



**HAL**  
open science

# Sur la commande de systèmes non linéaires par gains robustes séquencés

Hael Khansah

► **To cite this version:**

Hael Khansah. Sur la commande de systèmes non linéaires par gains robustes séquencés. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2007. Français. NNT: . tel-00168054

**HAL Id: tel-00168054**

**<https://theses.hal.science/tel-00168054>**

Submitted on 24 Aug 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ■ Thèse

Préparée au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

En vue de l'obtention du Doctorat de l'Université Paul Sabatier - Toulouse III

Ecole doctorale : EDSYS

Spécialité : Automatique

Par **Hael KHANSAH**

Sur la commande de systèmes non linéaires par gains robustes  
séquencés

# ■ Thèse

Préparée au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

En vue de l'obtention du Doctorat de l'Université Paul Sabatier - Toulouse III

Ecole doctorale : EDSYS

Spécialité : Automatique

Par **Hael KHANSAH**

Sur la commande de systèmes non linéaires par gains robustes  
séquencés

Soutenue le 16 juillet 2007 devant le jury :

Jean Louis CALVET Président

Jérôme HARMAND Rapporteur

Mohamed M'SAAD: Rapporteur

Jean MIGNOT Examineur

Jacques BERNUSSOU Directeur de thèse

Vincent MAHOUT Co-Directeur de thèse

*A ma mère et mon père*

*A mes frères et mes sœurs*

# *Avant- Propos*

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes (LAAS-CNRS). Je remercie M. Raja CHATILA, directeur du LAAS, pour m'avoir accueilli dans ce laboratoire et pour avoir mis à ma disposition les ressources nécessaires à effectuer ce travail. Je remercie également Mme. Isabelle QUEINNEC, chargée de recherche au CNRS, pour m'avoir accueilli au sein de son groupe.*

*Je tiens à remercier M. J.L Calvet, professeur à l'université de Toulouse III, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury de thèse.*

*J'exprime ma reconnaissance envers M. Mohamed M'ssad, Professeur à l'école nationale supérieure d'ingénieurs de Caen, et M. Jerome Harmand, chargé de recherche à l'INRA, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail.*

*Je remercie vivement M. Jean Mignot, ingénieur de CNES, d'avoir accepté d'être l'examineur de ma thèse.*

*Je voudrais tout particulièrement remercier mes directeurs de thèse, M. Jacques Bernussou, directeur de recherche de CNRS, et M. Vincent Mahout, maître de conférence à l'INSA de Toulouse, pour leurs soutiens constants qu'ils ont pu m'apporter, pour leurs disponibilités, leurs gentillesse et leurs ouvertures d'esprit.*

*Enfin, je remercie sincèrement toutes les personnes du LAAS qui ont su et pu me supporter durant toutes ces années.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>I Outils généraux pour l'étude des systèmes dynamiques</b>	<b>9</b>
I.1 Introduction . . . . .	9
I.2 Stabilité . . . . .	10
I.3 Fonction de Lyapunov . . . . .	11
I.4 Inégalité Matricielle Linéaire-LMI . . . . .	15
I.5 Stabilité-Stabilisation des systèmes linéaires . . . . .	16
I.6 Synthèse $H_2$ . . . . .	18
I.7 Système incertain . . . . .	19
I.8 Retour de sortie . . . . .	21
I.9 Conclusion . . . . .	23
<b>II Cas des systèmes non linéaires continus : retour d'état</b>	<b>24</b>
II.1 Introduction . . . . .	24
II.2 Algorithme général . . . . .	25
II.2.1 Polyèdre . . . . .	25
II.2.2 Ellipsoïde . . . . .	26
II.2.3 Inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre . . . . .	28
II.2.4 Algorithme . . . . .	30
II.3 Approximation bornée en norme des non linéarités . . . . .	33
II.4 Synthèse de lois de commande par retour d'état avec performance $H_2$ . . . . .	35
II.5 Application au pendule . . . . .	38
II.5.1 Simulations avec performance $H_2$ . . . . .	39
II.5.2 Simulation avec localisation des pôles dans un disque . . . . .	43

II.6	Conclusion . . . . .	45
<b>III</b>	<b>Interpolation des gains et extension aux trajectoires continues</b>	<b>46</b>
III.1	Introduction . . . . .	46
III.2	Séquencement quasi LPV . . . . .	47
III.2.1	Principe . . . . .	47
III.3	Interpolation . . . . .	50
III.3.1	Principe . . . . .	50
III.3.2	Polynôme d'interpolation . . . . .	50
III.3.3	Exemple de simulation sur le pendule . . . . .	51
III.4	Extension à un trajectoire quelconque . . . . .	52
III.4.1	Rappels sur la théorie des systèmes plats . . . . .	53
III.4.2	Modélisation de la dynamique de l'erreur de suivi . . . . .	55
III.4.3	Application au cas du pendule . . . . .	56
III.5	Conclusion . . . . .	61
<b>IV</b>	<b>Cas des systèmes non linéaires continus : le retour de sortie</b>	<b>62</b>
IV.1	Introduction . . . . .	62
IV.2	Modification de l'algorithme dans le cas de retour de sortie dynamique . . . . .	63
IV.2.1	Commandes locales . . . . .	63
IV.3	Estimation d'état -Filtrage- . . . . .	68
IV.4	Application numérique : Pendule inversé . . . . .	71
IV.5	Conclusion . . . . .	74
<b>V</b>	<b>Cas des systèmes non linéaires discrets</b>	<b>75</b>
V.1	Introduction . . . . .	75
V.2	Modèles considérés et adaptation des outils LMI . . . . .	75
V.2.1	Modèle (certain et incertain) . . . . .	76
V.2.2	Lyapunov en discret . . . . .	76
V.2.3	Méthodes de synthèse . . . . .	79
V.3	Extension de l'algorithme et synthèse de lois de commande séquencées sur le cas discret . . . . .	85
V.4	Application numérique : Pendule inversé . . . . .	89
V.4.1	Simulation avec performance $H_2$ . . . . .	90

V.5	Conclusion . . . . .	92
<b>VI</b>	<b>Étude d'un cas complexe : la lévitation magnétique</b>	<b>93</b>
VI.1	Introduction . . . . .	93
VI.2	Modélisation . . . . .	94
VI.2.1	Équation électrique . . . . .	94
VI.2.2	Équation mécanique . . . . .	95
VI.2.3	Mise sous forme d'état . . . . .	95
VI.3	Propriétés du modèle . . . . .	96
VI.3.1	Valeur des paramètres . . . . .	96
VI.3.2	Points d'équilibre du système . . . . .	96
VI.3.3	Renormalisation du modèle . . . . .	96
VI.4	Approximation bornée en norme . . . . .	97
VI.4.1	Conditions de simulation . . . . .	99
VI.5	Retour d'état . . . . .	100
VI.5.1	Synthèse . . . . .	100
VI.5.2	Simulation en mode séquencé . . . . .	100
VI.5.3	Simulation en mode interpolé . . . . .	101
VI.6	Retour de sortie . . . . .	101
VI.6.1	Synthèse . . . . .	101
VI.6.2	Simulation en mode séquencé . . . . .	102
VI.7	Conclusion . . . . .	104
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>105</b>
	<b>Glossaire</b>	<b>108</b>
	<b>Références Bibliographiques</b>	<b>110</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>110</b>
	<b>Index</b>	<b>113</b>

# Introduction

Dans le domaine de l'Automatique réputé être celui de l'analyse et de la commande des systèmes dynamiques, l'étude des systèmes non linéaires constitue toujours un champ de recherche et investigations très riche. Ceci peut se comprendre par le fait que le monde réel n'est peuplé que d'objets non linéaires dont la maîtrise ne se satisfait pas toujours des simplifications ou des approximations qui souvent consistent à imposer l'hypothèse de linéarité. Cette tendance assez généralisée au début de l'Automatique trouvait son intérêt dans le fait que la théorie de l'analyse et de la commande dans le cadre des systèmes dynamiques linéaires a fait de rapides progrès jusqu'à sa maturité que l'on peut situer aux années quatre vingt avec les avancées significatives dans l'utilisation de la représentation d'état pour les systèmes multivariables surpassant alors les méthodes fréquentielles très performantes dans le cadre, un peu restrictif, monovarié. Dans le domaine non linéaire, il y a eu des progrès très importants qui ont été faits dans le traitement "algébrique" des problèmes de commande. Sans vouloir en faire une liste exhaustive on peut néanmoins citer quelques approches significatives dans cette voie en commençant par celles qui se basent sur des concepts et méthodes en géométrie différentielles telles celles de linéarisation entrée-état ainsi que linéarisation entrée-sortie (Isidori) qui par difféomorphisme (transformations non linéaires régulières) visent à établir des classes d'équivalence entre représentations non linéaires et représentations linéaires. Dans la même classe il est possible de citer l'approche par "platitude" (Fliess) qui par transformations dynamiques non linéaires propose d'établir certaines classes d'équivalence entre systèmes dynamiques non linéaires et systèmes statiques. Dans ce domaine d'approches "algébriques" il faut également citer celles qui de près ou de loin s'inspirent ou utilisent la théorie de Lyapunov et l'outil fonctions de Lyapunov. C'est le cas de nombre d'approches par passivité (Willems, Ortega...) qui par utilisation de fonctions scalaires (supply rate) visent à spécifier la propriété de dissipativité, son degré et ainsi caractériser la stabilité de systèmes dynamiques non linéaires. Egalement, peut être citée dans cette classe d'approches la technique de backstepping qui, s'appuyant sur une structuration chaînée série, propose une analyse et une synthèse séquentielle par utilisation de fonctions de Lyapunov lo-

cales. Ces méthodes algébriques présentent sans conteste des contributions importantes d'un point de vue recherche mais sont encore loin d'avoir obtenu une notoriété indiscutable au plan des applications industrielles. Ceci est certainement dû à leur relative complexité conceptuelle et mathématique mais également au fait qu'elle nécessitent une modélisation assez élaborée des systèmes afin que le bénéfice escompté par leur mise en œuvre ne soit pas déjà perdu du fait des approximations de modèle. Dans le contexte non linéaire les exigences de robustesse sont encore traitées de manière assez "heuristique" et la plupart du temps par extension des outils et méthodes développées dans le cadre linéaire, donc, en fait, de manière approximative. Nombre de ces méthodes s'appliquent à résoudre des problèmes de type boucle fermée non linéaire autour soit de points d'équilibre statiques (problèmes de régulation) soit de trajectoires dynamiques (problème de poursuite). Dans ce dernier cas se pose le problème de la définition même de la trajectoire à suivre ce qui peut résulter en la définition d'un problème de commande optimale. Les deux principales méthodes en Commande Optimale sont, bien sûr, à citer dans la classe des outils disponibles pour le traitement de problèmes de commande des systèmes dynamiques non linéaires. La méthode du Principe du Maximum de Pontriaguine est une méthode variationnelle basée sur une condition nécessaire d'optimalité qui, faisant intervenir des variables adjointes (parallèle des paramètres de Lagrange en optimisation dans  $R^n$ ) propose la résolution d'un problème dit "aux deux bouts" qui est, en général, le point le plus critique dans l'application de la méthode. De plus cette méthode fournit une commande de type boucle ouverte (sauf pour le cas particulier LQ où la commande optimale peut se traduire en terme de rétroaction d'état, le gain étant dérivé à partir de la solution d'une équation de Riccati). La programmation dynamique, basée sur le principe d'optimalité HJB (Hamilton-Jacobi-Bellmann), peut en théorie être vue comme fournissant une commande de type boucle fermée, toutefois le volume de calcul à effectuer a priori associé au volume des données à conserver en fait une méthode typiquement et pratiquement "hors ligne".

Dans le domaine des systèmes non linéaires il existe quelques approches assez bien reconnues et adoptées dans le domaine applicatif industriel et qui sont basées sur un traitement numérique important... où, en quelque sorte, la puissance du calcul (et ceci est une réalité qui s'impose de plus en plus) vient compenser la relative faiblesse des approches analytiques. Parmi celles-ci on peut citer en première ligne la méthode de commande prédictive qui est un moyen terme entre une commande boucle fermée et une commande boucle ouverte, la boucle fermée étant réalisée de manière intermittante, périodique en général, où l'état du système est mesuré. Cette information temps réel qui est utilisée pour calculer une commande optimale par rapport à un

critère et des contraintes (sur l'état, sur la commande) sur un horizon d'optimisation fournissant une commande de boucle ouverte dont seuls les premiers éléments seront appliqués au système à commander selon un horizon de commande (de longueur inférieure, bien sûr, à l'horizon d'optimisation). L'intérêt de la méthode réside en sa relative simplicité au plan conceptuel et au fait qu'il est possible d'intégrer des contraintes variées. Les inconvénients liés à l'approche prédictive sont, d'abord, ceux liés aux méthodes de commande optimale et à leur complexité calculatoire qui fait que leur domaine de prédilection est celui des systèmes à dynamique pas trop rapide, et ensuite, il est difficile d'assurer la convergence (stabilité) de tels schémas de commande. Assez récemment, la littérature dans le domaine a vu surgir des contributions parlant de commande prédictive robuste, les résultats présentant pour la plupart des schémas relativement complexes altérant le point positif de simplicité lié à l'approche de commande prédictive, élément essentiel qui confortait l'intérêt de la méthode au niveau des applications. Une autre approche pour la commande des systèmes linéaires qui est également intéressante pour le domaine applicatif est celle dite de "commande par séquençement de gains" où l'idée fondatrice consiste à représenter le modèle non linéaire initial par un ensemble de modèles simplifiés (en général, linéaires pour présenter la simplicité maximale), chaque élément de l'ensemble constituant une représentation approchée, approximée dans un domaine d'espace (de fonctionnement) du système non linéaire initial. La détermination du schéma de commande global passe par le calcul des commandes associées à chacun des modèles de la base de modèles (modèles locaux) et le choix d'une stratégie de commutation, de séquençement dans le temps entre ces diverses commandes locales. Il est clair que la tâche de calcul hors ligne de cette méthode est lourde, d'autant plus lourde que seront nombreux les modèles locaux, ce qui va, bien sûr, dans le sens d'une meilleure précision de représentation. Tout comme l'approche de commande prédictive (dont une différence notoire est de nécessiter une lourde charge de calcul en ligne) l'approche de séquençement de gains est conceptuellement simple (donc "aisément" applicable par des spécialistes de processus, l'inconvénient venant, en général, du fait que son utilisation fondamentalement à caractère heuristique ne peut garantir ni la convergence ni la stabilité de ce type de commande. L'objet principal du travail rapporté dans ce manuscrit est d'apporter quelques réponses aux problèmes énoncés ci-dessus et de proposer une approche constructive à base de commande robuste de systèmes linéaires incertains. Le plan du manuscrit est le suivant. Après l'introduction générale, le chapitre 1 constitue un rappel de tous les concepts, résultats généraux utiles pour la compréhension de ce qui suit. Y sont donnés des condensés sur la Méthode de Lyapunov, la programmation semi définie et les LMI (Linear Matrix Inequalities), leur utilisation pour la résolution de problèmes

de commande, commande robuste... Dans le chapitre deux sera présenté un algorithme général de commande par séquençement de gains qui permet la transition assurée (convergente) entre deux points de fonctionnement stationnaires. Dans le cas de la connaissance de l'état global, il est montré comment approximer le modèle non linéaire par un ensemble de modèles linéaires avec incertitude associée, puis effectuer la détermination des commandes locales à travers la résolution d'un problème couplant un problème d'optimisation du domaine local de stabilité à un problème de synthèse de commande robuste. L'illustration de l'approche se fait sur un exemple simple : le pendule inversé. Le chapitre trois traite du problème plus complexe mais plus pratique d'information partielle où la loi de commande doit se réaliser à partir de la sortie mesurée de même que la politique de séquençement, et c'est là que se pose le problème principal. Une solution est présentée qui propose un séquençement de lois de retour de sortie dynamiques obtenues à partir de problème LMI intégrant à la fois, comme précédemment, maximisation du domaine de stabilité local et robustesse, séquençement basé sur l'estimation des composantes non mesurées par résolution d'un problème de filtrage robuste. Il est alors possible, au moyen d'hypothèses relativement réalistes quant à la qualité de l'observation effectuée, de proposer, ici également, une approche à convergence sûre de la transition entre une position stationnaire d'équilibre initial et un point final visé. Le même processus simple sert pour l'illustration de l'approche. Les deux chapitres précédents portent sur une approche par séquençement "discret" pour lequel la commande se présente comme la combinaison d'un terme de boucle ouverte variant par sauts discontinus et d'un terme de boucle fermée assurant une commande de régulation basée sur l'écart entre la mesure instantanée et les équilibres locaux dans le voisinage desquels sont définis les modèles locaux. Le chapitre suivant, le quatrième, s'attache à tester quelques idées (plutôt heuristiques) pour un séquençement de type continu (apparenté à la commande quasi LPV) s'attachant à faire varier continuellement les paramètres du contrôleur en fonction du signal d'entrée boucle ouverte pris à variation continue, contrôleur qui assure une fonction de régulation. Le terme de commande de boucle ouverte est initialement choisi afin de décrire le sous espace des positions d'équilibre (extension directe du cas à séquençement discontinu mais l'extension peut être proposée pour solutionner un problème de poursuite classique, la trajectoire à suivre pouvant résulter d'une optimisation temps réel ou d'une planification effectuée à l'aide d'une des méthodes analytiques mentionnées en début de chapitre (linéarisation, platitude...). Le chapitre cinq se présente comme une extension des travaux précédents portant sur des systèmes dynamiques à temps continu au cas des systèmes dynamiques non linéaires à temps discrets. Il existe pour cette approche par séquençement de gains un parallélisme très grand pour les

deux domaines : temps continu et temps discret. Le chapitre est quasiment une traduction des relations données dans le domaine continu pour les exprimer en termes correspondant au cas discret. Le dernier et sixième chapitre se veut une illustration des résultats précédents à un exemple expérimental plus complexe ; un problème de lévitation magnétique. Enfin, naturellement, l'ouvrage se conclut par un chapitre de réflexions finales et de réflexions d'ouverture et prospective.

---

# Chapitre I

## Outils généraux pour l'étude des systèmes dynamiques

---

### I.1 Introduction

Le but du chapitre est d'exposer de manière succincte les principaux concepts, méthodes et outils, surtout, du contexte linéaire, dont il a été fait usage pour proposer une approche pour la commande des systèmes non linéaires. Le concept de base se trouve dans les travaux de Lyapunov, et la masse des études qui en ont résulté, pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques [KHA 92] [SLO 91] [VID 93]. En seront rappelés les grandes lignes, les résultats principaux ainsi que leur extension au cas des systèmes à modélisation incertaine dont les modèles seront adaptés pour assurer, par immersion ou recouvrement, une représentation des systèmes non linéaires adaptée à la mise en œuvre des méthodes et outils développés en commande robuste. Ces outils d'analyse et de synthèse seront essentiellement ceux dérivés de la programmation semi définie et à base d'inégalités matricielles linéaires .

## I.2 Stabilité

### Définition I.1

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{I.1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $f(x)$  est une application de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  dans  $\mathbb{R}^n$  suffisamment différentiable. Nous nous restreignons à la classe des systèmes non linéaires stationnaires, l'approche développée ultérieurement étant de mise en œuvre infiniment plus complexe dans le contexte instationnaire.

Soit  $x_0$  une position d'équilibre :

$$f(x_0) = 0$$

Cette position d'équilibre est dite

– stable si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que

$$\forall x(0) : \|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \varepsilon, \forall t > 0$$

– asymptotiquement stable si  $\exists \delta > 0$  tel que

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0$$

$\delta$  et  $\varepsilon$  sont des scalaires et  $\|\cdot\|$  représente une norme vectorielle. Ces définitions ont, en général, une portée semi globale et peuvent se trouver vérifiées dans un voisinage, pas forcément infiniment petit entourant le point  $x_0$ . On établit aisément les définitions correspondant à une vision globale dans le cas où elles se trouvent vérifiées dans tout l'espace  $\mathbb{R}^n$  (c.a.d  $\delta \rightarrow \infty$ ).

A ces définitions peut être ajoutée celle relative à la stabilité exponentielle (énoncée ci dessous dans son acception globale).

$x_0$  est exponentiellement stable (globalement) si  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n, \exists r > 0$  et  $\alpha > 0$  (scalaires) tels que

$$\forall t > 0 \quad \|x(t) - x_0\| \leq r e^{-\alpha t} \|x(0) - x_0\|$$

L'intérêt d'une telle définition est qu'étant relative à une notion de stabilité naturelle au domaine linéaire où asymptotique et exponentiel sont équivalents, elle permet l'évaluation de bornes supérieures au temps de réponse.

Sont rappelés ici quelques résultats préliminaires et fondamentaux dûs à Lyapunov (méthode dite indirecte où première méthode), résultats locaux (valides sûrement dans un domaine infiniment petit autour de  $x_0$ ) et basés sur la linéarisation (ici, possible par hypothèse) des expressions

non linéaires  $F(x)$ . Soit  $A_0$  la matrice jacobienne de  $F(x)$  au point  $x_0$

$$A_0 = \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} = \left\{ a_{ij}^0 = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right\} \quad (\text{I.2})$$

Alors, l'équilibre  $x$  est asymptotiquement (et même exponentiellement), stable si les valeurs propres de  $A_0$  sont toutes à partie réelle (strictement) négative.

$A_0$ , issue de la linéarisation, ne peut renseigner sur la stabilité locale dans le cas où elle n'est pas asymptotiquement stable mais simplement stable, c'est-à-dire, dans le cas où elle possède (au moins) une valeur propre à partie réelle nulle, toutes les autres étant à partie réelle négative. Ces cas sont qualifiés de cas critiques pour le système non linéaire et l'étude de la stabilité locale nécessite alors la prise en compte de termes de degré supérieur à un dans le développement de  $F(x)$  dans un voisinage de  $x_0$ .

### I.3 Fonction de Lyapunov

La seconde méthode de Lyapunov [ROT 93](aussi appelée méthode directe) a été inspirée de et constitue une extension de concepts dérivés du domaine de la mécanique qui statue que la stabilité de mouvement peut se déduire du fait que, le long des trajectoires, l'énergie présente dans le système (constituée par la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique) est décroissante. La notion de fonction de Lyapunov peut se voir comme une généralisation de cette notion de l'énergie au cas de systèmes dynamiques généraux.

Pour ce qui suit on va supposer que la position d'équilibre a été ramenée par changement de variable approprié à l'origine  $x_0 = 0$ .

#### Définition I.2

La fonction  $V : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction de Lyapunov candidate, si elle satisfait les deux conditions suivantes :

- $V(x)$  est continue et ses dérivées partielles  $\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , existent et sont continues.
- $V(x)$  est définie positive, soit  $V(x) > 0$ ,  $\forall x \neq 0$  et  $V(0) = 0$ .

D'après la seconde méthode de Lyapunov, la stabilité des systèmes non linéaires peut être caractérisée par l'existence, pour ces systèmes, d'une fonction de Lyapunov contractive le long des trajectoires stables.

#### Théorème I.1

Dans le voisinage  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , l'état d'équilibre  $x = 0$  est :

- localement stable, s'il existe une fonction de Lyapunov candidate,  $V : D \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D$ .
- localement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction de Lyapunov candidate,  $V : D \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D$ .

La surface  $V(x) = c$ , pour une valeur de  $c > 0$ , est appelée surface de Lyapunov ou surface de niveau. La visualisation de telles surfaces permet la compréhension intuitive du théorème précédent.

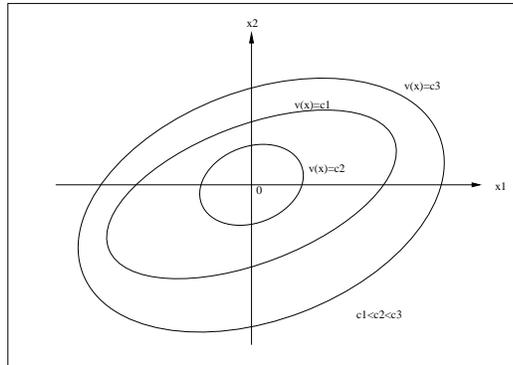


FIG. I.1 – Surfaces de niveau.

La condition  $\dot{V}(x) \leq 0$  implique que lorsqu'une trajectoire traverse une surface de Lyapunov  $V(x) = c$ , elle reste confinée à l'intérieur de l'ensemble  $\Omega_c = \{x : V(x) \leq c\}$ . Si  $V(x) < 0$ , la trajectoire se déplace vers une surface de Lyapunov interne avec une valeur de  $c$  plus petite, Au fur et a mesure que  $c$  décroît, la surface de Lyapunov  $V(x) = c$ , se rétrécit progressivement jusqu'à se transformer en l'origine. Si l'on sait seulement que  $\dot{V}(x) \leq 0$ , alors on pourra assurer que l'origine est stable, puisqu'il sera possible de confiner n'importe quelle trajectoire dans un voisinage de la taille  $\varepsilon > 0$  autour de l'origine.

Si  $D$  est égal à  $\mathbb{R}^n$ , il est possible de donner des conditions suffisantes de stabilité globale.

### Théorème I.2

L'état d'équilibre  $x = 0$  du système (I.1) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov candidate  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

- $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,
- $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ .

La seconde propriété signifie que la fonction de Lyapunov est radialement non bornée, de cette façon il est assuré que les surfaces de Lyapunov  $V(x) = c$  sont fermées assurant alors la convergence vers l'origine.

Les fonctions de Lyapunov peuvent être utilisées pour estimer un domaine d'attraction d'un état d'équilibre asymptotiquement stable, soit, déterminer des ensembles contenus à l'intérieur du domaine d'attraction. S'il existe une fonction de Lyapunov satisfaisant les conditions de stabilité asymptotique dans un domaine  $D$  et la surface de Lyapunov  $\Omega_c = \{x : V(x) \leq c\}$  est bornée et contenue dans  $D$ , alors toute trajectoire commençant dans  $\Omega_c$ , y restera et tendra vers l'équilibre tandis que  $t \rightarrow \infty$ . C'est-à-dire  $\Omega_c$  est une approximation du domaine d'attraction. Par la suite, nous allons formaliser ces idées à travers la définition d'un ensemble d'invariance positive.

### Définition I.3

Un ensemble  $\Gamma$ , contenant l'origine  $x = 0$ , est dit positivement invariant, relativement au système non linéaire (I.1), si pour toute condition initiale  $x(0) = x_0 \in \Gamma$ , les trajectoires  $s(t, x_0)$  du système vérifient  $s(t, x_0) \in \Gamma, \forall t \geq 0$ .

Maintenant, nous allons combiner les définitions de stabilité au sens de Lyapunov et la notion d'invariance positive.

### Définition I.4

L'ensemble non vide  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ , contenant l'état d'équilibre  $x = 0$  est

- un ensemble d'invariance positive et de stabilité pour le système non linéaire (I.1) relativement à l'équilibre  $x = 0$ , si  $\forall x_0 \in \Gamma$  on a  $s(t, x_0) \in \Gamma, \forall t \geq 0$ ,
- un ensemble d'invariance positive et de stabilité asymptotique pour le système non linéaire (I.1) relativement à l'équilibre  $x = 0$ , si  $\forall x_0 \in \Gamma$  on a  $s(t, x_0) \in \Gamma, \forall t \geq 0$ , et  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t, x_0) = 0$ .

D'après la seconde méthode de Lyapunov, la détermination de ces ensembles de stabilité et d'invariance positive, peut être effectuée à partir des fonctions de Lyapunov qui servent à montrer la stabilité. On peut alors donner le résultat suivant :

### Propriété I.1

Soit la fonction de Lyapunov candidate du système non linéaire (I.1). Alors le domaine compact défini par  $S(V, c) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c, c > 0\}$  est un domaine d'invariance positive et de

- stabilité si  $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in S(V, c)$ ,
- stabilité asymptotique si  $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in S(V, c) \setminus \{0\}$ .

### Remarque

La propriété d'invariance positive découle directement de la contractivité des fonctions de Lyapunov le long des trajectoires stables. Dans ce cas en effet, si à l'instant  $t_1$ , la trajectoire vérifie  $V(x(t_1)) = c_1$ , alors pour tout instant  $t_2 \geq t_1$ , elle vérifiera  $V(x(t_2)) = c_2 \leq c_1$ .

Nous avons vu qu'avec la seconde méthode de Lyapunov, on ne peut conclure à la stabilité asymptotique que si la dérivée de la fonction de Lyapunov est définie négative le long des trajectoires du système non linéaire. Il est néanmoins possible, dans certains cas où la dérivée est seulement semi définie négative, de conclure à la stabilité asymptotique. Pour cela, nous allons utiliser le principe d'invariance de La Salle.

### Théorème I.3

Soit  $\Gamma$  un ensemble compact positivement invariant et  $V : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction de Lyapunov candidate, telle que  $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Gamma$ . Définissons l'ensemble  $E$  des points où la dérivée est nulle  $E = \{x \in \Gamma : \dot{V}(x) = 0\}$ . Soit finalement  $M$  le plus grand ensemble invariant inclus dans  $E$ . Alors toute solution  $s(t, x_0)$  du système (I.1), initialisée dans  $\Gamma$ , converge vers  $M$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

### Remarque

- Il faut interpréter la notion «plus grande» au sens de la théorie d'ensemble, soit l'union de tous les ensembles invariants.
- Le principe de La Salle permet donc de conclure à la stabilité asymptotique de systèmes non linéaires dont la dérivée d'une fonction de Lyapunov est seulement semi-définie négative, pourvu que  $\dot{V}(x) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow s(t, x_0) = 0, \forall t \geq 0$ .

La méthode directe de Lyapunov est un outil puissant pour aborder l'étude de stabilité des points d'équilibre. Cependant, il est nécessaire de souligner deux inconvénients. Premièrement, il n'existe pas de procédure systématique pour construire la fonction de Lyapunov d'un système donné. Deuxièmement, les conditions de stabilité ne sont que suffisantes.

Toutefois, dans le cas des systèmes linéaires, la seconde méthode de Lyapunov est particulièrement intéressante puisque permettant d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes, exprimées tant en analyse qu'en synthèse, sous forme d'inégalités matricielles linéaires (acronyme LMI pour linear matrix inequality) pour lesquelles ont été développés et sont développés des algorithmes numériques efficaces.

## I.4 Inégalité Matricielle Linéaire-LMI

C'est une inégalité de la forme

$$L(x) = L_0 + \sum_{i=1}^m x_i L_i > 0 \quad (\text{I.3})$$

où  $x$  est un vecteur réel à  $m$  composantes et les matrices  $L_i$  sont symétriques, réelles de dimensions  $n$ .  $L_i$  sont des données,  $x$  est l'inconnue. L'inégalité signifie que la matrice symétrique  $L(x)$  doit être définie positive, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres (réelles) doivent être positives. Il est possible de traiter des inégalités non strictes du type  $L(x) \geq 0$  qui signifie que la matrice  $L(x)$  est semi-définie positive, c'est-à-dire, que certaines valeurs propres de  $L(x)$  peuvent être nulles.

Puisque le cône des matrices définies positives est convexe et que  $L(x)$  est une fonction affine de  $x$ , la contrainte  $L(x) > 0$  est une contrainte convexe en  $x$ . La référence encore incontournable en matière de LMI est l'ouvrage [BOY 94] où est fait un historique et un répertoire des nombreux problèmes faisant appel aux LMI.

### Propriété I.2

Le problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} & \min c'x \\ & \text{sous } L(x) > 0 \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

où  $c$  est un vecteur réel à  $m$  composantes, est une généralisation du problème de programmation linéaire classique au cône des matrices définies positives. Puisque le critère  $c'x$  est linéaire et la contrainte  $L(x) > 0$  est convexe, le problème I.4 est un problème d'optimisation convexe.

Rappelons ici le "complément de Schur" qui permet de transformer certaines inégalités matricielles non linéaires en LMI :

$$L(x) = \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S'(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{I.5})$$

si et seulement si

$$R(x) > 0 \text{ et } Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S'(x) > 0 \quad (\text{I.6})$$

ou, de manière équivalente, si et seulement si

$$Q(x) > 0 \text{ et } R(x) - S'(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0 \quad (\text{I.7})$$

La preuve de ce résultat découle immédiatement de :

$$V'(x)L(x)V(x) > 0 \iff L(x) > 0$$

avec  $V(x)$  de rang plein.

$V(x)$  est ensuite choisie pour diagonaliser par bloc  $L(x)$ . Ainsi

$$V(x) = \begin{bmatrix} I & Q^{-1}(x)S'(x) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

conduit à la seconde équivalence.

Les paragraphes qui suivent, se limitant aux résultats nécessaires au développement du manuscrit, vont donner quelques exemples de problèmes susceptibles d'un traitement à base de LMI.

## I.5 Stabilité-Stabilisation des systèmes linéaires

Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{I.9})$$

### Théorème I.4

Le système (I.5) est asymptotiquement stable si seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P$  solution de

$$A'P + PA < 0 \quad (\text{I.10})$$

Le résultat (théorème de Lyapunov) est lié à l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique en l'état :

$$v(x) = x'Px$$

La condition (I.10) est bien évidemment une LMI par rapport aux éléments de la matrice  $P$  et peut se ramener à la forme fondamentale I.3 en choisissant

$$L_0 = 0, \quad L_i = A'P_i + P_iA, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

avec  $P_i$  matrice symétrique, élément de la base de cardinalité  $m = \frac{n(n+1)}{2}$  de l'ensemble des matrices symétriques de dimension  $n$

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad P_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour le système

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{I.11})$$

il est relativement aisé d'établir :

**Théorème I.5** [BER 89]

Le système I.11 est stabilisable (asymptotiquement) si  $\exists S = S' > 0$  et  $R$  (dimension de  $B'$ ) telles que

$$AS + SA' + BR + R'B' < 0 \quad (\text{I.12})$$

(I.12) est une LMI par rapport aux éléments des deux matrices inconnues  $P$  et  $R$ . Sa solution permet de calculer le gain stabilisant  $K = RS^{-1}$  et de déterminer la fonction de Lyapunov

$$v(x) = x'Px \quad \text{où} \quad P = S^{-1}.$$

La notion duale de commandabilité, la détectabilité, est également susceptible d'un traitement par LMI à partir du résultat suivant, relatif au problème de l'existence d'un observateur pour le système

$$\dot{x} = Ax, \quad y = cx \quad (\text{I.13})$$

$y \in \mathbb{R}^p$  étant le vecteur de mesure.

**Théorème I.6** [DUL 00]

La paire  $(A,C)$  est détectable si et seulement si  $\exists Q = Q' > 0$  et  $L$  telles que

$$A'Q + QA + LC + C'L' < 0$$

Le gain du filtre (observateur) est  $K_f = Q^{-1}L$ .

Ainsi, par application du principe de séparation, est-il possible d'énoncer une condition nécessaire et suffisante de stabilisation par retour de sortie (dynamique).

**Théorème I.7** [GER 99]

Le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

est stabilisable par retour de sortie si et seulement si

$$\exists S > 0 \quad \text{et} \quad Q > 0, \quad R \quad \text{et} \quad L \quad (\text{de dimension appropriées})$$

telles que

$$\begin{cases} AS + SA' + BR + R'B' < 0 \\ A'Q + QA + LC + C'L' < 0 \end{cases}$$

La commande stabilisante s'écrit

$$u = Kx_f, \quad K = RS^{-1}$$

$x_f$  étant l'état de l'observateur

$$\dot{x}_f = (A + BK)x_f + K_f(y - c\hat{x}), \quad K_f = Q^{-1}L$$

## I.6 Synthèse $H_2$

Rappelons que la norme  $H_2$  d'un système linéaire représenté par le triplet  $(A, B, C)$  asymptotiquement stable peut se calculer par le biais des grammien de commandabilité [DUC 94] [LAN 93] (ou d'observabilité) selon :

$$\|C(pI - A)^{-1}B\|_2^2 = \text{Trace} [CSC'] \quad (\text{I.15})$$

$S$  grammien de commandabilité, solution définie non négative de

$$AS + SA' + BB' = 0$$

ou, de manière duale, selon :

$$\|C(pI - A)^{-1}B\|_2^2 = \text{trace} [B'QB] \quad (\text{I.16})$$

$Q$  grammien d'observabilité, solution définie non négative de

$$A'Q + QA + C'C = 0$$

Par utilisation de la propriété de monotonie de la solution de l'équation de Lyapunov il est possible de traduire le calcul de cette norme en termes de LMI [BER 99] :

$$\begin{aligned} & \|C(pI - A)^{-1}B\|_2^2 = \min \text{trace} [W] \\ \text{sous } & \begin{bmatrix} W & CS \\ SC' & S \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \text{et } AS + SA' + BB' \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

ou, de manière équivalente

$$\begin{aligned} & \|C(pI - A)^{-1}B\|_2^2 = \min \text{trace } [W] \\ & \text{sous } \begin{bmatrix} W & B'Q \\ QB & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \text{et } A'Q + QA + C'C \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Ainsi, pour le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_1w \\ z = c_1x + D_1u \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

où  $z$  est un vecteur de sortie (dite commandée) et  $w$  un bruit de dynamique, le problème de synthèse  $H_2$  se formule comme la détermination d'une loi de commande de contre réaction minimisant la norme  $H_2$  du transfert entre  $z$  et  $w$ . Reprenant les résultats rappelés en début de paragraphe, la synthèse  $H_2$ , pour le cas du retour d'état, s'écrit

$$\begin{aligned} & \min \text{trace } [W] \\ & \begin{bmatrix} W & C_1S + D_1R \\ SC'_1 + R'D'_1 & S \end{bmatrix} \geq 0 \\ & AS + SA' + BR + R'B' + B_1B'_1 \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

avec  $K = RS^{-1}$

soit

$$\begin{aligned} & \min \text{trace } [W] \\ & \begin{bmatrix} W & B'_1S \\ SB_1 & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} AS + SA' + BR + R'B' & SC'_1 + R'D'_1 \\ C_1S + D_1R & -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

## I.7 Système incertain

Sont rappelés dans ce paragraphe les résultats relatifs aux problèmes de synthèse pour systèmes linéaires avec incertitude bornée en norme [PET 87] [ZHO 88] [GAR 94] tels que

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \delta A)x + Bu + B_1w \\ z = C_1x + D_1u \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

et

$$\delta A = DFE \text{ avec } F'F \leq I$$

Le théorème suivant explicite une condition suffisante de stabilisation robuste par retour d'état :

**Théorème I.8**

Le système incertain (I.22) est stabilisable si  $\exists S = S' > 0$  et  $R$  telles que

$$\begin{bmatrix} AS + SA' + BR + R'B' + DD' & E'S \\ SE & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{I.23})$$

La démonstration se fait à partir de l'utilisation d'une fonction de Lyapunov unique (d'où la suffisance) :

$$v(x) = x'Px \quad \text{où} \quad P = S^{-1}$$

servant à tester la condition de stabilité de la matrice  $(A + DFE + BK)$  pour toute valeur de  $F$  telle que  $F'F \leq I$ .

Il est à noter également que le théorème (I.8) établit une condition nécessaire et suffisante de synthèse  $H_\infty$  par retour d'état car

$$\|E(pI - A - BK)^{-1}D\|_\infty < 1 \quad (\text{I.24})$$

pour  $K = RS^{-1}$

Ceci se vérifie aisément (au moins pour la suffisance) par le fait que système (I.22) peut être écrit de manière équivalente par

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + Dv \\ y = Ex \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

et

$$v = Fy \text{ avec } F'F \leq I$$

L'application du théorème du faible gain à (I.25) fournit justement la condition (I.24).

La formulation du problème  $H_2$ , simple dans le cas nominal, présente quelques difficultés pour le cas incertain. Le problème le plus "naturel" et le plus rigoureux pourrait être de type max-min, définissant un problème de jeu différentiel à somme nulle où la commande chercherait à minimiser la fonction coût (la norme  $H_2$ ) alors que l'incertitude se placerait sur sa réalisation la plus défavorable :

$$\min_K \max_F \|(C_1 + D_1K)(pI - A - BK - DFE)^{-1}B_1\|_2^2 \\ F'F \leq I$$

En fait, la difficulté du problème précédent fait que, de manière plus réaliste, est défini un nouveau problème de coût garanti qui consiste à minimiser une borne supérieure de toutes les valeurs possible de la norme  $H_2$  pour toute réalisation de  $F$  dans son domaine d'incertitude

$$\min_K \mu \\ \|(C_1 + D_1K)(pI - A - BK - DFE)^{-1}B_1\|_2^2 \leq \mu, \quad \forall F : F'F \leq I$$

La formulation LMI qui suit répond au problème précédent

$$\min \mu \quad (\text{I.26})$$

$$\text{trace } W \leq \mu \quad (\text{I.27})$$

$$\begin{bmatrix} W & C_1 S + D_1 R \\ SC'_1 + R'D'_1 & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{I.28})$$

$$\begin{bmatrix} AS + SA' + BR + R'B' + DD' + B_1 B'_1 & E'S \\ SE & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{I.29})$$

## I.8 Retour de sortie

En pratique, il se vérifie souvent que l'état complet n'est pas accessible à la mesure et que seule une information partielle, constituée du vecteur de sortie mesurée, peut être utilisée pour élaborer la loi de commande. Dans ce paragraphe, il est rappelé comment, au moyen de technique LMI, il est possible de déterminer une loi de commande de type retour de sortie dynamique [SCH 97]. Seule le problème de stabilisation sera rappelé, les autres (synthèse  $H_2$ ,  $H_\infty$  [FRA 84] [SAM 90] [KHA 91] [GAH 94a] [COU 98]) s'en déduisant de façon directe.

Soit donc le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $y$  étant la sortie mesurée. Le problème est celui de la détermination d'un compensateur de type retour de sortie dynamique stabilisant, c'est à dire, la détermination du triplet  $(A_c, B_c, C_c)$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u_c = C_c x_c \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

tel que le système bouclé, étendu :

$$\dot{X} = A_e X \quad \text{où} \quad \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x' & x'_c \end{bmatrix}' \quad (\text{I.32})$$

soit assyptotiquement stable. Pour ce problème de stabilisation et avec les hypothèses qui seront retenues, il n'est pas nécessaire de considérer les correcteurs qui ne seraient pas strictement propres ( $D_c \neq 0$ ). Le système (I.30) est stabilisable par le contrôleur (I.31) si et seulement si  $\exists P_e = P'_e > 0$  telle que

$$A'_e P_e + P_e A_e < 0 \quad (\text{I.33})$$

où  $P_e$  est une matrice carrée de dimension  $(n \times n_c)$ , la dimension du vecteur d'état composite  $X$ ,  $n_c$  étant la dimension du contrôleur (I.31). (I.33) n'est évidemment pas une LMI une inégalité matricielle bilinéaire en  $P_e$  et le triplet  $(A_c, B_c, C_c)$ .

Partitionnant

$$P_e \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad P_e^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix}$$

où  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$

et définissant

$$T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V' & 0 \end{bmatrix}, \quad (T \text{ régulière si } V \text{ de rang plein})$$

multipliant (I.33) à droite et à gauche respectivement par  $T$  et  $T'$ , il vient après un calcul fastidieux mais simple l'expression :

$$\begin{bmatrix} AY + YA' + BL + L'B' & Z + M \\ Z' + M' & A'X + XA + FC + C'F' \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{I.34})$$

$$L = C_c V', \quad F = U B_c, \quad M = V A_c' U' \quad (\text{I.35})$$

$$Z = Y A' X + Y C' F' + L' B' X$$

(I.34) peut être transformée en LMI dans le cas où :

$$n_c = n$$

par le changement de variable

$$Z + M = \overline{M}$$

qui permet d'écrire la LMI

$$\begin{bmatrix} AY + YA' + BL + L'B' & \overline{M} \\ \overline{M}' & A'X + XA + FC + C'F' \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{I.36})$$

par rapport aux inconnues que sont  $Y, L, X, F$  et  $\overline{M}$ . Une fois ces matrices calculées numériquement, il est possible sous l'hypothèse  $n_c = n$  d'inverser le système (I.35) pour déterminer le triplet  $(A_c, B_c, C_c)$  selon la procédure suivante :

- Choisir  $V$ , matrice régulière. Déterminer

$$C_c = L(V')^{-1}$$

- Calculer  $U$  sachant que  $XY + UV' = I$  ( $U$  est une matrice régulière car  $I - XY$  régulière)  
, alors

$$B_c = U^{-1}F$$

– Calculer  $Z$ , puis  $M = \overline{M} - Z$ . Enfin

$$A_c = U^{-1}M'(V')^{-1}$$

L'extension au problème de stabilisation robuste dans le cas d'incertitude bornée en norme  $A \leftarrow A + DFE$  ne pose guère de problème car (I.32) s'écrit

$$\dot{X} = (A_e + D_eFE_e)X$$

où

$$D_e = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, E_e = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix}$$

et l'application des résultats précédents mène à l'écriture de la condition suffisante pour la stabilisation robuste

$$\begin{bmatrix} AY + YA' + BL + L'B' & \overline{M} & YE' & D \\ \overline{M}' & A'X + XA + FC + C'F' & E' & XD \\ EY & E & -I & 0 \\ D & XD & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{I.37})$$

qui est bien, encore, une LMI par rapport aux matrices  $Y, L, X, F$  et  $\overline{M}$ , desquelles le triplet  $(A_c, B_c, C_c)$  peut être déterminé.

### Remarque

Il est possible de faire dans (I.36)  $\overline{M} = 0$ . On peut d'ailleurs considérer que c'est la valeur la moins contraignante pour la satisfaction de l'inégalité. Pour cette valeur, on retrouve en position diagonale les deux LMI qui sont les conditions de stabilisation par retour d'état et de détectabilité, conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une loi de commande par retour de sortie dynamique stabilisante. Cette condition permet, on l'a vu précédemment de déterminer cette loi avec utilisation d'un observateur, forme particulière qui ne correspond à aucune forme calculée à partir de la paramétrisation (I.35) et  $\overline{M} = 0$  soit  $M = -Z$ .

## I.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé les principaux concepts et outils utilisés dans le domaine de la commande linéaire robuste. Ceci se justifie par le fait que l'approche développée dans le chapitre suivant repose sur un séquençement de lois de commandes robuste locales issues de la satisfaction de contraintes en stabilité et tenant compte de certaines spécification de performance telle que la minimisation  $H_2$ .

---

## Chapitre II

# Cas des systèmes non linéaires continus : retour d'état

---

### II.1 Introduction

La commande des systèmes non linéaire pose des problèmes difficiles à résoudre. La difficulté vient du fait que plusieurs notions développées pour le cas des systèmes linéaires n'ont plus aucun sens dans le cadre non linéaire, par exemple, on ne peut plus utiliser l'analyse par fonction de transfert, de plus, la notion de pôles disparaît. Néanmoins, pour traiter cette problématique plusieurs techniques utilisant les acquis de la commande linéaire ont été proposées, comme, par exemple, la commande adaptative à plusieurs modèles [BEQ 95] ou le séquençement de gains [RUG 91] [RUG 00] [SHA 90]. Cette dernière est l'une des méthodes les plus reconnues dans le monde de l'industrie. Celle-ci aborde en général la commande d'un système non linéaire en le représentant par l'intermédiaire d'une famille de modèles linéaires autour de certains points de fonctionnement. Le problème est, donc, ramené au problème de commande linéaire où on peut trouver pour chaque modèle linéaire un correcteur en utilisant les méthodes de synthèse classiques des systèmes linéaires invariants, puis, construire, par fusion, (interpolation de ces correcteurs), une loi de commande globale. L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait

qu'il n'y a pas de possibilité mathématique pour garantir la stabilité ni les performances pour ce type de commande qui opère par commutation dans un ensemble de correcteurs. De plus, il n'existe pas de manière systématique pour choisir les points de linéarisation, et donc, les correcteurs. Pour s'affranchir de cet inconvénient, plusieurs approches ont été réalisées [LEI 98b] [LEI 98a] [CHE 98]. Nous proposons dans ce chapitre une technique qui s'appuie sur une technique d'ellipsoïdes invariants [HEN 99] [TEP 03], traitant le problème des non linéarités en utilisant la notion d'incertitude bornée en norme et garantissant la stabilité et la performance  $H_2$  localement. Nous présenterons dans un premier temps les grandes étapes de l'algorithme général, ce qui permettra d'introduire par la suite l'approximation des non linéarités et la synthèse  $H_2$ . Enfin, l'exemple simple du pendule inversé est utilisé pour illustrer les potentialités de l'approche.

## II.2 Algorithme général

Le but primordial de cet algorithme est d'assurer pour un système non linéaire une transition stable et robuste en boucle fermée entre deux points de fonctionnement. Il s'appuie sur la représentation du système non linéaire par le biais d'une famille de systèmes linéaires incertains à incertitude de type bornée en norme. Cette approche permet de déterminer des lois de commande robustes séquencées garantissant la stabilité quadratique et prenant en compte certaines spécifications de performances locales. Ces lois sont déterminées et garantissent un voisinage d'attraction des points d'équilibre dans lequel l'approximation de la non linéarité a été effectuée et validée. L'approche utilise des outils géométriques tels que ellipsoïdes et polyèdres. Avant d'exposer cet algorithme, nous commençons par étudier les propriétés de ces objets que nous manipulons tout au long du mémoire. Les propriétés des ellipsoïdes sont étudiées en détail dans [BOY 94]. Pour un rappel des propriétés des polyèdres on pourra consulter tout ouvrage traitant de la programmation linéaire, comme par exemple [VAN 97].

### II.2.1 Polyèdre

Un polyèdre  $P$  peut être défini comme l'intersection d'une famille finie de demi-plans.

#### Définition II.1

Étant donné un ensemble de vecteurs  $a_i$  et de scalaires  $b_i$ , nous pouvons définir le polyèdre  $P$  comme suit :

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^n : a_i'x \leq b_i, i = 1, \dots, p\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{aligned} \tag{II.1}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

où le signe  $\leq$  est interprété composante par composante. Deux propriétés essentielles concernent les polyèdres. D'une part, ils forment toujours un ensemble convexe et fermé, et d'autre part, l'intersection d'une famille finie d'ensembles polyédraux constitue aussi un ensemble polyédral. A partir de cet objet, un autre objet peut être défini, dit polytope, qui est un polyèdre borné. De manière duale, un polytope peut également être défini comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de sommets

$$P = Co\{v_i, \dots, v_p\}$$

Ainsi, la condition nécessaire pour qu'un polyèdre  $P(A, b)$  soit un polytope est que la matrice  $A$  soit inversible. Cependant, il faut attirer l'attention sur le fait que le passage de la représentation par demi-plans à la représentation par sommets peut se révéler délicat.

### Remarque

L'importance de cet objet vient de son utilisation comme une région prédéfinie autour de chaque point d'équilibre pour encadrer la non linéarité du système non linéaire.

## II.2.2 Ellipsoïde

Un ellipsoïde  $EL$  peut être défini de diverses façons. Nous donnons les trois formulations classiques qui sont :

$$\begin{aligned} EL &= \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px + 2x'q + \rho \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_c)'P(x - x_c) \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n, x = Qy + x_c \text{ et } y'y \leq 1\} \end{aligned} \tag{II.2}$$

La première formulation se base sur la fonction quadratique

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & q \\ q' & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = x'Px + 2x'q + \rho$$

avec

$$P = P' > 0, \quad \rho - q'p^{-1}q < 0$$

La deuxième formulation est équivalente à la première

$$(x - x_c)'P(x - x_c) - 1 = x'Px - 2x'Px_c + x_c'Px_c - 1$$

avec

$$q = -Px_c, \rho = x_c'Px_c - 1$$

Le vecteur  $x_c$  est appelé centre de l'ellipsoïde. Enfin, la troisième formulation se base sur une déformation de la sphère unité par une matrice  $Q$  :

$$Q = P^{-\frac{1}{2}}$$

On peut donc facilement passer de l'une à l'autre de ces formulations. Tout au long du mémoire nous utilisons la deuxième formulation où la matrice  $P$  va représenter soit la matrice de Lyapunov soit son inverse selon le problème de synthèse considéré. L'ellipsoïde formé par cette matrice a pour objectif d'estimer une région de stabilité locale autour de chaque point d'équilibre. La notion de volume de l'ellipsoïde joue un rôle important dans certains problèmes de commande [VAN 96] [VAN 98], et en particulier, la maximisation du volume d'un ellipsoïde. Il est aisé de voir que ce volume est proportionnel au déterminant de  $Q$ . Supposons que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$$

où les  $\lambda_i$  dénotent les valeurs propres de la matrice  $P$ , nous pouvons démontrer [BOY 94] que l'ellipsoïde  $EL$  admet des demi-axes de longueur  $\frac{1}{\lambda_i}$ . Etant donné que le déterminant de  $P$  est égale au produit de ses valeurs propres et que la trace de  $P$  est égal à leur somme. Nous pouvons utiliser les critères suivants afin de "maximiser" la taille d'un ellipsoïde :

1. Minimisation du logarithme du déterminant, égal à la quantité

$$\log \det P = \log \lambda_1 + \log \lambda_2 + \dots + \log \lambda_n$$

Le problème d'optimisation correspondant s'écrit

$$\min \log \det P$$

$$P = P' > 0$$

$$F(P^{-1}) > 0$$

où  $F(P^{-1})$  est une contrainte LMI en  $P^{-1}$ .

2. Minimisation de la trace de  $P$ , égale à la quantité

$$\text{trace } P = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

Le problème d'optimisation correspondant s'écrit

$$\min \text{trace } P$$

$$P = P' > 0$$

$$F(P) > 0$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation LMI classique à critère linéaire,

3. Minimisation de la plus grande valeur propre de  $P$ , dénotée  $\lambda$ . De façon équivalente, nous pouvons minimiser une borne supérieure sur cette valeur propre. Le problème d'optimisation correspondant s'écrit

$$\begin{aligned} \min \lambda \\ \lambda I > P' \\ P = P' > 0 \\ F(P) > 0 \end{aligned}$$

c'est également un problème d'optimisation LMI classique à critère linéaire. Le choix du critère dépend du problème traité. Les avantages respectifs de chaque critère sont mentionnées dans [DUR 96].

### II.2.3 Inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre

L'inclusion de l'ellipsoïde  $EL = \{Qy + x'_c : y'y \leq 1\}$  dans le polyèdre

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a'_i x \leq b_i, i = 1, \dots, p\}$$

signifie que la valeur maximum de  $a'_i(Qy + x_c)$  est inférieure ou égale à  $b_i$  pour tout vecteur  $y$  tel que  $y'y \leq 1$  et pour tout  $i = 1, \dots, p$ . Ce maximum est atteint sur la composante  $i$  pour le choix  $\frac{Qa_i}{\|Qa_i\|_2}$ . A partir de cela on peut prouver le lemme suivant :

#### Lemme II.1

L'ellipsoïde

$$EL = \{Qy + x'_c : y'y \leq 1\}$$

est inclus dans le polyèdre

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a'_i x \leq b_i, i = 1, \dots, p\}$$

si et seulement si

$$c_i = b_i - a'_i x_c > 0 \tag{II.3}$$

$$a'_i Q^2 a_i - c_i^2 \leq 0, i = 1, \dots, p \tag{II.4}$$

#### Preuve

Daprès [VAN 00]

$$\begin{aligned} EL \subseteq P &\Leftrightarrow \forall y'y \leq 1 \Rightarrow a'_i(Qy + x_c) \leq b_i \Leftrightarrow \max_{(y'y \leq 1)} a'_i Qy + a'_i x_c \leq b_i \\ &\Leftrightarrow \|Qa_i\| + a'_i x_c \leq b_i \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_i - a_i'x_c \geq 0 \\ \|Qa_i\|^2 \leq (b_i - a_i'x_c)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_i \geq 0 \\ a_i'Q^2a_i \leq c_i^2 \end{cases}$$

On peut maintenant trouver facilement la condition de l'inclusion de l'ellipsoïde représenté par la formulation  $EL = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_c)'P(x - x_c) \leq 1\}$ , que nous utilisons pour déterminer la région de stabilité en supposant que la matrice  $P$  représente la matrice de Lyapunov.

### Lemme II.2

L'ellipsoïde

$$EL = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_c)'P(x - x_c) \leq 1\}$$

est inclus dans le polyèdre

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i'x \leq b_i, i = 1, \dots, p\}$$

si et seulement si

$$\begin{bmatrix} P & a_i \\ a_i' & c_i^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.5})$$

### Preuve

En prenant compte que  $Q = P^{-\frac{1}{2}}$ , la relation (II.4) devient

$$a_i'P^{-1}a_i - c_i^2 \leq 0, i = 1, \dots, p \quad (\text{II.6})$$

à l'aide du complément de Schur, nous trouvons le lemme demandé.

### Remarque

Dans la plupart des cas, la synthèse de lois de commande locale ne nous fournit pas des LMIs contenant d'une façon directe la matrice de Lyapunov  $P$ , mais son inverse. Nous formons alors la région de stabilité ellipsoïdale en fonction de l'inverse de la matrice de Lyapunov  $S' = P^{-1}$  et cela ne pose aucun problème pour l'inclusion de l'ellipsoïde dans le polyèdre car on peut constater aisément que la relation (II.6) devient linéaire par rapport à la matrice  $S$

$$a_i'Sa_i - c_i^2 \leq 0, i = 1, \dots, p. \quad (\text{II.7})$$

### II.2.4 Algorithme

L'algorithme a pour but de déterminer un ensemble de correcteurs assurant la transition stable entre un point d'équilibre initial et un point d'équilibre final. Cette transition globale est assurée par une succession de transitions intermédiaires entre des positions d'équilibre intermédiaires déterminées de manière rétrograde par l'algorithme, partant du point final "remontant" à la condition initiale. Autour de chaque position d'équilibre intermédiaire est réalisée une approximation (recouvrement) du modèle non linéaire par un modèle linéaire avec incertitude bornée en norme. La synthèse (par biais de problèmes de type LMI) de correcteurs robustes permet également d'estimer, un domaine d'attraction de la position d'équilibre considérée, domaine d'attraction valant pour le système non linéaire. Il suffit alors, pour réaliser la transition stable globale entre condition initiale et condition finale de fixer chacun des points d'équilibres intermédiaires dans le domaine d'attraction du suivant. Le calcul des correcteurs robustes, et de leur domaine de validité peut également prendre en compte toute spécification de performance robuste locale, à la condition que cette dernière puisse s'exprimer sous la forme LMI. Sont rappelées, ci-après, quelques hypothèses suffisantes pour assurer la réussite de l'algorithme et, donc, l'existence d'une loi de commande par séquençement de gains.

#### Hypothèses de l'algorithme

##### 1. Existence d'un ensemble de points d'équilibre :

Considérons le système non linéaire :

$$\Sigma : \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \quad (\text{II.8})$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande. On suppose l'existence d'un ensemble de points d'équilibre paramétrés par une variable de séquençement  $\rho \in \Gamma$ ,  $\Gamma$  étant compact, tel que :

$$F(x^0(\rho), u^0(\rho)) = 0$$

La variable de séquençement est une fonction mesurable (elle est liée normalement aux arguments non linéaires). Le système non linéaire sera immergé dans une famille de systèmes linéaires à paramètres variables (*LPV*) et incertitude, définie autour d'un ensemble de points d'équilibre représentatifs, sous la forme suivante :

$$\Sigma(\rho) : \dot{x}(t) = (A(\rho) + \Delta(A)(\rho))(x(t) - x^0(\rho)) + B(\rho)(u(t) - u^0(\rho)) \quad (\text{II.9})$$

$A$  et  $B$  sont des matrices Jacobiennes continues de dimensions appropriées :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^0(\rho), u^0(\rho)}$$

## 2. Existence d'une trajectoire continue qui connecte le point de départ et le point d'arrivée :

Il existe une trajectoire ne dépendant que de la variable de séquençement  $\rho$ , notée  $C_\rho$  qui connecte  $x_0$  et  $x_f$ . Ceci signifie qu'il sera possible de reparamétriser cette trajectoire par rapport à un scalaire. Soit  $C_l$ ,  $0 \leq l \leq 1$ , de manière lorsque  $C_l|_{l=0}$  on se retrouve sur  $x_0$  et quand  $C_l|_{l=1}$  on est sur  $x_f$ . Ceci nous facilite les problèmes d'optimisation que nous allons exposer par la suite. Finalement, on a

$$\rho(l)|_{l=0} = \rho_0 \text{ (variable de séquençement de départ)}$$

$$\rho(l)|_{l=1} = \rho_f \text{ (variable de séquençement d'arrivée)}$$

Les points d'équilibre intermédiaires  $\rho(l) \in [\rho_0, \rho_f]$  seront obtenus par combinaison convexe

$$\rho(l) = l\rho_f + (1-l)\rho_0$$

## 3. Stabilisabilité :

On définit une hypothèse classique dans la synthèse de correcteurs linéaires. Pour tous les membres de la famille de systèmes linéaires obtenus à partir de la linéarisation des équations non linéaires (II.8) tout au long de la trajectoire  $C_l$ , il est nécessaire et donc supposé que la paire  $A(\rho), B(\rho)$  soit stabilisable.

En garantissant les trois hypothèses précédentes, nous pouvons résumer la démarche de l'algorithme comme suit [LAB 02] [TEP 02] :

1. Prendre comme point d'équilibre initial le point d'arrivée  $(x_{1eq}^{(j)}, u_{1eq}^{(j)})$ . Fixer aussi  $j = 1$ ,  $l^{(j)} = 1$ . (La loi de commande est construite hors ligne).
2. Définir un polyèdre  $P^{(j)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_{ieq}^{(j)}| < \delta_i, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N \right\}$  autour de  $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$  où  $N$  représente le nombre de correcteurs linéaires fournis par la technique et  $\delta_i$  un paramètre arbitraire à choisir.
3. Représenter le système non linéaire par l'intermédiaire d'un modèle linéaire à incertitude de type bornée en norme. On va montrer dans la partie suivante, comment, numériquement, par résolution d'un problème LMI, on approche le problème de l'approximation des non linéarités par un modèle linéaire avec incertitude bornée en norme.

4. Bâtir une loi de commande robuste linéaire locale  $u(t)^{(j)} = K^{(j)}(x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)}$  maximisant la région de stabilité  $EL^{(j)}$  incluse dans le polyèdre  $P^{(j)}$ .
5. Calculer le point d'équilibre prochain  $(x_{eq}^{(j+1)}, u_{eq}^{(j+1)})$  le plus loin possible dans  $EL^{(j)}$  par rapport à  $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$  pour l'obtention d'un nombre de correcteurs aussi faible que possible.
6. Si le point de départ  $(x_0, u_0)$  est inclus dans  $EL^{(j)}$ , finir le calcul des correcteurs, sinon retour en (2).

Les paramètres  $\delta_i$  sont des paramètres de réglage qui peuvent être choisis (par procédure itérative hors ligne) afin de limiter le nombre de correcteurs à calculer tout en conservant des performances convenables. Les  $\delta_i$  doivent être adaptés à la courbure du système non linéaire au point d'équilibre  $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$ . Le calcul du point d'équilibre suivant  $(x_{eq}^{(j+1)}, u_{eq}^{(j+1)})$  est effectué selon deux étapes :

- la première consiste à résoudre le problème d'optimisation (qui assure l'éloignement maximum par rapport à  $x_{eq}^{(j)}$ ) :

$$\begin{cases} \text{minimiser } l \\ x_{eq}(l) \in EL^{(j)} \\ 0 \leq l \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Soit  $l_{min}^{(j)}$  la solution.

- la seconde a pour but de trouver le point  $x_{eq}^{(j+1)} \in EL^{(j)}$  afin de garantir un certain niveau d'intersection parmi les ellipsoïdes successifs. Ceci se fait par le choix d' un paramètre

$$\beta \in [0, 1]$$

$$\text{et } l^{(j+1)} = l_{min}^{(j)} + \beta(l_{(j)} - l_{min}^{(j)})$$

et le point d'équilibre suivant :

$$(x_{eq}^{(j+1)}, u_{eq}^{(j+1)}) = (x_{eq}(l^{(j+1)}), u_{eq}(l^{(j+1)}))$$

Le problème d'optimisation précédent peut être résolu, par exemple, au moyen d'une méthode de bisection [TEP 03]. A partir des lois de commande locales trouvées pour chaque modèle linéaire, nous pouvons établir la loi de commande globale par commutation parmi les correcteurs

locaux. Cette loi de commande se formule sous la forme suivante :

$$U_{Global} = \begin{cases} u(t)^{(N)} = K^{(N)}(x(t) - x_{eq}^{(N)}) + u_{eq}^{(N)}, \\ x \in EL^{(N)} - \cup_{J=1}^{J=N-1} EL^{(J)} \\ \vdots \\ u(t)^{(2)} = K^{(2)}(x(t) - x_{eq}^{(2)}) + u_{eq}^{(2)}, \\ x \in EL^{(2)} - EL^{(1)} \\ u(t)^{(1)} = K^{(1)}(x(t) - x_{eq}^{(1)}) + u_{eq}^{(1)}, \\ x \in EL^{(1)} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

### II.3 Approximation bornée en norme des non linéarités

Une partie essentielle de l'algorithme consiste en la manière de représenter le système non linéaire par l'intermédiaire d'un modèle linéaire incertain. Plusieurs approches ont été proposées pour traiter ce problème, comme par exemple, la représentation d'un système non linéaire à travers une famille des modèles linéaires par morceaux ou celle utilisant la notion d'incertitude polytopique. Mais, on peut constater que les deux méthodes sont lourdes dans le cas de non linéarités à arguments multiples. De plus, nous affrontons aussi le problème de croissance du nombre des LMI, ce qui pose une difficulté numérique importante. Pour s'affranchir de ces inconvénients, nous exposons dans ce paragraphe une approche qui aborde le problème de l'approximation d'une non linéarité en utilisant la notion d'incertitude bornée en norme [KHA 06] [KHA ]. Considerons le système non linéaire affine en la commande décrit  $\forall t \geq 0$  par la relation :

$$\Sigma : \dot{x}(t) = F(x, u) = f(x(t)) + Bu(t)$$

Supposons que la fonction  $h(X) : \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^p$  représente les composantes non linéaires de  $f(x(t))$  de dimensions  $p$  et le vecteur  $X \in \mathbb{R}^q$  ( $X = vx, v \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ) représente les arguments des non linéarités (sous vecteur de  $x$ ) de dimensions  $q$ . En un point  $X_0 \in \mathbb{R}^p$ , il s'agit de déterminer une matrice définie positive telle que

$$\forall X \in \mathbb{D} \triangleq \{X : |x_i - x_{0i}| < \epsilon\}$$

( $\epsilon$  est un scalaire positif et  $x_i$  la  $i$ -ème composante de  $X$ )

$$\begin{aligned} [h(X) - \nabla(h(X_0))(X - X_0) - h(X_0)]' [h(X) - \nabla(h(X_0))(X - X_0) - h(X_0)] \\ \leq (X - X_0)' M (X - X_0) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

où

$$\nabla(h(X_0)) = [\nabla(h_1(X_0)), \nabla(h_2(X_0)), \dots, \nabla(h_q(X_0))]'$$

$$\nabla(h_i(X_0)) = \left[ \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial h_i}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial h_i}{\partial x_q}(X_0) \right]$$

Nous pouvons maintenant proposer la détermination numérique de la matrice  $M$  par tirage aléatoire dans  $\mathbb{D}$  en prenant  $N$  points  $X_m$  avec  $N \gg \frac{q(q+1)}{2}$  par résolution du problème LMI suivant :

$$\begin{aligned} & \min \text{ trace } M \\ & M \geq 0 \\ & [h(X_m) - \nabla(h(X_0))(X_m - X_0) - h(X_0)]' [h(X_m) - \nabla(h(X_0))(X_m - X_0) - h(X_0)] \\ & \leq (X_m - X_0)' M (X_m - X_0), \quad m = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \tag{II.13}$$

Nous réécrivons le vecteur des arguments non linéaires  $X$  en fonction du vecteur d'état  $x$ , on a alors :

$$X = vx$$

cela nous permet de réécrire la relation (II.12) par rapport à la fonction  $f(x(t))$  :

$$\begin{aligned} & [f(x) - \nabla(f(x_{eq}))(x - x_{eq}) - f(x_{eq})]' [f(x) - \nabla(f(x_{eq}))(x - x_{eq}) - f(x_{eq})] \\ & \leq (x - x_{eq})' v' M v (x - x_{eq}) \end{aligned} \tag{II.14}$$

D'autre part, l'erreur entre le système non linéaire et son approximation linéaire peut s'écrire :

$$[f(x) - \nabla(f(x_{eq}))(x - x_{eq}) - f(x_{eq})] = DFE(x - x_{eq}) \tag{II.15}$$

En s'appuyant sur la relation (II.14) nous trouvons

$$E' F' D' D F E \leq v' M v \tag{II.16}$$

Pour déterminer les matrices d'incertitude nous pouvons choisir :

$$\begin{aligned} D &= (v' M v)^{\frac{1}{2}} \\ E &= I \\ F' F &\leq I \end{aligned} \tag{II.17}$$

Le système non linéaire :

$$\Sigma : \dot{x}(t) = F(x, u) = f(x(t)) + Bu(t)$$

peut se représenter maintenant par l'intermédiaire d'une famille de modèles linéaires :

$$\Sigma_L^{(j)} = \begin{cases} \dot{x} = (A^{(j)} + D^{(j)} F E^{(j)})x + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_1 u \end{cases} \tag{II.18}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $w \in \mathbb{R}^l$  sont respectivement les vecteur d'état, de commande, de perturbation et  $z \in \mathbb{R}^p$  est la sortie commandée.

## II.4 Synthèse de lois de commande par retour d'état avec performance $H_2$

Il est donc possible de représenter (par immersion) le système non linéaire par une famille de systèmes linéaires incertains à incertitude bornée en norme ainsi que de déterminer des correcteurs linéaires robustes  $K^{(j)}$  à temps invariant mis en œuvre pour des valeurs choisies de la variable de séquençement  $\rho$ . Cela conduit à utiliser les techniques de synthèse robuste mentionnées au chapitre (1). Le compensateur global sera implanté pour le système non linéaire en commutant sur l'ensemble des correcteurs linéaires  $K = \bigcup_j K^{(j)}$ . Cette section est consacrée à montrer la manière utilisée pour déterminer le correcteur linéaire robuste  $K^{(j)}$  conçu pour le  $j$ -ème modèle linéaire incertain borné en norme  $\Sigma_L^{(j)}$  (II.18) en assurant une norme  $H_2 < \mu$  et en maximisant la région de stabilité ellipsoïdale

$$EL = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_c)' S^{-1} (x - x_c) \leq 1\}$$

inclus dans le polyèdre

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a'_i x \leq b_i, i = 1, \dots, p\}.$$

Avant de donner le théorème qui garantit la stabilité quadratique et les exigences précédentes, nous rappelons le corollaire suivant :

### Corollaire II.1

Le problème qui consiste à trouver une loi de commande stabilisant quadratiquement le système incertain :

$$x(t) = (A + DFE)x + B_2 u \text{ avec } F'F \leq 1 \tag{II.19}$$

est équivalent au problème  $H_\infty$  suivant :

Trouver une loi de commande stabilisant de manière interne le système

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax + Dw + B_2 u \\ z &= Ex \end{aligned}$$

et vérifiant la condition

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq 1$$

A travers ce résultat, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

**Théorème II.1**

Le système (II.18) est stabilisable quadratiquement par retour d'état et  $\|T_{zw}\|_2^2 \leq \mu$  si, il existe deux matrices symétriques définies positives  $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et une matrice  $R_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  solutions des inégalités matricielles suivantes :

$$\max \text{trace } S_j \quad (\text{II.20})$$

$$\text{trace } W < \mu \quad (\text{II.21})$$

$$S_j = S_j' > 0 \quad (\text{II.22})$$

$$c_i = b_i - a_i' x_{eq} > 0, a_i' S_j a_i - c_i^2 \leq 0 \quad (\text{II.23})$$

$$\begin{bmatrix} S_j & S_j C_1' + R_j' D_1' \\ C_1 S_j + D_1 R_j & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\begin{bmatrix} A^{(j)} S_j + S_j A^{(j)'} + B_2 R_j + R_j' B_2' & B_1 \\ B_1' & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{II.25})$$

$$\begin{bmatrix} A^{(j)} S_j + S_j A^{(j)'} + B_2 R_j + R_j' B_2' & D^{(j)} & S_j E^{(j)} \\ D^{(j)'} & -I & 0 \\ E^{(j)'} S_j & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.26})$$

Alors, la région de stabilité

$$EL^{(j)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - x_{eq}^{(j)})' S_j^{-1} (x - x_{eq}^{(j)}) \leq 1 \right\} \quad (\text{II.27})$$

est ellipsoïdale de volume maximal inclus dans le polyèdre

$$P^{(j)} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, 2n\} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \delta^j + x_1 e q^{(j)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta^j + x_n e q^{(j)} \\ \delta^j - x_1 e q^{(j)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta^j - x_n e q^{(j)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

La loi de commande par retour d'état définie pour le  $j$ -ème point d'équilibre  $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$  du système non linéaire  $\Sigma$  :

$$u(t)^{(j)} = K^{(j)}(x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)} = R_j S_j^{-1}(x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)} \quad (\text{II.29})$$

assure une norme  $H_2 < \mu$  pour le système  $\Sigma_L^{(j)}$  (II.18). De la même façon, il est possible d'inclure d'autres contraintes de performance. Par exemple, nous pouvons garantir une performance associée au régime transitoire pour chaque correcteur linéaire à l'aide d'un placement de pôles en boucle fermée dans un disque  $\mathbf{D}(q, r)$  en se basant sur le théorème suivant :

**Théorème II.2** [LI 00] [GAR 95]

Le système (II.18) est stable et ses valeurs propres sont localisées dans un disque  $\mathbf{D}(q, r)$  de centre  $-q + j0$   $q > 0$  et de rayon  $r$  ( $q > r$ ) s'il existe une constante  $\alpha > 0$ , une matrice  $R_j$  et une matrice symétrique positive  $S_j$  telles que :

$$\max \text{trace } S_j \quad (\text{II.30})$$

$$S_j = S_j' > 0 \quad (\text{II.31})$$

$$c_i = b_i - a_i' x_{eq} > 0, a_i' S_j a_i - c_i^2 \leq 0 \quad (\text{II.32})$$

$$\begin{bmatrix} -r^2 S_j & S_j A^{(j)'} + R_j' B_2' + q S_j & S_j E^{(j)'} \\ A^{(j)} S_j + B_2 R_j + q S_j & -S_j + \alpha D^{(j)} D^{(j)'} & 0 \\ E^{(j)} S_j & 0 & -\alpha I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.33})$$

et la loi de commande par retour d'état est :

$$u(t)^{(j)} = K^{(j)}(x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)} = R_j S_j^{-1}(x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)} \quad (\text{II.34})$$

Les lois de commande locales trouvées pour chaque modèle linéaire nous permettent de déterminer une loi de commande globale comme celle décrite par la relation (II.11). Un inconvénient se produisant avec une telle loi de commande se traduit par des discontinuités lors des instants de commutation. Pour s'affranchir de ce type d'inconvénient, il est possible d'envisager, en s'assurant d'un nombre de positions intermédiaires suffisant (idée de passage à la limite lorsque  $N \rightarrow \infty$ ), la détermination d'une loi de commande lisse dans le temps (sans commutation, du type LPV)

$$U_{Globle} = K(t)(x(t) - x_{eq}(t)) + u_{eq}(t). \quad (\text{II.35})$$

L'idée est basée sur la détermination d'une trajectoire continue à partir des points d'équilibre trouvés hors ligne, le correcteur unique est issu d'une interpolation polynomiale en fonction des points d'équilibre trouvés, et des correcteurs associés.

## II.5 Application au pendule

Cette partie est consacrée à l'illustration de l'application de l'algorithme proposé pour traiter les non linéarités à un exemple numérique du pendule simple inversé. La simplicité de cet exemple nous permet d'illustrer l'algorithme d'une manière directe et simple avec une seule non linéarité à un argument non linéaire. Les résultats sont visualisés car le système est d'ordre deux, ce qui facilite la compréhension de l'algorithme.

Les équations dynamiques sont :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{mgL}{J} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{J}u(t) \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

où  $[x_1(t), x_2(t)]' = [\theta(t), \dot{\theta}(t)]$  et  $\theta(t), \dot{\theta}(t)$  sont respectivement, l'angle du pendule par rapport à la verticale et la vitesse. La commande est notée  $u$  et les valeurs numériques :

- $m$  : Masse du pendule, considérée ponctuelle,  $m = 0.1Kg$ .
- $g$  : Gravité,  $g = 9,8\frac{m}{s^2}$ .
- $L$  : Longueur de pendule,  $L = 1m$ .
- $J$  : L'inertie,  $J = 0.1Kg.m^2$ .

L'objectif de la commande est de "lever" le pendule de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  à 0, en garantissant la stabilité en boucle fermée et certaines spécifications de performances locales pour chaque correcteur linéaire  $K^{(j)}$ . Nous allons garantir, dans un premier temps une performance associée au critère  $H_2$ , ensuite, une performance associée au régime transitoire pour chaque correcteur linéaire à l'aide d'un placement de pôles dans un disque du plan complexe gauche. La famille de points d'équilibre obtenus à partir du modèle non linéaire (II.36) est :

$$\begin{cases} x_{2eq} = 0 \\ u_{eq} = -mgl \sin(x_{1eq}) \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Par ailleurs, nous choisissons la variable de séquençement comme  $\rho(t) = x_1(t) = \theta(t)$ . Il est, donc, possible de définir une trajectoire paramétrée par le scalaire  $0 \leq l \leq 1$  de sorte que :

$$\begin{aligned} (x_{eq}(l)|_{l=0}, u_{eq}(l)|_{l=0})' &= (x_0, u_0) \text{ (point de départ)} \\ (x_{eq}(l)|_{l=1}, u_{eq}(l)|_{l=1})' &= (x_f, u_f) \text{ (point d'arrivée)} \end{aligned}$$

Le modèle non linéaire du pendule (II.36) peut se représenter par l'intermédiaire d'une famille de modèles linéaires :

$$\Sigma_L^{(j)} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A^{(j)}x + (D^{(j)} + B_1)w + B_2u \\ z_\infty = E^{(j)}x \\ z_2 = C_1x + D_1u \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

avec

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J} \cos(x_{eq}^{(j)}) & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### II.5.1 Simulations avec performance $H_2$

Pour une constante du niveau d'intersection  $\beta = 0.1$ , une variable d'encadrement  $\delta = 0.26$  et une norme  $\|T_{z_2w}\|_2^2 < \mu = 1$ , les résultats obtenus, en appliquant le théorème (II.1) et l'approximation bornée en norme des non linéarités pour une transition stable entre  $[\theta(t), \dot{\theta}(t)] = [\frac{\pi}{2}, 0] \rightarrow [0, 0]$ , sont résumés dans la table suivant :

Itération ( $j$ )	$x_{eq}^{(j)}$	$u_{eq}^{(j)}$	$K^{(j)}$
1	$x_f = (0, 0)'$	$u_f = 0$	$[-2.3691 - 1.9996]$
2	$(0.1760, 0)'$	$-0.1716$	$[-2.3552 - 2.0010]$
3	$(0.3591, 0)'$	$-0.3378$	$[-2.3135 - 2.0052]$
4	$(0.5282, 0)'$	$-0.4939$	$[-2.2450 - 2.0127]$
5	$(0.7046, 0)'$	$-0.6347$	$[-2.1532 - 2.0255]$
6	$(0.8808, 0)'$	$-0.7558$	$[-2.0287 - 2.0335]$
7	$(1.0585, 0)'$	$-0.8542$	$[-1.8858 - 2.0335]$
8	$(1.3237, 0)'$	$-0.9260$	$[-1.7286 - 2.0628]$
9	$(1.4172, 0)'$	$-0.9685$	$[-1.5563 - 2.0698]$
10	$x_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)'$	$u_0 = 0.98$	$[-1.5563 - 2.0698]$

La transition est faite en 10 itération, ce qui signifie qu'il suffit 8 points intermédiaires, que l'algorithme fournit automatiquement, pour garantir la stabilité et la performance  $H_2$  désirée.

Les paramètres d'incertitude bornée en norme pour chaque modèle linéaire sont :

$$\begin{aligned}
 D^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0.0062 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0555 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.1482 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.2732 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D^{(5)} &= \begin{bmatrix} 0.4151 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.5563 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(7)} = \begin{bmatrix} 0.6803 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.7710 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D^{(9)} &= \begin{bmatrix} 0.8161 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

avec  $E = I$  et  $F'F \leq I$ . Nous discutons maintenant les résultats en établissant une loi de commande globale par commutation parmi les correcteurs locaux  $\mathbf{U}_{Global}$  définie par la relation (II.11). La figure II.1 illustre la convergence de la trajectoire qui évolue toujours à l'intérieur

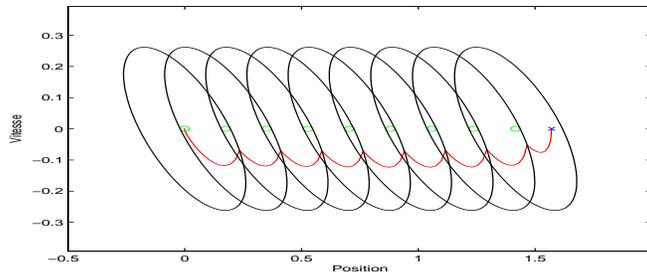


FIG. II.1 – Trajectoire d'état.

des ellipses de stabilité. Il est clair que la stabilité est garantie grâce à l'existence de deux points d'équilibre successifs dans une même région de stabilité.

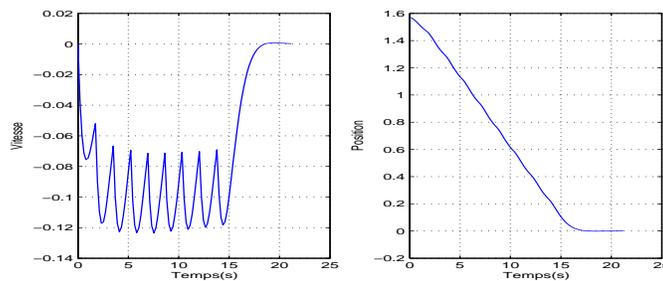


FIG. II.2 – Position et vitesse angulaire.

Les figures II.2 et II.3 montrent l'évolution de la position et la vitesse angulaire et le signal de commande, respectivement. Pour cette dernière, il y a des discontinuités lors des instants de commutations, l'amplitude de ces discontinuités diminue avec le nombre des correcteurs, c'est-à-dire en diminuant le paramètre d'encadrement  $\delta_i$ . Pour s'affranchir totalement de ce défaut,

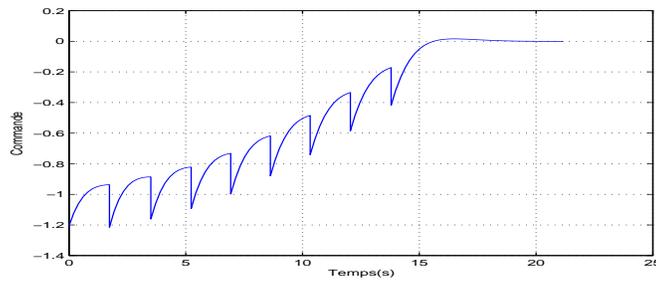


FIG. II.3 – Signal de commande.

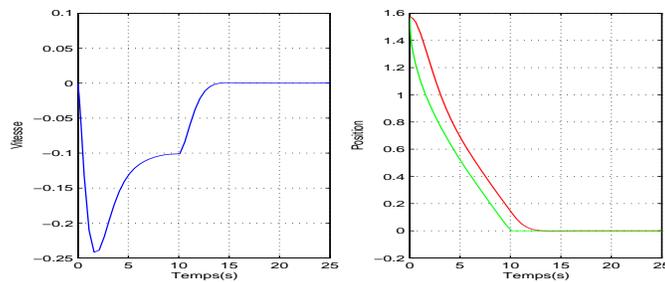
nous pouvons utiliser la formulation de loi de commande suivante :

$$\mathbf{U}_{Global} = K(t)(x(t) - x_{eq}(t)) + u_{eq}(t).$$

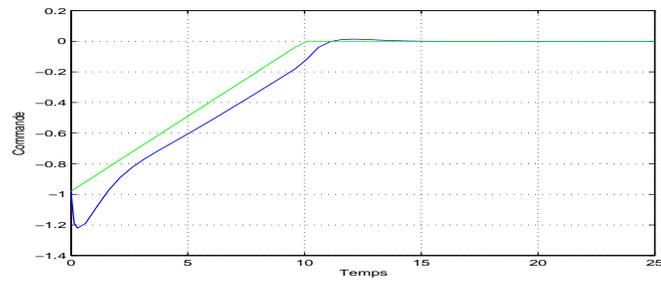
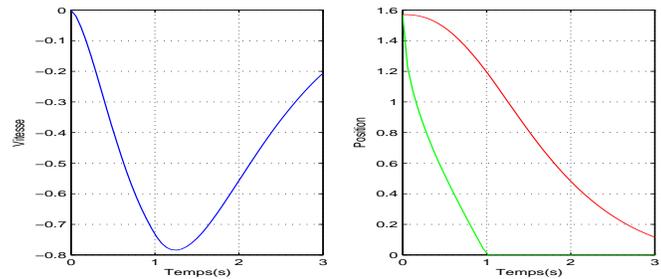
où le terme  $u_{eq}(t)$  est continu et défini de  $u_0$  à  $u_f$ . Pour la simulation, nous avons choisi une courbe linéaire :

$$u_{eq}(t) = u_0 + \left(\frac{u_f - u_0}{t_f}\right)t, t \in [0, t_f]$$

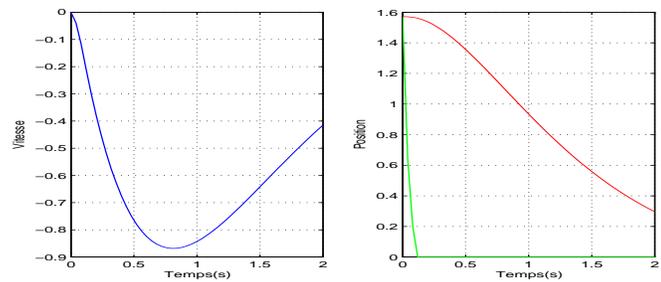
Le paramètre  $t_f$  est utilisé pour régler la rapidité. Le correcteur  $K(t)$  est issu d'une interpolation polynômiale en fonction des points d'équilibre  $u_{eq}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

FIG. II.4 – Position et vitesse angulaire dans le cas polynômial.  $t_f = 10s$ 

Les figures II.4 et II.5 montrent l'évolution de la position, la vitesse et la commande pour  $t_f = 10$ . Il est clair que la commande n'a plus de discontinuités et que la trajectoire est bien suivie. Nous pouvons constater l'amélioration de la rapidité de la réponse par rapport au cas de loi séquencée. La capacité de suivre de la trajectoire est liée au paramètre  $t_f$ , c'est-à-dire, à la rapidité du paramètre de séquencement  $u_{eq}(t)$ . Cette capacité se dégrade en diminuant le paramètre  $t_f$ . Cela est montré dans la figure II.6 en prenant  $t_f = 1$  et si on dépasse certaine limite le suivi de trajectoire n'est quasiment plus réalisable comme il est montré dans la figure II.7.

FIG. II.5 – Signal de commande dans le cas polynomial.  $t_f = 10s$ .FIG. II.6 – Position et vitesse angulaire dans le cas polynomial.  $t_f = 1s$ .

La synthèse de  $K(t) = K[u_{eq}(t)]$  et l'analyse de l'impact de sa dynamique sur la réponse du système sont marquées d'un empirisme certain. Il serait intéressant de pouvoir, à partir de la connaissance des dynamiques locales, donner une borne maximale à ne pas dépasser sur la dynamique du paramètre de séquencement pour obtenir une réponse satisfaisante (stabilité pratique). Il s'agit d'un problème complexe s'adressant au domaine des systèmes instationnaires et utilisation de fonction de Lyapunov dépendant du temps.

FIG. II.7 – Position et vitesse angulaire dans le cas polynomial.  $t_f = 0.1s$ .

### II.5.2 Simulation avec localisation des pôles dans un disque

Dans ce qui suit, on va montrer l'effet d'appliquer un autre critère de performance lié à la localisation des pôles dans un disque, ce qui offre la capacité de trouver un bon compromis entre l'amortissement et la rapidité des modes du système en boucle fermée. L'objectif de la commande est aussi de "lever" le pendule de  $\frac{\pi}{2}$  à 0 en garantissant la stabilité en boucle fermée et performance associée au régime transitoire pour chaque correcteur linéaire à l'aide d'un placement de pôles dans un disque  $\mathbf{D}(10, 9.8)$  du plan complexe gauche. La table suivante donne les points intermédiaires et les correcteurs linéaires de chaque modèle linéaire :

Itération ( $j$ )	$x_{eq}^{(j)}$	$u_{eq}^{(j)}$	$K^{(j)}$
1	$x_f = (0, 0)'$	$u_f = 0$	$[-1.4412 \ -1.0490]$
2	$(0.3141, 0)'$	$-0.3028$	$[-1.3902 \ -1.0422]$
3	$(0.6283, 0)'$	$-0.5760$	$[-1.2806 \ -1.0494]$
4	$(0.9369, 0)'$	$-0.7896$	$[-1.1198 \ -1.0545]$
5	$(1.2350, 0)'$	$-0.9253$	$[-0.9063 \ -1.0583]$
6	$(1.5225, 0)'$	$-0.9700$	$[-0.6402 \ -1.0593]$
7	$x_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)'$	$u_0 = 0.98$	$[-0.6402 \ -1.0593]$

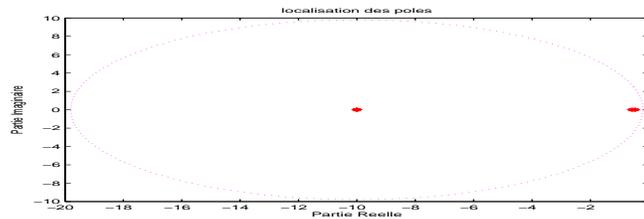


FIG. II.8 – Pôles en boucle fermée.

La figure II.8 montre la localisation des pôles dans le disque  $\mathbf{D}(10, 9.8)$  et la figure II.9 montre l'évolution de trajectoire d'état dans les ellipses successives.

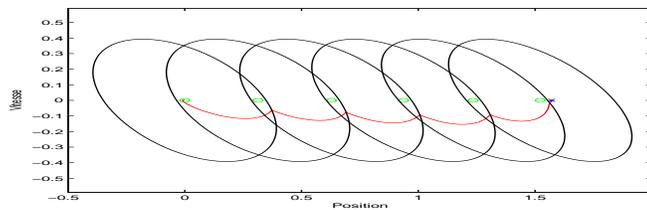


FIG. II.9 – Trajectoire d'état (cas de localisation des Pôles).

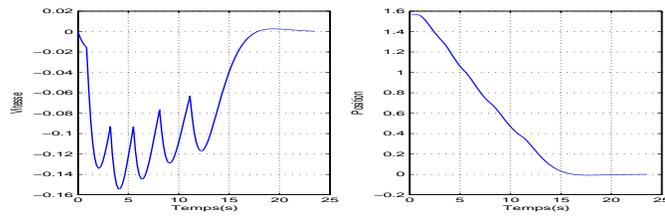


FIG. II.10 – Position et vitesse (cas de localisation des Pôles).

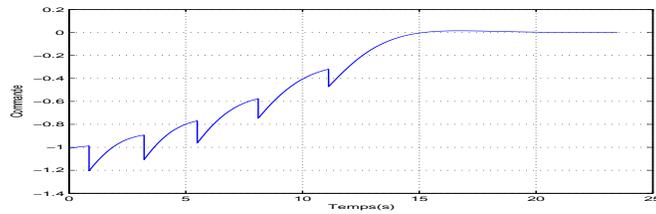
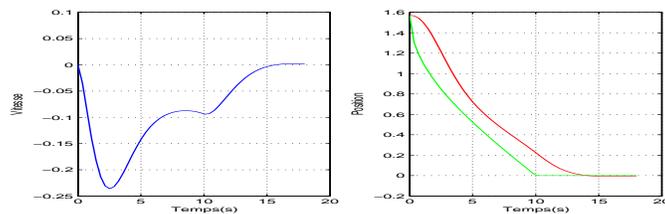
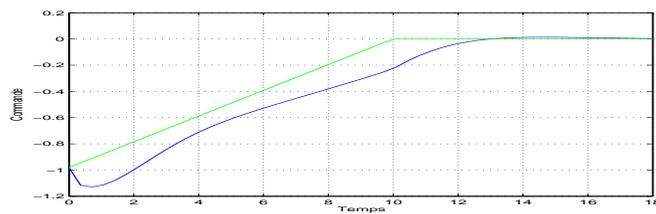


FIG. II.11 – Signal de commande (cas de localisation des Pôles).

Les figures II.10 et II.11 montrent la stabilité en boucle fermée dans le cas de loi de commande séquentiée, alors que les figures II.12 et II.13 montrent la stabilité avec une loi de commande continue, obtenue par interpolation.

FIG. II.12 – Position et vitesse (cas de localisation des Pôles).  $t_f=10s$ FIG. II.13 – Signal de commande (cas de localisation des Pôles).  $t_f = 10s$

## II.6 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une approche pour aborder le problème des non linéarités. Dans cette approche le système non linéaire est immergé dans une famille de modèles linéaires avec incertitude bornée en norme. L'approche est illustrée sur un exemple simple du pendule inversé montrant la transition stable garantie entre deux points d'équilibres désirés.

---

## Chapitre III

# Interpolation des gains et extension aux trajectoires continues

---

### III.1 Introduction

Dans la démarche proposée dans le chapitre précédent, il est possible de relever plusieurs inconvénients ou limitations. Le premier de ceux-ci est lié à la discontinuité de la trajectoire suivie. En effet, la trajectoire qui relie un point d'équilibre initial  $x_0$  à un point d'équilibre final  $x_f$  est définie par un ensemble fini sur la variété d'équilibre  $f(x^*) = 0$ . Le suivi de trajectoire se déroule ensuite en atteignant ces différents points sans contrainte (et donc sans connaissance à priori) du temps que mettra le système pour les rejoindre. Il paraît donc souhaitable de pouvoir imposer un temps de référence à ce suivi.

Un second inconvénient provient de la gestion du basculement de gains. En effet, lors des simulations (et par la suite en cas d'implantation du correcteur, lors du calcul en temps réel de la loi de commande), il est nécessaire de surveiller en permanence le point courant pour savoir quel point viser et quel correcteur appliquer. Cette gestion est coûteuse en temps et en ressource matérielle.

Enfin, la principale limitation de cette approche réside dans le fait que la trajectoire de

référence est obligatoirement située sur la variété d'équilibre. Cette contrainte est forte car elle impose pratiquement au système, lorsqu'il rejoint les différents points d'équilibre intermédiaires pour se déplacer de s'arrêter pour repartir ensuite. On comprend donc aisément qu'il ne s'agit alors pas de trajectoire optimale pour se rendre du point initial au point final.

Nous proposons dans ce chapitre quelques éléments qui cherchent à réduire ou supprimer ces limitations et qui permettent en conséquence d'améliorer les performances de l'approche proposée. Dans une première partie, nous étudierons le cas où la variable d'intervalle du modèle local  $\delta$ , qui définit le polyèdre  $P_\delta$  sur lequel l'approximation bornée en norme de la non linéarité est faite, tend vers 0. Ce cas de figure permet d'obtenir une commande quasi LPV. Dans une seconde partie nous chercherons à nous affranchir de la technique de basculement en proposant une interpolation des gains trouvés. Enfin nous étendrons l'étude proposée au cas du suivi de trajectoires quelconques en considérant alors non plus le modèle portant sur les variables d'état  $x$  mais celui portant sur l'écart de suivi de trajectoire  $\epsilon(t) = x_d(t) - x(t)$ .

## III.2 Séquencement quasi LPV

### III.2.1 Principe

L'approche présentée repose sur l'approximation d'une non linéarité par un sous-ensemble linéaire bornée en norme autour du point d'équilibre courant  $x^*$  (figure III.1 et III.2). Cette approximation est faite sur un ensemble de points d'équilibre déterminés de proche en proche par l'algorithme décrit dans le chapitre 3.

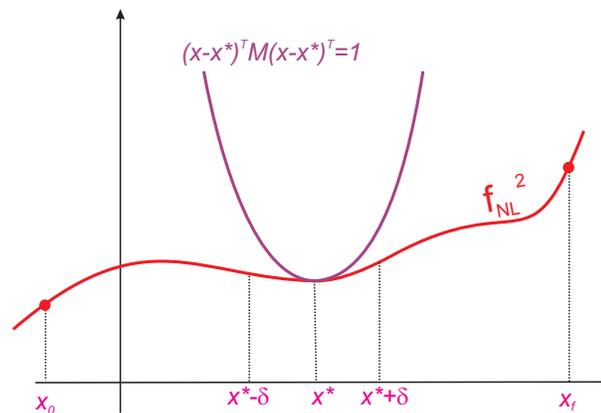


FIG. III.1 – Encadrement d'une non linéarité à un argument

Le nombre minimal de points intermédiaires (et donc de correcteurs locaux) est déterminé par l'intervalle  $\delta$  qui entoure le point d'équilibre et sur lequel l'approximation est réalisée. Il peut

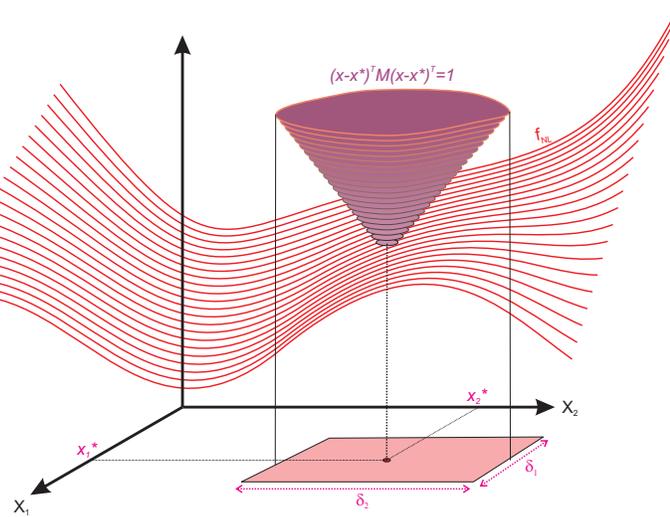
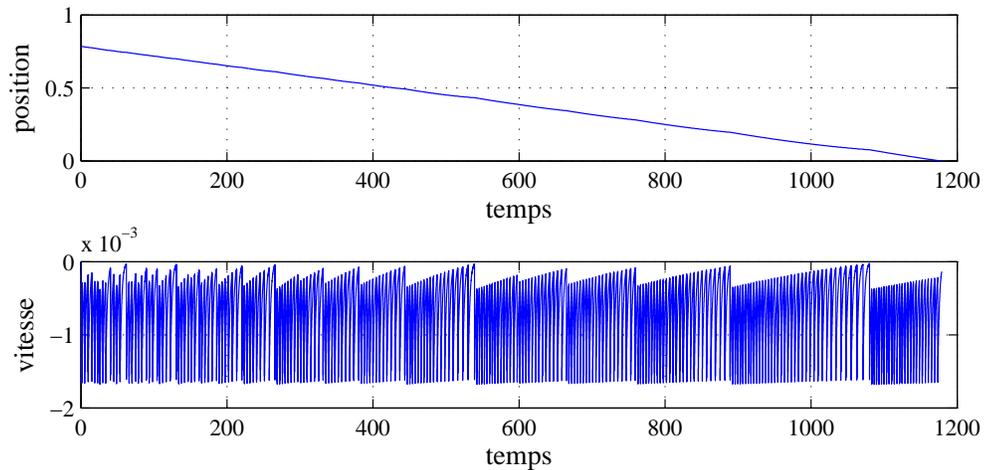


FIG. III.2 – Encadrement d’une non linéarité à deux arguments

alors paraître intéressant de faire tendre ce paramètre vers 0. En opérant ce passage à la limite, il est alors possible, du moins en théorie, de déterminer un correcteur pour tous les points de la variété d’équilibre qui passe entre le point initial  $x_0$  et le point final  $x_f$ . Un résultat de simulation réalisé par cette approche est montré sur la figure III.3. Pour cette simulation, la trajectoire est,

FIG. III.3 – Simulation de l’évolution du pendule lorsque  $\delta \rightarrow 0$ 

comme dans le chapitre précédent, un déplacement de  $\frac{\pi}{4}$  à 0 et la variable d’encadrement de la non linéarité  $\delta$  a été affectée à  $\frac{\pi}{800}$ . Il en résulte que l’algorithme de détermination des gains calcule 253 correcteurs différents. Pour ces synthèses, l’algorithme de synthèse impose une norme  $H_2 < 0.5$ , l’optimisation se faisant sur la maximisation du volume de l’ellipsoïde de stabilité. Il

est à noter que le nombre d'intervalles élémentaires qui divisent la trajectoire est de 200. Il y a donc 26% de correcteurs de plus que d'intervalles. Ce chiffre est comparable à ceux obtenus pour des valeurs différentes de  $\delta$  et donne une idée de l'inclusion de l'ellipsoïde dans le polyèdre  $\delta$ . Ce qui est remarquable dans cette simulation, c'est que la multiplication du nombre de correcteur détériore le temps de suivi de trajectoire. En effet, il faut près de 1200 secondes pour rallier le point final, ce qui est bien supérieur à ce qui est nécessaire pour un  $\delta$  supérieur (de l'ordre de 50 secondes pour  $\delta = 0.05$  par exemple). Cela s'accompagne également par une fréquence d'oscillation de plus en plus importante. Ce phénomène s'explique par le fait qu'à tout moment le point de consigne à atteindre correspond à une vitesse nulle. Le système, sous l'effet des basculements successifs, est soumis à de multiples accélérations/décélérations qui hachent la dynamique de poursuite.

Il est cependant intéressant d'observer l'évolution de la valeur que prennent les deux gains du retour d'état  $k_1$  et  $k_2$ . Cette évolution, en fonction des différents points d'équilibre à atteindre, est représentée sur la figure III.4. On peut constater que cette évolution, sans être linéaire, reste pour autant régulière. Dans la partie suivante, en exploitant cette régularité, il est proposé de déterminer un correcteur non plus séquencé mais continu.

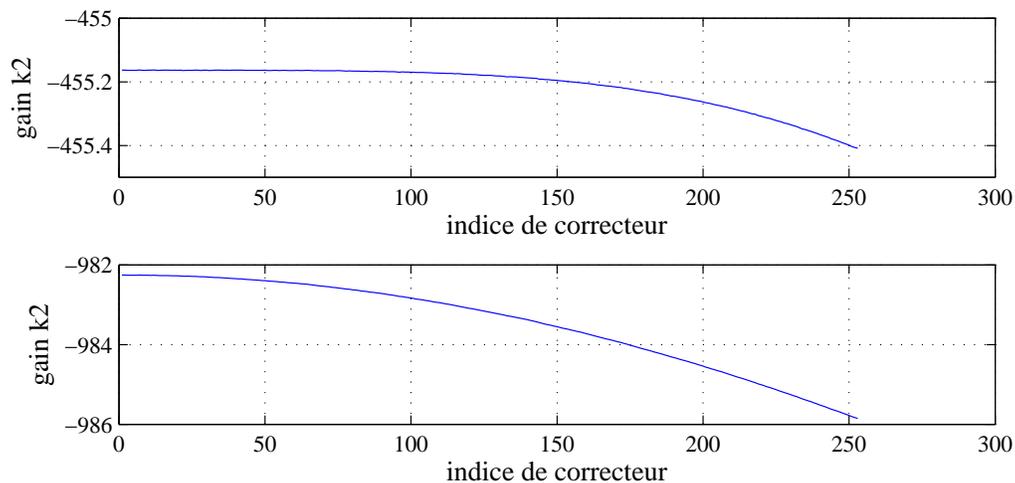


FIG. III.4 – Evolution de la valeur des 253 gains pour la simulation de la figure III.3

### III.3 Interpolation

#### III.3.1 Principe

Comme le montre la figure III.4, les gains du correcteur séquencé évoluent continûment. Cette évolution est directement liée au point  $(x_e, u_e)$  sur lequel l'hypothèse de linéarisation (approximation par l'introduction d'une incertitude normée en borne) a été appliquée. Il paraît donc possible de déterminer une loi d'évolution qui relie ces valeurs. Le choix d'une fonction polynômiale  $y = \sum_{k=0}^p \alpha_k x^k$  a été fait pour interpoler la valeur de chacun des gains  $k_i$  par rapport à la valeur de commande  $u_e$ . Lors de l'exécution de la tâche (en simulation ou expérimentalement) pour utiliser cette interpolation, cela nécessitera l'envoi d'une évolution temporelle de la grandeur  $u_e(t)$ . La valeur du point d'équilibre  $x_e(t)$  sera alors directement calculée à partir de  $u_e$  par la résolution de l'équation de la variété d'équilibre  $f(x_e, u_e) = 0$  et les gains du correcteur seront interpolés à partir des polynômes préalablement établis. La figure III.5 illustre cette architecture de commande.

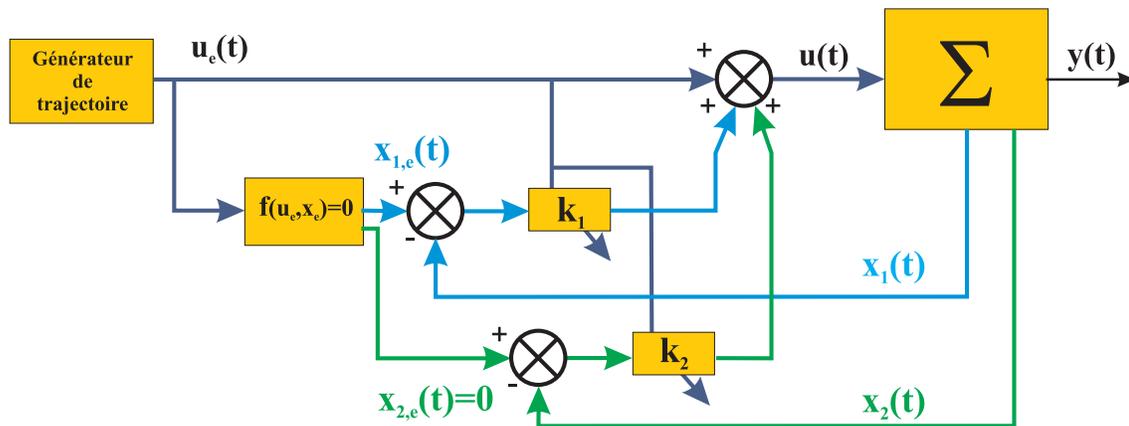


FIG. III.5 – Structure du contrôleur interpolé dans le cas d'un système de dimension 2

#### III.3.2 Polynôme d'interpolation

En introduisant une fonction polynômiale pour l'adaptation en ligne des gains, de nouveaux paramètres interviennent pour compléter la synthèse : les degrés des polynômes. Pour les  $n$  gains calculés (système d'ordre  $n$ ), il est en effet nécessaire de déterminer les degrés du polynôme qui permettront d'interpoler les gains au cours de l'exécution de la tâche. Sur la figure III.4 on peut constater qu'un degré 2 semble être suffisant pour l'évolution des gains  $k_1$  et  $k_2$ . La technique d'interpolation utilisée pour calculer les coefficients  $\alpha_k$  des polynômes (à travers la fonction

*Matlab polyfit*) est une minimisation par moindres carrés de l'écart entre les valeurs données et la courbe issue du polynôme. Lors de la détermination, le degré du polynôme est fourni et, en plus des coefficients, une valeur de l'erreur de prédiction est donnée. Dans l'algorithme de synthèse a donc été rajouté une boucle qui permet de calculer les coefficients et qui recherche un degré "optimal". Il est à noter toutefois que le choix du degré est important. En effet, il pourrait être envisagé d'utiliser un polynôme de degré égal au nombre de correcteurs. Cela permettrait d'assurer que pour un point donné, le correcteur vaut exactement ce qu'avait donnée la synthèse LMI à ce point. Malheureusement si le degré est élevé, la détermination du polynôme peut conduire à un phénomène de "wandering" comme le montre la figure III.6.

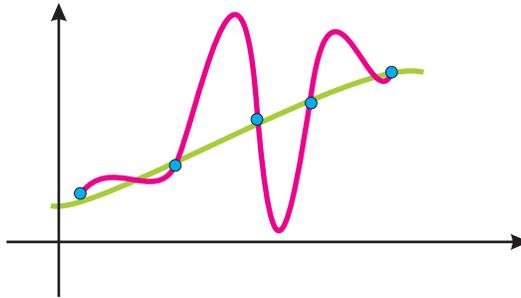


FIG. III.6 – Phénomène de wandering dû à un degré de polynôme trop important.

### III.3.3 Exemple de simulation sur le pendule

Un résultat de simulation exploitant cette technique est présenté figure III.7. Pour cette simulation, la trajectoire imposée est une rampe entre  $\frac{\pi}{4}$  et 0 parcourue en 12 secondes. Le constat majeur qu'il est possible de faire sur l'évolution des variables est, outre bien évidemment que la trajectoire en  $x_1$  est très correctement suivie, que la variable de vitesse  $x_2$  ne subit plus d'aussi importantes discontinuités. En effet, comme il n'est plus nécessaire dans ce cas de gérer le basculement de gain, il n'est donc plus nécessaire non plus d'attendre que la trajectoire rentre dans la bassin d'attraction du point suivant. Or ce basculement a lieu généralement lorsque le pendule commence à ralentir pour atteindre le point courant. Dans le cas présent, le point d'équilibre étant un point "fuyant" (rampe) ces phases de décélération n'ont plus court. Pour cette simulation, les résultats de la synthèse précédemment obtenue ont été utilisés, seule l'interpolation des gains des correcteurs a été ajoutée (le degré utilisé pour l'interpolation polynômial est de 3).

L'autre avantage évident qu'apporte cette nouvelle approche réside dans le fait qu'il est possible d'adapter le temps de trajectoire. Dans le cas précédent, seule la dynamique imposée

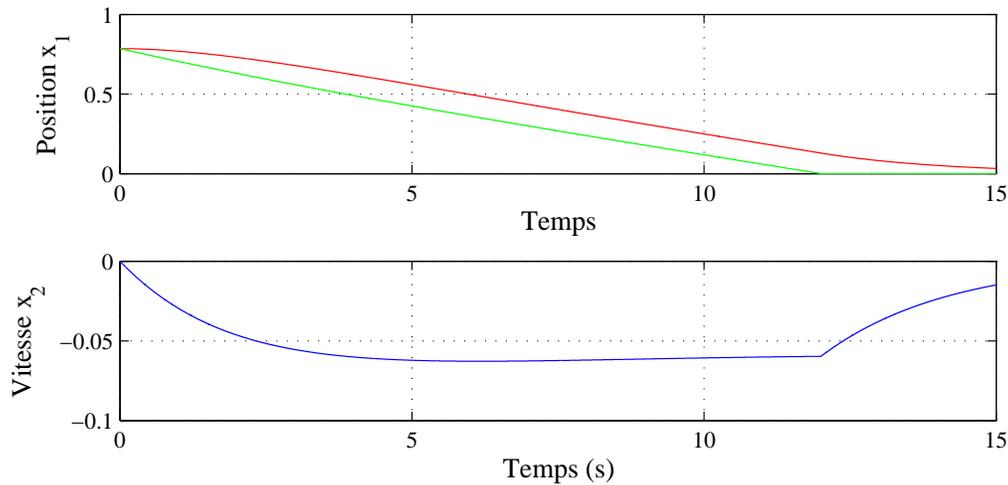


FIG. III.7 – Simulation d'un retour d'état sur le pendule avec interpolation des gains

(par le placement de pôles) permettait d'influencer la vitesse de suivi sans pour autant en avoir la maîtrise. Il était en effet possible de demander un placement de pôles relativement éloigné dans le  $\frac{1}{2}$  plan complexe gauche pour engendrer des dynamiques rapides mais le temps de parcours restait cependant pénalisé par la gestion des commutations. Un autre avantage conséquent est que la synthèse n'est plus liée à la trajectoire. En effet, si la synthèse est réalisée sur toute la variété d'équilibre atteignable ( $0$  à  $2\pi$  dans le cas du pendule) il en résulte, avec l'interpolation des gains, que pour chaque point d'équilibre un gain de retour d'état est connu. Lors de la simulation par la suite, quels que soient le point de départ et le point d'arrivée imposé, le correcteur est donc entièrement déterminé.

### III.4 Extension à un trajectoire quelconque

Un aspect négatif peut encore être relevé dans cette approche. Il réside dans le fait que la trajectoire de référence reste une variété d'équilibre. En effet, dans le cas du pendule par exemple, cela signifie que l'on cherche à faire déplacer le pendule à vitesse nulle, ce qui en soit est aberrant. La technique employée pour remédier à cet inconvénient afin d'améliorer le suivi de trajectoire consiste à décomposer la commande en deux parties. La première partie est une commande de type boucle ouverte qui permet d'engendrer une trajectoire de référence quelconque. Pour cette première composante plusieurs approches peuvent être envisagées, pour la plupart basées sur des techniques de commande optimale (principe du maximum, programmation dynamique). Le travail proposé ci-dessous repose sur l'utilisation des propriétés de platitude des systèmes non

linéaires.

La seconde composante de la commande est de type boucle fermée. Elle ne porte non plus directement sur l'état du système mais sur la dynamique de l'écart entre la trajectoire de référence et celle effectivement réalisée. Elle est de même nature que celle exposée dans le paragraphe précédent et assure la stabilisation robuste autour d'une erreur de suivi nulle.

Le problème consiste donc à imposer au système non linéaire, d'état  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

de suivre une trajectoire de référence  $y_d(t)$ . Cette sortie peut être engendrée par la trajectoire d'état de référence  $x_d(t)$  telle que :

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = f(x_d(t), u_d(t)) \\ y_d(t) = h(x_d) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

### III.4.1 Rappels sur la théorie des systèmes plats

La commande par platitude est une théorie relativement récente. Elle a été développée par M Fliess, J. Lévine, Ph. Martin and P. Rouchon dans les années 90 [FLI 95, FLI 96] et s'appuie sur une propriété intrinsèque de certains systèmes non linéaires.

#### Principe de base

Le système commandé non linéaire (III.1) a pour vecteur d'état et pour vecteur de contrôle :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Le système (III.1) est dit *différentiellement plat* (ou simplement *plat*) si et seulement si il existe un vecteur  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$  et deux fonctions algébriques  $\Phi$  et  $\Upsilon$  tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\alpha)}) \\ \mathbf{u} = \Upsilon(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\alpha+1)}) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

avec  $\mathbf{z}$  de la forme :

$$\mathbf{z} = \nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\beta)}) \quad (\text{III.5})$$

Le vecteur  $\mathbf{z}$  est appelé *sortie plate* du système (III.1) et sa dimension est obligatoirement égale à la dimension du vecteur d'entrée  $u$  (soit donc  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ ).

L'approche classique de commande utilisant la platitude [FLI 99] consiste à considérer que le commande :

$$\mathbf{u}(t) = \Upsilon(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\alpha)}, \mathbf{v}) \quad (\text{III.6})$$

linéarise dans la forme de Brunovsky le système (III.1) entre la sortie plate  $\mathbf{z}$  et une entrée auxiliaire  $\mathbf{v}$ . On obtient donc :

$$z_j^{(\beta_j+1)} = v_j \quad j = 1, \dots, \dim(u) \quad (\text{III.7})$$

### Application au suivi de trajectoire

Le concept de platitude prend tout son sens lorsque l'on impose au système de suivre une trajectoire de référence. En effet, la commande  $\mathbf{u}$  s'exprimant directement en fonction de  $\mathbf{z}$  et de ses  $(\alpha + 1)$  dérivées successives, la détermination d'une trajectoire plate de référence  $\mathbf{z}_d(t)$  peut se faire en utilisant une fonction  $\alpha$  fois dérivable. La commande calculée par (III.6) reflète la dynamique propre du système puisqu'elle revient à inverser le système par rapport à la sortie plate tout en excluant les dynamiques du zéro instables [MAR 96, FLI 99]. En utilisant un placement de pôles pour stabiliser la forme de Brunovsky (III.7), la commande  $\mathbf{v}$  peut se calculer comme :

$$v_j = z_{d,j}^{(\beta_j+1)} + \sum_{k=1}^{\beta_j} \sigma_j^k \left( z_j^{(k)} - z_{d,j}^{(k)} \right) \quad j = 1, \dots, \dim(u) \quad (\text{III.8})$$

où les  $\sigma_j^k$  composent un polynôme de type Hurwitz. Il est ainsi possible d'imposer une dynamique de suivi désirée.

Dans la technique de contrôle développée ici, il n'est pas fait usage du retour linéarisant (III.6) ni de sa stabilisation par placement de pôles simple (III.8).

En effet, la commande inverse exprimée par l'équation III.4 est utilisée directement comme commande boucle ouverte. Cette utilisation nécessite la programmation d'une trajectoire de référence  $z_d(t) = \zeta(t)$  telle que la fonction  $\zeta(t)$  soit  $\alpha + 1$  fois dérivable. On obtient alors la commande boucle ouverte suivante :

$$\mathbf{u}_d(t) = \Upsilon \left( \mathbf{z}_d, \dot{\mathbf{z}}_d, \ddot{\mathbf{z}}_d, \dots, \mathbf{z}_d^{(\alpha)}, \mathbf{z}_d^{(\alpha+1)} \right) \quad (\text{III.9})$$

qui se décline pour chacune des variables d'état par :

$$\mathbf{x}_d = \Phi(\mathbf{z}_d, \dot{\mathbf{z}}_d, \ddot{\mathbf{z}}_d, \dots, \mathbf{z}_d^{(\alpha)}) \quad (\text{III.10})$$

La principale difficulté de la démarche provient du fait que la sortie plate n'est pas obligatoirement la sortie réelle du système et que le passage de  $y_d$  à  $z_d$  n'est pas, de ce fait, toujours immédiat.

### III.4.2 Modélisation de la dynamique de l'erreur de suivi

Le couple  $(x_d(t), u_d(t))$  (déterminé en utilisant la théorie de la platitude) qui permet de faire suivre la trajectoire de référence est appliqué (commande de type boucle ouverte) au système. Cependant, comme un système n'est jamais parfaitement modélisé et qu'il existe toujours des incertitudes paramétriques et/ou des perturbations sur le système, la trajectoire suivie ne correspondra pas exactement à celle préalablement déterminée. Il est même envisageable que les perturbations remettent en cause la stabilité du système. Une seconde commande est alors nécessaire afin de compenser ces erreurs et d'assurer la stabilité. Comme la commande boucle ouverte permet la réalisation d'une trajectoire de référence, il s'agit donc dans cette seconde partie de stabiliser les écarts avec cette trajectoire et de tenter de le faire converger vers une valeur nulle.

Considérons donc l'erreur de suivi de trajectoire  $\epsilon = x_d(t) - x(t)$  à partir des équations (III.2) et (III.1) :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}(t) = f(x_d(t), u_d(t)) - f(x(t), u) = f(x_d(t), u_d(t)) - f(x_d(t) - \epsilon(t), u) \\ y(t) = h(x(t)) = h(x_d(t) - \epsilon(t)) \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Le système III.11 est un système non linéaire et non autonome. La dépendance temporelle de ces équations apparaît uniquement à travers l'évolution  $x_d(t)$  de la trajectoire à suivre.

La stabilisation robuste autour de  $\epsilon = 0$  consiste alors à faire des synthèses à des points particuliers  $x_d(t_i)$  de la trajectoire en utilisant une approximation bornée en norme de la fonction  $f$  à l'intérieur d'un polyèdre  $P_\delta$ . Ce polyèdre est construit autour de  $\epsilon = 0$  et est défini par l'écart maximal accepté. En choisissant  $\delta$  suffisamment petit (ce qui revient à dire que l'on ne souhaite pas que le système s'écarte de trop de sa trajectoire de référence), pour chacun des points choisis il est possible de trouver un correcteur unique par point particulier  $x_d(t_i)$  qui stabilise le système. Il n'y a pas, dans ce cas, besoin de faire de politique de basculement de gain en fonction de la variable  $\epsilon$ . Cependant comme les synthèses sont effectuées en différents points de la trajectoire, il est alors envisageable d'utiliser la technique d'interpolation exposée dans le paragraphe III.3. La variable d'interpolation est alors une des variables d'état  $x_d(t)$ .

Le structure algorithmique de la commande complète est présentée sur la figure III.8.

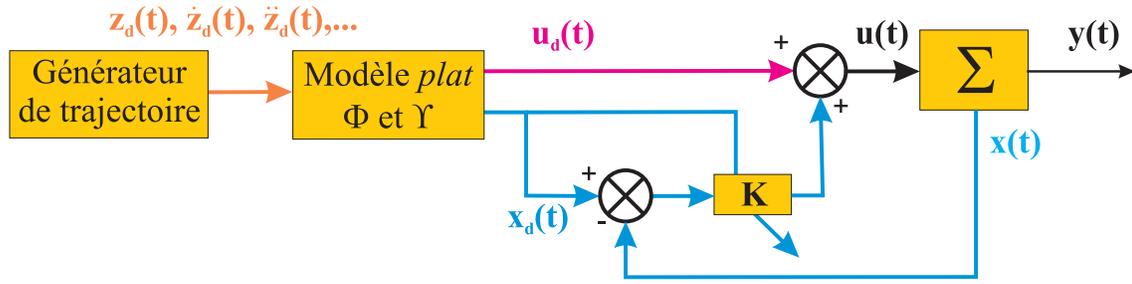


FIG. III.8 – Architecture du contrôleur en suivi de trajectoire.

### III.4.3 Application au cas du pendule

#### Platitude

A partir des équations de base du pendule :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mgl}{J} \sin(x_1) + \frac{1}{J}u \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

on en déduit directement que la position angulaire  $x_1$  est une sortie plate pour le système. En effet, les fonctions  $\Phi$  et  $\Upsilon$  s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 \\ u = J\ddot{x}_1 - mgl \sin(x_1) \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Comme il y a concomitance entre la variable plate, la variable de sortie réelle et la variable d'état  $x_1$ , il n'y a dans ce cas aucune difficulté pour définir la commande "boucle ouverte" nominale. Il suffit de proposer une fonction de classe  $C^2$  dépendante du temps qui assure par exemple, une transition entre la position d'origine  $x_1(t_0)$  et une position finale  $x_1(t_f)$ . Les fonctions utilisées pour les simulations présentées ci-après sont des fonctions splines trigonométriques d'ordre 3 [MAH 05]. Il est à noter que des fonctions splines classiques auraient pu être utilisées également. Cette commande boucle ouverte s'écrit :

$$u_d(t) = J\ddot{x}_{1,d}(t) - mgl \sin(x_{1,d}(t)) \quad (\text{III.14})$$

#### Détermination des compensateurs locaux

L'exemple traité dans ce paragraphe consiste à faire réaliser une trajectoire au pendule allant d'une position initiale de  $x_1(t_0) = \frac{\pi}{2}$  à une position finale  $x_1(t_f) = 0$ . Le temps de parcours  $t_f$  sera un des paramètres variant au cours des différentes simulations pour vérifier les performances de la loi de commande proposée.

### Équation et détermination de la partie non linéaire

La première étape consiste à exprimer l'équation dynamique de l'erreur de suivi de trajectoire. Celle-ci s'écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \dot{x}_{1,d} - \dot{x}_1 \\ = x_{2,d} - x_2 \\ = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = \dot{x}_{1,d} - \dot{x}_1 \\ = \frac{mgl}{J} \sin(x_{1,d}) + \frac{1}{J} u_d - \frac{mgl}{J} \sin(x_1) - \frac{1}{J} u \\ = -\frac{mgl}{J} \sin(x_{1,d} - \epsilon_1) + \frac{mgl}{J} \sin(x_{1,d}) + \frac{1}{J} u_d - \frac{1}{J} u \end{array} \right. \quad (\text{III.15})$$

La décomposition de l'équation III.15 en sa partie linéaire et sa partie non linéaire conduit à :

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \epsilon + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ f_{nl}(\epsilon_1, x_{1,d}, u_d) \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

avec  $f_{nl}(\epsilon_1, x_{1,d}, u_d) = -\frac{mgl}{J} \sin(x_{1,d} - \epsilon_1) + \frac{mgl}{J} \sin(x_{1,d}) + \frac{1}{J} u_d$ .

#### Calcul de l'expression *bornée en norme* de la partie non linéaire

Pour calculer l'expression des matrices  $D$  et  $E$  représentant l'incertitude bornée en norme de la fonction  $f_{nl}$ , la variable  $\epsilon_1$  est contrainte à appartenir au polyèdre de détermination  $[-0.25, +0.25]$ . Les deux autres paramètres de la fonction  $f_{nl}$  sont liés à la trajectoire à effectuer et donc aux différents points sur lesquels les synthèses sont effectuées. La méthode proposée consiste donc à découper cette trajectoire en un nombre fini de points pour lesquels seront calculés les correcteurs locaux. Dans la présente étude, l'intervalle de découpage a été fixé à  $\frac{\pi}{100}$ , ce qui conduit donc à la détermination de 50 correcteurs. Il est à noter que dans ce cas, comme la fonction non linéaire ne dépend que de la variable  $x_{1,d}$  (en effet, la valeur de  $u_d$  peut s'exprimer en fonction de  $x_{1,d}$ ) les correcteurs locaux seront valides quel que soit la trajectoire imposée dans la mesure où elle reste bornée entre  $x_1(t_0)$  et  $x_1(t_f)$ . Pour chacun des points particuliers de la trajectoire, la matrice  $E$  est la matrice identité et la matrice  $D$  est prise comme :

$$D = \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}} \quad (\text{III.17})$$

où  $d$  correspond au maximum pour  $\epsilon_1 \in [-0.25, +0.25]$  de l'écart entre la fonction non linéaire et son approximation linéaire au point de trajectoire considérée, soit encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{nl} = -\frac{mgl}{J} \sin(x_{1,d} - \epsilon_1) + \frac{mgl}{J} \sin(x_{1,d}) + \frac{1}{J} u_d \\ fl = -(\epsilon_1) * \frac{mgl}{J} * \cos(x_{1,d}) + \frac{1}{J} u_d \\ d = \max \left( \left| \frac{(f_{nl} - fl)^2}{(\epsilon_1^2)} \right| \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

La figure (III.9) montre l'évolution de la valeur de  $d$  le long de la trajectoire  $x_{1,d}$ .

#### Synthèse des correcteurs locaux et interpolation

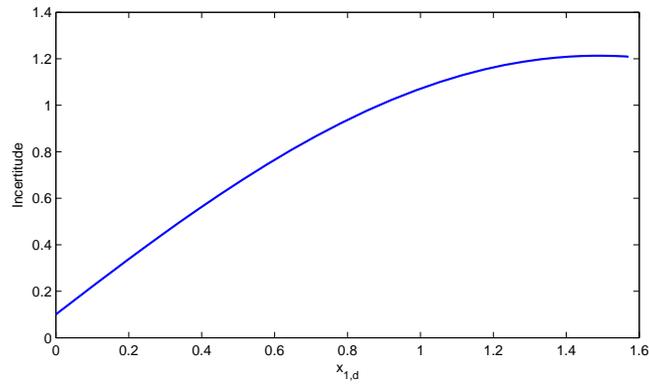


FIG. III.9 – Évolution de l'incertitude maximale ( $\sqrt{d}$ ) le long de la trajectoire.

La synthèse utilisée dans cette partie est une synthèse avec critère  $H_2$ , mais toutes les synthèses présentées dans la chapitre 2 restent utilisables dans le cadre présenté ici. Le solveur LMI utilisé pour résoudre cette succession de synthèse ne rencontre aucune difficulté pour calculer les correcteurs locaux. Il s'agit ensuite de trouver une interpolation polynômiale qui permette de donner une loi d'évolution des gains en fonction de la trajectoire de référence. Des polynômes d'ordre 5 ont été privilégiés pour les résultats de simulation présentés ci-dessous. Ils permettent de reproduire assez fidèlement l'évolution des gains  $k_1$  ou  $k_2$  pour les 50 points de la trajectoire, comme le montre la figure (III.10).

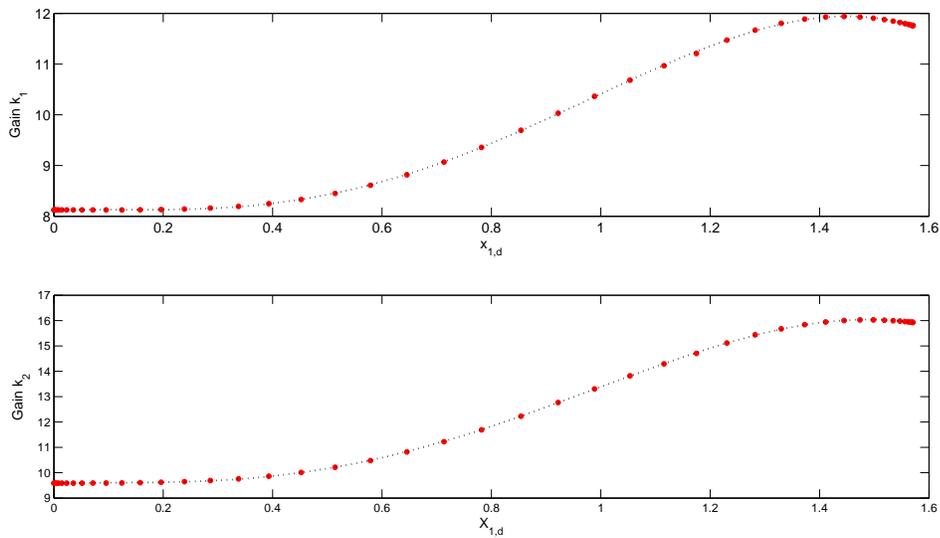
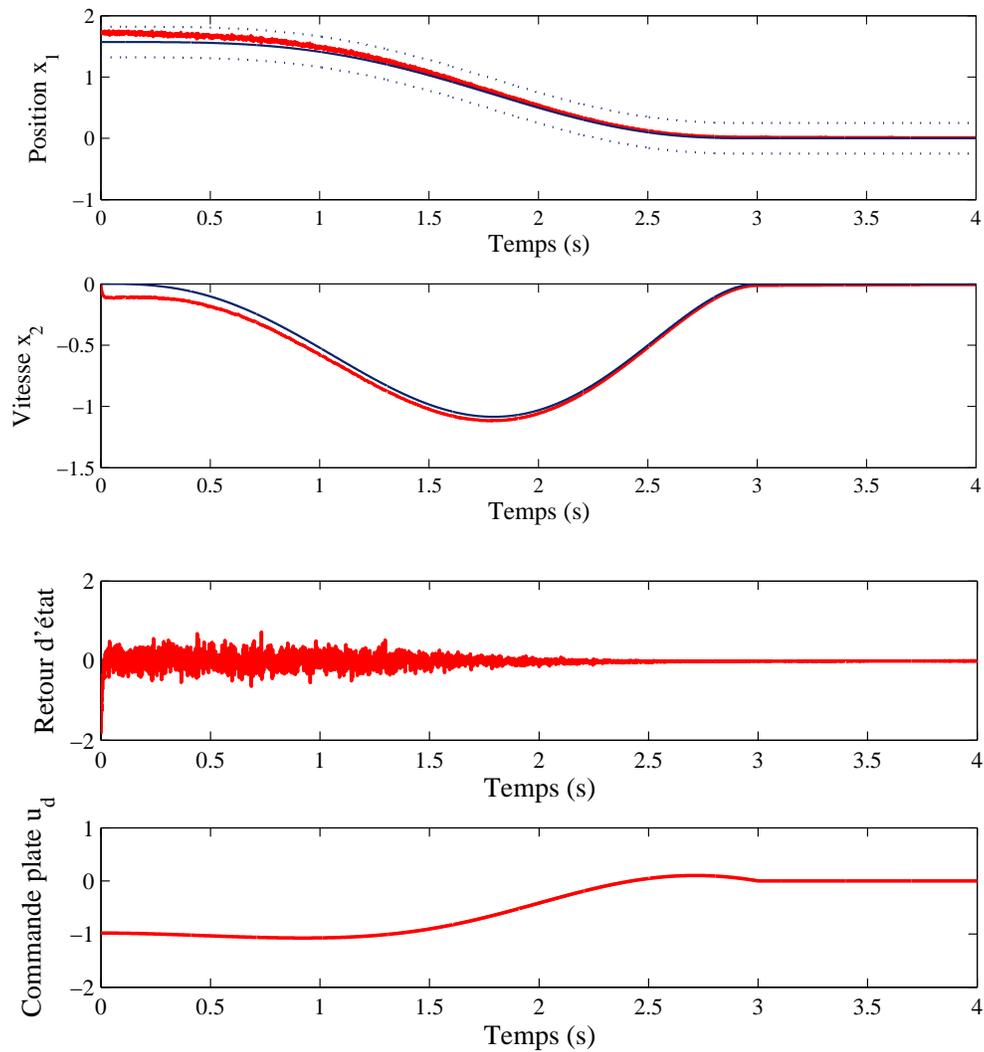


FIG. III.10 – Valeur et interpolation des gains  $k_1$  et  $k_2$  le long de la trajectoire de référence.

### Résultats de simulation

Une simple simulation intégrant la commande plate et la retour stabilisant n'aurait qu'un intérêt limité. En effet, comme la commande plate correspond à une inversion dynamique du système commandé, la si-

FIG. III.11 – Simulation en suivi de trajectoire avec  $t_f = 3s$ .

mulation numérique reproduirait la trajectoire désirée avec la précision qu’offre les possibilités numériques du calculateur. Afin de permettre de juger de l’efficacité de retour d’état stabilisant, trois éléments perturbateurs ont été rajoutés. Le premier consiste à introduire une erreur sur la position initiale du pendule. La loi de commande aura donc à compenser cet écart initial pour faire tendre vers zéro l’erreur de suivi. Cette erreur a été fixée à 10% (ce qui reste à l’intérieur du polyèdre  $P_\delta$  qui a servi à la détermination de l’incertitude bornée en norme). Les deux autres éléments sont des perturbations : un bruit de mesure sur la position du pendule et un bruit de commande appliqué directement sur la grandeur  $u$  vue par le système. Ces bruits sont des bruits blancs aléatoires dont l’amplitude est d’un maximum de 1% par rapport au signal utile. Deux résultats de simulations sont présentés. Le premier (fig III.11) a été réalisé en fixant le temps de description de la trajectoire de référence à  $t_f = 4$  secondes. Sur ces figures, le tracé des variables d’état  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  est accompagné du tracé de la trajectoire de référence calculée par la

spline trigonométrique. Sur le tracé de la position  $x_1$  a été également ajouté, un encadrement en pointillé qui correspond à l'intervalle sur lequel l'approximation bornée en norme a été calculée. On peut remarquer que dans ce cas la trajectoire ne sort pas de l'intervalle, ce qui indique que l'approximation reste valide tout au long du suivi. Les deux autres courbes de ce tracé montrent l'évolution des deux termes de commande, celui de la commande plate de type boucle ouverte et celui de la correction supplémentaire apportée par le retour d'état.

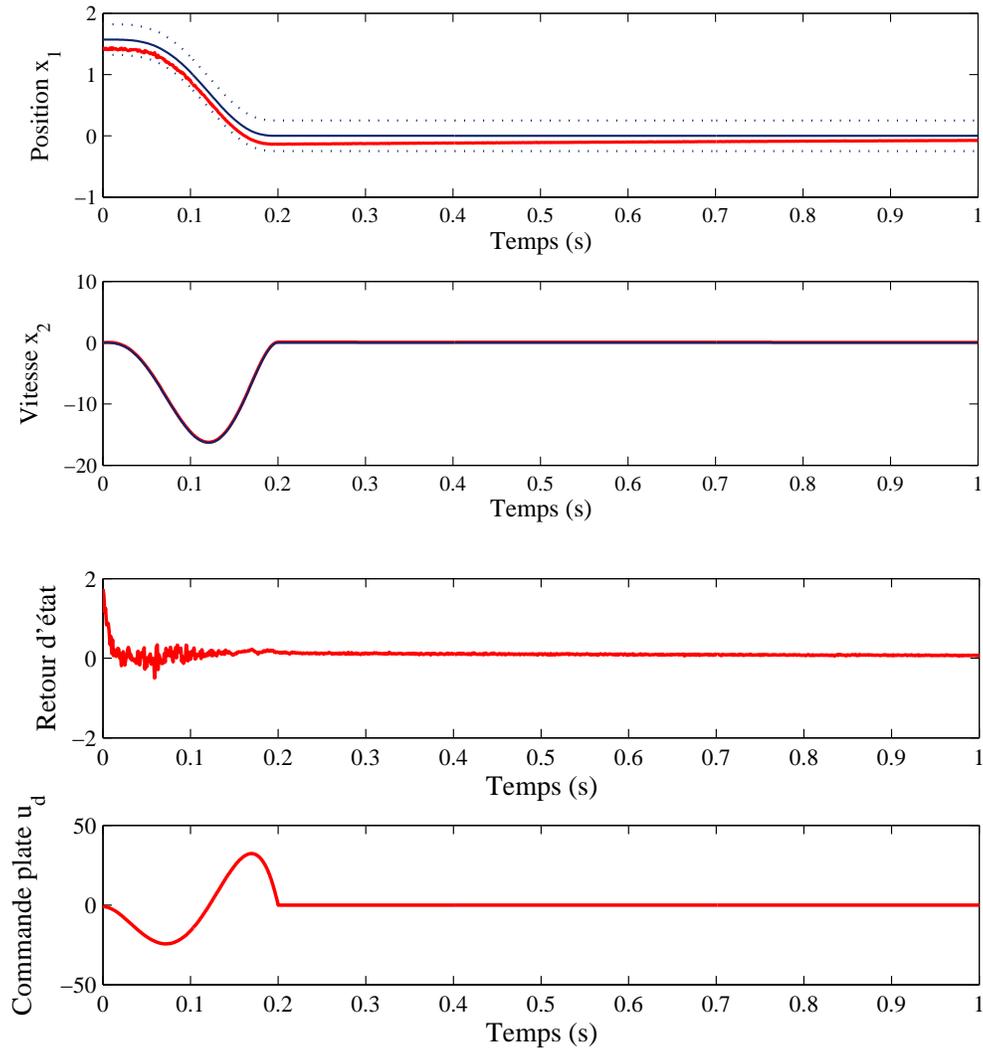


FIG. III.12 – Simulation en suivi de trajectoire avec  $t_f = 0.2s$ .

Pour la seconde simulation présentée, le temps de parcours a été largement diminué et est maintenant fixé à  $t_f = 0.2$  seconde. Il est possible de constater que ce changement de temps de référence n'influe que très marginalement la commande par retour d'état. En effet, c'est la partie de commande plate qui renferme l'accroissement de dynamique supplémentaire pour réaliser la trajectoire plus rapidement. Cette seconde simulation montre à quel point avec cette nouvelle approche il est possible de maîtriser

complètement la dynamique de suivi. L'inversion de la dynamique à travers les propriétés de platitude permet de mettre en place une commande boucle ouverte adaptée au suivi de la trajectoire imposée. Il est évident que cela s'accompagne de plus fortes amplitudes de commande et que la présence hypothétique (mais toujours présente en expérimental) de saturateur sur la commande viendrait mettre une limite basse sur la valeur que l'on peut donner à  $t_f$ . Dans le même ordre d'idée, il serait également envisageable de permettre un retour d'état plus dynamique (en relaxant par exemple un peu la contrainte  $H_2$  dans notre cas) afin d'améliorer la qualité du suivi. L'erreur de suivi tendrait plus rapidement vers 0 et rejoindrait plus rapidement la trajectoire de référence dans la première simulation ou annulerait l'erreur final dans la seconde.

### III.5 Conclusion

Après avoir expliqué l'approche par incertitude bornée en norme en utilisant une loi de commande séquencée, nous avons discuté dans ce chapitre le passage au cas LPV. Il se justifie par plusieurs inconvénients ou limitations qui se posent dans le mode séquencé comme, par exemple, la discontinuité des trajectoires suivies et l'exigence de surveiller en permanence le point courant pour savoir quel point viser et quel correcteur appliquer, ce qui peut être couteux en temps et en ressource matérielle.

---

## Chapitre IV

# Cas des systèmes non linéaires continus : le retour de sortie

---

### IV.1 Introduction

Nous avons exposé dans les chapitres précédents le problème de commande par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$ . Ce type de commande est bâti en supposant qu'il est possible de mesurer les composantes du vecteur d'état en permanence et à chaque instant. Autrement dit, nous supposons posséder des informations parfaites sur le système et cela n'est qu'une idéalisation qui peut rarement se réaliser. Dans la plupart des cas, le comportement des processus physiques ne met à notre disposition que des informations partielles sur le vecteur d'état et nous devons effectuer l'opération de commande à partir de ces informations disponibles incluses dans le vecteur de sortie mesurée  $y(t) = Cx(t)$ . Pour réaliser une loi de commande répondant plus à cette réalité physique, la théorie de commande par retour de sortie dynamique et des observateurs a été développée. On est appelé, donc, à étendre les outils proposés pour traiter le problème de non linéarité dans le cas de retour d'état pour inclure le cas de commande par retour de sortie dynamique et par observateur. Ce chapitre est consacré à cet objectif en commençant par l'exposition des difficultés qui sont à affronter dans le cas de retour de sortie dynamique pour l'adaptation de l'algorithme. Le chapitre se termine sur l'exemple simple du pendule inversé.

## IV.2 Modification de l'algorithme dans le cas de retour de sortie dynamique

Dans le cas de retour d'état, la difficulté principale, mais surmontable, est liée au problème numérique au niveau du calcul des lois de commande locales. En ce qui concerne la politique de commutation des lois de commande robustes, nous n'affrontons aucun problème car la mesure en temps réel du vecteur d'état permet en effet de n'effectuer la commutation sur la commande que si l'état se trouve dans le bassin d'attraction du point suivant visé, ce qui se produit, puisque la détermination des points d'équilibre intermédiaires satisfait cette condition. Ceci garantit qu'il existe toujours un instant où la trajectoire du système franchit la frontière du domaine d'attraction suivant. Ceci assure une transition stable du point de condition initiale au point final visé. Pour ce qui concerne la commande par retour de sortie dynamique, la difficulté majeure réside dans le choix de la politique de séquençement pour commuter parmi les commandes locales. Il y a là, en effet, un vrai inconvénient lié au fait qu'une partie du vecteur d'état n'est pas mesurable et, en conséquence, que la politique de séquençement suivie dans le cas de retour d'état n'est plus applicable identiquement. Ce point sera abordé dans un sous paragraphe suivant. Par rapport à l'algorithme général fourni pour le cas du retour d'état, les changements essentiels portent :

- sur le problème de la détermination des commandes locales
- sur le moyen d'établir une politique de séquençement.

### IV.2.1 Commandes locales

L'algorithme du paragraphe (II.2.4) génère une famille de systèmes linéaires incertains à incertitude de type borné en norme de sorte que les équations autour du  $j$ -ème point d'équilibre peuvent s'écrire comme suit :

$$\Sigma_L^{(j)} = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A^{(j)} + D^{(j)}FE^{(j)})x(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_2w(t) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $w \in \mathbb{R}^l$ ,  $z \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement les vecteurs d'état, de commande, de perturbation, de la sortie commandée et  $y \in \mathbb{R}^q$  est la sortie mesurée,  $j = 1, \dots, N$  où  $N$  représente le nombre de correcteurs fournis par l'algorithme. Les matrices  $D^{(j)}$ ,  $F$  et  $E^{(j)}$  représentent les paramètres d'incertitude bornée en norme données par les relations (la manière de déduire ces matrices est expliquée dans le paragraphe (II.3)) :

$$\begin{aligned} D &= (v'Mv)^{\frac{1}{2}} \\ E &= I \\ F'F &\leq I \end{aligned}$$

Le compensateur cherché  $K_L^{(j)}$  est strictement propre et a pour représentation d'état :

$$K_L^{(j)} = \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c^{(j)}x_c(t) + B_c^{(j)}y_c(t) \\ u_c(t) = C_c^{(j)}x_c(t) \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Ce compensateur  $K_L^{(j)}$  a pour but de garantir la stabilité quadratique et en plus de maximiser le volume d'ellipsoïde :

$$EL^{(j)} = \{X_e \in R^{2n} : (X - X_{eq}^{(j)})' S_j^{-1} (X - X_{eq}^{(j)}) \leq 1\} \quad (IV.3)$$

inclus dans le polyèdre :

$$P^{(j)} = \{X_e \in R^{2n} : a_i' X_e \leq b_i, i = 1, \dots, 2(2n)\} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{c1} \\ \vdots \\ x_{cn} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{c1} \\ \vdots \\ x_{cn} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \delta^{(j)} + x_{1eq}^{(j)} \\ \vdots \\ \delta^{(j)} + x_{neq}^{(j)} \\ \bar{\delta}^{(j)} \\ \vdots \\ \bar{\delta}^{(j)} \\ \delta^{(j)} - x_{1eq}^{(j)} \\ \vdots \\ \delta^{(j)} - x_{neq}^{(j)} \\ \bar{\delta}^{(j)} \\ \vdots \\ \bar{\delta}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (IV.4)$$

Les points d'équilibre liés aux variables d'état du compensateur sont bien sûr nuls. Les variables du compensateur sont également encadrées de façon à tenir un domaine compact et borné. Cela nous permet de bien poser le problème d'optimisation. Il est évident que les bornes  $\bar{\delta}^{(j)}$  pour les composantes de l'état du contrôleur, du système linéaire, peuvent être fixées à une valeur bien plus élevée que celles choisies pour le vecteur d'état qui sont des arguments des non linéarités intervenant dans les équations du système. En rappelant maintenant l'équivalence entre commande de type bornée en norme et commande  $H_\infty$ , nous pouvons réécrire le système (IV.1) sous la forme :

$$\Sigma_L^{(j)} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A^{(j)}x(t) + B_1w(t) + D^{(j)}w_\infty + B_2u(t) \\ z_\infty = D^{(j)}x(t) \\ z_2 = C_1x(t) + D_1u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_2w(t) \\ w_\infty = \Delta z_\infty, \Delta \Delta' \leq I \end{cases} \quad (IV.5)$$

La condition de stabilité est :

$$\|T_{z_\infty w_\infty}\| \leq 1$$

Le système dynamique global s'exprime alors :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_e^{(j)} X(t) + B_e^{(j)} w(t) + B_\infty w_\infty \\ z_\infty = C_{e\infty}^{(j)} X(t) \\ z_2 = C_{e2}^{(j)} X(t) \end{cases} \quad (IV.6)$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, A_e^{(j)} = \begin{bmatrix} A^{(j)} & B_2 C_c^{(j)} \\ B_c^{(j)} C_2 & A_c^{(j)} \end{bmatrix}, B_\infty^{(j)} = \begin{bmatrix} D^{(j)} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_e^{(j)} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c^{(j)} D_2 \end{bmatrix}, C_{e2}^{(j)} = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 C_c^{(j)} \end{bmatrix}, C_{e\infty}^{(j)} = \begin{bmatrix} E^{(j)} & 0 \end{bmatrix},$$

La condition suffisante de stabilité et de performance  $H_2$  pour le système (IV.1) est équivalente à la condition suffisante de commande mixte  $H_2/H_\infty$ . Rassemblant les résultats antérieurs, on est prêt maintenant à donner le résultat suivant qui montre la façon de garantir la stabilité quadratique du système (IV.1) et de maximiser le volume d'ellipsoïde  $EL^{(j)}$  inclus dans le polyèdre  $P^{(j)}$ .

### Théorème IV.1

Le système défini par (IV.1) est stabilisable par retour de sortie dynamique de type (IV.2) et  $\|T_{zw}\|_2^2 \leq \mu$  si, il existe une matrice symétrique (définie positive)  $W \in \mathbb{R}^{l \times l}$  et des matrices  $X_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_{1j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $V_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $F_j \in \mathbb{R}^{n \times q}$  telles que :

$$\max \text{trace } S_j \quad (\text{IV.7})$$

$$S_j = \begin{bmatrix} Y_j & V_j \\ V_j' & Y_{1j} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{IV.8})$$

$$\begin{bmatrix} S_j & S_j a_i \\ a_i' S_j & \delta_i^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{IV.9})$$

$$V_j > I \quad (\text{IV.10})$$

$$\text{trace } W < \mu \quad (\text{IV.11})$$

$$\begin{bmatrix} Y_j & I & B_1 \\ I & X_j & X_j B_1 + F_j D_2 \\ B_1' & B_1' X_j + D_2' F_j' & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{IV.12})$$

$$\begin{bmatrix} Y_j A^{(j)'} + L_j' B_2' + A^{(j)} Y_j + B_2 L_j & Z_j + M_j & Y_j C_1' + L_j' D_1' \\ Z_j' + M_j' & A^{(j)'} X_j + C_2' F_j' + X_j A^{(j)} + F_j C_2 & C_1' \\ C_1 Y_j + D_1 L_j & C_1 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.13})$$

$$\begin{bmatrix} Y_j A^{(j)'} + L_j' B_2' + A^{(j)} Y_j + B_2 L_j & Z_j + M_j & D^{(j)} & Y_j E^{(j)'} \\ Z_j' + M_j' & A^{(j)'} X_j + C_2' F_j' + X_j A^{(j)} + F_j C_2 & X_j D^{(j)} + F_j D_2 & E^{(j)'} \\ D^{(j)'} & D^{(j)'} X_j + D_2' F_j' & -I & 0 \\ E^{(j)} Y_j & E^{(j)} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.14})$$

avec

$$\begin{cases} L_j = C_c^{(j)} V_j', & F_j = U_j B_c^{(j)}, & M_j = V_j A_c^{(j)'} U_j' \\ Z_j = A^{(j)} + Y_j A^{(j)'} X_j + Y_j C_2' F_j' + L_j' B_2' X_j \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

Le compensateur strictement propre  $K_L^{(j)}$  du type retour de sortie dynamique pour le  $j$ -ème modèle linéaire, sera décrit par les équations :

$$K_L^{(j)} = \begin{cases} \dot{x}_c = A_c^{(j)} x_c(t) + B_c^{(j)} y_c(t) \\ u(t) = C_c^{(j)} x_c(t) \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

### Preuve

On déduit pour le système (IV.1) les deux fonctions de transfert :

$$T_{z_\infty w}^{(j)}(s) = C_{e_\infty}^{(j)} (sI - A_e^{(j)})^{-1} B_\infty^{(j)}$$

$$T_{z_2 w}^{(j)}(s) = C_{e_2}^{(j)} (sI - A_e^{(j)})^{-1} B_e^{(j)}$$

La norme  $H_2$  du transfert  $\|T_{z_2 w}^{(j)}(s)\|$  peut se définir aussi par :

$$\|T_{z_2 w}^{(j)}(s)\|_2^2 = \text{trace} (B_e^{(j)'} P B_e^{(j)})$$

avec  $P_j \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  solution de

$$A_e^{(j)'} P_j A_e^{(j)} - P_j + C_{e_2}^{(j)'} C_{e_2}^{(j)} = 0$$

où la matrice de Lyapunov  $P_j$  et son inverse sont partitionnées en quatre blocs  $n \times n$  tel que

$$P_j = \begin{bmatrix} X_j & U_j \\ U_j' & X_{1j} \end{bmatrix}, \quad P_j^{-1} = \begin{bmatrix} Y_j & V_j \\ V_j' & Y_{1j} \end{bmatrix}$$

$$\|T_{z_2 w}^{(j)}(s)\|_2^2 = \text{trace} W < \mu$$

où  $P_j$  et  $W$  vérifient les inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} A_e^{(j)'} P_j + P_j A_e^{(j)} & C_{e_2}^{(j)'} \\ C_{e_2}^{(j)} & -I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{IV.17})$$

$$\begin{bmatrix} P_j & P_j B_e^{(j)} \\ B_e^{(j)'} P_j & W \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{IV.18})$$

En pré et post multipliant les deux LMI par  $T_e'$  et

$$T_e = \begin{bmatrix} Y_j & I & 0 \\ V_j' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

respectivement et en utilisant les changements de variables suivants :

$$L_j = C_c^{(j)} V_j', \quad F_j = U_j B_c^{(j)}, \quad M_j = V_j A_c^{(j)'} U_j' \quad (\text{IV.19})$$

on obtient les inégalités matricielles (IV.12) et (IV.13). La condition  $H_\infty$  est obtenue en s'appuyant sur le "lemme borné réel" de sorte que le système précédent est stable si

$$\|T_{z_\infty w}^{(j)}(s)\| \leq 1,$$

alors que la matrice précédente  $P_j$  doit vérifier :

$$\begin{bmatrix} A_e^{(j)'} P_j + P_j A_e^{(j)} & P_j B_e^{(j)} & C_{e_\infty}^{(j)'} \\ B_e^{(j)'} P_j & -I & 0 \\ C_{e_\infty}^{(j)} & -I & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{IV.20})$$

Le développement de cette LMI en pré et post multipliant par  $T_{1e}'$  et

$$T_{1e} = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} Y_j & I \\ V_j' & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$$

nous conduit à (IV.14). La LMI (IV.7) assure le volume maximum de l'ellipsoïde  $EL^{(j)}$  et la relation (IV.9) garantit son inclusion dans le polyèdre  $P^{(j)}$ . La LMI (IV.9) est obtenue facilement à partir de la relation :

$$\begin{aligned} a_i' S a_i - \delta_i^2 &\leq 0 \\ \delta_i^2 - a_i' S S^{-1} S a_i &\geq 0 \end{aligned}$$

En utilisant le complément du Schur, on obtient (IV.9).

### Politique de commutation

Dans le cas d'une commande par retour d'état, qui, bien évidemment, suppose que toutes les composantes du vecteur d'état soient accessible à la mesure et donc connues en temps réel, la politique de commutation la plus efficace qui puisse être mise en œuvre pour l'algorithme développé est (en l'absence de bruit de mesure) d'effectuer la commutation dès le franchissement de la frontière (parfaitement définie par la connaissance des bassins d'attraction de chaque point d'équilibre choisis par l'algorithme) du domaine d'attraction du prochain point d'équilibre visé.

Il est évident qu'une telle politique de commutation ne peut être mise en œuvre dans le cas de retour de sortie où l'on ne possède, en temps réel, qu'une information partielle sur l'état du système. Une politique qui, assurément, assurerait une convergence sûre entre le point de départ et le point d'arrivée serait celle qui n'autoriserait la commutation que lorsque, pour une transition intermédiaire, le système aurait atteint la position d'équilibre visé (observation de non évolution sur un laps de temps) ou un voisinage très petit de cette position d'équilibre (observation d'une évolution infinitésimale). Comme la convergence en chaque position d'équilibre intermédiaire est une convergence asymptotique, une telle politique de commutation conduirait à un temps de réponse global (entre la condition initiale et la condition finale) infiniment long.

Pour tenter de réduire l'inconvénient précédent il est tentant d'envisager l'utilisation de la technique de l'observation ou du filtrage qui vise à fournir une estimation de l'état global à partir de l'information

contenue dans la sortie mesurée et utiliser (avec précaution) cette estimation pour définir la politique de commutation. En fait, plutôt que d'estimation sur l'état global, il suffirait d'effectuer l'estimation sur la partie complémentaire de la sortie qui, conjointement avec elle permettrait l'estimation globale (filtre ou observateur d'ordre réduit). Pour des raisons de simplicité et de concision, seule l'estimation globale portant sur tout l'état sera envisagée.

Utiliser une estimation d'état pour établir la loi de commutation utilisée pour le retour d'état n'assure pas en toute certitude qu'à chaque commutation l'état réel du système se trouve effectivement dans la zone d'attraction du point suivant. Toutefois considérant que les conditions traitées sont des conditions suffisantes et qu'elles donnent une mesure pessimiste des domaines de stabilité, il est permis d'espérer que l'utilisation de cette politique basée sur l'estimation d'état peut, dans nombre de situations pratiques, se montrer satisfaisante.

Le paragraphe qui suit fournit quelques idées pour réaliser l'estimation d'état, en restant dans ce contexte de l'utilisation de techniques linéaristes pour des problèmes non linéaires.

### IV.3 Estimation d'état -Filtrage-

Il n'est pas foncièrement étonnant que l'on puisse résoudre au moyen de techniques LMI certains problèmes d'estimation d'état ou de filtrage qui sont, comme communément admis des problèmes duaux de ceux de commande.

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques résultats concernant la détermination d'un estimateur dans le cas sans incertitude [COU 99b] [GAR 91].

Soit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w \\ y &= Cx \\ z &= Hx\end{aligned}$$

où  $y$  est la sortie dynamique mesurée et  $z$  est la sortie à estimer au moyen d'un filtre du type

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= A_f x_f + B_f y \\ z_f &= C_f x_f\end{aligned}$$

où le triplet  $(A_f, B_f, C_f)$  est à déterminer afin que  $z_f \rightarrow z$ . Pour cela est défini un problème de type  $H_2$  portant sur le système étendu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w \\ \dot{x}_f &= A_f x_f + B_f Cx \\ \zeta &= Hx - C_f x_f\end{aligned}$$

Soit

$$\min_{(A_f, B_f, C_f)} \|C_e(pI - A_e)^{-1} B_e\|_2^2$$

où

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_e = \begin{bmatrix} H & -C_f \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

qui s'écrit directement :

$$\begin{aligned} & \min \text{ trace } W \\ & \begin{bmatrix} W & B'P_e \\ P_e B & P_e \end{bmatrix} \geq 0 \\ & A'_e P_e + P_e A_e + C'_e C_e \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui, après transformations de congruence utilisant la matrice  $T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V' & 0 \end{bmatrix}$  (voir chapitre I) donne

$$\begin{aligned} & \min \text{ trace } W \\ & \begin{bmatrix} W & B'_1 & B'_1 X \\ B_1 & Y & I \\ X B_1 & I & X \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} AY + YA' & Z + M & YH' - L' \\ Z' + M' & A'X + XA + FC + C'F' & H' \\ HY - L & H & -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

où

$$L = C_f V', \quad F = UB_f, \quad M = VA'_F U'$$

et

$$Z = A + YA'X + YC'F'$$

L'expression (V.22) montre qu'il est nécessaire de faire l'hypothèse : Asymptotiquement stable. Cette hypothèse sera satisfaite pour chaque modèle linéaire intermédiaire qui sera stabilisé par retour de sortie dynamique. Le problème du filtrage est un problème facilement réductible à une forme LMI dont la solution permet de déterminer le triplet  $(A_f, B_f, C_f)$  à partir des valeurs de  $X, Y, L, F,$  et  $M$  et d'un choix (arbitraire) de  $V$ .

L'extension au problème de filtrage robuste ne pose aucune difficulté fondamentale dans le cas d'incertitudes bornées en norme (ce qui est loin d'être le cas pour des incertitudes polytopiques). Ainsi, pour un système incertain à incertitude bornée en norme

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + DFE)x + B_1 w \\ y = Cx \\ z = Hx \end{cases} \quad F'F \leq I$$

l'estimation robuste de  $z$  consistera à chercher un filtre de type

$$\begin{aligned} \dot{x}_f &= A_f x_f + B_f y \\ z_f &= C_f x_f \end{aligned}$$

de manière à minimiser une borne supérieure du coût défini par la norme  $H_2$  du transfert entre le signal d'erreur  $\zeta$  et le bruit  $w$ , soit

$$\min_{(A_f, B_f, C_f)} \mu$$

$$\forall F : F'F \leq I, \quad \|C_e(pI - A_e - D_eFE_e)^{-1}B_e\|_2^2 \leq \mu$$

$(A_e, B_e, C_e)$  étant définis en (IV.21) et

$$D_e = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, D_e = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix}$$

Une expression de ce problème s'écrit, après majoration des termes d'incertitude

$$\min \text{trace } W$$

$$W \geq B_e'PB_e$$

$$A_e'P_e + P_eA_e + C_e'C_e + P_eD_eD_e'P_e + E_e'E_e \leq 0$$

Après transformations, il est possible d'écrire un problème LMI :

$$\begin{aligned} & \min \text{trace } W \\ & \begin{bmatrix} W & B_1' & B_1'X \\ B_1 & Y & I \\ XB_1 & I & X \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} AY + YA' & Z + M & YH' - L' & D & YE' \\ Z' + M' & A'X + XA + FC + C'F' & H' & XD & E' \\ HY - L & H & -I & 0 & 0 \\ D' & D'X & 0 & -I & 0 \\ EY & E & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

### Remarques

1. Le problème du filtrage robuste doit être résolu, pour l'approche proposée sur le système constitué par le processus à commander et le compensateur dynamique bouclé. En effet, il n'est pas certain que le processus en boucle ouverte soit stable. La matrice de sortie pour ce système étendu sera constituée de la matrice de sortie mesurée du processus avec la matrice (identité) traduisant le fait que sont, bien sûr, connues (puisque calculées en filtre) les composantes du vecteur d'état du compensateur dynamique.
2. La plupart des conditions écrites sont des conditions relatives à des conditions asymptotiques : stabilité asymptotique pour la commande, convergence asymptotique pour l'estimation .... ce qui contrecarre notre souci d'améliorer le temps de réponse de l'approche présentée. En fait, le problème qui est résolu étant celui correspondant à la transition entre deux points d'équilibre, nous permet une initialisation exacte (à  $t = 0$ ) du filtre et, bien sûr, à chaque transition, l'utilisation de l'état antérieur comme condition initiale du nouveau filtre (continuité des état du filtre). Ceci permet de penser, pour une précision fixée, à une amélioration du temps de réponse du filtre qui pourra être contrôlé par comparaison directe des états mesurés ou connus (compensateur) et de leurs équivalents dans le vecteur d'état du filtre.

## IV.4 Application numérique : Pendule inversé

Nous considérons le même modèle du pendule décrit dans les chapitres précédents. Nous pouvons, donc, réécrire le modèle non linéaire par l'intermédiaire d'une famille des modèles linéaires suivants :

$$\Sigma_L^{(j)} = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A^{(j)} + D^{(j)}FE^{(j)})x(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_2w(t) \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

avec

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J} \cos(x_{eq}^{(j)}) & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

On considère la transition  $[\theta(t), \dot{\theta}(t)] = [\frac{\pi}{4}, 0] \rightarrow [0, 0]$ , avec  $\beta = 0.1$  et  $\delta = 0.2$ . Nous pouvons résumer les résultats dans les deux tables suivants :

Compensateur ( $j$ )	$A_c^{(j)}$		$B_c^{(j)}$		$C_c^{(j)}$
1	-1.5374	0.6037	-0.9434	-79.5619	$\begin{bmatrix} 5.5378 & 1.4868 \end{bmatrix}$
2	-1.5334	0.6076	-0.9264	-76.0364	$\begin{bmatrix} 5.6140 & 1.5667 \end{bmatrix}$
3	-1.5142	0.6285	-0.9404	-80.2454	$\begin{bmatrix} 5.5408 & 1.4988 \end{bmatrix}$
4	-1.4758	0.6850	-0.8996	-67.6884	$\begin{bmatrix} 5.8789 & 1.7579 \end{bmatrix}$
5	-1.5257	0.7575	-0.8697	-55.3058	$\begin{bmatrix} 6.6880 & 2.1440 \end{bmatrix}$
6	-1.7920	0.8002	-0.8544	-42.9811	$\begin{bmatrix} 5.5378 & 1.4868 \end{bmatrix}$
7	-1.8533	0.9758	-0.8654	-32.4724	$\begin{bmatrix} 9.6016 & 3.5863 \end{bmatrix}$
8	-1.8533	0.9758	-0.8654	-32.4724	$\begin{bmatrix} 9.6016 & 3.5863 \end{bmatrix}$

Itération ( $j$ )	$x_{eq}^{(j)}$	$u_{eq}^{(j)}$
1	$x_f = (0, 0)'$	$u_f = 0$
2	$(0.1053, 0)'$	$-0.1030$
3	$(0.2108, 0)'$	$-0.2050$
4	$(0.3186, 0)'$	$-0.3070$
5	$(0.4329, 0)'$	$-0.4111$
6	$(0.5590, 0)'$	$-0.5197$
7	$(0.7017, 0)'$	$-0.6326$
8	$x_0 = (\frac{\pi}{4}, 0)'$	$u_0 = -0.6930$

Les paramètres d'incertitudes bornées en norme : pour chaque modèle non linéaire sont :

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0133 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0343 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.0648 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.1055 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.1578 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(7)} = \begin{bmatrix} 0.2225 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec  $E = I$  et  $F'F = I$ . Les figures IV.1 et IV.2 montrent l'évolution de la position et la vitesse angulaire et le signal de commande, respectivement. Nous pouvons constater des discontinuités lors des instants de commutations. On peut aussi constater un temps de réponse plus long que celui obtenu par retour d'état, ce qui se justifie par le fait que la commande est générée à partir d'une information réduite.

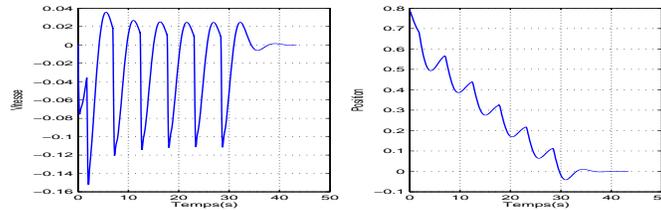


FIG. IV.1 – Position et vitesse angulaire.

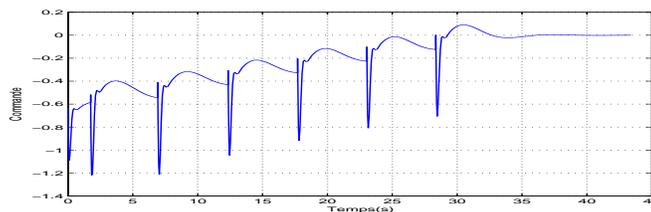


FIG. IV.2 – Signal de commande.

L'utilisation d'un compensateur unique issu d'une interpolation polynômiale en fonction des points d'équilibre trouvés hors ligne et des compensateurs associés, permet de s'affranchir du phénomène de

discontinuité. Il est également possible d'améliorer le temps de réponse comme le montre les figures IV.3 et IV.4 où l'on a fixé  $t_f = 20s$  avec une commande :

$$u_{eq}(t) = u_0 + \left(\frac{u_f - u_0}{t_f}\right)t, \quad t \in [0, t_f]$$

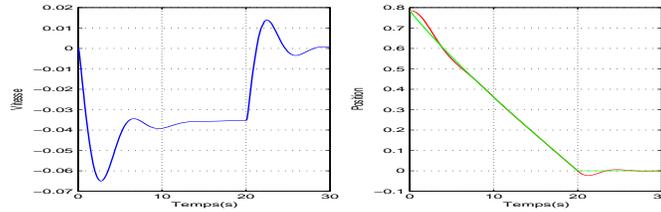


FIG. IV.3 – Position et vitesse angulaire dans le cas polynômial.  $t_f = 20s$

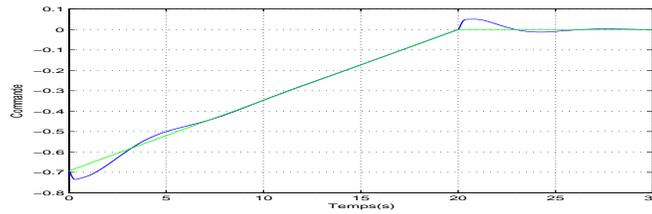


FIG. IV.4 – Signal de commande dans le cas polynômial.  $t_f = 20s$ .

Pour  $t_f = 10s$ , le suivi est encore garanti avec toutefois une trajectoire présentant un dépassement. Cependant, il est clair, que la capacité de suivre de trajectoire se dégrade en diminuant le paramètre  $t_f$  et comme cela est exposé dans la figure IV.5.

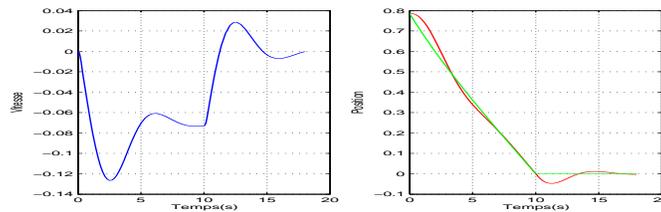


FIG. IV.5 – Position et vitesse angulaire dans le cas polynômial.  $t_f = 10s$

La réponse se dégrade encore lorsque l'on baisse  $t_f$  à des valeurs inférieures pour obtenir les courbes IV.6 et IV.7 correspondant à  $t_f = 0.1s$ .

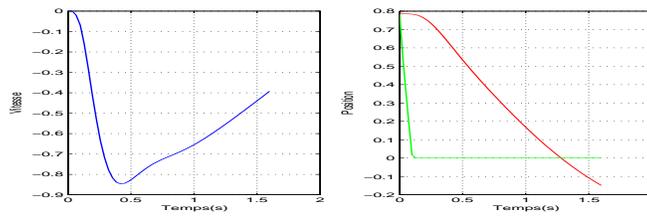


FIG. IV.6 – Position et vitesse angulaire dans le cas polynômial.  $t_f = 0.1s$ .

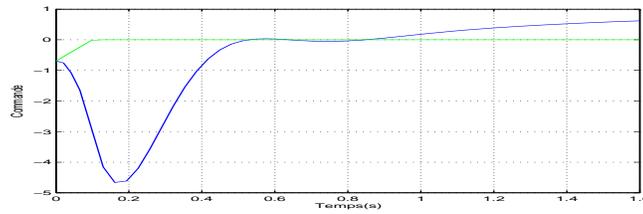


FIG. IV.7 – Signal de commande dans le cas polynômial.  $t_f = 0.1s$ .

## IV.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la modification de l'algorithme dans le cas de retour de sortie dynamique. Nous y avons discuté, dans un premier temps, le problème de détermination des lois de commande locale par retour de sortie dynamique, puis nous avons montré la façon suivie pour traiter le problème de la politique de séquençement où une partie du vecteur d'état n'est plus accessible.

---

## Chapitre V

# Cas des systèmes non linéaires discrets

---

### V.1 Introduction

Dans les dernières décennies, le domaine de l'informatique s'est fortement développé de sorte qu'il influence toutes les branches des sciences modernes. Les automaticiens se sont intéressés à développer des méthodes donnant la possibilité de profiter des moyens puissants fournis par l'informatique, aussi bien au niveau de la réalisation des compensateurs qu'à celui de leur analyse et de leur conception. En conséquence, la commande numérique s'est répandue ces dernières années avec le développement des méthodes d'analyse et de synthèse pour les systèmes à temps discret. Dans ce chapitre nous abordons ce domaine en exposant un résumé de résultats connus [JUR 71] [JUR 74] [KUC 91] [LEW 91] et nous développons, en particulier, ceux liés aux techniques  $H_2$  et  $H_\infty$  adaptées au cas discret [FRA 91] [STO 92] [GAH 94b]. Ensuite, sera faite l'extension de l'algorithme développé dans le cas continu pour inclure le cas discret. Son application sera faite sur le cas du pendule inversé.

### V.2 Modèles considérés et adaptation des outils LMI

Nous présentons dans cette partie les outils de base essentiels concernant le cas discret. Tout d'abord, nous rappelons les différentes façons possibles pour représenter un système dynamique linéaire à temps discret, puis nous étendons la notion de fonction de Lyapunov dans le cas discret et, enfin, un rappel succinct sur les méthodes de synthèse sera effectué.

### V.2.1 Modèle (certain et incertain)

La représentation d'un système dynamique linéaire à temps discret peut être décrite de deux manières différentes, tout comme pour le cas continu :

- représentation fréquentielle, par la matrice de transfert en  $z$ ,
- représentation temporelle, par un ensemble d'équations aux différences; la représentation d'état étant un ensemble d'équations aux différences du premier ordre.

Le cadre de notre étude, dans ce chapitre, est restreint aux systèmes à temps discret obtenus par échantillonnage, en vue de la commande par ordinateur de systèmes à temps continu. Autrement dit, on s'intéresse à un modèle avec variable continue fonctionnant sur la base d'un échantillonnage. Le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_1w_k + B_2u_k \\ z_k = C_1x_k + D_1u_k \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  et  $w_k \in \mathbb{R}^l$  sont respectivement les vecteurs d'état, de commande, de perturbation et  $z_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie commandée. La présence d'une incertitude bornée en norme peut se représenter d'une façon semblable au cas continu :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + DFE)x_k + B_1w_k + B_2u_k \\ z_k = C_1x_k + D_1u_k \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

avec  $F'F \leq 1$ . Rappelons que les modèles précédents sont obtenus à partir de modèles continus, par échantillonnage de période  $T$ . Le choix de  $T$  dépend du type de procédé et de la dynamique des signaux concernés. En tout état de cause, elle doit respecter le théorème de Shannon qui précise que la fréquence d'échantillonnage  $f = \frac{1}{T}$  doit être au moins égale à deux fois la plus grande fréquence contenue dans le spectre du signal que l'on veut échantillonner. Le caractère linéaire est généralement une idéalisation car la majorité des systèmes dans la réalité physique sont non linéaires. La représentation d'un système non linéaire à temps discret s'écrit :

$$\Sigma_d : x_{k+1} = f_d(x_k, u_k) \quad (\text{V.3})$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état, où  $u_k \in \mathbb{R}^m$  est la commande et le système est décrit  $\forall k > 0$ . Pour des raisons de simplicité, on va considérer le système affine en commande, avec matrice de commande stationnaire :

$$\Sigma_d : x_{k+1} = f_d(x_k) + Bu_k \quad (\text{V.4})$$

Il est clair, qu'il est possible, comme dans le cas continu, de linéariser, quand les non linéarités le permettent, un modèle non linéaire autour de points de fonctionnement et de travailler avec des modèles linéaires locaux. Un couple  $(x_{eq}, u_{eq})$  est un couple d'équilibre s'il satisfait

$$x_{eq} = f_d(x_{eq}) + Bu_{eq}$$

### V.2.2 Lyapunov en discret

La notion de fonction de Lyapunov dans le cas discret ne change pas par rapport à celle du cas continu (expliquée dans le premier chapitre). La fonction de Lyapunov peut être vue comme une fonction énergie

généralisée et sous la condition de signe défini positif, sa décroissance le long des trajectoires assurera la stabilité du système. Les définitions proposées par Lyapunov concernant la stabilité ont été formulées pour des systèmes en temps discret. On peut, également, distinguer les deux méthodes de Lyapunov suivantes [BOR 93][ABD 96] [BYR 93] :

### Première méthode de Lyapunov

On considère le cas où le système non linéaire

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

admet au voisinage de  $x_{eq} = 0$  un développement limité de la forme :

$$x_{k+1} = Ax_k + r(\|x\|) \tag{V.5}$$

dans laquelle la matrice  $A$  est constante et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|r(\|x\|)\|}{\|x\|} = 0$$

Le système linéaire décrit par la relation :

$$z_{k+1} = Az_k \tag{V.6}$$

peut être considéré comme la linéarisation de (V.5) autour  $x_{eq} = 0$ . Ce système (V.6) permet de statuer, localement, sur la stabilité du système non linéaire au point  $x_{eq} = 0$  :

- Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de module strictement inférieur à l'unité alors l'origine est asymptotiquement stable.
- Si  $A$  présente au moins une valeur propre de module, strictement supérieur à l'unité, l'origine est instable.
- Si des valeurs propres de  $A$  sont sur le cercle de rayon unité et les autres étant à l'intérieur, on ne peut pas conclure quant à la stabilité locale de l'équilibre  $x_{eq} = 0$  du système non linéaire. On se trouve alors dans un cas dit critique, la stabilité ne pouvant alors être étudiée qu'en prenant un développement limité intégrant des termes de degré supérieur à un.

Cette méthode est intéressante en tant qu'étude préliminaire, lorsque par exemple, le système non linéaire présente plusieurs points d'équilibre.

### Seconde méthode de Lyapunov

Cette méthode constitue la base de la plupart des études quantitatives de la stabilité et de l'attractivité. Elle ne nécessite pas la résolution des équations (ce qui est son grand avantage) et repose sur une fonction de Lyapunov  $v(x_k)$  définie comme suit (en supposant l'origine comme point d'équilibre) :

#### Définition V.1

Une fonction  $v(x_k)$  est dite candidate à Lyapunov si :

- $v(x_k)$  est une application continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^+$ , pour  $x_k \neq 0$  ( $v(x_k) > 0$ ,  $v(0) = 0$ ). Elle est dite définie positive.
- les courbes  $v(x_k) = \text{constante}$ , appelées équipotentielles de Lyapunov, définissent des domaines emboîtés :

$$D_i = \{x \in \mathbb{R}^n, v(x_k) \leq c_i\}$$

$$c_1 < c_2 \Rightarrow D_1 \subset D_2$$

Le principe de la méthode est de remplacer la convergence de  $x_k$  vers  $x_{eq}$  par l'étude de la variation de  $v(x_k)$  le long des trajectoires (discrètes) du système. On a ainsi :

$$\Delta v_k = v_{k+1} - v_k = v(f(x_k)) - v(x_k)$$

A partir de cela, on peut résumer le résultat principal dans le théorème suivant :

**Théorème V.1**

L'origine  $x_{eq} = 0$  est asymptotiquement stable s'il existe  $v$  et un domaine  $D$  entourant l'origine tels que  $\Delta v_k$  soit strictement négative pour tout  $k$  et  $x_k$  non nul dans  $D$ . Alors  $d = \{x : v(x) \leq c \text{ et } x \in D\}$  est un domaine de stabilité asymptotique. Le domaine correspondant à

$$dm = \{x : \max_c [v(x) \leq c \text{ et } x \in D]\}$$

constitue le domaine suffisant de volume maximal correspondant à  $v(x_k)$ . (voir la figure (V.1)).

Tout comme pour le cas continu, pour le système linéaire à temps discret, il est possible, à partir de l'utilisation d'une fonction quadratique

$$v(x) = x'Px$$

avec la condition  $P = P' > 0$  (matrice symétrique définie positive), d'établir une condition nécessaire et

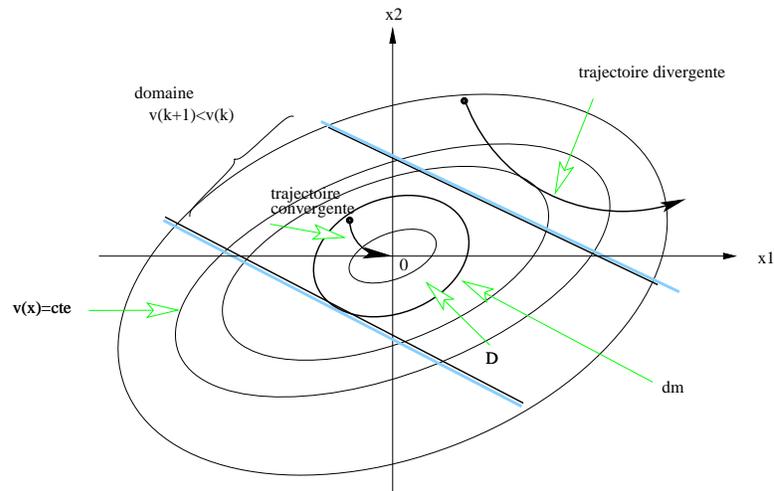


FIG. V.1 – Estimation du domaine de stabilité en cas discret.

suffisante de stabilité :

**Théorème V.2**

Le système (V.1) est asymptotiquement stable si et seulement si  $\exists P > 0$  telle que :

$$A'PA - P < 0 \quad (\text{V.7})$$

**V.2.3 Méthodes de synthèse**

Après avoir présenté la notion de fonction et d'équation de Lyapunov en temps discret, on peut, maintenant, exposer quelques rappels sur la commande par retour d'état et par retour de sortie dynamique, associés à l'optimisation de critère de type  $H_2$  et  $H_\infty$ .

**Stabilisabilité par retour d'état**

On considère le système linéaire à temps discret invariant décrit par (V.1), une condition de stabilisabilité est donnée par le théorème suivant :

**Théorème V.3**

Le système (V.1) est stabilisable par retour d'état de type  $u_k = Kx_k$  si et seulement si, il existe une matrice symétrique  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que :

$$\begin{bmatrix} -S & AS + B_2R \\ SA' + R'B_2' & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.8})$$

Le gain de retour d'état est alors donné par  $K = RS^{-1}$ .

**Preuve**

D'après le théorème de Lyapunov, le système (V.1) est stabilisable par retour d'état  $u_k = Kx_k$  si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que :

$$(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P < 0 \quad (\text{V.9})$$

l'inégalité (V.9) par complément de Schur peut se ramener à :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A + B_2K \\ A' + K'B_2' & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.10})$$

en pré et post multipliant (V.10) par la matrice régulière

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

où  $S = P^{-1}$ , on aura (V.8).

### Retour d'état et performance $H_2$

Dans cette section, nous rappelons le problème de commande, avec rejet de perturbation  $H_2$ , pour des systèmes linéaires incertains à temps discret. Parmi plusieurs approches existantes, nous présentons ici celle de type LMIs. On considère, de nouveau, le système (V.1). Le modèle en boucle fermée de ce système avec une loi de commande par retour d'état  $u_k = Kx_k$  s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + B_2K)x_k + B_1w_k = A_e x_k + B_e w_k \\ z_k = (C_1 + D_1K)x_k = C_e x_k \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

Le transfert  $T_{z_k w_k}$  s'écrit :

$$T_{z_k w_k} = C_e(zI - A_e)^{-1}B_e = (C_1 + D_1K)(zI - A - B_2K)^{-1}B_1$$

Le calcul de la norme  $H_2$  repose sur la détermination de grammien d'observabilité et de commandabilité  $(L_o, L_c)$  qui, sous les hypothèses usuelles de commandabilité et observabilité, sont les solutions définies positives des équations discrètes de Lyapunov [CHE 99] :

$$A_e' L_o A_e - L_o + C_e' C_e = 0$$

$$A_e' L_c A_e - L_c + B_e B_e' = 0$$

On a alors :

$$\|T_{z_k w_k}\|_2^2 = \text{trace}(B_e' L_o B_e) = \text{trace}(C_e L_c C_e')$$

A partir de ces équations, on peut établir les théorèmes suivants :

#### Théorème V.4 [COU 99a]

Le système (V.1) est stabilisable par retour d'état et  $\|T_{z_k w_k}\|_2^2 \leq \mu$  si et seulement si, il existe deux matrices symétriques (définies positives)  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et une matrice  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , solutions des inégalités matricielles suivantes :

$$\text{trace } W < \mu \quad (\text{V.12})$$

$$\begin{bmatrix} S & SC_1' + R'D_1' \\ C_1S + D_1R & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{V.13})$$

$$\begin{bmatrix} -S & AS + B_2R & B_1 \\ SA' + R'B_2' & -S & 0 \\ B_1' & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{V.14})$$

Ce théorème dérive de l'utilisation du gramien de commandabilité. Une expression duale est fournie dans le théorème suivant par l'utilisation du gramien d'observabilité.

#### Théorème V.5

Le système (V.1) est stabilisable par retour d'état et  $\|T_{z_k w_k}\|_2^2 \leq \mu$  si et seulement si, il existe deux matrices symétriques (définies positives)  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{l \times l}$  et une matrice  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , solutions des inégalités matricielles suivantes :

$$\text{trace } W < \mu \quad (\text{V.15})$$

$$\begin{bmatrix} W & B_1' S \\ S B_1 & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{V.16})$$

$$\begin{bmatrix} -S & S A_1' + R' B_2' & S C_1' + R' D_1' \\ A S + B_2 R & -S & 0 \\ C_1 S + D_1 R & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{V.17})$$

### Retour d'état et performance $H_\infty$

On s'intéresse maintenant au problème de la commande  $H_\infty$  des systèmes à temps discret. La définition de la commande  $H_\infty$  est similaire à celle présentée dans le cas continu. On va donner, dans un premier temps, quelques rappels du lemme borné réel pour les systèmes à temps discret [GAH 94b] et, par la suite, on va rappeler la condition nécessaire et suffisante de commande  $H_\infty$  par retour d'état.

#### Lemme V.1

Considérons une fonction de transfert discrète  $\|T(z)\|_\infty = D + C(zI - A)^{-1}B$ .

Les expressions suivantes sont alors équivalentes :

1.  $\|D + C(zI - A)^{-1}B\|_\infty < \mu$  et  $A$  est stable au sens des systèmes à temps discret ;
2. il existe une matrice symétrique (définie positive)  $P$  telle que :

$$\begin{bmatrix} A' P A - P & A' P B & C' \\ B' P A & B' P B - \gamma I & D' \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.18})$$

3. il existe une matrice symétrique (définie positive)  $P$  telle que :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A & B & 0 \\ A' & -P & 0 & C' \\ B' & 0 & -\gamma I & D' \\ 0 & C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.19})$$

Ce lemme nous permet de trouver d'une façon directe le théorème suivant :

#### Théorème V.6

Le système (V.1) est stabilisable par retour d'état et sa norme  $H_\infty$  est inférieure à  $\gamma$  si et seulement si, il existe une matrice symétrique (définie positive)  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que :

$$\begin{bmatrix} -S & AS + B_2R & B_1 & 0 \\ SA' + R'B_2' & -S & 0 & SC_1' + R'D_1' \\ B_1' & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & C_1S + D_1R & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.20})$$

Le gain stabilisant étant alors donné par  $K = RS^{-1}$ .

### Commande par retour de sortie dynamique

Dans cette partie est réalisé un bref rappel sur la commande par retour de sortie dynamique sachant que son intérêt essentiel, dans le cas discret comme dans le cas continu, vient du fait que les états d'un système ne sont pas toujours accessibles. Au système (V.1) est ajoutée l'égalité suivante, représentant la sortie mesurée du système :

$$y_k = C_2x_k + D_2w_k, \quad y_k \in \mathbb{R}^q \quad (\text{V.21})$$

Le compensateur cherché est strictement propre et a pour représentation :

$$\begin{cases} x_{ck+1} = A_c x_{ck} + B_c y_k \\ u_k = C_c x_{ck} \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

Le système dynamique global s'exprime alors :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_e X_k + B_e w_k \\ z_k = C_e X_k \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

avec

$$A_e = \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_2 \end{bmatrix}, \quad C_e = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 C_c \end{bmatrix}$$

On donne maintenant les trois théorèmes fournissant les conditions nécessaires et suffisantes pour le cas de stabilisabilité simple, de performance  $H_2$  et  $H_\infty$ . Ces théorèmes sont dérivés de manière fort similaire à celle développée dans le cas continu.

#### Théorème V.7

Le système défini par (V.1) et (V.21) est stabilisable par retour de sortie dynamique de type (V.22) si et seulement si, il existe deux matrices symétriques (définies positives)  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et des matrices  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$  telles que :

$$\begin{bmatrix} Y & I & YA' + L'B_2' & Z + M \\ I & X & A' & A'X + C_2'F' \\ AY + B_2L & A & Y & I \\ Z' + M' & XA + FC_2 & I & X \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{V.24})$$

avec

$$\begin{cases} V = U^{-1}(I - XY) \\ Z = YA'X + YC_2'F' + L'B_2'X \\ L = C_cV', F = UB_c, M = VA_c'U' \end{cases} \quad (\text{V.25})$$

### Preuve

D'après le théorème de Lyapunov, le système en boucle fermée (V.23) est asymptotiquement stable si et seulement si, il existe une matrice  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  symétrique définie positive telle que :

$$P - A_e'PA_e > 0 \quad (\text{V.26})$$

$P$  et  $P^{-1}$  sont partitionnées en quatre blocs de dimensions  $n \times n$  tel que

$$P = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & X_1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & Y_1 \end{bmatrix}$$

L'inégalité précédente par complément de Schur peut se ramener à :

$$\begin{bmatrix} P & A_e'P \\ PA_e & P \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{V.27})$$

On pré et post multiplie, respectivement, par  $\text{diag}(T', T')$  et  $\text{diag}(T, T)$  :

$$T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V' & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient alors l'inégalité (V.24), après le changement de variables :

$$\begin{aligned} L &= C_cV', F = UB_c, M = VA_c'U' \\ Z &= YA'X + YC_2'F' + L'B_2'X \end{aligned}$$

On s'intéresse dans ce qui suit au problème du retour de sortie dynamique garantissant certaines performances sur la norme  $H_2$ , cela peut résumer dans le théorème suivant :

### Théorème V.8

Le système défini par (V.1) et (V.21) est stabilisable par retour de sortie dynamique de type (V.22) et  $\|T_{z_k w_k}\|_2^2 \leq \mu$  si et seulement si, il existe une matrice symétrique (définie positive)  $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et les matrices  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$  telles que :

$$\text{trace } W < \mu \quad (\text{V.28})$$

$$\begin{bmatrix} W & B_1' & B_1'X + D_2'F' \\ B_1 & Y & I \\ XB_1 + FD_2 & I & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{V.29})$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & YA' + L'B'_2 & Z + M & YC'_1 + L'D'_1 \\ I & X & A' & A'X + C'_2F' & C'_1 \\ AY + B_2L & A & Y & I & 0 \\ Z' + M' & XA + FC_2 & I & X & 0 \\ C_1Y + D_1L & C_1 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{V.30})$$

avec  $L, F, M$  et  $Z$  définies au théorème (V.7)

### Preuve

La norme  $H_2$  du transfert  $T_{z_k w_k}$  pour le système en boucle fermée (V.23) est définie par :

$$\|T_{z_k w_k}\|_2^2 = \text{trace}(B'_e P B_e)$$

avec  $P \in \mathbb{R}^n \times n$  solution de  $A'_e P A_e - P + C'_e C_e = 0$ .

Ainsi

$$\|T_{z_k w_k}\|_2^2 < \text{trace } W < \mu$$

où  $P$  et  $W$  vérifient les inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} P & A'_e P & C'_e \\ PA_e & P & 0 \\ C_e & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{V.31})$$

$$\begin{bmatrix} W & B'_e P \\ PB_e & P \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{V.32})$$

En pré et post multipliant la première LMI par  $\text{diag}(T', T', I)$  et  $\text{diag}(T, T, I)$  et la deuxième LMI par  $\text{diag}(I, T')$  et  $\text{diag}(I, T)$  respectivement et en utilisant les changements de variables du théorème (V.7), on obtient les inégalités matricielles (V.29) et (V.30). Le théorème suivant concerne la performance  $H_\infty$  :

### Théorème V.9

Le système (V.1), (V.21) est stabilisable par retour de sortie dynamique de type (V.22) et  $\|T_{z_k w_k}\|_\infty \leq \gamma$  si et seulement si, il existe deux matrices symétriques (définies positives)  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et les matrices  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$  telles que :

$$\begin{bmatrix} Y & I & YA' + L'B'_2 & Z + M & 0 & YC'_1 + L'D'_1 \\ I & X & A' & A'X + C'_2F' & 0 & C'_1 \\ AY + B_2L & A & Y & I & B_1 & 0 \\ Z' + M' & XA + FC_2 & I & X & XB_1 + FD_2 & 0 \\ 0 & 0 & B'_1 & B'_1X + D'_2F' & \gamma I & 0 \\ C_1Y + D_1L & C_1 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{V.33})$$

avec  $L, F, M$  et  $Z$  définies au théorème (V.7)

**Preuve**

D'après le "lemme borné réel" dans le cas discret, le système en boucle fermée (V.23) est asymptotiquement stable et

$$\|T_{z_k w_k}\|_\infty \leq \gamma$$

si et seulement si il existe une matrice  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  symétrique définie positive telle que :

$$\begin{bmatrix} P & A'_e P & 0 & C'_e \\ P A_e & P & P B_e & 0 \\ 0 & B'_e P & \gamma I & 0 \\ C_e & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{V.34})$$

$P$  et  $P^{-1}$  sont partitionnées en quatre blocs de dimensions  $n \times n$  tels que

$$P = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & X_1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & Y_1 \end{bmatrix}$$

Si l'on pré et post multiplie par  $\text{diag}(T', T', I, I)$  et  $\text{diag}(T, T, I, I)$  respectivement, on obtient alors l'inégalité matricielle (V.33). Les expressions (V.24), (V.30) et (V.33) sont linéaires par rapport à  $X, Y, L, F$  et  $M_1 = M + Z$ , tous les problèmes relatifs aux trois théorèmes précédents sont susceptibles de résolution par utilisation de solveurs LMI. A partir des solutions en  $X, Y, L, F$  et  $M$  il est possible de proposer une solution pour le triplet  $(A_c, B_c, C_c)$  ainsi que pour la matrice de Lyapunov globale, et ce, par utilisation des mêmes expressions que celles établies pour le cas continu [COU 99a].

### V.3 Extension de l'algorithme et synthèse de lois de commande séquencées sur le cas discret

Cette section suit le même schéma que celui adopté pour les systèmes à temps continu, on pourra ainsi noter de nombreuses similarités, ce qui entraîne un développement plus succinct. Nous rappelons les grandes lignes de l'algorithme :

1. Prendre comme point d'équilibre initial le point d'arrivée  $(x_{1eq}^{(j)}, u_{1eq}^{(j)}) = (x_f, u_f)$ .
2. Définir un polyèdre  $P^{(j)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_{ieq}^{(j)}| < \delta_i, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N \right\}$  autour  $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$  où  $N$  représente le nombre de correcteurs linéaires fournis par la technique et  $\delta_i$  un paramètre d'entrée (adapté à la précision voulue).
3. Représenter le système non linéaire par l'intermédiaire d'un modèle linéaire à incertitude de type bornée en norme.
4. Bâtir une loi de commande robuste linéaire locale maximisant la région de stabilité  $EL^{(j)}$  incluse dans le polyèdre  $P^{(j)}$ .
5. Calculer le point d'équilibre prochain  $(x_{eq}^{(j+1)}, u_{eq}^{(j+1)})$  le plus éloigné possible dans  $EL^{(j)}$  de  $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$  pour l'obtention d'un nombre de correcteurs aussi faible que possible.

6. Si le point de départ  $(x_0, u_0)$  est inclus dans  $EL^{(j)}$ , finir le calcul des correcteurs, sinon retour en (2).

On considère, maintenant, le système non linéaire (V.3), on suppose que  $f_d(x_k)$  possède une dérivée continue en point d'équilibre donné  $x_{eq}^{(j)}$ , un développement en série de Taylor conduit à :

$$f_d(x_k) = f(x_{eq}^{(j)}) + \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x_{eq}^{(j)}} (x_k - x_{eq}^{(j)}) + r(x_k) \quad (V.35)$$

Dans une région polytopique  $P^{(j)}$  prédéfinie autour de  $x_{eq}^{(j)}$ , il est possible de majorer l'erreur entre le modèle non linéaire et son approximation linéaire comme suit :

$$\begin{cases} r(x(k))'r(x(k)) \leq (x(k) - x_{eq}^{(j)})'M^{(j)}(x(k) - x_{eq}^{(j)}) \\ M^{(j)} \geq 0 \end{cases} \quad (V.36)$$

$M^{(j)}$  est obtenue numériquement en résolvant, par exemple, le problème des LMI suivant :

$$\begin{cases} \min \text{trace } M^{(j)} \\ r(x_i)'r(x_i) \leq (x_i - x_{eq}^{(j)})'M^{(j)}(x_i - x_{eq}^{(j)}) \\ M^{(j)} \geq 0 \\ i = 1, \dots, L \end{cases} \quad (V.37)$$

où  $L$  est un nombre suffisamment grand de points choisis arbitrairement sur les limites de  $P^{(j)}$ . On peut, alors, maintenant, représenter le système non linéaire (V.4) par l'intermédiaire de la famille des systèmes linéaires incertains à incertitude de type bornée en norme suivante :

$$\Sigma_{Ld}^{(j)} = \begin{cases} x_{k+1} = (A^{(j)} + D^{(j)}FE^{(j)})x_k + B_1w_k + B_2u_k \\ z_k = C_1x_k + D_1u_k \end{cases} \quad (V.38)$$

En choisissant les matrices décrivant l'incertitude bornée en norme comme suit :

$$\begin{cases} D^{(j)} = (M^{(j)})^{\frac{1}{2}} \\ E^{(j)} = I \\ F'F \leq I \end{cases} \quad (V.39)$$

Cette approximation est valide dans la région polytopique prédéfinie  $P^{(j)}$ . La démarche de l'algorithme est similaire à celle donnée dans le cas continu et la seule différence réside dans la façon dont on détermine les correcteurs. Autrement dit, les LMI qui nous permettent de calculer ces correcteurs. La commande par retour d'état qui stabilise le système linéaire incertain discret (V.38) en garantissant la performance  $H_2$  et qui de plus maximise le volume de l'ellipsoïde  $EL^{(j)}$  inclus dans le polyèdre  $P^{(j)}$  est déterminé en se basant sur le théorème suivant :

### Théorème V.10

Le système (V.38) est stabilisable par retour d'état,  $\|T_{z_k w_k}\|_2^2 \leq \mu$  si, il existe deux matrices symétriques (définies positives)  $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et une matrice  $R_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , solutions des inégalités matricielles suivantes :

$$\max \text{trace } S_j \quad (\text{V.40})$$

$$c_i = b_i - a'_i x_{eq} > 0, \quad a'_i S_j a_i - c_i^2 \leq 0 \quad (\text{V.41})$$

$$\text{trace } W < \mu \quad (\text{V.42})$$

$$\begin{bmatrix} S_j & S_j C'_1 + R'_j D'_1 \\ C_1 S_j + D_1 R_j & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{V.43})$$

$$\begin{bmatrix} -S & A^{(j)} S_j + B_2 R_j & B_1 \\ S_j A^{(j)'} + R'_j B'_2 & -S_j & 0 \\ B'_1 & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{V.44})$$

$$\begin{bmatrix} -S_j & A^{(j)} S_j + B_2 R_j & D^{(j)} & 0 \\ S_j A^{(j)'} + R'_j B'_2 & -S_j & 0 & S_j E^{(j)'} \\ D^{(j)'} & 0 & -I & 0 \\ 0 & E^{(j)} S_j & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.45})$$

La loi de commande par retour d'état définie pour le j-ème point d'équilibre  $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$  du système non linéaire  $\Sigma_{Ld}^{(j)}$  est :

$$\begin{cases} u_k^{(j)} = K^{(j)}(x_k - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)} \\ K^{(j)} = R_j S_j^{-1} \end{cases} \quad (\text{V.46})$$

De plus, les deux relations (V.40) et (V.41) permettent d'obtenir une commande qui "maximise" la région d'attraction  $EL^{(j)}$  dans le polyèdre  $P^{(j)}$  (fixé par  $a_i, b_i$ ).

On peut déterminer la loi de commande globale en commutant entre les correcteurs locaux, cette loi sera, donc, établie comme suit :

$$U_{Global} = \begin{cases} u_k^{(N)} = K^{(N)}(x_k - x_{eq}^{(N)}) + u_{eq}^{(N)}, \\ \quad x \in EL^{(N)} - \cup_{J=1}^{J=N-1} EL^{(J)} \\ \quad \vdots \\ u_k^{(2)} = K^{(2)}(x_k - x_{eq}^{(2)}) + u_{eq}^{(2)}, \\ \quad x \in EL^{(2)} - EL^{(1)} \\ u_k^{(1)} = K^{(1)}(x_k - x_{eq}^{(1)}) + u_{eq}^{(1)}, \\ \quad x \in EL^{(1)} \end{cases} \quad (\text{V.47})$$

Une telle loi de commande présente des discontinuités lors des instants de commutation. Dn plus, il y a une forte probabilité que la procédure fournisse un grand nombre de points d'équilibre. Autrement dit, un

grand nombre de correcteurs. La croissance du nombre des points d'équilibre, et par passage à la limite peut donner l'idée de définir une loi de commande "lisse" (sans discontinuité) de la forme :

$$U_{Global} = K(k)(x_k - x_{eq}(k)) + u_{eq}(k)$$

Tout comme pour le cas continu, l'idée est basée sur la détermination d'une trajectoire continue à partir des points d'équilibre trouvés hors ligne, le correcteur unique est issu d'une interpolation polynomiale en fonction des points d'équilibre trouvés. La loi de commande précédente suppose que les états du système soient accessibles, cependant cela n'est pas toujours le cas. On est donc appelé à étendre les outils précédents pour inclure le cas du retour de sortie dynamique. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique garantissant la performance  $H_2$  par la retour de sortie dynamique :

**Théorème V.11**

Le système à temps discret défini par (V.1) et (V.21) est stabilisable par retour de sortie dynamique de type (V.22) et  $\|T_{z_k w_k}\|_2^2 \leq \mu$  si, il existe une matrice symétrique (définie positive)  $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et des matrices  $X_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_{1j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $V_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $F_j \in \mathbb{R}^{n \times q}$  telles que :

$$\max \text{trace } S_j \tag{V.48}$$

$$S_j = \begin{bmatrix} Y_j & V_j \\ V_j' & Y_{1j} \end{bmatrix} > 0 \tag{V.49}$$

$$\begin{bmatrix} S_j & S_j a_i \\ a_i' S_j & \delta_i^2 \end{bmatrix} > 0 \tag{V.50}$$

$$V_j > I \tag{V.51}$$

$$\text{trace } W < \mu \tag{V.52}$$

$$\begin{bmatrix} W & B_1' & B_1' X_j + D_2' F_j' \\ B_1 & Y_j & I \\ X_j B_1 + F_j D_2 & I & X_j \end{bmatrix} \geq 0 \tag{V.53}$$

$$\begin{bmatrix} Y_j & I & Y_j A^{(j)'} + L_j' B_2' & Z_j + M_j & Y_j C_1' + L_j' D_1' \\ I & X_j & A^{(j)'} & A^{(j)'} X_j + C_2' F_j' & C_1' \\ A^{(j)} Y_j + B_2 L_j & A^{(j)} & Y_j & I & 0 \\ Z_j' + M_j' & X_j A^{(j)} + F_j C_2 & I & X_j & 0 \\ C_1 Y_j + D_1 L_j & C_1 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{V.54}$$

$$\left[ \begin{array}{cccccc} Y_j & I & Y_j A^{(j)'} + L'_j B'_2 & Z_j + M_j & 0 & Y_j E^{(j)'} \\ I & X_j & A^{(j)'} & A^{(j)'} X_j + C'_2 F'_j & 0 & E^{(j)'} \\ A^{(j)} Y_j + B_2 L_j & A^{(j)} & Y_j & I & D^{(j)} & 0 \\ Z'_j + M'_j & X_j A^{(j)} + F_j C_2 & I & X_j & X_j D^{(j)} + F_j D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D^{(j)'} & D^{(j)'} X_j + D'_2 F'_j & I & 0 \\ E^{(j)} Y_j & E^{(j)} & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] > 0 \quad (\text{V.55})$$

avec

$$\begin{cases} L_j = C_{c_j} V'_j, F_j = U_j B_{c_j}, M_j = V_j A_{c_j}' U'_j \\ U_j = (I - X_j Y_j) V_j^{-1} \\ Z_j = Y_j A^{(j)'} X_j + Y_j C'_2 F'_j + L'_j B'_2 X_j \end{cases} \quad (\text{V.56})$$

Le compensateur strictement propre  $K_L^{(j)}$  du type retour de sortie dynamique pour le  $j$ -ème modèle linéaire, sera décrit par les équations :

$$K_L^{(j)} = \begin{cases} x_{ck+1} = A_{c_j} x_{ck} + B_{c_j} y_{ck} \\ u_k = C_{c_j} x_{ck} \end{cases} \quad (\text{V.57})$$

Le compensateur global est obtenu, soit par commutation parmi les compensateurs locaux, ce qui entraîne les mêmes défauts de commande par retour d'état (discontinuités), soit par interpolation polynomiale. La dernière formulation de compensateur peut être décrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_{ck+1} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} x_{ck} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,m} \end{bmatrix} y_{ck} \\ u_k &= \begin{bmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q,1} & \dots & c_{q,n} \end{bmatrix} x_{ck} \end{aligned} \quad (\text{V.58})$$

où chaque terme du compensateur  $a_{i,i}$ ,  $b_{i,i}$ ,  $c_{i,i}$  trouvée par interpolation polynomiale en fonction des points d'équilibre trouvés.

## V.4 Application numérique : Pendule inversé

Comme nous avons écrit précédemment, le modèle discret est obtenu à partir du modèle continu :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{mgl}{J} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{J} u(t) \end{cases} \quad (\text{V.59})$$

Il est possible de passer au cas discret en effectuant le changement de variable suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{x_{k+1} - x_k}{T} \quad (\text{V.60})$$

où  $T$  représente la période d'échantillonnage satisfaisant le théorème de Shanon. En faisant ce changement on obtient :

$$\begin{cases} x_{1k+1} = x_{1k} + T x_{2k} \\ x_{2k+1} = \frac{Tmgl}{J} \sin(x_{1k}) + x_{2k} + \frac{T}{J} u_k \end{cases} \quad (V.61)$$

La famille de points d'équilibre, s'écrit :

$$\begin{cases} x_{2k} = 0 \\ u_k = -mgl \sin(x_{1k}) \end{cases}$$

la famille des modèles linéaires obtenues par la linéarisation du modèle non linéaire (V.61) :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ \frac{Tmgl}{J} \cos(x_{1eq}) & 1 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T}{J} \end{bmatrix} \delta u$$

et nous considérons, pour la simulation, des matrices de pondération suivantes :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### V.4.1 Simulation avec performance $H_2$

On fixe dans cette simulation une période d'échantillonnage à  $T = 0.1$ , une constante du niveau d'intersection parmi les ellipsoïdes égale à  $\beta = 0.1$ , une variable d'encadrement  $\delta = 0.26$  et une norme  $\|T_{z_2 w}\|_2^2 < \mu = 1$ . Les différents résultats obtenus dans cette simulation, en appliquant le théorème (V.10) et l'approximation bornée en norme des non linéarités pour une transition stable entre  $[\theta(t), \dot{\theta}(t)] = [\frac{\pi}{2}, 0] \rightarrow [0, 0]$ , sont présentés sur le tableau suivant :

Itération ( $j$ )	$x_{eq}^{(j)}$	$u_{eq}^{(j)}$	$K^{(j)}$
1	$x_f = (0, 0)'$	$u_f = 0$	$[-1.4674 - 0.9683]$
2	$(0.2009, 0)'$	$-0.1955$	$[-1.4476 - 0.9685]$
3	$(0.4013, 0)'$	$-0.3828$	$[-1.3895 - 0.9692]$
4	$(0.6023, 0)'$	$-0.5552$	$[-1.2952 - 0.9704]$
5	$(0.8028, 0)'$	$-0.7049$	$[-1.1689 - 0.9720]$
6	$(1.0032, 0)'$	$-0.8264$	$[-1.0154 - 0.9739]$
7	$(1.2043, 0)'$	$-0.9149$	$[-0.8402 - 0.9758]$
8	$(1.4046, 0)'$	$-0.9665$	$[-0.6509 - 0.9775]$
9	$x_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)'$	$u_0 = 0.98$	$[-0.6509 - 0.9775]$

La transition stable est garantie en passant par 7 points intermédiaires avec  $\|T_{z_k w_k}\|_2^2 \leq 1$ . Les paramètres d'incertitude bornée en norme pour chaque modèles linéaires sont :

$$D^{(1)} = 1.0^{-4} \begin{bmatrix} 0.6223 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(2)} = 1.0^{-3} \begin{bmatrix} 0.6618 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0018 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.0033 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.0049 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.0064 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(7)} = \begin{bmatrix} 0.0076 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.0081 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On montre dans la figure V.2 l'évolution de trajectoire où on peut remarquer que le point visé et le point successif se trouvent toujours dans la même région ellipsoïdale, ce qui assure la stabilité.

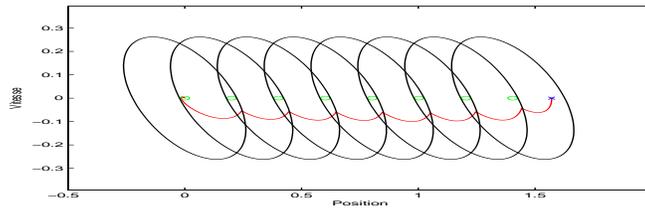


FIG. V.2 – Trajectoire d'état.

Les figures V.3 et V.4 présentent la position, la vitesse angulaire et le signal de commande, respectivement. Ce dernier montre les discontinuités lors des instants de commutation.

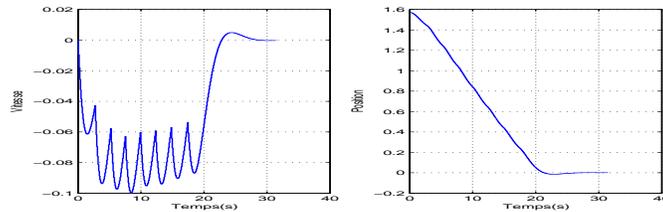


FIG. V.3 – Position et vitesse angulaire.

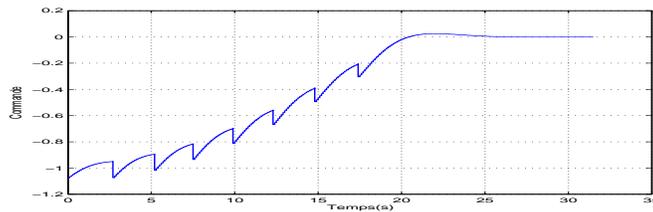


FIG. V.4 – Signal de commande.

Tout comme pour le cas continu, il est possible de traiter ce problème en utilisant une loi de commande de la forme :

$$U_{Global} = K(k)(x_k - x_{eq}(k)) + u_{eq}(k)$$

où le terme  $u_{eq}(t)$  est continu et défini de  $u_0$  à  $u_f$ . Pour la simulation, nous avons choisi une courbe linéaire :

$$u_{eq}(t) = u_0 + \left(\frac{u_f - u_0}{t_f}\right)t, \quad t \in [0, t_f]$$

La figure V.5 montre la position et la vitesse angulaire pour  $t_f = 10s$ , on peut constater que la position suit bien la trajectoire d'équilibre définie entre  $x_0$  et  $x_f$ , alors que la figure V.6 montre la commande, où il est clair que les discontinuités n'existent plus.

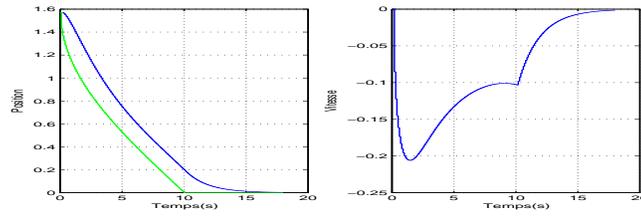


FIG. V.5 – Position et vitesse angulaire dans le cas polynômial.

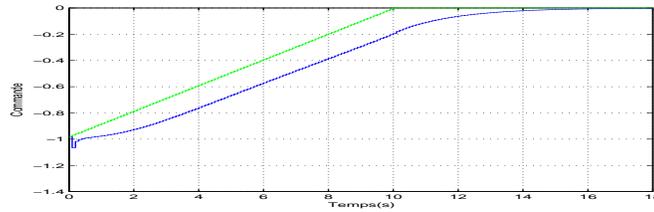


FIG. V.6 – Signal de commande dans le cas polynômial.

Enfin, le choix de la période d'échantillonnage joue un rôle très important pour la stabilité, comme il est montré dans la figure V.7 où la stabilité n'est plus garantie pour une période d'échantillonnage  $T = 0.5s$ .

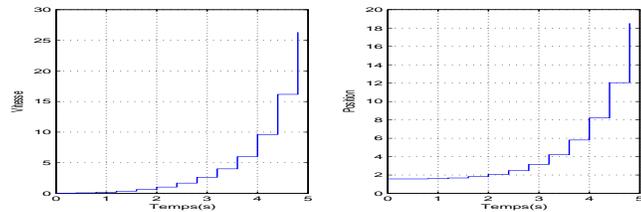


FIG. V.7 – Position et vitesse angulaire dans le cas polynômial.

### Remarque

Pour un choix raisonnable de la période d'échantillonnage, comme par exemple,  $T = 0.1$  nous pouvons constater que les résultats obtenus sont similaires à ceux trouvés dans le cas continu.

## V.5 Conclusion

Ce chapitre est la continuité directe des chapitres précédents qui traitent le problème posé dans le cas de commande continue. Nous y avons étendu les méthodes développés pour inclure le cas discret en montrant les deux cas, la commande par retour d'état et la commande par retour de sortie dynamique.

---

## Chapitre VI

# Étude d'un cas complexe : la lévitation magnétique

---

### VI.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons à un cas de système plus complexe que celui du pendule traité au cours des différents chapitres. De dimension supérieure (équations différentielles d'ordre 3), les difficultés proviennent de la non linéarité qui intègre dans ce cas plusieurs arguments, compliquant par cela le calcul de l'incertitude bornée en norme autour des points d'équilibre.

Ce système est un dispositif de lévitation magnétique. Bien qu'étudié ici dans une version simplifiée (lévitation simple d'une bille), ce genre de procédé se rencontre couramment dans l'industrie à travers les paliers magnétiques qui permettent de maintenir en sustentation magnétique (et donc sans frottements secs) un arbre de rotation.

Le dispositif étudié peut se schématiser comme sur la figure VI.1.

Ce système est commandé via la tension d'entrée  $U_{com}$ . Celle-ci est ensuite amplifiée pour donner une tension  $U_e$  aux bornes d'un circuit RL. La bobine fournit alors, en fonction du courant  $i_m$  qui la traverse, une force électromagnétique  $F_m$  que subit la bille en acier de masse  $m$  et qui vient s'opposer à la force de gravité  $mg$ . La position  $Z$  de la bille est repérée par rapport à la base de la bobine et un capteur optique délivre une tension de mesure  $V_s$ . Il est à noter que l'aspect non linéaire de cette modélisation provient

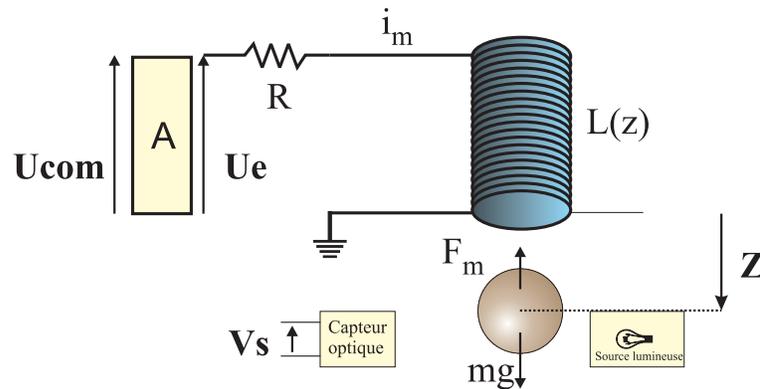


FIG. VI.1 – Lévitation magnétique d'une bille

du fait que la position de la bille modifie les lignes de champs magnétiques et en conséquence influe sur la valeur de l'inductance  $L(Z)$  de la bobine.

## VI.2 Modélisation

### VI.2.1 Équation électrique

On applique, via une amplification de la tension de commande  $U_{com}$ , une tension  $U_e$  aux bornes de la bobine d'inductance  $L(Z)$  et de résistance  $R$ . On a donc l'équation électrique :

$$U_e = aU_{com} + b = Ri_m + \frac{d(Li_m)}{dt} \quad (\text{VI.1})$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres de l'amplificateur.

La partie la plus délicate à modéliser concerne l'inductance de la bobine et sa dépendance par rapport à la position de la bille d'acier. On trouve dans le littérature [KAW 03, ELH 01, CAR 86] différentes approches et différents modèles pouvant représenter cette inductance. Toutes ces formes dépendent de l'inverse de position. Nous avons choisi de prendre l'expression la plus simple mais qui permet d'obtenir des résultats globalement satisfaisants sur la validité du modèle :

$$L(Z) = \frac{L_0}{Z} \quad (\text{VI.2})$$

où  $L_0$  est une constante liée aux caractéristiques de la bobine.

Cependant, on peut constater que la dynamique électrique de l'équation précédente est largement plus rapide que celle mécanique (cf. la situation des poles en boucle ouverte de la figure VI.2). La variation d'induction  $L(Z)$  n'influe donc que très marginalement l'équation électrique et par conséquent, celle-ci peut se réduire à :

$$aU_{com} + b = Ri_m + \frac{L_0}{Z} \frac{di_m}{dt} \quad (\text{VI.3})$$

Par la suite lors des synthèses des correcteurs et toujours en considérant que la variation de position  $Z$  est largement plus lente que les variations de courant  $i$ , il sera supposé qu'autour d'un point d'équilibre  $Z_0$ , l'équation électrique peut se réduire à l'expression linéaire suivante :

$$aU_{com} + b = Ri_m + \frac{L_0}{Z_0} \frac{di_m}{dt} \quad (\text{VI.4})$$

### VI.2.2 Équation mécanique

L'équation mécanique de la force développée par la bobine, dépend directement de l'inductance et peut s'exprimer comme :

$$F_m(Z, i_m) = \frac{1}{2} i_m^2 \frac{\partial L}{\partial Z} \quad (\text{VI.5})$$

ce qui conduit à l'expression non linéaire :

$$F_m(Z, i_m) = -\frac{1}{2} i_m^2 \frac{L_0}{Z^2} \quad (\text{VI.6})$$

En utilisant l'équation fondamentale de la dynamique on obtient l'équation mécanique suivante :

$$m\ddot{Z} = mg - \frac{1}{2} i_m^2 \frac{L_0}{Z^2} \quad (\text{VI.7})$$

### VI.2.3 Mise sous forme d'état

Afin de mettre ce système sous une forme de représentation d'état non linéaire classique, le choix suivant pour les variables d'état a été effectué :

$$\begin{cases} x_1 = Z \\ x_2 = \dot{Z} \\ x_3 = i_m \end{cases} \quad (\text{VI.8})$$

On obtient alors le modèle non linéaire complet de simulation :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \frac{1}{2m} L_0 \frac{x_3^2}{x_1^2} \\ \dot{x}_3 = -\frac{RZ}{L_0} x_3 + \frac{aZ}{L_0} U_{com} + \frac{bZ}{L_0} \end{cases} \quad (\text{VI.9})$$

Cependant, en se conformant à l'hypothèse ayant conduit à l'équation (VI.4), le modèle utilisé pour les différentes synthèses se réduit en chacun des points d'équilibre  $Z_0$  considérés à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \frac{1}{2m} L_0 \frac{x_3^2}{x_1^2} \\ \dot{x}_3 = -\frac{RZ_0}{L_0} x_3 + \frac{aZ_0}{L_0} U_{com} + \frac{bZ_0}{L_0} \end{cases} \quad (\text{VI.10})$$

## VI.3 Propriétés du modèle

### VI.3.1 Valeur des paramètres

Afin de proposer des résultats de simulation significatifs, ce modèle a été identifié et validé sur un dispositif réel (maquette pédagogique MagLev 33-006 de chez Feedback). Les valeurs trouvées pour les différents paramètres sont :

Gain de l'amplificateur $a$	3.47
Offset de l'amplificateur $b$	9.59
Resistance de la bobine $R$	20.4 $\Omega$
Inductance nominale $L_0$	1.54 $e^{-4}H$
Masse de la bille $m$	21.5 $g$

Les tensions d'entrée acceptées ( $V_{com}$ ) par le système varient entre 0 volt et 10 volts.

### VI.3.2 Points d'équilibre du système

L'ensemble des points d'équilibre du système est donné par :

$$\begin{cases} x_1^* = \sqrt{\frac{L_0}{2mg}} \left( \frac{a}{R} u^* + \frac{b}{R} \right) \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = -\frac{a}{R} u^* + \frac{b}{R} \end{cases} \quad (\text{VI.11})$$

où  $u^*$  est une tension positive de type boucle ouverte appliquée en entrée du système.

La variété d'équilibre est naturellement instable. En effet en appliquant la première méthode de Lyapunov, on trouve pour chacun des points d'équilibre des systèmes linéarisés autour de ce point d'équilibre (en faisant varier  $u^*$  entre 0 et 10 volts), trois pôles réels dont un est strictement positif (figure VI.2), ce qui induit donc l'instabilité.

### VI.3.3 Renormalisation du modèle

Lors de la phase de synthèse des différents correcteurs, il est apparu une très forte sensibilité numérique due à un mauvais conditionnement des matrices de linéarisation. Le modèle a été soumis à une mise à l'échelle des différentes valeurs que peuvent prendre les variables d'état. Cette mise à l'échelle (ou renormalisation) correspond à un changement de coordonnées linéaires du vecteur d'état :

$$\hat{x} = \mathcal{M}x \quad (\text{VI.12})$$

où  $\hat{x}$  correspond au nouveau vecteur d'état. Par la suite et afin de ne pas alourdir les notations, il ne sera plus fait mention de ce changement de variable bien qu'il soit essentiel pour la bonne convergence des algorithmes de résolution des différentes LMI. La matrice de changement de base  $\mathcal{M}$  a été choisie

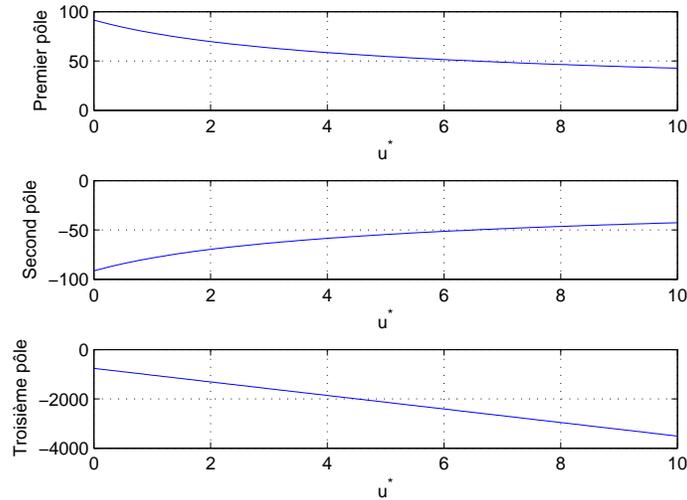


FIG. VI.2 – Évolution des pôles en boucle ouverte (système linéarisé) en fonction de la commande boucle ouverte.

comme :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} N1 & 0 & 0 \\ 0 & N2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.13})$$

avec  $N1 = 100$  et  $N2 = 10^{-2}$

## VI.4 Approximation bornée en norme

Comme le montre le système d'équations (VI.14) le système peut se décomposer en une sous-partie linéaire  $(A_0, B_0)$  et une partie non linéaire  $\mathcal{F}_{NL}(x)$  :

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u + \mathcal{F}_{NL}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{RZ_0}{L_0} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{aZ_0}{L_0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2,nl}(x) \\ \frac{bZ_0}{L_0} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.14})$$

Cette séparation des parties linéaires et non linéaires fait apparaître que les non linéarités n'affectent que la seconde équation du modèle mais que cette non linéarité dépend de deux arguments :  $x_1$  et  $x_3$ . De par cette double dépendance, le calcul de l'approximation bornée en norme de la non linéarité devient plus complexe.

Afin de déterminer les matrices E et D de l'approximation, la première étape consiste à déterminer le polyèdre autour du point d'équilibre  $x^*$  pour lequel la synthèse sera effectuée. La non linéarité  $f_{2,nl}(x)$  dépend de  $x_1$  et  $x_3$  comme :

$$f_{2,NL}(x) = g - \frac{1}{2m} L_0 \frac{x_3^2}{x_1^2} \quad (\text{VI.15})$$

Le polyèdre correspond donc à un rectangle de côté  $(\delta_1, \delta_3)$  centré sur le point d'équilibre  $x^*$  comme le montre la figure VI.3.

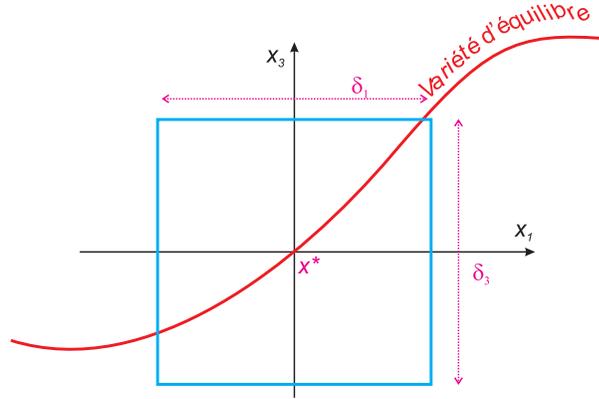


FIG. VI.3 – Polyèdre de définition pour l'approximation bornée en norme.

L'approximation bornée en norme consiste à considérer l'écart entre la fonction non linéaire et son approximation linéaire au point d'équilibre  $X^*$ .

Soit  $f_{2,L}$  la linéarisation de la fonction au point d'équilibre, on a :

$$f_{2,L}(X^*) = \left[ -\frac{1}{m} L_0 \frac{x_3^*}{x_1^*} \quad +\frac{1}{m} L_0 \frac{x_3^{*2}}{x_1^{*3}} \right] \quad (\text{VI.16})$$

Pour toutes trajectoires réalisables et donc à l'intérieur de chacun des polyèdres, la position  $x_1$  et le courant  $x_3$  sont strictement positifs. Le champs de vecteurs  $f_{2,nl}(x)$  est donc monotone décroissant dans la direction  $x_1$  et monotone croissant dans la direction  $x_3$ .

Il en résulte que l'écart en un point  $\tilde{x}$  quelconque du polyèdre entre le plan tangent résultant de la linéarisation de l'équation VI.16 au point d'équilibre et la fonction non linéaire en ce point  $f_{2,NL}(\tilde{x})$  sera maximum si l'on se trouve sur le contour du polyèdre.

La détermination de l'approximation bornée en norme de la fonction non linéaire se réalise alors par les différentes étapes suivantes :

1. Pour chaque point  $\tilde{x}_i$   $i = 1, \dots, N$  du contour du polyèdre (en prenant un pas de discrétisation de ce contour suffisamment petit) on calcule :

$$\Delta_i = \| f_{2,NL}(\tilde{x}_i) - f_{2,L}(\tilde{x}_i)(x^* - \tilde{x}_i) \| \quad (\text{VI.17})$$

2. Résoudre la LMI suivante :

$$\begin{aligned} & \min \text{trace}(M_2) \\ & \text{sous} \\ & \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,i} & \tilde{x}_{3,i} \end{bmatrix} M_2 \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,i} & \tilde{x}_{3,i} \end{bmatrix}^T > \Delta_i^2 \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

où  $M_2$  est une matrice carrée de dimension 2.

3. La distribution de l'approximation bornée en norme de cette non linéarité se calcule comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D = \sqrt{M} \\ E = I_3 \end{array} \right. \quad (\text{VI.19})$$

### VI.4.1 Conditions de simulation

Pour toutes les simulations présentées ci dessous le déplacement demandé à la bille correspond à une évolution du point initial  $X_i^* = \begin{bmatrix} 4.10^{-2} & 0 & 2.09 \end{bmatrix}$  vers le point final  $X_f^* = \begin{bmatrix} 1.5.10^{-2} & 0 & 0.78 \end{bmatrix}$ . Lorsque cela est possible (cas où les gains du retour d'état sont interpolés par exemple), le temps de trajectoire sera établi à  $T_f = 1$  seconde, ce qui est un compromis acceptable entre une vitesse de déplacement assez grande et des valeurs de corrections (amplitude de commande) globalement admissibles par le processus.

Que ce soit pour le retour d'état ou pour le retour de sortie, la détermination des différents paramètres pour le calcul des correcteurs est, dans le cas de ce système plus complexe que celui du pendule, parfois assez délicate. Ces différents paramètres sont :

- le choix du solveur (Lmilab, sedumi,...),
- les réglages du solveur (primal/dual, précision,...),
- les dimensions du polyèdre de définition pour l'incertitude bornée en norme,
- les réglages propres au correcteur (disque de placement des pôles en BF),
- le degré du polynôme d'interpolation, le cas échéant.

Selon les choix effectués, les différentes LMI peuvent ou pas converger et les solutions en cas de convergence peuvent être assez différentes (nombre de correcteurs, volume des ellipsoïdes de stabilité,...).

Dans les résultats présentés ci après, les résultats les plus significatifs sont présentés. Ils correspondent à des solutions jugées intéressantes pour le problème posé. Afin de permettre une certaine comparaison entre les simulations présentées, le polyèdre de définition pour l'incertitude a été fixé à :  $\delta_1 = 0.8$ ,  $\delta_2 = 0.4$  et  $\delta_3 = 0.8$ . Il est à noter que  $\delta_2$  n'intervient pas directement dans le calcul des matrices d'incertitude  $D$  et  $E$  étant donné que la fonction  $f_{2,NL}$  ne dépend que des variables  $x_1$  et  $x_3$ . Cependant le paramètre  $\delta_2$  est nécessaire pour la résolution des LMI correspondant à l'inclusion de l'ellipsoïde de stabilité dans le polyèdre. Cette valeur ne peut être fixée arbitrairement (voire égale à  $\infty$ ) car l'optimisation se fait par rapport au volume de l'ellipsoïde. En augmentant  $\delta_2$ , la maximisation du volume de l'ellipsoïde par rapport à la direction  $x_1$  (qui est la valeur de paramétrisation dans la recherche du nouveau point d'équilibre et donc la "direction" à favoriser) se trouve indirectement pénalisée et peut faire croître très sensiblement le nombre de correcteurs.

## VI.5 Retour d'état

### VI.5.1 Synthèse

Cette synthèse correspond aux équations citées au théorème (II.2) du Chapitre 2. Cela correspond à un placement des pôles en boucle fermée dans un disque  $\mathcal{D}(\alpha, \rho)$ .

Pour cette étude, le disque choisi est de rayon 38 centré sur le point  $(-40, 0)$ . Comme dans le cas de  $T_f$ , ce choix permet d'obtenir des dynamiques suffisamment rapides sans avoir des amplitudes de commande excessives. Avec cet ensemble de paramètres, le solveur LmiLab converge avec 6 correcteurs, ce qui semble particulièrement optimal dans la mesure où le choix retenu pour le polyèdre correspond à un découpage du déplacement en 4 intervalles (donc 4 correcteurs au minimum). La situation dans le plan complexe des pôles obtenus est représentée sur la figure VI.4.

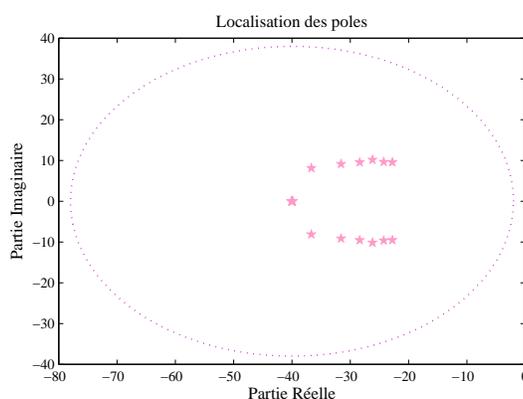


FIG. VI.4 – Positionnement des pôles en boucle fermée dans le cas du retour d'état.

### VI.5.2 Simulation en mode séquencé

Les résultats de simulation (Fig. VI.5) présentent les mêmes caractéristiques que celles déjà observées dans le cas du pendule. Bien que le basculement de gains (et donc du nouveau point d'équilibre associé à atteindre) se fasse lorsque la trajectoire rentre dans le bassin d'attraction du point suivant, la trajectoire se divise en autant de phases d'accélération/décélération qu'il y a de points intermédiaires déterminés lors de la phase de synthèse. Cela s'accompagne également d'amplitudes de commande élevées aux instants de commutation. En effet, la limite prouvée pour le bassin d'équilibre, déterminée par l'inégalité  $(X(t) - X_{i+1}^*)^T S^{-1} (X(t) - X_{i+1}^*) \leq 1$  se situe relativement proche du point d'équilibre courant  $X_i$  puisque c'est le principe de l'algorithme de détermination de la succession des points d'équilibre. Il en résulte (comme le montre le tracé de la vitesse de la figure VI.5) qu'à chaque instant de basculement, le système est quasiment arrêté, ce qui entraîne ce phénomène de discontinuité dans le suivi de la trajectoire. Il est également à noter, tout comme dans le cas du pendule, qu'aucun contrôle n'est véritablement possible sur le temps de parcours pour rallier le point final  $X_f$ .

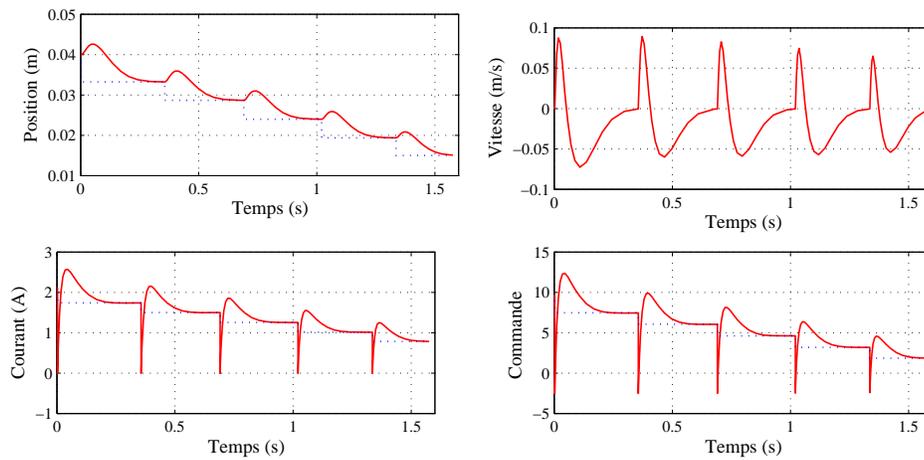


FIG. VI.5 – Retour d'état : simulation en mode séquencé

### VI.5.3 Simulation en mode interpolé

Il paraît donc naturel, au vue des résultats précédents, de chercher à imposer une évolution continue de la trajectoire le long de la variété d'équilibre. Cette approche, assez contradictoire comme cela a été déjà remarqué dans le chapitre 3, puisque l'on impose au système de se déplacer à vitesse nulle, offre tout de même l'avantage de pouvoir imposer le temps de parcours  $T_f$ . La même architecture de commande que celle proposée sur la figure III.5 a été mise en place (en dimension 3) pour la lévitation. Cette structure est envisageable dans la mesure où l'évolution des gains (cf. Fig ) est continue et régulière par rapport à l'évolution de la commande boucle ouverte  $u(t)^*$ . La figure VI.6 représente les différentes valeurs des 3 gains de retour au point de calcul des correcteurs (par des étoiles sur les graphiques) et trace l'évolution du polynôme d'interpolation (tracé en pointillé). Le degré du polynôme d'interpolation a été fixé à 3.

Le figure VI.5 montre le résultat de la simulation en utilisant cette technique d'interpolation. Le phénomène de discontinuité à disparu et le temps de parcours est davantage maîtrisé. Cette technique ne permet cependant pas d'annuler l'erreur de traînage entre le point d'équilibre "fuyant" de référence et la trajectoire réelle mais l'amélioration par rapport à la simulation précédente est très nette.

## VI.6 Retour de sortie

### VI.6.1 Synthèse

La synthèse du correcteur dynamique utilise l'algorithme décrit au chapitre 4. Le solveur LMI converge en 64 boucles (donc 64 correcteurs). Ce nombre de correcteurs est important en regard de celui obtenu pour le simple retour d'état mais il est important de signaler que ce problème d'optimisation est nettement plus contraint que le précédent puisqu'il fait intervenir un optimisation  $H_2$  et que la dimension du système étendu est de 6.

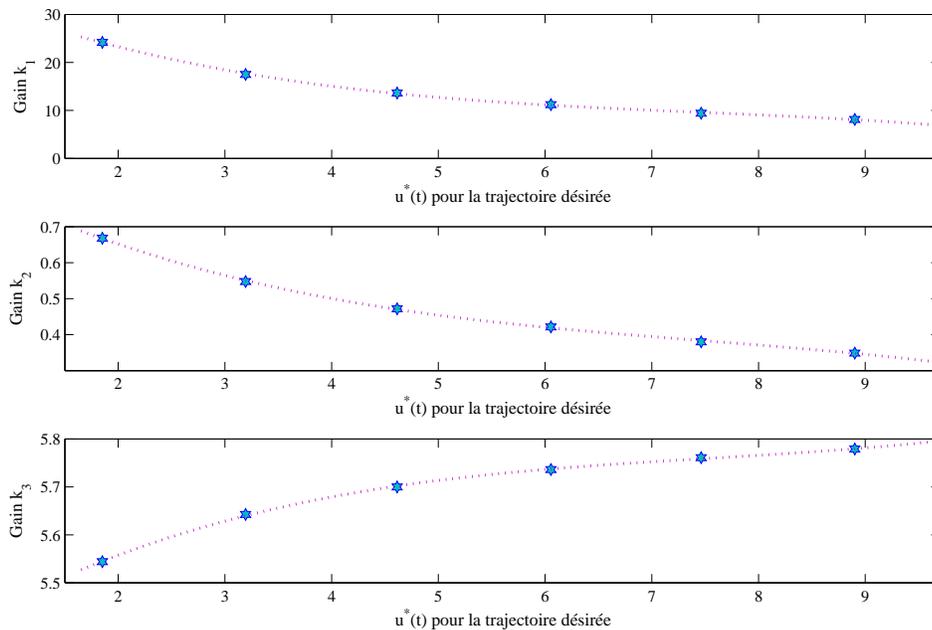


FIG. VI.6 – Evolution et interpolation des gains du retour d'état

La figure VI.8 localise les pôles dans le plan complexe. Il est à noter que sur cette figure qu'une échelle logarithmique a été adoptée étant donné que les pôles liés aux correcteurs dynamiques peuvent prendre des valeurs assez élevées.

### VI.6.2 Simulation en mode séquencé

En mode séquencé, il y a deux possibilités de gérer le basculement. La première consiste à attendre que la trajectoire arrive sur le point d'équilibre pour changer vers le nouveau point à atteindre et attribuer aux matrices  $A_c, B_c, C_c$  les valeurs correspondantes à la synthèse locale suivante. Cette première méthode pose le problème de la précision avec laquelle on estime que le point est atteint : prendre une grande précision permet de garantir la stabilité mais grève le temps de parcours global. Une plus petite précision engendre des temps de parcours plus faibles mais formellement plus rien ne garantit la stabilité puisque l'on n'est pas sûr d'être entré dans l'ellipsoïde de stabilité du point suivant. La seconde technique, plus sûre du point de vue de la stabilité, est celle utilisée dans le cas du retour d'état et consiste à observer l'inclusion du point de trajectoire courant dans le domaine d'attraction du prochain point d'équilibre. Cependant dans ce cas cela induit une difficulté supplémentaire. En effet la matrice de Lyapunov  $S$  est définie sur l'ensemble du vecteur d'état étendu. Il inclut donc les états du compensateur (ceux-ci sont calculés et donc par définition accessibles) mais aussi les états internes du système. Or si l'on se place dans l'hypothèse d'un retour de sortie, il paraît évident que l'état interne n'est justement pas mesuré. Le seul moyen donc de mettre en place cette seconde approche consiste alors à calculer un reconstruteur

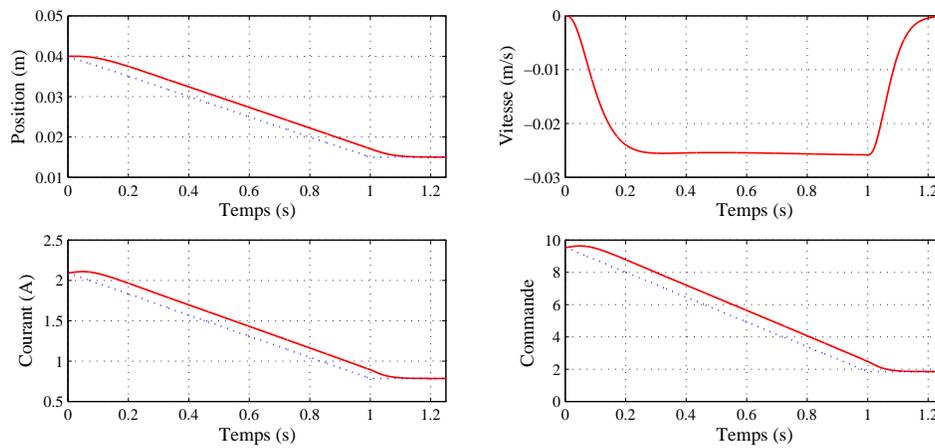


FIG. VI.7 – Retour d'état : simulation en mode interpolé

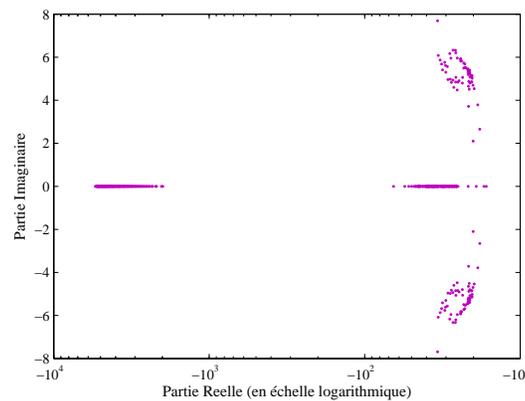


FIG. VI.8 – Positionnement des pôles en boucle fermée dans le cas du retour de sortie.

d'état interne en admettant que sa convergence soit plus rapide que le compensateur dynamique.

La simulation présentée sur la figure VI.9 correspond à un basculement lorsque le point d'équilibre est atteint avec une précision de  $1.10^{-5}$ . Comme le nombre de correcteurs est relativement élevé, la distance entre 2 points consécutifs est relativement réduite et la convergence vers un point est relativement rapide. Il en résulte que le temps de parcours total est globalement satisfaisant. Par contre, les mêmes défauts de discontinuité (visible sur la vitesse et sur le courant) et d'existence d'erreur de trainage sont présents.

Le seconde simulation correspond à un basculement lorsque le point rentre dans le bassin d'attraction. La seule différence visible avec la simulation précédente est naturellement le temps de convergence qui est plus rapide puisqu'à chaque étape le basculement se fait plus tôt. Il est à signaler que pour effectuer cette simulation, il n'a pas été fait appel à la technique du reconstituer d'état mais la calcul de l'inclusion a été réalisé directement avec la mesure de l'état du système, ce qui en simulation est toujours possible. La mise en place de cette technique sur le processus réel nécessiterait évidemment la conception de ce

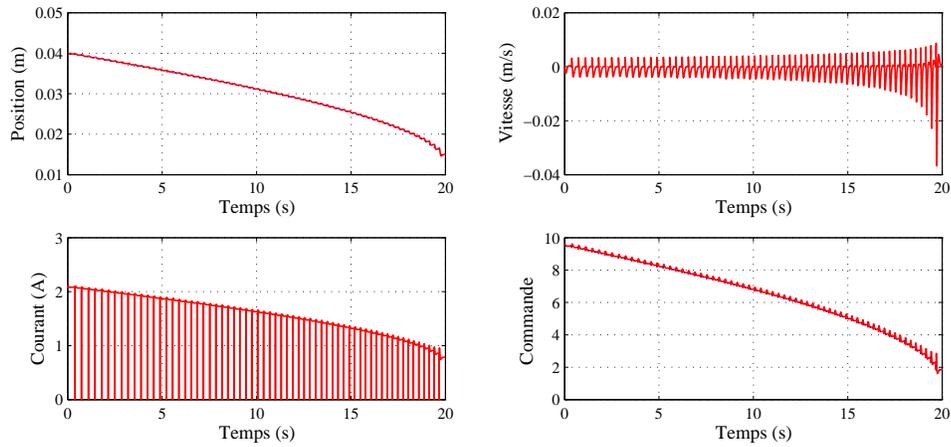


FIG. VI.9 – Retour de sortie : basculement après atteinte du point d'équilibre

reconstructeur.

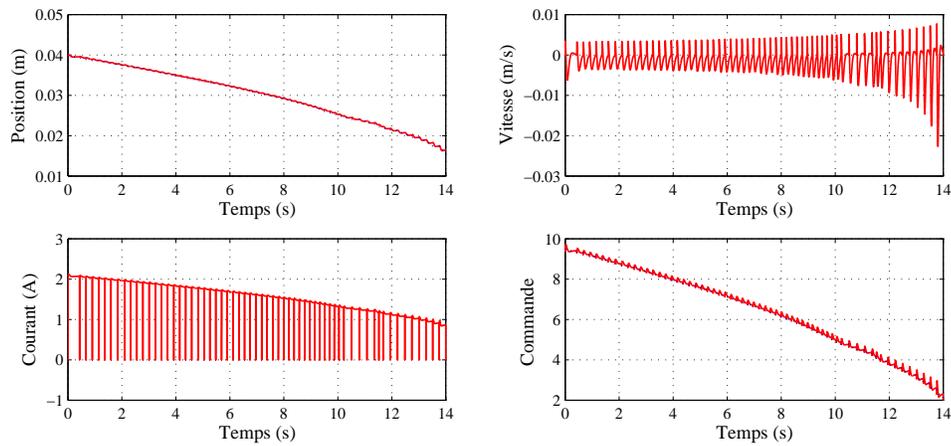


FIG. VI.10 – Retour de sortie : basculement après inclusion dans le bassin d'attraction

## VI.7 Conclusion

L'objet de ce chapitre a été d'utiliser la faisabilité de l'approche proposée dans le mémoire sur un système relativement complexe où la non linéarité dépend de plusieurs arguments. L'approche de la non linéarité par incertitude bornée en norme se révèle facile de mise en œuvre mais peut déboucher sur une majoration pessimiste.

# Conclusions et Perspectives

La commande des systèmes non linéaires constitue un domaine très actif de recherche en automatique et encore très ouvert. Dans ce travail, nous avons développé une approche traitant un problème particulier de ce domaine qui concerne le fait d'assurer une transition stable entre deux points opérationnels d'un système non linéaire. Cette approche emploie la technique de séquençement de gain et la notion d'incertitude bornée en norme pour ramener le problème de commande non linéaire à un problème de commandes linéaires multiples où on peut trouver pour chaque modèle linéaire une loi de commande qui reste valable dans un voisinage d'attraction d'un ensemble de points d'équilibre, en prenant en compte certaines spécifications de performances locales (placement des pôles, minimisation d'une norme de type  $H_2$  ou  $H_\infty$ ). Puis, la politique de commutation suivie établit une loi de commande globale de sorte que la commutation ne s'effectue sur la commande que si l'état se trouve dans le bassin d'attraction du point suivant visé, ce qui garantit la stabilité. Cette garantie de stabilité avec telle loi de commande s'accompagne d'un inconvénient se traduisant par des discontinuités lors des instants de commutation. Pour s'affranchir de ce type d'inconvénient, une autre forme de loi de commande peut être envisagée, en s'assurant de certaines conditions. L'idée est basée sur la détermination d'une trajectoire continue à partir des points d'équilibre trouvés hors ligne, le correcteur unique est issu d'une interpolation polynômiale en fonction des points d'équilibre trouvés et des correcteurs associés.

Le premier chapitre présente les concepts généraux sur la commande des systèmes dynamiques. Nous avons exposé la notion de fonction de Lyapunov et la stabilité quadratique, ce qui nous permet de résoudre les problèmes en faisant usage des outils de la programmation convexe, en particulier les inégalités matricielles linéaires. Plusieurs concepts de base de commande robuste ont été présentés. Nous avons abordé, en particulier, le problème de stabilité quadratique dans le cas de synthèse de commandes avec contraintes de type  $H_2$  dans le cas de retour d'état simple et avec incertitude bornée en norme. Nous terminons le chapitre, en rappelant le formalisme des inégalités matricielles linéaires déterminant la loi de commande par retour de sortie dynamique.

Après avoir présenté les concepts de base utiles à notre travail nous définissons un algorithme qui

assure, pour un système non linéaire, une transition stable et robuste en boucle fermée entre deux points de fonctionnement. Il s'appuie sur la représentation du système non linéaire par le biais d'une famille de systèmes linéaires incertains à incertitude de type bornée en norme. Cette approche permet de déterminer des lois de commande robustes séquencées garantissant la stabilité quadratique et prenant en compte certaines spécifications de performances locales. Ces lois sont déterminées et garantissent un voisinage d'attraction des points d'équilibre dans lequel l'approximation de la non linéarité a été effectuée et validée. L'approche utilise des outils géométriques tels que ellipsoïdes et polyèdres, ce qui exige d'exposer un rappel des propriétés de ces objets comme il est fait au début du chapitre II. La loi de commande bâtie à partir des lois de commandes locales par retour d'état soit par commutations parmi les points intermédiaires (garantir de stabilité grâce à la localisation de deux points successifs dans la même région de stabilité) soit par définition d'une loi de commande lisse (sans discontinuité) basée sur la détermination d'une trajectoire continue à partir des points d'équilibre trouvés hors ligne, le correcteur unique est issu d'une interpolation polynômiale en fonction des points d'équilibre trouvés.

Le chapitre III discute le passage des lois de commande séquencées au cas de commande quasi LPV, Cela permet de résoudre les inconvénients ou limitations qui se posent dans le cas séquencé comme, par exemple, la discontinuité de trajectoire suivie et l'exigence de surveiller en permanence le point courant pour savoir quel point visé et quel correcteur appliquer, ce qui coûteux en temps et en ressource matérielle.

Le chapitre IV, est un essai pour étendre l'algorithme proposé dans le deuxième chapitre pour devenir plus en accord avec la réalité physique qui ne nous permet, dans la plupart des cas, que d'avoir des informations partielles sur les systèmes à commander. Le chapitre traite, donc, du problème de retour de sortie où la difficulté suivante se pose.

Comment peut-on déterminer une politique de commutation qui assure la transition stable malgré l'absence de mesure de certains états? La réponse la plus facile à cette question est de faire la commutation quand le système atteint la position d'équilibre visée, mais une telle politique de séquencement conduirait à un temps de réponse globale infiniment long. Pour tenter de réduire l'inconvénient précédent il est tentant d'envisager l'utilisation de la technique de l'observation ou du filtrage qui vise à fournir une estimation de l'état global à partir de l'information contenue dans la sortie mesurée et utiliser (avec précaution) cette estimation pour définir la politique de commutation.

Dans le chapitre V, nous avons abordé le cas des systèmes non linéaires discret. Nous avons rappelé, dans un premier temps, les notions de base dans le cas discret. Puis, nous avons exposé les conditions de stabilité et de stabilisation dans le cas de synthèse de lois de commande par retour d'état et par retour de sortie dynamique avec contraintes de type  $H_2$  et  $H_\infty$  et en présence d'incertitude de type bornée en

norme. Le chapitre se termine en développant les changements et les modifications effectués sur l'algorithme dans le cas discret.

A la fin du mémoire, et après avoir montré dans les chapitres précédents l'application de l'algorithme sur un exemple simple du pendule inversé, nous discutons un exemple plus complexe. Il s'agit de lévitation magnétique, nous avons expliqué la modélisation de ce système qui représente une non linéarité à deux arguments non linéaires, en montrant la difficulté et la sensibilité numérique de ce système. Ensuite, nous terminons le chapitre en montrant les différents résultats obtenus en appliquant l'algorithme proposé sur le système de lévitation.

En guise de conclusion de ce travail, nous pouvons préciser les perspectives :

- L'algorithme proposé suppose que le modèle est affine en la commande et les non linéarités portent sur l'état. On peut envisager alors de considérer des non linéarités portant sur la commande.
- La possibilité d'utiliser d'autres types d'incertitude pour aborder le problème de non linéarité, comme par exemple, l'incertitude bornée réelle ou l'incertitude positive réelle.
- L'amélioration de la stratégie de retour de sortie dynamique.
- La prise en compte d'incertitude sur la mesure.

# Glossaire

## Notations

Terme	Description
$s$	Variable de Laplace
$I, \emptyset$	Matrice identité et matrice nulle de dimensions adaptées
$\ \cdot\ _2, \ \cdot\ _\infty$	Normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$
<i>Trace</i>	Trace d'une matrice : somme des éléments diagonaux
$A'$	Transposée de $A$
$A^{-1}$	Inverse de $A$
$P^j$	J-ème polyèdre d'encadrement des non linéarités
$EL^j$	J-ème ellipsoïde
$(x_0, u_0)$	Point de fonctionnement initial
$(x_f, u_f)$	Point de fonctionnement final

## Abréviations

Terme	Description
<i>LMI</i>	Inégalité Matricielle Linéaire
<i>LPV</i>	Linéaire à Paramètres Variants
<i>Q - LPV</i>	Quasi - Linéaire à Paramètres Variants

## Ensembles

Terme	Description
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices à $n$ lignes et $m$ colonnes
$\mathcal{S}^n$	Ensemble des matrices symétriques de dimension $n$

# Références bibliographiques

- [**ABD 96**] I. ABDORRAHMAN and B. MOHAMMED, “Stability of Discrete Time Systems : New Criteria and Application to Control Problems”, *Rapport de Recherche, INRIA*, , 1996.
- [**BEQ 95**] W. BEQUETTE and K. SCHOTT, “Control of Chemical Reactors Using Multiples Models Adaptive Control”, proceedings of *IFAC. Dinamarca*, vol. 8, Danemark, july 1995, pages 149-152.
- [**BER 89**] J. BERNUSSOU, P. PERES and J. GEROMEL, “A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratique Stabilization of Uncertain Systems”, *Systems and Control Letters*, vol. 13, 1989, pages 65-72.
- [**BER 99**] J. BERNUSSOU, J. GEROMEL and M. OLIVEIRA, “ $H_2$  Norm Optimization with Constrained Dynamic Output Feedback Controllers : Decentralized and Reliable Control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, 1999, pages 1449-1454.
- [**BOR 93**] P. BORNE, G. DAUPHIN, J. RICHARD, F. ROTELLA and I. ZAMBETTAKIS, “Analyse et Régulation des Processus Industriels, Régulation Numérique”, proceedings of *Méthodes et Pratique de L’ingénieur*, vol. 5, Paris, 1993.
- [**BOY 94**] S. BOYD, L. GHAOUI, E. FERON and V. BALACKRISHNAN, “Liar System Matrix Inequalities in System and Control Theoty”, proceedings of *Philadelphia, USA. Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM*, 1994.
- [**BYR 93**] I. BYRNES and B. GHOSH, “Stabilization of Discrete Time Non Linear Systems by Smooth Feedback”, *Systems & Control Letters*, vol. 21, 1993, pages 255-263.
- [**CAR 86**] A. CARMICHAEL, S. HINSCHLIFFE, P. MURGATROYD and W. I.D, “Magnatic suspension systems with digital controllers”, *Rev. Sci Instrum.*, vol. 57, no. 8, 1986, pages 1611-1615.
- [**CHE 98**] V. CHELLABOINA, A. LEONESSA and M. HADDAH, “Nonlinear system stabilization via equilibria-dependent lyapunov functions : Beyond gain scheduling control”, *Systems and Control Letters*, vol. 19, 1998, pages 23-27.
- [**CHE 99**] C. CHEN, *Linear System Theory and Design*, University Press, New York, USA, Oxford, 1999.
- [**COU 98**] C. COURTIES, J. BERNUSSOU and G. GARCIA, “ $H_\infty$  Robust Control for Polytopic Uncertain Systems”, *IEEE-CESA, Nabeul-Hammamet*, , 1998.

- [COU 99a] C. COURTIES, “Sur la Commande Robuste et LPV de Systèmes à Paramètres Lentement Variables”, PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées, 1999.
- [COU 99b] C. COURTIES, H. BOUAZIZI and J. BERNUSSOU, *Commande LPV à l'aide d'un d'un Observateur*, Rapport LAAS-CNRS No 99537, Toulouse, France, 1999.
- [DUC 94] G. DUC, *Robusresse des Systèmes Linéaires Multivariables*, Ecole Supérieure d'Electricité, France, 1994.
- [DUL 00] G. DULLERUD and P. FERNANDO, *A Course in Robuste Control Theory, A Convex Approach*, Springer-Verlag, New York, Inc, 2000.
- [DUR 96] C. DURIEU, T. POLYAC and E. WALTER, “Trace Versus Determinant in Ellipsoidal Outer Bounding With Application to State Estimation”, proceedings of *IFAC. San Francisco, California, USA*, 1996.
- [ELH 01] A. EL HAJJAJI and M. OULADSINE, “Modeling and Nonlinear Control of Magnetic Levitation Systems”, *IEEE Transactions On Industrials Electronics*, vol. 48, no. 4, 2001, pages 831-838.
- [FLI 95] M. FLIESS, J. LEVINE, P. MARTIN and P. ROUCHON, “Flatness and defect of non linear systems. Introductory theory and examples”, *Int. Journal of Control*, vol. 61, 1995, pages 1327-1361.
- [FLI 96] M. FLIESS, J. LEVINE, P. MARTIN and P. ROUCHON, “Système différentiellement plats : intérêts et exemples”, proceedings of *Ecole d'été d'Automatique : Flat systems, theory and practice*, Grenoble, 1996.
- [FLI 99] M. FLIESS, J. LEVINE, P. MARTIN and P. ROUCHON, “A Lie-Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, 1999, pages 922-937.
- [FRA 84] B. FRANCIS, J. HELTON and G. ZAMES, “ $H_\infty$  Optimal Feedback Controllers for Linear Multivariable Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, 1984, pages 888-900.
- [FRA 91] B. FRANCIS, “A Course in  $H_\infty$  Control Theory”, proceedings of *Lecture Note in Control and Information Sciences*, vol. 88, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [GAH 94a] P. GAHINET and P. APKARIAN, “A Linear Inequality Approach to  $H_\infty$  Control”, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, 1994, pages 421-448.
- [GAH 94b] P. GAHINET and P. APKARIAN, “A Linear Inequality Approach to  $H_\infty$  Control”, *International Journal of Robust and Non Linear Control*, vol. 4, 1994, pages 421-4481.
- [GAR 91] G. GARCIA and J. BERNUSSOU, “Stabilité et Detectabilité Quadratique : Lien avec l'Approche LQG”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 312, 1991.
- [GAR 94] G. GARCIA, J. BERNUSSOU and D. ARZELIER, “Robust Stabilization of Discrete-Time Linear Systems with Norm Bounded Time Varying Uncertainty”, *Systems and Control Letters*, vol. 22, 1994, pages 327-339.
- [GAR 95] G. GARCIA and J. BERNUSSOU, “Poles Assigement for Uncertain Systems in a Specified Disk by State Feedback”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, 1995, pages 148-190.

- [GER 99] J. GEROMEL, “Optimal Linear Filtering under Parameter Uncertainty”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, 1999, pages 168-175.
- [HEN 99] D. HENRION, “Stabilité des Systèmes Linéaires Incertains à Commande Contrainte”, PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées, 1999.
- [JUR 71] E. JURY, “Inners, Approach to Some Problems of System Theory”, *IEEE Transactions on Automat Control*, vol. 16, 1971, pages 233-240.
- [JUR 74] E. JURY, “Inners, an Stability of Dynamic Systems”, proceedings of *Wiley*, 1974.
- [KAW 03] R. KAWAKAMI, H. GALVÃO and T. YONEYAMA, “A Simple Technique for Identifying a Linearized Model for a Didactic Magnetic Levitation System”, *IEEE Transactions On Education*, vol. 46, no. 1, 2003, pages 22-25.
- [KHA ] H. KHANSAH, J. BERNUSSOU and M. VINCENT, “Scheduled Robust Control of Nonlinear System by Norm Bounded Approximation”, *IEEE Fourth International Multi-Conference on Systems, Signals, and Devices*.
- [KHA 91] P. KHARGONEKAR and M. ROTEA, “Mixed  $H_2/H_\infty$  Control : A Convex Optimization Approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, , 1991.
- [KHA 92] H. KHALIL, *Nonlinear Systems*, USA, Macmillan, 1992.
- [KHA 06] H. KHANSAH, “Commande Séquencée Robuste de Système non Linéaire par Approximation de Type Bornée en Norme”, *7ème Congrès des Doctorats, Toulouse, France*, , 2006.
- [KUC 91] V. KUCERA, “Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems”, proceedings of *Systems and Control Engineering*, 1991.
- [LAB 02] Y. LABIT, P. TEPPA, J. BERNUSSOU and G. GARCIA, “Application de la Commande Robuste Séquencée au Contrôle de la Transition Opérationnelle d’un Système Non Linéaire”, *2ème Conférence Internationale Francophone d’Automatique, Nante, France*, , 2002.
- [LAN 93] I. LANDAU, *Identification et Commande des Procédés*, Edition Hermes, France, 1993.
- [LEI 98a] D. LEITH and W. LEITHEAD, “Gain Scheduling and Nonlinear Systems Dynamic Analysis by Velocity Based Linearisation Families”, *Int. J. Control*, vol. 70, 1998, pages 289-317.
- [LEI 98b] D. LEITH and W. LEITHEAD, “Gain Scheduling Controller Design : an Analytic framework directly incorporating non equilibrium Plant Dynamics”, *Int. J. Control*, vol. 70, 1998, pages 249-269.
- [LEW 91] F. LEWIS, “Applied Optimal Control and Estimation”, proceedings of *Digital Signal Processing Series*, 1991.
- [LI 00] Y. LI, “Robuste Control of Linear Uncertain Systems with Regional and Variance Constraints”, *International Journal of Systems Science*, vol. 31, 2000, pages 367-371.
- [MAH 05] V. MAHOUT, “Path planning for non linear systems using trigonometric splines”, proceedings of *IFAC world congress, Prague july 2005*, 2005.
- [MAR 96] P. MARTIN, S. DEVASIA and B. PADEN, “A different look at output tracking : control of a VTOL aircraft”, *Automatica*, vol. 32, 1996, pages 101-107.

- [PET 87] I. PETERSEN, “A Stabilization Algorithm for Class of Uncertain Linear Systems”, *Systems and Control Letters*, vol. 8, 1987, pages 351-356.
- [ROT 93] F. ROTELLA, B. BORNE and J. RICHARD, *Analyse et Régulation des Processus Industriels, Régulation Continue*, France, 1993.
- [RUG 91] W. RUGH, “Analytical Framework for Gain Scheduling”, *IEEE Control Systems magazine*, vol. 11, 1991, pages 97-84.
- [RUG 00] W. RUGH and J. SHAMMA, “Research on Gain Scheduling”, *Automatica*, vol. 36, 2000, pages 1401-1425.
- [SAM 90] M. SAMPEI and T. MITA, “An Algebraic Approach to  $H_\infty$  Output Feedback Control Problems”, *Systems and Control Letters*, vol. 14, 1990, pages 13-24.
- [SCH 97] C. SCHERER, P. GAHINET and M. CHILALI, “Multiobjective Output-feedback Control via LMI Optimization”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, 1997, pages 896-911.
- [SHA 90] J. SHAMMA and M. ATHANS, “Analysis of non Linear Gain Scheduled Control Systems”, *IEEE Transactions on Automat Control*, vol. 35, 1990, pages 898-907.
- [SLO 91] J. SLOTINE and L. WEIPING, *Applied Nonlinear Control*, USA, New Jersey, Prentice-Hall, 1991.
- [STO 92] A. STOOORVOGEL, “The  $H_\infty$  Control Problem : A State Space Approache”, proceedings of *Digital Signal Processing Series*, 1992.
- [TEP 02] P. TEPPA, “Approche par Séquencement de Gains Robuste pour la Commande de Système Non Linéaire”, *3ème Congrès des Doctorats, Toulouse, France*, , 2002.
- [TEP 03] P. TEPPA, “Commande par Séquencement de Gains Robuste pour Systèmes non Linéaires”, PhD thesis, Institut National des Scienses Appliquées, 2003.
- [VAN 96] L. VANDENBERGHE and S. BOYD, “Semidefinite Programming”, proceedings of *SIAM Review*, vol. 38, 1996.
- [VAN 97] R. VANDERBEI, “Liar Programming : Foundations and Extensions”, proceedings of *New York, Kluwer Academic Publishers*, 1997.
- [VAN 98] L. VANDENBERGHE, S. BOYD and S. WU, “Determinant Maximization with Linear Matrix Inequality constraint”, proceedings of *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 19, 1998.
- [VAN 00] J. VANANTWERP and R. BRAATZ, “A Tutorial on Linear and Bilinear Matrix inequalities”, *J. Process Control*, vol. 10, 2000, pages 363-385.
- [VID 93] M. VIDYASAGAR, *Nonlinear Systems analysis*, USA, New Jersey, Prentice-Hall, 1993.
- [ZHO 88] K. ZHOU and P. KHARGONEKAR, “Robust Stabilization of Linear Systems with Norm Bounded Time Varying Uncertainty”, *Systems and Control Letters*, vol. 10, 1988, pages 17-20.



## Sur la commande de systèmes non linéaires par gains robustes séquencés

Dans ce travail, nous avons développé une approche systématique traitant un problème particulier dans le domaine de la commande non linéaire. Il concerne le fait d'assurer une transition stable entre deux points opérationnels d'un système non linéaire. Cette approche emploie la stratégie de séquencement de gain et la notion d'incertitude bornée en norme pour approximer un système non linéaire à travers une famille de systèmes linéaires incertains à incertitude bornée en norme. Autour d'un ensemble de points d'équilibre, des lois de commande locale sont déterminées en garantissant quelques spécifications de performances locales. Le séquencement est déterminé de sorte que la stabilité est garantie. Par interpolation polynomiale continue, une loi de commande continue est établie à partir des points d'équilibre trouvés hors ligne et des correcteurs associés. Une stratégie de commande séquencée par retour d'état ainsi qu'une stratégie par retour de sortie dynamique ont été envisagées. Dans le premier cas, la commutation est faite lorsque l'état se trouve dans le bassin d'attraction du point d'équilibre ultérieur visé. Dans le deuxième, nous avons déterminé une loi de commande par retour de sortie dynamique où la politique de commutation est basée sur les états estimés. Quelques exemples ont été donnés pour montrer l'efficacité de la méthode proposée.

Mots-clés : Systèmes non linéaires, Séquencement de gains, Stabilité quadratique, théorie de Lyapunov, Incertitude bornée en norme, Inégalités linéaires matricielles.

### About non linear systems control through scheduled robust feedback

In this work, we developed a systematic approach to treat a particular problem in the nonlinear field, which relates to the fact of ensuring a stable transition between two operational points for a nonlinear system. This approach employs the gain scheduling strategy involving norm bounded uncertainty to approximate a nonlinear system by a family of uncertain linear systems. Around a set of equilibrium points, local robust control laws are determined in order to satisfy local performances. A sequencing strategy is determined to insure a stable transition. By a polynomial interpolation and continuation, a continuous control law is proposed featuring an open law term associated with a feedback one. We have adopted two synthesis procedures : state feedback and output feedback. In the first case, the robust control law scheduling is switched when the state trajectory reaches the attraction domain of the next equilibrium point. For the second, we determine output feedback, and the scheduling politic is based on robust state estimation. Some examples are considered to show the effectiveness of the method.

Keywords : Non linear systems, Gain scheduling, Quadratic stability, Lyapunov theory, Norm bounded uncertainty, Linear matrix inequalities.