



HAL
open science

Automates cellulaires : un modèle de complexités

Guillaume Theyssier

► **To cite this version:**

Guillaume Theyssier. Automates cellulaires : un modèle de complexités. Mathématiques [math]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2005. Français. NNT: . tel-00166295

HAL Id: tel-00166295

<https://theses.hal.science/tel-00166295>

Submitted on 2 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : **346**

N° attribué par la bibliothèque : 05ENSL0346

THÈSE

en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon

spécialité : Informatique

Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme

école doctorale : *Mathématiques et Informatique fondamentale*

présentée et soutenue publiquement le 14/12/2005
par Monsieur Guillaume THEYSSIER

Automates cellulaires : un modèle de complexités

Directeurs de thèse : Marianne DELORME
Jacques MAZOYER

Après avis de : Madame Marie-Pierre BEAL, Membre/Rapporteur
Monsieur Bruno DURAND, Membre/Rapporteur

Devant la Commission d'examen formée de :
Madame Marie-Pierre BEAL, Membre/Rapporteur
Madame Marianne DELORME, Membre/Directeur de thèse
Monsieur Bruno DURAND, Membre/Rapporteur
Monsieur Antonio MACHÍ, Membre
Monsieur Jacques MAZOYER, Membre/Directeur de thèse
Monsieur Laurent VUILLON, Membre

*À mes parents, à ma soeur,
à Marion.*

Sommaire

Remerciements	iii
Introduction	v
Notations	xiii
1 Un modèle : les automates cellulaires	1
1.1 Objets syntaxiques	2
1.1.1 Définitions	3
1.1.2 Transformations syntaxiques élémentaires	4
1.1.3 Énumération et densité	6
1.2 Systèmes dynamiques discrets	7
1.2.1 Espace des configurations	7
1.2.2 Fonctions globales, propriétés globales	17
1.3 Groupage et universalité	25
1.3.1 Structures spatio-temporelles	25
1.3.2 Transformations syntaxiques	28
1.3.3 Universalité intrinsèque	29
1.4 Dynamiques	31
1.4.1 Groupage et dynamiques	34
1.4.2 Universalité pour le calcul Turing	35
1.5 Décidabilité	36
2 Les automates cellulaires captifs	41
2.1 Structures locales	42
2.1.1 Exemples historiques	43
2.1.2 Sous-automates et quotients	46
2.2 Les automates cellulaires captifs	52
2.2.1 Règles de sélection	52
2.2.2 Structure récursive	61
2.2.3 Décroissance et conservation de l'alphabet	69

2.3	Les automates cellulaires caméléons	71
3	Simulations et complexités	77
3.1	Simulations	78
3.1.1	Relations locales et changements d'échelle	79
3.1.2	Une approche globale	81
3.2	Complexités	88
3.2.1	Premiers exemples de paramètres	88
3.2.2	Paramètre de complexité de l'ensemble limite	90
3.2.3	Paramètre de complexité de communication	92
4	Hierarchies et universalités	97
4.1	Structures ordonnées	99
4.1.1	Propriétés classiques, idéaux et filtres	101
4.1.2	Automates cellulaires captifs	109
4.1.3	Universalités	112
4.2	Particules et dynamiques séquentielles	114
4.2.1	Forcer la séquentialité	115
4.2.2	Automates zigzag	119
4.3	Produits cartésiens et métronomes	122
4.3.1	Produits et dynamiques séquentielles	123
4.3.2	Métronomes	127
4.3.3	Produits limites	130
4.4	Pré-ordres et Turing-universalité	134
	Perspectives	141
	Index des auteurs	147
	Bibliographie	149

Remerciements

Au moment de mettre un point final à ce manuscrit, j'ai bien conscience que les idées qui y sont exposées doivent beaucoup aux rencontres et aux discussions qui ont jalonné mes années de recherche. Si cette thèse est bien la mienne, la culture scientifique particulière qui lui donne un sens est notamment le fruit de toutes ces personnes avec qui j'ai eu le privilège de travailler. Je tiens ici à rendre hommage à cette « communauté » qui a contribué à augmenter, corriger ou entretenir chez moi une certaine vision des automates cellulaires et de l'informatique en général.

Je remercie avant tout mes directeurs de thèse, Marianne Delorme et Jacques Mazoyer, pour avoir été d'abord les professeurs qui m'ont fait découvrir l'informatique théorique, pour m'avoir ensuite accompagné tout au long du parcours de la thèse avec une immense disponibilité, pour la confiance qu'ils m'ont accordée, pour leur ouverture et leur enthousiasme, pour leur sérieux et pour leur convivialité. Dans ces conditions, il m'est difficile de parler de ma thèse comme d'une épreuve.

Je remercie Marie-Pierre Béal et Bruno Durand pour leur relecture attentionnée de ce manuscrit : ils ont sans aucun doute contribué à éclaircir mes idées et à élargir ma réflexion. Je remercie également Antonio Machí et Laurent Vuillon d'avoir accepté de participer à mon jury.

Je remercie toute la communauté franco-chilienne autour des automates cellulaires, que j'élargis volontier à quelques non spécialistes, notamment à toute l'équipe MC². Je remercie tout particulièrement Nicolas Ollinger, Ivan Rapaport, Christoph Dürr, Enrico Formenti, George Varouchas, Vincent Bernardi, Mathieu Sablik, Alenjandro Maass, Martin Matamala, Anahi Gajardo, Emmanuel Jeandel, Victor Poupet, Laurent Boyer, Grégory Lafitte, Christophe Papazian et Michel Morvan pour les nombreuses idées que j'ai pu échanger avec eux.

Je remercie également tous ceux qui ont rendu mon séjour au LIP et à l'École Normale Supérieure de Lyon agréable (jazz, café, etc), et ceux qui m'ont accueilli à Chambéry pour la dernière ligne droite.

Enfin, je tiens par cette simple phrase, chargée de sens pour moi, à remercier tous mes amis, ma grande famille, mes parents, ma soeur et par dessus tout Marion pour leur présence et leur soutien qui dépasse largement la période de thèse qui vient de s'écouler.

Introduction

RENCONTRÉS fréquemment dans de nombreux domaines de recherche (physique, biologie, sociologie, économie, etc), les grands réseaux d'entités en interaction que l'on peut regrouper sous l'appellation « systèmes complexes » constituent aujourd'hui un enjeu scientifique majeur. Ils posent en effet un certain nombre de questions fondamentales qui dépassent largement les spécificités des domaines où ils sont rencontrés et demandent un effort de recherche propre. La complexité[↗] de tels systèmes tient à ce que la connaissance des entités qui les composent ne suffit en général pas à comprendre le comportement du système dans son ensemble.

Les automates cellulaires sont un modèle particulier de systèmes dynamiques discrets. Ce sont des réseaux réguliers de cellules toutes identiques, possédant chacune et à chaque instant un état parmi un ensemble fini, et qui évoluent par application synchrone et uniforme d'une règle de mise à jour définie localement. Ils sont utilisés pour la modélisation de phénomènes naturels variés (jusqu'aux « lois de l'univers » [94]), mais ils constituent avant tout un modèle en soi, remarquable par sa simplicité formelle et néanmoins capable de produire des comportements d'une grande richesse et souvent difficiles à prévoir. À ce titre, ils se présentent comme un cadre idéal pour étudier les problématiques transversales issues des « systèmes complexes ».

Au delà des constats empiriques de complexité, aujourd'hui abondants, la compréhension du modèle des automates cellulaires nécessite le développement d'outils théoriques adaptés, qu'il s'agisse de confirmer ou d'infirmer l'intuition qui naît des observations (nécessairement partielles), ou encore de délimiter ce qui est hors d'atteinte du calcul et donc de toute prédiction exacte, ou enfin, et surtout, de saisir de manière unifiée et explicite, par des objets mathématiques, ce qui apparaît de manière diffuse à travers une somme d'expériences hétérogènes.

Notre thèse s'inscrit avant tout dans cette démarche théorique, où la recherche de définitions formelles pertinentes au vu des phénomènes observés et l'établissement de liens entre celles-ci par la preuve sont deux activités étroitement liées.

[↗]Du latin *complexus* : « ce qui est tissé ensemble, ce qui est intriqué ».

Sources et problématiques de nos travaux On situe généralement la naissance du modèle des automates cellulaires dans les années 50 à la suite des travaux de J. von Neumann sur l'auto-reproduction et de sa collaboration avec S. Ulam (qui étudiait la croissance des cristaux). Le modèle développé par J. von Neumann [71] répondait par sa simplicité à un double critère : il était suffisamment simple pour permettre la construction effective (bien que théorique) d'un système exhibant le phénomène étudié, et suffisamment simple pour faire ressortir « l'essence » de ce phénomène et ainsi en permettre une meilleure compréhension. Par la suite, de nombreux travaux ont utilisé ce modèle pour étudier d'autres phénomènes naturels (avalanches, percolation du café, pigmentation de coquilles de mollusques, trafic urbain,...), mais surtout, une série d'études systématiques des automates cellulaires ont été menées donnant naissance à un domaine de recherche à part entière.

D'une part, les automates cellulaires ont été étudiés comme un modèle de calcul massivement parallèle (*i.e.* comme des réseaux d'unités de calcul qui coopèrent) et de nombreuses constructions algorithmiques [25, 64, 61] ainsi que des résultats sur la puissance et les propriétés de ce modèle de calcul [83, 60, 85] ont été produits. D'autre part, ils ont été étudiés à travers les propriétés globales de leur action sur l'ensemble des cellules. Ce second point de vue est par exemple adopté dans des travaux autour de la surjectivité et de la réversibilité [63, 69, 55, 41], mais il rejoint surtout la théorie classique des systèmes dynamiques et, notamment, une branche de celle-ci née dans la première moitié du 20^{ème} siècle, appelée aujourd'hui « dynamique symbolique ». En 1969, G. A. Hedlund (avec M. L. Curtis et R. C. Lyndon) fournit dans [31] une caractérisation topologique fondamentale des automates cellulaires et les étudie comme des endomorphismes sur des espaces compacts particuliers appelés « sous-shifts ». Ce point de vue a suscité de nombreux travaux où les automates cellulaires, vus comme des systèmes dynamiques discrets, sont étudiés soit avec des outils topologiques autour de la notion de chaos [43, 26, 11, 12], soit avec des outils de la théorie de la mesure et de la théorie ergodique autour de la problématique de l'attraction et de la convergence [45, 77], ou de la propagation de l'information et de l'entropie [88, 53].

Dans les années 1980, le physicien S. Wolfram a entrepris une étude expérimentale exhaustive de certaines familles d'automates cellulaires, d'où il a tiré une classification qualitative des comportements observés [92]. Si ses travaux ne contiennent pas de résultats formels nouveaux, ils ont sans aucun doute stimulé la recherche théorique sur les automates cellulaires, et ce notamment à travers deux problématiques : celle de la classification d'une part, et celle de la prévision et la décidabilité des comportements d'autre part. Pour cette dernière, des résultats importants ont été obtenus ultérieurement par J. Kari, comme l'indécidabilité de la réversibilité et de la surjectivité en dimension 2 et au delà [39] ou le théorème de Rice sur les

ensembles limites [40]. Par ailleurs, certaines classes d'automates cellulaires définies par des critères syntaxiques locaux ont été étudiées, soit dans le but de contourner l'indécidabilité omniprésente et garantir plus facilement certaines propriétés [30], soit pour offrir une structure facilitant l'analyse dynamique globale [54].

Plus récemment, une série de travaux (notamment [81, 79, 73]) a donné naissance à un formalisme mathématique rigoureux pour capturer deux notions utilisées fréquemment dans la littérature mais de façon informelle : la simulation et l'universalité. Développées depuis longtemps dans le cadre du calcul Turing et de l'équivalence entre différents modèles de machines de calcul, ces deux notions prennent avec ces travaux un sens plus fort, intrinsèque au modèle des automates cellulaires, et elles ne caractérisent plus seulement la capacité à calculer. Mais surtout, en résolvant par des choix simples et naturels les délicats problèmes de codage du monde Turing, simulation et universalité deviennent pour les automates cellulaires des notions parfaitement formalisées et qui se prêtent à un traitement mathématique complet.

Étudier les automates cellulaires, c'est selon nous chercher à comprendre comment la répétition dans l'espace d'une même cellule selon un agencement très simple peut produire avec le temps des comportements dans lesquels les mécanismes macroscopiques dépassent largement les capacités que laisse apparaître la description de la cellule individuelle. Nous distinguons dans ce questionnement général deux problématiques qui structurent nos travaux :

- (i). la mise au point d'outils permettant d'appréhender le ou les objets « macroscopiques » sous-jacents à chaque automate cellulaire, objets qui sont au centre de notre étude et sur lesquels nous souhaitons fonder classifications et analyses de complexité des automates cellulaires ;
- (ii). l'étude de la représentation syntaxique des automates cellulaires (la description du fonctionnement d'une cellule) et de son influence sur les objets « macroscopiques » associés, que ce soit en termes de calculabilité, ou à travers des propriétés combinatoires ou probabilistes (savoir quelles propriétés macroscopiques possèdent les automates typiques de la représentation étudiée).

Systemes dynamiques et comportements macroscopiques Les outils éprouvés de la théorie classique des systèmes dynamiques, développés dans un cadre général, s'appliquent aux automates cellulaires lorsque l'on voit ces derniers comme des fonctions continues agissant sur un espace compact (caractérisation de G. A. Hedlund et métrique de Cantor). Un tel transfert ne tire cependant pas parti de la structure bien particulière de l'espace des configurations des automates cellulaires. D'une part, si la métrique de Cantor permet de capturer certaines caractéristiques importantes du modèle (compacité et continuité), elle est peu adaptée pour prendre en compte l'uni-

formité du réseau de cellules (le choix d'une cellule privilégiée pour mesurer les distances entre configurations brise cette uniformité). D'autre part, le caractère discret du réseau de cellules fait apparaître une notion d'échelle très naturelle et qui permet de mieux décrire certaines dynamiques : en formant des groupes de cellules identiques, on obtient un réseau de macro-cellules sur lequel on peut faire agir tout automate cellulaire par la règle d'interaction locale qu'il induit entre macro-cellules. Notre choix pour étudier les automates cellulaires d'un point de vue « macroscopique » consiste alors à tirer parti des fortes propriétés de la métrique de Cantor mais en la complétant avec d'autres outils pour retrouver l'uniformité du modèle et pour permettre les changements d'échelle. À cette fin, nous nous appuyons sur les sous-shifts, ensembles de configurations fermés et invariants par décalages, et nous définissons une famille particulière de tels ensembles que l'on appelle les sous-shifts par blocs. Nous montrons que si un sous-shift par bloc est invariant sous l'action itérée d'un automate cellulaire donné, on peut lui associer canoniquement un nouvel automate cellulaire qui capture le comportement particulier de l'automate initial sur cette région de l'espace : c'est la notion de sous-automate enfoui. Chaque sous-automate enfoui d'un automate cellulaire révèle un aspect de sa dynamique globale. Notre approche, équivalente à celle des transformations de règles par groupage de N. Ollinger, souligne la dualité du comportement global de tout automate cellulaire : il est contrôlé aussi bien par la structure des configurations sur lesquelles il agit que par les règles de transition locales.

Pour compléter cette approche, nous nous concentrons également sur la circulation d'information dans les dynamiques globales à travers deux formalismes très différents. D'une part, nous adaptons la classification de P. Kůrka qui s'appuie sur des critères qualitatifs de circulation de l'information (équi-continuité, sensibilité et expansivité dans la métrique de Cantor [43]). Notre adaptation consiste à ignorer les déplacements absolus d'information pour ne s'intéresser qu'aux mouvements relatifs. On ne fait ainsi pas de distinction entre l'identité et un décalage global des états du réseau. D'autre part nous nous appuyons sur la notion de coloriage pour mettre en valeur, dans un diagramme espace-temps, les trajectoires de certaines structures localisées en faisant abstraction de leur contenu ou de leur forme exacte. Combinée avec les changements d'échelles, cette notion permet de définir, par des familles de diagrammes spatio-temporels, des schémas de circulation et de transformation de l'information (appelés dynamiques) ainsi que la façon dont ils peuvent être capturés par automate cellulaire. La notion de dynamique est utilisée dans toute la suite pour analyser le comportement global des automates cellulaires ; elle nous permet aussi de définir formellement, mais de façon très générale, la capacité d'un automate à effectuer des calculs Turing.

Structures locales La complexité des automates cellulaires apparaît dans les dynamiques globales qui peuvent être produites individuellement. Mais une autre forme de complexité réside dans le lien entre représentations syntaxiques locale et dynamiques globales. Ainsi, du point de vue de la calculabilité, on est confronté à deux types de problèmes (en général difficiles) : ceux portant sur certains aspects de la dynamique d'un automate cellulaire fixé (typiquement, déterminer si tel ensemble de configurations peut être atteint à partir de tel autre) et ceux consistant à décider pour chaque automate s'il possède une certaine propriété². Si l'indécidabilité d'un certain nombre de problèmes du premier type semble inévitable, car « intrinsèque » à l'automate étudié, la difficulté de ceux du second type dépend de façon cruciale des représentations syntaxiques que l'on se donne (la réversibilité en dimension 2 devient par exemple décidable si l'on représente les automates cellulaires sous forme partitionnée [30]). Ceci pose la question du choix de cette représentation.

Dans cette optique nous cherchons des sous-classes d'automates cellulaires définies par des contraintes supplémentaires sur les règles de transition locales, mais qui préservent en un certain sens la richesse des dynamiques globales de l'ensemble des automates cellulaires.

L'indécidabilité d'un problème sur une classe d'automates exprime qu'il existe une famille d'instances du problème impossibles à traiter uniformément, mais cela ne fournit pas nécessairement d'information sur la majorité des automates cellulaires de la classe considérée, c'est-à-dire sur l'automate cellulaire typique de la représentation syntaxique choisie. En plus de l'étude de la décidabilité, nous cherchons donc à dénombrer les automates cellulaires ayant une propriété donnée. En suivant cette approche, nous nous intéressons tout d'abord à deux relations de comparaison des règles locales de transition. L'une, relation de sous-automate, exprime qu'une règle est la restriction d'une autre à un sous-ensemble d'états. L'autre, relation d'automate quotient, exprime qu'une règle est obtenue à partir d'une autre par identification de certains états (ou « coloriage »). Ces deux relations simples peuvent être combinées et la relation la plus générale obtenue correspond au coloriage partiel. Nous montrons alors que presque aucun automate cellulaire ne possède de sous-automate non trivial, ni de quotient de certaines tailles. Ainsi presque tous les automates cellulaires se présentent, par leur règle de transition locale, comme « premiers », c'est à dire sans structure interne ou indécomposables en sous-systèmes plus simples.

Nous introduisons ensuite une classe d'automates, que nous appelons les automates cellulaires captifs, définis par une contrainte élémentaire sur la

²On peut parfois transférer des problèmes du second type dans des problèmes du premier type à travers des automates cellulaires universels, notion sur laquelle nous revenons ultérieurement.

règle locale : chaque transition doit sélectionner un état parmi ceux apparaissant dans le voisinage. Le fonctionnement des automates cellulaires captifs relève d'un paradigme dont on peut donner une interprétation simple : ce sont les automates qui n'effectuent aucun calcul sur place, dans la cellule, mais se contentent de déplacer, dupliquer ou effacer les états comme des informations atomiques. Cette définition naturelle est renforcée par deux caractérisations de la classe qui, chacune, offrent un point de vue différent permettant d'obtenir de nouvelles propriétés. Tout d'abord, les automates cellulaires captifs sont exactement les automates tels que chaque sous-ensemble d'états induit un sous-automate. D'autre part, nous montrons que ce sont aussi exactement les automates qui font décroître l'alphabet (l'alphabet de toute configuration initiale contient l'alphabet de la configuration image). Nous montrons également que les automates cellulaires captifs réversibles ont toujours un inverse captif : ce sont donc des automates qui conservent l'alphabet. En s'appuyant sur ces caractérisations, nous montrons alors que cette classe répond de façon intéressante à plusieurs aspects de notre questionnement sur les structures locales.

Tout d'abord, bien que sous-ensemble strict, elle est représentative des automates cellulaires en général dans le sens où on peut associer à tout automate cellulaire un automate cellulaire captif qui capture essentiellement les mêmes dynamiques. Ensuite, elle rend plus facile l'analyse de certaines propriétés et notamment concernant les ensembles limites où certains problèmes deviennent décidables lorsque l'on se restreint aux automates cellulaires captifs. Par ailleurs, parce qu'ils possèdent une structure locale très forte (à l'inverse de l'automate cellulaire typique), on montre que les automates cellulaires captifs suivent une loi zéro-un pour un certain type de propriétés très « naturelles » : soit presque tous ont la propriété, soit presque aucun. On montre en particulier que presque tous les automates cellulaires captifs sont intrinsèquement universels (au sens de [73]) alors que l'universalité intrinsèque est une propriété indécidable, même lorsque l'on se restreint à cette classe d'automates. Avec un point de vue nouveau, ce résultat renforce la thèse selon laquelle l'universalité est une propriété très facile à obtenir, ou « commune », bien que très difficile à décider.

Simulations, complexités, hiérarchies et universalités La littérature, depuis la naissance du domaine, est particulièrement abondante sur deux aspects des automates cellulaires : la notion d'universalité d'une part (universalité pour le calcul ou universalité intrinsèque), et les problèmes de classification d'autre part (classifications typologiques comme celles de S. Wolfram et de P. Kůrka, ou fondées sur des paramètres qui permettent de hiérarchiser les automates cellulaires). Bien qu'*a priori* très différentes, ces deux problématiques s'articulent selon nous fondamentalement autour d'une notion commune : celle de « simulation ». En effet, un automate est univer-

sel s'il peut « simuler » tous les autres et, inversement, si un automate en « simule » un autre il partage certaines de ses propriétés et peut reproduire toute sa complexité (le simulateur et le simulé sont donc hiérarchiquement liés).

Intuitivement, une « simulation » est une relation exprimant que le comportement d'un automate est, d'une certaine façon, entièrement reproductible par un autre. Formellement, il s'agit de relations de pré-ordres sur les automates cellulaires. Il n'y a pas une notion absolue de simulation : nous en considérons plusieurs dont la pertinence dépend du type de propriétés étudiées. Nous suivons deux approches pour les définir. D'une part, nous combinons des relations purement locales avec les transformations syntaxiques de groupage (à la façon de N. Ollinger). D'autre part, nous formulons une notion de simulation de nature dynamique, en termes de loi d'évolution globale et d'espace des phases, puis nous la caractérisons et l'affinons en tirant partie des propriétés fortes du modèle des automates cellulaires. Dans les deux approches, les relations de simulation obtenues reposent essentiellement sur trois notions : les transformations syntaxiques de groupage (évoquées ci-dessus), la restriction à des sous-espaces de configurations, puis la notion générale de facteur (semi-conjugaison topologique) et celle d'automate quotient qui en est un cas particulier.

Lorsque la relation de simulation est fixée, on peut alors étudier les notions de complexité compatibles, c'est à dire telles que tout automate cellulaire est toujours plus complexe que les automates cellulaires qu'il simule. Ces notions de complexité découlent du choix de la simulation, mais inversement elles fournissent des conditions nécessaires pour qu'un automate cellulaire puisse en simuler un autre. Nous montrons notamment la compatibilité d'une notion de complexité qui s'appuie sur la théorie de la complexité de communication avec les relations de simulation introduites. Cette notion apporte un point de vue original sur la capacité d'un automate cellulaire à faire circuler de l'information à travers chaque cellule du réseau.

En plus du cadre formel pour définir et étudier différentes notions de complexité, chaque relation de simulation induit une structure de pré-ordre sur l'ensemble des automates cellulaires, intéressante en soi. Nous étudions cette structure avec des outils élémentaires de la théorie des ordres (chaînes, idéaux, filtres) et montrons que de nombreuses propriétés classiques (réversibilité, surjectivité, et les notions dérivées de celle d'équicontinuité, d'expansivité et de sensibilité aux conditions initiales évoquées plus haut) correspondent à des idéaux ou des filtres dans certains pré-ordres de simulation, parfois dans tous. Un autre aspect fondamental de ces structures de pré-ordre est l'existence d'une classe formant un maximum global. Le cas échéant, une telle classe constitue l'ensemble des automates universels : ceux qui peuvent simuler tout automate. Alors que l'étude de l'universalité est classiquement limitée à la recherche de conditions suffisantes, nous déduisons de notre étude des notions de complexité compatibles et des structures

d'idéal ou de filtre, des conditions nécessaires pour les différentes notions d'universalité associées aux relations de simulation étudiées.

Une large partie de nos travaux est également consacrée à la problématique plus générale suivante : comment construire un automate cellulaire capable de simuler tous les automates d'une famille donnée, mais en minimisant l'ensemble des automates qu'il simule en dehors de cette famille (typiquement en assurant qu'il n'est pas universel si aucun automate de la famille ne l'est). Cette approche nouvelle de l'algorithmique sur automates cellulaires, dans laquelle nous ne cherchons pas seulement à obtenir un comportement spécifié à partir de certaines conditions initiales bien choisies mais également à garantir des propriétés pour toutes les conditions initiales, nécessite le développement de nouvelles constructions « contrôlées ».

Ainsi, en nous intéressant au produit cartésien et à son action sur les pré-ordres de simulation, nous établissons une construction originale, fondée sur des automates cellulaires de synchronisation (*firing squad*), qui associe à tout automate cellulaire \mathcal{A} un automate qui simule tous les produits cartésiens de \mathcal{A} avec lui-même, mais de façon « minimale » au sens où il n'est universel que si \mathcal{A} l'est. Cette construction peut s'interpréter comme la limite de l'opération de produit cartésien répétée finiment. Elle nous sert à construire des chaînes de longueur supérieure à l'ordinal ω dans certains pré-ordres de simulation.

Enfin, par une étude détaillée des dynamiques séquentielles dans les automates cellulaires et grâce à une construction permettant de limiter un automate cellulaire à de telles dynamiques, nous construisons un treillis infini d'automates cellulaires universels pour le calcul Turing. Ce treillis, fondé sur deux paramètres indépendants (le nombre de têtes de calcul et la complexité de chaque tête), contient notamment des chaînes infinies croissantes incomparables d'automates cellulaires Turing-universels. Cela montre que, si la capacité à effectuer des calculs Turing induit une certaine complexité, c'est bien plus la façon d'effectuer ces calculs qui détermine la position d'un automate cellulaire dans les structures de pré-ordre de simulation. La classe maximum de ces pré-ordres correspond alors à des automates capables de calculer de toutes les façons possibles et notamment de la façon la plus efficace à constante près.

Notations

\mathbb{N}	entiers naturels
\mathbb{N}_+	entiers naturels non nuls
\mathbb{Z}	entiers relatifs
\mathbb{Z}_p	entiers modulo p
C_n^k	$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2}$
$ \cdot $	cardinal d'un ensemble
A^B	fonctions de B dans A
a^B	fonction constante égale à a sur B
Id	fonction identité
$n \mapsto f(n)$	fonction qui à n associe $f(n)$
$f \upharpoonright D$	restriction de f au domaine D
$f \circ g$	$x \mapsto f(g(x))$
$f^n, n \in \mathbb{N}$	Id si $n = 0$, $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ sinon
$f^{-1}(x)$	l'ensemble $\{y : f(y) = x\}$
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties de E
ω	plus petit ordinal infini
\aleph_0	plus petit cardinal infini
Ω_1	ensemble des ordinaux dénombrables
$\bar{f} (f : Q \rightarrow R)$	extension uniforme de f à Q^n ou $Q^{\mathbb{Z}}$
$\ \cdot\ _\infty$	norme infinie
A^*	ensemble des mots finis sur A
u, v	mots finis
u_i, v_j	lettres aux positions i et j
\mathcal{A}, \mathcal{B}	automates cellulaires
$\delta_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{B}}$	fonctions locales (déf. 1 p. 3)

$V_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{B}}$	voisinages
$\nu_{\mathcal{A}}, \nu_{\mathcal{B}}$	arités (déf. 1 p. 3)
$r_{\mathcal{A}}, r_{\mathcal{B}}$	rayons
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_{\mathcal{B}}, \mathcal{R}$	réseaux
$z \otimes z'$	multiplication coordonnée à coordonnée (p. 3)
$z_i, z \in \mathcal{R}$	$i^{\text{ème}}$ coordonnée d'un vecteur
\mathcal{R}^+	vecteurs à coordonnées > 0 de \mathcal{R} (déf. 10 p. 16)
$[m]$	parallélépipède rectangle de format $m \in \mathcal{R}^+$ (déf. 9 p. 15)
$\text{Diag}_{\mathcal{A}}(c)$	diagramme espace-temps de \mathcal{A} sur c (p. 3)
\equiv	relation d'isomorphie (p. 4)
$\Delta_{E,r}(\cdot)$	densité dans la classe E à rayon fixé r (déf. 2 p. 6)
AC	ensemble des automates cellulaires
\mathfrak{d}	distance de Cantor (p. 7)
$\mathcal{L}(\cdot)$	motifs simples (déf. 4 p. 9)
$\mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{U}$	sous-shifts (déf. 6 p. 10)
$\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$	sous-shifts par blocs (déf. 10 p. 16)
$\Omega_{\mathcal{A}}$	ensemble limite de \mathcal{A} (déf. 12 p. 20)
$\overrightarrow{\mathcal{P}}$	uniformisation d'une propriété \mathcal{P} (déf. 17 p. 23)
\sqsubseteq	relation de sous-automate (déf. 19 p. 26)
$\mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle}$	transformation syntaxique de groupage (déf. 21 p. 28)
\preceq_{\sqsubseteq}	relation de simulation associée à \sqsubseteq (déf. 22 p. 29)
$\trianglelefteq_{\varsigma}$	relation de coloriage (déf. 24 p. 32)
\mathcal{D}	dynamique (déf. 25 p. 32)
\mathcal{U}	ensemble des ensembles de configurations (p. 38)
$\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$	relation de quotient entre automates (déf. 34 p. 48)
$\sqsubseteq_{\triangleleft}$	relation de sous-automate d'un quotient (p. 50)
$\trianglelefteq_{\triangleleft}$	relation de quotient d'un sous-automate (p. 50)
ACc	ensemble des automates cellulaires captifs (déf. 35 p. 52)
\simeq_X	relation d'égalité induite sur X (prop. 17 p. 62)
$\preceq_{\mathcal{G}}$	relation de simulation généralisée (déf. 41 p. 86)
$\overrightarrow{d}_{\preceq, E}$	distance orientée pour \preceq dans E (p. 100)
\preceq_{\triangleleft}	relation de simulation associée à \triangleleft (déf. 39 p. 79)
$\preceq_{\trianglelefteq}$	relation de simulation associée à \trianglelefteq (déf. 39 p. 79)

$\rightarrow_{\mathcal{A}}, \xleftrightarrow{\mathcal{A}}$	relations de connexité sur $A^{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}}$ (p. 88)
$\rho_{\preceq}^{\uparrow}$	paramètre de hauteur dans \preceq (p. 100)
$\rho_{\circlearrowleft}, \rho_{\rightarrow\circlearrowleft}$	paramètres « nombre de cycles » (prop. 26 p. 89)
ρ_{dyn}	paramètre « dynamiques capturées » (prop. 27 p. 90)
$\rho_{\mathfrak{h}}$	paramètre de complexité de l'ensemble limite (prop. 28 p. 90)
$\mathbb{C}_{\mathbb{C}}(f)$	complexité de communication d'une fonction (déf. 44 p. 92)
$\mathbb{C}_{\mathbb{C}}^*(\mathcal{A})$	complexité de communication de \mathcal{A} (p. 93)
\ll, \succ	relation de domination et d'équivalence (déf. 45 p. 94)
$\check{\mathcal{F}}$	ensemble des \succ -classes de fonctions de \mathbb{N}_+ dans \mathbb{N}_+ (déf. 45 p. 94)
Bor, Lin	classes (pour \succ) des fonctions bornées et de Id (p. 94)
$\rho_{\mathbb{C}}$	paramètre de complexité de communication (déf. 45 p. 94)
$\text{Nb}_T(c), \text{Pos}_T(c)$	nombre et position des T -particules dans c (déf. 49 p. 114)
$\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$	version contrôlée de \mathcal{A} pour T (déf. 4.2.1 p. 118)
$c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}(\dots)$	propriété zig-zag de \mathcal{A} sur c (p. 122)

Chapitre 1

Un modèle : les automates cellulaires

The purpose of models is not to fit the data but to sharpen the questions.

Samuel Karlin — 11th R. A. Fisher Memorial Lecture

LES automates cellulaires constituent un modèle particulier de système dynamique propice à l'étude de la complexité en général —pour différentes acceptions du mot « complexité » issues de différentes disciplines. Ce modèle se caractérise, à tous les niveaux, par sa simplicité formelle que l'on peut résumer dans les propriétés suivantes : déterminisme, synchronisme, uniformité, localité et finitude. Cette « minimalité » fut une motivation centrale dans les travaux pionniers qui ont établi le modèle. Ainsi, nous nous efforçons de faire tout au long de ce chapitre le choix de la simplicité et de suivre les paradigmes du modèle dans tous les objets que nous définissons. En particulier, la définition d'automate cellulaire adoptée ici se limite aux agencements de cellules les plus simples (voir [81] pour une définition plus générale).

Comprendre les liens entre la représentation —objet syntaxique— et le comportement —système dynamique— des automates cellulaires constitue le cœur de la problématique du modèle. Nous adoptons successivement les deux points de vue dans ce chapitre. En plus des définitions et concepts classiques, nous introduisons un certain nombre d'outils, originaux pour certains, qui nous permettent dans la suite d'étudier les automates cellulaires aussi bien individuellement que collectivement. Il s'agit d'abord d'outils combinatoires appliqués aux représentations syntaxiques, puis d'outils topologiques issus de la théorie des systèmes dynamiques (notamment une adaptation de la classification de P. Kůrka), enfin, d'outils de nature algébrique fondés sur le formalisme du groupage de N. Ollinger. Nous mettons

également en évidence un lien nouveau entre les opérations de groupage et certains sous-espaces de configurations remarquables que l'on peut caractériser topologiquement.

Pour terminer, nous adoptons le point de vue de la calculabilité en rappelant un certain nombre de résultats importants que nous utilisons dans la suite.



Sommaire

1.1 Objets syntaxiques	2
1.1.1 Définitions	3
1.1.2 Transformations syntaxiques élémentaires	4
1.1.3 Énumération et densité	6
1.2 Systèmes dynamiques discrets	7
1.2.1 Espace des configurations	7
Topologie	7
Sous-espaces remarquables	10
Blocs, alphabets et changements d'échelle	14
1.2.2 Fonctions globales, propriétés globales	17
Caractérisation topologique	17
Propriétés dynamiques	18
1.3 Groupage et universalité	25
1.3.1 Structures spatio-temporelles	25
1.3.2 Transformations syntaxiques	28
1.3.3 Universalité intrinsèque	29
Exemples	30
Non-universalité	31
1.4 Dynamiques	31
1.4.1 Groupage et dynamiques	34
1.4.2 Universalité pour le calcul Turing	35
1.5 Décidabilité	36

1.1 Objets syntaxiques

On peut voir un automate cellulaire comme une collection de machines (ou cellules) agencées de façon régulière, dotées chacune d'une mémoire finie et qui mettent à jour leur état selon une règle déterministe commune, de manière synchrone, locale et uniforme. La description de l'automate cellulaire dans son ensemble se réduit donc à la description de l'agencement des cellules et au fonctionnement d'une cellule.

1.1.1 Définitions

Définition 1 (automate cellulaire — objet syntaxique). *Un automate cellulaire est un quadruplet $\mathcal{A} = (\mathcal{R}, V_{\mathcal{A}}, A, \delta_{\mathcal{A}})$ où*

- $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$, avec $d \in \mathbb{N}_+$, est le réseau de cellules[↗],
- $V_{\mathcal{A}} = (z_1, \dots, z_{|V_{\mathcal{A}}|})$ est un ensemble fini ordonné quelconque de vecteurs de \mathcal{R} formant le voisinage,
- A est un ensemble fini, l’alphabet ou ensemble d’états,
- $\delta_{\mathcal{A}} : A^{|V_{\mathcal{A}}|} \rightarrow A$ est la règle de transition locale.

On définit en outre $\nu_{\mathcal{A}}$, arité de \mathcal{A} , par $\nu_{\mathcal{A}} = |V_{\mathcal{A}}|$.

À titre d’exemple, on peut définir pour chaque vecteur $z \in \mathcal{R}$ et chaque alphabet A un automate cellulaire appelé *décalage* (ou *translation*) de vecteur z (*shift* en anglais) par $\sigma_z = (\mathcal{R}, \{z\}, A, \text{Id})$. Ces automates cellulaires particuliers jouent un rôle fondamental dans toute la suite.

Une *configuration* c de l’automate cellulaire \mathcal{A} est l’attribution à chaque cellule $z \in \mathcal{R}$ d’un état $c(z)$, formellement $c \in A^{\mathcal{R}}$. Étant donnée une configuration c_0 , l’application synchrone et uniforme de la règle de transition locale définit une nouvelle configuration c_1 par :

$$c_1(z) = \delta_{\mathcal{A}}(c_0(z + z_1), \dots, c_0(z + z_{\nu_{\mathcal{A}}})).$$

On appelle *fonction globale* cette action de l’automate cellulaire sur les configurations. On appelle en outre *diagramme espace-temps* la suite de configurations obtenue en itérant la fonction globale à partir d’une certaine configuration initiale. Formellement, un diagramme espace-temps pour un automate cellulaire \mathcal{A} est un élément de $(A^{\mathcal{R}})^{\mathbb{N}}$ (que l’on assimile à $A^{\mathcal{R} \times \mathbb{N}}$) et on note dans la suite $\text{Diag}_{\mathcal{A}}(c)$ le diagramme espace-temps obtenu par itérations de \mathcal{A} à partir de la configuration c . La figure 1.1 donne quelques exemples de diagrammes espace-temps d’automates cellulaires qui diffèrent seulement par leur règle de transition.

Dans toute la suite, lorsque le contexte n’est pas ambigu, la notation \mathcal{A} pour un automate cellulaire fait implicitement référence au quadruplet $(\mathcal{R}_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, A, \delta_{\mathcal{A}})$ mais aussi à la fonction globale associée sur les configurations. Par ailleurs, on travaille toujours à réseau fixé. Enfin, pour tout $d \in \mathbb{N}_+$, on note $+$ l’addition terme à terme dans \mathbb{Z}^d (comme ci-dessus) et \otimes la multiplication terme à terme dans \mathbb{Z}^d :

$$(a_1, \dots, a_d) \otimes (b_1, \dots, b_d) = (a_1 b_1, \dots, a_d b_d).$$

[↗]On peut en fait généraliser la notion de réseau aux graphes de Cayley (voir [81]). Nous faisons ici le choix de la simplicité en ne considérant que les \mathbb{Z}^d . On notera toutefois dans la suite que le choix du réseau (dans notre cas le choix de la dimension d) est déterminant pour certaines propriétés.

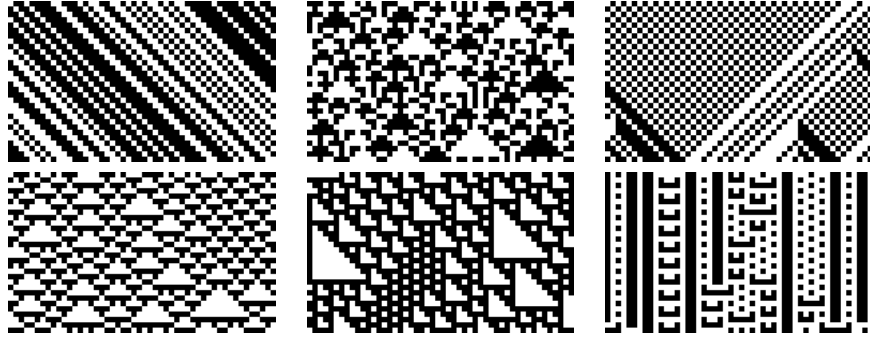


FIG. 1.1: Exemples de diagrammes espace-temps d'automates cellulaires ayant tous le même réseau $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$, les mêmes vecteurs de voisinage $\{-1, 0, 1\}$ et le même alphabet $\{\square, \blacksquare\}$. Le temps progresse de bas en haut.

1.1.2 Transformations syntaxiques élémentaires

Dans la définition 1, voisinage, alphabet et règle de transition locale sont arbitraires (dans la limite de la compatibilité du nombre d'arguments). Cependant, certaines transformations syntaxiques sont sans incidence sur le comportement global de l'automate cellulaire. Nous discutons ici des transformations les plus simples que nous utilisons abondamment dans toute la suite, le plus souvent de façon implicite.

Isomorphie L'alphabet est un ensemble fini quelconque, le seul paramètre important est sa cardinalité. Ainsi, le renommage des états ne change pas le comportement global d'un automate cellulaire dès lors que la règle de transition locale est changée en conséquence.

Formellement, on définit la relation d'isomorphie \equiv entre deux automates cellulaires \mathcal{A} et \mathcal{B} par

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \text{ et } \exists \phi : B \rightarrow A \text{ bijective telle que } \mathcal{A} \circ \bar{\phi} = \bar{\phi} \circ \mathcal{B},$$

où $\bar{\phi} : B^{\mathcal{R}_{\mathcal{B}}} \rightarrow A^{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}}$ désigne l'extension cellule à cellule de ϕ .

Travailler à isomorphie près[↗] n'élimine cependant pas un problème : on aimerait pouvoir manipuler des classes d'automates cellulaires comme si c'était des ensembles. Pour éviter des considérations ensemblistes totalement artificielles, on fixe un ensemble dénombrable $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots\}$ et on adopte la convention que tous les automates cellulaires considérés ont pour alphabet un sous-ensemble (fini) de \mathcal{S} . Dans ce cadre, lorsque le réseau \mathcal{R} est fixé,

[↗]C'est la convention adoptée dans la suite, sauf lorsque l'on aborde des problèmes de comptage de règles.

l'ensemble \mathcal{AC} des automates cellulaires est défini par :

$$\mathcal{AC} = \{(A, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}}) : A \subseteq \mathcal{S}, |A| < \infty, \\ V_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{R}, |V_{\mathcal{A}}| < \infty, \\ \delta_{\mathcal{A}} : A^{|V_{\mathcal{A}}|} \rightarrow A\}.$$

Pour toute propriété \mathcal{P} , on peut définir $\{\mathcal{A} \in \mathcal{AC} : \mathcal{A} \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$.

Voisinage L'ordre imposé sur le voisinage par la définition 1 sert uniquement à associer un vecteur de \mathcal{R} à chaque variable de la règle de transition locale. Dans la suite nous présentons la plupart du temps les voisinages comme des ensembles de vecteurs. À chaque fois l'automate cellulaire est pourtant bien défini, soit parce que la règle locale considérée ne dépend pas de l'ordre du voisinage (voir définition 32 page 45), soit parce que nous nous référons implicitement à l'ordre naturel sur \mathbb{Z} si \mathcal{R} est de dimension 1 et à un ordre « spirale » fixé sur \mathbb{Z}^d (par exemple $(0, 0) < (1, 0) < (1, 1) < (0, 1) < \dots$ si $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^2$).

Une autre transformation syntaxique sans incidence consiste à ajouter artificiellement des vecteurs au voisinage en même temps que des variables à la règle de transition locale : pour tout ensemble V' de vecteurs du réseau, on transforme $(\mathcal{R}, V_{\mathcal{A}}, A, \delta_{\mathcal{A}})$ en $(\mathcal{R}, V_{\mathcal{A}} \cdot V', A, \delta'_{\mathcal{A}})$ ² où $\delta'_{\mathcal{A}} : A^{\nu_{\mathcal{A}} + |V'|} \rightarrow A$ est définie par

$$\forall x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}} + |V'|} : \delta'_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}} + |V'|}) = \delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}}).$$

Pour un automate cellulaire \mathcal{A} , on note $r_{\mathcal{A}}$ (*rayon* de \mathcal{A}) la norme infinie de son plus grand vecteur de voisinage (*i.e.* $\max_{z \in V_{\mathcal{A}}} \|z\|_{\infty}$). La transformation syntaxique précédente nous permet de compléter le voisinage d'un automate cellulaire \mathcal{A} en ajoutant (si nécessaire) à son voisinage tous les vecteurs de norme infinie au plus $r_{\mathcal{A}}$. La plupart des automates considérés dans la suite ont un voisinage complété de cette façon.

La forme du voisinage nous renseigne sur l'ensemble des cellules qui sont *potentiellement* influencées par une cellule donnée. Après n itérations d'un automate \mathcal{A} , l'ensemble des positions relatives des cellules influençables par une cellule donnée est $\underbrace{V_{\mathcal{A}} + \dots + V_{\mathcal{A}}}_n$. On qualifie d'*omnidirectionnel* un

voisinage tel que la zone d'influence d'une cellule s'étend à tout le réseau avec les itérations de l'automate, formellement :

$$\forall z \in \mathcal{R}, \exists n \in \mathbb{N}_+ : z \in \underbrace{V_{\mathcal{A}} + \dots + V_{\mathcal{A}}}_n.$$

²Le symbole « \cdot » désigne ici la concaténation de listes ordonnées.

1.1.3 Énumération et densité

Une façon d'aborder la problématique générale des liens entre objets syntaxiques finis et dynamiques globales associées consiste à se demander quelles sont les propriétés globales typiques obtenues en générant aléatoirement des objets syntaxiques, ou dit autrement, quelles propriétés partage la majorité des automates cellulaires (comme objets syntaxiques).

La notion de « majorité » sur un ensemble infini dénombrable d'objets dépend de la façon dont on énumère ces objets. La définition suivante fournit une notion de mesure sur l'ensemble des automates cellulaires (ou un sous-ensemble) en fixant une énumération canonique (croissance du nombre d'états à rayon fixé) qui sera celle utilisée dans toute la suite.

Définition 2. Soit $E \subseteq AC$ et $\mathcal{P} \subseteq AC$, où E est vu comme une classe d'automates cellulaires et \mathcal{P} comme une propriété sur les automates cellulaires. \mathcal{P} est non-triviale sur E si $\mathcal{P} \cap E$ et $E \setminus \mathcal{P}$ sont non vides. Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$ et $r \in \mathbb{N}_+$ on note $E_{r,n}$ l'ensemble des automates cellulaires de E de rayon r sur l'ensemble d'états $\{s_1, \dots, s_n\}$. Lorsque la limite existe on définit la densité de \mathcal{P} (dans E et pour un rayon r) par

$$\Delta_{r,E}(\mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|E_{r,n} \cap \mathcal{P}|}{|E_{r,n}|}.$$

La définition ci-dessus permet d'envisager des propriétés et des classes d'automates cellulaires arbitraires, mais on l'utilisera avec des classes définies localement et des propriétés qui ont une interprétation de nature dynamique : on revient sur ce genre de questions au chapitre 2. Auparavant nous donnons ci-après une illustration de la définition 2 sur deux propriétés syntaxiques très simples mais qui seront abondamment utilisées dans toute la suite : celle d'état quiescent et celle d'état envahissant. Un *état quiescent* pour un automate cellulaire \mathcal{A} est un état $e \in A$ tel que $\delta_{\mathcal{A}}(e, \dots, e) = e$. Un *état envahissant*² pour \mathcal{A} est un état $\kappa \in A$ tel que $\kappa \in \{a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}}\} \Rightarrow \mathcal{A}(a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}}) = \kappa$.

²L'appellation envahissant n'est appropriée que si l'automate cellulaire considéré possède un voisinage omnidirectionnel.

Notons \mathcal{P}_{qu} la propriété de posséder au moins un état quiescent. Il n'est pas difficile de voir que pour tout réseau et tout rayon

$$\frac{|\mathbf{AC}_{r,n} \cap \mathcal{P}_{qu}|}{|\mathbf{AC}_{r,n}|} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

ainsi $\Delta_{r,AC}(\mathcal{P}_{qu}) = 1 - \frac{1}{e}$.

En notant \mathcal{P}_{env} la propriété de posséder au moins un état envahissant, on vérifie facilement que

$$\frac{|\mathbf{AC}_{r,n} \cap \mathcal{P}_{env}|}{|\mathbf{AC}_{r,n}|} \leq n \left(\frac{1}{n}\right)^{n^{2r-1}},$$

donc $\Delta_{r,AC}(\mathcal{P}_{env}) = 0$ dès que $r > 0$.

1.2 Systèmes dynamiques discrets

Un système dynamique discret est essentiellement la donnée d'un espace —souvent appelé *espace des phases*— qui représente l'ensemble des états possibles du système, et d'une fonction sur cet espace —souvent appelée *loi d'évolution*— qui décrit comment le système passe d'un état à l'état suivant.

Nous étudions ici les automates cellulaires comme des systèmes dynamiques discrets particuliers. Cela consiste à voir un automate cellulaire sous l'angle de sa fonction globale agissant sur les configurations vues comme des points d'un certain espace.

1.2.1 Espace des configurations

L'ensemble des configurations d'un automate cellulaire \mathcal{A} est $A^{\mathcal{R}_A}$, l'ensemble des fonctions de \mathcal{R}_A dans A . Il est de cardinal 2^{\aleph_0} (si $|A| > 1$) mais nous allons souvent l'appréhender à travers des objets finis ou dénombrables (motifs, langages,...) à la mesure de l'action intrinsèquement finitiste des automates cellulaires.

Topologie

L'ensemble des configurations peut être muni de la topologie produit (sur le réseau) de la topologie discrète sur l'alphabet, appelée dans la littérature *topologie de Cantor*. Cette topologie est métrisable, par exemple par la distance[↗]

$$\mathfrak{d}(c, c') = 2^{-\min\{\|z\|_\infty : c(z) \neq c'(z)\}}.$$

[↗]La définition de cette distance est indépendante de l'alphabet (pour être précis elle ne dépend que de la relation d'égalité sur l'alphabet), ce qui justifie que l'on utilise la même notation quel que soit l'alphabet dans la suite.

Le théorème de Tychonoff affirme qu'un produit quelconque d'espaces compacts est compact. Il est équivalent à l'axiome du choix. La proposition 1 ci-dessous, qui découle immédiatement de ce théorème, est quant à elle prouvable dans la théorie de Zermelo-Fraenkel et repose essentiellement sur une version faible du lemme de König. Dans la suite, chaque fois qu'un argument topologique lié à la compacité de l'espace des configurations est utilisé, il peut essentiellement être remplacé par le procédé d'extraction donné dans cette preuve. L'utilisation d'outils topologiques, permettant souvent des preuves efficaces et élégantes, ne doit donc pas masquer la nature profondément combinatoire des objets sous-jacents. On notera cependant que, ce procédé étant non constructif, il laisse souvent place à des questions indécidables (cf. section 1.5).

Proposition 1. *Pour tout alphabet A , l'espace métrique $(A^{\mathcal{R}}, \mathfrak{d})$ est compact.*

Démonstration. On numérote les sommets du réseau par $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u = u_1 \dots u_k \in A^k$, on définit

$$M_u = \{c \in A^{\mathcal{R}} : c(\eta(i)) = u_i, \forall 1 \leq i \leq k\}$$

avec la convention $M_\epsilon = A^{\mathcal{R}}$. Pour tout $u \in A^*$, les $M_{u\alpha}$ avec $\alpha \in A$ forment une partition de M_u .

Soit (c_i) une suite de configurations. Parmi les ensembles M_α (où $\alpha \in A$), on peut en choisir un, disons M_{α_0} , tel que $I_0 = \{i : c_i \in M_{\alpha_0}\}$ est infini (car les M_α sont en nombre fini). On peut itérer ce choix : si on a défini I_k et $u \in A^*$ tels que $I_k = \{i : c_i \in M_u\}$ est infini, alors il existe $\alpha_{k+1} \in A$ tel que $I_{k+1} = \{i : c_i \in M_{u\alpha_{k+1}}\}$ est infini.

On extrait alors la sous-suite (c_{i_k}) où

$$\begin{aligned} i_0 &= \min I_0 \\ i_{k+1} &= \min I_{k+1} \setminus \{i_0, \dots, i_k\} \end{aligned}$$

Par définition de \mathfrak{d} et par construction, cette suite converge vers la configuration c telle que $c(\eta(k)) = \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. \square

La distance \mathfrak{d} a l'inconvénient de ne pas être uniforme : elle repose sur le choix arbitraire d'une cellule du réseau comme « origine ». On peut pour s'en affranchir, et selon le phénomène que l'on souhaite étudier, munir l'espace de topologies plus faibles qui reposent sur des pseudo-distances. La plus connue est certainement la pseudo-distance dite de Besicovitch [10], mais l'on peut citer également l'approche algorithmique proposée par J. Cervelle [12].

Notre choix dans toute la suite, et sauf mention contraire, est de toujours utiliser la topologie de Cantor (pour ses fortes propriétés) tout en cherchant

à manipuler des objets qui ne privilégient aucune cellule du réseau.

La preuve de la proposition 1 repose sur les ensembles M_u . Les ensembles de ce type (appelés *cylindres*) jouent un rôle central dans la topologie de l'espace et dans la dynamique des automates cellulaires.

Définition 3 (cylindre). *Un cylindre f pour un automate cellulaire \mathcal{A} est une configuration partielle à support F fini. De façon équivalente, un cylindre peut être vu² comme l'ensemble des configurations c telles que $c \upharpoonright F = f$.*

Il est facile de voir que les cylindres, vus comme des ensembles, sont des ouverts fermés de $(A^{\mathcal{R}}, \mathfrak{d})$ et qu'ils forment une base topologique de cet espace (les boules sont des cylindres particuliers).

On peut naturellement définir l'action d'un automate cellulaire \mathcal{A} sur les cylindres comme suit. Étant donné un cylindre f de support F , on définit le cylindre image $f' = \mathcal{A}(f)$ de support F' (éventuellement vide) par

$$F' = \{z \in \mathcal{R} : \forall v \in V_{\mathcal{A}}, v + z \in F\},$$

$$f'(z) = \delta_{\mathcal{A}}(z + v_1, \dots, z + v_{\nu_{\mathcal{A}}}), \forall z \in F',$$

où $V_{\mathcal{A}} = (v_1, \dots, v_{\nu_{\mathcal{A}}})$.

Dans la suite et sauf mention contraire, nous considérons uniquement les cylindres dont le support est connexe et de forme parallélépipédique rectangle. Formellement, si \mathcal{R}^+ désigne l'ensemble des vecteurs à coordonnées strictement positives de \mathcal{R} ($\mathcal{R}^+ = \mathbb{N}_+^d$ si $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$), pour tout $m \in \mathcal{R}^+$ avec $m = (m_1, \dots, m_d)$, on note $[m]$ la partie de \mathcal{R} définie par :

$$[m] = \{(x_1, \dots, x_d) : 0 \leq x_i < m_i\}.$$

Un cylindre est par définition associé à une région fixée du réseau. La notion de *motif* définie ci-dessous est alors obtenue en quotientant l'ensemble des cylindres par la relation d'égalité à translation du support près.

Définition 4 (motif). *Un motif est une classe d'équivalence de cylindres pour la relation $=_C$ définie sur toute paire de cylindres, f de support F et g de support G , par*

$$f =_C g \Leftrightarrow \exists z_0 \in \mathcal{R} : f = T_{z_0}(g),$$

où $T_{z_0}(g)$ désigne le cylindre de support $G' = \{z_0 + z : z \in G\}$ qui vérifie, pour tout $z \in G'$, l'égalité $(T_{z_0}(g))(z) = g(z - z_0)$. La taille d'un motif est la taille du support d'un représentant de la classe. Par abus de langage, on dira qu'un motif u apparaît dans une configuration c si c appartient à l'un des cylindres de u . Un motif est simple si le support de ses représentants est de la forme $[m]$ pour $m \in \mathcal{R}^+$. On note $\mathcal{L}(c)$ l'ensemble des motifs simples apparaissant dans c . Enfin, pour $m \in \mathcal{R}^+$, on note $\mathcal{L}_m(c)$ l'ensemble des motifs de support $[m]$ apparaissant dans c .

²C'est le point de vue adopté dans la suite sauf mention contraire.

Quand le réseau est \mathbb{Z} , un motif simple est un mot sur l'alphabet de l'automate cellulaire. Dans ce cas $\mathcal{L}(c)$ désigne un *langage* au sens usuel. Par analogie, on utilisera parfois les termes *mot* et *langage* pour un réseau quelconque².

L'action des automates cellulaires sur les motifs découle naturellement de leur action sur les cylindres par commutation avec les translations. On utilisera encore la notation \mathcal{A} pour désigner l'action de \mathcal{A} sur $\mathcal{L}(A^{\mathcal{R}})$.

Sous-espaces remarquables

Dans la littérature, certains types particuliers de configurations sont souvent considérés : les configurations périodiques, ultimement périodiques ou finies (ces dernières ne sont qu'un type particulier de configurations ultimement périodiques). Elles ont le double avantage d'être chacune finiment représentables et de former un ensemble dense dans l'espace pour \mathfrak{D} , donc représentatif en un certain sens de l'espace tout entier.

Définition 5. *Lorsque $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$, une configuration c est périodique s'il existe d vecteurs p_1, \dots, p_d indépendants de \mathcal{R} tels que*

$$\forall i, 1 \leq i \leq d, \forall z \in \mathcal{R} : c(z + p_i) = c(z).$$

Une configuration d est ultimement périodique s'il existe une configuration c périodique qui ne diffère de d qu'en un nombre fini de cellules du réseau :

$$\exists K \in \mathbb{N}_+, \forall z \in \mathcal{R}, \|z\|_{\infty} \geq K \Rightarrow c(z) = d(z).$$

La définition qui suit formalise une notion d'ensembles de configurations particuliers appelés *sous-shifts*. Les sous-shifts sont les objets centraux d'un domaine d'étude des systèmes dynamiques appelé *dynamique symbolique* fondé notamment par M. Morse et G. A. Hedlund [68] (voir [50] pour une introduction approfondie au domaine). Bien que leur utilisation ne soit pas toujours explicitée dans la littérature³, on verra par la suite le rôle qu'ils jouent dans l'étude des automates cellulaires.

Définition 6 (sous-shift). *Un sous-shift \mathfrak{S} est un ensemble fermé de $A^{\mathcal{R}}$ stable par translation : $\forall z \in \mathcal{R}, \sigma_z(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{S}$.*

L'espace $A^{\mathcal{R}}$ tout entier constitue un sous-shift. Plus généralement, si $Q \subseteq A$, $Q^{\mathcal{R}}$ est un sous-shift que l'on appelle dans la suite *sous-shift complet* (*full-shift* en anglais).

²On prendra garde toutefois au fait que l'ensemble des motifs simples ne constitue plus alors un monoïde.

³M. Boyle et B. Kitchens, dans l'introduction de [9], déplorent cette situation sur un ton ironique : « We work in the setting of subshifts of finite type, and to explain this to some c.a. workers, we offer a few words from the pulpit. [...] ».

Comme le montre la proposition suivante, un sous-shift \mathfrak{S} est caractérisé par son langage $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$. Cette caractérisation sert souvent de définition[↗].

Proposition 2. *Étant donné un ensemble de configurations \mathfrak{S} , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i). \mathfrak{S} est un sous-shift
- (ii). $\exists L \subseteq \mathcal{L}(A^{\mathbb{R}})$ tel que $\mathfrak{S} = \{c \in A^{\mathbb{R}} : \mathcal{L}(c) \subseteq L\}$
- (iii). $\exists L \subseteq \mathcal{L}(A^{\mathbb{R}})$ tel que $\mathfrak{S} = \{c \in A^{\mathbb{R}} : \mathcal{L}(c) \cap L = \emptyset\}$
- (iv). $\mathfrak{S} = \{c \in A^{\mathbb{R}} : \mathcal{L}(c) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{S})\}$

Démonstration. Les preuves des implications (iv) \Rightarrow (iii) et (iii) \Rightarrow (ii) sont immédiates.

Soit $L \subseteq \mathcal{L}(A^{\mathbb{R}})$ et $X = \{c \in A^{\mathbb{R}} : \mathcal{L}(c) \subseteq L\}$. Alors X est clairement invariant par translations et c'est un fermé : en effet, tout motif apparaissant dans une configuration x limite d'une suite (x_n) de configurations de X apparaît nécessairement dans une configuration x_n suffisamment proche de x au sens de \mathfrak{d} . Ce qui prouve (ii) \Rightarrow (i).

Soit \mathfrak{S} un sous-shift et soit $X = \{c \in A^{\mathbb{R}} : \mathcal{L}(c) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{S})\}$. Il est clair que $\mathfrak{S} \subseteq X$. Réciproquement, considérons une configuration $x \in X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, la boule $B_n(x)$ de centre x et de rayon 2^{-n} contient une configuration $c_n \in \mathfrak{S}$ (car la classe du cylindre $B_n(x)$ constitue un motif qui apparaît dans \mathfrak{S} et \mathfrak{S} est invariant par translation). La suite (c_n) ainsi définie converge vers x , or \mathfrak{S} est fermé, donc $x \in \mathfrak{S}$ et finalement $\mathfrak{S} = X$. Ce qui prouve (i) \Rightarrow (iv). \square

Corollaire 1. *Soient \mathfrak{S} et \mathfrak{T} deux sous-shifts, alors $\mathfrak{S} = \mathfrak{T} \Leftrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{S}) = \mathcal{L}(\mathfrak{T})$.*

On peut donc confondre un sous-shift avec son langage. Par contre tout langage n'est pas le langage d'un sous-shift. Ceux-ci sont caractérisés par deux conditions (trivialement nécessaires) : stabilité par sous-motifs et extensibilité dans toutes les directions. La condition d'extensibilité est une condition très faible. En particulier elle ne garantit pas que deux motifs quelconques du langage apparaissent en même temps dans une configuration du sous-shift.

| Par exemple, le sous-shift $\mathfrak{S} = \{\omega 0^\omega, \omega 1^\omega\}$ est tel que 0 et 1 n'apparaissent
| simultanément dans aucun motif de $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$.

L'existence pour toute paire de motifs d'une configuration dans laquelle ils apparaissent tous les deux, propriété appelée *irréductibilité*, est équivalente à l'existence dans le sous-shift considéré d'un certain type configurations appelées dans la littérature configurations *univers*[↖] : étant donné un

[↗]Cette vision est en particulier adoptée dans le domaine du codage symbolique [4] ou un sous-shift peut être vu comme l'ensemble des configurations qui vérifient certaines contraintes (*i.e.* qui évitent un ensemble de mots interdits).

[↖]Ces configurations sont aussi parfois appelées configurations *récurrentes* ou *transitives*.

sous-shift \mathfrak{S} , une configuration $c \in \mathfrak{S}$ est univers pour \mathfrak{S} si $\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(\mathfrak{S})$ (donc en particulier $c \in \mathfrak{S}$). Dans la suite, un sous-shift \mathfrak{S} sera dit irréductible s'il contient une configuration univers². Dit autrement, un sous-shift \mathfrak{S} est irréductible si et seulement si c'est le sous-shift engendré par une configuration c , formellement $\mathfrak{S} = \overline{\{\sigma_z(c) : z \in \mathcal{R}\}}$ (où \overline{X} désigne la clôture topologique de X).

Dans l'exemple ci-dessus, on constate que le sous-shift \mathfrak{S} est l'union de 2 sous-shifts disjoints ($\{\omega 0^\omega\}$ et $\{\omega 1^\omega\}$). De façon générale, un sous-shift irréductible ne peut pas s'écrire comme l'union de deux sous-shifts disjoints³.

En effet, soit \mathfrak{S} un sous-shift tel que $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 \cup \mathfrak{S}_1$ où \mathfrak{S}_0 et \mathfrak{S}_1 sont des sous-shifts disjoints. Si c_u est une configuration univers pour \mathfrak{S} alors $c_u \in \mathfrak{S}_i$ pour un certain $i \in \{0, 1\}$. Donc $\mathcal{L}(\mathfrak{S}_i) = \mathcal{L}(\mathfrak{S})$. Le corollaire 1 permet de conclure que $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}$ et donc \mathfrak{S}_{1-i} est vide. La réciproque est fautive : le sous-shift $\mathfrak{S} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \cup \{0, 3\}^{\mathbb{Z}}$ ne peut pas être écrit comme l'union de deux sous-shifts disjoints mais il n'est pas irréductible.

L'existence d'une configuration univers pour un sous-shift confère à celui-ci une certaine uniformité comme le montre le lemme suivant qui sera utilisé fréquemment dans toute la suite. Cette propriété justifie la notion d'irréductibilité introduite ci-dessus.

Lemme 1 (lemme d'uniformité). *Soient A un alphabet, \mathcal{R} un réseau, \mathfrak{S} un sous-shift de $A^{\mathcal{R}}$ et \mathcal{E} un ensemble. Soit $f : A^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ une fonction conservative à la limite (i.e., si $e \in f(c_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}_+$ et $c = \lim_{i \rightarrow \infty} c_i$ alors $e \in f(c)$). Si de plus \mathfrak{S} est irréductible et f est invariante par décalage ($f(c) = f(\sigma_z(c))$ pour tout $z \in \mathcal{R}$), alors \mathfrak{S} et f vérifient la propriété suivante :*

$$\text{si } \forall c \in A^{\mathcal{R}}, f(c) \neq \emptyset \text{ alors } \bigcap_{c \in A^{\mathcal{R}}} f(c) \neq \emptyset.$$

Démonstration. On considère une configuration c_0 univers pour \mathfrak{S} . Pour toute configuration $c \in \mathfrak{S}$, il existe une suite $(c_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ de configurations de \mathfrak{S} qui converge vers c et telle que $f(c_i) = f(c_0)$ pour tout $i \in \mathbb{N}_+$ (on choisit c_i de la forme $\sigma_z(c_0)$ et cela provient de l'invariance par décalages de f). Le lemme en découle car si $e_0 \in f(c_0)$, on a alors $e_0 \in f(c)$ pour toute configuration $c \in \mathfrak{S}$ par la propriété de conservation à la limite. \square

L'image d'un sous-shift par un automate cellulaire est un sous-shift (c'est une conséquence immédiate de la proposition 4 de la section 1.2.2) et l'action

²Dans [50] où le formalisme est réduit au cas unidimensionnel, l'irréductibilité est une notion plus forte qui correspond à l'existence d'une configuration fortement transitive (i.e. une configuration telle que tout motif apparaît à droite et à gauche de toute position).

³Cela ne veut pas dire qu'un sous-shift irréductible ne contient aucun sous-shift propre. Cette propriété plus forte, appelée *minimalité*, est étroitement liée à un certain type de configurations univers (souvent appelées configurations uniformément récurrentes) et a été beaucoup étudiée dès la naissance de la dynamique symbolique (voir [67] par exemple).

d'un automate cellulaire sur les sous-shifts le caractérise complètement. En revanche il est inutile de considérer tous les sous-shifts de l'espace pour connaître un automate cellulaire.

Les sous-shifts dont les configurations sont caractérisées par leurs motifs jusqu'à une taille bornée, appelés sous-shifts *de type fini*, constituent une famille très étudiée². Ils interviennent naturellement dans le cadre des automates cellulaires car ils constituent les sous-shifts dont l'appartenance peut être vérifiée localement, *i.e.* par un automate cellulaire de rayon suffisant.

Définition 7. *Un sous-shift \mathfrak{S} est de type fini s'il existe $m \in \mathcal{R}^+$ tel que*

$$x \in \mathfrak{S} \Leftrightarrow \mathcal{L}_m(x) \subseteq \mathcal{L}_m(\mathfrak{S}).$$

On dit alors que \mathfrak{S} est d'ouverture m .

Remarquons qu'un sous-shift de type fini d'ouverture $(1, \dots, 1)$ est toujours un sous-shift complet.

L'image d'un sous-shift de type fini par un automate cellulaire n'est pas nécessairement de type fini comme le montre l'exemple suivant.

Soit \mathcal{A} l'automate cellulaire de réseau \mathbb{Z} , d'alphabet $A = \{0, 1, 2\}$ et de rayon 1 défini par

$$\delta_{\mathcal{A}}(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } xyz = 021 \text{ ou } xyz = 120, \\ 0 & \text{si } xyz = 020, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons le sous-shift \mathfrak{S} de type fini et d'ouverture 3 caractérisé par $\mathcal{L}_3(\mathfrak{S}) = \{202, 212, 021, 120, 020\}$ et soit $\mathfrak{T} = \mathcal{A}(\mathfrak{S})$. \mathfrak{T} n'est pas de type fini. En effet, en supposant que c'est un sous-shift de type fini et d'ouverture n , alors le mot $0(21)^{2n+1}20$ est dans \mathfrak{T} car tous ses sous-mots de taille n y sont. Il y a contradiction car $0(21)^{2n+1}20 \notin \mathcal{L}(\mathcal{A}(\mathfrak{S}))$.

La classe naturelle de sous-shifts sur laquelle va s'appuyer notre étude des automates cellulaires est celle des sous-shifts *sofiques* introduite par B. Weiss [89]. Le mot « sofique » (*sofic* en anglais), inventé par B. Weiss, est dérivé du mot hébreu signifiant « fini ». En effet, ces sous-shifts, à l'instar des sous-shifts de type fini et des configurations ultimement périodiques, sont tous finiment représentables. Nous donnons ci-dessous une définition des sous-shifts sofiques dans le formalisme des automates cellulaires équivalente à celle de B. Weiss.

²La première étude explicite de cette famille est due à W. Parry [76] qui les présente comme les supports des mesures de Markov. On trouve d'ailleurs parfois dans la littérature la terminologie *Markov shift* pour désigner essentiellement la même famille (précisément les sous-shifts de type fini d'ouverture 2, qui sont aussi appelés *1-step shift*, *vertex-shift* ou *edge-shift* dans [50]). Ils constituent aujourd'hui un outil central de la théorie du codage symbolique et sont implicitement présents dans un grand nombre de dispositifs concrets de transmission ou de stockage d'informations.

Définition 8. *Un sous-shift \mathfrak{T} est sofique si c'est l'image par un automate cellulaire d'un sous-shift de type fini.*

Un sous-shift de type fini est sofique et l'image d'un sous-shift sofique par un automate cellulaire est sofique. Remarquons à ce point que l'espace tout entier constitue un sous-shift de type fini. Ainsi, pour tout entier n , l'image de l'espace par n itérations d'un automate cellulaire est un sous-shift sofique.

Par ailleurs, le sous-shift \mathfrak{S} engendré par une configuration ultimement périodique c est sofique, et de type fini si et seulement si c est périodique.

Il est d'abord clair que \mathfrak{S} est de type fini si c est périodique (il suffit de contrôler les motifs qui contiennent une période entière plus une cellule dans chaque direction). On se convainc ensuite facilement que \mathfrak{S} est sofique si c est ultimement périodique : en ajoutant à chaque cellule une information donnant pour chaque vecteur de base du réseau la position relative ($<$, $>$ ou $=$) de la zone non périodique, on obtient un sous-shift de type fini dont l'image par un automate cellulaire qui efface l'information supplémentaire est \mathfrak{S} . Enfin, si c n'est pas périodique, il est impossible de vérifier par contraintes locales qu'une seule zone non périodique est présente : si les contraintes locales permettent l'existence d'une zone non périodique au milieu du motif périodique, alors elles permettent l'existence d'une infinité de zones non périodiques pourvu qu'elles soient suffisamment espacées. On en conclut que, dans le cas où c n'est pas périodique, \mathfrak{S} n'est pas de type fini.

En fait, dans le cas de la dimension 1, les sous-shifts soifiques sont caractérisés par leur langage.

Théorème 1 (B. Weiss, [89]). *Lorsque $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$, un sous-shift \mathfrak{S} est sofique si et seulement si $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ est un langage rationnel.*

La preuve est essentiellement la même que celle qui montre que les langages rationnels sont les images par morphismes des langages locaux [72].

Blocs, alphabets et changements d'échelle

Dans la littérature [90, 80, 8], les sous-shifts de dimension 1 du type ${}^\omega B^\omega$ ou B est un ensemble fini de mots ont été étudiés sous le nom de *renewal systems*, *loop systems* ou sous-shifts associés à des *automates fleurs* (*flower automata*) avec pour principale problématique de préciser leurs liens avec les sous-shifts de type fini.

Nous nous restreignons ici au cas où les mots de B sont tous de même taille. Dans ce cas, le sous-shift obtenu peut être vu, à changement d'échelle près, comme un sous-shift complet d'alphabet B . Cette opération de changement d'échelle, consistant à voir des blocs de cellules adjacentes comme des macro-cellules unitaires, est omniprésente dans la littérature. Elle correspond à une façon naturelle d'injecter, dans un espace donné, un espace de

plus gros alphabet. Elle est aussi à la base du groupage que nous présentons en détail en section 1.3.

Nous définissons d'abord formellement en toute dimension cette opération de changement d'échelle en nous restreignant au cas où les macro-cellules sont de forme parallélépipédique rectangle[†]. Formellement, pour $m \in \mathcal{R}^+$, une macro-cellule de format m est un ensemble de cellules de \mathcal{R} de la forme $z \otimes m + [m]$ pour $z \in \mathcal{R}$. Si l'ensemble d'états des cellules est A , l'ensemble d'états des macro-cellules est $A^{[m]}$ (ensemble des fonctions de $[m]$ dans A).

Définition 9. Soient $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$ un réseau et A un alphabet fixés. Étant donné un vecteur $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathcal{R}^+$, on définit la bijection continue notée[‡] \mathbf{o}_m , de l'espace $(A^{[m]})^{\mathcal{R}}$ dans l'espace $A^{\mathcal{R}}$, par (voir figure 1.2) :

$$\forall x \in \mathcal{R}, (\mathbf{o}_m(c))(x) = (c(y))(\epsilon),$$

où $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{R}$, $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathcal{R}$ et $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_d) \in [m]$ vérifient $x_i = m_i y_i + \epsilon_i$ pour tout i , $1 \leq i \leq d$ (y et ϵ sont respectivement le quotient et le reste de la division de x par m).

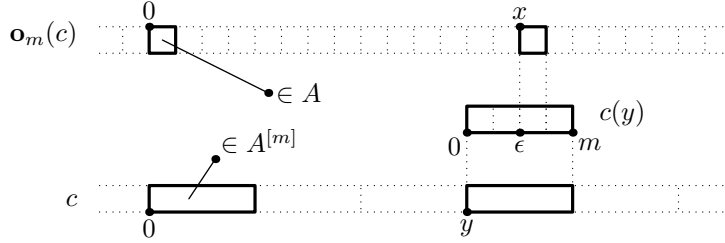


FIG. 1.2: Changement d'échelle en dimension 1 (ici $m = 4$ et $x = 14$ donc $y = 3$ et $\epsilon = 2$).

On remarque que \mathbf{o}_m utilise implicitement un alignement de l'origine du réseau des macro-cellules avec l'origine du réseau des cellules : ce choix est arbitraire mais nécessaire. De plus, \mathbf{o}_m vérifie seulement une version faible de commutation avec les translations :

$$\forall c \in (A^{[m]})^{\mathcal{R}}, \forall z \in \mathcal{R}, \mathbf{o}_m(\sigma_z(c)) = \sigma_{m \otimes z}(\mathbf{o}_m(c)).$$

Dit autrement, si $\mathfrak{B} \subseteq A^{[m]}$, $\mathbf{o}_m(\mathfrak{B}^{\mathcal{R}})$ n'est en général pas un sous-shift. Dans la suite, lorsque le réseau est \mathbb{Z} , on assimile $A^{[m]}$ à A^m pour alléger les notations.

[†]Se placer dans un cadre plus général alourdirait de façon conséquente les notations et nous n'avons à ce jour aucun exemple qui ne pourrait pas se ramener au cas parallélépipédique rectangle.

[‡]On reprend ici la notation de [73], le « o » vient de « ouverture », car \mathbf{o}_m « ouvre » les macro-cellules pour en extraire les cellules simples.

La définition suivante introduit une famille de sous-shifts qui constituent les sous-espaces naturels sur lesquels appliquer des changements d'échelle au sens donné ci-dessus.

Définition 10. Soient \mathcal{R} un réseau et A un alphabet fixés. Soit $m \in \mathcal{R}^+$. Si $\mathfrak{B} \subseteq A^{[m]}$ est un ensemble de motifs (appelés aussi blocs) de support m , on définit le sous-shift par blocs $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ comme la clôture par translations de l'ensemble $\mathfrak{o}_m(\mathfrak{B}^{\mathcal{R}}) : \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}} = \{\sigma_z(c) : z \in [m], c \in \mathfrak{o}_m(\mathfrak{B}^{\mathcal{R}})\}$.

On vérifie aisément que $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ est un sous-shift (c'est un ensemble clôt par translation et c'est aussi une union finie de fermés). Il est toujours irréductible cependant il n'est pas nécessairement de type fini.

Considérons, dans le cas du réseau \mathbb{Z} et d'un alphabet $A = \{0, 1\}$, l'ensemble de mots $\mathfrak{B} = \{00, 10\}$ et le sous-shift par blocs $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$. Si $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ était de type fini et d'ouverture n alors on aurait en particulier $10^{2n}1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$ (car tous les sous-mots de longueurs n de ce mot sont dans $\mathcal{L}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$), ce qui est impossible car il est clair que deux occurrences du symbole « 1 » sont toujours séparées par un nombre impair de symboles « 0 » dans le sous-shift par blocs $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$.

Intuitivement, la lecture ou le décodage d'une configuration d'un sous-shift par blocs $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ nécessite une information de synchronisation maintenue tout au long de la configuration. L'exemple précédent montre que, en l'absence d'une telle information, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ n'est pas de type fini, autrement dit l'appartenance à $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ ne peut pas être décidée de façon purement locale.

La proposition suivante montre cependant qu'un sous-shift par blocs est toujours sofique. La preuve consiste à construire un sous-shift de type fini en introduisant dans $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ des informations de synchronisation explicites qui peuvent ensuite être effacées localement.

Proposition 3. *Tout sous-shift par bloc $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ est sofique.*

Démonstration. On note A l'alphabet de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ et m le format des blocs de \mathfrak{B} de sorte que $\mathfrak{B} \subseteq A^{[m]}$. On définit alors \mathfrak{B}' comme l'ensemble des blocs b' de support m sur l'alphabet $A \times \{0, 1\}$ définis de la façon suivante :

$$\forall b \in \mathfrak{B}, \forall z \in [m], b'(z) = \begin{cases} (b(z), 1) & \text{si } z = (0, \dots, 0) \\ (b(z), 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit \mathcal{A} un automate cellulaire d'alphabet $A' = A \cup A \times \{0, 1\}$ qui change cellule à cellule tout état de la forme $(a, x) \in A \times \{0, 1\}$ en a . \mathcal{A} vérifie par construction :

$$\mathcal{A}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}'}) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}.$$

Il suffit pour conclure de montrer que $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}'}$ est de type fini. Nous montrons en fait que $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}'}$ est de type fini et d'ouverture m . En effet, si $c \in (A')^{\mathcal{R}}$ est telle que $\mathcal{L}_m(c) \subseteq \mathcal{L}_m(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}'})$, on vérifie qu'elle possède les 2 propriétés suivantes :

(i). $\exists z \in \mathcal{R}, \forall z' \in \mathcal{R} : c(z') \in A \times \{1\} \Leftrightarrow z_i - z'_i = 0 \pmod{m_i}, \forall i, 1 \leq i \leq d$
 (où $z = (z_1, \dots, z_d)$, $z' = (z'_1, \dots, z'_d)$ et $m = (m_1, \dots, m_d)$ avec d la dimension du réseau)

(ii). si $z' \in \mathcal{R}$ est tel que $c(z') \in A \times \{1\}$, alors $c \upharpoonright (z' + [m]) \in \mathfrak{B}'$.

On a alors $\sigma_{-z}(c) \in \mathfrak{o}_m((\mathfrak{B}')^{\mathcal{R}})$ donc, par définition, $c \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}'}$. \square

1.2.2 Fonctions globales, propriétés globales

En s'appuyant sur les propriétés de l'espace des configurations, on peut caractériser les automates cellulaires par leur fonction globale. On peut alors étudier des propriétés de nature globale, c'est-à-dire des propriétés qui caractérisent l'action de la fonction globale sur les configurations vues comme des points de l'espace.

Caractérisation topologique

La caractérisation topologique des automates cellulaires donnée dans la proposition qui suit est due à M. L. Curtis, G. A. Hedlund et R. C. Lyndon (voir [31] pour sa formulation en dimension 1). Ce résultat repose essentiellement sur la compacité de l'espace des configurations.

Proposition 4. *Une fonction sur $A^{\mathcal{R}}$ est continue et commute avec les translations si et seulement si c'est la fonction globale d'un automate cellulaire.*

Démonstration. La fonction globale d'un automate cellulaire \mathcal{A} commute avec les translations et elle est continue (en effet, pour que $\mathfrak{d}(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) \leq \epsilon$ il suffit que $\mathfrak{d}(x, y) \leq \epsilon \cdot 2^{-r_{\mathcal{A}}}$).

Réciproquement, par compacité (propriété 1), une fonction F continue sur $A^{\mathcal{R}}$ est uniformément continue (théorème de Heine). Il existe donc $r_F \in \mathbb{N}_+$ tel que $\forall x, y \in A^{\mathcal{R}} : \mathfrak{d}(x, y) \leq r_F \Rightarrow \mathfrak{d}(F(x), F(y)) \leq \frac{1}{2}$. Soient B_{r_F} la boule de rayon r_F dans \mathcal{R} centrée en 0, $\nu_F = |B_{r_F}|$ et ι une bijection de B_{r_F} dans $\{1, \dots, \nu_F\}$. On définit un automate cellulaire \mathcal{A} de voisinage B_{r_F} (ordonné selon ι) et dont la fonction locale vérifie, pour tout $a : \{1, \dots, \nu_f\} \rightarrow A$,

$$\delta_{\mathcal{A}}(a(1), \dots, a(\nu_F)) = (F(x))(0) \text{ pour } x \text{ tel que } x \upharpoonright B_{r_F} = a \circ \iota.$$

\mathcal{A} est bien défini d'après ce qui précède et F , si elle commute avec les translations, est la fonction globale de \mathcal{A} . \square

Ce théorème fonde l'étude des automates cellulaires comme systèmes dynamiques discrets particuliers (espace des phases compact, loi d'évolution continue et uniforme)².

²En fait l'espace associé à un automate cellulaire possède plusieurs autres propriétés topologiques remarquables (voir [44]).

Définition 11 (automate cellulaire — système dynamique). *Un automate cellulaire d'alphabet A et de dimension d est un endomorphisme de la structure $(A^{\mathbb{Z}^d}; \sigma_{z_1}, \dots, \sigma_{z_d})$ (où les z_i forment une base de \mathbb{Z}^d).*

Une conséquence importante de la proposition 4 est la caractérisation des automates cellulaires *réversibles*. Par définition, un automate cellulaire \mathcal{A} est réversible s'il existe un automate cellulaire \mathcal{B} de même alphabet et de même réseau (mais pas nécessairement de même voisinage) tel que $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \text{Id}$.

Corollaire 2. *Un automate cellulaire est réversible si et seulement si sa fonction globale est une bijection.*

Démonstration. Tout d'abord si \mathcal{A} est réversible par \mathcal{B} alors il est bijectif. Réciproquement, si \mathcal{A} est bijectif alors l'inverse de sa fonction globale, notée \mathcal{A}^{-1} , est une fonction bijective continue (car l'espace est compact) et qui commute avec les translations : c'est un automate cellulaire d'après la proposition 4. \square

Notons que ce résultat est difficile à obtenir directement à partir de la définition syntaxique des automates cellulaires, ce qui se traduit notamment par des résultats d'indécidabilité lorsque le réseau est de dimension 2 ou plus (cf. section 1.5).

Propriétés dynamiques

La caractérisation précédente appelle à se poser dans le cas particulier des automates cellulaires un certain nombre de questions classiques de la théorie des systèmes dynamiques [44].

Le premier type de questions qui se posent est celui de l'atteignabilité des points ou ensembles de l'espace. À cet égard, la classe des automates cellulaires surjectifs — ceux qui peuvent atteindre toutes les configurations — a été très étudiée et possède différentes caractérisations synthétisées dans le théorème suivant.

Théorème 2. *Soit \mathcal{A} un automate cellulaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i). \mathcal{A} est surjectif
- (ii). $\forall m \in \mathcal{R}^+, \forall u, v \in \mathcal{L}_m(A^{\mathcal{R}}), |\mathcal{A}^{-1}(u)| = |\mathcal{A}^{-1}(v)|$
- (iii). Toute paire $x, y \in A^{\mathcal{R}}$ telle que $\{z \in \mathcal{R} : x(z) \neq y(z)\}$ est fini vérifie :
 $x \neq y \Rightarrow \mathcal{A}(x) \neq \mathcal{A}(y)$

Pour un réseau de dimension 1, ces deux caractérisations de la surjectivité apparaissent dans [31] (théorèmes 5.4 et 9.3 respectivement). Pour les dimensions 2 et supérieures, la caractérisation (ii) apparaît dans [55] et la caractérisation (iii), connue sous le nom de « théorème de Moore-Myhill »,

apparaît dans [63, 69]. Cette dernière exprime que la surjectivité est équivalente à une forme d'injectivité locale. Cette équivalence correspond en fait à un résultat général plus profond, valable pour une large famille de sous-espaces et de réseaux élargissant notre définition des automates cellulaires (voir par exemple [29, 51, 24] pour un aperçu des généralisations possibles)[↗].

Par ailleurs, pour un réseau de dimension 1, la propriété (ii) (et donc la surjectivité) est équivalente à l'existence d'une borne uniforme sur le nombre d'antécédents de toute configuration, formellement :

$$\exists K \in \mathbb{N}, \forall x \in A^{\mathcal{R}}, |\mathcal{A}^{-1}(x)| \leq K.$$

En effet, en dimension 1, les tailles d'un mot et de ses antécédents diffèrent toujours d'une constante qui ne dépend que de l'automate considéré. Ce n'est plus vrai en dimension supérieure et l'existence d'une borne uniforme sur le nombre d'antécédents n'est plus équivalente à la surjectivité en dimensions supérieures.

En fait, tout automate cellulaire surjectif non injectif défini sur le réseau \mathbb{Z} induit un automate cellulaire sur \mathbb{Z}^2 de même alphabet, même voisinage et même règle de transition locale qui possède des configurations avec un nombre infini d'antécédents.

Un automate cellulaire injectif possède nécessairement la propriété (iii) du théorème. Ainsi, on peut étendre le corollaire 2 de la façon suivante (voir [17] pour une étude plus générale des liens entre surjectivité, injectivité et réversibilité lorsque l'on se restreint à certains sous-ensembles de configurations).

Corollaire 3. *Soit \mathcal{A} un automate cellulaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i). \mathcal{A} est réversible,
- (ii). \mathcal{A} est bijectif,
- (iii). \mathcal{A} est injectif,
- (iv). il existe \mathcal{B} de même alphabet avec $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = Id^{\mathfrak{d}}$,
- (v). il existe \mathcal{B} de même alphabet avec $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} = Id$.

Un automate cellulaire non surjectif possède par définition des configurations sans prédécesseur appelées « jardins d'éden ». Il peut aussi posséder des configurations atteignables en i étapes, mais pas en $i + 1$ étapes pour $i \geq 1$. On s'intéresse alors à l'ensemble des configurations atteignables à

[↗]Ce n'est *a priori* pas le cas de la caractérisation (ii) qui repose fortement sur la croissance régulière du nombre de motifs de taille donnée dans un sous-shift complet.

[↖]Soulignons que Id désigne comme d'habitude l'application identité sur l'espace entier $A^{\mathcal{R}, \mathcal{A}}$. Il n'est pas difficile de construire un automate cellulaire \mathcal{A} non injectif (et même non surjectif) tel que $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ est l'application identité sur un sous-espace.

toute étape. Ce type de configurations correspond, sous une certaine forme, à la notion classique d'attracteur (voir [43, 45, 47] pour l'étude de différentes notions d'attracteurs dans les automates cellulaires) et elle a été beaucoup étudiée, notamment du point de vue de la complexité algorithmique [33, 15, 40].

Définition 12. *Pour tout automate cellulaire \mathcal{A} , on définit son ensemble limite par*

$$\Omega_{\mathcal{A}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n(A^{\mathcal{R}}).$$

L'ensemble limite ainsi défini est un sous-shift, mais, si pour tout entier n l'ensemble des configurations atteignables en n étapes est nécessairement un sous-shift sofique comme on l'a déjà remarqué, ce n'est plus le cas de l'ensemble limite. En effet, L. P. Hurd a montré [33] pour le réseau \mathbb{Z} l'existence d'automates cellulaires dont le langage de l'ensemble limite est non récursif.

Parmi les automates cellulaires non surjectifs, certains exhibent un comportement extrême d'attraction qui se traduit dans leur ensemble limite. Par continuité et uniformité, on peut caractériser ce comportement de la façon suivante.

Définition 13. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est nilpotent si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

- $\exists x_0 \in A^{\mathcal{R}}$ telle que $\forall x \in A^{\mathcal{R}}, \exists t \in \mathbb{N}, \mathcal{A}^t(x) = x_0$,
- $|\Omega_{\mathcal{A}}| = 1$,
- $\exists a \in A, \exists T \in \mathbb{N}_+, \forall x \in A^{\mathcal{R}}, \forall t \geq T, \mathcal{A}^t(x) = \bar{a}$, où \bar{a} désigne la configuration constante partout égale à a .

Notons que l'équivalence entre la première et la dernière caractérisation provient essentiellement du lemme d'uniformité (lemme 1 page 12) en utilisant la fonction $f : A^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$ définie par $f(c) = \{n \in \mathbb{N}_+ : \mathcal{A}^n(c) = c_0\}$.

Un autre type de questions de nature globale provient de l'étude du chaos déterministe dans les systèmes dynamiques en général. On pourra consulter [26] ou [44] pour une étude approfondie de ce type de questions. Dans la suite, nous nous appuyons principalement sur l'approche de [43] à travers les notions d'équicontinuité, de sensibilité et d'expansivité.

L'équicontinuité tout d'abord caractérise une certaine forme de régularité ou de stabilité de la dynamique au voisinage d'un point donné (voir figure 1.3).

Définition 14. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est équicontinu en $x \in A^{\mathcal{R}}$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta, \forall y \in A^{\mathcal{R}} : \mathfrak{d}(x, y) \leq \delta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_+ : \mathfrak{d}(\mathcal{A}^n(x), \mathcal{A}^n(y)) \leq \epsilon.$$

Un automate cellulaire équicontinu en tout point est dit simplement équicontinu².

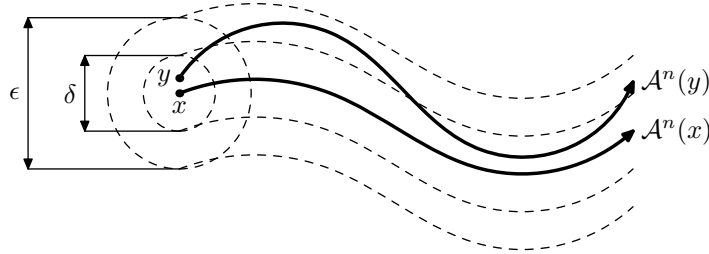


FIG. 1.3: Équicontinuité de \mathcal{A} en x .

L'équicontinuité d'un automate cellulaire (*i.e.* la stabilité des orbites autour de tous les points) est une propriété très forte caractérisée par l'ultime périodicité des orbites.

Théorème 3 (P. Kůrka, [43]). *Un automate cellulaire \mathcal{A} est équicontinu si et seulement si \mathcal{A} est ultimement périodique : il existe $t_0, p \in \mathbb{N}_+$ tels que $\mathcal{A}^{t_0} = \mathcal{A}^{t_0+p}$.*

Par le lemme d'uniformité, on montre facilement qu'un automate cellulaire est équicontinu si et seulement si l'orbite de chaque configuration est ultimement périodique.

En effet, les orbites d'un automate cellulaire équicontinu sont toutes ultimement périodiques d'après la proposition. Réciproquement, si \mathcal{A} ne possède que des orbites ultimement périodiques, on peut définir la fonction $f : A^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ par

$$f(c) = \{(t, p) : \mathcal{A}^t(c) = \mathcal{A}^{t+p}(c)\}.$$

$f(c)$ n'est jamais l'ensemble vide par hypothèse. Comme de plus f est invariante par translation et conservative à la limite (par commutation avec les translations et continuité de \mathcal{A}), le lemme d'uniformité (lemme 1 page 12) permet de conclure qu'il existe $(t_0, p_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant $\mathcal{A}^{t_0} = \mathcal{A}^{t_0+p_0}$ et le théorème 3 permet de conclure.

Si d'un point de vue global l'équicontinuité apparaît comme une forme de stabilité, on peut aussi la caractériser localement en terme de circulation d'information lorsque le réseau est \mathbb{Z} : le « centre » d'une configuration d'équicontinuité correspond à un « mur » empêchant l'information de circuler de part et d'autre.

²La compacité de l'espace implique que la notion d'équicontinuité en tout point coïncide avec la notion d'uniforme équicontinuité (une preuve apparaît dans [12]). Ceci justifie que nous confondions largement ces deux notions dans la suite.

En effet, si x est un point d'équicontinuité pour \mathcal{A} associé aux constantes ϵ et δ . Alors l'orbite de toute configuration de la boule $B_{x,\delta}$ de centre x et de rayon δ est déterminée à ϵ près. Autrement dit, si le mot u associé à la boule $B_{x,\delta}$ apparaît dans une configuration, l'état des cellules centrales qui supportent ce mot (précisément celles qui sont à distance inférieure à $\lceil \log \epsilon \rceil$ du centre) est déterminé à toute étape, indépendamment du reste de la configuration. De plus, si $\epsilon < 2^{-r_{\mathcal{A}}}$, aucune information ne peut être échangé entre les cellules de part et d'autre de l'occurrence de u : u est un *mot bloquant*. Réciproquement si u est un mot bloquant, on vérifie sans mal que toute configuration égale à u en son centre est un point d'équicontinuité.

Un automate cellulaire \mathcal{A} de dimension 1 sans point d'équicontinuité est par définition *sensible aux conditions initiales* ([43]). Informellement, la sensibilité correspond à l'absence de mot bloquant totalement le passage d'information de part et d'autre. Autrement dit, pour chaque mot, il existe un certain type d'information qui peut le traverser. Formellement, on a la définition suivante pour un réseau quelconque.

Définition 15. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est sensible aux conditions initiales s'il existe une constante positive ϵ telle que :*

$$\forall x \in A^{\mathcal{R}}, \forall \delta > 0, \exists t \in \mathbb{N}, \exists y \in A^{\mathcal{R}} : \mathfrak{d}(x, y) \leq \delta \text{ et } \mathfrak{d}(\mathcal{A}^t(x), \mathcal{A}^t(y)) \geq \epsilon.$$

La notion d'expansivité enfin traduit une forme d'instabilité systématique dans les orbites (voir figure 1.4), à l'inverse de l'équicontinuité qui caractérise elle la stabilité des orbites.

Définition 16. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est (positivement) expansif si*

$$\exists \epsilon > 0, \forall x, y \in A^{\mathcal{R}}, x \neq y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \mathfrak{d}(\mathcal{A}^n(x), \mathcal{A}^n(y)) \geq \epsilon.$$

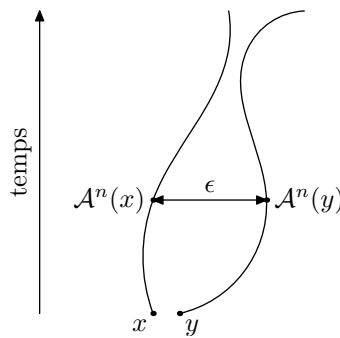


FIG. 1.4: Relation entre les orbites d'un automate cellulaire positivement expansif de constante d'expansivité ϵ .

En reprenant la définition de \mathfrak{d} , la définition ci-dessus peut être interprétée ainsi : toute différence entre 2 configurations implique, dès le temps initial ou après un certain nombre d'itérations, une différence proche de la

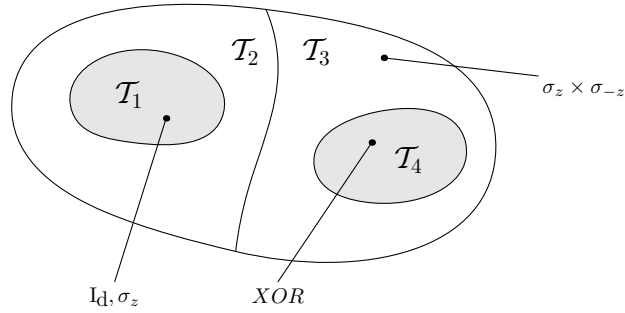
cellule centrale. Intuitivement, l'expansivité correspond à une forme de propagation systématique de l'information dans toutes les directions du réseau. Cette condition est trop forte dès que le réseau est de dimension supérieure ou égale à 2 : un simple argument combinatoire fondé sur une caractérisation de l'expansivité (donnée dans [44]) montre qu'un automate cellulaire ne peut être expansif que si son réseau est de dimension 1. Dans la suite on utilisera simplement le terme *expansif* pour désigner un automate cellulaire positivement expansif.

P. Kůrka utilise dans [43] ces définitions pour partitionner les automates cellulaires en ceux qui sont sensibles aux conditions initiales (classe K_3) et ceux qui ne le sont pas (classe K_2), puis en affinant chacune de ces deux classes avec les propriétés d'expansivité (classe K_4) et d'équicontinuité (classe K_1) respectivement. Cette approche, fondée sur des notions topologiques éprouvées, a aussi l'avantage de s'interpréter facilement en terme de circulation de l'information entre cellules comme on l'a vu ci-dessus. Cependant, comme toutes ces notions s'appuient sur la distance \mathfrak{d} , elles ont l'inconvénient de ne pas être uniformes : en particulier, l'automate σ_z peut être équicontinu ou sensible aux conditions initiales selon que $z = (0, \dots, 0)$ ou non. Intuitivement, les automates σ_z possèdent pourtant tous une dynamique « stable » dans laquelle aucun déplacement relatif d'information n'a lieu, mais où apparaît seulement un éventuel déplacement global de l'état des cellules que l'on ne peut détecter que si l'on distingue une certaine cellule du réseau. Il nous semble donc plus pertinent, dans le modèle des automates cellulaires, d'utiliser les 4 types de comportement ci-dessous (\mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 , \mathcal{T}_3 et \mathcal{T}_4) inspirés de la classification de P. Kůrka. L'idée est de s'intéresser aux mêmes phénomènes de transmission ou blocage de l'information mais en considérant en un certain sens uniquement les déplacements « relatifs » d'information. Pour cela, nous considérons \mathcal{A} et $\sigma_z \circ \mathcal{A}^t$ comme un même système dynamique : la mesure des déplacements d'information ne se fait alors plus par rapport à une cellule du réseau choisie arbitrairement, mais plus généralement par rapport à un certain vecteur vitesse de référence qui peut être choisi de façon quelconque. La définition suivante formalise cette façon de voir \mathcal{A} et $\sigma_z \circ \mathcal{A}^t$ comme un même système dynamique dans un cadre général.

Définition 17. *Pour toute propriété \mathcal{P} sur les automates cellulaires, on définit la propriété $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ suivante :*

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathcal{P}} &= \{ \mathcal{B} : \exists z, z' \in \mathcal{R}, \exists t, t' \in \mathbb{N}_+, \exists \mathcal{A} \in \mathcal{AC} \text{ avec } \mathcal{B} = \sigma_z \circ \mathcal{A}^t \text{ et } \sigma_{z'} \circ \mathcal{A}^{t'} \in \mathcal{P} \} \\ &= \{ \mathcal{B} : \exists z, \in \mathcal{R}, \exists t, t' \in \mathbb{N}_+, \exists \mathcal{A} \in \mathcal{AC} \text{ avec } \mathcal{B} = \mathcal{A}^t \text{ et } \sigma_z \circ \mathcal{A}^{t'} \in \mathcal{P} \} \end{aligned}$$

Dans la suite, si $\mathcal{A} \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}$, on dira que \mathcal{A} possède la propriété \mathcal{P} selon une certaine direction.

FIG. 1.5: Partitionnement des automates cellulaires selon les classes \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 , \mathcal{T}_3 et \mathcal{T}_4 .

Notons que dans le cas général les trois paramètres t , z' et t' sont utiles[↗] dans la deuxième forme de la définition. On peut les interpréter comme des paramètres d'accélération ou de ralentissement dans le temps et de dérive dans l'espace pour le phénomène étudié à travers la propriété \mathcal{P} .

Pour revenir à notre adaptation de la classification de P. Kůrka, on distingue les 4 types de comportement suivants :

- (i). l'ensemble \mathcal{T}_1 des automates cellulaires équicontinus selon une certaine direction ($\mathcal{T}_1 = \overleftrightarrow{K}_1$),
- (ii). l'ensemble \mathcal{T}_2 des automates cellulaires possédant des points d'équi-continuité selon une certaine direction ($\mathcal{T}_2 = \overleftrightarrow{K}_2$),
- (iii). l'ensemble \mathcal{T}_3 des automates cellulaires sans point d'équi-continuité selon aucune direction ($\mathcal{T}_3 = \text{AC} \setminus \mathcal{T}_2$),
- (iv). l'ensemble \mathcal{T}_4 des automates cellulaires expansifs selon une certaine direction ($\mathcal{T}_4 = \overleftrightarrow{K}_4$).

Dans le cas où $\mathcal{P} = K_1, K_2, K_3$ ou K_4 , les classes de la forme $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ définies ci-dessus peuvent être caractérisées de manière plus explicite. Par exemple, on vérifie que l'on a $\mathcal{T}_1 = \{\mathcal{A} : \exists z \in \mathcal{R}, \exists t, t' \in \mathbb{N}_+ \text{ avec } \sigma_z \circ \mathcal{A}^t = \mathcal{A}^{t'}\}$. Intuitivement, \mathcal{T}_1 est donc la classe des automates cellulaires ultimement périodiques à translation près. Dans la suite, nous utiliserons cependant de préférence la forme $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ pour les classes \mathcal{T}_1 à \mathcal{T}_4 (ce choix sera surtout justifié en section 4.1.1).

La figure 1.5 illustre le partitionnement des automates cellulaires obtenu. Les inclusions sont immédiates sauf $\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_3$ prouvée dans la proposition qui suit.

Proposition 5. $\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_3$

[↗]Pour voir cela, on peut par exemple considérer la propriété \mathcal{P} exprimant la capacité d'un automate cellulaire à déplacer un état dans une configuration quiescente à une vitesse $\frac{p}{q}$ donnée.

Démonstration. Dans le cas d'un réseau de dimension 2 ou plus, \mathcal{T}_4 est vide comme on l'a déjà remarqué plus haut. Plaçons nous dans le cas $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ et supposons qu'il existe $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_4$. On en déduit l'existence de deux automates, \mathcal{A}_2 avec des points d'équicontinuité et \mathcal{A}_4 expansif, et de paramètres $t_2, t'_2, t_4, t'_4 \in \mathbb{N}_+$ et $z_2, z_4 \in \mathbb{Z}$ tels que : $\mathcal{A}^{t_2} = \sigma_{z_2} \circ \mathcal{A}_2^{t'_2}$ et $\mathcal{A}^{t_4} = \sigma_{z_4} \circ \mathcal{A}_4^{t'_4}$. D'après la première relation, l'automate $\mathcal{A}_* = \sigma_{-z_2} \circ \mathcal{A}^{t_2}$ possède un mot bloquant. Si un tel mot apparaît dans une configuration initiale il partage le réseau de cellules de \mathcal{A}_* en deux moitiés indépendantes. Ceci est en contradiction avec l'expansivité de \mathcal{A}_4 car, d'après [44], il existe des entiers $b, r \in \mathbb{N}_+$ et $z_* \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $t_0 \in \mathbb{N}_+$ l'ensemble des valeurs $\{(\mathcal{A}_*^{tt_4}(c))(tz_* + z) : t \leq t_0 \text{ et } \|z\|_\infty \leq b\}$ dans le digramme espace-temps de \mathcal{A}_* à partir de la configuration c détermine l'ensemble des valeurs de $c(z)$ pour $-rt \leq z \leq rt$. \square

1.3 Groupage et universalité

Le but de cette section est d'introduire la notion de groupage, définie par J. Mazoyer et I. Rapaport [58], étendue ensuite par N. Ollinger [73], puis celle d'universalité intrinsèque présente dans la littérature depuis les travaux de E. R. Banks [3] et formalisée progressivement, notamment par B. Martin I [52], J. Albert et K. Čulik [1], puis B. Durand et Z. Róka [82, 20], et enfin N. Ollinger [74, 75, 73].

Nous adoptons ici un point de vue original qui, en complément de l'étude menée dans [73], éclaire une caractéristique basique mais selon nous fondamentale du modèle des automates cellulaires : la dualité entre l'espace —les données— et la règle —le contrôle. Celle-ci est parfaitement illustrée dans le fonctionnement des automates cellulaires intrinsèquement universels construits dans la littérature. Il s'agit d'automates capables d'adopter le comportement de n'importe quel automate cellulaire sur des configurations contenant une description explicite de la règle de transition de celui-ci selon un codage approprié (circuits logiques, tables de transition, etc) : c'est alors bien plus dans la forme et le contenu de telles configurations que dans la règle locale de l'automate universel que l'on trouve l'information pertinente pour expliquer le type de comportement observé.

1.3.1 Structures spatio-temporelles

Les régions de l'espace qui sont en un certain sens stables dans le temps jouent un rôle important dans la compréhension de la dynamique globale d'un automate cellulaire. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 18. Soit \mathcal{A} un automate cellulaire et \mathfrak{S} un sous-shift de $A^{\mathbb{R}}$. \mathfrak{S} est dit positivement invariant pour \mathcal{A} s'il existe $t \in \mathbb{N}_+$ tel que $\mathcal{A}^t(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{S}$.

On pourrait plus généralement définir cette notion de stabilité pour un ensemble de configurations quelconque, mais par continuité et uniformité tout ensemble positivement invariant est inclus dans un sous-shift positivement invariant : cela justifie de se limiter aux sous-shifts.

Un sous-shift \mathfrak{S} positivement invariant pour \mathcal{A} constitue en quelque sorte une composante autonome de la dynamique de \mathcal{A} . Un cas particulier simple mais important pour la suite est celui où $t = 1$ et \mathfrak{S} est un sous-shift complet. Le système dynamique $(\mathcal{A}, \mathfrak{S})$ est alors un automate cellulaire (d'après la proposition 4 car $\mathfrak{S} = Q^{\mathcal{R}}$ et que \mathcal{A} est continu sur \mathfrak{S} et commute avec les décalages). Cet automate, et plus généralement tout automate cellulaire qui lui est isomorphe, est appelé un *sous-automate* de \mathcal{A} .

Définition 19. \mathcal{B} est un sous-automate de \mathcal{A} , noté $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$, si $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ et s'il existe une injection $\phi : B \rightarrow A$ telle que $\mathcal{A} \circ \bar{\phi} = \bar{\phi} \circ \mathcal{B}$, où $\bar{\phi}$ désigne l'extension cellule à cellule de ϕ .

Les cas qui nous intéressent dans la définition 18 sont ceux où le système dynamique $(\mathcal{A}^t, \mathfrak{S})$ peut, en un certain sens, être vu comme un automate cellulaire². C'est le cas des sous-automates, mais en s'inspirant de la définition 19 nous pouvons plus généralement voir l'action d'un automate cellulaire dans tout sous-shift par bloc positivement invariant. Pour cela, il nous faut d'abord examiner plus en détail comment, sous l'action d'un automate cellulaire, l'alignement des configurations d'un sous-shift par blocs est modifié. Le lemme suivant affirme que l'éventuel décalage d'alignement peut être choisi identique pour toutes les configurations du sous-shift. La preuve s'appuie essentiellement sur le lemme d'uniformité.

Lemme 2. Soit \mathcal{A} un automate cellulaire et $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ un sous-shift par blocs positivement invariant : $\mathcal{A}^t(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$. On note $m \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^+$ le format des blocs de \mathfrak{B} . Alors il existe $z_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{R}$ tel que

$$\forall c \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}, \forall z' \in \mathcal{R} : \sigma_{z'}(c) \in \mathfrak{o}_m(\mathfrak{B}^{\mathcal{R}}) \Leftrightarrow \sigma_{z'+z_{\mathfrak{B}}}(\mathcal{A}^t(c)) \in \mathfrak{o}_m(\mathfrak{B}^{\mathcal{R}}).$$

Démonstration. Soit $f : \mathfrak{B}^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{R})$ la fonction définie par

$$f(c) = \{z \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}} : \sigma_z \circ \mathcal{A}^t \circ \mathfrak{o}_m(c) \in \mathfrak{o}_m(\mathfrak{B}^{\mathcal{R}})\}.$$

Comme $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ est positivement invariant en temps t , on a $f(c) \neq \emptyset$ pour toute configuration $c \in \mathfrak{B}^{\mathcal{R}}$. De plus, f est clairement invariante par décalage et conservative à la limite (car $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ est fermé et $\sigma_z \circ \mathcal{A}^t \circ \mathfrak{o}_m$ est une fonction continue, pour tout $z \in \mathcal{R}$). Ainsi, le lemme d'uniformité (lemme 1 page 12) permet de conclure qu'il existe $z_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{R}$ tel que pour tout $c \in \mathfrak{B}^{\mathcal{R}}$ on a nécessairement $\sigma_{z_{\mathfrak{B}}} \circ \mathcal{A}^t \circ \mathfrak{o}_m(c) \in \mathfrak{o}_m(\mathfrak{B}^{\mathcal{R}})$. Le lemme en découle. \square

² $(\mathcal{A}^t, \mathfrak{S})$ ne peut *a priori* pas toujours être ramené à un automate cellulaire. Considérer de tels systèmes dynamiques dans toute leur généralité nous ferait sortir du cadre de cette thèse.

Grâce au lemme ci-dessus, on peut alors voir l'action d'un automate cellulaire dans tout sous-shift par blocs positivement invariant : c'est la notion de sous-automate enfoui.

Définition 20. Si $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ est un sous-shift par blocs positivement invariant pour \mathcal{A} , un sous-automate enfoui de \mathcal{A} associé à $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$, est, à isomorphie près, un automate cellulaire $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ d'alphabet \mathfrak{B} et de réseau $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ défini par :

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{B}} = \mathbf{o}_m^{-1} \circ \sigma_{-z_{\mathfrak{B}}} \circ \mathcal{A}^t \circ \mathbf{o}_m,$$

où $z_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{R}$ vérifie la condition du lemme 2, t est tel que $\mathcal{A}^t(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ et $m \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^+$ est le format des blocs de \mathfrak{B} .

$\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ est bien un automate cellulaire sur $\mathfrak{B}^{\mathcal{R}}$: c'est une fonction bien définie de $\mathfrak{B}^{\mathcal{R}}$ dans lui-même (par la condition du lemme 2 imposée sur $z_{\mathfrak{B}}$), continue (comme composition de fonctions continues) et qui commute avec les décalages sur $\mathfrak{B}^{\mathcal{R}}$ (cela découle de la version faible de commutation que vérifie \mathbf{o}_m comme mentionné en section 1.2.1).

Par ailleurs, on vérifie aisément que si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux sous-automates enfouis de \mathcal{A} associés au même sous-shift par bloc $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$, alors il existe $z \in \mathcal{R}$ tels que $\mathcal{B} = \sigma_z \circ \mathcal{B}'$. L'ensemble des sous-automates enfouis associés à un même sous-shift par bloc possèdent donc essentiellement la même dynamique, à un décalage régulier des configurations près. Cependant, il n'y a aucune raison de privilégier un représentant par rapport à un autre.

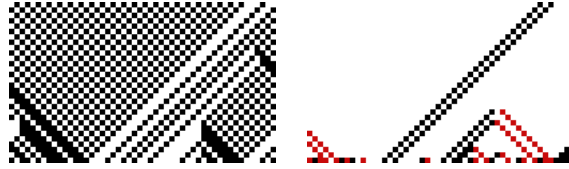


FIG. 1.6: Un automate (à gauche) et son sous-automate enfoui (à droite).

La figure 1.6 donne des diagrammes espace-temps d'un automate cellulaire \mathcal{A} d'alphabet $A = \{\square, \blacksquare\}$ et de rayon 1 ainsi que de son sous-automate enfoui $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ associé au sous-shift par bloc $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ avec

$$\mathfrak{B} = \{\square \blacksquare \square \blacksquare \square \blacksquare, \square \blacksquare \square \square \blacksquare, \square \blacksquare \blacksquare \square \blacksquare\}$$

et $\mathcal{A}^6(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$. \mathcal{A} est l'automate 184 dans la notation de S. Wolfram et $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ est un automate à trois états et de rayon 1 très simple : un état quiescent joue le rôle de fond dans lequel se déplacent deux sortes de particules (représentées par les deux autres états) qui se déplacent à vitesse constante dans des directions opposées et se détruisent en cas de rencontre.

1.3.2 Transformations syntaxiques

L'approche de J. Mazoyer, I. Rapaport et N. Ollinger pour définir le groupage est différente. Elle consiste à s'appuyer d'une part sur une notion locale de sous-système dynamique, et d'autre part sur des transformations purement syntaxiques qui jouent le rôle des changements d'échelle. Dans [73], N. Ollinger a suivi cette approche dans un cadre très général, *i.e.* indépendamment de la notion locale de sous-système et en considérant un ensemble *a priori* très large de transformations (qui inclue en particulier toutes les transformations couramment utilisée dans la littérature). Il a notamment établi une sorte de forme normale pour cet ensemble de transformations syntaxiques. Nous donnons ici une synthèse de ces travaux sur le groupage en utilisant la définition 19 comme notion locale de sous-système et en présentant directement les transformations syntaxiques sous leur forme normale. Nous reviendrons à un cadre plus général au chapitre 3.

Définition 21. *Soit \mathcal{A} un automate cellulaire. Pour tout vecteur $m \in \mathcal{R}^+$, tout $t \in \mathbb{N}_+$ et tout $z \in \mathcal{R}$, on définit l'automate cellulaire transformé suivant :*

$$\mathcal{A}^{\langle m,t,z \rangle} = \mathbf{o}_m^{-1} \circ \sigma_z \circ \mathcal{A}^t \circ \mathbf{o}_m.$$

$\mathcal{A}^{\langle m,t,z \rangle}$ est bien un automate cellulaire par la proposition 4 car c'est une fonction continue (comme composée de fonctions continues) et qui commute avec les décalages (d'après la propriété de commutation faible de \mathbf{o}_m^{-1} et \mathbf{o}_m vue en section 1.2.1 page 15).

Étant donné un automate cellulaire \mathcal{A} , on s'intéresse à l'ensemble des automates cellulaires obtenus par de telles transformations et à leurs sous-automates. La proposition suivante exprime l'équivalence de cette approche avec celle des sous-automates enfouis exposée plus haut. La preuve s'appuie essentiellement sur la commutation avec les translations.

Proposition 6. *Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux automates cellulaires de même réseau \mathcal{R} . Alors \mathcal{A} est un sous-automate enfoui de \mathcal{B} si et seulement s'il existe des paramètres $m \in \mathcal{R}^+$, $t \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathcal{R}$ tels que $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m,t,z \rangle}$.*

Démonstration. Si \mathcal{A} est un sous-automate enfoui de \mathcal{B} , alors par définition il existe des paramètres m , t et z tels que $\mathcal{A} \equiv (\mathbf{o}_m^{-1} \circ \sigma_z \circ \mathcal{B}^t \circ \mathbf{o}_m \upharpoonright \mathfrak{B}^{\mathcal{R}})$ pour un certain ensemble $\mathfrak{B} \subseteq B^{[m]}$. Autrement dit : $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m,t,z \rangle}$.

Réciproquement, si $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m,t,z \rangle}$ pour des paramètres m , t et z , et en notant ι l'injection impliquée dans cette relation de sous-automate puis $\mathfrak{B} = \iota(\mathcal{A}) \subseteq B^{[m]}$, on a alors : $\mathcal{B}^t(\mathbf{o}_m(\mathfrak{B}^{\mathcal{R}})) \subseteq \mathbf{o}_m(\mathfrak{B}^{\mathcal{R}})$. Donc, par commutation de \mathcal{B} avec les décalages, on a $\mathcal{B}^t(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$. On vérifie alors que \mathcal{A} est un sous-automate enfoui associé à $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$. \square

Si \mathcal{B} est un sous-automate enfoui de \mathcal{A} , on peut voir \mathcal{A} comme « plus complexe » que \mathcal{B} car il est en particulier capable de reproduire en un certain sens toute la dynamique de \mathcal{B} . Ceci motive la définition suivante.

Définition 22. On définit la relation \preceq_{\square} sur les automates cellulaires de même réseau \mathcal{R} par :

$$\mathcal{A} \preceq_{\square} \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists m, m' \in \mathcal{R}^+, t, t' \in \mathbb{N}_+, z, z' \in \mathcal{R} : \mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m', t', z' \rangle}.$$

\preceq_{\square} est une relation de pré-ordre (cf. [73]) et on peut l'interpréter aussi comme une relation de simulation (nous revenons sur ce point au chapitre 3).

On peut remarquer au vu de la définition des transformations syntaxiques que les paramètres de décalage z et z' sont redondants. La relation \preceq_{\square} peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \preceq_{\square} \mathcal{B} \\ \Leftrightarrow \exists m, t, z, m', t' : \mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m', t', (0, \dots, 0) \rangle} \\ \Leftrightarrow \exists m, t, z, m', t' : \mathcal{A}^{\langle m', t', (0, \dots, 0) \rangle} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m, t, z \rangle}. \end{aligned}$$

En effet, on vérifie par le calcul que pour des paramètres $m_1, m_2 \in \mathcal{R}^+$, $t_1, t_2 \in \mathbb{N}_+$ et $z_1, z_2 \in \mathcal{R}$, on a

$$\mathcal{A}^{\langle m_1, t_1, z_1 \rangle \langle m_2, t_2, z_2 \rangle} = \mathcal{A}^{\langle m_1 \otimes m_2, t_1 t_2, t_1 z_1 + z_2 \otimes m_1 \rangle}.$$

On peut donc forcer $z = (0, \dots, 0)$ ou $z' = (0, \dots, 0)$ sans perte de généralité dans la relation $\mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m', t', z' \rangle}$ car, comme pour tout $m_{\Delta} \in \mathcal{R}^+$, $t_{\Delta} \in \mathbb{N}_+$ et $z_{\Delta} \in \mathcal{R}$ on a

$$\mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle \langle m_{\Delta}, t_{\Delta}, z_{\Delta} \rangle} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m', t', z' \rangle \langle m_{\Delta}, t_{\Delta}, z_{\Delta} \rangle},$$

il suffit de choisir $t_{\Delta} z + z_{\Delta} \otimes m = (0, \dots, 0)$ (ou $t_{\Delta} z' + z_{\Delta} \otimes m' = (0, \dots, 0)$ respectivement).

1.3.3 Universalité intrinsèque

L'outil de groupage permet de façon générale d'associer une règle de transition —un automate cellulaire enfoui— à certaines familles de configurations structurées de l'espace —les sous-shifts par blocs— sur lesquelles un automate cellulaire exhibe un comportement caractéristique. Cela donne naturellement lieu à la définition suivante d'universalité qui est de nature dynamique et reste intrinsèque au modèle des automates cellulaires. Cette définition correspond à une interprétation stricte de la notion intuitive d'universalité intrinsèque présente dans la littérature [20, 52], nous revenons sur la généralité de l'approche aux chapitres 3 et 4.

Définition 23. Un automate cellulaire \mathcal{A} est intrinsèquement universel si tout automate cellulaire \mathcal{B} est un sous-automate enfoui de \mathcal{A} .

Intuitivement, un automate cellulaire \mathcal{A} est intrinsèquement universel s'il est capable de reproduire en un certain sens la dynamique de tout automate cellulaire \mathcal{B} . Avec le formalisme développé précédemment on peut voir cette capacité à reproduire une dynamique de deux manières : soit globalement par restriction à un sous-espace, soit localement par transformations syntaxiques de la règle de transition. L'universalité intrinsèque peut aussi être caractérisée en terme d'ordre comme le montre la proposition suivante.

Théorème 4 (N. Ollinger, [73, théorèmes 12 et 14]). *\mathcal{A} est intrinsèquement universel si et seulement si, pour tout \mathcal{B} , $\mathcal{B} \preceq_{\square} \mathcal{A}$.*

Ainsi, l'ensemble des automates cellulaires intrinsèquement universels constitue une classe qui est un maximum global pour \preceq_{\square} .

Exemples

La problématique de l'universalité est présente dans la littérature dès les travaux de J. von Neumann [71], même s'il ne s'agit pas toujours d'universalité intrinsèque au sens donné ci-dessus. L'une des préoccupations majeures dans ce domaine a été d'exhiber les automates cellulaires universels les plus petits possibles pour différentes notions de taille.

Dans [3], E. R. Banks construit pour le réseau \mathbb{Z}^2 un automate cellulaire intrinsèquement universel² d'alphabet $\{\square, \blacksquare\}$, avec pour voisinage l'ensemble $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ (souvent appelé voisinage de von Neumann), et dont la règle de transition est donnée figure 1.7.

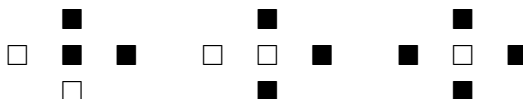


FIG. 1.7: L'automate cellulaire de E. R. Banks est invariant par rotation du voisinage autour de la cellule centrale. Seules les configurations du voisinage qui induisent un changement d'état de la cellule centrale sont représentées (à rotation près).

En dimension 1, lorsque le rayon est limité, la construction d'automates cellulaires intrinsèquement universels est plus difficile en raison des problèmes de croisement d'information. E. R. Banks souligne dans [3] que son automate cellulaire de dimension 2 permet de simuler n'importe quel automate cellulaire de dimension 1 en utilisant seulement une portion de l'espace finie selon une direction, les autres cellules étant fixées à l'état 0 qui est quiescent. Il en déduit alors l'existence d'un automate cellulaire intrinsèquement universel de dimension 1, avec 2 états et 5 voisins.

²Le formalisme utilisé par E. R. Banks n'est pas celui de l'universalité intrinsèque, mais on vérifie *a posteriori* que sa construction est universelle au sens de la définition 23.

N. Ollinger a construit un automate cellulaire intrinsèquement universel à 6 états de rayon 1 (voir [74]). Il utilise une représentation par circuits à niveaux de l'automate cellulaire à simuler. La minimisation du nombre d'états repose sur une utilisation maximale de l'espace : la règle est représentée non pas par un circuit mais par une collection de circuits binaires juxtaposés, la structure de chaque circuit est codée spatialement et les portes des circuits ainsi que les limites des blocs (ou macro-cellules) n'utilisent que 2 états et un codage positionnel pour représenter 4 valeurs (porte NAND, porte COPY, porte IGNORE, limite de cellule).

Non-universalité

Comme on l'a dit plus haut, des automates cellulaires universels ont été proposés dans la littérature avant l'apparition d'une définition précise d'universalité. En revanche, la notion doit être formalisée dès qu'il s'agit d'obtenir des résultats négatifs. Dans la suite nous donnerons plusieurs preuves de non-universalité au sens de la définition 23. Un premier exemple est celui des automates cellulaires surjectifs.

Proposition 7. *Pour tout \mathcal{A} surjectif, si $\mathcal{B} \preceq_{\square} \mathcal{A}$ alors \mathcal{B} est surjectif.*

Démonstration. Il suffit de vérifier d'une part qu'un sous-automate d'un automate cellulaire surjectif est surjectif (cela découle de la caractérisation (iii) du théorème 2), et d'autre part que si \mathcal{A} est surjectif, $\mathcal{A}^{<m,t,z>}$ est lui aussi surjectif pour tout $m \in \mathcal{R}^+$, $t \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathbb{Z}$ (cela découle du fait que \mathbf{o}_m^{-1} , \mathbf{o}_m et σ_z sont des fonctions bijectives). \square

La propriété ci-dessus implique qu'il n'existe pas d'automate cellulaire surjectif intrinsèquement universel.

Corollaire 4. *Un automate cellulaire intrinsèquement universel n'est pas surjectif.*

Nous revenons sur cette propriété de \preceq_{\square} vis-à-vis de la surjectivité ainsi que sur les conditions nécessaires à l'universalité intrinsèque au chapitre 4.

1.4 Dynamiques

Étant donnés deux automates cellulaires \mathcal{A} et \mathcal{B} , la relation $\mathcal{A} \preceq_{\square} \mathcal{B}$ exprime que l'ensemble des diagrammes espace-temps de \mathcal{A} se retrouvent en un certain sens dans ceux de \mathcal{B} . Cependant, il est parfois nécessaire de comparer plus finement les dynamiques de deux automates cellulaires en identifiant certains comportements spécifiques qui peuvent être produits par l'un mais pas par l'autre (alors qu'ils sont incomparables au sens de \preceq_{\square}). L'objet de

cette section est de développer des outils pour ce type de comparaisons[♠]. Pour ce faire nous nous concentrons essentiellement sur les déplacements d'information au cours du temps.

Tout d'abord, pour capturer une notion d'information suffisamment générale, nous avons recours à la définition suivante qui permet de s'abstraire de l'alphabet de l'automate cellulaire considéré : les atomes d'information que l'on choisit de mettre en évidence ne sont alors pas nécessairement les états de l'automate mais plus généralement des ensembles d'états. Autrement dit, les atomes d'information sont obtenus par projection ou coloriage de l'alphabet initial. La définition suivante formalise cette idée pour différents objets associés à un automate cellulaire (états, configurations ou diagrammes espace-temps).

Définition 24. *Soient A et B deux ensembles finis. Pour tout ensemble X , toute paire $(a, b) \in A^X \times B^X$, et toute surjection $\varsigma : B \rightarrow A$, on note $a \preceq_{\varsigma} b$, b se colorie en a selon ς , le fait que $\forall x \in X, \varsigma(b(x)) = a(x)$. On note en outre $a \trianglelefteq b$ le fait qu'il existe ς telle que $a \preceq_{\varsigma} b$.*

Les comportements spécifiques auxquels on s'intéresse dans la suite, et qui vont servir à comparer des automates cellulaires entre eux, sont alors des familles de diagrammes spatio-temporels sur un certain alphabet Q (i.e. des sous-ensembles de $(Q^{\mathcal{R}})^{\mathbb{N}}$). Un tel ensemble de diagrammes[♠] est appelé simplement une *dynamique*. Informellement, une dynamique associée à un alphabet Q décrit un schéma de propagation, de transformation et de composition de l'information dont les atomes sont les élément de Q . Par définition, un automate cellulaire *capture* un tel comportement (une telle *dynamique*) s'il peut produire de tels diagrammes à changement d'échelle et coloriage près. Formellement, on a la définition suivante.

Définition 25. *Une dynamique \mathcal{D} associée à un alphabet Q et à un réseau \mathcal{R} est un ensemble de suites de points de l'espace $Q^{\mathcal{R}}$, ou de façon équivalente un sous-ensemble de $Q^{\mathcal{R} \times \mathbb{N}}$. Un automate cellulaire \mathcal{A} de réseau \mathcal{R} capture la dynamique \mathcal{D} s'il existe $t, t' \in \mathbb{N}_+$, $m, m' \in \mathcal{R}^+$ et $z \in \mathcal{R}$ tels que, pour toute suite $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ (où $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$), il existe $c \in (A^{[m]})^{\mathcal{R}}$ et une surjection $\varsigma : A^{[m]} \rightarrow Q^{[m']}$ avec*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{o}_{m'}^{-1}(d_{nt'}) \preceq_{\varsigma} (\mathcal{A}^{<m, t, z>})^n(c).$$

Si $t' = 1$, on dit que \mathcal{A} capture \mathcal{D} pas à pas. Si $z = (0, \dots, 0)$, on dit que \mathcal{A} capture \mathcal{D} directement. Une dynamique est cellulaire si elle est capturée par un certain automate cellulaire.

[♠]Même si ce n'est pas notre objectif premier, on notera que les notions introduites dans cette section, et notamment la définition 25, englobent la notion de signal telle qu'elle est définie dans [61].

[♠]Bien sûr, les diagrammes spatio-temporels qui composent une dynamique ne sont pas nécessairement des diagrammes espace-temps d'automate cellulaire.

Les paramètres de changement d'échelle sont identiques pour tous les éléments de la dynamique $\mathcal{D}^{\mathfrak{A}}$: l'automate qui capture celle-ci doit en effet être capable de reproduire les variations de vitesses, de temps et de distance mises en jeu à travers les différents diagrammes qui composent \mathcal{D} .

La figure 1.8 illustre ces définitions dans le cas du réseau \mathbb{Z} par une dynamique \mathcal{D} représentant la propagation d'une information binaire selon une trajectoire parabolique (dans l'espace-temps) et capturée par un automate cellulaire très simple.

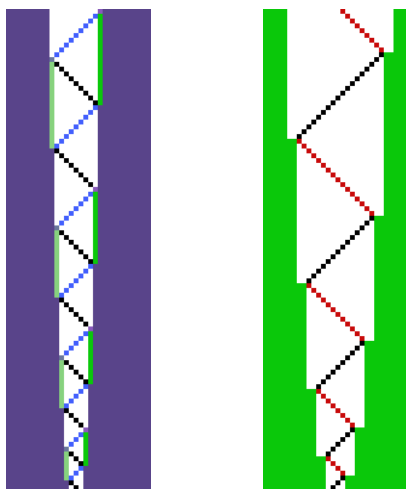


FIG. 1.8: Diagramme espace-temps (à droite) d'un automate cellulaire \mathcal{A} d'alphabet $A = \{\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \square\}$ et de rayon 2, capturant une dynamique (famille de paraboles discrètes dont une est représentée à gauche). Les paramètres de groupage appliqués à \mathcal{A} sont $m = 2$, $z = 0$ et $t = 1$ (ce paramètre contrôle l'excentricité de la parabole obtenue). Le coloriage $\varsigma : A^2 \rightarrow \{\square, \blacksquare\}$ associé est caractérisé par $\varsigma^{-1}(\blacksquare) = \{\blacksquare\square, \blacksquare\blacksquare, \square\blacksquare, \blacksquare\blacksquare\}$.

La définition qui suit formalise un type de dynamique qui nous intéresse plus particulièrement dans la suite.

Définition 26. *Une dynamique \mathcal{D} est persistante si pour tout $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ il existe une position $z \in \mathcal{R}$ telle que la suite $(\mathbf{d}(z, t))_{t \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante à partir d'un certain rang.*

Notons en particulier qu'une dynamique persistante capturée directement par un automate cellulaire \mathcal{A} à voisinage omnidirectionnel ne peut l'être qu'en utilisant des configurations sans état envahissant.

²On pourrait demander de plus que ς soit unique à toute la dynamique, mais cela revient essentiellement au même car, les paramètres m et m' étant fixés uniformément, il n'existe qu'un nombre fini de choix possibles pour ς .

1.4.1 Groupage et dynamiques

La proposition 23 page 79 implique l'existence d'un automate cellulaire \mathcal{B} qui capture toutes les dynamiques capturées par un automate cellulaire \mathcal{A} et tels que $\mathcal{A} \not\sqsubseteq \mathcal{B}$. En revanche, un automate cellulaire capture toutes les dynamiques capturées par les automates cellulaires qu'il simule au sens de \sqsubseteq .

Proposition 8. *Si $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$, toute dynamique capturée par \mathcal{A} est capturée par \mathcal{B} .*

Démonstration. Si \mathcal{A} capture une dynamique \mathcal{D} , il existe par définition des paramètres $t, t' \in \mathbb{N}_+$, $m, m' \in \mathcal{R}^+$ et $z \in \mathcal{R}$ tels que, pour toute suite $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ (où $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$), il existe $c \in (A^{[m]})^{\mathcal{R}}$ et une surjection $\varsigma : A^{[m]} \rightarrow Q^{[m']}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{o}_{m'}^{-1}(d_{nt'}) \sqsubseteq_{\varsigma} (\mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle})^n(c).$$

Par définition, si $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ il existe $m_*, m_{\bullet} \in \mathcal{R}^+$, $t_*, t_{\bullet} \in \mathbb{N}_+$ et $z_*, z_{\bullet} \in \mathcal{R}$ tels que $\mathcal{A}^{\langle m_*, t_*, z_* \rangle} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m_{\bullet}, t_{\bullet}, z_{\bullet} \rangle}$. Comme on l'a remarqué en page 29, on peut de plus supposer sans perte de généralité que $z_* = (0, \dots, 0)$. Par ailleurs, quitte à itérer les automates cellulaires de part et d'autre de la relation \sqsubseteq , on peut aussi supposer que t_* est multiple de $\prod_i m_i$ (où m_i est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de m).

On a alors aussi

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{o}_{m' \otimes m_*}^{-1}(d_{t_* t' n}) \sqsubseteq_{\varsigma'} (\mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle \langle m_*, t_*, z_* \rangle}) (\mathbf{o}_{m_*}^{-1}(c)),$$

où $\varsigma' : (A^{[m]})^{[m_*]} \rightarrow (Q^{[m']})^{[m_*]}$ est l'extension naturelle de ς aux blocs de format m_* . De plus, par choix de t_* et z_* , on vérifie par le calcul qu'il existe $z_+ \in \mathcal{R}$ avec

$$\mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle \langle m_*, t_*, z_* \rangle} \equiv \mathcal{A}^{\langle m_*, t_*, z_* \rangle \langle m, t, z_+ \rangle}.$$

On en déduit alors

$$\mathcal{A}^{\langle m_*, t_*, z_* \rangle \langle m, t, z_+ \rangle} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m_{\bullet}, t_{\bullet}, z_{\bullet} \rangle \langle m, t, z_+ \rangle},$$

à travers une certaine injection $\pi : (A^{[m]})^{[m_*]} \rightarrow (B^{[m_{\bullet}]})^{[m]}$. Il découle alors directement de cette relation que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{o}_{m' \otimes m_*}^{-1}(d_{t_* t' n}) \sqsubseteq_{\varsigma' \circ \pi^{-1}} (\mathcal{B}^{\langle m_{\bullet}, t_{\bullet}, z_{\bullet} \rangle \langle m, t, z_+ \rangle})^n (\bar{\pi} \circ \mathbf{o}_{m_*}^{-1}(c)).$$

Ceci montre que \mathcal{B} capture la dynamique \mathcal{D} . □

Corollaire 5. *Si un automate cellulaire est intrinsèquement universel alors il capture toutes les dynamiques cellulaires.*

1.4.2 Universalité pour le calcul Turing

La définition 25 ci-dessus s'appuie sur des collections de diagrammes spatio-temporels quelconques, c'est à dire des éléments de $(Q^{\mathcal{R}})^{\mathbb{N}}$ pour un certain réseau \mathcal{R} et un certain alphabet fini Q . Or de tels objets peuvent être utilisés pour représenter l'évolution de l'état au cours du temps d'une grande variété de systèmes dynamiques discrets. Il suffit que l'état du système S considéré puisse être représenté par une configuration de $Q^{\mathcal{R}}$. Une fois la convention d'encodage de l'état du système S dans les configurations de $Q^{\mathcal{R}}$ fixée, la définition 25 fournit une notion formelle de simulation *extrinsèque* c'est à dire de ce que peut être la capacité d'un automate cellulaire à reproduire la dynamique de S .

L'étude comparative des systèmes dynamiques discrets en général ne rentre pas dans le cadre de cette thèse. En revanche on peut utiliser cette approche pour formaliser d'une manière assez générale la capacité des automates cellulaires à effectuer des calculs et en particulier leur universalité pour le calcul Turing. Ainsi nous allons définir (partiellement) la notion d'universalité pour le calcul Turing, non pas en décrivant directement une façon de calculer par automate cellulaire, mais en formalisant la capacité des automates cellulaires à reproduire le comportement de divers systèmes de calculs vus comme des systèmes dynamiques.

Définition 27 (universalité pour le calcul Turing). *Un système dynamique discret est (Q, \mathcal{R}) -représentable s'il peut être vu comme une fonction F agissant sur un ensemble $E \subseteq Q^{\mathcal{R}}$. Un automate cellulaire \mathcal{A} simule un système dynamique représenté par (F, E) s'il capture la dynamique \mathcal{D} définie par*

$$\mathcal{D} = \{(F^n(e))_{n \in \mathbb{N}} : e \in E\}.$$

Un automate cellulaire est universel pour le calcul Turing (ou simplement Turing-universel) s'il simule à travers une $(Q, \mathcal{R}_{\mathcal{A}})$ -représentation « raisonnable » un système dynamique réputé « Turing-complet ».

Cette définition capture à notre connaissance toutes les variantes d'universalité pour le calcul utilisées dans la littérature et en particulier, la construction de J. H. Conway sur le « Jeu de la Vie » utilisant une machine à registres [20] ainsi que celle de M. Cook sur l'automate cellulaire élémentaire numéro 110 dans la notation de S. Wolfram utilisant des *cyclic tag systems* [14].

Notons qu'une simulation extrinsèque au sens ci-dessus se fait toujours en temps linéaire (chaque étape du système simulé demande un nombre constant d'étapes dans le système simulateur) or l'équivalence pour le calcul des différents systèmes Turing-complets repose parfois sur des déformations non linéaires du temps² : un automate cellulaire universel pour le calcul

²Par exemple, la simulation d'une machine de Turing par une machine à 2 compteurs nécessite une distortion exponentielle du temps (voir [62]).

Turing ne simule donc pas nécessairement tous les systèmes Turing-complets.

La définition 27 n'est pas complètement formalisée puisqu'elle repose sur les notions floues de « Turing-complétude » et de (Q, \mathcal{R}) -représentation « raisonnable ». Nous laissons volontairement ces notions indéfinies (voir [62] pour une étude des systèmes Turing-complets et [20] pour une discussion sur ces questions dans le cadre des automates cellulaires). Toutefois, nous utilisons dans la suite la définition 27 de manière rigoureuse comme une condition suffisante à l'universalité pour le calcul Turing. En effet, tous les automates cellulaires Turing-universels considérés dans la suite le sont par simulation d'une machine de Turing, et toutes les simulations de machine de Turing par automate cellulaire utilisent la représentation « raisonnable » suivante : si A est l'alphabet du ruban et B est l'ensemble d'états de la machine considérée, une configuration de la machine dans laquelle la tête est en position z_0 et dans l'état e_0 est $(A \cup A \times B, \mathbb{Z})$ -représentée par la configuration c définie par :

$$c(z) = \begin{cases} r(z) & \text{si } z \neq z_0, \\ (r(z_0), e_0) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $r(z)$ désigne la lettre (éventuellement un blanc) présente sur le ruban en position z .

Les dynamiques produites par une machine de Turing sont de nature séquentielle, c'est à dire que les changements d'état sont localisés (ils ont lieu à proximité d'une certaine position qui elle-même peut se déplacer au cours du temps à vitesse finie) par opposition aux automates cellulaires où des changements d'état peuvent avoir lieu partout simultanément. La définition suivante formalise ce type de dynamiques sur lesquelles nous reviendrons au chapitre 4.

Définition 28. *Une dynamique \mathcal{D} est séquentielle si il existe $K \in \mathbb{N}_+$ telle que, pour tout $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ avec $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$, pour tout $z, z' \in \mathcal{R}$ et $n, n' \in \mathbb{N}$ avec $n \leq n'$, on a :*

$$d_n(z) \neq d_{n+1}(z) \wedge d_{n'}(z') \neq d_{n'+1}(z') \Rightarrow \|z - z'\|_\infty \leq K(n' - n + 1).$$

1.5 Décidabilité

Comme nous l'avons déjà souligné, la simplicité formelle des automates cellulaires n'empêche pas la présence d'une grande complexité dans le modèle, complexité qui s'exprime en particulier par de nombreux résultats d'indécidabilité.

Le premier d'entre eux concerne la propriété de nilpotence (définition 13 page 20). Cette propriété a été montrée indécidable en dimension 2 et supérieures par K. Culik, J. Patchl et S. Yu dans [15] puis le résultat a été

étendu² à la dimension 1 par J. Kari dans [38]. Dans les deux cas la preuve est obtenue par réduction au problème de la pavabilité du plan par un jeu de tuiles dû à R. Berger [5].

Théorème 5. *Pour tout réseau, le problème de la nilpotence est indécidable.*

Le problème de la nilpotence apparaît comme un problème « simple » qui se réduit à de nombreux problèmes naturels. Par exemple, le théorème 5 implique l'indécidabilité de la propriété d'équicontinuité (caractérisée par le théorème 3)³. Il n'est pas difficile non plus de voir que la nilpotence se réduit au problème de savoir si un automate cellulaire donné \mathcal{A} atteint son ensemble limite en temps fini (formellement, $\exists n \in \mathbb{N}_+ : \mathcal{A}^n(A^{\mathcal{R}}) = \Omega_{\mathcal{A}}$).

On notera que des variantes du problème de la nilpotence ont également été montrées indécidables. Tout d'abord, K. Sutner a montré dans [84] que le problème de savoir si toutes les configurations périodiques d'un automate cellulaire donné convergent vers un point fixe est indécidable. Par ailleurs, J. Mazoyer et I. Rapaport ont montré dans [59] que l'analogue de la nilpotence pour les configurations périodiques est aussi un problème indécidable (la preuve est faite en dimension 1 et le résultat s'étend facilement à toute dimension).

Théorème 6. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est nilpotent sur les configurations périodiques s'il existe une configuration périodique $c \in A^{\mathcal{R}}$ telle que pour toute configuration périodique c' il existe $t \in \mathbb{N}_+$ avec $\mathcal{A}^t(c') = c$. Le problème de la nilpotence sur les configurations périodiques est indécidable.*

Les résultats d'indécidabilité ci-dessus et ceux que nous donnerons plus loin accèdent la thèse selon laquelle presque toute propriété intéressante est indécidable. L'étude de la calculabilité dans le modèle des automates cellulaires a toutefois permis de mettre à jour des exceptions remarquables. En effet, S. Amoroso et Y. N. Patt ont montré dans [2] que la surjectivité et l'injectivité des automates cellulaires de réseau \mathbb{Z} sont des propriétés décidables. Par contre, J. Kari a montré dans [39] que ces propriétés deviennent indécidables à partir de la dimension 2.

Théorème 7. *Lorsque $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$, la surjectivité et l'injectivité des automates cellulaires sont décidables en temps polynomial. Lorsque $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 2$, la surjectivité et l'injectivité sont des propriétés indécidables.*

Ce résultat donne un autre exemple de propriété sensible à la dimension de l'espace (cf. section 1.2.2 page 22 sur la propriété d'expansivité). On peut citer également [7] pour une nouvelle propriété dont la décidabilité dépend de la dimension.

²L'indécidabilité de la nilpotence en dimension 1 implique l'indécidabilité de la nilpotence en toutes dimensions.

³La réduction est directe dans le cas où l'alphabet peut varier. L'indécidabilité de l'équicontinuité à alphabet fixé a également été montrée dans [19]

Plus récemment, N. Ollinger a montré dans [75] l'indécidabilité d'une propriété d'un autre genre : l'universalité intrinsèque. La preuve utilise une réduction à la nilpotence sur les configurations périodiques (théorème 6 ci-dessus) et le résultat est prouvé en dimension 1.

Théorème 8. *Il est indécidable de savoir si un automate cellulaire est intrinsèquement universel ou non.*

Enfin, J. Kari a montré dans [40] un résultat connu sous l'appellation « théorème de Rice pour les ensembles limites » qui illustre l'importance de la nilpotence pour les problèmes de décisions : pour toute propriété \mathcal{P} non triviale des automates cellulaires caractérisée par ensemble limite, le problème de décider la nilpotence se réduit au problème de décider \mathcal{P} . Dans notre formalisme (définition 2), une propriété caractérisée par ensemble limite est un ensemble $\mathcal{P} \subseteq \text{AC}$ d'automates cellulaires² qui ne dépend que des ensembles limites, *i.e.* qui vérifie :

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{AC} : \text{si } \Omega_{\mathcal{A}} = \Omega_{\mathcal{B}} \text{ alors } \mathcal{A} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{P}.$$

Le problème de décision associé à \mathcal{P} est alors le problème $\text{D}_{\text{AC}}(\mathcal{P})$ suivant :

Entrée : $\mathcal{A} = (A, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}}) \in \text{AC}$

Question : Est-ce que $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$?

Le théorème de Rice sur les ensembles limites s'énonce alors de la façon suivante.

Théorème 9. *Pour toute propriété \mathcal{P} non triviale (*i.e.* telle que $\exists \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{AC}$ avec $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{B} \notin \mathcal{P}$) et caractérisée par ensemble limite, le problème $\text{D}_{\text{AC}}(\mathcal{P})$ est indécidable.*

Nous envisagerons à nouveau des propriétés comme des ensemble d'automates cellulaires au chapitre 2 lorsque nous étudierons des problèmes de densité (sections 2.1.2 et 2.2.2). Cependant, dans l'article de J. Kari, l'énoncé du théorème de Rice suit un autre formalisme pour la définition des propriétés concernant les ensembles limites. Il s'agit dans [40] d'un ensemble d'ensembles limites « acceptables ». Formellement, pour tout ensemble fini $T \subseteq \mathcal{S}$, on note P_T l'ensemble des sous-shifts de $T^{\mathcal{R}}$ (P_T contient en particulier l'ensemble limite de tout automate cellulaire défini sur l'ensemble d'états T). L'ensemble des ensembles limites d'automates cellulaires est alors contenu dans $\mathcal{U} = \bigcup_{T \text{ fini}} P_T$.

Une propriété \mathcal{P}' des ensembles limites est définie formellement comme un sous-ensemble de \mathcal{U} . Un automate cellulaire \mathcal{A} possède la propriété \mathcal{P}' si $\Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}'$. Le problème de décision associé à \mathcal{P}' est alors le problème $\text{D}_{\Lambda}(\mathcal{P}')$ suivant :

²L'ensemble AC est défini pour un réseau \mathcal{R} fixé que nous ne mentionnons pas ici car le résultat de J. Kari est vrai pour tout réseau.

Entrée : $\mathcal{A} = (A, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}}) \in \mathbf{AC}$

Question : Est-ce que $\Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}'$?

L'énoncé original du théorème de Rice est donc le suivant.

Théorème 10. *Pour toute propriété \mathcal{P}' des ensembles limites qui est non triviale (i.e. telle que $\exists \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{AC}$ avec $\Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}'$ et $\Omega_{\mathcal{B}} \notin \mathcal{P}'$), le problème $D_{\Lambda}(\mathcal{P}')$ est indécidable.*

On montre que l'on peut déduire le théorème 9 du théorème 10 et réciproquement.

Pour toute propriété des ensembles limites \mathcal{P}' (i.e. $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{U}$), on définit $\mathcal{P}_{\mathbf{AC}}(\mathcal{P}')$, propriété des automates cellulaires caractérisée par ensemble limite de la façon suivante :

$$\mathcal{P}_{\mathbf{AC}}(\mathcal{P}') = \{\mathcal{A} \in \mathbf{AC} : \Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}'\}.$$

Inversement, si \mathcal{P} est une propriété caractérisée par ensemble limite, on définit la propriété des ensembles limites $\mathcal{P}_{\Lambda}(\mathcal{P})$ par

$$\mathcal{P}_{\Lambda}(\mathcal{P}) = \{\Omega \in \mathcal{U} : \exists \mathcal{A} \in \mathcal{P} \text{ avec } \Omega_{\mathcal{A}} = \Omega\}.$$

Alors on a $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_{\mathbf{AC}}(\mathcal{P}') \Leftrightarrow \Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}'$ et $\Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}_{\Lambda}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{P}$. Enfin, on vérifie d'une part que $\mathcal{P}_{\mathbf{AC}}(\mathcal{P}')$ est non triviale (au sens du théorème 9) si et seulement si \mathcal{P}' est non triviale (au sens du théorème 10), et d'autre part que $\mathcal{P}_{\Lambda}(\mathcal{P})$ est non triviale si et seulement si \mathcal{P} est non triviale.

Pour terminer, on peut citer deux résultats d'indécidabilité supplémentaires relatifs aux ensembles limites. Tout d'abord il est montré dans [15] qu'étant donné un automate cellulaire \mathcal{A} et un motif u , on ne peut pas décider si ce motif persiste dans l'évolution de \mathcal{A} , c'est à dire si $u \in \mathcal{L}(\Omega_{\mathcal{A}})$. D'autre part, L. P. Hurd a montré [33] l'existence d'un automate cellulaire \mathcal{A} au langage limite non récursivement énumérable².

²Un tel résultat est également présenté dans [15], mais la preuve donnée s'appuie sur l'affirmation fautive qu'un automate cellulaire universel (pour une notion d'universalité non précisée dans l'article) possède toujours un langage limite non récursivement énumérable. Dans [28], un automate cellulaire Turing-universel au langage limite rationnel est construit et nous conjecturons qu'il existe des automates cellulaires intrinsèquement universels au langage limite récursivement énumérable.

Chapitre 2

Les automates cellulaires captifs

Nous ne sommes ni sur les gradins, ni sur la scène, mais dans la machine panoptique, investis par ses effets de pouvoir que nous reconduisons nous-mêmes puisque nous en sommes rouages.

Michel Foucault — « Surveiller et punir »

LA définition syntaxique locale d'un automate cellulaire contient toute l'information sur le système dynamique que celui-ci constitue. Cependant, il est en général impossible de déduire uniformément de ces objets syntaxiques leurs propriétés dynamiques—ce qui se traduit par de nombreux résultats d'indécidabilité (cf. section 1.5).

À l'inverse, la littérature contient beaucoup de constructions d'automates cellulaires exhibant un comportement spécifié (dynamique, algorithmique, universalité, etc.), et de telles constructions reposent souvent sur une forte structure locale (loi de groupe sur l'ensemble des états, produit cartésien, signaux, etc) qui garantit le comportement global spécifié.

Étudier des classes d'automates cellulaires définies par des propriétés syntaxiques locales est donc naturel pour mieux comprendre et faciliter l'analyse de certains comportements. En revanche, c'est aussi se restreindre à un sous-ensemble de systèmes dynamiques qui n'est pas forcément représentatif du modèle des automates cellulaires en général.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord brièvement un certain nombre de classes issues de la littérature qui sont chacune définies par une propriété syntaxique locale. Nous discutons ensuite de deux relations sur les fonctions de transition locales (sous-automate et automate quotient) et montrons que presque aucun automate cellulaire ne possède de sous-automate non trivial, ni de quotient de certaines tailles.

L'objet principal du chapitre est alors d'introduire et d'étudier les automates cellulaires *captifs*, une classe d'automates définie par une propriété syntaxique locale. Cette classe est en un certain sens représentative des automates cellulaires en général. Par ailleurs, elle offre une forte structure locale vis-à-vis de la relation de sous-automate (là où les automates cellulaires en général n'en ont pas) qui permet d'obtenir des propriétés intéressantes propres à la classe. En particulier, nous montrons que presque tous les automates cellulaires captifs sont intrinsèquement universels, alors qu'être intrinsèquement universel reste une propriété indécidable dans cette classe.

Pour finir, nous caractérisons les automates cellulaires, appelés automates cellulaires *caméléons*, qui admettent un automate quotient pour toute relation d'équivalence sur leurs états : ils sont essentiellement réduits aux automates cellulaires à 2 états.

◇

Sommaire

2.1 Structures locales	42
2.1.1 Exemples historiques	43
2.1.2 Sous-automates et quotients	46
2.2 Les automates cellulaires captifs	52
2.2.1 Règles de sélection	52
États, arité, espace	52
Ensembles limites	56
Contraintes sur les dynamiques « chaotiques »	59
2.2.2 Structure récursive	61
Loi zéro-un sur les propriétés monotones	62
Universalité	64
2.2.3 Décroissance et conservation de l'alphabet	69
2.3 Les automates cellulaires caméléons	71

2.1 Structures locales

Nous nous intéressons ici aux propriétés *syntaxiques* des automates cellulaires, c'est à dire aux propriétés pouvant s'exprimer au moyen de la règle de transition locale et des états seulement[↗]. En particulier l'appartenance à une classe d'automates cellulaires définie à partir d'une telle propriété doit être décidable.

[↗]Les discussions sur la forme particulière du voisinage ne font pas l'objet de cette thèse.

2.1.1 Exemples historiques

Une façon naturelle de définir une sous-classe des automates cellulaires consiste à munir l'ensemble d'états d'une certaine structure (au sens mathématique du terme) et à s'intéresser aux fonctions de transition locales qui la préservent en un certain sens, ou qui possèdent un comportement régulier vis-à-vis de celle-ci. L'exemple le plus connu est celui des automates cellulaires additifs.

Définition 29. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est additif si l'on peut munir l'ensemble d'états A d'une loi de groupe \otimes telle que pour tous $x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}} \in A^{\mathcal{R}}$, et tous $y_1, \dots, y_{\nu_{\mathcal{A}}} \in A^{\mathcal{R}}$:*

$$\delta_{\mathcal{A}}(x_1 \otimes y_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}} \otimes y_{\nu_{\mathcal{A}}}) = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}}) \otimes \mathcal{A}(y_1, \dots, y_{\nu_{\mathcal{A}}}).$$

Remarquons que si l'alphabet A est muni de la loi \otimes , alors $A^{\mathcal{R}}$ hérite de la structure de groupe par $\overline{\otimes}$ (extension cellule à cellule de la loi \otimes). Un automate cellulaire additif est alors un endomorphisme de $(A^{\mathcal{R}}; \overline{\otimes})$.

Cette classe a été très étudiée (voir par exemple [54, 77, 57]) et est aujourd'hui relativement bien comprise sous de nombreux aspects. En revanche, comme le montre la proposition suivante, la structure additive diminue fortement la complexité possible d'un automate cellulaire : elle interdit l'universalité intrinsèque. La preuve consiste à montrer qu'une règle additive ne peut pas réaliser un mécanisme très simple d'interactions entre flux d'information : celui de deux signaux transportant une information atomique qui se propagent dans des directions opposées et qui se détruisent mutuellement en cas de rencontre.

Proposition 9. *Il n'existe pas d'automate cellulaire additif intrinsèquement universel.*

Démonstration. Nous montrons qu'il existe un automate cellulaire qui n'est sous-automate d'aucun automate cellulaire additif, ce qui conclut la preuve d'après le théorème 4 car l'additivité est une propriété préservée par groupage (avec la même loi de groupe étendue au blocs de cellules).

Soit \mathcal{A} défini sur l'alphabet $A = \{l, 0, r\}$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \upharpoonright \{l, 0\}^{\mathbb{Z}} &= \sigma_1, \\ \mathcal{A} \upharpoonright \{r, 0\}^{\mathbb{Z}} &= \sigma_{-1}, \\ \delta_{\mathcal{A}}(x_{-1}, x_0, x_1) &= 0 \text{ si } \{l, r\} \subseteq \{x_{-1}, x_0, x_1\}. \end{aligned}$$

Supposons alors qu'il existe \mathcal{B} additif pour la loi \otimes , de neutre e , avec $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ pour l'injection $i : A \rightarrow B$. On note x l'état de B tel que $i^{-1}(0) \otimes x = i^{-1}(r)$. Considérons les configurations c_n (resp. d_n) partout égales à $i^{-1}(0)$ (resp. e) sauf en cellule n (resp. $-n$) qui est dans l'état $i^{-1}(l)$ (resp. x) .

Par additivité de \mathcal{B} et d'après la relation $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}_+$:

$$\begin{aligned} \overline{i^{-1}(0)} &= \mathcal{B}^{2n}(c_{-n} \overline{\otimes} d_n) = \mathcal{B}^{2n}(c_{-n}) \otimes \mathcal{B}^{2n}(d_n) \\ &= \mathcal{B}^{2n}(c_{-n} \overline{\otimes} \sigma_{-1}(d_n)) = \mathcal{B}^{2n}(c_{-n}) \overline{\otimes} \sigma_{-1}(\mathcal{B}^{2n}(d_n)). \end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'un état $y \in B$ tel que $i^{-1}(l) \otimes y = i^{-1}(0) \otimes y$ d'où $i^{-1}(0) = i^{-1}(l)$: il y a contradiction. \square

Un autre exemple de classe, motivée cette fois par une interprétation physique, est celle des automates cellulaires conservatifs définis dans [70] puis étudiés sous divers aspects, notamment dans [27, 18, 66].

Définition 30. Soit \mathcal{A} un automate cellulaire d'alphabet $A = \{1, \dots, |A|\}$ tel que pour toute configuration périodique c de période $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$ on a :

$$\sum_{z \in \mathcal{P}} c(z) = \sum_{z \in \mathcal{P}} (\mathcal{A}(c))(z).$$

\mathcal{A} et tous les automates cellulaires qui lui sont isomorphes est dit conservatif.

B. Durand, E. Formenti et Z. Róka ont montré dans [18] que cette propriété de conservation, *a priori* de nature globale, s'exprime par une propriété syntaxique locale plus ou moins compliquée selon la dimension du réseau.

Notons aussi que E. Moreira a montré dans [65] l'existence d'automates cellulaires conservatifs intrinsèquement universels.

Dans [30], K. Morita et H. Harao introduisent une classe d'automates cellulaires fondée sur un partitionnement des états.

Définition 31. Un automate cellulaire \mathcal{A} est partitionné s'il existe une décomposition de l'ensemble d'états A sous la forme $A = A_1 \times \dots \times A_{\nu_A}$ et une fonction $\phi : A \rightarrow A$ telles que

$$\forall x_1, \dots, x_{\nu_A} \in A : \delta_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\nu_A}) = \phi(\pi_1(a_1), \dots, \pi_{\nu_A}(a_{\nu_A})),$$

où $\pi_i : A \rightarrow A_i$ est la projection associée à la $i^{\text{ème}}$ composante de la décomposition ci-dessus.

La motivation principale de l'introduction d'une telle classe dans [30] est la construction d'automates cellulaires réversibles². En effet, il n'est pas difficile de voir qu'un automate cellulaire partitionné est réversible si et seulement si la fonction ϕ associée de la définition 31 est une bijection. L'idée est que le partitionnement des états assure que la valeur de la composante i

²Notons qu'une autre famille, les automates à *partition*, est aussi utilisée pour la construction d'automates cellulaires réversibles [21]. Les idées sous-jacentes sont semblables mais la mise en oeuvre est très différente.

d'une cellule $z \in \mathcal{R}$ influence uniquement la cellule $z - v_i$ (où v_i est le vecteur de voisinage correspondant à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de la fonction locale). Il est aussi montré dans [30] qu'un automate cellulaire partitionné peut être intrinsèquement universel (la preuve est donnée dans un formalisme différent).

Un autre type de propriétés syntaxiques locales à la base de la définition de sous-classes d'automates cellulaires concerne les variables de la règle de transition locale et la façon dont celle-ci en dépend.

Historiquement, le premier exemple est sans doute celui des automates cellulaires appelés *totalistiques* dans la littérature : ceux dont les transitions dépendent seulement de la somme des états du voisinage, et donc pas de l'ordre dans lequel ils apparaissent. Cette définition est motivée par la modélisation de phénomènes naturels dans lesquels il n'y a généralement pas de direction privilégiée. Plus généralement, on peut considérer les automates dont la règle de transition locale dépend arbitrairement d'un certain nombre de variables et seulement de la somme des autres : c'est le cas du *Jeu de la Vie*, un automate cellulaire proposé par J. Conway [6]. La définition classique de ce type d'automates nécessite une structure additive sur les états. Nous lui préférons la définition suivante qui est plus générale et selon nous plus naturelle.

Définition 32. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est ensembliste sur un ensemble de variable $I \subseteq \{1, \dots, \nu_{\mathcal{A}}\}$ s'il est invariant par permutation quelconque des vecteurs de voisinage associées à I . Formellement, pour toute permutation π de $\{1, \dots, \nu_{\mathcal{A}}\}$ telle que $j \notin I \Rightarrow \pi(j) = j$ et pour tout $a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}} \in A$, on a*

$$\delta_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}}) = \delta_{\mathcal{A}}(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(\nu_{\mathcal{A}})})$$

On remarque que la fonction de transition locale d'un automate cellulaire ensembliste sur I dépend uniquement des variables qui ne sont pas dans I et du multi-ensemble formé par les états présents dans les variables de I .

En s'inspirant de [1], on peut facilement construire un automate cellulaire intrinsèquement universel et ensembliste en toutes ses variables.

Un autre exemple de classe définie par une propriété de la règle de transition locale et la façon dont celle-ci dépend de ses variables est celui des automates cellulaires permutifs.

Définition 33. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est permutif en position i , pour tout $1 \leq i \leq \nu_{\mathcal{A}}$, si pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}}) \in A^{\nu_{\mathcal{A}}-1}$ la fonction :*

$$x \mapsto \delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}})$$

est bijective.

Formellement, la propriété de permutivité est définie sur la règle de transition locale seulement. Mais la dynamique des automates cellulaires permutifs

tifs dépend fortement des vecteurs associés aux variables permutives[↗]. Ainsi, la proposition suivante montre que, si les positions de permutivité sont en nombre suffisant et agencées de façon adéquate, un automate cellulaire permutif est nécessairement surjectif.

Proposition 10. *Si \mathcal{A} est permutif en toute position correspondant à un coin de son voisinage complété (i.e., un vecteur $z = (\epsilon_1 r_{\mathcal{A}}, \dots, \epsilon_d r_{\mathcal{A}})$ avec $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$), alors \mathcal{A} est surjectif.*

Démonstration. Soit \mathcal{A} un tel automate cellulaire. On note D_k l'ensemble des vecteurs du réseau de norme infinie au plus k et on note C les coins du voisinage de \mathcal{A} . On va montrer que tout cylindre de support D_k possède un antécédent et la compacité de l'espace permet de conclure. Pour cela, il suffit de montrer que l'on peut énumérer les vecteurs de D_k selon une suite (z_i) vérifiant pour tout i ($2 \leq i \leq |D_k|$) :

$$(z_i + C) \cap (\{z_j + V_{\mathcal{A}} : j \leq i\} \setminus \{z_j + V_{\mathcal{A}} : j \leq i - 1\}) \neq \emptyset.$$

En effet, on peut alors construire itérativement un antécédent f à tout cylindre m de support D_k de la façon suivante : on commence par choisir $z \in C$ et fixer arbitrairement l'état de toutes les cellules aux positions $z_1 + V \setminus \{z\}$. La permutivité de \mathcal{A} en position z garantit l'existence d'un choix de $f(z_1 + z)$ tel que $(\mathcal{A}(f))(z_1) = m(z_1)$. Ensuite, à l'étape i , l'ensemble $\{z_j + V_{\mathcal{A}} : j \leq i\} \setminus \{z_j + V_{\mathcal{A}} : j \leq i - 1\}$ des cellule dont l'état n'a pas été fixé aux étapes précédentes contient nécessairement un coin z' relativement à z_i : on peut donc fixer arbitrairement l'état de cet ensemble de cellules, excepté la cellule z' , puis la permutivité permet de fixer l'état en z' de sorte que $(\mathcal{A}(f))(z_i) = m(z_i)$. En itérant ce processus, on construit bien un antécédent f au cylindre m .

Enfin, il est facile de vérifier que l'énumération de D_k selon l'ordre lexicographique a la propriété recherchée. \square

D'après la proposition 7, ceci implique que les automates cellulaires permutifs en tout coin de leur voisinage ne sont pas intrinsèquement universels.

2.1.2 Sous-automates et quotients

On peut voir la relation de sous-automate (définition 19) comme une relation d'ordre[↗] sur les automates cellulaires. La hauteur dans $(\mathbf{AC}; \sqsubseteq)$ est alors définie inductivement : les automates cellulaires sans sous-automates

[↗]Étant donné que l'on utilise une association implicite entre les vecteurs du voisinage et les variables de la règle locale, le terme « position » fera référence dans la suite tantôt à une variable, tantôt au vecteur correspondant.

[↗]Pour être précis, il s'agit d'un pré-ordre dont la relation d'équivalence induite est la relation d'isomorphie (définie page 4).

propre sont à hauteur 0, les automates cellulaires n'ayant que des automates cellulaires de hauteur au plus n comme sous-automate, dont 1 au moins à hauteur n , sont à hauteur $n + 1$.

Étant donné un automate cellulaire, connaître l'ensemble de ses sous-automates nous renseigne sur la structure de sa règle de transition locale et permet de partiellement décomposer celle-ci en règles plus petites. Cependant, certains automates n'ont aucun sous-automate non trivial comme le montrent les exemples suivants.

Soit \mathcal{A} défini par $\delta_{\mathcal{A}}(x) = \pi(x)$ où π est une permutation de A . Il est clair que $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$ implique $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. Un autre exemple est donné par \mathcal{A} d'alphabet $A = \mathbb{Z}_p$ (p premier) et $\delta_{\mathcal{A}}(x, y) = x + y \bmod p$. Si $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$, alors B induit un sous-groupe de $(\mathbb{Z}_p, +)$, donc $|B| = 1$ ou $|B| = p$ (et alors $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$).

Au sens de l'ordre \sqsubseteq , de tels automates cellulaires sont à hauteur au plus 1 car, hormis eux-mêmes, ils ne peuvent admettre comme sous-automate que l'automate cellulaire à un seul état. Ces exemples invitent à se poser plus généralement la question suivante : est-il fréquent pour un automate cellulaire de posséder une structure non-triviale vis-à-vis de \sqsubseteq ? Dit autrement, quelle est la hauteur dans l'ordre \sqsubseteq d'un automate cellulaire tiré au hasard ?

Pour formaliser la question, nous introduisons la propriété $\mathcal{P}_{\sqsubseteq}$ suivante :

$$\mathcal{P}_{\sqsubseteq} = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, 1 < |B| < |A| \text{ et } \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}\}.$$

Tout revient alors à se demander si $\Delta_{r, \text{AC}}(\mathcal{P}_{\sqsubseteq})$ existe et le cas échéant quelle est sa valeur. La proposition suivante répond à la question : un automate cellulaire aléatoire ne possède aucune structure locale vis-à-vis de \sqsubseteq et les exemples donnés ci-dessus représentent donc le cas général.

Proposition 11. *Pour tout $r \in \mathbb{N}_+$, $\Delta_{r, \text{AC}}(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}) = 0$.*

La preuve repose sur un argument de comptage simple et utilise le lemme suivant (prouvé dans [86]).

Lemme 3. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall k, 2 \leq k \leq n - 1 : \left(\frac{k}{n}\right)^{k^{2r+1}} \leq n^{-2k}$.

Preuve de la proposition. Pour tout entier $k, 2 \leq k \leq n - 1$, la probabilité que $\mathcal{A} \in \text{AC}_n$ ait un sous-automate à k états est majorée par $C_n^k \left(\frac{k}{n}\right)^{k^{2r+1}}$: pour un choix de k états fixé, chaque transition impliquant seulement ces k états doit mener à l'un d'entre eux. On a alors :

$$\Delta_{r, \text{AC}}(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-1} C_n^k \left(\frac{k}{n}\right)^{k^{2r+1}}.$$

D'après le lemme 3, on peut récrire cette inégalité en :

$$\begin{aligned} \Delta_{r,AC}(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-1} C_n^k \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n^2}\right)^k - \sum_{k \in \{0,1,n\}} C_n^k \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{2n}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi $\Delta_{r,AC}(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}) = 0$. □

En terme d'ordre, on peut donc caractériser la distribution de hauteur pour \sqsubseteq des automates cellulaires tirés aléatoirement : le corollaire suivant montre que les hauteurs 0 et 1 se répartissent presque tous les automates cellulaires.

Corollaire 6. *Si $\mathcal{P}_{h=0}$, $\mathcal{P}_{h=1}$ et $\mathcal{P}_{h>1}$ désignent les propriétés d'être à hauteur 0, 1 et au moins 2 (respectivement) dans l'ordre $(AC; \sqsubseteq)$, alors on a pour tout $r \in \mathbb{N}_+$:*

$$\begin{aligned} \Delta_{r,AC}(\mathcal{P}_{h=0}) &= \frac{1}{e} \\ \Delta_{r,AC}(\mathcal{P}_{h=1}) &= 1 - \frac{1}{e} \\ \Delta_{r,AC}(\mathcal{P}_{h>1}) &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\mathcal{P}_{h>1} \subseteq \mathcal{P}_{\sqsubseteq}$, puis $\mathcal{P}_{equ} \subseteq \mathcal{P}_{h=1}$ et enfin $\mathcal{P}_{h=0} = AC \setminus (\mathcal{P}_{equ} \cup \mathcal{P}_{\sqsubseteq})$. Le calcul de $\Delta_{r,AC}(\mathcal{P}_{equ})$ fait en section 1.1.3 permet de conclure. □

La relation de sous-automate est une notion naturelle de comparaison entre automates cellulaires. La définition suivante introduit une autre relation d'ordre[↗] sur les fonctions de transition locales : les relation d'automate cellulaire quotient. Elle est fondée sur une notion de coloriage des états compatible avec les règles de transitions qui sera utilisée abondamment en section 2.3 et qui se rapproche de la définition 24 page 32.

Définition 34. *Étant donné un automate cellulaire \mathcal{A} et un ensemble fini B , une B -coloration de \mathcal{A} est une surjection $\pi : A \rightarrow B$ telle que pour tout $x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}} \in A$ et $y_1, \dots, y_{\nu_{\mathcal{A}}} \in A$:*

$$(\forall i, \pi(x_i) = \pi(y_i)) \Rightarrow \pi(\delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}})) = \pi(\delta_{\mathcal{A}}(y_1, \dots, y_{\nu_{\mathcal{A}}}))$$

[↗]Encore une fois, il s'agit d'un pré-ordre dont la relation d'équivalence induite est la relation d'isomorphie.

L'automate image de \mathcal{A} par la B -coloration π est l'automate \mathcal{B} d'alphabet B , de même réseau et même voisinage[↗] que \mathcal{A} , dont la règle de transition locale est définie pour tout $y_1, \dots, y_{\nu_{\mathcal{A}}} \in B$ par

$$\delta_{\mathcal{B}}(y_1, \dots, y_{\nu_{\mathcal{A}}}) = \pi(\delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}})) ,$$

où les x_i sont des éléments quelconques de A vérifiant $\pi(x_i) = y_i$. Un automate cellulaire obtenu par une certaine B -coloration de \mathcal{A} est appelé un automate quotient de \mathcal{A} , ce que l'on note $\mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{A}$.

Par la proposition 4, la relation d'automate quotient est aussi un cas particulier de la notion classique de facteur ou semi-conjugaison entre systèmes dynamiques appliquée aux automates cellulaires (voir [44] ou [26]); pour cette raison, on pourra également la désigner comme la relation de « facteur lettre à lettre ».

La question de la hauteur pour \trianglelefteq d'un automate cellulaire aléatoire se pose aussi. La proposition suivante y répond partiellement en montrant l'absence d'automate quotient de certaines tailles pour presque tous les automates cellulaires. Formellement, si $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$, on définit la propriété \mathcal{P}_f suivante :

$$\mathcal{P}_f = \{\mathcal{A} : \exists \mathcal{B}, |\mathcal{B}| = f(|\mathcal{A}|) \text{ et } \mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{A}\}.$$

Proposition 12. *Pour tout $r \in \mathbb{N}_+$, tout $k \in \mathbb{N}_+$ et tout réel α , $0 < \alpha < 1$, on a*

$$\begin{aligned} \Delta_{r, \mathcal{AC}}(\mathcal{P}_{n \rightarrow k}) &= 0, \\ \Delta_{r, \mathcal{AC}}(\mathcal{P}_{n \rightarrow n-k}) &= 0, \\ \Delta_{r, \mathcal{AC}}(\mathcal{P}_{n \rightarrow \alpha n}) &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration. Considérons un automate cellulaire \mathcal{A} admettant une Q -coloration π et notons $q = |Q|$ et $n = |A|$. Il existe nécessairement $q_0 \in Q$ tel que $|\pi^{-1}(q_0)| \geq \lceil \frac{n}{q} \rceil$. Soit $a_0 \in \pi^{-1}(q_0)$, comme la coloration π utilise q couleurs, on a $|\pi^{-1}(\pi(\delta_{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_0)))| \leq n - q + 1$. Donc, par compatibilité du coloriage, on a au moins $\left(\frac{n}{q}\right)^{\nu_{\mathcal{A}}} - 1$ transitions (précisément tous les $\nu_{\mathcal{A}}$ -uplets qui s'envoient par π sur (q_0, \dots, q_0) , excepté (a_0, \dots, a_0)) qui doivent mener à un état parmi un ensemble de cardinal au plus $n - q + 1$ qui ne dépend que de $\delta_{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_0)$ (précisément $\pi^{-1}(\pi(\delta_{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_0)))$). Ceci est vrai quelle que soit la coloration. Le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de cardinal q étant par ailleurs borné par q^n , on a donc :

$$\Delta_{r, \mathcal{AC}}(\mathcal{P}_{n \rightarrow k}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\binom{n}{k}^{\nu_{\mathcal{A}}-1}} = 0,$$

[↗] \mathcal{B} est défini syntaxiquement comme un automate cellulaire de même voisinage que \mathcal{A} . Mais le voisinage minimal de \mathcal{B} peut très bien être plus petit que le voisinage minimal de \mathcal{A} .

car $\nu_{\mathcal{A}} \geq 3$ ($r \geq 1$).

Ensuite, en reprenant les notations de la coloration π , et en notant E_q l'ensemble $\{\bar{\pi}(u) : u \in A^{\nu_{\mathcal{A}}}\text{ et } \pi(\delta_{\mathcal{A}}(u)) = q\}$ il existe nécessairement $q_1 \in Q$ tel que $|E_{q_1}| \geq q^{\nu_{\mathcal{A}}-1}$. En effet, par compatibilité de la coloration π , les ensembles E_q forment une partition de $Q^{\nu_{\mathcal{A}}}$. L'existence de E_{q_1} contraint au moins $q^{\nu_{\mathcal{A}}-1} - 1$ transitions à une valeur parmi au plus $n - q + 1$ (au lieu de n). Ainsi, en majorant le nombre de surjections de n dans $n - k$ par n^n , on a :

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\mathcal{AC}}(\mathcal{P}_{n \rightarrow n-k}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^n \left(\frac{k+1}{n} \right)^{(n-k)^{\nu_{\mathcal{A}}-1}-1} \\ &= 0, \\ \Delta_{r,\mathcal{AC}}(\mathcal{P}_{n \rightarrow \alpha n}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^n \left(\frac{n - \alpha n}{n} \right)^{(\alpha n)^{\nu_{\mathcal{A}}-1}-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $\nu_{\mathcal{A}} \geq 3$. □

Pour finir cette section, nous nous intéressons aux relations obtenues par compositions successives des relations \sqsubseteq et \trianglelefteq . Formellement, on définit l'ensemble de relations \mathcal{E} tel que $\sqsubseteq \in \mathcal{E}$, $\trianglelefteq \in \mathcal{E}$ et si $R_1 \in \mathcal{E}$ alors

$$\begin{aligned} \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \exists \mathcal{C}, \mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C} R_1 \mathcal{B}\} &\in \mathcal{E}, \\ \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \exists \mathcal{C}, \mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C} R_1 \mathcal{B}\} &\in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

En particulier, \mathcal{E} contient les relations

$$\begin{aligned} \trianglelefteq\sqsubseteq &= \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \exists \mathcal{C}, \mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{B}\} \text{ et} \\ \sqsubseteq\trianglelefteq &= \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \exists \mathcal{C}, \mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C} \trianglelefteq \mathcal{B}\}. \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que si $\mathcal{A} \sqsubseteq\trianglelefteq \mathcal{B}$ alors on a nécessairement $\mathcal{A} \trianglelefteq\sqsubseteq \mathcal{B}$: si \mathcal{C} est tel que $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{C}$ par l'injection $i : A \rightarrow C$ et $\mathcal{C} \trianglelefteq \mathcal{B}$ par la coloration $\pi : B \rightarrow C$, alors l'ensemble d'états $\pi^{-1}(i(A))$ induit un sous-automate de \mathcal{B} (par compatibilité du coloriage) dont \mathcal{A} est quotient par le coloriage $i^{-1} \circ \pi$. En résumé, en notant $\pi_+ = i^{-1} \circ \pi$ et $X = \pi^{-1} \circ i(B^{\mathcal{R}})$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A^{\mathcal{R}} & \xleftarrow{\pi_+} & X & \xrightarrow{\text{Id}} & B^{\mathcal{R}} \\ \downarrow \mathcal{A} & & \downarrow \mathcal{B} & & \downarrow \mathcal{B} \\ A^{\mathcal{R}} & \xleftarrow{\pi_+} & X & \xrightarrow{\text{Id}} & B^{\mathcal{R}} \end{array}$$

Ainsi, comme les relations \sqsubseteq et \trianglelefteq sont transitives, on en déduit que \mathcal{E} est réduit à \sqsubseteq , \trianglelefteq , $\sqsubseteq\trianglelefteq$ et $\trianglelefteq\sqsubseteq$, et que $\trianglelefteq\sqsubseteq$ est transitive. Il est facile de voir

qu'aucune des relations \sqsubseteq et \trianglelefteq n'est conséquence de l'autre. Nous donnons ci-après un exemple de couple d'automates \mathcal{A} et \mathcal{B} tels que $\mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{A}$ mais $\mathcal{B} \not\sqsubseteq \mathcal{A}$. Cela montre que \sqsubseteq n'est pas une relation transitive et nous ne nous y intéressons pas dans la suite.

Soit $A = \{0, \dots, p-1\}$, p premier, $p \geq 5$, et $\alpha, a_0, a_1, b_0, b_1$, 5 éléments distincts de A . Soit \mathcal{A} l'automate cellulaire d'alphabet A et défini par

$$\delta_{\mathcal{A}}(x, y) = \begin{cases} a_{1-i} & \text{si } x \neq \alpha \text{ et } y = a_i, \\ b_{1-i} & \text{si } x \neq \alpha \text{ et } y = b_i, \\ y + 1 \bmod p & \text{sinon.} \end{cases}$$

\mathcal{A} n'admet aucune coloration non-triviale. En effet, si π est une Q -coloration de \mathcal{A} et si $e, f \in A$ sont tels que $\pi(e) = \pi(f)$ alors $\pi(e + 1 \bmod p) = \pi(f + 1 \bmod p)$ car $\delta_{\mathcal{A}}(\alpha, e) = e + 1 \bmod p$ et $\delta_{\mathcal{A}}(\alpha, f) = f + 1 \bmod p$. Plus généralement, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'égalité $\pi(e + k \bmod p) = \pi(f + k \bmod p)$. En supposant (sans perte de généralité) $f > e$, on pose $k = f - e$. D'après ce qui précède on a, pour tout $j \in \mathbb{N}_+$: $\pi(f) = \pi(f + jk \bmod p)$. Comme p est premier et k non nul, on en déduit que π est constante. On a donc montré

$$\mathcal{C} \trianglelefteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \equiv \mathcal{A} \text{ ou } |\mathcal{C}| = 1.$$

Considérons l'automate cellulaire identité \mathcal{B} sur l'alphabet $B = \{0, 1\}$. Comme \mathcal{B} possède 2 états quiescents et que \mathcal{A} n'en possède aucun, on ne peut pas avoir $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$ si $\mathcal{C} \trianglelefteq \mathcal{A}$, ce qui montre $\mathcal{B} \not\sqsubseteq \mathcal{A}$.

Par contre, on a bien $\mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{A}$. En effet, si \mathcal{D} est le sous-automate de \mathcal{A} induit par l'ensemble d'états $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ alors $\mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{D}$ avec la coloration $\pi : \{a_0, a_1, b_0, b_1\} \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\pi(a_i) = 0$ et $\pi(b_i) = 1$.

Cet exemple montre également que l'on peut avoir un sous-automate d'un automate donné (ici $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{B}$) qui peut être colorié en un nouvel automate (ici \mathcal{B}) mais tel que le coloriage ne peut pas être étendu à l'automate initial entier (ici \mathcal{A}).

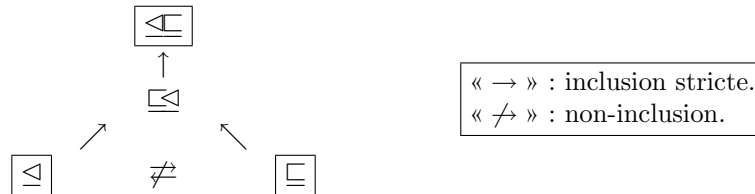


FIG. 2.1: Inclusions et non-inclusions entre les relations de \mathcal{E} . Les relations encadrées sont les relations transitives.

La figure 2.1 résume les inclusions et non-inclusions entre les différentes relations de \mathcal{E} .

2.2 Les automates cellulaires captifs

Les résultats présentés dans cette section ont fait l'objet des publications [86] et [87].

Nous abordons à présent la classe des automates cellulaires captifs. Tout au long de cette section, nous adoptons différents points de vue, qui donnent lieu à chaque fois à une caractérisation de la classe, et montrons comment elle constitue un « sous-modèle » naturel des automates cellulaires, formellement plus simple mais aux comportements aussi riches et complexes, et qui concentre certaines problématiques majeures du modèle général.

2.2.1 Règles de sélection

Les automates cellulaires captifs sont une classe d'automates cellulaires définie de manière locale par une propriété du premier ordre sur la règle de transition locale et les états², appelée dans la suite propriété « prison ». Cette propriété impose aux fonctions de transition locales des automates cellulaires captifs une sélection d'un état parmi les états présents dans le voisinage.

Définition 35. *Un automate cellulaire \mathcal{A} d'arité $\nu_{\mathcal{A}}$ est captif s'il vérifie la propriété suivante, appelée propriété prison :*

$$\forall x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}} \in A : \delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}}) \in \{x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}}\}.$$

On note $\mathcal{A}c$ l'ensemble des automates cellulaires captifs.

Par sa forme, la propriété prison peut être vue comme une contrainte de localité supplémentaire et les automates cellulaires captifs correspondent ainsi à une version renforcée du paradigme de localité sur lequel repose le modèle des automates cellulaires en général.

États, arité, espace

La définition 35 montre que, formellement, la propriété prison est d'autant plus contraignante que le nombre d'états est grand et que l'arité de l'automate est petite. Un automate cellulaire à 2 états est captif si et seulement si ses deux états sont quiescents, ce qui fixe seulement 2 transitions de la règle locale, les autres étant quelconques. Au contraire, la propriété prison pour un automate cellulaire d'arité 2 est très contraignante quel que soit le nombre d'états.

²Ce n'est *a priori* pas le cas des automates cellulaires additifs, conservatifs ou à partition qui nécessitent une quantification existentielle de relation sur les états : la loi de groupe, la fonction de potentiel ou la partition.

L'étude des automates cellulaires d'arité 2 se ramène essentiellement à celle des automates cellulaires d'arité 2, de réseau \mathbb{Z} et de voisinage $\{0, 1\}$. Il n'est pas difficile de voir qu'un tel automate \mathcal{A} , s'il est captif, est en particulier incapable de réaliser un croisement d'états (ce qui n'est pas à interpréter comme l'impossibilité à croiser de l'information en général) : formellement, il n'existe pas d'états $a, b, c \in A$ tels qu'une configuration de la forme ${}^\omega c a c^n b c^\omega$ (pour $n \in \mathbb{N}_+$) soit envoyée par itérations de \mathcal{A} vers une configuration de la forme ${}^\omega c b c^p a c^\omega$ (pour $p \in \mathbb{N}_+$). En effet, on montre par une rapide étude de cas que le croisement doit se faire au niveau du motif ab , or la propriété prison ne laisse que deux alternatives ($\delta_{\mathcal{A}}(a, b) = a$ ou $\delta_{\mathcal{A}}(a, b) = b$) qui chacune ne font que déplacer la frontière entre la moitié gauche de la configuration restreinte à l'alphabet $\{a, c\}$ et la moitié droite restreinte à l'alphabet $\{b, c\}$.

Si l'on retire la contrainte d'être captif, le croisement peut être réalisé simplement en utilisant un état supplémentaire d qui code la présence simultanée de a et b sur une même cellule et qui apparaît par la transition $\delta_{\mathcal{A}}(a, b) = d$, puis disparaît par les transitions $\delta_{\mathcal{A}}(d, c) = a$ et $\delta_{\mathcal{A}}(c, d) = b$.

Dans le cas général, l'arité 2 ne réduit pas la complexité potentielle des automates cellulaires comme cela a été montré dans [13] ou [34]. La construction utilisée pour reproduire le comportement de tout automate cellulaire avec un automate cellulaire d'arité 2 repose essentiellement sur le produit cartésien d'états, c'est à dire la possibilité de coder dans une seule cellule plusieurs flux d'information indépendants. La classe des automates cellulaires captifs n'est quant-à elle pas close par produit cartésien comme le montre l'exemple suivant.

Pour $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$, $\sigma_1 \in \mathbf{ACc}$ et $\sigma_{-1} \in \mathbf{ACc}$, mais $\sigma_1 \times \sigma_{-1} \notin \mathbf{ACc}$ car

$$\sigma_1 \times \sigma_{-1}((0, 1), (0, 0), (1, 0)) = (1, 1) \notin \{(0, 1), (0, 0), (1, 0)\}.$$

Dans un automate cellulaire captif, l'état pris par chaque cellule représente en un certain sens une information atomique. Pour maintenir localement plusieurs flux d'information indépendants (avec d'éventuels croisements), il est alors nécessaire de coder ceux-ci dans l'agencement spatial des états. De nombreuses techniques de codage utilisant l'espace apparaissent dans la littérature, et leur étude constitue un axe important de la compréhension du modèle des automates cellulaires. La classe \mathbf{ACc} constitue, par l'atomicité que confère aux états la propriété prison, un cadre naturel pour traiter ce genre de questions.

L'universalité, par définition, nécessite une certaine capacité à coder dans l'espace. Il est remarquable à ce point que la classe \mathbf{ACc} contienne des automates cellulaires intrinsèquement universels (nous reviendrons largement sur cette remarque en section 2.2.2).

Les travaux de E. R. Banks présentés en section 1.3.3 en donnent un exemple radical : comme les 2 états de ces automates cellulaires sont quiescents, ils sont captifs. Nous ne connaissons pas d'automate cellulaire captif

intrinsèquement universel d'arité inférieure à 5. On peut noter en particulier que l'automate cellulaire intrinsèquement universel d'arité 3 et à 6 états construit par N. Ollinger n'est pas captif. Ceci provient du fait que, bien qu'utilisant des codages spatiaux, sa structure repose sur un produit cartésien (2×3 états).

Pour finir cette section, nous donnons un procédé simple, mais aux conséquences importantes (cf. section 2.2.1), de transformation uniforme de tout automate cellulaire en un automate cellulaire captif qui le simule. Ce procédé repose sur la remarque suivante : sur des configurations telles que tout voisinage contient un certain ensemble B d'états, les transitions d'un automate cellulaire captif peuvent être quelconques, pourvu qu'elles mènent à un état de B .

Nous construisons pour tout automate cellulaire \mathcal{A} , un automate cellulaire captif $\rho(\mathcal{A})$ qui le simule au sens de \preceq_{\square} de la façon qui suit (pour simplifier la présentation nous nous limitons au réseau \mathbb{Z} mais la généralisation est aisée). Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ est l'alphabet de \mathcal{A} , on considère un nouvel état $\# \notin A$ et on note $w = w_1 w_2 \dots w_{n+2}$ le mot $\# a_1 a_2 \dots a_n \#$. Soit \mathfrak{S} le sous-shift par blocs associé à l'ensemble de mots $\{aw : a \in A\}$ et soit $\kappa_{\#,A}$ la fonction de codage injective de $A^{\mathbb{Z}}$ dans \mathfrak{S} qui code un état a par le mot aw : formellement,

$$(\kappa_{\#,A}(c))(z) = \begin{cases} c(k) & \text{si } z = k(n+3) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \\ w_i & \text{sinon, où } i = z \bmod (n+3). \end{cases}$$

On définit alors $\rho_{\#}(\mathcal{A})$, de rayon $r' = r(n+3) + n + 2$ par son action sur tout mot u (avec $|u| = 2r' + 1$) de la façon suivante :

- si $u \in \mathcal{L}(\mathfrak{S})$ alors $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ mime le comportement de \mathcal{A} à travers l'encodage $\kappa_{\#,A}$, formellement :

$$\rho_{\#}(\mathcal{A})(u) = \delta_{\mathcal{A}}(c_{-r}, \dots, c_0, \dots, c_r) \text{ si } u = wc_{-r}w \dots wc_iw \dots wc_rw ;$$

- si $u \notin \mathcal{L}(\mathfrak{S})$ et si $\# \in \mathcal{L}(u)$ alors $\rho_{\#}(\mathcal{A})(u) = \#$;
- enfin, dans tous les autres cas, $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ est l'identité.

Il est clair que $\rho_{\#}(\mathcal{A}) \in \mathbf{Ac}$: dans chacun des cas de la définition précédente le nouvel état pris par une cellule est présent dans son voisinage avant la transition.

Par construction, il est aussi clair que $\mathcal{A} \preceq_{\square} \rho_{\#}(\mathcal{A})$: d'une part \mathfrak{S} est préservé par itérations de $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ et d'autre part le système $(\mathfrak{S}, \rho_{\#}(\mathcal{A}))$ est isomorphe à $(A^{\mathbb{Z}}, \mathcal{A})$ à travers la fonction de codage $\kappa_{\#,A}$. \mathcal{A} est donc un sous-automate enfoui de $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ associé au sous-shift par blocs \mathfrak{S} .

\mathcal{A} et $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ ne sont pas toujours dans la même classe d'équivalence pour \preceq_{\square} (on n'a pas toujours $\rho_{\#}(\mathcal{A}) \preceq_{\square} \mathcal{A}$). En particulier, $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ n'est jamais surjectif donc il ne peut pas être dans la même classe que \mathcal{A} lorsque \mathcal{A} est surjectif (proposition 7). La proposition suivante montre cependant que

$\rho_{\#}(\mathcal{A})$ ne capture (directement) aucune dynamique non persistante qui ne soit à son tour capturée (directement) par \mathcal{A} . Ainsi, la transformation de \mathcal{A} pour en faire un automate captif $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ est neutre dynamiquement, car elle ne rajoute pas de comportement (persistant) dans $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ qui ne serait déjà présent dans \mathcal{A} .

Proposition 13. *Les dynamiques persistantes capturées directement par \mathcal{A} sont les dynamiques persistantes capturées directement par $\rho_{\#}(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Tout d'abord, $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ capture toutes les dynamiques capturées par \mathcal{A} d'après la proposition 8 page 34 car $\mathcal{A} \preceq_{\square} \rho_{\#}(\mathcal{A})$.

Réciproquement, considérons une dynamique persistante \mathcal{D} sur l'alphabet Q capturée directement par $\rho_{\#}(\mathcal{A})$. Par définition, il existe des paramètres $m, m', t, t' \in \mathbb{N}_+$ tels que pour tout $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ (où $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$), il existe $c \in ((A \cup \{\#\})^m)^{\mathcal{R}}$ et une surjection $\varsigma : (A \cup \{\#\})^m \rightarrow Q^{m'}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{o}_{m'}^{-1}(d_{t'n}) \preceq_{\varsigma} \left(\rho_{\#}(\mathcal{A})^{<m,t,(0,\dots,0)>} \right)^n (c).$$

Pour chaque c dans la relation précédente, on a $\mathbf{o}_m(c) \in \mathfrak{S}$ car sinon, soit $\# \notin \mathcal{L}(\mathbf{o}_m(c))$ et alors $\rho_{\#}(\mathcal{A})^{<m,t,(0,\dots,0)>}$ est l'identité sur c , soit au contraire $\# \in \mathcal{L}(\mathbf{o}_m(c))$ et l'état $\#$ envahit tout le réseau et chaque cellule devient constante au bout d'un certain temps. Dans les deux cas cela contredit le fait que \mathcal{D} est une dynamique persistante.

On peut supposer, quitte à multiplier simultanément m et m' par $n+3$, que m est multiple de $n+3$. On note $p = \frac{m}{n+3}$. Par définition de \mathfrak{S} , $\mathcal{L}_m(\mathfrak{S})$ contient $n+3$ types de mots :

- ceux commençant par aw où $a \in A$ (type 0) ;
- ceux commençant par $w_i \cdots w_{n+2} a w_1 \cdots w_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n+2$ et $a \in A$ (type i).

De plus, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $c(z) \in \mathcal{L}_m(\mathfrak{S})$ est toujours du même type (précisément car m est multiple de $n+3$) et on peut supposer qu'il s'agit du type 0, quitte à remplacer c par $\mathbf{o}_m^{-1}(\sigma_{-i+1}(\mathbf{o}_m(c)))$ et utiliser la bijection $\phi : w_i \cdots w_{n+2} u \mapsto u w_i \cdots w_{n+2}$ pour i bien choisi. On note \mathfrak{S}_0 le sous-ensemble de \mathfrak{S} constitué uniquement des configurations c telles que le mot $c(0) \cdots c(m-1)$ est de type 0.

Considérons maintenant la bijection $\psi : (A \cup \{\#\})^m \rightarrow A^p$ définie par

$$\psi(a_1 w a_2 w \cdots a_p w) = a_1 a_2 \cdots a_p.$$

On remarque que pour toute configuration $c \in \mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}_0)$ on a

$$\bar{\psi}(c) = \mathbf{o}_p^{-1}(\kappa_{\#,A}^{-1} \circ \mathbf{o}_m(c)).$$

Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}_0) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & (A^p)\mathcal{R} \\ \downarrow \rho_{\#} \mathcal{A}^{<p,t,(0,\dots,0)>} & & \downarrow \mathcal{A}^{<p,t,(0,\dots,0)>} \\ \mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}_0) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & (A^p)\mathcal{R} \end{array}$$

Comme \mathcal{A} est un sous-automate enfoui de $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ associé à \mathfrak{S} et à $\kappa_{\#,A}$, on en déduit :

$$\mathbf{o}_{m'}^{-1}(d_{nt'}) \trianglelefteq_{\zeta \circ \psi^{-1}} \left(\mathcal{A}^{<p,t,(0,\dots,0)>} \right)^n (c).$$

□

On remarque que l'arité de $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ est linéaire en $|A|$. La section 2.2.2 fournit une autre construction de ce genre, qui permet d'obtenir des automates cellulaires captifs dont l'arité est constante en $|A|$.

Ensembles limites

La propriété prison implique que tout état d'un automate cellulaire captif est quiescent et par conséquent qu'aucun automate cellulaire captif[↗] n'est nilpotent. La preuve de J. Kari du théorème de Rice sur les ensembles limites repose sur l'indécidabilité de la nilpotence. Il est donc naturel de se demander si ce théorème reste valide lorsqu'on se restreint aux automates cellulaires captifs. La notion de propriété non triviale est alors relative aux automates cellulaires captifs : il s'agit d'une propriété que possède un automate cellulaire captif et telle qu'il existe un automate cellulaire captif ne la possédant pas.

Le théorème de Rice échoue dans le cas des automates cellulaires captifs car, contrairement au cas général, l'ensemble limite d'un automate cellulaire captif \mathcal{A} contient toute l'information sur l'alphabet de celui-ci : formellement $\mathcal{L}_1(\Omega_{\mathcal{A}}) = A$. Ainsi, par exemple, la propriété « il y a un nombre pair d'états dans l'alphabet de l'ensemble limite » est une propriété de l'ensemble limite qui peut être décidée de façon élémentaire (il suffit de tester la parité du nombre d'états de l'automate cellulaire donné en entrée) et elle est non triviale : les automates cellulaires identité à 2 et 3 états respectivement sont captifs, l'un possède cette propriété et l'autre pas.

Un autre exemple, qui justifie aussi en soi l'étude des ensembles limites des automates cellulaires captifs, est celui de la surjectivité : un automate cellulaire captif \mathcal{A} est surjectif si et seulement si son ensemble limite est un sous-shift complet.

En effet, si \mathcal{A} est surjectif son ensemble limite est l'espace tout entier donc un sous-shift complet et, réciproquement, si $\Omega_{\mathcal{A}} = Q^{\mathbb{R}}$ on a alors $A = Q$ (comme $\mathcal{L}_1(\Omega_{\mathcal{A}}) = A$) et donc $\Omega_{\mathcal{A}} = A^{\mathbb{R}}$.

[↗]Avec au moins deux états.

Ainsi, lorsque $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$, la surjectivité fournit un autre exemple de propriété limite non triviale décidable (théorème 7) pour les automates cellulaires captifs. Notons que dans le cas des automates cellulaires en général la surjectivité n'est pas une propriété de l'ensemble limite.

En effet soit \mathcal{A} l'automate cellulaire identité et soit \mathcal{B} un automate cellulaire d'alphabet $B = A \cup \{*\}$ tel que \mathcal{B} restreint à A est l'identité et $* \notin \delta_{\mathcal{B}}(B, \dots, B)$. On a alors $\Omega_{\mathcal{A}} = \Omega_{\mathcal{B}}$, donc \mathcal{A} et \mathcal{B} vérifient exactement les mêmes propriétés des ensembles limites. Cependant \mathcal{A} est surjectif et \mathcal{B} ne l'est pas.

Dans [42], J. Kari présente l'étude de la décidabilité des propriétés limites à alphabet fixé comme un problème ouvert important. La classe \mathbf{AC} constitue, d'après ce qui précède, un cadre naturel pour étudier cette question.

Le transfert des propriétés indécidables dans le cas général vers des propriétés indécidables pour \mathbf{AC} provient d'une propriété d'uniformité de la transformation ρ et des fonctions d'encodage κ , mais ne découle pas directement de la propriété prison. Pour expliciter ce lien entre simulation uniforme et transfert des propriétés des ensembles limites, nous formulons le théorème 11 ci-dessous dans le cadre d'une classe E quelconque d'automates cellulaires. Les problèmes de décision qui nous intéressent sont dans ce cadre les problèmes $D_E(\mathcal{P}')$ suivant, où \mathcal{P}' est une propriété des ensembles limites ($\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{U}$) :

Entrée : $\mathcal{A} = (A, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}}) \in E$

Question : Est-ce que $\Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}'$?

Le théorème s'énonce alors de la façon suivante.

Théorème 11. *Soit $E \subseteq \mathbf{AC}$ une classe d'automates cellulaires telle qu'il existe des fonctions ρ et $\kappa_{\mathcal{A}}$ avec les propriétés suivantes :*

- ρ est une fonction calculable de \mathbf{AC} dans E ;
- pour tout $\mathcal{A} \in \mathbf{AC}$, $\kappa_{\mathcal{A}}$ envoie les configurations de \mathcal{A} dans les configurations de $\rho(\mathcal{A})$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathcal{R}} & \xrightarrow{\kappa_{\mathcal{A}}} & \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}}) \\ \downarrow \mathcal{A} & & \downarrow \rho(\mathcal{A}) \\ A^{\mathcal{R}} & \xrightarrow{\kappa_{\mathcal{A}}} & \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}}) \end{array}$$

- les fonctions $\kappa_{\mathcal{A}}$ sont injectives dans leur ensemble :

$$\text{si } \kappa_{\mathcal{A}}(c) = \kappa_{\mathcal{B}}(d) \text{ alors } \kappa_{\mathcal{A}} = \kappa_{\mathcal{B}} \text{ et } c = d;$$

- les fonctions $\kappa_{\mathcal{A}}$ sont honnêtes :

$$\forall \mathcal{B}, \text{ si } \rho(\mathcal{A})(d) = c \text{ et } c \in \kappa_{\mathcal{B}}(B^{\mathcal{R}}) \text{ alors } d \in \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}})^{\heartsuit}.$$

^{\heartsuit}On a donc $c \in \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}})$. Et, d'après la condition d'injectivité dans leur ensemble des fonctions de codage, on en déduit que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Alors il existe une fonction injective $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ telle que, pour toute propriété des ensembles limites $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}$ non triviale (i.e. telle que $\exists \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{AC}$ avec $\Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}$ et $\Omega_{\mathcal{B}} \notin \mathcal{P}$), le problème de décision $D_E(\Phi(\mathcal{P}))$ est indécidable.

Démonstration. On définit la fonction Φ de la manière suivante :

$$\Phi(\mathcal{P}) = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathcal{AC}} \{P_+ \in \mathcal{U} : P_+ \cap \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}}) \in \{\kappa_{\mathcal{A}}(P) : P \in \mathcal{P}, P \neq \emptyset\}\}.$$

Tout d'abord, Φ est injective car si $\mathcal{P}_a \neq \mathcal{P}_b$ dans \mathcal{U} , on peut trouver $P_a \in \mathcal{P}_a$ tel que $P_a \neq \emptyset$ et $P_a \notin \mathcal{P}_b$ (la preuve est identique si $\mathcal{P}_b \setminus \mathcal{P}_a \neq \emptyset$). Soit alors un automate cellulaire \mathcal{A} tel que $P_a \subseteq A^{\mathcal{R}}$ et soit $K = \kappa_{\mathcal{A}}(P_a)$. Par définition de Φ , $K \in \Phi(\mathcal{P}_a)$. Supposons que $K \in \Phi(\mathcal{P}_b)$. Alors il y a $P \in \mathcal{P}_b$, $P \neq \emptyset$ et un automate cellulaire \mathcal{B} tels que $K \cap \kappa_{\mathcal{B}}(B^{\mathcal{R}}) = \kappa_{\mathcal{B}}(P)$. Par injectivité dans leur ensemble des fonctions κ , cela implique $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Ainsi $\kappa_{\mathcal{A}}(P) = K$ et, par injectivité de $\kappa_{\mathcal{A}}$, $P_a = P \in \mathcal{P}_b$: contradiction.

Montrons à présent que $\Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\Omega_{\rho(\mathcal{A})} \in \Phi(\mathcal{P})$ (ce qui termine la preuve du théorème en appliquant le théorème 10 car ρ est une fonction calculable). Supposons d'abord que $\Omega_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}$. Par le diagramme commutatif, on a $\kappa_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}}) \subseteq \Omega_{\rho(\mathcal{A})} \cap \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}})$. Réciproquement, pour toute configuration $c \in \Omega_{\rho(\mathcal{A})} \cap \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}})$ il y a $d \in \Omega_{\rho(\mathcal{A})}$ telle que $(\rho(\mathcal{A}))(d) = c$ (par définition de l'ensemble limite). La propriété d'honnêteté implique alors que $d \in \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}})$. On peut répéter cet argument pour construire une suite infinie de configurations de $\kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}})$ antécédentes les unes des autres selon $\rho(\mathcal{A})$ et qui mènent à c . En appliquant encore une fois le diagramme commutatif, on en conclue que $c \in \kappa_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}})$. Ainsi, $\Omega_{\rho(\mathcal{A})} \cap \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}}) \subseteq \kappa_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}})$ et donc $\Omega_{\rho(\mathcal{A})} \cap \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}}) = \kappa_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}})$. Par conséquent $\Omega_{\rho(\mathcal{A})} \in \Phi(\mathcal{P})$ d'après la définition de Φ .

Supposons maintenant que $\Omega_{\rho(\mathcal{A})} \in \Phi(\mathcal{P})$. Alors il y a $P \in \mathcal{P}$, $P \neq \emptyset$ et un automate cellulaire \mathcal{B} tels que $\Omega_{\rho(\mathcal{A})} \cap \kappa_{\mathcal{B}}(B^{\mathcal{R}}) = \kappa_{\mathcal{B}}(P)$. Comme on l'a remarqué ci-dessus, pour tout $c \in \Omega_{\rho(\mathcal{A})} \cap \kappa_{\mathcal{B}}(B^{\mathcal{R}})$ il existe $d \in \Omega_{\rho(\mathcal{A})}$ telle que $(\rho(\mathcal{A}))(d) = c$. En appliquant la propriété d'honnêteté, on en déduit que $d \in \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}})$ et donc $c \in \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}})$. Ainsi, par injectivité dans leur ensemble des fonctions κ , $\kappa_{\mathcal{A}} = \kappa_{\mathcal{B}}$ (et donc $A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}$). Comme montré ci-dessus, $\Omega_{\rho(\mathcal{A})} \cap \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}}) = \kappa_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}})$, donc on a :

$$\kappa_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}}) = \Omega_{\rho(\mathcal{A})} \cap \kappa_{\mathcal{A}}(A^{\mathcal{R}}) = \Omega_{\rho(\mathcal{A})} \cap \kappa_{\mathcal{B}}(B^{\mathcal{R}}) = \kappa_{\mathcal{B}}(P) = \kappa_{\mathcal{A}}(P).$$

Par injectivité de $\kappa_{\mathcal{A}}$, on en déduit $\Omega_{\mathcal{A}} = P \in \mathcal{P}$. □

Les automates cellulaires captifs munis d'une légère variante des fonctions $\rho_{\#}$ et $\kappa_{\#,A}$ vérifient les hypothèses du théorème (une preuve formelle détaillée est donnée dans [86]) : en particulier, l'injectivité dans leur ensemble et l'honnêteté des fonctions $\kappa_{\#,A}$ viennent d'une part de la présence explicite de l'alphabet A dans toute configuration encodée selon $\kappa_{\#,A}$ et

d'autre part du rôle joué par l'état $\#$ pour propager les erreurs de codage, erreurs qui sont rendues détectables par la forme du codage puisqu'il s'agit d'un sous-shift de type fini.

Contraintes sur les dynamiques « chaotiques »

Comme on l'a vu précédemment, les automates cellulaires captifs exhibent la richesse et la complexité des automates cellulaires en général. La propriété prison amène cependant de fortes contraintes sur certains types de dynamiques globales. Plus précisément, nous allons montrer que l'expansivité, l'additivité et la permutivité sont des propriétés largement incompatibles avec la propriété prison. Toutefois, il existe un automate cellulaire captif qui est à la fois additif, permutif et expansif.

Soit \mathcal{A} l'automate cellulaire d'alphabet $\{0, 1\}$ et de rayon 1 défini par

$$\delta_{\mathcal{A}}(x, y, z) = x + y + z \pmod{2}.$$

\mathcal{A} est captif car ses deux états sont quiescents et on vérifie qu'il est également additif (pour l'addition dans \mathbb{Z}_2), permutif en ses deux variables gauche et droite donc expansif.

La propriété suivante montre partiellement que les dynamiques expansives (voir définition 16) sont incompatibles avec la propriété prison.

Proposition 14. *Lorsque le réseau est \mathbb{Z} , il existe un seul automate cellulaire captif expansif de rayon 1, à isomorphie près.*

Démonstration. Soit \mathcal{A} un captif expansif de rayon 1. Il découle de la définition de l'expansivité que tout sous-automate de \mathcal{A} est expansif. Soit 0 et 1 deux états quelconques de \mathcal{A} . On appelle \mathcal{B} l'automate \mathcal{A} restreint à $\{0, 1\}$. \mathcal{B} étant captif et expansif, ses deux états sont quiescents et il vérifie

$$\exists \epsilon, \forall x, y : x \neq y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \mathfrak{d}(\delta_{\mathcal{B}}^n(x), \delta_{\mathcal{B}}^n(y)) \geq \epsilon.$$

Remarquons d'abord que $\delta_{\mathcal{B}}(0, 1, 1) \neq \delta_{\mathcal{B}}(0, 0, 1)$. En effet si tel n'était pas le cas, la configuration c_i , valant 0 pour $z < i$ et 1 ailleurs, s'enverrait sur c_{i+1} ou c_{i-1} pour tout i : cela contredirait l'expansivité de \mathcal{B} car, pour $k \in \mathbb{N}$, les orbites de c_{-k} et de la configuration constante égale à 1 (ou de c_k et de la configuration constante égale à 0) reste à une distance inférieure à 2^k , donc inférieure à ϵ pour k choisi suffisamment grand. De façon symétrique on a $\delta_{\mathcal{B}}(1, 0, 0) \neq \delta_{\mathcal{B}}(1, 1, 0)$. De plus $\delta_{\mathcal{B}}(0, 1, 1) \neq 1$ sinon les orbites de la configuration uniformément égale à 1 et de c_{-k} restent séparées d'une distance inférieure à 2^{-k+1} ce qui contredit l'expansivité de \mathcal{B} encore une fois. De manière analogue, on a $\delta_{\mathcal{B}}(0, 0, 1) \neq 0$. Enfin, $\delta_{\mathcal{B}}(1, 0, 1) \neq \delta_{\mathcal{B}}(0, 1, 0)$ sinon, en supposant que cette valeur commune est 0 (le cas 1 est semblable) deux configurations identiques sur les positions inférieures à k et respectivement

égales à $01(011)^\omega$ et $(011)^\omega$ sur les positions strictement supérieures à k ont même image et sont à distance 2^{-k-2} ce qui contredit l'expansivité. Enfin si l'on suppose $\delta_{\mathcal{B}}(101) = 1$ (et donc $\delta_{\mathcal{B}}(010) = 0$) deux configurations identiques sur les positions inférieures à k et respectivement égales à $(01)^\omega$ et $0111(01)^\omega$ sur les positions strictement supérieures à k ont même image et sont à distance inférieure à 2^{-k-2} ce qui contredit l'expansivité encore une fois. En résumé on a :

$$\begin{array}{ll} \delta_{\mathcal{B}}(111) = 1 & \delta_{\mathcal{B}}(000) = 0 \\ \delta_{\mathcal{B}}(101) = 0 & \delta_{\mathcal{B}}(010) = 1 \\ \delta_{\mathcal{B}}(110) = 0 & \delta_{\mathcal{B}}(001) = 1 \\ \delta_{\mathcal{B}}(100) = 1 & \delta_{\mathcal{B}}(011) = 0 \end{array}$$

Supposons maintenant que 2 soit un état de \mathcal{A} différent de 0 et de 1. Si $\delta_{\mathcal{A}}(012) = 0$ alors deux configurations identiques sur les positions inférieures à k et respectivement égales à $1(221)^\omega$ et 1^ω sur les positions strictement supérieures à k ont même image et sont à distance 2^{-k-1} ce qui contredit l'expansivité (en effet, \mathcal{A} restreint à 2 états quelconques a toujours le comportement de \mathcal{B} comme montré ci-dessus). Par symétrie on a $\delta_{\mathcal{A}}(012) \neq 2$ et comme les rôles joués par les 3 états sont totalement symétriques, on en déduit :

$$\forall x, y, z \in A : x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } x \neq z \Rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(xyz) = y.$$

Considérons alors les configurations $c = {}^\omega(012)^\omega$ et c' telles que $c'(z) = c(z)$ pour tout z , $z < k$ ou $z > k + 1$, et $c'(k + 1) = c(k)$ et $c'(k) = c(k + 1)$. On a alors $\mathcal{A}(c) = c$ (car c est telle que 3 positions consécutives ont toujours 3 valeurs distinctes) et $\mathcal{A}(c') = c'$ (car trois positions consécutives dans c' forment toujours un mot de la forme abc ou aba avec $a \neq b$, $b \neq c$ et $a \neq c$). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathfrak{d}(\mathcal{A}^n(c), \mathcal{A}^n(c')) \leq 2^{-k}$: cela contredit l'expansivité donc \mathcal{A} possède 2 états seulement et $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. \square

Les deux propositions qui suivent viennent compléter le résultat précédent en explicitant l'incompatibilité existant entre la propriété prison et les deux principaux exemples connus aujourd'hui de structures locales qui peuvent engendrer des comportements de type chaotique. Contrairement à la proposition 14 qui procède par une étude de cas au niveau de la dynamique globale, on notera que les preuves qui suivent sont purement locales et ne font pas intervenir l'espace et sa géométrie. Ainsi, bien que rédigées formellement dans le cas d'un réseau de dimension un, elles s'étendent immédiatement à tous les autres cas.

Proposition 15. *Un automate cellulaire \mathcal{A} captif avec au moins 3 états est additif (pour une loi de groupe notée \otimes de neutre e) si et seulement si c'est une translation, ou une fonction constante égale à e .*

Démonstration. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq \nu_{\mathcal{A}}$, on note f_i la fonction $x \mapsto \delta_{\mathcal{A}}(\underbrace{e, \dots, e}_{i-1}, x, \underbrace{e, \dots, e}_{\nu_{\mathcal{A}}-i})$. Par le principe de superposition, on a :

$$\forall x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}} \in A : \delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}}) = \bigotimes_{i=1}^{\nu_{\mathcal{A}}} f_i(x_i).$$

La propriété prison impose de plus que, $\forall x$ et $\forall i$, $f_i(x) = e$ ou $f_i(x) = x$. Fixons i et soient x tel que $f_i(x) = x$ et y tel que $f_i(y) = e$:

- si $f_i(x + y) = e$ alors $x = e$,
- si $f_i(x + y) = x + y$ alors $y = e$.

Donc soit $f_i = \text{Id}$ soit $f_i = e$. Supposons à présent que le groupe A possède un élément a tel que $a + a \neq a$ et $a + a \neq e$. Alors il existe au plus un indice i tel que $f_i = \text{Id}$. En effet, si $f_i = f_j = \text{Id}$ avec $i \neq j$, \mathcal{A} viole la propriété prison sur l'entrée $x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}}$ avec $x_i = x_j = a$ et $x_m = e$ pour $m \neq i, m \neq j$. Dans cette hypothèse, \mathcal{A} est donc soit un shift, soit la fonction constante égale à e .

Dans le cas contraire, tous les éléments de A sont d'ordre 2. Si \mathcal{A} n'est ni un shift, ni la fonction constante égale à e (*i.e.* s'il existe $i \neq j$ tels que $f_i = f_j = \text{Id}$), alors A ne peut contenir 2 éléments a et b non nuls et distincts. En effet, \mathcal{A} contredirait la propriété prison sur l'entrée $x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}}$ avec $x_i = a, x_j = b$ et $x_m = e$ pour $m \neq i, m \neq j$ puisque $a + b$ ne peut pas être égal à e (sinon $a = -b = b$), ni à a (sinon $b = e$), ni à b (sinon $a = e$). Ainsi A est réduit à 2 éléments. \square

Proposition 16. *Soit \mathcal{A} un automate captif. Si \mathcal{A} est permutif en deux positions $i \neq j$, alors \mathcal{A} possède 2 états seulement.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose $i < j$. Pour $u \in A^{i-1}$ et $v \in A^{\nu_{\mathcal{A}}-i}$, on note $\sigma_{i,u,v}$ la fonction $x \mapsto \delta_{\mathcal{A}}(u_1, \dots, u_{i-1}, x, v_1, \dots, v_{\nu_{\mathcal{A}}-i})$ et $U = \Sigma(uv)$. Soit $V = \sigma_{i,u,v}^{-1}(U)$. Comme $\sigma_{i,u,v}^{-1}$ est bijective, on a $|U| = |V|$. Soit $x \in V \setminus U$. On a $x \notin U$ et $\sigma_{i,u,v}^{-1}(x) \neq x$ (puisque $\sigma_{i,u,v}(x) \in U$) donc $x = \delta_{\mathcal{A}}(u\sigma_{i,u,v}^{-1}(x)v) \notin \Sigma(u\sigma_{i,u,v}^{-1}(x)v)$: contradiction avec la propriété prison, donc nécessairement $V = U$. En conséquence pour $a \notin U$, $\mathcal{A}(uav) = a$. On peut tenir le même raisonnement en position j .

Soient a, b, c trois lettres différentes dans l'alphabet A ; d'après ce qui précède $a = \delta_{\mathcal{A}}(b^{i-1}ab^{j-i-1}cb^{2r+1-j}) = c$: contradiction, donc l'alphabet est réduit à 2 éléments. \square

2.2.2 Structure récursive

Si la propriété prison définit les automates cellulaires captifs par une contrainte formelle posée sur chaque transition, on peut aussi caractériser cette classe par une propriété structurelle de la règle de transition locale dans son ensemble.

Proposition 17. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est captif si et seulement si tout sous-ensemble d'états $X \subseteq A$ induit un sous-automate noté \mathcal{A}_X .*

Démonstration. La propriété prison implique que pour tout $X \subseteq A$ et tout $x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}} \in X$ on a $\delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}}) \in X$. Réciproquement si tout sous-ensemble d'états induit un sous-automate, alors pour tout $a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}} \in A$ on a $\delta_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}}) \in \{a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}}\}$ car $\{a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}}\}$ en particulier induit un sous-automate. \square

On remarque que la forme même de la propriété prison permet de façon très simple de tirer uniformément dans l'ensemble des automates cellulaires captifs à nombre d'états et voisinage fixés : il suffit pour chaque transition de tirer uniformément un état parmi ceux présents dans le voisinage. Ceci donne un sens concret à l'étude des questions de comportement typique.

Les propositions 11 et 17 ont pour conséquence immédiate que la classe \mathbf{AC} est négligeable parmi les automates cellulaires, au sens où $\Delta_{r, \mathbf{AC}}(\mathbf{AC}) = 0$ (ce que l'on peut établir directement comme montré ci-dessous).

On peut vérifier que pour tout $r \in \mathbb{N}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}_+$ on a

$$|\mathbf{AC}_{r,n}| \leq (2r+1)^{n^{2r+1}}.$$

En effet, pour chacune des n^{2r+1} transitions, on choisit un état déjà présent dans le voisinage ce qui laisse au plus $2r+1$ choix différents.

La recherche des propriétés typiques des automates cellulaires en général et de celles des automates cellulaires captifs sont donc deux problèmes indépendants.

Ci-après nous montrons d'abord que le comportement typique des automates cellulaires captifs est bien caractérisé (là où celui des automates cellulaires en général ne l'est pas) : un type naturel de propriétés suit une loi zéro-un pour la classe \mathbf{AC} . Comme illustration de cette loi, nous montrons ensuite que l'universalité intrinsèque est omniprésente dans la classe \mathbf{AC} . Enfin, nous montrons que la propriété d'universalité restreinte aux automates cellulaires captifs reste indécidable.

Loi zéro-un sur les propriétés monotones

La structure récursive des automates cellulaires captifs donne, si l'on se restreint à un certain type de propriétés, une réponse générale à la question du comportement typique dans \mathbf{AC} .

Définition 36. *Soit E une classe d'automates cellulaires et $\mathfrak{R} \subseteq \mathbf{AC} \times \mathbf{AC}$ une relation de pré-ordre. Une propriété $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{AC}$ est croissante sur E pour \mathfrak{R} si pour tout $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathfrak{R} : \mathcal{A} \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{P}$. Elle est décroissante si pour tout $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathfrak{R} : \mathcal{B} \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{P}$. Dans la suite, lorsque l'on ne précise pas la relation \mathfrak{R} considérée, il s'agit toujours de \sqsubseteq .*

L'observation clé à l'origine de la loi zéro-un sur \mathcal{AC} découle directement de la caractérisation des automates cellulaires captifs donnée par la propriété 17 : tout automate cellulaire captif peut être décomposé en sous-automates et ceux-ci sont indépendants dès lors qu'ils ne partagent aucun état de l'alphabet.

Le lemme 4 formalise cette idée (on utilise les notations de la définition 2 pour la classe \mathcal{AC}).

Lemme 4. *Soit $r \in \mathbb{N}_+$. Soit un entier $n \geq 2$, et soit $\mathcal{B} \in \mathcal{AC}_{r,n}$. Il existe un rationnel $\lambda_{\mathcal{B}} \in]0, 1[$ tel que pour tout $m \geq n$ et tout $X \subseteq \{s_1, \dots, s_m\}$, avec $|X| = n$, on a :*

$$\frac{|\{\mathcal{A} \in \mathcal{AC}_{r,n} : \mathcal{A}_X \equiv \mathcal{B}\}|}{|\mathcal{AC}_{r,n}|} = \lambda_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. Soit $m \geq n$ fixé et considérons $X \subseteq \{s_1, \dots, s_m\}$ de cardinal n . D'après la propriété 17, on peut définir la relation d'équivalence \simeq_X telle que $\mathcal{A} \simeq_X \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}_X = \mathcal{B}_X$. Il est clair que \simeq_X possède exactement $|\mathcal{AC}_{r,n}|$ classes d'équivalence, toutes de même taille $\frac{|\mathcal{AC}_{r,m}|}{|\mathcal{AC}_{r,n}|}$. Par ailleurs, $\{\mathcal{A} : \mathcal{A}_X \equiv \mathcal{B}\}$ est l'union d'un nombre b de classes de \simeq_X qui dépend uniquement de \mathcal{B} . Ainsi,

$$\frac{|\{\mathcal{A} \in \mathcal{AC}_{r,m} : \mathcal{A}_X \equiv \mathcal{B}\}|}{|\mathcal{AC}_{r,m}|} = \frac{b}{|\mathcal{AC}_{r,n}|}$$

et le lemme est prouvé. \square

On peut à présent établir la loi zéro-un sur les propriétés monotones (définition 36).

Théorème 12. *Soit $r \in \mathbb{N}_+$. Pour toute propriété \mathcal{P} non triviale dans \mathcal{AC} , on a :*

- si \mathcal{P} est décroissante alors $\Delta_{r, \mathcal{AC}}(\mathcal{P}) = 0$;
- si \mathcal{P} est croissante alors $\Delta_{r, \mathcal{AC}}(\mathcal{P}) = 1$.

Démonstration. Supposons d'abord la propriété \mathcal{P} décroissante. Comme elle est non triviale, il existe $n \in \mathbb{N}_+$ avec $\mathcal{B} \in \mathcal{AC}_{r,n} \setminus \mathcal{P}$. Pour tout entier $m \geq n$, soient $m = kn + r$ sa division euclidienne par n et X_i l'ensemble défini par $X_i = \{(i-1)n + 1, \dots, in\}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. On a alors :

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{AC}_{r,m} \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq k} \{\mathcal{A} \in \mathcal{AC}_{r,m} : \mathcal{A}_{X_i} \neq \mathcal{B}\}$$

car $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ implique $\forall i, 1 \leq i \leq k : \mathcal{A}_{X_i} \in \mathcal{P}$. Par ailleurs, comme les ensembles X_i sont disjoints, les événements « $\mathcal{A}_{X_i} \neq \mathcal{B}$ » sont indépendants. En exprimant l'inclusion ci-dessus en termes de probabilités, nous obtenons :

$$\frac{|\mathcal{P} \cap \mathcal{AC}_{r,m}|}{|\mathcal{AC}_{r,m}|} \leq \prod_{1 \leq i \leq k} \frac{|\{\mathcal{A} \in \mathcal{AC}_{r,m} : \mathcal{A}_{X_i} \neq \mathcal{B}\}|}{|\mathcal{AC}_{r,m}|} = (1 - \lambda_{\mathcal{B}})^k,$$

où l'égalité de droite est obtenue par le lemme 4. Par passage à la limite, nous obtenons finalement : $\Delta_{r, \mathbf{ACc}}(\mathcal{P}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \lambda_{\mathcal{B}})^k = 0$.

Si \mathcal{P} est croissante alors $\neg \mathcal{P}$ (la propriété complémentaire de \mathcal{P}) est par définition décroissante. Or, d'après ce qui précède, $\Delta_{r, \mathbf{ACc}}(\neg \mathcal{P}) = 0$. Ainsi $\Delta_{r, \mathbf{ACc}}(\mathcal{P}) = 1$. \square

On a déjà montré que cette loi n'est pas vérifiée dans le cas général. En effet, pour les propriétés croissantes \mathcal{P}_{qu} et $\mathcal{P}_{\sqsubseteq}$ on a montré respectivement que $\Delta_{r, \mathbf{AC}}(\mathcal{P}_{qu}) = 1 - \frac{1}{e}$ (section 1.1.3) et $\Delta_{r, \mathbf{AC}}(\mathcal{P}_{\sqsubseteq}) = 0$ (proposition 11 page 47).

Du théorème 12, on dérive facilement le corollaire suivant qui donne un exemple de propriété dont la densité relative aux automates cellulaires captifs est la même que la densité dans le cas général comme prouvé dans [26].

Corollaire 7. *Pour tout rayon r , et si \mathcal{P} désigne l'une des propriétés injectivité, expansivité ou surjectivité, alors $\Delta_{r, \mathbf{ACc}}(\mathcal{P}) = 0$.*

Démonstration. La surjectivité est une propriété non-triviale dans \mathbf{ACc} et elle est décroissante d'après la caractérisation (iii) du théorème 2, donc le théorème 12 s'applique. Par ailleurs, comme on l'a déjà remarqué, l'injectivité implique la surjectivité (caractérisation (iii) du théorème 2) et il en est de même pour l'expansivité (voir [31]).

Remarquons néanmoins que l'injectivité et l'expansivité sont des propriétés décroissantes. \square

Universalité

Nous avons vu en section 2.2.1 qu'il existait des automates cellulaires captifs intrinsèquement universels. Nous montrons ici que l'universalité intrinsèque possède un statut tout à fait particulier dans la classe \mathbf{ACc} .

Tout d'abord, le théorème 12 amène le corollaire suivant : presque tout automate cellulaire captif est intrinsèquement universel.

Corollaire 8. *Il existe $r_0 \in \mathbb{N}_+$ tel que pour tout $r \geq r_0$, on a :*

$$\Delta_{r, \mathbf{ACc}}(\{\mathcal{A} : \forall \mathcal{B}, \mathcal{B} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{A}\}) = 1.$$

Démonstration. Être intrinsèquement universel est une propriété croissante et il existe des automates cellulaires captifs intrinsèquement universels à partir d'un certain rayon r_0 : le théorème 12 s'applique. \square

Malgré ce corollaire, la propriété d'universalité intrinsèque reste indécidable dans la classe \mathbf{ACc} . Ce résultat, qui fait l'objet de toute la suite de cette section, repose essentiellement sur une construction τ qui transforme tout automate cellulaire \mathcal{A} en un automate cellulaire captif $\tau(\mathcal{A})$ qui le simule.

Le rayon de $\tau(\mathcal{A})$ ne dépend que du rayon de $\mathcal{A}^{\triangleright}$, ce qui permet d'obtenir la résultat d'indécidabilité à rayon fixé (*i.e.* dans le même formalisme que le corollaire 8).

Dans la simulation de \mathcal{A} par $\tau(\mathcal{A})$, chaque cellule de \mathcal{A} est directement simulée par une certaine cellule de $\tau(\mathcal{A})$ appelée *cellule de données* et chaque cellule de données est entourée par un certain nombre de cellules de contrôle. L'idée de la simulation est alors la suivante : pour qu'une cellule de donnée change d'état, on doit garantir que son état futur est présent dans son voisinage. Pour ce faire, des *cellules de signal* placées au voisinage de chaque cellule de données prennent successivement tous les états de A (par un mécanisme de décalage de proche en proche). La construction utilise 3 autres types de cellules de contrôle : 2 servent à assurer le synchronisme global de la simulation et le dernier est utilisé pour propager les erreurs d'encodage (ce qui sera utile dans la proposition 18 ci-après). Le synchronisme est contrôlé par des *cellules d'alignement* et des *cellules mémoire*. Les cellules de signal successives forment une alternance d'états et d'indicateurs d'alignement de sorte que toutes les cellules d'alignement reçoivent l'indicateur d'alignement qui leur correspond en même temps dans leur voisinage : cela constitue une configuration de synchronisation. Enfin, les cellules de mémoire sont utilisées pour conserver le résultat des transitions (qui ont lieu de manière asynchrone) jusqu'à la prochaine synchronisation. À chaque fois qu'une telle synchronisation a lieu, les cellules de données reçoivent le contenu des cellules de mémoire qui sont nettoyées.

La définition suivante donne la description formelle de $\tau(\mathcal{A})$ lorsque \mathcal{A} est de rayon 1. Il n'est pas difficile d'étendre la construction à de plus grands rayons.

Définition 37. Soit \mathcal{A} un automate d'alphabet $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Soit $O = \{o_0, \dots, o_{n-1}\}$ et $\{\kappa\}$ des ensembles d'états disjoints de A . Soit $W_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des mots de la forme $O \cdot (A \cup O) \cdot \{\kappa\} \cdot (A \cup O) \cdot (A \cup O) \cdot A$, et soit $C_{\mathcal{A}}$ le sous-shift par blocs associé à $W_{\mathcal{A}}$. Enfin, soit

$$K_S = \{a_j o_{j+1 \bmod n}, 0 \leq j \leq n-1\} \cup \{o_j a_j, 0 \leq j \leq n-1\},$$

$$K_O = \{o_j o_{j+1 \bmod n}, 0 \leq j \leq n-1\}.$$

L'automate cellulaire $\tau(\mathcal{A})$ de rayon 7 et d'alphabet $A_{\tau} = A \cup \{\kappa\} \cup O$ est alors défini de la façon suivante :

- (i). pour tout $o, o', o'' \in O$ (états d'alignement), $s_1, s'_1, s''_1, s_2, s'_2, s''_2 \in A \cup O$ (états signaux), $m, m', m'' \in A \cup O$ (états mémoires) et $d, d', d'' \in A$ (états de données), $\tau(\mathcal{A})$ vérifie

^{\triangleright}Contrairement à la transformation $\rho_{\#}$ pour laquelle une augmentation du nombre d'états de \mathcal{A} implique une augmentation du rayon de $\rho_{\#}(\mathcal{A})$.

u	$\tau(\mathcal{A})(u)$
1) $d'' o s_1 \kappa s_2 m d \boxed{o'} s'_1 \kappa s'_2 m' d' o'' s''_1$	$\begin{cases} o' & \text{si } oo' \in K_O \\ \kappa & \text{sinon,} \end{cases}$
2) $o s_1 \kappa s_2 m d o' \boxed{s'_1} \kappa s'_2 m' d' o'' s''_1 \kappa$	$\begin{cases} s'_2 & \text{si } s'_1 s'_2 \in K_S \\ \kappa & \text{sinon,} \end{cases}$
3) $s_1 \kappa s_2 m d o' s'_1 \boxed{\kappa} s'_2 m' d' o'' s''_1 \kappa s''_2$	κ
4) $\kappa s_2 m d o' s'_1 \kappa \boxed{s'_2} m' d' o'' s''_1 \kappa s''_2 m''$	$\begin{cases} s''_1 & \text{si } s'_2 s''_1 \in K_S \\ \kappa & \text{sinon,} \end{cases}$
5) $s_2 m d o' s'_1 \kappa s'_2 \boxed{m'} d' o'' s''_1 \kappa s''_2 m'' d''$	$\begin{cases} s'_1 & \text{si } s'_1 \in \{\mathcal{A}(dd'd''), o'\}, \\ m' & \text{sinon,} \end{cases}$
6) $m d o' s'_1 \kappa s'_2 m' \boxed{d'} o'' s''_1 \kappa s''_2 m'' d'' o$	$\begin{cases} m' & \text{si } s'_1 = o' \\ d' & \text{sinon,} \end{cases}$

(ii). pour tout $u \in A_\tau^{15} \setminus L(C_{\mathcal{A}})$, $\tau(\mathcal{A})(u) = \begin{cases} u_8 & \text{si } \kappa \text{ apparaît dans } u, \\ \kappa & \text{sinon.} \end{cases}$

Les 6 cas de la première partie de la définition ci-dessus sont mutuellement exclusifs en raison des positions différentes prises par l'état κ dans u . Plus précisément, dans une configuration de $C_{\mathcal{A}}$, le type d'une cellule et son comportement dépendent de sa distance à la plus proche occurrence d'un état κ à sa gauche : 3 pour les cellules de données, 2 pour les cellules mémoire, 1 ou 5 pour les cellules de signal et 4 pour les cellules d'alignement. Dans la suite, nous désignons par $\Gamma_{\mathcal{A}}$ le sous-ensemble de $C_{\mathcal{A}}$ défini de la façon suivante

$$c \in \Gamma_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow c \in C_{\mathcal{A}} \text{ et } \forall z \in \mathbb{Z} \begin{cases} c(z-4) = \kappa \Rightarrow c(z)c(z+6) \in K_O, \text{ et} \\ c(z-5) = \kappa \Rightarrow c(z-4)c(z) \in K_S, \text{ et} \\ c(z-1) = \kappa \Rightarrow c(z-2)c(z) \in K_S. \end{cases}$$

$\Gamma_{\mathcal{A}}$ est donc l'ensemble des configurations de $C_{\mathcal{A}}$ telles que

- la configuration formée par les cellules d'alignement successives de c est périodique de période $o_0 \dots o_{n-1}$;
- la configuration formée par les cellules de signal successives de c est périodique de période $o_0 a_0 o_1 a_1 \dots o_{n-1} a_{n-1}$.

On peut vérifier que $\Gamma_{\mathcal{A}}$ est un sous-shift de type fini positivement invariant pour $\tau(\mathcal{A})$ (on a précisément $\tau(\mathcal{A})(\Gamma_{\mathcal{A}}) \subseteq \Gamma_{\mathcal{A}}$). De plus, l'ouverture de $\Gamma_{\mathcal{A}}$ est inférieure à la taille du voisinage de $\tau(\mathcal{A})$ donc celui-ci peut vérifier l'appartenance d'une configuration à $\Gamma_{\mathcal{A}}$ (cas 1, 2 et 4 de la définition ci-dessus). Cet aspect du fonctionnement de $\tau(\mathcal{A})$ est à la base de la proposition 18 ci-après. Auparavant, nous montrons que $\tau(\mathcal{A})$ peut simuler \mathcal{A} .

Lemme 5. *Pour tout automate cellulaire \mathcal{A} , $\mathcal{A} \preceq_{\square} \tau(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Nous montrons en fait que $\mathcal{A}^{<n,1,0>} \sqsubseteq \tau(\mathcal{A})^{<6n,2n,0>}$, avec $n = |A|$. Soit $\psi : A \times \{0, \dots, n-1\} \rightarrow A_\tau^6$ la fonction définie par :

$$\psi(\alpha, j) = o_j a_j \kappa o_{j+1 \bmod n} o_j \alpha.$$

On définit alors une fonction injective $\Upsilon : A^n \rightarrow A_\tau^{6n}$ ainsi :

$$\Upsilon(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = \psi(\alpha_0, 0) \dots \psi(\alpha_j, j) \dots \psi(\alpha_{n-1}, n-1).$$

On considère alors le sous-shift par blocs \mathfrak{S}_Υ défini par l'ensemble $\Upsilon(A^n)$ de blocs, tous de taille $6n$. \mathfrak{S}_Υ est précisément le sous-ensemble de $\Gamma_{\mathcal{A}}$ formé des configurations « synchronisées » comme expliqué plus haut. On peut vérifier que \mathfrak{S}_Υ est positivement invariant, précisément : $\tau(\mathcal{A})^{2n}(\mathfrak{S}_\Upsilon) \subseteq \mathfrak{S}_\Upsilon$. $\mathcal{A}^{<n,1,0>}$ est un sous-automate enfoui de $\tau(\mathcal{A})$ associé à \mathfrak{S}_Υ :

$$\begin{array}{ccc} (A^n)^\mathbb{Z} & \xrightarrow{\bar{\Upsilon}} & \mathfrak{S}_\Upsilon \\ \downarrow \mathcal{A}^{<n,1,0>} & & \downarrow \tau(\mathcal{A})^{<6n,2n,0>} \\ (A^n)^\mathbb{Z} & \xrightarrow{\bar{\Upsilon}} & \mathfrak{S}_\Upsilon \end{array}$$

En effet, partant d'une configuration $c \in \mathfrak{S}_\Upsilon$, on vérifie que les cellules de données ne changent pas d'état pendant $2n-1$ étapes et finissent par prendre l'état de leur cellule mémoire voisine après $2n$ étapes. De leur côté, les cellules mémoires sont initialement dans un état de O jusqu'à ce qu'un certain état de A apparaisse dans une cellule signal de leur voisinage. Cet état est précisément le résultat de la transition par \mathcal{A} appliquée aux 3 cellules de données voisines et il apparaît nécessairement en au plus $2n-1$ étapes en raison de la forme de la configuration formée des cellules signal. Ainsi, après $2n-1$ étapes, chaque cellule mémoire contient le résultat de la transition par \mathcal{A} , puis ce résultat est transféré aux cellules de données et les cellules mémoire sont réinitialisées de sorte que la configuration obtenue est à nouveau dans \mathfrak{S}_Υ . \square

La proposition suivante montre, que \mathcal{A} et $\tau(\mathcal{A})$ simulent les mêmes automates cellulaires surjectifs non-triviaux.

Proposition 18. *Pour tout automate cellulaire \mathcal{A} et tout automate cellulaire surjectif \mathcal{B} différent de l'identité, on a $\mathcal{B} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \preceq_{\sqsubseteq} \tau(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{A} \preceq_{\sqsubseteq} \tau(\mathcal{A})$ et que la surjectivité est une propriété préservée par changement d'échelle, il suffit de montrer que $\mathcal{B} \sqsubseteq \tau(\mathcal{A})^{<m,t,0>}$ implique $\mathcal{B} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{A}$ (en effet, on peut vérifier que, pour des automates quelconques \mathcal{C} et \mathcal{D} , $\mathcal{C} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{D}$ implique l'existence de paramètres m, t, z, m' et t' tels que $\mathcal{C}^{<m,t,z>} \sqsubseteq \mathcal{D}^{<m',t',0>}$).

Soit $\phi : B \rightarrow A_\tau^m$ l'injection intervenant dans la relation $\mathcal{B} \sqsubseteq \tau(\mathcal{A})^{<m,t,0>}$ et soit L_ϕ le langage engendré par l'ensemble de mots $\phi(B)$. Deux cas peuvent alors se présenter :

- si $L_\phi \not\subseteq L(\Gamma_{\mathcal{A}})$ alors soit κ n'apparaît pas dans L_ϕ et alors $\mathcal{B} = id$ (car $\tau(\mathcal{A})$ est l'identité sur les configurations sans κ), soit il existe $b_0 \in B$ tel que κ apparaît dans $\phi(b_0)$. Dans ce cas, considérons $w \in L_\phi \setminus L(\Gamma_{\mathcal{A}})$ et la configuration périodique c_0 de période $\phi(b_0)w$. c_0 peut être choisie différente de $\bar{\kappa}$ (sinon cela impliquerait $\phi(b) = \kappa^m \forall b \in B$, et donc que \mathcal{B} possède un état seulement). Soit $p = |\phi(b_0)w|$. Alors $\kappa^p \notin L(c_0)$. Par ailleurs, comme \mathcal{B} est surjectif et $c_0 \in (\phi(B))^{\mathbb{Z}}$, la simulation de \mathcal{B} par $\tau(\mathcal{A})$ implique l'existence d'une configuration $c_{-1} \in \phi(B)^{\mathbb{Z}}$ et d'un entier m' tels que $\tau(\mathcal{A})^{m'}(c_{-1}) = c_0$. Si $p - 1 \geq 2$, $\kappa^{p-1} \notin L(c_{-1})$ (sinon $\kappa^p \in L(c_0)$) : on peut appliquer à nouveau le même raisonnement de telle sorte qu'il doit exister $c \in \phi(B)^{\mathbb{Z}}$ telle que $\kappa^2 \notin L(c)$ et $\tau(\mathcal{A})^t(c) = c_0$ pour un certain t . Clairement $\kappa \in L(c)$ étant donné que $\kappa \in L(c_0)$ et que $\tau(\mathcal{A}) \in \mathbf{Ac}$. Enfin, par surjectivité de \mathcal{B} encore une fois, il existe c' telle que $\tau(\mathcal{A})(c') = c$. On a alors $\kappa \in L(c')$ et donc $c' \in \Gamma_{\mathcal{A}}$ parce qu'une configuration qui n'appartient pas à $\Gamma_{\mathcal{A}}$ et contenant un κ mène forcément à une configuration contenant κ^2 . Puisque $\Gamma_{\mathcal{A}}$ est stable par $\tau(\mathcal{A})$, on a $c_0 \in \Gamma_{\mathcal{A}}$: contradiction avec le choix de c_0 .
- supposons maintenant que $L_\phi \subseteq L(\Gamma_{\mathcal{A}})$. Si $c \in \Gamma_{\mathcal{A}}$ et c' sont deux configurations telles que $\tau(\mathcal{A})^t(c') = c$ pour un certain t alors $c' \in \Gamma_{\mathcal{A}}$ car toute $d \in \tau(\mathcal{A})(A_\tau^{\mathbb{Z}} \setminus \Gamma_{\mathcal{A}})$ est telle que $\kappa^2 \in L(d)$. De plus, l'orbite de c' entre dans \mathfrak{S}_Υ toutes les $2n$ étapes, donc si $t \geq 2n$, on peut considérer

$$\chi(c) = \tau(\mathcal{A})^{t'}(c') \text{ avec } t' \leq t \text{ et maximal tel que } \tau(\mathcal{A})^{t'}(c') \in \mathfrak{S}_\Upsilon.$$

Cette définition est en fait indépendante de t et de c' car entre $\chi(c)$ et c , les cellules de données n'ont pas changé et qu'une configuration dans \mathfrak{S}_Υ est entièrement déterminée par ses cellules de données. Comme \mathcal{B} est surjectif, toute configuration de $\mathfrak{o}_m(\phi(B)^{\mathbb{Z}})$ est atteignable en plus de $2n$ étapes de sorte que χ est bien définie sur $\mathfrak{o}_m(\phi(B)^{\mathbb{Z}})$ tout entier. Si $\gamma : W_{\mathcal{A}} \rightarrow A$ est définie par $\gamma(w_1 \dots w_6) = w_6$ (γ associe la valeur de la cellule de données à chaque bloc de $W_{\mathcal{A}}$), on a alors sur $\mathfrak{o}_m(\phi(B)^{\mathbb{Z}})$ l'égalité $\chi = \mathfrak{o}_{6n} \circ \overline{\Upsilon} \circ \overline{\gamma_n} \circ \mathfrak{o}_{6n}^{-1} \circ \sigma_z$ (où γ_n désigne l'extension de γ à $W_{\mathcal{A}}^n$) pour un certain $z \in \mathbb{Z}$. Enfin, le sous-shift par blocs $\mathfrak{T}_B = \mathfrak{o}_{6nm}^{-1} \circ \sigma_z \circ \mathfrak{o}_m(\phi(B)^{\mathbb{Z}})$ est envoyé par l'injection $\mathfrak{o}_m^{-1} \circ \overline{\Upsilon} \circ \overline{\gamma_n} \circ \mathfrak{o}_m$ dans le sous-shift par blocs $\mathfrak{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}_\Upsilon)$. Comme $\mathcal{A}^{<nm,t>}$ est un sous-automate enfoui de $\tau(\mathcal{A})^{<6nm,2nt>}$ associé au sous-shift par blocs $\mathfrak{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}_\Upsilon)$ (d'après le lemme 5), et que $\mathcal{B}^{<6n,2n>}$ est un sous-automate enfouis de $\tau(\mathcal{A})^{<6nm,2nt>}$ associé à \mathfrak{T}_B , l'injection ci-dessus permet de conclure que $\mathcal{B}^{<6n,2n>}$ est un sous-automate enfoui de $\mathcal{A}^{<nm,t>}$ associé à \mathfrak{T}_B . Autrement dit, $\mathcal{B}^{<6n,2n>} \sqsubseteq \mathcal{A}^{<nm,t>}$, donc $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$.

□

On peut alors montrer que l'universalité intrinsèque reste une propriété

indécidable avec les contraintes (restriction à \mathcal{AC} et à un rayon fixé) utilisées pour montrer la loi zéro-un (théorème 12).

Théorème 13. *Il existe $r_0 \in \mathbb{N}_+$ tel que, pour tout $r \geq r_0$, il est indécidable de savoir si un automate cellulaire captif de rayon r est intrinsèquement universel ou pas.*

Démonstration. Considérons l'automate cellulaire \mathcal{X} sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et défini par : $\delta_{\mathcal{X}}(a, b, c) = b + c \bmod 2$. Il est clair que, $\forall m, n$, $\mathcal{X}^{<m,n>}$ est toujours surjectif et jamais l'identité. Ainsi, d'après le lemme 5 et la propriété 18, on a pour tout automate cellulaire \mathcal{A} : $\mathcal{X} \preceq_{\square} \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{X} \preceq_{\square} \tau(\mathcal{A})$.

N. Ollinger montre dans [75] l'indécidabilité de l'universalité intrinsèque pour les automates cellulaires en général². Il définit une construction récursive U_q telle que pour tout \mathcal{A} de rayon 1, on a :

- $U_q(\mathcal{A})$ est de rayon r_U (r_U ne dépend pas de \mathcal{A}),
- si \mathcal{A} est nilpotent sur les configurations périodiques (voir section 1.5) alors $\mathcal{X} \not\preceq_{\square} U_q(\mathcal{A})$,
- si \mathcal{A} n'est pas nilpotent sur les configurations périodiques alors $U_q(\mathcal{A})$ est intrinsèquement universel.

L'indécidabilité de la q -nilpotence permet de conclure à l'indécidabilité de l'universalité intrinsèque. D'après la propriété ci-dessus sur \mathcal{X} et τ , on vérifie que la construction (récursive) $\tau \circ U_q$ possède les mêmes propriétés que U_q , mais qu'elle a pour image des automates cellulaires captifs de rayon r_0 fixé (précisément $r_0 = 7r_U$). Cela conclut la preuve du théorème. \square

Bien qu'omniprésente dans \mathcal{AC} , l'universalité intrinsèque n'est donc pas une propriété simple lorsque l'on se restreint aux automates cellulaires captifs. Nous revenons sur l'universalité dans \mathcal{AC} en section 4.1.2 avec un point de vue différent.

2.2.3 Décroissance et conservation de l'alphabet

Les automates cellulaires captifs peuvent aussi être définis comme les automates cellulaires qui font décroître (au sens large) l'alphabet de toute configuration. Il n'est pas difficile de voir qu'il suffit de vérifier cette décroissance sur les configurations périodiques.

Proposition 19. *Soit \mathcal{A} un automate cellulaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i). $\mathcal{A} \in \mathcal{AC}$
- (ii). pour tout configuration c : $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}(c)) \subseteq \mathcal{L}_1(c)$
- (iii). pour tout configuration périodique c : $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}(c)) \subseteq \mathcal{L}_1(c)$

²Le résultat n'y est pas formulé à rayon fixé, mais on vérifie facilement qu'il reste valable avec cette restriction.

Démonstration. On a clairement (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii). Soit \mathcal{A} tel que pour toute configuration périodique c on a $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}(c)) \subseteq \mathcal{L}_1(c)$. Pour tous $a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}} \in A$ fixés, on construit une configuration périodique c telle que $c(v_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq \nu_{\mathcal{A}}$ (où (v_1, \dots, v_n) est le voisinage de \mathcal{A}) et $\mathcal{L}_1(c) = \{a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}}\}$. La condition précédente montre que $\delta_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}}) \in \{a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{A}}}\}$ donc $\mathcal{A} \in \mathbf{Ac}$. \square

La proposition suivante montre que la classe \mathbf{Ac} est stable par passage à l'inverse. Ainsi, les automates cellulaires captifs et réversibles conservent l'alphabet des configurations.

Proposition 20. *Si $\mathcal{A} \in \mathbf{Ac}$ est réversible, alors $\mathcal{A}^{-1} \in \mathbf{Ac}$.*

Démonstration. Soit c une configuration périodique. Comme \mathcal{A} est bijectif, la suite $(\mathcal{A}^n(c))_n$ est périodique (et pas seulement ultimement périodique). Donc il y a un entier n tel que $\mathcal{A}^{-1}(c) = \mathcal{A}^n(c)$. Or, d'après la proposition 19, $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}^n(c)) \subseteq \mathcal{L}_1(c)$, d'où $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}^{-1}(c)) \subseteq \mathcal{L}_1(c)$. Comme cette relation est vérifiée pour toute configuration périodique, la proposition 19 implique que \mathcal{A}^{-1} est un automate cellulaire captif. \square

Corollaire 9. *Un automate cellulaire captif et réversible conserve l'alphabet des configurations.*

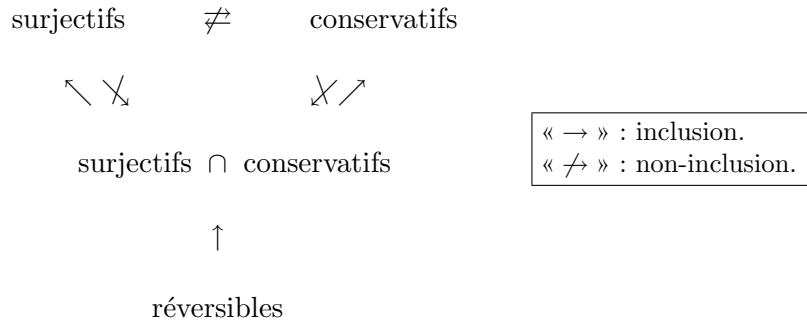


FIG. 2.2: Inclusions et non-inclusions entre classes d'automates cellulaires captifs.

La figure 2.2 résume les relations entre les différentes classes d'automates cellulaires captifs discutées ici.

La question de l'existence d'un automate cellulaire captif surjectif mais non réversible qui conserve l'alphabet reste ouverte, mais les autres inclusions de classes ne sont pas des égalités comme le montrent les exemples suivants.

Soit \mathcal{X} l'automate cellulaire d'alphabet $\{0, 1\}$ et défini par $\delta_{\mathcal{X}}(a, b, c) = a + b + c \pmod{2}$. \mathcal{X} est surjectif et captif, cependant il ne conserve pas l'alphabet de toute configuration puisque, par exemple, ${}^{\omega}110^{\omega}$ est envoyée sur ${}^{\omega}0^{\omega}$.

Soit \mathcal{A} l'automate cellulaire d'alphabet $\{0, 1\}$ défini par

$$\delta_{\mathcal{A}}(x, y, z, t, u) = \begin{cases} 1 & \text{si } yzt = 111 \text{ ou } yzt = 010, \\ 1 & \text{si } yztu = 0110 \text{ ou } xyz t = 0110, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

\mathcal{A} est captif, mais n'est pas surjectif car le mot 1110111 n'a pas d'antécédent. En revanche, \mathcal{A} conserve l'alphabet de toute configuration car une cellule dans l'état 0 ne change pas d'état et tout bloc de 1 consécutifs conserve au moins une occurrence de 1 après une itération de \mathcal{A} (cas 1 de la définition si le bloc est de taille 1 ou supérieur à 2, cas 2 de la définition s'il est de taille 2).

2.3 Les automates cellulaires caméléons

Comme on l'a vu, les automates cellulaires captifs sont ceux pour lesquels tout sous-ensemble d'états induit un sous-automate. C'est cette structure récursive vis-à-vis de \sqsubseteq qui permet d'établir la loi zéro-un sur les propriétés monotones (théorème 12). Il est naturel de s'intéresser à la classe suivante, analogue de $\mathcal{A}\mathcal{C}$ pour la notion de coloriage.

Définition 38. *Un automate cellulaire \mathcal{A} est caméléon si, pour tout ensemble fini B et toute surjection $f : A \rightarrow B$, \mathcal{A} admet f comme B -coloration.*

Il est clair que tout automate cellulaire à 2 états est caméléon. En revanche, avec 3 états ou plus, la contrainte de la définition ci-dessus devient trop forte : la propriété suivante montre que la famille des automates cellulaires caméléon avec au moins 3 états est peu intéressante puisque réduite aux automates cellulaires constants et aux décalages.

Proposition 21. *Un automate cellulaire avec au moins 3 états est caméléon si et seulement si c'est un automate constant ou un décalage.*

Démonstration. Il est clair que les automates cellulaires constants et les décalages sont des automates caméléon. Réciproquement, on considère un automate cellulaire caméléon \mathcal{A} avec au moins 3 états. Pour alléger la ré-

daction, on adopte les notations suivantes[↗] $\forall u \in A^{\nu_A}, \forall \alpha, \beta \in A$:

$$\begin{aligned} |u|_\alpha &= |\{i : u_i = \alpha\}| \\ I_u &= \{i : u_i = \delta_{\mathcal{A}}(u)\} \\ \chi_\alpha(\beta) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme \mathcal{A} est un automate cellulaire caméléon, il admet toujours χ_α comme $\{0, 1\}$ -coloration. Ce sont les seules colorations utilisées dans la preuve.

Tout d'abord, il existe $u \in A^{\nu_A}$ tel que $|u|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} = 1$. En effet, on va montrer la propriété suivante

$$\forall k \leq \nu_A - 1, \text{ si } \forall u \in A^{\nu_A}, |u|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} > k \text{ alors } \forall u \in A^{\nu_A}, |u|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} > k + 1.$$

Cette propriété permet de conclure car, en supposant que $\forall u \in A^{\nu_A}$ on a $|u|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} > 1$, on est assuré notamment que, $\forall u \in A^{\nu_A}$, $|u|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} > \left\lceil \frac{\nu_A}{|A|} \right\rceil$. Or il existe $u \in A^{\nu_A}$ tel que, $\forall \alpha \in A$, $|u|_\alpha \leq \left\lceil \frac{\nu_A}{|A|} \right\rceil$.

Nous prouvons maintenant la propriété énoncée ci-dessus. Supposons donc que, pour tout $u \in A^{\nu_A}$, $|u|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} > k$ et qu'il existe $u \in A^{\nu_A}$ tel que $|u|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} \leq k + 1$. Soient $\alpha, \beta \in A$ deux états distincts et tous deux distincts de $\delta_{\mathcal{A}}(u)$. Soit $i_0 \in I_u$. On définit alors $v \in A^{\nu_A}$ par

$$v_j = \begin{cases} \alpha & \text{si } j = i_0, \\ \delta_{\mathcal{A}}(u) & \text{si } j \in I_u \setminus \{i_0\}, \\ \beta & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $w \in A^{\nu_A}$ par

$$w_j = \begin{cases} \delta_{\mathcal{A}}(u) & \text{si } j \in I_u, \\ \beta & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\bar{\chi}_\beta(v) = \bar{\chi}_\beta(w)$ donc $\delta_{\mathcal{A}}(w) = \delta_{\mathcal{A}}(v) = \beta$ (car $\forall \gamma \in A$, $\gamma \neq \beta$, $|v|_\gamma \leq k$). Par ailleurs, $\bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(u)}(w) = \bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(u)}(u)$ donc $\delta_{\mathcal{A}}(w) = \delta_{\mathcal{A}}(u) \neq \beta$: il y a contradiction.

Dans toute la suite on fixe $u \in A^{\nu_A}$ tel que $|u|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} = 1$ et on note i_0 l'unique élément de I_u . On a alors

$$\forall v \in A^{\nu_A}, \delta_{\mathcal{A}}(v) \neq \delta_{\mathcal{A}}(u) \Rightarrow v_{i_0} = \delta_{\mathcal{A}}(v). \quad (2.1)$$

En effet, en supposant le contraire (il existe v tel que $\delta_{\mathcal{A}}(v) \neq \delta_{\mathcal{A}}(u)$ et $v_{i_0} \neq \delta_{\mathcal{A}}(v)$), alors le mot w tel que

$$w_j = \begin{cases} v_j & \text{si } j \neq i_0 \\ u_j & \text{si } j = i_0 \end{cases}$$

[↗]Encore une fois, les ν_A -uplets d'états sont notés comme des mots de longueur ν_A sur l'alphabet A .

vérifie $\bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(u)}(w) = \bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(u)}(u)$ et $\bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(v)}(w) = \bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(v)}(v)$, or $\delta_{\mathcal{A}}(v) \neq \delta_{\mathcal{A}}(u)$: il y a contradiction.

On considère à présent la propriété suivante :

$$\forall v \in A^{\nu_{\mathcal{A}}}, \delta_{\mathcal{A}}(v) = \delta_{\mathcal{A}}(u) \Rightarrow v_{i_0} = \delta_{\mathcal{A}}(u). \quad (2.2)$$

Les propriétés 2.1 et 2.2 permettent de conclure directement que \mathcal{A} est soit constant, soit un décalage de vecteur $-v_{i_0}$ où v_{i_0} est le $i_0^{\text{ème}}$ vecteur de \mathcal{A} .

On montre donc pour finir qu'on a la propriété 2.2 si \mathcal{A} n'est pas constant. Supposons qu'il existe $v \in A^{\nu_{\mathcal{A}}}$ tel que $\delta_{\mathcal{A}}(v) = \delta_{\mathcal{A}}(u)$ et $i_0 \notin I_v$. Il ne peut alors exister $w \in A^{\nu_{\mathcal{A}}}$ tel que $\delta_{\mathcal{A}}(w) \neq \delta_{\mathcal{A}}(u)$ et $|w|_{\delta_{\mathcal{A}}(w)} = 1$. En effet, on aurait soit $I_w \cap I_u = \emptyset$ soit $I_w \cap I_v = \emptyset$. En supposant qu'on est dans le premier cas (l'autre cas est semblable) et si $\alpha \in A$ avec $\alpha \neq \delta_{\mathcal{A}}(u)$ et $\alpha \neq \delta_{\mathcal{A}}(w)$, le mot w' tel que

$$w'_j = \begin{cases} u_j & \text{si } j \in I_u, \\ w_j & \text{si } j \in I_w, \\ \alpha & \text{sinon,} \end{cases}$$

vérifie $\bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(u)}(w') = \bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(u)}(u)$ et $\bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(w)}(w') = \bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(w)}(w)$ or $\delta_{\mathcal{A}}(w) \neq \delta_{\mathcal{A}}(u)$: contradiction.

En notant \mathcal{P}_k la propriété

$$\forall w \in A^{\nu_{\mathcal{A}}}, \delta_{\mathcal{A}}(w) \neq \delta_{\mathcal{A}}(u) \Rightarrow |w|_{\delta_{\mathcal{A}}(w)} > k,$$

on a donc montré \mathcal{P}_1 . Si l'on montre $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ pour tout $k \leq \nu_{\mathcal{A}} - 1$, cela termine la preuve car de $\mathcal{P}_{\lceil \frac{\nu_{\mathcal{A}}}{2} \rceil}$ on déduit un mot w' tel que $\delta_{\mathcal{A}}(w') = \delta_{\mathcal{A}}(u)$ et $|w'|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} = 0$. Alors $\delta_{\mathcal{A}}$ est constante égale à $\delta_{\mathcal{A}}(u)$ car si $v' \in A^{\nu_{\mathcal{A}}}$ est tel que $\delta_{\mathcal{A}}(v') \neq \delta_{\mathcal{A}}(u)$ on en déduit un mot v'' tel que $\bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(v')}(v'') = \bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(v')}(v')$, donc $\delta_{\mathcal{A}}(v'') \neq \delta_{\mathcal{A}}(u)$, et $|v''|_{\delta_{\mathcal{A}}(u)} = 0$. On a ainsi $\bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(u)}(v'') = \bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(u)}(w')$ et donc $\delta_{\mathcal{A}}(v'') = \delta_{\mathcal{A}}(u)$: contradiction.

Pour finir, il ne reste plus qu'à montrer $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ pour tout $k \leq \nu_{\mathcal{A}} - 1$. Supposons donc qu'on a \mathcal{P}_k et qu'il existe $w \in A^{\nu_{\mathcal{A}}}$ avec $\delta_{\mathcal{A}}(w) \neq \delta_{\mathcal{A}}(u)$ et $|w|_{\delta_{\mathcal{A}}(w)} = k + 1$. Soit $\alpha \in A$ avec $\alpha \neq \delta_{\mathcal{A}}(u)$ et $\alpha \neq \delta_{\mathcal{A}}(w)$. En considérant $i_1 \in I_w$, on définit alors $v' \in A^{\nu_{\mathcal{A}}}$ par

$$v'_j = \begin{cases} \delta_{\mathcal{A}}(u) & \text{si } j = i_1, \\ \delta_{\mathcal{A}}(w) & \text{si } j \in I_w \setminus \{i_1\}, \\ \alpha & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $v'' \in A^{\nu_{\mathcal{A}}}$ par

$$w_j = \begin{cases} \delta_{\mathcal{A}}(w) & \text{si } j \in I_w, \\ \alpha & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\delta_{\mathcal{A}}(v') = \alpha$ d'après la propriété \mathcal{P}_k (car $\forall \beta \neq \alpha |v'|_{\beta} \leq k$) et aussi $\delta_{\mathcal{A}}(v'') = \alpha$ car $\bar{\chi}_{\alpha}(v'') = \bar{\chi}_{\alpha}(v')$. Mais d'autre part $\bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(w)}(v'') = \bar{\chi}_{\delta_{\mathcal{A}}(w)}(w)$ donc $\delta_{\mathcal{A}}(v'') = \delta_{\mathcal{A}}(w)$: contradiction. \square



Jusque là, après une présentation générale du modèle (chapitre 1), nous avons étudié les automates cellulaires sous l'angle de leur représentation syntaxique, en particulier pour la classe des automates cellulaires captifs (chapitre 2).

Dans les chapitres qui suivent, nous poursuivons l'étude des automates cellulaires en cherchant au contraire à nous affranchir le plus possible de leur représentation syntaxique pour insister sur leurs propriétés dynamiques globales. Notre problématique devient celle de la classification des automates cellulaires et plus particulièrement celle de l'étude de notions de complexité selon ce point de vue global.

L'outil fondamental est celui de simulation. Bien que fréquemment utilisé dans la littérature, ce n'est que récemment, avec les travaux de J. Mazoyer, I. Rapaport et N. Ollinger, qu'une étude formelle de cet outil est apparue, initiant l'étude de structures de l'ensembles des automates cellulaires.

Le chapitre 3 introduit différentes relations de simulation et différents paramètres de complexité associés. Après avoir établi la compatibilité de paramètres "naturels", nous obtenons des bornes de complexité pour des classes d'automates cellulaires définies localement.

Le chapitre 4 est dédié à l'ensemble des automates cellulaires munis de pré-ordres de simulation. Nous étendons les travaux mentionnés ci-dessus en envisageant de nouvelles simulations et en établissant de nouveaux liens entre des propriétés ou outils classiques des automates cellulaires (classification topologique de P. Kůrka, calcul séquentiel, produits cartésiens) et des structures ordonnées induites (idéaux, filtres, treillis, chaînes).



Chapitre 3

Simulations et complexités

J'étais autrefois bien nerveux. Me voici sur une nouvelle voie : je mets une pomme sur la table puis je me mets dans cette pomme. Quelle tranquillité !

Henri Michaux — « Lointain intérieur »

C E chapitre est consacré à l'étude des notions de simulation entre automates cellulaires, c'est-à-dire des relations exprimant que le comportement d'un certain automate cellulaire est reproductible en un certain sens par un autre automate cellulaire. On attend d'une telle relation qu'elle soit réflexive et transitive : les objets de notre étude sont donc des pré-ordres sur les automates cellulaires.

Chaque notion de simulation que l'on peut formuler constitue un point de vue particulier, pertinent pour l'étude de certaines propriétés, inadapté pour d'autres. Notre approche, dans ce chapitre et le suivant, consiste donc à développer différents points de vue à travers différentes notions de simulation complètement formalisées. C'est seulement une fois le choix de la simulation effectué que l'on peut définir et étudier en toute rigueur une notion d'équivalence entre automates (induite par le pré-ordre de simulation), des notions de complexité (abordées dans ce chapitre) et une notion d'universalité (objet du chapitre suivant).

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de différentes notions de simulation qui nous semblent pertinentes pour comparer les dynamiques globales des automates cellulaires. On a vu au chapitre précédent des exemples de pré-ordres sur les automates cellulaires à travers les relations \sqsubseteq , \sqsubseteq et \sqsubseteq . Cependant, elles sont beaucoup trop restrictives car elles dépendent en grande partie de propriétés syntaxiques locales (cardinal de l'alphabet, rayon) dont on souhaiterait s'affranchir pour l'étude de la

dynamique globale des automates cellulaires. Au contraire, la relation \preceq_{\square} fondée sur les changements d'échelles n'a pas ce défaut et on a vu au chapitre 1 qu'elle capture l'universalité intrinsèque, une notion fondamentale du modèle. Notre approche consiste donc d'une part à considérer des notions particulières très simples, semblables à \preceq_{\square} , et qui s'appuient sur des combinaisons de changement d'échelle et de relations locales de sous-automate et d'automate quotient. D'autre part, en voyant les automates cellulaires comme des systèmes dynamiques, nous formulons une notion intuitive très générale, qui englobe toutes les notions précédentes, et nous l'affinons en tirant partie des spécificités du modèle des automates cellulaires.

Dans une seconde partie, nous nous intéressons aux notions de complexité, appelées *paramètres de complexité*, que l'on peut associer à une relation de simulation donnée en respectant un critère de compatibilité très simple : tout automate cellulaire doit être plus complexe que les automates cellulaires qu'il simule. Nous établissons d'une part la compatibilité de certains paramètres fondés sur des objets classiques de l'étude des automates cellulaires (cycles dans l'espace des phases, ensembles limites) avec les notions de simulation étudiées. D'autre part, par un rapprochement original avec la théorie de la complexité de communication, nous introduisons un nouveau paramètre commun à toutes les relations de simulation et qui mesure en un certain sens la quantité d'information qui transite à travers chaque cellule du réseau au cours du temps.

S'il contient quelques résultats nouveaux, ce chapitre vise avant tout à introduire des notions qui seront utilisées dans le chapitre suivant.

◇

Sommaire

3.1	Simulations	78
3.1.1	Relations locales et changements d'échelle	79
3.1.2	Une approche globale	81
3.2	Complexités	88
3.2.1	Premiers exemples de paramètres	88
3.2.2	Paramètre de complexité de l'ensemble limite	90
3.2.3	Paramètre de complexité de communication	92

3.1 Simulations

Dans la littérature, le mot de « simulation » est utilisé le plus souvent dans la comparaison de deux systèmes de calcul. Nous nous intéressons ici aux notions intrinsèques au modèle des automates cellulaires. Nous ne considérons toutefois pas de notion de simulation entre automates cellulaires

ayant des réseaux différents. Le lecteur intéressé par ces questions est renvoyé à [81] (voir également [78] avec une notion de simulation très différente).

3.1.1 Relations locales et changements d'échelle

L'approche suivie par N. Ollinger dans [73] pour définir le groupage et le pré-ordre \preceq_{\square} consiste à combiner une relation sur les règles de transition locales avec des transformations syntaxiques qui jouent le rôle de changement d'échelle. Cette approche invite à définir les notions de simulation qui correspondent aux relations locales étudiées en section 2.1.2, et qui chacune expriment une relation très simple entre automates (sous-système ou quotient).

Définition 39. *On définit alors les notions de simulation \preceq_{\triangleleft} , et $\preceq_{\triangleleft\triangleleft}$ sur les automates cellulaires de même réseau \mathcal{R} par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \preceq_{\triangleleft} \mathcal{B} &\Leftrightarrow \exists m, m' \in \mathcal{R}^+, t, t' \in \mathbb{N}_+, z, z' \in \mathcal{R} : \mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle} \triangleleft \mathcal{B}^{\langle m', t', z' \rangle}, \\ \mathcal{A} \preceq_{\triangleleft\triangleleft} \mathcal{B} &\Leftrightarrow \exists m, m' \in \mathcal{R}^+, t, t' \in \mathbb{N}_+, z, z' \in \mathcal{R} : \mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle} \triangleleft\triangleleft \mathcal{B}^{\langle m', t', z' \rangle}. \end{aligned}$$

Le formalisme introduit par N. Ollinger permet de montrer de manière unifiée que les notions de simulations définies ci-dessus sont des pré-ordres.

Proposition 22 (Théorème 11 de [73]). *Tout comme \preceq_{\square} , les relations \preceq_{\triangleleft} et $\preceq_{\triangleleft\triangleleft}$ sont des pré-ordres.*

Les inclusions entre les relations locales \square , \triangleleft et $\triangleleft\triangleleft$ se retrouvent dans les relations de simulations introduites ci-dessus. En revanche, les différences établies en section 2.1.2 ne peuvent être transférées directement en raison des changements d'échelle. Nous allons tout de même montrer que les notions de simulation de la définition 39 sont différentes.

Tout d'abord, la connexité dans l'espace des phases est toujours préservée par la simulation \preceq_{\square} : en particulier deux orbites disjointes dans le simulateur correspondent à deux orbites disjointes dans le simulé et réciproquement. Si \preceq_{\triangleleft} préserve l'injectivité globale des automates cellulaires (proposition 35 du chapitre suivant), le coloriage de certains automates cellulaires peut en revanche transformer deux orbites disjointes en deux orbites qui se rejoignent. Plus généralement, la connexité dans l'espace des phases n'est pas préservée par la relation \triangleleft . La proposition suivante exploite cette différence fondamentale pour montrer que certaines simulations au sens de \triangleleft sont impossibles au sens de \preceq_{\square} .

Proposition 23. *Il existe deux automates cellulaires \mathcal{A} et \mathcal{B} tels que $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \not\preceq_{\square} \mathcal{A}$.*

Démonstration. Soit $\pi : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\pi(0) = 0$ et $\pi(x) = 1$ si $x \neq 0$. On considère l'automate cellulaire \mathcal{A} d'alphabet $A = \{0, 1, 2\}$ et de

rayon 2 avec

$$\delta_{\mathcal{A}}(x, y, z, t, u) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{\pi}(xyztu) = 01110, \\ 2 & \text{si } \bar{\pi}(yztu) = 0110, \\ z & \text{si } \bar{\pi}(yzt) = 111 \text{ et si } \bar{\pi}(xyztu) \neq 01110, \\ z & \text{si } \bar{\pi}(yzt) = 010, \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Soit enfin \mathcal{B} l'automate cellulaire d'alphabet $B = \{0, 1\}$, de rayon 2 et défini par

$$\delta_{\mathcal{B}}(x, y, z, t, u) = \begin{cases} 1 & \text{si } yzt = 111 \text{ ou } yzt = 010 \text{ ou } yztu = 0110, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La figure 3.1 illustre le comportement de \mathcal{A} et \mathcal{B} par des exemples de

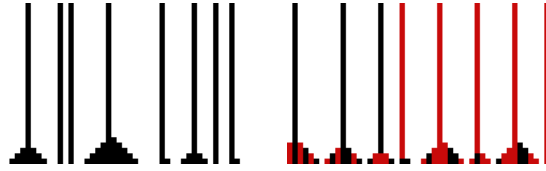


FIG. 3.1: Exemples de diagrammes espace-temps des automates cellulaires \mathcal{A} (à gauche) et \mathcal{B} (à droite).

diagrammes espace-temps. Intuitivement, \mathcal{A} comme \mathcal{B} réduisent les plages d'états non nuls à la longueur 1. De plus, \mathcal{A} conserve à la fin de la réduction l'information de parité de la longueur de telles plages grâce aux états 1 (cas impair) ou 2 (cas pair).

Par construction, il est clair que $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ à travers la coloration π . Nous allons montrer que \mathcal{A} ne peut pas simuler \mathcal{B} au sens de \preceq_{\square} . La preuve consiste à montrer qu'on ne peut pas, à partir de \mathcal{A} et par la relation \preceq_{\square} , conserver la dynamique de réduction de plages (nécessaire à la simulation de \mathcal{B}) et simultanément « annuler » le mécanisme de détection de parité.

En effet, supposons qu'il existe $m, m', t, t' \in \mathbb{N}_+$ et $z, z' \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathcal{B}^{\langle m', t', z' \rangle} \preceq_{\square} \mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle}$ et notons ϕ l'injection intervenant dans cette relation. Soient $u = 1^{m'}$ et $v = 0^{m'}$ (u et v sont des états particuliers de $\mathcal{B}^{\langle m', t', z' \rangle}$). Tout d'abord, on a nécessairement $\bar{\pi}(\phi(u)) = 1^m$ car 0 est un état bloquant pour \mathcal{A} : formellement, si deux configuration c et c' sont telles qu'il existe $z_- \leq z_+$ avec $c(z_-) = c'(z_-) = c(z_+) = c'(z_+) = 0$ et, pour tout z tel que $z_- \leq z \leq z_+$, $c(z) = c'(z)$ alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout z tel que $z_- \leq z \leq z_+$:

$$(\mathcal{A}^n(c))(z) = (\mathcal{A}^n(c'))(z).$$

En effet, dans le cas contraire (si $\bar{\pi}(\phi(u))$ contient un 0), une configuration du type ${}^{\omega}\phi(v)\phi(u)^n\phi(v)^{\omega}$ ne serait jamais envoyée vers une configuration du

type ${}^\omega\phi(v)\phi(u)^{n-k}\phi(v)^\omega$ pour k suffisamment grand, ce qui doit être le cas vu le comportement de $\mathcal{B}^{<m',t',z'>}$ sur les configurations du type ${}^\omega uv^n u^\omega$.

On vérifie ensuite que $\bar{\pi}(\phi(u')) \neq 1^m$ pour tout $u' \in B^m$, $u' \neq u$ sinon $\mathcal{A}^{<m,t,z>}$ restreint à $\{\phi(u), \phi(u')\}$ serait l'identité ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{B}^{<m',t',z'>}$ restreint à $\{u, u'\}$. On peut alors considérer les configurations $c_n \in B^{\mathbb{Z}}$ avec $c_n(z) = 1 \Leftrightarrow 0 \leq z \leq n$: les orbites de c_{2n+1} et c_{2n+2} se rejoignent sous l'action de \mathcal{B} . Par conséquent, les orbites de $\mathbf{o}_{m'}^{-1}(c_{2n+1})$ et $\mathbf{o}_{m'}^{-1}(c_{2n+2})$ se rejoignent aussi sous l'action de $\mathcal{B}^{<m',t',z'>}$. En revanche, si x et y sont deux configurations de \mathcal{A} telles qu'il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ avec

- $x(z) = y(z) = 1$ lorsque $z_1 \leq z \leq z_2$,
- $x(z_1 - 1) = y(z_1 - 1) = 0$,
- $x(z_2 + 1) = 0$ et
- $y(z_2 + 1) = 1$,

alors les orbites de x et y sous l'action de \mathcal{A} sont disjointes. Il en va donc de même pour les orbites de $\mathbf{o}_m^{-1}(x)$ et $\mathbf{o}_m^{-1}(y)$ sous l'action de $\mathcal{A}^{<m,t,z>}$. Pour conclure il suffit de remarquer que $\mathbf{o}_{m'}^{-1}(c_{2n+1})$ et $\mathbf{o}_{m'}^{-1}(c_{2n+2})$ sont nécessairement envoyées par $\bar{\phi}$ sur deux configurations $\mathbf{o}_m^{-1}(x)$ et $\mathbf{o}_m^{-1}(y)$ où x et y sont du type ci-dessus : il y a contradiction avec l'injectivité de ϕ . \square

L'automate cellulaire \mathcal{B} est capable d'extraire une information dispersée dans l'espace (parité d'une plage d'états) et de la transcrire dans l'état d'une seule cellule. La proposition ci-dessus montre que ce mécanisme ne peut pas être rendu local par groupage et qu'il ne peut pas être annulé par passage au sous-automate sans que la dynamique générale ne soit affectée.

La figure 3.2 résume les inclusions et différences entre les relations de simulation considérées jusque là (les différences découlent de la proposition 23 ci-dessus et de l'exemple donné plus loin page 107).

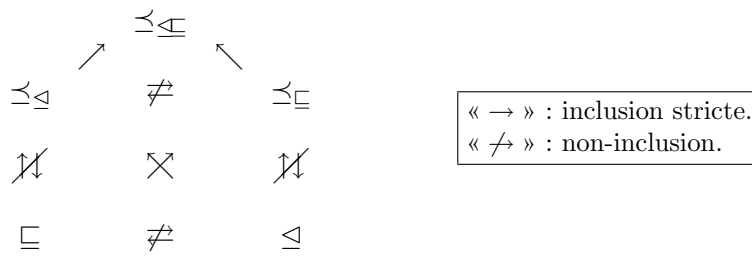


FIG. 3.2: Inclusions et non-inclusions entre relations de simulations.

3.1.2 Une approche globale

Le but de cette section est de formuler une notion de simulation de nature dynamique fondée sur la comparaison des orbites. Nous nous appuyons ensuite sur les fortes propriétés du modèle pour affiner la notion formulée.

Enfin, nous montrons que la notion de simulation obtenue induit un pré-ordre sur les automates cellulaires, et qu'elle contient les relations \preceq_{\square} , \preceq_{\triangleleft} et \preceq_{\triangleleft} .

Intuitivement, avec la relation de simulation que nous allons définir ci-après, \mathcal{B} *simule* \mathcal{A} si toutes les orbites de \mathcal{A} peuvent se lire dans les orbites de \mathcal{B} . Cette « lecture » se fait en distinguant dans l'espace de \mathcal{B} un certain nombre de zones qui chacune « représente » un point de l'espace de \mathcal{A} . L'évolution de \mathcal{A} est alors retracée dans l'évolution de \mathcal{B} par les étapes où \mathcal{B} se trouve dans l'une de ces zones.

Plus précisément, la simulation repose sur les principes suivants :

- pour tout $t \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathcal{R}$, \mathcal{A} et $\sigma_z \circ \mathcal{A}^t$ sont vus comme un même système dynamique, donc $\sigma_z \circ \mathcal{A}^t$ peut être choisi pour représenter \mathcal{A} ;
- à chaque configuration x de l'automate simulé correspond un ensemble C_x de configurations de l'automate simulateur (la « zone » correspondant à x) telles que :
 - la simulation est exhaustive : $\forall x, C_x \neq \emptyset$;
 - l'interprétation dans le simulateur est non ambiguë : $C_x \cap C_{x'} = \emptyset$ dès que $x \neq x'$;
 - dans le simulateur, le temps de passage d'une zone C_x à une zone C_y ne dépend pas du représentant choisi dans C_x ;
- les translations dans le simulé sont traduites par des translations dans le simulateur² : $\exists z_1, z_2 \in \mathcal{R}^+, \forall z \in \mathcal{R}, \forall x : C_{\sigma_{z_1 \otimes z}(x)} = \sigma_{z_2 \otimes z}(C_x)$;
- une fois fixés les représentants du simulateur et du simulé, les pas successifs x_1, \dots, x_n, \dots de toute orbite du représentant du simulé correspondent exactement aux pas appartenant aux ensembles C_{x_1}, \dots, C_{x_n} dans le représentant du simulateur.

La figure 3.3 illustre ces principes. Une première formulation de notion de simulation est donc la suivante.

Définition 40. \mathcal{A} est simulé par \mathcal{B} , s'il existe un ensemble $E \subseteq B^{\mathcal{R}}$, une fonction surjective $f : E \rightarrow A^{\mathcal{R}}$, et des automates \mathcal{A}_0 et \mathcal{B}_0 de la forme $\sigma_{z_a} \circ \mathcal{A}^{t_a}$ et $\sigma_{z_b} \circ \mathcal{B}^{t_b}$ (respectivement) vérifiant :

- (i). $\forall y \in E, \exists t \in \mathbb{N}_+ : \mathcal{B}_0^t(y) \in E$,
- (ii). $\exists z_1, z_2 \in \mathcal{R}^+, \forall z \in \mathcal{R} : \sigma_{z_2 \otimes z}(E) \subseteq E$ et $f \circ \sigma_{z_2 \otimes z} = \sigma_{z_1 \otimes z} \circ f$ sur E .
- (iii). $\forall x \in A^{\mathcal{R}}, \exists t_x \in \mathbb{N}_+, \forall y \in E :$

$$f(y) = x \Rightarrow \begin{cases} t_x = \min_{\mathbb{N}_+} \{t : \mathcal{B}_0^t(y) \in E\}, \\ f(\mathcal{B}_0^{t_x}(y)) = \mathcal{A}_0(x), \end{cases}$$

Avec ce formalisme, on a $C_x = f^{-1}(x)$ et $E = \bigcup_x C_x$. La nature fonctionnelle de f assure la non ambiguïté de la simulation. Par ailleurs, le temps

²Intuitivement, cette condition exprime que le découpage de l'espace en zone doit être uniforme, et ne pas privilégier arbitrairement une position du réseau.

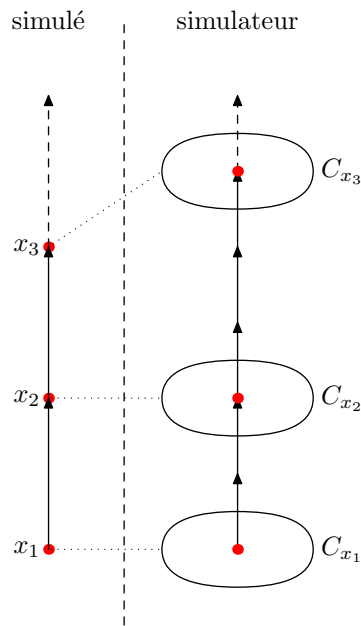


FIG. 3.3: Principes généraux d'une simulation.

t_x mis par le simulateur pour effectuer un pas de simulation peut dépendre de la configuration x considérée (mais il ne dépend pas de la façon dont on simule ce pas de calcul, c'est à dire du choix d'un représentant de x dans C_x).

Formulée ainsi, notre notion de simulation autorise une fonction de décodage arbitraire des configurations de l'automate simulateur vers les configurations de l'automate simulé. La notion obtenue ne correspond pas à l'idée intuitive de simulation car toute la complexité d'une dynamique peut être « cachée » dans la fonction de décodage f , ce qui rend possible la simulation d'automates cellulaires très complexes par des automates cellulaires très simples.

En effet, étant donné un automate cellulaire \mathcal{A} de réseau \mathbb{Z} , le déterminisme de \mathcal{A} permet de connaître $\mathcal{A}^n(c)$ à partir de c et de n seulement pour toute configuration $c \in A^{\mathbb{Z}}$. Ainsi, muni d'une fonction de décodage qui détermine $\mathcal{A}^n(c)$ en fonction de c et n , tout automate cellulaire capable en un certain sens d'incrémenter un compteur n peut simuler n'importe quel automate cellulaire comme le montre l'exemple ci-dessous.

Soit \mathcal{B} l'automate cellulaire de réseau \mathbb{Z} et d'alphabet $B = \{\perp, \bullet\} \times \{0, 1\}$ de rayon 1 défini par :

$$\delta_{\mathcal{B}}((x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), (x_1, y_1)) = (x_0, \max\{y_0, y_{-1}\}).$$

\mathcal{B} a un comportement extrêmement simple mais peut simuler tout automate cellulaire \mathcal{A} de réseau \mathbb{Z} .

En effet, en supposant que $A = \{1, \dots, n\}$, soit $\phi : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{\perp, \bullet\}^{\mathbb{Z}}$ la fonction qui code chaque configuration de \mathcal{A} par une configuration de $\{\perp, \bullet\}^{\mathbb{Z}}$ de la façon suivante :

$$\phi(c) = \dots \gamma(c(-1))\gamma(c(0))\gamma(c(1)) \dots$$

avec $\gamma(a) = \underbrace{\bullet \dots \bullet}_{a} \perp \dots \perp$.

Soit alors E l'ensemble des configurations de $B^{\mathbb{Z}}$ telles que la première couche est de la forme $\phi(c)$ et la seconde de la forme ${}^{\omega}01^{k+1}0^{\omega}$ pour $k \in \mathbb{N}$. On définit alors la fonction $f : E \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ sur une telle configuration y par $f(y) = \mathcal{A}^k(c)$. Il est alors clair que \mathcal{B} simule \mathcal{A} sur E avec la fonction de décodage f .

On remarque que, dans cet exemple, la fonction de décodage f est continue mais E n'est pas fermé (c'est dû à la condition de finitude sur le compteur unaire de la seconde couche). On peut définir une variante de cette simulation.

Soit $E' = E \cup E_0 \cup E_1$ où E_0 (resp. E_1) est l'ensemble des configurations dont la première composante est de la forme $\phi(c)$ et la seconde composante est ${}^{\omega}0^{\omega}$ (resp. ${}^{\omega}1^{\omega}$). On étend alors f en f' définie sur E' par

$$f'(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in E, \\ c_0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où c_0 est une configuration quiescente de \mathcal{A} . Il est clair que \mathcal{B} simule \mathcal{A} sur E' avec la fonction de décodage f' .

Dans cette seconde variante, E' est bien fermé, mais la fonction de décodage est cette fois discontinue en certains points (précisément en tout point de $E_0 \cup E_1$). Ceci suggère donc de renforcer la notion de simulation introduite précédemment par deux conditions simultanées : la fonction de décodage doit être définie sur un fermé et continue. Désormais, toutes les simulations considérées sont telles que l'ensemble E est fermé et la fonction de décodage f est continue.

Les propriétés du modèle des automates cellulaires, et notamment l'uniformité, permettent de caractériser plus précisément cette notion générale de simulation. En effet, on peut montrer que les délais du simulateur pour effectuer une étape de la dynamique du simulé sont en fait nécessairement uniformément bornés. De plus, ils forment une suite ultimement périodique dans chaque orbite du simulateur comme le montre la proposition suivante.

Proposition 24. *Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux automates cellulaires tels que \mathcal{B} simule \mathcal{A} au sens de la définition 40 : on note les représentants $\mathcal{B}_0 = \sigma_{z_b} \circ \mathcal{B}^b$ et $\mathcal{A}_0 = \sigma_{z_a} \circ \mathcal{A}^a$, la fonction de décodage f , telle qu'il existe $z_1, z_2 \in \mathcal{R}$ vérifiant $\sigma_{z_1 \otimes z} \circ f = f \circ \sigma_{z_2 \otimes z}$ (pour tout $z \in \mathcal{R}$). Si l'on suppose f définie sur un fermé E et continue, la simulation vérifie alors les propriétés suivantes :*

- il existe $T \in \mathbb{N}_+$ tel que pour tout $x \in A^{\mathcal{R}}$, $t_x \leq T$ (où t_x est défini par $t_x = \min\{t : \exists y \in f^{-1}(x) \text{ et } \mathcal{B}_0^t(y) \in E\}$);
- pour tout $y \in E$, la suite $(t_n(y))_{n \in \mathbb{N}_+}$ est ultimement périodique de période T , où

$$t_1(y) = \min\{t \in \mathbb{N}_+ : \mathcal{B}_0^t(y) \in E\},$$

$$t_{n+1}(y) = \min\{t \in \mathbb{N}_+ : \mathcal{B}_0^{t_n(y)+t}(y) \in E\}.$$

Démonstration. Il apparaît d'abord que $\mathfrak{S} = \mathbf{o}_{z_2}^{-1}(E)$ est un sous-espace de $(B^{[z_2]})^{\mathcal{R}}$ invariant par décalage (d'après le point (ii) de la définition 40) et fermé (car E est fermé et $\mathbf{o}_{z_2}^{-1}$ continue), donc c'est un sous-shift.

Soit $\phi = \mathbf{o}_{z_1}^{-1} \circ f \circ \mathbf{o}_{z_2}$ définie de \mathfrak{S} dans $(A^{[z_1]})^{\mathcal{R}}$. ϕ est continue, surjective et commute avec les translations. Considérons alors le sous-shift \mathfrak{T} engendré par une configuration de $\phi^{-1}(c_u)$ où c_u est une configuration univers de $(A^{[z_1]})^{\mathcal{R}}$. Par définition, \mathfrak{T} est irréductible (voir page 12). De plus, par continuité et commutation avec les décalages, ϕ reste surjective lorsqu'elle est restreinte à \mathfrak{T} : en effet, $\phi(\mathfrak{T})$ a par construction le même langage que $(A^{[z_1]})^{\mathcal{R}}$ et ce sont tous deux des sous-shifts donc ils sont égaux.

On considère alors la fonction $g : \mathfrak{T} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$ définie par

$$g(y) = \{t \in \mathbb{N}_+ : \mathbf{o}_{z_2}^{-1} \circ \mathcal{B}_0^t \circ \mathbf{o}_{z_2}(y) \in \mathfrak{S}\}.$$

$g(y)$ n'est jamais vide, par définition de la simulation (point (i) de la définition 40). Comme \mathcal{B}_0 est continue et invariante par décalage, et comme \mathfrak{S} est un sous-shift, la fonction g est de plus conservative à la limite. Par le lemme d'uniformité (lemme 1 page 12), il existe donc $T \in \mathbb{N}_+$ tel que pour tout $y \in \mathfrak{T}$, $\mathbf{o}_{z_2}^{-1} \circ \mathcal{B}_0^T \circ \mathbf{o}_{z_2}(y) \in \mathfrak{S}$. Comme ϕ est surjective lorsqu'elle est restreinte à \mathfrak{T} , on en déduit que pour tout $x \in A^{\mathcal{R}}$, $t_x \leq T$ (point (iii) de la définition 40), et également que, pour tout $y \in E$, $\mathcal{B}_0^T(y) \in E$.

Considérons maintenant $y \in E$ et la suite $(t_n(y))_{n \in \mathbb{N}_+}$ associée. En notant $s_k = \sum_{i \leq k} t_i$, il existe d'après ce qui précède une fonction $f_+ : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $s_{f_+(n)}(n) = s_n + T$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, l'ensemble (fini) suivant :

$$E_n = \{1 \leq t \leq T : \exists n' \in \mathbb{N}_+, s_{n'} = s_n + t\}.$$

E_n représente l'ensemble des temps compris entre s_n et $s_n + T$ où la simulation progresse d'un pas. D'après la remarque ci-dessus, on a $E_n \subseteq E_{f_+(n)}$

pour tout $n \in \mathbb{N}_+$. Soit alors $(E_{n_j})_{j \in \mathbb{N}_+}$ la suite extraite de (E_n) définie par

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 \\ n_{j+1} &= f_+(n_j). \end{aligned}$$

$(E_{n_j})_{j \in \mathbb{N}_+}$ est croissante pour l'inclusion et bornée ($\forall j, E_{n_j} \subseteq \{1, \dots, T\}$) donc elle est constante à partir d'un certain rang. On en déduit directement que la suite $(t_n(y))_{n \in \mathbb{N}_+}$ est ultimement périodique de période T . \square

Cette proposition montre dans une large mesure que la liberté laissée sur les temps de simulations dans la définition proposée est un artifice. Nous allons dans toute la suite nous restreindre au cas où ces délais de simulation sont constants².

La preuve ci-dessus met également en avant une propriété importante des simulations étudiées : si l'on effectue les changements d'échelle appropriés sur les espaces du simulateur et du simulé (dans la preuve ci-dessus, on considère les espaces $\mathfrak{o}_{z_1}^{-1}(A^{\mathcal{R}})$ pour le simulé et $\mathfrak{S} = \mathfrak{o}_{z_2}^{-1}(E)$ pour le simulateur) alors la fonction de décodage f induite par ces transformations (la fonction $\phi = \mathfrak{o}_{z_1}^{-1} \circ f \circ \mathfrak{o}_{z_2}$ dans la preuve ci-dessus) reste continue, et commute avec les décalages.

Les fonctions continues d'un sous-shift vers un autre (pas nécessairement de même alphabet) et qui commutent avec les décalages sont connues sous le nom de « codes »³ dans la théorie de la dynamique symbolique (voir [50]). Elles généralisent les automates cellulaires et, tout comme ceux-ci, elles constituent exactement les fonctions obtenues par application synchrone et uniforme de règles de transition locales (par une généralisation de la proposition 4). Ainsi, les conditions de continuité sur la fonction f et de fermeture de son ensemble de définition représentent une contrainte de localité du codage et du décodage des configurations. Partant d'un point de vue dynamique global, notre étude rejoint donc [20] où la localité du codage et du décodage est introduite dès la définition des simulations envisagées.

Avec les remarques qui précèdent, la notion de simulation prend alors la forme suivante⁴ dans laquelle les outils de changement d'échelle et de groupage (cf. sections 1.2.1 et 1.3) apparaissent naturellement.

Définition 41 (simulation généralisée). *Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux automates cellulaires de même réseau \mathcal{R} . \mathcal{B} simule \mathcal{A} (noté $\mathcal{A} \preceq_{\mathcal{G}} \mathcal{B}$) s'il existe $m, m' \in \mathcal{R}^+$,*

²Nous ne connaissons pas d'exemple où des délais variables sont nécessaires pour obtenir la simulation d'un certain automate cellulaire par un certain autre.

³En anglais : *sliding bloc code*.

⁴Précisément, on peut montrer que la relation de simulation au sens initial avec une fonction de décodage f continue, qui commute faiblement avec les translations, où E est un fermé et les temps t_x sont tous égaux, est exactement la relation de simulation généralisée de la définition 41 : la preuve consiste essentiellement à définir le sous-shift \mathfrak{S} et la fonction ϕ comme dans la preuve de la proposition 24.

$t, t' \in \mathbb{N}_+$, $z, z' \in \mathcal{R}$, un sous-shift \mathfrak{S} de $(B^{[m']})^{\mathcal{R}}$ tel que $\mathcal{B}^{<m', t', z'>}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{S}$ et une fonction continue et surjective $\phi : \mathfrak{S} \rightarrow (A^{[m]})^{\mathcal{R}}$ qui commute avec les translations telle qu'on ait l'égalité suivante sur \mathfrak{S} :

$$\phi \circ \mathcal{B}^{<m', z', t'>} = \mathcal{A}^{<m, t, z>} \circ \phi.$$

Avec cette définition, la simulation généralisée $\preceq_{\mathcal{G}}$ induit une relation de pré-ordre sur les automates cellulaires.

Proposition 25. $(\mathcal{AC}, \preceq_{\mathcal{G}})$ est un pré-ordre.

Démonstration. On vérifie sans mal que $\preceq_{\mathcal{G}}$ est réflexive. Soit \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} trois automates cellulaires tels que $\mathcal{A} \preceq_{\mathcal{G}} \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \preceq_{\mathcal{G}} \mathcal{C}$. Il existe donc des paramètres $m_1, m_2, m'_1, m'_2 \in \mathcal{R}^+$, $t_1, t_2, t'_1, t'_2 \in \mathbb{N}_+$ et $z_1, z_2, z'_1, z'_2 \in \mathcal{R}$, des sous-shifts $\mathfrak{S}_1 \subseteq (B^{[m'_1]})^{\mathcal{R}}$ et $\mathfrak{S}_2 \subseteq (C^{[m'_2]})^{\mathcal{R}}$ tels que $\mathcal{B}^{<m'_1, t'_1, z'_1>}(\mathfrak{S}_1) \subseteq \mathfrak{S}_1$ et $\mathcal{C}^{<m'_2, t'_2, z'_2>}(\mathfrak{S}_2) \subseteq \mathfrak{S}_2$, et des fonctions (continues, surjectives et qui commutent avec les translations) $\phi_1 : \mathfrak{S}_1 \rightarrow (A^{[m_1]})^{\mathcal{R}}$ et $\phi_2 : \mathfrak{S}_2 \rightarrow (B^{[m_2]})^{\mathcal{R}}$, avec les égalités suivantes sur \mathfrak{S}_1 et \mathfrak{S}_2 respectivement :

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \mathcal{B}^{<m'_1, t'_1, z'_1>} &= \mathcal{A}^{<m_1, t_1, z_1>} \circ \phi_1, \\ \phi_2 \circ \mathcal{C}^{<m'_2, t'_2, z'_2>} &= \mathcal{B}^{<m_2, t_2, z_2>} \circ \phi_2. \end{aligned}$$

On en déduit les égalités suivantes sur $\mathfrak{o}_{m_2}^{-1}(\mathfrak{S}_1)$ et $\mathfrak{o}_{m'_1}^{-1}(\mathfrak{S}_2)$ respectivement :

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_{m_2}^{-1} \circ \phi_1 \circ \mathfrak{o}_{m_2} \circ \mathcal{B}^{<m'_1 \otimes m_2, t'_1, z'_1>} &= \mathcal{A}^{<m_1 \otimes m_2, t_1, z_1>} \circ \mathfrak{o}_{m_2}^{-1} \circ \phi_1 \circ \mathfrak{o}_{m_2}, \\ \mathfrak{o}_{m'_1}^{-1} \circ \phi_2 \circ \mathfrak{o}_{m'_1} \circ \mathcal{C}^{<m'_2 \otimes m'_1, t'_2, z'_2>} &= \mathcal{B}^{<m_2 \otimes m'_1, t_2, z_2>} \circ \mathfrak{o}_{m'_1}^{-1} \circ \phi_2 \circ \mathfrak{o}_{m'_1}. \end{aligned}$$

En notant $\Phi = \mathfrak{o}_{m_2}^{-1} \circ \phi_1 \circ \mathfrak{o}_{m_2} \circ \mathfrak{o}_{m'_1}^{-1} \circ \phi_2 \circ \mathfrak{o}_{m'_1}$, on a alors sur le sous-shift $\mathfrak{S} = (\mathfrak{o}_{m'_1}^{-1} \circ \phi_2^{-1} \circ \mathfrak{o}_{m'_1} \circ \mathfrak{o}_{m_2}^{-1})(\mathfrak{S}_1) \subseteq \mathfrak{o}_{m'_1}^{-1}(\mathfrak{S}_2)$:

$$\Phi \circ \mathcal{C}^{<m'_2 \otimes m'_1, t'_2, z'_2>} = \mathcal{A}^{<m_1 \otimes m_2, t_1, z_1>} \circ \Phi.$$

Pour conclure, on vérifie que Φ est continue, commute avec les translations et est surjective[↗] de \mathfrak{S} dans $(A^{[m_1 \otimes m_2]})^{\mathcal{R}}$. \square

Par définition, les inclusions entre les relations \sqsubseteq , \trianglelefteq et \trianglelefteq se retrouvent dans les relations de simulation associées. Par ailleurs, on vérifie que ces dernières constituent toutes des cas particuliers de $\preceq_{\mathcal{G}}$. En effet, si l'on note par $\mathcal{A} \mathcal{G} \mathcal{B}$ le fait qu'il existe un sous-shift \mathfrak{S} de $B^{\mathcal{R}}$ et une fonction $\phi : \mathfrak{S} \rightarrow A^{\mathcal{R}}$ surjective continue et qui commute avec les translations, avec

[↗]Pour alléger les notations, on utilise implicitement la bijection canonique entre $(Q^{[m \otimes m']})^{\mathcal{R}}$ et $\mathfrak{o}_{m'}^{-1}((Q^{[m]})^{\mathcal{R}})$ où Q est un alphabet quelconque et $m, m' \in \mathcal{R}^+$.

de plus $\phi \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \phi$ sur \mathfrak{S} , on remarque que la relation $\preceq_{\mathcal{G}}$ peut être caractérisée de la façon suivante :

$$\mathcal{A} \preceq_{\mathcal{G}} \mathcal{B} \iff \exists m, m', t, t', z, z' : \mathcal{A}^{<m, t, z>} \mathcal{G} \mathcal{B}^{<m', t', z'>}.$$

Comme la relation \preceq_{\sqsubseteq} est incluse dans la relation \mathcal{G} , la notion de simulation \preceq_{\sqsubseteq} est un cas particulier de $\preceq_{\mathcal{G}}$.

3.2 Complexités

Un paramètre de complexité est une fonction qui associe à chaque automate cellulaire une certaine valeur prise dans un ensemble totalement ordonné. Dans le cadre de l'étude d'une relation de simulation \preceq , les paramètres de complexité qui nous intéressent sont ceux qui sont croissants pour \preceq . Dit autrement, étant donné le pré-ordre \preceq , on s'intéresse à des ordres totaux obtenus en ordonnant d'une certaine façon les éléments incomparables et en identifiant certaines classes de \preceq .

Définition 42 (paramètre de complexité). *Un paramètre de complexité pour une relation de simulation \preceq et un ensemble totalement ordonné (E, \leq) est une fonction $\rho : \mathcal{AC} \rightarrow E$ croissante :*

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Rightarrow \rho(\mathcal{A}) \leq \rho(\mathcal{B}).$$

Avec cette définition, on remarque qu'un paramètre de complexité pour une relation de simulation \preceq est aussi un paramètre de complexité pour toute relation de simulation incluse dans \preceq .

L'ensemble image E d'un paramètre de complexité — intuitivement, la « nature » de la complexité mesurée — est *a priori* quelconque, cependant la condition de croissance vis-à-vis d'une relation de simulation est très forte et élimine des paramètres artificiels. En effet, le nombre d'états ou le rayon d'un automate cellulaire ne sont par exemple pas des paramètres de complexité pour \preceq_{\sqsubseteq} ni pour \preceq_{\triangleleft} (donc pour aucune des simulations envisagées ici) au sens de la définition 42.

3.2.1 Premiers exemples de paramètres

Nous donnons ici trois exemples de paramètres de complexité simples. Les deux premiers se fondent sur le dénombrement des cycles dans l'espace des phases, le troisième sur l'ensemble des dynamiques capturées.

Étant donné un automate cellulaire \mathcal{A} , on définit la relation $\rightsquigarrow_{\mathcal{A}}$ sur $A^{\mathcal{R}}$, symétrique et transitive, par $x \rightsquigarrow_{\mathcal{A}} y \iff x \rightarrow_{\mathcal{A}} y$ et $y \rightarrow_{\mathcal{A}} x$ où

$$x \rightarrow_{\mathcal{A}} y \iff \exists t \in \mathbb{N}_+ : \mathcal{A}^t(x) = y.$$

Les ensembles suivants représentent alors l'ensemble des cycles de configurations périodiques et l'ensemble des cycles non isolés de configurations périodiques pour \mathcal{A} :

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(\mathcal{A}) &= \{x \in A^{\mathcal{R}} : x \text{ périodique et } x \stackrel{\leftrightarrow}{\mathcal{A}} x\}, \\ \mathcal{Y}_{\rightarrow}(\mathcal{A}) &= \{x \in \mathcal{Y}(\mathcal{A}) : \exists y, z \in A^{\mathcal{R}}, z \stackrel{\leftrightarrow}{\mathcal{A}} x, y \rightarrow_{\mathcal{A}} z \text{ et } z \not\rightarrow_{\mathcal{A}} y\}.\end{aligned}$$

La relation $\stackrel{\leftrightarrow}{\mathcal{A}}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{Y}_{\rightarrow}(\mathcal{A})$, on peut donc s'intéresser aux classes d'équivalence pour $\stackrel{\leftrightarrow}{\mathcal{A}}$ dans ces ensembles. Les paramètres de complexité ρ_{\circlearrowleft} et $\rho_{\rightarrow\circlearrowleft}$ introduits dans la proposition suivante mesurent le nombre de ces classes.

Proposition 26. *On définit les paramètres ρ_{\circlearrowleft} et $\rho_{\rightarrow\circlearrowleft}$ à valeur dans l'ensemble $\mathbb{N}_+ \cup \{\aleph_0\}$ par*

$$\begin{aligned}\rho_{\circlearrowleft}(\mathcal{A}) &= |\mathcal{Y}(\mathcal{A}) / \stackrel{\leftrightarrow}{\mathcal{A}}|, \\ \rho_{\rightarrow\circlearrowleft}(\mathcal{A}) &= |\mathcal{Y}_{\rightarrow}(\mathcal{A}) / \stackrel{\leftrightarrow}{\mathcal{A}}|.\end{aligned}$$

ρ_{\circlearrowleft} et $\rho_{\rightarrow\circlearrowleft}$ sont des paramètres de complexité pour \preceq_{\square} .

Démonstration. Pour tout automate cellulaire \mathcal{A} , tout $m \in \mathcal{R}^+$, tout $t \in \mathbb{N}_+$ et tout $z \in \mathcal{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{Y}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \mathbf{o}_m^{-1}(x) \in \mathcal{Y}(\mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle}), \\ x \in \mathcal{Y}_{\rightarrow}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \mathbf{o}_m^{-1}(x) \in \mathcal{Y}_{\rightarrow}(\mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle}).\end{aligned}$$

En effet, les automates cellulaires $\mathbf{o}_m^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathbf{o}_m$ et \mathcal{A} ont tout d'abord des diagrammes des phases isomorphes. Ensuite, $x \stackrel{\leftrightarrow}{\mathcal{A}} y$ si et seulement si $x \stackrel{\leftrightarrow}{\mathcal{A}^t} y$ (car $x \stackrel{\leftrightarrow}{\mathcal{A}} y$ implique l'existence de t , et t' tels que, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $\mathcal{A}^{kt}(x) = y$ et $\mathcal{A}^{kt'}(y) = x$). Enfin, $(\sigma_z \circ \mathcal{A})^t$ se comporte comme \mathcal{A}^t sur une configuration périodique donnée pour t bien choisi. Ainsi, ρ_{\circlearrowleft} et $\rho_{\rightarrow\circlearrowleft}$ sont invariants par transformations syntaxiques. Comme ils sont de plus décroissants pour \square , la proposition est prouvée. \square

Ces paramètres liés aux nombres de cycles ont été utilisés, dans un autre formalisme, par I. Rapaport [79] et N. Ollinger [73] pour exhiber diverses familles strictement croissantes d'automates cellulaires dans certains pré-ordres de simulation. Nous revenons dessus avec les automates captifs en section 4.1.2.

La proposition 8 page 34 montre que toutes les dynamiques capturées par un automate cellulaire sont aussi capturées par tout automate cellulaire qui le simule au sens de \preceq_{\square} . Cette proposition se généralise directement aux relations \preceq_{\triangleleft} et $\preceq_{\triangleleft\triangleleft}$ (les preuves sont semblables). Toutes ces relations admettent donc pour paramètre de complexité l'ensemble des dynamiques capturées comme l'exprime la proposition suivante.

Proposition 27. Soit ρ_{dyn} le paramètre à valeur dans $\mathcal{P}(\mathbf{Dyn}_{AC})$, où \mathbf{Dyn}_{AC} désigne l'ensemble des dynamiques² capturées par automate cellulaire, et défini par

$$\rho_{\text{dyn}}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{D} : \mathcal{A} \text{ capture la dynamique } \mathcal{D}\}.$$

ρ_{dyn} est un paramètre de complexité pour \preceq_{\square} , \preceq_{\triangleleft} et $\preceq_{\triangleleft\square}$.

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 8. □

3.2.2 Paramètre de complexité de l'ensemble limite

Nous allons définir des paramètres de complexité pour \preceq_{\triangleleft} qui capturent en un certain sens la complexité de l'ensemble limite. Ces paramètres sont tous associés à une hiérarchie admissible de classes de sous-shifts. La définition suivante formalise cette notion (elle utilise les notations introduites en section 2.2.1).

Définition 43. Une classe C de sous-shifts est un sous-ensemble de U . Nous dirons qu'elle est admissible si elle est invariante par changement d'échelle et stable par coloriage : formellement, pour tout $m \in \mathcal{R}^+$ et tout surjection $\varsigma : T \rightarrow T'$, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \in C &\Leftrightarrow \mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}) \in C, \\ \mathfrak{S} \in C \cap P_T &\Rightarrow \bar{\varsigma}(\mathfrak{S}) \in C. \end{aligned}$$

Une hiérarchie \mathfrak{h} de classes de sous-shifts est une chaîne (pour l'inclusion) de classe de sous-shifts : formellement, $\mathfrak{h} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(U))$ et toute paire $C_1, C_2 \in \mathfrak{h}$ vérifie l'une des inclusions $C_1 \subseteq C_2$ ou $C_2 \subseteq C_1$. Une hiérarchie \mathfrak{h} est admissible si toutes les classes qu'elle contient sont admissibles et si $\bigcup \mathfrak{h}$ contient tous les ensembles limites d'automates cellulaires.

À toute hiérarchie admissible de sous-shifts, correspond naturellement le paramètre qui à un automate cellulaire associe la position de son ensemble limite dans cette hiérarchie : c'est un paramètre de complexité pour \preceq_{\triangleleft} comme le montre la proposition suivante.

Proposition 28. Soit \mathfrak{h} une hiérarchie admissible. \preceq_{\triangleleft} admet pour paramètre de complexité $\rho_{\mathfrak{h}}$ à valeurs dans $(\mathfrak{h}, \subseteq)$ défini par :

$$\rho_{\mathfrak{h}}(\mathcal{A}) = \min_{\subseteq} \{C \in \mathfrak{h} : \Omega_{\mathcal{A}} \in C\}.$$

Démonstration. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont tels que $\mathcal{A}^{<m,t,z>} \triangleleft \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$ à travers le coloriage ς , alors on a :

$$\mathbf{o}_m^{-1}(\Omega_{\mathcal{A}}) = \bar{\varsigma}(\mathbf{o}_{m'}^{-1}(\Omega_{\mathcal{B}})).$$

²On adopte la convention que l'alphabet d'une dynamique est toujours un sous-ensemble de \mathcal{S} de sorte que \mathbf{Dyn}_{ac} est bien un ensemble.

En effet, il est d'abord clair que pour tout automate cellulaire \mathcal{D} et tous paramètres m^*, t^*, z^* , on a $\Omega_{\mathcal{D}\langle m^*, t^*, z^* \rangle} = \mathbf{o}_{m^*}^{-1}(\Omega_{\mathcal{D}})$. Ensuite, si deux automates cellulaires sont tels que $\mathcal{A}_\bullet \trianglelefteq \mathcal{B}_\bullet$ par le coloriage ς_\bullet alors on a $\Omega_{\mathcal{A}_\bullet} = \varsigma_\bullet(\Omega_{\mathcal{B}_\bullet})$ (car ς_\bullet est surjective et pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, $x, y \in (B_\bullet)^{\mathcal{R}}$ on a $\mathcal{B}_\bullet^n(x) = y \Rightarrow \mathcal{A}_\bullet^n(\varsigma_\bullet(x)) = \varsigma_\bullet(y)$).

La définition 43 permet de conclure que $\rho_{\mathfrak{h}}$ est un paramètre de complexité pour \preceq_{\triangleleft} . \square

À ce point, la démarche suivie pour définir les classes et les hiérarchies admissibles de façon compatible avec la relation \trianglelefteq afin d'obtenir des paramètres de complexité pour \preceq_{\triangleleft} peut paraître artificielle. Mais la notion de hiérarchie admissible telle qu'on l'a définie est intéressante car elle contient des hiérarchies fondées sur la complexité algorithmique des langages de sous-shift², notamment la hiérarchie de Chomsky (voir [32] pour une introduction détaillée). Nous considérons ici uniquement le réseau \mathbb{Z} .

Proposition 29. *Soit $\mathfrak{h}_0 = \{C_{\mathbb{R}}, C_{\text{ALG}}, C_{\mathbb{C}}, C_{\text{RE}}, \mathcal{U}\}$ la hiérarchie définie par*

- $\mathfrak{S} \in C_{\mathbb{R}} \iff \mathcal{L}(\mathfrak{S})$ est rationnel,
- $\mathfrak{S} \in C_{\text{ALG}} \iff \mathcal{L}(\mathfrak{S})$ est algébrique,
- $\mathfrak{S} \in C_{\mathbb{C}} \iff \mathcal{L}(\mathfrak{S})$ est contextuel,
- $\mathfrak{S} \in C_{\text{RE}} \iff \mathcal{L}(\mathfrak{S})$ est récursivement énumérable.

Alors \mathfrak{h}_0 est une hiérarchie admissible.

Démonstration. La stabilité par coloriage de chacune des classes de \mathfrak{h}_0 est un cas particulier de la stabilité de celles-ci par les morphismes tels que seul le mot vide a pour image le mot vide (résultat classique que l'on peut retrouver dans [32]). Il reste alors à montrer que pour chaque classe $C \in \mathfrak{h}_0$, pour tout $m \in \mathbb{N}_+$ et tout sous-shift \mathfrak{S} on a

$$\mathfrak{S} \in C \iff \mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}) \in C.$$

Tout d'abord les familles de langages de la hiérarchie de Chomsky utilisées ici sont aussi toutes closes par morphisme inverse et par intersection avec un langage rationnel (voir par exemple le chapitre 11 de [32]) on a donc, pour toute classe $C \in \mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{S} \in C \Rightarrow \mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}) \in C$ car on vérifie facilement que $\mathcal{L}(\mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S})) = \pi^{-1}(\mathcal{L}(\mathfrak{S}) \cap A^{m\mathbb{N}})$ où π est le morphisme adéquat.

Réciproquement, si $\mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}) \in C$, on montre que $\mathfrak{S} \in C$ en exprimant le langage $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ à partir de $\mathcal{L}(\mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S}))$ de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = \pi_{\star} \left(\varsigma \left(\mathcal{L}(\mathbf{o}_m^{-1}(\mathfrak{S})) \cap (A^m)^* A_{\star}^m \right) \right),$$

où A est l'alphabet de \mathfrak{S} , $A_{\star} = A \cup \{\star\}$ (avec $\star \notin A$), π_{\star} est le morphisme des mots sur l'alphabet $A \times A_{\star}^{m-1}$ dans les mots sur l'alphabet A défini par

$$\pi_{\star}(u_1, \dots, u_m) = u_1 \chi(u_2) \cdots \chi(u_m)$$

²Dans [46], A. Maass et P. Kůrka proposent une hiérarchie adaptée aux langages de sous-shift qui affine largement la hiérarchie de Chomsky et pourrait être utilisée ici.

(avec $\chi(a) = \epsilon$ si $a = \star$ et a sinon), et ς est la substitution des mots d'alphabet A^m dans les mots d'alphabet A_\star^m définie par

$$\varsigma(u_1, \dots, u_m) = \{(u_1, \dots, u_m), (u_1, \dots, u_{m-1}, \star), \dots, (u_1, \star, \dots, \star)\}.$$

Ceci conclue la preuve car les familles de langages considérées sont aussi closes par les substitutions telles que seul le mot vide a pour image le mot vide (voir encore une fois [32]). \square

La complexité des langages limites des automates cellulaires a été très étudiée, et notamment dans [33] qui fournit des exemples d'automates cellulaires pour chacune des classes de \mathfrak{h}_0 sauf C_C . Le domaine du paramètre $\rho_{\mathfrak{h}_0}$ est donc bien atteint par les automates cellulaires. Notons cependant que le théorème de Rice sur les ensembles limites (théorème 10 page 39) implique que ce paramètre est non calculable.

3.2.3 Paramètre de complexité de communication

L'utilisation de la théorie de la complexité de communication dans les automates cellulaires était l'objet de notre stage de maîtrise qui a donné lieu à la publication [23] dont certains résultats sont repris ici.

La problématique de l'échange d'information entre cellules est au coeur du modèle des automates cellulaires. Dans cette section, nous définissons et étudions un paramètre de complexité (au sens de la définition 42), commun aux relations de simulation \preceq_{\square} , \preceq_{\triangleleft} et $\preceq_{\triangleleft\square}$. Il mesure en un certain sens la complexité des échanges d'information entre cellules au cours du temps. Notre approche se base sur la complexité de communication, théorie née de l'article fondateur de A. C. Yao [93] et aujourd'hui largement développée et étudiée (voir [48] pour une introduction approfondie).

Le modèle introduit par [93] est le suivant. Étant donnée une fonction $f : X \times Y \rightarrow Z$ (où X , Y et Z sont des ensemble finis quelconques), on considère deux joueurs dont l'objectif commun est d'évaluer f sur l'entrée (x, y) . L'un des joueurs a la connaissance de x uniquement et l'autre de y uniquement. La complexité de communication de f mesure la quantité d'information qu'ils doivent nécessairement s'échanger dans le pire cas (sur les entrées (x, y) possibles) afin d'évaluer $f(x, y)$. La définition suivante formalise ce modèle.

Définition 44. *Soient X , Y et Z des ensemble finis quelconques. Un protocole P de domaine $X \times Y$ à valeur dans Z est un arbre binaire enraciné dont chaque feuille est étiquetée par un élément de Z et chaque nœud interne (y compris la racine) par une fonction de X dans $\{0, 1\}$ ou une fonction de Y dans $\{0, 1\}$. La valeur $P(x, y)$ du protocole sur l'entrée (x, y) est égale à l'étiquette de la feuille atteinte en partant de la racine et en parcourant l'arbre de la façon suivante : à partir d'un nœud d'étiquette $f_X : X \rightarrow \{0, 1\}$ (resp. $f_Y : Y \rightarrow \{0, 1\}$) on progresse vers son fils droit si $f_X(x) = 1$ (resp. $f_Y(y) = 1$) et vers son fils gauche sinon. Le coût du protocole P est la profondeur de l'arbre enraciné. Étant donnée une fonction $f : X \times Y \rightarrow Z$, le*

protocole P calcule f si $f(x, y) = P(x, y)$ pour toute entrée (x, y) . Enfin, la complexité de communication $\mathbb{C}(f)$ de f est définie comme le coût minimum d'un protocole calculant f .

Intuitivement, à chaque passage à travers un nœud, l'un des joueurs envoie un bit d'information ($f_X(x)$ si le joueur est associé à X et $f_Y(y)$ sinon) à l'autre joueur et ce bit ne dépend que de l'entrée x et des informations échangées jusque là : la notion de protocole formalise donc bien le fait qu'un joueur a la connaissance de x uniquement et l'autre de y uniquement. En outre, il découle de la définition de \mathbb{C} que $\mathbb{C}(f) \leq \lceil \log_2 |X| \rceil + \lceil \log_2 |Y| \rceil$. En effet, on peut toujours utiliser le protocole qui consiste à communiquer toute l'information sur x au joueur associé à Y et toute l'information sur y au joueur associé à X .

La figure 3.4 illustre ces définitions sur un exemple simple.

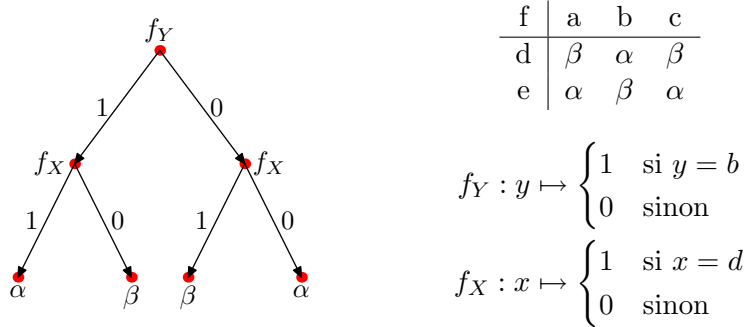


FIG. 3.4: Complexité de communication et protocole pour une fonction f de domaine $X \times Y = \{d, e\} \times \{a, b, c\}$ avec $\mathbb{C}(f) = 2$.

La paramètre de complexité que l'on va définir se base sur la complexité de communication des fonctions locales des automates cellulaires. Mesurer la complexité de communication d'une fonction locale $\delta_{\mathcal{A}} : A^{\nu_{\mathcal{A}}} \rightarrow A$ nécessite d'abord de partitionner son domaine de définition $A^{\nu_{\mathcal{A}}}$ selon un produit $X \times Y$ comme dans la définition ci-dessus. Comme il n'y a aucune raison de privilégier une façon par rapport aux autres, nous allons tous les considérer et extraire le pire cas. Formellement, pour tout automate cellulaire \mathcal{A} on utilise dans la suite la valeur suivante comme mesure de complexité de communication de sa fonction locale :

$$\mathbb{C}^*(\mathcal{A}) = \max_{1 \leq i \leq \nu_{\mathcal{A}}} \mathbb{C}(f_i),$$

où f_i désigne $\delta_{\mathcal{A}}$ vue comme une fonction de $A^i \times A^{\nu_{\mathcal{A}}-i}$ dans A . La quantité $\mathbb{C}^*(\mathcal{A})$ est bien définie car, même si plusieurs fonctions locales $\delta_{\mathcal{A}}$ (qui diffèrent essentiellement par leur arité) peuvent être choisies pour représenter \mathcal{A} , la valeur $\max_i \mathbb{C}(f_i)$ ne dépend pas de ce choix. En effet, deux fonctions locales représentant un même automate cellulaire ne diffèrent que

par d'éventuelles variables supplémentaires dont ne dépendent pas les fonctions f_i . Pour les mêmes raisons, on remarque que $\mathbb{C}^*(\sigma_z \circ \mathcal{A}) = \mathbb{C}^*(\mathcal{A})$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$. Une autre propriété intéressante de \mathbb{C}^* se manifeste vis-à-vis des changement d'échelle. En effet, il n'est pas difficile de voir que

$$\mathbb{C}^*(\mathcal{A}) \leq \mathbb{C}^*(\mathcal{A}^{<m,1,0>}) \leq m\mathbb{C}^*(\mathcal{A})$$

(la deuxième inégalité provient du fait qu'un protocole qui calcule $\delta_{\mathcal{A}^{<m,1,0>}}$ vue comme une fonction de $(A^m)^i \times (A^m)^{\nu_{\mathcal{A}^{<m,1,0>} - i}}$ dans A^m est obtenu en composant m protocoles qui calculent $f_j, f_{j+1}, \dots, f_{j+m}$ pour j bien choisi).

On peut alors définir notre paramètre de complexité comme étant la variation de $\mathbb{C}^*(\mathcal{A})$ avec les itérations de \mathcal{A} .

Définition 45. Soient $f, g \in \mathbb{N}_+^{\mathbb{N}_+}$. On définit la relation \llcorner par

$$f \llcorner g \iff \exists p, q, r \in \mathbb{N}_+, \forall n \in \mathbb{N}_+ : f(pn) \leq r \cdot g(qn).$$

On note en outre $f \asymp g$ si $f \llcorner g$ et $g \llcorner f$. On note alors $\tilde{\mathcal{F}}$ l'ensemble $\mathbb{N}_+^{\mathbb{N}_+}$ quotienté par la relation \asymp . Le paramètre de complexité $\rho_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $(\tilde{\mathcal{F}}, \llcorner)$ est défini par $\rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = \tilde{f}$ où f désigne la fonction $t \mapsto \mathbb{C}^*(\mathcal{A}^t)$.

Proposition 30. $\rho_{\mathbb{C}}$ est un paramètre de complexité pour \preceq_{\sqsubseteq} , \preceq_{\triangleleft} et \preceq_{\sqsubseteq} .

Démonstration. D'après les définitions précédentes, il suffit de montrer les trois propriétés suivantes :

- (i). $\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{C}^*(\mathcal{A}) \leq \mathbb{C}^*(\mathcal{B})$,
- (ii). $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{C}^*(\mathcal{A}) \leq \mathbb{C}^*(\mathcal{B})$ et
- (iii). $\forall m \in \mathbb{N}_+, \forall t \in \mathbb{N}_+, \forall z \in \mathbb{Z} : \rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) \asymp \rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}^{<m,t,z>})$.

Les deux premières propriétés découlent immédiatement de la définition de la complexité de communication : dans les deux cas un protocole de calcul pour \mathcal{A} se déduit de tout protocole de calcul de \mathcal{B} (par application du coloriage aux nœuds et aux feuilles dans le cas de \triangleleft ou par restriction à un sous-arbre dans le cas de \sqsubseteq). Pour la troisième propriété, on peut déjà remarquer que $\rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}^t) \asymp \rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$ (par définition de $\rho_{\mathbb{C}}$ et de \asymp). D'autre part $\rho_{\mathbb{C}}(\sigma_z \circ \mathcal{A}) = \rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$ car $\mathbb{C}^*(\sigma_z \circ \mathcal{A}) = \mathbb{C}^*(\mathcal{A})$ comme on l'a déjà remarqué plus haut. Pour conclure, il suffit de vérifier que $\rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}^{<m,1,0>}) \asymp \rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$ (c'est une conséquence de l'encadrement $\mathbb{C}^*(\mathcal{A}) \leq \mathbb{C}^*(\mathcal{A}^{<m,1,0>}) \leq m\mathbb{C}^*(\mathcal{A})$ donné plus haut). \square

D'après la remarque faite plus haut sur \mathbb{C} , et en notant **Lin** la classe de la fonction identité, on vérifie facilement que pour tout automate cellulaire \mathcal{A} on a $\rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) \llcorner \mathbf{Lin}$. Dans [23], un automate cellulaire \mathcal{B} vérifiant

$\rho_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \mathbf{Lin}$ est construit[♮] ainsi que des automates pour lesquels le paramètre $\rho_{\mathcal{C}}$ ne vaut ni \mathbf{Lin} ni \mathbf{Bor} , la classe des fonctions bornées[♯]. En outre, il est montré dans le même article que les automates cellulaires additifs se prêtent facilement au calcul de $\rho_{\mathcal{C}}$. En effet, leur structure algébrique permet de calculer la valeur d'une cellule à un temps donné partant d'une configuration donnée avec une complexité de communication bornée comme le montre la proposition suivante (prouvée dans [23] avec un formalisme différent).

Proposition 31. *Pour tout automate additif \mathcal{A} on a $\rho_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \mathbf{Bor}$.*

Démonstration. Soit \oplus une loi de groupe sur A qui fait de \mathcal{A} un automate cellulaire additif et soit $e \in A$ son élément neutre. Nous allons montrer que $\mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \leq 2 \lceil \log_2(A) \rceil$ (ce qui conclut la preuve). Pour cela, en notant $n = \lceil \log_2(A) \rceil$, on identifie les éléments de A à des mots de longueur n sur l'alphabet $\{0, 1\}$: pour $a \in A$, on note $\pi_k(a) \in \{0, 1\}$ la $k^{\text{ème}}$ lettre du mot correspondant à a et $\phi : \{0, 1\}^n \rightarrow A$ la fonction inverse, *i.e.* qui vérifie $\phi(\pi_1(a) \dots \pi_n(a)) = a$. Considérons alors f_i , la fonction locale $\delta_{\mathcal{A}}$ vue comme fonction de $A^i \times A^{\nu_{\mathcal{A}}-i}$ dans A . Un protocole calculant f_i est donné par l'arbre binaire complet de profondeur $2n$ où chaque nœud interne de profondeur k ($0 \leq k < 2n$) est étiqueté par la fonction $h_k : A^i \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$h_k(x_1, \dots, x_i) = \pi_{k+1}(\delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_k, e, \dots, e))$$

quand $k < n$ et par la fonction

$$g_k(x_{i+1}, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}-i}) = \pi_{k-n+1}(\delta_{\mathcal{A}}(e, \dots, e, x_{i+1}, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}-i}))$$

lorsque $k \geq n$, et où une feuille est étiquetée par $\phi(u) \otimes \phi(v)$ où u et v sont les mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui étiquettent respectivement la première et la seconde moitié du chemin qui mène de la racine à la feuille considérée[♭]. Par construction du protocole, la feuille atteinte sur l'entrée $(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}})$ a pour étiquette $\delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_k, e, \dots, e) \otimes \delta_{\mathcal{A}}(e, \dots, e, x_{i+1}, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}-i})$, qui est égale à $\delta_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_{\nu_{\mathcal{A}}})$ par additivité de \mathcal{A} : le protocole calcul donc bien f_i . \square

Cette proposition fournit une autre preuve qu'aucun automate cellulaire additif n'est intrinsèquement universel.

[♮]Cet automate cellulaire est de complexité maximale pour $\rho_{\mathcal{C}}$, mais pas au sens de $\rho_{\text{dyn}} : \rho_{\text{dyn}}(\mathcal{B}) \neq \mathbf{Dyn}_{\text{AC}}$.

[♯] \mathbf{Bor} contient toutes les fonctions bornées (par définition) mais également des fonctions non bornées. En revanche, pour tout automate cellulaire \mathcal{A} , la fonction $f : t \mapsto \mathcal{C}^*(\mathcal{A}^t)$ vérifie toujours : $\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists K_1 \in \mathbb{N}_+ : \forall n \in \mathbb{N}_+ f(n+k) \leq k_1 f(n)$. Ainsi, lorsque $f \in \mathbf{Bor}$, f est bien une fonction bornée.

[♭]L'étiquette d'une arête est 1 si elle mène à un fils droit et 0 sinon.

Chapitre 4

Hiérarchies et universalités

Les raies cornues ne tombent pas des arbres. Elles n'y grimpent pas non plus. Il reste encore dans la nature de saines séparations.

Henri Michaux — « Face aux verrous »

Nous avons jusqu'ici considéré chaque relation de simulation comme une propriété vérifiée par certains couples d'automates cellulaires et qui exprime la capacité de l'un à reproduire le comportement de l'autre. Dans ce chapitre, nous adoptons un point de vue global et abordons les notions de simulation comme des relations qui structurent l'ensemble des automates cellulaires en pré-ordre.

Nous étudions d'abord différentes familles d'automates cellulaires et les sous-structures qu'elles induisent dans les pré-ordres de simulation. Ainsi, nous montrons que de nombreuses propriétés classiques (surjectivité, réversibilité, mais aussi les propriétés \mathcal{T}_1 à \mathcal{T}_4 issues de la classification de P. Kůrka) correspondent à des idéaux ou des filtres de ces pré-ordres. Nous étudions également les automates cellulaires captifs dans ce cadre et montrons qu'ils possèdent une structure pour \preceq_{\square} dans laquelle on peut plonger tout arbre fini et des chaînes infinies. Ceci contraste avec le fait qu'ils sont presque tous intrinsèquement universels, c'est à dire presque tous dans une seule classe d'équivalence, maximum global pour \preceq_{\square} . Nous étudions ensuite l'universalité dans les différents pré-ordres de simulation et obtenons de nombreuses conditions nécessaires, les unes liées aux paramètres de complexité introduites au chapitre précédent, les autres aux structures d'idéaux ou de filtres que l'on a étudiées.

Dans une seconde partie de ce chapitre nous développons des méthodes de construction autour des dynamiques séquentielles et du produit cartésien,

avec comme objectif l'obtention d'un treillis infini d'automates cellulaires Turing-universels contenant des chaînes infinies incomparables. Ce résultat rappelle toute l'étendue de complexité qu'il peut exister entre une machine (même universelle) au fonctionnement séquentiel et une machine au fonctionnement parallèle. Mais il montre aussi qu'un automate cellulaire peut s'auto-limiter à un comportement séquentiel, ce qui permet d'étudier et de comparer les paradigmes séquentiel et parallèle à l'intérieur d'un modèle unique : celui des automates cellulaires.

Les constructions utilisées pour y parvenir sont intéressantes en soi. Nous proposons notamment une construction originale, fondée sur des automates cellulaires ayant une propriété de synchronisation globale robuste², qui peut s'interpréter comme une limite de la répétition de l'opération de produit cartésien.

Ainsi, en revenant sur la capacité des automates cellulaires à capturer le calcul séquentiel, nous montrons d'abord que l'on peut construire des automates cellulaires Turing-universels avec au plus une tête de calcul effective, puis des automates cellulaires Turing-universels avec au plus un nombre fini borné de têtes de calcul de têtes effectives (obtenus par produit cartésien des précédents), et enfin, plus surprenant, des automates cellulaires Turing-universel qui dans chaque évolution possèdent un nombre fini de têtes de calcul effectives, mais tels que ce nombre est globalement non borné (ce dernier automate est obtenu par notre construction de produit limite). Dans tous les cas ces automates ne sont universels pour aucune des relations de simulation considérées car incapables de reproduire une dynamique dans laquelle une infinité de calculs ont lieu simultanément.

◇

Sommaire

4.1 Structures ordonnées	99
4.1.1 Propriétés classiques, idéaux et filtres	101
4.1.2 Automates cellulaires captifs	109
4.1.3 Universalités	112
4.2 Particules et dynamiques séquentielles	114
4.2.1 Forcer la séquentialité	115
4.2.2 Automates zigzag	119
4.3 Produits cartésiens et métronomes	122
4.3.1 Produits et dynamiques séquentielles	123
4.3.2 Métronomes	127
4.3.3 Produits limites	130
4.4 Pré-ordres et Turing-universalité	134

²Ils sont dérivés d'automates connus dans la littérature sous le nom de *firing squad*.

4.1 Structures ordonnées

Chaque relation de simulation induit un pré-ordre sur les automates cellulaires. Ces structures sont intéressantes en tant que telles et nous introduisons ci-après des outils avec lesquels les explorer.

Tout d'abord, si \preceq désigne un pré-ordre quelconque sur l'ensemble des automates cellulaires, pour tout automate \mathcal{A} , on note $\tilde{\mathcal{A}}^{\preceq}$ sa classe d'équivalence induite par \preceq , formellement :

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\preceq} = \{\mathcal{B} : \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A}\}.$$

Dans la théorie des ordres en général, on distingue des types particuliers d'ordres induits, appelés idéaux et filtres, qui jouent un rôle important pour comprendre la structure d'ordre dans son ensemble (voir [16]). Nous verrons en section 4.1.1 que des propriétés naturelles des automates cellulaires correspondent à ces types d'ordres induits dans certaines relations de simulation. Intuitivement, une classe d'automates cellulaires est un idéal si elle représente une certaine contrainte ou limitation qui se transmet par simulation, du simulateur au simulé. Au contraire, une classe est un filtre si elle représente une absence de contrainte ou une certaine « liberté » qui se transmet par simulation, du simulé au simulateur. Dans les deux cas, on demande de plus que les classes considérées ne soient pas trop dispersées et présentent une forme d'homogénéité : pour un idéal la contrainte présente dans deux automates cellulaires doit se retrouver dans un même troisième qui les simule tous les deux ; pour un filtre la « liberté » présente dans deux automates doit se retrouver dans un même troisième simulé par les deux premiers.

Définition 46. *Si \preceq est une relation de pré-ordre sur les automates cellulaires, un idéal (resp. un filtre) pour \preceq est un sous-ensemble $I \subseteq \mathcal{AC}$ vérifiant :*

- (i). $\forall \mathcal{A} \in I, \forall \mathcal{B} \in \mathcal{AC}, \mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \text{ (resp. } \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B} \in I,$
- (ii). $\forall \mathcal{A} \in I, \forall \mathcal{B} \in I, \exists \mathcal{C} \in I : \mathcal{A} \preceq \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{B} \preceq \mathcal{C} \text{ (resp. } \mathcal{C} \preceq \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C} \preceq \mathcal{B}).$

Les notions d'idéal et de filtre sont duales. Cependant, le complémentaire d'un idéal ou d'un filtre n'est pas nécessairement un filtre ou un idéal. Lorsque c'est le cas, on parle alors d'idéal ou de filtre *premier*. Par ailleurs, un idéal (resp. un filtre) I tel qu'il existe un automate cellulaire \mathcal{A}_I avec $\mathcal{A} \in I \Leftrightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{A}_I$ (resp. $\mathcal{A} \in I \Leftrightarrow \mathcal{A}_I \preceq \mathcal{A}$) est appelé *principal*.

Un autre type de sous-ensemble d'automates cellulaires joue un rôle important pour l'étude des structures de pré-ordre de simulation : les chaînes.

Définition 47. Soit \preceq une relation de simulation. Une chaîne est un ensemble $E \subseteq \mathcal{AC}$ tel que (E, \preceq) est un ordre total.

Parmi les chaînes de (\mathcal{AC}, \preceq) , nous distinguons celles qui correspondent à des ordinaux[↗]. On définit alors une notion de distance orientée[↗] entre \mathcal{A} et \mathcal{B} comme la taille de la plus longue chaîne ordinale entre ces automates. Cette distance est bien définie puisque les chaînes ordinales potentielles entre automates sont bornées car par définition dénombrables. Formellement, on note

$$\vec{d}_{\preceq, E}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup\{\alpha \in \Omega_1 : \mathcal{A} \xrightarrow[\alpha, \preceq, E]{} \mathcal{B}\},$$

où Ω_1 désigne l'ensemble des ordinaux dénombrables et $\mathcal{A} \xrightarrow[\alpha, \preceq, E]{} \mathcal{B}$ est un prédicat indiquant l'existence d'une chaîne \mathcal{C} pour la simulation \preceq de longueur α , incluse dans E et qui relie \mathcal{A} à \mathcal{B} (formellement, $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{C} : \mathcal{C} \in E, \mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \preceq \mathcal{B}$).

On vérifie facilement que la distance orientée $\vec{d}_{\preceq, \mathcal{AC}}$ permet de définir un paramètre de complexité pour la simulation \preceq . En effet, les notions de simulation considérées ici possèdent toutes comme minimum global les automates cellulaires à 1 état, noté $\mathbb{1}$.

On vérifie que c'est le cas pour \preceq_{\square} et \preceq_{\triangleleft} et le résultat suit par inclusion de ces relations dans toutes celles considérées ici. Pour \preceq_{\square} , cela vient du fait que pour tout automate cellulaire \mathcal{A} il existe $t \in \mathbb{N}_+$ tel que \mathcal{A}^t possède un état quiescent. Pour \preceq_{\triangleleft} , cela est assuré par un coloriage trivial (tout les états sont coloriés de la même façon).

On peut alors définir un paramètre de complexité comme la distance à $\mathbb{1}$ dans le pré-ordre de simulation considéré :

$$\rho_{\preceq}^{\uparrow}(\mathcal{A}) = \vec{d}_{\preceq, \mathcal{AC}}(\mathbb{1}, \mathcal{A}).$$

Comme on vient de le voir la classe $\mathbb{1}$ est minimum global pour tous les pré-ordres de simulation et elle ne présente pas d'intérêt si ce n'est de pouvoir définir une notion de hauteur. À l'inverse, la classe qui forme un maximum global pour un pré-ordre de simulation, si elle existe, revêt une signification très importante en terme de simulation : c'est la classe des automates cellulaires universels, c'est à dire capables de simuler tout automate cellulaire.

[↗]Les ordinaux sont les représentants canoniques (pour l'isomorphisme d'ordres) des bons ordres (ordres dans lesquels toute partie non-vide possède un plus petit élément). Nous n'utilisons ici que des propriétés élémentaires des ordinaux qui ne justifient pas une formalisation complète (voir [37] pour une introduction rigoureuse).

[↗]La distance est définie pour un couple $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tel que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, mais elle n'est en général pas définie pour $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.

Définition 48. Soit \preceq une relation de pré-ordre sur les automates cellulaires. Un automate cellulaire \mathcal{A} est \preceq -universel si pour tout automate cellulaire \mathcal{B} de même réseau on a $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$.

On a vu en section 1.3.3 que la relation \preceq_{\square} capture de façon naturelle la notion d'universalité intrinsèque, précisément : un automate cellulaire admet tout automate cellulaire comme sous-automate enfoui si et seulement si il est \preceq_{\square} -universel. Le formalisme développé par N. Ollinger permet d'obtenir de façon unifiée une caractérisation du même genre pour le pré-ordre \preceq_{\triangleleft} (cela généralise le théorème 4). La preuve repose sur des manipulations techniques des transformations syntaxiques, sur l'existence d'automates cellulaires intrinsèquement universels et enfin sur la propriété suivante, qui exprime que l'on peut trouver tout automate cellulaire \mathcal{A} comme sous-automate enfoui d'un certain automate \mathcal{B} en fixant les paramètres du sous-shift par bloc associé (temps de retour, taille des blocs et décalage) :

$$\forall m \in \mathcal{R}^+, \forall t \in \mathbb{N}_+, \forall z \in \mathcal{R}, \forall \mathcal{A} \in \mathcal{AC}, \exists \mathcal{B} \in \mathcal{AC} : \mathcal{A} \preceq_{\square} \mathcal{B}^{\langle m, t, z \rangle}.$$

Théorème 14. \mathcal{A} est \preceq_{\triangleleft} -universel si et seulement si, pour tout \mathcal{B} , il existe $m \in \mathcal{R}^+$, $t \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathcal{R}$ tels que $\mathcal{B} \preceq_{\square} \mathcal{A}^{\langle m, t, z \rangle}$.

Ce théorème donne à la \preceq_{\triangleleft} -universalité le sens suivant : c'est la capacité d'un automate cellulaire à admettre tout automate cellulaire comme quotient d'un de ses sous-automates enfouis.

4.1.1 Propriétés classiques, idéaux et filtres

N. Ollinger a établi dans [73] que certaines propriétés classiques sur les automates cellulaires correspondent à des idéaux du pré-ordre \preceq_{\square} . Dans cette section, nous complétons ses résultats par l'étude d'autres propriétés et d'autres relations de simulation. Cette étude a un intérêt double. D'une part elle montre comment les différents pré-ordres de simulation capturent ces propriétés classiques et indique donc quelles relations de simulation sont plus adaptées à l'étude d'une propriété donnée. D'autre part, elle fournit des critères sur l'existence d'une simulation entre deux automates cellulaires donnés : le simulateur doit appartenir à tous les filtres auxquels appartient le simulé, et le simulé à tous les idéaux auxquels appartient le simulateur.

Comme les simulations considérées sont construites sur un même principe, nous commençons par établir deux lemmes qui éviteront des répétitions dans les preuves ultérieures.

Le premier lemme montre que le produit cartésien de deux automates cellulaires est un majorant des deux automates pour toutes les relations de simulation que l'on étudie ici. Le résultat reste vrai si l'on applique des transformations syntaxiques aux automates cellulaires dans le produit cartésien. On reviendra sur l'étude du produit cartésien vis à vis des pré-ordres de simulation en section 4.3.

Lemme 6. *Si \preceq est l'une des relations de simulation \preceq_{\square} , \preceq_{\triangleleft} , $\preceq_{\triangleleft\triangleleft}$ ou $\preceq_{\mathcal{G}}$, alors on a pour toute paire d'automates cellulaires \mathcal{A} et \mathcal{B} et tous paramètres $m, m' \in \mathcal{R}^+$, $z, z' \in \mathcal{R}$ et $t, t' \in \mathbb{N}_+$:*

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}^{<m,t,z>} \times \mathcal{B}^{<m',t',z'>} \text{ et } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A}^{<m,t,z>} \times \mathcal{B}^{<m',t',z'>}.$$

Démonstration. D'après les inclusions entre les relations considérées, il suffit en fait de montrer le lemme pour \preceq_{\square} et \preceq_{\triangleleft} . Soit d'abord la coloration $\pi : A^{[m]} \times B^{[m']} \rightarrow A^{[m]}$ définie par $\pi(u, v) = u$. Il est alors clair que $\mathcal{A} \preceq_{\triangleleft} \mathcal{A}^{<m,t,z>} \preceq_{\triangleleft} \mathcal{A}^{<m,t,z>} \times \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$ où la dernière relation est obtenue par le coloriage π . De la même façon on a $\mathcal{B} \preceq_{\triangleleft} \mathcal{A}^{<m,t,z>} \times \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$.

Considérons à présent une configuration $c \in (A^{[m]})^{\mathcal{R}}$ temporellement périodique pour $\mathcal{A}^{<m,t,z>}$ (i.e. telle que $(\mathcal{A}^{<m,t,z>})^t(c) = c$) et uniforme ($c = \omega a^\omega$) où $a \in A^{[m]}$. Il est alors clair que $\mathcal{B}^{<m',t',z'>}$ est un sous-automate de $(\mathcal{A}^{<m,t,z>} \times \mathcal{B}^{<m',t',z'>})^{<(1,\dots,1),t,0>}$ associé au sous-alphabet $\{a\} \times B^{[m']}$. On a donc $\mathcal{B} \preceq_{\square} \mathcal{A}^{<m,t,z>} \times \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$ et on montre par un raisonnement similaire que $\mathcal{A} \preceq_{\square} \mathcal{A}^{<m,t,z>} \times \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$. \square

Le lemme qui suit fournit un schéma de preuve pour montrer qu'une propriété du type $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ est croissante ou forme un idéal pour une certaine relation de simulation. Il s'appuie sur la forme des propriétés du type $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ et sur des propriétés des transformations syntaxiques.

Lemme 7. *Soit \mathfrak{R} une relation parmi $\{\square, \triangleleft, \triangleleft\triangleleft, \mathcal{G}\}$ et soit \mathcal{P} une propriété des automates cellulaires telle que , pour tout $m \in \mathcal{R}^+$ et $t \in \mathbb{N}_+$:*

$$(i). \mathbf{o}_m^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathbf{o}_m \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{P},$$

$$(ii). \mathcal{A} \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{A}^t \in \mathcal{P}.$$

Si \mathcal{P} est de plus croissante pour \mathfrak{R} , alors la propriété $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ est croissante pour $\preceq_{\mathfrak{R}}$. Si \mathcal{P} est décroissante pour \mathfrak{R} et stable par produit cartésien, alors $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ est un idéal pour $\preceq_{\mathfrak{R}}$.

Démonstration. On considère seulement le cas d'une propriété \mathcal{P} décroissante pour \mathfrak{R} (le cas croissant est inclus dans le cas décroissant par symétrie). Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux automates cellulaires tels que $\mathcal{A} \preceq_{\mathfrak{R}} \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}$. Par définition de $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ (définition 17 page 23), il existe un automate cellulaire $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ ainsi que des paramètres $t_1, t_2 \in \mathbb{N}_+$ et $z_1, z_2 \in \mathcal{R}$ tels que $\mathcal{B} = \sigma_{z_1} \circ \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{t_1}$ et $\sigma_{z_2} \circ \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{t_2} \in \mathcal{P}$. On a alors aussi $\mathcal{A} \preceq_{\mathfrak{R}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}$. Par définition, il existe donc des paramètres $m, m' \in \mathcal{R}^+$, $t, t' \in \mathbb{N}_+$ et $z, z' \in \mathcal{R}$ tels que $\mathcal{A}_+ \mathfrak{R} \mathcal{B}_+$ où $\mathcal{A}_+ = \mathbf{o}_{m'}^{-1} \circ \sigma_{z'} \circ \mathcal{A}^{t'} \circ \mathbf{o}_{m'}$ et $\mathcal{B}_+ = \mathbf{o}_m^{-1} \circ \sigma_z \circ \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^t \circ \mathbf{o}_m$. De plus, on a aussi $\sigma_{t_+} \circ \mathcal{A}_+^{t_+} \mathfrak{R} \sigma_{t_+} \circ \mathcal{B}_+^{t_+}$ pour tout $t_+ \in \mathbb{N}_+$ et tout $z_+ \in \mathcal{R}$ (c'est vrai pour \square , pour \triangleleft et pour \mathcal{G} donc pour tous les choix possibles de \mathfrak{R}). On peut choisir t_+ et z_+ tels que

$$\sigma_{z_+} \circ \mathcal{B}_+^{t_+} = \mathbf{o}_m^{-1} \circ (\sigma_{z_2} \circ \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{t_2})^{t_+} \circ \mathbf{o}_m$$

pour un certain $t_\bullet \in \mathbb{N}_+$. En effet, on vérifie par le calcul qu'il suffit de choisir $t_+ = t_2 \prod_j m_j$ et z_+ tel que chacune de ses coordonnées $(z_+)_i$ vérifie l'équation

$$m_i(z_+)_i = \left(\prod_j m_j \right) (t(z_2)_i - t_2 z_i).$$

Avec un tel choix, on a alors $\sigma_{z_+} \circ \mathcal{B}_+^{t_+} \in \mathcal{P}$ d'après les hypothèses (i) et (ii). Donc $\sigma_{z_+} \circ \mathcal{A}_+^{t_+} = \mathbf{o}_{m'}^{-1} \circ \sigma_{t_+ z' + m' \otimes z_+} \circ \mathcal{A}^{t_+ t'} \circ \mathbf{o}_{m'} \in \mathcal{P}$ car \mathcal{P} est décroissante pour \mathfrak{R} . Donc $\sigma_{t_+ z' + m' \otimes z_+} \circ \mathcal{A}^{t_+ t'} \in \mathcal{P}$ d'après l'hypothèse (i) et finalement $\mathcal{A} \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ par définition de $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$.

Pour finir, si $\mathcal{A} \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{B} \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ alors il existe \mathcal{A}_\bullet et \mathcal{B}_\bullet ainsi que des paramètres $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{N}_+$ et $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathcal{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sigma_{z_1} \circ \mathcal{A}_\bullet^{t_1}, \\ \mathcal{B} &= \sigma_{z_3} \circ \mathcal{B}_\bullet^{t_3}, \\ \sigma_{z_2} \circ \mathcal{A}_\bullet^{t_2} &\in \mathcal{P}, \\ \sigma_{z_4} \circ \mathcal{B}_\bullet^{t_4} &\in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Comme \mathcal{P} est supposée stable par produit cartésien, on a donc

$$\mathcal{C} = \sigma_{z_2} \circ \mathcal{A}_\bullet^{t_2} \times \sigma_{z_4} \circ \mathcal{B}_\bullet^{t_4} \in \mathcal{P}.$$

Or, comme $\mathcal{A}_\bullet \preceq_{\mathfrak{R}} \mathcal{C}$, $\mathcal{B}_\bullet \preceq_{\mathfrak{R}} \mathcal{C}$ (d'après le lemme 6) et que $\mathcal{A} \preceq_{\mathfrak{R}} \mathcal{A}_\bullet$ et $\mathcal{B} \preceq_{\mathfrak{R}} \mathcal{B}_\bullet$, on en déduit finalement que $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ est un idéal pour $\preceq_{\mathfrak{R}}$. \square

Ce lemme nous permet de donner un premier exemple de propriété qui correspond à un idéal dans toutes les relations de simulation considérées ici : être équicontinu selon une certaine direction (classe \mathcal{T}_1).

Proposition 32. \mathcal{T}_1 est un idéal non principal pour les relations \preceq_{\square} , \preceq_{\triangleleft} , $\preceq_{\triangleleft\triangleleft}$ et $\preceq_{\mathcal{G}}$.

Démonstration. Considérons une relation $\mathfrak{R} \in \{\square, \triangleleft, \triangleleft\triangleleft, \mathcal{G}\}$. Pour tous paramètres $m \in \mathcal{R}^+$ et $t \in \mathbb{N}_+$, on a :

- (i). $\mathbf{o}_m^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathbf{o}_m \in K_1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \in K_1$,
- (ii). $\mathcal{A} \in K_1 \Rightarrow \mathcal{A}^t \in K_1$.

De plus, on vérifie que K_1 est une propriété décroissante pour \mathfrak{R} (car elle est décroissante pour \mathcal{G} d'après la caractérisation donnée par le théorème 3 page 21) et stable par produit cartésien (d'après la même proposition) : le lemme 7 permet de conclure que $\mathcal{T}_1 = \overleftrightarrow{K_1}$ est un idéal pour $\preceq_{\mathfrak{R}}$.

Pour finir, il reste à montrer que cet idéal est non principal, quelle que soit la simulation parmi celles considérées. Pour cela, on considère les automates cellulaires $\mathcal{A}_{\circlearrowright}$ et $\mathcal{A}_{\circlearrowleft}$ qui sont respectivement l'automate identité et

un automate constant sur le même alphabet $\{0, 1\}$. Il n'est pas difficile de vérifier que d'une part ils sont tous deux équicontinus (donc appartiennent à \mathcal{T}_1) et que $\mathcal{B} \preceq_{\mathcal{G}} \mathcal{A}_{\square}$ implique \mathcal{B} nilpotent tandis que \mathcal{A}_{\square} ne peut simuler aucun automate cellulaire nilpotent au sens de $\preceq_{\mathcal{G}}$. Ceci prouve qu'il ne peut exister d'automate \mathcal{A}_{\square} tel que $\mathcal{A}_{\square} \preceq \mathcal{A}_{\square}$ et $\mathcal{A}_{\square} \preceq \mathcal{A}_{\square}$ où \preceq est l'une des relations considérées. \square

La proposition 33 ci-après généralise la propriété de croissance de la surjectivité pour \preceq_{\square} observée en section 1.3.3. En effet, la surjectivité correspond à un idéal pour toutes les relations de simulations que l'on a définies à l'exception de $\preceq_{\mathcal{G}}$, simulation pour laquelle la question reste ouverte.

Proposition 33. *L'ensemble des automates cellulaires surjectifs induit un idéal dans les pré-ordres de simulation \preceq_{\square} , \preceq_{\triangleleft} et $\preceq_{\triangleleft_{\square}}$.*

Démonstration. Tout d'abord, la surjectivité est stable par produit cartésien et le lemme 6 permet de conclure que deux automates surjectifs sont toujours simulés par un troisième automate lui aussi surjectif.

Ensuite, comme montré dans la proposition 7 page 31 la surjectivité est stable par transformations syntaxiques. Il suffit alors de montrer que c'est aussi une propriété décroissante pour les relations \preceq_{\square} et \preceq_{\triangleleft} . Pour \preceq_{\square} , le résultat est montré dans la preuve de la proposition 7. Enfin, si $\mathcal{A} \preceq_{\triangleleft} \mathcal{B}$ à travers la coloration $\pi : B \rightarrow A$, et si \mathcal{B} est surjectif, pour toute configuration $x \in A^{\mathcal{R}}$, si $y \in \bar{\pi}^{-1}(x)$ alors il existe $z \in B^{\mathcal{R}}$ telle que $\mathcal{B}(z) = y$, donc $\mathcal{A}(\bar{\pi}(z)) = x$. \mathcal{A} est alors lui aussi surjectif. \square

N. Ollinger remarque dans [73] que la principalité d'un idéal fournit une procédure de semi-décision de la propriété associée. Dans le cas de la surjectivité (qui est co-récursivement énumérable²³), cela fournirait une procédure de décision. Ainsi, en dimension 2 et plus, l'idéal des automates cellulaires surjectifs ne peut être principal.

Par ailleurs, dans le cas des simulations \preceq_{\triangleleft} et $\preceq_{\triangleleft_{\square}}$, la proposition suivante renforce la proposition 33 : les automates cellulaires surjectifs forment un idéal premier, de plus le filtre des automates cellulaires non surjectifs est alors principal.

Proposition 34. *L'ensemble des automates cellulaires non surjectifs constitue un filtre premier et principal pour les relations \preceq_{\triangleleft} et $\preceq_{\triangleleft_{\square}}$.*

Démonstration. En utilisant la proposition 33, il suffit de montrer qu'il existe un automate cellulaire \mathcal{B} tel que, pour tout automate \mathcal{A} , \mathcal{A} est non-surjectif si et seulement si $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ (où \preceq est l'une des relations de simulation considérées). Soit \mathcal{B} l'automate cellulaire sur l'alphabet $B = \{0, 1\}$ constant égal

²³Pour énumérer les automates cellulaires non-surjectifs il suffit de rechercher pour tout automate \mathcal{A} un motif $u \in \mathcal{L}(A^{\mathcal{R}\mathcal{A}}) \setminus \mathcal{L}(\mathcal{A}(A^{\mathcal{R}\mathcal{A}}))$, la recherche d'un tel motif se faisant par énumération de $\mathcal{L}(A^{\mathcal{R}\mathcal{A}})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{A}(A^{\mathcal{R}\mathcal{A}}))$ par taille croissante des motifs.

à 0. Pour tout \mathcal{A} , il est clair que $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ implique que \mathcal{A} est non-surjectif (proposition 33). Réciproquement, supposons \mathcal{A} non surjectif et considérons un motif $u \in \mathcal{L}(A^{\mathcal{R}}) \setminus \mathcal{L}(\mathcal{A}(A^{\mathcal{R}}))$. En notant $m \in \mathcal{R}^+$ le support du motif u , on vérifie alors que $\mathcal{A}^{<m,1,0>}$ simule l'automate \mathcal{B} par le coloriage $f(u) = 1$ et, $\forall v \neq u, f(v) = 0 : \mathcal{B} \preceq \mathcal{A}^{<m,1,0>}$, donc $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$. \square

Nous ne connaissons à ce jour pas d'exemple d'automate cellulaire non surjectif \mathcal{A} tel que $\mathcal{B} \not\preceq_{\square} \mathcal{A}$ où \mathcal{B} est l'automate cellulaire de la preuve ci-dessus. Cependant nous ne sommes pas parvenus à montrer que les automates cellulaires non surjectifs sont un filtre pour \preceq_{\square} .

Les automates cellulaires réversibles constituent un idéal pour \preceq_{\square} comme cela a déjà été montré dans [73]. La proposition suivante étend ce résultat avec d'autres notions de simulation. De plus, l'existence d'automates cellulaires réversibles universels pour les automates cellulaires réversibles au sens de \preceq_{\square} (voir [22, 36] dans un formalisme toutefois différent) assure que cet idéal est principal pour \preceq_{\square} et \preceq_{\triangleleft} . La question de la principalité de l'idéal dans le cas de \preceq_{\triangleleft} reste ouverte.

Proposition 35. *Les automates cellulaires réversibles constituent un idéal pour les relations \preceq_{\square} , \preceq_{\triangleleft} et \preceq_{\triangleleft} .*

Démonstration. Tout d'abord le lemme 6 montre que deux automates cellulaires réversibles sont toujours simulés par un même troisième pour toutes les relations considérées ici car la réversibilité est stable par produit cartésien.

Ensuite il est clair que la réversibilité, ou de façon équivalente l'injectivité (corollaire 3 page 19), est invariante par changement d'échelle car pour tout $m \in \mathcal{R}^+$ et tout $z \in \mathcal{R}$ les fonctions \mathbf{o}_m^{-1} , \mathbf{o}_m et σ_z sont bijectives.

Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} tels que $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ alors si \mathcal{A} n'est pas injectif, \mathcal{B} ne l'est pas non plus car pour tout $x \in A^{\mathcal{R}}$, on a $|\mathcal{A}^{-1}(x)| \leq |\mathcal{B}^{-1}(\iota(x))|$ (où ι est l'injection intervenant dans la relation $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$).

Enfin, soit \mathcal{A} et \mathcal{B} tels que $\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B}$ à travers la coloration $\pi : B \rightarrow A$. On a $\mathcal{A} \circ \bar{\pi} = \bar{\pi} \circ \mathcal{B}$. Soit $\phi : A \rightarrow B$ une fonction injective quelconque vérifiant $\pi \circ \phi = \text{Id}$. Si \mathcal{B} est réversible, l'automate cellulaire $\mathcal{A}_{\curvearrowright} = \bar{\pi} \circ \mathcal{B}^{-1} \circ \bar{\phi}$ est bien défini (comme fonction continue et commutant avec les décalages sur $A^{\mathcal{R}}$). On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \mathcal{A}_{\curvearrowright} &= \mathcal{A} \circ \bar{\pi} \circ \mathcal{B}^{-1} \circ \bar{\phi} \\ &= \bar{\pi} \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{B}^{-1} \circ \bar{\phi} \\ &= \bar{\pi} \circ \bar{\phi} \\ &= \text{Id} \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le corollaire 3, \mathcal{A} est bijectif. \square

Les résultats précédents montrent un certain nombre de similitudes dans les structures de pré-ordre vis-à-vis de propriétés globales des automates cellulaires. Nous abordons à présent, toujours par l'étude des idéaux et des filtres, des aspects sur lesquels diffèrent les pré-ordres de simulation étudiés.

Nous étudions tout d'abord l'existence de point d'équicontinuité selon une certaine direction (classes \mathcal{T}_2 et \mathcal{T}_3). La relation \preceq_{\triangleleft} a un comportement régulier vis-à-vis de cette propriété comme le montre la proposition suivante.

Proposition 36. \mathcal{T}_2 constitue un idéal pour \preceq_{\triangleleft} .

Démonstration. Tout d'abord, pour tout automate \mathcal{A} , tout $m \in \mathcal{R}^+$ et tout $t \in \mathbb{N}_+$ on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \in K_2 &\Leftrightarrow \mathbf{o}_m^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathbf{o}_m \in K_2 \\ \mathcal{A} \in K_2 &\Rightarrow \mathcal{A}^t \in K_2.\end{aligned}$$

En effet, on vérifie facilement que $x \in A^{\mathcal{R}}$ est un point d'équicontinuité pour \mathcal{A} si et seulement si $\mathbf{o}_m^{-1}(x)$ est un point d'équicontinuité pour $\mathbf{o}_m^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathbf{o}_m$. De plus, tout point d'equicontinuité pour \mathcal{A} est un point d'équicontinuité pour \mathcal{A}^t (la quantification universelle sur toutes les itérations de \mathcal{A} dans la définition 14 page 20 contient en particulier toutes les itérations multiples de t).

Ensuite, si deux automates cellulaires \mathcal{A} et \mathcal{B} sont tels que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ par le coloriage $\pi : B \rightarrow A$, et si ϵ est la constante de sensibilité de \mathcal{A} , alors on a pour tout $x \in B^{\mathcal{R}}$:

$$\forall \delta > 0, \exists y \in A^{\mathcal{R}}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ avec } \mathfrak{d}(\overline{\pi}(x), y) \leq \frac{\delta}{2} \text{ et } \mathfrak{d}(\mathcal{A}^n(\overline{\pi}(x)), \mathcal{A}^n(y)) \geq \epsilon.$$

Il existe alors $y' \in \overline{\pi^{-1}(y)}$ avec $\mathfrak{d}(x, y') \leq \delta$ (n'importe quelle configuration y' telle que $y'(z) = x(z)$ lorsque $\|z\|_{\infty} \leq \lceil \log \delta - 1 \rceil$ et $y(z) \in \pi^{-1}(y(z))$ sinon convient). On a alors $\mathfrak{d}(\mathcal{B}^n(x), \mathcal{B}^n(y)) \geq \epsilon$ par définition du coloriage. On a donc montré que K_2 est décroissante pour \preceq .

Enfin, comme K_2 est stable par produit cartésien (les points d'équicontinuité du produit sont les produits de points d'équicontinuité) on en déduit d'après le lemme 7 que $\mathcal{T}_2 = \overset{\leftrightarrow}{K}_2$ est un idéal pour \preceq_{\triangleleft} . \square

Ce résultat a pour conséquence immédiate que la relation \preceq_{\sqsubseteq} n'est pas incluse dans la relation \preceq_{\triangleleft} (en fait, même la relation \sqsubseteq n'est pas incluse dans \preceq_{\triangleleft}) car la propriété \mathcal{T}_2 n'est pas une propriété décroissante ni pour \preceq_{\sqsubseteq} , ni pour \sqsubseteq comme le montre l'exemple qui suit.

Soit \mathcal{B} un automate cellulaire de rayon 1 appartenant à \mathcal{T}_3 et soit \mathcal{A} d'alphabet $A = B \cup \{M\}$ (avec $M \notin B$) de même réseau et même rayon que \mathcal{B} défini par :

$$\delta_{\mathcal{A}}(x, y, z) = \begin{cases} \delta_{\mathcal{B}}(x, y, z) & \text{si } \{x, y, z\} \subseteq B, \\ y & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$ et donc $\mathcal{B} \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{A}$. En revanche $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_2$ car la configuration ${}^{\omega}M^{\omega}$ est un point d'équicontinuité pour \mathcal{A} . Donc $\mathcal{B} \not\preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{A}$.

Pour poursuivre l'étude de notre classification topologique adaptée de celle de P. Kůrka, nous considérons à présent la classe \mathcal{T}_4 . Encore une fois, cette classe définie par une propriété topologique induit une forte structure dans un pré-ordre de simulation : la proposition suivante montre que c'est un idéal pour la relation \preceq_{\sqsubseteq} .

Proposition 37. \mathcal{T}_4 est un idéal pour la relation \preceq_{\sqsubseteq} .

Démonstration. Tout d'abord, pour tout $m \in \mathcal{R}^+$ et tout $t \in \mathbb{N}_+$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \in K_4 &\Leftrightarrow \mathbf{o}_m^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathbf{o}_m \in K_4 \\ \mathcal{A} \in K_4 &\Rightarrow \mathcal{A}^t \in K_4. \end{aligned}$$

En effet, si \mathcal{A} est expansif de constante d'expansivité ϵ alors \mathcal{A}^t est expansif de constante d'expansivité $2^{-tr\mathcal{A}}\epsilon$ car

$$\mathfrak{d}(\mathcal{A}^n(x), \mathcal{A}^n(y)) \geq \epsilon \Rightarrow \mathfrak{d}(\mathcal{A}^{\max(n-t, 0)}(x), \mathcal{A}^{\max(n-t, 0)}(y)) \geq 2^{-tr\mathcal{A}}\epsilon.$$

De plus, $\mathbf{o}_m^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathbf{o}_m$ est aussi expansif de constante d'expansivité ϵ . Réciproquement, par continuité et bijectivité de \mathbf{o}_m^{-1} et \mathbf{o}_m , si $\mathbf{o}_m^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathbf{o}_m$ est expansif alors \mathcal{A} l'est aussi.

Ensuite, il est clair que l'expansivité est une propriété décroissante pour \sqsubseteq (par restriction du quantificateur universel sur les configurations). Par ailleurs, un produit cartésien d'automates cellulaires expansif est toujours expansif (cela découle directement de la définition). Le lemme 7 permet donc de conclure que $\mathcal{T}_4 = \overleftrightarrow{K}_4$ est un idéal pour \preceq_{\sqsubseteq} . \square

Pour finir, nous nous intéressons à la structure de (\mathbf{AC}, \preceq) privée des automates cellulaires \preceq -universels pour certaines relations \preceq . La proposition suivante montre que cette classe est close par produit cartésien. Elle étend un résultat de N. Ollinger obtenu dans [73].

Proposition 38. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux automates cellulaires et \preceq une relation de simulation parmi $\{\preceq_{\sqsubseteq}, \preceq_{\sqsubseteq\sqsubseteq}\}$. Si $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est \preceq -universel alors \mathcal{A} ou \mathcal{B} est \preceq -universel.

Démonstration. On considère uniquement le cas de \preceq_{\sqsubseteq} , l'autre étant un cas particulier de celui-ci que l'on prouve de manière semblable. Soit \mathcal{U} un automate cellulaire intrinsèquement universel à deux états : a et b . Par hypothèse et d'après le théorème 14, il existe $m \in \mathcal{R}^+$, $t \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathcal{R}$ tels que $\mathcal{U} \sqsubseteq \mathcal{A}^{\langle m,t,z \rangle} \times \mathcal{B}^{\langle m,t,z \rangle}$ (car $\mathcal{A}^{\langle m,t,z \rangle} \times \mathcal{B}^{\langle m,t,z \rangle}$ est isomorphe à $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^{\langle m,t,z \rangle}$) à travers la coloration $\varsigma : X^{[m]} \times Y^{[m]} \rightarrow \{a, b\}$. On note $\pi_1 : X^{[m]} \times Y^{[m]} \rightarrow X^{[m]}$ et $\pi_2 : X^{[m]} \times Y^{[m]} \rightarrow Y^{[m]}$ les fonctions définies par $\pi_1(u, v) = u$ et $\pi_2(u, v) = v$.

Si $\pi_1(\varsigma^{-1}(a)) \cap \pi_1(\varsigma^{-1}(b)) = \emptyset$ alors pour tout $(u, v) \in X^{[m]} \times Y^{[m]}$ on a $\varsigma(u, v) = a \Leftrightarrow u \in \pi_1(\varsigma^{-1}(a))$. On en déduit la relation $\mathcal{U} \sqsubseteq \mathcal{A}^{\langle m,t,z \rangle}$ à travers la coloration $\varsigma_1 : X^{[m]} \rightarrow \{a, b\}$ définie par $\varsigma_1(u) = \varsigma(u, v)$ où $v \in Y^{[m]}$ est fixé arbitrairement. \mathcal{A} est donc \preceq_{\sqsubseteq} -universel.

Maintenant, si $u_1 \in \pi_1(\varsigma^{-1}(a)) \cap \pi_1(\varsigma^{-1}(b))$, on en déduit la relation $\mathcal{U} \sqsubseteq \mathcal{B}^{\langle m,t,z \rangle}$ par la coloration $\varsigma_2 : Y^{[m]} \rightarrow \{a, b\}$ vérifiant $\varsigma_2(v) = \varsigma(u_1, v)$ et cette fois \mathcal{B} est \preceq_{\sqsubseteq} -universel. \square

On déduit de cette proposition que l'ensemble des automates cellulaires non-universels possède une structure d'idéal dans les pré-ordres \preceq_{\sqsubseteq} et \preceq_{\sqsubseteq} . La principalité de ces idéaux est liée à la décidabilité de la notion d'universalité correspondante comme on l'a déjà évoqué plus haut. La preuve de l'indécidabilité de l'universalité intrinsèque (théorème 8 page 38) se transpose directement² à \preceq_{\sqsubseteq} : on a donc le corollaire suivant.

Corollaire 10. *L'ensemble des automates cellulaires non \preceq -universels est un idéal pour $\preceq \in \{\preceq_{\sqsubseteq}, \preceq_{\sqsubseteq}\}$. De plus, dans le cas du réseau \mathbb{Z} , cet idéal est non principal et pour tout \mathcal{A} \preceq -universel et tout \mathcal{B} non \preceq -universel on a $\vec{d}_{\preceq, \mathcal{AC}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \geq \omega$.*

Démonstration. La structure d'idéal découle de la proposition 38 et de la définition de la \preceq -universalité. La non principalité dans le cas du réseau \mathbb{Z} découle de l'indécidabilité de la \preceq -universalité. Enfin, pour ce même réseau, on déduit de la non principalité que pour tout \mathcal{A} \preceq -universel et tout \mathcal{B} non \preceq -universel on a $\vec{d}_{\preceq, \mathcal{AC}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \geq \omega$. \square

Le tableau suivant rappelle les structures d'idéal et de filtre pour les différents pré-ordres de simulation étudiés dans cette section (\heartsuit signifie « principal », et les annotations entre parenthèses de la forme « $\mathcal{R} = \mathbb{Z}?$ » ou « $\mathcal{R} \neq \mathbb{Z}?$ » indiquent que la principalité reste une question ouverte pour certains réseaux).

²Comme expliqué page 69, la preuve s'appuie sur une construction récursive U_q telle que pour tout \mathcal{A} , l'automate cellulaire $U_q(\mathcal{A})$ est intrinsèquement universel si \mathcal{A} n'est pas nilpotent sur les configurations périodiques et, réciproquement, si \mathcal{A} est nilpotent sur les configurations périodiques, alors on a $\mathcal{X} \not\preceq_{\sqsubseteq} U_q(\mathcal{A})$ pour un certain automate cellulaire \mathcal{X} . Pour transposer la preuve à la \preceq_{\sqsubseteq} -universalité il suffit de vérifier que dans ce dernier cas on a en fait $\mathcal{X} \not\preceq_{\sqsubseteq} U_q(\mathcal{A})$.

	\preceq_{\square}	\preceq_{\triangleleft}	\preceq_{\triangleleft}	\preceq_g
surjectivité	idéal 1 ^{er} ? $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$?	idéal 1 ^{er} $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$?	idéal 1 ^{er} $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$?	?
non surjectivité	?	filtre 1 ^{er} ☞	filtre 1 ^{er} ☞	?
réversibilité	idéal 1 ^{er} ? ☞	idéal 1 ^{er} ? ☞ ?	idéal 1 ^{er} ? ☞	?
\mathcal{T}_1	idéal 1 ^{er} ? 	idéal 1 ^{er} ? 	idéal 1 ^{er} ? 	idéal 1 ^{er} ?
\mathcal{T}_2	idéal	idéal 1 ^{er} ? ☞ ?	idéal	idéal
\mathcal{T}_3	filtré	?	filtré	filtré
\mathcal{T}_4	idéal 1 ^{er} ? ☞ ?	?	?	?
non universalité	idéal 1 ^{er} $\mathcal{R} \neq \mathbb{Z}$?	?	idéal 1 ^{er} $\mathcal{R} \neq \mathbb{Z}$?	?

4.1.2 Automates cellulaires captifs

Nous améliorons ici deux résultats concernant \preceq_{\square} obtenus par N. Ollinger [73] en montrant qu'ils restent valides lorsque l'on se restreint à la classe \mathcal{AC} . Tout d'abord, la proposition suivante (illustrée par la figure 4.1) montre que des chaînes infinies et que tout arbre fini peut être obtenu comme ordre induit de $(\mathcal{AC}, \preceq_{\square})$. Elle repose sur une famille d'automates captifs qui, sur un ensemble de configurations bien structurées, possèdent schématiquement le comportement qui suit. L'ensemble des états est scindé en deux parties : sur la première, la règle de transition de l'automate peut être assimilée à la fonction « max » ; sur l'autre moitié, il fait systématiquement apparaître un état qui se propage dans tout le réseau sauf si la configuration initiale est uniforme. Enfin, en dehors des configurations bien structurées, le comportement est caractérisé par la propagation d'un état envahissant. Avec un tel fonctionnement on contrôle les valeurs des paramètres $\rho_{\rightarrow\circ}$ et ρ_{\circ} par le cardinal de la première et la seconde partie de l'alphabet respectivement.

Proposition 39. *Il existe une famille $(\mathcal{B}_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}_+}$ d'automates cellulaires captifs tels que :*

$$- (m \leq m') \wedge (n \leq n') \Rightarrow \mathcal{B}_{m,n} \preceq_{\square} \mathcal{B}_{m',n'} ;$$

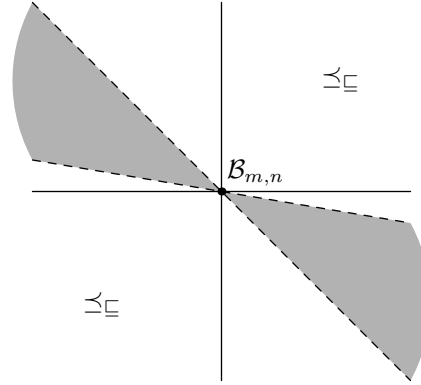


FIG. 4.1: La famille $\mathcal{B}_{m,n}$ dans le pré-ordre \preceq_{\square} (les zones grisées représentent l'ensemble des $\mathcal{B}_{m',n'}$ montrés incomparables avec $\mathcal{B}_{m,n}$ dans la proposition 39).

$$- \begin{cases} (m - m') + (n - n') < 0 \\ \text{et} \\ \frac{1}{6}(m - m') + (n - n') > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{B}_{m',n'} \not\preceq_{\square} \mathcal{B}_{m,n} \\ \text{et} \\ \mathcal{B}_{m,n} \not\preceq_{\square} \mathcal{B}_{m',n'} \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}_+$, soit $A_{m,n} = \{1, \dots, m + n\}$ et $\mathcal{A}_{m,n}$ un automate cellulaire captif de rayon 5 sur l'ensemble d'états $A_{m,n} \cup \{\#\}$ et défini ci-après. Soit $w = w_1 w_2 w_3 w_4$ le mot $\#m\#\#$. Parmi les configurations de $\mathcal{A}_{m,n}$ nous distinguons l'ensemble suivant :

$$S_{m,n}^0 = \{c \in (A_{m,n} \cup \{\#\})^{\mathbb{Z}} : c(i) = w_{i \bmod 5} \text{ si } i \neq 0 \bmod 5\}.$$

On note alors $S_{m,n} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \sigma_z(S_{m,n}^0)$. Alors $\mathcal{A}_{m,n}$ est défini par :

$$\delta_{\mathcal{A}_{m,n}}(u_{-5} \dots u_5) = \begin{cases} \max(x, y, z) & \text{si } u = xwywz \text{ et } \max(x, y, z) \geq m \\ x & \text{si } u = xwxwx \text{ et } x \leq m \\ m & \text{sinon et si } u = xwywz \text{ et } x, y, z \leq m \\ u_0 & \text{sinon et si } u \in L(S_{m,n}) \\ \# & \text{si } u \notin L(S_{m,n}) \text{ et si } \# \in u \\ \min(u_i) & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Nous affirmons alors que

$$\rho_{\circlearrowleft}(\mathcal{A}_{m,n}) = 6(m + n) + 1 \text{ et } \rho_{\rightarrow \circlearrowleft}(\mathcal{A}_{m,n}) = m + 6n - 4.$$

La preuve découle de ces deux égalités en posant $\mathcal{B}_{m,n} = \mathcal{A}_{m,n}$. Pour calculer ρ_{\circlearrowleft} et $\rho_{\rightarrow \circlearrowleft}$ sur les $\mathcal{A}_{m,n}$, on procède par une étude de cas d'après la définition de $\mathcal{A}_{m,n}$. On peut vérifier que les configurations des ensemble $S_{m,n}$, $A_{m,n}^{\mathbb{Z}}$ et $X = \{c : c \notin S_{m,n} \cup A_{m,n}^{\mathbb{Z}}\}$ ont des orbites disjointes (deux configurations

prises parmi deux de ces ensembles ont toujours deux orbites disjointes). Ainsi, en considérant $\mathcal{A}_{m,n}$ sur chacun de ces ensembles séparément on en déduit :

- $\mathcal{Y}(\mathcal{A}_{m,n}) \cap S_{m,n}$ est l'ensemble des configurations périodiques de période xw avec $x \in A_{m,n}$;
- $\mathcal{Y}_{\rightarrow}(\mathcal{A}_{m,n}) \cap S_{m,n}$ est l'ensemble des configurations périodiques de période xw avec $x \in A_{m,n}, x < m$;
- $\mathcal{Y}(\mathcal{A}_{m,n}) \cap A_{m,n}^{\mathbb{Z}} = \{\bar{x} : x \in A_{m,n}\}$;
- $\mathcal{Y}(\mathcal{A}_{m,n}) \cap X = \{\#\}$;
- $\mathcal{Y}_{\rightarrow}(\mathcal{A}_{m,n}) \cap A_{m,n}^{\mathbb{Z}} = U(\mathcal{A}_{m,n}) \cap X = \emptyset$.

De plus, toutes les configurations de $\mathcal{Y}(\mathcal{A}_{m,n})$ sont seules dans leur classe pour $\xrightarrow{\mathcal{A}}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que pour tout $x \in A_{m,n}$ il y a exactement 5 configurations périodiques de période xw . \square

La proposition et le corollaire qui suivent montrent que la classe des automates cellulaires intrinsèquement universels est séparée des autres classes au sens où entre tout automate cellulaire non intrinsèquement universel et tout automate cellulaire intrinsèquement universel on trouve une chaîne infinie d'automates cellulaires captifs.

Proposition 40. *Pour tout automate cellulaire captif \mathcal{A} non intrinsèquement universel, il existe un automate cellulaire captif \mathcal{B} non intrinsèquement universel tel que $\mathcal{A} \preceq_{\square} \mathcal{B}$ mais $\mathcal{B} \not\preceq_{\square} \mathcal{A}$.*

Démonstration. Nous montrons d'abord qu'il n'existe pas d'automate cellulaire captif \mathcal{A} non intrinsèquement universel et tel que pour tout automate cellulaire captif \mathcal{B} non intrinsèquement universel on a $\mathcal{B} \preceq_{\square} \mathcal{A}$. Cela découle de l'énumérabilité des automates cellulaires intrinsèquement universels : avec un automate cellulaire captif maximal pour les automates captifs non intrinsèquement universels on pourrait alors énumérer les automates cellulaires captifs non intrinsèquement universels. Ainsi, on pourrait décider l'universalité intrinsèque des automates cellulaires captifs, ce qui contredit la proposition ??.

Montrons à présent que pour toute paire \mathcal{A}, \mathcal{B} d'automates cellulaires captifs non intrinsèquement universels, il existe un automate captif \mathcal{C} non intrinsèquement universel tel que $\mathcal{A} \preceq_{\square} \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \preceq_{\square} \mathcal{C}$. Cela complète la preuve de la proposition puisque cela implique qu'il n'existe pas plus d'un automate cellulaire maximal pour les automates captifs non-intrinsèquement universels, et l'on a montré ci-dessus qu'il ne peut en exister un seul.

On construit \mathcal{C} de la manière suivante. Soit \ll un ordre total sur $A \cup B$ tel que $\forall a \in A$ et $\forall b \in B : b \ll a$ (à renommage près, on peut supposer

$A \cap B = \emptyset$). On définit alors $\delta_{\mathcal{C}}$ sur tout $u \in (A \cup B)^{2r+1}$ par :

$$\delta_{\mathcal{C}}(u) = \begin{cases} \delta_{\mathcal{A}}(u) & \text{si } u \in A^{2r+1}, \\ \delta_{\mathcal{B}}(u) & \text{si } u \in B^{2r+1}, \\ \max \Sigma(u) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où \max est relatif à l'ordre \ll . Il est clair que \mathcal{C} est captif et que $\mathcal{A} \preceq_{\square} \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \preceq_{\square} \mathcal{C}$. De plus, si \mathcal{C} est intrinsèquement universel, alors \mathcal{A} ou \mathcal{B} l'est aussi. En effet, considérons un automate cellulaire intrinsèquement universel \mathcal{U} (pas nécessairement captif) tel que pour toute paire d'états $a, b \in U$ la configuration périodique de période ab est un point fixe de \mathcal{U} (il n'est pas difficile de construire un tel automate en imposant par exemple qu'il se comporte comme l'identité lorsqu'au plus deux états différents sont présents dans le voisinage). On a alors $\mathcal{U} \sqsubseteq \mathcal{C}^{<m,t,z>}$ pour certains paramètres $m, t \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathbb{Z}$ (d'après la proposition 6 page 28). Si l'on note ϕ l'injection implicite dans cette relation, on a nécessairement $\phi(U) \subseteq A^m$ ou $\phi(U) \subseteq B^m$ car, sinon, il existe $u_1, u_2 \in U$ tels que le mot $\phi(u_1)\phi(u_2)$ contient à la fois un état de A et un état de B . D'après la définition de \mathcal{C} , la configuration périodique de période $\phi(u_1)\phi(u_2)$ ne peut pas être un point fixe car tous les états de B finissent par disparaître : cela contredit la propriété de \mathcal{U} . En conséquence, on a nécessairement $\mathcal{U} \sqsubseteq \mathcal{A}^{<m,n>}$ ou $\mathcal{U} \sqsubseteq \mathcal{B}^{<m,n>}$. \square

Corollaire 11. *Pour tout \mathcal{B} intrinsèquement universel et tout \mathcal{A} non intrinsèquement universel, on a $\vec{d}_{\preceq_{\square}, \mathcal{AC}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq \omega$.*

Démonstration. D'après la proposition 13 page 55, si \mathcal{A} n'est pas intrinsèquement universel $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ ne l'est pas non plus. On construit alors une chaîne de longueur ω d'automates cellulaires captifs non intrinsèquement universels à partir de $\rho_{\#}(\mathcal{A})$ (d'après la proposition 40). \square

4.1.3 Universalités

De façon générale, un automate cellulaire \preceq -universel appartient à tous les filtres de \preceq , et n'appartient à aucun idéal (non-trivial) de \preceq . Par ailleurs, comme on l'a déjà dit, un tel automate maximise tous les paramètres de complexité associés à la relation \preceq . Les résultats de cette section, qui fournissent des conditions nécessaires pour la \preceq -universalité dans différents pré-ordres \preceq , s'appuient donc sur l'étude des paramètres de complexités et des structures d'idéaux et filtres qui précède.

La propriété suivante exprime que la complexité de communication d'un automate cellulaire universel pour \preceq_{\square} est maximale. Cette condition nécessaire à l'universalité s'applique aussi aux relations \preceq_{\square} et \preceq_{\triangleleft} (par inclusion dans \preceq_{\square}).

Proposition 41. *Si \mathcal{A} est \preceq_{\square} -universel alors $\rho_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \mathbf{Lin}$.*

Démonstration. L'existence d'un automate cellulaire \mathcal{A} tel que $\rho_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \mathbf{Lin}$ est montrée dans [23]. Le résultat découle alors de la proposition 30. \square

Bien que nous n'ayons pas obtenu de résultats nouveaux, le paramètre $\rho_{\mathcal{C}}$ nous semble constituer un outil intéressant pour montrer qu'un automate n'est pas intrinsèquement universel. En particulier, il pourrait être mis en oeuvre sur les automates cellulaires à 2 états de rayon 1 et notamment sur les automates de numéro 110 et 54^{\curvearrowright} dans la notation de S. Wolfram [91].

Le paramètre $\rho_{\mathbf{dyn}}$, commun aux simulations \preceq_{\square} , \preceq_{\triangleleft} et $\preceq_{\triangleleft\triangleleft}$, permet d'obtenir un résultat similaire avec cette fois les dynamiques cellulaires.

Proposition 42. *Soit \mathcal{A} un automate cellulaire $\preceq_{\triangleleft\triangleleft}$ -universel. \mathcal{A} vérifie $\rho_{\mathbf{dyn}}(\mathcal{A}) = \mathbf{Dyn}_{AC}$. En particulier \mathcal{A} est Turing-universel.*

Démonstration. Cela découle directement de la proposition 27. \square

La proposition suivante relie la relation \preceq_{\triangleleft} à la sensibilité aux conditions initiales.

Proposition 43. *Les automates \preceq_{\triangleleft} -universels sont inclus dans \mathcal{T}_3 , c'est à dire qu'ils ne possèdent aucun point d'équicontinuité dans aucune direction.*

Démonstration. La preuve découle de la proposition 36. \square

La relation \preceq_{\square} n'est, elle, pas contrainte vis-à-vis de la classe \mathcal{T}_3 . En effet, on déduit facilement de la construction décrite précédemment (page 107) qu'il existe des automates cellulaires intrinsèquement universels avec des points d'équicontinuité, qui appartiennent donc à la classe \mathcal{T}_2 . Il n'est pas difficile non plus de construire un automate cellulaire intrinsèquement universel appartenant à \mathcal{T}_3 comme le montre l'exemple suivant.

[↷]Ils sont souvent considérés comme les deux candidats à l'universalité. Dans [14], M. Cook montre que 110 est universel pour le calcul Turing.

Pour tout \mathcal{A} , on construit \mathcal{B} avec $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ et tel que $\mathcal{B} \times (\sigma_{-2} \circ \mathcal{B}) \in \mathcal{T}_3$. Pour simplifier, on considère \mathcal{A} de réseau \mathbb{Z} et de rayon 1, mais la construction se généralise aisément. \mathcal{B} est l'automate cellulaire d'alphabet $B = A \cup \{\kappa_1, \kappa_2\}$ (avec $\{\kappa_1, \kappa_2\} \cap A = \emptyset$) défini par :

$$\delta_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \begin{cases} \delta_{\mathcal{A}}(x, y, z) & \text{si } \{x, y, z\} \subseteq A, \\ z & \text{si } z \in \{\kappa_1, \kappa_2\}, \\ y & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\pi : B \rightarrow B$ avec $\pi(\kappa_1) = \kappa_2$ et $\pi(b) = \kappa_1$ pour $b \neq \kappa_1$. On vérifie alors que pour toute configuration $c \in B^{\mathbb{Z}}$ et tout $k \in \mathbb{N}_+$, la configuration $c' \in B^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$c'(z) = \begin{cases} \pi(c(z)) & \text{si } z = k, \\ c(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

est telle que $\mathfrak{d}(c, c') \leq 2^{-k}$ et $\mathfrak{d}(\mathcal{B}^k(c), \mathcal{B}^k(c')) \geq \frac{1}{2}$. Ainsi, $\mathcal{B} \times (\sigma_{-2} \circ \mathcal{B}) \in \mathcal{T}_3$ car, quelle que soit la direction, l'une ou l'autre des composantes du produit est sensible aux conditions initiales et interdit l'existence de points d'équicontinuité.

Poursuivant la caractérisation des automates cellulaires \preceq_{\triangleleft} -universels on a aussi la propriété suivante qui exprime que tout automate \preceq_{\triangleleft} -universel maximise le paramètre de complexité $\rho_{\mathfrak{h}_0}$.

Proposition 44. *Si \mathcal{A} est \preceq_{\triangleleft} -universel alors $\mathcal{L}(\Omega_{\mathcal{A}})$ n'est pas récursivement énumérable.*

Démonstration. Cela découle des propositions 29 et 28 ainsi que de l'existence d'automates cellulaires dont le langage de l'ensemble limite n'est pas récursivement énumérable comme montré dans [33]. \square

La figure 4.2 donne une vue synthétique sur les relations entre les différentes notions d'universalité² et les différents paramètres de complexité étudiés dans cette thèse.

4.2 Particules et dynamiques séquentielles

Le comportement de certains automates cellulaires peut être mieux compris en étudiant les trajectoires suivies par certains états particuliers. La définition suivante formalise la notion de *particule* : un ensemble d'états qui peuvent être « localisés », c'est à dire qui ne se répandent pas dans l'espace itération après itération.

Définition 49. *Soit \mathcal{A} un automate cellulaire. $T \subseteq A$ est un type de particule pour \mathcal{A} si le nombre (éventuellement infini) de cellules dans un*

²L'universalité pour le calcul Turing est étudiée plus en détail en section 4.4

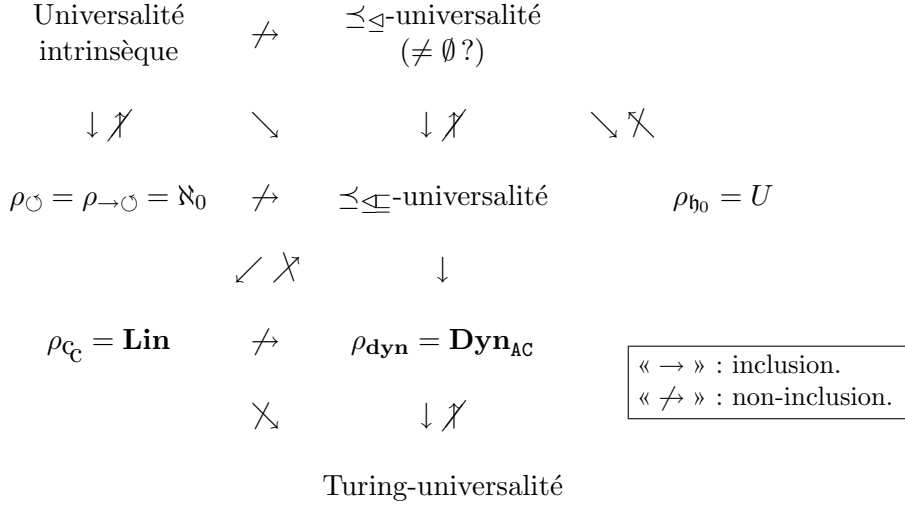


FIG. 4.2: Relations entre notions d'universalité et paramètres de complexité. Intuitivement, la complexité progresse de bas en haut.

état de T n'augmente pas sous l'action de \mathcal{A} . Formellement, en notant $Nb_T(c) = |\{z \in \mathcal{R} : c(z) \in T\}|$, on a :

$$\forall c \in A^{\mathcal{R}}, Nb_T(c) \geq Nb_T(\mathcal{A}(c)).$$

On appelle T -particule dans une configuration c , un couple $(z, c(z))$ (position et état) tel que $c(z) \in T$. Lorsque $Nb_T(c) = 1$, on note $Pos_T(c)$ la position de l'unique T -particule dans c .

On remarque que cette définition permet à un automate cellulaire d'avoir plusieurs types de particules et que plusieurs particules de types différents peuvent se trouver en même temps sur une même cellule. Par ailleurs, on vérifie aisément que l'ensemble d'états $A \setminus T$ induit un sous-automate que l'on appelle *automate cellulaire médium* associé à \mathcal{A} et T . Dans la suite de cette section on se limite au réseau \mathbb{Z} .

4.2.1 Forcer la séquentialité

Le formalisme particule/médium que l'on vient d'introduire permet notamment de construire des automates cellulaires qui exhibent un comportement que l'on peut qualifier de séquentiel. Étant donné une machine de Turing d'ensemble d'états E et d'alphabet de ruban R , il n'est pas difficile de construire un automate cellulaire dans lequel la tête Turing est simulée par un certain type T de particule et le médium correspondant, choisi comme automate cellulaire identité sur l'ensemble d'états R , joue le rôle du

ruban. Dans un tel automate, les changements d'état ne peuvent se produire qu'au voisinage d'une T -particule, ainsi, dans une configuration c telle que $\text{Nb}_T(c) = 1$, le comportement de l'automate est séquentiel et reproduit celui de la machine de Turing. Formellement, cet automate simule la machine au sens de la définition 27 (*i.e.* il capture toute la dynamique de la machine). Cependant, on ne peut pas affirmer que cet automate soit globalement un système séquentiel. En effet, rien ne garantit la présence d'une seule T -particule dans ses configurations initiales. Pour contourner ce problème, nous introduisons ci-dessous une construction générale qui permet, étant donné un automate cellulaire \mathcal{A} admettant un type de particule T , de produire un nouvel automate dans lequel la présence d'une seule T -particule dans chaque configuration est en un certain sens contrôlée.

Tout d'abord, sur les configurations comportant une seule T -particule, le fonctionnement de l'automate construit est essentiellement celui de \mathcal{A} auquel on ajoute une couche de contrôle de la position de la particule. Dans cette couche, une cellule dans l'état \leftarrow indique que la particule est à sa gauche (au sens large) et une cellule dans l'état \rightarrow indique que la particule est à sa droite (au sens strict). Cette couche de contrôle reste inchangée par itérations, sauf au voisinage de la particule où les états \leftarrow et \rightarrow sont mis à jour pour refléter les mouvements éventuels de la particule. Enfin, les contrôles suivants sont effectués en permanence de façon locale :

- à une T -particule correspond toujours un état \leftarrow ;
- à gauche d'une particule on trouve toujours un état \rightarrow ;
- jamais un état \rightarrow n'apparaît à droite d'un état \leftarrow .

Dès que l'un de ces contrôles échoue, un état envahissant est produit pour détruire toute la configuration, or la présence d'au moins deux T -particules dans la configuration fait nécessairement échouer l'un de ces contrôles : la construction garantit donc bien en ce sens que $\text{Nb}_T(c) = 1$.

Définition 50. Soit \mathcal{A} un automate cellulaire admettant le type de particule T . On définit $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}$ sur l'alphabet $\overset{\nabla}{A} = \{\kappa\} \cup (A \times \{\leftarrow, \rightarrow\})$ de rayon $2r_{\mathcal{A}}$ et dont la règle de transition locale $\delta_{\overset{\nabla}{\mathcal{A}}}$ admet κ pour état envahissant et vérifie :

$$\delta_{\overset{\nabla}{\mathcal{A}}}((u_{-2r_{\mathcal{A}}}, v_{-2r_{\mathcal{A}}}), \dots, (u_{2r_{\mathcal{A}}}, v_{2r_{\mathcal{A}}})) = x \text{ avec}$$

$$x = \begin{cases} \kappa & \text{si } \begin{cases} \exists i, -2r_{\mathcal{A}} \leq i \leq 2r_{\mathcal{A}} \text{ avec } u_i \in T \text{ et } v_i = \rightarrow, \text{ ou} \\ \exists i, -2r_{\mathcal{A}} \leq i \leq 2r_{\mathcal{A}} - 1 \text{ avec } u_{i+1} \in T \text{ et } v_i = \leftarrow, \text{ ou} \\ \exists i, j, -2r_{\mathcal{A}} \leq i < j \leq 2r_{\mathcal{A}} \text{ tels que } v_i = \leftarrow \text{ et } v_j = \rightarrow \end{cases} \\ (u, v) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$u = \delta_{\mathcal{A}}(u_{-r_{\mathcal{A}}}, \dots, u_{r_{\mathcal{A}}})$$

$$v = \begin{cases} \leftarrow & \text{si } \exists i, -r_{\mathcal{A}} \leq i \leq 0 \text{ avec } \delta_{\mathcal{A}}(u_{i-r_{\mathcal{A}}}, \dots, u_{i+r_{\mathcal{A}}}) \in T, \\ \rightsquigarrow & \text{si } \exists i, 0 < i \leq r_{\mathcal{A}} \text{ avec } \delta_{\mathcal{A}}(u_{i-r_{\mathcal{A}}}, \dots, u_{i+r_{\mathcal{A}}}) \in T, \\ v_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note enfin $\lambda_{\mathcal{A},T} : \overset{\nabla}{A} \setminus \{\kappa\} \rightarrow A$ la fonction définie par

$$\lambda_{\mathcal{A},T}(a, \leftarrow) = \lambda_{\mathcal{A},T}(a, \rightsquigarrow) = a.$$

Le lemme suivant montre que la construction ci-dessus effectue bien le contrôle de présence d'une seule particule et que l'automate obtenu possède un comportement identique à celui de départ en présence d'une seule particule.

Lemme 8. *La construction ci-dessus est croissante : si \mathcal{A} et \mathcal{B} , avec $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$, admettent respectivement les types de particule T et T' avec $\iota(T) \subseteq T'$ (où ι est l'injection impliquée dans la relation $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$), alors $\overset{\nabla}{\mathcal{A}} \sqsubseteq \overset{\nabla}{\mathcal{B}}$.*

De plus, pour tout automate cellulaire \mathcal{A} , $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}$ a les propriétés suivantes :

- il admet $\overset{\nabla}{T} = T \times \{\leftarrow\}$ comme type de particule ;
- la fonction Ψ_T qui à toute configuration $c \in A^{\mathbb{Z}}$ telle que $\text{Nb}_T(c) = 1$ et $\text{Nb}_T(\mathcal{A}(c)) = 1$, associe la configuration $c' \in \overset{\nabla}{A}^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$c'(z) = \begin{cases} (c(z), \rightsquigarrow) & \text{si } z < \text{Pos}_{\mathcal{A}}(T)(c), \\ (c(z), \leftarrow) & \text{sinon,} \end{cases}$$

est telle que

- (i). $\Psi_T(\mathcal{A}(c)) = \overset{\nabla}{\mathcal{A}}(\Psi_T(c))$,
- (ii). $\text{Nb}_{\overset{\nabla}{T}}(\Psi_T(c)) = \text{Nb}_{\overset{\nabla}{T}}\left(\overset{\nabla}{\mathcal{A}}(\Psi_T(c))\right) = 1$
- (iii). $\text{Pos}_T(c) = \text{Pos}_{\overset{\nabla}{T}}(\Psi_T(c))$,
- (iv). $\text{Pos}_T(\mathcal{A}(c)) = \text{Pos}_{\overset{\nabla}{T}}\left(\overset{\nabla}{\mathcal{A}}(\Psi_T(c))\right)$;
- si une configuration $c \in \overset{\nabla}{A}^{\mathbb{Z}}$ est telle que $\text{Nb}_{\overset{\nabla}{T}}(c) > 1$, alors toute cellule finit par être constante dans le diagramme espace-temps $\text{Diag}_{\overset{\nabla}{\mathcal{A}}}^{\overset{\nabla}{T}}(c)$.

Démonstration. La croissance de la construction se vérifie facilement d'après la définition puisque cette construction procède essentiellement par ajout d'une couche de contrôle.

Considérons un automate cellulaire \mathcal{A} admettant un type de particule T . Tout d'abord, si pour une configuration c de $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ on a $\text{Nb}_{\nabla}(c) < \text{Nb}_{\nabla}\left(\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T(c)\right)$ alors la configuration $c' = \overline{\lambda_{\mathcal{A},T}}(c)$ de \mathcal{A} est telle que $\text{Nb}_T(c') < \text{Nb}_T(\mathcal{A}(c'))$ ce qui contredit le fait que T est un type de particule pour \mathcal{A} .

On vérifie ensuite directement d'après la définition les propriétés de Ψ_T : en fait, $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ est construit précisément pour vérifier ces propriétés.

Enfin, soit c une configuration de $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ telle qu'il existe deux positions $i < j$ telles que $c(i) \in \overset{\nabla}{T}$ et $c(j) \in \overset{\nabla}{T}$. S'il existe $a \in A$ tel que $c(j-1) = (a, \leftarrow)$ alors κ apparaît dans $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T(c)$ et c'est un état envahissant. Sinon, il existe un entier l , $i \leq l \leq j$, tel que $c(l) = (a, \leftarrow)$ et $c(l+1) = (a, \rightsquigarrow)$ et alors κ apparaît dans $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T(c)$. Dans tous les cas, comme κ est un état envahissant, chaque cellule finit par être constante égale à κ dans $\text{Diag}_{\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T}(c)$. \square

L'automate $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ est « forcé » à agir avec une seule T -particule ce qui constitue une contrainte très forte (si l'on fait abstraction du médium) : la proposition suivante montre en particulier que si l'automate médium associé à \mathcal{A} et T est l'identité, alors $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ peut être globalement assimilé à un système séquentiel.

Proposition 45. *Si \mathcal{A} admet un type de particule T tel que l'automate cellulaire médium associé est l'identité, alors les dynamiques persistantes capturées directement et pas à pas par $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ sont nécessairement séquentielles.*

Démonstration. Soit \mathcal{D} une dynamique capturée directement pas à pas par $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$. Par définition, il existe $t \in \mathbb{N}_+$ et $m, m' \in \mathcal{R}^+$ tels que, pour toute suite $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$, il existe $c \in \left(\overset{\nabla}{A}\right)^{\mathcal{R}^{[m]}}$ et une coloration $\varsigma : \overset{\nabla}{A}^{[m]} \rightarrow Q^{[m']}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{o}_{m'}^{-1}(d_n) \leq_{\varsigma} \left(\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T^{<m,t,(0,\dots,0)>} \right)^n (c).$$

Si \mathcal{D} est persistante, alors on a de plus nécessairement $\text{Nb}_{\nabla}(c) \leq 1$ d'après le lemme 8. Ainsi, comme l'automate cellulaire médium associé à T dans \mathcal{A}

est l'identité, pour toute position $z \in \mathcal{R}$ et toute configuration $x \in (\overset{\nabla}{A})^{\mathcal{R}}$ on a

$$(\overset{\nabla}{A}_T(x))(z) \neq x(z) \Rightarrow \left\| \text{Pos}_{\overset{\nabla}{T}}(x) - z \right\|_{\infty} \leq r_{\overset{\nabla}{A}}.$$

On en déduit directement que \mathcal{D} est séquentielle au sens de la définition 28 (on le vérifie avec le choix de constante $K = 2r_{\overset{\nabla}{A}}$). \square

4.2.2 Automates zigzag

Le fait que $\overset{\nabla}{A}_T$ ne capture essentiellement que des dynamiques séquentielles est déjà en soi une propriété très forte qui conditionne sa position dans les pré-ordres de simulation (voir section 4.4). L'objet des définitions qui suivent est d'introduire une famille $(\mathcal{Z}_p)_{p \in \mathbb{N}_+}$ d'automates cellulaires, appelés « automates zigzag », au comportement purement séquentiel et qui forment une hiérarchie (infinie) au sens de $\leq \ll$. Cette famille donne un exemple simple de paramètre de complexité de nature « séquentielle » dans les automates cellulaires.

Le fonctionnement de ces automates peut être interprété de la façon suivante. Dans \mathcal{Z}_p qui admet pour type de particule T_p , l'état t d'une T_p -particule est caractérisé par sa direction et son niveau d'énergie $\eta(t)$. Le médium associé au type de particule T_p est constitué de 2 sortes d'états : E (état neutre) et les M_i qui sont des barrières de potentiel asymétriques. Le comportement d'une particule entourée de l'état neutre E est alors de se déplacer dans sa direction caractéristique en conservant son énergie. De plus, une barrière M_i ($i > 0$) peut être traversée de gauche à droite par toute particule d'énergie inférieure à i , sinon il y a rebond de la particule, et elle peut être traversée de droite à gauche par toute particule d'énergie strictement supérieure à i , sinon il y a rebond et incrémentation du niveau d'énergie de la particule. Enfin, la barrière M_0 est une barrière infranchissable sur laquelle toute particule rebondit, et se voit de plus vidée de son énergie (*i.e.* elle passe au niveau d'énergie 1) lorsque elle arrive par la droite.

Définition 51. *Pour tout $p \in \mathbb{N}_+$, soit $\mathcal{Z}_{\mathcal{Z}_p}$ l'automate cellulaire de rayon 1 suivant :*

- son alphabet est $B_p = Q_p \cup S_p$ où $Q_p = \{M_0, M_1, \dots, M_{p-1}, E\}$ et avec $S_p = \{ \underset{i}{\leftarrow} X, X \in Q_p, 1 \leq i \leq p \} \cup \{ \overset{i}{\leftarrow} X, X \in Q_p, 1 \leq i \leq p \}$.
- il admet le type de particule S_p avec le comportement suivant :

$$(i). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathcal{Z}_p}}(M_0, \underset{i}{\leftarrow} E, X) = \underset{1}{\leftarrow} E$$

$$(ii). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathcal{Z}_p}}(X, \overset{i}{\leftarrow} E, M_0) = \overset{i}{\leftarrow} E$$

$$(iii). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, E) = E$$

$$(iv). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(\underset{i}{\overleftarrow{E}}, E, X) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$$

$$(v). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(E, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, X) = E$$

$$(vi). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(X, E, \underset{i}{\overleftarrow{E}}) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$$

$$(vii). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_j) = \underset{i}{\overleftarrow{E}} \text{ si } i > j$$

$$(viii). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_j) = E \text{ si } i \leq j$$

$$(ix). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(\underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_j, X) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}} \text{ si } i \leq j$$

$$(x). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(X, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, E) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}$$

$$(xi). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(\underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, E, X) = \underset{i}{\overleftarrow{E}} \text{ si } i \leq j$$

$$(xii). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(M_j, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, X) = \underset{j+1}{\overleftarrow{E}} \text{ si } i \leq j$$

$$(xiii). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(M_j, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, X) = E \text{ si } i > j$$

$$(xiv). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(X, M_j, \underset{i}{\overleftarrow{E}}) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}} \text{ si } i > j$$

$$(xv). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(E, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, X) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}$$

$$(xvi). \delta_{\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}_p}}(X, E, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}) = \underset{i}{\overleftarrow{E}} \text{ si } i > j$$

où $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p-1$ et X désigne indifféremment E ou M_k ($1 \leq k \leq p$);

– c'est l'identité partout ailleurs (et notamment sur son automate médium associé à S_p).

Enfin, on définit l'automate cellulaire « zigzag » \mathcal{Z}_p par $\mathcal{Z}_p = \overset{\nabla}{\mathbb{Z}_{S_p}}$. On note

$T_p = \overset{\nabla}{S_p}$ le type de particule associé et $\eta : T_p \rightarrow \{1, \dots, p\}$ la fonction indicatrice sur l'état de la particule définie par $\eta(\alpha) = i$ si $\lambda_{\mathcal{Z}_p, T_p}(\alpha)$ est de la forme $\underset{i}{\overleftarrow{X}}$ ou $\underset{i}{\overleftarrow{X}}$.

En agençant les barrières d'un automate « zigzag » de façon adéquate, on peut faire suivre une sorte de cycle d'hystérésis à une particule à l'intérieur d'un domaine délimité par deux états M_0 . Sa trajectoire spatio-temporelle

ressemble alors à un enchaînement de « zigzag ». Ce type de comportement se produit pour $\mathcal{Z}_{\mathcal{Z}_p}$ sur l'ensemble de mots de la forme $M_0 \underset{1}{\overleftarrow{E}} U_p$ où U_p désigne les mots de la forme

$$E^{i_1} M_{p-1} E^{i_2} M_{p-2} \dots M_1 E^{i_p} M_0.$$

où $i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N}_+$. Par le lemme 8, et comme de telles configurations ne comportent qu'une S_p -particule, \mathcal{Z}_p produit un comportement similaire sur les images de ces configurations par Φ_{S_p} . La figure 4.3 illustre ce comportement.

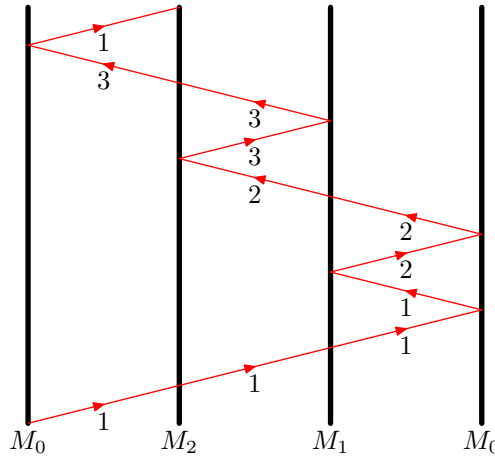


FIG. 4.3: La dynamique de $\mathcal{Z}_{\mathcal{Z}_p}$ sur un mot de $M_0 \underset{1}{\overleftarrow{E}} U_p$ (ici $p=3$)

Le lemme suivant montre qu'à chaque fois qu'une T_p -particule de \mathcal{Z}_p effectue un « zigzag » simple (caractérisé par la propriété \mathcal{P} ci-dessous), son énergie augmente strictement entre le début et la fin du « zigzag ».

Lemme 9. *Pour tout $p \in \mathbb{N}_+$, sur une configuration c telle que $\text{Nb}_{T_p}(c) = 1$, \mathcal{Z}_p a la propriété \mathcal{P} suivante : s'il existe des instants $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \in \mathbb{N}_+$ et des positions $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{N}_+$ avec $z_1 > z_2$, $z_3 > z_2$ et $z_4 < z_2$ vérifiant, pour $1 \leq i \leq 4$:*

- (i). $\text{Pos}_{T_p}(\mathcal{Z}_p^{t_i}(c)) = z_i$,
 - (ii). $\forall t, t_1 < t < t_2 : z_2 \leq \text{Pos}_{T_p}(\mathcal{Z}_p^t(c)) < z_1$,
 - (iii). $\forall t, t_2 < t < t_3 : z_2 < \text{Pos}_{T_p}(\mathcal{Z}_p^t(c)) \leq z_3$,
 - (iv). $\forall t, t_3 < t < t_4 : z_4 < \text{Pos}_{T_p}(\mathcal{Z}_p^t(c)) < z_3$,
- alors $\eta((\mathcal{Z}_p^{t_1}(c))(z_1)) < \eta((\mathcal{Z}_p^{t_4}(c))(z_4))$.

Démonstration. Le fait que $z_1 > z_2$ et $z_3 > z_2$ implique un changement de direction de la particule (i.e. passage d'un état du type $(X, \overleftarrow{\leftarrow})$ à un état du

type $(\underset{j}{\overleftarrow{Y}}, \leftarrow)$ en position z_2 . Donc $\lambda_{\mathcal{Z}_p, T_p}(c(z_2 - 1)) = M_k$. De plus $k > 0$ car la T_p -particule traverse ensuite la cellule z_2 pour atteindre la position z_4 , or un état e tel que $\lambda_{\mathcal{Z}_p, T_p}(e) = M_0$ ne peut pas être traversé par une particule (transition (i) de la définition 51). Or, comme $\lambda_{\mathcal{Z}_p, T_p}(c(z)) \neq M_0$ si $z_2 \leq z \leq z_1$ (pour la même raison que précédemment), on a nécessairement $\eta((\mathcal{Z}_p^{t_1}(c))(z_1)) \leq k$ (transition (xii) de la définition 51). Ensuite, comme la particule a traversé de droite à gauche la cellule $z_2 - 1$ dans l'état M_k (car $z_4 < z_2$) et puisqu'aucune cellule entre z_4 et z_2 (incluses) n'est dans un état e tel que $\lambda_{\mathcal{Z}_p, T_p}(e) = M_0$, on a nécessairement $\eta((\mathcal{Z}_p^{t_4}(c))(z_4)) > k$ (transition (xiv) de la définition 51). \square

Dans la suite, si \mathcal{A} est un automate cellulaire admettant un type de particule T , on note $c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}(t_1, z_1, t_4, z_4)$ le fait que la propriété \mathcal{P} ci-dessus s'applique, pour \mathcal{A} et son type de particule T , entre les temps t_1 et t_4 , sur la position de départ z_1 et la position d'arrivée z_4 , et à partir de la configuration c de \mathcal{A} .

Plus généralement, on note $c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}_p$ le fait qu'il existe une suite d'instants t_1, t_2, \dots, t_p et une suite de positions z_1, \dots, z_p tels que

$$\forall i, 1 \leq i \leq p-1 : c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}(t_i, z_i, t_{i+1}, z_{i+1}).$$

La figure 4.3 montre que \mathcal{Z}_p est capable d'enchaîner p « zigzags » simples, formellement : le mot $M_0 \underset{1}{\overleftarrow{E}} U_p$ permet de construire une configuration c de \mathcal{Z}_p telle que $c \models_{\mathcal{Z}_p, T_p} \mathcal{P}_p$. En revanche, la proposition suivante affirme que \mathcal{Z}_p ne peut pas enchaîner plus de p zigzag simples.

Proposition 46. *Si $q > p$, il n'existe pas de configuration c de \mathcal{Z}_p telle que $c \models_{\mathcal{Z}_p, T_p} \mathcal{P}_q$.*

Démonstration. En supposant qu'une telle configuration existe et en appliquant q fois le lemme 9 (une fois pour chaque zigzag simple), on montre que le type de particule T_p possède au moins q niveaux d'énergie : il y a contradiction avec la définition de \mathcal{Z}_p si $q > p$. \square

Corollaire 12. $(\mathcal{Z}_p)_{p \in \mathbb{N}_+}$ induit une chaîne dans le pré-ordre $(\mathcal{AC}, \preceq_{\mathcal{AC}})$.

Démonstration. D'après la définition 51, on a $\mathcal{Z}_p \sqsubseteq \mathcal{Z}_{p+1}$. Par ailleurs, la proposition 46 implique que $\rho_{\text{dyn}}(\mathcal{Z}_p) \not\subseteq \rho_{\text{dyn}}(\mathcal{Z}_q)$ dès que $q > p$. Le fait que ρ_{dyn} est un paramètre de complexité pour $\preceq_{\mathcal{AC}}$ (proposition 27 page 90) permet de conclure. \square

4.3 Produits cartésiens et métronomes

Les résultats présentés dans cette section et la suivante ont fait l'objet d'une communication à ECCS'05

Dans cette section, nous nous intéressons à l'action du produit cartésien

sur les pré-ordres de simulation considérés jusque là. L'opération de produit cartésien peut être très irrégulière vis-à-vis de ces pré-ordres. D'une part, il existe des classes d'équivalence pour $\preceq_{\underline{\subseteq}}$ closes par produit cartésien : c'est le cas des automates cellulaires nilpotents, périodiques ou universels par exemple. D'autre part, nous montrons qu'il existe des automates cellulaires pour lesquels le produit cartésien accroît la complexité au sens de $\preceq_{\underline{\subseteq}}$ de manière significative et que cet accroissement peut être poursuivi indéfiniment par itération de l'opération de produit.

En s'appuyant sur un certain type d'automates capables de synchroniser le réseau de cellule (automates métronomes), nous établissons ensuite une construction qui peut être vue comme la limite de l'itération de l'opération de produit cartésien. Précisément, pour tout automate \mathcal{A} on construit un automate \mathcal{A}_+ qui simule tous les produits de \mathcal{A} avec lui-même. L'intérêt de la construction est qu'elle est générique et qu'elle garantit que \mathcal{A}_+ n'est pas $\preceq_{\underline{\subseteq}}$ -universel si \mathcal{A} ne l'est pas. La difficulté réside dans le contrôle de la dynamique de l'automate métronome utilisé : il faut garantir que celle-ci est suffisamment simple (tout en accomplissant sa fonction de synchronisation) pour que l'automate \mathcal{A}_+ obtenu ne soit pas $\preceq_{\underline{\subseteq}}$ -universel.

4.3.1 Produits et dynamiques séquentielles

Le but est ici de construire des automates cellulaires qui ne peuvent pas simuler leur propre produit cartésien. On construit également des automates \mathcal{A} en cherchant à maximiser la distance dans $\preceq_{\underline{\subseteq}}$ entre \mathcal{A} et $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Toutes ces constructions s'appuient sur l'étude des dynamiques séquentielles menée en section 4.2.

Le lemme suivant montre que pour comparer entre eux les produits cartésiens d'automates cellulaires de la forme $\prod_i^{\nabla} \mathcal{A}_i$ avec la relation $\preceq_{\underline{\subseteq}}$, les décalages sont inutiles dans les transformations syntaxiques et on peut supposer que les coloriages utilisés ont la propriété que le simulateur ne peut utiliser que des mots sans particule pour représenter des mots sans particule dans le simulé.

Lemme 10. *Soient $(\mathcal{A}_i)_{i \leq p}$ et $(\mathcal{B}_i)_{i \leq q}$ deux familles d'automates cellulaires, admettant respectivement les types de particule $(T_i)_{i \leq p}$ et $(T'_i)_{i \leq q}$, et dont les automates cellulaires médium associés sont tous l'identité. On note $\mathcal{A} = \prod_i^{\nabla} \mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B} = \prod_i^{\nabla} \mathcal{B}_i$. Alors, si $\mathcal{A} \preceq_{\underline{\subseteq}} \mathcal{B}$, il existe $m, m', t, t' \in \mathbb{N}_+$ tels que*

$$\mathcal{A}^{<m,t,0>} \underline{\subseteq} \mathcal{B}^{<m',t',0>}$$

à travers une coloration $\varsigma : X \rightarrow A^m$ (où $X \subseteq B^{m'}$) telle que

$$\varsigma^{-1} \left(\left(\prod_i^{\nabla} \mathcal{A}_i \setminus (T_i \cup \{\kappa\}) \right)^m \right) \subseteq \left(\prod_i^{\nabla} \mathcal{B}_i \setminus T'_i \right)^{m'}$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe $m, m', t, t' \in \mathbb{N}_+$ et $z, z' \in \mathbb{Z}$ ainsi qu'un ensemble $X \subseteq B^{m'}$ et une coloration $\varsigma : X \rightarrow A^m$ tels qu'on a la relation $\mathcal{A}^{<m,t,z>} \preceq \mathcal{B}^{<m',t',z'>}$ à travers la coloration ς . Sans perte de généralité, on peut de plus supposer que $z = 0$ (voir section 1.3.2 page 29) et que $K_b^{m'} \in X$, où $K_b = \underbrace{(\kappa, \dots, \kappa)}_q$, car pour tout i il existe un mot de

X égal à $\kappa^{m'}$ sur la couche i . En effet, si une couche i_0 ($1 \leq i_0 \leq q$) dans \mathcal{B} n'utilise ni son état envahissant ni aucun état de T_{i_0}' pour la simulation (formellement, si pour tout $u = u_1 \dots u_{m'} \in X$ et tout $1 \leq j \leq m'$ on a $u_j \in \overset{\nabla}{B}_1 \times \dots \times \overset{\nabla}{B}_{i_0-1} \times (\overset{\nabla}{B}_{i_0} \setminus (T_{i_0}' \cup \{\kappa\})) \times \overset{\nabla}{B}_{i_0+1} \times \dots \times \overset{\nabla}{B}_q$) alors on peut recommencer le raisonnement² avec $\mathcal{B} = \prod_{i \neq i_0} \overset{\nabla}{B}_{T_i'}$ car \mathcal{B}_{i_0} restreint aux

configurations produites avec X est l'identité (précisément, $\prod_{i \neq i_0} \overset{\nabla}{B}_{T_i'}$ simule

\mathcal{A} avec les mêmes paramètres mais sur l'ensemble X' obtenu à partir de X par effacement de la couche i_0 et la coloration $\varsigma' : X' \rightarrow A^m$ obtenue à partir de ς avec la même transformation). Ainsi, X contient pour chaque couche i un mot égal à $\kappa^{m'}$ sur cette couche (car il contient un mot u qui sur la couche i contient un état dans $T_i' \cup \{\kappa\}$ et que l'évolution de \mathcal{B} sur ${}^\omega u {}^\omega$ finit nécessairement par faire apparaître $\kappa^{m'}$ sur la couche i d'après le lemme 8 page 117). Donc on a bien $K_b^{m'} \in X$ comme énoncé plus haut. Mais alors, $\varsigma^{-1}(K_a^m) = \{K_b^{m'}\}$ (où $K_a = \underbrace{(\kappa, \dots, \kappa)}_p$) car K_a^m est un état en-

vahissant pour \mathcal{A} et que $K_b^{m'}$ est un état envahissant pour \mathcal{B} restreint aux configurations de ${}^\omega X {}^\omega$. Alors, en comparant les vitesses de propagation vers la gauche et vers la droite des états envahissants K_a^m et $K_b^{m'}$ dans $\mathcal{A}^{<m,t,0>}$ et $\mathcal{B}^{<m',t',z'>}$, on en déduit que $z' = 0$.

Enfin, on peut aussi supposer sans perte de généralité que

$$\varsigma^{-1} \left(\left(\prod_i \overset{\nabla}{A}_i \setminus (T_i' \cup \{\kappa\}) \right)^m \right) \subseteq \left(\prod_i \overset{\nabla}{B}_i \setminus T_i' \right)^{m'}.$$

En effet, si un mot $u \in \left(\prod_i \overset{\nabla}{A}_i \setminus (T_i' \cup \{\kappa\}) \right)^m$ (*i.e.* sans particule et sans état κ dans aucune couche) est simulé par un mot $v \in \varsigma^{-1}(u)$ dont la couche i_0 contient une T_{i_0}' -particule alors pour tout mot $u' \in \left(\prod_i \overset{\nabla}{A}_i \setminus (T_i' \cup \{\kappa\}) \right)^m$ il existe $v' \in \varsigma^{-1}(u')$ dont la couche i_0 est égale à $\kappa^{m'}$. En effet, à tout diagramme espace-temps de \mathcal{A} partant de la configuration initiale ${}^\omega u {}^\omega$ on

²Si par ce procédé on finit par éliminer toutes les composantes du produit \mathcal{B} , c'est que $\mathcal{A} = \text{Id}$ et le résultat du lemme est clairement vérifié.

peut faire correspondre via ς un diagramme espace-temps Δ de \mathcal{B} partant d'une configuration initiale qui contient le mot vv . Or, dans Δ , toutes les cellules finissent par avoir leur couche i_0 constante égale à κ (lemme 8) et ${}^\omega u^\omega$. On en déduit que \mathcal{B} peut simuler \mathcal{A} avec les mêmes paramètres, mais en restreignant ς à l'ensemble $X \setminus X'$ où X' est l'ensemble des mots de $\varsigma^{-1} \left(\left(\prod_i \overset{\nabla}{A}_i \setminus (\overset{\nabla}{T}_i \cup \{\kappa\}) \right)^m \right)$ dont la couche i_0 est différente de $\kappa^{m'}$ ($X \setminus X'$ est stable sous l'action de \mathcal{B} car inclus dans X et car ${}^\omega \kappa^\omega$ est une configuration quiescente pour la couche i_0). On peut poursuivre ce raisonnement pour chaque couche et on a alors la propriété attendue énoncée par le lemme. \square

La proposition suivante constitue un outil de comparaison entre automates cellulaires obtenus comme produits cartésiens d'automates du type \mathcal{Z}_p . Lorsqu'un automate cellulaire de ce type en simule un autre, on peut associer injectivement aux particules du simulé des particules du simulateur au moins aussi complexes.

Proposition 47. *Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} des automates de la forme $\mathcal{Z}_{a_1} \times \cdots \times \mathcal{Z}_{a_p}$ et $\mathcal{Z}_{b_1} \times \cdots \times \mathcal{Z}_{b_q}$ (respectivement) où $a_i \in \mathbb{N}_+$, $b_j \in \mathbb{N}_+$. Si $\mathcal{A} \leq \underline{\leq} \mathcal{B}$ alors il existe une injection $\phi : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, q\}$ telle que pour tout i (avec $1 \leq i \leq p$) on a l'inégalité $a_i \leq b_{\phi(i)}$.*

Démonstration. Tout d'abord, d'après le lemme 10, il existe $m, m', t, t' \in \mathbb{N}_+$ tels que $\mathcal{A}^{<m,t,0>} \leq \underline{\leq} \mathcal{B}^{<m',t',0>}$ à travers la coloration $\varsigma : X \rightarrow A^m$ et avec $X \subseteq B^{m'}$. Considérons alors l'ensemble \mathfrak{E} des configurations pour l'automate $\mathcal{Z}_{a_1} \times \cdots \times \mathcal{Z}_{a_p}$ de la forme

$${}^\infty \mathfrak{E} P_1 \mathfrak{E}^{l_1} P_2 \mathfrak{E}^{l_2} \dots \mathfrak{E}^{l_{p-1}} P_p \mathfrak{E}^\infty$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= (E, \dots, E), \\ l_i &\in \mathbb{N}_+ \text{ et } l_i > m \text{ (avec } 1 \leq i \leq p-1), \\ P_i &= \left\{ \underbrace{(E^{|w|+2}, \dots, E^{|w|+2})}_{i-1}, M_0 \underbrace{Ew}_{1}, \underbrace{(E^{|w|+2}, \dots, E^{|w|+2})}_{p-i} \right\}, w \in U_{a_i}. \end{aligned}$$

Comme toute configuration de ce type est telle que chaque couche i (avec $0 \leq i \leq p$) ne contient qu'une particule du type S_i , on peut obtenir une configuration de \mathcal{Z}_s par application de $\Psi_{S_{a_i}}$ (définie au lemme 8) sur chaque couche i . On considère alors $c \in \Psi_{S_{a_1}} \times \cdots \times \Psi_{S_{a_p}}(\mathfrak{E})$ et $d \in (B^{m'})^{\mathbb{Z}}$ telle que $\overline{\varsigma^{-1}}(d) = \mathbf{o}_m^{-1}(c)$. Intuitivement, la configuration c est constituée de p zones disjointes telles que dans la zone i ($1 \leq i \leq p$), une T_{a_i} -particule effectue un enchaînement périodique de a_i zigzags sans empiéter sur les zones voisines.

Soit $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, q\}$ l'ensemble des couches de \mathcal{B} où l'état κ n'apparaît pas lorsque l'on considère le diagramme espace-temps $\text{Diag}_{\mathcal{B}^{<m',t',0>}}(d)$. Comme le comportement de $\mathcal{A}^{<m,t,0>}$ sur c est périodique et que les cellules qui changent d'état périodiquement sont limitées à une zone finie et qu'en dehors de cette zone la configuration c est uniforme, on peut supposer sans perte de généralité pour la suite que d est telle que toute couche n'appartenant pas à \mathcal{J} est égale à ${}^\omega \kappa^\omega$. Ainsi, comme un changement d'état dans $\text{Diag}_{\mathcal{B}^{<m',t',0>}}(d)$ ne peut avoir lieu qu'au voisinage d'une cellule dont une couche (qui appartient nécessairement à \mathcal{J}) contient une particule, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{Z}$, si $((\mathcal{A}^{<m,t,0>})^n(c))(z)$ contient une particule alors il existe z' avec $\|z' - z\|_\infty \leq r_{\mathcal{B}}$ tel que $((\mathcal{B}^{<m',t',0>})^n(d))(z')$ contient une particule dans une couche de \mathcal{J} . Réciproquement, comme d'après le lemme 10 un mot de A^m sans particule et ne contenant pas κ ne peut être représenté via ς que par un mot de X sans particule, si $((\mathcal{B}^{<m',t',0>})^n(d))(z')$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et $z' \in \mathbb{Z}$) contient une particule (nécessairement dans une couche de \mathcal{J}) alors il existe $z \in \mathbb{Z}$ avec $\|z' - z\|_\infty \leq r_{\mathcal{B}}$ tel que $((\mathcal{A}^{<m,t,0>})^n(c))(z)$ contient une particule. De plus, comme une particule d'un automate cellulaire \mathcal{Z}_p ne peut disparaître sans générer un état κ (définition 51) et que chaque couche de \mathcal{J} ne peut contenir plus d'une particule (lemme 8), on en déduit que la trajectoire de l'unique particule (si elle existe) de chaque couche de \mathcal{J} reproduit la trajectoire d'une même particule de $\mathcal{A}^{<m,t,0>}$ sur c à au plus $r_{\mathcal{B}}$ cellules près. Pour c bien choisie (*i.e.* telle que tous les « zigzags » générés dans $\text{Diag}_{\mathcal{A}^{<m,t,0>}}(c)$ sont d'amplitude strictement supérieure à $r_{\mathcal{B}}$), on peut ainsi garantir qu'une T_{b_j} -particule de \mathcal{B} ($1 \leq j \leq q$) qui correspond au sens ci-dessus à une T_{a_i} -particule de \mathcal{A} dans c ($1 \leq i \leq p$) effectuée dans $\text{Diag}_{\mathcal{B}^{<m',t',0>}}(d)$ un enchaînement de a_i zigzags : elle a la propriété \mathcal{P}_{a_i} . Par la proposition 46 page 122, on en déduit que $b_j \geq a_i$ et la propriété est montrée. \square

Grâce à cette propriété, on peut maintenant illustrer les effets du produit cartésien sur certains automates à travers les deux corollaires suivants. Le premier exprime que l'automate cellulaire $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ peut être à une distance finie arbitrairement grande de \mathcal{A} .

Corollaire 13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, il existe un automate cellulaire \mathcal{A} tel que $\overrightarrow{d}_{\preceq}(\mathcal{A}, \mathcal{A} \times \mathcal{A}) \geq n$ où \preceq est l'une des relations \preceq_{\square} ou \preceq_{\triangleleft} .*

Démonstration. En considérant $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_{n+1}$, on a pour tout $i \leq n$ les relations $\mathcal{A} \square \mathcal{Z}_{n+1} \times \mathcal{Z}_i \square \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, $\mathcal{Z}_{n+1} \times \mathcal{Z}_i \succ_{\triangleleft} \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \succ_{\triangleleft} \mathcal{Z}_{n+1} \times \mathcal{Z}_i$ d'après la proposition 47. Le corollaire en découle. \square

Ce second corollaire montre qu'itérer l'opération de produit cartésien sur un même automate cellulaire peut engendrer une chaîne infinie.

Corollaire 14. *Il existe un automate cellulaire \mathcal{A} telle que la suite $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\mathcal{A}_n = \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_n$ est strictement croissante pour \preceq_{\square} et \preceq_{\triangleleft} .*

Démonstration. Il suffit de poser $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_p$ et la proposition 47 permet de conclure. \square

Ce corollaire 14 invite naturellement à se demander quelle peut être la limite de la suite $(\mathcal{A}_n)_n$ ainsi construite lorsqu'elle est croissante. Nous proposons ci-après une famille de constructions qui, à partir d'un automate cellulaire \mathcal{A} quelconque, fournissent des majorants naturels pour la suite $(\mathcal{A}_n)_n$.

4.3.2 Métronomes

Ces constructions reposent sur l'existence d'un certain type d'automates cellulaires qui sont capables de maintenir un régime cyclique de durée arbitrairement grande dans lequel un certain type d'information — dite information de synchronisation — apparaît périodiquement dans toutes les cellules à la fois, et jamais à d'autres instants dans aucune cellule. Ces automates sont de plus tels que si leur comportement à partir d'une certaine configuration initiale ne suit pas ce régime, alors il est en un certain sens détectable. On peut les voir comme des « métronomes » ajustables (car la longueur du cycle peut être choisie en fonction de la configuration initiale) et fiables (car soit leur comportement suit un régime cohérent, soit il s'en écarte fortement par diffusion d'une information signalant l'incohérence).

Définition 52. *Soient $T_1, \dots, T_p \in \mathbb{Z}$ (avec $p \in \mathbb{N}_+$) et $T = \sum_i T_i$. Un automate cellulaire \mathcal{H} est un (T_1, \dots, T_p) -métronomie s'il possède un état envahissant $\kappa_{\mathcal{H}} \in H$ et s'il existe une surjection $\pi_H : H \rightarrow \{0, 1, \dots, p\}$ telle que $\pi_H(\kappa_{\mathcal{H}}) = 0$ et, $\forall c \in H^{\mathcal{R}}$, on a l'alternative suivante :*

- (i). *le régime est cohérent et cyclique : $\exists n, t_0 \in \mathbb{N}$ tels que $n + T > 0$ et $\forall z \in \mathcal{R}, \forall t \in \mathbb{N}$ on a pour tout $i, 1 \leq i \leq p$ (voir figure 4.4) :*

$$(\mathcal{H}^t(c))(z) \in \pi_H^{-1}(i) \Leftrightarrow t \equiv t_0 + \sum_{1 \leq j < i} T_j + (i-1)n \pmod{pn + T};$$

- (ii). *le régime est cohérent et infini (ou limite) : $\forall t \in \mathbb{N}, \exists i_t \in \{0, 1, \dots, p\}, \forall z \in \mathcal{R} : (\mathcal{H}^t(c))(z) \in (\pi_H^{-1}(i_t) \setminus \{\kappa_{\mathcal{H}}\})$ de plus $t \neq t' \Rightarrow 0 \in \{i_t, i_{t'}\}$;*

- (iii). *le régime est incohérent : $\forall z \in \mathcal{R}, \exists t_z \in \mathbb{N}, \forall t \geq t_z : (\mathcal{H}^t(c))(z) = \kappa_{\mathcal{H}}$.*

Pour une configuration c en régime cohérent, un instant $t \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathcal{R}$ on a $(\mathcal{H}^t(c))(z) \in \pi_H^{-1}(\{1, \dots, p\})$ est appelé un instant de synchronisation de c . De plus, dans le cas (i), n est appelé la caractéristique du régime cyclique de c . On note enfin $M_T(\mathcal{H})$ l'ensemble des caractéristiques de régime possibles pour \mathcal{H} .

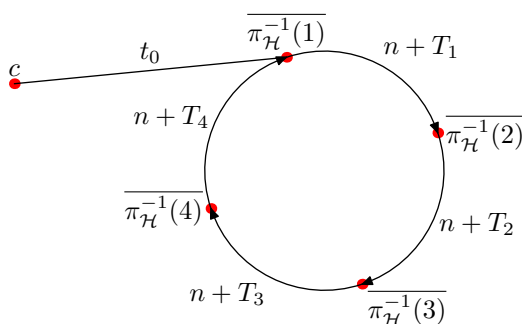


FIG. 4.4: Fonctionnement d'un automate métronome sur la configuration c en régime cohérent cyclique (cas (i) de la définition 52 avec ici $p = 4$).

Intuitivement, le régime d'un métronome est cohérent si l'état envahissant n'apparaît pas et si toute information de synchronisation (formellement un état de $\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(\{1, \dots, p\})$), lorsqu'elle apparaît, apparaît toujours uniformément sur tout le réseau. Le régime cohérent limite peut être vu comme un régime cyclique de caractéristique infinie : il y a au plus une apparition de toute information de synchronisation car il faut un temps infini pour atteindre la synchronisation suivante. Ainsi, la caractéristique principale d'un métronome est que toute configuration donne lieu à un régime cohérent ou bien entraîne l'apparition d'un état envahissant.

Cette définition reprend, sous une forme renforcée et plus facile à exploiter dans la suite, une propriété très étudiée dans la littérature [64, 56] connue sous le nom de *ligne de fusiliers*. Dans sa version stricte, la propriété de la ligne de fusiliers pour un automate cellulaire \mathcal{A} correspond à l'existence de 3 états $\{g, s, f\} \subseteq A$ (pour « général », « soldat » et « feu ») tels qu'il existe une fonction $\tau_{\mathcal{A}} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}_+$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\tau_{\mathcal{A}}(n)}(\infty(gs^n g)^\infty) &= \infty f^\infty, \\ \forall t < \tau_{\mathcal{A}}(n) : \mathcal{A}^t(\infty(gs^n g)^\infty) &\in (A \setminus \{f\})^{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Dans [35], K. Imai et K. Morita généralisent cette condition en autorisant un ensemble F d'états pour jouer le rôle de f . On a alors la propriété de la ligne de fusiliers généralisée dans laquelle les deux lignes ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\tau_{\mathcal{A}}(n)}(\infty(gs^n g)^\infty) &\in \infty F^\infty, \\ \forall t < \tau_{\mathcal{A}}(n) : \mathcal{A}^t(\infty(gs^n g)^\infty) &\in (A \setminus F)^{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

K. Imai et K. Morita construisent alors un automate cellulaire \mathcal{A}_0 réversible ayant la propriété de la ligne de fusiliers généralisée² (avec une fonction $\tau_{\mathcal{A}_0}$

²Il est facile de voir (comme montré dans [35]), qu'un automate cellulaire réversible ne peut pas avoir la propriété de la ligne de fusiliers stricte : pour n bien choisi, deux configurations c et c' de la forme $\infty(Gs^n G)^\infty$ et telles que $c = \sigma_z(c')$ (avec $\|z\|_\infty \leq n$) mènent à la même configuration ∞F^∞ ce qui contredit l'injectivité.

égale à $n \mapsto 3n$). La proposition suivante s'appuie sur cet automate pour construire des métronomes non-universels.

Proposition 48. *Pour tout $T_1, \dots, T_p \in \mathbb{Z}$, il existe un automate cellulaire \mathcal{H} non \preceq_{\subseteq} -universel qui constitue un (T_1, \dots, T_p) -métronome tel que $3\mathbb{N}_+ \cap M_\tau(\mathcal{H})$ est infini.*

Démonstration. Pour simplifier, on ne détaille la construction que dans le cas $p = 1$ et $T_1 = 0$ (le cas général s'obtient sans difficulté à partir de celui-ci par dédoublement des états en plusieurs copies qui s'enchaînent si $p > 1$ et ajout éventuel d'états de temporisation pour $T_i \neq 0$). On construit à partir de \mathcal{A}_0 un automate cellulaire \mathcal{B}_0 de rayon $r_{\mathcal{B}_0} = \max(r, r')$ (en notant $r = r_{\mathcal{A}_0}$ et $r' = r_{\mathcal{A}_0^{-1}}$) sur l'alphabet $B_0 = A_0 \times A_0 \times \{0, 1\}$ défini par

$$\delta_{\mathcal{B}_0}((a_{-r_{\mathcal{B}_0}}, a'_{-r_{\mathcal{B}_0}}, b_{-r_{\mathcal{B}_0}}), \dots, (a_{r_{\mathcal{B}_0}}, a'_{r_{\mathcal{B}_0}}, b_{r_{\mathcal{B}_0}})) = \begin{cases} (\mathcal{A}_0(a_{-r}, \dots, a_r), \mathcal{A}_0^{-1}(a'_{-r'}, \dots, a'_{r'}), \chi(a_0, b_0)) & \text{si } b_0 = 1, \\ (\mathcal{A}_0^{-1}(a_{-r'}, \dots, a_{r'}), \mathcal{A}_0(a'_{-r}, \dots, a'_r), \chi(a'_0, b_0)) & \text{si } b_0 = 0, \end{cases}$$

où $\chi(a, b)$ vaut $1 - b$ si $a \in F$ et b sinon. Intuitivement, sur les configurations telles que la couche d'alphabet $\{0, 1\}$ est uniforme égale à b , \mathcal{B}_0 effectue une transition de \mathcal{A}_0 sur la première des couches associées à A_0 et une transition de \mathcal{A}_0^{-1} sur l'autre si $b = 1$ (et inversement si $b = 0$). De plus, le sens de progression du temps est inversé en même temps que la couche $\{0, 1\}$ lorsqu'un signal de synchronisation (un état de F) apparaît sur la première (resp. seconde) couche A_0 lorsque $b = 1$ (resp. $b = 0$).

Pour faire de \mathcal{B}_0 un métronome, on lui ajoute un état envahissant κ qui est produit à chaque fois que l'une des vérifications suivantes échoue :

- (i). la couche $\{0, 1\}$ doit être uniforme ;
- (ii). les états de F , lorsqu'ils apparaissent dans l'une ou l'autre des couches A , doivent apparaître uniformément sur tout le réseau ;
- (iii). un état de F peut uniquement apparaître dans la première couche A (resp. seconde) si la couche $\{0, 1\}$ vaut 1 (resp. 0).

L'automate \mathcal{B} ainsi construit vérifie les propriétés de la définition 52.

Supposons que \mathcal{B} soit \preceq_{\subseteq} -universel et considérons un automate cellulaire \mathcal{U} \preceq_{\subseteq} -universel sans état envahissant : précisément, quel que soit le voisinage (valide) choisi pour la représentation syntaxique de \mathcal{U} , cet automate est sans état envahissant. Par le théorème 14, il existe des paramètres $m \in \mathcal{R}^+$, $t \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathcal{R}$ tels que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}^{<m, t, z>}$. Or, dans une telle simulation, aucun état de $B^{[m]} \setminus B_0^{[m]}$ ne peut apparaître par choix de \mathcal{U} . La simulation a donc lieu sur des configurations de \mathcal{B}_0 dont la couche $\{0, 1\}$ est toujours uniforme : \mathcal{U} est donc injectif par construction de \mathcal{B}_0 ce qui contredit son universalité (proposition 35). \square

Le lemme suivant donne un schéma d'utilisation des métronomes pour construire des automates qui tirent partie de leur « fiabilité ». En effet il montre que si un automate cellulaire contient une couche qui est un métronome, toutes les simulations qu'il peut effectuer sont, sous certaines conditions, telles que toutes les configurations de la couche métronome suivent un régime cohérent commun.

Lemme 11. *Soit \mathcal{H} un (T_1, \dots, T_p) -métronome associé à la surjection π_H et \mathcal{A} un automate cellulaire qui possède un état envahissant² et tel que $\mathcal{H} \leq \mathcal{A}$ à travers la coloration $\varsigma : A \rightarrow H$. Si \mathcal{B} est un automate cellulaire sans état envahissant tel que $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}^{<m,t,z>}$ (avec $m \in \mathcal{R}^+$, $t \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathcal{R}$) à travers la coloration $\varsigma' : X \subseteq A^{[m]} \rightarrow B$ alors il existe $i \in \{0, \dots, p\}$ tel que $X \subseteq (\varsigma^{-1}(\pi_H^{-1}(i) \setminus \{\kappa_{\mathcal{H}}\}))^{[m]}$. De plus, toutes les configurations appartenant à $\bar{\varsigma}(\mathbf{o}_m(X^{\mathcal{R}}))$ partagent les mêmes instants de synchronisation.*

Démonstration. Tout d'abord, en notant $\kappa_{\mathcal{A}}$ l'état envahissant de \mathcal{A} , on a nécessairement $\varsigma^{-1}(\kappa_{\mathcal{H}}) = \{\kappa_{\mathcal{A}}\}$. Ensuite, s'il existe $u \in X$ contenant un état $\kappa_{\mathcal{A}}$, alors $\kappa_{\mathcal{A}}^{[m]} \in X$ (par stabilité de X pour $\mathcal{A}^{<m,t,z>}$) et $\varsigma'(\kappa_{\mathcal{A}}^{[m]})$ est un état envahissant pour \mathcal{B} , ce qui contredit les hypothèses sur \mathcal{B} . On en déduit que $X \subseteq (\varsigma^{-1}(H \setminus \{\kappa_{\mathcal{H}}\}))^{[m]}$. Supposons alors, pour $i \in \{0, \dots, p\}$, qu'il existe $u \in X \cap ((\pi_H \circ \varsigma)^{-1}(i))^{[m]}$ et $v \in X \setminus ((\pi_H \circ \varsigma)^{-1}(i))^{[m]}$, et considérons une configuration c de la forme ${}^\infty uv {}^\infty$ puis $d = \bar{\varsigma}(\mathbf{o}_m(c))$. La configuration d de \mathcal{H} ne peut pas vérifier la condition (ii) ni la condition (i) de la définition 52 puisque par choix de u et v il existe $z_1, z_2 \in \mathcal{R}$ tels que $\pi_H(d(z_1)) \neq i$ et $\pi_H(d(z_2)) = i$. Donc d vérifie la condition (iii) et on en déduit que X contient $\kappa_{\mathcal{A}}^{[m]}$, ce qui contredit l'inclusion $X \subseteq (\varsigma^{-1}(H \setminus \{\kappa_{\mathcal{H}}\}))^{[m]}$ montrée ci-dessus.

Enfin, si l'on considère $d, d' \in X^{\mathcal{R}}$ et les configurations correspondantes pour \mathcal{H} , $c = \bar{\varsigma}(\mathbf{o}_m(d))$ et $c' = \bar{\varsigma}(\mathbf{o}_m(d'))$, alors les temps de synchronisation de c et c' sont nécessairement les mêmes. En effet, dans le cas contraire, toute configuration c_+ telle que $\mathfrak{d}(c, \sigma_{z_1}(c_+)) \leq \epsilon_1$ et $\mathfrak{d}(c', \sigma_{z_2}(c_+)) \leq \epsilon_2$ finirait par engendrer un état $\kappa_{\mathcal{H}}$ pour des valeurs de z_1, z_2, ϵ_1 et ϵ_2 bien choisies (d'après la définition 52 et par continuité et commutation avec les décalages de \mathcal{H}) or une telle configuration c_+ peut être réalisée (pour certaines valeurs des paramètres $z_1, z_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ compatibles avec les choix précédents) sous la forme $\bar{\varsigma}(\mathbf{o}_m(d_+))$ pour une certaine configuration $d_+ \in X^{\mathcal{R}}$: le comportement de $\mathcal{A}^{<m,t,z>}$ sur d_+ engendrerait l'apparition de l'état $\kappa_{\mathcal{A}}^{[m]}$ ce qui est exclu. \square

4.3.3 Produits limites

En s'appuyant sur le découpage temporel fourni par un automate métronome, on peut construire une partition du réseau \mathcal{R} en un nombre fini

²L'état envahissant de \mathcal{A} est associé à un voisinage complet. Autrement dit \mathcal{A} est tel que toute cellule à distance inférieure à $r_{\mathcal{A}}$ d'une cellule qui est dans l'état prend à son tour l'état envahissant.

(disons p) de sous-réseaux, tous identiques à translation près et isomorphes à \mathcal{R} . On peut alors faire agir un automate cellulaire \mathcal{A} en parallèle et de façon indépendante sur chacun de ces sous-réseaux : tout se passe donc comme si un produit cartésien de p copies de \mathcal{A} agissait sur le réseau initial.

Pour simplifier, nous nous restreignons ci-dessous aux automates cellulaires \mathcal{A} de rayon 1. Si \mathcal{H} est un $(-1, -2, 2, 1)$ -métronome associé à la surjection π_H , on construit l'automate cellulaire $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ comme suit. Tout d'abord, $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ est de rayon $\max(r_{\mathcal{H}}, 3)$, et d'alphabet $Q_{\mathcal{A}, \mathcal{H}} = H \times A \times P \times \Phi \cup \{\kappa\}$ où κ est un état envahissant, $P = \{E\} \cup A \times \{\rightarrow, \leftarrow\}$ et

$$\Phi = \{\mathbf{s}_i : i \in \{1, \dots, p\}\} \cup \{\mathbf{l}_i : i \in \{1, \dots, p\}\} \cup \{\mathbf{r}_i : i \in \{1, \dots, p\}\}.$$

En l'absence de κ , son fonctionnement vérifie les propriétés suivantes :

- la couche associée à H reproduit le comportement de \mathcal{H} en remplaçant l'état envahissant de \mathcal{H} par κ ;
- les couches associées à A et Φ sont inertes tant que n'apparaît pas dans leur voisinage un état dont la valeur h sur la couche H vérifie $h \notin \pi_H^{-1}(0)$; de plus, la couche Φ doit toujours être de la forme ${}^\infty(\mathbf{s}_i \mathbf{l}_i \mathbf{r}_i)^\infty$ sinon un état κ est produit ;
- la couche P consiste en un jeu de particules qui peuvent se déplacer dans les deux directions (représentées par \rightarrow et \leftarrow) et transportent un état de A ; si cette couche ne contient pas une particule toutes les 3 cellules exactement et toutes progressant dans la même direction alors un état κ est généré.

En plus de ces propriétés, $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ a le comportement suivant lorsque les couches P et Φ sont bien formées (au sens ci-dessus) et lorsque \mathcal{H} est en régime cohérent cyclique de caractéristique n (cas (i) de la définition 52). La couche correspondant à A est découpée en macro-cellules de taille 3, chacune d'entre elles étant repérée dans la couche Φ par le mot $\mathbf{s}_i \mathbf{l}_i \mathbf{r}_i$. Si $n = 3k$, la macro cellule numéro j contient, dans l'ordre, une cellule pour son état courant (marquée dans Φ par un état \mathbf{s}_i), une cellule (marquée dans Φ par un état \mathbf{l}_i) pour l'état de sa voisine virtuelle de gauche, la macro-cellule numéro $j - k$, et une (marquée dans Φ par un état \mathbf{r}_i) pour sa voisine virtuelle de droite, la macro-cellule numéro $j + k$. Le réseau de macro-cellules est ainsi partitionné en k sous-réseaux indépendants. De plus, à chaque macro-cellule est associée une particule sur la couche P et toutes les particules se déplacent de façon synchrone selon un cycle en 4 phases contrôlé par le métronome \mathcal{H} : pendant chaque phase le déplacement des particules est constant et uniforme et le passage d'une phase $\phi \in \{1, 2, 3, 4\}$ du cycle à la suivante a lieu lorsque la couche associée à \mathcal{H} entre uniformément dans $\pi_H^{-1}(\phi)$. Du point de vue de la macro-cellule numéro j et avec des particules initialement alignées avec les marqueurs l_1 de la couche Φ , le cycle est le suivant (voir figure 4.5) :

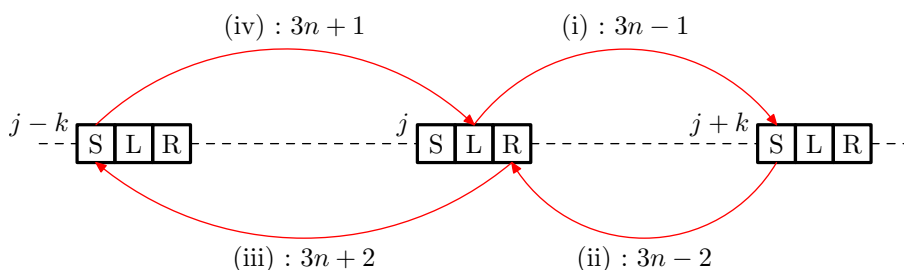


FIG. 4.5: Cycle de fonctionnement de $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ pour la macro-cellule numéro j .

- (i). aller lire l'état de la macro-cellule $j + k$ (distance $n - 1$)
- (ii). revenir et écrire l'information à l'emplacement prévu dans la macro-cellule j (distance $n - 2$);
- (iii). aller lire l'état de la macro-cellule $j - k$ (distance $n + 2$);
- (iv). revenir et écrire l'information à l'emplacement prévu dans la macro-cellule j (distance $n + 1$).

À la fin de ce cycle, la macro-cellule possède localement toutes les informations pour pouvoir effectuer une transition de \mathcal{A} . De cette façon, $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ simule le comportement de $\underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_k$, les k composantes de ce dernier étant juxtaposées dans l'espace sous la forme de k macro-cellules consécutives.

Enfin, en plus des vérifications propres à chaque couche évoquées plus haut, $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ effectue la vérification de cohérence suivante qui, lorsqu'elle échoue, engendre l'apparition d'un état κ : si la couche H d'une cellule entre dans un état de $\pi_H^{-1}(\phi)$ alors la couche Φ de la même cellule doit être dans un état parmi $\{\mathbf{s}_\phi, \mathbf{l}_\phi, \mathbf{r}_\phi\}$. Plus précisément, les particules de la couche P doivent toutes être alignées dans la couche Φ avec l'état \mathbf{l}_1 si $\phi = 1$, \mathbf{s}_2 si $\phi = 2$, \mathbf{r}_3 si $\phi = 3$ et \mathbf{s}_4 si $\phi = 4$. Notons que cette vérification combinée avec la vérification de la périodicité de la couche Φ donnée plus haut permet de vérifier que n (la caractéristique du régime cyclique de \mathcal{H}) est multiple de 3 comme supposé dans la description ci-dessus.

On a alors la proposition suivante qui fournit une construction générique que l'on peut voir comme un « produit cartésien limite » (*i.e.* la limite de l'opération de produit cartésien répétée finiment) et qui permet d'étendre la proposition 38 au sens où le produit cartésien limite d'un automate cellulaire \mathcal{A} est universel si et seulement si $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ est universel. Cette proposition s'appuie essentiellement sur la construction $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ ci-dessus, la proposition 48 et le lemme 11. Le coeur de la preuve consiste à montrer que, sous certaines conditions, l'interaction entre la couche H et les autres dans $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ peut être de

deux types seulement : soit la couche H finit par ne plus produire de synchronisation et les comportements de H et des autres couches deviennent indépendantes après un temps fini uniformément borné, soit la couche H produit des synchronisations cycliques compatibles avec la simulation décrite ci-dessus.

Proposition 49. *Il existe un métronome \mathcal{H} tel que pour tout automate cellulaire \mathcal{A} on a à la fois*

$$(i). \forall n \in \mathbb{N}_+ : \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_n \preceq_{\mathcal{H}} \overset{\times}{\mathcal{A}}, \text{ et}$$

$$(ii). \overset{\times}{\mathcal{A}} \text{ est } \preceq_{\mathcal{H}}\text{-universel si et seulement si } \mathcal{A} \text{ l'est.}$$

Démonstration. Soit \mathcal{H} un $(-1, -2, 2, 1)$ -métronome vérifiant les conditions de la proposition 48. Comme $M_\tau(\mathcal{H})$ contient des caractéristiques de régime cyclique multiples de 3 arbitrairement grandes, on peut effectuer la simulation de $\underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_n$ par $\overset{\times}{\mathcal{A}}$ décrite ci-dessus pour des valeurs de n arbitrairement grandes : on en déduit la première partie de la proposition.

Pour montrer la seconde partie, supposons que $\overset{\times}{\mathcal{A}}$ est $\preceq_{\mathcal{H}}$ -universel et considérons un automate cellulaire \mathcal{U} $\preceq_{\mathcal{H}}$ -universel sans état envahissant. D'après le théorème 14, il existe $m \in \mathcal{R}^+$, $t \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathcal{R}$ tels que $\mathcal{U} \preceq_{\mathcal{H}} \overset{\times}{\mathcal{A}}_{\langle m, t, z \rangle}$ à travers la coloration $\varsigma' : X \subseteq Q_{\mathcal{A}, \mathcal{H}}^{[m]} \rightarrow U$. Comme on a par construction $\mathcal{H} \triangleleft_{\mathcal{H}} \overset{\times}{\mathcal{A}}$, on déduit du lemme 11 qu'il existe $i \in \{0, \dots, 4\}$ tel que $X \subseteq (\varsigma^{-1}(\pi_H^{-1}(i) \setminus \{\kappa_{\mathcal{H}}\}))^{[m]}$. Autrement dit, la simulation de \mathcal{U} par $\overset{\times}{\mathcal{A}}$ est telle que la couche associée à H dans $\overset{\times}{\mathcal{A}}$ est toujours en régime cohérent de même nature (limite avec le cas (ii) de la définition 52 ou cyclique avec le cas (i)) avec des instants de synchronisation dans la couche H fixés uniformément pour toute la simulation.

Dans le cas d'un régime limite, on déduit de la construction de $\overset{\times}{\mathcal{A}}$ qu'il existe un temps t_0 fixé uniformément à partir duquel les couches associées à A et Φ restent identiques et la couche associée à P possède le comportement d'un décalage (car ses particules ne peuvent se rencontrer sans faire apparaître un état envahissant ce qui est impossible car \mathcal{U} ne possède pas d'état envahissant). De plus, à partir de t_0 , ces trois couches ont un comportement indépendant de la couche associée à H . Le comportement au delà du temps t_0 est donc celui d'un automate cellulaire \mathcal{B} de la forme $\sigma_z \times \sigma_{z'} \times \text{Id}$. Considérons alors un automate cellulaire \mathcal{U}_+ qui a exactement le comportement de \mathcal{U} sauf qu'il possède une couche d'états supplémentaire jouant le

rôle d'un compteur fini qui fige le comportement de \mathcal{U} tant qu'une valeur limite supérieure à t_0 n'est pas atteinte. D'après le théorème 14, il existe des paramètres m_+ , t_+ et z_+ tels que $\mathcal{U}_+ \preceq_{\preceq} \mathcal{U}^{\langle m_+, t_+, z_+ \rangle}$. En considérant les configurations sur lesquelles \mathcal{U} simule \mathcal{U}_+ et comme le compteur fini de \mathcal{U}_+ repousse l'activité de \mathcal{U} après un temps supérieur à t_0 , on déduit de ce qui précède que $\mathcal{U} \preceq_{\preceq} \mathcal{H} \times \mathcal{B}$. Or, comme ni \mathcal{H} , ni \mathcal{B} ne sont \preceq_{\preceq} -universels, il y a contradiction avec le choix de \mathcal{U} (par la proposition 38).

On est donc nécessairement dans le cas où toutes les configurations de $X^{\mathcal{R}}$ induisent sur la couche H un même régime cyclique de caractéristique fixée notée n . Par construction de $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$, on a nécessairement $n = 3k$ pour $k \in \mathbb{N}_+$ (sinon un état envahissant est généré) et la couche A simule un produit cartésien de \mathcal{A} . De plus, la couche Φ est périodique de période divisant t et la couche P est entièrement déterminée par les couches A et Φ . On en déduit que le comportement de $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}^{\langle m, t, z \rangle}$ sur $X^{\mathcal{R}}$ peut être simulé par $\mathcal{B}' = \mathcal{H} \times \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_k$ et donc que $\mathcal{U} \preceq_{\preceq} \mathcal{B}'$. Or \mathcal{B}' ne peut être \preceq_{\preceq} -universel si ni \mathcal{A} ni \mathcal{H} ne le sont (proposition 38) : il y a contradiction avec le choix de \mathcal{U} . \square

Nous utilisons plus loin cette construction pour obtenir des chaînes d'automates cellulaires Turing-universels, mais l'on peut déjà en donner une interprétation dans le cadre des dynamiques séquentielles. Étant donné un automate cellulaire \mathcal{A} avec un type de particule T , la construction $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ permet de contraindre \mathcal{A} à l'utilisation d'une seule T -particule et donc à un comportement de type séquentiel. Un produit cartésien de $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ est contraint à l'utilisation d'un nombre fini borné de T -particules. L'automate $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}^{\nabla}$ est lui contraint à n'utiliser qu'un nombre fini de T -particules sur chaque configuration, mais ce nombre est globalement non borné.

4.4 Pré-ordres et Turing-universalité

Cette section s'appuie sur tous les outils développés jusque là pour étudier la place des automates cellulaires Turing-universels dans les pré-ordres de simulation.

La proposition 42 affirme qu'un automate cellulaire \preceq_{\preceq} -universel est Turing universel. La réciproque est fautive comme le montre la proposition suivante. Ce résultat n'est pas étonnant car, intuitivement, une machine de Turing avec son unique tête ne peut reproduire le comportement d'automates cellulaires dans lesquels des changements d'état ont lieu simultanément.

ment en des positions éloignées du réseau de cellules. Notons cependant que la preuve n'est pas aussi immédiate lorsqu'il s'agit de comparer non pas une machine de Turing à un automate cellulaire \preceq_{\sqsubseteq} -universel, mais un automate cellulaire Turing-universel à un automate cellulaire \preceq_{\sqsubseteq} -universel. En effet, dans ce dernier cas, aucune garantie sur la présence d'une seule tête de calcul n'est donnée *a priori* : il faut en quelque sorte recréer cette garantie par les constructions développées en section 4.2.

Proposition 50. *Il existe des automates cellulaires Turing-universels non \preceq_{\sqsubseteq} -universels.*

Démonstration. Soit \mathcal{A} un automate cellulaire admettant un type de particule T avec pour automate cellulaire médium associé l'automate cellulaire identité et tel que $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ est Turing-universel.

Il est facile de vérifier que $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ est incapable de capturer une dynamique \mathcal{D} telle que pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, il existe un diagramme d de \mathcal{D} dans lequel toutes les cellules changent d'état toutes les k étapes : $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall z \in \mathcal{R}, d_{kn}(z) \neq d_{k(n+1)}(z)$. En effet, si $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ capture \mathcal{D} , il existe $t, t' \in \mathbb{N}_+, m, m' \in \mathcal{R}^+$ et $z \in \mathcal{R}$ tels que, pour tout diagramme $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ (où $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$), il existe $c \in (A^{\overset{\nabla}{[m]}})^{\mathcal{R}}$ et une surjection $\varsigma : A^{\overset{\nabla}{[m]}} \rightarrow Q^{[m']}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{o}_{m'}^{-1}(d_{nt'}) \preceq_{\varsigma} \left(\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T^{<m,t,z>} \right)^n (c).$$

En choisissant un diagramme \mathbf{d} satisfaisant la propriété de \mathcal{D} donnée plus haut pour $k = t'$, on force dans la configuration c correspondante la présence de plus d'une particule (car un changement d'état ne peut avoir lieu qu'au voisinage d'une particule étant donné que l'automate médium est l'identité).

Donc chaque cellule de $\overset{\nabla}{\mathcal{A}}_T$ devient constante après un certain temps d'après le lemme 8 ce qui contredit le choix de \mathbf{d} .

La proposition 42 permet de conclure car une telle dynamique peut être choisie cellulaire. \square

Nous allons montrer que les automates cellulaires Turing-universels sont en fait très dispersés dans les pré-ordres de simulation \preceq_{\sqsubseteq} et \preceq_{\sqsubseteq} : nous construisons comme ordre induit de chacun de ces pré-ordres un treillis infini d'automates cellulaires Turing-universels.

La construction proposée s'appuie essentiellement sur les produits cartésiens d'automates cellulaires du type \mathcal{Z}_p . En outre, tous les automates cellulaires de la collection que l'on va définir contiennent une couche qui assure leur universalité pour le calcul Turing. Cette couche, qui fait l'objet de la définition suivante, est de plus capable d'enchaîner un nombre non borné de « zigzags » ce qui la rend impossible à simuler par les \mathcal{Z}_p .

Définition 53. Soit T_{univ} une machine de Turing universelle d'ensemble d'états Q_T et d'alphabet de ruban Q_R . Soit $Q'_R = \{M_+, M, E\}$ et

$$Q'_T = \{\underset{i}{\overleftarrow{X}}, X \in Q'_R, i \in \{0, 1, 2\}\} \cup \{\underset{i}{\overrightarrow{X}}, X \in Q'_R, i \in \{0, 1, 2\}\}.$$

On définit alors l'automate cellulaire \mathcal{B}_u sur l'alphabet

$$B_u = Q_R \cup (Q_R \times Q_T) \cup Q'_R \cup Q'_T$$

de la façon suivante :

- sur les configurations d'alphabet $Q_R \cup Q_R \times Q_T$ qui ne comportent qu'une cellule dans un état de $Q_R \times Q_T$, \mathcal{B}_u mime le comportement de la machine T_{univ} (avec la représentation usuelle);
- pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ et tout $X \in Q'_R$, \mathcal{B}_u vérifie :

$$(i). \mathcal{B}_u(X, E, \underset{i}{\overleftarrow{E}}) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$$

$$(ii). \mathcal{B}_u(\underset{i}{\overleftarrow{E}}, E, X) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$$

$$(iii). \mathcal{B}_u(E, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, M) = \begin{cases} E & \text{si } i = 2, \\ \underset{0}{\overleftarrow{E}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(iv). \mathcal{B}_u(\underset{2}{\overleftarrow{E}}, M, X) = \underset{2}{\overleftarrow{M}}$$

$$(v). \mathcal{B}_u(E, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_+) = \underset{f(i)}{\overleftarrow{E}} \text{ avec } f(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 2, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(vi). \mathcal{B}_u(M_+, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, E) = \underset{2}{\overleftarrow{E}}$$

$$(vii). \mathcal{B}_u(M, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, E) = \begin{cases} \underset{1}{\overleftarrow{E}} & \text{si } i = 0 \\ E & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(viii). \mathcal{B}_u(E, M, \underset{1}{\overleftarrow{E}}) = \underset{1}{\overleftarrow{M}}$$

$$(ix). \mathcal{B}_u(X, E, \underset{i}{\overleftarrow{M}}) = \underset{0}{\overleftarrow{E}}$$

- \mathcal{B}_u est l'identité partout ailleurs.

$S_0 = R \times T \cup Q'_T$ est un type de particule pour \mathcal{B}_u . Pour finir, on pose

$$\mathcal{Z}_u = \underset{S_0}{\nabla} \mathcal{B}_u, Q_u = \underset{S_0}{\nabla} B_u \text{ et } T_u = \underset{S_0}{\nabla} S_0.$$

Comme on l'a évoqué plus haut, une particule de \mathcal{Z}_u peut enchaîner un nombre non borné de « zigzags ». Pour le vérifier, on définit U_u , ensemble des mots sur l'alphabet B_u de la forme $E^n M E^{n'}$.

Proposition 51. *Soit c une configuration de \mathcal{B}_u de la forme*

$${}^\infty EM_+ \xrightarrow[2]{EU_u^p} M_+ E^\infty.$$

On a alors $c \models_{\mathcal{B}_u, S_0} \mathcal{P}_p$.

Démonstration. Cela découle directement de la définition 53 (voir la figure 4.6). \square

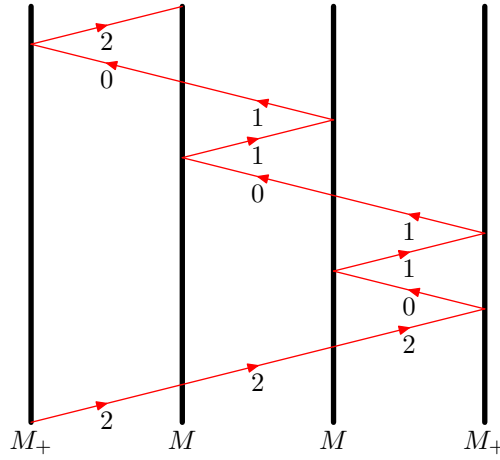


FIG. 4.6: La dynamique de \mathcal{B}_u sur ${}^\infty EM_+ \xrightarrow[2]{EU_u^p} M_+ E^\infty$ (ici $p = 2$)

On peut alors définir la collection d'automates cellulaires qui forme un treillis pour \preceq_{\sqsubseteq} . Pour toute suite finie décroissante $s = (n_1, \dots, n_p)$ d'éléments de \mathbb{N}_+ , on définit l'automate cellulaire $\mathcal{A}_s = \mathcal{Z}_u \times \mathcal{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{Z}_{n_p}$. La comparaison de deux automates cellulaires du type \mathcal{A}_s se réduit essentiellement à la comparaison des produits d'automates de la forme \mathcal{Z}_p qui les composent. La proposition suivante est une adaptation de la proposition 47 qui tient compte de l'ajout de \mathcal{Z}_u aux produits considérés.

Proposition 52. *Soient $s = (n_1, \dots, n_p)$ et $s' = (n'_1, \dots, n'_q)$ deux suites finies décroissantes d'éléments de $\mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$. On a*

$$\mathcal{A}_s \preceq \mathcal{A}_{s'} \Leftrightarrow p \leq q \text{ et } n_i \leq n'_i, \forall i, 1 \leq i \leq p,$$

où \preceq désigne l'une des simulations \preceq_{\sqsubseteq} ou \preceq_{\sqsubseteq} .

Démonstration. D'une part, si on a $p \leq q$ et $n_i \leq n'_i, \forall i, 1 \leq i \leq p$ alors $\mathcal{A}_s \sqsubseteq \mathcal{A}_{(n'_1, \dots, n'_p)}$ (puisque, pour tout i , $\mathcal{B}_{n_i} \sqsubseteq \mathcal{B}_{n'_i}$ et les constructions mises en jeu pour obtenir un automate du type de \mathcal{A}_s sont croissante vis-à-vis de \sqsubseteq par construction et d'après le lemme 8). De plus, il est clair que

$\mathcal{A}_{(n'_1, \dots, n'_p)} \sqsubseteq \mathcal{A}_{s'}$ (car les automates \mathcal{Z}_p possèdent un état quiescent), donc $\mathcal{A}_s \sqsubseteq \mathcal{A}_{s'}$.

Il suffit de montrer que $\mathcal{A}_s \preceq_{\sqsubseteq} \mathcal{A}_{s'}$ si et seulement si $p \leq q$ et $n_i \leq n'_i$, avec $\forall i, 1 \leq i \leq p$. La preuve est similaire à celle de la proposition 47 : la seule différence est que l'on considère cette fois un ensemble de configuration \mathfrak{E} de la forme

$$\infty \mathfrak{E} P_u \mathfrak{E}^{l_0} P_1 \mathfrak{E}^{l_1} P_2 \mathfrak{E}^{l_2} \dots \mathfrak{E}^{l_{p-1}} P_p \mathfrak{E}^\infty$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= (E, \dots, E), \\ l_i &\in \mathbb{N}_+ \text{ et } l_i > m \text{ (avec } 0 \leq i \leq p-1), \\ P_u &= \{(M_+ \xrightarrow[2]{E^w} M_+, E^k, \dots, E^k), w \in U_{a_i} \\ &\text{et } k = |w| (\max_i n'_i + 1) + 5\}, \\ P_i &= \{(\underbrace{E^{|w|+2}, \dots, E^{|w|+2}}_{i-1}, M_0 \xrightarrow[1]{E^w}, \underbrace{E^{|w|+2}, \dots, E^{|w|+2}}_{p-i}), w \in U_{a_i}\}. \end{aligned}$$

On utilise alors exactement les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 47 en remarquant qu'avec l'ensemble \mathfrak{E} de configurations considérées ci-dessus, l'automate \mathcal{Z}_u dans le produit \mathcal{A}_s effectue un enchaînement de $\max_i n'_i + 1$ zigzags (voir proposition 51) donc seule une particule de \mathcal{Z}_u dans le produit $\mathcal{A}_{s'}$ peut reproduire cet enchaînement. Une fois cette association entre l'automate \mathcal{Z}_u de \mathcal{A}_s et l'automate \mathcal{Z}_u de $\mathcal{A}_{s'}$ établie, on peut poursuivre le raisonnement de la proposition 47 pour obtenir l'existence d'une injection $\phi : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, q\}$ vérifiant $n'_{\phi(i)} \geq n_i$ pour tout i , $1 \leq i \leq p$. \square

Théorème 15. *L'ensemble des \mathcal{A}_s muni de l'ordre \preceq (pour $\preceq \in \{\preceq_{\sqsubseteq}, \preceq_{\sqsubseteq\sqsubseteq}\}$) constitue un treillis distributif.*

Démonstration. C'est (à isomorphie près) le treillis des suites finies décroissantes d'élément d'un ensemble bien ordonné. \square

Ce treillis montre que l'on peut construire des automates cellulaires Turing-universels dans lesquels deux paramètres indépendants (le nombre de composantes de type \mathcal{Z}_p et le nombre maximal de zigzags que peut enchaîner une composante de ce type) peuvent être librement fixés. On en déduit l'existence des chaînes infinies incomparables² d'automates cellulaires Turing-universels extraits de ce treillis.

²Aucun élément de l'une des chaînes n'est capable de simuler un quelconque élément de l'autre chaîne.

Corollaire 15. *Il existe des chaînes infinies incomparables d'automates cellulaires Turing-universels.*

Démonstration. Il suffit de considérer la suite $(\mathcal{Z}_u \times \mathcal{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ et la suite $(\mathcal{Z}_u \times \underbrace{\mathcal{Z}_2 \times \cdots \times \mathcal{Z}_2}_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ et la proposition 52 permet de conclure. \square

Avec les constructions établies en section 4.3, on peut formuler un résultat d'un autre type qui illustre aussi d'une certaine façon la dispersion des automates cellulaires Turing-universels dans le pré-ordre $(\mathbf{AC}, \preceq_{\underline{\subseteq}})$: il existe une chaîne d'automates cellulaires Turing-universels de longueur $\omega \cdot 2$ donc il existe un automate cellulaire Turing-universel à distance infinie du haut et du bas de ce pré-ordre.

Corollaire 16. *Il existe une chaîne pour $\preceq_{\underline{\subseteq}}$ de longueur $\omega \cdot 2$ d'automates cellulaires Turing-universels.*

Démonstration. Il suffit de choisir $\mathcal{A}_n = \underbrace{\mathcal{Z}_u \times \cdots \times \mathcal{Z}_u}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_+$ et

$\mathcal{A}_\omega = \prod_{\mathcal{H}} \mathcal{Z}_u$ pour la première moitié de la chaîne (d'après les propositions 52 et 49), puis le corollaire 10 page 108 assure l'existence de la deuxième moitié car $\prod_{\mathcal{H}} \mathcal{Z}_u$ n'est pas $\preceq_{\underline{\subseteq}}$ -universel (proposition 49). \square

Perspectives

LES recherches menées au cours de notre thèse nous ont permis de progresser dans certaines voies déjà présentes dans la littérature (notamment les structures de pré-ordres de simulation), mais aussi de nous pencher sur des problématiques nouvelles. Nous présentons ici les directions qui nous semblent les plus intéressantes pour la poursuite de nos travaux, en essayant de formaliser à chaque fois des questions précises (plus ou moins ambitieuses) au coeur des problèmes envisagés.

Automates cellulaires typiques Une partie de nos travaux est consacrée à la caractérisation des propriétés macroscopiques des automates cellulaires typiques d'une certaine classe d'automates (ou de l'ensemble des automates cellulaires). En particulier nous avons montré que des choix simples dans la façon de générer un automate cellulaire au hasard permettent de garantir presque sûrement certaines propriétés par ailleurs indécidables : les automates cellulaires captifs sont presque tous intrinsèquement universels.

Si l'on adopte un instant le point de vue de la modélisation du monde réel, cette approche amène des résultats « positifs » qui contrastent fortement avec l'indécidabilité omniprésente dans les automates cellulaires, c'est à dire l'absence profonde de méthode de prédiction systématique et exacte des comportements. En effet, pour le modélisateur, connaître les propriétés typiques d'une classe d'automates cellulaires permet de limiter la recherche du « bon » modèle à un certain ensemble de candidats avec la garantie que les propriétés macroscopiques recherchées seront présentes dans la plupart d'entre eux.

Ceci motive l'étude de classes comme les automates cellulaires captifs, mais également la recherche des propriétés typiques des automates cellulaires en général. La première question qui se pose, au vu des résultats sur les automates captifs, est celle de la densité de l'universalité intrinsèque dans les automates cellulaires.

► *Quelle est la valeur de $\Delta_{AC,r}(\mathcal{P}_u)$ (si elle existe) ?*

Cette question est étroitement liée à l'étude de l'ensemble des sous-automates enfouis des automates cellulaires typiques. Nous avons montré qu'un automate cellulaire typique est localement sans structure (propositions 11 et 12), mais cela ne donne aucune information sur sa structure à différentes échelles, *i.e.* sur l'apparition éventuelle de sous automates enfouis associés à des paramètres de groupage non triviaux. Ce questionnement est au coeur de la compréhension du modèle des automates cellulaires car c'est une façon de se demander comment des structures spatiales peuvent apparaître dans le temps alors que le fonctionnement local, ou « immédiat », est totalement non structuré. Ils nous paraît important d'étudier les automates cellulaires typiques à l'égard de cette problématique et cela rejoint la question de la valeur de $\Delta_{AC,r}(\mathcal{P}_u)$, mais on peut également chercher à construire des automates cellulaires particuliers qui évitent un certain type de structure à toutes les échelles², voire toutes les structures non-triviales à toutes les échelles.

► *Existe-t-il un automate cellulaire \mathcal{A} tel que, pour tous paramètres m, t, z , on a $\mathcal{A}^{<m,t,z>} \notin \mathcal{P}_{\square}$?*

En dehors de l'universalité intrinsèque, l'observation de nombreux diagrammes espace-temps d'automates cellulaires captifs générés aléatoirement suggère qu'ils partagent presque tous des propriétés de nature dynamique qui les distinguent nettement des automates cellulaires quelconques tirés au hasard. Il s'agit selon nous de propriétés qui caractérisent le comportement de ces automates sur l'ensemble des configuration initiales (ou sur un ensemble de mesure 1) et non pas sur un sous-ensemble négligeable comme dans le cas des sous-automates enfouis.

► *Les automates captifs sont ils presque tous dans la classe \mathcal{T}_2 ? Et les automates cellulaires en général sont ils majoritairement dans la classe \mathcal{T}_3 ?*

Plus généralement, si le formalisme des sous-automates enfouis permet de capturer les comportements potentiels d'un automate cellulaire donné, c'est à dire ceux obtenus lorsqu'on se restreint à un certain ensemble de configurations initiales bien structurées, il reste à mieux comprendre comment certains sous-automates enfouis « émergent » à partir de presque toutes les configurations initiales.

Automates cellulaires captifs S'ils illustrent par plusieurs propriétés intéressantes notre étude des représentations syntaxiques, les automates cellulaires captifs constituent également une classe intéressante en soi. En effet,

²Dans [57], des résultats dans ce sens sont obtenus mais avec une notion de changement d'échelle restreinte.

la propriété prison (qui caractérise la classe) définit une contrainte « naturelle » sur la façon dont les automates cellulaires peuvent calculer : les états sont déplacés, dupliqués ou effacés, mais ne renferment aucune information composite. Les « calculs » effectués par automates cellulaires captifs reposent donc entièrement sur un codage de l'information dans l'agencement spatial des états. Ainsi, l'arité (*i.e.* l'espace dont dispose un automate pour le stockage local d'information) se présente comme un facteur déterminant pour les automates cellulaires captifs.

► *En dimension 1, quelle est l'arité minimale d'un automate cellulaire captif intrinsèquement universel ?*

Par ailleurs, comme nous l'avons vu, le théorème de Rice sur les ensembles limites n'est plus vérifié par les automates cellulaires captifs, notamment car la surjectivité devient une propriété de l'ensemble limite (et est décidable en dimension 1). Dans [42], J. Kari conjecture que la surjectivité est essentiellement la seule propriété de l'ensemble limite décidable (en dimension 1) à alphabet fixé. Les automates cellulaires captifs offrent un cadre naturel pour étudier cette question.

Enfin, nous avons montré que les automates cellulaires captifs réversibles étaient très contraints (ils possèdent un inverse captif et conservent l'alphabet des configurations). Cela pose naturellement la question de la décidabilité de cette propriété (en dimension 2) ainsi que de la surjectivité.

Structure des pré-ordres de simulation Nous avons vu que les relations de simulation fournissent un cadre formel rigoureux pour l'étude de notions de complexité d'une part et de notions d'universalité d'autre part. Mais elles induisent également une structure sur les automates cellulaires importante en soi. En effet, les structures de pré-ordre de simulation constituent selon nous les objets naturels sur lesquels fonder une étude formelle rigoureuse de la problématique de la classification des automates cellulaires, omniprésente dans la littérature. Une première approche, pour étudier ces pré-ordres, consiste à chercher quels type d'ordres induits elle renferment. Si les objets que l'on classe sont discrets, rien ne dit que les pré-ordres obtenus le sont également.

► *Est-ce qu'une relation parmi \preceq_{\square} , \preceq_{\triangleleft} , $\preceq_{\triangleleft\triangleleft}$ et \preceq_G possède un ordre induit dense ?*

Une autre question naturelle concernant les pré-ordres de simulation est leur hauteur, qui représente l'« étendue » maximale de complexité qu'il peut y avoir entre un automate cellulaire « simple » et un automate cellulaire « complexe ». Pour cela, on cherche à construire des chaînes croissantes d'automates cellulaires les plus longues possibles : nous avons construit une chaîne de longueur $\omega \cdot 2$ (par ailleurs constituée uniquement d'automates

Turing-universels) mais nous conjecturons que la hauteur des pré-ordres de simulation est bien plus importante. Cependant, l'obtention de telles chaînes repose sur des résultats négatifs (un certain automate est incapable d'en simuler un certain autre) souvent difficiles à obtenir. Nous envisageons alors deux pistes pour construire des chaînes croissantes « longues » :

- (i). G. Lafitte donne dans [49] une notion d'ordinal reconnaissable par automate cellulaire. En l'adaptant pour en faire un paramètre de complexité pour une certaine relation de simulation, on peut espérer transférer la taille des ordinaux reconnus dans la longueur de certaines chaînes d'automates cellulaires croissantes pour ce paramètre.
- (ii). la construction $\overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}$ peut être itérée à partir d'un automate cellulaire sans jamais atteindre la classe maximum dans les pré-ordres de simulation. On peut alors considérer des chaînes de la forme

$$\mathcal{A}, \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \dots, \overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}_1}, \overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}_1} \times \overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}_1}, \dots, \overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}_2}, \dots, \overset{\times}{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}_n}, \dots$$

Dans ce deuxième type de constructions, toute la difficulté consiste à obtenir un automate métronome (ou un automate qui a la propriété de *la ligne de fusiliers*) dont on peut garantir le comportement à partir de toutes les configurations initiales. Ce type de questions n'a, à notre connaissance, pas (ou peu) été étudiée dans la littérature. Outre la construction de chaînes, l'obtention d'un automate métronome « contrôlé » dans tous les aspects de sa dynamique a des conséquences importantes pour la relation de simulation \preceq_{\square} . En effet, nous avons démontré (mais ce résultat ne figure pas dans cette thèse) que s'il existe un automate cellulaire métronome dont la complexité limite (paramètre $\rho_{\mathfrak{h}}$) correspond à la classe C d'une hiérarchie admissible \mathfrak{h} , alors il existe un automate cellulaire intrinsèquement universel dont la complexité limite correspond à la même classe C dans la hiérarchie \mathfrak{h} .

► *Quelle est la complexité limite minimale d'un automate cellulaire intrinsèquement universel ? Nous conjecturons qu'il existe un automate cellulaire intrinsèquement universel au langage limite récursif donc que $\rho_{\mathfrak{h}}$ n'est pas un paramètre de complexité pour \preceq_{\square} .*

Pour revenir sur la structure des préordres de simulation, notre étude de la construction $\rho_{\#}$ transformant tout automate cellulaire en automate cellulaire captif suggère que la structure du pré-ordre \preceq_{\square} sur l'ensemble des automates cellulaires peut être plongée dans un sous-ensemble de classes d'équivalence qui contiennent chacune un automate cellulaire captif. Si ce

sous-ensemble est strict, on peut voir un tel plongement comme une propriété d'auto-similarité.

► *Peut-on injecter la structure ordonnée (AC, \preceq) dans (ACc, \preceq) pour une certaine relation de simulation (par exemple \preceq_{\square}) ?*

► *Quelles sont les classes d'équivalence associées à \preceq_{\square} (ou d'autres relation de simulation) qui ne contiennent pas d'automate cellulaire captif ?*

Universalités L'effort de formalisation de la notion de simulation mené progressivement dans la littérature a permis de distinguer nettement la (ou les) notion(s) d'universalité pour le calcul Turing d'un autre type d'universalité, plus fort, intrinsèque au modèle des automates cellulaires et parfaitement formalisé : les classes formant un maximum global dans les pré-ordres de simulation. Jusqu'alors, l'étude de ce type de notions était limitée à l'universalité intrinsèque telle que nous l'avons définie au chapitre 1. En introduisant de nouvelles relations de simulation, nous avons été amenés à étudier plusieurs notions d'universalité. Il reste à mieux caractériser celles-ci (notamment la \preceq_{\square} -universalité), comment elles diffèrent de l'universalité intrinsèque (associée à \preceq_{\square}), et à exhiber des automates (s'ils existent) qui sont universels pour une simulation sans l'être pour une autre.

Par ailleurs, la relation \preceq_{\triangleleft} diffère fondamentalement des autres car elle dépend du comportement des automates cellulaires sur l'ensemble des configurations initiales et non pas seulement un sous-ensemble comme c'est le cas pour \preceq_{\square} , \preceq_{\square} ou $\preceq_{\mathcal{G}}$. En cela, l'existence éventuelle d'un automate \preceq_{\triangleleft} -universel revêt une signification particulière : il s'agirait d'un automate qui, sur toute configuration initiale, reproduit simultanément le comportement de tous les automates cellulaires (chacun à partir d'une certaine configuration initiale). Ainsi, si l'on considère l'automate \preceq_{\triangleleft} -universel sur une configuration initiale univers (par exemple sur une configuration initiale aléatoire pour la mesure uniforme), alors le diagramme espace-temps obtenu contient, à coloriage et changement d'échelle près, toutes les portions finies de tous les digrammes espace-temps possibles de tous les automates cellulaires.

► *Existe-il un automate cellulaire \preceq_{\triangleleft} -universel ? Les automates cellulaires \preceq_{\square} -universels sont-ils tous intrinsèquement universels ? Les automates cellulaires qui capturent toutes les dynamiques cellulaires sont-ils \preceq_{\square} -universels ? Nous conjecturons que les trois réponses sont négatives.*

Si l'on cherche à mieux caractériser la ou les notions d'universalité associées à des pré-ordres de simulations, il est notamment important de disposer de conditions nécessaires. Dans cette optique, le paramètre de complexité

de communication nous semble constituer un outil intéressant pour montrer que certains automates ne sont pas universels. Alors que la borne supérieure sur le nombre d'états nécessaire à un automate cellulaire unidimensionnel de rayon 1 a été récemment réduite à 6 états par N. Ollinger [74], on ne sait toujours pas si 2 états sont suffisants.

► *Quelles sont les valeurs du paramètre ρ_C pour les automates 54, 110 ou 73 dans la notation de S. Wolfram pour les automates cellulaires unidimensionnels à 2 états de rayon 1 ?*

Il nous paraît également intéressant, pour mieux comprendre la notion dans son ensemble, de considérer des notions d'universalité « relatives », c'est à dire des automates qui sont des maximums « locaux », capables de simuler tous les automates d'une certaine classe. Par exemple, il existe des automates réversibles « universels » pour les automates cellulaires réversibles. Une notion similaire d'universalité « relative » peut être envisagée pour la classe des automates cellulaires surjectifs.

► *L'idéal des automates cellulaires surjectifs est-il principal pour certaines simulations lorsque le réseau est \mathbb{Z} ?*

Une réponse positive à cette question fournirait un exemple de différence de structure dans les pré-ordres de simulation suivant la dimension du réseau de cellules.

Index des auteurs

- Albert, J. 25, 45
Amoroso, S. 37
- Banks, E. R. 25, 30
Béal, M.-P. 11
Berger, R. 37
Berlekamp, E. R. 45
Bernardi, V. 37
Berstel, J. 14
Boccaro, N. 44
Boyle, M. 10
- Cattaneo, G. vi, 8
Cervelle, J. vi, 8, 21
Choffrut, C. 53
Conway, J. H. 45
Cook, M. 35, 113
Čulik, II, K. 20, 25, 36, 39, 45
- Davey, B. A. 99
Durand, B. 19, 25, 29, 35–37, 44, 86
Durand-Lose, J. 44, 105
Dürr, C. 92, 94, 95, 113
- Fiorenzi, F. 19
Fischer, P. C. vi
Formenti, E. vi, 8, 20, 37, 44, 49, 64
- Goles, E. 39, 44
Grange, A. 44
Gromov, M. 19
- Guy, R. K. 45
- Harao, A. M. M. vii, ix, 44, 45
Hedlund, G. A. vi, 10, 17, 18, 64
Hopcroft, J. 91, 92
Hurd, L. P. 20, 39, 92, 114
- Ibarra, O. H. 53
Imai, K. 105, 128
- Jech, T. 100
- Kari, J. vi, vii, 20, 37, 38, 57, 143
Kim, M. 53
Kimura, M. vi, 18
Kitchens, B. 10
Kůrka, P. vi, viii, 17, 18, 20–23, 25, 49, 91
Kushilevitz, E. 92
- Lafitte, G. 144
Lind, D. 10, 12, 13, 86
- Maass, A. vi, 20, 39, 91
Machí, A. 19
Marcus, B. 10, 12, 13, 86
Margara, L. vi, 8
Martin, B. vi, 25, 29
Martin, O. vii, 43
Martinez, S. 39
Maruoka, A. vi, 18

- Mazoyer, J. vi, 8, 25, 32, 37, 43, 128, 142
Mignosi, F. 19
Minsky, M. L. 35, 36
Moore, E. F. vi, 19, 128
Moran, S. 53
Moreira, A. 44
Morita, K. 105, 128
Morse, M. 10, 12
Myhill, J. vi, 19
- Nagel, K. 44
Neumann, J. V. vi, 30
Nisan, N. 92
Nivat, M. 14
- Odlyzko, A. vii, 43
Ollinger, N. vii, x, 15, 25, 28–31, 38, 69, 79, 89, 101, 104, 105, 107, 109, 146
- Pachl, J. 20, 36, 39
Parry, W. 13
Patt, Y. 37
Perrin, D. 14
Pivato, M. vi, 43
Poupet, V. 79
Priestley, H. A. 99
- Rapaport, I. vii, 25, 37, 43, 89, 92, 94, 95, 113, 142
Reimen, N. vi
Restivo, A. 14
Róka, Z. vii, 1, 3, 25, 29, 35, 36, 44, 79, 86
- Schreckenber, M. 44
Smith III, A. R. vi
Sutner, K. 37
- Terrier, V. vi, 32
Theyssier, G. 47, 52, 58, 92, 94, 95, 113
Tisseur, P. vi
- Ullman, J. 91, 92
- Čulík II, K. 53
Varouchas, G. 37
- Weiss, B. 13, 14
Williams, S. 14
Wolfram 113
Wolfram, S. vi, vii, 43
- Yao, A. C. 92
Yassawi, R. vi, 43
Yu, S. 20, 36, 39

Bibliographie

- [1] ALBERT, J., AND ČULIK, II, K. A simple universal cellular automaton and its one-way and totalistic version. *Complex Systems 1* (1987), 1–16. {25, 45}
- [2] AMOROSO, S., AND PATT, Y. Decision Procedures for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tesselation Structures. *Journal of Computer and System Sciences 6* (1972), 448–464. {37}
- [3] BANKS, E. R. Universality in cellular automata. In *Eleventh Annual Symposium on Switching and Automata Theory* (Santa Monica, California, 1970), IEEE. {25, 30}
- [4] BÉAL, M.-P. *Codage Symbolique*. Masson, 1993. {11}
- [5] BERGER, R. The undecidability of the domino problem. *Mem. Amer. Math Soc. 66* (1966). {37}
- [6] BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J. H., AND GUY, R. K. *Winning Ways for your Mathematical Plays*, vol. 2. Academic Press, 1982. chapter 25. {45}
- [7] BERNARDI, V., DURAND, B., FORMENTI, E., AND KARI, J. A new dimension sensitive property for cellular automata. In *Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* (2004). {37}
- [8] BERSTEL, J., AND PERRIN, D. *Theory of Codes*. Academic Press, New York, 1985. {14}
- [9] BOYLE, M., AND KITCHENS, B. Periodic points for onto cellular automata. *Indagationes Mathematicae. New Series 10*, 4 (1999), 483–493. {10}
- [10] CATTANEO, G., FORMENTI, E., MARGARA, L., AND MAZOYER, J. A new shift-invariant metric on S^Z inducing a non-trivial topology. In *Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'97)* (Aug. 1997), I. Privara and P. Rusika, Eds., vol. 1295 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag. {8}

- [11] CATTANEO, G., AND MARGARA, L. Topological definitions of chaos applied to cellular automata dynamics. In *Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* (1998). {vi}
- [12] CERVELLE, J. *Complexité structurelle et algorithmique des pavages et des automates cellulaires*. PhD thesis, Université de Provence, 2002. {vi, 8, 21}
- [13] CHOFFRUT, C., AND CULIK II, K. On real-time cellular automata and trellis automata. *Acta Informatica* 21, 4 (1984). {53}
- [14] COOK, M. Universality in elementary cellular automata. *Complex Systems* 15 (2004), 1–40. {35, 113}
- [15] ČULIK, II, K., PACHL, J., AND YU, S. On the limit sets of cellular automata. *SIAM Journal on Computing* 18, 4 (Aug. 1989), 831–842. {20, 36, 39}
- [16] DAVEY, B. A., AND PRIESTLEY, H. A. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 2002. {99}
- [17] DURAND, B. *Automates cellulaires : réversibilité et complexité*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, février 1994. {19}
- [18] DURAND, B., FORMENTI, E., AND RÓKA, Z. Number-conserving cellular automata I : Decidability. *Theoretical Computer Science* 299 (2003). {44}
- [19] DURAND, B., FORMENTI, E., AND VAROUCHAS, G. On undecidability of equicontinuity classification for cellular automata. In *DMCS* (2003), pp. 117–128. {37}
- [20] DURAND, B., AND RÓKA, Z. *Cellular Automata : a Parallel Model*, vol. 460 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1999, ch. The game of life : universality revisited., pp. 51–74. {25, 29, 35, 36, 86}
- [21] DURAND-LOSE, J. *Automates cellulaires, automates à partitions et tas de sable*. PhD thesis, Université Bordeaux I, juin 1996. {44}
- [22] DURAND-LOSE, J. Intrinsic universality of a 1-dimensional reversible cellular automaton. In *Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science* (1997). {105}
- [23] DÜRR, C., RAPAPORT, I., AND THEYSSIER, G. Cellular automata and communication complexity. *Theoretical Computer Science* 322 (2004). {92, 94, 95, 113}
- [24] FIORENZI, F. Cellular automata and strongly irreducible shifts of finite type. *Theoretical Computer Science* 299 (2003). {19}
- [25] FISCHER, P. C. Generation of primes by a one-dimensional real-time iterative array. *Journal of the ACM* 12, 3 (July 1965), 388–394. {vi}

- [26] FORMENTI, E. *Automates cellulaires et chaos : de la vision topologique à la vision algorithmique*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, octobre 1998. {vi, 20, 49, 64}
- [27] FORMENTI, E., AND GRANGE, A. Number conserving cellular automata II : Dynamics. *Theoretical Computer Science* 304 (2003). {44}
- [28] GOLES, E., MAASS, A., AND MARTINEZ, S. On the limit set of some universal cellular automata. *Theoretical computer science* 110, 1 (1993), 53. {39}
- [29] GROMOV, M. Endomorphisms of symbolic algebraic varieties. *J. Europ. Math. Soc.* 1 (1999), 109–197. {19}
- [30] HARAO, A. M. M. Computation universality of one-dimensional reversible (injective) cellular automata. *The trans. of the EICE E* 72, 6 (1989). {vii, ix, 44, 45}
- [31] HEDLUND, G. A. Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical Systems. *Mathematical Systems Theory* 3, 4 (1969), 320–375. {vi, 17, 18, 64}
- [32] HOPCROFT, J., AND ULLMAN, J. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison Wesley, 1979. {91, 92}
- [33] HURD, L. P. Formal language characterizations of cellular automaton limit sets. *Complex Systems* 1 (1987), 69–80. {20, 39, 92, 114}
- [34] IBARRA, O. H., KIM, M., AND MORAN, S. Sequential machine characterizations of trellis and cellular automata and applications. *SIAM Journal on Computing* 14 (1985). {53}
- [35] IMAI, K., AND MORITA, K. Firing squad synchronization problem in reversible cellular automata. *Theoretical Computer Science* 165 (1996). {128}
- [36] IMAI, K., AND MORITA, K. A computation-universal two-dimensional 8-state triangular reversible cellular automaton. *Theoretical Computer Science* 231, 2 (2000). {105}
- [37] JECH, T. *Set theory*. Academic Press, New York, 1978. {100}
- [38] KARI, J. The Nilpotency Problem of One-dimensional Cellular Automata. *SIAM Journal on Computing* 21 (1992), 571–586. {37}
- [39] KARI, J. Reversibility and Surjectivity Problems of Cellular Automata. *Journal of Computer and System Sciences* 48, 1 (1994), 149–182. {vi, 37}
- [40] KARI, J. Rice’s theorem for the limit sets of cellular automata. *Theoretical Computer Science* 127 (1994), 229–254. {vii, 20, 38}
- [41] KARI, J. Representation of reversible cellular automata with block permutations. *Mathematical Systems Theory* 29, 1 (1996), 47–61. {vi}

- [42] KARI, J. Theory of cellular automata : A survey. *Theoretical Computer Science* 334 (2005). {**57, 143**}
- [43] KÛRKA, P. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 17 (1997), 417–433. {**vi, viii, 20–23**}
- [44] KÛRKA, P. *Topological and symbolic dynamics*. Société Mathématique de France, 2003. {**17, 18, 20, 23, 25, 49**}
- [45] KÛRKA, P., AND MAASS, A. Limit Sets of Cellular Automata Associated to Probability Measures. *Journal of Statistical Physics* 100, 5-6 (2000), 1031–1047. {**vi, 20**}
- [46] KÛRKA, P., AND MAASS, A. Realtime subshifts. *Theoretical Computer Science* 237 (2000). {**91**}
- [47] KÛRKA, P., AND MAASS, A. Stability of subshifts in cellular automata. *Fundamenta Informaticae* 52, 1-3 (Septembre 2002), 143–155. {**20**}
- [48] KUSHILEVITZ, E., AND NISAN, N. *Communication Complexity*. Cambridge University Press, 1997. {**92**}
- [49] LAFITTE, G. *Calculs et infinis*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, décembre 2002. {**144**}
- [50] LIND, D., AND MARCUS, B. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, 1995. {**10, 12, 13, 86**}
- [51] MACHI, A., AND MIGNOSI, F. Garden of eden configurations for cellular automata on cayley graphs of groups. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 6 (1993). {**19**}
- [52] MARTIN, B. A universal cellular automaton in quasi-linear time and its S-m-n form. *Theoretical Computer Science* 123, 2 (1994), 199–237. {**25, 29**}
- [53] MARTIN, B. *Automates cellulaires, information et chaos*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, janvier 2001. {**vi**}
- [54] MARTIN, O., ODLYZKO, A., AND WOLFRAM, S. Algebraic properties of cellular automata. *Communications in Mathematical Physics* 93 (1984), 219. {**vii, 43**}
- [55] MARUOKA, A., AND KIMURA, M. Condition for Injectivity of Global Maps for Tessellation Automata. *Information and Control* 32 (1976), 158–162. {**vi, 18**}
- [56] MAZOYER, J. On Optimal Solutions to the Firing Squad Synchronization Problem. *Theoretical Computer Science* 168 (1996), 367–404. {**128**}
- [57] MAZOYER, J., AND RAPAPORT, I. Additive cellular automata over Z_p and the bottom of (CA, \leq) . In *Mathematical Foundations of Computer Science* (1998), Lecture Notes in Computer Science, pp. 834–843. {**43, 142**}

- [58] MAZOYER, J., AND RAPAPORT, I. Inducing an Order on Cellular Automata by a Grouping Operation. In *Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science* (1998), Lecture Notes in Computer Science. {25}
- [59] MAZOYER, J., AND RAPAPORT, I. Global fixed point attractors of circular cellular automata and periodic tilings of the plane : undecidability results. *Discrete Mathematics* 199 (1999), 103–122. {37}
- [60] MAZOYER, J., AND REIMEN, N. A linear speed-up theorem for cellular automata. *Theoretical Computer Science* 101 (1992). {vi}
- [61] MAZOYER, J., AND TERRIER, V. Signals in one-dimensional cellular automata. *Theor. Comput. Sci.* 217, 1 (1999), 53–80. {vi, 32}
- [62] MINSKY, M. L. *Computation : Finite and infinite machines*. Prentice-Hall, 1967. {35, 36}
- [63] MOORE, E. F. Machine Models of Self-Reproduction. In *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* (1962), vol. 14, American Mathematical Society, pp. 17–33. {vi, 19}
- [64] MOORE, E. F. The firing squad synchronization problem. In *Sequential Machines - Selected Papers*, E. F. Moore, Ed. Addison-Wesley, 1964, pp. 213–214. {vi, 128}
- [65] MOREIRA, A. Universality and decidability of number-conserving cellular automata. *Theoretical Computer Science* 292 (2003). {44}
- [66] MOREIRA, A., BOCCARA, N., AND GOLES, E. On conservative and monotone one-dimensional cellular automata and their particle representation. *Theoretical Computer Science* 325 (2004). {44}
- [67] MORSE, M. Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.* 22 (1921), 84–110. {12}
- [68] MORSE, M., AND HEDLUND, G. A. Symbolic dynamics. *Amer. J. Math.* 3 (1936), 286–303. {10}
- [69] MYHILL, J. The Converse of Moore’s Garden-of-Eden Theorem. In *Proceedings of the American Mathematical Society* (1963), vol. 14, American Mathematical Society, pp. 658–686. {vi, 19}
- [70] NAGEL, K., AND SCHRECKENBERG, M. A cellular automaton model for freeway traffic. *J. Phys.* 2 (1992), 2221–2229. {44}
- [71] NEUMANN, J. V. *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, Urbana, Illinois, 1966. {vi, 30}
- [72] NIVAT, M. Transductions des langages de Chomsky. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 18 (1968), 339–456. {14}
- [73] OLLINGER, N. *Automates Cellulaires : structures*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, décembre 2002. {vii, x, 15, 25, 28–30, 79, 89, 101, 104, 105, 107, 109}

- [74] OLLINGER, N. The quest for small universal cellular automata. In *International Colloquium on Automata, Languages and Programming* (2002), Lecture Notes in Computer Science, pp. 318–330. {**25, 31, 146**}
- [75] OLLINGER, N. The intrinsic universality problem of one-dimensional cellular automata. In *Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science* (2003), Lecture Notes in Computer Science, pp. 632–641. {**25, 38, 69**}
- [76] PARRY, W. Intrinsic markov chains. *Trans. Amer. Math. Soc.* 112 (1964), 55–66. {**13**}
- [77] PIVATO, M., AND YASSAWI, R. Limit measures for affine cellular automata. *Ergodic Theory & Dynamical Systems* 22, 4 (2002), 1269–1287. {**vi, 43**}
- [78] POUPET, V. Simulating 3D cellular automata with 2D cellular automata. In *Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* (2004). {**79**}
- [79] RAPAPORT, I. *Inducing an Order on Cellular Automata by a Grouping Operation*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, juin 1997. {**vii, 89**}
- [80] RESTIVO, A. A note on renewal systems. *Theoretical Computer Science* 94 (1992). {**14**}
- [81] RÓKA, Z. *Cellular automata on Cayley graphs*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, 1994. {**vii, 1, 3, 79**}
- [82] RÓKA, Z. Simulations between cellular automata on cayley graphs. *Theoretical Computer Science* 225 (1999). {**25**}
- [83] SMITH III, A. R. Real-time language recognition by one-dimensional cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences* 6, 3 (June 1972), 233–253. {**vi**}
- [84] SUTNER, K. Classifying circular cellular automata. *Physica D* 45 (1990), 386. {**37**}
- [85] TERRIER, V. Language not recognizable in real time by one-way cellular automata. *Theoretical Computer Science* 156, 1–2 (1996), 281–287. {**vi**}
- [86] THEYSSIER, G. Captive cellular automata. In *Mathematical Foundations of Computer Science* (2004), Lecture Notes in Computer Science, pp. 427–438. {**47, 52, 58**}
- [87] THEYSSIER, G. How common can be universality for cellular automata? In *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science* (2005). {**52**}
- [88] TISSEUR, P. *Aspects ergodiques des automates cellulaires*. PhD thesis, Institut de Mathématiques de Luminy, 1999. {**vi**}

-
- [89] WEISS, B. Subshifts of finite type and sofic systems. *Monatshefte für Mathematik* 77 (1973), 462–474. {**13**, **14**}
- [90] WILLIAMS, S. Notes on renewal systems. *Proceedings of the American Mathematical Society* 110, 3 (1990), 851–853. {**14**}
- [91] WOLFRAM, S. Statistical mechanics of cellular automata. *Review of Modern Physics* 55 (1983). {**113**}
- [92] WOLFRAM, S. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D* 10 (1984), 1–35. {**vi**}
- [93] YAO, A. C. Some complexity questions related to distributive computing. In *ACM Symposium on Theory of Computing* (1979). {**92**}
- [94] ZUSE, K., Ed. *Rechnender Raum*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1969. {**v**}

Index

- alphabet, 3
- arité, 3
- automate cellulaire
 - \equiv , 4
 - additif, 43
 - captif, 52
 - classe de, 6
 - conservatif, 44
 - ensembliste, 45
 - équicontinu, 20
 - expansif, 22
 - nilpotent, 20
 - objet syntaxique, 3
 - partitionné, 44
 - permutif, 45
 - réversible, 18
 - sensible, 22
 - système dynamique, 18
- automate médium, 115
- automate quotient, 49
- coloration, 48
- complexité de communication, 93
- configuration, 3
 - périodique, 10
 - ultimement périodique, 10
 - univers, 11
- diagramme espace-temps, 3
- dynamique, 32
 - capture d'une, 32
 - cellulaire, 32
 - persistante, 33
 - séquentielle, 36
- décalage, 3
- ensemble limite, 20
- fonction globale, 3
- mot bloquant, 22
- métronomie, 127
- paramètre de complexité, 88
 - ρ_h , 90
 - ρ_C , 94
 - ρ_{\cup} , 89
 - $\rho_{\rightarrow \cup}$, 89
 - ρ_{dyn} , 90
 - ρ_{\leq}^{\uparrow} , 100
- particule, 114
- propriété, 6
 - caractérisée par ensemble limite, 38
 - croissante, 62
 - densité, 6
 - des ensembles limites, 38
 - décroissante, 62
 - non-triviale, 6
- rayon, 5
- règle locale, 3
- réseau, 3
- simulation
 - chaîne, 100
 - filtre, 99

- premier, 99
- principal, 99
- généralisée, 86
- idéal, 99
 - premier, 99
 - principal, 99
- pré-ordre, 87
- sous-automate, 26
- sous-automate enfoui, 27
- sous-shift, 10
 - complet, 10
 - de type fini, 13
 - irréductible, 12
 - langage, 11
 - ouverture, 13
 - par blocs, 16
 - positivement invariant, 25
 - sofique, 14
- système dynamique discret, 7
- topologie
 - \mathfrak{d} , 7
 - Cantor, 7
 - cylindre, 9
 - motif, 9
- translation, 3
- universalité
 - intrinsèque, 29
 - Turing, 35
 - \preceq_{\triangleleft} -universalité, 101
 - $\preceq_{\triangleleft\!\!\!-}$ -universalité, 101
- voisinage, 3
 - omnidirectionnel, 5
- état, 3
 - envahissant, 6
 - quiescent, 6