



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude des phénomènes transitoire dans les enroulements

Roland Rouxel

► **To cite this version:**

Roland Rouxel. Contribution à l'étude des phénomènes transitoire dans les enroulements. Autre. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1956. Français. NNT : . tel-00165361

**HAL Id: tel-00165361**

**<https://theses.hal.science/tel-00165361>**

Submitted on 25 Jul 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E S  
présentées à la FACULTE DES SCIENCES  
de l'UNIVERSITE de GRENOBLE  
pour obtenir  
le grade d' INGENIEUR-DOCTEUR  
par

Roland ROUXEL  
Ingénieur I.E.G.

--:--:

PREMIERE THESE :

"Contribution à l'étude  
des phénomènes transitoires dans les enroulements".

DEUXIEME THESE :

Propositions données par la Faculté :  
"Les opérations logiques dans les calculatrices digitales".

soutenues le 7 JUILLET 1956,  
devant la Commission d'Examen :

MM. NEEL L.	Président,
KUNTZMANN J.	Rapporteur,
FALLOT M.	} Examineurs.
PILLET E.	



CONTRIBUTION  
A L'ETUDE  
DES PHENOMENES TRANSITOIRES  
DANS LES ENROULEMENTS

--:--:--:--



Cette étude est dédiée, en témoignage de notre gratitude, à la mémoire de Monsieur le Professeur F. ESCLANGON, qui en fut l'instigateur, et qui ne nous ménagea ni sa sollicitude, ni ses encouragements au cours de la préparation de cette thèse.

--:--:--

Nous tenons à exprimer notre respectueuse reconnaissance et nos remerciements à Monsieur le Professeur NEEL qui a bien voulu accepter la présidence du jury d'examen.

Nous adressons également nos vifs remerciements :

à Monsieur le Professeur KUNTZMANN qui nous a prodigué, tout au long de ce travail, ses précieuses directives, et fait bénéficier de sa haute compétence ;

à Monsieur le Professeur FALLOT pour l'intérêt qu'il a toujours porté à notre travail ;

à Monsieur PILLET pour ses judicieux conseils et sa constante bienveillance.

Nous exprimons enfin notre reconnaissance aux dirigeants de la Société BROWN BOVERI, en particulier à Monsieur WALVOGEL ainsi qu'à Monsieur CHRISTOFFEL, grâce auxquels la partie expérimentale de cette étude a pu être réalisée.

--:--:--



TABLE DES MATIERES

--:--:--

- INTRODUCTION, ..... p. 1

- PREMIERE PARTIE,

POSITION DU PROBLEME.

Hypothèses, .....	p.	5
Mise en équation, .....	p.	7
Conditions aux limites, .....	p.	8
Conditions initiales, .....	p.	10
Solutions particulières du système intégral. p.		12

- DEUXIEME PARTIE.

ETUDE DES THEORIES ANTERIEURES.

Chapitre I, Théories conduisant à des solutions explicites, .....	p.	15
- Théorie de WAGNER,		
- Théorie américaine,		
- Etude comparative de ces deux théories,		
- Théorie de FRUHAUF et PIRENNE,		
- Théorie de HELLER et VEVERKA,		
- Conclusions.		

Chapitre II, Théories basées sur l'étude d'une équation  
intégrale, ..... P. 36

- Généralités.
- Etude du système intégral-différen-  
tiel.
- Théorie de PIRENNE et ABETTI.

- TROISIEME PARTIE.

ETUDE A LA MACHINE ANALOGIQUE.

Chapitre I, Principe de la méthode de calcul, ..... P. 49

Chapitre II, Résolution mathématique du problème; ..... P. 55

Chapitre III, Vérification expérimentale, ..... P. 64

- QUATRIEME PARTIE.

NOUVELLE ETUDE DU SYSTEME INTEGRAL.

Chapitre I, Généralités, ..... P. 75

Chapitre II, Variation exponentielle de  $M(x, y)$ , ..... P. 80

- Principe de la méthode de calcul.
- Solutions du système intégral :  
extrémité à la terre,  
extrémité isolée.

Chapitre III, Variation parabolique de  $M(x, y)$ , ..... P. 94

- Extrémité à la terre,
- Extrémité isolée.

Chapitre IV, Etude synthétique des deux méthodes précé-  
dentes, Vérification expérimentale, ..... P. 117

- CONCLUSIONS. ..... P. 126

- ANNEXE. Calcul de la réponse à une onde triangulaire, ... P. 128

- BIBLIOGRAPHIE. ..... P. 131

## I N T R O D U C T I O N

--:--:--:--:--

L'un des problèmes qui préoccupent depuis longtemps le constructeur de matériel électrique industriel est celui de l'isolation et de la protection de ce matériel contre les surtensions accidentelles.

Les surtensions d'origine atmosphérique sont parmi les plus dangereuses, et des recherches systématiques ont montré que, sur un réseau frappé par la foudre (réf. 1 à 10), il y a propagation d'une onde à front raide que l'on définit par les paramètres suivants :

- la valeur de crête,
- la durée du front d'onde,
- la durée de l'onde jusqu'à mi-amplitude.

Ces études, d'un caractère statistique, et qui utilisent soit les effets électriques de la décharge, soit ses effets magnétiques, ont permis de préciser les valeurs numériques de ces paramètres, et de normaliser l'onde d'essai. On peut ainsi reproduire le phénomène au laboratoire et en mesurer les effets (réf. 11 à 15).

Une conception rationnelle de l'isolation d'un matériel donné, enroulement de transformateur ou de machine tournante, devra envisager le problème sous deux aspects :

- d'une part, l'étude du comportement diélectrique de l'isolant soumis à l'application d'une onde de choc : c'est l'essai sous pleine tension. Il s'agit de définir la valeur de crête maximum que l'isolant peut subir sans dommage, et d'en étudier les variations dans le temps. (réf. 16).

- d'autre part, et c'est l'aspect que nous envisagerons, l'étude de la répartition des contraintes le long de l'enroulement afin d'y proportionner l'épaisseur d'isolant.

Cette dernière étude peut se faire sur l'enroulement une fois achevé au moyen de relevés oscillographiques, soit à la station de choc sous pleine tension, soit, sous réserve de linéarité du phénomène (réf. 5 à 17), sous tension réduite. Ces essais constituent plutôt une vérification de la conception de l'enroulement, et l'intérêt d'une prédétermination de ces contraintes est évident.

L'accroissement constant des tensions et des puissances mises en jeu donne à ce problème une acuité particulière, et il nous a semblé utile de faire le point des nombreuses méthodes de calcul proposées à ce sujet.

La première méthode qui vient à l'esprit pour l'étude d'un matériel de grande puissance est d'en réaliser un modèle réduit (réf. 18 à 27).

Plusieurs conceptions sont possibles (réf. 23). On peut envisager une similitude purement géométrique, il s'agit alors d'un véritable modèle réduit. Un tel modèle a été réalisé par CHLADEK (réf. 24) pour l'étude des phénomènes transitoires dans un enroulement à simple couche sans noyau magnétique. Malgré les résultats obtenus par CHLADEK, cette méthode présente de sérieux inconvénients. On utilise, en effet, pratiquement, dans l'étude des cas plus complexes, les mêmes matériaux magnétiques et diélectriques dans la construction du modèle et de l'original, et l'analyse dimen-

sionnelle montre que, dans ces conditions, l'échelle des temps est égale à l'échelle des longueurs : on est alors conduit à envisager des fréquences extrêmement élevées, et, outre les difficultés d'ordre expérimental, les propriétés non linéaires du noyau ne sont pas conservées.

On peut chercher à reproduire simplement les quantités électriques sans respecter la similitude géométrique entre le modèle et l'original : c'est le modèle analogique ou circuit équivalent. Il est constitué de résistances, d'inductances et de capacités. L'échelle des longueurs n'intervient pas et trois échelles indépendantes le définissent entièrement. L'échelle des puissances étant fixée, on pourra choisir arbitrairement l'échelle des temps et celle des impédances, mais, du fait de l'absence de similitude géométrique, on ne pourra pas tenir compte de l'influence de l'effet pelliculaire sur les constantes de l'enroulement (réf. 25).

ABETTI a réalisé une synthèse des deux conceptions précédentes et peut ainsi s'affranchir des inconvénients de l'une et l'autre méthode. Son modèle se compose :

- d'une part, d'un modèle géométrique simulant le comportement électromagnétique du noyau et de l'enroulement,
- d'autre part, d'un circuit capacitif équivalent simulant le comportement électrostatique de l'original.

Il garde ainsi l'avantage d'une échelle des temps arbitraire, et l'analyse dimensionnelle montre qu'une échelle appropriée de tension permet de respecter la similitude des propriétés non linéaires du noyau, ce qui revient à écrire l'identité des caractéristiques magnétiques  $B$ ,  $H$  et  $\mu$  de l'original et du modèle en des points et à des instants correspondants.

Dans les modèles à échelle de temps voisine de l'unité, les noyaux du modèle et de l'original sont géométriquement semblables, alors que dans les modèles à grande échelle de temps, dans le rapport de 50 à 1, à 1.000 à 1 ou plus, la pénétration du flux magnétique est plus importante que dans l'original, et la section du noyau sera, en conséquence, plus faible que celle exigée par la similitude géométrique. Ces derniers modèles permettent de réduire

considérablement l'influence des capacités parasites et d'enregistrer automatiquement les données nécessaires au constructeur.

ABETTI a fait une étude très complète de cette question (réf. 23, 26, 27), et les résultats qu'il obtient sont extrêmement intéressants. On conçoit cependant que la construction correcte de tels modèles soit délicate et leur manque d'universalité incite à se demander si le développement simultané des méthodes modernes de calcul (réf. 28) et des moyens de calcul permet de poser le problème dans un cadre d'hypothèses suffisamment générales.

Une telle étude théorique peut être abordée :

- soit par les méthodes du calcul numérique et l'on est alors, en général, conduit à poser le problème correspondant sur une machine à calculer, analogique ou digitale ;
- soit par une étude mathématique qui permettra d'obtenir des solutions explicites. Ces dernières présentent le maximum d'universalité, mais nécessitent évidemment des hypothèses plus particulières dont il importe de justifier la validité.

Nous rappellerons, dans la première partie de ce travail, les hypothèses permettant une mise en équation commode du phénomène, et nous préciserons les conditions envisagées.

La deuxième partie sera consacrée à l'étude des nombreuses théories proposées, et nous distinguerons :

- d'une part, les théories conduisant à une solution explicite ;
- d'autre part, les théories faisant appel aux méthodes du calcul numérique.

Nous exposerons, dans la troisième partie, une nouvelle méthode de calcul et une étude à la machine analogique nous permettra d'appliquer effectivement cette méthode au calcul des contraintes dans un enroulement de transformateur.

Nous montrerons enfin, dans la dernière partie, que des hypothèses plus particulières, que nous justifierons, permettent d'obtenir de nouvelles solutions explicites et les différentes méthodes proposées seront confrontées entre elles et aux données de l'expérience.

P R E M I E R E P A R T I E

-:-:-:-:-

P O S I T I O N D U P R O B L E M E

-:-:-

HYPOTHESES. -

Nous envisagerons le cas d'un enroulement sans fer, simple, uniforme, et nous préciserons dans quelle mesure les résultats établis s'appliquent, en présence d'un noyau magnétique et d'un enroulement secondaire.

Du point de vue de l'étude des régimes transitoires, un tel enroulement peut être considéré comme un ensemble complexe comprenant des capacités, des inductances et des résistances. L'influence des résistances est, en général, assez peu marquée et se traduit principalement par un amortissement des oscillations. En négligeant cet effet, on se place dans des conditions légèrement plus sévères que celles rencontrées réellement, et l'on sait que

le schéma équivalent de l'enroulement peut être alors représenté comme ci-contre :

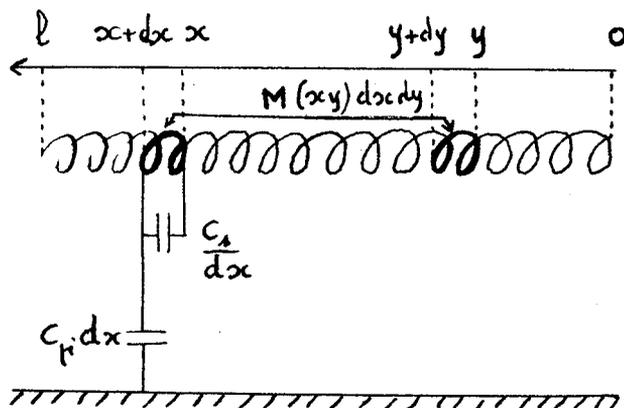


Figure 1.

Nous désignerons par :

$l$  : la longueur de l'enroulement ;

$dx$  et  $dy$  : deux éléments situés respectivement aux points d'abscisses  $x$  et  $y$  ;

$C_s$  est la capacité série relative à tout l'enroulement ;

$C_p$  la capacité par rapport à la terre de tout l'enroulement ;

$C_s \frac{l}{dx} = \frac{C_s}{dx}$  sera la capacité série relative à l'élément  $dx$  ;

$C_p \frac{dx}{l} = C_p dx$  sera la capacité par rapport à la terre de l'élément  $dx$  ;

$C_p$  et  $C_s$  désignant alors les capacités série et parallèle de l'unité de longueur.

Nous définirons également la mutuelle inductance entre les éléments  $dx$  et  $dy$  par la fonction :

$$M(xy) dx dy.$$

La self inductance totale de l'enroulement  $L$  est telle que :

$$L = \int_0^l \int_0^l M(xy) dx dy,$$

et l'inductance de l'unité de longueur  $L$  est définie par la valeur de  $M(xy)$  lorsque  $x = y$ .

On sait qu'en l'absence de noyau magnétique, cette fonction de mutuelle inductance ne dépend que de la géométrie de l'enroulement, et, dans le cas envisagé d'un enroulement homogène, de la distance  $|x - y|$  entre les éléments considérés. Dans la suite, nous nous placerons, en général, dans cette hypothèse.

PIRENNE (réf. (29) ) a étudié expérimentalement les variations du coefficient d'induction mutuelle de deux spires entou-

rant un noyau magnétique, en fonction de la fréquence et de la distance entre spires. Il ressort de cette étude que l'on peut encore supposer avec une approximation de quelques centièmes, que ce coefficient ne dépend que de la distance entre spires et non de leur position respective dans l'enroulement. L'influence de la fréquence est, au contraire, prépondérante. Lorsque la fréquence augmente, la pénétration du flux dans le noyau magnétique est de plus en plus faible, et la valeur du coefficient de mutuelle inductance diminue progressivement pour tendre vers une valeur limite, indépendante de la fréquence, correspondant à un flux nul dans le fer. Si cette valeur limite est atteinte pour des fréquences suffisamment basses, nous pourrions encore admettre en première approximation que les résultats établis pour une fonction de mutuelle inductance indépendante de la fréquence restent valables en présence d'un noyau magnétique.

MISE EN EQUATION. -

Soit :

$e(x,t)$  la tension par rapport à la terre en fonction du temps au point d'abscisse  $x$ ,

$i(x,t)$  l'intensité du courant en fonction du temps dans le bobinage au point d'abscisse  $x$ .

Les deux lois de KIRCHOFF appliquées à l'élément  $dx$  s'écrivent alors, en choisissant convenablement le sens des intensités :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\ell} M(xy) i(y) dy \quad (1) \\ \frac{\partial i}{\partial x} = C_p \frac{\partial e}{\partial t} - C_s \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial t} \quad (2) \end{array} \right.$$

les solutions de ces équations devant satisfaire aux conditions aux limites et aux conditions initiales choisies.

CONDITIONS AUX LIMITES. -

Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas d'un enroulement dont l'entrée, primitivement au potentiel zéro, est soumise à l'application brusque d'une tension constante d'amplitude  $E$  (onde rectangulaire infinie), l'autre extrémité, que nous prendrons comme origine des abscisses, étant soit à la terre, soit isolée.

Une telle onde à front infiniment raide est évidemment théorique mais on sait, par superposition d'ondes élémentaires, déterminer la solution relative à une onde quelconque connaissant la réponse du système à l'onde rectangulaire.

Extrémité à la terre.

Les deux extrémités sont alors à potentiel fixe et les conditions aux limites correspondantes s'écrivent :

$$\begin{cases} e(0,t) = 0 \\ e(l,t) = E \end{cases}$$

Extrémité isolée.

Les différents auteurs écrivent les conditions aux limites correspondantes :

$$\begin{cases} i(0,t) = 0 \\ e(l,t) = E \end{cases}$$

Des considérations énergétiques, que nous allons préciser, montrent que ces conditions sont incorrectes et conduisent aux relations :

$$\left| \begin{array}{l} i(0,t) + C_s \frac{\partial^2 e(0,t)}{\partial x \partial t} = 0 \\ e(l,t) = E \end{array} \right.$$

Il paraît, en effet, normal de tenir compte de l'influence de la capacité série et d'écrire qu'à l'extrémité de l'enroulement la somme des intensités dans les branches inductives et capacitives du schéma équivalent est nulle.

Considérations énergétiques.

L'énergie interne de l'enroulement s'écrit :

$$\frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l M(xy) i(x)i(y) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^l C_p e^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l C_s \left( \frac{\partial e}{\partial x} \right)^2 dx$$

Si l'enroulement n'échange pas d'énergie avec l'extérieur (oscillations libres), la dérivée de l'énergie par rapport au temps est nulle :

$$\int_0^l \int_0^l M(xy) i(x) \frac{\partial i(y)}{\partial t} dx dy + \int_0^l C_p e \frac{\partial e}{\partial t} dx + \int_0^l C_s \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} dx = 0$$

soit, compte tenu de l'équation (1) :

$$\int_0^l i(x) \frac{\partial e}{\partial x} dx + C_p \int_0^l e \frac{\partial e}{\partial t} dx + C_s \int_0^l \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} dx$$

L'intégrale :

$$\int_0^l \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} dx$$

s'évalue par parties et l'on obtient alors, compte tenu de l'équation (2) :

$$\int_0^{\ell} i(x) \frac{\partial e}{\partial x} dx + \int_0^{\ell} e \frac{\partial i}{\partial x} dx + C_s \left[ e \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial t} \right]_0^{\ell} = 0$$

soit :

$$[ei]_0^{\ell} + C_s \left[ e \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial t} \right]_0^{\ell} = 0 \quad (2')$$

Si l'extrémité est à la terre, les conditions précédentes s'écrivent pour les oscillations libres :

$$\begin{cases} e(0,t) = 0 \\ e(\ell,t) = 0 \end{cases}$$

et l'expression précédente est identiquement vérifiée.

Si l'extrémité est isolée, on a encore la condition :

$$e(\ell,t) = 0$$

et l'expression (2') ne peut être vérifiée que si l'on a, en outre :

$$i(0,t) + C_s \frac{\partial^2 e(0,t)}{\partial x \partial t} = 0$$

#### CONDITIONS INITIALES. -

D'après les hypothèses faites, aucun courant ne circule à l'instant initial dans les branches inductives :

$$i(x,0) = 0$$

La répartition initiale de tension est alors déterminée par le schéma capacitif de l'enroulement et l'on est conduit (réf. (1) ), à des répartitions initiales de tension  $e(x,0)$  solutions de l'équation :

$$\frac{d^2 e}{dx^2} - \frac{\rho^2}{\ell^2} e = 0$$

Les solutions de cette équation doivent satisfaire aux conditions aux limites précédentes.

Extrémité à la terre.

$$\left. \begin{array}{l} e(0,t) = 0 \\ e(\ell,t) = E \end{array} \right\} \text{d'où :} \left\{ \begin{array}{l} i(x,0) = 0 \\ e(x,0) = E \frac{\text{Sh } \rho \frac{x}{\ell}}{\text{Sh } \rho} \end{array} \right.$$

Extrémité isolée.

$$\left\{ \begin{array}{l} i(0,t) + C_s \frac{\partial^2 e(0,t)}{\partial x \partial t} = 0 \\ e(\ell,t) = E \end{array} \right.$$

et, compte tenu de l'hypothèse précédente,

$$i(x,0) = 0$$

on obtient en intégrant la première condition entre 0 et  $\Delta t$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e(0,t)}{\partial x} = 0 \\ e(\ell,t) = 0 \end{array} \right.$$

On est alors conduit à la répartition initiale de tension :

$$e(x,0) = E \frac{\text{Ch } \rho \frac{x}{\ell}}{\text{Ch } \rho}$$

Ces répartitions hyperboliques de tension ont été confirmées par de nombreux relevés oscillographiques et justifient les notions de capacités série et parallèle introduites par WAGNER (réf. (30) ) en 1915.

SOLUTIONS PARTICULIERES DU SYSTEME INTEGRAL. -

Nous remplacerons par des conditions homogènes les conditions aux limites précédentes en ajoutant à la solution générale, correspondant aux oscillations libres du système, une solution particulière :

$$\begin{cases} e(x,t) \\ i(x,t) \end{cases}$$

telles que :

$$e(\ell,t) = E$$

Il est aisé de vérifier que les solutions suivantes satisfont à cette condition et au système intégral (I) :

Extrémité à la terre :

Extrémité isolée :

$$\begin{cases} e(x,t) = E \frac{L_x}{L} \\ i(x,t) = \frac{E}{L} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} e(x,t) = E \\ i(x,t) = 0 \end{cases}$$

en posant :

$$L_x = \int_0^x \int_0^{\ell} M(\xi, y) d\xi dy$$

Le problème est ainsi parfaitement défini et nous étudierons maintenant les solutions proposées par les différents auteurs.

DEUXIEME PARTIE

-:-:-:-:-

E T U D E

DES THEORIES ANTERIEURES

-:-:-:-



GENERALITES. -

Toute étude théorique des régimes transitoires dans les enroulements repose sur l'étude du système intégral-différentiel (I) précédemment établi et les diverses théories proposées correspondent à des approximations différentes de ces équations.

- Les unes cherchent par diverses hypothèses sur la fonction de mutuelle inductance à se débarrasser du signe intégrale dans l'équation (1) relative aux inductions et conduisent à des solutions explicites.

- Les autres supposent, au contraire, négligeable l'influence de la capacité série (équation (2)), et cherchent à se ramener à une équation intégrale de type connu pouvant être résolue par les méthodes du calcul numérique.

Nous montrerons qu'il est possible de généraliser ces dernières théories et de tenir compte de l'influence de la capacité série.



A) Extrémité à la terre,

$$(III) \left\{ \begin{aligned} e(x,t) &= E \frac{x}{l} + E \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \Omega_k t & (5) \\ A_k &= \frac{\cos k \pi}{k \pi} \cdot \frac{2 \mu^2}{\mu^2 + k^2 \pi^2} & (6) \\ \Omega_k &= \frac{k \pi}{\sqrt{\mathcal{L} \mathcal{C}_s (\mu^2 + k^2 \pi^2)}} & (7) \end{aligned} \right.$$

B) Extrémité isolée.

$$(IV) \left\{ \begin{aligned} e(x,t) &= E + E \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos \frac{k\pi x}{2l} \cos \Omega'_k t & (8) \\ A'_k &= - \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{k\pi} \cdot \frac{16 \mu^2}{4\mu^2 + k^2 \pi^2} & (9) \\ \Omega'_k &= \frac{k\pi}{\sqrt{\mathcal{L} \mathcal{C}_s (4\mu^2 + k^2 \pi^2)}} & (10) \end{aligned} \right.$$

L'auteur indique que pour tenir compte de l'effet des couplages magnétiques entre éléments de l'enroulement, il suffit de majorer la valeur de la self-induction. Nous préciserons ultérieurement l'influence de la mutuelle inductance, et nous verrons dans quelle mesure les résultats expérimentaux confirment ces hypothèses.

C) Remarque.

Reprenant les hypothèses de WAGNER, RUDENBERG (réf. (31) ) interprète différemment les phénomènes consécutifs au choc et développe la théorie des "ondes mobiles". Décomposant l'onde incidente en son spectre de fréquence, l'auteur détermine à partir de l'équation différentielle (4) de quelle manière les composantes sinusoidales de cette onde se propagent dans l'enroulement et définit une fréquence critique  $\Omega_c$ ,

telle que :

$$\Omega_c = \frac{1}{\sqrt{L C_s}}$$

Il découle immédiatement des relations (7) ou (10) que les ondes de pulsation supérieures à  $\Omega_c$  ne peuvent pénétrer dans l'enroulement.

L'onde réfléchie, somme des ondes sinusoïdales de pulsations supérieures à  $\Omega_c$ , donne naissance à une répartition de tension exponentielle décroissant le long de l'enroulement depuis l'extrémité soumise au choc. L'onde résultante, égale à la somme de l'onde mobile et de l'onde atténuée, donne à chaque instant la valeur de la tension entre chaque point de l'enroulement et la terre.

Cette interprétation semble difficilement conciliable avec la notion de mutuelle inductance et, partant de la même équation différentielle, revient simplement à écrire les solutions sous la forme :

$$e(x,t) = E \frac{x}{l} + E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} \left[ \sin\left(\frac{k\pi x}{l} + \Omega_k t\right) + \sin\left(\frac{k\pi x}{l} - \Omega_k t\right) \right]$$

pour l'extrémité à la terre, et à considérer l'onde de pulsation  $\Omega_k$  se propageant à la vitesse :

$$V_k = \frac{\Omega_k}{k \pi}$$

## II - THEORIE AMERICAINE. -

Le schéma équivalent proposé par WAGNER ne diffère de celui des lignes que par l'adjonction des capacités séries et sa théorie néglige les mutuelles inductances entre éléments de l'enroulement. Dès 1919, BLUME et BOYAJIAN (réf. (32)), ont cherché à tenir compte de l'effet des couplages magnétiques, et ont proposé une théorie reprise depuis par plusieurs auteurs américains et anglais (réf. (1) (17), (33), (34)).

La théorie américaine écrit l'équation relative aux inductions sous la forme :

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{N}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot 10^{-8} \quad (11)$$

N est le nombre total de spires,

$\Phi$  est le flux total, somme du flux commun à toutes les spires,  $\Phi_m$ ,  
et du flux de fuites  $\Phi_1$ .

En désignant par :

h : la longueur de la ligne de fuites,

s : la longueur de la spire moyenne,

i(x,t) : le courant dans l'inductance,

$$\Phi = \Phi_m + \frac{4\pi N s}{10 l h} \int_x^l d\xi \int_0^{\xi} i(y,t) dy \quad (12)$$

Le flux  $\Phi_m$  est indépendant de l'abscisse x et peut être éliminé par différentiation.

Les équations (11) et (12) s'écrivent après deux dérivations successives par rapport à x :

$$\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} = - \frac{\mathcal{L}_1}{\rho^3} \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (13)$$

en posant : 
$$\mathcal{L}_1 = \frac{4\pi \rho N^2 s}{10^9 h}$$

D'autre part, l'équation des courants (2) s'écrit en rapportant les coefficients  $C_p$  et  $C_s$  à l'ensemble de l'enroulement :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\mathcal{C}_p}{\rho} \frac{\partial e}{\partial t} - \rho \mathcal{C}_s \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial t} \quad (14)$$

En éliminant les intensités entre (13) et (14), il vient :

$$\frac{\partial^4 e}{\partial x^4} - \frac{\mathcal{L}_1}{\rho^2} \mathcal{C}_s \frac{\partial^4 e}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\mathcal{L}_1}{\rho^4} \mathcal{C}_p \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

Cherchons des solutions de la forme :

$$e(x,t) = E_0 e^{j\alpha x} e^{j\omega t}$$

En substituant dans l'équation (15), on obtient entre  $\alpha$  et  $\omega$  la relation :

$$\omega^2 = \frac{(\alpha \ell)^4}{\mathcal{L}_1(\mathcal{C}_p + (\alpha \ell)^2 \mathcal{C}_s)} \quad (16)$$

La théorie américaine admet alors a priori une répartition sinusoïdale de tension et cherche des solutions analogues à celles de la théorie de WAGNER sans s'assurer qu'elles satisfont à l'équation (11) :

A) Extrémité à la terre.

$$(V) \left\{ \begin{aligned} e(x,t) &= E \frac{x}{\ell} + E \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \omega_k t \quad (17) \\ A_k &= \frac{\cos k \pi}{k \pi} \frac{2 \mu^2}{\mu^2 + k^2 \pi^2} \quad (18) \\ \omega_k &= \frac{k^2 \pi^2}{\sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{C}_s (\mu^2 + k^2 \pi^2)}} \quad (19) \end{aligned} \right.$$

B) Extrémité isolée.

$$(VI) \left\{ \begin{aligned} e(x,t) &= E + E \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos \frac{k\pi x}{2\ell} \cos \omega'_k t \quad (20) \\ A'_k &= - \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi} \frac{16 \mu^2}{4\mu^2 + k^2 \pi^2} \quad (21) \end{aligned} \right.$$

$$(VI) \quad \omega'_k = \frac{k^2 \pi^2}{2\sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{C}_3 (4\mu^2 + k^2 \pi^2)}} \quad (22)$$

### III - ETUDE COMPARATIVE DE CES DEUX THEORIES.

Si l'on compare les rapports des fréquences fondamentales, extrémité libre et à la terre, donnés par les deux théories,

$\frac{\Omega'_1}{\Omega_1}$  et  $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$ , pour des valeurs de  $\mu^2$  suffisamment élevées (ces valeurs sont, en général, comprises entre 25 et 500), la théorie de WAGNER donne un rapport sensiblement égal à 2, et la théorie américaine un rapport voisin de 4. D'après KOHN (réf. (35)), "l'expérience ne se raccorde presque jamais ni avec l'une ni avec l'autre mais se situe entre les deux, en général plus près de la théorie américaine". Nous chercherons à préciser d'un point de vue théorique cette constatation expérimentale.

Les résultats présentés par BEWLEY, lors de la discussion du rapport de RUDENBERG à l'A.I.E.E. (1940) (réf. 31) sont également en faveur de la théorie américaine. Des relevés oscillographiques sur un enroulement de transformateur triphasé, 5 000 kVA, 12 000 volts neutre à la terre, lui permettent de déterminer les harmoniques d'onde 1, 2, 3 et 6 et il compare dans les deux cas théoriques envisagés, les valeurs du rapport  $\frac{\omega'_k}{\omega_1}$ , extrémité à la terre, aux valeurs expérimentales :

$\frac{\omega_k}{\omega_1}$	$\frac{\omega_1}{\omega_1}$	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{\omega_3}{\omega_1}$ .....	$\frac{\omega_6}{\omega_1}$
Théorie de WAGNER	1	1,8	2,4	3,1
Théorie Américaine	1	3,6	7,1	19
Valeurs expérimentales.	1	3,3	7,2	13

Tableau I.

Ces résultats sont nettement en faveur de la théorie américaine. RUDENBERG fait cependant remarquer, à juste raison, qu'étant donné la diversité des enroulements, ce test peut prêter à discussion et qu'on ne peut dire qu'une seule méthode d'analyse soit satisfaisante.

Nous avons appliqué ces deux théories à un modèle de transformateur, sur lequel la S.A. BROWN BOVERI a effectué les mesures des constantes caractéristiques ainsi que les relevés oscillographiques des tensions transitoires apparaissant entre l'enroulement primaire et la masse.

Les caractéristiques essentielles de ce modèle sont les suivantes :

- l'enroulement primaire est homogène et constitué par 60 galettes comprenant chacune 15 spires ; distance entre galettes = 4,5 mm, longueur axiale totale = 1450 mm., diamètre intérieur = 590 mm., diamètre extérieur = 724 mm.
- l'enroulement secondaire disposé à l'intérieur était remplacé par un écran cylindrique d'aluminium, court-circuité sur lui-même sur toute sa longueur, des études expérimentales préliminaires ayant montré qu'une telle substitution n'altérerait pas les phénomènes transitoires de l'enroulement primaire.

- diamètre de l'écran : 504 mm.
- longueur " " : 1500 mm.
- épaisseur " " : 1 mm.

A l'intérieur de cet écran se trouve un noyau cylindrique en tôle de fer (diamètre = 360 mm).

L'ensemble est disposé dans l'air, l'extrémité de l'enroulement primaire ainsi que l'écran et le noyau sont directement mis à la terre. Un anneau de garde est relié à l'entrée de l'enroulement. Les oscillogrammes de tension  $e_1, e_2 \dots \dots \dots e_9$  relevés entre des points de l'enroulement distants de  $\frac{l}{9}$  et la masse, ont été enregistrés dans les conditions suivantes<sup>10</sup>:

- tension du générateur de choc : 1 000 volts
- onde de choc : 0,03 500 V<sup>s</sup>
- durée de balayage : 25  $\mu$ s

Nous avons calculé les courbes théoriques correspondant aux oscillogrammes  $e_1, e_5$  et  $e_9$  à l'aide des relations (III) pour la théorie de WAGNER, et des relations (V) pour la théorie américaine, pour les six premiers harmoniques, et les résultats consignés sur les figures (2) et (3) sont, cette fois, en faveur de la théorie de WAGNER et confirment l'opinion de RUDENBERG.

Les constantes  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}_p$ , et  $\mathcal{E}_s$ , nécessaires au calcul, ont été déterminées par la mesure directe et par le calcul à partir des données géométriques de l'enroulement.<sup>(\*)</sup>

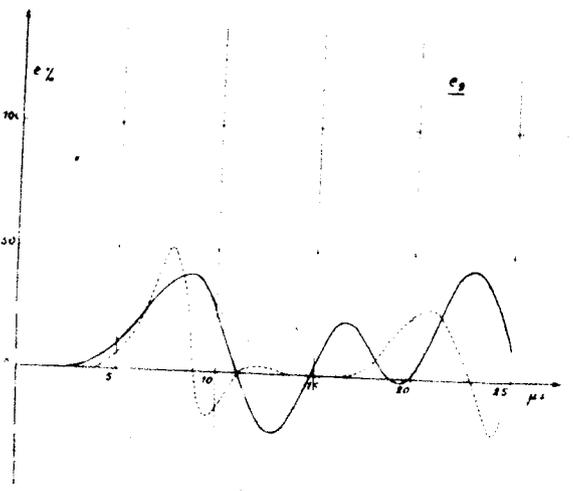
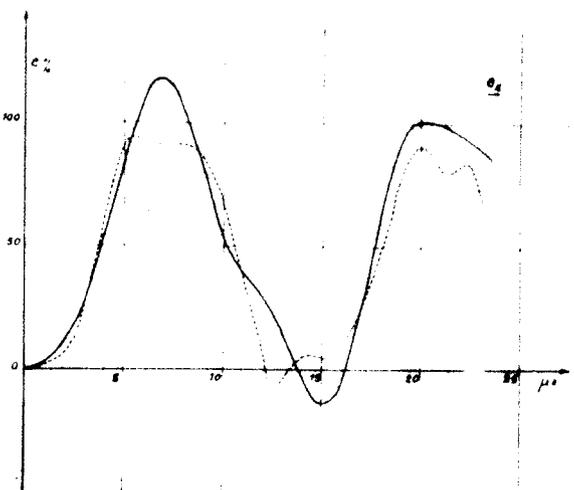
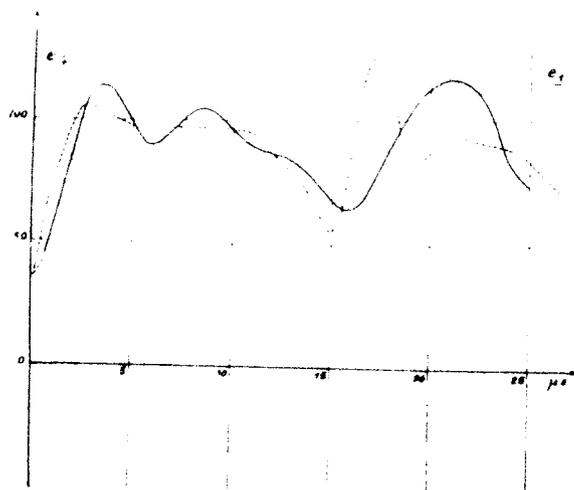
On a trouvé :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 75 \text{ mH} \\ \mathcal{E}_p &= 610 \text{ pF} \\ \mathcal{E}_s &= 6,6 \text{ pF}\end{aligned}$$

L'inductance de fuites  $\mathcal{L}_1$  de la théorie américaine a été choisie de manière à obtenir des échelles de temps comparables pour les deux théories (égalité des fréquences fondamentales).

(\*) Cette question est exposée en détail au chapitre III, 3ème partie

- Théorie de WAGNER. -



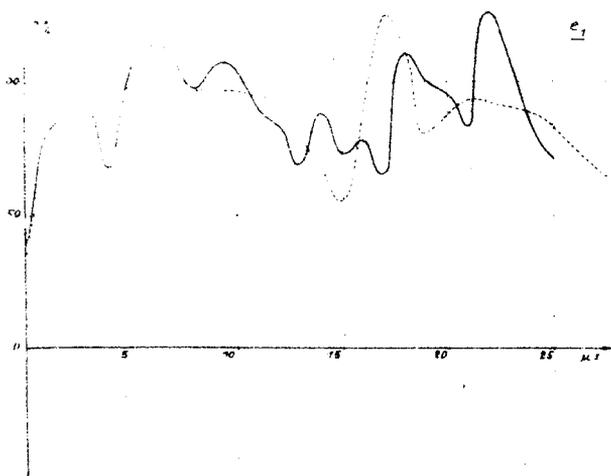
Comparaison des valeurs calculées et mesurées pour la tension à la terre d'un enroulement soumis à une tension de choc rectangulaire 100 %.

Les tensions  $e_1, e_5, e_9$  sont les tensions des connexions entre bobines et la terre.

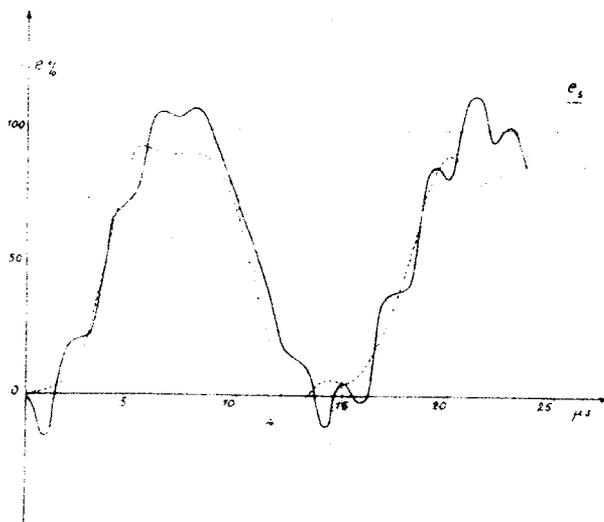
Traits pleins :  
valeurs calculées.

Traits pointillés :  
valeurs mesurées.

Figure 2



Comparaison des valeurs calculées et mesurées pour la tension à la terre d'un enroulement soumis à une tension de choc rectangulaire 100 % .



Les tensions  $e_1$ ,  $e_5$ ,  $e_9$  sont les tensions des connexions entre bobines et la terre.

Traits pleins :

valeurs calculées.

Traits pointillés :

valeurs mesurées.

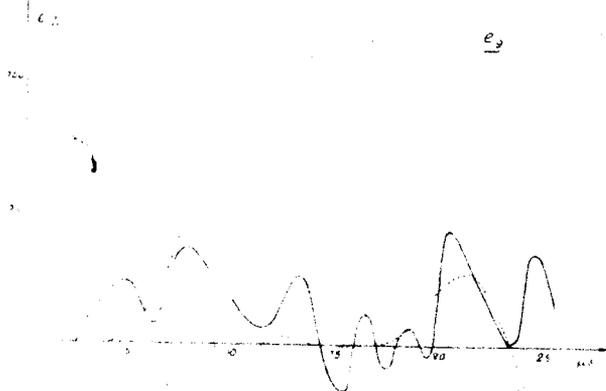


Figure 3 .

Il est d'ailleurs possible d'éliminer ce facteur et de comparer aux valeurs expérimentales les valeurs du rapport

$$\frac{\omega_k}{\omega_1}$$

de l'une et l'autre théorie pour les six premiers harmoniques.

La théorie américaine admet un rapport  $k$  fois plus élevé que la théorie de WAGNER et cette divergence est bien mise en évidence par la comparaison des courbes théoriques relatives aux oscillogrammes  $e_1$  et  $e_9$  des figures (2) et (3).

La courbe  $e_5$ , relative au point milieu de l'enroulement ne comprend que des oscillations d'ordre impair. L'onde fondamentale est alors prépondérante et les résultats donnés par l'une et l'autre théorie coïncident sensiblement avec la courbe expérimentale correspondante.

La détermination des fréquences propres d'un enroulement peut se faire à partir des relevés oscillographiques des tensions transitoires apparaissant entre des points bien déterminés de l'enroulement soumis à une onde de choc (réf. 36).

Ainsi l'oscillogramme de tension relatif au point milieu de l'enroulement met en évidence l'onde fondamentale et un oscillogramme relevé entre deux points d'abscisses

$$\frac{\ell}{4} \text{ et } \frac{3\ell}{4}$$

ne fait apparaître que les oscillations d'ordre pair. L'harmonique 4 n'intervient d'ailleurs pas et l'harmonique 2 est alors prépondérant.

Cette méthode est cependant très peu précise en ce qui concerne la détermination des oscillations d'ordre plus élevé et nous allons exposer la méthode qui nous a permis, à partir des oscillogrammes de tension précédents, de calculer les valeurs expérimentales des rapports

$$\frac{\omega_k}{\omega_1}$$

pour les six premiers harmoniques.

Détermination des fréquences propres à partir des oscillogrammes. -

1°) Principe de la méthode.

Les oscillations consécutives à l'application d'une onde de choc de forme quelconque peuvent s'écrire, rapportées à l'axe des oscillations :

$$F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \omega_i t$$

L'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{2k\pi}{\omega}} F(t) \cos \omega t dt$$

s'écrit, si  $\omega \neq \omega_i$

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \sin 2k\pi \frac{\omega_i}{\omega}$$

si  $\omega = \omega_i$ , cette valeur devient illusoire et l'on est alors conduit à l'expression :

$$I = a_n \frac{k\pi}{\omega_n} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{\infty} a_i \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_n^2} \sin 2k\pi \frac{\omega_i}{\omega_n}$$

Si l'on fait varier  $\omega$  d'une manière continue, I passera par une série de maxima et de minima dont certains correspondront aux valeurs des fréquences propres cherchées ( $\omega = \omega_i$ ).

Pour des valeurs de k suffisamment élevées, les maxima ou minima relatifs à ces fréquences propres seront nettement prépondérants et on éliminera aisément les fréquences parasites.

La longueur des oscillogrammes utilisés est, dans le cas envisagé, relativement faible, de l'ordre de deux fois la période fondamentale. Nous avons pu cependant déterminer par cette méthode les six premières fréquences propres de l'enroulement en

remarquant que le signe d'un extremum relatif à une fréquence propre  $\omega_i$  est celui de l'amplitude  $a_i$  correspondante. Il est d'ailleurs possible, à titre de vérification, de calculer à partir des valeurs ainsi déterminées, les courbes théoriques relatives aux oscillogrammes  $e_1 \dots e_9$ , en admettant que les amplitudes des oscillations soient celles données par la théorie de WAGNER (ou la théorie américaine, ces valeurs étant identiques pour l'une ou l'autre théorie).

Nous établirons au chapitre II (4ème partie) une relation qui nous permettra de retrouver théoriquement ces valeurs et la comparaison des courbes théoriques ainsi obtenues et des courbes expérimentales (figure 13) justifie pratiquement la méthode exposée (Le léger décalage des échelles des temps n'intervient effectivement pas dans le calcul des rapports des différentes valeurs propres).

### 2°) Calculs pratiques.

L'utilisation d'une machine analogique permet de calculer sans difficulté des expressions telles que :

$$I = \int_0^{\frac{2k\pi}{\omega}} F(t) \cos \omega t \, dt$$

La courbe expérimentale  $F(t)$  est introduite à l'aide d'un suiveur optique à cellule photoélectrique, et le terme  $\cos \omega t$  est obtenu comme solution de l'équation :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

Un organe multiplicateur délivre à sa sortie le produit :

$$F(t) \cos \omega t$$

que l'on intègre entre 0 et  $\frac{2k\pi}{\omega}$ , k étant choisi aussi grand que

possible, compte tenu de la longueur de la courbe expérimentale  $F(t)$ . Les différents résultats sont consignés dans le tableau (II) et l'on peut constater que les valeurs expérimentales se situent comme précédemment entre les valeurs théoriques, mais sont cette fois plus proches de la théorie de WAGNER. Cette divergence tient essentiellement à la diversité des comportements électromagnétiques des enroulements envisagés<sup>(\*)</sup> et montre clairement la nécessité de faire intervenir explicitement la fonction de mutuelle inductance dans les solutions proposées.

$\frac{\omega_k}{\omega_1}$	$\frac{\omega_1}{\omega_1}$	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{\omega_3}{\omega_1}$	$\frac{\omega_4}{\omega_1}$	$\frac{\omega_5}{\omega_1}$	$\frac{\omega_6}{\omega_1}$
Théorie de WAGNER.	1	1,8	2,3	2,6	2,8	2,9
Théorie américaine	1	3,5	6,8	10,2	13,8	17,2
Valeurs expérimentales	1	1,9	2,7	3,5	4,3	5

Tableau II.

(\*) En admettant que la solution proposée par la théorie américaine soit mathématiquement correcte.

IV - THEORIE DE FRUHAUF et PIRENNE. -

Parmi les théories qui admettent des répartitions sinusoidales de tension, il convient de citer une théorie proposée en 1932 par FRUHAUF (réf. 37) et reprise plus récemment par PIRENNE (réf. 29).

Ces auteurs envisagent le cas d'une fonction de mutuelle inductance rapidement décroissante et cherchent des solutions de la forme :

$$\begin{cases} e(x,t) = e_0 \sin \frac{\pi n x}{2l} \cos \omega t \\ i(x,t) = i_0 \cos \frac{\pi n x}{2l} \sin \omega t \end{cases}$$

Ces solutions ne satisfont aux conditions aux limites choisies que pour des valeurs paires de n si l'extrémité est à la terre, et pour des valeurs impaires si l'extrémité est isolée.

En reportant ces expressions dans les équations (1) et (2) du système intégral (I) et en éliminant

$$\frac{e_0}{i_0}$$

entre ces deux équations, il vient :

$$\cos \frac{\pi n x}{2l} = \omega^2 \left[ \frac{C_p + C_s \left( \frac{\pi n}{2l} \right)^2}{\left( \frac{\pi n}{2l} \right)^2} \int_0^l M(xy) \cos \frac{\pi n y}{2l} dy \right]$$

L'intégrale peut s'écrire :

$$A(x) \cos \frac{\pi n x}{2l} + B(x) \sin \frac{\pi n x}{2l}$$

en posant :

$$A(x) = \int_0^l M(xy) \cos \frac{\pi}{2} n \frac{x-y}{l} dy$$

$$B(x) = \int_0^l M(xy) \sin \frac{\pi}{2} n \frac{x-y}{l} dy$$

D'après les hypothèses faites sur  $M(xy)$  si  $x$  est différent de  $y$ , la valeur de cette fonction reste faible et on peut considérer alors que  $A(x)$  reste sensiblement indépendant de  $x$  et que  $B(x)$  est négligeable devant  $A(x)$ .

En supposant :

$$A(x) = A$$

$$B(x) = 0$$

la relation précédente <sup>ne</sup> peut être vérifiée que pour des valeurs  $\omega_n$  de  $\omega$  telles que :

$$\omega_n = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{\frac{Al}{n} \ell \left[ C_p + C_s \left( \frac{\pi n}{2\ell} \right)^2 \right]}}$$

PIRENNE pose alors :

$\frac{Al}{n} = \mathcal{L}_n$  et obtient, en rapportant les coefficients  $C_p$  et  $C_s$  à l'ensemble de l'enroulement :

$$\omega_n = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{\mathcal{L}_n \mathcal{E}_p \left[ 1 + \left( \frac{\pi n}{2\mu} \right)^2 \right]}}$$

où  $\mu^2 = \frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_s}$

$\mathcal{L}_n$  est le coefficient de self-induction apparent d'un  $n^{\text{ème}}$  de l'enroulement et, comme l'indique PIRENNE, cette méthode "ne permet donc de déterminer les fréquences propres que si l'on dispose de l'enroulement et elle nécessite alors des mesures presque aussi compliquées que celles des fréquences propres elles-mêmes".

Nous montrerons qu'il est possible, si la fonction de mutuelle inductance est rapidement décroissante, d'explicitier des solutions approchées du système intégral (I) ne faisant intervenir que des paramètres aisément mesurables ou calculables à partir des données géométriques de l'enroulement.

V - THEORIE DE HELLER ET VEVERKA. -

Cette théorie tient compte de l'influence de la fonction de mutuelle inductance et admet qu'elle peut être représentée par une loi de variation exponentielle que nous écrirons :

$$M(xy) = L e^{-\nu \left| \frac{x-y}{\ell} \right|}$$

où L est l'inductance de l'élément unité (spire ou galette),

$\nu$  une constante positive dépendant de la géométrie de l'enroulement et caractérisant son comportement électromagnétique.

Les équations générales (I) s'écrivent dans ces conditions :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^x e^{-\nu \left( \frac{x-y}{\ell} \right)} i(y) dy + \int_x^{\ell} e^{-\nu \left( \frac{x-y}{\ell} \right)} i(y) dy \right] \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = C_p \frac{\partial e}{\partial t} - C_s \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial t} \quad (2)$$

En différentiant deux fois par rapport à x l'équation (23), on obtient successivement :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = L \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{\nu}{\ell} \int_0^x e^{-\nu \left( \frac{x-y}{\ell} \right)} i(y) dy + \frac{\nu}{\ell} \int_x^{\ell} e^{-\nu \left( \frac{y-x}{\ell} \right)} i(y) dy \right] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} = L \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\nu^2}{\ell^2} \int_0^x e^{-\nu \left( \frac{x-y}{\ell} \right)} i(y) dy + \frac{\nu^2}{\ell^2} \int_x^{\ell} e^{-\nu \left( \frac{y-x}{\ell} \right)} i(y) dy \right. \\ \left. - \frac{2\nu}{\ell} i(y) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

soit :

$$\left\{ \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} = \frac{\nu^2}{\ell^2} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{2\nu}{\ell} L \frac{\partial i}{\partial t} \right. \quad (26)$$

$$\left[ \frac{\partial i}{\partial x} = C_p \frac{\partial e}{\partial t} - C_s \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial t} \right. \quad (2)$$

et, en éliminant les intensités entre les équations (26) et (2), il vient :

$$\frac{\partial^4 e}{\partial x^4} - \frac{2\mathcal{D}}{\ell} L C_s \frac{\partial^4 e}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{2\mathcal{D}}{\ell} L C_p \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{\mathcal{D}^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = 0 \quad (27)$$

Cherchons des solutions de la forme :

$$E_0 e^{j\alpha x} e^{j\omega t}$$

en substituant dans l'équation (27), on obtient entre les fréquences dans l'espace  $\alpha$  et les fréquences dans le temps  $\omega$ , la relation :

$$\omega^2 = \frac{\mathcal{D}^2 (\alpha \ell)^2 + (\alpha \ell)^4}{2\mathcal{D} \ell^2 L [\mathcal{E}_p + (\alpha \ell)^2 \mathcal{E}_s]} \quad (28)$$

en rapportant les coefficients  $C_p$  et  $C_s$  à l'ensemble de l'enroulement

HELLER et VEVERKA (réf. (38), (39) ), obtiennent une relation analogue qui leur permet de préciser l'influence de la fonction de mutuelle inductance : si celle-ci est lentement décroissante, le terme en  $\mathcal{D}^2 (\alpha \ell)^2$  peut être négligé devant  $(\alpha \ell)^4$  et on retrouve une expression comparable à celle de la théorie américaine :

$$\omega^2 = \frac{(\alpha \ell)^4}{\mathcal{L}_1 [\mathcal{E}_p + (\alpha \ell)^2 \mathcal{E}_s]} \quad (16)$$

Si, au contraire, la fonction de mutuelle inductance décroît rapidement :

$$\mathcal{D}^2 \alpha^2 \gg \alpha^4$$

on obtient une expression analogue à celle de la théorie de WAGNER :

$$\omega^2 = \frac{(\alpha l)^2}{\mathcal{L} [\mathcal{E}_p + (\alpha l)^2 \mathcal{E}_s]}$$

La relation (28) permet ainsi de passer d'une manière continue de l'une à l'autre théorie.

L'équation (27) est du quatrième ordre en  $x$ , et les solutions correspondantes seront déterminées par les deux conditions aux limites choisies et deux conditions supplémentaires exprimant que l'équation intégrale (23) est satisfaite.

Remarquons que ces conditions peuvent être obtenues directement à partir des relations (23) et (24) :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial x}(0) = \frac{l}{v} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0) \quad (0) \\ \frac{\partial e}{\partial x}(l) = -\frac{l}{v} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(l) \quad (1) \end{array} \right.$$

Ces deux conditions jointes aux deux conditions aux limites forment un système linéaire homogène qui n'admet de solutions non identiquement nulles que si le déterminant des coefficients est nul.

On obtient ainsi une relation implicite entre les racines de l'équation caractéristique qui, compte tenu des relations entre coefficients et racines de cette équation, détermine les fréquences propres recherchées.

L'expression de ce déterminant est malheureusement compliquée. Les auteurs limitent leur étude à l'onde fondamentale et montrent que si l'extrémité de l'enroulement est mise à la terre, les termes hyperboliques peuvent être négligés.

Si l'extrémité est isolée, nous avons montré que les conditions :

$$\left| \begin{array}{l} i(0,t) = 0 \\ e(l,t) = 0 \end{array} \right.$$

étaient incorrectes, et il serait intéressant d'entreprendre une

nouvelle étude du déterminant relatif aux conditions :

$$\left| \begin{array}{l} i(0,t) + c_s \frac{\partial^2 e(0)}{\partial x \partial t} = 0 \\ e(l,t) = 0 \end{array} \right.$$

Cette théorie permettrait, également, d'aborder d'une manière rigoureuse, le calcul des oscillations d'ordre supérieur et c'est, à notre connaissance, la plus complète parmi celles qui conduisent à une relation explicite entre les fréquences propres et les racines de l'équation caractéristique.

## VI - CONCLUSIONS. -

Les hypothèses faites par les différents auteurs au sujet de la fonction de mutuelle inductance nous ont permis d'établir une classification des nombreuses théories proposées.

WAGNER néglige l'effet de la mutuelle inductance et obtient ainsi une équation dont il donne une solution mathématiquement exacte, bien que, dans certains cas, assez éloignée de la réalité.

La théorie américaine admet une fonction de mutuelle inductance linéairement décroissante, mais propose une étude mathématique incomplète qui peut conduire à des résultats incorrects. Ainsi, d'après cette théorie, la fréquence fondamentale d'un enroulement dont l'extrémité isolée, augmenterait indéfiniment lorsque la mutuelle inductance tend vers une valeur constante, alors que nous montrerons (\*) qu'elle varie, en réalité, très peu.

HELLER et VEVERKA admettent une représentation exponentielle de la fonction de mutuelle inductance et une étude mathématique rigoureuse leur permet d'établir une relation qui englobe, à titre de

(\*) 2ème partie, chapitre II.

résultats partiels, les équations des deux théories précédentes. Celle-ci conduit à des calculs compliqués.

Nous montrerons que, si l'on admet pour la fonction de mutuelle inductance, une loi de variation parabolique, une solution simple peut être explicitée, même pour les harmoniques d'ordre supérieur. Ce mode de représentation ne peut, évidemment, être adopté si la fonction de mutuelle inductance est rapidement décroissante, mais il est alors possible d'envisager des hypothèses simplificatrices qui nous permettront d'expliciter de nouvelles solutions.

-:-:-:-

C H A P I T R E    I I

-:-:-:-:-:-:-

THEORIES BASEES SUR L'ETUDE D'UNE EQUATION

INTEGRALE

-:-:-:-:-:-:-

I - GENERALITES. -

Les théories précédemment exposées cherchent par diverses approximations sur la fonction de mutuelle inductance à se débarrasser du signe intégrale dans l'équation (1) relative aux inductions. Une nouvelle théorie, proposée en 1940 par PIRENNE (réf. (29) ), et reprise plus récemment par ABETTI (réf. (40) ), est basée sur l'étude d'une équation intégrale de FREDHOLM.

Ces auteurs admettent alors que l'influence de la capacité série est négligeable. Nous allons montrer qu'il est possible de tenir compte de cet effet.

Les solutions sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} e(x,t) = U(x) H(t) \\ i(x,t) = I(x) V(t) \end{array} \right.$$

En substituant dans le système intégral (I) :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l M(xy) I(y) dy \quad (1) \\ \frac{\partial i}{\partial x} = C_p \frac{\partial e}{\partial t} - C_s \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial t} \quad (2) \end{array} \right.$$

il vient :

$$\begin{cases} U'(x) H(t) = V'(t) \int_0^b M(xy) I(y) dy \\ I'(x) V(t) = C_p U(x) H'(t) - C_s U''(x) H'(t) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \frac{V(t)}{H'(t)} = \frac{C_p U(x) - C_s U''(x)}{I'(x)} \\ \frac{V'(t)}{H(t)} = \frac{U'(x)}{\int_0^b M(xy) I(y) dy} \end{cases}$$

Les premiers membres sont fonctions de t seulement, tandis que les seconds membres ne dépendent que de x.

Les valeurs communes de ces rapports sont donc deux constantes que nous désignerons par  $-\alpha$  et  $+\beta$ .

$$\begin{cases} \frac{V(t)}{H'(t)} = -\alpha \\ \frac{V'(t)}{H(t)} = \beta \end{cases} \quad \text{d'où : (VII)} \quad \begin{cases} H''(t) + \frac{\beta}{\alpha} H(t) = 0 \\ V''(t) + \frac{\beta}{\alpha} V(t) = 0 \end{cases}$$

U(x) et I(x) devront satisfaire au système :

$$(VIII) \quad \begin{cases} U'(x) = \beta \int_0^b M(xy) I(y) dy & (29) \\ I'(x) = -\frac{1}{\alpha} \left[ C_p U(x) - C_s U''(x) \right] & (30) \end{cases}$$

On peut écrire les solutions :  $e(x,t)$ ,  $i(x,t)$  sous la forme :

$$\begin{cases} e(x,t) = \lambda U(x) \frac{H(t)}{\lambda} \\ i(x,t) = \mu I(x) \frac{V(t)}{\mu} \end{cases}$$

$\lambda$  et  $\mu$  désignant deux constantes positives.

Les équations (29) et (30) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} U'(x) = \beta \frac{\lambda}{\mu} \int_0^l M(xy) I(y) dy \\ I'(x) = -\frac{1}{\alpha} \frac{\mu}{\lambda} \left[ C_p U(x) - C_s U''(x) \right] \end{cases}$$

Le système (VII) montre que le rapport  $\frac{\lambda}{\mu}$  peut être choisi d'une manière arbitraire, en particulier tel que :

$$\beta \frac{\lambda}{\mu} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad \text{d'où} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}}$$

et

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{\mu}{\lambda} = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Les systèmes (VII) et (VIII) s'écrivent en définitive, en posant :

$$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \omega$$

$$(IX) \quad \begin{cases} H''(t) + \omega^2 H(t) = 0 \\ V''(t) + \omega^2 V(t) = 0 \end{cases}$$

Les considérations énergétiques dont nous sommes partis suffisent à assurer que  $\omega^2$  est réel car un système à énergie constante ne peut admettre, comme solutions exponentielles en t, que des :

$$e^{j\omega t}, \quad (\omega \text{ réel}).$$

$$(X) \quad \begin{cases} U'(x) = \omega \int_0^{\ell} M(xy) I(y) dy & (32) \\ I'(x) = -\omega [C_p U(x) - C_s U''(x)] & (33) \end{cases}$$

$U(x)$  et  $I(x)$  sont donc solutions du système (X) et nous allons montrer que l'on peut ramener l'ensemble de ce système et des conditions imposées à une équation intégrale homogène de FREDHOLM.

II - ETUDE DU SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL(X). -

L'équation (32) intégrée par parties, peut s'écrire :

$$U'(x) = \omega \varphi(x, \ell) I(\ell) - \omega \int_0^{\ell} \varphi(xy) I'(y) dy \quad (34)$$

en posant :

$$\int_0^y M(xs) ds = \varphi(xy)$$

En intégrant une fois par rapport à x, (33) et (34), et en posant :

$$\int_0^x \varphi(\xi y) = F(xy), \quad \text{il vient :}$$

$$\begin{cases} U(x) = U(0) + \omega I(l)F(xl) - \omega \int_0^l F(xy) I'(y) dy \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} I(x) = I(0) - C_p \omega \int_0^x U(\xi) d\xi + C_s \omega [U'(x) - U'(0)] \end{cases} \quad (36)$$

Introduisons les conditions aux limites :

**A) Extrémité à la terre.**

$$U(0) = 0$$

$$U(l) = 0$$

On déduit de (35) et (36) :

$$I(l) = \frac{-\omega \int_0^l F(l y) [C_p U(y) - C_s U''(y)] dy}{F(l l)}$$

D'où l'équation intégrale des tensions :

$$U(x) = \omega^2 \int_0^l \left[ F(xy) - \frac{F(xl)F(y l)}{F(l l)} \right] [C_p U(y) - C_s U''(y)] dy \quad (37)$$

Introduisons la nouvelle fonction :

$$\mathcal{U}(x) = C_p U(x) - C_s U''(x) \quad (38)$$

L'équation (37) dérivée deux fois par rapport à  $x$  s'écrit successivement :

$$U'(x) = \omega^2 \int_0^l \left[ \varphi(xy) - \varphi(x, l) \frac{F(y l)}{F(l l)} \right] \mathcal{U}(y) dy$$

$$U''(x) = \omega^2 \int_0^l \left[ \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(x, l)}{\partial x} \frac{F(y l)}{F(l l)} \right] \mathcal{U}(y) dy \quad (39)$$

où : 
$$\frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial M(xs)}{\partial x} ds$$

La relation (38) s'écrira, en définitive, compte tenu de (37) et (39) :

$$U(x) = \omega^2 \int_0^l \left[ C_p K_1(xy) - C_s K_2(xy) \right] U(y) dy$$

soit :

$$U(x) = \omega^2 \int_0^l K(xy) U(y) dy$$

(40)

en posant :

$$K(xy) = C_p K_1(xy) - C_s K_2(xy)$$

et

$$K_1(xy) = F(xy) - \frac{F(xl) F(yl)}{F(ll)}$$

$$K_2(xy) = \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(xl)}{\partial x} \cdot \frac{F(yl)}{F(ll)}$$

L'équation (40) est une équation intégrale homogène du type de FREDHOLM en  $U(x)$  qui n'admet de solutions non identiquement nulles que pour certaines valeurs du paramètre  $\omega^2 = \lambda$  (réf. (46)). Ces valeurs, appelées valeurs propres, sont les zéros d'une fonction  $D(\lambda)$  telle que :

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} A_n$$

où :

$$A_n = \int_0^l \dots \int_0^l \begin{vmatrix} K(y_1 y_1) & \dots & K(y_1 y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(y_n y_1) & \dots & K(y_n y_n) \end{vmatrix} dy_1 \dots dy_n$$

En ne considérant que les premiers termes de  $D(\lambda)$  il sera possible, du moins théoriquement, d'obtenir des valeurs approchées des fréquences propres de l'enroulement.

Remarque : Les considérations qui précèdent sont tout à fait générales et ne font intervenir aucune hypothèse sur la fonction  $M(xy)$ . Il est, en effet, toujours possible, de par la nature physique du problème, d'évaluer l'expression :

$$\frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial M(xy)}{\partial x} ds$$

Généralement  $M(xy)$  sera fonction seulement de  $|x - y|$  et présentera une discontinuité de la dérivée au point  $x = y$ . On distinguera alors deux cas suivant les valeurs relatives de  $x$  et  $y$ .

**B) Extrémité isolée.**

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} i(0,t) + c_s \frac{\partial^2 e(0,t)}{\partial x \partial t} = 0 \\ e(l,t) = 0 \end{array} \right.$$

Le système (IX) relatif aux fonctions du temps  $H(t)$ ,  $V(t)$ , montre que les solutions sont de la forme, compte tenu de l'équation des intensités (2) :

$$\left| \begin{array}{l} e(x,t) = U(x) \cos(\omega t + \delta) \\ i(x,t) = I(x) \sin(\omega t + \delta) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\left| \begin{array}{l} I(0) - c_s \omega \frac{dU(0)}{dx} = 0 \\ U(l) = 0 \end{array} \right.$$

En introduisant la première condition aux limites dans l'équation (36) :

$$I(x) = - C_p \omega \int_0^x U(\xi) d\xi + C_s \omega U'(x) \quad (41)$$

On a, par ailleurs, d'après (32), compte tenu de la deuxième condition aux limites :

$$U(\xi) = \omega \int_0^{\xi} \int_l^{\xi} M(\eta y) I(y) dy$$

et

$$U'(x) = \omega \int_0^l M(xy) I(y) dy$$

d'où :

$$I(x) = \omega^2 \int_0^l G(xy) I(y) dy \quad (42)$$

en posant :

$$G(xy) = - C_p \int_0^x \int_l^{\xi} M(\eta y) d\eta d\xi + C_s M(xy)$$

L'équation (42), comme l'équation (40) est une équation intégrale homogène du type FREDHOLM.

L'une est relative aux tensions, et l'autre aux intensités.

Le système intégral-différentiel (X) peut donc s'écrire, pour les conditions aux limites envisagées, sous la forme d'une équation intégrale de type connu. Insistons sur le fait que cette équation ne fait intervenir aucune hypothèse restrictive sur la forme de la fonction M(xy) ou l'influence de la capacité série, et qu'elle est équivalente à l'ensemble du système (X) et des conditions imposées.

Etude du cas particulier où  $M(xy) = \text{constant}$ .

Une solution rigoureuse du système intégral (X) peut être obtenue dans le cas où la fonction de mutuelle inductance est indépendante de  $x$  et de  $y$ , ce qui revient à supposer l'enroulement sans fuite.

Ce système s'écrit alors :

$$\begin{cases} U'(x) = \omega M \int_0^{\ell} I(y) dy \\ I'(x) = -\omega [C_p U(x) - C_s U'(x)] \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$U''(x) = 0$$

La répartition de tension est linéaire et :

$$I'(x) = -\omega C_p U(x)$$

la répartition de courant est parabolique, et l'on peut poser :

$$\begin{cases} I(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ U(x) = -\frac{1}{\omega C_p} (2\alpha x + \beta). \end{cases}$$

Introduisons les conditions aux limites :

Extrémité à la terre.

Aucune oscillation n'est possible puisque la répartition de tension est linéaire, et que :

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U(\ell) = 0 \end{cases}$$

Extrémité isolée.

$$\begin{cases} I(0) - C_s \omega U'(0) = 0 \\ U(l) = 0 \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\gamma = -2\alpha \frac{C_s}{C_p}$$

et  $\frac{1}{\omega C_p} (2\alpha l + \beta) = 0$

d'où :

$$\begin{cases} I(x) = \alpha \left[ x^2 - 2l x - \frac{2l^2}{\mu^2} \right] \\ U(x) = \frac{2\alpha l}{\omega C_p} (l - x) \end{cases}$$

en posant :

$$\mu^2 = \frac{C_p}{C_s}$$

En écrivant que l'équation intégrale est satisfaite, il vient :

$$\frac{1}{\omega C_p} = \omega M l^2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{\mu^2} \right]$$

et, en remarquant que :

$$M l^2 = L$$

$$\omega_1^2 = \frac{3\mu^2}{L C_p (\mu^2 + 3)}$$

Il est intéressant de comparer cette valeur à celle obtenue dans l'autre cas extrême où  $M(xy) = 0$  (théorie de WAGNER).

On trouve alors :

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^2}{L C_p \left( 4 + \frac{\pi^2}{\mu^2} \right)}$$

$\mu^2$  est, en général, assez élevé, de l'ordre de 25 à 1 000 et l'on peut écrire :

$$\omega_1 \neq \sqrt{\frac{3}{2L C_p}} \quad \text{cas de l'enroulement sans fuites.}$$

$$\Omega_1 \neq \frac{\pi}{2\sqrt{L C_p}} \quad \text{cas des lignes,}$$

soit un écart d'environ 10% : la mutuelle inductance n'a qu'une faible influence sur la fréquence fondamentale d'un enroulement dont l'extrémité est isolée.

Nous préciserons au chapitre III (4ème partie) l'influence de la mutuelle inductance sur les oscillations d'ordre supérieur.

### III - THEORIE DE PIRENNE ET ABETTI. -

Si l'on néglige l'influence de la capacité série, les expressions précédentes des noyaux se simplifient, et l'on obtient :

#### Extrémité à la terre.

$$U(x) = \omega^2 \int_0^l K_1(xy) U(y) dy$$

où

$$K_1(xy) = C_p \left[ F(xy) - \frac{F(x, l) F(y, l)}{F(l, l)} \right]$$

#### Extrémité isolée.

$$I(x) = \omega^2 \int_0^l G_1(xy) I(y) dy$$

où

$$G_1(xy) = -C_p \int_0^x \int_l^\xi M(\eta, y) d\xi d\eta$$

On retrouve alors les équations obtenues par PIRENNE (réf. (29) ), et ABETTI (réf. (40) ), qui admettent l'hypothèse précédente. Cette hypothèse ne permet cependant d'aborder que le calcul de l'onde fondamentale, et l'étude des équations intégrales (40) et (42) précédemment établies permettrait d'envisager également le calcul des oscillations d'ordre supérieur.

ABETTI propose une méthode d'itération qui lui permet d'arriver aux conclusions suivantes, relatives à l'onde fondamentale :

La répartition de tension le long d'un enroulement uniforme, extrémité mise à la terre, est pratiquement sinusoidale quelle que soit la fonction de mutuelle inductance.

Si l'extrémité est isolée, cette répartition est sensiblement linéaire pour les enroulements à fort couplage magnétique et s'écarte de plus en plus d'une ligne droite au fur et à mesure que la mutuelle inductance diminue, pour tendre vers une répartition sinusoidale dans le cas limite des lignes de transmission.

Ces conclusions, confirmées par une étude expérimentale, sont extrêmement intéressantes, et nous chercherons à préciser dans quelle mesure elles s'appliquent aux oscillations d'ordre supérieur.

Si la théorie des équations de FREDHOLM conduit, en pratique, à des calculs inextricables, il serait, par contre, très intéressant d'appliquer aux équations intégrales (40) et (42) les méthodes modernes du calcul numérique (réf. (28) ).

Nous n'avons pas approfondi cette étude, et nous exposons maintenant les principes d'une autre méthode de résolution approchée du système intégral (I).

T R O I S I E M E   P A R T I E

--:--:--:--:--

E T U D E

A   L A   M A C H I N E   A N A L O G I Q U E

--:--:--:--



C H A P I T R E I

---:---:---:---:---

PRINCIPE DE LA METHODE DE CALCUL

---:---:---

Une méthode de résolution approchée du système intégral différentiel (I) peut consister à représenter les dérivées par rapport à  $x$  par des expressions approchées : on est alors ramené à l'étude d'un système aux différences.

Le système :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l M(xy) i(y) dy \\ \frac{\partial i}{\partial x} = C_p \frac{\partial e}{\partial t} - C_s \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial t} \end{array} \right.$$

s'écrit dans ces conditions :

$$(XI) \left\{ \begin{array}{l} e(x + \Delta x, t) - e(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l M(xy) \Delta x i(y) dy \\ i(x + \frac{\Delta x}{2}, t) - i(x - \frac{\Delta x}{2}, t) = \\ C_p \Delta x \frac{\partial e(x, t)}{\partial t} - \frac{C_s}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} [e(x - \Delta x, t) - 2e(x, t) + e(x + \Delta x, t)] \end{array} \right.$$

Les intensités sont supposées prises au milieu des éléments  $\Delta x$  et le système (XI) diffèrera aussi peu qu'on le voudra du système intégral (I).

Introduisons les conditions aux limites :

Extrémité à la terre.

$$e(0,t) = 0$$

$$e(l,t) = 0$$

On est alors conduit au schéma équivalent suivant :

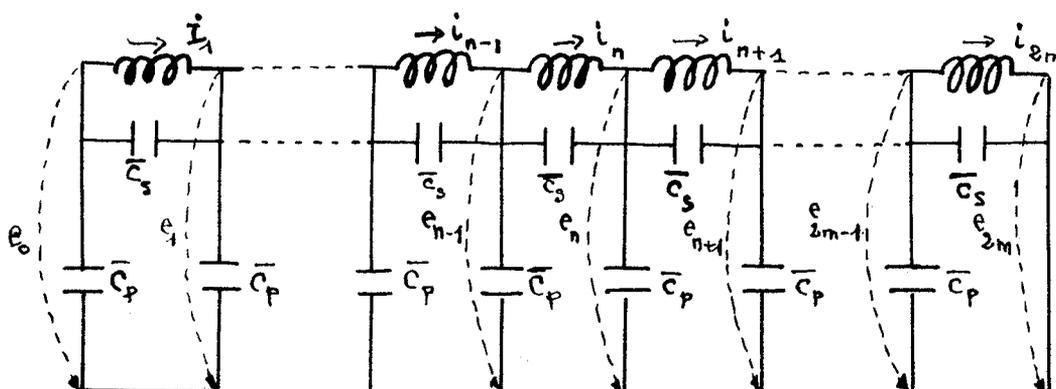


Figure 4.

$x$  devient une variable discontinue  $n$  et le système correspondant s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{n-1} - e_n = L \sum_{q=1}^{2m} \alpha_{(n-q)} \frac{di_q}{dt} \quad \text{pour } 1 \leq n \leq 2m \\ i_n - i_{n+1} + \overline{C}_s \frac{de_{n-1}}{dt} - 2 \frac{de_n}{dt} + \frac{de_{n+1}}{dt} - \overline{C}_p \frac{de_n}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

pour  $1 \leq n \leq 2m-1$

en désignant par :

$2m$  le nombre d'éléments  $\Delta x$ ,

$\alpha L$ , la mutuelle inductance entre deux éléments  $n$  et  $q$ ,

$|n-q|$

$\overline{C}_p$ , la capacité par rapport à la terre d'un élément,

$\overline{C}_s$ , la capacité série d'un élément.

Il est commode de considérer l'élément comme unité de longueur, et, dans ces conditions :

$$\overline{C_p} = C_p$$

$$\overline{C_s} = C_s$$

Nous nous placerons, par la suite, dans cette hypothèse.

Extrémité isolée.

$$\begin{cases} i(0,t) + C_s \frac{\partial^2 e(0,t)}{\partial x \partial t} = 0 \\ e(l,t) = 0 \end{cases}$$

et l'on est conduit au schéma équivalent suivant :

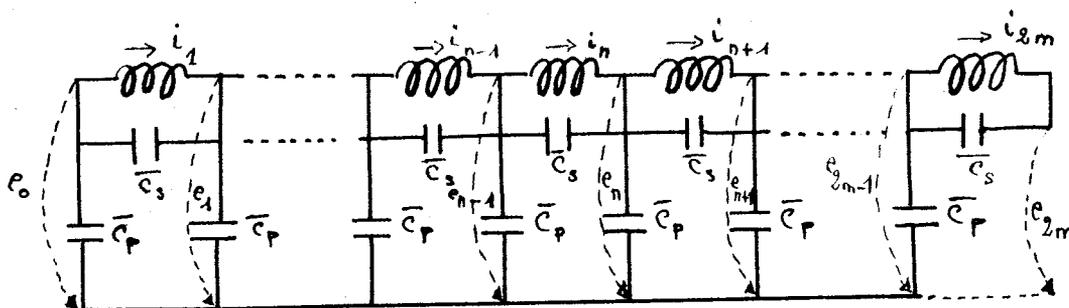


Figure 5.

et, avec les notations précédentes, au système différentiel :

$$\begin{cases} e_{n-1} - e_n = L \sum_{q=1}^{2m} \alpha_{n-q} \frac{di_q}{dt} & \text{pour } 1 \leq n \leq 2m \\ i_n - i_{n+1} + C_s \left( \frac{de_{n-1}}{dt} - 2 \frac{de_n}{dt} + \frac{de_{n+1}}{dt} \right) - C_p \frac{de_n}{dt} = 0 & \text{pour } 1 \leq n \leq 2m-1 \\ i_{2m} + C_s \left( \frac{de_{2m-1}}{dt} - \frac{de_{2m}}{dt} \right) = 0 \end{cases}$$

Généralisation.

La représentation approchée du système intégral (I) nous a conduit à décomposer l'enroulement en  $2m$  éléments identiques, possédant chacun :

une capacité par rapport à la terre:  $C_p$

une capacité série :  $C_s$

une inductance propre :  $L$

une inductance mutuelle avec tous les autres éléments :

$$\alpha_{|m-q|} \cdot L$$

$$n = 1, \dots, 2m$$

$$q = 1, \dots, 2m$$

Il est alors possible d'aborder le calcul des enroulements non homogènes et de généraliser les équations précédentes.

Nous admettrons encore que l'enroulement peut être décomposé en  $2m$  éléments et que chaque élément possède :

- une capacité par rapport à la terre

$$K_n$$

$$n = 0, \dots, 2m-1$$

- une capacité série

$$C_n$$

$$n = 1, \dots, 2m$$

- une inductance propre

$$l_{nn}$$

$$n = 1, \dots, 2m$$

- une inductance mutuelle avec tous les autres éléments

$$l_{nq} = l_{qn}$$

$$n = 1, \dots, 2m$$

$$q = 1, \dots, 2m$$

Nous utiliserons la transformation de CARSON :

$$g(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} h(t) dt$$



Ce système est d'ordre  $4m$  et la matrice impédance  $Z(p)$  est symétrique et formée de quatre sous-matrices d'ordre  $2m$ :

- une matrice de mutuelle inductance,
- une matrice de capacités,
- une matrice numérique,
- une matrice numérique transformée de la précédente.

La notation matricielle met ainsi en évidence la structure et la symétrie du système.

#### Extrémité à la terre.

Le système différentiel correspondant se déduit du précédent en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice impédance : il est d'ordre  $4m-1$ . Nous étudierons plus particulièrement ce dernier cas et nous montrerons qu'une transformation mathématique (\*) permet une simplification importante.

#### Remarque.

Les enroulements sont souvent constitués d'un nombre fini d'éléments distincts (galettes dans le cas d'un enroulement de transformateur) et la solution rigoureuse du problème serait obtenue pour un nombre  $2m$  d'éléments égal au nombre de galettes.

Les possibilités de la machine à calculer utilisée pour la résolution effective du système correspondant conduisent, en général, à n'envisager qu'un nombre  $2m$  d'éléments inférieur au nombre de galettes.

Les solutions du système intégral (I) et du système différentiel correspondant apparaissent ainsi, dans le cas d'un enroulement uniforme, comme deux approximations différentes de la réalité.

-:-:-:-:-

(\*)

L'idée de cette transformation est due à M. WALDVOGEL.

C H A P I T R E II

-----

RESOLUTION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

-----

La résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants est un problème classique qui ne présente pas de difficultés d'ordre théorique.

Dans le cas d'un enroulement uniforme dont l'extrémité est mise à la terre, une transformation mathématique permet une simplification importante, et nous généraliserons ce résultat au cas des enroulements non homogènes, si la symétrie par rapport à un plan transversal est conservée.

Les équations du système s'écrivent alors, en posant :

$$a = \frac{C_p}{C_s}$$

$$\begin{bmatrix} E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -pC_s E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = pL \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{2m-1} \\ \alpha_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \alpha_{2m-1} & & & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{2m} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{2m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} pC_s \begin{bmatrix} -(2+a) & 1 & & \\ 1 & -(2+a) & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & -1 & -(2+a) \end{bmatrix}$$

où  $i_1 \dots\dots\dots i_{2m}$  sont les transformées des  $2m$  intensités inconnues  
 et  $e_1 \dots\dots\dots e_{2m-1}$  sont les transformées des  $2m-1$  tensions inconnues.

Nous écrirons symboliquement ce système :

$$\begin{bmatrix} E \\ pC_s E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pL \boxed{M} & \boxed{N} \\ \boxed{N} & pC_s \boxed{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{2m} \\ e_{2m-1} \end{bmatrix}$$

La matrice impédance  $z(p)$ , d'ordre  $4m-1$  pour  $2m$  cellules, est synétrique et formée de quatre sous-matrices :

$M$  : matrice des inductances mutuelles d'ordre  $2m$ ,

$A$  : matrice des capacités d'ordre  $2m-1$ ,

$N$  et sa transposée  $N'$  : matrices numériques respectivement d'ordre :

$$\begin{cases} 2m \\ 2m-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2m-1 \\ 2m \end{cases}$$

Effectuons un changement de variables défini par la transformation orthogonale  $\boxed{C}$  telle que :

$$\boxed{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \boxed{C_1} \\ \boxed{C_2} \end{bmatrix}$$

$\boxed{C_1}$  matrice d'ordre  $2m$

$\boxed{C_2}$  matrice d'ordre  $2m-1$





$$\boxed{M_2}_m \begin{bmatrix}
 1 - \alpha_1 & \alpha_1 - \alpha_2 & \dots & \alpha_{m-1} - \alpha_{2m-m} \\
 \alpha_1 - \alpha_2 & 1 - \alpha_3 & \dots & \alpha_{m-2} - \alpha_{2m-(m-1)} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \alpha_{m-1} - \alpha_{2m-m} & & 1 - \alpha_{2m-1} & \alpha_1 - \alpha_{2m-2} \\
 & & & \vdots \\
 & & & \alpha_1 - \alpha_{2m-1}
 \end{bmatrix}$$

La forme de ces sous-matrices montre que l'on obtient  $\boxed{M_1}_{m-1}$  en supprimant la première ligne et la première colonne de  $\boxed{M_1}_m$  et  $\boxed{M_2}_{m-1}$  en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de  $\boxed{M_2}_m$ .

On obtient donc  $\boxed{M}_2_{2m-2}$  en supprimant à  $\boxed{M}_2_{2m}$  la première et la dernière ligne ainsi que la première et la dernière colonne.

Un calcul et un raisonnement analogues montreraient que les trois autres sous-matrices de  $\boxed{Z}_1_{2m-2}$  se déduisent des sous-matrices de  $\boxed{Z}_1_{2m}$  en supprimant à ces dernières, la première et la dernière ligne ainsi que la première et la dernière colonne.

Ces sous-matrices sont de la forme pour  $2n$  cellules :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_1 & N & C_2^{-1} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \sqrt{2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} N_1 \\ m \\ m-1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} N_2 \\ m \end{array} & \end{array} \right]$$

$\begin{bmatrix} N_1 \\ m \\ m-1 \end{bmatrix}$

matrice rectangulaire

m lignes  
m-1 colonnes

$\begin{bmatrix} N_2 \\ m \end{bmatrix}$

matrice carrée d'ordre m.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_2^{-1} & N & C_1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} & \sqrt{2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} N_2 \\ m \\ m \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} N_1 \\ m-1 \\ m \end{array} & \end{array} \right]$$

$\begin{bmatrix} N_1 \\ m-1 \\ m \end{bmatrix}$

matrice rectangulaire

m-1 lignes  
m colonnes

$\begin{bmatrix} N_2 \\ m \end{bmatrix}$

matrice carrée d'ordre m.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_2 & A & C_2 \end{bmatrix}^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -(2+a) & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -(2+a) & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 - (2+a) \\ \hline & & & -(2+a) & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & 1 & & \\ & & & & -(2+a) & \\ & & & & & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \boxed{A_2}_m & \\ \hline & \boxed{A_1}_{m-1} \end{array} \right]$$

$\boxed{A_1}$  et  $\boxed{A_2}$  matrices carrées d'ordre  $m-1$  et  $m$ .

En définitive, le système s'écrit avec les notations précédentes :

$$\begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ C \\ \dots \\ C \\ E \\ \dots \\ -pC_s E \\ \vdots \\ C \\ \dots \\ -pC_s E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & \\ & \dots \\ & & M_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_2 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} N_2' \\ \dots \\ N_1' \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_2 \\ \dots \\ A_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_2 \\ \dots \\ Y_1 \\ \dots \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ C \\ \vdots \\ E \end{bmatrix} = p L M_1 X_1 + N_1 Y_2 \quad \text{d'ordre } m$$

$$\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ E \end{bmatrix} = p L M_2 X_2 + N_2 Y_1 \quad \text{d'ordre } m$$

$$\begin{bmatrix} -pC_s E \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = N_2' X_2 + pC_s A_2 Y_1 \quad \text{d'ordre } m$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ -pC_s E \end{bmatrix} = N_1' X_1 + pC_s A_1 Y_2 \quad \text{d'ordre } m-1$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}_m = \frac{M_1^{-1}}{pL} \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - N_1 Y_2$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}_m = \frac{M_2^{-1}}{pL} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ E \end{bmatrix} - N_2 Y_1$$

$$(43) \quad \begin{bmatrix} LC_s p^2 A_2 - N_2' M_2^{-1} N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} LC_s p^2 E \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_m - N_2' M_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ E \end{bmatrix}_m$$

$$(44) \quad \begin{bmatrix} LC_s p^2 A_1 - N_1' M_1^{-1} N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}_{m-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ LC_s p^2 E \end{bmatrix}_{m-1} - N_1' M_1^{-1} \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_m$$

On constate ainsi que l'on a divisé les  $4n-1$  équations du réseau en  $n$  couples indépendants de  $n$  équations pour les courants et en  $2$  couples indépendants de  $n$  et  $n-1$  équations pour les tensions.

Cette importante simplification permet, pour une capacité donnée de la machine, de doubler sensiblement le nombre d'éléments, le système étudié d'ordre  $4n-1$  se décomposant en deux systèmes indépendants respectivement d'ordre  $2n$  et  $2n-1$ .

Remarquons enfin que la transformation mathématique définie précédemment pour les enroulements homogènes s'applique également aux enroulements non homogènes, si la symétrie de l'enroulement par rapport à un plan transversal est conservée, c'est-à-dire si les cellules équidistantes des extrémités sont identiques. Il est alors possible d'étudier d'une manière systématique l'influence d'inhomogénéités à l'intérieur de l'enroulement, particulièrement l'influence de la surisolation des spires d'extrémités, en bénéficiant de la simplification exposée ci-dessus. Il est d'une grande importance pratique de remarquer que l'on ne saurait être gêné par une surisolation des spires d'entrée différente aux deux extrémités, car les phénomènes au voisinage de l'une de ces extrémités ne sont effectivement pas influencés par la nature de l'isolation de l'extrémité opposée.

-:-:-:-:-



C H A P I T R E    I I I

--:--:--

VERIFICATION    EXPERIMENTALE

--:--:--:--:--:--

La théorie précédente a été appliquée au modèle de transformateur dont nous avons donné par ailleurs les caractéristiques essentielles, et sur lequel la S.A. BROWN BOVERI a effectué les mesures des constantes nécessaires au calcul ainsi que les relevés oscillographiques des tensions transitoires apparaissant entre l'enroulement primaire et la masse. L'utilisation d'une machine analogique a permis de résoudre effectivement les équations (43) et (44) du système et d'obtenir les courbes théoriques correspondantes.

Pour les besoins de la théorie et compte tenu des possibilités de la machine analogique, l'enroulement est décomposé en 10 cellules de 6 galettes chacune ( $2m = 10$ ).

I - DETERMINATION DES CONSTANTES. -

a) Mesures des inductances.

Les mesures des inductances propres et mutuelles, réalisées pour des fréquences comprises entre 50 et 16 000 pps. ont montré que, pour des fréquences de 16 000 pps. et au-dessus, l'inductance des cellules est sensiblement constante et ne dépend pratiquement pas de la position de la cellule dans l'enroulement, confirmant ainsi l'hypothèse de base sur la fonction  $l_{nq}$  ou sur les coefficients  $\alpha$ . En outre, il s'est avéré que le choix de 16 kc. pour la mesure de l'inductance d'une cellule était judicieux, parce que cette fréquence suffisait au plein épanouissement de l'effet pelliculaire et ne donnait pas lieu à l'effet électrostatique qui aurait masqué, par sa superposition, tous les phénomènes électromagnétiques; en effet, la première fréquence propre d'une cellule a été trouvée aux alentours de 120 kc. Avec la même fréquence de 16 kc. ont été

mesurées toutes les inductances mutuelles. Les résultats de ces mesures dans les notations utilisées, sont les suivants :

$$\begin{array}{ll}
 L & = 3,10 \text{ milli Henry }^{(*)} & \alpha_5 & = 0,02 \\
 \alpha_1 & = 0,47 & \alpha_6 & = 0,01 \\
 \alpha_2 & = 0,16 & \alpha_7 & = 0,01 \\
 \alpha_3 & = 0,07 & \alpha_8 & = 0,01 \\
 \alpha_4 & = 0,04 & \alpha_9 & = 0,01
 \end{array}$$

A titre de contrôle, nous avons utilisé les valeurs ainsi mesurées de  $L$  et des  $\alpha$  pour en déduire l'inductance totale  $\mathcal{L}$  de l'enroulement, soit de  $2m = 10$  cellules en série. On établit facilement la relation :

$$\mathcal{L} = L \left\{ 2m + 2 \left[ (2m-1) \alpha_1 + (2m-2) \alpha_2 + \dots + 2\alpha_{m-2} + \alpha_{m-1} \right] \right\}$$

on trouve ainsi pour  $\mathcal{L}$  la valeur de 68 mH.

D'autre part, une mesure directe de l'inductance totale de l'enroulement effectuée sous 16 kc. a donné la valeur de 101 mH. Mais la fréquence propre de l'ensemble de l'enroulement, ayant été trouvée par une méthode de mesure par résonance, égale à 35 kc., il y a lieu d'effectuer une correction. Un calcul simple montre que ce facteur de correction est

$$\left[ 1 - \left( \frac{16}{35} \right) \right]^2$$

de sorte que la valeur de l'inductance se trouve ramenée de 101 à 80 mH. La concordance avec la valeur résultant de la juxtaposition des 10 cellules est satisfaisante.

#### b) Mesure des capacités.

Les mesures de capacité entre éléments de l'enroulement ont été réalisées à l'aide d'un pont de mesures classiques ;

(\*) Cette valeur est, en réalité, une moyenne entre les valeurs mesurées pour les différentes cellules qui varient elles-mêmes entre les valeurs extrêmes de 3,28 à 3,03 milli Henry.

mais, il y a lieu, pour ces mesures, de tenir compte du fait suivant :

les dimensions de l'enroulement sont suffisamment grandes pour que sa capacité vis-à-vis de la terre intervienne dans la mesure de la capacité entre enroulement et écran, de sorte que l'on a, en fait, à considérer 4 conducteurs, soit l'enroulement primaire, l'écran simulant le secondaire, le noyau et la terre, qui définissent deux à deux 6 capacités différentes.

Le tableau ci-dessous donne les résultats de ces mesures :

<u>capacité</u>	<u>valeur en picofarads</u>	<u>capacité entre</u>
C <sub>1</sub>	21	noyau-enroulement
C <sub>2</sub>	113	enroulement-terre
C <sub>3</sub>	5	écran-terre
C <sub>4</sub>	337	noyau-écran
C <sub>5</sub>	635	enroulement-écran
C <sub>6</sub>	36	noyau-terre

En particulier, la capacité entre l'enroulement et l'écran atteint 635 pF. En tenant compte des capacités de bord, la capacité parallèle par cellule atteint :

$$C_p = 61 \text{ pF environ.}$$

La capacité entre galettes (capacité série) est mesurée en déconnectant les deux premières galettes. Il s'est confirmé, comme nous l'avions admis dans la théorie que les capacités par rapport aux autres éléments ont un effet négligeable dans cette mesure. On a trouvé C' = 295 pF pour la capacité entre 2 galettes voisines déconnectées. Pour tenir compte de la connection qui existe toujours, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur, entre 2 galettes simples, il y a lieu de diviser cette capacité par le facteur 3 (ce facteur résulte d'une intégration de l'énergie électrostatique sur la hauteur radiale, intégration basée sur une répartition linéaire de la capacité, et une répartition linéaire de la tension). En outre, le passage de la capacité équivalente entre galettes, soit C'' =  $\frac{1}{3}$  • 295 pF à la capacité série entre cellules, soit

C est basé sur le raisonnement suivant qui suppose une répartition linéaire de la tension à l'intérieur d'une cellule : une cellule se compose de 6 galettes simples, c'est-à-dire que chaque capacité C'' est soumise au tiers de la tension de la cellule et le nombre d'espaces entre galettes simples est de 6 par cellule, de sorte que :

$$C_s = \frac{C''}{3^2} \cdot 6 = \frac{2}{3} C'' = \frac{2}{9} C' = \frac{2}{9} \cdot 295 = 66 \text{ pF.}$$

c) Calcul des inductances.

Le calcul des inductances propres et mutuelles des différentes cellules de l'enroulement à partir de ses données géométriques se fait aisément à l'aide des tables appropriées (nous avons utilisé celle de GROVER\* : Inductance Calculations) en utilisant la théorie des images pour tenir compte de l'effet de l'écran secondaire . Ainsi nous trouvons-nous placés dans les mêmes conditions que lors des mesures d'inductance, en ce sens que nous n'opérons qu'avec la notion d'inductance pure, sans effet électrostatique, et sous fréquence suffisamment élevée. Les résultats de ces calculs dans les notations utilisées sont les suivants :

L	=	3,20 milli Henry	$\alpha_5$	=	0,02
$\alpha_1$	=	0,43	$\alpha_6$	=	0,02
$\alpha_2$	=	0,16	$\alpha_7$	=	0,01
$\alpha_3$	=	0,08	$\alpha_8$	=	0,01
$\alpha_4$	=	0,04	$\alpha_9$	=	0,01

La concordance avec la mesure directe de ces coefficients est absolument satisfaisante.

\* L'utilisation de formules applicables à des inductances dans l'air est certainement justifiée parce que la présence de l'écran conducteur formé sur lui-même diminue tout effet magnétique du cylindre en tôle de fer disposé à son intérieur.(réf. (41) ).

d) Calcul des capacités.

Le calcul des capacités ne présente pas de difficultés, les formules classiques devant être légèrement majorées pour tenir compte des effets de bord. On trouve :

pour la capacité parallèle d'une cellule :  $C_p = 61 \text{ pF}$ .

pour la capacité entre galettes déconnectées :  $C' = 285 \text{ pF}$ .  
valeurs qui concordent bien avec les mesures.

II - TENSIONS INTERNES DE L'ENROULEMENT SOUMIS A L'ONDE DE CHOC. -

a) Mesure de la répartition des tensions.

Les oscillogrammes de tensions entre les points de l'enroulement correspondant aux tensions  $e_1, \dots, e_9$ , et la terre ont été enregistrés dans les conditions suivantes :

- l'extrémité de l'enroulement ainsi que l'écran et le noyau sont directement mis à la terre ;
- tension du générateur de choc : 1 000 volts ;
- onde de choc :  $0,03 / 500 \mu s$  ;
- oscillographe cathodique à cathode froide ;
- durée de balayage :  $25 \mu s$

L'expérience montre qu'une telle forme d'onde de choc donne naissance pendant la durée d'observation ci-dessus pratiquement aux mêmes phénomènes transitoires à l'intérieur de l'enroulement qu'une onde rigoureusement rectangulaire. Le calcul permet d'ailleurs de confirmer cette constatation<sup>(\*)</sup>, de sorte que les conditions de l'essai sont parfaitement acceptables.

L'ensemble des résultats de ces mesures est consigné dans les 9 graphiques en traits pointillés de la figure 6 : ces graphiques représentent les tracés des 9 tensions  $e_1, e_2, \dots, e_9$ ,

(\*) Ce calcul est indiqué en annexe.

Etude à la machine  
analogique.

Comparaison des valeurs calculées et mesurées pour la tension à la terre d'un enroulement soumis à une tension de choc rectangulaire 100 %.

Les tensions  $e_1, e_2, \dots, e_9$  sont les tensions des connexions entre bobines et la terre.

Traits pleins :

valeurs calculées.

Traits pointillés :

valeurs mesurées.

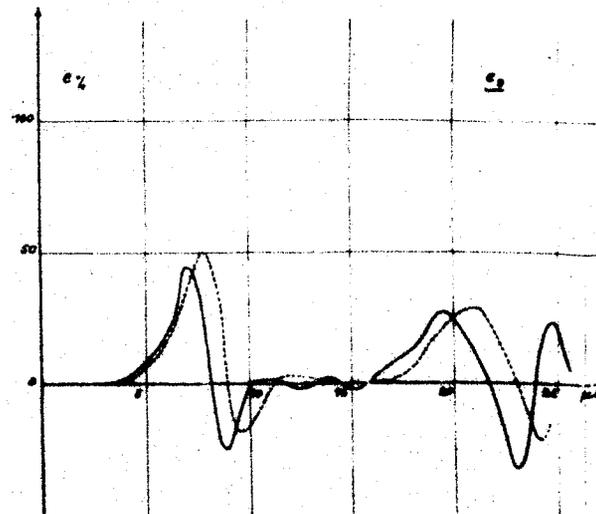
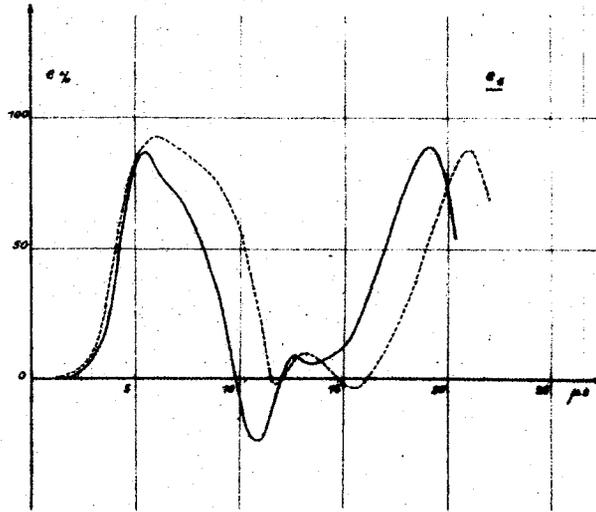
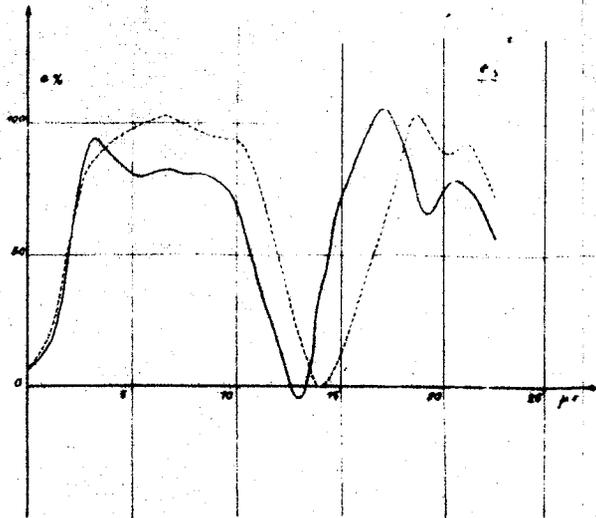


Figure 6.

en fonction du temps.

b) Calcul de la répartition des tensions.

La théorie précédente nous a permis d'écrire sous forme matricielle (43) et (44) ; les équations du réseau en fonction des nouvelles inconnues  $Y_1$  et  $Y_2$ , sommes et différences des tensions entre l'enroulement et la masse, en des points équidistants des extrémités.

La résolution de ces systèmes, effectuée à l'aide d'une machine analogique, comporte en fait trois étapes :

1°) les calculs préliminaires qui permettent, à partir des constantes physiques précédemment déterminées, de calculer les coefficients du système différentiel ;

2°) l'affichage sur la machine analogique de ces coefficients et l'enregistrement des courbes solutions ;

3°) la vérification des résultats obtenus et la détermination des tensions  $e_1, \dots, e_{2m-1}$ , à partir des courbes solutions des systèmes affichés. La connaissance des intensités est sans intérêt.

La discontinuité à l'origine (répartition initiale de tension) peut être éliminée par un changement de variables.

Posons :

$$\begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix}$$

la valeur de  $\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}$  étant déterminée par la relation :

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^{-1} \text{ qui annule dans les équations (43) et (44) les termes } p^2 E.$$

On obtient alors :

$$(XII) \left\{ \begin{aligned} & \left[ LC_s A_2 p^2 - N_2' M_2^{-1} N_2 \right] \begin{bmatrix} Z_1 \end{bmatrix}_m = -N_2' M_2^{-1} N_2 A_2^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}_m - N_2' M_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}_m \\ & \left[ LC_s A_1 p^2 - N_1' M_1^{-1} N_1 \right] \begin{bmatrix} Z_2 \end{bmatrix}_{m-1} = -N_1' M_1^{-1} N_1 A_1^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}_{m-1} - N_1' M_1^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}_{m-1} \end{aligned} \right.$$

les valeurs initiales des  $[Z]$  sont nulles.

La répartition initiale des tensions  $e_1, \dots, e_9$  est définie par les relations :

$$\begin{bmatrix} Y_1(0) \end{bmatrix}_m = - \boxed{A_2}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}_m$$

$$\begin{bmatrix} Y_2(0) \end{bmatrix}_{m-1} = - \boxed{A_1}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}_{m-1}$$

Les calculs préliminaires nécessaires à la détermination des coefficients du système (XII) comportent donc :

- 1°) des inversions de matrices,
- 2°) des produits de matrices.

L'inversion d'une matrice d'ordre  $m$  se ramène à la résolution de  $m$  systèmes algébriques d'ordre  $m$  par la relation simple :

$$\boxed{X} = \boxed{A}^{-1} \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{A} \boxed{X} = \boxed{1}$$

La machine analogique permet de résoudre très rapidement ces systèmes avec la précision désirée par une méthode d'itération.

On calcule de même les produits tels que :

$$\boxed{X} = \boxed{M}^{-1} \boxed{N}$$

soit  $\boxed{M} \boxed{X} = \boxed{N}$

Enfin, le produit de deux matrices tel que :

$$\boxed{N'} \boxed{X}$$

se fait aisément à la machine à calculer de bureau.

La précision de ces calculs préliminaires doit être en rapport avec la précision de l'affichage des coefficients sur la machine qui est, en valeur relative, de l'ordre du millième.

Deux opérations sont encore nécessaires :

- rendre tous les coefficients calculés inférieurs à l'unité ;
- définir une échelle de temps-machine en tenant compte de l'ordre de grandeur des termes en  $p^2$  et des caractéristiques techniques de la machine analogique (vitesse de rotation minimum du cylindre enregistreur) en relation avec le temps réel désiré.

Nous avons défini la nouvelle échelle de temps par la relation :

$$\text{temps machine} = \frac{10^7}{3} \text{ temps réel}$$

qui nous donnait la meilleure précision possible pour suivre l'évolution du phénomène réel pendant une durée de l'ordre de 30 s.

L'affichage des coefficients ainsi déterminés se fait à l'aide d'un pont de mesure classique et ne présente pas de difficultés particulières. Nous avons procédé à cet affichage en partant des valeurs mesurées pour les constantes de l'enroulement. En fait, les divergences entre valeurs mesurées et calculées pour ces constantes sont si faibles, d'après ce que nous venons de voir,

qu'il n'y avait pas de raison particulière de travailler sur la machine analogique avec les unes plutôt qu'avec les autres.

La vérification des résultats comporte deux étapes :

- une vérification séparée pour chacun des systèmes étudiés permet de s'assurer que les tensions de sortie des amplificateurs correspondant à  $z''$  et  $z$  sont bien solutions, à l'instant de la vérification, du système affiché.
- une vérification globale sur le système initial, à partir des solutions des deux systèmes indépendants permet de s'assurer de l'exactitude de ces solutions et de la concordance des échelles de temps de chacun des systèmes. Cette vérification englobe, en outre, l'ensemble des transformations effectuées sur le système initial ainsi que les calculs préliminaires.

Les résultats du calcul, fournis par la machine analogique, sont consignés dans les 9 graphiques en traits pleins de la figure (6) : ces graphiques représentent les tracés des 9 tensions  $e_1, e_2, \dots, e_9$  en fonction du temps réel.

La concordance entre les résultats de la théorie et ceux de l'expérience est des plus satisfaisante et justifie pratiquement la méthode de calcul proposée.

-:-:-:-:-

QUATRIEME PARTIE

--:--:--:--:--:--:--

NOUVELLE ETUDE

DU

SYSTEME INTEGRAL

--:--:--



C H A P I T R E I

---:---:---:---:---:---:---

G E N E R A L I T E S

---:---:---:---:---

La méthode de calcul que nous venons d'exposer est très générale et peut s'appliquer à tous les enroulements de transformateurs ou de machines, homogènes ou non homogènes, quelle que soit la fonction de mutuelle inductance, supposée seulement ne dépendre que de la géométrie de l'enroulement.

Si cette méthode permet d'aborder avec efficacité le calcul des contraintes dans un enroulement soumis à une onde de choc de forme quelconque, comme toute méthode de calcul numérique, elle ne met pas en évidence, d'une manière générale, l'influence des différents paramètres sur les solutions du problème.

Dans la mesure où elles ne nécessitent pas des hypothèses trop éloignées de la réalité, l'intérêt des théories conduisant à des solutions plus ou moins explicites reste certain.

L'étude de ces théories a montré l'importance de la fonction de mutuelle inductance, et les hypothèses faites à ce sujet par les différents auteurs ont permis d'en établir la classification suivante\*:

---

\* La théorie de WAGNER néglige l'influence de la mutuelle inductance et ne figure pas dans ce tableau.



- Si la fonction de mutuelle inductance est lentement décroissante, nous admettrons avec la théorie américaine qu'elle peut être représentée par une loi de variation linéaire ou parabolique, et nous ferons une étude mathématique rigoureuse de cette théorie.

Nous comparerons dans l'un et l'autre cas les résultats obtenus par ces différentes théories.

Nous allons maintenant définir, d'une manière plus précise, ce que nous entendons par fonction de mutuelle inductance "lentement" ou "rapidement" décroissante.

Soit  $\mathcal{L}$  l'inductance totale de l'enroulement,

$L$  l'inductance de l'élément unité,

$\ell$  la longueur de l'enroulement.

Nous dirons qu'une fonction de mutuelle inductance est lentement décroissante si le rapport  $\frac{\mathcal{L}}{L \ell^2}$  de l'inductance totale de l'enroulement à l'inductance qu'il aurait si cette fonction était constante (cas idéal d'un enroulement sans fuite) est supérieur à une certaine valeur que nous allons préciser.

Nous admettrons, en effet, que dans ce cas  $M(|x-y|)$  est de la forme :

$$M(xy) = L \left[ a \left( \frac{x-y}{\ell} \right)^2 - b \left| \frac{x-y}{\ell} \right| + 1 \right]$$

$a$  et  $b$  étant deux constantes positives définies par la géométrie de l'enroulement.

La nature physique du problème impose que  $M(|x-y|)$  soit constamment positive et décroissante dans l'intervalle  $(0, \ell)$ . On voit aisément que ces conditions imposent aux coefficients  $a$  et  $b$  :

$$2a \leq b \leq 1+a$$

On sait par ailleurs que :

$$\mathcal{L} = \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} M(xy) \, dx \, dy \quad (45)$$

soit, dans le cas envisagé, tous calculs effectués :

$$\mathcal{L} = \left( 1 - \frac{b}{3} + \frac{a}{6} \right) L \ell^2 \quad (46)$$

La limite inférieure du rapport  $\frac{\mathcal{L}}{L \ell^2}$  est alors telle que :

$$\left| \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array} \right. \quad \text{soit :} \quad \frac{\mathcal{L}}{L \ell^2} \geq \frac{1}{2}$$

Si  $\frac{\mathcal{L}}{L \ell^2} \leq \frac{1}{2}$ , nous dirons que la fonction de mutuelle inductance est rapidement décroissante, et nous la supposons de la forme :

$$M(xy) = L e^{-\mathcal{D} \left| \frac{x-y}{\ell} \right|}$$

où  $\mathcal{D}$  est une constante positive dépendant de la géométrie de l'enroulement.

D'après la relation (45), on a dans ce cas :

$$\frac{\mathcal{L}}{L \ell^2} = \frac{\mathcal{D} - 1 + e^{-\mathcal{D}}}{\mathcal{D}^2} \quad (47)$$

et la limite inférieure de  $\mathcal{D}$  est telle que :

$$\frac{\mathcal{D} - 1 + e^{-\mathcal{D}}}{\mathcal{D}^2} \leq \frac{1}{2}$$

soit :  $\mathcal{D} \geq 2,55$

La mutuelle inductance varie, en fait, d'une manière continue, et ces considérations théoriques n'ont d'autre but que de permettre, dans le cadre d'hypothèses vraisemblables, un traitement mathématique aussi simple que possible.

La comparaison des résultats obtenus par l'une et l'autre méthode au voisinage de la frontière des deux domaines de représentation précédemment définis justifiera, d'un point de vue théorique, la valeur de ces hypothèses, et nous chercherons dans la confrontation avec les données de l'expérience, la justification pratique des relations établies.

-:-:-:-:-



C H A P I T R E II

-:-:-:-

VARIATION EXPONENTIELLE DE M(xy)

-:-:-:-:-:-:-

I - PRINCIPE DE LA METHODE DE CALCUL. -

Si la fonction de mutuelle inductance est rapidement décroissante, nous rechercherons des solutions analogues à celles de la théorie de WAGNER. Ces solutions sont sinusoïdales, donc périodiques en x, et ceci nous amène à concevoir un enroulement infini dans les deux sens, aux conditions aux limites périodiquement réparties.

Extrémité à la terre.

$$\left| \begin{array}{l} e(0,t) = 0 \\ e(l,t) = 0 \end{array} \right.$$

Les solutions sont périodiques en l :

$$\left| \begin{array}{l} e_0 \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \omega t \\ i_0 \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \omega t \end{array} \right.$$

Extrémité isolée.

$$\left| \begin{array}{l} i(0,t) + C_s \frac{\partial^2 e(0,t)}{\partial x \partial t} = 0 \\ e(l,t) = 0 \end{array} \right.$$

On a montré que  $\frac{\partial e(0)}{\partial x} = 0$ , ce qui assure la continuité de la dérivée, et les solutions sont périodiques en  $2\ell$  :

$$\begin{cases} e_0 \cos \frac{k\pi x}{2\ell} \cos \omega t \\ i_0 \sin \frac{k\pi x}{2\ell} \sin \omega t \end{cases}$$

Nous supposons que  $M(xy)$  peut être représentée par une loi de variation exponentielle de la forme :

$$M(xy) = L e^{-\mathcal{D} \left| \frac{x-y}{\ell} \right|}$$

$$\mathcal{D} \geq 2,55$$

et les considérations suivantes nous permettront de préciser, d'un point de vue théorique, la valeur de l'approximation précédente.

Désignons par  $M^*$  la fonction de mutuelle inductance de l'enroulement étudié, compte tenu de l'influence des enroulements fictifs adjacents. Il est possible d'établir, dans les deux cas envisagés, un diagramme faisant ressortir l'écart entre les fonctions  $M$  et  $M^*$ .

Nous poserons :

$$|x - y| = \xi$$

Extrémité à la terre.

$$\begin{aligned} M_e^* &= L e^{-\mathcal{D} \frac{\xi}{\ell}} (1 + e^{-\mathcal{D}} + e^{-2\mathcal{D}} + \dots) \\ &+ L e^{-\mathcal{D} (1 - \frac{\xi}{\ell})} (1 + e^{-\mathcal{D}} + e^{-2\mathcal{D}} + \dots) \end{aligned}$$

soit :

$$M_e^* = L \frac{e^{-\mathcal{D} \frac{\xi}{\ell}} + e^{-\mathcal{D} (1 - \frac{\xi}{\ell})}}{1 - e^{-\mathcal{D}}}$$

ou, en posant :

$$h = \frac{1}{2} - \frac{\xi}{\ell} :$$

$$M_e^* = L \frac{\text{Ch } \frac{\mathcal{D}}{2} h}{\text{Sh } \frac{\mathcal{D}}{2}}$$

Pour  $x = y$ ,  $M_e^* = \frac{L}{\text{th } \frac{\mathcal{D}}{2}}$  et  $M = L$

soit, pour les valeurs de  $\mathcal{D}$  considérées :  $M_e^* \neq M$

Pour  $|x - y| = \frac{\rho}{2}$ ,  $M_e^* = \frac{L}{\text{Sh } \frac{\mathcal{D}}{2}}$  et  $M = L e^{-\frac{\mathcal{D}}{2}}$

soit  $M_e^* \neq 2M$

Nous avons supposé la fonction de mutuelle inductance rapidement décroissante, et la mutuelle inductance entre deux points distants de  $\frac{\rho}{2}$  reste faible ; nous pourrions admettre que les fonctions  $M$  et  $M_e^*$  relatives au point milieu de l'enroulement coïncident sensiblement.

Pour  $|x - y| = \rho$ ,  $M_e^* = \frac{L}{\text{th } \frac{\mathcal{D}}{2}}$  et  $M = L e^{-\mathcal{D}}$

Les fonctions  $M_e^*$  et  $M$  prennent des valeurs très différentes si l'on considère les deux points extrêmes de l'enroulement.

Nous avons tracé sur le diagramme suivant (figure 7) les écarts entre les valeurs des fonctions  $M$  et  $M_e^*$  en chaque point de l'enroulement pour une valeur particulière de  $\mathcal{D}$  ( $\mathcal{D}=5$ ). Le domaine de représentation très approchée ( $M_e^* \neq M$ ) est très étendu, et l'approximation précédente se trouve ainsi justifiée.

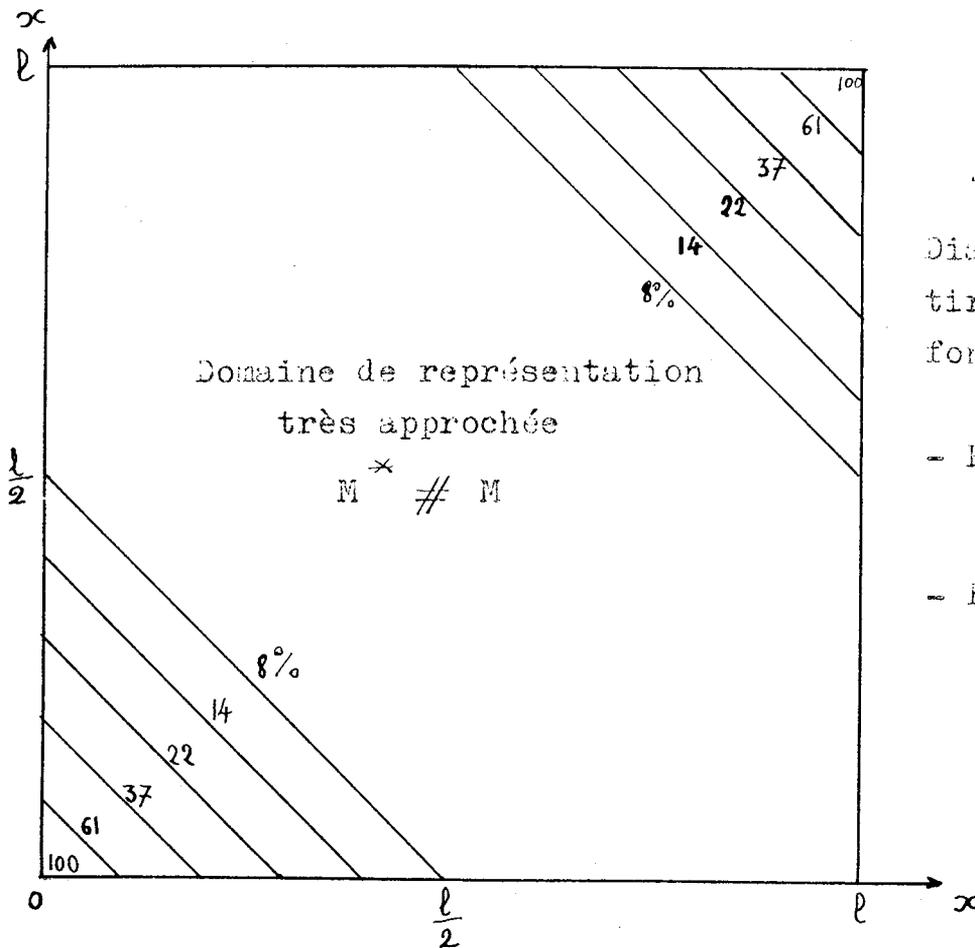


Figure 7

Diagramme faisant ressortir l'écart entre les fonctions  $M^*$  et  $M$ .

- Extrémité à la terre :  $\mathcal{D} = 5,$

- Extrémité isolée :  $\mathcal{D} = 2,5.$

Extrémité isolée.

La fonction  $M_i^*$  correspondante est alors définie par une progression géométrique de raison  $e^{-2\mathcal{D}}$ , et l'on obtient une relation analogue :

$$M_i^* = L \frac{\text{Ch } \mathcal{D}' h}{\text{Sh } \frac{\mathcal{D}'}{2}}$$

en posant :  $\mathcal{D}' = 2\mathcal{D}$

Le diagramme de la figure 7 fait alors ressortir les écarts entre les fonctions  $M^*$  et  $M$  relatives aux valeurs suivantes de  $\mathcal{D}$  :

extrémité à la terre :  $\mathcal{D} = 5,$

extrémité isolée :  $\mathcal{D} = 2,5.$

L'approximation obtenue, pour une valeur donnée de  $\mathcal{D}$ , est donc encore meilleure dans ce dernier cas.

II - SOLUTIONS DU SYSTEME INTEGRAL. -

Le système intégral (I) peut s'écrire, compte tenu des hypothèses précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\ell} M^*(xy) i(y) dy \\ \frac{\partial i}{\partial x} = c_p \frac{\partial e}{\partial t} - c_s \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial t} \end{array} \right.$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} M(xy) i(y) dy \\ \frac{\partial i}{\partial x} = c_p \frac{\partial e}{\partial t} - c_s \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial t} \end{array} \right.$$

Nous avons montré que les solutions étaient de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} e(x,t) = U(x) \cos(\omega t + \delta) \\ i(x,t) = I(x) \sin(\omega t + \delta) \end{array} \right.$$

$U(x)$  et  $I(x)$  étant alors solutions du système :

$$(XIII) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dx} = \omega \int_{-\infty}^{+\infty} M(xy) I(y) dy \\ \frac{dI}{dx} = -c_p \omega U + c_s \omega \frac{d^2 U}{dx^2} \end{array} \right.$$

1°) Extrémité à la terre.

Conditions initiales :

$$e(x,0) = E \frac{\text{Sh } \rho \frac{x}{l}}{\text{Sh } \rho}$$

$$i(x,0) = 0$$

Conditions aux limites :

$$e(0,t) = 0$$

$$e(l,t) = 0$$

Les hypothèses précédentes conduisent à envisager des solutions  $U(x)$ ,  $I(x)$  de la forme :

$$\left| \begin{array}{l} U(x) = e_0 \sin \frac{k\pi x}{l} \\ I(x) = i_0 \cos \frac{k\pi x}{l} \end{array} \right.$$

satisfaisant aux conditions aux limites ci-dessus.

a) Calcul des fréquences propres.

En substituant dans (XIII) et en éliminant  $\frac{e_0}{i_0}$ , il vient :

$$\cos \frac{k\pi x}{l} = \omega^2 \frac{C_p + C_s \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2}{\left( \frac{k\pi}{l} \right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} M(xy) \cos \frac{k\pi y}{l} dy \quad (48)$$

Remplaçons  $M(xy)$  par son expression, pour évaluer l'intégrale, qui s'écrit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(xy) \cos \frac{k\pi y}{l} dy = L \int_{-\infty}^x e^{-\gamma \frac{x-y}{l}} \cos \frac{k\pi y}{l} dy + L \int_x^{\infty} e^{-\gamma \frac{y-x}{l}} \cos \frac{k\pi y}{l} dy$$

soit, tous calculs effectués :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(xy) \cos \frac{k\pi y}{l} dy = \frac{2\gamma l L}{k^2 \pi^2 + \gamma^2} \cos \frac{k\pi x}{l}$$

En substituant dans la relation (48), les termes en  $\cos \frac{k\pi x}{\rho}$  disparaissent, et cette relation ne sera alors vérifiée que pour certaines valeurs  $\omega_k$  de  $\omega$ , telles que :

$$\omega_k^2 = \frac{\left(\frac{k\pi}{\rho}\right)^2}{C_p + C_s \left(\frac{k\pi}{\rho}\right)^2} \cdot \frac{k^2 \pi^2 + \mathcal{D}^2}{2\mathcal{D} \rho L} \quad (49)$$

Nous ramènerons les constantes  $C_p$ ,  $C_s$  et  $L$ , à l'ensemble de l'enroulement par les relations :

$$\mathcal{C}_p = \rho C_p$$

$$\mathcal{C}_s = \frac{C_s}{\rho}$$

$$\mathcal{L} = 2 \frac{\mathcal{D} - 1 + e^{-\mathcal{D}}}{\mathcal{D}^2} L \rho^2$$

La relation (49) s'écrit alors, en posant  $\mu^2 = \frac{\mathcal{C}_p}{\mathcal{C}_s}$

$$\omega_k^2 = \frac{k^2 \pi^2 (\mathcal{D}^2 + k^2 \pi^2)}{\mathcal{L} \mathcal{C}_s (\mu^2 + k^2 \pi^2)} \frac{\mathcal{D} - 1 + e^{-\mathcal{D}}}{\mathcal{D}^3} \quad (50)$$

Remarques :

- Lorsque  $\mathcal{D} \rightarrow \infty$ , nous retrouvons la relation établie par WAGNER :

$$\Omega_k^2 = \frac{k^2 \pi^2}{\mathcal{L} \mathcal{C}_s (\mu^2 + k^2 \pi^2)} \quad (7)$$

- Le rapport

$$\frac{\omega_k}{\Omega_k} = \sqrt{\frac{\mathcal{D} - 1 + e^{-\mathcal{D}}}{\mathcal{D}^3} (k^2 \pi^2 + \mathcal{D}^2)} \quad (51)$$

représente le facteur de correction qu'il faut apporter à la théorie de WAGNER, et précise l'influence de la mutuelle inductance (caractérisée par le coefficient  $\mathcal{V}$ ) sur les fréquences propres de l'enroulement. On constate que cette influence se traduit par une augmentation de ces fréquences propres, d'autant plus sensible que le rang de l'oscillation envisagée est plus élevé ( $k$  élevé) et que la fonction de mutuelle inductance est moins décroissante ( $\mathcal{V}$  faible).

- HELLER et VEVERKA obtiennent une relation de même forme entre les fréquences dans le temps ( $\omega$ ) et les fréquences dans l'espace ( $\alpha$ ), les hypothèses précédentes nous permettent d'aborder effectivement le calcul de ces fréquences propres.

b) Calcul des amplitudes.

La solution  $e(x,t)$ , relative à l'extrémité à la terre, s'écrit, compte tenu des hypothèses précédentes :

$$e(x,t) = E \frac{\mathcal{L}x}{\mathcal{L}} + E \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \omega_k t$$

L'orthogonalité des solutions permet de déterminer, à partir de la répartition initiale de tension, l'amplitude  $A_k$  de l'oscillation de rang  $k$  :

$$\int_0^{\ell} \frac{\text{Sh } \rho \frac{x}{\ell}}{\text{Sh } \rho} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\ell} \mathcal{L}_x \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx + A_k \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

où  $L_x = \int_0^x \int_0^l M(\xi y) d\xi dy$ , soit; pour une représentation

exponentielle de  $M(xy)$  :

$$L_x = L \frac{l^2}{\gamma^2} \left[ 2\gamma \frac{x}{l} + (e^{-\gamma \frac{x}{l}} - 1) - e^{-\gamma} (e^{\gamma \frac{x}{l}} - 1) \right]$$

On trouve, pour  $A_k$ , une expression que l'on peut écrire, tous calculs effectués :

$$A_k = \frac{2\mu^2}{\mu^2 + k^2\pi^2} \frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{\gamma^2}{(\gamma - 1 + e^{-\gamma})(\gamma^2 + k^2\pi^2)} \frac{1 + (1 - e^{-\gamma})\cos k\pi}{k\pi} \quad (52)$$

Nous avons admis que la fonction de mutuelle inductance était rapidement décroissante, et le terme en  $e^{-\gamma}$  peut être négligé :

- la mutuelle inductance n'a pas d'influence sur l'amplitude des oscillations d'ordre impair ;
- cette influence reste faible sur l'amplitude des oscillations d'ordre pair.

Remarque :

Si  $\gamma$  augmente indéfiniment, on retrouve l'expression (6) de la théorie de WAGNER.

La théorie américaine admet, comme la théorie de WAGNER, une solution incorrecte  $E \frac{x}{l}$  indépendante de la mutuelle inductance, et trouve évidemment la même valeur que cette théorie

L'expression de la contrainte par rapport à la masse d'un enroulement soumis à l'application d'une onde rectangulaire, l'autre extrémité étant mise à la terre, s'écrira en définitive :

$$(XIV) \begin{cases} e(x,t) = E \frac{Lx}{L} + E \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \omega_k t & (53) \\ A_k \neq \frac{2\mu^2}{\mu^2 + k^2\pi^2} \frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)(\gamma^2 + k^2\pi^2)} \cdot \frac{1 + \cos k\pi}{k\pi} & (54) \\ \omega_k^2 \neq \frac{k^2\pi^2 (\gamma^2 + k^2\pi^2)}{L C_s (\mu^2 + k^2\pi^2)} \frac{\gamma-1}{\gamma^3} & (55) \end{cases}$$

en posant :

$$\frac{Lx}{L} \neq \frac{1}{2(\gamma-1)} \left[ 2\gamma \frac{x}{l} - 1 + e^{-\gamma \frac{x}{l}} - e^{-\gamma(1-\frac{x}{l})} \right] \quad (56)$$

l'extrémité mise à la terre étant prise comme origine des abscisses.

2°) Extrémité isolée.

Conditions initiales :

Conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} e(x,0) &= E \frac{\text{Ch} \mu \frac{x}{l}}{\text{Ch} \mu} \\ i(x,0) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i(0,t) + C_s \frac{\partial^2 e(0,t)}{\partial x \partial t} &= 0 \\ e(l,t) &= 0 \end{aligned}$$

Nous chercherons des solutions de la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} e(x,t) &= e_0 \cos \frac{k\pi x}{2l} \cos \omega t \\ i(x,t) &= i_0 \sin \frac{k\pi x}{2l} \sin \omega t \end{aligned} \right.$$

satisfaisant aux conditions aux limites ci-dessus.

a) Calcul des fréquences propres.

On obtient comme précédemment :

$$\sin \frac{k\pi x}{2l} = \omega'^2 \frac{C_p + C_s \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2}{\left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} M(xy) \sin \frac{k\pi y}{2l} dy$$

Un calcul analogue montre que si la fonction  $M(xy)$  est telle que :

$$M(xy) = L e^{-\gamma \frac{|x-y|}{l}},$$

cette relation ne peut être vérifiée que pour certaines valeurs  $\omega'_k$  de  $\omega'$ , telles que :

$$\omega'_k{}^2 = \frac{k^2 \pi^2 (4\gamma^2 + k^2 \pi^2)}{\mathcal{L} \mathcal{L}_s (4\rho^2 + k^2 \pi^2)} \cdot \frac{\gamma - 1 + e^{-\gamma}}{4\gamma^3} \quad (57)$$

Les remarques précédentes s'appliquent au cas de l'enroulement dont l'extrémité est isolée :

1) Lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , on retrouve l'expression donnée par la théorie de WAGNER :

$$\omega'_k = \frac{k^2 \pi^2}{\mathcal{L} \mathcal{L}_s (4\rho^2 + k^2 \pi^2)}$$

2) Le rapport :

$$\frac{\omega'_k}{\omega_k} = \sqrt{\frac{\gamma - 1 + e^{-\gamma}}{4\gamma^3} (k^2 \pi^2 + 4\gamma^2)} \quad (58)$$

représente le facteur de correction qu'il faut apporter à la théorie de WAGNER pour tenir compte de l'influence de la mutuelle inductance caractérisée par le coefficient  $\gamma$ . Cette influence reste peu importante pour la fréquence fondamentale.

3) La relation trouvée est de même forme que celle obtenue dans le

cas où l'extrémité est à la terre, et analogue à celle de HELLER et VEVERKA.

b) Calcul des amplitudes.

La solution s'écrit, dans le cas envisagé :

$$e(x,t) = E + E \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos \frac{k\pi x}{2\ell} \cos \omega'_k t \quad (59)$$

et les propriétés d'orthogonalité permettent d'écrire, compte tenu de la répartition initiale de tension :

$$\int_0^{\ell} \frac{\text{Ch } \rho \frac{x}{\ell}}{\text{Ch } \rho} \cos \frac{k\pi x}{2\ell} dx = \int_0^{\ell} \cos \frac{k\pi x}{2\ell} dx + A'_k \int_0^{\ell} \cos^2 \frac{k\pi x}{2\ell} dx$$

d'où, tous calculs effectués :

$$A'_k = - \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi} \frac{16 \rho^2}{k^2 \pi^2 + 4 \rho^2} \quad (60)$$

C'est l'expression trouvée par la théorie de WAGNER (9) et la théorie américaine (21).

La solution relative à l'extrémité isolée ne comprend que des oscillations d'ordre impair et la mutuelle inductance n'a pas d'influence sur l'amplitude de ces oscillations.

Cette solution s'écrira en définitive :

$$e(x,t) = E + E \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos \frac{k\pi x}{2l} \cos \omega'_k t \quad (59)$$

$$(XV) \quad A'_k = - \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi} \frac{16\mu^2}{k^2\pi^2 + 4\mu^2} \quad (60)$$

$$\omega'_k{}^2 \neq \frac{k^2\pi^2 (4\mathcal{D}^2 + k^2\pi^2)}{s (4\mu^2 + k^2\pi^2)} \frac{\mathcal{D} - 1}{4\mathcal{D}^3} \quad (61)$$

### 3°) Remarques.

Nous pouvons écrire les expressions (55) et (60) sous la forme :

- Extrémité à la terre :

$$\omega_k^2 = \frac{k^2\pi^2}{\mathcal{L}\mathcal{C}_s (k^2\pi^2 + \mu^2)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{D}}\right) + \frac{k^4\pi^4}{\mathcal{L}\mathcal{C}_s (k^2\pi^2 + \mu^2)} \frac{\mathcal{D} - 1}{\mathcal{D}^3}$$

- Extrémité isolée :

$$\omega'_k{}^2 = \frac{k^2\pi^2}{\mathcal{L}\mathcal{C}_s (k^2\pi^2 + 4\mu^2)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{D}}\right) + \frac{k^4\pi^4}{\mathcal{L}\mathcal{C}_s (k^2\pi^2 + 4\mu^2)} \frac{\mathcal{D} - 1}{4\mathcal{D}^3}$$

- Si  $\mathcal{D}$  est élevé, le second terme de ces expressions peut être négligé, et les fréquences propres sont sensiblement proportionnelles au rang de l'harmonique envisagé (théorie de WAGNER).

- Lorsque  $\mathcal{D}$  diminue, le second terme augmente progressivement et devient prépondérant (théorie américaine) pour des valeurs de telles que :

$$\mathcal{D} < k\pi \quad \text{si l'extrémité est à la terre,}$$

$$\mathcal{D} < \frac{k\pi}{2} \quad \text{si l'extrémité est isolée.}$$

En ce qui concerne la fréquence fondamentale, remarquons que ces

valeurs correspondent sensiblement à la valeur limite inférieure précédemment définie.

Nous avons montré qu'il était possible, si la fonction de mutuelle inductance décroît rapidement, d'admettre des hypothèses simplificatrices, et nous avons justifié, d'un point de vue théorique, ces hypothèses.

Nous avons pu ainsi établir les relations (XIV) et (XV), solutions du problème, et préciser, dans le cas envisagé, l'influence de la mutuelle inductance sur les fréquences propres de l'enroulement.

Si la fonction de mutuelle inductance est lentement décroissante, les hypothèses précédentes ne sont plus valables et il faut tenir compte de la longueur finie de l'enroulement. Cette étude fait l'objet du prochain chapitre.

-:-:-:-:-

## C H A P I T R E III

-:-:-:-:-

VARIATION PARABOLIQUE DE  $M(xy)$ 

-:-:-:-:-

Nous supposons, dans cette étude, que la fonction de mutuelle inductance est lentement décroissante, telle que le rapport  $\frac{\mathcal{L}}{L \ell^2}$  soit supérieur à  $\frac{1}{2}$ , et nous admettrons qu'elle peut être correctement représentée par une loi de variation parabolique :

$$M(xy) = \left[ a \left( \frac{x-y}{\ell} \right)^2 - b \left| \frac{x-y}{\ell} \right| + 1 \right] L$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes positives définies par la géométrie de l'enroulement, et telles que :

$$2a \leq b \leq a+1$$

Nous étudierons d'abord le cas d'un enroulement dont l'extrémité est mise à la terre, la fonction de mutuelle inductance étant supposée linéaire, soit :

$$\left| \begin{array}{l} a = 0 \\ 0 \leq b \leq 1 \end{array} \right.$$

puis, nous montrerons que les résultats obtenus restent très approximativement valables dans le cas d'une loi de variation parabolique.

Nous traiterons ensuite le cas d'un enroulement dont l'extrémité est isolée.

EXTREMITE MISE A LA TERRE.

I - SOLUTIONS DU SYSTEME INTEGRAL DANS LE CAS LINEAIRE. -

Nous avons montré que les solutions  $e(x,t)$ ,  $i(x,t)$ , relatives à l'onde rectangulaire infinie, sont de la forme, pour des conditions initiales nulles :

$$e(x,t) = U(x) \cos \omega t$$

$$i(x,t) = I(x) \sin \omega t$$

$U(x)$  et  $I(x)$  devant satisfaire au système :

$$(X) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dx} = \omega \int_0^{\rho} M(xy) I(y) dy \\ \frac{dI}{dx} = -C_p \omega U + C_s \omega \frac{d^2 U}{dx^2} \end{array} \right. \quad (32)$$

$$\frac{dI}{dx} = -C_p \omega U + C_s \omega \frac{d^2 U}{dx^2} \quad (33)$$

et aux conditions aux limites :

$$\left| \begin{array}{l} U(0) = 0 \\ U(\rho) = 0 \end{array} \right.$$

Ces solutions ne peuvent plus être supposées a priori sinusoidales et dépendent de la fonction de mutuelle inductance envisagée.

Nous supposons  $M(xy)$  de la forme :

$$M(xy) = \left[ -b \left| \frac{x-y}{\rho} \right| + 1 \right] L \quad 0 \leq b \leq 1$$

Substituons dans l'équation (32) et dérivons deux fois par rapport à  $x$  ; on a successivement :

$$\frac{dU}{dx} = L\omega \left[ \int_0^x \left(1 - b \frac{x-y}{\ell}\right) I(y) dy + \int_x^{\ell} \left(1 + b \frac{x-y}{\ell}\right) I(y) dy \right] \quad (62)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = L\omega \left[ -\frac{b}{\ell} \int_0^x I(y) dy + \frac{b}{\ell} \int_x^{\ell} I(y) dy \right] \quad (63)$$

$$\frac{d^3U}{dx^3} = -\frac{2b}{\ell} L\omega I(x) \quad (64)$$

Le système (X) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3U}{dx^3} = -\frac{2b}{\ell} L\omega I(x) \end{array} \right. \quad (64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dI}{dx} = -C_p \omega U(x) + C_s \omega \frac{d^2U}{dx^2} \end{array} \right. \quad (33)$$

soit :

$$(XVI) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4U}{dx^4} + \frac{2b}{\ell} L C_s \omega^2 \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{2b}{\ell} L C_p \omega^2 U'' = 0 \end{array} \right. \quad (65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3U}{dx^3} = -\frac{2b}{\ell} L\omega I \end{array} \right. \quad (64)$$

Les solutions du système (XVI) doivent satisfaire au système (X), ce que nous exprimerons par deux conditions supplémentaires déduites des relations (62) et (63) qui permettent de passer du système intégral (X) au système (XVI). Ces relations permettent, en effet, d'écrire :

$$(XVII) \begin{cases} \frac{dU}{dx}(0) + \frac{dU}{dx}(\ell) = \left(\frac{2}{b} - 1\right) \ell \frac{d^2U}{dx^2}(0) \\ \frac{dU}{dx}(0) + \frac{dU}{dx}(\ell) = -\left(\frac{2}{b} - 1\right) \ell \frac{d^2U}{dx^2}(\ell) \end{cases}$$

et l'ensemble du système (XVI) et des conditions (XVII) est alors équivalent au système intégral (X).

Remarque :

Le calcul des intensités présente, en général, assez peu d'intérêt, et nous bornerons l'étude suivante à l'équation des tensions (65). Nous rapporterons, comme précédemment, les coefficients  $C_p$ ,  $C_s$  et  $L$  à l'ensemble de l'enroulement par les relations :

$$C_p = \ell C_p$$

$$C_s = \frac{C_s}{\ell}$$

$$L = \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} M(xy) dx dy$$

soit, dans le cas envisagé, où  $M(xy) = \left[ -b \left| \frac{x-y}{\ell} \right| + 1 \right] L$

$$L = \left( 1 - \frac{b}{3} \right) L \ell^2$$

L'équation s'écrit alors, en posant  $m = \frac{2b}{1 - \frac{b}{3}}$

$$\frac{d^4U}{dx^4} + m \frac{L}{\ell^2} C_s \omega^2 \frac{d^2U}{dx^2} - m \frac{L}{\ell^4} C_p \omega^2 U = 0 \quad (66)$$

Comparons cette équation à l'équation de la théorie américaine. Cette dernière s'écrit, pour des solutions de la forme :

$$e(x,t) = U(x) \cos \omega t$$

$$\frac{d^4U}{dx^4} + \frac{L_1}{\ell^2} C_s \omega^2 \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{L_1}{\ell^4} C_p \omega^2 U = 0 \quad (67)$$

Ces deux équations ne diffèrent que par la signification des coefficients d'inductance, et l'on voit ainsi que la théorie américaine revient à considérer une fonction de mutuelle inductance linéairement décroissante.

Le coefficient  $\mathcal{L}_1$  de la théorie américaine représente une inductance de fuites, et se prête difficilement au calcul numérique. Le coefficient  $\mathcal{L}$  de la théorie actuelle représente l'inductance totale de l'enroulement. Il est défini sans ambiguïté et directement accessible à la mesure ou au calcul. Il est multiplié par un coefficient numérique  $m$  qui traduit l'influence de la mutuelle inductance:

$$m = \frac{2b}{1 - \frac{b}{3}}$$

On peut préciser que cette influence n'affecte pas les rapports des différentes fréquences propres entre elles, et revient simplement à modifier l'échelle des temps.

#### ETUDE DE L'EQUATION DES TENSIONS.

Nous nous proposons d'étudier les solutions de l'équation:

$$\frac{d^4 U}{dx^4} + m \frac{\mathcal{L}}{l^2} \mathcal{C}_s \omega^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - m \frac{\mathcal{L}}{l^4} \mathcal{C}_p \omega^2 U = 0 \quad (66)$$

compte tenu des conditions aux limites et des conditions (XVII) qui expriment que ces solutions satisfont également au système intégral (X). Cette étude nous permettra de préciser la validité des solutions proposées par la théorie américaine.

L'équation caractéristique de l'équation des tensions (66) s'écrit, en posant :  $z = r l$ ,

$$z^4 + m \mathcal{L} \mathcal{C}_s \omega^2 z^2 - m \mathcal{L} \mathcal{C}_p \omega^2 = 0 \quad (68)$$

C'est une équation bicarrée, et nous désignerons par :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ -\alpha \end{array} \right\} \text{ ses deux racines réelles,}$$

$\left. \begin{matrix} \beta \\ -\beta \end{matrix} \right\}$  ses deux racines imaginaires pures,

$\alpha$  et  $\beta$  étant positifs et liés aux paramètres de l'enroulement par les relations :

$$(XVIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 = -mL C_s \omega^2 \end{array} \right. \quad (69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 \beta^2 = -mL C_p \omega^2 \end{array} \right. \quad (70)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \mu^2 \end{array} \right. \quad (71)$$

en posant :  $\mu^2 = \frac{C_p}{C_s}$

La solution  $U(x)$  est de la forme :

$$U(x) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{z_i \frac{x}{l}}$$

A) Calcul des fréquences propres.

L'ensemble des conditions (XVII) et des conditions aux limites choisies forment un système linéaire homogène qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^4 C_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 C_i e^{z_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 z_i C_i (e^{z_i} + 1) = \left( \frac{2}{b} - 1 \right) \sum_{i=1}^4 C_i z_i^2$$

$$\sum_{i=1}^4 z_i C_i (e^{z_i} + 1) = - \left( \frac{2}{b} - 1 \right) \sum_{i=1}^4 C_i z_i^2 e^{z_i}$$

Ce système n'admet de solutions non identiquement nulles que si le déterminant des coefficients est nul, soit, avec les notations adoptées :

$$\begin{vmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 e^{\alpha} & e^{-\alpha} & e^{\beta} & e^{-\beta} \\
 \alpha^2(1+e^{\alpha}) & \alpha^2(1+e^{-\alpha}) & \beta^2(1+e^{\beta}) & \beta^2(1+e^{-\beta}) \\
 \alpha(1+e^{\alpha})-h\alpha^2 & -\alpha(1+e^{-\alpha})-h\alpha^2 & \beta(1+e^{\beta})-h\beta^2 & -\beta(1+e^{-\beta})-h\beta^2
 \end{vmatrix} = 0$$

en posant :

$h = \frac{2}{b} - 1 \geq 1$ , la nature physique du problème imposant  $b \leq 1$ .

On peut écrire ce déterminant sous la forme :

$$\begin{vmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 Ch\alpha & Sh\alpha & Ch\beta & Sh\beta \\
 \alpha^2(Ch\alpha+1) & \alpha^2(Sh\alpha) & \beta^2(Ch\beta+1) & \beta^2 Sh\beta \\
 \alpha(Sh\alpha - h\alpha) & \alpha(Ch\alpha + 1) & \beta(Sh\beta - h\beta) & \beta(Ch\beta+1)
 \end{vmatrix} = 0$$

Il s'annule quels que soient  $\alpha$  et  $h$ , pour des valeurs de  $\beta$  telles que :

$$\beta = j (2k+1)\pi \tag{72}$$

On trouve, par ailleurs, tous calculs effectués, la relation :

$$h \alpha^2 + \frac{2\alpha}{\text{th } \frac{\alpha}{2}} = h \beta^2 + \frac{2\beta}{\text{th } \frac{\beta}{2}} \quad (73)$$

que nous écrirons, en posant :

$$\alpha = 2p$$

$$p \text{ et } q > 0$$

$$\beta = 2jq$$

$$h p^2 + \frac{p}{\text{th } p} = \frac{q}{\text{tg } q} - h q^2$$

Le tracé des courbes (figure 8) relatives à chacun des deux membres montre que cette relation est très sensiblement vérifiée quelles que soient les valeurs de p et de h pour des valeurs de q telles que :

$$q \neq k\pi$$

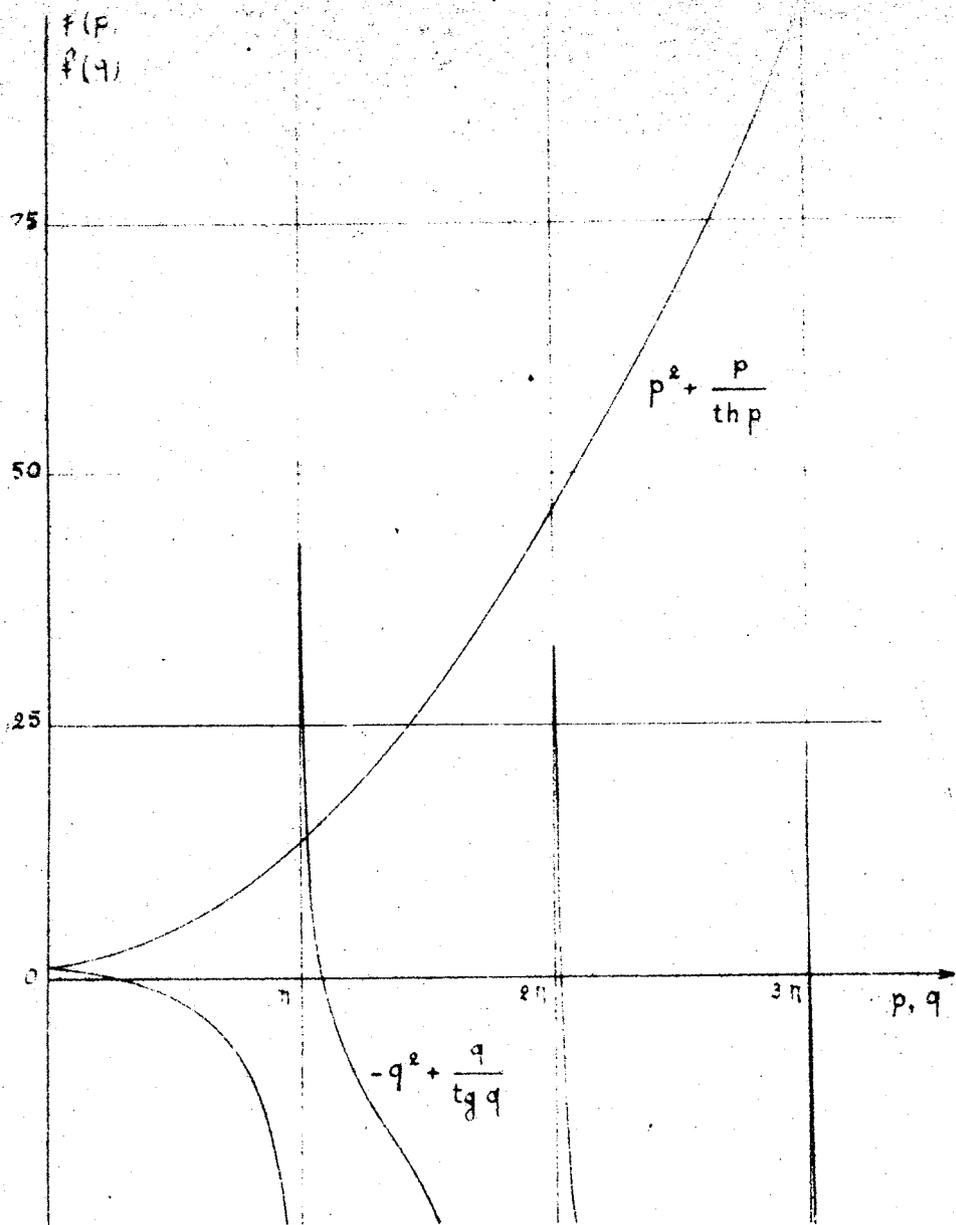
$$\text{soit } \beta \neq 2j k\pi \quad (74)$$

Le calcul permettrait, d'ailleurs, de confirmer ce résultat et, étant donné l'approximation des hypothèses concernant la représentation de la fonction de mutuelle inductance, on peut admettre, compte tenu des deux relations précédentes :

$$\beta \neq jk\pi$$

L'examen de ces courbes montre que cette approximation est d'autant meilleure que la fonction de mutuelle inductance est moins décroissante et que la rang de l'oscillation envisagée est plus élevé.

On déduit alors des relations (XVIII) :



Solution graphique de l'équation :

$$h p^2 + \frac{p}{\text{th } p} = \frac{q}{\text{tg } q} - h q^2$$

Figure 8.

$$h = 1$$

$$\alpha_k^2 = \frac{k^2 \pi^2 p^2}{p^2 + k^2 \pi^2}$$

et

$$\omega_k^2 = \frac{k^4 \pi^4}{m \mathcal{L} \mathcal{E}_s (p^2 + k^2 \pi^2)}$$

soit :

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{\sqrt{m \mathcal{L} \mathcal{E}_s (p^2 + k^2 \pi^2)}} \quad (75)$$

Comparons cette valeur à celle de la théorie américaine :

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{\sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{E}_s (p^2 + k^2 \pi^2)}} \quad (18)$$

Elle n'en diffère que par la signification de l'inductance  $\mathcal{L}$  qui est ici, l'inductance totale multipliée par un coefficient numérique caractérisant la fonction de mutuelle inductance.

Nous pouvons, en outre, préciser qu'elle est rigoureuse pour les oscillations d'ordre impair, et très approchée pour les oscillations d'ordre pair.

Nous pouvons, comme précédemment, définir le facteur de correction à apporter à la théorie de WAGNER pour tenir compte de l'influence de la mutuelle inductance :

$$\frac{\omega_k}{\Omega_k} = \frac{k\pi}{\sqrt{m}}$$

#### B) Calcul des amplitudes.

L'intégrale générale de l'équation (66) est de la forme :

$$U_k(x) = A_k \operatorname{Ch} \alpha \frac{x}{p} + B_k \operatorname{Sh} \alpha \frac{x}{p} + C_k \operatorname{Ch} \beta \frac{x}{p} + D_k \operatorname{Sh} \beta \frac{x}{p}$$

Les constantes  $A_k, B_k, C_k, D_k$ , étant liées par le système homogène :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{Ch}\alpha & \text{Sh}\alpha & \text{Ch}\beta & \text{Sh}\beta \\ \alpha^2(\text{Ch}\alpha+1) & \alpha^2 \text{Sh}\alpha & \beta^2(\text{Ch}\beta+1) & \beta^2 \text{Sh}\beta \\ \alpha(\text{Sh}\alpha-h\alpha) & \alpha(\text{Ch}\alpha+1) & \beta(\text{Sh}\beta-h\beta) & \beta(\text{Ch}\beta+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \\ D_k \end{bmatrix} = 0$$

Le déterminant des coefficients est supposé nul, et il est alors possible d'exprimer trois des constantes en fonction de la quatrième.

- Pour les oscillations d'ordre impair, cette condition est réalisée pour les valeurs de  $\beta$  telles que :

$$\beta = j(2k+1)\pi.$$

On est alors immédiatement conduit à la solution :

$$U_{2k+1}(x) = D_{2k+1} \sin(2k+1)\pi \frac{x}{l} \quad (76)$$

- Les oscillations d'ordre pair sont caractérisées par la relation :

$$h\alpha^2 + \frac{2\alpha}{\text{th} \frac{\alpha}{2}} = h\beta^2 + \frac{2\beta}{\text{th} \frac{\beta}{2}} \quad (73)$$

Posons :

$$\boxed{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \text{Sh}\alpha & \text{Ch}\beta & \text{Sh}\beta \\ \alpha^2 \text{Sh}\alpha & \beta^2(\text{Ch}\beta+1) & \beta^2 \text{Sh}\beta \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{bmatrix} B_{2k} \\ C_{2k} \\ D_{2k} \end{bmatrix} = - \boxed{K}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \text{Ch}\alpha \\ \alpha^2(\text{Ch}\alpha+1) \end{bmatrix} A_{2k}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} B_{2k} \\ C_{2k} \\ D_{2k} \end{bmatrix} = \frac{A_{2k}}{(\beta^2 - \alpha^2) \text{Sh}\alpha \text{Sh}\beta} \begin{bmatrix} -\beta^2 \text{Sh}\beta & -\beta^2 \text{Sh}\beta & \text{Sh}\beta \\ \text{Sh}\alpha \text{Sh}\beta(\alpha^2 - \beta^2) & 0 & 0 \\ \text{Sh}\alpha \text{Sh}\beta(\beta^2 - \alpha^2) + \beta^2 \text{Sh}\alpha & \alpha^2 \text{Sh}\alpha & -\text{Sh}\alpha \end{bmatrix}$$

d'où :

$$B_{2k} = - \frac{A_{2k}}{\text{th} \frac{\alpha}{2}} \quad D_{2k} = \frac{A_{2k}}{\text{th} \frac{\beta}{2}}$$

$$C_{2k} = - A_{2k}$$

Les oscillations d'ordre pair seront alors telles que :

$$U_{2k}(x) = \left[ \text{Ch}\alpha \frac{x}{l} - \frac{\text{Sh}\alpha \frac{x}{l}}{\text{th} \frac{\alpha}{2}} - \text{Ch}\beta \frac{x}{l} + \frac{\text{Sh}\beta \frac{x}{l}}{\text{th} \frac{\beta}{2}} \right] A_{2k} \quad (77)$$

Nous avons montré que l'on avait sensiblement pour les oscillations d'ordre pair :

$$\beta = 2j kx$$

et le terme en  $\frac{\text{Sh}\beta \frac{x}{l}}{\text{th}\beta}$  est alors prépondérant.

Il est possible de préciser ceci en comparant pour une valeur déterminée de  $\alpha$  et  $\beta$ , la solution exacte (77) et la solution approchée :

$$U_{2k}(x) \neq D_{2k} \sin \frac{2k\alpha x}{l}$$

On s'est fixé  $\rho^2 = 100$ ,  $h = 1$ ,  
et on déduit des relations :

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$h\alpha^2 + \frac{2\alpha}{\text{th} \frac{\alpha}{2}} = h\beta^2 + \frac{2\beta}{\text{th} \frac{\beta}{2}}$$

$$\begin{cases} \alpha = 5,512 \\ \beta = j.6,592 \end{cases}$$

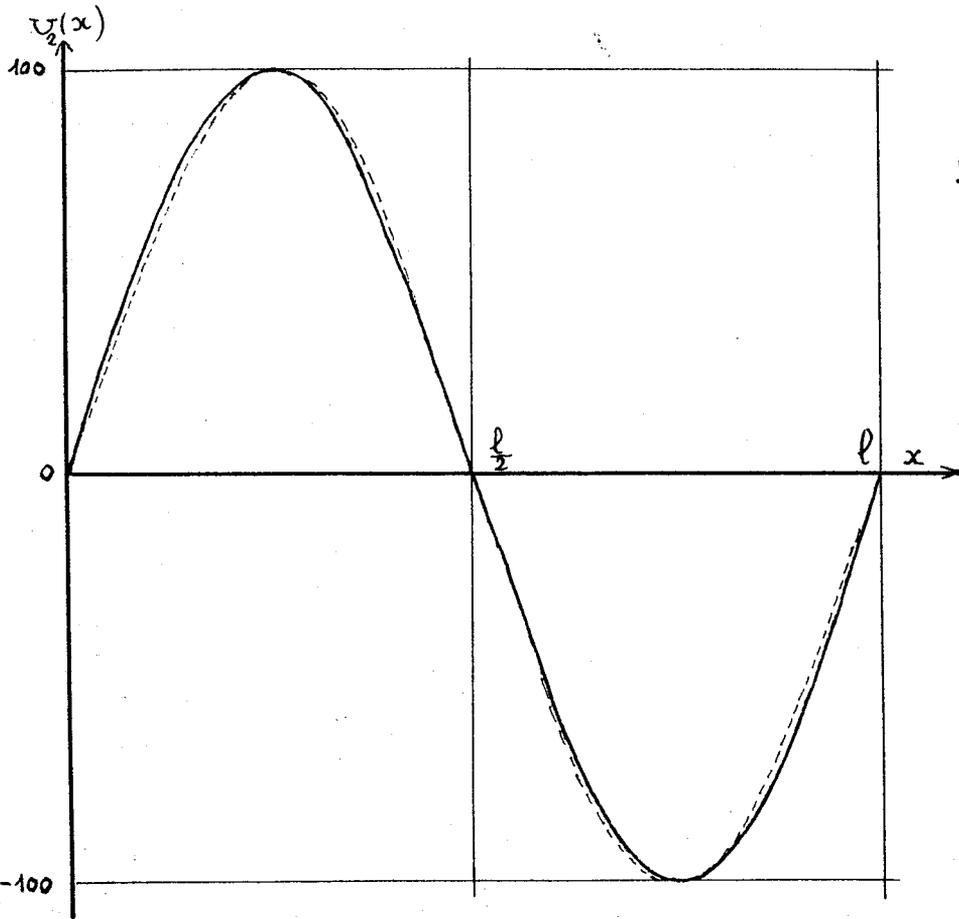
pour l'oscillation d'ordre 2.

La solution exacte (77) est tracée en pointillés sur la figure 9, et la solution sinusoïdale correspondante, en traits pleins, en diffère très peu  $\star$ . Nous avons tracé à plus grande échelle (figure 10) l'écart relatif entre ces deux courbes. L'examen de ces graphiques montre que nous pouvons admettre que les solutions sont de la forme :

$$U_k(x) = D_k \sin \frac{k\alpha x}{l}$$

Cette expression est rigoureuse pour les oscillations d'ordre impair ; elle est d'autant plus approchée pour les oscillations d'ordre pair que le rang de l'oscillation considérée est plus élevé.

$\star$  Ces deux fonctions passent par un maximum pour  $x = \frac{l}{4}$  (oscillation d'ordre 2). Les échelles d'ordonnées des deux courbes ont été choisies telles que leurs amplitudes maxima respectives soient égales.



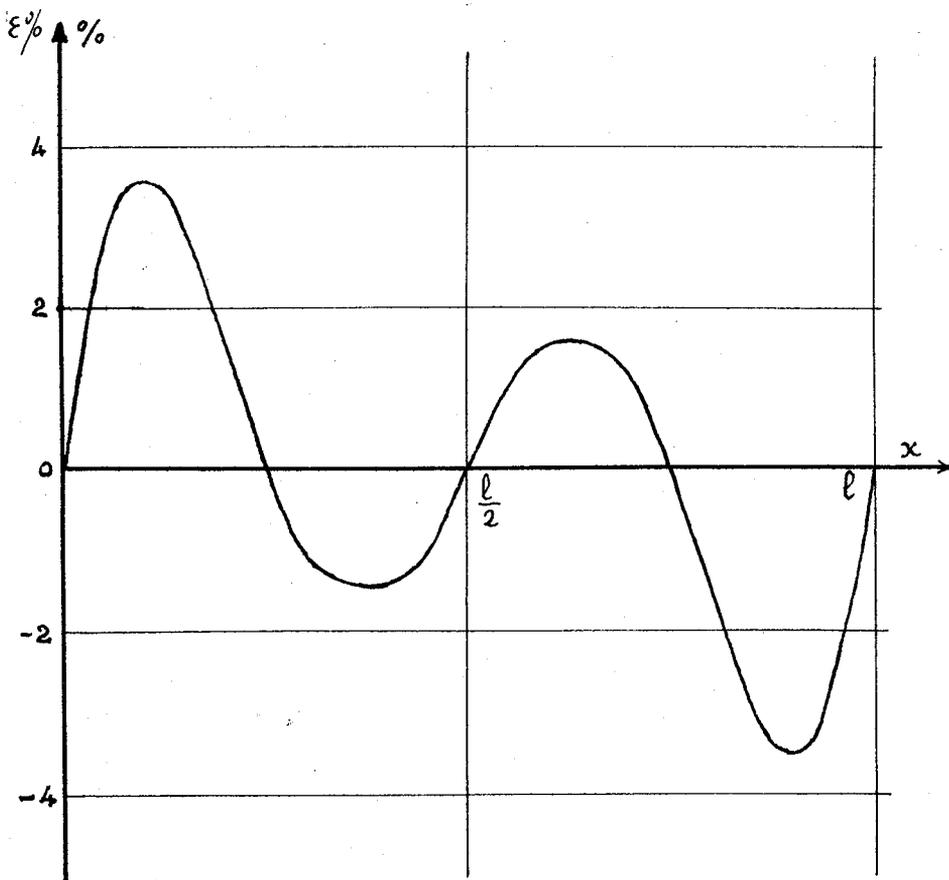
Oscillation d'ordre 2.

Répartition de  
tension.

Traits pleins :  
solution sinusoidale

Traits pointillés :  
solution exacte.

Figure 9.



Oscillation d'ordre 2.

Répartition de  
tension.

Ecart relatif en %  
entre la solution exacte  
et la solution approchée

Figure 10.

Remarque :

Si nous substituons dans l'équation des tensions (66), la solution :

$$U_k(x) = D_k \sin \frac{kx}{l}$$

nous retrouvons la relation précédemment établie :

$$\omega_k = \frac{k^2 a^2}{\sqrt{m L C_s (p^2 + k^2 a^2)}}$$

Orthogonalité des solutions.

On peut écrire l'équation (65) des tensions sous la forme :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 U}{dx^2} \right) + \lambda \left[ L' C_s \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) - L' C_p U \right] = 0 \quad (78)$$

en posant :

$$L' = \frac{2b}{l} L$$

Désignons par  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux valeurs propres distinctes et soient  $U_1$  et  $U_2$  deux fonctions propres correspondantes :

Posons :

$$DU = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 U}{dx^2} \right) \text{ et évaluons : } \int_0^l (U_1 DU_2 - U_2 DU_1) dx,$$

soit :

$$\int_0^l \left[ U_1 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 U_2}{dx^2} \right) - U_2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 U_1}{dx^2} \right) \right] dx$$

en intégrant deux fois par parties :

$$\left| U_1 \frac{d}{dx} (U_2'') \right|_0^l - \left| U_2 \frac{d}{dx} (U_1'') \right|_0^l + \int_0^l \left[ \frac{d}{dx} (U_1'') U_2' - \frac{d}{dx} (U_2'') U_1' \right] dx$$

soit :

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^{\ell} L' C_p U_1 U_2 dx + \lambda_1 \int_0^{\ell} L' C_s U_2 \frac{d}{dx} \left( \frac{dU_1}{dx} \right) dx$$

$$- \lambda_2 \int_0^{\ell} L' C_s U_1 \frac{d}{dx} \left( \frac{dU_2}{dx} \right) dx = 0$$

en intégrant par parties :

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^{\ell} (L' C_p U_1 U_2 + L' C_s U_1' U_2') dx + \lambda_1 L' C_s \left. U_2 U_1' \right|_0^{\ell}$$

$$- \lambda_2 L' C_s \left. U_1 U_2' \right|_0^{\ell} = 0$$

soit, en tenant compte des conditions aux limites précédentes :

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^{\ell} (L' C_p U_1 U_2 + L' C_s U_1' U_2') = 0$$

par hypothèse  $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ , d'où, en posant  $\mu^2 = \frac{C_p}{C_s}$

$$\int_0^{\ell} \left( \frac{\mu^2}{\ell^2} U_1 U_2 + U_1' U_2' \right) dx = 0 \tag{79}$$

On vérifierait aisément que cette relation reste valable pour les oscillations d'ordre impair, et il est alors possible, compte tenu de la répartition initiale de tension, d'évaluer les amplitudes  $D_{2k+1}$  et  $A_{2k}$  des oscillations.

Cette relation d'orthogonalité conduit cependant à des calculs très longs, et l'étude précédente a montré que l'on pouvait admettre des solutions sinusoïdales. Il est alors possible d'utili-

ser la relation classique d'orthogonalité :

$$\int_0^{\ell} \sin \frac{k_1 \pi x}{\ell} \sin \frac{k_2 \pi x}{\ell} dx = 0 \quad \text{si } k_1 \neq k_2$$

$$= \frac{\ell}{2} \quad \text{si } k_1 = k_2$$

- Amplitude des oscillations.

La solution relative à l'extrémité mise à la terre s'écrit compte tenu des considérations précédentes :

$$e(x,t) = E \frac{\mathcal{L}_x}{\mathcal{L}} + E \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \omega_k t$$

$$\text{où } \mathcal{L}_x = \left[ \frac{-b}{3\ell} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + \ell \left( 1 - \frac{b}{2} \right) x \right] L$$

$$\text{et } \mathcal{L} = \left( 1 - \frac{b}{3} \right) L \ell^2$$

L'orthogonalité de ces solutions permet d'écrire, compte tenu de la répartition initiale de tension :

$$\int_0^{\ell} \frac{\text{Sh } \rho \frac{x}{\ell}}{\text{Sh } \rho} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\ell} \mathcal{L}_x \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx + \int_0^{\ell} A_k \sin^2 \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

d'où, tous calculs effectués :

$$D_k = \frac{2 \rho^2}{\rho^2 + k^2 \pi^2} \frac{\cos k\pi}{k\pi} + 2 \frac{b}{1 - \frac{b}{3}} \frac{\cos k\pi + 1}{k^3 \pi^3}$$

La mutuelle inductance n'a pas d'influence sur l'amplitude des oscillations d'ordre impair, et tend à augmenter l'amplitude des oscillations d'ordre pair. Cet effet reste cependant peu important et peut être négligé pour les oscillations d'ordre supérieur à 2.

II - CAS D'UNE VARIATION PARABOLIQUE. -

L'étude du cas d'une variation linéaire a conduit à l'équation des tensions (66), et a montré que les solutions correspondantes étaient sensiblement sinusoïdales quelle que soit la pente de la fonction de mutuelle inductance envisagée.

Ce résultat tient compte de l'influence de la capacité série et s'applique aux oscillations d'ordre supérieur : il permet de généraliser la conclusion, précédemment citée, des travaux d'ABETTI, relatifs à l'onde fondamentale.

On vérifierait aisément, par ailleurs, qu'une loi de variation parabolique,

$$M(xy) = \left[ a \left( \frac{x-y}{l} \right)^2 - b \left| \frac{x-y}{l} \right| + 1 \right] L$$

conduit à la même équation différentielle (66) qu'une loi linéaire, le coefficient  $m$  étant alors lié à la fonction de mutuelle inductance par la relation :

$$m = \frac{2b}{1 - \frac{b}{3} + \frac{a}{6}}$$

Nous pourrions donc étendre, avec une bonne approximation, au cas parabolique, la relation des fréquences propres, établie dans le cas d'une relation linéaire,  $m$  ayant alors la valeur ci-dessus.

La solution s'écrit, en définitive, dans le cas parabolique :

$$\left\{ \begin{aligned} e(x,t) &= E \frac{L_x}{L} + E \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \omega_k t & (80) \\ D_k &= \frac{2V^2}{\rho^2 + k^2 \pi^2} \frac{\cos k\pi}{k\pi} + 2 \frac{b-a}{1 - \frac{b}{3} + \frac{a}{6}} \frac{1 + \cos k\pi}{k^3 \pi^3} & (81) \\ \omega_k &= \frac{k^2 \pi^2}{\sqrt{m L C_s (\rho^2 + k^2 \pi^2)}} & (82) \end{aligned} \right.$$

(XIX)

où :

$$\mathcal{L}_x = \left[ \frac{a-b}{3l} x^3 - \frac{a-b}{2} x^2 + l \left( 1 - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} \right) x \right] L$$

$$\mathcal{L} = \left( 1 - \frac{b}{3} + \frac{a}{6} \right) l^2$$

$$m = \frac{2b}{1 - \frac{b}{3} + \frac{a}{6}}$$

EXTREMI'ITE ISOLEE.

Nous n'envisagerons que le cas d'une fonction de mutuelle inductance linéaire :

$$M(xy) = \left[ -b \left| \frac{x-y}{l} \right| + 1 \right] L$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent :

$$\begin{cases} I(0) = \omega C_s U'(0) \\ U(l) = 0 \end{cases}$$

soit, d'après l'équation (64) :

$$\begin{cases} U'''(0) = -\frac{2b}{l} L C_s \omega^2 U'(0) \\ U(l) = 0 \end{cases}$$

d'où, compte tenu de la relation :  $-m \mathcal{L} C_s \omega^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ,

$$\begin{cases} U'''(0) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{l^2} U'(0) \\ U(l) = 0 \end{cases}$$

Nous y ajouterons, comme précédemment, les conditions :

$$(XVII) \begin{cases} \frac{dU}{dx}(0) + \frac{dU}{dx}(l) = \left(\frac{2}{b} - 1\right) l \frac{d^2U}{dx^2}(0) \\ \frac{dU}{dx}(c) + \frac{dU}{dx}(l) = - \left(\frac{2}{b} - 1\right) l \frac{d^2U}{dx^2}(l) \end{cases}$$

qui expriment que l'équation intégrale (1) est satisfaite.

L'ensemble de ces conditions forme un système linéaire homogène qui n'admettra de solutions non identiquement nulles que si le déterminant des coefficients est nul, soit, avec les notations précédentes :

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & 0 & \alpha \\ \text{Ch}\alpha & \text{Sh}\alpha & \text{Ch}\beta & \text{Sh}\beta \\ \alpha^2(\text{Ch}\alpha+1) & \alpha^2\text{Sh}\alpha & \beta^2(\text{Ch}\beta+1) & \beta^2\text{Sh}\beta \\ \alpha(\text{Sh}\alpha-h\alpha) & \alpha(\text{Ch}\alpha+1) & \beta(\text{Sh}\beta-h\beta) & \beta(\text{Ch}\beta+1) \end{vmatrix} = 0$$

Cette expression s'écrit, tous calculs effectués, en posant :

$$\begin{aligned} \alpha &= p \\ \beta &= jq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &h(p^2+q^2) \left[ p^3 \text{Sh}p \cos q - q^3 \text{Ch}p \sin q \right] - p q (q^2 - p^2) \text{Sh} p \sin q \\ &+ 2p^2 q^2 (\text{Ch} p + 1) (\cos q + 1) + 2q^4 \text{Ch} p (\cos q + 1) + 2p^4 \cos q (\text{Ch} p + 1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (83)$$

L'utilisation d'une machine arithmétique permettrait de tracer un réseau de courbes :

$$q_k = f(p_k)$$

qu'il serait possible de graduer suivant les valeurs du rapport

$$\mu^2 = \frac{C_p}{C_s}, \text{ tel que :}$$

$$\mu^2 = \frac{p_k^2 q_k^2}{q_k^2 - p_k^2} \quad (71)$$

A une valeur déterminée de  $\mu^2$ , correspondent ainsi deux valeurs  $p_k$  et  $q_k$  relatives à la fréquence  $\omega_k$  qui est alors donnée par l'une des relations :

$$\omega_k^2 = \frac{q_k^2 - p_k^2}{m L C_s} \quad (69)$$

$$\omega_k^2 = \frac{p_k^2 q_k^2}{m L C_p} \quad (70)$$

$m$  caractérisant la fonction de mutuelle inductance envisagée.

### Cas d'une fonction de mutuelle inductance très lentement décroissante

Dans ces conditions,  $h = \frac{2}{b} - 1$  est très grand, et l'expression précédente se réduit à :

$$h(p^2+q^2) \left[ p^3 \text{Sh}p \cos q - q^3 \text{Ch}p \sin q \right] = 0 \quad (84)$$

L'étude du cas limite où la fonction de mutuelle inductance est constante ( $h$  infini,  $m=0$ ) a montré que la fréquence fondamentale restait finie, et égale à :

$$\omega_1^2 = \frac{3\mu^2}{L C_p (3 + \mu^2)} \quad ($$

Les relations précédentes montrent que  $p$  et  $q$  doivent

être deux infiniment petits du même ordre, et nous pourrons, dans l'expression (83) du déterminant, remplacer, pour l'étude de la fréquence fondamentale, les lignes trigonométriques par leur développement limité.

On trouve, tous calculs effectués, que la fréquence fondamentale s'écrit, pour des fonctions de mutuelle inductance, très lentement décroissantes :

$$\omega_1^2 = \frac{\mu^2(3-b)}{L C_p \left[ \mu^2 \left(1 - \frac{b}{4}\right) + 3 \right]} \quad (85)$$

et, lorsque  $b \rightarrow 0$

$$\omega_1^2 \rightarrow \frac{3\mu^2}{L C_p (3 + \mu^2)}$$

C'est l'expression précédemment obtenue lorsque  $M(xy) = \text{constante}$ .

Les fréquences supérieures correspondent à des valeurs  $p$  et  $q \neq 0$ , et l'une des relations (69) ou (70) montre que ces fréquences augmentent indéfiniment lorsque la mutuelle inductance tend vers une valeur constante.

Nous bornerons à ces considérations l'étude du cas où l'extrémité est isolée. Tous les éléments nécessaires à une étude plus approfondie sont ainsi donnés, et nous aborderons maintenant la justification pratique des relations précédemment établies.

-:-:-:-:-

C H A P I T R E    I V

---:---:---:---:---

ETUDE SYNTHETIQUE DES DEUX METHODES PRECEDENTES

VERIFICATION EXPERIMENTALE

---:---:---:---

Les considérations théoriques qui précèdent nous ont amenés à classer les différentes fonctions de mutuelle inductance en deux catégories suivant les valeurs du rapport  $\frac{\mathcal{L}}{L l^2}$  caractérisant des fonctions plus ou moins décroissantes et à traiter chacune d'elles par des méthodes mathématiques différentes.

Le rapport  $\frac{\mathcal{L}}{L l^2}$  varie, en fait, d'une manière continue entre zéro et l'unité, et une comparaison des résultats donnés par l'une et l'autre méthode au voisinage de la frontière des deux domaines de représentations paraboliques et exponentielles nous permettra de justifier, d'un point de vue théorique, les relations établies. Nous confronterons enfin, aux courbes expérimentales précédentes, les courbes théoriques obtenues à l'aide de ces relations.

Dans le cas d'une loi de variation exponentielle, le paramètre  $\mathcal{D}$  est déterminé sans ambiguïté par les valeurs du rapport

$$\frac{\mathcal{L}}{L l^2},$$

$$\frac{\mathcal{L}}{L l^2} = 2 \frac{\mathcal{D} - 1 + e^{-\mathcal{D}}}{\mathcal{D}^2} \tag{47}$$

pour les valeurs de ce rapport comprises entre 0 et  $\frac{1}{2}$ .

Nous allons montrer que, dans le cas d'une loi de variation parabolique, les paramètres a et b sont également parfaitement définis par les valeurs de ce rapport supposé varier linéairement entre  $\frac{1}{2}$  et l'unité.

La nature physique du problème impose aux coefficients a et b, les conditions :

$$2a \leq b \leq 1+a$$

et les droites :

$$b = 2a$$

$$b = 1+a$$

limitent le domaine correspondant.

Le rapport  $\frac{\mathcal{L}}{L l^2}$  est lié

aux coefficients a et b par la relation :

$$\frac{\mathcal{L}}{L l^2} = 1 - \frac{b}{3} + \frac{a}{6} \quad (46)$$

et l'on s'impose :

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{b}{3} + \frac{a}{6} \leq 1$$

On vérifie aisément que cette double inégalité est toujours vérifiée à l'intérieur du domaine considéré, et l'on constate que, seules les valeurs de b, telles que :

$$b = 2a$$

permettent une variation linéaire continue du rapport  $\frac{\mathcal{L}}{L l^2}$  entre  $\frac{1}{2}$  et l'unité.

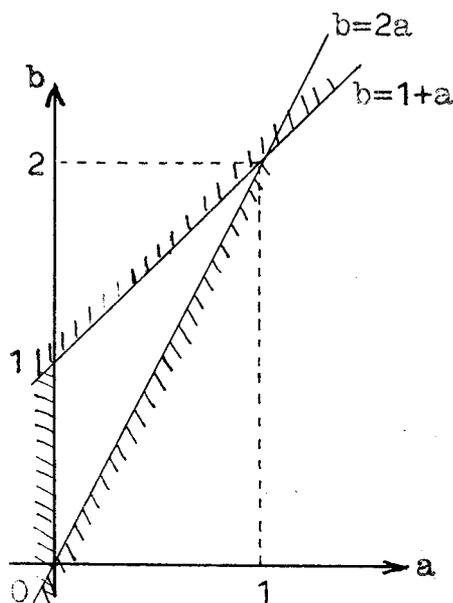


Figure 11.

D'où, en posant :  $\frac{\mathcal{L}}{Ll^2} = \delta$

$$\begin{cases} b = 4(1-\delta) \\ a = 2(1-\delta) \end{cases}$$

et  $m = \frac{\delta(1-\delta)}{\delta}$  (86)

- EXTREMITÉ A LA TERRE -

On a trouvé :

- Si  $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$  :

$$\frac{\omega_k}{\Omega_k} = \sqrt{\frac{\mathcal{V} - 1 + e^{-\mathcal{V}}}{\mathcal{V}^3} (\mathcal{V}^2 + k^2 \pi^2)}$$

où  $\mathcal{V}$  est tel que :

$$\delta = 2 \frac{\mathcal{V} - 1 + e^{-\mathcal{V}}}{\mathcal{V}^2}$$

- Si  $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$  :

$$\frac{\omega_k}{\Omega_k} = \frac{k\pi}{\sqrt{m}}$$

où  $m$  est tel que :

$$m = \frac{\delta(1-\delta)}{\delta}$$

Les courbes correspondantes tracées en pointillés sur la figure 12 pour les six premières fréquences propres d'un enroulement, extrémité à la terre, présentent du fait des hypothèses faites dans l'une et l'autre méthode, une discontinuité à la

frontière des deux domaines de représentation.

Cette discontinuité augmente avec le rang de l'oscillation envisagée, mais reste peu importante, et permet d'apprécier la valeur de l'approximation obtenue.

Les courbes pratiques sont tracées en traits pleins, et coïncident sensiblement avec les courbes théoriques précédentes.

- EXTREMITÉ ISOLÉE -

Lorsque l'extrémité de l'enroulement est isolée, nous avons établi la relation (57) dans le cas d'une fonction de mutuelle inductance suffisamment décroissante.

Les hypothèses faites dans ce cas conduisent à envisager des enroulements fictifs de longueur  $2\ell$ , et nous avons montré que la relation établie restait valable pour des valeurs de

$$\mathcal{V} \geq \frac{\mathcal{V}_1}{2}$$

où  $\mathcal{V}_1$  est la limite inférieure, relative au cas où l'extrémité est à la terre. Nous pouvons admettre, d'après ce qui précède, que la relation (57) permettra le calcul des fréquences propres d'un enroulement, extrémité isolée, pour des valeurs de  $\mathcal{V} > 1,2$ , soit, d'après la relation :

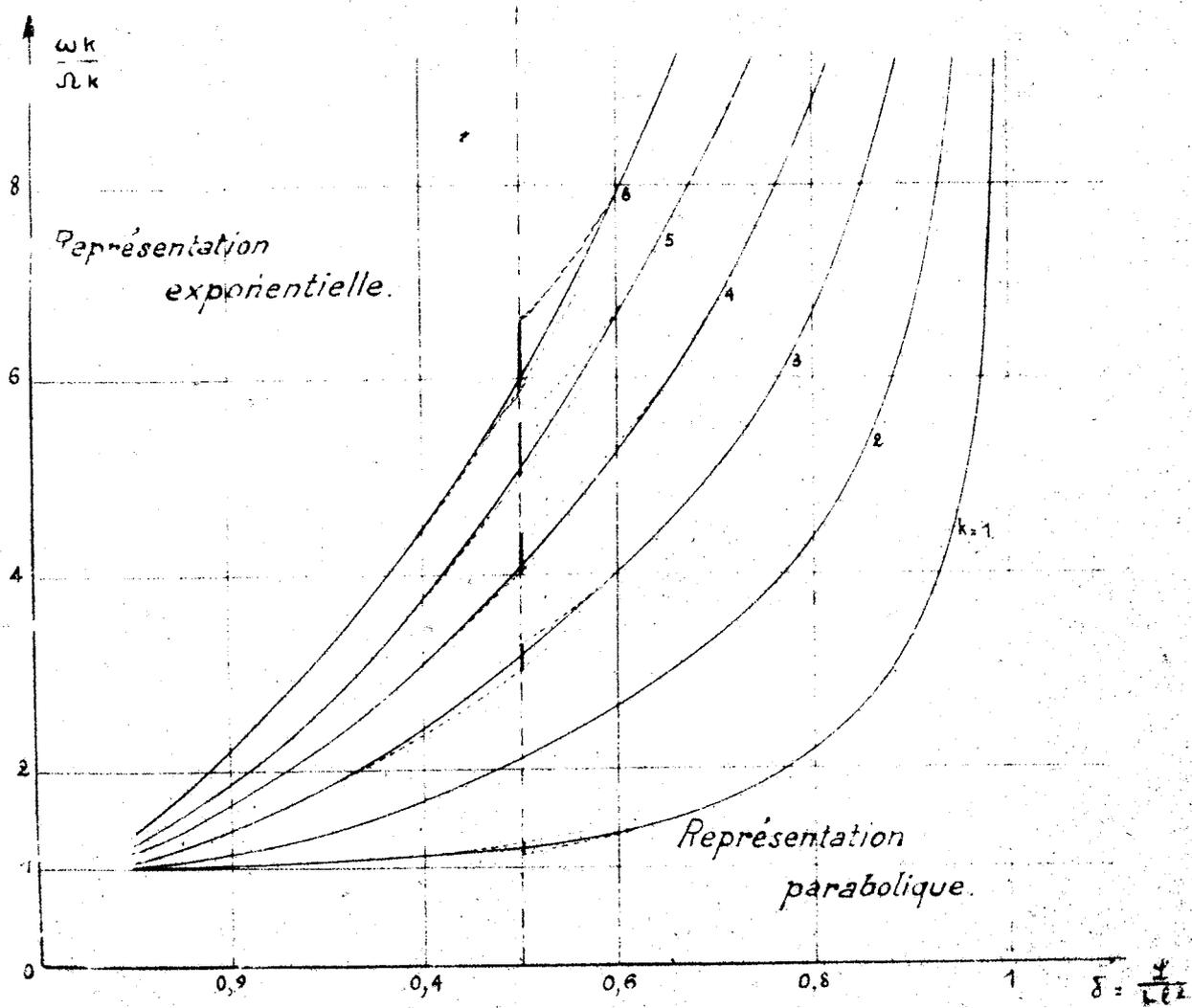
$$\delta = 2 \frac{\mathcal{V} - 1 + e^{-\mathcal{V}}}{\mathcal{V}^2} \quad (47)$$

pour des valeurs de  $\delta$  comprises entre 0, et 0,7, c'est-à-dire dans la majorité des cas rencontrés en pratique.

- VERIFICATION EXPERIMENTALE -

Du fait de la diversité des comportements électromagnétiques des différents enroulements, chaque auteur a pu justifier expérimentalement ses résultats théoriques et nous ne ferons pas exception à cette règle.

La présente étude a cependant permis de préciser les limites de la validité des différentes méthodes, et d'établir des



CALCUL DES FREQUENCES PROPRES.

EXTREMITE A LA TERRE.

Facteur de correction à apporter à la théorie de

WAGNER :

$$0 \leq \frac{L}{l^2} \leq \frac{1}{2} : \frac{\omega_k}{\Omega_k} = \sqrt{\frac{\gamma - 1 + e^{-\gamma}}{\gamma^3}} (\gamma^2 + k^2 \pi^2)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{L}{l^2} < 1 : \frac{\omega_k}{\Omega_k} = \frac{k\pi}{\sqrt{m}}$$

Traits pleins : courbes pratiques.

Traits pointillés : courbes théoriques.

Figure 12.

relations et des courbes nouvelles ne faisant intervenir qu'un petit nombre de paramètres aisément accessibles au calcul ou à la mesure directe :

$\mathcal{L}$  : inductance totale de l'enroulement,

$L$  : inductance de l'unité de longueur (spire, ou galette),

$l$  : longueur de l'enroulement (nombre total de spires ou de galettes),

$\mathcal{C}_p$  : capacité par rapport à la terre de tout l'enroulement,

$\mathcal{C}_s$  : capacité série de l'enroulement.

Compte tenu des hypothèses faites et des conditions imposées le problème est entièrement défini par ces paramètres, et il nous a semblé intéressant d'appliquer les résultats qui précèdent au modèle de transformateur dont nous avons donné, par ailleurs, les caractéristiques essentielles, et de comparer entre elles les méthodes de calcul proposées.

On a trouvé :

Inductance totale	:	$\mathcal{L} = 75$ mH.
Inductance d'une galette	:	$L = 0,139$ mH.
Nombre de galettes	:	$l = 60$
Capacité par rapport à la masse	:	$\mathcal{C}_p = 610$ pF.
Capacité série	:	$\mathcal{C}_s = 6,6$ pF.

Formons le rapport :  $\frac{\mathcal{L}}{L l^2}$  :

$$\frac{\mathcal{L}}{L l^2} = 0,15$$

Ce rapport, inférieur à  $\frac{1}{2}$ , montre que la fonction de mutuelle inductance est rapidement décroissante, au sens précédemment défini, et nous admettrons une représentation exponentielle de celle-ci.

L'extrémité de l'enroulement est mise à la terre, et la solution est donnée par les relations (XIV) :

$$e(x,t) = E \frac{L_x}{L} + E \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \omega_k t \quad (53)$$

$$(XIV) \quad A_k \neq \frac{2\mu^2}{\mu^2 + k^2\pi^2} \frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{\nu^2}{(\nu-1)(\nu^2 + k^2\pi^2)} \frac{1 + \cos k\pi}{k\pi} \quad (54)$$

$$\omega_k^2 \neq \frac{k^2\pi^2 (\nu^2 + k^2\pi^2)}{L\mathcal{E}_s (\mu^2 + k^2\pi^2)} \frac{\nu-1}{\nu^3} \quad (55)$$

où  $\nu$  est tel que :

$$\frac{L}{Ll^2} \neq 2 \frac{\nu-1}{\nu^2} \quad \text{soit : } \nu \neq 12,3$$

$$\text{et } \mu^2 = \frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_s} \quad \text{soit } \mu^2 \neq 92,5$$

Le tableau suivant donne, pour les six premiers harmoniques; les valeurs des fréquences propres calculées d'après la relation ci-dessus et les valeurs expérimentales précédemment déduites des oscillogrammes.

$\frac{\omega_k}{\omega_1}$	$\frac{\omega_1}{\omega_1}$	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{\omega_3}{\omega_1}$	$\frac{\omega_4}{\omega_1}$	$\frac{\omega_5}{\omega_1}$	$\frac{\omega_6}{\omega_1}$
Valeurs calculées	1	1,9	2,7	3,5	4,3	5,1
Valeurs expérimentales.	1	1,9	2,7	3,5	4,3	5

- TABLEAU IV -



## C O N C L U S I O N S

-:-:-:-

1°) La prédétermination des contraintes dans un enroulement soumis au choc est un problème important, et de nombreuses méthodes de calcul ont été proposées à ce sujet. On peut envisager :

- soit la réalisation d'un modèle,
- soit une étude théorique conduisant à une solution explicite,
- soit une étude théorique faisant appel aux méthodes du calcul numérique.

2°) La fonction de mutuelle inductance joue un rôle prépondérant dans la détermination de ces contraintes et la diversité des hypothèses faites à ce sujet, explique la divergence des résultats proposés par les différents auteurs.

3°) La nature des hypothèses concernant la fonction de mutuelle inductance conditionne la méthode de calcul adoptée.

On peut envisager :

a) des fonctions de mutuelle inductance quelconques. Nous avons alors montré qu'il était possible :

- soit de se ramener à une équation intégrale de type connu qui peut être résolue par les méthodes du calcul numérique, compte tenu de l'influence de la capacité série ;
- soit de se ramener à un système différentiel linéaire que nous avons résolu à l'aide d'une machine analogique.

Une simplification mathématique importante peut être apportée dans le cas où l'extrémité de l'enroulement est mise à la terre.

b) des fonctions de mutuelle inductance plus particulières : il est alors possible d'explicitier des solutions approchées du problème. Nous avons montré que l'on pouvait définir le comportement électromagnétique d'un enroulement par le rapport  $\frac{L}{Ll^2}$  de l'in-

ductance totale à l'inductance calculée en supposant une fonction de mutuelle inductance constante. Nous avons établi des relations qui permettent, suivant les valeurs de ce rapport; le calcul des contraintes dans un enroulement homogène dont l'entrée est soumise à un choc, l'autre extrémité étant soit à la terre, soit isolée :

- si l'extrémité est à la terre, les solutions sont sensiblement sinusoïdales, et le calcul direct est possible pour toute valeur du rapport  $\frac{L}{Ll^2}$  comprise entre zéro et l'unité:

$$0 \leq \frac{L}{Ll^2} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{relations XIV, page 89}),$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{L}{Ll^2} < 1 \quad (\text{relations XIX, page 112}).$$

- si l'extrémité est isolée, le calcul direct est possible pour les valeurs de ce rapport inférieures à 0,7 (solutions sinusoïdales) :

$$0 \leq \frac{L}{Ll^2} \leq 0,7 \quad (\text{relations XV, page 32}),$$

$$0,7 < \frac{L}{Ll^2} < 1 \quad : \text{ aucune solution explicite n'a pu être donnée, mais les éléments nécessaires au calcul ont été indiqués.}$$

L'étude théorique et expérimentale précédente a enfin montré l'équivalence des différentes méthodes de calcul proposées. Nous espérons également qu'elle aura permis de préciser les limites de validité de ces méthodes et qu'elle ouvrira la voie à de nouvelles et fructueuses recherches.

-:-:-:-:-

B I B L I O G R A P H I E

-:-:-:-:-

- THE BRITISH ELECTRICAL AND ALLIED INDUSTRIES RESEARCH ASSO-  
CIATION. -

(1) - "Surge Phenomena". 1941. -

- BERGER. -

(2) - "Comparaison statistique des perturbations par orage  
de quelques grands réseaux à tension élevée".  
C.I.G.R.E. 1952. Rapport 302. -

(3) - "Rapport sur les travaux du comité d'études N° 8 -  
(Surtensions et foudre)". C.I.G.R.E. 1954. Rapport  
306. -

(4) - "Recherches suisses sur la foudre". Bulletin A.S.E.  
1936, page 145. -

(5) - "Etat actuel des questions techniques dans le domaine  
de la foudre et des surtensions". (Bibliographie).  
C.I.G.R.E. 1948. Rapport 327. -

- LANGLOIS BERTHELOT. -

(6) - "quelques vues d'actualité sur la question des ondes  
de choc". Bulletin S.F.E. Septembre 1947, page 482. -

- NORINDER. -

(7) - "Recherches sur la foudre en Suède". Bulletin A.S.E.  
1947, page 799. (Bibliographie). -

A N N E X E

-:-:-

CALCUL DE LA REponse A UNE ONDE TRIANGULAIRE

-:-:-:-:-:-:-

Les considérations théoriques qui précèdent sont relatives à l'onde rectangulaire infinie. Par superposition d'ondes élémentaires, on sait en déduire la réponse du système à une onde de forme quelconque. Le calcul est particulièrement simple pour une onde triangulaire, et montre que, pendant la durée d'observation envisagée, une trentaine de microsecondes, l'erreur introduite en remplaçant l'onde théorique par l'onde expérimentale,  $0,03 / 500 \mu s$ , est tout à fait négligeable.

Soit  $I_1(p)$  la réponse du système d'impédance  $z(p)$  à l'onde rectangulaire unité

$$I_1(p) = \frac{1}{z(p)}$$

Si on désigne par  $\frac{1}{a}$  la raideur du front de l'onde expérimentale, sa transformée s'écrit :

$$E(p) = \frac{1}{a p} - \frac{e^{-ap}}{(a-\epsilon)p}$$

où  $\epsilon$  est déterminé par la longueur de la queue d'onde.

Pour l'onde  $0,03 / 500 \mu s$  :

$$a = 3 \cdot 10^{-2}$$

$$\epsilon = 9 \cdot 10^{-7}$$

en prenant le micro-seconde comme unité de temps.

La réponse  $I_2(p)$  du système d'impédance  $z(p)$  à cette onde est telle que :

$$I_2(p) = \frac{1}{z(p)} \left[ \frac{1}{a p} - \frac{e^{-ap}}{(a-\epsilon) p} \right]$$

soit :

$$I_2(p) = I_1(p) \left[ \frac{1}{a p} - \frac{e^{-ap}}{(a-\epsilon) p} \right]$$

pour  $t < a$  :

$$I_2(p) = \frac{1}{a p} \cdot I_1(p)$$

c'est-à-dire :

$$I_2(t) = \frac{1}{a} \int_0^{t < a} I_1(\zeta) d\zeta$$

l'intervalle de temps  $(0, a)$  est, dans le cas considéré, bien inférieur à l'épaisseur du tracé de la courbe.

pour  $t > a$  :

$$I_2(t) = \frac{1}{a} \int_0^t I_1(\zeta) d\zeta - \frac{1}{a-\epsilon} \int_0^{t-a} I_1(\zeta) d\zeta$$

$$\frac{1}{a-\epsilon} = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{\epsilon}{a} \right) \text{ en négligeant } \left( \frac{\epsilon}{a} \right)^2 \text{ devant } \frac{\epsilon}{a}$$

$$\text{et : } I_2(t) = \frac{1}{a} \int_0^t I_1(\zeta) d\zeta - \frac{1}{a} \int_0^{t-a} I_1(\zeta) d\zeta - \frac{\epsilon}{a^2} \int_0^{t-a} I_1(\zeta) d\zeta$$

soit :

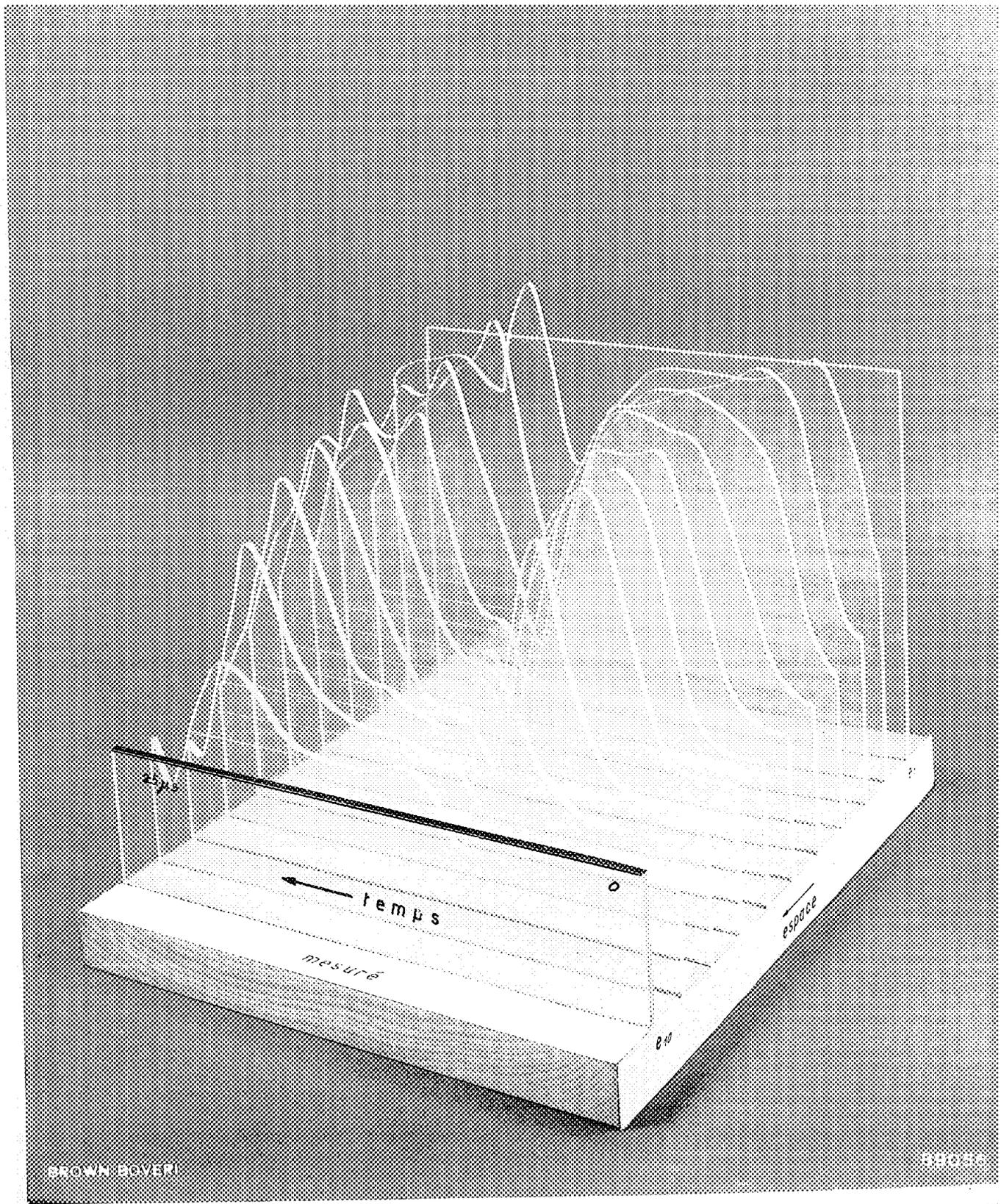
$$I_2(t) = \frac{1}{a} \int_{t-a}^{t > a} I_1(\tau) d\tau - \frac{\epsilon}{a^2} \int_0^{t-a} I_1(\tau) d\tau$$

Le premier terme est négligeable, et provient de la raideur finie du front d'onde ; c'est la valeur moyenne de la réponse à l'onde rectangulaire dans l'intervalle très petit (t-a, t).

Le deuxième terme provient de la longueur finie de la queue d'onde ( $\epsilon=0$ ) et s'évalue par planimétrie.

Le calcul de ce terme effectué pour l'onde 0,03 / 500  $\mu$  s, montre que la réponse à cette onde est, au bout de 30  $\mu$  s, inférieur de 2 à 3 % de l'onde appliquée à la réponse de l'enroulement à l'onde rectangulaire.

---:---:---:---



d'un enroulement soumis à une tension de choc rectangulaire:  
 dimensions, temps, espace (longueur axiale de l'enroulement) et tension.

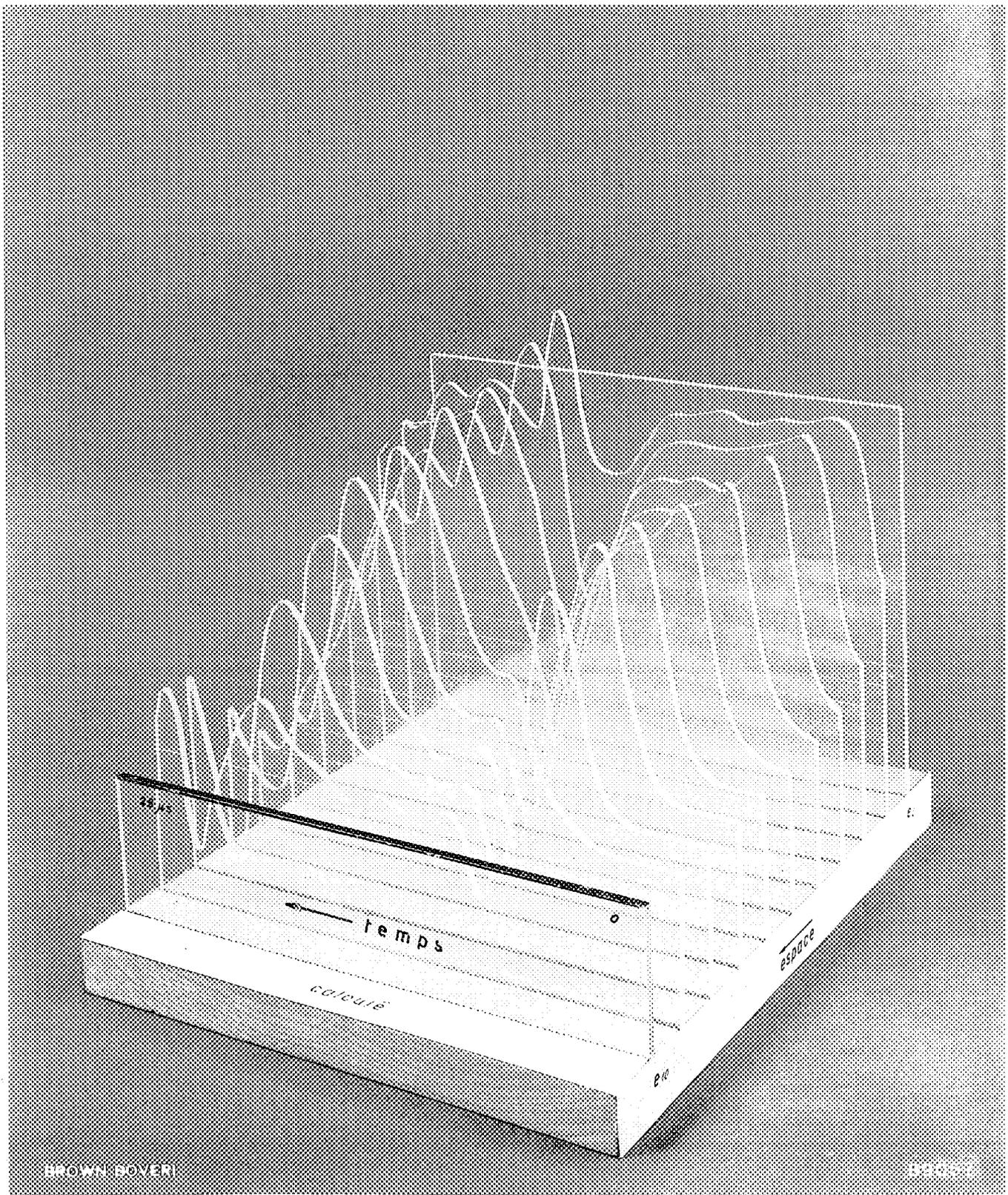
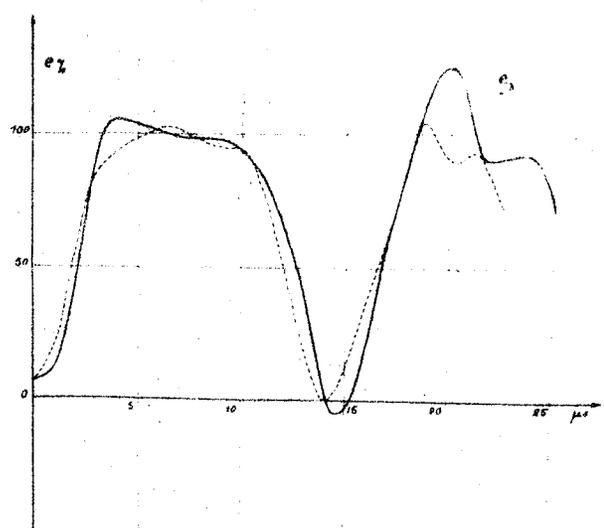


Fig. 4 Confrontation des valeurs calculées et mesurées <sup>(pour les bornes)</sup> internes à la ter-  
 transposition des familles de courbes de la fig. 3 dans deux modèles à :

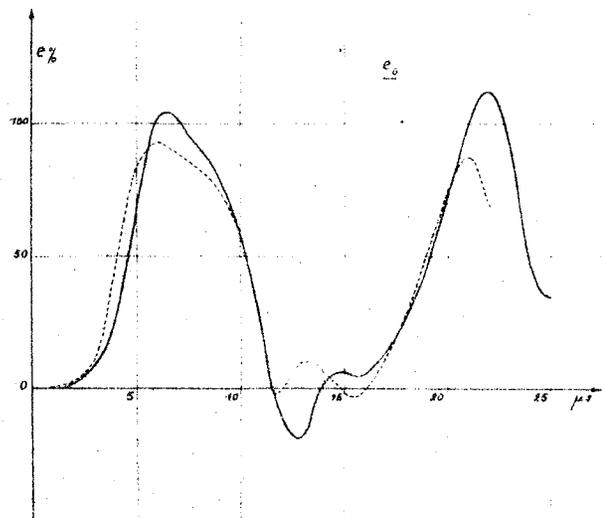




Etude mathématique.

Comparaison des valeurs calculées et mesurées pour la tension à la terre d'un enroulement soumis à une tension de choc rectangulaire 100 %.

Les tensions  $e_1, e_2, \dots, e_9$  sont les tensions des connexions entre bobines et la terre.



Traits pleins :

Valeurs calculées.  
(relations XIV, page ).

Traits pointillés :

Valeurs mesurées.

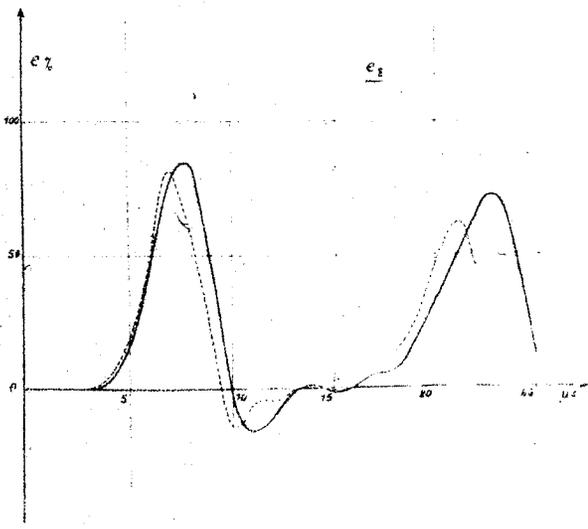
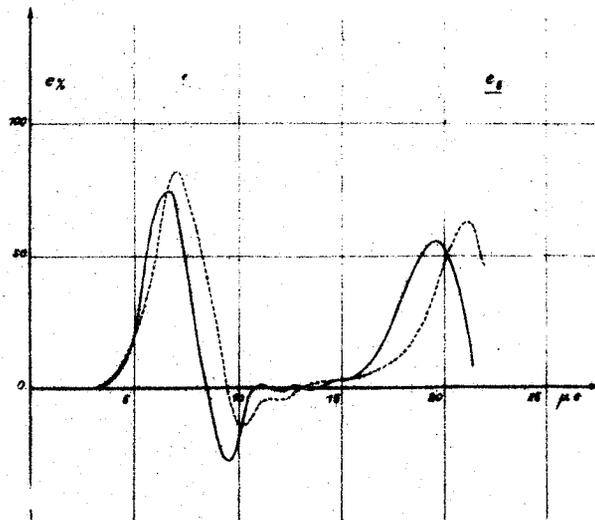
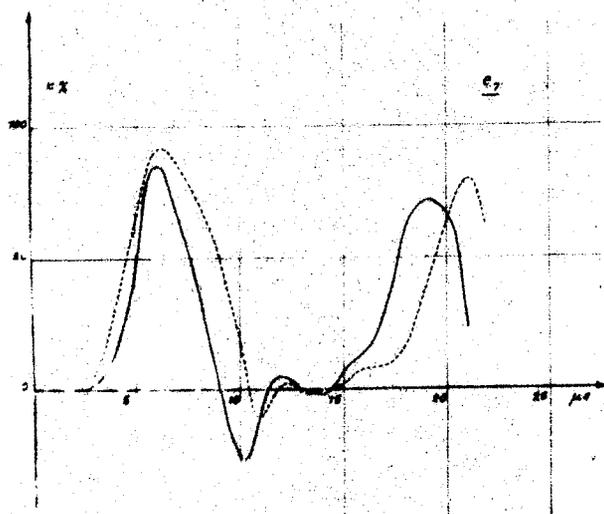
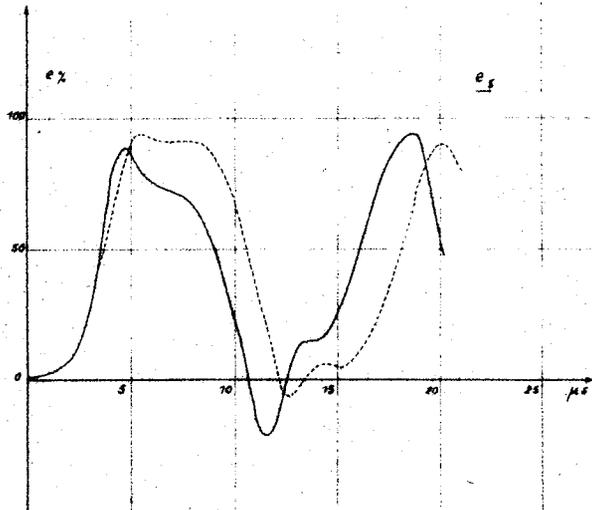
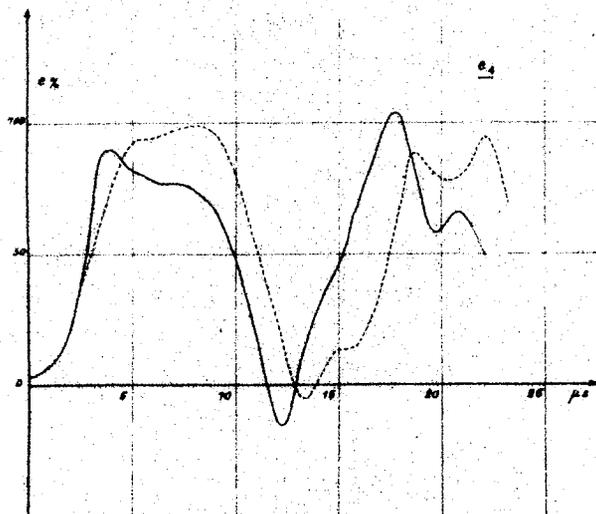
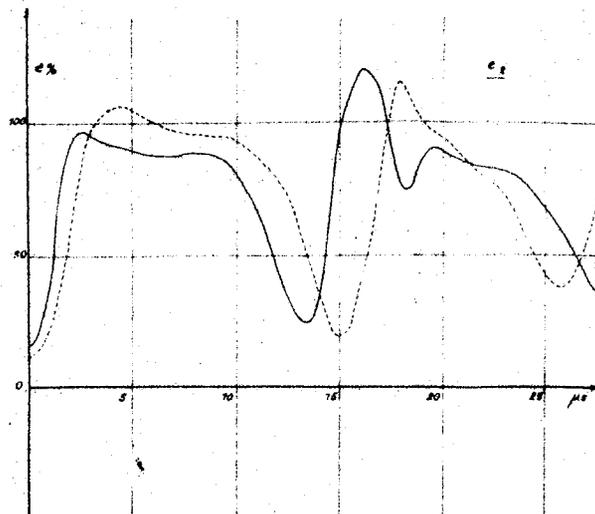
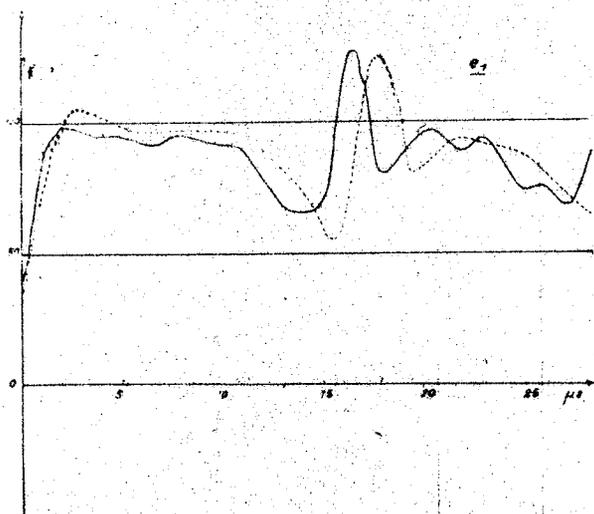
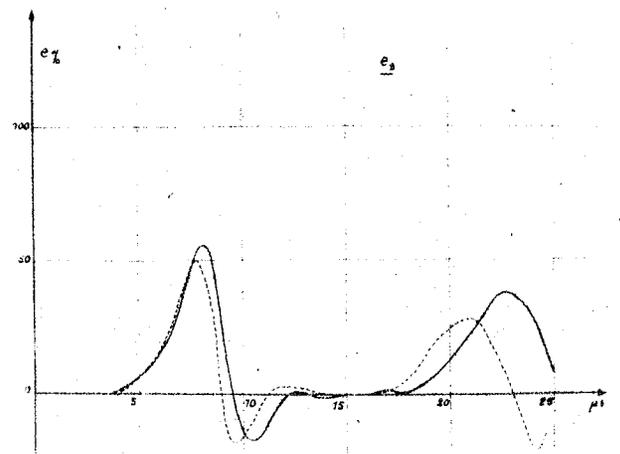
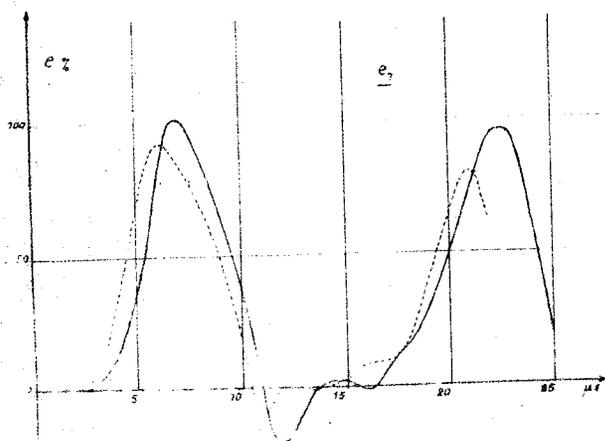
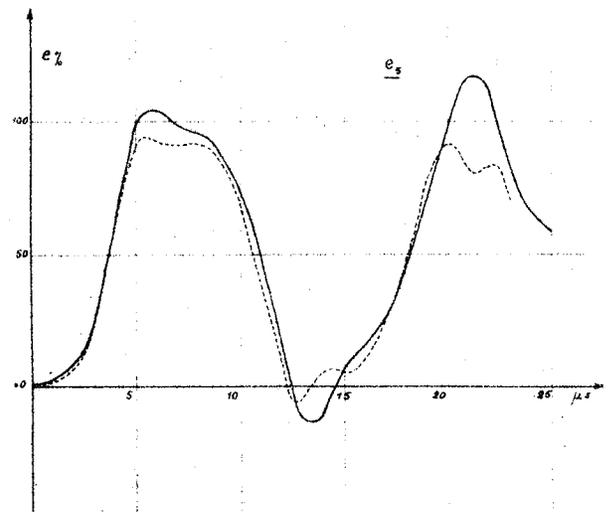
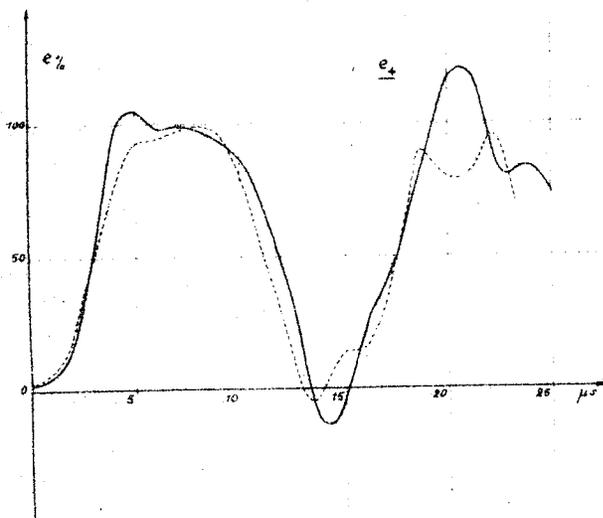
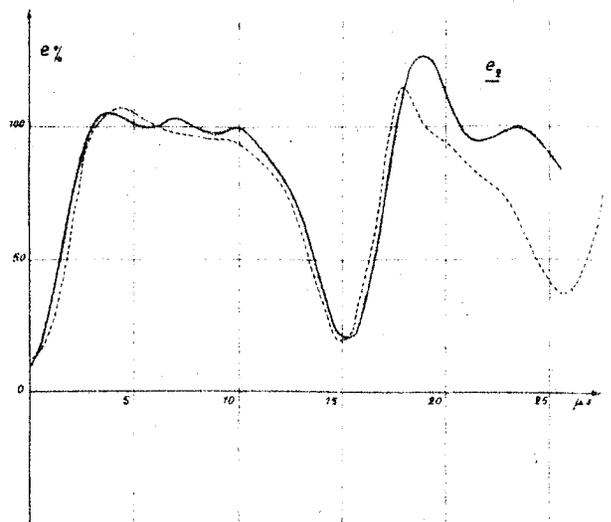
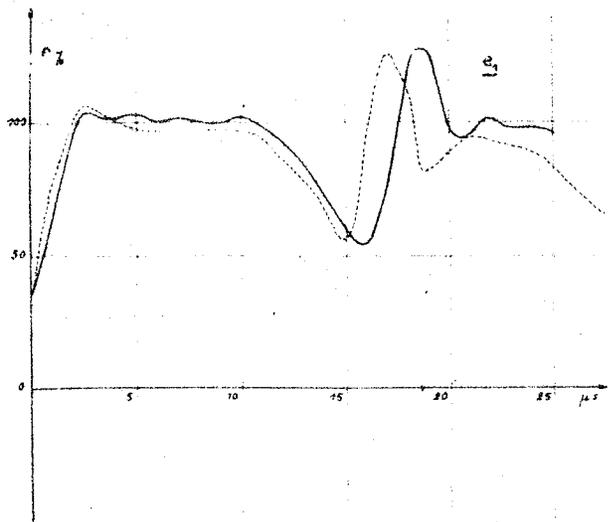


Figure 13.





- BOCKMANN et HYLTEN-CAVALLUS. -

(8)-"Surtensions d'origine atmosphérique sur les lignes haute tension. Dispositifs d'enregistrement et résultats de deux années". C.I.G.R.E. 1950. Rapport 321. -

- Mc CANN et HARDER. -

(9)-"Coups de foudre directs et ondes de foudre sur les lignes de transport d'énergie". C.I.G.R.E. 1948. Rapport 322. (Bibliographie. -

- LAURENT, NEUVE EGLISE et RIVET. -

(10)-"Quelques problèmes d'actualité sur les phénomènes de choc". Bulletin S.F.E. Avril 1952, page 210. -

- LANGLOIS BERTHELOT. -

(11)-"Une année d'essais au choc sur les transformateurs de distribution". Bulletin S.F.E. Mars 1950, page 141. -

- ANGELINE. -

(12)-"Nouvelles formules pour les calculs pratiques relatifs aux essais de choc". C.I.G.R.E. 1950. Rapport 135. -

- PROVOOST. -

(13)-"Tensions de choc dans les transformateurs". Technische Hogeschool. Delft. Thèse 1954. -

(14)-"Essais de transformateurs au choc". C.I.G.R.E. 1954.  
Rapport 115. -

- DUGOUMOIS et ZOLLER. -

(15)-"Les contraintes dues aux ondes de choc dans les transformateurs modernes". C.I.G.R.E. 1950. Rapport 124. -

- LANGLOIS BERTHELOT. -

(16)-"La fatigue diélectrique des isolants et la maintenance des appareils électriques (notamment les transformateurs)". C.I.G.R.E. 1954. Rapport 105. (Bibliographie).-

- ALLIBONE, Mc KENZIE et PERRY. -

(17)-"The effect of impulse voltage on transformer windings".  
Journal of I.E.E. 1937, page 117. -

- ANGELINI. -

(18)-"Application des principes de similitude à l'étude expérimentale du comportement des circuits électriques". Elettrotecnica. Milan 1943, page 5. -

- BRAINERD et JACOB NEUVELD. -

(19)-"Similarity relations in electrical engineering".  
A.I.E.E. 1935, page 268. -

- CAHEN. -

(20)-"Les auxiliaires du calcul des réseaux électriques : modèles analogues, calculateurs". Bulletin S.F.E. Mars 1954. -

- SINCLAIR. -

- (21)-"Theory of models of electromagnetic systems".  
Journal I.R.E. 1948, page 1364. -

- VENIKOFF. -

- (22)-"L'emploi de la méthode physique des modèles réduits  
dans l'étude des réseaux électriques". C.I.G.R.E.  
1952. Rapport 339. -

- ABETTI. -

- (23)-"Transformer models for the determination of transient  
voltages". A.I.E.E. Juin 1953. -

- CHLADEK. -

- (24)-"Models of oscillating windings of transformers".  
Elektrotechnický Obzor (Prague). Volume 39, 1950,  
pages 73-78. -

- ESCLANGON. -

- (25)-"Emploi de la similitude pour le calcul de l'effet  
pelliculaire dans les conducteurs ferromagnétiques".  
Annales de l'Université de Grenoble. 1945, page 127. -

- ABETTI. -

- (26)-"La détermination des tensions transitoires au moyen  
de transformateurs expérimentaux de modèle réduit".  
C.I.G.R.E. 1954. Rapport 131. -

- ABETTI et BELCK. -

(27)-"Long time scale models of transformers for the determination of transient voltages". A.I.E.E. Avril 1954.-

- KUNTZMANN. -

(28)-"Cours de calcul numérique de l'Université de Grenoble". 1956. -

- PIRENNE. -

(29)-"Théorie générale des phénomènes oscillatoires dans les enroulements de transformateurs". R.G.E. 1940. page 19. -

- WAGNER. -

(30)-"Pénétration des ondes dans les enroulements". Electrotechnik und Maschinenbau (Vienne). 1915. page 89. -

- RUDENBERG. -

(31)-"Performances of travelling waves in coils and windings". A.I.E.E. 1940. page 1031. -

- BLUME et BOYAJIAN. -

(32)-"Abnormal voltages within transformers". A.I.E.E. 1919, page 577. -

- PALUEFF et HAGENOUTH. -

(33)-"Effect of transient voltages". A.I.E.E. 1929, page 681. - A.I.E.E. 1930, page 1179 et 1497. - A.I.E.E. 1931, page 803. - A.I.E.E. 1932, page 60. -

- BEWLEY. -

(34)-"Travelling waves on transmission lines". John Wiley and sons, New-York(N.Y.). 2ème édition 1951, 2ème partie. -

- KOHN. -

(35)-"Contribution nouvelle au problème de choc dans les transformateurs industriels". Revue Jeumont (Nos 9, 11, 13 et 14). 1950-1951. -

- BEWLEY, HAGENGUTH et JACKSON. -

(36)-"Methods of determining natural frequencies in coils and windings". A.I.E.E. 1941, page 1145. -

- PRUHAUF. -

(37)-"Phénomènes transitoires dans les enroulements de transformateurs abordés par des ondes mobiles". C.I.C.R.E. 1932. Rapport 2<sup>e</sup>. -

- HELLER et VEVLERKA. -

(38)-"Calcul des fréquences propres d'un enroulement cylindrique à une seule couche soumis à une tension de choc". Bulletin A.S.E. 1949, page 951. -

(39)-"Les contraintes électriques créées dans un bobinage par une tension de choc unitaire". C.I.C.R.E. 1952. Rapport 140. -

- ABETTI. -

(40)-"Fundamental oscillations of coils and windings". A.I.E.E. Février 1954. -

- GROVER. -

(41)-"Inductance calculations". D. Van Nostrand Company,  
Inc. 1946. -

- PAUTHENET. -

(42)-"Propagation des ondes à front raide dans les machines  
électriques". Thèse Grenoble 1951. -

- NORRIS. -

(43)-"The lightning strength of power transformers". Journal  
of I.E.E. 1948. page 389. -

- GARDNER et BARNES. -

(44)-"Transients in linear systems". John Wiley and Sons,  
Inc. New-York. 1942. -

- LEWIS. -

(45)-"Theoretical and experimental study of surge phenomena  
on windings". The light voltage laboratory. Queen  
Mary College. Thesis, London 1947. -

- GOURSAT. -

(46)-"Cours d'analyse mathématique". Gauthier-Villars et Cie  
éditeurs, Paris 1927. -

-:-:-:-:-



