

Quelques contributions à la commande non linéaire des robots marcheurs bipèdes sous-actionnés

Ahmed Chemori

▶ **To cite this version:**

Ahmed Chemori. Quelques contributions à la commande non linéaire des robots marcheurs bipèdes sous-actionnés. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2005. Français. NNT : . tel-00168406

HAL Id: tel-00168406

https://theses.hal.science/tel-00168406

Submitted on 28 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : " Automatique - Productique "

préparée au Laboratoire d'Automatique de Grenoble
dans le cadre de **l'École Doctorale**
" Électronique, Électrotechnique, Automatique, Traitement du Signal "

présentée et soutenue publiquement

par

Ahmed Chemori

le 14 juin 2005

Quelques contributions à la commande non linéaire des robots marcheurs bipèdes sous-actionnés

---

Directeur de Thèse : Mazen Alamir
Co-Encadrant : Antonio Loría

JURY

M.	Didier GEORGES	, Président
M.	Tarek HAMEL	, Rapporteur
M.	Nacer Kouider M'SIRDI	, Rapporteur
M.	Mazen ALAMIR	, Directeur de thèse
M.	Antonio LORIA	, Co-encadrant
Mme.	Christine CHEVALLEREAU	, Examinateur

A Dieu,

A ma très chère mère,

A mon chère père,

A mes frères et soeurs,

A toute ma famille.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude, ma reconnaissance et mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Mazen ALAMIR, un vrai modèle d'un chercheur passionné, pour ses conseils, sa disponibilité, et son efficacité. Je m'adresse également mes sincères remerciements à mon co-encadrant Antonio LORIA qui son lui se travail ne serait pas débuté, et qui m'a beaucoup aidé tout au long de la thèse.

Mes remerciements s'adressent à monsieur Didier GEORGES d'avoir accepter d'être président du jury et messieurs Nacer Kouider M'SIRDI et Tarek HAMEL qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail. Merci également à Mme Christine CHEVALLEREAU d'avoir accepter examiner mon manuscrit, ainsi qu'à tout les membres du groupe de recherche ROBEA : "Commande pour la marche et la course d'un robot bipède". Merci également à Gabriel BUCHE.

Je tiens à remercier tous mes collègues du laboratoire, et en particulier : Anas, Khodeir, Aymen, Alessandro, Fadi, Laurent, Alexandru, sid-Ahmed, Bilal, Emmanuel ...

Un grand merci à toute l'équipe administrative et technique du laboratoire et en particulier : Marie-thérèse, Virginie, Patricia, Marie-rose, Marielle, Daniel, philippe, ...

Pour finir, j'en profite pour remercier tous ceux et celles qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



Table des matières

1 Introduction générale **1**

1.1 Introduction 1
1.2 La marche bipède humaine 2
1.2.1 Concepts et facteurs de la marche humaine 2
1.2.2 Paramètres de la marche humaine 3
1.3 La marche bipède robotique 5
1.3.1 Principes de la marche robotique bipède 6
1.4 Les modes de la marche robotique 9
1.4.1 La marche statique 9
1.4.2 La marche dynamique 10
1.5 Les robots marcheurs bipèdes 11
1.5.1 Réalisations actuelles 12
1.5.2 Les robots humanoïdes 15
1.5.3 Projets de recherche sur les robots bipèdes dans le monde 16
1.6 État de l'art 17
1.7 Contributions 20
1.7.1 Première approche : commande prédictive non linéaire de dimension faible 21
1.7.2 Deuxième approche : commande de type Lyapunov 24
1.7.3 Publications de l'Auteur 25
1.8 Plan du mémoire 26
1.9 Conclusion 27

2 Rabbit : un prototype expérimental **29**

2.1 Introduction 29
2.2 Description technologique de la plate-forme expérimentale : le prototype RABBIT 30
2.2.1 L'idée de base de la structure choisie 30
2.2.2 Description de la structure mécanique articulée 31
2.2.3 Les capteurs de la plate-forme expérimentale 34



2.2.4 Les actionneurs de la plate-forme expérimentale 35
2.3 Modélisation cinématique 35
2.4 Modélisation dynamique 38
2.5 Modèle dynamique en phases de simple et de double support 40
2.5.1 Les contraintes de non pénétration et non décollage 40
2.5.2 Les contraintes de non glissement sur le sol 41
2.5.3 La dynamique en phase de simple support 42
2.5.4 La dynamique en phase de double support 43
2.6 Modèle dynamique en phase d'impact 44
2.7 Conclusion 47

3 Première approche : commande prédictive non linéaire de faible dimension 49
3.1 Introduction 49
3.2 La commande Prédictive à base de modèle 51
3.3 Principe de l'approche proposée 53
3.3.1 Formulation du problème 53
3.3.2 Quelques définitions et notations utiles 56
3.3.3 La loi de commande par retour d'état proposée 58
3.3.4 Analyse de stabilité 61
3.4 Applications 66
3.4.1 Application 1 : un système non linéaire dont le linéarisé est non commandable 66
3.4.2 Application 1 : résultats de simulation 67
3.4.3 Application 2 : la bille sur le rail 73
3.4.4 Application 2 : résultats de simulation 74
3.4.5 Application 3 : le pendule inversé modèle ECP 505 80
3.4.6 Application 3 : résultats de simulation 82
3.4.7 Application 4 : le système dynamique chaotique hybride de Lorenz modifié 88
3.4.8 Application 4 : résultats de simulation 89
3.5 Évaluation du temps de calcul 93
3.6 Conclusion 94

4 Deuxième approche : commande par la méthode de Lyapunov 97
4.1 Introduction 97
4.1.1 Le cycle de marche 98
4.2 Commande en phase de simple support 99



4.2.1 Génération des trajectoires de référence 99
4.2.2 Modèle d'ordre réduit 100
4.2.3 Loi de commande 103
4.2.4 Analyse de stabilité 107
4.3 Commande en phase d'impact 108
4.4 Commande en phase de double support 109
4.4.1 Formulation du problème de commande 110
4.4.2 Modèle d'ordre réduit 110
4.4.3 Loi de commande : un contrôleur dynamique 111
4.4.4 Analyse de stabilité 111
4.5 Enchaînement des cycles de marche 112
4.6 Analyse de la stabilité sur un cycle complet de marche 113
4.7 Conclusion 116

5 Applications à la commande de la marche d'un robot bipède sous-actionné 119
5.1 Introduction 119
5.2 Application de la première approche de commande 119
5.2.1 Le robot bipède : un système à dynamique hybride 120
5.2.2 Résultats de simulation 123
5.2.3 Choix des configurations désirées du robot 125
5.2.4 Scénario 1 : la marche à vitesse constante 127
5.2.5 Scénario 2 : génération d'allures transitoires de démarrage et de l'arrêt . 135
5.2.6 Scénario 3 : transition entre différentes vitesses de marche 138
5.2.7 Scénario 4 : balancement autour d'une posture d'équilibre 142
5.2.8 Scénario 5 : robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques 146
5.2.9 Scénario 6 : robustesse vis-à-vis des irrégularités du sol 150
5.2.10 Évaluation du temps de calcul 154
5.3 Application de la deuxième approche de commande 155
5.4 Conclusion 161

6 Conclusions et perspectives 163
6.1 Conclusions générales 163
6.2 Comparaison entre les deux approches de commande proposées 166
6.3 Perspectives 167



A Modèle dynamique du robot bipède **171**

A.1 La matrice d'inertie 172

A.2 La matrice de Coriolis et des termes centrifuge 174

A.3 Le vecteur de gravité 175

A.4 La matrice de répartition des couples sur les articulations 175

B Principe de linéarisation partielle par retour d'état **177**

B.1 Transformation d'état 178

B.2 Forme normale 178

B.3 Dynamique interne 179

B.4 Dynamique des zéros 179

B.5 Exemple 179



Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Introduction

Depuis longtemps l'homme cherche à imiter des fonctions spécifiques aux êtres vivants [56], [44]. Par exemple les réseaux de neurones artificiels imitent le cerveau humain dans sa structure et son fonctionnement. Les algorithmes génétiques imitent l'évolution d'une population d'individus vivant dans un milieu biologique. Ils sont souvent utilisés dans la résolution de problèmes d'optimisation numériquement difficiles.

La marche est le mode de locomotion employé par l'être humain et plusieurs animaux. Nous marchons quotidiennement sans nous poser de questions sur la prouesse réalisée. Et pourtant, regardons les mois d'apprentissage nécessaires à un jeune enfant pour qu'il maîtrise ce processus finalement si complexe.

Outre le fait de copier l'animal, la marche robotique permet d'évoluer sur une plus grande variété de terrains. Le sol peut être irrégulier voir parsemé de petits obstacles. Une approche consiste à penser que le robot doit être le plus proche de l'homme afin de pouvoir être utilisé là ou va l'homme. Des chercheurs de plusieurs communautés scientifiques, telles que la médecine, la biomécanique, la robotique, et l'automatique travaillent déjà sur ce sujet.

L'objectif principal de l'étude de la marche en robotique réside dans la conception et la réalisation de prototypes de robots marcheurs (bipèdes, quadrupèdes, hexapodes,...etc). Ces prototypes sont censés être capables de reproduire ou d'imiter certains mécanismes de la marche humaine ou animale et d'aider ou de remplacer l'être humain dans des tâches plus ou moins difficiles.

D'une façon générale, lors de la synthèse d'une approche de commande pour le contrôle de la marche chez un robot bipède, une éventuelle démarche de conception à suivre pourra être

la suivante [69] :

1. comprendre et *interpréter la marche* robotique bipède du point de vue contrôle. Pour cela il est indispensable de comprendre les divers phénomènes physiques mis en jeu par cette activité;
2. établir *un cahier des charges* dans lequel figurent les moyens (matériels et logiciels) disponibles, les objectifs à atteindre, ainsi que les contraintes à respecter;
3. *modéliser* la dynamique du robot marcheur ainsi que les phénomènes intervenant pendant la marche tels que le contact pied/sol, les frottements, les impacts et les transitions entre les différentes phases de mouvement;
4. proposer un *algorithme de commande* permettant d'atteindre les objectifs fixés au préalable. Cette solution proposée doit éventuellement respecter les contraintes fixées dans le cahier des charges;
5. mettre au point l'algorithme de commande (en mode simulation), puis le valider en *temps réel* sur le prototype afin de tester sa robustesse.

1.2 La marche bipède humaine

L'objectif de cette section est de clarifier les principaux mécanismes physiologiques et biomécaniques mis en jeu lors de la marche humaine [1].

La marche humaine est une activité d'une extrême complexité, c'est une acquisition motrice précoce. Progressivement et rapidement affinée chez l'enfant, elle devient une fonction complexe intégrée à de multiples niveaux du système nerveux central à tel point qu'il n'est pas possible de lui reconnaître un centre spécial. Elle met en jeu plusieurs automatismes, bouclés de la moelle au tronc cérébral, au cervelet, aux noyaux gris centraux. Ces derniers permettent la reproduction cyclique de la séquence active des membres inférieurs, tout en autorisant l'adaptativité nécessaire aux variations du relief, aux changements d'allure ou aux modifications de trajectoire [76].

1.2.1 Concepts et facteurs de la marche humaine

On trouve la marche bipède chez l'être humain et plusieurs animaux (les oiseaux par exemple), cependant la marche la plus sophistiquée est celle de l'être humain. C'est la raison pour laquelle, dans l'étude de la locomotion artificielle bipède, l'homme est une référence indiscutable. Ce

1. Pour plus de détails sur la marche humaine le lecteur est invité à consulter [76], qui constitue une référence de base dans le domaine.



dernier dispose d'un corps caractérisé par un extraordinaire système de coordination. Il met en jeu, entre autres :

- 29 degrés de liberté et 48 muscles pour chaque membre inférieur (jambe);
- un moteur pelvien pour la marche en terrain horizontal et la poussée du triceps sural et des extenseurs de hanche pour les changements de pente et les reliefs accidentés;
- un organe de contact avec le sol spécifiquement adaptatif grâce à ses grandes capacités de déformation induites par ses nombreux degrés de liberté, par sa semelle plantaire épaisse et fixée, ainsi que par le jeu vertical et transversal des métatarses;
- des capteurs d'accélération [2] angulaire et linéaire permettant le contrôle des trajectoires en l'absence de contrôle visuel.

D'après ce qui précède, on constate d'une part la grande complexité de la marche humaine et d'autre part sa perfection et sa sophistication.

1.2.2 Paramètres de la marche humaine

Quelques terminologies souvent utilisées en biomécanique et reprises en robotique bipède sont présentées ici :

la marche : mode de locomotion bipède avec activité alternée des membres inférieurs et maintien de l'équilibre dynamique;

la locomotion : activité de l'appareil moteur en relation avec le déplacement des segments du corps humain;

le pas : activité séquentielle des deux membres inférieurs au cours de la marche;

le cycle de marche : activité d'un seul membre inférieur, depuis le contact du talon au sol jusqu'au prochain contact au sol. Sa décomposition donne lieu aux phases de marche, cette décomposition est illustrée sur la figure 1.1 pour un être humain;

phase de simple appui : appelée aussi *phase de simple support*, elle commence avec l'appui total d'un pied au sol jusqu'au lever du talon de ce même pied. Cette phase constitue entre 70% et 80% du cycle de marche, pendant laquelle le poids du marcheur repose sur ce support unique. La jambe qui supporte le marcheur est appelée *jambe d'appui*, ou *jambe de support*, tandis que l'autre jambe est appelée *jambe de balancement* ou *jambe de vol*;

phase de double appui : appelée souvent *phase de double support*, elle constitue entre 20% et 30% d'un cycle de marche. Elle est caractérisée par le fait que le marcheur s'appuie

2. Le corps humain dispose d'autres types de capteurs tels que les capteurs articulaires, et les capteurs musculaires.

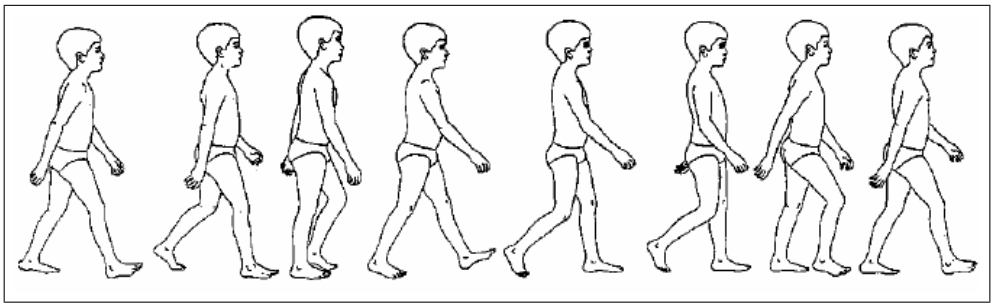


FIG. 1.1 – *Décomposition d'un cycle de marche humain*

sur le sol par ses deux pieds, d'où le nom *phase de double support*;

phase de passage (du membre inférieur): période pendant laquelle le membre inférieur considéré ne supporte aucun poids, mais il avance en se pliant puis en s'étendant. Cette phase est souvent appelée *phase de balancement* et elle se déroule simultanément à la phase de simple support mais sur l'autre membre, i.e. lorsqu'une jambe est en phase de simple support l'autre est en phase de balancement.

membre oscillant : membre inférieur qui passe le pas, par opposition à celui qui est ancré au sol. Ce membre est souvent appelé *jambe de balancement*, *jambe libre*, ou encore *jambe de vol*.

Le mouvement relatif à la marche humaine met en jeu divers déplacements, qui se déroulent dans différents plans illustrés dans la figure 1.2. Ces déplacements constituent des facteurs biomécaniques intervenant principalement dans le plan sagittal et dans le plan frontal (ou coronal). Ils garantissent la stabilité de l'unité locomotrice et lui permettent le synchronisme mobilité/stabilité.

Dans le plan sagittal interviennent :

- une rotation du bassin autour de l'axe vertical avec un basculement du coté non porteur;
- une flexion du genou pendant l'appui;
- des mouvements bien coordonnés du pied et de la cheville.

Dans le plan frontal intervient le déplacement latéral du bassin.

A noter que ces mouvements jouent un rôle primordial dans la minimisation du débattement du centre de gravité. Ce dernier a un mouvement périodique et il est illustré sur la figure 1.3.

Si nos membres inférieurs étaient rigides le débattement du centre de gravité aurait été de 75 mm. Mais ceci est diminué jusqu'à 45 mm grâce aux mouvements sagittaux et frontaux ainsi qu'à leur coordination. A titre d'exemple, la rotation axiale du bassin contribue par une diminution de 10 mm, et la flexion du genou par une diminution de 11 mm, du débattement du centre de gravité.



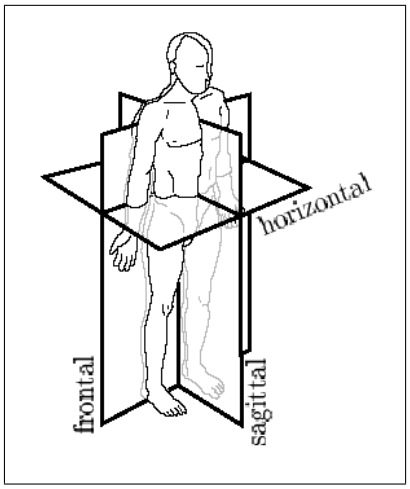


FIG. 1.2 – *Plans principaux dans lesquels les mouvements prennent lieu*

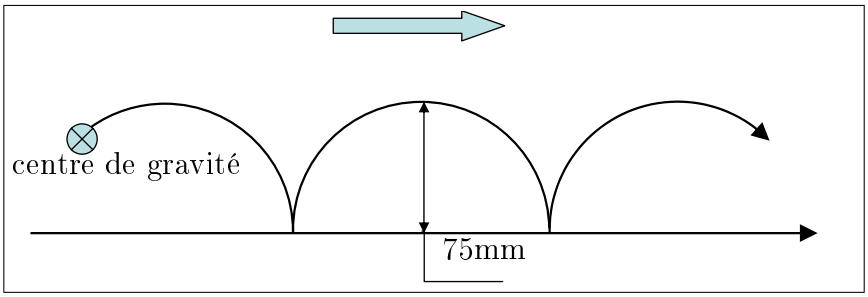


FIG. 1.3 – *Débattement du centre de gravité pendant la marche*

1.3 La marche bipède robotique

Les robots marcheurs bipèdes font partie des robots marcheurs à pattes [79]. Ils possèdent des spécificités qui les distinguent des autres robots à pattes. Un robot marcheur bipède peut être défini comme étant une chaîne cinématique qui comporte deux sous-chaînes appelées jambes et une troisième appelée tronc. Les trois sous-chaînes sont interconnectées au moyen d'une articulation commune, qui forme ce qu'on appelle la hanche. Les jambes peuvent être articulées en plusieurs points comportant ainsi une cuisse (ou fémur), un tibia, une cheville, un orteil ...etc. Un schéma synoptique illustratif d'une structure simple d'un robot bipède, est celui de la figure 1.4.

Les deux jambes du robot ont la possibilité de décoller alternativement de la surface de marche, et la cadence de décollement définit la vitesse et le type de déplacement. Dans le cas de la marche, le robot est toujours en contact avec le sol au moins avec une jambe. La course, quant à elle, est caractérisée par des périodes où les deux jambes sont en l'air.

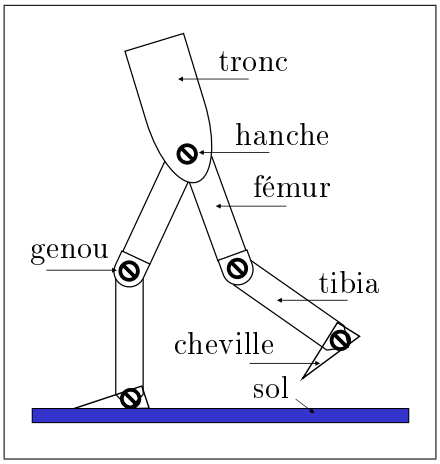


FIG. 1.4 – *Structure simple d'un robot bipède*

La marche bipède robotique est inspirée de la marche humaine, bien qu'une marche si efficace et si élégante que la marche humaine soit loin d'être reproduite. Malgré leurs capacités à danser, descendre ou monter les marches d'escaliers et même taper sur une balle, les robots bipèdes manquent encore d'aisance et d'autonomie.

L'équilibre du marcheur est partiellement déterminé par la position du centre de gravité. C'est le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur sur toutes les parties d'un corps. A l'arrêt, celui-ci doit se situer sur une verticale passant à l'intérieur de la surface délimitée par les points d'appui[3] sinon le robot est en déséquilibre.

Il est important de noter qu'un corps gardera plus facilement son équilibre si :

- son centre de gravité est bas. Dans ce cas l'inclinaison du corps devra être importante pour que la projection du centre de gravité soit en dehors de la surface délimitée par les points d'appuis,
- le corps est large, car sa stabilité sera plus aisée à maintenir.

1.3.1 Principes de la marche robotique bipède

Durant la marche, le robot bipède alterne les rôles de ses deux jambes, ce qui lui permet de se déplacer sur la surface de marche[4]. La manière d'interaction du robot marcheur avec le sol

3. Cette surface est souvent appelée polygone de sustentation.

4. La surface de marche est généralement considérée dans la littérature concernée comme horizontale à part quelques cas exceptionnels, par contre elle est inclinée dans le cas des robots passifs qui se contentent de l'effet de la gravité pour se déplacer.



définit les différentes phases de marche, elles peuvent être classées comme suit :

phase de simple support : durant laquelle le robot est en contact avec le sol à travers une seule jambe, d'où le nom *simple support* ou *simple appui*. La jambe de contact est appelée *jambe de support*, tandis que l'autre jambe est appelée *jambe de vol*, ou *jambe de balancement*;

phase de double support : c'est la période au cours de laquelle les deux jambes sont simultanément en contact avec le sol, d'où le nom *double support* ou *double appui*;

phase de vol : pendant cette phase, le robot bipède n'a aucun contact avec la surface de marche. En effet, les deux pieds sont en l'air, cette phase intervient dans les scénarios de course;

phase d'impact : elle caractérise le phénomène de choc, entre le pied de balancement et le sol. Elle intervient à la fin de la phase de simple support dans le cas de la marche, et à la fin de la phase de vol dans le cas de la course.

Par conséquent un cycle de marche consiste en un enchaînement de phases de simple support, d'impact, et de double support (cf. figure 1.5). Un cycle de course, quant à lui, est une succession de phases de simple support, de vol, et d'impact (cf. figure 1.6).

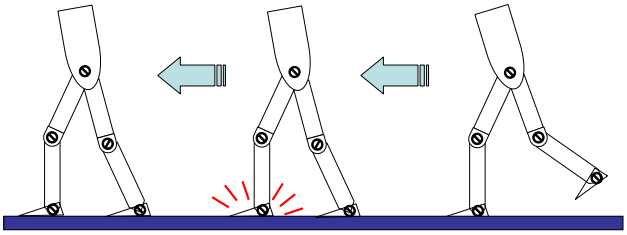


FIG. 1.5 – *Séquence des phases dans la marche*

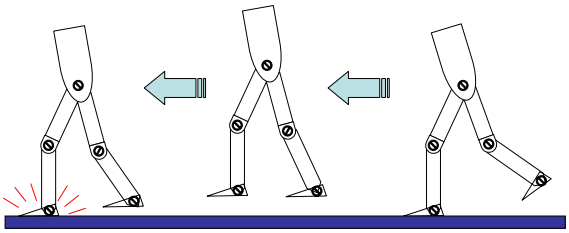


FIG. 1.6 – *Séquence des phases dans la course*

Afin d'étudier la marche bipède, les points suivants doivent être abordés :

- la mise en équation de la dynamique du robot, dans les différentes phases du cycle;
- la prise en compte de la dynamique du sol lors du contact pied/sol (contact rigide, compliant, ...etc);
- l'enchaînement des phases pour l'obtention du cycle de mouvement complet;
- éventuellement, la minimisation d'un critère auxiliaire comme la dépense énergétique;
- le tout devant être fait dans les limites admissibles définies par les diverses contraintes de saturation (couples maximaux, débattements articulaires, excursions maximales avant butées).

Dans le cas de la marche bipède, la question qui peut se poser est alors la suivante :

Comment faire marcher un robot bipède?



Du point de vu de la commande, la marche bipède peut être considérée comme étant une succession de postures, comme cela est illustré sur la figure 1.7. Le robot marcheur doit suivre cette séquence de postures, dans le but d'effectuer un certain mouvement lui permettant de se déplacer.

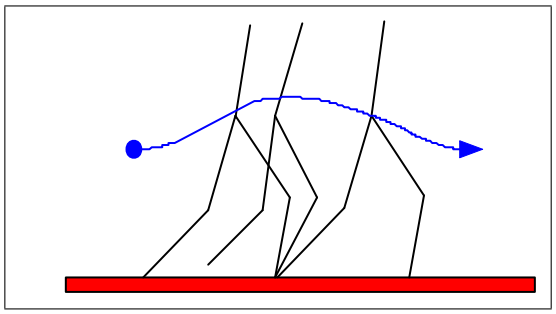


FIG. 1.7 – *Postures séquentielles de la marche*

L'ensemble de ces postures peut être défini comme étant des trajectoires de référence à poursuivre par les articulations du robot. Par conséquent, il suffit de trouver la loi de commande qui permet la poursuite des trajectoires articulaires de référence, dans le but de faire avancer le robot sur la surface de marche (le sol).

Bien évidemment, cette présentation du problème de la marche est trop simplifiée car elle cache un ensemble de problèmes auxquels il faut faire face, citons entre autres :

- la dynamique fortement non linéaire du système;
- les redondances cinématiques et le nombre élevé de degrés de liberté rendant les mouvements difficiles à gérer;
- la structure variable du modèle selon la phase en cours. Cette variation se traduit par l'ajout/suppression de contraintes algébriques traduisant le contact avec le sol. Ceci se traduit par un sous-actionnement ou un sur-actionnement selon que l'on soit en phase de simple ou de double support;
- La gestion des impacts avec le sol introduisant des discontinuités (sauts ou variations instantanées) sur le vecteur d'état du système;
- Le problème de sous-actionnement qui peut survenir pendant certaines phases du cycle de marche, dû à un nombre de degrés de liberté supérieurs au nombre d'actionneurs;
- Le contact avec le sol, qui englobe des problèmes qu'il faut gérer aussi, comme le non glissement sur la surface de marche;
- La stabilité pendant la marche, qui n'est pas évidente à assurer (surtout à priori), elle pourra être définie mathématiquement comme étant la capacité du système bouclé à

rester indéfiniment dans une certaine région (appelée par certains auteurs : *domaine de viabilité* [94]), traduisant l'absence de chute.

1.4 Les modes de la marche robotique

Dans le contexte de la marche robotique, on distingue deux types de marches qui sont étroitement liés à la stabilité du corps du robot pendant le déplacement. Il s'agit de *la marche statique* et *la marche dynamique* qui seront brièvement décrites par la suite.

1.4.1 La marche statique

La marche statique est caractérisée par le fait que le robot marcheur garde toujours son centre de masse (c.d.m) projeté verticalement à l'intérieur du polygone de sustentation, formé par les points de contact avec le sol. Cela signifie qu'à n'importe quel instant, si les mouvements du robot sont arrêtés, il reste indéfiniment en position stable. Une marche statique pour un robot quadrupède est illustrée par la figure 1.8. Cette solution est la plus simple, elle consiste

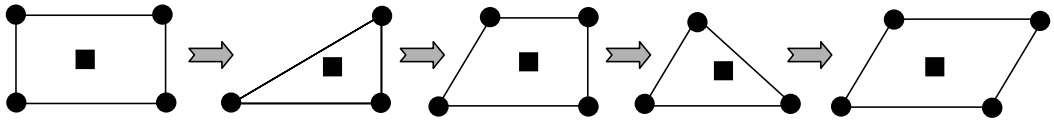


FIG. 1.8 – *Marche statique quadrupède* (■*: c.d.m,* ●*: pattes*)*, la flèche indique le sens de la marche, les pattes forment les sommets du polygone de sustentation*

à déplacer les pattes une par une comme le montre la figure 1.8. L'équilibre est facilement maintenu grâce à la projection du centre de gravité toujours très bien placée par rapport au polygone de sustentation. Le problème majeur de cette solution réside dans sa lenteur. En effet, le robot doit faire quatre déplacements pour avancer d'un pas. Cependant, pour augmenter la vitesse du déplacement, une autre solution peut être envisagée, elle consiste à déplacer les deux pattes opposées en même temps.

Il semble évident que moins le robot a de pattes, plus il est difficile de le faire marcher. En effet, une marche statique pour un robot bipède est celle illustrée sur la figure 1.9. La solution consiste à amener la projection du centre de gravité au polygone de sustentation. Il faut déplacer avant chaque mouvement une partie de la masse du robot au dessus du pied restant en appui en basculant une partie du robot à chaque déplacement. Une autre illustration d'une telle marche statique bipède est celle de la figure 1.10 dans le plan sagittal.

Ce qu'il faut retenir, pour la marche statique c'est que pendant le déplacement du robot (quel qu'il soit), la projection du c.d.m devra toujours rester à l'intérieur du polygone de sustentation. Cette restriction doit être vérifiée même si ce dernier change durant la marche.

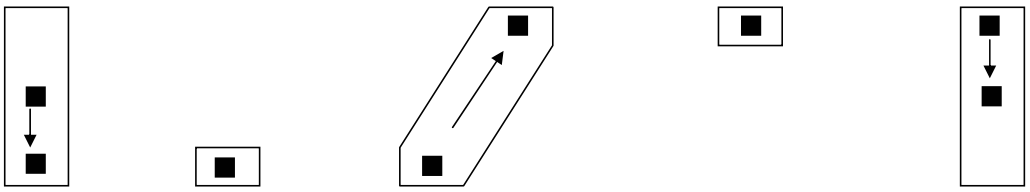


FIG. 1.9 – *Marche statique bipède, vue de dessus, (■: c.d.m) projeté sur le polygone de sustentation, la flèche indique le sens de déplacement du c.d.m*

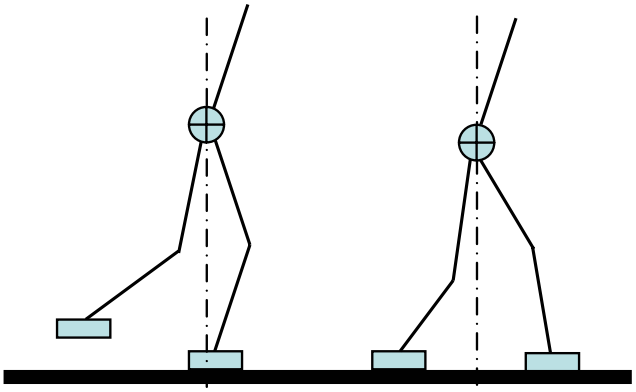


FIG. 1.10 – *Marche statique bipède (vue dans le plan sagittal)*

1.4.2 La marche dynamique

Contrairement à la marche statique, dans une marche dynamique, il n'y a pas une telle contrainte sur la position du c.d.m. Pour ce mode de locomotion, le robot se trouve en déséquilibre pendant le pas. Il récupère son équilibre au moment où il repose ses pattes situées en l'air. Puis il se place à nouveau en déséquilibre en soulevant d'autres pattes. Ce mécanisme se traduit par le fait que le c.d.m du robot quitte le polygone de sustentation pour des périodes de temps durant la marche. Ceci engendre une accélération horizontale chez le robot marcheur. Cependant, de telles périodes de temps doivent, d'une part, être courtes et d'autre part, elles doivent être contrôlées afin d'éviter une éventuelle chute du robot.

Dans la figure 1.11 la marche dynamique est illustrée à travers le polygone de sustentation et le déplacement de la projection du c.d.m pour un robot marcheur bipède. Si on compare



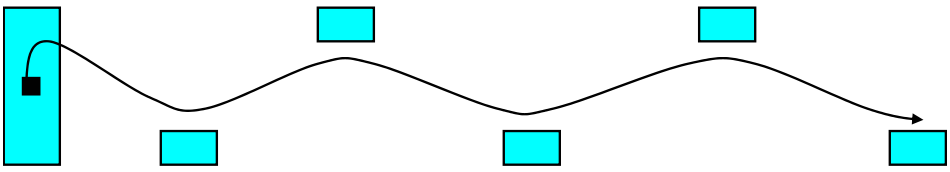


FIG. 1.11 – *Marche dynamique bipède (■ : c.d.m), la flèche indique l'excursion de la projection du c.d.m*

les deux modes de marche, on constate bien évidement que la marche statique est très restrictive et caractérisée par des mouvements lents. Ceci empêchera le robot marcheur d'atteindre de grandes vitesses de déplacement. En revanche, la marche dynamique le permet. Ceci est obtenu en supprimant la contrainte sur le déplacement du centre de masse, ce qui augmente la mobilité du système par une plus grande flexibilité des mouvements des jambes et des pieds.

Du point de vu contrôle, la marche dynamique est la plus difficile à obtenir, étant donné que le robot marcheur est très instable dans le cas de ce mode de locomotion.

Il reste à noter, dans ce contexte, que l'être humain, qui est le modèle de locomotion le plus élégant à imiter, applique des allures de marche dynamique pour se déplacer.

1.5 Les robots marcheurs bipèdes

La robotique à pattes est une branche de la robotique se situant au carrefour de deux grands domaines : *la robotique classique de manipulation*, du fait que la structure des pattes ressemble à celle des bras manipulateurs, et *la robotique mobile*, du fait que le robot marcheur se déplace, ce qui est un point commun avec les robots mobiles à roues ou a chenilles.

En robotique mobile classique, l'objectif principal réside dans la recherche d'une trajectoire à suivre dans un milieu structuré ou non. Cette trajectoire doit être un chemin continu sur le sol permettant au robot d'aller d'un point de départ à un point d'arrivée. Ceci nécessite l'utilisation soit de rails ou bien de routes sur le chemin reliant les deux points.

Une telle contrainte de régularité du chemin n'est pas évidente à satisfaire dans certains cas (terrain accidenté, escalier, ...etc). D'autre part, dès qu'il est nécessaire de faire traverser à un robot un terrain irrégulier, les robots marcheurs présentent une supériorité évidente par rapport aux robots à roues ou à chenilles. Ceci est dû à la nécessité des roues et des chenilles d'avoir un contact permanent avec le sol, alors qu'un robot marcheur se contente de points d'appuis épars sur lesquels il pose momentanément ses pieds. Autrement dit le succès des robots marcheurs par rapport aux robots mobiles à roues ou à chenilles est dû a deux avantages

dont ils disposent, à savoir *la mobilité* et *la flexibilité*. La mobilité des robots marcheurs est supérieure à celle des robots à roues ou à chenilles, parce qu'ils ont la possibilité de traverser des terrains irréguliers, discontinus ou encombrés d'obstacles. Tandis que la flexibilité réside dans la possibilité de changer la configuration de la base du support dans le but de s'adapter au relief du terrain. Les deux notions de *mobilité* et de *flexibilité* sont mieux illustrées sur la figure 1.12.



FIG. 1.12 – *Adaptation d'un robot marcheur à pattes au terrain*

Remarque 1 *Il faut noter qu'à cause de la limitation de mobilité,* 50% *des terrains émergés ne sont pas accessibles à la roue ou à la chenille, mais ces terres sont habitées par des animaux à pattes et seraient accessibles par tout robot marcheur à pattes.*

Le nombre de pattes constitue une spécificité caractérisant les robots marcheurs. Un robot disposant de six pattes est appelé *robot hexapode*. Un robot à quatre pattes est appelé *robot quadrupède*, et un robot à deux pattes (ou deux jambes) est appelé *robot bipède*. Les robots bipèdes constituent une classe intéressante de robots marcheurs à pattes. Ils attirent de plus en plus l'attention des chercheurs de diverses disciplines. De nos jours on recense des centaines de prototypes réalisés à travers le monde. Ils sont de plus en plus complexes et aboutis.

La section qui suit est une présentation générale des différents prototypes de robots marcheurs bipèdes, qui ont vu le jours depuis les années 70, jusqu'à nos jours. Bien évidement la liste complète des prototypes réalisés est assez longue. On essayera tout de même de faire un tour d'horizon sur les principales réalisations dans l'histoire de la robotique bipède.

1.5.1 Réalisations actuelles

Depuis les années 70, des centaines de prototypes de robots marcheurs ont été construits à travers le monde, et particulièrement au Japon.

Les toutes premières réalisations remontent à la fin des années 60, à l'université de WASEDA au Japon. En effet, après une série de prototypes, à savoir `WL-1`(1966-1967), `WL-3`(1968-1969), `WAP-1`(1969), `WAP-2`(1970), et `WAP-3`(1971), réalisés au sein de cette université, Kato et

Tsuiki construisent le prototype `WL-5`(1970-1972), un robot marcheur bipède 3D à 11 degrés de liberté, capable d'éffectuer des allures de marche statique (cf. figure 1.9), suivi d'un autre prototype nommé `WL-9RD`(1979-1980) capable de réaliser des allures de marche quasi-dynamiques, puis le prototype `WL-10`(1982-1983) qui est capable de réaliser des allures de marche latérales, de tourner, et de marcher en arrière comme en avant. Ensuite, le même groupe construit le successeur de `WL-10`, c'est le `WL-10RD`(1984) un prototype 3D à 12 degrés de liberté, qui est le premier prototype capable de réaliser des allures de marche dynamique (pour plus de détail sur les différentes réalisations à l'université de WASEDA se référer à [3]).

En 1980, Matsuok propose un prototype capable d'effectuer des allures de course, inspirées de la course humaine.

Vers le milieu des années 80, Miura et Shimoyama (à l'université de Tokyo) construisent une série de prototypes de robots marcheurs bipèdes nommés `Biper1-Biper5` où le dernier prototype `Biper5` est un robot marcheur 3D avec des cartes électroniques embarquées, capable de réaliser des allures de marche dynamiques.

A cette même époque, i.e. vers le milieu des années 80, Furusho et Masubuchi ont construit le prototype `Kenkyaku`, un robot bipède planaire à quatre actionneurs, capable de se déplacer avec une vitesse de $0.8m/sec$. Vers la fin des années 80, Furusho et Sano construisent `BLR-G2` un robot bipède anthropomorphe de 0.97 m de hauteur et de 25 kg de poids, capable de se déplacer avec une vitesse de 0.35 m/sec.

Vers la fin des années 80 aussi, Kato développe le prototype `WL12RIII`. Il est le premier prototype capable de marcher sur un terrain tout en stabilisant la marche par le mouvement du tronc.

Au début des années 90, Kajita et Tani développent `Meltran II`; un prototype planaire à quatre degrés de liberté, capable de traverser des terrains encombrés avec de petits obstacles. Il se déplace avec une vitesse de 0.2 m/sec.

Après une première génération de robots bipèdes marcheurs (`E0-E6`), dont le développement à commencé en 1986, la maison Honda lance une deuxième génération de robots humanoïdes. Elle développe une nouvelle série entre 1993 et 1997, qui comporte trois prototypes nommés `P1`, `P2`, `P3`. Par rapport à leurs prédécesseurs, ces prototypes disposent en plus des jambes, d'un tronc, d'une tête, et de membres supérieurs. Le robot `P2` quant à lui est le

premier robot marcheur autonome doté d'une capacité à marcher sur des terrains irréguliers, tandis que le P3 est le robot Honda le plus compact, avec la spécificité de marcher plus rapidement, avec une meilleure perception et des mouvements plus lisses.

Vers le milieu des années 90, l'INRIA construit le robot BIP, un prototype d'un robot marcheur 3D, à 15 degrés de liberté (cf. figure 1.9).

Vers la fin des années 90, Pratt développe au MIT un prototype de robot planaire à sept degrés de liberté avec des chevilles, appelé Spring Flamingo (cf. figure 1.9). Il est capable de se déplacer avec une vitesse de 1.2 m/sec et de marcher sur une surface inclinée. A la même époque à l'université de Munich, Johnnie (cf. figure 1.9) voit le jour. C'est un prototype 3D, à 23 degrés de liberté, capable de se déplacer avec une vitesse de marche de 0.4 m/sec .

Vers cette même époque aussi, l'institut de la robotique humanoïde à l'université WASEDA développe WABIAN (cf. figure 1.9) un prototype de robot marcheur 3D à 52 degrés de liberté, qui se déplace avec une vitesse de 0.21 m/sec .

Au début des années 2000, sous l'égide du CNRS et du MENRT, Rabbit est construit conjointement par plusieurs laboratoires de recherche, regroupant des disciplines d'Automatique, de Mécanique, et de Robotique. C'est un prototype à 7 degrés de liberté sous-actionné, qui peut être la structure mécanique la plus simple capable de reproduire des allures de marche qui ressemblent à celles des êtres humains. En outre ce prototype est doté d'une spécificité originale qui réside dans la capacité à effectuer des allures de marche et de course en même temps.

Le début des années 2000 a vu le développement des deux prototypes de robots humanoïdes les plus aboutis. Il s'agit du robot SDR-4X[5](cf. figure 1.9) de Sony qui est capable d'effectuer des mouvements bien coordonnés et lisses, de marcher sur des terrains irréguliers, d'éviter des obstacles et bien d'autres tâches. Le deuxième prototype quant à lui est le robot humanoïde ASIMO[6] (cf. figure 1.9) d'Honda développé en 2002, et qui a été reconnu comme étant le robot humanoïde le plus abouti.

Suite au succès mené par Honda, le gouvernement Japonais a lancé le projet HRP (Humanoïd Robot Project) qui a permis récemment au prototype HRP-2 (cf. figure 1.9) de voir le jour. C'est un robot humanoïde 3D à 30 degrés de liberté qui a une taille comparable à celle

5. SDR : Sony Dream Robot
6. ASIMO : Advanced Step in Innovative Mobility



d'un être humain. Il est capable de réaliser une multitude de tâches allant de la marche classique jusqu'à l'assistance de l'être humain pour soulever des objets par exemple. Ce prototype est très utilisé actuellement dans les laboratoires de recherche au Japon.

L'ensemble de prototypes brièvement présentés ci-dessus n'est pas exhaustif. En effet, il existe d'autres prototypes de robots marcheurs développés à travers le monde (plus ou moins aboutis). D'autre part il faut noter que bien que les premières réalisations aient vu le jour au début des années 70, l'idée d'un robot humanoïde remonte à l'époque du quinzième siècle. A cette époque, Leonard de Vinci a conçu, et probablement réalisé le premier prototype de robot humanoïde, capable de se mettre debout, de bouger les bras, et la tête.

Pour un historique plus détaillé sur les différentes réalisations, le lecteur peut se référer à [2].

1.5.2 Les robots humanoïdes

Les robots humanoïdes sont des robots bipèdes disposant de la morphologie humaine, ils s'appellent aussi *robots anthropomorphes*. Les réalisations les plus abouties et incontestables sont celles construites au Japon ces dernières années. A titre d'exemple on donne un aperçu sur les robots humanoïdes de la maison `Honda`.

Actuellement leur réalisation la plus aboutie est le robot humanoïde `Asimo` qui constitue le résultat de plusieurs années de recherche, passant par plusieurs générations de prototypes. L'origine d'`Asimo` remonte à l'année 1986, son évolution au fil des années est récapitulée ci-dessous :

1986 : Dans le but de comprendre la marche à deux jambes, la maison `Honda` conçoit et construit le robot `E0`, un robot bipède à deux jambes sans tronc. Ce prototype emploie un mode de marche statique. Il est capable d'avancer lentement, en accomplissant un pas au bout de 5 à 20 sec.

1987 – 1991 : Trois prototypes successeurs de `E0` sont construits, il s'agit de `E1`, `E2` et `E3`. La spécificité qui les distingue de `E0` est la possibilité de marcher avec des allures de marches dynamiques. Leur structure mécanique articulée, comme `E0`, ne possède que deux jambes sans tronc ni membres supérieurs.

1991 – 1993 : Trois autres prototypes `E4`, `E5`, et `E6` voient le jour. Dans cette série de robots bipèdes, les concepteurs ont réussi à augmenter la vitesse de marche, avec la possibilité de monter et de descendre des escaliers. La structure mécanique articulée reste cependant toujours construite autour de deux jambes.

1993 – 1997 : Développement d'une nouvelle série de robots marcheurs `P1`, `P2` et `P3` dont la principale spécificité est l'anthropomorphie. En effet, par rapport à leurs prédécesseurs ces prototypes disposent en plus des jambes d'un tronc, d'une tête et de membres supérieurs. Le robot `P2`, quant à lui, est le premier robot autonome doté d'une capacité à marcher sur des terrains irréguliers, tandis que `P3` reste le robot `Honda` le plus compact, avec la spécificité de marcher plus rapidement, avec un meilleur balancement et des mouvements plus lisses.

1997 – 2004 : Après plus de 15 ans de recherche et développement les concepteurs de robots bipèdes chez `Honda` présentent `Asimo` le 31 Octobre 2000 comme étant le robot humanoïde le plus évolué au monde. C'est un prototype à 26 degrés de liberté qui pèse 43 Kg et mesure $1.2m$. Sa taille comparable à celle d'un être humain et ses capacités lui permettent de dépasser le stade de la marche. Il est capable d'accomplir plusieurs tâches comme allumer/éteindre la lumière, ouvrir/fermer une porte, pousser un chariot, travailler à table. Dans sa conception, ce prototype dispose d'une grande capacité de perception lui permettant de marcher, tourner, gravir les escaliers et effectuer divers mouvements en toute simplicité et efficacité, grâce à des articulations très sophistiquées au niveau des hanches. Ce prototype dispose, entre autres, de la capacité à traverser divers terrains et à changer la longueur et la vitesse de ses pas de marche. A ceci s'ajoute sa capacité de localisation d'objets grâce à un système de vision, et la reconnaissance vocale qui lui permet d'analyser puis d'obéir aux ordres.

1.5.3 Projets de recherche sur les robots bipèdes dans le monde

Par la suite les principaux projets de recherche en robotique bipède à travers le monde sont présentés. Ils sont classés par pays [1]

Australie :

Le projet Thecodont : the biped walker

Canada :

Université McGill : the Ambulatory Robotics Lab

Colombia :

Université Pontificia Bolivariana : BARTOLO : the walking machine

États unis :

Université Cornell : Humain Power, Biomechanics, and Robotics Laboratory

Georgia Institute of Technology

The Harvard Robotics Laboratory

Iowa state university : Biped balancing and walking control



University of Michigan
MIT leg Laboratory
University of New Hampshire : Robot lab
Southern Methodist university : The Systems Laboratory
University California Berkeley : Locomotion Laboratory
UCLA Commotion Lab Mobile robots
WSE Robotics Team : Biped project

France :

Le projet PRC-GDR ROBEA
INRIA : Le projet BIP
LIRMM : Le groupe de recherche en robotique à pattes

Grande Bretagne :

The shadow Robot Group

Japon :

Honda : Les robots humanoïdes (P2, P3, Asimo, ...etc)
Université Koube : Laboratoire Kitamura
Université de Nagoya : Labortoire Fukuda
Université d'Osaka : Laboratoire Furusho
Université de Tohoku : Mechatronics Designe Lab
Université de Tokyo : Henri Laboratory
Université Waseda : Le projet humanoïde
Université Nationale de Yokohama : Kawamura Laboratory

Mexique :

Universidad Nacional Autonoma de Mexico : LINDA group

1.6 État de l'art

Le contrôle d'un robot marcheur bipède consiste à trouver des lois de commande susceptibles de coordonner les mouvements des différents membres de la structure mécanique articulée [69]. Ceci permet au robot de se déplacer sur la surface de marche (le sol). De part sa complexité et sa richesse, cette tâche attire de plus en plus de chercheurs qui s'intéressent au développement de nouvelles approches de commande pour de tels systèmes.

Les prototypes de robots marcheurs peuvent être regroupés en deux classes, à savoir :

- **les robots dits passifs :** ce sont des robots ne nécessitant pas une source exogène d'énergie mais utilisant plutôt l'effet de la gravité pour se déplacer sur un sol incliné;
- **les robots dits actifs :** ce sont des prototypes utilisant des actionneurs au niveau des articulations leur permettant de se déplacer sur un sol horizontal.

Les travaux de recherche réalisés dans le cadre de la première catégorie, consistent principalement en une analyse de propriétés de la marche (dynamique, stabilité, cycles limites,...etc). Les travaux les plus significatifs sur la marche passive sont ceux de McGeer [64], traitant le problème de la marche d'un robot compas sur un sol incliné. L'objectif consiste à reproduire des cycles de locomotion, et à analyser la stabilité des cycles générés. Le principe quant à lui consiste à utiliser l'effet de la gravité (sol incliné) comme action pour reproduire une marche périodique stable à partir de certaines configurations initiales. Dans ce même contexte d'autres travaux ont été proposés [39], [38], [37].

Les travaux de recherche réalisés dans le cadre de la deuxième catégorie (les robots actifs) concernent principalement la commande de la MARCHE de tels robots. Plus récemment, des travaux de recherche dédiés à la commande de la course commencent à voir le jour [29], [28].

Vu que cette thèse rentre dans le cadre de cette deuxième catégorie, il sera réservé plus d'intérêt aux travaux de recherche réalisés dans ce contexte, et plus particulièrement sur les approches de commande proposées pour des robots bipèdes sous-actionnés.

Plusieurs travaux ont été proposés dans le cadre de la commande de robots complètement actionnés [53],[47],[48], [85], [35], [17].

Le sous-actionnement est souvent introduit volontairement pour réduire le nombre d'actionneurs, et par conséquent le coût de construction du prototype. En outre ce problème est d'un grand intérêt académique puisque les techniques classiques de commande des systèmes non linéaires ne sont plus valables pour ce genre de systèmes. Autrement dit, pour un robot marcheur complètement actionné, l'idée consiste à trouver des trajectoires de référence, puis proposer des lois de commande permettant de poursuivre ces trajectoires. Cependant, pour un robot marcheur sous-actionné, cette technique ne permet pas d'atteindre les objectifs voulus (marche cyclique stable), en effet, un facteur supplémentaire doit être rajouté pour y arriver.

Dans ce but, plusieurs solutions ont été proposées pour s'affranchir du problème de sous-



actionnement. Les principales solutions retenues dans la littérature sont regroupées en trois familles, elles sont présentées par la suite :

Une première manière de procéder consiste à utiliser des commandes virtuelles [27]. Dans ce cas, des trajectoires de référence sont définies sur toutes les coordonnées du robot, y compris les coordonnées non actionnées. Ces trajectoires sont paramétrées par un certain vecteur de paramètres p. Différents choix de p sont possibles; ce peut être le temps virtuel, un paramètre libre sur les trajectoires de référence, ou bien une variable de configuration indépendante des variables de sortie. La seconde dérivée du paramètre p est ensuite utilisée comme étant une entrée de commande virtuelle supplémentaire, ce qui éliminera le sous-actionnement. Les trajectoires de référence sont obtenues en résolvant un problème d'optimisation, où le critère auxiliaire pourra être une fonction quadratique des couples moteurs [82, 81]. La stabilité du système bouclé est assurée dès qu'une condition sur le moment cinétique autour du point de contact est vérifiée, ce qui induit une convergence vers les trajectoires de référence optimales. Dans ce même contexte d'autres auteurs ont proposé d'utiliser des trajectoires de référence paramétrées [41, 93, 32, 86] et la première dérivée du paramètre comme étant une entrée de commande supplémentaire. Dans [93] ce paramètre est ajusté dans le but de vérifier les contraintes de contact avec le sol, ce paramètre caractérise l'allure de marche, ce pourra être la longueur du pas, la hauteur du pas, ou bien la vitesse de marche. Dans [32, 86] les auteurs utilisent le principe de contraintes virtuelles, la dynamique des zéros (appelée le système limite virtuel) est paramétrée par un certain paramètre considéré comme étant une entrée de commande supplémentaire. Le but dans ce cas est la stabilisation orbitale des systèmes non linéaires sous-actionnés avec un degré de sous-actionnement. La stabilité a été prouvée en se basant sur la méthode de lyapunov.

Une autre solution pour s'affranchir du problème de sous-actionnement consiste à définir des trajectoires de référence sur un certain nombre de sorties égal au nombre d'entrées de commande. Ces trajectoires n'évoluent pas en fonction du temps, mais plutôt en fonction d'une variable de configuration indépendante des variables de sortie. Cette méthode utilise le concept de contraintes virtuelles et la dynamique des zéros associée [40, 91, 92, 77]. Autrement dit le principe est basé sur l'étude analytique de la dynamique des zéros. En effet, l'analyse utilise une optimisation hors ligne dans le but d'améliorer la stabilité de la dynamique des zéros. Dans [92] le concept de la dynamique des zéros hybride est introduit. La convergence vers des trajectoires cycliques est étudiée numériquement en utilisant la méthode de la section de Poincaré. Dans [77], une analyse de robustesse des lois de commande a été menée avec des



perturbations telles que des obstacles sur le sol, des forces perturbantes ou un sol compliant.

La troisième solution consiste à utiliser les techniques de commande prédictive non linéaire [16, 62, 6, 9]. Ces approches de commande consistent à trouver les échantillons de commande à des instants futurs (horizon de commande) en minimisant un certain critère d'optimisation auxiliaire. La commande est dite à N pas en avant, par conséquent dès que le nombre de degrés de liberté de la commande $N \times r$ (où r est le nombre d'actionneurs) est supérieur au nombre de degrés de liberté n du système, le sous-actionnement disparaîtra. Une telle approche a été appliquée à la commande de la marche du robot bipède sous-actionné RABBIT dans [7, 8] où le problème de la synthèse de la marche et de sa commande est posé sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. Les contraintes considérées peuvent être physiques ou technologiques relatives aux déplacements, ou bien liées aux contacts avec le sol (contraintes unilatérales). Le problème d'optimisation est défini sur un horizon fuyant, sur lequel les contraintes sont mises à jour en ligne. Une spécificité particulière d'une telle approche de commande, est la possibilité de générer des mouvements sans trajectoires de référence définies à priori.

La première contribution que nous proposons rentre dans le cadre de cette dernière famille. C'est une nouvelle approche de commande prédictive non linéaire dite de faible dimension. En revanche la deuxième contribution est une nouvelle approche de commande inspirée des techniques de commande position/force [57]. La nouveauté dans cette deuxième contribution est le sous-actionnement. Pour des raisons de clarté, elle est focalisée sur l'exemple particulier du robot bipède sous-actionné RABBIT. Néanmoins elle pourra être généralisée aux systèmes mécaniques sous-actionnés avec impacts.

1.7 Contributions

Cette section récapitule les contributions apportées par ce travail. Celles-ci concernent plus particulièrement la commande de la marche dynamique des robots bipèdes sous-actionnés. Deux approches de commande sont proposées :

- une commande prédictive non linéaire de faible dimension dans laquelle, la marche est constituée de deux phases alternant simple support et impact avec le sol [E, F, G, H, I][7];
- une commande du type Lyapunov avec inclusion d'une phase de double support pendant

7. Les références alphabétiques sont énumérées dans la section 1.7.3



laquelle le robot est sur-actionné [A, B, C, D].

Ces deux approches sont successivement présentées d'une manière succincte dans la suite de ce chapitre.

1.7.1 Première approche : commande prédictive non linéaire de dimension faible

La première approche proposée dans ce travail est une nouvelle commande prédictive non linéaire de faible dimension. L'approche proposée ici ne s'applique pas exclusivement au robot marcheur, mais elle est dédiée à une classe générale de systèmes non linéaires hybrides dont les robots bipèdes font partie. La dynamique de tels systèmes peut être modélisée par le système d'équations suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \qquad \text{si} \quad x \notin \mathcal{S}_0 \tag{1.1}$$

$$x(t^+) = \Delta(x(t)) \qquad \text{si} \quad x \in \mathcal{S}_0 \tag{1.2}$$

où $\mathcal{S}_0$ représente la surface de commutation. La première équation (1.1) modélise la dynamique continue du système, alors que la deuxième équation représente la dynamique discontinue. Plus précisémment, elle modélise un saut conditionnel sur le vecteur d'état qui survient au moment où les trajectoires d'état rencontrent la surface de commutation.

L'approche proposée permet d'impulser des cycles limites stables. Ces derniers peuvent dégénérer en un point permettant ainsi de réaliser l'objectif de stabilisation classique pour une large classe de systèmes non linéaires.

Le principe de base de cette approche de commande, consiste à utiliser le concept de linéarisation partielle par retour d'état, permettant de scinder les composantes du vecteur d'état du système en sous-état complètement linéarisé ξ, et dynamique interne η; puis d'optimiser les trajectoires sur les coordonnées linéarisées ξ de telle sorte qu'une propriété de stabilité sur la dynamique des zéros soit satisfaite. Ces trajectoires visent à reproduire périodiquement une certaine configuration cible désirée ξ^f dans le but de toucher la surface de commutation. Les trajectoires sont paramétrées par un vecteur de paramètres, ceux-ci peuvent être par exemple :

- des paramètres libérés sur les trajectoires de référence;
- des paramètres de la configuration du robot, ou
- des paramètres caractérisant l'approche de commande, comme la période d'un cycle τ_c.

Ces paramètres sont calculés par optimisation sur l'état final de la dynamique interne, i.e. au prochain instant de commutation, éventuellement avec une régularisation apportée par une



pondération intégrale de la trajectoire durant le pas. Plus précisémment, au début d'un cycle l'état de la dynamique interne au prochain instant de commutation est prédite pour un paramètre donné, l'optimisation utilise cette prédiction afin de trouver le meilleur paramètre afin que la dynamique interne soit au prochain instant de commutation la plus proche possible d'un certain état désiré η^f.

Pour l'analyse de la stabilité du système global en boucle fermée, le retour d'état proposé, qui mène à une linéarisation partielle, assure une stabilité asymptotique de la partie linéarisée ξ. Ainsi, la stabilité du système global se ramène à la stabilité de la dynamique interne. Pour cela, on propose un outil graphique basé sur la section de Poincaré, qui nous permet, en plus de l'analyse de la stabilité, d'avoir une estimation de la région d'attraction. Ceci n'est pas évident vu la complexité de la dynamique de tels systèmes. Ce même graphique permet d'estimer la marge de robustesse vis-à-vis des incertitudes du modèle.

D'une façon générale, un vecteur de décision multi-variable paramétrant les trajectoires de référence peut être envisagé, cependant dans un soucis d'appliquer en temps réel l'approche de commande, un paramètre scalaire est choisi, ce qui réduit considérablement le temps de calcul.

Il est crucial de noter que l'application de cette approche de commande ne se limite pas qu'aux systèmes hybrides présentés ci-dessus, mais qu'elle reste également valide pour les systèmes non linéaires continus classiques, dans le sens où la dynamique de ces systèmes pourra être étendue à une dynamique hybride avec un saut virtuel. En effet, trois des cinq exemples d'application proposés sont des systèmes non linéaires à dynamique continue.

Dans [E, G] l'approche a été appliquée à un système dynamique non linéaire hybride (système chaotique impulsionnel de Lorenz) et à un système dynamique non linéaire continu (la bille sur le rail).

Dans [F] c'est une classe de systèmes mécaniques qui est concernée, à savoir les systèmes mécaniques sous-actionnés, et comme application, le pendule inversé modèle 505 d'ECP est stabilisé ou forcé à effectuer des mouvements cycliques.

L'application la plus intéressante est celle dans [H], elle concerne une application dans la robotique à pattes, à savoir la commande de RABBIT, un robot marcheur à 7 degrés de liberté sous-actionné. Ce système constitue un bon exemple d'application étant donné que sa



dynamique l'inclut dans la classe de systèmes hybrides traités par cette approche de commande. en effet, si on considère le cycle de marche comme étant une succession de phases de simple support et d'impact, alors la dynamique du robot marcheur durant la première phase peut s'écrire sous la forme (1.1) et pendant la deuxième phase sous la forme (1.2).

Dans [I], l'application concerne encore la commande du robot marcheur bipède, mais avec une analyse de robustesse du contrôleur envers des incertitudes paramétriques dans le modèle dynamique, et envers des irrégularités de la surface de marche.

Une caractéristique particulière des résultats de stabilité relative à cette première approche réside dans le fait que les cycles limites générés ne sont pas toujours d'ordre 1. Plus précisément, même en régime établi l'état du robot à la fin d'un pas i n'est pas forcément celui qui a prévalu à la fin du pas précédent $i-1$. C'est à l'état du robot à la fin du pas $i-k_0$ qu'il convient de comparer, aboutissant ainsi à des cycles limites multi-pas. Ceci est une première différence fondamentale entre la stabilité obtenue pour cette approche et celle généralement invoquée dans la littérature. Une autre différence réside dans le fait que sous des conditions moins restrictives, il est possible de démontrer la convergence vers le voisinage d'un cycle limite multi-pas sans qu'une convergence stricte ne puisse être démontrée, ni obtenue dans les faits. Ceci est à notre sens un résultat plutôt intéressant dans la mesure où il semble suggérer une classe de situations plus large que celle où une convergence stricte vers un cycle limite mono-pas est garantie. Après tout, cette dernière exigence est clairement superflue pour une bonne marche anthropomorphe.

Dans la suite du manuscrit deux chapitres sont consacrés à cette première approche de commande. Dans le premier, son principe de base est détaillé avec quatre exemples d'application illustratifs. Le deuxième sera entièrement consacré à la commande du robot marcheur bipède RABBIT, où plusieurs scénarios sont présentés permettant de montrer la souplesse de l'approche de commande. Cette souplesse se traduit par le fait qu'un simple changement d'un paramètre ou d'une configuration suffit pour adapter l'approche à une tâche différente. A titre d'exemple, pour commander le robot en phase de transition entre la position d'arrêt et une marche cyclique, il suffit de changer la configuration finale désirée, en prenant celle correspondant à la marche et vice versa. Pour changer la vitesse moyenne de marche il suffit d'agir sur τ_c la période d'un cycle.



1.7.2 Deuxième approche : commande de type Lyapunov

La deuxième contribution apportée par cette thèse est une approche de commande à base de Lyapunov.

Le principe de base de cette approche consiste à scinder le cycle de marche en trois phases chronologiquement consécutives qui sont la phase de simple support, la phase d'impact et la phase de double support. Les phases de simple et de double support sont des phases principales dans le sens où la première constitue 70% d'un cycle de marche et la deuxième 30%, alors que la phase d'impact est une phase instantanée intervenant entre les deux phases principales mais qui a un grand effet sur la dynamique du système.

L'objectif est alors de trouver des lois de commande sur le cycle complet de marche. Pour cela, les modèles dynamiques régissant le robot marcheur dans les différentes phases du cycle de marche sont calculés. Durant les deux phases principales le système, du fait qu'il est en contact avec le sol, est sous contraintes holonomes. Le modèle dynamique le décrivant est obtenu à partir du modèle original à sept degrés de liberté, en appliquant une technique de réduction du modèle. La phase d'impact est caractérisée par un choc [8] entre le pied de vol et la surface de marche. En effet, pour modéliser une telle phase on utilise des lois de la mécanique irrégulière [12] (mécanique d'impact).

Pour ce qui est de la commande, cette deuxième approche consiste à utiliser des lois de commande non linéaires classiques (retour d'état, commande dynamique, ... etc), souvent utilisées pour les robots manipulateurs à plusieurs degrés de liberté, et en particulier dans le cas de la commande hybride position/force.

Pour analyser la stabilité du système en boucle-fermée, une méthode de Lyapunov est utilisée. Elle consiste à analyser la stabilité du système durant les phases principales, ensuit pour analyser la stabilité sur le cycle complet de marche, l'effet des impacts est considéré comme étant des perturbations exogènes.

Dans [B], une première version de l'approche de commande est présentée, dans laquelle les impacts ne sont pas explicitement pris en compte. Le modèle d'impact considéré consiste en une simple permutation du rôle des jambes (i.e la jambe de support devient la jambe de balancement, et vice versa). La stabilité du système en boucle-fermée a été analysée dans les différentes phases du cycle de marche, néanmoins une réflexion sur la stabilité du système sur le cycle complet de marche a été introduite.

8. On considère que l'impact est rigide [12].



La dynamique de l'impact rigide a été prise en considération dans [C], en plus de la simple permutation du rôle des jambes. Une preuve de stabilité faible sur le cycle complet de marche est proposée. Une analyse plus approfondie de la stabilité est celle de [A], alors que dans [D] des trajectoires articulaires optimales de référence ont été proposées.

Dans la suite du manuscrit un chapitre est consacré à cette approche de commande. Cependant, les résultats de simulation seront présentés dans le chapitre de l'application à la commande du robot bipède, avec les résultats relatifs à la première approche de commande.

1.7.3 Publications de l'Auteur

[A]. A. Chemori and A. Loria, "Control of a planar under-actuated biped on a complete walking cycle", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 49, N 5, May 2004.

[B]. A. Chemori and A. Loria, "Commande d'un robot bipède sur un cycle complet de marche", *CIFA (Conférence Internationale Francophone d'Automatique)*, Nantes, France, 2002.

[C]. A. Chemori and A. Loria, "Control of a planar five link under-actuated biped robot on a complete walking cycle", *IEEE CDC (*41^{st} *International Conference on Decision and Control)*, Las vegas-Nevada, USA, 2002.

[D]. A. Chemori and A. Loria, "Walking control strategy for a planar under-actuated biped robot based on optimal reference trajectories and partial feedback linearization", *RoMoCo'04 (*4^{th} *International workshop on Robot Motion and Control)*, Puszczykowo, Poland, 2004.

[E]. A. Chemori and M. Alamir, "Limit cycle generation for a class of nonlinear systems with jumps using a low dimensional predictive control", *International Journal of Control*, vol 78, N 15, October 2005.

[F]. A. Chemori and M. Alamir, "Nonlinear Predictive Control of Under-actuated Mechanical Systems Application : the ECP 505 inverted pendulum", *MTNS'04 (*16^{th} *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems)*, Leven, Belgique, 2004.

[G]. A. Chemori and M. Alamir, "Low dimensional predictive control scheme for limit cycle generation in nonlinear hybrid controlled systems", *CCCT'04 (International Conference on Computing, Communications and Control Technologies)*, Texas, USA, 2004.

[H]. A. Chemori and M. Alamir, "Generation of Multi-steps limit cycles for Rabbit using a low dimensional nonlinear predictive control scheme", *IEEE/RSJ IROS 2004 (International Conference on Intelligent Robots and Systems)*, Sendai, Japan, 2004.



[I]. A. Chemori and M. Alamir, "A new low dimensional nonlinear predictive control scheme for Rabbit's dynamic walking control", *HLR 2004 (French-German Workshop on humanoid and legged robots)*, Metz, France, 2004.

1.8 Plan du mémoire

Ce manuscrit comporte six chapitres, qui sont introduits brièvement dans le paragraphe suivant :

Chapitre 1 : Il s'agit du présent chapitre. Il comporte trois parties essentielles : La problématique de commande d'un robot bipède, l'état de l'art, et les contributions de ce travail. Dans la première partie sont introduits la marche bipède humaine, la marche bipède robotique, et les robots marcheurs bipèdes. La deuxième partie constitue un tour d'horizon sur la littérature de la commande des robots marcheurs bipèdes. La dernière partie, est une brève description des principales contributions apportées par cette thèse.

Chapitre 2 : Ce chapitre est une description du prototype du robot marcheur bipède RABBIT, où une description technologique de ce robot marcheur (structure mécanique articulée, actionneurs, capteurs, ... etc) est d'abord proposée. La modélisation du robot marcheur est ensuite présentée. Le modèle cinématique, ainsi que le modèle non linéaire dynamique décrivant le robot en mouvement sont développés. Le modèle dynamique non linéaire est utilisé dans les approches de commande proposées.

Chapitre 3 : Le troisième chapitre propose une présentation détaillée de la première approche de commande, à savoir la commande prédictive non linéaire. On soulignera ses aspects de base tels que : son principe, la loi de commande, l'analyse de la stabilité, ... etc. Puis cette approche est illustrée à travers quelques exemples d'application, qui incluent différents types de systèmes. On termine le chapitre par des résultats de simulation relatifs à ces exemples d'application.

Chapitre 4 : La deuxième approche de commande dite de Lyapunov sera présentée dans ce chapitre. Le principe de base de cette approche de commande est élucidé. Il utilise des lois de commande inspirées des approches de commande de manipulateurs sous contraintes holonomes (i.e. en interaction avec leur environnement). Une discussion autour de l'analyse de stabilité est proposée.

Chapitre 5 : Ce chapitre présente les résultats de simulation qui concernent l'application des deux approches à la commande du robot marcheur bipède RABBIT, où plusieurs scénarios de simulation sont présentés et discutés.



Chapitre 6 : Le dernier chapitre comporte deux volets : dans le premier une conclusion générale sur le travail réalisé sera formulée, tandis que dans le deuxième, on discutera les éventuelles perspectives et travaux futurs, du présent travail.

1.9 Conclusion

Le présent chapitre d'introduction générale a abordé les trois points essentiels suivants :

Problématique de la commande d'un robot bipède : Dans cette partie une description de la marche humaine est présentée à travers ses concepts de base et ses facteurs. Puis une description de la marche bipède robotique est abordée du point de vu contrôle. Ses aspects de base ainsi que les complexités associées sont discutées. Enfin les robots marcheurs bipèdes sont introduits.

État de l'art : Cette deuxième partie du chapitre concerne essentiellement la littérature sur la commande des robots marcheurs bipèdes. Cet état de l'art est plus focalisé sur les approches de commande concernant les robots marcheurs bipèdes sous-actionnés. Néanmoins, ce qu'il faut retenir est que le problème de la commande de tels systèmes reste encore ouvert. en effet, malgré la multitude des approches de commande proposées, il reste encore des pistes qui n'ont pas été explorées et des questions qui nécessitent des réponses.

Contributions : La dernière partie du chapitre a fait l'objet d'une brève description des deux principales contributions apportées par cette thèse, tout en soulignant leur originalité. Malgré les résultats prometteurs obtenus, ces contributions constituent un début : seule la confrontation aux aléas de l'expérimentation réelle permet de valider définitivement la pertinence des solutions proposées. L'absence d'une telle validation reste définitivement la source d'une frustration présente et le moteur d'une volonté pour une réussite future.



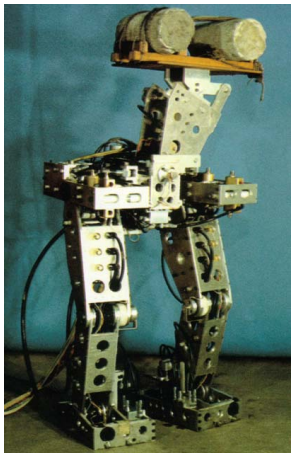
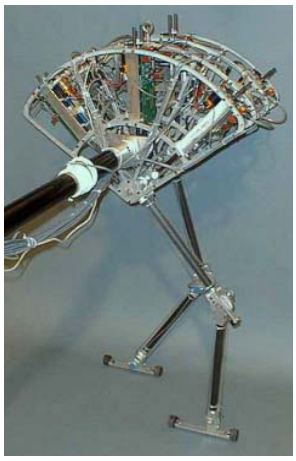
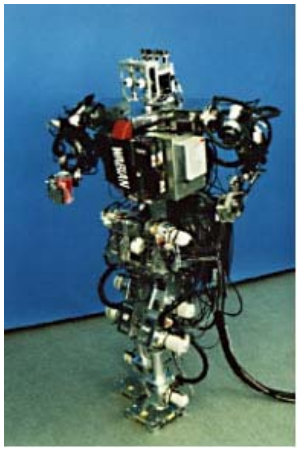
a	b	c	d
			
e	f	g	h
			

FIG. 1.13 – *Quelques exemples de prototypes de robots bipèdes : WL-5 (a), Spring Flamingo (b), Wabian (c), SDR-4X (d), Bip (e), Asimo (f), HRP-2 (g), johnnie (h)*

Chapitre 2

Rabbit : un prototype expérimental

2.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré essentiellement au robot marcheur bipède dont la commande représente l'essentiel du travail effectué dans la thèse. L'objectif est d'aborder deux grands aspects le concernant, à savoir :

- la description technologique de la plate-forme expérimentale : le prototype RABBIT;
- la modélisation cinématique et dynamique du robot marcheur.

Le centre d'intérêt de la première partie est une description technique du prototype RABBIT. C'est une présentation de la plate-forme expérimentale, son idée de base, ainsi que les différents organes qui la constituent (articulations, actionneurs, capteurs, système de guidage, ...etc)[1].

Dans la deuxième partie, le problème de la modélisation du robot marcheur bipède sera abordé. Une modélisation cinématique sera d'abord envisagée, elle permettra d'identifier les positions et vitesses cartésiennes des centres de masse des différents segments du robot. Basée sur le principe de Lagrange, la modélisation dynamique quant à elle permet de déduire la dynamique régissant le robot marcheur en mouvement. Par application du formalisme de Lagrange, le modèle dynamique à sept degrés de liberté (d.d.l) est obtenu.

Le cycle de marche du robot bipède est décomposé en phases de simple support, d'impact, et de double support. Le modèle dynamique durant les phases de simple et de double support est obtenu à partir du modèle à sept degrés de liberté en tenant compte des contraintes de contact avec le sol. Le modèle dynamique d'impact est obtenu par application des lois de la mécanique non régulière en supposant que le choc entre le pied et le sol est rigide.

1. Pour plus de détails sur cette étude technologique du prototype, nous invitons le lecteur à consulter `http://robot-rabbit.lag.ensieg.inpg.fr/`



2.2 Description technologique de la plate-forme expérimentale : le prototype RABBIT

Dans cette section quatre points essentiels seront abordés, à savoir :

- L'idée de base qui était à l'origine du choix de la structure du robot;
- La description de la structure mécanique articulée;
- La description des actionneurs;
- La description des capteurs.

2.2.1 L'idée de base de la structure choisie

Durant ces dernières années, la recherche sur les robots marcheurs bipèdes a été intensifiée, que ce soit sur le plan théorique, ou bien sur le plan pratique. Plusieurs dizaines de prototypes de robots marcheurs bipèdes ont été réalisés à travers le monde. Les robots réalisés ont une structure plus ou moins compliquée, avec parfois, plus de 15 degrés de liberté motorisés. Ces bipèdes sont généralement équipés de pieds avec des chevilles de type cardan motorisées. D'autre part ils réalisent généralement des allures de marche à faibles vitesses dans un environnement 3D.

Une étude a été menée dans le cadre d'un projet national ROBEA[2] intitulé : *Commande pour la marche et la course d'un robot bipède*. Cette étude a porté sur un robot bipède sans chevilles[3] (contact passif avec le sol). Dans ce cas, aucun couple ne peut être appliqué au niveau des chevilles. Le projet a donc adopté la structure la plus simple possible, mais qui reste néanmoins représentative de la marche humaine. En outre le prototype a été conçu pour qu'il puisse effectuer des allures de marche ainsi que des allures de course. Ceci constitue une originalité de la plate-forme expérimentale. Le prototype conçu a été nommé RABBIT, le nombre d'actionneurs a été volontairement réduit. Une structure planaire composée d'un tronc et deux jambes motorisées aux hanches, et aux genoux a été défini. Le contact entre le pied et le sol est ponctuel. D'autre part pour limiter le mouvement à une évolution dans le plan sagittal, le robot est maintenu par une barre autour d'un poteau central. Le bipède est libre en rotation autour du poteau central. Ceci permet une stabilisation latérale du robot. Un schéma illustratif du prototype est représenté sur la figure 2.1.

2. ROBEA : ROBotique et Entités Artificielles.

3. La présence d'une cheville actionnée donne plus de capacité et de robustesse à la commande pour faire face à des perturbations. Par conséquent un pied sans cheville complique la tâche de la commande.



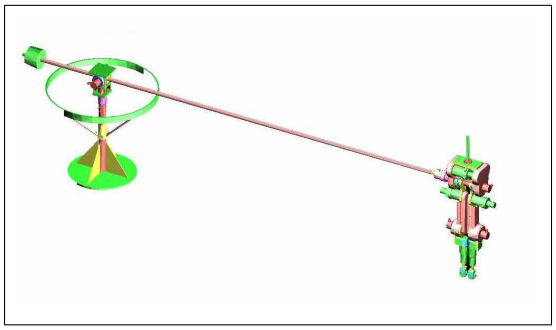


FIG. 2.1 – *Structure globale du prototype* RABBIT

La structure ainsi choisie, permet d'aborder, entre autres, les problèmes suivants :

- le sous-actionnement (un degré de sous-actionnement en phase de simple support, et trois degrés de sous actionnement en phase de vol);
- l'effet des impacts avec le sol (impacts rigides);
- l'unilatéralité des forces de contact avec le sol;
- la permutation entre les différentes phases du cycle de marche;
- les fortes non linéarités dans la dynamique du robot marcheur;
- le caractère hybride de la dynamique globale du bipède sur le cycle de marche.

En dehors de ces problèmes, ce choix de la structure permet d'éviter certaines difficultés. Ces difficultés évitées incluent, par exemple, les calculs numériques associés à un nombre important d'articulations, la modélisation 3D du robot et des efforts de contact avec le sol dans le cas de l'existence de semelles.

Soulignons aussi que les difficultés évitées sont essentiellement d'ordre technique, alors que les problèmes abordés sont bien d'ordre théorique.

2.2.2 Description de la structure mécanique articulée

L'ensemble de la structure mécanique articulée, est constitué de deux parties principales, à savoir le robot bipède proprement dit, et le système de guidage. La structure du robot bipède comporte cinq segments rigides (un tronc et deux jambes comportant chacune une cuisse et un tibia) reliés entre eux à travers des articulations rotoïdes. Un schéma technique de cette structure du bipède est présenté sur la figure 2.2.

Dans cette structure quatre axes sont motorisés, à savoir les deux articulations des hanches, et les deux articulations des genoux. Les deux axes des hanches sont confondus, cependant ceux des genoux sont parallèles.

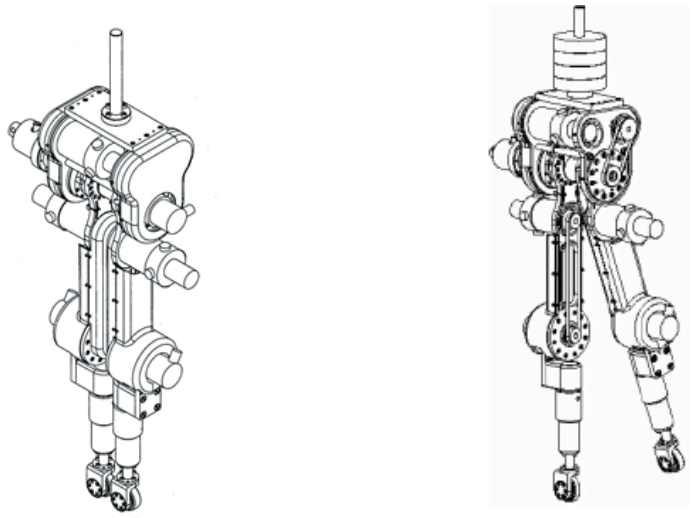


FIG. 2.2 – *Schémas techniques du prototype* RABBIT

Le système de guidage est schématisé sur la figure 2.1, présentée précédemment. Il comporte une barre radiale, et une colonne centrale, située au centre de la piste circulaire qui constitue le chemin du robot bipède. La barre radiale a un degré de liberté autour de l'axe central vertical, et un degré de liberté autour de l'axe centrale horizontal parallèle au plan sagittal du robot.

Paramètres géométriques et dynamiques

Ces différents paramètres sont récapitulés dans le tableau 2.1

Paramètre	masse	longueur	moment d'inertie
tronc	20 Kg	0.625 m	2.22 $Kg.m^2$
cuisse	6.8 Kg	0.4 m	1.08 $Kg.m^2$
tibia	3.2 Kg	0.4 m	0.93 $Kg.m^2$

TAB. 2.1 – *Les paramètres géométriques et dynamiques du robot* RABBIT

- La masse de chaque cuisse inclut le demi-réducteur hanche, le moteur genou, et le demi-réducteur genou.
- La masse de chaque tibia inclut le demi-réducteur genou et pied.
- La masse du tronc est égale à la masse des deux jambes.
- La longueur de la barre radiale est de 3 m, et la hauteur des hanches est de 0.8 m.



Débattements articulaires

Les débattements sont des limites extrêmes sur les excursions au niveau des différentes articulations dans les deux sens du mouvement. Ils sont assurés par des butées mécaniques, ils sont donnés par :

cuisse/tronc : $-30°$ en arrière (extension), et $+90°$ en avant (flexion);

tibia/cuisse : $-90°$ en arrière (flexion), et $+30°$ en avant (extension);

tronc/barre : $-45°$ en arrière, et $+45°$ en avant;

barre/colonne autour de l'axe horizontal : $-10°$, $+10°$;

barre/colonne autour de l'axe vertical : rotation illimitée.

Système de guidage

La liaison entre le tronc et la barre est réalisée par un montage de roulement. Il est situé dans un manchon disposé du côté interne, strictement aligné avec l'axe des hanches. Le support entre la barre et la colonne centrale est réalisé par deux liaisons pivots d'axes concourants, montées sur roulements. Le pivot central vertical se prolonge vers le haut au delà de la barre pour supporter une table horizontale. Tournant en même temps que le robot, cette table sert à supporter les racks qui contiennent les cartes d'acquisition et de commande, ainsi que l'étage de puissance. Les câbles entre le robot et les racks sont maintenus le long de la barre radiale. Le contrepoids qui se trouve de l'autre côté de la barre (cf. figure 2.1), sert à équilibrer le poids de la barre radiale, et celui des câbles. Il peut éventuellement servir pour changer la gravité, afin de tester la robustesse des approches de commande.

Les pieds

Dans le but de limiter l'action du contact avec le sol à deux composantes[4] seulement, une solution a été adoptée. Elle consiste à munir chaque tibia d'une roulette frontale. Par conséquent le contact pied/sol obtenu est ponctuel. En outre, cette solution permet aussi de rendre compatible le système de guidage (qui est sphérique), et le système marcheur (qui est plan).

Une vue du prototype réalisé, qui montre en particulier la structure du bipède, est illustrée sur la photo de la figure 2.3.

4. une composante normale, et une composante tangentielle dans le plan sagittal



FIG. 2.3 – *Photo du prototype* RABBIT

2.2.3 Les capteurs de la plate-forme expérimentale

La plate-forme expérimentale comprend cinq types de capteurs. Considérés comme proprioceptifs, ils permettent la mesure des différentes grandeurs nécessaires pour obtenir la posture du robot bipède et son interaction avec le sol. Ce sont les suivants :

Capteurs articulaires : chaque articulation motorisée est dotée d'un capteur de position monté directement sur l'articulation (cf. figure 2.4)[5]. Ces capteurs servent pour la mesure de la position articulaire absolue entre les deux segments du robot qui constituent l'articulation. Ils sont caractérisés par une résolution de 2000 *impulsions/tour*.

Capteur de position du tronc : obtenue à partir d'un codeur incrémental, la position du tronc est mesurée par rapport à la barre centrale. La résolution de ce capteur de position est de 2000 *impulsions/tour*.

Capteurs de l'axe central : l'axe de la barre centrale constitue une liaison avec deux rotations, l'une illimitée par rapport à l'axe verticale, et l'autre avec un débattement de $-10°, +10°$ par rapport à l'axe horizontal. Les deux positions sont mesurées par des codeurs incrémentaux dont la résolution est de 5000 *impulsions/tour*.

Capteur d'effort : les deux tibias du robot bipède sont munis de capteurs d'efforts. Ces capteurs permettent la mesure des forces de contact avec le sol, à savoir la force de réaction normale, et celle de la réaction tangentielle. Il faut noter que la mesure de

5. Pour voir de plus près une des articulations du robot, la figure 2.5 montre une photo du genou gauche de RABBIT

ces forces permet de détecter les instants d'impacts. Ces derniers sont nécessaires pour permuter entre les différentes lois de commandes.

Capteur de fin de course : deux capteurs de fin de course sont montés sur les deux extrémités de chaque articulation, et à proximité des butées mécaniques.

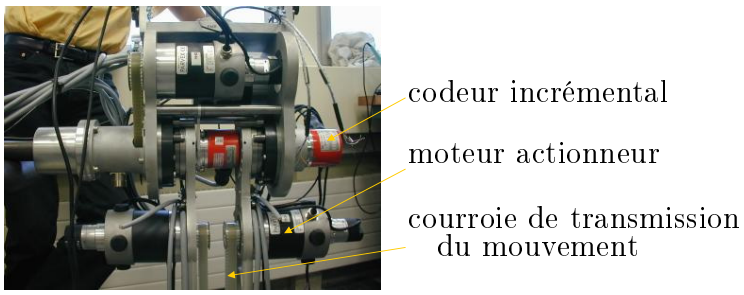


FIG. 2.4 – *Photo du bassin de* RABBIT



FIG. 2.5 – *Le genou de* RABBIT

2.2.4 Les actionneurs de la plate-forme expérimentale

Le robot bipède RABBIT dispose de sept degrés de liberté. Cependant, seulement 4 degrés de liberté sont motorisés : les deux articulations des hanches et les deux articulations des genoux.

En ce qui concerne les actionneurs utilisés, il s'agit de moteurs à courant continu (cf. figure 2.4). Il sont identiques pour les quatre articulations actionnées. Ce sont des moteurs de type `Parvex`, modèle `RS420J`. Ces actionneurs doivent d'une part être munis de codeurs incrémentaux, et d'autre part être protégés contre les chocs. Les codeurs incrémentaux utilisés ont une résolution de 2000 *impulsion/tour*. Ils sont montés directement sur les axes des moteurs.

2.3 Modélisation cinématique

La modélisation des robots marcheurs, consiste à trouver un modèle mathématique, qui peut représenter au mieux le comportement du système. Les robots marcheurs se distinguent des robots manipulateurs à base fixe, par le fait qu'il ne sont pas rigidement fixés au sol. En effet, ces robots se déplacent en décollant alternativement les pieds durant la marche. Par conséquent le nombre de degrés de liberté nécessaire à la modélisation du robot augmente. Le nombre de jonctions détermine le nombre de degrés de liberté du robot manipulateur à base fixe. Cependant, dans le cas d'un robot marcheur il faut ajouter à ce nombre de degrés de liberté, les déplacements de l'ensemble du corps global du robot dans l'espace.



Comme cela a été expliqué dans les sections précédentes, le robot bipède en question (RABBIT), dispose de cinq segments rigides. Ces segments sont inter-connectés à travers des articulations rotoïdes, par conséquent il a sept degrés de liberté.
Afin de pouvoir effectuer les calculs trigonométriques nécessaires à la modélisation cinématique du robot, la structure mécanique articulée du bipède est schématisée comme le montre la figure 2.6. Elle comporte un tronc de masse m_1, de longueur l_1, et de moment d'inertie I_1

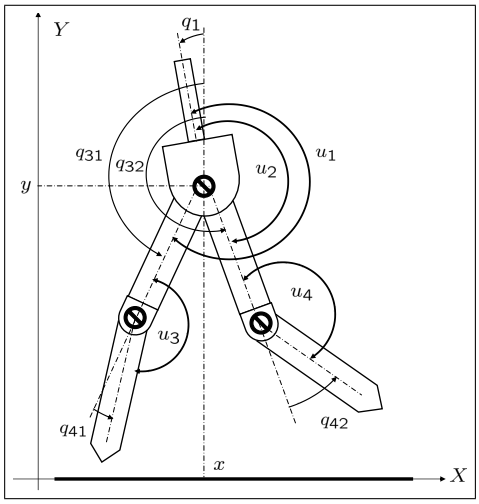


FIG. 2.6 – *Définition des coordonnées généralisées et des couples*

relié aux jambes à travers une hanche rotoïde. Les jambes sont articulées au niveau des genoux comportant chacune une cuisse et un tibia dont les longueurs sont l_3 l_4 (respectivement) et dont les moments d'inertie sont I_3, I_4 (respectivement).

Le vecteur de coordonnées généralisées est composé du vecteur de coordonnées articulaires

$$q_{art} = (q_{31},q_{41},q_{32},q_{42},q_1)$$

et du vecteur des positions cartésiennes des hanches

$$q_{cart} = (x,y);$$

soit le vecteur de coordonnées généralisées

$$q = \begin{pmatrix} q_{31} & q_{41} & q_{32} & q_{42} & q_1 & x & y \end{pmatrix}^T. \tag{2.1}$$

Comme cela a été évoqué dans la section précédente les quatre axes se trouvant au niveau des articulations des hanches, et des genoux sont équipés de moteurs à courant continu et de

codeurs incrementaux. Ainsi le robot bipède dispose de cinq segments rigides, sept degrés de liberté et de quatre moteurs actionneurs [6].

Remarque 2 *Sur la figure* 2.6*, qui schématise la structure mécanique articulée du robot, on remarque, pour les coordonnées articulaires des cuisses (i.e.* q_{31}*, et* q_{32}*), le choix des angles absolus (par rapport à la verticale). Alors que, pour les coordonnées articulaires des tibias (i.e.* q_{41}*, et* q_{42}*), des angles relatifs (entre cuisses et tibias) ont été choisis.*

La modélisation cinématique permet d'exprimer les positions et les vitesses des centres de masse des différents segments du robot. Sous l'hypothèse que les centres de masses sont situés sur les segments à la moitié de leur longueur, les positions et vitesses cartésiennes des centres de masse des différents segments en fonction des coordonnées généralisées sont données par les équations trigonométriques suivantes :

Les positions suivant l'axe x :

$$\begin{cases} x_{31} = x - \frac{l_3}{2}\sin(q_{31}) \\ x_{41} = x - l_3\sin(q_{31}) - \frac{l_4}{2}\sin(q_{31}+q_{41}) \\ x_{32} = x - \frac{l_3}{2}\sin(q_{32}) \\ x_{42} = x - l_3\sin(q_{32}) - \frac{l_4}{2}\sin(q_{32}+q_{42}) \\ x_1 = x - \frac{l_1}{2}\sin(q_1) \end{cases} \tag{2.2}$$

Les positions suivant l'axe y :

$$\begin{cases} y_{31} = y + \frac{l_3}{2}\cos(q_{31}) \\ y_{41} = y + l_3\cos(q_{31}) + \frac{l_4}{2}\cos(q_{31}+q_{41}) \\ y_{32} = y + \frac{l_3}{2}\cos(q_{32}) \\ y_{42} = y + l_3\cos(q_{32}) + \frac{l_4}{2}\cos(q_{32}+q_{42}) \\ y_1 = y - \frac{l_1}{2}\sin(q_1) \end{cases} \tag{2.3}$$

Les vitesses suivant l'axe x :

$$\begin{cases} \dot{x}_{31} = \dot{x} - \frac{l_3}{2}\dot{q}_{31}\cos(q_{31}) \\ \dot{x}_{41} = \dot{x} - l_3\dot{q}_{31}\cos(q_{31}) - \frac{l_4}{2}(\dot{q}_{31}+\dot{q}_{41})\cos(q_{31}+q_{41}) \\ \dot{x}_{32} = \dot{x} - \frac{l_3}{2}\dot{q}_{32}\cos(q_{32}) \\ \dot{x}_{42} = \dot{x} - l_3\dot{q}_{32}\cos(q_{32}) - \frac{l_4}{2}(\dot{q}_{32}+\dot{q}_{42})\cos(q_{32}+q_{42}) \\ \dot{x}_1 = \dot{x} - \frac{l_1}{2}\dot{q}_1\cos(q_1) \end{cases} \tag{2.4}$$

6. Les couples générés par les quatre moteurs représentent les entrées de commande du système, qui sont illustrées sur la figure 2.6



Les vitesses suivant l'axe y :

$$\begin{cases} \dot{y}_{31} = \dot{y} - \frac{l_3}{2}\dot{q}_{31}\sin(q_{31}) \\ \dot{y}_{41} = \dot{y} - l_3\dot{q}_{31}\sin(q_{31}) - \frac{l_4}{2}(\dot{q}_{31}+\dot{q}_{41})\sin(q_{31}+q_{41}) \\ \dot{y}_{32} = \dot{y} - \frac{l_3}{2}\dot{q}_{32}\sin(q_{32}) \\ \dot{y}_{42} = \dot{y} - l_3\dot{q}_{32}\sin(q_{32}) - \frac{l_4}{2}(\dot{q}_{32}+\dot{q}_{42})\sin(q_{32}+q_{42}) \\ \dot{y}_1 = \dot{y} - \frac{l_1}{2}\dot{q}_1\sin(q_1) \end{cases} \tag{2.5}$$

Remarque 3 *Les vitesses des segments sont utilisées dans la modélisation dynamique. En effet, la méthode de Lagrange est utilisée par la suite. Cette méthode nécessite le calcul du Lagrangien, qui représente la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Or, le calcul de l'énergie cinétique nécessite le calcul des vitesses des segments, exprimées en fonction des coordonnées généralisées.*

2.4 Modélisation dynamique

Suivant l'interaction avec le sol, le mouvement de la marche chez les robots bipèdes, peut être découpé en plusieurs phases successives. Ainsi, la commande du robot nécessite la connaissance de son modèle dynamique dans ces différentes phases. Pour trouver le modèle dynamique du robot marcheur dans les différentes phases de marche, il convient de trouver d'abord un modèle dynamique du robot en phase de vol[7] (les deux pieds en l'air). Cette configuration est à un nombre maximum de degrés de liberté. Puis en passant aux autres phases (simple support et double support), le modèle dynamique peut être déduit du modèle initial en associant les contraintes nécessaires de contact avec le sol. C'est cette méthodologie qui sera appliquée dans ce qui suit pour calculer le modèle dynamique de RABBIT dans les différentes phases du cycle de marche.

Afin de décrire la dynamique du bipède dans l'espace des coordonnées articulaires, deux formulations sont possibles : *la formulation de Lagrange* et *la formulation de Newton Euler* [88] [84] [33].

Dans la formulation de Lagrange, le robot est considéré en entier. Puis l'analyse est effectuée en utilisant la fonction de Lagrange[8] (différence entre énergie cinétique et énergie potentielle). Cependant, dans la formulation de Newton-Euler chaque segment du robot est considéré séparément, puis les équations décrivant le mouvement linéaire et angulaire sont

7. Cette dynamique du robot est régie par des équations différentielles sous la forme $\dot{x} = f(x,u)$.
8. La fonction de Lagrange est appelée souvent le lagrangien.



calculées. Elles doivent prendre en compte éventuellement le couplage entre les segments. Ce dernier se traduit par des forces de couplage apparaissant dans les équations. Puis par récurrence, les termes de couplage sont à déterminer et le modèle global du robot est obtenu. Dans notre cas, la première formulation est utilisée.

Soit l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \tag{2.6}$$

où

$q = (q_1 \dots q_n)^T$ est le vecteur de coordonnées généralisées (appelé aussi vecteur de variables de configuration);

$L = K - P$ est le Lagrangien qui représente la différence entre l'énergie cinétique K et l'énergie potentielle P;

$\tau = (\tau_1 \dots \tau_m)^T$ est le vecteur des entrées de commande (couples ou forces généralisées).

L'application de la méthode de Lagrange a permis après quelques manipulations algébriques d'aboutir à la dynamique décrivant le bipède en mouvement dans le plan sagittal. Elle peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Su \tag{2.7}$$

où

$M(q) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ est une matrice symétrique définie positive dite d'inertie;

$N(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ est la matrice des effets centrifuges, gyroscopiques, et de Coriolis;

$G(q) \in \mathbb{R}^7$ est le vecteur de forces de gravité généralisées;

$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$ est le vecteur des entrées de commande (couples articulaires);

$S \in \mathbb{R}^{7\times 4}$ est la matrice de répartition des actions des moteurs sur les articulations.

Remarque 4

- *Le nombre de degrés de liberté est $n = 7$. Le nombre d'entrées de commande est $m = 4$. Par conséquent le robot bipède en question fait partie des systèmes mécaniques dits sous-actionnés.*
- *Pour plus de détails sur les différentes matrices du modèle dynamique, le lecteur est invité à consulter l'annexe* A.



2.5 Modèle dynamique en phases de simple et de double support

Pendant la marche le robot bipède peut être considéré comme une structure mécanique articulée mobile en interaction avec son environnement. Cette interaction se résume à un éventuel contact avec la surface de marche (sol) soit à travers un seul appui, ou bien à travers deux appuis. Ceci donne naissance à ce qu'on appelle *phase de simple support* (ou *simple appui* ou encore *simple contact*) et *phase de double support* (ou *double appui* ou encore *double contact*) respectivement.

Un des éléments centraux des mouvements d'un robot marcheur, et en particulier un bipède, est le contact avec le sol. Cet aspect traduit l'interaction du robot avec son environnement. Afin que le robot bipède garde contact avec le sol, il faut éviter toute pénétration, décollage prématuré ou glissement sur la surface de marche. Pour cela certaines contraintes décrivant le contact avec le sol doivent être vérifiées. D'où la nécessité d'une description de telles contraintes sous forme d'équations ou d'inégalités mathématiques.

2.5.1 Les contraintes de non pénétration et non décollage

Pendant la marche, le robot doit garder le contact avec le sol à travers les points de support (un pied en phase de simple support et deux pieds en phase de double support). En effet, ces points ne peuvent ni pénétrer dans le sol, ni le quitter, et ceci peut être exprimé sous forme de contraintes holonomes comme suit :

$$\Phi(q) = 0 \tag{2.8}$$

où :

q est le vecteur de coordonnées généralisées;

$\Phi(q)$ est le vecteur de positions cartésiennes verticales des points de contact avec le sol.

La première dérivée de la relation (2.8) donne les vitesses des points de contact. Elles doivent aussi être nulles, et ceci peut être exprimé par :

$$J(q)\ \dot{q} = 0 \tag{2.9}$$

où $J(q)$ est la matrice jaccobienne des contraintes $\Phi(q)$.

La deuxième dérivée de la relation (2.8) donne les accélérations des points de contact, qui doivent aussi être nulles. Ceci permet d'aboutir à

$$J(q)\ \ddot{q} + \Pi(q,\dot{q}) = 0 \tag{2.10}$$



où

$$\Pi(q,\dot{q}) = \frac{\partial J(q)}{\partial q}\ \dot{q}^T\dot{q}$$

Remarque 5 *Dans le cas de la marche sur un sol rigide, ces contraintes se réduisent au non décollage. Par conséquent elles seront appelées contraintes unilatérales.*

2.5.2 Les contraintes de non glissement sur le sol

Chaque point de contact est le lieu de forces de frottement avec le sol. Une force normale s'opposant à toute pénétration dans le sol, et une force tangentielle s'opposant à tout glissement. Le non glissement peut être étudié selon le principe d'Amontons-Coulomb, présenté par la suite.

Principe d'Amontons-Coulomb

Soit un point de contact entre deux solides Ⓡ et Ⓢ[9]. On dénote par f_n la composante de la force normale au plan tangent en P (i.e. perpendiculaire à la surface de frottement), et par f_t la composante de force dans le plan tangent en P (i.e. parallèle à la surface de frottement). Ces forces sont illustrées sur la figure 2.7.

Il n'y a pas de glissement entre les deux corps si le module de la composante tangentielle est majoré par un terme proportionnel au module de la composante normale. Ceci peut être exprimé par :

$$|f_t| \leq \mu_0\ |f_n| \tag{2.11}$$

μ_0 est appelé coefficient de frottement d'adhérence. Il dépend essentiellement de la nature des matériaux en contact.

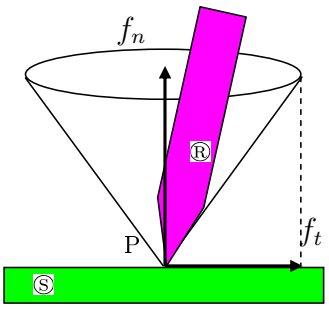


FIG. 2.7 – *Cône de frottement et forces de contact entre deux solides Ⓡ et Ⓢ*

Si λ_n, λ_t désignent les multiplicateurs de Lagrange [84, 88] relatifs aux forces de contact avec le sol (normale et tangentielle respectivement). La relation (2.11) peut être réécrite en

9. Dans le cas particulier du robot marcheur, Ⓡ représente le pied du robot, et Ⓢ représente le sol.

fonction des multiplicateurs de Lagrange comme suit :

$$|\lambda_t| \leq \mu_0 \, |\lambda_n| \tag{2.12}$$

2.5.3 La dynamique en phase de simple support

Comme son nom l'indique, la phase de simple support est caractérisée par un contact unique. Le modèle dynamique pour cette phase doit donc prendre en considération les contraintes de contact avec le sol. Par conséquent, la dynamique durant cette phase de marche comporte deux parties : une équation exprimant le mouvement dans le plan sagittal, et une équation exprimant les contraintes de non pénétration et de non décollage du pied en contact avec le sol. Ces contraintes traduisent la persistance du contact avec le sol durant la marche. Ceci se traduit mathématiquement par un terme qui apparaît dans l'équation de la dynamique du système (2.7). Ce terme exprime les efforts exercés par le sol sur le pied de contact. Ceci se traduit par l'équation suivante :

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Su + f_{ss} \quad ; \quad f_{ss} = J_1^T(q) \, \lambda \tag{2.13}$$

où

$f_{ss} \in \mathbb{R}^7$ est le vecteur des forces de contact avec le sol;

$J_1(q) \in \mathbb{R}^{2\times 7}$ est la matrice jaccobienne des contraintes holonomes de contact avec le sol;

λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange correspondants.

Étant donné que les forces de contact avec le sol incluent une force normale, et une force tangentielle, le vecteur des multiplicateurs de Lagrange λ est donné par :

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_t & \lambda_n \end{pmatrix}^T \tag{2.14}$$

La jambe de support est supposée être décrite par (q_{31},q_{41}), et la jambe de vol (q_{32},q_{42}). Les contraintes de contact avec le sol peuvent être exprimées par :

$$\begin{cases} y_{p1} = \dot{y}_{p1} = \ddot{y}_{p1} = 0 \\ x_{p1} = \dot{x}_{p1} = \ddot{x}_{p1} = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

où x_{p1}, y_{p1} sont les coordonnées cartésiennes du pied de support. Elles peuvent être exprimées en fonction des coordonnées des jambes par[10] :

$$\begin{cases} y_{p1} = y + l_3 \cos(q_{31}) + l_4 \cos(q_{31} + q_{41}) \\ x_{p1} = x + l_3 \sin(q_{31}) + l_4 \sin(q_{31} + q_{41}). \end{cases} \tag{2.16}$$

10. Les différentes coordonnées sont illustrées sur la figure 2.6.



L'équation (2.16) remplacée dans (2.15) donne

$$J_1(q)\ddot{q} + \Pi_{ss}(q,\dot{q}) = 0 \tag{2.17}$$

où $\Pi_{ss} \in \mathbb{R}^2$ est donnée par :

$$\Pi_{ss}(q,\dot{q}) \quad := \quad \begin{pmatrix} -l_3\dot{q}_{31}^2\cos(q_{31}) - l_4(\dot{q}_{31}+\dot{q}_{41})^2\cos(q_{31}+q_{41}) \\ l_3\dot{q}_{31}^2\sin(q_{31}) + l_4(\dot{q}_{31}+\dot{q}_{41})^2\sin(q_{31}+q_{41}) \end{pmatrix}.$$

Le modèle dynamique résultant qui modélise le mouvement de balancement et les contraintes holonomes de contact avec le sol est alors donné par :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Su + J_1^T(q)\ \lambda \\ J_1(q)\ \ddot{q} + \Pi_{ss}(q,\dot{q}) = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

2.5.4 La dynamique en phase de double support

La procédure de modélisation en phase de double support est identique à celle adoptée pour la phase de simple support. Cette fois-ci le bipède dispose d'un double contact avec le sol. La dynamique qui prend en compte les forces exercées par le sol sur le robot peut être décrite par

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Su + f_{ds} \quad ; \quad f_{ds} = J^T(q)\ \lambda \tag{2.19}$$

où

$f_{ds} \in \mathbb{R}^7$ est le vecteur des forces de contact avec le sol;

$J(q) \in \mathbb{R}^{4\times 7}$ est la matrice jaccobienne des contraintes holonomes de contact avec le sol;

$\lambda \in \mathbb{R}^4$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange correspondants.

Les contraintes de contact avec le sol peuvent être exprimées par :

$$\begin{cases} y_{p1} = \dot{y}_{p1} = \ddot{y}_{p1} = 0 \\ y_{p2} = \dot{y}_{p2} = \ddot{y}_{p2} = 0 \\ x_{p1} = \dot{x}_{p1} = \ddot{x}_{p1} = 0 \\ x_{p2} = \dot{x}_{p2} = \ddot{x}_{p2} = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

où (x_{p1},y_{p1}) sont les coordonnées cartésiennes du premier pied du robot relatif à la jambe décrite par (q_{31},q_{41}). (x_{p2},y_{p2}) sont les coordonnées cartésiennes du deuxième pied du robot relatif à la jambe décrite par (q_{32},q_{42}). En fonction des coordonnées articulaires des jambes,



les coordonnées des pieds peuvent être exprimées par :

$$\begin{cases} y_{p1} = y + l_3\cos(q_{31}) + l_4\cos(q_{31}+q_{41}) \\ y_{p2} = y + l_3\cos(q_{32}) + l_4\cos(q_{32}+q_{42}) \\ x_{p1} = x + l_3\sin(q_{31}) + l_4\sin(q_{31}+q_{41}) \\ x_{p2} = x + l_3\sin(q_{32}) + l_4\sin(q_{32}+q_{42}) \end{cases} \tag{2.21}$$

L'ensemble d'équations (2.21) remplacées dans (2.20) conduit à l'égalité suivante

$$J(q)\ddot{q} + \Pi_{ds}(q,\dot{q}) = 0 \tag{2.22}$$

où $\Pi_{ds} \in \mathbb{R}^4$ est donnée par :

$$\Pi_{ds}(q,\dot{q}) \;:=\; \begin{pmatrix} -l_3\dot{q}_{31}^2\cos(q_{31}) - l_4(\dot{q}_{31}+\dot{q}_{41})^2\cos(q_{31}+q_{41}) \\ -l_3\dot{q}_{32}^2\cos(q_{32}) - l_4(\dot{q}_{32}+\dot{q}_{42})^2\cos(q_{32}+q_{42}) \\ l_3\dot{q}_{31}^2\sin(q_{31}) + l_4(\dot{q}_{31}+\dot{q}_{41})^2\sin(q_{31}+q_{41}) \\ l_3\dot{q}_{32}^2\sin(q_{32}) + l_4(\dot{q}_{32}+\dot{q}_{42})^2\sin(q_{32}+q_{42}) \end{pmatrix}$$

Enfin, le modèle dynamique en phase de double support qui prend en compte les contraintes de contact avec le sol peut s'écrire

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Su + J^T(q)\ \lambda \\ J(q)\ \ddot{q} + \Pi_{ds}(q,\dot{q}) = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

2.6 Modèle dynamique en phase d'impact

L'impact entre deux corps rigides peut être traduit comme étant une collision, qui est modélisée par une équation algébrique au moment de l'impact. Cette collision est caractérisée par des forces impulsionnelles qui sont relativement grandes par rapport aux termes centrifuges et de Coriolis. Dans [12] plusieurs exemples de tels systèmes sont traités. Ils sont souvent appelés systèmes mécaniques avec impact.

Dans le cas de la marche bipède le phénomène d'impact a lieu à la fin de la phase de simple support. Il est caractérisé (sous l'hypothèse des corps rigides) par une collision entre le pied de vol et la surface de marche. La phase d'impact se produit pendant une durée très courte dite infinitésimale durant laquelle la configuration du robot bipède reste inchangée. Les vitesses articulaires subissent des changements brusques et instantanés (sauts). De ce fait, l'objectif du développement d'un modèle d'impact approprié est d'exprimer les vitesses juste après l'impact en fonction des positions et vitesses articulaires juste avant l'impact. Les coordonnées généralisées après l'impact sont les mêmes que celles d'avant l'impact. Dans ce



qui suit on désigne par t^- l'instant juste avant l'impact, tandis que t^+ désigne l'instant juste après l'impact. Les notations $(\cdot)^-$, $(\cdot)^+$ désignent $(\cdot)$ juste avant (respectivement juste après) l'impact pour une grandeur donnée issue du contexte.

Le modèle d'impact adopté ici est celui proposé dans [49] et repris dans [90]. Selon [49] le bipède peut être considéré comme une chaîne cinématique qui dispose d'un point de contact avec le sol, et un autre point qui s'apprête à rentrer en contact avec le sol. Sous l'hypothèse que les deux corps qui rentrent en contact (i.e. le pied de vol du robot et le sol) sont rigides, des forces impulsionnelles d'impact sont engendrées et le modèle dynamique à cet instant s'écrit comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Su + \delta F_{ext} \tag{2.24}$$

où δF_{ext} représente les forces extérieures impulsionelles d'impact agissant sur le robot au point de contact. Les hypothèses suivantes sur l'impact [49, 90] sont considérées :

H1 : L'impact se produit pendant une durée infinitésimale.

H2 : Les forces extérieures engendrées lors de l'impact sont impulsionelles.

H3 : L'impact provoque des discontinuités (changements brutaux) au niveau des vitesses articulaires, cependant les coordonnées articulaires demeurent inchangées durant l'impact.

H4 : Les commandes générées par les moteurs actionneurs ne sont pas impulsionnelles.

H5 : Le contact du pied de vol avec le sol se produit sans glissement et sans rebondissement. (Il est à noter que cette hypothèse doit être vérifié à posteriori pour une stratégie de commande donnée, elle ne doit pas être prise comme une donnée indépendante des choix de commande adoptés ultérieurement).

H6 : A l'instant de l'impact, le pied de support quitte la surface de marche sans rebondissement.

En plus de ces hypothèses, les forces impulsionnelles d'impact sont relativement grandes, par rapport aux forces centrifuges et de Coriolis. Par conséquent ces dernières peuvent être négligées. L'intégration de (2.24) sur l'intervalle $[t^-,t^+]$, en prenant en considération ces hypothèses donne :

$$M(q)(\dot{q}^+ - \dot{q}^-) = F_{ext} \tag{2.25}$$

où

$\dot{q}^-$ (respectivement $\dot{q}^+$) représente les vitesses juste avant (respectivement juste après) l'impact;

F_{ext} résulte de l'intégration de δF_{ext} sur l'intervalle de l'impact, à savoir

$$F_{ext} = \int_{t^-}^{t^+} \delta F_{ext}(\tau)d\tau \tag{2.26}$$



Dans l'équation (2.25) q^- et $\dot{q}^-$ sont connues (configuration du robot juste avant l'impact). D'autre part puisque l'impact n'altère pas les positions

$$q^+ = q^- = q \tag{2.27}$$

$\dot{q}^+ \in \mathbb{R}^7$ et $F_{ext} \in \mathbb{R}^2$ sont inconnues dans (2.25), qui représente un système de sept équations et de neuf inconnues. Pour pouvoir le résoudre, il faut trouver deux équations supplémentaires. Selon l'hypothèse **H5** (cf. ci dessus), la jambe de vol touche le sol sans rebondissement ni glissement. Ceci peut être exprimé par les contraintes suivantes sur les coordonnées du pied de vol.

$$\begin{cases} x_{p2} = x - l_3 \sin(q_{32}) - l_4 \sin(q_{32} + q_{42}) = d \\ y_{p2} = y + l_3 \cos(q_{32}) + l_4 \cos(q_{32} + q_{42}) = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

où d désigne la longueur du pas. Les contraintes (2.28) sont sous la forme $\Phi(q) = 0$, l'évaluation de la première dérivée donne

$$J_2(q)\ \dot{q}^+ = 0 \tag{2.29}$$

Où $J_2(q)$ est la matrice jacobienne des contraintes (2.28). Les forces extérieures d'impact peuvent être exprimées en fonction des multiplicateurs de Lagrange correspondants comme suit :

$$F_{ext} = J_2^T(q)\lambda \tag{2.30}$$

où $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \lambda_t \end{pmatrix}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange relatifs aux forces de contact avec le sol, à savoir λ_n pour la force normale et λ_t pour la force tangentielle.

La dynamique de l'impact résultante est alors donnée par :

$$\begin{cases} M(q)(\dot{q}^+ - \dot{q}^-) = J_2^T(q)\lambda = J_2^T(q) \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \lambda_t \end{pmatrix} \\ J_2(q)\dot{q}^+ = 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

C'est un système de 9 équations à 9 inconnus $\dot{q}^+ \in \mathbb{R}^7$ et $\lambda = \in \mathbb{R}^2$. La solution d'un tel système d'équations nous permet de trouver les vitesses post-impact ainsi que les forces d'impact représentées par leurs multiplicateurs de Lagrange. Elles sont exprimées par :

$$\begin{cases} \dot{q}^+ = \left[I - M^{-1}J_2^T(J_2M^{-1}J_2^T)^{-1}J_2\right]\dot{q}^- \\ \lambda = \left[J_2M^{-1}J_2^T\right]\dot{q}^- \end{cases} \tag{2.32}$$

Étant donné que le robot bipède se déplace en alterant ses deux jambes, et que l'impact marque la fin d'un pas; il faut permuter les rôles des jambes[11], pour préparer le bipède au pas suivant.

11. La jambe de support devient une jambe de balancement et vice versa.



Cette permutation peut être exprimée mathématiquement par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} q^+ \\ \dot{q}^+ \end{pmatrix} = B(q) \begin{pmatrix} q^- \\ \dot{q}^- \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

où B est une matrice d'une application linéaire dans l'espace des coordonnées généralisées.

Pour récapituler, le modèle d'impact qui prend en compte la dynamique de l'impact aussi bien que la permutation nécessaire des jambes du bipède s'écrit :

$$\begin{pmatrix} q^+ \\ \dot{q}^+ \end{pmatrix} = \Delta(q) \begin{pmatrix} q^- \\ \dot{q}^- \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Où $\Delta(q)$ est une matrice donnée par :

$$\Delta(q) = \begin{bmatrix} B(q) & 0 \\ 0 & B(q)D(q) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Avec

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$D(q) = \left[I - M^{-1}J_2^T(J_2M^{-1}J_2^T)^{-1}J_2\right]$$

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, deux parties essentielles ont été abordées, il s'agit de la description technologique de la plate-forme expérimentale (le prototype RABBIT), et la modélisation (cinématique et dynamique) du robot marcheur bipède.

Dans la première partie, une description globale du prototype a été présentée, en abordant l'idée de base qui a mené au choix de la structure mécanique. Une description détaillée de cette structure mécanique a été ensuite abordée. Ceci a permis de projeter la lumière sur ses différentes composantes, à savoir les actionneurs, les capteurs, le système de guidage, ... etc.



La première étape de la partie modélisation consiste à choisir les variables de configuration (angles relatifs ou absolus, coordonnées articulaires, coordonnées cartésiennes, positions des centres de masses, ...etc). Ceci a permis de dégager les notations qui sont utilisées dans le modèle dynamique.

La modélisation cinématique du robot a permis de traiter les différents segments de la structure mécanique articulée afin de tirer les coordonnées articulaires de leurs centres de masse. Elle a permis également de trouver leurs vitesses cartésiennes.

Puisqu'un cycle de marche peut être considéré comme étant un enchaînement de trois phases de marche, à savoir, la phase de simple support, la phase d'impact et la phase de double support, il est nécessaire de développer un modèle approprié pour chacune de ces phases. Ceci a fait l'objet de la modélisation dynamique. En effet, dans un premier temps, le modèle du bipède à sept degrés de liberté est calculé sans tenir compte du contact avec le sol. Ensuite les contraintes de contact avec le sol sont considérées dans le but d'obtenir des modèles pour les phases de simple support et de double support. Le modèle approprié pour la phase d'impact s'appuie sur les lois de la mécanique non régulière. Le modèle adopté permet de calculer les vitesses articulaires post-impact en fonction des coordonnées et des vitesses articulaires pré-impact. De plus, ce modèle est complété afin de prendre en considération la permutation des rôles des jambes du robot.



Chapitre 3

Première approche : commande prédictive non linéaire de faible dimension

3.1 Introduction

L'origine de la commande prédictive remonte à la fin des années 70 [80]. Le terme de commande prédictive (MPC : *Model Predictive Control*) ne fait pas référence à une approche de commande spécifique, mais plutôt à toute une gamme de stratégies de commande qui utilisent explicitement un modèle du système à commander pour calculer la commande en minimisant une fonction coût. En revanche trois aspects de base relatifs à la commande prédictive sont [16] :

- l'utilisation explicite d'un modèle du système pour prédire les états/sorties à des instants futurs (horizon de prédiction);
- le calcul d'une séquence de commande (sur un horizon dit de commande) en minimisant une certaine fonction coût;
- la technique de glissement de l'horizon de prédiction, qui consiste à déplacer l'horizon à chaque période d'échantillonnage après l'application de la première commande de le séquence optimale ainsi obtenue.

Le principe d'horizon fuyant, un des piliers de la commande prédictive, proposé par Propoi en 1963, a été largement utilisé depuis, dans les différentes approches de commande prédictive.

Dans le contexte des systèmes non linéaires, la commande prédictive a été largement utilisée dans l'industrie pétro-chimique afin de gérer les fortes non linéarités, les contraintes de fonctionnement et les enjeux importants du coût et de la qualité des produits obtenus. Cependant, son application n'était pas accompagnée d'un niveau de réflexion théorique permettant

d'aboutir à des preuves de la stabilité de la boucle fermée. Ce genre de travaux est venu bien plus tard. Dans un premier temps, des résultats sur la stabilisation des systèmes non linéaires discrets dans [54] ont été obtenus, puis dans [61, 66] pour des systèmes non linéaires continus. Ces dernières contributions ont été le début d'une série de travaux qui portent sur la commande prédictive à horizon fuyant. En effet, d'autres résultats ont été obtenus sur les systèmes discrets [58, 4, 5], sur la robustesse [70, 10, 96, 67]. Des formulations de commande par retour d'état échantillonnée ont vu le jour également [65, 68, 60]. Des travaux mentionnant explicitement le souci de l'implementation en temps réel [71, 72, 9]. Des caractérisations en terme d'optimalité inverse ont été proposées [59] ainsi que des formulations pour des systèmes hybrides [75]. Pour plus de détails sur la littérature de la commande préditive à horizon fuyant, le lecteur peut se référer à [62, 6, 9].

La première approche de commande, proposée dans ce chapitre, fait partie de la famille des commandes prédictives non linéaires, elle est dotée de la spécificité à aboutir à des problèmes d'optimisation de très faible dimension. Cette approche est proposée pour une classe de systèmes hybrides (systèmes dynamiques non linéaires dont l'état présente des sauts instantanés [95]) en général. Cependant, elle reste bien valable et applicable pour des systèmes non linéaires classiques continus.

L'idée de base consiste à utiliser le concept de linéarisation partielle par retour d'état non linéaire afin de scinder le vecteur d'état en deux parties. La première partie inclut les états du sous-système linéaire résultant (ils sont appelés, dans la suite, les variables "*directement commandées*"). La deuxième partie du vecteur d'état forme ce qu'on appelle l'état interne dont la dynamique est communément qualifiée de "*dynamique interne*". Ceci provient du fait qu'initialement cette dynamique a été caractérisée par le fait que la sortie, dont le premier sous-état représente les dérivées successives, est forcée à 0. Ce deuxième sous-vecteur forme ce que nous désignons par la suite comme étant les variables "*indirectement commandées*".

Suite à cette linéarisation par retour d'état, des trajectoires sur les variables directement commandées sont définies, elles visent à reproduire un certain état final désiré à des instants de décision. Ces trajectoires sont paramétrées par un vecteur de variables. La détermination de ce vecteur est basée sur la résolution en ligne d'un problème d'optimisation qui utilise une prédiction de la dynamique interne. Dans la plupart des exemples traités dans la suite, des formulations aboutissant à une réduction de la dimension du vecteur d'optimisation à un scalaire est proposée. Ceci représente une spécificité de la technique proposée.



Le problème d'optimisation à résoudre porte essentiellement sur le comportement, et surtout la stabilité de la dynamique interne du système. Afin que cette dernière soit analysée, un outil graphique est proposé. Cet outil utilise la méthode de la section de Poincaré aux instants de décision. L'approche proposée permet également la génération de cycles limites stables, d'une manière générale pour la classe de problèmes hybrides en question. Néanmoins elle permet aussi de résoudre les problèmes de stabilisation autour d'un point d'équilibre. Ceci est obtenu comme cas particulier de cycle limite où ce dernier se réduit à un point dans le plan de phase.

Cinq exemples d'application permettent l'illustration de la large gamme de systèmes sur lesquels l'approche est applicable. Ce jeu d'exemples inclut : trois systèmes non linéaires sans discontinuité, à savoir un système non linéaire instable en boucle ouverte, dont le linéarisé est non commandable, et deux systèmes mécaniques sous-actionnés : la bille sur le rail [19] et le pendule inversé (modèle 505) de chez ECP [1] [21]. En plus de ces trois systèmes continus, l'approche est appliquée à deux exemples de systèmes non linéaires hybrides, à savoir le système chaotic impulsionnel de Lorenz [22], et le robot marcheur bipède sous-actionné RABBIT [18] [20], qui constitue la principale application de notre travail. Notons au passage que cette même méthodologie à été appliquée pour l'étude de la stabilité semi-globale d'une nouvelle architecture de boucle à verrouillage de phase dans le cadre d'un contract CIFRE entre le laboratoire d'automatique de Grenoble et la société ST-Microelectronics [45]

3.2 La commande Prédictive à base de modèle

Les techniques de commande prédictive ont une philosophie qui s'apparente fortement au comportement naturel d'un conducteur au volent de son véhicule [16, 11]. En effet, il est nécessaire au conducteur d'analyser l'état de la route sur un horizon assez lointain pour déterminer la stratégie de conduite à adopter. Analyser l'état de la route ou prédire le comportement future relève d'un concept intuitif et naturel, de sorte que la commande prédictive est, en fait, présente dans plusieurs activités humaines, telle que la marche, le ski, ... etc.

Le principe de base de la commande prédictive consiste à prendre en compte, à l'instant actuel, le comportement future, par le biais d'utilisation explicite d'un modèle numérique du système dans le but de prédire la sortie dans le future, sur un horizon fini. Un des intérêts des méthodes prédictive réside dans le fait que, pour une consigne précalculée sur un certain horizon, il est ainsi possible d'exploiter les informations de trajectoires prédifinies situées dans

1. Educational Control Products.



le future, étant donné que le but est de faire coïncider la sortie du système avec cette consigne sur un horizon fini comme le montre la figure 3.1. La commande prédictive est appliquée

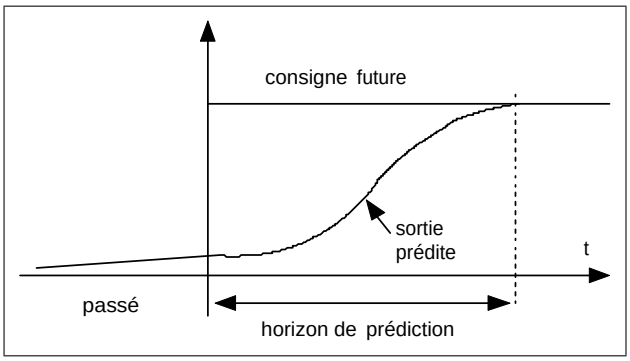


FIG. 3.1 – *Prédiction à horizon fini*

également dans les problèmes de poursuite de trajectoires. C'est le cas de plusieurs servomécanismes et notamment de la commande d'axe en machine outils ou en robotique, domaines où les trajectoires à poursuivre sont, de façon générale, parfaitement connues.

Le schéma bloc de la figure 3.2 permet d'illustrer le concept de la commande prédictive à base de modèle.

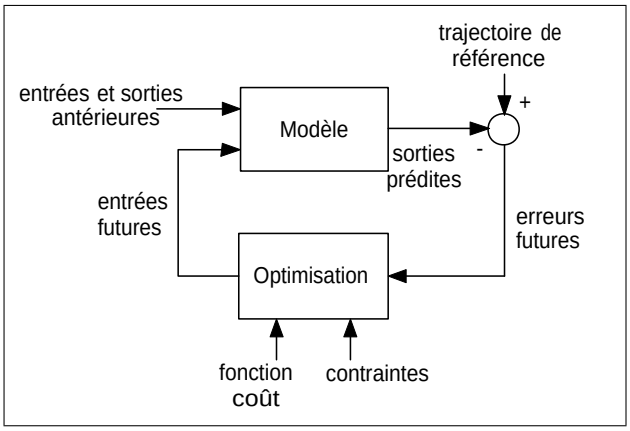


FIG. 3.2 – *Structure de base de la commande prédictive à base de modèle*

Le modèle est utilisé pour prédire les sorties futures, connaissant l'état actuel et antérieur du système, ainsi que les enrées futures de commande. La séquence future de commande est calculée par optimisation d'une fonction coût sous contraintes (sur la commande, sur la sortie), Dans le but de minimiser les erreurs futures de poursuite de trajectoires de référence.

3.3 Principe de l'approche proposée

Dans cette partie du chapitre, l'approche de commande proposée est détaillée. Principalement quatre sections seront introduites, elles traitent essentiellement les points suivants :

- formulation du problème de commande;
- définitions et notations utilisées;
- loi de commande par retour d'état proposée;
- analyse et résultats de stabilité.

3.3.1 Formulation du problème

Une classe de systèmes non linéaires hybrides [95] dont la dynamique peut être exprimée par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad \text{si} \quad x \notin \mathcal{S}_0 \tag{3.1}$$

$$x(t^+) = \Delta(x(t^-)) \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{S}_0 \tag{3.2}$$

est considérée, où :

$x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système;

$u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées de commande;

f, g et Δ dans (3.1)-(3.2) : sont des fonctions continues non linéaires.

L'équation 3.2 exprime un saut conditionnel instantané (discontinuité) sur les états du systèmes. Autrement dit, un saut sur l'état se produit lorsque la trajectoire de l'état dont l'évolution est décrite par (3.1) heurte la surface de saut (ou de commutation) définie par :

$$\mathcal{S}_0 := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad S(x) = 0 \Big\}$$

où $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_s}$ est une application continue, n_s est la dimension de la surface de commutation.

Remarque 6

- *Cette classe de systèmes en question est appelée souvent* **systèmes à effet impulsionnel**.
- *Afin de bien définir le comportement du système, l'hypothèse suivante est introduite.*

Hypothèse 1 *Il existe un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\Big\{ x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{S}_0 \Big\} \Rightarrow \Big\{ S\Big(\Delta(x)\Big) \geq \gamma(\mathcal{C}) > 0 \Big\} \tag{3.3}$$

où $\gamma(\cdot)$ est une fonction strictement positive, définie sur $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n_s}$



Cette hypothèse assure que le saut conduit l'état loin de la surface de commutation $\mathcal{S}_0$. Ceci, avec certains arguments concernant la continuité et la bornitude permet l'aboutissement à une dynamique bien définie dite *'free-chattering'*. En l'absence d'une telle hypothèse, un phénomène dit de "*Zeno*" est à craindre. Il consiste à avoir un nombre infini de commutations sur un intervalle de temps borné.

Le lemme suivant permet de s'assurer que l'approche de commande proposée puisse être appliquée aux systèmes continus classiques. En effet, il permet de montrer qu'un système continu classique peut se mettre sous la forme standard (3.1)-(3.2).

Lemme 1 *tout système continu classique de dimension n sous la forme*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{3.4}$$

peut être étendu à un système hybride de dimension $(n+1)$ *s'écrivant sous la forme* (3.1)-(3.2) *pour lequel l'hypothèse* 1 *est satisfaite.*

Preuve

Soit $\tau_c > 0$ un nombre réel positif, x^e : le vecteur d'état étendu de dimension $(n+1)$, et u^e : le vecteur de commande étendu correspondant, de dimension $(m+1)$ tel que :

$$x^e := \begin{pmatrix} x \\ x^e_{n+1} \end{pmatrix} \quad ; \quad u^e := \begin{pmatrix} u \\ u^e_{m+1} \end{pmatrix}$$

avec la dynamique étendue suivante :

$$\dot{x}^e = \begin{pmatrix} f(x) + g(x)u \\ u^e_{m+1} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u^e_{m+1} \end{pmatrix} = f^e(x^e) + g^e(x^e)u^e \tag{3.5}$$

La surface de commutation, et la fonction de saut peuvent respectivement être définies par :

$$S(x^e) = \tau_c - x^e_{n+1} \quad ; \quad \Delta(x^e) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Avec ces notations, l'hypothèse 1 est vérifiée pour

$$\mathcal{C} := \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{et} \quad \gamma(\mathcal{C}) = \tau_c$$

△

Une fois le choix de $\tau_c > 0$ fixé, d'après le lemme 1, le système étendu donné par l'équation (3.5) peut être défini pour n'importe quel système continu classique (3.4).



Note : tout au long de ce manuscrit, le système étendu est appelé *système τ_c-étendu.*

Le problème consiste à trouver une loi de commande qui stabilise les trajectoires en boucle fermée autour d'une trajectoire cyclique bornée[2]. Autrement dit soit $\tau_c > 0$ une certaine période appropriée, l'objectif est de prouver que sous le retour d'état proposé, il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ et une trajectoire bornée attractive $x_l(\cdot)$ définie sur $[0,k_0\tau_c^-]$ telle que la condition asymptotique suivante soit satisfaite :

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{\tau\in[0,k_0\tau_c]} \| x_{cl}(jk_0\tau_c + \tau; x_0) - x_l(\tau) \| = 0 \tag{3.7}$$

$x_{cl}(\cdot; x_0)$ est la trajectoire du système en boucle fermée qui commence à la condition initiale $(0,x_0)$. x_l est la trajectoire cible qui satisfait les conditions aux limites suivantes (compatibles avec l'application du saut $\Delta(\cdot)$ définie par (3.2)) :

$$x_l(k_0\tau_c^-) = x^f \quad ; \quad x_l(0) = \Delta(x^f) \tag{3.8}$$

$x^f \in \mathbb{R}^n$: un certain état final désiré.

Remarque 7

- *Dans le cas où* (3.7) *n'est pas globalement satisfaite, l'objectif est donc d'estimer une région d'attraction bornée* $\mathbb{X}$ *pour laquelle* (3.7) *est vérifiée pour tout* $x_0 \in \mathbb{X}$.

- *La trajectoire cible* x_l *qui est définie sur un intervalle de longueur* $k_0\tau_c$ *à la fin duquel un saut sur l'état (qui peut être virtuel) survient. Ceci est mieux illustré sur la figure* 3.3 *ci-dessous (pour le cas particulier* $k_0 = 1$*)*

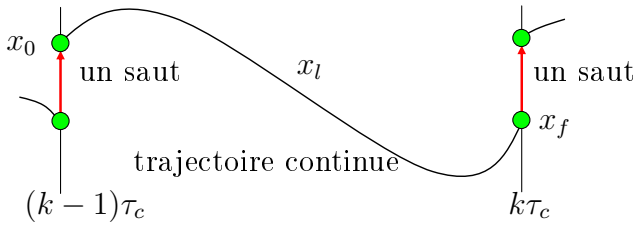


FIG. 3.3 – *Définition de la trajectoire cible* x_l

2. Une originalité de cette approche de commande est que la périodicité de la trajectoire cyclique n'est pas forcément d'ordre 1. En effet, il est tout a fait possible d'obtenir des cycles limites d'ordre multiple. Ceci est largement illustré plus tard à travers les exemples d'application proposés.

3.3.2 Quelques définitions et notations utiles

Dans ce qui suit, quelques définitions et notations utilisées dans cette approche de commande sont présentées.

Soit le système non linéaire défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \tag{3.9}$$

où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une sortie adaptée pour une linéarisation par retour d'état. L'utilisation des outils de la géométrie différentielle permet de trouver un retour d'état partiellement linéarisant[3] par rapport à la sortie $y = h(x)$ [50]. Ceci définit une transformation de coordonnées Φ et un retour d'état linéarisant Ψ comme suit :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad ; \quad x = \Phi^{-1}(\bar{x}) \quad ; \quad u = \Psi(x,v) \tag{3.10}$$

La dynamique du système partiellement linéarisée résultant peut s'exprimer dans l'espace des nouvelles coordonnées par

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \quad ; \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} \tag{3.11}$$

$$\dot{\eta} = Z(\xi,\eta,v) \quad ; \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_\eta} \tag{3.12}$$

où ξ représente la partie complètement linéarisée du vecteur d'état, alors que η représente l'état interne dont la dynamique est dite "*dynamique interne*"

Il est à noter que le couple (A,B) est commandable, puisque selon la technique utilisée, ξ n'est autre que la sortie et ses dérivées successives.

Remarque 8

- *Le principe de linéarisation partielle est détaillé dans l'annexe B.*
- *Il faut noter qu'une multitude de possibilités de choix de l'application de sortie existe. Parmi les différents choix possibles, ceux qui mènent à la plus grande valeur de n_ξ sont naturellement à privilégier.*

Dans le contexte des systèmes hybrides (avec des sauts sur les états du système), le choix de l'application de sortie $y = h(x)$ doit vérifier certaines conditions. Elles sont introduites dans la définition qui suit.

3. Pour plus de détails sur le principe de la linéarisation partielle cf. annexe B.



Définition 1 *Une application de sortie $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite compatible avec la dynamique hybride* (3.1)-(3.2) *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Il existe une application $\bar{S} : \mathbb{R}^{n_\xi} \to \mathbb{R}^{n_s}$ telle que l'implication suivante est vérifiée :*

$$\left\{ \bar{S}(\xi) = 0 \right\} \Rightarrow \left\{ S \circ \Phi^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour tout} \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_\eta} \right\} \tag{3.13}$$

2. *Il existe un sous-ensemble $\bar{\mathcal{C}} \subset \mathbb{R}^{n_\xi}$ tel que*

$$\left\{ \xi \in \bar{\mathcal{C}} \right\} \Rightarrow \left\{ \Phi^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \quad \text{pour tout} \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_\eta} \right\} \tag{3.14}$$

où $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ étant l'ensemble évoqué dans l'hypothèse 1.

Une application de sortie $y = h(x)$ compatible avec la dynamique du système conduit à une décomposition du vecteur d'état du système en un sous vecteur ξ d'états complètement linéarisés, et un sous vecteur η de la dynamique interne. L'objectif est de commander l'apparition du saut (condition (3.13)), et le comportement résultant (condition (3.14)) à travers le sous système complètement linéarisé (3.11).

Dans le lemme suivant, il est établi que le système τ_c-*étendu*, obtenu par l'application du lemme 1 au système continu classique, admet toujours une application de sortie compatible avec sa dynamique.

Lemme 2 *Tout système hybride τ_c-étendu résultant de l'extension d'un système continu suivant le lemme* 1*, admet une application de sortie compatible avec sa dynamique.*

Preuve

soit l'application de sortie $h^e(x^e) = x^e_{n+1}$. Le choix $\xi = x^e_{n+1}$ est tout à fait possible. Étant donné que la surface de commutation $S(x^e) = \tau_c - x^e_{n+1}$ implique que $x^e_{n+1} = \xi$, alors le premier point de la définition 1 est vérifié, avec $\bar{S}(\xi) = \tau_c - \xi$.

En ce qui concerne le deuxième point, le fait que $\mathcal{C} = \mathbb{R}^{n+1}$ implique nécessairement que la condition (3.14) est satisfaite. △

Remarque 9 *Dans le cas où le système original admet une application de sortie $h(x)$ menant à une linéarisation partielle par retour d'état, un choix approprié de l'application de sortie étendue est $h^e(x^e) = \begin{pmatrix} h(x) \\ x^e_{n+1} \end{pmatrix}$ pour laquelle l'argumentation développée ci-dessus reste valable.*



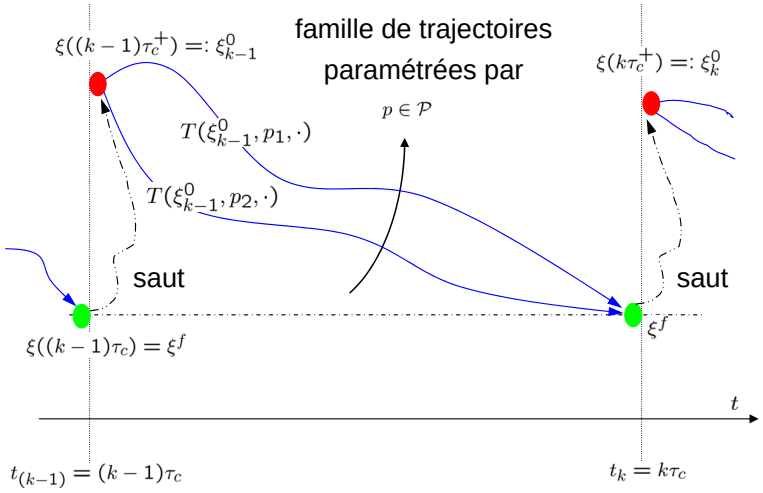


FIG. 3.4 – *La famille des trajectoires admissibles paramétrées*

3.3.3 La loi de commande par retour d'état proposée

Soit $\tau_c > 0$ une certaine période fixée a priori. L'idée de base dans l'approche qu'on propose réside dans l'utilisation du sous-vecteur d'état ξ (qui constitue la partie complètement linéarisée) pour atteindre (toucher) périodiquement la surface de commutation à une certaine cible pré-définie $\xi^f \in \bar{S}^{-1}(0)$. Ceci est possible étant donné que l'application de sortie $h(x)$ utilisée pour effectuer la linéarisation partielle est compatible avec la dynamique (3.1)-(3.2) dans le sens de la définition 1. Dans ce cas, les sauts sur le vecteur d'état surviennent donc périodiquement à des instants $t_k = k\tau_c$, $k \in \mathbb{N}_+$. Aux instants juste avant les commutations :

$$\forall k \in \mathbb{N}_+ \quad : \quad \xi(t_k^-) = \xi^f \quad ; \quad \bar{S}(\xi^f) = 0 \tag{3.15}$$

Une fois le couple (τ_c,ξ^f) défini, il existe une infinité de possibilités pour joindre les conditions aux limites (3.15). Ceci se traduit par le fait qu'il y a une infinité de trajectoires qui commencent à l'état initial suivant l'impact précédent $\xi(t_{k-1}^+)$ et qui rejoignent l'état final $\xi(t_k^-) = \xi^f$ qui représente le sous-état désiré juste avant l'impact actuel (cf. figure 3.4). Dans la définition suivante la notion de trajectoires admissibles est introduite.

Définition 2 *Soit un entier $n_p \in \mathbb{N}$. Pour tout sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_p}$, une famille de trajectoires admissibles paramétrées par des paramètres dans $\mathcal{P}$ est définie par l'application suivante :*

$$T : \mathbb{R}^{n_\xi} \times \mathcal{P} \times [0,\tau_c] \to \mathbb{R}^{n_\xi} \tag{3.16}$$

telle que les conditions suivantes sont vérifiées, pour tout $p \in \mathcal{P}$, *et toute condition initiale* $\xi^0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$

1. $T(\xi^0,p,0) = \xi_0 \quad$ *et* $\quad T(\xi^0,p,\tau_c) = \xi^f$
2. $T(\xi^0,p,\cdot)$ *est compatible avec le système linéaire* (3.11). *En effet, si le système* (3.11) *est à la condition initiale* $(0,\xi^0)$, *alors une poursuite exacte de la trajectoire* $T(\xi^0,p,\cdot)$ *est possible avec un retour d'état variant dans le temps approprié, défini sur l'intervalle* $[0,\tau_c]$. *Ce retour d'état peut être exprimé par :*

$$v(\tau) = \mathcal{V}_{(\xi^0,p)}(\xi(\tau),\tau) \quad \forall \tau \in [0,\tau_c]. \tag{3.17}$$

La famille de trajectoires admissibles permet une paramétrisation de dimension finie des trajectoires reliant deux points dans l'espace $\mathbb{R}^{n_\xi}$. Ces dernières peuvent être exactement poursuivies par le sous-système linéarisé commandable (3.11) au moyen du retour d'état (3.17).

L'application d'un tel retour d'état, entre deux sauts successifs, mène systématiquement à $\xi(t_k^-) = \xi^f$ à l'instant juste avant l'impact k. En effet, ceci fait de l'instant juste avant l'impact t_k^- un choix judicieux pour définir la section de Poincaré (cf. [55]). Ceci est utilisé ultérieurement dans l'analyse de stabilité du système en boucle fermée résultant.

Ainsi, s'il est possible de démontrer que, sous certaines conditions, la séquence $\big(\eta(t_k^-)\big)_{k\in\mathbb{N}_+}$ admet une dynamique asymptotiquement stable, alors la stabilité du système global peut être déduite.

Nous allons démontrer dans la suite que le retour d'état (3.17), pour un certain choix de ξ^f permet de définir une application $F : \mathbb{R}^{n_\eta} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n_\eta}$ telle que la dynamique interne η projetée sur la section de Poincaré définie par les instants de commutation t_k vérifie l'équation suivante :

$$\eta(t_{k+1}^-) = F\Big(\eta(t_k^-),p(t_k^+),\xi^f\Big) \tag{3.18}$$

où $p(t_k^+) \in \mathcal{P}$ est le paramètre qui permet la sélection de la trajectoire optimale [4] $T(\xi(t_k^+),p(t_k^+),\cdot)$ qui est poursuivie par ξ sur l'intervalle $[t_k,t_{k+1}]$.

L'état du système juste après le saut survenant à l'instant t_k est donnée par :

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}(t_k^+) = \Delta\Big(\begin{pmatrix}\xi^f\\ \eta(t_k^-)\end{pmatrix}\Big) =: \begin{pmatrix}\xi^+(\eta(t_k^-))\\ \eta^+(\eta(t_k^-))\end{pmatrix}.$$

De plus, étant donné que le retour d'état (3.17) permet la poursuite exacte (parfaite) de la trajectoire de référence sur l'intervalle $[t_k,t_{k+1}]$, l'évolution prédite du sous-état η (dynamique

4. Parmi les trajectoires de la famille admissible selon la définition 2.



interne) sur cet intervalle est donnée par 3.12, à savoir

$$\dot{\eta}(t) \;=\; Z\Big(\xi^{ref}(t),\eta(t),v^{ref}(t)\Big) \tag{3.19}$$

avec

$$\xi^{ref}(t) \;=\; T\Big(\xi^{+}(\eta(t_k^-)),p(t_k^+),t\Big) \quad ; \quad t\in[t_k^+,t_{k+1}^-[\tag{3.20}$$

$$v^{ref}(t) \;=\; \mathcal{V}_{(\xi^{+}(\eta(t_k^-)),p(t_k^+))}\big(\xi^{ref}(t),t\big) \quad ; \quad t\in[t_k^+,t_{k+1}^-[\tag{3.21}$$

Par conséquent, en injectant (3.20)-(3.21) dans (3.19), la dynamique interne peut être réécrite comme suit :

$$\dot{\eta}(t) =: \varphi\Big(\eta(t),\eta(t_k^-),p(t_k^+),\xi^f\Big) \quad ; \quad t\in[t_k,t_{k+1}] \tag{3.22}$$

L'intégration de cette dynamique sur l'intervalle $[t_k,t_{k+1}]$, en partant de la condition initiale $\eta^+(\eta(t_k))$, donne (3.18). Le lemme suivant récapitule la discussion précédente :

Lemme 3 *Sous réserve que l'hypothèse* 1 *soit satisfaite. Étant donné :*

- *une application de sortie $h(x)$ compatible avec la fonction de saut (cf. définition* 1*) utilisée dans la linéarisation partielle par retour d'état;*
- *un couple $(\tau_c,\xi^f)\in\mathbb{R}_+\times\bar{S}^{-1}(0)$ de période τ_c et une valeur finale désirée sur ξ, et*
- *une séquence de paramètres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ dans l'ensemble $\mathcal{P}$;*

il existe une application $F:\mathbb{R}^{n_\eta}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}^{n_\eta}$ telle que avec la loi de commande par retour d'état exprimée par :

$$v(t)=\mathcal{V}_{(\xi(t_k^+),p_k)}(\xi(t),t) \quad ; \quad t\in]t_k,t_{k+1}] \tag{3.23}$$

la dynamique discrète résultante de η est donnée par :

$$\eta(t_{k+1}^-)=F(\eta(t_k^-),p_k,\xi^f) \tag{3.24}$$

Remarque 10 *La dynamique* (3.24) *représente un système à temps discret dont l'état est η, et l'entrée de commande est p. Par conséquent, le choix du vecteur de paramètres p_k à chaque instant t_k peut être obtenu par des outils classiques de synthèse de lois de commande dédiées aux systèmes discrets non linéaires. Cependant, ces outils classiques sont souvent de nature analytique nécessitant l'écriture explicite de la dérivée d'une certaine fonction de Lyapunov à trouver. La complexité de la fonction F rend très difficile, voir impossible l'utilisation d'une telle démarche, au moins d'une façon générique. C'est dans ce cadre-ci que les outils de la commande prédictive fournissent une autre alternative bien adaptée à ce genre de situation [54, 4, 62], puisque de telles approches ne nécessitent pas de calculs analytiques explicites.*



En se basant sur des techniques de commande prédictive, le calcul de p_k s'obtient en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$p_k = \hat{p}(\eta(t_k^-),\xi^f,\eta^f) := \min_{p\in\mathcal{P}} \|F(\eta(t_k^-),p,\xi^f) - \eta^f\|_Q^2 \tag{3.25}$$

Connaissant l'état final désiré x^f, les sous-états cibles ξ^f et η^f peuvent être calculés par le biais de la transformation Φ donnée par (3.10), à savoir :

$$\begin{pmatrix}\xi^f\\ \eta^f\end{pmatrix} := \Phi(x^f). \tag{3.26}$$

Étant donné que la solution du problème d'optimisation (3.25) nécessite la connaissance de $F(\eta(t_k^-),p,\xi^f) = \eta(t_{k+1}^-)$. Qui représente l'état de la dynamique interne juste avant le prochain impact. Ceci est obtenu par une prédiction basée sur l'utilisation du modèle du système.

Le retour d'état (3.25), injecté dans (3.24) engendre le système en boucle-fermée exprimé par la dynamique discrète suivante :

$$\begin{aligned}\eta(t_{k+1}^-) &= F_{cl}(\eta(t_k^-),\bar{x}^f) \\ &:= F(\eta(t_k^-),\hat{p}(\eta(t_k^-),\xi^f,\eta^f),\xi^f)\end{aligned} \tag{3.27}$$

dans laquelle la notation $\bar{x}^f := (\xi^f,\eta^f)$ est utilisée. Cette dynamique peut être exprimée sous une forme multi-pas[5] comme suit :

$$\eta(t_{k+k_0}^-) = F_{cl}^{k_0}(\eta(t_k^-),\bar{x}^f) \tag{3.28}$$

La fonction multi-pas $F_{cl}^{k_0}$ est d'une grande importance dans l'étude de la stabilité de la boucle fermée associée à la loi de commande proposée. Ceci fait l'objet de la section suivante.

3.3.4 Analyse de stabilité

L'analyse de stabilité du système peut être envisagée au moyen de la méthode de la section de Poincaré. Ceci revient à analyser la stabilité du système discret (3.28) défini aux instants t_k^- juste avant le saut k.

Sous la stratégie de commande prédictive proposée, la poursuite des trajectoires de référence sur la partie complètement linéarisée conduit à :

$$\xi(t_k^-) = \xi^f \tag{3.29}$$

5. État de la dynamique interne évaluée après k_0 cycles (le cycle est la période qui s'étale entre deux instants discrets successifs t_k, t_{k+1}).



où ξ^f est le sous-état final désiré (cible) sur ξ, donné par (3.26). Ceci fait que la stabilité du système global (3.11)-(3.12) soit étroitement liée à la stabilité de la séquence

$$\big(\eta(t_k^-)\big)_{k\in\mathbb{N}} \tag{3.30}$$

sous l'hypothèse que (3.29) est vérifiée grâce à la poursuite exacte des trajectoires de référence. Cette hypothèse sous entend naturellement que cette poursuite exacte ne nécessite pas de commande en dehors des bornes admissibles physiquement (ce qui est vérifié a posteriori dans notre approche). Quant aux imperfections de la poursuite qui résultent de l'imperfection des boucles de commande locales, leur effet doit être englobé dans la marge de robustesse du résultat de la stabilité qui suit.

S'agissant d'un problème avec sauts et avec des trajectoires k_0 cyclique, une définition de la stabilité entendue dans ce travail est nécessaire.

Définition de la stabilité

La stabilité en question est illustrée sur la figure 3.5 pour le cas où $k_0 = 1$, et sur la figure 3.6 pour le cas où $k_0 = 3$.

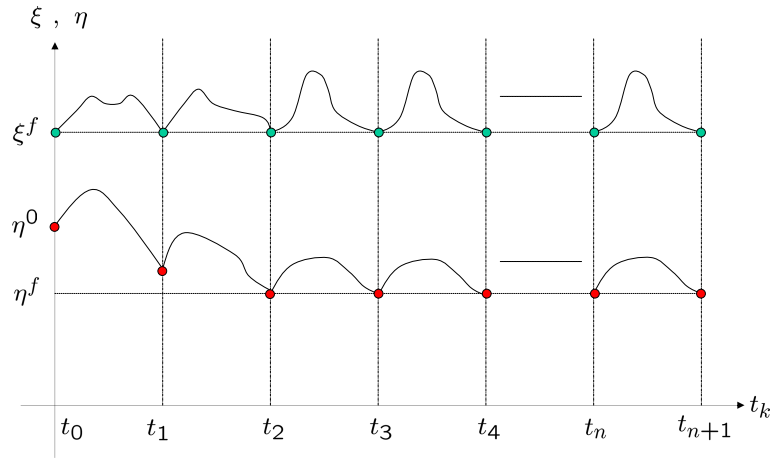


FIG. 3.5 – *Illustration de la stabilité (cas où $k_0 = 1$)*

En effet, d'après les deux figures, une trajectoire k_0-cyclique asymptotiquement stable sur l'état complet du système est obtenue si le système en boucle-fermée vérifie la condition suivante sur la dynamique interne :

$$\|\eta(t^-_{(j+1)k_0}) - \eta^f\|_Q^2 \leq \mu \|\eta(t^-_{jk_0}) - \eta^f\|_Q^2 \quad ; \quad \mu < 1 \tag{3.31}$$



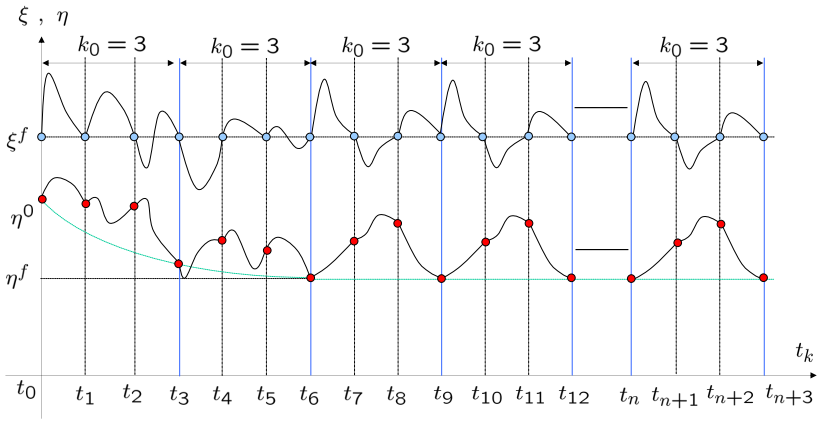


FIG. 3.6 – *Illustration de la stabilité (cas où $k_0 = 3$)*

une condition moins forte est de demander que les trajectoires du système en boucle fermée convergent asymptotiquement vers un voisinage d'une trajectoire k_0-cyclique. Ceci revient à ce que la condition suivante soit vérifiée, pour un certain ε positif

$$\lim_{j\to\infty} \|\eta(t^-_{jk_0}) - \eta^f\| \leq \varepsilon \tag{3.32}$$

Dans ce qui suit, on introduit le résultat principal concernant l'analyse de stabilité associée à la stratégie de commande proposée. Plus précisément, une proposition résumant les conditions nécessaires pour la stabilité est donnée. Ces conditions sont testées au moyen d'un outil graphique qui est proposé pour l'analyse de stabilité est basé de la section de Poincaré. Cet outil permet, en plus de l'analyse de stabilité, d'estimer la région d'attraction, ce qui n'est pas tout à fait trivial dans le cas général des systèmes non linéaires.

Résultat principal sur la stabilité

Dans la proposition suivante, le résultat principal concernant la stabilité est récapitulé.

Proposition 1

1. Convergence vers un cycle limite stable :

Si pour certains $k_0 \in \mathbb{N}$, $Q > 0$ et $\rho > 0$, l'application $F_{cl}^{k_0}$ définie par (3.28) *satisfait l'inégalité suivante :*

$$\forall\ r \in [0,\rho[\quad ; \quad \Psi_{k_0}^{Q}(r) := \left[\sup_{\|\eta-\eta^f\|_Q^2=r} \|F_{cl}^{k_0}(\eta,x^f) - \eta^f\|_Q^2\right] \leq \mu r \qquad ; \quad \mu < 1 \tag{3.33}$$

alors la trajectoire d'état en boucle fermée converge vers un cycle limite stable de longueur

k_0, ce qui peut être exprimé par :

$$\lim_{j\to\infty} x_{cl}(jk_0^-) = x^f \tag{3.34}$$

pour toute condition initiale $\xi(0^-) = \xi^f$ et $\eta(0^-) \in \mathbb{M}_\rho = B(\eta^f,\rho)$ où $B(\eta^f,\rho)$ est la boule centrée en η^f et de rayon ρ.

2. Convergence vers un voisinage d'un cycle limite stable :

Si pour certains $k_0 \in \mathbb{N}$, et $Q > 0$, il existe un réel $\rho > 0$, et un certain nombre positif $\varepsilon < \rho$ telle que les deux inégalités suivantes soient satisfaites :

$$\sup_{r\leq\varepsilon}\left[\Psi_{k_0}^Q(r)\right] \leq \varepsilon \tag{3.35}$$

et

$$\forall r \in]\varepsilon,\rho] \quad \Psi_{k_0}^Q(r) \leq \mu r \quad ; \quad \mu < 1 \tag{3.36}$$

alors l'ensemble $\mathbb{M}_\varepsilon$ défini par :

$$\mathbb{M}_\varepsilon := \left\{ \begin{pmatrix} \xi^f \\ \eta \end{pmatrix} \quad | \quad \|\eta - \eta^f\|_Q^2 \leq \varepsilon \right\} \tag{3.37}$$

est invariant et attractif pour la dynamique donnée par (3.28) pour toute condition initiale dans l'ensemble $\mathbb{M}_\rho$ défini par :

$$\mathbb{M}_\rho := \left\{ \begin{pmatrix} \xi^f \\ \eta \end{pmatrix} \quad | \quad \|\eta - \eta^f\|_Q^2 \leq \rho \right\} \tag{3.38}$$

Autrement dit, pour n'importe quelle condition initiale dans l'ensemble $\mathbb{M}_\rho$, la séquence de poincaré satisfait

$$\lim_{j\to\infty} \begin{pmatrix} \xi(jk_0\tau_c^-) \\ \eta(jk_0\tau_c^-) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_\varepsilon \tag{3.39}$$

Preuve :

1. Convergence vers un cycle limite stable :

L'inégalité (3.33) implique que pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\|\eta(t_{(j+1)k_0}) - \eta^f\|_Q^2 \leq \mu\|\eta(t_{jk_0}^-) - \eta^f\|_Q^2 \quad ; \quad \mu < 1 \tag{3.40}$$



par récurrence, et pour un certain $m \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\|\eta(t_{(j+m)k_0}) - \eta^f\|_Q^2 \leq \mu^m \|\eta(t_{jk_0}^-) - \eta^f\|_Q^2 \quad ; \quad \mu < 1 \tag{3.41}$$

étant donné que $\mu < 1$, ceci implique que

$$\lim_{j\to\infty} \eta(t_{jk_0}^-) = \eta^f \tag{3.42}$$

Cette dernière relation montre que les trajectoires en boucle-fermée convergent vers un cycle limite stable de longueur k_0 défini par le couple (ξ^f,η^f)

2. Convergence vers un voisinage d'un cycle limite stable :

Étant donné que (3.35) est satisfaite, alors l'ensemble $\mathbb{M}_\varepsilon$ est invariant.

De plus pour toute condition initiale dans l'ensemble $\mathbb{M}_\rho$, sous la condition (3.36), tant que l'image de la section de Poincaré est en dehors de l'ensemble $\mathbb{M}_\varepsilon$, on a nécessairement

$$\|\eta(t_{jk+k_0}) - \eta^f\|_Q^2 \leq \mu \|\eta(t_{jk}) - \eta^f\|_Q^2$$

ce qui nous permet d'en déduire que $\mathbb{M}_\varepsilon$ est attractif.

Remarque 11

- *L'utilisation de l'application multi-pas $F_{cl}^{k_0}(\cdot)$ est très importante pour l'analyse de stabilité. Le calcul nécessaire repose sur la solution du problème d'optimisation qui est effectuée hors ligne. Cependant, l'optimisation effectuée dans le calcul du retour d'état utilise une application mono-pas, et le calcul dans ce cas s'effectue en ligne.*
- *Il est important de souligner que lors de la vérification des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité, un calcul hors ligne de l'application :*

$$\Psi_{k_0}^Q(r) := \sup_{\|\eta-\eta^f\|_Q^2=r} \|F_{cl}^{k_0}(\eta,x^f) - \eta^f\|_Q^2 \tag{3.43}$$

est effectué pour des valeurs croissantes de r. La possibilité d'effectuer un tel calcul dans la pratique vient du fait que pour un grand nombre des systèmes mécaniques abordés classiquement, la dimension n_η du sous-état η (la dynamique interne) est relativement petite par rapport à la dimension de l'état complet du système. A titre d'exemple pour le robot marcheur bipède en question $n_\eta = 2$ alors que $n = 10$. Pour la bille sur le rail, et le pendule inversé ECP 505, $n_\eta = 2$ et $n = 4$.
- *Il faut souligner que l'ensemble des conditions initiales conduisant à des trajectoires stables en boucle-fermée, est plus large que la région d'attraction estimée par la proposition 1. Ceci provient du fait que les calculs (3.43) sont basés sur le cas le plus défavorable.*



– *Selon l'analyse de stabilité fondée sur la proposition* 1*, c'est plutôt l'impact de la trajectoire en boucle-fermée, avec la section de Poincaré, qui converge vers* x_f *(cas du point 1 de la propoition* 1*), ou un voisinage* $\mathbb{M}_\varepsilon$ *(cas du point 2 de la proposition* 1*). Cependant, le comportement de la trajectoire globale, entre deux impacts successifs, dépend de la trajectoire du système résultant sous la condition initiale* x_f*.*

3.4 Applications

Afin d'illustrer l'approche de commande proposée, quelques exemples d'application sont envisagés, à savoir des exemples académiques sont proposés. L'application de la méthodologie de commande à la marche du robot biped RABBIT fera l'objet d'un chapitre dédié.

L'ensemble des applications introduites par la suite comprend quatre exemples, à savoir trois systèmes dynamiques sans discontinuités (sans sauts sur l'état) et un système hybride. Les systèmes continus incluent un système non linéaire dont le linéarisé est non commandable, la bille sur le rail, et le pendule inversé modèle 505 d'ECP. Tandis que le quatrième exemple concerne le système dynamique chaotique hybride de Lorenz modifié.

Pour chaque application deux simulations sont proposées permettant d'atteindre deux types d'objectifs, à savoir la stabilisation classique autour d'un point d'équilibre, et la génération de cycles limites stables. Des tests de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques sont également proposés.

Note : pour les différents exemples d'application envisagés, il s'agit de systèmes non linéaires. Ces systèmes peuvent avoir plusieurs points d'équilibre, néanmoins les simulations relatives à la stabilisation autour du point d'équilibre, concernent principalement l'origine. Pour tout autre point d'équilibre, la procédure reste la même, il suffit de changer ξ^f et η^f.

3.4.1 Application 1 : un système non linéaire dont le linéarisé est non commandable

Le système en question est décrit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha\ u \\ \dot{x}_2 = -1.5\ x_2(x_2 + x_3) + \beta\ x_3\ u \\ \dot{x}_3 = x_2\ x_3 + \sin(x_1) + \gamma(1 - \cos(x_1))\ u \end{cases} \tag{3.44}$$



les trois paramètres α, β, et γ agissent sur la dynamique du système, leurs valeurs seront données lors de la présentation des résultats de simulation. Le vecteur d'état x est donné par :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \tag{3.45}$$

le système d'équation (3.44) peut être mis sous la forme (3.4), avec les fonctions f et g données par

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5\ x_2(x_2 + x_3) \\ x_2\ x_3 + \sin(x_1) \end{pmatrix} \quad ; \quad g(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\ x_3 \\ \gamma(1 - \cos(x_1)) \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

L'origine est un point d'équilibre instable pour le système non linéaire en boucle ouverte. La linéarisation du système autour de ce point d'équilibre donne le linéarisé suivant :

$$\dot{x} = A\ x + B\ u \tag{3.47}$$

où les matrices A, et B sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul de la matrice de commandabilité montre clairement que ce système linéarisé n'est pas commandable. En choisissant $\tau_c = 1$, et en appliquant le lemme 1 ce système de dimension 3 peut être étendu à un système de dimension 4 sous la forme (3.1)-(3.2). En outre par le biais du lemme 2, il est possible de vérifier que le système admet une application de sortie compatible, qui peut être construite avec $h(x) = x_1$. Ceci conduit aux définitions suivantes des sous-états ξ et η

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4^e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \eta = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 \tag{3.48}$$

où x_4^e est l'état supplémentaire, rajouté pour étendre le système selon le lemme 1. Les résultats de simulation concernant cet exemple sont présentés par la suite.

3.4.2 Application 1 : résultats de simulation

On considère le système présenté ci-dessus, avec les valeurs numériques suivantes de ses paramètres α,β, et γ

$$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = 0.4 \quad ; \quad \gamma = 0.5 \tag{3.49}$$



les trajectoires de référence $T(x_1^0,p,0)$ à poursuivre doivent respecter les contraintes suivantes :

Conditions sur la position :

$$T(x_1^0,p,0) = x_1^0 \quad ; \quad T(x_1^0,p,\tau_c) = x_1^f \quad ; \quad T(x_1^0,p,\frac{\tau_c}{2}) = p \tag{3.50}$$

Ce qu'il faut noter ici est que le paramètre d'optimisation scalaire étant la valeur de x_1 (l'état directement commandé) au milieu de la période d'un cycle

$$p = x_1(\tau_c/2)$$

d'autre part, ce choix n'est qu'un exemple, bien évidement une multitude de choix est possible, à titre d'exemple il peut être l'état x_1 à n'importe quel instant entre 0 et τ_c. Il peut également être la vitesse initiale, i.e. $\dot{x}_1(0)$, ou finale $\dot{x}_1(t_f)$, ...etc.

Conditions sur la première dérivée (vitesse) :

$$\dot{T}(x_1^0,p,0) = \dot{x}_1^0 \quad ; \quad \dot{T}(x_1^0,p,\tau_c) = \dot{x}_1^f \tag{3.51}$$

La matrice de pondération dans le critère d'optimisation est choisie comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

La période de commutation est :

$$\tau_c = 1 \; sec$$

Deux simulations sont envisagées:

Application 1 : stabilisation d'une position d'équilibre

A partir d'une certaine condition initiale, l'objectif consiste à stabiliser le système en position d'équilibre. Le choix des sous-états désirés, correspondant à la stabilisation est le suivant (cf. (3.50),(3.51))

$$\xi^f = x_1^f = 0 \quad ; \quad \eta^f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Le comportement du système en boucle-fermée sous le contrôleur proposé peut être vu sur la figure 3.7. Elle représente l'evolution des trajectoires d'état en boucle fermée , ainsi que le plan de phase de la dynamique interne. L'évolution de l'entrée de commande est représentée sur la figure 3.8.(a).



Analyse de stabilité

L'analyse de stabilité du système en boucle fermée est basée sur la proposition 1. L'utilisation d'une telle proposition nécessite de tracer l'application $\Psi_{k_0}^{Q}(r)$ pour des valeurs croissantes de $r = \|\eta - \eta^f\|_Q^2$, et pour différentes valeurs de k_0. Cette courbe est représentée sur la figure 3.8.(b). Selon la proposition 1, les conditions suffisantes de stabilité du point 2 sont satisfaites avec les valeurs numériques suivantes des paramètres k_0,ρ,ε

$$(k_0,\rho,\varepsilon) = (3,0.098,0.022)$$

Donc les conditions sont remplies pour $k_0 = 3$, alors qu'elles ne le sont pas pour $k_0 = 1$, et 2, et ceci justifie bien l'utilisation de l'application multi-pas.

Robustesse vis-à-vis des incertitudes paramètriques

Soit le modèle du système (3.44), avec les paramètre α,β,γ donnés par (3.49). Ces paramètres sont supposés entachés d'incertitudes, ceci peut être exprimé par :

$$\alpha_u = \alpha \pm \Delta\alpha \quad ; \quad \beta_u = \beta \pm \Delta\beta \quad ; \quad \gamma_u = \gamma \pm \Delta\gamma \tag{3.52}$$

Les incertitudes Δ sur les trois paramètres sont de 10% de leurs valeurs nominales.

Le comportement du système incertain en boucle-fermée dans le cas d'une stabilisation autour du point d'équilibre, à partir de la condition initiale $x = (0.75,0.4,0.5)^T$ est représenté sur la figure 3.9. Elle représente différentes courbes correspondent aux différents cas possibles suivant les signes des incertitudes.

Application 1 : génération de cycles limites stables

La génération de cycles limites stables est le cas général de l'application de cette approche de commande. L'objectif est de reproduire périodiquement un état cible sur les coordonnées directement commandées. Autrement dit aux instants notés t_k^-, qui correspondent aux instants juste avant les commutations.

Le cas d'un cycle limite est obtenu avec un choix approprié des sous-états cibles, sur les coordonnées directement commandées. Ce choix est différent de celui qui correspond au point d'équilibre du système (cas de la stabilisation d'une position d'équilibre). A titre d'exemple notre choix s'est porté sur les sous-états suivants

$$\xi^f = x_1^f = 0.7 \quad ; \quad \eta^f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T \tag{3.53}$$



Le système en boucle-fermée se comporte comme un oscillateur. En effet l'évolution des états du système en fonction du temps est représentée sur la figure 3.10, aussi bien que le plan de phase des variables indirectement commandées (dynamique interne).

L'entrée de commande correspondante générée par le contrôleur proposé est illustrée sur la figure 3.11.(a).

D'après les courbes de simulation obtenues, on constate que les trajectoires du système en boucle fermée convergent bien vers un voisinage d'un cycle limite stable. Ceci est confirmé par l'analyse de stabilité qui suit :

Analyse de stabilité

L'outil graphique pour l'analyse de stabilité, repose sur le tracé de la courbe de l'application multi-pas $\Psi_{k_0}^{Q}(r)$. Cette courbe est tracée sur la figure 3.11.(b).

D'après les trois courbes, correspondantes aux valeurs 1, 2, et 3 de k_0, on constate que les conditions suffisantes du point 2 de la proposition 1 sont vérifiées pour les deux cas suivants :

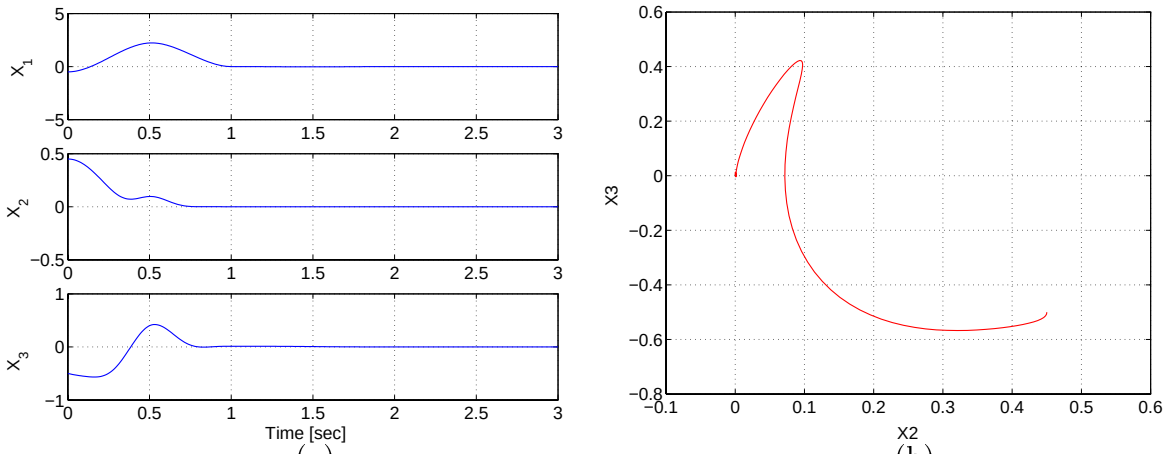
cas 1 : $(k_0,\rho,\epsilon) = (2\ ,\ 0.1\ ,\ 0.0248)$

cas 2 : $(k_0,\rho,\epsilon) = (3\ ,\ 0.176\ ,\ 0.0245)$

D'après la proposition 1, les trajectoires en boucle fermée convergent vers un voisinage d'un cycle limite défini par $\mathbb{M}_\varepsilon$ (cf. (3.37)), pour toute condition initiale dans $\mathbb{M}_\rho$ (cf. (3.38)). $\mathbb{M}_\rho$ définit la région d'attraction.

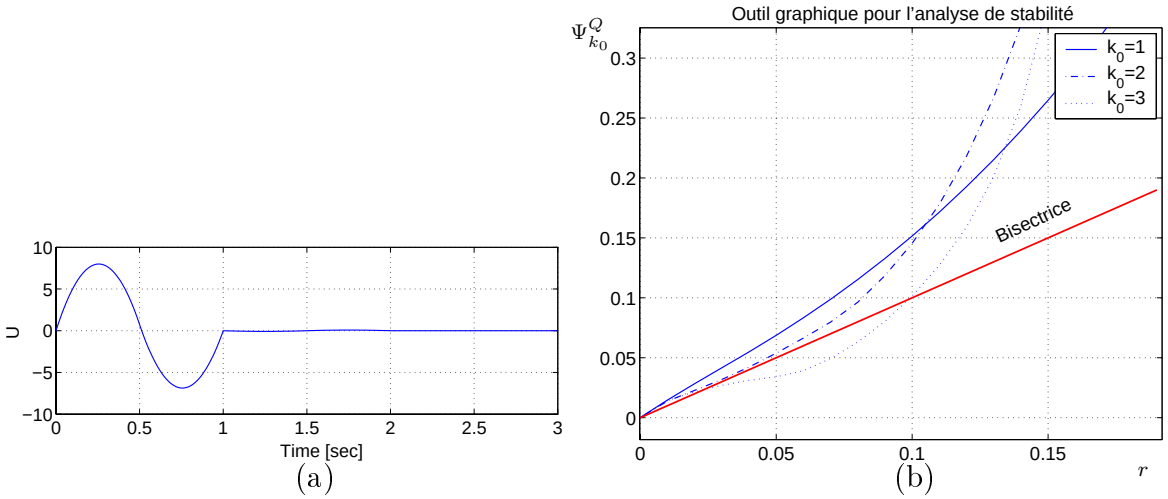
Différentes conditions initiales sont ensuite testées avec les mêmes paramètres de commande. Les résultats de la figure 3.12 semble montrer la convergence vers un voisinage du même cycle limite caractérisé par le choix des états finaux désirés ξ^f, η^f et la période de commutation τ_c.





(a) (b)

FIG. 3.7 – *Application 1 (stabilisation) : évolution dans le temps des états en boucle fermée (a), plan de phase de la dynamique interne η (b)*



(a) (b)

FIG. 3.8 – *Application 1 (stabilisation) : évolution dans le temps de l'entrée de commande (a), courbe d'analyse de stabilité (b) : les conditions suffisantes du point 2 de la proposition 1 sont satisfaites pour $k_0 = 3$*

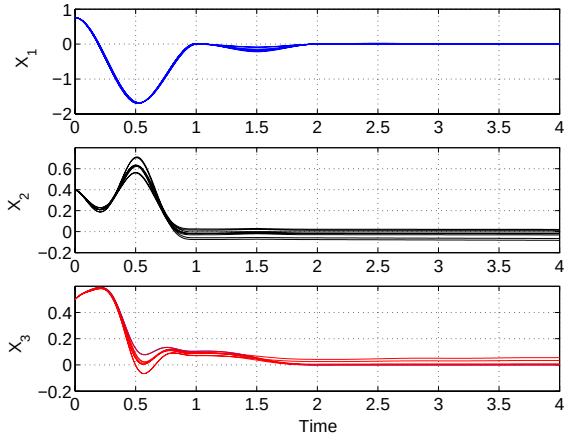
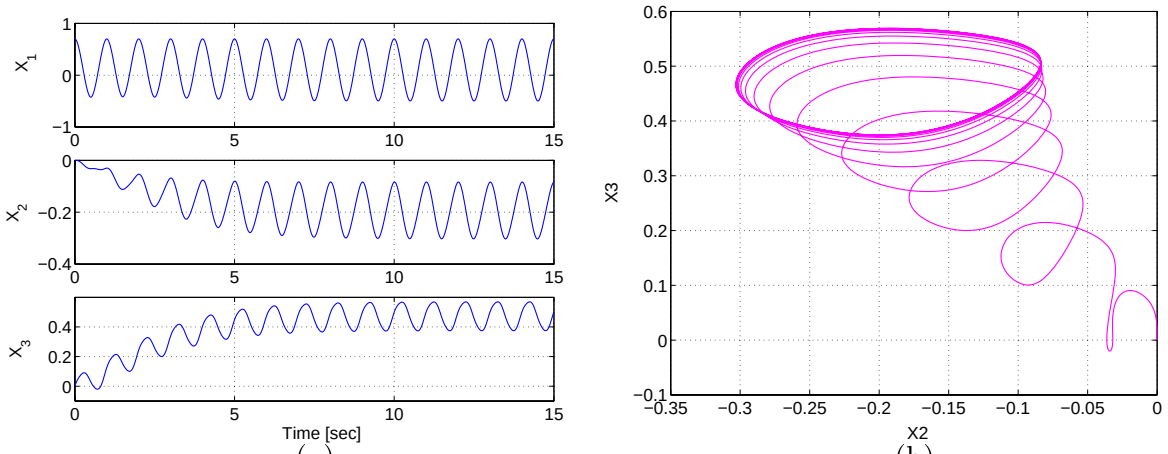
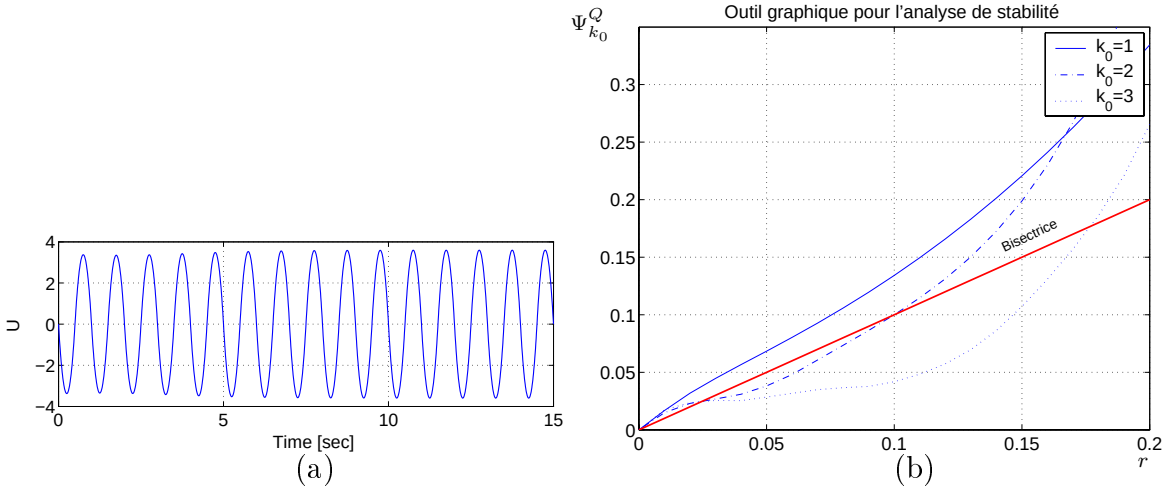


FIG. 3.9 – *Application 1 (stabilisation - test de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques) : évolution dans le temps des états du système incertain en boucle fermée*



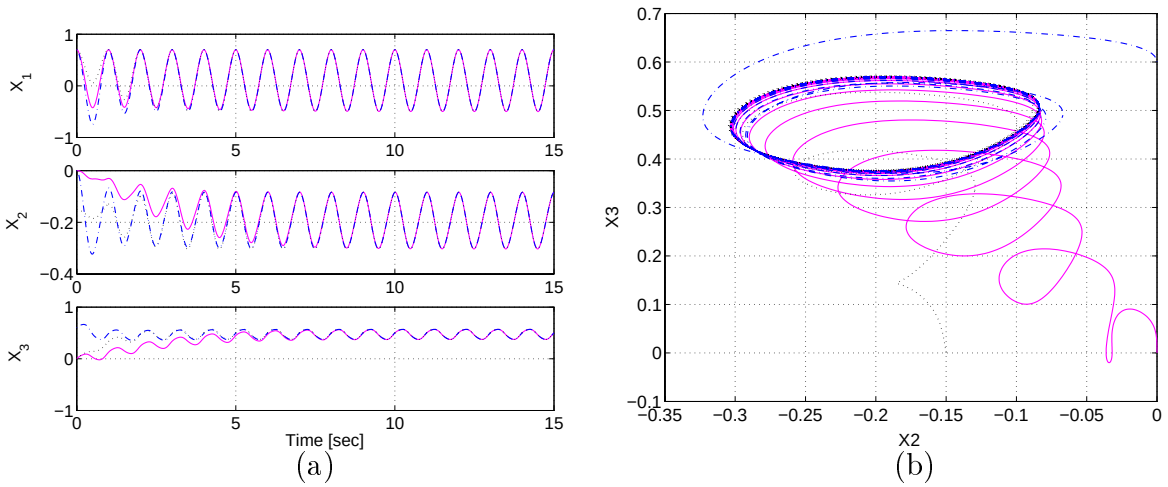
(a) (b)

FIG. 3.10 – *Application 1 (génération de cycles limites) : évolution dans le temps des états du système en boucle fermée (a), plan de phase de la dynamique interne η (b)*



(a) (b)

FIG. 3.11 – *Application 1 (génération de cycles limites) : évolution dans le temps de l'entrée de commande (a), courbe d'analyse de stabilité (b) : les condition suffisantes de stabilité du point 2 de la proposition 1 sont vérifiées pour $k_0 = 2$ et 3*



(a) (b)

FIG. 3.12 – *Application 1 (génération de cycles limites : simulation à partir de différentes conditions initiales) : évolution des états en boucle fermée (a), plan de phase de η (b)*

3.4.3 Application 2 : la bille sur le rail

Le deuxième exemple d'application est un système mécanique sous-actionné. Il s'agit de la bille sur le rail.

Description du système

Un des systèmes bien connus en automatique est la bille sur le rail[6] (cf. figure 3.14). Schématisé sur la figure 3.13, le système comporte une barre rigide portant un rail. Ce dernier est mobile autour d'un axe horizontale, son moment d'inertie est J. Son angle de rotation θ par rapport à l'horizontale est commandé par un moteur à courant continu qui lui applique un couple u. Une bille (de masse m, de rayon R, et de moment d'inertie J_b) est placée sur le rail où elle est capable de se déplacer le long du rail avec un degré de liberté sous l'effet de la gravité.

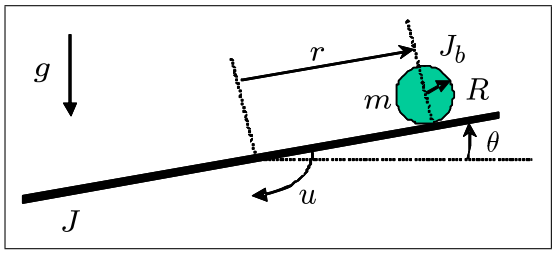


FIG. 3.13 – *Schéma synoptique de la bille sur le rail*



FIG. 3.14 – *Plate-forme expérimentale de la bille sur le rail*

Modèle dynamique

Le modèle dynamique régissant le système en boucle ouverte peut être exprimé par les équations suivantes (cf. [43])

$$\begin{cases} (m\ r^2 + J + J_b)\ddot{\theta} + 2\ m\ r\ \dot{r}\ \dot{\theta} + m\ g\ r\ \cos\theta\ =\ u \\ \ddot{r} - B\ r\ \theta\ \dot{\theta}^2 + B\ g\ \sin\theta\ =\ 0 \end{cases} \quad ;\quad avec \quad B = \frac{m}{\frac{J_b}{R^2} + m} \tag{3.54}$$

soit le vecteur d'état suivant :

$$x = \begin{pmatrix} \theta & r & \dot{\theta} & \dot{r} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$$

6. Une plate-forme expérimentale de ce système est localisée à : http://www.lag.ensieg.inpg.fr/fr/realisationsIndex.php



le modèle dynamique (3.54) prend la forme (3.4) avec f et g définies par

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{-2m}{C} x_2 x_3 x_4 - \frac{mgx_2}{C} \cos x_1 \\ Bx_1 x_2 x_3 - Bg \sin x_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad avec \quad C = mx_2^2 + J + J_b \tag{3.55}$$

Par application du lemme 1, le système τ_c-étendu peut être obtenu. Une application de sortie compatible est construite avec $h(x) = \theta$, ce qui conduit à

$$\xi = \begin{pmatrix} \theta & \dot{\theta} & x_5^e \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \eta = \begin{pmatrix} r & \dot{r} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 \tag{3.56}$$

où x_5^e est l'état additionnel évoqué dans le lemme 2 dans le but d'étendre le système continu. Les simulations de la commande de ce système selon la méthodologie proposée dans ce chapitre sont présentées par la suite.

3.4.4 Application 2 : résultats de simulation

Dans cette section les principaux résultats de simulations obtenus sont présentés. Comme pour la première application, l'approche de commande proposée est appliquée dans deux contextes: la stabilisation autour du point d'équilibre, et la génération de cycles limites stables.

Afin de faciliter la manipulation des courbes et des résultats de simulation, Une interface graphique a été développée en utilisant le `GUI` de `Matlab`, elle permet également la visualisation du système en mouvement. Une vue de cette interface est représentée sur la figure 3.15.

On considère le modèle dynamique (3.54) du système avec les valeurs numériques des paramètres récapitulées dans le tableau 3.1. En ce qui concerne le choix du paramètre d'op-

Paramètre	**Signification**	**valeur**
m	masse de la bille	0.11 kg
R	rayon de la bille	0.015 m
J_b	moment d'inertie de la bille	9.99 10^{-6} $kg.m^2$
r	position linéaire de la bille	variable
L	longueur du rail	1.0 m
J	moment d'inertie du rail	0.125 $kg.m^2$
θ	l'angle du rail par rapport à l'horizontale	variable
g	la gravité	9.8 $m.s^-2$

TAB. 3.1 – *Paramètres géométriques et dynamiques de la bille sur le rail*



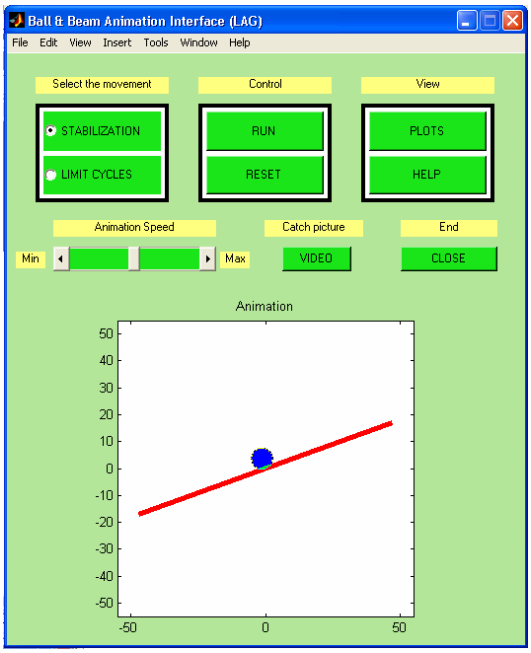


FIG. 3.15 – *Interface graphique pour la bille sur le rail (réalisé avec* `GUI` *de* `matlab` *)*

timisation p, il correspond (de la même façon que dans la première application) à la valeur de la coordonnée directement actionnée à l'instant qui se situe au milieu de la période de commutation.

Les trajectoires admissibles à poursuivre sur les coordonnées directement commandées doivent vérifier les conditions aux limites suivantes[7] :

Conditions sur la position : $T(\xi_0,p,0) = \theta^0 \quad ; \quad T(\xi^0,p,\frac{\tau_c}{2}) = p \quad ; \quad T(\xi^0,p,\tau_c) = \theta^f$

Conditions sur la vitesse : $\dot{T}(\xi^0,p,0) = \dot{\theta}^0 \quad ; \quad \dot{T}(\xi^0,p,\tau_c) = \dot{\theta}^f$

Dans les simulations envisagées, la matrice de pondération qui figure dans le critère d'optimisation (3.25) a été choisie comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

La période de commutation est donnée par :

$$\tau_c = 0.85 \ sec$$

7. Un paramètre scalaire p est libéré sur ses trajectoires, il est calculé par optimisation (cf. (3.25)).

Application 2 : stabilisation autour de la position d'équilibre

Pour le cas de la stabilisation, les sous-états cibles sont choisis comme suit :

$$\xi^f = (\theta^f, \dot{\theta}^f) = 0 \quad ; \quad \eta^f = (r^f, \dot{r}^f) = 0$$

Les résultats sont présentés sur les figures 3.16-3.17.

Pour l'analyse de stabilité, la démarche à suivre est identique à celle de l'application 1. Elle se base sur la proposition 1. La courbe de l'application $\Psi_{k_0}^Q(r)$ pour des valeurs croissantes de $r = \|\eta - \eta^f\|_Q^2$ conduit à la courbe montrée sur la figure 3.16.(a). Elle montre que les conditions du premier point de la proposition 1 sont satisfaites pour :

$$(k_0, \rho)_1 = (2, 0.28) \quad ; \quad (k_0, \rho)_2 = (3, 0.42)$$

Ceci nous permet de conclure que les trajectoires en boucle fermée convergent vers un cycle limite stable d'ordre $k_0 = 2$.

Application 2 : robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques

Le même modèle dynamique du système en question (la bille sur le rail) est considéré. Avec l'hypothèse que les moments d'inertie de la bille et du rail sont identifiés avec des incertitudes par rapport à leur valeurs nominales

$$J_{bu} = J_b \pm \Delta J_b \quad ; \quad J_u = J \pm \Delta J$$

Chaque incertitude est de 50% de la valeur nominale correspondante. Le comportement du système en boucle fermée est montré sur la figure 3.18, laissant entrevoir un bon comportement en présence des incertitudes.

Application 2 : génération de cycles limites stables

Ce scénario correspond aux choix suivant des sous-états désirés ξ^f, et η^f

$$\xi^f = (\theta^f, \dot{\theta}^f)^T = \begin{pmatrix} 20^\circ & 10^\circ/s \end{pmatrix}^T \quad ; \quad \eta_f = 0$$

L'analyse de stabilité utilise toujours la proposition 1 et la courbe de l'application $\Psi_{k_0}^Q(r)$ calculée par optimisation hors ligne. Elle est représentée sur la figure 3.19.(a). En examinant cette courbe, il est possible de vérifier que les conditions de stabilité du deuxième point de la proposition 1 sont satisfaites, avec :

$$(k_0, \rho, \varepsilon) = (3 \ , \ 0.67 \ , \ 0.028)$$



par conséquent, pour toute condition initiale dans l'ensemble :

$$\mathbb{M}_\rho = \mathbb{M}_{0.67} := \left\{ \begin{pmatrix} \xi^f \\ \eta \end{pmatrix} \quad | \quad \|\eta - \eta^f\|_Q^2 \leq 0.67 \right\} \tag{3.57}$$

Le système dynamique projeté sur la section de Poincaré converge vers l'ensemble :

$$\mathbb{M}_\varepsilon = \mathbb{M}_{0.028} := \left\{ \begin{pmatrix} \xi^f \\ \eta \end{pmatrix} \quad | \quad \|\eta - \eta^f\|_Q^2 \leq 0.028 \right\} \tag{3.58}$$

L'évolution des différentes coordonnées du système, à savoir θ,$\dot{\theta}$,r, et $\dot{r}$ sont tracées sur la figure 3.20. La figure 3.19.(b) montre l'évolution de la trajectoire de commande, ainsi que le plan de phase (position/vitesse) de la coordonnée non actionnée.

Application 2: Commutation entre différents cycles limites

Le but de cette simulation est de montrer qu'il est possible de permuter en ligne entre différents cycles limites. Pour cela il suffit de changer les sous-états ξ^f, et η^f. Soit la séquence suivante des différentes valeurs de ξ^f, quant à η^f, il est gardé inchangé :

- $\xi^f = \begin{pmatrix} +20° & +10°/s \end{pmatrix}$ *pour* $k = 1 \ldots 10$
- $\xi^f = \begin{pmatrix} +15° & -70°/s \end{pmatrix}$ *pour* $k = 11 \ldots 20$
- $\xi^f = \begin{pmatrix} +5° & -110°/s \end{pmatrix}$ *pour* $k = 21 \ldots 30$

Trois courbes de simulation correspondant à ce scénario sont représentées sur la figure 3.21. Il s'agit du plan de phase de la dynamique interne η, l'évolution de l'entrée de commande dans le temps, ainsi que l'évolution du paramètre d'optimisation.

D'après le plan de phase, il y a trois cycles limites différents, dont chacun correspond à un choix de ξ^f, comme cela a été fixé ci-dessus. La commutation entre les différents cycles limites semble lisse.



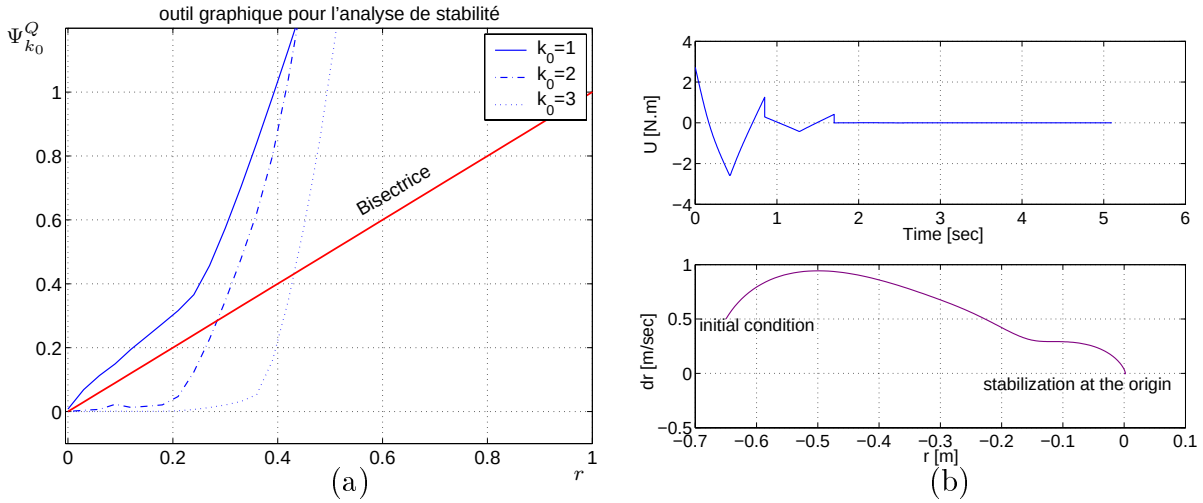


FIG. 3.16 – *Application 2 (stabilisation) : courbe d'analyse de stabilité : les conditions suffisantes du point 1 de la proposition 1 sont satisfaites pour $k_0 = 2{,}3$ (a), évolution dans le temps de l'entrée de commande (b)haut, plan de phase de η (b)bas*

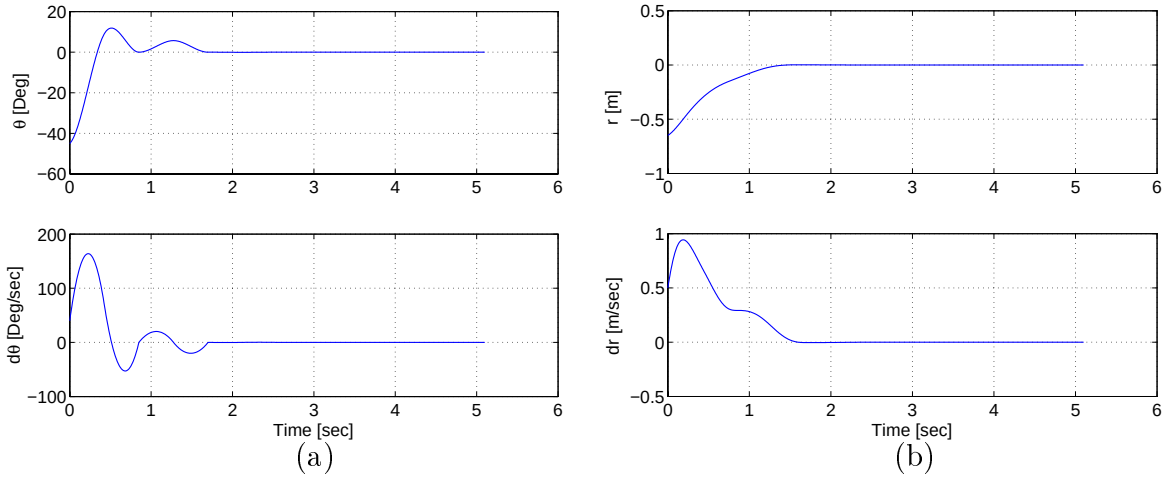


FIG. 3.17 – *Application 2 (stabilisation) : évolution dans le temps de la position et la vitesse angulaires du rail (a), position et vitesse linéaire de la bille (b)*

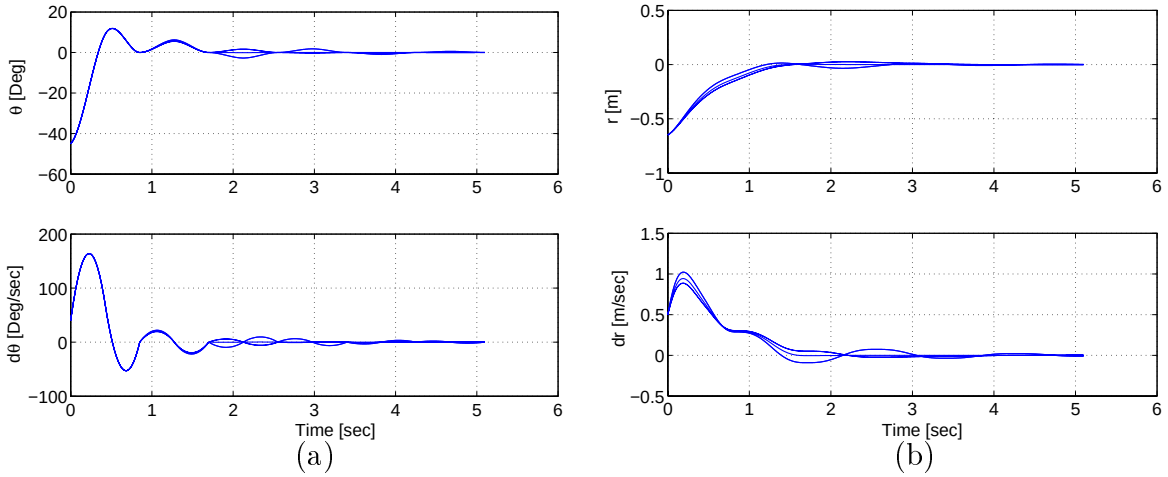


FIG. 3.18 – *Application 2 (stabilisation - robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques) : évolution des états du système incertain en boucle fermée*

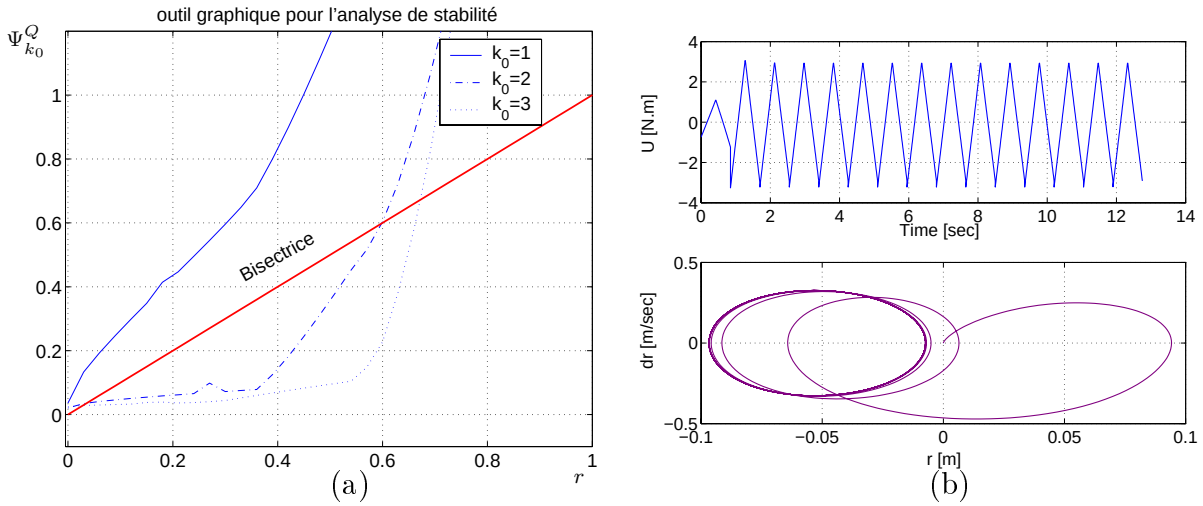


FIG. 3.19 – *Application 2 (génération de cycles limites) : courbe d'analyse de stabilité (a) : les conditions suffisantes du point 2 de la proposition 1 sont vérifiées pour $k_0 = 2{,}3$, évolution de l'entrée de commande (b)haut, plan de phase de η (b)bas*

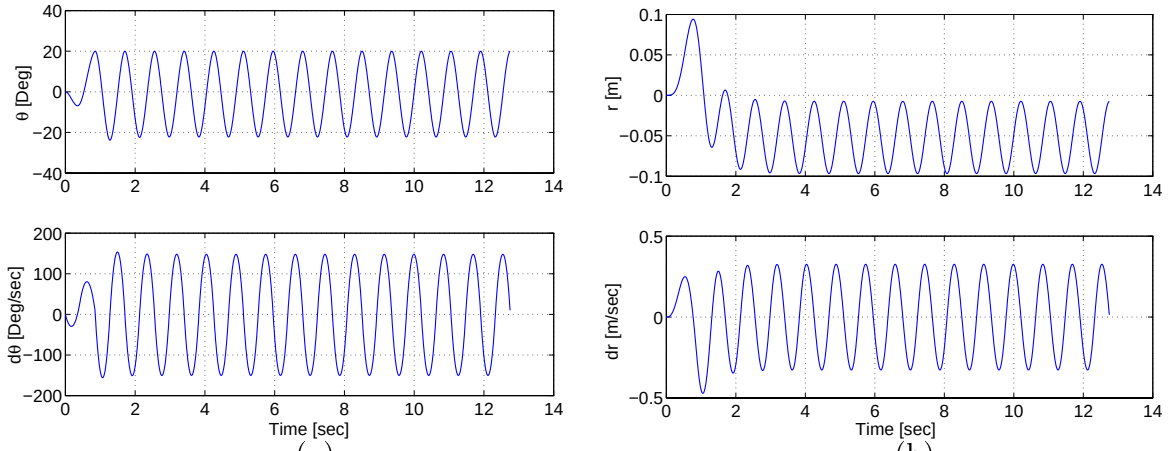


FIG. 3.20 – *Application 2 (génération de cycles limites) : position et vitesse angulaires du rail (a), position et vitesse linéaires de la bille (b)*

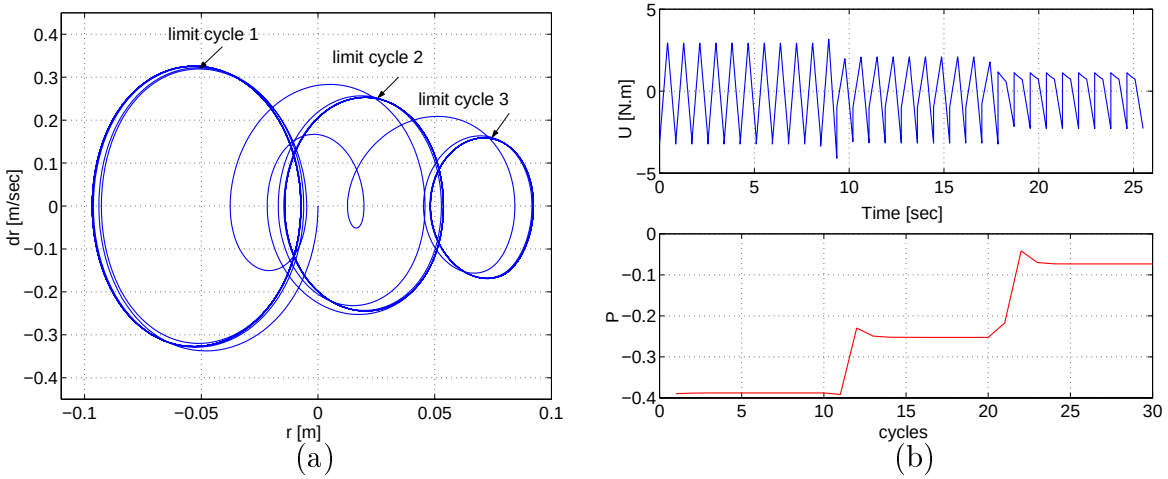


FIG. 3.21 – *Application 2 (génération cycles limites : permutation entre cycles limites) plan de phase de η (a), entrée de commande associée (b)haut, paramètre d'optimisation (b)bas*



3.4.5 Application 3 : le pendule inversé modèle ECP 505

L'approche de commande proposée est applicable à une large gamme de systèmes mécaniques dits sous-actionnés. A titre d'exemple on introduit encore un autre système de cette famille. Il s'agit du pendule inversé ECP [8] modèle 505.

Description du système

Ce système est représenté sur la figure 3.22, il comporte une bare verticale qui supporte une autre barre glissante, commandée en position par le biais d'un moteur à courant continu fixé au bout de la barre verticale. La transmission du mouvement du moteur à la barre glissante est assurée par une tige traversant la barre verticale, et un système courroie-poulie. Ce pendule est différent du pendule inversé classique, dans la mesure où la commande de la barre verticale se fait à travers la barre glissante, au lieu d'un chariot qui se déplace horizontalement.

Le centre de gravité de la barre verticale peut être déplacé en ajustant le contre poids fixé en bas, et par conséquent la dynamique du système peut être altérée.

La position et la vitesse de la barre glissante sont mesurées au moyen d'un codeur incrémental, fixé sur le moteur. La position et la vitesse angulaire de la barre verticale sont mesurées par un autre codeur fixé au pivot entre cette barre et la base du pendule.

Modèle dynamique

L'application du formalisme de Lagrange permet d'obtenir le modèle dynamique décrivant le système.

Sous l'hypothèse que les frottements sont négligés, la dynamique du système peut être décrite par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} m_1\ \ddot{r} + m_1 l_0 \ddot{\theta} - m_1 r \dot{\theta}^2 - m_1 g \sin\theta = F(t) \\ m_1 l_0 \ddot{r} + J_0(r)\ddot{\theta} + 2m_1 r \dot{r}\dot{\theta} - (m_1 l_0 + m_2 l_c) g \sin\theta - m_1 g \cos\theta = 0 \end{cases} \tag{3.59}$$

où les deux coordonnées généralisées sont

θ : l'angle de la barre du pendule par rapport à la verticale, et

r : la position du centre de gravité de la barre glissante (notée x sur la figure 3.23).

le terme J_0 dans la dynamique du système est donné par :

$$J_0 = J_1 + J_2 + m_1(l_0^2 + r^2) + m_2 l_c^2$$

8. Educational Control Products : http://www.ecpsystems.com/





FIG. 3.22 – *Le pendule inversé ECP 505*

Les différents paramètres employés dans le modèle dynamique sont illustrés sur la figure 3.23, et le tableau 3.3

En réécrivant les équations du modèle dynamique (3.59), afin d'isoler les dérivées secondes, on obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{J_0(r)}{J_c} r\dot{\theta}^2 + \frac{2m_1 l_0}{J_c} r\dot{r}\dot{\theta} - \frac{m_1 l_0 g}{J_c}\cos\theta + g\sin\theta + \frac{J_0(r)}{m_1 J_c} F(t) \\ \ddot{\theta} = -\frac{m_1 l_0}{J_c} r\dot{\theta}^2 - \frac{2m_1}{J_c} r\dot{r}\dot{\theta} + \frac{m_1 g}{J_c}\cos\theta - \frac{l_0}{J_c} F(t) \end{cases} \quad ; \quad J_c = J_0(r) - m_1 l_0^2 \quad (3.60)$$

En adoptant le vecteur d'état suivant

$$x = \begin{pmatrix} r & \theta & \dot{r} & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$$

le modèle dynamique (3.60) peut être mis sous la forme (3.4), avec les fonction continues f et g définies comme suit :

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{J_0(x_1)}{J_c} x_1 x_4^2 + \frac{2m_1 l_0}{J_c} x_1 x_3 x_4 - \frac{m_1 l_0 g}{J_c}\cos x_2 + g\sin x_2 \\ -\frac{m_1 l_0}{J_c} x_1 x_4^2 - \frac{2m_1}{J_c} x_1 x_3 x_4 + \frac{m_1 g}{J_c}\cos x_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_0(x_1)}{m_1 J_c} \\ \frac{l_0}{J_c} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Par application du lemme 1, le système τ_c-étendu peut être obtenu. Une application de sortie compatible est construite avec $h(x) = r = x_1$, ce qui conduit à :

$$\xi = \begin{pmatrix} r & \dot{r} & x_5^e \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \eta = \begin{pmatrix} \theta & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 \quad (3.62)$$

où x_5^e est l'état additionnel engendré par l'extension du système continu selon le lemme 2.

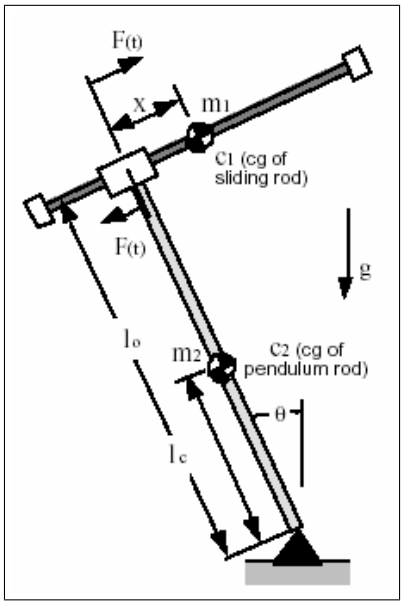


FIG. 3.23 – *Schéma synoptique du pendule inversé ECP 505*

3.4.6 Application 3 : résultats de simulation

Une description détaillée du système a été proposée ci-dessus. Ici, quelques scénarios de simulation sont envisagés afin de montrer le comportement du système bouclé avec la loi de commande proposée.

Le modèle dynamique du système donné par (3.60) est considéré avec le choix des différents paramètres du modèle, récapitulé dans le tableau 3.3.

Pour une certaine souplesse dans les simulations, et pour faciliter également la manipulation des courbes de simulation ainsi que la visualisation du système en mouvement, une interface graphique à été développée en utilisant le `GUI` de `Matlab`. La figure 3.24 représente le panneau de commande, alors que le fenêtre graphique est illustré sur la figure 3.25. Cette interface permet de lancer et d'arrêter l'animation à tout moment, tracer les courbes de simulation, générer la séquence vidéo, ... etc.

Application 3 : stabilisation

Pour ce scénario, les paramètres de conception de l'approche de commande sont regroupés dans le tableau 3.2.

Le scénario de simulation considéré consiste à stabiliser le système en partant de différentes

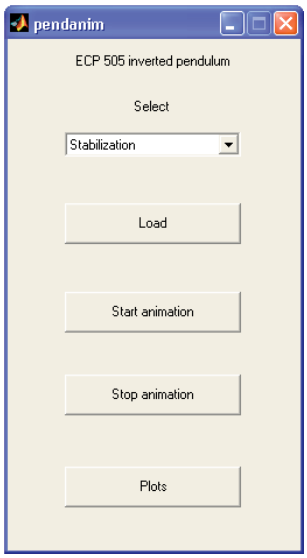


FIG. 3.24 – *Le panneau de commande*

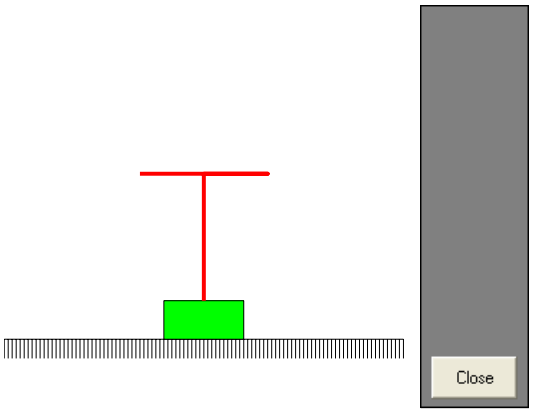


FIG. 3.25 – *La fenêtre graphique*

Paramètre	Signification	Valeur
τ_c	période d'un cycle	$0.75sec$
Q	matrice de pondération	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$
p	paramètre d'optimisation	$r(t_k + \frac{\tau_c}{2})$
ξ^f	sous-état final désiré sur ξ	0
η^f	sous-état final désiré sur η	0

TAB. 3.2 – *Paramètres de l'approche de commande*

conditions initiales résumées ci-dessous

$$\xi^0_{1,2,3} = \left[\begin{pmatrix} 0.1m \\ 0.1m/s \end{pmatrix}_1 \quad \begin{pmatrix} 0.25m \\ 0.15m/s \end{pmatrix}_2 \quad \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.15 \end{pmatrix}_3 \right]$$

$$\eta^0_{1,2,3} = \left[\begin{pmatrix} -45° \\ 10°/s \end{pmatrix}_1 \quad \begin{pmatrix} -11.5° \\ -28.5°/s \end{pmatrix}_2 \quad \begin{pmatrix} 45° \\ -10°/s \end{pmatrix}_3 \right]$$

Le comportement du système en boucle fermée, est illustré sur la figure 3.27. Elle trace l'évolution de ses coordonnées (actionnées et non actionnées) dans le temps. Sur la figure 3.26.(b), l'évolution de l'entrée de commande est tracée en fonction du temps, ainsi que le plan de phase de la dynamique interne du système.

L'analyse de stabilité est basée sur la courbe de la figure 3.26.(a), sur laquelle l'application $\Psi^Q_{k_0}$ est tracée pour des valeurs croissantes de $r = \|\eta - \eta^f\|^2_Q$, et pour différentes valeurs de k_0.

D'après cette courbe, les conditions du premier point de la proposition 1 sont vérifiées, pour :

$$(k_0,\rho)_1 = (2,1.05) \quad ; \quad (k_0,\rho)_2 = (3,1.42)$$

ce qui permet de conclure sur la stabilité : convergence asymptotique vers un cycle limite stable. D'autre part, il est remarquable que ces conditions ne sont pas vérifiées pour $k_0 = 1$.

Application 3 : robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques

Dans cette section, un scénario de test de la robustesse est proposé. Il est similaire à celui effectué pour le premier exemple d'application. Les paramètres du modèle (les masses et les moments d'inertie) sont supposés évalués avec des incertitudes. Ce qui peut être exprimé par :

$$\begin{aligned} m_{1u} &= m_1 \pm \Delta m_1 \quad , \quad m_{2u} = m_2 \pm \Delta m_2 \\ J_{1u} &= J_1 \pm \Delta J_1 \quad , \quad J_{2u} = J_2 \pm \Delta J_2 \end{aligned}$$

La valeur de l'incertitude sur chaque paramètre est égale de 10% de sa valeur nominale. Le comportement du système en boucle fermée, assujetti à ce genre d'incertitudes est représenté sur la figure 3.28. Elle montre l'évolution des coordonnées du système dans le temps. Le système incertain est stabilisé à l'équilibre, en dépit des incertitudes introduites, mais il prend plus de temps que le système nominal pour se stabiliser.

Application 3 : effet des incertitudes sur la stabilité

D'après la simulation précédente, le système incertain est forcé à se stabiliser à l'équilibre par le contrôleur. Pour voir de plus près l'effet des incertitudes sur la stabilité, l'idée consiste à tracer la courbe d'analyse de stabilité pour le système incertain. Pour cela, les paramètres du système sont supposés assujettis à des incertitudes additives, telle que

$$m_{1u} = m_1 + \Delta m_1 \ , \ m_{2u} = m_2 + \Delta m_2 \ , \ J_{1u} = J_1 + \Delta J_1 \ , \ J_{2u} = J_2 + \Delta J_2.$$

Cette fois-ci, les incertitudes sont de 50% de la valeur nominale correspondante. La courbe d'analyse de stabilité qui trace la fonction $\Psi_{k_0}^{Q}$ est illustrée sur la figure 3.29, pour $k_0 = 2$, pour les systèmes nominal et incertain.

Ce qu'il faut remarquer de cette courbe est que le système incertain dispose d'une région d'attraction plus petite que celle du système nominal. Ce qui permet de conclure que les incertitudes additives considérées ont rétréci la région d'attraction.



Application 3 : génération de cycles limites stables

Pour passer de la stabilisation à la génération de cycles limites, il suffit de changer les sous-états cibles comme suit :

$$\xi^f = \begin{pmatrix} -0.08m \\ 0.1m/s \end{pmatrix} \quad ; \quad \eta^f = \begin{pmatrix} 0° \\ 0°/s \end{pmatrix}$$

Le scénario de simulation proposé, considère les trois différentes conditions initiales suivantes

$$\xi^0_{1,2,3} = \left[\begin{pmatrix} 0m \\ 0/s \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0.1m \\ -0.5m/s \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}_3 \right]$$

$$\eta^0_{1,2,3} = \left[\begin{pmatrix} 0\circ \\ 0°/s \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} -40° \\ 50°/s \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 40° \\ -50°/s \end{pmatrix}_3 \right]$$

Illustrées sur la figure 3.31, les trajectoire du système en boucle fermée convergent vers le voisinage d'un cycle limite unique quelque soient les conditions initiales considérées. Ceci est prévisible à partir de la courbe d'analyse de stabilité en utilisant la proposition 1, et le tracé graphique de $\Psi^Q_{k_0}$ (cf. figure 3.30.(a)). D'après cette courbe, les conditions nécessaires pour conclure à la stabilité à partir du deuxième point de la proposition sont réunies pour :

$$(k_0,\rho,\varepsilon)_1 = (2,1.12,0.01) \ ; \ (k_0,\rho,\varepsilon)_2 = (3,1.426,0.009)$$

Donc pour toute condition initiale appartenant à l'ensemble $\mathbb{M}_\rho$ la dynamique interne projetée sur la section de Poincaré converge vers l'ensemble $\mathbb{M}_\varepsilon$ (cf. proposition 1 et les valeurs ci-dessus de ρ et ε).

Sur la figure 3.30.(b), l'évolution du signal de commande est tracée en fonction du temps, ainsi que le plan de phase de la coordonnée non actionnée.



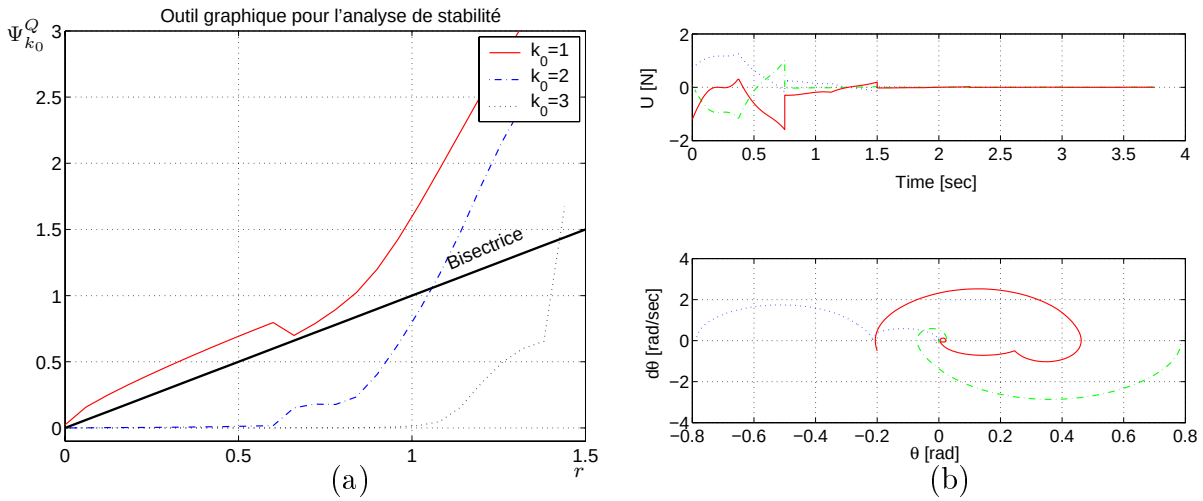


FIG. 3.26 – *Application 3 (stabilisation) : courbe d'analyse de stabilité (a) : les conditions suffisantes de stabilité du point 1 de la proposition 1 sont vérifiées pour* $k_0 = 2{,}3$ *, évolution de l'entrée de commande et plan de phase de la dynamique interne (b)*

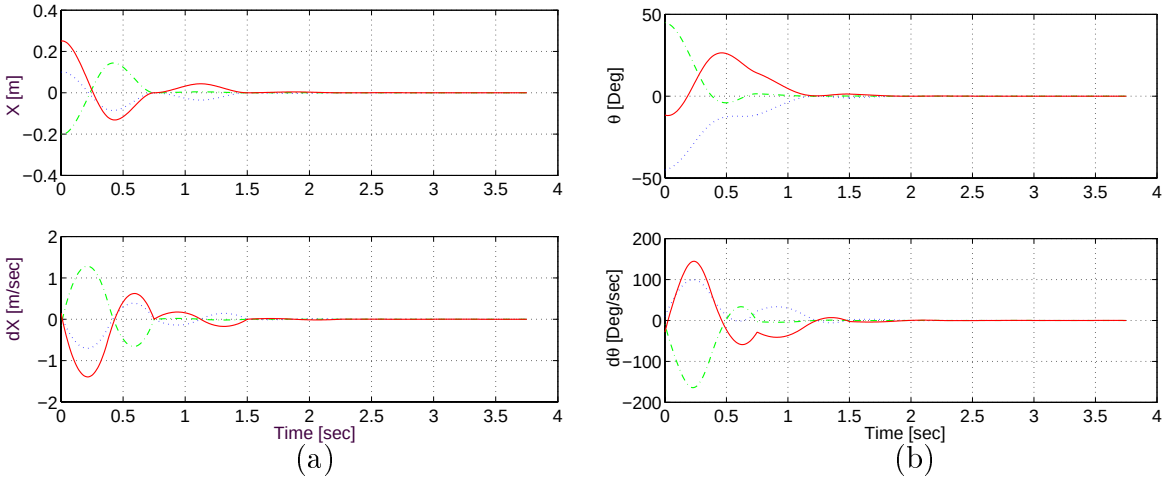


FIG. 3.27 – *Application 3 (stabilisation) : évolution de la position et vitesse de la coordonnée actionnée (a), évolution de la position et vitesse de la coordonnée non actionnée (b)*

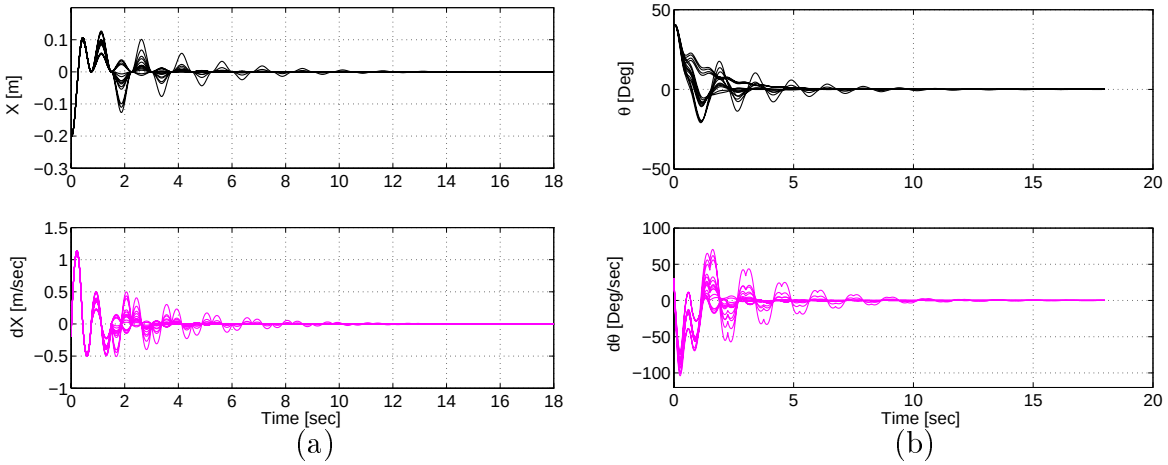
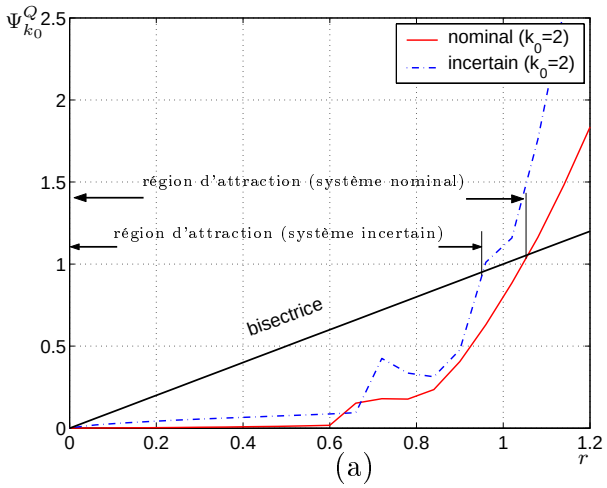
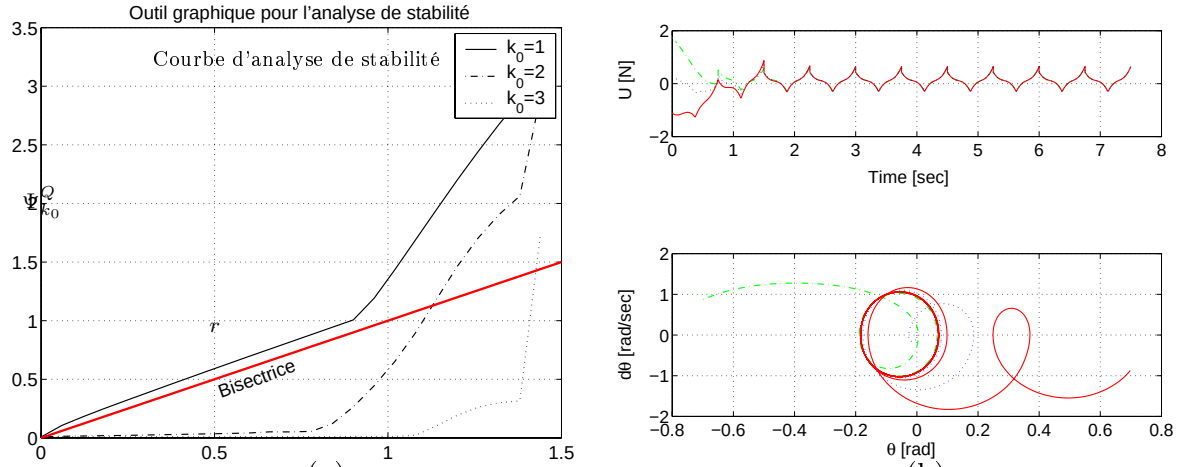


FIG. 3.28 – *Application 3 (robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques) : position et vitesse de la coordonnée actionnée (a), position et vitesse de la coordonnée non actionnée (b)*



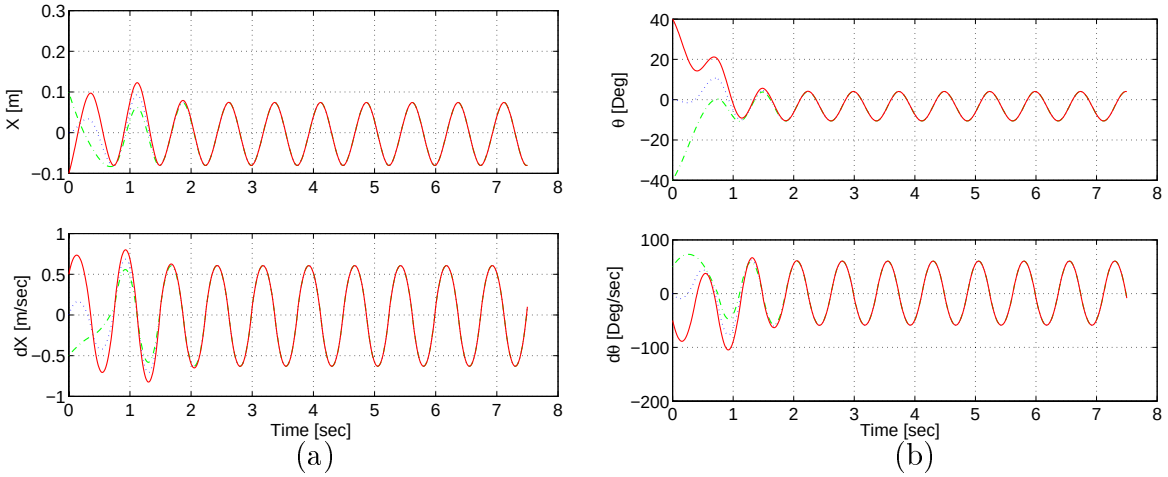
(a)

FIG. 3.29 – *Application 3 (robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques) : courbe d'analyse de stabilité pour le système nominal et incertain*



(a) (b)

FIG. 3.30 – *Application 3 (génération de cycles limites) : courbe d'analyse de stabilité (a) : les conditions suffisantes du point 2 de la proposition* 1 *sont vérifiées pour* $k_0 = 2{,}3$*, évolution de l'entrée de commande et plan de phase de* η *(b)*



(a) (b)

FIG. 3.31 – *Application 3 (génération de cycles limites) : évolution de la position et vitesse de la coordonnée actionnée (a), de la position et vitesse de la coordonnée non actionnée (b)*

3.4.7 Application 4 : le système dynamique chaotique hybride de Lorenz modifié

Un exemple de système non linéaire hybride est celui de Lorenz. C'est un système chaotique impulsionnel qui est décrit par les équations suivantes [9] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\sigma\ x_1(t) + \sigma\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = r\ x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)\ x_3(t) + u \qquad ; \quad si \quad t \neq k\ \tau_c \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)\ x_2(t) - b\ x_3(t) \end{cases} \tag{3.63}$$

l'équation du saut est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x_1(t^+) \\ x_2(t^+) \\ x_3(t^+) \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} x_1(t^-) \\ x_2(t^-) \\ x_3(t^-) \end{pmatrix} = (I + B) \begin{pmatrix} x_1(t^-) \\ x_2(t^-) \\ x_3(t^-) \end{pmatrix} \quad ; \quad si \quad t = k\ \tau_c \tag{3.64}$$

où σ,r,b sont trois paramètres positifs, I est la matrice identité, et la matrice B est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 \end{pmatrix}$$

Lorsque le choix suivant des paramètres est adopté :

$$\sigma = 10\ , \quad r = 28\ , \quad b = 8/3,$$

le système autonome (sans entrée de commande) devient chaotique [95]. En utilisant le vecteur d'état étendu :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$$

avec $\dot{x}_4 = 1$ et la fonction de saut étendue

$$\begin{pmatrix} x_1(t^+) \\ x_2(t^+) \\ x_3(t^+) \\ x_4(t^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} x_1^- \\ x_2^- \\ x_3^- \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad t = k\ \tau_c \tag{3.65}$$

le système prend la forme (3.1)-(3.2), avec la définition suivante des fonction f et g

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\sigma\ x_1 + \sigma\ x_2 \\ r\ x_1 - x_2 - x_1\ x_3 \\ x_1\ x_2 - b\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

9. Ce système est obtenu à partir du système autonome présenté dans [95] (cf. chapitre 3, section 3.2). Il a été modifié en rajoutant une entré de commande agissant directement sur le deuxième état.



et la surface de commutation est définie par :

$$S(x) = x_4 - \tau_c$$

En utilisant la transformation de coordonnées (3.10), le choix suivant de l'application de sortie

$$h(x) := (x_2,x_4)^T \in \mathbb{R}^2 \tag{3.67}$$

conduit à la définition suivante des sous-états (ξ,η) :

$$\xi := (x_2,x_4)^T \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \eta := \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$$

De plus l'application de sortie (3.67) est compatible avec la dynamique (3.63)-(3.64) au sens de la définition 1, étant donné que ses deux conditions sont satisfaites.

3.4.8 Application 4 : résultats de simulation

Dans cette section les résultats de simulation concernant le système chaotique hybride de Lorenz sont présentés.

Pour cela, considérons le modèle dynamique du système donné par (3.63)-(3.64), avec $\mu = -0.6 \quad ; \quad \tau_c = 0.2$

L'origine est un point d'équilibre instable pour le système (comme cela a été discuté dans [95]). Un choix particulier du paramètre d'optimisation $p = x_2(\tau_c/2)$ est considéré pour cette simulation. La matrice de pondération dans le critère d'optimisation est fixée à l'identité, i.e. $Q = Diag(1,1)$.

Application 4 : Stabilisation

Pour imposer la stabilisation, il suffit de choisir les sous-états ξ^f, et η^f comme suit :

$$\xi^f = x_2^f = 0 \quad ; \quad \dot{x}_2^f = 0 \quad ; \quad \eta^f = \begin{pmatrix} x_1^f & x_3^f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Les courbes de simulation sont représentées sur les figures 3.32, 3.33.

Le comportement du système en boucle ouverte (sans commande[10]), est illustré sur la figure 3.32.(a) qui trace l'évolution des trois états du système dans le temps.

L'analyse de stabilité du système en boucle fermée est basée sur la proposition 1. Sur la figure 3.32.(b), l'application $\Psi_{k_0}^Q$ est tracée. D'après la courbe, il est possible de conclure

10. On suppose que la commande est nulle $u = 0$.

que les conditions du premier point de la proposition sont vérifiées, pour $(k_0,\rho) = (1,\infty)$, par conséquent une convergence globale asymptotique vers le point d'équilibre est assurée.

Sur la figure 3.33.(b) qui représente le plan de phase, une telle convergence des trajectoires d'états x_1,x_3 vers le point d'équilibre (0,0) est observée. Ceci est conforme avec l'analyse de stabilité selon la proposition 1.

D'après l'évolution des différents états du système (cf. figure 3.33.(a)), ce dernier est stabilisé à l'équilibre au bout de 3 cycles.

A présent, différentes simulations partant de différentes conditions initiales situées relativement loin de l'équilibre sont présentées. Sur la figure 3.34, l'évolution dans le temps des états du système est tracée, aussi bien que l'entrée de commande, et le plan de phase de la dynamique interne.

D'après les courbes, le système en boucle fermée se stabilise à l'équilibre, en dépit des conditions initiales larges considérées.

Application 4 : Génération de cycle limites stables

En ce qui concerne la génération de cycles limites, on considère les états désirés suivants

$$\xi^f = x_2^f = 15 \quad ; \quad \eta^f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

L'analyse de stabilité selon la proposition 1, et le tracé de l'application $\Psi_{k_0}^Q$ (voir figure 3.35), confirme que les conditions du deuxième point de la proposition sont vérifiées, pour

$$(k_0,\rho,\epsilon) = (1,\infty,2.48)$$

L'évolution des états du système dans le temps, aussi bien que la commande, et les trajectoires d'états dans le plan de phase sont tracées sur la figure 3.36. La figure 3.37 trace l'évolution du paramètre d'optimisation.



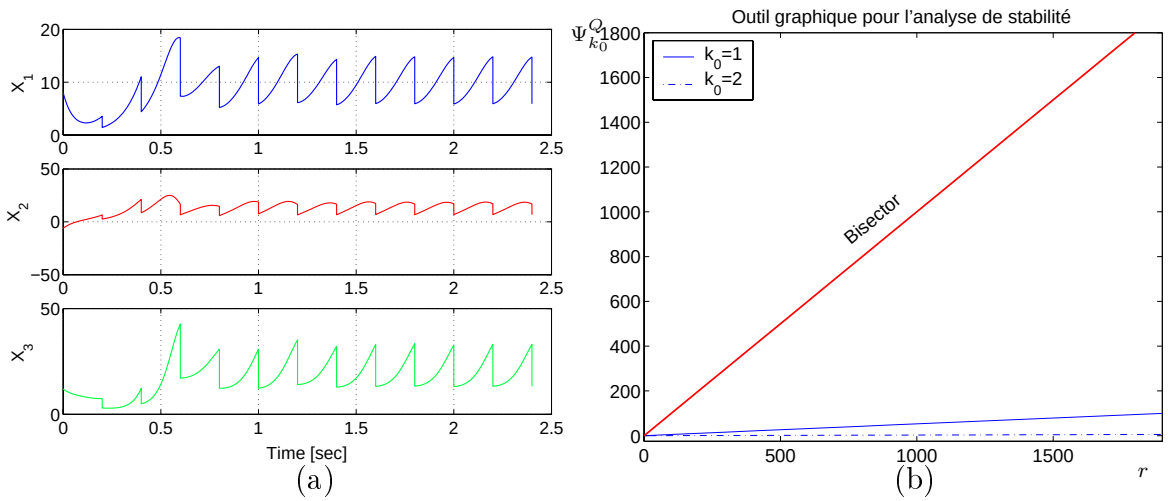


FIG. 3.32 – *Application 4 (stabilisation) : comportement du système en boucle ouverte (sans entrée de commande) (a), courbe d'analyse de stabilité (b) : les conditions suffisantes du point 1 de la proposition 1 sont vérifiées pour* $k_0 = 1$

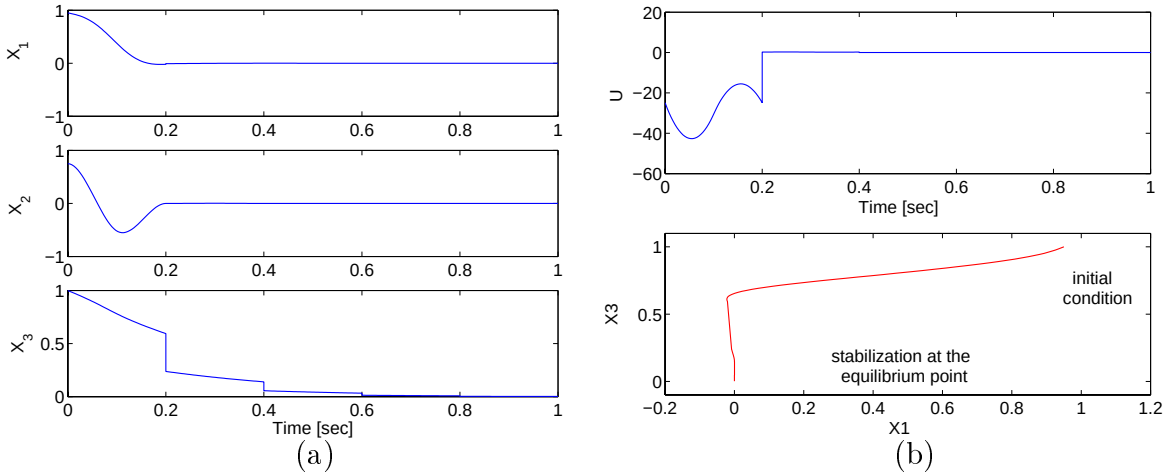


FIG. 3.33 – *Application 4 (stabilisation) : évolution des états en boucle fermée (a), évolution de l'entrée de commande, et plan de phase de la dynamique interne (b)*

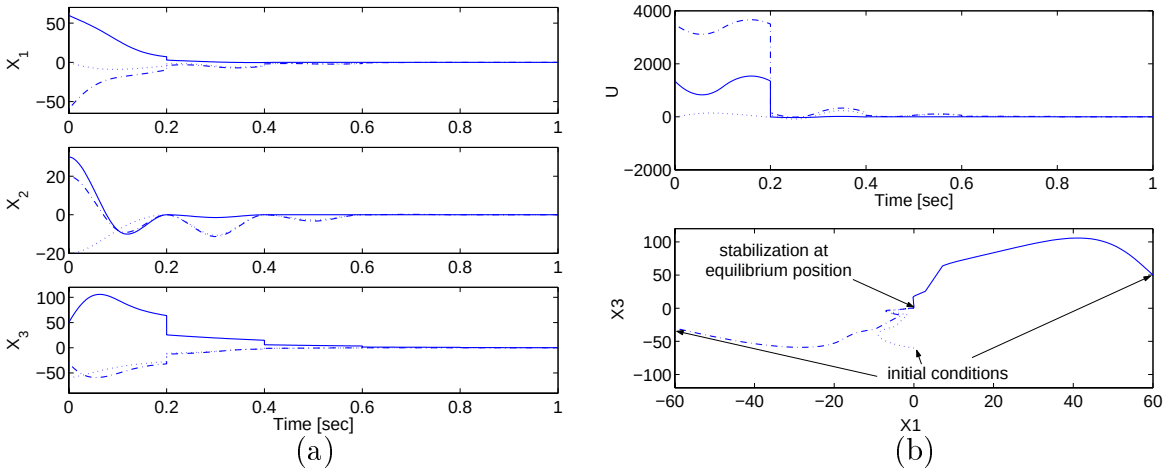


FIG. 3.34 – *Application 4 (stabilisation) : pour différentes conditions initiales larges, évolution des états en boucle fermée (a), entrée de commande (b)haut, plan de phase (b)bas*



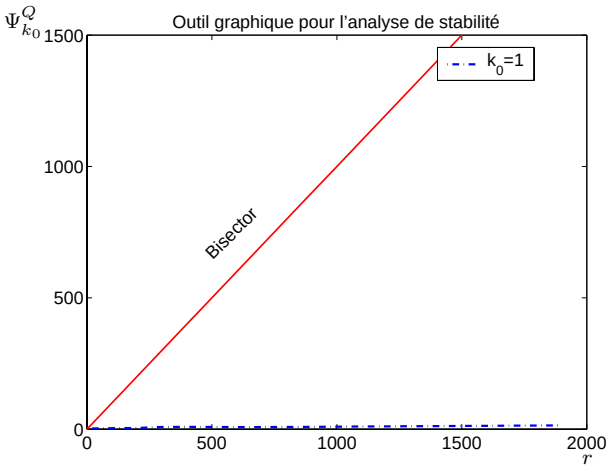
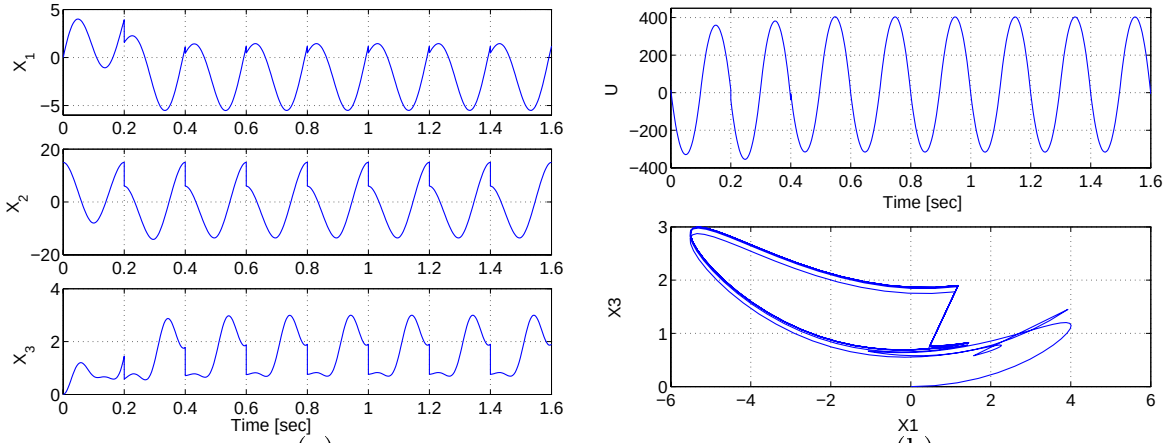


FIG. 3.35 – *Application 4 (génération de cycles limites) courbe d'analyse de stabilité: les conditions suffisantes du point 2 de la proposition* 1 *sont vérifiées pour* $k_0 = 1$



(a) (b)

FIG. 3.36 – *Application 4 (génération de cycles limites) : évolution dans le temps des états en boucle fermée (a), entrée de commande, et plan de phase da la dynamique interne (b)*

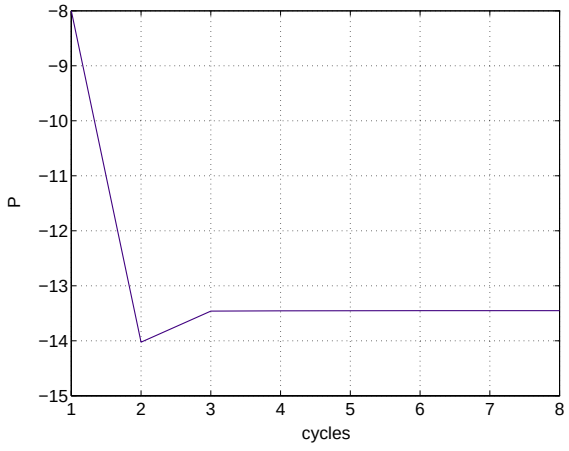


FIG. 3.37 – *Application 4 (génération de cycles limites) : évolution du paramètre d'optimisation*

3.5 Évaluation du temps de calcul

Comme ils l'ont bien montré les exemples présentés dans ce chapitre, l'approche de commande proposée est une approche particulière de commande prédictive dans laquelle, le problème d'optimisation à résoudre en ligne est de très faible dimension. En particulier, dans l'ensemble des exemples montrés, ce problème d'optimisation a été pris scalaire afin de pousser la logique jusqu'au bout. Dans cette section, une idée des temps de calcul par instant de décision nécessaire pour la mise en œuvre en ligne de la loi de commande, est présentée.

L'évaluation du temps de calcul est effectuée sur une machine dotée d'un microprocesseur `intel`, à une fréquence d'horloge de `2.5 Ghz`. Sur les figures 3.38-3.39 est tracée l'évolution du temps de calcul (principalement le temps nécessaire pour résoudre le problème d'optimisation) en fonction des cycles (sachant que le cycle est la période s'étalant entre deux instants de décision successifs). Dans cette évaluation les trajectoires de référence sont mises à jour une fois par cycle. Il faut remarquer aussi que les calculs sont effectués sur une plate-forme `visual Fortran 5.0`, et les procédures d'optimisation utilisées sont celles de la bibliothèque numérique `IMSL` associée à cette plate-forme.

La courbe associée à la première application (système non linéaire dont le linéarisé est non commandable) est celle de la figure 3.38.(a), la valeur moyenne du temps de calcul, et celle maximale, évaluées sur 50 cycles sont données par :

$$\bar{t}_{calc} = 0.0168\ sec \quad ; \quad t_{max} = 0.021\ sec$$

Pour la deuxième application (une bille sur un rail), c'est la courbe de la figure 3.38.(b), qui trace le temps de calcul, les valeurs moyenne et maximale sont respectivement données par :

$$\bar{t}_{calc} = 0.0567\ sec \quad ; \quad t_{max} = 0.151\ sec$$

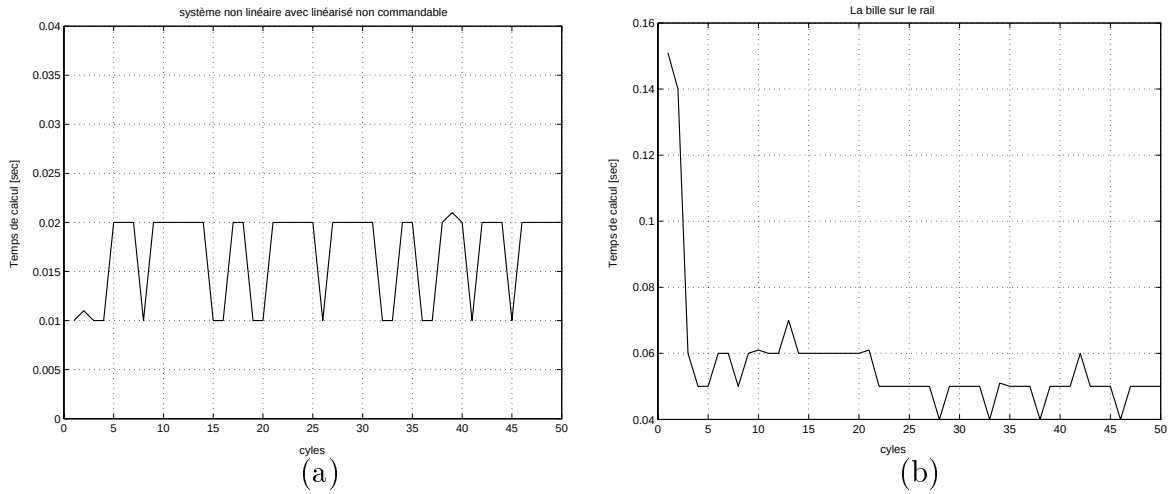
En ce qui concerne le pendule inversé (application 3), la courbe du temps de calcul est celle de la figure 3.39.(a), la valeur moyenne, et la valeur maximale du temps de calcul, sont données par :

$$\bar{t}_{calc} = 0.0296\ sec \quad ; \quad t_{max} = 0.041\ sec$$

Pour le système de Lorenz (application 4), la courbe qui trace le temps de calcul est celle de la figure 3.39.(b), l'évaluation de la valeur moyenne et la valeur maximale du temps de calcul donne :

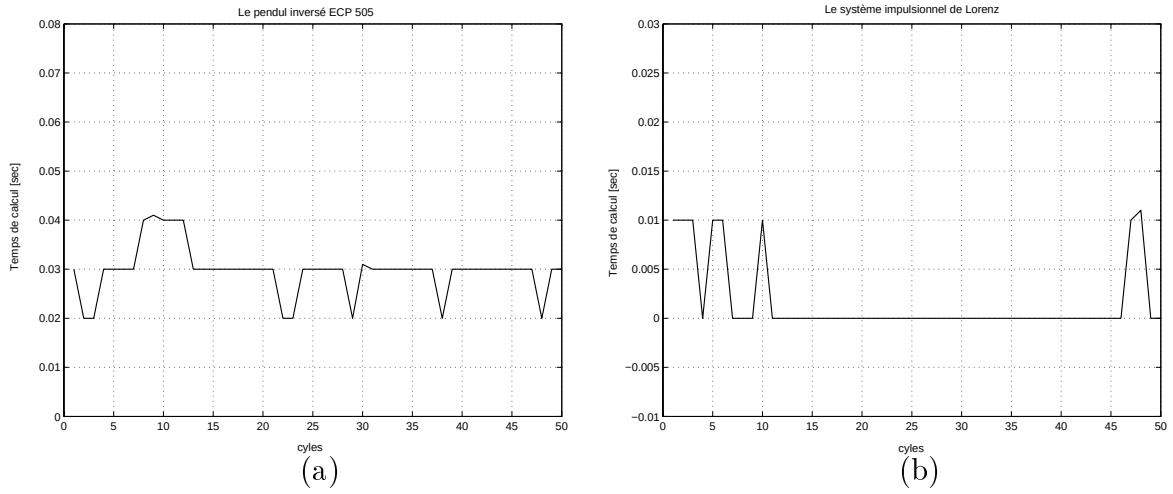
$$\bar{t}_{calc} = 0.0016\ sec \quad ; \quad t_{max} = 0.011\ sec$$





(a) (b)

FIG. 3.38 – *Évaluation du temps de calcul: application 1 (a), application 2 (b)*



(a) (b)

FIG. 3.39 – *Évaluation du temps de calcul: application 3 (a), application 4 (b)*

3.6 Conclusion

Ce chapitre a fait l'objet d'une présentation de la première approche de commande développée dans le cadre de cette thèse. Il s'agit d'une commande prédictive non linéaire de faible dimension. Une telle approche est proposée dans le but d'aboutir à une mise en œuvre en temps réel sur des systèmes relativement rapides, ce qui est rarement le cas pour les schémas de commande prédictive non linéaire.

Plusieurs applications ont été proposées, qui concernent généralement des systèmes mécaniques sous-actionnés. Cependant, deux applications d'entre elles, constituent de bons exemples pour des essais en temps réel, à savoir le pendule inversé `ECP 505`, et le robot bipède RABBIT



dans la mesure où les dispositifs correspondant sont à disposition au Laboratoire d'Automatique de Grenoble.

L'approche présentée dans ce chapitre est dédiée à une classe de systèmes hybrides qui présentent des sauts dans le vecteur d'état. Après avoir présenté l'approche de commande, une analyse de stabilité du système en boucle fermée a été proposée avec un outil graphique basé sur une optimisation hors ligne.

L'application de la méthode à la commande du robot marcheur RABBIT fera l'objet du chapitre 5.



	Signification	**valeur**
θ	L'angle de la barre du pendule par rapport à la verticale	Variable
x	La position du centre de gravité de la barre glissante	Variable
l_0	Longueur de la barre du pendule, du pivot jusqu'à la barre glissante	0.33 m
m_1	La masse complete de la barre glissante, y compris les élément attachés	$m_{10} + m_{w1}$
m_{10}	La masse de la barre glissante sans les éléments attachés	0.103 kg
m_{w1}	La masse des éléments attachés (poids additifs) (=0 s'ils sont enlevé)	0.110kg
m_2	La masse de l'ensemble sans m_1	$m_{20} + m_{w2}$
m_{w2}	La masse du contrepoids ($\div 2$: si un seul disque est remonté)	1.0 kg
m_{20}	La masse de l'ensemble mobile sans m_1 et m_{w2}	0.785 kg
l_{c0}	Position du centre de gravité de l'ensemble pendulaire avec la barre glissante et sans le contrepoids	0.071 m
l_w	distance signée du pivot au centre de gravité du contrepoids	-0.1084 m
l_c	Position du centre de gravité de l'ensemble pendulaire sans la barre glissante	$(m_{20}l_{c0} + m_{w2}l_w)/m_2$
l_{m1}	distance entre le pivot et le centre de gravité de la barre glissante	variable
α	L'angle que fait le c.d.g de la barre glissante avec la barre verticale	variable
g	La gravité	9.8 m/s^2
J_0^*	$[J_0^* = J_{0e} - m_1\ l_0^2]$ évalué lorsque $m_{w2} = 0$	0.0246$kg.m^2$
J_{0s}	Le moment d'inertie de l'ensemble pendulaire sans la barre glissante et le contrepoids par rapport au pivot	0.0246 $kg.m^2$
J_{0e}	Le moment d'inertie de l'ensemble pendulaire complet par rapport au pivot	$J_{0s} + m_1 l_0^2 + m_{w2} l_w^2$
k_f	Le gain de l'ensemble CNA-amplificateur-moteur-poulie	0.0013 $N/DACincr$
k_x	Facteur de normalisation du codeur de la barre glissante (codeur 2)	50200 $incr/m$
k_a	Facteur de normalisation du codeur de la barre verticale (codeur 1)	2546 $incr/rad$

TAB. 3.3 – *Paramètres dynamiques et mécaniques du pendule inversé ECP 505*



Chapitre 4

Deuxième approche : commande par la méthode de Lyapunov

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, la deuxième contribution de ce travail sera introduite. Elle consiste en une approche de commande dite de Lyapunov. Cette deuxième approche est basée sur des lois de commande avec retour d'état non linéaire. Les lois de commande proposées visent à stabiliser le système autour certaines trajectoires de référence. L'approche part du principe qu'un cycle de marche est le résultat d'enchaînement de trois phases de marche consécutives : la phase de simple support, la phase d'impact et la phase de double support. Son objectif est de commander le robot bipède en phases principales de simple et de double support, tout en assurant une stabilité robuste pendant la marche vis-à-vis des impacts qui sont considérés comme étant des perturbations. La commande en phase de simple support asservit le robot bipède afin qu'il poursuive des trajectoires pré-définies sur les coordonnées actionnées lui permettant ainsi de faire un pas en avant. Le système à commander durant cette phase de marche est doté d'un modèle non linéaire sous-actionné, partiellement linéarisable, ce qui va provoquer un certain comportement de la dynamique interne résultant de la poursuite des trajectoires sur les coordonnées actionnées. Ce comportement fait que le tronc (coordonnée non actionnée) diverge de la verticale, or il est souhaitable de le garder autour de la verticale, mais puisque la durée de la phase de simple support est limitée ($\simeq 1\ sec$) le tronc n'aura pas le temps d'éloigné trop de la verticale, étant donné qu'il n'a pas une dynamique divergente en temps fini. C'est ici que le rôle de la phase de double support intervient. En effet, cette phase est utilisée pour stabiliser le système, et en particulier la dynamique interne (coordonnée non actionnée). Durant cette phase le système est complètement actionné, voir sur-actionné, alors une commande est appliquée permettant au bipède de garder le double contact avec le

sol d'une part, et redresser le tronc verticalement d'autre part. Mais qu'en est-il de la phase d'impact ?

Dans cette approche les impacts sont traités comme étant des perturbations. Autrement dit les lois de commande en phases de simple support et de double support assurent une convergence asymptotique, et entre ces deux phase vient l'impact rigide qui perturbe le système. Il introduit des discontinuités sur les vitesses articulaires. Donc dans l'analyse de stabilité du système sur le cycle complet de marche, les impacts sont traités comme étant des perturbations. Ceci se traduit par une stabilité robuste du bipède pendant la marche.

4.1.1 Le cycle de marche

La marche d'un robot bipède consiste en une alternance des jambes. La manière d'interaction du robot bipède avec le sol définit ce qu'on appelle les phases de marche. Autrement dit le simple contact donne lieu à la phase de simple support, le double contact induit la phase de double support, et la collision du pied de vol avec la sol engendre la phase d'impact. De cet effet un cycle de marche adopté pour cette approche de commande comporte trois phases consécutives. Deux phases principales (simple support et double support) séparées par une phase instantanée dite d'impact. Cette séquence est illustrée sur la figure 4.1.

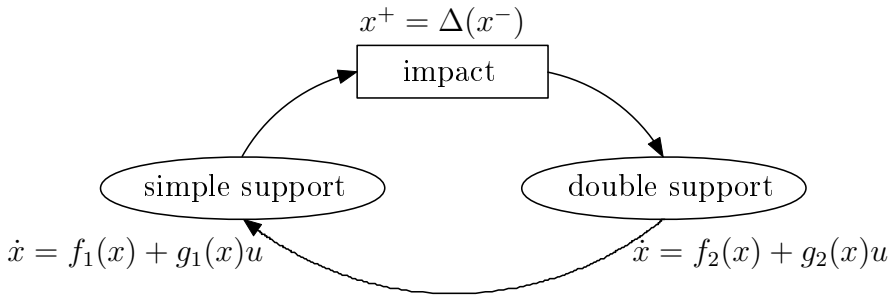


FIG. 4.1 – *Séquence des phases du cycle de marche*

Durant son cycle de marche, le bipède passe par trois phases. Pendant la première, il ressemble à une chaîne cinématique ouverte, caractérisé par un contact persistant avec la surface de marche. Alors que pendant la deuxième phase, le phénomène engendré illustre le passage de la chaîne ouverte à une chaîne fermée (impact avec le sol). Enfin, pendant la troisième phase de marche, il ressemble à une chaîne cinématique fermée, avec deux points de contact avec le sol.



4.2 Commande en phase de simple support

La commande en phase de simple support qu'on propose est inspirée de la commande des robots manipulateurs avec contraintes holonomes [63] [74] [13] et la commande dite hybride position/force [73] [14] [30] [15] [78] [87].

4.2.1 Génération des trajectoires de référence

Durant la phase de simple support, le but est de conduire le robot pour qu'il fasse un pas en avant. Ceci pourra être interprété comme étant un mouvement qui part d'une certaine configuration initiale, pour rejoindre une certaine configuration finale. Donc il faut trouver les trajectoires articulaires permettant de réaliser ce mouvement. Dans la littérature plusieurs techniques ont été proposées pour la génération de trajectoires. Elles peuvent être générées en utilisant des oscillateurs de Vander Pol comme dans [53], en utilisant un pendule inversé de longueur variable comme dans [52]. Des trajectoires optimales ont été proposées dans [82, 81].

Pour cette deuxième approche de commande, la méthode de génération de trajectoires proposée suit une technique simple. Elle est généralement utilisée dans des applications concernant les robots manipulateurs, et elle n'obéit à aucun critère d'optimisation d'énergie.

Afin d'imiter la marche humaine, et notamment ses mouvements, la jambe d'appuie doit avoir un mouvement pendulaire inversé dont le point fixe est le pied d'appuie et l'extrémité libre est la hanche. La jambe de vol, quant à elle, avance en se pliant par un certain angle δ puis en s'étendant avec le même angle. Par conséquent, elle a un mouvement pendulaire où le point fixe étant cette fois-ci la hanche tandis que l'extrémité libre est le pied de balancement. Dans le but d'avoir des trajectoires périodiques, il faut que les conditions finales d'une jambe soient les mêmes que les conditions initiales de l'autre jambe. Avec ces considérations, les trajectoires de référence proposées peuvent être les suivantes [24] :

$$\begin{cases} q_{31d}(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi t}{t_{ss}}))(q_{32}(0)-q_{31}(0))+q_{31}(0) \\ q_{41d}(t) = q_{41}(0) \\ q_{32d}(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi t}{t_{ss}}))(q_{31}(0)-q_{32}(0))+q_{32}(0) \\ q_{42d}(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(\frac{2\pi t}{t_{ss}}))\delta+q_{42}(0) \end{cases} \tag{4.1}$$

où t_{ss} représente la durée de la phase de simple support.

Remarque 12

- *Seulement les trajectoires de référence sur les coordonnées actionnées*[1] *ont été proposées.*

1. Ce sont les coordonnées des jambes, i.e. q_{31},q_{41},q_{32},q_{42}.



Les trajectoires de référence sur les coordonnées non actionnées, ne sont pas proposées à ce stade. Ultérieurement la stabilité du bipède sera étudiée par rapport à de telles trajectoires, compatibles avec la dynamique du robot.

- *Ces trajectoires de référence conduisent le robot marcheur à partir d'une certaine configuration initiale des jambes, définie par :*

$$q_{31}(0) = q_{31_0} \quad ; \quad q_{41}(0) = q_{41_0} \quad ; \quad q_{32}(0) = q_{32_0} \quad ; \quad q_{42}(0) = q_{42_0}$$

vers une certaine configuration finale symétrique, définie par :

$$q_{31}(t_{ss}) = q_{32_0} \quad ; \quad q_{41}(t_{ss}) = q_{42_0} \quad ; \quad q_{32}(t_{ss}) = q_{31_0} \quad ; \quad q_{42}(t_{ss}) = q_{41_0}$$

- *Un ou plusieurs paramètres peuvent être libérés sur ces trajectoires [26], pour être calculés par optimisation dans le but de stabiliser la dynamique interne du système. Ce principe est appliqué dans la deuxième approche de commande, présentée dans le chapitre* 3.

Les trajectoires de référence sur les vitesses articulaires sont obtenues en appliquant la première dérivée par rapport au temps, ceci donne :

$$\begin{cases} \dot{q}_{31d}(t) = (\frac{\pi}{2t_{ss}}) \sin(\frac{\pi t}{t_{ss}})(q_{32}(0) - q_{31}(0)) \\ \dot{q}_{41d}(t) = 0 \\ \dot{q}_{32d}(t) = (\frac{\pi}{2\ t_{ss}}) \sin(\frac{\pi t}{t_{ss}})(q_{31}(0) - q_{32}(0)) \\ \dot{q}_{42d}(t) = (\frac{\pi}{t_{ss}}) \sin(\frac{2\pi t}{t_{ss}})\delta \end{cases} \tag{4.2}$$

La deuxième dérivée quant à elle, donne les accélérations articulaires de référence :

$$\begin{cases} \ddot{q}_{31d}(t) = (\frac{\pi^2}{2t_{ss}^2}) \cos(\frac{\pi t}{t_{ss}})(q_{32}(0) - q_{31}(0)) \\ \ddot{q}_{41d}(t) = 0 \\ \ddot{q}_{32d}(t) = (\frac{\pi^2}{2\ t_{ss}^2}) \cos(\frac{\pi t}{t_{ss}})(q_{31}(0) - q_{32}(0)) \\ \ddot{q}_{42d}(t) = (\frac{2\pi^2}{t_{ss}^2}) \cos(\frac{2\pi t}{t_{ss}})\delta \end{cases} \tag{4.3}$$

4.2.2 Modèle d'ordre réduit

Étant donné que le robot marcheur en phase de simple support est en contact avec le sol, cela induit ce qu'on appelle contraintes holonomes caractérisant ce contact. La dynamique dans cette phase doit prendre en considération ces contraintes (cf. sect 2.5.3). Ces dernières introduisent des dépendances dans le vecteur de coordonnées généralisées du système. Par conséquent ce dernier peut être scindé en un sous-vecteur de coordonnées indépendantes, et un sous-vecteur de coordonnées dépendantes. En revanche dans le but d'extraire la dynamique



modélisant les coordonnées indépendantes[2], une technique de réduction du modèle sera utilisée [63],[73]. La dynamique du robot en phase de simple support est décrite dans la section 2.5.3. Elle comporte une équation différentielle décrivant la dynamique du robot, et une équation modélisant les contraintes holonomes. Le modèle d'ordre réduit peut être obtenu en utilisant ces deux équations.
Soit l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2 *Il existe une région $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, définie par $\Omega := \Omega_{nc} \times \Omega_c$, où Ω_{nc} est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n-m}$, Ω_c est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^m$. D'autre part on suppose aussi l'éxistance d'une fonction $\psi : \Omega_{nc} \to \mathbb{R}^m$ deux fois continuement différentiable, telle que $\phi(q_{nc},\psi(q_{nc})) = 0$ pour tout $q_{nc} \in \Omega_{nc}$.*

Sous ces conditions le vecteur de coordonnées généralisées dépendantes q_c, peut être exprimé d'une façon unique en fonction du vecteur de coordonnées indépendantes q_{nc}

$$q_c = \psi(q_{nc}) \quad \textit{pour tout} \quad q_{nc} \in \Omega_{nc}$$

Les contraintes $\phi(q_{nc},\psi(q_{nc}))$, pour la phase de simple support, sont exprimées par les équations (2.16). Sous l'hypothèse 2, la matrice jacobienne $J(q) = \partial\phi(q)/\partial q$ peut être subdivisée comme suit

$$J(q) = [J_1(q),J_2(q)]\,, \quad \text{où} \quad J_1(q) := \partial\phi(q)/\partial q_{nc}\ ,\ J_2(q) := \partial\phi(q)/\partial q_c$$

et la matrice jacobienne $J_2(q) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est toujours non singulière dans l'ensemble Ω.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la solvabilité globale, sont données dans [74], et sont basées sur le théorème de la fonction implicite [83]. Donc, on peut supposer que pour tout $q \in \Omega$ il exist des constantes positives β_1,β_2,β_3 tel que, pour tout[3] $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$0 < \beta_1 \leq \|J_2(q)\| \leq \|J(q)\| \leq \beta_2\,, \qquad \left\|\frac{\partial J(q)}{\partial q_i}\right\| < \beta_3\,. \tag{4.4}$$

Un modèle d'ordre réduit est obtenu en prenant en compte les contraintes ci-dessus. Ce qui permet d'aboutir au modèle suivant :

$$\begin{cases} M_*(q)\ddot{q}_{nc} + N_*(q,\dot{q})\dot{q}_{nc} + G_*(q) = H^T(q)Su \\ \lambda = Z(q)[N_\lambda(q,\dot{q})\dot{q}_{nc} + G(q) - Su] \end{cases} \tag{4.5}$$

2. Ce modèle est appelé *modèle d'ordre réduit.*

3. Noter que l'inégalité $\|J_2(q)\| \leq \|J(q)\|$ dans (4.4) n'est pas évidente, nous invitons le lecteur à consulter [36], ch. X, sec. 6,7.



L'indice $*$ exprime la réduction du modèle, les matrices du modèle réduit [63],[73] sont données par

$$M_*(q) := H^T(q)M(q)H(q) \tag{4.6a}$$
$$N_\lambda(q) := M(q)\dot{H} + N(q,\dot{q})H(q) \tag{4.6b}$$
$$N_*(q,\dot{q}) := H^T(q)N_\lambda(q,\dot{q}) \tag{4.6c}$$
$$G_*(q) := H^T(q)G(q) \tag{4.6d}$$
$$Z(q) := \left[J_1(q)M^{-1}(q)J_1(q)\right]^{-1} J_1(q)M^{-1}(q) \tag{4.6e}$$

où $H(q)$ est la matrice définie par :

$$H(q) = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ -J_2^{-1}(q)J_1(q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 5} \tag{4.7}$$

Pour le cas du robot bipède RABBIT, le nombre de degrés de liberté est $n = 7$, et le nombre de contraintes holonomes est $m = 2$ (en phase de simple support).

Remarque 13

- *Le modèle d'ordre réduit obtenu est valide sur l'espace Ω_1 défini par:*

$$\Omega_1 = \{(q_{nc},\dot{q}_{nc}) \in \mathbb{R}^{5\times 5}\}$$

  autrement dit, $q \in \Omega_1$, si et seulement si $J_2(q)^{-1}$ exite.

- *Noter que $q_{nc} \in \mathbb{R}^5$, et $u \in \mathbb{R}^4$, donc même après réduction du modèle, le système reste encore sous-actionné.*

- *Le modèle d'ordre réduit hérite les propriétés du modèle dynamique original, entre autres, la matrice $\dot{M}_*(q) - 2N_*(q,\dot{q})$ est anti-symétrique.*

- *λ représente le vecteur des multiplicateurs de Lagrange relatifs aux forces de contact avec le sol (normale et tangentielle)*

$$f = (\frac{\partial \Phi}{\partial q})^T \lambda = J_1^T(q)\lambda$$

Hypothèse 3 : 'Standing assumption'

Pendant toute la durée de la phase de simple support, le frotement au point de conatct est supposé suffisement large pour empêcher tout glissement avec le sol. D'autre part le contact pied/sol est supposé persistant, à savoir que le pied ne quitte pas le sol à des instants imprévus. Au moment de l'impact le pied de vol ne glisse pas, et ne rebondis pas non plus.



4.2.3 Loi de commande

On propose une loi de commande donnée par (cf. [57]) :

$$u = S^{+}(H^{+})^{T}(q)u_a \tag{4.8}$$

où $(\cdot)^{+}$ indique le pseudo inverse de $(\cdot)$.

Cette loi de commande remplacée dans le système (4.5) permet de découpler la partie actionnée de celle non actionnée. Ce remplacement donne

$$\begin{cases} M_*(q)\ddot{q}_{nc} + N_*(q,\dot{q})\dot{q}_{nc} + G_*(q) = u_a \\ \lambda = Z(q)[N_\lambda(q,\dot{q})\dot{q}_{nc} + G(q) - (H^{+})^{T}(q)u_a]\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

En effet, si $q_{nc} := [q_a \quad q_{na}]^T$ et $u_a := [u_1 \quad 0]^T$, où q_a représente la partie actionnée, et q_{na} représente la partie non actionnée, alors le système découplé sera :

$$m_{11}\ddot{q}_a + m_{12}\ddot{q}_{na} + n_{11}\dot{q}_a + n_{12}\dot{q}_{na} + g_1(q) = u_1 \tag{4.10a}$$

$$m_{21}\ddot{q}_a + m_{22}\ddot{q}_{na} + n_{21}\dot{q}_a + n_{22}\dot{q}_{na} + g_2(q) = 0 \tag{4.10b}$$

où

$$M_* := \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad N_* := \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad G_* := \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Pour poursuivre les trajectoies de référence (4.1) sur les coordonnées actionées[4], la loi de commande suivante est proposée [25] [23] :

$$u_1 = R\ddot{q}_{ad} - m_{12}m_{22}^{-1}(g_2 + n_{21}\dot{q}_a + n_{22}\dot{q}_{na}) + g_1 + n_{11}\dot{q}_a + n_{12}\dot{q}_{na} + u_2 \tag{4.12}$$

où $R = m_{11} - m_{12}m_{22}^{-1}m_{21}$ est inversible (ceci sera démontré ci-dessous), et $u_2 = -R(K_d\dot{\tilde{q}}_a + K_p\tilde{q}_a)$.

Remarque 14 *Dans les équations ci-dessus, et la suite du chapitre, les notations suivantes sont utilisées :*

$(\cdot)_d$ *: l'indice d fait référence à la coordonnée désirée (de référence),*

$(\tilde{\cdot}) = (\cdot) - (\cdot)_d$ *: l'erreur entre la coordonnée et sa valeur désirée.*

Inversibilité de R

Définissons tout d'abord les matrices

$$\bar{M} := \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12}^{\top}m_{22}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{M} := \begin{bmatrix} R & 0 \\ m_{12}^{\top}m_{22}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

4. Les coordonnées actionnées q_a sont celles des jambes du robot.



Soit $m_{12,i}$, qui désigne le $i^{ème}$ élément du vecteur m_{12}. La matrice $\tilde{M}$ est obtenue en soustrayant le vecteur ligne $m_{12,i}\{m_{12}^{\top}/{m_{22}}^{-1} \quad 1\}$ de chacune des quatre premières lignes de $\bar{M}$, d'où on a $\det\tilde{M} = \det\bar{M}$.

De plus, $\det\bar{M} = (\det M_*)/m_{22})$ et est positif étant donné que M_* est définie positive.

Puis en calculant le déterminant $\det\tilde{M}$ à travers les mineurs principals correspondants à sa dernière colonne, pour en déduire que $\det R = \det\tilde{M} > 0$, ce qui signifie que R est inversible, et la preuve est accomplie. △

Les trajectoires de référence q_{ad} , $\dot{q}_{ad}$, $\ddot{q}_{ad}$ sont imposées cependant, pour la coordonnée non actionnée (le tronc) on observe que la trajectoire

$$\ddot{q}_{nad} = -m_{22}^{-1}m_{21}\ddot{q}_{ad} - m_{22}^{-1}n_{21}\dot{q}_a - m_{22}^{-1}n_{22}\dot{q}_{na} - m_{22}^{-1}g_2 + K'_d\dot{\tilde{q}}_{na} + K'_p\tilde{q}_{na} \tag{4.14}$$

satisfait les équations de la boucle fermée suivantes :

$$\ddot{\tilde{q}}_a + K_d\dot{\tilde{q}}_a + K_p\tilde{q}_a = 0 \tag{4.15a}$$

$$\ddot{\tilde{q}}_{na} + K'_d\dot{\tilde{q}}_{na} + K'_p\tilde{q}_{na} = m_{22}^{-1}m_{21}[K_d\dot{\tilde{q}}_a + K_p\tilde{q}_a]\,. \tag{4.15b}$$

Cette observation sera utilisée pour analyser la stabilité du système autour des trajectoires (4.1) et (4.14).

La trajectoire de référence (4.14) sur la coordonnée non actionnée (tronc) est en fonction du temps. Elle vérifie les équations de la boucle fermée ci-dessus, et permet l'analyse de stabilité de l'origine du système en boucle fermée par la méthode de Lyapunov. Étant donné que cette trajectoire dépend des variables d'état du système, elle sera calculée en ligne. Par conséquent il n'est pas possible de prévoir a priori une borne uniforme lorsque $t \to \infty$. Néanmoins pour des raisons d'analyse de stabilité, il pourra être démontré (cf. ci-dessous) que le système est *'forward complete'*. Ceci est récapitulé dans la proposition suivante

Proposition 2 *'Forward completeness'*

Soit $q_{nad}(t,t_0,q_{nad\,0},q_0,\dot{q}_0)$ la solution de (4.14), qui commence à l'instant t_0, à partir de la condition initiale q_{nad0}, elle est paramétrée par les conditions initiales sur les autres variables d'état, q_0,$\dot{q}_0$.

Toute solution $q_{nad}(t,t_0,q_{nad\,0},q_0,\dot{q}_0)$ de (4.14) existe pour tout $t \geq t_0$, et pour n'import quelle condition initiale.

Preuve : *'Forward completeness'*

L'objectif est de démontrer que la solution de l'équation différentielle (4.14), notée $t \mapsto q_{nad}$,



le long des trajectoires (4.15) est continue. L'idée de base consiste à vérifier qu'il existe une fonction de Lyapunov V, telle que sa dérivée $\dot{V}$ vérifie : $\dot{V} \leq \mu V$, pour $\mu > 0$.

Pour des raisons de clarté, les notations suivantes sont utilisées :

Pour un certain $t_0 \leq 0$ fixe, soient les nombres réels quelconques suivants :

$$q_0 =: q(t_0) \quad ; \quad \dot{q}_0 =: \dot{q}(t_0) \quad ; \quad q_{ad\,0} =: q_{ad}(t_0) \quad ; \quad \dot{q}_{ad\,0} =: \dot{q}_{ad}(t_0)$$

D'autre part, soient les Définissons des termes suivants

$$\bar{m}_{ij}(t) := m_{ij}(q(t)) \tag{4.16}$$

$$\bar{n}_{21}(t,q_{na},\dot{q}_{na}) := \frac{1}{\bar{m}_{22}(t)} n_{21}\left(\begin{bmatrix} q_a(t) \\ q_{na} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{q}_a(t) \\ \dot{q}_{na} \end{bmatrix}\right) \dot{q}_a(t) \tag{4.17}$$

$$\bar{n}_{22}(t,q_{na},\dot{q}_{na}) := \frac{1}{\bar{m}_{22}(t)} n_{22}\left(\begin{bmatrix} q_a(t) \\ q_{na} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{q}_a(t) \\ \dot{q}_{na} \end{bmatrix}\right) \tag{4.18}$$

$$\bar{g}_2(t,q_{na}) := \frac{1}{\bar{m}_{22}(t)} g_2\left(\begin{bmatrix} q_a(t) \\ q_{na} \end{bmatrix}\right) \tag{4.19}$$

où $q_a(t)$ et $\dot{q}_a(t)$ satisfont l'équation différentielle (4.10a), avec l'entrée de commande u_1, ce qui donne (4.15a).

Puisque $\tilde{q}_a(t)$ et $\dot{\tilde{q}}_a(t)$ sont uniformément bornés, alors $q_{ad}(t)$ et $\dot{q}_{ad}(t)$ le sont aussi. Par conséquent $q_a(t)$ et $\dot{q}_a(t)$ sont définis pour tout t, et sont uniformément bornés. Donc les fonctions (4.16)-(4.19) définies ci-dessus sont uniformément bornées.

D'autre part, en examinant le modèle dynamique du robot marcheur en question (cf. annexe A), on constate que seulement deux éléments de la matrice de Coriolis $N(q,\dot{q})$ dépendent de la vitesse du tronc $\dot{q}_{na}$, qui sont $n_{[6,5]}(q,\dot{q})$ et $n_{[7,5]}(q,\dot{q})$.

A partir de (4.6c), et (4.7), la relation suivante est déduite :

$$N_*(q,\dot{q}) := N_{11}(q,\dot{q}) - J_1(q)^T N_{21}(q,\dot{q}) - N_{12}(q,\dot{q}) J_1(q) + J_1(q)^T N_{22}(q,\dot{q}) J_1(q) \tag{4.20}$$

où N_{ij} sont des sous-blocs de $N(q,\dot{q})$ de tailles appropriées, à savoir :

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad avec \;\; N_{11} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \,,\, N_{12} \in \mathbb{R}^{5\times 2} \,,\, N_{21} \in \mathbb{R}^{2\times 5} \,,\, N_{22} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{4.21}$$

Étant donné que $N_{[6,5]}(q,\dot{q})$ et $N_{[7,5]}(q,\dot{q})$ correspondent à la dernière colonne du sous-bloc N_{21}, donc seulement le deuxième terme du deuxième membre de l'équation (4.20) peut dépendre de la vitesse du tronc $\dot{q}_{na}$. Cependant, en évaluant la dérivée partielle des deux contraintes de contact avec le sol, on constate que $J_2 \equiv I$, et les deux dernières colonnes de J_1 sont nulles. Par conséquent l'élément (5,5) de la matrice $J_1(q)^T N_{21}(q,\dot{q})$ est nul aussi. Ceci implique que



$n_{22}(q,\dot{q})$ intervenant dans l'équation (4.10b), ne dépend pas de la vitesse du tronc $\dot{q}_{na}$. De plus $n_{21}(q,\dot{q})$ dépend linéairement de $\dot{q}_{na}$. Alors, l'ensemble des ces arguments implique que pour tout compact $\mathcal{K}$, il existe une constante $k_c > 0$ indépendante de l'instant initial, tel que pour tout $\dot{q}_a(t) \in \mathcal{K}$, tout $t \geq t_0$, et tout $(q_{na},\dot{q}_{na}) \in \mathbb{R}^2$, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\|\bar{n}_{22}(t,q_{na},\dot{q}_{na})\| \leq k_c\|\dot{q}\| \quad ; \quad \|\bar{n}_{21}(t,q_{na},\dot{q}_{na})\| \leq k_c \tag{4.22}$$

D'autre part, tout les éléments de $G(q)$ sont des fonctions trigonométriques et des constantes, alors il existe k_g tel que $\|G(q)\| \leq k_g$, pour tout $q \in \mathbb{R}^7$ (cf. Annexe A).

En utilisant ces bornes, l'existence de solution de (4.10b) peut être examinée, à savoir une solution de l'équation suivante sera envisagée :

$$\ddot{q}_{na} + \bar{n}_{21}(t,q_{na},\dot{q}_{na}) + \bar{n}_{22}(t,q_{na},\dot{q}_{na})\dot{q}_{na} + g_2 = \frac{\bar{m}_{21}(t)}{\bar{m}_{22}(t)}\ddot{q}_a(t) \tag{4.23}$$

elle sera notée $q_{na}(t)$.

Il est à noter que l'entrée de cette équation différentielle est uniformément bornée (avec une borne ne dépendant que de $\mathcal{K}$), étant donné que $\ddot{q}_{ad}(t)$ et $\dddot{q}_a(t)$ sont uniformément bornés.

Ensuite, il faut évaluer la dérivée de la fonction de Lyapunov suivante par rapport au temps :

$$V(q_{na},\dot{q}_{na}) := q_{na}^2 + \dot{q}_{na}^2$$

le long des trajectoires de (4.23). D'après (4.22), il existe $\mu > 0$ telle que :

$$\dot{V}(q_{na}(t),\dot{q}_{na}(t)) \leq \mu V(q_{na}(t),\dot{q}_{na}(t))$$

pour $\|q_{na}(t);\dot{q}_{na}(t)\|$ suffisamment grand. D'autre part, l'utilisation du théorème de comparaison, et la définition de $V(q_{na},\dot{q}_{na})$, implique qu'il existe γ_1, $\gamma_2 > 0$ tel que

$$\|q_{na}(t);\dot{q}_{na}(t)\| \leq \gamma_1\|q_{na}(t_0);\dot{q}_{na}(t_0)\|\mathrm{e}^{\gamma_2(t-t_0)}$$

pour $t \geq t_0$ suffisamment grand. Ceci implique l'existence de $q_{na}(t)$ pour tout $t \geq t_0$, et tout $t_0 \geq 0$.

Il est à noter que l'analyse précédente est valide seulement sur l'intervalle maximal de solutions $[t_0,t_0+T_1]$ (on note que $q_a(t)$ depend de $q_{na}(t)$). Cependant, les solutions de (4.15a) sont uniformément bornées, sur l'intervalle d'existence de longueur T_1. Néanmoins avec l'hypothèse d'existence locale, obtenue par la condition de Lipschitz, que la dynamique satisfait, la solution peut être étendue sur l'intervalle $[t_0+T_1,t_0+T_2]$, l'analyse précédente restera valide.



En répétant cette opération, avec les mêmes argumentations proposées dans [55], pages 73-75, il est possible d'obtenir les solutions allant jusqu'à l'infinie.

D'après cette analyse, il est possible de conclure, via (4.14), que $q_{nad}(t)$ est une solution d'une équation différentielle, qui prend la forme suivante

$$\ddot{q}_{nad} + K'_p \dot{q}_{na} + K'_d q_{na} = v(t) \tag{4.24}$$

où $v(\cdot)$ est une fonction continue sur $[t_0,\infty)$. La solution $q_{na}(t)$ de (4.24)[5] existe pour tout $t \geq t_0$. Ceci peut être démontré en résolvant cette équation différentielle. Autrement, une preuve élégante peut être consultée dans [42], page 33.

Enfin l'unicité des solutions se déduit d'après la propriété de Lipschitz, que la dynamique vérifie.

Remarque 15 *La trajectoire* (4.14) *dépend de l'état du système, et par ailleurs sa bornitude n'est pas garantie lorsque* $t \to \infty$*. Cependant, ceci n'est pas gênant, étant donné que cette trajectoire sera suivie uniquement pendant une courte durée (la durée du simple support). Ensuite pendant la phase de double support, l'erreur de la posture du tronc sera rectifiée par rapport à la verticale.*

4.2.4 Analyse de stabilité

Dans le but d'analyser la stabilité du système en boucle fermée, une approche classique basée sur la théorie de Lyapunov est proposée (cf. par exemple [55, 50]). Le résultat est récapitulé dans la proposition suivante :

Proposition 3 *L'origine du système* (4.10)*, bouclé avec la commande* (4.12)*, est Globalement Exponentiellement Stable (GES) autour des trajectoires* (4.1)*,* (4.14)*, pour des matrices de gains de retours* K_p*,* K_d*,* K'_p*, et* K'_d *diagonales définies positives.*

Preuve :

Le système en boucle fermée, obtenu avec la commande proposée et celui exprimé par (4.15). En effet, l'origine de (4.15), avec le second membre de (4.15b) nul, est Globalement Exponentiellement Stable. Le membre de droite de l'équation (4.15b) est borné (étant donné que $\|m_{ij}(q)\| \leq m_M$) par une fonction linéaire de $\|\tilde{q}_a; \dot{\tilde{q}}_a\|$.

Plus particulièrement, soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\tilde{q},\dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2}\left(\|\dot{\tilde{q}}\|^2 + \tilde{q}^\top [\, K_P + \varepsilon K_D \,]\tilde{q}\right) + \varepsilon \tilde{q}^\top \dot{\tilde{q}} \tag{4.25}$$

5. Cette solution dépend évidement de $v(t)$.



Elle pourra être réécrite sous la forme :

$$V(\tilde{q}^1,\dot{\tilde{q}}^1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_P + \varepsilon K_D & \varepsilon I \\ \varepsilon I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}$$

Cette fonction est radialement non bornée, et définie positive si[6] :

$$k_{Pm} + \varepsilon k_{Dm} > 0 \quad ; \quad k_{Pm} > \varepsilon^2 - \varepsilon k_{Dm}$$

D'autre part $\dot{V}$ est définie négative si k_{dm}, $k_{p_m} > 0$ et

$$\begin{cases} k'_{dm} > \varepsilon + \frac{{m_{12}}_m^2}{{m_{22}}_M^2} \max\left\{\frac{{k_d}_m^2}{k_{dM}-\varepsilon}, \frac{{k_p}_m^2}{\varepsilon k_{pM}}\right\} \\ k'_{p_m} > \frac{{m_{12}}_m^2}{{m_{22}}_M^2} \max\left\{\frac{\varepsilon {k_d}_m^2}{k_{dM}-\varepsilon}, \frac{{k_p}_m^2}{k_{pM}}\right\} \end{cases} \tag{4.26}$$

Donc pour des matrices de gains de retours suffisamment grands, vérifiant ces conditions, la dérivée de la fonction de Lyapunov vérifie l'inégalité suivante :

$$\dot{V}(\tilde{q},\dot{\tilde{q}}) \leq -\frac{1}{2}\left(k_{Dm}\|\dot{\tilde{q}}\|^2 + \varepsilon k_{Pm}\|\tilde{q}\|^2\right) \tag{4.27}$$

où $\dot{V}$ a été évaluée le long des trajectoires de (4.15), et

k_{Pm}, k_{Dm} (respectivement) sont des bornes inférieurs sur la norme induite de K_P, K_D (respectivement).

k_{PM}, k_{DM} (respectivement) sont des bornes supérieurs sur la norme induite de K_P, K_D (respectivement).

△

4.3 Commande en phase d'impact

L'objectif est de trouver une équation d'erreur asymptotiquement stable pendant la phase d'impact. Pour cela considérons le modèle d'impact (2.34) introduit dans la section 2.6, qui peut être réécrit :

$$q^+ = B(q)q^- \tag{4.28a}$$

$$\dot{q}^+ = B(q)D(q)\dot{q}^- = \Delta_1(q)\dot{q}^- \tag{4.28b}$$

où $\Delta_1(q) = B(q)D(q)$, les matrices $B(q)$ et $D(q)$ sont définies dans la section 2.6.

Pour les positions articulaires post-impact, soient les positions désirées suivantes :

$$q_d^+ = B(q)q_d^- \tag{4.29}$$

6. En appliquant le complément de Schur.



alors l'équation d'erreur en boucle fermée correspondante sera donnée par :

$$\tilde{q}^+ = B(q)\tilde{q}^-. \tag{4.30}$$

Pour les vitesses articulaires post-impact, on considère les vitesses désirées données par :

$$\dot{q}_d^+ = \Delta_1(q)\dot{q}_d^- + \Delta_2(q)(\dot{q}^- - \dot{q}_d^-) \tag{4.31}$$

où $\Delta_2(q)$ est une matrice à choisir. D'après (4.28b)-(4.31), l'équation d'erreur de vitesse en boucle fermée peut être exprimée par :

$$\dot{\tilde{q}}^+ = (\Delta_1(q) - \Delta_2(q))\dot{\tilde{q}}^-. \tag{4.32}$$

Par ailleurs, avec le choix

$$\Delta_2(q) = \Delta_1(q) + \varepsilon I \quad , \quad \varepsilon < 1$$

on obtient

$$\dot{\tilde{q}}^+ = \varepsilon\dot{\tilde{q}}^- \quad , \quad \varepsilon < 1.$$

Pour récapituler, l'équation de la boucle fermée qui prend en compte les erreurs de position et de vitesse sera la suivante

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}^+ \\ \dot{\tilde{q}}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(q) & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}^- \\ \dot{\tilde{q}}^- \end{bmatrix} = \Delta_3(q) \begin{bmatrix} \tilde{q}^- \\ \dot{\tilde{q}}^- \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

elle représente un système linéaire discret autonome, dont la stabilité dépend des valeurs propres de la matrice Δ_3. Étant donné que $\varepsilon < 1$ et les valeurs propres de la matrice B vérifient $\lambda(B) \leq 1$, alors la dynamique exprimée par (4.33) est stable (assymptitiqument stable par rapport à $\dot{\tilde{q}}$).

Une façon pour réaliser cet objectif consiste à choisir convenablement les conditions initiales désirées sur les positions et les vitesses articulaires pour la phase de double support.

4.4 Commande en phase de double support

La phase de double support est chronologiquement la dernière phase dans un cycle de marche. Comme son nom l'indique, elle est caractérisée par le fait que le bipède soit en contact avec le sol à travers les deux pieds. D'autre part elle constitue (chez les êtres humains) entre 20 et 30% d'un cycle de marche. Dans la section qui suit, le problème de la commande du robot bipède en phase de double support sera éclairci.



4.4.1 Formulation du problème de commande

Une question pertinente qui pourra être posée est la suivante :

Comment va-t-on formuler le problème de commande en phase de double support?

Étant donné que :

- le robot bipède est sous-actionné en phase de simple support;
- la commande en simple support utilise une trajectoire non bornée sur la coordonnée non actionnée (tronc);
- la phase d'impact, altere les vitesses articulaires, et notamment celle du tronc;

alors le tronc ne restera pas autour de la verticale, or il est souhaitable de le garder vertical. D'où vient l'idée d'utiliser la phase de double support pour redresser le tronc verticalement.

4.4.2 Modèle d'ordre réduit

Le fait que le bipède soit en contact avec le sol à travers deux pieds se traduit par quatre contraintes holonomes. Ces dernières introduisent des dépendances dans le vecteur de coordonnées généralisées. Ceci incite de réduire le modèle dynamique, pour en extraire la dynamique des coordonnées indépendantes. Pour dériver le modèle d'ordre réduit, la procédure est identique à celle appliquée en phase de simple support. En effet, en appliquant la technique de réduction du modèle proposée dans [63],[73] on aboutis au modèle d'ordre réduit (4.5), avec $q_{nc} \in \mathbb{R}^3$. Le modèle d'ordre réduit est valide sur un espace Ω_2 vérifiant une condition sur la matrice Jacobienne des contraintes. Cette condition est exprimée par :

$$q_{42} \neq n\pi \ , 0$$

ce qui est tout a fait raisonnable, car ça correspond à une situation souvent appelée en robotique notion de singularité [84, 88]. Dans une telle situation le manipulateur perd un ou plusieurs degrés de liberté. En effet, l'espace de validité du modèle ainsi obtenu est défini par :

$$\Omega_2 = \{(q_{nc},\dot{q}_{nc}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} : q_{42} \neq n\pi,0\} \tag{4.34}$$

Remarque 16 *Noter que dans cette phase le système est* sur-*actionné puisque il possède uniquement trois degrés de liberté indépendants, alors qu'il a quatre entrées de commande*

$$q_{nc} \in \mathbb{R}^3 \quad ; \quad u \in \mathbb{R}^4$$



4.4.3 Loi de commande : un contrôleur dynamique

Soit la loi de commande découplante (4.8), qui mène au système (4.9), avec des dimensions appropriées. La première équation, dans (4.9), représente la dynamique des coordonnées indépendantes. Quant à la deuxième, elle représente les multiplicateurs de Lagrange relatifs aux forces de contact avec le sol.

Après avoir découplé la dynamique des coordonnées indépendantes, de celle des forces de contact, il faut trouver une loi de commande u_a, permettant d'atteindre les objectifs voulus. Pour cela on considère la commande non linéaire linéarisante (souvent appelée commande dynamique) suivante :

$$u_a := M_*(q)u_0 + N_*(q,\dot{q})\dot{q}_{nc} + G_*(q) \tag{4.35}$$

où u_0 est l'entrée extérieur de commande donnée par :

$$u_0 = \ddot{q}_{ncd} + K_d"(\dot{q}_{ncd} - \dot{q}_{nc}) - K_p"(q_{ncd} - q_{nc}) \tag{4.36}$$

$K_d"$ et $K_p"$ sont des matrices de gains de retour (diagonales définies positives). Cette loi de commande génère le système en boucle fermée suivant :

$$\ddot{\tilde{q}}_{nc} + K_d"\dot{\tilde{q}}_{nc} + K_p"\tilde{q}_{nc} = 0\,. \tag{4.37}$$

Remarque 17

- *La connaissance exacte des termes de gravité, de Coriolis, et d'inertie est nécessaire pour mettre au point ce contrôleur.*
- *Le système en boucle fermée résultant est complètement linéarisé.*

4.4.4 Analyse de stabilité

Le modèle dynamique en boucle fermée est celui de (4.37). Il est complètement linéarisé. En effet, si on considère le vecteur d'état $x = [\tilde{q}_{nc}\ \dot{\tilde{q}}_{nc}]^T \in \mathbb{R}^6$, alors la dynamique (4.37) peut s'écrire sous la forme linéaire $\dot{x} = A\,x$, avec $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p" & -K_d" \end{bmatrix}$, et un choix approprié des matrices de gains de retour $K_p"$, $K_d"$ garantie que le système soit exponentiellement stable.

Durant les deux phases de simple et de double support, on ne commande que les coordonnées indépendantes. Cependant, dans le modèle d'ordre réduit du système, il existe aussi ce qu'on appelle les forces de contraintes (dans notre cas ce sont les forces de contact avec le sol). Ces forces n'ont pas été commandées, par ailleurs on suppose que le contact avec le sol est persistant, à savoir qu'il n'y a pas de glissement (i.e. le frottement avec le sol est suffisant



pour empêcher tout glissement) ni un décollage du sol (la réaction du sol est toujours positive, dirigée vers le haut).

4.5 Enchaînement des cycles de marche

Un cycle de marche, comme cela a été défini auparavant, consiste en une succession de phases principales de simple et de double support, séparées par une phase instantanée dite d'impact (cf. figure 4.2).

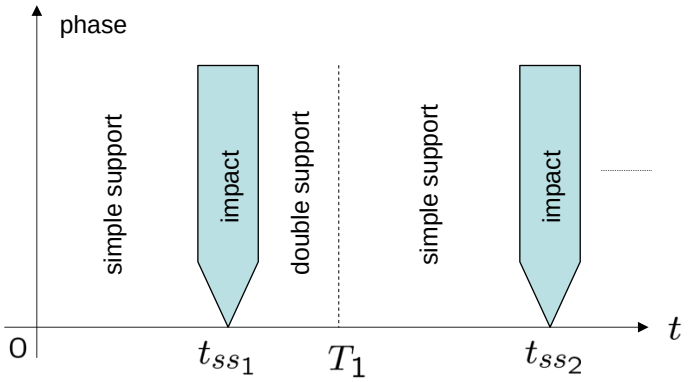


FIG. 4.2 – *Enchaînement des phases de marche*

Durant les phases principales, la dynamique du robot marcheur est gouvernée par des équations différentielles. Cependant, celle de l'impact est décrite par une équation algébrique, le modèle global régissant la dynamique du robot marcheur sur un cycle complet de marche est donné par[7] :

$$\Sigma_{SS} : \ddot{\tilde{q}} + K_d\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q} = F(t,\tilde{q},\dot{\tilde{q}}) \tag{4.38a}$$

$$\Sigma_I : \begin{bmatrix} \tilde{q}^+ \\ \dot{\tilde{q}}^+ \end{bmatrix} = \Delta_3(q) \begin{bmatrix} \tilde{q}^- \\ \dot{\tilde{q}}^- \end{bmatrix} \tag{4.38b}$$

$$\Sigma_{DS} : \ddot{\tilde{q}} + K''_d\dot{\tilde{q}} + K''_p\tilde{q} = 0 \tag{4.38c}$$

Après avoir analysé la stabilité du système pendant les phases de simple support, de double support et d'impact, il faut l'analyser sur le cycle complet de marche. Puisque la phase d'impact introduit des discontinuités sur les vitesses articulaires, cette phase sera considérée comme étant une perturbation au système. L'analyse de stabilité proposée sera introduite dans la section suivante.

7. Pour un modèle plus détaillé, avec éventuellement les domaines de validité des phases du cycle, cf. (4.42).



4.6 Analyse de la stabilité sur un cycle complet de marche

Pendant la phase de simple support, et celle du double support, l'origine (point d'équilibre) du système en boucle fermée résultant de la loi de commande proposée, a été prouvé qu'il est exponentiellement stable. Plus précisément, il est GES (Globalement Exponentiellement Stable) dans la phase de simple support, et LES (Localement Exponentiellement Stable) dans la phase de double support [8]. L'idée de base derrière l'analyse de stabilité, sur le cycle complet de marche, part du principe que si les impacts intervenants juste après les phases de simple support, ne font pas sortir les trajectoires du domaine de validité du double support, alors une stabilité asymptotique presque partout est garantie. Ceci est formulé dans la proposition suivante :

Proposition 4 *Soit le système* (2.7), (2.8), (2.34) *avec les hypothèses* 2, *et* 3. *Le modèle d'ordre réduit* (4.10) *est supposé fortement couplé*[9].

Soit le contrôleur (4.8), (4.12), (4.35), *avec des matrices de gains de retour, diagonales définies positives, alors l'origine du système en boucle fermée est uniformément faiblement asymptotiquement stable, i.e. il est uniformément stable au sens de Lyapunov, et toutes les trajectoires convergent vers zéro, pour presque tout* $t \geq t_0 \geq 0$ *et uniformément par rapport aux conditions initiales.*

Preuve

La première étape consiste à exprimer la dynamique du système en boucle fermée en divisant le cycle complet de marche en trois intervalles adjoints correspondant aux trois phases du cycle

Soit $T_i > 0$: l'instant du $i^{ème}$ impact. D'une façon générale cet instant est en fonction de q, mais dans notre cas il est choisi constant, étant donné que les trajectoires de référence sont des fonctions périodiques dans le temps. Par conséquent les impacts surviennent à des instants périodiques réguliers.

Dans le cas où T_i n'est pas constant, l'analyse reste aussi valide sous certaines hypothèses. En particulier il faut définir une surface d'impact $S(q,\dot{q}) = 0$, et la condition d'avoir un impact est que les trajectoires touchent cette surface. Ceci va définir des configurations d'impact qui dépendent de l'état du système, donc une fois l'état du système soit sur la surface $S(q,\dot{q}) = 0$, un impact aura lieu [10]

8. Il est LES, étant donné que le modèle dynamique d'ordre réduit n'est valable que pour $q_{42} \neq n\pi$,0.

9. I.e. la matrice R dans (4.12) est inversible.

10. Cette hypothèse reste valide uniquement sous la contrainte de non glissement et de contact persistant avec le sol (cf. par exemple [95, 40]).



Soit T_{DS} et T_{SS} les durées des phases de double et de simple support respectivement. Elles sont supposées aussi constantes. Pour tout $t_0 \geq 0$, soit la définition des différents intervalles du $i^{ème}$ cycle de marche :

$$\begin{aligned} I_{SS,i} &:= \{t \in \mathbb{R}_{\geq t_0} : t \in [T_{i-1}^+ + T_{DS}, T_i^-)\} \\ I_{I,i} &:= [T_i^-, T_i^+] \\ I_{DS,i} &:= \{t \in \mathbb{R}_{\geq t_0} : t \in (T_i^+, T_i^+ + T_{DS})\} \end{aligned} \tag{4.39}$$

Par conséquent

$$\mathcal{I}_{SS} := \bigcup_i I_{SS,i} \quad ; \quad \mathcal{I}_{DS} := \bigcup_i I_{DS,i} \quad ; \quad \mathcal{I}_I := \bigcup_i I_{I,i} \tag{4.40}$$

Donc, l'intervalle $[t_0, \infty)$, pour tout $t_0 \geq 0$ est composé d'alternance d'intervalles de simple support ($I_{SS,i}$), d'impact (I_i), et de double support ($I_{DS,i}$). D'autre part les domaines de validité de simple support et de double support peuvent s'écrire :

$$\tilde{\Omega}_{SS} := \{(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5\} \quad ; \quad \tilde{\Omega}_{DS} := \{(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \tilde{q}_{42} + q_{42d} \neq k\pi \,,\, k \in \mathbb{N}\} \tag{4.41}$$

Avec ces notations, le modèle dynamique global du robot marcheur sur un cycle complet de marche sera le suivant :

$$\Sigma_{SS} \; : \quad \ddot{\tilde{q}} + K_d \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \; = \; F(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \quad ; \quad \forall\, (t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \in \mathcal{I}_{SS} \times \tilde{\Omega}_{SS} \tag{4.42a}$$

$$\Sigma_I \; : \quad \begin{bmatrix} \tilde{q}^+ \\ \dot{\tilde{q}}^+ \end{bmatrix} = \Delta_3(q) \begin{bmatrix} \tilde{q}^- \\ \dot{\tilde{q}}^- \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall\, (t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \in \mathcal{I}_I \times \mathbb{R}^{2n} \tag{4.42b}$$

$$\Sigma_{DS} \; : \quad \ddot{\tilde{q}} + K_d'' \dot{\tilde{q}} + K_p'' \tilde{q} \; = \; 0 \quad ; \quad \forall\, (t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \in \mathcal{I}_{DS} \times \tilde{\Omega}_{DS} \tag{4.42c}$$

Sous l'hypothèse 3, les solutions de (4.42) sont définies comme étant des fonctions $\varphi(\cdot)$ continues à droite, d'une variation bornée (cf. [12, 95]). En effet, sur $\mathcal{I}_{SS,i}$ on a la solution $\varphi_{SS}(\cdot)$ de (4.42a), et sur l'intervalle $\mathcal{I}_{DS,i}$, la solution étant celle de (4.42c).

Si l'extension jusqu'à l'infinie de l'intervalle $\mathcal{I}_{SS}$ est considérée (c'est comme si le robot ne termine jamais son pas), l'origine pour (4.42a) est un point d'équilibre exponentiellement stable. Le raisonnement pourra être formulé pour la phase de double support, étant donné que les trajectoires restent toujours dans le domaine de validité du double support Ω_{DS}. Ceci pourra être garanti en choisissant soigneusement les trajectoires de référence [73]. Par conséquent, si durant les phases d'impact les trajectoires en boucle-fermée demeurent dans le domaine de validité de la phase de double support, alors une faible stabilité de l'origine pour le système (4.42) peut être déduite.



Afin de vérifier que c'est le cas, il faut quantifier les effets des forces d'impact, tout en les considérant comme étant des perturbations qui dépendent de l'état du système, mais qui interviennent pendant une courte durée arbitraire. De plus, d'après l'équation (2.25), les forces d'impact vérifient :

$$\|F_{ext}\| \leq m_M(\|\dot{\tilde{q}}\| + \|\dot{q}_d\|) \qquad m_M \geq \|M(q)\| \tag{4.43}$$

Soit $\beta > 0$ est tel que $\|\dot{q}_d(t)\| \leq \beta$ pour tout $t \in \mathcal{I}_I$. D'autre part la dérivée de la fonction de Lyapunov $V(\tilde{q},\dot{\tilde{q}})$ donnée par (4.25) donne[11]:

$$\dot{V}(\tilde{q}(t),\dot{\tilde{q}}(t)) \leq -\frac{1}{2}(k_{Dm}\|\dot{\tilde{q}}(t)\|^2 + \varepsilon k_{Pm}\|\tilde{q}(t)\|^2) + m_M[\|\dot{\tilde{q}}(t)\| + \beta][\|\dot{\tilde{q}}(t)\| + \varepsilon\|\tilde{q}(t)\|],$$

pour tout $t \in \mathcal{I}_{SS} \cup \mathcal{I}_I$.

Par conséquent si $k_{Pm} \geq 2m_M$, et $k_{Dm} \geq 4m_M(1+\varepsilon/2)$ alors :

$$\dot{V}(\tilde{q}(t),\dot{\tilde{q}}(t)) \leq -\frac{1}{4}(k_{Dm}\|\dot{\tilde{q}}(t)\|^2 + \varepsilon k_{Pm}\|\tilde{q}(t)\|^2) + \beta m_M[\|\dot{\tilde{q}}(t)\| + \varepsilon\|\tilde{q}(t)\|],$$

pour tout $t \in \mathcal{I}_{SS} \cup \mathcal{I}_I$.

D'autre part, soit $(\tilde{q}^*,\dot{\tilde{q}}^*)$ n'importe quel couple de vecteurs, tels que :

$$\|\tilde{q}^*\| = \frac{8\beta m_M}{K_{Pm}} \quad , \quad \|\dot{\tilde{q}}^*\| = \frac{8\beta m_M}{K_{Dm}} \quad , \quad V(\tilde{q}^*,\dot{\tilde{q}}^*) := c$$

Ceci permet d'en déduire que :

$$\dot{V}(\tilde{q}(t),\dot{\tilde{q}}(t)) \leq -\frac{1}{8}(k_{Dm}\|\dot{\tilde{q}}(t)\|^2 + \varepsilon k_{Pm}\|\tilde{q}(t)\|^2)$$

sur l'ensemble $\{(t,\tilde{q},\dot{\tilde{q}}) : V(\tilde{q}(t),\dot{\tilde{q}}(t)) \geq c\}$.

Par ailleurs $\dot{V}(\tilde{q}(t),\dot{\tilde{q}}(t))$, et par conséquent $\|\tilde{q}(t)\,;\dot{\tilde{q}}(t)\|$, converge vers une région qui pourra être réduite en augmentant les gains de retours. Autrement dit, la perturbation due aux impacts pourra être compensée, pour assurer que la phase de double support commence avec les bonnes conditions initiales.

La stabilité exponentielle, pourra être conclue pour presque tout t du moment où l'origine de (4.42c) est aussi exponentiellement stable.

L'argumentation précédente est basée sur l'hypothèse que $\|\dot{q}_d(T_i)\| \leq \beta_i$ à l'instant de l'impact. En générale il n'est pas possible de quantifier le nombre β_i, à cause de la dépendance de $\dot{q}_{nad}$ des trajectoires du système et de l'impact. Mais la durée de ce dernier est suffisamment courte, ce qui permet de supposer que la borne sur q_{nad}, sur l'intervalle en question est aussi relativement petite. D'autre part il faut noter qu'il n'est pas nécessaire que $\dot{q}_{nad}(t)$ soit borné

11. En considérant (4.27).



par β pour tout t, et pour chaque ensemble de conditions initiales. Il faut plutôt qu'elle soit bornée sur des intervalles compacts. Ceci est assuré, étant donné que les solutions de (4.42a) existent et elles sont uniques pour tout t.

Remarque 18

- *Il faut noter qu'aucune restriction n'est faite sur le choix de la phase initiale, théoriquement le bipède peut commencer à partir de la phase de simple support, comme il peut bien commencer à partir de la phase de double support.*
- *Les résultats de simulation relatifs à cette deuxième approche de commande seront présentés dans le chapitre* 5*, qui fera l'objet d'application des deux approches à la commande du robot bipède sous-actionné* RABBIT.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, la deuxième approche de commande a été élucidée. Elle repose principalement sur la décomposition d'un cycle de marche en phase principales de simple et de double support, avec une phase instantanée d'impact, qui sépare les deux phases principales. L'objectif principal était de trouver une commande stabilisante pour le robot bipède sur un cycle complet de marche. Pour cela des lois de commande inspirées des approches de commande de robots manipulateurs soumis à des contraintes[12] ont été utilisées pour commander le système dans chacune des deux phases de simple est de double support.

Le système sans contraintes (robot avec pieds en l'air) dispose de sept degrés de liberté, nécessaires à la description de sa dynamique. Cependant, durant la phase de simple support, le robot marcheur est en contact avec le sol à travers un seul pied, cela génère deux contraintes de contact avec le sol. Ces dernières introduisent des dépendances dans le vecteur de coordonnées généralisées. Ceci incite de trouver le modèle dynamique d'ordre réduit régissant les coordonnées indépendantes du système. Une fois le modèle d'ordre réduit est obtenu, il faut trouver une commande stabilisante autour de certaines trajectoires de référence.

En ce qui concerne les trajectoires de référence, des fonctions trigonométriques simples permettant d'aller d'une certaine configuration initiale (qui représente la posture initiale du bipède) à une certaine configuration finale (qui représente la posture finale du bipède) ont été proposées. Pour poursuivre ces trajectoires une commande non linéaire a été proposée, dans

12. Souvent appelée commande hybride position/force.



le but de faire un pas en avant.

La même procédure adoptée pour la phase de simple support est appliquée dans la phase de double support. La seule différence est que le robot marcheur dans la phase de double support est en contact avec le sol à travers les deux pieds. Cela gérère quatre contraintes au lieu de deux, et le modèle d'ordre réduit sera de dimension 3 au lieu de 5. Par conséquent, le système est sur-actionné, étant donné qu'il dispose de quatre actionneurs et trois degrés de liberté.

L'analyse de stabilité proposée est basée sur l'approche de Lyapunov. En effet, le système résultant en boucle fermée est analysé dans les trois phases du cycle de marche, à savoir la phase de simple support, la phase d'impact et la phase de double support. Les lois de commande proposées dans ces deux phases conduisent à des systèmes en boucle-fermée exponentiellement stable. Sur un cycle complet de marche, une stabilité uniforme asymptotique est prouvée sous certaines conditions, tout en considérant les impacts avec le sol comme étant des perturbations.

Cette deuxième approche a été appliquée en mode simulation à la commande de la marche dynamique du robot bipède sous-actionné RABBIT. Les simulations ont été réalisées avec un simulateur développé avec `Matlab`. Les résultats de simulation obtenus seront présentés dans le chapitre 5 des applications.





Chapitre 5

Applications à la commande de la marche d'un robot bipède sous-actionné

5.1 Introduction

Les deux chapitres précédents ont fait l'objet d'une présentation des deux approches de commande proposées. Le présent chapitre est consacré à l'application des deux approches à la commande de la marche dynamique du robot bipède RABBIT décrit dans le chapitre 2. Les résultats de simulation obtenus sont présentés et interprétés.

5.2 Application de la première approche de commande

Etant donné que l'approche est bien adaptée aux systèmes dynamiques hybrides, le robot bipède sous-actionné constitue un bon exemple d'application puisqu'il est régi par une dynamique hybride. Ceci vient du fait que le cycle de marche consiste en une alternance de phases de simple support et d'impact. Lors de la première, le système est non linéaire continu, alors que la deuxième introduit une discontinuité dans le vecteur d'état du système.

Cette approche a été appliquée à la commande du robot bipède sous-actionné, présenté au chapitre 2. Six scénarios de simulation ont été réalisés, il s'agit de :

- la marche à vitesse constante;
- la génération d'allures transitoires de démarrage et d'arrêt;
- la transition entre différentes vitesses de marche;
- le balancement autour d'une posture d'équilibre;
- la robustesse vis-à-visdes incertitudes paramétriques;
- la robustesse vis-à-vis des irrégularités du sol.



Avant de présenter les résultats de simulation, la dynamique du robot bipède est re-visitée dans le cadre des notations générales utilisées lors de la présentation de l'approche de commande.

5.2.1 Le robot bipède : un système à dynamique hybride

Le robot bipède en question : RABBIT, est un robot marcheur bipède sous-actionné, une description détaillée du point de vue technique et technologique a fait l'objet du chapitre 2.

La dynamique d'un tel système en phase de simple support est rappelée ici. Elle est obtenue par application du formalisme de Lagrange [88, 84], et elle est donnée par :

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Su + F_{ext} \tag{5.1}$$

Dans le but d'exprimer les forces F_{ext}, sous l'hypothèse que le contact soit persistant, on considère les contraintes :

$$\ddot{x}_{f_1}(q,\dot{q},F_{ext},u) = 0 \qquad ; \qquad \ddot{y}_{f_1}(q,\dot{q},F_{ext},u) = 0 \tag{5.2}$$

où (x_{f_1},y_{f_1}) sont les coordonnées cartésienne du pied de contact avec le sol.

L'association de ces contraintes à la dynamique (5.1) introduira des dépendances dans le vecteur de coordonnées généralisées. Par conséquent, ce dernier peut être subdivisé en deux sous-vecteurs, celui des coordonnées indépendantes, noté q_{nc} :

$$q_{nc} = \begin{pmatrix} q_{31} & q_{41} & q_{32} & q_{42} & q_1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^5 \tag{5.3}$$

et celui, dit de coordonnées dépendantes[1], noté q_c, défini par

$$q_c = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 \tag{5.4}$$

La prise en compte des contraintes de contact avec le sol mène à la dynamique du robot marcheur en phase de simple support, décrite par (5.1)-(5.2), par conséquent, l'élimination des coordonnées dépendantes conduit à un système dynamique de 7 équations à 7 inconnus, représentés pat le vecteur

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_{31} & \ddot{q}_{41} & \ddot{q}_{32} & \ddot{q}_{42} & \ddot{q}_1 & \lambda_n & \lambda_t \end{pmatrix}^T$$

où $\lambda := (\lambda_n,\lambda_t)^T \in \mathbb{R}^7$ représente le vecteur des multiplicateurs de Lagrange relatifs aux forces de contact avec le sol.

1. Le vecteur de coordonnées dépendantes, peut être obtenu en focntion des coordonnées indépendantes par le biais de calculs trigonométriques sur la chaîne cinématique ouverte.



Le vecteur de coordonnées indépendantes est de dimension 5, donc le vecteur d'état correspondant (incluant les coordonnées indépendantes, aussi bien que leurs dérivées i.e. les vitesses) est $x \in \mathbb{R}^{10}$. Pour récapituler, la dynamique du robot bipède en phase de simple support peut être alors mis sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad ; \quad \lambda = \Lambda(x,u). \tag{5.5}$$

Remarque 19

- *L'évaluation des forces de contact avec le sol, permet de vérifier la persistance de contact avec le sol. Elle permet également la vérification de la condition de non glissement sur la surface de marche.*
- *Pour cette approche de commande, le cycle de marche considéré consiste en une succession de phases de simple support et d'impact. A savoir, chaque deux phases de simple support sont séparées par une phase d'impact. Étant donné que le robot marcheur dispose de deux jambes et sa locomotion consiste à alterner ces deux jambes, alors le cycle de marche peut être décomposé comme il est montré sur la figure* 5.1

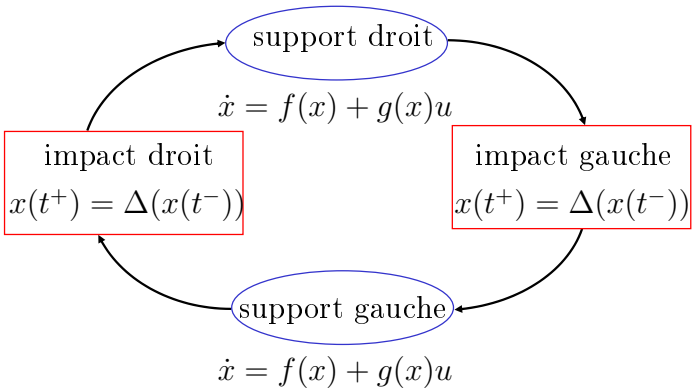


FIG. 5.1 – *Décomposition du cycle de marche*

- *Il faut noter que la dynamique* (5.5) *est valide entre deux impact successifs.*

Après chaque phase de simple support, un impact survient, il marque la fin de la phase de simple support. Il traduit un phénomène de collision (choc) entre la jambe de balancement et le sol. Le modèle dynamique décrivant cette phase est donné par :

$$x(t^+) = \Delta(x(t^-)) \tag{5.6}$$

Remarque 20

– *Le modèle* (5.6) *inclut, en plus de la dynamique d'impact, la permutation du rôle des jambes, i.e. la jambe de balancement devient la jambe de support, et vice versa.*

– *Pour de plus amples détails sur ce modèle dynamique, se référer au chapitre 2.*

Soit y_{f_2} la position verticale cartésienne du pied de balancement. L'apparition de l'impact avec le sol est liée à la condition suivante

$$y_{f_2}(x(t)) = 0 \quad ; \quad \dot{y}_{f_2}(x(t)) \leq 0 \tag{5.7}$$

Par conséquent, en concordance avec la section 3.3.1, la fonction de commutation suivante est proposée :

$$S(x) := \left[y_{f_2}(x)\right]^2 + \max\{0,\dot{y}_{f_2}(x)\} \tag{5.8}$$

Il reste à vérifier que l'hypothèse 1 (cf. chapitre 3) est vérifiée pour ce choix. Pour cela soit la définition suivante de l'ensemble $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{10} \quad \text{s.t} \quad \dot{y}_{f_2}(\Delta(x)) \geq \varepsilon_0 \right\} \quad ; \quad \varepsilon_0 > 0 \tag{5.9}$$

ce qui implique que :

$$\left\{ S(x) = 0 \quad \text{et} \quad x \in \mathcal{C} \right\} \quad \Rightarrow \quad S\Big(\Delta(x)\Big) \geq \varepsilon_0 =: \gamma(\mathcal{C})$$

On considère maintenant l'application de sortie suivante :

$$h(x) := \begin{pmatrix} q_{31} & q_{41} & q_{32} & q_{42} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 \tag{5.10}$$

Ce choix correspond bien aux coordonnées actionnées du robot (coordonnées articulaires des membres des jambes). En plus il correspond à 4 sorties dont le degré relatif est de 2 pour chaque sortie.

Par application du principe de linéarisation partielle[2], soit la définition suivante des sous états ξ et η :

$$\xi := \begin{pmatrix} q_{31} & q_{41} & q_{32} & q_{42} & \dot{q}_{31} & \dot{q}_{41} & \dot{q}_{32} & \dot{q}_{42} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^8 \quad ; \quad \eta := \begin{pmatrix} q_1 & \dot{q}_1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2.$$

L'application de sortie (5.10) est compatible avec la dynamique (5.5)-(5.6) au sens de la définition 1 (cf. chapitre 3). Afin de vérifier cette compatibilité, il faut que les conditions d'une telle définition soient vérifiées :

- Vu que la condition d'impact (5.7) dépend exclusivement de ξ, la première condition est bien vérifiée;
- D'autre part, avec un choix approprié de ξ, indépendamment de la valeur de $\eta = (q_1,\dot{q}_1)^T$, (5.9) peut être vérifiée.

Remarque 21 *Avant de présenter les différents résultats de simulation, on va récapituler l'application de cette approche à la commande du robot bipède par l'organigramme de la figure* 5.2. *Il illustre techniquement le fonctionnement de l'approche.*

2. Pour plus de détails sur le principe de linéarisation partielle, se référer à l'annexe B.



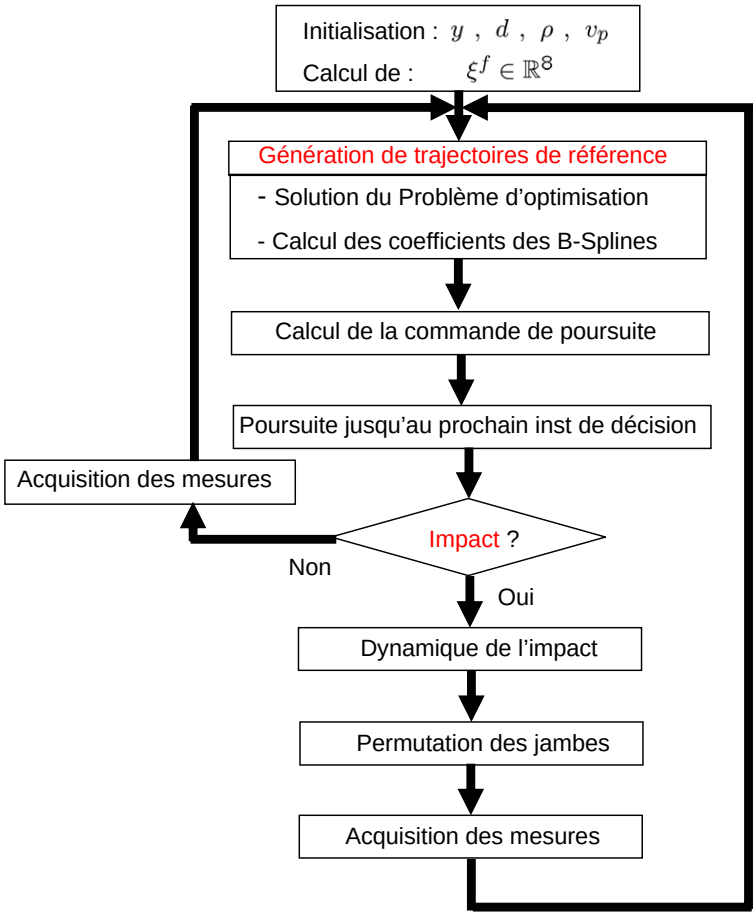


FIG. 5.2 – *Organigramme d'application de la première approche à la commande du robot bipède*

5.2.2 Résultats de simulation

Cette section est entièrement consacrée à la présentation et la discussion des résultats de simulation, obtenus[3] par application de la première approche à la commande du robot bipède sous-actionné. Six scénarios d'application sont envisagés.

Avant la présentation de ces résultats, une technique de paramétrisation réduite du vecteur de sortie est introduite, ainsi que le choix des différents paramètres de l'approche de commande.

3. Sur un simulateur du prototype réel, développé avec `Matlab`, et `Visual Fortran`.

Paramétrisation réduite de q_a

L'objectif consiste à exprimer le vecteur de coordonnées actionnées du robot (coordonnées des membres des jambes) q_a donné par :

$$q_a := \begin{pmatrix} q_{31} & q_{41} & q_{32} & q_{42} \end{pmatrix}^T$$

en fonction de trois paramètres géométriques, à savoir d, y, et ρ, qui sont illustrés sur la figure 5.3, ils représentent :

d : longueur du pas, i.e. distance entre les deux points de contact dans la cofiguration double support;

y : position verticale des hanches, i.e. la coordonnée cartésienne suivant l'axe des y;

ρ : rapport entre la position horizontale des hanches (suivant l'axe des x), et la longueur du pas.

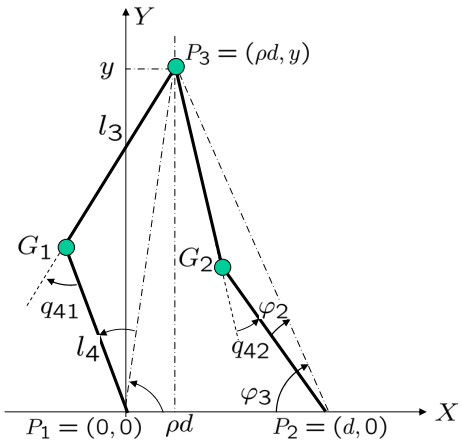


FIG. 5.3 – *Géométrie des jambes pour la paramétrisation réduite de $h(x)$*

En se basant sur la figure 5.3, et en utilisant un calcul trigonométrique, les coordonnées articulaires des membres des jambes peuvent être exprimées en fonction des trois nouveaux paramètres par les relations suivantes :

$$\begin{cases} q_{31} = \pi - \arctan(\frac{\rho\ d}{y}) - \varphi_3 \\ q_{41} = \pi - \varphi_{34} \\ q_{32} = \pi + \arctan(\frac{d\ (1-\rho)}{y}) - \varphi_3 \\ q_{42} = \pi - \varphi_{34} \end{cases} \text{, avec } \begin{cases} \varphi_{34} = \arccos(\frac{-((1-\rho)^2\ d^2+y^2)+l_3^2+l_4^2}{2\ l_3\ l_4}) \\ \varphi_3 = \arctan(\frac{y}{d\ (1-\rho)}) \end{cases} \tag{5.11}$$

Remarque 22 *Cette paramétrisation facilite le choix de la configuration désirée du robot. En effet, il suffit de connaître d, y ρ pour pouvoir déduire q_a. En connaissant q_1 en plus, toutes les positions articulaires du robot peuvent être déduites.*



5.2.3 Choix des configurations désirées du robot

Le choix de la configuration désirée (cible) du robot se résume au choix des sous états ξ^f et η^f. Étant donné que $\eta^f = (q_1^f, \dot{q}_1^f)^T$, il suffit de choisir une position et une vitesse désirée du tronc, pour avoir η^f.

Le choix de η^f est étroitement lié au cycle limite désiré (vers lequel la dynamique interne converge). Néanmoins ce n'est pas le seul paramètre qui agit sur le cycle limite désiré. En effet, il y a d'autres paramètres de cette approche de commande qui agissent sur le cycle limite, à titre d'exemple la matrice de pondération Q dans le critère d'optimisation proposé.

Étant donné que :

$$\xi^f = ({q_a^f}^T, {\dot{q}_a^f}^T)^T = \begin{pmatrix} q_{31}^f & q_{41}^f & q_{32}^f & q_{42}^f & \dot{q}_{31}^f & \dot{q}_{41}^f & \dot{q}_{32}^f & \dot{q}_{42}^f \end{pmatrix}^T$$

le choix des positions q_a^f et des vitesses $\dot{q}_a^f$ des coordonnées actionnées, permettra de fixer entièrement ξ^f. Le choix de q_a^f est déjà abordé dans la section précédente. Il repose sur le principe de paramètrisation réduite ainsi expliquée. Il reste donc le choix de $\dot{q}_a^f$ pour pouvoir définir complètement la configuration désirée du robot.

Pour définir les vitesses articulaires désirées $\dot{q}_a^f$, on propose une technique basée sur le principe de vitesse à norme minimale, qui est présenté par la suite.

Soit $q_a^f \in \mathbb{R}^4$ le vecteur de coordonnées actionnées désirées, obtenu par une méthode ou par une autre[4]. Ce choix correspond à la posture désirée des jambes juste avant chaque impact, à savoir $q_a(t_k^-) = q_a^f$.

Associé à ce vecteur de position, soit le vecteur de vitesses correspondantes $\dot{q}_a^f(q_a^f) \in \mathbb{R}^4$. Il est obtenu, connaissant une certaine vitesse d'impact[5] désirée $-v_{f_2}$, par la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} {\dot{q}_a}^f(q_a^f, v_{f_2}) &:= \text{Arg} \min_{\dot{q}_a} \|\dot{q}_a\|^2 \quad \text{sous la condition} \quad \frac{\partial y_{f_2}}{\partial q_a}(q_a^f)\dot{q}_a = -v_{f_2} \\ &= -\Big[\frac{\partial y_{f_2}}{\partial q_a}(q_a^f)\Big]^T v_{f_2} / \|\frac{\partial y_{f_2}}{\partial q_a}(q_a^f)\|^2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Remarque 23

- *On note que y_{f_2} est la position cartésienne verticale (suivant l'axe y) du pied de balancement.*

4. Une manière d'obtenir q_a^f consiste à utiliser la paramétrisation réduite ainsi proposée.

5. Cette vitesse d'impact est la vitesse verticale désirée, avec laquelle le pied de balancement touche le sol au moment d'impact



- *D'après le problème d'optimisation ci-dessus, $\dot{q}_a^f$ est la vitesse à norme minimale, qui correspond à une certaine vitesse d'impact désirée $-v_{f_2}$.*
- *La connaissance des trois paramètres d,y,ρ, la position et la vitesse du tronc q_1,$\dot{q}_1$, et la vitesse d'impact $-v_{f_2}$, permettra alors de définir complètement la configuration désirée finale du robot, i.e. ξ^f, et η^f.*

Pour les simulations envisagées, considérons le modèle dynamique du robot bipède exprimé par (5.5)-(5.6), avec les paramètres dynamiques résumés dans le tableau 2.1.

Un paramètre d'optimisation scalaire est utilisé, il s'agit de l'angle de la cuisse de la jambe de balancement à un instant intermédiaire entre deux impacts successifs

$$p = q_{32}(\tau_c/2) \tag{5.13}$$

Les autres paramètres de l'approche de commande sont regroupés dans le tableau 5.1

Paramètre	**Signification**	**valeur**
τ_c	la durée d'un pas	$0.75sec$
y	hauteur de hanches	$y = 0.775$
d	Longueur d'un pas	$0.3m$
ρ	position horizontale des hanches	0.5
v_{f_2}	vitesse d'impact du pied de balancement	$-0.25m/sec$
$(q_1,\dot{q}_1)_0$	position et vitesse initiale du tronc	(0,0)
Q	matrice de pondération	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
v_{mean}	vitesse moyenne de marche	$-0.4m/sec$

TAB. 5.1 – *Description des paramètres de l'approche de commande*

Remarque 24 *Le paramètre d'optimisation* (5.13) *est un choix particulier, d'ailleurs plusieurs choix sont possibles. D'autre part un vecteur d'optimisation de dimension supérieure est possible aussi, mais pour des raisons de temps de calcul*[6]*, notre choix s'est porté sur un paramètre scalaire.*

Une interface de commande, a été développée, en utilisant le `GUI` de `Matlab`, dans le but de mieux manipuler les simulations, elle permet de :

- visualiser le robot en mouvement, pour bien voir la séquence de posture effectuée;
- lancer la simulation, et l'arrêter à n'importe quel moment;

6. Pour une évaluation du temps de calcul, se référer à la section 5.2.10



- revoir le mouvement effectué;
- tracer les courbes de simulation, et
- préparer la séquence des images pour la vidéo.

La fenêtre d'interface est illustrée sur la figure 5.4, où on remarque à gauche les différentes commandes, et à droite la posture du robot.

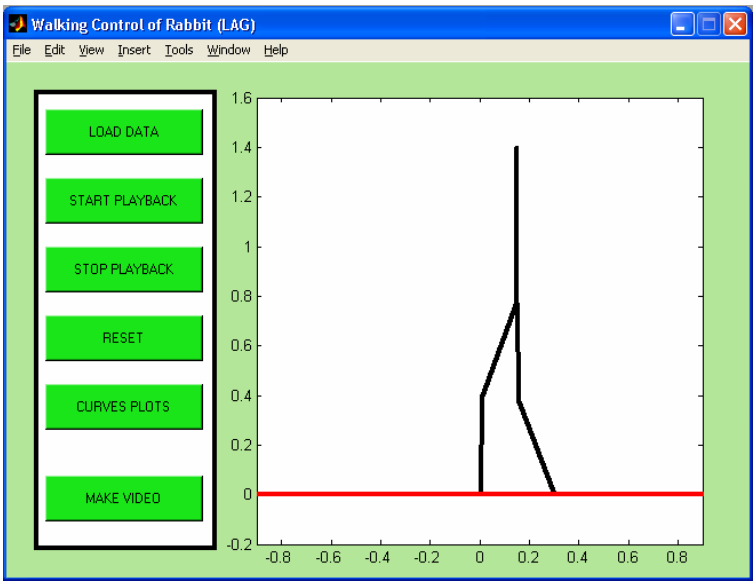


FIG. 5.4 – *L'interface graphique de commande (réalisé avec* `GUI` *de* `Matlab`*)*

Par la suite, les différents scénarios de simulation sont présentés.

5.2.4 Scénario 1 : la marche à vitesse constante

L'objectif de cette simulation est de faire marcher le robot bipède à vitesse constante. Les paramètres du modèle ainsi que ceux de l'approche de commande sont fixés comme indiqué ci-dessus.

Analyse de stabilité

L'analyse de stabilité est basée sur la proposition 1, évoquée dans le chapitre 3. Cette proposition utilise le tracé de l'application multi-pas $\Psi_{k_0}^Q$ en fonction de $r = \|\eta - \eta^f\|_Q^2$, pour différentes valeurs de k_0[7]. En particulier pour $k_0 = 1$ et 2, cette application est représentée sur la figure 5.7.

7. La valeur de k_0 représente la multiplicité de l'application Ψ, i.e. après combien de cycles cette fonction est évaluée

D'après La courbe les remarques suivantes peuvent être formulées :

- Pour $k_0 = 1$, les conditions de la proposition 1 ne sont pas vérifiées, par conséquent, des valeurs supérieurs de k_0 sont nécessaires.
- Pour $k_0 = 2$, les conditions du point 2 de la proposition 1 sont vérifiées avec $\varrho \approx 0.56$ et $\varepsilon \approx 0.08$. D'après la proposition pour n'importe quelle condition initiale appartenant à l'ensemble $\mathbb{M}_\rho$ défini par :

$$\mathbb{M}_\rho := \left\{ \begin{pmatrix} \xi^f \\ \eta \end{pmatrix} \quad | \quad \|\eta - \eta^f\|_Q^2 \leq 0.56 \right\},$$

les impacts des trajectoires du système en boucle-fermée sur la section de Poincaré convergent vers l'ensemble attractif et invariant $\mathbb{M}_\varepsilon$ défini par :

$$\mathbb{M}_\varepsilon := \left\{ \begin{pmatrix} \xi^f \\ \eta \end{pmatrix} \quad | \quad \|\eta - \eta^f\|_Q^2 \leq 0.08 \right\},$$

ce qui définit un voisinage d'un cycle limite multiple d'ordre 2, défini par $\eta^f = 0$.

Remarque 25 *Pour donner une idée de la taille de la région d'attraction, noter que l'ensemble $\mathbb{M}_\varrho$ des conditions initiales à partir desquelles une convergence au voisinage du cycle limite est possible, inclut entre autres, les deux condition initiales suivantes :*

$$(q_1,\dot{q}_1)_0 = (\pm 42.87°,0°/sec)$$

Courbes de simulation

La simulation consiste à faire marcher le robot bipède pendant 15 pas, sur une surface de marche horizontale, et sans obstacles. Le modèle dynamique est supposé parfait (une étude dédiée à la robustesse vis-à-vis des incertitudes du modèle, est présenté ci-dessous).

L'évolution des positions et vitesses des coordonnées articulaires des fémurs en fonction du temps est tracée sur la figure 5.8.(a), et celle des tibias sur la figure 5.8.(b). La coordonnée non actionnée (le tronc), évolue dans le temps comme le montre la figure 5.9, qui représente sa position, sa vitesse, ainsi que son plan de phase. Ce qu'il faut remarquer sur ces deux courbes est que le cycle est bien d'ordre 2. En effet, après deux impacts les trajectoires reviennent au voisinage du point de départ sur le plan de phase. Ceci confirme bien le résultat de stabilité évoqué ci-dessus. Il faut remarquer également que visuellement les courbes de position et de vitesse du tronc sont parfaitement périodique. Ceci n'est pas vrai, en effet, la convergence est vers un voisinage du cycle limite, mais ce voisinage n'est pas suffisamment large pour qu'il



soit visible sur ces courbes. Par contre il est visible sur la courbe du plan de phase.

Les coordonnées cartésiennes des hanches (position et vitesse) sont représentées sur la figure 5.10. Il faut noter que le robot marche de la droite vers la gauche, i.e. à l'opposé de la direction de l'axe des x. Les trajectoires des hanches dans le plan sagittal sont tracées sur la courbe 5.11, aussi bien que la vitesse moyenne de marche.

L'interaction du robot marcheur avec le sol, est caractérisée par les forces de contact avec le sol. Elles sont représentées sur la figure 5.12.(a), qui trace la force normale, la force tangentielle, et leur rapport, i.e. λ_t/λ_n. Ce dernier est comparé avec le coefficient μ_0 de frottement (pied/sol)[8]. La remarque qui en découle de cette figure, est que la condition de persistance de contact avec le sol est vérifiée ($\lambda_n > 0$), et la condition de non glissement de Coulomb est vérifiée, vu que le rapport $|\lambda_t/\lambda_n|$ est strictement inférieur à μ_0.

Les coordonnées et vitesses cartésiennes des pieds du robot sont tracées en fonction du temps sur les deux figures 5.14, 5.15, qui montrent respectivement leurs positions et leurs vitesses.

Les couples moteurs, qui représentent les entrées de commande de notre système sont représentés sur la figure 5.13. Ils restent visiblement dans la région d'admissibilité du prototype. A savoir que le couple maximum des quatre moteurs actionneurs[9] est de $150N.m$, alors que le pic des couples générés par notre contrôleur est de $83.5N.m$.

Cependant, cette vérification de l'admissibilité, n'est pas suffisante, il faut vérifier aussi que la puissance maximale des moteurs actionneurs n'est pas atteinte. Pour cela l'idée consiste à tracer la vitesse angulaires de l'arbre de moteur (valeur absolue en $tour/min$) en fonction du couple moteur (valeur absolue), et vérifier qu'on reste bien dans la région d'admissibilité donnée par le constructeur. La région d'admissibilité, donnée par le constructeur est montrée sur la figure 5.5. Les quatre moteurs actionneurs du prototype sont identiques, ils ont une vitesse maximale de 6000 $tour/min$, et un couple max de 4 $N.m$. D'autre part, dans le processus de conception, les frottements sont négligés, alors il faut introduire une certaine marge de sécurité. Par conséquent, pour les résultats de simulation, qui sont présentés, la vitesse maximale considérée est de 4000 $tours/min$, et le couple maximal est de 3 $N.m$. Ce qui donne

8. Le coefficients de frottement μ_0 est de 0.7 dans notre cas.

9. Le prototype RABBIT utilise des moteurs à courant continu du type `RS 420 J`, doté de réducteurs de vitesse de rapport 50.



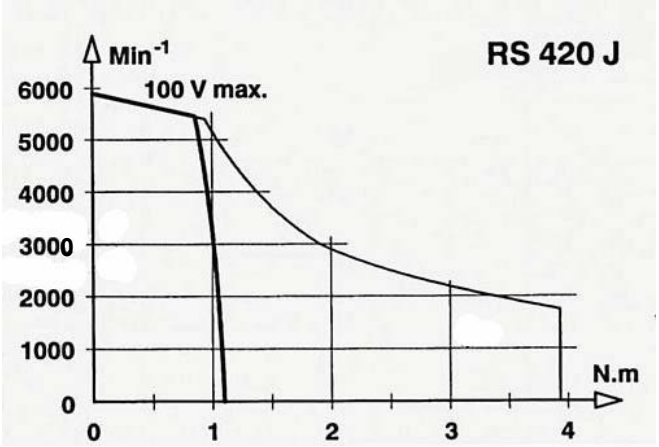


FIG. 5.5 – *Région admissible de puissance des moteurs d'après le constructeur*

le gabarit de la zone admissible représenté sur la figure 5.6.

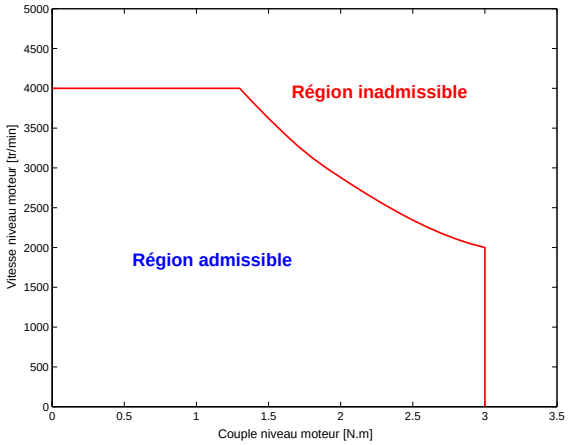


FIG. 5.6 – *Gabarit de la région des puissances admissibles des moteurs*

Le rapport des réducteurs de vitesses, utilisés avec les moteurs à courant continu, est de 50. Les formules suivantes sont utilisées pour passer de la vitesse niveau articulation à la vitesse niveau moteur, et du couple niveau articulation au couple niveau moteur :

$$\begin{cases} v_{mot} = \frac{v_{art} \times 50 \times 60}{2 \times \pi} \\ \tau_{mot} = \frac{\tau_{art}}{50} \end{cases} \tag{5.14}$$

où

v_{mot} est la vitesse niveau moteur, en $[tours/min]$,

v_{art} est la vitesse relative[10] niveau articulation, en $[rad/sec]$,

10. Par exemple pour la jambe (q_{31},q_{41}) la vitesse relative du genou est donnée par $v_{genou1} = \mid q_{31} - q_{41} \mid$.

τ_{mot} est le couple niveau moteur, en $[N.m]$,

τ_{art} est le couple niveau articulation, en $[N.m]$.

Le test de la puissance admissible des moteurs, est concrétisé donc par le tracé de la vitesse niveau moteur en fonction du couple niveau moteur. il est superposé au gabarit caractérisant la puissance maximale. Si le tracé reste bien à l'intérieur du gabarit, on en déduit que les puissances sont admissibles. Dans le cas de ce premier scénario de simulation ces courbes sont tracées sur la figure 5.12.(b), qui justifie que la puissance maximale reste bien dans la zone admissible, pour les quatre actionneurs.

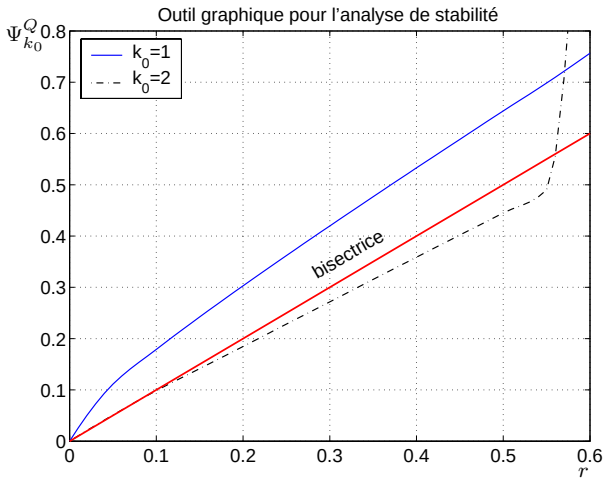
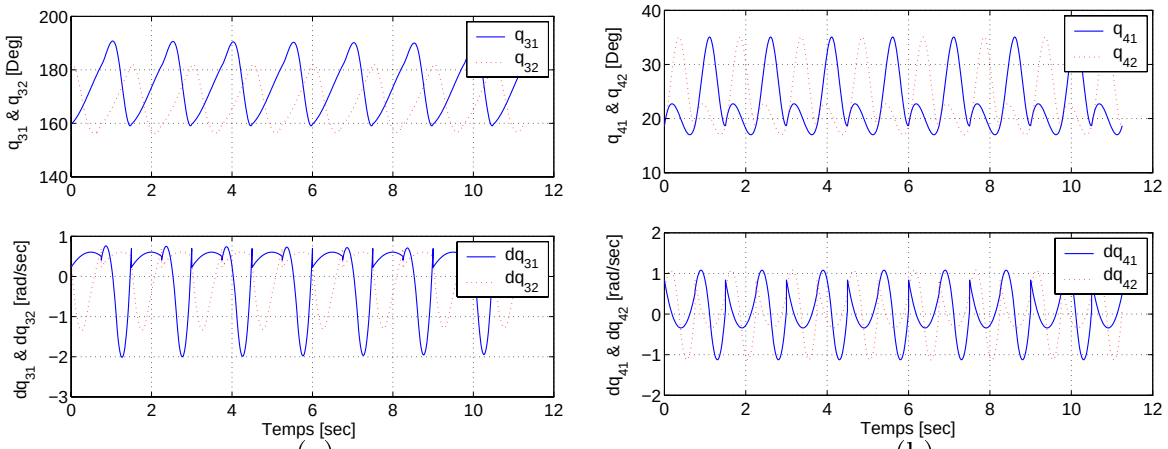
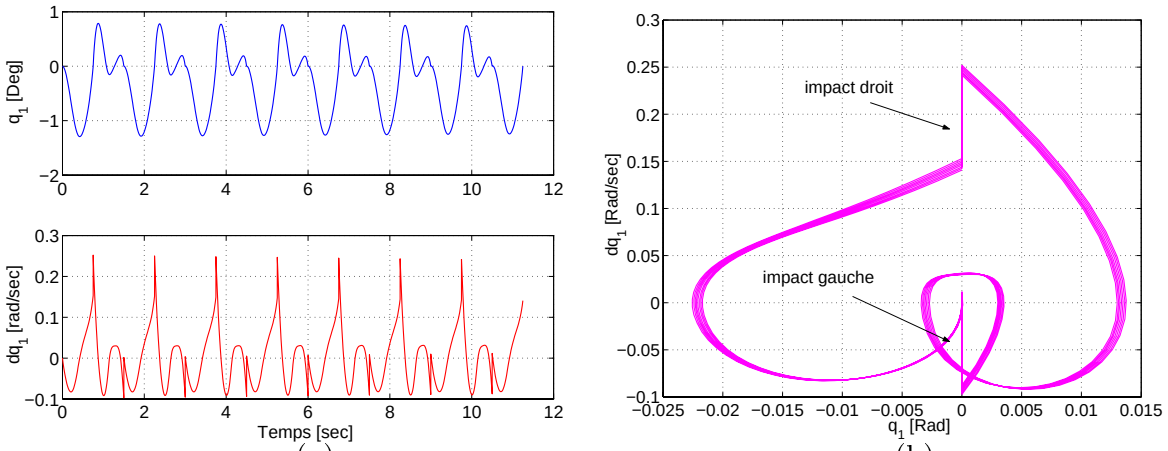


FIG. 5.7 – *Scénario 1 (marche à vitesse constante) : Courbe d'analyse de stabilité : les conditions suffisantes du point 2 de la proposition 1 sont satisfaites pour* $k_0 = 2$



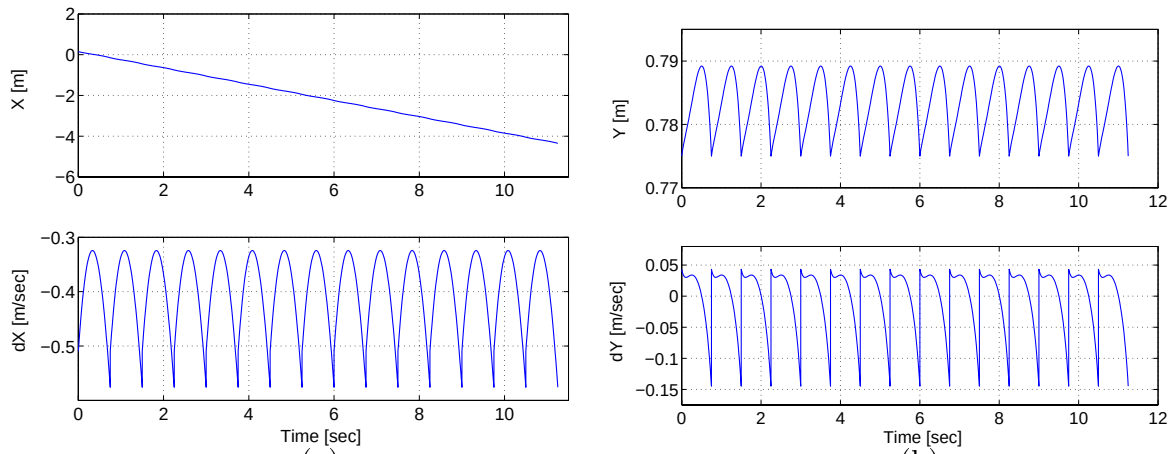
(a) (b)

FIG. 5.8 – *Scénario 1 (marche à vitesse constante) : évolution dans le temps des (a) : positions et vitesses articulaires des fémurs, (b) : positions et vitesses articulaires des tibias*



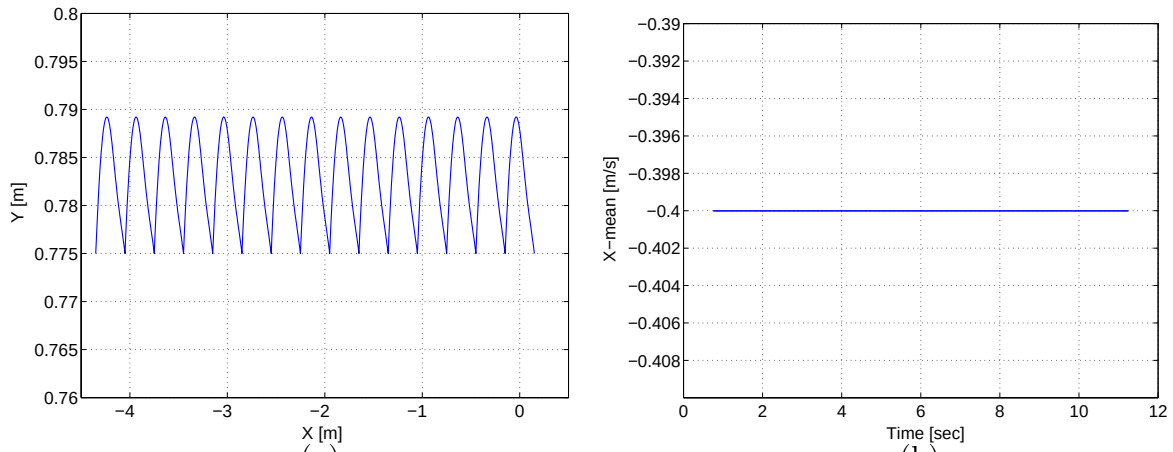
(a) (b)

FIG. 5.9 – *Scénario 1 (marche à vitesse constante) : évolution dans le temps de la position et vitesse du tronc (a), plan de phase de la dynamique interne* η *(b)*



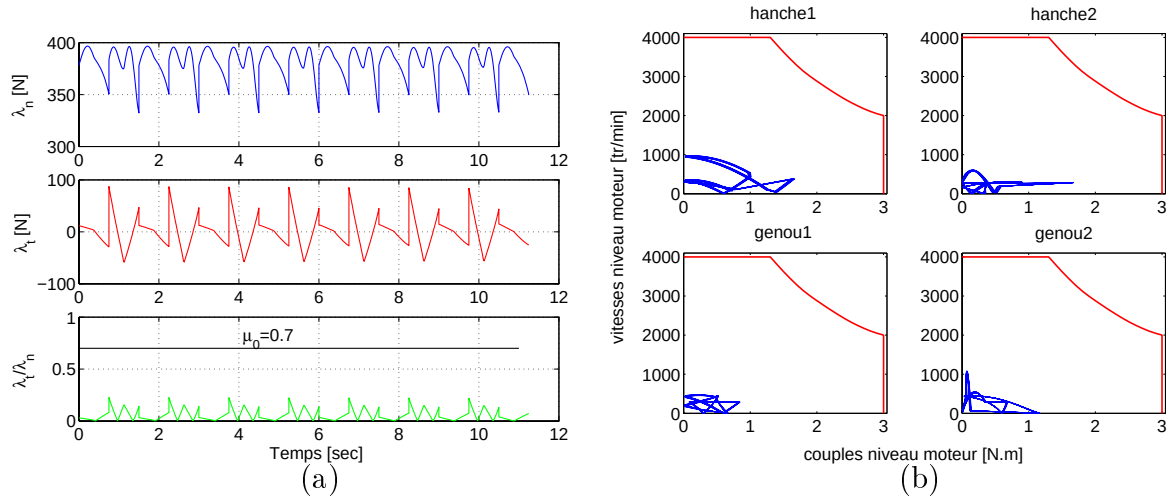
(a) (b)

FIG. 5.10 – *Scénario 1 (marche à vitesse constante) : évolution dans le temps des positions et vitesses cartésiennes des hanches (a) : suivant l'axe des x, (b) : suivant l'axe des y*



(a) (b)

FIG. 5.11 – *Scénario 1 (marche à vitesse constante) : trajectoire des hanches dans le plan sagittal (a), vitesse moyenne de marche (b)*



(a) (b)

FIG. 5.12 – *Scénario 1 (marche à vitesse constante) : évolution des forces de contact avec le sol (a), admissibilité des puissances des moteurs actionneurs (b)*

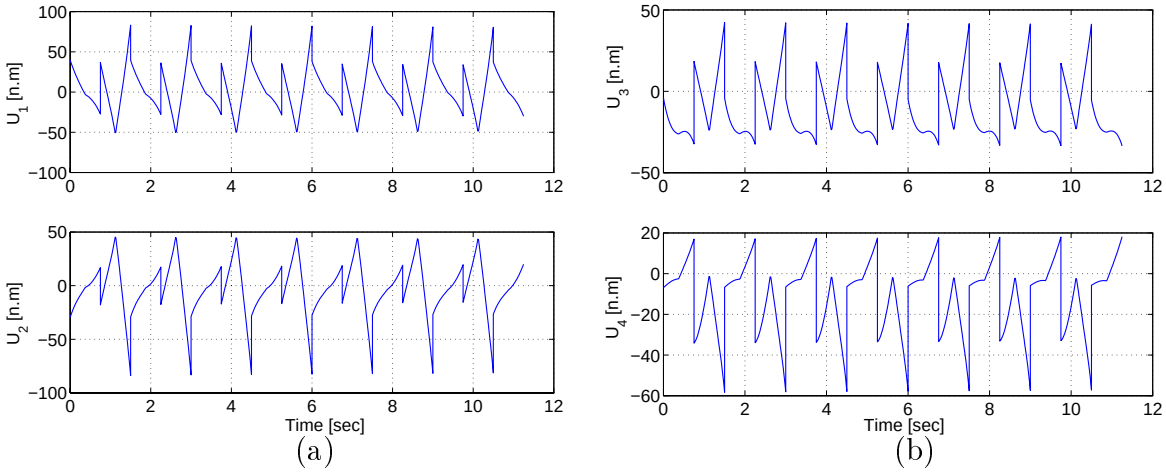


FIG. 5.13 – *Scénario 1 (marche à vitesse constante) : évolution des couples moteurs (a) : des cuisses, (b) : des tibias*

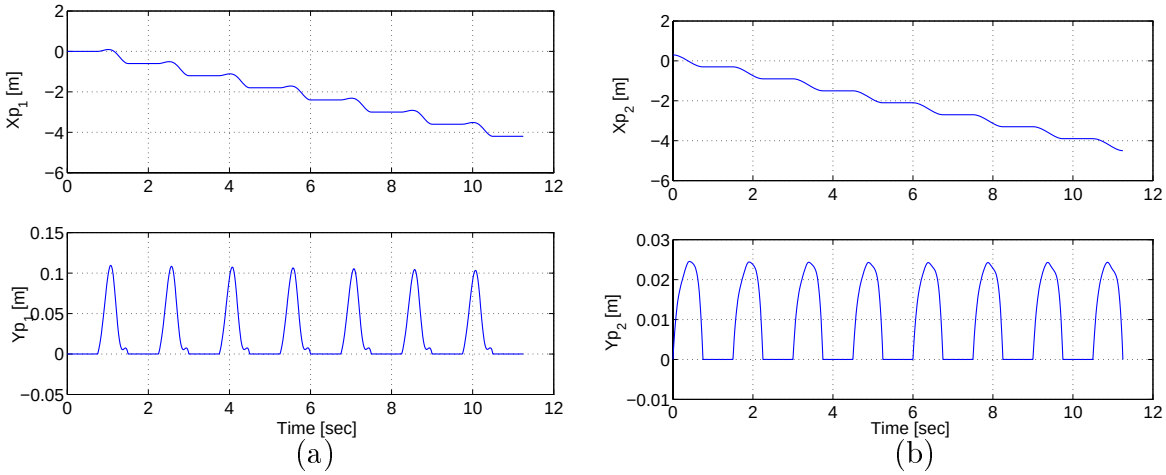


FIG. 5.14 – *Scénario 1 (marche à vitesse constante) : évolution dans le temps des (a) : positions cartésiennes du pied 1, (b) : positions cartésiennes du pied 2*

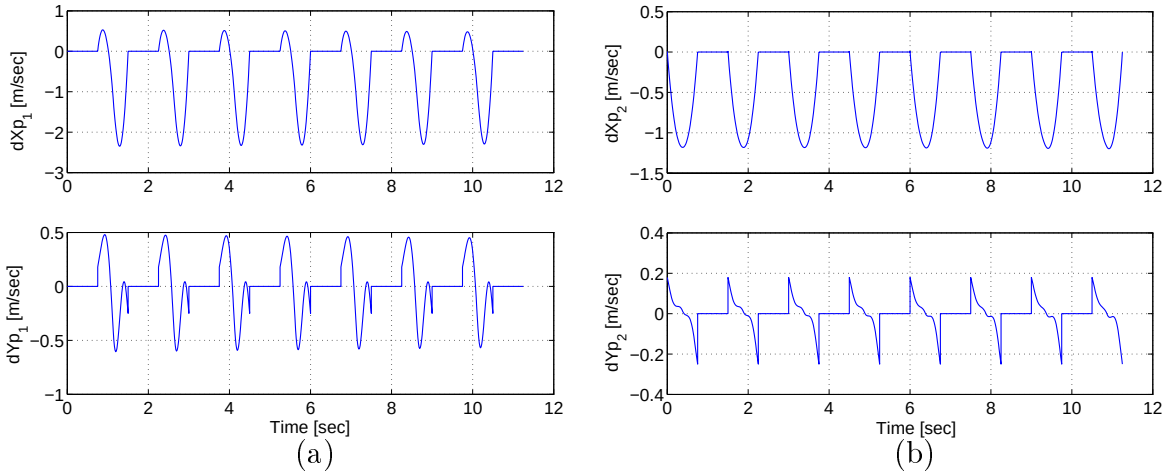


FIG. 5.15 – *Scénario 1 (marche à vitesse constante) : évolution dans le temps (a) : des vitesses cartésiennes du pied 1, (b) : des vitesses cartésiennes du pied 2*

5.2.5 Scénario 2 : génération d'allures transitoires de démarrage et de l'arrêt

Le but de ce deuxième scénario de simulation s'inspire du travail réalisé dans [34]. Il a comme objectif de générer des allures transitoires de marche. Ces allures permettent au robot bipède d'aller à partir d'une position d'arrêt (debout) vers une marche cyclique, et l'inverse, i.e. aller à partir d'une marche cyclique, vers une position d'arrêt du robot.

Dans ce contexte, on propose une simulation permettant les deux allures à la fois. Elle consiste à démarrer le robot à partir d'une position d'arrêt, faire quelques pas de marche, et revenir à une position d'arrêt à nouveau. Ceci peut être illustré sur le schéma synoptique de la figure 5.16.

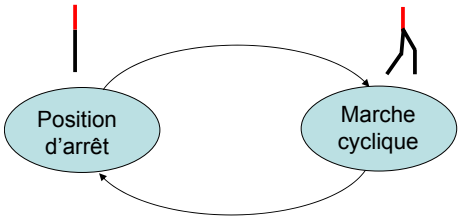


FIG. 5.16 – *Principe du scénario 2 de simulation*

Les courbes de simulation correspondantes sont représentées sur les figures 5.17 - 5.22.

Ce qu'il faut remarquer de ces courbes est la convergence rapide vers le cycle limite. D'après les courbes de position et de vitesse du tronc, une certaine périodicité est remarquable à partir du deuxième pas. D'autre part la transition de la position d'arrêt vers la périodicité (et l'inverse) se voit clairement sur les trajectoires en boucle fermée des coordonnées cartésiennes des hanches (cf. les figures 5.19.(a), 5.19.(b), et 5.22.(a)).

D'après les trajectoires des commandes (cf. figure 5.20), se révèle la faisabilité d'application sur le prototype RABBIT, étant donné que ces couples moteurs reste bien dans la limite admissible. Les puissances maximales sont bien respectées aussi, cela peut être constaté à partir de la figure 5.21.(b) qui trace les vitesses angulaires des moteurs en fonction des couples moteurs.

La figure 5.22.(b) montre la séquence des postures, pour les 4 premiers pas de marche effectués par le robot. La posture d'arrêt au début est remarquable.

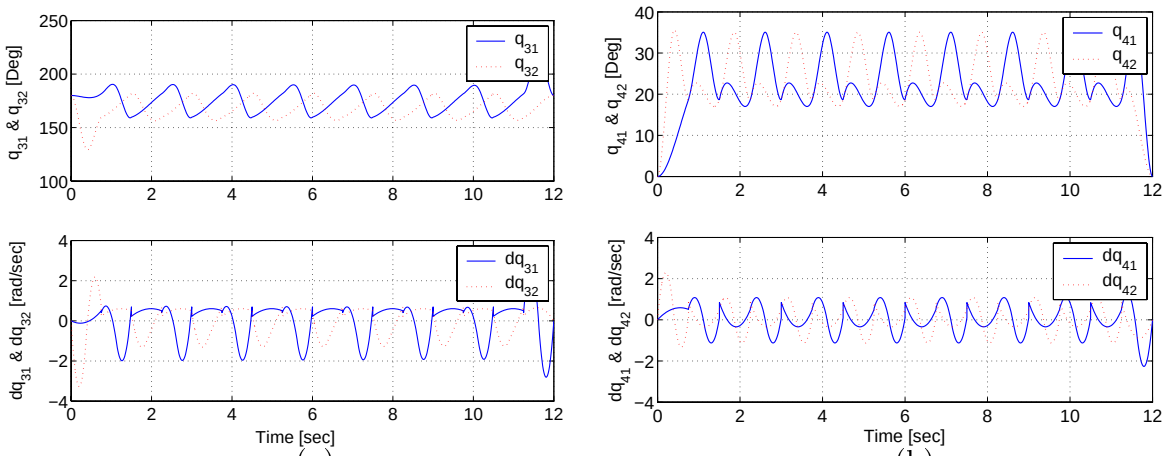


FIG. 5.17 – *Scénario 2 (allures transitoires de démarrage/arrêt) : évolution des positions et vitesses articulaires des cuisses (a), des tibias (b)*

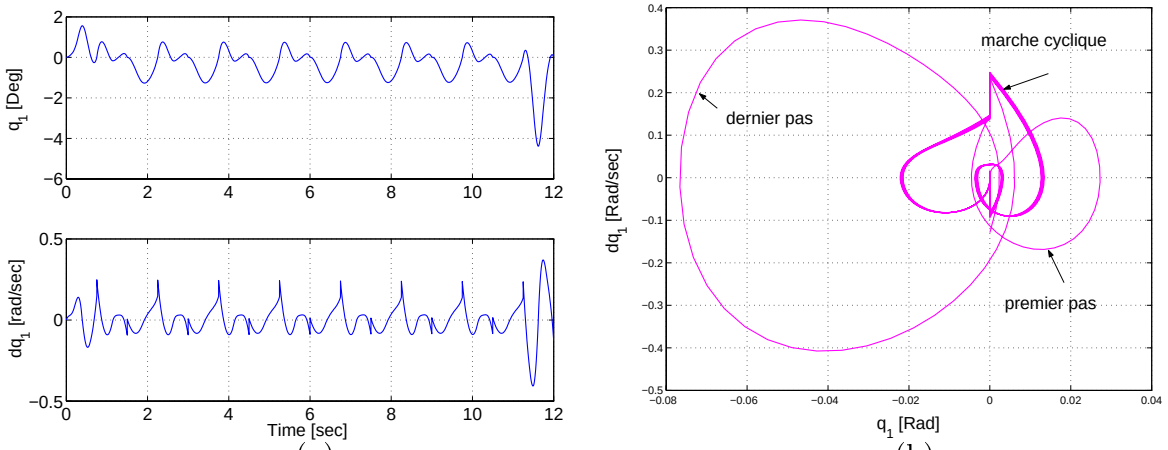


FIG. 5.18 – *Scénario 2 (allures transitoires de démarrage/arrêt) : évolution de la position et vitesse du tronc (a), plan de phase de la dynamique interne η (b)*

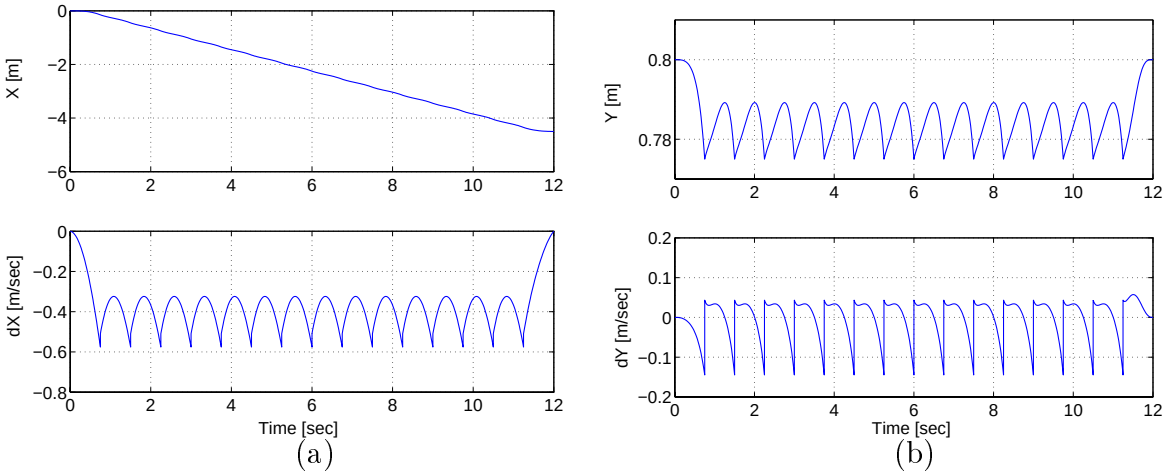
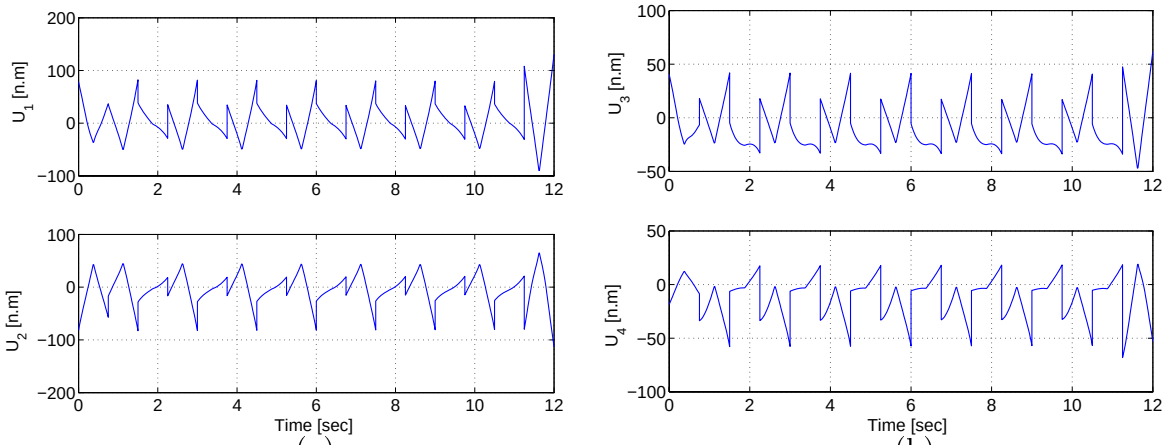
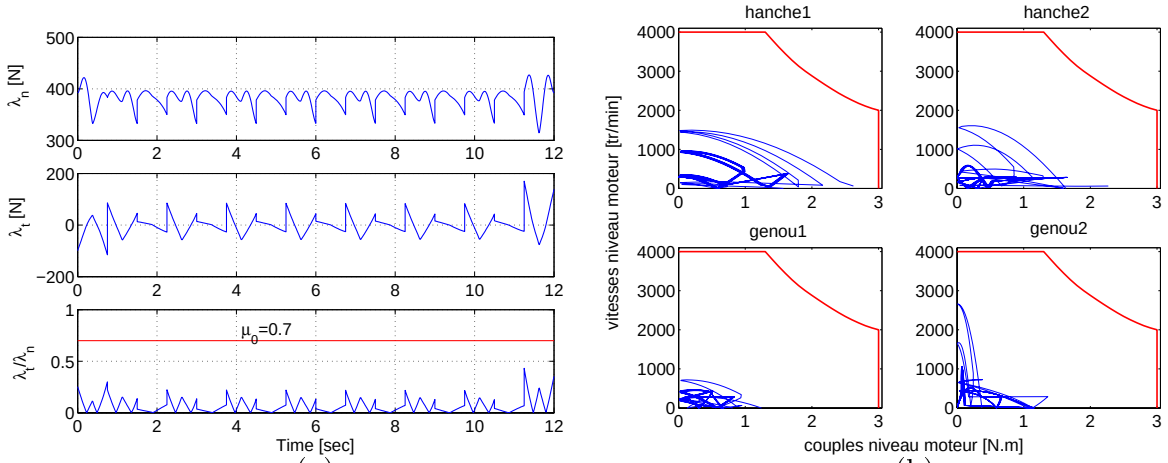


FIG. 5.19 – *Scénario 2 (allures transitoires de démarrage/arrêt) : évolution des coordonnées cartésiennes des hanches (a) : suivant l'axe des x, (b) : suivant l'axe des y*



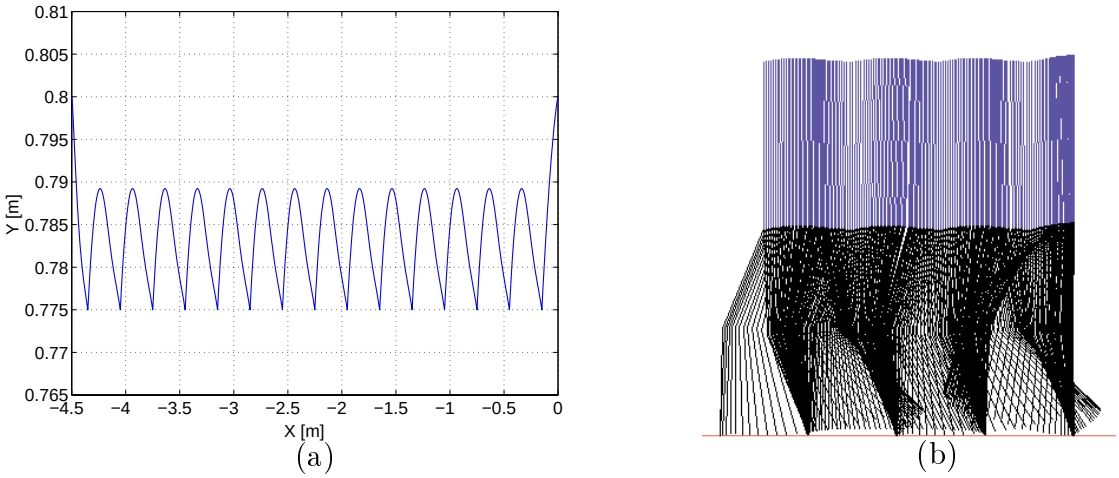
(a) (b)

FIG. 5.20 – *Scénario 2 (allures transitoires de démarrage/arrêt) : évolution dans le temps des couples moteurs (a) : des fémurs, (b) : des tibias*



(a) (b)

FIG. 5.21 – *Scénario 2 (allures transitoires de démarrage/arrêt) : évolution des forces de contact avec le sol (a), admissibilité des puissances des moteurs (b)*



(a) (b)

FIG. 5.22 – *Scénario 2 (allures transitoires de démarrage/arrêt) : évolution de la trajectoire des hanches dans le plan sagittal (a), mouvement du bipède pendant les 4 premiers pas (b)*

5.2.6 Scénario 3 : transition entre différentes vitesses de marche

Cette troisième application vise à montrer la possibilité de commutation en ligne entre différentes vitesses de marche moyennes. Cela peut être obtenu en agissant sur un des paramètres de l'approche de commande. Ceci est possible avec le même contrôleur, et il n'est pas nécessaire de commuter entre différents contrôleurs pour atteindre cet objectif.

Une simulation de 46 pas de marche est proposée, pendant laquelle le robot commute entre trois vitesse moyennes de marche désirées. Autrement dit le robot va marcher avec une vitesse $v_1 = 0.24m/sec$, pendant 12 pas, puis avec une vitesse $v_2 = 0.3m/sec$, pendant 14 pas, et enfin il commute à une vitesse $v_3 = 0.4m/sec$, pendant les 20 derniers pas. Ceci est illustré sur la figure 5.23.

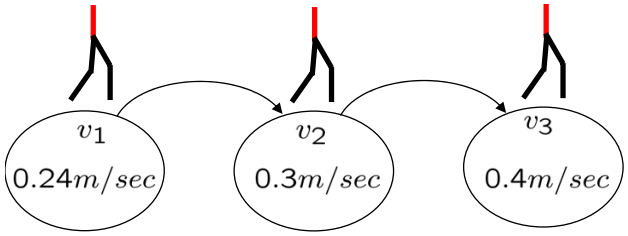


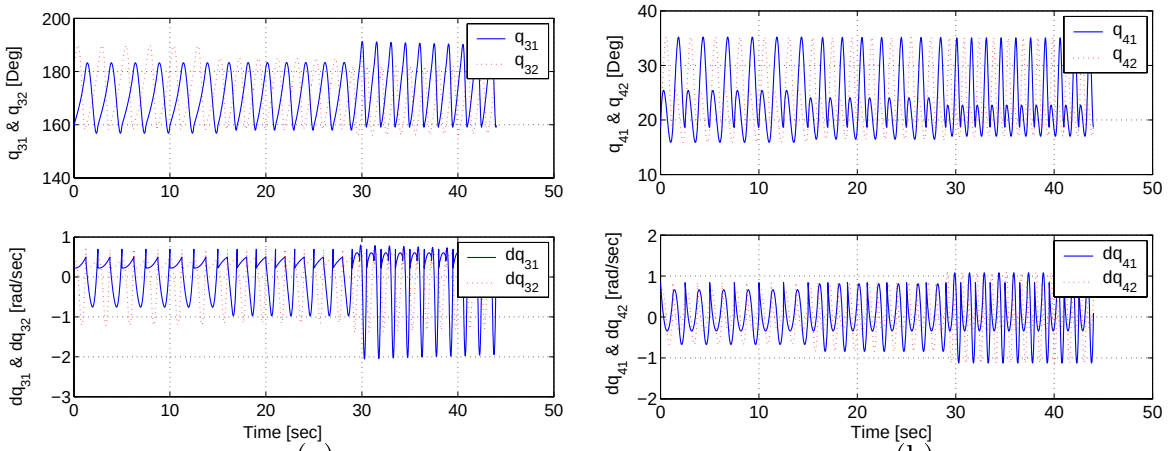
FIG. 5.23 – *Principe du scénario 3 de simulation*

Pour les trois vitesses de marche, il est important de noter que la configuration cyclique du robot ne change pas. Néanmoins il est possible de changer la vitesse de marche en agissant sur la configuration du robot (c'est une autre alternative). Cela pourra être fait pour changer l'enjambé par exemple, dans le but d'augmenter ou baisser la vitesse de marche. Dans notre cas c'est plutôt la durée du cycle τ_c, qui est utilisée pour changer la vitesse de marche. Étant donné que celle-ci est inversement proportionnelle à la vitesse moyenne de marche. Par conséquent, pour atteindre les vitesses désirées ainsi mentionnées, la durée du cycle doit prendre séquentiellement les valeurs $1.25sec$ (pour la première vitesse), $1sec$ (pour la deuxième vitesse), et $0.75sec$ (pour la troisième vitesse), puisque la longueur du pas dans la configuration choisie est de $0.3m$.

Les figures 5.24 - 5.29 présentent les courbes de simulation, relatives à ce scénario. Ce qui est intéressant à remarquer, est que la transition entre les différentes vitesses de marche se reflète sur le plan de phase de la coordonnée non actionnée (tronc). Cela peut être vu comme étant une transition entre différents cycles limites (cf. figure 5.25.(b)), dont chacun correspond à une vitesse de marche. Sur la figure 5.29.(b), l'évolution de la vitesse moyenne de marche

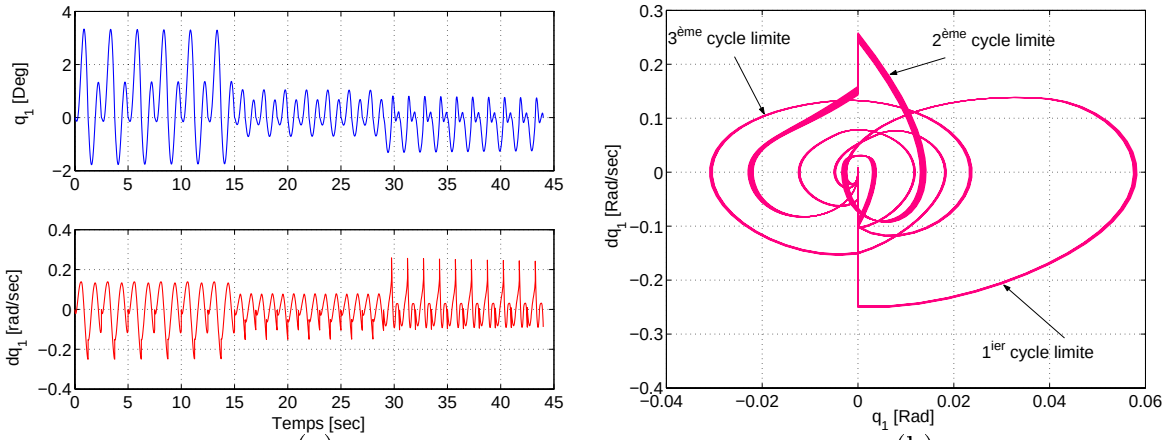
est représentée.

La figure 5.28.(a), représente les forces de contact avec le sol. Ce qu'il faut remarquer dans ce cas est que plus la vitesse de marche augmente, plus la courbe (du rapport force tangentielle/force normale) se rapproche de la zone de glissement (caractérisée par $\lambda_t/\lambda_n = \mu_0$). Ceci est tout à fait logique, puisque en augmentant la vitesse moyenne de marche, les forces d'impact vont augmenter, et en particulier la force tangentielle. Le robot n'aura pas suffisamment de temps pour bien s'appuyer sur le sol puisque il a tendance à avancer plus vite. Donc tout cela participe à augmenter le risque de glissement du pied de contact avec le sol.



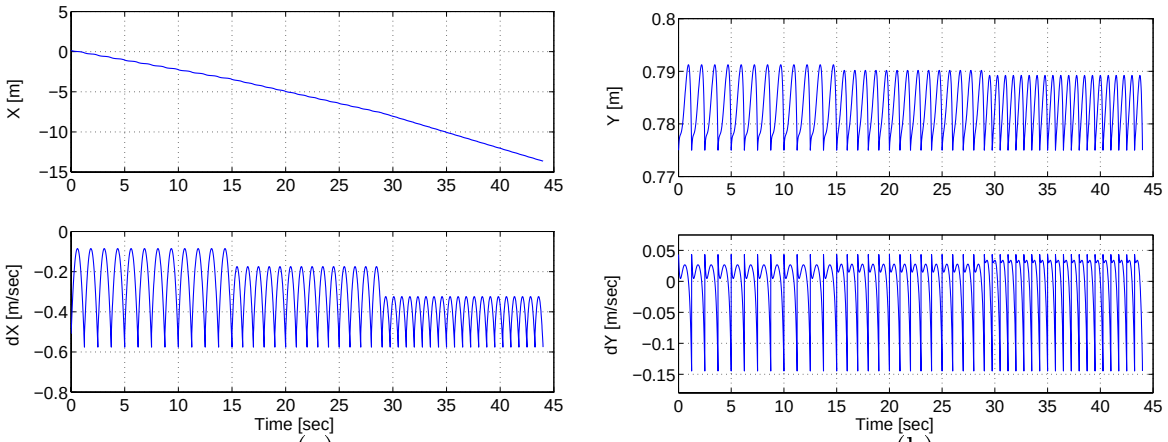
(a) (b)

FIG. 5.24 – *Scénario 3 (transition entre différentes vitesses) : évolution des positions et vitesses articulaires (a) : des cuisses, (b) : des tibias*



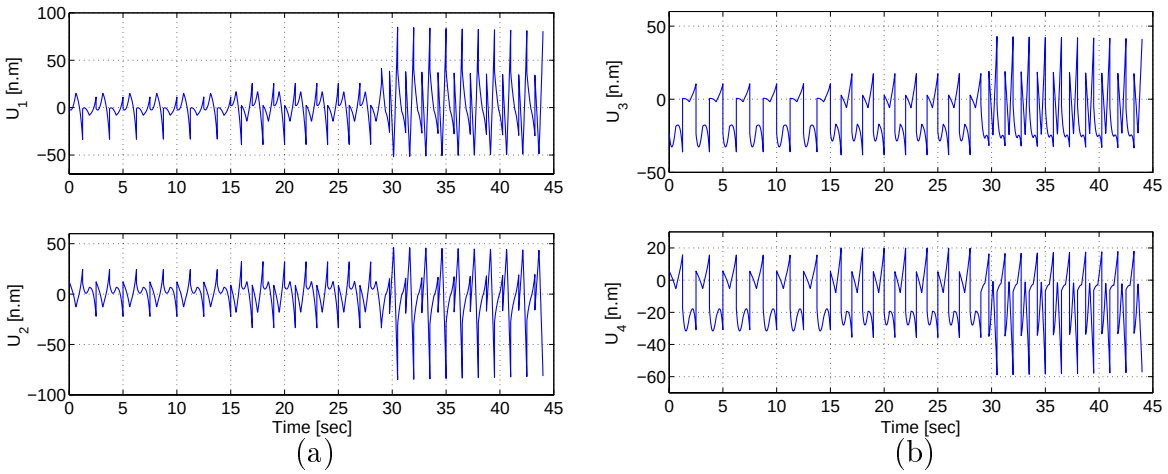
(a) (b)

FIG. 5.25 – *Scénario 3 (transition entre différentes vitesses) : évolution de la position et vitesse du tronc (a), plan de phase de la dynamique interne η (b)*



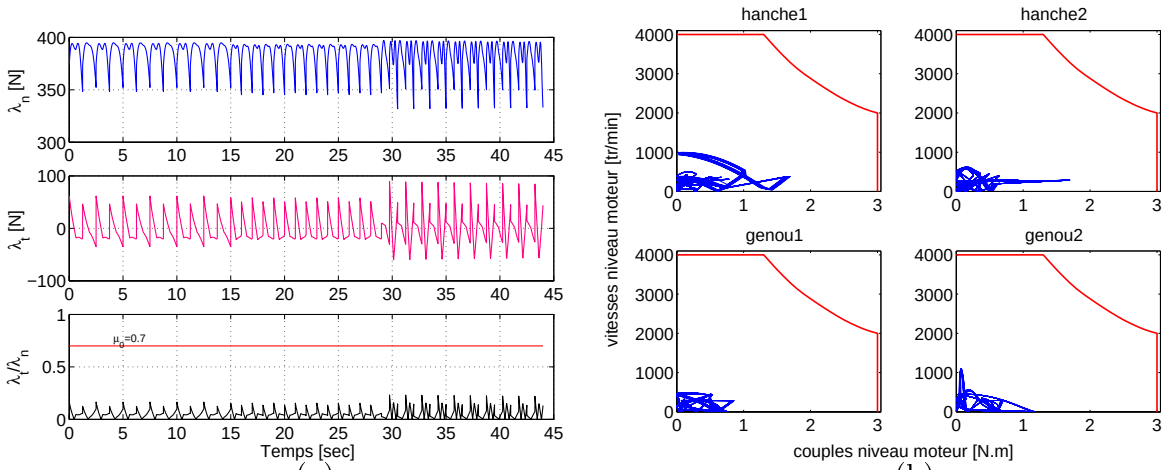
(a) (b)

FIG. 5.26 – *Scénario 3 (transition entre différentes vitesses) : évolution des coordonnées cartésiennes des hanches (a) : suivant l'axe des x, (b) : suivant l'axe des y*



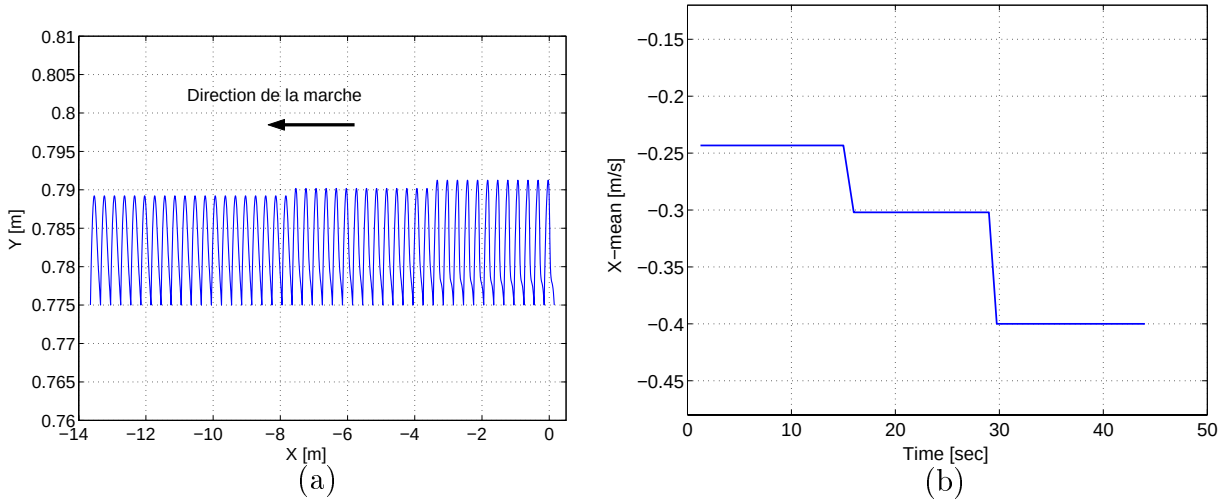
(a) (b)

FIG. 5.27 – *Scénario 3 (transition entre différentes vitesses) : évolution des couples moteurs (a) : des fémurs, (b) : des tibias*



(a) (b)

FIG. 5.28 – *Scénario 3 (transition entre différentes vitesses) : évolution des forces de contact avec le sol (a), admissibilité des puissances des moteurs (b)*



(a) (b)

FIG. 5.29 – *Scénario 3 (transition entre différentes vitesses) : évolution de la trajectoire des hanches dans le plan sagittal (a), évolution de la vitesse moyenne de marche (b)*

5.2.7 Scénario 4 : balancement autour d'une posture d'équilibre

L'idée de base concernant ce scénario, est inspirée de [32], où le problème de la stabilisation orbitale à été abordé. L'objectif ici est de réaliser le même scénario en utilisant cette première approche de commande.

Le scénario proposé donc, consiste à considérer le robot bipède dans une certaine posture d'arrêt (debout), mais en configuration de simple support. Puis de générer des trajectoires permettant de démarrer de cette configuration initiale, et y revenir périodiquement, tout en gardant le robot stable et notamment sa dynamique interne. Le tronc est gardé autour de la position verticale (à travers l'optimisation de l'état final du tronc [11]). Le principe de ce scénario est illustré à travers le schéma synoptique représenté sur la figure 5.30

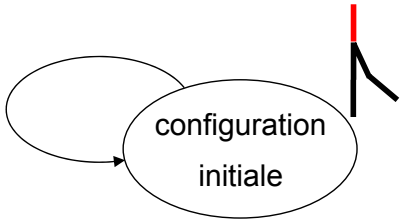


FIG. 5.30 – *Principe du scénario 4 de simulation*

Il convient de remarquer que malgré la différence fondamentale entre les scénarios de la marche et le présent scénario de balancement, le principe de la loi de commande reste pratiquement inchangé, seuls les paramètres finaux désirés sont changés. C'est un point fondamental de l'approche de commande proposée: la généricité.

Les courbes de simulation correspondantes, sont représentées sur les figures 5.31-5.36. les remarques suivantes s'imposent :

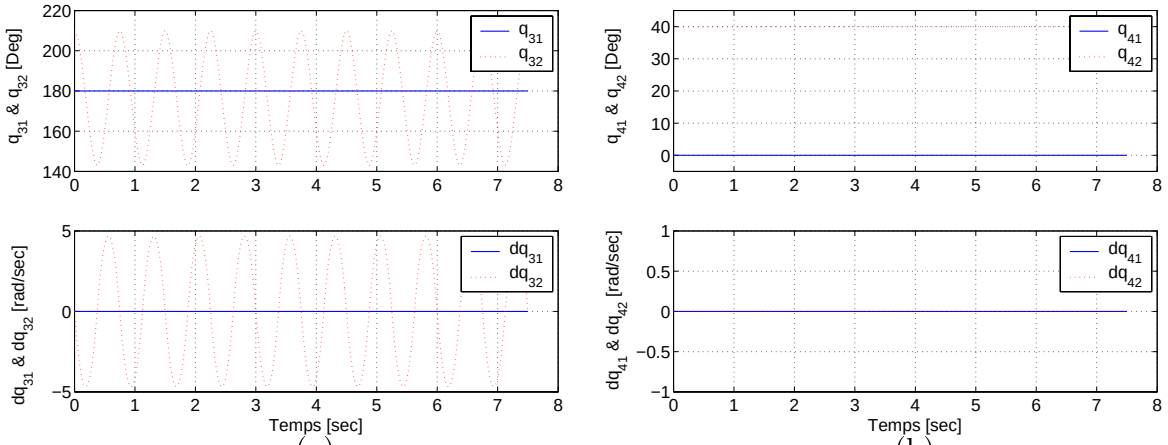
- Le cycle limite obtenu (cf. figure 5.32), pour ce scénario, est différent de celui obtenu pour les scénarios de la marche. En particulier il est caractérisé par l'absence des impacts qui introduisent des sauts sur les vitesses articulaires.
- Différents cycles limites sont obtenus, suivant la configuration choisie, en particulier sur la figure 5.36.(b), les cycles limites correspondant à 4 différentes configurations sont représentées. La différence entre les configurations choisies a été considéré sur ξ^f. En effet, pour toutes les configurations η^f est identique. Ceci se reflète sur le plan de phase, où on remarque que la taille et la forme du cycle limite change, mais les 4 cycles limites

11. Le principe de notre approche de commande est expliqué dans le chapitre 3.



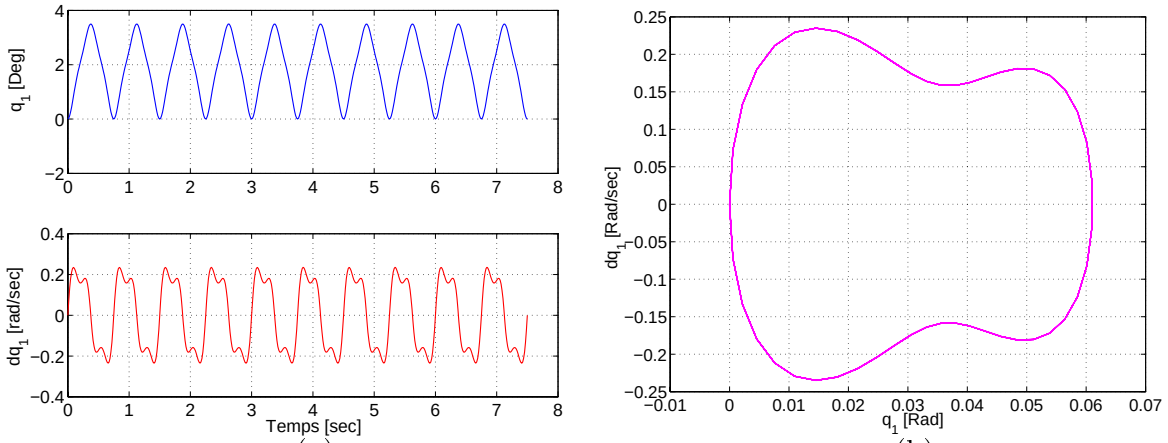
passent par le point commun (0,0), qui représente $\eta^f = (q_1,\dot{q}_1) = (0,0)$.

- D'après les vitesses et les couples, les limites admissibles sur les couples et les puissances des actionneurs sont vérifiées.
- le mouvement effectué par le robot sur un cycle est représenté sous forme d'une séquences de postures sur la figure 5.36.(a).



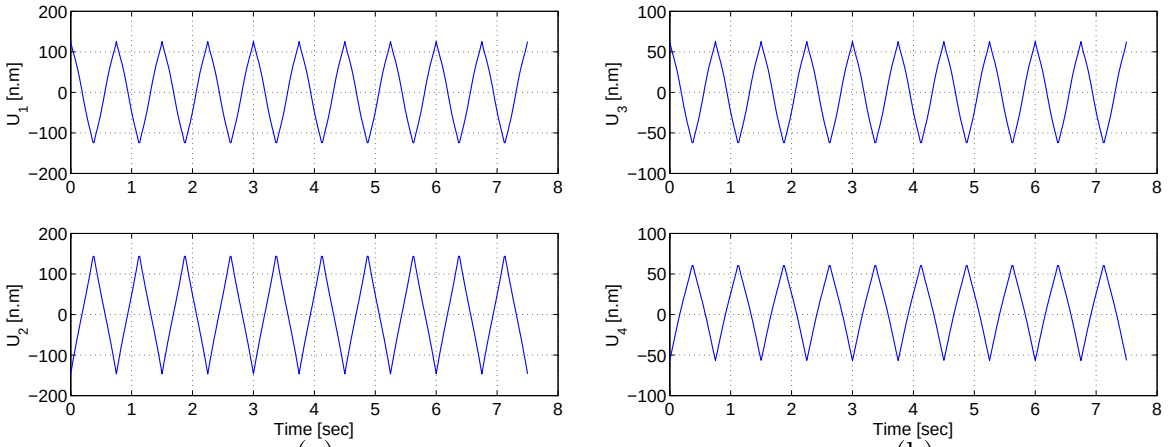
(a) (b)

FIG. 5.31 – *Scénario 4 (balancement autour d'un équilibre) : évolution des positions et vitesses articulaires des cuisses (a), des tibias (b)*



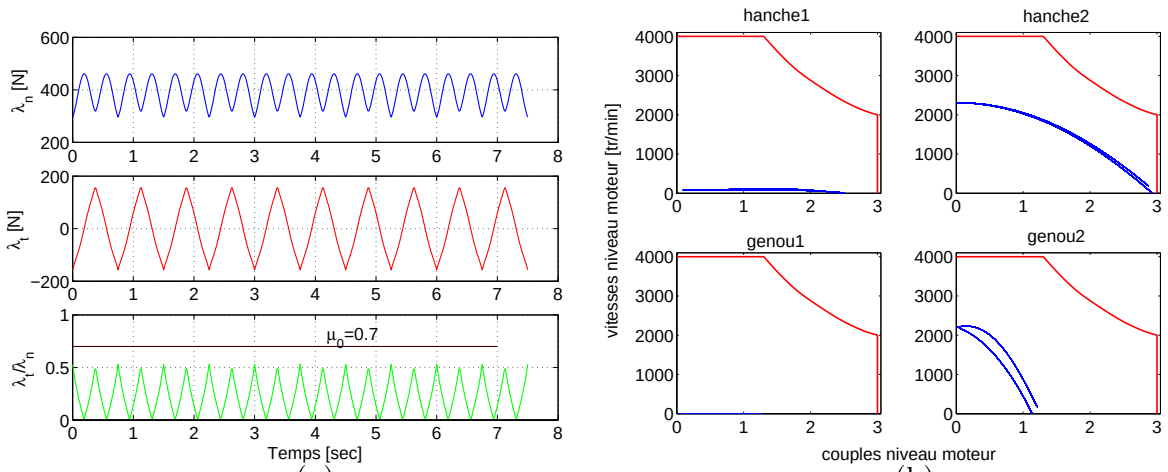
(a) (b)

FIG. 5.32 – *Scénario 4 (balancement autour d'un équilibre) : évolution de la position et vitesse articulaire du tronc (a), plan de phase de la dynamique interne η (b)*



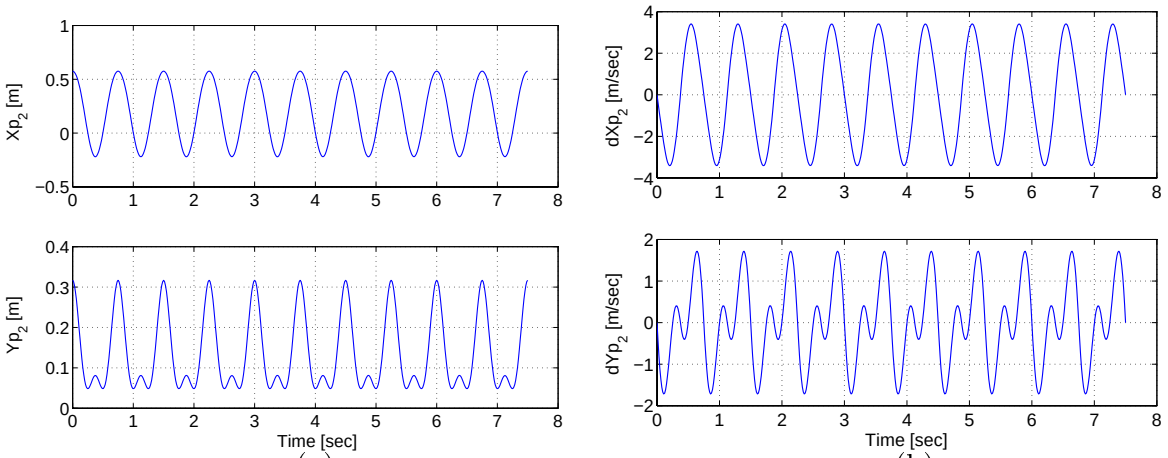
(a) (b)

FIG. 5.33 – *Scénario 4 (balancement autour d'un équilibre) : évolution des couples moteurs (a) : des fémurs, (b) : des tibias*



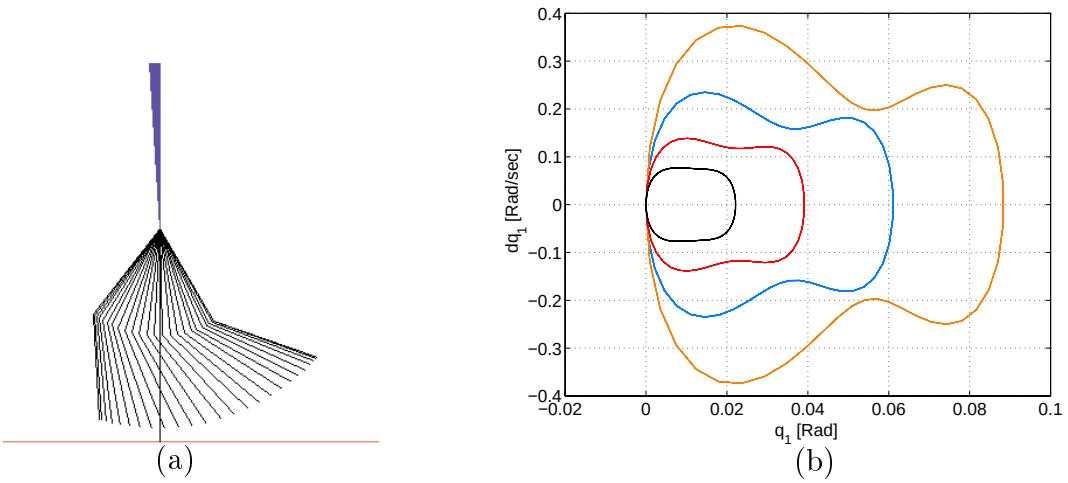
(a) (b)

FIG. 5.34 – *Scénario 4 (balancement autour d'un équilibre) : évolution des forces de contact avec le sol (a), admissibilité des puissances des moteurs actionneurs (b)*



(a) (b)

FIG. 5.35 – *Scénario 4 (balancement autour d'un équilibre) : évolution dans le temps des (a) : positions cartésiennes du pied libre, (b) : vitesses cartésiennes du pied libre*



(a) (b)

FIG. 5.36 – *Scénario 4 (balancement autour d'un équilibre) : mouvement effectué par le robot sur un cycle (a), cycles limites correspondant aux différentes configurations (b)*

5.2.8 Scénario 5 : robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques

L'objectif de ce scénario de simulation est de tester la robustesse de la première approche de commande proposée. Il consiste à tester la robustesse vis-à-vis des incertitudes, agissant principalement sur les paramètres du modèle du robot marcheur.

Le modèle dynamique du robot est donc considéré avec l'hypothèse que les moments d'inertie sont entachés d'incertitudes (erreurs de mesure). Donc les moments d'inertie des segments rigides du robot, à savoir I_1 (pour le tronc), I_3 (pour le fémur), et I_4 (pour le tibia) sont considérés avec des incertitudes de 10% de leurs valeurs nominales

$$I_{1u} = I_1 + \Delta I_1 \quad ; \quad I_{3u} = I_3 + \Delta I_3 \quad ; \quad I_{4u} = I_4 + \Delta I_4$$

où $\Delta I_i = 0.1 I_i$, pour $i \in \{1,3,4\}$

Les courbes de simulation relatives à ce scénario, sont représentées sur les figures 5.37-5.41. Il s'agit d'une marche de 12 pas sur un sol plat horizontale. Les paramètres de l'approche de commande sont identiques à ceux fixés auparavant (cf. sect 5.2.3)

D'après ces courbes, les remarques suivantes s'imposent :

- Les trajectoires des fémurs, sont plus sensibles aux incertitudes, que celles des tibias (cf. les figures 5.37, 5.38).
- Les trajectoires de la coordonnée non actionnée (cf. figure 5.39), convergent vers un autre cycle limite, sur le plan de phase de η. Mais le nouveau cycle limite a le même degré de multiplicité, i.e. 2.
- Les conditions d'admissibilité des couples moteurs générés, ainsi que les limites permises de puissance maximale des actionneurs sont satisfaites. Ceci est vrai pour le système nominal, aussi bien que pour le système incertain (cf. les figures 5.40, 5.41.(b)).
- Les incertitudes introduites, ne cause pas un décolage du pied de contact avec le sol, ni un glissement (cf. la figure 5.41.(a))

On propose un autre test de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques. Il consiste à introduire une incertitude sur la masse de la coordonnée articulaire non actionnée (le tronc). En effet, ceci peut être exprimé par

$$\bar{m}_{1u} = m_1 + \Delta m_1 \quad ; \quad \Delta m_1 = 15\%$$

Étant donné que l'incertitude est considérée sur la masse du tronc, seulement les courbes de simulation de la dynamique interne seront présentées. Sur la figure 5.42.(a), les trajectoires en



boucle fermée du tronc sont tracées (position et vitesse), pour le système incertain, aussi bien que pour le système nominal. Ce qu'il faut remarquer est la différente de périodicité entre les deux courbes. En effet, la courbe du système nominal à une périodicité égale à 2 cycles, alors que celle du système incertain, quant à elle, est égale à 1 seul cycle. Ceci peut être mieux vu sur la courbe 5.42.(b) qui représente le plan de phase associé, pour les deux cas de figure (nominal et incertain). Il est clairement remarquable que le cycle limite du système nominal est d'ordre 2 (i.e. la trajectoire revient au point du départ après deux cycles, ou deux impact). Cependant, celui du système incertain est d'ordre 1 (i.e. la trajectoire revient au point du départ après un cycle, ou un seul impact). L'essentiel est que le robot continue à marcher d'une manière stable, en dépit de l'incertitude introduite.



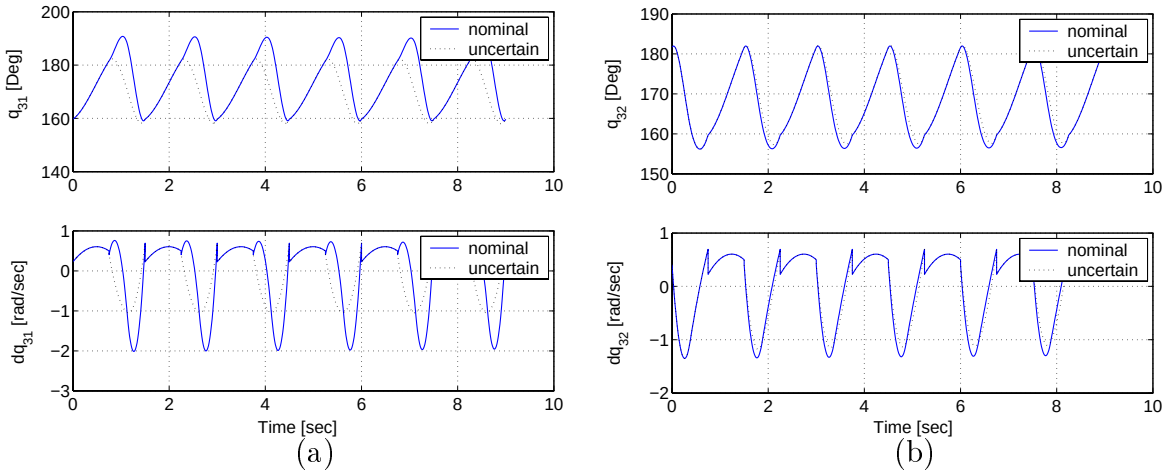


FIG. 5.37 – *Scénario 5 (robustesse / incertitudes inertielles) : évolution des positions et vitesses articulaires des cuisses*

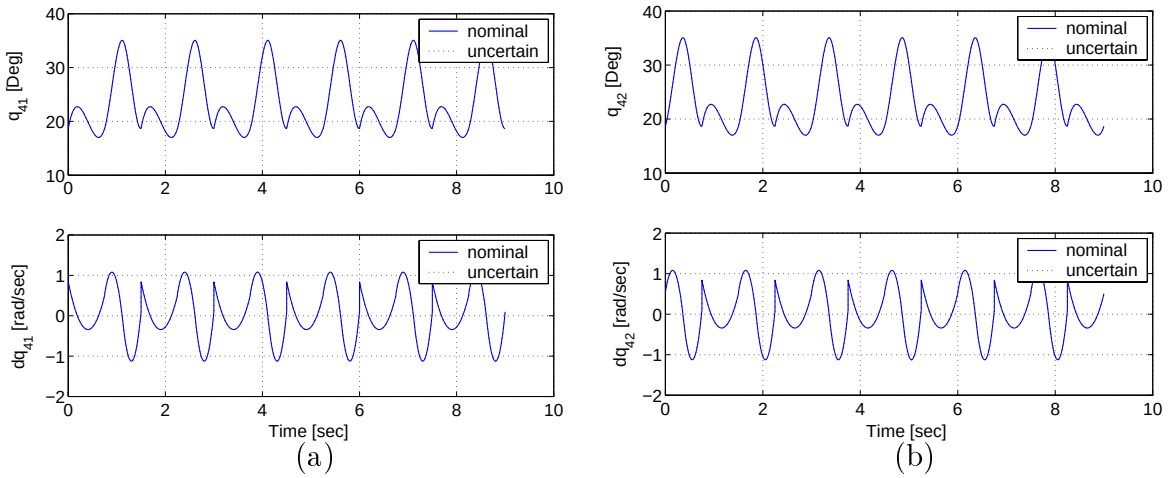


FIG. 5.38 – *Scénario 5 (robustesse / incertitudes inertielles) : évolution des positions et vitesses articulaires des tibias*

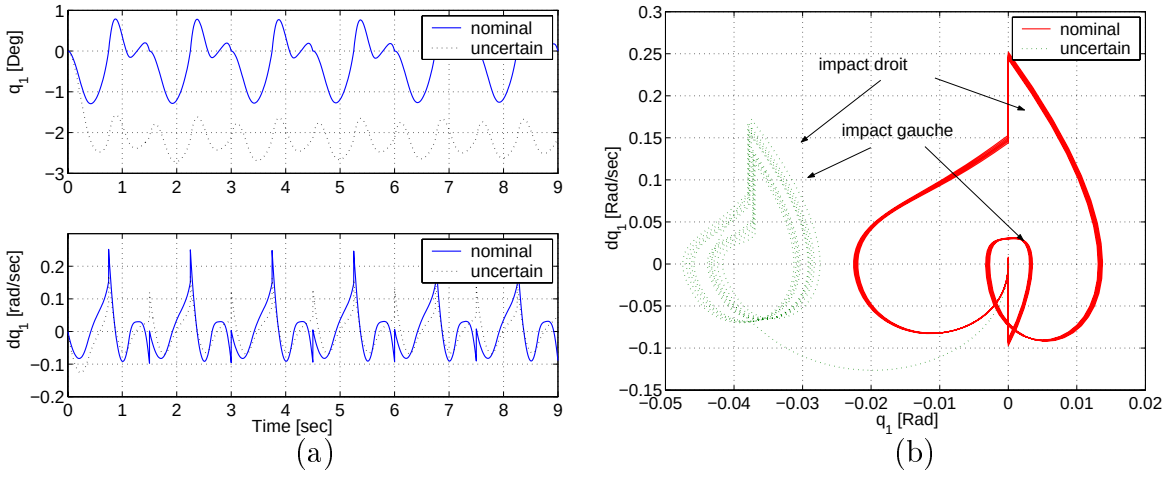


FIG. 5.39 – *Scénario 5 (robustesse / incertitudes inertielles) : évolution de la position et vitesse du tronc (a), plan de phase de la dynamique interne η (b)*

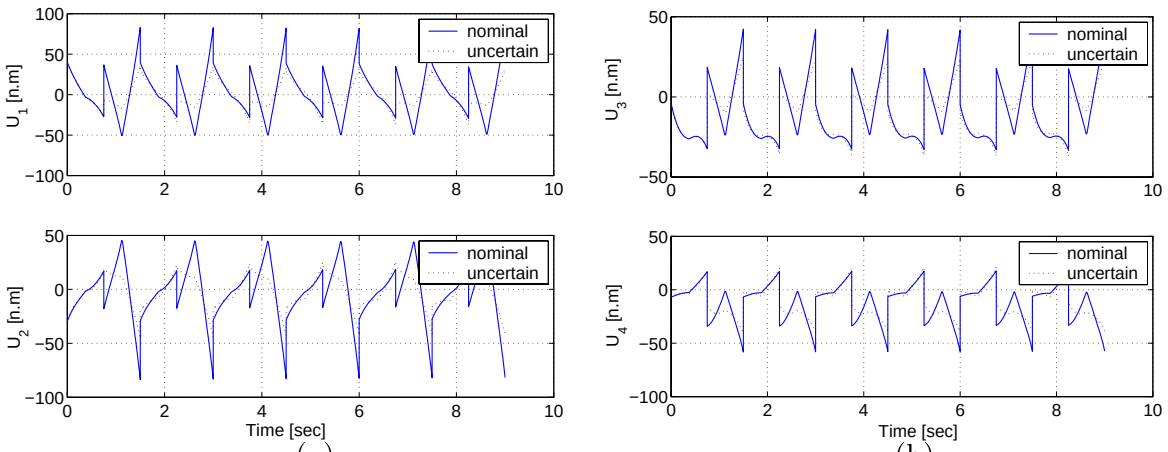


FIG. 5.40 – *Scénario 5 (robustesse / incertitudes inertielles) : évolution des couples moteurs (a) : des fémurs, (b) : des tibias*

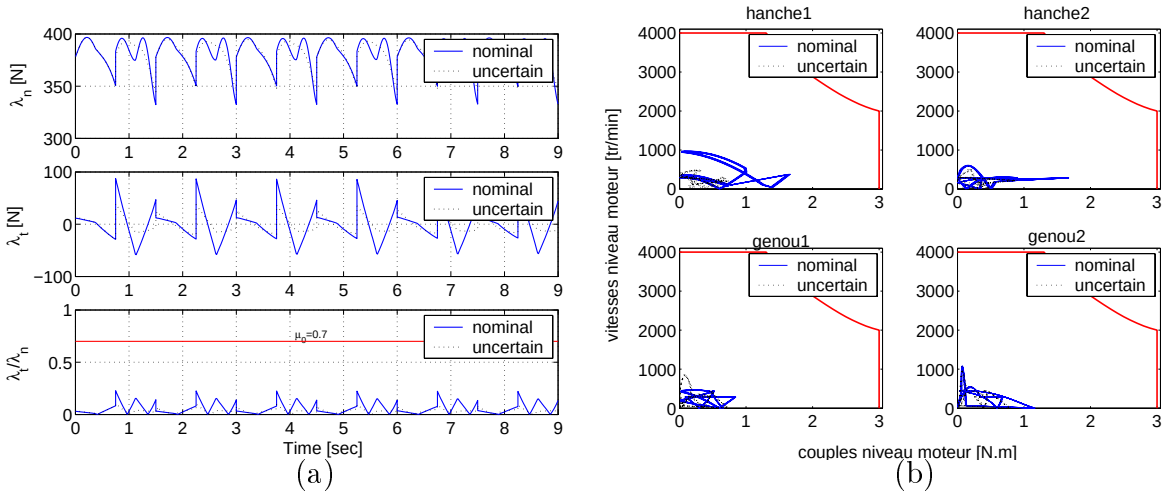


FIG. 5.41 – *Scénario 5 (robustesse / incertitudes inertielles) : évolution des forces de contact avec le sol (a), admissibilité des puissances des moteurs actionneurs (b)*

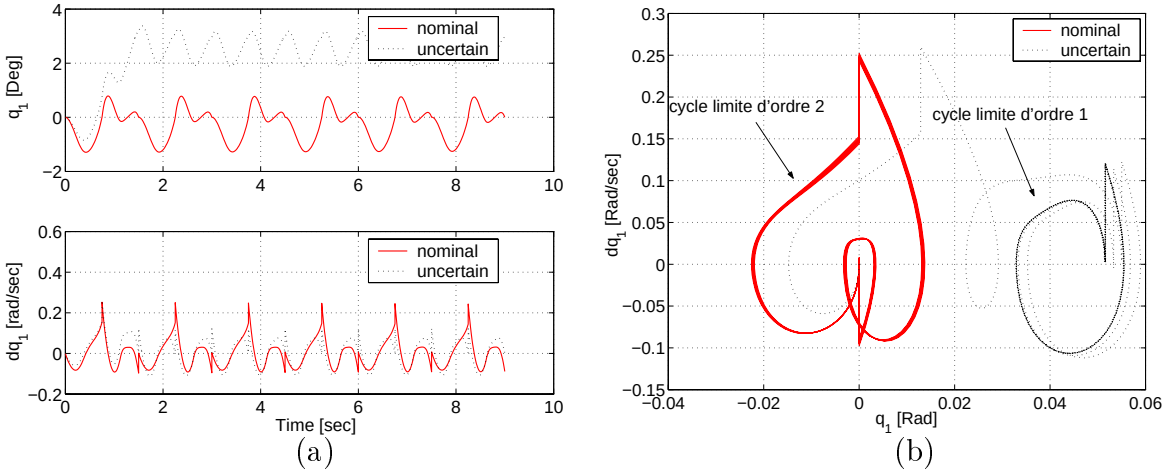


FIG. 5.42 – *Scénario 5 (robustesse / incertitude sur la masse du tronc) : évolution de la position et vitesse du tronc (a), plan de phase de la dynamique interne η (b)*

5.2.9 Scénario 6 : robustesse vis-à-vis des irrégularités du sol

Le présent scénario concerne aussi un test de robustesse. Cette fois-ci il s'agit de la robustesse envers des irrégularités de la surface de marche. La simulation proposée considère le cas où le robot marcheur est amené à marcher sur un sol plat, où il rencontre une marche d'escalier de 1 cm d'hauteur. Cette dernière est située à une distance de $1.4m$ de son point de départ. D'après la configuration du robot choisie (cf. tableau 5.1), la longueur du pas est de 0.3 m. Par conséquent, il va toucher cette marche durant son cinquième pas de marche. Le principe de ce scénario peut être schématisé sur la figure 5.43.

Il y a donc 3 étapes dans cette tâche réalisée par le robot. Au premier lieu il fait quelques pas sur le sol plat. La deuxième étape est l'enjambé de la marche, et la troisième est la marche sur le nouveau sol plat, à la même hauteur que la marche.

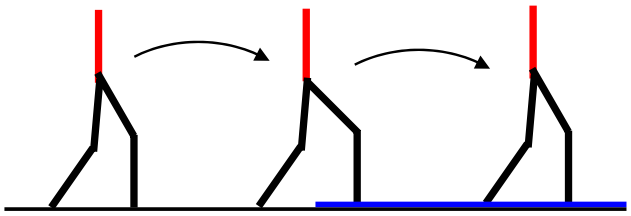


FIG. 5.43 – *Principe du scénario 6 de simulation*

Les paramètres de l'approche de commande son les mêmes que celles fixés précédemment, à l'exception de la matrice de pondération dans le critère d'optimisation, qui est maintenant $Q = Diag\{1{,}0.1\}$.

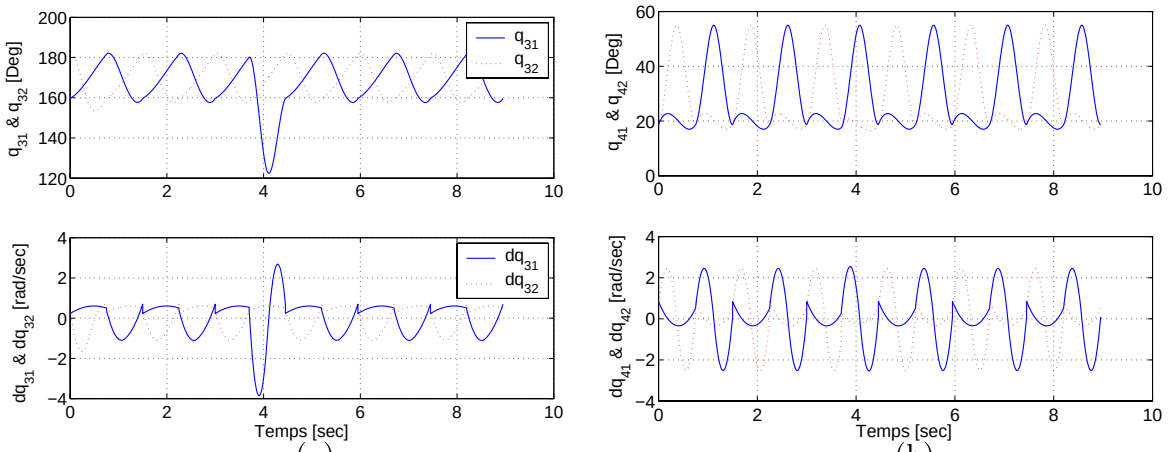
Les résultats de simulation en terme de courbes des différentes trajectoires en boucle fermée sont illustrées sur les figures 5.44-5.49. Les remarques suivantes peuvent être mentionnées :

- sur l'évolution dans le temps, des trajectoires des différentes grandeurs, l'effet de l'impact inattendu avec la marche d'escalier se voit clairement (cf. par exemple les figures 5.44.(a), 5.45.(a), 5.47.(a));
- pour la dynamique interne du système (trajectoires en boucle fermée du tronc), au premier lieu une convergence vers un cycle limite d'ordre 1 est remarquable. Puis l'impact inattendu éloigne les trajectoires de ce cycle. En revanche une convergence après l'impact vers le même cycle de départ (cf. les figures 5.45.(a) et (a)) est remarquable;
- l'effet de l'impact sur les entrées de commande (couples moteurs) se traduit par un pic de 120 $N.m$ sur la commande du fémur de la jambe libre (i.e. u_2, cf. figure 5.46.(a)). Mais puisque le couple admissible max est de 150 $N.m$ on reste bien dans la limite admissible

du prototype.

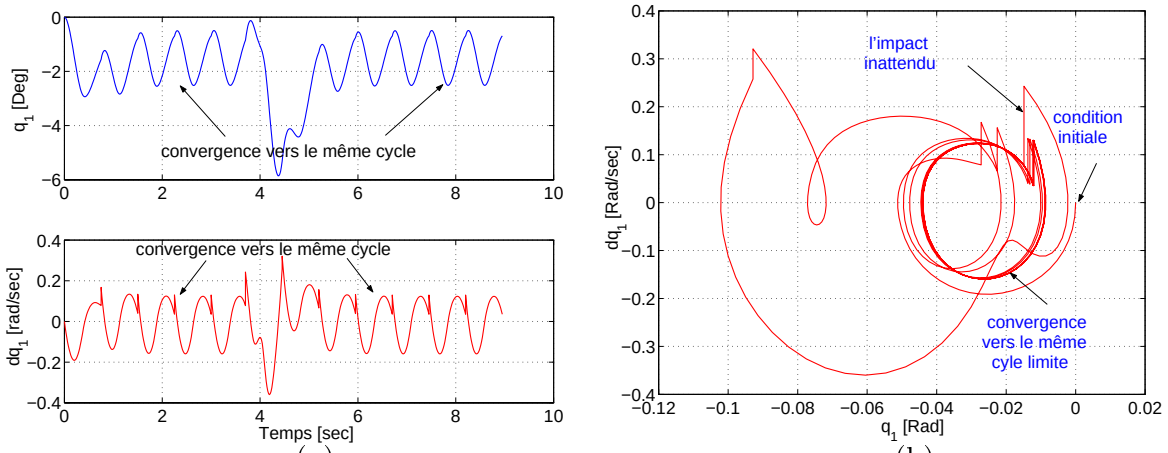
L'impact inattendu peut être considéré comme une perturbation du système. Mais vu les résultats de simulation obtenus, il est possible de conclure de la robustesse de l'approche proposée vis-à-vis de ce genre de perturbations.

Remarque 26 *Deux tests de robustesse de notre approche de commande ont été envisagés (scénario 5 et scénario 6). Ce ne sont pas les tests exclusifs de robustesse. En effet, la robustesse peut être étudiée envers des perturbations sous forme de forces poussant le robot, ou des changements dans les paramètres de l'environnement (coefficients de frottement par exemple), ou également la marche sur un sol incliné, ou encore la marche sur un sol compliant.*



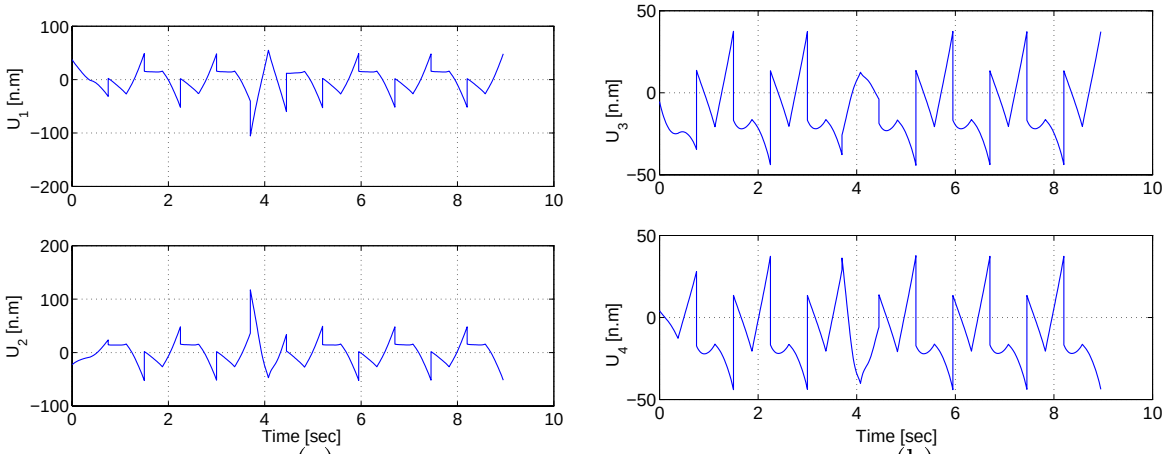
(a) (b)

FIG. 5.44 – *Scénario 6 (robustesse / irrégularités du sol) : évolution des positions et vitesses articulaires (a) : des cuisses, (b) : des tibias*



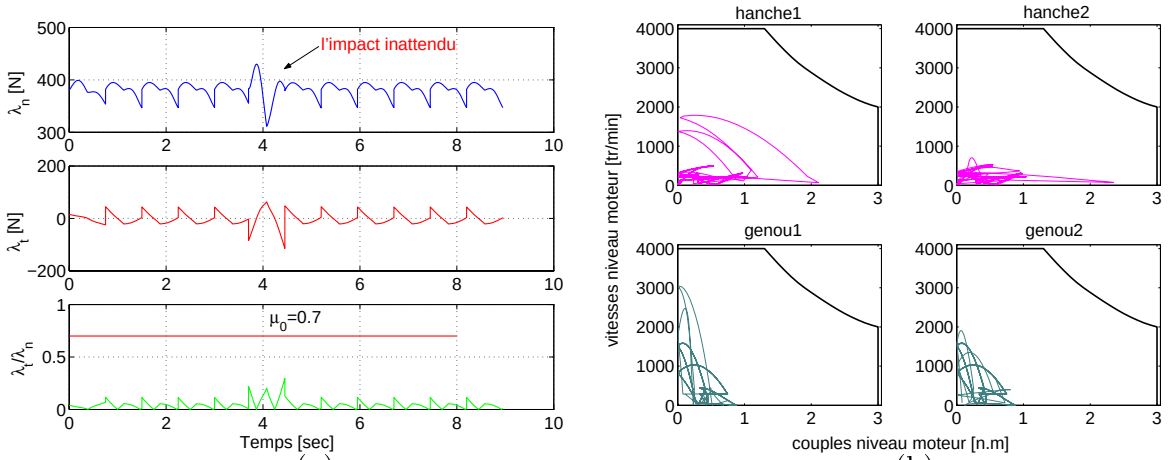
(a) (b)

FIG. 5.45 – *Scénario 6 (robustesse / irrégularités du sol) : évolution de la position et vitesse du tronc (a), plan de phase de la dynamique interne η (b)*



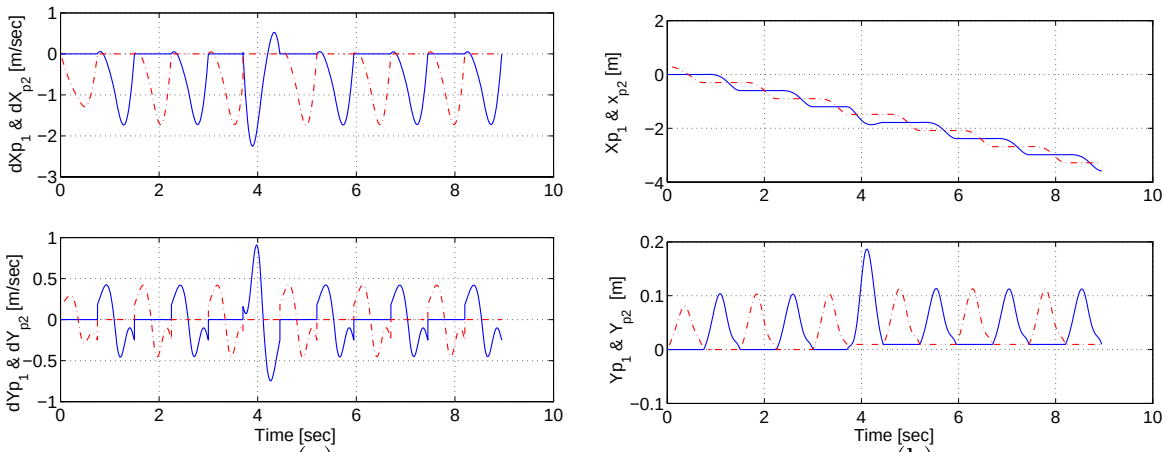
(a) (b)

FIG. 5.46 – *Scénario 6 (robustesse / irrégularités du sol) : évolution des couples moteurs (a) : des fémurs, (b) : des tibias*



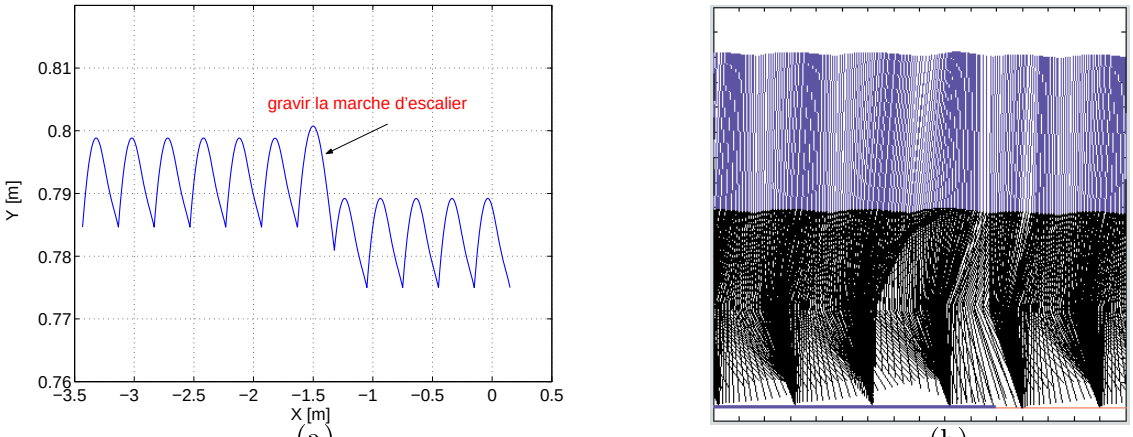
(a) (b)

FIG. 5.47 – *Scénario 6 (robustesse / irrégularités du sol) : évolution des forces de contact avec le sol (a), admissibilité des puissances des moteurs actionneurs (b)*



(a) (b)

FIG. 5.48 – *Scénario 6 (robustesse / irrégularités du sol) : évolution des (a) : positions cartésiennes des pieds, (b) : vitesses cartésiennes des pieds*



(a) (b)

FIG. 5.49 – *Scénario 6 (robustesse / irrégularités du sol) : évolution de la trajectoire des hanches dans le plan sagittal (a), mouvement effectué par le robot (b)*

5.2.10 Évaluation du temps de calcul

Les approches de commande prédictive ont généralement un inconvénient qui réside dans le temps de calcul nécessaire à la résolution du problème d'optimisation. Cet inconvénient a longtemps cantonné l'application de la commande prédictive non linéaire aux systèmes lents. la tendance aujourd'hui est d'imaginer de nouvelles formulation permettant d'aboutir à des problèmes d'optimisation simples et rapide à résoudre. La première approche de commande proposée dans cette thèse tombe dans cette catégorie[12]

Par le biais de cette section, l'objectif est de montrer qu'il est possible de réduire considérablement le temps de calcul, en utilisant un problème d'optimisation de faible dimension (dimension scalaire dans notre cas).

Le résultat d'évaluation est le tracé du temps de calcul en fonction des cycles[13]. Pour cela l'idée est de faire marcher le robot bipède pendant 50 cycles, où le temps de calcul est évalué. C'est le temps nécessaire pour résoudre le problème d'optimisation associé. La courbe obtenue est celle représentée sur la figure 5.50.

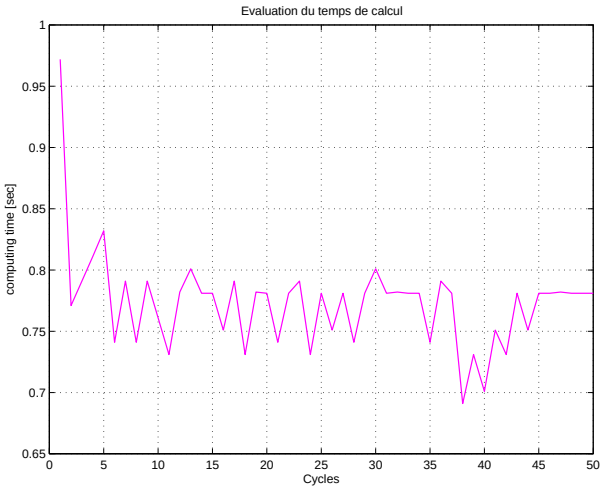


FIG. 5.50 – *Évaluation du temps de calcul*

L'algorithme sur lequel l'optimisation est basée, est celui de la fonction `DBCPOL` de la bibliothèque numérique `IMSL` de `visual fortran 5`. L'évaluation du temps de calcul a été effectuée sur une machine équipée d'un microprocesseur `intel`, dont la fréquence d'horloge

12. cf. http://www.lag.ensieg.inpg.fr/NMPC_FS06/index.php

13. Le terme cycle employé ici fait référence au pas de marche, autrement dit la durée qui s'étale entre deux impacts successifs.



est de `2.5 GHZ`. D'après la courbe on remarque que le temps de calcul est inférieur à 1 *sec*, et la valeur maximale est donnée par :

$$t_{calc_{max}} = 0.97 \ sec$$

Même avec cette amélioration significative du temps de calcul, notre approche de commande semble non applicable en temps réel en l'état même s'il devient clair qu'un gain supplémentaire dans la vitesse des processeur nous rapprocherait de ce fait. D'autre part, il convient de souligner qu'aucune optimisation particulière du code n'a été tentée, ni une tentative de réduire le nombre d'itérations admissibles.

Pour une application en temps réel, on propose de remplacer le problème d'optimisation, par une interpolation. Elle consiste à définir une grille sur l'espace $(q_1,\dot{q}_1)$, et puis calculer hors ligne le paramètre d'optimisation (solution du problème d'optimisation 3.25), pour tous les points de la grille. Ceci permet d'obtenir ce qu'on appelle *lookup table*. En ligne il suffit donc d'avoir la mesure de l'état initial (i.e. au début de chaque pas) du tronc $(q_1,\dot{q}_1)_0$, pour pouvoir déduire instantanément le paramètre d'optimisation nécessaire, à la définition des trajectoires des autres coordonnées.

5.3 Application de la deuxième approche de commande

Cette section est consacrée aux résultats de simulation, obtenus par application de la deuxième approche à la commande de la marche dynamique du robot bipède sous-actionné RABBIT. Un simulateur du robot marcheur a été développé en utilisant `Matlab`. Le schéma de simulation[14] est celui de la figure 5.51. L'interface de commande est représenté sur la figure 5.52, il permet de faciliter la manipulation des simulations et notamment le tracé des courbes de simulation. L'application proposée concerne une marche dynamique à vitesse constante. La durée d'un pas est fixée à 1.43 *sec*. En partant du principe que la phase de simple support constitue 70% d'un cycle de marche, et celle du double support 30%, les durées suivantes sont adoptées pour les phases de simple et de double support, respectivement :

$$t_{ss} = 1 \ sec \quad ; \quad t_{ds} = 0.43 \ sec$$

Ce scénario de simulation consiste à faire marcher le robot bipède pour quelques pas, sur une surface de marche horizontale sans obstacles, ni encombrants.

Les courbes de simulation obtenues sont représentées sur les figures 5.53-5.60.

14. Ce schéma de simulation est construit en utilisant Simulink.



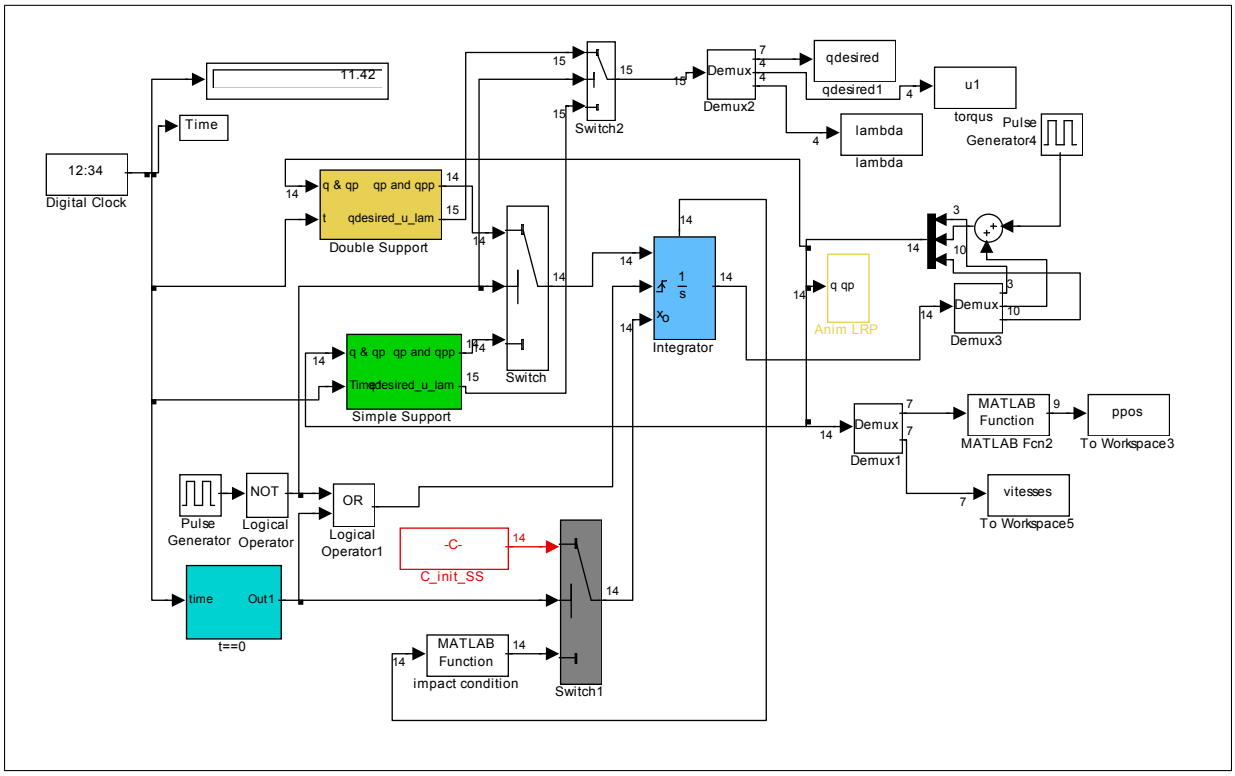


FIG. 5.51 – *Schéma de simulation de la deuxième approche de commande*

L'évolution des coordonnées articulaires des fémurs est illustrée sur la figure 5.53, alors que celles des tibias sont représentées sur la figure 5.54. Sur ces deux figures les trajectoires en boucle fermée sont tracées superposées aux trajectoires de référence, et l'erreur de poursuite est calculée et tracée dans la deuxième sous-figure dans chaque cas. D'autre part, il faut noter que la simulation commence à partir des conditions initiales non nulles. Mais une convergence vers les trajectoires de référence est assurée par les lois de commande proposées, elle est remarquables aussi sur les figures de simulation.

La figure 5.55, quant à elle, représente l'évolution des coordonnées non actionnées. A savoir le tronc et les coordonnées cartésiennes des hanches. D'après l'évolution de la coordonnée du tronc, il s'incline pendant la phase de simple support par rapport à la verticale, mais cette inclinaison est corrigée durant la phase de double support. Cette idée de d'utilisation de la phase de double support pour stabiliser la dynamique du système en boucle fermée, et en particulier la dynamique interne a été montrée dans le chapitre de présentation de cette approche de commande. Ce qu'il faut remarquer aussi est que l'inclinaison du tronc diminue d'un pas à l'autre.





FIG. 5.52 – *Panneau de commande de l'interface d'animation*

Les vitesses articulaires des coordonnées actionnées sont représentées sur la figure 5.56. Des pics sur les vitesses articulaires sont remarquables sur ces courbes au début de la simulation. Ceci est du aux conditions initiales non nulles adoptées, puis ces vitesses articulaires convergent vers des trajectoires cycliques. L'évolution de la vitesse du tronc est illustrée sur la figure 5.57.(a), alors que la figure 5.57.(b) représente le plan de phase de la dynamique interne.

Les couples des articulations sont représentés sur la figure 5.58. La limite maximale de 150 $N.m$ est vérifiée, néanmoins ce n'est pas le seul point à vérifier. En effet, il faut vérifier aussi que la puissance maximale des moteurs n'est pas dépassée. Cela peut être déduit à partir de la courbe de la figure 5.60, sur laquelle, l'évolution de la vitesse niveau moteur est tracée en fonction du couple niveau moteur[15]. La condition d'admissibilité est que cette courbe reste à l'intérieur du gabarit donné par le constructeur des moteurs à courant continu utilisés au niveau des articulations. D'après la courbe, la condition d'admissibilité est largement vérifiée, étant donné que la courbe est loin de la frontière du gabarit. Les forces de contact avec le sol sont tracées sur la figure 5.59 pour les deux pieds du robot.

15. Le passage de la vitesse niveau articulation à la vitesse niveau moteur est expliqué dans la section 5.2.4.

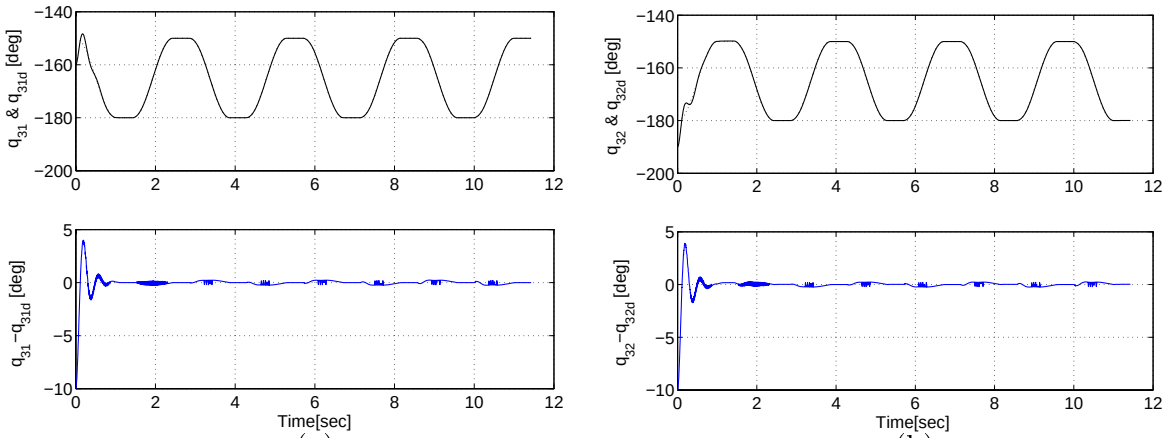


FIG. 5.53 – *Approche 2: évolution dans le temps des trajectoires articulaires des fémurs, avec les erreurs de poursuite*

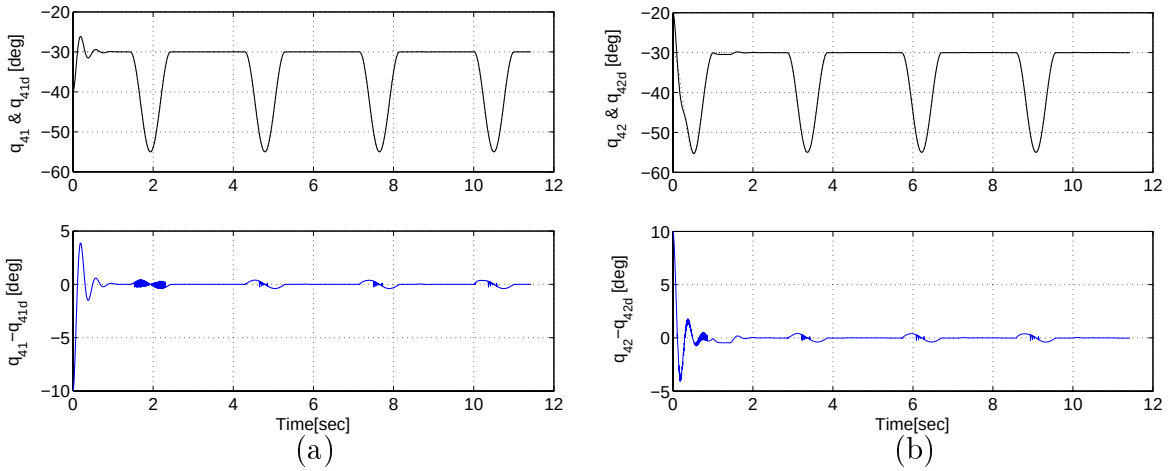


FIG. 5.54 – *Approche 2: évolution dans le temps des trajectoires articulaires des tibias, avec les erreurs de poursuite*

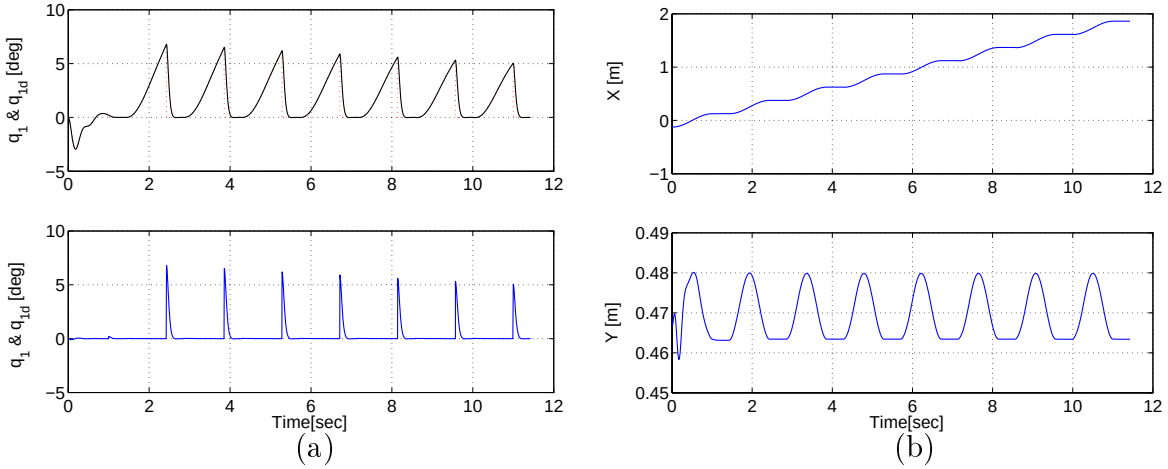
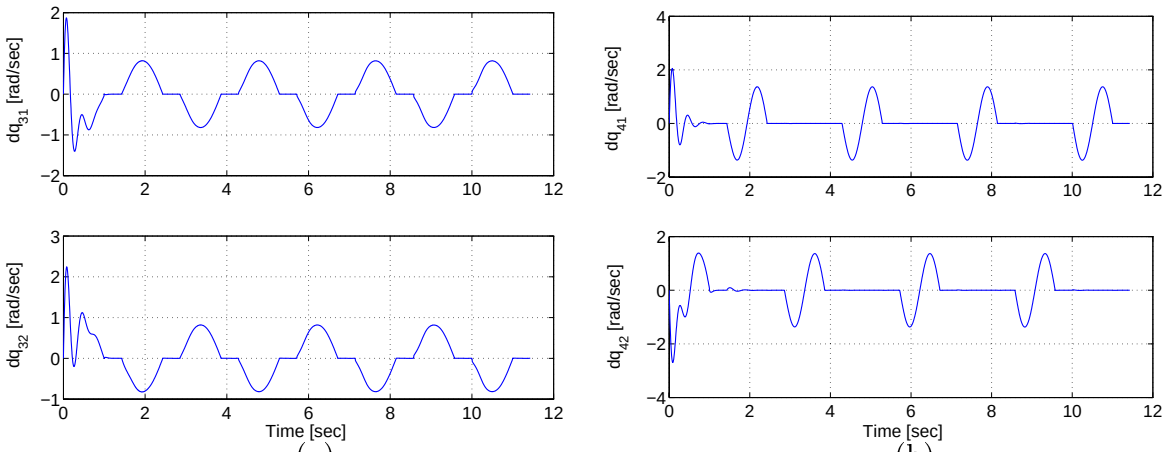
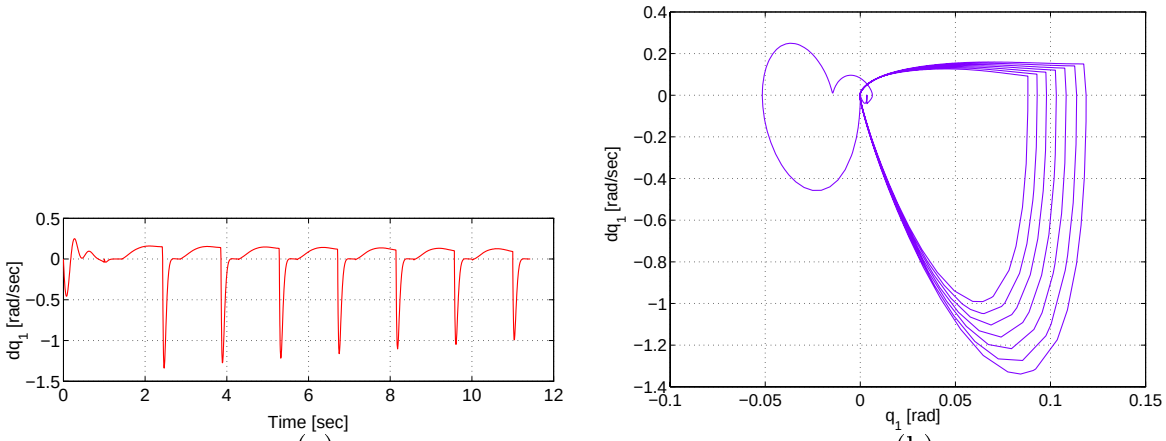


FIG. 5.55 – *Approche 2: évolution dans le temps des trajectoires des coordonnées non actionnées : tronc (a), hanches (b)*



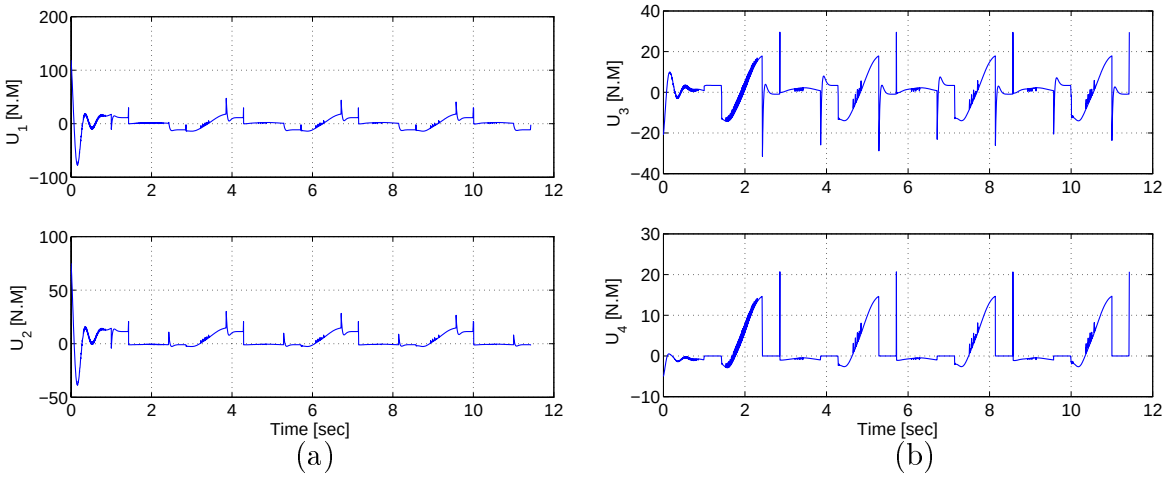
(a) (b)

FIG. 5.56 – *Approche 2: évolution dans le temps des trajectoires des vitesses articulaires, des fémurs (a), des tibias (b)*



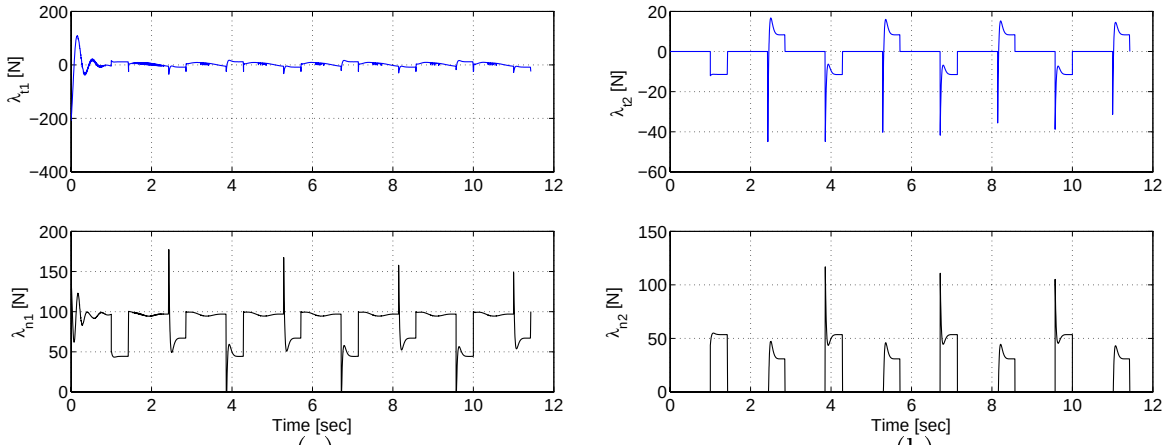
(a) (b)

FIG. 5.57 – *Approche 2: évolution dans le temps de la vitesse du tronc (a), plan de phase de la dynamique interne (b)*



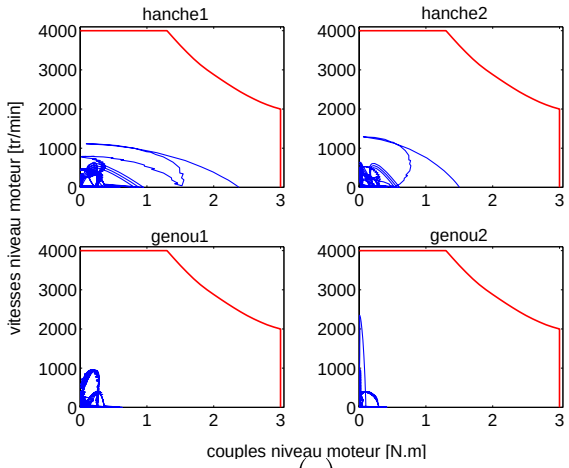
(a) (b)

FIG. 5.58 – *Approche 2: évolution dans le temps des couples articulaires des fémurs: (a), des tibias: (b)*



(a) (b)

FIG. 5.59 – *Approche 2 : évolution dans le temps des forces de contact avec le sol (a) : du pied 1, (b) : du pied 2*



(a)

FIG. 5.60 – *Approche 2 : évolution des vitesses angulaires des moteur en fonction des couples niveau moteurs, superposées au gabarit constructeur délimitant la puissance maximale*

5.4 Conclusion

Après avoir présenté les deux approches de commande, à savoir la commande prédictive non linéaire de faible dimension et la commande Lyapunov dans les chapitres précédents. Le présent chapitre vient les illustrer par application à la commande de la marche dynamique d'un robot marcheur bipède sous-actionné.

Dans cet esprit, la première approche de commande a été appliquée pour réaliser les six scénarios de simulation suivants :

- la marche à vitesse constante;
- la génération d'allures transitoires de démarrage et de l'arrêt;
- la transition entre différentes vitesses de marche;
- le balancement autour d'une posture d'équilibre;
- la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques, et
- la robustesse vis-à-vis des irrégularités du sol.

Les résultats de simulation relatifs à chaque scénario ont été présentés, sous forme de courbes de simulation. Ces dernières tracent les allures des différentes grandeurs clés pour l'approche de commande, aussi bien que pour le système à commander. Des commentaire ont été données, dans le but de souligner les principales remarques qui peuvent en découler. Une évaluation du temps de calcul a été effectuée. Elle permet de montrer l'amélioration significative dans le temps de calcul en utilisant des vecteurs d'optimisation de faible dimension (scalaire) d'une part, et la vérification de certaines contraintes a posteriori d'autre part.

La deuxième approche de commande, quant à elle, a été appliquée dans un scénario d'une marche à vitesse constante. Les simulations ont été réalisées avec un simulateur du système développé avec `Matlab`. Les courbes de simulation ont été présentées, et les contraintes de contact avec le sol ont été vérifiées a posteriori. D'autre part, les courbes de simulation ont permis de voir la faisabilité de l'approche de commande sur le prototype réel. En effet, les couples générés, nécessaires à la poursuite des trajectoires de référence, respectent bien les limites admissibles du prototype. Les puissance maximales des actionneurs sont respectées aussi.





Chapitre 6

Conclusions et perspectives

6.1 Conclusions générales

Durant ces dernières années, la robotique à pattes a fait de grands progrès. En particulier sur le plan technologique, en effet, plusieurs centaines de prototypes de robots marcheurs à pattes et en particulier des robots bipèdes ont été réalisés à travers le monde. De nos jours des prototypes très aboutis existent, comme les robots humanoïdes `ASIMO`, et `HRP2`. Cependant, le développement des algorithmes et approches de commande ayant une assise théorique solide n'a pas suivi le même rythme que le développement technologique en dépit de la multitude d'approches de commande proposées pour contrôler ce type de systèmes complexes.

La commande de robots marcheurs, et en particulier les bipèdes, présente plusieurs difficultés à surmonter. Celles-ci sont en relation étroite avec la dynamique propre à ce genre de systèmes ainsi que leur interaction avec l'environnement. Face à ces complexités et difficultés auxquelles on est confronté, il faut trouver la bonne approche de commande qui gère ces problèmes dans le but de pouvoir réaliser une marche stable du robot bipède.

Dans cet esprit plusieurs approches de commande ont été proposées dans la littérature, destinées à différentes structures de robots marcheurs bipèdes (plus ou moins compliquées), de la structure la plus simple : l'acrobot marcheur, aux structures les plus compliquées avec plusieurs degrés de liberté.

Le travail réalisé dans cette thèse rentre dans ce cadre de recherche sur la commande de la marche bipède. En particulier deux contributions sont apportées par ce travail. Elles concernent essentiellement deux nouvelles approches de commande dédiées à une classe de robots marcheurs, appelée robots bipèdes sous-actionnés.



Le prototype en question est un robot bipède à une structure mécanique articulée à 5 corps rigides. Les segments sont inter-connectés à travers des articulations rotoïdes. La structure articulée comprend un tronc relié à deux jambes à travers les hanches. Les jambes sont articulées aux genoux, qui relient les cuisses aux tibias. Le nombre de degrés de liberté dont le robot dispose étant de 7 incluant 5 coordonnées articulaires et deux coordonnées cartésiennes dans le plan sagittal. Le mécanisme dispose de quatre moteurs actionneurs, dont deux sont au niveau des hanches, entre les cuisses et le tronc, et les deux autres sont au niveau des genoux, entre les cuisses et les tibias. La surface de marche est supposée plate, horizontale, et sans obstacles ni encombrants. Le contact entre les pieds et le sol est ponctuel du fait que le robot ne dispose pas de chevilles. Ceci engendre des impacts inévitables durant la marche. L'objectif était de trouver des approches de commande permettant de résoudre le problème de la marche dynamique d'un tel robot.

La première approche de commande proposée fait partie des approches de commande dites non linéaires prédictives. Le principe de base de cette approche consiste dans un premier temps à trouver un retour d'état partiellement linéarisant afin de scinder le vecteur d'état en un sous-vecteur d'état complètement linéarisé et un sous-vecteur d'état dont la dynamique est qualifiée de dynamique interne[1]. Ensuite, des trajectoires de référence sur les coordonnées linéarisées sont proposées. Elles incitent le système à toucher périodiquement la surface de commutation (ceci correspond dans le cas du bipède aux impacts entre le pied et le sol pendant la marche). Ces trajectoires sur les coordonnées actionnées sont paramétrées par un vecteur de variables, calculé par optimisation dans le soucis de stabiliser la dynamique interne. L'analyse de la stabilité en boucle fermée est alors effectuée en utilisant un outil graphique basé sur la section de Poincaré définie aux instants de commutation.

Bien que cette approche soit inspirée de la commande de robots marcheur bipèdes, elle n'est pas destinée exclusivement à de tels systèmes. Elle concerne généralement une classe de systèmes hybrides qui présentent des sauts conditionnels dans leur vecteur d'état. Le robot marcheur bipède en est un bon exemple d'application, vu la dynamique qui définit son mouvement. D'autre part, elle reste aussi bien valable pour les systèmes non linéaires continus.

Ce qui est crucial dans cette approche de commande est, entre autres, la possibilité de réduire considérablement le temps de calcul en adoptant des vecteurs d'optimisation de dimension scalaire, d'où l'appellation *Commande prédictive de faible dimension*. L'approche a été illustrée à travers cinq exemples d'application. Il s'agit d'un système non linéaire instable

1. Le système en question fait partie d'une classe appelée systèmes à non minimum de phase. Elle est caractérisée par le fait que la dynamique interne du système soit instable.



en boucle ouverte, dont le linéarisé autour du point d'équilibre est non commandable, deux systèmes mécaniques sous-actionnés, à savoir la bille sur le rail et le pendule inversé ECP modèle 505, le système chaotique impulsionnel de Lorenz, et le robot marcheur bipède sous-actionné.

D'une façon générale, cette première approche de commande peut être considérée comme étant une approche de génération et de stabilisation de cycles limites d'ordre supérieur. La notion de cycle limite d'ordre supérieur fait référence à des trajectoires dans le plan de phase qui commencent d'un certain point, et qui y reviennent après deux cycles ou plus. Ce nombre de cycles définit l'ordre du cycle limite. La stabilisation autour d'un point d'équilibre est possible avec cette approche de commande. En effet, c'est un cas particulier de la stabilisation autour de cycle limite, où ce dernier se réduit à un point dan le plan de phase de la dynamique interne.

D'après les résultats prometteurs que cette approche a donnée, elle nous a ouvert la porte sur plusieurs pistes à explorer qui peuvent conduire à des résultats plus intéressants, ceci sera discuté dans la section des perspectives.

La deuxième approche de commande proposée dans cette thèse concerne principalement la commande de robots bipèdes sous-actionnés. Elle fait partie des approches dites de Lyapunov.

Elle est basée sur des lois de commande souvent utilisées pour les robots manipulateurs en interaction avec leur environnement. Autrement dit des manipulateurs sous contraintes holonomes. Ce type de commande est souvent appelé commande hybride position/force. D'après la littérature, ce genre de commande à été appliqué aux robots manipulateurs complètement actionnés. A notre connaissance, elle n'a pas été appliquée aux systèmes sous-actionnés. Ceci constitue, entre autres, la nouveauté dans cette approche de commande.

L'idée de base de cette deuxième approche est de considérer les différentes phases du cycle de marche, où le robot est sous contraintes holonomes (dues au contact avec le sol). Puis le modèle d'ordre réduit régissant le robot en mouvement et prenant en compte les contraintes de contact avec le sol est calculé. Une fois la dynamique du robot dans les différentes phases du cycle de marche obtenue, des commandes classiques (dynamiques, retour d'état non linéaire,...etc) sont proposées. Elles sont utilisées pour poursuivre les trajectoires de référence sur le cycle de marche. Ces trajectoires de référence sont des fonctions du temps, à savoir des fonctions trigonométriques permettant d'aller d'une certaine configuration initiale (au début du pas) à une certaine configuration finale (à la fin du pas). L'analyse de stabilité du système en boucle-fermée sous les contrôleurs proposés est effectuée sur chaque phase du cycle de

Performance	Approche 1	Approche 2
Nom	*Commande prédictive non linéaire de faile dimension*	*Commande par la méthode de Lyapunov*
Trajectoires de références	trajectoires paramétrées mis à jour en ligne	trajectoires non paramétrées en fonction du temps
Loi de commande	retour d'état non linéaire	retour d'état non linéaire
Analyse de stabilité	outil graphique basé sur la section de Poincaré	méthode de Lyapunov
Optimisation	optimisation scalaire en ligne utilisant une prédiction	pas d'optimisation
Applications	système non linéaire dont le linéarisé est non commandable, la bille sur le rail, le pendule inversé ECP 505, le système chaotic impulsionel de Lorenz, le robot bipède sous-actionné RABBIT	le robot bipède sous-actionné RABBIT

TAB. 6.1 – *Tableau comparatif entre les deux approches de commande proposées*

marche en utilisant la méthode de Lyapunov. Une autre analyse de la stabilité est nécessaire sur le cycle complet de marche. Les impacts qui interviennent entre chaque phase de simple et de double support ont été considérés comme étant des perturbations lors de l'analyse de stabilité. En revanche sous certaines conditions, la stabilité sur le cycle complet de marche est obtenue. Une généralisation de cette approche de commande aux systèmes mécaniques sous-actionnés avec impacts est tout a fait envisageable, ceci sera discuté dans la section des perspectives.

6.2 Comparaison entre les deux approches de commande proposées

Après avoir donné des conclusions générales sur les deux approches de commande, il serait intéressant de récapituler ces conclusions par une comparaison entre les deux approches. Ceci est résumé dans la tableau comparatif 6.1.



Les contributions apportées par cette thèse sont conclues ci-dessus. Certaines perspectives relatives à la suite à donner à ces contributions sont envisagées dans la section suivante. Elles peuvent donner naissance à d'autres pistes à explorer ou continuer sur les mêmes pistes déjà commencées pour mener des réflexions plus approfondies. Ces réflexions peuvent être menées sur la commande des robots marcheurs, ou bien sur la commande des systèmes mécaniques sous-actionnés avec impacts d'une façon générale.

6.3 Perspectives

Dans cette section, l'ensemble des perspectives que nous estimons abordables seront présentées. Elles peuvent rapporter soit des améliorations, soit des nouveautés aux contributions apportées par ce travail. Une façon de présenter ces perspectives consiste à aborder celles de chaque contribution séparément, puis les perspectives communes aux deux approches de commande proposées.

En ce qui concerne la première contribution, à savoir la commande prédictive non linéaire de faible dimension, les directions suivantes sont proposées :

1. Dans l'approche de commande telle qu'elle est présentée, les contraintes sur la commande n'ont pas été prises en considération explicitement en ligne. Une vérification à posteriori est effectuée. En effet, comme perspective, des contraintes sur la commande peuvent être considérées dans l'élaboration de l'approche à moins que cela augmente significativement le temps de calcul. En revanche, les contraintes sur la commande n'est qu'un exemple, en effet, il y a d'autres contraintes qu'il est judicieux de les prendre en compte. Elles concernent la marche bipède, et plus particulièrement l'interaction avec le sol. C'est ce qu'on appelle les contraintes unilatérale de contact avec le sol et les contraintes de non glissement. Ceci pourra être intégré dans la conception de la commande.
2. Pour ce qui est du vecteur d'optimisation, on a proposé un paramètre scalaire pour les différentes applications. Pour le choix de ce paramètre plusieurs sélections sont possibles. A titre d'exemple pour le robot marcheur, entre le choix de l'angle du fémur de la jambe de support et l'angle du fémur de la jambe de balancement, il y a une grande difference, notamment dans la taille et la forme du cycle limite. Par conséquent, une exploration des différentes possibilités du paramètre d'optimisation est intéressante. Elle permettrait d'identifier les paramètres qui agissent plus sur la dynamique interne du systèmes, ou bien qui nécessitent moins d'énergie de la part de la commande pour atteindre l'objectif voulu.

3. Le choix des paramètres de l'approche de commande, comme par exemple la configuration désirée (ξ^f,η^f), la période d'un cycle τ_c, ou bien la matrice de pondération Q n'est pas optimisé à l'état actuel. Il est par conséquent tout a fait envisageable d'optimiser ces choix dans le but d'améliorer le comportement global du système, de renforcer la stabilité, d'élargir la région d'attraction, ou encore d'améliorer la robustesse de la stabilité.
4. Dans l'approche telle qu'elle est appliquée au robot bipède, le critère d'optimisation proposé, porte sur l'état du tronc au prochain impact. Cependant, il est possible d'imaginer un critère d'optimisation qui prend aussi en considération les dépenses énergétiques. Ceci pourra modifier la région d'attraction mais celle-ci est de toute façon analysée a posteriori. Une prise en compte des contraintes dans la définition du critère d'optimisation est donc possible sans effort considérable.
5. L'approche a été appliquée à une variété de systèmes, et notamment à la commande de la marche dynamique d'un robot bipède sous-actionné. Or il est intéressant de mener une réflexion sur l'adaptation de l'approche à la commande du robot bipède pour des allures de course.
6. Récemment, il y a une certaine tendance vers ce qu'on appelle les robots humanoïdes. Ce sont des robot marcheurs bipèdes qui ont la morphologie de l'être humain, avec plusieurs degrés de liberté. Il serait donc intéressant d'essayer d'appliquer l'approche à la commande de tels robots, dans le but de réaliser des tâches assez complexes telle que gravir des escaliers, pousser un chariot, ou encore marcher en soulevant une charge.

La deuxième approche de commande proposée dans le cadre de cette thèse, à savoir la commande de type Lyapunov, ouvre aussi la voie vers d'autres questions et idées qui méritent d'être explorées. Ces points peuvent être abordés dans le but d'étendre l'approche de commande et de la généraliser. Il serait aussi intéressant de détourner l'approche vers d'autres pistes, dans le but de résoudre d'autres problèmes inhérents à la commande de systèmes mécaniques sous-actionnés. Dans cet esprit la liste suivante inclut des points qui nous paraissent les plus intéressants :

1. L'approche telle qu'elle est proposée concerne l'allure de marche. Il serait intéressant d'essayer des allures de la course, pour le même robot sous-actionné, ou à la limite pour un robot complètement actionné avec des chevilles.
2. Il est primordiale de généraliser cette approche de commande à des systèmes mécaniques sous-actionnés avec impacts.
3. L'approche telle qu'elle est formulée ne prend pas en compte les saturations sur les commandes. Or dans un prototype réel, les actionneurs ont toujours une limite maximale



au delà de laquelle l'action est saturée. En revanche une piste intéressante serait de formuler la même approche avec des lois de commande saturées.

4. Vu que le prototype réel (i.e. RABBIT) ne dispose pas de capteurs pour mesurer les vitesses angulaires aux différentes articulations. Il est crucial, et tout a fait envisageable d'adapter l'approche à de telles situations, en choisissant des lois de commande sans mesure de vitesses. Ceci reste un problème ouvert, car cette technique de commande a été proposée pour des systèmes complètement actionnés [57], [46], [31].
5. Pour cette deuxième approche de commande, les trajectoires articulaires de référence proposées ne sont pas adaptées en ligne. Par conséquent il serait intéressant de proposer des trajectoires mises à jour en ligne dans le but d'améliorer le comportement et la stabilité du système. Ceci est indispensable dans le cas où il y a des changements imprévus dans l'environnement (perturbations, obstacles, ..., etc).

En plus des perspectives relatives aux deux approches de commande séparément, une série de perspectives ou de travaux futurs que nous estimons communs aux deux approches est présentée :

1. La perspective la plus intéressante, qui constitue l'étape suivante dans nos travaux est l'application en temps réel des deux approches de commande développées, au prototype RABBIT. Ceci est primordial, vu les résultats prometteurs obtenus en simulation.
2. Pour les deux approches de commande une marche sur un sol rigide a été considérée, or il est intéressant de considérer la marche sur un sol compliant.
3. Il serait aussi intéressant d'adapter les deux approches de commande à la marche 3D. Ceci peut être réalisé avec une commande des mouvements dans le plan sagittal. Une commande des mouvements dans le plan frontal, et la coordination entre les deux pour pouvoir réaliser une marche statiquement, ou dynamiquement stable.





Annexe A

Modèle dynamique du robot bipède

Dans cet annexe le modèle dynamique du robot bipède RABBIT sera détaillé, il est calculé avec `Maple`®. Rappelons que le modèle dynamique Lagrangien [84] s'écrit :

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Su \tag{A.1}$$

où

$q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de coordonnées généralisées,

$M(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice d'inertie,

$G(q)$ est le vecteur de forces de gravité,

$N(q,\dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de forces de Coriolis et centrifuges,

$u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées de commande.

Il faut noter que dans ce modèle dynamique les frottements ont été négligés.

Malgré la complexité de la dynamique (A.1), qui inclue de diverses non linéarités, elle dispose de quelques propriétés fondamentale [33] qui peuvent être exploitées pour faciliter la conception des lois de commande. Ces propriétés sont récapitulées dans les points suivants :

- La matrice d'inertie $M(q)$ est symétrique, définie positive, elle vérifie :

$$\lambda_m I \leq M(q) \leq \lambda_M I$$

  où λ_m (respectivement $\lambda_M < \infty$) représente la valeur propre la plus petite (respectivement la plus grande) de la matrice $M(q)$ pour toute configuration q.

- La matrice définie par $D(q,\dot{q}) = \dot{M}(q) - 2\,N(q,\dot{q})$ est anti symétrique c.à.d $D(i,j) = -D(j,i)$ pour un choix particulier de $N(q,\dot{q})$ (qui est toujours possible),

$$z^T D(q,\dot{q}) z = 0 \quad , \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$



- Pour n'import quel couple (x,y) de vecteurs, l'égalité suivante est vérifiée :

$$C(q,x)y = C(q,y)x$$

- Les termes de Coriolis et centrifuge $N(q,\dot{q})\dot{q}$ vérifient :

$$\|N(q,\dot{q})\dot{q}\| \leq n_0\|\dot{q}\|^2$$

  Pour une certaine constante bornée $n_0 > 0$

- La matrice $N(q,\dot{q})$ vérifie :

$$\|N(q,\dot{q})\| \leq k_c\|\dot{q}\|$$

  Pour une certaine constante bornée $k_c > 0$

- Le vecteur de gravité $G(q)$ vérifie :

$$\|G(q)\| \leq g_0$$

  Pour une certaine constante $g_0 > 0$

Pour le robot bipède le vecteur de coordonnées généralisées est donné par :

$$q = \begin{pmatrix} q_{31} & q_{41} & q_{32} & q_{42} & q_1 & x & y \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$$

Le vecteur d'entrées de commande est donné par :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$$

Le nombre de coordonnées généralisées est $n = 7$, et le nombre d'entrées de commande est $m = 4$. Par conséquent le système est sous actionné. Par la suite les différentes matrices du modèle dynamique seront détaillées.

Remarque 27 *Dans ce qui suit, les notations suivantes sont utilisées :*

m_1, l_1, I_1 : *masse, longueur et moment d'inertie (respectivement) du tronc,*

m_3, l_3, I_3 : *masse, longueur et moment d'inertie (respectivement) du fémur,*

m_4, l_4, I_4 : *masse, longueur et moment d'inertie (respectivement) du tibia,*

g : *accélération de la pesanteur.*

A.1 La matrice d'inertie

La matrice d'inertie $M(q) \in \mathbb{R}^{7\times7}$ est symétrique définie positive, elle se déduit de l'énergie cinétique K du bipède à travers la relation suivante :

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} \tag{A.2}$$



Les élément de cette matrice sont donnés par

$$M(1,1) = \tfrac{1}{4}m_3 l_3^2 + \{l_3 l_4 \cos(q_{41}) + l_3^2 + \tfrac{1}{4}l_4^2\}m_4 + I_3 + I_4$$
$$M(1,2) = \{\tfrac{1}{2}l_3 l_4 \cos(q_{41}) + \tfrac{1}{4}l_4^2\}m_4 + I_4$$
$$M(1,3) = M(1,4) = M(1,5) = 0$$
$$M(1,6) = -\tfrac{1}{2}m_3 l_3 \cos(q_{31}) - \{\tfrac{1}{2}l_4 \cos(q_{31} + q_{41}) + l_3 \cos(q_{31})\}m_4$$
$$M(1,7) = -\tfrac{1}{2}m_3 l_3 \sin(q_{31}) - \{\tfrac{1}{2}l_4 \sin(q_{31} + q_{41}) + l_3 \sin(q_{31})\}m_4$$

$$M(2,2) = \tfrac{1}{4}m_4 l_4^2 + I_4$$
$$M(2,3) = M(2,4) = M(2,5) = 0$$
$$M(2,6) = -\tfrac{1}{2}m_4 l_4 \cos(q_{31} + q_{41})$$
$$M(2,7) = -\tfrac{1}{2}m_4 l_4 \sin(q_{31} + q_{41})$$

$$M(3,3) = \tfrac{1}{4}m_3 l_3^2 + \{l_3 l_4 \cos(q_{42}) + l_3^2 + \tfrac{1}{4}l_4^2\}m_4 + I_3 + I_4$$
$$M(3,4) = \{\tfrac{1}{2}l_3 l_4 \cos(q_{42}) + \tfrac{1}{4}l_4^2\}m_4 + I_4$$
$$M(3,5) = 0$$
$$M(3,6) = -\tfrac{1}{2}m_3 l_3 \cos(q_{32}) - \{\tfrac{1}{2}l_4 \cos(q_{32} + q_{42}) + l_3 \cos(q_{32})\}m_4$$
$$M(3,7) = -\tfrac{1}{2}m_3 l_3 \sin(q_{32}) - \{\tfrac{1}{2}l_4 \sin(q_{32} + q_{42}) + l_3 \sin(q_{32})\}m_4$$

$$M(4,4) = \tfrac{1}{2}m_4 l_4^2 + I_4$$
$$M(4,5) = 0$$
$$M(4,6) = -\tfrac{1}{2}m_4 l_4 \cos(q_{32} + q_{42})$$
$$M(4,7) = -\tfrac{1}{2}m_4 l_4 \sin(q_{32} + q_{42})$$

$$M(5,5) = \tfrac{1}{4}m_1 l_1^2 + I_1$$
$$M(5,6) = -\tfrac{1}{2}m_1 l_1 \cos(q_1)$$
$$M(5,7) = -\tfrac{1}{2}m_1 l_1 \sin(q_1)$$

$$M(6,6) = m$$
$$M(6,7) = 0$$

$$M(7,7) = m$$



A.2 La matrice de Coriolis et des termes centrifuge

D'après le formalisme de Lagrange les termes de la matrice de Coriolis sont définies par :

$$N_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\{\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k}\}\dot{q}_i \tag{A.3}$$

avec :

$$n_{ijk} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k}\} \tag{A.4}$$

n_{ijk} sont appelés les symboles de Christoffel du premier type. Ils garantissent que la matrice $\dot{M} - 2N$ soit anti-symétrique. Les éléments de la matrice $N(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$, sont les suivants :

$N(1,1) = -\frac{1}{2}m_4 l_3 l_4 \sin(q_{41})\dot{q}_{41}$
$N(1,2) = -\frac{1}{2}m_4 l_3 l_4 \sin(q_{41})\{\dot{q}_{31} + \dot{q}_{41}\}$
$N(1,3) = N(1,4) = N(1,5) = N(1,6) = N(1,7) = 0$

$N(2,1) = \frac{1}{2}m_4 l_3 l_4 \sin(q_{41})\dot{q}_{31}$
$N(2,2) = N(2,3) = N(2,4) = N(2,5) = N(2,6) = N(2,7) = 0$

$N(3,1) = N(3,2) = 0$
$N(3,3) = -\frac{1}{2}m_4 l_3 l_4 \sin(q_{42})\dot{q}_{42}$
$N(3,4) = -\frac{1}{2}m_4 l_3 l_4 \sin(q_{42})\{\dot{q}_{32} + \dot{q}_{42}\}$
$N(3,5) = N(3,6) = N(3,7) = 0$

$N(4,1) = N(4,2) = 0$
$N(4,3) = \frac{1}{2}m_4 l_3 l_4 \sin(q_{42})\dot{q}_{32}$
$N(4,4) = N(4,5) = N(4,6) = N(4,7) = 0$

$N(5,1) = N(5,2) = N(5,3) = N(5,4) = N(5,5) = N(5,6) = N(5,7) = 0$

$N(6,1) = \{(m_4 + \frac{m_3}{2})l_3 \sin(q_{31}) + \frac{1}{2}m_4 l_4 \sin(q_{31} + q_{41})\}\dot{q}_{31} + \frac{1}{2}m_4 l_4 \sin(q_{31} + q_{41})\dot{q}_{41}$
$N(6,2) = \frac{1}{2}m_4 l_4 \sin(q_{31} + q_{41})\{\dot{q}_{31} + \dot{q}_{41}\}$
$N(6,3) = \{(m_4 + \frac{m_3}{2})l_3 \sin(q_{32}) + \frac{1}{2}m_4 l_4 \sin(q_{32} + q_{42})\}\dot{q}_{32} + \frac{1}{2}m_4 l_4 \sin(q_{32} + q_{42})\dot{q}_{42}$
$N(6,4) = \frac{1}{2}m_4 l_4 \sin(q_{32} + q_{42})\{\dot{q}_{32} + \dot{q}_{42}\}$
$N(6,5) = \frac{1}{2}m_1 l_1 \sin(q_1)\dot{q}_1$
$N(6,6) = N(6,7) = 0$



$N(7,1) = -\{(m_4 + \frac{m_3}{2})l_3\cos(q_{31}) + \frac{1}{2}m_4 l_4\cos(q_{31}+q_{41})\}\dot{q}_{31} - \frac{1}{2}m_4 l_4\cos(q_{31}+q_{41})\dot{q}_{41}$
$N(7,2) = -\frac{1}{2}m_4 l_4\cos(q_{31}+q_{41})\{\dot{q}_{31}+\dot{q}_{41}\}$
$N(7,3) = -\{(m_4 + \frac{m_3}{2})l_3\cos(q_{32}) + \frac{1}{2}m_4 l_4\cos(q_{32}+q_{42})\}\dot{q}_{32} - \frac{1}{2}m_4 l_4\cos(q_{32}+q_{42})\dot{q}_{42}$
$N(7,4) = -\frac{1}{2}m_4 l_4\cos(q_{32}+q_{42})\{\dot{q}_{32}+\dot{q}_{42}\}$
$N(7,5) = -\frac{1}{2}m_1 l_1\cos(q_1)\dot{q}_1$
$N(7,6) = N(7,7) = 0$

A.3 Le vecteur de gravité

Le vecteur de gravité se déduit en dérivant l'énergie potentielle du bipède suivant la relation :

$$G(q) = \frac{\partial P}{\partial q} \tag{A.5}$$

les éléments du vecteur de gravité $G(q) \in \mathbb{R}^7$, sont les suivants :

$G(1) = -g\{(\frac{1}{2}m_3 l_3 + m_4 l_3)\sin(q_{31}) + \frac{1}{2}m_4 l_4\sin(q_{31}+q_{41})\}$
$G(2) = -g\{\frac{1}{2}m_4 l_4\sin(q_{31}+q_{41})\}$
$G(3) = -g\{(\frac{1}{2}m_3 l_3 + m_4 l_3)\sin(q_{32}) + \frac{1}{2}m_4 l_4\sin(q_{32}+q_{42})\}$
$G(4) = -g\{\frac{1}{2}m_4 l_4\sin(q_{32}+q_{42})\}$
$G(5) = -g\{\frac{1}{2}m_1 l_1\sin(q_1)\}$
$G(6) = 0$
$G(7) = g(m_1 + 2m_3 + 2m_4) = gm$

A.4 La matrice de répartition des couples sur les articulations

C'est la matrice $S \in \mathbb{R}^{n\times m}$ qui définie la répartition des entrées de commande sur les articulations du robot bipède, elle est donné par :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Annexe B

Principe de linéarisation partielle par retour d'état

L'objectif principal de cet annexe est d'introduire le concept de linéarisation partielle par retour d'état [55, 50, 89, 51]. A cet effet, au premier lieu, son principe de base est expliqué. Puis un exemple illustratif est introduit pour éclaircir l'idée. Le lecteur souhaitant plus de détails sur ce principe, peut se référer à [55], [50], [89], [51].
Le principe en question sera abordé pour les systèmes non linéaires mono-variables (mono-entrée/mono-sortie). Cependant, il est facilement généralisable pour les systèmes multi-variables (multi-entrées/multi-sorties).
considérons les systèmes non linéaires décrits par les équations suivantes :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{B.1}$$
$$y = h(x) \tag{B.2}$$

(B.1) représente l'équation d'état, et (B.2) représente l'équation de sortie. $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ sont respectivement l'entrée de commande, et la sortie du système. $f(x)$, $g(x)$, et $h(x)$ sont des fonctions non linéaires continues.
Soit $L_f h$ la dérivée de Lie de h, définie par :

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

Définition 3 *On dit que le système* (B.1)-(B.2) *a un degré relatif r, dans une région Ω, si* $\forall x \in \Omega$

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \quad ; \quad \forall i < r-1 \tag{B.3}$$
$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \tag{B.4}$$

S'il n'existe pas un entier r tel que $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$, on dit que le degré relatif est infini.

Remarque 28 *Un cas particulier, relatif à la valeur de r en découle. Il correspond au cas où $r = n$, et ceci implique une linéarisation entrée/état.*

B.1 Transformation d'état

Soit :

$$\begin{cases} \xi = [h(x) \;\; L_f h(x) \;\; \dots \;\; L_f^{r-1} h(x)]^T \\ \eta = [\eta_1(x) \;\; \eta_2(x) \;\; \dots \eta_{n-r}(x)]^T \end{cases} \tag{B.5}$$

où η_i sont des fonctions indépendantes, vérifiant la condition :

$$L_g \eta_i = 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

alors la transformation (B.5), qui peut être réécrite sous une forme plus compact $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \Phi(x)$ est un difféomorphisme. Ceci donne ce qu'on appelle *forme normale*, expliquée par la suite.

B.2 Forme normale

Quand le degré relatif r est défini et $r < n$ (où n est l'ordre du système), le système non linéaire (B.1) peut être mis sous une forme normale :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} = \xi_r \\ \dot{\xi}_r = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u \quad ; \quad x = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ \dot{\eta} = Z(\xi,\eta) \quad ; \quad \text{partie non observable} \end{cases} \tag{B.6}$$

Soit maintenant la loi de commande non linéaire u, définie par :

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v \quad ; \quad \alpha(x) = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad ; \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

qui, remplacée dans (B.6), donne la dynamique du système exprimée en fonction des nouvelles coordonnées :

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \quad ; \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} \tag{B.7}$$

$$\dot{\eta} = Z(\xi,\eta) \quad ; \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_\eta} \tag{B.8}$$

où la paire (A,B) est commandable, $n_\xi = r$, et $n_\eta = (n - r)$.



B.3 Dynamique interne

L'équation (B.8) définit ce qu'on appelle *dynamique interne* du système. Ce sont les états rendus inobservable par la linéarisation.

B.4 Dynamique des zéros

Au moyen de linéarisation entrée/sortie, la dynamique d'un système non linéaire est composée d'une partie externe (entrée-sortie) et d'une partie interne (inobservable). D'autre part il faut se préoccuper de la dynamique interne qui ne peut pas être instable sous peine d'obtenir un système globale instable. Une propriété intrinsèque du système non linéaire peut être définie en considérant sa dynamique interne quand l'entrée de commande est telle que la sortie y est maintenue à zéro. Ceci revient à analyser ce qu'on appelle la *dynamique des zéros.*

Définition 4 *La dynamique des zéros du système, est par définition la dynamique du système sur la surface lisse de variété*

$$M^* = \{x/y = \dot{y} = \ldots = y^{(r-1)} = 0\}$$

c.à.d avec $\xi(0) = 0$, *et* $u^* = \frac{-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$ *alors, on a* $\dot{\xi} = 0 \quad ; \quad \dot{\eta} = Z(0,\eta)$

Définition 5 *Le système est à minimum de phase assymptotiquement, si sa dynamique des zéros est assymptotiquement stable, sinon il est dit à non minimum de phase.*

B.5 Exemple

Soit le système non linéaire décrit par les équations (B.1)-(B.2), avec les fonctions f,g,h définies comme suit :

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad g(x) = \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad h(x) = x_3 \tag{B.9}$$

Calculons les dérivées successives de y, pour faire apparaître la commande, pour cela on a :

$$\dot{y} = x_2 \quad ; \quad \ddot{y} = \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u \quad \Rightarrow \quad r = 2.$$

Le système a donc un degré relatif de 2, cela signifie que le système n'est pas linéarisable entrée/état avec cette sortie et qu'il existe une dynamique interne.
En effet,

$$L_f h(x) = x_2 \quad ; \quad L_g h(x) = 0 \quad ; \quad L_g L_f h(x) = 1$$



Considérons ensuit la transformation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= h(x) = x_3\\ \xi_2 &= L_f h(x) = x_2\end{aligned}$$

il faut maintenant trouver η qui vérifie : $L_g\eta = 0$

$$L_g\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x_1}e^{x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = 0$$

Soit la solution :

$$\eta(x) = 1 + x_1 - e^{x_2}$$

Donc, les nouvelles coordonnées sont exprimées par :

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \eta\end{pmatrix} = \Phi(x) = \begin{pmatrix}x_3\\ x_2\\ 1 + x_1 - e^{x_2}\end{pmatrix} \tag{B.10}$$

D'autre part on a $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & e^{-x_2} & 0\end{pmatrix}$ non singulière, alors la transformation inverse sera :

$$x = \Phi^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \eta\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -1 + \eta + e^{\xi_2}\\ x_2 = \xi_2\\ x_3 = \xi_1\end{cases} \tag{B.11}$$

La forme normale :

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1 = \xi_2\\ \xi_2 = (-1 + \eta + e^{\xi_2})\xi_2 + u\\ \dot{\eta} = \dot{x}_1 - e^{x_2}\dot{x}_2 = (1 - \eta - e^{\xi_2})(1 + \xi_2 e^{\xi_2})\end{cases} \tag{B.12}$$

La dynamique des zéros : $(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0) \Rightarrow \dot{\eta} = -\eta$ dynamique assymptotiquement stable, donc le système est à minimum de phase.

Bibliographie

[1] *Biped Robot Research in the World.* http://www.mel.go.jp/soshiki/robot/undo/kajita/bipedsite-e.html, 2005.

[2] *Historical : From trucks with legs to modern walking machines.* http://gate1.fzi.de/ids/public_html/historical.php, 2005.

[3] *WASEDA University Humanoid.* http://www.humanoid.rise.waseda.ac.jp/booklet/kato04.html, 2005.

[4] M. Alamir and G. Bornard. On the stability of receding horizon control of nonlinear discrete-time systems. *Systems & Control Letters*, 23:291–296, 1994.

[5] M. Alamir and G. Bornard. Stability of a truncated infinite constrained receding horizon scheme : The general nonlinear case. *Automatica*, 31, No 9:1353–1356, 1995.

[6] F. Allgower, T.A. Badgwell, J.S. Qin, J.B. Rawlings, and S.J. Wright. Nonlinear predictive control and moving horizon estimation. an introductory overview. In P. M. Frank, editor, *Advances in control Highlights of ECC'99*, pages 81–93. 1999.

[7] C. Azevedo and P. Poignet. Commande prédictive pour la marche d'un robot bipède sous-actionné. In *CIFA 2002*, pages 605–610, 2002.

[8] C. Azevedo, P. Poignet, and B. Espiau. Artificial locomotion control: from human to robots. *Int. Jour. on Robotics and Autonomous Systems, Elsvier*, 47(4):203–223, 2004.

[9] T. Binder, L. Blank, H.G. Bock, R. Burlisch, W. Dahmen, T. Kronseder W. Marquardt M. Diehl, M., J.P. Schloder, and O. O. von Stryk. *Introduction to Model Based Optimization of Chemical Processes on Moving Horizons, Online Optimization of Large Scale Systems: State of the Art.* Springer, Berlin, m. grotschel, krumke and j. rambau edition, 2001.

[10] R. Blauwkamp and T. Basar. A receding-horizon approoach to robust output feedback control for nonlinear systems. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 5, pages 4879–4884, NJ, USA, 1999.

[11] P. Boucher and D. Dumur. *La commande prédictive.* TECHNIP, 2000.



[12] B. Brogliato. *Nonsmooth impact mechanics. Models, dynamics and control.* Number 220 in LNCIS. Springer Verlag, 1996.

[13] B. Brogliato and R. Lozano. Adaptive algorithm for force/position control of flexible joint manipulators with holonomic constraints. In *Proc. 30th. IEEE Conf. Decision Contr.*, Brighton, England, 1991.

[14] L. Cai and A. Goldenberg. An approach to control of force and position of robot manipulators. In *Proc. IEEE Conf. Robotics Automat.*, pages 86–91, 1989.

[15] A. Caiti and G. Cannata. Hybrid position/force control of constrained manipulators in presence of uncertainties. In *Proc. 4th. Symp. Robot Contr.*, pages 647–652, Capri, Italy, 1994.

[16] E.F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control.* Springer Verlag, 1999.

[17] T. Chang and Y. Hurmuzlu. Sliding control without reaching phase and its application to bipedal locomotion. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, 115:447–455, 1993.

[18] A. Chemori and M. Alamir. Generation of multi-steps limit cycles for rabbit using a low dimensional nonlinear predictive control scheme. In *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Sendai, Japan, 2004.

[19] A. Chemori and M. Alamir. Low dimensional predictive control scheme for limit cycle generation in nonlinear hybrid controlled systems. In *Proc. International Conference on Computing, Communications and Control Technologies*, Texas, USA, 2004.

[20] A. Chemori and M. Alamir. A new low dimensional nonlinear predictive control scheme for rabbit's dynamic walking control. In *French-German Workshop on humanoid and legged robots*, Metz , France, 2004.

[21] A. Chemori and M. Alamir. Nonlinear predictive control of under-actuated mechanical systems application : the ecp 505 inverted pendulum. In *Proc. 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Leven, Belgium, 2004.

[22] A. Chemori and M. Alamir. Limit cycle generation for a class of non-linear systems with jumps using a low dimensional predictive control. *Int. J. of Contr.*, 78(15):1206–1217, 2005.

[23] A. Chemori and A.Loria. Control of a planar under-actuated biped on a complete walking cycle. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 49(5), 2004.

[24] A. Chemori and A. Loria. Commande d'un robot bipède sur un cycle complet de marche. In *CIFA 2002*, pages 840–845, 2002.

[25] A. Chemori and A. Loria. Control of a planar five link under-actuated biped robot on a complete walking cycle. In *Proc. 41th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 2056–2061, Las vegas, Nevada, USA, 2002.



[26] A. Chemori and A. Loria. Walking control strategy for a planar under-actuated biped robot based on optimal reference trajectories and partial feedback linearization. In *Proc. 4th International workshop on Robot Motion and Control*, Puszczykowo, Poland, 2004.

[27] C. Chevallereau. Parameterized control for under-actuated biped robots. In *IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.

[28] C. Chevallereau and Y. Aoustin. Optimal reference trajectorires for walking ad rinnung of a biped robot. *Robotica*, 19:557–569, 2001.

[29] C. Chevallereau and P. Sardin. Designe and actuation optimisation of a 4 axes biped robot for walking and running. In *Proc. IEEE Conf. Robotics Automat.*, pages 3365–3370, Leuven, Belgium, 2000.

[30] S. Chiaverini and L. Sciavicco. The parallel approach to force/position control manipulators. *IEEE Trans. on Robotics Automat.*, 9:289–293, 1993.

[31] M. S. de Queiroz, J. Hu, D. Dawson, T. Burg, and S. Donepudi. Adaptive position/force control of robot manipulators without velocity measurements: Theory and experimentation. *IEEE Trans. Syst. Man and Cybernetics*, 1996. (to appear).

[32] C. Canudas de Wit, B. Espiau, and C. Urrea. Orbital stabilization of underactuated mechanical systems. In *Proc. 15th. IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona, spain, 2002.

[33] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, and G. Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer, 1996.

[34] L. France, A. Girault, and B. Espiau. Generation of walk transiant trajectories for a biped robot. In *ICAR99*, Tokyo, Japan., October 1999.

[35] Y. Fujimoto and A. Kawamura. Simulation of an autonomous biped walking robot including environmental force interaction. *IEEE Robotics and Automat. Magazine*, 5(2):33–41, June 1998.

[36] F. R. Gantmacher. *The theory of matrices, vols. I and II*. Chelsea publishing Co., New York, 1960.

[37] M. Garcia, A. Chaterjee, A. Ruina, and M. Colman. The simplest walking model : stability, complexity and scaling. *ASME J. Biom. Eng.*, 120(2):281–288, 1998.

[38] A. Goswami, B. Espiau, and A. Keramane. Limit cycles and their stability in a passive bipedal gait. In *ICRA96*, pages 246–251, Mineapolis, USA, 1996.

[39] A. Goswami, B. Thuilot, and B. Espiau. *Compass-like biped robot Part I: Stability and bifurcation of passive gaits*. Rapport de recherche, INRIA, 1996.

[40] J. W. Grizzle, G. Abba, and F. Plestan. Asymptotically stable walking for biped robots: analysis via systems with impulse effects. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 46(1):51–64, January 2001.



[41] F. Gubina, H. Hemami, and R. B. McGhee. On the dynamic stability of biped locomotion. *IEEE Trans. on Biomed. Engineer.*, 21(2):102–108, 1974.

[42] J. Hale. *Ordinary Differential equations*. Interscience, New York: John Wiley, 1969.

[43] J. Hauser, S. Sastry, and P. kokotovic. Nonlinear control via approximate input-output linearisation : the ball and beam example. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 37(3):392–398, 1992.

[44] J. Hollerbach. Computers, brains and the control of movement. *Trend in neuroscience*, 5, 1982.

[45] M. Houdebine, S. Dedieu, M. Alamir, and O. Sename. A new fractional frequency synthesizer architecture with stability and robustness analysis. In *IFAC World Congress*, 2005.

[46] J. Hu, M. de Queiroz, T. Burg, and D. Dawson. Adaptive position/force of robot manipulators without velocity measurements. In *Proc. IEEE Conf. Robotics Automat.*, pages 887–892, 1995.

[47] Y. Hurmuzlu. Dynamics of bipedal gait: Part i objectiv functions and the contact event of a planar five-link biped. *J. Appl. Math. Mech.*, 60(00):331–336, 1993.

[48] Y. Hurmuzlu. Dynamics of bipedal gait: Part ii stability analysis of a planar five-link biped. *J. Appl. Math. Mech.*, 60(00):337–343, 1993.

[49] Y. Hurmuzlu and D.B. Marghitu. Rigid body collisions of planar kinematic chains with multiple contact points. *Int. J. Rob. Research*, 13(1):82–92, 1994.

[50] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, 1989.

[51] W. Li J. J. E. Slotine. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.

[52] S. Kajita, T. Yamura, and A. Kobayashi. Dynamic walking control of a biped robot along a potentiel energy concerving orbit. *IEEE Trans. on Robotics Automat.*, 8(4):431–438, August 1992.

[53] R. Katoh and M. Mori. Control method of biped locomotion giving asymptotic stability of trajectory. *Automatica*, 20(4):405–414, 1984.

[54] S. S. Keerthi and E. G. Gilbert. Optimal infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems. *J. Optim. Theory Applics,*, 57:265–293, 1988.

[55] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, Second Edition, 1996.

[56] G. Loeb. Finding common ground between robotics and physiology. *Trend in neuroscience*, 6, 1983.

[57] A. Loria and E. Panteley. Force/tracking control of constrained manipulators without velocity measurements. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 44(7):1407–1412, 1999.



[58] L. Magni, G. De Nicolao, and R. Scattolini. Output feedback receding horizon control of discrete-time nonlinear systems. In *Proceedings of the 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, pages 422–427, Oxford, UK, 1998.

[59] L. Magni and R. Sepulchre. Stability margins of nonlinear receding horizon control via inverse optimalty. *Systems & Control Letters*, 32(4):241–245, 1998.

[60] N. Marchand, M. Alamir, and I. Balloul. Stabilization of nonlinear systems by discontinuous state feedback. In *NCN Springer-Verlag series. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 81–93. Springer-Verlag, August 2000.

[61] D. Q. Mayne and H. Michalska. Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35:814–824, 1990.

[62] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36:789–814, 2000.

[63] H. McClamroch and D. Wang. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 33:419–426, 1988.

[64] T. McGeer. Passive dynamic walking. *Int. J. Robotics Res.*, 9(2):62–82, April 1990.

[65] E. S. Meadows, M. A. Henson, J. W. Eaton, and J. B. Rawlings. Receding horizon control and discontinuous state feedback stabilization. *International Journal of Control*, 62(5):1217–1229, 1995.

[66] H. Michalska and D. Q. Mayne. Receding horizon control of nonlinear systems without differentiablility of optimal value function. *Systems & Control Letters*, 16:123–130, 1991.

[67] H. Michalska and D. Q. Mayne. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38:1623–1633, 1993.

[68] H. Michalska and D. Q. Mayne. Moving horizon observers and observer-based control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40:995–1006, 1995.

[69] A. Morecki and K.Waldron. *Human and machine locomotion.* LNCIS. Springer Verlag, Udine, Italy, 1997.

[70] G. De Nicolao, L. Magni, and R. Scattolini. On the robustness of receding-horizon control with terminal constraints. *IEEE Trans. Automatic Control*, 41(3):451–453, 1996.

[71] T. Ohtsuka and H. Fujii. Real-time optimization algorithm for nonlinear receding horizon control. *Automatica*, 33(6):1147–1154, 1997.

[72] T. Ohtsuka and K. Ohata. Nonlinear receding horizon output feedback control. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 5, pages 4332–4333, San Diego, USA, 1997.

[73] E. Panteley and A. Stotsky. Adaptive trajectory/force control scheme for constrained robot manipulators. *Int. J. Adapt. Contr. Sign. Process.*, 7(6):489–496, 1993.



[74] E. Panteley and A. Stotsky. Asymptotic stability of constrained robot motion observer based control schemes. In *Proc. 2nd. European Contr. Conf.*, pages 1255–1260, Groningen, The Netherlands, 1993.

[75] T. Parisini and S. Sacone. A hybrid receding horizon control scheme for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 38, No 3:187–196, 1999.

[76] F. Plas, E. Viel, and Y. Blanc. *La marche humaine : kiésiologie dynamique, biomécanique et pathomécanique.* Monographies de Bois-Larris. Masson, 1983.

[77] F. Plestan, J. W. Grizzle, E. R. Westervelt, and G. Abba. Stable walking of a 7 dof biped robot. *IEEE Trans. on Robotics Automat.*, 19(4):653–668, August 2003.

[78] M. Raibert and J. Craig. Hybrid position/force control of manipulators. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, 103:126–133, 1981.

[79] M. H. Raibert. Legged robots. *Commmun. ACM*, 29:499–514, 1986.

[80] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud, and J. Papon. Model predictive heuristic control : application to industrial processes. *Automatica*, 14(2):413–428, 1978.

[81] M. Rostami and G. Bessonnet. Impactless sagittal gait of a biped robot during the single support phase. In *Proc. IEEE Conf. Robotics Automat.*, pages 1385–1391, Leuven, Belgium, 1998.

[82] L. Roussel, C. Canudas, and A. Goswami. Generation of energy optimal complete gait cycles for biped robots. In *Proc. IEEE Conf. Robotics Automat.*, pages 2036–2041, Leuven, Belgium, 1998.

[83] I. Sandberg. Global implicit function theormes. *IEEE Trans. on Circ. Syst.*, 28:145–149, 1981.

[84] L. Sciavicco and B. Siciliano. *Modeling and control of robot manipulators.* McGraw Hill, New York, 1996.

[85] C. Shih and W. A. Gruver. Control of a biped robot in the double support phase. *IEEE Trans. on Syst., Man and Cyb*, 22(4):729–735, July/August 1992.

[86] A. S. Shiriaev and C. Canudas de Wit. Virtual constraints: a constructive tool for orbital stabilization of under-actuated nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, page to appear, 2005.

[87] B. Siciliano and L. Villani. Adaptive force/position regulator for robot manipulators. *Int. J. Adapt. Contr. Sign. Process.*, 7:389–403, 1993.

[88] M. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control.* John Wiley & Sons, New York, 1989.

[89] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis.* Prentice Hall,Second Edition, 1993.



[90] E. R. Westervelt. *Towards a Coherent Framework for the Control of Planar Biped Locomotion*. PhD thesis, University of Michigan, 2003.

[91] E. R. Westervelt, J. W. Grizzle, and C. Canudas de Wit. Switching and pi control of walking motions of planar biped walkers. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 48(2):308–312, 2003.

[92] E. R. Westervelt, J. W. Grizzle, and D. E. Koditschek. Hybrid zero dynamics of planar biped walkers. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 48(1):42–56, 2003.

[93] P. B. Wieber. Constrained dynamics and parametrized control in biped walking. In *MNTS*, Perpignan, France, 2000.

[94] P. B. Wieber. *Modélisation et commande d'un robot marcheur antropomorphe*. PhD thesis, EMP, 2000.

[95] T. Yang. *Impulsive control theory*. LNCIS. Springer Verlag, 2001.

[96] X. Yugeng and G. Xiaojun. Properties of recding horizon control for nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 16:118–123, 1999.



Résumé : Dans ce travail le problème de la commande de la marche dynamique des robots bipèdes sous-actionnés est traité. Deux nouvelles approches de commande sont proposées. La première approche est une commande prédictive non linéaire de faible dimension. Le principe de base de cette approche consiste à utiliser le concept de linéarisation partielle par retour d'état, pour scinder les composantes du vecteur d'état du système, en sous-état à dynamique complètement linéarisée, et un sous-état à dynamique interne; puis utiliser des trajectoires optimales de référence sur les coordonnées linéarisées pour stabiliser la dynamique interne du système. Ces trajectoires visent à reproduire une certaine configuration désirée dans le but de toucher périodiquement la surface d'impact. La stabilité du système en boucle-fermée est analysée par un outil graphique basé sur la section de Poincaré.
La deuxième contribution apportée par ce travail est une approche de commande de type Lyapunov. Le principe de base de cette approche consiste à scinder le cycle de marche en trois phases chronologiquement consécutives qui sont la phase de simple support, la phase d'impact et la phase de double support. L'objectif est alors de trouver des lois de commande sur le cycle complet de marche. Pour cela, les modèles dynamiques régissant le robot marcheur dans les différentes phases du cycle de marche sont calculés. Pour commander le robot dans les différentes phases, des lois de commandes inspirées des commandes hybrides position/force de robots manipulateurs à plusieurs degrés de liberté sont proposées.

Mot-clés : Robots marcheurs bipèdes, commande prédictive, commande lyapunov, dynamique interne, section de Poincaré, cycle limite, sous-actionné, stabilité.

Abstract : This work deals with dynamic walking control of under-actuated biped robots. Two contributions are introduced. The first control approach is a low dimensional nonlinear predictive control. Basically this approach uses the concept of partial feedback linearization to split up the state vector into a sub-vector of completely linearized coordinates and internal dynamics. Then, optimal reference trajectories on the linearized coordinates are used to stabilize the internal dynamics of the system. These trajectories aim at reproducing some desired configuration in order to hit periodically the impact surface. The stability issue is discussed using a graphical tool, based on the Poincaré section.
The second approach is a lyapunov based control. The proposed strategy is based upon singling out the three fundamental phases of motion of a biped : single support, impact and double support. Then, the aim is to propose control laws for the whole walking cycle. For this, the dynamic models of the biped on the different phases are computed. To control the robot on the whole walking cycle, the proposed control laws are inspired from hybrid position/force control.

Keywords : Biped walking robots, predictive control, lyapunov based control, internal dynamics, Poincaré section, limit cycle, under-actuated, stability.