



HAL
open science

L'Effet Casimir Dynamique et son lien avec l'Amplification Paramétrique en Optique Quantique

François-Xavier Dezael

► **To cite this version:**

François-Xavier Dezael. L'Effet Casimir Dynamique et son lien avec l'Amplification Paramétrique en Optique Quantique. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT: . tel-00165149

HAL Id: tel-00165149

<https://theses.hal.science/tel-00165149>

Submitted on 24 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire Kastler Brossel

Université Pierre et Marie Curie



Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

François-Xavier Dezael

*Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE*

**L'Effet Casimir Dynamique et son lien avec
l'Amplification Paramétrique en Optique Quantique**

Soutenue le 25 juin 2007 devant le jury composé de :

M. Daniel BLOCH Rapporteur
M. Diego DALVIT Rapporteur
M. Claude FABRE Président du jury
Mme Astrid LAMBRECHT Directrice de thèse
M. Paulo MAIA NETO Examineur

Résumé

D'après la Théorie Quantique des Champs, tout diffuseur en accélération non-uniforme dans le vide subit une force dissipative liée aux fluctuations du vide. Par conservation de l'énergie, il doit émettre des photons. Cette prédiction théorique, appelée Effet Casimir Dynamique, est présentée dans la première partie de ce mémoire. Nous calculons les signatures du rayonnement émis par des miroirs oscillants, dans le vide et dans un bain thermique. La diffusion des champs au sein d'une cavité oscillante est déterminée par itération fréquentielle, de façon à pallier aux divergences des anciennes approches, et étendre les calculs au-delà du seuil d'oscillation paramétrique. Dans la deuxième partie de la thèse, nous montrons qu'il est possible de générer un phénomène analogue à l'Effet Casimir Dynamique par compression des fluctuations du vide au sein de dispositifs du type Amplificateur Paramétrique Optique (APO). De manière à reproduire la transformation des champs diffusés par des miroirs oscillants, nous étudions divers systèmes comportant des miroirs et des cristaux $\chi^{(2)}$ pompés par laser. Après une analyse détaillée des contraintes expérimentales, nous proposons une réalisation pratique de l'analogie à l'aide d'un micro-APO monolithique, permettant d'espérer un rayonnement largement supérieur à celui accessible mécaniquement.

Mots-clefs : Effet Casimir Dynamique, vide quantique, Optique Quantique, cristaux non-linéaires, fluorescence paramétrique, amplificateurs et oscillateurs paramétriques optiques

Abstract

According to Quantum Field Theory, any non-uniformly accelerated scatterer in vacuum experiences a dissipative force due to vacuum fluctuations. Because of energy conservation, photons should be emitted. This theoretical prediction, called Dynamical Casimir Effect, is presented in the first part of the thesis. We calculate the radiation emitted by oscillating mirrors, in vacuum and in thermal baths. The scattering of fields inside an oscillating cavity is computed through an iteration in frequency domain so as to circumvent the divergences resulting from previous approaches and to extend calculations above the threshold of parametric oscillation. In the second part of the thesis, we show that it is possible to generate a phenomenon analogous to Dynamical Casimir Effect by squeezing vacuum fluctuations inside devices like Optical Parametric Amplifiers (OPA). In order to reproduce the transformation of the fields scattered by oscillating mirrors, we study various systems made up of mirrors and $\chi^{(2)}$ crystals pumped with laser. After a detailed analysis of experimental constraints, we propose a concrete realization of the analogy with a monolithic micro-OPA, giving hope for a radiation widely exceeding the one achievable through mechanical means.

Keywords : Dynamical Casimir Effect, quantum vacuum, Quantum Optics, non-linear crystals, parametric fluorescence, optical parametric amplifiers and oscillators

Remerciements

J'ai effectué ma thèse entre Septembre 2004 et Aout 2007 au Laboratoire Kastler-Brossel. Je tiens tout d'abord à remercier ses directeurs successifs, Franck Laloë et Paul Indelicato, pour m'avoir accueilli et offert de bonnes conditions de travail.

J'adresse ensuite mes remerciements à tous les membres de l'équipe Fluctuations Quantiques et Relativité, qui m'ont épaulé au cours de ces trois années. En premier lieu, je suis reconnaissant envers Astrid Lambrecht, pour avoir accepté d'encadrer ma thèse. Elle m'a laissé une grande liberté dans mon travail, et a toujours su encourager et valoriser mes initiatives. Merci beaucoup Astrid! Je te souhaite beaucoup de bonheur avec ta nouvelle fille, Emilie. Un grand merci à Serge Reynaud aussi, qui malgré un emploi du temps très chargé, m'a fréquemment accordé des entretiens et répondu à bon nombre de mes questions. Merci Serge pour m'avoir aiguillé lors des répétitions de soutenance, et pour avoir accepté de remplacer Astrid le jour J. De même, je tiens à remercier Brahim Lamine pour la relecture de ma thèse et pour ses commentaires et suggestions, notamment lors des répétitions. Nos quelques discussions de Physique fondamentale ont été l'occasion de clarifier des points importants de mon travail. Au-delà de son soutien professionnel, je le remercie pour sa gentillesse et sa bonne humeur. Merci aussi à Francesco, Rémy, Guillaume, Irina et Ines, pour les nombreux moments de détente et de convivialité que j'ai pu partager avec eux.

Je remercie également les membres de mon jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Notamment, je tiens à manifester ma gratitude envers Daniel Bloch et Diego Dalvit, qui ont produit leur rapport dans des délais très courts. Merci Diego pour avoir accepté d'être rapporteur malgré la barrière de la langue. Par ailleurs, je remercie Claude Fabre et Paulo Maia Neto pour leur contribution, ainsi que pour les entretiens que j'ai pu avoir avec eux.

Un grand merci à Monique Bonnamy et Laetitia Morel, pour leur disponibilité et leur gentillesse (je ne vous ai pas trop sollicitées, mais quand j'ai eu à le faire, ce fut un vrai plaisir!). Un énorme merci à Serge Begon pour avoir débloqué presque tous mes problèmes informatiques, et pour son dévouement spontané! Merci aussi à Corinne Poisson pour m'avoir aidé à compléter ma page personnelle sur l'ancien site web du labo. Une spéciale dédicace à Sophie, pour sa complicité et son soutien. Merci d'avoir été ma confidente dans les moments difficiles Sophie! Aussi, un gros gros merci à Vincent Delaubert, qui m'a rendu d'énormes services et a grandement contribué à faciliter la fin de ma thèse. Merci Vincent pour ton aide précieuse, et pour ton amitié. Je n'oublie pas Julien, mon voisin de bureau pendant deux ans : merci pour les nombreux coups de main que tu m'as donnés Julien! Je n'oublie pas non plus tous les autres, avec qui j'ai pu avoir des échanges cordiaux au cours de ces trois années : EOL, Laurent Lopez, Charles Leyder, Thomas Caniard, Olivier Arnoult, Olivier Arcizet, Martino Trassinelli, Florence Thibout, Jean Cvilinski, Csilla Szabo, Pierre Verlot... Par ailleurs, je tiens à remercier Thomas Coudreau, Nicolas Treps, Olivier Arcizet et Charles Leyder pour avoir répondu à certaines de mes questions d'ordre expérimental, et Jean-Michel Courty pour m'avoir transmis son cours d'Optique Quantique.

Le travail de thèse requiert un certain équilibre, qu'il faut bien évidemment rechercher aussi en-dehors du laboratoire, et je remercie à ce titre tous mes compères du C2 Crew : Bob, Preden, Ben, Guillaume, Tim... ainsi que ceux de la capoeira, avec une mention spéciale pour Clémence. J'ai toujours pu compter sur vous, pour traverser les mauvais moments, mais aussi pour fêter les bons. Spéciale dédicace à vous tous ! Merci à Nathalie pour m'avoir accompagné dans les débuts difficiles et houleux de ma thèse, ainsi qu'à Caroline pour avoir fait un bout de chemin avec moi en deuxième année, et à Yang Yue pour les moments que l'on a partagés en troisième année. Un grand merci aussi à Greg, Isa, Jérôme ($\times 2$), Manuela, Thibaut, Louise, Marine, Stephane et Audrey pour leur amitié. Je dédie une ligne spéciale à Joël Hillion (aka Jojo), pour avoir suivi mon parcours d'un oeil attentif et bienveillant depuis le Lycée.

Enfin, je tiens à remercier ma famille et plus particulièrement mes parents, mes grands-parents et mon frère pour leur soutien et leur amour tout au long de ces années d'études. Le chemin a été long et semé d'embûches, mais la récompense est là et ils y sont pour beaucoup !

Table des matières

1	Introduction	1
2	L'Effet Casimir Dynamique : état des lieux et prolongements	7
A	Cadre théorique général et conventions	9
B	Approche perturbative	12
B.1	Diffusion des champs par un miroir en mouvement	12
B.1.1	Principe du développement perturbatif	12
B.1.2	Cas du mouvement harmonique	13
B.1.3	Densité spectrale et flux émis par un miroir en mouvement harmonique dans le vide	20
B.1.4	Densité spectrale et flux émis par un miroir en mouvement harmonique dans un champ thermique	22
B.2	Diffusion des champs par une cavité en mouvement	27
B.2.1	Réponse linéaire pour un mouvement quelconque	27
B.2.2	Cas du mouvement harmonique	31
B.2.3	Identification de modes oscillatoires résonants	31
B.2.4	Calcul du spectre émis pour les mouvements résonants	32
B.2.5	Calcul des flux émis à résonance	33
C	Approche non-perturbative	35
C.1	Diffusion des champs par un miroir oscillant	37
C.1.1	Principe du développement non-perturbatif	38
C.1.2	Calcul exact du spectre émis par un miroir oscillant dans le vide	42
C.1.3	Calcul exact du spectre émis par un miroir oscillant dans un champ thermique	45
C.2	Diffusion des champs par une cavité oscillante	47
C.2.1	Itération fréquentielle des champs diffusés intra-cavité	48
C.2.2	Expression exacte des champs globalement diffusés par la cavité et conditions de résonance	55

	C.2.3	Calcul du spectre émis par une cavité en oscillation résonante	62
	C.2.4	Contributions dominantes pour une cavité de haute finesse	65
	C.2.5	Prise en compte des conditions de transparence à haute fréquence	70
3		Analogie avec les phénomènes non-linéaires en Optique Quantique	73
A		Principe de l'analogie et conventions	75
B		Effet des non-linéarités sur les champs au sein des cristaux	80
	B.1	Résolution de l'équation de propagation dans l'approche semi-classique	80
	B.2	Cas du pompage par un faisceau laser unique	82
	B.3	Pompage bilatéral	92
C		Prise en compte de l'environnement optique	97
	C.1	Interfaces entre milieux d'indices différents	97
		C.1.1 Cas général	98
		C.1.2 Diffusion des états quasi-classiques monomodes	99
	C.2	Effet global de la traversée d'un cristal entouré de vide	101
D		Systèmes optiques analogues aux miroirs oscillants	104
	D.1	Cristal séparé du miroir	105
		D.1.1 Cas où le miroir ne diffuse pas les pompes	105
		D.1.2 Cas où le miroir diffuse les pompes	109
	D.2	Cristal accolé au miroir	111
	D.3	Miroir collé entre deux cristaux	112
		D.3.1 Cas général	113
		D.3.2 Cas du miroir complètement transmissif pour les pompes	117
		D.3.3 Cas du miroir parfaitement réfléchissant pour les pompes	119
	D.4	Cavité APO à deux cristaux	121
	D.5	APO monolithique	126
E		Discussion de l'analogie et contraintes expérimentales	129
	E.1	Problématique liée à la génération de seconde harmonique	129
	E.2	Contraintes d'accord de phase	132
		E.2.1 Considérations générales	132
		E.2.2 Cas particulier du Sulfure de Cadmium (<i>CdS</i>)	137
	E.3	Ordres de grandeur	138
		E.3.1 Configuration miroir unique collé entre deux cristaux	139
		E.3.2 Configuration APO monolithique	140
F		Propositions expérimentales pour la réalisation pratique de l'analogie	141
	F.1	Détection du régime d'oscillation apparente d'un miroir collé entre deux cristaux	141
	F.2	Détection du régime d'oscillation résonante d'un APO monolithique	142

4 Conclusion et perspectives	145
Annexe	149
A Traitement Hamiltonien perturbatif et processus paramétriques associés au mouvement d'un miroir	150
B Signaux de photodétection en régime de comptage : une approche naive . . .	155
C Émission de paires dans des processus d'ordres supérieurs	159
D Procédure d'itération fréquentielle au sein d'une cavité oscillante	163
E Calcul des amplitudes de diffusion pour une cavité en oscillation résonante . .	166
E.1 Calcul "exact"	166
E.2 Détermination des contributions dominantes pour une cavité de haute finesse	171
E.3 Calcul des amplitudes restreintes aux contributions dominantes	174
F Prise en compte des conditions de transparence à haute fréquence	178
F.1 Principe de la régularisation	178
F.2 Expression régularisée du spectre pour une cavité haute-finesse en oscillation résonante	179
G Proposition de calcul valable au-dessus du seuil	182
Bibliographie	185

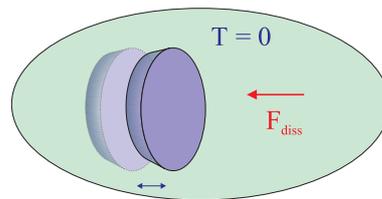
Introduction

LA théorie quantique a profondément changé notre conception de l'espace vide. En effet, même en débarrassant de toute particule matérielle une enceinte fermée et en refroidissant sa température jusqu'au zéro absolu pour éliminer le rayonnement du corps noir, il reste encore dans l'enceinte des fluctuations quantiques irréductibles du champ. Ces fluctuations, aussi appelées fluctuations du vide ou fluctuations de point zéro, correspondent à une énergie moyenne de $\frac{1}{2}\hbar\omega$ par mode du champ de fréquence ω .

Un atome isolé dans le vide n'interagit qu'avec les fluctuations du vide et c'est cette interaction qui est responsable des processus d'*émission spontanée* faisant passer l'atome de ses niveaux d'énergie élevée vers son niveau fondamental. Dans ce niveau, l'atome est encore couplé au vide et ce couplage est accompagné d'effets tels que le déplacement de Lamb des fréquences d'absorption [Milonni]. Quand deux atomes sont couplés aux mêmes fluctuations du vide, l'interaction des atomes avec les fluctuations du champ induit une attraction entre eux, appelée force de Van der Waals. Cette force, qui joue un rôle physico-chimique très important, a reçu une interprétation quantique dès les années 1930 [London]. Alors qu'il étudie ce problème, Casimir découvre en 1948 qu'une force s'exerce également entre deux miroirs placés dans le vide [Casimir]. Les fluctuations du vide sont modifiées par la présence de la cavité, et leur énergie dépend de la distance entre les deux miroirs. Le vide exerce donc une force qui attire les miroirs l'un vers l'autre. Cette *force de Casimir* ne dépend que de deux constantes fondamentales, la vitesse de la lumière c et la constante de Planck \hbar , de la distance et de facteurs numériques simples. En ce sens, elle a un caractère remarquablement universel puisqu'elle ne dépend pas, en particulier, de la charge de l'électron, à la différence des forces de Van der Waals. Bien que relativement petite, la force de Casimir est aujourd'hui mesurée avec une bonne précision grâce aux techniques de mesure modernes [Bordag, Lambrecht(03)]. Une autre façon d'interpréter l'effet Casimir consiste à dire que des miroirs placés dans le vide réfléchissent les fluctuations quantiques du vide et subissent donc une force liée à la pression

de radiation. Entre deux miroirs formant une cavité Fabry-Pérot, cette force est précisément la force de Casimir.

La pression de radiation du vide a aussi des conséquences physiques observables sur le mouvement d'un diffuseur dans le vide, où elle est responsable d'une force de réaction de rayonnement. Celle-ci tend à s'opposer au mouvement du diffuseur, dès que la trajectoire est non-uniformément accélérée [Fulling(76)]. En effet, la pression de radiation des fluctuations du vide est elle-même une quantité fluctuante. Tout diffuseur subit donc des fluctuations de force, de valeur moyenne nulle lorsqu'il est seul et immobile dans le vide [Barton]. Lorsque le diffuseur se déplace dans le vide, l'équilibre entre les fluctuations de force des deux côtés du miroir est perturbé. Le miroir subit alors une force moyenne s'opposant à son mouvement [Jaekel(92)]. Comme dans le cas bien connu du mouvement Brownien, cette force motionnelle peut se comprendre comme un effet cumulatif à long terme des fluctuations [Ford, Mori, Gardiner].

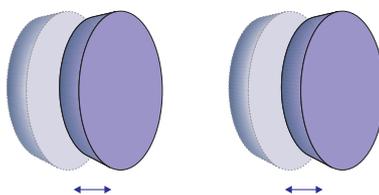


Quand un miroir oscille dans le vide, la force de réaction de rayonnement tend à freiner son mouvement. Par conservation de l'énergie, le miroir émet des photons dans le vide. Ce rayonnement motionnel met en évidence l'influence réciproque entre les fluctuations du vide et le mouvement mécanique. Il existe une autre façon d'interpréter la force motionnelle. Lorsque le miroir oscille dans le vide, le couplage entre la pression de radiation des modes vides et le mouvement mécanique se traduit par un processus paramétrique. Ce processus, analogue à la génération des états comprimés [Reynaud(Squeezing)], crée des paires de photons. La conservation de l'énergie lors du processus implique un amortissement du mouvement du miroir, qui correspond exactement à la force motionnelle.

Ce rayonnement est bien sûr nul pour un mouvement à vitesse uniforme du miroir, par suite de l'invariance de Lorentz des fluctuations du vide. Si le miroir est en mouvement uniformément accéléré, le rayonnement émis est également nul [Fulling(76)]. Ceci est dû à une symétrie plus large, qui est l'invariance conforme du vide électromagnétique. Le rayonnement induit par le mouvement n'apparaît que lorsque l'accélération dépend du temps, comme par exemple dans le cas d'une oscillation harmonique du miroir. Ces résultats ont un grand intérêt conceptuel, parce qu'ils relient les propriétés dissipatives des fluctuations du vide et les symétries de la théorie électromagnétique [Reynaud(01), Jaekel(02)]. Cependant, ces effets des fluctuations du vide n'ont pas été étudiés expérimentalement jusqu'à présent. La raison essentielle en est que les signatures mécaniques qui leur sont associées apparaissent comme de petites perturbations du mouvement de n'importe quel objet macroscopique. En effet, les

forces correspondantes sont proportionnelles à \hbar et sont donc difficiles à détecter. Par contre, le nombre de photons émis, qui est donné par l'énergie rayonnée divisée par l'énergie d'un seul photon, ne dépend plus de \hbar . Du point de vue d'une réalisation expérimentale, cet argument favorise clairement la détection du rayonnement, d'autant plus qu'il existe des techniques très sensibles pour la détection de photons.

Le rayonnement émis par un miroir unique oscillant dans le vide est trop faible pour être observé expérimentalement avec les techniques actuelles. En vue d'une mise en évidence des effets dissipatifs du vide quantique, une idée très naturelle consiste alors à étudier le rayonnement induit par le mouvement d'une cavité ayant une grande finesse [Lambrecht(96)].



Cette idée permet de bénéficier d'une exaltation résonante du rayonnement motionnel. Des études détaillées ont montré que l'observation de cet effet, appelé "Effet Casimir Dynamique", reste néanmoins un défi pour l'expérience car il faut exciter le mouvement des miroirs tout en les maintenant à très basse température, et détecter un très faible rayonnement motionnel à des fréquences micro-ondes [Lambrecht(05)]. Des signatures spécifiques du rayonnement émis par la cavité, que je discuterai dans le chapitre 2, pourraient être utiles afin de distinguer le rayonnement motionnel des effets parasites [Lambrecht(98)].

Mais il existe une autre idée basée sur le fait qu'on peut voir l'émission du rayonnement motionnel comme un effet paramétrique dans lequel un quantum de mouvement est transformé en une paire de photons par couplage opto-mécanique entre le mouvement des miroirs et la pression de radiation du vide. On peut par exemple penser à remplacer l'oscillation mécanique de la cavité par une oscillation apparente pour le champ, induite par une modulation de l'indice d'un cristal non-linéaire. Ce système correspond à un oscillateur ou, en dessous du seuil, un amplificateur paramétrique optique (OPO ou APO). Ces systèmes sont bien connus et maîtrisés depuis longtemps [Reynaud(BruitQ)]. Un avantage majeur de ce type de dispositif par rapport à ceux faisant appel à une excitation mécanique des miroirs est que la fréquence d'oscillation appartient dans ce cas au domaine du rayonnement visible, ce qui permet d'espérer des flux photoniques bien plus importants. Nous approfondirons cette idée dans le chapitre 3.

Ce manuscrit s'articulera donc autour de deux grands chapitres :

Dans le chapitre 2, nous allons présenter une synthèse originale des principales prédictions théoriques concernant l'Effet Casimir Dynamique, en faisant appel à une approche diffusive

de l'interaction entre les champs quantiques et les miroirs. Nous utiliserons les techniques développées depuis une vingtaine d'années dans l'équipe *Fluctuations Quantiques et Relativité* au sein du *Laboratoire Kastler Brossel*. Nous tâcherons d'apporter des éclairages nouveaux quant à l'interprétation des phénomènes impliqués dans le rayonnement motionnel, notamment par un examen minutieux des processus paramétriques excités dans le vide et dans un champ thermique, ou encore en proposant une extension des calculs en cavité au-delà des limites rencontrées ces dernières années. Pour cela, nous distinguerons les résultats issus d'un traitement perturbatif des champs diffusés, et ceux issus d'un traitement non-perturbatif. La première approche permettra de rendre compte de tous les phénomènes se produisant lors de l'oscillation d'un miroir unique dans le vide et pour toute température raisonnable, mais s'avèrera potentiellement insuffisante pour décrire la situation d'une cavité de haute finesse en oscillation. Dans cette situation en effet, une approche non-perturbative révèle l'existence d'un seuil proche duquel des effets singuliers apparaissent, tels que l'émission de pulses d'énergie par la cavité ou encore la présence dans le spectre du rayonnement de fréquences supérieures à la fréquence d'oscillation des miroirs. Ces effets ont été décrits par le passé grâce à un calcul exact dans le domaine temporel des déphasages accumulés par les champs lors de leurs multiples réflexions au sein de la cavité. Or ce calcul fait apparaître une divergence de la densité d'énergie émise au niveau du seuil. Nous présenterons donc une technique alternative, consistant en un calcul exact dans le domaine fréquentiel de l'effet des multiples diffusions intra-cavité, et permettant de mieux comprendre l'apparition de cette divergence. Grâce à cette approche, nous pourrions déterminer les processus contribuant majoritairement au rayonnement et adapter nos calculs à une prise en compte de la dépendance en fréquence des coefficients de diffusion des miroirs.

Dans le chapitre 3, nous montrerons qu'il existe une grande analogie entre les processus intervenant dans l'Effet Casimir Dynamique et les phénomènes non-linéaires rencontrés en Optique Quantique. Nous exploiterons alors ces similitudes pour proposer des systèmes optiques analogues aux miroirs oscillants. L'utilisation de cristaux non-linéaires de type $\chi^{(2)}$ pompés par des faisceaux lasers continus permettra en effet de comprimer les fluctuations du vide de la même manière que si les champs étaient diffusés par un miroir en mouvement harmonique. En plaçant de tels cristaux devant un miroir, nous serons donc en mesure de moduler la position de la surface effective de réflexion des champs, réalisant ainsi une oscillation apparente du miroir. Nous chercherons d'abord à imaginer un dispositif analogue à un miroir unique oscillant, puis nous ferons en sorte d'adapter un système de type APO pour obtenir l'oscillation apparente d'une cavité. Nous verrons à cette occasion que le recours à deux faisceaux pompes contra-propageants de déphasage ajustable offrira la possibilité d'un contrôle cohérent des phases d'oscillation relatives des miroirs. Cette étude généralisera donc la situation usuelle des OPO, qui correspond à une modulation périodique de la longueur apparente de la cavité [Giacobino(92)]. Notamment, nous proposerons des dispositifs susceptibles de fonctionner dans un régime analogue à une oscillation globale de la cavité. Afin d'observer les effets du vide, il conviendra de pomper le système en l'absence de tout autre signal d'amorce,

c'est-à-dire en amplifiant uniquement la fluorescence paramétrique des cristaux. Nous discuterons alors de la validité de l'analogie en fonction des contraintes expérimentales liés d'une part à la génération de seconde harmonique et d'autre part aux conditions d'accord de phase au sein des cristaux. Une fois ces contraintes ciblées, nous choisirons des cristaux adaptés, et proposerons finalement un dispositif expérimental satisfaisant pour la réalisation pratique de l'analogie.

L'Effet Casimir Dynamique : état des lieux et prolongements

Sommaire

A	Cadre théorique général et conventions	9
B	Approche perturbative	12
B.1	Diffusion des champs par un miroir en mouvement	12
B.2	Diffusion des champs par une cavité en mouvement	27
C	Approche non-perturbative	35
C.1	Diffusion des champs par un miroir oscillant	37
C.2	Diffusion des champs par une cavité oscillante	47

DANS la littérature, différentes approches ont été proposées pour prédire et caractériser l'Effet Casimir Dynamique, la plupart utilisant un espace-temps bidimensionnel comme cadre simplifié d'étude. En replaçant les choses dans leur contexte historique, c'est tout d'abord la modification, sous l'effet du mouvement d'un ou deux diffuseurs parfaits, de la structure du vide quantique [Moore(70)] et du tenseur énergie-impulsion associés au champ électromagnétique [Fulling(76)] qui ont suscité de l'intérêt. Ensuite, les calculs ont porté sur la force ressentie par les miroirs. Celle-ci a été tantôt évaluée pour des miroirs parfaits comme une modification de la force de Casimir statique [Dodonov(89)], tantôt déterminée pour des miroirs réels à l'aide de relations de fluctuation-dissipation [Jaekel(92), Jaekel(92)F]. Par ailleurs, un traitement géométrique des trajectoires d'espace-temps associées aux rayons lumineux se réfléchissant au sein d'une cavité, permet de constater que, sous certaines conditions concernant le mouvement des miroirs, la densité d'énergie pouvait croître de manière résonante et former des pulses d'autant plus piqués temporellement que le nombre de réflexions

intra-cavité considéré augmentait [Law(94), Cole(95)]. Il s'est alors avéré qu'une détection du rayonnement émis serait de réalisation expérimentale plus aisée que la mesure des forces dissipatives liées au mouvement des miroirs. Pour calculer le rayonnement en question, il a été, dans un premier temps, fait appel à une approche linéarisée du couplage opto-mécanique entre les fluctuations du vide et le mouvement des miroirs [Lambrecht(96)], en traitant la cavité comme un système ouvert constitué de miroirs réels (ce qui n'était pas le cas dans les articles [Law(94), Cole(95)], où les miroirs étaient supposés parfaits). Le cas d'une cavité haute finesse en oscillation dans le vide a ensuite donné lieu à un calcul plus général [Lambrecht(98)] révélant l'existence d'un seuil, proche duquel apparaissent les pulses d'énergie prévus par les articles [Law(94), Cole(95)]. Toutefois, la cavité étant traitée comme un système ouvert, il est de plus apparu que ces pulses devaient être émis périodiquement à l'extérieur de la cavité. Cette étude a par ailleurs montré l'existence de contributions de fréquences supérieures à la limite imposée par les modèles linéaires. Enfin, son extension au cas du mouvement dans un champ thermique [Lambrecht(98)T] a mis en évidence l'influence de la température sur les signaux émis. Mentionnons aussi que des calculs en espace-temps quadri-dimensionnel ont été entrepris [MaiaNeto(93), MaiaNeto(96), Mundarain(98), Dalvit(01)], et que le modèle bi-dimensionnel donnera des prédictions satisfaisantes tant que le "waist" des modes de la cavité sera négligeable devant l'extension transverse des miroirs.

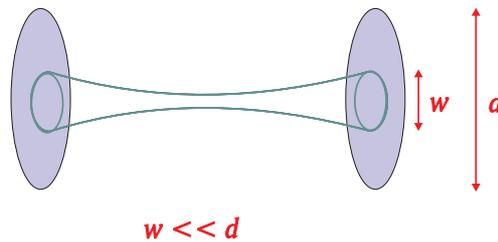


FIG. 2.1: Condition de validité du modèle bi-dimensionnel. w représente le waist des modes de la cavité, et d l'extension transverse des miroirs.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord fixer un cadre théorique général pour notre étude en deux dimensions d'espace-temps, ainsi que quelques conventions relatives aux représentations des grandeurs physiques que nous serons amenés à manipuler. Dans une deuxième partie, nous rappellerons le formalisme perturbatif utilisé dans notre équipe pour décrire la diffusion des champs sur un miroir ou une cavité en mouvement, tout en portant un regard nouveau sur les phénomènes décrits. Le rayonnement attendu dans le vide pour chaque système sera calculé, et on discutera au passage de l'influence de la température sur les signaux émis. Dans la troisième partie, nous présenterons une approche originale pour le traitement non-perturbatif des effets motionnels, ouvrant la voie à une prise en compte plus réaliste des paramètres physiques intervenant dans les calculs en cavité, et notamment proche du seuil.

A Cadre théorique général et conventions

On adoptera les notations suivantes pour les opérateurs champ électrique \hat{E} et potentiel vecteur \hat{A} se propageant librement en deux dimensions d'espace-temps :

$$\hat{E}(x, t) = -\frac{\partial \hat{A}(x, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\hat{A}(x, t) = \hat{\varphi}(t - x/c) + \hat{\psi}(t + x/c) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[e^{-i\omega u} \hat{\varphi}[\omega] + e^{-i\omega v} \hat{\psi}[\omega] \right] \quad (2.2)$$

On distingue deux composantes contrapropageantes du potentiel, $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$, qui dépendent uniquement des variables du cône de lumière $u = t - x/c$ et $v = t + x/c$. Leurs transformées de Fourier s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}[\omega] &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c |\omega|}} \left\{ \theta(\omega) \hat{a}[\omega] + \theta(-\omega) \hat{a}^\dagger[-\omega] \right\} \\ \hat{\psi}[\omega] &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c |\omega|}} \left\{ \theta(\omega) \hat{b}[\omega] + \theta(-\omega) \hat{b}^\dagger[-\omega] \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $\theta(\omega)$ est la fonction de Heavyside. Les opérateurs $\hat{a}[\omega]$ et $\hat{b}[\omega]$ sont les opérateurs usuels d'annihilation : $\hat{a}[\omega]$ annihile les photons de fréquence ω se propageant vers la droite et $\hat{b}[\omega]$ annihile les photons de fréquence ω se propageant vers la gauche. On a les relations de commutation (pour ω et ω' positifs) :

$$\begin{cases} [\hat{a}[\omega], \hat{a}^\dagger[\omega']] = 2\pi\delta(\omega - \omega') & [\hat{a}[\omega], \hat{a}[\omega']] = 0 \\ [\hat{b}[\omega], \hat{b}^\dagger[\omega']] = 2\pi\delta(\omega - \omega') & [\hat{b}[\omega], \hat{b}[\omega']] = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} [\hat{a}[\omega], \hat{b}[\omega']] = 0 \\ [\hat{a}[\omega], \hat{b}^\dagger[\omega']] = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Avec ces conventions, la valeur moyenne $\langle \varepsilon_0 \hat{E}(x, t)^2 \rangle$ correspondra à une densité d'énergie¹. Définissons aussi les notations matricielles suivantes :

$$\hat{\Phi}(x, t) = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(t - x/c) \\ \hat{\psi}(t + x/c) \end{pmatrix}; \quad \hat{\Phi}[x, \omega] = \begin{pmatrix} e^{i\omega x/c} \hat{\varphi}[\omega] \\ e^{-i\omega x/c} \hat{\psi}[\omega] \end{pmatrix} = e^{i\eta\omega x/c} \hat{\Phi}[\omega] \quad (2.6)$$

$$\text{avec : } \hat{\Phi}[\omega] = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}[\omega] \\ \hat{\psi}[\omega] \end{pmatrix} \quad \text{et : } \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

¹Plus précisément, on aura affaire à une densité "linéique" par rapport à la direction de propagation retenue pour les champs

On travaillera en représentation de Heisenberg, avec un formalisme de type "entrée-sortie" pour les champs quantiques. L'interaction des champs avec un milieu matériel donné sera modélisé par une matrice S de diffusion. Les milieux matériels que nous considèrerons seront supposés ne donner lieu à aucun phénomène dissipatif quand ils sont au repos dans un référentiel inertiel ou dans tout référentiel obtenu par transformation conforme du système de coordonnées associé à un référentiel inertiel [Fulling(76)]. La matrice S de tels milieux devra alors être choisie :

- unitaire dans le domaine fréquentiel (pour satisfaire la conservation des relations de commutation du champ),
- transparente à haute fréquence (c'est-à-dire proche de la matrice unité au-delà d'une certaine fréquence),
- causale et réelle dans le domaine temporel [Jaekel(91), Intravaia(PhD)].

Prenons l'exemple d'un miroir au repos dans un référentiel inertiel (cf figure 2.2).

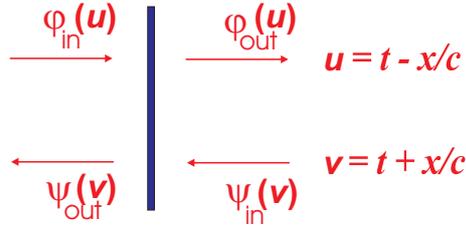


FIG. 2.2: Diffusion des champs sur un miroir au repos. Les indices 'in' et 'out' correspondent respectivement aux champs avant et après diffusion sur le miroir.

On posera alors, si la position du miroir est x dans ce référentiel :

$$\hat{\Phi}_{out}[x, \omega] = \mathbf{S}[\omega] \hat{\Phi}_{in}[x, \omega], \text{ avec : } \mathbf{S}[\omega] = \begin{pmatrix} s_{11}[\omega] & s_{12}[\omega] \\ s_{21}[\omega] & s_{22}[\omega] \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$\text{et : } \begin{cases} \mathbf{S}[\omega] \mathbf{S}^\dagger[\omega] = \mathbf{I} & \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \mathbf{S}[\omega] = \mathbf{I} \\ \mathbf{S}[\omega] \text{ analytique et régulière pour : } \text{Im}(\omega) > 0; \\ \mathbf{S}[-\omega] = \overline{\mathbf{S}[\omega]}^* \end{cases} \quad (2.9)$$

Par la suite, nous omettrons les conditions d'analyticité et de régularité pour $\text{Im}(\omega) > 0$, qui ne nous seront pas utiles. Dans la plupart des cas, cette matrice pourra se mettre soit sous la forme :

$$\mathbf{S}[\omega] = \begin{pmatrix} t[\omega] & r[\omega] \\ r[\omega] & t[\omega] \end{pmatrix}, \text{ avec : } \begin{cases} |t[\omega]|^2 + |r[\omega]|^2 = 1 \text{ et : } t[\omega] r[\omega]^* \in i\mathbb{R} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} t[\omega] = 1 \text{ et : } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} r[\omega] = 0 \\ t[-\omega] = t[\omega]^*, \text{ et : } r[-\omega] = r[\omega]^* \end{cases} \quad (2.10)$$

si l'on souhaite mettre en avant la symétrie de la transformation pour les composantes contra-propageantes du champ, soit sous la forme :

$$\mathbf{S}[\omega] = \begin{pmatrix} t[\omega] & r[\omega] \\ -r[\omega] & t[\omega] \end{pmatrix}, \text{ avec : } \begin{cases} |t[\omega]|^2 + |r[\omega]|^2 = 1 \text{ et : } t[\omega]r[\omega]^* \in \mathbb{R} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} t[\omega] = 1 \text{ et : } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} r[\omega] = 0 \\ t[-\omega] = t[\omega]^*, \text{ et : } r[-\omega] = r[\omega]^* \end{cases} \quad (2.11)$$

si l'on souhaite pouvoir se ramener à des coefficients de diffusion r et t réels.

D'autre part, on sera souvent amené à utiliser des diagrammes d'espace-temps, dans lesquels on représentera par exemple la trajectoire d'un miroir en mouvement par une courbe continue, et celle des champs par des droites inclinées à 45° par rapport aux axes spatio-temporels (cf figure 2.3).

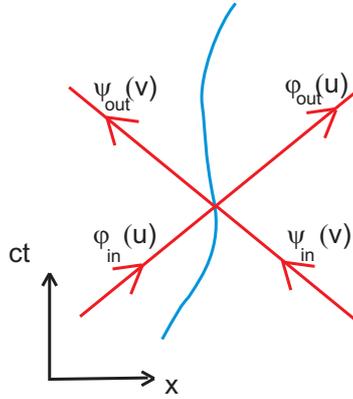


FIG. 2.3: Trajectoire d'espace-temps d'un miroir. Les champs libres sont représentés par des rayons lumineux. Les indices 'in' et 'out' correspondent respectivement aux champs avant et après diffusion sur le miroir.

B Approche perturbative

B.1 Diffusion des champs par un miroir en mouvement

B.1.1 Principe du développement perturbatif

Soit $q(t)$ la trajectoire d'un miroir dans le référentiel du laboratoire (cf figure 2.4).

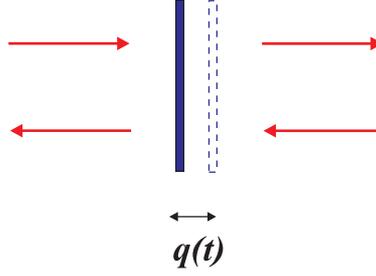


FIG. 2.4: Miroir de trajectoire $q(t)$ dans le référentiel du laboratoire.

Les champs évalués le long de cette trajectoire vont permettre de définir les champs "vus" par le miroir dans son référentiel propre. Ainsi, en notant \bar{q} la position (fixe) du miroir dans un de ses référentiels "comobiles" :

$$\hat{\Phi}(q(t), t) = \bar{\Phi}(\bar{q}, \tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \bar{\Phi}[\bar{q}, \omega] e^{-i\omega\tau} \quad (2.12)$$

où τ est le temps propre associé au miroir : $d\tau = \sqrt{1 - q'(t)^2/c^2} dt$. Dans l'approximation non-relativiste, on aura $\tau \simeq t$. Si la trajectoire peut se mettre sous la forme $q(t) = x_0 + \delta q(t)$ avec $\delta q(t) \ll \lambda$, où λ est la longueur d'onde des photons susceptibles d'être impliqués dans le rayonnement émis, alors on obtient le développement au premier ordre suivant :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\bar{q}, \tau) &\simeq \hat{\Phi}(x_0, t) + \delta q(t) \partial_x \hat{\Phi}|_{(x_0, t)} \\ &\simeq \hat{\Phi}(x_0, t) - (\delta q(t)/c) \boldsymbol{\eta} \partial_t \hat{\Phi}|_{(x_0, t)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

ce qui, après transformée de Fourier, donne :

$$\bar{\Phi}[\bar{q}, \omega] \simeq \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left(2\pi\delta(\omega - \omega') + \frac{i\omega'}{c} \delta q[\omega - \omega'] \boldsymbol{\eta} \right) \hat{\Phi}[x_0, \omega'] \quad (2.14)$$

Supposons maintenant que l'on puisse décrire la diffusion des champs dans le référentiel attaché au miroir par une matrice $\bar{\mathbf{S}}$ vérifiant les propriétés exposées dans la partie A. On peut alors décrire le processus par la relation suivante :

$$\bar{\Phi}_{out}[\bar{q}, \omega] = \bar{\mathbf{S}}[\omega] \bar{\Phi}_{in}[\bar{q}, \omega], \text{ avec par exemple : } \bar{\mathbf{S}}[\omega] = \begin{pmatrix} \bar{t}[\omega] & \bar{r}[\omega] \\ -\bar{r}[\omega] & \bar{t}[\omega] \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\text{et : } \begin{cases} |\bar{t}[\omega]|^2 + |\bar{r}[\omega]|^2 = 1 \text{ et : } \bar{t}[\omega]\bar{r}[\omega]^* \in \mathbb{R} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \bar{t}[\omega] = 1 \text{ et : } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \bar{r}[\omega] = 0 \\ \bar{t}[-\omega] = \bar{t}[\omega]^*, \text{ et : } \bar{r}[-\omega] = \bar{r}[\omega]^* \end{cases} \quad (2.16)$$

En combinant les relations (2.14) et (2.15), la transformation des champs diffusés par le miroir dans le référentiel du laboratoire s'écrira, au premier ordre en δq [Jaekel(92), Jaekel(92)F] :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{out}[\omega] &\simeq \int \frac{d\omega'}{2\pi} \mathbf{S}[\omega, \omega'] \hat{\Phi}_{in}[\omega'] \\ &\simeq \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left(2\pi\delta(\omega - \omega') \mathbf{S}[\omega] + \delta\mathbf{S}[\omega, \omega'] \right) \hat{\Phi}_{in}[\omega'] \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\text{avec : } \mathbf{S}[\omega] = e^{-i\eta\omega x_0/c} \bar{\mathbf{S}}[\omega] e^{i\eta\omega x_0/c} \quad (2.18)$$

$$\delta\mathbf{S}[\omega, \omega'] = \frac{i\omega'}{c} \delta q[\omega - \omega'] e^{-i\eta\omega x_0/c} \{ \bar{\mathbf{S}}[\omega] \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta} \bar{\mathbf{S}}[\omega'] \} e^{i\eta\omega' x_0/c} \quad (2.19)$$

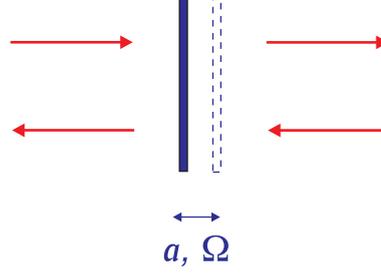
L'approximation "grande longueur d'onde" utilisée dans le développement perturbatif (2.13) correspond donc à supposer que : $|\omega' \delta q[\omega - \omega']|/c \ll 1$ pour tous les couples de fréquences $(\omega; \omega')$ susceptibles d'intervenir dans le rayonnement émis. Or, le rayonnement potentiellement associé à une fréquence mécanique Ω donnée aura typiquement lieu dans un domaine spectral : $0 < \omega < \omega_{max}$, où ω_{max} sera déterminé soit par les propriétés de l'état incident, soit par les conditions de transparence du miroir à haute fréquence. On aura alors : $|\omega'| = |\omega \pm \Omega| \leq \omega_{max} + \Omega$. Il suffira donc que l'amplitude des composantes de Fourier dominantes du mouvement satisfassent : $(\omega_{max} + \Omega) |\delta q[\Omega]|/c \ll 1$, ce qui sera systématiquement le cas dans la pratique pour des mouvements non-relativistes si ω_{max} est du même ordre de grandeur que Ω .

B.1.2 Cas du mouvement harmonique

Considérons maintenant un mouvement harmonique du miroir à la fréquence Ω et d'amplitude a (cf figure 2.5) :

$$\begin{cases} \delta q(t) = -a \sin(\Omega t - \theta) \\ \delta q[\omega] = i\pi \frac{a}{2} \left\{ \delta(\omega + \Omega) e^{-i\theta} - \delta(\omega - \Omega) e^{i\theta} \right\} \end{cases} \quad (2.20)$$

La vitesse maximale du miroir sera alors : $v_{max} = \Omega a$. Définissons d'autre part la quantité : $\beta = v_{max}/c$, rapport de la vitesse maximale du miroir et de la vitesse de la lumière dans le vide. Dans toute situation réaliste, le mouvement du miroir sera non-relativiste et on aura donc : $\beta \ll 1$. Si la trajectoire du miroir est : $q(t) = x_0 + \delta q(t)$, où x_0 est une constante arbitraire et $\delta q(t)$ est la fonction donnée en (2.20), alors la transformation (2.17) s'écrira pour

FIG. 2.5: Miroir en oscillation harmonique à la fréquence Ω avec une amplitude a .

chaque composante du champ :

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{out}[\omega] &\simeq \bar{t}[\omega] \hat{\varphi}_{in}[\omega] + \bar{r}[\omega] e^{-2i\omega x_0/c} \hat{\psi}_{in}[\omega] \\
&+ \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \frac{\beta}{2} e^{+i(\theta - \Omega x_0/c)} \left\{ -\bar{t}[\omega] + \bar{t}[\omega - \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\
&+ \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \frac{\beta}{2} e^{-2i\omega x_0/c} e^{+i(\theta + \Omega x_0/c)} \left\{ \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega - \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\
&+ \left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \frac{\beta}{2} e^{-i(\theta - \Omega x_0/c)} \left\{ -\bar{t}[\omega] + \bar{t}[\omega + \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \\
&+ \left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \frac{\beta}{2} e^{-2i\omega x_0/c} e^{-i(\theta + \Omega x_0/c)} \left\{ \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega + \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \quad (2.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{out}[\omega] &\simeq \bar{t}[\omega] \hat{\psi}_{in}[\omega] - \bar{r}[\omega] e^{2i\omega x_0/c} \hat{\varphi}_{in}[\omega] \\
&+ \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \frac{\beta}{2} e^{+i(\theta + \Omega x_0/c)} \left\{ \bar{t}[\omega] - \bar{t}[\omega - \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\
&+ \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \frac{\beta}{2} e^{2i\omega x_0/c} e^{+i(\theta - \Omega x_0/c)} \left\{ \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega - \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\
&+ \left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \frac{\beta}{2} e^{-i(\theta + \Omega x_0/c)} \left\{ \bar{t}[\omega] - \bar{t}[\omega + \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \\
&+ \left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \frac{\beta}{2} e^{2i\omega x_0/c} e^{-i(\theta - \Omega x_0/c)} \left\{ \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega + \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Les termes faisant intervenir les champs entrants à la fréquence ω correspondent à la diffusion sur le miroir quand il est au repos en x_0 . Les termes faisant apparaître les deux bandes latérales $\omega \pm \Omega$ correspondent eux au déphasage supplémentaire des champs diffusés, lié au mouvement du miroir. Dans chaque cas, les facteurs \bar{t} rendent compte de la transmission, et \bar{r} de la réflexion. Si les coefficients de diffusion en question varient suffisamment peu entre les

différentes fréquences impliquées, on pourra écrire les résultats (2.21) et (2.22) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_{out}[\omega] \simeq \sqrt{T} \hat{\varphi}_{in}[\omega] \\ \quad + \varepsilon \sqrt{R} e^{-2i\omega x_0/c} \left[\hat{\psi}_{in}[\omega] + (1 - \omega/\Omega) \beta e^{+i(\theta + \Omega x_0/c)} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \right. \\ \quad \quad \quad \left. + (1 + \omega/\Omega) \beta e^{-i(\theta + \Omega x_0/c)} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \right] \\ \\ \hat{\psi}_{out}[\omega] \simeq \sqrt{T} \hat{\psi}_{in}[\omega] \\ \quad - \varepsilon \sqrt{R} e^{+2i\omega x_0/c} \left[\hat{\varphi}_{in}[\omega] - (1 - \omega/\Omega) \beta e^{+i(\theta - \Omega x_0/c)} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \right. \\ \quad \quad \quad \left. - (1 + \omega/\Omega) \beta e^{-i(\theta - \Omega x_0/c)} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \right] \end{array} \right. \quad (2.23)$$

où les coefficients R et T sont des réels positifs tels que $R + T = 1$, et $\varepsilon = \pm 1$. D'après la relation entre les potentiels $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ et les opérateurs \hat{a} et \hat{b} (2.3), pour tout $\omega > 0$, ce résultat peut se mettre sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_{out}[\omega] \simeq \sqrt{T} \hat{a}_{in}[\omega] + \varepsilon \sqrt{R} e^{-2i\omega x_0/c} \left[\hat{b}_{in}[\omega] \right. \\ \quad + e^{+i(\theta + \Omega x_0/c)} \sqrt{\frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right|} \beta \left\{ \theta(\omega - \Omega) \hat{b}_{in}[\omega - \Omega] + \theta(\Omega - \omega) \hat{b}_{in}^\dagger[\Omega - \omega] \right\} \\ \quad \quad \quad \left. + e^{-i(\theta + \Omega x_0/c)} \sqrt{\frac{\omega}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right)} \beta \hat{b}_{in}[\omega + \Omega] \right] \\ \\ \hat{b}_{out}[\omega] \simeq \sqrt{T} \hat{b}_{in}[\omega] - \varepsilon \sqrt{R} e^{+2i\omega x_0/c} \left[\hat{a}_{in}[\omega] \right. \\ \quad - e^{+i(\theta - \Omega x_0/c)} \sqrt{\frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right|} \beta \left\{ \theta(\omega - \Omega) \hat{a}_{in}[\omega - \Omega] + \theta(\Omega - \omega) \hat{a}_{in}^\dagger[\Omega - \omega] \right\} \\ \quad \quad \quad \left. - e^{-i(\theta - \Omega x_0/c)} \sqrt{\frac{\omega}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right)} \beta \hat{a}_{in}[\omega + \Omega] \right] \end{array} \right. \quad (2.24)$$

i) Compression des fluctuations du vide

Nous allons voir que les termes en $\theta(\Omega - \omega) \hat{b}_{in}^\dagger[\Omega - \omega]$ et $\theta(\Omega - \omega) \hat{a}_{in}^\dagger[\Omega - \omega]$ vont donner lieu à une compression des fluctuations du vide, se traduisant par la création de photons aux fréquences ω comprises entre 0 et Ω . Pour s'en convaincre, on peut s'intéresser au nombre de photons dans l'état sortant du miroir quand l'état entrant est le vide, c'est-à-dire au nombre de photons émis par le miroir en mouvement dans le vide :

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_{out}^{(\rightarrow)}[\omega] \rangle_{vac} &= \langle \hat{a}_{out}^\dagger[\omega] \hat{a}_{out}[\omega] \rangle_{vac} \simeq R \frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right| \beta^2 \theta(\Omega - \omega) \theta(\Omega - \omega) \langle \hat{b}_{in}[\Omega - \omega] \hat{b}_{in}^\dagger[\Omega - \omega] \rangle_{vac} \\ \langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega] \rangle_{vac} &= \langle \hat{b}_{out}^\dagger[\omega] \hat{b}_{out}[\omega] \rangle_{vac} \simeq R \frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right| \beta^2 \theta(\Omega - \omega) \theta(\Omega - \omega) \langle \hat{a}_{in}[\Omega - \omega] \hat{a}_{in}^\dagger[\Omega - \omega] \rangle_{vac} \end{aligned} \quad (2.25)$$

On précise que cette définition des opérateurs nombre n'est pas tout-à-fait adaptée à nos conventions de "quantification en variables continues", car elle est susceptible de faire apparaître un $2\pi\delta(0)$ divergent. Toutefois, dans le cadre de la discussion que l'on souhaite faire de ces résultats, on pourra se contenter de remplacer cette divergence par 1, comme ce qui serait le cas pour une description discrétisée de l'espace des fréquences. On se reportera à l'annexe **B** pour une définition rigoureuse de l'opérateur nombre dans l'approche continue, que l'on appellera alors "opérateur densité spectrale de flux photonique". Reprenons :

$$\langle \hat{n}_{out}^{(-)}[\omega] \rangle_{vac} = \langle \hat{n}_{out}^{(-)}[\omega] \rangle_{vac} \simeq \underbrace{R \beta^2 \frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right|}_{R_{sq}[\omega]} \theta(\Omega - \omega) \quad (2.26)$$

On voit donc que des photons seront émis à gauche et à droite du miroir, en quantité proportionnelle au rapport $\beta = v_{max}/c$ ainsi qu'au coefficient de réflexion R du miroir. Cet effet correspond à un facteur de compression des fluctuations du vide à la fréquence ω donné par $R_{sq}[\omega]$ [Fabre(Cours)]. On note d'autre part que le rayonnement ne se produit que pour $\omega \in]0; \Omega[$. Par conséquent, avec les notations du paragraphe **B.1.1**, on aura $\omega_{max} = \Omega$, et $(\omega_{max} + \Omega)|\delta q[\Omega]|/c \simeq v_{max}/c \ll 1$, ce qui valide bien le traitement perturbatif utilisé pour aboutir au résultat (2.23). On pourra aisément se convaincre qu'il en va de même pour les résultats (2.21) et (2.22) correspondant au cas où les coefficients de diffusion du miroir dépendent de la fréquence.

En examinant (2.25), on peut interpréter les choses de manière naive en disant qu'un photon virtuel à la fréquence $\Omega - \omega$ est réfléchi par le miroir en oscillation mécanique à Ω sous la forme d'un photon réel à la fréquence ω et que ce processus a une probabilité proportionnelle à $R \beta^2 \omega(\Omega - \omega)/\Omega^2$. D'après (2.21) et (2.22), il apparaît que si les coefficients de diffusion du miroir varient suffisamment entre $\Omega - \omega$ et ω , le même type de processus se produira aussi par transmission à travers le miroir. Une interprétation plus rigoureuse de ces processus [Jaekel(92)] fait intervenir le théorème de fluctuation-dissipation et consiste à dire que la force fluctuante mais nulle en moyenne associée à la pression de radiation ressentie par le miroir au repos dans le vide quantique se transforme en une force dissipative s'opposant au mouvement quand le miroir est non-uniformément accéléré, et que des photons sont alors émis dans le vide pour satisfaire la conservation de l'énergie. Par ailleurs, comme

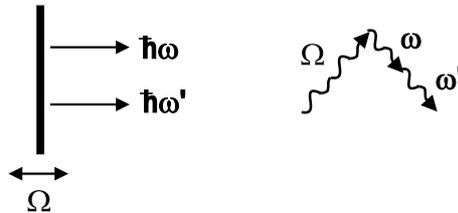


FIG. 2.6: Processus d'émission de photons par paires à la surface d'un miroir en oscillation mécanique à Ω dans le vide.

démontré dans l'annexe A, ces photons sont en fait émis par paires, en l'occurrence ici des paires $\{\omega; \Omega - \omega\}$ avec $\omega \in]0; \Omega[$. On pourra donc proposer la représentation imagée suivante : à chaque quantum mécanique d'énergie $\hbar\Omega$ cédé par le miroir au "champ du vide", deux quanta lumineux d'énergie respective $\hbar\omega$ et $\hbar(\Omega - \omega)$ sont émis (cf figure 2.6).

ii) Compression des fluctuations thermiques

Prenons maintenant comme état entrant un état stationnaire² différent du vide. Analysons par exemple le cas simple de l'état nombre à un photon de fréquence ω_0 se propageant vers la droite : $|1_{\omega_0}^{(\leftarrow)}\rangle$, qui pourra représenter un photon thermique par exemple (cf figure 2.7).

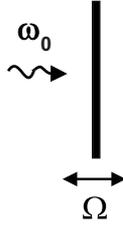


FIG. 2.7: Photon de fréquence ω_0 se propageant vers la droite avant diffusion sur un miroir en mouvement harmonique à la fréquence Ω .

En moyennant l'opérateur nombre sortant avec cet état entrant, il vient (pour $\omega > 0$) :

$$\begin{aligned}
& \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{out}^\dagger[\omega] \hat{a}_{out}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \\
& \simeq T \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}^\dagger[\omega] \hat{a}_{in}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle + R \frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right| \beta^2 \theta(\Omega - \omega) \theta(\Omega - \omega) \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{b}_{in}^\dagger[\Omega - \omega] \hat{b}_{in}^\dagger[\Omega - \omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \\
& \simeq T \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}^\dagger[\omega] \hat{a}_{in}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle + R \frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right| \beta^2 \theta(\Omega - \omega) \quad (2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{b}_{out}^\dagger[\omega] \hat{b}_{out}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \\
& \simeq R \left\{ \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}^\dagger[\omega] \hat{a}_{in}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle + \frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right| \beta^2 \left[\theta(\omega - \Omega) \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}^\dagger[\omega - \Omega] \hat{a}_{in}[\omega - \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \theta(\Omega - \omega) \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}[\Omega - \omega] \hat{a}_{in}^\dagger[\Omega - \omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\omega}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \beta^2 \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}^\dagger[\omega + \Omega] \hat{a}_{in}[\omega + \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \right\}
\end{aligned}$$

²c'est-à-dire un état propre du Hamiltonien $H^{(0)}$ associé à la propagation libre du champ, cf Annexe A

$$\begin{aligned}
\simeq R \left\{ \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}^\dagger[\omega] \hat{a}_{in}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle + \frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right| \beta^2 \left[\theta(\omega - \Omega) \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}^\dagger[\omega - \Omega] \hat{a}_{in}[\omega - \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \right. \right. \\
\left. \left. + \theta(\Omega - \omega) \left(\langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}^\dagger[\Omega - \omega] \hat{a}_{in}[\Omega - \omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle + 1 \right) \right] \right. \\
\left. + \frac{\omega}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \beta^2 \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{a}_{in}^\dagger[\omega + \Omega] \hat{a}_{in}[\omega + \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \right\} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en utilisant (2.26) :

$$\langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \simeq \langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega] \rangle_{vac} + T \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{in}^{(\leftarrow)}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
\langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \simeq \langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega] \rangle_{vac} + R \left\{ \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{in}^{(\leftarrow)}[\omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \right. \\
+ \frac{\omega}{\Omega} \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega} \right| \beta^2 \left[\theta(\omega - \Omega) \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{in}^{(\leftarrow)}[\omega - \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \right. \\
\left. \left. + \theta(\Omega - \omega) \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{in}^{(\leftarrow)}[\Omega - \omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \right] \right. \\
\left. + \frac{\omega}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \beta^2 \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{in}^{(\leftarrow)}[\omega + \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle \right\} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

A l'aide de (2.29) et (2.30), on va pouvoir identifier différents types de processus impliquant le photon incident de fréquence ω_0 lors de sa diffusion sur le miroir oscillant :

$$\begin{cases} \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle - \langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0] \rangle_{vac} \simeq T \\ \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle - \langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0] \rangle_{vac} \simeq R \quad (\text{pour } \omega_0 \neq \Omega/2) \end{cases} \quad (2.31)$$

Ce résultat traduit une diffusion sans modification de fréquence. Le photon incident est dans ce cas réfléchi avec une probabilité R ou transmis avec une probabilité T , comme si le miroir était immobile (cf figure 2.8).

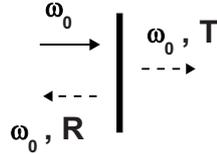


FIG. 2.8: Processus de diffusion à l'ordre 0 d'un photon incident de fréquence ω_0 sur un miroir en oscillation mécanique. A cet ordre, tout se passe comme si le miroir était immobile, et le photon incident est réfléchi avec une probabilité R , ou transmis avec une probabilité T .

D'autre part, si $0 < \omega_0 < \Omega$:

$$\begin{cases} \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\Omega - \omega_0] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle - \langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\Omega - \omega_0] \rangle_{vac} \simeq 0 \\ \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\Omega - \omega_0] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle - \langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\Omega - \omega_0] \rangle_{vac} \simeq R \beta^2 \frac{\omega_0}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega_0}{\Omega}\right) \end{cases} \quad (2.32)$$

On constate dans ce cas que le photon incident de fréquence ω_0 est réfléchi sous la forme d'un photon de fréquence $\Omega - \omega_0$, et ce avec une probabilité : $R \beta^2 \omega_0 (\Omega - \omega_0) / \Omega^2$. Cet effet motionnel se superpose à celui du vide impliquant un photon incident virtuel de fréquence ω_0 . En se reportant à l'approche Hamiltonienne de l'annexe A, on peut reformuler les choses en disant que, lors de sa réflexion sur le miroir oscillant, le photon incident de fréquence ω_0 stimule l'émission d'une paire de photons $(\omega_0; \Omega - \omega_0)$, en plus de celle émise par compression des fluctuations du vide (cf figure 2.9).



FIG. 2.9: Processus d'émission paramétrique d'une paire de photons $(\omega_0; \Omega - \omega_0)$ stimulée par un photon de fréquence $\omega_0 < \Omega$ lors de sa réflexion sur un miroir en oscillation mécanique à Ω . Le miroir cède un quantum d'énergie mécanique $\hbar\Omega$ au champ.

Si maintenant $\omega_0 > \Omega$:

$$\begin{cases} \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0 - \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle - \langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0 - \Omega] \rangle_{vac} \simeq 0 \\ \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0 - \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle - \langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0 - \Omega] \rangle_{vac} \simeq R \beta^2 \frac{\omega_0}{\Omega} \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - 1\right) \end{cases} \quad (2.33)$$

Dans ce cas, le photon incident de fréquence ω_0 est réfléchi sous la forme d'un photon de fréquence $\omega_0 - \Omega$, et ce avec une probabilité : $R \beta^2 \omega_0 (\omega_0 - \Omega) / \Omega^2$. En d'autres termes, il y a conversion paramétrique du photon incident d'énergie $\hbar\omega_0$ en un photon d'énergie $\hbar(\omega_0 - \Omega)$, avec restitution d'un quantum d'énergie mécanique $\hbar\Omega$ au miroir (cf figure 2.10).

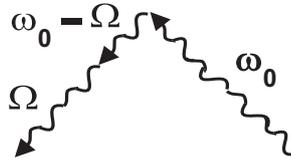


FIG. 2.10: Processus de conversion paramétrique d'un photon de fréquence $\omega_0 > \Omega$ en un photon de fréquence $\omega_0 - \Omega$ sur un miroir en oscillation mécanique à Ω . Le miroir se voit alors restituer un quantum d'énergie mécanique $\hbar\Omega$.

Cet effet motionnel n'a pas de contrepartie dans le vide, étant donné que l'on ne peut extraire d'énergie de l'état fondamental du champ.

Enfin, pour tout $\omega_0 > 0$, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0 + \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle - \underbrace{\langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0 + \Omega] \rangle_{vac}}_{=0} \simeq 0 \\ \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} | \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0 + \Omega] | 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \rangle - \underbrace{\langle \hat{n}_{out}^{(\leftarrow)}[\omega_0 + \Omega] \rangle_{vac}}_{=0} \simeq R \beta^2 \frac{\omega_0}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega_0}{\Omega} \right) \end{array} \right. \quad (2.34)$$

On observe ici encore un effet lié au mouvement du miroir qui n'existait pas dans le vide. Il y a dans ce cas un couplage paramétrique du photon incident de fréquence ω_0 avec un quantum d'excitation mécanique du miroir Ω , donnant lieu à l'émission d'un photon de fréquence $\omega_0 + \Omega$ (cf figure 2.11), et ce avec une probabilité : $R \beta^2 \omega_0(\omega_0 + \Omega)/\Omega^2$.

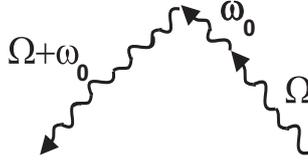


FIG. 2.11: Processus de conversion paramétrique d'un photon de fréquence ω_0 en un photon de fréquence $\omega_0 + \Omega$ sur un miroir en oscillation mécanique à Ω [cf équation (2.34)]. Le miroir cède un quantum d'énergie mécanique $\hbar\Omega$ au champ.

Dans le cas où les coefficients de diffusion du miroir varient suffisamment avec la fréquence [cf (2.21) et (2.22)], on aura des processus paramétriques analogues en transmission.

Pour terminer, il convient de noter qu'il n'y pas a priori de borne supérieure pour la fréquence ω_0 dans les processus décrits par les figures 2.10 et 2.11, ce qui pourrait remettre en cause l'approche perturbative. Plus précisément, pour : $R \beta^2 \omega_0(\omega_0 \pm \Omega)/\Omega^2 \rightarrow 1$, les résultats devraient différer sensiblement. Toutefois, lorsque l'on aura affaire à un champ thermique, pour toute température raisonnable, nous n'aurons pas ce problème, étant donné la décroissance exponentielle du spectre de corps noir à haute fréquence.

B.1.3 Densité spectrale et flux émis par un miroir en mouvement harmonique dans le vide

Il est également instructif de s'intéresser à la densité spectrale du rayonnement émis par le miroir. Dans l'annexe B, on démontre que la densité spectrale du flux photonique moyen mesuré par un photodétecteur à la fréquence ω peut être calculée par identification des termes (pour ω et ω' positifs) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{a}^\dagger[\omega] \hat{a}[\omega'] \rangle = 2\pi \delta(\omega - \omega') n_\omega^{(\leftarrow)} \\ \text{si l'on détecte les photons se propageant vers la droite, et :} \\ \langle \hat{b}^\dagger[\omega] \hat{b}[\omega'] \rangle = 2\pi \delta(\omega - \omega') n_\omega^{(\leftarrow)} \\ \text{si l'on détecte les photons se propageant vers la gauche.} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Ceci est vrai si la durée de l'échantillonnage de détection est suffisamment grande, et dans le cas où la moyenne est effectuée avec un état stationnaire du champ. Par extension, si la durée totale d'oscillation du miroir est suffisamment grande devant $2\pi/\Omega$, la densité spectrale du flux photonique moyen émis à la fréquence ω par un miroir en oscillation harmonique à Ω pourra être calculée par identification des termes (pour ω et ω' positifs) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{a}_{out}^\dagger[\omega] \hat{a}_{out}[\omega'] \rangle = \frac{2\varepsilon_0 c \sqrt{\omega \omega'}}{\hbar} \langle \varphi_{out}^\dagger[\omega] \varphi_{out}[\omega'] \rangle = 2\pi \delta(\omega - \omega') n_{\omega, out}^{(\rightarrow)} \\ \text{pour le flux émis vers la droite,} \\ \langle \hat{b}_{out}^\dagger[\omega] \hat{b}_{out}[\omega'] \rangle = \frac{2\varepsilon_0 c \sqrt{\omega \omega'}}{\hbar} \langle \psi_{out}^\dagger[\omega] \psi_{out}[\omega'] \rangle = 2\pi \delta(\omega - \omega') n_{\omega, out}^{(\leftarrow)} \\ \text{pour le flux émis vers la gauche.} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

D'après (2.21) et (2.22), on aura donc, si le mouvement se fait dans le vide :

$$n_{\omega, out, vac}^{(\rightarrow)} = n_{\omega, out, vac}^{(\leftarrow)} \simeq \left\{ \left| \bar{t}[\omega] - \bar{t}[\omega - \Omega] \right|^2 + \left| \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega - \Omega] \right|^2 \right\} \frac{\beta^2}{4} \frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right) \theta(\Omega - \omega) \quad (2.37)$$

et dans le cas où : $\bar{t}[\omega] \simeq \bar{t}[\omega - \Omega]$ et : $\bar{r}[\omega] \simeq \bar{r}[\omega - \Omega]$, il vient :

$$n_{\omega, out, vac}^{(\rightarrow)} = n_{\omega, out, vac}^{(\leftarrow)} \simeq R \beta^2 \frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right) \theta(\Omega - \omega) \quad \text{avec : } R = |\bar{r}[\omega]|^2 \quad (2.38)$$

On voit donc que la densité spectrale des photons émis par le miroir a une forme parabolique avec un maximum à $\omega = \Omega/2$ (cf figure 2.12). D'autre part, on note qu'aucun photon ne sera émis à $\omega \geq \Omega$. Ceci est une conséquence de la conservation d'énergie lors des processus d'émission de paires : $\hbar\Omega = \hbar\omega + \hbar\omega'$ (cf figure 2.6), dans le cadre du traitement perturbatif.

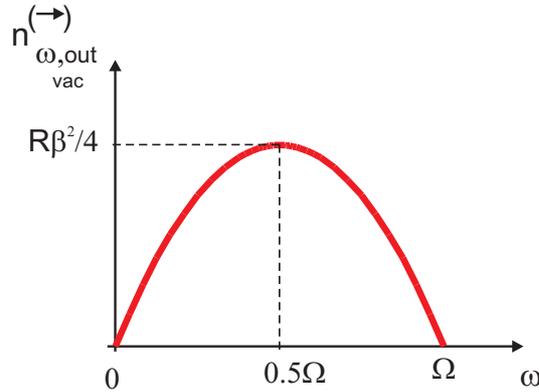


FIG. 2.12: Spectre émis par un miroir en mouvement harmonique à la fréquence Ω . Le maximum de la densité spectrale est atteinte en $\Omega/2$ et vaut $R\beta^2/4$.

On peut maintenant déterminer le flux photonique moyen total émis à partir du vide dans le cas où les coefficients de diffusion du miroir sont suffisamment constants sur $[0; \Omega]$:

$$\Phi_{out, v}^{(\rightarrow)} = \Phi_{out, v}^{(\leftarrow)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} n_{\omega, out, vac}^{(\rightarrow)} \simeq \frac{R\Omega\beta^2}{12\pi} = \frac{R\Omega^3 a^2}{12\pi c^2} \quad (2.39)$$

et dans la limite d'un miroir parfait ($R \simeq 1$) :

$$\Phi_{out,v} = \Phi_{out,v}^{(\rightarrow)} + \Phi_{out,v}^{(\leftarrow)} \simeq \frac{\Omega \beta^2}{6\pi} = \frac{\Omega^3 a^2}{6\pi c^2} \quad (2.40)$$

Expérimentalement, les limites de rupture pour un miroir macroscopique imposent de travailler avec des vitesses maximales inférieures à la vitesse du son : $\beta = v_{max}/c < 10^{-6}$. Par ailleurs, les fréquences maximales d'oscillation mécanique que l'on peut espérer atteindre³ sont de l'ordre du GigaHertz et l'amplitude maximale accessible à ces fréquences est de l'ordre de 10^{-12}m , ce qui donne : $\Phi_{out,v} \simeq 10^{-12} \text{photons.s}^{-1}$. On comprend alors pourquoi il est vain de chercher à détecter le rayonnement motionnel associé au mouvement d'un miroir seul dans le vide. Toutefois, si l'on arrivait à générer un phénomène analogue avec des fréquences d'excitation dans le visible (i.e. $\Omega \simeq 10^{15} \text{rad.s}^{-1}$) tout en gardant une amplitude de 10^{-12}m , alors on aurait : $\Phi_{out,v} \simeq 10^3 \text{photons.s}^{-1}$, ce qui rendrait l'effet détectable via des mesures sensibles en régime de comptage de photons.

B.1.4 Densité spectrale et flux émis par un miroir en mouvement harmonique dans un champ thermique

Pour avoir un vide parfait, il conviendrait que les parois de l'enceinte où l'on souhaite réaliser l'expérience soient portées au zéro absolu, ce qui ne sera bien évidemment jamais le cas dans la pratique. Nous allons donc étudier l'influence de la température sur le spectre émis par un miroir en mouvement harmonique. Dans un champ thermique d'équilibre à la température T_{eq} , la valeur moyenne d'un opérateur \hat{O} quelconque sera donnée par [Loudon] :

$$\langle \hat{O} \rangle_{T_{eq}} = \sum_{\{\{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\} \in F\}} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\} \langle \{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\} | \hat{O} | \{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\} \rangle \quad (2.41)$$

La somme est effectuée sur tous les états nombre multimodes :

$$|\{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\}\rangle = |\mathbf{n}_{\omega_1}^{(\alpha_1)}\rangle \otimes |\mathbf{n}_{\omega_2}^{(\alpha_2)}\rangle \otimes |\mathbf{n}_{\omega_3}^{(\alpha_3)}\rangle \otimes \dots \text{ avec, pour tout } i : \mathbf{n}_{\omega_i}^{(\alpha_i)} \in \mathbb{N} \quad (2.42)$$

formant une base complète de l'espace de Fock F associé au champ, et $P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\}$ est la probabilité de chacun de ces états dans la distribution grand-canonique [Diu] :

$$P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\} = \frac{\exp\left(-\sum_{\alpha \in \{\rightarrow; \leftarrow\}} \int_0^{+\infty} d\omega \varrho(\omega) \mathbf{n}_\omega^{(\alpha)} \hbar\omega/k_B T_{eq}\right)}{\sum_{\{\{\tilde{\mathbf{n}}_\omega^{(\alpha)}\} \in F\}} \exp\left(-\sum_{\alpha \in \{\rightarrow; \leftarrow\}} \int_0^{+\infty} d\omega \varrho(\omega) \tilde{\mathbf{n}}_\omega^{(\alpha)} \hbar\omega/k_B T_{eq}\right)} \quad (2.43)$$

³par effet piézoélectrique par exemple [Lambrecht(05), Bommel, Carr, Yu]

$\varrho(\omega)$ est la densité spectrale d'états accessibles aux photons dans l'enceinte. Elle est constante en deux dimensions d'espace-temps. Par construction, on aura :

$$\sum_{\{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\} = 1 \quad \text{et} : \quad \sum_{\{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_\omega^{(\alpha)}\} n_{\omega_0}^{(\alpha_0)} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/k_B T_{eq}} - 1} \quad (2.44)$$

On calcule alors aisément :

$$\langle \hat{a}_{in}^\dagger[\omega] \hat{a}_{in}[\omega'] \rangle_{T_{eq}} = \sum_{\{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} \langle \{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} | \hat{a}_{in}^\dagger[\omega] \hat{a}_{in}[\omega'] | \{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} \rangle \quad (2.45)$$

$$= \sum_{\{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} n_{\omega}^{(\leftarrow)} 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (2.46)$$

$$= \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_{eq}} - 1} 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (2.47)$$

et de même :

$$\langle \hat{b}_{in}^\dagger[\omega] \hat{b}_{in}[\omega'] \rangle_{T_{eq}} = \sum_{\{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} \langle \{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} | \hat{b}_{in}^\dagger[\omega] \hat{b}_{in}[\omega'] | \{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} \rangle \quad (2.48)$$

$$= \sum_{\{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\tilde{\omega}}^{(\alpha)}\} n_{\omega}^{(\leftarrow)} 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_{eq}} - 1} 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (2.50)$$

D'après (2.36), la densité spectrale du flux moyen des photons thermiques de fréquence ω en l'absence de perturbation de l'équilibre thermique sera donc :

$$\begin{cases} n_{\omega, b.b.}^{(\leftarrow)}_{T_{eq}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_{eq}} - 1} \\ n_{\omega, b.b.}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_{eq}} - 1} \end{cases} \quad (2.51)$$

et correspond bien évidemment au spectre du corps noir (on a choisi l'indice "b.b." pour signifier "black body").

Si le mouvement du miroir est harmonique et donné par la trajectoire $\delta q(t) = -a \sin(\Omega t - \theta)$, alors d'après (2.21), (2.22) et (2.36), la densité spectrale du flux des photons diffusés par le

miroir à la fréquence ω dans un champ thermique à T_{eq} sera [avec $\beta = v_{max}/c = \Omega a/c$] :

$$\begin{aligned}
n_{T_{eq}}^{(\leftarrow), out} = n_{T_{eq}}^{(\leftarrow)} &\simeq |t[\omega]|^2 \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_{eq}} - 1} + |r[\omega]|^2 \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_{eq}} - 1} \\
&+ \left| \bar{t}[\omega] - \bar{t}[\omega - \Omega] \right|^2 \frac{\beta^2}{4} \frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right) \left\{ \theta(\omega - \Omega) \frac{(-1)}{e^{\hbar(\omega - \Omega)/k_B T_{eq}} - 1} + \theta(\Omega - \omega) \left(\frac{1}{e^{\hbar(\Omega - \omega)/k_B T_{eq}} - 1} + 1 \right) \right\} \\
&+ \left| \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega - \Omega] \right|^2 \frac{\beta^2}{4} \frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right) \left\{ \theta(\omega - \Omega) \frac{(-1)}{e^{\hbar(\omega - \Omega)/k_B T_{eq}} - 1} + \theta(\Omega - \omega) \left(\frac{1}{e^{\hbar(\Omega - \omega)/k_B T_{eq}} - 1} + 1 \right) \right\} \\
&+ \left| \bar{t}[\omega] - \bar{t}[\omega + \Omega] \right|^2 \frac{\beta^2}{4} \frac{\omega}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \frac{1}{e^{\hbar(\omega + \Omega)/k_B T_{eq}} - 1} \\
&+ \left| \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega + \Omega] \right|^2 \frac{\beta^2}{4} \frac{\omega}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \frac{1}{e^{\hbar(\omega + \Omega)/k_B T_{eq}} - 1} \tag{2.52}
\end{aligned}$$

On remarque que l'on retrouve bien la densité spectrale (2.37) émise dans le vide en prenant la limite $T_{eq} \rightarrow 0$. Il est d'ailleurs possible de réécrire (2.52) sous la forme :

$$\begin{aligned}
n_{T_{eq}}^{(\leftarrow), out} &\simeq n_{T_{eq}}^{(\leftarrow), b.b.} + n_{vac}^{(\leftarrow)} \\
&+ \left[\left| \bar{t}[\omega] - \bar{t}[\omega - \Omega] \right|^2 + \left| \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega - \Omega] \right|^2 \right] \frac{\beta^2}{4} \frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right) \frac{1}{e^{\hbar(\Omega - \omega)/k_B T_{eq}} - 1} \theta(\Omega - \omega) \\
&+ \left[\left| \bar{t}[\omega] - \bar{t}[\omega - \Omega] \right|^2 + \left| \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega - \Omega] \right|^2 \right] \frac{\beta^2}{4} \frac{\omega}{\Omega} \left(\frac{\omega}{\Omega} - 1 \right) \frac{1}{e^{\hbar(\omega - \Omega)/k_B T_{eq}} - 1} \theta(\omega - \Omega) \\
&+ \left[\left| \bar{t}[\omega] - \bar{t}[\omega - \Omega] \right|^2 + \left| \bar{r}[\omega] + \bar{r}[\omega - \Omega] \right|^2 \right] \frac{\beta^2}{4} \frac{\omega}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \frac{1}{e^{\hbar(\omega + \Omega)/k_B T_{eq}} - 1} \tag{2.53}
\end{aligned}$$

On voit donc que l'on peut identifier différentes contributions dans le rayonnement diffusé :

- d'une part, il y a la contribution associée au rayonnement du corps noir,
- d'autre part, il y a celle associée au rayonnement motionnel dans le vide,
- et enfin, il y a celle associée à la conversion paramétrique des photons thermiques.

Dans le cas où les coefficients de diffusion du miroir varient peu entre les fréquences impliquées, le résultat (2.53) devient :

$$\begin{aligned}
n_{T_{eq}}^{(\leftarrow), out} = n_{T_{eq}}^{(\leftarrow)} &\simeq n_{T_{eq}}^{(\leftarrow), b.b.} + n_{vac}^{(\leftarrow)} + R \beta^2 \frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right) \frac{1}{e^{\hbar(\Omega - \omega)/k_B T_{eq}} - 1} \theta(\Omega - \omega) \\
&+ R \beta^2 \frac{\omega}{\Omega} \left(\frac{\omega}{\Omega} - 1 \right) \frac{1}{e^{\hbar(\omega - \Omega)/k_B T_{eq}} - 1} \theta(\omega - \Omega) \\
&+ R \beta^2 \frac{\omega}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \frac{1}{e^{\hbar(\omega + \Omega)/k_B T_{eq}} - 1} \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Chacun des trois derniers termes rend compte de la compression des fluctuations thermiques, via les processus représentés respectivement dans les figures 2.9, 2.10 et 2.11 du paragraphe

B.1.2 ii). Afin d'étudier les variations de ces contributions en fonction de la fréquence, définissons :

$$\begin{aligned}
n_{\omega, c.th.}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} &= R\beta^2\nu(1-\nu) \frac{1}{e^{\hbar\Omega(1-\nu)/k_B T_{eq}} - 1} \theta(1-\nu) + R\beta^2\nu(\nu-1) \frac{1}{e^{\hbar\Omega(\nu-1)/k_B T_{eq}} - 1} \theta(\nu-1) \\
&\quad + R\beta^2\nu(1+\nu) \frac{1}{e^{\hbar\Omega(1+\nu)/k_B T_{eq}} - 1} \\
&= \underbrace{R\beta^2\nu|1-\nu| \frac{1}{e^{\hbar\Omega|1-\nu|/k_B T_{eq}} - 1}}_{n_{\nu, c.th.}^{(\rightarrow)-} T_{eq}} + \underbrace{R\beta^2\nu(1+\nu) \frac{1}{e^{\hbar\Omega(1+\nu)/k_B T_{eq}} - 1}}_{n_{\nu, c.th.}^{(\rightarrow)+} T_{eq}} \quad (2.55)
\end{aligned}$$

où l'indice "c.th." signifie "conversions thermiques", et $\nu = \omega/\Omega$. Une étude de fonction montre que pour $\hbar\Omega > 10k_B T_{eq}$:

- $n_{\nu, c.th.}^{(\rightarrow)-} T_{eq}$ est une fonction piquée autour de $\nu = 1$. La valeur du pic vaut : $R\beta^2 \frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega}$, et sa largeur à mi-hauteur est donnée par : $\Delta\nu \simeq \frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega}$ (cf figure 2.13).

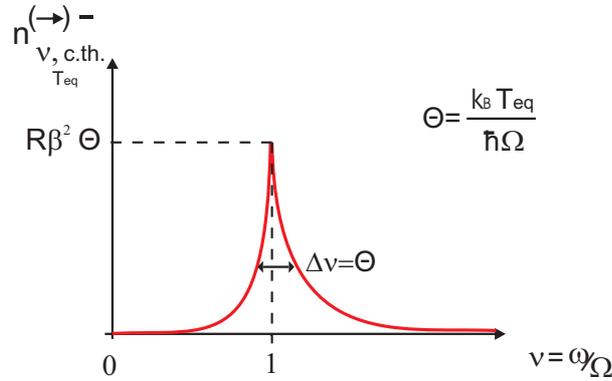


FIG. 2.13: Allure typique de la densité spectrale associée à l'émission de paires ($\omega; \Omega - \omega$) stimulées thermiquement pour $\omega < \Omega$, et aux conversions thermiques $\omega - \Omega \rightarrow \omega$ pour $\omega > \Omega$. Cette forme est valable tant que $\hbar\Omega > 10k_B T_{eq}$.

- $n_{\nu, c.th.}^{(\rightarrow)+} T_{eq}$ est une fonction "en cloche". Sa valeur maximale est atteinte aux alentours de $\nu = \frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega}$ et vaut environ : $R\beta^2 e^{-\hbar\Omega/k_B T_{eq}} \frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega}$. La largeur à mi-hauteur de cloche est donnée par : $\Delta\nu \simeq \frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega}$ (cf figure 2.14).

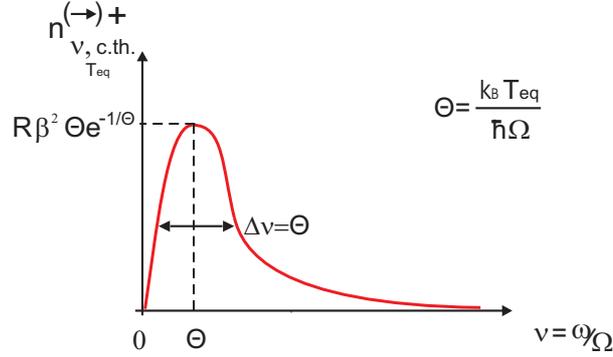


FIG. 2.14: Allure typique de la densité spectrale associée aux conversions thermiques : $\omega + \Omega \rightarrow \omega$, pour $\hbar\Omega > 10k_B T_{eq}$.

On peut alors déterminer la valeur du flux moyen total des photons émis par compression des fluctuations thermiques pour $\hbar\Omega > 10k_B T_{eq}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{out, c.th}^{(\rightarrow)} &= \Phi_{out, c.th}^{(\leftarrow)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} n_{\omega, c.th.}^{(\rightarrow)} = \Omega \int_0^{+\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \left(n_{\nu, c.th.}^{(\leftarrow)-} + n_{\nu, c.th.}^{(\rightarrow)+} \right) \\ &\simeq \frac{R\Omega\beta^2}{2\pi} \left(\frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega} \right)^2 + \frac{R\Omega\beta^2}{2\pi} \left(\frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega} \right)^2 e^{-\hbar\Omega/k_B T_{eq}} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Rappelons le résultat relatif au vide obtenu en (2.39) : $\Phi_{out, v}^{(\rightarrow)} \simeq R\Omega\beta^2/12\pi$. On voit donc que, pour $\hbar\Omega \gg k_B T_{eq}$, le flux moyen total des photons émis par conversion thermique sera négligeable devant celui associé à la compression des fluctuations du vide. Par ailleurs, le flux moyen relatif au rayonnement du corps noir sera lui aussi négligeable, pour peu que le photodétecteur utilisé ait un seuil d'efficacité spectrale ω_{min} tel que $k_B T_{eq} \ll \hbar\omega_{min} < \hbar\Omega/2$. Dans ce cas en effet, en considérant que le rendement quantique du photodétecteur vaut 1 sur le domaine $[\omega_{min}; \omega_{max}]$ et 0 en-dehors, on aura (avec $\omega_{min} \ll \omega_{max}$) :

$$\begin{aligned} \Phi_{b.b.}^{(\rightarrow)} &= \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \frac{d\omega}{2\pi} n_{\omega, b.b.}^{(\rightarrow)} = \Omega \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{1}{e^{\nu\hbar\Omega/k_B T_{eq}} - 1} \\ &\simeq \frac{\Omega}{2\pi} \frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega} e^{-\nu_{min}\hbar\Omega/k_B T_{eq}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Pour $\hbar\Omega = 100k_B T_{eq}$ et $\omega_{min} = \Omega/3$ par exemple, il vient : $\Phi_{b.b.}^{(\rightarrow)} \simeq 7.10^{-18}\Omega$, ce qui sera négligeable devant $\Phi_{out, v}^{(\rightarrow)}$ si $\beta > 2.10^{-8}$ (en prenant $R = 1$). Pour $\hbar\Omega = 1000k_B T_{eq}$ et $\omega_{min} = \Omega/10$, il vient : $\Phi_{b.b.}^{(\rightarrow)} \simeq 6.10^{-48}\Omega$, ce qui sera négligeable devant $\Phi_{out, v}^{(\rightarrow)}$ si $\beta > 10^{-23}$.

Avec Ω dans le visible, la relation $\hbar\Omega \gg k_B T_{eq}$ est vérifiée à $T_{eq} = 300K$, ce qui montre que si l'on parvient à exciter l'analogue d'une oscillation mécanique à une telle fréquence, alors

on sera en mesure de détecter les effets du vide dans le rayonnement émis, tout en menant l'expérience à l'intérieur d'une enceinte à température ambiante. D'après la discussion menée dans le paragraphe B.1.3, la compression des fluctuations du vide génèrera un flux de l'ordre de 10^3 photons par seconde.

B.2 Diffusion des champs par une cavité en mouvement

De manière à amplifier le rayonnement émis par un miroir unique oscillant dans le vide, on peut penser à utiliser deux miroirs en oscillation mécanique à la même fréquence Ω (cf figure 2.15), en tirant parti des réflexions multiples du champ à l'intérieur de la cavité. Dans

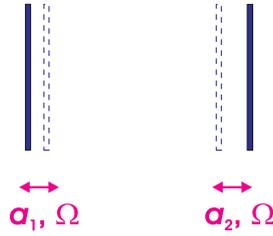


FIG. 2.15: Cavité constituée de deux miroirs en oscillation à la fréquence Ω et d'amplitude respective a_1 et a_2 .

les articles [Jaekel(92)F] et [Lambrecht(96)], il a été démontré que quand Ω est égal à un multiple entier du mode fondamental de la cavité et sous certaines conditions concernant le mouvement relatif des miroirs, le rayonnement émis est effectivement multiplié par la finesse F de la cavité par rapport au cas du miroir unique. Les photons sont alors émis aux fréquences propres de la cavité comprises entre 0 et Ω . Nous allons dans ce paragraphe rappeler comment ces résultats ont été obtenus, avec une approche perturbative de la diffusion des champs sur chaque miroir et en utilisant la théorie de la réponse linéaire pour évaluer la réponse globale de la cavité. Nous considèrerons d'abord la réponse linéaire de la cavité par rapport à de petits déplacements quelconques des miroirs, puis en choisissant un mouvement harmonique à la fréquence Ω pour chacun d'entre eux. Ce dernier choix nous permettra d'identifier des modes oscillatoires particuliers, qui auront comme caractéristique d'amplifier le rayonnement de manière résonante. Nous déterminerons alors la signature spectrale de ces modes, avant de calculer les flux émis associés.

B.2.1 Réponse linéaire pour un mouvement quelconque

Considérons donc tout d'abord le cas général où la trajectoire de chacun des miroirs est donnée par $q_1(t) = x_1 + \delta q_1(t)$ et $q_2(t) = x_2 + \delta q_2(t)$, en supposant $\delta q_1(t)$ et $\delta q_2(t)$ négligeables devant la longueur d'onde minimale du rayonnement susceptible d'être émis par la cavité. D'après le paragraphe B.1.1, on pourra alors écrire pour les champs diffusés sur

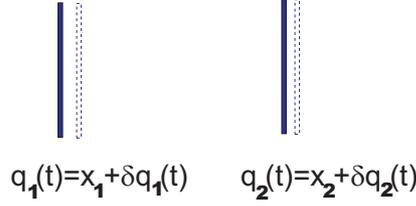


FIG. 2.16: Cavité constituée de deux miroirs en oscillation selon les trajectoires $q_1(t)$ et $q_2(t)$.

chacun des miroirs ($i = 1$ ou 2) :

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{out,i}[\omega] &\simeq \int \frac{d\omega'}{2\pi} \mathbf{S}_i[\omega, \omega'] \hat{\Phi}_{in,i}[\omega'] \\
&\simeq \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left(2\pi\delta(\omega - \omega') \mathbf{S}_i[\omega] + \delta\mathbf{S}_i[\omega, \omega'] \right) \hat{\Phi}_{in,i}[\omega'] \quad (2.58)
\end{aligned}$$

avec : $\mathbf{S}_i[\omega] = e^{-i\eta\omega x_i/c} \bar{\mathbf{S}}_i[\omega] e^{i\eta\omega x_i/c}$

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{S}_i[\omega, \omega'] &= \frac{i\omega'}{c} \delta q_i[\omega - \omega'] e^{-i\eta\omega x_i/c} \{ \bar{\mathbf{S}}_i[\omega] \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta} \bar{\mathbf{S}}_i[\omega'] \} e^{i\eta\omega' x_i/c} \\
\bar{\mathbf{S}}_i[\omega] &= \begin{pmatrix} \bar{t}_i[\omega] & \bar{r}_i[\omega] \\ \bar{r}_i[\omega] & \bar{t}_i[\omega] \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} |\bar{t}_i[\omega]|^2 + |\bar{r}_i[\omega]|^2 = 1 \text{ et } : \bar{t}_i[\omega] \bar{r}_i[\omega]^* \in i\mathbb{R} \\ \bar{t}_i[-\omega] = \bar{t}_i[\omega]^*, \text{ et } : \bar{r}_i[-\omega] = \bar{r}_i[\omega]^* \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \bar{t}_i[\omega] = 1 \text{ et } : \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \bar{r}_i[\omega] = 0 \end{cases} \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Quand les deux miroirs sont au repos en x_1 et x_2 , on aura donc :

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{out,1}[\omega] &= \mathbf{S}_1[\omega] \hat{\Phi}_{in,1}[\omega] = e^{-i\eta\omega x_1/c} \bar{\mathbf{S}}_1[\omega] e^{i\eta\omega x_1/c} \hat{\Phi}_{in,1}[\omega] \\
\hat{\Phi}_{out,2}[\omega] &= \mathbf{S}_2[\omega] \hat{\Phi}_{in,2}[\omega] = e^{-i\eta\omega x_2/c} \bar{\mathbf{S}}_2[\omega] e^{i\eta\omega x_2/c} \hat{\Phi}_{in,2}[\omega] \quad (2.60)
\end{aligned}$$

Dans toute la suite, on prendra : $x_1 = -L/2$ et : $x_2 = +L/2$ pour simplifier les expressions. L sera alors la longueur moyenne de la cavité. Nous allons distinguer les champs entrants, intra-cavité et sortant par les indices "in", "cav" et "out" respectivement (cf figure 2.17). Le résultat (2.60) pour les miroirs au repos s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{cav}[\omega] \\ \hat{\psi}_{out}[\omega] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{t}_1[\omega] & \bar{r}_1[\omega] e^{+i\omega L/c} \\ \bar{r}_1[\omega] e^{-i\omega L/c} & \bar{t}_1[\omega] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{in}[\omega] \\ \hat{\psi}_{cav}[\omega] \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{out}[\omega] \\ \hat{\psi}_{cav}[\omega] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{t}_2[\omega] & \bar{r}_2[\omega] e^{-i\omega L/c} \\ \bar{r}_2[\omega] e^{+i\omega L/c} & \bar{t}_2[\omega] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{cav}[\omega] \\ \hat{\psi}_{in}[\omega] \end{pmatrix} \quad (2.61)
\end{aligned}$$

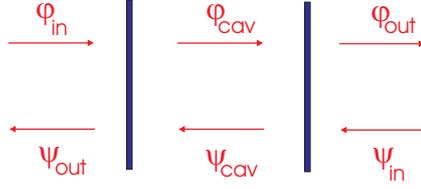


FIG. 2.17: Deux miroirs immobiles diffusant les composantes contra-propageantes du champ. On distingue les champs entrants, intra-cavité et sortants.

En manipulant ces relations, on retrouve les relations typiques des cavités Fabry-Pérot exprimant les champs sortants et intra-cavité en fonction des champs entrants :

$$\hat{\Phi}_{out}[\omega] = \mathbf{S}_{1,2}[\omega] \hat{\Phi}_{in}[\omega] \quad \hat{\Phi}_{cav}[\omega] = \mathbf{R}_{1,2}[\omega] \hat{\Phi}_{in}[\omega] \quad (2.62)$$

$$\text{avec : } \mathbf{S}_{1,2}[\omega] = \frac{1}{\bar{d}[\omega]} \begin{pmatrix} \bar{t}_1[\omega]\bar{t}_2[\omega] & \bar{r}_2[\omega]e^{-i\omega L/c} + \bar{d}_2[\omega]\bar{r}_1[\omega]e^{+i\omega L/c} \\ \bar{r}_1[\omega]e^{-i\omega L/c} + \bar{d}_1[\omega]\bar{r}_2[\omega]e^{+i\omega L/c} & \bar{t}_1[\omega]\bar{t}_2[\omega] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{1,2}[\omega] = \frac{1}{\bar{d}[\omega]} \begin{pmatrix} \bar{t}_1[\omega] & \bar{t}_2[\omega]\bar{r}_1[\omega]e^{+i\omega L/c} \\ \bar{t}_1[\omega]\bar{r}_2[\omega]e^{+i\omega L/c} & \bar{t}_2[\omega] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_1[\omega] &= \bar{t}_1[\omega]^2 - \bar{r}_1[\omega]^2 & \bar{d}_2[\omega] &= \bar{t}_2[\omega]^2 - \bar{r}_2[\omega]^2 \\ \bar{d}[\omega] &= 1 - \bar{r}[\omega]e^{+2i\omega L/c} & \bar{r}[\omega] &= \bar{r}_1[\omega]\bar{r}_2[\omega] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Le dénominateur $\bar{d}[\omega]$ dans les matrices $\mathbf{S}_{1,2}[\omega]$ et $\mathbf{R}_{1,2}[\omega]$ rend compte des résonances optiques pour les modes propres de la cavité : $\omega = p\pi c/L$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

Considérons maintenant que les miroirs sont mis en mouvement selon les trajectoires $q_1(t) = -L/2 + \delta q_1(t)$ et $q_2(t) = L/2 + \delta q_2(t)$. Avec une approche perturbative de la diffusion

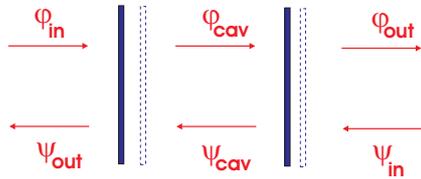


FIG. 2.18: Deux miroirs mobiles diffusant les composantes contra-propageantes du champ. des champs sur chaque miroir et en linéarisant la réponse globale de la cavité à l'ordre 1 en

les δq_i [Jaekel(92)F], on peut démontrer que les champs sortants et intra-cavité s'expriment en fonction des champs entrants selon :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{out}[\omega] &\simeq \int \frac{d\omega'}{2\pi} \mathbf{S}_{1,2}[\omega, \omega'] \hat{\Phi}_{in}[\omega'] \\ &\simeq \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left(2\pi\delta(\omega - \omega') \mathbf{S}_{1,2}[\omega] + \delta\mathbf{S}_{1,2}[\omega, \omega'] \right) \hat{\Phi}_{in}[\omega']\end{aligned}\quad (2.64)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{cav}[\omega] &\simeq \int \frac{d\omega'}{2\pi} \mathbf{R}_{1,2}[\omega, \omega'] \hat{\Phi}_{in}[\omega'] \\ &\simeq \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left(2\pi\delta(\omega - \omega') \mathbf{R}_{1,2}[\omega] + \delta\mathbf{R}_{1,2}[\omega, \omega'] \right) \hat{\Phi}_{in}[\omega']\end{aligned}\quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}\text{avec : } \delta\mathbf{S}_{1,2}[\omega, \omega'] &= \mathbf{P}_{-1} \delta\mathbf{S}_1[\omega, \omega'] [\mathbf{P}_{+1} + \mathbf{P}_{-1} \mathbf{R}_{1,2}[\omega']] + \mathbf{P}_{+1} \delta\mathbf{S}_2[\omega, \omega'] [\mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_{+1} \mathbf{R}_{1,2}[\omega']] \\ &\quad + [\mathbf{P}_{-1} \mathbf{S}_1[\omega] \mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_{+1} \mathbf{S}_2[\omega] \mathbf{P}_{+1}] \delta\mathbf{R}_{1,2}[\omega, \omega']\end{aligned}\quad (2.66)$$

$$\begin{aligned}\text{et : } \delta\mathbf{R}_{1,2}[\omega, \omega'] &= \frac{1}{\bar{d}[\omega]} \left\{ [\mathbf{P}_{+1} + \mathbf{P}_{-1} \mathbf{S}_2[\omega] \mathbf{P}_{+1}] \delta\mathbf{S}_1[\omega, \omega'] [\mathbf{P}_{+1} + \mathbf{P}_{-1} \mathbf{R}_{1,2}[\omega']] \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_{+1} \mathbf{S}_1[\omega] \mathbf{P}_{-1}] \delta\mathbf{S}_2[\omega, \omega'] [\mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_{+1} \mathbf{R}_{1,2}[\omega']] \right\}\end{aligned}\quad (2.67)$$

où les $\mathbf{S}_i[\omega]$ et $\delta\mathbf{S}_i[\omega, \omega']$ ont été définis en (2.59), les $\mathbf{S}_{1,2}[\omega]$, $\mathbf{R}_{1,2}[\omega]$ et $\bar{d}[\omega]$ en (2.63), et $\mathbf{P}_{\pm 1} = (1 \pm \eta)/2$. La densité spectrale des flux moyens émis par la cavité à la fréquence ω pourra se calculer par identification des termes :

$$\text{Tr} \left(\langle \hat{\Phi}_{out}[-\omega] \hat{\Phi}_{out}[\omega']^T \rangle \right) = 2\pi \delta(\omega - \omega') n_{\omega, out} \quad \text{avec : } n_{\omega, out} = n_{\omega, out}^{(\rightarrow)} + n_{\omega, out}^{(\leftarrow)} \quad (2.68)$$

”Tr” correspond à l’opération de trace et $\hat{\Phi}_{out}[\omega']^T$ est la matrice ligne transposée à partir de la matrice colonne $\hat{\Phi}_{out}[\omega']$. Le flux moyen total émis par la cavité dans le vide sera alors donné par [Lambrecht(96)] :

$$\Phi_{out, v} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\omega}{\omega'} \text{Tr}(\delta\mathbf{S}_{1,2}[\omega, -\omega'] \delta\mathbf{S}_{1,2}[\omega, -\omega']^\dagger) \quad (2.69)$$

Dans l’expression (2.66) de $\delta\mathbf{S}_{1,2}[\omega, \omega']$, on peut isoler un terme rendant compte de la réflexion directe des champ sur les miroirs à l’extérieur de la cavité : $\mathbf{P}_{-1} \delta\mathbf{S}_1[\omega, \omega'] \mathbf{P}_{+1} + \mathbf{P}_{+1} \delta\mathbf{S}_2[\omega, \omega'] \mathbf{P}_{-1}$. Tous les autres termes rendront eux compte de diffusions multiples des champs à l’intérieur de la cavité, comme en attestent la présence des dénominateurs $\bar{d}[\omega]$ ou $\bar{d}[\omega']$ dans l’expression des $\mathbf{R}_{1,2}[\omega']$ et $\delta\mathbf{R}_{1,2}[\omega, \omega']$. En conséquence, on aura des résonances optiques identiques à celles du Fabry-Pérot immobile étudié plus haut. Le rayonnement motionnel impliquera donc principalement les fréquences ω et ω' correspondant à des modes propres de la cavité au repos, que l’on appellera ”modes propres moyens”.

B.2.2 Cas du mouvement harmonique

Considérons maintenant le cas particulier d'un mouvement harmonique à la fréquence Ω pour chaque miroir, avec une amplitude respective a_1 et a_2 , et un déphasage temporel $\theta_2 - \theta_1$ (cf figure 2.15) :

$$\delta q_i(t) = a_i \sin(\Omega t - \theta_i) \quad (2.70)$$

Si le mouvement se fait dans le vide, on démontre que les fréquences impliquées dans le spectre du rayonnement émis correspondent aux modes propres moyens de la cavité compris entre 0 et Ω [Lambrecht(96)]. En faisant des hypothèses simplificatrices, on va pouvoir donner une expression analytique pour le flux photonique moyen total émis par la cavité, calculé à partir de la formule (2.69). D'une part, on supposera les coefficients de diffusion \bar{r}_i et \bar{t}_i des miroirs réels et indépendants de la fréquence sur le domaine $[0; \Omega]$. D'autre part, on considèrera une cavité de haute finesse, c'est-à-dire des coefficients \bar{r}_1 et \bar{r}_2 proches de 1. On posera alors :

$$\bar{r}_1 \bar{r}_2 = e^{-2\rho} \text{ avec } \rho \ll 1 \quad (2.71)$$

La finesse de la cavité étant définie par [Fabre(Cours)] :

$$F = \frac{\pi \sqrt{\bar{r}_1 \bar{r}_2}}{1 - \bar{r}_1 \bar{r}_2} \quad (2.72)$$

on aura $F \simeq \frac{\pi}{2\rho} \gg 1$. Dans ces conditions, on obtient [Lambrecht(96)] :

$$\Phi_{out,v} = \frac{\Omega^3 (a_1^2 + a_2^2)}{12\pi c^2} + \sum_{p,p'=1}^{+\infty} \Phi_{p,p'} \quad (2.73)$$

$$\text{avec : } \Phi_{p,p'} = \frac{c}{L} \frac{p\pi}{L} \frac{p'\pi}{L} \frac{\rho}{4\rho^2 + (\Omega L/c - p\pi - p'\pi)^2} |a_1 e^{i\theta_1} - (-1)^{p+p'} a_2 e^{i\theta_2}|^2 \quad (2.74)$$

Le premier terme apparaissant dans (2.73) est une contribution non-résonante provenant de la réflexion directe des fluctuations du vide sur les miroirs à l'extérieur de la cavité. Pour $a_1 = a_2 = a$, il s'identifie au résultat (2.40) relatif au flux moyen total émis par un miroir unique oscillant dans le vide à la fréquence Ω avec une amplitude a . Les termes $\Phi_{p,p'}$ correspondent eux aux résonances optiques pour les photons issus du rayonnement motionnel au sein de la cavité.

B.2.3 Identification de modes oscillatoires résonants

On remarque que quand la fréquence d'excitation mécanique des miroirs est un multiple entier du mode fondamental de la cavité : $\Omega = K\pi c/L$ avec $K \geq 2$, les contributions $\Phi_{p,p'}$ avec $p + p' = K$ seront amplifiées de manière résonante. Ces résonances correspondront à l'émission par les miroirs de paires de photons $\{p\Omega/K; (K-p)\Omega/K\}$ dans des modes propres moyens de la cavité. De plus, on note que si K est pair, on aura tout intérêt à choisir

$\theta_2 = \theta_1 + \pi$ pour maximiser les $\Phi_{p,p'}$ en question. Si K est impair, on aura plutôt intérêt à choisir $\theta_2 = \theta_1$. Par conséquent, on disposera de tout un ensemble de modes oscillatoires résonants. Les modes pairs $\Omega = 2\pi c/L, 4\pi c/L, \dots$ seront préférentiellement choisis tels que les miroirs soient déphasés d'une demi-période d'oscillation dans leur mouvement relatif. La longueur de la cavité sera alors modulée périodiquement autour de sa valeur moyenne L , et on appellera "respiratoires" de tels modes (cf figure 2.19).

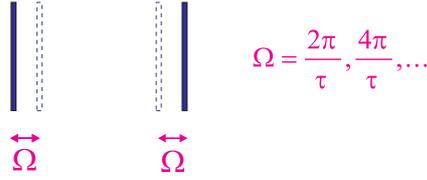


FIG. 2.19: Mode oscillatoire résonant $\Omega = K\pi/\tau$ avec K pair. La longueur de la cavité est modulée autour de sa valeur moyenne L avec une période $2\tau/K$, où le paramètre τ correspond au temps moyen mis par un photon pour aller d'un miroir à l'autre ($\tau = L/c$).

Les modes impairs $\Omega = 3\pi c/L, 5\pi c/L, \dots$ seront eux préférentiellement choisis tels que les miroirs oscillent en phase. On aura dans ce cas une translation globale de la cavité, laquelle conservera donc une longueur constante au cours du mouvement, et on parlera alors de "modes d'oscillation globale" (cf figure 2.20).

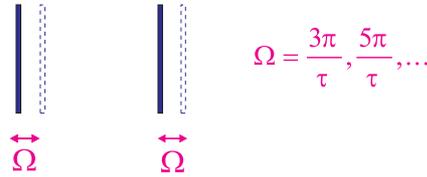


FIG. 2.20: Mode oscillatoire résonant $\Omega = K\pi/\tau$ avec K impair. La longueur de la cavité est maintenue fixe au cours de l'oscillation. Une période d'oscillation globale durera $2\tau/K$, où ici aussi le paramètre τ correspond au temps moyen mis par un photon pour aller d'un miroir à l'autre ($\tau = L/c$).

En résumé, les modes oscillatoires résonants seront associés à :

$$\Omega = K \frac{\pi c}{L} ; \quad K = \begin{cases} 2, 4, 6, \dots & \theta_2 = \theta_1 + \pi, \text{ modes respiratoires} \\ 3, 5, 7, \dots & \theta_2 = \theta_1, \text{ modes d'oscillation globale.} \end{cases} \quad (2.75)$$

B.2.4 Calcul du spectre émis pour les mouvements résonants

A partir de l'expression des $\Phi_{p,p'}$ écrite en (2.74), et en faisant le choix adapté de mode oscillatoire pour $\Omega L/c = K\pi$ avec K entier supérieur ou égal à 2 donné, on obtient en

définitive les contributions résonantes :

$$\forall p \in \{1, \dots, K-1\} \quad \Phi_{p,K-p} \simeq \frac{p(K-p)}{\pi K^3} \frac{\Omega^3(a_1+a_2)^2}{4c^2\rho} \simeq F \frac{3p(K-p)}{\pi K^3} \frac{\Omega^3(a_1+a_2)^2}{6\pi c^2} \quad (2.76)$$

Chacun de ces termes correspond en fait à l'intégration d'un pic à $\omega = p\Omega/K$ apparaissant dans le spectre émis. On peut démontrer que les pics en question ont une forme Lorentzienne, avec une largeur inversement proportionnelle à F [Lambrecht(96)], et que la densité spectrale atteinte par chaque pic est donnée par :

$$\forall p \in \{1, \dots, K-1\} \quad n_{p\Omega/K, vac}^{out} \propto \frac{p}{K} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \frac{\Omega^2(a_1+a_2)^2 F^2}{\pi^2 c^2} \quad (2.77)$$

Le facteur $p/K(1-p/K)$ reproduira, pour l'intensité relative des pics, la forme parabolique du spectre émis par un miroir unique oscillant dans le vide. L'allure du spectre pour $K=5$ est donné dans la figure 2.21⁴.

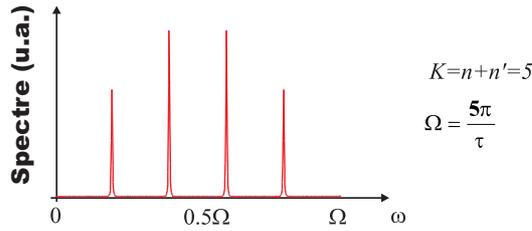


FIG. 2.21: Spectre émis par une cavité en oscillation résonante dans le vide avec $K=5$. On distingue quatre pics, aux fréquences $\omega = \Omega/5, 2\Omega/5, 3\Omega/5$ et $4\Omega/5$.

B.2.5 Calcul des flux émis à résonance

On va maintenant sommer les contributions $\Phi_{p,K-p}$ pour calculer le flux moyen total émis dans les modes oscillatoires résonants en question, en supposant de plus que $a_1 = a_2 = a$:

$$\Phi_{out,v} \simeq \sum_{p=1}^{K-1} \Phi_{p,K-p} \simeq \frac{2F}{\pi} \frac{K^2-1}{K^2} \frac{\Omega^3 a^2}{6\pi c^2} \quad (2.78)$$

Pour tout $K \geq 2$, on aura donc :

$$\Phi_{out,v} \simeq \frac{2F}{\pi} \frac{\Omega^3 a^2}{6\pi c^2} \simeq \frac{2F}{\pi} \frac{\Omega}{6\pi} \left(\frac{v_{max}}{c}\right)^2 \simeq \frac{2F}{\pi} \frac{\Omega \beta^2}{6\pi} \quad \text{avec } v_{max} = \Omega a \text{ et } \beta = \frac{v_{max}}{c} \quad (2.79)$$

⁴u.a. signifie "unités arbitraires". Les pics principaux atteignent une valeur de l'ordre de $(2\beta F/\pi)^2$, avec $\beta = \Omega(a_1+a_2)/2c$

ce qui correspond au flux émis par un miroir unique oscillant dans le vide à la fréquence Ω avec une amplitude a , multiplié par la finesse de la cavité. Mentionnons que l'effet sur $\Phi_{out,v}$ d'éventuels écarts par rapport aux conditions de mouvement résonant a été étudié dans l'article [Dodonov(98)]. En reprenant les ordres de grandeurs discutés à la fin de la sous-partie B.1.3, on voit que pour une fréquence d'oscillation mécanique de l'ordre du GigaHertz et une amplitude $a \simeq 10^{-12}\text{m}$, ce qui correspond aux conditions optimales d'une excitation piézoélectrique du mouvement des miroirs avec les technologies actuelles [Lambrecht(05)], on obtiendra ici pour les modes résonants :

$$\Phi_{out,v} \simeq 10^{-12} \times F \quad (2.80)$$

ce qui montre que pour rendre le rayonnement détectable, il faudra disposer de cavités de très haute finesse, typiquement $F > 10^9$. De telles finesse sont accessibles avec des cavités supraconductrices, mais la contrainte simultanée d'excitation au GigaHertz limite sérieusement les possibilités d'une réalisation expérimentale. En revanche, si l'on parvenait à générer un phénomène analogue avec des fréquences d'excitation dans le visible (i.e. $\Omega \simeq 10^{15}\text{rad.s}^{-1}$) tout en gardant une amplitude de 10^{-12}m , alors on aurait : $\Phi_{out,v} \simeq 10^3 \times F$, ce qui rendrait une détection expérimentale beaucoup plus aisée. Nous verrons alors dans le chapitre 3 tout l'intérêt de chercher dans des systèmes de type "Amplificateurs Paramétriques Optiques" des régimes analogues à l'oscillation résonante des miroirs.

C Approche non-perturbative

Dans la partie précédente, nous avons uniquement considéré le régime perturbatif, en linéarisant la diffusion des champs par rapport au mouvement des miroirs. Lors d'une réflexion unique, les champs diffusés subissent un déphasage de l'ordre de v_{max}/c par rapport aux champs incidents, et ce déphasage reste faible pour toute situation réaliste avec un miroir macroscopique. Toutefois, à l'intérieur d'une cavité, le champ est susceptible d'être réfléchi un grand nombre de fois sur les miroirs oscillants. Si le mode oscillatoire est résonant, il y a accumulation optimale des déphasages subits lors de chaque réflexion, ce qui peut se traduire par un large déphasage total. Une linéarisation de la réponse globale par rapport au mouvement des miroirs s'avère alors insuffisante pour décrire le rayonnement émis par une cavité de haute finesse. L'article [Lambrecht(98)], dans lequel les coefficients de diffusion des miroirs sont supposés indépendants de la fréquence, présente un traitement non-linéarisé du déphasage accumulé par les champs au sein d'une telle cavité. Cette approche permet d'obtenir des expressions analytiques pour la densité d'énergie émise à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité, ainsi que pour les densités spectrales associées. Il est alors montré que, quand la finesse est suffisamment élevée, le rayonnement est émis sous forme de pulses, dont le spectre contient des contributions non négligeables de fréquences supérieures à la fréquence Ω d'oscillation des miroirs. Ces signatures pourraient se révéler intéressantes pour discriminer le rayonnement motionnel d'éventuels effets parasites. Afin de préciser les choses, il convient d'introduire d'une part le paramètre associé au déphasage lors d'une seule réflexion :

$$\alpha = \frac{v_{max}}{c} \quad (2.81)$$

et d'autre part un paramètre caractérisant l'effet des réflexions multiples :

$$\alpha_{eff} = \frac{4F}{\pi} \frac{v_{max}}{c} \quad \text{où } F \text{ est la finesse de la cavité.} \quad (2.82)$$

Le paramètre α_{eff} correspond au déphasage effectif subi par le champ au sein de la cavité. Contrairement à α , il peut prendre des valeurs élevées grâce à la multiplication par le facteur F . Lorsque l'oscillation des miroirs se fait dans un mode résonant, il existe des orbites périodiques pour lesquelles la longueur apparente parcourue par les champs entre leurs réflexions successives au sein de la cavité est constante, et ce malgré le mouvement des miroirs [Law(94), Cole(95)]. Les rayons lumineux correspondant à une orbite périodique rencontrent alors les miroirs toujours à la même position, ce qui aboutit à un phénomène d'interférences, identique à celui se produisant au sein d'une cavité immobile. On peut en fait identifier deux types d'orbite périodique : dans un cas, l'orbite "attire" les trajectoires voisines, alors que dans l'autre, elle les "repousse". Seules les orbites attractives donneront lieu à une amplification conséquente du rayonnement motionnel. Ce processus conduit à la formation de pulses d'énergie régulièrement espacés, effectuant des aller-retours dans la cavité. A chaque réflexion sur les miroirs, les photons auront une probabilité π/F de s'échapper de la cavité, ce qui se traduira par une émission périodique des pulses vers l'extérieur.

En se basant sur ces arguments qualitatifs, on peut calculer précisément la densité d'énergie émise par une cavité en oscillation résonante dans le vide en fonction du temps. Le résultat est montré dans la figure 2.22, où la densité d'énergie est tracée pour trois valeurs différentes de α_{eff} . Les pulses émis sont d'autant plus courts et intenses que le paramètre α_{eff} augmente.

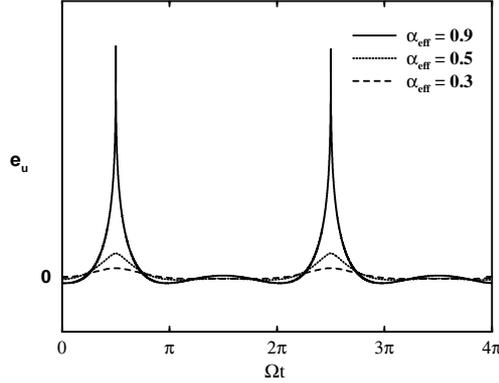


FIG. 2.22: Densité d'énergie émise vers l'extérieur par la cavité en fonction du temps, pour différentes valeurs de α_{eff} . La limite supérieure du graphique correspond à $10^{-3}\hbar\Omega^2$. Quand α_{eff} s'approche de 1, l'énergie se concentre en des pulses émis périodiquement par la cavité.

Ces calculs restent valables pour α_{eff} allant jusqu'à 1, alors que le traitement linéarisé ne l'est que pour $\alpha_{eff} \ll 1$. Par ailleurs, l'effet d'une température T_{eq} non nulle sur la densité d'énergie émise a été étudié dans l'article [Lambrecht(98)T], ce qui a permis de constater que les pulses se formant pour α_{eff} proche de 1 sont susceptibles de contenir bien plus de photons qu'à température nulle, et qu'il faut maintenir $k_B T_{eq} \ll \hbar\Omega$ pour que les effets du vide soient prépondérants (cf figure 2.23).

Dans tous les cas, le calcul prévoit une divergence de la densité d'énergie quand on atteint le seuil $\alpha_{eff} = 1$, ce qui laisse supposer que certains effets physiques n'ont pas été correctement pris en compte. Par exemple, on peut incriminer le fait d'avoir considéré les coefficients de diffusion des miroirs indépendants de la fréquence sur tout le domaine spectral impliqué. Comment alors tenir compte des conditions de transparence à haute fréquence nécessairement vérifiées par nos diffuseurs tout en gardant une approche non-linéarisée? Le spectre contenant des contributions non négligeables de fréquences supérieures à Ω , on peut aussi se poser la question de savoir si seule la théorie de la réponse linéaire appliquée à la cavité dans son ensemble est à remplacer par une approche plus générale, ou s'il convient également d'avoir une approche non-perturbative de la diffusion des champs sur chaque miroir pris individuellement.

Pour répondre à ces questions, nous allons dans un premier temps rappeler l'approche non-perturbative donnant l'expression exacte dans le domaine fréquentiel des champs diffusés par un miroir unique oscillant dont les coefficients sont considérés indépendants de la

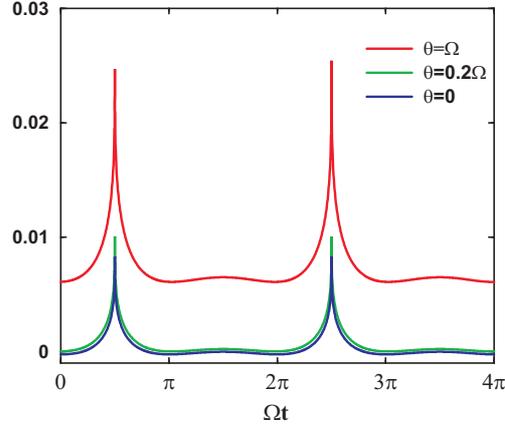


FIG. 2.23: Densité d'énergie émise vers l'extérieur par la cavité en fonction du temps, pour $\alpha_{eff} = 0,9$ et différentes valeurs de $\theta = 2\pi k_B T_{eq}/\hbar$. Les deux courbes $\theta = 0$ et $\theta = 0,2\Omega$ sont quasiment confondues. Par contre, pour $\theta = \Omega$, les pulses commencent à se démarquer nettement de ceux émis dans le vide.

fréquence. Ensuite, nous étendrons ce calcul au cas où les champs sont diffusés par deux miroirs oscillants, en composant les transformations successives des champs réfléchis au sein de la cavité. On procèdera alors par itération dans le domaine fréquentiel le long des trajectoires d'espace-temps suivies par les rayons lumineux associés au champ, ce qui constituera une approche alternative à celle utilisée dans l'article [Lambrecht(98)] où l'itération en question était effectuée dans le domaine temporel, et le spectre obtenu par transformée de Fourier du résultat final. Enfin, le spectre des signaux émis à $T_{eq} \neq 0$ n'ayant pas été calculé dans l'article [Lambrecht(98)T] on prendra soin dans ce chapitre d'étudier systématiquement la signature spectrale des effets liés à la température.

Remarque : Nous serons dans cette partie amenés à définir la quantité α comme la rapidité maximale des miroirs au sens relativiste du terme [Raimond(Cours)]. La vitesse maximale normalisée par c sera alors donnée par $\beta = \text{th}(\alpha) \simeq v_{max}/c$, ce qui nous permettra de garder des notations cohérentes par rapport à la partie précédente. La divergence pour $\alpha_{eff} = 1$ que nous venons d'évoquer à propos de la densité d'énergie émise correspondra par exemple à un seuil s'écrivant : $4\beta F/\pi = 1$. En ce qui concerne la puissance moyenne émise par la cavité, du fait de l'intégration des pulses lors de l'opération de moyennage, cette divergence n'apparaît que pour $\alpha_{eff} = 2$, c'est-à-dire $2\beta F/\pi = 1$. De même, pour la densité spectrale des flux moyens émis par la cavité, c'est cette dernière condition qui émergera comme caractéristique du seuil d'oscillation, et nous la nommerons parfois comme telle par abus de langage.

C.1 Diffusion des champs par un miroir oscillant

Nous allons dans ce paragraphe présenter un traitement non-linéarisé du déphasage subi par les champs lors de leur réflexion sur un miroir unique oscillant. Bien qu'a priori super-

flue pour toute excitation mécanique réaliste du miroir, cette approche permettra de mieux comprendre les phénomènes susceptibles de se produire au sein d'une cavité de haute finesse, proche du seuil d'oscillation. En choisissant un mouvement adapté, nous serons en mesure de fournir une expression exacte pour les champs diffusés par le miroir, à travers un développement non-perturbatif en $\beta = v_{max}/c$. Grâce à ce développement, nous calculerons ensuite les densités spectrales émises dans le vide et dans un champ thermique quelconque, en vérifiant que l'on retrouve bien les résultats de l'approche perturbative pour $\beta \ll 1$.

C.1.1 Principe du développement non-perturbatif

Pour les calculs qui vont suivre, nous considérerons un miroir dont la matrice de diffusion ne dépend pas de la fréquence sur le domaine spectral qui nous intéressera. Dans ce cas, quand le miroir est en mouvement par rapport au laboratoire, la relation (2.15) représentant la diffusion des champs dans un référentiel attaché au miroir devient :

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_{out}[\bar{q}, \omega] \\ \bar{\psi}_{out}[\bar{q}, \omega] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & \varepsilon\sqrt{R} \\ -\varepsilon\sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_{in}[\bar{q}, \omega] \\ \bar{\psi}_{in}[\bar{q}, \omega] \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

avec $R + T = 1$ et $\varepsilon = \pm 1$, ce qui implique pour les champs diffusés dans le référentiel du laboratoire [cf équations (2.6) et (2.12)] :

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{out}(t - q(t)/c) \\ \hat{\psi}_{out}(t + q(t)/c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & \varepsilon\sqrt{R} \\ -\varepsilon\sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{in}(t - q(t)/c) \\ \hat{\psi}_{in}(t + q(t)/c) \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_{out}(u) = \sqrt{T}\hat{\varphi}_{in}(u) + \varepsilon\sqrt{R}\hat{\psi}_{in}(V(u)) & \text{avec : } V(t - q(t)/c) = t + q(t)/c \\ \hat{\psi}_{out}(v) = \sqrt{T}\hat{\psi}_{in}(v) - \varepsilon\sqrt{R}\hat{\varphi}_{in}(U(v)) & \text{avec : } U(t + q(t)/c) = t - q(t)/c \end{cases} \quad (2.85)$$

La fonction U n'est autre que la fonction V^{-1} . Les fonctions V et U peuvent aussi être vues comme des fonctions implicites de u et v respectivement, et de la trajectoire $q(t)$:

$$\begin{cases} V(u) = u + 2q\left(\frac{u+V(u)}{2}\right)/c \\ U(v) = v - 2q\left(\frac{v+U(v)}{2}\right)/c \end{cases} \quad (2.86)$$

Après deux transformées de Fourier dans les équations (2.85), on obtient :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_{out}[\omega] = \sqrt{T}\hat{\varphi}_{in}[\omega] + \varepsilon\sqrt{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \hat{\psi}_{in}[\omega'] \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{i(\omega u - \omega' V(u))} \\ \hat{\psi}_{out}[\omega] = \sqrt{T}\hat{\psi}_{in}[\omega] - \varepsilon\sqrt{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \hat{\varphi}_{in}[\omega'] \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{i(\omega v - \omega' U(v))} \end{cases} \quad (2.87)$$

Pour un miroir immobile en x_0 par exemple, on aura :

$$\begin{cases} V(u) = t + x_0/c = u + 2x_0/c \\ U(v) = t - x_0/c = v - 2x_0/c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\varphi}_{out}[\omega] = \sqrt{T}\hat{\varphi}_{in}[\omega] + \varepsilon\sqrt{R}e^{-2i\omega x_0/c}\hat{\psi}_{in}[\omega] \\ \hat{\psi}_{out}[\omega] = \sqrt{T}\hat{\psi}_{in}[\omega] - \varepsilon\sqrt{R}e^{+2i\omega x_0/c}\hat{\varphi}_{in}[\omega] \end{cases} \quad (2.88)$$

Astreignons maintenant le miroir à avoir une trajectoire donnée par :

$$\sin(\Omega q(t)/c - \phi_a) = -\beta \sin(\Omega t - \phi_b) \quad (2.89)$$

On remarque que pour $\beta \ll 1$, cette trajectoire s'apparente à un mouvement harmonique à la fréquence Ω et de vitesse maximale $c\beta$. Le choix de ce type de trajectoire permet de relier

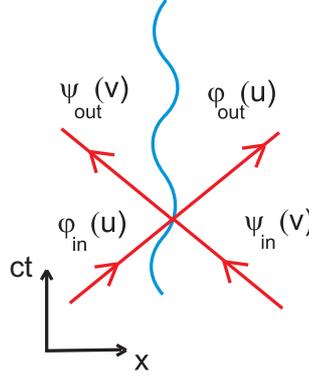


FIG. 2.24: Diagramme d'espace-temps représentant la diffusion de deux rayons lumineux contra-propageants sur un miroir oscillant.

les phases des rayons incidents et réfléchis sur le miroir par des relations homographiques [Lambrecht(98)] :

$$e^{i\Omega V(u)} = \frac{ae^{i\Omega u} + b}{b^*e^{i\Omega u} + a^*} \quad \text{avec : } \begin{cases} a = e^{i\phi_a} \text{ch}(\alpha) \\ b = e^{i\phi_b} \text{sh}(\alpha) \end{cases} \quad (2.90)$$

où α est défini par $\beta = \text{th}(\alpha)$. Par abus de langage, il nous arrivera par la suite de dire qu'un miroir suivant ce type de trajectoire est en mouvement "homographique". On va maintenant pouvoir faire un calcul exact, c'est-à-dire non-linéarisé, des intégrales apparaissant dans les équations (2.87) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{i(\omega u - \omega' V(u))} &= \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{i(\omega - \omega')u} e^{i\omega'(u - V(u))} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{i(\omega - \omega')u} [e^{i\Omega(V(u) - u)}]^{-\frac{\omega'}{\Omega}} \end{aligned} \quad (2.91)$$

En utilisant (2.90) et après quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$[e^{i\Omega(V(u) - u)}]^{-\frac{\omega'}{\Omega}} = \left[\frac{1 + e^{i(\phi_b - \phi_a)} \beta e^{-i\Omega u}}{1 + e^{-i(\phi_b - \phi_a)} \beta e^{i\Omega u}} \right]^{-\frac{\omega'}{\Omega}} e^{-2i\phi_a \frac{\omega'}{\Omega}} \quad (2.92)$$

On a donc affaire à une fonction périodique de u , que l'on peut développer en série de Fourier :

$$[e^{i\Omega(V(u) - u)}]^\nu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m[\nu] e^{-im\Omega u} \quad (2.93)$$

où les $\gamma_m[\nu]$ sont donnés par :

$$\gamma_m[\nu] = e^{2i\phi_a\nu} e^{im(\phi_b - \phi_a)} \nu H_m(\nu, \beta) \quad (2.94)$$

Les fonctions $\nu H_m(\nu, \beta)$ sont des polynômes en ν et β , dont on peut obtenir une expression analytique :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \nu H_m(\nu, \beta) = (-1)^{|m|} \frac{\beta^{|m|}}{|m|!} & \left[\frac{\prod_{j=0}^{|m|} (\epsilon(m)[m - \nu] - j)}{\epsilon(m)[m - \nu]} + \right. \\ & \left. \nu \sum_{l \geq 1} \left\{ (-1)^l \frac{|m|!}{(|m| + l)!} \frac{\prod_{j=0}^{|m|+2l} (\epsilon(m)[m - \nu] + l - j)}{(\epsilon(m)[m - \nu] + l)(\nu + \epsilon(m)l)} \frac{\beta^{2l}}{l!} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\text{où : } \begin{cases} \epsilon(m) = +1 & \text{si } m \geq 0 \\ \epsilon(m) = -1 & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Ce résultat est valable pour un mouvement homographique de vitesse maximale arbitraire, même approchant de la vitesse de la lumière. Dans toute situation réaliste, la vitesse mécanique du miroir restera largement inférieure à c . Nous aurons donc $\beta \ll 1$ et l'expression des $H_m(\nu, \beta)$ se simplifiera en :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \nu H_m(\nu, \beta) \simeq (-1)^{|m|} \frac{\beta^{|m|}}{|m|!} \frac{\prod_{j=0}^{|m|} (\epsilon(m)[m - \nu] - j)}{\epsilon(m)[m - \nu]} \quad (2.96)$$

Dans le cas général, on peut écrire un développement non-perturbatif pour le champ φ diffusé par le miroir, en regroupant les résultats des équations (2.87), (2.91) et (2.93) :

$$\varphi_{out}[\nu] = \sqrt{T} \varphi_{in}[\nu] + \varepsilon \sqrt{R} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m[m - \nu] \psi_{in}[\nu - m] \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad (2.97)$$

où, pour alléger les notations, on a introduit la variable réduite $\nu = \omega/\Omega$, ainsi les champs exprimés en fonction de cette nouvelle variable $\varphi[\nu] = \hat{\varphi}[\omega]$ et $\psi[\nu] = \hat{\psi}[\omega]$. Dans la limite non-relativiste, on va retrouver le résultat perturbatif. En effet, d'après (2.94) et (2.96), $\gamma_m[m - \nu] \propto \beta^{|m|}$, et en ne gardant que les termes d'ordre 0 et 1 en β , on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_{out}[\nu] \simeq \sqrt{T} \varphi_{in}[\nu] + \varepsilon \sqrt{R} e^{-2i\nu\phi_a} & \left[\psi_{in}[\nu] + (1 - \nu) \beta e^{+i(\phi_b + \phi_a)} \psi_{in}[\nu - 1] \right. \\ & \left. + (1 + \nu) \beta e^{-i(\phi_b + \phi_a)} \psi_{in}[\nu + 1] \right] \end{aligned} \quad (2.98)$$

ce qui correspond bien à la transformation (2.23) pour la composante φ du champ diffusé dans l'approche perturbative, avec $\phi_a = \Omega x_0/c$ et $\phi_b = \theta$.

Dans l'article [Lambrecht(98)], le résultat (2.97) avait déjà été présenté mais avec une formulation des $\gamma_m[\nu]$ légèrement différente de celle que nous venons d'exhiber en (2.94). Dans le cas particulier $\phi_a = 0$ et $\phi_b = \pi/2$, l'expression des coefficients de Fourier du développement (2.93) avait en effet été donnée sous la forme :

$$\gamma_m[\nu] = (-i)^{m+2} \nu \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} G_m(\nu, \beta) \quad (2.99)$$

où les coefficients :

$$G_m(\nu, \beta) = \beta^{|m|} \sum_{l \geq 0} \frac{\Gamma(\epsilon(m)\nu + l) \Gamma(\epsilon(m)(m - \nu) + l) \beta^{2l}}{\Gamma(|m| + l + 1) l!} \quad (2.100)$$

sont directement reliés à la fonction hypergéométrique $F(\nu, m - \nu; m + 1; \beta^2)$ définie par exemple dans l'équation 9.100 du livre [Gradshteyn] ⁵. Par construction, on doit pouvoir identifier les expressions des $\gamma_m[\nu]$ dans les deux formulations. En comparant (2.94) pour $\phi_a = 0$, $\phi_b = \pi/2$ et (2.99), il vient alors :

$$H_m(\nu, \beta) = (-1)^{m+1} \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} G_m(\nu, \beta). \quad (2.101)$$

Nous allons maintenant procéder de la même façon pour dériver l'expression de la composante ψ_{out} . Pour ce faire, il convient d'inverser la relation (2.90) :

$$e^{i\Omega U(v)} = \frac{a^* e^{i\Omega v} - b}{-b^* e^{i\Omega v} + a} \quad (2.102)$$

De manière analogue à l'équation (2.92), on a :

$$\left[e^{i\Omega(U(v)-v)} \right]^{-\frac{\omega'}{\Omega}} = \left[\frac{1 - e^{i(\phi_b + \phi_a)} \beta e^{-i\Omega v}}{1 - e^{-i(\phi_b + \phi_a)} \beta e^{i\Omega v}} \right]^{-\frac{\omega'}{\Omega}} e^{2i\phi_a \frac{\omega'}{\Omega}} \quad (2.103)$$

Le développement en série de Fourier s'écrit maintenant :

$$\left[e^{i\Omega(U(v)-v)} \right]^\nu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m[\nu] e^{-im\Omega v} \quad (2.104)$$

où les coefficients $\tilde{\gamma}_m[\nu]$ sont donnés par :

$$\tilde{\gamma}_m[\nu] = (-1)^m e^{-2i\phi_a \nu} e^{im(\phi_b + \phi_a)} \nu H_m(\nu, \beta) \quad (2.105)$$

Ils font intervenir les mêmes fonctions $H_m(\nu, \beta)$ que précédemment et ne diffèrent des $\gamma_m[\nu]$ que par le facteur de phase. On obtient finalement l'expression générale, valable pour toute vitesse, du champ ψ_{out} :

$$\psi_{out}[\nu] = \sqrt{T} \psi_{in}[\nu] - \varepsilon \sqrt{R} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m[m - \nu] \varphi_{in}[\nu - m] \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad (2.106)$$

⁵La propriété 8.334 des fonctions Γ avait aussi été utilisée

Comme auparavant, en faisant un développement à l'ordre 1 en β , on retrouve :

$$\begin{aligned} \psi_{out}[\nu] \simeq \sqrt{T} \psi_{in}[\nu] - \varepsilon \sqrt{R} e^{+2i\nu\phi_a} \left[\varphi_{in}[\nu] - (1-\nu)\beta e^{+i(\phi_b-\phi_a)} \varphi_{in}[\nu-1] \right. \\ \left. - (1+\nu)\beta e^{-i(\phi_b-\phi_a)} \varphi_{in}[\nu+1] \right] \end{aligned} \quad (2.107)$$

ce qui correspond au résultat perturbatif (2.23) pour la composante ψ du champ diffusé, avec $\phi_a = \Omega x_0/c$ et $\phi_b = \theta$.

C.1.2 Calcul exact du spectre émis par un miroir oscillant dans le vide

Nous allons maintenant calculer la densité spectrale du flux photonique moyen émis par le miroir, en tenant compte de tous les ordres en β . D'après l'Annexe B, si l'on moyenne avec un état stationnaire du champ, on peut écrire la densité spectrale pour ν et ν' positifs :

$$\begin{cases} \langle a^\dagger[\nu] a[\nu'] \rangle = \frac{2\pi}{\Omega} \delta(\nu - \nu') n_\nu^{(-)} & \langle b^\dagger[\nu] b[\nu'] \rangle = \frac{2\pi}{\Omega} \delta(\nu - \nu') n_\nu^{(-)} \\ \frac{2\varepsilon_0 c \sqrt{\nu\nu'}}{\hbar} \langle \varphi^\dagger[\nu] \varphi[\nu'] \rangle = \frac{2\pi}{\Omega} \delta(\nu - \nu') n_\nu^{(-)} & \frac{2\varepsilon_0 c \sqrt{\nu\nu'}}{\hbar} \langle \psi^\dagger[\nu] \psi[\nu'] \rangle = \frac{2\pi}{\Omega} \delta(\nu - \nu') n_\nu^{(-)} \end{cases} \quad (2.108)$$

Pour déterminer l'expression de $n_\nu^{(-)}$ par exemple, on peut commencer par évaluer la fonction à deux points du champ φ diffusé par le miroir vers la droite. D'après l'équation (2.97), celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \varphi_{out}^\dagger[\nu] \varphi_{out}[\nu'] &= T \varphi_{in}^\dagger[\nu] \varphi_{in}[\nu'] \\ &+ \varepsilon \sqrt{R} \sqrt{T} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m^*[m-\nu] \psi_{in}^\dagger[\nu-m] \varphi_{in}[\nu'] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \gamma_{m'}[m'-\nu'] \varphi_{in}^\dagger[\nu] \psi_{in}[\nu'-m'] \right\} \\ &+ R \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \gamma_m^*[m-\nu] \gamma_{m'}[m'-\nu'] \psi_{in}^\dagger[\nu-m] \psi_{in}[\nu'-m'] \end{aligned} \quad (2.109)$$

En moyennant avec le vide comme état entrant de part et d'autre du miroir, seul le dernier terme de l'équation ci-dessus va contribuer pour les fréquences positives du champ sortant :

$$\begin{aligned} \frac{2\varepsilon_0 c \sqrt{\nu\nu'}}{\hbar} \langle \varphi_{out}^\dagger[\nu] \varphi_{out}[\nu'] \rangle_{vac} \\ &= R \sqrt{\nu\nu'} \sum_{m>\nu} \sum_{m'>\nu'} \frac{\gamma_m^*[m-\nu] \gamma_{m'}[m'-\nu']}{\sqrt{(m-\nu)(m'-\nu')}} \langle 0 | b_{in}[m-\nu] b_{in}^\dagger[m'-\nu'] | 0 \rangle \\ &= R \sqrt{\nu\nu'} \sum_{m>\nu} \sum_{m'>\nu'} \frac{\gamma_m^*[m-\nu] \gamma_{m'}[m'-\nu']}{\sqrt{(m-\nu)(m'-\nu')}} \frac{2\pi}{\Omega} \delta((m-\nu) - (m'-\nu')) \end{aligned} \quad (2.110)$$

La densité spectrale du flux photonique moyen émis vers la droite à la fréquence ν s'écrit alors :

$$n_{\nu, out}^{(\rightarrow)} = R \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \frac{\nu}{m - \nu} |\gamma_m[m - \nu]|^2 \quad (2.111)$$

Par symétrie, la densité spectrale du flux moyen émis vers la gauche s'écrit de la même façon :

$$n_{\nu, out}^{(\leftarrow)} = R \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \frac{\nu}{m - \nu} |\gamma_m[m - \nu]|^2 \quad (2.112)$$

En utilisant l'expression des coefficients γ_m (2.94), on trouve l'expression suivante pour la densité spectrale émise par le miroir :

$$n_{\nu, out}^{(\rightarrow)} = n_{\nu, out}^{(\leftarrow)} = R \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \nu(m - \nu) |H_m(m - \nu, \beta)|^2 \quad (2.113)$$

Pour β pas trop proche de 1, on peut remplacer H_m par son expression approchée (2.96) et écrire un développement semi-perturbatif :

$$n_{\nu, out}^{(\rightarrow)} \simeq R \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \beta^{2m} \nu(m - \nu) \left(\frac{\prod_{j=1}^{m-1} |\nu - j|}{m!} \right)^2 \quad (2.114)$$

$$\simeq R \beta^2 \nu(1 - \nu) \theta(1 - \nu) + R \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu, m \neq 1}} \beta^{2m} \nu(m - \nu) \left(\frac{\prod_{j=1}^{m-1} |\nu - j|}{m!} \right)^2 \quad (2.115)$$

La densité spectrale du rayonnement émis s'annule pour toutes les fréquences ω multiples entières de la fréquence d'oscillation mécanique Ω . Le spectre émis se compose donc d'une "succession d'arches", chacune étant limitée par deux multiples entiers successifs de la fréquence Ω . L'allure typique qu'aurait le spectre en question pour un miroir ultra-relativiste est représenté sur la figure 2.25. Les grandeurs inscrites en ordonnées sur ce graphique donnent

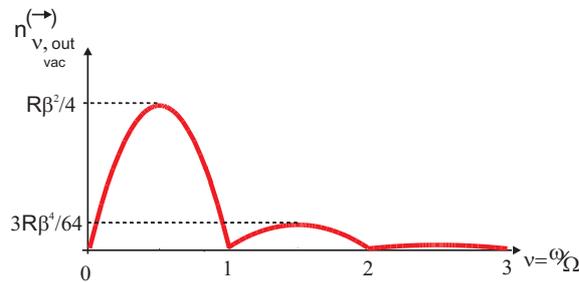


FIG. 2.25: Spectre émis par un miroir en oscillation ultra-relativiste à la fréquence Ω .

un ordre de grandeur des valeurs maximales atteintes par les deux premières arches. On remarque par ailleurs que, au premier ordre en β^2 , (2.115) redonne le résultat perturbatif (2.38),

c'est-à-dire la première arche. Bien qu'a priori superflu pour toute oscillation réaliste du miroir, le développement que l'on vient d'écrire permettra de comprendre l'allure de l'enveloppe du spectre émis par une cavité de haute finesse, proche du seuil d'oscillation. On démontre dans l'Annexe C que les termes correspondant à $m \geq 2$ apparaissant dans (2.114) correspondent principalement à l'émission de paires de photons dans des processus paramétriques d'ordres supérieurs. Plus précisément, le couplage opto-mécanique entre le mouvement du miroir et les fluctuations du vide va permettre d'exciter des paires de photons $(\omega; m\Omega - \omega)$ pour tout entier $m \geq 2$, en plus des paires $(\omega; \Omega - \omega)$ prédites par le calcul perturbatif (cf Fig.2.26). L'amplitude de probabilité associée à chacun de ces processus sera proportionnelle à β^m et la probabilité que le miroir émette une telle paire sera proportionnelle à β^{2m} . Dans toute situation réaliste, on aura $\beta \ll 1$ et les paires émises avec le plus de probabilité resteront donc néanmoins celles associées à l'ordre $m = 1$, c'est-à-dire celles prévues par le calcul perturbatif.

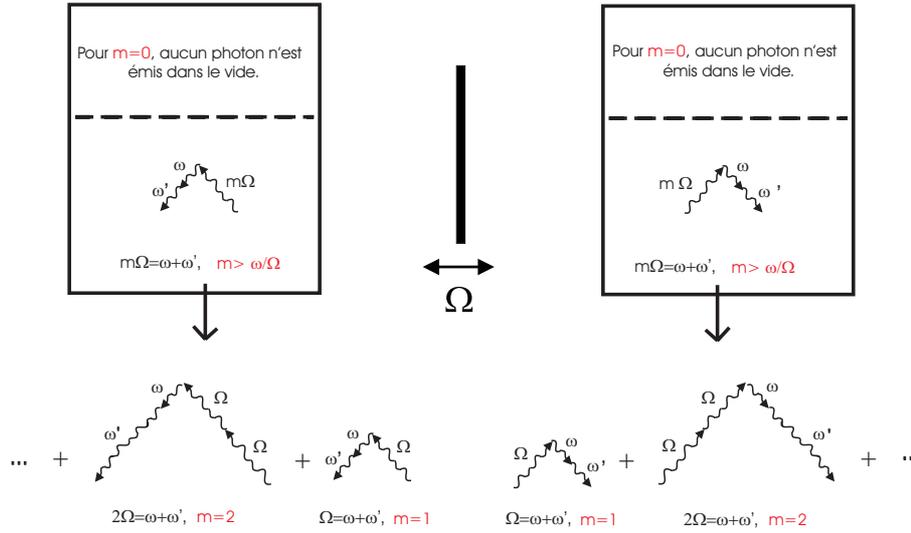


FIG. 2.26: Le couplage opto-mécanique entre les fluctuations du vide et le miroir donne lieu à des processus paramétriques : m quanta d'énergie mécanique $\hbar\Omega$ sont absorbés et deux quanta lumineux d'énergie $\hbar\omega$ et $\hbar(m\Omega - \omega)$ sont émis.

Remarque : D'après (2.101) et (2.100), le résultat (2.113) rejoint celui de l'article [Lambrecht(98)] :

$$n_{\nu, out}^{(\rightarrow)} = n_{\nu, out}^{(\leftarrow)} = R \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \nu(m - \nu) |G_m(m - \nu, \beta)|^2 = R \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \nu(m - \nu) |G_m(\nu, \beta)|^2 \quad (2.116)$$

C.1.3 Calcul exact du spectre émis par un miroir oscillant dans un champ thermique

Pour évaluer l'effet de la température dans le cadre du traitement non-linéaire des champs diffusés, nous allons maintenant considérer que le miroir se déplace non pas dans le vide mais dans un champ thermique d'équilibre à la température T_{eq} . En utilisant le même type de formalisme que celui présenté dans le paragraphe B.1.4, nous trouvons pour la fonction à deux points du champ φ diffusé par le miroir aux fréquences positives :

$$\begin{aligned}
& \langle \varphi_{out}^\dagger[\nu] \varphi_{out}[\nu'] \rangle_{T_{eq}} \\
&= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c} T \sum_{\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}^{(\alpha)}\} \in F} \frac{1}{\sqrt{\nu\nu'}} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} \langle \{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} | a_{in}^\dagger[\nu] a_{in}[\nu'] | \{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} \rangle \\
&+ \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c} R \left\{ \sum_{m>\nu} \sum_{m'>\nu'} \frac{\gamma_m^*[m-\nu] \gamma_{m'}[m'-\nu']}{\sqrt{(m-\nu)(m'-\nu')}} \sum_{\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} \langle \{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} | b_{in}[m-\nu] b_{in}^\dagger[m'-\nu'] | \{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m \leq \nu} \sum_{m' \leq \nu'} \frac{\gamma_m^*[m-\nu] \gamma_{m'}[m'-\nu']}{\sqrt{(\nu-m)(\nu'-m')}} \sum_{\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} \langle \{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} | b_{in}^\dagger[\nu-m] b_{in}[\nu'-m'] | \{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} \rangle \right\} \\
&= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c} T \frac{1}{\sqrt{\nu\nu'}} \sum_{\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} n_\nu 2\pi \delta(\nu - \nu') \\
&+ \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c} R \left\{ \sum_{m>\nu} \sum_{m'>\nu'} \frac{\gamma_m^*[m-\nu] \gamma_{m'}[m'-\nu']}{\sqrt{(m-\nu)(m'-\nu')}} \sum_{\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} (n_{m-\nu} + 1) \frac{2\pi}{\Omega} \delta((m-\nu) - (m'-\nu')) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m \leq \nu} \sum_{m' \leq \nu'} \frac{\gamma_m^*[m-\nu] \gamma_{m'}[m'-\nu']}{\sqrt{(\nu-m)(\nu'-m')}} \sum_{\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}^{(\alpha)}\} \in F} P_{T_{eq}}\{\mathbf{n}_{\bar{\nu}}\} n_{\nu-m} \frac{2\pi}{\Omega} \delta((\nu-m) - (\nu'-m')) \right\} \\
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Par conséquent, la densité spectrale du flux photonique moyen émis à ν vers la droite par un miroir oscillant dans un champ thermique à T_{eq} s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} &= T \frac{1}{e^{\hbar\Omega\nu/k_B T_{eq}} - 1} + \\
&R \left\{ \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m > \nu}} \frac{\nu}{m-\nu} |\gamma_m[m-\nu]|^2 \left(\frac{1}{e^{\hbar\Omega(m-\nu)/k_B T_{eq}} - 1} + 1 \right) + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \leq \nu}} \frac{\nu}{\nu-m} |\gamma_m[m-\nu]|^2 \frac{1}{e^{\hbar\Omega(\nu-m)/k_B T_{eq}} - 1} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{e^{\hbar\Omega\nu/k_B T_{eq}} - 1} + R \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \frac{\nu}{m - \nu} |\gamma_m[m - \nu]|^2 + R \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{\nu}{|m - \nu|} \frac{|\gamma_m[m - \nu]|^2}{e^{\hbar\Omega|m - \nu|/k_B T_{eq}} - 1} \quad (2.118)$$

Comme dans le traitement perturbatif, on identifie une contribution associée au spectre du corps noir, une autre associée au spectre émis dans le vide, et une dernière liée à la conversion paramétrique motionnelle des photons thermiques :

$$\begin{aligned} n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} &= n_{\nu, b.b.}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} + n_{\nu, vac}^{(\rightarrow)} + R \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{\nu}{|m - \nu|} \frac{|\gamma_m[m - \nu]|^2}{e^{\hbar\Omega|m - \nu|/k_B T_{eq}} - 1} \\ &= n_{\nu, b.b.}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} + n_{\nu, vac}^{(\rightarrow)} + R \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \nu |m - \nu| \frac{|H_m(m - \nu, \beta)|^2}{e^{\hbar\Omega|m - \nu|/k_B T_{eq}} - 1} \end{aligned} \quad (2.119)$$

et pour β pas trop proche de 1, on peut écrire un développement semi-perturbatif :

$$\begin{aligned} n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} &\simeq n_{\nu, b.b.}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} + n_{\nu, vac}^{(\rightarrow)} + R \beta^2 \nu (1 - \nu) \frac{1}{e^{\hbar\Omega(1 - \nu)/k_B T_{eq}} - 1} \theta(1 - \nu) \\ &\quad + R \beta^2 \nu (\nu - 1) \frac{1}{e^{\hbar\Omega(\nu - 1)/k_B T_{eq}} - 1} \theta(\nu - 1) \\ &\quad + R \beta^2 \nu (1 + \nu) \frac{1}{e^{\hbar\Omega(\nu + 1)/k_B T_{eq}} - 1} \\ &\quad + R \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^* \\ m \neq \pm 1}} \beta^{2|m|} \nu |m - \nu| \left(\frac{\prod_{j=1}^{|m|-1} |\epsilon(m)\nu - j|}{|m|!} \right)^2 \frac{1}{e^{\hbar\Omega|m - \nu|/k_B T_{eq}} - 1} \end{aligned} \quad (2.120)$$

On remarque ici aussi que, au premier ordre en β^2 , on retrouve le résultat perturbatif (2.54). Les termes supplémentaires correspondent à des conversions paramétriques d'ordres supérieurs des photons thermiques. En plus de l'émission stimulée de paires $(\omega; m\Omega - \omega)$ pour tout $m > \omega/\Omega$, on observera des conversions du type $\omega - m\Omega \rightarrow \omega$ pour $0 < m < \omega/\Omega$ et $\omega + |m|\Omega \rightarrow \omega$ pour $m < 0$. Afin de déterminer l'effet de ces processus sur le spectre émis par un miroir qui serait ultra-relativiste, nous allons procéder de manière équivalente à ce qui avait été fait dans la partie B.1.4 lors du traitement perturbatif des effets thermiques, en définissant :

$$\begin{aligned} n_{\nu, c.th.}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} &= R \beta^2 \nu |1 - \nu| \frac{1}{e^{\hbar\Omega|1 - \nu|/k_B T_{eq}} - 1} + R \beta^2 \nu (1 + \nu) \frac{1}{e^{\hbar\Omega(1 + \nu)/k_B T_{eq}} - 1} \\ &\quad + R \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^* \\ m \neq \pm 1}} \beta^{2|m|} \nu |m - \nu| \left(\frac{\prod_{j=1}^{|m|-1} |\epsilon(m)\nu - j|}{|m|!} \right)^2 \frac{1}{e^{\hbar\Omega|m - \nu|/k_B T_{eq}} - 1} \end{aligned} \quad (2.121)$$

Une étude de fonction montre que pour $\hbar\Omega > 10k_B T_{eq}$, l'effet global de ces contributions se caractérise par une succession de pics pour toutes les fréquences multiples entières de Ω , comme indiqué sur la figure 2.27. La valeur maximale atteinte par le premier pic est de l'ordre

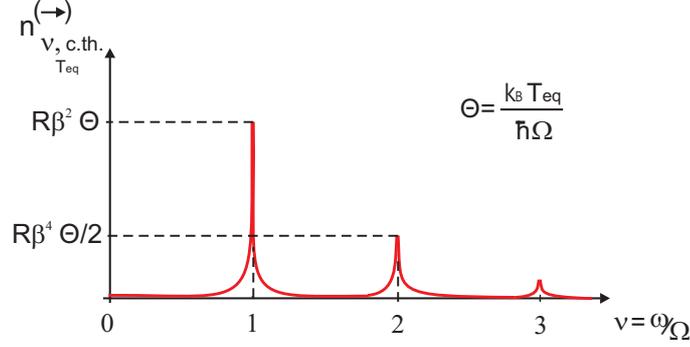


FIG. 2.27: Allure typique de la densité spectrale associée aux conversions thermiques excitées par un miroir en oscillation ultra-relativiste. Cette forme est valable tant que $\hbar\Omega > 10k_B T_{eq}$.

de $R\beta^2 \frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega}$, celle atteinte par le deuxième pic de $R\beta^4 \frac{k_B T_{eq}}{2\hbar\Omega}$, et ainsi de suite. La largeur à mi-hauteur est dans chaque cas de l'ordre de $\frac{k_B T_{eq}}{\hbar\Omega}$. Par comparaison avec la contribution du vide étudiée juste avant, on voit que les effets thermiques du rayonnement motionnel seront négligeables pour $\hbar\Omega \gg k_B T_{eq}$.

C.2 Diffusion des champs par une cavité oscillante

Considérons maintenant deux miroirs indexés par $i = 1$ (miroir de "gauche") et $i = 2$ (miroir de "droite") respectivement. Astreignons-les à avoir une trajectoire donnée par :

$$\sin(\Omega q_i(t)/c - \phi_{a,i}) = -\beta_{\{i\}} \sin(\Omega t - \phi_{b,i}) \quad (2.122)$$

Pour chaque miroir 'i', on notera $\varphi_{in,i}$ et $\psi_{in,i}$ les champs entrant, et $\varphi_{out,i}$ et $\psi_{out,i}$ les champs diffusés, tel que le montre la figure 2.28. On adoptera la convention $\varepsilon_1 = +1$ et $\varepsilon_2 = -1$ pour les facteurs apparaissant devant les $\sqrt{R_i}$ dans les expressions de $\varphi_{out,i}$ et $\psi_{out,i}$ en fonction de $\varphi_{in,i}$ et $\psi_{in,i}$ [cf (2.97) et(2.106)] :

$$\begin{cases} \varphi_{out,1}[\nu] = \sqrt{T_1} \varphi_{in,1}[\nu] + \sqrt{R_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m^{\{1\}} [m - \nu] \psi_{in,1}[\nu - m] \\ \psi_{out,1}[\nu] = \sqrt{T_1} \psi_{in,1}[\nu] - \sqrt{R_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{1\}} [m - \nu] \varphi_{in,1}[\nu - m] \end{cases} \quad (2.123)$$

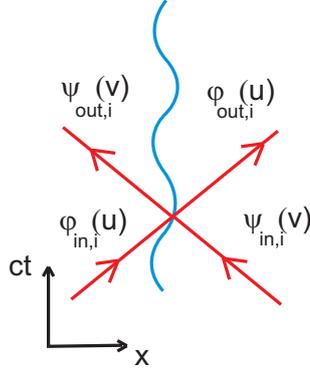


FIG. 2.28: Trajectoire d'espace-temps du miroir 'i' oscillant. Les champs entrant et sortant sont représentés par des rayons lumineux et indicés par 'i'.

$$\begin{cases} \varphi_{out,2}[\nu] = \sqrt{T_2}\varphi_{in,2}[\nu] - \sqrt{R_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m^{\{2\}}[m-\nu]\psi_{in,2}[\nu-m] \\ \psi_{out,2}[\nu] = \sqrt{T_2}\psi_{in,2}[\nu] + \sqrt{R_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[m-\nu]\varphi_{in,2}[\nu-m] \end{cases} \quad (2.124)$$

On notera par ailleurs L la longueur moyenne de la cavité : $L = c(\phi_{a,2} - \phi_{a,1})/\Omega$.

C.2.1 Itération fréquentielle des champs diffusés intra-cavité

Par la suite, on sera amené à noter $\varphi_{in} \equiv \varphi_{in,1}$ et $\psi_{in} \equiv \psi_{in,2}$ les champs entrants, et $\varphi_{out} \equiv \varphi_{out,2}$ et $\psi_{out} \equiv \psi_{out,1}$ les champs sortants de part et d'autre de la cavité. D'autre part, les champs se propageant librement entre les deux miroirs, on aura $\varphi_{out,1}[\nu] = \varphi_{in,2}[\nu]$ et $\psi_{out,2}[\nu] = \psi_{in,1}[\nu]$ pour toute fréquence ν . On va déterminer l'effet des réflexions successives sur chaque composante spectrale du champ décrit par un rayon se réfléchissant au sein de la cavité, tel que schématisé sur la figure 2.29. Pour cela, on va remplacer :

- dans l'expression de $\varphi_{out,1}[\nu]$, $\varphi_{in,1}[\nu]$ par $\varphi_{in}[\nu]$ et $\psi_{in,1}[\nu']$ par $\psi_{out,2}[\nu']$,
- dans l'expression de $\psi_{out,2}[\nu']$, $\psi_{in,2}[\nu']$ par $\psi_{in}[\nu']$ et $\varphi_{in,2}[\nu'']$ par $\varphi_{out,1}[\nu'']$. On recommence ensuite l'opération à partir de $\varphi_{out,1}[\nu'']$, et on itère cet algorithme jusqu'à l'infini. L'expression obtenue au final pourra être notée $\varphi_{cav}[\nu]$.

On peut aussi commencer l'itération à partir de $\psi_{out,2}[\nu]$ (Fig. 2.30). Dans ce cas, on remplace :

- dans l'expression de $\psi_{out,2}[\nu]$, $\psi_{in,2}[\nu]$ par $\psi_{in}[\nu]$ et $\varphi_{in,2}[\nu']$ par $\varphi_{out,1}[\nu']$,
- dans l'expression de $\varphi_{out,1}[\nu']$, $\varphi_{in,1}[\nu']$ par $\varphi_{in}[\nu']$ et $\psi_{in,1}[\nu'']$ par $\psi_{out,2}[\nu'']$, puis on recommence l'opération à partir de $\psi_{out,2}[\nu'']$. En itérant cet algorithme jusqu'à l'infini, on obtiendra une expression finale que l'on pourra noter : $\psi_{cav}[\nu]$.

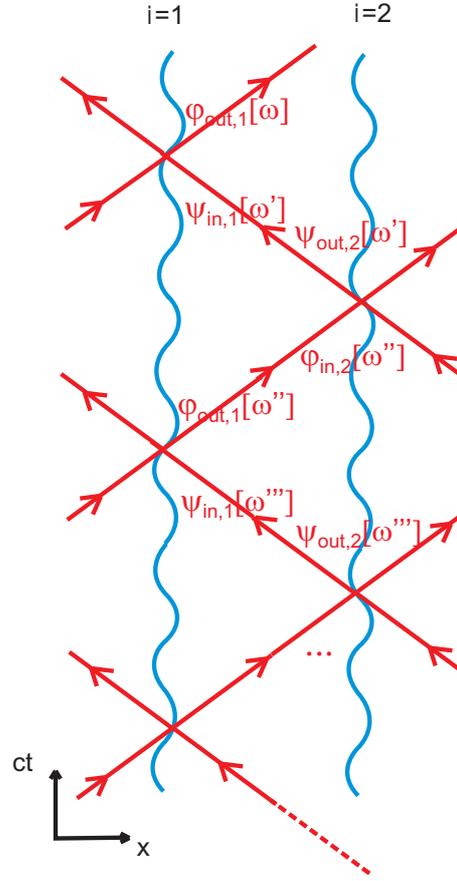


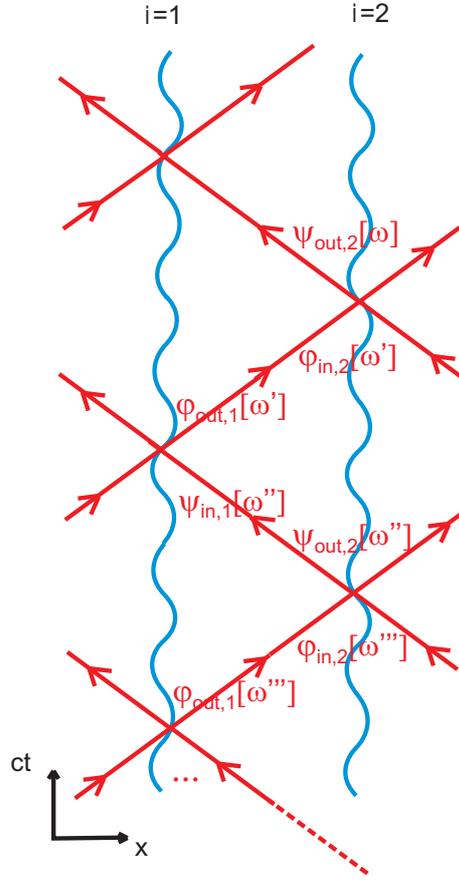
FIG. 2.29: Diagramme d'espace-temps représentant la trajectoire d'un rayon lumineux au sein d'une cavité oscillante. Le mouvement des miroirs est ici donné par l'équation (2.122) dans le cas particulier où : $\phi_{a,2} = \phi_{a,1} + 3\pi$ et : $\phi_{b,1} = \phi_{b,2}[2\pi]$. Il y a oscillation globale de la cavité.

Les champs sortants de la cavité pourront alors s'écrire :

$$\begin{cases} \varphi_{out}[\nu] = \sqrt{T_2} \varphi_{cav}[\nu] - \sqrt{R_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m^{\{2\}}[m - \nu] \psi_{in}[\nu - m] \\ \psi_{out}[\nu] = \sqrt{T_1} \psi_{cav}[\nu] - \sqrt{R_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{1\}}[m - \nu] \varphi_{in}[\nu - m] \end{cases} \quad (2.125)$$

ce qui traduit le fait que les miroirs transmettent une partie des champs intra-cavité vers l'extérieur, et réfléchissent directement une partie des champs entrants sans leur laisser pénétrer la cavité.

On peut par exemple caractériser l'effet d'un aller-retour dans la cavité à partir d'une

FIG. 2.30: Itération sur une trajectoire d'espace-temps à partir de $\psi_{out,2}$.

première itération :

$$\begin{aligned}
 \psi_{out,2}[\nu] &= \sqrt{T_2}\psi_{in,2}[\nu] + \sqrt{R_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[m-\nu] \left[\sqrt{T_1}\phi_{in,1}[\nu-m] \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{R_1} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \gamma_{m'}^{\{1\}}[m'-(\nu-m)]\psi_{in,1}[(\nu-m)-m'] \right], \\
 &= \sqrt{T_2}\psi_{in}[\nu] + \sqrt{R_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[m-\nu] \left[\sqrt{T_1}\phi_{in}[\nu-m] \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{R_1} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \gamma_{m'}^{\{1\}}[m'-(\nu-m)]\psi_{out,2}[(\nu-m)-m'] \right] \tag{2.126}
 \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \psi_{out,2}[\nu] &= \sqrt{T_2}\psi_{in}[\nu] + \sqrt{R_2}\sqrt{T_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[m-\nu]\varphi_{in}[\nu-m] \\ &+ \sqrt{R_2}\sqrt{R_1}\sqrt{T_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[m-\nu]\gamma_{m'}^{\{1\}}[(m+m')-\nu]\psi_{in}[\nu-(m+m')] + \dots \end{aligned} \quad (2.127)$$

Dans cette formule, le premier terme rend compte du champ qui vient d'entrer dans la cavité par le miroir 2, le deuxième terme du champ qui vient de se réfléchir sur le miroir 2 après être entré par le miroir 1, et le troisième terme du champ qui vient d'effectuer un aller-retour dans la cavité après être entré par le miroir 2. Les termes représentés par des pointillés correspondront eux aux champs ayant subi au moins trois réflexions intra-cavité. Afin d'illustrer la signification physique des différents termes, on peut maintenant interpréter l'expression (2.127) en termes de processus paramétriques. En effet, il est possible de déterminer quels sont les photons créés ou annihilés, ainsi que leurs éventuelles corrélations, à chaque réflexion lors d'un aller-retour dans la cavité. Prenons par exemple le deuxième terme. Dans le vide, celui-ci correspond aux processus déjà présentés dans la figure 2.26 : pour $m > \omega/\Omega$, il y a émission de paires de photons $(\omega, m\Omega - \omega)$ sur le miroir 2, avec une amplitude de probabilité proportionnelle à β^m [cf (2.96)]. Si la cavité oscille dans un champ thermique, ces paires pourront aussi être émises de manière stimulée par des photons thermiques de fréquence ω ou $m\Omega - \omega$ avec $m > \omega/\Omega$, et le rayonnement émis à ω sera par ailleurs composé de photons provenant de la conversion paramétrique de photons thermiques de fréquence $\omega - m\Omega$ pour $m < \omega/\Omega$. Chacun de ces processus auront en commun une amplitude de probabilité proportionnelle à $\beta^{|m|}$.

Dans toute situation réaliste, on aura $\beta \ll 1$, et donc la grande majorité des photons émis à ω dans le vide le sera dans des paires $(\omega, \Omega - \omega)$ avec $\omega < \Omega$. Toutefois, l'article [Lambrecht(98)] a montré l'existence de contributions non-négligeables de fréquence supérieures à Ω dans le spectre émis par une cavité haute finesse en oscillation résonante dans le vide et proche du seuil. Cela signifie donc que des processus d'ordres supérieurs peuvent avoir lieu au sein d'une telle cavité. Il est alors légitime de se demander si ces processus correspondent par exemple à l'émission directe de paires $(\omega, 2\Omega - \omega)$ ou à des conversions paramétriques en deux étapes, dans lesquelles un photon à $\Omega - \omega$ est d'abord émis dans une paire $(\omega, \Omega - \omega)$, puis "recyclé" sous la forme d'un photon à $2\Omega - \omega$.

Nous allons illustrer cette discussion grâce au troisième terme de l'expression (2.127). Ce terme rend compte d'un aller-retour du champ. Suivant la fréquence ω et l'état entrant considérés, il va donner lieu à diverses combinaisons de processus. L'amplitude de probabilité associée à une combinaison sera, si l'ordre du processus à la réflexion est m sur le miroir 1 et m' sur le miroir 2, proportionnelle à $\beta^{|m|+|m'|}$.

1) Pour $0 < \omega < \Omega$ par exemple, les combinaisons dominantes auront une amplitude de probabilité proportionnelle à β . Plusieurs cas de figure sont envisageables lors d'un aller-retour dans la cavité :

a) une paire $(\omega, \Omega - \omega)$ est émise lors de la réflexion sur le miroir 1 ($m' = 1$), soit spontanément dans le vide, soit de manière stimulée par un photon thermique ; aucun photon n'est émis lors de la réflexion sur le miroir 2 ($m = 0$) [cf figure 2.31] ;

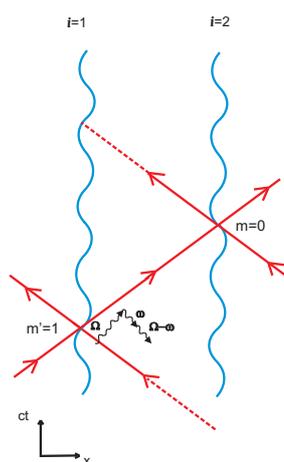


FIG. 2.31: Emission d'une paire par le miroir 1 lors d'un aller-retour dans la cavité.

b) aucun photon n'est produit lors de la réflexion sur le miroir 1 ($m' = 0$) et une paire de photons $(\omega, \Omega - \omega)$ est émise lors de la réflexion sur le miroir 2 ($m = 1$), soit spontanément dans le vide, soit de manière stimulée par un photon thermique [cf figure 2.32].

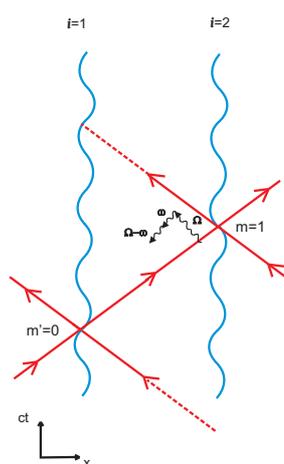


FIG. 2.32: Emission d'une paire par le miroir 2 lors d'un aller-retour dans la cavité.

2) Pour : $\Omega < \omega < 2\Omega$, les combinaisons dominantes auront une amplitude de probabilité proportionnelle à β^2 . Une des conversions paramétriques susceptibles d'être excitées thermiquement fera toutefois exception. Plusieurs cas de figure sont envisageables lors d'un aller-retour dans la cavité :

a) une paire $(\omega, 2\Omega - \omega)$ est émise lors de la réflexion sur le miroir 1 ($m' = 2$), soit spontanément dans le vide, soit de manière stimulée par un photon thermique ; aucun photon n'est émis lors de la réflexion sur le miroir 2 ($m = 0$) [cf figure 2.33] ;

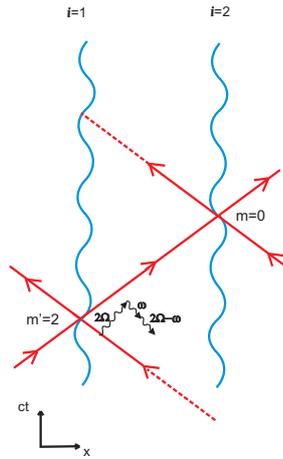


FIG. 2.33: Emission d'une paire par le miroir 1 lors d'un aller-retour dans la cavité.

b) aucun photon n'est produit lors de la réflexion sur le miroir 1 ($m' = 0$) et une paire de photons $(\omega, 2\Omega - \omega)$ est émise lors de la réflexion sur le miroir 2 ($m = 2$), soit spontanément dans le vide, soit de manière stimulée par un photon thermique [cf figure 2.34] ;

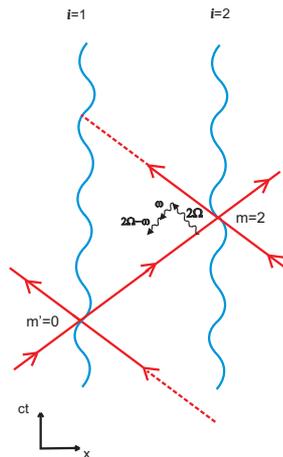


FIG. 2.34: Emission d'une paire par le miroir 2 lors d'un aller-retour dans la cavité.

c) un photon à $\tilde{\omega} = \omega - \Omega$, est émis dans une paire $(\tilde{\omega}, \Omega - \tilde{\omega})$ lors de la réflexion sur le miroir 1 ($m' = 1$) puis est couplé à un quantum d'énergie mécanique $\hbar\Omega$ dans un processus de création d'un photon à ω lors de la réflexion sur le miroir 2 ($m = 1$); au final, une paire $(\omega, 2\Omega - \omega)$ a été créée. Le deuxième processus peut également être excité directement par un photon thermique de fréquence $\omega - \Omega$, auquel cas l'amplitude de probabilité associée sera proportionnelle à β . On voit donc que si la température est suffisamment élevée, la contribution de fréquences supérieures à Ω au spectre proviendra principalement de conversions thermiques. [cf figure 2.35];

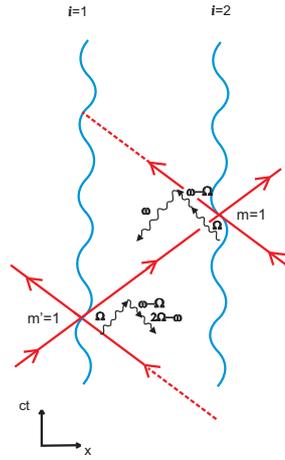


FIG. 2.35: Emission d'une paire par le miroir 1 puis couplage d'un des photons de la paire avec un quantum d'énergie mécanique du miroir 2.

On peut aussi donner un exemple de combinaison dans laquelle l'un des entiers m est négatif. Considérons par exemple le cas où $0 < \omega < \Omega$. On peut alors imaginer une situation dans laquelle un photon à $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$ est d'abord émis dans une paire $(\tilde{\omega}, \Omega - \tilde{\omega})$ lors de la réflexion sur le miroir 1 ($m' = 2$). Lors de la réflexion sur le miroir 2, il y a absorption du photon $\tilde{\omega}$, restitution d'un quantum d'énergie mécanique $\hbar\Omega$ au miroir 2 et émission d'un photon à ω [cf figure 2.36]; au final, une paire $(\omega, \Omega - \omega)$ a été créée, et l'amplitude de probabilité associée à cette combinaison sera proportionnelle à β^3 . Le deuxième processus peut également être excité directement par un photon thermique à $\omega + \Omega$. Dans ce cas, l'amplitude de probabilité associée sera proportionnelle à β . On voit donc que les processus associés aux entiers m négatifs ne seront efficaces que si la température est suffisamment élevée.

En itérant cette procédure jusqu'à l'infini, on va faire apparaître des termes rendant compte d'un nombre quelconque de réflexions du champ au sein de la cavité. Pour un rayon effectuant un nombre donné de réflexions intra-cavité, la composante spectrale ν du champ qui va résulter de ces multiples diffusions fera à chaque fois intervenir toutes les composantes spectrales $(\nu - m)$ [$m \in \mathbb{Z}$] du champ entrant. A chaque rayon et à chaque couple $(\nu; \nu - m)$,

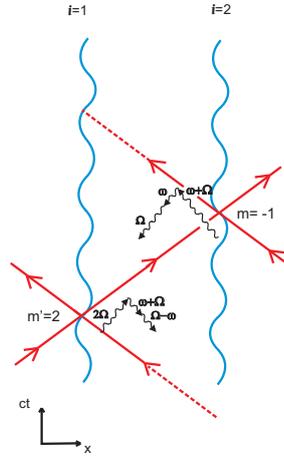


FIG. 2.36: Emission d'une paire par le miroir 1 puis conversion d'un des photons de cette paire avec restitution d'un quantum d'énergie mécanique au miroir 2 [$0 < \omega < \Omega$].

on pourra associer une amplitude de probabilité globale. Il faudra alors tenir compte de toutes les contributions permettant d'émettre un photon de fréquence ν à partir de la composante $(\nu - m)$ de l'état entrant considéré et via les multiples réflexions du rayon envisagé. On aura donc tout un ensemble de combinaisons de processus individuels rendant compte d'un processus global donné le long de la trajectoire d'espace-temps suivie par le rayon en question. A priori, une infinité de combinaisons sera envisageable, et il conviendra de les regrouper en fonction de la puissance de β émergeant de la multiplication des facteurs $\gamma_{m_i}^{\{1\}}$ et $\tilde{\gamma}_{m_j}^{\{2\}}$ associés à chacun des processus.

A première vue, seules les combinaisons dont la puissance globale sera faible contribueront notablement au rayonnement émis. Dans la théorie de la réponse linéaire, on ne gardait que celles d'amplitude proportionnelle à β , et l'amplitude totale d'émission d'une paire $(\omega; \Omega - \omega)$ à résonance correspondait alors à la multiplication de β par le nombre moyen de rayons susceptibles d'interférer constructivement au sein de la cavité (c'est-à-dire par la finesse F de la cavité). Toutefois, quand la finesse devient grande, on peut s'attendre à ce qu'un effet cumulatif de combinaisons d'amplitude plus faible puisse apporter des contributions non négligeables au spectre final. Suivant le nombre d'étapes considérées et le type de processus envisagés, les combinaisons associées à une même puissance de β seront plus ou moins nombreuses et ceci nous amènera le moment venu à négliger certains termes dans l'expression des champs diffusés globalement par la cavité.

C.2.2 Expression exacte des champs globalement diffusés par la cavité et conditions de résonance

Dans ce sous-paragraphe, nous allons d'abord donner l'expression des champs sortants après itération à l'infini de la procédure précédemment invoquée. Grâce à ces expressions, nous

retrouverons ensuite les conditions de résonance identifiées lors de l'approche perturbative du paragraphe B.2.

On se reportera à l'Annexe D pour le détail des calculs aboutissant à l'obtention des champs intra-cavité via l'algorithme d'itération fréquentielle. En utilisant les relations (D-6), ainsi que les résultats (D-4) et (D-5), on peut déterminer les champs sortants de la cavité :

$$\begin{aligned}
\varphi_{out}[\nu] &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \sum_{n=0}^{+\infty} r^{n+1} \right. \\
&\quad \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n}}^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} \left[\gamma_{m_{2j}}^{\{1\}} [\sum_{k=0}^{2j} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{m_{2j+1}}^{\{2\}} [\sum_{k=0}^{2j+1} m_k - \nu] \right] \gamma_{m_{2n}}^{\{1\}} [\sum_{k=0}^{2n} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{(m - \sum_{k=0}^{2n} m_k)}^{\{2\}} [m - \nu] \\
&\quad \left. + \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \delta_{m,0} \right\} \varphi_{in}[\nu - m] \\
&\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sqrt{R_1} T_2 \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \right. \\
&\quad \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n-1}}^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} \left[\gamma_{m_{2j}}^{\{1\}} [\sum_{k=0}^{2j} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{m_{2j+1}}^{\{2\}} [\sum_{k=0}^{2j+1} m_k - \nu] \right] \gamma_{(m - \sum_{k=0}^{2n-1} m_k)}^{\{1\}} [m - \nu] \\
&\quad \left. - \sqrt{R_2} \gamma_m^{\{2\}} [m - \nu] \right\} \psi_{in}[\nu - m]
\end{aligned} \tag{2.128}$$

où $r = \sqrt{R_2} \sqrt{R_1}$, δ est le symbole de Kronecker, et pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}
&- \prod_{j=0}^{n-1} \left[\gamma_{m_{2j}}^{\{1\}} [\sum_{k=0}^{2j} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{m_{2j+1}}^{\{2\}} [\sum_{k=0}^{2j+1} m_k - \nu] \right] \text{ doit être pris égal à } 1, \\
&- \gamma_{(m - \sum_{k=0}^{2n-1} m_k)}^{\{1\}} [m - \nu] \text{ doit être pris égal à } : \gamma_m^{\{1\}} [m - \nu].
\end{aligned}$$

L'expression de $\psi_{out}[\nu]$ s'obtiendra à partir de (2.128) en permutant φ_{in} et ψ_{in} d'une part, les indices 1 et 2 d'autre part, puis en remplaçant $\gamma^{\{2\}}$ par $\tilde{\gamma}^{\{2\}}$ et $\tilde{\gamma}^{\{1\}}$ par $\gamma^{\{1\}}$.

On voit donc que la cavité pourra générer globalement le même type de processus qu'un miroir unique oscillant, dont les coefficients de diffusion dépendraient de la fréquence. Ici toutefois, il y a de multiples conversions envisageables au sein de la cavité, en plus de celles excitées par réflexion directe sur les faces externes des miroirs. Dans tous les cas, on aura émission de paires $(\omega; m\Omega - \omega)$ pour $m\Omega > \omega$, et les photons jumeaux en question seront

éventuellement décorrélés par la cavité. A température non nulle, on aura des conversions paramétriques initiées par des photons thermiques de fréquence $|\omega - m\Omega|$. La cavité va surtout se distinguer du miroir unique de par le fait qu'elle va permettre d'amplifier le rayonnement motionnel de manière résonante pour les fréquences correspondant à ses modes propres moyens.

Pour fixer les idées, focalisons nous par exemple sur les termes de réflexion multiple impliquant les composantes $\psi_{in}[\nu - m]$ dans l'expression (2.128) de $\varphi_{out}[\nu]$:

$$\sqrt{R_1}T_2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n-1}} \prod_{j=0}^{n-1} \left[\gamma_{m_{2j}}^{\{1\}} [\sum_{k=0}^{2j} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{m_{2j+1}}^{\{2\}} [\sum_{k=0}^{2j+1} m_k - \nu] \right] \gamma_{(m - \sum_{k=0}^{2n-1} m_k)}^{\{1\}} [m - \nu] \right\} \psi_{in}[\nu - m] \quad (2.129)$$

La contribution associée à une composante spectrale $(\nu - m)$ donnée du champ entrant s'obtient donc en sommant les amplitudes de toutes les combinaisons de processus amenant de la fréquence $|\nu - m|$ à la fréquence ν en $2n$ étapes, sur chaque trajectoire rendant compte de n aller-retours au sein de la cavité. Puis on somme sur $n \in \mathbb{N}$ chacun des termes ainsi obtenus après les avoir pondérés par le facteur r^n .

Pour un entier relatif m et un entier naturel n donnés, tous les arrangements $(m_0; \dots; m_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n+1}$ tels que $\sum_{i=0}^{2n} m_i = m$, sont a priori envisageables. Un arrangement donné correspondra à un processus d'ordre m_{2n} lors de la première réflexion du champ au sein de la cavité, puis à un processus d'ordre m_{2n-1} lors de la deuxième, ..., puis à un processus d'ordre m_1 lors de l'avant-dernière, et à un processus final d'ordre m_0 lors de la dernière réflexion du champ avant sa sortie de la cavité. L'amplitude associée à cette série de processus sera proportionnelle à β^q avec $q = \sum_{i=0}^{2n} |m_i|$.

Il convient maintenant de se demander dans quelle mesure les termes que l'on vient de décrire pourront s'additionner en phase. On va donc chercher à voir quelle influence joueront les phases cachées dans les facteurs $\gamma_{m_i}^{\{1\}}$ et $\tilde{\gamma}_{m_j}^{\{2\}}$ sur les sommes en question. On va dans un premier temps identifier des conditions de résonance relatives aux caractéristiques du mouvement des miroirs, et dans un deuxième temps, faire apparaître les conditions d'interférences constructives entre les rayons multiples réfléchis au sein de la cavité. Pour ce faire, on va insérer les expressions (2.94) et (2.105) des coefficients γ_m et $\tilde{\gamma}_m$ dans le résultat (2.128)

relatif au champ φ_{out} globalement diffusé par la cavité :

$$\begin{aligned}
\varphi_{out}[\nu] = & \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} e^{im(\phi_{b,1} - \phi_{a,1})} \sum_{n=0}^{+\infty} r^{n+1} e^{-2i(n+1)(\phi_{a,1} - \phi_{a,2})\nu} \right. \\
& \sum_{\substack{\{m_0, \dots, m_{2n+1}\} \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \\ \sum_{i=0}^{2n+1} m_i = m}} e^{2i(\phi_{a,1} - \phi_{a,2}) \sum_{j=0}^n (n+1-j) \{m_{2j} + m_{2j+1}\}} e^{i(\phi_{b,2} - \phi_{b,1} + \phi_{a,2} - \phi_{a,1} + \pi) \sum_{j=0}^n m_{2j+1}} \\
& \prod_{k=0}^{2n+1} \left[\sum_{l=0}^k m_l - \nu \right] \prod_{j=0}^n \left[H_{m_{2j}} \left(\sum_{k=0}^{2j} m_k - \nu, \beta_{\{1\}} \right) H_{m_{2j+1}} \left(\sum_{k=0}^{2j+1} m_k - \nu, \beta_{\{2\}} \right) \right] \\
& \left. + \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \delta_{m,0} \right\} \varphi_{in}[\nu - m] \\
& + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sqrt{R_1} T_2 e^{-2i\phi_{a,1}\nu} e^{im(\phi_{b,1} + \phi_{a,1})} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{-2in(\phi_{a,1} - \phi_{a,2})\nu} \right. \\
& \sum_{\substack{\{m_0, \dots, m_{2n}\} \in \mathbb{Z}^{2n+1} / \\ \sum_{i=0}^{2n} m_i = m}} e^{2i(\phi_{a,1} - \phi_{a,2}) \sum_{j=0}^n (n-j) \{m_{2j} + m_{2j+1}\}} e^{i(\phi_{b,2} - \phi_{b,1} + \phi_{a,2} - \phi_{a,1} + \pi) \sum_{j=0}^{n-1} m_{2j+1}} \\
& \prod_{k=0}^{2n} \left[\sum_{l=0}^k m_l - \nu \right] \prod_{j=0}^{n-1} \left[H_{m_{2j}} \left(\sum_{k=0}^{2j} m_k - \nu, \beta_{\{1\}} \right) H_{m_{2j+1}} \left(\sum_{k=0}^{2j+1} m_k - \nu, \beta_{\{2\}} \right) \right] \\
& H_{m_{2n}} \left(\sum_{k=0}^{2n} m_k - \nu, \beta_{\{1\}} \right) \\
& \left. - \sqrt{R_2} e^{2i\phi_{a,2}(m-\nu)} e^{im(\phi_{b,2} - \phi_{a,2})} (m - \nu) H_m(m - \nu, \beta_{\{2\}}) \right\} \psi_{in}[\nu - m] \tag{2.130}
\end{aligned}$$

Les facteurs $e^{-2i(n+1)(\phi_{a,1} - \phi_{a,2})\nu}$ et $e^{-2in(\phi_{a,1} - \phi_{a,2})\nu}$ détermineront le caractère constructif ou destructif des interférences entre rayons multiplesment réfléchis lorsque la sommation sur $n \in \mathbb{N}$ sera effectuée. Nous y reviendrons plus tard.

Outre la nécessité d'avoir des interférences constructives, il faudra au préalable que la somme sur les m_i se fasse avec un maximum de termes en phase. Or, nous verrons plus loin que, sous le seuil, les contributions dominantes au spectre à m et n fixés seront obtenues en regroupant les arrangements dans lesquels tous les m_i ont le même signe que m . Le signe des produits : $\prod_{k=0}^{2n+1} [\dots] \prod_{j=0}^n [H_{m_{2j}}(\dots) H_{m_{2j+1}}(\dots)]$ sera alors indépendant du choix particulier des m_i dans ce sous-ensemble (on a pris ici l'exemple des produits apparaissant devant φ_{in} dans (2.130), mais cette remarque vaut aussi pour ceux apparaissant devant ψ_{in}). Par conséquent, on voit que pour $2(\phi_{a,1} - \phi_{a,2}) = 2k\pi$ et $\phi_{b,2} - \phi_{b,1} + \phi_{a,2} - \phi_{a,1} + \pi = 2k'\pi$ [$(k, k') \in \mathbb{Z}^2$], la somme sur les m_i dans le sous-ensemble considéré se fera en phase.

Ces conditions peuvent se réécrire sous la forme :

$$\exists K \in \mathbb{N}^* / \begin{cases} \phi_{a,2} = \phi_{a,1} + K\pi, & \text{c'est-à-dire : } \Omega L/c = K\pi \\ \phi_{b,2} = \phi_{b,1} - (K+1)\pi & [2\pi] \end{cases} \quad (2.131)$$

où la notation $[2\pi]$ signifie "modulo 2π ", c'est-à-dire " $+2p\pi$ " avec $p \in \mathbb{Z}$. La fréquence d'oscillation mécanique Ω commune aux deux miroirs devra donc être un multiple entier du mode optique fondamental de la cavité au repos. D'autre part, étant donnée la trajectoire choisie pour chaque miroir :

$$\Omega q_i(t)/c \simeq \phi_{a,i} - \beta_{\{i\}} \sin(\Omega t - \phi_{b,i}) \quad (2.132)$$

on retrouve pour $K \geq 2$ les critères de résonance qui avaient été évoqués lors du traitement perturbatif :

- si K est pair, on obtient un mode "respiratoire" résonant en modulant périodiquement la longueur de la cavité avec une fréquence $\Omega = K\pi c/L$ autour de sa valeur moyenne L ,
- si K est impair, on obtient un mode d'oscillation globale résonant en faisant osciller la cavité à la fréquence $\Omega = K\pi c/L$ tout en maintenant la distance L entre ses miroirs constante.

Il est possible de réinterpréter ces résonances par un argument géométrique relatif aux trajectoires d'espace-temps suivies par les rayons lumineux multiples réfléchis au sein de la cavité. Dans les modes résonants en effet, certaines orbites deviennent attractives [Law(94), Cole(95)]. Après un nombre suffisant de réflexions, les divers rayons "piégés" par la cavité vont se rapprocher de ces orbites particulières, ce qui se traduira par la formation de pulses d'énergie [cf figure 2.37].

Par ailleurs, le choix de $\phi_{a,1}$ et $\phi_{b,1}$ va fixer l'origine (arbitraire) de l'espace-temps. On va donc choisir des valeurs qui simplifieront les expressions que l'on cherche à écrire :

$$\phi_{a,1} = -\frac{K\pi}{2}, \quad \phi_{b,1} = \frac{(K+1)\pi}{2} \quad (2.133)$$

ce qui, avec les conditions (2.131), permet de fixer :

$$\phi_{a,2} = +\frac{K\pi}{2}, \quad \phi_{b,2} = -\frac{(K+1)\pi}{2} \quad (2.134)$$

Toujours dans un souci de simplification des expressions, on prendra :

$$\beta_{\{1\}} = \beta_{\{2\}} = \beta = \text{th}(\alpha) \quad (2.135)$$

Les coefficients de Fourier donnés dans les équations (2.94) et (2.105) deviennent alors :

$$\begin{cases} \gamma_m^{\{1\}}[\nu] = e^{-iK\pi\nu} (-1)^{mK} i^m \nu H_m(\nu, \beta) & \gamma_m^{\{2\}}[\nu] = e^{iK\pi\nu} (-1)^{mK} (-i)^m \nu H_m(\nu, \beta) \\ \tilde{\gamma}_m^{\{1\}}[\nu] = e^{iK\pi\nu} (-i)^m \nu H_m(\nu, \beta) & \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[\nu] = e^{-iK\pi\nu} i^m \nu H_m(\nu, \beta) \end{cases} \quad (2.136)$$

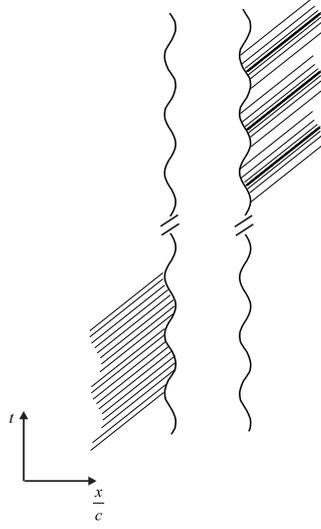


FIG. 2.37: Diagramme d'espace-temps représentant le resserrement des rayons lumineux autour des orbites attractives après un grand nombre de réflexions au sein d'une cavité en oscillation globale résonante.

Sous ces conditions, l'équation (2.130) devient :

$$\begin{aligned}
\varphi_{out}[\nu] = & \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} (-1)^m K i^m \sum_{n=0}^{+\infty} r^{n+1} e^{i(2n+2)K\pi\nu} \right. \\
& \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n}} \prod_{j=0}^{2n} \left[(\sum_{k=0}^j m_k - \nu) H_{m_j}(\sum_{k=0}^j m_k - \nu, \beta) \right] (m - \nu) H_{(m - \sum_{k=0}^{2n} m_k)}(m - \nu, \beta) \\
& + \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \delta_{m,0} \left. \right\} \varphi_{in}[\nu - m] \\
& + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sqrt{R_1} T_2 i^m e^{iK\pi\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{i2nK\pi\nu} \right. \\
& \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n-1}} \prod_{j=0}^{2n-1} \left[(\sum_{k=0}^j m_k - \nu) H_{m_j}(\sum_{k=0}^j m_k - \nu, \beta) \right] (m - \nu) H_{(m - \sum_{k=0}^{2n-1} m_k)}(m - \nu, \beta) \\
& \left. - \sqrt{R_2} (-i)^m e^{-iK\pi\nu} (m - \nu) H_m(m - \nu, \beta) \right\} \psi_{in}[\nu - m] \tag{2.137}
\end{aligned}$$

où, pour $n = 0$:

$$\sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n-1}} \prod_{j=0}^{2n-1} \left[(\dots) H_{m_j}(\dots) \right] (m - \nu) H_{\dots}(m - \nu, \beta) \equiv (m - \nu) H_m(m - \nu, \beta).$$

Via les termes $e^{i(2n+2)K\pi\nu}$ et $e^{i2nK\pi\nu}$, on voit que l'on aura a priori interférence constructive entre les rayons ayant effectué différents nombres d'aller-retours au sein de la cavité pour $\nu = p/K$ ($p \in \mathbb{N}^*$), c'est-à-dire $\omega = p\pi c/L$. On retrouve donc les fréquences propres caractéristiques d'une cavité Fabry-Pérot de longueur L . Nous verrons que, dans le spectre, les pics associés auront de plus une forme Lorentzienne, de largeur inversement proportionnelle à la finesse de la cavité. Cette propriété découlera naturellement de la présence des facteurs r^{n+1} et r^n . Toutefois, la largeur des pics dépendra aussi de l'ordre global m considéré.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux établis dans l'article [Lambrecht(98)], et notamment, notre équation (2.137) est à identifier avec une équation dérivant de ce papier pour les mouvements résonants :

$$\begin{aligned} \varphi_{out}[\nu] = & \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \sum_{n=0}^{+\infty} r^{n+1} \gamma_{m,2n+2}[m-\nu] + \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \delta_{m,0} \right\} \varphi_{in}[\nu-m] \\ & + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sqrt{R_1} T_2 \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \gamma_{m,2n+1}[m-\nu] - \sqrt{R_2} \gamma_{m,-1}[m-\nu] \right\} \psi_{in}[\nu-m] \end{aligned} \quad (2.138)$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma_{m,p}[\nu] = (-i)^{m+2} \nu \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} e^{-iK\pi\nu p} G_m(\nu, \beta_p), \\ G_m(\nu, \beta_p) = \beta_p^{|m|} \sum_{l \geq 0} \frac{\Gamma(\epsilon(m)\nu + l) \Gamma(\epsilon(m)(m-\nu) + l)}{\Gamma(|m| + l + 1)} \frac{\beta_p^{2l}}{l!}, \\ \beta_p = (-1)^K \text{th}(p\alpha). \end{cases} \quad (2.139)$$

Ce résultat avait été établi par transformée de Fourier de l'expression exacte des champs globalement diffusés par la cavité dans le domaine temporel. En posant $r = e^{-2\rho}$, l'introduction des notions de rapidité effective : $\alpha_{eff} = 2\alpha/\rho$, et de vitesse effective : $\beta_{eff} = \text{th}(\alpha_{eff})$ avait à cette occasion amené à comparer la situation d'une cavité en oscillation résonante proche du seuil $\alpha_{eff} = 1$ à celle d'un miroir unique oscillant qui serait ultra-relativiste. Rappelons ici que pour une cavité de haute-finesse, $\rho \ll 1$ et :

$$F = \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r} \simeq \frac{\pi}{2\rho} \quad (2.140)$$

Avec la condition $\alpha \simeq \beta$, on retrouve bien :

$$\alpha_{eff} \simeq \frac{4\beta F}{\pi} \simeq \frac{4F}{\pi} \frac{v_{max}}{c} \quad (2.141)$$

Enfin, par construction, on doit pouvoir identifier les amplitudes associées à une seule réflexion dans les deux approches, c'est-à-dire : $\gamma_m^{\{1\}}[\nu] = \gamma_{m,1}[\nu]$. En comparant (2.136) et (2.139), il vient alors :

$$e^{-iK\pi\nu} (-1)^{mK} i^m \nu H_m(\nu, \text{th}(\alpha)) = (-i)^{m+2} \nu \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} e^{-iK\pi\nu} G_m(\nu, (-1)^K \text{th}(\alpha)),$$

et on retrouve bien le résultat (2.101) :

$$H_m(\nu, \beta) = (-1)^{m+1} \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} G_m(\nu, \beta). \quad (2.142)$$

C.2.3 Calcul du spectre émis par une cavité en oscillation résonante

D'après les équations (2.108) et (2.137), pour toute fréquence ν positive, la densité spectrale du flux photonique moyen émis vers la droite par une cavité en mouvement résonant [cf (2.131)] dans le vide sera donnée par :

$$\begin{aligned} n_{\nu, out}^{(\rightarrow)} = & \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \nu(m - \nu) \\ & \times \left\{ \left| \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \sum_{n \geq 0} r^{n+1} e^{2i\pi K \nu n} \right. \right. \\ & \quad \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n}} \prod_{j=0}^{2n} \left[(\sum_{k=0}^j m_k - \nu) H_{m_j}(\sum_{k=0}^j m_k - \nu, \beta) \right] H_{(m - \sum_{k=0}^{2n} m_k)}(m - \nu, \beta) \Big|^2 \\ & + \left| \sqrt{R_1} T_2 \sum_{n \geq 0} r^n e^{2i\pi K \nu(n+1)} \right. \\ & \quad \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n-1}} \prod_{j=0}^{2n-1} \left[(\sum_{k=0}^j m_k - \nu) H_{m_j}(\sum_{k=0}^j m_k - \nu, \beta) \right] H_{(m - \sum_{k=0}^{2n-1} m_k)}(m - \nu, \beta) \\ & \quad \left. \left. - \sqrt{R_2} (-1)^m H_m(m - \nu, \beta) \right|^2 \right\} \quad (2.143) \end{aligned}$$

Tel quel, le résultat (2.143) est strictement équivalent à celui issu de l'article [Lambrecht(98)] :

$$\begin{aligned} n_{\nu, out}^{(\rightarrow)} = & \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \nu(m - \nu) \times \left\{ \left| \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \sum_{n \geq 0} r^n e^{-2i\pi K \nu n} G_m(\nu, \beta_{2n}) \right|^2 \right. \\ & \left. + \left| \sqrt{R_1} T_2 \sum_{n \geq 0} r^n e^{-2i\pi K \nu(n+1)} G_m(\nu, \beta_{2n+1}) - \sqrt{R_2} G_m(\nu, \beta_{-1}) \right|^2 \right\} \quad (2.144) \end{aligned}$$

Avec l'expression (2.116) relative au spectre du miroir unique oscillant dans le vide, il apparaît que la limite formelle $K = 0$ dans l'expression (2.144) peut être vue comme la densité spectrale du rayonnement émis par un miroir unique moyenné sur l'ensemble des vitesses effectives $\beta_{2n(+1)}$. C'est par ailleurs avec cette procédure que l'enveloppe du spectre pour $K \neq 0$ peut être déterminée. Chaque pic associé à un mode propre moyen de la cavité est alors limité

supérieurement par l'enveloppe en question, formée d'une succession d'arches et s'annulant pour toutes les fréquences multiples entières de Ω . Les figures 2.38 et 2.39 représentent les spectres relatifs aux modes résonants $K = 3$ et $K = 5$, dans le vide et pour une rapidité effective $\alpha_{eff} = 0,9$ proche du seuil. Dans les deux cas, la limite supérieure du graphique correspond à la valeur $\alpha_{eff}^2/4$. Pour $K = 3$, on distingue deux pics sous chaque arche. Ils correspondent aux résonances optiques $\omega = \Omega/3$ et $2\Omega/3$ pour l'arche principale, $\omega = 4\Omega/3$ et $5\Omega/3$ pour la deuxième arche, et ainsi de suite.

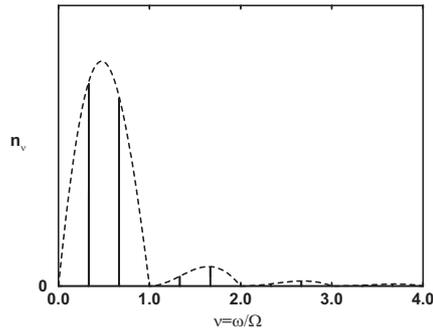


FIG. 2.38: Spectre du rayonnement émis par une cavité en oscillation globale dans le vide à la fréquence $\Omega = 3\pi c/L$, pour $\alpha_{eff} = 0,9$ et $r = 0,99$. La courbe en pointillés constitue l'enveloppe du spectre, et les pics correspondent aux résonances optiques de la cavité.

Pour $K = 5$, on distingue quatre pics sous chaque arche. Ils correspondent aux résonances optiques $\omega = \Omega/5$, $2\Omega/5$, $3\Omega/5$ et $4\Omega/5$ pour l'arche principale, $\omega = 6\Omega/5$, $7\Omega/5$, $8\Omega/5$ et $9\Omega/5$ pour la deuxième arche, et ainsi de suite.

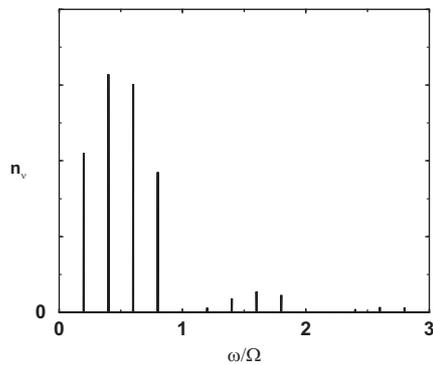


FIG. 2.39: Spectre du rayonnement émis par une cavité en oscillation globale dans le vide à la fréquence $\Omega = 5\pi c/L$, pour $\alpha_{eff} = 0,9$ et $r = 0,99$.

Si le mouvement s'effectue dans un champ thermique à la température T_{eq} , le spectre du rayonnement émis devient :

$$\begin{aligned}
n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} &= n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{vac} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\nu |m - \nu|}{e^{\hbar\Omega|m-\nu|/k_B T_{eq}} - 1} \\
&\times \left\{ \left| \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \sum_{n \geq 0} r^{n+1} e^{2i\pi K \nu n} \right. \right. \\
&\quad \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n}} \prod_{j=0}^{2n} \left[\left(\sum_{k=0}^j m_k - \nu \right) H_{m_j} \left(\sum_{k=0}^j m_k - \nu, \beta \right) \right] H_{(m - \sum_{k=0}^{2n} m_k)}(m - \nu, \beta) \\
&\quad \left. + \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \delta_{m,0} \right|^2 \\
&\quad + \left| \sqrt{R_1} T_2 \sum_{n \geq 0} r^n e^{2i\pi K \nu (n+1)} \right. \\
&\quad \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \leq i \leq 2n-1}} \prod_{j=0}^{2n-1} \left[\left(\sum_{k=0}^j m_k - \nu \right) H_{m_j} \left(\sum_{k=0}^j m_k - \nu, \beta \right) \right] H_{(m - \sum_{k=0}^{2n-1} m_k)}(m - \nu, \beta) \\
&\quad \left. - \sqrt{R_2} (-1)^m H_m(m - \nu, \beta) \right|^2 \left. \right\} \tag{2.145}
\end{aligned}$$

et avec le formalisme employé dans l'article [Lambrecht(98)], on aura :

$$\begin{aligned}
n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} &= n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{vac} + \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\nu |m - \nu|}{e^{\hbar\Omega|m-\nu|/k_B T_{eq}} - 1} \times \left\{ \left| \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} \sum_{n \geq 0} r^n e^{-2i\pi K \nu n} G_m(\nu, \beta_{2n}) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| \sqrt{R_1} T_2 \sum_{n \geq 0} r^n e^{-2i\pi K \nu (n+1)} G_m(\nu, \beta_{2n+1}) - \sqrt{R_2} G_m(\nu, \beta_{-1}) \right|^2 \right\} \tag{2.146}
\end{aligned}$$

Comme dans le cas du miroir unique oscillant, on peut distinguer la contribution du vide et celle liée aux effets thermiques. De manière générale, les effets thermiques du rayonnement motionnel seront négligeables pour toutes les résonances optiques $\omega = p\Omega/K$ ($p \in \mathbb{N}^*$) du spectre si $k_B T_{eq} \ll \hbar\Omega/K$. La densité spectrale associée pourra alors se calculer directement à partir de l'expression (2.143), et l'allure du spectre sera la même que dans le vide. Mentionnons quand-même que l'annulation du spectre pour toutes les fréquences multiples entières de la fréquence d'excitation mécanique ne resterait pas valable à haute température. Dans ce cas en effet, les résonances optiques $\omega = p\Omega$ ($p \in \mathbb{N}^*$) seraient suffisamment exaltées grâce à la compression des fluctuations thermiques.

On peut aussi mettre le résultat (2.145) sous une forme qui pourra s'avérer utile par la suite :

$$n_{T_{eq}}^{(\rightarrow), out} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\nu(m - \nu)}{1 - e^{-\hbar\Omega(m - \nu)/k_B T_{eq}}} \times \left\{ |A_m(\nu)|^2 + |B_m(\nu)|^2 \right\} \quad (2.147)$$

où les termes entre crochets sont les mêmes que dans l'expression (2.145), et les amplitudes $A_m(\nu)$ et $B_m(\nu)$ s'identifient à chacun des deux membres y apparaissant.

Par ailleurs, il pourrait s'avérer judicieux de détecter les photons créés à l'intérieur de la cavité, étant donné que pour une finesse élevée, leur flux sera largement supérieur à celui des photons émis à l'extérieur de la cavité. Le rapport entre les deux sera approximativement donné par la finesse de la cavité. On peut par exemple penser à envoyer des atomes de Rydberg [Rempe(90), Haroche(96)] entre les miroirs pour venir sonder l'état du champ intra-cavité. Au sein d'une cavité de haute-finesse en oscillation résonante, la densité spectrale du flux moyen des photons que verraient ces atomes sera alors donnée par :

$$n_{T_{eq}}^{(\rightarrow), cav} \simeq (F/\pi) \times n_{T_{eq}}^{(\rightarrow), out} \quad (2.148)$$

Signalons enfin que pour des raisons évidentes de symétrie, le spectre émis vers la gauche s'obtient dans chaque cas à partir du spectre émis vers la droite en permutant les indices 1 et 2 portés par les coefficients de diffusion relatifs aux miroirs.

Bien que d'apparence plus compacte, les résultats (2.144) et (2.146) ne permettront pas de prévoir quelles combinaisons de processus apporteront les contributions dominantes au spectre émis par une cavité de haute finesse. De plus, par construction, ils ne pourront pas faire l'objet d'une adaptation simple pour prendre en compte les conditions de transparence à haute fréquence des miroirs. Nous allons voir qu'en revanche, les résultats (2.143) et (2.145) nous apporteront satisfaction quant à ces deux points.

C.2.4 Contributions dominantes pour une cavité de haute finesse

Nous allons dans cette sous-partie regrouper par puissance de β les termes intervenant dans le spectre émis par une cavité en oscillation résonante dans le vide ou dans un champ thermique, et identifier les combinaisons de processus qui apporteront les contributions principales pour $F \gg 1$.

Pour $\beta \ll 1$, d'après (2.96) :

$$\nu H_m(\nu, \beta) \simeq \beta^{|m|} \frac{\epsilon(m)^{|m|}}{|m|!} \frac{\prod_{j=0}^{|m|} (\nu - m + \epsilon(m)j)}{\nu - m} \quad (2.149)$$

et donc, en se focalisant sur l'un des membres apparaissant dans (2.145) et (2.147) :

$$\begin{aligned}
A_m(\nu) &= \sum_{n \geq 0} r^{n+1} e^{2i\pi K\nu n} \\
&\quad \sum_{\substack{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} \\ / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m\}}} \prod_{j=0}^{2n} \left[(\sum_{k=0}^j m_k - \nu) H_{m_j}(\sum_{k=0}^j m_k - \nu, \beta) \right] (m - \nu) H_{m_{2n+1}}(m - \nu, \beta) \\
&\simeq \sum_{n \geq 0} r^{n+1} e^{2i\pi K\nu n} \\
&\quad \sum_{\substack{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} \\ / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m\}}} \beta^{\sum_{k=0}^{2n+1} |m_k|} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right]
\end{aligned} \tag{2.150}$$

avec, pour $j = 0$, $\sum_{k=0}^{j-1} m_k \equiv 0$. À chaque arrangement de $2n+2$ processus $(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2}$, tels que l'ordre global $\sum_{k=0}^{2n+1} m_k$ après $n+1$ aller-retours du champ dans la cavité soit égal à m , sera donc, comme nous l'avons évoqué plus tôt, associé une amplitude proportionnelle à $\beta^{\sum_{k=0}^{2n+1} |m_k|}$. Pour regrouper les termes apparaissant dans (2.150) par puissance de β , on peut d'abord remarquer que :

$$\begin{aligned}
\forall m \in \mathbb{Z}, \forall (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \right\} : \\
|m| = \left| \sum_{k=0}^{2n+1} m_k \right| = \epsilon(m) \sum_{k=0}^{2n+1} m_k \implies \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + \sum_{k=0}^{2n+1} (|m_k| - \epsilon(m)m_k) \\
\implies \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + \sum_{k=0}^{2n+1} (\epsilon(m_k) - \epsilon(m))m_k \\
\implies \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l \quad \text{avec : } l = \sum_{\{k / \epsilon(m_k) \neq \epsilon(m)\}} |m_k|
\end{aligned} \tag{2.151}$$

c'est-à-dire :

$$|m| = \left| \sum_{k=0}^{2n+1} m_k \right| = \epsilon(m) \sum_{k=0}^{2n+1} m_k \implies \exists! l \in \mathbb{N} / \begin{cases} \sum_{\{k / \epsilon(m_k) = \epsilon(m)\}} |m_k| = |m| + l \text{ et :} \\ \sum_{\{k / \epsilon(m_k) \neq \epsilon(m)\}} |m_k| = l \end{cases} \quad (2.152)$$

La valeur minimale de $\sum_{k=0}^{2n+1} |m_k|$ est donc $|m|$; elle est obtenue pour $l = 0$, c'est-à-dire quand tous les m_k sont du même signe que m , et dans ce cas :

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] &= \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \\ &= \epsilon(m)^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (-\nu + \epsilon(m)p)}{(-\nu)} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{|m_j|!} \right] \end{aligned} \quad (2.153)$$

Le signe de ce produit sera donc indépendant du choix particulier de l'arrangement (m_0, \dots, m_{2n+1}) dans le sous-ensemble où tous les m_i sont du même signe que m (que l'on appellera "sous-ensemble $\{m; l = 0\}$ "). Cette remarque fait écho à l'argument utilisé dans la sous-partie [C.2.2](#) pour déterminer les conditions de mouvement résonant.

Si l'on pose $r = e^{-2\rho}$, l'équation (2.150) peut alors se réécrire :

$$\begin{aligned} A_m(\nu) \simeq \beta^{|m|} &\left\{ \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \sum_{\substack{\{m_0, \dots, m_{2n+1}\} \in \mathbb{N}^{2n+2} \\ / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{|m_j|!} \right] \right. \\ &+ \sum_{l \geq 1} \beta^{2l} \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \\ &\left. \sum_{\substack{\{m_0, \dots, m_{2n+1}\} \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.154)$$

On remarque une grande similitude de l'expression ci-dessus avec l'amplitude associée à un processus d'ordre m lors de la réflexion sur un miroir unique oscillant $\nu H_m(\nu)$, donnée en (2.95). En prenant la limite formelle $K = 0$ dans (2.154), on annule artificiellement l'effet des interférences entre rayons multiples réfléchis au sein de la cavité, et on obtient en

quelque sorte une moyenne de l'amplitude du miroir unique pondérée par $e^{-2(n+1)\rho}$ sur chaque ensemble de combinaisons de $2n + 2$ processus associé à un processus global d'ordre m .

Comme montré dans l'Annexe E, sous le seuil ($4\beta F/\pi < 1$), bien que les sous-ensembles $\{m; l = 0\}$ semblent à première vue apporter les contributions dominantes au spectre, quand $4\beta F/\pi \rightarrow 1$, les sous-ensembles $\{m; l \neq 0\}$ seront aussi susceptibles de contribuer de manière non-négligeable.

Pour une puissance de β fixée à : $|m| + 2l$ ($l \in \mathbb{N}$), les arrangements $(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2}$ appartenant à un sous-ensemble $\{m; l\}$ donné (c'est-à-dire tels que : $\sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m$ et : $\sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l$) seront en fait plus ou moins nombreux suivant les valeurs individuelles des m_i auxquelles on se restreindra. D'après (2.152), la somme des m_i de même signe que m devra être égale à : $m + \epsilon(m)l$, et celle des m_i de signe différent de m à : $-\epsilon(m)l$. Par ailleurs, pour : $F \gg |m| + 2l$, la somme sur n dans l'expression (2.150) pourra être restreinte à : $2n + 2 \geq |m| + 2l$ sans affecter significativement le résultat final.

On peut alors dénombrer les arrangements des divers sous-ensembles $\{m; l\}$ comme suit :

Pour $m \geq 1$ et $l = 0$ par exemple, les arrangements (m_0, \dots, m_{2n+1}) faisant apparaître m fois la valeur 1 et $(2n + 2 - m)$ fois la valeur 0, seront au nombre de : $(2n+2)(2n+1)\dots(2n+3-m)/m!$. Dès que l'on voudra faire figurer dans la liste des m_i au moins un entier supérieur ou égal à 2, alors, pour $n \gg m$, le nombre des arrangements associés sera bien plus faible. Par exemple, pour faire figurer dans la liste : un entier égal à 2, $(m-2)$ entiers égaux à 1 et $(2n + 3 - m)$ entiers nuls, on n'aura que : $(2n + 2)(2n + 1)\dots(2n + 4 - m)/(m - 2)!$ combinaisons possibles. Cette discussion est en fait reliée à des interprétations physiques simples (on utilisera la notation Ω_M pour rendre compte d'un quantum d'énergie mécanique du miroir) :

- si l'on s'intéresse à la contribution associée à $m = 1$, alors il y aura exactement $2n + 2$ arrangements donnant une amplitude β (c'est-à-dire tels que : $l = 0$) au bout de $n + 1$ aller-retours au sein de la cavité : ceux pour lesquels un seul m_i sera pris égal à 1 et tous les autres nuls, ce qui correspondra, lors de l'une des $2n+2$ réflexions considérées, à l'émission d'une paire : $\Omega_M \rightarrow (\omega; \Omega - \omega)$ pour $0 < \omega < \Omega$ (cf Fig.2.31, 2.32) ou à la conversion paramétrique d'un photon thermique : $(\omega - \Omega) + \Omega_M \rightarrow \omega$ pour $\Omega < \omega < 2\Omega$.

- si l'on s'intéresse à la contribution associée à $m = 2$, alors, pour $n \gg 1$, les arrangements les plus nombreux donnant une amplitude β^2 (donc tels que : $l = 0$) au bout de $n + 1$ aller-retours au sein de la cavité seront ceux pour lesquels deux m_i exactement seront pris égaux à 1 et tous les autres nuls. En effet, pour $\Omega < \omega < 2\Omega$ par exemple, l'excitation en deux étapes : $\Omega_M \rightarrow (\omega - \Omega; 2\Omega - \omega)$ puis : $(\omega - \Omega) + \Omega_M \rightarrow \omega$ d'une paire $(\omega; 2\Omega - \omega)$ (cf Fig.2.35) pourra être obtenue autant de fois qu'il y a de choix de 2 réflexions parmi les $2n + 2$ réflexions du champ sur les miroirs, c'est-à-dire : $(2n + 2)(2n + 1)/2$ fois, alors que l'excitation de la même paire en une seule étape : $2\Omega_M \rightarrow (\omega; 2\Omega - \omega)$ (cf Fig.2.33 et 2.34) pourra être obtenue autant de fois qu'il y a de choix de une réflexion parmi $2n + 2$, c'est-à-dire : $2n + 2$ fois.

De manière symétrique, pour $m \leq -1$ et $l = 0$, les arrangements (m_0, \dots, m_{2n+1}) faisant apparaître $|m|$ fois la valeur -1 et $(2n+2-|m|)$ fois la valeur 0 , seront au nombre de : $(2n+2)(2n+1)\dots(2n+3-|m|)/|m|!$. Dès que l'on voudra faire figurer dans la liste des m_i au moins un entier inférieur ou égal à -2 , alors, pour $n \gg |m|$, le nombre des arrangements associés sera bien plus faible. Par exemple, pour faire figurer dans la liste : un entier égal à -2 , $(|m| - 2)$ entiers égaux à -1 et $(2n+3-|m|)$ entiers nuls, on n'aura que : $(2n+2)(2n+1)\dots(2n+4-|m|)/(|m|-2)!$ combinaisons possibles. Cette discussion est ici aussi reliée à des interprétations physiques simples :

- si l'on s'intéresse à la contribution associée à $m = -1$, alors il y aura exactement $2n+2$ arrangements donnant une amplitude β (c'est-à-dire tels que : $l = 0$) au bout de $n+1$ aller-retours au sein de la cavité : ceux pour lesquels un seul m_i sera pris égal à -1 et tous les autres nuls, ce qui correspondra, lors de l'une des $2n+2$ réflexions considérées, à la conversion paramétrique d'un photon thermique : $(\omega + \Omega) \rightarrow \omega + \Omega_M$ ($\forall \omega > 0$).

- si l'on s'intéresse à la contribution associée à $m = -2$, alors, pour $n \gg 1$, les arrangements les plus nombreux donnant une amplitude β^2 (donc tels que : $l = 0$) au bout de $n+1$ aller-retours au sein de la cavité seront ceux pour lesquels deux m_i exactement seront pris égaux à -1 et tous les autres nuls. En effet, l'excitation en deux étapes : $(\omega + 2\Omega) \rightarrow (\omega + \Omega) + \Omega_M$ puis : $(\omega + \Omega) \rightarrow \omega + \Omega_M$ d'un photon de fréquence ω pourra être obtenue autant de fois qu'il y a de choix de 2 réflexions parmi les $2n+2$ réflexions du champ sur les miroirs, c'est-à-dire : $(2n+2)(2n+1)/2$ fois, alors que l'excitation du même photon en une seule étape : $(\omega + 2\Omega) \rightarrow \omega + 2\Omega_M$ pourra être obtenue autant de fois qu'il y a de choix de une réflexion parmi $2n+2$, c'est-à-dire : $2n+2$ fois.

Le sous-ensemble $\{m = 0; l = 0\}$ n'est lui constitué que d'un seul élément : $(0, \dots, 0)$, et sera associé à une amplitude $\beta^0 = 1$. Il correspondra à la diffusion des photons thermiques par la cavité comme si cette dernière était au repos.

On démontre dans l'Annexe E que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$, les arrangements les plus nombreux au sein de chaque sous-ensemble $\{m; l\}$ seront toujours ceux pour lesquels le choix des m_i est restreint à $\{+1; 0; -1\}$. Cela répond alors à l'une des deux questions que nous avons soulevées en introduction à cette partie, à savoir que **pour des finesesses élevées et quelle que soit la température, on peut garder une approche perturbative de la diffusion des champs sur chaque miroir pris individuellement pour déterminer la réponse globale et éventuellement "non-linéaire" d'une cavité oscillante**. La transformation des champs sur chaque miroir pourra donc être ramenée aux expressions :

$$\begin{cases} \varphi_{out,i}[\nu] \simeq \sqrt{T_i} \varphi_{in,i}[\nu] + \varepsilon_i \sqrt{R_i} \sum_{m=-1}^{+1} \gamma_m^{\{i\}} [m - \nu] \psi_{in,i}[\nu - m] \\ \psi_{out,i}[\nu] \simeq \sqrt{T_i} \psi_{in,i}[\nu] - \varepsilon_i \sqrt{R_i} \sum_{m=-1}^{+1} \tilde{\gamma}_m^{\{i\}} [m - \nu] \varphi_{in,i}[\nu - m] \end{cases} \quad (2.155)$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{out,i}[\nu] \simeq \sqrt{T_i} \varphi_{in,i}[\nu] + \varepsilon_i \sqrt{R_i} e^{-2i\nu\phi_{a,i}} \left[\psi_{in,i}[\nu] + e^{+i(\phi_{b,i}+\phi_{a,i})} (1-\nu) \beta_{\{i\}} \psi_{in,i}[\nu-1] \right. \\ \left. + e^{-i(\phi_{b,i}+\phi_{a,i})} (1+\nu) \beta_{\{i\}} \psi_{in,i}[\nu+1] \right] \\ \psi_{out,i}[\nu] \simeq \sqrt{T_i} \psi_{in,i}[\nu] - \varepsilon_i \sqrt{R_i} e^{+2i\nu\phi_{a,i}} \left[\varphi_{in,i}[\nu] - e^{+i(\phi_{b,i}-\phi_{a,i})} (1-\nu) \beta_{\{i\}} \varphi_{in,i}[\nu-1] \right. \\ \left. - e^{-i(\phi_{b,i}-\phi_{a,i})} (1+\nu) \beta_{\{i\}} \varphi_{in,i}[\nu+1] \right] \end{array} \right. \quad (2.156)$$

C.2.5 Prise en compte des conditions de transparence à haute fréquence

En reprenant les calculs à partir de (2.154), et en ne retenant que les contributions dominantes que l'on vient d'identifier, il va être possible d'obtenir une expression analytique des amplitudes globales de diffusion sous le seuil, que l'on pourra aménager pour tenir compte des conditions de transparence à haute fréquence des miroirs. Cette démarche est menée dans l'Annexe F, et elle aboutit notamment à l'obtention d'une expression régularisée pour le spectre du rayonnement émis par une cavité de haute finesse en oscillation résonante dans un champ thermique :

$$\begin{aligned} n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} &\simeq n_{\nu, f.b.b.}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} + n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{vac} \\ &+ 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{\nu|m-\nu|}{e^{\hbar\Omega|m-\nu|/k_B T_{eq}} - 1} (2\beta F/\pi)^{2|m|} |R_m(\nu)|^2 \prod_{p=1}^{|m|-1} (p - \epsilon(m)\nu)^2 \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$\text{avec : } n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{vac} \simeq 2 \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \nu(m-\nu) (2\beta F/\pi)^{2m} |R_m(\nu)|^2 \prod_{p=1}^{m-1} (p-\nu)^2 \quad (2.158)$$

$$\text{et pour } m = \pm 1 : \prod_{p=1}^{|m|-1} (p - \epsilon(m)\nu)^2 \equiv 1 \quad (2.159)$$

Les coefficients $|R_m(\nu)|^2$ rendent compte à la fois de la forme Lorentzienne des pics autour des résonances optiques de la cavité $\nu = p/K$, mais aussi des conditions de transparence à haute fréquence des miroirs :

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} R_m(\nu) = 0 \quad \text{et : } \forall \nu \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{|m| \rightarrow +\infty} R_m(\nu) = 0 \quad (2.160)$$

Pour $2\beta F/\pi \ll 1$, et en l'absence de régularisation, on a $R_m(p/K) \simeq 1$ pour tous les entiers $p > 0$ et $m \in \mathbb{Z}$. Dans tous les cas, la largeur à mi-hauteur de ces pics est inversement proportionnelle à F .

Le terme $n_{\nu, f.b.b.}^{(\leftarrow)}$ correspond au spectre du corps noir filtré par la cavité, et dépend notamment du coefficient $R_0(\nu)$. En ce qui concerne la contribution du vide et celle des conversions thermiques, on voit que l'on obtient un résultat très similaire aux développements non-perturbatifs des densités spectrales calculées en [C.1](#) pour le miroir unique. La vitesse maximale effective est ici donnée par $2\beta F/\pi$, et le coefficient de réflexion effectif pour un processus d'ordre m est proportionnel à $|R_m(\nu)|^2$. Quand la vitesse maximale effective s'approche de 1, la cavité se comporte en définitive comme un miroir ultra-relativiste, qui ne comprimerait que les fluctuations des composantes $\nu = p/K$. L'intérêt de la régularisation haute-fréquence consiste à limiter les processus efficaces de compression aux entiers p et m tels que toutes les fréquences comprises entre $|m - p/K|$ et p/K soient suffisamment réfléchies par les miroirs. On peut ainsi s'attendre à ce que l'intensité des contributions à une résonance donnée soit rapidement décroissante avec m . La divergence apparente de la densité spectrale ([2.157](#)) pour $2\beta F/\pi \rightarrow 1$ sera alors évitée grâce à l'effet modérateur des coefficients $R_m(p/K)$ régularisés.

Dans l'Annexe [F](#), on obtient une expression analytique des coefficients $R_m(\nu)$ valable en-dessous du seuil d'oscillation paramétrique. **Une perspective intéressante pour des travaux futurs consistera en la proposition d'expressions valables au-dessus du seuil pour le spectre.** On pourra alors tirer avantage d'avoir démontré que le traitement perturbatif individuel de chacune des diffusions au sein d'une cavité de haute finesse est suffisant pour rendre compte d'une éventuelle réponse globalement non-linéaire de la cavité. Il est par exemple possible de reprendre la procédure d'itération présentée dans ce chapitre, en utilisant cette fois les résultats ([2.21](#)) et ([2.22](#)) de l'approche perturbative pour la transformation des champs sur chaque miroir. L'intérêt de ces résultats est leur dépendance explicite en fréquence pour les coefficients de diffusion des miroirs. Les prémisses d'une telle démarche sont présentées dans l'Annexe [G](#). Le calcul du spectre émis par une cavité oscillante nécessitera alors de se donner un modèle théorique pour les propriétés dispersives et diffusives des miroirs. On peut par exemple penser à un modèle "plasma" [[Intravaia\(PhD\)](#)]. Le domaine de validité des expressions obtenues avec cette méthode sera beaucoup plus large, et méritera à l'avenir un travail numérique.

Analogie avec les phénomènes non-linéaires en Optique Quantique

Sommaire

A	Principe de l'analogie et conventions	75
B	Effet des non-linéarités sur les champs au sein des cristaux . . .	80
B.1	Résolution de l'équation de propagation dans l'approche semi-classique	80
B.2	Cas du pompage par un faisceau laser unique	82
B.3	Pompage bilatéral	92
C	Prise en compte de l'environnement optique	97
C.1	Interfaces entre milieux d'indices différents	97
C.2	Effet global de la traversée d'un cristal entouré de vide	101
D	Systèmes optiques analogues aux miroirs oscillants	104
D.1	Cristal séparé du miroir	105
D.2	Cristal accolé au miroir	111
D.3	Miroir collé entre deux cristaux	112
D.4	Cavité APO à deux cristaux	121
D.5	APO monolithique	126
E	Discussion de l'analogie et contraintes expérimentales	129
E.1	Problématique liée à la génération de seconde harmonique	129
E.2	Contraintes d'accord de phase	132
E.3	Ordres de grandeur	138
F	Propositions expérimentales pour la réalisation pratique de l'analogie	141
F.1	Détection du régime d'oscillation apparente d'un miroir collé entre deux cristaux	141

F.2 Détection du régime d'oscillation résonante d'un APO monolithique 142

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent, les fluctuations de la pression de radiation du vide ressentie par un miroir au repos se manifestent par l'apparition d'une force dissipative lorsque le miroir est non-uniformément accéléré, ce qui se traduit par une perturbation effective de l'état du champ électromagnétique diffusé par le miroir. D'après l'Annexe A, le Hamiltonien décrivant cette perturbation est quadratique en le champ, ce qui a pour effet d'en comprimer les fluctuations, via des processus en tout point similaires à la conversion paramétrique observée dans les cristaux non-linéaires en Optique Quantique.

L'ordre de grandeur du flux des photons émis dans ces processus par un miroir unique en oscillation mécanique dans le vide s'avère être beaucoup trop faible pour être détectable expérimentalement et on a alors proposé l'utilisation d'une cavité haute-finesse pour amplifier le rayonnement émis. Cette étude a montré que, si la détection de l'Effet Casimir Dynamique avec un tel système n'est pas hors de portée des expérimentateurs avec les technologies actuelles, elle n'en reste pas moins une tâche ardue.

Par ailleurs, on a remarqué dans les paragraphes B.1.3 et B.2.5 que si, par un phénomène analogue à l'excitation mécanique du mouvement des miroirs, on arrivait à générer des fréquences d'oscillation dans le domaine du rayonnement visible, l'ordre de grandeur des flux émis serait bien plus favorable à une détection expérimentale.

Or, les cristaux non-linéaires couramment utilisés dans les expériences d'Optique Quantique fonctionnent justement dans le visible ou le proche infra-rouge. Dans de tels cristaux, les quanta d'énergie lumineuse apportés par un faisceau laser pompe jouent un rôle analogue aux quanta d'excitation mécanique utilisés pour faire osciller un miroir. Quand le pompage est effectué dans le vide par exemple, on observe un phénomène dit de "fluorescence paramétrique", et il y a émission de paires de photons jumeaux dont la somme des fréquences est égale à la fréquence des photons pompes [Friberg(85)]. En outre, il est bien connu que l'introduction d'un cristal non-linéaire au sein d'une cavité a pour effet, lorsque le système est pompé par laser, de moduler périodiquement la longueur effective de la cavité. De tels systèmes, appelés Amplificateurs Paramétriques Optiques (APO) ou Oscillateur Paramétrique Optiques (OPO) ont donné lieu à un grand nombre d'expériences dans les vingt dernières années [Giacobino(92)], et leurs résultats sont aujourd'hui bien compris [Mandel].

Il semble donc que l'utilisation de cristaux non-linéaires soit tout-à-fait adaptée à la conception de systèmes analogues aux miroirs oscillants. Toutefois, avec les dispositifs de type APO (ou OPO) utilisés jusqu'à présent, seule l'analogie avec un mouvement "respiratoire" de la cavité a été démontrée. L'objet de ce chapitre sera de montrer que l'on peut en fait obtenir pour chaque miroir un mouvement apparent quelconque, et de déterminer sous quelles conditions un APO (ou un OPO) serait susceptible de fonctionner dans un régime analogue à celui d'une cavité en oscillation globale.

A Principe de l'analogie et conventions

Nous allons dans ce paragraphe, adapter nos conventions de quantification à la description de la propagation des champs dans les milieux matériels. Tout en gardant un modèle à deux dimensions d'espace-temps, nous allons de plus inclure dans certains facteurs de normalisation les paramètres physiques nécessaires à la prise en compte de l'extension transverse des faisceaux pompes ou de la section efficace d'interaction entre les pompes et les cristaux. On suivra en cela les prescriptions utilisées dans l'ouvrage : [Loudon].

On considèrera donc que la propagation du champ se fait selon un axe particulier x , que l'on appellera "axe des abscisses", et que le champ est polarisé rectilignement dans une direction transverse à cet axe. Nos conventions de quantification du champ en question seront alors les suivantes :

$$\hat{E}(x, t) = -\frac{\partial \hat{A}(x, t)}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\hat{A}(x, t) = \hat{\varphi}(x, t) + \hat{\psi}(x, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[e^{-i(\omega t - k_x(\omega)x)} \hat{\varphi}_x[\omega] + e^{-i(\omega t + k_x(\omega)x)} \hat{\psi}_x[\omega] \right] \quad (3.2)$$

La variable x en indice correspond à la prise en compte, non pas d'une projection de quantités vectorielles selon l'axe des abscisses, mais :

- d'une éventuelle enveloppe modulant l'expression qu'auraient les champs si leur propagation était "libre" (c'est-à-dire décrite par une équation différentielle linéaire) dans le milieu considéré au point x ;
- d'une éventuelle dépendance spatiale des divers facteurs physiques intervenant dans l'expression des champs.

La quantité : $\pm k_x(\omega)$ est la valeur algébrique en un point x donné de la projection selon l'axe des abscisses du vecteur d'onde associé à la composante à ω du champ se propageant vers la droite ou vers la gauche et son module est donné par : $k_x(\omega) = n_x(\omega)\omega/c$, où $n_x(\omega)$ est l'indice de réfraction du milieu dans lequel se propage le champ au point x .

Soit A l'extension surfacique transverse des faisceaux utilisés ou encore la section efficace d'interaction entre le champ et le milieu matériel considéré. On peut alors définir les potentiels du champ électromagnétique de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_x[\omega] &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c^2 A |k_x(\omega)|}} \left(\theta(\omega) \hat{a}_x[\omega] + \theta(-\omega) \hat{a}_x^\dagger[-\omega] \right) \\ \hat{\psi}_x[\omega] &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c^2 A |k_x(\omega)|}} \left(\theta(\omega) \hat{b}_x[\omega] + \theta(-\omega) \hat{b}_x^\dagger[-\omega] \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Avec ces conventions, la valeur moyenne : $\langle \varepsilon_0 \hat{E}(x, t)^2 \rangle$ aura la dimension d'une densité d'énergie électromagnétique, l'unité de volume étant ici une grandeur définie dans l'espace

tri-dimensionnel. Nous utiliserons aussi les notations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(x, t) &= \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(x, t) \\ \hat{\psi}(x, t) \end{pmatrix} ; \hat{\Phi}[x, \omega] = \begin{pmatrix} e^{+ik_x(\omega)x} \hat{\varphi}_x[\omega] \\ e^{-ik_x(\omega)x} \hat{\psi}_x[\omega] \end{pmatrix} ; \hat{\Phi}_x[\omega] = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_x[\omega] \\ \hat{\psi}_x[\omega] \end{pmatrix} \\
\hat{\mathbf{E}}(x, t) &= \begin{pmatrix} \hat{E}^{(\rightarrow)}(x, t) \\ \hat{E}^{(\leftarrow)}(x, t) \end{pmatrix} ; \hat{\mathbf{E}}[x, \omega] = \begin{pmatrix} \hat{E}^{(\rightarrow)}[x, \omega] \\ \hat{E}^{(\leftarrow)}[x, \omega] \end{pmatrix} ; \hat{\mathbf{E}}_x[\omega] = \begin{pmatrix} \hat{E}_x^{(\rightarrow)}[\omega] \\ \hat{E}_x^{(\leftarrow)}[\omega] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\partial_t \hat{\varphi}(x, t) \\ -\partial_t \hat{\psi}(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega e^{+ik_x(\omega)x} \hat{\varphi}_x[\omega] \\ i\omega e^{-ik_x(\omega)x} \hat{\psi}_x[\omega] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega \hat{\varphi}_x[\omega] \\ i\omega \hat{\psi}_x[\omega] \end{pmatrix} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

On aura alors par exemple les relations :

$$\begin{cases} \hat{\Phi}[x, \omega] = e^{ik_x(\omega)x\eta} \hat{\Phi}_x[\omega] \\ \hat{\mathbf{E}}[x, \omega] = e^{ik_x(\omega)x\eta} \hat{\mathbf{E}}_x[\omega] \end{cases} \quad \text{avec : } \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Dans un cristal non-linéaire, le pompage par un faisceau laser intense induit l'apparition d'une polarisation non-linéaire, dont les caractéristiques dépendent d'une part du réseau cristallin et de la structure de bande du composé considéré, et d'autre part des caractéristiques du faisceau utilisé [Bloem, Boyd, Shen]. Cet effet peut être vu comme une modulation de l'indice de réfraction effectif du cristal, ou encore comme une modulation de son épaisseur effective. Il semble donc judicieux de placer un tel cristal devant un miroir pour moduler la localisation de la surface effective de réflexion des champs sur le miroir.

Dans ce chapitre, nous allons montrer que les dispositifs représentés sur la figure 3.1, pompés par des faisceaux lasers intenses, pourront donner lieu à des phénomènes analogue à l'Effet Casimir Dynamique. Dans la configuration (a), un miroir unique est posé entre deux cristaux non-linéaires. Ce dispositif va modéliser l'oscillation d'un seul miroir. Pour modéliser l'oscillation d'une cavité dans le vide, nous allons étudier deux sortes d'amplificateurs paramétriques optiques (APO). D'une part la configuration (b), dans laquelle un cristal non-linéaire est collé sur la face intra-cavité de chaque miroir, et d'autre part un APO monolithique (c) dans lequel les deux miroirs sont collés sur les faces externes d'un seul cristal.

Pour que l'analogie soit pertinente, il faudra que lors de la diffusion des champs sur le dispositif a), et à chaque réflexion sur les miroirs à l'intérieur de la cavité des dispositifs b) et c), les cristaux agissent de manière à ce que le champ du vide "voie" le(s) miroir(s) osciller à la fréquence Ω . En d'autres termes, pour la diffusion sur le dispositif a), et pour chaque réflexion à l'intérieur de la cavité sur les blocs :

- {miroir 1 + cristal 1} et : {cristal 2 + miroir 2} [dispositif b)],
- {miroir 1 + cristal} et : {cristal + miroir 2} [dispositif c)],

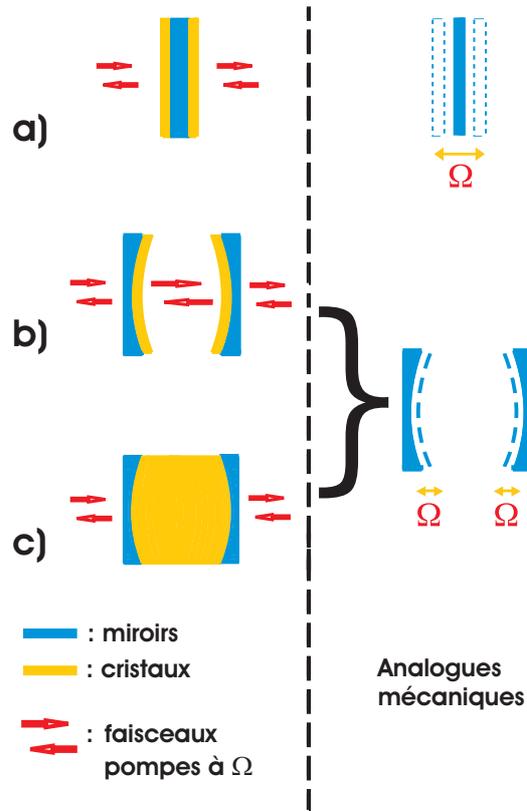


FIG. 3.1: a) Dispositif comportant un miroir placé entre deux cristaux non-linéaires et pompé par des faisceaux lasers de fréquence Ω , susceptible d'être analogue à un miroir unique en oscillation mécanique à la fréquence Ω . b) c) Dispositifs de type APO à deux cristaux et APO monolithique pompés par des faisceaux lasers de fréquence Ω , susceptibles d'être analogues à une cavité dont les miroirs oscilleraient mécaniquement à la fréquence Ω .

il s'agira d'obtenir les mêmes transformations des champs que celles exhibées dans les résultats (2.21) et (2.22), ou (2.23), et ce pour toutes les fréquences se démarquant dans le spectre du rayonnement motionnel relatif respectivement au miroir unique [cas a)], ou à la cavité [cas b) et c)]. Par ailleurs, les champs réfléchis directement à l'extérieur d'une cavité de bonne finesse en oscillation résonante auront une contribution négligeable au spectre, et c'est la raison pour laquelle on pourra a priori s'abstenir de placer aussi des cristaux à l'extérieur de la cavité dans les dispositifs b) et c), ce qui serait pourtant nécessaire si l'on souhaitait avoir l'analogie rigoureux d'une cavité en oscillation par rapport au référentiel du laboratoire dans lequel les photons émis seront détectés. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

On se laissera un certains nombre de degrés de liberté quant aux caractéristiques de pompage : le nombre de faisceaux laser pompant les cristaux ainsi que leur sens de propagation,

leur fréquence, leur intensité et leur phase relative seront choisis de manière appropriée suivant les configurations que l'on envisagera.

Comme nous l'avons déjà laissé sous-entendre, la fréquence du laser correspondra tout naturellement à la fréquence d'excitation mécanique des miroirs. Il faudra donc que le spectre d'émission du laser soit très concentré et stabilisé autour d'une certaine valeur Ω . Aussi, on peut intuitivement prédire que la puissance de pompage sera en partie l'analogie de la vitesse maximale d'excitation mécanique des miroirs, et que la phase des faisceaux pompes déterminera la phase temporelle d'oscillation apparente. Les faisceaux utilisés seront préférentiellement choisis issus d'un seul et même laser, de manière à ce que leurs phases relatives aient une stabilité temporelle suffisante d'une part, et soient ajustables par l'expérimentateur d'autre part. Cela permettra d'utiliser la dépendance spatiale de la différence de marche entre deux faisceaux pompes contra-propageant pour assigner au "mouvement" de chaque miroir une phase modulable en fonction de sa position.

Compte tenu de toutes ces remarques, les faisceaux pompes utilisés seront idéalement représentés (en tout point d'abscisse x donnée) par le produit tensoriel de deux états quasi-classiques monomodes contra-propageants : $|\{\lambda_x[\tilde{\omega}]\}\rangle = |\{\lambda_x^{(\rightarrow)}[\tilde{\omega}]\}\rangle \otimes |\{\lambda_x^{(\leftarrow)}[\tilde{\omega}]\}\rangle$, tels que :

$$\begin{cases} \hat{a}_x[\omega] |\{\lambda_x[\tilde{\omega}]\}\rangle = \lambda_x^{(\rightarrow)}[\omega] |\{\lambda_x[\tilde{\omega}]\}\rangle \\ \hat{b}_x[\omega] |\{\lambda_x[\tilde{\omega}]\}\rangle = \lambda_x^{(\leftarrow)}[\omega] |\{\lambda_x[\tilde{\omega}]\}\rangle \end{cases} \quad (3.6)$$

avec [cf [Loudon]] :

$$\begin{cases} \lambda_x^{(\rightarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi_x^{(\rightarrow)}} e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} \delta(\omega - \Omega) \\ \lambda_x^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi_x^{(\leftarrow)}} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \delta(\omega - \Omega) \end{cases} \quad (3.7)$$

où $\Phi_x^{(\rightarrow)}$ (resp. $\Phi_x^{(\leftarrow)}$) est le flux photonique en x du faisceau se propageant vers la droite (resp. vers la gauche) et $\theta_p^{(\rightarrow)}$ (resp. $\theta_p^{(\leftarrow)}$) sa phase. Selon nos conventions, les champs classiques associés aux faisceaux pompes seront alors donnés par :

$$\begin{cases} E^{(\rightarrow)}(x, t) = E^{(\rightarrow)}[x, \Omega] e^{-i\Omega t} + c.c. = E_x^{(\rightarrow)}[\Omega] e^{-i\Omega(t - n_x(\Omega)x/c)} + c.c. \\ E^{(\leftarrow)}(x, t) = E^{(\leftarrow)}[x, \Omega] e^{-i\Omega t} + c.c. = E_x^{(\leftarrow)}[\Omega] e^{-i\Omega(t + n_x(\Omega)x/c)} + c.c. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} E^{(\rightarrow)}[x, \Omega] = i\Omega \varphi[x, \Omega] = i \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi_x^{(\rightarrow)}}{2\varepsilon_0 c A n_x(\Omega)}} e^{i[\theta_p^{(\rightarrow)} + \Omega n_x(\Omega)x/c]} \\ E^{(\leftarrow)}[x, \Omega] = i\Omega \psi[x, \Omega] = i \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi_x^{(\leftarrow)}}{2\varepsilon_0 c A n_x(\Omega)}} e^{i[\theta_p^{(\leftarrow)} - \Omega n_x(\Omega)x/c]} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} E_x^{(\rightarrow)}[\Omega] = i\Omega \varphi_x[\Omega] = i \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi_x^{(\rightarrow)}}{2\varepsilon_0 c A n_x(\Omega)}} e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} \\ E_x^{(\leftarrow)}[\Omega] = i\Omega \psi_x[\Omega] = i \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi_x^{(\leftarrow)}}{2\varepsilon_0 c A n_x(\Omega)}} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \end{cases} \quad (3.10)$$

où on a implicitement supposé que le milieu traversé au point x est non-absorbant et donc que $n_x(-\Omega) = n_x(\Omega)$, et "c.c." signifie "complexe conjugué". Dans la pratique, $\hbar\Omega\Phi_x^{(\pm)}/A$ correspondra à la puissance surfacique des pompes en x , et $\theta_p^{(\rightarrow)} - \theta_p^{(\leftarrow)}$ au déphasage¹ entre les deux faisceaux contra-propageants en $x = 0$, point origine du système de coordonnées choisi. On envisagera différents cas de figure suivant que les miroirs utilisés diffusent ou non les faisceaux pompes. Enfin, on considérera que le flux photonique des pompes n'est pas significativement affecté par la traversée des cristaux, ce qui correspondra à l'approximation "des pompes constantes". On vérifiera a posteriori, en évaluant les taux de conversion au sein des systèmes que l'on étudiera, que cette approximation est bien valable. L'indice x sera donc omis dans la notation associée au flux d'un faisceau pompe.

¹sensé être suffisamment constant dans le temps

B Effet des non-linéarités sur les champs au sein des cristaux

Dans cette section, nous allons déterminer l'effet des non-linéarités sur les composantes du champ lors de leur propagation au sein d'un cristal. Nous allons d'abord proposer une approche semi-classique pour la résolution de l'équation de propagation, puis l'appliquer successivement au cas où un seul faisceau pompe est utilisé, et au cas où le pompage est effectué bilatéralement par deux faisceaux pompes contra-propageants.

Pour chaque cas, on conservera dans un premier temps toutes les non-linéarités susceptibles d'être induites par les champs pompes. Chacune d'entre elles sera représentée par une susceptibilité non-linéaire $\chi^{(m+1)}$, avec $m \geq 1$ pour des cristaux non centro-symétriques [Shen]. On montrera alors les analogies avec les processus décrits lors du traitement non-perturbatif de la diffusion des champs sur un miroir oscillant. En se restreignant ensuite aux cristaux dont l'effet $\chi^{(2)}$ est dominant, on se ramènera à une situation analogue à l'approche perturbative.

B.1 Résolution de l'équation de propagation dans l'approche semi-classique

En considérant temporairement le caractère tri-dimensionnel de l'espace et les champs classiques, on obtient, à partir des équations de Maxwell écrites pour un milieu diélectrique parfait, l'équation de propagation régissant l'évolution du vecteur champ électrique au sein du cristal [Joffre(Cours), Debuissch(PhD)] :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

où le vecteur polarisation $\vec{P}(\vec{r}, t)$ rend compte du couplage des champs avec les atomes du cristal. Quand le champ des faisceaux pompes est suffisamment intense, au terme de polarisation linéaire habituel va s'ajouter un vecteur de polarisation non-linéaire noté $\vec{P}^{(NL)}$:

$$P_i(\vec{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} P_i[\vec{r}, \omega] e^{-i\omega t} \quad \text{avec : } P_i[\vec{r}, \omega] = \varepsilon_0 \chi_{i,j}^{(1)}[\omega] E_j[\vec{r}, \omega] + P_i^{(NL)}[\vec{r}, \omega] \quad (3.12)$$

où l'on a utilisé la convention de sommation sur les indices spatiaux répétés, et $\chi^{(1)}$ est le tenseur de susceptibilité linéaire. Pour sa part, la polarisation non-linéaire peut être développée en puissances successives du champ :

$$P_i^{(NL)}[\vec{r}, \omega] = \varepsilon_0 \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \int \left(\prod_{k=1}^q \frac{d\omega_k}{2\pi} \right) \chi_{i,i_0, \dots, i_q}^{(q+1)}[\omega; \omega - \sum_{k=1}^q \omega_k, \omega_1, \dots, \omega_q] E_{i_0}[\vec{r}, \omega - \sum_{k=1}^q \omega_k] E_{i_1}[\vec{r}, \omega_1] \dots E_{i_q}[\vec{r}, \omega_q] \quad (3.13)$$

où $\chi^{(q+1)}$ est par définition le tenseur susceptibilité non-linéaire d'ordre $q + 1$ du cristal². Pour être défini de façon unique, il sera pris invariant dans les $(q + 1)!$ permutations des

²vis-à-vis des indices spatiaux qu'il porte, c'est en réalité un tenseur d'ordre $q + 2$

$\{(i_0, \omega_0); \dots; (i_q, \omega_q)\}$. Si le champ prend des valeurs importantes pour des fréquences éloignées des résonances du matériau, c'est-à-dire dans une zone de transparence, alors on pourra négliger la dépendance en fréquence des $\chi^{(m+1)}$ pour tout $m \geq 0$. Dans toute la suite, on ne considèrera pas les effets tensoriels de la polarisation et on travaillera donc uniquement avec des susceptibilités scalaires. Par ailleurs, on négligera l'angle de double-réfraction³, d'ordinaire inférieur à quelques degrés, ce qui permettra de prendre : $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \simeq -\Delta \vec{E}(\vec{r}, t)$. Enfin, on ne s'intéressera pas à la structure transverse des champs, mais uniquement à leurs variations longitudinales selon l'axe des x . Ces dispositifs vont nous permettre de ramener l'équation de propagation 3.11 à une version unidimensionnelle, valable pour des ondes planes :

$$\frac{\partial^2 E[x, \omega]}{\partial x^2} + k(\omega)^2 E[x, \omega] = -\frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} P^{(NL)}[x, \omega] \quad (3.14)$$

avec $k(\omega) = n(\omega)\omega/c$, où $n(\omega)$ est l'indice de réfraction du cristal à la fréquence ω , tel que vu par la polarisation considérée pour le champ à la fréquence ω . Si le cristal est anisotrope, cet indice variera en fonction de l'orientation de la polarisation par rapport aux axes du cristal. On considèrera que les champs ont une polarisation rectiligne, appartenant au plan transverse. La polarisation non-linéaire s'écrit maintenant :

$$P^{(NL)}[x, \omega] = \varepsilon_0 \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \int \left(\prod_{i=1}^q \frac{d\omega_i}{2\pi} \right) \chi^{(q+1)}[\omega; \omega - \sum_{i=1}^q \omega_i, \omega_1, \dots, \omega_q] E[x, \omega - \sum_{i=1}^q \omega_i] E[x, \omega_1] \dots E[x, \omega_q] \quad (3.15)$$

De façon à pouvoir remplacer les champs classiques dans l'équation (3.14) par des opérateurs quantiques, on va procéder à une approche semi-classique. Commençons par faire le développement suivant pour le produit des champs classiques apparaissant dans la polarisation non-linéaire :

$$\begin{aligned} & E[x, \omega_0] E[x, \omega_1] \dots E[x, \omega_q] \\ &= \sum_{(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in \{\rightarrow, \leftarrow\}^{q+1}} E_x^{(\alpha_0)}[\omega_0] E_x^{(\alpha_1)}[\omega_1] \dots E_x^{(\alpha_q)}[\omega_q] e^{i[k^{(\alpha_0)}(\omega_0) + k^{(\alpha_1)}(\omega_1) + \dots + k^{(\alpha_q)}(\omega_q)]x} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} k^{(\rightarrow)}(\omega) = +k(\omega) \\ k^{(\leftarrow)}(\omega) = -k(\omega) \end{cases} \quad (3.17)$$

On prendra garde que l'indice x rend ici compte, comme dans le paragraphe A de ce chapitre, non pas de la projection de grandeurs vectorielles selon l'axe des x , mais de l'enveloppe

³”walk-off” en anglais

éventuelle affectant le champ électrique par rapport aux solutions de l'équation (3.14) sans second membre. En considérant que le champ des pompes est suffisamment intense, on va pouvoir écrire les champs quantiques comme somme d'une valeur moyenne et de fluctuations [Reynaud(BruitQ)] :

$$\hat{E}_x^{(\alpha_j)}[\omega_j] = \langle \hat{E}_x^{(\alpha_j)}[\omega_j] \rangle + \delta \hat{E}_x^{(\alpha_j)}[\omega_j] \quad (3.18)$$

On remplacera alors dans (3.15) le produit des champs classiques par :

$$\hat{E}_x^{(\alpha_0)}[\omega - \sum_{i=1}^q \omega_i] \hat{E}_x^{(\alpha_1)}[\omega_1] \dots \hat{E}_x^{(\alpha_q)}[\omega_q] \simeq \hat{E}_x^{(\alpha_0)}[\omega - \sum_{i=1}^q \omega_i] \langle \hat{E}_x^{(\alpha_1)}[\omega_1] \rangle \dots \langle \hat{E}_x^{(\alpha_q)}[\omega_q] \rangle \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &\simeq \langle \hat{E}_x^{(\alpha_0)}[\omega - \sum_{i=1}^q \omega_i] \rangle \langle \hat{E}_x^{(\alpha_1)}[\omega_1] \rangle \dots \langle \hat{E}_x^{(\alpha_q)}[\omega_q] \rangle \\ &\quad + \delta \hat{E}_x^{(\alpha_0)}[\omega - \sum_{i=1}^q \omega_i] \langle \hat{E}_x^{(\alpha_1)}[\omega_1] \rangle \dots \langle \hat{E}_x^{(\alpha_q)}[\omega_q] \rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

ce qui permettra d'écrire l'équation de propagation (3.14) sous la forme d'une équation différentielle linéaire quant aux fluctuations quantiques des champs. Plus précisément, on obtiendra un système d'équations différentielles linéaires couplées. Si l'état associé au champ moyen peut être décrit par les équations (3.6) et (3.7) :

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}_x^{(\alpha_j)}[\omega_j] \rangle &= \langle \{ \lambda_x[\tilde{\omega}] \} | \hat{E}_x^{(\alpha_1)}[\omega_1] | \{ \lambda_x[\tilde{\omega}] \} \rangle \\ &= i\omega_j \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c^2 A |k(\omega_j)|}} \left(\theta(\omega_j) \lambda_x^{(\alpha_j)}[\omega_j] + \theta(-\omega_j) \lambda_x^{(\alpha_j)}[-\omega_j]^* \right) \\ &= i\omega_j \sqrt{\frac{\hbar \Phi^{(\alpha_j)}}{2\varepsilon_0 c^2 A |k(\omega_j)|}} \left(\theta(\omega_j) 2\pi e^{i\theta_p^{(\alpha_j)}} \delta(\omega_j - \Omega) + \theta(-\omega_j) 2\pi e^{-i\theta_p^{(\alpha_j)}} \delta(-\omega_j - \Omega) \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le terme proportionnel à $\delta(\omega_j - \Omega)$ rendra compte de l'absorption par le cristal d'un photon pompe de fréquence Ω , et celui proportionnel à $\delta(-\omega_j - \Omega)$ de l'émission stimulée d'un photon à Ω . Par ailleurs, dans l'expression (3.20), le premier membre correspondra à la génération d'harmoniques supérieures, alors que le deuxième correspondra à des processus de conversions paramétriques plus variés. Nous y reviendront plus tard.

Nous allons, dans les deux sections qui suivent, résoudre l'équation de propagation dans cette approche semi-classique, successivement dans le cas où le cristal est pompé par un faisceau unique et par deux faisceaux contra-propageants.

B.2 Cas du pompage par un faisceau laser unique

Supposons que le cristal soit traversé par un faisceau pompe unique dont l'état peut être décrit par les équations (3.6) et (3.7) avec :

$$\left\{ \Phi^{(\rightarrow)} \neq 0 \text{ et } \Phi^{(\leftarrow)} = 0 \right\} \quad \text{ou} : \quad \left\{ \Phi^{(\rightarrow)} = 0 \text{ et } \Phi^{(\leftarrow)} \neq 0 \right\}.$$

En notant Φ le flux photonique de la pompe et θ_p sa phase, on peut définir un opérateur quantique de polarisation non-linéaire à partir de l'expression classique (3.15), en appliquant les procédures (3.16), (3.18), (3.19) et (3.21) :

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(NL)}[x, \omega] \simeq \varepsilon_0 \sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{\{(m_+, m_-) \in \mathbb{N}^2 / \\ m_+ + m_- = q\}}} \chi^{(q+1)}[\omega; \omega - (m_+ - m_-)\Omega, \{\Omega\}_{m_+}, \{-\Omega\}_{m_-}] \\ i^q \sqrt{\frac{\hbar \Phi}{2\varepsilon_0 c^2 A}}^q \left(\frac{\Omega e^{i\theta_p} e^{i\varepsilon_p k(\Omega)x}}{\sqrt{|k(\Omega)|}} \right)^{m_+} \left(\frac{(-\Omega) e^{-i\theta_p} e^{i\varepsilon_p k(-\Omega)x}}{\sqrt{|k(-\Omega)|}} \right)^{m_-} \\ \left(\hat{E}_x^{(\rightarrow)}[\omega - (m_+ - m_-)\Omega] e^{ik(\omega - (m_+ - m_-)\Omega)x} \right. \\ \left. + \hat{E}_x^{(\leftarrow)}[\omega - (m_+ - m_-)\Omega] e^{-ik(\omega - (m_+ - m_-)\Omega)x} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

- où : - $\begin{cases} \varepsilon_p = +1 \text{ si la pompe se propage vers la droite} \\ \varepsilon_p = -1 \text{ si la pompe se propage vers la gauche} \end{cases}$
- $\chi^{(q+1)}$ est symétrique en tous ses arguments écrits après le ”,” ,
- $\{\Omega\}_{m_+}$ signifie qu'il y a m_+ arguments égaux à Ω ,
- $\{-\Omega\}_{m_-}$ signifie qu'il y a m_- arguments égaux à $-\Omega$.

Nous pouvons distinguer trois situations différentes :

Pour $\omega > 0$ et $\omega - (m_+ - m_-)\Omega < 0$, la contribution $\chi^{(q+1)}[\omega; \omega - (m_+ - m_-)\Omega, \{\Omega\}_{m_+}, \{-\Omega\}_{m_-}]$ à la polarisation non-linéaire rend compte de processus dans lesquels il y a absorption de m_+ photons pompes à Ω , émission stimulée de m_- photons à Ω , émission d'un photon à $(m_+ - m_-)\Omega - \omega$, et d'un autre à ω .

Pour $\omega > 0$ et $\omega - (m_+ - m_-)\Omega > 0$, la contribution $\chi^{(q+1)}[\omega; \omega - (m_+ - m_-)\Omega, \{\Omega\}_{m_+}, \{-\Omega\}_{m_-}]$ rend compte de processus dans lesquels il y a absorption de m_+ photons pompes à Ω , émission stimulée de m_- photons à Ω , absorption d'un photon à $\omega - (m_+ - m_-)\Omega$ (un photon thermique par exemple), et émission d'un photon à ω .

Pour $\omega = (m_+ - m_- + 1)\Omega$ et $m_+ > m_-$, la contribution $\chi^{(q+1)}[\omega; \Omega, \{\Omega\}_{m_+}, \{-\Omega\}_{m_-}]$ rend compte de processus de génération d'harmonique supérieure.

En définitive, si l'on pose : $m = (m_+ - m_-)$, hormis la génération d'harmonique supérieure (pour $m \geq 1$), on aura soit création de paires de photons $(\omega; m\Omega - \omega)$ pour $\omega < m\Omega$, soit

conversion paramétrique de photons thermiques de fréquence $\omega - m\Omega$ en photons de fréquence ω pour $\omega > m\Omega$. On remarque donc la grande analogie avec les processus décrits lors du traitement non-perturbatif de la diffusion des champs sur un miroir oscillant dans le vide ou dans un champ thermique, les photons pompes et stimulés à Ω jouant ici le rôle des quanta d'excitation mécanique.

Si le cristal est non-absorbant à la fréquence ω , les indices $n(\omega)$ et $n(-\omega)$ sont égaux et par conséquent $k(-\omega) = -k(\omega)$. Le résultat (3.22) peut alors se réécrire :

$$\hat{\mathbf{P}}^{(NL)}[x, \omega] \simeq \varepsilon_0 \sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{\{(m_+, m_-) \in \mathbb{N}^2 / \\ m_+ + m_- = q\}}} \chi^{(q+1)}[\omega; \omega - (m_+ - m_-)\Omega, \{\Omega\}_{m_+}, \{-\Omega\}_{m_-}] \\ i^q \sqrt{\frac{\hbar \Omega \Phi}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}}^q (-1)^{m_-} e^{i(m_+ - m_-)\theta_p} e^{i\varepsilon_p (m_+ - m_-)k(\Omega)x} \\ e^{ik(\omega - (m_+ - m_-)\Omega)x\eta} \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - (m_+ - m_-)\Omega] \quad (3.23)$$

$n(\Omega)$ est l'indice de réfraction du cristal à la fréquence Ω , tel que vu par la polarisation des pompes. On s'est en outre permis de passer aux notations matricielles pour la polarisation non-linéaire et le champ électrique, ce qui n'est pas anodin. En effet, ce passage correspond à négliger dans (3.22) la contribution de processus dans lesquels :

- deux photons d'une même paire seraient émis dans des directions distinctes,
- un photon thermique serait converti en un photon de direction de propagation opposée.

Les conditions d'accord de phase que l'on sera amené à choisir plus tard justifieront cette approximation.

Posons maintenant, comme suggéré plus haut $m = m_+ - m_-$; dans ce cas $m_+ + m_- = |m| + 2m_{\pm}$. On va donc pouvoir réagencer la somme sur q et sur les couples (m_+, m_-) tels que $q = m_+ + m_-$ dans 3.23, en regroupant tous les entiers m_+ et m_- dont la différence vaut m et dont la somme vaut $|m| + 2l$ avec $l \in \mathbb{N}$. Avec $q \in \mathbb{N}^*$, il conviendra de distinguer :

$$\begin{cases} m \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \exists! l \in \mathbb{N} / q = |m| + 2l \\ m = 0 \Rightarrow \exists! l \in \mathbb{N}^* / q = 2l \end{cases} \quad (3.24)$$

Pour un processus donné, l'entier l correspondra au nombre d'émissions stimulées si m est positif, et au nombre de photons pompes absorbés si m est négatif :

$$m_- = l + \theta(-m)(-m) ; \quad m_+ = l + \theta(m)m \quad (3.25)$$

où θ est la fonction de Heavyside. On peut alors réécrire (3.23) sous la forme :

$$\hat{\mathbf{P}}^{(NL)}[x, \omega] \simeq \varepsilon_0 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m[\omega - m\Omega] e^{i[\varepsilon_p m k(\Omega) \mathbf{I} + k(\omega - m\Omega)\eta]x} \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega] \quad (3.26)$$

avec \mathbf{I} la matrice unité, et pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$:

$$\begin{aligned} \alpha_m[\omega - m\Omega] &= i^m e^{im\theta_p} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}}^{|m|} \\ &\times \left(\sum_{l \geq 0} \chi^{(|m|+2l+1)}[\omega; \omega - m\Omega, \{\Omega\}_{l+\theta(m)m}, \{-\Omega\}_{l+\theta(-m)(-m)}] \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}}^{2l} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\text{et : } \alpha_0[\omega] = \left(\sum_{l \geq 1} \chi^{(2l+1)}[\omega; \omega, \{\Omega\}_l, \{-\Omega\}_l] \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}}^{2l} \right). \quad (3.28)$$

On remarque la grande similitude de forme entre ces facteurs et les γ_m des amplitudes de diffusion sur un miroir oscillant dans l'approche non-perturbative [cf (2.94) et (2.95)].

Les $\chi^{(j)}$ étant des quantités proportionnelles à $(1/E_{at})^j$, où E_{at} est le champ liant un électron au noyau d'un atome du cristal, on peut démontrer que, avec les cristaux usuels, pour que la non-linéarité d'ordre $j + 1$ soit du même ordre de grandeur que celle d'ordre j dans l'expression de la polarisation non-linéaire, il faut que les faisceaux pompes aient une puissance surfacique $\hbar\Omega\Phi/A \geq 10^{18} \text{W.m}^2$ [Loudon]. Or, la valeur typique du seuil de détérioration des cristaux non-linéaires usuels est d'environ : 10^{13}W.m^{-2} . On se restreindra donc dans toute la suite de cette sous-partie aux non-linéarités $\chi^{(2)}$, c'est-à-dire à $m = \pm 1$ dans le résultat (3.26), et à $l = 0$ dans (3.27) :

$$\hat{\mathbf{P}}^{(NL)}[x, \omega] \simeq \varepsilon_0 \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] e^{i[\varepsilon_p m k(\Omega)\mathbf{I} + k(\omega - m\Omega)\boldsymbol{\eta}]x} \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega] \quad (3.29)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \alpha_{+1}[\omega - \Omega] = i e^{i\theta_p} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega - \Omega, \Omega] \\ \alpha_{-1}[\omega + \Omega] = (-i) e^{-i\theta_p} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega + \Omega, -\Omega] \end{cases} \quad (3.30)$$

L'ordre de grandeur typique du $\chi^{(2)}$ dans une zone de transparence sera de 10^{-11}m.V^{-1} .

L'équation (3.14) s'écrit maintenant, pour les champs quantiques :

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{E}}[x, \omega]}{\partial x^2} + k(\omega)^2 \hat{\mathbf{E}}[x, \omega] \simeq -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] e^{i[\varepsilon_p m k(\Omega)\mathbf{I} + k(\omega - m\Omega)\boldsymbol{\eta}]x} \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega] \quad (3.31)$$

En utilisant (3.4) et (3.5), on obtient :

$$e^{ik(\omega)x\boldsymbol{\eta}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x^2} + 2ik(\omega)\boldsymbol{\eta} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x} \right) \simeq -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] e^{i[\epsilon_p m k(\Omega)\mathbf{I} + k(\omega - m\Omega)\boldsymbol{\eta}]x} \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega] \quad (3.32)$$

On rappelle que pour $\tilde{\omega} \neq \pm\Omega$, $\hat{\mathbf{E}}_x[\tilde{\omega}] = \delta \hat{\mathbf{E}}_x[\tilde{\omega}]$, cf (3.18) et (3.21).

Faisons à présent l'approximation de l'enveloppe lentement variable [Fabre(Cours)] :

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x^2} \ll k(\omega) \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x} \quad (3.33)$$

Pour $\omega \in \vartheta(0)$, $k(\omega) \in \vartheta(0)$ et l'approximation ne semble pas a priori valide, mais le facteur ω^2/c^2 de l'équation (3.32) nous permet de supposer que la contribution à l'effet global de ces très basses fréquences sera faible. Il vient alors :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x} \simeq \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] e^{i[\epsilon_p m k(\Omega)\mathbf{I} - \{k(\omega) + k(m\Omega - \omega)\}\boldsymbol{\eta}]x} \boldsymbol{\eta} \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega] \quad (3.34)$$

Après intégration par parties, on obtient $[\forall(x_0, x) \in \text{cristal}]$:

$$\hat{\mathbf{E}}_x[\omega] - \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega] \simeq \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] \left\{ \left[\left(i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \right)^{-1} e^{i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega)\tilde{x}} \boldsymbol{\eta} \hat{\mathbf{E}}_{\tilde{x}}[\omega - m\Omega] \right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x d\tilde{x} \left(i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \right)^{-1} e^{i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega)\tilde{x}} \boldsymbol{\eta} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega]}{\partial x} \Big|_{\tilde{x}} \right\} \quad (3.35)$$

où : $\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) = \epsilon_p m k(\Omega)\mathbf{I} - \{k(\omega) + k(m\Omega - \omega)\}\boldsymbol{\eta}$ correspond à un bilan d'impulsion pour chaque processus considéré.

Par ailleurs, en supposant que l'enveloppe des champs varie lentement à l'échelle de la taille du cristal, on peut écrire la "condition de cristal mince" suivante :

$$\forall(x_0, x) \in \text{cristal}, \quad \hat{\mathbf{E}}_x[\omega] \simeq \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega] + (x - x_0) \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x} \Big|_{x_0} \quad (3.36)$$

ce qui permet de réécrire la variation du champ (3.35) sous la forme :

$$\begin{aligned}
& (x - x_0) \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x} \Big|_{x_0} \\
& \simeq \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] \\
& \left\{ \left[\left(i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \right)^{-1} e^{i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \tilde{x}} \boldsymbol{\eta} \left(\hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega - m\Omega] + (\tilde{x} - x_0) \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega]}{\partial x} \Big|_{x_0} \right) \right]_{x_0}^x \right. \\
& \quad \left. - \int_{x_0}^x d\tilde{x} \left(i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \right)^{-1} e^{i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \tilde{x}} \boldsymbol{\eta} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega]}{\partial x} \Big|_{x_0} \right\} \\
& \simeq \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] \left[\left(i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \right)^{-1} e^{i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \tilde{x}} \right]_{x_0}^x \boldsymbol{\eta} \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega - m\Omega] \\
& + \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] \left\{ \left(i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \right)^{-1} e^{i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) x} - \left[\left(i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \right)^{-2} \frac{e^{i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \tilde{x}}}{x - x_0} \right]_{x_0}^x \right\} \\
& \quad \boldsymbol{\eta} (x - x_0) \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega]}{\partial x} \Big|_{x_0} \\
& \tag{3.37}
\end{aligned}$$

En supposant que l'on peut faire une résolution perturbative de cette équation, il vient, à l'ordre le plus bas en $(x - x_0) \partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega] / \partial x|_{x_0}$:

$$\begin{aligned}
(x - x_0) \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x} \Big|_{x_0} & \simeq \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] \left[\left(i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \right)^{-1} e^{i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \tilde{x}} \right]_{x_0}^x \boldsymbol{\eta} \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega - m\Omega] \\
& \tag{3.38}
\end{aligned}$$

A cet ordre, on ne garde que les termes d'ordre 1 en $\chi^{(2)}$, ce qui correspondra par exemple à négliger le phénomène dit de "saturation de la conversion paramétrique" dans un APO doublement résonant [Debuissch(PhD)]. Cette hypothèse sera valable tant que l'on restera suffisamment sous le seuil d'oscillation paramétrique de la cavité. Du terme tout intégré vont

émerger des conditions d'accord de phase⁴ :

$$\begin{aligned} & \left[\left(i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \right)^{-1} e^{i\Delta_{\epsilon_p} \mathbf{k}_m(\omega) \tilde{x}} \right]_{x_0}^x \\ &= (x - x_0) \begin{pmatrix} e^{i\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(\leftarrow)}(\omega) \frac{x+x_0}{2}} \sin_C \left[\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(\leftarrow)}(\omega) \frac{x-x_0}{2} \right] & 0 \\ 0 & e^{i\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(\leftarrow)}(\omega) \frac{x+x_0}{2}} \sin_C \left[\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(\leftarrow)}(\omega) \frac{x-x_0}{2} \right] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\text{où : } \begin{cases} \Delta_{\epsilon_p} k_m^{(\leftarrow)}(\omega) = \epsilon_p m k(\Omega) - \{k(\omega) + k(m\Omega - \omega)\} \\ \Delta_{\epsilon_p} k_m^{(\leftarrow)}(\omega) = \epsilon_p m k(\Omega) + \{k(\omega) + k(m\Omega - \omega)\} \end{cases} \quad (3.40)$$

Ces quantités correspondent à un bilan d'impulsion pour chaque processus associé à $m = \pm 1$ au sein du cristal.

$\Delta_{+1} k_{+1}^{(\leftarrow)}(\omega)$ traduira par exemple, pour $0 < \omega < \Omega$, l'échange d'impulsion lors de la conversion d'un photon pompe à Ω se propageant vers la droite, en deux photons à ω et $\Omega - \omega$ (appartenant à une paire) se propageant vers la droite.

$\Delta_{-1} k_{+1}^{(\leftarrow)}(\omega)$ traduira lui, toujours pour $0 < \omega < \Omega$, l'échange d'impulsion lors de la conversion d'un photon pompe à Ω se propageant vers la gauche, en deux photons à ω et $\Omega - \omega$ (appartenant à une paire) se propageant vers la droite.

L'écart à la conservation de l'impulsion sera dans chaque cas encaissée par le cristal. Toutefois, plus cet écart sera grand et le cristal épais, plus l'interaction paramétrique donnera naissance à une superposition de champs interférant destructivement. C'est de cela dont attestent les \sin_C dans la matrice (3.39). En notant l l'épaisseur du cristal utilisé, on considérera alors les conditions d'accord de phase suivantes (pour $m = \pm 1$) :

$$\begin{cases} \left| m k(\Omega) - \{k(\omega) + k(m\Omega - \omega)\} \right| l \ll 1 \\ \left| m k(\Omega) + \{k(\omega) + k(m\Omega - \omega)\} \right| l \gg 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \left| k(\Omega) - \{k(\omega) + k(\Omega - \omega)\} \right| l \ll 1 \\ \left| k(\Omega) + \{k(\omega) + k(\Omega - \omega)\} \right| l \gg 1 \end{cases} \quad \text{et :} \quad \begin{cases} \left| k(\Omega + \omega) - \{k(\Omega) + k(\omega)\} \right| l \ll 1 \\ \left| k(\Omega + \omega) + \{k(\Omega) - k(\omega)\} \right| l \gg 1 \end{cases} \quad (3.42)$$

⁴"phase-matching" en anglais

Ce choix correspond à la plupart des situations rencontrées avec les cristaux utilisés dans les expériences d'Optique Quantique [Giacobino(92)]. Il revient à ne conserver que les processus pour lesquels tous les photons impliqués ont même sens de propagation⁵. Définissons maintenant une matrice déterminant l'efficacité des conversions paramétriques en question :

$$\mathbf{P}_{m,\Omega,\epsilon_p}^{\{x_0,x\}}(\omega) = \begin{pmatrix} e^{i\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(-)}(\omega) \frac{x+x_0}{2}} \sin_C \left[\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(-)}(\omega) \frac{x-x_0}{2} \right] & 0 \\ 0 & -e^{i\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(-)}(\omega) \frac{x+x_0}{2}} \sin_C \left[\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(-)}(\omega) \frac{x-x_0}{2} \right] \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Avec les conditions d'accord de phase (3.41), cette matrice devient :

$\forall (x_0, x) \in \text{cristal}$ tels que $|x - x_0| \leq l$:

$$\mathbf{P}_{m,\Omega,\epsilon_p}^{\{x_0,x\}}(\omega) \simeq \mathbf{P}_{m,\Omega,\epsilon_p}^{\{x_0\}}(\omega) = \begin{pmatrix} e^{i\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(-)}(\omega) x_0} \delta_{\epsilon_p,+1} & 0 \\ 0 & -e^{i\Delta_{\epsilon_p} k_m^{(-)}(\omega) x_0} \delta_{\epsilon_p,-1} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

où δ représente le symbole de Kronecker. Dans ce cas, la variation du champ (3.38) s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x} \right|_{x_0} \simeq \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] \mathbf{P}_{m,\Omega,\epsilon_p}^{\{x_0\}}(\omega) \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega - m\Omega] \quad (3.45)$$

ce qui, avec les conditions de cristal mince (3.36), donne finalement pour le champ à l'intérieur du cristal :

$$\begin{aligned} \forall (x_0, x) \in \text{cristal}, \hat{\mathbf{E}}_x[\omega] &\simeq \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega] + (x - x_0) \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] \mathbf{P}_{m,\Omega,\epsilon_p}^{\{x_0\}}(\omega) \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega - m\Omega] \\ \Rightarrow \hat{\Phi}_x[\omega] &\simeq \hat{\Phi}_{x_0}[\omega] + (x - x_0) \frac{1}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m[\omega - m\Omega] \mathbf{P}_{m,\Omega,\epsilon_p}^{\{x_0\}}(\omega) i(\omega - m\Omega) \hat{\Phi}_{x_0}[\omega - m\Omega] \end{aligned} \quad (3.46)$$

⁵celui du faisceau pompe en l'occurrence

Pour chaque composante du champ, on obtient :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_x[\omega] = \hat{\varphi}_{x_0}[\omega] + \delta_{\epsilon_p, +1} \sum_{m=\pm 1} i(\omega - m\Omega) \frac{(x - x_0)\alpha_m[\omega - m\Omega]}{2cn(\omega)} e^{i\Delta_{+1} k_m^{(\leftarrow)}(\omega) x_0} \hat{\varphi}_{x_0}[\omega - m\Omega] \\ \hat{\psi}_x[\omega] = \hat{\psi}_{x_0}[\omega] - \delta_{\epsilon_p, -1} \sum_{m=\pm 1} i(\omega - m\Omega) \frac{(x - x_0)\alpha_m[\omega - m\Omega]}{2cn(\omega)} e^{i\Delta_{-1} k_m^{(\leftarrow)}(\omega) x_0} \hat{\psi}_{x_0}[\omega - m\Omega] \end{cases} \quad (3.47)$$

On voit donc que, lors de la traversée du cristal, seule la composante du champ de même sens de propagation que le faisceau pompe est affectée. On peut aussi mettre le résultat (3.46) sous la forme :

$$\forall (x_0, x) \in \text{cristal}, \quad \hat{\Phi}_x[\omega] \simeq \sum_{m \in \{-1; 0; +1\}} \gamma_{m, \epsilon_p}^{\{x_0, x\}}[\omega - m\Omega] \hat{\Phi}_{x_0}[\omega - m\Omega] \quad (3.48)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \gamma_{0, \epsilon_p}^{\{x_0, x\}}[\omega] = \mathbf{I} \\ \gamma_{+1, \epsilon_p}^{\{x_0, x\}}[\omega] = (\Omega - \omega) e^{i\theta_p} \frac{(x - x_0)}{2cn(\omega)} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega - \Omega, \Omega] \mathbf{P}_{+1, \Omega, \epsilon_p}^{\{x_0\}}(\omega) \\ \gamma_{-1, \epsilon_p}^{\{x_0, x\}}[\omega] = (\Omega + \omega) e^{-i\theta_p} \frac{(x - x_0)}{2cn(\omega)} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega + \Omega, -\Omega] \mathbf{P}_{-1, \Omega, \epsilon_p}^{\{x_0\}}(\omega) \end{cases} \quad (3.49)$$

Pour $\omega \neq 2\Omega$, le champ $\hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega \pm \Omega]$ se réduit à ses fluctuations $\delta\hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega \pm \Omega]$ [cf (3.18) et (3.21)]. Il en va bien évidemment de même pour le potentiel associé : $\hat{\Phi}_{x_0}[\omega \pm \Omega] = \delta\hat{\Phi}_{x_0}[\omega \pm \Omega]$. Si le pompage se fait dans le vide et en l'absence de tout autre signal injecté, on observera pour ces fréquences le phénomène dit de "fluorescence paramétrique", ou encore de "conversion paramétrique basse spontanée" [Mandel]. Pour $\omega < \Omega$, le terme en $\chi^{(2)}[\omega; \omega - \Omega, \Omega]$ sera alors associé à des processus dans lesquels un photon pompe de fréquence Ω est absorbé, et une paire de photons $(\omega; \Omega - \omega)$ est émise. Si la température est non nulle, ce terme sera aussi associé à des processus dans lesquels un photon pompe de fréquence Ω est absorbé, et :

- une paire de photons $(\omega; \Omega - \omega)$ est émise par stimulation thermique,
 - un photon thermique de fréquence $\omega - \Omega$ est converti en un photon de fréquence ω si $\omega > \Omega$.
- Le terme en $\chi^{(2)}[\omega; \omega + \Omega, -\Omega]$ sera lui associé à des processus dans lesquels un photon thermique de fréquence $\omega + \Omega$ est converti en un photon de fréquence ω , via l'émission stimulée d'un photon de fréquence Ω .

Tous ces processus correspondent à une compression des fluctuations du champ entrant. Nous les avons représentés dans la figure 3.2.

Pour $\omega = 2\Omega$, il faut tenir compte dans les effets non-linéaires des valeurs moyennes $\langle \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\Omega] \rangle$, ou encore $\langle \hat{\Phi}_{x_0}[\Omega] \rangle$. Les processus de génération de seconde harmonique

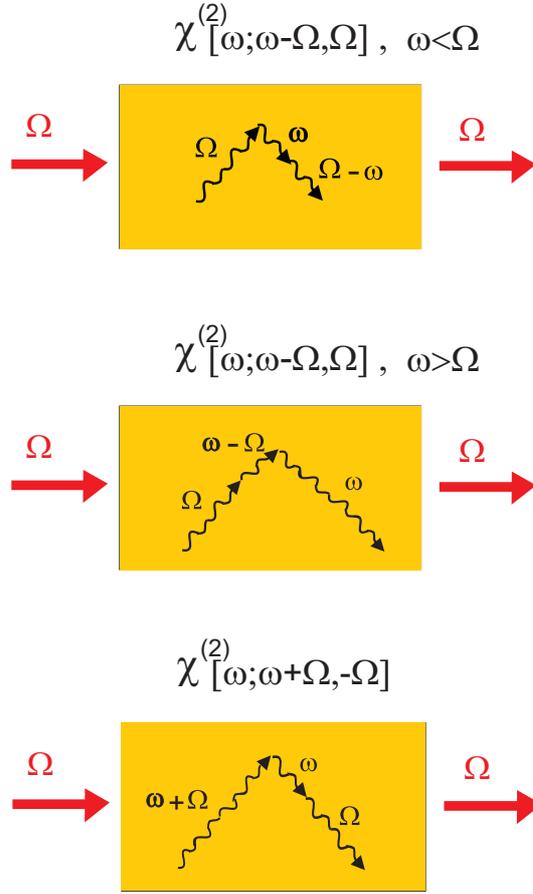


FIG. 3.2: Processus associés à la compression des fluctuations du champ entrant dans un cristal $\chi^{(2)}$ pompé par un faisceau laser de fréquence Ω .

associés au terme en $\chi^{(2)}[2\Omega; \Omega, \Omega]$ seront donc a priori bien plus intenses que les précédents, et il conviendra d'en disposer de manière à ce que la fluorescence paramétrique soit malgré tout détectable. Nous y reviendront plus tard. Comme indiqué sur la figure 3.3, ces processus correspondent à l'absorption de deux photons pompes de fréquence Ω et à l'émission d'un photon de fréquence 2Ω .

En-dehors de la génération de seconde harmonique, on remarque la grande analogie des processus impliqués ici avec ceux relatifs aux champs diffusés par un miroir oscillant dans l'approche perturbative. Toutefois, du fait de la présence des $\delta_{\epsilon_p, \pm 1}$ dans (3.47) ou encore des $\mathbf{P}_{\pm 1, \Omega, \epsilon_p}^{\{x_0\}}$ dans (3.49), tous les photons émis le seront dans le même sens de propagation que le faisceau pompe utilisé, ce qui rompt la symétrie des flux moyens émis par rapport à la situation du miroir oscillant. Cela est dû au fait que l'on emploie un faisceau pompe unique. On va voir que l'utilisation de deux faisceaux pompes contra-propageants sera susceptible de restaurer la symétrie ainsi brisée.

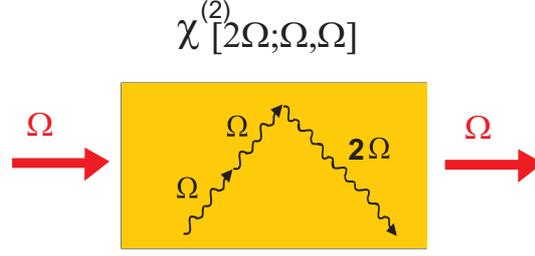


FIG. 3.3: Processus de génération de seconde harmonique dans un cristal $\chi^{(2)}$ pompé par un faisceau laser de fréquence Ω .

B.3 Pompage bilatéral

Supposons maintenant que le cristal soit traversé par deux faisceaux pompes contra-propageants issus du même laser et pouvant être représentés par l'état décrit dans les équations (3.6) et (3.7) avec : $\Phi^{(\rightarrow)} \neq 0$ et $\Phi^{(\leftarrow)} \neq 0$.

En repartant de l'expression classique de la polarisation non-linéaire (3.15), et en appliquant les procédures (3.16), (3.18), (3.19) et (3.21), on obtient l'opérateur de polarisation non-linéaire :

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(NL)}[x, \omega] \simeq \varepsilon_0 \sum_{q \geq 1} \sum_{\{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \{\rightarrow; \leftarrow\}^{q+1}\}} \sum_{\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q) \in \{-1; +1\}^q\}} \chi^{(q+1)}[\omega; \omega - (\sum_{i=1}^q \varepsilon_i)\Omega, \varepsilon_1\Omega, \dots, \varepsilon_q\Omega] \\ \hat{E}^{(\alpha_0)}[x, \omega - (\sum_{i=1}^q \varepsilon_i)\Omega] \prod_{j=1}^q \left(\varepsilon_j i \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(\alpha_j)}}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} e^{i\varepsilon_j \theta_p^{(\alpha_j)}} e^{ik^{(\alpha_j)}(\varepsilon_j\Omega)x} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Chaque produit $\prod_{j=1}^q (\dots)$ rend ici compte :

- pour $\varepsilon_j = +1$, de l'absorption de photons pompes (de fréquence Ω) qui se propageaient dans la direction α_j ,
- pour $\varepsilon_j = -1$, de l'émission stimulée (par les photons pompes) de photons de fréquence Ω dans la direction α_j .

De façon analogue à ce qui a été fait pour le pompage par un faisceau unique, on peut trouver

des fonctions $\alpha_{(k,l)}$ telles que :

$$\hat{\mathbf{P}}^{(NL)}[x, \omega] \simeq \varepsilon_0 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{\{m^{(\rightarrow)}, m^{(\leftarrow)}\} \in \mathbb{Z}^2 / \\ m^{(\rightarrow)} + m^{(\leftarrow)} = m}} \alpha_{(m^{(\rightarrow)}, m^{(\leftarrow)})}[\omega - m\Omega] e^{i \left\{ [m^{(\rightarrow)} - m^{(\leftarrow)}] k(\Omega) \mathbf{I} + k(\omega - m\Omega) \boldsymbol{\eta} \right\} x} \hat{\mathbf{E}}_x[\omega - m\Omega] \quad (3.51)$$

où les entiers $m^{(\rightarrow)}$ et $m^{(\leftarrow)}$ correspondent dans (3.50) à la somme des ε_j associés respectivement à $\alpha_j = \rightarrow$ et $\alpha_j = \leftarrow$. Dans les processus décrits par un entier $m = m^{(\rightarrow)} + m^{(\leftarrow)}$ donné, outre l'absorption de photons pompes et l'émission stimulée de photons à Ω , il y aura émission de paires de photons $(\omega; m\Omega - \omega)$ pour $\omega < m\Omega$, ou encore, pour $\omega > m\Omega$, conversion de photons (thermiques par exemple) à $\omega - m\Omega$ en photons à ω . Avec la notation matricielle, les photons émis dans une même paire auront même sens de propagation, et un photon issu d'un autre photon par conversion sera émis dans le même sens que son "photon père".

En suivant pas à pas la démarche menée dans le cas du pompage par un faisceau unique, on obtient, en ne retenant que la non-linéarité $\chi^{(2)}$, pour tout $(x_0, x) \in \text{cristal}$ et à l'ordre le plus bas en $(x - x_0) \partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega] / \partial x|_{x_0}$:

$$(x - x_0) \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_x[\omega]}{\partial x} \Big|_{x_0} \simeq \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \left\{ \sum_{\substack{\{m^{(\rightarrow)}, m^{(\leftarrow)}\} \in \{-1; 0; +1\}^2 \\ / m^{(\rightarrow)} + m^{(\leftarrow)} = m}} \alpha_{(m^{(\rightarrow)}, m^{(\leftarrow)})}[\omega - m\Omega] \left[\left(i \Delta \mathbf{k}_{(m^{(\rightarrow)}, m^{(\leftarrow)})}(\omega) \right)^{-1} e^{i \Delta \mathbf{k}_{(m^{(\rightarrow)}, m^{(\leftarrow)})}(\omega) \tilde{x}} \right]_{x_0}^x \right\} \boldsymbol{\eta} \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega - m\Omega] \quad (3.52)$$

$$\text{où : } \Delta \mathbf{k}_{(m^{(\rightarrow)}, m^{(\leftarrow)})}(\omega) = [m^{(\rightarrow)} - m^{(\leftarrow)}] k(\Omega) \mathbf{I} - \left\{ k(\omega) + k([m^{(\rightarrow)} + m^{(\leftarrow)}] \Omega - \omega) \right\} \boldsymbol{\eta} \quad (3.53)$$

Le terme tout intégré s'écrit :

$$\left[\left(i\Delta\mathbf{k}_{(m^{(\rightarrow)}, m^{(\leftarrow)})}(\omega) \right)^{-1} e^{i\Delta\mathbf{k}_{(m^{(\rightarrow)}, m^{(\leftarrow)})}(\omega)\tilde{x}} \right]_{x_0}^x$$

$$= (x - x_0) \begin{pmatrix} e^{i\Delta k_{m^{(\rightleftharpoons)}}^{(\leftarrow)}(\omega)\frac{x+x_0}{2}} \sin_C \left[\Delta k_{m^{(\rightleftharpoons)}}^{(\leftarrow)}(\omega)\frac{x-x_0}{2} \right] & 0 \\ 0 & e^{i\Delta k_{m^{(\rightleftharpoons)}}^{(\leftarrow)}(\omega)\frac{x+x_0}{2}} \sin_C \left[\Delta k_{m^{(\rightleftharpoons)}}^{(\leftarrow)}(\omega)\frac{x-x_0}{2} \right] \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta k_{m^{(\rightleftharpoons)}}^{(\leftarrow)}(\omega) = [m^{(\rightarrow)} - m^{(\leftarrow)}]k(\Omega) - \left\{ k(\omega) + k([m^{(\rightarrow)} + m^{(\leftarrow)}]\Omega - \omega) \right\} \\ \Delta k_{m^{(\rightleftharpoons)}}^{(\leftarrow)}(\omega) = [m^{(\rightarrow)} - m^{(\leftarrow)}]k(\Omega) + \left\{ k(\omega) + k([m^{(\rightarrow)} + m^{(\leftarrow)}]\Omega - \omega) \right\} \end{cases} \quad (3.55)$$

En considérant les conditions d'accord de phase (3.41), et avec l'hypothèse de cristal mince (3.36), on obtient finalement le champ :

$\forall (x_0, x) \in \text{cristal}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_x[\omega] &\simeq \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega] + (x - x_0) \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m^{(\leftarrow)}[\omega - m\Omega] \mathbf{P}_{m,\Omega,+1}^{\{x_0\}}(\omega) \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega - m\Omega] \\ &\quad + (x - x_0) \frac{i\omega}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m^{(\leftarrow)}[\omega - m\Omega] \mathbf{P}_{m,\Omega,-1}^{\{x_0\}}(\omega) \hat{\mathbf{E}}_{x_0}[\omega - m\Omega] \\ \Rightarrow \hat{\Phi}_x[\omega] &\simeq \hat{\Phi}_{x_0}[\omega] + (x - x_0) \frac{1}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m^{(\leftarrow)}[\omega - m\Omega] \mathbf{P}_{m,\Omega,+1}^{\{x_0\}}(\omega) i(\omega - m\Omega) \hat{\Phi}_{x_0}[\omega - m\Omega] \\ &\quad + (x - x_0) \frac{1}{2cn(\omega)} \sum_{m=\pm 1} \alpha_m^{(\leftarrow)}[\omega - m\Omega] \mathbf{P}_{m,\Omega,-1}^{\{x_0\}}(\omega) i(\omega - m\Omega) \hat{\Phi}_{x_0}[\omega - m\Omega] \end{aligned} \quad (3.56)$$

où les $\mathbf{P}_{m,\Omega,\epsilon_p}^{\{x_0\}}$ (ω) sont les matrices définies en (3.44), et les fonctions $\alpha_m^{(\pm)}$ sont données par :

$$\begin{cases} \alpha_{+1}^{(-)}[\omega - \Omega] = i e^{i\theta_p^{(-)}} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(-)}}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega - \Omega, \Omega] \\ \alpha_{-1}^{(-)}[\omega + \Omega] = (-i) e^{-i\theta_p^{(-)}} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(-)}}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega + \Omega, -\Omega] \\ \alpha_{+1}^{(+)}[\omega - \Omega] = i e^{i\theta_p^{(+)}} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(+)}}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega - \Omega, \Omega] \\ \alpha_{-1}^{(+)}[\omega + \Omega] = (-i) e^{-i\theta_p^{(+)}} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(+)}}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega + \Omega, -\Omega] \end{cases} \quad (3.57)$$

Le résultat (3.56) s'écrit pour chaque composante :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_x[\omega] \simeq \hat{\varphi}_{x_0}[\omega] + \sum_{m=\pm 1} i(\omega - m\Omega) \frac{(x - x_0)\alpha_m^{(-)}[\omega - m\Omega]}{2cn(\omega)} e^{i\Delta_{+1}k_m^{(-)}(\omega)x_0} \hat{\varphi}_{x_0}[\omega - m\Omega] \\ \hat{\psi}_x[\omega] \simeq \hat{\psi}_{x_0}[\omega] - \sum_{m=\pm 1} i(\omega - m\Omega) \frac{(x - x_0)\alpha_m^{(+)}[\omega - m\Omega]}{2cn(\omega)} e^{i\Delta_{-1}k_m^{(+)}(\omega)x_0} \hat{\psi}_{x_0}[\omega - m\Omega] \end{cases} \quad (3.58)$$

On voit donc que, lors de la traversée du cristal, chaque composante du champ ne sera affectée que par les non-linéarités associées au faisceau pompe de même sens de propagation. En comparant avec le résultat (3.47), le cas du pompage bilatéral peut, comme l'on pouvait s'y attendre, être vu comme une simple superposition des cas de pompage par un faisceau unique se propageant vers la droite et vers la gauche.

On peut aussi mettre le résultat (3.56) sous la forme :

$$\forall (x_0, x) \in \text{cristal}, \quad \hat{\Phi}_x[\omega] \simeq \sum_{m \in \{0; \pm 1\}} \gamma_m^{\{x_0, x\}}[\omega - m\Omega] \hat{\Phi}_{x_0}[\omega - m\Omega] \quad (3.59)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l}
\gamma_0^{\{x_0, x\}}[\omega] = \mathbf{I} \\
\gamma_{+1}^{\{x_0, x\}}[\omega] = (\Omega - \omega) e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \frac{(x - x_0)}{2cn(\omega)} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(\leftarrow)}}{2\varepsilon_0cAn(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega - \Omega, \Omega] \mathbf{P}_{+1, \Omega, +1}^{\{x_0\}}(\omega) \\
\quad + (\Omega - \omega) e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \frac{(x - x_0)}{2cn(\omega)} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(\leftarrow)}}{2\varepsilon_0cAn(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega - \Omega, \Omega] \mathbf{P}_{-1, \Omega, -1}^{\{x_0\}}(\omega) \\
\gamma_{-1}^{\{x_0, x\}}[\omega] = (\Omega + \omega) e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \frac{(x - x_0)}{2cn(\omega)} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(\leftarrow)}}{2\varepsilon_0cAn(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega + \Omega, -\Omega] \mathbf{P}_{+1, \Omega, +1}^{\{x_0\}}(\omega) \\
\quad + (\Omega + \omega) e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \frac{(x - x_0)}{2cn(\omega)} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(\leftarrow)}}{2\varepsilon_0cAn(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega + \Omega, -\Omega] \mathbf{P}_{-1, \Omega, -1}^{\{x_0\}}(\omega)
\end{array} \right. \quad (3.60)$$

La symétrie évoquée dans la sous-partie précédente, à propos de l'analogie avec les processus générés par un miroir oscillant dans l'approche perturbative, sera donc ici restaurée pour $\Phi^{(\leftarrow)} = \Phi^{(\leftarrow)}$. Nous verrons plus tard comment il conviendra d'ajuster le déphasage $\theta_p^{(\leftarrow)} - \theta_p^{(\leftarrow)}$ suivant les systèmes que nous considérerons.

C Prise en compte de l'environnement optique

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux diverses formes que prendra la transformation des champs à chaque étape de la traversée d'un environnement optique composé de cristaux non-linéaires, d'éléments diélectriques passifs et de miroirs. Cette étude sera importante pour tenir compte, en plus des phénomènes non-linéaires au sein des cristaux, des effets dispersifs et diffusifs affectant les champs aux diverses interfaces entre composants optiques. On précisera dans un premier temps ces effets en donnant la transformation des opérateurs champ aux interfaces entre milieux d'indices de réfraction distincts. Ensuite, on déterminera la transformation globale des champs lors de la traversée d'un cristal $\chi^{(2)}$ dans le cas particulier où celui-ci est entouré de vide et traité anti-reflet.

C.1 Interfaces entre milieux d'indices différents

Dans cette section, on va donner la forme prise par la diffusion des opérateurs champ lors de la traversée d'une surface de séparation entre deux milieux différents, d'abord pour des champs incidents quelconques, puis dans le cas particulier des états quasi-classiques. On considèrera l'interface entre deux milieux A et B d'indice respectif $n_A(\omega)$ et $n_B(\omega)$, et on appellera x_i l'abscisse spatiale de cette interface, comme indiqué sur la figure 3.4.

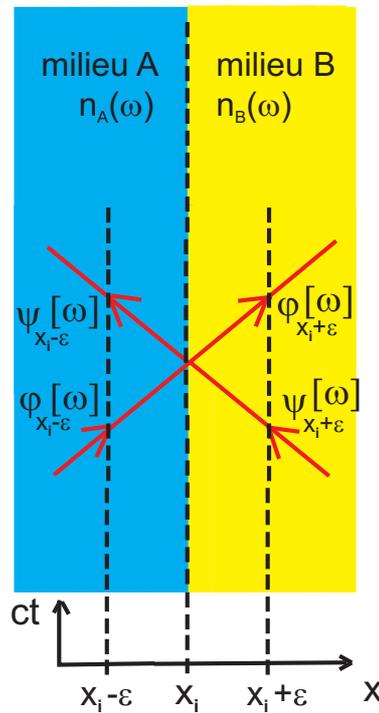


FIG. 3.4: Représentation de la diffusion des champs à l'interface entre deux milieux dans un diagramme d'espace-temps.

C.1.1 Cas général

Nous allons définir les opérateurs champ entrants et sortant au niveau de l'interface selon :

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_{out}[x_i, \omega] = e^{i \mathbf{k}_{out, x_i}(\omega) x_i} \hat{\Phi}_{out, x_i}[\omega] \\ \hat{\Phi}_{in}[x_i, \omega] = e^{i \mathbf{k}_{in, x_i}(\omega) x_i} \hat{\Phi}_{in, x_i}[\omega] \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \hat{\Phi}_{out, x_i}[\omega] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\begin{array}{c} \hat{\varphi}_{x_i + \varepsilon}[\omega] \\ \hat{\psi}_{x_i - \varepsilon}[\omega] \end{array} \right) ; \quad \mathbf{k}_{out, x_i}(\omega) = \begin{pmatrix} \omega n_B(\omega)/c & 0 \\ 0 & -\omega n_A(\omega)/c \end{pmatrix} \\ \hat{\Phi}_{in, x_i}[\omega] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\begin{array}{c} \hat{\varphi}_{x_i - \varepsilon}[\omega] \\ \hat{\psi}_{x_i + \varepsilon}[\omega] \end{array} \right) ; \quad \mathbf{k}_{in, x_i}(\omega) = \begin{pmatrix} \omega n_A(\omega)/c & 0 \\ 0 & -\omega n_B(\omega)/c \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.62)$$

où $\omega n_i(\omega)/c$ et $-\omega n_i(\omega)/c$ correspondent à la valeur algébrique de la projection du vecteur d'onde selon l'axe des x , associée à la composante de fréquence ω du champ se propageant respectivement vers la droite et vers la gauche dans le milieu i .

On suppose que l'on peut décrire la diffusion des champs à l'interface en x_i par une matrice de diffusion unitaire $\mathbf{S}_i[\omega]$ telle que :

$$\begin{aligned} & \hat{\Phi}_{out}[x_i, \omega] = \mathbf{S}_i[\omega] \hat{\Phi}_{in}[x_i, \omega] \\ \Rightarrow & e^{i \mathbf{k}_{out, x_i}(\omega) x_i} \hat{\Phi}_{out, x_i}[\omega] = \mathbf{S}_i[\omega] e^{i \mathbf{k}_{in, x_i}(\omega) x_i} \hat{\Phi}_{in, x_i}[\omega] \\ \Rightarrow & \hat{\Phi}_{out, x_i}[\omega] = e^{-i \mathbf{k}_{out, x_i}(\omega) x_i} \mathbf{S}_i[\omega] e^{i \mathbf{k}_{in, x_i}(\omega) x_i} \hat{\Phi}_{in, x_i}[\omega] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Typiquement, la matrice $\mathbf{S}_i[\omega]$ prend la forme (2.16) :

$$\mathbf{S}_i[\omega] = \begin{pmatrix} t_i[\omega] & r_i[\omega] \\ -r_i[\omega] & t_i[\omega] \end{pmatrix}, \text{ avec : } \begin{cases} |t_i[\omega]|^2 + |r_i[\omega]|^2 = 1 \text{ et : } t_i[\omega] r_i[\omega]^* \in \mathbb{R} \\ t_i[-\omega] = t_i[\omega]^*, \text{ et : } r_i[-\omega] = r_i[\omega]^* \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} t_i[\omega] = 1 \text{ et : } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} r_i[\omega] = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

Dans ces conditions, nous avons la transformation suivante pour les champs lors de leur traversée de l'interface :

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{out, x_i}[\omega] \\ \hat{\psi}_{out, x_i}[\omega] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i[\omega] e^{i\omega(n_A(\omega) - n_B(\omega))x_i/c} & r_i[\omega] e^{-2i\omega n_B(\omega)x_i/c} \\ -r_i[\omega] e^{2i\omega n_A(\omega)x_i/c} & t_i[\omega] e^{i\omega(n_A(\omega) - n_B(\omega))x_i/c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{in, x_i}[\omega] \\ \hat{\psi}_{in, x_i}[\omega] \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

Par exemple, si les deux milieux sont diélectriques, et si l'interface entre les deux n'est médiée par aucun autre composant optique, les relations de passage de l'électromagnétisme classique imposent [Raimond(Cours), Jackson] :

$$r_i[\omega] = \frac{n_A(\omega) - n_B(\omega)}{n_A(\omega) + n_B(\omega)} \quad \text{et} \quad t_i[\omega] = \frac{2\sqrt{n_A(\omega)n_B(\omega)}}{n_A(\omega) + n_B(\omega)} \quad (3.66)$$

L'interface pourra aussi dans certains cas être matérialisée par un composant optique suffisamment fin, comme un miroir ou une couche de traitement anti-reflet par exemple. Dans ce cas les coefficients r_i et t_i seront propres à ce composant particulier. Dans l'exemple d'un traitement anti-reflet de l'interface pour une fréquence ω donnée, on pourra prendre $t_i[\omega] \simeq 1$ et $r_i[\omega] \simeq 0$.

C.1.2 Diffusion des états quasi-classiques monomodes

i) Imaginons pour commencer qu'un état quasi-classique incident $|\{\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle$ se propageant vers la droite traverse l'interface représentée sur la figure 3.4. Si, dans le milieu A, la valeur propre de l'opérateur $a_x[\omega]$ associée à cet état est :

$$\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi} e^{i\theta_p} \delta(\omega - \Omega) \quad (3.67)$$

alors, dans le milieu B, l'état transmis sera vecteur propre de l'opérateur $a_x[\omega]$ avec la valeur propre :

$$\lambda_t^{(\rightarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi} t_i[\omega] e^{i\theta_p} e^{i\omega(n_A(\omega) - n_B(\omega))x_i/c} \delta(\omega - \Omega) \quad (3.68)$$

Dans le milieu A, l'état réfléchi sera vecteur propre de l'opérateur $b_x[\omega]$ avec la valeur propre :

$$\lambda_r^{(\leftarrow)}[\omega] = -2\pi\sqrt{\Phi} r_i[\omega] e^{i\theta_p} e^{2i\omega n_A(\omega)x_i/c} \delta(\omega - \Omega) \quad (3.69)$$

de sorte que, dans le milieu A, le champ électromagnétique total peut être représenté par l'état produit tensoriel :

$$|\{\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_r^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \quad (3.70)$$

On peut finalement écrire l'état global du champ sous la forme :

$$\theta(x_i - x) |\{\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_r^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_i) |\{\lambda_t^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle \quad (3.71)$$

ii) Imaginons maintenant qu'un état quasi-classique incident $|\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle$ se propageant vers la gauche traverse l'interface. Si, dans le milieu B, la valeur propre de l'opérateur $b_x[\omega]$ associée à cet état est :

$$\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi} e^{i\theta_p} \delta(\omega - \Omega) \quad (3.72)$$

alors, dans le milieu A, l'état transmis sera vecteur propre de l'opérateur $b_x[\omega]$ avec la valeur propre :

$$\lambda_t^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi} t_i[\omega] e^{i\theta_p} e^{i\omega(n_A(\omega) - n_B(\omega))x_i/c} \delta(\omega - \Omega) \quad (3.73)$$

Dans le milieu B, l'état réfléchi sera vecteur propre de l'opérateur $a_x[\omega]$ avec la valeur propre :

$$\lambda_r^{(\rightarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi} r_i[\omega] e^{i\theta_p} e^{-2i\omega n_B(\omega)x_i/c} \delta(\omega - \Omega) \quad (3.74)$$

Par conséquent, dans le milieu B, le champ électromagnétique total peut être représenté par l'état produit tensoriel :

$$|\{\lambda_r^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \quad (3.75)$$

On peut finalement écrire l'état global du champ sous la forme :

$$\theta(x_i - x)|\{\lambda_t^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_i)|\{\lambda_r^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \quad (3.76)$$

iii) Imaginons enfin que l'état incident soit la superposition d'un état se propageant vers la droite et d'un état se propageant vers la gauche :

$$\theta(x_i - x)|\{\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_i)|\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle.$$

Si, dans les milieux A et B respectivement, les valeurs propres des opérateurs a et b associées sont :

$$\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} \delta(\omega - \Omega) \quad (3.77)$$

$$\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \delta(\omega - \Omega) \quad (3.78)$$

alors, dans le milieu A, l'état diffusé sera vecteur propre de l'opérateur $b_x[\omega]$ avec la valeur propre :

$$\begin{aligned} \lambda_{out}^{(\leftarrow)}[\omega] &= 2\pi\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} t_i[\omega] e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i\omega(n_A(\omega)-n_B(\omega))x_i/c} \delta(\omega - \Omega) \\ &\quad - 2\pi\sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} r_i[\omega] e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} e^{2i\omega n_A(\omega)x_i/c} \delta(\omega - \Omega) \end{aligned} \quad (3.79)$$

et, dans le milieu B, l'état diffusé sera vecteur propre de l'opérateur $a_x[\omega]$ avec la valeur propre :

$$\begin{aligned} \lambda_{out}^{(\rightarrow)}[\omega] &= 2\pi\sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} t_i[\omega] e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} e^{i\omega(n_A(\omega)-n_B(\omega))x_i/c} \delta(\omega - \Omega) \\ &\quad + 2\pi\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} r_i[\omega] e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{-2i\omega n_B(\omega)x_i/c} \delta(\omega - \Omega) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Au final, l'état global du champ pourra s'écrire sous la forme :

$$\theta(x_i - x)|\{\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{out}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_i)|\{\lambda_{out}^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \quad (3.81)$$

Les résultats que nous avons obtenus ici pour la diffusion d'états quasi-classiques et mono-modes montrent que notre formalisme redonne bien la transformation des champs classiques et monochromatiques aux interfaces.

L'intérêt de la démarche que nous avons menée tout au long de cette section C.1 sera de disposer d'expressions rigoureuses pour le calcul des champs dans un environnement optique donné. Nous serons notamment en mesure de tenir compte de la diffusion des champs pompes et signaux aux interfaces entre tous les composants optiques, ce qui nous permettra d'insérer l'expression adéquate du champ moyen et des fluctuations pour la résolution semi-classique de l'équation de propagation au sein des cristaux.

C.2 Effet global de la traversée d'un cristal entouré de vide

Après avoir étudié dans la section précédente l'interface entre deux milieux d'indices différents, nous allons maintenant examiner la relation entre champs entrants et sortants lors de la traversée d'un cristal d'indice $n(\omega)$ entouré de vide. La figure 3.5 est un diagramme d'espace-temps représentant la situation que l'on veut étudier.

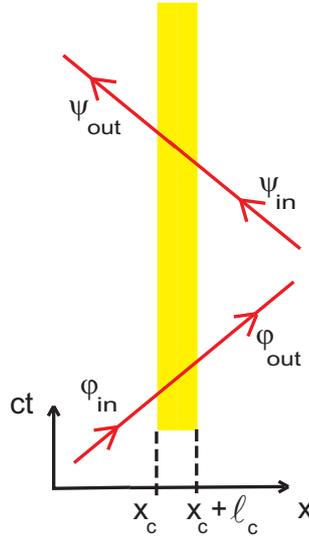


FIG. 3.5: Diagramme d'espace-temps représentant deux rayons traversant un cristal non-linéaire entouré de vide.

D'après la relation (3.65) décrivant la diffusion aux interfaces, et en supposant que le cristal a été traité anti-reflet sur chacune de ses faces externes pour la fréquence ω , on trouve la transformation des champs en x_c et $x_c + l_c$ quand ils passent du vide au cristal ou inversement :

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{out,x_c}[\omega] \\ \hat{\psi}_{out,x_c}[\omega] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega(1-n(\omega))x_c/c} & 0 \\ 0 & e^{i\omega(1-n(\omega))x_c/c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{in,x_c}[\omega] \\ \hat{\psi}_{in,x_c}[\omega] \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{out,x_c+l_c}[\omega] \\ \hat{\psi}_{out,x_c+l_c}[\omega] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega(n(\omega)-1)(x_c+l_c)/c} & 0 \\ 0 & e^{i\omega(n(\omega)-1)(x_c+l_c)/c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{in,x_c+l_c}[\omega] \\ \hat{\psi}_{in,x_c+l_c}[\omega] \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

Nous allons maintenant utiliser les résultats obtenus plus haut pour la diffusion des états quasi-classiques monomodes et supposer que le cristal est pompé par un état incident : $\theta(x_c - x)|\{\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_c - l_c)|\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle$, avec $\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} \delta(\omega - \Omega)$ et $\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \delta(\omega - \Omega)$. Si l'on suppose que le traitement anti-reflet est aussi efficace pour la fréquence Ω , le champ à l'intérieur du cristal a la forme $|\{\lambda_c^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle$ avec :

$$\begin{cases} \lambda_c^{(\rightarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} e^{i\omega(1-n(\omega))x_c/c} \delta(\omega - \Omega) \\ \lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i\omega(n(\omega)-1)(x_c+l_c)/c} \delta(\omega - \Omega) \end{cases} \quad (3.84)$$

De manière à se ramener simplement aux calculs présentés dans la partie **B**, on peut définir des phases effectives pour les faisceaux pompes au sein du cristal :

$$\begin{cases} \theta_{p,c}^{(\rightarrow)} = \theta_p^{(\rightarrow)} + \Omega(1 - n(\Omega))x_c/c \\ \theta_{p,c}^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} + \Omega(n(\Omega) - 1)(x_c + l_c)/c \end{cases} \quad (3.85)$$

D'après l'expression (3.58) des champs à l'intérieur du cristal, et en supposant que les conditions d'accord de phase (3.41) sont vérifiées, on trouve la relation suivante entre les champs venant d'entrer dans le cristal et ceux s'apprêtant à en sortir :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_{in,x_c+l_c}[\omega] \simeq \hat{\varphi}_{out,x_c}[\omega] + \sum_{m=\pm 1} i(\omega - m\Omega) \frac{l_c \alpha_{c,m}^{(\rightarrow)}[\omega - m\Omega]}{2cn(\omega)} e^{i\Delta_{+1} k_m^{(\rightarrow)}(\omega)x_c} \hat{\varphi}_{out,x_c}[\omega - m\Omega] \\ \hat{\psi}_{in,x_c}[\omega] \simeq \hat{\psi}_{out,x_c+l_c}[\omega] - \sum_{m=\pm 1} i(\omega - m\Omega) \frac{(-l_c) \alpha_{c,m}^{(\leftarrow)}[\omega - m\Omega]}{2cn(\omega)} e^{i\Delta_{-1} k_m^{(\leftarrow)}(\omega)(x_c+l_c)} \hat{\psi}_{out,x_c+l_c}[\omega - m\Omega] \end{cases} \quad (3.86)$$

avec, pour $m = \pm 1$:

$$\begin{cases} \Delta_{\epsilon_p} k_m^{(\rightarrow)}(\omega) = \epsilon_p m \Omega n(\Omega)/c - \{\omega n(\omega) + (m\Omega - \omega)n(m\Omega - \omega)\}/c \\ \Delta_{\epsilon_p} k_m^{(\leftarrow)}(\omega) = \epsilon_p m \Omega n(\Omega)/c + \{\omega n(\omega) + (m\Omega - \omega)n(m\Omega - \omega)\}/c \end{cases} \quad (3.87)$$

Les coefficients $\alpha_{c,m}$ sont obtenus à partir des α_m définis dans l'équation (3.57), en remplaçant θ_p par $\theta_{p,c}$:

$$\alpha_{c,m}^{(\rightleftharpoons)}[\omega - m\Omega] = i^m e^{im\theta_{p,c}^{(\rightleftharpoons)}} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi^{(\rightleftharpoons)}}{2\varepsilon_0 c A n(\Omega)}} \chi^{(2)}[\omega; \omega - m\Omega, m\Omega] \quad (3.88)$$

Nous allons enfin combiner les résultats (3.82), (3.83), (3.86), (3.87) et (3.88), et supposer d'une part que le traitement anti-reflet est suffisamment efficace pour chacune des fréquences

ω , Ω , $\Omega - \omega$ et $\Omega + \omega$, et d'autre part que ces fréquences appartiennent à un domaine de transparence du cristal. Dans ces conditions, nous pouvons finalement écrire les champs sortant du cristal en fonction des champs entrants sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_{out, x_c + l_c}[\omega] \simeq e^{i\omega(n(\omega)-1)l_c/c} \left\{ \hat{\varphi}_{in, x_c}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_c, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{in, x_c}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_c, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{in, x_c}[\omega + \Omega] \right\} \\ \hat{\psi}_{out, x_c}[\omega] \simeq e^{i\omega(n(\omega)-1)l_c/c} \left\{ \hat{\psi}_{in, x_c + l_c}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_c, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in, x_c + l_c}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_c, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in, x_c + l_c}[\omega + \Omega] \right\} \end{array} \right. \quad (3.89)$$

où l'on a défini des facteurs $\beta_{l, \Phi}$ dont on discutera la signification physique un peu plus loin :

$$\beta_{l, \Phi} = \frac{l\Omega}{2c\bar{n}_s} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A \bar{n}_p} \chi^{(2)}} \quad (3.90)$$

\bar{n}_s , \bar{n}_p et $\chi^{(2)}$ sont respectivement l'indice moyen relatif à la polarisation du signal et de la pompe, et la susceptibilité moyenne dans la zone de transparence considérée, c'est-à-dire loin des résonances du cristal.

Les relations obtenues en (3.89) ressemblent déjà beaucoup à la transformation des champs pour un miroir oscillant dans l'approche perturbative. En plaçant un cristal et un miroir côte-à-côte, on devrait donc être capable d'obtenir un très bon analogue. On verra par la suite que la vitesse maximale de l'oscillation apparente du miroir sera alors donnée par $c\beta_{l, \Phi}$.

Pour mémoire, on donne aussi le résultat suivant pour les champs venant d'entrer dans le cristal en fonction des champs s'appêtant à en sortir, qui sera utile dans des configurations où le cristal sera directement accolé à un miroir à sa gauche et/ou à sa droite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_{in, x_c + l_c}[\omega] = e^{i\omega(1-n(\omega))x_c/c} \left\{ e^{i\omega(n(\omega)-1)x_c/c} \hat{\varphi}_{out, x_c}[\omega] \right. \\ \left. + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i(\omega-\Omega)(n(\omega-\Omega)-1)x_c/c} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_c, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{out, x_c}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i(\omega+\Omega)(n(\omega+\Omega)-1)x_c/c} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_c, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{out, x_c}[\omega + \Omega] \right\} \\ \hat{\psi}_{in, x_c}[\omega] = e^{i\omega(n(\omega)-1)(x_c+l_c)/c} \left\{ e^{i\omega(1-n(\omega))(x_c+l_c)/c} \hat{\psi}_{out, x_c + l_c}[\omega] \right. \\ \left. + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i(\omega-\Omega)(1-n(\omega-\Omega))(x_c+l_c)/c} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_c, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{out, x_c + l_c}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i(\omega+\Omega)(1-n(\omega+\Omega))(x_c+l_c)/c} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_c, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{out, x_c + l_c}[\omega + \Omega] \right\} \end{array} \right. \quad (3.91)$$

D Systèmes optiques analogues aux miroirs oscillants

Pour motiver la mise en oeuvre de l'analogie, nous allons d'abord montrer qu'un cristal $\chi^{(2)}$ pompé dont on compense la dispersion peut se comporter comme une sorte d'interface optique entre deux référentiels en mouvement apparent l'un par rapport à l'autre. Plus précisément, si la fréquence des pompes est Ω , un observateur immobile placé à droite (respectivement à gauche) du cristal verra tout diffuseur immobile placé à gauche (respectivement à droite) du cristal osciller à la fréquence Ω . En effet, en supposant les conditions d'accord de phase (3.42) vérifiées, si $\Phi^{(-)} = \Phi^{(+)} = \Phi$ et $\theta_p^{(-)} = \theta_p^{(+)} = \theta_p$, la transformation des champs (3.89) peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$\bar{\Phi}[\omega] = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left(2\pi\delta(\omega - \omega') \mathbf{I} + \frac{i\omega'}{c} \delta q[\omega - \omega'] \boldsymbol{\eta} \right) \hat{\Phi}[\omega'] \quad (3.92)$$

avec :

$$\bar{\Phi}[\omega] = e^{-i\omega(n(\omega)-1)l_c/c} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{out,x_c+l_c}[\omega] \\ \hat{\psi}_{out,x_c}[\omega] \end{pmatrix} \quad \hat{\Phi}[\omega] = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{in,x_c}[\omega] \\ \hat{\psi}_{in,x_c+l_c}[\omega] \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

$$\text{et : } \frac{i\omega'}{c} \delta q[\omega - \omega'] = \frac{\omega'}{\Omega} \beta_{l_c,\Phi} \left\{ -2\pi\delta(\omega - \omega' - \Omega) e^{i\theta_p} + 2\pi\delta(\omega - \omega' + \Omega) e^{-i\theta_p} \right\} \quad (3.94)$$

Dans le domaine temporel, ceci correspond à un mouvement $\delta q(t) = a \sin(\Omega t - \theta_p)$, avec une amplitude apparente :

$$a = 2c \frac{\beta_{l_c,\Phi}}{\Omega} = \frac{l_c}{\bar{n}_s} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A \bar{n}_p}} \chi^{(2)} \quad (3.95)$$

En se basant sur l'approche perturbative présentée dans la sous-section B.1.1 du chapitre 2, si l'on définit : $q(t) = x_0 + \delta q(t)$ avec x_0 une constante arbitraire, l'équation (3.92) est la transformée de Fourier du développement au premier ordre en $\delta q(t)$ de $\hat{\Phi}(t, q(t))$. Cela montre bien qu'après avoir traversé le cristal, le champ se comporte comme s'il provenait d'un objet en mouvement selon la trajectoire $q(t)$.

Nous allons maintenant illustrer ce résultat avec différents dispositifs optiques comportant des cristaux $\chi^{(2)}$ et des miroirs, et susceptibles de réaliser l'analogie avec les miroirs oscillants. Nous déterminerons d'abord la transformation des champs sur un système composé d'un miroir et d'un cristal séparés par du vide. Juste après, nous étudierons la limite où le miroir et le cristal sont accolés. Ces dispositifs permettront d'obtenir l'analogie pour les champs diffusés du côté du miroir où se trouve le cristal. Ensuite, nous proposerons un dispositif plus symétrique, où sera fait appel à deux cristaux, chacun apposé sur l'une des faces externes du miroir. Pour étendre l'analogie à une cavité, nous envisagerons enfin deux configurations de type APO. Dans la première, un cristal sera accolé à la face intra-cavité de chaque miroir, et

dans la deuxième, les miroirs seront accolés à chaque face externe d'un cristal unique (APO monolithique).

Par souci de simplification, on considèrera dans chaque cas que les indices moyens vus par la polarisation des champs pompes et signaux dans le cristal sont approximativement égaux : $\bar{n}_s \simeq \bar{n}_p \simeq \bar{n}$.

D.1 Cristal séparé du miroir

Prenons donc pour commencer la configuration de la figure 3.6 où un miroir se trouve à une certaine distance d_i d'un cristal non-linéaire d'épaisseur l_i .

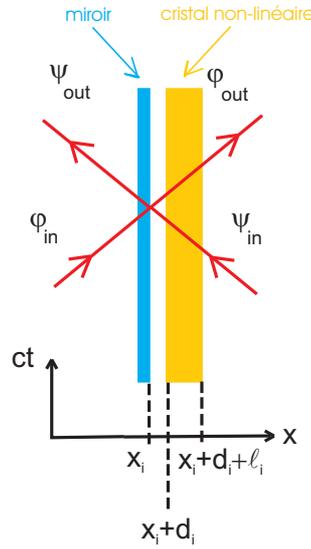


FIG. 3.6: Diagramme d'espace-temps représentant la diffusion des champs sur un ensemble {miroir + vide + cristal}.

On considère que le cristal a été traité anti-reflet sur chacune de ses faces externes pour les fréquences qui interviendront dans nos calculs. Plusieurs cas de figure vont se présenter suivant la manière dont le miroir diffuse le ou les faisceaux pompes, ainsi que les photons paramétriquement émis par le cristal.

D.1.1 Cas où le miroir ne diffuse pas les pompes

Nous allons d'abord étudier le cas où le miroir est complètement transmissif pour le(s) faisceau(x) pompe, mais partiellement réfléchissant pour les photons "paramétriques". Si le dispositif est pompé avec deux faisceaux contra-propageants de flux respectif $\Phi^{(\rightarrow)}$ et $\Phi^{(\leftarrow)}$ et phases respectives $\theta_p^{(\rightarrow)}$ et $\theta_p^{(\leftarrow)}$, sous les conditions d'accord de phase (3.42), et dans un domaine de transparence du cristal, les relations de transformation des champs (3.89) s'écrivent

sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_{out, x_i + d_i + l_i}[\omega] = e^{i\omega(n(\omega)-1)l_i/c} \left\{ \hat{\varphi}_{in, x_i + d_i}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{in, x_i + d_i}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{in, x_i + d_i}[\omega + \Omega] \right\} \\ \hat{\psi}_{out, x_i + d_i}[\omega] = e^{i\omega(n(\omega)-1)l_i/c} \left\{ \hat{\psi}_{in, x_i + d_i + l_i}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in, x_i + d_i + l_i}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in, x_i + d_i + l_i}[\omega + \Omega] \right\} \end{array} \right. \quad (3.96)$$

Entre le miroir et le cristal, les champs se propagent librement sur une distance d_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_{out, x_i}[\omega] = \hat{\varphi}_{in, x_i + d_i}[\omega] \\ \hat{\psi}_{in, x_i}[\omega] = \hat{\psi}_{out, x_i + d_i}[\omega] \end{array} \right. \quad (3.97)$$

Ils sont ensuite diffusés par le miroir. En utilisant la relation (3.65) que l'on a établie auparavant, ce processus est décrit par les relations :

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{out, x_i}[\omega] \\ \hat{\psi}_{out, x_i}[\omega] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i[\omega] & r_i[\omega] e^{-2i\omega x_i/c} \\ -r_i[\omega] e^{2i\omega x_i/c} & t_i[\omega] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{in, x_i}[\omega] \\ \hat{\psi}_{in, x_i}[\omega] \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

En combinant les trois relations de transformation (3.96), (3.97) et (3.98), on trouve tout d'abord pour le champs $\hat{\varphi}$ juste après diffusion sur le miroir :

$$\hat{\varphi}_{out, x_i}[\omega] = t_i[\omega] \hat{\varphi}_{in, x_i}[\omega] + r_i[\omega] e^{-2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_i/c} \times \left\{ \hat{\psi}_{in, x_i + d_i + l_i}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in, x_i + d_i + l_i}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in, x_i + d_i + l_i}[\omega + \Omega] \right\} \quad (3.99)$$

En notant $\hat{\varphi}_{in/out}$ et $\hat{\psi}_{in/out}$ les champs entrants/sortants par rapport au dispositif considéré dans sa globalité, et en ne gardant que les termes d'ordre 0 et 1 en $\beta_{l_i, \Phi^{(\pm)}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{out}[\omega] = & e^{i\omega(n(\omega)-1)l_i/c} \left[t_i[\omega]\hat{\varphi}_{in}[\omega] + r_i[\omega] e^{-2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_i/c} \hat{\psi}_{in}[\omega] \right. \\
& + \beta_{l_i, \Phi^{(\rightarrow)}} (1 - \omega/\Omega) e^{+i\theta_p^{(\rightarrow)}} t_i[\omega - \Omega] \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\
& + \left\{ \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} r_i[\omega] e^{-2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_i/c} + \right. \\
& \quad \left. \beta_{l_i, \Phi^{(\rightarrow)}} (1 - \omega/\Omega) e^{+i\theta_p^{(\rightarrow)}} r_i[\omega - \Omega] e^{-2i(\omega-\Omega)x_i/c} e^{i(\omega-\Omega)(n(\omega-\Omega)-1)l_i/c} \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\
& + \beta_{l_i, \Phi^{(\rightarrow)}} (1 + \omega/\Omega) e^{-i\theta_p^{(\rightarrow)}} t_i[\omega + \Omega] \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \\
& + \left\{ \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} r_i[\omega] e^{-2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_i/c} + \right. \\
& \quad \left. \beta_{l_i, \Phi^{(\rightarrow)}} (1 + \omega/\Omega) e^{-i\theta_p^{(\rightarrow)}} r_i[\omega + \Omega] e^{-2i(\omega+\Omega)x_i/c} e^{i(\omega+\Omega)(n(\omega+\Omega)-1)l_i/c} \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \left. \right] \\
\end{aligned} \tag{3.100}$$

On peut d'ores et déjà remarquer les similitudes entre cette transformation et celle écrite en (2.21) pour le champ $\hat{\varphi}$ diffusé par un miroir oscillant, en tenant compte de la dépendance en fréquence des coefficients de réflexion et transmission.

On va maintenant considérer les coefficients du miroir indépendants de la fréquence et réels. On peut alors adopter les notations $t_i \equiv \sqrt{T_i}$ et $r_i \equiv \varepsilon_i \sqrt{R_i}$, avec $R_i + T_i = 1$. Supposons de plus que l'on n'utilise qu'un seul faisceau pompe se propageant vers la gauche : $\{\Phi^{(\rightarrow)} = 0; \Phi^{(\leftarrow)} \neq 0\}$. Dans ce cas, le champ $\hat{\varphi}$ sortant devient :

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{out}[\omega] = & e^{i\omega(n(\omega)-1)l_i/c} \left[\sqrt{T_i} \hat{\varphi}_{in}[\omega] + \varepsilon_i \sqrt{R_i} e^{-2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_i/c} \times \right. \\
& \left. \left\{ \hat{\psi}_{in}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \right\} \right] \\
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Posons $\phi_{b,i} = \theta_p^{(\leftarrow)} - \Omega x_i/c$ et $\phi_{a,i} = \Omega x_i/c$. Il vient alors, en notant $\nu = \omega/\Omega$:

$$\begin{aligned} \varphi_{out}[\nu] = \sqrt{T_i} e^{i\nu(n(\nu)-1)\Omega l_i/c} \varphi_{in}[\nu] + \varepsilon_i \sqrt{R_i} e^{2i\nu(n(\nu)-1)\Omega l_i/c} e^{-2i\nu\phi_{a,i}} \times \\ \left\{ \psi_{in}[\nu] + e^{+i(\phi_{b,i}+\phi_{a,i})} (1-\nu) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \psi_{in}[\nu-1] \right. \\ \left. + e^{-i(\phi_{b,i}+\phi_{a,i})} (1+\nu) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \psi_{in}[\nu+1] \right\} \end{aligned} \quad (3.102)$$

On obtient donc, aux termes dispersifs en $e^{i\nu(n(\nu)-1)\Omega l_i/c}$ et $e^{2i\nu(n(\nu)-1)\Omega l_i/c}$ près, la même expression que celle écrite en (2.156) pour le champs φ diffusé par un miroir en oscillation mécanique dans l'approche perturbative. Par conséquent, pour un observateur situé à droite du cristal, tout se passe comme si le miroir oscillait à la fréquence Ω autour de sa position moyenne x_i , avec une phase temporelle $\theta_p^{(\leftarrow)} - \Omega x_i/c$ et une vitesse maximale :

$$v_{max} = c \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \simeq \frac{l_i \Omega}{2\bar{n}} \sqrt{\frac{\hbar \Omega \Phi^{(\leftarrow)}}{2\varepsilon_0 c A \bar{n}}} \chi^{(2)} \quad (3.103)$$

On peut aussi présenter ce résultat sous une forme légèrement différente, en posant $\phi_{b,i}(\nu) = \theta_p^{(\leftarrow)} - \Omega n(\nu)x_i/c$, $\phi_{a,i}(\nu) = \Omega n(\nu)x_i/c$ et en choisissant l'origine des abscisses telle que $x_i = -l_i/2$. Dans ce cas, le champ sortant s'écrit :

$$\begin{aligned} \varphi_{out}[\nu] = \sqrt{T_i} e^{i\nu(n(\nu)-1)\Omega l_i/c} \varphi_{in}[\nu] + \varepsilon_i \sqrt{R_i} e^{-2i\nu\phi_{a,i}(\nu)} \times \\ \left\{ \psi_{in}[\nu] + e^{+i(\phi_{b,i}(\nu)+\phi_{a,i}(\nu))} (1-\nu) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \psi_{in}[\nu-1] \right. \\ \left. + e^{-i(\phi_{b,i}(\nu)+\phi_{a,i}(\nu))} (1+\nu) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \psi_{in}[\nu+1] \right\} \end{aligned} \quad (3.104)$$

On voit grâce à cette expression que pour un observateur situé à droite du cristal, tout se passe comme si le miroir oscillait autour d'une position moyenne $x_i(\nu) = n(\nu)x_i$ et avec une phase temporelle $\phi_{b,i}(\nu)$ dépendant des propriétés dispersives du cristal utilisé ainsi que de la fréquence d'observation.

Dans des conditions symétriques, on obtiendra des résultats équivalents pour la diffusion des champs à gauche du système représenté sur la figure 3.7. Si l'on n'utilise qu'un seul faisceau pompe se propageant vers la droite : $\{\Phi^{(\rightarrow)} \neq 0; \Phi^{(\leftarrow)} = 0\}$, et en posant $\phi_{b,i} = \theta_p^{(\leftarrow)} + \Omega x_i/c + \pi$ et $\phi_{a,i} = \Omega x_i/c$, le champ ψ_{out} sortant de l'ensemble s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi_{out}[\nu] = \sqrt{T_i} e^{i\Omega\nu(n(\nu)-1)l_i/c} \psi_{in}[\nu] - \varepsilon_i \sqrt{R_i} e^{2i\nu\phi_{a,i}} e^{2i\Omega\nu(n(\nu)-1)l_i/c} \times \\ \left\{ \varphi_{in}[\nu] - e^{+i(\phi_{b,i}-\phi_{a,i})} (1-\nu) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \varphi_{in}[\nu-1] \right. \\ \left. - e^{-i(\phi_{b,i}-\phi_{a,i})} (1+\nu) \beta_{l_i, \Phi^{(\leftarrow)}} \varphi_{in}[\nu+1] \right\} \end{aligned} \quad (3.105)$$

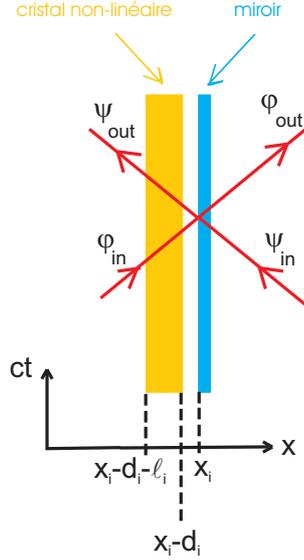


FIG. 3.7: Diagramme d'espace-temps représentant la diffusion des champs sur un ensemble {cristal + vide + miroir}.

On obtient donc ici, aux termes dispersifs en $e^{i\nu(n(\nu)-1)\Omega l_i/c}$ et $e^{2i\nu(n(\nu)-1)\Omega l_i/c}$ près, la même expression que celle écrite en (2.156) pour le champs ψ diffusé par un miroir en oscillation mécanique dans l'approche perturbative. Pour un observateur situé à gauche du cristal, tout se passe comme si le miroir oscillait à la fréquence Ω autour de sa position moyenne x_i , avec une phase temporelle $\theta_p^{(\leftarrow)} + \Omega x_i/c + \pi$ et une vitesse maximale donnée par (3.103) en remplaçant $\Phi^{(\leftarrow)}$ par $\Phi^{(\rightarrow)}$.

D.1.2 Cas où le miroir diffuse les pompes

Considérons maintenant le cas où le miroir des figures 3.6 et 3.7 est partiellement réfléchissant pour les photons "paramétriques" et pour le(s) faisceau(x) pompe. Nous allons démontrer que l'on peut réduire ce cas à la situation précédente où le miroir transmet totalement les faisceaux pompes, en introduisant des flux lumineux et des phases effectifs. Dans la configuration de la figure 3.6 par exemple, si l'état incident est représenté par : $\theta(x_i - x)|\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_i - d_i - l_i)|\{\lambda_{in}^{(\rightarrow)}[\omega]\}\rangle$ avec $\lambda_{in}^{(\rightleftharpoons)}[\omega] = 2\pi\delta(\omega - \Omega) \sqrt{\Phi^{(\rightleftharpoons)}} e^{i\theta_p^{(\rightleftharpoons)}}$, alors, en suivant le formalisme introduit dans la sous-partie C.1.2 de ce chapitre, on pourra écrire l'état résultant après diffusion sur l'ensemble {miroir+vide+cristal} sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \theta(x_i - x)|\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{out}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_i)\theta(x_i + d_i - x)|\{\lambda_v^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_v^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \\
& + \theta(x - x_i - d_i)\theta(x_i + d_i + l_i - x)|\{\lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \\
& + \theta(x - x_i + d_i + l_i)|\{\lambda_{out}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle
\end{aligned} \tag{3.106}$$

où $\lambda_v^{(\rightleftharpoons)}$ correspond aux champs pompes dans l'espace vide entre le miroir et le cristal, et $\lambda_c^{(\rightleftharpoons)}$ aux champs pompes dans le cristal. D'après (3.82), (3.83) et (3.98), on aura :

$$\begin{cases} \lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega] &= 2\pi\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)(x_i+d_i+l_i)/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \delta(\omega - \Omega) \\ \lambda_v^{(\leftarrow)}[\omega] &= 2\pi\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)l_i/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \delta(\omega - \Omega) \end{cases} \quad (3.107)$$

$$\begin{cases} \lambda_v^{(\rightarrow)}[\omega] &= 2\pi\left[\sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} t_i[\Omega] e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} + \sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} r_i[\Omega] e^{-2i\Omega x_i/c} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)l_i/c} e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}}\right] \delta(\omega - \Omega) \\ \lambda_c^{(\rightarrow)}[\omega] &= 2\pi\left[\sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} t_i[\Omega] e^{i\Omega(1-n(\Omega))(x_i+d_i)/c} e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} r_i[\Omega] e^{i\Omega(1-n(\Omega))(x_i+d_i)/c} e^{-2i\Omega x_i/c} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)l_i/c} e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}}\right] \delta(\omega - \Omega) \end{cases} \quad (3.108)$$

On peut maintenant définir des flux et phases effectifs de pompage vers la droite dans le cristal $\tilde{\Phi}^{(\rightarrow)}$ et $\tilde{\theta}_p^{(\rightarrow)}$ tels que :

$$\sqrt{\tilde{\Phi}^{(\rightarrow)}} e^{i\tilde{\theta}_p^{(\rightarrow)}} = \sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} t_i[\Omega] e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} + \sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}} r_i[\Omega] e^{-2i\Omega x_i/c} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)l_i/c} e^{i\theta_p^{(\rightarrow)}} \quad (3.109)$$

ce qui permet de réécrire les champs pompes au sein du cristal sous la forme :

$$\begin{cases} \lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega] &= 2\pi\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)(x_i+d_i+l_i)/c} \delta(\omega - \Omega) \\ \lambda_c^{(\rightarrow)}[\omega] &= 2\pi\sqrt{\tilde{\Phi}^{(\rightarrow)}} e^{i\tilde{\theta}_p^{(\rightarrow)}} e^{i\Omega(1-n(\Omega))(x_i+d_i)/c} \delta(\omega - \Omega) \end{cases} \quad (3.110)$$

On peut alors démontrer que les résultats (3.99), (3.100), (3.101), (3.102) et (3.104) seront valables en remplaçant $\Phi^{(\rightarrow)}$ par $\tilde{\Phi}^{(\rightarrow)}$ et $\theta_p^{(\rightarrow)}$ par $\tilde{\theta}_p^{(\rightarrow)}$. La situation est donc équivalente à celle où le miroir est complètement transmissif pour deux faisceaux pompes contra-propageants de flux et phase respectives $(\tilde{\Phi}^{(\rightarrow)}, \tilde{\theta}_p^{(\rightarrow)})$ et $(\Phi^{(\leftarrow)}, \theta_p^{(\leftarrow)})$. A partir de (3.109), on peut calculer le flux effectif de pompage vers la droite dans le cristal :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^{(\rightarrow)} &= \Phi^{(\rightarrow)} |t_i[\omega]|^2 + \Phi^{(\leftarrow)} |r_i[\omega]|^2 \\ &\quad + 2\sqrt{\Phi^{(\rightarrow)}\Phi^{(\leftarrow)}} r_i[\omega] t_i^*[\omega] \cos\left([2x_i - (n(\Omega) - 1)l_i]\Omega/c + \theta_p^{(\leftarrow)} - \theta_p^{(\rightarrow)}\right) \end{aligned} \quad (3.111)$$

où on a utilisé le fait que $r_i[\omega]t_i^*[\omega] \in \mathbb{R}$. Si $\theta_p^{(\rightarrow)} - \theta_p^{(\leftarrow)}$ représente le déphasage entre les deux faisceaux pompes contra-propageants en $x = 0$ en l'absence du miroir et du cristal, l'argument $[2x_i - (n(\Omega) - 1)l_i]\Omega/c + \theta_p^{(\leftarrow)} - \theta_p^{(\rightarrow)}$ correspondra au déphasage entre le faisceau transmis par le miroir à partir de la pompe (\rightarrow) , et le faisceau réfléchi par le miroir à partir de la pompe (\leftarrow) après que cette dernière ait traversé le cristal. Le terme en cosinus dans (3.111) rendra donc compte de l'interférence entre ces deux faisceaux, issus du même laser et recombinaison par le miroir en x_i .

D.2 Cristal acollé au miroir

La situation où le cristal est acollé au miroir est importante pour l'étude ultérieure d'un APO monolithique. Son étude se réduit en fait à un cas particulier de celle considérée dans la section précédente, dans la limite d'une distance nulle entre le miroir et le cristal. Il en résulte que les champs se transforment globalement de manière identique sur les dispositifs où le miroir et le cristal sont séparés par un espace vide (cf figure 3.6), et sur ceux où ces deux composants sont acollés (cf figure 3.8).

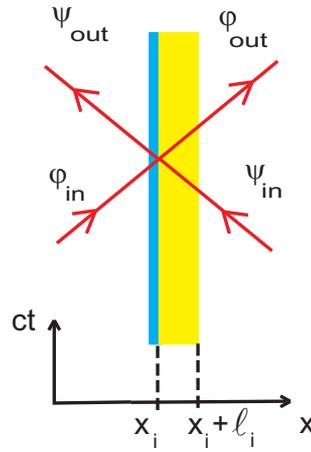


FIG. 3.8: Diagramme d'espace-temps représentant la diffusion des champs sur un ensemble {miroir + cristal}.

En effet, en suivant les mêmes raisonnements que ceux ayant abouti à (3.100), (3.101), (3.102) et (3.104), dans lesquels d'ailleurs, rien ne fait intervenir la position du cristal par rapport au miroir, on obtient les mêmes résultats. Le même raisonnement est évidemment vrai pour les configurations symétriques.

Toutefois, il convient de noter que dans le cas où le miroir est partiellement réfléchissant pour le(s) faisceau(x) pompe, l'état (3.106) devient :

$$\begin{aligned}
& \theta(x_i - x) |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{out}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \\
& + \theta(x - x_i)\theta(x_i + l_i - x) |\{\lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \\
& + \theta(x - x_i + l_i) |\{\lambda_{out}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle
\end{aligned} \tag{3.112}$$

avec :

$$\begin{cases}
\lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega] & = 2\pi \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)(x_i+l_i)/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \delta(\omega - \Omega) \\
\lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega] & = 2\pi \left[\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} t_i[\Omega] e^{i\Omega(1-n(\Omega))x_i/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} r_i[\Omega] e^{-2i\Omega n(\Omega)x_i/c} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)(x_i+l_i)/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \right] \delta(\omega - \Omega)
\end{cases} \tag{3.113}$$

On définit alors le flux effectif $\tilde{\Phi}^{(\leftarrow)}$ et la phase effective $\tilde{\theta}_p^{(\leftarrow)}$ associés au pompage vers la droite de la même manière qu'en (3.109) selon :

$$\sqrt{\tilde{\Phi}^{(\leftarrow)}} e^{i\tilde{\theta}_p^{(\leftarrow)}} = \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} t_i[\Omega] e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} + \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} r_i[\Omega] e^{-2i\Omega x_i/c} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)l_i/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \quad (3.114)$$

Avec cette définition :

$$\begin{cases} \lambda_c^{(\leftarrow)}[\omega] &= 2\pi\sqrt{\tilde{\Phi}^{(\leftarrow)}} e^{i\tilde{\theta}_p^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)(x_i+l_i)/c} \delta(\omega - \Omega) \\ \lambda_c^{(\rightarrow)}[\omega] &= 2\pi\sqrt{\tilde{\Phi}^{(\rightarrow)}} e^{i\tilde{\theta}_p^{(\rightarrow)}} e^{i\Omega(1-n(\Omega))x_i/c} \delta(\omega - \Omega) \end{cases} \quad (3.115)$$

qui s'identifie à (3.110) pour $d_i = 0$. Par conséquent, les résultats (3.100), (3.101), (3.102) et (3.104) restent valables en remplaçant $\Phi^{(\leftarrow)}$ par $\tilde{\Phi}^{(\leftarrow)}$ et $\theta_p^{(\leftarrow)}$ par $\tilde{\theta}_p^{(\leftarrow)}$.

D.3 Miroir collé entre deux cristaux

De manière à ce que l'analogie tienne des deux côtés du miroir, il semble tout-à-fait naturel de placer un cristal à gauche du miroir et un autre à sa droite, et de regarder sous quelles conditions ce système reproduira bien la transformation des champs diffusés vers la gauche et vers la droite par un miroir oscillant. On se propose donc d'étudier la configuration représentée sur les figures 3.1 a) et 3.9, où les deux cristaux ont une épaisseur l_g et l_d respectivement.

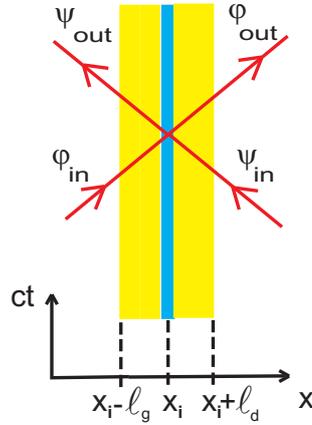


FIG. 3.9: Diagramme d'espace-temps représentant la diffusion des champs sur un dispositif composé d'un miroir collé entre deux cristaux, susceptible d'être analogue à un miroir oscillant pour les champs diffusés vers la gauche et vers la droite.

Nous allons utiliser l'ensemble des résultats obtenus auparavant avec respectivement un seul cristal à droite du miroir et un seul cristal à gauche du miroir pour exhiber la transformation des champs sur ce dispositif. Nous allons d'abord considérer le cas général d'une diffusion quelconque des faisceaux pompes par le miroir, puis le cas limite où le miroir est complètement transmissif pour les pompes, et enfin celui où le miroir est parfaitement réfléchissant pour les pompes.

D.3.1 Cas général

Si l'état incident est représenté par $\theta(x_i - l_g - x) |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_i - l_d) |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle$ avec $\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi\delta(\omega - \Omega) \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}}$, alors l'état résultant après diffusion sur l'ensemble {cristal+miroir+cristal} sera :

$$\begin{aligned} & \theta(x_i - l_g - x) |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{out}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_i + l_g)\theta(x_i - x) |\{\lambda_{c,g}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{c,g}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \\ & + \theta(x - x_i)\theta(x_i + l_d - x) |\{\lambda_{c,d}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{c,d}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle + \theta(x - x_i - l_d) |\{\lambda_{out}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \otimes |\{\lambda_{in}^{(\leftarrow)}[\omega]\}\rangle \end{aligned} \quad (3.116)$$

Les amplitudes $\lambda_{c,g}^{(\leftarrow)}$ et $\lambda_{c,d}^{(\leftarrow)}$ correspondent aux champs pompes respectivement dans le cristal de gauche et dans celui de droite. On détermine leur expression grâce aux relations générales de diffusion (3.65) :

$$\begin{cases} \lambda_{c,d}^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi \left[\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(1-n(\Omega))(x_i-l_g)/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} t_i[\Omega] \right. \\ \quad \left. + \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)(x_i+l_d)/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} r_i[\Omega] e^{-2i\Omega n(\Omega)x_i/c} \right] \delta(\omega - \Omega) \\ \lambda_{c,g}^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi \left[-\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(1-n(\Omega))(x_i-l_g)/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} r_i[\Omega] e^{2i\Omega n(\Omega)x_i/c} \right. \\ \quad \left. + \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)(x_i+l_d)/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} t_i[\Omega] \right] \delta(\omega - \Omega) \end{cases} \quad (3.117)$$

Comme précédemment, on définit des flux et phases effectifs pour le faisceau pompe se propageant vers la droite dans le cristal de droite et pour celui se propageant vers la gauche dans le cristal de gauche selon :

$$\begin{cases} \sqrt{\Phi_d^{(\leftarrow)}} e^{i\theta_{p,d}^{(\leftarrow)}} = \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} t_i[\Omega] e^{i\Omega(n(\Omega)-1)l_g/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \\ \quad + \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} r_i[\Omega] e^{i\Omega(n(\Omega)-1)l_d/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{-2i\Omega x_i/c} \\ \sqrt{\Phi_g^{(\leftarrow)}} e^{i\theta_{p,g}^{(\leftarrow)}} = -\sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} r_i[\Omega] e^{i\Omega(n(\Omega)-1)l_g/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{2i\Omega x_i/c} \\ \quad + \sqrt{\Phi^{(\leftarrow)}} t_i[\Omega] e^{i\Omega(n(\Omega)-1)l_d/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \end{cases} \quad (3.118)$$

ce qui permet d'écrire les champs associés sous la forme :

$$\begin{cases} \lambda_{c,d}^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi \sqrt{\Phi_d^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(1-n(\Omega))x_i/c} e^{i\theta_{p,d}^{(\leftarrow)}} \delta(\omega - \Omega) \\ \lambda_{c,g}^{(\leftarrow)}[\omega] = 2\pi \sqrt{\Phi_g^{(\leftarrow)}} e^{i\Omega(n(\Omega)-1)x_i/c} e^{i\theta_{p,g}^{(\leftarrow)}} \delta(\omega - \Omega) \end{cases} \quad (3.119)$$

On suppose par la suite que les faces extérieures des cristaux au contact du vide sont traitées anti-reflet pour les fréquences impliqués dans les processus paramétriques que nous considérerons, et que les fréquences en question appartiennent à un domaine de transparence des cristaux.

Pour obtenir le champ $\hat{\varphi}$ sortant du système global, on utilise l'expression générale (3.100), et on procède à un certain nombre de remplacements. Plus précisément, on remplace le flux

$\Phi^{(\leftarrow)}$ par le flux dans le cristal de droite $\Phi_d^{(\leftarrow)}$, la phase $\theta_p^{(\leftarrow)}$ par la phase relative au cristal de droite $\theta_{p,d}^{(\leftarrow)}$, l'épaisseur l_i par celle du cristal de droite l_d et le champ entrant $\hat{\varphi}_{in}[\omega]$ par :

$$\hat{\varphi}_{in,x_i}[\omega] = e^{i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} \left\{ \hat{\varphi}_{in}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_g,\Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_g,\Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \right\} \quad (3.120)$$

On procède de manière symétrique pour le champ $\hat{\psi}_{out}$, en remplaçant $\Phi^{(\leftarrow)}$ par $\Phi_g^{(\leftarrow)}$, $\theta_p^{(\leftarrow)}$ par $\theta_{p,g}^{(\leftarrow)}$, l_i par l_g et $\hat{\varphi}_{in}[\omega]$ par :

$$\hat{\psi}_{in,x_i}[\omega] = e^{i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} \left\{ \hat{\psi}_{in}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l_d,\Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l_d,\Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \right\} \quad (3.121)$$

Alors, en ne conservant que les termes d'ordre 0 et 1 en $\beta_{...}$, on obtient pour les champs globalement diffusés par le système :

$$\hat{\varphi}_{out}[\omega] = e^{i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} \left[t_i[\omega] e^{i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} \hat{\varphi}_{in}[\omega] + r_i[\omega] e^{-2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} \hat{\psi}_{in}[\omega] \right. \\ + (1 - \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_g,\Phi^{(\leftarrow)}} t_i[\omega] e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} + \right. \\ \left. \beta_{l_d,\Phi_d^{(\leftarrow)}} t_i[\omega - \Omega] e^{+i\theta_{p,d}^{(\leftarrow)}} e^{i(\omega-\Omega)(n(\omega-\Omega)-1)l_g/c} \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\ + (1 - \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_d,\Phi^{(\leftarrow)}} r_i[\omega] e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{-2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} + \right. \\ \left. \beta_{l_d,\Phi_d^{(\leftarrow)}} r_i[\omega - \Omega] e^{+i\theta_{p,d}^{(\leftarrow)}} e^{-2i(\omega-\Omega)x_i/c} e^{i(\omega-\Omega)(n(\omega-\Omega)-1)l_d/c} \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\ + (1 + \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_g,\Phi^{(\leftarrow)}} t_i[\omega] e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} + \right. \\ \left. \beta_{l_d,\Phi_d^{(\leftarrow)}} t_i[\omega + \Omega] e^{-i\theta_{p,d}^{(\leftarrow)}} e^{i(\omega+\Omega)(n(\omega+\Omega)-1)l_g/c} \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \\ \left. + (1 + \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_d,\Phi^{(\leftarrow)}} r_i[\omega] e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{-2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} + \right. \right. \\ \left. \left. \beta_{l_d,\Phi_d^{(\leftarrow)}} r_i[\omega + \Omega] e^{-i\theta_{p,d}^{(\leftarrow)}} e^{-2i(\omega+\Omega)x_i/c} e^{i(\omega+\Omega)(n(\omega+\Omega)-1)l_d/c} \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \right] \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{out}[\omega] = & e^{i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} \left[t_i[\omega] e^{i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} \hat{\psi}_{in}[\omega] - r_i[\omega] e^{2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} \hat{\varphi}_{in}[\omega] \right. \\
& + (1 - \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_d, \Phi^{(\leftarrow)}} e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} t_i[\omega] e^{i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} + \right. \\
& \left. \beta_{l_g, \Phi_g^{(\leftarrow)}} t_i[\omega - \Omega] e^{+i\theta_{p,g}^{(\leftarrow)}} e^{i(\omega-\Omega)(n(\omega-\Omega)-1)l_d/c} \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\
& - (1 - \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_g, \Phi^{(\rightarrow)}} r_i[\omega] e^{+i\theta_p^{(\rightarrow)}} e^{2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} + \right. \\
& \left. \beta_{l_g, \Phi_g^{(\rightarrow)}} r_i[\omega - \Omega] e^{+i\theta_{p,g}^{(\rightarrow)}} e^{2i(\omega-\Omega)x_i/c} e^{i(\omega-\Omega)(n(\omega-\Omega)-1)l_g/c} \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\
& + (1 + \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_d, \Phi^{(\leftarrow)}} t_i[\omega] e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} + \right. \\
& \left. \beta_{l_g, \Phi_g^{(\leftarrow)}} t_i[\omega + \Omega] e^{-i\theta_{p,g}^{(\leftarrow)}} e^{i(\omega+\Omega)(n(\omega+\Omega)-1)l_d/c} \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \\
& - (1 + \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_g, \Phi^{(\rightarrow)}} r_i[\omega] e^{-i\theta_p^{(\rightarrow)}} e^{2i\omega x_i/c} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} + \right. \\
& \left. \beta_{l_g, \Phi_g^{(\rightarrow)}} r_i[\omega + \Omega] e^{-i\theta_{p,g}^{(\rightarrow)}} e^{2i(\omega+\Omega)x_i/c} e^{i(\omega+\Omega)(n(\omega+\Omega)-1)l_g/c} \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \left. \right] \quad (3.123)
\end{aligned}$$

Puisque nous avons supposé que les conditions d'accord de phase sont vérifiées dans les deux cristaux, nous pouvons simplifier les phase apparaissant dans ces expressions :

$$\begin{cases} e^{i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} e^{\pm\Omega(n(\Omega)-1)l_d/c} \simeq e^{i(\omega\pm\Omega)(n(\omega\pm\Omega)-1)l_d/c} \\ e^{i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} e^{\pm i\Omega(n(\Omega)-1)l_g/c} \simeq e^{i(\omega\pm\Omega)(n(\omega\pm\Omega)-1)l_g/c} \end{cases} \quad (3.124)$$

Par conséquent, si l'on redéfinit les phases effectives $\theta_{p,d}^{(\leftarrow)}$ et $\theta_{p,g}^{(\leftarrow)}$ pour tenir compte de l'effet dispersif associé à la deuxième traversée des cristaux par les faisceaux pompes recombines sur le miroir, et en incluant la dispersion totale dans les coefficients de diffusion du miroir de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)} = \theta_{p,d}^{(\leftarrow)} + \Omega(n(\Omega) - 1)l_d/c \\ \tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)} = \theta_{p,g}^{(\leftarrow)} + \Omega(n(\Omega) - 1)l_g/c \end{cases} \quad (3.125)$$

$$\begin{cases} \tilde{t}_i[\omega] = t_i[\omega] e^{i\omega(n(\omega)-1)(l_g+l_d)/c} \\ \tilde{r}_{i,g}[\omega] = r_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} \\ \tilde{r}_{i,d}[\omega] = r_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} \end{cases} \quad (3.126)$$

on peut réécrire les expressions (3.122) et (3.123) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{out}[\omega] &\simeq \tilde{t}_i[\omega] \hat{\varphi}_{in}[\omega] + \tilde{r}_{i,d}[\omega] \hat{\psi}_{in}[\omega] \\
&+ (1 - \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_g, \Phi^{(\leftarrow)}} e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} \tilde{t}_i[\omega] + \beta_{l_d, \Phi_d^{(\leftarrow)}} e^{+i\tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)}} \tilde{t}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\
&+ (1 - \omega/\Omega) e^{-2i\omega x_i/c} \left\{ \beta_{l_d, \Phi^{(\leftarrow)}} e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} \tilde{r}_{i,d}[\omega] + \beta_{l_d, \Phi_d^{(\leftarrow)}} e^{+i\tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)}} \tilde{r}_{i,d}[\omega - \Omega] e^{+2i\Omega x_i/c} \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\
&+ (1 + \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_g, \Phi^{(\leftarrow)}} e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} \tilde{t}_i[\omega] + \beta_{l_d, \Phi_d^{(\leftarrow)}} e^{-i\tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)}} \tilde{t}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \\
&+ (1 + \omega/\Omega) e^{-2i\omega x_i/c} \left\{ \beta_{l_d, \Phi^{(\leftarrow)}} e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} \tilde{r}_{i,d}[\omega] + \beta_{l_d, \Phi_d^{(\leftarrow)}} e^{-i\tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)}} \tilde{r}_{i,d}[\omega + \Omega] e^{-2i\Omega x_i/c} \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega]
\end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{out}[\omega] &\simeq \tilde{t}_i[\omega] \hat{\psi}_{in}[\omega] + \tilde{r}_{i,g}[\omega] \hat{\varphi}_{in}[\omega] \\
&+ (1 - \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_d, \Phi^{(\leftarrow)}} e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} \tilde{t}_i[\omega] + \beta_{l_g, \Phi_g^{(\leftarrow)}} e^{+i\tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)}} \tilde{t}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\
&- (1 - \omega/\Omega) e^{+2i\omega x_i/c} \left\{ \beta_{l_g, \Phi^{(\leftarrow)}} e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} \tilde{r}_{i,g}[\omega] + \beta_{l_g, \Phi_g^{(\leftarrow)}} e^{+i\tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)}} \tilde{r}_{i,g}[\omega - \Omega] e^{-2i\Omega x_i/c} \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\
&+ (1 + \omega/\Omega) \left\{ \beta_{l_d, \Phi^{(\leftarrow)}} e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} \tilde{t}_i[\omega] + \beta_{l_g, \Phi_g^{(\leftarrow)}} e^{-i\tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)}} \tilde{t}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \\
&- (1 + \omega/\Omega) e^{+2i\omega x_i/c} \left\{ \beta_{l_g, \Phi^{(\leftarrow)}} e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} \tilde{r}_{i,g}[\omega] + \beta_{l_g, \Phi_g^{(\leftarrow)}} e^{-i\tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)}} \tilde{r}_{i,g}[\omega + \Omega] e^{+2i\Omega x_i/c} \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega]
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Il est important de noter que puisque la matrice de diffusion du miroir seul (3.64) est unitaire, la matrice de diffusion obtenue en ajoutant l'effet dispersif des cristaux l'est aussi :

$$\tilde{\mathbf{S}}_{i,g,d}[\omega] = \begin{pmatrix} \tilde{t}_i[\omega] & \tilde{r}_{i,d}[\omega] \\ -\tilde{r}_{i,g}[\omega] & \tilde{t}_i[\omega] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i[\omega] e^{i\omega(n(\omega)-1)(l_g+l_d)/c} & r_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l_d/c} \\ -r_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l_g/c} & t_i[\omega] e^{i\omega(n(\omega)-1)(l_g+l_d)/c} \end{pmatrix} \in \text{SU}(2) \tag{3.129}$$

Dans toute la suite, par souci de simplification, on prendra $l_g = l_d = l$ et $\Phi^{(\leftarrow)} = \Phi^{(\leftarrow)} = \Phi$. En tenant compte de (3.125), les flux et phases effectifs dans les cristaux (3.118) deviennent alors :

$$\begin{cases} \sqrt{\Phi_d^{(\leftarrow)}} e^{i\tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)}} = \sqrt{\Phi} t_i[\Omega] e^{2i\Omega(n(\Omega)-1)l/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \\ \quad + \sqrt{\Phi} r_i[\Omega] e^{2i\Omega(n(\Omega)-1)l/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{-2i\Omega x_i/c} \\ \sqrt{\Phi_g^{(\leftarrow)}} e^{i\tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)}} = -\sqrt{\Phi} r_i[\Omega] e^{2i\Omega(n(\Omega)-1)l/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} e^{2i\Omega x_i/c} \\ \quad + \sqrt{\Phi} t_i[\Omega] e^{2i\Omega(n(\Omega)-1)l/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \end{cases} \tag{3.130}$$

D.3.2 Cas du miroir complètement transmissif pour les pompes

Supposons tout d'abord que l'on choisisse un miroir très transmissif pour les faisceaux pompes, donc tel que $|r_i[\Omega]| \ll |t_i[\Omega]| \simeq 1$. On prendra $t_i[\Omega] = 1$ pour simplifier. Dans ce cas, les flux et phases effectifs s'écrivent :

$$\begin{cases} \sqrt{\Phi_d^{(\leftarrow)}} e^{i\tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)}} \simeq \sqrt{\Phi} e^{2i\Omega(n(\Omega)-1)l/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \\ \sqrt{\Phi_g^{(\leftarrow)}} e^{i\tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)}} \simeq \sqrt{\Phi} e^{2i\Omega(n(\Omega)-1)l/c} e^{i\theta_p^{(\leftarrow)}} \end{cases} \quad (3.131)$$

On notera $\phi_l = 2\Omega(n(\Omega) - 1)l/c$ la phase supplémentaire associée à la dispersion dans les cristaux pour chaque faisceau pompe transmis. Cette phase pourra être ajustée en modifiant la longueur l des cristaux par exemple. Pour fixer les idées, supposons que les faisceaux pompes contra-propageants viennent pomper notre système en se propageant dans le vide depuis deux points d'abscisse respective $x_g < 0$ et $x_d > 0$ dans le système de coordonnées choisi, et que $x_i \pm l \in]0; x_d[$ par exemple. Avec les conventions adoptées dans la partie A, en $x = 0$, leurs champs classiques seront reliés par :

$$\varphi[0, \Omega] = \psi[0, \Omega] e^{i(\theta_p^{(\leftarrow)} - \theta_p^{(\leftarrow)})} \quad (3.132)$$

Les deux faisceaux étant issus d'un seul et même laser, la quantité $\theta_p^{(\leftarrow)} - \theta_p^{(\leftarrow)}$ sera fixée et correspondra à la différence de marche entre les chemins optiques suivis par chaque faisceau depuis le point où le faisceau commun initial a été séparé en deux et le point $x = 0$. D'après nos hypothèses, il vient par ailleurs :

$$\begin{cases} \varphi[x_i, \Omega] = \varphi[0, \Omega] e^{i\Omega[x_i + (n(\Omega)-1)l]/c} \\ \psi[x_i, \Omega] = \psi[0, \Omega] e^{-i\Omega[x_i + (n(\Omega)-1)l]/c} \end{cases} \quad (3.133)$$

et donc :

$$\varphi[x_i, \Omega] = \psi[x_i, \Omega] e^{i(\theta_p^{(\leftarrow)} - \theta_p^{(\leftarrow)} + 2\Omega x_i/c + 2\Omega(n(\Omega)-1)l/c)} \quad (3.134)$$

Appelons ϕ_p le déphasage associé à la différence de marche totale en x_i :

$$\phi_p = \theta_p^{(\leftarrow)} - \theta_p^{(\leftarrow)} + 2\Omega x_i/c + \phi_l \quad [2\pi] \quad (3.135)$$

On peut maintenant regrouper toutes les relations entre les caractéristiques de pompage évoquées selon :

$$\begin{cases} l_g = l_d = l \text{ et } \Phi^{(\leftarrow)} = \Phi^{(\leftarrow)} = \Phi_d^{(\leftarrow)} = \Phi_g^{(\leftarrow)} = \Phi \\ \Rightarrow \beta_{l_g, \Phi^{(\leftarrow)}} = \beta_{l_d, \Phi^{(\leftarrow)}} = \beta_{l_d, \Phi_d^{(\leftarrow)}} = \beta_{l_g, \Phi_g^{(\leftarrow)}} = \beta \end{cases} \quad (3.136)$$

$$\begin{cases} \theta_p^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} - 2\Omega x_i/c + \phi_p - \phi_l [2\pi] \\ \tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} + \phi_l [2\pi] \\ \tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} + \phi_l [2\pi] \\ \tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} - 2\Omega x_i/c + \phi_p [2\pi] \\ \tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} + 2\Omega x_i/c - \phi_p + 2\phi_l [2\pi] \end{cases} \quad (3.137)$$

Sous ces conditions, en notant $\theta_p = \theta_p^{(\leftarrow)} - \Omega x_i/c$, les expressions (3.127) et (3.128) des champs sortants se réécrivent :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{out}[\omega] &\simeq \tilde{t}_i[\omega] \hat{\varphi}_{in}[\omega] + \tilde{r}_i[\omega] e^{-2i\omega x_i/c} \hat{\psi}_{in}[\omega] \\ &+ (1 - \omega/\Omega)\beta e^{+i\theta_p} e^{-i\Omega x_i/c} \left\{ e^{+i(\phi_p - \phi_l)} \tilde{t}_i[\omega] + e^{+i\phi_p} \tilde{t}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\ &+ (1 - \omega/\Omega)\beta e^{+i\theta_p} e^{-2i\omega x_i/c} e^{+i\Omega x_i/c} \left\{ \tilde{r}_i[\omega] + e^{+i\phi_p} \tilde{r}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\ &+ (1 + \omega/\Omega)\beta e^{-i\theta_p} e^{+i\Omega x_i/c} \left\{ e^{-i(\phi_p - \phi_l)} \tilde{t}_i[\omega] + e^{-i\phi_p} \tilde{t}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \\ &+ (1 + \omega/\Omega)\beta e^{-i\theta_p} e^{-2i\omega x_i/c} e^{-i\Omega x_i/c} \left\{ \tilde{r}_i[\omega] + e^{-i\phi_p} \tilde{r}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{out}[\omega] &\simeq \tilde{t}_i[\omega] \hat{\psi}_{in}[\omega] - \tilde{r}_i[\omega] e^{2i\omega x_i/c} \hat{\varphi}_{in}[\omega] \\ &+ (1 - \omega/\Omega)\beta e^{+i\theta_p} e^{+i\Omega x_i/c} \left\{ \tilde{t}_i[\omega] + e^{+i\phi_l} \tilde{t}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\ &- (1 - \omega/\Omega)\beta e^{+i\theta_p} e^{2i\omega x_i/c} e^{-i\Omega x_i/c} \left\{ e^{+i(\phi_p - \phi_l)} \tilde{r}_i[\omega] + e^{+i\phi_l} \tilde{r}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\ &+ (1 + \omega/\Omega)\beta e^{-i\theta_p} e^{-i\Omega x_i/c} \left\{ \tilde{t}_i[\omega] + e^{-i\phi_l} \tilde{t}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \\ &- (1 + \omega/\Omega)\beta e^{-i\theta_p} e^{2i\omega x_i/c} e^{+i\Omega x_i/c} \left\{ e^{-i(\phi_p - \phi_l)} \tilde{r}_i[\omega] + e^{-i\phi_l} \tilde{r}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \end{aligned} \quad (3.139)$$

Dans ces expressions, on a introduit les coefficients de réflexion et de transmission effectifs :

$$\begin{cases} \tilde{t}_i[\omega] = t_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l/c} \\ \tilde{r}_i[\omega] = r_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l/c} \end{cases} \quad (3.140)$$

Pour $\phi_i = \pi [2\pi]$, et $\phi_p = 0 [2\pi]$, les résultats (3.127) et (3.128) s'identifient exactement aux relations (2.21) et (2.22) donnant la transformation des champs diffusés par un miroir en mouvement harmonique dans l'approche perturbative. Par conséquent, on obtient dans ces conditions un parfait analogue du miroir oscillant à la fréquence Ω autour d'une position moyenne x_i , avec une phase temporelle $\theta_p = \theta_p^{(-)} - \Omega x_i/c$, une vitesse maximale $2c\beta$, et dont les propriétés optiques sont représentées par la matrice unitaire :

$$\tilde{\mathbf{S}}_i[\omega] = \begin{pmatrix} \tilde{t}_i[\omega] & \tilde{r}_i[\omega] \\ -\tilde{r}_i[\omega] & \tilde{t}_i[\omega] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l/c} & r_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l/c} \\ -r_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l/c} & t_i[\omega] e^{2i\omega(n(\omega)-1)l/c} \end{pmatrix} \quad (3.141)$$

De manière à avoir $\phi_i = \pi [2\pi]$ et $\phi_p = 0 [2\pi]$, il faudra d'une part choisir l'épaisseur l de chaque cristal telle que :

$$\exists p \in \mathbb{N} / \quad l = \frac{(2p+1)\pi c}{2\Omega(n(\Omega)-1)} \quad (3.142)$$

c'est-à-dire, en notant $\Lambda = 2\pi c/\Omega$ la longueur d'onde des pompes :

$$\exists p \in \mathbb{N} / \quad l = \frac{(2p+1)\Lambda}{4(n(\Lambda)-1)} \quad (3.143)$$

et d'autre part ajuster la différence de marche totale pour les deux faisceaux pompes en x_i à $2p'\pi c/\Omega = p'\Lambda$ avec $p' \in \mathbb{Z}$.

D.3.3 Cas du miroir parfaitement réfléchissant pour les pompes

Supposons maintenant que l'on choisisse un miroir parfaitement réfléchissant pour les faisceaux pompes, donc tel que⁶ :

$$\tilde{\mathbf{S}}_i[\Omega] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.144)$$

Dans ce cas, les flux et phases effectifs (3.130) deviennent :

$$\begin{cases} \sqrt{\Phi_d^{(-)}} e^{i\tilde{\theta}_{p,d}^{(-)}} \simeq -\sqrt{\Phi} e^{i\theta_p^{(-)}} e^{2i\Omega(n(\Omega)-1)l/c} e^{-2i\Omega x_i/c} \\ \sqrt{\Phi_g^{(-)}} e^{i\tilde{\theta}_{p,g}^{(-)}} \simeq -\sqrt{\Phi} e^{i\theta_p^{(-)}} e^{2i\Omega(n(\Omega)-1)l/c} e^{+2i\Omega x_i/c} \end{cases} \quad (3.145)$$

Transposons ce qui avait été fait dans le cas du miroir parfaitement transmissif, en appelant la phase supplémentaire associée à la dispersion dans les cristaux pour chaque faisceau pompe réfléchi $\phi_i = 2\Omega(n(\Omega)-1)l/c$. Le déphasage ϕ_p associé à la différence de marche totale des

⁶la valeur -1 des coefficients de réflexion correspond par exemple au cas du miroir métallique parfait [Hecht]

chemins suivis par les deux faisceaux pompes contra-propageants en x_i reste le même. Par contre, les relations entre les caractéristiques de pompage changent pour les phases effectives :

$$\begin{cases} l_g = l_d = l \text{ et } \Phi^{(\leftarrow)} = \Phi^{(\leftarrow)} = \Phi_d^{(\leftarrow)} = \Phi_g^{(\leftarrow)} = \Phi \\ \Rightarrow \beta_{l_g, \Phi^{(\leftarrow)}} = \beta_{l_d, \Phi^{(\leftarrow)}} = \beta_{l_d, \Phi_d^{(\leftarrow)}} = \beta_{l_g, \Phi_g^{(\leftarrow)}} = \beta \end{cases} \quad (3.146)$$

$$\begin{cases} \theta_p^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} - 2\Omega x_i/c + \phi_p - \phi_l [2\pi] \\ \tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} - 2\Omega x_i/c + \phi_l + \pi [2\pi] \\ \tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} + 2\Omega x_i/c + \phi_l + \pi [2\pi] \\ \tilde{\theta}_{p,d}^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} + 2\phi_l - \phi_p + \pi [2\pi] \\ \tilde{\theta}_{p,g}^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} + \phi_p + \pi [2\pi] \end{cases} \quad (3.147)$$

En procédant de la même façon que dans le cas du miroir complètement transmissif, on obtient les champs globalement diffusés par le système :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{out}[\omega] &\simeq \tilde{t}_i[\omega] \hat{\varphi}_{in}[\omega] + \tilde{r}_i[\omega] e^{-2i\omega x_i/c} \hat{\psi}_{in}[\omega] \\ &+ (1 - \omega/\Omega)\beta e^{+i\theta_p} e^{-i\Omega x_i/c} \left\{ e^{+i(\phi_p - \phi_l)} \tilde{t}_i[\omega] + e^{+i(\phi_l + \pi)} \tilde{t}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\ &+ (1 - \omega/\Omega)\beta e^{+i\theta_p} e^{-2i\omega x_i/c} e^{+i\Omega x_i/c} \left\{ \tilde{r}_i[\omega] + e^{+i(\phi_l + \pi)} \tilde{r}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\ &+ (1 + \omega/\Omega)\beta e^{-i\theta_p} e^{+i\Omega x_i/c} \left\{ e^{-i(\phi_p - \phi_l)} \tilde{t}_i[\omega] + e^{-i(\phi_l + \pi)} \tilde{t}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \\ &+ (1 + \omega/\Omega)\beta e^{-i\theta_p} e^{-2i\omega x_i/c} e^{-i\Omega x_i/c} \left\{ \tilde{r}_i[\omega] + e^{-i(\phi_l + \pi)} \tilde{r}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{out}[\omega] &\simeq \tilde{t}_i[\omega] \hat{\psi}_{in}[\omega] - \tilde{r}_i[\omega] e^{2i\omega x_i/c} \hat{\varphi}_{in}[\omega] \\ &+ (1 - \omega/\Omega)\beta e^{+i\theta_p} e^{+i\Omega x_i/c} \left\{ \tilde{t}_i[\omega] + e^{+i(\phi_p + \pi)} \tilde{t}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \\ &- (1 - \omega/\Omega)\beta e^{+i\theta_p} e^{2i\omega x_i/c} e^{-i\Omega x_i/c} \left\{ e^{+i(\phi_p - \phi_l)} \tilde{r}_i[\omega] + e^{+i(\phi_p + \pi)} \tilde{r}_i[\omega - \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \\ &+ (1 + \omega/\Omega)\beta e^{-i\theta_p} e^{-i\Omega x_i/c} \left\{ \tilde{t}_i[\omega] + e^{-i(\phi_p + \pi)} \tilde{t}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \\ &- (1 + \omega/\Omega)\beta e^{-i\theta_p} e^{2i\omega x_i/c} e^{+i\Omega x_i/c} \left\{ e^{-i(\phi_p - \phi_l)} \tilde{r}_i[\omega] + e^{-i(\phi_p + \pi)} \tilde{r}_i[\omega + \Omega] \right\} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \end{aligned} \quad (3.149)$$

En faisant le même choix de phase qu'auparavant : $\phi_l = \pi [2\pi]$, et $\phi_p = 0 [2\pi]$, les résultats (3.148) et (3.149) s'identifient encore une fois exactement aux expressions (2.21) et (2.22) des champs diffusés par un miroir en mouvement harmonique. Par conséquent, les critères retenus

pour l'épaisseur des cristaux et la différence de marche des pompes en x_i dans le cas du miroir très transmissif permettent ici aussi d'obtenir un parfait analogue du miroir oscillant à la fréquence Ω autour d'une position moyenne x_i , avec une phase temporelle $\theta_p = \theta_p^{(\leftarrow)} - \Omega x_i / c$, une vitesse maximale $2c\beta$, et dont les propriétés optiques sont représentées par la matrice unitaire $\tilde{\mathbf{S}}_i[\omega]$ [cf (3.141)].

En définitive, les systèmes considérés dans cette section présentent deux avantages notoires par rapport à ceux ne comportant qu'un cristal :

- d'une part ils étendent l'analogie à un mouvement apparent des deux côtés du miroir,
- d'autre part ils permettent de reproduire la dépendance en fréquence des coefficients de diffusion du miroir jusque dans les effets motionnels, moyennant l'attribution des propriétés dispersives des cristaux au miroir lui-même.

Toutefois, les conditions (3.143) requises pour l'épaisseur des cristaux sont susceptibles de rendre plus délicate la réalisation pratique d'une telle analogie. Le choix d'une cavité APO pourra alors s'avérer plus simple, en ce sens que seul le mouvement apparent de la face intra-cavité de chaque miroir sera nécessaire pour générer une transformation globale des champs équivalente à celle obtenue avec une cavité oscillante d'assez bonne finesse.

D.4 Cavité APO à deux cristaux

Dans cette section, nous allons nous intéresser à un dispositif de type APO, où sera accolé un cristal à la face intra-cavité de chaque miroir (cf figure 3.10). Nous ne placerons pas de cristal sur les faces externes des miroirs car, si la finesse n'est pas trop faible, les contributions dominantes au spectre émis proviendront des réflexions intra-cavité.

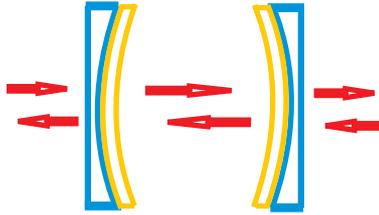


FIG. 3.10: Dispositif de type APO à deux cristaux, susceptible d'être analogue à une cavité oscillante.

On va déterminer les conditions de pompage permettant qu'une telle configuration diffuse les champs intra-cavité de la même manière que si chaque miroir oscillait mécaniquement à la fréquence des pompes. Rappelons d'abord le résultat (2.156) pour la transformation des

champs à l'intérieur d'une cavité en oscillation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{out,1}[\nu] \simeq \sqrt{T_1}\varphi_{in}[\nu] + \varepsilon_1\sqrt{R_1}e^{-2i\nu\phi_{a,1}} \left[\psi_{out,2}[\nu] + e^{+i(\phi_{b,1}+\phi_{a,1})}(1-\nu)\beta_{\{1\}} \psi_{out,2}[\nu-1] \right. \\ \qquad \left. + e^{-i(\phi_{b,1}+\phi_{a,1})}(1+\nu)\beta_{\{1\}} \psi_{out,2}[\nu+1] \right] \\ \psi_{out,2}[\nu] \simeq \sqrt{T_2}\psi_{in}[\nu] - \varepsilon_2\sqrt{R_2}e^{+2i\nu\phi_{a,2}} \left[\varphi_{out,1}[\nu] - e^{+i(\phi_{b,2}-\phi_{a,2})}(1-\nu)\beta_{\{2\}} \varphi_{out,1}[\nu-1] \right. \\ \qquad \left. - e^{-i(\phi_{b,2}-\phi_{a,2})}(1+\nu)\beta_{\{2\}} \varphi_{out,1}[\nu+1] \right] \end{array} \right. \quad (3.150)$$

La transformation globale des champs était obtenue par itération de (3.150) le long des trajectoires d'espace-temps associées aux rayons lumineux multiples réfléchis à l'intérieur de la cavité [cf figure 3.11].

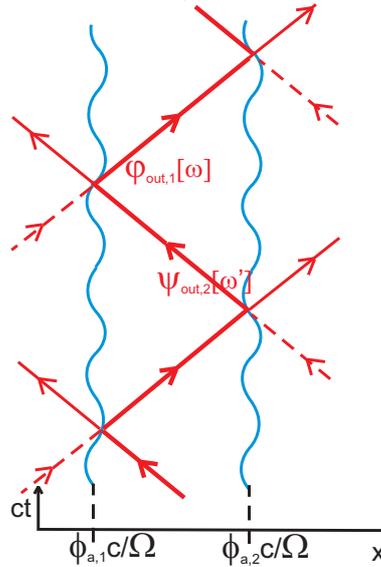


FIG. 3.11: Diffusion des composantes monochromatiques d'un rayon lumineux au sein d'une cavité oscillante (cas particulier de l'oscillation globale).

Ecrivons maintenant la relation de transformation (3.101) et sa relation symétrique pour les champs φ et ψ , respectivement diffusés par les systèmes {miroir+cristal} pompé unilatéralement vers la gauche et {cristal+miroir} pompé unilatéralement vers la droite, en supposant

de plus que la dispersion au sein des cristaux a été compensée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{out,1}[\nu] \simeq \sqrt{T_1} \varphi_{in}[\nu] + \varepsilon_1 \sqrt{R_1} e^{-2i\nu x_1 \Omega/c} \left[\begin{array}{l} \psi_{out,2}[\nu] + e^{+i\theta_p^{(-)}} (1-\nu) \beta_{l_1, \Phi^{(-)}} \psi_{out,2}[\nu-1] \\ + e^{-i\theta_p^{(-)}} (1+\nu) \beta_{l_1, \Phi^{(-)}} \psi_{out,2}[\nu+1] \end{array} \right] \\ \psi_{out,2}[\nu] \simeq \sqrt{T_2} \psi_{in}[\nu] - \varepsilon_2 \sqrt{R_2} e^{+2i\nu x_2 \Omega/c} \left[\begin{array}{l} \varphi_{out,1}[\nu] - e^{+i(\theta_p^{(-)} + \pi)} (1-\nu) \beta_{l_2, \Phi^{(-)}} \varphi_{out,1}[\nu-1] \\ - e^{-i(\theta_p^{(-)} + \pi)} (1+\nu) \beta_{l_2, \Phi^{(-)}} \varphi_{out,1}[\nu+1] \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (3.151)$$

Si l'on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{a,1} = \Omega x_1/c, \quad \phi_{a,2} = \Omega x_2/c \\ \phi_{b,1} = \theta_p^{(-)} - \Omega x_1/c, \quad \phi_{b,2} = \theta_p^{(-)} + \Omega x_2/c + \pi \end{array} \right. \quad (3.152)$$

l'itération se fera comme pour l'oscillation réelle [cf Fig.3.12]. Pour que cette itération soit

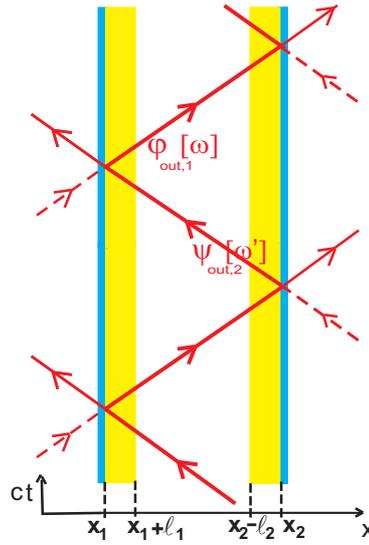


FIG. 3.12: Diffusion des composantes monochromatiques d'un rayon lumineux au sein d'un APO à 2 cristaux.

valable avec la configuration proposée dans la figure 3.10, il faut respecter les conditions de validité pour lesquelles les relations (3.151) ont été obtenues. Il convient alors :

- d'utiliser des miroirs dont les coefficients de diffusion sont sensiblement les mêmes pour toutes les fréquences sensées être résonantes dans la cavité,

- d'avoir des cristaux $\chi^{(2)}$ transparents et traités anti-reflet sur leur face "au contact du vide" à ces fréquences et tels que les conditions d'accord de phase (3.42) soient vérifiées pour les processus paramétriques impliqués,

- de faire en sorte que les miroirs soient très transmissifs pour les faisceaux pompes, et suffisamment réfléchissants pour les photons paramétriques résonants,
- de compenser la dispersion au sein des cristaux s'il s'avère que celle-ci détruit les conditions de résonances,
- de pomper l'ensemble {miroir 1 + cristal 1} avec un faisceau pompe unique se propageant vers la gauche, et l'ensemble {cristal 2 + miroir 2} avec un faisceau pompe unique se propageant vers la droite.

Par conséquent, il faudra injecter les pompes depuis l'intérieur de la cavité, à l'aide par exemple d'une lame séparatrice comme indiqué sur la figure 3.13. Si l'on veut que la cavité

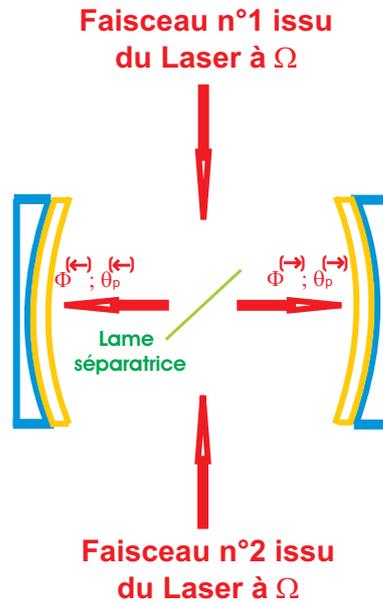


FIG. 3.13: Dispositif de type APO à deux cristaux avec injection centrale des pompes, réalisant potentiellement l'analogie avec l'Effet Casimir Dynamique

joue correctement son rôle d'amplificateur de la fluorescence paramétrique, il faudra faire en sorte que les photons créés au sein des cristaux ne soient pas diffusés par la lame séparatrice d'injection. On pourra par exemple prendre une lame suffisamment réfléchissante pour les pompes et suffisamment transmissive pour les fréquences résonantes au sein de la cavité. Plus précisément, il faudra que les résonances contribuant le plus au spectre soient correctement transmises par la lame. D'après les résultats du chapitre 2, si $K \geq 10$ par exemple, cette contrainte concernera principalement les fréquences $\omega = p\Omega/K \in [\Omega/10; 9\Omega/10]$.

Rappelons maintenant les conditions pour que le rayonnement émis par une cavité en

oscillation soit amplifié de manière résonante, en notant L la longueur moyenne de la cavité :

$$\begin{cases} \phi_{a,2} = \phi_{a,1} + K\pi \quad (K \in \mathbb{N}^*), \text{ c'est-à-dire : } \Omega L/c = K\pi, \\ \phi_{b,2} = \phi_{b,1} - (K+1)\pi \quad [2\pi], \end{cases} \quad (3.153)$$

D'après les relations de phase (3.152), et en prenant $x_1 = -L/2$ et $x_2 = +L/2$, les conditions analogues de "résonance" pour un APO à 2 cristaux $\chi^{(2)}$ sans dispersion et pompés depuis le centre de la cavité [cf Fig.3.13] seront :

$$\begin{cases} \Omega(x_2 - x_1)/c = K\pi \quad (K \in \mathbb{N}^*), \text{ c'est-à-dire : } \Omega L/c = K\pi, \\ \theta_p^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} - K\pi \quad [2\pi], \end{cases} \quad (3.154)$$

Pour satisfaire ces conditions, il faudra :

- que la distance L entre les miroirs soit ajustée de manière à ce que la fréquence des pompes utilisées soit un multiple entier du mode fondamental de la cavité,

- que, si par exemple la lame d'injection est placée au centre de la cavité, la différence de marche entre les chemins optiques suivis par chaque faisceau pompe depuis leur point de séparation initial à partir du faisceau mère jusqu'au point d'injection dans l'APO⁷ soit maintenue égale à : $(K\pi + 2p\pi)\frac{c}{\Omega} = (K+2p)\frac{\Lambda}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Pour K pair, on obtiendra donc l'analogie d'un mouvement respiratoire résonant de la cavité en s'arrangeant pour que la différence de marche soit un multiple entier pair d'une demi longueur d'onde de pompe. Pour K impair, on obtiendra l'analogie d'une oscillation globale résonante de la cavité en fixant la différence de marche à un multiple entier impair d'une demi longueur d'onde de pompe.

Si l'on veut de plus pouvoir transposer certains des résultats établis dans l'approche non-perturbative du chapitre 2, il pourra s'avérer intéressant de faire en sorte que les vitesses maximales du mouvement apparent de chaque miroir soient égales : $\beta_{l_1, \Phi(\leftarrow)} \simeq \beta_{l_2, \Phi(\leftarrow)} = \beta$. Etant donnés les paramètres intervenant dans leur expression générale :

$$\beta_{l, \Phi} = \frac{l\Omega}{2c\bar{n}_s} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A \bar{n}_p} \chi^{(2)}} \quad (3.155)$$

on pourra par exemple modifier le rapport entre les flux lumineux incidents sur la lame, jusqu'à l'observation du régime souhaité.

Sous réserve de pouvoir s'adapter simultanément à toutes ces contraintes⁸, le dispositif APO que l'on vient de présenter permettra en définitive d'obtenir indifféremment l'analogie d'un mode "respiratoire" résonant ou d'oscillation globale résonante de la cavité, via un simple ajustement de la phase relative des faisceaux utilisés pour pomper les cristaux. Toutefois, l'utilisation d'une lame d'injection adéquate à l'intérieur de la cavité pourra s'avérer délicate

⁷en n'oubliant pas de tenir compte des éventuelles phases associées aux réflexions

⁸ou du moins, aux plus critiques

à mettre en oeuvre dans la pratique. Il serait par conséquent plus judicieux de trouver un système fournissant le même type d'analogie, sans nécessiter l'injection des pompes dans la région intra-cavité. Dans la prochaine section, notre étude portera donc sur un dispositif à pompage externe.

D.5 APO monolithique

Nous allons dans cette section montrer qu'il est aussi possible d'obtenir l'analogie d'une cavité en oscillation résonante avec un dispositif de type APO monolithique tel que celui représenté sur la figure 3.14. Nous allons voir qu'un pompage bilatéral externe permet en effet de reproduire lors de la réflexion sur chaque miroir les conditions d'un mouvement apparent avec une phase relative ajustable. Un autre intérêt de ce système par rapport à celui étudié dans la section précédente est de ne pas requérir de traitement anti-reflet sur le cristal.

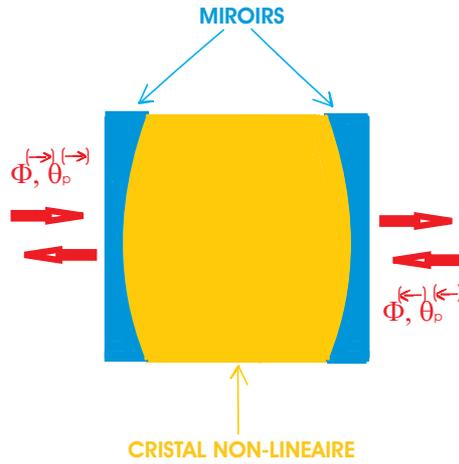


FIG. 3.14: Système optique de type APO monolithique susceptible d'être analogue à une cavité en oscillation résonante.

Pour simplifier notre étude, nous allons considérer les miroirs complètement transmissifs pour les faisceaux pompes et suffisamment réfléchissants pour les photons émis dans les modes propres de la cavité par conversion paramétrique au sein du cristal. La figure 3.15 représente la propagation des champs dans l'espace-temps au sein de ce système. On note $L = x_2 - x_1$ la longueur de la cavité et l celle du cristal. Par construction, ces deux longueurs sont quasi-identiques : $l \simeq L$. Dans la pratique, on pourra toutefois être amené à insérer des couches diélectriques passives entre le cristal et les miroirs de façon à compenser la dispersion, auquel cas ces deux longueurs seront différentes. De façon à alléger l'écriture des expressions que l'on va manipuler, on choisit l'origine des abscisses au centre de l'APO, en posant $x_1 = -L/2$ et $x_2 = +L/2$. Par ailleurs, les champs entrants dans le dispositif seront notés φ_{in} et ψ_{in} . Pour déterminer la transformation des champs sur chaque miroir au sein de la cavité, on va

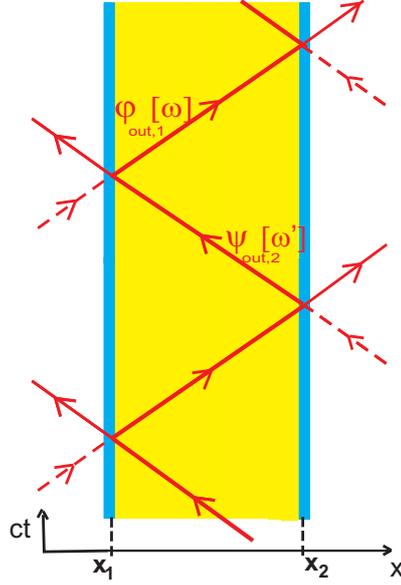


FIG. 3.15: Diagramme d'espace-temps représentant la trajectoire d'un rayon lumineux au sein de l'APO monolithique.

utiliser la transformation (3.91) des champs φ et ψ lors de la traversée d'un cristal, étudiée dans la section C.2. Nous allons de plus supposer les coefficients de diffusion des miroirs quasi-identiques pour tous les signaux paramétriques résonants, et faire l'hypothèse que les conditions d'accord de phase associées sont satisfaites dans le cristal. En supposant enfin que l'on parvienne à compenser exactement la dispersion pour les fréquences concernées, la transformation des champs juste après réflexion sur chaque miroir s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_{out,-L/2}[\omega] \simeq \sqrt{T_1} \hat{\varphi}_{in}[\omega] + \varepsilon_1 \sqrt{R_1} e^{+i\omega L/c} \times \left[\hat{\psi}_{out,+L/2}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(-)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l,\Phi^{(-)}} \hat{\psi}_{out,+L/2}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(-)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l,\Phi^{(-)}} \hat{\psi}_{out,+L/2}[\omega + \Omega] \right] \\ \hat{\psi}_{out,+L/2}[\omega] \simeq \sqrt{T_2} \hat{\psi}_{in}[\omega] - \varepsilon_2 \sqrt{R_2} e^{+i\omega L/c} \times \left[\hat{\varphi}_{out,-L/2}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(-)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l,\Phi^{(-)}} \hat{\varphi}_{out,-L/2}[\omega - \Omega] \right. \\ \left. + e^{-i\theta_p^{(-)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l,\Phi^{(-)}} \hat{\varphi}_{out,-L/2}[\omega + \Omega] \right] \end{array} \right. \quad (3.156)$$

ce qui correspond exactement aux transformations (2.156) pour des miroirs oscillants, avec les phases :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{a,1} = -\Omega L/2c \quad \phi_{a,2} = +\Omega L/2c \\ \phi_{b,1} = \theta_p^{(-)} + \Omega L/2c \quad \phi_{b,2} = \theta_p^{(-)} + \Omega L/2c + \pi \end{array} \right. \quad (3.157)$$

Par conséquent, à chaque réflexion au sein de la cavité de l'APO pompé à Ω , les champs aux fréquences de résonance se transformeront comme si les miroirs étaient en oscillation mécanique à Ω (cf figure 3.11), autour de leur position moyenne respective $-L/2$ et $L/2$, et avec une phase temporelle respective $\theta_p^{(\leftarrow)} + \Omega L/2c$ et $\theta_p^{(\leftarrow)} + \Omega L/2c + \pi$. L'itération fréquentielle sur la trajectoire d'espace-temps associée à chaque rayon lumineux multiples fois réfléchi au sein de l'APO se fera alors de manière similaire, et le spectre résultant à l'extérieur de la cavité sera donc le même⁹. Les conditions de mouvement résonant (2.131) s'écrivent ici aussi :

$$\begin{cases} \Omega L/c = K\pi \\ \theta_p^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\leftarrow)} - K\pi [2\pi] \end{cases} \quad (3.158)$$

Afin de satisfaire ces conditions, il faudra donc :

- ajuster la fréquence du laser pompe à un multiple entier du mode fondamental de la cavité,

- imposer que le déphasage au centre de l'APO entre les deux faisceaux pompes contre-propageants soit de $K\pi$ (modulo 2π), c'est-à-dire que la différence de marche entre les chemins optiques suivis par les faisceaux pompes depuis leur point de séparation à partir du faisceau mère jusqu'au centre de l'APO soit de $(K + 2p)\frac{\Delta}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Pour K pair, on obtiendra donc l'analogie d'un mouvement respiratoire résonant de la cavité en s'arrangeant pour que la différence de marche soit un multiple entier pair d'une demi-longueur d'onde de pompe. Pour K impair, on obtiendra l'analogie d'une oscillation globale résonante de la cavité en fixant la différence de marche à un multiple entier impair d'une demi-longueur d'onde de pompe.

Si l'on souhaite de plus avoir : $\beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}} = \beta_{l,\Phi^{(\rightarrow)}} = \beta$, il conviendra d'ajuster les flux $\Phi^{(\leftarrow)}$ et $\Phi^{(\rightarrow)}$ de manière à ce que leurs valeurs numériques soient le plus proche possible. On qualifiera par la suite d' "homocinétique" un tel mouvement apparent.

Il conviendra en définitive de proposer un montage permettant de vérifier toutes ces conditions avec une stabilité suffisamment robuste. Nous y reviendrons dans la partie **F**.

⁹en négligeant les termes associés à la réflexion directe sur les faces externes de la cavité

E Discussion de l'analogie et contraintes expérimentales

Dans cette partie, nous allons discuter certains points autour desquels les résultats des parties précédentes se sont articulés pour proposer des systèmes analogues aux miroirs oscillants, et voir quelles contraintes expérimentales certaines des hypothèses que nous avons formulées nous amèneront à surmonter. Dans un premier temps, nous clarifierons le statut de la génération de seconde harmonique par rapport aux effets du vide que l'on veut obtenir et nous en dégagerons une condition simple pour que cet effet ne remette pas en cause nos calculs. Dans un deuxième temps, nous verrons comment réaliser les conditions d'accord de phase requises par l'analogie, en se fixant un certain nombre de critères à respecter. Enfin, nous calculerons l'ordre de grandeur des flux photoniques que l'on pourra espérer obtenir avec chacune des configurations s'accommodant de toutes les contraintes précédemment identifiées.

E.1 Problématique liée à la génération de seconde harmonique

Comme nous l'avons déjà évoqué plus tôt, le pompage des cristaux peut aussi impliquer des processus dits de "génération de seconde harmonique", au cours desquels deux photons pompes de fréquence Ω sont absorbés pour donner naissance à un photon de fréquence 2Ω . Ces processus, s'ils sont permis par le cristal, donneront naissance à des flux lumineux bien plus intenses que ceux issus de la fluorescence paramétrique. Ils risquent donc a priori de rendre les photons que nous cherchons indétectables. Toutefois, dans l'effet que l'on souhaite voir, les fréquences multiples de Ω sont sensées avoir une densité spectrale nulle. Par conséquent, à l'aide de filtres adaptés, on pourra se débarrasser de la composante à 2Ω sans affecter les signaux qui nous intéresseront. Cette remarque vaut aussi pour la composante à Ω associée aux pompes.

Par ailleurs, cet effet ne remettra pas en cause notre analogie, car il serait aussi présent pour un miroir oscillant mécaniquement à Ω si on l'irradiait avec des faisceaux laser cohérents de fréquence Ω . C'est un effet classique d'optique non-linéaire dans les cristaux comme c'est un effet classique d'électromagnétisme avec conditions aux limites non-stationnaires pour le miroir en mouvement, alors que la fluorescence paramétrique comme l'Effet Casimir Dynamique sont d'origine purement quantiques.

Le seul point susceptible de nous gêner concerne l'approximation des pompes constantes. En effet, si le flux photonique de seconde harmonique émis s'avère être de l'ordre de celui des pompes, alors notre approximation serait mise en défaut. Nous allons donc évaluer ce flux dans le cas où ces processus seraient le plus favorisés, c'est-à-dire en considérant que les conditions d'accord de phase :

$$|\Delta k(2\Omega)|l = |\Omega n_i(\Omega) + \Omega n_j(\Omega) - 2\Omega n_k(2\Omega)|l/c \ll 1 \quad (3.159)$$

sont vérifiées. n_i , n_j et n_k sont les indices de réfraction associés à la polarisation de chacun des photons mis en jeu.

D'après le résultat (3.89), après une traversée de cristal de longueur l pompé bilatéralement, les champs sortants s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_{out}[\omega] = e^{i\omega(n(\omega)-1)l/c} \left\{ \hat{\varphi}_{in}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{in}[\omega - \Omega] \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\varphi}_{in}[\omega + \Omega] \right\} \\ \hat{\psi}_{out}[\omega] = e^{i\omega(n(\omega)-1)l/c} \left\{ \hat{\psi}_{in}[\omega] + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 - \omega/\Omega) \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in}[\omega - \Omega] \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + e^{-i\theta_p^{(\leftarrow)}} (1 + \omega/\Omega) \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}} \hat{\psi}_{in}[\omega + \Omega] \right\} \end{array} \right. \quad (3.160)$$

Pour $\omega > \Omega$, les opérateurs d'annihilation correspondant exprimés en fonction de la fréquence réduite $\nu = \omega/\Omega$ sont donnés par :

$$a_{out}[\nu] \simeq \dots \left\{ \dots + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} \sqrt{\nu(\nu-1)} \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}} a_{in}[\nu-1] + \dots \right\} \quad (3.161)$$

$$b_{out}[\nu] \simeq \dots \left\{ \dots + e^{+i\theta_p^{(\leftarrow)}} \sqrt{\nu(\nu-1)} \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}} b_{in}[\nu-1] + \dots \right\} \quad (3.162)$$

Par conséquent, en moyennant avec l'état produit tensoriel associé aux faisceaux pompes contra-propageants : $|\{\lambda^{(\leftarrow)}[\tilde{\nu}]\} \rangle \otimes |\{\lambda^{(\leftarrow)}[\tilde{\nu}]\} \rangle$, on obtient, toujours pour $\nu > 1$:

$$\begin{aligned} & \langle a_{out}^\dagger[\nu] a_{out}[\nu'] \rangle \\ & \simeq \sqrt{\nu(\nu-1)} \sqrt{\nu'(\nu'-1)} \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}}^2 \langle a_{in}^\dagger[\nu-1] a_{in}[\nu'-1] \rangle \\ & \simeq \nu(\nu-1) \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}}^2 \Phi^{(\leftarrow)}(2\pi/\Omega) \delta(\nu-2) (2\pi/\Omega) \delta(\nu'-2) \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} & \langle b_{out}^\dagger[\nu] b_{out}[\nu'] \rangle \\ & \simeq \sqrt{\nu(\nu-1)} \sqrt{\nu'(\nu'-1)} \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}}^2 \langle b_{in}^\dagger[\nu-1] b_{in}[\nu'-1] \rangle \\ & \simeq \nu(\nu-1) \beta_{l,\Phi^{(\leftarrow)}}^2 \Phi^{(\leftarrow)}(2\pi/\Omega) \delta(\nu-2) (2\pi/\Omega) \delta(\nu'-2) \end{aligned} \quad (3.164)$$

Les flux photoniques que l'on cherche à déterminer pourront alors se calculer de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{2\Omega}^{(\leftarrow)} = \int_1^{+\infty} \frac{\Omega d\nu}{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\Omega d\nu'}{2\pi} \langle a_{out}^\dagger[\nu] a_{out}[\nu'] \rangle \\ \Phi_{2\Omega}^{(\leftarrow)} = \int_1^{+\infty} \frac{\Omega d\nu}{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\Omega d\nu'}{2\pi} \langle b_{out}^\dagger[\nu] b_{out}[\nu'] \rangle \end{array} \right. \quad (3.165)$$

ce qui donne, pour les flux respectivement émis vers la droite et vers la gauche :

$$\begin{cases} \Phi_{2\Omega}^{(\rightarrow)} \simeq 2\beta_{i,\Phi}^2 \Phi^{(\rightarrow)} \\ \Phi_{2\Omega}^{(\leftarrow)} \simeq 2\beta_{i,\Phi}^2 \Phi^{(\leftarrow)} \end{cases} \quad (3.166)$$

Ce résultat montre que, pour une seule traversée de cristal, tant que $\beta_{i,\Phi}^{(\rightleftharpoons)} \ll 1$, l'approximation des pompes constantes sera valable.

Dans les expériences usuelles d'Optique Quantique avec des cristaux $\chi^{(2)}$, on aura typiquement [Bachor, Gigan(PhD), Laurat(PhD)] :

$\bar{n} \simeq 1$	$\overline{\chi^{(2)}} \simeq 10^{-11} \text{m.V}^{-1}$	$l \simeq 1 \text{cm}$	$\Lambda \simeq 1 \mu\text{m}$	$P \simeq 0, 1 \text{W}$	$w \simeq 100 \mu\text{m}$
--------------------	---	------------------------	--------------------------------	--------------------------	----------------------------

\bar{n} , $\overline{\chi^{(2)}}$ et l sont respectivement l'indice moyen, la susceptibilité non-linéaire moyenne et l'épaisseur du cristal. $\Lambda = 2\pi c/\Omega$, $P = \hbar\Omega\Phi$ et w sont respectivement la longueur d'onde, la puissance et le waist des faisceaux pompes. C'est souvent au niveau du waist que s'effectue le pompage du cristal. Si A est l'aire de focalisation dans le cristal, on aura alors $A \simeq \pi w^2$. Un waist $w \simeq 100 \mu\text{m}$ correspond par exemple à une aire $A \simeq 3.10^{-8} \text{m}^2$. Avec les valeurs données dans le tableau ci-dessus, on obtient :

$$\beta_{i,\Phi} = \frac{l\Omega}{2c\bar{n}} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A \bar{n}}} \overline{\chi^{(2)}} \simeq \frac{l\pi}{\Lambda\bar{n}} \sqrt{\frac{P}{2\pi\varepsilon_0 c w^2 \bar{n}}} \overline{\chi^{(2)}} \simeq 8.10^{-3} \quad (3.167)$$

Par conséquent, dans des conditions standards, l'approximation des pompes constantes sera valable lors d'une seule traversée de cristal. De plus, avec des cristaux d'une épaisseur de l'ordre du centimètre, les conditions d'accord de phase sélectionneront naturellement un seul type de processus et un seul jeu de fréquences pour les photons impliqués [Debuissch(PhD)]. On peut donc dans ce cas facilement s'arranger pour que les conditions d'accord de phase favorisent l'émission paramétrique par rapport à la génération de seconde harmonique. Par la suite, on sera amené à considérer des cristaux d'épaisseur plus faible, ce qui relâchera la sélection opérée par les conditions d'accord de phase, mais réduira la valeur de $\beta_{i,\Phi}$. En définitive, même avec des puissances surfaciques de pompage plus élevées, on aura toujours $\beta_{i,\Phi} \ll 1$, et l'approximation des pompes constantes pourra être appliquée dans toutes les situations que l'on envisagera.

La situation dans les APO ou les OPO pourrait être différente, étant donnée l'amplification opérée par la cavité sur les signaux paramétriques. Dans ce cas en effet, on peut démontrer que, sous réserve d'accord de phase, le flux de seconde harmonique émis à résonance à l'extérieur de la cavité sera donné par $\Phi_{2\Omega} \simeq 2(2\beta_{i,\Phi})^2 (F/\pi) \Phi$ si la pompe n'est pas résonante et par $\Phi_{2\Omega} \simeq 2\pi(2\beta_{i,\Phi} F/\pi)^2 \Phi$ si la pompe est résonante. Par conséquent, tant que l'on sera suffisamment en-dessous du seuil d'oscillation : $2\beta_{i,\Phi} F/\pi \ll 1$, l'approximation des pompes constantes restera correcte.

E.2 Contraintes d'accord de phase

Dans la plupart des calculs menés dans les parties **B**, **C** et **D** de ce chapitre, nous avons supposé les conditions d'accord de phase (3.42) vérifiées. L'objet de cette partie est de préciser les critères requis pour satisfaire ces conditions, ainsi que les contraintes qu'elles imposeront par rapport à l'analogie que l'on souhaite obtenir, puis de proposer un matériau semi-conducteur (*CdS*) présentant des caractéristiques adaptées par rapport aux critères que l'on aura retenus.

E.2.1 Considérations générales

Dans les cristaux non-linéaires usuels, la biréfringence permet habituellement d'obtenir l'accord de phase avec l'un des deux types d'interactions paramétriques suivantes :

- soit une interaction "type I" : les photons paramétriques aux fréquences ω et $\Omega - \omega$ en accord de phase avec les photons pompe à Ω sont émis avec une polarisation identique et orthogonale à celle des pompes,

- soit une interaction "type II" : les photons paramétriques sont émis dans deux polarisations orthogonales, l'une d'entre elles étant identique à celle des pompes.

Or, pour un miroir en oscillation mécanique réelle dans le vide, des calculs effectués en considérant un espace tri-dimensionnel [Mundarain(98)] ont montré que, si le mouvement du miroir est parfaitement longitudinal, deux photons émis dans une même paire auront une polarisation identique. Toutefois, il semble que quand le mouvement possède également des composantes transverses, alors deux photons émis dans une même paire pourront avoir une polarisation distincte. Nous considérerons donc préférentiellement des interactions de type I, mais en se laissant tout-de-même la possibilité d'envisager des interactions type II (ou autres). Un calcul en espace tri-dimensionnel sera à l'avenir nécessaire pour déterminer quel est le mouvement analogue des phénomènes que nous décrirons en fonction du type d'interaction dominant dans le cristal.

Avec un cristal de longueur l , la condition (3.42) écrite pour une paire de photons $\{\omega; \Omega - \omega\}$ avec une interaction type I est de la forme :

$$\begin{cases} |\Delta k_-(\omega, \Omega)|l = |\Omega n_{\perp}(\Omega) - (\Omega - \omega)n_{//}(\Omega - \omega) - \omega n_{//}(\omega)|l/c \ll 1 \\ |\Delta k_+(\omega, \Omega)|l = |\Omega n_{\perp}(\Omega) + (\Omega - \omega)n_{//}(\Omega - \omega) + \omega n_{//}(\omega)|l/c \gg 1 \end{cases} \quad (3.168)$$

Les indices \perp et $//$ sont relatifs respectivement à la polarisation des photons pompes et à celle des photons émis par paires. La condition sur Δk_- correspond, on le rappelle, à un critère nécessaire pour une interférence constructive entre les champs issus de l'émission paramétrique en différents points du cristal, et concerne les paires de photons émises dans le même sens que les photons pompes leur ayant donné naissance. La condition sur Δk_+ assurera que la superposition des champs associés aux paires de photons émises dans le sens opposé à celui de leurs photons pompes "pères" donnera lieu à une interférence destructive, ce qui correspondra dans la pratique en espace tri-dimensionnel à restreindre l'émission paramétrique dans un

cône d'angle solide suffisamment faible autour de la direction considérée dans le modèle unidimensionnel. Il faudrait en toute rigueur que ces conditions soient aussi vérifiées pour les couples de fréquences $\{\omega; \Omega + \omega\}$, afin que les processus impliquant des photons thermiques interviennent de la même manière que pour un miroir en oscillation réelle dans un champ thermique. Mais on a vu dans le chapitre 2 que si $k_B T_{eq} \ll \hbar\Omega/K$, ces processus thermiques seront négligeables. A température ambiante, pour Ω dans le visible ou le proche infra-rouge et pour K pas trop élevé, on pourra donc se dispenser de cette contrainte.

Par ailleurs, la validité de tous les calculs du chapitre 3 pour lesquels nous avons fait appel à des conditions d'accord de phase s'apparentant à (3.168), requiert en fait uniquement la satisfaction des conditions suivantes :

$$\begin{cases} |\sin_C(\Delta k_-(\omega, \Omega)l/2)| \simeq 1 \text{ et : } e^{i\Delta k_-(\omega, \Omega)l/2} \simeq 1 \\ |\sin_C(\Delta k_+(\omega, \Omega)l/2)| \ll 1 \end{cases} \quad (3.169)$$

Cette précision va nous permettre de fixer des conditions suffisantes pour que tous les calculs en question soient valables. Une idée simple consiste à déterminer quelles valeurs des paramètres $|\Delta k_{\pm}(\dots)l$ sont satisfaisantes pour vérifier les relations (3.169), et à arrêter un choix de valeurs limites raisonnables. Si l'on pose $x = |\Delta k_{\pm}(\dots)l$, on remarque par exemple que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0; 0,3] : 0,996 \leq |\sin_C(x/2)| \leq 1 \text{ et : } |e^{ix/2} - 1| \leq 0,162 \\ \forall x \geq 20 : |\sin_C(x/2)| < 0,1 \end{cases} \quad (3.170)$$

Pour vérifier (3.169), on pourra donc se contenter d'avoir :

$$\begin{cases} |\Delta k_-(\omega, \Omega)l = |\Omega n_{\perp}(\Omega) - (\Omega - \omega)n_{//}(\Omega - \omega) - \omega n_{//}(\omega)|l/c \leq 0,3 \\ |\Delta k_+(\omega, \Omega)l = |\Omega n_{\perp}(\Omega) + (\Omega - \omega)n_{//}(\Omega - \omega) + \omega n_{//}(\omega)|l/c \geq 20 \end{cases} \quad (3.171)$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$\begin{cases} (\Omega l/c) |\Delta n_-(\omega, \Omega)| \leq 0,3 \\ (\Omega l/c) |\Delta n_+(\omega, \Omega)| \geq 20 \end{cases} \quad (3.172)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta n_-(\omega, \Omega) = n_{\perp}(\Omega) - \left[(1 - \omega/\Omega)n_{//}(\Omega - \omega) + (\omega/\Omega)n_{//}(\omega) \right] \\ \Delta n_+(\omega, \Omega) = n_{\perp}(\Omega) + \left[(1 - \omega/\Omega)n_{//}(\Omega - \omega) + (\omega/\Omega)n_{//}(\omega) \right] \end{cases} \quad (3.173)$$

Nous allons donc être amenés à étudier le comportement dispersif des cristaux. A l'aide de tables donnant les propriétés optiques des composés $\chi^{(2)}$ usuels [Gupta]¹⁰, on va pouvoir choisir les matériaux les mieux adaptés à des conditions d'accord de phase satisfaisantes

¹⁰ Consulter en particulier les pages 136 à 140 de cet ouvrage.

quant à l'analogie que l'on souhaite obtenir. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps préciser quels seront les critères généraux nécessaires.

Commençons par les conditions relatives aux Δk_+ . Si l'on appelle \bar{n} l'indice moyen du cristal à la fréquence pompe, l'ordre de grandeur de $\Delta n_+(\omega, \Omega)$ pour ω et Ω dans un même domaine de transparence du cristal, sera de $2\bar{n}$. Par conséquent :

$$(\Omega l/c) |\Delta n_+(\omega, \Omega)| \geq 20 \Leftrightarrow (\Omega l/c) \geq 10/\bar{n} \quad (3.174)$$

c'est-à-dire, en notant $\Lambda = 2\pi c/\Omega$ la longueur d'onde des pompes :

$$\begin{aligned} (\Omega l/c) |\Delta n_+(\omega, \Omega)| \geq 20 &\Leftrightarrow l \geq 10\Lambda/2\pi\bar{n} \\ &\Leftrightarrow l \geq 1,6(\Lambda/\bar{n}) \end{aligned} \quad (3.175)$$

Sachant que $1 < \bar{n} < 10$ dans les cristaux $\chi^{(2)}$ usuels, cette relation imposera une restriction à des cristaux dont l'épaisseur minimale sera de l'ordre de la longueur d'onde de pompe utilisée. Par ailleurs, en ce qui concerne les conditions relatives aux Δk_- , on aura :

$$\begin{aligned} (\Omega l/c) |\Delta n_-(\omega, \Omega)| \leq 0,3 &\Leftrightarrow |\Delta n_-(\omega, \Omega)| \leq 0,3\Lambda/2\pi l \\ &\Leftrightarrow |\Delta n_-(\omega, \Omega)| \leq 4,7 \cdot 10^{-2}(\Lambda/l) \end{aligned} \quad (3.176)$$

donc, suivant l'épaisseur et les propriétés dispersives du cristal utilisé, on pourra mettre simultanément en accord de phase un nombre plus ou moins grand de couples de fréquences $\{\omega; \Omega - \omega\}$.

Dans les expériences courantes d'Optique Quantique avec des matériaux $\chi^{(2)}$ tels que le KTP ou le KDP, la longueur d'onde des pompes est choisie aux alentours de $1\mu\text{m}$ et la taille des cristaux utilisés est généralement supérieure au millimètre, ce qui impose d'avoir $|\Delta n_-(\omega, \Omega)| \leq 4,7 \cdot 10^{-5}$. Cette condition est, pour la plupart des cristaux, très sélective quant aux fréquences susceptibles d'être mises en accord de phase, et nécessite, pour être satisfaite, l'utilisation des propriétés de biréfringence du cristal, ou encore l'emploi d'une technique dite de quasi-accord de phase¹¹ [Joffre(Cours)]. On voit donc que, pour un pompage dans le visible ou le proche infra-rouge et pour une taille de cristal macroscopique, il sera difficilement envisageable de mettre une large gamme de couples $\{\omega; \Omega - \omega\}$ en accord de phase avec la fréquence pompe Ω . Par contre, si l'on prend l'épaisseur l à la limite inférieure imposée par (3.175), il suffira d'avoir $|\Delta n_-(\omega, \Omega)| \leq 0,03\bar{n}$, ce qui sera beaucoup moins sélectif, et ceci d'autant moins que l'indice moyen du cristal sera élevé. Suivant les propriétés dispersives du cristal envisagé, on pourra dans ce cas espérer mettre en accord de phase un nombre plus important de couples $\{\omega; \Omega - \omega\}$. Pour l'analogie avec un miroir unique, il conviendrait par exemple d'avoir cet accord pour $\omega \in [\Omega/10; 9\Omega/10]$, de manière à obtenir au moins les 8 dixièmes de l'arche parabolique prévue dans le spectre émis.

¹¹cette technique consiste à prendre un cristal constitué d'un empilement alterné de couches, de sorte que le signe de la non-linéarité $\chi^{(2)}$ est changé périodiquement pour compenser le désaccord.

Si l'on envisage d'utiliser une cavité, les conditions de résonance seront :

$$\Omega L/c = K\pi, \quad K \in \mathbb{N}^*, \quad \text{et :} \quad (3.177)$$

$$\omega = (p/K)\Omega, \quad p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.178)$$

D'après les résultats du chapitre 2, on s'attend à avoir de l'ordre de K pics détectables, c'est-à-dire de l'ordre de $K/2$ couples de fréquences $\{(1-p/K)\Omega; (p/K)\Omega\}$ devant être simultanément en accord de phase avec les pompes à Ω . Ici aussi donc, pour $K \geq 4$, il sera préférable d'employer des cristaux de taille microscopique. D'autre part, du fait des propriétés dispersives des cristaux, il peut s'avérer très délicat de mettre simultanément en résonance plus d'un couple de fréquence dans la cavité d'un APO, surtout si ces couples doivent être répartis sur une large bande de fréquences. Pour $K \geq 10$ par exemple, les résonance optiques d'un APO fonctionnant dans un régime analogue à celui d'une cavité en oscillation résonante dans le vide, devront appartenir à un domaine dont l'extension minimale est de $8/10$ de Ω . Une solution envisageable consiste donc à se limiter à $K = 2$ ou 3 . D'après (3.177), avec $K = 2$ ou 3 , la longueur de la cavité devra être :

$$L = \Lambda, \quad \text{ou } 3\Lambda/2 \quad (3.179)$$

c'est-à-dire par exemple :

$$\begin{cases} L \simeq 1,5\mu\text{m}, \quad \text{ou } 2,25\mu\text{m} & \text{pour } \Lambda \simeq 1,5\mu\text{m}, \\ L \simeq 1\mu\text{m}, \quad \text{ou } 1,5\mu\text{m} & \text{pour } \Lambda \simeq 1\mu\text{m}, \\ L \simeq 0,6\mu\text{m}, \quad \text{ou } 0,9\mu\text{m} & \text{pour } \Lambda \simeq 0,6\mu\text{m}, \end{cases} \quad (3.180)$$

Nous envisagerons donc de travailler avec des microcavités. Pour obtenir de tels dispositifs, il semble approprié de faire croître un échantillon monolithique¹², avec une première couche de traitement diélectrique, puis le cristal, et enfin une deuxième couche de traitement diélectrique. Les deux couches diélectriques joueront alors le rôle de la cavité et, étant accolées au cristal, le recours aux traitements anti-reflets ne sera pas nécessaire. On peut par exemple penser à utiliser des structures type VCSEL¹³ [Iga]. Les fluctuations de la longueur effective de la cavité pourront s'avérer difficiles à contrôler, et il sera éventuellement nécessaire d'asservir la fréquence des faisceaux pompes sur les résonances de l'émission paramétrique.

Par ailleurs, si la portion active du cristal a la taille de la cavité, c'est-à-dire si $l \simeq L$, pour que les conditions (3.175) et (3.179) soient compatibles, il faudra choisir un cristal tel que $\bar{n} \geq 1,6$. La condition (3.176) s'écrira alors, pour les résonances correspondant respectivement à $K = 2$ et 3 :

$$\begin{cases} (\Omega L/c)\Delta n_-(\Omega/2, \Omega) \leq 0,3 \Leftrightarrow \Delta n_-(\Omega/2, \Omega) \lesssim 0,047 \\ (\Omega L/c)\Delta n_-(\Omega/3, \Omega) \leq 0,3 \Leftrightarrow \Delta n_-(\Omega/3, \Omega) \lesssim 0,031 \end{cases} \quad (3.181)$$

¹²par épitaxie par exemple

¹³"Vertical Cavity Surface Emitting Laser"

Cette propriété devrait assurer une bonne stabilité des conditions d'accord de phase, notamment par rapport aux fluctuations thermiques du cristal¹⁴, et permettre une accordabilité suffisante de la fréquence Ω . Si \bar{n} est suffisamment supérieur à 1,6, on pourra encore améliorer ces critères en diminuant l'épaisseur du cristal jusqu'à la limite inférieure des conditions imposées par (3.175), tout en maintenant une distance $L = \Lambda$ ou $3\Lambda/2$ entre les miroirs. On pourra alors tirer avantage, lors de la croissance de l'échantillon, de combler les "vides" de la cavité par des couches semi-conductrices ou diélectriques passives compensant tant que faire se peut la dispersion du cristal non-linéaire aux fréquences sensées être résonantes. Il faudra dans tous les cas s'assurer que ces fréquences tombent dans le domaine de transparence du cristal non-linéaire, de manière à ce qu'elles ne soient pas absorbées, ce qui compromettrait leur caractère résonant. De même, la fréquence de pompe Ω devra être choisie dans le domaine de transparence en question, afin que les processus d'émission paramétriques soient efficaces, et pour éviter une détérioration du matériau si la puissance de pompage élevée. Dans un autre registre, si la génération de seconde harmonique est permise par le cristal, et si son absorption est susceptible de provoquer une dégradation du matériau, il faudra éventuellement prendre garde à ce que la fréquence 2Ω tombe elle aussi dans le domaine de transparence.

En résumé :

- pour l'analogie avec un miroir unique, on choisira un cristal transparent sur un domaine spectral assez large, idéalement $[\Omega/10; 2\Omega]$, c'est-à-dire $[\Lambda/2; 10\Lambda]$, et une épaisseur suffisamment faible pour que les conditions d'accord de phase soient vérifiées pour tous les couples de fréquences $\{\omega; \Omega - \omega\}$ appartenant au domaine $[\Omega/10; 9\Omega/10]$, c'est-à-dire $[10\Lambda/9; 10\Lambda]$,

- pour l'analogie avec une cavité, le choix des conditions de résonance $K = 2$ ou 3 et le recours à un échantillon monolithique et microscopique permettront d'être beaucoup moins exigeant quant à l'étendue du domaine de transparence du cristal et aux conditions d'accord de phase, puisque seules les fréquences Ω et $\Omega/2$, ou Ω , $\Omega/3$ et $2\Omega/3$ seront concernées (et éventuellement 2Ω). Notons tout-de-même que si l'on veut observer l'émission des pulses prédits pour une cavité en oscillation résonante proche du seuil, il conviendra d'avoir également un bon accord de phase pour les processus $\Omega/2 \rightarrow 3\Omega/2$ ou $\Omega/3 \rightarrow 4\Omega/3$ et $2\Omega/3 \rightarrow 5\Omega/3$. En effet, la durée de ces pulses étant plus courte que le temps mis par la lumière pour traverser la cavité, la contribution de fréquences supérieures à Ω est une condition nécessaire à leur formation¹⁵.

Enfin, pour des raisons pratiques quant à l'obtention d'échantillons de taille microscopique, il pourra s'avérer préférable d'utiliser une croissance par épitaxie de matériaux semi-conducteurs ayant des propriétés $\chi^{(2)}$ (tels que *CdS*, *CdSe*, *GaAs*...) à la place des cristaux usuels (tels que le KTP, le KDP, *NiLbO₃*...). Nous allons dans la sous-partie qui suit focaliser notre attention sur un exemple de composé semi-conducteur présentant un large domaine de

¹⁴typiquement : $(1/n)dn/dT \lesssim 10^{-4} K^{-1}$.

¹⁵cf partie C du chapitre 2.

transparence dans le visible et le proche infra-rouge.

E.2.2 Cas particulier du Sulfure de Cadmium (*CdS*)

Le Sulfure de Cadmium cristallise généralement dans une structure hexagonale (groupe cristallin $6mm$), avec une biréfringence caractéristique des milieux uniaxes, à savoir présentant un axe optique d'indice n_e (indice extraordinaire), et deux axes équivalents d'indice n_o (indice ordinaire), dans le plan orthogonal à l'axe optique [Gupta]. Il possède un domaine de transparence s'étendant de $0,55\mu\text{m}$ à $15\mu\text{m}$, ce qui en fait a priori un bon candidat pour un accord de phase étendu, par exemple pour tous les couples $\{\omega; \Omega - \omega\}$ sur un domaine d'au moins $[\Omega/10; 9\Omega/10]$, c'est-à-dire $[10\Lambda/9; 10\Lambda]$, avec $\Lambda \geq 1,2\mu\text{m}$ pour que l'éventuelle génération de seconde harmonique ne cause pas de dégradation thermique du système à puissance de pompage élevée.

D'autre part, les éléments non nuls de son tenseur $\chi^{(2)}$ permettent d'envisager une interaction type I ou II (et même éventuellement une interaction où les photons pompes et ceux émis paramétriquement auraient tous une polarisation identique). L'émission paramétrique sera donc a priori accompagnée de la génération de seconde harmonique (sous réserve d'accord de phase). La valeur moyenne à $1\mu\text{m}$ de la susceptibilité non-linéaire associée à chaque type d'interaction est respectivement : $\chi^{(2)} \simeq 14\text{pm.V}^{-1}$, -13pm.V^{-1} et 26pm.V^{-1} .

Venons-en maintenant aux propriétés dispersives. Sur le domaine de transparence évoqué, on peut décrire la variation des indices ordinaires et extraordinaires en fonction de la longueur d'onde λ en μm par des équations de type Sellmeier [Gupta] :

$$\begin{cases} n_o(\lambda) = 5,235 + \frac{0,1819}{\lambda^2 - 0,1651} \\ n_e(\lambda) = 5,239 + \frac{0,2076}{\lambda^2 - 0,1651} \end{cases} \quad (3.182)$$

On peut alors démontrer que, à $\Lambda \simeq 1,2\mu\text{m}$ par exemple, quel que soit le type d'interaction considéré et pour tout $\omega \in [\Omega/12; \Omega]$ (c'est-à-dire $\lambda \in [1,2\mu\text{m}; 14,4\mu\text{m}]$), on aura : $10,601 \leq \Delta n_+(\omega, \Omega) \leq 10,892$ (ce qui confirme bien au passage que $\Delta n_+(\omega, \Omega) \simeq 2\bar{n}$, avec $\bar{n} \simeq 5,35$ à $1,2\mu\text{m}$). D'après (3.175), l'épaisseur minimale du cristal de *CdS* que l'on s'autorisera alors à considérer sera $l_{min} \simeq 0,18\mu\text{m}$. Avec cette épaisseur minimale et $\Lambda \simeq 1,2\mu\text{m}$, la condition (3.175) s'écrira :

$$(\Omega l_{min}/c) |\Delta n_-(\omega, \Omega)| \leq 0,3 \Leftrightarrow |\Delta n_-(\omega, \Omega)| \leq 0,32 \quad (3.183)$$

Or, à partir des équations (3.182), on peut démontrer que, quel que soit le type d'interaction considéré, pour $\Lambda \simeq 1,2\mu\text{m}$ et $\omega \in [\Omega/12; \Omega]$, on aura :

$$|\Delta n_-(\omega, \Omega)| \leq 0,135 \text{ et } |\Delta n_-(2\Omega, \Omega)| \geq 1,285 \quad (3.184)$$

Par conséquent, on voit qu'avec une épaisseur $l \simeq l_{min} \simeq 0,18\mu\text{m}$, et une longueur d'onde de pompe $\Lambda \simeq 1,2\mu\text{m}$, les conditions d'accord de phase (3.172) seront vérifiées pour tous les types d'interaction impliqués et ce sur un domaine spectral étendu : $\omega \in [\Omega/12; \Omega]$. D'autre part, la génération de seconde harmonique à $0,6\mu\text{m}$ sera présente, mais avec des conditions d'accord de phase non-optimales : $|\sin_c [\Delta k_-(2\Omega, \Omega)l_{min}/2]| \leq 0,78$.

En conclusion, le Sulfure de Cadmium sera de toute évidence un très bon candidat pour réaliser l'analogie, que ce soit avec un miroir unique (collé entre deux fines couches de *CdS* par exemple), ou avec une cavité (un APO monolithique et microscopique par exemple).

E.3 Ordres de grandeur

Dans cette sous-partie, nous allons calculer les flux photoniques moyens que l'on peut espérer obtenir avec, d'une part un miroir collé entre deux cristaux microscopiques et pompés dans des conditions telles que l'analogie avec un miroir unique oscillant est réalisée, et d'autre part un APO monolithique et microscopique pompé dans des conditions telles que l'analogie avec une cavité en oscillation résonante est réalisée.

Rappelons pour commencer l'expression de l'équivalent de v_{max}/c lors de la réflexion sur un miroir immobile précédé d'un cristal d'indice moyen \bar{n} , de susceptibilité moyenne $\overline{\chi^{(2)}}$ et de longueur l , pompé à Ω avec un faisceau laser continu de flux photonique Φ et focalisé sur une aire A :

$$\beta_{l,\Phi} = \frac{l\Omega}{2c\bar{n}} \sqrt{\frac{\hbar\Omega\Phi}{2\varepsilon_0 c A \bar{n}}} \overline{\chi^{(2)}} \quad (3.185)$$

Considérons par exemple un échantillon microscopique de *CdS* pompé à $\Lambda \simeq 1,2\mu\text{m}$. On aura alors un indice moyen $\bar{n} \simeq 5,35$ et une susceptibilité $\overline{\chi^{(2)}} \simeq 10^{-11}\text{m.V}^{-1}$. Pour une épaisseur $l \simeq 0,18\mu\text{m}$, une puissance de pompe $\hbar\Omega\Phi \simeq 1\text{W}$, et une aire de focalisation $A \simeq 10^{-10}\text{m}^2$ (ce qui correspond à un waist $w \simeq 10\mu\text{m}$), on obtient :

$$\beta_{l,\Phi} \simeq 5.10^{-7} \quad (3.186)$$

On voit donc que dans ces conditions, on aura bien $\beta_{l,\Phi} \ll 1$. On peut aussi évaluer l'amplitude apparente du mouvement :

$$a = 2c\beta_{l,\Phi}/\Omega \simeq 2.10^{-13}\text{m} \quad (3.187)$$

ce qui correspondra en quelques sortes à l'amplitude d'oscillation du cortège électronique de la bande de valence du semi-conducteur, sous l'effet des faisceaux pompes. Nous allons maintenant évaluer ces quantités en prenant, pour toutes les grandeurs a priori ajustables expérimentalement, les limites supérieures de ce qu'il sera raisonnable d'atteindre dans la pratique, tout en conservant des épaisseurs de cristal microscopiques. En ce qui concerne la puissance surfacique de pompe par exemple, on va prendre la valeur typique du seuil de détérioration des cristaux non-linéaires usuels : $\hbar\Omega\Phi/A \simeq 1\text{GW.cm}^{-2} = 10^{13}\text{W.m}^{-2}$. Alors,

en maintenant les autres paramètres à leurs valeurs précédentes, on obtiendra pour *CdS* pompé à $\Lambda \simeq 1, 2\mu\text{m}$:

$$\beta_{l,\Phi} \simeq 2.10^{-5} \text{ et } a \simeq 6.10^{-12}\text{m} \quad (3.188)$$

Par ailleurs, certains matériaux semi-conducteurs comme *GaAs* ou *CdGeAs₂* par exemple, possèdent de forts $\chi^{(2)}$. Dans le cas de *GaAs*, on aura $\overline{\chi^{(2)}} \simeq 2.10^{-10}\text{m.V}^{-1}$ et un indice moyen $\bar{n} \simeq 3, 5$ (à $1\mu\text{m}$). En gardant $l \simeq 0, 18\mu\text{m}$ et $\Lambda \simeq 1, 2\mu\text{m}$, il vient alors :

$$\beta_{l,\Phi} \simeq 2.10^{-5} \text{ et } a \simeq 6.10^{-12}\text{m pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{10}\text{W.m}^{-2}, \quad (3.189)$$

$$\beta_{l,\Phi} \simeq 6.10^{-4} \text{ et } a \simeq 2.10^{-10}\text{m pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{13}\text{W.m}^{-2}. \quad (3.190)$$

On voit donc que, même dans ces cas limites, pour des cristaux microscopiques, on gardera la condition $\beta_{l,\Phi} \ll 1$. Nous allons maintenant utiliser ces résultats pour déterminer les flux photoniques que l'on pourra espérer générer avec un miroir unique collé entre 2 cristaux microscopiques, puis avec un APO monolithique et microscopique, en considérant dans chaque cas que les conditions d'accord de phase seront satisfaisantes pour les composantes spectrales dominantes de la fluorescence paramétrique.

E.3.1 Configuration miroir unique collé entre deux cristaux

Considérons donc un miroir collé entre deux cristaux de taille microscopique, en supposant que les conditions de pompage soient telles que l'on obtienne une oscillation apparente du miroir avec une vitesse maximale $c\beta_{l,\Phi}$ (cf sous-partie D.3). En supposant les effets thermiques négligeables, d'après les résultats de la section B.1.3 du chapitre 2, on aura un flux photonique moyen total émis :

$$\Phi_{out,v} \simeq \frac{\Omega \beta_{l,\Phi}^2}{6\pi} \quad (3.191)$$

c'est-à-dire, pour des cristaux de *CdS* d'épaisseur $l \simeq 0, 18\mu\text{m}$ et pompés à $\Lambda \simeq 1, 2\mu\text{m}$:

$$\Phi_{out,v} \simeq 20 \text{ photons par seconde pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{10}\text{W.m}^{-2}, \quad (3.192)$$

$$\Phi_{out,v} \simeq 3.10^4 \text{ photons par seconde pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{13}\text{W.m}^{-2}. \quad (3.193)$$

En prenant des cristaux de *GaAs*, sous les mêmes conditions, on obtiendra :

$$\Phi_{out,v} \simeq 3.10^4 \text{ photons par seconde pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{10}\text{W.m}^{-2}, \quad (3.194)$$

$$\Phi_{out,v} \simeq 3.10^7 \text{ photons par seconde pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{13}\text{W.m}^{-2}. \quad (3.195)$$

Par conséquent, la situation qui semblait désespérée pour un miroir unique en oscillation mécanique réelle dans le vide donne ici lieu à une émission a priori largement suffisante pour être détectable expérimentalement. D'autre part, on vérifie que les flux que l'on vient de calculer seront négligeables par rapport à celui des pompes, qui sera dans chaque cas au moins de l'ordre de $\Phi \simeq 10^{18}$ photons par seconde. De même, ayant $\beta_{l,\Phi} \ll 1$, le flux de seconde harmonique éventuel restera négligeable devant celui des pompes, ce qui justifie d'avoir fait l'approximation des pompes constantes.

E.3.2 Configuration APO monolithique

Considérons maintenant un APO monolithique et microscopique, en supposant que les conditions de pompage soient telles que l'on obtienne l'analogie d'une oscillation résonante de la cavité, avec une vitesse maximale commune aux deux miroirs $c\beta_{l,\Phi}$ (cf sous-partie D.5). On considèrera pour fixer les idées une finesse $F \simeq 100$ pour la cavité. Dans ce cas, on sera toujours largement en-dessous du seuil d'oscillation ($2\beta_{l,\Phi}F/\pi \ll 1$) pour toutes les valeurs de $\beta_{l,\Phi}$ calculées en (3.186), (3.188), (3.189) et (3.190). En supposant les effets thermiques négligeables, d'après les résultats de la section B.2 du chapitre 2, à résonance avec $K = 2$ ou $K = 3$, on aura alors un flux photonique moyen total émis :

$$\Phi_{out,v} \simeq \frac{\Omega \beta_{l,\Phi}^2 F}{3\pi^2} \quad (3.196)$$

En utilisant un cristal de *CdS* d'épaisseur $l \simeq 1\mu\text{m}$ pompé à $\Lambda \simeq 1,2\mu\text{m}$, on obtiendra :

$$\Phi_{out,v} \simeq 5.10^4 \text{ photons par seconde pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{10}\text{W.m}^{-2}, \quad (3.197)$$

$$\Phi_{out,v} \simeq 5.10^7 \text{ photons par seconde pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{13}\text{W.m}^{-2}, \quad (3.198)$$

et pour un cristal de *GaAs*, dans les mêmes conditions :

$$\Phi_{out,v} \simeq 5.10^7 \text{ photons par seconde pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{10}\text{W.m}^{-2}, \quad (3.199)$$

$$\Phi_{out,v} \simeq 5.10^{10} \text{ photons par seconde pour } \hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{13}\text{W.m}^{-2}, \quad (3.200)$$

Par conséquent, la situation pour un APO monolithique et microscopique avec un cristal de *CdS* ou de *GaAs* sera bien plus clémente que pour une cavité en oscillation mécanique réelle dans le vide, et ce système produira des flux de photons aisément détectables. On vérifie ici encore que les flux émis seront négligeables par rapport à celui des pompes, et que, ayant considéré des systèmes suffisamment sous le seuil : $2\beta_{l,\Phi}F/\pi \ll 1$, il en ira de même pour le flux de seconde harmonique éventuel.

Enfin, si l'on souhaite observer un régime pulsé analogue à celui prédit pour l'Effet Casimir Dynamique, il faudra travailler proche du seuil ou même au-dessus. Pour atteindre un tel régime, il suffira de choisir un cristal vérifiant les conditions d'accord de phase adéquates¹⁶, et d'utiliser des cavités de finesse plus élevée. Dans ce cas toutefois, l'approximation des pompes constantes sera susceptible d'être mise à mal par la génération de seconde harmonique. Il serait donc intéressant à l'avenir de reprendre la résolution de l'équation de propagation menée dans la partie B de ce chapitre, sans faire cette approximation.

¹⁶cf discussion à la fin de la sous-section E.2.1.

F Propositions expérimentales pour la réalisation pratique de l'analogie

F.1 Détection du régime d'oscillation apparente d'un miroir collé entre deux cristaux

Dans la sous-partie E.2.2, nous avons montré qu'un cristal microscopique de *CdS* pouvait fournir des conditions d'accord de phase dans un domaine spectral suffisamment étendu pour envisager un système analogue à un miroir unique oscillant. D'autre part, lors des calculs d'ordres de grandeur entrepris en E.3, il s'est avéré que les flux émis avec un miroir unique collé entre deux cristaux de *CdS* ou *GaAs* (cf figure 3.16) pompés dans le proche infra-rouge avec des faisceaux laser intenses, devraient être de l'ordre du détectable. Nous pourrions donc

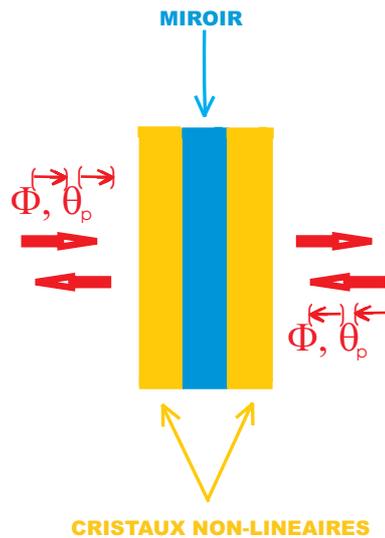


FIG. 3.16: Echantillon comportant un miroir inséré entre 2 couches cristallines, susceptible de fonctionner dans un régime analogue à l'Effet Casimir Dynamique pour un miroir unique.

proposer un montage expérimental pour la mesure des signaux issus d'un tel dispositif, pompé dans un régime analogue à l'Effet Casimir Dynamique relatif à un miroir unique oscillant. Toutefois, nous n'en ferons pas état dans cette thèse, car la mise en oeuvre expérimentale s'avèrera beaucoup plus simple et les ordres de grandeur plus favorables avec un dispositif de type APO monolithique, pompé dans un régime analogue à l'Effet Casimir Dynamique relatif à une cavité oscillante. A l'avenir, il sera tout-de-même intéressant de trouver un montage pour le miroir unique.

F.2 Détection du régime d'oscillation résonante d'un APO monolithique

Lors de la discussion sur les contraintes d'accord de phase en E.2, nous avons jugé raisonnable de proposer un système de type APO monolithique (cf figure 3.17) de taille microscopique pour avoir une analogie satisfaisante avec une cavité oscillant dans le vide. Nous allons dans cette partie préciser comment insérer un tel échantillon dans un montage expérimental de manière à pouvoir observer des régimes analogues aux modes oscillatoires résonants de la cavité.

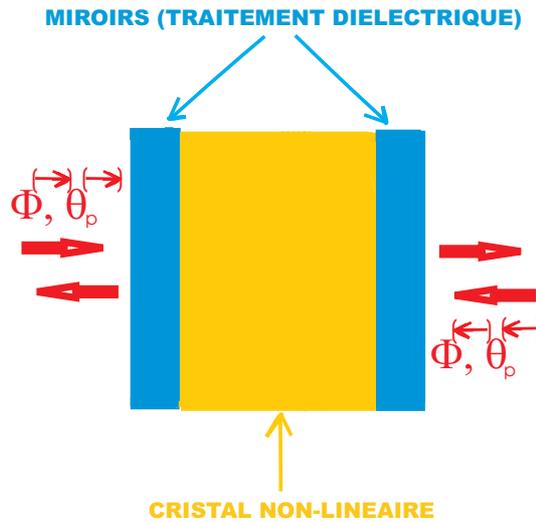


FIG. 3.17: Echantillon de type APO monolithique susceptible de fonctionner dans un régime analogue à l'Effet Casimir Dynamique.

On adoptera un pompage de l'échantillon avec deux faisceaux contra-propageants, issus d'un seul et même laser de fréquence $\Omega = 2\pi c/\Lambda$, et on se bornera aux prescriptions énoncées dans la section E.2, à savoir que l'on fixera $\Omega L/c = K\pi$ avec $K = 2$ ou $K = 3$. En d'autres termes, on fera en sorte que le mouvement apparent généré par l'APO soit l'analogue du mode "respiratoire" $K = 2$, ou d'oscillation globale $K = 3$. La quantité L représentera dans la pratique la longueur effective de la cavité formée par les traitements diélectriques externes (ou "réflecteurs de Bragg"), et il conviendra de disposer de lasers continus dans le visible ou le proche infra-rouge aisément accordables autour des longueurs d'onde $\Lambda = L$ et $\Lambda = 2L/3$, de manière à palier aux fluctuations de L via les variations thermiques d'indice. Dans chacun des modes choisis, on s'attendra à avoir soit une résonance optique dégénérée en $\Omega/2$ pour $K = 2$, soit deux résonances optiques en $\Omega/3$ et $2\Omega/3$ pour $K = 3$.

Lors de la croissance de l'échantillon, il pourra éventuellement s'avérer judicieux d'insérer entre le cristal et les miroirs des couches diélectriques passives permettant de compenser la dispersion au sein du cristal, si celle-ci s'avère détruire les résonances que l'on souhaitera observer. D'autre part, pour être dans le cadre de validité de l'analogie telle que présentée dans

la section D.5, on fera en sorte que les miroirs soient suffisamment transmissifs pour les faisceaux pompes et suffisamment réfléchifs pour les photons issus de la conversion paramétrique au sein du cristal. Nous nous intéresserons donc à un dispositif de type APO doublement résonant. Rappelons maintenant les conditions que nous avons énumérées en D.5 pour obtenir l'analogie d'un mouvement résonant et homocinétique avec ce type de dispositif :

$$\begin{cases} \Phi^{(\leftarrow)} = \Phi^{(\rightarrow)} \\ \Omega L/c = K\pi \\ \theta_p^{(\leftarrow)} = \theta_p^{(\rightarrow)} - K\pi [2\pi] \end{cases} \quad (3.201)$$

où il est entendu que l'on fixera $K = 2$ ou 3 , et que la troisième condition correspondra à imposer que le déphasage au centre de l'APO entre les deux faisceaux pompes contre-propageants soit de $K\pi$ (modulo 2π).

On peut donc proposer le montage représenté sur la figure 3.18.

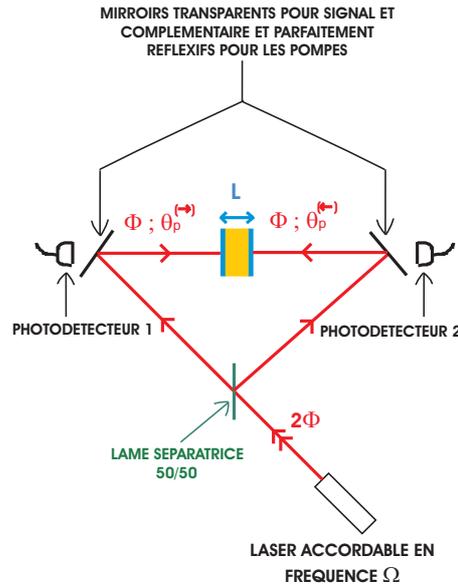


FIG. 3.18: Proposition de montage expérimental pour la mise en évidence de l'analogie de l'Effet Casimir Dynamique avec un micro APO monolithique doublement résonant.

Dans ce montage, un laser continu et accordable en fréquence envoie son faisceau vers une lame séparatrice. Cette lame divise le faisceau en deux, avec une répartition équitable des flux entre les faisceaux réfléchis et transmis. Chaque faisceau est ensuite dirigé vers un miroir se situant sur son trajet, et ayant comme propriété de le réfléchir presque intégralement vers l'échantillon APO. Les deux miroirs choisis pour cette opération doivent par ailleurs être suffisamment transmissifs pour les signaux paramétriques résonants que l'on souhaite générer. Cette propriété permet en effet de placer un photodétecteur derrière chaque miroir

pour détecter les photons issus de l'amplification de la fluorescence paramétrique au sein de l'APO.

Afin de satisfaire les conditions (3.201) requises pour l'analogie avec les modes oscillatoires résonants $K = 2$ ou 3 de la cavité, il faudra :

- choisir initialement la fréquence Ω du laser autour de $2\pi c/L$ ou $3\pi c/L$, et l'asservir sur les maxima de l'intensité mesurée par les photodétecteurs,

- contrôler la position de l'APO monolithique par rapport aux miroirs dirigeant les faisceaux pompes vers l'échantillon, de manière à ce que ces faisceaux aient entre la lame séparatrice et le centre de l'échantillon une différence de marche de $p\Lambda$ pour $K = 2$ et de $(p + 1/2)\Lambda$ pour $K = 3$ ($p \in \mathbb{Z}$).

On pourra aussi, si cela s'avère nécessaire pour obtenir les conditions d'accord de phase, jouer sur l'angle d'attaque des pompes par rapport à l'axe optique du cristal, en inclinant par exemple l'axe longitudinal de l'APO par rapport à l'axe de pompage¹⁷. Par ailleurs, étant donné que l'on travaillera dans le visible ou le proche infra-rouge, il ne sera pas nécessaire de se placer à basse température pour que les effets du vide soient prépondérants. A température ambiante en effet, on aura $k_B T_{eq} \ll \hbar\Omega/3$, et la contribution des conversions thermiques au spectre émis sera négligeable devant celle de la fluorescence paramétrique. Enfin, d'après les calculs d'ordre de grandeur menés dans la partie E.3.2, pour une finesse $F \simeq 100$, et en utilisant un cristal de *CdS* d'épaisseur $l \simeq 1\mu\text{m}$ pompé à $\Lambda \simeq 1,2\mu\text{m}$, on pourra espérer détecter un flux de $5 \cdot 10^4$ photons par seconde pour une puissance surfacique de pompe $\hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{10}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$, et de $5 \cdot 10^7$ photons par seconde pour $\hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{13}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$. On remplaçant *CdS* par *GaAs*, on obtiendra un flux de $5 \cdot 10^7$ photons par seconde pour $\hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{10}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$, et de $5 \cdot 10^{10}$ photons par seconde pour $\hbar\Omega\Phi/A \simeq 10^{13}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Mentionnons enfin que si l'on souhaite observer un régime pulsé analogue à celui prédit pour l'Effet Casimir Dynamique, il conviendra d'une part de choisir un cristal vérifiant les conditions d'accord de phase adéquates¹⁸, et d'autre part de faire en sorte que les composantes spectrales nécessaires à la formation des pulses soient suffisamment réfléchies et résonantes dans la cavité formée par les miroirs de Bragg de l'APO. Pour s'approcher du seuil, ou même le dépasser, il faudra, dans l'exemple pris ci-dessus pour *GaAs* pompé à hauteur de $10^{10}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$, que la finesse de la cavité soit de l'ordre de 10^4 , ce qui semble a priori aisément accessible. En outre, le choix d'une finesse élevée permettra d'obtenir des flux plus importants encore que ceux calculés ci-avant. Par conséquent, il serait très intéressant à l'avenir de disposer de prédictions théoriques valables au-dessus du seuil. C'est là tout l'intérêt de la démarche menée dans la partie C.2 du chapitre 2 et aboutissant notamment au calcul proposé dans l'annexe G.

¹⁷quelques critères généraux pour un choix d'orientation optimal sont donnés dans l'article [Zhang]

¹⁸cf discussion à la fin de la sous-section E.2.1.

Conclusion et perspectives

LE travail de cette thèse a porté sur un approfondissement des connaissances relatives à l'Effet Casimir Dynamique d'une part, et sur l'élaboration d'une analogie avec l'Amplification Paramétrique en Optique Quantique d'autre part. Dans les grandes lignes, notre démarche a consisté à développer une approche théorique réunissant les méthodes de la Théorie Quantique des Champs et celles de l'Optique Quantique, afin de pouvoir aisément passer de la description de l'un de ces effets à l'autre. Cette approche a permis d'obtenir des résultats originaux et intéressants pour les deux domaines, que nous nous proposons de résumer et de mettre en perspective dans cette conclusion.

Dans le chapitre 2, nous avons dressé un état des lieux des résultats connus concernant l'Effet Casimir Dynamique, tout en leur apportant de nombreux éclairages nouveaux. Nous avons dans un premier temps présenté une approche perturbative du couplage opto-mécanique entre les fluctuations quantiques du champ électromagnétique et le mouvement des miroirs. Cette approche a permis de calculer les signatures spectrales ainsi que le flux du rayonnement émis par un miroir unique oscillant dans le vide et dans un bain thermique quelconque. Nous avons à cette occasion identifié des processus motionnels excités thermiquement, et retrouvé les résultats relatifs au vide dans la limite d'une température nulle. Les effets thermiques se sont avérés avoir une contribution négligeable au rayonnement émis tant que $\hbar\Omega \gg k_B T_{eq}$, Ω étant la fréquence d'oscillation mécanique du miroir et T_{eq} la température de l'enceinte dans laquelle l'expérience est menée. Toujours dans le cadre de l'approche perturbative, nous avons proposé une synthèse originale des résultats connus concernant la réponse linéaire des champs globalement diffusés par une cavité en oscillation dans le vide, et rappelé comment certains mouvements particuliers permettent une amplification résonante des flux émis par les miroirs. Dans un deuxième temps, nous avons fait état d'un traitement non-perturbatif montrant l'existence d'un seuil, proche duquel une cavité de haute-finesse en oscillation résonante émet des pulses contenant des photons de fréquence supérieure à la fréquence d'oscillation des

miroirs. Grâce à une approche fréquentielle itérative de la diffusion des champs au sein d'une telle cavité, nous avons abouti à une meilleure compréhension des phénomènes physiques déterminant l'apparition du seuil d'oscillation ainsi que des divergences qui résultaient des anciennes approches. A cette occasion, **nous avons proposé un algorithme permettant la prise en compte des conditions de transparence à haute fréquence des miroirs, et démontré qu'il est possible d'étendre nos calculs au-delà du seuil.**

Dans le chapitre 3, nous nous sommes atelés à démontrer l'analogie entre l'Effet Casimir Dynamique et les processus paramétriques en Optique Quantique. Une analyse semi-classique de la propagation des champs au sein de cristaux non-linéaires pompés par des faisceaux laser continus a d'abord permis de mettre en lumière la grande similitude de ces processus avec ceux excités par un miroir en mouvement dans le vide ou dans un bain thermique. Par divers choix d'agencements de cristaux $\chi^{(2)}$ et de miroirs, nous avons alors progressivement sélectionné des dispositifs susceptibles de diffuser les champs de la même manière que si les miroirs oscillaient mécaniquement, en ajustant par exemple les conditions de pompage ou encore l'épaisseur des cristaux. Cette démarche a effectivement abouti à la proposition de systèmes fonctionnant dans des régimes analogues à l'oscillation d'un miroir unique ou d'une cavité. Elle a notamment montré qu'il est possible d'obtenir un contrôle cohérent des phases relatives d'oscillation apparente des miroirs au sein d'une cavité de type APO. Nous avons ensuite discuté la validité de l'analogie et passé au crible certaines contraintes expérimentales, liées à la génération de seconde harmonique et à l'obtention de conditions d'accord de phase satisfaisantes dans les cristaux. Il s'est alors avéré que la taille des cristaux requises pour réaliser l'analogie doit être de l'ordre de la longueur d'onde des pompes, ce qui fait des matériaux semi-conducteurs de bons candidat pour la croissance des échantillons. Cela nous a amené à identifier des matériaux adaptés, tels que le Sulfure de Cadmium *CdS*. Nous sommes finalement arrivés à la conclusion que l'un des meilleurs systèmes envisageables pour une réalisation pratique de l'analogie est **un APO monolithique de taille microscopique, doublement résonant et pompé bilatéralement**. Un tel montage expérimental **devrait en effet permettre d'obtenir aussi bien l'analogie d'un mouvement respiratoire résonant que celui d'une oscillation globale résonante de la cavité**. La compression des fluctuations du vide sera ici obtenue par amplification de la fluorescence paramétrique au sein d'un cristal de *CdS* ou de *GaAs* par exemple. La fréquence d'oscillation apparente de la cavité correspondra à la fréquence des pompes utilisées, et se situera donc dans le domaine du rayonnement visible ou proche infra-rouge. L'ordre de grandeur des flux photoniques que l'on peut espérer atteindre avec ce type de dispositif est de ce fait bien plus élevé que dans le cas de l'excitation mécanique des miroirs. En effet, si F est la finesse de la cavité utilisée, on devrait obtenir de l'ordre de $10^2 \times F$ photons par seconde pour *CdS* pompé à hauteur d'un MégaWatt.cm⁻² et de l'ordre de $10^5 \times F$ photons par seconde en utilisant *GaAs* dans les mêmes conditions, alors que l'on ne pouvait espérer que de l'ordre de $10^{-12} \times F$ photons par seconde avec une excitation piézoélectrique au GigaHertz par exemple. Les signaux issus des systèmes proposés dans cette thèse seront donc largement plus faciles à détecter.

Une des perspectives de ce travail est la réalisation expérimentale de l'analogie dans les conditions que l'on a précrites dans ce manuscrit. Mentionnons qu'un projet d'expérience utilisant une idée similaire est actuellement développé à l'Université de Padoue en Italie, dans l'équipe du Professeur G. Carugno [Braggio(05)]. Le montage envisagé fait appel à une cavité supra-conductrice¹, dans laquelle une couche de semi-conducteur est accolée à l'un des miroirs et irradiée par des trains d'impulsions laser. Le semi-conducteur passe ainsi périodiquement d'un état complètement transparent à parfaitement réfléchissant, et la longueur effective de la cavité est modulée à une fréquence de l'ordre du GigaHertz. Une extension des résultats obtenus dans cette thèse devrait aider à trouver une configuration optimale pour cette expérience, et permettre d'évaluer précisément les ordres de grandeur du rayonnement motionnel impliqué. Signalons aussi que le Professeur R. Onofrio à Dartmouth aux Etats-Unis a proposé une expérience exploitant la superradiance d'atomes alcalins pour amplifier l'Effet Casimir Dynamique au sein d'une cavité composée d'un résonateur acoustique excitant l'oscillation mécanique de l'un des miroirs à une fréquence de l'ordre du GigaHertz [Onofrio(04), Onofrio(06)]. Même si une détection semble accessible avec cette technique, il n'en reste pas moins que les systèmes APO étudiés dans cette thèse donnent accès à un effet analogue bien plus efficace en termes de flux de photons émis.

Une autre perspective offerte par notre travail est l'extension du domaine de validité des calculs relatifs à l'Effet Casimir Dynamique au-delà du seuil d'oscillation paramétrique. La procédure que nous avons proposée dans l'annexe G devrait en outre pouvoir s'adapter à la description des OPO, en incorporant les facteurs d'accord de phase et de dispersion relatifs à la traversée des cristaux dans les coefficients de diffusion des miroirs. Un travail numérique se basant sur les calculs présentés dans cette thèse devrait donc fournir des informations intéressantes sur le rayonnement motionnel au-dessus du seuil d'une part, et sur les OPO d'autre part. On pourra aussi avec profit orienter les recherches futures sur la question de l'obtention d'un régime pulsé à partir d'un OPO² pompé en continu.

Par ailleurs, une modélisation en espace tridimensionnel sera à l'avenir nécessaire pour vérifier la robustesse de l'analogie, et obtenir des résultats plus précis. La structure transverse des champs, ainsi que la biréfringence et la nature tensorielle de la susceptibilité non-linéaire $\chi^{(2)}$ devront être prises en compte dans le traitement de l'interaction paramétrique au sein des cristaux.

Pour finir, il importe de souligner qu'une mise en évidence expérimentale des effets dissipatifs liés au mouvement dans le vide serait très intéressante, étant donné que ces effets soulèvent des questions intrigantes par rapport au principe de relativité du mouvement, et alimentent de vifs débats de physique fondamentale [Fulling(76), Jaekel(95), Jaekel(95)B, Jaekel(97), Davis(01)].

¹de longueur $L \simeq 10\text{cm}$

²ou d'un APO proche du seuil

Annexe

A Traitement Hamiltonien perturbatif et processus paramétriques associés au mouvement d'un miroir

Nous allons dans cette annexe considérer que l'énergie transférée au champ par un miroir au cours d'un déplacement élémentaire $\delta q(t)$ est modélisable par une perturbation effective du Hamiltonien associé au champ :

$$\delta \hat{H}(t) = -\hat{F}(t)\delta q(t) \quad (\text{A-1})$$

où $\delta q(t)$ est traité comme une variable classique, et $\hat{F}(t)$ est l'opérateur force associé à la pression de radiation exercée par le champ sur le miroir quand il est au repos. Cette force est reliée à la composante T_{xx} du tenseur de Maxwell [Raimond(Cours)] et s'écrit [Jaekel(92)] :

$$\begin{cases} \hat{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \hat{F}[\omega, \omega'] e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t} \\ \hat{F}[\omega, \omega'] = \varepsilon_0 i\omega i\omega' \text{Tr} [\mathfrak{F}[\omega, \omega'] \hat{\Phi}_{in}[\omega] \hat{\Phi}_{in}[\omega']^T] \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

Tr est l'opération 'Trace', $\hat{\Phi}[\omega']^T$ est la matrice ligne transposée à partir de la matrice colonne $\hat{\Phi}[\omega']$, et $\mathfrak{F}[\omega, \omega']$ est la matrice :

$$\mathfrak{F}[\omega, \omega'] = \boldsymbol{\eta} - \bar{\mathbf{S}}[\omega'] \boldsymbol{\eta} \bar{\mathbf{S}}[\omega] \quad (\text{A-3})$$

où $\bar{\mathbf{S}}$ est la matrice de diffusion associée au miroir dans son référentiel propre. Pour respecter les notations de l'article [Jaekel(92)], nous choisissons cette dernière sous la forme :

$$\bar{\mathbf{S}}[\omega] = \begin{pmatrix} \bar{t}[\omega] & \bar{r}[\omega] \\ \bar{r}[\omega] & \bar{t}[\omega] \end{pmatrix}, \text{ avec : } \begin{cases} |\bar{t}[\omega]|^2 + |\bar{r}[\omega]|^2 = 1 \text{ et : } \bar{t}[\omega] \bar{r}[\omega]^* \in i\mathbb{R} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \bar{t}[\omega] = 1 \text{ et : } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \bar{r}[\omega] = 0 \\ \bar{t}[-\omega] = \bar{t}[\omega]^*, \text{ et : } \bar{r}[-\omega] = \bar{r}[\omega]^* \end{cases} \quad (\text{A-4})$$

Dans ce cas, la matrice intervenant dans l'opérateur force s'écrit :

$$\mathfrak{F}[\omega, \omega'] = \begin{pmatrix} \alpha[\omega, \omega'] & \beta[\omega, \omega'] \\ -\beta[\omega, \omega'] & -\alpha[\omega, \omega'] \end{pmatrix} \text{ avec : } \begin{cases} \alpha[\omega, \omega'] = 1 - \bar{t}[\omega] \bar{t}[\omega'] + \bar{r}[\omega] \bar{r}[\omega'] \\ \beta[\omega, \omega'] = \bar{t}[\omega] \bar{r}[\omega'] - \bar{r}[\omega] \bar{t}[\omega'] \end{cases} \quad (\text{A-5})$$

Par ailleurs, le Hamiltonien total du champ est donné par :

$$\hat{H}(t) = \hat{H}^{(0)} + \delta \hat{H}(t) \quad (\text{A-6})$$

où $\hat{H}^{(0)}$ est le Hamiltonien non-perturbé associé à la situation où le miroir est immobile. On peut démontrer qu'il s'exprime de la même manière que si la propagation des champs était

parfaitement libre. Par conséquent, si l'on utilise l'ordre normal pour éviter les divergences associées à l'énergie de point zéro, il peut s'exprimer de la manière suivante :

$$: \hat{H}^{(0)} : = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hbar\omega \left\{ a_{in}^\dagger[\omega] a_{in}[\omega] + b_{in}^\dagger[\omega] b_{in}[\omega] \right\} \quad (\text{A-7})$$

Avec nos conventions, cette notation reste abusive et il conviendrait de donner une expression plus rigoureuse en rapport avec les quantités physiquement mesurables ; toutefois, pour l'usage que nous allons en faire dans cette annexe, on pourra s'en contenter.

Développons maintenant l'expression de l'opérateur $\hat{F}[\omega, \omega']$ donnée en (A-2), à l'aide de (A-5), (2.7) et (2.3) :

$$\begin{aligned} \hat{F}[\omega, \omega'] &= \varepsilon_0 i\omega i\omega' \text{Tr} \left[\mathfrak{F}[\omega, \omega'] \hat{\Phi}_{in}[\omega] \hat{\Phi}_{in}[\omega']^T \right] \\ &= \varepsilon_0 i\omega i\omega' \left[\alpha[\omega, \omega'] \left\{ \varphi_{in}[\omega] \varphi_{in}[\omega'] - \psi_{in}[\omega] \psi_{in}[\omega'] \right\} - \beta[\omega, \omega'] \left\{ \varphi_{in}[\omega] \psi_{in}[\omega'] - \psi_{in}[\omega] \varphi_{in}[\omega'] \right\} \right] \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar|\omega|}{2c}} i\sqrt{\frac{\hbar|\omega'|}{2c}} \left[\alpha[\omega, \omega'] \left\{ \theta(\omega)\theta(\omega') \left(a_{in}[\omega] a_{in}[\omega'] - b_{in}[\omega] b_{in}[\omega'] \right) \right. \right. \\ &\quad + \theta(-\omega)\theta(-\omega') \left(a_{in}^\dagger[-\omega] a_{in}^\dagger[-\omega'] - b_{in}^\dagger[-\omega] b_{in}^\dagger[-\omega'] \right) \\ &\quad + \theta(\omega)\theta(-\omega') \left(a_{in}[\omega] a_{in}^\dagger[-\omega'] - b_{in}[\omega] b_{in}^\dagger[-\omega'] \right) \\ &\quad \left. + \theta(-\omega)\theta(\omega') \left(a_{in}^\dagger[-\omega] a_{in}[\omega'] - b_{in}^\dagger[-\omega] b_{in}[\omega'] \right) \right\} \\ &\quad - \beta[\omega, \omega'] \left\{ \theta(\omega)\theta(\omega') \left(a_{in}[\omega] b_{in}[\omega'] - b_{in}[\omega] a_{in}[\omega'] \right) \right. \\ &\quad + \theta(-\omega)\theta(-\omega') \left(a_{in}^\dagger[-\omega] b_{in}^\dagger[-\omega'] - b_{in}^\dagger[-\omega] a_{in}^\dagger[-\omega'] \right) \\ &\quad + \theta(\omega)\theta(-\omega') \left(a_{in}[\omega] b_{in}^\dagger[-\omega'] - b_{in}[\omega] a_{in}^\dagger[-\omega'] \right) \\ &\quad \left. + \theta(-\omega)\theta(\omega') \left(a_{in}^\dagger[-\omega] b_{in}[\omega'] - b_{in}^\dagger[-\omega] a_{in}[\omega'] \right) \right\} \right] \quad (\text{A-8}) \end{aligned}$$

Il pourra aussi s'avérer utile de mettre ce résultat sous la forme :

$$\begin{aligned}
\hat{F}[-\omega, -\omega'] &= i\sqrt{\frac{\hbar|\omega|}{2c}} i\sqrt{\frac{\hbar|\omega'|}{2c}} \times \\
&\left[\alpha[-\omega, -\omega'] \left\{ \theta(\omega)\theta(\omega') \left(a_{in}^\dagger[\omega]a_{in}^\dagger[\omega'] - b_{in}^\dagger[\omega]b_{in}^\dagger[\omega'] \right) + \theta(-\omega)\theta(-\omega') \left(a_{in}[-\omega]a_{in}[-\omega'] - b_{in}[-\omega]b_{in}[-\omega'] \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \theta(\omega)\theta(-\omega') \left(a_{in}^\dagger[\omega]a_{in}[-\omega'] - b_{in}^\dagger[\omega]b_{in}[-\omega'] \right) + \theta(-\omega)\theta(\omega') \left(a_{in}[-\omega]a_{in}^\dagger[\omega'] - b_{in}[-\omega]b_{in}^\dagger[\omega'] \right) \right\} \right. \\
&\quad - \beta[-\omega, -\omega'] \left\{ \theta(\omega)\theta(\omega') \left(a_{in}^\dagger[\omega]b_{in}^\dagger[\omega'] - b_{in}^\dagger[\omega]a_{in}^\dagger[\omega'] \right) + \theta(-\omega)\theta(-\omega') \left(a_{in}[-\omega]b_{in}[-\omega'] - b_{in}[-\omega]a_{in}[-\omega'] \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \theta(\omega)\theta(-\omega') \left(a_{in}^\dagger[\omega]b_{in}[-\omega'] - b_{in}^\dagger[\omega]a_{in}[-\omega'] \right) + \theta(-\omega)\theta(\omega') \left(a_{in}[-\omega]b_{in}^\dagger[\omega'] - b_{in}[-\omega]a_{in}^\dagger[\omega'] \right) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{A-9}$$

L'opérateur \hat{F} étant quadratique en les champs, l'opérateur d'évolution associé à la perturbation effective $\delta\hat{H}(t)$ va se comporter de manière analogue aux opérateurs de compression, d'usage courant en Optique Quantique pour décrire les processus paramétriques dans les milieux non-linéaires $\chi^{(2)}$ [Loudon] et prévoir la possibilité de réduire les fluctuations de certaines quadratures du champ sous la limite quantique standard [Fabre(Cours), Reynaud(Squeezing)]. Le mouvement du miroir devrait donc donner lieu à une compression des fluctuations du vide, se traduisant par l'émission de paires de photons.

Afin de vérifier ce fait, nous allons passer en représentation de Schrödinger. Dans cette représentation, ce sont les états du champs qui évolueront dans le temps. Par ailleurs, en $t = 0$, l'expression de l'opérateur \hat{F} coïncidera dans les deux représentations. Par conséquent, si l'on considère que le miroir se met en mouvement à partir d'un instant $t_0 > 0$ par exemple (en supposant donc que ce dernier était immobile pour $t \in]-\infty; t_0[$), la perturbation effective en représentation de Schrödinger s'écrira :

$$\begin{cases} \delta\hat{H}(t) = -\delta q(t) \hat{F}(0) = \delta q(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \hat{F}[\omega, \omega'] \\ \hat{F}[\omega, \omega'] = \varepsilon_0 i\omega i\omega' \text{Tr} \left[\hat{\mathfrak{F}}[\omega, \omega'] \hat{\Phi}[\omega] \hat{\Phi}[\omega']^T \right] \end{cases} \tag{A-10}$$

où l'on a pris soin de retirer les indices "in" aux opérateurs champs. Nous allons maintenant nous inspirer du calcul effectué en 4D dans l'article [Mundarain(98)].

Prenons d'abord le vide comme état entrant, et considérons un état perturbé du champ :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{(k,k') \in \{\rightarrow, \leftarrow\}^2} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'_0}{2\pi} c_{\omega_0; \omega'_0}^{(k)(k')}(t) |1_{\omega_0}^{(k)}, 1_{\omega'_0}^{(k')}\rangle + b(t)|0\rangle \tag{A-11}$$

où l'on somme sur tous les états à deux photons $|1_{\omega_0}^{(k)}, 1_{\omega'_0}^{(k')} \rangle$, les photons de la paire ayant un sens de propagation identique ($k = k'$) ou opposé ($k \neq k'$). Pour ne compter qu'une seule fois chaque paire, on pourra par exemple imposer : $\forall \omega'_0 > \omega_0, c_{\omega_0; \omega'_0}^{(k)(k')}(t) = 0$. L'état initial du champ étant le vide, toutes les amplitudes associées aux paires seront nulles pour $t < t_0$: $c_{\omega_0; \omega'_0}^{(k)(k')}(-\infty) = 0$, $b(-\infty) = 1$. D'après la théorie des perturbations au premier ordre [Dalibard(Cours)], il vient alors :

$$c_{\omega_0; \omega'_0}^{(k)(k')}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle 1_{\omega_0}^{(k)}, 1_{\omega'_0}^{(k')} | \delta \hat{H}(t') | 0 \rangle e^{i(E_{\omega_0, k; \omega'_0, k'}^{(0)} - E_{vac}^{(0)})t'/\hbar} dt' \quad (\text{A-12})$$

avec : $E_{\omega_0, k; \omega'_0, k'}^{(0)} - E_{vac}^{(0)} = \hbar(\omega_0 + \omega'_0)$. En considérant un temps fini d'oscillation du miroir, on aura une bonne estimation des amplitudes totales de création de paires en prenant la limite $t \rightarrow +\infty$ [Mundarain(98)]. En utilisant (A-10), on obtient :

$$\begin{aligned} c_{\omega_0; \omega'_0}^{(k)(k')}(+\infty) &\simeq \frac{i}{\hbar} \delta q[\omega_0 + \omega'_0] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle 1_{\omega_0}^{(k)}, 1_{\omega'_0}^{(k')} | \hat{F}[\omega, \omega'] | 0 \rangle \\ &\simeq \frac{i}{\hbar} \delta q[\omega_0 + \omega'_0] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle 1_{\omega_0}^{(k)}, 1_{\omega'_0}^{(k')} | \hat{F}[-\omega, -\omega'] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

D'après (A-9), (A-5) et (2.16), chaque type de paire donne :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle 1_{\omega_0}^{(\rightarrow)}, 1_{\omega'_0}^{(\rightarrow)} | \hat{F}[-\omega, -\omega'] | 0 \rangle &= -\frac{\hbar}{2c} \sqrt{\omega_0 \omega'_0} \{ \alpha[-\omega_0, -\omega'_0] + \alpha[-\omega'_0, -\omega_0] \} \\ &= -\frac{\hbar}{c} \sqrt{\omega_0 \omega'_0} \alpha[-\omega_0, -\omega'_0] \\ &= -\frac{\hbar}{c} \sqrt{\omega_0 \omega'_0} \alpha[\omega_0, \omega'_0]^* \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)}, 1_{\omega'_0}^{(\leftarrow)} | \hat{F}[-\omega, -\omega'] | 0 \rangle = +\frac{\hbar}{c} \sqrt{\omega_0 \omega'_0} \alpha[\omega_0, \omega'_0]^* \quad (\text{A-15})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle 1_{\omega_0}^{(\rightarrow)}, 1_{\omega'_0}^{(\leftarrow)} | \hat{F}[-\omega, -\omega'] | 0 \rangle &= +\frac{\hbar}{2c} \sqrt{\omega_0 \omega'_0} \{ \beta[-\omega_0, -\omega'_0] - \beta[-\omega'_0, -\omega_0] \} \\ &= +\frac{\hbar}{c} \sqrt{\omega_0 \omega'_0} \beta[\omega_0, \omega'_0]^* \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle 1_{\omega_0}^{(\leftarrow)}, 1_{\omega'_0}^{(\rightarrow)} | \hat{F}[-\omega, -\omega'] | 0 \rangle = -\frac{\hbar}{c} \sqrt{\omega_0 \omega'_0} \beta[\omega_0, \omega'_0]^* \quad (\text{A-17})$$

Par conséquent, la probabilité totale d'émission d'une paire dont les photons ont même sens de propagation sera donnée par :

$$|c_{\omega_0; \omega'_0}^{(k)(k)}(+\infty)|^2 \simeq \frac{\omega_0 \omega'_0}{c^2} |\alpha[\omega_0, \omega'_0]|^2 |\delta q[\omega_0 + \omega'_0]|^2 \quad (\text{A-18})$$

et celle d'émission d'une paire dont les photons se propagent en sens opposé par :

$$|c_{\omega_0:\omega'_0}^{(k)\neq(k')}(+\infty)|^2 \simeq \frac{\omega_0\omega'_0}{c^2} |\beta[\omega_0, \omega'_0]|^2 |\delta q[\omega_0 + \omega'_0]|^2 \quad (\text{A-19})$$

D'après l'expression (A-5) des facteurs α et β , si les coefficients de diffusion du miroir varient peu entre les fréquences ω_0 et ω'_0 , les photons d'une même paire seront principalement émis avec un sens de propagation identique.

On se propose à présent d'étendre ce raisonnement à tout état entrant $|\Psi_{in}\rangle$ stationnaire (c'est-à-dire état propre de $\hat{H}^{(0)}$). Considérons donc un état perturbé du champ :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\chi_{out} \neq \Psi_{in}} c_{\chi_{out}}(t) |\chi_{out}\rangle + b(t) |\Psi_{in}\rangle \quad (\text{A-20})$$

où l'on somme sur tous les états χ_{out} stationnaires (autres que Ψ_{in}) susceptibles d'être excités par la perturbation, et avec : $c_{\chi_{out}}(-\infty) = 0$, $b(-\infty) = 1$. Toujours d'après la théorie des perturbations au premier ordre, on aura :

$$c_{\chi_{out}}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle \chi_{out} | \delta \hat{H}(t') | \Psi_{in} \rangle e^{i(E_{\chi_{out}}^{(0)} - E_{\Psi_{in}}^{(0)})t'/\hbar} dt' \quad (\text{A-21})$$

En notant : $E_{\chi_{out}}^{(0)} - E_{\Psi_{in}}^{(0)} = \hbar(\Omega_{\chi_{out}} - \Omega_{\Psi_{in}})$, on obtiendra finalement :

$$\begin{aligned} c_{\chi_{out}}(+\infty) &\simeq \frac{i}{\hbar} \delta q[\Omega_{\chi_{out}} - \Omega_{\Psi_{in}}] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \chi_{out} | \hat{F}[\omega, \omega'] | \Psi_{in} \rangle \\ &\simeq \frac{i}{\hbar} \delta q[\Omega_{\chi_{out}} - \Omega_{\Psi_{in}}] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \chi_{out} | \hat{F}[-\omega, -\omega'] | \Psi_{in} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

En examinant l'expression de $\hat{F}[\omega, \omega']$ donnée en (A-8) ou celle de $\hat{F}[-\omega, -\omega']$ donnée en (A-9), on peut voir que les états perturbés possibles seront ceux obtenus à partir de $|\Psi_{in}\rangle$:

- soit en ajoutant deux photons ;

si l'on note ω_0 et ω'_0 leur fréquence respective, on aura : $\Omega_{\chi_{out}} - \Omega_{\Psi_{in}} = \omega_0 + \omega'_0$,

- soit en supprimant deux photons ;

si l'on note ω_0 et ω'_0 leur fréquence respective, on aura : $\Omega_{\chi_{out}} - \Omega_{\Psi_{in}} = -\omega_0 - \omega'_0$,

- soit en en ajoutant un et en en supprimant un autre ;

si l'on note ω_0 et ω'_0 leur fréquence respective, on aura : $\Omega_{\chi_{out}} - \Omega_{\Psi_{in}} = \omega_0 - \omega'_0$.

Il faudra par ailleurs, pour que ces processus aient une probabilité suffisante, que la somme ou la différence des fréquences en question corresponde à une composante spectrale du mouvement de contribution notable.

B Signaux de photodétection en régime de comptage : une approche naïve

D'après la théorie de la photodétection [Reynaud(BruitQ), Reynaud(Squeezing)], un appareil de mesure de l'intensité lumineuse est sensible au nombre de photons incidents plutôt qu'à la puissance lumineuse [Cook(82), Shapiro(85)]. Cette propriété amène à définir l'opérateur intensité associé à un photodétecteur idéal¹ mesurant le flux des photons se propageant vers la droite ou vers la gauche par respectivement :

$$\begin{cases} \hat{I}^{(\rightarrow)}(t) = \hat{E}_-^{(\rightarrow)}(t)\hat{E}_+^{(\rightarrow)}(t) \\ \hat{I}^{(\leftarrow)}(t) = \hat{E}_-^{(\leftarrow)}(t)\hat{E}_+^{(\leftarrow)}(t) \end{cases} \quad (\text{B-1})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \hat{E}_+^{(\rightarrow)}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{a}[\omega] e^{-i\omega t} \\ \hat{E}_-^{(\rightarrow)}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{a}^\dagger[\omega] e^{+i\omega t} \end{cases} \quad \text{et : } \begin{cases} \hat{E}_+^{(\leftarrow)}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{b}[\omega] e^{-i\omega t} \\ \hat{E}_-^{(\leftarrow)}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{b}^\dagger[\omega] e^{+i\omega t} \end{cases} \quad (\text{B-2})$$

Le nombre moyen de détections entre les instants t et $t + T$ est alors donné par :

$$\begin{cases} N_{t,T}^{(\rightarrow)} = \int_t^{t+T} dt' \langle \hat{I}^{(\rightarrow)}(t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle \hat{I}_{t,T}^{(\rightarrow)}(t') \rangle = \langle \hat{I}_{t,T}^{(\rightarrow)}[0] \rangle \\ N_{t,T}^{(\leftarrow)} = \int_t^{t+T} dt' \langle \hat{I}^{(\leftarrow)}(t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle \hat{I}_{t,T}^{(\leftarrow)}(t') \rangle = \langle \hat{I}_{t,T}^{(\leftarrow)}[0] \rangle \end{cases} \quad (\text{B-3})$$

où l'on a introduit les opérateurs :

$$\begin{cases} \hat{I}_{t,T}^{(\rightarrow)}(t') = \theta(t' - t)\theta(T + t - t') \hat{I}^{(\rightarrow)}(t') \\ \hat{I}_{t,T}^{(\leftarrow)}(t') = \theta(t' - t)\theta(T + t - t') \hat{I}^{(\leftarrow)}(t') \end{cases} \quad \text{et : } \begin{cases} \hat{I}_{t,T}^{(\rightarrow)}[\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \hat{I}_{t,T}^{(\rightarrow)}(t') e^{i\Omega t'} \\ \hat{I}_{t,T}^{(\leftarrow)}[\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \hat{I}_{t,T}^{(\leftarrow)}(t') e^{i\Omega t'} \end{cases} \quad (\text{B-4})$$

ce qui correspond dans la pratique à l'échantillonnage du signal d'intensité entre t et $t + T$, et à la transformée de Fourier de cet échantillon. En utilisant (B-1), (B-2) et (B-3), il vient :

$$\begin{cases} N_{t,T}^{(\rightarrow)} = \langle \hat{I}_{t,T}^{(\rightarrow)}[0] \rangle = T \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{a}^\dagger[\omega]\hat{a}[\omega'] \rangle e^{i(\omega-\omega')(t+T/2)} \text{sin}_C \left[(\omega - \omega')T/2 \right] \\ N_{t,T}^{(\leftarrow)} = \langle \hat{I}_{t,T}^{(\leftarrow)}[0] \rangle = T \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{b}^\dagger[\omega]\hat{b}[\omega'] \rangle e^{i(\omega-\omega')(t+T/2)} \text{sin}_C \left[(\omega - \omega')T/2 \right] \end{cases} \quad (\text{B-5})$$

et en généralisant à toutes les fonctions d'échantillonnage raisonnablement proches de la fonction créneau $\theta(t' - t)\theta(T + t - t')$, on peut écrire :

$$\begin{cases} N_{t,T}^{(\rightarrow)} = \langle \hat{I}_{t,T}^{(\rightarrow)}[0] \rangle = T \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{a}^\dagger[\omega]\hat{a}[\omega'] \rangle \delta_{1/T}^{(t)}(\omega - \omega') \\ N_{t,T}^{(\leftarrow)} = \langle \hat{I}_{t,T}^{(\leftarrow)}[0] \rangle = T \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{b}^\dagger[\omega]\hat{b}[\omega'] \rangle \delta_{1/T}^{(t)}(\omega - \omega') \end{cases} \quad (\text{B-6})$$

¹c'est-à-dire de rendement quantique 1 sur une plage de fréquences donnée

où, quel que soit t , $\delta_\epsilon^{(t)}(\eta)$ est une fonction continue de η et de ϵ vérifiant :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^* \begin{cases} \delta_\epsilon^{(t)}(0) = 1 \\ \forall \eta \in \mathbb{R}^*, \quad |\delta_\epsilon^{(t)}(\eta)| < 1 \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

$$\text{et : } \forall \eta \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon^{(t)}(\eta) = \delta_{\eta,0} \quad \text{avec : } \begin{cases} \delta_{\eta,0} = 1 \text{ si } \eta = 0 \\ \delta_{\eta,0} = 0 \text{ si } \eta \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B-8})$$

On peut aussi définir le flux moyen des photons détectés entre t et $t + T$:

$$\begin{cases} \Phi_{d;t,T}^{(\rightarrow)} = \frac{N_{t,T}^{(\rightarrow)}}{T} = \frac{\langle \hat{I}_{t,T}^{(\rightarrow)}[0] \rangle}{T} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{a}^\dagger[\omega] \hat{a}[\omega'] \rangle \delta_{1/T}^{(t)}(\omega - \omega') \\ \Phi_{d;t,T}^{(\leftarrow)} = \frac{N_{t,T}^{(\leftarrow)}}{T} = \frac{\langle \hat{I}_{t,T}^{(\leftarrow)}[0] \rangle}{T} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{b}^\dagger[\omega] \hat{b}[\omega'] \rangle \delta_{1/T}^{(t)}(\omega - \omega') \end{cases} \quad (\text{B-9})$$

Dans la limite d'un temps T de mesure suffisamment long, les flux photoniques moyens pourront être considérés indépendants de t , et on les calculera par passage à la limite :

$$\begin{cases} \Phi_d^{(\rightarrow)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{t,T}^{(\rightarrow)}}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\langle \hat{I}_{t,T}^{(\rightarrow)}[0] \rangle}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{a}^\dagger[\omega] \hat{a}[\omega'] \rangle \delta_{1/T}(\omega - \omega') \\ \Phi_d^{(\leftarrow)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{t,T}^{(\leftarrow)}}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\langle \hat{I}_{t,T}^{(\leftarrow)}[0] \rangle}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{b}^\dagger[\omega] \hat{b}[\omega'] \rangle \delta_{1/T}(\omega - \omega') \end{cases} \quad (\text{B-10})$$

La fonction $\delta_\epsilon(\eta)$ est définie de la même manière que $\delta_\epsilon^{(t)}(\eta)$.

Supposons maintenant que l'on utilise des filtres fréquentiels tels que :

$$\begin{cases} \hat{E}_+^{(\rightarrow)}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} g[\omega] \hat{a}[\omega] e^{-i\omega t} \\ \hat{E}_-^{(\rightarrow)}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} g[\omega]^* \hat{a}^\dagger[\omega] e^{+i\omega t} \end{cases} \quad \text{et : } \begin{cases} \hat{E}_+^{(\leftarrow)}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} g[\omega] \hat{b}[\omega] e^{-i\omega t} \\ \hat{E}_-^{(\leftarrow)}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} g[\omega]^* \hat{b}^\dagger[\omega] e^{+i\omega t} \end{cases} \quad (\text{B-11})$$

En transposant alors toutes les définitions adoptées pour le cas non-filtré au cas filtré (on apposera un indice f à toutes les grandeurs concernées), on calcule le flux photonique filtré

moyen mesuré pendant une durée suffisante selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{d,f}^{(\rightarrow)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{t,T,f}^{(\rightarrow)}}{T} \\ \quad = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\langle \hat{I}_{t,T,f}^{(\rightarrow)}[0] \rangle}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} g[\omega]^* g[\omega'] \langle \hat{a}^\dagger[\omega] \hat{a}[\omega'] \rangle \delta_{1/T}(\omega - \omega') \\ \\ \Phi_{d,f}^{(\leftarrow)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{t,T,f}^{(\leftarrow)}}{T} \\ \quad = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\langle \hat{I}_{t,T,f}^{(\leftarrow)}[0] \rangle}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} g[\omega]^* g[\omega'] \langle \hat{b}^\dagger[\omega] \hat{b}[\omega'] \rangle \delta_{1/T}(\omega - \omega') \end{array} \right. \quad (\text{B-12})$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{d,f}^{(\rightarrow)} \simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} |g[\omega]|^2 \langle \hat{a}^\dagger[\omega] \hat{a}[\omega'] \rangle \delta_\epsilon(\omega - \omega') \\ \\ \Phi_{d,f}^{(\leftarrow)} \simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} |g[\omega]|^2 \langle \hat{b}^\dagger[\omega] \hat{b}[\omega'] \rangle \delta_\epsilon(\omega - \omega') \end{array} \right. \quad (\text{B-13})$$

Supposons maintenant que le filtre utilisé soit centré en ω_0 et ait une bande passante $\delta\varpi$. En faisant de plus l'hypothèse que cette bande passante est suffisamment étroite, on peut réécrire (B-13) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{d,f[\omega_0;\delta\varpi]}^{(\rightarrow)} \simeq \delta\varpi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{a}^\dagger[\omega_0] \hat{a}[\omega'] \rangle \delta_\epsilon(\omega_0 - \omega') \\ \\ \Phi_{d,f[\omega_0;\delta\varpi]}^{(\leftarrow)} \simeq \delta\varpi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \hat{b}^\dagger[\omega_0] \hat{b}[\omega'] \rangle \delta_\epsilon(\omega_0 - \omega') \end{array} \right. \quad (\text{B-14})$$

Ces résultats nous amènent à définir la "densité spectrale de flux photonique moyen" à la fréquence ω_0 par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\omega_0}^{(\rightarrow)} = \frac{\Phi_{d,f[\omega_0;\delta\varpi]}^{(\rightarrow)}}{\delta\varpi} \simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'_0}{2\pi} \langle \hat{a}^\dagger[\omega_0] \hat{a}[\omega'_0] \rangle \delta_\epsilon(\omega_0 - \omega'_0) \\ \\ n_{\omega_0}^{(\leftarrow)} = \frac{\Phi_{d,f[\omega_0;\delta\varpi]}^{(\leftarrow)}}{\delta\varpi} \simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'_0}{2\pi} \langle \hat{b}^\dagger[\omega_0] \hat{b}[\omega'_0] \rangle \delta_\epsilon(\omega_0 - \omega'_0) \end{array} \right. \quad (\text{B-15})$$

et, dans la pratique, si la moyenne est effectuée avec un état stationnaire du champ², on

²c'est-à-dire un état propre du Hamiltonien $H^{(0)}$ associé à la propagation libre du champ, cf Annexe A

pourra calculer ces densités en identifiant les termes :

$$\begin{cases} \langle \hat{a}^\dagger[\omega_0]\hat{a}[\omega'_0] \rangle = 2\pi \delta(\omega_0 - \omega'_0) n_{\omega_0}^{(\rightarrow)} \\ \langle \hat{b}^\dagger[\omega_0]\hat{b}[\omega'_0] \rangle = 2\pi \delta(\omega_0 - \omega'_0) n_{\omega_0}^{(\leftarrow)} \end{cases} \quad (\text{B-16})$$

On réobtiendra alors le flux photonique moyen total par intégration :

$$\begin{cases} \Phi_d^{(\rightarrow)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_0}{2\pi} n_{\omega_0}^{(\rightarrow)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'_0}{2\pi} n^{(\rightarrow)}[\omega_0; \omega'_0] \\ \Phi_d^{(\leftarrow)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_0}{2\pi} n_{\omega_0}^{(\leftarrow)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'_0}{2\pi} n^{(\leftarrow)}[\omega_0; \omega'_0] \end{cases} \quad (\text{B-17})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} n^{(\rightarrow)}[\omega_0; \omega'_0] = \langle \hat{a}^\dagger[\omega_0]\hat{a}[\omega'_0] \rangle \\ n^{(\leftarrow)}[\omega_0; \omega'_0] = \langle \hat{b}^\dagger[\omega_0]\hat{b}[\omega'_0] \rangle \end{cases} \quad (\text{B-18})$$

Pour terminer, nous proposons de définir l'équivalent des opérateurs nombre classiques par des opérateurs "densité spectrale de flux photonique moyen" selon :

$$\begin{cases} \hat{n}_{\omega_0}^{(\rightarrow)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'_0}{2\pi} \hat{a}^\dagger[\omega_0]\hat{a}[\omega'_0] \delta_\epsilon(\omega_0 - \omega'_0) \\ \hat{n}_{\omega_0}^{(\leftarrow)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'_0}{2\pi} \hat{b}^\dagger[\omega_0]\hat{b}[\omega'_0] \delta_\epsilon(\omega_0 - \omega'_0) \end{cases} \quad (\text{B-19})$$

On peut aussi définir des opérateurs "flux photonique moyen total" selon :

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_d^{(\rightarrow)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_0}{2\pi} \hat{n}_{\omega_0}^{(\rightarrow)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'_0}{2\pi} \hat{n}^{(\rightarrow)}[\omega_0; \omega'_0] \delta_\epsilon(\omega_0 - \omega'_0) \\ \hat{\Phi}_d^{(\leftarrow)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_0}{2\pi} \hat{n}_{\omega_0}^{(\leftarrow)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'_0}{2\pi} \hat{n}^{(\leftarrow)}[\omega_0; \omega'_0] \delta_\epsilon(\omega_0 - \omega'_0) \end{cases} \quad (\text{B-20})$$

$$\text{avec : } \hat{n}^{(\rightarrow)}[\omega_0; \omega'_0] = \hat{a}^\dagger[\omega_0]\hat{a}[\omega'_0] \quad \text{et : } \hat{n}^{(\leftarrow)}[\omega_0; \omega'_0] = \hat{b}^\dagger[\omega_0]\hat{b}[\omega'_0] \quad (\text{B-21})$$

Ces définitions seront exploitées dans l'annexe suivante, pour calculer l'équivalent d'un taux de comptage en coïncidence à deux fréquences.

C Émission de paires dans des processus d'ordres supérieurs

Nous allons dans cette annexe démontrer qu'un miroir en mouvement "homographique" [cf (2.89)] dans le vide émet non seulement des paires de photons $(\omega; \Omega - \omega)$ comme prévu dans l'approche perturbative, mais aussi des paires $(\omega; m\Omega - \omega)$ avec m entier supérieur ou égal à 2 quelconque. Pour un ordre m donné, la probabilité d'émission d'une paire sera proportionnelle à β^{2m} . Dans toute situation réaliste, on aura $\beta \ll 1$ et les paires émises avec le plus de probabilité resteront donc néanmoins celles associées à l'ordre $m = 1$, c'est-à-dire celles prévues par le calcul perturbatif.

Pour ce faire, nous allons nous intéresser à la fonction de corrélation normale d'ordre 2 des opérateurs densités spectrales de flux photonique (cf Annexe B). Pour des photons de fréquences ν_1 et ν_2 positives se propageant vers la droite par exemple, cette fonction est reliée à la fonction à quatre points du champ par la relation :

$$\begin{aligned}
K_{\nu_1, \nu_2}^{(\rightarrow)(\rightarrow)} &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{d\nu'_1}{2\pi} \frac{d\nu'_2}{2\pi} \langle a^\dagger[\nu_1] a^\dagger[\nu_2] a[\nu'_2] a[\nu'_1] \rangle \delta_{\epsilon_1}(\nu_1 - \nu'_1) \delta_{\epsilon_2}(\nu_2 - \nu'_2) \\
&= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{d\nu'_1}{2\pi} \frac{d\nu'_2}{2\pi} \frac{4\epsilon_0^2 c^2 \sqrt{\nu_1 \nu_2 \nu'_2 \nu'_1}}{\hbar^2} \langle \varphi^\dagger[\nu_1] \varphi^\dagger[\nu_2] \varphi[\nu'_2] \varphi[\nu'_1] \rangle \delta_{\epsilon_1}(\nu_1 - \nu'_1) \delta_{\epsilon_2}(\nu_2 - \nu'_2)
\end{aligned} \tag{C-1}$$

Pour voir si des photons de fréquence ν_1 et ν_2 sont corrélés, il faudra évaluer la quantité :

$$C_{\nu_1, \nu_2}^{(\rightarrow)(\rightarrow)} = K_{\nu_1, \nu_2}^{(\rightarrow)(\rightarrow)} - n_{\nu_1}^{(\rightarrow)} n_{\nu_2}^{(\rightarrow)} .$$

D'après l'équation (2.97), à droite d'un miroir qui oscille selon la trajectoire (2.89), si l'on moyenne avec le vide comme état entrant, la fonction à quatre points du champ sortant aux fréquences ν_1, ν_2, ν_2' et ν_1' positives s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi_{out}^\dagger[\nu_1] \varphi_{out}^\dagger[\nu_2] \varphi_{out}[\nu_2'] \varphi_{out}[\nu_1'] \rangle_{vac} = \\
&R^2 \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{m'_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{m'_1 \in \mathbb{Z}} \gamma_{m_1}^* [m_1 - \nu_1] \gamma_{m_2}^* [m_2 - \nu_2] \gamma_{m'_2} [m'_2 - \nu_2'] \gamma_{m'_1} [m'_1 - \nu_1'] \\
&\quad \langle \psi_{in}^\dagger[\nu_1 - m_1] \psi_{in}^\dagger[\nu_2 - m_2] \psi_{in}[\nu_2' - m'_2] \psi_{in}[\nu_1' - m'_1] \rangle_{vac} \tag{C-2}
\end{aligned}$$

En faisant apparaître les opérateurs de création et annihilation associés aux champs entrants

dans chaque terme de la somme obtenue ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \langle \psi_{in}^\dagger[\nu_1 - m_1] \psi_{in}^\dagger[\nu_2 - m_2] \psi_{in}[\nu_2' - m_2'] \psi_{in}[\nu_1' - m_1'] \rangle_{vac} = \\
& \frac{\hbar^2}{4\varepsilon_0^2 c^2} \frac{\theta(m_1 - \nu_1) \theta(m_1' - \nu_1')}{\sqrt{(m_1 - \nu_1)(m_1' - \nu_1')}} \times \\
& \left\{ \frac{\theta(m_2 - \nu_2) \theta(m_2' - \nu_2')}{\sqrt{(m_2 - \nu_2)(m_2' - \nu_2')}} \langle 0 | b_{in}[m_1 - \nu_1] b_{in}[m_2 - \nu_2] b_{in}^\dagger[m_2' - \nu_2'] b_{in}^\dagger[m_1' - \nu_1'] | 0 \rangle \right. \\
& \left. + \frac{\theta(\nu_2 - m_2) \theta(\nu_2' - m_2')}{\sqrt{(\nu_2 - m_2)(\nu_2' - m_2')}} \langle 0 | b_{in}[m_1 - \nu_1] b_{in}^\dagger[\nu_2 - m_2] b_{in}[\nu_2' - m_2'] b_{in}^\dagger[m_1' - \nu_1'] | 0 \rangle \right\} \quad (C-3)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
& \langle \psi_{in}^\dagger[\nu_1 - m_1] \psi_{in}^\dagger[\nu_2 - m_2] \psi_{in}[\nu_2' - m_2'] \psi_{in}[\nu_1' - m_1'] \rangle_{vac} = \\
& \frac{\hbar^2}{4\varepsilon_0^2 c^2} \frac{\theta(m_1 - \nu_1) \theta(m_1' - \nu_1')}{\sqrt{(m_1 - \nu_1)(m_1' - \nu_1')}} \times \\
& \left\{ \frac{\theta(m_2 - \nu_2) \theta(m_2' - \nu_2')}{\sqrt{(m_2 - \nu_2)(m_2' - \nu_2')}} \left[2\pi \delta((m_2 - \nu_2) - (m_2' - \nu_2')) \langle 0 | b_{in}[m_1 - \nu_1] b_{in}^\dagger[m_1' - \nu_1'] | 0 \rangle \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \langle 0 | b_{in}[m_1 - \nu_1] b_{in}^\dagger[m_2' - \nu_2'] b_{in}[m_2 - \nu_2] b_{in}^\dagger[m_1' - \nu_1'] | 0 \rangle \right] \right. \\
& \left. + \frac{\theta(\nu_2 - m_2) \theta(\nu_2' - m_2')}{\sqrt{(\nu_2 - m_2)(\nu_2' - m_2')}} 2\pi \delta((m_1 - \nu_1) - (\nu_2 - m_2)) \langle 0 | b_{in}[\nu_2' - m_2'] b_{in}^\dagger[m_1' - \nu_1'] | 0 \rangle \right\} \quad (C-4)
\end{aligned}$$

Ces calculs s'apparentent à l'utilisation du théorème de Wick [Itzykson], et aboutissent à :

$$\begin{aligned}
& \langle \psi_{in}^\dagger[\nu_1 - m_1] \psi_{in}^\dagger[\nu_2 - m_2] \psi_{in}[\nu_2' - m_2'] \psi_{in}[\nu_1' - m_1'] \rangle_{vac} = \\
& \frac{\hbar^2}{4\varepsilon_0^2 c^2} \frac{\theta(m_1 - \nu_1) \theta(m_1' - \nu_1')}{\sqrt{(m_1 - \nu_1)(m_1' - \nu_1')}} \times \\
& \left\{ \frac{\theta(m_2 - \nu_2) \theta(m_2' - \nu_2')}{\sqrt{(m_2 - \nu_2)(m_2' - \nu_2')}} \left[4\pi^2 \delta((m_2 - \nu_2) - (m_2' - \nu_2')) \delta((m_1 - \nu_1) - (m_1' - \nu_1')) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 4\pi^2 \delta((m_2' - \nu_2') - (m_1 - \nu_1)) \delta((m_2 - \nu_2) - (m_1' - \nu_1')) \right] \right. \\
& \left. + \frac{\theta(\nu_2 - m_2) \theta(\nu_2' - m_2')}{\sqrt{(\nu_2 - m_2)(\nu_2' - m_2')}} 4\pi^2 \delta((m_2 - \nu_2) - (\nu_1 - m_1)) \delta((m_2' - \nu_2') - (\nu_1' - m_1')) \right\} \quad (C-5)
\end{aligned}$$

et donc, d'après (C-1) :

$$\begin{aligned}
K_{\nu_1, \nu_2}^{(-)(-)}{}_{vac} &= \\
R^2 &\left\{ \sum_{m_1 > \nu_1} \sum_{m_2 > \nu_2} \sum_{m'_2 > \nu_2} \sum_{m'_1 > \nu_1} \nu_1 \nu_2 \frac{\gamma_{m_1}^*[m_1 - \nu_1] \gamma_{m_2}^*[m_2 - \nu_2] \gamma_{m'_2}[m'_2 - \nu_2] \gamma_{m'_1}[m'_1 - \nu_1]}{\sqrt{(m_1 - \nu_1)(m_2 - \nu_2)(m'_2 - \nu_2)(m'_1 - \nu_1)}} \right. \\
&\quad \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} \\
&+ \sum_{m_1 > \nu_1} \sum_{m_2 > \nu_2} \sum_{m'_2 > \nu_2} \sum_{m'_1 > \nu_1} \nu_1 \nu_2 \frac{\gamma_{m_1}^*[m_1 - \nu_1] \gamma_{m_2}^*[m_2 - \nu_2] \gamma_{m'_2}[m'_2 - \nu_2] \gamma_{m'_1}[m'_1 - \nu_1]}{\sqrt{(m_1 - \nu_1)(m_2 - \nu_2)(m'_2 - \nu_2)(m'_1 - \nu_1)}} \\
&\quad \delta_{m_1 + m_2, m'_1 + m'_2} \delta_{\nu_1 - \nu_2, m'_1 - m_2} \\
&+ \left. \sum_{m_1 > \nu_1} \sum_{m_2 < \nu_2} \sum_{m'_2 < \nu_2} \sum_{m'_1 > \nu_1} \nu_1 \nu_2 \frac{\gamma_{m_1}^*[m_1 - \nu_1] \gamma_{m_2}^*[m_2 - \nu_2] \gamma_{m'_2}[m'_2 - \nu_2] \gamma_{m'_1}[m'_1 - \nu_1]}{\sqrt{(m_1 - \nu_1)(m_2 - \nu_2)(m'_2 - \nu_2)(m'_1 - \nu_1)}} \right. \\
&\quad \left. \delta_{m_1 + m_2, m'_1 + m'_2} \delta_{\nu_1 + \nu_2, m_1 + m_2} \right\} \quad (C-6)
\end{aligned}$$

" δ " dénote ici le symbole de Kronecker. D'après (2.111), le premier terme entre crochets de cette équation s'identifie aisément au produit : $n_{\nu_1}^{(-)}{}_{vac} n_{\nu_2}^{(-)}{}_{vac}$.

Isolons maintenant le dernier terme entre crochets de l'équation (C-6) :

$$\begin{aligned}
R^2 &\sum_{m_1 > \nu_1} \sum_{m_2 < \nu_2} \sum_{m'_2 < \nu_2} \sum_{m'_1 > \nu_1} \nu_1 \nu_2 \frac{\gamma_{m_1}^*[m_1 - \nu_1] \gamma_{m_2}^*[m_2 - \nu_2] \gamma_{m'_2}[m'_2 - \nu_2] \gamma_{m'_1}[m'_1 - \nu_1]}{(m_1 - \nu_1)(m'_1 - \nu_1)} \\
&\quad \delta_{m_1 + m_2, m'_1 + m'_2} \delta_{\nu_1 + \nu_2, m_1 + m_2} \\
&= R^2 \sum_{m_0 \in \mathbb{N}^*} \delta_{\nu_1 + \nu_2, m_0} \left\{ \sum_{m_1 > \nu_1} \sum_{\tilde{m}_1 > \nu_1} \sum_{\tilde{m}_2 > m_0 - \nu_2} \frac{\nu_1 \nu_2}{(m_1 - \nu_1)(\tilde{m}_1 - \nu_1)} \right. \\
&\quad \left. \gamma_{m_1}^*[m_1 - \nu_1] \gamma_{(m_0 - m_1)}^*[(m_0 - m_1) - \nu_2] \gamma_{(m_0 - \tilde{m}_2)}[(m_0 - \tilde{m}_2) - \nu_2] \gamma_{\tilde{m}_1}[\tilde{m}_1 - \nu_1] \delta_{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2} \right\} \\
&= R^2 \sum_{m_0 \in \mathbb{N}^*} \delta_{\nu_1 + \nu_2, m_0} \left\{ \sum_{m_1 > \nu_1} \sum_{\tilde{m}_1 > \nu_1} \frac{\nu_1 (m_0 - \nu_1)}{(m_1 - \nu_1)(\tilde{m}_1 - \nu_1)} \right. \\
&\quad \left. \gamma_{m_1}^*[m_1 - \nu_1] \gamma_{(m_0 - m_1)}^*[\nu_1 - m_1] \gamma_{(m_0 - \tilde{m}_1)}[\nu_1 - \tilde{m}_1] \gamma_{\tilde{m}_1}[\tilde{m}_1 - \nu_1] \right\} \quad (C-7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \sum_{m_0 > \nu_1} \delta_{\nu_1 + \nu_2, m_0} \left\{ \frac{\nu_1}{m_0 - \nu_1} \left| \gamma_{m_0} [m_0 - \nu_1] \right|^2 \right. \\
&\quad + \sum_{\substack{m_1 > \nu_1, \tilde{m}_1 > \nu_1 \\ (m_1, \tilde{m}_1) \neq (m_0, m_0)}} \frac{\nu_1 (m_0 - \nu_1)}{(m_1 - \nu_1)(\tilde{m}_1 - \nu_1)} \\
&\quad \left. \gamma_{m_1}^* [m_1 - \nu_1] \gamma_{(m_0 - m_1)}^* [\nu_1 - m_1] \gamma_{(m_0 - \tilde{m}_1)} [\nu_1 - \tilde{m}_1] \gamma_{\tilde{m}_1} [\tilde{m}_1 - \nu_1] \right\} \\
&\hspace{15em} \text{(C-8)}
\end{aligned}$$

En sommant le membre de droite de la dernière égalité obtenue dans le calcul (C-8) sur $\nu_2 = m - \nu_1$ avec $m > \nu_1$ ($m \in \mathbb{N}^*$), le premier terme entre crochets va s'identifier à $n_{\nu_1 \text{ vac}}^{(-)}$ (au facteur R près). Il vient alors, d'après (C-6), (C-8) et ce qui vient d'être dit :

$$\sum_{m > \nu_1} C_{\nu_1, m - \nu_1 \text{ vac}}^{(-)(-)} = \sum_{m > \nu_1} \left\{ K_{\nu_1, m - \nu_1 \text{ vac}}^{(-)(-)} - n_{\nu_1 \text{ vac}}^{(-)} n_{(m - \nu_1) \text{ vac}}^{(-)} \right\} = R \left\{ n_{\nu_1 \text{ vac}}^{(-)} + \Delta_{p.p.}(\nu_1) \right\}$$

où l'on a rassemblé dans $\Delta_{p.p.}(\nu_1)$ tous les autres termes de la somme. Appelons p_1 la partie entière de ν_1 . En utilisant (2.94) et (2.95), puis en examinant les termes adéquats dans les sommes (C-6) et (C-8), on remarque que $\Delta_{p.p.}(\nu_1)$ est proportionnel à $\beta^{4(p_1+1)}$ alors que $n_{\nu_1 \text{ vac}}^{(-)}$ est proportionnel à $\beta^{2(p_1+1)}$. Or, dans toute situation réaliste, le miroir sera non-relativiste, ce qui implique $\beta \ll 1$, et donc :

$$\sum_{m > \nu_1} C_{\nu_1, m - \nu_1 \text{ vac}}^{(-)(-)} \simeq R n_{\nu_1 \text{ vac}}^{(-)} \quad \text{(C-9)}$$

On peut réinterpréter ce dernier résultat en termes de probabilités :

"somme sur $m > \nu_1$ ($m \in \mathbb{N}^*$) des probabilités de détecter deux photons à ν_1 et $m - \nu_1$ corrélés à droite du miroir $\simeq R \times$ probabilité de détecter un photon à ν_1 à droite du miroir"

c'est-à-dire :

"somme sur $m > \nu_1$ ($m \in \mathbb{N}^*$) des probabilités d'émission vers la droite par le miroir d'un photon à ν_1 dans une paire de photons $(\nu_1, m - \nu_1) \simeq$ probabilité d'émission par le miroir d'un photon à ν_1 vers la droite"

En conclusion, dans le vide, les photons seront principalement émis sous la forme de paires $(\nu, m - \nu)$ avec $m > \nu$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

D Procédure d'itération fréquentielle au sein d'une cavité oscillante

L'objet de cette Annexe est d'explicitier la procédure d'itération fréquentielle pour la transformation des champs multiples réfléchis au sein d'une cavité en oscillation mécanique. Nous allons pour cela repartir de l'équation (2.126) donnée dans le sous-paragraphe C.2.1 du chapitre 2 :

$$\begin{aligned}
\psi_{out,2}[\nu] &= \sqrt{T_2}\psi_{in,2}[\nu] + \sqrt{R_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[m-\nu] \left\{ \sqrt{T_1}\varphi_{in,1}[\nu-m] \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{R_1} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \gamma_{m'}^{\{1\}}[m'-(\nu-m)]\psi_{in,1}[(\nu-m)-m'] \right\} \\
&= \sqrt{T_2}\psi_{in}[\nu] + \sqrt{R_2}\sqrt{T_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[m-\nu]\varphi_{in}[\nu-m] \\
&\quad + \sqrt{R_2}\sqrt{R_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[m-\nu]\gamma_{m'}^{\{1\}}[m'-(\nu-m)]\psi_{out,2}[(\nu-m)-m']
\end{aligned} \tag{D-1}$$

Cette expression rend compte de l'effet d'un aller-retour dans la cavité. Nous pouvons lui appliquer la procédure d'itération une seconde fois pour caractériser l'effet de deux aller-retours :

$$\begin{aligned}
\psi_{out,2}[\nu] &= \sqrt{T_2}\psi_{in}[\nu] + \sqrt{R_2}\sqrt{T_1} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_{m_1}^{\{2\}}[m_1-\nu]\varphi_{in}[\nu-m_1] \\
&\quad + \sqrt{R_2}\sqrt{R_1}\sqrt{T_2} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \\
&\quad \tilde{\gamma}_{m_1}^{\{2\}}[\sum_{i=1}^1 m_i - \nu]\gamma_{m_2}^{\{1\}}[\sum_{i=1}^2 m_i - \nu]\psi_{in}[\nu - \sum_{i=1}^2 m_i] \\
&\quad + \sqrt{R_2}\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\sqrt{T_1} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{+\infty} \\
&\quad \tilde{\gamma}_{m_1}^{\{2\}}[\sum_{i=1}^1 m_i - \nu]\gamma_{m_2}^{\{1\}}[\sum_{i=1}^2 m_i - \nu]\tilde{\gamma}_{m_3}^{\{2\}}[\sum_{i=1}^3 m_i - \nu]\varphi_{in}[\nu - \sum_{i=1}^3 m_i] \\
&\quad + \sqrt{R_2}\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\sqrt{R_1} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_4=-\infty}^{+\infty} \\
&\quad \tilde{\gamma}_{m_1}^{\{2\}}[\sum_{i=1}^1 m_i - \nu]\gamma_{m_2}^{\{1\}}[\sum_{i=1}^2 m_i - \nu]\tilde{\gamma}_{m_3}^{\{2\}}[\sum_{i=1}^3 m_i - \nu]\gamma_{m_4}^{\{1\}}[\sum_{i=1}^4 m_i - \nu]\psi_{out,2}[\nu - \sum_{i=1}^4 m_i]
\end{aligned} \tag{D-2}$$

En définissant la quantité $r = \sqrt{R_2}\sqrt{R_1}$, l'itération à l'infini donne :

$$\begin{aligned}
\psi_{cav}[\nu] &= \sqrt{T_2}\psi_{in}[\nu] + \sqrt{R_2}\sqrt{T_1} \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \tilde{\gamma}_{m_1}^{\{2\}}[m_1 - \nu] \varphi_{in}[\nu - m_1] \\
&+ \sqrt{T_2} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \\
&\sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 1 \leq i \leq 2n}} \prod_{j=1}^n \left[\tilde{\gamma}_{m_{2j-1}}^{\{2\}}[\sum_{k=1}^{2j-1} m_k - \nu] \gamma_{m_{2j}}^{\{1\}}[\sum_{k=1}^{2j} m_k - \nu] \right] \psi_{in}[\nu - \sum_{k=1}^{2n} m_k] \\
&+ \sqrt{R_2}\sqrt{T_1} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \\
&\sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 1 \leq i \leq 2n+1}} \prod_{j=1}^n \left[\tilde{\gamma}_{m_{2j-1}}^{\{2\}}[\sum_{k=1}^{2j-1} m_k - \nu] \gamma_{m_{2j}}^{\{1\}}[\sum_{k=1}^{2j} m_k - \nu] \right] \tilde{\gamma}_{m_{2n+1}}^{\{2\}}[\sum_{k=1}^{2n+1} m_k - \nu] \varphi_{in}[\nu - \sum_{k=1}^{2n+1} m_k]
\end{aligned} \tag{D-3}$$

puis en posant $m = \sum_{k=1}^{2n} m_k$, ou $m = \sum_{k=1}^{2n+1} m_k$ dans l'expression (D-3), on obtient :

$$\begin{aligned}
\psi_{cav}[\nu] &= \sqrt{T_2}\psi_{in}[\nu] + \sqrt{R_2}\sqrt{T_1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{\gamma}_m^{\{2\}}[m - \nu] \varphi_{in}[\nu - m] \\
&+ \sqrt{T_2} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 1 \leq i \leq 2n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \left[\tilde{\gamma}_{m_{2j-1}}^{\{2\}}[\sum_{k=1}^{2j-1} m_k - \nu] \gamma_{m_{2j}}^{\{1\}}[\sum_{k=1}^{2j} m_k - \nu] \right] \right. \\
&\quad \left. \tilde{\gamma}_{m_{2n-1}}^{\{2\}}[\sum_{k=1}^{2n-1} m_k - \nu] \gamma_{(m - \sum_{k=1}^{2n-1} m_k)}^{\{1\}}[m - \nu] \right\} \psi_{in}[\nu - m] \\
&+ \sqrt{R_2}\sqrt{T_1} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} \\
&\left\{ \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 1 \leq i \leq 2n}} \prod_{j=1}^n \left[\tilde{\gamma}_{m_{2j-1}}^{\{2\}}[\sum_{k=1}^{2j-1} m_k - \nu] \gamma_{m_{2j}}^{\{1\}}[\sum_{k=1}^{2j} m_k - \nu] \right] \tilde{\gamma}_{(m - \sum_{k=1}^{2n} m_k)}^{\{2\}}[m - \nu] \right\} \varphi_{in}[\nu - m]
\end{aligned} \tag{D-4}$$

où, pour $n = 1$, le facteur $\prod_{j=1}^{n-1} \left[\tilde{\gamma}_{m_{2j-1}}^{\{2\}}[\dots] \gamma_{m_{2j}}^{\{1\}}[\dots] \right]$ est une notation abusive, et vaut en fait 1.

L'expression de $\varphi_{cav}[\nu]$ se déduit de (D-4) en permutant φ_{in} et ψ_{in} d'une part, les indices 1 et 2 d'autre part, puis en remplaçant $\gamma^{\{2\}}$ par $\tilde{\gamma}^{\{2\}}$ et $\tilde{\gamma}^{\{1\}}$ par $\gamma^{\{1\}}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{cav}[\nu] &= \sqrt{T_1} \varphi_{in}[\nu] + \sqrt{R_1} \sqrt{T_2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_m^{\{1\}} [m - \nu] \psi_{in}[\nu - m] \\
&+ \sqrt{T_1} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 1 \leq i \leq 2n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \left[\gamma_{m_{2j-1}}^{\{1\}} [\sum_{k=1}^{2j-1} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{m_{2j}}^{\{2\}} [\sum_{k=1}^{2j} m_k - \nu] \right] \right. \\
&\quad \left. \gamma_{m_{2n-1}}^{\{1\}} [\sum_{k=1}^{2n-1} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{(m - \sum_{k=1}^{2n-1} m_k)}^{\{2\}} [m - \nu] \right\} \varphi_{in}[\nu - m] \\
&+ \sqrt{R_1} \sqrt{T_2} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} \\
&\left\{ \sum_{\substack{\{m_i \in \mathbb{Z}\} \\ 1 \leq i \leq 2n}} \prod_{j=1}^n \left[\gamma_{m_{2j-1}}^{\{1\}} [\sum_{k=1}^{2j-1} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{m_{2j}}^{\{2\}} [\sum_{k=1}^{2j} m_k - \nu] \right] \gamma_{(m - \sum_{k=1}^{2n} m_k)}^{\{1\}} [m - \nu] \right\} \psi_{in}[\nu - m]
\end{aligned} \tag{D-5}$$

Grâce aux expressions (D-4) et (D-5) des champs intra-cavité, on peut maintenant déterminer les champs sortants de la cavité en utilisant les relations (2.125) :

$$\begin{cases} \varphi_{out}[\nu] = \sqrt{T_2} \varphi_{cav}[\nu] - \sqrt{R_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m^{\{2\}} [m - \nu] \psi_{in}[\nu - m] \\ \psi_{out}[\nu] = \sqrt{T_1} \psi_{cav}[\nu] - \sqrt{R_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}_m^{\{1\}} [m - \nu] \varphi_{in}[\nu - m] \end{cases} \tag{D-6}$$

C'est à partir de ces résultats que les calculs sont repris dans la sous-section C.2.2 du chapitre 2.

E Calcul des amplitudes de diffusion pour une cavité en oscillation résonante

L'objet de cette Annexe est de proposer une expression analytique simple pour les amplitudes de diffusion issues de l'itération fréquentielle au sein d'une cavité en oscillation résonante. Dans le cas d'une cavité haute finesse, on identifiera les contributions dominantes, ce qui nous permettra de simplifier le calcul des amplitudes.

E.1 Calcul "exact"

Reprenons les calculs à partir du résultat (2.154), en négligeant dans un premier temps les puissances de β associées à $l \geq 1$ dans chaque amplitude d'ordre global m :

$$\begin{aligned}
A_m(\nu) &\simeq \sum_{l \geq 0} \beta^{|m|+2l} \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \\
&\quad \sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \\
&\simeq \beta^{|m|} \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho + 2i\pi K\nu n} \sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in (\epsilon(m)\mathbb{N})^{2n+2} / \right. \\
&\quad \left. / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{m_j} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \\
&\simeq \beta^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} e^{-2i\pi K\nu} \sum_{n \geq 0} e^{-(2n+2)(\rho - i\pi K\nu)} \sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \right. \\
&\quad \left. / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m| \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right]
\end{aligned} \tag{E-1}$$

On peut démontrer "l'identité remarquable" suivante :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n_r \in \mathbb{N}^* : \sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{n_r-1}) \in \mathbb{N}^{n_r} / \sum_{k=0}^{n_r-1} m_k = |m| \right\}} \prod_{j=0}^{n_r-1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] = \frac{n_r^{|m|}}{|m|!} \tag{E-2}$$

Si l'on définit : $w = i\pi K\nu - \rho$, il vient alors :

$$\begin{aligned}
& \forall m \in \mathbb{Z} : \\
& \sum_{n \geq 0} e^{-(2n+2)(\rho - i\pi K\nu)} \sum_{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m|\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] \\
& = \frac{1}{|m|!} \sum_{n \geq 0} e^{(2n+2)w} (2n+2)^{|m|} \\
& = \frac{1}{|m|!} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} \left[\sum_{n \geq 0} e^{(2n+2)w} \right] \\
& = \frac{1}{|m|!} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} \left[\frac{e^{2w}}{1 - e^{2w}} \right] \\
& = \frac{1}{|m|!} \sum_{k=0}^{|m|} \lambda_{k,|m|} \frac{e^{2(k+1)w}}{(1 - e^{2w})^{(k+1)}} \tag{E-3}
\end{aligned}$$

où les $\lambda_{k,|m|}$ sont des coefficients dont les valeurs pour $k = 0$ et $k = |m|$ peuvent être déterminées aisément :

$$\begin{cases} \lambda_{0,|m|} = 2^{|m|} \\ \lambda_{|m|,|m|} = 2^{|m|} |m|! \end{cases} \tag{E-4}$$

Par ailleurs, la finesse de la cavité étant définie par $F = \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}$, pour une cavité haute finesse (i.e. pour $F \gg 1$), on aura nécessairement $\rho \ll 1$ ($r = e^{-2\rho}$), et donc $F \simeq \frac{\pi}{2\rho}$ ou encore $r \simeq e^{-\pi/F} \simeq 1 - \pi/F$. On aura alors : $e^{2w} \simeq e^{-\pi/F} e^{2i\pi K\nu} \simeq (1 - \pi/F) e^{2i\pi K\nu}$. Par conséquent, pour $F \gg 1$ (et $\forall m \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)(\pi/F - 2i\pi K\nu)} \sum_{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m|\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] \\
& \simeq \frac{1}{|m|!} \sum_{k=0}^{|m|} \lambda_{k,|m|} \frac{e^{-(k+1)\pi/F} e^{(k+1)2i\pi K\nu}}{\left((1 - e^{2i\pi K\nu}) + (\pi/F) e^{2i\pi K\nu} \right)^{k+1}} \tag{E-5}
\end{aligned}$$

Si ν est dans un voisinage ϑ suffisamment proche d'un multiple entier de $1/K$ (i.e. $\nu \in \vartheta(p/K)$, $p \in \mathbb{N}^*$), on obtient des interférences constructives entre rayons réfléchis dans la cavité, ce

qui se traduit par :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|m|!} \sum_{k=0}^{|m|} \lambda_{k,|m|} \frac{e^{-(k+1)\pi/F} e^{(k+1)2i\pi K\nu}}{\left((1 - e^{2i\pi K\nu}) + (\pi/F)e^{2i\pi K\nu}\right)^{k+1}} \\ & \simeq \frac{1}{|m|!} \sum_{k=0}^{|m|} \lambda_{k,|m|} \frac{e^{-(k+1)\pi/F}}{(\pi/F)^{k+1}} \simeq 2^{|m|} (F/\pi)^{|m|+1} e^{-(|m|+1)\pi/F} \end{aligned} \quad (\text{E-6})$$

En affinant cette analyse, on exhibe la forme "Lorentzienne" des pics :

$$\forall K \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall \nu \in \vartheta(p/K) :$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)(\pi/F - 2i\pi K\nu)} \sum_{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m|\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] \right|^2 \\ & \simeq \left| 2^{|m|} (F/\pi)^{|m|+1} \frac{e^{-(|m|+1)\pi/F}}{\left((1 - e^{2i\pi K\nu})F/\pi + e^{2i\pi K\nu}\right)^{|m|+1}} \right|^2 \simeq \left| \frac{2^{|m|} (F/\pi)^{|m|+1} e^{-(|m|+1)\pi/F}}{\left(1 - 2iKF(\nu - p/K)\right)^{|m|+1}} \right|^2 \\ & \simeq \frac{2^{2|m|} (F/\pi)^{2(|m|+1)} e^{-2(|m|+1)\pi/F}}{\left(1 + 4K^2 F^2 (\nu - p/K)^2\right)^{|m|+1}} \end{aligned} \quad (\text{E-7})$$

Finalement, pour $\beta \ll 1$ et $F \gg 1$:

$$\forall m \in \mathbb{Z} : \quad A_m(\nu) \simeq \frac{F}{\pi} (2\beta F/\pi)^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} e^{-2i\pi K\nu} L_{|m|}(\nu) \quad (\text{E-8})$$

$$\text{où : } L_{|m|}(\nu) = \sum_{k=0}^{|m|} \tilde{\lambda}_{k,|m|} \frac{e^{-(k+1)\pi/F} e^{(k+1)2i\pi K\nu}}{\left((1 - e^{2i\pi K\nu}) + (\pi/F)e^{2i\pi K\nu}\right)^{k+1}} \quad (\text{E-9})$$

$$\tilde{\lambda}_{|m|,|m|} = (\pi/F)^{|m|+1}, \quad \text{et pour } k \neq |m| : \quad \tilde{\lambda}_{k,|m|} \leq \tilde{\lambda}_{|m|,|m|} \quad (\text{E-10})$$

$L_{|m|}(\nu)$ est un "peigne Lorentzien" dont les pics sont [cf (E-6)] :

$$\{\nu = p/K; L_{|m|}(p/K) \simeq e^{-(|m|+1)\pi/F}\} \quad (p \in \mathbb{N}), \quad \text{c'est-à-dire, si } F \gg |m| + 1 :$$

$$\{\nu = p/K; L_{|m|}(p/K) \simeq 1\} \quad (p \in \mathbb{N}),$$

et dont le module au carré a, pour chaque pic, une largeur à mi-hauteur [cf (E-7)] :

$$\Delta_{|m|}\nu \simeq \frac{\sqrt{2^{\frac{1}{|m|+1}} - 1}}{2KF}$$

En dehors de ces résonances optiques, on aura : $L_{|m|}(\nu) \ll 1$.

Il est temps de revenir sur l'approximation consistant à négliger les termes de $l \geq 1$ dans le calcul (E-1). Fort des résultats établis ci-avant pour $F \gg 1$, on peut en effet craindre que ces termes viennent eux aussi apporter des contributions non négligeables du type $(2\beta F)^{|m|+2l}$ quand on prendra la limite $2\beta F/\pi \rightarrow 1$:

$\forall K \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{l \geq 1} \beta^{|m|+2l} \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \\ & \sum_{\substack{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m|+2l\}}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \\ & = \sum_{l \geq 1} \frac{F}{\pi} (2\beta F/\pi)^{|m|+2l} \dots ? \end{aligned} \quad (\text{E-11})$$

De manière à pouvoir s'inspirer des raisonnements suivis pour $l = 0$, on va postuler l'existence d'un polynôme $F_{m,l}(\nu)$ de degré $2l$ en la variable ν , tel que :

$\forall K \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall l \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \sum_{\substack{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m|+2l\}}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\dots - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\dots - \nu)} \right] \\ & = \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} F_{m,l}(\nu) e^{-2i\pi K\nu} \sum_{n \geq 0} e^{-(2n+2)(\rho - i\pi K\nu)} \sum_{\substack{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m|+2l\}}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] \end{aligned} \quad (\text{E-12})$$

Remarque : On peut alors démontrer que : $\left| F_{m,l}(\nu) \right| \leq \left| \prod_{|m|+1}^{|m|+l} (p + \nu) \right|^2 \frac{(|m| + 2l)!}{l! (|m| + l)!}$ (E-13)

On aura donc (pour tout $K \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{aligned} & \sum_{l \geq 1} \beta^{|m|+2l} \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \\ & \sum_{\substack{\{m_0, \dots, m_{2n+1}\} \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \\ & = \sum_{l \geq 1} \beta^{|m|+2l} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} F_{m,l}(\nu) e^{-2i\pi K\nu} \\ & \sum_{n \geq 0} e^{-(2n+2)(\rho - i\pi K\nu)} \sum_{\substack{\{m_0, \dots, m_{2n+1}\} \in \mathbb{N}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m| + 2l}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] \end{aligned} \quad (\text{E-14})$$

Or, d'après (E-2), (E-3), (E-4), (E-5) et (E-6), il vient pour $F \simeq \pi/2\rho \gg 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} e^{-(2n+2)(\rho - i\pi K\nu)} \sum_{\substack{\{m_0, \dots, m_{2n+1}\} \in \mathbb{N}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m| + 2l}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] & = \sum_{n \geq 0} e^{-(2n+2)(\rho - i\pi K\nu)} \frac{(2n+2)^{|m|+2l}}{(|m| + 2l)!} \\ & = 2^{|m|+2l} (F/\pi)^{|m|+2l+1} L_{|m|+2l}(\nu) \end{aligned} \quad (\text{E-15})$$

où $L_{|m|+2l}(\nu)$ est une fonction de type "peigne Lorentzien" [cf (E-9)] dont les pics sont :

$$\begin{aligned} & \{ \nu = p/K; L_{|m|+2l}(p/K) \simeq e^{-(|m|+2l+1)\pi/F} \} \quad (p \in \mathbb{N}), \text{ c'est-à-dire, si } F \gg |m| + 2l + 1 : \\ & \{ \nu = p/K; L_{|m|+2l}(p/K) \simeq 1 \} \quad (p \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

et dont le module au carré a, pour chaque pic, une largeur à mi-hauteur :

$$\Delta_{|m|+2l} \nu \simeq \frac{\sqrt{2^{\frac{1}{|m|+2l+1}} - 1}}{2KF}$$

En dehors de ces résonances optiques, on aura : $L_{|m|+2l}(\nu) \ll 1$.

On obtient en définitive, pour $F \gg 1$:

$$\forall K \in \mathbb{N}^*, \quad \forall m \in \mathbb{Z} :$$

$$A_m(\nu) \simeq \frac{F}{\pi} (2\beta F/\pi)^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} e^{-2i\pi K\nu} \sum_{l \geq 0} (2\beta F/\pi)^{2l} F_{m,l}(\nu) L_{|m|+2l}(\nu) \quad (\text{E-16})$$

avec $F_{m,0}(\nu) = 1$ (pour tout $m \in \mathbb{Z}$), et pour $l \in \mathbb{N}^*$, $F_{m,l}(\nu)$ est a priori un polynôme de degré $2l$ en ν , dont il ne semble pas aisé d'obtenir une expression exacte. Toutefois, on va voir que, en identifiant les combinaisons d'arrangements apportant les contributions principales aux amplitudes de diffusion, il sera possible, en ne gardant que les termes pertinents, d'en trouver une expression approchée.

E.2 Détermination des contributions dominantes pour une cavité de haute finesse

Par des arguments combinatoires, nous allons ici chercher à savoir, pour $m \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{N}$ donnés, quels sont les $m_k \in \mathbb{Z}$ qui contribueront le plus au terme :

$$\sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|} \prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{|m_j|! (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \quad (\text{E-17})$$

tel que apparaissant dans l'équation (E-12). On peut commencer par remarquer que, pour $F \gg |m| + 2l$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} e^{-(2n+2)(\rho - iK\pi\nu)} \sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m| + 2l \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] \\ & \simeq \sum_{n \in \mathbb{N} / 2n+2 \geq |m| + 2l} e^{-(2n+2)(\rho - iK\pi\nu)} \sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m| + 2l \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] \end{aligned} \quad (\text{E-18})$$

Il convient de préciser, qu'à la suite de changements de variable, les m_k apparaissant dans les expressions que l'on va manipuler dans cette section seront pris dans \mathbb{N} et non dans \mathbb{Z}

comme c'était le cas dans l'expression (E-17) par exemple. Le choix d'un entier m_k dans (E-18) rendra compte à la fois du choix m_k et $-m_k$ dans (E-17).

À m et l fixés, pour $n \in \mathbb{N}$ donné tel que $2n+2 \geq |m|+2l$, les arrangements $(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2}$ tels que $\sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m| + 2l$ faisant apparaître exactement $|m| + 2l$ indices m_k égaux à 1 (les autres étant alors nécessairement tous égaux à 0) seront au nombre de : $C_{2n+2}^{|m|+2l} = \frac{(2n+2)!}{(|m|+2l)!(2n+2-|m|-2l)!}$. Les arrangements obtenus à partir de ces derniers par substitution d'une combinaison de p indices m_k ($2 \leq p \leq |m| + 2l$) parmi les $|m| + 2l$ égaux à 1 par un indice égal à p et $p-1$ indices égaux à 0 seront au nombre de : $C_{2n+2}^1 \times C_{2n+2-1}^{|m|+2l-p}$.

Or, avec $p \geq 2$, pour $2n+2 \gg \begin{cases} 1 \\ |m|+2l \end{cases}$:

$$C_{2n+2}^1 \times C_{2n+2-1}^{|m|+2l-p} = \frac{(2n+2)!}{(|m|+2l-p)!(2n+1-|m|-2l)!} \simeq \frac{(2n+2)^{|m|+2l-p+1}}{(|m|+2l-p)!}$$

$$\ll C_{2n+2}^{|m|+2l} = \frac{(2n+2)!}{(|m|+2l)!(2n+2-|m|-2l)!} \simeq \frac{(2n+2)^{|m|+2l}}{(|m|+2l)!}$$

En étendant ce raisonnement à tous les autres arrangements : $(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2}$ tels que $\sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m| + 2l$ envisageables, on voit intuitivement que les arrangements faisant apparaître exactement $|m|+2l$ indices m_k égaux à 1 (les autres étant tous égaux à 0) apportent la contribution dominante à la somme (E-18) pour $F \gg |m| + 2l$.

On va maintenant donner une démonstration mathématiquement plus rigoureuse du résultat précédent. Pour $q \in \mathbb{N}$ ($q \equiv |m| + 2l$) et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = q\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right]$$

$$= \sum_{\left\{ (n_0, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^{q+1} / \left[\sum_{p=0}^q n_p = 2n+2 \right. \right. \\ \left. \left. \text{et} : \sum_{p=0}^q p n_p = q \right] \right\}} \sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \{0, \dots, q\}^{2n+2} / \left[\forall p \in \{0, \dots, q\} : \right. \right. \\ \left. \left. \text{Card}(\{m_k, k \in \{0, \dots, 2n+1\} / m_k = p\}) = n_p \right] \right\}} \prod_{p=0}^q \left[\frac{1}{p!} \right]^{n_p}$$

$$= \sum_{\left\{ (n_0, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^{q+1} / \left[\sum_{p=0}^q n_p = 2n+2 \right. \right. \\ \left. \left. \text{et} : \sum_{p=0}^q p n_p = q \right] \right\}} C_{2n+2}^{n_0} C_{2n+2-n_0}^{n_1} C_{2n+2-n_0-n_1}^{n_2} \dots C_{2n+2-\sum_{p=0}^{q-1} n_p}^{n_q} \prod_{p=0}^q \left[\frac{1}{p!} \right]^{n_p}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\left\{ (n_0, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^{q+1} / \left[\sum_{p=0}^q n_p = 2n+2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \text{et: } \sum_{p=0}^q p n_p = q \right] \right\}} \frac{(2n+2)!}{n_0! n_1! n_2! \dots n_q! (2n+2 - \sum_{p=0}^q n_p)!} \prod_{p=0}^q \left[\frac{1}{p!} \right]^{n_p} \\
&= \sum_{\left\{ (n_0, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^{q+1} / \sum_{p=0}^q p n_p = q \right\}} \delta_{n_0, (2n+2 - \sum_{p=1}^q n_p)} \frac{(2n+2)!}{n_0! n_1! n_2! \dots n_q!} \prod_{p=0}^q \left[\frac{1}{p!} \right]^{n_p} \\
&= \sum_{\left\{ (n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^q / \sum_{p=1}^q p n_p = q \right\}} \frac{(2n+2)!}{(2n+2 - \sum_{p=1}^q n_p)!} \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_q!} \prod_{p=1}^q \left[\frac{1}{p!} \right]^{n_p} \\
&= \sum_{\left\{ (n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^q / \sum_{p=1}^q p n_p = q \right\}} \frac{(2n+2)!}{(2n+2 - \sum_{p=1}^q n_p)!} \frac{1}{n_1!} \prod_{p=2}^q \left(\frac{1}{n_p!} \left[\frac{1}{p!} \right]^{n_p} \right) \quad (\text{E-19})
\end{aligned}$$

Sous la condition : $(n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^q / \sum_{p=1}^q p n_p = q$, on voit que n_1 est nécessairement différent de $q-1$ et que les seuls arrangements possibles sont :

$$\begin{cases} n_1 = q \text{ et } \forall p \in \{2, \dots, q\} : n_p = 0 & \Rightarrow \sum_{p=1}^q n_p = q \\ 0 \leq n_1 \leq q-2 \text{ et } \exists p \in \{2, \dots, q\} / n_p \neq 0 & \Rightarrow \sum_{p=1}^q n_p < q \end{cases} \quad (\text{E-20})$$

Or, à $q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés tels que $2n+2 \gg q$, le terme dominant dans la somme (E-19) est celui pour lequel $(2n+2 - \sum_{p=1}^q n_p)!$ est minimum, i.e. celui pour lequel $\sum_{p=1}^q n_p$ est maximum. Par conséquent, d'après (E-20), c'est celui pour lequel :

$n_1 = q$ et $\forall p \in \{2, \dots, q\} : n_p = 0$, ce qui, dans l'équation (E-19), revient à restreindre initialement notre choix des entiers naturels m_k ($k \in \{0, \dots, 2n+1\}$) à l'ensemble $\{0, 1\}$:

$\forall q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} / 2n+2 \gg q :$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = q \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] = \frac{(2n+2)^q}{q!} \\
&\simeq \sum_{\left\{ (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \{0, 1\}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = q \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] = \frac{(2n+2)!}{(2n+2-q)! q!} \quad (\text{E-21})
\end{aligned}$$

Finalement, d'après les résultats (E-18) et (E-21), pour $F \gg |m| + 2l$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} e^{-(2n+2)(\rho - iK\pi\nu)} \sum_{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{N}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m| + 2l\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] \\ & \simeq \sum_{n \in \mathbb{N} / 2n+2 \geq |m| + 2l} e^{-(2n+2)(\rho - iK\pi\nu)} \sum_{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \{0,1\}^{2n+2} / \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = |m| + 2l\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{1}{m_j!} \right] \end{aligned} \quad (\text{E-22})$$

En conclusion, pour $F \gg |m| + 2l$, dans l'expression (E-17), les $m_k \in \{-1, 0, 1\}$ apporteront la contribution principale à l'amplitude de diffusion.

E.3 Calcul des amplitudes restreintes aux contributions dominantes

D'après les résultats de la section précédente (E.2), pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que $F \gg |m| + 2l$, on aura :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \\ & \sum_{\left\{ \begin{array}{l} (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l \end{array} \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|} \prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{|m_j|! (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \\ & \simeq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} / \\ 2n+2 \geq |m| + 2l}} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \\ & \sum_{\left\{ \begin{array}{l} (m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \{-1; 0; 1\}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l \end{array} \right\}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|} \prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{|m_j|! (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \end{aligned} \quad (\text{E-23})$$

Au sein des produits apparaissant dans (E-23), pour tout $j \in \{0, \dots, 2n+1\}$:

$$\begin{aligned} - \text{ si } m_k = 0, \text{ on aura : } & \frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|} \prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{|m_j|! (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} = 1, \\ - \text{ si } m_k = \pm 1, \text{ on aura : } & \frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|} \prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{|m_j|! (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} = \epsilon(m_j) \left(\sum_{k=0}^j m_k - \nu \right). \end{aligned}$$

A chaque arrangement $(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \{-1; 0; 1\}^{2n+2}$, on pourra donc associer une application injective σ de $\{1, \dots, |m| + 2l\}$ dans $\{0, \dots, 2n + 1\}$ telle que :

$$\prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] = \prod_{j=1}^{|m|+2l} \left[\epsilon(m_{\sigma_j}) \left(\sum_{k=1}^j m_{\sigma_k} - \nu \right) \right] \quad (\text{E-24})$$

Pour un entier n tel que : $2n + 2 \geq |m| + 2l$ donné, on pourra alors, lors de la somme sur les arrangements (m_0, \dots, m_{2n+1}) , se ramener au choix de $|m| + 2l$ entiers m_k non nuls (et donc égaux à ± 1) parmi $2n + 2$ éléments :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \\ & \sum_{\substack{\{m_0, \dots, m_{2n+1}\} \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \\ & \simeq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} / \\ 2n+2 \geq |m|+2l}} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} C_{2n+2}^{|m|+2l} \sum_{\substack{\{m_1, \dots, m_{|m|+2l}\} \in \{-1; +1\}^{|m|+2l} \\ / \sum_{k=1}^{|m|+2l} m_k = m}} \prod_{j=1}^{|m|+2l} \left[\epsilon(m_j) \left(\sum_{k=1}^j m_k - \nu \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E-25})$$

Après quelques manipulations des sommes, on peut démontrer que :

$$\sum_{\substack{\{m_1, \dots, m_{|m|+2l}\} \in \{-1; +1\}^{|m|+2l} \\ / \sum_{k=1}^{|m|+2l} m_k = m}} \prod_{j=1}^{|m|+2l} \left[\epsilon(m_j) \left(\sum_{k=1}^j m_k - \nu \right) \right] = \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} \times f_{m,l}(\nu) \quad (\text{E-26})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{m,0}(\nu) = 1, \text{ et pour tout } l \in \mathbb{N}^* : \\ f_{m,l}(\nu) = \\ (-1)^l \sum_{n_1=1}^{|m|+l+1} \sum_{n_2=n_1+1}^{|m|+l+2} \dots \sum_{n_l=n_{l-1}+1}^{|m|+2l} \prod_{j=1}^l \left[\left\{ (n_j - 2j) - \epsilon(m)\nu \right\} \left\{ (n_j + 1 - 2j) - \epsilon(m)\nu \right\} \right] \end{array} \right. \quad (\text{E-27})$$

L'équation (E-25) peut alors se réécrire :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \\
& \sum_{\substack{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l\}}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \\
& \simeq \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} f_{m,l}(\nu) e^{-2i\pi K\nu} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} / \\ 2n+2 \geq |m|+2l}} e^{-2(n+1)(\rho - i\pi K\nu)} C_{2n+2}^{|m|+2l} \quad (\text{E-28})
\end{aligned}$$

Pour $2n+2 \gg |m|+2l$, on aura :

$$C_{2n+2}^{|m|+2l} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2-|m|-2l)! (|m|+2l)!} \simeq \frac{(2n+2)^{|m|+2l}}{(|m|+2l)!} \quad (\text{E-29})$$

Par conséquent, pour $F \gg |m|+2l$, on retrouvera dans (E-28) une somme similaire au résultat (E-15) :

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} / \\ 2n+2 \geq |m|+2l}} e^{-2(n+1)(\rho - i\pi K\nu)} C_{2n+2}^{|m|+2l} \simeq 2^{|m|+2l} (F/\pi)^{|m|+2l+1} L_{|m|+2l}(\nu) \quad (\text{E-30})$$

On obtient finalement³ un résultat qui s'identifie à (E-31) :

$$\begin{aligned}
A_m(\nu) & \simeq \sum_{l \geq 0} \beta^{|m|+2l} \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)2\rho} e^{2i\pi K\nu n} \\
& \sum_{\substack{\{(m_0, \dots, m_{2n+1}) \in \mathbb{Z}^{2n+2} / \\ \sum_{k=0}^{2n+1} m_k = m \text{ et } \sum_{k=0}^{2n+1} |m_k| = |m| + 2l\}}} \prod_{j=0}^{2n+1} \left[\frac{\epsilon(m_j)^{|m_j|}}{|m_j|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m_j|} (\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu + \epsilon(m_j)p)}{(\sum_{k=0}^{j-1} m_k - \nu)} \right] \\
& \simeq \frac{F}{\pi} (2\beta F/\pi)^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} e^{-2i\pi K\nu} \sum_{l \geq 0} (2\beta F/\pi)^{2l} f_{m,l}(\nu) L_{|m|+2l}(\nu) \quad (\text{E-31})
\end{aligned}$$

Les fonctions $F_{m,l}(\nu)$ introduites en (E-12) dans la section E.1 de cette annexe, sont donc bien, quand on ne prend en compte que les contributions dominantes aux amplitudes de

³si l'on restreint la somme sur l à $|m|+2l \ll F$

diffusion et pour $F \gg |m| + 2l$, des polynômes de degré $2l$ en ν s'identifiant au fonction $f_{m,l}(\nu)$ que l'on vient de définir [cf (E-27)].

En résumé, pour $F \gg 1$, chaque amplitude d'ordre global m pourra s'écrire :

$$A_m(\nu) \simeq \frac{F}{\pi} (2\beta F/\pi)^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)} e^{-2i\pi K\nu} \sum_{l \geq 0} (2\beta F/\pi)^{2l} f_{m,l}(\nu) L_{|m|+2l}(\nu) \quad (\text{E-32})$$

où les $f_{m,l}(\nu)$ sont des polynômes de degré $2l$ en ν tels que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{m,0}(\nu) = 1, \text{ et pour tout } l \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } F \gg |m| + 2l : \\ f_{m,l}(\nu) \simeq \\ (-1)^l \sum_{n_1=1}^{|m|+l+1} \sum_{n_2=n_1+1}^{|m|+l+2} \dots \sum_{n_l=n_{l-1}+1}^{|m|+2l} \prod_{j=1}^l \left[\left\{ (n_j - 2j) - \epsilon(m)\nu \right\} \left\{ (n_j + 1 - 2j) - \epsilon(m)\nu \right\} \right] \end{array} \right. \quad (\text{E-33})$$

et les $L_{|m|+2l}(\nu)$ sont des fonctions de type "peigne Lorentzien" [cf (E-9)] rendant compte des interférences entre rayons multiples réfléchis au sein de la cavité. Seuls les "modes propres moyens" de la cavité donneront lieu à des interférences constructives, ce qui se traduira, dans chaque fonction $L_{|m|+2l}(\nu)$, par les pics :

$$\left\{ \nu = p/K; L_{|m|+2l}(p/K) \simeq e^{-(|m|+2l+1)\pi/F} \right\} (p \in \mathbb{N}), \text{ c'est-à-dire, si } F \gg |m| + 2l + 1 :$$

$$\left\{ \nu = p/K; L_{|m|+2l}(p/K) \simeq 1 \right\} (p \in \mathbb{N}),$$

Le module au carré des $L_{|m|+2l}(\nu)$ aura lui, pour chaque pic, une largeur à mi-hauteur :

$$\Delta_{|m|+2l}\nu \simeq \frac{\sqrt{2^{\frac{1}{|m|+2l+1}} - 1}}{2KF}$$

En dehors de ces résonances optiques, on aura : $L_{|m|+2l}(\nu) \ll 1$.

Pour terminer cette section, on peut remarquer que, à résonance et à quelques facteurs près, l'expression (E-32) se rapproche plus encore de ce que serait l'amplitude d'un processus d'ordre m généré par un miroir unique oscillant de vitesse maximale $2\beta F/\pi$ [cf (2.95)], ce qui renforce l'intérêt de nos calculs, en terme d'interprétation physique.

F Prise en compte des conditions de transparence à haute fréquence

F.1 Principe de la régularisation

Dans tous les calculs ayant permis d'aboutir à (E-32), on a supposé que les coefficients de réflexion et de transmission étaient indépendants de la fréquence. Par ailleurs, on constate que, quand $2\beta F/\pi \rightarrow 1$, des termes d'indices $|m|$ et l de plus en plus élevés vont a priori contribuer au spectre. Or ces termes rendent compte de processus dans lesquels des photons de fréquence $|p - \epsilon(m)\nu|$, $p \in \{-l, \dots, 0, \dots, |m| + l\}$, sont diffusés par les miroirs. Par conséquent, en s'appuyant sur l'approche proposée dans l'Annexe G pour tenir compte de la dépendance en fréquence des coefficients de diffusion des miroirs, il semble raisonnable de penser que, si $[0; \nu_c]$ est le plus grand domaine sur lequel on puisse considérer les coefficients de diffusion des miroirs constants, les résultats (E-32) et (E-33) ne seront utilisables pour le calcul du spectre que si :

- 1) $\nu \in [0; \nu_c]$;
- 2) $\forall (m, l) \in \mathbb{S}_{\beta, F} : \text{Max}\{|-l - \epsilon(m)\nu|; ||m| + l - \epsilon(m)\nu|\} \leq \nu_c$
où $\mathbb{S}_{\beta, F}$ est l'ensemble des couples (m, l) contribuant a priori au spectre et tels que :
 $(2\beta F/\pi)^{|m|+2l}$ soit non négligeable devant une certaine valeur de référence liée aux appareils de mesure utilisés;
- 3) $F \gg \text{Max}\{|m| + 2l / (m, l) \in \mathbb{S}_{\beta, F}\}$.

Nos résultats ne seront donc a priori valables que pour $2\beta F/\pi < 1$, c'est-à-dire sous le seuil. On peut toutefois définir une fonction $R_m(\nu)$ telle que, si les trois conditions ci-dessus sont réalisées simultanément :

$$R_m(\nu) = \sum_{l \geq 0} (2\beta F/\pi)^{2l} f_{m,l}(\nu) L_{|m|+2l}(\nu) \quad (\text{F-1})$$

et si l'une au moins des trois conditions n'est pas satisfaite, toutes les modifications à apporter à l'expression (E-32) pour calculer le spectre soient encodées dans cette fonction. Elle caractérisera en quelques sortes l'effet de filtrage opéré par la cavité pour chaque processus global d'ordre m . Pour $2\beta F/\pi \ll 1$, et $|p - \epsilon(m)\nu| < \nu_c$ ($\forall p \in \{0, \dots, |m|\}$) par exemple, elle sera simplement donnée par : $R_m(\nu) \simeq L_{|m|}(\nu)$. Par ailleurs, les miroirs étant nécessairement transparents aux très hautes fréquences, on aura (en extrapolant à partir des résultats présentés dans l'Annexe G) :

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} R_m(\nu) = 0 \quad \text{et} : \quad \forall \nu \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{|m| \rightarrow +\infty} R_m(\nu) = 0 \quad (\text{F-2})$$

et, dans la plupart des cas, on pourra considérer que :

$$\nu > \nu_c \quad \text{ou} \quad |m - \nu| > \nu_c \quad \Rightarrow \quad R_m(\nu) \ll 1 \quad (\text{F-3})$$

F.2 Expression régularisée du spectre pour une cavité haute-finesse en oscillation résonante

Si les miroirs formant la cavité sont identiques, et si $F \gg 1$:

$$\sqrt{T_1}\sqrt{T_2} \simeq 2\rho \simeq \pi/F \quad ; \quad \sqrt{R_1}T_2 \simeq 2\rho \simeq \pi/F \quad ; \quad \sqrt{R_2} \simeq 1 . \quad (\text{F-4})$$

Ces relations traduisent par exemple le fait que la probabilité T_i pour qu'un photon soit transmis par chaque miroir est d'environ π/F . Elles ne seront valables que pour des photons de fréquence $\nu < \nu_c$.

En utilisant les équations (2.147), (E-32), (F-1) et (F-4), et en tenant compte des conditions de transparence à haute fréquence, il vient (pour $\beta \ll 1$ et $F \gg 1$) :

$$\begin{aligned} n_{T_{eq}}^{(\rightarrow), out} &\simeq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\nu(m-\nu)}{1 - e^{-\hbar\Omega(m-\nu)/k_B T_{eq}}} \\ &\times \left\{ \left| (2\beta F/\pi)^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)(m-\nu)} e^{-2i\pi K\nu} R_m(\nu) + T_0(\nu) \delta_{m,0} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| (2\beta F/\pi)^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)(m-\nu)} R_m(\nu) - (-1)^{|m|} \frac{\beta^{|m|}}{|m|!} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{(-\epsilon(m)\nu)(m-\nu)} r_m(\nu) \right|^2 \right\} \\ &\simeq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\nu(m-\nu)}{1 - e^{-\hbar\Omega(m-\nu)/k_B T_{eq}}} \\ &\times \left\{ \left| (2\beta F/\pi)^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{\nu(m-\nu)} e^{-2i\pi K\nu} R_m(\nu) + T_0(\nu) \delta_{m,0} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| (2\beta F/\pi)^{|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)}{\nu(m-\nu)} R_m(\nu) - \frac{r_0(\nu)}{\nu} \delta_{m,0} \right|^2 \right\} \quad (\text{F-5}) \end{aligned}$$

où l'on a introduit les fonctions $T_0(\nu)$ et $r_m(\nu)$, telles que, pour $\nu < \nu_c$ et $|m-\nu| < \nu_c$: $T_0(\nu) = \sqrt{T_1}\sqrt{T_2}$ et $r_m(\nu) = \sqrt{R_2}$.

On considèrera que :

- $r_0(\nu) \simeq 1$ tant que ν est inférieur à ν_c puis tend rapidement vers 0 quand ν devient supérieur à ν_c .

- $T_0(\nu) \simeq \pi/F$ tant que ν est inférieur à ν_c puis tend rapidement vers 1 au-delà.

D'où finalement, pour $\beta \ll 1$ et $F \gg 1$:

$$\begin{aligned}
n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{T_{eq}} &\simeq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\nu(m-\nu)}{1 - e^{-\hbar\Omega(m-\nu)/k_B T_{eq}}} (2\beta F/\pi)^{2|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)^2}{\nu^2(m-\nu)^2} \\
&\quad \times \left(2|R_m(\nu)|^2(1 - \delta_{m,0}) + \left[|e^{-2i\pi K\nu} R_0(\nu) + T_0(\nu)|^2 + |R_0(\nu) - r_0(\nu)|^2 \right] \delta_{m,0} \right) \\
&\simeq \frac{|e^{-2i\pi K\nu} R_0(\nu) + T_0(\nu)|^2 + |R_0(\nu) - r_0(\nu)|^2}{e^{\hbar\Omega\nu/k_B T_{eq}} - 1} \\
&\quad + 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{\nu(m-\nu)}{1 - e^{-\hbar\Omega(m-\nu)/k_B T_{eq}}} (2\beta F/\pi)^{2|m|} \frac{\prod_{p=0}^{|m|} (p - \epsilon(m)\nu)^2}{\nu^2(m-\nu)^2} |R_m(\nu)|^2 \\
&\simeq n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{vac} + \frac{|e^{-2i\pi K\nu} R_0(\nu) + T_0(\nu)|^2 + |R_0(\nu) - r_0(\nu)|^2}{e^{\hbar\Omega\nu/k_B T_{eq}} - 1} \\
&\quad + 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{\nu|m-\nu|}{e^{\hbar\Omega|m-\nu|/k_B T_{eq}} - 1} (2\beta F/\pi)^{2|m|} |R_m(\nu)|^2 \prod_{p=1}^{|m|-1} (p - \epsilon(m)\nu)^2
\end{aligned} \tag{F-6}$$

$$\text{avec : } n_{\nu, out}^{(\rightarrow)}_{vac} \simeq 2 \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > \nu}} \nu(m-\nu) (2\beta F/\pi)^{2m} |R_m(\nu)|^2 \prod_{p=1}^{m-1} (p-\nu)^2 \tag{F-7}$$

$$\text{et, pour } m = \pm 1 : \prod_{p=1}^{|m|-1} (p - \epsilon(m)\nu)^2 \equiv 1$$

Le terme faisant apparaître l'ordre $m = 0$ se ramènera en fait, dans les cas simples, à la densité spectrale de rayonnement du corps noir. On voit d'autre part que, aux facteurs $2|R_m(\nu)|^2$ et $(|m|!)^2$ près, le spectre émis par une cavité haute-finesse en oscillation résonante s'obtient à partir du spectre émis par un miroir unique [cf (2.114) et (2.120)] en remplaçant β par $2\beta F/\pi$. Le facteur $|R_m(\nu)|^2$ rend compte, on le rappelle, de l'effet de filtrage pour un processus global d'ordre m , dû aux interférences entre rayons multiples réfléchis au sein de la cavité [cf (F-1)]. On s'attend à ce que cet effet s'estompe rapidement et rende inefficace l'amplification des modes propres de la cavité pour $\nu > \nu_c$ ou $|m-\nu| > \nu_c$ [cf (F-2) et (F-3)].

On précise que, d'après (2.147), (2.148) et (F-4), la densité spectrale du flux moyen des photons intra-cavité pourra être obtenue en multipliant par F celle du flux moyen des photons à l'extérieur de la cavité. D'autre part, le spectre des flux moyens émis vers la droite et vers la gauche seront dans chaque cas égaux (par symétrie).

L'objet d'un futur travail sera de calculer les composantes spectrales résonantes correspondant à ces expressions, en utilisant l'expression analytique des coefficients $R_m(\nu)$ ainsi que la procédure de régularisation proposées dans le paragraphe F.1. Ces calculs ne seront a priori valides que sous le seuil, mais devraient permettre de prévoir qualitativement l'allure du spectre au-dessus du seuil.

G Proposition de calcul valable au-dessus du seuil

Dans cette annexe, on va reprendre les résultats issus de l'approche perturbative pour un miroir oscillant dont les coefficients de diffusion dépendent de la fréquence, puis, en extrapolant leur insertion dans la procédure d'itération fréquentielle développée en C.2.1, proposer des expressions analytiques pour les amplitudes globales de diffusion des champs par une cavité oscillante, tenant compte de la dépendance en fréquence des coefficients de diffusion de chaque miroir ⁴ ainsi que du caractère potentiellement non-linéaire de la réponse globale de la cavité. Ces expressions auront donc un domaine de validité beaucoup plus vaste que celles établies jusqu'à présent pour étudier l'Effet Casimir Dynamique, et seront notamment valables en-dessous comme au-dessus du seuil. Dans un premier temps, nous allons réécrire les résultats (2.21) et (2.22) sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_{out,i}[\nu] \simeq \sum_{m \in \{-1;0;+1\}} \gamma_m^{\{t,i\}}[m-\nu] \varphi_{in,i}[\nu-m] + \sum_{m \in \{-1;0;+1\}} \gamma_m^{\{r,i\}}[m-\nu] \psi_{in,i}[\nu-m] \\ \psi_{out,i}[\nu] \simeq \sum_{m \in \{-1;0;+1\}} \tilde{\gamma}_m^{\{t,i\}}[m-\nu] \psi_{in,i}[\nu-m] + \sum_{m \in \{-1;0;+1\}} \tilde{\gamma}_m^{\{r,i\}}[m-\nu] \varphi_{in,i}[\nu-m] \end{cases} \quad (\text{G-1})$$

avec, si les trajectoires des miroirs sont données par $\Omega q_i(t)/c = \phi_{a,i} - \beta_{\{i\}} \sin(\Omega t - \phi_{b,i})$:

$$\begin{cases} \gamma_0^{\{t,i\}}[-\nu] = \bar{t}_i[\nu] \\ \gamma_{+1}^{\{t,i\}}[1-\nu] = (1-\nu) \frac{\beta_{\{i\}}}{2} e^{i(\phi_{b,i}-\phi_{a,i})} \{ -\bar{t}_i[\nu] + \bar{t}_i[\nu-1] \} \\ \gamma_{-1}^{\{t,i\}}[-1-\nu] = (1+\nu) \frac{\beta_{\{i\}}}{2} e^{-i(\phi_{b,i}-\phi_{a,i})} \{ -\bar{t}_i[\nu] + \bar{t}_i[\nu+1] \} \end{cases} \quad (\text{G-2})$$

$$\begin{cases} \gamma_0^{\{r,i\}}[\nu] = \bar{r}_i[\nu] \\ \gamma_{+1}^{\{r,i\}}[1-\nu] = (1-\nu) \frac{\beta_{\{i\}}}{2} e^{-2i\nu\phi_{a,i}} e^{i(\phi_{b,i}+\phi_{a,i})} \{ \bar{r}_i[\nu] + \bar{r}_i[\nu-1] \} \\ \gamma_{-1}^{\{r,i\}}[-1-\nu] = (1+\nu) \frac{\beta_{\{i\}}}{2} e^{-2i\nu\phi_{a,i}} e^{-i(\phi_{b,i}+\phi_{a,i})} \{ \bar{r}_i[\nu] + \bar{r}_i[\nu+1] \} \end{cases} \quad (\text{G-3})$$

$$\text{et : } \begin{cases} \tilde{\gamma}_0^{\{t,i\}}[-\nu] = \bar{t}_i[\nu] \\ \tilde{\gamma}_{+1}^{\{t,i\}}[1-\nu] = (1-\nu) \frac{\beta_{\{i\}}}{2} e^{i(\phi_{b,i}+\phi_{a,i})} \{ -\bar{t}_i[\nu] + \bar{t}_i[\nu-1] \} \\ \tilde{\gamma}_{-1}^{\{t,i\}}[-1-\nu] = (1+\nu) \frac{\beta_{\{i\}}}{2} e^{-i(\phi_{b,i}+\phi_{a,i})} \{ -\bar{t}_i[\nu] + \bar{t}_i[\nu+1] \} \end{cases} \quad (\text{G-4})$$

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_0^{\{r,i\}}[\nu] = -\bar{r}_i[\nu] \\ \tilde{\gamma}_{+1}^{\{r,i\}}[1-\nu] = (1-\nu) \frac{\beta_{\{i\}}}{2} e^{+2i\nu\phi_{a,i}} e^{i(\phi_{b,i}-\phi_{a,i})} \{ \bar{r}_i[\nu] + \bar{r}_i[\nu-1] \} \\ \tilde{\gamma}_{-1}^{\{r,i\}}[-1-\nu] = (1+\nu) \frac{\beta_{\{i\}}}{2} e^{+2i\nu\phi_{a,i}} e^{-i(\phi_{b,i}-\phi_{a,i})} \{ \bar{r}_i[\nu] + \bar{r}_i[\nu+1] \} \end{cases} \quad (\text{G-5})$$

⁴donc des conditions de transparence à haute fréquence

Après itération à l'infini le long des trajectoires d'espace-temps associées aux rayons multiplement réfléchis au sein de la cavité, le résultat (2.128) par exemple devient :

$$\begin{aligned}
\varphi_{out}[\nu] \simeq & \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{m_{-1} \in \{0; \pm 1\}} \gamma_{m_{-1}}^{\{t,2\}} [m_{-1} - \nu] \sum_{n=0}^{+\infty} \right. \\
& \sum_{\substack{\{m_i \in \{0; \pm 1\}\} \\ 0 \leq i \leq 2n+1}} \prod_{j=0}^n \left[\gamma_{m_{2j}}^{\{r,1\}} [\sum_{k=-1}^{2j} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{m_{2j+1}}^{\{r,2\}} [\sum_{k=-1}^{2j+1} m_k - \nu] \right] \gamma_{(m - \sum_{k=-1}^{2n+1} m_k)}^{\{t,1\}} [m - \nu] \\
& + \sum_{m_{-1} \in \{0; \pm 1\}} \gamma_{m_{-1}}^{\{t,2\}} [m_{-1} - \nu] \gamma_{(m - m_{-1})}^{\{t,1\}} [m - \nu] \left. \right\} \varphi_{in}[\nu - m] \\
& + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{m_{-1} \in \{0; \pm 1\}} \gamma_{m_{-1}}^{\{t,2\}} [m_{-1} - \nu] \sum_{n=0}^{+\infty} \right. \\
& \sum_{\substack{\{m_i \in \{0; \pm 1\}\} \\ 0 \leq i \leq 2n}} \prod_{j=0}^{n-1} \left[\gamma_{m_{2j}}^{\{r,1\}} [\sum_{k=-1}^{2j} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{m_{2j+1}}^{\{r,2\}} [\sum_{k=-1}^{2j+1} m_k - \nu] \right] \gamma_{m_{2n}}^{\{r,1\}} [\sum_{k=-1}^{2n} m_k - \nu] \gamma_{(m - \sum_{k=-1}^{2n} m_k)}^{\{t,2\}} [m - \nu] \\
& - \gamma_m^{\{r,2\}} [m - \nu] \left. \right\} \psi_{in}[\nu - m] \tag{G-6}
\end{aligned}$$

où :

- pour $n = 0$: $\prod_{j=0}^{n-1} \left[\gamma_{m_{2j}}^{\{r,1\}} [\sum_{k=-1}^{2j} m_k - \nu] \tilde{\gamma}_{m_{2j+1}}^{\{r,2\}} [\sum_{k=-1}^{2j+1} m_k - \nu] \right]$ doit être pris égal à 1.
- $\forall p \in \mathbb{Z} / |p| \geq 2, \forall i \in \{1; 2\}, \forall \nu_0 \in \mathbb{R}, \gamma_p^{\{t,i\}}[\nu_0] = \gamma_p^{\{r,i\}}[\nu_0] = \tilde{\gamma}_p^{\{t,i\}}[\nu_0] = \tilde{\gamma}_p^{\{r,i\}}[\nu_0] = 0$.

A partir de ce résultat, il sera possible de calculer le spectre émis par une cavité de finesse arbitrairement élevée en oscillation résonante dans le vide ou dans un champ thermique quelconque. Afin de procéder à des simulations numériques, il conviendra alors de disposer d'un modèle théorique décrivant la dépendance en fréquence des coefficients $\bar{t}_i[\nu]$ et $\bar{r}_i[\nu]$. Un tel travail permettra en particulier de faire des prédictions quantitatives pour l'Effet Casimir Dynamique au-dessus du seuil.

Bibliographie

- [Bachor] H.A. Bachor, T.C. Ralph, *A guide to experiments in quantum optics*, Wiley-Vch (2003) Cité p. **131**
- [Barton] G. Barton, *J. Phys. A : Math. Gen.* **24** 991 (1991) Cité p. **2**
- [Bloem] N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*, World Scientific Publishing, Singapore (1996, repris du livre publié pour la première fois en 1965) Cité p. **76**
- [Bommel] H.E. Bömmel, K. Dransfeld, *Phys. Rev.* **117** 1245 (1960) Cité p. **22**
- [Bordag] M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, *Phys. Reports* **353** 1 (2001) Cité p. **1**
- [Boyd] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, Inc (1992) Cité p. **76**
- [Braggio(05)] C. Braggio et al., *Europhys. Lett.* **70** 754-760 (2005) Cité p. **147**
- [Carr] P.H. Carr, *J. Acoust. Soc. Am.* **41** 75 (1966) Cité p. **22**
- [Casimir] H.B.G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51** 793 (1948) Cité p. **1**
- [Cole(95)] C.K. Cole, W.C. Schieve, *Phys. Rev.* **52** 4405 (1996) Cité p. **8, 35, 59**
- [Cook(82)] R.J. Cook, *Phys. Rev. A* **25** 2164 (1982) Cité p. **155**
- [Dalibard(Cours)] J.L. Basdevant, J. Dalibard, M. Joffre *Mécanique quantique*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, Ellipses (2004) Cité p. **153**
- [Dalvit(01)] M. Crocce, D.A.R. Dalvit, F.D. Mazzitelli, *Phys. Rev. A* **64** 013808 (2001) Cité p. **8**
- [Davis(01)] P.C.W. Davis, *Chaos* **11** 539 (2001) Cité p. **147**
- [Debuissch(PhD)] T. Debuisschert, *Réduction des fluctuations quantiques de la lumière à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique*, Thèse de doctorat, Univ. Paris VI (1990) Cité p. **80, 87, 131**
- [Dodonov(89)] V.V. Dodonov, A.B. Klimov and V.I. Man'Ko, *Phys. Rev. Lett. A* **142** 511 (1989) Cité p. **7**
- [Dodonov(98)] V.V. Dodonov, *Phys. Rev. A* **58** 4147 (1998) Cité p. **34**

- [Diu] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, *Physique Statistique*, Hermann (1996) Cité p. [22](#)
- [Fabre(Cours)] G. Grynberg, C. Fabre, A. Aspect *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*, Cours de l'X, Ellipses (1997) Cité p. [16](#), [31](#), [86](#), [152](#)
- [Ford] G.W. Ford, M. Kac, P. Mazur, *J. Math. Phys.* **6** 504 (1965) Cité p. [2](#)
- [Friberg(85)] S. Friberg, C.K. Hong, L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **54** 2011 (1985) Cité p. [74](#)
- [Fulling(76)] S.A. Fulling and P.C.W. Davies, *Proc. R. Soc. London A* **348** 393 (1976) Cité p. [2](#), [7](#), [10](#), [147](#)
- [Gardiner] C.W. Gardiner, *IBM J. Res. Dev.* **32** 127 (1988) Cité p. [2](#)
- [Giacobino(92)] E. Giacobino, C. Fabre (ed), *Quantum Noise Reduction in Optical Systems; Appl. Phys. B* **55** 189 (1992) Cité p. [4](#), [74](#), [89](#)
- [Gigan(PhD)] S. Gigan, *Amplification paramétrique d'images en cavité : Effets classiques et quantiques*, Thèse de doctorat, Univ. Paris VI (2004) Cité p. [131](#)
- [Gradshteyn] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 5th edn., edited by A. Jeffrey Cité p. [41](#)
- [Gupta] M. C. Gupta, *Handbook of photonics*, CRC Press (1997). Cité p. [133](#), [137](#)
- [Haroche(96)] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J.M. Raimond, S. Haroche *Phys. Rev. Lett.* **76** 1800 (1996) Cité p. [65](#)
- [Hecht] E. Hecht, *Optics*, Pearson International Edition, Inc. Addison Wesley (2002) Cité p. [119](#)
- [Iga] K. Iga, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **6** 6 1201,1215 (2000) Cité p. [135](#)
- [Intravaia(PhD)] F. Intravaia, *Effet Casimir et interaction entre plasmons de surface*, Thèse de doctorat, Univ. Paris VI (2005) Cité p. [10](#), [71](#)
- [Itzykson] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Mac Graw Hill, New-York (1980) Cité p. [160](#)
- [Jackson] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons Inc., New-York (1975) Cité p. [99](#)
- [Jaekel(91)] M.T. Jaekel, S. Reynaud, *J. Physique I* **1** 1395 (1991) Cité p. [10](#)
- [Jaekel(92)] M.T. Jaekel, S. Reynaud, *Quant. Opt.* **4** 39 (1992) Cité p. [2](#), [7](#), [13](#), [16](#), [150](#)
- [Jaekel(92)F] M.T. Jaekel, S. Reynaud, *J. Phys. I (France)* **2** 149 (1992) Cité p. [7](#), [13](#), [27](#), [30](#)

- [Jaekel(95)] M.T. Jaekel, S. Reynaud, *Quant. Semiclass. Opt.* **7** 499-508 (1995) Cité p. [147](#)
- [Jaekel(95)B] M.T. Jaekel, S. Reynaud, *Brazilian Journal of Physics* **25** 315-323 (1995) Cité p. [147](#)
- [Jaekel(97)] M.T. Jaekel, S. Reynaud, *Reports on Progress in Physics* **60** 863-887 (1997) Cité p. [147](#)
- [Jaekel(02)] M.T. Jaekel, A. Lambrecht, S. Reynaud, *New Astronomy Review* **46**, 727 (2002) Cité p. [2](#)
- [Joffre(Cours)] M. Joffre, *Optique non-linéaire en régimes continu et femto-seconde*, Cours de Master, mise à jour régulière sur le site <http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/physique/Manuel.Joffre/onl/> Cité p. [80](#), [134](#)
- [Lambrecht(96)] A. Lambrecht, M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Phys. Rev. Lett.* **77** 615 (1996) Cité p. [3](#), [8](#), [27](#), [30](#), [31](#), [33](#)
- [Lambrecht(98)] A. Lambrecht, M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Eur. Phys. J. D* **3** 95-104 (1998) Cité p. [3](#), [8](#), [35](#), [37](#), [39](#), [41](#), [44](#), [51](#), [61](#), [62](#), [64](#)
- [Lambrecht(98)T] A. Lambrecht, M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Europhys. Lett.* **43** 147-152 (1998) Cité p. [8](#), [36](#), [37](#)
- [Lambrecht(03)] A. Lambrecht and S. Reynaud, in *Vacuum energy and Renormalization*, B.Duplantier and V.Rivasseau eds, 109 (Birkhauser, 2003) Cité p. [1](#)
- [Lambrecht(05)] A. Lambrecht, *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **7** S3-S10 (2005) Cité p. [3](#), [22](#), [34](#)
- [Laurat(PhD)] J. Laurat, *Etats non-classiques et intrication en variables continues à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique*, Thèse de doctorat, Univ. Paris VI (2004) Cité p. [131](#)
- [Law(94)] C.K. Law, *Phys. Rev. Lett.* **73** 1931 (1994) Cité p. [8](#), [35](#), [59](#)
- [London] F. London, *Z. Phys.* **63** 245 (1930) Cité p. [1](#)
- [Loudon] R. Loudon *The Quantum Theory of Light*, Third Edition, Oxford Science Publications (2000) Cité p. [22](#), [75](#), [78](#), [85](#), [152](#)
- [MaiaNeto(93)] P.A. Maia Neto, S. Reynaud *Phys. Rev. A* **47** 1639 (1993) Cité p. [8](#)
- [MaiaNeto(96)] P.A. Maia Neto, L.A.S. Machado *Phys. Rev. A* **54** 3420 (1996) Cité p. [8](#)
- [Mandel] L. Mandel, E. Wolf *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press Cité p. [74](#), [90](#)
- [Milonni] P.W. Milonni, *The Quantum Vacuum*, Academic Press, New York (1993) Cité p. [1](#)

- [Moore(70)] G.T. Moore, *J. Math. Phys.* **11** 2679 (1970) Cité p. **7**
- [Mori] H. Mori, *Prog. Theor. Phys.* **33** 423 (1965) Cité p. **2**
- [Mundarain(98)] D.F. Mundarain, P.A. Maia Neto, *Phys. Rev. A* **57** 1379 (1998) Cité p. **8, 132, 152, 153**
- [Onofrio(04)] R. Onofrio, in *Proceedings of the Sixth International Workshop on Quantum Fields under External Conditions*, edited by K. A. Milton, Rinton, Princeton (2004). Cité p. **147**
- [Onofrio(06)] W.J. Kim, J.H Brownell, R. Onofrio, *Phys. Rev. Lett.* **96** 200402 (2006) Cité p. **147**
- [Raimond(Cours)] J.M. Raimond, *Electromagnétisme et Relativité*, Cours du Magistère Interuniversitaire de Physique (L3), Cité p. **37, 99, 150**
- [Rempe(90)] G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **64** 2783 (1990) Cité p. **65**
- [Reynaud(BruitQ)] S. Reynaud, *Ann. Phys. Fr.* , **15** pp. 63-162 (1990) Cité p. **3, 82, 155**
- [Reynaud(Squeezing)] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, C. Fabre, *Progress in Optics XXX* , Edited by E. Wolf, pp. 1-85 (1992) Cité p. **2, 152, 155**
- [Reynaud(01)] S. Reynaud, A. Lambrecht, C. Genet, and M.T. Jaekel, *C.R. Acad. Sci. Paris* **2 IV**, 1287 (2001) Cité p. **2**
- [Shapiro(85)] J.H. Shapiro, *IEEE J. Quantum Electron.* **QE21** 237 (1985) Cité p. **155**
- [Shen] Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley-Interscience Publication, (1984) Cité p. **76, 80**
- [Yu] Z. Yu, S. Boseck, *Rev. Mod. Phys.* **67** 863 (1995) Cité p. **22**
- [Zhang] W.Q. Zhang, *Opt. Comm.* **105** 226-232 (1994) Cité p. **144**