HAL
open science

Étude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'. Une étude de cas au Viêt-nam.

Thien Trung Le Thai Bao

To cite this version:

Thien Trung Le Thai Bao. Étude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'. Une étude de cas au Viêt-nam.. domain_stic.educ. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT : . tel-00169190

HAL Id: tel-00169190

https://theses.hal.science/tel-00169190

Submitted on 2 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE EN CO-TUTELLE

Présentée par

LÊ THÁI BẢO Thiên Trung

Pour obtenir les titres de
Docteur de l'Université Joseph Fourier, Grenoble et Docteur du Vietnam
Spécialité : MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE

ÉTUDE DIDACTIQUE DES RELATIONS ENTRE NOTION DE LIMITE ET DECIMALISATION DES NOMBRES RÉELS DANS UN ENVIRONNEMENT « CALCULATRICE »

Une étude de cas dans l'enseignement mathématique secondaire au Viêt-nam

Date de soutenue : 29 août 2007

Composition du jury

Annie BESSOT	Directrice de thèse
Jean-Luc DORIER	Directeur de thèse
LÊ VĂN Tiến	Directeur de thèse
Claire MARGOLINAS	Rapportrice
NGUYỄN BÁ Kim	Rapporteur
Colette LABORDE	Présidente
LÊ THỊ Hoài Châu	Examinatrice
NGUYỄN CHÍ Thành	Examinateur

Thèse préparée au sein des équipes
Didactique et Informatique pour l'Apprentissage des Mathématiques
Laboratoire LIG, Université Joseph Fourier, Grenoble
Didactic Toán, Département de l'Informatique et des Mathématiques
Université de Pédagogie de Ho Chi Minh Ville

Remerciements

J'exprime ma profonde et affectueuse reconnaissance tout d'abord à Annie Bessot qui m'accompagne dans une belle aventure d'apprendre la recherche en didactique des mathématiques de la mémoire DEA à la fin de cette thèse. Rigoureuse, efficace et exigeante, elle m'a toujours encouragé, guidé, soutenu et soit patiente à m'écouter tout au long de trois années de thèse. Sans elle, je n'aurais pas ce moment important de ma vie.

Mes profonds remerciements vont aussi à Jean-Luc Dorier qui venait régulièrement à Grenoble de travailler avec nous. Grâce à lui, mes connaissances tant épistémologiques que mathématiques sont beaucoup enrichies.

J'adresse mes grands remerciements à Le Van Tien qui m'a donné les conseils importants pendant mes séjours au Viêt-nam dans le cadre de la thèse en co-tutelle, en particulier pour ma présentation orale.

Je remercie profondément Alain Birebent qui grâce à son expérience et sa participation dans la conception de l'ingénierie didactique, cette thèse peut être à son terme.

Je n'oublie pas Claude Comiti. Avec Annie, vous avez fondé la didactique des mathématiques au Viêt-nam, surtout à notre université. Grâce à cette coopération, j'ai eu l'occasion d'apprendre la recherche en didactique des mathématiques en France.

C'est pour moi un honneur que Clair Margolinas et Nguyen Ba Kim aient rapporté sur cette thèse. Leurs remarques, en particulier celle de Clair sont intéressantes et utiles. Qu'elles veuillent bien recevoir ici mes remerciements.

Ma grande gratitude revient également à Collette Laborde qui a accepté de présider le jury.

Je voudrais remercie Le Thi Hoai Chau et Nguyen Chi Thanh d'avoir participé au jury.

Je voudrais remercie aussi les enseignants du lycée de l'Université de Pédagogie Nguyen Thai Hoa, Nguyen Huu Tam, Ho Thi My Van et leurs élèves de nous avoir accueillis. Je n'oublie pas Huong, Nga et Dung qui m'ont aidé de préparer l'expérimentation de l'ingénierie didactique.

J'ai eu le plaisir de partager avec les membres d'abord de l'équipe DDM puis de l'équipe DIAM des moments agréables et les remercie de m'avoir toujours encouragé. Je pense fort à Affonso, Angela, Bernard, Jean-François, Khanh, Huong, Sae, Sophie et Zilora.

Ma reconnaissance va bien entendu à la région Rhône-Alpes pour m'avoir octroyé une bourse d'étude qui m'a aidé financièrement à réaliser cette thèse.

Je remercie mes collèges du département des mathématiques et de l'informatique de l'Université de Pédagogie de Hon Chi Minh Ville qui m'ont beaucoup encouragé pendant trois années de thèse.

Une pensée spéciale à mes parents, mes petites sœurs et mon petit frère qui m'ont toujours accompagné pendant ces années de thèse.

Table des matières

Introduction **1**
I. Outils théoriques et méthodologiques 2
II. Organisation de la thèse 5

Partie A

Chapitre A1. Travaux de référence en Didactiques des Mathématiques **11**
I. Sur la notion de limite 11
II. Sur la notion de nombre 27
Conclusion et nouvelles questions 36

Chapitre A2. Enquête épistémologique : relations entre la notion de limite, la construction des nombres réels et la décimalisation des réels **37**
I. De l'étude mathématique vers une étude épistémologique 37
II. Principales constructions de **R** dans l'histoire et relations avec le concept de limite 38
III. Place de l'écriture décimale illimité (EDI) dans les constructions de R 55
Conclusion 63

Chapitre A3. Conclusion de la partie A : Organisations mathématiques de référence (OM) **65**
I. OM de référence 65
II. Nouvelles questions pour l'enseignement mathématique secondaire (EMS) au Viêt-nam. 68

Partie B

Chapitre B1. Relation entre la notion de nombres, la notion de limite et la décimalisation des nombres réels dans EMS au Viêt-nam **73**

Première partie. Au niveau du collège **73**
I. Institution collège 1 (1994 - 2002) 74
II. Institution collège 2 (programme en cours à partir de 2002) 91

Deuxième partie. Au niveau du lycée **99**
I. Institution actuelle (de 2000 à 2008) 99
II. Une volonté d'intégration des problèmes de l'approximation décimale dans l'étude de la notion de limite dans le programme expérimental et ses manuels 106

Troisième partie. Conclusion de l'analyse institutionnelle **111**
I. Relation dans EMS entre nombre et limite 111
II. Rapports institutionnels aux écritures décimales (ED) : Hypothèses de recherches sur les EDI 111
III. Une expérimentation 113

Chapitre B2. Mise à l'épreuve expérimentale des hypothèses de recherches **115**

Première partie. Analyse *a priori* **117**
I. Question 1 : Rapport institutionnel à écriture décimale illimité périodique (EDIP)..... 117
II. Question 2b : Statut de l'EDI – Ordre discret dans l'ensemble des EDI..... 120
III. Questions 2a et 2c : Opérations sur les EDIP – Obstacle *infini -fini*..... 120
VI. Question 3 : Rapport institutionnel à écriture décimale illimité non périodique (EDINP) 125
Deuxième partie. Analyse *a posteriori* **129**
I. Question 1 : Rapport institutionnel à EDIP..... 129
II. Question 2b : Statut de l'EDI – Ordre discret dans des EDI 133
III. Questions 2a et 2c : Opérations sur les EDIP – Obstacle *infini -fini*..... 136
VI. Question 3 : Rapport institutionnel au nombre irrationnel..... 143
Troisième partie. Conclusion de l'expérimentation **149**
I. Le rapport institutionnel aux EDI dans EMS et Ecoles Normales Supérieurs (ENS) est celui du Collège 149
II. Absence de la re-interprétation d'une EDI par la notion de limite mais présence potentielle du statut de suite numérique pour une EDI 150

Partie C

Chapitre C0. Un problème fondamental de l'approximation et choix macro-didactiques pour l'ingénierie didactique 155
I. Quelques éléments de transposition didactique 155
II. Un problème fondamental de l'approximation et choix macro didactiques 161
III. Présentation générale de l'ingénierie didactique et des conditions d'expérimentation167
Chapitre C1. Instrumentation du calcul par la calculatrice Casio fx-570MS 171
Première partie. Analyse *a priori* de la situation 1 ..... **171**
I. Choix méso-didactiques pour la situation 1 173
II. Phase 1. Connaissances instrumentales des parenthèses 173
III. Phase 2. Enseignement de touches ALPHA, X (statut de variable mathématique), et CALC 175
IV. Phase 3. Renforcement de l'instrumentation des touches ALPHA, X et CALC – Introduction des touches COPY et INSERT..... 176
Deuxième partie. Analyse *a posteriori* de la situation 1..... **179**
I. Phase 1. Connaissances instrumentales des parenthèses..... 179
II. Phase 2. Enseignement de touches ALPHA, X (statut de variable mathématique), et CALC 181
III. Phase 3. Renforcement de l'instrumentation des touches ALPHA, X et CALC – Introduction des touches COPY et INSERT..... 183
Conclusion de la situation 1 185
Chapitre C2. Mise à l'épreuve des stratégies algébriques institutionnellement fortes 187
Première partie. Analyse *a priori* de la situation 2. ..... **187**

I. Phase 1. Eléments du milieu 188
II. Phase 2. Réhabilitation d'une stratégie non algébrique..... 197
Deuxième partie. Analyse *a posteriori* de la situation 2 **..... 209**
I. Phase 1. Eléments du milieu 209
II. Phase 2. Réhabilitation d'une stratégie non algébrique..... 213
Conclusion de la situation 2 224
Chapitre C3. Jeu « A la recherche de meilleur couple (x ; $f(x)$) » 227
Première partie. Analyse *a priori* de la situation 3 **..... 227**
I. Variables micro-didactiques pour la situation 3 229
II. Jeu « À la recherche du meilleur couple (x ; $f(x)$) » 230
III. Questions pour la conclusion du jeu 248
Deuxième partie. Analyse *a posteriori* de la situation 3 **..... 251**
I. Jeu de la recherche d'un meilleur couple (x ; $f(x)$)..... 251
II. Questions pour la conclusion du jeu..... 278
Conclusion de la situation 3 284
Chapitre C4. Une introduction à la topologie métrique de la notion de limite 287
Première partie. Analyse *a priori* de la situation 4 **..... 287**
I. Variables micro-didactiques 288
II. Phase 1. Comparaison des intervalles : bornes décimales ou bornes fractionnaires 290
III. Phase 2. Symétrisation de l'intervalle de proximité de 0,3 : métrique de la notion de limite..... 295
IV. Phase 3. Renforcement du raisonnement par condition suffisante 299
Deuxième partie. Analyse *a posteriori* de la situation 4 **..... 301**
I. Phase 1. Comparaison des intervalles : bornes décimales ou bornes fractionnaires 301
II. Phase 2. Symétrisation de l'intervalle de proximité de 0,3 : métrique de la notion de limite..... 311
III. Phase 3. Renforcement du raisonnement par condition suffisante..... 318
IV. Question finale 319
Conclusion de la situation 4 321

Conclusion et perspectives……...**323**
I. Les principaux résultats de la thèse…….323
II. Limites de notre recherche et perspectives……327

Résumé de la thèse en vietnamien……...**331**

Bibliographie……**347**

Introduction

Les notions de nombre réel et de limite sont fondamentales en Mathématiques, en particulier en analyse réelle. Tout d'abord implicite depuis Euclide dans la théorie des rapports des grandeurs et la méthode d'exhaustion, ces notions ne sont devenues de véritables savoirs mathématiques que progressivement au cours du 19ème siècle. Les constructions de l'ensemble des nombres réels en 1872 par Dedekind et Cantor s'appuient sur le perfectionnement de la notion de limite de suite numérique accompli en particulier par Cauchy (1821).

L'analyse du système d'enseignement français actuel (Bronner 1997, Birebent 2001, Le Van 2001) montre que, depuis la Contre - Réforme des Mathématiques Modernes (années 1980), toute définition des nombres irrationnels et réels a disparu des programmes de mathématiques. La noosphère de l'époque, à l'image de Ovaert (1981) a tenté de mettre en avant une autre problématique pour l'enseignement de l'analyse en général et pour celui des nombres réels en particulier. Dans ce paradigme, l'étude de l'analyse et des nombres réels peut relever d'une problématique de l'approximation où l'approximation décimale des nombres réels et des fonctions pourrait jouer un rôle premier dans l'**E**nseignement **M**athématique **S**econdaire (EMS) en France.

> L'approximation est au cœur des grands problèmes de l'analyse : approximation de nombres, de fonctions… Elle est aussi au cœur des méthodes et technique du champ. 'Majorer, minorer, approcher', comme l'affirme Dieudonné, sont ici les techniques de base. (Artigue 1996, p. 166)

Birebent (2001) décrit la raison d'être de l'*approximation numérique décimale* (ou *décimalisation*) des nombres réels comme suit :

> […] Nous considèrerons l'approximation numérique décimale comme une œuvre mathématique dont la raison d'être est *l'utilisation d'un nombre décimal à la place d'un autre nombre*, dans certaines opérations mathématiques comme l'évaluation, l'ordre et les opérations. (Op. cité, p. 7)

Qu'en est-il dans EMS au Viêt-nam ?

L'ensemble des nombres réels est introduit, au niveau du collège, *comme l'ensemble des écritures décimales* (limitées ou illimitées) alors que les notions de suite convergente et de limite n'apparaissent au lycée qu'en classe 11 (Première en France). Les deux notions, nombre réel et limite, sont introduites de façon apparemment indépendante et dans un ordre d'apparition inverse à celui de l'histoire. L'introduction des objets nouveaux de l'analyse au Lycée est sensée modifier profondément les pratiques mathématiques qui, de géométriques ou algébriques au collège, s'enrichissent de la problématique de l'analyse. Or, au Lycée, le rapport institutionnel à la notion de limite relève de façon quasi exclusive de l'algèbre (Le Thai Bao 2004).
Au Viêt-nam, toute problématique de l'approximation est absente de l'enseignement des mathématiques secondaires.

> Quant à l'analyse, c'est une analyse algébrisée, c'est-à-dire une analyse sans une problématique de l'approximation. Dans cette analyse, les suites occupent une place très restreinte, les suites récurrentes étant totalement absentes. […] (Le Van 2001, p. 224)

Cependant le Ministère de l'Éducation et de la Formation (MEF) préconise l'introduction officielle de la calculatrice dans EMS ce qui modifie les conditions du calcul - en l'instrumentant, et le résultat de ce calcul - en le décimalisant en une valeur le plus souvent approchée.

Dans ce contexte, nous formulons donc notre objet d'étude sous la forme des questions initiales suivantes :

1. Au niveau mathématique, comment les écritures décimales vivent – elles dans la construction des nombres réels, construction qui, rappelons-le, nécessite la notion de limite ? Quels statuts y prennent-elles ?
2. Comment sont transposées dans EMS la construction des nombres réels, leur décimalisation et la relation écritures décimales - notion de limite ? En particulier, l'introduction de la notion de limite et de suite convergente au lycée permet-elle une reprise, au sein de l'analyse, des nombres réels construits au Collège comme écritures décimales ?
3. Comment faire pour que sous les contraintes et les conditions institutionnelles de EMS au Viêt-nam, les objets « suites numériques » et « écritures décimales » soient pris en compte comme outils de l'étude des nombres réels et de la notion de limite dans une problématique topologique d'approximation décimale à l'aide de la calculatrice ?

Pour travailler les questions 1 et 2 sur la vie des réels et ses relations avec la notion de limite dans le cadre de EMS au Viêt-nam, nous allons utiliser des outils théoriques issus principalement de la théorie de l'anthropologie du didactique de Chevallard (1985, 1989, 1992, 1994, 1998).

Pour tenter de répondre à la question 3, nous chercherons à concevoir, réaliser et analyser une ingénierie didactique visant l'introduction d'un point de vue topologique de la notion de limite en relation avec la décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice » : cette méthodologie propre à la didactique des mathématiques s'appuie sur des outils théoriques issus essentiellement de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1982a, 1982b, 1986, 1988, 1998).

I. Outils théoriques et méthodologiques

Nous commençons par présenter brièvement les outils théoriques bien connus de l'anthropologie du didactique, qui nous permettent de mener les études propres aux questions 1 et 2 : celui de praxéologie mathématique (Chevallard 1992, 1998), puis celui de transposition didactique (Chevallard 1985, 1994).

I.1. Organisation mathématique comme outil d'étude du rapport institutionnel à un objet de savoir

Pour analyser le rapport institutionnel à un objet de savoir, Chevallard (1998) introduit la notion de *praxéologie mathématique* ou d'*organisation mathématique* (OM) autour d'un savoir. Une OM est constituée du quadruplet : types de tâches $\boldsymbol{T}$ présent dans une institution donnée, techniques $\boldsymbol{\tau}$ permettant d'accomplir les tâches de $\boldsymbol{T}$, technologies $\boldsymbol{\theta}$ justifiant les techniques $\boldsymbol{\tau}$, théories $\boldsymbol{\Theta}$ justifiant les technologies $\boldsymbol{\theta}$.

Chevallard (1998) distingue différents niveaux pour les OM.

- $[T/\tau/\theta/\Theta]$: OM *ponctuelle* relative à un unique type de tâches T.

Le tout, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie ponctuelle. Ce qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, T. (Op. cité, p. 95)

- $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$: OM *locale* centrée sur une unique technologie θ.

- $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$: OM *régionale* formée autour d'une unique théorie Θ.
- $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$: OM *globale*, agrégation de plusieurs OM régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k.

On ne rencontre en fait que rarement des praxéologies ponctuelles. Généralement, en une institution *I* donnée une théorie Θ répond de *plusieurs technologies* θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles *plusieurs techniques* τ_{ij} correspondant à *autant de types de tâches* T_{ij}. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations *locales*, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisation *régionales*, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ. (Au-delà, on nommera organisation globale le complexe praxéologique $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k). […] (Ibid.,p. 95)

En termes d'organisation mathématique, nous reformulons notre deuxième question initiale :

Quelles organisations mathématiques autour des objets de savoirs *nombre réel (écritures décimales)* et *limite* existent dans EMS au Viêt-nam ? Quels sont les types de tâches existantes, les techniques enseignées pour les accomplir, les discours technologiques justifiant les techniques enseignées ? Quelles relations entre *nombre réel* et *limite* sont présentes dans les organisations mathématiques autour ces deux objets de savoirs ? Pourquoi ces relations existent-elles ? Quelles relations sont absentes ? Pourquoi ?

Pour répondre à ces questions, nous conduisons une analyse institutionnelle de l'EMS au Viêt-nam, et recherchons les traces des interrelations entre la notion de nombre réel et la notion de limite, en particulier dans la décimalisation des nombres.

A partir de l'analyse institutionnelle, nous formulons des hypothèses de recherche sur les interrelations entre la décimalisation des nombres réels et la notion de limite.

Un questionnaire sera construit pour mettre à l'épreuve ces hypothèses de recherche.

I.2. Transposition didactique

Commençons par donner le schéma classique de la transposition didactique selon ses trois chaînons principaux.

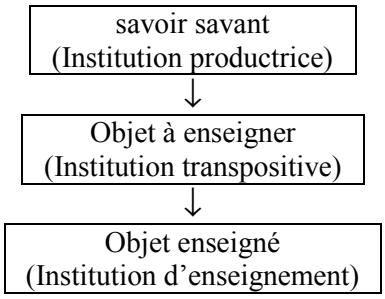


Figure 1. Schéma de la transposition didactique

L'institution cible de la transposition didactique est une institution d'enseignement.

Pour notre étude, nous considérons deux institutions d'enseignement : l'enseignement des mathématiques au collège et l'enseignement des mathématiques au lycée après l'introduction de la notion de limite.

Nous reprenons le terme de savoir savant pour désigner la référence qui légitime l'existence et la vie d'un savoir mathématique dans l'institution d'enseignement. Les

mathématiques dans l'institution productrice s'organisent autour d'un objet comme celui de la notion de limite ou de nombres en des organisations mathématiques de référence.

La théorie de la transposition didactique met en évidence deux grands types de questions relativement à un savoir enseigné :

- Qu'est ce qui fait qu'un savoir est là, et pas un autre ? Qu'est-ce qui le rend légitime ? Et donc, quel est sa référence au niveau du savoir savant ? (Problème de la légitimation du savoir enseigné)

- La transposition didactique fait apparaître systématiquement un écart entre une organisation mathématique enseignée et les organisations mathématiques qui le légitiment (ou OM de référence), écart dû à des contraintes et des conditions pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement et donc sur les savoirs : Quel écart entre le savoir enseigné et les références ? Quelles contraintes et conditions sont explicatives de cet écart ?

L'étude de transposition didactique des notions de limites et de nombres est dirigée par ce programme d'étude.

Nous commençons par effectuer une enquête épistémologique pour répondre à notre première question initiale.

Dans la sphère savante, quelles relations entretiennent entre elles la construction des nombres réels, la notion de limite et la décimalisation des nombres réels (écritures décimales illimitées) ?

Les résultats de l'enquête épistémologique sont finalisés par la description d'organisations mathématiques de référence qui abordent de façon directe ou indirecte les interrelations entre la notion de limite, la notion de nombres et la décimalisation des nombres.

Cela permet de revenir sur la deuxième question.

A partir d'une analyse des programmes et de manuels du collège et du lycée (et de leur évolution), nous identifions des organisations mathématiques *à enseigner,* interprétées comme les traces de la reconstruction des OM de référence dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée (Viêt-nam).

Enfin, nous cherchons à expliquer l'écart entre les OM de référence et les OM à enseigner par des conditions et des contraintes des institutions, collège et lycée (après enseignement de la notion de limite).

I.3. Ingénierie didactique

Pour répondre à la question 3, nous suivons une méthodologie propre à la didactique des mathématiques qui est de concevoir, expérimenter et analyser une ingénierie didactique.

> La notion d'ingénierie didactique a émergé en didactique des mathématiques au début des années 1980. Il s'agissait d'étiqueter par ce terme une forme du travail didactique : celle comparable au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un projet précis, s'appuie sur les connaissances scientifiques de son domaine, accepte de se soumettre à un contrôle de type scientifique mais, dans le même temps, se trouve obligé de travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science et donc de s'attaquer pratiquement, avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes que la science ne veut ou ne peut encore prendre en charge. (Artigue 1990, p. 283)

> L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des « réalisations didactiques » en classe, c'est-à-dire sur

la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. […] (Ibid., p. 286)

L'ingénierie didactique est donc une situation d'enseignement élaborée par le chercheur, une forme du travail didactique semblable à celui de l'ingénieur : elle s'appuie sur les connaissances scientifiques de son domaine pour travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science.

L'ingénierie didactique permet :

- une action sur le système d'enseignement, basée sur des études didactiques préalables.
- une mise à l'épreuve d'hypothèses ou de questions élaborées par la recherche par leur réalisation dans un système d'enseignement.

Elle a donc une double fonction : méthodologique, et productrice de questions didactiques nouvelles.

Dans notre cas, après avoir formulé une situation fondamentale de l'approximation décimale liée à la notion de limite, l'ingénierie didactique est construite par un jeu sur les *variables didactiques* de cette situation. Elle est expérimentée en classe 12 pour mettre à l'épreuve la viabilité d'une genèse expérimentale des relations entre décimalisation des nombres réels et notion de limite. Chaque situation didactique de l'ingénierie met en place un *milieu* : nous serons particulièrement attentif aux éléments du « milieu calculatrice » dans les calculs instrumentés.

Pour concevoir l'ingénierie didactique, nous considérons trois types de variables didactiques (ou « variables de commande »), les variables macro, méso et micro didactiques:

- les variables *macro-didactiques* ou *globales* qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie,
- et les variables *micro-didactiques* ou *locales* qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie, c'est-à-dire l'organisation d'une séance ou d'une phase, les unes et les autres pouvant être elles-mêmes des variables d'ordre général ou des variables dépendantes du contenu didactique dont l'enseignement est visé. (Artigue 1990, p. 291).

La notion de variable *méso didactique* a été introduite par Bessot, Birebent dans le cours de master 2 EIAHD (2001) pour désigner une variable de commande qui permet l'« organisation des situations didactiques de l'ingénierie ».

II. Organisation de la thèse

La thèse s'organise en trois parties : A, B et C.

Dans la partie A, nous effectuons :

- Une synthèse de certains résultats de recherches précédentes, auxquelles nous nous référons, selon les deux axes :
  - notion de limite,
  - notion de nombre.

- Une enquête épistémologique des relations entre la construction des nombres réels, la notion de limite et la décimalisation des nombres réels (écritures décimales illimitées) afin de compléter les résultats des approches épistémologiques des travaux de référence.

La partie A nous permet :

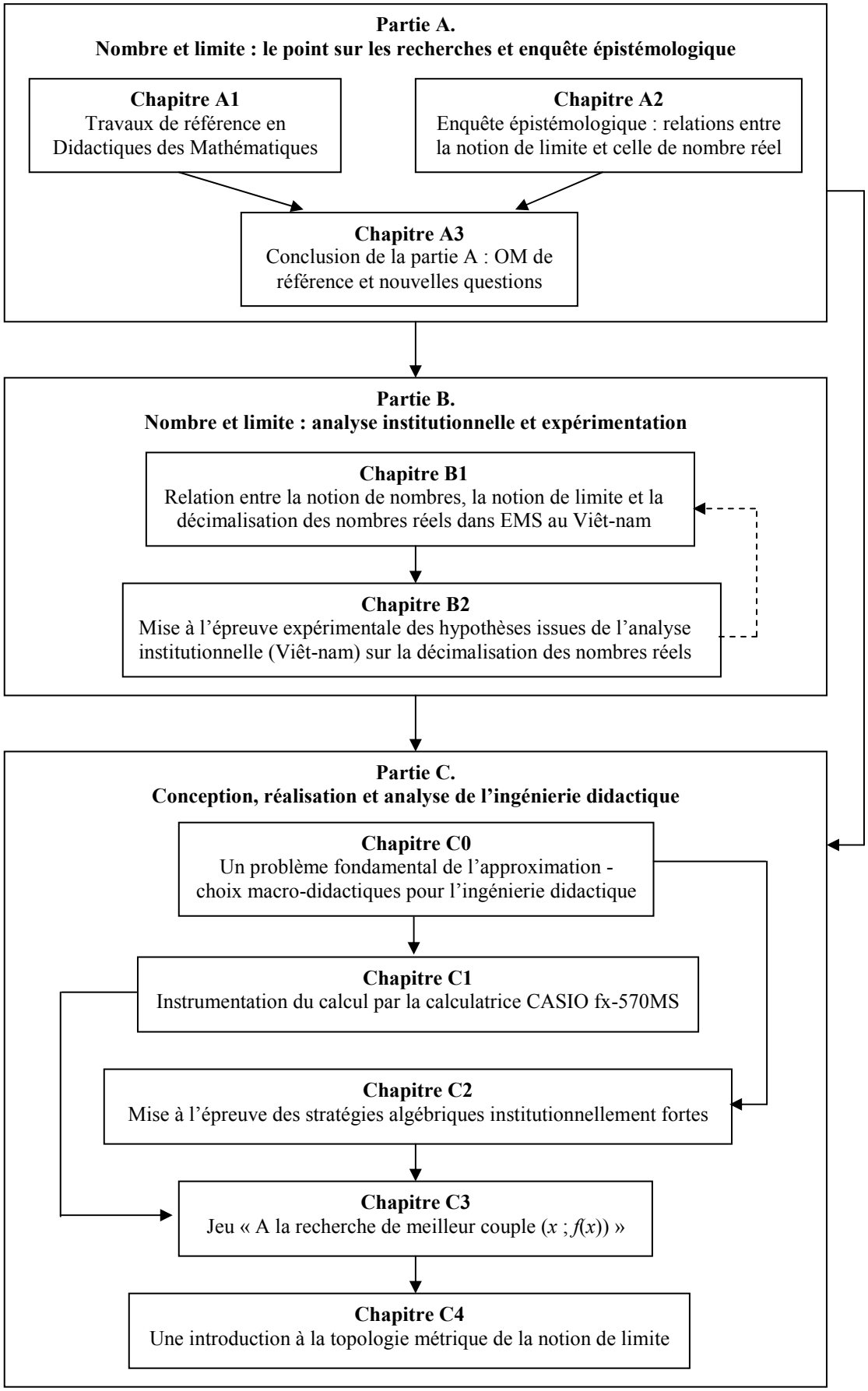
- de décrire les OM de référence abordant les interrelations entre la notion de limite, la notion de nombres et la décimalisation des nombres.
- de poser de nouvelles questions sur des traces de ces OM dans le savoir *à enseigner*.

Dans la partie B, nous effectuons :

- une analyse institutionnelle des traces des OM de référence au Collège et au Lycée (après enseignement de la notion de limite) au Viêt-nam. Cette analyse nous permet de formuler des hypothèses de recherche sur le rapport institutionnel à la décimalisation des nombres réels dans ces deux institutions.
- une mise à l'épreuve expérimentale des hypothèses de recherche.

Dans la partie C, nous concevons, réalisons et analysons une ingénierie didactique d'introduction d'un point de vue topologique de la notion de limite en relation avec la décimalisation des nombres réels en classe 12 (Terminale). Cette ingénierie s'appuie sur les études didactiques préalables des parties A et B.

Nous présentons ci-après la structure de notre manuscrit à l'aide d'un organigramme.


Partie A.
Nombre et limite : le point sur les recherches et enquête épistémologique
Chapitre A1
Travaux de référence en Didactiques des Mathématiques
Chapitre A2
Enquête épistémologique : relations entre la notion de limite et celle de nombre réel
Chapitre A3
Conclusion de la partie A : OM de référence et nouvelles questions
Partie B.
Nombre et limite : analyse institutionnelle et expérimentation
Chapitre B1
Relation entre la notion de nombres, la notion de limite et la décimalisation des nombres réels dans EMS au Viêt-nam
Chapitre B2
Mise à l'épreuve expérimentale des hypothèses issues de l'analyse institutionnelle (Viêt-nam) sur la décimalisation des nombres réels
Partie C.
Conception, réalisation et analyse de l'ingénierie didactique
Chapitre C0
Un problème fondamental de l'approximation - choix macro-didactiques pour l'ingénierie didactique
Chapitre C1
Instrumentation du calcul par la calculatrice CASIO fx-570MS
Chapitre C2
Mise à l'épreuve des stratégies algébriques institutionnellement fortes
Chapitre C3
Jeu « A la recherche de meilleur couple (x ; f(x)) »
Chapitre C4
Une introduction à la topologie métrique de la notion de limite

Partie A

Nombre et limite
Le point sur les recherches en didactique
Enquête épistémologique

Chapitre A1
Travaux de référence en Didactiques des Mathématiques

Nous présentons ici certains résultats de travaux de recherches auxquelles nous nous référons et qui ont été menés ces trois dernières décennies dans les cadres théoriques de la didactique des mathématiques. Nous les regroupons en deux parties selon les deux axes suivants :

- sur la notion de limite,
- sur la notion de nombre.

I. Sur la notion de limite

Dans cette partie, nous présentons brièvement les principaux résultats de travaux de recherches en didactique des mathématiques sur la notion de limite en les regroupant selon le type d'approche :

- épistémologique : selon les cadres théoriques, repérage d'obstacles épistémologiques, de points de vue épistémologiques ou d'organisations mathématiques de référence.
- écologique : vie de la notion de « limite de fonction » dans les institutions de l'enseignement mathématique secondaire française, espagnole et vietnamienne.
- ingénieries didactiques en relation avec des analyses épistémologiques et/ou écologique.

I.1. Approche épistémologique de la notion de limite

a. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite

Afin d'identifier les véritables difficultés dans l'acquisition de la notion de limite et d'améliorer l'enseignement et l'apprentissage de cette notion, Cornu (1983) effectue une étude historique et épistémologique avec l'objectif suivant :

> Le repérage des obstacles épistémologiques de la notion de limite était notre but essentiel dans notre parcours historique. Ces obstacles expliquent certaines lenteurs, certaines erreurs ; mais ils n'ont pas qu'un aspect négatif. Ils ont été souvent facteurs de progrès, par les moyens qu'il a fallu mettre en œuvre pour les surmonter. (Op. cité, p. 57)

Nous résumons ci-après les principaux obstacles épistémologiques (Bachelard 1983, Brousseau 1989) relatifs à la notion de limite tels que les énoncent Cornu (1983) :

• « La transposition numérique des grandeurs » : elle découle du processus d'abstraction du contexte géométrique et du contexte cinématique dans le domaine numérique où le concept de limite s'unifie.

• L'aspect « métaphysique » de la notion de limite :

- mise en place d'un type nouveau de raisonnements mathématiques : la suite de déductions logiques usuelles doit relever d'un processus infini.
- notion « d'infiniment petit » ou « d'infiniment grand » : existe – t- il des quantités pas encore nulles, mais qui ne sont déjà plus « assignables », des quantités « évanescentes » ? Que se passe –t -il à « l'instant » où une quantité s'annule ? Un nombre (positif), plus petit que toute quantité donnée, est–il nul ?
- « une limite est-elle ou non atteinte ? »

Parmi les autres obstacles, citons : le modèle monotone. Une somme infinie peut être finie. Deux quantités peuvent tendre simultanément vers zéro alors que leur rapport « $\frac{0}{0}$ » tend vers une quantité finie.

Dans son travail, Sierpinska (1985) effectue aussi une étude épistémologique de la notion de limite et propose une autre liste d'obstacles épistémologiques :

1. « Horror Infiniti »
2. Obstacles liés à la notion de fonction
3. Obstacles « géométriques »
4. Obstacles « logiques »
5. L'obstacle du symbole.

(Op. cité, p. 38)

Sierpinska confronte sa liste des obstacles avec celles de Cornu :

> Au deuxième obstacle de Cornu correspondrait tout le groupe d'obstacles nommé chez nous « horror infiniti ». C'est le groupe le plus important, il renferme les problèmes liés à l'idée de constante infiniment petite, la question de savoir si la limite doit ou ne doit pas être atteinte et aussi les problèmes que l'auteur intitule « autres obstacles ». (Ibid., p.64)

Sierpinska attache le groupe d'obstacles « Horreur de l'infini » au « refus du statut d'opération mathématique pour le passage à la limite », passage à la limite dont ne sont visibles que des approximations (de la limite) :

> On trouve dans ce groupe, les refus du statut d'opération mathématique pour le passage à la limite (1.1.-1.4.).
> Il s'agit de se convaincre du fait que :
> […]
> 1.3. Le passage à la limite considéré comme la recherche de ce dont nous ne connaissons que des approximations.
> […]
> (Ibid., p.39)

Des études de Cornu et de Sierpinska nous retenons l'« Horreur de l'infini » comme ensemble de problèmes liés à l'infini et constituant l'obstacle épistémologique principal à la construction de la notion de limite.

b. Points de vue épistémologique sur la notion de limite

Dans son travail, Bkouche (1996) met en évidence non seulement deux points de vue épistémologique sur la notion de limite de fonction - « cinématique » et « approximation », mais aussi l'existence d'une relation dialectique entre ces deux points de vue.

- Dans le point de vue « cinématique », la variable « tire » la fonction :

> Si une grandeur variable x tend vers une valeur a de cette grandeur (au sens qu'elle prend des valeurs de plus en plus proches de la valeur a), alors une grandeur y qui dépend de la grandeur x (qui est une fonction de la grandeur x) tend vers une valeur b si, au fur et à mesure que la grandeur x se rapproche de la valeur a, la grandeur y se rapproche de b.

- Dans le point de vue « approximation », le degré d'approximation que l'on veut tire le degré d'approximation de la variable :

> La définition en (ε, δ) n'est autre qu'une systématisation de cette notion d'approximation.

Bkouche résume l'opposition entre les points de vue « cinématique » et « approximation » comme suit :

> Si, dans la notion cinématique c'est la variable qui tire la fonction, dans la notion d'approximation, c'est le degré d'approximation que l'on veut qui fixe l'approximation de la variable.

Nous savons que c'est le point de vue « approximation » qui a permis la stabilisation du concept de limite aujourd'hui. Cependant, toujours selon Bkouche, le point de vue « cinématique » est nécessaire dans le processus d'acquisition de la notion de limite :

> S'il est vrai que ce qui a conduit à la prédominance de ce point de vue (d'approximation), c'est sa valeur opératoire et son efficacité dans les démonstrations de l'analyse, il serait dangereux de rejeter le point de vue cinématique dans la mesure où il reste le cadre intuitif dans lequel se pense la notion de limite.

Dans sa thèse, Trouche (1996) ajoute un troisième point de vue sur la notion de limite qu'il appelle point de vue « opératoire » :

> Cependant, même à l'examen du processus d'apprentissage, on n'échappe pas, on le verra, à la distinction d'un point de vue « opératoire » : on peut en effet manipuler des théorèmes opératoires, utiliser des résultats relatifs aux « limites usuelles », en dehors de tout point de vue cinématique et d'approximation. Il ne reste alors des limites que le calcul sur les limites. Il s'agit bien là d'un « point de vue opératoire » qui repose sur des « principes de calcul dégagés de toutes considérations (…) de limites ». (Op. cité, p. 81)

En nous référant au travail de Bosch, Espinoza, Gascon (2002) que nous exposons ci-après, nous appelons désormais « algébrique » le troisième point de vue repéré par Trouche.

Le point de vue « approximation » de Bkouche se rattache à la définition topologique de la notion de limite : les degrés d'approximation ε et δ peuvent se formuler en langage de voisinages.

Pour nous, l'approximation ne se trouve pas seulement dans le point de vue « approximation » de Bkouche sur la notion de limite mais aussi dans le point de vue « cinématique »:

- le point de vue « cinématique » donne un rôle prédominant à l'approximation de la variable x pour approcher $f(x)$.

- le point de vue « approximation » donne un rôle prédominant à l'approximation de l'image $f(x)$.

C'est pour cela que nous appellerons désormais ces deux points de vue « *approximation x* » et « *approximation f*(*x*) ».

c. Organisation mathématique de référence autour de la notion de limite de fonction

Afin d'analyser les reconstructions possibles des OM concernant la notion de limite de fonctions dans les programmes et dans les manuels de l'institution EMS espagnole, Bosch, Espinoza, Gascon (2002) modélisent deux OM locales de référence autour des limites de fonctions. Ils se placent dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD).

> Pero para efectuar esta reconstrucción necesitamos un punto de vista y éste nos lo proporcionará lo que llamamos una *OM de referencia*. En el caso que nos ocupa, ésta engloba e integra en una OM regional dos OM locales (que designaremos por OM_1 y OM_2) en torno a los límites de funciones […](Op. cité, pp. 97 - 98)[1]

[1] Mais pour effectuer cette reconstruction nous avons besoin d'un point de vue et c'est ce que fournit ce que nous appelons une OM de référence. Dans le cas qui nous occupe, elle englobe et intègre en une OM

Nous résumons ainsi les deux OM de référence :

• *OM_1 autour de l'algèbre des limites* part de la supposition de l'existence de la limite de la fonction et pose seulement le problème de comment déterminer sa valeur pour certaines fonctions familières.

- Ce problème est traité à travers différentes *types de tâches* comme : calculer la limite d'une fonction $f(x)$ quand $x \to a$, avec a réel fini ou infini ; déterminer la limite d'une fonction en un point ou à l'infini.

- Les *techniques mathématiques* associées à ce type de tâche se basent fondamentalement dans la réalisation de manipulations algébriques sur l'expression de $f(x)$.

- La *technologie minimum* de OM_1 qui justifie ces techniques peut être décrite, par exemple, au moyen d'une petite axiomatique (dont chaque axiome représente une règle de calcul) comme celle proposée par Lang en son livre « Calculus » (1986).

• *OM_2 autour de la topologie des limites* prétend aborder le problème de la nature de l'objet « limite de fonction » et répond à la question essentielle de l'existence de la limite d'un type déterminé de fonctions.

- Cette question est traitée à travers certains *types de tâches* comme : démontrer l'existence (ou la non existence) de la limite d'une fonction $f(x)$ quand $x \to a$, avec a fini ou infini ; démontrer l'existence (ou la non existence) des limites aux bornes d'un intervalle pour des classes déterminées de fonctions ; démontrer les propriétés qui relient les opérations entre les fonctions avec la valeur de la limite, *incluant, en particulier, la démonstration des « règles de calcul » de la technologie minimum de OM_1* .

- La *technologie minimum* de OM_2 (justifiant les *techniques mathématiques* associées à ces types de tâche) est centrée sur l'usage des propriétés de limites des suites et sur la définition classique de « limite » en terme de ε et δ.

- Cette technologie s'appuie, à son tour, sur la théorie de nombres réels.

Ainsi, on peut dire que OM_1 est partiellement contenue dans OM_2 : les éléments *technologiques* de OM_1 peuvent être considérés comme des types de tâche mathématique de OM_2. Ces deux OM *locales* sont intégrées dans une OM *régionale* qui répond, par exemple, à la question de la *dérivabilité* de certains types de fonctions, ou à celle de leur *intégrabilité*.

d. Synthèse des résultats des analyses épistémologiques

La problématique de l'infini propre à la notion de limite (l'« Horror Infiniti » de Sierpinska) constitue un obstacle épistémologique essentiel de cette notion.

Nous retenons trois problématiques épistémologiques sur la notion de limite de fonction :

- Une problématique « algébrique » qui porte sur le calcul des limites (existantes) selon des règles algébriques, et qui peut masquer la nature de la notion de limite de fonction ;
- Une problématique d'« approximation x » qui donne à l'approximation de la variable x un rôle prédominant pour s'approcher de $f(x)$;

---

régionale deux OM locales (que nous désignons par OM_1 et OM_2) autour des limites de fonctions […] (traduction en français par Annie Bessot).

- Une problématique d'« approximation $f(x)$ » incarnée dans la définition (ε, δ) ou dans le langage de voisinages (en rapport avec la définition topologique de la notion de limite).

Les deux OM locales de référence sur la notion de limite de fonction, *OM_1 autour de l'algèbre des limites* et *OM_2 autour de la topologie des limites*, peuvent permettre d'analyser les OM à enseigner. Nous allons maintenant présenter des travaux de ce type portant sur trois institutions EMS différentes : France, Espagne et Viêt-Nam.

I.2. Approche écologique de la notion de limite de fonction dans trois institutions EMS

a. Trouche (1996) : EMS en France

Trouche conduit une analyse diachronique des programmes français de 1966 à 1994 sur la notion de limite. Il constate une évolution des programmes visant à installer un point de vue « non algébrique » :

> La transposition didactique observée à partir de l'évolution des programmes produit une notion de limite qui se rattache à un double point de vue :
> - Un point de vue cinématique, issu de l'observation graphique des phénomènes (le global à la place du local) ;
> - Un point de vue d'approximation non contrôlée, issu de l'observation numérique (si x est proche de x_0, alors $f(x)$ est proche de L)
> (Op. cité, p. 101)

Puis Trouche examine les manuels du programme 1994 et conclut à la prédominance du point de vue « algébrique » (ou opératoire) sur la notion de limite :

> Le point de vue cinématique est présent :
> - à travers l'évocation du théorème des croissances comparées ;
> - à travers les observations graphiques et numériques de phénomènes de rapprochement.
>
> Mais c'est le point de vue opératoire qui domine largement à travers les techniques opératoires utilisées. (Op. cité, p. 119)

Toujours selon Trouche, le point de vue « approximation x » (ou cinématique) sur la notion de limite dans EMS français repose sur les évolutions constatées du statut des représentations graphiques, du calcul numérique et des outils de calculs.

b. Bosch, Espinoza, Gascon (2002) : EMS en Espagne

Bosch et al. se fondent sur la structure décrite de l'OM de référence pour interpréter l'OM à enseigner autour de la notion de limite.

Les traces de l'OM de référence dans le curriculum et les manuels de l'EMS en Espagne sont les suivantes:

- OM'_1 = [T/ t / /] désigne la trace de OM_1 dans les manuels. Les espaces blancs indiquent que la technologie et la théorie (qui forment ensemble le bloc *logos*) correspondant à la praxis [T/t] est absente dans le curriculum. On peut donc prévoir que la reconstruction de OM_1 par les enseignants sera incomplète ou complétée par des discours technologiques sans rapport avec le logos de OM_1.

- OM'_2 = [/ /θ /Θ] désigne la trace de OM_2 dans les manuels, beaucoup plus faible que celle de OM_1 ; elle est présente sans lien avec OM'_1. Les espaces blancs indiquent qu'aucune pratique mathématique ne correspond à cette technologie et cette théorie.

- De plus, les traces de OM_1 et OM_2 apparaissent complètement déconnectées dans le curriculum.

Bosch et al. présentent ensuite l'OM effectivement enseignée telle que l'on peut l'observer dans le travail mathématique des élèves et dans la pratique du professeur quand il dirige l'étude de la notion de limite dans la classe.

L'étude de cas conduite dans les classes de deux enseignants (1998) permet d'affirmer que, dans le processus didactique observé[2], la « raison d'être » de l'OM construite correspond à l'unique question du calcul des limites des fonctions en un point ou à l'infini, en partant de la supposition que ces limites existent ou sont infinies. La question de l'existence de la limite n'est donc jamais posée.

c. Le Thai Bao (2004) : EMS au Viêt-nam

Notre analyse des programmes et des manuels vietnamiens de 1990 à 2004 (Le Thai Bao 2004), apporte des résultats similaires à ceux de Bosch et al. à propos de l'OM à enseigner. Ajoutons à leurs conclusions que :

• Le type de tâche central de OM'_1 *algèbre de limites,* est toujours donné institutionnellement sous la forme :

$$\text{« Calculer } \lim_{x \to a} f(x) \text{ »}$$

où a est soit entier soit $\sqrt{n}$ soit infini et $f(x)$ est une des « *fonctions familières* » donnée par une formule algébrique.

• Dans OM'_2, trace de OM_2, les définitions en (ε, δ) se maintiennent dans les manuels durant la période considérée (1990-2004), tout en restant séparées du calcul des limites.

- Une première hypothèse est formulée sous la forme de règles du contrat didactique sur le calcul de limites.

> L'élève n'est pas responsable de l'étude de la fonction dont il calcule la limite : il n'a pas à prévoir la limite, ni à considérer la fonction, ni à s'intéresser à la pertinence de l'exercice.
> Par contre, l'élève doit savoir calculer les limites que le manuel ou l'enseignant lui fournissent, notamment sous la forme « calculer $\lim_{x \to a} f(x)$» (a fini ou infini), en identifiant leurs formes, puis en opérant par des *règles d'actions* sur les limites. (Op. cité, p. 21)

Les règles d'actions sur le calcul des limites de fonctions et leurs domaines de validité respectifs sont résumées dans le tableau suivant (Op. cité, p. 20):

[2] Dans l'article, l'analyse repose principalement sur l'observation de l'une des deux classes.

Fonction	Règle d'action	Domaine de validité
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	**RA1**. Diviser $P(x)$ et $Q(x)$ par x^n, n exposant « le plus grand ».	$\lim\limits_{x->\infty} f(x)$: forme indéterminée (**FI**) $\dfrac{\infty}{\infty}$ P(x), Q(x) : polynômes ou quelques $f(x)$ irrationnels
	RA2. Factoriser $P(x)$ et $Q(x)$ avec un facteur commun (x - a)	$\lim\limits_{x->a} f(x)$ où a fini; FI : $\dfrac{0}{0}$ $P(x)$, $Q(x)$: polynômes
$f(x)$ contient $(\sqrt{p(x)}\pm\sqrt{q(x)})$	**RA3**. Multiplier et diviser $f(x)$ par la forme conjuguée $(\sqrt{p(x)}\mp\sqrt{q(x)})$	Pas exemple : $\lim\limits_{x->a} f(x)$ où a fini ; FI : $\dfrac{0}{0}$ $(\sqrt{p(x)}\pm\sqrt{q(x)})=0$ pour $x=a$
$f(x)$ contient $(\sqrt[3]{p(x)}\pm\sqrt[3]{q(x)}$	**RA4**. Multiplier et diviser $f(x)$ par la forme conjuguée $(\sqrt[3]{p(x)^2}\mp\sqrt[3]{p(x)}\sqrt[3]{q(x)}+\sqrt[3]{q(x)^2}$	Pas exemple : pour $x\to\infty$, $(\sqrt[3]{p(x)}\pm\sqrt[3]{q(x)}$ est la FI : $(+\infty)-(+\infty)$
f définie en a	**RA5**: $\lim\limits_{x->a} f(x)=f(a)$ où a fini	f continue en a

Tableau 1. Règles d'action sur le calcul des limites de fonctions dans EMS au Viêt-Nam

- Une deuxième hypothèse porte sur la prédominance du point de vue algébrique dans l'institution EMS vietnamienne.

Pour mettre à l'épreuve ces deux hypothèses issues de l'analyse institutionnelle, un questionnaire comportant les deux questions suivantes a été construit :

Question 1. Calculer $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x-3}$

Question 2. Rédiger un message pour expliquer à un élève de 10ième ce que signifie $\lim\limits_{x->1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

La question 1 est du type « âge de capitaine », puisque 3 n'appartient pas au domaine de définition de la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x-3}$: elle vise à mettre à l'épreuve la première hypothèse concernant le calcul de limite.

La question 2, inspirée de Robert (1982)[3], cherche à obtenir des éléments d'information sur l'assujettissement du rapport personnel des élèves au point de vue algébrique sur la notion de limite.

Ce questionnaire a été proposé aux 131 élèves de trois classes 12 (Terminale) de trois lycées à Ho Chi Minh Ville : *la notion de limite avait déjà été enseignée*.

Pour la question 1, la majorité des élèves répondent dans le respect du contrat didactique sur les limites en utilisant immédiatement la règle d'action RA3 - multiplier et diviser $f(x)$

[3] Voici la question de Robert (1982) qui appartient au questionnaire destiné aux étudiants de la première année de l'université :

1. Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous ?

par la forme conjuguée $(\sqrt{p(x)} \mp \sqrt{q(x)})$ - attachée à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. De plus, 56 élèves sur 131 donne « ∞ » comme limite.

Pour répondre à la question 2, une large majorité des élèves interrogés rédigent une indication sur un calcul algébrique à effectuer pour chercher la limite. Une élève commente en écrivant « voilà, on peut résoudre ce problème sans rien comprendre à lim ».

L'analyse *a posteriori* du questionnaire a permis de valider les hypothèses :

- l'élève calcule $\lim_{x->a} f(x)$ en opérant les transformations algébriques adéquates sur *f(x)*, sans s'intéresser à la pertinence de l'exercice.

- Le rapport institutionnel à la notion de limite au lycée au Viêt-Nam relève exclusivement de l'algèbre.

d. Conclusion

Nous constatons la prédominance de l'*algèbre des limites* dans les trois institutions EMS considérées. Cette prédominance est compréhensible puisque que le type de tâche du calcul des limites vit dans une « bonne écologie didactique » : ce type de tâche peut non seulement exister de manière isolée grâces aux règles algébriques enseignées, mais aussi servir d'autres objets de l'analyse comme par exemple, l'objet asymptote et l'étude des variations d'une fonction.

Par ailleurs, au niveau du savoir savant, l'*algèbre des limites* est le fruit d'une modélisation algébrique du passage à la limite dans les opérations sur les fonctions, modélisation particulièrement opératoire pour l'étude de l'analyse. En complément des axiomes de l'*algèbre des limites* proposées par Lang (1986) (cités par Bosch et al.), nous pouvons prendre l'exemple de Cauchy (1821) qui modélise par des règles algébriques les passages à la limite concernant l'infini – infiniment petits et infiniment grands.

Si d'abord on considère les fonctions simples d'une seule variable, on trouvera qu'il est facile de fixer leurs valeurs singulières. Ces valeurs correspondent toujours à l'une des trois hypothèses

$$x = -\infty, \quad x = 0, \quad x = \infty,$$

et sont respectivement

Pour les fonctions				
$a+x$	a quelconque ...	$a+(-\infty)=-\infty$	.....	$a+\infty=\infty$
$a-x$	a quelconque	$a-(-\infty)=\infty$	.....	$a-\infty=-\infty$
ax	a positif.....	$a\times(-\infty)=-\infty$	.....	$a\times\infty=\infty$
	a négatif.....	$a\times(-\infty)=\infty$	.....	$a\times\infty=-\infty$
$\frac{a}{x}$	a positif.....	$\frac{a}{-\infty}=0$	$\frac{a}{0}=\pm\infty$	$\frac{a}{\infty}=0$
	a négatif.....	$\frac{a}{-\infty}=0$	$\frac{a}{0}=\mp\infty$	$\frac{a}{\infty}=0$
x^a	a positif.....	.....	$0^a=0$	$\infty^a=\infty$
	a négatif.....	.....	$0^a=\infty$	$\infty^a=0$
A^x	A sup. à l'unité..	$A^{-\infty}=0$	$A^0=1$	$A^\infty=\infty$
	A inf. à l'unité...	$A^{-\infty}=\infty$	$A^0=1$	$A^\infty=0$
$L(x)$	Base des log. sup. à l'unité.....	.....	$L(0)=-\infty$	$L(\infty)=\infty$
	Base des log. inf. à l'unité.....	.....	$L(0)=\infty$	$L(\infty)=-\infty$
$\sin x$	.....	$\sin(-\infty)=M((-1,+1))$	.....	$\sin(\infty)=M((-1,+1))$
$\cos x$	.....	$\cos(-\infty)=M((-1,+1))$	.....	$\cos(\infty)=M((-1,+1))$

La notation $M((-1, +1))$ désigne ici, comme dans les préliminaires, une quelconque des quantités moyennes entre les deux limites

-1 et $+1$.

[…] (Op. cité, p. 52)

Quelquefois on rencontre dans le calcul des expressions singulières qui ne peuvent être considérées que comme des limites vers lesquelles convergent des fonctions de plusieurs variables, tandis que ces mêmes variables deviennent infiniment petites ou infiniment grandes, ou même, plus généralement, convergent vers des limites fixes. Telles sont, par exemple, les expressions

$$0 \times 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \ldots,$$

parmi lesquelles on doit regarder les deux premières comme les limites vers lesquelles convergent le produit et le rapport de deux variables infiniment petites, les deux suivantes comme les limites du produit et du rapport de deux variables positives infiniment grandes, etc. Si l'on considère en particulier les expressions singulières que produisent les fonctions

$$x+y, \quad xy, \quad \frac{x}{y}, \quad y^x, \quad y^{\frac{1}{x}},$$

on trouvera que les valeurs de ces mêmes expressions, lorsque les variables restent indépendantes, peuvent être aisément fixées par ce qui précède. Les équations qui serviront à déterminer ces valeurs seront respectivement

Pour les fonctions		
$x+y$	$\infty + \infty = \infty$,	$\infty - \infty = M((-\infty, +\infty))$;
xy	$0 \times 0 = 0$,	$0 \times \infty = 0 \times -\infty = M((-\infty, +\infty))$,
	$\infty \times \infty = -\infty \times -\infty = \infty$,	$\infty \times -\infty = -\infty$;
$\frac{x}{y}$	$\frac{0}{0} = M((-\infty, +\infty))$,	$\frac{0}{\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$, $\frac{\infty}{0} = \frac{-\infty}{0} = \pm\infty$,
	$\frac{\infty}{\infty} = \frac{-\infty}{-\infty} = M((0, \infty))$,	$\frac{\infty}{-\infty} = \frac{-\infty}{\infty} = M((-\infty, 0))$;
y^x	$0^0 = \infty^0 = M((0, \infty))$,	$0^\infty = \infty^{-\infty} = 0$,
	$0^{-\infty} = \infty^\infty = \infty$,	$1^\infty = 1^{-\infty} = M((0, \infty))$;
$y^{\frac{1}{x}}$	$0^{\frac{1}{0}} = \infty^{\frac{1}{0}} = 0$ ou ∞,	$0^{\frac{1}{\infty}} = \infty^{\frac{1}{-\infty}} = M((0, 1))$,
	$0^{\frac{1}{-\infty}} = \infty^{\frac{1}{\infty}} = M((1, \infty))$,	$1^{\frac{1}{0}} = M((0, \infty))$.

(Op. cité, pp. 69 -70)

Cauchy affirme aussi l'importance du problème de calcul des limites d'une fonction, surtout dans les cas où la définition de la fonction ne permet pas de déterminer de manière simple la valeur de la fonction en un point de la variable à considérer.

> […] S'il se présente un cas particulier dans lequel la définition donnée ne puisse plus fournir immédiatement la valeur de la fonction que l'on considère, on cherche la limite ou les limites vers lesquelles cette fonction converge, tandis que les variables s'approchent indéfiniment des valeurs particulières qui leurs sont assignées ; […] Nous nommerons *valeurs singulières* de la fonction proposée celles qui se trouvent déterminées comme on vient de le dire. […] La recherche des valeurs singulières des fonctions est une des questions les plus importantes et les plus délicates de l'Analyse […] (Op. cité, p. 51)

La trace de OM_2 et de points de vue « non algébriques » sur la notion de limite sont présents dans les trois institutions mais reste essentiellement dans le topos de l'enseignant et déconnecté de la trace de OM_1. Bosch et al. nomment cette séparation *le bicéphalisme du curriculum sur les limites de fonctions*. Pour nous, ce phénomène révèle que la noosphère a la volonté de ne pas exclure totalement les points de vue « non algébriques » sur la notion de limite, tout en l'excluant de fait du topos de l'élève (Le Thai Bao 2004). Est-il possible de faire vivre aux élèves un enseignement concernant un point de vue non algébrique de la notion de limite ?

I.3. Ingénieries didactiques

a. Ingénierie didactique de Le Thai Bao (2004)

Afin de concevoir et analyser une ingénierie didactique visant à élargir le rapport institutionnel à la notion de limite dans EMS au Viêt-Nam, nous reprenons à notre compte les injonctions des réformateurs français au moment de la contre-réforme 1980-1985. Artigue (1996) décrit ainsi ces injonctions :

> L'Analyse est vue comme le champ de l'approximation et il s'agit de ménager une entrée progressive des élèves du lycée dans ce champ, sans se limiter à ses aspects calculatoires.

Comme nous l'avons vu, Bkouche (1996) insiste aussi sur la notion d'approximation.

Nous avons donc conçu une ingénierie didactique dans un environnement « calculatrice » pour tenter, via l'approximation décimale, de faire vivre un rapport topologique[4] à la notion de limite.

Le problème central de l'ingénierie était le suivant :

Soit f une fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 0{,}1x - 0{,}02}{0{,}25x^2 - 0{,}01}$.

- Proposer un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 3 et $x < 0{,}2$.
- Proposer un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 3 et $x > 0{,}2$.

Nous avons mis en place cette ingénierie dans une classe 11 du Viêt-Nam où avait déjà été enseignée la notion de limite : la classe a été divisée en 10 groupes de 4 élèves, une moitié des groupes travaillant avec $x < 0{,}2$ et l'autre avec $x > 0{,}2$.

4 groupes (sur 10) de la classe observée ont produit des couples (x ; $f(x)$) en « écriture décimale illimitée ».

Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
0,1(9) et 2,(9)	0,19999…et 2,9999…	0,199(9) et 2,9(9)7	0,2(0)1 et 3,(0)1

Tableau 2. Types d'« EDI » (Le Thai Bao 2004)

Pour les élèves, le nombre 0,1(9) (ou 0,1999…, écriture décimale illimitée ayant 9 comme période, noté *EDIP9*) *est le plus proche de 0,2 et inférieur strictement à 0,2*. Pour certains élèves, cette écriture est celle d'un irrationnel comme le montre l'interaction entre les élèves d'un groupe :

> E1: Avec le nombre 18/90 ? (d'après le brouillon : 0,1(9) = 0,1 +0,9x0,(1) =1/10 + 9/90 = 18/90)
> E2: Ce nombre est le plus proche de 0,2 ? (moqueur, car 18/90 = 0,2)
> E1: Alors, le nombre le meilleur est 17/90.
> E3: Non. Le nombre "zéro virgule un neuf neuf neuf …" est plus intéressant
> E1: Non. Le nombre 17/90, parce que si on prend 0,1999…, on ne peut pas savoir quelle est la fraction.
> - si on prend 0,1999…, c'est *un nombre irrationnel*,
> E2: Cet irrationnel, c'est combien?
> E1: Cet irrationnel, nous ne savons pas comment le représenter. Donc, nous l'écrivons 0,1(9)
> (Extrait des lignes 12 à 19 du protocole du groupe 1 composé des 3 élèves H, V et B)

[4] $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ « Pour tout voisinage V_L de L donné, il existe un voisinage V_a de a tel que toutes les images de V_a par f appartiennent à V_L ».

Cela nous montre que la construction de la notion de limite ne peut pas éviter une (re)construction du nombre réel, en particulier ne peut pas éviter le problème de la représentation décimale des nombres réels- ou *décimalisation des nombres réels*, et l'intervention des écritures décimales illimitées.

De plus, du point de vue obstacles épistémologiques, il apparaît dans notre ingénierie une sorte d'*infini - fini* activée dans les écritures décimales illimitées comme 0,2(0)1.

Nous étudions d'autres ingénieries didactiques issues de travaux précédents pour répondre à la question : le problème de la décimalisation des nombres réels apparaît-il ? Si oui, comment ?

b. Séquence didactique de Cornu (1983)

En se référant aux obstacles épistémologiques dégagés par son analyse épistémologique du concept de limite, Cornu construit une séquence didactique basée sur un ensemble de questions en direction d'élèves de Première. Il cherche à repérer des informations sur des obstacles au travers du « vocabulaire » utilisé par les élèves autour de la notion de limite

> Cette séquence avait essentiellement deux buts :
>
> • commencer avec les élèves l'apprentissage de la notion de limite. […]
>
> • observer, dans une situation en classe, ce qui se passe lors de l'apprentissage de la notion de limite. Le but du chercheur est de recueillir le maximum d'éléments d'information pour répondre aux questions qu'il se pose. Ces questions se regroupent en l'occurrence autour de deux pôles : tout d'abord une étude du vocabulaire employé par les élèves. Comme on le verra plus loin, les premières activités proposées tentent de mettre l'élève en présence de la notion de limite, sans faire usage du vocabulaire habituel lié à cette notion. Or, l'élève aura à s'exprimer, par écrit et oralement. Il devra donc utiliser des mots, des expressions. Nous avons cherché à favoriser l'expression des élèves, de façon à relever le type de vocabulaire qu'ils mettent en œuvre. Par ailleurs, l'observation avait aussi pour but de repérer les obstacles auxquels se heurte l'élève. […] (Op. cité, pp. 133 -134)

Cornu intègre l'ensemble des questions aux premières séances de l'enseignement de la notion de limite selon le programme des Premières B et C de l'époque :

> Notre observation s'est donc située dès le début de l'apprentissage, jusqu'à la définition formelle de la notion de limite, c'est-à-dire jusqu'à ce qui est la plupart du temps le début du cours ! […] (Op. cité, pp. 137-138)

L'ensemble des questions de Cornu comporte différents types d'activités « d'approche » : activité géométrique, activité d'analyse, activité sur les développement décimaux et activité de « mise en commun ». Nous nous intéresserons ici à l'activité sur les développements décimaux.

Ci-après les questions au centre de cette activité (Op. cité, pp. 159 -160) :

> 1 – Voici un nombre : 0,3
> et un autre nombre : 0,33
> et encore un nombre : 0,333
> … etc … : 0,3333
> 0,33333
> ……..
>
> $\frac{1}{3}$ est-il dans la liste ?
>
> Y a-t-il dans la liste des nombres supérieurs à $\frac{1}{3}$?

Peut – on trouver un nombre $a < \frac{1}{3}$, plus grand que chacun des nombres de la liste ?

Que signifie l'écriture 0,3333… ? Représente-t-elle un nombre ? Lequel ?

2 – On multiple chaque nombre de la liste précédente par 3. Que se passe–t–il ?

3 – On retranche de 1 chaque nombre de la liste obtenue en 2. Que se passe–t–il ?

4 – Voici une autre liste de nombre :

1,1
0,9
1,01
0,99
1,001
0,999
⋮

Quel rôle joue le nombre 1 par rapport à cette liste ?

5- Trouvez une autre situation analogue.

Ces questions portent *a priori* sur le lien analytique opéré par la notion de limite, en particulier comme borne supérieure, entre les fractions (1/3 et 1) et des « listes » qui sont implicitement des suites décimales illimitées[5].

> […] Dans I, on veut faire prendre conscience du rôle particulier que joue le nombre 1/3 par la liste proposée : il n'est pas dans la liste, et pourtant il n'en est pas loin… C'est en fait la notion de borne supérieure qui se trouve là. On pose également le problème de l'écriture 0,333…, écriture qui induit parfois chez les élèves l'idée qu'il existerait un « dernier nombre » avant d'atteindre 1/3. Dans II, on refait la même chose avec 0,999… ; mais cette fois, il faut trouver la limite. On passe ensuite à 0,1 ; 0,01 ; …, puis dans IV, on introduit une situation où la convergence n'est pas monotone. (Op. Cité, pp.141-142)

Cornu constate *a posteriori*, lors de l'analyse de l'expérimentation, que les EDI ne sont pas associées au mot « limite », mais active richement les expressions désignant l'idée de l'infini. On retrouve l'*infini- fini* de Le Thai Bao (2004) dans l'expression « dernier 3 » de 0,333…

> […] Certains parlent du « dernier 3 » de 0,333… Le mot « limite » n'est toujours pas apparu ; mais cette activité a donné lieu à un vocabulaire assez riche : « valeur approchée », « se rapproche », « plus près… », « infini », « l'indéfiniment », « ne se finira jamais », « illimitée », etc… (Op. cité, p. 144)

Cornu fait donc rencontrer le problème de la représentation décimale des nombres à travers des « listes » d'écritures décimales illimitées dont les limites sont *a priori* des rationnels. Mais les réponses aux questions montrent l'existence d'un lien « arithmétique » entre ces rationnels et leurs « listes » d'écritures décimales illimitées, et l'absence du lien « analytique » prévu.

> L'idée de limite est toujours absente, et les élèves sont attirés par des observations de type arithmétique : ils cherchent la moyenne des nombres, ils sont sensibles aux symétries. Il ne leur est pas naturel de regarder comment <u>évolue</u> une suite de nombres, et ils sont hostiles à l'idée qu'on puisse associer à une suite un nombre qui n'est même pas dans la liste. Leur vision des mathématiques est entièrement <u>statique</u>. (Op. cité, p. 144, c'est Cornu qui souligne)

Ce constat pose le problème du statut de nombre des EDI et du franchissement de l'obstacle *infini - fini*.

---

[5] Dans les suites décimales illimitée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un nombre réel a, chaque a_n est la valeurs approchée par défaut ou par excès à 10^{-n} de a.

Nous nous intéressons maintenant au projet du Groupe AHA : comment y est traité le problème du statut de nombre des EDI ? Y a-t-il une prise en compte du franchissement de l'obstacle *infini - fini* ?

c. Projet du Groupe AHA

Le projet du Groupe AHA porte sur une « approche heuristique de l'analyse ». Pour cette approche, les auteurs du Groupe AHA proposent des études mathématiques diversifiées sur la notion de limite comme annoncé dans l'*Avant – Propos* : *Qu'est-ce que l'Analyse mathématique ?*

> […] L'Analyse, cela peut être regardé de très très près (étudier des tangentes) ou de très très loin (étudier des comportements asymptotiques). C'est le même concept de *limite* que nous construirons pour effectuer ces deux démarches. Nous verrons que ce procédé d'aller voir tout au bout, d'aller à la limite, sera aussi la clef de beaucoup d'autres problèmes, par exemple celui du calcul des aires de surfaces courbes, problèmes a priori non évidents.
> […] (Groupe AHA 1999a)

Du point de vue épistémologique, le titre de l'ouvrage du Groupe AHA - *Vers l'infini pas à pas* – laisse penser à une tentative d'organiser pas à pas des franchissements de l'obstacle principal du concept de limite « Horreur de l'infini » et donc à un travail sur un point de vue non algébrique :

> A propos des asymptotes comme des suites, les auteurs notent : « Comme dans l'histoire, l'infini est essentiel dans la constitution de l'analyse : c'est pourquoi ce projet met d'emblée sur le tapis des problèmes impliquant l'infini ». (Schneider 2001, p. 19)

Dans l'ouvrage AHA, la notion de nombre réel est définie par les EDI :

> On donne le nom de *nombres réels* à tous les nombres décimaux illimité. […]
> (Groupe AHA 1999a, p. 361)

Schneider (2001) décrit la simultanéité de l'étude de nombre réel et du « discours technologique » de l'algèbre des limites de suites : ce discours s'appuie implicitement à la fois sur l'axiome d'Archimède et sur l'axiome des intervalles emboîtés :

> Dans la suite du projet AHA, le concept formalisé de limite est encore mobilisé dans les démonstrations des théorèmes généraux sur l'algèbre des limites de suites (limite d'une somme, etc.) Toutes ces démonstrations reposent implicitement sur une propriété incontournable que les auteurs dégagent afin de lui donner le statut d'axiome : l'axiome d'Archimède. La démonstration, comme discours technologique, débouche donc sur les fondements théoriques.
>
> Un autre axiome incontournable en analyse réelle est l'axiome des intervalles emboîtés. Dans ce projet, il permet, avec l'axiome d'Archimède, de donner le statut de nombre à des décimaux illimités, périodiques ou non, qui souffrent ordinairement d'une « crise d'identité ». (Op. cité, p. 20)[6]

Comment se développe le « discours technologique » qui justifie le statut de nombre des EDI et la raison d'être de l'axiome des intervalles emboîtés ?

La réponse se trouve dans la troisième partie – *En route vers l'axiome des intervalles emboîtés* - du chapitre 11 de l'ouvrage AHA.

Ce discours se fait en l'absence de toute praxis, et examine des cas d'EDI particulières présentées par les auteurs pour justifier l'affirmation que « *tous les décimaux illimités sont*

[6] C'est nous qui soulignons pour repérer l'objet « EDI » dans l'ouvrage.

des nombres ». Chaque partie du discours s'annonce par un énoncé en gras et par une (ou deux) tâche(s) isolée(s). Il sépare l'étude des EDI en deux phases : EDIP puis EDINP.

Phase 1

> **Tout décimal illimité périodique est un entier ou un rationnel.**
>
> Est-il légitime d'écrire 1 = 0,999… ?
> (Group AHA 1999a, p. 356)

Cet énoncé distingue ainsi entier et rationnel. La raison de cette distinction est de traiter le cas de l'écriture décimale illimitée ayant la période de 9 (EDIP9) pour énoncer (implicitement) la propriété : tout nombre décimal possède deux écritures décimales illimitées, l'une « n'est pas à proprement parlé illimité », l'autre (EDIP9) est une expression illimitée périodique :

> Prenons encore le cas de 1/4. La division de 1 par 4 conduit à 0,250000… qui n'est pas à proprement parler un décimal illimité puisqu'on l'écrit habituellement 0,25. En employant l'expression décimale illimitée de 1, on en obtient l'expression décimale illimitée (périodique)

$$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=\frac{24+0{,}999...}{100}=0{,}24999...\text{ (Op. cité, p. 361)}$$

Nous présentons dans le tableau ci-dessous la structure du discours de l'identification « 1 = 0,999… » (Op. cité, pp. 356 – 357) :

Identification	« 1 = 0,999… »
Algébrique	En comparant simplement ou simplistement les parties entières, on est tenté de conclure 1 > 0,999…. Soit x = 0,999…. Alors, $10x = 9{,}999\ldots$ $9x = 9{,}999\ldots - 0{,}999\ldots$ $= 9$ ou $x = 1$.
Analytique par le calcul de la limite de suite	On peut identifier 0,999… à la limite d'une série, à savoir en l'occurrence la suite de terme général $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+...+\frac{9}{10^n}$. Les calculs conduisent à $0{,}999\ldots = \lim_{n\to\infty}\frac{9}{10}(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+...+\frac{1}{10^{n-1}})$ $= \frac{9}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{10^n})}{1-(\frac{1}{10})} = \frac{9}{10}.\frac{1}{1-(\frac{1}{10})}=1.$
Analytique par l'axiome des intervalles emboîtés	Ce résultat fait apparaître 0,999… à l'intersection des intervalles $[1 - \frac{1}{10^n}, 1]$ emboîtés comme ceci : $[\frac{9}{10}, 1] \supset [\frac{99}{100}, 1] \supset [\frac{999}{1000}, 1] \supset \ldots$ Par ailleurs 1 s'y trouve aussi et la longueur de ces intervalles tend vers 0. On peut donc qu'identifier 0,99… et 1, sinon il y aurait entre les deux une distance strictement positive qui contredirait le fait que la longueur des intervalles tend vers 0.

Tableau 3. Identification « 0,999… = 1 » dans l'ouvrage AHA (1999)

L'ordre et les opérations prolongent ceux de l'ensemble **D** et sont mobilisés dans l'identification « 1 = 0,999… ». Dans les identifications analytiques, il y a une rupture entre le nombre décimal et l'écriture décimale illimitée, suite et bornes des intervalles se présentant en écriture fractionnaire.

Le discours se continue par l'identification analytique du cas « 0,64949… = $\frac{643}{990}$ » à l'identique du cas « 0,999… = 1 ».

Phase 2

> **Tout décimal illimité est un nombre grâce à la propriété des intervalles emboîtés**
>
> Vers quoi tend la série harmonique alternée
>
> $1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, , 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots$?
>
> (Suggestion : situez sur un axe les quelques premiers termes de celle suite)
>
> (Op. cité, p. 358)

Cet énoncé vise à justifier la raison d'être de l'axiome des intervalles emboîtés : « tout EDI est un nombre (sous-entendu réel). ». La recherche de la limite de la série harmonique alternée s'appuyé sur la donnée d'une suite d'intervalles emboîtés fermés :

> Nous voici donc en présence d'une suite d'intervalles emboîtés fermés
>
> [0,5 ; 1]
> [0,5 ; 0,83…]
> [0,583… ; 0,83…]
> [0,583… ; 0,78…]
> [0,616… ; 0,78…]
> [0,616… ; 0,759…]
> [0,634… ; 0,759…]
> ⋮
>
> Dont la longueur $\frac{1}{n}$ tends vers 0. On est tenté de dire, […], que leur intersection est réduite à un seul nombre, qui est la limite de la série harmonique alternée. Mais quelle sorte de nombre est cette limite ? (Op. cité, p. 359)

Au contraire du cas de l'identification des EDIP, les bornes des intervalles emboîtés sont en écriture décimale. D'ailleurs, une EDINP n'est présente que de façon implicite dans le fait que ln2 n'est pas un rationnel :

> Or, il est crédible que ln2 soit un irrationnel. S'il ne l'était pas, on pourrait trouver un nombre rationnel q tel que
>
> $$\ln 2 = q \text{ ou } e^q = 2.$$
>
> Voilà qui semble bien difficile, vu l'irrationalité célèbre (mais non démontré ici) de e. (p. 361)
>
> En conclusion, en admettant que les intervalles emboîtés :
> […]
> s'intersectent en un seul nombre, nous avons donné le statut de nombre à un décimal illimité sans doute non périodique. (Op. cité, p. 361)

Pour démontrer que la limite de la série en question est égale à ln2, le discours mobilise des objets mathématiques tels que : la droite graduée et la représentation des fractions sur cette droite ; la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et son graphique ; l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ et la fonction logarithmique ln$x$; l'aire d'un rectangle et la formule de calcul d'aire du rectangle.

• *Pour conclure*

Le « discours technologique » de l'ouvrage AHA nous donne un exemple de l'identification des EDI selon les types des nombres (entier, rationnel et irrationnel) par les limites de suites numériques trouvées dans le calcul algébrique des limites ou la démonstration mobilisant les axiomes topologiques (d'Archimède et des intervalles emboîtés).

Pourtant, ce qui nous manque ici, c'est le traitement de l'obstacle *infini – fini*. Il faut d'ailleurs prendre en compte l'ordre et les opérations dans l'ensemble des EDI pour le statut de nombre de l'ostensif « EDI ».

d. Synthèse des ingénieries didactiques

Nous résumons dans le tableau suivant les principales différences entre les trois ingénieries présentées :

	Le Thai Bao (2004)	Cornu (1983)	Groupe AHA (1999a)
Dispositif expérimental	Micro - ingénierie	Ensemble de questions	Macro - ingénierie
Place de l'ingénierie par rapport à l'enseignement de la notion de limite	Retour sur la notion de limite déjà enseignée pour lui donner une signification topologique, via la décimalisation des réels	Intégration des questions dans le début de l'enseignement de la notion de limite	Projet d'enseignement de l'Analyse au secondaire autour de l'étude de la notion de limite.
Présence des EDI	Réponses à la situation fondamentale : chercher un couple (x ; f(x)) tel que f(x) soit le plus proche possible de a.	Questions sur les développements décimaux.	Discours technologique sur le statut de nombre des EDI, séparés en EDIP et EDINP.
Eléments de la notion de limite	Approximation et distance	Borne supérieure	Axiomes : Archimède et intervalles emboîtés
EDIP9 « institutionnel » « infini-fini »	2,999… ; 2,(9) 2,9(9)7 ; 3,(0)1	0,333… ; 0,999… « dernier 3 » de 0,333…	0,25000…/0,24999…

Tableau 4. Différences entre les ingénieries en ce qui concerne les EDI

L'ingénierie de Le Thai Bao (2004), la séquence de Cornu (1983) et le projet du Groupe AHA (1999a) convergent vers une problème commun : le statut de nombre des EDI en relation avec les notions de suite numérique et de limite de suite numérique. Cela renforce l'hypothèse que la construction de la notion de limite via l'approximation décimale ne peut pas éviter une (re)construction du nombre réel incarné dans l'ostensif « EDI ».

II. Sur la notion de nombre

Nous reprenons d'abord certains résultats de recherches sur la notion de nombre décimal autour duquel s'organisent des *praxéologies* d'approximation décimale dans l'EMS.
Nous présentons brièvement ensuite les principaux résultats de travaux de recherche en didactique des mathématiques sur la notion de nombre réel, en particulier via les écritures décimales illimitées présentes dans l'EMS en France durant la période des Mathématiques Modernes.

II.1. Nombre décimal

a. Epistémologie du statut numérique de l'objet nombre décimal

Pour la conception de situations d'enseignement des nombres décimaux et rationnels dans la scolarité obligatoire française, Brousseau (1987) effectue une analyse épistémologique de l'objet nombre décimal :

> Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. (Brousseau 1987, p. 450)

Brousseau (ibidem) présente quelques conclusions de son analyse épistémologique qui mettent en lumière différentes conceptions historiques des décimaux, selon lesquelles :

- Le « décimal » porte un statut *paramathématique* (Chevallard 1981) à l'époque de l'antiquité (Egyptiens -2500, Babyloniens -1900 ans, Chinois -13e siècle) :

> […] cette structure est mobilisée implicitement dans des usages et des pratiques, ses propriétés sont utilisées pour résoudre certains problèmes, mais elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil. (Ibid., p. 451)

- Le « décimal » prend un statut *protomathématique* grâce à l'invention de Al Uqlidisi vers 952 :

> Il n'est tout d'abord qu'un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné, mais que son inventeur Al Uqlidisi, vers 952, ne traite pas comme un objet d'étude (Abdeljaouad, 1978). (Op. cité, p. 451)

- Le « décimal » accède au statut de *notion mathématique* grâce à Stevin (1585) :

> Les décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie ; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, la constitution de tables. (Ibid., p. 452)

Le statut de *notion mathématique* permet à Stevin d'utiliser le terme « nombre (réel) » pour toute sorte de quantités :

> Pour Stevin, « les quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres (réels) parce que toutes sont approchables par les nombres décimaux […] (Ibid., p. 452)

Dans cette conclusion de Brousseau, nous constatons aussi le rôle important de la notion d'approximation. La notion de convergence d'une suite numérique permet d'assurer une approximation décimale d'aussi près que l'on le veut des quantités rationnelles ou irrationnelles : cette notion n'est pas encore présente chez Stevin, puisqu'elle n'émergera qu'à la fin du 19° siècle avec Cauchy. C'est pourtant elle qui permet d'envisager l'unification des nombres dans l'ensemble des réels.

*b. Caractéristiques de l'ensemble **D** des nombres décimaux*

En étudiant les définitions et constructions de **D** soit comme extension de **N** soit comme restrictions de **Q** ou de **R**, Brousseau (1987) met en évidence les caractéristiques de **D** contre **N**, **Q** ou **R**. Ces caractéristiques guident les choix des situations d'enseignement des nombres décimaux et celles de constructions des nombres réels à partir des nombres décimaux.

- L'ensemble **D** se distingue de **N** par l'ordre *dense*[7] (non discret) contre l'ordre discret.

> Par exemple, « n est le successeur de 17 » a une solution dans **N,** mais pas dans **D**. (Op. cité, p. 449)
> Si on veut fonder $\mathbf{D}^+$ contre **N** il faut donc une situation où l'on a besoin que chaque élément ait un inverse, et où on a besoin d'un ordre dense. (Op. cité, p. 442)[8]

- L'ensemble **D** est dense dans **Q** ou dans **R**.

> **D** approche **Q** ou **R** parce que, pour tout réel, quelle que soit la tolérance que l'on s'accorde, il existe toujours un décimal dont la distance à ce réel soit inférieure à la tolérance choisie. (Op. cité, p. 450).

Cette caractéristique permet de construire **R** à partir de la structure de **D** plus commode dans la pratique que celle de **Q** :

> **D** hérite des facilités de calcul que l'on trouve dans **N**, mais **Q** les a perdues, en particulier pour les différences, les comparaisons, le calcul sur les intervalles. (Op. cité, p. 449)

Du point de vue didactique, ces facilités calculatoires de **D** héritées de **N** fonde des *praxéologies* d'approximation décimale dans l'EMS.

c. Difficultés de l'enseignement des nombres décimaux dans l'EMS en France

• *Place des nombres décimaux*

En analysant des « *fragments biographiques de l'institution EMS relativement au Numérique* » de la période classique (1854/1947) à la période contemporaine (1985/1995), Bronner (1997) constate que les nombres décimaux jouent toujours, en tant que savoir à enseigner, le rôle de fondations dans l'enseignement des système des nombres à partir de la Réforme des Mathématiques Modernes (1968/1978) (voir son tableau à la page 176).

• *Difficulté sur l'acquisition de l'ordre dense dans l'ensemble des nombres décimaux*

A propos de l'ordre dans les nombres décimaux, Izorche (1977) et Margolinas (1985) proposent aux élèves des classes 3e et 2e les questions suivantes :

> Pouvez vous donner, s'il en existe, un nombre réel qui soit compris entre 2,746 et 2,747 ? (Izorche 1977, question 5, p. 19)

> Ecris le meilleur encadrement possible avec trois chiffres après la virgule :
> ... < 4,1 < …
> (Margolinas 1985, deuxième partie de la question 3, p. 41)

Izorche et Margolinas constatent, dans les analyses *a posteriori* de ces questions, une difficulté concernant :

- les problèmes d'intercalation décimale entre deux bornes décimales

[7] Nous adoptons désormais le terme d'« *ordre dense* » de Brousseau (1987) pour désigner un ordre « *non discret* ».
[8] C'est nous qui soulignons.

- d'encadrement décimal par des décimaux qui obligent de quitter D_3[9] (cas de Izorche) ou de passer de D_1 à D_3 (cas de Margolinas) : seulement 46,8% des élèves réussissent dans la question d'Izorche et seulement 27,2% des élèves parviennent à donner l'encadrement optimum dans la question de Margolinas.

Margolinas explique cette difficulté par le fait que les élèves mobilisent un ordre de **N** – c'est-à-dire un ordre discret – dans la comparaison de deux décimaux en les ramenant dans un même D_i : absence de l'ordre dense de **D**.

> L'ordre dans D pose de nombreux problèmes aux élèves. Rappelons que nous nous situons maintenant dans les étapes de résolution de problèmes où les écritures non décimales n'interviennent plus.
> […] on a pu constater autant en entretien individuel que dans les réponses nulles, une tendance à ne travailler que dans l'ordre de N, à un isomorphisme près. En cela nous confirmons les résultats de Izorche, en les appliquant à d'autres ensembles que D_i. (Op. cité, p. 110)

Margolinas conclut aussi à une difficulté pour établir la relation « emboîtée » entre les D_i, c'est-à-dire $D_1 \subset D_2 \subset D_3$ … qui est nécessaire pour les problèmes d'intercalation décimale entre deux bornes décimales et d'encadrement décimal par des décimaux.

> Le travail de Izorche nous avait montré les difficultés que rencontrent les élèves dans les questions faisant intervenir plusieurs D_i. Tout semblait se passer comme si ces ensembles étaient cloisonnés, et non pas emboîtés.
> Dans la question 3 et 5 de notre questionnaire, nous avons forcé les élèves à travailler dans plusieurs D_i, et certaines réponses nous amènent à faire des hypothèses sur la nature de la relation entre ces ensembles, pour les élèves. (Op. cité, p. 111)

Dans son travail, Neyret (1995) modélise les types des ordres possibles dans les nombres décimaux par prolongement de l'ordre de **N** dans la comparaison des nombres décimaux.

[9] D_i désigne l'ensemble des décimaux ayant i chiffres décimaux après la virgule. Par exemple, 2,746 appartient à D_3.

Soit les deux décimaux : $a = a_0,a_1a_2\ldots a_n$ et $b = b_0,b_1b_2\ldots b_m$ où a_n et b_m non nuls, $n < m$

Stratégie de comparaison	Description	Domaine de validité
Par l'ordre lexicographique	- Comparer a_0 et b_0 - Si $a_0 = b_0$, comparer a_1 et b_1 Si $a_1 = b_1$, comparer a_2 et b_2 … Le processus arrête quand $a_i \neq b_i$ $(0 \leq i \leq n)$ ou $i = n+1$	Juste dans tout cas
Comparer deux entiers provenant de la troncature	- Supprimer $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_m$ de b - Comparer deux entiers $\overline{aa_1a_2\ldots a_n}$ et $\overline{bb_1b_2\ldots b_n}$	Faux dans les cas, par exemple : elle conclut 1,234 = 1,2345
Comparer deux entiers provenant de l'extension	- Ajouter $(m-n)$ fois de 0 au a - Comparer deux entiers $\overline{aa_1a_2\ldots a_n\underbrace{0\ldots0}_{(m-n)}}$ et $\overline{bb_1b_2\ldots b_m}$	Juste dans tout cas
Comparer deux couples des entiers	- Considérer $a = (a_0, \overline{aa_1a_2\ldots a_n})$ et $b = (b_0, \overline{bb_1b_2\ldots b_m})$ - Comparer a_0 et b_0 - Si $a_0 = b_0$, comparer $\overline{aa_1a_2\ldots a_n}$ et $\overline{bb_1b_2\ldots b_m}$	Faux dans les cas, par exemple : elle conclut 1,1234 > 1,234 parce que 1234 > 234

Tableau 5. Ordres possibles fonctionnent dans l'ensemble **D** selon Neyret (1995)

Neyret propose des questions similaires aux élèves à la fin du collège et aux étudiants à l'entrée à l'IUFM (années 1990) avant de concevoir et réaliser une ingénierie didactique dans un système didactique de formation des enseignants.

A la question reprise de celle de Izorche : « Pouvez vous donner, s'il en existe, un nombre réel qui soit compris entre 2,746 et 2,747 ? », l'expérimentation de Neyret montre que près de 20% des élèves et étudiants observés échouent, bien que ce type d'exercice soit souvent présent à l'école primaire et au collège à l'époque.

Neyret propose une autre question « non classique » :

> Combien y a-t-il de nombres entre 12,23 et 12,232 ? (Question 4.2, p. 145, Op. cité)

Seulement 31% des étudiants et 36% des élèves répondent par « beaucoup » ou « une infinité ».

A une question similaire à celle de Margolinas :

> Encadrez le nombre 4,157 par deux nombres décimaux les plus proches comportant deux chiffres après la virgule :
>
> ……..< 4,157 < …….....
>
> (Deuxième partie de la question 4.1, p. 146)

40% des élèves et 34% des étudiants ne parviennent pas à donner l'encadrement optimum.

• *Difficulté sur la distinction entre le nombre décimal et l'écriture décimale*

Digneau (1989) remarque que, pour les élèves, l'inclusion $\mathbf{N} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q}$ n'est pas évidente :

> La première concerne la non-inclusion des différents ensembles de nombres ; la situation semble contradictoire : les élèves reconnaissent facilement que 1 = 1,00 donc 1 est à la fois

entier et décimal ou 1,32 = $\frac{132}{100}$ donc **D** est bien inclus dans **Q**. Pourtant nombreux sont ceux qui, spontanément, dissocient ces ensembles. (Op. cité, p. 26)

Les travaux de Margolinas (1985), et Perrin (1992) dégagent aussi les difficultés sur la distinction entre les nombres et leurs écritures.

La nature des nombres décimaux, leur place par rapport aux autres ensembles de nombres, la différence entre nombre et écriture d'un nombre sont des questions qui sont loin d'être réglées pour les élèves-instituteurs : les fractions sont difficilement acceptées comme nombre décimal par certains alors que des écritures décimales infinies le sont. (Perrin, 1992, p. 176)

Dans son travail, Neyret (1995) propose la question suivante[10] :

Parmi les écritures suivantes, entourez celles qui, pour vous, représentent un nombre décimal :

0,66 ; $\frac{1}{3}$; 0,6666 ; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{9}$; 3 ; $\frac{21}{25}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$; $\sqrt{4}$; 3,14 ; 15,00 ; 5,7418 ; $\frac{11}{7}$; $\frac{12}{100}$; 30,06 ; $\sqrt{\frac{4}{4}}$; 0,3 ; $\sqrt{8}$; $\frac{15}{75}$; $\frac{15}{4}$; $\frac{1,3}{3,7}$; $\frac{\sqrt{2}}{100}$. (Question 2, p. 137, Op. cité)

Dans l'analyse *a posteriori,* presque aucun étudiant et aucun élève ne répondent correctement à la question : ils ne considèrent pas les entiers comme des décimaux. 33% des étudiants et 49% des élèves identifient les nombres décimaux à leur écriture avec la virgule. 58% des étudiants et 42% des élèves considèrent par contre les fractions comme des nombres décimaux, car les décimaux peuvent s'écrire sous forme fractionnaire et la division peut ramener les fractions aux écritures décimales.

• *Lien entre rationnel, décimal et écriture décimale par la division euclidienne : difficulté de prise en compte du reste de la division*

En posant la question :

Une division a été posée :

$$\begin{array}{r|l} 415 & 192 \\ \cline{2-2} 310 & 2,16 \\ 1180 & \\ 28 & \end{array}$$

Entourez, parmi les égalités suivantes, celles qui sont exactes :

(a) $\frac{415}{192} = 2,16$

(b) 415 = 2,16 x192 + 28

(c) 415 = 2,16 x192 + $\frac{28}{100}$

(d) 415 = 2,16 x192 + $\frac{28}{1000}$

(e) 415 = 2,16 x192 + 0,28

(Question 3, p. 139, Op. cité)

Neyret montre dans son analyse *a posteriori* que 48% des étudiants et 61% des élèves entourent (a) et ne prennent donc pas en compte la reste de la division : il y a donc une tendance d'assimilation de la fraction $\frac{415}{192}$ au décimal 2,16 dans la division.

[10] inspirée de la question 1 de Margolinas (1985).

• *Pas de changement des rapports institutionnels aux nombres décimaux après l'enseignement au lycée*

L'expérimentation de Neyret (1995) lui permet de montrer des « résultats significativement semblables » entre les réponses des deux populations concernées –les élèves à la fin du collège (3e et 2e) et les étudiants à l'entrée de l'IUFM. Cela atteste que les rapports institutionnels et, donc, personnels aux nombres, en particulier aux nombres décimaux, ne sont pas significativement modifiés au lycée.

> Au lycée, les ensembles des nombres vont de soi et ne sont pas objets sensibles d'enseignement. D'une manière générale, le domaine numérique est donc considéré comme constitué et par conséquent peu remanié, même si l'introduction d'objets nouveaux peut évidemment modifier par la suite les connaissances des élèves. (Op. cité, p. 149)

Autrement dit, l'enseignement au lycée par la présence d'objets nouveaux, en particulier les objets de l'analyse ne permettent pas de surmonter les difficultés de l'acquisition des caractéristiques des nombres décimaux présentes au collège.

> Ainsi les difficultés et les erreurs que l'on peut repérer chez l'une ou l'autre des populations sont de même type pour les exercices que nous leur avons proposés et vont dans le sens des remarques que nous avons faites dans l'analyse des différents questionnaires :
> - pas de distinction entre les nombres et leurs écritures,
> - difficultés à mettre en rapport les différents D*i*,
> - peu d'interrelations entre les différents systèmes de nombres,
> - en particulier, difficultés à voir quelle est la fonction des décimaux par rapport aux autres ensembles de nombres. (Op. cité, p. 149)

d. L'obstacle épistémologique de N pour D et son renforcement par des choix didactiques

Brousseau (1998) conclut que la connaissance des nombres entiers constitue un obstacle épistémologique pour l'acquisition des autres nombres, particulièrement dans la décimalisation des nombres réels.

> Il est compréhensible que ce que les mathématiciens appellent le plongement de **N** dans un sur-ensemble, fasse disparaître certaines de ces propriétés qui ne sont plus vraies pour tous les nombres, ou même qui ne sont plus vraies pour aucun.
>
> L'élève n'est pas averti de cette rupture, car, ni la culture, et en particulier la tradition, ni l'ingénierie didactique n'ont encore produit les instruments nécessaires […]. Il commet donc des erreurs, et comme elles sont attachées à une certaine manière de comprendre les propriétés des nombres, ces conceptions fausses persistent et on peut observer les effets de la rupture pendant de nombreuses années. (Op. cité, p. 153)

- Le choix didactique sur l'enseignement des nombres réels par la problématique des changements d'unités des mesures renforce didactiquement l'obstacle épistémologique en assimilant explicitement les nombres décimaux aux nombres naturels.

> Le fait d'attacher les décimaux à des mesures conduit à les faire considérer par l'enfant comme un triplet (n, p, u) : d'une part un entier n d'autre part une division par 10^p, c'est-à-dire un changement d'unité u : 3,25 mètres, c'est 325 cm exprimé en mètres. La pratique de « changements d'unité » font que p et u entretiennent des rapports privilégiés (il suffit de proposer des exercices, où, à la fois, on change d'unité et on multiple par une puissance de 10 pour s'en apercevoir). Le décimal fonctionne comme un entier et n'est plus détachable d'une unité : l'objet n'est pas le décimal, mais la grandeur physique. (Op. cité, p. 131)

- On opère sur les nombres décimaux comme sur des naturels complétés de la virgule.

> Cette assimilation aux naturels sera évidemment renforcée par l'étude des opérations sous forme de mécanismes, c'est-à-dire d'action que l'on effectue de mémoire, sans comprendre,

> comme dans les naturels, avec seulement un petit complément pour la virgule. (Op. cité, p. 132)

- L'assimilation du décimal comme entier avec une virgule conduit à assimiler l'EDI au nombre décimal.

> L'usage et la définition implicite (et parfois explicite) des décimaux les assimile à « des naturels avec une virgule ». En conséquence, l'élève ne considèrera pas les naturels comme des décimaux, alors que 0,3 $\underline{3}$ … lui sera classé comme décimal. (Op. cité, p. 132)

e. En résumé

L'avancée cognitive sur la notion de nombre décimal chez Stevin (1585) marque une unification de toutes sortes des nombres (réels). Cette unification est décrite par Brousseau (1987) comme une approximation décimale de tous les nombres, assurée implicitement par la notion de convergence.

Dans L'EMS française contemporaine, l'objet nombre décimal joue le rôle de fondement dans l'enseignement des systèmes des nombres. Car, du point de vue mathématique, le nombre décimal suffit pour construire les autres nombres réels ; du point de vue pratique, il est plus commode que **Q** dans les praxéologie*s* sur l'ordre et les opérations.

Cependant, de nombreux chercheurs ont montré les difficultés de l'enseignement des nombres décimaux dans l'EMS en France, particulièrement sur l'ordre dense de **D**, la distinction entre nombres décimaux et leurs écritures, les relations des nombres décimaux à eux-mêmes et aux autres nombres réels.

II.2. Nombres réels

a. Approche épistémologique des nombres réels

• Obstacles épistémologiques sur les nombres réels, en particulier les irrationnels

Bronner (1997) étudie, dans l'histoire, la genèse des rapports aux nombres réels, en particulier à l'objet racine carrée. L'objectif de l'étude épistémologique de Bronner est de mettre en évidence les conditions et les contraintes de la constitution de rapports au savoir nombre réel, en particulier les obstacles épistémologiques de l'acquisition de la notion des nombres réels.

Les rapports aux nombres réels et à la racine carrée sont étudiés, par Bronner, selon les courants historiques et les problématiques suivantes :

> - Le courant numéricien et les problématiques du calcul approché ;
> - Le courant algébrique formel et la problématique du calcul exact ;
> - La modélisation des grandeurs (l'approche euclidienne et celle de Descartes) ;
> - L'arithmétisation des nombres réels.
>
> (Op. cité, p. 10)

L'étude de Bronner montre que le dépassement des obstacles liés à « la crise des incommensurables » représente une problématique centrale dans les différents courants. Les nombres accèdent au statut numérique par l'instauration de nouveaux rapports, « un système axiomatisé de nombres », dans les constructions des nombres réels de la fin du 19e siècle.

> Les fondements des théories précédentes, se trouvant mal assurées et trop dépendants de la géométrie, amènent un nouveau rapport au nombre – un système axiomatisé de nombres- qui servira de base aux mathématiques modernes, et notamment au domaine de l'analyse. (Op. cité, p. 45)

Cette citation sous-entend aussi un lien historique, *qu'il reste à mettre en évidence*, entre la notion de nombre et certaines notions de l'analyse, en particulier la notion de limite.

• *Hypothèse sur les obstacles communs entre la notion de limite et celle de nombre réel*

Dans son étude de 1985, Margolinas part de l'hypothèse que des difficultés sur l'introduction de l'analyse au lycée attestées dans les travaux contemporains sur la notion de limite comme Berthelot (1983), Robert (1982), Cornu (1982) et Sierpinska (1985)… peuvent être rencontrées dès l'introduction des nombres réels au collège.

> […] Or de nombreux travaux sur les débuts de l'analyse nous ont montré de graves difficultés […]
> Nous avons pensé que certaines erreurs constatées au cours de l'apprentissage de l'analyse réelle pourraient se révéler dès l'introduction des nombres réels. Et que la mise en relation de ces erreurs avec d'autres aptitudes dans le domaine numérique pourrait éclairer leur nature (en particulier : difficulté ou obstacles). (Op. cité, p. 3)

Cela permet à Margolinas d'interroger la nature de ces difficultés : sont-ils des obstacles épistémologiques ou simplement des difficultés ?

• *Ecriture décimale et l'infini : mise en commun du rationnel et l'irrationnel*

Margolinas (1985) pose la question de la signification d'une notation numérique relativement à la théorie où cette écriture prend place :

> Les écritures numériques sont donc souvent les fruits de théories mathématiques. Mais n'en sont –elles pas alors également les « agents » ? Utiliser une notation numérique nous place dans une théorie plutôt qu'une autre. Le choix de l'écriture contient un choix (implicite) d'une conception mathématique des nombres. (Op. cité, p. 6)

Toujours selon Margolinas, la représentation décimale des nombres perfectionnée par Stevin (1585) réunit rationnel et irrationnel *via* les écritures décimales illimités.

> En effet, grâce à la numération décimale, Stevin nous donnera des techniques, tant de calcul approché de racine carré, que de calcul approché de division. Une division qui ne finit pas est elle plus scandaleuse qu'une extraction de racine qui ne finit pas ? Du point de vue de la numération décimale, les fractions ne sont pas moins entachées d'infini que ne le sont les racines. La problématique qui entraîna la « crise des irrationnels » n'a donc plus d'objet. (Op. cité, p. 8).

Cette citation souligne aussi que la « crise des irrationnels » est en fait liée à une problématique de l'infini.

Dans le cas particulier de **R**, l'ensemble $\mathbf{D_\infty}$ (présenté par Margolinas) - « Toute suite de chiffres définie vers la droite et comportant une virgule » (Lebesgue 1975) – permet de représenter les nombres réels. Pour que chaque nombre possède une écriture décimale illimitée unique dans $\mathbf{D_\infty}$, il faut identifier les écritures du type $1,\overline{9} = 2,\overline{0}$ (un décimal a deux écritures décimales illimitées) :

> Par ailleurs, si les nombres naturels peuvent s'écrire comme des décimaux et les décimaux comme des rationnels, les rationnels ne peuvent plus s'écrire que dans D_∞. Leur écriture n'y est plus unique puisque $1,\overline{9} = 2,\overline{0}$. Mais on peut considérer, par exemple, les nombres comportant la période 9 comme « non canoniques » pour avoir une représentation unique. Leur écriture est dans D_∞, on peut la rendre finie, car les développements étant périodiques, une simple notation (comme la barre ci-dessus), ajoutée à la notation décimale permet l'écriture. (Op. cité, p. 9)

La non dénombrabilité caractérisant **R** par rapport à **Q** permet à Margolinas de souligner l'impossibilité de représenter les nombres réels (en fait, les nombres irrationnels) par des

écritures décimales « finies » contrairement au cas de la périodicité des nombres rationnels :

> Nous avons donc pu écrire, avec une écriture décimale achevé, tous les nombres rationnels, et donc décimaux et naturels. Or, nous ne pouvons pas écrire tous les nombres réels à partir d'en ensemble fini de signes. En effet, R étant non dénombrable, une telle notation est impossible, car si elle l'était, il suffirait d'ordonner ces signes pour pouvoir les compter, ce qui est contradictoire. (Op. cité, p. 9)

Cela nous montre que l'écriture *infini – fini* existe seulement dans la représentation des nombres rationnels par des EDI.

b. Rapport aux nombres définies par les EDI au niveau collège dans l'EMS en France dans et juste après de la période Réforme Mathématiques Modernes

• *Rapports à l'ordre sur les nombres réels via les EDI*

Pour la question posée par Izorche (1977) « Dans **R**, quel est le nombre qui précède 4 ? » (Question 15), la réponse par $3,\overline{9}$ se trouve le plus souvent (38,9%)

Avec la question 9.2 de Margolinas (1985) :

> Y-a-t-il un plus grand nombre de l'intervalle [2 ; 3[?
> ☐ Oui, et c'est …
> ☐ Oui, mais je ne sais pas lequel.
> ☐ Non. Parce que……..
> (deuxième partie de la question 9, p. 67)

La plupart des élèves (64,4%) répondent « oui » et donne le plus souvent l'écriture « $2,\overline{9}$ » (26,5%).

De plus, tous les élèves ont répondu « plus petit » dans la première partie de la question 10 de Margolinas :

> Le nombre $0,\overline{9}$ est :
> ☐ égal au nombre 1.
> ☐ plus petit que le nombre 1.
> ☐ plus grand que le nombre 1.

Cela montre une absence d'identification du type « $2,\overline{9} = 3$ » dans le rapport personnel aux EDI au niveau collège dans les périodes où les nombres réels sont définies par les EDI. De plus, l'ordre discret de D_i est prolongé aux EDI.

• *Rapports aux opérations sur les nombres réels via les EDI*

A propos des opérations sur les écritures décimales illimitées périodiques (EDIP), Margolinas propose les questions suivantes :

> Ecris à ta manière le résultat de l'opération :
> $1,\overline{4} + 3,\overline{7} = \ldots$
> (Question 8, p. 64)

> Quel est le résultat de l'opération
> $1 - 0,\overline{9} = \ldots$
> Si vous ne pouvez pas répondre, expliquez pourquoi :
> ……
> (Question 10.2, p. 75)

Seulement 8,8% et 2,4% des élèves répondent correctement à la question 8 (par « $5,\overline{2}$ ») et à la question 10.2 (par « 0 »). Les réponses « décimale barre », $5,\overline{1}$ pour la question 8 et

$0,\overline{1}$ pour la question 10.2, se trouve le plus souvent (32,6 % pour question 8 et 41,5% pour la question 10.2). Cela montre un prolongement des opérations des nombres décimaux aux EDIP.

Par ailleurs, autour de 15% des élèves élaborent des réponses de type *infini – fini*, appelé « infinitésimales » par Margolinas : $5,\overline{2}\,1$ pour la question 8 et $0,\overline{0}\,1$ pour la question 10.2.

L'entretien avec 7 binômes d'élèves de 3e et 2e permet à Margolinas de mettre en lumière le rapport personnel des élèves à cette écriture *infini –fini*. Par exemple, à la question « que veut dire le 1 dans l'écriture $5,\overline{2}\,1$? » :

> Sadrine : « il sera toujours en dernier, il viendra après le 2. »
> Irène : « Ben oui, il y aura une infinité de 2 et toujours 1 à la fin. »
> Sandrine : « Y aura toujours une infinité de 2, et toujours un 1 qui suivra les 2. »
> (Margolinas 1988, p. 60)

c. En résumé

Le dépassement de la « la crise des incommensurables » par l'axiomatisation des nombres à la fin du 19e siècle fonde la base de l'analyse moderne. Cela montre un lien historique entre le nombre et les objets de l'analyse.

L'étude de la décimalisation des nombres réels chez Stevin (1585) (par les écritures décimales) permet à Margolinas (1985) de mettre en lumière le point commun entre les commensurables et incommensurables : l'infini. Cela permet de s'interroger sur l'existence de difficultés communes liées à l'infini entre les notions de limite et de nombres.

Les questions de Izorche et Margolinas sur la notion de nombre réel via les EDI mettent à l'épreuve l'hypothèse que l'introduction des nombres réels *via* les écritures décimales peut faire apparaître des problématiques sur l'infini lié à l'obstacle principal de la notion de limite, l'« Horror Infiniti », et sur le statut numérique des EDI (par exemple $2,\overline{9}$ ou $5,\overline{2}\,1$ ou $0,\overline{0}\,1$).

Conclusion et nouvelles questions

Les travaux sur la notion de limite et la notion de nombre réel révèlent une relation dialectique entre la notion de nombre réel et la notion de limite qu'il nous faut mettre en évidence en particulier : place et rôle de la notion de borne supérieure, de l'axiome des intervalles emboîtés et des écritures décimales dans la constructions des nombres par la notion de limite.

D'où, un nouveau questionnement :

- première question : dans la sphère savante, quelles relations entretiennent la notion de limite, la construction des nombres réels et la décimalisation des nombres réels ?

- deuxième question : ces relations sont-elles présentes dans l'enseignement des mathématiques au Viêt-nam ? Si oui, comment ? Sinon pourquoi ?

- troisième question : une reprise de notre ingénierie précédente (Le Thai Bao, 2004) cherchera à prendre en compte la double construction de la notion de limite et la notion de nombre réel. Cette double construction peut-elle utiliser l'outil suite numérique, sa limite et les écritures décimales illimitées, dans un environnement calculatrice ? Si oui, comment ?

Chapitre A2
Enquête épistémologique : relations entre la notion de limite, la construction des nombres réels et la décimalisation des réels

Les travaux que nous avons pris comme référence (chapitre A1) débouchent sur des résultats épistémologiques indépendants sur chacune des notions, limite et nombres. Les résultats concernant la notion de limite sont nombreux : obstacles épistémologiques de Cornu (1983) et Sierpinska (1985) ; différentes problématiques de la notion de limite de Bkouche(1996) et Trouche (1996) et enfin OM de référence de Bosch et al. (2002).

C'est pourquoi, nous nous restreignons dans ce chapitre à donner des éléments de réponse à la question épistémologique suivante :

Quelles relations entretiennent entre-elles la construction des nombres réels, la notion de limite et la décimalisation des nombres réels (écritures décimales illimitées) ?

I. De l'étude mathématique vers une étude épistémologique

Il y a beaucoup de manières de définir ou de construire mathématiquement l'ensemble des nombres réels. Dans ce sens, nous reprendrons à notre compte la conclusion de Brousseau (1998) à propos des décimaux :

> Elles [ces constructions et définitions] diffèrent par le choix de ce que l'on considère connu comme objets mathématiques et comme méthode de démonstration, mais leurs résultat est le même, en ce sens qu'il existe un moyen de montrer l'équivalence, l'isomorphisme des structures obtenues. (Op. cité, p. 201).

Il convient de dire que **R** est unique, à un isomorphisme près, moyennant le respect de trois structures essentielles : structure algébrique de corps commutatif (pour les opérations +, ×), structure d'ordre total permettant la comparaison des réels et structure topologique qui porte sur les propriétés invariantes par applications continues. Ces trois structures ne sont pas indépendantes, mais sont « compatibles »[1] entre elles. En ce qui concerne la notion de limite, la compatibilité entre la structure topologique et les deux autres structures permet de travailler sur les voisinages d'éléments de **R** au lieu de travailler directement sur ces éléments.

[1] Bourbaki (1960) définit **R** comme groupe topologique complété du groupe additif **Q** où il y a deux compatibilités structurées :
- La première est la compatibilité entre structure algébrique de groupe et structure topologique que Bourbaki définit (p. 10) par le fait que l'application, $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$, est continue. Cette compatibilité est construite à partir de la notion de limite. Bourbaki définit antérieurement la notion de limite à partir de celle de filtre de voisinages ; c'est-à-dire que cette compatibilité peut être définie en termes de voisinages ou d'une base de filtres de voisinages (cela est montré dans la proposition 1, p. 12).
- La deuxième est la compatibilité entre structure algébrique et structure d'ordre, structures prolongées des structures dans **Q**, par exemple : $x \leq y$ équivaut à $x + z \leq y + z$ pour tout z de **R** (on peut trouver à la page p. 129).
Dans cette construction, **R** est muni de l'axiome d'Archimède et de la propriété de la borne supérieure, appelées propriétés topologiques fondamentales (pp. 135 - 137). En fait, ces deux propriétés caractérisent la continuité de **R**. La propriété, dite axiome d'Archimède, est prolongée de **Q** (en fait, à partir de l'ensemble des naturels **N**) et la propriété de la borne supérieure caractérise le complétude de **R** par rapport à **Q**.

La compatibilité entre les trois structures (corps commutatif, ordre total, topologie) caractérise **R** comme « complet » : cette propriété topologique fondamentale distingue **R** de l'ensemble des rationnels **Q**. Du point de vue ensembliste, la complétude remplit les « trous » de **Q** par les irrationnels. Dans certaines définitions de **R**, la relation de la notion de limite avec la propriété de complétude pour caractériser la continuité de **R**, est mise en avant : par exemple dans la construction par les suites de Cauchy. Mais dans d'autres, cette relation est plus ou moins occultée : par exemple dans la définition axiomatique de **R** d'après Hilbert.

On peut donc arriver, à partir de constructions différentes, à la complétude de **R**, c'est-à-dire à la cohérence entre la complétude et la notion de limite. Cependant, il nous faut apporter un éclairage épistémologique sur cette relation : notre projet est donc d'analyser les principales constructions des nombres réels dans l'histoire, les liens épistémologique existant entre elles afin de mettre en évidence la relation entre ces constructions et la notion de limite.

Nous nous intéressons ici à trois moments cruciaux vis-à-vis des constructions des théories des nombres dans l'histoire de l'évolution du statut numérique des nombres réels :

1ième moment : La construction de la théorie des rapports des grandeurs chez Euclide.

2ième moment : La co-évolution du statut numérique des réels et de la notion de limite, de Stevin à Cauchy

3ième moment : les constructions de l'ensemble des nombres réels de Dedekind, de Cantor, de Méray et de Tannery. L'axiomatisation d'après Hilbert.

II. Principales constructions de R dans l'histoire et relations avec le concept de limite

II.1. La théorie des rapports des grandeurs chez Euclide

Les nombres apparaissent ici de façon protomathématique comme des rapports de grandeurs, commensurables et incommensurables. D'après Bourbaki (1969), « toute mesure de grandeurs implique une notion confuse de nombre réel » (p. 184). Le problème de l'incommensurabilité des grandeurs (comme le rapport de la diagonale d'un carré à son côté ou le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre) a organisé une première rencontre avec des prémisses de la notion de limite dans des problèmes géométriques.

a. Construction des rapports

Une théorie des rapports des grandeurs se trouve dans le livre 5 des Éléments d'Euclide. Elle s'exprime dans la définition 6 de ce livre comme suit :

> 6. Des grandeurs sont dites être en même raison[2], la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

Des auteurs contemporains, comme Dhombres (1978), Cousquer (1995), traduisent cette définition en langage moderne par une relation binaire :

[2] Dans langage actuel, on utilise plus souvent le mot « rapport » d'après Dhombres (1978, p. 33).

Soient quatre grandeurs A, B, C et D. On dit que A et B ont même rapport que C et D lorsque, pour tous entiers n et m, on a les implications suivantes selon les trois seuls cas possibles :

Si $nA > mB$ alors $nC > mD$.
Si $nA = mB$ alors $nC = mD$.
Si $nA < mB$ alors $nC < mD$.

Les rapports sont donc construits par la notion d'égalité entre deux rapports, les propositions de ce livre permettent d'opérer sur les rapports[3].

b. Ordre total sur des rapports de grandeurs

Un ordre total sur les rapports est caractérisé dans la définition 8 du livre 5 d'Euclide :

> 8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

En langage actuel, cette définition veut dire que s'il existe deux naturels n et m tel que $nA > mB$, et $nC < mD$ alors $C/D < A/B$. Cela équivaut à un autre énoncé qui permet de comparer deux rapports quelconques par l'intermédiaire du rapport des naturels m/n : $C/D < A/B$ s'il existe un rapport de naturels m/n tel que $C/D < m/n < A/B$.

c. Opérations sur des rapports et statut numérique

Nous reprenons la conclusion de Dhombres (1978) : les opérations d'addition et de multiplication sur les rapports d'Euclide ne sont pas totalement établies. Les rapports d'Euclide ne prennent donc que partiellement un statut numérique :

> Limitativement à nos yeux, Euclide fonde la mesure des grandeurs mais ne veut nullement construire un corps de nombres, c'est-à-dire un ensemble muni à la fois d'une addition et d'une multiplication. (Op. cité, p. 57).

En analysant les livres d'Euclide à l'aide des outils mathématiques modernes, Dhombres (1978) montre qu'avec tout le matériel d'Euclide, on ne peut munir l'ensemble des rapports, **G**, que de la structure d'un sous demi-corps de **R**. Il manque dans la théorie euclidienne un élément important de l'analyse, que Dhombres appelle condition de maximalité. Bronner (1997) le résume ainsi dans sa thèse :

> Il n'y aucune condition de maximalité dans les Éléments d'Euclide : propriété de la borne supérieure, complétude au sens des suites de Cauchy,… […] (Op. cité, p. 32)

d. Rapports incommensurables

On peut trouver, dans le livre X d'Euclide, une tentative de classification des rapports incommensurables. Cette tentative atteste que la construction des rapports d'Euclide est une extension des rapports de naturels. Bronner le mentionne aussi dans sa thèse :

> La préoccupation d'Euclide est essentiellement théorique et permet d'envisager des rapports de grandeurs commensurables ou incommensurables. (Ibid., p. 31)

Cependant, d'après Dhombres, Euclide n'a pas beaucoup travaillé sur les rapports irrationnels. « Les nombres irrationnels ne sont pas des objets institutionnels dans

[3] On peut trouver une analyse complète de livre V dans Dhombres (1978)

l'institution grecque euclidienne » affirme Bronner (1997, p.35) en conclusion de son analyse épistémologique.

e. Méthode d'exhaustion pour démontrer l'égalité des rapports et éléments de la notion de limite

On trouve dans la proposition 1 du livre X d'Euclide un élément de la notion de convergence :

> Proposition 1 (livre X) : Soient deux grandeurs inégales. Si l'on soustrait de la plus grande une grandeur supérieure à sa moitié et de ce qui reste une grandeur supérieure à la moitié de ce reste, et si l'on répète continuellement le procédé, alors il restera une grandeur inférieure à la plus petite grandeur envisagée.

D'après Cornu (1983), cette proposition veut dire que « par des divisions par 2 successives, on peut rendre une grandeur aussi petite qu'on veut » (p. 41). On trouve ici la conception d'une grandeur devenant aussi petite que l'on veut et pouvant être rapprochée du ε de la notion de limite actuelle.

Euclide, dans le livre XII, démontre la propriété sur le rapport des aires « les aires de deux cercles ont un rapport double de celle des diamètres », en utilisant la méthode d'exhaustion qui s'appuie sur la proposition 1 du livre X et sur le raisonnement par l'absurde.

Euclide démontre d'abord cette propriété pour les polygones réguliers : « des polygones semblables inscrits dans des cercles ont des aires qui sont en rapport double de celle des diamètres correspondants ». Il s'agit de démontrer l'égalité des rapports des aires des cercles S_1/S_2 à des carrés des diamètres $(d_1/d_2)^2$.

Euclide distingue trois cas : $S_1/S_2 < (d_1/d_2)^2$, $S_1/S_2 > (d_1/d_2)^2$ ou $S_1/S_2 = (d_1/d_2)^2$.

Il élimine les deux premiers cas en utilisant la proposition 1 pour les amener à une contradiction.

La méthode d'exhaustion est beaucoup utilisée par Archimède, pas exemple pour démontrer l'égalité du rapport de l'aire d'un cercle au carré de son rayon (S/R^2) à celui du périmètre de ce cercle à son diamètre, et pour encadrer π : $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$.

La méthode d'exhaustion met en place le raisonnement par l'absurde pour éviter le passage à l'infini, c'est-à-dire la notion de limite. Dumont (1992, p. 85) résume cette méthode en donnant les étapes de la démonstration de l'équivalence de deux surfaces S et Σ :

> 1. Si S n'est pas équivalente à Σ, elle est plus grande ou plus petite.
> 2. Qu'elle soit d'abord plus grande.
> On peut donc former la différence S - Σ, et construire, d'après la proposition 1 du livre 10, une grandeur plus petite que S - Σ, pour aboutir à une première contradiction.
> 3. Qu'elle soit ensuite plus petite.
> On peut donc former la différence Σ - S, et construire une grandeur plus petite que Σ - S, pour aboutir à une seconde contradiction.
> 4. S n'étant ni plus grande ni plus petite que Σ lui est donc équivalente.

En l'absence de la notion de quantité infiniment petite, la méthode d'exhaustion consiste à montrer que les deux différences S - Σ et Σ - S sont strictement positives et donc équivalentes. Cela correspond à la notion de distance dans la notion de limite.

f. Problématique de l'infini : obstacle commun

Ovaert (1976) distingue la méthode d'exhaustion de la notion de limite par le domaine d'application (les grandeurs pour la première, les nombres pour la seconde) :

> Il faut voir aussi que la méthode d'exhaustion s'applique à des grandeurs géométriques, et pas à des nombres. Le concept unificateur de limite sur des nombres n'est pas présent, on ne dispose pas de résultats généraux, et on remet la méthode en œuvre sur chaque exemple, sans avoir dégager véritablement l'outil qui permettrait de résoudre les problèmes de façon plus générale.

Pour Tannery (1886), « l'idée d'infini était sous-jacente à celle de nombre réel ». Or, le terme « infini » est évité dans les Éléments d'Euclide :

> Au terme de l'étude du texte des Éléments, on peut conclure que la théorie s'est débarrassée de toute manipulation sur les développements infinis, de toute considération de l'infini. (Dhombres 1978, p. 109)

Cela va dans le sens de l'hypothèse de Margolinas (1985) sur l'existence d'un obstacle épistémologique commun aux notions de limite et de nombre : celui de la problématique de l'infini.

La relation entre le concept de limite et le concept de nombre, au temps des rapports d'Euclide, reste implicite lors de l'intervention de la méthode d'exhaustion dans la démonstration de l'égalité entre des rapports. Euclide construit des rapports par la relation d'égalité entre rapports concernant l'incommensurable π (propriété de l'aire du cercle, calcul des cercles et des volumes des coniques chez Archimède) et Archimède utilise encore la méthode d'exhaustion pour approcher π.

Nous allons analyser maintenant la relation entre les notions de limite et de nombres dans les moments où l'objet « nombre réel » prend un nouveau statut numérique.

II. 2. Co-évolution du statut numérique des réels et de la notion de limite, de Stevin à Cauchy

Rappelons qu'il manque aux rapports d'Euclide deux éléments importants pour accéder au statut numérique, les opérations et la complétude. Nous allons analyser l'évolution de ces deux éléments depuis Stevin (1585) en reprenant la conclusion de l'analyse épistémologique des nombres décimaux de Brousseau (1998).

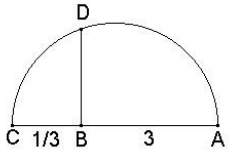
> C'est après Simon Stevin (1585) que le décimal accède au statut de *notion mathématique*. Stevin introduit systématiquement les nombres géométriques et les multinomies – les fonctions polynômes – pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. […] Pour Stevin, « les quantités irrationnels, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres (réels) parce que toutes sont approchables par les nombres décimaux ; il n'a pas écrit cette phrase, mais tout se passe comme s'il l'avait pensée. (Op. cité, p. 207).

a. Construction géométrique des rapports incommensurables et opérations géométriques sur les rapports

• *Construction géométrique des rapports incommensurables chez Stevin (1585)*

Avec la théorie des rapports d'Euclide, Stevin (1585) donne des exemples de constructions de rapports incommensurables qui sont en fait des nombres constructibles, par exemple la construction du rapport $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Explication du donné. Soit donné la ligne AB, et les nombres donnez $\sqrt{5}$ et 3. Explication du requis. Il faut trouver une ligne en telle raison à la AB, comme $\sqrt{5}$ à 3.



Construction. On prendra les potences quarrees des nombres donnez, qui sont 9 et 5, puis on produira AB en C, ainsi que AB aie telle raison à BC, comme 9 à 5, puis se trouvera la ligne moienne proportionnelle entre AB et BC, par la 13e proposition du 6e livre d'Euclide, qui soit D. Ie di que BD est la ligne requise, aiant telle raison à la AB, comme $\sqrt{5}$ à 3. (Op. cité)

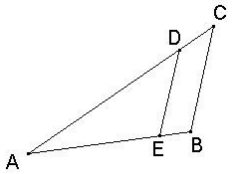
Stevin explicite, ensuite, comment construire sur une longueur une partie incommensurable par rapport à cette longueur en utilisant le théorème de Thalès.

De la ligne droicte donnée, Couper partie requise.

Nota. Ce problème est la 9e proposition 6e livre d'Euclide, la où la requise partie aux exemples de la mesme, est toujours expliquée par nombres Arithmétiques ; Mais l'on peut aussi bien requirer partie à la ligne donnée incommensurable, que commensurable, nous descriprons doncques ici pour parfection d'icelle proposition, la manière de couper parties incommensurables.

Explication du donné et requis. Soit la ligne donnée AB, de laquelle il faut couper sa $\sqrt{1/3}$.

Construction. On menera du point A, quelque ligne AC, faisant quelque angle BAC, posant que la mesure AC face $\sqrt{3}$, nominateur donné ; puis l'on trouvera AD (par précédent problème) en telle raison à AC, comme $\sqrt{1}$ numérateur donné, à $\sqrt{3}$ nominateur donné, puis se menera la ligne CB, et la parallèle DE. Ie di que AE est la requise $\sqrt{1/3}$ de la donné AB ;[…] (Ibid.)[4]



La construction des parties irrationnelles d'une longueur telles que $\frac{\sqrt{5}}{3}$ et $\sqrt{1/3}$ de Stevin contient implicitement celle des opérations géométriques des rapports, tel que $\sqrt{5}\times\frac{1}{3}$, ce qui sera mis en évidence par Descartes.

• *Opérations géométriques sur les rapports chez Descartes (1637)*

On peut trouver dans le livre I de la *Géométrie* de Descartes (1637) les opérations géométriques explicitées sur des rapports qui sont en fait des nombres constructibles.

LIVRE PREMIER
DES PROBLÈMES QU'ON PEUT CONSTRUIRE SANS Y EMPLOYER QUE DES CERCLES ET DES LIGNES DROITES.

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

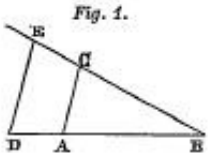
Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les

[4] C'est nous qui soulignons.

lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

Soit, par exemple, AB (fig.1) l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC,

Fig. 1.

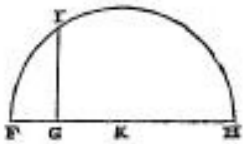


je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH (fig.2), je lui ajoute en ligne

Fig. 2.



droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après. (Op. cité)[5]

L'objet nombre réel s'appuie maintenant sur la géométrie comme support essentiel pour accéder au nouveau statut numérique.

• *Statut paramathématique numérique des rapports*

Avec les constructions des parties incommensurables d'une longueur de Stevin et des opérations géométriques de Descartes, les rapports s'enrichissent du point de vue numérique par rapport au temps d'Euclide. Cependant, l'ensemble des rapports pris en compte reste plutôt celui du corps des nombres constructibles et, d'après Dhombres (1978), la continuité de l'ensemble des rapports abordés passe par l'intuition géométrique.

Toutefois, l'image du nombre continu ne reste pas dans l'abstrait eudoxien, mais s'incarne dans la ligne géométrique. (Op. cité, p. 162)

Il est intéressant de noter la formalisation des opérations géométriques dans une écriture littérale chez Descartes qui permet de mettre en place un nouveau statut numérique dans les problèmes algébriques et géométriques.

Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme

[5] C'est nous qui soulignons.

> l'une a et l'autre b, et écris $a + b$; et $a - b$ pour soustraire b de a ; et ab pour les multiplier l'une par l'autre ; et $\frac{a}{b}$ pour diviser a par b ; et $a.a$ ou a^2 pour multiplier a par soi-même ; et a^3 pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini ; et $\sqrt{a^2+b^2}$ pour tirer la racine carrée de $a^2 + b^2$; et $\sqrt{C.a^3-b^3+ab^2}$, pour tirer la racine cubique de $a^3 - b^3 + ab^2$, et ainsi des autres. (Ibid.)

En plus, la constructibilité des parties irrationnelles d'une longueur amène Stevin à souligner l'indifférenciation entre incommensurable et commensurable et à tout expliquer par l'unificateur « nombre ».

> Par exemple, nous savons que 1 est incommensurable à $\sqrt{2}$, mais comme 1 à $\sqrt{2}$, ainsi le côté du carré de la diagonale, par quoi le côté du carrée est incommensurable à sa diagonale, ce qui nous serait impossible à savoir sans les nombres. (Ibid.)

C'est pourquoi, pour Stevin :

> Qu'il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables, ou sourds. (Ibid.)

De cela, en accord avec Brousseau (1998) et Dhombres (1995), nous concluons que les nombres réels prennent un statut numérique *paramathématique* grâce aux opérations basées sur une construction géométrique : Stevin utilise la notion de nombre comme outil unificateur dans des problèmes algébriques et géométriques.

> Stevin dépasse, en fait, l'exposé cartésien, car il utilise, selon ses besoins, algèbre numérique ou géométrie […]. (Dhombres 1995, p. 569)

b. Conditions de l'évolution de la notion de limite : « les rapport sont –ils des nombres ? »

Le point de vue de Stevin est donc que tout rapport est un nombre. Pour Brousseau (1998) ce point de vue revient à l'approximation décimale de tout nombre.

> Pour Stevin, « les quantités irrationnels, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres (réels) parce que toutes sont approchables par les nombres décimaux ; il n'a pas écrit cette phase, mais tout se passe comme s'il l'avait pensée. (Op. cité, p. 207)

Cependant, les nombres décimaux ne vont pas jouer pas un rôle central pour construire les nombres réels à ce moment-là et jusqu'aux constructions de Dedekind et de Cantor à la fin du XIXe siècle. Ce sont les nombres rationnels qui vont occuper alors la place essentielle. Cela peut s'expliquer par des raisons qui ne seront dégagées que bien plus tard : la « bonne structure » de l'ensemble des rationnels – structure de corps commutatif, alors que l'ensemble des décimaux n'est qu'un anneau unitaire.

L'approximation des irrationnels par des nombres rationnels dans différents problèmes va faire évoluer la notion de limite et le débat sur la question : *les rapports sont-ils des nombres ?*

• *Nombres et modèle monotone de la notion de limite chez Newton (1642-1727)*

D'après Cornu (1982), « chez Newton (1642-1727), on trouve une réflexion très approfondie sur le concept de limite » (p. 632). En effet, la notion de limite est à la base de la méthode des fluxions de Newton (1671). Dans ce traité, la notion de limite est définie comme un rapport abstrait, « un rapport ultime ».

> Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement les rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités décroissant sans limite s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi

> près que toute différence donnée, mais qu'ils ne peuvent jamais dépasser ou atteindre avant que les quantités soient diminuées indéfiniment. (Op. Omnia, I, p. 251)

Pour Newton, le nombre est aussi « un rapport abstrait ».

> On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le nombre est de trois espèces, l'entier, la fractionnaire et le sourd. L'entier est mesuré par l'unité ; la fractionnaire par un sous-multiple de l'unité ; le sourd est incommensurable avec l'unité. (Newton 1707)

On peut dire que, pour Newton, un « nombre » ou une « limite » est un rapport abstrait.

• *Nombres et modèle monotone de la notion de limite chez D'Alembert (1717-1783)*

D'après Cornu (1982), « D'Alembert (1717-1783) introduit de façon précise la notion de limite, car il veut éviter les difficultés dues aux infiniment petits et aux infiniment grands » (p. 636). Voici la définition dans l'*Encyclopédie Diderot et D'Alembert* :

> On dit qu'une grandeur est la limite une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable.

Où le fait qu'une quantité ne peut pas devenir égale à sa limite est souligné.

> A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus et peut en différer aussi peu qu'on voudra. (Ibid.)

Au contraire du point de vue de Newton, D'Alembert ne considère comme nombre que les rapports commensurables.

> Les nombres commensurables sont proprement les seuls et vrais nombres. En effet, tout nombre renferme l'idée d'un rapport […] et tout rapport réel entre deux quantités suppose une partie aliquote qui leur soit commune […] $\sqrt{2}$ n'est point un nombre proprement dit, c'est une quantité qui n'existe point, et qu'il est impossible de trouver. Les fractions même ne sont des nombres commensurables, que parce que ces fractions représentent proprement des entiers […]. (Ibid.)

Cependant d'autres, comme Newton ou Stevin, considèrent comme nombre un rapport incommensurable parce qu'il est limite de rationnels d'après l'explication suivante de D'Alembert.

> De là il est aisé de voir que si les rapports incommensurables sont regardés comme des nombres, c'est par la raison que s'ils ne sont pas des nombres, il ne s'en faut de rien pour ainsi dire, qu'ils n'en soient réellement, <u>puisque la différence d'un rapport incommensurable à un nombre proprement dit, peut être aussi petite que l'on voudra</u>. (Ibid.)[6]

Si la discrimination entre irrationnel et rationnel conduit à concevoir l'irrationnel comme n'étant pas un nombre, considérer une quantité irrationnelle comme *limite de nombres rationnels* tend à lui attribuer un statut de nombre.

• *Nombres et perfectionnement de la notion de limite chez Cauchy (1821)*

Le nombre, pour Cauchy (1821) dans la partie Analyse Algébrique, est la mesure d'une grandeur comparée à son unité. En faisant précéder le nombre d'un signe (+ ou -), on

[6] C'est nous qui soulignons.

obtient une quantité qui exprime l'accroissement (pour le signe +) ou la diminution (pour le signe -) ; Cauchy introduit ainsi l'ensemble des nombres positifs et négatifs.

> Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en *Arithmétique*, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire aux nombres précédés des signes + ou –. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions ; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou signe –, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce. (Op. cité, p. 17)

Par les notions d'accroissement et de diminution, Cauchy pose le problème des opérations sur ces objets, accroissements et diminutions, pas exemple pour l'addition :

> En partant de ces principes, il est facile de rendre compte des diverses opérations que l'on peut faire subir aux quantités. Par exemple, deux quantités étant données, on pourra toujours en trouver une troisième qui, prise pour accroissement d'un nombre fixe, si elle est positive, et pour diminution dans le cas contraire, conduise au même résultat que les deux quantités données, employées l'une après l'autre à pareil usage. Cette troisième quantité, qui à elle seule produit le même effet que les deux autres, est ce qu'on appelle leur *somme*, Ainsi les deux quantités -10 et +7 ont pour somme -3, attendu qu'une diminution de 10 unités, jointe à une augmentation de 7 unités, équivaut à une diminution de 3 unités. *Ajouter* deux quantités, c'est former leur somme. La différence entre une première quantité et une seconde, c'est une troisième quantité qui, ajoutée à la seconde, reproduit la première. (Ibid., p. 18)

Cela permet à Cauchy de définir la notion de limite du point de vue de l'« approximation »[7]. Cauchy n'utilise pas de termes ε et δ. En fait, il précise ce que signifie « une variable *x* tend vers une valeur *a* ».

> Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc. (Ibid., p. 19)

On peut considérer que l'attribution d'une valeur numérique est une relation fonctionnelle. Pour Lakatos, la définition de Cauchy est celle de la notion de convergence des suites numériques.

> Strictly, Cauchy's variables are consequence of Weierstrassian reals. (Lakatos, 1978, p.48).

Cauchy définit ensuite la notion de série numérique en relation avec celle de fonction et les notions de convergence et de divergence d'une série.

> On appelle *série* une suite indéfinie de quantités
>
> $u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots$
>
> qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit :
>
> $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$
>
> La somme des *n* premiers termes, *n* désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de *n* toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite *s*,

[7] Ce qui est référé de Bkouche (1996) :

> la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croit indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complètement déterminée. (Ibid., p. 114)

Pourtant, les notions de série et de suite numérique sont équivalentes puisque tout suite numérique peut s'écrire comme la série :

Soit une suite $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n\ldots$ On prend $u_0 = S_1 - S_0, \ldots, u_{n-1} = S_n - S_{n-1}, \ldots$ Donc $S_n = u_{n-1} + S_{n-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ (pour tout $n > 0$).

Une série de Cauchy est formée par « une suite indéfinie de quantités u_0, u_1, u_2, $u_3\ldots$ », nombres positifs et négatifs ; la conception de la notion de limite n'est pas limitée ici au cas monotone.

Avec l'évolution de la notion de limite d'une suite numérique, on peut dire que le rapport d'une grandeur à son unité en tant que mesure de cette grandeur est, pour Cauchy, un nombre.

c. Résume de la co-évolution du statut numérique des réels et de la notion de limite d'Euclide à Cauchy

Moment	Nombre en tant que rapport	Relation entre nombre et limite	Evolution de la notion de limite
Euclide	*Notion protomathématique* des nombres réels Statut numérique : ordre total, sans opérations, sans complétude		
	- Construction des rapports par la relation d'égalité - Existence de rapports commensurables et incommensurables. - Irrationnel : pas objet d'étude	Méthode d'exhaustion comme outil pour montrer l'égalité entre deux rapports et pour faire certains calculs approchés	Méthode d'exhaustion : grandeur devenant aussi petite que l'on veut (*approximation monotone*)
Stevin 1585	*Notion paramathématique* des nombres réels Statut numérique : ordre total, opérations géométriques, continu géométrique		
	Rapport = Nombre	Tout rapport est approchable par des décimaux	Approximation décimale
Newton 1642-1727	Nombre = Rapport abstrait.	Nombre ou « limite » = Rapport abstrait	Méthode des fluxions : rapport ultime de deux quantités infiniment décroissantes. (*approximation monotone*)
D'Alembert 1717-1783	- Rapport commensurable = Nombre - Incommensurable $\neq$ nombre	Irrationnel = Limite de rationnels	Notion de limite d'une grandeur : approcher comme l'on veut mais sans surpasser. (*approximation monotone*)
Cauchy 1821	- Rapport = Nombre. - Nombre avec les signes (+/-) = Quantité. $\Rightarrow$ Ensemble des nombres positifs et négatifs	On sait exactement ce que veut dire : « a est la limite de (x_n) ».	Notion de limite d'une suite numérique du point de vue de l'*approximation non monotone*

Tableau 1. Co-évolution du statut numérique des réels et de la notion de limite

Nous allons analyser maintenant le rôle de la notion de limite dans les constructions modernes des nombres réels à la fin de 19e après le perfectionnement de la notion de limite de suite numérique entrepris par Cauchy (1821).

II.3. Constructions des réels à la fin de 19e siècle : *notion mathématique* des nombres réels

a. Critère de Cauchy et question de l'existence des nombres réels

L'équivalence des notions de suite et de série nous permet de considérer que le critère établi par Cauchy (1821) pour la convergence d'une série joue aussi le rôle d'un critère de convergence d'une suite numérique. Voici ce critère :

> D'après les principes ci- dessus établis, pour que la série
>
> $$(1)\ u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$$
>
> soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme
>
> $$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$
>
> vers un limite fixe s ; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes
>
> $$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$$
>
> différent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations
>
> $$s_{n+1} - s_n = u_n,$$
> $$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$
> $$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
> ……..
>
> Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente ; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes
>
> $$u_n + u_{n+1},$$
> $$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
> …….,
>
> c'est-à-dire les sommes des quantités
>
> $$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots,$$
>
> prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. <u>Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.</u> (Op. cité, pp. 115-116)

Ce critère énonce donc que pour qu'une suite numérique (s_n) soit convergente, il faut et il suffit que la différence entre s_{n+p} et s_n, c'est-à-dire la valeur absolue $|s_{n+p} - s_n|$ (non explicitée chez Cauchy) devienne aussi petite que l'on veut, si n est suffisamment grand.

Cependant, le problème de l'existence d'un nombre réel comme limite d'une suite de Cauchy n'est pas posé. Dans la citation supra, Cauchy parle d'une suite (s_n) dont la limite est déjà connue.

En outre, Cauchy définit la notion de continuité d'une fonction sur un intervalle :

> Soit *f(x)* une fonction de la variable *x*, et supposons que, pour chaque valeur de *x* intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de *x* comprise entre ces limites, on attribue à la valeur *x* un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence
>
> $$f(x+\alpha) - f(x),$$
>
> qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de *x*. Cela posé, la fonction *f(x)* sera, entre les deux limites assignées à la variable *x*, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de *x* intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence
>
> $$f(x+\alpha) - f(x)$$
>
> décroît indéfiniment avec celle de α. […]. (Ibid., p. 43)

Dans la définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle, l'expression « pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données » présuppose le continu de l'intervalle (c'est-à-dire de l'ensemble des nombres réels).

Or, le continu de **R** qui dépend maintenant de l'intuition géométrique n'assure pas l'existence d'un nombre réel comme limite d'une suite de Cauchy.

De plus, le problème de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires indépendant de l'intuition géométrique est posé dans le mémoire de Bolzano (1817).

> Il n'y a absolument rien à objecter, ni contre la *justesse*, ni contre l'*évidence* de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la *bonne méthode* qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques *pures* (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) des considérations qui appartiennent à une partie *appliquée* (ou spéciale) seule, à savoir la *géométrie*. […] (Op. cité, p. 137)

Bolzano démontre ensuite ce théorème dans les deux étapes ci-dessous dont le premier précise la notion de borne supérieur.

> Théorème. – *Si une propriété M n'appartient pas à* toutes *les valeurs d'une grandeur variable* x*, mais appartient à* toutes *celles qui sont* plus petites *qu'un certain u : alors il existe toujours une grandeurs U qui est la plus grande de celles dont on peut affirmer que toutes les valeurs inférieures* x *possèdent la propriété M (1). (Ibid., p.153)*
>
> *Théorème.* – Si deux fonctions de *x*, *f(x)* et *φ(x)*, varient *suivant la loi de continuité* ou bien pour *toutes* les valeurs de *x*, ou bien au moins pour toutes celles qui sont situées entre α et β ; si de plus $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ et $f(\beta) > \varphi(\beta)$: alors il existe toujours un certaine valeur intermédiaire de x entre α et β pour la quelle $f(x) = \varphi(x)$. (Ibid., p. 159)

En analysant les démonstrations de Bolzano, Dhombres (1978) décrit cette démonstration somme suit :

> En posant g(x) = f(x) – b on ramène facilement le problème au suivant : si $g : [x_0, X] \to \mathbf{R}$, $g(x_0) < 0$, $g(X) > 0$ et g continue, il existe au moins un $x \in [x_0, X]$ tels que $g(x) = 0$.
>
> Appelons M(x) la propriété pour un point x de $[x_0, X]$ que $f(y) < 0$ pour tout $y \in [x_0, x]$. Bien entendu, si M(x) est vraie, ainsi en est-il de M(y) pour tout y tel que $x_0 \leq y \leq x$.
>
> Muni de cette seule propriété pour M, Bolzano établit qu'il existe une « quantité » X_0 qui est la borne supérieure des quantités x pour lesquelles M(x) a lieu. En termes modernes, il suffirait de dire que l'ensemble des réels $x \in [x_0, X]$ tels que M(x) soit vraie (ensemble non vide puisqu'il contient x_0 et se trouve majoré par X) possède une borne supérieure.

> Admettons d'abord ce résultat et soit X_0 le nombre réel annoncé. Par continuité et définition de la borne supérieure, on a $g(X_0) \leq 0$. Cependant, pour tout x tel que $X > x > X_0$, il existe x_1 satisfaisant $x > x_1 > X_0$ et $g(x_1) > 0$ par la propriété de définition de X_0. Encore par continuité, on en déduit $g(X_0) \geq 0$. Et donc $g(X_0) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.
>
> Pour établir son résultat de borne supérieure, Bolzano inaugure un raisonnement de découpage dyadique que nous nous contentons de décrire rapidement.
>
> Evidemment, X ne possède pas la propriété M et l'on considère le milieu $\frac{X+x_0}{2}$. Ou bien $\frac{X+x_0}{2}$ possède M et on considère alors le milieu $\frac{1}{2}\left[\frac{X+x_0}{2}+X\right]$, ou bien $\frac{X+x_0}{2}$ ne possède pas M et on considère le milieu $\frac{1}{2}\left[\frac{X+x_0}{2}+x_0\right]$. Quoiqu'il en soit, à la nouvelle étape, on est réduit à déterminer le nombre X_0 cherché dans un intervalle de longueur au plus $\frac{X-x_0}{4}$. <u>En poursuivant cette dichotomie, on construit une famille de segments emboîtés, de longueur $2^{-n}(X-x_0)$, dont chaque extrémité gauche possède la propriété M, l'extrémité droite ne la possèdent pas. Bolzano conclut à la convergence de la suite constituée par les extrémités droites de tels segments.</u>[…]
> (Op. cité, pp. 217 -218)[8]

L'existence d'un nombre réel appartenant à une famille de segments emboîtés (ou limite commune de deux suites adjacentes) est ici présupposée, au contraire du point de vue de Cauchy, comme résultant de la continuité de la fonction *g*.

Le processus historique de la « numérisation »[9] des rapports (particulièrement des rapports géométriques) accompagne l'évolution de la notion de limite. Il ramène le problème de l'existence de la limite réelle pour toute famille de segments emboîtés (ou pour toute suite de Cauchy) à celui de la continuité de l'ensemble des nombres réels indépendamment de l'intuition géométrique.

b. Notion de limite et de borne d'un intervalle

Sierpinska (1985) signale que la méthode d'exhaustion de l'Antiquité exprime plutôt l'idée de la borne d'un ensemble.

> Si aujourd'hui l'idée de limite est étroitement liée à l'opération topologique de fermeture, dans l'institution géométrique elle est, dans certaines situations, plus proche de ce qu'on pourrait appeler la « borne » d'un ensemble. Nous dirions, par exemple, que, chez Archimède, le volume d'un solide est la borne de la somme des volumes des disques qui le remplissent avec une idée de volume qui n'est pas réduite au nombre. Dans le même ordre d'idées, où les mathématiciens se limitaient aux fonctions monotones, la limite borne plutôt l'ensemble qu'elle n'appartient à sa fermeture. (Op. cité, p. 52)

Dans l'étude des « grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite », Cornu (1982) indique que D'Alembert appelle aussi limite les bornes d'un intervalle.

> On notera enfin que le mot limite est aussi employé par D'Alembert pour désigner les bornes d'un intervalle. (Op. cité, p. 637)

[8] C'est nous qui soulignons.
[9] Ce terme est emprunté de Dhombres (1995) pour décrire le processus d'évolution de l'histoire de nombres réels jusqu'avant les constructions de la fin XIX siècle (Dedekind et Cantor, 1872).

Cauchy exprime le même point de vue que D'Alembert dans sa définition de la continuité d'une fonction lors de l'expression « pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données ».

Nous trouvons enfin, dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires de Bolzano, une construction de la notion de borne supérieure pour un intervalle générique, par la limite des suites adjacentes.

Dans ce sens, la notion de borne peut-être liée aux modèles monotones de la notion de limite. Elle est conçue comme limite de suites ou de fonctions monotones.

c. Deux grandes types constructions de R (1872) : par les suites de Cauchy de Cantor (équivalentes à celles de Meray et de Hein) et par les coupures de Dedekind (équivalente à celle de Tannery)

• *Résumé des constructions*

Les constructions de **R** de Dedekind et de Cantor partent de la théorie des ensembles et de connaissances arithmétiques sur les rationnels.

	Dedekind	Cantor
Construction de **R**	Par coupures[10] (C,C') de **Q** tel que C, C' non vides, $C \cup C' = \mathbf{Q}$ et $C \cap C' = \varnothing$ avec un ordre d'inclusion et les opérations ensemblistes[11].	Par classes d'équivalence[12] des suites de Cauchy[13] de rationnels avec une relation d'ordre[14] et les opérations sur les suites.
Caractéristiques	**R** est un corps commutatif ordonné, archimédien et *complet*. L'infini de **R** est appelé *puissance du continu*[15].	
Complétude (continu)	La propriété de la borne supérieure / inférieure.	Propriété : toute suite de Cauchy est convergente.

Tableau 2. Comparaison de constructions de R à partir de Q

• *Relation avec la notion de limite*

Il faut remarquer que, dans la construction de Dedekind, il est suffisant de déterminer une coupure par un couple de deux suites numériques adjacentes de rationnels (u_n, v_n) où $\{u_n\} \subset C$ et $\{v_n\} \subset C'$.

En analysant l'article de Meray (1869), Cousquer (1995) relève une remarque intéressante à propos de l'équivalence entre la convergence de toute suite monotone bornée et celle de toute suite de Cauchy.

> Dans l'article de 1869, C. Meray part de deux principes (que nous présenterons dans le langage actuel) qu'il considère comme des fondements et veut montrer qu'ils sont équivalents :
> - une suite monotone bornée converge vers une limite.

[10] Une coupure est un couple (C, C') des ensembles des nombres rationnels tels que $\forall x \in C, \forall x' \in C' \Rightarrow x < x'$.
[11] Ordre : $(C_1, C'_1) \leq (C_2, C'_2)$ si $C_1 \subset C_2$.
Pour l'addition : $(C_1, C'_1) + (C_2, C'_2) = (C_3, C'_3)$, où $C_3 = \{x \in \mathbf{Q} : x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in C_1$ et $x_2 \in C_2\}$. De même façon, on peut définir la multiplication mais selon une règle de signe plus compliquée.
[12] Relation équivalente: $(x_n) \sim (y_n)$ si, pour tout rationnel $\alpha > 0$, il existe un naturel N : $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - y_n| < \alpha$.
[13] (x_n) est la suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un naturel $N > 0$ tel que, pour tout $m, n \geq N$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$.
[14] Relation d'ordre : $(x_n) \leq (y_n)$ si, il existe un naturel N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $y_n \geq x_n$.
[15] La théorie des cardinaux de Cantor, opposant " dénombrable " à " non dénombrable ", montre que l'infini de **R** est plus "grand " que l'infini du dénombrable de **Q**.

- une suite (v_n) telle que la « *différence* $v_{n+p} - v_n$ *tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, quelque relation qu'on puisse établir entre n et p* » est une suite convergente. (Op.cité, p. 181)

La continuité (ou complétude) de **R** se caractérise donc par l'une des quatre propriétés équivalentes[16] suivantes :

- La propriété de la borne supérieure.
- Toute suite de Cauchy est convergente.
- Toute suite monotone et bornée est convergente.
- Il existe un nombre réel unique appartenant à tous les segments de chaque famille de segments emboîtés.

L'existence de **R** est donc assurée par la convergence de suites numériques, soit de Cauchy, soit monotones bornées, soit adjacentes.

Le nombre réel accède donc au statut de *notion mathématique* grâce à l'unification de trois notions : suite numérique convergente, limite de suite numérique et nombre réel. D'après Boyer (1968), Weierstrass explicite cette unification dans son cours en 1876.

> En fait Weierstrass a corrigé l'erreur logique de Cauchy et résolu le problème de l'existence de la limite d'une suite convergente en admettant la suite elle-même comme étant le nombre ou la limite. (Op. cité, p. 606)

d. Modèle de la droite graduée chez Dedekind et Cantor

Dedekind et Cantor relient leurs constructions des nombres réels à partir de **Q** à la droite de la géométrie.

> Tout comme Dedekind, Cantor explicite la relation entre les nombres réels nouvellement construits et la droite de la géométrie. (Dhombres 1975, p. 227)

Ils représentent d'abord les nombres rationnels sur la droite graduée. Dedekind (1872) relie cette « corrélation » à la mesure des longueurs :

> On sait que cette analogie existant entre les nombres rationnels et les points d'une droite devient une véritable corrélation quand on choisit sur la droite une certain point O, origine ou point zéro, et une certaine unité de longueur pour mesurer les distances. A l'aide de cette dernière, on peut construire pour tout nombre rationnel a une longueur correspondante […] et déterminer un point correspondant […] (Op. cité)

Dedekind met en avant l'existence d'une infinité de lacunes sur la droite graduée une fois représenté tous les nombres rationnels.

> Mais il est un fait de la plus haute importance : c'est qu'il existe sur la droite une infinité de points ne correspondant à aucun nombre rationnel… (Ibid.)

Pour Dedekind, la construction des coupures dans **Q** complète les lacunes de **Q** et assure la continuité de la droite graduée.

---

[16] Avec la présence de l'axiome d'Archimède. En fait : soit *K* un corps totalement ordonné. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) *K* possède la propriété de la borne supérieure.
b) Toute suite d'éléments de *K* croissante et majorée converge
c) *K* est archimédien et possède la propriété que toute suite de Cauchy d'éléments de K est convergente.
d) *K* est archimédien et possède la propriété des segments emboîtés.

On peut trouver la démonstration, par exemple, dans le théorème 10.2 à la page 63 de Boualem –Brouzet (2002)

> Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur la fait que tout point de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque […] (Ibid.)

Quant à Cantor, chaque point sur la droite graduée correspond à au moins une suite de Cauchy des nombres rationnels.

> A tout point de la droite M, on peut associer au moins une suite fondamentale $\{x_n\}_{n\geq 1}$, constituée de nombres rationnels, telle que les points d'abscisse x_n se rapprochent de M lorsque n tend vers l'infini. Réciproquement, Cantor pose en axiome qu'à tout nombre réel (non rationnel) correspond un point de la droite ayant alors ce nombre comme abscisse.[…] De fait l'axiome en question se condense sous la forme, dite de Cantor, *des segments emboîtés*. (Dhombres 1975, p. 227)

L'axiome des segments emboîtés sur la droite graduée assure, pour Cantor, l'existence des points (non rationnels) correspondant au nouveau nombre construit comme limite d'une suite de Cauchy de nombres rationnels. Nous savons aujourd'hui l'équivalence entre la propriété « toute suite de Cauchy est convergente » et la propriété, dite de *l'axiome des segments emboîtés*.

*e. Définition axiomatique de **R** d'après Hilbert (1899)*

• *Système des axiomes*

Une famille de nombres satisfaisant les quatre conditions (a), (b), (c), (d) ci-dessous, est unique à un isomorphisme près, et est appelée ensemble des nombres réels.

> (a) un corps commutatif pour les deux lois + , × ,
> (b) un corps totalement ordonné,
> (c) un groupe ordonné archimédien pour la loi +,
> (d) un système qu'il ne soit pas possible d'agrandir en lui rajoutant des éléments de manière à obtenir un système vérifiant encore (a), (b), (c).

Dans cette axiomatisation, la complétude correspond à la condition (d) dont on ne voit pas directement la relation avec la notion de limite :

> Le point le plus important est le point (d) qui est la forme axiomatisée, abstraite, des recherches de Dedekind et de Cantor sur l'aspect « complet » de **R**. (Dhombres 1978, p. 230)

On peut donc remplacer la condition (d) par l'une des quatre propriétés équivalentes de la complétude.

• *Rôle de l'axiomatisation*

L'axiomatisation permet d'assurer la cohérence des constructions de **R**. En utilisant la notion d'unicité à un isomorphisme près, elle permet de :

- montrer l'équivalence entre les constructions de Dedekind et de Cantor.

- valider d'autres constructions des réels et, en particulier, le modèle de la droite graduée.

II.4. Conclusion sur les principales constructions de R en leur relation avec la notion de limite

Nous schématisons les différentes constructions et définitions des nombres réels et les liens épistémologiques entre elles dans la figure 1.

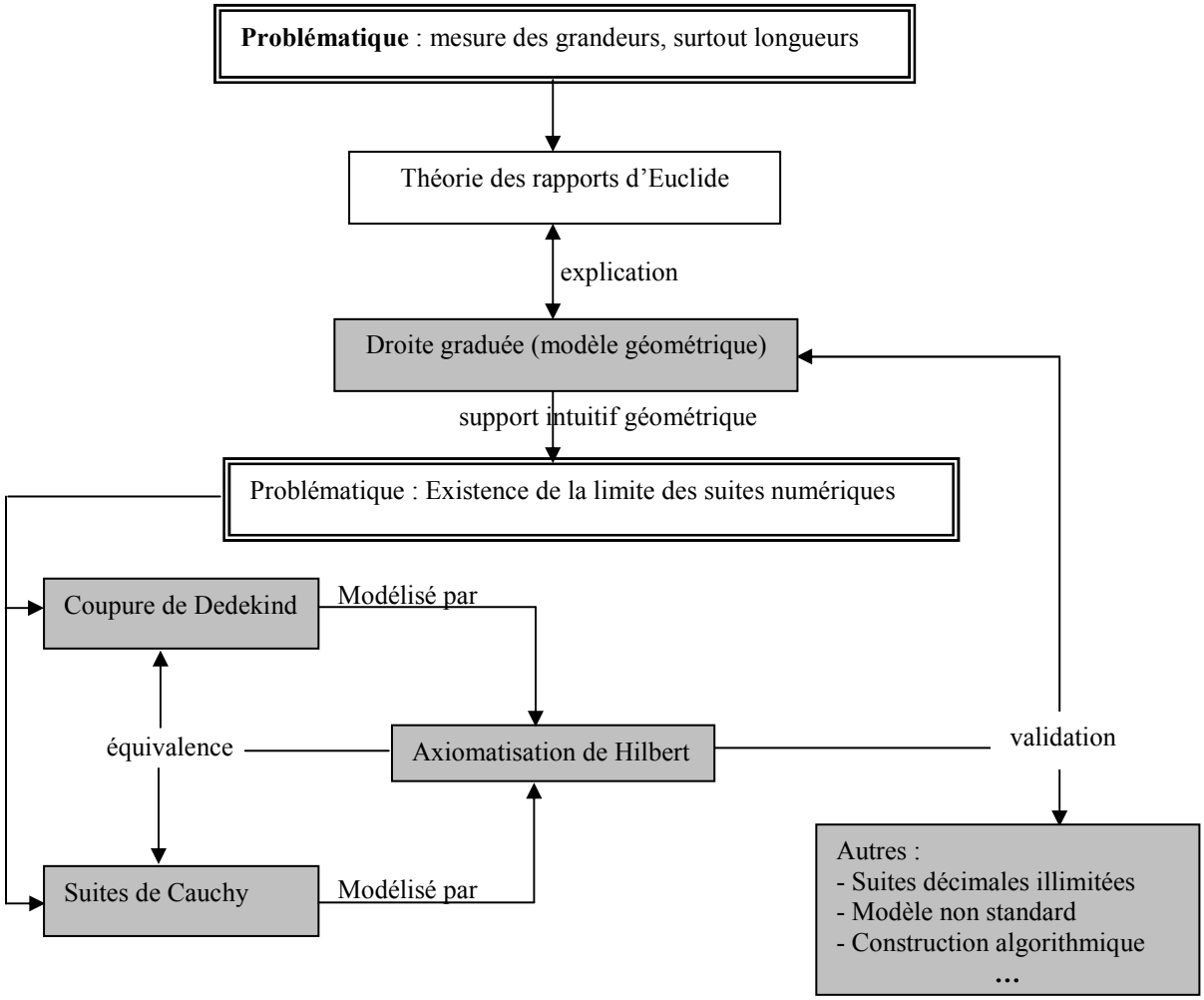


Figure 1. Différentes constructions et définitions des nombres réels

• *Lien entre les constructions de **R** et la notion de limite*

Les premières constructions modernes de **R** de Dedekind et de Cantor caractérisent la structure de l'ensemble des nombres réels comme corps commutatif ordonné, archimédien et complet. L'infini de **R** est appelé puissance du continu.

La complétude de **R** s'appuie essentiellement sur l'une des quatre propriétés équivalentes déjà mentionnées :

- La propriété de la borne supérieure.
- Toute suite de Cauchy est convergente.
- Toute suite monotone et bornée est convergente.
- Il existe un nombre réel unique appartenant à tous les segments de chaque famille de segments emboîtés.

L'existence de **R** est donc assurée par l'existence de la limite de suites numériques, soit de Cauchy, soit monotones bornées, soit adjacentes avec une autre suite.

La structure de **R** unifie les trois notions : suite numérique convergente, limite d'une suite numérique et nombre réel, un nombre réel étant déterminé par l'une des suites numériques qui converge vers lui.

Mais existe-t-il des constructions s'appuyant sur l'ensemble des nombres décimaux ? Quel statut ont ces constructions ? C'est ce que nous allons examiner maintenant.

III. Place de l'écriture décimale illimité (EDI) dans les constructions de R

A propos d'autres constructions de **R** équivalentes, Dhombres (1978) présente la construction par des écritures décimales illimitées.

> En gros, cette méthode consiste à appeler nombre réel positif une expression de la forme : $k,x_1x_2\ldots x_n\ldots$ où $k\in$ N, $x_n \in [0,1,\ldots..,9]$ pour tout n. (Op. cité, p. 237)

Le problème de l'écriture décimale illimité de période 9 est traité par l'identification.

> Techniquement, on identifiera des expressions du type : 0,1999… et 0,2000… (Ibid., p. 237)

L'ensemble des EDI est muni de l'ordre lexicographique. L'EDI doit prendre le statut de limite (ou borne supérieure / inférieure) d'une suite numérique de décimaux (EDI ayant comme période 0) pour prouver que l'ensemble des EDI possède toutes les caractéristiques minimales de **R** :

> […] on peut vérifier que $x = h,x_1x_2\ldots x_n\ldots$ est la borne supérieure de la suite $q_n(x) = h,x_1x_2\ldots x_n\ 0\ldots0\ldots$ et aussi définir l'addition de deux nombres réels positifs : $\underset{n\geq 1}{Sup}(q_n(x)+q_n(y)) = x+y$. (Ibid., p. 237)

Dhombres expriment ensuite l'idée que :

> Ce raisonnement fut utilisé depuis la fin du XIXème siècle, soit <u>sous la forme décimale</u> (ou en numération de base quelconque), soit sous la forme des fractions continues (cf. Chap.II § 4.2). <u>Pédagogiquement, on aurait assez tendance à penser que c'est la présentation la mieux adaptée pour l'Enseignement Secondaire</u>, car elle éclaire les vraies difficultés : non unicité de l'écriture décimale, existence d'un réel inverse d'un décimal quelconque et parce qu'elle calque le mieux l'idée intuitive de mesure. (Ibid., p. 237)[17]

Ce type de construction est donc clairement placé par Dhombres du côté d'une adaptation de la construction de **R** pour l'enseignement secondaire.

En accord avec Dhombres, le traité[18] de Lebesgue (1931) *La mesure des grandeurs* présente une construction de **R** à partir de la mesure des grandeurs, ouvrage destiné à la formation des jeunes professeurs ; il y est affirmé la priorité de la problématique de la mesure des grandeurs et de l'écriture décimale pour l'enseignement des nombres dans le Secondaire :

> Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques […] ; d'autre part, cette mesure fournit le nombre. (Op. cité, p. 2)

[17] C'est nous qui soulignons.

[18] Un traité (Neyret 1995) est un livre produit par un mathématicien (considéré comme institution transpositive), appartenant à la sphère savante, ou très proche de celle-ci, dans le but d'élémenter les savoirs à enseigner.

> Si j'utilise constamment la numération décimale dans l'enseignement secondaire, c'est donc pour de simples raisons pédagogiques : pour une économie de temps, et parce que le nombre écrit suivant la numération décimale est un objet concret sur lequel de jeunes cerveaux raisonnent plus facilement. (Ibid. p. 8)

Nous analysons maintenant cette construction d'ensemble de nombres que Lebesgue nomme « nombre le plus général ».

III.1. Traité de Lebesgue (1931)

a. Constructions des écritures décimales illimitées (EDI)

Lebesgue veut « passer directement de la notion de nombre entier à celle du nombre le plus général sans avoir à utiliser ou, si l'on veut, à dégager ni celle de nombre décimal exact, ni celle de nombre rationnel » (p. 11) par un procédé de comparaison. Nous résumons ci-dessous le procédé de comparaison de Lebesgue :

- comparer un segment AB avec un segment unité U_0 en le portant sur la demi-droite AB où le point A est origine.

- soit A_1 la dernière extrémité obtenue en portant n fois U_0, avant de dépasser B
Si A_1 atteint B, on dire que la longueur de AB est n

Dans le cas contraire, on obtient un encadrement. Donc, B appartient au segment A_1B_1 où la longueur AB_1 est n+1 fois U_0.

On découpe successif de l'unité U_n (n = 0, 1, 2,…) en 10 partie égale pour obtenir une unité U_{n+1} avec la quelle on compare, « à chaque stade de la mesure », la longueur de A_nB_n (décachotomie successive des unités)

Lebesgue construit donc une suite d'écritures infinies telle que « chaque nombre est obtenu en écrivant un chiffre à la droite du précédent » qui correspond à une suite des segments emboîtés AB, A_1B_1, A_2B_2…

L'écriture décimale illimitée apparaît dans son livre à la page 13, «37,425…» ou « 4,632… ». Elle représente une suite croissante de décimaux qui sont 37 ; 37,4 ; 37,42 ; 37,425… ou 4 ; 4,6 ; 4,63 ; 4,632… pas exemple.

b. Statut numérique des EDI et cas des suites ayant la période de neuf (EDIP9)

Pour répondre à la question :

> Il faut se demander *si toute suite de chiffres indéfinie vers la droite, et comportant une virgule, est un nombre.* C'est-à-dire si cette suite provient de la comparaison d'un segment AB à l'unité U. (Ibid., p. 11)

Lebesgue cherche à construire un segment AB correspondant à un EDI, incluant les EDIP9.

A étant donné, il montre l'existence (axiome de continuité) et l'unicité (axiome d'Archimède) de B en construisant algorithmiquement une suite de segments emboîtés A_1B_1, A_2B_2… :

> Si, connaissant cette suite, on cherche à construire AB à partir de A sur une demie- droite AX, on obtient de suite les segments A_1B_1, A_2B_2, … emboîtés les un dans les autres. Des axiomes, énoncées ou sous-entendus, de la géométrie, il résulte qu'il y a un point B commun à tous ces segments (axiome de continuité) et qu'il n'y en a qu'un (axiome d'Archimède). On a donc un segment AB bien déterminé, mais la longueur de AB ne sera la suite de chiffre d'où l'on est parti que si B ne coïncide avec aucun des points B_i. On voit immédiatement que ce cas se

> présente si, et seulement si, tous les chiffres de la suite sont des 9 à partir d'un certain rang. (Ibid., pp. 11 -12)

Cependant pour lui, les EDIP9 sont à exclure :

> De telles suites sont donc à exclure, toutes les autres sont des nombres. (p. 12)

Lebesgue rejette donc les cas EDPI9 parce qu'avec un segment AB déterminé par une EDIP9, le procédé de comparaison d'un tel segment AB avec le système d'unités de la décachotomie produit une suite ayant comme période 0, c'est-à-dire un nombre décimal. Ce nombre décimal est donc le seul qui existe pour Lebesgue, car c'est celui qui résulte de son procédé de comparaison.

• *Ordre sur les EDI*

La construction de l'ensemble des nombres réels exige l'unicité de chaque élément. Dans la construction de Lebesgue, l'exclusion des suites ayant la période de neuf permet de munir commodément l'ensemble de l'ordre lexicographique sur les EDI.

L'ordre lexicographique est exposé comme suit :

> Ce n'est que parce que la comparaison des chiffres de *x* et de *y* permet de reconnaître quel est le plus grand, […] (Ibid., p. 16)

• *Opérations sur des EDI*

La construction des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication et division) s'appuie sur celle des opérations sur les nombres entiers au sein du mesurage des longueurs en changeant successivement d'unité (procédé de décachotomie). Plus précisément, il faut opérer successivement sur des entiers qui sont les mesures approchées des longueurs à l'unité près de chaque décachotomie. C'est pourquoi, Lebesgue doit formuler dans chaque opération deux lois : l'une pour supprimer et remettre la virgule, l'autre pour supprimer les chiffres décimaux « inexactes » :

> 9. *Addition. – On sait ce qu'on appelle un segment somme de deux autres ; on se propose, étant connues les longueurs de deux segments, de trouver celle du segment somme.* Soit AB, somme des segments Aω, ωB ; […] Le segment $a_i\omega$ contient U_i un nombre entier de fois, ce nombre $(\omega A)_i$ est celui que l'on déduit de (ωA) <u>en supprimant dans celui-ci et la virgule les chiffres décimaux au-delà du $i^{\text{ième}}$</u>. De même pour ωb_i. Donc a_ib_i contient $d_i = (\omega A)_i + (\omega B)_i$ fois U_i et $a_i'b_i'$ le contient $e_i = (\omega A)_i + (\omega B)_i + 2$ fois. De sorte que les longueurs de a_ib_i et $a_i'b_i'$, avec l'unité U, sont <u>les nombres que l'on obtient en séparant par les virgule *i* chiffres à la droite de d_i et e_i</u>.[…]
>
> 10. *Multiplication.* […]
>
> D'où la règle : le nombre cherché, qu'on *appelle le produit des deux nombres données, a pour chiffres successifs les chiffres de même rang du nombre qu'on obtient, pour i assez grand, <u>en supprimant dans les deux nombres données la virgule et les chiffres au-delà du $i^{ième}$ chiffre décimal</u>, en augmentant chacun des deux entiers ainsi obtenus d'une unité, en faisant le produit des entiers ainsi augmentés, <u>puis en séparant par une virgule 2i chiffres à la droite de ce produit</u>*. (Ibid., pp. 13 -14)[19]

Pour rendre compréhensible sa construction, prenons un exemple :

Supposons que l'on connaisse respectivement « 37,4252… » et « 4,6325… » comme mesures des longueurs [AB] et [BC] à l'aide d'une unité U. Examinons l'addition [AB] + [BC].

[19] C'est Lebesgue qui met en italique et c'est nous qui soulignons.

Unités de chaque décachotomie	Opérations sur des entiers	Sommes dans chaque décachotomie	Suite décimale illimité de AB + BC
$U_1 = U/10$	374 + 46 = 420	42,0	42
$U_2 = U_1/10^2$	3742 + 463 = 4205	42,05	42,0
$U_3 = U_2/10^3$	37425 + 4632 = 42057	42,057	42,05
$U_4 = U_3 / 10^4$ …	374252 + 46325 = 42057 …	42,0577 …	42,057 …

Tableau 4. Suite décimale illimitée de [AB] + [BC]

En supprimant le dernier chiffre décimal de chaque suite de chiffres de la somme, on obtient une suite décimale 42 ; 42,0 ; 42,05 ; 42,057 ; … qui peut se noter « 42,057… » comme somme de la mesure de [AB] + [BC].

De même façon, il définit une règle de multiplication mais selon un processus plus compliqué.

c. Question : quelle est la base mathématique de ces opérations ?

Comment Lebesgue s'assure –t-il que sa construction va produire dans chaque opération le résultat comme une écriture décimale illimitée ?

La convergence du couple de suites adjacentes des décimaux est assurée, pour Lebesgue, par l'axiome de continuité : il existe un point unique appartenant à tous les segments de chaque famille de segments emboîtés[20].

> Un nombre n'a une signification concrète que si le segment unité U est fixé ; […] que si des nombres z_1, z_2, …, z'_1, z'_2… formaient deux suites de valeurs indéfiniment approchées d'un nombre z avec l'unité U, […] que parce que les chiffres de z sont déterminés par ceux des z_i et z'_i […] (Ibid., p. 16)[21]

Cela nous amène à poser une question épistémologique :

Lebesgue construit-il vraiment l'ensemble R par les écritures décimales illimités ?

L'existence de chaque EDI chez Lebesgue est assurée par l'existence de la longueur d'un segment, d'une unité et du procédé de decachotomie de l'unité. On peut dire que l'ensemble **R** est ici présupposé par la donnée d'une droite graduée complète, complétude caractérisée par l'axiome des segments emboîtés.

Lebesgue ne construit que l'ensemble des EDI, en tant que suite de décimaux, comme la mesure de la longueur de segments de la droite graduée.

d. Pont de vue didactique de Lebesgue sur l'enseignement des nombres

Lebesgue réserve la construction ci-dessus (EDI et opérations) à l'enseignement.

> Je crois devoir rappeler que cet exposé s'adresse à des Professeur sur les précautions qu'il conviendrait de prendre pour les élèves, voir §17 [voir la page 17]. (Ibid., p. 14)[22]

Lebesgue prescrit un ordre d'enseignement des nombres.

[20] On peut la trouver dans la citation à la page 21.
[21] C'est nous qui soulignons.
[22] Cette remarque se trouve dans la note de page.

> Voici, par exemple, ce que l'on fait dans l'enseignement français, peu différent à cet égard de celui donné dans les autres pays.
>
> Dans l'enseignement primaire, et dans les premières classes de l'enseignement secondaire, on apprend aux enfants ce que sont les nombres, sans définitions savantes ou prétentieuses, en leur faisant manier des nombres. D'abord les entiers d'un seul chiffre, puis ceux de deux chiffres, puis les entiers quelconques. A l'occasion, par exemple, du système métrique ils apprennent l'usage de la virgule et s'habituent au maniement des nombres décimaux. Dans cette partie de l'enseignement les nombres sont bien les comptes rendus d'expériences de dénombrement ou de mesure dont j'ai parlé ; à aucun moment on ne les entortille dans la métaphysique.
>
> D'autre part, on apprend aux élèves à manier les fractions ; soit à l'occasion des fractions, soit à l'occasion de division comme celle de 1 par 3, ou à l'occasion d'extractions de racines carrées, les enfants rencontrent des nombres qui ne pourraient être écrits qu'à l'aide d'une suite infinie de chiffres. […]
>
> *Si bien qu'on admet dans la suite de l'enseignement que la notion de nombre est acquise, et que l'on peut parler des opérations sur les nombres quelconques*. […] en algèbre, on introduit les règles relatives aux signes dans les opérations [1], mais on suppose connues les opérations sur les nombres positifs.
>
> [1] En passant, je fais remarquer que si l'on définit les opérations sur les nombres positifs et négatifs comme nous venons de le faire pour les nombres, mais en remplaçant l'emploi des segments non dirigés par l'emploi des vecteurs, les règles relatives aux signes perdent tout caractère artificiel.
>
> On va ainsi jusqu'à la première partie du baccalauréat, jusqu'à la fin de la classe de Premier, en utilisant des notions un peu imprécises d'origine nettement expérimentale. Mais dans la classe suivante, celle de Mathématiques, réservée aux élèves voulant pousser davantage leur culture scientifique, on va réviser les notions et leur donner une base plus solide. […] (Ibid., p. 17)[23]

Nous schématisons cet ordre dans la figure 2.

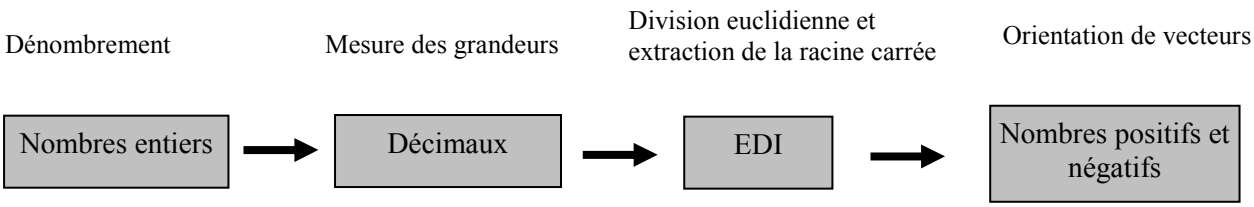


Figure 2. Ordre de l'enseignement des nombres selon Lebesgue

On trouve donc, chez Lebesgue, une proposition d'extension : $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{D}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ en direction de l'enseignement secondaire.

Lebesgue défend l'inutilité :

- de théoriser **D**

> Ce que j'ai voulu dire, c'est qu'il est inutile de faire à part une théorie complète relative aux nombres décimaux. (Ibid., p. 24)

- de construire les nombres rationnels

> On ne dirait donc pas un mot de la théorie des fractions, car la fraction $\frac{a}{b}$ serait tout simplement le nombre quotient exact de *a* par *b* […]. (Ibid., p. 24)

Lebesgue prescrit la présentation des nombres irrationnels dans le système de numération décimale.

[23] C'est nous qui soulignons.

> Mais ma principale critique porte sur ce que l'on dit, ou plutôt sur ce que l'on ne dit pas, au sujet des nombres irrationnels. (Ibid., p. 18)
> On évite d'ailleurs de parler de l'expression des nombres irrationnels dans le système de numération décimale. (Ibid., p. 21)

Lebesgue expose aussi, pour l'enseignement supérieur, son point de vue sur la construction des nombres réels à partir des nombres décimaux à la place des nombres rationnels comme celle de Dedekind et Cantor (1872) :

> Arrivés dans l'enseignement supérieur, les élèves auraient la maturité voulue pour suivre une analyse plus complète du procédé jusque là employé pour définir les nombres. […] puisque pour déterminer, et par la suite pour arriver à définir, un nombre il ne suffit pas repérer par rapport à l'échelle trop lâche des entiers, il faut d'abord construire de nouveaux nombres (formant ce que l'on appelle un ensemble partout dense) ; cet ensemble est celui des nombres décimaux dans mon exposé […] (Ibid., p. 23)

La construction des nombres réels à partir des nombres décimaux, selon Lebesgue, « c'est la méthode des coupures » (p. 23) sur **D**.

Nous considérons maintenant le livre III *Topologie générale* de Bourbaki (1960) en remarquant que le formalisme fortement présent dans cet ouvrage a joué un rôle moteur pour la Réforme des Mathématiques Modernes des années 1970 en France : quel est le statut de l'écriture décimale illimitée ? Quelle place pour les EDIP9 ? Y-a-t-il un lien entre les EDI et la notion de suite et de limite ? Si oui, quel est-il ?

III.2. Traité de Bourbaki (1960)

*a. Ensemble **R** et notion de limite*

Dans les chapitre IV, *Nombre réels,* livre III, *Topologie générale*, l'ensemble des nombres réels est construit comme un espace topologique particulier ayant une structure algébrique et une structure d'ordre « prolongée de celle de **Q** ».

> Définition 2. – *On désigne par **R** le groupe topologique*[24] *complété du groupe additif **Q** de la droite rationnelle. Les éléments de **R** sont appelés nombres réels ; en tant qu'espace topologique, **R** est appelé droite numérique ; en tant que groupe topologique, on l'appelle groupe additif de la droite numérique.*
> […]
> Nous allons voir qu'on peut *prolonger* à **R** la *structure d'ordre* de **Q**, de manière que la structure d'ordre prolongée soit encore compatible avec structure de groupe additif de **R** :
> Proposition 1. – *La relation $y - x \in \overline{Q}_+$ est une relation d'ordre dans **R**, qui fait de **R** un ensemble totalement ordonné, est compatible avec la structure de groupe additif de **R**, et induit sur **Q** la relation d'ordre $x \leq y$.* (Op. cité, pp. 131-132)

Bourbaki définit antérieurement la notion de limite à partir de celle de filtre de voisinages dans l'espace topologique : c'est donc une notion de limite de point de vue topologique.

Nous nous intéressons plus spécialement au §8 intitulé « Développement usuels des nombres réels ».

[24] *Définition 1.- On appelle groupe topologique un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une topologie satisfaisant aux deux axiomes suivants :*
(GT_I). L'application $(x, y) \to xy$ de $G \times G$ dans G est continue.
(GT_{II}). L'application $x \to x^{-1}$ de G dans G (symétrie du groupe G) est continue.
(Bourbaki, *Topologie générale*, p. 9)

b. Développements usuels des nombres réels

Bourbaki présente dans ce paragraphe le développement des nombres réels relatifs à une suite de base (d_n) qui généralise la notion de base *décimale*.

> 2. **Développements des nombres réels relatifs à une suite de base**
>
> On va se borner à étudier le cas où $\varepsilon_n = \frac{1}{d_n}$, ($d_n$) étant une suite strictement croissante d'entiers tels que $d_0 = 1$, et que d_n soit un *multiple* de d_{n-1} pour $n \geq 1$». (Ibid., p. 40)

Le développement d'un nombre réel x relativement à la suite de base (d_n) fait apparaître successivement des entiers $p_0 = [x]$, u_1, u_2, … u_n,… qui forment la suite des valeurs approchées par défaut (r_n) de x, où $r_n = r_{n-1} + \frac{u_n}{d_n}$.

Il existe donc ici deux représentations d'un même nombre réel x avec une mise en relation établie au sein de la notion de limite apparaissant sous forme d'une écriture de somme infinie.

> […]
> On en tire
>
> (3) $r_n = r_{n-1} + \frac{u_n}{d_n} = p_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{d_k}$
>
> et, comme $x = \lim_{n \to \infty} r_n$,
>
> (4) $x = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{d_n}$.
>
> […] (Ibid., p. TG IV.41)

D'après Bourbaki, le développement de base a, en particulier pour a entier strictement plus grand que 1, est le plus important et le développement décimal (a = 10) est réservé, en plus, à l'effectuation à la main des calculs numériques.

> Les suites de base les plus importantes sont celles où $d_n = a^n$, a étant un entier >1 ; on dit alors que a est le *nombre de base* (ou simplement la base) des développements correspondants. Pour les calculs numériques manuels, on emploie les développements de base 10, qui sont dits *développements décimaux* ; dans les calculs sur ordinateurs, on utilise le plus souvent les développements de base 2 (dites développements *dyadiques*). (Ibid., p. 43)[25]

c. Ecriture décimale illimitée (EDI)

Quelques lignes plus loin, l'écriture illimitée est abordée et mise en relation avec la notion de valeur approchée.

> Pour représenter les valeurs approchées par défaut r_n d'un nombre $x \geq 0$, dans son développement de base a, on se sert du symbolisme suivant : on désigne chaque entier u tel que $0 \leq u \leq a - 1$ par un signe particulier ; si $r_n = p_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{d_k}$, on écrit d'abord, à l'aide de ces signes, le développement de base a de l'entier positif $p_0 = [x]$ (E, III, p. 40), puis on place une virgule, et on écrit ensuite successivement les signes représentant les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si S est le symbole ainsi obtenu, on écrit souvent, par abus de langage, x = S… ; il doit être

[25] C'est Bourbaki qui met en italique et c'est nous qui soulignons.

> entendu une fois pour toutes qu'une telle relation n'est qu'une manière abrégée d'indiquer que le second membre est la valeur approchée de x à $1/a^n$ *près par défaut*. (Ibid., p. 43)

L'égalité « x = S… » est donc un abus de langage, l'écriture S… ne peut être qu'un abrégé de « $p_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{d_k}$ », valeur approchée de x à $1/a^n$ près par défaut.

La seule égalité permise est $x = \lim_{n\to\infty} r_n$ et en cela Bourbaki relie l'écriture illimitée interdite et la limite de la suite numérique (r_n).

• *Concernant l'écriture décimale illimitée de période neuf (EDIP9)*

Le problème de l'existence des nombres réels possédant deux développements est traité dans la *définition d'un nombre réel par son développement*.

Selon ce traitement, on a $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$, la somme infinie à droite s'appelant développement décimal *impropre* du nombre 1.

• *Concernant l'ordre sur les EDI*

L'ordre de deux nombres « distincts » est présent dans le paragraphe « Comparaison des développements » .

> La connaissance des développement de deux nombres réels distincts x, y, permet de déterminer si $x < y$ ou si $x > y$. (Ibid., p. 42)

Si on écrit les développements par EDI, l'ordre n'est autre que l'ordre lexicographique des décimaux.

> Autrement dit, *l'ordre de x et y est le même que celui des deux premiers termes distincts de leurs développement respectifs*. (Ibid., p. 42)

• *Concernant les opérations sur les EDI*

Les opérations sur les développements des nombres réels ne sont pas définies par Bourbaki. Pourtant, il est clair que ces opérations sont effectuées grâce au passage à la limite et aux théorèmes algébriques sur les limites. Par exemple :

> Soient $x = \lim_{n\to\infty} r_n = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{10^n}$ et $y = \lim_{n\to\infty} r_n' = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{10^n}$.
>
> On a $x + y = \lim_{n\to\infty}(r_n + r_n') = p_0 + q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_n + v_n)}{10^n}$

Cela veut dire que par passage à la limite, on peut déterminer la somme $x + y$ comme la limite de la suite ($r_n + r_n'$). Le problème est que la dernière somme infinie n'est pas encore le développement décimal de cette somme puisque $u_n + v_n$ peut être plus grand que 10^n.

III.3. Conclusion sur la place des EDI dans les constructions de R par Bourbaki et Lebesgues

Nous résumons dans le tableau 5 la place de EDI dans les traités de Bourbaki et de Lebesgue, en dégageant :

- les savoirs qui produisent les EDI (savoirs de départ),
- la place des EDI dans les traités,

- le traitement pour le EDIP9,
- l'ordre et les opérations sur des EDI.

Traité	**Bourbaki :** **nombre réel → EDI**	**Lebesgue :** **EDI → nombre réel**
Savoirs de départ	Ensemble **R** : espace topologique. Notion de limite.	Ensemble **N**. Mesure des longueurs et axiomes d'Archimède et des segments emboîtés. : modèle géométrique de **R**.
Place des EDI	Développement des nombres réels relatifs à une suite de base, en particulier : développement décimal de x en somme infinie : $x = d_0,d_1d_2\ldots d_n\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$	- Construction des nombres réels à partir de **N**. - Un nombre réel, mesure d'une longueur, est la suite illimitée des nombres décimaux : d_0 ; d_0,d_1 ; d_0,d_1d_2 ; … ; $d_0,d_1d_2\ldots d_n$, …, représentée par une EDI " $d_0,d_1d_2\ldots d_n\ldots$". Il provient du procédé de comparaison de la longueur au système des unités de la décachotomie.
EDIP9	Existence comme *développement décimal impropre*.	Exclus par construction : unicité des EDI.
Ordre sur EDI	Lexicographique avec l'identification 0,999… = 1	Lexicographique de l'ensemble des nombres entiers grâce à l'unicité des EDI
Opérations sur EDI	Opérer sur les suites des décimaux ; puis passager à la limite	Opérer sur les suites des entiers avec la règle de la virgule, puis utiliser l'axiome des segments emboîtés pour déterminer les chiffres décimaux.

Tableau 5. Comparaison de la place de EDI dans les traités de Bourbaki et de Lebesgue

L'analyse de ces deux traités permet de conclure que l'EDI représente, soit une suite particulière de décimaux satisfaisant un critère de convergence (axiome des segments emboîtés dans la construction de **R** chez Lebesgue), soit la limite de cette suite (développement décimal d'un réel chez Bourbaki).

Conclusion

Dans l'histoire, il existe une relation dialectique dans l'évolution du statut des nombres réels et de la notion de limite : les progrès de la notion de limite sont nécessaires à ceux de la notion de nombre réel, et inversement, les progrès de la notion de limite se nourrissent de ceux de **R**.

L'étude de cette relation dialectique à trois moments de la construction historique des nombres nous a permis d'associer intimement l'évolution de la nature et du statut des ensembles de nombres (jusqu'à **R** comme espace topologique) et de celle de la notion de limite.

- Le perfectionnement de la notion de limite par Cauchy (1821) et son critère de convergence d'une suite numérique (critère de Cauchy) fonde une construction moderne de **R** par Cantor (1872) : cette construction s'appuie sur la problématique de l'existence de la limite de toute suite rationnelle satisfaisant au critère de Cauchy.
- En même temps que Cantor, la construction de Dedekind (1872) s'appuie sur l'existence des bornes supérieure et inférieure de tout intervalle borné de nombres rationnels ; or cette existence équivaut à la convergence des suites de Cauchy ou des suites adjacentes (Bolzano 1817).

La relation dialectique se cristallise finalement dans l'unification de la notion de nombre réel et de la notion de limite : un nombre réel est défini par une classe de suites numériques

équivalentes entre elles ; toutes les suites numériques de la classe équivalente admettent ce nombre réel comme limite.

L'axiomatisation de **R** par Hilbert (1899) permet de valider des constructions différentes de **R**, en particulier celles qui sont souvent transposées dans l'EMS :

- la construction de **R** à partir de **D** (par les coupures de Dedekind sur **D** ou par les suites de Cauchy de nombres décimaux),
- le modèle de la droite graduée (avec les axiomes des segments emboîtés et d'Archimède).

Les constructions de **R** à partir de **D** reviennent à problématiser la décimalisation des nombres réels.

Stevin (1585) utilise les nombres décimaux pour étudier d'autres nombres que les décimaux comme des fractions non décimales (ou des racines carrées) en s'appuyant implicitement sur la densité de **D** dans un sur–ensemble contenant les nombres constructibles : « tous sont approchables par les nombres décimaux ».

L'étude des traités français de Lebesgue (1931) et Bourbaki (1960), permet de montrer que le statut possible des EDI dans la décimalisation des nombres réels reste ambigu. L'ostensif EDI peut représenter aussi bien une suite de nombres décimaux telle que « chaque nombre est obtenu en écrivant un chiffre à la droite du précédent », que la limite de cette suite.

Une telle suite de nombres décimaux satisfait plusieurs critères de convergence qui permettent la construction de **R** à partir de **D** (comme celle proposée par Dhombres, 1978) : suite monotone bornée ; suite de Cauchy et suite adjacente à une autre suite.

Chapitre A3
Conclusion de la partie A : OM de référence

Nous décrivons d'abord les OM de référence qui abordent de façon directe ou indirecte les interrelations entre la notion de limite, la notion de nombres et la décimalisation des nombres pour rechercher, dans l'étude des OM *à enseigner,* les traces de la reconstruction de ces interrelations dans EMS (Viêt-nam).

Puis, nous posons de nouvelles questions pour aller plus loin en ce qui concerne l'EMS au Viêt-nam.

I. OM de référence

A partir des travaux didactiques sur la notion de limite (chapitre A1) et l'enquête épistémologique (chapitre A2), nous présentons trois OM locales de référence.

a. OM_1 autour de l'algèbre des limites (cf. Bosch et al. 2002)

En s'appuyant sur la problématique du calcul de la limite existante, l'*algèbre des limites* est le fruit d'une modélisation en règles algébriques du passage à la limite dans les opérations sur les fonctions.

L'*algèbre des limites* permet d'éviter la problématique de l'infini de la notion de limite comme les problématiques d'approximation de cette notion. Elle permet aussi d'associer l'écriture $\lim_{x \to a} f(x)$ à un nombre réel ou à l'infini.

b. OM_2 autour de la topologie des limites

L'OM_2 s'appuie sur la problématique de l'existence de la limite. Bosch et al. (2002) abordent les *techniques mathématiques* associées aux types de tâches dans OM_2 en présentant un exemple :

> Junto a estos tipos de tareas , tenemos las *técnicas matemáticas* asociadas útiles para realizar las demostraciones requeridas. Veamos, por ejemplo, cómo se aborda una tarea del primer tipo:
>
> *Demostrar que la función f(x) = sen(x) no tiene límite en el infinito.*
>
> Consideremos la sucesión de término general $x_n = (\pi/2 + 2\pi n)$. Sabemos que $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
>
> Estudiemos el comportamiento de la sucesión de las imágesnes :
>
> $f(x_n) = \text{sen}\,(\pi/2 + 2\pi n) = 1$ para todo n.
>
> Luego $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 1$.
>
> Sea ahora la sucesión de términos general $x_n' = (-\pi/2 + 2\pi n)$. Sabemos que $\lim_{n \to +\infty} x_n' = +\infty$.
>
> Estudiemos el comportamiento de la sucesión de las imágenes :
>
> $f(x_n') = \text{sen}\,(\pi/2 + 2\pi n) = -1$ para todo n.
>
> Luego $\lim_{n \to +\infty} f(x_n') = -1$.
>
> Tenemos dos sucesiones que tienden a infinito y cuyas imágenes por f convergen a puntos diferentes. Por lo tanto no existe el límite de $f(x) = \text{sen}(x)$ en el infinito. (Op. cité, p. 99) [1]

[1] Pour ces types de tâches, nous avons les *techniques mathématiques* associées utiles pour réaliser les démonstrations requises. Regardons, par exemple, comment s'aborde une tâche du premier type :

Démontrons que la fonction f(x) = sin(x) n'a pas de limite à l'infini.

Considérons la suite de terme général $x_n = (\pi/2 + 2\pi n)$.

Dans l'exemple précédent, la non existence de la limite de la fonction $f(x) = \sin(x)$ à l'infini s'appuie sur la production de suites numériques et le calcul des limites de ces suites. Ces calculs appartiennent à OM_1 et abordent de façon indirecte la relation entre nombre et limite.

A partir de notre enquête épistémologique, nous modélisons ici une restriction de OM_2, de Bosch et al., dans une organisation mathématique $OM_{2'}$ locale qui relève plus explicitement de la relation dialectique entre la notion de limite et la notion de nombre réel.

• *$OM_{2'}$ locale « existence de la limite d'une suite numérique »*

Certains des *type des tâches* constitutives de $OM_{2'}$ sont les suivantes :

- T2'1 : Démontrer la convergence (dans **R**) d'une suite numérique
- T2'2 : Démontrer l'existence de la solution d'une équation

Pour réaliser ces démonstrations, la *technique mathématique* ci-après porte explicitement sur la relation dialectique entre nombre et limite.

Produire et vérifier que la suite numérique satisfait l'un des critères de convergence :
- le critère de Cauchy,
- le critère « monotone bornée »,
- le critère des intervalles emboîtés (ou des suites adjacentes),
- la définition en terme (ε, **N**).

Dan certains cas, on peut utiliser aussi des techniques portant sur des théorèmes démontrés précédemment comme les théorèmes de l'*algèbre des limites* ou le théorème des valeurs intermédiaires … Dans ce cas, la relation dialectique entre nombre et limite se pose de façon indirecte.

Le bloc théorique (*technologie* et *théorie*) est celui décrit par Bosch et al. (2002) pour OM_2.

> El discurso tecnológico de OM_2 está centrado en el uso de las propiedades de los límites de las sucesiones y en la definición clásica de « límite » en términos de ε y δ. Dicha tecnología se apoya, a su vez, en la teoría de los números reales que considera su estructura como espacio métrico y sus múltiples propiedades : densidad, completitude, caracterización de la topología de **R** inducida por la métrica euclídea, existencia del supremo (y del ínfimo) de cualquier subconjunto no vacío y acotado de **R**, sucesiones de Cauchy, etc. (Op. cité, p. 100)[2]

Nous savons que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Étudions le comportement à l'infini de la suite des images :
$f(x_n) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$ pour tout n.
Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$

Soit alors la suite de terme général $x'_n = (-\pi/2 + 2\pi n)$. Nous savons que $\lim_{n\to+\infty} x'_n = +\infty$

Étudions le comportement à l'infini de la suite des images :
$f(x_n) = \sin(-\pi/2 + 2\pi n) = -1$ pour tout n.
Nous avons deux suites qui tendent vers l'infini et dont les images par f convergent en un point différent. Par conséquent la limite de $f(x) = \sin(x)$ n'existe pas. (Traduction en français par Annie Bessot)

[2] Le discours technologique de OM_2 est centré sur l'usage des propriétés des limites des suites et sur la définition classique de la « limite » en termes de ε et δ. Cette technologie s'appuie, à son tour, sur la théorie de nombres réels qui considère sa structure comme espace métrique et ses multiples propriétés : densité, complétude, caractérisation de la topologie de **R** induite par la métrique euclidienne, existence d'un maximum (et d'un minimum) dans n'importe quel intervalle non vide et fermé de **R**, suites de Cauchy, etc. (Traduction en français par Annie Bessot)

Autrement dit le bloc théorique s'appuie sur la topologie de **R** pour la notion de limite.

Pour illustrer l'$OM_{2'}$, nous prenons comme exemple une activité du manuel *Mathématiques 1re S. E* de la collection Dimathème (1982) qui prépare l'introduction des notions de limite et de continuité de fonction :

> On appelle D_n ($n \in$ **N**) l'ensemble des décimaux d tels que le nombre $10^n \times d$ soit un entier relatif (ex. : $2{,}427 \in D_3$).
> a) Combien l'ensemble $[0 ; 1] \cap D_n$ a-t-il d'éléments ?
> b) Soit $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe 2 réels a_n et b_n :
> $a_n = \text{Max } \{x \in D_n, f(x) < 0\}$
> $b_n = \text{Min } \{x \in D_n, f(x) > 0\}$
> Quelle relation existe-t-il entre a_n et b_n ?
> c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et que $\lim a_n = \lim b_n$. Soit x_0 cette limite.
> d) Montrer que : $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in [0 ; 1]$ et $\forall x' \in [0 ; 1]$. $|f(x) - f(x')| < k|x - x'|$.
> e) En déduire que : $\forall n \in$ **N**, $|f(b_n) - f(a_n)| < k \times 10^{-n}$ puis que $-k \times 10^{-n} < f(x_0) < k \times 10^{-n}$.
> Conclure que $f(x_0) \neq 0$ conduit à une contradiction.
> (Op. cité, p. 187)

L'activité supra relève d'une technique pour démontrer l'existence d'une racine de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle [0 ; 1] en produisant deux suites décimales adjacentes (a_n) et (b_n) telles que les suites de leurs images $f(a_n)$ et $f(b_n)$ soient aussi adjacentes et vérifient $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ pour tout n. Cela permet de conclure à l'existence d'un nombre réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$ et tel que a_n et b_n soient successivement les valeurs décimales approchées à 10^{-n} près de x_0 à travers la relation $b_n - a_n = 10^{-n}$.

c. OM_3 locale « développement décimal d'un nombre réel »

OM_3 est la restriction d'une OM plus générale – « *développement usuels des nombres réels* » présente, par exemple, chez Bourbaki (1960) ; elle répond à la question de la représentation des nombres réels selon une suite de base qui forme une partie dense de **R**, par exemple : développement en fraction continue, développements *dyadiques* …

Des *types des tâches* constitutives de OM_3 sont :

- T31 : Approximation décimale à 10^{-n} près d'un nombre réel
- T32 : Résolution approchée décimale à 10^{-n} près d'une équation (l'existence de la racine étant connue)

La *technique* générale associée à ces types de tâches est d'encadrer le nombre réel (ou la racine de solution) x par un couple décimal (d_n, d_n') où $d_n, d_n' \in D_n$ ($n \in$ **N**) tels que $|d_n' - d_n| = 10^{-n}$.

Cette technique se justifie par la *technologie* minimale assurant l'existence d'un tel couple décimal (d_n, d_n'). En effet :

- **D** est une partie dense de **R** : on peut toujours choisir un décimal d proche de x tel que $0 < x - d < 10^{-n}$ pour tout $n \in$ **N**. Si p_n est la projection de d dans D_n (Margolinas, 1985) alors $0 < d - p_n < 10^{-n}$. On a donc $0 < x - p_n < 2.10^{-n}$. Autrement dit, $-10^{-n} < x - (p_n + 10^{-n}) < 10^{-n}$. Soit $d_n = p_n + 10^{-n} \in D_n$. On a $|x - d_n| < 10^{-n}$.

- On a alors $d_n - 10^{-n} < x < d_n + 10^{-n}$. Si $d_n < x$, il suffit de choisir $d_n' = d_n + 10^{-n}$. Sinon, on choisit $d_n' = d_n - 10^{n}$.

Cette technologie s'appuie, comme dans OM_1 et OM_2, sur la théorie des nombres réels, en particulier **R** comme espace métrique et ses multiples propriétés (cf. OM_2 de Bosch et al.) en ajoutant les propriétés minimales de **D** : *sous-groupe additif dense* de **R** (cf. Bourbaki).

Nous pouvons citer les problèmes de calcul de la valeur approchée à 10^{-n} près du quotient $\frac{a}{b}$ ou de la racine carré $\sqrt{a}$ (où a est un entier positif et b est un entier non nul) comme des exemples de tâches du type T31. L'activité de Dimathème (1982) citée plus haut donne un exemple d'une technique de résolution approché décimale à 10^{-n} près d'une équation comme une tâche du type T32.

Les deux dernières OM - $OM_{2'}$ et OM_3 - relèvent d'une problématique de l'approximation des nombres par des suites numériques, tout particulièrement des suites décimales (approximation décimale d'un réel).

Les trois OM locales - OM_1, $OM_{2'}$ et OM_3- tournent autour de la construction des nombres réels. Elles peuvent donc être intégrées dans une OM *régionale* que nous ne modélisons pas ici.

II. Nouvelles questions pour l'EMS au Viêt-nam.

La prédominance de la trace de OM_1, *algèbre des limites*, dans le rapport institutionnel à la notion de limite des EMS français, espagnol et vietnamien privilégie la problématique algébrique de la notion de limite en laissant une place faible à d'autres problématiques comme celle d'approximation.

En particulier, notre questionnaire (Le Thai Bao, 2004) permet d'observer l'effet de la place prépondérante de l'*algèbre des limites* au Viêt-nam : dans le rapport personnel (observable du rapport institutionnel), la seule signification disponible de la notion de limite via l'écriture $\lim_{x \to a} f(x)$ est algébrique.

Les études précédentes, s'appuyant sur des ingénieries didactiques ou des analyses épistémologiques, affirment qu'il est incontournable de revenir sur le problème de la représentation décimale des nombres réels, si on veut aller au-delà de l'algèbre, c'est-à-dire donner un sens à la notion de limite lié à une problématique de l'approximation (décimale).

En France, les études sur l'enseignement des nombres, en particulier les nombres décimaux, mettent en lumière de nombreuses difficultés dans l'acquisition des notions de nombres dans l'EMS en particulier : ordre dense de **D** et relation entre écriture décimale et nombres.

En ce qui concerne l'institution vietnamienne, nous allons chercher à préciser ces résultats dans la partie B, en répondant aux questions suivantes :

- Quel est le rapport institutionnel à la notion de nombre, tout particulièrement aux nombres décimaux et aux nombres réels ?
- Les interrelations entre la notion de limite et la notion de nombre réel sont-elles présentes dans l'enseignement des mathématiques au Viêt-nam ? Si oui, comment ? Sinon pourquoi ?

En référence aux trois OM locales de référence – OM_1 « algèbres de limites », $OM_{2'}$ « existence de la limite d'une suite numérique » et OM_3 « développement décimal d'un nombre réel » - nous reformulons les questions en termes de praxéologies mathématiques.

Quelles traces des trois OM de références trouvons-nous ? Quelles techniques associées sont enseignées ? Lesquelles sont privilégiées ? Quels sont les discours technologiques justifiant ces techniques ? Quels sont les éléments théoriques associés à ces discours ? Comment évoluent temporellement les types de tâches des trois OM, techniques et technologies ? Pourquoi ?

Partie B

Nombre et limite
Analyse institutionnelle
Expérimentation

Chapitre B1
Relation entre la notion de nombres, la notion de limite et la décimalisation des nombres réels dans EMS au Viêt-nam

Introduction

Dans ce chapitre, nous conduisons une analyse institutionnelle de l'EMS au Viêt-nam, pour rechercher les traces des interrelations entre la notion de nombre réel et la notion de limite, en particulier dans la décimalisation des nombres.

La notion de nombre réel est introduite dès le collège et la notion de limite est enseignée au lycée. Nous étudions donc deux institutions, celle du collège[1] et celle du lycée[2].

Première partie. Au niveau du collège

Au niveau du collège, la notion de limite étant absente, nous menons une enquête sur :

- l'existence de traces de la construction des nombres réels, en particulier des traces de l'OM_3 « *développement décimal d'un nombre réel* »,
- la place des écritures décimales dans les traces de la construction des nombres réels.

Programmes du collège et manuels correspondants

1. Nous partons du programme de la « réforme de l'éducation » de 1986 à 2000. Le programme du collège de cette période a été élaboré à la fin des années 1970. Ensuite, il a été mis en place progressivement dans les années 1986. Après quelques modifications et compléments, il a été stabilisé à partir des années 1994.

Le programme de 2000 à 2002 opère peu de changements par rapport au programme de 1994. Il y a donc une certaine stabilité dans les manuels depuis 1994.

Ces programmes et leurs manuels constituent une institution que nous nommons « institution collège 1 » (ou « Collège 1 »).

2. Depuis l'année scolaire 2002 - 2003, un nouveau programme et des manuels correspondants, que nous nommons « institution collège 2 » (ou Collège 2), se mettent en place progressivement. Dans l'année scolaire 2005-2006, ce nouveau programme est devenu officiel de la classe 6 (Sixième) à la classe 8 (Quatrième).

Les deux institutions, Collège 1 et Collège 2, co-existent donc actuellement. L'analyse du Collège 1 sert de référence à celle de Collège 2 : c'est pour cela qu'elle est la plus détaillée.

Nous analysons aussi les livres d'exercices associés à chaque manuel qui concernent le travail à la maison des élèves. Nous avons également consulté les livres des enseignants.

[1] Classes de 6 à 9
[2] Classes de 10 à 12

I. Institution collège 1 (1994 - 2002)

I.1 Traces de la construction des nombres réels dans la partie cours et habitats des écritures décimales

Nous analysons les parties cours des manuels de ce programme pour :

- porter un regard global sur l'organisation de l'enseignement des nombres,
- déterminer l'habitat des différentes écritures décimales.

*a. De l'ensemble **N** à l'ensemble **R** au Collège : inexistence de l'ensemble D ?*

La construction des systèmes de nombres s'effectue au Collège selon le schéma ci-après.

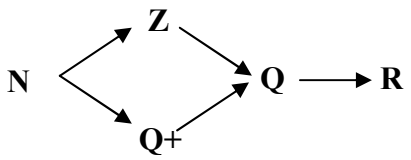


Figure 1. Organisation de l'enseignement des nombres au Collège

- L'extension, $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}^+$, relève d'une problématique du partage égal d'objets.

> 1. Supposons qu'on veuille partager deux oranges identiques en parts égales entre trois enfants. […] (*Mathématique 6*, vol.1, p. 5)

- L'extension, $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$**,** apporte une solution au problème posé par l'effectuation de la soustraction deux nombres naturels, qui n'est pas toujours possible dans **N**.

> **1. Problématique**
> On sait effectuer l'addition et la multiplication de deux nombres naturels 3 + 5 = 8, 7.4 = 28. La somme ou le produit de deux nombres naturels est aussi un naturel.
> Et pour la soustraction ? 5 – 3 = 2, mais 3 – 5 = ? On voit que la soustraction n'est pas toujours effectuable.
> On se pose le problème de compléter l'ensemble **N** des nombres naturels, par de nouveaux nombres afin que la soustraction puisse toujours s'effectuer dans le nouvel ensemble.
> (*Algèbre 7*, p. 3)

- L'extension, **Z** et $\mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{Q}$**,** apporte une solution au problème posé par la division de deux entiers dans **Z**.

> **1. Problématique**
> […] Dans **Z**, les opérations de l'addition, de la soustraction et de la multiplication sont toujours effectuables. Et pour la division ? 6 : 2 = 3, mais 7 : 2 = ? On voit que la division n'est pas toujours effectuable.
> On se pose donc le problème d'élargir **Z** en un ensemble de nouveaux nombres afin que la division par un nombre non nul puisse toujours s'effectuer. En classe 6, on utilise une fraction pour écrire le résultat de la division. […] Pour ce problème, on va donc élargir la notion de fraction. (*Algèbre 7*, p. 3)

- L'extension, $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$, porte sur la problématique de l'écriture décimale illimitée.

> Tout nombre rationnel peut se représenter en écriture décimale limité ou illimité périodique.
> Inversement, toute écriture décimale limitée ou illimité périodique représente un nombre rationnel.
> **2. Ecriture décimale illimitée non périodique. Nombre irrationnel**
> On considère maintenant l'écriture décimale illimitée non périodique. Par exemple :
> 96,13113111311113…
> 0,101001000100001…
> Il est clair que ces écritures décimales illimitées ne représentent pas de nombres rationnels.

> [...] *On appelle nombre irrationnel un nombre qui a une écriture décimale illimitée non périodique.*
> 3. *Nombre réel.* Les rationnels et les irrationnels sont appelés *nombres réels*. Alors, *tout nombre réel peut être représenté par une écriture décimale limitée ou illimitée périodique (les nombres rationnels) ou illimitée non périodique (les nombres irrationnels)*. Réciproquement, *toute écriture décimale limitée ou illimitée périodique ou illimitée non périodique est la représentation décimale d'un nombre réel quelconque. L'ensemble des nombres réels est noté* **R**. (*Algèbre 9*, p. 4)[3]

Examinons l'extrait suivant :

> […] *Les points rationnels ne complètent pas l'axe numérique.* […] On [les mathématiciens] démontre que *les points rationnels et irrationnels complètent l'axe numérique*, plus précisément, chaque nombre réel correspond à un point sur l'axe numérique et réciproquement. C'est pourquoi, l'axe numérique s'appelle aussi *axe numérique réel*. (*Algèbre 9*, p.7)

L'intention de l'auteur du manuel est donc double :

- d'une part, du point de vue mathématique, la complétude de **R** repose sur le modèle de la droite graduée.
- d'autre part, l'extension des systèmes des nombres est close par la relation biunivoque entre les éléments de **R** (ou nombre réels) et les points de la droite graduée.

L'ensemble des nombres réels est institutionnellement défini comme l'ensemble des différentes écritures décimales : limitées, illimitées périodiques et illimitées non périodiques. Nous notons désormais les différentes écritures décimales (ED) respectivement par EDL, EDIP et EDINP.

La décimalisation des nombres réels semble donc centrale pour l'institution collège 1. Qu'en est-il ?

• *Place des nombres décimaux*

Dans l'enseignement des systèmes des nombres au collège, l'étude de l'ensemble des nombres décimaux n'est pas un objectif de l'institution. Cependant, à travers l'extension de **Q** à **R** par l'écriture décimale, les nombres décimaux (ensemble **D)** est identifié comme une restriction particulière des rationnels positifs de **Q** et sont appelés « fractions décimales ».

> a) En pratique, on rencontre souvent des fractions ayant comme numérateur des puissances de dix, par exemple : [...]
>
> Ces fractions sont dites *fractions décimales*.
> b) Par commodité, on écrit souvent une fraction décimale sous la forme d'un nombre décimal [...] (*Mathématique 6*, vol. 2, pp. 25 - 26)

L'ensemble **D** n'existe donc pas en tant que tel, mais seulement comme restriction de **Q**. Son statut numérique (opérations et ordre) hérite donc officiellement de celui de **Q**.

> **2. Somme de deux nombres décimaux**
>
> Exemple : 15,238 + 6,107 = $\frac{15238}{1000}+\frac{6407}{1000}=\frac{15238+6407}{1000}=\frac{21645}{1000}=21{,}645$ (Ibid. , p. 32)

Cependant, en réalité on opère selon une autre règle.

> Dans la pratique, on calcule comme suit :

[3] C'est nous qui soulignons.

$$\begin{array}{r} 15{,}238 \\ +\ 6{,}407 \\ \hline 21{,}645 \end{array}$$

(Ibid., p. 32)

Ce dernier commentaire suggère que les nombres décimaux positifs ont déjà un passé scolaire qui leur a donné leur propre statut numérique. Nous allons donc enquêter sur la vie des nombres décimaux positifs au Primaire.

Nombres décimaux positifs au Primaire[4]

A ce niveau, apparaissent trois types des nombres : le nombre naturel, la fraction et le nombre décimal. L'organisation de ces nombres se résume par le schéma suivant :

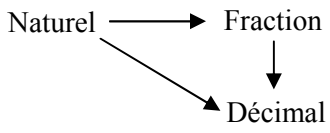
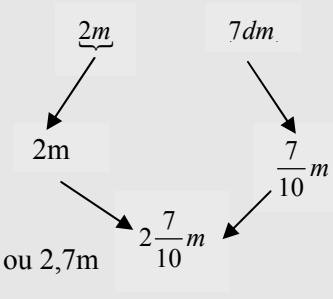


Figure 2. Organisation de l'enseignement des nombres au Primaire

Les nombres décimaux sont issus de la problématique de la mesure des grandeurs à l'aide des fractions décimales :

a) Exemple 1 : la mesure de la longueur d'un tableau est 2m 7dm […]



On écrit 2m 7dm par $2\frac{7}{10}m$ ou 2,7m

(*Mathématique 5* (CS2), p. 55)

Le nombre décimal apparaît au Primaire, implicitement comme une fraction particulière. Il existe ici des exercices de passage de l'écriture en fraction décimale à celle en décimal. Par exemple :

Écrire les fractions décimales suivantes en écriture en nombre décimal :

a) $\frac{25}{10}$; $\frac{354}{10}$; $\frac{427}{100}$; $\frac{1984}{100}$; $\frac{2368}{1000}$.

[…] (Ibid., exercice 2, p. 60)

Mais, il n'existe aucun exercice du passage inverse : de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire. En fait, l'attente de l'institution vis-à-vis des nombres décimaux est d'établir des règles de calcul et de comparaison en relation avec le calcul et la comparaison sur les entiers.

Chaque nombre décimal comporte deux parties : une partie entière et une partie décimale, séparées par une virgule.

Les chiffres à gauche de la virgule appartiennent à la partie entière, les chiffres à droite de la virgule appartiennent à la partie décimale. (Ibid., p. 56)

[4] Classes de 1 à 5

Les nombres décimaux comportent donc deux parties - entière et décimale – qui vont permettre la mise en place de règles de comparaison (ordre) et d'opérations (addition, soustraction et multiplication) héritées de **N** et en rupture avec celles des $\mathbf{Q}^+$ déjà construites. Par exemple, pour l'addition :

> Pour faire l'addition de deux nombres décimaux :
> - On écrit l'un des nombres décimaux au dessus de l'autre de façon à ce que les chiffres de même ordre des deux décimaux soient dans la même colonne, et de même pour les virgules.
> - Faire l'addition comme avec deux nombres entiers
> - Dans la somme obtenue, mettre la virgule dans la même colonne que celle des deux décimaux. (Ibid., p. 79)

Tous les exercices de cette partie se limitent d'ailleurs à des nombres décimaux ayant au maximum trois chiffres décimaux : l'ordre dense (non discret[5]) dans **D** est absent de ce niveau.

Revenons au niveau collège.

b. Habitats des différentes écritures décimales

Dans le manuel *Algèbre 6* (Sixième), l'écriture décimale illimitée périodique se présente pour la première fois dans la partie cours de la section 12 - *Nombre décimal illimité périodique* - chapitre II – *Opération sur les fractions*.

> b) Si le dénominateur d'une fraction irréductible contient d'autres facteurs que 2 et 5, on n'a pas une division qui s'arrête et cette fraction peut s'écrire comme un nombre décimal illimité périodique. (p. 67)
>
> […]
>
> Pour comprendre le nombre décimal illimité périodique, représentons la fraction $\frac{118}{55}$ en écriture décimale. […]

> On obtient un nombre appelé *nombre décimal illimité périodique* 2,14545…
> De la même façon :
>
> $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)$; 3 est la période
>
> $\frac{1}{99} = 0{,}0101... = 0{,}(01)$; 01 est la période (p. 67)

Parallèlement à l'apparition de l'écriture décimale illimitée périodique, on donne au nombre décimal un nouveau nom:

> Remarque : Le nombre décimal s'appelle aussi *nombre décimal limité* (p. 68)

Les habitats des différentes écritures décimales (ED) sont donc les suivants.

- L'écriture décimale limitée (EDL) apparaît dans l'enseignement des nombres décimaux dès l'école primaire.
- L'écriture décimale illimitée périodique (EDIP) apparaît au collège en même temps qu'une reprise de la division euclidienne : c'est le résultat de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur d'une fraction.

[5] Rappelons que nous adoptons le terme d'« *ordre dense* » de Brousseau (1987) pour désigner un ordre « *non discret* » : dans **D**, il n'existe ni prédécesseur et ni successeur d'un nombre décimal.

- L'écriture décimale illimitée non périodique (EDINP) est conçue comme une extension des écritures décimales et conduit à la définition de la notion de nombre irrationnel.

c. En résumé et questions posées

Le tableau 1 ci-après résume l'apparition des écritures décimales selon le niveau d'enseignement du système de nombres du primaire au collège.

Niveau	Primaire	Collège			
Classe	4 et 5	6	7		9
Nombres	**N, Q+, D+**	**N → Q+**	**N → Z**	**Z** et **Q+→ Q**	**Q → R**
Construction	Mesures des grandeurs	Partage des objets	Extension de la soustraction	Extension de la division	Extension de l'écriture décimale
Ecriture décimale (habitat)	EDL ($\mathbf{D}^+$)	EDL (restriction **Q→ D)** et EDIP (représentation décimale d'une fraction non décimale)			EDL, EDIP et EDINP (extension des ED)
Complétude de **R**	Biunivocité entre **R** et les points de la droite graduée (statut d'axiome)				

Tableau 1. Système de nombres du Primaire au Collège

Dans le topos de l'enseignant, l'ensemble des nombres réels apparaît, au Collège, comme l'ensemble des écritures décimales (ED) : - limitées (EDL) - illimitées périodiques (EDIP) - et illimitées non périodiques (EDINP).

Les questions suivantes restent posées.

- L'ensemble des ED a –t-il un statut numérique au collège ? C'est-à-dire : l'ensemble des ED est-il structuré par les opérations d'addition et de multiplication et l'ordre en ce qui concerne les écritures décimales illimités (EDI) ? Comment existe et se met en place cette structuration, plus particulièrement dans le topos de l'élève ?

- Quelle est la trace de OM_3 « développement décimal d'un nombre réel » ? Quel est le rapport institutionnel à l'objet EDI ?

Dans le topos de l'enseignant, la correspondance biunivoque entre **R** et la droite graduée (dit axe numérique réel) est déclarée mais non construite. Quels sont les habitats de la droite graduée (ou axe gradué) et quelles niches y occupe –elle ?

I.2. Absence du statut numérique de l'ensemble des EDI

a. Ordre sur les EDI

Nous analysons le manuel *Algèbre 9* (2003, pp. 3-8) où l'ensemble **R** est définie par celui des EDL et EDI.

- Dans le topos de l'élève, il existe un seul exercice de comparaison portant sur des EDI, nommés nombres réels.

> Comparez les nombres réels suivants :
> a) 0,123 et 0,(123) ;
> b) 0,(01) et 0,01001000100001… (Exercice 2, p. 2)

- Dans la partie cours (topos de l'enseignant) tout ce qui concerne l'ordre de l'ensemble des EDI est donné dans un seul paragraphe.

> Nous avons appris à comparer des nombres rationnels en leurs écritures décimales. Le nombre réel peut se représenter en écriture décimale, donc, pour effectuer la comparaison (=, <, >) des réels, on peut le faire comme on sait le faire avec les rationnels.
>
> Par exemple : 1,414(7) < 1,41532…

-2,3(02) < -1,89023…
-7,498…< 0,015. (Ibid., p.4)

On recommande dans le topos de l'enseignant que la comparaison des écritures décimales illimitées s'appuie sur *une pratique antérieure* : la comparaison des écritures décimales des nombres rationnels (c'est-à-dire la comparaison des écritures décimales limitées ou illimitées périodiques).

Cependant, dans le topos de l'élève, la comparaison de deux EDIP (rationnels) n'est jamais traitées (absence d'exercices), au profit de la comparaison des fractions.

Pour comparer deux nombres décimaux (EDL), deux techniques sont possibles.

• *Ordre dans **D***: la première technique est l'ordre dans **D,** présent depuis le Primaire pour la comparaison dans $\mathbf{D}^+$ et énoncée comme règle :

> Pour comparer deux nombres décimaux, on peut faire comme suit :
>
> - Comparer les deux parties entières de ces deux décimaux comme dans le cas des nombres naturels, le plus grand décimal est celui qui possède la plus grande partie entière.
> - Si les deux parties entières sont égales, on compare successivement chaque chiffre décimale dans l'ordre de dixième, centième, millième … ; jusqu'à un rang où le plus grande chiffre décimal de l'un des deux nombres décimaux désigne le plus grand nombre décimal entre les deux nombres décimaux. (*Mathématique 5* (CS2), p. 63)

• *Ordre dans **Q** :* la deuxième technique est celle de la comparaison de deux fractions « décimales » qui amène à représenter les deux nombres décimaux comme deux fractions ayant même dénominateur ou même dénominateur. Cette technique n'apparaît qu'au collège.

Les décimaux sont re-identifiés comme fractions décimales lorsque l'on construit les ensembles **Q+** au niveau de la classe 6 et **Q** au niveau de classe 7.

- Dans *Mathématique 6, vol. 2*, à la page 25 :

> **10. Notions sur les nombres décimaux et les pourcentages**
> a) En pratique, on rencontre souvent des fractions ayant comme numérateur des puissances de dix, par exemple : […]
>
> Ces fractions sont dites *fractions décimales*.
> b) Par commodité, on écrit souvent une fraction décimale sous la forme d'un nombre décimal : […]
> c) Un nombre décimal se compose de deux parties :
> - la partie entière s'écrit à gauche de la virgule ;
> - la partie décimale s'écrit à droite de la virgule.
> Remarque : Le nombre de chiffres de la partie décimale est égale au nombre de zéros figurant au dénominateur de la fraction.

- Dans *Algèbre 7*, à la page 37 :

> En classe 6, on a appris les nombres décimaux.
> Par exemple : (…)
> Ce sont des rationnels positifs, appelés aussi nombres décimaux positifs.
> On a leurs nombres opposés : (…)
> Ce sont des rationnels négatifs, appelés nombres décimaux négatifs.
> Il existe donc, dans Q, des nombres décimaux positifs avec le signe + (qu'il convient de ne pas écrire) et des décimaux négatifs avec le signe -.

Cependant, aucun exercice ne nécessite l'usage de cette technique : ni pour comparer deux nombres décimaux, ni pour comparer un nombre décimal et un rationnel non- décimal. La

technique de comparaison des nombres décimaux par celle des nombres rationnels semble donc non – viable dans EMS vietnamienne au profit de la technique de comparaison décimale issue du primaire.

La présence actuelle et la puissance de la calculatrice (Le Thai Bao 2004) contribuent aussi à favoriser la technique de comparaison en décimalisant les nombres rationnels.

On peut donc faire l'hypothèse que l'ordre sur l'ensemble des EDI est considéré institutionnellement comme un prolongement « naturel » de l'ordre dans **D**.

b. Opérations sur les EDI

L'analyse du manuel Algèbre 9 (2003, pp.3 -8) montre que :

- dans la partie exercice (topos de l'élève), il n'y a aucun exercice portant sur des opérations des EDI.
- dans la partie cours (topos de l'enseignant), les opérations sur les écritures décimales des réels sont énoncées comme axiomes prolongeant ceux de **Q**.

> En s'appuyant sur l'écriture décimale d'un nombre réel, on peut effectuer des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de puissance sur les nombres réels de façon analogue aux opérations sur les rationnels. (p. 5)

Cependant, les opérations sur les EDIP de rationnels ne sont jamais traitées : il n'y a aucun exercice les concernant.

I.3. Trace de OM_3 « développement décimal d'un nombre réel » : Rapport institutionnel aux EDI

a. Rapport institutionnel aux EDIP

OM3 « développement décimal d'un nombre réel » se réduit à deux types de tâches que nous allons étudiées.

• *Type de tâches essentiel de l'objet EDIP : Ecrire une fraction donnée en EDIP (T_{EDIP})*

Le type de tâche T_{EDIP} est un cas particulier du type de tâche T31 « Approximation décimale à 10^{-n} près d'un nombre réel » où :

- le nombre réel est une fraction non décimale,
- la période de l'EDIP dans une écriture infinie -finie 0,(31) ou 0,313131… permet potentiellement de déterminer toutes les valeurs décimales approchées de la fraction à 10^{-n} près de la fraction.

Dans la section §12, *Nombre décimal illimité périodique*, il y a 10 tâches de ce type sur un total de 24 tâches (soit 42%).

La technique pour accomplir ce type de tâches est la suivante :

> Pour comprendre le nombre décimal illimité périodique, représentons la fraction $\frac{118}{55}$ en écriture décimale.
>
> | | |
> |---|---|
> 118 | 55
> 080 | 2,14545…
> 250 |
> 300 |
> 250 |
> 300 |
> 25… |

> On voit qu'il est impossible de représenter $\frac{118}{55}$ par un nombre décimal parce que si l'on effectue encore la division, les chiffres 4 et 5 sont répétés dans le quotient. On obtient un nombre appelé *nombre décimal illimité périodique* 2,14545…
> Brièvement, on écrit 2,1(45). La notation (45) veut dire que les chiffres 4 et 5 (formant le nombre 45) sont infiniment répétés. Le nombre 45 s'appelle *période* du nombre décimal illimité périodique. (p. 68, c'est nous qui soulignons)

La périodicité n'est pas déduite de la propriété des restes d'une *division euclidienne généralisée*[6], ni de l'observation de la répétition des restes, mais de l'observation du comportement du quotient décimal approché.

Dans l'institution, l'absence de savoirs arithmétiques sur la *division euclidienne*[7] (généralisée) ne permet pas de justifier la notion de période d'un EDIP : cette absence de justification théorique marque, dans l'institution, l'incomplétude de la praxéologie ponctuelle autour du type de tâche de l'écriture d'une fraction donnée en EDIP. Nous notons donc OM_{EIDP} = [T/t/ /], trace de OM_3, la praxéologie ponctuelle incomplète de EMS vietnamienne.

Quelles sont les propriétés arithmétiques pouvant servir de justification théorique à la périodicité de l'EDIP dans le développement décimal de la fraction par la division euclidienne ?

• Soit une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ (positive), l'algorithme de la division euclidienne pour déterminer « $d_0,d_1d_2...d_n...$ » suit les étapes dans le tableau 2.

La division euclidienne	Etape (ou pas)
$p = d_0.q + r_1$	0
$10.r_1 = d_1.q + r_2$	1
$10.r_2 = d_2.q + r_3$	2
…	…
$10.r_{q-2} = d_{p-2}.q + r_{q-1}$	q-1
$10.r_{q-1} = d_{p-1}.q + r_q$	q

Tableau 2. Division euclidienne entre deux entiers p : q

Après la q-ième étape, on obtient q valeurs des restes r_i entiers et inférieurs à $q - 1$. Il existe donc au moins deux valeurs $r_i = r_j$ ($i < j$), d'après le principe de Dirichlet. La suite des chiffres $d_id_{i+1}…d_{j-1}$ est donc répétée indéfiniment. Et si on choisit le plus petit couple tel que $r_i = r_j$, la longueur de la période ($j - i$) est inférieure ou égale à $q - 1$. La condition d'arrêt est d'atteindre la ($j - i$)ème étape quand on obtient pour la première fois $r_j = r_i$ ($i < j$).

La technique supra s'appuie donc sur l'effectuation de divisions euclidiennes successives. La condition d'arrêt de ces divisions successives est l'apparition d'une (première) répétition d'un reste. Le théorème de l'unicité du couple (q,r) dans la division euclidienne $a = b.q + r$ ($r < b$) et le principe de Dirichlet jouent le rôle de la technologie expliquant et justifiant cette technique.

• Le rationnel $\frac{p}{q}$ est un décimal si et seulement si $q = 2^N.5^M$ (puisque $\frac{p}{2^N5^M} = \frac{2^M5^N p}{10^{N+M}}$).

• Un nombre réel est donc un rationnel si, et seulement si, son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. De plus :

- La longueur de sa période est inférieure ou égale à q -1.

- Toutes les fractions $\frac{r_i}{q}$ (les r_i sont les restes dans le tableau 2) ont la même période que $\frac{p}{q}$.

[6] C'est-à-dire l'effectuation successive de divisions euclidiennes.
[7] Nous appelons désormais *division euclidienne* la division euclidienne généralisée.

- Dans le cas $\frac{1}{q}$ où q est un entier premier, la longueur de la période est un diviseur de q -1.

En effet, si on effectue cet algorithme jusqu'à la (q-1)ème étape, alors on obtient r_1 =1 (d_0 =0) et $10^{q-1} = \overline{d_1...d_{q-1}} \times q + r_q$. Puis que (10,q) = 1, on a $10^{q-1} \equiv 1$ (modulo q) d'après le théorème de Fermat. On a $r_q \equiv 1$ (modulo q) et $r_q < q$, donc $r_q = 1$. C'est-à-dire $d_1d_2...d_{q-1}$ est répétée indéfiniment. Autrement dit, la longueur de la période est un diviseur de q -1.

- On n'a pas encore trouvé, jusqu'à aujourd'hui, un résultat le plus général permettant de déterminer la longueur de la période de toute fraction[8].

Comment peut-on pallier l'absence de ces éléments technologiques ?

Une règle du contrat didactique se met en place.

Dans les 10 tâches du type T_{EDIP}, la non décimalité du nombre est toujours signalée.

Nous donnons dans le tableau 3 l'énoncé de ces tâches *complété* par les réponses (sauf pour l'exercice 3b) obtenues par la technique institutionnelle.

Exercice 3	Exercice 4	Exercice 8
a) $\frac{2}{3} = 0{,}666...$; $\frac{5}{6} = 0{,}8333...$	a) $\frac{16}{11} = 1{,}454545...$	a) $\frac{19}{30} = 0{,}6333...$; $\frac{5}{6} = 2{,}545454...$
b) $\frac{4}{15} = 0{,}2666...$; $\frac{16}{49} = ?$	b) $\frac{323}{990} = 0{,}3262626...$	b) $\frac{23}{15} = 1{,}5333...$; $\frac{13}{22} = 0{,}590909...$

Tableau 3. Tâches du type de tâches T_{EDIP} dans le manuel *Mathématique 6*

Toutes les fractions sont irréductibles, la période apparaît « précocement » et elle est de 1 à 2 chiffres sauf pour l'exercice 3b.

Une règle du contrat didactique dicte donc la réponse dans la recherche de la période d'un rationnel au travers de la division euclidienne :

- L'élève n'est pas responsable de l'étude la non – décimalité de la fraction.

- La succession de chiffres répétés 1 ou 2 fois dans le quotient décimal approché est la période.

Le cas particulier de l'exercice 3b : la période de la fraction $\frac{16}{49}$ comporte 42 chiffres

326530612244897959183673469387755102040816[9]

[8] Un résultat plus général peut se trouve, par exemple, dans Boualem - Brouzet (2002) :

Soient $b \geq 2$et q ≥ 1 deux entiers premiers entre eux.

Le développement en base b de $1/q$ est périodique à partir du rang 1. Sa période $\tau(q)$ est égal à l'ordre de la classe de b dans le groupe $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$. En particulier elle divise $\phi(q)$.

De plus, si $\tau(q) = q - 1$, alors pour tout entier $1 \leq p \leq q - 1$, le développement en base b de p/q se déduit de celui de $1/q$ par une permutation cyclique des termes. (Théorème 16.2 p.107)

Remarque : $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$ est le groupe des éléments inversibles de $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ et $\phi(q)$ est la fonction d'Euler : $\phi(q) = q\prod_{l \in P_q}(1-\frac{1}{l})$ où P_q est l'ensemble des diviseurs premiers de q.

[9] On trouvera dans l'annexe 1 une technique instrumentée par la calculatrice permettant de calculer la période.

Il faut effectuer plus de 42 divisions euclidiennes pour reconnaître la répétition. Cela représente une rupture de contrat importante. Pour repérer la période, l'observation de la répétition de chiffres est rendue impossible ; la seule technique étant l'effectuation de la division[10], comment l'élève peut-il trouver la période dans ce cas ?

Nous ne trouvons ni de solution dans le *livre de l'exercice* du ministère de l'Education et de la Formation, ni d'explication dans le livre pour l'enseignant. On peut penser que cette fraction est une erreur typographique comme le sous entend le livre de l'Edition d'Ho Chi Minh ville, *Résolution des exercices de Mathématique 6*. L'auteur de ce livre a remplacé la fraction $\frac{16}{49}$ par $\frac{5}{9}$ pour le calcul.

> Car les dénominateurs des fractions $\frac{2}{3};\frac{5}{6};\frac{4}{15};\frac{16}{49}$ [sic] contiennent d'autres facteurs que 2 et 5, les facteurs 3 et 7. Elles s'écrivent seulement sous la forme décimale illimité périodique.
>
> a) $\frac{2}{3} = 0,(6)$; $\frac{5}{6} = 0,8(3)$ b) $\frac{4}{15} = 0,2(6)$; $\frac{5}{9} = 0,(5)$ [sic]
>
> (Phan 1998, p. 70)

• *Un sous type de tâches de T_{EDIP} : « calcul décimal approché à 10^{-n} près de « a : b » où a, b sont des décimaux »*

Ce type de tâches « calcul décimal approché à 10^{-n} près de « *a* : *b* » où *a*, *b* sont décimaux » se trouve dans le manuel juste avant la présentation de l'EDIP. Dans la section 10 – *Division des décimaux* – il y a 5 exemplaires de ce type de tâches sur un total de 12 tâches (soit 42%) et le calcul des valeurs approchées à 10^{-n} est limité à $n = 3$. Par exemple :

> 5. Calculer la valeur approchée :
> a) de 53 : 101 et de 2 719 : 138 (à 0,01 près) ;
> b) de 1,25 :1,6 et de 4,01 : 0,39 (à 0,001 près) (*Mathématique 6*, vol. 2, p. 67)

Voici la technique pour accomplir cette tâche telle qu'elle est présentée par le manuel :

> **3. Division d'un nombre décimal par l'autre décimal**
>
> Exemple : 3,2 : 4,23 = $\frac{32}{10}:\frac{423}{100}=\frac{32}{10}.\frac{100}{423}=\frac{320}{423}$.
>
> On retourne au cas de la division d'un nombre entier par l'autre entier.
>
> Dans la pratique, on fait comme suit :

3,20	4,23
2390	0,756
2750	
212	

> 0,756 est la valeur approchée du quotient à 0,001 près dans la division 3,2 par 4,23.
>
> (Ibid., pp. 66-67)

La technique de la division d'un décimal par un autre décimal est donc la division euclidienne. Dans l'institution, l'accomplissement de ce sous-type de tâches ne diffère du type de tâche principal que par la condition d'arrêt de l'effectuation des divisions euclidiennes : ici la condition d'arrêt est le nombre de chiffres après la virgule obtenu au quotient, qui doit être le même que 0,1 ou 0,001 ou 0,001 c'est-à-dire 1 ou 2 ou 3.

[10] On ne sait que la longueur de la période divise $\phi(49) = 42$ puisque 49 est premier avec la base 10.

• *Relation entre la fraction et son développement décimal*

La relation entre le quotient de décimaux et l'écriture fractionnaire apparaît bien dans la partie cours sur l'exemple supra « 3,2 : 4,23 = $\frac{320}{423}$ ». Pourtant le fait qu'une EDIP, par exemple « 2,1(45) », peut fournir n'importe laquelle des valeurs décimales approchées du quotient de décimaux, par exemple « 1,18 : 5,5 », n'est pas mis en évidence ni dans le topos de l'élève, ni dans le topos de l'enseignant.

L'existence d'un encadrement décimal (d_n, d_n') où $d_n' - d_n = 10^{-n}$ est totalement absente comme conséquence de la technique de la division euclidienne du type de tâches T_{EDIP} et de son sous type de tâche « calcul décimal approché à 10^{-n} près de « a : b » où a, b sont des décimaux ».

- Il n'existe donc pas d'élément technologique assurant la précision à 10^{-n} près des valeurs décimales approchées.

- La relation entre une EDIP et les valeurs décimales approchés à 10^{-n} près d'une fraction est absente.

• *Fragilité du type de tâche autour la décimalité et la non- décimalité de la fraction*

Parallèlement à la présence de OM_{EDIP}, il existe d'autres types de tâches comme celle que nous appelons *Démontrer la décimalité (ou la non – décimalité) d'une fraction*.

> Expliquez pourquoi on peut écrire sous la forme décimale les fractions suivantes, puis écrivez les sous cette forme :
> $\frac{5}{16}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{51}{40}$; $\frac{113}{125}$
> (*Mathématique 6, vol. 2*, Exercice 1, p. 68).

> Expliquez pourquoi on peut écrire sous la forme d'un nombre décimal illimité périodique les fractions suivantes, puis écrivez les en cette écriture :
>
> $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{16}{49}$ (Ibid., Exercice 3, p. 69).

Quelle est la technique institutionnelle de ce type de tâche ?

La technique attendue par l'institution pour résoudre ce type de tâches s'appuie sur la décomposition en facteurs premiers du dénominateur de la fraction irréductible. Elle est énoncée sans justification dans la partie cours :

> a) […] Si le dénominateur d'une fraction irréductible ne contient pas, dans sa décomposition en facteurs premiers, d'autres facteurs que 2 et 5, on a une division limitée et cette fraction peut être représentée en écriture d'un nombre décimal.
>
> b) Si le dénominateur d'une fraction irréductible contient d'autres facteurs que 2 et 5, on n'a pas une division limitée et cette fraction peut représenter en écriture décimale illimité périodique. (Ibid. p. 67)

Pourtant, l'effectuation de la division euclidienne pour écrire les fractions en EDL ou EDIP peut jouer aussi le rôle de technique des tâches supra.

L'identification de nombres décimaux et rationnels non décimaux par cette technique (décomposition en facteurs premiers) n'est à la charge de l'élève que s'il y a la consigne « expliquer pourquoi … ». En outre, il n'y a pas d'exercice où sont confrontés décimaux et rationnels non décimaux.

L'identification de la nature d'une fraction comme décimal ou non décimal n'est pas vraiment de la responsabilité de l'élève puisque cette nature est déjà affirmée dans la consigne.

• *Signification des pointillés « … » dans une EDIP*

Quelles peuvent être les attentes de l'institution dans les exercices suivants ?

> Ecrire sous la forme brève (mettre la période entre parenthèses) les nombres décimaux illimités périodiques :
> a) 0,66666… ; 1,838383…
> b) 4,3012012… ; 6,4135135… (Ibid., exercice 2, p. 69)

Cela correspond à la partie cours où le remplacement des pointillés « … » par une parenthèse est encouragé.

> De la même façon [le remplacement 2,14545… par 2,1(45)] :
>
> $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)$; 3 est la période
>
> $\frac{1}{99} = 0{,}0101... = 0{,}(01)$; 01 est la période (Ibid., p. 68)

En l'absence de la définition de la période, une autre règle de contrat didactique peut alors se mettre en place : dans l'écriture décimale illimitée utilisant des pointillés "… ", une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois est la période.

• *Écriture décimale illimitée périodique ayant 9 comme période (EDIP9)*

Bien que l'EDIP9 ne soit pas présente, ni traitée dans la comparaison des écritures décimales (ED), elle n'est pas officiellement exclue.

> Toute écriture décimale limitée ou illimitée périodique représente un rationnel. (*Algèbre 9*, p.3)

b. Rapport institutionnel aux EDINP

• *Absence d'OM autour des EDINP*

Dans la partie cours, on peut lire la remarque suivante à propos de la définition de l'ensemble des nombres réels :

> Remarque : du point de vue pratique, on n'effectue couramment que des calculs approchés sur les nombres réels avec la précision qu'on voudra, c'est-à-dire sur des rationnels exprimés par leurs valeurs approchés.
> Pas exemple, pour calculer : 0,12345 … + 1,3 à 0,1 près.
> On a : 0,12345 … + 1,3 ≈ 0,1 + 1,3 = 1,4.
> Pour le calcul à 0,01 près :
> 0,12345 … + 1,3 ≈ 0,12 + 1,3 = 1,4. (*Algèbre 9*, p.5)

C'est l'unique moment où l'on aborde l'écriture décimale illimitée non périodique dans le problème du calcul approché au collège. Cependant, l'élève n'a aucune responsabilité vis-à-vis de ce problème : aucune tâche de ce type ne lui est proposée.

Dans le topos de l'élève, l'EDINP n'apparaît qu'une fois dans la comparaison d'écritures décimales (cf. plus haut).

Dans les sections suivantes, *Racine carrée* et *Racine cubique*, les écritures décimales produites ne sont jamais considérées comme des EDINP mais comme des valeurs approchées, comme nous le montrons ci-après. L'EDINP a désormais disparu quasi-totalement de EMS vietnamienne.

OM_3 « développement décimal d'un nombre réel » se réduit à un seul type de tâches sans lien avec EDINP.

• *Type de tâche « calcul décimal approché à 10^{-n} près d'une racine carrée ou cubique »*

Comme T_{EDIP}, ce type de tâche est aussi un cas du type de tâche T31 « Approximation décimale à 10^{-n} d'un nombre réel ».

Dans le manuel, l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique s'effectue officiellement par la lecture de tables numériques (l'algorithme de l'extraction de la racine carré ou cubique et la calculatrice sont présents seulement en annexe) et l'occasion de revenir sur l'EDINP n'est pas saisie. Voici un exemple :

> Exemple 1 : Trouver $\sqrt{5{,}62}$
> En lisant dans le tableau numérique, la case de l'intersection de la ligne de 5,6 et la colonne de 2, on a le nombre 2,371. On a $\sqrt{5{,}62} \approx 2{,}371$. (*Algèbre 9*, p. 20)

Les valeurs approchées sont donc associées au signe « ≈ ». Le signe « ≈ » remplace les pointillés dans l'EDINP.

Une règle implicite semble fonctionner : si l'on ne demande pas explicitement le calcul approché ou l'extraction de la racine carrée (ou cubique), il faut donner des résultats 'exacts', c'est-à-dire entrer dans un travail algébrique.

Concernant le calcul approché de la racine carré ou cubique, nous rappelons ici un résultat de notre étude, Le Thai Bao (2004), sur l'évolution de l'utilisation de calculatrices dans cette institution.

> La plupart des enseignants de collèges autorisent leurs élèves à utiliser la calculatrice pour calculer les rapports trigonométriques et extraire les racines carrées et les racines cubiques. Par contre, les tables numériques (trigonométrique, racines carrées et cubiques) sont rarement utilisées. (p. 35)

Dans les techniques officielles (lecture des tables numériques) et non officielles (algorithmes ou utilisation de la calculatrice) de l'extraction la racine carrée ou cubique, l'encadrement d'un nombre $\sqrt{a}$ ou $\sqrt[3]{a}$ (a entier positif) par un couple décimal (d_n, d_n') où $d_n' - d_n = 10^{-n}$ est totalement absent.

I.4. Rôle de la droite graduée ou « axe gradué » dans l'enseignement des nombres

Nous examinons, aux moments des introductions des ensembles de nombres **N**, **Z**, **Q** et **R**, la question suivante : quel rôle joue la droite graduée dans l'introduction des ensembles numériques ?

a. Type de tâche « représenter des nombres sur l'axe gradué »

Ce type de tâches est présent dans l'introduction des ensembles des nombres **Z**, **Q+** et **Q**.

La technique de ce type de tâches suppose la réalisabilité du partage d'une longueur en n parties égales (n entier positif) et l'existence d'un correspondance (biunivoque) d'un point sur la droite graduée et d'un rationnel, dans une problématique de la mesure des longueurs géométriques.

> Pour représenter le nombre rationnel $\frac{a}{b}$, a, b ∈ **Z**, b > 0 sur l'axe numérique, on fait comme suit :

1) on partage l'unité de l'axe numérique en b parties égales, on obtient une nouvelle unité égale à $\frac{1}{b}$ fois l'ancienne unité.

2) Si a > 0 alors $\frac{a}{b}$ est représenté par un point, à droite de l'origine 0, la distance de ce point à l'origine étant égale à *a* fois la nouvelle unité.

3) Si a < 0 alors $\frac{a}{b}$ est représenté par un point, à gauche de l'origine 0, la distance de ce point à l'origine étant égale à $|a|$ fois la nouvelle unité.

Par exemple : représenter les nombres $\frac{5}{3}$ et $\frac{-5}{3}$ sur l'axe numérique.

(*Algèbre 7*, p. 29)

Cependant, ce type de tâche est absent de l'introduction de **R**. On ne trouve la biunivocité entre les points de **R** et la droite graduée que dans le topos de l'enseignant en tant qu'axiome.

b. Représentation des nombres sur la droite graduée dans l'étude des fonctions au collège

La notion de fonction numérique est définie pour la première fois en classe 7 pour l'ensemble des nombres rationnels. En même temps, le plan repéré est défini, dans la partie cours, par la donnée d'un système de deux axes gradués orthogonaux.

Examinons l'exemple 1 à la page 83 du manuel *Algèbre 7*.

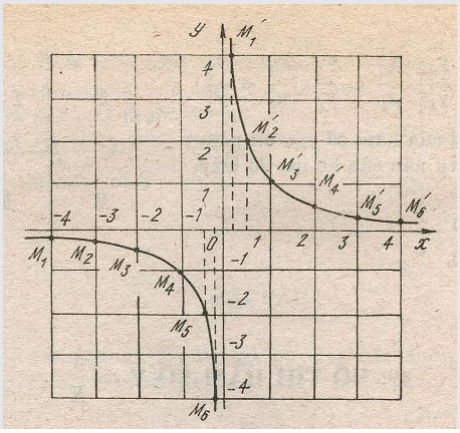
Tracer le graphe de la fonction $y = \frac{1}{x}$

On établit un tableau de valeurs de la fonction pour certaines valeurs de la variable x :

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Représenter les points $M_1(-4 ; -\frac{1}{4})$, $M_2(-3; -\frac{1}{3})$, (…) et les points $M'_1(\frac{1}{4} ; 4)$, $M'_2(\frac{1}{2} ; 2)$, […]

Dans le plan repéré Oxy, si l'on prend plus de valeurs de x, on a plus de points sur les deux courbes, comme dans la figure suivante :



La droite graduée est donc nécessaire à la représentation graphique des fonctions (linaire, rationnelle et polynôme du deuxième degré) au collège où la représentation des nombres rationnels sur deux droites graduées joue un rôle essentiel permettant de tracer les graphiques des fonctions à ce niveau.

Le type de tâches « représenter graphiquement la fonction » occupe une place considérable dans l'étude des fonctions tout au long du collège. On trouve :

- 15/56 soit 27 % de la totalité des exercices du chapitre III, *Fonction*, manuel *Algèbre 7*.

- 26/44 soit 59% de la totalité des exercices dans l'étude des fonctions linaire et du deuxième degré dans le chapitre II du manuel *Algèbre 9*.

Par contre, parmi les 26 exercices, « représenter graphiquement une fonction », du manuel *Algèbre 9* où on parle de la fonction définie sur **R** et d'axe « complet », il n'existe que deux exercices (soit 8%) où l'expression algébrique de la fonction a un coefficient irrationnel, par exemple l'exercice 4 (p. 44).

a) Tracer le graphique de la fonction $y = x\sqrt{3}$

Cependant, le problème de construire exactement une longueur irrationnelle (constructible à la règle et au compas), comme $\sqrt{3}$, par rapport à l'unité choisie n'est pas exigé ici. Il s'agit de représenter sur l'axe gradué un nombre irrationnel par une de ses valeurs décimales approchées fournie par la calculatrice. Cela signifie que la représentation graphique des fonctions sur **R** porte sur celle des nombres rationnels sur une droite graduée.

c. Relation entre l'ordre des nombres et la droite graduée

Dans les introductions de **N** à **Q**, la représentation des nombres de chacun de ces ensembles sur l'axe (ou sur le demi- axe) lie l'ordre de ces ensembles au problème des arrangements ordonnés d'une suite de nombres. Examinons la relation entre l'ordre et la représentation d'une suite de nombres sur l'axe gradué de deux points de vue:

- L'ordre entre deux nombres permet de représenter ces nombres sur l'axe numérique. Notons ce passage « ordre → axe gradué ».
- Les positions de deux nombres sur l'axe numérique permettent d'ordonner deux nombres. Notons ce passage « axe gradué → ordre ».

Ensemble	Partie cours	Partie exercice
N	• **Comparaison et arrangement ordonné des nombres naturels** […] a) Appuyer à la position des nombres dans la suite des nombres naturels : […] b) Appuyer à la position des nombres sur le demi - axe numérique :[…] - Le nombre se trouve au plus loin de l'origine 0 est le plus grand c) Appuyer sur les chiffres décimaux du nombre : […] (*Mathématique 4*, p. 32)	- Aucun exercice du passage « axe gradué → ordre ». - Un exercice du passage « ordre → axe gradué » : Représenter sur le demi- axe les nombres naturels z vérifiant : a) $6 \leq z < 11$; b) $4 < z \leq 12$. (Exercice 4, p. 12, *Mathématique 6*, vol 1)
Z	**§2. Ordre dans Z** **1. Comparaison de deux nombres entiers relatifs** […] C'est-à-dire : *Le nombre entier a est plus petit que l'entier b, noté a < b, si le point de a se trouve à gauche de celui de b sur l'axe numérique.* (*Algèbre 7*, p. 6)	- Supposable le passage « axe gradué → ordre » dans le type de tâche « comparer entre les deux nombres ». par exemple : Comparer les nombres entiers suivantes : […] (Ex. 1, p.7, *Algèbre 7*) - Un exercice du passage « ordre → axe gradué » : Trouvez des entiers a tel que : a) $\lvert a \rvert = 9$; $\lvert a = 7$ où $a > 0$; $\lvert a \rvert = 3$ où $a < 0$. b) $\lvert a \rvert < 2$. Dans chaque cas, représentez a et $\lvert a \rvert$ sur l'axe numérique.(Ex. 3, p. 8, *Algèbre 7*)
Q+	**§8. Représentation de la fraction sur le demi axe numérique**	- Sans passage « axe gradué → ordre » dans le type de tâche « représenter les nombres sur l'axe

	[…] a) On peut représenter la fraction sur le demi axe comme le cas des naturels.[…] b) les fractions égales […] sont représentées par un point unique A. c) Sur le demi - axe numérique, pour deux fractions différentes, le point représentant la plus grande fraction se trouve à droite celui de la plus petite. […] *Mathématique 6*, vol 2, p. 21)	gradué ». par exemple : Représentez sur le même demi- axe des fractions suivantes : […] (Ex. 3, p. 22, *Mathématique 6*, vol2) - Un exercice du passage « ordre → axe gradué » : Arrangez les fractions suivantes : a) De plus petite à plus grande, puis les représentez sur le demi- axe : […] a) De plus grande à plus petite, puis les représentez sur le demi- axe : […] (Ex. 2, p. 21, *Mathématique 6*, vol2)
Q	**§3. Ordre dans Q** **1. Comparaison de deux nombres entiers relatifs** […]*Remarque :* D'après des règles de comparaison de deux rationnels et la méthode de leurs représentations sur l'axe numérique, on conclut : *Si x < y alors le point de x se trouve à gauche celui de y sur l'axe numérique.* (*Algèbre 7*, p.31)	- Sans passage « axe gradué → ordre » dans le type de tâche « représenter les nombres sur l'axe gradué ». par exemple : Représentez sur l'axe numérique des fractions suivantes : […] - Aucun exercice du passage « ordre → axe gradué ».

Tableau 5. Axe gradué et ordres d'introduction des ensembles de nombres

Dans le topos de l'enseignant, existe à la fois le passage « axe gradué → ordre », les positions par rapport à l'origine (représentant 0) d'une suite des nombres sur l'axe gradué définissant l'ordre de cette suite, et le passage « ordre → axe gradué». Dans l'introduction des ensembles **Z** et **Q**, l'ordre est définie à l'aide du passage « axe gradué → ordre ».

Par contre, pour « comparer deux nombres » dans **Q**, on peut faire l'hypothèse que la comparaison algébrique[11] domine la représentation sur l'axe gradué, la première étant présente depuis le primaire, et se renforçant dans l'introduction de **Q+** au début du Collège, au deuxième semestre de la classe 6 - la représentation des nombres sur l'axe gradué disparaissant au profit de la comparaison des fractions par des règles algébriques.

En général, le passage « axe gradué → ordre » occupe une place restreinte dans le topos de l'élève.

Dans l'introduction de **R**, les passages réciproques entre ordre et axe gradué ne sont présents que dans le topos de l'enseignant.

I.5. Conclusion sur l'analyse de l'institution collège 1

Dans le topos de l'enseignant, l'ensemble **R** est théoriquement défini par l'ensemble des ED et représenté par la droite graduée.

a. Statut numérique des écritures décimales

L'institution collège en privilégiant une approche algébrique des systèmes de nombres met à l'écart l'ensemble **D**, tout en rappelant les règles pratiques présentes à l'école primaire. Autrement dit, l'étude des nombres décimaux (EDL) ne se réalise que sommairement et le

[11] - Règles de comparaison de deux fractions ayant même dénominateur à la page 17 (*Mathématique 6*, vol2):
Si a < c alors a/b < c/b (b ≠ 0)
Si a > c alors a/b > c/b (b ≠ 0)
- Et pour deux fractions quelconques à la page 17 (Ibid., vol2) :
Pour comparer deux (ou plusieurs) fractions n'ayant pas de même dénominateur, on les réduit au même dénominateur, puis comparer les dénominateurs de ces fractions.

statut numérique des nombres décimaux (les opérations et l'ordre) est réduit à celui des nombres entiers : l'ordre dense dans **D** n'est pas étudié.

Aucune précision sur l'ordre structurant l'ensemble des EDI n'est donnée. Cependant, l'institution attend que l'ordre lexicographique sur les EDI prolonge « naturellement » celui des EDL. Ce prolongement n'est pas un enjeu d'enseignement : il est laissé à la responsabilité de l'élève.

L'absence du type de tâches concernant les opérations sur les EDI permet de supposer que les techniques d'opérations dans **D** se prolongent aussi « naturellement » à l'ensemble des EDI. En particulier, l'effectuation des opérations entre deux EDIP (rationnels) peut s'appuyer sur celle des opérations dans **D,** contre les opérations dans **Q** qui nécessite la transformation d'un EDIP en la fraction correspondante. Ce prolongement, comme l'ordre, n'est pas un enjeu d'enseignement.

L'institution évite l'utilisation des EDINP bien qu'elle les ait introduites pour la définition formelle des nombres irrationnels. Le rapport institutionnel à une EDINP est vide en l'absence de toute organisation mathématique autour de l'EDINP.

A ce niveau, l'ensemble des ED (EDL, EDI) ne prend pas totalement un statut numérique puisque l'ordre et les opérations dans **D** ne peuvent pas structurer **R** en l'absence de la notion de limite.

b. Relation entre écritures décimales et nombres

Les traces de OM_3 « développement décimal d'un nombre réel » dans l'institution de collège 1 ne se réduisent qu'à quelques cas du type de tâche T31 « approximation décimale à 10^{-n} près d'un nombre réel » : T_{EDIP} « écrire une fraction donnée en EDIP », « calcul décimal approché à 10^{-n} près de « a : b » où a, b sont décimaux » et « calcul décimal approché à 10^{-n} près d'une racine carrée ou cubique ».

Dans les techniques institutionnelles de ces trois types de tâches, la production d'un encadrement décimal (d_n, d_n') est totalement absente. Les trois types de tâches (traces de OM_3) sont présents de façon déconnectée.

Les interrelations – nombre réel, valeur approchée décimale (nombre décimal) d'un nombre réel et écriture décimale (EDL, EDI) d'un nombre réel – sont faibles aussi bien dans le topos de l'élève que dans le topos de l'enseignant.

L'absence du bloc théorique (technologie, théories) dans le type de tâches T_{EDIP} induit la mise en place d'une règle implicite : la répétition de chiffres dans le quotient de la division de deux entiers est une condition d'arrêt de l'effectuation des divisions euclidiennes successives.

L'absence du bloc pratique fait mourir le bloc théorique (décomposition en facteurs premiers d'un entier) dans l'identification des nombres décimaux ou non décimaux.

c. Rôle de la droite graduée

La droite numérique réelle déclarée mais non construite dans le topos de l'enseignant est réduite à la droite numérique rationnelle dans le topos de l'élève. La représentation graphique des fonctions au collège porte essentiellement sur la représentation des nombres rationnels sur les deux axes gradués d'un repère orthogonal.

La comparaison de deux nombres fait peu intervenir le passage « axe gradué → ordre ».

Nous analysons maintenant le programme qui est en train de mettre en place à partir de 2002 et ses manuels en référence avec l'analyse de l'institution collège 1 pour déterminer l'évolution concernant les traces de la décimalisation des nombres réels.

II. Institution collège 2 (programme en cours à partir de 2002)

II.1. Stabilisation du processus d'enseignement des systèmes des nombres

Il n'y a aucun changement sur l'organisation et la problématique de l'introduction de système des nombres par rapport aux programmes précédents.

A propos de l'EDIP, le programme demande :

> L'élève doit distinguer un nombre décimal limité d'un nombre décimal illimité périodique. Il faut que l'élève comprenne qu'un nombre rationnel peut se représenter en écriture décimale limitée ou en écriture décimale illimitée périodique. (Programme collège, p. 20)

L'écriture décimale illimité est donc encore un objet d'enseignement du programme.

La différence de ce programme avec le précédent consiste à faire descendre l'introduction de la notion de nombre réel à la classe 7 (Cinquième) avec l'explication suivante.

> L'introduction des notions de racine carrée, de nombre irrationnel (nombre décimal illimité non périodique) et de nombre réel est d'achever plus tôt l'enseignement de la notion de nombres, de donner accès au calcul numérique et aux contenus successifs. Il est suffisant que l'élève sache qu'un nombre réel est le nom commun des nombres rationnels et irrationnels ; que l'élève comprenne la signification de l'axe numérique. (Programme collège, p. 21)

L'axiome « biunivocité entre **R** et les points de la droite graduée » est recommandé, comme dans l'institution collège 1, pour accompagner la définition de **R**.

> - Reconnaître la biunivocité 1-1 entre l'ensemble **R** et l'ensemble des points de l'axe numérique, l'ordre des nombres réels sur l'axe numérique. (Programme collège, p. 98)

Comme dans l'institution collège 1, le nombre décimal n'est re- identifié que comme un nombre rationnel particulier. Le statut numérique du nombre décimal (opérations et ordre) a été étudié depuis le primaire où le programme se limite clairement aux nombres décimaux ayant trois chiffres décimaux après la virgule.

> + L'addition et la soustraction des nombres décimaux ayant au maximum trois chiffres décimaux. […]
> + La multiplication des nombres décimaux ayant trois chiffres décimaux au maximum (y compris la partie entière) et la partie décimale du produit ayant 3 chiffres décimaux au maximum.
> + La division des nombres décimaux ayant trois chiffres décimaux au maximum (y compris la partie entière) et la partie décimale du quotient ayant 3 chiffres décimaux au maximum.
> (Programme primaire 2001, p. 36)

Nous analysons maintenant le manuel de la classe 7 (vol. 1) et son livre d'exercices pour la question : Y- a t'il une évolution du statut numérique des EDI par rapport au collège 1 ? Si oui, laquelle ?

II.2. Statut numérique des EDI : Ordre et opérations

Les opérations sur les EDI ne sont pas abordées ni dans le topos de l'élève, ni dans celui de l'enseignant.

La généralisation de l'ordre lexicographique sur les EDI à tous les nombres réels est précisée.

> • Soient deux nombres x et y. On a toujours $x = y$ ou $x < y$ ou $x > y$.
> […] on peut comparer deux nombres réels de la même façon que deux nombres rationnels à partir de leurs écritures décimales.
> *Exemple* :
> a) $0,3\overline{192\ldots} < 0,3\overline{2(5)}$
> b) $1,2459\overline{8\ldots} > 1,2459\overline{6\ldots}$
>
> **?2** *Comparer les nombres réels suivants*
> a) 2,(35) et 2,369121518…
> b) -0,(63) et $-\frac{7}{11}$ (*Mathématique 7*, vol.1, p. 43)

Dans le manuel et son livre d'exercices, on trouve 13 tâches concernant la comparaison des EDI.

II.3. Trace de OM_3 « développement décimal d'un nombre réel »

a. Rapport institutionnel aux EDIP

• *Y- a –t'il une évolution dans la technique du type de tâches T_{EDIP} « écrire une fraction donnée en EDIP » ?*

On trouve, dans le manuel, 14 exemplaires de ce type de tâches sur un total de 27 tâches (soit 52%). Ce type de tâche occupe donc une place importante comme dans l'institution précédente.

Il n'y a pas de changement dans la technique pour accomplir ce type de tâches par rapport l'institution précédente. La technique porte toujours sur la répétition de chiffre dans le quotient décimal approché de la division euclidienne.

> Exemple 2 : Ecrire la fraction $\frac{5}{12}$ en écriture décimale.
> On a :
>
> $$\begin{array}{r|l} 5,0 & 12 \\ \cline{2-2} 20 & 0,4166\ldots \\ 80 & \\ 80 & \\ 8 & \\ \vdots & \end{array}$$
>
> Cette division n'est jamais finie. Si l'on effectue encore la division, le chiffre 6 est répété dans le quotient. On dit que l'effectuation de la division 5 par 12 nous donne un nombre (0,4166…) appelé *nombre décimal illimité périodique*. Brièvement, on écrit 0,41(6). La notation (6) veut dire que le chiffre 6 est infiniment répété. Le nombre 6 s'appelle *période* du nombre décimal illimité périodique 0,41(6). (Ibid., p. 32)

Qu'est ce que la période ?

La période est donnée par les chiffres qui se répètent 2, 3 ou 4 fois dans le quotient d'une division ou dans une écriture décimale comportant des pointillés.

> Ecrire sous une forme brève (mettre la période entre parenthèses) les nombres décimaux illimités périodiques : 0,3333… ; -1,3212121… ; 2,513513513… ; 13,26535353… (*Livre de l'exercice de mathématique 7,* exercice 86, p. 15)

Pourtant, la période n'est pas unique.

> **Question** : Les nombres suivants sont-ils égaux ? 0,(31) et 0,3(13)
> (*Mathématique 7*, vol.1, p. 35)

Il n'y a donc qu'une légère modification du rapport institutionnel à la périodicité de l'EDIP par rapport à l'institution collège 1 : la notion de période donne lieu à plus d'exercices.

• *Disparition du sous type de tâches « calcul décimal approché à 10^{-n} près de « a : b » où a, b sont décimaux » de T_{EDIP}*

Les tâches « calcul décimal approché à 10^{-n} près de « *a* : *b* » où *a*, *b* sont décimaux » ne sont plus présentes dans l'institution de collège 2.

Par rapport à l'institution collège 1, le programme et le manuel *mathématique 7* en vigueur présente des règles d'arrondi d'un nombre décimal dans la section qui suit celle de l'EDIP. Pourtant, sans lien avec l'EDIP, on présente simplement des règles pour supprimer des derniers chiffres du nombre décimal, par exemple :

> Exemple : a) Arrondir le nombre 86,149 jusqu'au premier chiffre décimal. On trouve que le premier chiffre décimal du nombre 86,149 est 1. Le premier chiffre supprimé étant 4 (plus petit que 5), on garde 86,1. On obtient 86,149 ≈ 86,1 (arrondi jusqu'à le premier chiffre décimal. (Ibid., p. 36)

• *Nouveau type de tâches : Transformer une EDIP donnée en fraction correspondante*

On trouve dans l'institution « Collège 2 », dans le livre d'exercices, un nouveau type de tâches : *Transformer une EDIP donnée en fraction correspondante.*

Quelle est la technique pour accomplir ce type de tâches ?

- Partie cours du *Mathématique 7*, vol.1, à la page 33 :

> Exemple : $0,(4) = 0,(1).4 = \frac{1}{9}.4 = \frac{4}{9}$

- Exercices 88 et 89 du *Livre de l'exercice de mathématique 7*, vol.1, à la page 15 :

> 88. Pour écrire 0,(25) en fraction, on fait comme suit :
> $$0,(25) = 0,(01).25 = \frac{1}{99}.25 = \frac{25}{99} \text{ (car } \frac{1}{99} = 0,(01)\text{)}$$
> De la même façon, écrivez les écritures décimales suivantes en fraction :
> 0,(34) ; 0,(5) ; 0,(123).

> 89. Pour écrire 0,0(3) en fraction, on fait comme suit :
> $0,0(3) = \frac{1}{10}.0,(3) = \frac{1}{10}.0,(1).3 = \frac{1}{10}.\frac{1}{9}.3 = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$ (car $\frac{1}{9} = 0,(1)$).
> De la même façon, écrivez les écritures décimales suivantes en fraction :
> 0,0(8) ; 0,1(2) ; 0,1(23).

La technique s'appuie sur la connaissance des écritures fractionnaires des EDIP de « base » 0,(1), 0,(01)…. L'écriture décimale à transformer est écrite comme produit d'une fraction

décimale et/ou de 0,(1), 0,(01)…. par un entier. Il n'existe ici pas de « règles d'écriture » systématiques : les passages 0,(4) = 0,(1).4 et 0,0(3) = $\frac{1}{10}$.0,(3) = $\frac{1}{10}$.0,(1).3 ressemblent aux règles algébriques du produit des nombres décimaux.

Le problème est que justement ces règles s'appuient sur une ressemblance ni justifiée, ni expliquée, avec celles du produit des décimaux. Cela renforce le prolongement des opérations des nombres décimaux aux EDIP.

Existe-t-il une règle algébrique systématique permettant le passage de l'EDIP à la fraction correspondante ? Nous en donnons deux, se rattachant à la technique institutionnelle.

Pour les EDIP de « base »	Pour toutes les autres EDIP
$0,\underbrace{0...0}_{k}(\underbrace{0...01}_{n}) = \frac{1}{\underbrace{9...9}_{n}\underbrace{0...0}_{k}}$	$q,u_1...u_k(u_{k+1}...u_{k+n}) = \frac{\overline{qu_1...u_k}}{10^k} + \frac{\overline{u_{k+1}...u_{k+n}}}{\underbrace{9...9}_{n}\underbrace{0...0}_{k}}$

Tableau 6. Deux règles d'écriture pour le passage d'une EDIP à l'écriture fractionnaire

Comment justifier le passage d'une EDIP à la fraction correspondante pour la technique institutionnelle ?

Nous ne trouvons aucune justification dans l'institution. L'élève n'a pas à justifier que la fraction obtenue est bien celle qui correspond à l'EDIP en question. Pourtant, une justification possible pourrait être apportée par la praxis du type de tâches T_{EDIP} - *Ecrire une fraction donnée en EDIP* - c'est-à-dire par l'effectuation des divisions euclidiennes correspondantes à la fraction trouvée, qui doit alors être interprétée comme le quotient du numérateur et du dénominateur.

Cependant, l'effectuation des divisions euclidiennes pour une fraction donnée ne peut pas justifier à elle seule l'égalité « 0,(9) = 1 ».

- *Une identification du type « 0,(9)= 1 » est-elle présente ?*

Les deux tâches suivantes apparaissent dans le *Livre d'exercices de mathématique 7*.

> Démontrer que :
> a) 0,(37) + 0,(62) = 1 ;
> b) 0,(33).3 = 1. (Exercice 91, p. 15)

Nous examinons la résolution proposée dans le *Livre d'exercices de mathématique 7*.

> **91**. a) 0,(37) = $\frac{37}{99}$; 0,(62) = $\frac{62}{99}$
>
> Donc 0,(37) + 0,(62) = $\frac{37}{99} + \frac{62}{99} = \frac{99}{99} = 1$
>
> b) 0,(33) = $\frac{33}{99} = \frac{1}{3}$
>
> Donc : 0,(33).3 = $\frac{1}{3}$.3 = 1 (p. 36)

Les auteurs évitent donc l'apparition de l'EPID9, alors même que la possibilité d'écrire l'égalité 0,(99) = 1 est offerte. L'identification du type « 0,999… = 1 » reste donc absente.

Le prolongement des opérations de l'ensemble D permet de prévoir l'apparition de l'écriture 0,(99) comme réponse aux tâches supra. L'institution prépare – t'elle l'apparition de l'écriture 0,(99) pour l'enseignant ? Si oui, qu'attend l'institution de l'enseignant ?

Aucune réponse n'est donnée dans le livre de l'enseignant. On peut donc supposer que la noosphère cherche à éviter le problème de la double écriture des nombres décimaux.

b. Rapport institutionnel aux EDINP

Les EDINP n'apparaissent que dans les tâches de comparaison des EDI. Pourtant, comme dans Collège 1, les écritures décimales produites ne sont jamais considérées comme des EDINP.

• *Y- a –t'il une évolution dans la technique du type de tâches « calcul décimal approché à 10^{-n} près d'une racine carré ou cubique » ?*

L'institution collège 2 autorise officiellement l'utilisation soit d'une table numérique soit de la calculatrice dans le calcul approché d'une racine carré ou cubique. L'algorithme de l'extraction de la racine carrée ou cubique a totalement disparu.

> *Demande de savoir faire :*
>
> […]
>
> - Savoir utiliser le tableau numérique, la calculatrice pour trouver la valeur approchée d'une racine carrée d'un nombre réel positif. (Programme, p. 98)

En accord avec la demande du programme, les auteurs du manuel présentent la manipulation des touches de la calculatrice comme une technique officielle pour le calcul décimal approché de la racine carrée.

86. Utilisation de la calculatrice.

Touche de la racine carrée : $\boxed{\sqrt{\ }}$

Calcul	Suite des touches	Résultat
$\sqrt{5{,}7121}$	$\boxed{5}\boxed{.}\boxed{7}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{\sqrt{\ }}$	2,39
$\sqrt{108\times 48}$	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{8}\boxed{\times}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{=}\boxed{\sqrt{\ }}$	72
$\sqrt{\dfrac{6{,}3+8{,}2}{3{,}5}}$	$\boxed{6}\boxed{.}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{8}\boxed{.}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{=}\boxed{\sqrt{\ }}$	2,0354009
$\dfrac{\sqrt{7{,}9}}{1{,}5}$	$\boxed{7}\boxed{.}\boxed{9}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{=}$	1,8737959

En utilisant la calculatrice, calculer :

$\sqrt{3783025}$ **;** $\sqrt{1125.45}$ **;** $\sqrt{\dfrac{0{,}3+1{,}2}{0{,}7}}$ **;** $\dfrac{\sqrt{6{,}4}}{1{,}2}$ **. (*Mathématique 7*, p. 42)**

Dans les exemples du tableau supra :

- les deux premiers résultats sont les valeurs exactes des racines $\sqrt{5{,}7121}$ et $\sqrt{108\times 48}$;
- les deux derniers résultats sont les troncatures des affichages de la calculatrice dans le calcul de $\sqrt{\dfrac{6{,}3+8{,}2}{3{,}5}}$ et $\dfrac{\sqrt{7{,}9}}{1{,}5}$. En effet, dans le calcul $\sqrt{\dfrac{6{,}3+8{,}2}{3{,}5}}$, les

calculatrices autorisées[12] dans EMS comme CASIO fx-220, CASIO fx-500A, CASIO fx-92, CASIO fx-500MS et CASIO fx-570MS donnent « 2,035400978 ».

Les auteurs n'utilisent pas de règles d'arrondi (qui viennent pourtant juste d'être présentées) pour les affichages décimaux de la calculatrice dans ces calculs. La troncature semble donc être associée à la calculatrice.

Les règles d'arrondi sont introduites sans raison d'être et totalement déconnectées avec les traces de OM_3 (types de tâches T_{EDIP} et « calcul décimal approché à 10^{-n} près d'une racine carrée »).

II.4. Rôle de la droite graduée

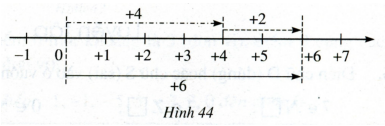
Dans le topos de l'élève, il n'y a aucun changement du rôle de la droite graduée par rapport à l'institution collège 1.

- Absence des exercices de l'usage de la droite graduée pour comparer les nombres.
- Absence des exercices de construction de longueurs irrationnelles (constructibles à la règle et au compas).
- La représentation graphique des fonctions s'appuie sur la représentation des nombres rationnels sur la droite graduée.

Pourtant, dans le topos de l'enseignant, la droite graduée est mobilisée plus souvent que dans l'institution collège 1. Par exemple, pour arriver aux règles algébriques de l'addition sur l'ensemble des entiers Z, les auteurs du manuel *Mathématique 6*, vol.1, commencent par des exemples utilisant la droite graduée :

1. Addition des deux nombres positifs :

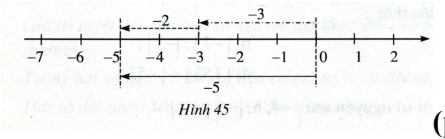
[…]



Hình 44

2. Addition des deux nombres positifs :

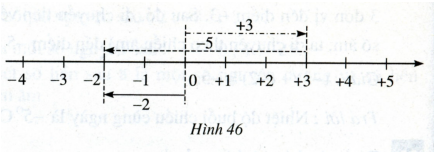
[…]



Hình 45

(p. 74)

§5. Addition des deux nombres ayant les signes différents […]



Hình 46

(p. 76)

[12] Selon le décret n° 3343/KT&KD 29/04/2005 du Ministère de l'Education et de la Formation :
Le candidat est autorisé à amener dans la salle d'examen :
- Stylo, règle, crayon noir, compas, équerre, outils pour la construction géométrique.
- Calculatrice ne possédant pas la fonctionnalité de traitement de texte et la carte mémoire. Plus précisément, sont autorisées les calculatrices ne pouvant réaliser que les quatre opérations arithmétiques, a racine carrée, et la puissance ; sont autorisées les calculatrices de la marque Casio fx 95, fx 200, fx 500A, fx 500MS, fx 570MS et les calculatrices équivalentes (avec les touches trigonométriques, logarithmes, exponentielles)

Cependant dans le *livre d'exercices*, seules les règles algébriques sont attendues des élèves pour résoudre l'addition des nombres entiers.

II.5. Résumé de l'évolution du rapport institutionnel aux systèmes de nombres et à leur décimalisation (du Collège 1 au Collège 2)

L'institution collège 2 fait descendre la définition de **R** par les ED et la droite graduée au niveau de la classe 7 (contre la classe 9 dans l'institution collège 1).

a. Statut numérique des écritures décimales

Il n'y a pas de modification du rapport institutionnel aux écritures décimales par rapport à l'institution de collège 1.

- Le rapport institutionnel au nombre décimal (EDL) reste celui de l'école primaire : on limite aux nombres ayant en maximum 3 chiffres décimaux. L'ordre dense dans **D** n'est pas étudié.
- L'institution attend officiellement que l'ordre sur les EDI prolonge celui de l'ensemble des nombres décimaux étudiés au primaire. On n'aborde pas d'opérations sur les EDI.
- L'EDINP n'a aucun sens dans le topos de l'élève en l'absence d'organisation mathématique relative à l'EDINP.

b. Relation entre les écritures décimales et nombres

Le flou des interrelations « nombre réel - écriture décimale du nombre réel – valeur décimale approchée du nombre réel » se renforce par rapport à l'institution collège 1. En effet :

- Les traces de OM_3 « développement décimal d'un nombre réel » dans le collège 2 sont moins nombreuses que celles dans le collège 1 : le type de tâche « calcul décimal approché à 10^{-n} près de « a : b » où a, b sont décimaux » n'est plus présent. L'encadrement décimal (d_n, d_n') reste absent.
- L'institution collège 2 autorise officiellement l'utilisation de la calculatrice dans le calcul décimal approché d'une racine carrée en supprimant totalement l'algorithme de l'extraction de la racine carrée.
- Les règles d'arrondi d'un nombre décimal sont présentes mais déconnectées totalement des traces de OM_3.

L'identification des nombres décimaux ou non décimaux n'est pas de la responsabilité de l'élève. Le développement décimal d'une fraction dans le type de tâches T_{EDIP} s'appuie toujours sur la même règle implicite que dans l'institution collège 1 : dans la division euclidienne de deux entiers (générateurs de l'écriture décimale d'un rationnel) une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois dans le quotient est la période.

Par rapport à l'institution collège 1, l'identification algébrique d'une EDIP comme un nombre rationnel est présent dans le type de tâche « transformer une EDIP donné en fraction correspondante ». Dans les tâches de ce type du manuel, l'apparition de l'égalité 0,(99) = 1 est prévisible dans la praxis, mais l'indentification « 0,(9) = 1 » est toujours absente.

c. Le rôle de la droite graduée reste le même que dans l'institution collège 1 : la droite numérique réelle est réduite à la droite numérique rationnelle et le passage « axe gradué → ordre » n'est pas posé.

Nous analysons maintenant les traces de OM_1 « algèbres de limites », $OM_{2'}$ « existence de la limite d'une suite numérique » et OM_3 « développent décimal d'un nombre réel » au lycée pour la question :

Quelle relation existe entre la notion de limite (introduite la classe 11) et la notion de nombre réel (définie au collège) ? En particulier, y a –t'il une reprise des ED dans l'étude de l'analyse ?

Chapitre B1

Deuxième partie. Au niveau du lycée

Programmes du Lycée et manuels correspondants

1. De 1990 à 1999, avec le programme de la « réforme de l'éducation », trois collections principales de manuels sont utilisées dans les trois régions nord, centre et sud du Viêt-nam.

2. À partir de 2000, avec le programme en vigueur intitulé « harmonisation et unification », une unique collection de manuels existe dans l'ensemble du pays.

3. Il y a actuellement un programme expérimental avec deux collections de manuels correspondants. Il est prévu de mettre en place ce programme à partir de l'année scolaire 2008-2009.

Commentaires initiaux sur les programmes

Il n'y a pas de grand changement dans le programme en vigueur (depuis 2000) par rapport au programme de la « réforme de l'éducation » de 1990 à 1999. Les deux directives principales du programme en vigueur proposées par le Ministère d'Education et de Formation (MEF) sont les suivantes.

1) Respecter globalement le dernier programme (programme de 1990 à 1999)
2) Alléger ce programme, c'est-à-dire abaisser le niveau exigé et simplifier certains contenus.

En particulier, le groupe des auteurs du manuel en vigueur est composé d'auteurs des trois collections de manuels du programme de 1990 à 1999. Notre étude, Le Thai Bao (2004), montre qu'il n'y a pas de grand changement dans le rapport institutionnel à la notion de limite entre les deux programmes (traces de OM_1 et OM_2).

Dans le programme expérimental et ses manuels, un auteur didacticien a la volonté d'intégrer des problèmes de l'approximation décimale dans l'enseignement de l'analyse qui est, selon lui (Le Van 2001), fortement algébrisé dans l'institution en vigueur.

Au niveau du lycée, nous étudions maintenant :

- « L'institution actuelle » (programme et manuel en vigueur) pour chercher les traces de OM_1 et OM_2, et plus particulièrement l'évolution des traces de OM_2, « existence de la limite d'une suite numérique » et OM_3 « développement décimal d'un nombre réel » par rapport à l'institution du programme de 1990 à 1999,

- Comment se traduit, dans le programme expérimental, la volonté d'intégration des problèmes de l'approximation décimale dans l'étude de la notion de limite.

I. Institution actuelle (de 2000 à 2008)

I.1. Absence de trace de OM_3 « développement décimal d'un nombre réel »

Le type de tâche T31 « *approximation décimale à 10^{-n} près d'un nombre réel* » présent dans les Collèges 1 et 2 n'est pas repris dans l'institution lycée en vigueur.

Le type de tâche T32 *« résolution approchée décimale à 10^{-n} près d'une équation »* absent dans les Collège 1 et 2 n'est pas non plus présent dans le Lycée actuel.

Le type de tâche T32 existe –t- il dans la période 1990 à 1999 ? Si oui, pourquoi disparaît –il ensuite ?

Dans l'étude écologique du type de tâche *RA* « résolution approchée d'une équation », Le Van (2001) met en évidence une volonté de transposer au savoir *à enseigner* certaines méthodes numériques concernant le type de tâche *RA* lors de l'introduction de notions d'informatique dans la période de 1990 à 1999.

> L'étude des productions noosphériennes montre la volonté de la noosphère d'insérer certains éléments du domaine des méthodes numériques et du domaine de l'algorithmique/programmation/informatique. Cela se manifeste par l'introduction, dans le programme des mathématiques de Seconde, du thème « Éléments des méthodes et techniques de calcul » dont l'objectif essentiel, dégagé dans le programme, est de familiariser les élèves à l'ordinateur et à l'informatique. C'est en cet habitat que la noosphère avait la volonté insérer certaines méthodes numériques simples. Dans cet esprit, le calcul des racines carrée et cubique d'un nombre positif à l'aide de la méthode d'Itération (du point fixe) est recommandé. Cet objet peut jouer deux rôles : permettre une première approche de méthodes numériques et permettre de mettre en relation les trois objets méthode numérique, algorithme et ordinateur. (Op. cité, pp. 225-226)

Pourtant, toujours selon Le Van (2001), la volonté d'intégration de *praxéologies* relatives au type de tâches *RA* n'est pas réalisée.

> Cependant, dans les trois séries des manuels considérés, seul le manuel de Seconde de l'équipe 2 obéit à l'exigence du programme : il introduit dans le chapitre IV « Science et techniques des calculs » la rubrique « Méthodes numériques » où figure la méthode du point fixe (dite par les auteurs " méthode d'itération ") pour approcher la solution de l'équation f(x) = 0. Cela témoigne des difficultés écologiques de l'intégration de ces objets à l'enseignement. L'attente de l'institution des programmes n'est pas atteinte. (Ibid., p. 112)

Le Van (2001) explique l'absence du type de tâche *RA* dans l'institution actuelle par les hypothèses suivantes.

> Pourtant, ce thème [éléments du domaine des méthodes numériques et du domaine de l'algorithmique/programmation/informatique] est supprimé des nouveaux programmes des mathématiques (en application officielle à la rentrée scolaire 2000).
> Nous avons fait l'hypothèse de quatre contraintes comme causes de la disparition de ce thème (donc de RA) dans les nouveaux programmes :
> - Contrainte du temps didactique : le nombre d'heures fixé par le programme n'est pas suffisant pour l'introduction du thème « Certains éléments des méthodes et techniques des calculs » en tant que partie intégrante des mathématiques enseignées.
> - Contrainte des relations trophiques : ce thème apparaît comme " isolat " sans lien véritable avec d'autres parties du programmes des mathématiques.
> - Contrainte du choix didactique : le point de vue dominant présenté dans la noosphère consiste à introduire l'enseignement de l'informatique dans une nouvelle discipline spéciale, indépendante des mathématiques.
> - Contrainte concernant la méthode d'Itération : l'utilisation des instruments informatiques rend difficile l'explication de la pertinence du calcul des valeurs approchées des racines carrée et cubique d'un nombre à l'aide de la méthode d'Itération. (Ibid., p. 226)

I.2. Traces de OM_1 « algèbre des limites » et OM_2 « topologie des limites »

Dans Le Thai Bao (2004), nous avons recherché les traces de OM_1 et OM_2. Nous résumons ici les résultats principaux.

Pour les traces de OM_1 dans le manuel, *Algèbre et Analyse 11*, en vigueur et les manuels du programme de la période précédente 1990-1999, le type de tâche « Calculer $\lim_{x \to a} f(x)$ »

(ou « Calculer limu_n ») est commun et prépondérant. Nous l'attestons par le tableau 7 ci-après qui donne les pourcentages de présence de ce type de tâches dans le chapitre *limite*[1] des manuels *Algèbre et Analyse 11*.

Manuel en vigueur[2]	Manuels du programme précédent		
	Collection 1[3]	Collection 2[4]	Collection 3[5]
73%	74 %	80%	79%

Tableau 7. Effectifs des tâches « algèbre des limites » dans les manuels

Dans le manuel en vigueur :

- Les traces de OM_2 se restreignent au type de tâche « démontrer l'existence de la limite d'une fonction (ou d'une suite) ». Ces traces sont infimes puisque dans la partie exercices, 3 tâches concernent les suites numériques et 1 les fonctions (sur un total de 77 pour le chapitre *limite*, soit 5%)..
- Les traces de OM_1 apparaissent dans le manuel et le livre pour l'enseignant complètement déconnectées de celles de OM_2.
- La considération des sujets récents de mathématique des baccalauréats du Viêt-nam et des concours d'entrée à l'université montre que les tâches et le rôle des tâches relevant de OM_2 sont totalement absents. Tandis que le rôle de la trace de OM_1 apparaît au moins dans la question de l'étude des fonctions toujours présente dans les sujets de mathématiques de ces examens.

La viabilité des traces de OM_2 dans le topos de l'élève est donc quasiment nulle

Examinons de plus près les 3 tâches concernant $OM_{2'}$ « existence de la limite d'une suite numérique » (partie de OM_2), puisque c'est à travers $OM_{2'}$ que pourrait vivre potentiellement une relation entre limite et nombres réels.

I.3. Trace de $OM_{2'}$ « existence de la limite d'une suite numérique »

Comme nous venons de le voir, la trace de $OM_{2'}$ dans l'institution actuelle a une praxis très faiblement nourrie : seule T2'1 « Démontrer la convergence d'une suite numérique » existe et en seulement 3 exemplaires.

Quels sont les critères de convergence utilisés dans les trois tâches de $OM_{2'}$?

- 2 tâches (sur 3) utilisent la définition en terme (ε, N).

1. En utilisant la définition de limite de suite numérique, démontrer que :

a) $\lim \frac{3}{n-2} = 0$; b) $\lim \frac{n-1}{n+1} = 1$ (*Algèbre et Analyse 11*, p. 115)

Dans les deux tâches supra, on ne pose pas véritablement le problème de l'existence de la limite. En fait, on attend une démonstration formaliste que le nombre donné est bien la limite : choisir ε et calculer un nombre entier N dépendant de ε. Le choix des suites

[1] Les deux sections *limite de suites* et *limite de fonctions* font partie d'un même chapitre IV « *Limite* ».
[2] *Algèbre et Analyse 11*. Équipe de rédacteurs : Tran Van Hao – Cam Duy Le (Partie I) et Ngo Thuc Lanh – Ngo Xuan Son – Vu Tuan (Partie II), maison d'édition de l'Education, 2001
[3] *Algèbre et Analyse 11*. Equipe de rédacteurs Ngo Thuc Lanh – Vu Tuan - Ngo Xuan Son, maison d'édition de l'Education,1997.
[4] Algèbre et Analyse 11. Équipe de rédacteurs : Phan Duc Chinh – Ngo Huu Dung, maison d'édition de l'Education,1998.
[5] Algèbre et Analyse 11. Équipe de rédacteurs : Tran Van Hao – Phan Truong Dan, maison d'édition de l'Education,1999

monotones ($u_n = \frac{3}{n-2}$) et ($u_n = \frac{n-1}{n+1}$) favorisent la recherche d'un nombre N à partir de l'inégalité $|u_n - l| < \varepsilon$ ($l = 0$ ou 1).

La conjecture ou le calcul de la limite n'est pas de la responsabilité de l'élève. Il ne faut pas non plus étudier la suite numérique proposée (par exemple, la suite $u_n = \frac{3}{n-2}$ n'est pas définie en $n = 2$).

- Une tâche (sur 3) utilise le théorème de Weierstrass[6] : critère « monotone bornée ».

> 4. Soit la suite numérique (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} (n \geq 1) \end{cases}$
> Démontrer que la suite donnée a une limite. Trouver cette limite. (*Algèbre et Analyse 11*, p. 115)

Nous résumons la résolution attendue en nous référant au livre d'exercices du manuel.

> On démontre que : $u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$, la suite ($u_n$) est décroissante et supérieure à 1, la suite (u_n) a donc une limite d'après le théorème de Weierstrass
>
> On calcule : $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^{n-1}}}{1} = 1$.

Dans les trois tâches supra, toutes les suites numériques sont monotones.

Quelle est l'évolution de la trace de OM_2 de l'institution actuelle par rapport à la période précédente (1990 - 1999) ?

Dans les manuels du programme de 1990 à 1999, seuls les deux critères - définition en terme (ε, N) et « monotone bornée » - fonctionnent dans T2'1 « Démontrer la convergence d'une suite numérique ».

Dans l'institution actuelle apparaît le théorème 4 (appelé théorème du sandwich à l'université au Viêt-nam), absent de l'institution précédente.

> **Théorème 4** (limite d'une suite numérique encadrée par les deux autres suites numériques tendant vers une même limite)
> *Soit trois suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n).*
> *Si $\forall n \in N^*$ on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = A$ alors $\lim u_n = A$.*
> […] (*Algèbre et Analyse 11*, p. 108)

Par rapport au critère des segments emboîtés (suites adjacentes), le théorème 4 exige l'existence d'une limite commune des suites v_n et w_n « $\lim v_n = \lim w_n = A$ » : dans le critère des intervalles emboîtées, il suffit de démontrer la convergence vers 0 de la suite des distances $|w_n - v_n|$.

[6] **Théorème 3** (condition suffisante pour que la suite numérique ait une limite) (Théorème de Weierstrass). *Une suite croissante et bornée supérieure a une limite. Une suite décroissante et bornée inférieure a une limite.* (*Algèbre et Analyse 11*, p. 108)

Le théorème 4 va servir en classe 12 à démontrer $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, puis la formule de Newton-Leibniz $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ dans la partie cours. Il ne sert en classe 11 que pour un seul exercice.

> 3. Trouver les limites suivantes
> […] b) $\lim \frac{3\sin n + 4\cos n}{n+1}$ (Ibid., p 115)

I.4. Articulation entre Collège et Lycée sur l'objet EDI au sein des notions de suite numérique et limite.

a. L'EDI prend – elle le statut de « suite numérique convergente » ?

Dans le topos de l'élève, aucune suite numérique n'est donnée par une EDI. On ne trouve que des suites données par une formule ou par une relation de récurrence, les constantes étant toujours entières.

Les propriétés de croissance et de majoration d'une suite numérique donnée par une EDI ne sont pas présentées au moment de l'étude de ces propriétés. Dans le cas de EDIP, on ne trouve pas d'articulation des EDIP avec la notion de suite géométrique.

Dans le topos de l'enseignant, il y a un seul exemple où l'EDI prend le statut de suite numérique[7].

> 2. Méthodes pour définir une suite numérique
> […]
> *b) Donner une proposition de la description des termes de la suite*
> Par exemple : Soit la suite (u_n) où u_n est la valeur approchée à 10^{-n} près de π où $\pi = 3{,}1415926535\ldots$
> On a $u_1 = 3{,}1$; $u_2 = 3{,}14$; $u_3 = 3{,}141$; $u_4 = 3{,}1415$; …
> […] (*Algèbre et Analyse 11*, p. 90)

Mais la convergence de cette suite numérique n'est pas étudiée.

b. L'EDI prend – elle le statut de « limite de suite » ?

On ne trouve aucun critère de convergence de suite numérique définie par une EDI et on ne donne jamais à une EDI le statut de limite que ce soit dans le topos de l'enseignant ou dans celui de l'élève.

I.5. Rôle de la droite graduée au Lycée et notion de l'intervalle

a. Représentation des rationnels sur les deux axes gradués d'un repère orthogonal dans la représentation graphique des fonctions

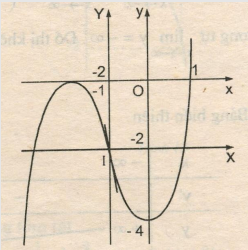
Au lycée, le type de tâches « Etude d'une fonction » occupe une place prépondérante dans le domaine de l'Analyse de la classe 12 (Terminale) : ce type de tâches apparaît toujours au Bac et au concours d'entrée à l'université.

Voici un exemple de l'étude d'une fonction dans le manuel *Analyse 12* :

> Exemple 1. Etudier la fonction $y = x^3 + 3x^2 - 4$
> 1) Domaine de définition : **R**
> 2) Variation (…)

[7] Cela n'existe pas dans les manuels du programme précédent.

3) Graphe
Car $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 1$
donc (-2 ; 0) et (1,0) sont les coordonnées des points d'intersection du graphe avec l'axe horizontal.
Le coefficient directeur de la tangente au graphe en I(-1 ; -2) est y'(-1) = -3



Dans ce problème, il faut représenter graphiquement la fonction après l'étude des variations de la fonction et de sa dérivée. Par rapport à la représentation graphique de la fonction au collège, on a donc moins besoin de la représentation des nombres rationnels sur les droites graduées.

La construction exacte d'une longueur irrationnelle constructible sur la droite graduée n'est pas attendue dans la représentation graphique de la fonction. Il suffit de représenter l'une des valeurs approchées de cette longueur telle qu'elle est fournie par la calculatrice.

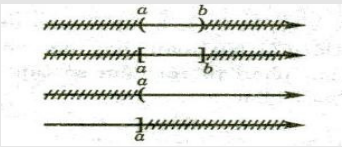
b. Un nouvel objet, la notion d'intervalle et un ancien objet, la droite graduée

Au début de Lycée, classe 10, (Seconde), **R** devient un intervalle et on lui associe la droite graduée, en particulier pour parler des sous ensembles de **R** comme intersection ou union d'intervalles.

Dans la partie cours de l'*Algèbre 10* à la page 17, après l'introduction des notions d'intervalles ouvert, fermé et demi- ouvert, on remarque que :

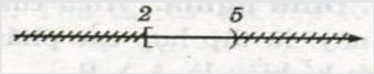
Il faut remarquer que l'intervalle (-∞ ; +∞) est l'ensemble **R**. Il convient de noter :
$R_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\} = [0 ; +\infty)$.
$R- = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\} = (-\infty; 0]$.
$R^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$, $R^*_+ = (0 ; +\infty)$, $R^*_- = (-\infty; 0)$
Représentation des sous ensembles de **R** sur l'axe numérique

Intervalle ouvert (a ; b) :
Intervalle fermé [a ; b] :
Intervalle ouvert (a ; +∞) :
Intervalle demi- ouvert (- ∞; a] :



Dans la partie exercice, l'axe est présent pour traduire une inéquation ou pour présenter les solutions d'une inéquation ou d'un système d'inéquations.

Soient $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x - 2 \geq 0\}$
$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x - 5 < 0\}$
$A \cap B$ est l'ensemble de toutes solutions vérifiant les deux inéquations : $x - 2 \geq 0$ et $x - 5 < 0$
On a $A \cap B = [2 ; 5)$.
La figure représente l'ensemble $A \cap B$ sur l'axe numérique :



(Ibid., exemple 3, p. 19)

La droite graduée joue donc le rôle de substitut de **R**, comme l'univers ordonné de tous les nombres (le plus grand ensemble de nombres). Il va donc servir à représenter des restrictions de **R** par l'ordre (on barre ce qui est plus petit ou / et plus grand), comme

intersection ou union d'intervalles de **R**. Par exemple dans le type de tâches « résoudre des systèmes d'inéquations ».

Résoudre le système des inéquations : $\begin{cases} 3x+2>0 & (1) \\ 2x-5<0 & (2) \end{cases}$

Solution. Les ensembles de déterminations de (1) et (2) sont **R**

L'ensemble de toutes solutions de (1) est $T_1 = (-\frac{2}{3};+\infty)$, et celui de (2) est $T_1 = (-\infty;\frac{5}{2})$. Donc l'ensemble de toutes solution du système est $T = T_1 \cap T_2 = (-\frac{2}{3};+\infty) \cap (-\infty;\frac{5}{2}) = (-\frac{2}{3};\frac{5}{2})$

(Ibid., exemple 1, p. 88,)

La représentation des intervalles sur l'axe gradué, ne nécessite que l'ordre des bornes des intervalles.

Dans la technique du type de tâche « trouver l'intersection ou l'union d'intervalles », l'intervalle se représente sur la droite graduée par un couple de nombres ordonnés appelés bornes. Mais, la relation entre les bornes de l'intervalle et la notion de limite n'est jamais étudiée et reste donc absente.

I.6. Résumé du rapport institutionnel à la notion de limite en sa relation avec les nombres et leur décimalisation dans le lycée actuel

a. Absence de la reprise des écritures décimales au sein de l'analyse

L'institution ne prend pas en charge une reprise des écritures décimales au sein de l'analyse.

- Le statut de suite numérique convergente et celui de limite pour les EDI ne sont pas des objets d'enseignements (absence totale de praxéologie relative aux EDI). Un seul exemple dans le topos de l'enseignant aborde le statut de suite numérique de π comme EDI.

- On ne trouve aucune trace de OM_3 « développement décimal d'un nombre réel ».

L'introduction de la notion de limite au lycée ne modifie donc pas le rapport institutionnel aux écritures décimales du collège.

b. Traces de $OM_{2'}$

Les traces de $OM_{2'}$ « existence de la limite d'une suite numérique » occupe une place extrêmement modeste à côté des traces prépondérantes de OM_1 « algèbre des limites ».

Dans les traces de $OM_{2'}$, le critère des segments emboîtés (suites adjacentes) et le critère de Cauchy sont absents. En revanche, l'institution se contente de reprendre quelques tâches utilisant les deux critères de convergence présents depuis le programme précédent :

- la définition formaliste en terme (ε, N) où la limite est déjà donnée et sans aucune étude de la suite numérique en question,
- le critère « monotone bornée » (théorème de Weierstrass).

c. Evolution du rôle de la droite graduée : notion d'intervalle

Au lycée, la droite graduée est présente dans deux types de tâches, « représenter graphiquement une fonction » et « trouver l'intersection ou l'union d'intervalles ».

Un intervalle est essentiellement un sous ensemble ordonné de **R,** dont la caractéristique essentielle est le couple de nombres ordonnés appelés bornes. Il n'a pas de structure

topologique : la relation entre les bornes de l'intervalle et la notion de limite, *via* l'approximation, est absente. De plus, un intervalle ayant des bornes irrationnelles n'apparaît jamais dans l'institution.

II. Une volonté d'intégration des problèmes de l'approximation décimale dans l'étude de la notion de limite dans le programme expérimental et ses manuels

II.1. Evolution de la transposition didactique sur la notion de limite

a. Disparition du formalisme dans l'introduction de la notion de limite

Par rapport aux programmes précédents, le programme expérimental exclut toute définition en termes (ε, δ) dans l'introduction des notions de limite de suite numérique et de fonction.

- Ne pas utiliser ε, N pour définir la notion de la limite de suite numérique.
- Introduire la notion de la limite en 0 à travers des exemples concrets ; ensuite celle de limite différente de 0. (Programme 13)
- Définir la notion de limite de fonction par celle de suite numérique. (Programme, p14)

Il y a donc une tendance à exclure tout formalisme dans l'introduction de la notion de limite.

b. Nouvelle rubrique « Activité » dans les manuels expérimentaux

Par rapport aux manuels des programmes précédents, un nouveau dispositif didactique « Activité » apparaît pour la première fois dans les manuels du programme expérimental.

Dans le *livre de l'enseignant* du manuel *Algèbre et Analyse 11,* les auteurs de la collection 2 recommandent un « renforcement des activités de l'élève » dans le manuel futur (p. 14). Toujours selon ces auteurs, « les activités insérées dans le manuel sont multiformes. » (p. 14).

Les auteurs mettent en avant les principaux types d'activités suivants :

- *Activité de motivation*

L'objectif de cette activité est d'apporter à l'élève une conscience du rôle, de la signification et de l'importance d'une nouvelle connaissance à enseigner […] (p. 14)

- *Activité de découverte d'une nouvelle connaissance*

[…] à travers cette activité, l'élève découvre par lui-même une nouvelle connaissance. Alors, la nouvelle connaissance apparaît comme un résultat du travail de l'élève pour résoudre le problème posé par l'activité. (p. 15)

- *Activité de fonctionnement d'une ancienne connaissance*

L'activité de fonctionnement d'une ancienne connaissance exige que l'élève rappelle ou mette en place certaines connaissances cruciales déjà enseignées pour favoriser la mobilisation de ces connaissances. (p. 15)

- *Activité de renforcement et de mise en place d'une connaissance récente*

Cette activité exige que l'élève mette en place une connaissance acquise récemment pour résoudre des problèmes […] (p. 16)

- *Activité de validation d'une nouvelle connaissance*

> Ce sont des activités comme la démonstration d'un théorème ou d'une formule donnés précédemment. (p. 16)

Nous nous limitons ici à l'étude des « activités de découverte d'une nouvelle connaissance » : notions de limite de suite numérique et de fonction.

Dans le tableau 8, nous résumons les ressemblances et les différences entre ces activités de découverte dans les manuels *Algèbre et Analyse 11* des deux collections 1 et 2.

Manuel section	Collection 1	Collection 2
limite de suite	Expérimentation numérique Nombres rationnels Calcul à la main	Expérimentation numérique Nombre décimal Calcul instrumenté par la calculatrice
limite de fonction	Algèbre des limites de suites numériques	Expérimentation numérique Nombre décimal et nombre rationnel Calcul instrumenté par la calculatrice et calcul à la main

Tableau 8. Activités de découverte des notions de limite dans les manuels expérimentaux

Seul le manuel de la collection 2 propose dans les deux sections *limite de suite* et *limite de fonction* des expérimentations numériques.

De plus ces expérimentations numériques portent sur l'approximation décimale et sont instrumentées par la calculatrice. Nous nous centrons donc sur les activités du manuel *Algèbre et Analyse 11* de la collection 2.

II.2. Approximations décimales dans les activités du manuel de la collection 2 sur la notion de limite

a. Approximation décimale instrumentée par la calculatrice

Le manuel introduit la notion de la limite 0 de la suite numérique (u_n) où $u_n = \dfrac{1}{n}$ par l'activité ci-après.

▲$_1$ Soit la suite (u_n) où $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Avec la calculatrice CASIO fx – 500MS, on peut établir un tableau de valeurs de la suite (u_n) :

u_1	1	u_{40}	0,025
u_2	0,5	u_{60}	0,016 666 666
u_3	0,333 333 333	u_{80}	0,0125
u_4	0,25	u_{100}	0,01
u_5	0,2	u_{1000}	0,001
u_6	0,166 666 666	u_{10000}	0,0001
u_7	0,142 857 142	u_{100000}	0,000 01
u_8	0,125	$u_{1000000}$	0,000 001
u_9	0,111 111 111	$u_{10000000}$	0,000 000 1
u_{10}	0,1	$u_{100000000}$	0,000 000 01
u_{20}	0,05	$u_{1000000000}$	0,000 000 001

a) Observez ce tableau et commentez ensuite le comportement des valeurs de u_n lorsque n augmente.

b) Représentez les termes u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_{10} sur l'axe numérique. Commentez les variations des distances de ces points à 0.

c) Quel est le terme de la suite à partir duquel la distance à 0 devient inférieure respectivement à 0,001 et 0,000 000 01 ? Quel commentaire pouvez-vous faire sur cette distance quand n devient très grand ?

(On dit que la suite $u_n = \frac{1}{n}$ a pour limite 0 quand n tend vers l'infini positif) (p. 132)

Dans cette activité, l'exploration numérique n'est pas de la responsabilité de l'élève mais est donnée toute faite dans le tableau. Pour répondre aux questions, l'élève doit lire les données du tableau ; par exemple, pour répondre à la sous question c, il suffit que l'élève repère dans le tableau les lignes où figurent les nombres 0,001 et 0,000 000 01 et recopient les termes correspondants u_{1000} et à $u_{100000000}$.

Qu'attend-on de l'enseignant dans cette activité ?

On peut lire les recommandations suivantes dans le *livre de l'enseignant* :

> La responsabilité principale de l'enseignant dans l'activité 1 est la suivante :
> - Diriger l'élève pour qu'il réponde aux questions durant l'activité.
> - Ensuite, l'enseignant doit souligner la propriété caractéristique « u_n est inférieur à n'importe quel nombre positif à partir d'un certain terme » ; il doit énoncer « on dit que (u_n) a pour limite 0 quand n tend vers l'infini positif » quand (u_n) vérifie cette caractéristique.
> (Op. cité, p. 144)

On attend donc un passage de la problématique d'« approximation x » (plus n augmente, plus u_n diminue : sous question a et b) à la problématique d'« approximation $f(x)$ » : « u_n est inférieur à n'importe quel nombre positif à partir d'un certain terme » - par un argument d'autorité de l'enseignant. Aucune validation théorique de l'affirmation de l'enseignant n'est exigée.

Nous complétons cette analyse par quelques commentaires sur la pertinence de l'usage de la calculatrice dans cette activité.

Y – a – il une raison à l'utilisation de la calculatrice ?

Le choix de valeurs entières ($n \in \mathbf{N}^*$) pour le calcul de la suite numérique (u_n) telle que $u_n = \frac{1}{n}$ semble plus favorable à un calcul à la main (écriture de fractions) qu'à un calcul instrumenté par la calculatrice (décimalisation) : pourquoi donner des valeurs décimales approchées plutôt que des fractions ? Cette question nous semble d'autant plus pertinente que la représentation de valeurs rationnelles exactes $\frac{1}{n}$ sur la droite graduée (par partage : Collèges 1 et 2) se révèle plus économique que celle de nombres décimaux (question b).

Une nécessité de la prise en compte du milieu calculatrice

Examinons le comportement de la décimalisation de la calculatrice dans le cas de la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{1}{n}$. Le tableau 9 ci-après présente l'affichage de la calculatrice CASIO fx-500MS dans le calcul de $\frac{1}{10^n}$ où $n \in \mathbf{N}^*$.

n =	Affichage[8]
1,2,…,9	$0,\underbrace{0...0}_{n}1$
10,…,99	10^{-n}
100, 101, …	Math ERROR

Tableau 9. Affichage de la calculatrice dans le calcul $1/10^n$

Le fait qu'à partir de n = 100, la calculatrice affiche toujours le signal d'erreur, « Math ERROR », devrait être prévu dans l'organisation de l'activité expérimentale à l'aide de la calculatrice pour pouvoir fournir une explication adéquate. Les calculs 10^n où $n \geq 100$ dépasse la capacité de la calculatrice ; mais le problème est que l'élève peut entrer ce calcul dans l'éditeur de la calculatrice et interroger l'enseignant sur le message renvoyé par la calculatrice.

b. Articulation avec les EDI au collège

La première activité de l'introduction de la notion de limite de fonction permet de revenir aux EDI du collège.

▲1 Soit la fonction $f(x) = 2x$.
1) Attribuer à la variable x les valeurs de la suite numérique (x_n) comme le tableau suivant :

x	$x_1 = 0,9$	$x_2 = 0,99$	$x_2 = 0,99$	…	$x_n = 0,\underbrace{999...99}_{n}$	…	$\to 1$
$f(x)$	$f(x_1) = 1,8$	$f(x_2) = 1,98$	$f(x_3) = 1,998$	…	$f(x_n) = ?$	…	$\to ?$

a) Calculer le terme général $f(x_n)$ de la suite numérique $(f(x_n))$ où $x_n = 0,\underbrace{999...99}_{n} = 1 - \frac{1}{10^n}$

b) Trouver la limite de la suite $(f(x_n))$. (p. 145)

Les résultats des trois ingénieries didactiques présentés dans le Chapitre A1 permettent de prévoir, dans cette activité, l'apparition de l'obstacle *infini – fini*.

- EDIP9 : 0,(9) pour la limite de (x_n) (quand n tend vers l'infini positif),
- EDI *Infini - fini* non mathématique : 1,(9)8 pour la limite de $(f(x_n))$.

Dans le *livre de l'enseignant*, l'apparition des EDI n'est pas prévue. Nous posons la question :

Quel est le recours possible pour l'enseignant face à l'apparition de ces EDI ?

Par rapport à l'institution actuelle, on trouve dans le manuel expérimental un exercice relatif à l'étude de la convergence d'une suite des nombres décimaux dans le topos de l'élève.

6. Soit la suite numérique (u_n) où u_n = 0,33…3 (n chiffres 3 après le virgule)
a) Démontrer que (u_n) est convergente en vérifiant qu'elle est croissante et bornée supérieurement.
b) Trouver $\lim u_n$. (p. 145)

En tant que trace de $OM_{2'}$ « existence de la limite d'une suite numérique », le critère de convergence indiquée dans la sous question a) est « monotone bornée » (théorème de Weierstrass). Les autres critères comme la définition formaliste en terme (ε, N) ou le

[8] En utilisant la norme 2.
Cette calculatrice dispose deux normes de la représentation des résultats :
- Norm 1 : sortir sous la forme $ax10^n$ des nombres x ayant : $|x| < 10^{-2}$ ou $|x| \geq 10^{10}$
- Norm 2 : sortir sous la forme $ax10^n$ des nombres x ayant : $|x| < 10^{-9}$ ou $|x| \geq 10^{10}$

théorème des segments emboîtés (ou de la notion de suites adjacentes) sont hors programme.

Les auteurs du manuel présentent la solution qu'ils attendent pour cet exercice dans le *livre de l'enseignant*.

6a) $u_{n+1} - u_n = 0,\underbrace{33...33}_{n+1 \text{ chiffres } 3} - 0,\underbrace{33...33}_{n \text{ chiffres } 3} = 0,\underbrace{00...0}_{n \text{ chiffres } 0}3 > 0$ pour tout n.

Alors, (u_n) est une suite croissante. (1)

$u_n = 0{,}33\ldots3 < 1\ \forall n$. Donc, (u_n) est bornée supérieurement. (2)

De (1) et (2), on a (u_n) est convergente.

b) $u_n = 0{,}33\ldots3 = \dfrac{33...3}{10^n} = \dfrac{3.10^{n-1} + 3.10^{n-2} + ...3.10 + 3}{10^n} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + ... + \dfrac{3}{10^n}$.

Alors $\dfrac{3}{10}, \dfrac{3}{10^2}, \ldots, \dfrac{3}{10^n}, \ldots$ est la suite géométrique « décroissante infiniment » ayant $q = \dfrac{1}{10}$,

on a donc : $\lim u_n = \lim(\dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + ... + \dfrac{3}{10^n}) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + ... + \dfrac{3}{10^n} + ... = \dfrac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{1}{3}$.

La tâche supra ne relie pas l'EDIP introduit au Collège à la notion de limite : l'ostensif « 0,333… » reste absent. L'enseignant a pourtant ici l'occasion de traiter l'identification « 0,(3) = 1/3 » en s'appuyant sur la notion de limite. De même, il peut prolonger cette tâche par l'identification « 0,(9) = 1 » en donnant à cette EDIP9 le statut de limite : si 0,(9) est la limite de la suite numérique u_n = 0,99…9 (n chiffres 9 après le virgule), on peut identifier « 0,(9) = 1 » selon la même technique du calcul de la limite dans la tâche supra.

Son rapport institutionnel aux ED permet-il à l'enseignant de lycée de s'en saisir ? C'est ce que nous examinerons dans le chapitre B2.

Chapitre B1
Troisième partie. Conclusion de l'analyse institutionnelle

I. Relation dans EMS entre nombre et limite

L'EMS actuel comporte les institutions collèges 1 et 2 et l'institution lycée actuel.

Dans la relation entre nombre et limite, la prédominance des traces de OM_1 « algèbre des limites » résulte du rapport institutionnel à l'ostensif « $\lim_{x \to a} f(x)$ » ou « $\lim u_n$ » : il faut opérer algébriquement pour associer cette ostensif à un nombre ou à l'infini.

Le rapport institutionnel à la notion de limite relevant exclusivement sur la problématique algébrique exclut donc la problématique d'approximation et la topologie de **R** associée.

Cependant, les traces infimes et isolées de $OM_{2'}$ « existence de la limite d'une suite numérique », le formalisme des critères de convergence par la définition (ε, N) et « monotone bornée » s'appuient de manière cachée sur une problématique d'approximation de la limite.

Dans les traces de OM_3 « développement décimal d'un nombre réel » présentes seulement au collège, les techniques pour accomplir les exemplaires de T31 « approximation décimale à 10^{-n} près d'un nombre réel » ne relève pas de la relation « nombre réel - écriture décimale du nombre réel – valeur décimale approchée du nombre réel » : elle relève seulement de la division euclidienne généralisée (instrumentée ou non par la calculatrice) en vue de l'obtention du seul quotient. L'encadrement du nombre réel par un couple décimal (d_n, d_n'), la distance entre les deux nombres décimaux étant inférieur à 10^{-n}, n'est jamais présent comme élément technologique.

De la même façon, l'utilisation de la calculatrice pour la décimalisation des nombres ne s'accompagne d'aucun élément technologique (calcul des valeurs décimales approchées d'une fraction ou des racines carrées ou cubiques). Cette absence de justification des techniques de décimalisation renforce le flou de la relation « nombre réel - écriture décimale du nombre réel – valeur décimale approchée du nombre réel ».

II. Rapports institutionnels aux ED : Hypothèses de recherches sur les EDI

L'étude des nombres décimaux et de l'approximation décimale ne sont pas des objets d'enseignement de l'EMS actuel. L'institution lycée ne prend pas en compte la relation entre nombre et limite dans les écritures décimales alors que l'ensemble des ED représente théoriquement l'ensemble des nombres réels depuis le collège. Nous faisons donc l'hypothèse que le rapport institutionnel aux ED dans EMS est celui du Collège.

L'étude des nombres décimaux ne se réalise qu'à l'école primaire sur des nombres décimaux positifs ayant au maximum 3 chiffres après la virgule. L'ordre dense (non discret) dans **D** n'est donc étudié à aucun niveau de l'EMS du Viêt-Nam.

Nous formulons donc les hypothèses de recherche suivantes à propos des rapports institutionnels aux EDI.

• *Statut numérique des EDI*

H1. *EDI et limite*

L'écriture décimale illimitée n'a ni le statut de suite numérique convergente de nombres décimaux ni celui de « limite » de cette suite (*après que la notion de limite ait été introduite*). En particulier, l'identification de 0,(9) au nombre 1 reste impossible.

H2. *Opérations et ordre sur les EDI*

Les opérations et l'ordre sur l'ensemble des nombres décimaux **D** se prolongent sur les EDI**,** plus précisément :

- l'ordre dans **D** se prolonge sur l'ensemble des EDI. En particulier, le nombre 0,(9) est strictement inférieur au nombre 1 et le plus proche de 1 conformément au rapport institutionnel à l'ordre discret dans **N**. (H21)

- Les techniques opératoires de **D** sont attribuées à l'ensemble des EDI. L'intervention d'opérations dans l'ensemble des EDI à partir d'opérations sur des limites n'existe pas. Les opérations sur deux EDIP (rationnels) se ramènent à des opérations dans **D,** et non à des opérations dans **Q** qui nécessitent la transformation d'une EDIP en la fraction correspondante. (H22)

Remarque. L'ordre dans **D** se réduit institutionnellement à l'ordre dans D_n (*n* finis) car l'étude des nombres décimaux ne se réalise qu'à l'école primaire sur des nombres décimaux positifs ayant au maximum 3 chiffres après la virgule. La structure algébrique et l'ordre dans un D_n sont isomorphes à la structure algébrique et à l'*ordre discret* dans **N**.

• *Rapport institutionnel à l'EDIP*

H3. *Règles du contrat didactique à propos de la notion de période de l'EDIP*

- Dans l'ostensif d'une EDIP utilisant des pointillés « … », une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois est la période. (H31)

- L'élève n'est pas responsable de l'étude de la décimalité ou de la non – décimalité d'une fraction à écrire en écriture décimale. Dans la division euclidienne généralisée de deux entiers (générateurs de l'écriture décimale d'un rationnel), une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois dans le quotient décimal approché est la période de l'EDIP. (H32)

• *Rapport institutionnel à l'EDINP*

H4. *Une EDINP est un irrationnel*

L'écriture décimale illimitée non périodique assure, dans le topos de l'enseignant, la définition formelle des nombres irrationnels. Par contre, la raison d'être de l'EDINP n'existe pas dans le topos de l'élève.

c. Droite graduée et intervalle

La droite des nombres réels est réduite à celle des nombres rationnels. La représentation des nombres rationnels sur la droite graduée s'appuie sur l'ordre algébrique dans **Q**.

Un intervalle est essentiellement un sous ensemble ordonné de **R,** dont la caractéristique essentielle est le couple de nombres ordonnés appelés bornes. Ces bornes sont en générale rationnelles ou infinies. Il n'a pas de structure topologique : la relation entre les bornes de l'intervalle et la notion de limite n'est pas étudiée.

III. Une expérimentation

Avant la conception d'une ingénierie didactique sur la notion de limite, nous allons mettre à l'épreuve, dans le chapitre B2, les hypothèses H1, H2, H3 et H4 concernant les EDI par un questionnaire au niveau des deux acteurs principaux de EMS : l'enseignant et l'élève. Nous proposerons ce questionnaire aux élèves de classes 10 et 12 du Lycée.

Pour les enseignants, nous nous placerons en amont de EMS, dans les instituts de formation des enseignants. Notre hypothèse est que le rapport institutionnel aux ED à la sortie de ces institutions ne sera pas modifié par l'entrée dans EMS.

L'étude de la constitution du rapport institutionnel aux écritures décimales dans les institutions de formation d'enseignants dépasse le cadre de notre étude : elle exigerait au minimum d'étudier les programmes de formation ainsi que les manuels de mathématiques et de méthodologie des mathématiques.

Nous nous contenterons ici de proposer le même questionnaire aux étudiants - *futur – enseignants* - des deux dernières années des écoles normales supérieures et aux lycéens (classes 10 et 12) pour mettre en évidence l'état du rapport institutionnel aux ED pour les deux positions de EMS.

Chapitre B2
Mise à l'épreuve expérimentale des hypothèses issues de l'analyse institutionnelle sur la décimalisation des nombres réels

Introduction

Dans ce chapitre, nous concevons un questionnaire pour mettre à l'épreuve les hypothèses H1, H2, H3 et H4 issues de l'analyse institutionnelle de EMS du Viêt-nam sur les interrelations entre la décimalisation des nombres réels et la notion de limite.

Ci-après le texte du questionnaire.

Questionnaire de la classe 12 et pour les étudiants des Écoles Normales Supérieures (ENS)

Question 1
Comparez les deux nombres de chacun des couples suivants (la calculatrice est interdite).
a) 2,8383… ☐ 2,(83)
b) 2,777… ☐ $\frac{25}{9}$
c) $\frac{83333}{25000}$ ☐ 3,(3)
d) $\frac{40907}{90000}$ ☐ 0,4545...
e) 1,(9) ☐ 2

Question 2
a) Calculez 1,(4) +3,(7) = …
b) Mettez une croix devant les affirmations justes (il y a peut-être plusieurs affirmations justes)
Le nombre décimal illimité périodique 0,999…(ayant la période de 9) est :
- *la suite numérique* (u_n) *où* $u_1 = 0,9$; $u_2 = 0,99$; .... ; $u_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$; ... ☐
- *la limite de la suite* (u_n) *ci-dessus.* ☐
- *un nombre réel qui est strictement inférieur à 1.* ☐
- *un nombre réel qui est supérieur à 1.* ☐
- *égal au nombre 1.* ☐
- *le plus proche de 1.* ☐

c) Calculez 1 – 0,(9) = …
Si vous ne pouvez pas répondre, expliquez pourquoi :
…….

Question 3
Y a-t-il un nombre irrationnel entre 42,498 98… et 42,5 ?
☐ Oui et c'est …
☐ Oui, mais je ne sais pas lequel.
☐ Non. Parce que ……

Une variante du questionnaire a été proposée en début d'année aux élèves des classes 10 du Lycée (Seconde). Ces élèves viennent de sortir du Collège. Pour ce niveau, nous supprimons dans la question 2b les deux premières affirmations, les notions de suite numérique et de limite n'étant pas encore enseignées.

Mettez une croix devant les affirmations justes (il y a peut-être plusieurs affirmations justes)

*Le nombre décimal illimité périodique 0,99**9**…(ayant la période de 9) est* :

- *un nombre réel qui est strictement inférieur à 1.* ☐
- *un nombre réel qui est supérieur à 1.* ☐
- *égal au nombre 1.* ☐
- *le plus proche de 1.* ☐

Rappelons que pour les élèves de classe 12 (Terminale), les notions de suite numérique et de limite ont été enseignées au second semestre de la classe 11 (Première).

Nous présentons maintenant l'analyse *a priori* du questionnaire.

Chapitre B2

Première partie. Analyse *a priori*

Le questionnaire pose donc des questions concernant le statut des EDI, l'ordre et les opérations (limitées ici à l'addition) sur les EDI.

- Statut de l'EDI : question 2b
- Ordre sur les EDI : question 1 et question 3
- Addition des EDI : questions 2a et 2c

I. Question 1 : Rapport institutionnel à EDIP

Comparer les deux nombres de chacun des couples suivants (la calculatrice est interdite).
a) 2,8383… ☐ 2,(83)
b) 2,777… ☐ $\frac{25}{9}$
c) $\frac{83333}{25000}$ ☐ 3,(3)
d) $\frac{40907}{90000}$ ☐ 0,4545...
e) 1,(9) ☐ 2

Dans les manuels mathématiques à l'école primaire et au Collège, le problème de la comparaison (par les signes <, =, >) entre deux nombres apparaît toujours après la présentation d'un nouvelle ensemble de nombres, par exemple :

- Dans l'introduction de l'ensemble des nombres décimaux **D** au Primaire.

< > ?	65,3 ….. 65,29	72,1 ….. 72,100
	4,534 ….. 4,54	68,9 ….. 67,9

(*Mathématique 5* (au Primaire), 1998, Exercice 1, p. 64)

- Dans l'introduction de l'ensemble des nombres entiers relatifs **Z**.

Remplissez les cases suivantes du signe « < » ou « > » :
17 ☐ 15 ; 3 ☐ -27; -15 ☐ 1; -23 ☐ -11. (Exercice 1, p. 8 , Algèbre 7, 1995)

- Dans l'introduction de l'ensemble des nombres rationnels **Q**.

Comparer les deux nombres de chacun des couples suivants :
$\frac{13}{15}$ et $\frac{33}{35}$; $\frac{-5}{7}$ et $\frac{-9}{11}$; $\frac{-9}{7}$ et $\frac{-19}{15}$ (Exercice 2, p. 32 , Algèbre 7, 1995)

- Dans l'introduction de l'ensemble des nombres réels **R**.

Comparez les paires de nombres réels suivants :
a) 0,123 et 0,(123) ;
b) 0,(01) et 0,01001000100001… (Exercice 2, *Algèbre 9* (au collège), 2003, page 2)

Dans l'institution vietnamienne, le problème de la comparaison des nombres apparaît comme routinier. La comparaison par les signes (<, =, >) fait partie des attentes de l'institution. Regardons plus en détail.

I.1. Signification des pointillés « … » dans l'écriture décimale

a) 2,8383… ☐ 2,(83)

b) 2,777… ☐ $\frac{25}{9}$

Les comparaisons demandées dans 1a et 1b vont nous permettre de vérifier la signification institutionnelle de l'ostensif « … » en mettant à l'épreuve l'hypothèse H31 : *dans l'ostensif d'une EDIP utilisant des pointillés « ... », une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois est la période*.

- La réponse avec le signe " = " exprime le respect du contrat institutionnel.
- Les réponses avec les autres signes (<, > ou encore ≠) expriment le non-respect du contrat ou simplement l'effectuation fausse de la division (pour b).

I.2. Périodicité de l'EDIP dans la division euclidienne généralisée

c) $\frac{83333}{25000}$ ☐ 3,(3)

d) $\frac{40907}{90000}$ ☐ 0,4545...

Les comparaison 1c et 1d visent à valider la règle du contrat didactique de l'hypothèse H32 : *l'élève n'est pas responsable de l'étude de la décimalité ou de la non – décimalité d'une fraction à écrire en écriture décimale. Dans la division euclidienne généralisée de deux entiers (génératrice de l'écriture décimale d'un rationnel), une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois dans le quotient décimal approché est la période de l'EDIP*.

a. Comparaison 1c : « $\frac{83333}{25000}$ ☐ 3,(3) »

Le nombre en écriture fractionnaire $\frac{83333}{25000}$ est décimal car $25000 = 2^3 5^5$.

Dans la division de 83 333 par 25 000, le chiffre 3 se répète 4 fois (après la virgule) sans être la période.

83333	25000
83330	3,33332
83300	
83000	
80000	
50000	
0	

Voici les réponses possibles :

• « $\frac{83333}{25000}$ *= 3,(3)* »

Cette réponse par l'*égalité* exprime le respect de la règle du contrat didactique H32 selon laquelle, l'effectuation successive des divisions euclidiennes « 83 333 : 25 000 » est arrêtée par la répétition du chiffre 3 deux, trois ou quatre fois dans le quotient décimal approchée.

• « $\frac{83333}{25000}$ *< 3,(3)* »

Cette réponse correcte peut être obtenue :

- par la réalisation jusqu'au reste 0 de la division de 83 333 par 25 000 qui donne le quotient décimal exact : 3,33332. Un observable de cette réponse est la réalisation de la division au brouillon.
- Par la transformation de 3,(3) en fraction, suivie de la comparaison des deux fractions dans **Q** : réponse peu probable si H22 est vraie.

Remarque. La calculatrice étant interdite, la division doit être réalisée à la main. Certaines réponses, comme « < » et surtout, « > » peuvent donc provenir de l'effectuation fausse de la division. C'est pour cela que nous avons prévu de recueillir les brouillons pour avoir accès au calcul.

• « $\frac{83333}{25000} \neq 3,(3)$ »

Par la décomposition du dénominateur en facteurs premiers, $25000 = 2^3 5^5$, qui permet de conclure à la décimalité du rationnel $\frac{83333}{25000}$. 3,(3) ne représentant pas un nombre décimal, ces deux nombres ne sont pas égaux. Cette réponse n'est pas attendue car la responsabilité de la décimalité d'un nombre n'est pas du ressort de l'élève dans EMS (H32).

b. Comparaison 1d : « $\frac{40907}{90000}$ □ 0,4545… »

Le nombre en écriture fractionnaire $\frac{40907}{90000}$ est un rationnel non décimal, car dans la fraction irréductible $\frac{40907}{90000}$, le dénominateur 90000 contient le diviseur premier 3.

Dans la division de 40 907 par 90 000, les deux chiffres 45 apparaissent en premier et se répète deux fois, mais ce n'est pas la période (2 est la période) !

40907	90000
409070	0,454522 …
490700	
407000	
470000	
200000	
200000	
…	

Les réponses possibles sont analogues à celles de la sous - question 1c.

- « $\frac{40907}{90000}$ = 0,4545… » Réponse attendue (conforme à H32)

- « $\frac{40907}{90000}$ < 0,4545… » Réponse correcte (effectuation au delà de 4 étapes de la division ou transformation de 0,4545… en fraction et comparaison des deux fractions dans **Q**)

Remarque. L'effectuation de cette division est plus coûteuse que celle de la sous – question 1c : il faut effectuer une division d'un naturel ayant 5 chiffres par un autre ayant 4 chiffres. On peut donc prévoir plus d'erreurs de calcul que dans 1c.

I.3. Rapport institutionnel à l'EDIP9

e) 1,(9) ☐ 2

La réponse « 1,(9) < 2 » est la réponse attendue puisque conforme au rapport institutionnel aux écritures décimales illimitées périodiques (H21). Rappelons que l'identification du nombre 0,(9) au nombre 1 reste absente dans EMS actuelle.

La présence de la réponse « 1,(9) = 2 » est donc improbable dans EMS. Cependant, ces réponses peuvent apparaître de la part des étudiants des ENS puisqu'ils sont munis d'outils mathématiques de l'Analyse, en particulier des constructions mathématiques de **R**.

II. Question 2b : Statut de l'EDI – Ordre discret dans l'ensemble des EDI

Par commodité, nous codons les affirmations proposées dans la question 2b en 2b1, 2b2, 2b3, 2b4, 2b5 et 2b6.

2b) Mettre une croix devant les affirmations justes (il y a peut-être plusieurs affirmations justes)
*Le nombre décimal illimité périodique 0,99**9**…(ayant la période de 9) est* :
-[2b1] *la suite numérique* (u_n) *où* $u_1 = 0,9$; $u_2 = 0,99$; …. ; $u_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$; … ☐
-[2b2] *la limite de la suite* (u_n) *ci-dessus.* ☐
-[2b3] *un nombre réel qui est strictement inférieur à 1.* ☐
-[2b4] *un nombre réel qui est supérieur à 1.* ☐
-[2b5] *égal au nombre 1.* ☐
-[2b6] *le plus proche de 1.* ☐

La question 2b est inspirée de la question 10.1 du questionnaire de Margolinas (1985) : à laquelle nous avons rajouté les affirmations 2b1, 2b2 et 2b6.

Le rajout des affirmations 2b1 et 2b2 (réservées aux élèves ou étudiants pour lesquels la notion de limite a déjà été enseignée) permet d'enquêter sur le statut de l'EDI à travers une EDIP9.

L'hypothèse H1 « *L'écriture décimale illimitée n'a ni le statut de suite numérique convergente de nombres décimaux ni celui de « limite » de cette suite (après que la notion de limite ait été introduite). En particulier, l'identification de 0,(9) au nombre 1 reste impossible*. » permet de prévoir la faible présence des affirmations 2b1 et 2b2.

Par contre, on attend la forte présence des mêmes affirmations 2b1 et 2b2 dans les ENS.

Dans EMS, on attend 2b3 et 2b6 selon H21.

Sous l'hypothèse de travail d'un sujet rationnel, ces affirmations (2b3 et 2b6) sont *a priori* incompatibles avec l'affirmation « 0,99**9**… est égal au nombre 1 » (2b5) et « 0,99**9**… est supérieur au nombre 1 » (2b4).

III. Questions 2a et 2c : Opérations sur les EDIP – Obstacle *infini -fini*

2a) Quel est le résultat de l'opération 1,(4) +3,(7) = …
[…]
2c) Quel est le résultat de l'opération 1 – 0,(9) = …
Si vous ne pouvez pas répondre, expliquez pourquoi :

Ces questions sont une reprise des questions 8 et 10.2 du questionnaire de Margolinas (1985) destiné aux élèves des classes de 3ème et de seconde du collège en France (programme 1977 de la contre-réforme) avant l'enseignement de la notion de limite.

Le tableau 2 présente les réponses prévues dans l'analyse *a priori* de Margolinas (1985) : nous avons seulement remplacé l'écriture avec barre propre à l'institution française (programme 1977) par l'écriture avec parenthèse propre à l'institution vietnamienne : par exemple $5,\overline{2}1$ de l'institution française est noté par 5,(2)1 dans l'institution vietnamienne.

Questions	2a « 1,(4) +3,(7) »	2c « 1- 0,(9) = ? »
Réponses mathématiquement correctes	5,(2)	0
Réponses décimales exemple dans D1 exemple dans D2 …	 5,1 5,21 …	 0,1 0,01 …
Réponses « décimale parenthèse »[1]	5,(1)	0,(1)
Réponses « infinitésimales »	5,(2)1	0,(0)1

Tableau 1. Réponses prévues dans l'analyse *a priori* de Margolinas (1985)

La reprise de ces questions pour EMS du Viêt-nam vise deux objectifs.

- Le premier objectif est de valider l'hypothèse H22 sur les opérations dans EDI : *Les techniques opératoires de **D** sont attribuées à l'ensemble des EDI. L'intervention d'opérations dans l'ensemble des EDI à partir d'opérations sur des limites n'existe pas. Les opérations sur deux EDIP (rationnels) se ramènent à des opérations dans **D,** et non à des opérations dans **Q** qui nécessitent la transformation d'une EDIP en la fraction correspondante.*

- Le deuxième objectif est de confirmer l'existence de réponses par les EDI *infini – fini* (non mathématique), comme 5,(2)1, propres à l'institution vietnamienne.

Dans ses analyses *a posteriori*, Margolinas trouve que les réponses par des EDI *infini –fini* qu'elle appelle « infinitésimales » correspondent à la réussite au questionnaire.

> Les réponses décimales sont donc caractéristiques d'élèves en difficulté, et toutes les autres (et en particulier les réponses « infinitésimales ») celles d'élèves ayant de bonnes réussites. On peut remarquer que ce résultat est cohérent avec ceux des entretiens. (Margolinas 1988, p. 62).

Nous explicitons maintenant les réponses possibles en nous appuyant sur l'analyse de Margolinas, tout en prenant en compte les spécificités de notre enquête : en particulier les réponses de niveau Lycée et ENS.

III.1. Réponses mathématiquement correctes

Selon Margolinas (1988), « les réponses mathématiquement correctes se comprennent d'elles–même » (p. 58).

Dans notre cas (présence possible de la notion de limite), il est nécessaire de distinguer les différentes stratégies qui amènent à la réponse dite « mathématiquement correctes » selon l'intervention ou non de la notion de limite.

[1] Réponses « décimale barre » de Margolinas (1985)

a. Pour le calcul « 1,(4) + 3,(7) = ? »

• *Stratégie algébrique n'utilisant pas de notion de limite* (peu probable dans EMS car contraire à H32)

Les règles algébriques de la technique du type de tâches « *Transformer une EDIP donnée en fraction correspondante* » (cf. Chapitre B1 : Collège 2) permet de faire l'addition des fractions dans **Q** : 1,(4) + 3,(7) = $\frac{13}{9} + \frac{34}{9} = \frac{47}{9}$.

Dans ce cas, deux réponses sont prévisibles.

- La réponse « *fraction – non limite* » est $\frac{47}{9}$.
- La réponse « *EDI – non limite* » est 5,(2) ou 5,22… qui provient de la décimalisation de la fraction $\frac{47}{9}$.

• *Stratégie analytique utilisant la notion de limite* (peu probable dans EMS car contraire à H1 et H32)

En considérant une EDI comme une « limite de suite », on calcule la somme des EDI en question par opération sur deux limites Cette stratégie peut être prévue dans les ENS.

Dans ce cas, les deux réponses de la stratégie algébrique sont possibles.

- La réponse « *fraction – limite* » $\frac{47}{9}$ provient de l'articulation entre EDIP et la notion de limite dans la notion de somme infinie d'une suite géométrique telle que la valeur absolue de la raison est inférieure à 1.

1,(4) = $1 + 4/10 + 4/10^2 + \ldots + 4/10^n + \ldots$

3,(7) = $3 + 7/10 + 7/10^2 + \ldots + 7/10^n + \ldots$

Donc : 1,(4) + 3,(7) = $4 + 11/10 + 11/10^2 + \ldots + 11/10^n + \ldots$

$$= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{11}{10^n} = 4 + \frac{11/10}{1 - 1/10} = 4 + \frac{11}{9} = \frac{47}{9}.$$

- La réponse « *EDI – limite* » 5,(2) ou 5,22… provient de l'articulation entre EDI et la limite de suites de nombres décimaux.

1,(4) = $\lim_{n\to\infty} u_n$ où (u_n) est la suite convergente : 1,4 ; 1,44 ; … ; $1,\underbrace{4\ldots4}_{n}$;…

3,(7) = $\lim_{n\to\infty} v_n$ où (v_n) est la suite convergente : 3,7 ; 3,77 ; … ; $3,\underbrace{7\ldots7}_{n}$;…

Donc, la somme 1,(4) + 3,(7) est la limite de la suite de somme $(u_n + v_n)$: 5,1 ; 5,21 ; … ; $5,\underbrace{2\ldots2}_{n}1$;… Avec $u_n + v_n = 5,\underbrace{2\ldots2}_{n} + \frac{1}{10^{n+1}}$, on a donc $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = 5,(2)$

Seules les traces sur les brouillons donnent des observables permettant de distinguer entre les stratégies algébriques et analytiques.

a. Pour le calcul « 1- 0,(9) = ? »

Dans ce calcul, les deux stratégies, algébrique et analytique, amènent à la réponse 0.

III.2. Réponses décimales

Selon Margolinas, « les réponses décimales sont celles qui fixent un D_i dans lequel donner la réponse, nous les avons regroupées sans tenir compte du D_i choisi »[2]. (Ibid., p. 58)
Autrement dire, les réponses décimales proviennent de l'assimilation de l'EDI à un D_i (i fini) en remplaçant la somme des EDI par la somme des « projections[3] » des EDI dans D_i.
Par exemple :

Dans le calcul « 1,(4) + 3,(7) = ? », les projections de 1,(4) et 3,(7) dans D_2 étant 1,44 et 3,77, l'observable est la réponse 5,21. De même pour le calcul « 1 - 0,(9) = ? », l'observable est 0,01.

Nous codons ces réponses par **Dn**.

III.3. Réponses « décimale parenthèse »

Margolinas (1988) décrit les réponses « décimale barre » (que nous renommons « décimale parenthèse »).

> Les réponses « décimale barre » correspondent à des élèves qui ont exactement des réponses dans D1, auxquelles une barre a été rajoutée à la partie décimale. Pour les questions 8 ($1,\overline{4}$ + $3,\overline{7}$ = ?) et 10.2 (1- $0,\overline{9}$ = ?), cela revient à considérer que les règles d'opération sur les décimaux se reportent sur les décimaux illimités, moyennant l'adaptation du rajout de la barre. (Op. cité, p. 58)

Autrement dire, les réponses « décimale parenthèse » sont le produit du rapport personnel à l'EDI induit de l'écriture institutionnelle avec parenthèse (ou pointillés « … ») de l'EDI : une écriture décimale avec parenthèse (ou pointillés « … »), par exemple 3,(7) (ou 3,7…), est un nombre décimal (par exemple 3,7) auquel on a rajouté un parenthèse ou des pointillés « … ».

Les observables sont donc 5,(1) pour le calcul « 1,(4) + 3,(7) = ? » et 0,(1) (ou 0,1…) pour le calcul « 1 - 0,(9) = ? ».

Nous codons ces réponses par **D(n)**.

III.4. Réponses par EDI *infini- fini*

Margolinas (1988) utilise le terme *infinitésimale* pour désigner l'EDI *infini -fini* 0,(0)1.

> Les réponses « infinitésimales » sont celles dans lesquelles l'élève envisage la possibilité d'un nombre, qu'on pourrait écrire $0,\overline{0}1$, qui est positif, plus petit que tous les nombres positifs, mais cependant pas égal à zéro. Toutes ces réponses ont ce « nombre » $0,\overline{0}1$ comme différence avec les réponses mathématiquement correctes. (Op. cité, p. 58)

---

[2] On appellera <u>Dn</u> l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme « suite finie de chiffres comportant une virgule et exactement n chiffres après celle – ci ». (Margolinas, 1988, p. 57)

[3] […] Margolinas modélise les rapports entre un nombre réel quelconque et les décimaux. Elle considère la relation d'équivalence entre deux nombres $X = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ et $Y = m + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$, n, m entiers, a_k et b_k étant des chiffres de 0 à 9, telle que X est équivalent à Y si $n = m$ et si $a_k = b_k$ pour tout k compris entre 1 et i. Elle émet l'hypothèse que les écritures de D_i sont associées à une des classes d'équivalence définies par la relation précédente. Pour tout élément x d'une classe d'équivalence, l'élément de D_i correspondant est appelé projection de x dans D_i (Neyret, 1995, 132)

Dans les entretiens avec des binômes d'élèves du seconde menés afin d'éclairer la réponse par EDI *infini -fini* $5,\overline{2}1$ et $0,\overline{0}1$, Margolinas expliquent ces réponses comme suit :

> Les réponses « infinitésimales », sont des réponses plus élaborées, qui dénotent le fonctionnement des coordinations des différents Dn. Pour donner ces réponses, il faut avoir remarqué, par exemple dans la question 8 ($1,\overline{4}+3,\overline{7}=?$), que dans D1 on obtient 5,1 dans D2 5,21 et que si on continue les 2 continueront à augmenter. Ce qui dysfonctionne dans cette conception de D∞ c'est justement le problème de l'infini, c'est-à-dire ce qui est spécifique de la constitution des réels, mais ce qui concerne les décimaux est maîtrisé. (Ibid., p. 61)

Nous adoptons désormais la notation D_∞ de Margolinas pour l'ensemble des EDI.

> On appellera D∞ l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme « suite de chiffres indéfinie vers la droite et comportant une virgule ». (Ibid., p. 57)

Nous codons **D(n)p** les réponses *infini –fini* comme 5,(2)1 ou 5,2…21 pour le calcul « 1,(4) + 3,(7) = ? » et 0,(0)1 ou 0,0…01 pour le calcul « 1 - 0,(9) = ? ».

III.5. Réponses assimilant l'EDIP à un couple d'entiers

Nous complétons les types de réponses de Margolinas par des réponses résultant de l'assimilation d'une EDI « *n,(p)* » à un couple d'entiers (*n*, *p*).
Les observables sont 4,(11) ou 4,11 pour le calcul « 1,(4) + 3,(7) = ? » et 1,(9) ou 1,(1) pour le calcul « 1 - 0,(9) = ? ».
Nous codons ces réponses par **Couple(*n, p*)**.

III.6. Résumé des réponses prévues dans EMS et ENS au Viêt-nam

Nous résumons dans le tableau 2 les types des réponses possibles aux questions 2a et 2c dans l'institution vietnamienne.

Type des réponses \ Question		2a « 1,(4) + 3,(7) = ? »	2c « 1- 0,(9) = ? »
Math. correct	*fraction –non limite*	$\frac{47}{9}$	0
	fraction - limite		
	EDI - non limite	5,(2) ou 5,22…	
	EDI - limite		
Dn	exemple dans D_1 exemple dans D_2 …	5,1 5,21 …	0,1 0,01 …
D(n)		5,(1) ; 5,(21) ou 5,1… ; 5,21…	0,(1) ; 0,(01) ou 0,1… ; 0,01…
D(n)p		5,(2)1 ou 5,2…21	0,(0)1 ou 0,0…01
Couple(n, p)		4,(11) ou 4,11	1,(9) ou 1,(1)

Tableau 2. Résumé des types de réponses prévues EMS et ENS (Viêt-nam)

Les réponses *Dn, D(n), D(n)p* et *Couple(n,p)* sont les observables du prolongement possible des opérations dans D à D_∞ : rappelons que les opérations dans D_∞ ne sont pas objets d'enseignement dans EMS.

VI. Question 3 : Rapport institutionnel à EDINP

Y a-t-il un nombre irrationnel entre 42,498 98… et 42,5 ?
☐ Oui et c'est …
☐ Oui, mais je ne sais pas lequel.
☐ Non. Parce que ……

Cette question est inspirée d'un exercice du manuel français *Maths Seconde* de la collection Déclic (1990).

2°) Trouver un réel, non rationnel, dans chacun des cas suivants :
[…]
c) entre les rationnels 42,498 98… et 42,5 ;
d) entre $\frac{18736}{94512}$ et $\frac{18735}{94513}$ (Misset-Delaruelle, 1990, exercice 19, p. 22)

Nous reprenons la sous question *c)* (contre *d)*) de l'exercice en supposant que la sous question *c)* favorise la réponse par une EDI, les nombres rationnels étant donnés en ED.

La question 3 vise donc à valider le rapport institutionnel à l'EDINP formulé dans l'hypothèse H4 : *L'écriture décimale illimitée non périodique assure, dans le topos de l'enseignant, la définition formelle des nombres irrationnels. Par contre, la raison d'être de l'EDINP n'existe pas dans le topos de l'élève*.

On peut prévoir que les réponses « Oui » seront prépondérantes car la distance entre les deux nombres de l'encadrement est supérieure à 0,001.

a. Quel « nombre irrationnel» peut-on fournir pour la réponse « Oui et c'est … » ?

• EDIP9 (réponse fausse)

Dans l'ingénierie didactique de Le Thai Bao (2004), une partie des élèves conclut que 0,1(9) est irrationnel parce qu'il ne correspond à aucune fraction. Une EDIP9 peut se présenter comme un bon candidat de nombre irrationnel.

La réponse par une EDIP9 peut être produite par différentes stratégies.

- *Moyenne arithmétique*

Dans la recherche d'un nombre irrationnel entre deux bornes, le calcul du milieu des bornes est prévisible. Dans ce cas, le calcul du milieu peut amener à l'EDIP9.

$$\frac{42,49898... + 42,5}{2} = \frac{84,9(98)}{2} = 42,4(99)$$

- *Prolongement de l'ordre dans **D** à D_∞*

Les autres EDIP9 proviennent du prolongement de l'ordre dans **D** à D_∞. Les observables sont, par exemple « 42,498999… » (ou « 42,4999… ») car 42,498 98 … < 42,4989 99… < 42,5.

Rappelons que, par l'hypothèse H21, nous supposons que « *l'ordre dans **D** se réduit institutionnellement à l'ordre dans D_n (n finis) car l'étude des nombres décimaux ne se réalise qu'à l'école primaire sur des nombres décimaux positifs ayant au maximum 3 chiffres après la virgule. La structure algébrique et d'ordre dans un D_n est isomorphe à la structure algébrique et d'ordre discret dans **N**.* »

Par l'hypothèse H1 et H21, on peut prévoir la présence forte des « nombres irrationnels » EDIP9 dans EMS.

• *Moyenne géométrique (réponse juste)*

En utilisant la propriété de moyenne géométrique $a < \sqrt{ab} < b$ où a et b sont positifs, on a donc $42{,}4(98) < \sqrt{42{,}5 \times 42{,}4(98)} < 42{,}5$.

Il faut cependant démontrer l'irrationalité de $\sqrt{42{,}5 \times 42{,}4(98)}$. Un exemple d'éléments institutionnels d'une telle démonstration.

- Transformer « 42,4(98) = $\frac{21037}{495}$ » par une règle algébrique systématique de EMS pour le passage de l'EDIP à la fraction correspondante (Chapitre B1).
- Démontrer que $\sqrt{\frac{425}{10} \times \frac{21037}{495}}$ ne correspond à aucune fraction $\frac{m}{n}$ (m, $n \in$ N et $n \neq 0$) par un raisonnement par l'absurde comme dans la démonstration de l'irrationalité de la diagonale d'un carré de côté 1. Ci-après celle du manuel *Algèbre 9*

> Supposons qu'il existe un rationnel positif irréductible $\frac{m}{n}$ (m, $n \in$ N et $n \neq 0$) tel que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Alors $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$ (1). C'est-à-dire m^2 est pair, m est donc aussi pair : $m = 2m'$. En le remplaçant dans (1) : $4m'^2 = 2n^2$ ou $n^2 = 2m'^2$. C'est-à-dire n^2 est pair, n est donc aussi pair : $n = 2n'$. Alors, dans la fraction $\frac{m}{n}$, le dénominateur et le numérateur sont divisibles par 2. Elle n'est pas donc irréductible : cela est contradictoire avec l'hypothèse. (*Algèbre 9* (partie cours), 2003, p. 6)

Cependant, la démonstration que $\sqrt{\frac{425}{10} \times \frac{21037}{495}}$ est irrationnel est un peu plus complexe (voir annexe 1).

• *EDINP (réponse juste)*

Une EDINP peut être construit à l'aide d'une loi permettant d'écrire les chiffres après « … ». Par exemple : 42,498 98… < 42,49**9 09 009 0009**… < 42,5.

Rappelons que les nombres irrationnels sont officiellement définis, dans la partie cours, par des EDINP.

> 96,13113111311113…
> 0,101001000100001…
> Il est clair que ces écritures décimales illimitées ne représentent pas de nombres rationnels.
> […] On appelle nombre irrationnel un nombre qui a une écriture décimale illimitée non périodique.
> (*Algèbre 9*, 2003, p. 4)

De plus, l'EDINP « 0,101001000100001… » apparaît une fois dans un exercice de comparaison des nombres du Collège 1.

Le « nombre irrationnel » donné par une EDINP est une réponse optimale si on considère la définition d'un nombre irrationnel dans EMS. Mais cette définition restant dans le topos de l'enseignant (H4), on peut prévoir l'absence d'un « nombre » EDINP dans la réponse « Oui et c'est.. ».

b. Les difficultés de la construction d'un irrationnel, tâche jamais proposée dans EMS au Viêt-nam, permettent de prévoir que les réponses « Oui, mais je ne sais pas lequel » seront prépondérantes.

c. Dans le cas de réponses non prévues *« Non. Parce que… »,* quelles seront les explications associées ?

Chapitre B2

Deuxième partie. Analyse *a posteriori*

Le questionnaire a été proposé en septembre 2005 dans des classes de lycées et d'écoles normales supérieures à Ho Chi Minh Ville (Viêt-nam).

Le fait que ce questionnaire ait été passé en tout début d'année fait que les réponses des élèves de la classe 10 sont pour nous des observables du rapport institutionnel à EDI du Collège.

Nous présentons dans le tableau 3 les classes concernées et leur effectif.

Niveau	Nom de l'établissement	Effectif
Secondaire	- 3 classe 10 (Seconde) du Lycée Luong The Vinh de HCM ville - 2 classe 10 du Lycée de l'Université de Pédagogie de HCM ville	174
	2 classe 12 (Terminale) du Lycée de l'Université de Pédagogie de HCM ville	89
Supérieure	2 classes de la dernière année de l'Ecole Supérieure de Pédagogie de HCM Ville pour la formation des enseignants collège (durée de la formation : 3 ans) : notées *3e ENS.collège*	52
	1 classe de troisième année de l'Université Pédagogique de HCM Ville pour la formation des enseignants lycée (durée de la formation : 4 ans) : notée *3e ENS.lycée*.	26

Tableau 3. Classes aux niveaux secondaire et supérieure expérimentées

Les conditions de passation ont été les suivantes :

- Chaque élève et étudiant reçoit un questionnaire et une feuille de brouillon.
- On demande aux élèves et aux étudiants de travailler individuellement pour donner leurs réponses écrites sur la feuille du questionnaire en effectuant les calculs (si nécessaire) sur la feuille de brouillons fournie.
- La passation dure 25 minutes.
- Un observateur (Le Thai Bao) est présent durant toutes les séances. Il ramasse questionnaires et brouillons.

I. Question 1 : Rapport institutionnel à EDIP

I.1. Signification des pointillés « … » dans l'écriture décimale

a) 2,8383… ☐ 2,(83)

b) 2,777… ☐ $\frac{25}{9}$

Le tableau 4 ci-après présente les effectifs des réponses par le signe « = » ou autres signes dans les comparaisons 1a (en grisé) et 1b (non grisé).

Classe	Réponse	« = » (respect du contrat)		Autres signes : « < », « > » ou « ≠ »		Pas de réponse		Total
	question	1a	1b	1a	1b	1a	1b	
10 (Seconde)		170 98 %	136 78 %	3 1 %	38 22 %	1 0,6 %	0	174
12 (Terminale)		81 91 %	72 81 %	8 9 %	17 19 %	0	0	89
Total EMS		251 95%	208 79%	11 4%	55 21%	1 0,4%	0	263
3e ENS.collège		51	45	1	7	0	0	52
3e ENS.lycée		24	19	2	7	0	0	26
Total ENS[1]		75 96 %	64 82 %	3 4 %	14 18 %	0	0	78

Tableau 4. Types de réponses aux questions 1a et 1b selon les niveaux

L'hypothèse H31 sur le rapport institutionnel aux pointillés « … » dans une EDI est vérifiée chez les élèves ainsi que chez les étudiants (autour de 95 % pour 1a et autour de 80 % pour 1b).

> Dans l'ostensif d'une EDIP utilisant des pointillés « … », une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois est la période. (H31)

Pour la comparaison 1b, il y a autour de 20 % des réponses des élèves (EMS) et des étudiants (ENS) par d'autres signes. En examinant les brouillons de ces réponses, on trouve que la plupart de ces réponses résultent d'erreurs dans la division de 25 par 9.

I.2. Périodicité de l'EDIP dans la division euclidienne généralisée

c) $\frac{83333}{25000}$ □ 3,(3)

d) $\frac{40907}{90000}$ □ 0,4545...

Le tableau 5 ci-après présente les effectifs des réponses par le signe « = » ou autres signes dans les comparaisons 1c et 1d.

Nous codons :

- *Respect.contrat* les réponses par le signe « = » qui exprime le respect du contrat didactique concernant la période de l'EDIP produite par la division euclidienne généralisé (hypothèse H32) ;
- *Math.correct* les réponses par le signe « < » avec une division correcte observée dans le brouillon ;
- *Div.fausse* les réponses par les signes « < » ou « > » avec une division fausse observée dans le brouillon.

[1] Les institutions des écoles normales supérieures.

Classe	Réponse / question	« = » Respect. contrat (faux)		« < » Math.correct		« < » ou « > » Div.fausse		Autres (≠, ≈)		Pas de réponse		Total
		1c	1d	1c	1d	1c	1d	1c	1d	1c	1d	
10 (Seconde)		83 48 %	67 39 %	31 18 %	33 19 %	59 34 %	69 40 %	0	1 1 %	1 1 %	4 2 %	174
12 (Terminale)		39 44 %	20 22 %	22 25 %	24 27 %	25 28 %	39 44 %	2 2 %	3 3 %	1 1 %	3 3 %	89
Total EMS		122 46 %	87 33 %	53 20 %	57 22%	84 32%	108 41 %	2 1 %	4 2 %	2 1 %	7 3 %	263
3e ENS.collège		22	7	14	26	14	15	0	0	2	4	52
3e ENS.lycée		13	6	10	13	3	7	0	0	0	0	26
Total ENS		35 45 %	13 17 %	24 31 %	39 50 %	17 22 %	22 36 %	0	0	2 3 %	4 5 %	78

Tableau 5. Types de réponses aux questions 1c et 1d selon les niveaux

Remarquons tout de suite le nombre élevé de divisions erronées :

- dans EMS, 32 % pour la division 1c et 41 % pour celle de 1d
- dans ENS, 22 % pour la division 1c et 36 % pour celle de 1d.

Il n'y a pas d'amélioration nette de cette technique entre EMS et ENS !

Examinons les réponses fondées sur une division correcte.

a. Respect fort de la règle du contrat didactique dans la comparaison « $\frac{83333}{25000}$ □ 3,(3) » (1c)

Classe / Réponse	« = » Respect contrat (faux)	« < » Math.correct	Total
10 (Seconde)	83 (73 %)	31 (27 %)	114
12 (Terminale)	39 (64 %)	22 (36 %)	61
Total EMS	122 (70 %)	53 (30 %)	175
3e ENS.collège	22	14	36
3e ENS.lycée	13	10	23
Total ENS	35 (59 %)	24 (41 %)	59

Tableau 6. **Comparaison 1c : respect du contrat ou réponse correcte selon les niveaux**

L'effectif des réponses « = » chez les élèves du lycée observés est nettement plus élevé que celui des réponses mathématiquement correctes (70 % contre 30 %). Cela permet d'affirmer l'existence forte de la règle du contrat didactique, énoncée dans l'hypothèse H32 :

> L'élève n'est pas responsable de l'étude la décimalité ou de la non – décimalité d'une fraction à écrire en écriture décimale. Dans la division euclidienne généralisée de deux entiers (générateurs de l'écriture décimale d'un rationnel), une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois dans le quotient décimal approché est la période de l'EDIP. (H32)

Le respect de cette règle du contrat didactique persiste aussi majoritairement dans les institutions de formation des enseignants (59% contre 41 % de réponses correctes), institutions où pourtant les étudiants ont rencontré dans leur enseignement de mathématique des concepts d'Arithmétique.

b. Affaiblissement du respect de la règle du contrat didactique dans la comparaison « $\frac{40907}{90000}$ □ 0,4545... » *(1d)*

Réponse / Classe	« = » Respect. contrat (faux)	« < » Math.correct	Total
10 (Seconde)	67 (67 %)	33 (33 %)	100
12 (Terminale)	20 (45 %)	24 (55 %)	44
Total EMS	87 (60 %)	57 (40 %)	144
3e ENS.collège	7	26	33
3e ENS.lycée	6	13	19
Total ENS	13 (25 %)	39 (75 %)	52

Tableau 7. Comparaison 1d : respect du contrat ou réponse correcte selon les niveaux

Dans la comparaison 1d, l'effectif des réponses *Respect.contrat* reste encore élevé, malgré que le nombre 45 ne se répète que 2 fois dans la division correcte de 40907 par 90000 :

- 60 % contre 40 % de réponses correctes dans EMS,
- 25 % contre 75 % de réponses correctes dans ENS.

Nous ne trouvons aucune réponse utilisant la décomposition du dénominateur en facteurs premiers dans les brouillons des élèves et des étudiants.

I.3. Rapport institutionnel à l'EDIP9

Pour la comparaison « 1,(9) □ 2 » (1e), presque toutes les réponses (EMS et ENS) se rattachent au prolongement de l'ordre dans **D** à D_∞ (tableau 8) : 92 % pour EMS et 94 % pour ENS.

Réponse / Classe	« < » Prolongement de D	« = »	« ≠ »	« ≈ »	Pas de réponse	Total
10 (Seconde)	158	9	0	7	0	174
12 (Terminale)	83	2	2	2	0	89
Total EMS	241 (92%)	11	2	9		263
3e ENS.collège	48	1	0	2	1	52
3e ENS.lycée	25	0	0	0	1	26
Total ENS	73 (94%)	1	0	2	2	78

Tableau 8. Types de réponses aux questions 1e selon les niveaux

L'identification du nombre 0,(9) au nombre 1 est donc refusée par presque tous les élèves d'EMS et les étudiants d'ENS observés.

On peut formuler l'hypothèse que les institutions de formation d'enseignants ne prennent pas en compte cette identification liée à la décimalisation des nombres réels. Cela pourrait mettre ces futurs enseignants en grande difficulté lorsqu'ils rencontreront des situations où cette identification intervient, en particulier dans des activités d'expérimentation numérique (instrumentée par la calculatrice) comme la noosphère actuelle le préconise.

Dans EMS, il y a 11 réponses par « = » (contre 1 dans ENS) et 9 réponses par « ≈ » (contre 2 dans ENS). Nous allons considérer les réponses de ces élèves dans la question 2b.

II. Question 2b : Statut de l'EDI – Ordre discret dans des EDI

2b) Mettre une croix devant les affirmations justes (il y a peut-être plusieurs affirmations justes)
Le nombre décimal illimité périodique 0,999…(ayant la période de 9) est :
-[2b1] *la suite numérique* (u_n) *où* $u_1 = 0,9$; $u_2 = 0,99$; …. ; $u_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$; … ☐
-[2b2] *la limite de la suite* (u_n) *ci-dessus.* ☐
-[2b3] *un nombre réel qui est strictement inférieur à 1.* ☐
-[2b4] *un nombre réel qui est supérieur à 1.* ☐
-[2b5] *égal au nombre 1.* ☐
-[2b6] *le plus proche de 1.* ☐

Rappelons qu'au niveau de la classe 10 (Seconde), nous supprimons dans la question 2b les deux premières affirmations concernant les notions de suite numérique et de limite (non enseignées). La question 2b pour la classe 10 est donc la suivante.

2b) Mettez une croix devant les affirmations justes (il y a peut-être plusieurs affirmations justes)
Le nombre décimal illimité périodique 0,999…(ayant la période de 9) est :
-[2b3] *un nombre réel qui est strictement inférieur à 1.* ☐
-[2b4] *un nombre réel qui est supérieur à 1.* ☐
-[2b5] *égal au nombre 1.* ☐
-[2b6] *le plus proche de 1.* ☐

Le tableau 9 ci-après présente l'effectif selon les affirmations choisies pour la question 2b et selon les niveaux scolaires.

Choix / Classe	2b1 «suite »	2b2 « limite »	2b3 «< 1 »	2b4 «>1»	2b5 « = 1 »	2b6 « le plus proche »	Aucun	Total
10	[*non proposée*]		112 64 %	0	9 5 %	164 94 %	3 2 %	174
12	45 51 %	13 15 %	56 63 %	0	0	74 83 %	2 2 %	89
Total EMS	Classe 12		168 64%	0	9 3%	238 90%	5 2%	263
3e ENS.collège	16	5	43	0	1	43	1	52
3e ENS.lycée	8	3	21	0	1	19	0	26
Total ENS	24 31 %	8 10 %	64 82 %	0	2 3 %	62 79 %	1 2 %	78

Tableau 9. Effectif selon les choix des affirmations à la question 2b

Nous allons examiner maintenant les affirmations 2b6 et 2b3 (largement majoritaire) d'une part et les affirmations 2b1 et 2b2 d'autre part.

II.1. L'EDIP9 « 0,999… » est un nombre, le plus proche de 1 et inférieur à 1 : ordre discret dans D_∞

Cette partie s'appuie sur l'analyse des réponses 2b6 et 2b3 à la question 2b.

a. Dans EMS

Presque tous les élèves (90 %) affirment que « 0,999… est le plus proche de 1 » (2b6). Cela confirme que l'ordre discret dans **N** est prolongé à l'ensemble des EDI : tout nombre possède un prédécesseur et un successeur.

Ce résultat et celui de la comparaison « 1,(9) □ 2 » de l'item 1e pour laquelle 92% des élèves répondent « 1,(9) < 2 », permettent de valider l'hypothèse H21.

> L'ordre dans **D** se prolonge sur l'ensemble des EDI. En particulier, le nombre 0,(9) est strictement inférieur au nombre 1 et le plus proche de 1 conformément au rapport institutionnel à l'ordre discret dans **N**. (H21)

Nous allons maintenant mettre en relation la question 2 avec les réponses à l'item précédent 1e « 1,(9) □ 2 » pour analyser la cohérence des réponses des élèves.

- 92 % des élèves de EMS écrivent « 1,(9) < 2 » (1e), alors qu'ils sont seulement 64 % à affirmer que « 0,999… < 1 » (2b3).

Pour expliquer cette baisse, on peut penser que l'affirmation « 0,999… est le plus proche de 1 » est perçue comme plus « forte » que l'affirmation « 0,999… < 1 » par les élèves ; plus « forte » signifiant pour nous que l'affirmation « 0,999… est le plus proche de 1 » contient implicitement l'affirmation « 0,999… < 1 ».

De plus :

- l'affirmation « 0,999… est un nombre réel qui est supérieure à 1 » (2b4) n'est jamais choisie.
- l'affirmation « 0,999… = 1 » (2b5) n'est quasiment jamais choisie (5 % en classe 10 et 0 % en classe 12).
- Le choix « 0,999… < 1 » est toujours associé à celui de « 0,999… est le plus proche de 1 ».

Ces trois points qui vont dans le sens de notre interprétation.

Que répondent à la question 2 les 11 élèves (cf. tableau 8) ayant écrit « 1,(9) = 2 » dans l'item 1e ?

Les 9 élèves issus de la classe 10 affirment encore que « 0,999… = 1 ».

Les 2 élèves issus de la classe 12 choisissent l'affirmation « 0,999… est le plus proche de 1 ».

Ces résultats laissent penser que des identifications du type « 0,999… = 1 » peuvent être présentes dans un enseignement effectif au collège à l'occasion du travail sur les ED alors qu'elles ne sont jamais reprises au Lycée.

b. Dans ENS

Les réponses des étudiants ne se distinguent pas de celles de EMS et plus particulièrement de celles de la classe 12 :

- 82 % affirment que « 0,999… < 1 »
- 79 % affirment que « 0,999… est le plus proche de 1 »
- 3 % seulement choisissent « 0,999… = 1 »..

L'enseignement de structures topologiques générales dans les ENS (programme des enseignements d'analyse), et particulièrement de la notion d'ordre non dénombrable (donc non discret) dans **R** n'a pas donné d'outil pour l'ordre sur les EDI, qui reste déconnecté de **R**. L'hypothèse H21est donc aussi validée dans les ENS.

II.2. Statut de l'EDI en fin d'EMS et dans les ENS : suite numérique

Cette partie s'appuie sur l'analyse des réponses 2b1 et 2b2 à la question 2b.

a. Dans EMS

Pour 58 élèves des classes 12 (65 %), l'écriture « 0,999… » est attachée soit à la notion de suite soit à celle de limite de suite, mais de manière séparée comme nous le montrons ci-après :

- 45 élèves des classes 12 (sur 89, soit 51%) acceptent que « 0,999… est la suite numérique (u_n) où $u_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$ » (2b1). Seules 4 de ces 45 élèves associe l'écriture « 0,999… » à la notion de limite en cochant 2b2.
- 13 élèves des classes 12 (sur 89, soit 15%) affirment que « 0,999… est la limite de la suite (u_n) où $u_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$ » (13 sur 89 : 15%) (2b2). Aucun de ces 13 élèves associe l'écriture « 0,999… » à la notion de suite numérique en cochant 2B1.

Ces résultats semblent invalidés la première partie de l'hypothèse H1.

> L'écriture décimale illimitée n'a ni le statut de suite numérique convergente de nombres décimaux ni celui de « limite » de cette suite (*après que la notion de limite ait été introduite*).

On pourrait plutôt dire :

> Pour une majorité d'élève de fin d'EMS, l'écriture décimale illimitée peut prendre le statut de suite numérique de nombres décimaux, mais pas celui de « limite » de cette suite (*après que la notion de limite ait été introduite*).

Rappelons qu'aucun élève des classes 12 n'accepte « 0,999… = 1 ».

Donc 39 des 45 élèves disant que « 0,999… est la suite numérique (u_n)… » affirment *en même temps* que 0,999… :

- est le plus proche de 1 »
- n'est pas égale à 1
- n'est pas la limite de cette suite.

L'affirmation « 0,999… est la suite numérique (u_n) où $u_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$ » n'a donc pas, pour ces 39 élèves (44 % des élèves de classe 12), la signification analytique de suite *convergente* vers 1.

La signification de « 0,999… est la suite numérique (u_n)… » est plutôt que la succession des termes de la suite 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; …représente une succession de valeurs approchées de 1 ayant un plus grand élément 0,999… « le plus proche de 1 mais distinct ». On retrouve donc ici les traces d'une problématique d'« approximation x » de 1.

b. Dans ENS

L'effectif pour les affirmations 2b1 et 2b2 dans ENS est moindre que celui des élèves de la classe 12 :

- pour 2b1 : 31 % des étudiants contre 51% des élèves des classes 12.

- pour 2b2 : 10 % des étudiants contre 15% des élèves des classes 12.

Ces résultats attestent qu'il n'y a pas une reprise dans ENS des EDI au sein de l'analyse, qui permettrait de leur attribuer un statut de « suite numérique convergente » ou de « limite ».

III. Questions 2a et 2c : Opérations sur les EDIP – Obstacle *infini -fini*

a) Quel est le résultat de l'opération 1,(4) +3,(7) = …
[…]
c) Quel est le résultat de l'opération 1 – 0,(9) = …
Si vous ne pouvez pas répondre, expliquez pourquoi :
……
.....

Les tableaux 11 et 12 ci-après présentent les effectifs des réponses aux questions (2a) et (2c) selon les types définis dans l'analyse *a priori*.

Réponse / Classe	Math.correct			D(n)p	D(n)	Couple(n,p)	Dn	sans calcul	Total
	Non limite		limite						
	EDI	fraction							
10 (Seconde)	29 17 %	46 26 %	[0]	46 26 %	46 26 %	25 14 %	18 10 %	10 6 %	174
12 (Terminale)	11 12 %	47 53 %	0	47 53 %	8 9 %	6 7 %	4 4 %	11 12 %	89
Total EMS	40 15 %	93 35 %	0	93 35 %	54 21 %	31 12 %	22 8 %		
	42 (16 %)			200 (76 %)				21 (8 %)	263
3e ENS.collège	13	2	0	31	2	1	0	3	52
3e ENS.lycée	4	2	1	10	3	0	0	6	26
Total ENS	17 22 %	4 5 %	1 1 %	41 52 %	5 6 %	1 1 %	0		
	22 (28 %)			47 (60 %)				9 (12 %)	78

Tableau 11. Calcul « 1,(4) +3,(7) = ? » (2a)

Réponse / Classe	Math.correct		D(n)p	D(n)	Couple(n,p)	Dn	sans calcul		Total
	Non limite	limite					Explication	sans	
10 (Seconde)	4 2 %		30 17 %	46 26 %	18 10 %	16 9 %	49 28 %	11 6 %	174
12 (Terminale)	4 4 %	48 54 %	48 54 %	12 13 %	2 2 %	2 2 %	19 21 %	2 2 %	89
Total EMS	8 3 %	78 30 %	78 30 %	58 22 %	20 8 %	18 7 %	68 26 %	13 5 %	
	8 (3 %)		174 (66 %)				81 (31 %)		263
3e ENS.collège	2	0	22 42 %	6 12 %	1 2 %	0	4 8 %	17 33 %	52
3e ENS.lycée	2	0	8 31 %	2 8 %	0	0	9 35 %	5 19 %	26
Total ENS	4 5 %	0	30 38 %	8 10 %	1 1 %	0	13 17 %	22 28 %	
	4 (5 %)		39 (50 %)				35 (45 %)		78

Tableau 12. Calcul « 1 – 0,(9) = ? » (2c)

Soulignons que dans la catégorie « mathématiquement correct » nous incluons des calculs erronés.

Dans le calcul 2c, la consigne « Si vous ne pouvez pas répondre, expliquez pourquoi … » permet de recueillir des explications à l'absence de résultat au calcul.
Un premier résultat est l'augmentation importante de « sans calcul » dans le passage du calcul 2a à 2c :

- de 8 % à 31 % pour EMS
- de 12 % à 45 % pour ENS.

Comme nous l'avions prévu, le calcul « 1 – 0,(9) = ? » pose une difficulté que nous analyserons plus loin au travers des explications données.

Nous commençons par examiner la validité de l'hypothèse H22 qui affirme le prolongement des opérations dans **D** à D_∞.

III.1. Prolongement des opérations dans D à D_∞

a. Dans EMS

Les opérations dans D_∞ n'étant pas objet d'enseignement dans EMS, la majorité des élèves répondent par *Dn, D(n), D(n)p* et *Couple(n,p)* qui sont pour nous des observables du prolongement possible des opérations dans **D** à D_∞ :

- pour le calcul 2a : 76 % (tableau 11)
- pour le calcul 2c : 66 % (tableau 12)

Pour le calcul 2a « 1,(4) + 3,(7) = ? » (tableau 11), toutes les réponses correctes (42) des élèves des classes 10 et 12 sauf deux en classes 12 sont des EDI « 5,(2) » ou « 5,22… ». Les deux exceptions (classe 12) proposent un calcul dans **Q**.

Pour le calcul 2c « 1 - 0,(9) = ? » (tableau 12), le nombre de réponses mathématiquement correctes devient presque nulle : 3 % pour l'ensemble d'EMS observé (classes 10 et 12).

Pour les élèves des classes 12 (tableaux 11 et 12), on ne trouve aucun calcul de limite dans les brouillons des réponses correctes (13 réponses correctes pour 2a et 4 réponses correctes pour 2c) : les EDI ne sont donc jamais considérées comme des limites en cohérence avec ce que nous avons vu précédemment.

Ces résultats valident donc l'hypothèse H22.

> Les techniques opératoires de **D** sont attribuées à l'ensemble des EDI. L'intervention d'opérations dans l'ensemble des EDI à partir d'opérations sur des limites n'existe pas. Les opérations sur deux EDIP (rationnels) se ramènent à des opérations dans **D,** et non à des opérations dans **Q** qui nécessitent la transformation d'une EDIP en la fraction correspondante. (H22)

b. Dans ENS

Les réponses *Dn, D(n), D(n)p* et *Couple(n,p),* observables du prolongement possible des opérations dans **D** à D_∞, sont aussi majoritaires mais dans une moindre mesure :

- pour le calcul 2a : 60 % (tableau 11)
- pour le calcul 2c : 50 % (tableau 12)

Pour le calcul 2a « 1,(4) + 3,(7) = ? » (tableau 11), 17 réponses « mathématiquement correctes » (sur 22) sont des EDI « 5,(2) » ou « 5,22… ». Seuls 4 étudiants (5 %) calculent

(juste) dans **Q** et donnent la réponse « *fraction - non limite* » $\frac{47}{9}$. Cependant, deux de ces 4 étudiants font un calcul du même type pour 2c, mais erroné : 1 – 0,(9) = 1 – 1/9 = 8/9.

Un unique étudiant d'une ENS additionne deux sommes infinies : « 1,(4) = 1 + 4/10 + $4/10^2$ + …+ $4/10^n$ + … et 3,(7) = 3 + 7/10 + $7/10^2$ + … + $7/10^n$ + … » qui aboutit à la « *fraction –limite* » $\frac{47}{9}$. Cependant, cet étudiant ne donne pas de résultat au calcul 2c.

Pour le calcul 2c « 1 - 0,(9) = ? » (tableau 12), le nombre de réponses mathématiquement correctes devient presque nulle : 5 %.

Encore une fois, l'enseignement mathématique et la formation au sein des ENS ne semble pas modifié le rapport institutionnel aux opérations sur les EDI qui reste analogue à celui de EMS.

c. Exemple de type d'erreurs

Nous donnons ci-après quelques exemples des types d'erreurs apparues.

- les réponses de type *Dn* proviennent de l'attribution d'un D_i (*i* fini) à une EDIP en remplaçant la somme des EDI par la somme des « projections[2] » des EDIP dans ce D_i. Nous donnons ci-après quelques exemples de telles réponses.

L'attribution de D_1 aux EDIP

Câu hỏi 2 : a) Hãy tính : 1,(4) + 3,(7) =. 5,1 […] c) Hãy tính : 1 – 0,(9) = 0,1 Nếu em không thể trả lời, hãy giải thích tại sao : ……	Brouillon 1,4 3,7 5,1 1 0,9 0,1	2a) 1,(4) + 3,(7) = 5,1 2c) 1 – (0,9) = 0,1 (Elève *L2S4-37*)	Brouillon 1,4 1 3,7 0,9 5,1 0,1

L'attribution de D_p aux EDIP « *n*,(*p*) »

Câu hỏi 2 : a) Hãy tính : 1,(4) + 3,(7) =. 5,2221777 […] c) Hãy tính : 1 – 0,(9) = 0,000000001 Nếu em không thể trả lời, hãy giải thích tại sao : ……	Brouillon 1,4444 3,7777777 5,2221777 1,000000000 – 0,999999999 1,(4) 1,4444 0,9	2a) 1,(4) + 3,(7) = 5,2221777 2c) 1 – (0,9) = 0,000000001 (Elève *L2S6-28*)	Brouillon 1,4444 3,7777777 5,2221777 1,000000000 - 0,999999999 […]

Pour l'élève *L2S4-37* : 1,(4) = 1,$\underbrace{4444}_{4}$; 3,(7) = 3,$\underbrace{7777777}_{7}$ et 0,(9) = 0,$\underbrace{999999999}_{9}$

- Les réponses de type *Dn* proviennent de l'assimilation d'une EDI « *n*,(*p*) » à un couple d'entiers (*n*, *p*).

[2] […] Margolinas modélise les rapports entre un nombre réel quelconque et les décimaux. Elle considère la relation d'équivalence entre deux nombres $X = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ et $Y = m + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$, *n*, *m* entiers, a_k et b_k étant des chiffres de 0 à 9, telle que *X* est équivalent à *Y* si *n* = *m* et si $a_k = b_k$ pour tout k compris entre 1 et *i*. Elle émet l'hypothèse que les écritures de D_i sont associées à une des classes d'équivalence définies par la relation précédente. Pour tout élément *x* d'une classe d'équivalence, l'élément de D_i correspondant est appelé projection de *x* dans D_i (Neyret, 1995, 132)

Câu hỏi 2 : a) Hãy tính : 1,(4) + 3,(7) = 4,(11) […] c) Hãy tính : 1 – 0,(9) = … Nếu em không thể trả lời, hãy giải thích tại sao : ……	Brouillon Lớp : 10A1 Mã số học sinh : 10 1,(4) 3,(7) 4,11	2a) 1,(4) + 3,(7) = 4,(11) 2c) 1 – (0,9) = (Elève *L1S1-10*)	Brouillon **Classe** : 10A1 **Code** : 10 ~~1, (4)~~ ~~3, (7)~~ ~~4, 11~~ 1 - 0,(9) 1, (9)

- Les réponses de type *D(n)* proviennent de règles d'actions issues des opérations dans **D**.

Câu hỏi 2 : a) Hãy tính : 1,(4) + 3,(7) = 1,4 · 0,(1) + 3,7 · 0,(1) = 0,(1)(4,4 + 3,7) = 0,(1) · 5,1 = 5,(1) b) Hãy đánh dấu chéo vào khẳng định đúng (có thể có nhiều khẳng định đúng) […] c) Hãy tính : 1 – 0,(9) = 1 – 9 . 0,(1) Nếu em không thể trả lời, hãy giải thích tại sao : ……	2a) 1,(4) + 3,(7) = 1,4 × 0,(1) +3,7 × 0,(1) = 0,(1)×(4,4+3,7) = 0,(1)×5,1 = 5,(1) 2c) 1 – (0,9) = 1 – 9× 0,(1) (Etudiant *EC-10*)

- Les réponses de type *D(n)p* « sont celles dans lesquelles l'élève envisage la possibilité d'un nombre, qu'on pourrait écrire $0,\overline{0}1$, qui est positif, plus petit que tous les nombres positifs, mais cependant pas égal à zéro » (Margolinas, 1988, p. 58).

Câu hỏi 2 : a) Hãy tính : 1,(4) + 3,(7) = 5,(2)1 […] c) Hãy tính : 1 – 0,(9) = … 0,(0)1 Nếu em không thể trả lời, hãy giải thích tại sao ……	Brouillon 1,44 3,77 5,21 1,4444 3,7777 5,2221 1 - 0,9 = 0,1 1 - 0,99 0,01	2a) 1,(4) + 3,(7) = 5,(2)1 2c) 1 – (0,9) = 0,(0)1 (Elève *L2T1-06*)	Brouillon 1,44 3,77 5,21 1,4444 3,7777 5,2221 1- 0,9 = 0,1 1 - 0,99 0,01

III.2. Prédominance des réponses *D(n)p* (EDI *infini – fini*) comme prolongement des opérations de D à D_∞ dans les classes 12 (EMS) et ENS

Rappelons que les réponses erronées résultant du prolongement des opérations de D à D_∞ sont largement majoritaires dans EMS et dans ENS. Nous allons maintenant analyser les types d'erreur qui apparaissent. Pour cela, nous extrayons des tableaux 11 et 12 deux sous tableaux 13 et 14. Les types d'erreurs sont présentés dans ces tableaux selon l'ordre *Dn, couple(n,p), D(n), D(n)p*, qui correspond à un passage de mieux en mieux négocié de D_i à D_∞.

Réponse Classe	D(n)p	D(n)	Couple(n,p)	Dn	Total
10 (seconde)	46 34 %	46 34 %	25 19 %	18 13 %	135
12 (Terminale)	47 72 %	8 12 %	6 9 %	4 6 %	65
Total EMS	93 47 %	54 27 %	31 15 %	22 11 %	200
3e ENS.collège	31	2	1	0	34
3e ENS.lycée	10	3	0	0	13
Total ENS	41 87 %	5 11 %	1 2 %	0 0 %	47

Tableau 13. Prolongement de **D** à D_∞ dans le calcul « 1,(4) +3,(7) = ? » (2a)

Réponse / Classe	D(n)p	D(n)	Couple(n,p)	Dn	Total
10 (Seconde)	30 27 %	46 42 %	18 16 %	16 15%	110
12 (Terminale)	48 75 %	12 19 %	2 3 %	2 3 %	64
Total EMS	78 45 %	58 33 %	20 11 %	18 10 %	174
3e ENS.collège	22	6	1	0	29
3e ENS.lycée	8	2	0	0	10
Total ENS	30 77 %	8 20 %	1 3 %	0	39

Tableau 14. Prolongement de **D** à D_∞ dans le calcul « 1 – 0,(9) = ? » (2c)

Les tableaux 13 et 14 montrent une différence au sommet de la hiérarchie des types d'erreurs produites entre d'un côté, la classe 10 (représentant du Collège) et de l'autre côté, la classe 12 et l'ENS.

En effet, la hiérarchie des erreurs (selon l'effectif en pourcentage) pour la classe 12 et l'ENS est la même quelque soit le calcul, c'est-à-dire les erreurs se concentrent essentiellement sur *D(n)p* et *D(n)*.

	Réponse	D(n)p	D(n)	Couple (n,p)	Dn
« 1,(4) +3,(7) = ? » (2a)	Classe 12	72 %	12 %	9 %	6 %
	ENS	87 %	11 %	2 %	0 %
« 1 – 0,(9) = ? » (2c)	Classe 12	75 %	19 %	3 %	3 %
	ENS	77 %	20 %	3 %	0 %

Tableau 15. Hiérarchie des types d'erreurs en classe 12 et ENS pour les calculs 2a et 2c

En classe 10, les résultats sont relativement réparties entre les différents types d'erreurs, avec une prédominance de la réponse *D(n)*.

Réponse	D(n)	D(n)p	Couple (n,p)	Dn
« 1,(4) +3,(7) = ? » (2a)	34 %	34 %	19 %	13 %
« 1 – 0,(9) = ? » (2c)	42 %	27 %	16 %	15 %

Tableau 16. Hiérarchie des types d'erreurs en classe 10 pour les calculs 2a et 2c

Remarquons que les résultats de la classe 10 sont similaires à ceux obtenus par Margolinas (1988) pour la seconde en France (programme 1977).

En classe 12 et ENS, les réponses *D(n)p* sont largement majoritaire : 3/4 ou plus des erreurs produites, alors qu'au niveau de la classe 10 (début d'année) elles représentent au mieux un peu plus d'1/4.

Or nous avons observé précédemment que le rapport aux EDI avait peu changé du collège au Lycée et à l'ENS en ce qui concerne l'ordre. Or comme le dit Margolinas (1988), les réponses D(n)p montrent une certaine maîtrise des coordinations entre les différents D_i.

> Pour donner ces réponses, il faut avoir remarqué, par exemple dans la question 8 ($1,\overline{4}+3,\overline{7}=?$), que dans D1 on obtient 5,1 dans D2 5,21 et que si on continue les 2 continueront à augmenter. (Margolinas 1988, p. 61)

La différence notable entre la classe 10 et la classe 12 / ENS ne peut s'expliquer que par par l'enseignement au lycée d'un nouvel objet : un candidat est la notion de suite puisque, comme nous l'avons vu, un EDI peut à ces niveaux prendre le statut de suite.

Il n'en reste pas moins que la prédominance des réponses *D(n)p* dans toutes les classes observées, fin de EMS et ENS, atteste qu'il existe un problème lié à la notion d'infini et donc à la notion de limite. Il est d'ailleurs remarquable que les réponses par EDI *infini – fini* augmentent considérablement dans les classes où la notion de limite a été déjà enseignée. Ce qui, une fois de plus, atteste que les EDI n'ont pas le statut de limite.

III.3. Une explication sur la quasi absence des réponses mathématiquement correctes dans le calcul « 1 - 0,(9) = ? » (2c)

Pour le calcul « 1 - 0,(9) = ? » (tableau 12). Les réponses dites « mathématiquement correctes » sont quasi nulles dans EMS (3 %) et dans ENS (5 %). Nous l'expliquons par le rapport institutionnel à l'EDIP9 mis en place au Collège et qui conduit à l'inégalité « 0,(9) < 1 ».

Comme nous l'avons déjà remarqué, il y a un écart considérable des réussites entre les deux calculs 2a et 2c (tableaux 11 et 12)

- Dans EMS : 16 % pour 2a contre 3 % pour 2c.
- Dans ENS : 28 % pour 2a contre 5% pour 2c.

Comment peut-on produire une réponse correcte au calcul « 1,(4) + 3,(7) = ? » (2a) sans calcul de limite ?

Une réponse EDI correcte est soit 5,(2) ou 5,22… . Pour tenter de répondre, examinons certaines des réponses correctes en EDI sans calcul de limite.

- Un cas de la classe 10 :

Câu hỏi 2 : a) Hãy tính : 1,(4) + 3,(7) = 5,(2) có tận cùng bằng số 1.	1,(4) + 3,(7) = 5,(2) ayant 1 à la fin (Elève *L1S3-07*)

- Un cas de la classe 12 :

Câu hỏi 2 : a) Hãy tính : 1,(4) + 3,(7) = 5,22……1 ≈ 5,(2)	1,(4) + 3,(7) = 5,22……1 ≈ 5,(2) (Elève *L2T1-41*)

-Un cas de ENS :

Câu hỏi 2 : a) Hãy tính : 1,(4) + 3,(7) = … ≈ 5,(2)	1,(4) + 3,(7) = … ≈ 5,(2) (Etudiant *EL – 15*)

Les réponses 5,(2) ou 5,22… peuvent provenir de l'attribution à 5,(2) d'un statut de valeur approchée, c'est-à-dire d'une valeur très proche du « résultat ». Dans l'écriture « 5,22… », les pointillés "… " semblent donc signifier qu'il existe encore quelque chose après « beaucoup » de chiffres 2. La présence du signe ≈ et les écritures « 1,(4) + 3,(7) = 5,22……1 ≈ 5,(2) » ou « 1,(4) + 3,(7) = 5,(2) ayant 1 à la fin » sont pour nous des traces de ces conceptions..

Autrement dit, le calcul « 1,(4) + 3,(7) = ? » contient potentiellement une problématique d'« approximation *x* » de la notion de limite : les résultats successifs des calculs « $1,\underbrace{4...4}_{n}$ + $3,\underbrace{7...7}_{n}$ » dans chaque D_n (trouvés dans des brouillons) montre une succession de nombres qui produisent 5,(2).

La réponse 5,(2) d'une l'élève de la classe 12 illustre notre interprétation.

Câu hỏi 2 : a) Hãy tính : 1,(4) + 3,(7) = 5,(2)	Brouillon 1,4444… + 3,7777… 5,2222…	2a) 1,(4) + 3,(7) = 5,(2) (Elève *L2T3-06*)	Brouillon 1,4444… + 3,7777… 5,2222…

Pourquoi est-il si difficile de produire une réponse correcte au calcul « 1 - 0,(9) = ? » (2c) sans calcul de limite ?

Examinons le cas de deux élèves de classe 12.

- Cas de l'élève *L2T3 – 06* (classe 12) :

Cet élève a répondu « 1,(4) + 3,(7) = 5,(2) » dans le calcul 2a (cf. extrait supra).

Il refuse 0 dans le calcul « 1 - 0,(9) = ? » (2c). Il explique pourquoi.

Il conclut finalement : 0,000 ….. 1 comme résultat du calcul « 1 – 0,(9) ».

c) Hãy tính : 1 – 0,(9) = … Nếu em không thể trả lời, hãy giải thích tại sao : kết quả này sẽ dần về 0, nên không ghi được kết quả. Sửa lại : kết quả là một số thập phân vô hạn có tận cùng bằng 1 : 0, 000 … 1
c) Calculer : 1 – 0,(9) = … Si vous ne pouvez pas répondre, expliquez pourquoi : Ce résultat s'approche de 0, est très petit, on ne peut pas écrire ce résultat. Correction : ce résultat est un nombre décimal illimité ayant 1 à la fin 0,000 ….1 (L2T3 – 06)

- Cas de l'élève *L2T1-04* (classe 12) :

L'élève répond « 1,(4) + 3,(7) = $\frac{47}{9}$ » (2a) par un calcul dans **Q**.

Il refuse 0 comme résultat du calcul « 1 – 0,(9) = ?» (2c) par un calcul analogue dans **Q**. *Il ne donne pas de résultat* « Car lim0,(9) = 1. Mais, en réalité, 0,(9) ≠ 1 ».

c) Hãy tính : 1 – 0,(9) = … Nếu em không thể trả lời, hãy giải thích tại sao : ……Vì lim 0,(9) = 1 nhưng thật ra 0,(9) ≠ 1.	c) Calculer : 1 – 0,(9) = … Si vous ne pouvez pas répondre, expliquez pourquoi : Car lim0,(9) = 1. Mais, en réalité, 0,(9) ≠ 1.

Cela montre que la seule problématique d'« approximation x » (« lim0(9) = 1 » plus n augmente, plus $0,\underbrace{9...9}_{n}$ s'approche de 1) ne suffit pas pour dépasser l'ordre discret. Il faut ici une problématique d'« approximation $f(x)$ » : la distance $|1-0,\underbrace{9...9}_{n}|$ devient infiniment petit quand n tend vers l'infini.

III.4. Quelles explications pour la réponse « sans calcul » à « 1 - 0,(9) = ? » ?

a. Dans EMS

81 élèves (tableau 12) ne donnent pas de résultat au calcul 2c « 1 – 0,(9) = ? ».

Parmi eux 68 élèves expliquent « pourquoi… ». Ces 68 explications sont toutes en relation avec l'obstacle épistémologique de l'infini.

• *Impossibilité du calcul hors d'un D_i*

39 élèves (sur 68, soit 57%) donne une explication du type :

> Il est impossible de calculer parce que 0,(9) est un nombre illimité, on ne sait pas donc combien de chiffres 9. (Elève *L2S6-39*) :

Non dépassement de la contradiction « 1 – 0,(9) = 0 » et « 0,(9) < 1 ».

26 élèves (sur 68, soit 35%) explique :

> Il est impossible de représenter ce nombre. Le résultat est un nombre illimité mais non périodique. (Elève *L2S6-26*)

Parmi ces 26 :

- 15 élèves n'acceptent que l'écriture périodique. Dans le calcul 2a « 1,(4) + 3,(7) = ? », ils proposent l'EDI « 5,(2) » ou « 5,22… »
- 11 élèves donnent l'EDI *infini – fini* « 5,(2)1 » ou « 5,22…21 » dans le calcul « 1,(4) + 3,(7) = ? ». Ils refusent donc l'écriture 0,(0)1 pour « 1 – 0,(9) = ? ».

Ces 26 élèves refusent de conclure que « 1 – 0,(9) = 0 » car pour eux « 0,(9) < 1 ».

Refus du statut de limite à l'écriture 0,(9)

Les 3 autres explications (sur 68) évoquent les notions de limite et de suite numérique convergente.

- « lim0,(9) = 1. Mais, dans la réalité, 0,(9) ≠ 1 ». (Elève *L2T1-04*)
- « Il est impossible de le calculer. Car 0,(9) = 0,9999… s'accroît et tend vers 1 et la soustraction 1 – 0,(9) décroît et tend vers 0 ». (Elève *L2T3-17*)
- « Parce que la soustraction 1 – 0,9 est $\frac{1}{1000....}$ ». (Elève *L2S1-19*)

b. Dans ENS

35 étudiants (tableau 12) ne donnent pas de résultat au calcul 2c « 1 – 0,(9) = ? ».

26 élèves (sur 35) donnent des explications. On trouve les mêmes types d'explications que dans EMS, toutes liées à l'obstacle de l'infini et avec la même hiérarchie.

• *Impossibilité du calcul hors d'un D_i* : 12 explications

• *Non dépassement de la contradiction « 1 – 0,(9) = 0 » et « 0,(9) < 1 » :* 10 explications

• *Refus du statut de limite à l'écriture 0,(9)* : 4 explications

Nous les donnons ci-après.

-« Il y a un lien avec la notion de limite » (Etudiant *EC-25*) : 1 explication.

-« D'après le calcul posé, on a $u_n = \frac{10^n - 1}{10^n}$. Pour tout *n*, la soustraction 1–0,9 est donc 10^{-n} » (par exemple : étudiant *EL-15*): 3 explications.

VI. Question 3 : Rapport institutionnel au nombre irrationnel

Y a-t-il un nombre irrationnel entre 42,498 98… et 42,5 ?
☐ Oui et c'est …
☐ Oui, mais je ne sais pas lequel.
☐ Non. Parce que
…….

Rappelons que pour l'EMS du Viêt-nam un nombre irrationnel est défini par une EDINP, mais sa praxis est très pauvre.

Le tableau présente les effectifs selon la réponse « Oui » ou « Non ». Pour cela nous réunissons en une seule colonne les réponses « Oui et c'est… » et « Oui, mais je ne sais pas lequel … ».

Réponse / Classe	*Oui*	*Non …*	Pas de réponse	Total
10	138 (79 %)	26 (15 %)	10 (6 %)	174
12	75 (84 %)	13 (15 %)	1 (1 %)	89
Total EMS	213 (81 %)	39 (15 %)	11 (4 %)	263
3e ENS.collège	45 (87 %)	5 (10 %)	2 (4 %)	52
3e ENS.lycée	24 (92 %)	2 (8 %)	0	26
Total ENS	69 (88 %)	7 (9 %)	2 (3 %)	78

Tableau 17. Réponses « Oui » ou « Non »

Comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, la plupart des élèves (EMS) et des étudiants (ENS) répondent par « Oui » : 81 % (ENS) et 88 % (EMS).

Il y a une légère augmentation des réponses par « Oui » avec le niveau scolaire : 79 % (classe 10), 84 % (classe 12), 87 % (*ENS.collège*) et 92 % (*ENS.lycée*).

Examinons les réponses par « Oui ».

Nous codons les types de « nombres irrationnels » associés aux réponses « Oui et c'est…», selon deux groupes :

- « nombres irrationnels » prévus dans l'analyse *a priori*,
- « nombres irrationnels » non prévus dans l'analyse *a priori.*

• *« Nombres irrationnels » prévus dans l'analyse a priori*

- *EDIP9* : Réponse (fausse) par une EDIP9.
- *MG* : Réponse (juste) par la moyenne géométrique
- *EDINP* : Réponse (juste) par une EDINP.

• *« Nombre irrationnel » non prévu dans l'analyse a priori*

- *Dn* : Réponse (fausse) par un nombre décimal.
- *EDI* : Réponse (fausse) par une EDI avec pointillés « … » mais dont la non–périodicité n'est pas explicitée, par exemple : « 42,49997…» ou « 42,49998… ».
- $\sqrt{n}$: Réponse (fausse) $m+\sqrt{n}$ où *m, n* sont des décimaux positifs.
- Réponse par *42,4(98)*

Dans le tableau 10, nous récapitulons les réponses « Oui » des élèves et étudiants.

Réponse / Classe	*Oui et c'est …*							*Oui mais…*	Total
	Dans analyse *a priori*			Hors analyse *a priori*					
	EDIP9	EDINP	MG	Dn	42,4(98)	EDI	$\sqrt{n}$		
10 (Seconde)	65 47 %	0	0	21 15 %	1 1 %	0	3 2 %	48 35 %	138
12 (Terminale)	35 47 %	0	0	5 7 %	2 3 %	0	1 1 %	32 42 %	75
Total EMS	100 47 %	0	0	26 12 %	3 1 %	0	4 2 %	80 38 %	213
3e ENS.collège	14	0	0	4	2	4	2	19	45
3e ENS.lycée	7	0	0	0	1	1	1	14	24
Total ENS	21 30 %	0 0	0 0	4 6 %	3 4 %	5	3 4 %	33 48 %	69

Tableau 18. Rapport institutionnel à l'irrationalité

IV.1. Analyse des réponses « Oui et c'est … »

a. L'EDIP9 est un nombre irrationnel (tableau 18)

- Dans EMS

La prépondérance des réponses par EDIP9 (47 %) affirme l'existence du rapport personnel à l'EDIP9 induit par le rapport institutionnel aux EDI du Collège : une EDIP9 est un nombre irrationnel et l'identification de 0,(9) au nombre 1 est donc impossible (hypothèse H1).

Les 100 réponses par EDIP9 sauf 3 (qui proviennent du calcul de la moyenne arithmétique) utilisent l'ordre prolongé de celui dans **D** pour produire une EDIP9 entre 42,498 98… et 42,5.

- Dans ENS

Le nombre des étudiants (ENS) qui pensent encore que l'EDIP9 est un nombre irrationnel est considérable : 30 %.

b. Absence des réponses justes par EDINP ou MG (tableau 18)

- Aucune réponse par une EDINP

Cela valide l'hypothèse H4 :

> L'écriture décimale illimitée non périodique assure, dans le topos de l'enseignant, la définition formelle des nombres irrationnels. Par contre, la raison d'être de l'EDINP n'existe pas dans le topos de l'élève.

De plus, le rapport des futurs enseignants à l'EDINP n'évolue pas et reste identique à celui de EMS.

- Aucune construction de nombre irrationnel par la moyenne géométrique

De plus les réponses (fausses) par le nombre « $m + \sqrt{n}$ » relevant du lien entre l'irrationalité et la notion de racine carrée sont quasi nulle malgré l'existence institutionnelle de l'exemple emblématique de l'irrationalité qu'est $\sqrt{2}$: 2 % pour l'EMS et 4% pour l'ENS. On peut penser que la décimalité des nombres de l'encadrement rendent difficile cette construction.

c. L'écriture décimale est non opératoire pour produire un irrationnel (tableau 18)

L'absence de la réponse en EDINP affirme la déconnexion entre nombre réel et écriture décimale du nombre. La définition d'un irrationnel comme une EDINP au Collège ne fournit pas d'outil pour la construction d'un irrationnel.

Le caractère non opératoire de l'écriture décimale explique les réponses fausses comme un nombre irrationnel est

- un nombre décimal (par exemple : 42,49997), c'est-à-dire une EDL (12 % des réponses EMS et 6 % des réponses ENS)
- 42,4(98), c'est-à-dire une EDIP **(1 %** des réponses EMS et 4 % des réponses ENS)
- une EDI dont la non –périodicité n'est pas explicitée (par exemple : 42,49998…) (0 dans EMS et 7 % dans ENS)

12 % des élèves de EMS produisent dans cette situation un décimal comme 42,49997 ou (pour 3 seulement) un EDIP 42,4(98), et jamais une EDI alors que les étudiants de ENS se répartissent entre les trois réponses.

IV.2. Difficultés de la construction d'un irrationnel : réponse « Oui, mais je ne sais pas lequel » (tableau 18)

Dans EMS, 38 % des réponses sont « Oui, mais je ne sais pas lequel ». Cela confirme les difficultés de la construction d'un irrationnel, tâche jamais proposée dans EMS au Viêt-nam.

Dans ENS, la prépondérance des réponses par « Oui, mais je ne sais pas lequel » (48 %) montre que la construction des nombres irrationnels reste aussi absente dans les institutions des ENS concernées.

IV.3. Explications de la réponse « Non. Parce que… » (Tableau 17)

- Dans EMS

Sur 39 élèves (sur 263, soit 15%) affirmant « Non. Parce que … », il y a 18 explications. Deux types de difficultés apparaissent dans ces 18 explications : difficulté lié à la densité de **D** dans **R** et problématique d'« approximation *x* » de la notion de limite.

*• Difficulté lié à la densité de **D** dans **R** (2 explications)*

Deux explications sont du type : « Il n'y a pas d'irrationnel entre ces nombres décimaux ».

• Difficulté lié à la problématique d'« approximation x » de la notion de limite (16 explications)

- « 42,498 98… devient très proche de 42,5 » : 9 explications.
- « 42,498 98… est illimité périodique, il est donc impossible de déterminer un nombre après lui et inférieur à 42,5 » : 3 explications.
- « 42,498 98… est le plus proche de 42,5 » : 4 explications

La plupart de ces explications (16 sur 18) repose donc sur le fait que des valeurs successives d'une EDIP « 42,498 98… » (42,498 ; 42,49898 ; 42,4989898 ; …) deviennent de plus en plus proche de 42,5.

Une problématique d'« approximation *x* » de la limite dans ces 16 explications amène au fait que « 42,498 98… est le nombre le plus proche de 42,5 ».

b. Dans ENS

Il y a encore 7 étudiants (sur 78, soit 9 %) répondant par « Non ». Mais un seul étudiant (codé *EC-16*) parmi ces 7 donne une explication par une majoration

> L'erreur entre les deux nombres est inférieure à 0,1.

sans envisager la minoration $|42{,}5 - 42{,}498\,98\ldots| > 0{,}001$.

Chapitre B2

Troisième partie. Conclusion de l'expérimentation

Résumons maintenant les résultats principaux de l'expérimentation.

I. Le rapport institutionnel aux EDI dans EMS et ENS est celui du Collège

Les résultats de l'expérimentation et leur analyse nous permettent de conclure que le rapport institutionnel à la décimalisation des nombres réels (non décimaux) reste inchangé depuis le Collège : des résultats similaires se retrouvent dans EMS du Collège (élèves de classes 10, au début de l'année scolaire), EMS du Lycée (élèves des classes 12, après introduction de la notion de limite) et ENS (futurs enseignants, étudiants des 2 dernières années de ENS).

Ces résultats mettent en avant un problème de formation des enseignants d'autant plus cruciale que la noosphère préconise l'introduction d'un nouveau dispositif « activités » au lycée pour les nouveaux programmes. Soulignons de plus que la notion d'activité semble, dans le futur enseignement de l'analyse au Lycée, mise en relation avec l'« expérimentation numérique » et donc avec la décimalisation des nombres.

Pour qu'une vie des EDI existe au sein des organisations mathématiques autour de la notion de limite dans une EMS future, il semble nécessaire de modifier *le rapport de l'enseignant à l'ostensif « EDI » par la construction d'ingénierie de formation appropriée dans les écoles normales supérieures.*

Nous allons approfondir ce résultat global en examinant les résultats de l'expérimentation concernant les différents EDI comme EDIP9, EDIP et EDINP.

I.1. Rapport institutionnel à l'EDIP9 : prolongement de l'ordre discret de N à D_∞

L'EDIP9 « 0,999… » est, pour une très large majorité des élèves d'EMS et des futurs enseignants des ENS, un *nombre, inférieur strictement à 1 et le plus proche de 1* (ordre discret).

Ce « nombre » EDIP9 est de plus, pour la plupart des élèves d'EMS et des futurs enseignants d'ENS observés, *un nombre irrationnel*.

Ces deux résultats valident les deux hypothèses suivantes, formulées à l'issue de l'analyse institutionnelle :

- le prolongement de l'ordre discret de **N** à D_∞ (hypothèse H21),
- l'absence institutionnelle d'identification de 0,(9) au nombre 1 au Collège et, surtout au Lycée au sein de la notion de limite (une partie de l'hypothèse H1).

Le fait de retrouver des résultats similaires au niveau des réponses des futurs enseignants (ENS) laisse supposer que la décimalisation des nombres réels n'est pas objet d'enseignement.

I.2. Rapport institutionnel à l'EDIP

a. Règles du contrat didactique à propos de la notion de période de l'EDIP

Dans la division euclidienne généralisée de deux entiers (technique institutionnelle de la décimalisation d'un nombre rationnel), la majorité des élèves (EMS) et futurs enseignants (ENS) déduisent la périodicité (pour produire une EDIP) de *la répétition de la même suite de nombres 2, 3 ou 4 fois dans le quotient décimal approché.* Les propriétés des restes successifs de la division ne sont jamais prises en compte dans cette technique.

Presque tous les élèves d'EMS et futurs enseignants des ENS observés écrivent « 2,8383… = 2,(83) ».

L'hypothèse H3 sur les règles du contrat didactique à propos de la notion de période de l'EDIP est donc validée.

b. Prolongement des opérations de D à D_∞

La majorité des sujets observés (EMS et ENS) prolonge l'addition de **D** aux calculs dans D_∞ : « 1,(4) + 3,(7) = ? » et « 1 – 0,(9) = ? ».

L'hypothèse H22 sur le prolongement des opérations de **D** à D_∞ est donc validée.

Ce prolongement se traduit par une tendance à assimiler une EDIP à un nombre décimal.

Dans cette assimilation, l'écriture *infini –fini* « *n*,(*p*)*m* », indice de l'obstacle de l'infini, est prépondérante après enseignement des notions de suite et de limite (classe12 et ENS) alors qu'au Collège (classe 10) les réponses se répartissent entre les différents types de réponses erronées.

Une EDIP « *n*,(*p*) » (comme 21,(3)) peut donc porter plusieurs significations :

- un *couple d'entiers (n, p)* (dans EMS et ENS)
- un *nombre décimal n,p* de D_1 (dans EMS et ENS)
- un *nombre décimal n,p…p* (*p* chiffes *p*) de D_p (dans EMS)

Ces différentes significations résultent de l'absence de relation entre nombre réel et écriture décimale du nombre réel. (Cf. Chapitre B1).

I.3. Rapport institutionnel à l'irrationalité

Pour tous les sujets observés (EMS et ENS), la définition institutionnelle (Collège) de la notion de nombre irrationnel comme EDINP est *vide de sens*.

C'est une conséquence de l'hypothèse H4 sur l'absence de *praxis* de l'organisation mathématique autour de l'EDINP dans EMS.

II. Absence de la re-interprétation d'une EDI par la notion de limite mais présence potentielle du statut de suite numérique pour une EDI

Aucun des élèves des classes 12 (EMS) et futurs enseignants sauf 1 (ENS) ne donne le *statut de « limite »* à une EDI. Cela valide une partie de l'hypothèse H1 : absence de la re-interprétation d'une EDI par la notion de limite.

Le questionnaire proposé induit potentiellement une *problématique d'« approximation x »* de la notion de limite dans le travail nécessitant un prolongement de l'ordre et des opérations dans **D** à D_∞ (addition de deux EDIP et intercalation entre deux EDI).

L'interprétation d'une EDI comme une «succession de valeurs décimales » approchant cet EDI apparaît fréquemment dans les classes observées (classe 12 de EMS et dans une moindre mesure dans ENS). L'absence du statut de suite numérique d'une EDI (hypothèse H1) n'est donc que partiellement vraie.

Ce dernier résultat montre que, malgré la fragilité de la décimalisation des réels an classe 12, l'interprétation possible d'une EDI comme suite peut permettre d'envisager de faire vivre une ingénierie didactique organisant *une nouvelle rencontre* avec la notion de limite *via* l'approximation décimale.

L'étude des réponses (classe 12 et ENS) dans lesquelles le statut de « succession des valeurs décimales » est attribué à une EDI montre aussi que *l'ordre discret* et *l'absence d'une problématique d'« approximation f(x) »* de la notion de limite s'oppose :

- à l'attribution d'un statut numérique à l'ensemble des EDI (ordre et opérations),
- à l'identification du type « 0,999… = 1 ».

Les résultats de cette enquête nous conduit à poser la question suivante.

Dans les conditions actuelles de l'enseignement des mathématiques au Viêt-nam (et de la formation des enseignants de mathématiques), est-il possible d'organiser dialectiquement l'enseignement des deux passages fondamentaux pour l'analyse que sont :

- *celui de l'ordre discret dans* $\mathbf{N}$ *à l'ordre dense (non discret) dans* $\mathbf{D}$ *et* D_∞,
- *celui de la problématique d'« approximation x » à la problématique d'« approximation f(x) » de la notion de limite* ?

Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question nous avons conçu, réalisé (en classe 12) et analysé une ingénierie didactique que nous présentons dans la partie C.

Partie C

Conception, réalisation et analyse
de l'ingénierie didactique d'introduction
à la topologie métrique de la notion de limite (EMS)

Chapitre C0
Un problème fondamental de l'approximation
Choix macro- didactiques pour l'ingénierie didactique

L'ingénierie didactique a lieu *après* un enseignement de la notion de limite en classe 11 selon une organisation algébrique de la notion de limite OM_1 (cf. Chapitres A1 et B1).

Elle vise à organiser *une nouvelle rencontre* avec la notion de limite via l'approximation décimale pour enseigner des éléments de l'organisation topologique de la notion de limite OM_2 (cf. Chapitres A1, A2 et A3). Elle cherche donc à répondre aux questions suivantes :

Est-il possible de faire vivre un point de vue topologique de la notion de limite en relation avec la décimalisation des nombres réels (construction de **R** à partir de **D**) ?
Quelles difficultés ou quels obstacles s'opposent à l'émergence de ce point de vue ?

Nous présentons dans ce chapitre :
- quelques éléments de la transposition didactique de la topologie de **R**,
- un problème fondamental d'approximation caractérisant un point de vue topologique sur la notion de limite et les choix macro-didactiques découlant de ce problème fondamental.

I. Quelques éléments de transposition didactique

I.1. Le point de vue topologique sur la notion de limite dans des traités

Bien que Cauchy (1821) ait perfectionné la notion de limite en précisant ce que signifie « une variable x tend vers une valeur a » et en donnant la définition de limite d'une série (comme nous l'avons analysé dans l'étude épistémologique), il faut attendre Weierstrass (vers 1872) pour une formulation de la notion de limite de fonction en termes ε - η :

> Si, étant donné un nombre positif quelconque ε, il existe un η_0 tel que pour $0 < \eta < \eta_0$, la différence $f(x_0 \pm \eta) - L$ est le plus petite en valeur absolue que ε alors L est la limite de $f(x)$ pour $x = x_0$ (Weierstrass[1])

La définition de Weierstrass s'énonce pour le cas où x_0 et L sont finis. La citation supra ne nous permet pas de savoir ce que dit Weierstrass de x_0 par rapport à D_f, domaine de définition de f.

De nos jours[2], la notion de droite numérique achevée $\overline{\boldsymbol{R}}$ permet de formuler une définition des différents « cas » de limite.

> Soit A une partie non vide de $\boldsymbol{R}$ et $a \in \overline{\boldsymbol{R}}$ un point adhérent à A dans $\overline{\boldsymbol{R}}$. Un élément $l \in \overline{\boldsymbol{R}}$ est dit **limite en *a*** d'une fonction $f : A \to \boldsymbol{R}$ si et seulement si, pour tout voisinage W de l dans $\overline{\boldsymbol{R}}$, il existe un voisinage V de a dans $\overline{\boldsymbol{R}}$ tel que $f(V \cap A) \subset W$. (Arnaudiès – Fraysse 1989, p. 133)

L'hypothèse « *a est un point adhérent de A* » est nécessaire à la notion de limite parce qu'elle assure que $f(V \cap A) \neq \emptyset$ pour tout voisinage V de a.

Cette définition couvre 3 possibilités pour les valeurs de a et l : fini, $+\infty$ et $-\infty$. Elle désigne donc 9 cas différents de limite (en excluant les cas de la limite à droite ou à

---

[1] Sierpinska (1985, p. 50)
[2] Notre référence est l'ouvrage d'Arnaudiès – Fraysse (1989).

gauche) : $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ où x_0 et y_0 sont des réels.

De plus, cette définition inclut aussi la notion de limite de suite numérique : si A = **N** (ensemble des nombres naturels), $a = +\infty$ est un point adhérent à **N** dans $\overline{\boldsymbol{R}}$.

Dans la topologie usuelle[3] de **R**, on sait que toute partie ouverte est l'union (finie ou infinie) d'intervalles ouverts. L'ensemble des intervalles ouverts (ou fermés) de **R** est donc une base[4] de la topologie de **R**. On peut donc reformuler la définition citée précédemment en remplaçant le terme de « voisinage » par « intervalle ouvert » (ou « intervalle fermé »).

En nous bornant à considérer le cas de a et l finis ($a, l \in$ **R**), la topologie métrique de **R** s'appuyant sur la distance usuelle $d = |x - y|$ ($x, y \in$ **R**) permet de revenir sur la définition de Weierstrass :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ telle que ($\forall x \in$ **A** et $|x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

ou dans le langage de la distance :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ telle que ($\forall x \in$ **A** et $d(x, a) < \delta) \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon$

De point de vue topologique, ces définitions ne s'énoncent pas sur des voisinages quelconques mais sur des boules[5] ouvertes centrées sur a et l : B(a, δ) et B(l, ε). On peut énoncer la définition équivalente :

> Pour toute boule centrée sur l et de rayon ε quelconque, il existe une boule centrée sur a et de rayon δ telle que $f[A \cap B(a, \delta)] \subset B(l, \varepsilon)$.

La définition sur les boules ouvertes (ou fermées) est suffisante puisque l'ensemble des boules ouvertes (ou fermées) est une base de la topologie métrique usuelle de **R**.

D'ailleurs, soit $a \in$ **R** ; pour toute suite positive (r_n) tendant vers 0, la suite des boules $\{B(a, r_n)\}_{n \in N}$ est une base de voisinages de a. Il suffit donc d'une définition de la limite sur la suite des boules de rayon une suite (r_n) tendant vers 0 : par exemple, $r_n = \frac{1}{n}$ ou $r_n = 10^{-n}$.

En choisissant $r_n = 10^{-n}$, on peut énoncer une définition de la notion de limite comme suit :

$\forall 10^{-n}$ ($n \in$ N) $\exists 10^{-p}$ ($p \in$ N) telle que ($\forall x \in$ **A** et $d(x, a) < 10^{-p}) \Rightarrow d(f(x), l) < 10^{-n}$

A partir de la définition de la limite d'une fonction f en un point a fini, d'autres problèmes peuvent se poser selon la nature de l'ensemble de départ **A** de f et du rapport entre a et $\boldsymbol{A}$. Par exemple : la fonction f est-elle continue en a ? Si oui, la fonction f est –elle dérivable en a ? Sinon, peut-on prolonger f en a par continuité ?

Voici quelques résultats usuels : soit a un point d'accumulation[6] de $\boldsymbol{A}$.

---

[3] L'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbf{R}}$ définit ce qu'on appelle une **structure d'espace topologique sur R** (dont $\partial_{\mathbf{R}}$ est l'*ensemble des parties ouvertes*) ou en abrégé : $\mathcal{O}_{\mathbf{R}}$ définit **une topologie** sur **R**. Ce n'est pas la seule topologie possible sur **R,** mais c'est la plus naturelle : on l'appelle **la topologie usuelle** de **R**. […] (Ibid., p. 91)

[4] Un ensemble $\mathcal{B}$ de parties ouvertes de **R** est appelé **une base** de la topologie (usuelle) de la topologie (usuelle) de **R** ssi tout ouvert $\omega \in \mathcal{O}_{\mathbf{R}}$ peut être écrit, lorsqu'il est non vide, comme union d'éléments de $\mathcal{B}$. (Ibid., p. 91)

[5] Soient (E, d) un espace métrique. Par définition, si $a \in E$ et $r \in \mathbf{R}_+$, l'ensemble $\{x \in E \setminus d(a, x) < r\}$ s'appelle boule ouverte de centre a et de rayon r. Nous la noterons $B_d(a, r)$ ou $B(a,r)$ pour abréger.
De même pour la définition de la boule fermée par l'ensemble $\{x \in E \setminus d(a, x) \leq r\}$.(Ibid., p. 521)

• Si $a \in \boldsymbol{A}$: f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

• Si a $\notin \boldsymbol{A}$: la fonction $g : A \cup \{a\} \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ $\forall x \in A$ et $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ s'appelle la prolongement par continuité de f en a.

En résumé

• Comme nous l'avons déjà vu, dans les traités, la topologie de **R** pour la notion de limite se particularise de plus en plus en même temps que la distance, selon le schéma suivant.

Voisinage → Intervalle (voisinage particulier) → Boule (intervalle symétrique) → Boule de rayon $1/n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) → Boule de rayon 10^{-n} ($n \in \mathbf{N}$)

Nous résumons les définitions équivalentes de la notion de limite selon cette particularisation de la topologie de **R** dans le tableau 1.

Espace **R**	Définitions de la notion de limite s'appuyant sur
Topologie usuelle	notion de voisinage ou notion d'intervalle
Topologie métrique	notion de boule (ou notion de distance) en termes (ε, δ)
Base de la topologie métrique	suite de boules ayant comme rayons la suite (r_n) tendant vers 0. Par exemple : en termes $(1/n ; 1/p)$ ou $(10^{-n}, 10^{-p})$

Tableau 1. Définitions équivalentes de la notion de limite

La base de la topologie métrique selon la suite de boules ayant comme rayons la suite $(10^{-n})_{n \in \mathbf{N}}$ montre que la distance décimale est suffisante à la définition de la notion de limite. Ce fait est un des résultats de la propriété : **D** est *partout dense*[7] dans **R**, autrement dit l'ensemble des points adhérents de **D** est **R**.

Chaque nombre réel est donc un point adhérent de l'ensemble **D** : la construction de la notion de limite d'une suite décimale participe à la construction de **R** à partir de **D**.

• Le symbole $\lim_{x \to a} f(x) = l$ de la fonction $f : \boldsymbol{A}$ ($\subset \mathbf{R}$)$\to \mathbf{R}$ correspond aux différents cas de la limite selon le triplet ($\boldsymbol{A}$, a, l). Nous nous bornons à citer les cas usuels :

[6] On dit que a est point d'accumulation de **A** dans T [un espace topologique] ssi tout voisinage de **A** rencontre $\mathbf{A} \backslash \{a\}$. (Ibid., p. 540). Dans **R**, cela veut dire qu'il existe une suite numérique (r_n) de **A** et $(r_n) \neq (a)$ tendant vers a.
Si la partie **A** est dense dans **R,** chaque point adhérent de **A** est aussi son point d'accumulation.

[7] Soit G un groupe Archimédien. Une partie E de G est dite **partout dense** dans G ssi pour tous x et y dans G tels que $x < y$, on peut trouver $z \in E$ tel que $x < z < y$. (Ibid. 15)
Soit $\mathcal{D}$ une partie de **R** *partout dense dans* **R**. L'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ des intervalles ouverts dont toute extrémité appartient à $\mathcal{D}$ est une base d'ouverts de **R**. (Ibid., p. 91)

- Pour le cas $A = \mathbf{N}$ et $a = +\infty$: notion de limite de suite numérique
  - $l = +\infty$ ou $l = -\infty$: suite divergente
  - l fini : suite convergente

- Pour le cas de A = union finie des intervalles ouverts disjoints $\bigcup_{i=1}^{n}]b_i ; c_i[$ (tel que $]b_i ; c_i[\cap]b_j ; c_j[= \varnothing \ \forall j \neq j$) : notion de limite de fonction où a est un point adhérent de A
  - ➢ $a \in A \Rightarrow a \in]b_i ; c_i[$
    - $l = +\infty$ ou $l = -\infty$: fonction tendant vers l'infini
    - l finis : limite finie de fonction
      - $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$: notion de continuité
      - $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$: notion de discontinuité
  - ➢ $a \notin A \Rightarrow a = b_i$ ou $a = c_i$, il suffit de considérer les deux cas suivants :

    $A =]b, a[\cup]a ; c[$
    - $l = +\infty$ ou $l = -\infty$: fonction tendant vers l'infini (positif ou négative)
    - l finis : limite finie de la fonction qui discontinue, mais prolongeable en continuité en a

    $A =]a ; b[$ ou $A =]c ; a[$ où a fini : notion de limite à gauche et à droite en point a

    $a = +\infty$ ou $a = -\infty$: notion de limite à l'infini (positif ou négatif)

Tableau 2. Cas usuels correspondant à $\lim_{x \to a} f(x) = l$

I.2. Présence du point de vue topologique dans les manuels de l'EMS en France et au Vietnam (pour le cas *a* et *l* finis)

La transposition didactique de la notion de limite dans l'EMS en France et au Viêt-nam, produit autant de définitions que de cas enseignés.

Nous nous intéresserons ici aux définitions présentes dans les manuels secondaires pour le cas a et l finis.

a. Manuels français

Depuis les années 1986, les définitions en termes (ε, δ) sont hors programme. Nous citons donc certaines définitions issues des manuels de 1970 à 1985.

- La définition du manuel de Première (CDE) de la collection Queysanne-Revuz (programme 1970) est proche de celle de la sphère savante.

> Une fonction f définie sur un intervalle pointé de centre x_0 admet la **limite** l au point x_0 si et seulement si, quel que soit l'intervalle J de centre l, il existe un intervalle pointé I' de centre x_0 tel que f(I') ⊂ J. (p. 63)

Quelques lignes au-dessus, les rédacteurs expliquent le terme d'« *intervalle pointé* ».

> La fonction f est définie sur un intervalle de centre x_0, *sauf peut-être en* x_0, donc sur un *intervalle pointé* de centre x_0. (p. 62)

La formulation (ε, δ) figure aussi dans ce manuel.

> On peut également dire f admet l pour limite au point x_0 si et seulement si étant donné $\alpha > 0$ on peut trouver $\beta > 0$ tel que, quel que soit x réel on ait $0 < | x - x_0| < \beta \Rightarrow |f(x) - l | < \alpha$. (p. 63)

La notion d'intervalle de centre x_0, $]x_0 - d ; x_0 + d[$, n'est autre que celle de boule ouverte.

- Le manuel de Première (S.E) de la collection Dimathème (1982) présente une définition en termes $(10^{-n}, 10^{-p})$.

Soit E une partie non vide de R telle que E$\cup\{x_0\}$ soit un intervalle. Une application f de E vers R admet une limite nulle en x_0 si :
$\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}$ tel que : [$x \in$ E et $|x - x_0| < 10^{-p}$] $\Rightarrow$ [$|f(x)| < 10^{-n}$]
Que l'on peut écrire aussi :
$\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}$ tel que : [$x \in$ E et $x_0 - 10^{-p} < x < x_0 + 10^{-p}$] $\Rightarrow$ [$-10^{-n} < f(x) < 10^{-n}$] (p. 191)

La définition en termes (ε, δ) s'énonce comme une « formulation équivalente » sans démonstration :

b) **Formulation équivalente**
f admet une limite nulle en x_0 si :
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \alpha > 0$ tel que : [$x \in$ E et $|x - x_0| < \alpha$] $\Rightarrow$ [$|f(x)| < \varepsilon$] (p. 192)

Ce manuel privilégie la définition en termes (10^{-n},10^{-p}), c'est-à-dire introduit la suite des boules ouvertes ayant comme rayons la suite $(r_n = 10^{-n})_{n\in\mathbf{N}}$.

Résumé

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$	Topologie de **R** pour la notion de limite de fonction
A =]b ; c[et $a \in$ **A** **A** =]b ; c[\{a} $\Rightarrow$ a $\notin$ **A**	Notion d'intervalle pointé Distance (ε, δ) Boules ouvertes de rayons (10^{-n} ; 10^{-p})

Tableau 3. Topologie de **R** pour la notion de limite de fonction dans les manuels français

b. Manuels vietnamiens

• *Manuels du programme « réforme de l'éducation » (1990 -1999)*

Durant cette période, rappelons que trois manuels sont présents.

- Le manuel *Algèbre et Analyse 11* du groupe des rédacteurs Tran Van Hao – Phan Truong Dan (1998) :

Le nombre b s'appelle limite de la fonction $f(x)$ quand x tend vers a si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage δ du point a tel que, pour tout $x \neq a$ de ce voisinage, on ait $|f(x) - b| < \varepsilon$. (p. 156)

On présente donc une définition de la limite de fonction dans laquelle sont imbriquées les notions de voisinage et de distance en termes (ε, δ).

La notion de « voisinage δ du point a » est introduite juste avant la définition de limite.

Soit un nombre réel a et un nombre δ positif. L'intervalle (a - δ ; a + δ) de l'axe numérique (figure 4.1) s'appelle un voisinage du point a (on dit aussi voisinage δ du point a)

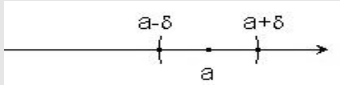


Figure 4.1

A partir de cette définition, on voit que le point x appartient au voisinage δ du point a si et seulement si $a - \delta < x < a + \delta$ ou $|x - a| < \delta$ (p. 156)

Ce voisinage est donc la boule ouverte centrée en a et de rayon δ.

Dans les deux autres manuels, on lit :

- manuel *Algèbre et Analyse 11* du groupe des rédacteurs Ngo Thuc Lanh – Vu Tuan – Ngo Xuan Son (1996) :

> **On dit que la fonction y = *f*(*x*) tend vers *L* (ou admet la limite *L*) quand *x* tend vers *a*** si, quel que soit un nombre ε positif (aussi petit que l'on veut), on peut trouver un nombre positif δ tel que lorsque $0 < |x - a| < \delta$ alors $|f(x) - L| < \varepsilon$
>
> ($0 < |x - a|$ veut dire que $x \neq a$)
>
> […]
>
> On suppose $x \neq a$ parce qu'on ne s'intéresse qu'au « comportement » de $f(x)$ quand x tend vers a, mais pas au comportement de $f(x)$ quand $x = a$. (p. 155)

- manuel *Algèbre et Analyse 11* du groupe des rédacteurs Phan Duc Chinh – Ngo Huu Dung (1998) :

> On dit que la fonction $y = f(x)$ admet la limite L quand $x \to x_0$, noté $\lim_{x->x_0} f(x) = L$, si pour toutes suites (x_n ; n = 1, 2, 3 …), les valeurs x_n appartenant au domaine de définition de la fonction, la suite ($f(x_n)$; n = 1, 2, …) tend vers L. Autrement dit $\lim_{x_n->x_0} f(x_n) = L$ ($x_n \in$ ***X***, domaine de définition de la fonction) (p. 112)

*Quelle est la nature de l'ensemble de départ **A** de la fonction f ? La relation entre le point a et l'ensemble **A** est-elle précisée ?*

Pour le troisième manuel l'ensemble de départ **A** de la fonction *f* est le domaine de définition de la fonction *f*.

Seul le premier manuel explique dans une remarque la relation entre *a* et un « voisinage de *a* ».

> Remarque : A partir de la définition de la limite de fonction $f(x)$ quand x tend vers a, la condition nécessaire de la limite est que la fonction $f(x)$ soit définie en tout point d'un voisinage quelconque de a, sauf au point a où la fonction peut être définie ou non (on a $x \neq a$ dans la définition). Cela permet de chercher, dans certain cas, la limite de fonction en des points où la fonction n'est pas définie. (Tran Van Hao – Phan Truong Dan 1998, p. 157)

• *Manuel en vigueur du programme « harmonisation et unification » (à partir de 2000)*

Durant cette période, il n'existe qu'un seul manuel. Ci-après la définition de la notion de limite donnée.

> Soit la fonction $f(x)$ définie sur un intervalle K, sauf peut-être en $a \in K$. On dit que la fonction $f(x)$ a pour limite L (ou tend vers L) lorsque x tend vers a, si pour toute suite numérique (x_n)($x_n \in K$, $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathrm{N}^*$) telle que si $\lim x_n = a$ alors $\lim f(x_n) = L$. (*Algèbre et Analyse 11*, p. 117)

On définit donc la notion de limite de fonction dans le « langage des suites numériques ». Il n'y a donc pas de trace de la topologie de **R** dans la définition de la notion de limite de fonction du manuel en vigueur : les traces de la topologie ne se trouvent que dans la notion de suite numérique définie en terme (ε, **N**).

Par rapport aux manuels du programme précédent, on précise que l'ensemble de départ est un intervalle K et que a peut appartenir ou non à K. La définition dans le « langage des suites numériques » assure mathématiquement que a est un point adhérent de K, sans que la notion d'adhérence soit présente explicitement.

En résumé

Période	$\lim_{x \to a} f(x) = l$	Topologie de **R** pour la notion de limite de fonction
1990-1999	**A** = $\mathbf{D}_f$ domaine de définition de f $a \in \mathbf{D}_f$ ou $a \notin \mathbf{D}_f$	Distances (ε, δ) Voisinage = boule (intervalle symétrique)
Depuis 2000	**A** = $]b\,;c[$ et $a \in$ **A** **A** = $]b\,;c[\backslash\{a\} \Rightarrow a \notin$ **A**	Traces : (ε, **N**) seulement pour la notion de limite de suite

Tableau 4. Topologie de **R** pour la notion de limite de fonction dans les manuels vietnamiens

Commentaire

On trouve, dans les définitions de la notion de limite de suite des manuels vietnamiens, des traces de la topologie de **R** : boules ayant comme rayons δ et ε (intervalles symétriques). Cependant, comme nous l'avons mis en évidence dans l'analyse institutionnelle, un intervalle est essentiellement un sous ensemble ordonné de **R** :

> dont la caractéristique essentielle est le couple de nombres ordonnés appelés bornes. Il n'a pas de structure topologique : la relation entre les bornes de l'intervalle et la notion de limite n'est pas étudiée. De plus, un intervalle ayant des bornes irrationnelles n'apparaît jamais dans l'institution. (Chapitre B1)

II. Un problème fondamental de l'approximation et choix macro didactiques

Quels sont les problèmes de l'approximation liés à la notion de limite ?

Examinant « le processus de la transposition didactique des calculs numériques en Trigonométrie » en France du traité de Bézout à celui de Bourbaki, Birebent (2001) met en avant la volonté des noosphériens, au milieu de 19e siècle, d'introduire, dans l'enseignement secondaire, des savoirs liés l'approximation numérique.

> Ainsi, en ce milieu du XIXe siècle, la nécessité de transposer dans l'enseignement des savoirs savants sur l'approximation numérique a été reconnue et elle a donné lieu à débats dans la Noosphère d'alors. Il s'agit d'élémentariser, c'est-à-dire de procéder à un découpage dans les pratiques de l'époque et à une injection de certains d'entre eux dans les curriculum. (Birebent 2001, p. 63)

Le découpage opéré par les noosphériens de cette époque dans les pratiques de calcul aboutit à formuler deux problèmes « élémentaires » de l'approximation, suivant ce sur quoi porte le contrôle de la précision du calcul approché.

> […] deux problèmes d'approximation distincts pour le calcul numérique : celui d'obtenir, à la fin d'un calcul, une précision fixée à l'avance et celui d'estimer la précision sur le résultat d'un calcul avec des valeurs approchées. (Ibid., p. 64)

Girard et Lentin (1964) énoncent comme suit ces deux problèmes dans leur manuel d'Arithmétique.

> On peut envisager, dans les questions d'approximation, deux problèmes principaux.
>
> 1°) Les erreurs commises sur les données étant bornées supérieurement par des nombres connus, on veut connaître une borne supérieure de l'erreur commise sur le résultat [*Problème 1*].

> 2°) On désire avoir un résultat avec une erreur qui ne dépasse pas une borne fixée à l'avance. On se propose d'évaluer les données avec une approximation suffisante pour qu'il en soit ainsi [*Problème 2*].
>
> Ces deux problèmes sont inverses. On saura les résoudre quand on aura étudié les erreurs commises dans les quatre opérations fondamentales sur les nombres approchés.
> (Girard et Lentin, p. 46)

Nous parlerons ici de problème fondamental plutôt qu'élémentaire en les considérant comme générateur de problèmes d'approximations particuliers.

Dans le cas où le calcul concerne une relation fonctionnelle $x \mapsto f(x)$, nous pouvons ré-relier chacun des deux problèmes fondamentaux à l'« approximation x » pour le problème 1 et à l'« approximation $f(x)$ » pour le problème 2.

Un problème fondamental d'approximation *f(x)*

En nous appuyant sur ce qui précède, nous énonçons le problème fondamental d'approximation *f(x)*, en mettant en évidence les variables permettant de générer les problèmes particuliers de notre ingénierie. Nous indiquons en gras ces variables.

« Calculer [**tous/ *n***] couples (x ; $f(x)$) tel que $\boldsymbol{f}(x) \in$ B**(*l*, ε)** ».

Nous avons ainsi placé le problème du calcul de limite dans une problématique d' « approximation $f(x)$ » dans la topologie de **R** dont une base de voisinage sont les boules B(l ; ε), $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$.

Les variables didactiques de ce problème concernent les conditions du calcul, la fonction, les nombres l, le voisinage de l et enfin le nombre de couples (x ; $f(x)$) demandé ([tous / n]).

Les choix macro didactiques, *c'est-à-dire les choix fixés pour l'ensemble de l'ingénierie*, concernent les conditions du calcul, la fonction et le nombre l. Nous allons présenter maintenant ces choix et les raisons de ces choix.

II.1. Conditions du calcul : présence de la calculatrice

La calculatrice CASIO fx-570MS est autorisée sans aucune limite sur les touches et les fonctions disponibles.

- La calculatrice est associée institutionnellement au calcul approché et affiche le plus souvent les nombres calculés sous leur forme décimale. Elle permet donc de poser le problème de la décimalisation des nombres.

- L'autorisation, sans aucune limite, des touches et des fonctions disponibles permet d'observer la cohabitation de la calculatrice et du travail algébrique dans l'EMS du Viêt-nam, puisque le calcul à la main n'est pas interdit.

II.2. Choix de la fonction *f*

Nous avons choisi la fonction f tel que $x \mapsto f(x) = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$ pour les raisons suivantes.

• Registre de la fonction *f*

La fonction *f* est présentée dans le registre algébrique (contre le registre graphique), conformément à l'usage dans l'EMS du Viêt-nam. Ce choix permet le calcul instrumenté aussi bien qu'à la main et de recourir à des critères de validation algébrique.

• Nature de *f*

La fonction *f* est rationnelle selon la classification de EMS, c'est-à-dire définie par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)$ et $v(x)$ sont des polynômes du premier ou du second degré. Le choix de *f* rationnelle s'est fait contre celui de fonctions irrationnelle / trigonométrique / logarithme / exponentielle) pour favoriser le travail algébrique nécessaire dans l'ingénierie,

Nous avons choisi $u(x)$ et $v(x)$ du second degré et factorisables en produit de polynôme du premier degré

- contre $u(x)$ ou $v(x)$ polynôme du degré $n > 3$ pour utiliser les outils algébriques présents dans l'institution : équation et inéquation du premier et second degré,
- contre $u(x)$ ou $v(x)$ est un polynôme du degré $n < 2$ pour ne pas dévoiler la forme « simplifiée » de $f(x)$.

Ce choix permet donc des transformations algébriques sur l'expression $f(x)$ institutionnellement familières : factorisation et simplification.

• Coefficients de l'expression algébrique *f*(*x*)

Les coefficients de l'expression algébrique « initiale » donnant *f* sont des nombres décimaux appartenant à D_i, $i = 0, 1, 2$.

- contre des coefficients tous entiers (par exemple : $f(x) = \frac{200x^2 + 10x - 21}{100x^2 + 70x - 30}$) pour masquer une factorisation évidente et donc empêcher la simplification ; provoquer l'usage de la calculatrice dans le calcul (approché), et de favoriser la décimalisation des nombres. Ce choix ne bloque pas le calcul exact.

- contre des coefficients dans D_i tels que $i > 2$ (par exemple : $f(x) = \frac{0{,}2x^2 + 0{,}01x - 0{,}021}{0{,}1x^2 + 0{,}07x - 0{,}03}$) pour pouvoir revenir aisément dans un domaine de validité algébrique. D'ailleurs, si l'index *i* (de D_i) est trop grand, le calcul avec l'expression $f(x)$ devient trop coûteux y compris avec la calculatrice, ce calcul pouvant dépasser la capacité de la calculatrice. Un tel choix aurait pour conséquence de complexifier le calcul approché et de bloquer le calcul exact.

• Continuité de la fonction *f*

Le domaine de définition de la fonction *f* est conformément à l'usage dans EMS confondu avec le domaine de continuité de la fonction, les nombres réels hors de ce domaine étant les points de discontinuité de la fonction. Ils sont, dans le respect du contrat institutionnel de EMS, en nombres finis.

La fonction *f* est discontinue en deux points –1 et 0,3. Elle est prolongeable par continuité en 0,3 et non prolongeable en -1.

$D_f = \mathbf{R} \backslash \{-1 ; 0{,}3\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0{,}3[\cup]0{,}3 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

L'image de tout intervalle par *f* est aussi un intervalle, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

> Soit A un intervalle de **R**, et *f* : A → **R** une fonction continue. Alors *f*(A) est un intervalle. (Arnaudiès – Fraysse 1989, p. 121).

L'exploration de la fonction continue sur son domaine de définition revient donc à l'exploration numérique de deux intervalles de **R**, départ et image . Or tout intervalle de **R** a la puissance du continu, c'est-à-dire un ordre non dénombrable, donc *dense* (*non discret*[8]). Dans l'exploration décimale des intervalles de définition (favorisée par le calcul instrumenté et le choix des coefficients de *f(x)*), ce choix permet donc de poser le problème de l'ordre *dense* de **D** puis de **R** comme construit implicitement par des suites décimales dans EMS.

• Monotonie de la fonction *f*

Le choix d'une fonction strictement monotone (contre non monotone) revient au choix d'une fonction injective qui, sur chacun des intervalles du domaine de définition, est bijective. La fonction *f* choisie est continue et strictement croissante.

> Si *I* est un intervalle non trivial de **R** et *f* : *I* → **R** une fonction **continue** et **strictement croissante**. Alors :
> (I) *J* = *f*(*I*) est un intervalle. Si *I* est compact, *J* l'est aussi.
> Si I = [*a* ; *b*[avec - ∞ < *a* < *b* ≤ + ∞
> $$J = [f(a), \lim_{x \to b, x<b} f(x)[\ ;$$
> Si *I* =]*a* ; *b*[avec - ∞ ≤ *a* < *b* ≤ + ∞
> $$J = [f(a), \lim_{x \to b, x<b} f(x)[\ ;$$
> Si *I* =]*a* ; *b*] avec - ∞ ≤ *a* < *b* < + ∞
> $$J =]\lim_{x \to b, x>a} f(x), f(b)] \ ;$$
> (II) soit g la bijection réciproque de $f|^{J} : I \to J, x \mapsto f(x)$. Alors *g* est **strictement croissante** et **continue**.
> (Op. cité, p. 147)

La fonction *f* conserve aussi l'ouverture ou la fermeture de l'intervalle. Ce choix conforte l'idée que l'intervalle de départ est de même nature que l'intervalle image.

Les deux intervalles peuvent découler de l'étude des variations de la fonction *f* mis en place en place dans EMS en classe 10, puis reprise en classe 12 après l'enseignement de la dérivée d'une fonction..

Voici par exemple ce qui est attendu à l'issue de cet enseignement de la classe 12 :

> *Exemple 2.* Etude de la variation de la fonction
> $$y = 3x + \frac{3}{x} + 5 .$$
> *Solution.* La fonction est définie pour tout $x \neq 0$, $x \in$ **R**.

[8] Un groupe abélien totalement ordonné (G, +, ≤) est dit **discret** ssi G_+^* admet un **minorant** a >0. Sinon, le groupe est dit **non discret** lorsqu'il est non nul. […]
Si *G* est *non discret*, entre deux éléments distincts dans *G*, il en existe toujours au moins un autre (et par conséquent, une infinité). […] (Arnaudiès – Fraysse 1989, p. 5)

La dérivée de la fonction est $y' = 3 - \frac{3}{x^2} = 3\frac{x^2 - 1}{x^2}$.

y' est aussi défini pour tout $x \neq 0$, $x \in$ **R**. Le signe de y' est même que $x^2 - 1$.
La variation de la fonction est décrite dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Alors la fonction est croissante sur les intervalles (-∞ ; 1) et (1 ; +∞), décroissante sur les intervalles (-1 ; 0) et (0 ; 1).
(Analyse 12, 2003, p.50)

II.3. Choix du nombre *l*

Rappelons que l'étude du domaine de définition de la fonction *f* a donné deux points de discontinuité –1 et 0,3.

Étudions le comportement de *f* sur chacun des intervalles de définition (ou de continuité), pour justifier notre choix.

Etude de la fonction f selon le contrat institutionnel en classe 12

- Domaine de définition : D_f = **R** \{- 1 ; 0,3} =]-∞ ; -1[∪]-1 ; 0,3[∪]0,3 ; +∞[

- Signe de la dérivé e: $f'(x) = \frac{1,3}{(x+1)^2} > 0$ pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 0,3$

- Le tableau de variation de *f* :

x	-∞		-1		0,3		+∞
$f(x)$		+	‖	+	‖	+	
$f(x)$	2	↗	+∞ ‖ -∞	↗	1 ‖ 1	↗	2

- Ensemble des valeurs de la fonction *f* :

$$f(D_f) = \mathbf{R}\backslash\{1 ; 2\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$$

• $l \notin f(D_f)$

Un nombre *l* n'appartenant pas à l'ensemble des valeurs de la fonction *f* (contre $l \in f(D_f)$) revient à dire qu'il n'existe aucune valeur de *x* telle que $f(x)$ soit égale à *l*. Mais peut-on approcher d'aussi prés que l'on veut *l* par un calcul adéquat sur *x* ?

La problématisation de la notion de limite par l'approximation restreint l'étude de $\lim_{x \to a} f(x) = l$ au cas où *l* et *a* sont finis.

Seul $l = 1$ convient, ce qui revient à l'étude de $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$

Conséquences

• *Le choix des valeurs numériques du couple de nombres (l ; a)* : $l = 1$ et $a = 0{,}3$ - permet aussi de poser le problème des EDIP9 du point de vue de la limite (cf. chapitre B2) : visant ici aux identifications « 0,999… = 1 » et « 0,299… = 0,3 » et à leur généralisation.

De plus, le choix $a = 0{,}3$ décimal (contre entier) organise une rupture du contrat didactique du calcul de la limite d'une fonction pour lequel le point a est toujours entier.

• *Forme indéterminée concernant* $\lim\limits_{x \to 0{,}3} f(x) = 1$

Dans le type de tâche « calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ » de l'EMS du Vietnam, les formes indéterminées comme $\frac{0}{0}$ / $(+\infty) - (+\infty)$ / $\frac{\infty}{\infty}$ sont présentes, les règles algébriques d'actions, pour le lever l'indétermination, ayant été mises en évidence précédemment (cf. tableau 1, chapitre A1).

Les choix de f et de $x = 0{,}3$ déterminent la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ pour les raisons suivantes :

- Cette forme indéterminée est mise en avant par les rédacteurs du manuel en vigueur dès l'exemple préparatoire pour introduire la notion de limite de fonction.

Pourtant, comme nous l'avons montré dans une expérimentation (Le Thai Bao 2004), le symbole $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ n'est, pour l'élève, rien d'autre qu'un ordre pour opérer algébriquement avec des règles d'action pertinentes. Notre choix permet donc un retour sur un exemple analogue.

- Dans le manuel en vigueur, le calcul de limite dans le cas d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ est caractéristique du type de tâches « calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ».

- Le calcul de cette forme indéterminée est aussi l'un des problèmes historiques à l'origine du concept de limite. Ce problème apparaît dès Archimède lorsque la notion de la fonction n'est pas encore un objet mathématique selon Robinet (1983) :

> Dans la première période qui se situe d'Archimède à la moitié du XVIIIe siècle, on ne peut pas proprement parler, utiliser le mot « concept de limites de fonctions » puisqu'il n'y a pas encore de manière clairement explicitée de concept de fonction.
> Les problèmes qui se posent aux mathématiciens d'alors et qui relèvent peu ou prou du concept actuel de limite, sont schématiquement :
> - Trouver des limites d'éléments géométriques […]
> - Mesurer des grandeurs et des éléments « différentiels » attachés aux courbes et aux surfaces […]
> - Calculer les formes indéterminées (par exemple, que vaut $\frac{f(x)}{g(x)}$ en $x = a$ si $f(a) = g(a) = 0$?)
> - Evaluer l'ordre de grandeur des sommes partielles des séries divergentes, ou des restes de séries convergentes. (Robinet 1983, pp. 232-233)

Résumé des choix macro-didactiques

Graphe de f *sur] -1 ; +∞[\{0,3}*

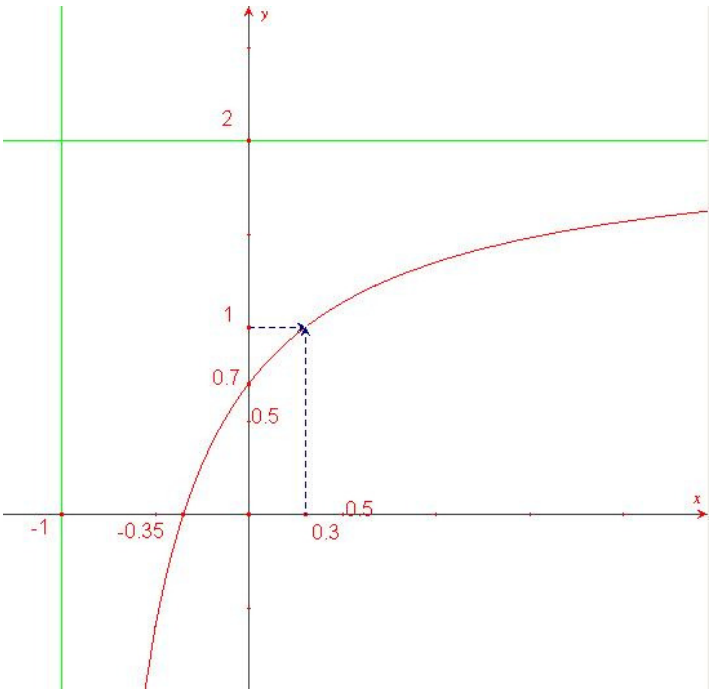


Figure 1. Graphe de la fonction *f* sur l'intervalle] -1 ; +∞[\{0,3}

• Condition du calcul :

- La calculatrice CASIO fx-570MS est autorisée sans limitation sur l'usage des touches et des fonctions disponibles.
- Le calcul à la main n'est pas interdit.

• Fonction f : $x \mapsto f(x) = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$

- La fonction f est rationnelle, factorisable, continue et strictement croissante sur chaque l'intervalle du domaine de définition.
- Elle est discontinue et prolongeable par continuité en 0,3 et non prolongeable en -1.

• Limite l :

- l = 1. Il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ soit égale à 1. Mais peut-on l'approcher d'aussi près que l'on veut ?
- $\lim\limits_{x \to 0{,}3} f(x) = 1$.

III. Présentation générale de l'ingénierie didactique et des conditions d'expérimentation

III.1. Présentation générale

L'ingénierie comporte quatre situations :

- la situation 1 a pour objectif l'enseignement de touches, de la calculatrice CASIO fx-570MS (en vigueur dans EMS), hors du programme de EMS au Viêt-nam.
- les situations 2, 3 et 4 sont générées par le choix de valeurs de variables du problème fondamental.

Nous schématisons notre ingénierie dans la figure 2, en représentant en grisé les variables didactiques dont les valeurs changent pour générer les problèmes particuliers posés dans chacune des situations.

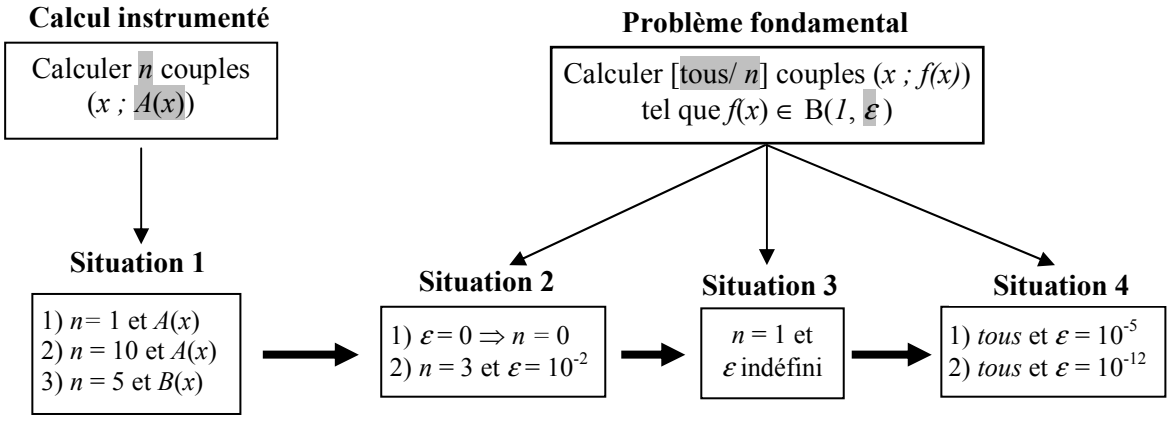


Figure 2. Schéma de l'ingénierie didactique

• L'enjeu de la situation 2 est le fonctionnement de stratégies algébriques institutionnellement fortes.

• L'enjeu de la situation 3 est de faire émerger des problématiques d'approximation en réponse au problème fondamental en particulier de faire apparaître la problématique d' « approximation $f(x)$ » comme alternative optimale à la problématique d' « approximation x ».

• L'enjeu de la situation 4 est de mettre en place une formalisation topologique de la notion de limite s'appuyant sur un raisonnement par condition suffisante.

III.2. Conditions de l'expérimentation de l'ingénierie

Nous avons expérimenté l'ensemble de l'ingénierie didactique dans une classe 12 (Terminale) du Lycée de l'Université de Pédagogie de Ho Chi Minh Ville, comportant 38 élèves, pendant trois séances.

Nous présentons dans le tableau 6 la durée de chacune des séances ainsi que le jour de leur réalisation.

Séance 1	Séance 2	Séance3
10 octobre 2006	12 octobre 2006	13 octobre 2006
20 minutes	1 heure 30	1heure

Tableau 6. Durée et date de chacune des trois séances de l'ingénierie

Lors de l'expérimentation, chacun des 38 élèves de la classe disposait d'une calculatrice CASIO fx-570MS.

Le Thai Bao Thien Trung est l'enseignant pendant les trois séances[9].

Le tableau 7 présente le découpage en situations didactiques des trois séances.

Séance 1	Séance 2	Séance 3
Situation 1	Situations 2 et 3	Situation 4

Tableau 7. Découpage en situations didactiques des trois séances de l'ingénierie

Nous allons maintenant entrer dans les situations construites de l'ingénierie didactique en justifiant de plus près les choix issus du travail de leur conception et les conséquences prévues de ces choix sur les réponses et les stratégies (analyse *a priori*).
Puis nous présenterons ce qui s'est passé dans la classe observée dans une analyse *a posteriori*.

Ces analyses *a posteriori* s'appuient sur les données suivantes :

- dans toutes les séances : les fiches de réponses des élèves et leurs brouillons[10]
- dans les séances 2 et 3 :
    - Les enregistrements audio et vidéo des élèves ;
    - Les enregistrements vidéo de l'enseignant[11], en particulier de ce qu'il écrit au tableau.

[9] Nous remercions ici messieurs, Nguyen Thai Hoa – enseignant de mathématique, Nguyen Huu Tam – enseignant de physique, madame Ho Thi My Van – enseignante d'anglais de la classe 12 A1 et leurs élèves de nous avoir accueillis.
[10] Nous remercions Le Thi Nga et Tang Minh Dung qui ont distribué et ramassé les nombreuses fiches des trois séances et qui ont eu à gérer les enregistrements audio.
[11] Nous remercions Vu Nhu Thu Huong qui a filmé l'enseignant les séances 2 et 3.

Chapitre C1
Instrumentation du calcul par la calculatrice Casio fx-570MS

Première partie
Analyse *a priori* de la situation 1

Déroulement (20 minutes)

1. Phase 1

• La fiche « Séance 1, Phase 1 » est distribuée aux élèves :

> **Consigne.**
> Vous devez calculer avec la calculatrice en n'appuyant qu'une seule fois sur la touche « = » : apparaît alors une seule ligne de calcul à l'écran de la calculatrice »
> Calculer $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ pour $x = 3{,}1$ (*vous avez 2 minutes*)
> **Résultat** : ……...

• Les élèves travaillent individuellement. Au bout de 2 minutes, les réponses sont ramassées.

• L'enseignant projette la réponse correcte à l'aide d'une table de rétro-projection :

$$(3{,}1^2 + 2\text{x}3{,}1 + 1) \div (3{,}1^2 + 1) = 1{,}584354383$$

2. Phase 2

• L'enseignant distribue la fiche « Séance 1, Phase 2 » :

Consigne. Complétez le tableau suivant à l'aide de calculatrice. *Vous avez 5 minutes.*

Valeur de x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Valeur de $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$					
Valeur de x	0,9	4,50	2006	19,8	541,7
Valeur de $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$					

• Les élèves travaillent individuellement. Au bout de 5 minutes exactement, les réponses sont ramassées

• L'enseignant demande à l'un des élèves qui a rempli le plus vite toutes les cases de dicter à l'enseignant son *programme en acte* final (notion introduite par Nguyen 2005[1]) : cette manipulation est rendu visible à tous à l'aide de la tablette de rétro-projection.

[1] […] la succession des touches effectivement appuyées pour un calcul, que nous appellerons « programme en acte ». (Nguyen 2005, p. 146)

L'hypothèse est que la rapidité pour remplir un tableau de 10 cases repose sur des connaissances sur les touches mémoire de la calculatrice pour économiser des manipulations.

• Pour remplir et corriger le tableau, l'enseignant institutionnalise les manipulations proposées par l'élève par une *manipulation collective, accompagnée d'un discours technologique* sur un algorithme de calcul utilisant les touches ALPHA, X, CALC. L'enseignant accompagne les manipulations des élèves sur la table de rétro-projection.

1. Éditer $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ dans la calculatrice : écrire l'expression en ligne où la lettre X est introduite à l'écran par la suite de touches ALPHA X. *Commentaire* : « *X est une mémoire qui a ici un statut de variable mathématique. On aurait pu aussi utiliser A, B ou C...* Apparaît dans l'éditeur de la calculatrice : $(X^2+2X+1)\div(X^2+1)$.
2. Appuyer sur la touche CALC. Apparaît dans l'éditeur de la calculatrice : X ?, la valeur tapée ou 0 (dans le cas du premier calcul).
3. Taper la valeur 3,1 puis appuyer sur la touche =.
4. Appuyer sur la touche CALC : apparaît dans l'éditeur de la calculatrice : X ? et la valeur 3,1.
5. Taper la valeur 2,6, puis appuyer sur la touche =.

Continuer ainsi pour toutes les valeurs *x* du tableau, en répétant 2. et 3.

Les touches ALPHA, X (ou autres touches mémoires A, B, C, D, E, F, Y, M), CALC sont donc enseignées pour des raisons d'économie et de rapidité du calcul dans la manipulation de la calculatrice.

3. Phase 3

• On distribue la fiche « Séance 1, Phase 3» :

Consigne. Complétez le tableau suivant à l'aide de la calculatrice. *Vous avez 5 minutes.*

Valeur de x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Valeur de $\frac{x^2+2\sqrt{x+1}}{x^2+1}$					

Après avoir rempli le tableau ne pas éteindre votre calculatrice, pour pouvoir corriger d'éventuelles erreurs sans tout recommencer.

• Au bout de 5 minutes environ, *l'enseignant rappelle aux élèves qu'il ne faut pas éteindre leur calculatrice* puis il ramasse les réponses.

• L'enseignant affiche le tableau « sans erreurs ».

• Puis il demande à un élève qui a fait un tableau contenant des erreurs *dans toutes les cases*, comment il ferait pour retrouver son erreur et la corriger.

S'il ne sait pas, l'enseignant pose la même question à l'ensemble de la classe.

• L'enseignant institutionnalise l'usage des touches COPY et INSERT pour corriger d'éventuelles erreurs.

Les touches COPY et INSERT sont donc introduites *pour la rectification des erreurs*.

Cet usage est élargi par l'enseignant : *ces touches peuvent aussi servir à remplacer une expression numérique par une expression littérale*.

I. Choix méso-didactiques pour la situation 1

- *Sur les nombres* : nous avons choisi des nombres décimaux comportant 1 chiffre après la virgule (D_1) pour placer le calcul dans le contrat didactique du calcul instrumenté par la calculatrice, et donc hors du contrat didactique de l'algèbre. Nous avons choisi D_1 pour que les calculs ne soient trop coûteux au niveau du nombre d'appuis de touches et pour ne pas bloquer le calcul « exact », c'est-à-dire le calcul dans Q (voir ci-après calcul exact ou approché)

- *Sur l'expression à calculer* : l'expression à calculer n'est pas présentée dans le registre fonctionnelle, mais sous la forme d'une « expression algébrique » telle qu'elle est présente au collège pour ne pas induire de connaissances liées aux fonctions, en particulier sur le tableau de valeurs d'une fonction.

- *Sur le calcul exact ou approché* : aucune consigne ne précise s'il s'agit de calcul exact ou de calcul approché pour observer la nature des réponses dans un calcul instrumenté par la calculatrice et préciser ainsi les attentes institutionnelles vis-à-vis de ce type de calcul. Le choix de décimaux de l'ensemble D1 permet de transformer aisément le nombre en une fraction et ne bloque pas le calcul exact.

II. Phase 1. Connaissances instrumentales des parenthèses

II.1. Choix micro-didactiques

Le choix de $A(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ assure mathématiquement que l'image $A(x)$ de tout nombre x rationnel est un rationnel.

Dans le calcul $A(x)$ pour $x = 3{,}1$, le résultat exact est un nombre rationnel non décimal $\dfrac{1681}{1061}$ (la fraction est irréductible et son dénominateur 1061 a d'autres diviseurs que des multiples de 2 et 5). Toute réponse sous forme décimale sera donc une valeur approchée du nombre $A(x)$.

Par le contrat explicité dans la consigne « Vous devez calculer avec la calculatrice… » et la limitation du temps (2 minutes), nous bloquons le calcul exact à la main.

Pourquoi la contrainte sur le nombre d'appuis de la touche $\boxed{=}$?

Cette contrainte bloque les calculs en 2 lignes (ou plus) qui proviennent de deux (ou plus) appuis sur la touche $\boxed{=}$ comme, par exemple :(1) $3{,}1^2 + 2\text{x}3{,}1 + 1$ = (2) ANS ÷ $(3{,}1^2 + 1)$

Rappelons que le calcul instrumenté par la calculatrice de $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ (pour x = 3,1) exige une transformation de l'écriture algébrique qui vise à « linéariser » l'expression en une ou deux lignes. Dans le cas *d'une seule ligne et donc d'un seul appui sur la touche* $\boxed{=}$, l'usage de parenthèses est incontournable.

La contrainte sur le nombre d'appuis de la touche $\boxed{=}$ permet donc d'étudier l'usage des parenthèses dans les calculs instrumentés et prépare l'introduction de la touche $\boxed{\text{ALPHA}}$, puis de celle de $\boxed{\text{COPY}}$ dans la suite de la séquence.

II.2 Réponses possibles

Nous pouvons prévoir les calculs instrumentés suivants :

- *Calculs instrumentés « sans erreur » de mise entre parenthèses* : « $(3{,}1^2 + 2\text{x}3{,}1 + 1) \div (3{,}1^2 + 1) = 1{,}584354383$ »

La réponse affichée suite au calcul peut être transformée en des réponses sous forme fractionnaire :

- La touche $\boxed{\text{ab/c}}$ seule permet de transformer l'affichage 1,584354383 en la fraction mixte $1\frac{620}{1061}$.
- La touche $\boxed{\text{d/c}}$ (en appuyant successivement sur les touches $\boxed{\text{SHIFT}}$ et $\boxed{\text{ab/c}}$) permet de transformer l'affichage 1,584354383 en la fraction $\frac{1681}{1061}$.

Remarquons cependant, que si le nombre 1,584354383 est rentré directement dans la calculatrice et si on appuie ensuite sur la touche $\boxed{\text{d/c}}$ (ou $\boxed{\text{ab/c}}$) la machine ne modifie pas l'affichage : on est hors de portée de l'affichage fractionnaire. Ceci reste vrai quelque soit le nombre de décimales de la décimalisation de $\frac{1681}{1061}$ que l'on rentre. La transformation de l'affichage 1,584354383 en $\frac{1681}{1061}$ suite au calcul *A(3,1)* montre que la machine mémorise quelque chose de ce calcul qui lui permet de retrouver l'écriture fractionnaire. Par contre, pour l'élève (ou l'utilisateur non averti), le paradoxe reste entier.

Le Département de l'Enseignement Secondaire du ministère de l'Education et de la Formation publie un « *Guide d'usage de la calculatrice CASIO fx 570MS pour résoudre les problèmes des classes 10 – 11 – 12* » dans lequel il est précisé une condition de possibilité de la transformation :

> Si le nombre des caractères composant la fraction ou la fraction mixte (signe de division y compris) est plus grand que 10, la calculatrice n'affiche que l'écriture décimale. (Nguyen Van. 2005, p. 12)

*Nous appelons **PAF** la **P**ortée de l'**A**ffichage sous forme **F**ractionnaire de la calculatrice : le nombre des caractères composant l'écriture fractionnaire irréductible (signe de division y compris) doit être inférieur ou égal à 10.*

Donc, tout nombre représenté par une fraction irréductible dont le nombre de caractères est supérieur à 10 est hors du **PAF** de la calculatrice.

- *Calculs instrumentés « avec erreur » de mise entre parenthèses* :

- Oubli de parenthèse(s) pour le numérateur : « $3{,}1^2 + 2\text{x}3{,}1 + 1 \div (3{,}1^2 + 1) = 15{,}90425071$ »

La valeur exacte du calcul est $3{,}1^2 + 2\text{x}3{,}1 + \frac{1}{3{,}1^2+1} = \frac{1687441}{106100}$ (fraction irréductible).

Le résultat du calcul est donc hors PAF.

Le calcul « $(3,1^2 + 2x3,1 + 1 \div (3,1^2 + 1)$ » est accepté et compris par la calculatrice comme un calcul sans parenthèse : « $3,1^2 + 2x3,1 + 1 \div (3,1^2 + 1)$ »

• Oubli de parenthèse(s) pour le dénominateur : « $(3,1^2 + 2x3,1 + 1) \div 3,1^2 + 1 = 2,749219563$ »

La valeur exacte du calcul est $\frac{3,1^2 + 2x3,1 + 1}{3,1^2} + 1 = \frac{2642}{961}$ (fraction irréductible). La calculatrice peut donc afficher $2\frac{720}{961}$ ou $\frac{2642}{961}$.

Remarques

-le calcul « $(3,1^2 + 2x3,1 + 1) \div (3,1^2 + 1$ » est accepté et compris par la calculatrice comme un calcul sans oubli de parenthèse « $(3,1^2 + 2x3,1 + 1) \div (3,1^2 + 1)$ ».

- La calculatrice affiche « Syntax ERROR » pour « $3,1^2 + 2x3,1 + 1) \div (3,1^2 + 1) =$ » et pour « $(3,1^2 + 2x3,1 + 1) \div 3,1^2 + 1) =$ » : ce message invalide donc ces oublis de parenthèse. Il existe donc un milieu pour la validation pour l'oubli d'une parenthèse fermée qui n'aurait pas été ouverte.

• Aucune parenthèse : « $3,1^2 + 2x3,1 + 1 \div 3,1^2 + 1 = 16,91405827$ »

La valeur exacte du calcul est $3,1^2 + 2x3,1 + \frac{1}{3,1^2} + 1 = \frac{1625441}{96100}$ (fraction irréductible). Le résultat du calcul est donc hors PAF.

III. Phase 2. Enseignement de touches ALPHA, X (statut de variable mathématique), et CALC

III.1 Choix micro-didactiques

Dans la phase 2, nous maintenons le choix de $A(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$: l'image de tout nombre rationnel est rationnel. Nous donnons ci-après les valeurs exactes $A(x)$ en fractions irréductibles pour les 10 valeurs de x de la phase 2.

Valeur de x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Valeur de $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$	$\frac{1681}{1061}$	$\frac{162}{97}$	$\frac{9801}{8021}$	$\frac{61009}{60029}$	$\frac{65522}{63737}$
Valeur de x	0,9	4,50	2006	19,8	541,7
Valeur de $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$	$\frac{361}{181}$	$\frac{121}{85}$	$\frac{4028049}{4024037}$	$\frac{5408}{4913}$	$\frac{29452329}{29343989}$

Tableau 1. Valeurs exactes en fractions irréductibles

Une variable didactique est donc l'appartenance des résultats des calculs de $A(x)$ à la portée de l'affichage sous forme fractionnaire de la calculatrice (**PAF**) :

• $A(x) \in$ PAF pour $x = 3,1$; 2,6 ; 8,9 ; 0,9 ou 4,50

• $A(x) \notin$ PAF pour $x = 122,5$; 71,4 ; 2006 ; 541,7

Le nombre d'appuis de touches pour faire un calcul ($23 < n < 29$) ainsi que le nombre de réitérations de ce calcul en fonction de la valeur de x ($m = 10$) ont été choisis pour empêcher que le tableau soit rempli en 5 minutes *sans l'usage de mémoires*.

Les observables de l'usage de la mémoire sont donc le remplissage des cases et les résultats.

Le choix des 10 valeurs de x vise aussi à recueillir des informations sur laquelle des méthodes, entre troncature ou arrondi, est la plus présente dans les réponses décimales écrites à partir de l'affichage de la calculatrice. Nous disposons d'observables dépendant du choix de Dn ($0 < n < 9$) et de la valeur de x.

Dn	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
x =	3,1 ; 2,6 ; 0,9	122,5 ; 71,4	8,9 ; 4,5 2006 ; 19,8 ; 547,1	3,1 ; 0,9 ; 2006 ; 19,8 ; 541,7	8,9 ; 122,5 ; 71,4 ; 0,9 ;4,5 ; 2006	71,4 ; 4,5	3,1 ; 2,6 ; 8,9 ; 541,7	8,9 ; 0,9 ; 2006 ; 541,7

Tableau 2. Valeurs de x et Dn permettant d'observer la distinction entre troncature et arrondi

III.2. Réponses possibles

Les tableaux 3 et 4 présentent les remplissages des cases du tableau de la fiche 1 issues de la recopie des affichages décimaux de la calculatrice (tableau 3) ou des affichages décimaux ou fractionnaires suite à l'appui de la touche d/c (tableau 4).

Valeur de x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Valeur de $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$	1,584354383	1,670103093	1,221917467	1,016325443	1,028005711
Valeur de x	0,9	4,50	2006	19,8	541,7
Valeur de $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$	1,994475138	1,423529712	1,000997009	1,100753104	1,003692068

Tableau 3. Affichages décimaux de la calculatrice

Valeur de x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Valeur de $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$	$\frac{1681}{1061}$	$\frac{162}{97}$	$\frac{9801}{8021}$	1,016325443	1,028005711
Valeur de x	0,9	4,50	2006	19,8	541,7
Valeur de $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$	$\frac{361}{181}$	$\frac{121}{85}$	1,000997009	$\frac{5408}{4913}$	1,003692068

Tableau 4. Affichages suite à l'appui de la touche d/c

IV. Phase 3. Renforcement de l'instrumentation des touches ALPHA, X et CALC – Introduction des touches COPY et INSERT

IV.1. Choix micro-didactiques

L'expression à calculer $B(x) = \frac{x^2+2\sqrt{x+1}}{x^2+1}$ diffère de celle de la phase précédente par la présence d'un radical : *pour un nombre rationnel x, le calcul exacte de B(x) ne donne pas forcément un rationnel*. Avec les valeurs x choisies, leurs images $B(x)$ sont toujours

irrationnels, les nombres sous les racines carrées $\sqrt{4,2}$; $\sqrt{3,6}$; $\sqrt{9,9}$; $\sqrt{123,5}$; $\sqrt{72,4}$ n'étant pas des carrés parfaits.

Ce choix permet de :

- mettre les résultats du calcul hors de portée de l'affichage sous forme fractionnaire de la calculatrice (**PAF**) ; il vise donc à recueillir le maximum d'informations pour vérifier l'hypothèse du non-respect de *la règle de l'arrondi de résultat décimal d'un calcul approché* dans les calculs instrumentés par la calculatrice.
- favoriser l'apparition d'erreurs dues aux transformations d'écritures dans le passage de l'écriture algébrique à l'écriture pour la calculatrice : en particulier pour entrer $\sqrt{x+1}$ sur la calculatrice, il faut taper √(X+1).

  Remarque : « $(X^2+2\sqrt{(X+1)} \div (X^2 + 1)$ » est accepté et compris par la calculatrice comme « $X^2+2\sqrt{(X+1)} \div (X^2 + 1)$ », c'est à dire $x^2 + \frac{2\sqrt{x+1}}{x^2+1}$.

Dans cette dernière phase, nous retrouvons une série de 5 calculs assez semblables aux 10 calculs de la phase 2, en particulier les valeurs de x sont les mêmes que les 5 premières valeurs de la phase 2. Cette ressemblance vise à favoriser l'usage des touches ALPHA, X, CALC institutionnalisées dans la phase précédente.

VI.2. Réponses possibles

Les observables sont les nombres dans le remplissage des cases. Nous donnons ci-après les différents cas possibles avec l'hypothèse que quand il y a erreur, elle est systématique.

Valeur de x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Valeur de $\frac{x^2+2\sqrt{x+1}}{x^2+1}$	1,287435565	1,36014603	1,065987447	1,00141439	1,003141354

Tableau 5. Nombres sans erreurs

Valeur de x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Valeur de $x^2+\frac{2\sqrt{x+1}}{x^2+1}$	9,991686272	7,249012009	79,28845472	15006,25148	5097,963337

Tableau 6. *Nombres avec « transformation de l'écriture pour le radical » mais oubli de fermeture de la parenthèse*

Valeur de x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Valeur de $\frac{x^2+2\sqrt{x}+1}{x^2+1}$	1,331890987	1,415580296	1,074386904	1,001475017	1,003314343

Tableau 7. *Nombres avec l'erreur « pas de transformation de l'écriture pour le radical »*

Chapitre C1

Deuxième partie
Analyse *a posteriori* de la situation 1

I. Phase 1. Connaissances instrumentales des parenthèses

Tous les élèves de la classe observée ont utilisé la calculatrice

Tous les élèves sauf 1 (oubli d'une parenthèse pour le numérateur) semblent maîtriser l'usage des parenthèses.

Types des nombres dans les réponses « sans erreur » de mise entre parenthèses :

Types des nombres				Total
Décimaux	Fraction $\frac{1681}{1061}$	« Egalité : décimal = fraction » $1{,}584354383 = \frac{1681}{1061}$, $1{,}584 = \frac{1681}{1061}$ et $1{,}5844 = \frac{1681}{1061}$	Fraction mixte $1\frac{620}{1061}$	
21	11	5	0	37

Tableau 8. Types des nombres présents

Les réponses par des nombres décimaux apparaissent le plus souvent (21 élèves sur 37). Rappelons que nous n'avons donné aucune consigne sur le calcul. Le calcul instrumenté par la calculatrice est donc pour plus de la moitié des élèves un « calcul approché ».

Le tableau 2 ci-dessus présente les 21 réponses décimales selon l'appartenance à D*n*, *n* chiffres après la virgule ($n \leq 9$) :

D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9 Affichage calculatrice	Total
0	3	7	2	2	2	0	0	5	21

Tableau 9. Réponses par décimal D_n

La distinction entre la troncature ou l'arrondi du nombre décimal affiché par la calculatrice « 1,584354383 » (D9) n'est observable que dans les réponses dans D1 (1,5 ou 1,6), D4 (1,5843 ou 1,5844) et D7 (1,5843543 ou 1,5843544).

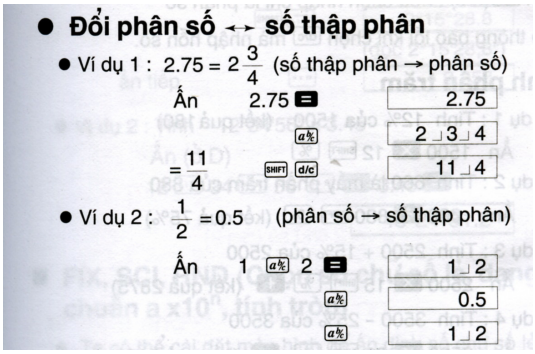
La majorité des réponses décimales appartient à D3 (7 sur 21) et D9 (5 sur 21). Dans les deux réponses D4, l'une est une troncature (1,5843), mais l'autre est un arrondi (1,5844). Nous ne pouvons donc pas conclure sur les taux des réponses par arrondi ou troncature.

Pour les nombres décimaux arrondis ou tronqués, le signe « ≈ » apparaît 4 fois (sur 16). Par exemple, « ≈ 1,58435 ». Le décimal écrit (par l'élève) est-il une valeur approchée du nombre décimal affiché par la calculatrice (1,584354383) ou celle du résultat du calcul en question ?

16 réponses sur 37 (11 en fraction, 5 en « égalité : décimal = fraction ») s'appuient sur l'usage de la touche $\boxed{\text{d/c}}$ pour un résultat « exact » en fraction. La fraction $\frac{1681}{1061}$ est-elle une valeur exacte pour les élèves ? Où et comment les élèves ont-ils eu l'occasion

d'apprendre l'usage de la touche d/c pour passer de l'affichage en décimal à celui en fraction ?

Dans le guide d'usage de la calculatrice du Département de l'Enseignement Secondaire du Ministère de l'Education et de la Formation, on peut lire page 13 :

Extrait original	Traduction en français
 ● **Đổi phân số ↔ số thập phân** ● Ví dụ 1 : 2.75 = $2\frac{3}{4}$ (số thập phân → phân số) Ấn 2.75 = 2.75 a% 2 ⌟ 3 ⌟ 4 = $\frac{11}{4}$ SHIFT d/c 11 ⌟ 4 ● Ví dụ 2 : $\frac{1}{2}$ = 0.5 (phân số → số thập phân) Ấn 1 a% 2 = 1 ⌟ 2 a% 0.5 a% 1 ⌟ 2	**• Passage fraction ↔ décimal** • Exemple 1 : […] (décimal → fraction) Appui […] […] • Exemple 2 : […] (fraction → décimal) […]

De plus, dans un autre exemple, après avoir exécuté un programme de résolution du système de deux équations du premier degré, les rédacteurs de ce guide prescrivent :

> […]
>
> Nous obtenons le résultat $x = 0.0625$, appuyons successivement sur SHIFT ab/c [la touche d/c]
>
> La calculatrice affiche $\frac{1}{16}$, on a donc $a^2 = 16$ ou $a = 4$
>
> De même : $b = 3$ (p.75)

Ces deux extraits attestent d'attentes institutionnelles privilégiant dans les calculs la donnée d'une fraction, plutôt que celles d'un nombre décimal. Dans les exemples cités, il y a toujours égalité entre la fraction et le nombre décimal affiché ou fourni : on peut en déduire que sous une forme ou une autre il y a bien égalité pour les élèves entre 1,584354383 et $\frac{1681}{1061}$.

Avec la réponse par « égalité », 5 élèves (sur 38) montrent le maximum de ce qu'ils savent faire avec la calculatrice. Examinons ces cas :

égalité 1	égalité 2	égalité 3	Total
$1{,}584354383 = \frac{1681}{1061}$	$\approx 1{,}5844 = \frac{1681}{1061}$	$1{,}584 = \frac{1681}{1061}$	
3	1	1	5

Tableau 10. Réponses par « égalité »

3 réponses (sur 5) en égalité 1 renforcent notre conjecture sur l'égalité $1{,}584354383 = \frac{1681}{1061}$. Dans les deux autres cas, le signe « = » ne porte pas le sens d'égalité, mais celui d'un autre mode d'affichage de la calculatrice.

L'absence de la réponse en fraction mixte montre que l'écriture en fraction mixte n'est pas une attente de l'institution vietnamienne.

II. Phase 2. Enseignement de touches ALPHA, X (statut de variable mathématique), et CALC

10 élèves sur 38 remplissent entièrement le tableau : on en déduit que plus d'un quart des élèves connaissent les touches mémoires et leur usage.

L'enseignant[1] demande à celui qui a fini le plus vite parmi les 10 élèves (élève codé 35) d'exposer sa manipulation de la calculatrice en la dictant à l'enseignant qui l'exécute sur la tablette de rétro-projection : comme prévu, cet élève utilise les touches ALPHA, X et CALC.

Quelles occasions a-t-on au lycée d'apprendre les touches mémoires et leur usage ? Dans le guide du Département de l'Enseignement Secondaire, les touches ALPHA, X (ou A, B, C… comme variable mathématique et non comme variable informatique[2]) et CALC sont présentées à la page 38.

> […] statut de « variable mathématique » : une mémoire contient un seul nombre durant tout le calcul. (Nguyen 2005, p. 166)

Précisons que l'on change de calcul effectif quand on change la valeur de x : par exemple un premier calcul devient effectif quand on édite $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ en tapant ALPHA, X, en terminant par l'appui sur la touche CALC puis, qu'en réponse à l'affichage « X ? » on tape une valeur par exemple « 3,1 » (voir algorithme enseigné).

Le guide illustre ensuite plusieurs fois cet usage des touches dans des exemples de résolution d'exercices de EMS (classes 10, 11 et 12).

Par exemple (pp. 60-61) :

[1] LE THAI BAO Thien Trung

[2] […] une variable informatique est une mémoire effaçable désignée pour recevoir des valeurs successives. (Nguyen 2005, p. 92)

Extrait original	Traduction en français
Ví dụ 1: Điền các giá trị của hàm số $y = -3x + 2$ vào bảng sau X: $-5,3$; -4 ; $-\frac{4}{3}$; $2,17$; $4\frac{3}{7}$; $5\sqrt{7}$ Y Giải Ghi vào màn hình Y = −3X + 2 và ấn CALC Máy hỏi X? ấn (−) 5.3 = Kết quả Y = 17.9 Ấn tiếp CALC Máy hỏi X? ấn (−) 4 = Kết quả Y = 14 Máy hỏi X? ấn (−) 4 $a^{b/c}$ 3 = Kết quả Y = 6 , ... Ta được bảng kết quả X: $-5,3$; -4 ; $-\frac{4}{3}$; $2,17$; $4\frac{3}{7}$; $5\sqrt{7}$ Y: $17,9$; 14 ; 6 ; -4.51 ; $-\frac{79}{7}$; $-37,6863$	*Exemple 1* : Compléter le tableau de valeurs ci-dessus de la fonction y = - 3x +2 […] Solution Editer sur l'écran Y = -3X + 2 et appuyer sur CALC La machine demande X ? Appuyer sur (-) 5.3 = Résultat Y = 17.9 Appuyer ensuite sur CALC La machine demande X ? […] […] On obtient le tableau des résultats [….]

Dans l'extrait supra, les rédacteurs semblent respecter une règle implicite :

- dans les cas de valeurs rationnelles de X écrites sous forme non décimale, effectuer le passage à l'affichage en fraction ;
- dans les cas de rationnels écrits sous forme décimale ou de non rationnels, ne pas effectuer le passage à l'affichage en fraction.

Le passage de l'affichage en décimal à celui en fraction dans les cas où $x \in PAF$

Décimaux ou fractions ?	Effectifs
Réponse par nombres décimaux pour tous les cas	19
Réponse par fractions pour les $x \in$ PAF	18
Aucun cas rempli	1
Total	38

Tableau 11. Passage de l'affichage en décimal à celui en fraction

Le nombre des réponses sans passage à l'affichage en fraction et celui avec passage sont quasiment égaux : 19 contre 18. Tous les nombres étant donnés sous forme décimale, la règle implicite du guide du Département de l'Enseignement Secondaire ne peut donc pas être respectée. Certains élèves (18 sur 38) vont donc respecter une autre règle : « écrire une fraction toutes les fois où c'est possible »

Nous donnons dans le tableau 8 les *réponses décimales* obtenues par recopie du décimal affiché par la calculatrice ou par troncature ou arrondi de ce nombre.

Réponses décimales	Effectifs
Affichage de la calculatrice	12
Décimal tronqué	14
Décimal arrondi	5
Décimal arrondi ou tronqué non distinguable	6
Aucun cas rempli par décimal	2
Total	38

Tableau 12. Nombres décimaux écrits à partir de l'affichage de la calculatrice (phase 2)

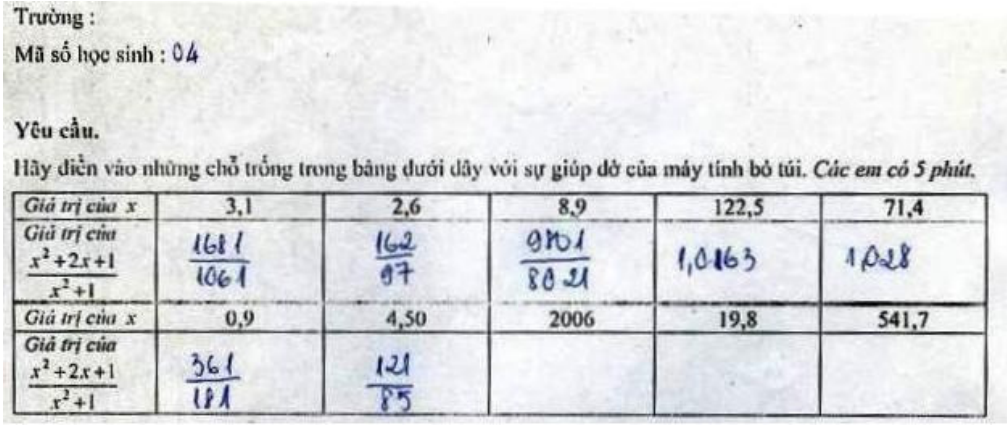
Le nombre des réponses par décimal tronqué à partir de celui affiché sur l'écran de la calculatrice est majoritaire (14 réponses contre 5 par arrondi). Nous faisons donc l'hypothèse que :

Dans le calcul instrumenté par la calculatrice, l'élève a le droit de ne pas respecter la règle de l'arrondi de résultat décimal.

Or, pour le calcul dit approché, la règle de l'arrondi d'un résultat décimal fait l'objet d'un enseignement : il est présenté à la page 133 du manuel *Algèbre 10* (2003) comme suit :

> La règle de l'arrondi des nombres est la suivante :
>
> a) Si le premier chiffre abandonné est inférieur à 5, on garde toute la première partie.
>
> b) Si le premier chiffre abandonné est supérieur ou égal à 5, on ajoute 1 au dernier chiffre de la première partie.

Dans 6 réponses, le passage de l'affichage en décimal à celui en fraction dans certains des cas où $x \in$ **PAF** masque une partie des informations sur la troncature ou l'arrondi. Par exemple :



Trường :

Mã số học sinh : 04

Yêu cầu.

Hãy điền vào những chỗ trống trong bảng dưới đây với sự giúp đỡ của máy tính bỏ túi. *Các em có 5 phút.*

Giá trị của x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Giá trị của $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$	$\frac{1681}{1061}$	$\frac{162}{97}$	$\frac{9801}{8021}$	1,0163	1,028
Giá trị của x	0,9	4,50	2006	19,8	541,7
Giá trị của $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$	$\frac{361}{181}$	$\frac{121}{85}$			

Le choix de répondre dans D4 pour $x = 122{,}5$ et dans D3 pour $x = 71{,}4$ évite l'usage de la règle de l'arrondi : ce phénomène d'évitement apparaîtra systématiquement dans la phase 3 chez un autre élève. On peut penser aussi que les 6 élèves ayant proposé un décimal tronqué non distinguable du décimal arrondi sont dans le même cas.

La limitation du temps associé à l'augmentation du nombre de calculs augmente le nombre des réponses par décimal affiché sur l'écran de la calculatrice : 12 réponses contre 5 durant la phase 1.

III. Phase 3. Renforcement de l'instrumentation des touches ALPHA, X et CALC – Introduction des touches COPY et INSERT

37 sur 38 élèves remplissent toutes les cases du tableau : l'usage des touches ALPHA, X et CALC pour les 5 calculs explique cette réussite.

Réponses		Effectifs
Sans erreurs		32
Erreurs	« transformation de l'écriture pour le radical » mais oubli de fermeture de la parenthèse	1
	« pas de transformation de l'écriture pour le radical »	4
	Autre	1
Total		38

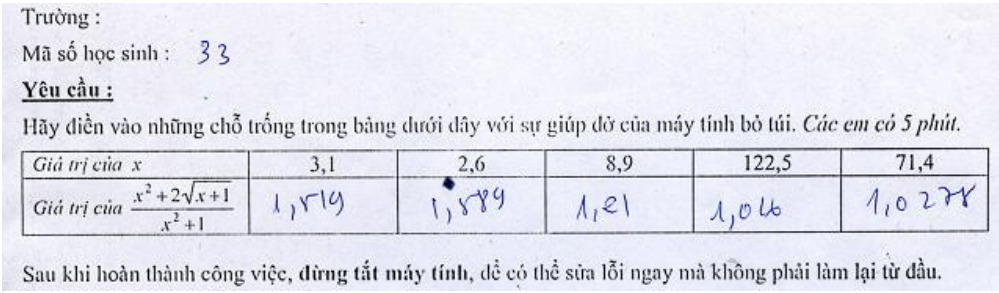
Tableau 13. Nombres écrits dans la classe observée

La majorité des élèves (32 sur 38) transforme correctement l'écriture algébrique en un programme en acte (sachant que « $(X^2+2\sqrt{(X+1)} \div (X^2 + 1)$ » est accepté et compris par la calculatrice comme « $(X^2+2\sqrt{(X+1)}) \div (X^2 + 1)$ »).

Cependant, le choix de la présence d'un radical dans l'expression augmente les erreurs sur l'usage des parenthèses : 5 élèves contre 1 seul dans de la phase 1. L'introduction des touches COPY et INSERT s'appuie sur l'une de 6 réponses « erronées ».

L'enseignant demande à un élève qui a fini le plus vite d'exposer sa manipulation de la calculatrice en la dictant à l'enseignant qui l'exécute sur la tablette de rétro-projection : cet élève n'utilise pas les touches COPY et INSERT pour modifier l'expression de la phase 2, il se contente de réécrire l'expression. *La combinaison des touches* COPY *et* INSERT *pour rectifier une expression éditée est inconnue pour l'ensemble de la classe*. On peut expliquer cette absence de connaissances instrumentales par l'absence d'occasion de les apprendre : il n'est fait aucune mention de ces touches dans la partie « *résolution des problèmes des manuels secondaires* » du guide du Département de l'Enseignement Secondaire (2005).

L'autre réponse erronée est la suivante :



Trường :

Mã số học sinh : 33

Yêu cầu :

Hãy điền vào những chỗ trống trong bảng dưới đây với sự giúp đỡ của máy tính bỏ túi. *Các em có 5 phút.*

Giá trị của x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Giá trị của $\frac{x^2+2\sqrt{x+1}}{x^2+1}$	1,519	1,589	1,21	1,016	1,02778

Sau khi hoàn thành công việc, **dừng tắt máy tính**, để có thể sửa lỗi ngay mà không phải làm lại từ đầu.

L'élève codé 33 ne commet pas d'erreur sur l'usage des parenthèses. Voici un *programme en acte* explicatif : $(X^2+2\sqrt{(X^2 +1)}) \div (X^2 + 1)$, ce *programme en acte* produisant sa réponse :

Valeur de x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Valeur de $\frac{x^2+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$	1,519754853	1,589092179	1,210846617	1,016259352	1,027812339

Tableau 14. Affichages produits par le *programme en acte* explicatif de la réponse de l'élève 33

A partir du tableau 13, nous voyons que l'élève 33 tronque systématiquement (1,519) les nombres affichés sur l'écran de la calculatrice.

Nous donnons dans le tableau 14 les *réponses décimales* obtenues par recopie du décimal affiché par la calculatrice ou par troncature ou arrondi de ce nombre.

Réponses décimales	Effectifs
Affichage de la calculatrice	12
Décimal tronqué	20
Décimal arrondi	6
Total	38

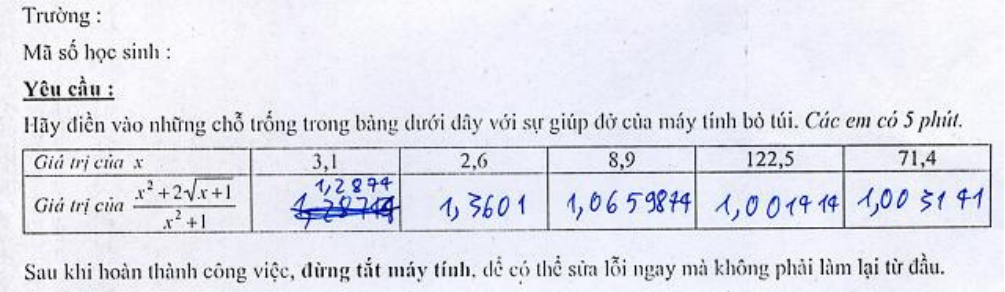
Tableau 15. Nombres décimaux écrits à partir de l'affichage de la calculatrice (phase 3)

Le nombre des réponses par décimal affiché sur l'écran de la calculatrice est stable par rapport à celui de la phase 2.

L'augmentation des réponses par décimal tronqué à partir de l'affichage de la calculatrice (20 sur 38) valide notre hypothèse : plus de la moitié des élèves de la classe observée ne respecte pas *la règle de l'arrondi de résultat décimal enseignée pour le calcul approché*.

Remarquons que dans l'enseignement de la physique au lycée la troncature est privilégiée dans le calcul approché instrumenté par la calculatrice. On peut penser que cette pratique institutionnelle hors des mathématiques explique ce comportement majoritaire.

Une réponse montre même comment un élève évite l'usage de la règle sur l'arrondi :



Trường :

Mã số học sinh :

Yêu cầu :

Hãy điền vào những chỗ trống trong bảng dưới đây với sự giúp đỡ của máy tính bỏ túi. *Các em có 5 phút.*

Giá trị của x	3,1	2,6	8,9	122,5	71,4
Giá trị của $\frac{x^2+2\sqrt{x+1}}{x^2+1}$	1,2874 ~~1,28744~~	1,3601	1,0659874	1,001414	1,0031441

Sau khi hoàn thành công việc, **đừng tắt máy tính**, để có thể sửa lỗi ngay mà không phải làm lại từ đầu.

Cet élève se place systématiquement dans un D*n* où la règle de l'arrondi se ramène à la troncature : D4 pour x = 3,1 et 2,6 ; D7 pour x = 8,9 ; D6 pour x = 122,5 et 71,4. Les ratures dans le remplissage du premier cas montre qu'après avoir hésité entre deux nombres de D5 (1,28743 ou 1,28744), il se place dans D4 pour pouvoir répondre 1,2874 par troncature de 1,287435565. Ce phénomène est contradictoirement un observable de la connaissance d'une règle que l'on doit respecter.

Conclusion de la situation 1

Cette première situation est révélatrice du rapport institutionnel à la calculatrice dans les calculs effectifs :

- Une majorité d'élèves sait manipuler la touche d/c pour passer de l'affichage en décimal à celui en fraction quand c'est possible. Cette manipulation place le résultat du calcul instrumenté dans la structure algébrique **Q**, c'est-à-dire dans un contrat algébrique.
- La variabilité des pratiques observées pour donner, dans le calcul instrumenté, un résultat décimal à partir de l'affichage de la calculatrice montre qu'il n'y a pas de contrat institutionnel bien installé pour ce calcul « approché » : soit les élèves recopient le nombre décimal affiché, soit ils le tronquent (majoritairement). Certains élèves vont même choisir un D_n en fonction du nombre affiché pour éviter l'usage de la règle d'arrondi enseigné dans la classe de mathématiques.
- Peu d'élèves (dans la classe observée) ont des connaissances sur l'usage des mémoires comme variable mathématique (touches ALPHA, X, CALC). Ceci confirme les résultats trouvés par Nguyen (2005).

  Dans l'institution vietnamienne, la moitié des élèves sortant du collège (en classe 2nd) utilise la mémoire alors que très peu d'élèves en classe de 1er l'utilisent. Le vide didactique affectant les tâches de calculs instrumentés repéré dans le chapitre C3 [analyse institutionnelle] semble avoir pour conséquence d'effacer les quelques connaissances instrumentales acquises au collège. (Op. cité, p. 150)

- Aucun élève n'utilise la combinaison des touches COPY et INSERT pour rectifier des erreurs d'édition, mais réécrivent le résultat.

On peut donc conclure que l'usage institutionnel de la calculatrice, dans la classe de mathématiques au Lycée, renforce le contrat algébrique du calcul, le calcul approché obéissant à des règles implicites ou explicites instables.

Nous avons donc expérimenté un enseignement sur des connaissances instrumentales concernant les mémoires comme variable mathématique et la combinaison des touches COPY et INSERT pour la rectification d'une expression déjà éditée.

Cette première situation permet d'envisager, dans la séance 2 de l'ingénierie didactique, la présence de calculs instrumentés par la calculatrice. Elle organise aussi la mise en place d'un milieu matériel (offert par certains affichages de la calculatrice) en réponse aux actions de calcul de l'élève.

Chapitre C2
Mise à l'épreuve des stratégies algébriques institutionnellement fortes

Première partie
Analyse *a priori* de la situation 2.

Déroulement (30 minutes)

1. Phase 1

• Au début de la séance 2, l'expression donnant la fonction *f* est écrite au tableau et s'y maintient durant toute la séance :

Soit *f* la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$.

• La feuille « Question 1 » (format A4) est distribuée aux élèves :

Question 1. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.	Brouillon

• Les élèves travaillent individuellement. Au bout de 7 minutes les réponses sont ramassées.

• L'enseignant conclut avec les élèves la phase 1 en écrivant au tableau :

$D_f = R \setminus \{-1 ; 0{,}3\}$
Il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ soit égale à 1.

2. Phase 2

• La feuille « Question 2 » (format A4) est distribuée aux élèves :

Question 2. Donner trois valeurs de x telles que $f(x)$ appartienne à [0,99 ; 1,01].	Brouillon

• Les élèves travaillent individuellement. Au bout de 15 minutes les réponses sont ramassées.

• L'enseignant organise une synthèse des réponses qu'il écrit au tableau.

I. Phase 1. Eléments du milieu : « 0,3 est une valeur interdite pour *x* » et « 1 est une valeur interdite pour *f*(*x*) »

Rappelons que le choix macro didactique de la fonction $f : x \to f(x) = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$ est caractérisé par les valeurs suivantes :

- La fonction *f* n'est pas définie en 0,3 ; la forme indéterminée de *f* en 0,3 est $\dfrac{0}{0}$.
- La fonction *f* est rationnelle, « factorisable » et prolongeable par continuité en 0,3. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)$ et $v(x)$ sont des polynômes du second degré.

I.1. Choix micro-didactiques

Le choix de l'équation $f(x) = 1$ a pour enjeu mathématique : *Il n'existe aucune valeur de x telle que f(x) = 1*.

La question « Résoudre l'équation $f(x) = 1$ » a l'avantage par rapport à « Démontrer qu'il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ soit égale à 1 », de ne pas dévoiler immédiatement l'enjeu mathématique.

Ce choix permet de masquer que la limite de *f* est 1 en $x = 0{,}3$. *Nous plaçons l'élève hors du domaine de fonctionnement des règles d'action du calcul de la limite de fonction pour la forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$ *mises en évidence dans Le Thai Bao (2004), reprises dans notre chapitre A1 (p. 7).*

Nous aurions pu aussi choisir de poser les questions « Trouver le domaine de définition de la fonction *f* » ou « Calculer $f(x)$ pour $x = 0{,}3$, s'il existe ». Ici la question « Résoudre l'équation $f(x) = 1$ » fait apparaître $D_f = R \setminus \{-1 ; 0{,}3\}$ comme une attente institutionnelle.

En effet, le type de tâches « Résoudre une équation se ramenant à une équation du second degré », que nous notons désormais *T : « EQN → EQN 2e degré »*, est objet d'enseignement dans le programme en vigueur de la classe 10. Nous présentons ci-après 3 exemples extraits du manuel *Algèbre 10*, 2003, pp. 51-53.

Exemple 2. Résoudre l'équation : $\dfrac{x+2}{x-2} + \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{3x+7}{x^2-4}$ (b)

Résolution. Le domaine de définition de l'équation (c) est $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$. Multiplier les deux côtés de (b) par $h(x) = (x-2)(x+2)$ définie et non nulle sur D, on a :

(b) $\Leftrightarrow (x+2)^2 + (x-2)^2 = 3x + 7$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 8 = 3x + 7$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$ (b')

Sur D, l'équation (b') a l'ensemble des solutions $T = \{1, \frac{1}{2}\}$.

Donc, l'équation (b) a l'ensemble des solutions $T = \{1, \frac{1}{2}\}$.

On écrit aussi que l'équation (b) a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

Exemple 3. Résoudre l'équation : $\dfrac{x+2}{x-2} + \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{8x}{x^2-4}$ (c)

Résolution. Le domaine de définition de l'équation (c) est $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$. Multiplier les deux côtés de (c) par $h(x) = (x - 2)(x + 2)$ définie et non nulle sur D, on a :

(c) $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 8x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$ (c')

Sur D, l'équation (c') n'a pas de solution. Donc, l'équation (c) n'a pas de solution.

On peut écrit l'ensemble des solution de (c) est T = ∅

Exemple 1. Résoudre l'équation : $x - 2 = \sqrt{x}$ (d)

Résolution. Le domaine de définition de l'équation (d) est $D = [0 ; +\infty)$.

Mettre au carrée les deux côtés de (d), on a :

$x^2 - 4x + 4 = x$ (d')

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$

Ce sont les racines de (d'). Essayer ces racines pour l'équation (d), on voit que : x = 1 n'est pas la solution de (d), x = 4 est la solution de (d). L'équation (d) a une seule solution x = 4

Les trois exemples supra nous montrent que la donnée du *domaine de définition de l'équation D* est la première étape de la technique de résolution de ce type de tâche dans l'institution du lycée. Dans les cas des équations (b) et (c), la présentation de D sous forme d'une union d'intervalles, par exemple $(-\infty ; -2) \cup (-2 ; 2) \cup (2 ; +\infty)$, est absente : l'institution privilégie donc une problématique de l'interdit, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Pour le même type de tâche, au collège cette première étape se restreint *à la donnée de* conditions pour que le travail algébrique soit possible.

Exemple 2 : Résoudre l'équation : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 1$.

Ce type d'équations contient la variable aux dénominateurs.

Avec les conditions $x \neq 0$, $x - 1 \neq 0$ (autrement dire $x \neq 1$), en multipliant les deux côtés de l'équation par $x(x - 1)$, on obtient :

$(x - 1) + x = x(x - 1)$

ou $x^2 - 3x + 1 = 0$

Résoudre la dernière équation, on obtient : $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Les valeurs x_1 et x_2 satisfait la condition de la différence à 0 et 1. Elles sont donc les solutions de l'équation en question.

(Algèbre 9, 2003, p. 91)

C'est pourquoi, dans certains cas, l'institution du lycée (toujours dans une problématique de l'interdit) accepte cette première étape sous les deux formes : domaine de définition ou conditions.

Exemple 1. Résoudre l'équation : $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x - 1$ (3)

Résolution.

La condition pour que la racine carrée soit définie (domaine de définition de l'équation) est :

$$2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 1.$$

Si l'on veut mettre au carré les deux côtés de (3), il faut que le côté à droite ne soit pas négatif.

[…]

(*Algèbre 10*, 2003, p. 125)

Nous donnons dans le tableau 1 la technique attendue pour T : « EQN → EQN 2e degré ».

Soit l'équation $f(x) = g(x)$	
Etape 1	Donner la condition pour que le travail algébrique soit possible : $A(x) \neq 0$ pour $\frac{1}{A(x)}$ et $B(x) \geq 0$ pour $\sqrt{B(x)}$; Ou donner le domaine de définition de l'équation D déduit de la condition
Etape 2	Ramener l'équation initiale à une équation du second degré, $ax^2 + bx + c = 0$, en appliquant les règles algébriques énoncées et démontrée dans les théorèmes suivants du manuel *Algèbre 10*, 2003, pp 49 -50 : 2) Soit l'équation $f(x) = g(x)$ (1) ayant le domaine de définition D. Si la fonction $h(x)$ définie sur D, alors l'équation $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ équivaut à l'équation (1) sur D. 2) Soit l'équation $f(x) = g(x)$ (1) ayant le domaine de définition D. Si la fonction $h(x)$ définie sur D et $h(x) \neq 0$ pour tout $x \in$ D, alors l'équation $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ équivaut à l'équation (1) sur D.
Etape 3	Conclure sur l'existence (ou non) de solution pour « $ax^2 + bx + c = 0$ » ; si oui, présenter les racines exactes dans Q($\sqrt{a}$) *sans expliciter le procédé de calcul*
Etape 4	Conclure sur l'existence de solution de l'équation initiale : existence de solution pour l'équation du second degré et si oui, appartenance au domaine de définition D

Tableau 1. Technique attendue pour T : « EQN → EQN 2e degré »

L'EMS vietnamienne (collège et lycée) n'explique pas, dans le type de tâche T : « EQN → EQN 2e degré », comment sont calculées les racines de l'équation du second degré (étape 3). Cependant, l'institution attend comme solution la donnée des racines exactes de Q($\sqrt{a}$), a étant entier comme dans l'exemple 2 de l'*Algèbre 9*. Deux calculs sont possibles : soit par l'algorithme basé sur le calcul du discriminant Δ[1] (ou Δ'[2]), soit instrumenté par la calculatrice.

Nous débutons donc la situation 2 par une tâche algébrique familière de l'institution EMS. La réponse attendue pour la résolution de l'équation $f(x) = 1$ permet non seulement d'institutionnaliser l'enjeu mathématique nécessaire pour la situation centrale (situation 3), mais aussi l'ensemble de définition D_f comme interdisant la valeur 0,3.

I.2. Réponses possibles

Examinons le calcul instrumenté par la calculatrice CASIO fx-570MS : deux possibilités apparaissent dans les textes officiels, le programme « *EQN-1 Degré 2* » et le programme « SOLVE ». Nous les présentons successivement.

---

1 Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$\Delta < 0$: vô nghiệm

$\Delta = 0$: có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

$\Delta > 0$: có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

(*Algèbre 9*, 2003, p. 84)

2 Supposons que $b = 2b'$

Appelons $\Delta' = b'^2 - ac$ […]

- Si $\Delta' < 0$: l'équation n'a pas de solution.
- Si $\Delta' = 0$: l'équation a une racine double $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- Si $\Delta' > 0$: l'équation a deux racines différentes $x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$.

(*Algèbre 9*, 2003, p. 85)

a. Le programme « EQN-1 Degré 2 » de la calculatrice CASIO fx-570MS

Le guide du Département de l'Enseignement Secondaire du ministère de l'Education et de la Formation le mentionne comme suit:

Exemple 3 : L'équation du second degré à une variable

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

Résoudre l'équation $x^2 + x\sqrt{3} - 2\sqrt{5} = 0$
Appeler le programme EQN – 1 Degré 2
Entrer a = 1, b = $\sqrt{3}$, c = - 2 $\sqrt{5}$
Résultat $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1.4192 \\ x_2 = -3.1512 \end{array}\right.$

Remarque :
☉ Lors de l'exécution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, si l'écran de la calculatrice affiche le résultat avec :
• soit un seul affichage « R ⇔ I » à droite en haut
• soit la lettre *i* après un nombre comme solution
Il faut conclure que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres réels **R**.
[…] (p. 64)

- Aucun commentaire n'est fait sur le résultat décimal « $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1.4192 \\ x_2 = -3.1512 \end{array}\right.$ » : soit les auteurs arrondissent les décimaux affichés par la calculatrice : 1,419173921 et -3,151224729 ; soit ils activent la fonction « arrondi » en gardant 5 chiffre après la virgule de la calculatrice en tapant : [MODE] [MODE] [MODE] [MODE] [MODE] [1] [5].

La résolution approchée de l'équation dans l'exemple du guide ne respecte pas le contrat algébrique de la résolution exacte d'une équation.

- La calculatrice CASIO fx-570MS n'affiche jamais le message « l'équation n'a pas de solution » lors de l'exécution du programme « EQN–1 Degré 2 » : le programme fonctionne sur l'ensemble des nombres complexes hors programme EMS du Viêt-nam en vigueur. Il faut que l'élève sache d'interpréter les affichages accompagnant le résultat comme « R ⇔ I » et « *i* » pour conclure de l'inexistence de solution de l'équation du second degré.

Nous donnons, dans le tableau 1, le programme en acte correspondant à l'exécution du programme « EQN–1 Degré 2 » pour la résolution de l'équation du second degré $2x^2 - 3x + 1 = 0$ du premier exemple (manuel *Algèbre 10*), à l'aide de la calculatrice CASIO fx-570MS.

Suite de touches	Action dans la calculatrice	Affichage sur l'écran de la calculatrice
MODE MODE MODE 1 → 2	Appeler le programme de résolution « EQN–1 Degré 2 » de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.	*a* ?
2 =	Entrer $a = 2$	*b* ?
(-) 3 =	Entrer $b = -3$	*c* ?
1 =	Entrer $c = 1$; Exécuter le programme pour résoudre l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$; Afficher la première racine	
= ou ↓	Afficher la deuxième racine	
ab/c ou d/c	Afficher x_2 sous forme fractionnaire	

Tableau 2. Programme en acte et résolution de l'équation « $2x^2 - 3x + 1 = 0$ »

Dans l'exemple supra, le programme « EQN–1 Degré 2 » de la calculatrice donne les racines exactes.

Cependant, la possibilité d'afficher des solutions exactes dépend de l'équation. Par exemple, dans le manuel *Algèbre 9* (collège), l'exécution du même programme pour l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ ne peut donner que des racines approchées : $x_1 = 2{,}618033989$ et $x_2 = 0{,}381966011$. Il faut donc utiliser l'algorithme basé sur le calcul du discriminant Δ (ou Δ') pour donner les racines dans $Q(\sqrt{a})$.

Nous faisons l'hypothèse d'une règle d'usage du programme « EQN–1 Degré 2 » dans EMS :

Le résultat de l'exécution du programme « EQN–1 Degré 2 » est acceptable s'il est soit un nombre entier, soit affichable sous forme fractionnaire (c'est-à-dire à la portée d'affichage sous forme fractionnaire PAF). Dans les autres cas, on doit utiliser l'algorithme de résolution de l'équation du second degré en calculant le discriminant Δ (ou Δ') pour donner les racines (si elles existent) exactes dans $Q(\sqrt{a})$.

b. Le programme « SOLVE » de la calculatrice CASIO fx-570MS

Le guide nous invite à découvrir un autre programme de la calculatrice CASIO fx-570MS pour la résolution directe de l'équation se ramenant à une équation du second degré par exemple (p. 64) :

Extrait original	Traduction en français
Ví dụ 4: Giải phương trình $\frac{4{,}5649x + 2{,}8769}{-3{,}9675x + 11{,}9564} = \frac{2{,}4738x + 5{,}3143}{7{,}5379x - 8{,}3152}$ (1) Giải Ta biết chắc nếu quy đồng mẫu số sẽ được một phương trình bậc 2 (với điều kiện mẫu khác 0). Để nhanh gọn ta dùng lệnh SOLVE Ghi (1) vào màn hình và ấn SHIFT SOLVE Máy hỏi X? ấn 2 = SHIFT SOLVE Được nghiệm $x_1 = 1.7390$ Ta cố đổi giá trị X nữa để tìm nghiệm thứ 2 Kết quả $x_2 = -1.1539$	***Exemple 4 : Résoudre l'équation*** […] Solution On sait certainement que la réduction au même dénominateur ramène l'équation à celle du 2er degré (avec la condition du dénominateur non nul). Mais, pour faire plus vite, on utilise la fonction SOLVE. Editer (1) sur l'écran et appuyer sur SHIFT SOLVE La machine demande X ? appuyer sur 2 = SHIFT SOLVE On a la solution $x_1 = 1.7390$ On essaye de changer la valeur de X pour trouver la deuxième solution Résultat $x_2 = - 1.1539$

Pour utiliser la fonction « SOLVE », il faut d'abord savoir d'utiliser les touches ALPHA, X (ou n'importe quelles autres touches de mémoires A, B, C, …) pour écrire l'équation à résoudre sur l'écran de la calculatrice. La fonction « SOLVE » demande ensuite d'entrer une valeur de X pour qu'elle puisse afficher le résultat. On peut changer la valeur initiale de X en appuyant sur les touches SHIFT SOLVE : l'affichage du résultat peut changer ou non.

Le guide explique la fonction « SOLVE » comme suit :

> La machine nous aide à résoudre […] sans nécessiter des transformations algébriques.
> […]
> • La fonction SOLVE résout de façon approchée [l'équation] par la méthode de Newton. Pour certaines expressions [de la fonction] et pour certaines valeurs « initiales » de la variable, la fonction peut ne pas afficher de résultat.
> • Si l'expression n'est pas complétée par « = 0 », la machine accepte et comprend comme si l'expression était complétée par « = 0 ». (p. 39)

Avec la fonction « SOLVE », on peut exécuter directement l'équation initiale sans transformation algébrique ramenant l'équation initiale à une équation du second degré.

La fonction « SOLVE » ne résout l'équation que de façon approchée et il peut y avoir échec dans un grand nombre de cas (dépendant de l'équation et de la valeur initiale de X).

Nous avons étudié les résultats donnés par la fonction « SOLVE » pour les 3 premiers exemples au-dessus du manuel *Algèbre 10* (lycée) et pour certaines valeurs initiales de X.

Equations initiales (EI)			
$\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{3x+7}{x^2-4}$ (EI$_1$) a deux solutions 1/2 et 1		$\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{8x}{x^2-4}$ (EI$_2$) n'a pas de solution	$x-2=\sqrt{x}$ (EI$_3$) a deux solutions 1 et 4
X initiale	*Résultat affiché*	Nous avons essayé 10 valeurs « initiales » différentes, la machine affiche toujours « Can't Solve »	Nous n'avons pas trouvé de valeur initiale pour l'affichage « 1 » : avec des valeurs très proches de 1 comme 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; … ou 1,01 ; 1,001 ; … et, enfin, avec 1, la machine affiche toujours « 4 ».
3	0,5 ou « 1/2 »[3]		
2	1		

Equations provenant de la première transformation algébrique selon le manuel (E1TA)					
$(x+2)^2+(x-2)^2=3x+7$ (E1TA$_1$) a deux solutions 1/2 et 1		$(x+2)^2+(x-2)^2=8x$ (E1TA$_2$) a une seule solution 2		$x^2-4x+4=x$ (E1TA$_3$) a deux solutions 1 et 4	
X initiale	*Affichage*	*X initiale*	*Affichage*	*X initiale*	*Affichage*
3 ou 2	1	1	1,99999[4]	3	4
- 1	0,5 ou « 1/2 »	1,999999	2	2	1
		3	2,00001		

Tableau 3. Exécution de la fonction « SOLVE » pour les trois exemples du manuel *Algèbre 10*

Les observables supra nous montre que :
- dans certains des cas où l'équation a des racines rationnelles, la fonction « SOLVE » peut donner les solutions exactes : cas de (EI$_1$), (E1TA$_1$) et (E1TA$_3$). Dans les autres cas (solutions rationnelles ou irrationnelles), la fonction « SOLVE » peut donner soit une solution approchée (cas E1TA$_2$) soit afficher le message « Can't Solve » en fonction du choix de la valeur « initiale ».

- dans le cas de (EI$_3$), nous supposons qu'il n'existe pas de valeur initiale pour que la machine affiche l'autre solution.

- dans le cas de (EI$_2$), le message « Can't Solve » signifie que la résolution de cette équation avec la valeur « initiale » choisie est hors des capacités de la calculatrice comme les auteurs du guide le mentionne plus haut ; on ne peut donc pas conclure à l'inexistence de solution réelle pour (EI$_2$).

- Si nous exécutons la fonction « SOLVE » pour une équation du second degré n'ayant pas de solution réelle, comme par exemple $x^2 - x + 1 = 0$, la calculatrice affiche « Can't Solve » : la fonction « SOLVE » ne cherche que des solutions réelles.

- la durée de l'exécution du programme « SOLVE » dépend de la vitesse de convergence de la méthode de Newton (fonction et valeur initiale) : il faut souvent attendre longtemps.
A quelle étape de la technique de résolution d'une équation se ramenant à une équation du second degré peut intervenir le calcul instrumenté par « EQN – 1 Degré 2 » ou par « SOLVE » ?

a. Avec le choix « *Résoudre* l'équation $f(x) = 1$ », l'attente institutionnelle de la résolution de l'équation selon le contrat algébrique est la suivante :

[3] En appuyant sur la touche d/c ou ab/c. De même pour la deuxième affichage dans le tableau.
[4] Si l'on tape sur la touche d/c ou ab/c, l'affichage n'est pas modifié. De même pour l'autre solution approchée dans ce tableau.

$$\frac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} = 1 \ (1)$$

Avec la condition : $x^2 + 0{,}7x - 0{,}3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 0{,}3$, on a donc $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1 ; 0{,}3\}$.
Multiplier les deux côtés de l'équation (1) par $h(x) = x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$ définie et non nulle sur D_f, on obtient :

$$2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 0{,}6x + 0{,}09 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0{,}3$$

Mais $0{,}3 \notin D_f$, l'équation $f(x) = 1$ n'a donc pas de solution.

En exécutant le programme « EQN – 1 Degré 2 » :

- pour l'équation $x^2 - 0{,}6x + 0{,}09 = 0$, la machine affiche « x = 0,3 » (ou « x = 3/10 »[5]) ;

- pour la condition $x^2 + 0{,}7x - 0{,}3 \neq 0$, la machine affiche « $x_1 = 0{,}3$ » (ou « $x_1 = 3/10$ »[6]) et « $x_2 = -1$ ».

Ces affichages sont conformes à la règle d'usage du programme « EQN–1 Degré 2 » dans EMS : pour l'équation « $f(x) = 1$ », le résultat de l'exécution du programme « EQN–1 Degré 2 » est acceptable. L'absence d'écriture du calcul du discriminant Δ (ou Δ') est donc un observable de l'usage du programme « EQN–1 Degré 2 ».

b. Nous présentons dans le tableau 4 les observables de l'exécution de la fonction « SOLVE » pour la résolution des trois équations intervenant dans les différentes étapes de la technique de résolution de « $f(x) = 1$ » en fonction des choix faits pour la valeur initiale de X.

Equation initiale (EI)		*première transformation algébrique (E1TA)*		*$ax^2 + bx + c = 0$ (étape 3 de la technique)*	
$\frac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} = 1$ n'a pas de solution		$2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$ a une seule solution 0,3		$x^2 - 0{,}6x + 0{,}09 = 0$ a une seule solution 0,3	
X initiale	*Résultat affiché*	*X initiale*	*Résultat affiché*	*X initiale*	*Résultat affiché*
2 ; 1 ; 0,9 ; … 0,3 ; 0	Can't Solve	1 ; 0,9 ; 0,8	Can't Solve	1	0,300000524
		0,7 ; 0,6 ; 0,5 ; 0,4	0,300001	0, 6	0,300000638
- 0,35	Math Error	0,29	0,299999	0,4	0,3 ou « 3/10 »
0,2 ; -0,5 ; -1	0,299999[7]	0,3 ; 0,30000001 ; 0,2999999	0,3 ou « 3/10 »[8]	0,2	0,299999301
				- 0,35	0,299999298

Tableau 4. Exécution de la fonction « SOLVE » pour les trois équations issues de $f(x) = 1$

Le contrat algébrique de l'institution par rapport au type de tâche T : « EQN → EQN 2e degré » nous permet de prévoir que l'usage de la fonction « SOLVE » est peu probable. Cependant, *la présence de solutions approchées de Dn (n > 2) et/ou celle de l'équation de*

[5] En appuyant sur la touche d/c ou ab/c.
[6] En appuyant sur la touche d/c ou ab/c.
[7] Si l'on tape sur la touche d/c ou ab/c, l'affichage n'est pas modifié. De même pour l'autre solution approchée dans ce tableau.
[8] En appuyant sur la touche d/c ou ab/c.

l'étape 2 et/ou l'absence de transformations algébriques sont des observables de l'usage de la fonction « SOLVE ».

De plus, l'étape 3 de la technique aboutit à l'écriture d'une équation du second degré. Le guide n'utilisant jamais la fonction « SOLVE »pour résoudre une telle équation, nous faisons l'hypothèse que la résolution instrumentée d'une équation du second degré s'effectue par le programme « EQN-1 Degré2 » et jamais par la fonction « SOLVE ». Un autre argument en faveur de cette hypothèse est que l'exécution « EQN-1 Degré2 » est plus économique que celle de « SOLVE » : non seulement, on n'a pas à éditer l'expression sur l'écran de la calculatrice mais encore la durée de l'exécution de « EQN-1 Degré2 » est immédiate.

En résumé

Avec l'hypothèse de l'absence de l'usage de la fonction « SOLVE » pour résoudre les équations du second degré (étape 3 de la technique), les réponses possibles sont les suivantes :

- *Réponse prenant en compte le domaine de définition de l'équation*

La mise en condition ($x^2 + 0{,}7x - 0{,}3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 0{,}3$) ou la donnée du domaine de définition de f ($D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1 ; 0{,}3\}$) sont des observables de cette réponse.

Deux stratégies sont alors possibles et peuvent conduire à la réponse attendue : *l'équation n'a pas de solution* :

• *Sans factorisation et sans simplification :*

$$\frac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 0{,}6x + 0{,}09 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}3 \text{ . Mais } 0{,}3 \notin D_f$$

Les coefficients décimaux de l'équation favorisent cette stratégie et masquent le carré parfait $(x - 0{,}3)^2$. Elle favorise aussi l'exécution du programme « EQN – 1 Degré 2 » de la calculatrice, les calculs en Physique et Chimie utilisant cette capacité de la calculatrice. Dans ce cas, l'absence du calcul $\Delta = 0{,}6^2 - 4\text{x}0{,}09 = 0$ ou $\Delta' = 0{,}3^2 - 0{,}09 = 0$ et/ou de l'écriture du carré parfait $(x - 0{,}3)^2$ sont des observables de cette exécution.

• *Factorisation et simplification :*

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{(x - 0{,}3)(2x + 0{,}7)}{(x - 0{,}3)(x + 1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x + 0{,}7}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 0{,}3 \text{ . Mais } 0{,}3 \notin D_f$$

- *Réponse ne prenant pas en compte le domaine de définition de l'équation*

• Dans ce cas, les stratégies supra peuvent amener à la réponse $x = 0{,}3$.

Le type de tâches T : « EQN → EQN 2e degré » étant un objet d'enseignement du programme de la classe 10 et très souvent présent dans les concours d'entrée à l'université, nous prévoyons la prédominance des réponses prenant en compte le domaine de définition de la fonction *f*.

II. Phase 2. Réhabilitation d'une stratégie non algébrique

II.1. Variables micro-didactiques

Nous jouons sur les valeurs de quatre variables didactiques pour concevoir la phase 2.

1) *L'intervalle est un intervalle d'appartenance possible des images f(x) et non un intervalle d'appartenance de x*. Du point de vue de la notion de limite, nous entrons donc implicitement dans une problématique d'« approximation $f(x)$ » contre une problématique d'« approximation x » (cf. chapitre A1). L'enjeu mathématique caché (non institutionnalisé) qui prolonge celui de la question 1 est le suivant : *Il existe une valeur de x telle que f(x) soit dans un domaine de proximité de 1*.

2) *Domaine de proximité de 1*

Le choix de l'intervalle fermé [0,99 ; 1,01] contre l'inégalité $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$ est lié à l'enjeu de l'ingénierie didactique qui est de donner à la notion d'intervalle une signification topologique de voisinage.

Le fait que 1 ne peut pas être atteint, établi dans la phase 1, fait que cet intervalle n'est pas un intervalle image.

Dans le rapport institutionnel, la notion d'intervalle est définie par celle d'inégalité en classe 10.

- Intervalle $(a\,;b) = \{x \in \mathbf{R} \backslash\, a < x < b\}$.
- Segment $[a\,;b] = \{x \in \mathbf{R} \backslash\, a \leq x \leq b\}$.
- Intervalle $(a\,;b] = \{x \in \mathbf{R} \backslash\, a < x \leq b\}$.
  Intervalle $[a\,;b) = \{x \in \mathbf{R} \backslash\, a \leq x < b\}$.

[…](*Algèbre 10*, 2003, p. 17)

Dans la résolution d'une inéquation, la solution attendue est la donnée d'une intervalle ou une réunion d'intervalles :

Exemple 1. Résoudre les inéquations suivantes :
a) $5x + 4 > 0$ b) $-3x - 6 \geq 0$.
Résolution.
a) $5x + 4 > 0 \Leftrightarrow 5x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{5}$.
L'ensemble des solutions est $(-\frac{4}{5}\,;+\infty)$
b) $-3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq -2$
L'ensemble des solutions est $(-\infty\,;-2]$

(*Algèbre 10*, 2003, p. 80)

Exemple 3. Résoudre l'inéquation : $-3x^2 + 7x - 4 < 0$

Solution. Le trinôme $-3x^2 + 7x - 4$ a deux racines $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Car le signe du trinôme doit être même que celui de coefficient $a = -3$, l'ensemble des solution de l'inéquation est donc $(-\infty\,;1) \cup (\frac{4}{3}\,;+\infty)$

(*Algèbre 10*, 2003, p. 114)

Nous posons donc l'hypothèse qu'il y a un lien de quasi équivalence entre la notion d'intervalle et celle d'encadrement par deux inégalités.

Cependant, pour la question 2, la donnée de l'inégalité $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$ aurait conduit à la résolution algébrique de deux inéquations, alors que nous supposons que celle de $f(x) \in [0{,}99 ; 1{,}01]$ permet d'autres stratégies comme nous le montrerons. L'apparition d'autres stratégies que la résolution algébrique de deux inéquations permet leur diffusion lors de la synthèse effectuée par l'enseignant et prépare la situation 3 de l'ingénierie.

3) *Bornes de l'intervalle*

Avec le choix de 0,99 et de 1,01, les bornes sont décimales et symétriques par rapport à 1.

Les bornes décimales conditionnent la recherche de valeurs de $f(x)$ et de x décimales. La symétrie des deux bornes (contre non symétriques) par rapport à 1, apporte une similitude (coût, occasion) du travail de recherche d'un côté ou de l'autre de 1.

Les écritures $1 - 10^{-2}$ ou $1 + 10^{-2}$ font apparaître la distance des bornes à 1 et 1 comme centre.

Nous avons choisi les écritures décimales 0,99 et 1,01 pour masquer la distance des bornes à 1 : en effet, la distance est un enjeu de l'ingénierie didactique au centre de la situation 3.

4) *Nombre des valeurs de x à trouver :* $n = 1$ ou 2 ou 3 ou … toutes.

Si $n = 1$ ou 2, on peut se ramener à la résolution de deux équations $f(x) = k$ avec k l'une ou l'autre borne.

Si $n = 3$, on est obligé de sortir au moins une fois de D_2 pour trouver une troisième valeur de x dans $]0{,}99 ; 1[\cup]1 ; 1{,}01[$. On retrouve ici le problème de la construction d'un nombre décimal compris entre deux décimaux successifs de D_2 (décimalisation). La recherche de cette valeur permet d'observer si elle se base sur l'exploration de l'intervalle [0,99 ; 1,01] pour $f(x)$ ou sur un intervalle de x.

Le choix de $n > 3$ ou infini aurait favorisé la recherche d'un intervalle pour x.

II.2. Stratégies possibles

Nous prévoyons 4 stratégies issues de différentes problématiques :

- Algèbre des inéquations « Inq »
- Algèbre des équations « Eq »
- Algèbre des équations – variation de la fonction f « Eq.Dérivée »
- Exploration d'un domaine de x avec la calculatrice « Dx.Calculatrice »

a. Algèbre des inéquations (*Inq*)

Le lien de quasi équivalence entre la notion d'intervalle et celle d'inégalité peut conduire le passage de la donnée $f(x) \in [0{,}99 ; 1{,}01]$ à l'inégalité $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$. On peut prévoir donc une réponse se ramenant à la résolution algébrique d'un système de deux inéquations : $\begin{cases} f(x) \geq 0{,}99 \\ f(x) \leq 1{,}01 \end{cases}$.

Voici un exemple du type de tâche « Résoudre le système de deux inéquations du second degré » dans le manuel *Algèbre 10*.

Exemple 1. Résoudre le système des inéquations :

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x + 18 > 0 \ (1) \\ 3x^2 - 20x - 7 < 0 \ \ (2) \end{cases}$$

Solution 1.

Le trinôme $2x^2 - 13x + 18$ a deux racines $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{9}{2}$. Pour que le signe du trinôme soit même que celui de coefficient $a = 2 > 0$, il faut choisir x hors du segment extrémité par les deux racines. L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est donc :

$$S_1 = (-\infty\ ;\ 2) \cup (\frac{9}{2}\ ;\ +\infty)$$

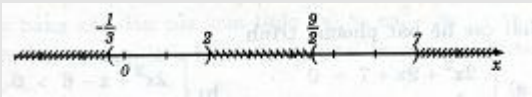
Le trinôme $3x^2 - 20x - 7$ a deux racines $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 7$. Pour que le signe du trinôme soit contraire que celui de coefficient $a = 3$, il faut choisir x dans l'intervalle extrémité par les deux racines. L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est donc :

$$S_2 = (-\frac{1}{3}\ ;\ 7)$$

L'ensemble des solutions du système des inéquations en question est l'intersection des deux ensembles des solutions S_1 et S_2 :

$$S = S_1 \cap S_2 = (-\frac{1}{3}\ ;\ 2) \cup (\frac{9}{2}\ ;\ 7).$$

On peut illustrer par l'axe numérique suivant :



(p. 117)

Le côté droit des inéquations du système doit être nul. La résolution de systèmes de deux inéquations du second degré se base sur la résolution de chaque inéquation du second degré par la règle de signe du trinôme[9] et la recherche de l'intersection des ensembles des solutions des inéquations. La recherche de l'intersection des intervalles fait apparaître un schéma de la droite réelle comme nous l'avions analysé dans le chapitre B2.

Dans notre cas, le côté droit des inéquations $\begin{cases} f(x) \geq 0{,}99 \\ f(x) \leq 1{,}01 \end{cases}$ n'est pas nul et $f(x)$ est une expression rationnelle, c'est-à-dire $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x) = 2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21$ et $Q(x) = x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$. Ce cas se rencontre rarement dans l'institution EMS.

Nous pouvons donc prévoir la présence de transformations algébriques pour se ramener au cas familier précédent.

---

[9] Théorème. Soient le trinôme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$
Si $\Delta < 0$ alors le signe de $f(x)$ est même que celui du coefficient a pour tout nombre réel x.
Si $\Delta = 0$ alors le signe de $f(x)$ est même que celui de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ a les deux racines x_1 et x_2 et on peut supposer que $x_1 < x_2$. Dans ce cas, le signe de $f(x)$ est le même que celui de a pour tout x extérieur à l'intervalle $[x_1\ ;\ x_2]$ (autrement dit, $x < x_1$ ou $x > x_2$) et le signe de $f(x)$ est contraire au celui de a pour tout x appartenant à l'intervalle $[x_1\ ;\ x_2]$ (autrement dit, $x_1 < x < x_2$). (*Algèbre 10*, 2003, p. 111)

La condition pour que le travail algébrique soit possible est que $x \neq -1$ et $x \neq 0{,}3$ ou $x \in \mathbf{R}\backslash\{-1 ; 0{,}3\}$

Transformation erronée ne prenant pas en compte le signe de dénominateur Q(x)		$\begin{cases} P(x) \geq 0{,}99Q(x) \\ P(x) \leq 1{,}01Q(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) - 0{,}99Q(x) \geq 0 \\ P(x) - 1{,}01Q(x) \leq 0 \end{cases}$
Transformation correcte prenant en compte le signe de dénominateur Q(x)	sans simplification ni factorisation	$\begin{cases} \dfrac{P(x)}{Q(x)} - 0{,}99 \geq 0 \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} - 1{,}01 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{P(x) - 0{,}99 \times Q(x)}{Q(x)} \geq 0 \\ \dfrac{P(x) - 1{,}01Q(x)}{Q(x)} \leq 0 \end{cases}$
	avec simplification et factorisation $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{(x-0{,}3)u(x)}{(x-0{,}3)v(x)} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\begin{cases} \dfrac{u(x)}{v(x)} - 0{,}99 \geq 0 \\ \dfrac{u(x)}{v(x)} - 1{,}01 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u(x) - 0{,}99 \times v(x)}{v(x)} \geq 0 \\ \dfrac{u(x) - 1{,}01v(x)}{v(x)} \leq 0 \end{cases}$

Tableau 5. Transformations algébriques se ramenant à des inéquations ayant le côté droit nul

a1. Transformation erronée ne prenant pas en compte le signe de dénominateur Q(x)

Cette transformation algébrique amène au système familier de deux inéquations du second degré :

$$\begin{cases} 1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087 \geq 0 \\ 0{,}99x^2 - 0{,}607x + 0{,}093 \leq 0 \end{cases}$$

- La technique présentée dans l'exemple 1 supra pour résoudre ce système autorise l'utilisation du programme « EQN-1 Degré 2 » pour trouver les racines des équations du second degré (voir plus loin la stratégie *Eq*), et ensuite donner la réponse sous la forme de l'intervalle $[0{,}3 ; \frac{31}{99}]$.

- La prise en compte de la condition ($x \neq -1$ et $x \neq 0{,}3$) permet de conclure que l'ensemble des solutions est :

$$]0{,}3 ; \frac{31}{99}].$$

a2. Transformation correcte prenant en compte le signe de dénominateur Q(x) sans simplification ni factorisation

Cette transformation algébrique conduit à l'écriture d'un système de deux inéquations « rationnelles » :

$$\begin{cases} \dfrac{1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} \geq 0 \\ \dfrac{0{,}99x^2 - 0{,}607x + 0{,}093}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} \leq 0 \end{cases}$$

La résolution de chaque inéquation de ce système s'appuie sur l'établissement d'un tableau de signe portant sur l'expression gauche de l'inéquation.

- Par exemple, on établit le tableau de signe de l'expression $\frac{1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$ comme suit :

• Etape 1. Résolution des deux équations du second degré par l'usage du programme « EQN-1 Degré 2 » :

L'équation $1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087 = 0$ a deux solution $x_1 = 0{,}3$ et $x_2 = \frac{29}{101}$.

L'équation $x^2 + 0{,}7x - 0{,}3 = 0$ a deux solutions $x_1 = 0{,}3$ et $x_2 = -1$ (valeurs interdites trouvées précédemment).

• Etape 2. Etablissement du tableau de signe :

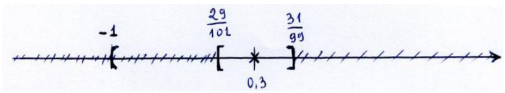
x	-∞		-1		29/101		0,3		+∞
$1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087$		+		+	0	-	0	+	
$x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$		+	0	-		-	0	+	
Signe du quotient		+	‖	-	0	+	‖	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} \geq 0$ est donc $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ [\frac{29}{101}\ ;\ 0{,}3[\ \cup\ ]0{,}3\ ;\ +\infty[$

- De même, pour l'inéquation $\frac{0{,}99x^2 - 0{,}607x + 0{,}093}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} \leq 0$. L'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-1\ ;\ 0{,}3[\ \cup\ ]0{,}3\ ;\ \frac{31}{99}]$.

- L'ensemble des solutions du système des inéquations est l'intersection des ensembles de solutions des deux inéquations : utilisation du schéma de la droite réelle :

$$[\frac{29}{101}\ ;\ 0{,}3[\ \cup\ ]0{,}3\ ;\ \frac{31}{99}].$$



a3. Transformation correcte avec simplification et factorisation

Ces transformations algébriques conduisent à l'écriture d'un système de deux inéquations « rationnelles » :

$$\begin{cases} \frac{1{,}01x - 0{,}29}{x+1} \geq 0 \\ \frac{0{,}99x - 0{,}31}{x+1} \leq 0 \end{cases}$$

On résout chaque inéquation du système selon la technique institutionnelle suivante :

Exemple 2. Résoudre l'inéquation : $\frac{(2x-5)(5-3x)}{3x+4} \leq 0$.

Résolution. Le domaine de définition de l'inéquation est **R**\ $\{-\frac{4}{3}\}$.

On a : $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$5 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

$3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

Le tableau de signe de l'expression à gauche d'après la méthode des intervalles[10] :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$5-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Vế trái		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

[Expression gauche]

A partir du tableau de signe, on a l'ensemble des solutions de l'inéquation en question :

$(-\frac{4}{3} ; \frac{5}{3}] \cup [\frac{5}{2} ; +\infty)$. (Algèbre 10, 2003, p. 83)

- La détermination de l'intersection des ensembles de solutions des deux inéquations s'appuie sur le schéma de la droite réelle et permet à donner comme réponse dans le cas *b* :

$$[\frac{29}{101} ; 0{,}3[\cup]0{,}3 ; \frac{31}{99}]$$

Remarquons que l'intervalle des solutions du système dans le cas *a*, $]0{,}3 ; \frac{31}{99}]$, est un sous intervalle de l'ensemble correct des solutions du système. Du point de vue ensembliste, le cas *a* revient à chercher les solution du système $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$ en rajoutant $Q(x) > 0$ ce qui restreint l'ensemble des solutions. Ainsi, les élèves dans ce cas, peuvent proposer trois solutions correctes au problème. Seule une erreur dans la résolution de l'inéquation subsiste si l'élève a utilisé une équivalence. Dans le cas, peu probable où un élève raisonnerait par condition suffisante, la réponse pourrait d'ailleurs être tout à fait correcte.

Pour finir, dans D_2, seuls deux nombres 0,29 et 0,31 sont dans $[\frac{29}{101} ; 0{,}3[\cup]0{,}3 ; \frac{31}{99}]$ de cas *b* (ou *c*) et un nombre 0,31 est dans $]0{,}3 ; \frac{31}{99}]$. Dans ces cas, nous pouvons observer l'exploration numérique des intervalles de solutions : comment sont choisis les trois valeurs dans l'intervalle ou l'encadrement de *x* (décimales ou rationnelles) ?

Des observables de la stratégie *Inq* sont des transformations algébriques sur les inéquations, le tableau de signe et le schéma de la droite réelle.

[10] Etablir un tableau de signe commun pour tous les binômes ($ax + b$, dans l'expression du côté gauche) en rangeant par ordre croissant toutes les racines [des binômes] ; puis en effectuant le produit des signes dans chaque intervalle (on appelle cette méthode *la méthode des intervalles*) (*Algèbre 10*, 2003, p. 83).

b. Algèbre des équations (*Eq*)

Une stratégie liée à l'algèbre des équations consiste à explorer l'intervalle [0,99 ; 1,01] pour choisir 3 valeurs m dans cet intervalle et résoudre trois équations $f(x) = m$.

Nous prévoyons que les choix suivants apparaîtront le plus souvent : m_1 et m_2 sont l'une ou l'autre des bornes de l'intervalle ; $m_3 \in$]0,99 ; 1,01[$\cap$ D_3. En effet, ces choix sont les moins coûteux.

Rappelons que l'équation $f(x) = m$ appartient au type de tâche T : « EQN → EQN 2e degré » (Résoudre une équation se ramenant à une équation du second degré). L'équation du second degré issue de transformations algébriques ne faisant intervenir ni factorisation ni simplification dans la 3e étape de la technique institutionnelle (tableau 4) a toujours deux solutions $x = 0{,}3$ (stable et interdite) et $x = \dfrac{m-0{,}7}{2-m}$ pour tout $m \neq 1$ et $m \neq 2$: *si l'on choisit m rationnel, la solution autre que 0,3 est aussi rationnelle (contre la solution irrationnelle de Q($\sqrt{a}$))*

• *Usage du programme « EQN-1 Degré 2 » pour résoudre l'équation f(x) = m*

Dans les résolutions des équations $f(x) = m$ où $m = 0{,}99$ ou 1,01 (bornes de l'intervalle), l'analyse *a priori* de la question 1 montre que le programme « EQN-1 Degré 2 » de la calculatrice peut être utilisé pour résoudre l'équation du second degré (3e étape de la technique de T : « EQN → EQN 2e degré »).

Equation initiale	$f(x) = 0{,}99$		$f(x) = 1{,}01$	
Equation du 2e degré (3e étape de la technique)	$1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087 = 0$		$0{,}99x^2 - 0{,}607x + 0{,}093 = 0$	
Affichage de résultat en exécutant le programme « EQN-1 Degré 2 »	décimal	fractionnaire[11]	décimal	fractionnaire
	$x_1 = 0{,}3$	$x_1 = \dfrac{3}{10}$	$x_1 = 0{,}313131313$	$x_1 = \dfrac{31}{99}$
	$x_2 = 0{,}287128712$	$x_2 = \dfrac{29}{101}$	$x_2 = 0{,}3$	$x_2 = \dfrac{3}{10}$

Tableau 6. Affichages de « EQN-1 Degré 2 » pour les équations du 2e degré

Conformément à la règle d'usage du programme « EQN-1 Degré 2 », le résultat de l'exécution de ce programme pour la résolution des équations du second degré est donc acceptable : il est affichable sous forme fractionnaire. Cependant, l'affichage décimal de la racine autre que 0,3 de chacun des équations (0,287128712 ou 0,313131313) n'est qu'une valeur approchée de cette racine. On retrouve ici le problème de l'affichage de la calculatrice présenté dans la situation 1.

Pour le choix de m dans]0,99 ; 1[$\cup$]1 ; 1,01[, il y a :

• 18 nombres décimaux de D_3 : 0,991 ; … ; 0,999 et 1,001 ; … ; 1,009

• 198 nombres décimaux de D_4 (y compris 18 décimaux de D_3) : 0,9901 ; … ; 0,9999 et 1,0001 ; … ; 1,0099.

[11] En appuyant sur la touche d/c ou ab/c.

Si l'on choisit m parmi les 198 nombres décimaux de D_4 (ou D_3), la résolution de $f(x) = m$ donne $x = \dfrac{m-0{,}7}{2-m}$ nombre rationnel dont le nombre des caractères composant l'écriture fractionnaire irréductible (signe de division y compris) est inférieur ou égal à 10. En effet :

Dans D_3, soit $m = \overline{0{,}99a}$ ou $m = \overline{1{,}00a}$ avec a entier $\in$ [1 ; 9]	Dans $D_4 \backslash D_3$ soit $m = \overline{0{,}99ab}$ soit $m = \overline{1{,}00ab}$ avec a et b entiers $\in$ [1 ; 9]
$x = \dfrac{\overline{29a}}{\overline{100a'}}$ ou $x = \dfrac{\overline{30a}}{\overline{99a'}}$ où $a' = 10 - a$	$x = \dfrac{\overline{29ab}}{\overline{100a'b'}}$ ou $x = \dfrac{\overline{30ab}}{\overline{99a'b'}}$ où $a' = 10 - a$ et $b' = 10 - b$

Tableau 7. Solution de l'équation $f(x) = m$ avec $m \in D_4 \cap]0{,}99 ; 1[\cup]1 ; 1{,}01[$

Le choix de l'intervalle [0,99 ; 1,01] assure donc que le résultat de l'exécution du programme « EQN-1 Degré2 » pour résoudre l'équation du second degré issus de l'équation $f(x) = m$ appartient à *PAF* (Porté de l'Affichage sous forme Fractionnaire de la calculatrice) pour tout m de D_2 ; D_3 et D_4 dans l'intervalle [0,99 ; 1,01].

• *Usage de la fonction « SOLVE » pour résoudre l'équation f(x) = m*

La question 2 n'appartient pas au type de tâche T : « EQN → EQN 2e degré ». L'usage de la fonction « SOLVE » est autorisé. Les observables de l'exécution de cette fonction pour résoudre les équations $f(x) = m$ où m = 0,99 ou 1,01 et les équations provenant de la première transformation algébrique sont donnés dans le tableau 9 ci-après :

Equations initiales (EI)			
$\dfrac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3} = 0{,}99$ a une seule solution $\dfrac{29}{101}$		$\dfrac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3} = 1{,}01$ a une seule solution $\dfrac{31}{99}$	
X initiale	*Résultat affiché*	*X initiale*	*Résultat affiché*
2 ; 1 ; 0,9 ; 0,7 ; … ; 0,4 ; 0,1 ; -0,1 ; -0,2 ; -0,4 ; -0,6 ; -0,8 ; -0,9	Can't solve	5 ; 2 ; 1 ; 0,9 ; … ; 0,1 ; 0 ; -0,1 ; …; -0,9 ; -1 ; -2 ; -5 ou $\dfrac{31}{99}$	0,313131313
0,8 ; 0,3 ; 0,2 ; -0,3 ; -0,5 ; -0,7 ; -1 ; 2 ou ;29/101	0,287128712[12]		
Equations provenant de la première transformation algébrique (E1TA)			
$2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = 0{,}99x^2 + 0{,}693x - 0{,}297$ a deux solution 0,3 et $\dfrac{29}{101}$		$2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = 1{,}01x^2 + 0{,}707x - 0{,}303$ a deux solution 0,3 et $\dfrac{31}{99}$	
X initiale	*Résultat affiché*	*X initiale*	*Résultat affiché*
2 ; 1 ; 0,9 ; 0,8 ; 0,6 ; …; 0,3	0,3 ou « 3/10 »[13]	2 ; 1 ; 0,9 ; … ; 0,4 ou 31/99	0,313131313
0,7 ; 0,2 ; 0,1 ; 0 ; -0,1 ; … ; -1 ; -2 ou 29/101	0,287128712	0,3 ; 0,2 ; 0,1 ; 0 ; -0,1 ; … ; -0,9 ; -1 ; -2	0,3 ou « 3/10 »

Tableau 8. Exécution de la fonction « SOLVE » pour les équations $f(x) = m$ (bornes de l'intervalle)

Nous supposons donc qu'il n'existe pas de valeur initiale pour que les affichages décimaux autre que 0,3 passe sous forme fractionnaire par appuis sur la touche d/c ou ab/c. Si l'élève utilise la fonction « SOLVE », il ne peut que donner des solutions approchées comme

[12] Si l'on tape sur la touche d/c ou ab/c, l'affichage n'est pas modifié. De même pour l'autre solution approchée dans ce tableau.

[13] En appuyant sur la touche d/c ou ab/c. De même pour la deuxième affichage dans le tableau.

0,287128712 et 0,313131313 : l'absence des fractions $\frac{29}{101}$ et $\frac{31}{99}$ est un observable du fonctionnement de « SOLVE ».

c. Algèbre des équations – variations de la fonction *f* (*Eq.Dérivée*)

Après avoir résolu les deux équations $f(x) = m$ (bornes de l'intervalle) comme dans la stratégie *Eq* (solutions : $x_1 = \frac{29}{101}$ et $x_2 = \frac{31}{99}$), on étudie les variations de la fonction *f* dans l'intervalle $[\frac{29}{101} ; \frac{31}{99}]$:

Le calcul de la dérivée de *f* donne $f'(x) = \frac{1{,}3x^2 - 0{,}78x + 0{,}117}{(x^2 + 0{,}7x - 0{,}3)^2} = \frac{1{,}3(x - 0{,}3)^2}{(x^2 + 0{,}7x - 0{,}3)^2} > 0$ pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 0{,}3$.

*La racine double du numérateur de la dérivée (*x *= 0,3) est la valeur interdite : on peut faire l'hypothèse que cette caractéristique de la racine rend difficile l'étude du signe de la dérivée.*

En effet, cette étude doit être conduite *comme si la racine n'était pas une valeur interdite.* Cet aspect contradictoire sera d'autant plus difficile à surmonter que ce cas ne se rencontre jamais dans l'institution EMS.

On établit le tableau de variations de *f* dans l'intervalle $[\frac{29}{101} ; \frac{31}{99}]$:

x	$\frac{29}{101}$		0,3		$\frac{31}{99}$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	0,99	↗	1 ‖ 1	↗	1,01

Pour construire le tableau de variations de *f*, il faut donc ordonner $\frac{29}{101}$ et $\frac{31}{99}$; l'étude du signe de la dérivée et *le calcul de la limite de la fonction quand x tend vers 0,3*.

Le tableau de variations permet de conclure que $f([\frac{29}{101} ; 0{,}3[\cup]0{,}3 ; \frac{31}{99}]) = [0{,}99 ; 1[\cup]1 ; 1{,}01]$. Il faut donc choisir 3 valeurs de *x* dans $[\frac{29}{101} ; 0{,}3[\cup]0{,}3 ; \frac{31}{99}]$.

Cette stratégie fait apparaître 1 comme limite de *f* quand *x* tend vers 0,3. L'étude du coût de cette stratégie (voir ci-après) montre qu'elle est peu probable.

d. Exploration d'un domaine de *x* avec la calculatrice (*Dx.Calculatrice*)

Cette stratégie consiste en l'exploration numérique d'un domaine contenant 0,3 par le calcul de $f(x)$ instrumenté par la calculatrice.

Cette exploration se fait par un processus d'essais, la validation d'un essai, choix d'une valeur pour *x,* étant l'appartenance de $f(x)$ à l'intervalle [0,99 ; 1,01]. Ce processus consiste à :

- choisir une valeur x_i dans un domaine contenant 0,3 ;
- calculer $f(x_i)$ à l'aide de la calculatrice
- comparer $f(x_i)$ à 0,99 et 1,01.
- si $f(x_i)$ appartient à [0,99 et 1,01], on valide x_i.
- on répète le processus jusqu'à l'obtention de trois valeurs validées de x_i.

Cette stratégie instrumentée utilise les touches ALPHA, X (ou autres touches mémoires A, B, C, D, E, F, Y, M), CALC, COPY et INSERT introduites dans la situation 1.

L'affichage décimal de la calculatrice est privilégié car elle favorise la comparaison de $f(x)$ à 0,99 et 1,01 : le passage à l'affichage fractionnaire de la calculatrice (pour les résultats du *PAF*) devient inutile.

Une question se pose : *les choix se basent-ils sur la connaissance (règle d'action) suivante : «pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3 » ?*

Par exemple, pour le choix de x_1 = 0,299, la calculatrice affiche « 0,999230177 » ou « $\frac{1298}{1299}$ » (si l'on tape sur d/c ou ab/c) dans le calcul de $f(x_1)$. L'affichage décimal permet de valider immédiatement 0,299.

Le comportement numérique de la calculatrice CASIO fx-570MS montre pragmatiquement que la calculatrice respecte la monotonie de f pour $x \in D_1, D_2, \ldots, D_5$. La croissance « pragmatique » de f peut donc guider le tâtonnement du choix des valeurs de x. Nous posons donc l'hypothèse que :

La monotonie « pragmatique » de f est un milieu pour l'apprentissage de la règle d'action *«pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3 ».*

- Combinaison des stratégies Eq et Dx.Calculatrice

Le coût du travail algébrique sur les inéquations ou celle de la résolution des équations pour la troisième valeur permet de prévoir des processus qui combinent *Eq* et *Dx-calculatrice* :

- *[Eq]*^{2}*– Dx.Calculatrice* : résoudre 2 équations pour trouver x_1 et $x_2 \in [0{,}99 ; 1{,}01]$ – choisir x_3 dans $]x_1 ; x_2[$ – calculer et comparer $f(x_3)$ aux 0,99 et 1,01.
- *Eq – [Dx.Calculatrice]*^{2} : résoudre une équation pour trouver $x_1 \in [0{,}99 ; 1{,}01]$ – choisir x_2 et x_3 dans $]x_1 ; 0{,}3[$ (si $x_1 < 0{,}3$) ou $]0{,}3 ; x_1[$ (si $x_1 > 0{,}3$) – calculer et comparer $f(x_2)$ et $f(x_3)$ aux 0,99 et 1,01.

II.3. Résumé de l'analyse *a priori* et coût des stratégies

	Stratégie	Observables	Exploration : intervalle $f(x)$ ou x ? **Questionnement particulier**
algébrique	*Inq*	D_f ; transformations algébriques ; tableau de signe et schéma de la droite réelle	$[\frac{29}{101}$; 0,3[$\cup$]0,3 ; $\frac{31}{99}]$ (ou]0,3 ; $\frac{31}{99}$]) de x. 3 valeurs de x : *quelle stratégie ?*
	Eq	D_f ; transformations algébriques	[0,99 ; 1,01] de $f(x)$. $m_3 \in$]0,99 ; 1,01[: *quelle décimalisation ?*
non algébrique	*Eq.Dérivée*	D_f ; transformations algébriques ; calcul de la dérivé et tableau de la variation	$[\frac{29}{101}$; 0,3[$\cup$]0,3 ; $\frac{31}{99}]$ de x. Calcul de la limite en $x = 0,3$? 3 valeurs de x : *quelle stratégie ?*
	Dx.Calculatrice	D_f; couples des nombres décimaux (x ; $f(x)$)	Domaine de proximité de x. *Essais* : *x proche de 0,3 ?*

Tableau 9. Résumé des stratégies de l'analyse *a priori*

- La stratégie *Inq* est plus coûteuse que *Eq* : il faut étudier le signe des expressions (tableau de signe) et déterminer l'intersection des intervalles par le schéma de la droite réelle. De plus, les transformations algébriques correctes sur l'inéquation de départ sont plus coûteuse que celles sur les équations : on peut donc prévoir un échec des stratégies *Inq*, c'est-à-dire une absence de réponses. Mais, le lien de quasi équivalence entre la notion d'intervalle et celle d'encadrement par deux inégalités et la prédominance de l'algèbre dans l'EMS vietnamienne (cf. Le Van 2001 et Nguyen 2005) permettent de prévoir la présence forte de *Inq*, les élèves ramenant par contrat la tâche de la phase 2 à la résolution des deux inéquations correspondantes.

- La stratégie *Eq.Dérivée* est plus coûteuse que *Eq* : il faut étudier la variation de f dans $[\frac{29}{101}$; 0,3[$\cup$]0,3 ; $\frac{31}{99}[$, et calculer la limite de f en 0,3 pour compléter cette étude. L'étude de la variation d'une fonction f rationnelle, « factorisable » et prolongeable par continuité en 0,3 opère une rupture du contrat institutionnelle de l'étude des fonctions dans EMS, une telle étude étant absente de l'institution : on peut donc prévoir un échec dans l'étude de la variation de f et donc un blocage d'une telle stratégie.

- Le coût de la stratégie *Dx.Calculatrice* dépend de l'apprentissage de la règle d'action « pour que $f(x)$ soit proche de 1, x doit être proche de 0,3 ». Si l'élève n'a pas cette connaissance, plus rapidement il l'apprend par interaction avec le milieu de la monotonie « pragmatique » de f, moins la stratégie *Dx.Calculatrice* est coûteuse.

Les stratégies optimales du point de vue du coût sont donc *Eq* et *Dx.Calculatrice* : cependant on peut faire l'hypothèse que la quasi équivalence institutionnelle entre l'appartenance de $f(x)$ à l'intervalle [0,99 ; 1,01] et la résolution d'un système d'inéquations favorisera la stratégie *Inq* malgré son coût.

Chapitre C2

Deuxième partie
Analyse *a posteriori* de la situation 2

I. Phase 1. Eléments du milieu : « 0,3 est une valeur interdite pour *x* » et « 1 est une valeur interdite pour *f*(*x*) »

Nous donnons dans le tableau 5 les réponses des élèves à la question 1.

Réponse	attendue (juste)	fausse	total
Sans factorisation – simplification	29	5	34
Factorisation et simplification	1	3	4
total	30	8	38

Tableau 10. Réponses des élèves à la résolution de l'équation $f(x) = 1$

- 30 élèves (sur 38) de la classe observée répondent correctement à la question 1 en prenant en compte le domaine de définition D_f : « l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution. La question 1 n'est donc pas problématique pour les élèves vietnamiens.

- Conformément à notre hypothèse, la majorité des réponses (34 sur 38) ne mobilisent aucune factorisation, ni simplification :

> Cette question se trouve en dehors du domaine de fonctionnement des règles d'action du calcul de la limite de fonction pour la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

- Les 5 réponses fausses « x = 0,3 » ne mobilisent ni factorisation, ni simplification et proviennent de la non prise en compte du domaine de définition D_f. Ces élèves ne respectent pas la première étape de la technique du type de tâche T : « EQN → EQN 2e degré ».

- 3 élèves répondent par une autre valeur que 0,3. Ils respectent la première étape de la technique de T : « EQN → EQN 2e degré » avec la condition $x \neq 0,3$ et $x \neq -1$; mais, la factorisation et la simplification conduisent à des erreurs de calculs que nous détaillons plus loin.

- Tous les élèves de la classe observée sauf 1 (37 sur 38) respecte totalement ou en partie le contrat algébrique par rapport au type de tâche T : « EQN → EQN 2e degré » : des transformations algébriques apparaissent dans toutes leurs copies.

- La forme décimale du résultat « 0,3 », bien que non fractionnaire reste acceptable dans le contrat algébrique, d'autant plus que les coefficients de l'équation sont dans D_1 et D_2.

> a) En pratique, on rencontre souvent des fractions ayant comme numérateur des puissances de dix, par exemple : [...]
>
> Ces fractions sont dites *fractions décimales*.
> b) Par commodité, on écrit souvent une fraction décimale sous la forme d'un nombre décimal :
> $\frac{7}{10}$ est écrite par 0,7 ; $\frac{18}{100}$ est écrite par 0,18 ;
> $\frac{2215}{1000}$ est écrite par 2,215 ; $\frac{9083}{10000}$ est écrite par 0,9083.

(*Mathématique 6*, vol. 2, 1999, pp. 25 - 26)

Malgré tout 6 élèves (sur 33) écrivent la fraction 3/10, attestant du poids du contrat algébrique stricte.

- Calcul instrumenté par le programme « EQN-1 degré 2 » de la calculatrice

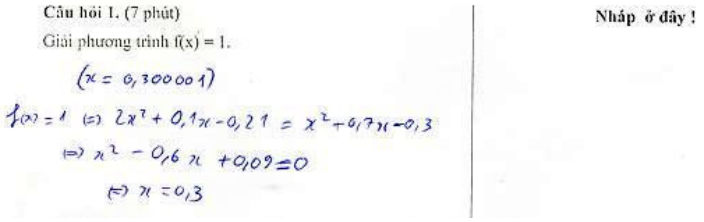
33 élèves ne mobilisant ni factorisation, ni simplification arrivent à l'équation du second degré « $x^2 - 0{,}6x + 0{,}09 = 0$ » et à « $x = 0{,}3$ ». Conformément à l'attente institutionnelle pour la troisième étape de T : « EQN → EQN 2e degré », nous ne trouvons aucun calcul explicité de Δ ou Δ', y compris dans le brouillon ; un seul élève présente la transformation algébrique $(x - 0{,}3)^2$ avant le fait « $x = 0{,}3$ » :

A ces 32 élèves (sur 38) ayant utilisé le programme « EQN – 1 Degré 2 » de la calculatrice, nous pouvons rajouter 4 élèves ayant factorisé ou simplifié de manière erronée ou non l'équation initiale (voir plus loin), ce qui fait 36 élèves (sur 38).

- Calcul instrumenté par la fonction « SOLVE » de la calculatrice

Deux élèves codés 02 et 11, parmi les 5 élèves répondant « $x = 0{,}3$ est solution de f(x) = 1 », semblent utiliser cette fonction. On suppose d'abord que les élèves 02 et 11 ont tenté d'exécuter la fonction « SOLVE » à partir de l'équation initiale $f(x) = 1$ et obtenu l'affichage de la calculatrice « Can't solve » : ils ont donc du opérer une première transformation algébrique (E1TA) pour produire « $2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$ ».

La présence dans la copie de l'élève 02 des 2 observables « x = 0,300001 » et de l'équation « $2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$ » atteste bien de l'exécution de la fonction « SOLVE » pour cette équation.


Câu hỏi 1. (7 phút)
Giải phương trình f(x) = 1.
(x = 0,300001)
f(x) = 1 ⟺ 2x² + 0,1x − 0,21 = x² + 0,7x − 0,3
⟺ x² − 0,6x + 0,09 = 0
⟺ x = 0,3
Nháp ở đây !

En effet, nous avons trouvé $x = 0{,}300001$ en exécutant la fonction « SOLVE » pour résoudre l'équation E1TA pour des valeurs initiales comme 0,7 ; 0,6 ; 0,5 ; 0,4. L'affichage $x = 0{,}300001$ n'est pas acceptable du fait de l'impossibilité du passage sous forme fractionnaire par appui sur les touches d/c ou ab/c. L'élève 02 transforme donc algébriquement l'équation « $2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$ » en l'équation du second degré « $x^2 - 0{,}6x + 0{,}09 = 0$ ». Le programme « EQN-1 degré2 » lui permet de trouver la solution $x = 0{,}3$.

L'élève 11 n'écrit que le résultat $x = 0{,}3$ sans aucune transformation algébrique. Nous supposons donc que l'élève exécute la fonction « SOLVE » pour l'équation « $2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$ », qu'il peut éditer dans la calculatrice à partir de l'équation initiale sans passer par son écriture.

- Les réponses mobilisant la factorisation et la simplification de f(x)

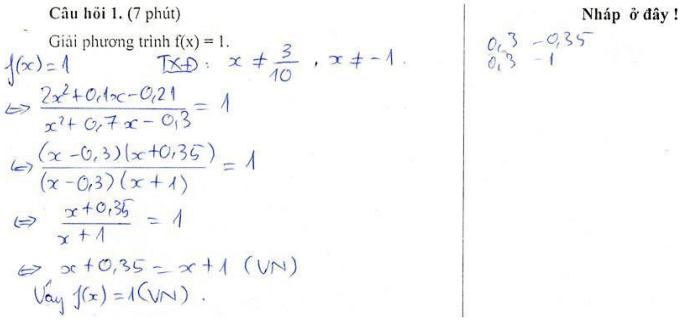
3 réponses (sur 4) mobilisant la factorisation et la simplification conduisent à des erreurs de calcul. Toutes ces erreurs proviennent de la mobilisation de la formule de factorisation $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ présente dans l'institution vietnamienne :

- Si Δ > 0 alors :

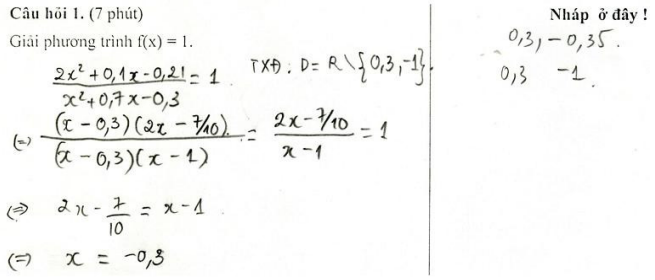
$f(x) = a(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines du polynôme $f(x)$.

(*Algèbre 10*, 2003, p. 112)

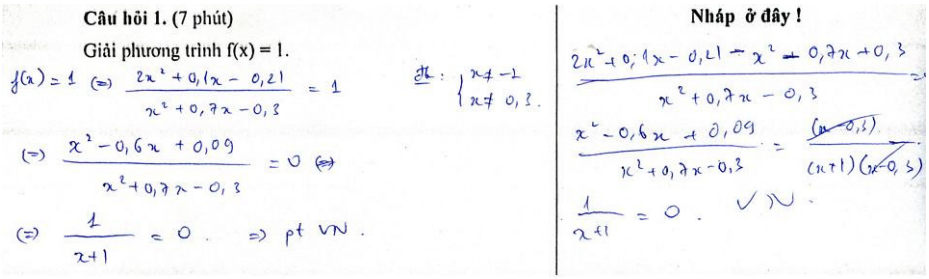
- Une erreur est produite en remplaçant $2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21$ par $(x - 0{,}3)(x + 0{,}35)$: oubli de la constante $a = 2$



- Une erreur est produite en remplaçant $2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21$ par $(x - 0{,}3)(2x - 7/10)$ et $x^2 + 0{,}7x - 0{,}3$ par $(x - 0{,}3)(x -1)$, sans prise en compte du signe de la racine négative

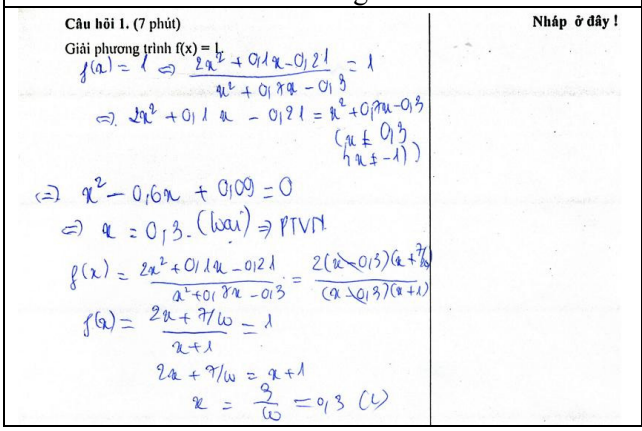


- Une erreur est produite en remplaçant $x^2 - 0{,}6x + 0{,}09$ par $(x - 0{,}3)$, sans prise en compte de la racine double



Aucun calcul de Δ ou Δ' ne figure dans les copies supra : les élèves ont utilisé le programme « EQN-1 Degré2 » pour trouver les racines servant à la factorisation. Le remplacement de l'expression $x^2 - 0{,}6x + 0{,}09$ par $(x - 0{,}3)$ dans la dernière copie renforce cette conjecture.

Nous présentons ci-dessus la seule réponse exacte mobilisant la factorisation et la simplification :

Extrait original	Traduction en français
 **Câu hỏi 1.** (7 phút) **Nháp ở đây !** Giải phương trình f(x) = 1 $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3} = 1$ $\Leftrightarrow 2x^2+0{,}1x-0{,}21 = x^2+0{,}7x-0{,}3$ $(x \neq 0{,}3 ; x \neq -1)$ $\Leftrightarrow x^2-0{,}6x+0{,}09=0$ $\Leftrightarrow x = 0{,}3$ (loại) $\Rightarrow$ PTVN $f(x) = \frac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3} = \frac{2(x-0{,}3)(x+7/10)}{(x-0{,}3)(x+1)}$ $f(x) = \frac{2x+7/10}{x+1} = 1$ $2x+7/10 = x+1$ $x = \frac{3}{10} = 0{,}3$ (L)	[…] $\Rightarrow$ x = 0,3 (exclu) $\Rightarrow$ L'équation n'a pas de solution (en bref) […]$\Rightarrow$ x = $\frac{3}{10}$ = 0,3 (exclu) (en bref)

La copie montre que l'élève avait déjà résolu sans erreur l'équation sans factorisation ni simplification. Il reconnaît ensuite que l'expression de la fonction est factorisable et reprend la résolution. Nous verrons plus loin que ce travail algébrique servira de milieu pour la validation du jeu de la situation 3.

Institutionnalisation de l'enseignant

La présence majoritaire de la réponse attendue (30 sur 38) « *f(x)* = 1 n'a pas de solution » permet à l'enseignant de réaliser aisément l'institutionnalisation de « l'équation *f*(*x*) = 1 n'a pas de solution » et « 0,3 et -1 sont interdits », permettant à ces énoncés de devenir des éléments du milieu algébrique.

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau (chronologiquement)
P : Nous trouvons les conditions que *x* est différent de 1 et *x* … Es : différente de 0,3 P : Oui, autrement dit, le domaine de définition de *f* est D_f égal **R** … Es : Sauf -1 et 0,3. P : Sous ces conditions, l'équation … Es : n'a pas de solution. P : Oui, autrement dit, il n'existe aucune valeur de *x* telle que *f*(*x*) soit égale à 1.	Question 1 : Résolvez l'équation *f*(*x*) = 1 Condition : $x \neq 1$ et $x \neq 0{,}3$ D_f = **R** \{- 1 ; 0,3} Il n'existe aucune valeur de *x* telle que *f*(*x*) soit égale à 1

(Extrait du protocole reproduit à partir de l'enregistrement vidéo de la séance 2)

L'enseignant ne représente pas D_f comme une union d'intervalles « (-∞ ; -1) ∪ (-1 ; 0,3) ∪ (0,3 ; +∞) ». La donnée de l'interdit D_f = **R** \{- 1 ; 0,3} est conforme à l'attente de l'institution.

II. Phase 2. Réhabilitation d'une stratégie non algébrique

Nous ne trouvons pas de combinaison entre les stratégies *Eq* et *Dx.Calculatrice*. Chaque réponse s'appuie sur une seule stratégie.

Algèbre des inéquations (*Inq*)	21
Algèbre des équations (*Eq*)	11
Algèbre des équations – variation de la fonction *f* (*Eq.Dérivée*)	2 (+1)
Exploration d'un domaine de x avec la calculatrice (*Dx.Calculatrice*)	4
Total	38

Tableau 11. Stratégies algébriques et non algébriques observées

- Comme nous l'avions prévu, malgré son coût élevé, les réponses par *Inq* sont majoritaires (21 sur 38) et attestent de la quasi équivalence institutionnelle entre la notion d'intervalle et celle d'encadrement par deux inégalités.

Comparons la question 2 de notre ingénierie à deux problèmes proposés par Le Thai Bao (2004) :

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 0{,}1x - 0{,}02}{0{,}25x^2 - 0{,}01}$

Problème 1 : Donner 3 valeurs numériques de x telles que $2{,}99 \leq f(x) < 3{,}01$

Problème 2 : Donner 3 valeurs numériques de x telles que $2{,}99 < f(x) \leq 3{,}01$

Ces deux problèmes ne se différencient de la question 2 que par la donnée d'inéquations au lieu d'un intervalle. Dans le premier cas, seules les réponses *Inq* apparaissent alors que dans le cas de la question 2, l'éventail de réponses (*Eq*, *Dx.Calculatrice* et *Eq.Dérivée*) s'ouvre. Cet enrichissement des types de réponses valide donc *a posteriori* notre choix de la donnée de $f(x) \in [0{,}99 ; 1{,}01]$ contre celle de l'inégalité $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$. Rappelons que ce choix permet la diffusion des réponses autres que *Inq* lors de la synthèse effectuée par l'enseignant.

- Les réponses par des stratégies algébriques *Inq* et *Eq* sont largement majoritaires (32 sur 38 : 21 par *Inq* et 11 par *Eq*) dans la phase 2 attestant de la prépondérance de l'algèbre des équations et inéquations dans l'EMS vietnamienne.

- Les 32 réponses strictement algébriques contiennent toujours la donnée soit de $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-1 ; 0{,}3\}$ soit de la condition ($x \neq -1$ et $x \neq 0{,}3$) et des transformations algébriques dans le respect du contrat algébrique de la résolution algébrique des équations et des inéquations. Ce contrat algébrique est respecté bien que la question 2 ne soit pas présentée sous les consignes habituelles qui sont « Résoudre l'équation (ou le système d'inéquations) … ».

De plus, à l'exception des 6 cas utilisant factorisation et simplification, il n'y a aucun calcul explicite de Δ ou de Δ', y compris dans le brouillon, dans la résolution des équations du second degré. Rappelons que ces équations ont des coefficients décimaux dans D_2 ou D_3 comme $1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087 = 0$ ou $0{,}99x^2 - 0{,}607x + 0{,}093 = 0$. La donnée immédiate des racines de ces équations sans calcul de Δ atteste de l'usage du programme « EQN-1 Degré 2 » de la calculatrice :

Dans l'EMS vietnamienne, il existe une cohabitation entre la résolution algébrique (obtentions des solutions exactes) des équations et inéquations se ramenant au second

degré et le programme « EQN-1 Degré 2 » de la calculatrice CASIO fx-570MS : la calculatrice renforce l'algèbre.

Examinons maintenant de plus près les réponses relevant de chacune des quatre stratégies.

II.1. Stratégie « Algèbres des inéquations »

Les transformations algébriques possibles pour se ramener à un système d'inéquations ayant le côté droit nul peuvent aboutir aux intervalles de solutions suivants (cf. analyse *a priori*) :

- Cas 1. Transformation algébrique erronée ne prenant pas en compte le signe du dénominateur : intervalle $]0,3\ ;\ \frac{31}{99}]$ ou encadrement $0,3 < x \leq \frac{31}{99}$.

- Cas 2. Transformations algébriques correctes prenant en compte le signe du dénominateur avec (ou non) simplification et factorisation

a. Tableau de signes correct et production de l'intervalle attendu : $[\frac{29}{101}\ ;\ 0,3\ [\ \cup\ ]0,3\ ;\ \frac{31}{99}]$ ou encadrement $\frac{29}{101} \leq x \leq \frac{31}{99}$ avec $x \neq 0,3$.
b. Tableau de signes erroné et production d'un intervalle erroné
c. Résolution du système des inéquations inachevé : aucun intervalle

Rappelons que l'intervalle $]0,3\ ;\ \frac{31}{99}]$ de cas 1 est une partie de l'intervalle attendu $[\frac{29}{101}\ ;\ 0,3\ [\ \cup\ ]0,3\ ;\ \frac{31}{99}]$.

Intervalle ou encadrement ?	Cas 1 *Une partie de l'intervalle attendu*	Cas 2			Total
		Intervalle attendu	*Intervalle erroné*	*Aucun intervalle*	
Intervalle	1	1	0		2
Encadrement	5	3	3		11
Total	6	4	3	8	21
		15			

Tableau 12. Intervalles de *x* observés dans les réponses par *Inq*

- Seules 4 élèves (sur 21) arrivent à donner l'encadrement (ou l'intervalle) correct.

- 15 (sur 21) élèves maîtrisent les transformations algébriques du système d'inéquations initial pour produire le système d'inéquations rationnels avec le côté droit nul (cas 2).

Cependant seulement 4 de ces 15 élèves parviennent à mener jusqu'au bout la résolution : c'est-à-dire établir des tableaux de signe corrects et donner l'ensemble des solutions correspondant. Cela s'explique par le coût de la stratégie *Inq*, la résolution du système des inéquations rationnelles ayant le côté droit non nul étant non routinier dans l'EMS vietnamien.

De ce fait, plus de la moitié des 15 élèves (8) n'arrivent pas à achever dans le temps imparti (15 minutes) cette résolution : ils n'écrivent pas d'encadrement ou d'intervalle qui leur permettait de donner les 3 valeurs de *x* demandées.

- 11 (sur 13) élèves se contentent de donner un encadrement comme solution du système d'inéquations, bien que l'institution privilégie la donnée d'un intervalle ou d'une réunion

d'intervalles comme solution d'un système d'inéquations. Cela peut s'expliquer par le fait que dans l'enseignement effectif, les enseignants acceptent l'encadrement comme solution : la quasi-équivalence institutionnelle entre la notion d'intervalle et celle d'encadrement par deux inégalités existe dans le topos d'enseignant. De plus, la recherche de 3 valeurs de x dans l'intervalle favorise le passage à l'encadrement.

- Dans les 6 réponses du cas 1, nous ne trouvons aucune explication écrite. Les 6 élèves marquent « ⇔ » à chaque transformation algébrique. Cela montre que ces élèves utilise une règle d'action d'équivalence « *Multiplication des deux côtés de l'équation par le dénominateur* » dont le domaine de validité est l'algèbre des équations.

- 3 élèves établissent un tableau de signe erroné et produisent comme solution : $x < -1$ ou $x \geq \frac{31}{99}$. Il n'y a donc pas de problème pour la recherche de 3 valeurs de x dans l'intervalle non borné $(-\infty\ ;\ a)$ ou $(b\ ;\ +\infty)$: ces élèves choisissent trois valeurs entières de x, par exemple : -2, 1, 2. Aucun ne vérifie la validité de ces valeurs entières. Cela s'explique par la rareté de la pratique institutionnelle de vérification du résultat d'un travail algébrique.

Observons à présent conjointement les 6 réponses correspondantes au cas 1 et les 4 réponses correctes correspondant au cas 2 relativement à la question suivante :

Quelles stratégies mettent en place les 10 élèves donnant un encadrement ou un intervalle ($]0{,}3\ ;\ \frac{31}{99}]$ ou $[\frac{29}{101}\ ;\ 0{,}3\ [\ \cup\ ]0{,}3\ ;\ \frac{31}{99}]$) pour construire 3 valeurs de x de cet encadrement ou de cet intervalle ?

Les intervalles ou les encadrements produits ont au moins une borne fractionnaire : on peut envisager la donnée de valeurs numériques soit fractionnaires soit décimales.

fraction	décimal	Pas de valeur de x	total
4	5	1	10

Tableau 13. Effectif selon la nature, fractionnaire ou décimale, des 3 valeurs de x

Un seul élève (codé 02) parvient à l'encadrement $\begin{cases} \frac{29}{101} \leq x \leq \frac{31}{99} \\ x \neq 0{,}3 \end{cases}$, mais n'a pas de temps de construire 3 valeurs appartenant à cet encadrement.

Les trois stratégies suivantes permettent de construire 3 valeurs de x dans l'ensemble des solutions.

• *Stratégie basée sur l'ordre dans D_i (i >2)* (5 cas) :

Dans l'exemple représentatif ci-dessous, l'élève calcule avec la calculatrice la valeur décimale de $\frac{31}{99}$, qu'il tronque en 0,31 (qu'il raye) ; puis prend 3 décimaux successifs de D_3 appartenant à l'intervalle]0,3 ; 0,31[

3 g Ta có → $x \in (0,3, \frac{31}{99}]$ → 3 giá trị của x có thể là $x = 0,301$, $x = 0,302$, $x = 0,303$.	On obtient → $x \in (0,3 ; \cancel{0,31}\ \frac{31}{99}]$ → 3 valeurs de x possibles sont $x = 0,301$, $x = 302$, $x = 0,303$

• *Stratégie basée sur l'ordre dans* ***Q*** (3 cas)

Transformation de l'encadrement $0,3 < x \leq \frac{31}{99}$ en un encadrement par deux fractions ayant même dénominateur, puis en s'appuyant sur l'ordre dans **N** des numérateurs, construction de 3 fractions de l'intervalle :

$\Leftrightarrow 0,3 < x \leq \frac{31}{99} \Leftrightarrow \frac{297}{990} < x \leq \frac{310}{990}$ • 3 giá trị của x có $f(x) \in [0,99 ; 1,01]$ là $x = \{\frac{299}{990} ; \frac{300}{990} ; \frac{310}{990}\}$.	$\Leftrightarrow 0,3 < x \leq \frac{31}{99} \Leftrightarrow \frac{297}{990} < x \leq \frac{310}{990}$ • 3 valeurs de x telles que $f(x) \in [0,99 ; 1,01]$ sont : $x = \{\frac{299}{990} ; \frac{300}{990} ; \frac{310}{990}\}$

• *Stratégie consistant à prendre les bornes et le milieu d'un intervalle à bornes fractionnaires (1 cas)*

$x \neq \frac{3}{10}$ $\frac{29}{101} \leq x \leq \frac{31}{99}$ → 3 giá trị x : $\frac{29}{101}$; $\frac{3001}{9999}$; $\frac{31}{99}$ có thể chọn	$\begin{cases} x \neq \frac{3}{10} \\ \frac{29}{101} \leq x \leq \frac{31}{99} \end{cases}$ → trois valeurs de x possibles $\frac{29}{101} ; \frac{3001}{9999} ; \frac{31}{99}$

La fraction $\frac{3001}{9999}$ est la moitié de la somme des bornes et donc le milieu de l'intervalle. Le calcul du milieu a été réalisé à l'aide de la calculatrice, le calcul à la main étant très coûteux.

En résumé, 9 élèves sur 10 ayant donné un intervalle ou un encadrement pour x les ont exploré.

• Plus de la moitié des 9 élèves (5) ont une stratégie basée sur la décimalisation des bornes fractionnaires à l'aide de la calculatrice puis utilise l'ordre dans D_3 pour construire 3 valeurs de x de ces intervalles (ou encadrements). Ces 5 élèves montrent qu'ils savent intercaler un décimal de D_3 entre deux décimaux de D_2.

• Les 4 autres élèves mettent en oeuvre des connaissances sur l'ensemble des rationnels **Q** comme l'ordre et les opérations dans **Q,** à l'aide de la calculatrice, pour construire les fractions à partir des bornes rendues fractionnaires.

II.2. Réponses par la stratégie « Algèbres des équations »

Nous analysons les 11 réponses *Eq* selon les critères successifs suivants :

- Nombre de valeurs m trouvées dans [0,99 ; 1,01] (correspondant au nombre d'équations $f(x) = m$) : deux ou trois ?
- Nombres m choisis : fraction ou décimal (si oui, dans quel D_n) ?
- Valeurs de x : fraction ou décimal ?

Total	Nombre des m		m : fraction ou décimal ?		
	trois	deux (bornes)	décimal		rationnel
			D_2 et D_3	D_n (n>3)	
11	9	2	10	1	0

Tableau 14. Réponses par *Eq* selon 2 premiers critères

9 élèves (sur 11) construisent au moins une valeur décimale de $m \in$]0,99 ; 1,01[.

Conformément à nos prévisions, tous les m produits sont décimaux : 10 réponses (sur 11) choisissent m_1= 0,99, m_2 = 1,01 et $m_3 \in D_3$.

Un seul élève (codé 28) choisit successivement 3 valeurs de m dans D_3, D_4 et D_5 : 0,999 ; 0,9999 et 0,99999.

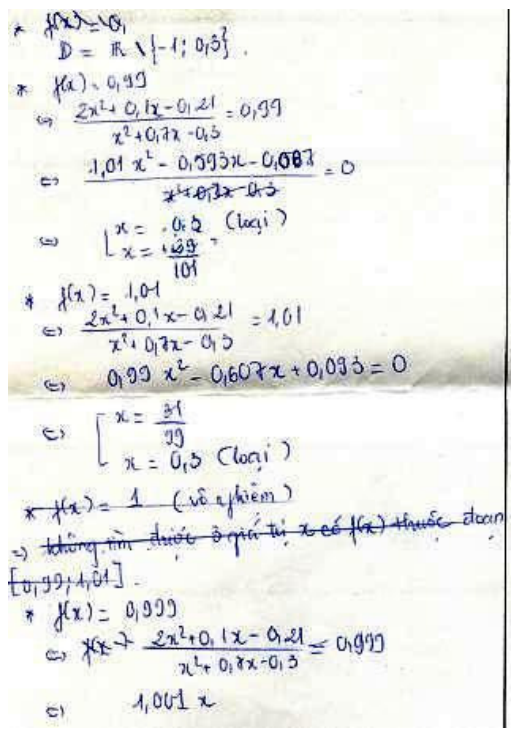
- De la difficulté à intercaler un décimal entre 0,99 et 1,01

Un des deux élèves qui résolvent les deux équations $f(x) = k$ (bornes de l'intervalle) se justifie ainsi :

> Alors, pour [0,99 ; 1,01], il n'y a que 2 valeurs de x, ce sont $x = \frac{29}{101}$ et $x = \frac{31}{99}$. Car il n'y a aucune valeur de x telle que $f(x) = 1$.

Cet élève affirme implicitement qu'il n'existe pas d'autres valeurs entre 0,99 et 1,01 que 1, valeur interdite (phase 1).

La difficulté supra se retrouve aussi dans la rature de l'une des 9 copies prenant 3 valeurs de m (l'élève 13).



~~* $f(x) = 0$~~

D = **R**\{-1 ; 0,3}

* $f(x) = 0{,}09$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3} = 0{,}99.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1{,}01x^2-0{,}593x+0{,}087}{\cancel{x^2+0{,}7x-0{,}3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0{,}3 \text{ exclu} \\ x = \frac{29}{101} \end{array}\right.$$

* $f(x) = 1{,}01$

[…]

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{31}{99} \\ x = 0{,}3 \text{ (exclu)} \end{array}\right.$$

~~* $f(x) = 1$ (n'a pas de solution)~~

~~⇒ On ne peut pas trouver 3 valeurs de x telles que $f(x) \in$ [0,99 ; 1,01].~~

* f(x) = 0,999

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3} = 0{,}999.$$

$$\Leftrightarrow 1{,}001x$$

De plus, 3 parmi ces 9 élèves résolvent de nouveau l'équation $f(x) = 1$ de la phase 1, avant de rechercher une valeur dans D_3. Cela renforce l'hypothèse que le choix $n = 3$ de la

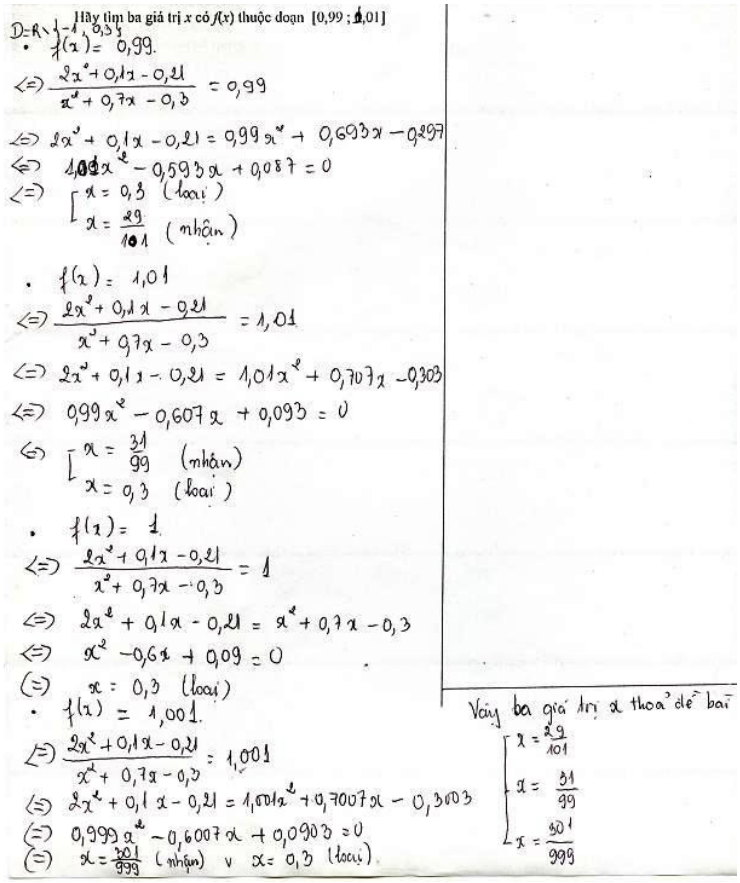
variable didactique « *Nombre des valeurs de x à trouve* » permet d'organiser un retour sur la décimalisation.

- De quelle nature sont les trois valeurs de x produites ?

Valeurs de x : fraction ou décimal ?		
fraction	Fraction et décimal	décimal
9	1	1

Tableau 15. Effectif selon la nature des valeurs de x

9 (sur 11) élèves répondent par des valeurs de x sous forme fractionnaire, comme par exemple l'élève 07



D = R\{-1 ; 0,3}

• $f(x) = 0,99$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} = 0,99$

$\Leftrightarrow 2x^2+0,1x-0,21 = 0,99x^2+0,693x-0,297$

$\Leftrightarrow 1,01x^2-0,593x+0,087 = 0$

$\Leftrightarrow$ x = 0,3 (exclu)

$x = \dfrac{19}{101}$ (accepté)

• $f(x) = 1,01$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} = 1,01$

[…]

$\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{31}{99}$ (accepté)

x = 0,3 (exclu)

• $f(x) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} = 1$

[…]

$\Leftrightarrow$ x = 0,3 (exclu)

• $f(x) = 1,001$

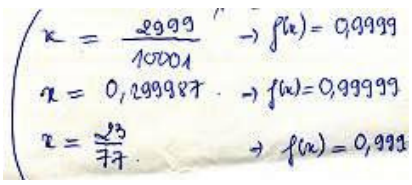
[…]$\Leftrightarrow x = \dfrac{301}{999}$ (accepté) x = 0,3 (exclu)

Trois valeurs de x satisfaisant à la demande : $x = \dfrac{29}{101}$ $x = \dfrac{31}{99}$ $x = \dfrac{301}{999}$

- Dans les 11 réponses par *Eq*, nous ne trouvons aucune trace de l'exécution de la fonction « SOLVE » de la calculatrice.

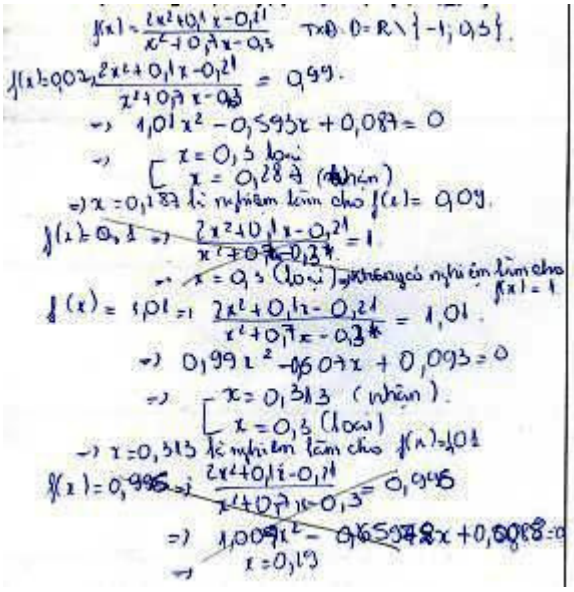
Seuls les deux élèves qui donnent x_i décimal pourraient utiliser la fonction « SOLVE » de la calculatrice.

• L'élève 28 répond par 2 valeurs x sous forme fractionnaire et la troisième sous forme décimale.



Comme nous l'avions prévu dans l'*analyse a priori* de la stratégie *Eq*, pour $m = 0{,}99999 \in D_5$, la racine $x = \dfrac{0{,}99999 - 0{,}7}{2 - 0{,}99999} = \dfrac{29999}{100001}$ est hors de *PAF* (le nombre de caractères composant cette fraction est égal 12 > 10). C'est un observé de l'usage du programme « EQN-1 degré 2 » de la calculatrice.

• L'élève 27 répond par 3 valeurs décimales.

	[…] : D = **R**\{-1 ; 0,3} $f(x) = 0{,}09 \Rightarrow \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} = 0{,}99.$ $\Rightarrow 1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087 = 0$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0{,}3 \text{ exclu} \\ x = 0{,}287 \text{ (accepté)} \end{array}\right.$ $\Rightarrow x = 0{,}287$ est la racine telle que $f(x) = 0{,}09$ $\cancel{f(x) = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} = 1}$ $\cancel{\Rightarrow x = 0{,}3 \text{ (exclu)} \Rightarrow \text{Il n'y a pas de racine telle que } f(x) = 1.}$ $f(x) = 1{,}01 \Rightarrow$ […] $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0{,}313 \text{ (accepté)} \\ x = 0{,}3 \text{ exclu} \end{array}\right.$ $\Rightarrow x = 0{,}313$ est la racine telle que $f(x) = 1{,}01$ $\cancel{f(x) = 0{,}996 \Rightarrow \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3} = 0{,}996}$ $\cancel{[\ldots]}$ $\cancel{\Rightarrow x = 0{,}19}$

La présence des observables des équations du second degré et des ordres des racines « $\left[\begin{array}{l} x = 0{,}3 \\ x = 0{,}287 \end{array}\right.$ » et « $\left[\begin{array}{l} x = 0{,}313 \\ x = 0{,}3 \end{array}\right.$ » atteste de l'exécution du programme « EQN-1 degré 2 » (voir le tableau 7 dans l'analyse *a priori* de la stratégie *Eq*).

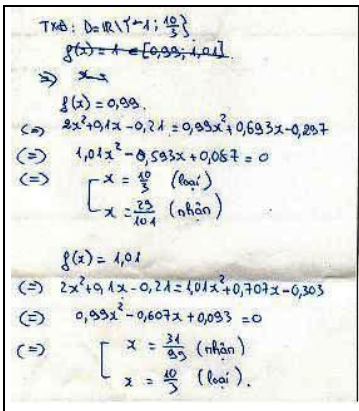
II.3. Echec de l'étude de la variation de la fonction *f*

Trois élèves tentent d'utiliser la stratégie « *Algèbre des équations – variation de la fonction f (Eq.Dérivée)* ».

Rappelons que le choix de la fonction *f* fait que la racine double du numérateur de la dérivée est aussi la valeur interdite, ce qui rend difficile l'étude de la variation de la fonction *f*. En effet, l'étude du signe de la dérivée doit être conduite comme si la racine n'était pas une valeur interdite.

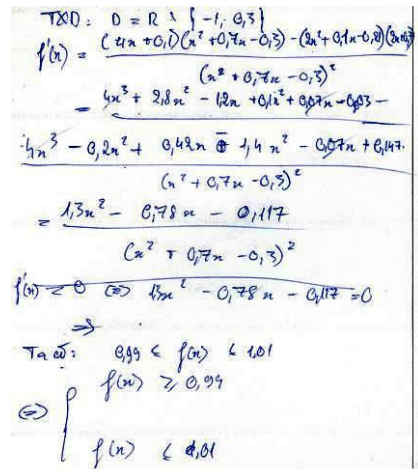
Trois copies montrent cette difficulté : les élèves 37 et 21 n'achèvent pas l'étude de la variation de la fonction ; l'élève 12 l'abandonne pour une stratégie *Inq*.

Examinons la première (élève 37).

		Domaine de définition : D = **R**\{-1 ; $\frac{10}{3}$ } ~~$f(x) = 1 \in [0,99 ;1,01]$~~ ~~$\Rightarrow x =$~~ $f(x) = 0,99$. […] $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{10}{3} \text{ (exclu)} \\ x = \frac{29}{101} \text{ (accepté)} \end{array}\right.$ $f(x) = 1,01$ […] $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{29}{101} \text{ (accepté)} \\ x = \frac{10}{3} \text{ (exclu).} \end{array}\right.$	$f'(x) = \frac{1,3x^2 - 0,78x + 0,117}{(x^2 + 0,7x - 0,3)^2}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$

La valeur interdite est noté $\frac{10}{3}$ au lieu de $\frac{3}{10}$, cette inversion provenant certainement d'une erreur de recopie de l'affichage fractionnaire de la calculatrice.

Une autre tentative d'étude de la variation de la fonction *f* se trouve dans la copie de l'élève 12 (l'une des 21 réponses *Inq*).

	Domaine de définition : **D** = R**{-1 ; 0,3}** $f'(x) = \frac{(4x + 0,1)(x^2 + 0,7x - 0,3) - (2x^2 + 0,1x - 0,21)(2x + 0,7)}{(x^2 + 0,7x - 0,3)^2}$ […] $= \frac{1,3x^2 - 0,78x + 0,117}{(x^2 + 0,7x - 0,3)^2}$ ~~$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,3x^2 - 0,78x - 0,117 = 0$~~ $\Rightarrow$ On a : $0,99 \leq f(x) \leq 1,01$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0,99 \\ f(x) \leq 1,01 \end{cases}$ […]

C'est bien l'étude du signe de la dérivée de *f* qui bloque l'étude de la variation de *f*. L'élève abandonne cette étude pour la stratégie *Inq*.

II.4. Réponses par la stratégie « Exploration d'un domaine de *x* avec la calculatrice »

Nous donnons dans le tableau 16 les trois valeurs validées x_i (i = 1,2,3) et les valeurs de $f(x_i)$ correspondantes des 4 élèves ayant utilisé cette stratégie.

$(x\,;f(x))$	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$
Elève 16	0,29	0,992248062	0,31	1,007633588	0,311	1,008390542
Elève 26	0,29	0,9922	0,295	0,99613	0,31	1,0076
Elève 34	0,29	0,992	0,291	0,993	0,292	0,994
Elève 35	0,29	$\frac{128}{129} \approx 0{,}99224$	0,291	$\frac{1282}{1291} \approx 0{,}99302$	0,292	$\frac{321}{323} \approx 0{,}9938$

Tableau 16. Valeurs de *x* validées par les 4 élèves de la stratégie *Dx.Calculatrice*

- Dans chaque réponse, les 3 valeurs de *x* constituent une suite croissante de décimaux de D_2 et de D_3 commençant par $x = 0{,}29$. Les élèves doivent donc accéder à D_3 pour trouver les trois valeurs de *x*.

Deux élèves (16 et 26) dépassent 0,3 ; les deux autres (34 et 35) intercalant, entre 0,29 et 0,3, les deux premiers décimaux successifs de D3.

- Comme nous l'avons montré, les résultats des calculs des $f(x)$ pour x dans D_2 ou D_3 appartiennent à *PAF*. Seul l'élève 35 écrit d'abord les résultats $f(x)$ sous forme fractionnaire pour ensuite les décimaliser pour valider les valeurs de *x*. Toutes les validations se font par comparaison de décimaux.

Nous présentons dans le tableau 17 les affichages sous forme décimal et fractionnaire de la calculatrice pour les *x* choisis par les 4 élèves.

x	0,29	0,291	0,292	0,295	0,31	0,311
Affichage des calculs f(x)	0,992248062	0,99302866	0,993808049	0,996138996	1,007633588	1,008390542
	$\frac{128}{129}$	$\frac{1282}{1291}$	$\frac{321}{323}$	$\frac{258}{259}$	$\frac{132}{131}$	$\frac{1322}{1311}$

Tableau 17. Affichages sous forme décimale et fractionnaire de la calculatrice pour les x choisis

Conformément aux observables de la situation 1, nous retrouvons dans les 4 réponses les types des décimaux provenant des calculs instrumentés de $f(x)$ par la calculatrice :

• L'élève 16 recopie l'affichage décimal de la calculatrice

• Les élèves 26 et 35 tronque cet affichage

• L'élève 34 l'arrondit

- Comment les quatre élèves arrivent-ils aux trois valeurs validées ?

• Les deux élèves 26 et 34 n'écrivent que les 3 valeurs de *x* (et $f(x)$) validées. Il y a donc deux possibilités : soit ces élèves choisissent trois valeurs pour x proches de 0,3 en s'appuyant sur la règle d'action « *pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3* » soit ils l'apprennent par essais avec la calculatrice en ne recopiant que les essais validés.

• Les élèves 16 et 35 écrivent leurs essais successifs : ils nous permettent ainsi d'avoir accès aux connaissances implicites qui sous-tendent ce processus et sur les éléments du milieu qui permettent leur apprentissage.

Les valeurs décimales et la plupart des calculs de $f(x)$ dans les deux copies montrent que les élèves utilisent les touches ALPHA, X (ou autres touches mémoires A, B, C, …), et la touche CALC.

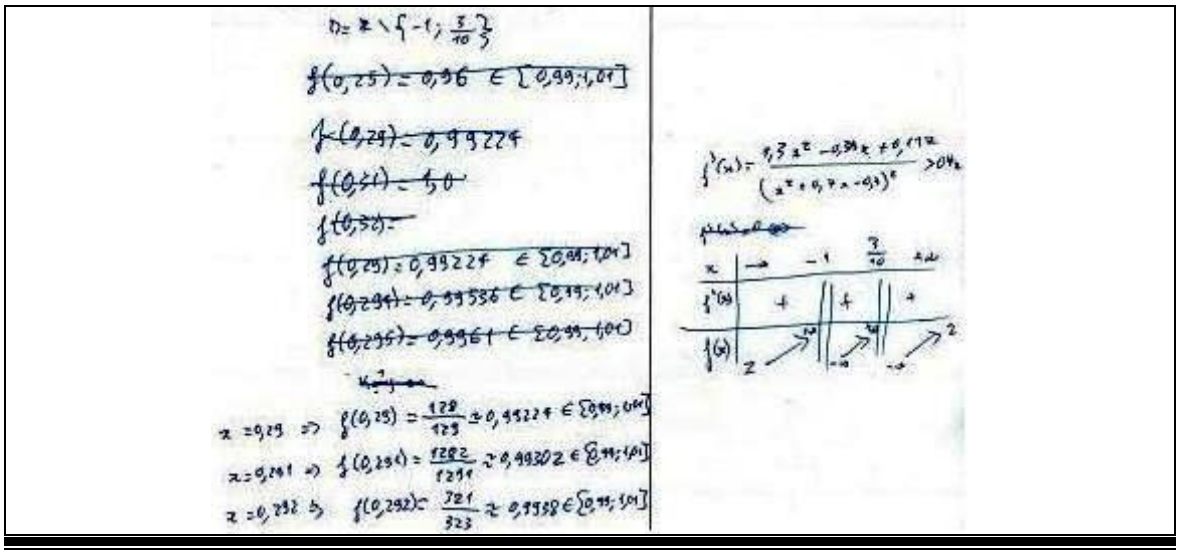
Nous prendrons d'abord la copie de l'élève 16.

(ĐK : $x \neq -1$ và $x \neq 0,3$). ~~$x = 1,34$~~ ~~Ta có :~~ ~~$x = 0,99 \Rightarrow f(x)$~~ Ta có : $x = 0,01 \Rightarrow y = 0,721871287$. $x = 0,02 \Rightarrow y = 0,725490196$. $x = 0,03 \Rightarrow y = 0,737864077$. $x = 0,09 \Rightarrow y = 0,807339449$. $x = 0,1 \Rightarrow y =$ $x = 0,25 \Rightarrow y = 0,96$. $x = 0,26 \Rightarrow y = 0,968253968$ $x = 0,27 \Rightarrow y = 0,976377952$. $x = 0,29 \Rightarrow y = 0,992248062$. $x = 0,31 \Rightarrow y = 1,007633588$ $x = 0,311 \Rightarrow y = 1,008390542$.	(Condition : $x \neq -1$ et $x \neq 0,3$). ~~$x = 1,34$~~ ~~On a :~~ ~~$x = 0,99 \Rightarrow f(x)$~~ On a : $x = 0,01 \Rightarrow y = 0,721871287$. $x = 0,02 \Rightarrow y = 0,725490196$. $x = 0,03 \Rightarrow y = 0,737864077$. $x = 0,09 \Rightarrow y = 0,807339449$. $x = 0,1 \Rightarrow y =$ $x = 0,25 \Rightarrow y = 0,96$. $x = 0,26 \Rightarrow y = 0,968253968$ $x = 0,27 \Rightarrow y = 0,976377952$. $x = 0,29 \Rightarrow y = 0,992248062$. $x = 0,31 \Rightarrow y = 1,007633588$ $x = 0,311 \Rightarrow y = 1,008390542$.

Les premiers essais $x = 0,01$; 0,02 et 0,03 (espacées d'un pas 0,01) montre que l'élève 16 commence le processus de tâtonnement sans la connaissance « *pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3* ». Les valeurs décimales des $f(x)$ (pour ces 3 valeurs de *x)* recopiées à partir de l'écran de la calculatrice fournissent l'information sur la nature de la monotonie « pragmatique » de *f*.

Le premier saut de pas 0,06 pour l'essai $x = 0,09$ montre que l'élève s'appuie sur une première règle d'action (monotonie pragmatique) « *plus x augmente, plus f(x) augmente* ». Le second saut de pas 0,15 pour l'essai $x = 0,25$ affirme l'apprentissage la deuxième règle d'action « *pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3* ». L'élève sort en effet de D_2 pour choisir la troisième valeur validée $x = 0,311$.

La première règle d'action « *plus x augmente, plus f(x) augmente* » explique l'étude de variation de la fonction de *f* dans *la copie de l'élève 35.*



~~D = **R**\{-1 ; $\frac{3}{10}$}~~ ~~$f(0,25) = 0,96 \in [0,99 ; 1,01]$~~ ~~$f(0,29) = 0,99224$~~ ~~$f(0,31) = 1,0$~~ ~~$f(0,32) =$~~ ~~$f(0,29) = 0,99224 \in [0,99 ; 1,01]$~~ ~~$f(0,291) = 0,99536 \in [0,99 ; 1,01]$~~ ~~$f(0,295) = 0,9961 \in [0,99 ; 1,01]$~~ ~~Alors~~ $x = 0,29 \Rightarrow f(0,29) = \frac{128}{129} \approx 0,99224 \in [0,99 ; 1,01]$ $x = 0,291 \Rightarrow f(0,291) = \frac{1282}{1291} \approx 0,99302 \in [0,99 ; 1,01]$ $x = 0,292 \Rightarrow f(0,29) = \frac{321}{323} \approx 0,9938 \in [0,99 ; 1,01]$	$f'(x) = \frac{1,3x^2 - 0,31x + 0,117}{(x^2 + 0,7x - 0,3)^2}$ ~~$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$~~ x: $-\infty$; -1 ; $\frac{3}{10}$; $+\infty$ $f'(x)$: + ‖ + ‖ + $f(x)$: $2 \nearrow +\infty$ ‖ $-\infty \nearrow +\infty$ ‖ $-\infty \nearrow 2$

Les ratures des $f(x)$ portant sur des valeurs validées de x comme 0,31 ; 0,29 ; 0,294 ; 0,295 et les écritures fractionnaires révèlent l'hésitation de l'élève 35 à donner une réponse à l'aide des seules informations de l'affichage décimal de la calculatrice.
L'étude de la variation de la fonction montre une recherche de validation théorique des calculs instrumentés par la calculatrice.

Le calcul du dénominateur de la dérivée est erroné : le coefficient correct de x est 0,78 (et non 0,31). L'élève ne rencontre donc pas le problème de l'étude de signe du dénominateur dont la racine double est la valeur interdite. Dans ce cas, l'équation $1,3x^2 + 0,31x + 0,117$ n'a pas de solution (le programme « EQN-1 Degré 2 » donne deux solutions complexes). L'élève conclut donc que le dénominateur de $f'(x)$ est positif pour tout x, c'est-à-dire que $f'(x)$ est positif pour tout $x \in D_f$: d'où la monotonie théorique établie dans le tableau de la variation.

Remarquons que dans ce tableau, l'élève écrit $+\infty$ et $-\infty$ pour la limite de f en 0,3. Cela est conforme au contrat institutionnel de l'étude des fonctions : toutes les fonctions rationnelles à étudier dans le manuel *Analyse 12* (2003) dont le domaine de définition est de la forme D = R\\{a} ou R\\{a, b} ont les droites $x = a$ et $x = b$ (si b existe) comme asymptotes verticales.

II.5. Synthèse de l'enseignant

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau (chronologiquement)
	Question 2 : Donner trois valeurs de x telles que $f(x)$ appartienne à [0,99 ; 1,01]
P : Pour cette question, je trouve dans vos réponses 3 méthodes principales et je les synthétise au tableau.	
La première méthode est de résoudre 3 équations $f(x) = 0{,}99$ et $f(x) = 1{,}01$ et la troisième ; par exemple, l'élève 11 et certains entre vous ont choisi $f(x) = 1{,}001$.	1. $f(x) = 0{,}99$; $f(x) = 1{,}01$; $f(x) = 1{,}001$
Dans la deuxième méthode, certains camarades proposent 3 valeurs x_1, x_2 et x_3, calculent $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$ à l'aide de la calculatrice, et vérifient si ces images appartiennent au segment [0,99 ; 1,01].	2. $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow f(x_1), f(x_2)$ et $f(x_3) \in$ [0,99 ; 1,01] ?
Es protestent : C'est le tâtonnement !	
P : Pour la dernière méthode, certains camarades résolvent une double inéquation $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$.	3. $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$
Es : C'est long et difficile.	

(Extrait du protocole reproduit à partir de l'enregistrement video de la séance 2)

L'enseignant rend donc publiques les trois stratégies présentes le plus souvent *Eq*, *Dx.Calculatrice* et *Inq* : la stratégie *Eq.Dérivée* n'est pas mentionnée et il ne conclut pas.

L'ordre choisi par l'enseignant ne respecte pas une hiérarchie basée sur l'effectif puisqu'il ne mentionne qu'en dernier la stratégie majoritaire *Inq*. Les trois stratégies sont ainsi mises sur un pied d'égalité et validées par l'enseignant. Par ailleurs, les élèves réagissent de manière significative. Ils reconnaissent le fait que la stratégie *Inq* est coûteuse en temps et en difficulté et protestent contre la stratégie *Dx.Calculatrice* qui n'est pour eux qu'un tâtonnement qui n'a pas sa place dans une classe de mathématique de niveau 12.

Par cette synthèse, l'enseignant lève l'interdit institutionnel sur le tâtonnement.

On peut donc penser que dans la suite de l'ingénierie deux stratégies seront en concurrence avec la stratégie *Inq* : les stratégies *Eq* et *Dx.Calculatrice*.

Conclusion de la situation 2

La situation 2 montre que la calculatrice est constamment présente non seulement dans *Dx.Calculatrice* mais aussi dans les stratégies algébriques. La calculatrice cohabite avec le travail algébrique pour renforcer le contrat institutionnel de l'algèbre au travers du programme « EQN-1 Degré 2 » et des touches ab/c et d/c.

Les résultats de la phase 1, « $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-1 ; 0{,}3\}$ » ou « $x \neq -1$ et $x \neq 0{,}3$ » et « il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x) = 1$ », sont validées par un milieu algébrique constitué par la résolution d'équation du premier ou du second degré instrumenté par le programme « EQN -1 Degré 2 » qui donne immédiatement les racines. Dans la phase 2, les interdits : « *0,3 est une valeur interdite pour x* » et « *1 est une valeur interdite pour f(x)* » jouent le rôle d'élément du milieu pour la validation (Margolinas 1993).

La phase 2 met en lumière certaines pratiques numériques disponibles : la grande majorité des élèves (22 sur 25)[1] rencontre le problème d'intercalation d'un décimal ou d'une fraction dans un « petit » intervalle, c'est-à-dire dans un intervalle tel que les bornes soient à une distance inférieure à un centième, et le résout avec succès. Cette réussite se fonde sur des pratiques numériques du collège justifiées par l'ordre dans **D** (décimalisation par passage de D_2 à D_3 ou D_4) ou dans **Q** (réduction au même dénominateur pour se ramener à l'ordre dans **N**).

L'exercice proposé dans la phase 2 relève d'une tâche d'approximation. Cependant, les élèves n'ont pas les moyens de la reconnaître comme telle. Par contre, ils peuvent aisément ramener celle-ci à des tâches algébriques apparemment classiques, cette interprétation étant renforcé par le contrat institutionnel fortement algébrisé dans l'EMS vietnamienne (cf. Le Van 2001, Nguyen 2005). C'est bien ce que font tous les élèves sauf 4.

Cette deuxième phase permet de confronter les élèves au problème du coût et du risque d'erreur des stratégies algébriques et d'envisager l'émergence d'une stratégie d'essais instrumentée par la calculatrice *Dx.Calculatrice* malgré une péjoration institutionnelle du tâtonnement auquel elle est associée. C'est ce que font 4 élèves. Dans la synthèse, l'enseignant réhabilite le tâtonnement. Ces deux faits essentiels préparent la mise en place de la stratégie fondamentale de l'approximation dans la suite de l'ingénierie didactique.

[1] 9 sur 10 pour *Inq*, 9 sur 11 pour *Eq* et 4 sur 4 pour *Dx.Calculatrice*.

Chapitre C3
Jeu « A la recherche de meilleur couple (x ; $f(x)$) »

Première partie
Analyse *a priori* de la situation 3

Déroulement (60 minutes)

• L'enseignant écrit au tableau la fonction f ainsi que les résultats de la situation 2. Ces écrits resteront présents durant toute la phase 1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$.

Question 1 : Résolvez l'équation $f(x) = 1$

Condition : $x \neq 1$ et $x \neq 0{,}3$
$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1 ; 0{,}3\}$
Il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ soit égale à 1

Question 2 : Donnez trois valeurs de x telles que $f(x)$ appartienne à [0,99 ; 1,01]

1. $f(x) = 0{,}99$; $f(x) = 1{,}01$; $f(x) = 1{,}001$
2. $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow f(x_1), f(x_2)$ et $f(x_3) \in [0{,}99 ; 1{,}01]$?
3. $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$

1. Jeu « A la recherche du meilleur couple (x ; f(x)) »

• La classe est partagée en binôme. Chaque binôme reçoit trois fiches (format A4), une fiche : « Règle du jeu - Réponse du binôme » et deux fiches personnelles.

- Fiche : « Règle du jeu - Réponse du binôme »

Règle du Jeu « À la recherche du meilleur couple (x ; $f(x)$) »

Vous travaillez en binôme.

Chaque binôme A et B cherche à trouver un couple de nombres (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit proche de 1.

La recherche comporte deux phases

Phase 1. (15 minutes)

A travaille avec $x < 0{,}3$ et B avec $x > 0{,}3$.

Ils travaillent individuellement durant 10 minutes.

Chacun doit noter ses couples successifs sur sa fiche personnelle et entourer le couple qu'il juge le meilleur (c'est-à-dire tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1).

Phase 2. (10 minutes)

A et B *se réunissent* pour écrire les couples entourés.

Puis ils décident entre eux le couple « *le meilleur* » à proposer à la classe.

Le binôme gagnant de la classe sera celui qui donnera le meilleur couple de la classe, c'est-à-dire le couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1

Feuille Phase 2	
« meilleur » couple de A : couple entouré sur la fiche personnelle de A	
« meilleur » couple de B couple entouré sur la fiche personnelle de B	
« meilleur » couple de l'équipe **à proposer à la classe**	
Justifier la décision **pour le meilleur couple de l'équipe**	

- « Fiches personnelles » :

Fiche personnelle pour $x < 0{,}3$ de **A** : …… …… Équipe : ……..		
x	$f(x)$	**Brouillon**
0	0,7	

Fiche personnelle pour $x > 0{,}3$ de **B** : …… Équipe : ……..		
x	$f(x)$	**Brouillon**
1	1,35	

• L'enseignant lit la règle et l'enjeu du jeu écrite sur la fiche « règle du jeu – Réponse du binôme ».

• Les binômes travaillent pendant 25 minutes.

• L'enseignant ramasse les fiches personnelles et les feuilles « Règle du jeu – Réponse du binôme » puis écrit une synthèse des couples (x ; $f(x)$) des binômes au tableau.

• L'enseignant organise un travail collectif sur les couples des binômes. Ce travail vise à valider la légalité ou l'illégalité de l'ensemble « couples des binômes et justifications du choix » *sans conclure sur l'existence du meilleur couple de la classe*.

2. Questions pour la conclusion du jeu

• La feuille « Question 3 » (format A4) est distribuée aux élèves :

Question 3. (5 minutes) Est-ce qu'il existe un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 1 ? Justifiez votre réponse.	Brouillon

• Les élèves travaillent individuellement. Au bout de 5 minutes les réponses sont ramassées.

• L'enseignant s'appuie sur les réponses des élèves pour conclure à l'inexistence du couple tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1 par l'argumentation suivante :

> Pour chaque entier n fixé, on peut trouver x_0 tel que $f(x_0) = 0,\underbrace{9...9}_{n}$ (ou $f(x_0) = 1,\underbrace{0...0}_{n}1$). En augmentant n, on peut toujours trouver un meilleur couple que le couple précédent.

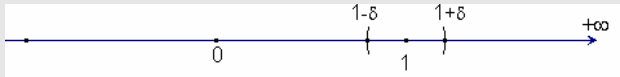
• La feuille « Question 4 » (format A4) est distribuée aux élèves.

Question 4. (5 minutes) En utilisant la calculatrice : calculez $f(0,299999)$ par la formule F_1 et $f(0,3\underbrace{0...0}_{8}1)$ par la formule F_2. Que pensez-vous des résultats donnés par la calculatrice ?	Brouillon

• Les élèves travaillent individuellement. Au bout de 5 minutes les réponses sont ramassées.

• L'enseignant s'appuie sur les réponses des élèves pour conclure.

> L'affichage 1 de la calculatrice n'est pas un résultat exact : cet affichage représente un intervalle centré en 1, c'est-à-dire un voisinage de 1.



I. Variables micro-didactiques pour la situation 3

1) *Domaine de proximité*

a. Le jeu est la recherche d'un couple (x ; $f(x)$) tel que « *f(x) soit le plus proche possible de 1* » contre « *x soit le plus proche possible de 0,3* ».

Ce choix se justifie par le fait que du point de vue de la notion de limite, la problématique d'« approximation $f(x)$ » (contre la problématique d'« approximation x ») est l'enjeu final de l'ingénierie didactique : *on peut toujours trouver un couple (x ; f(x)) telle que f(x) soit aussi proche que l'on veut de 1*.

b. La recherche d'un couple (x ; $f(x)$) tel que « *f(x) soit le plus proche possible de 1* » contre $f(x)$ appartenant à un intervalle petit de 1 (par exemple, $f(x) \in [0,999 ; 1,001]$) permet de favoriser la stratégie *Dx-calculatrice* tant que le calcul de $f(x)$ instrumenté par la calculatrice est possible. L'absence dans ce choix de la donnée d'un intervalle pour *f(x)* rend difficile le fonctionnement de la quasi équivalence entre intervalle et inéquations et donc peu probable la stratégie *Inq*.

2) *Conditions initiales*

a. On demande de travailler soit avec $x < 0,3$ (c'est-à-dire $x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0,3[$) pour A ou $x > 0,3$ (c'est-à-dire $x \in]0,3 ; +\infty[$) pour B contre un travail avec $f(x) < 1$ ou $f(x) > 1$. Dans la concurrence entre des stratégies algébriques ou non algébriques, le choix d'indiquer un intervalle non borné de x favorise le prolongement de la stratégie non

algébrique *Dx-calculatrice* (situation 2), pouvant être attachée à une problématique d'« approximation x » de la notion de limite.

Nous avons vu (cf. chapitre A1) qu'une problématique d'« approximation x » de la notion de limite est favorable à la mise en place de celle d'« approximation $f(x)$ » de la notion de limite (cf. chapitre A1).

b. Nous ne limitons pas le domaine d'exploration de x, c'est-à-dire que nous ne proposons pas par exemple $]a$; 0,3[pour A et]0,3 ; b[pour B. Cependant, les données des couples (0 ; 0,7) dans la fiche personnelle de A et (1 ; 1,35) limitent implicitement les intervalles d'exploration de x. En effet, les règles d'action de la monotonie pragmatique de f comme « *plus x augmente, plus f(x) augmente* » ou « *plus x diminue, plus f(x) diminue* » peuvent conduire à explorer les x dans]0 ; 0,3[pour A et]0,3 ; 1[pour B.

c. La limitation (A travaille avec $x < 0,3$ et B avec $x > 0,3$) simplifie le travail individuel de A et de B. Le meilleur couple pour A sera un x tel que $f(x)$ soit proche de 1 par valeur inférieure et pour B un x tel que $f(x)$ soit proche de 1 par valeur supérieure. Cela privilégie la distance à 1 comme critère de comparaison pour décider du meilleur couple du binôme.

3) *Variable de l'organisation de travail*

a. Le choix de l'ordre « *travail individuel – travail en binôme* » permet dans un premier temps à chaque élève A et B de s'engager dans une stratégie personnelle pour écrire le meilleur couple, puis dans un second temps de *coopérer* pour confronter leurs résultats et débattre pour décider du meilleur couple (x ; $f(x)$) du binôme et de la justification de la décision prise.

b. Les binômes jouent les uns contre les autres (et non les uns avec les autres) : ainsi il y a un enjeu pour chaque binôme de construire un critère de comparaison pour décider du meilleur couple (distance à 1) ou d'améliorer ensemble leurs résultats.

II. Jeu « À la recherche du meilleur couple (x ; $f(x)$) »

II.1 Stratégies possibles

Nous ne considérerons pas la stratégie *Inq* car la non donnée d'un intervalle d'appartenance pour *f(x)* et son coût la rende très peu probable.

Ici nous n'envisagerons que deux types de stratégies, celles issues des stratégies *Dx.Calculatrice* et *Eq* de la situation 2.

- Dans le prolongement de la stratégie *Dx.Calculatrice* et sous l'hypothèse du fonctionnement de la règle d'action « *pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3* » de la situation 2, une valeur de x « proche de 0,3 » est choisie, puis son image $f(x)$ est calculée (à la main ou à l'aide de la calculatrice). Cette première stratégie est attachée à la problématique d'« approximation x » de la notion de limite.

- Dans le prolongement de la stratégie *Eq* et sous l'hypothèse de l'exploration de l'intervalle [0,99 ; 1,01], une valeur de m proche de 1 est choisie, puis une valeur de x est calculée en résolvant l'équation $f(x) = m$. Cette deuxième stratégie est attachée à la problématique « approximation $f(x)$ » de la notion de limite.

a. Choix de *x* dans un voisinage de 0,3 : « *Dx* »

La stratégie *Dx* porte sur la relation fonctionnelle $x \rightarrow f(x)$. L'image de f(x) est calculée à partir d'une valeur initiale pour x satisfaisant à la limitation : $x < 0{,}3$ (cas A) ou $x > 0{,}3$ (cas B).

Le calcul de $f(x)$ peut se réaliser par :

- la formule initiale $F_1 = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$,

- la formule simplifiée $F_2 = \dfrac{2x + 0{,}7}{x + 1}$.

32 élèves (sur 38) utilisent la formule F_1 dans la question 2 de la situation 2 et 6 la formule F2. Nous pouvons prévoir la prédominance de la formule F_1 et l'utilisation des touches ALPHA, X (ou autres touches mémoires A, B, C, D, E, F, Y, M), CALC de la calculatrice pour le calcul de $f(x)$ dans l'un et l'autre cas.

a.1. Réponses possibles par $F_1 = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$ en relation avec les affichages de la calculatrice

Les réponses possibles dépendent du comportement numérique de la calculatrice CASIO fx-570MS dans le calcul de $f(x)$. Les affichages, suite aux appuis de touches de la calculatrice, fournissent des *informations* et des *rétroactions* au sujet : ces affichages jouent donc le rôle d'éléments du milieu matériel dans cette situation (et dans toute l'ingénierie). Nous allons étudier ces affichages pour caractériser les informations et les rétroactions suite à des appuis de touches de la calculatrice.

Un premier constat est que l'affichage de la calculatrice du calcul de $f(x)$ vérifie une loi « limite » :

si $x < 0{,}3$ alors $f(x) \leq 1$,
si $x > 0{,}3$ alors $f(x) \geq 1$.

Nous allons analyser maintenant comment elle est respectée.

Si on approche 0,3 par des nombres décimaux de D_i où i augmente (i = 1, 2, 3…), le comportement numérique de la calculatrice change selon deux domaines de D_i que nous avons appelé domaine de « monotonie pragmatique » et domaine de « non monotonie pragmatique »

Le domaine de « monotonie pragmatique » se restreint au calcul des images *f(x)* de valeurs de x « proches de 0,3 » par des nombres décimaux appartenant à des D_1, D_2, …, D_5 successifs par la stratégie *Dx-calculatrice*.

La calculatrice CASIO fx-570MS respecte pragmatiquement la monotonie de f pour $x \in D_1, D_2, \ldots, D_5$, mais pas au-delà. La monotonie « pragmatique » de f découlant du lien « entrées de x_i / affichages du résultat du calcul instrumenté $f(x_i)$ » est un milieu pour l'apprentissage ou la validation de la règle d'action « *pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3* ».

Le fonctionnement de connaissances sur l'ordre des décimaux conduit à choisir des approximations décimales de la valeur interdite 0,3 en prenant le maximum (cas A) ou le minimum (cas B) par rapport à 0,3 dans des D_i successifs : 0,29 dans D_2, 0,299 dans D_3,

…., $u_n = 0{,}2\underbrace{9...9}_{n}$ dans D_{n+1} (cas A) ou 0,301 dans D_3, 0,3001 dans D_4, …., $v_n = 0{,}3\underbrace{0...0}_{n}1$ dans D_{n+2} (cas B). Derrière ces choix, se construit une suite de décimaux « se rapprochant de 0,3 ».

Cependant, l'affichage de la calculatrice dans le domaine de « non monotonie pragmatique » pour D_i ($i \geq 6$) bloque cette construction. L'insuffisance du milieu matériel peut conduire soit à des généralisations portant sur la suite (x_i, $f(x_i)$) soit au passage à la problématique d'« approximation $f(x)$ » de la notion de limite.

Nous allons maintenant montrer comment l'affichage du calcul instrumenté des images, par f, de la suite des approximations décimales successives $u_n = 0{,}2\underbrace{9...9}_{n}$ *ou* $v_n = 0{,}3\underbrace{0...0}_{n}1$ *dépend des deux domaines de « monotonie pragmatique » et de « non monotonie pragmatique ».*

- Pour la suite croissante $u_n = 0{,}2\underbrace{9...9}_{n}$ (cas A)

D_i		D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_i (i > 7)
u_n		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_n ($n > 6$)
$f(u_n)$	décimal	0,992248062	0,999230177	0,999923071	0,999992307	1	1	1
	fractionnaire	$\frac{128}{129}$	$\frac{1298}{1299}$	hors de *PAF* (Porté de l'Affichage sous forme Fractionnaire)		?		

Tableau 1. Affichages de la calculatrice dans le calcul $f(u_n)$ par la formule F_1

• La calculatrice respecte la monotonie de f dans le calcul de $f(u_n)$ pour D_1, …, D_5.

• A partir de D_i tel que $i \geq 6$, elle affiche toujours 1 dans le calcul $f(u_n)$.

Est –ce que la calculatrice affiche de façon stable 1 pour tout $x \geq u_5$ *(D_6) ?*

• La calculatrice affiche de façon stable 1 dans le calcul de $f(x)$ pour tout $x > u_6$ (D_7). Mais elle n'affiche pas de façon stable 1 dans le calcul de $f(x)$ pour $x \in]u_5 ; u_6[$. Par exemple :

D_i	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_i (i >10)
x	0,299999 1	0,299999 11	0,299999 111	0,299999 1111	$0{,}299999\ \underbrace{1...1}_{i-6}$
$f(x)$	1	0,999999 135	0,999999 134	0,999999 134	0,999999 134

Tableau 2. Affichages dans le calcul de $f(x)$ pour $x = 0{,}299999\underbrace{1...1}_{n} \in]u_5 ; u_6[$

Le tableau 2 montre que la calculatrice ne respecte pas la monotonie de f dans ce cas.

- Pour la suite décroissante $v_n = 0{,}3\underbrace{0...0}_{n}1$ (cas B) :

D_i		D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_i (i > 10)
v_n		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_n (n >8)
$f(v_n)$	décimal	1,00076864	1,000076917	1,000007692	1	1	1	1	1	Math ERROR
	fractionnaire	$1\frac{1}{1301}$ ou $\frac{1302}{1301}$	$1\frac{1}{13001}$	hors de *PAF*	?					

Tableau 3. Affichages de calculatrice dans le calcul de $f(v_n)$ par la formule F_1

• La calculatrice respecte la monotonie de f dans le calcul de $f(v_n)$ avec $n < 4$ (D_1, …, D_5).

• Pour des D_i tels que $6 \leq i \leq 10$, la calculatrice affiche 1 dans le calcul de $f(v_n)$.

• A partir de D_{11}, la calculatrice fait une troncature et garde 0,3 : elle affiche donc « Math ERROR ».

Est –ce que la calculatrice affiche de façon stable 1 pour tout x : $v_8 \leq x \leq v_4$ (D_6) ?

• La calculatrice affiche de façon stable 1 dans le calcul de $f(x)$ pour tout $x \in]v_8 ; v_5[$. Elle n'affiche pas de façon stable 1 dans le calcul de $f(x)$ pour $x \in]v_5 ; v_4[$. Par exemple :

D_i	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_i (i > 10)
x	0,300000 9	0,300000 99	0,300000 999	0,300000 9999	$0{,}300000\ \underbrace{9...9}_{i-6}$
$f(x)$	1	1,000000 777	1,000000 77	1,000000 769	1,000000 769

Tableau 4. Affichages dans le calcul de $f(x)$ pour $x = 0{,}300000\underbrace{9...9}_{n} \in]v_5 ; v_4[$

Le tableau 2 montre que la calculatrice ne respecte pas la monotonie de f dans ce cas.

Dans l'exploration de x et le calcul de f(x), à partir de D_6 la calculatrice peut afficher la valeur interdite 1.

Les conséquences de cet affichage qui donne le résultat institutionnalisé – *1 est une valeur interdite pour f(x)* - dépendent du rapport personnel au calcul instrumenté par la calculatrice.

La règle implicite suivante sur le calcul instrumenté par la calculatrice peut ou non fonctionner : « *dans le calcul instrumenté par la calculatrice, si le résultat affiché est un entier ou affichable sous forme fractionnaire, alors ce résultat est exact ».*

• Fonctionnement de la règle implicite sur le calcul instrumenté dans Q

L'affichage de 1 dans le calcul, par exemple, pour $f(u_5)$ et $f(v_4)$ désigne alors une valeur exacte car 1 est entier (comme pour l'égalité $1{,}584354383 = \frac{1681}{1061}$ présente dans le premier calcul de la situation 1 dont le résultat est affichable sous forme fractionnaire).

Cette interprétation de 1 comme valeur exacte va interdire les valeurs u_5 ou v_4 : on peut alors envisager des processus d'exploration de $x < u_5$ (cas A) ou $x > v_4$ (cas B) à partir de D_6.

Nous examinerons ici les affichages de la calculatrice pour $x \in]u_4 ; u_5[$ (cas A) et $x \in]v_3; v_4[$ (cas B).

Cas A

- Pour $x \in]u_4 ; u_5[$, par exemple :

$x \in D_6$ et $0{,}29999 < x < 0{,}299999$								
x	0,29999 1	0,29999 2	0,29999 3	0,29999 4	0,29999 5	0,29999 6	0,29999 7	0,29999 8
$f(x)$	0,99999 3076	0,99999 3846	0,99999 4615	0,99999 5384	0,99999 6153	0,99999 6923	0,99999 7692	0,99999 6923

Tableau 5. Affichages du calcul de $f(x)$ pour $x \in D_6 \cap]u_4 ; u_5[$

$x \in D_7$ et $0{,}299998 < x < 0{,}299999$									
x	0,29999 81	0,29999 82	0,29999 83	0,29999 84	0,29999 85	0,29999 86	0,29999 87	0,29999 88	0,29999 89
$f(x)$	0,99999 7166	0,99999 7435	0,99999 7285	0,99999 7596	0,99999 7596	1	1	1	1

Tableau 6. Affichages du calcul de $f(x)$ pour $x \in D_7 \cap [0{,}299998 ; u_5]$

Comme nous l'avons déjà dit, la calculatrice ne respecte pas la monotonie de f dans ces deux cas : en grisé dans les tableaux 3 et 4, les valeurs « anormales ».

Une étude analogue nous montre que la calculatrice ne respecte pas non plus la monotonie de f pour x appartenant strictement à D_8 ou D_9. Pour x à partir de D_{10}, la calculatrice fait une troncature pour garder les 10 premiers chiffres, c'est-à-dire une valeur de D_9.

Cas B

- Pour $x \in]v_4 ; v_3[$, on trouve un comportement numérique similaire, par exemple :

$x \in D_6$ et $0{,}300001 < x < 0{,}30001$								
x	0,30000 2	0,30000 3	0,30000 4	0,30000 5	0,30000 6	0,30000 7	0,30000 8	0,30000 9
$f(x)$	1,00000 3077	1,00000 2308	1,00000 3077	1,00000 3846	1,00000 4615	1,00000 5385	1,00000 6154	1,00000 6923

Tableau 7. Affichages du calcul de $f(x)$ pour $x \in D_6 \cap [0{,}300001 ; 0{,}30001]$

$x \in D_7$ et $0{,}300001 < x < 0{,}300002$									
x	0,30000 11	0,30000 12	0,30000 13	0,30000 14	0,30000 15	0,30000 16	0,30000 17	0,30000 18	0,30000 19
$f(x)$	1	1	1	1	1,00000 2564	1,00000 2404	1,00000 2715	1,00000 2564	1,00000 2834

Tableau 8. Affichages du calcul de $f(x)$ pour $x \in D_6 \cap [0{,}300001 ; 0{,}300002]$

Quel est alors le meilleur couple telle que f(x) soit proche de 1 ?

Toutes les valeurs de $x \in [u_6 = 0{,}2999999 ; v_5 = 0{,}3000001]$ sont interdites puisque, pour tous les x dans cet intervalle, la calculatrice affiche soit 1 soit « Math ERROR », dans le calcul de $f(x)$ (cf. tableaux 1 et 2). Sous le fonctionnement de la règle implicite du calcul instrumenté dans Q, la réponse est un couple de nombres décimaux $(x ; f(x))$ tel que la calculatrice n'affiche pas 1 dans le calcul de $f(x)$. Nous nommons *Dx.Décimaux calculatrice* une telle réponse.

D'après les tableaux d'affichage 1 et 2, un couple $(x ; f(x))$ de cette réponse sera tel que $u_4 \leq x < u_6$ (cas A) ou $v_3 \geq x > v_5$ (cas B) ; autrement dit $10^{-7} < |x - 0{,}3| \leq 10^{-5}$.

Nous présentons dans le tableau 9 les meilleurs couples issus des tableaux de 1 à 8 :

$x \in D_i$	D_5	D_6	D_7	D_8
	Tableau 1	Tableau 5	Tableau 6	Tableau 2
Cas A	(u_4 = 0,29999 ; 0,999992307)	(0,299997 ; 0,999997692)	(0,2999985 ; 0,999997596)	(0,299999 11 ; 0,999999 135)
$x \in D_i$	D_5	D_6	D_7	D_{10}
	Tableau 3	Tableau 7	Tableau 8	Tableau 4
Cas B	(v_3 = 0,30001 ; 1,000007629)	(0,300003 ; 1,000002308)	(0,3000016 ; 1,000002404)	(0,300000 9999 ; 1,000000 769)

Tableau 9. Couples (x ; $f(x)$) pour la réponse *Dx.Décimaux calculatrice*

Les couples (x ; $f(x)$) dans le tableau 9 sont tels que $f(x) \in]1 - 10^{-5} ; 1 - 10^{-7}[$ (cas A) ou $f(x) \in]1 + 10^{-5} ; 1 + 10^{-7}[$ (cas B).

En résumé, les observables de la réponse *Dx.Décimaux calculatrice* sont des couples (x ; $f(x)$) tels que :

$$10^{-7} < |x - 0,3| \leq 10^{-5} \text{ et } 10^{-7} < |f(x) - 1| < 10^{-5}$$

Quels critères de comparaison pour décider du meilleur couple entre le cas A et le cas B ?

Dans les réponses *Dx.Décimaux de la calculatrice*, nous prévoyons l'intervention de la notion de distance à 1 comme critère de comparaison entre les deux meilleurs couples de A et B dans le *travail en binôme*. Nous attendons donc la présence de la notion distance à 1 dans la justification du choix du meilleur couple du binôme.

• Non fonctionnement de la règle implicite sur le calcul instrumenté dans Q

L'affichage 1 de la calculatrice dans le calcul de $f(x)$ est considéré comme une valeur approchée de 1, donc la valeur exacte de $f(x)$ est considérée comme différente de 1.

L'affichage 1 contraint à abandonner la stratégie *Dx-calculatrice* de la situation 2. Cet abandon peut conduire soit à élaborer des généralisations provenant de l'observation de l'affichage numérique de la calculatrice, soit à utiliser la stratégie *Dy.Eq* (voir plus loin).

Les généralisations provenant de l'observation de l'affichage numérique de la calculatrice peuvent être des trois ordres, des écritures décimales illimitées (*Dx.EDI*) ou limitées (*Dx.EDn)* ou écritures fractionnaires (*Dx.EF*)

- *Réponse Dx.EDI*

Cette réponse s'appuie sur ce qui a été enseigné sur les écritures décimales illimitées (EDI) au collège. On peut s'attendre à des réponses par un couple (x : $f(x)$) :

- d'EDIP9 institutionnelles :

• (0,2(9) ; 0,(9)) ou (0,2999… ; 0,999…) (cas A)

- d'EDI « *infini – fini* » comme :

• (0,2(9) ; 0,(9)2) ou (0,2999… ; 0,99…92) (cas A)

• (0,3(0)1 ; 1,(0)1) ou (0,30…01 ; 1,0…01) (cas B)

(0,3(0)1 ; 1,(0)7) ou (0,30…01 ; 1,0…07)

(0,3(0)1 ; 1,(0)76) ou (0,30…01 ; 1,0…076)

Le couple des EDIP9 peut être attaché aux conceptions « 0,(9) < 1 » et « 0,(9) est le plus proche de 1 » (Cf. Chapitre B2).

Les EDI « *infini – fini* » comme 0,(9)2 ; 1,(0)1 ; 1,(0)7 et 1,(0)76 sont des généralisations résultant de l'observation numérique de la calculatrice (cf. tableaux 1 et 2).

Les réponses par ces EDI (EDIP9 et « *infini – fini* ») s'appuient donc sur un ordre prolongé de celui de l'ensemble **D** et sur le fait que ces EDI sont considérés comme différents de 1.

Les réponses *Dx.EDI* permettent de revenir dans le travail public sur le problème de la représentation décimale des nombres réels dans la construction de la notion de limite. Elles permettent d'organiser une identification analytique « 0,999… = 1 » et le rejet des EDI « *infini – fini* ».

- *Réponse Dx.EDn*

Cette réponse revient à donner un couple des décimaux en indiquant par un indice *n* par exemple, le nombre de 9 (cas A) ou de 0 (cas B). Par exemple :

- $(\ 0{,}2\underbrace{9\ldots9}_{n}\ ;\ 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{n}\ )$ ou $(\ 0{,}2\underbrace{9\ldots9}_{n}\ ;\ 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{n}2\ )$ (cas A)
- $(\ 0{,}3\underbrace{0\ldots0}_{n}1\ ;1{,}\underbrace{0\ldots0}_{n}1\ )$ ou $(\ 0{,}3\underbrace{0\ldots0}_{n}1\ ;1{,}\underbrace{0\ldots0}_{n}7\ )$ ou $(\ 0{,}3\underbrace{0\ldots0}_{n}1\ ;1{,}\underbrace{0\ldots0}_{n}76\ )$ (cas B)

Dans la justification des binômes répondant par *Dx.EDn*, nous pouvons prévoir « *les modèles dynamiques* » (Robert 1982)[1], par exemple : « plus *n* augmente, plus $0{,}2\underbrace{9\ldots9}_{n}$ s'approche 0,3 et plus $1{,}\underbrace{0\ldots0}_{n}1$ s'approche donc de 1 ».

Ces réponses (*Dx.EDI et Dx.EDn*) montrent le rôle de la calculatrice dans la stratégie *Dx* et prennent acte des limites de l'affichage de la calculatrice pour *x* assez proche de 0,3. Elles rompent la relation fonctionnelle $x \to f(x)$, puisque, par exemple, $f(\ 0{,}2\underbrace{9\ldots9}_{n}\ ) \neq 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{n+1}$.

Dans le calcul de la distance de $f(x)$ à 1 entre des réponses de type *Dx.EDI* ou *Dx.EDn*, on peut prévoir des calculs de distance généralisant les opérations dans **D** : soit une EDI « *infini –fini* », par exemple 0,(0)1 soit une écriture décimale avec l'indice *n,* par exemple $0{,}\underbrace{0\ldots0}_{n}1$. Cette distance rend difficile voire impossible la comparaison entre les deux meilleurs couples de A et B. Que va-t-il se passer dans ce cas là ?

- *Réponse Dx.EF*

On peut envisager une généralisation de l'affichage fractionnaire à partir du calcul de $f(u_n)$ (cas A) et $f(v_n)$ (cas B) avec n = 1 et 2 en la loi arithmétique (correcte mais non prouvée) suivante :

- Pour $u_n = 0{,}2\underbrace{9\ldots9}_{n}$, on a $f(u_n) = \dfrac{12\underbrace{9\ldots9}_{n-1}8}{12\underbrace{9\ldots9}_{n}}$ (cas A).
- Pour $v_n = 0{,}3\underbrace{0\ldots0}_{n}1$, on a $f(v_n) = \dfrac{13\underbrace{0..0}_{n}2}{13\underbrace{0..0}_{n}1}$ ou $f(v_n) = 1\dfrac{1}{13\underbrace{0..0}_{n}1}$ (cas B).

[1] Les modèles dynamiques correspondent à l'utilisation d'un verbe d'évolution dans le temps ou dans l'espace. […] (Robert 1982, p. 317)

Les généralisations de $f(u_n) = \dfrac{12\underbrace{9...9}_{n-1}8}{12\underbrace{9...9}_{n}}$ (cas A) et $f(v_n) = \dfrac{13\underbrace{0..0}_{n}2}{13\underbrace{0..0}_{n}1}$ (cas B) ont peu probabilité parce que chacun de ces généralisation ne peut appuyer que sur 2 affichages fractionnaires des calculs des $f(u_1)$ et $f(u_2)$ (cas A) ou $f(v_0)$ et $f(v_1)$ (cas B).

Pourtant, la généralisation $f(v_n) = 1\dfrac{1}{13\underbrace{0..0}_{n}1}$ est possible parce que la calculatrice peut afficher les résultats des calculs de $f(0{,}31)$, $f(0{,}301)$ et $f(0{,}3001)$ sous forme fractionnaire mixte : ce sont $1\dfrac{1}{131}$, $1\dfrac{1}{1301}$ et $1\dfrac{1}{13001}$. De plus, observant la constitution arithmétique de ces trois fractions mixtes, la généralisation $f(v_n) = 1\dfrac{1}{1v_n}$ semble être simple.

a.2. Réponses possibles par $F_2 = \dfrac{2x+0{,}7}{x+1}$

Rappelons que 6 élèves ont utilisé la formule F_2 dans la question 2 de la situation 2. On peut donc s'attendre à l'utilisation, même si elle reste minoritaire, de la formule simplifiée F_2 pour calculer $f(x)$.

Avec la formule simplifié F_2, on peut envisager le calcul de $f(x)$ soit instrumenté par la calculatrice soit à la main.

Calcul de $f(x)$ instrumenté par la calculatrice

Domaine de « monotonie pragmatique de f »

Dans le calcul de $f(x)$ par la formule F_2, la calculatrice respecte la monotonie de f pour $x \in D_1, D_2, \ldots, D_9$. On peut construire une suite de décimaux « se rapprochant de 0,3 » jusqu'à $0{,}2\underbrace{9...9}_{8}$ ou $0{,}3\underbrace{0...0}_{7}1$ de D_9.

Domaine d'affichage stable de $0{,}\underbrace{9...9}_{9}$ *et de* 1

- La calculatrice affiche de façon stable $f(x) = 0{,}\underbrace{9...9}_{9}$ pour $x \in [\,0{,}2\underbrace{9...9}_{9}\ ;\ 0{,}3[$

Pour la suite $u_n = 0{,}2\underbrace{9...9}_{n}$ (cas A) :

u_n		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
$f(u_n)$	décimal	0,992248062	0,999230177	0,999923071	0,999992307	0,99999923	0,999999923
	fractionnaire	$\frac{128}{129}$	$\frac{1298}{1299}$	hors de *PAF*			

u_n		u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_n avec $n > 10$
$f(u_n)$	décimal	0,999999992	0,999999999	0,999999999	0,999999999	0,999999999
	fractionnaire	hors de *PAF*				

Tableau 10. Affichages de la calculatrice du calcul de $f(u_n)$ par la formule F_2

- La calculatrice affiche de façon stable 1 pour $x \in$]0,3 ; $0{,}3\underbrace{0...0}_{8}1$] :

Pour la suite $v_n = 0{,}3\underbrace{0...0}_{n}1$ (cas B) :

v_n		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$f(v_n)$	décimal	1,00076864	1,000076917	1,000007692	1,000000769	1,000000077	1,000000008
	fractionnaire	$1\frac{1}{1301}$ ou $\frac{1302}{1301}$	$1\frac{1}{13001}$	hors de *PAF*			

v_n		v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_n avec $n > 10$
$f(v_n)$	décimal	1,000000001	1	1	1	1
	fractionnaire	hors de *PAF*	?			

Tableau 11. Affichages de la calculatrice du calcul de $f(v_n)$ par la formule F_2

Quel est alors le meilleur couple tel que f(x) soit proche de 1 ?

Dans ce cas, des réponses similaires du cas a.1 (formule F_1) peuvent être prévues :

• *Dx.Décimaux calculatrice*

Par exemple : ($u_8 = 0{,}2\underbrace{9...9}_{8}$; $0{,}\underbrace{9...9}_{9}$) pour le cas A

($v_7 = 0{,}3\underbrace{0...0}_{7}1$; 1,000000001) pour le cas B

• *Dx.EDI*

Par exemple : (0,2(9) ; 0,(9)) ou (0,2999… ; 0,999…) pour le cas A

(0,3(0)1 ; 1,(0)1) ou (0,30…01 ; 1,0…01) pour le cas B

• *Dx.EDn*

Par exemple : ($0{,}2\underbrace{9...9}_{n}$; $0{,}\underbrace{9...9}_{n}$) pour A et ($0{,}2\underbrace{0...0}_{n}1$; $1{,}\underbrace{0...0}_{n}1$) pour le cas B

• *Dx.EF*

Par exemple :

Pour $u_n = 0{,}2\underbrace{9...9}_{n}$, on a $f(u_n) = \dfrac{12\underbrace{9...9}_{n-1}8}{12\underbrace{9...9}_{n}}$ (cas A).

Pour $v_n = 0{,}3\underbrace{0...0}_{n}1$, on a $f(v_n) = \dfrac{13\underbrace{0..0}_{n}2}{13\underbrace{0..0}_{n}1}$ ou $f(v_n) = 1\dfrac{1}{13\underbrace{0..0}_{n}1}$ (cas B).

Calcul de *f*(*x*) à la main

La formule F_2 étant simple, on peut envisager le calcul de $f(x)$ à la main sous le contrat du calcul exact. Dans ce cas, le couple (x ; $f(x)$) comporte x décimal et $f(x)$ fractionnaire. On peut prévoir les mêmes réponses que *Dx.EF*. En effet :

• Pour $u_n = 0{,}2\underbrace{9...9}_{n}$, on a $f(u_n) = \dfrac{2\times 0{,}2\underbrace{9...9}_{n} + 0{,}7}{0{,}2\underbrace{9...9}_{n} + 1} = \dfrac{12\underbrace{9...9}_{n-1}8}{12\underbrace{9...9}_{n}}$ (cas A).

• Pour $v_n = 0{,}3\underbrace{0...0}_{n}1$, on a $f(v_n) = \dfrac{2\times 0{,}3\underbrace{0...0}_{n}1 + 0{,}7}{0{,}3\underbrace{0...0}_{n}1 + 1} = \dfrac{13\underbrace{0...0}_{n}2}{13\underbrace{0...0}_{n}1}$ ou $f(v_n) = 1\dfrac{1}{13\underbrace{0..0}_{n}1}$ (cas B)

Contrairement aux réponses *Dx.EF*, la fraction mixte a peu de possibilité d'apparaître car le passage à la fraction mixte n'est pas une attente institutionnelle.

Nous nommons ce type de réponse « *Dx.Calcul exact* ».

b. Choix de *m* dans un voisinage de 1 : « Dy.Eq »

Dans la stratégie *Dy.Eq*, on choisit un voisin m de 1 ; puis on cherche une valeur de x telle que $f(x) = m$. Cette stratégie s'appuie sur la résolution de l'équation $f(x) = m$ dans un milieu algébrique constitué par la résolution d'équations du premier ou du second degré instrumenté par le programme « EQN-1 Degré 2 ». En effet, l'équation $f(x) = m$ peut se ramener soit à celle du second degré (formule F_1) soit à celle du premier degré (formule F_2).

Dans notre analyse on fait l'hypothèse du fonctionnement de la règle implicite suivante : « *si on choisit m < 1, la solution x de f(x) = m sera inférieure à 0,3 ; si on choisit m > 1, la solution x de f(x) = m sera supérieure à 0,3* ».

b1. Réponse « Dy.Eq 2e degré »

Les réponses observées dans la question 2 (situation 2) pour la stratégie *Eq* permettent de prévoir le choix d'un m décimal dans D_2, D_3, … L'équation $f(x) = m$ (correspondant à la formule initiale F_1) est ramenée à l'équation du second degré de la troisième étape de la technique de T « EQN → EQN 2e degré » : $(2 - m)x^2 + (0{,}1 - 0{,}7m)x + 0{,}3m - 0{,}21 = 0$, et utilise le programme « EQN-1 Degré 2 » pour la résoudre.

- Par exemple, les réponses portant sur les bornes de l'intervalle [0,99 ; 1,01] de la situation 2 peuvent être reprises :

• ($\dfrac{29}{101}$; 0,99) ou (0,287128712 [2] ; 0,99) pour le cas A

• ($\dfrac{31}{99}$; 1,01) ou (0,313131313 [3] ; 1,01) pour le cas B

[2] Affichage décimal de la racine x_1 du programme « EQN-1 Degré 2 » pour résoudre l'équation $1{,}01x^2 - 0{,}593x + 0{,}087 = 0$.

Ces *m* sont choisis les plus proches de 1 dans D_2 : 0,99 (cas A) ou 1,01 (cas B).

La résolution des équations de cette stratégie dépend du comportement numérique du programme « EQN-1 Degré 2 ».

Le fonctionnement de connaissances sur l'ordre des décimaux conduit à choisir des approximations décimales de la valeur interdite 1 en prenant le maximum (cas A) ou le minimum (cas B) par rapport à 1 dans des D_i successifs : 0,9, 0,99, …., $0,\underbrace{9...9}_{i}$ (cas A) et 1,01, 1,001, …., $1,\underbrace{0...0}_{i}1$ (cas B). Derrière ces choix, se construit une suite de décimaux « se rapprochant de 1 ».

Pour les équations $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{n}$ et $f(x) = 1,\underbrace{0...0}_{n}1$, les équations du second degré dans la troisième étape de la technique de T « EQN → EQN 2e degré » sont :

$$1,\underbrace{0...0}_{n}1\,x^2 - 0,5\underbrace{9...9}_{n}3\,x + 0,0\underbrace{8...8}_{n}7 = 0 \quad (1)$$

$$0,\underbrace{9...9}_{n}\,x^2 - 0,6\underbrace{0...0}_{n}7\,x + 0,0\underbrace{9...0}_{n}3 = 0 \quad (2)$$

Nous donnons dans le tableau 12 le comportement numérique du programme « EQN1-Degré 2 » pour les équations du second degré (1) et (2).

	Equation (1) de $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{n}$				Equation (2) de $f(x) = 1,\underbrace{0...0}_{n}1$			
2 racines	x_1		x_2		x_1		x_2	
affichage	D	F	D	F	D	F	D	F
n = 2	0,3	$\frac{3}{10}$	0,287128712	$\frac{29}{101}$	0,313131313	$\frac{31}{99}$	0,3	$\frac{3}{10}$
n = 3	0,3	$\frac{3}{10}$	0,298701298	$\frac{299}{1001}$	0,301301301	$\frac{301}{999}$	0,3	$\frac{3}{10}$
n = 4	0,3	$\frac{3}{10}$	0,299870013	$\frac{2999}{10001}$	0,300130013	$\frac{3001}{9999}$	0,3	$\frac{3}{10}$
n = 5	0,3	$\frac{3}{10}$	0,299987	hors PAF	0,300013	hors PAF	0,3	$\frac{3}{10}$
A partir de n ≥ 6, le comportement numérique est perturbé								
n = 6	x = 0,29999935				x = 0,30000065			
n = 7	x = 0,299999935				x = 0,300000065			
n = 8	x = 0,299999993				x = 0,300000006			
n = 9	x = 0,299999999				x = 0,3			
n = 10	x = 0,3				x_1 = 0,3 + 0,000004579i x_2 = 0,3 - 0,000004579i			
n = 11	x_1 = 0,3 + 0,000004472i x_2 = 0,3 - 0,000004472i				x_1 = 300003 x_2 = 0,299997			
n = 12	x_1 = 0,3 + 0,000004472i x_2 = 0,3 - 0,000004472i				x_1 = 300003 x_2 = 0,299997			
n>12	Stable avec $x_{1/2}$ = 0,3 ± 0,000004472i				Stable avec x_1 = 300003 x_2 = 0,299997			

Tableau 12. Comportement numérique du programme « EQN-1 Degré 2 »

[3] Affichage décimal de la racine x_2 du programme « EQN-1 Degré 2 » pour résoudre l'équation $0,99x^2 - 0,607x + 0,093 = 0$.

Si l'élève choisit m à partir de D_5, soit la calculatrice n'affiche que la racine x décimale, par exemple : x = 0,299987 pour $f(x)$ = 0,99999 (cas A) ou x = 0,300013 pour $f(x)$ = 1,00001 (cas B) ; soit la calculatrice donne une seule valeur, la valeur interdite (x = 0,3) ou des x complexes (c'est-à-dire l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution réelle). Cet affichage bloque l'utilisation du programme « EQN-1 Degré 2 ».

On peut envisager une généralisation de l'affichage fractionnaire (n = 2, 3, 4) en la loi arithmétique (correcte mais non prouvée) suivante :

Pour $f(x_1) = 0,\underbrace{9...9}_{n}$ ou $f(x_2) = 1,\underbrace{0...0}_{n-1}1$, $x_1^n = \dfrac{2\underbrace{9...9}_{n-1}}{1\underbrace{0...0}_{n-1}1}$ ou $x_2^n = \dfrac{3\underbrace{0...0}_{n-2}1}{\underbrace{9...9}_{n}}$ (pour tout $n \geq 2$)

Remarquons que les deux suites $(x_1^n)_{n\geq 2}$ et $(x_2^n)_{n\geq 2}$ telles que $x_1^n = \dfrac{2\underbrace{9...9}_{n-1}}{1\underbrace{0...0}_{n-1}1}$ et $x_2^n = \dfrac{3\underbrace{0...0}_{n-2}1}{\underbrace{9...9}_{n}}$ (suites de rationnels non décimaux) tendent vers 0,3 quand n tend vers $+\infty$.

b2. Réponse « Dy.Eq 1er degré »

La factorisation et la simplification de l'expression initiale F_1 ramène l'équation $f(x) = m$ à $\dfrac{2x+0,7}{x+1} = m$ (correspondant à la formule simplifiée F_2).

L'équation $\dfrac{2x+0,7}{x+1} = m$ se ramène à l'équation du premier degré suivante : $(2-m)x = m - 0,7$. On n'a donc la solution $x = \dfrac{m-0,7}{2-m}$ pour tout $m \neq 1$ et $m \neq 2$.

En choisissant m décimal proche de 1, par exemple $m = 0,\underbrace{9...9}_{n}$ (cas A) ou $m = 1,\underbrace{0...0}_{n-1}1$ (cas B) ($n \in \mathbf{N}^*$), on obtient la solution rationnelle :

- Pour $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{n}$, on a $x = \dfrac{2\underbrace{9...9}_{n-1}}{\underbrace{10...0}_{n-1}1}$ inférieur strictement à 0,3.

  On peut écrire $x = \dfrac{0,3-10^{-n}}{1+10^{-n}}$ ($m = 1 - 10^{-n}$)

- Pour $f(x) = 1,\underbrace{0...0}_{n-1}1$, on a : $x = \dfrac{3\underbrace{0...0}_{n-2}1}{9\underbrace{9...9}_{n-1}} = \dfrac{0,3+10^{-n}}{1-10^{-n}} > 0,3$

De façon plus générale, pour $f(x) = 1 \pm \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \neq 1$) on a : $x = \dfrac{0,3 \mp \varepsilon}{1 \pm \varepsilon} \neq 0,3$.

ε peut alors être un nombre non rationnel.

Supplément mathématique : démonstration de l'idécimalité de $x_1^n = \dfrac{2\underbrace{9...9}_{n-1}}{1\underbrace{0...0}_{n-1}1}$ *et* $x_2^n = \dfrac{3\underbrace{0...0}_{n-2}1}{\underbrace{9...9}_{n}}$

(n ≥2) et calcul de leurs périodes

- On démontre d'abord la propriété numérique suivante : « la fraction $\dfrac{\overline{d_1 d_2 ... d_n}}{\underbrace{99...9}_{n}}$ est égale à l'EDIP $0,(d_1 d_2 \ldots d_n)$ dont la période $d_1 d_2 \ldots d_n$ correspond au numérateur de la fraction ».

En effet :

$$0,(d_1 d_2 \ldots d_n) = \overline{d_1 d_2 ... d_n}\,.(10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + \ldots + 10^{-kn} + \ldots) = \frac{\overline{d_1 d_2 ... d_n}}{(1-10^{-n})10^n} = \frac{\overline{d_1 d_2 ... d_n}}{\underbrace{99...9}_{n}}$$

- La fraction $x_2^n = \dfrac{3\underbrace{0...0}_{n-2}1}{\underbrace{9...9}_{n}}$ est donc non décimale et son numérateur $\underbrace{30...01}_{n}$ est la période de l'EDIP, c'est-à-dire : $x_2^n = \dfrac{3\underbrace{0...0}_{n-2}1}{\underbrace{9...9}_{n}} = 0,(\underbrace{30...01}_{n})$.

- Considérons les fractions $x_1^n = \dfrac{2\underbrace{9...9}_{n-1}}{1\underbrace{0...0}_{n-1}1}$.

On a $x_1^n = \dfrac{0,3-10^{-n}}{1+10^{-n}} = \dfrac{(0,3-10^{-n})(1-10^n)}{(1+10^{-n})(1-10^n)} =$

$$= \frac{0,3-10^{-n}-3.10^{-(n+1)}+10^{-2n}}{1-10^{-2n}} = \frac{0,2\underbrace{9...9}_{n-2}87\underbrace{0...0}_{n-2}}{0,\underbrace{9...9}_{2n}} = \frac{2\underbrace{9...9}_{n-2}87\underbrace{0...0}_{n-2}1}{\underbrace{9...9}_{2n}} = 0,(2\underbrace{9...9}_{n-2}87\underbrace{0...0}_{n-2}1)\,.$$

On a donc la période de x_1^n est $2\underbrace{9...9}_{n-2}87\underbrace{0...0}_{n-2}1$.

Dans les réponses *D_y.Eq* (*1er degré ou 2e degré*), si on choisit $m = 0,\underbrace{9...9}_{i}$ (cas A) ou $m = 1,\underbrace{0...0}_{i}1$ (cas B) avec i fini, la distance de $f(x)$ à 1 est 10^{-i}. La comparaison entre les couples de ces réponses se ramène à celle entre des nombres entiers i. C'est donc un bon critère de décision du meilleur couple du binôme.

II.2. Stratégies *Dx* et *Dy.Eq* et rapport institutionnel à la notion de limite

Dans notre travail, Le Thai Bao (2004), l'analyse *a posteriori* de la question 2 « Rédiger un message pour expliquer à un élève de 10ième ce que signifie $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$ » affirme non seulement la prédominance de l'algèbre des limites dans EMS du Viêt-nam, mais aussi

l'absence totale de la problématique d'« approximation $f(x)$ »[4] du point de vue de la notion de limite.
Par contre, après avoir rédigé une indication sur un calcul algébrique à effectuer pour chercher la limite, 37 élèves (sur 131) explique la notion de limite par des modèles « dynamiques » (Robert 1982) que nous avons renommés problématique d'« approximation x » de la limite (voir tableau 3, p. 26, Le Thai Bao 2004).
On peut donc prévoir qu'apparaisse un calcul de la limite : $\lim_{x \to 0,3} \frac{2x^2 + 0,1x - 0,21}{x^2 + 0,7x - 0,3}$, suite à la stratégie D_x (en accord avec la problématique d'« approximation x ») et non dans la stratégie D_y.
L'enjeu de l'ingénierie est justement *le passage de la problématique d'« approximation x» à la problématique d' « approximation f(x) »* nécessaire à la mise en place d'une signification topologique de la notion de limite (situation 4).

[4] Nous avons appelé « conception d'approximation » dans Le Thai Bao (2004).

II.3. Résumé des types de réponses possibles et coût des stratégies

Stratégie	Formule	Types de réponses
Dx	F_1 ou F_2	*Dx.Décimaux calculatrice* : couple de décimaux (x ; $f(x)$) tel que la calculatrice n'affiche pas 1 dans le calcul de $f(x)$. Par exemple : • F_1 : (0,29999 ; 0,999992307) (cas A) ; (0,30001 ; 1,000007629) (cas B) • F_2 : ($0,2\underbrace{9...9}_{8}$; $0,\underbrace{9...9}_{9}$) (cas A) ; ($0,3\underbrace{0...0}_{7}1$; $1,\underbrace{0...0}_{8}1$) (cas B)
		Dx.EDI : $f(x) \in D_\infty$. Par exemple : • (0,2(9) ; 0,(9)) ou (0,2(9) ; 0,(9)2) (cas A) • (0,3(0)1 ; 1,(0)1) ou (0,3(0)1 ; 1,(0)7) (cas B)
		Dx.EDn : $f(x) \in D_n$ où n est inconnu. Par exemple : • ($0,2\underbrace{9...9}_{n}$; $0,\underbrace{9...9}_{n}$) ou ($0,2\underbrace{9...9}_{n}$; $0,\underbrace{9...9}_{n}2$) (cas A) • ($0,3\underbrace{0...0}_{n}1$; $1,\underbrace{0...0}_{n}1$) ou ($0,3\underbrace{0...0}_{n}1$; $1,\underbrace{0...0}_{n}7$) (cas B)
	F_2	*Dx.EF* — *Dx.Calculs exact* : $f(x)$ est une fraction. Par exemple : • $x = 0,2\underbrace{9...9}_{n}$ et $f(x) = \dfrac{12\underbrace{9...9}_{n-1}8}{12\underbrace{9...9}_{n}}$ (cas A) • $x = 0,3\underbrace{0...0}_{n}1$ et $f(x) = \dfrac{13\underbrace{9...9}_{n}2}{13\underbrace{9...9}_{n}1}$ ou $f(v_n) = 1\dfrac{1}{13\underbrace{0..0}_{n}1}$ (cas B) Avec n finis ou n inconnu
Dy.Eq	F_1	*Dy.Eq 2e degré : $f(x) = m \in D_2, D_3, D_4, D_5$*. Par exemple, dans D_2 : • ($\dfrac{29}{101}$; 0,99) ou (0,287128712 ; 0,99) (cas A) • ($\dfrac{31}{99}$; 1,01) ou (0,313131313 ; 1,01) (cas B)
	F_2	*Dy.Eq 1er degré : $f(x) \in D_n$* avec n finis ou inconnu. Par exemple : • $x = \dfrac{2\underbrace{9...9}_{n-1}}{1\underbrace{0...0}_{n-1}1}$ et $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{n}$ (cas A) • $x = \dfrac{3\underbrace{0...0}_{n-2}1}{9\underbrace{9...9}_{n-1}}$ et $f(x) = 1,\underbrace{0...0}_{n-1}1$ (cas B)

Tableau 13. Résumé des réponses possibles

- Dans la stratégie *Dx*, on peut prévoir la prédominance des réponses *Dx.Décimaux calculatrice* manifestation du fonctionnement de la règle implicite : « *dans le calcul instrumenté par la calculatrice, si le résultat affiché est entier ou affichable sous forme fractionnaire, ce résultat est une valeur exacte* ».

Une courte analyse montre l'origine institutionnelle de cette règle.

> Dans tous les exemples du « *Guide d'usage de la calculatrice CASIO fx 570MS pour résoudre les problèmes des classes 10-11-12* » du Département de l'Enseignement Secondaire du Ministère de l'Education et de la Formation, chaque fois la calculatrice affiche un résultat entier ou fractionnaire (en appuyant sur la touche ab/c ou d/c). Cet entier ou cette fraction est la valeur exacte du calcul que l'élève peut valider par un calcul à la main. Autrement dit, tous les exemples du guide restent dans le domaine de validité de la règle implicite sur le calcul instrumenté dans **Q**.

• En fait quand la calculatrice affiche un résultat entier, ce résultat n'est qu'une valeur approchée (comme l'affichage de 1 du calcul de $f(u_5)$ ou $f(v_4)$ de notre situation 3). Ce fait n'est jamais mentionné dans le guide.

• Dans un calcul instrumenté, la calculatrice affiche souvent, dans un premier temps, un résultat décimal qui est en général une valeur approchée (cf. les calculs de la situation 1). Si la calculatrice transforme le résultat décimal en un affichage fractionnaire par appuis sur la touche ab/c ou d/c, ce dernier affichage désigne toujours la valeur exacte (on peut le valider par un calcul à la main). L'affichage décimal est souvent dans un premier temps une valeur approchée jamais signalée dans le guide. De plus, dans ce cas, les auteurs n'écrivent que l'affichage fractionnaire.

En complément des extraits du guide présentés dans les situations 1 et 2 où l'on peut vérifier le fonctionnement implicite de cette règle, nous pouvons citer ici trois autres exemples.

• Tout d'abord l'exemple du non passage à la forme fractionnaire, celui du calcul instrumenté des images d'une fonction *f* dans un intervalle par les touches ALPHA, X et CALC.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{5}$ Hãy tính các giá trị của f(x) khi x có các giá trị từ -2 đến 5 với bước nhảy là 0.5 . Giải Dùng lệnh CALC , ghi vào màn hình $y = \frac{4x^3 - x^4}{5}$ Ấn CALC máy hỏi ? ấn -2 = máy hiện y = -96 Ấn CALC máy hỏi ? ấn -1.5 = máy hiện y = -3.7125 Ấn CALC máy hỏi ? ấn -1 = máy hiện y = -1	*Exemple 1* : soit la fonction $y = f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{5}$ Calculer les valeurs de $f(x)$ pour les valeurs de x entre -2 et 5 espacées d'un pas de 0,5. Résolution Utiliser la fonction CALC après avoir édité[5] $Y = \frac{4X^3 - X^4}{5}$ Appuyer sur CALC la machine demande X ? Appuyer sur -2 = la machine affiche Y = -96 Appuyer sur CALC la machine demande X ? Appuyer sur -1,5 = la machine affiche Y = -3,7125 Appuyer sur CALC la machine demande X ? Appuyer sur -1 = la machine affiche Y = -1 …… (p. 99)

Dans l'extrait supra, les résultats entiers comme -96 et -1 sont les valeurs exactes du calcul de $f(-2)$ et $f(-1)$. Le résultat décimal « -3,7125 » est une valeur exacte du calcul de $f(-1,5)$ qui pourrait être transformé sous forme fractionnaire, soit « $-3\frac{57}{80}$ » (en appuyant sur la touche ab/c)soit « $-\frac{297}{80}$ » (en appuyant sur la touche d/c). Les auteurs arrêtent à l'affichage décimal du calcul de $f(x)$ car c'est la valeur exacte correspondant à la valeur décimale de x. Cela est conforme à notre conjecture sur le fonctionnement de la règle implicite : quand doit – on passer à l'affichage fractionnaire ? (Voir page ? de la situation 1).

• Deux exemples sur la résolution instrumentée de systèmes d'équations du second degré à l'aide des programmes disponibles dans la calculatrice.

[5] Il n'existe pas les touches mémoires nommées « x » et « y », on peut les remplacer par X et Y.

Giải: Hệ phương trình (ở EQN 1 - **unknowns** 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{14}{11} \\ y = -\frac{13}{11} \end{cases}$	Résolution : système d'équations (utiliser le programme EQN1 – unknowns 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{14}{11} \\ y = -\frac{13}{11} \end{cases}$ (p.74)
$\begin{cases} 2A + 4B + C = -5 \\ 10A + 4B + C = -29 \\ 2A - 6B + C = -10 \end{cases}$ Dùng chương trình EQN 1 - **unknowns** 3 Giải được : A = -3 ; B = $\frac{1}{2}$; C = -1	[…] $\begin{cases} 2A + 4B + C = -5 \\ 10A + 4B + C = -29 \\ 2A - 6B + C = -10 \end{cases}$ Utiliser le programme EQN1- unknowns 3 On obtient : A = -3 ; B = $\frac{1}{2}$; C = -1 (p. 75)

Les résultats entiers et fractionnaires dans les cas supra sont aussi des valeurs exactes. Les auteurs passent de l'affichage décimal à l'affichage fractionnaire (en appuyant sur la touche ab/c ou d/c), la calculatrice affichant dans un premier temps les résultats décimaux : x =1,272727273 et y = 1,181818182 (pour le système page 74) et A = -3 ; B = 0,5 ; C = -1 (pour le système page 75).

- Dans la stratégie *Dy.Eq*, à chaque changement de la valeur de m (pour s'approcher de 1), il faut résoudre une nouvelle équation $f(x) = m$. Cette stratégie est donc plus coûteuse que la stratégie *Dx* ; de plus la stratégie *Dx* est favorisée par le calcul de $f(x)$ instrumenté par les touches ALPHA, X et CALC de la calculatrice.

- L'apparition de la stratégie *Dy.Eq* est donc peu probable comme stratégie « de base » : l'exploration d'un voisinage de 0,3 est premier par rapport à celui de 1 par la stratégie *Dy.Eq*. Cependant, *Dy.Eq* peut apparaître suite au blocage de l'exploration d'un voisinage de 0,3 par la stratégie *Dx-calculatrice*. On peut penser aussi qu'après le choix d'un couple *Dx.Décimaux calculatrice* comme (0,29999 ; 0,999992307), on s'interroge sur l'existence d'un autre couple telle que $f(x)$ = 0,999999 meilleur que 0,999992307.

- Cette apparition de *Dy.Eq* marque une évolution de l'« *approximation x* » à l'« *approximation f(x)* » du point de vue de la notion de limite.

- Le *travail collectif* qui suit le jeu vise à construire implicitement cette évolution.

II.4. Intervention prévue de l'enseignant dans le *travail collectif* à partir des réponses possibles

Interventions prévues de l'enseignant	
Dx.Décimaux calculatrice	- Institutionnaliser la notion de distance comme critère de comparaison. - Poser les questions suivantes : • Que se passe–t–il quand on augmente 9 ou 0 dans la valeur x des couples ? (Voir les tableaux 1 et 2) • Existe – il un couple meilleur que ceux donnés ?
Dx.EDI.	Discussion sur les « EDI » proposés et institutionnalisation (voir plus loin *).
Dx.EDn	Est-ce que (par exemple) $f(0{,}2\underbrace{9\ldots9}_{n}) = 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{n}$ et $f(0{,}3\underbrace{0\ldots0}_{n}1) = 1{,}\underbrace{0\ldots0}_{n}1$? Contre-exemples envisageables : couple ($\frac{29}{101}$; 0,99) de la situation 2 ou de *Dx. Calcul exact*
Dx.EF	Mise en public la généralisation.
Dx.Calcul exact	Pour $x \in D_f$, on peut calculer $f(x)$ soit par la formule F_1 soit par F_2. Institutionnalisation de la formule F_2
Dy.Eq 1er degré	- Institutionnalisation de la résolution de l'équation par la formule F_2. - Dans le cas d'un couple (x ; $f(x)$) d'indice n, l'enseignant demande la démonstration de la forme de la solution, par exemple : $x_1 = \frac{2\underbrace{9\ldots9}_{n-1}}{1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1} < 0{,}3$; $x_2 = \frac{3\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1}{\underbrace{9\ldots9}_{n+1}} > 0{,}3$.
Dy.Eq 2e degré	Existe-t-il un couple meilleur que ceux donnés ? (Voir le tableau 9) Résolution collective des équations $f(x) = 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{10}$ et $f(x) = 1{,}\underbrace{0\ldots0}_{9}1$ de deux manières : « EQN-1 Degré 2» et *Dy. Eq 1er degré*.

Tableau 14. Interventions prévues de l'enseignant selon les réponses observées

*Réponses *Dx.EDI.* Discussion sur les « EDI » proposés et institutionnalisation

Cette discussion et cette institutionnalisation s'appuient sur les notions de suite et de limite : rappelons que l'ingénierie se place après l'enseignement de ces deux notions. Nous faisons l'hypothèse que ce travail algébrique sur la notion de limite ne dévoilera pas l'enjeu de l'ingénierie, à savoir donner un sens topologique à la limite : $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$.

- L'enseignant pose d'abord la question :

Les nombres 0,(9) ; 0,(9)2 ; 1,(0)1 et 1,(0)7 et … existent –ils ?

- L'enseignant écrit ensuit au tableau la suite (u_n) où $u_n = 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{n}$ en calculant la distance entre 1 et les u_n avec la classe :

Soit la suite (u_n) où $u_1 = 0,9$ $u_2 = 0,99$ $u_3 = 0,999$ …. $u_n = 0,\underbrace{9...9}_{n}$	distances entre 1 et les u_n $1 - u_1 = 10^{-1}$ $1 - u_2 = 10^{-2}$ $1 - u_3 = 10^{-3}$ ... $1 - u_n = 10^{-n}$
Quand $n \to \infty$, est-ce que $(u_n) \to 0,(9)$? ……	Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ ……

- La classe travaille collectivement pour répondre aux questions de la colonne de gauche et de la colonne de droite : les réponses attendues sont « 0,999…. » ou « 0,(9) » dans la colonne de gauche et 1 pour le calcul de limite dans la colonne de droite.

- L'enseignant institutionnalise ces réponses en écrivant au tableau et en faisant écrire dans les cahiers les déclarations suivantes :

> • Les mathématiciens admettent la notation 0,(9) comme une autre écriture de 1. On accepte que le nombre décimal admette deux écritures. Par exemple : 0,2(9) = 0,3.
>
> • L'écriture 1,(0)1 est impossible pour les mathématiciens. On peut dire « une infinité de zéro » ; mais jamais « une infinité de zéros, puis 1 à la fin » : l'infini n'a pas de fin !
>
> De même, il faut rejeter des écritures comme 1,(0)7 ; 0,(9)2 ; …

III. Questions pour la conclusion du jeu

III.1. Question 3 – inexistence de meilleur couple (x ; $f(x)$)

On peut envisager les réponses par « OUI » ou « NON ».

a. Réponse par « NON »

Pour justifier la réponse par « NON », les trois types d'argumentations portant sur l'ordre dense de **D** (ou **R**) ci-dessous peuvent être envisagées.

- *Type d'argumentations par la problématique d' « approximation x » de la limite*

Ce sont des argumentations du type : « on peut toujours trouver un couple (x ; $f(x)$) meilleur que le couple précédent en prenant une valeur de x plus proche de 0,3 que la valeur précédente ».

Dans ce cas, le calcul de la limite de f en 0,3 et l'étude de la variation de f peuvent être présents. Car ils renforcent la problématique d'« approximation x ».

- *Type d'argumentations par la problématique d' « approximation f(x) » de la limite*

Ce sont les argumentations du type : « on peut toujours trouver un couple (x ; $f(x)$) meilleur que le couple précédent en choisissant une valeur de $f(x)$ plus proche de 1 que la valeur précédente ».

Dans ce cas, l'équation $f(x) = m$, pour : $m = 1,\underbrace{0...0}_{i}1$, ou $0,\underbrace{9...9}_{i}$ (écritures décimales), ou $m = 1 \pm 10^{-i}$, peut être présente.

Les deux types d'argumentations d'« approximation x » ou d'«approximation $f(x)$ » utilisent implicitement un ordre dense de **D** (ou **R**) et prennent en compte la relation fonctionnelle $x \to f(x)$.

*- Type d'argumentations par l'ordre dense de **D** (ou **R**), mais ne prenant pas en compte la relation $x \to f(x)$*

L'observable est une argumentation du type : « il n'existe aucun nombre le plus proche de 1 (tout en étant différent de 1) ». Le nombre n'est pas conçu comme l'image d'un autre nombre par une fonction.

Pour déstabiliser ce type d'argumentation, il faut construire d'autres fonctions discontinues comme contre exemple. En voici un exemple simple :

La fonction f : **R** → **R** définie par $\begin{cases} f(x) = 0{,}5 \ \forall x \neq 2 \\ f(2) = 0{,}9 \end{cases}$ admet le couple (2 ; 0,9) ayant $f(x)$ le plus proche de 1.

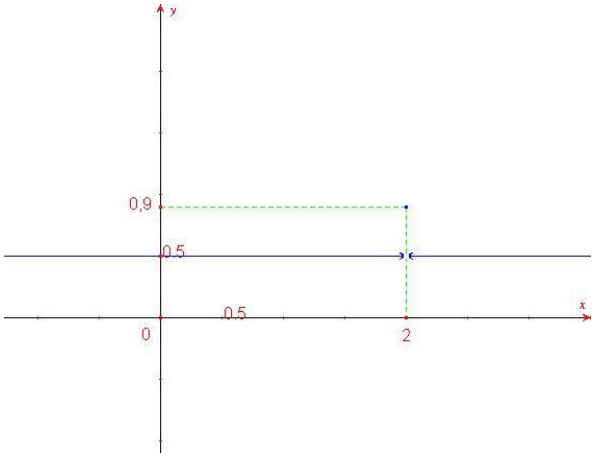


Figure 1. Graphe d'une fonction contre exemple

b. Réponses par « OUI »

Malgré les conditions du jeu et en particulier le travail coopératif enseignant – élèves, cette réponse peut être envisageable à cause de la résistance de l'obstacle épistémologique de **N** : l'ordre discret de **N** est prolongé à **D** (puis à $\mathbf{D}_\infty$).

L'observable de la résistance de l'ordre de **N** est le fonctionnement de propriétés discrètes comme :

- Tout nombre possède un prédécesseur et un successeur.
- Toute partie possède un premier élément et un dernier élément.

III.2. Question 4 – Interprétation de l'affichage de 1

- Réponse 1 : « l'affichage de 1 ne représente qu'une valeur approchée proche de 1, mais différente de 1 ».

- Réponse 2 : « l'affichage de 1 désigne la valeur exacte du calcul ».

On peut envisager la prédominance de la réponse 1 comme le fruit des interactions du milieu didactique organisé par travail coopératif du jeu.

Chapitre C3

Deuxième partie
Analyse *a posteriori* de la situation 3

I. Jeu de la recherche d'un meilleur couple (x ; $f(x)$)

Les 38 élèves sont répartis en 19 binômes selon les 4 rangées de la classe. Chaque binôme occupe la même table

1ère rangée : I.1, I.2, I.3, I.4, I.5
2ère rangée : II.1, II.2, II.3, II.4, II.5
3ère rangée : III.1, III.2, III.3, III.4, III.5
4ère rangée : IV.1, IV.2, IV.3, IV.4

Nous allons dans notre analyse respecter le découpage du jeu dans ses trois phases :

- Phase 1. Couples (x ; $f(x)$) produits individuellement
- Phase 2. Couples (x ; $f(x)$) jugés « le meilleur » par chaque binôme
- Phase 3. Travail coopératif enseignant - élèves

I.1. Phase 1. Couples (x ; $f(x)$) produits individuellement

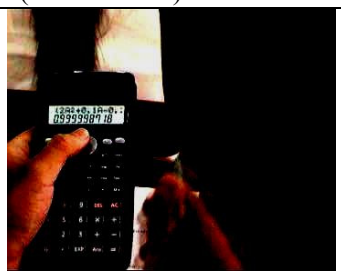
Dans le tableau 15, nous présentons les 38 couples (x ; $f(x)$) produits individuellement par les élèves A et B des 19 binômes selon catégories de réponses prévues dans l'analyse *a priori*.

D_x							*Dy.Eq*	Total
Formule initiale F_1					Formule simplifié F_2			
Dx.Décimaux calculatrice	*Dx. EDI*	*Dx. ED_n*	*Dx. EF*	(0,299999 ; 1) ou (0,300001 ; 1)	*Dx.Décimaux calculatrice*	*Dx.Calcul exact*		
27	4	2	1	2	1	1	0	38
36					2			

Tableau 15. Couples (x ; $f(x)$) individuels des 38 élèves

a. Dx stratégie « de base »

Aucun élève ne commence par la stratégie *Eq* (résolution d'équations) : conformément à notre prévision, tous les élèves débutent une exploration d'un voisinage de 0,3 par la stratégie « de base » *Dx* prolongée par *Dx.Calculatrice*. Par ailleurs, la suite des couples décimaux dans les fiches personnelles de tous les élèves (y compris l'élève utilisant la formule F_1 et répondant par *Dx.Calcul exact*) et l'enregistrement vidéo montrent que les élèves utilisent les touches ALPHA, X (ou autres touches mémoires : A, B, C, …) et CALC de la calculatrice.

Elève A (binôme II.2) : touche mémoire X	Elève A (binôme II. 5) : touche mémoire A
	

Comme nous l'avions prévu, tous les élèves sauf 2 utilisent la formule F_1.

b. Fonctionnement fort de la règle implicite sur le calcul instrumenté dans Q

Rappelons cette règle implicite : « *dans le calcul instrumenté par la calculatrice, si le résultat affiché est un entier ou affichable sous forme fractionnaire, alors ce résultat est exact* ». C'est le fonctionnement de cette règle qui permet l'interprétation de l'affichage 1 comme valeur exacte.

Sur les 28 élèves produisant individuellement des couples (x ; $f(x)$) selon une procédure *Dx. Décimaux calculatrice*, seul l'élève utilisant la formule F_2 ne rencontre pas l'affichage de 1 et se trouve ainsi hors du fonctionnement de la règle implicite sur le calcul instrumenté dans **Q.**

Cet élève A (binôme I.1) répond par le couple ($u_8 = 0{,}2\underbrace{9...9}_{8}$; $0{,}\underbrace{9...9}_{9}$) : en effet, dans le cas de l'utilisation de la formule F_2 la calculatrice affiche de façon stable $0{,}\underbrace{9...9}_{9}$ pour tout $x \geq u_8 = 0{,}2\underbrace{9...9}_{8}$ (cf. tableau 10).

Examinons les 27 élèves utilisant la formule F_1 et répondant par des couples *Dx.Décimaux calculatrice*.

Ces 27 élèves respectent-ils la règle implicite sur le calcul instrumenté dans Q ?

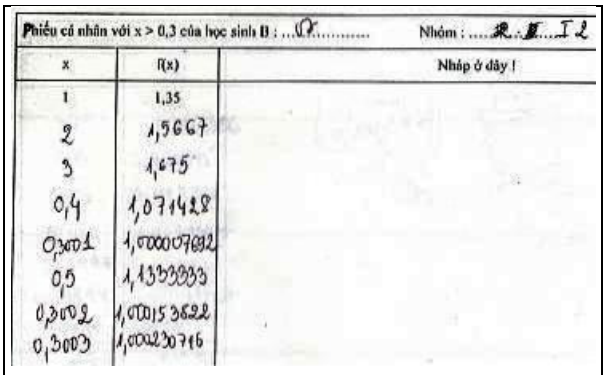
Dans le tableau 16, nous identifions les valeurs de x des 27 couples *Dx.Décimaux calculatrice* à u_n (cas A) ou v_n (cas B) et leur associons les distances $d_x = |x - 0{,}3|$ à 10^{-n}.

d_x	$d_x = 10^{-4}$		$10^{-7} < d_x \leq 10^{-5}$						Total
			$d_x = 10^{-5}$		$10^{-6} < d_x < 10^{-5}$		$10^{-7} < d_x < 10^{-6}$		
$x \in D_i$?	D_4		D_5		D_i ($i \geq 6$)		D_i ($i \geq 7$)		
Elève	A	B	A	B	A	B	A	B	
x	$x = u_3$	$x = v_2$	$x = u_4$	$x = v_3$	$x \in]u_4 ; u_5[$	$x \in]v_4 ; v_3[$	$x \in]u_5 ; u_6[$	$x \in]v_5 ; v_4[$	
Effectif	1	1	3	2	8	8	0	4	27
	2		5		16		4		
			25						

Tableau 16. Comparaison de $d_x = |x - 0{,}3|$ des couples *Dx.Décimaux calculatrice* (F_1) à 10^{-n}

- 2 élèves répondent par des couples (x ; $f(x)$) tels que $x = u_3 = 0{,}2999$ (cas A) ou $x = v_2 = 0{,}3001$ (cas B) dans D_4. Ils ne rencontrent pas l'affichage de 1 dans le calcul de $f(x)$ faute de temps pour aller plus loin. Ces 2 élèves ne semblent pas maîtriser la règle d'action « *pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3* ».

Donnons l'exemple de l'élève B du binôme I.2.



Phiếu cá nhân với x > 0,3 của học sinh B : ...07..... Nhóm : 2.I.I 2

x	f(x)	Nháp ở đây !
1	1,35	
2	1,5667	
3	1,675	
0,4	1,071428	
0,3001	1,000007692	
0,5	1,1333333	
0,3002	1,000153522	
0,3003	1,000230716	

Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : 07 Binôme I.2

x	$f(x)$	Brouillon
1	**1,35**	
2	1,5667	
3	1,675	
0,4	1,071428	
0,3001	1,000007692	
0,5	1,1333333	
0,3002	1,000153522	
0,3003	1,000230716	

Dans la copie supra, l'augmentation de x selon les suites 0,3001 – 0,5 et 0,3002 – 0,3003 montre que cet élève ne s'appuie pas sur la monotonie pragmatique de f. Notons une erreur de recopie de l'affichage de la calculatrice du calcul de $f(0{,}3001)$: l'affichage correct est 1,000076917 ; il arrondit et note un zéro de plus. Cette erreur ne change pas l'information sur la monotonie pragmatique de f pour $x \in \mathbf{N}$, $D_1,\ldots, D_4$ renvoyée par les écritures successives.

- 25 élèves (sur 27) rencontrent l'affichage de 1 dans le calcul de $f(x)$, en particulier dès $f(u_5 = 0{,}299999)$ (cas A) ou $f(v_4 = 0{,}300001)$ (cas B). Nous examinerons les différents cas du tableau 16 dans le paragraphe suivant.

Interprétant l'affichage de 1 comme une valeur exacte dans le calcul de $f(x)$ pour $x \neq 0{,}3$, ces 25 élèves répondent par des couples $(x\,;f(x))$ tel que$10^{-7} < d_x \leq 10^{-5}$; c'est-à-dire $u_4 \leq x < u_5$ (cas A) ou $v_5 < x \leq v_3$ (cas B).

Donc, la majorité des élèves de la classe observée (25 sur 38) respecte la règle implicite sur le calcul instrumenté dans Q.

Nous allons maintenant analyser les procédures d'intercalations de nombres décimaux dans de « petits » intervalles ($10^{-7} < d_x \leq 10^{-5}$) de ces 25 élèves.

c. Intercalation décimale dans de « petits » intervalles

Nous trouvons 3 types de décisions différents dans les fiches personnelles à la suite de l'affichage de 1 du calcul de $f(u_5)$ ou $f(v_4)$:

- Décision 1 (dec1): 5 élèves se contentent de choisir le couple $(u_4, f(u_4))$ (3 cas A) ou $(v_3, f(v_3))$ (2 cas B).
- Décision 2 (dec2) : 16 élèves explorent les x de D_i ($i \geq 6$) dans $]u_4\,;u_5[$ (8 cas A) ou $]v_4\,;v_3[$ (8 cas B).
- Décision 3 (dec3) : 4 élèves de cas B explorent les x de D_i ($i \geq 7$) dans $]v_5\,;v_4[$.

Le schéma ci-dessous distingue les trois décisions (*dec1*, *dec2*, *dec3*) suite aux interactions avec l'élément du milieu calculatrice qu'est l'*affichage de 1*.

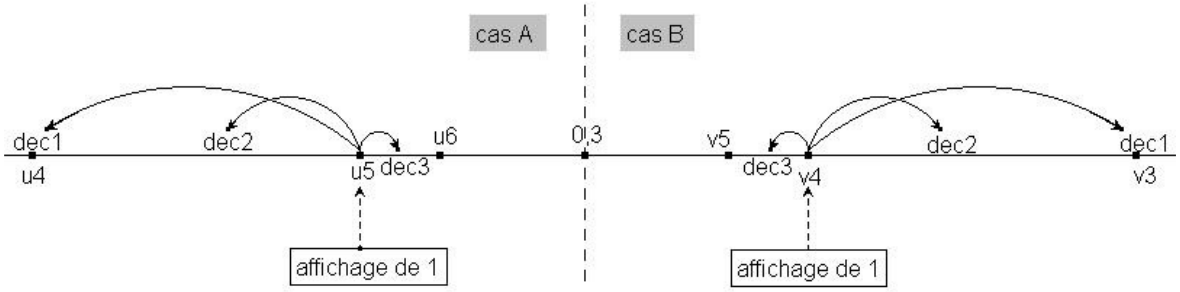


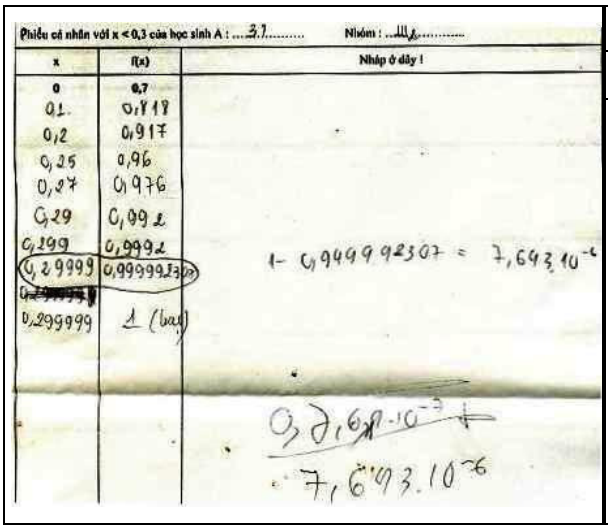
Figure 2. Trois décisions suite au affichage de 1

Les *dec1* et *dec2* éloigne les *x* de 0,3, tandis que la *dec3* l'en rapproche.

Nous présentons, pour chaque décision, des exemples représentatifs de leur démarche d'exploration ; pour 1 et 2, des fiches personnelles de A et de B (pour des binômes distincts).

Décision 1 – Choix du couple (u_4, $f(u_4)$) (cas A) ou (v_3, $f(v_3)$) (cas B)

• Ci-après la fiche personnelle de l'élève A du binôme III.2 :

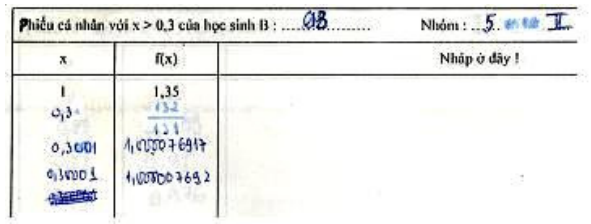


Fiche personnelle avec x < 0,3 de A : 31 Binôme III.2		
x	*f*(*x*)	Brouillon
0	**0,7**	
0,1	0,818	
0,2	0,917	1-0,999992307=7,693.10^{-6}
0,25	0,96	
0,27	0,976	
0,29	0,992	
0,29999	0,999992307	
~~0,299999 9~~		0,769. 10^{-7}
0,299999	1 (exclu)	7,693. 10^{-6}

La copie supra montre explicitement que la monotone « pragmatique » de *f* découlant du lien « entrées de x_i/ affichages du résultat du calcul instrumenté $f(x_i)$ » dans D_1, D_2, …, D_5 permet de valider la règle d'action « *pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3* ».

Cet élève calcule la distance de $f(u_4)$ à 1 « 1 – 0,999992307 » dans la partie brouillon pour comparer avec le couple de son camarade B. Nous reviendrons sur ce point dans l'analyse des couples des binômes.

• Ci-après la fiche personnelle de l'élève B du binôme II.5 :



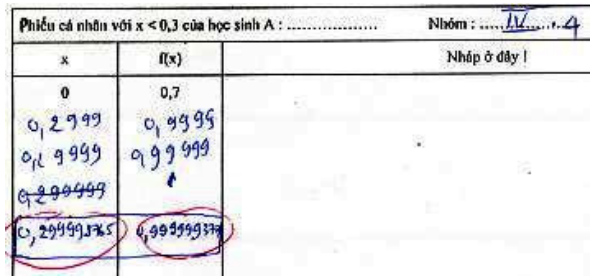
Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : 03 Binôme II.5		
x	$f(x)$	Brouillon
1	**1,35**	
0,31	$\frac{132}{131}$	
0,3001	1,000076917	
0,30001	1,000007692	
~~0,300001~~		

Cet élève écrit dans un premier temps la valeur de v_4 dans la colonne des x et a vraisemblablement calculé la valeur de $f(v_4)$: trouvant 1, il n'a pas noté la valeur dans la colonne des $f(x)$, a rayé v_4 et arrêté ses calculs. Aussi, écrit-il le couple (v_3 ; 1,000007692) comme « meilleur couple de B ».

• Les 5 élèves ayant pris une décision de type 1, n'accèdent donc pas à des D_i ($i \geq 6$) dans $]u_4 ; u_5[$ ou $]v_4 ; v_3[$ pour d'autres essais de x. Ceci s'explique par une difficulté à intercaler un décimal dans un « petit » intervalle, c'est-à-dire tel que les bornes soient à une distance inférieure à 10^{-5}. Cette difficulté avait déjà été constatée chez 3 élèves dans la situation 2.

Décision 2 - Exploration des x de D_i ($i \geq 6$) dans $]u_4 ; u_5[$ (cas A) ou $]v_4 ; v_3[$(cas B)

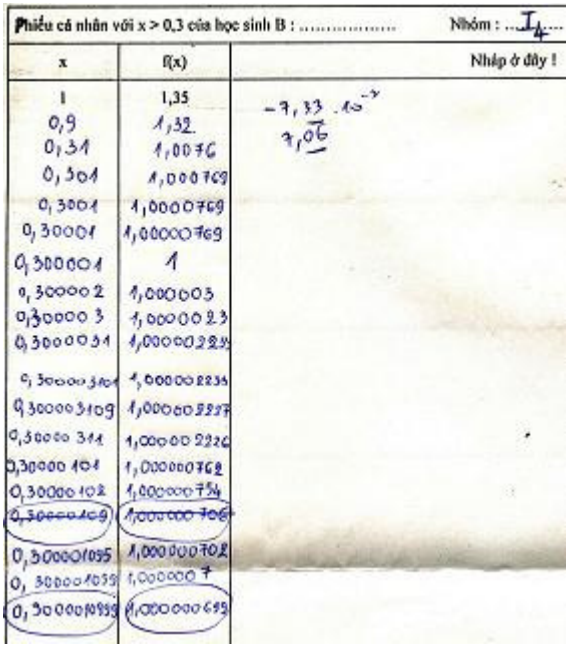
• Ci-après la fiche personnelle de l'élève A du binôme IV.4 :



Fiche personnelle avec x < 0,3 de A : … Binôme IV.4		
x	$f(x)$	Brouillon
0	**0,7**	
0,2999	0,9999	
0,29999	0,99999	
~~0,299999~~	~~1~~	
0,299998765	0,999999377	

Dans son exploration des valeurs de la suite $f(u_n)$ cet élève rencontre l'affichage de 1 pour la valeur de $f(u_5)$ sur sa calculatrice. Le fait qu'il raye ce résultat dans son tableau prouve qu'il a bien reconnu la valeur interdite. Il change alors de stratégie et explore les valeurs de $f(x)$ pour x dans $]u_4 ; u_5[$. En fait, il n'y a pas de trace de ses essais sur sa fiche, mais le choix unique de x = 0,299998765 dans D_9 est trop particulier pour ne pas supposer qu'il a fait des essais avant de se décider à noter cette valeur. Reste qu'on n'a aucune hypothèse sur la stratégie qui a pu le conduire à ce choix.

• Ci-après la fiche personnelle de l'élève B du binôme I.4 :



Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : ….. Binôme I.4		
x	*f*(*x*)	Brouillon
1	**1,35**	- 7,<u>33</u>.10^{-7}
0,9	1,32	7,<u>06</u>
0,31	1,0076	
0,3001	1,000076917	
0,30001	1,000007692	
0,300001	1	
0,300002	1,000003	
0,300003	1,0000023	
0,3000031	1,000002233	
0,300003101	1,000002233	
0,300003109	1,000002227	
0,30000311	1,000002226	
0,30000101	1,000000762	
0,30000102	1,000000754	
~~0,30000109~~	~~1,000000706~~	
0,300001095	1,000000702	
0,300001099	1,0000007	
0,3000010999	1,000000699	

Le tableau 17 décrit l'intercalation systématique de décimaux dans de petits intervalles en interaction avec les éléments du milieu : nombres écrits et affichage de la calculatrice. Dans le tableau, nous indiquons :

- en grisé : les essais de *x* que nous avons supposés effectués sans être écrits dans la fiche personnelle ;
- par des flèches, la relation emboîtée entre de petits intervalles successifs.

Ce tableau montre que ce cas est plus riche et donne un exemple assez complexe d'une stratégie d'affinement de l'exploration des intervalles. Comme dans le cas précédent, cet élève commence à explorer à la suite des $f(v_n)$ et rencontre la valeur interdite 1 affichée sur sa calculatrice pour v_4. Il ne la raye pas, mais le fait qu'il change alors d'intervalle d'exploration montre qu'il a bien identifié le problème.

Cela le conduit à explorer l'intervalle $]v_4 ; v_3[$ par une démarche d'intercalation systématique. Cette démarche s'appuie sur un constat du calcul instrumenté : le premier nombre décimal de D_6 (0,300001) donne 1. Son successeur dans D_6 (0,300002) produit une valeur différente de 1, le suivant (0,300003) une valeur différente de 1 mais plus proche de 1. Il en découle une exploration des décimaux successifs de D_6, D_7 puis D_9 afin d'améliorer la proximité à 1 sans « être 1 », sans tenir compte d'une monotonie éventuelle de la fonction. Dès que l'image *f(x)* par un décimal est moins proche de 1 que celle de son prédécesseur, on passe au D_i suivant. Cette démarche atteste de connaissances sur l'ordre des décimaux qui fondent les techniques d'intercalation décimale. Dans cette démarche, tous les essais ne sont pas retranscrits.

Le passage de l'un à l'autre de ces intervalles résulte donc des informations renvoyées par le milieu décrit précédemment :

- rencontre de l'affichage 1,
- valeur de *f*(*x*) moins proche de 1 que la précédente,
- et finalement valeur stable de *f*(*x*).

Intervalle d'exploration de x	Suite des essais de x	Passage de D_i	Interaction du milieu calculatrice
]0,3 ; 1]	0,9;… ; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4	D_i où i = 1,…,6	Affichage de 1 dans le calcul de $f(v_4)$
]v_4 ; v_3[	0,300002 ; 0,300003 ; 0,300004	D_6	- Valeur de f(0,300002) ≠ 1 - Valeur de f(0,300003) meilleure que celle de f(0,300002) - Valeur de f(0,300004) moins bon que celle de f(0,300003)
]0,300003 ; 0,300004[	0,3000031 ; 0,3000032	D_7	- Valeur de f(0,3000031) meilleure que celle de f(0,300003) - Valeur de f(0,3000032) moins bon que celle de f(0,3000031)
]0,3000031 ;0,3000032[	0,300003101 ; 0,300003102 ; … ; 0,300003108 ; 0,300003109 ;	D_9	Plus x augmente dans D_8 ou D_9, plus valeur de $f(x)$ est proche de 1 (contraire à la monotonie théorique de f)
	0,30000311 ; 0,30000312 ;…	D_8	
]v_4 ; 0,300002[	0,30000101 ; 0,30000102 ; 0,30000103 ;… ; 0,30000108 ; 0,30000109	D_8	
]v_4 ; 0,30000109[	0,300001091 ;…;0,300001095 ; 0,300001095 … ; 0,300001099	D_9	
	0,3000010999 ; 0,30000109999 ; …	D_{10}, D_{11}, D_{12}, …	Affichage stable pour des essais de $x = 0{,}3000010\underbrace{9\ldots9}_{n}$ (n ≥ 3)

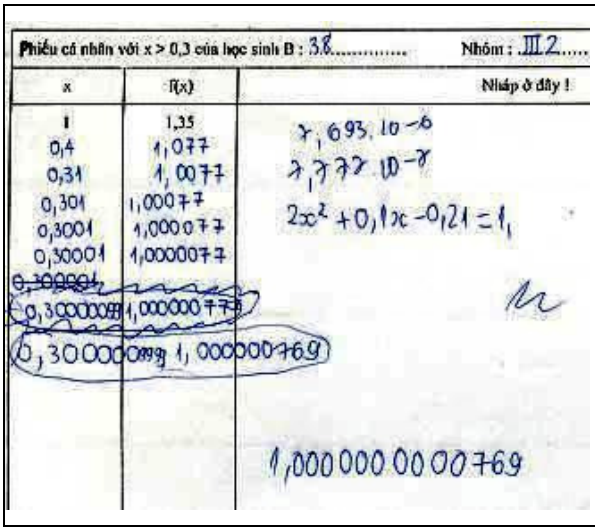
Tableau 17. Une intercalation décimale systématique guidée par le milieu

• Pour les 16 élèves ayant pris la décision 2 et les 5 élèves ayant pris la décision 1, toutes les valeurs $x \in [u_5 ; v_4]$ sont interdite après l'affichage de 1 dans les calcul de $f(u_5)$ (cas A) ou $f(v_4)$ (cas B). Ces 21 élèves ne vont pas aller plus loin en explorant l'intervalle $]u_5 ; u_6[$ (cas A) ou $]v_5 ; v_4[$ (cas B) parce que la calculatrice affiche très souvent 1 pour l'essai de $x \in]u_5 ; v_4[$. Notre étude complémentaire montre que la calculatrice affiche 1 pour $x \in$ [0,2999992 ; 0,3[(pour A) et $x \in [v_8 ; 0{,}3000008]$ (pour B).

Décision 3 - Exploration des x de D_i (i ≥ 7) dans $]v_5 ; v_4[$ (4 cas B)

Les 4 élèves B ayant pris la décision 3 ont d'abord fait le constat que la calculatrice n'affiche pas de façon stable 1 pour des x de $]v_5 ; v_4[$ suite à l'essai $x = v_4$. Ils explorent alors l'intervalle]0,3000008 ; v_4[. Le non arrêt à l'essai $x = v_4$ et l'exploration des $x < v_4$ montre que ces élèves acceptent un couple (x ; $f(x)$) tels que $x > 0{,}3$ et $f(x) < 1$.

Ci-après la fiche personnelle de l'élève B du binôme III.2 :



Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : 38 Binôme III.2		
x	$f(x)$	Brouillon
1	**1,35**	$7{,}693.10^{-6}$
0,4	1,077	$7{,}777.10^{-7}$
0,31	1,0077	$2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = 1,$
0,301	1,00077	
0,3001	1,000077	
0,30001	1,0000077	
~~0,300001~~		
0,30000099	1,000000777	
0,3000009999	1,000000769	
		1,0000000000769

Après avoir rencontré la valeur interdite affichée dans le calcul de $f(v_4)$, cet élève intercale des x dans $]v_5\,;\,v_4[$ selon 0,30000099 et 0,3000009999. Remarquons que, pour $x = 0{,}3000009\underbrace{...9}_{n}$ ($n > 4$) la calculatrice tronque pour garder $x = 0{,}3000009999$: elle affiche donc de façon stable 1,000000769.

Nous reviendrons sur la tentative de résoudre une équation à propos de la partie brouillon de cet élève dans l'analyse des couples des binômes.

En résumé, 20 élèves ayant pris la décision 2 (16 élèves) et la décision 3 (4 élèves) montrent leurs connaissances sur l'ordre dans l'ensemble des décimaux dans les techniques d'intercalation décimale de x dans de « petits » intervalles (distances des deux bornes inférieurs à 10^{-5}).

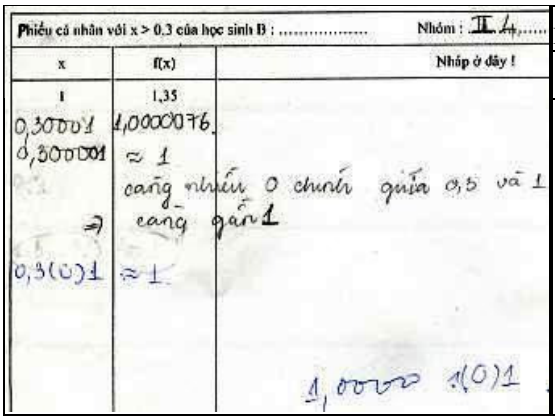
d. L'affichage de 1 est-il un calcul exact de *f*(*x*) ?

Le questionnement de l'affichage de 1 se retrouve dans les fiches personnelles de 10 élèves :

Dx.EDI (4), *Dx.EDn* (2), *Dx.EF* (1), (u_5 ; 1) (cas A) ou (v_6 ; 1) (cas B) (2), *Dx.Calcul exact* (1).

Les exemples qui illustrent chacune de ces catégories démontrent que l'affichage de 1 n'est pas interprété comme une valeur exacte. Parfois, cela va jusqu'au refus de recopie de 1 pour lui substituer un nombre soit construit à partir d'une généralisation de l'observation de l'affichage des nombres précédant 1, soit calculé à la main.

• Réponse *Dx.EDI* de l'élève B du binôme II.4 :



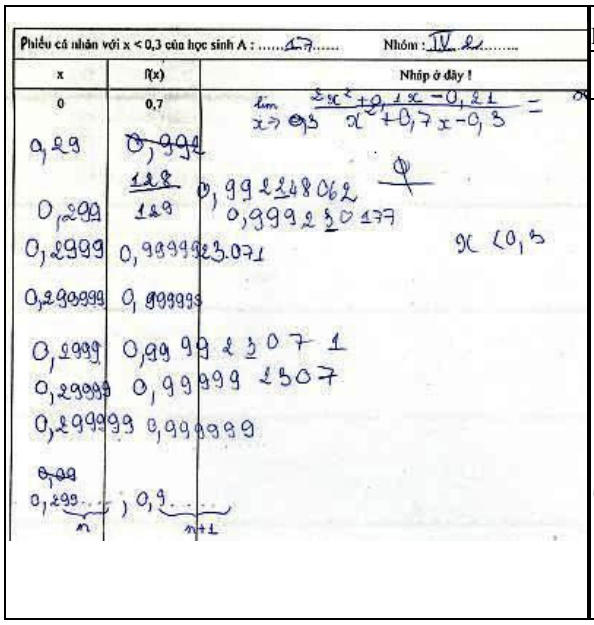
Fiche personnelle avec x > 0,3 de B :…… Binôme II.4		
x	$f(x)$	Brouillon
1	**1,35**	
0,30001	1,0000076	
0,300001	≈ 1	
⇒	plus 0 entre 0,3 et 1 plus proche de 1	
0,3(0)1	**≈ 1**	**1,0000 1,(0)1**

L'écriture « ≈ 1 » atteste que l'affichage de 1 est interprété par cet élève clairement comme une valeur approchée du calcul de $f(v_4)$. L'espace entre 0,300001 et 0,3(0)1 et les traces de gommage (utilisation d'un crayon pour écrire les essais) permet de supposer d'autres essais de $x < v_4$. L'observation des affichages de la calculatrice (suite aux entrées de x) conduit à l'écriture de la conjecture « plus [*il y a*] de 0 entre 0,3 et 1 pour x, plus $f(x)$ s'approche 1 ».

Dans les colonnes de x et $f(x)$ sont alors écrites au stylo deux écritures : « 0,3(0)1 » et « ≈ 1 ». Dans la partie brouillon, l'élève a noté 1,0000 et 1,(0)1. Cela atteste que l'écriture décimale illimitée correspondant à la généralisation est problématique.

Suite au travail en binôme, l'écriture 1,(0)76 s'imposera dans la fiche « Règle du jeu - Réponse du binôme » (voir l'analyse des réponses de binômes plus loin).

• Réponse *Dx.EDn* de l'élève A du binôme IV.2



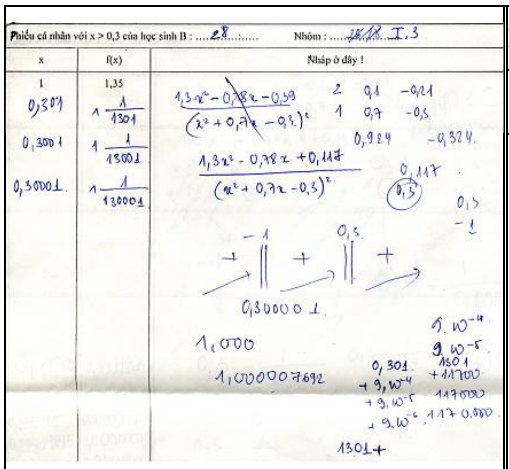
Fiche personnelle avec x < 0,3 de A : … Binôme IV.2		
x	$f(x)$	Brouillon
0	**0,7**	$\lim\limits_{x\to 0,3} \frac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} =$
0,29	~~0,992~~	
	$\frac{128}{129}$ 0,992248062	
0,299	0,999230177	$x < 0,3$
0,2999	0,9999923071	
0,299999	0,999999	
0,2999	0,999923071	
0,29999	0,999992307	
0,299999	0,999999	
~~0,09~~		
$0,299\underbrace{\ldots}_{n}$	$0,9\underbrace{\ldots}_{n+1}$	

Dans l'exploration des valeurs de la suite $f(u_n)$, l'affichage de 1 dans le calcul de $f(u_5)$ est rencontré, mais 0,999999 est recopié.

L'arrêt à l'essai $x = u_5$ indique que la formule F_1 est certainement utilisée pour le calcul instrumenté : la formule F_2 dans le calcul de $f(x)$ permet d'essayer jusqu'à $x = u_8$ avant de rencontrer 1 (voir tableau 10). La tentative de calcul de la limite par la formule initiale F_1 dans la partie brouillon renforce cette supposition.

Après l'essai de u_5, les valeurs de x = 0,2999 ; 0,29999 ; 0,299999 sont de nouveau calculées : cela prouve que l'affichage 1 du calcul de $f(u_5)$ est considéré comme « anormal ». Le nombre 1 n'est donc pas recopié mais remplacé par un décimal construit par généralisation de l'affichage des calculs des $f(u_i)$ avec i = 1, 2, 3, 4 : n chiffres de 9 dans $x = 0{,}2\underbrace{9...9}_{n}$ correspondants à n+1 chiffres de 9 dans le calcul de $f(x)$ « $0{,}\underbrace{9...}_{n+1}$ ». Les chiffres après n+1 chiffres 9 dans le calcul des $f(u_i)$ avec i = 1, 2, 3, 4 sont hors du champ de la généralisation : soulignement du chiffre 2 dans le calcul de $f(0{,}29)$ « 0,992<u>2</u>48062 » et du chiffre 3 dans les calculs de $f(2{,}99)$ « 0,9992<u>3</u>0177 » et $f(2{,}999)$ « 0,99992<u>3</u>071 ».

• Réponse *Dx.EF* de l'élève B du binôme I.3



Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : 28 Binôme I.3

x	$f(x)$	Brouillon
1	**1,35**	$\frac{1{,}3x^2 - 0{,}78x + 0{,}39}{(x^2 + 0{,}7x - 0{,}3)^2}$ 2 0,1 - 0,21 1 0,7 - 0,3
0,301	$1\frac{1}{1301}$	0,924 -0,324
0,3001	$1\frac{1}{13001}$	$\frac{1{,}3x^2 - 0{,}78x + 0{,}117}{(x^2 + 0{,}7x - 0{,}3)^2}$ 0,117
0,30001	$1\frac{1}{130001}$	0,3 0,3 -1 -1 0,3 + + + 0,300001
		1,000 […]
		1,000007692 […]

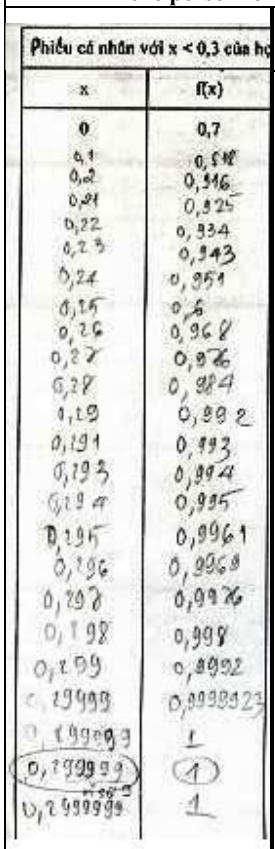
Le calcul de la dérivée sur la formule initiale montre l'utilisation de la formule F_1. Dans le calcul de $f(v_3)$, la calculatrice affiche « 1,000007692 » noté dans la partie brouillon, mais seul l'écriture $1\frac{1}{130001}$ est recopié dans la colonne $f(x)$. Le couple $(0{,}3\underbrace{0...0}_{n}1\ ;\ 1\frac{1}{13\underbrace{0...0}_{n}1})$ est donné comme le meilleur couple de B dans la réponse du binôme I.3. Ce couple provient de la généralisation des affichages fractionnaires mixtes des calculs des $f(v_1)$ et $f(v_2)$ comme le travail collectif le confirmera.

Le nombre « 0,300001 » présent dans la partie brouillon permet de penser que le calcul $f(v_4)$ a produit l'affichage de 1 mais que cet affichage a été refusé pour lui substituer la généralisation du résultat du calcul $f(v_n)$ en fraction mixte. Cette généralisation respecte la monotonie théorique de la fonction f résultant de l'étude de signe de la dérivée. Cette étude tient compte du fait que la racine double du numérateur de la dérivée (x = 0,3) est la valeur interdite, entourée dans la partie brouillon.

• Réponse (u_5 ; 1) d'un élève A et (v_4 ; 1) d'un élève B

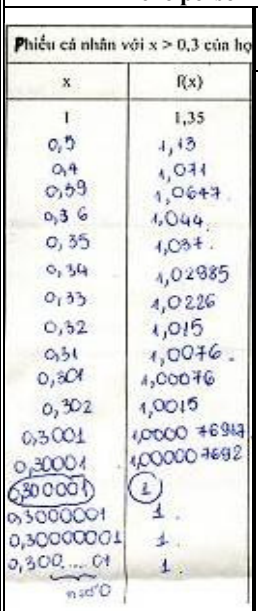
Ces deux élèves forment le même binôme IV.1. L'analyse de leurs réponses montre que, pour ces élèves, l'affichage de 1 est une valeur approchée de $f(u_5)$ ou $f(v_4)$.

Fiche personnelle avec x < 0,3 de A



x	$f(x)$
0	**0,7**
0,1	0,818
0,2	0,916
0,21	0,925
0,22	0,934
0,23	0,943
0,24	0,951
0,25	0, 6
0,26	0,968
0,27	0,976
0,28	0,984
0,29	0,992
0,291	0,993
0,293	0,994
0,294	0,995
0,295	0,9961
0,296	0,9969
0,297	0,9976
0,298	0,998
0,299	0,992
0,29999	0,9999923
0,299999	1
0,2 $\underbrace{999\,99}_{n \text{ chiffres } 9}$	1
0,2 999999	1

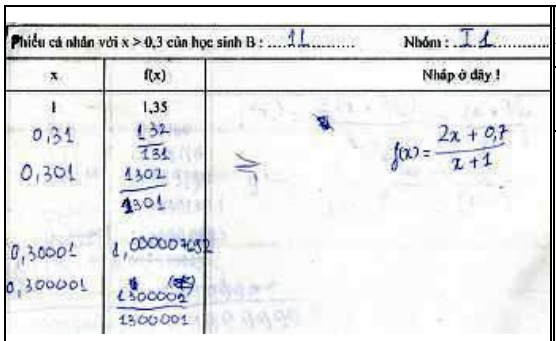
Fiche personnelle avec x < 0,3 de B



x	$f(x)$
1	**1,35**
0,5	1,13
0,4	1,071
0,39	1,0647
0,36	1,044
0,35	1,037
0,34	1,02985
0,33	1,0226
0,32	1,015
0,31	1,0076
0,301	1,00076
0,302	1,0015
0,3001	1,000076917
0,30001	1,000007692
0,300001	1
0,3000001	1
0,30000001	1
0,3 $\underbrace{00...0}_{n \text{ chiffres } 0}$ 1	1

Les deux élèves de ce binôme s'appuient sur la monotonie pragmatique de f pour des essais de $x \in D_2$ et D_3. Après avoir rencontré 1 dans le calcul de $f(u_5)$ (cas A) ou $f(v_4)$ (cas B), ils ne prennent ni la décision 1 (choix de $x = u_4$ ou $x = v_3$) ni la décision 2 (exploration des intervalles $]u_4\,;\,u_5[$ ou $]v_4\,;\,v_3[$) ni la décision 3 (exploration dans l'intervalle $]u_5;\,u_6[$ ou $]v_5\,;\,v_4[$. Ils continuent les essais de $x = u_6$, u_7… (cas A) ou $x = v_5$, v_6, …(cas B). Ils conjecturent que la calculatrice affiche toujours 1 dans le calcul de $f(u_n)$ ($n \geq 5$, cas A) ou $f(v_n)$ ($n \geq 4$, cas B). Le contrôle de la monotonie de la fonction f les conduit à interpréter l'affichage de 1 comme une valeur approchée de 1.

• Réponse *Dx.Calcul exact* de l'élève B du binôme I.1



Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : 11 Binôme I.1		
x	$f(x)$	Brouillon
1	**1,35**	$f(x) = \frac{2x+0,7}{x+1}$
0,31	$\frac{132}{131}$	
0,301	$\frac{1302}{1301}$	
0,30001	1,000007692	
0,300001	$\frac{1300002}{1300001}$	

Dans le calcul de $f(v_n)$ par la formule F_1, l'affichage de 1 est rencontré, écrit dans la colonne de $f(x)$ puis enfin rayé. La formule F_2 est alors utilisée pour faire « le calcul à la main » de $f(x)$: $f(v_4) = \frac{1300002}{1300001}$. Le couple ($0,3\underbrace{0...0}_{n}1$; $\frac{13\underbrace{0...0}_{n}2}{13\underbrace{0...0}_{n}1}$) est donné comme le meilleur couple de B dans la réponse du binôme I.1.

I.2. Phase 2. Analyse des interactions A et B dans les binômes

Dans le tableau 17, nous récapitulons les couples (x ; $f(x)$) finaux des 19 binômes selon les types de réponses prévus dans l'analyse *a priori*.

D_x								*Dy.Eq*	Total
Formule initiale F_1						Formule simplifié F_2			
Dx.Décimaux calculatrice	*Dx. EDI*	*Dx. ED_n*	*Dx. EF*	(u_5 ; 1)	Pas réponse	*Dx.Décimaux calculatrice*	*Dx.Calcul exact*		
12	2	0	1	1	2	0	1	0	19

Tableau 18. Couples résultant des interactions A et B dans les binômes

La plupart des binômes (12) répondent par les couples *Dx.Décimaux calculatrice*. Cela est en accord avec la prédominance des réponses de ce type pour les 27 couples des élèves A et B.

Les deux réponses *Dx.EDn* n'arrivent pas à s'imposer dans les binômes I.2 et IV.2 contre *Dx.Décimaux calculatrice*. C'est pourquoi, la réponse *Dx.EDn* est absente du tableau 18.

a. Pourquoi les résultats des interactions dans les binômes différent-ils de ceux de Le Thai Bao (2004) ?

Dans un travail précédent (Le Thai Bao 2004), nous avions proposé une situation très similaire.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 0,1x - 0,02}{0,25x^2 - 0,01}$.

Problème 1 : Proposer un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 3 et x < 0,2.
Problème 2 : Proposer un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 3 et x > 0,2.

Cette situation avaient été mise en place dans une classe 11 du Viêt-Nam où avait déjà été enseignée la notion de limite : la classe avait alors été divisée en 10 groupes de 4 élèves, une moitié des groupes travaillant avec $x < 0,2$ et l'autre avec $x > 0,2$.

La plupart des groupes dans la classe observée en 2004 (8 sur 10) avaient répondu soit par des couples *Dx.EDI* (4) soit par des couples *Dx.EDn* (4). Les réponses *Dx.Décimaux calculatrice* étaient absentes !

L'apparition dominante des réponses *Dx.Décimaux calculatrice* dans la situation 3 (12 sur 19) s'explique par le changement institutionnel du rôle de la calculatrice dû à l'évolution de génération des calculatrices autorisées et encouragées dans l'EMS du Viêt-nam. En effet :

• En 2004, la calculatrice CASIO fx-500A était présente : cette version a une seule ligne commune à l'édition et à l'affichage du résultat. La calculatrice actuelle CASIO fx-570MS possède deux lignes différentes sur l'écran : une ligne pour l'édition et une ligne pour l'affichage du résultat. De plus cette calculatrice est autorisée et son utilisation encouragée dans l'EMS du Viêt-nam en vigueur selon le *préambule* du guide du Département de l'Enseignement Secondaire du Ministère de l'Education et de la Formation.

> La calculatrice CASIO fx-570MS a beaucoup d'avantage pour les élèves du Lycée et au niveau de l'Enseignement Supérieure parce que :
>
> - elle peut être utilisée pour résoudre la majorité des problèmes du Lycée et une partie des problèmes du niveau de l'Enseignement Supérieure,
> - sa manipulation suit un nouveau processus d'appuis de touches (l'expression éditée est affichée selon le système S.V.P.A.M[1]),
> - elle est bien organisée et légère ; son prix est aussi raisonnable pour les élèves et les étudiants.
>
> Avec ses avantages, cette marque de calculatrice aide certainement beaucoup les élèves et les étudiants dans l'apprentissage et la vie quotidienne.

• Nguyen (2005) met en lumière des différences sur les touches mémoires des calculatrices de EMS :

Hiérarchie des modèles : Du plus simple au plus complexe	Fx 220	Fx 500A	Fx 992	Fx 500MS	Fx 570MS
Mémoire A, B, C… et nombre de ces mémoires			× 7	× 9	× 9
Mémoire du dernier résultat Ans			×	×	×
Mémoire M+, M-	×	×	×	×	×
Mémoire d'expression				×	×
Mémoire de formule				×	×
Parenthèses	×	×	×	×	×
Mémoire constante	×	×	×		
Touche « X↔Y »	×	×	×		
Touche « X↔M »	×	×			
Système S.V.P.A.M			×	×	×

(Tableau 1, p. 106)

Nous grisons les colonnes des calculatrices utilisées dans nos deux expérimentations.

La calculatrice CASIO fx-500A n'a donc ni les touches mémoires X, A, B, …, ni la mémoire d'expression, ni la mémoire de formule. Autrement dit, on ne peut pas éditer une expression littérale pour calculer $f(x)$, mais il faut recommencer pour chaque essai de x. Le

[1] Le système S.V.P.A.M, acronyme de : « Super Visually Perfect Algebraic Method », permet d'entrer une expression sur la calculatrice à l'identique de son écriture algébrique usuelle. Exemple : si l'on veut calculer sin 30°, on tape « sin » « 30° ». Sur celle qui ne possède pas ce système, on doit taper « 30° » « sin ». (Nguyen 2005, p. 106)

calcul de $f(x)$ pour $x \in D_n$ devient donc très coûteux : plus n augmente, plus l'essai de x devient coûteux. Pour rencontrer l'affichage de la valeur interdite pour $f(x)$ - la valeur 3 pour la fonction en 2004 - il faut essayer avec $x \in D_7$, par exemple $x = 0{,}1\underbrace{9\ldots9}_{7}$ ou $x = 0{,}2\underbrace{0\ldots0}_{6}1$ (voir tableaux p. 44, Le Thai Bao 2004). La conséquence est que les élèves de l'expérimentation 2004 ne rencontrent (ou rarement) ni l'affichage interdit ni le non – respect de la monotonie de la fonction f faute de temps pour essayer des $x \in D_n$ avec $n \geq 6$. La généralisation des affichages numériques de la calculatrice en *Dx.EDI* et *Dx.EDn* se trouve donc favorisé. *A contrario*, rappelons qu'au début de l'ingénierie expérimentée dans l'environnement calculatrice CASIO fx-570MS, nous avons conduit un enseignement sur les touches ALPHA, X (ou autres touches mémoires), CALC, enseignement qui a permis une diminution drastique du coût du calcul instrumenté de $f(x)$ pour $x \in D_n$

• Une autre grande différence entre CASIO fx-500A et CASIO fx-570MS est que la calculatrice CASIO fx-500A n'affiche que le résultat décimal (ou entier) : il n'existe pas de touche ab/c ou d/c pour passer à l'affichage fractionnaire de résultat. La règle implicite sur le calcul instrumenté dans **Q** ne peut donc pas fonctionner (ou faiblement) à l'époque de l'utilisation de CASIO fx-500A dans l'EMS du Viêt-Nam (de l'année 2000 à 2004).

b. Analyse des réponses *Dx.Décimaux calculatrice* (12 sur 19)

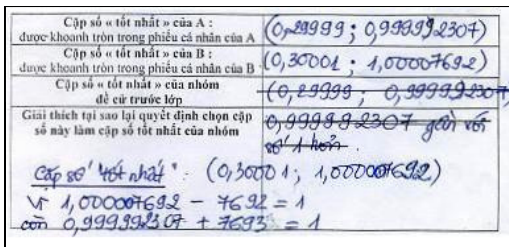
Les 12 réponses par couples *Dx.Décimaux calculatrice* résultent tous de l'interaction d'élèves ayant répondu par *Dx.Décimaux calculatrice*, sauf pour le binôme IV.2.

L'élève A du binôme IV.2 répond par *Dx.EDn* (voir la copie de sa fiche personnelle plus haut) n'a pas réussi à défendre son couple *Dx.EDn*. Elle a accepté le couple *Dx.Décimaux calculatrice* de l'élève B comme le meilleur couple.

Le travail en binôme demande la mise en place d'un critère pour décider « le meilleur » couple ». Nous avions fait l'hypothèse qu'une notion de distance apparaîtrait comme un critère : en effet, un tel critère de distance est présent, plus ou moins explicite selon les binômes.

- Il est explicite dans les justifications de deux binômes.

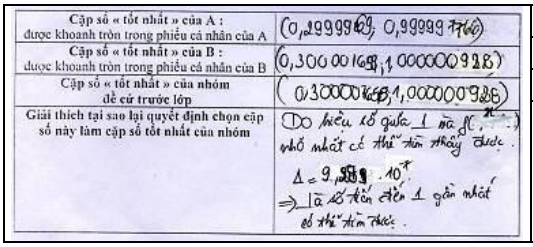
• Réponse du binôme III.5 :



…couple de A …	(0,29999 ; 0,999992307)
…couple de B…	(0,30001 ; 1,00007692)
…couple de l'équipe…	~~(0,29999 ; 0,999992307)~~
Justifier … de l'équipe	~~0,999992307 est plus proche de 1~~
« Meilleur » couple de l'équipe : (0,30001 ; 1,000007692) Car 1,000007692 – 7692 = 1 Et 0,999992307 + 7693 = 1	

Les ratures dans la fiche du binôme III.5 nous permettent d'imaginer un débat entre A et B pour convaincre l'autre que son couple est le meilleur. D'abord, une erreur de recopie du couple de B (1,000007692 recopié comme 1,00007692) leur fait choisir le couple de A. Après la reprise du calcul de $f(v_3)$, le couple de A est rayé dans la partie « meilleur couple de l'équipe ». Les distances des $f(x)$ de A et B à 1 sont calculées : 7692 et 7693, avec oubli de la multiplication par 10^{-9}. C'est sur ce critère qu'est justifié le choix de (0,30001 ; 1,000007692).

• La justification du binôme II.3 explicite aussi le critère de comparaison des distances des $f(x)$ à 1 qui fonde la décision du « meilleur » couple » .



Cặp số « tốt nhất » của A : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của A	(0,2999969; 0,999997766)
Cặp số « tốt nhất » của B : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của B	(0,300001658; 1,000000928)
Cặp số « tốt nhất » của nhóm đề cử trước lớp	(0,300001658; 1,000000928)
Giải thích tại sao lại quyết định chọn cặp số này làm cặp số tốt nhất của nhóm	Do hiệu số giữa 1 và f(x) nhỏ nhất có thể tìm thấy được. Δ = 9,28.10^-7 ⇒ là số đến đến 1 gần nhất có thể tìm được.

…**couple de A** …	(0,2999969 ; 0,999997766)
…**couple de B**…	(0,300001658 ; 1,000000928)
…**couple de l'équipe**…	(0,300001658 ; 1,000000928)
Justifier … **de l'équipe**	Car la différence entre 1 et $f(x)$ plus petit est $\Delta = 9{,}28.10^{-7}$ ⇒ ce nombre est le plus proche de 1 que nous pouvons trouver.

- Dans 5 binômes, une justification du type « $f(x)$ de ce couple est plus proche de 1 que l'autre » accompagne le calcul des distances dans les fiches personnelles des élèves, comme par exemple, dans les fiches personnelles du binôme III.2 déjà présentées.

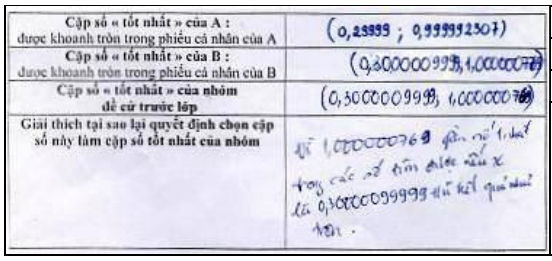
Fiche personnelle avec x < 0,3 de A : 31 Binôme III.2			Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : 38 Binôme III.2		
x	$f(x)$	Brouillon	x	$f(x)$	Brouillon
0	**0,7**		**1**	**1,35**	$7{,}693.10^{-6}$
0,1	0,818		0,4	1,077	$7{,}777.10^{-7}$
0,2	0,917	$1-0{,}999992307=7{,}693.10^{-6}$	0,31	1,0077	$2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = 1,$
0,25	0,96	$0{,}769.\ 10^{-7}$	0,301	1,00077	
0,27	0,976	$7{,}693.\ 10^{-6}$	0,3001	1,000077	
0,29	0,992		0,30001	1,0000077	
0,29999	0,999992307		~~0,300001~~		
~~0,299999 9~~			0,30000099	1,000000777	
0,299999	1 (exclu)		0,3000009999	1,000000769	
					1,0000000000769

La partie brouillon des fiches personnelles de A et de B contiennent la distance de $f(x)$ à 1 : « 1 - 0,999992307 = $7{,}693.10^{-6}$ » pour A et « $7{,}69.\ 10^{-7}$ » pour B. Ce binôme choisit donc le couple (0,3000009999 ; 1,000000769) de B comme le meilleur couple de l'équipe.

Dans la partie brouillon de la fiche personnelle de l'élève B, les écritures du nombre « 1,0000000000769 » et de l'équation « $2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = 1$ » nous permettent d'imaginer, sans trop de risque de nous tromper, une genèse de la problématique d'« approximation $f(x)$ » pour cet élève (ou ce binôme) : après avoir choisi le couple (0,3000009999 ; 1,000000769), l'élève B s'interroge sur l'existence d'un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ = 1,0000000000769 ; mais le coût de la résolution de cette équation l'empêche d'aller jusqu'à bout de cette approximation de 1.

- Dans les 5 derniers binômes, bien qu'aucun calcul de distances ni dans les fiches personnelles ni dans les justifications du choix ne soit présent, ces binômes ont bien choisi le meilleur couple du point de vue de la distance de $f(x)$ à 1. Ceci montre qu'ils se sont appuyés implicitement sur cette comparaison. Quelles sont leurs justifications ?

• 2 binômes justifient le choix du « meilleur » couple de l'équipe par le fait que de plus « la calculatrice affiche de façon stable à partir de $x \in D_{10}$ », comme, par exemple, pour le binôme III.3.



Cặp số « tốt nhất » của A : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của A	(0,29999 ; 0,999992307)	…**couple de A**…	(0,29999 ; 0,999992307
Cặp số « tốt nhất » của B : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của B	(0,3000009999, 1,000000769)	…**couple de B**…	(0,3000009999 ;1,000000769)
Cặp số « tốt nhất » của nhóm đề cử trước lớp	(0,3000009999, 1,000000769)	…**couple de l'équipe**…	(0,3000009999 ;1,000000769)
Giải thích tại sao lại quyết định chọn cặp số này làm cặp số tốt nhất của nhóm	Vì 1,000000769 gần nó 1 nhất trong các số tìm được nếu x là 0,30000099999 thì kết quả như trên.	**Justifier** …**de l'équipe**	Car 1,000000769 est le plus proche de 1 parmi les nombres trouvés. Si x = 0,30000099999, on obtient le même résultat.

Rappelons que si on édite un décimal ayant n chiffres ($n > 11$), la calculatrice ne mémorise que les 11 premiers chiffres décimaux (alors qu'elle affiche au maximum les 10 premiers chiffres décimaux). Elle affiche de façon stable le même résultat quand on ajoute à un nombre décimal $x = a_0,a_1\ldots a_{10}$ (a_i sont les chiffres) de nouveaux chiffres.

• 2 binômes ne donne aucune justification.

• Un binôme écrit que « car le nombre est beau et satisfait à la demande ».

En résumé

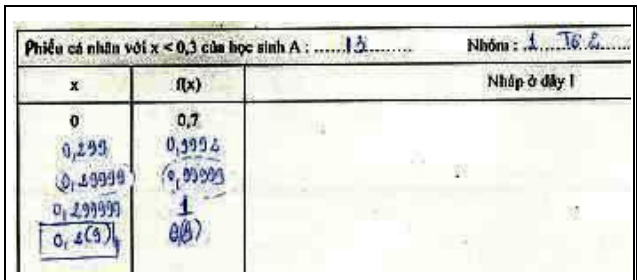
12 binômes répondant par *Dx.Décimaux calculatrice* (sur 19) utilisent la notion de distance à 1 pour décider entre eux *qu'il existe un meilleur couple*.

c. Analyses des 7 autres réponses (voir le tableau 17)

Pour ces 7 binômes, va se poser le problème de l'élaboration d'un critère de comparaison pour décider du « meilleur couple » : un critère reposant sur la distance à 1 comme celui fonctionnant chez les 12 binômes précédents va se révéler problématique. En effet cette distance peut être aussi petite que l'on veut ou impossible à calculer. Cette difficulté est au centre de notre ingénierie. Comment ces binômes vont-ils faire face à cette difficulté ? C'est ce que nous allons essayer de comprendre dans la suite de notre analyse.

- Deux binômes (II.1 et III.4) proposent des couples Dx.EDI

Chacun de ces deux binômes comporte au départ au moins 1 élève qui propose un couple *Dx.EDI* dans sa fiche personnelle. Il semble que le travail en binôme ait convaincu l'autre de changer sa réponse individuelle en une réponse *Dx.EDI*. En effet, les deux binômes proposant des couples *Dx.EDI* porte des traces de corrections qui vont dans ce sens, comme par exemple le binôme II.1.



Phiếu cá nhân với x < 0,3 của học sinh A : ....13..... Nhóm : 1 ....Tô 2.....

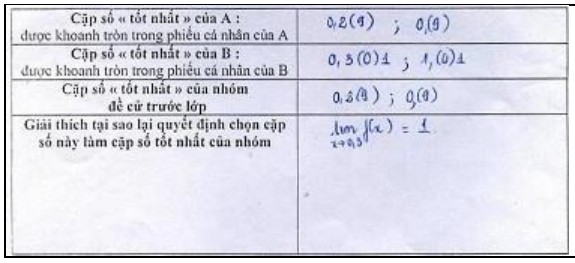
x	f(x)	Nhập ở đây !
0	0,7	
0,299	0,9992	
0,29999	0,99999	
0,299999	1	
0,2(9)	0,(9)	

Fiche personnelle avec x < 0,3 de A :13 Binôme II.1

x	$f(x)$	Brouillon
0	**0,7**	
0,299	0,9992	
0,29999	0,99999	
0,299999	1	
$\boxed{0,2(9)}$	0,(9)	

Après avoir rencontré l'affichage de 1 dans le calcul de $f(u_5)$, l'élève A du binôme II.1 écrit le couple (u_4 ; 0,99999) comme le meilleur couple : il entoure ce couple. Après coup, il efface ensuite cette marque et écrit le couple *Dx.EDI* (0,2(9) ; 0,(9)).

• Binôme II.1

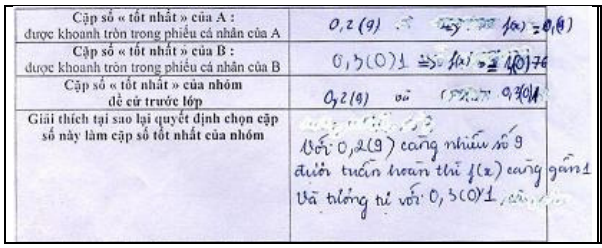


Cặp số « tốt nhất » của A : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của A	0,2(9) ; 0,(9)
Cặp số « tốt nhất » của B : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của B	0,3(0)1 ; 1,(0)1
Cặp số « tốt nhất » của nhóm đề cử trước lớp	0,2(9) ; 0,(9)
Giải thích tại sao lại quyết định chọn cặp số này làm cặp số tốt nhất của nhóm	$\lim_{x\to 0,3} f(x) = 1$

« meilleur » couple de A […]	0,2(9) ; 0,(9)
« meilleur » couple de B […]	0,3(0)1 ; 1,(0)1
« meilleur » couple de l'équipe […]	0,2(9) ; 0,(9)
Justifier … couple de l'équipe	$\lim_{x\to 0,3} f(x) = 1$

Le binôme II.1 choisit le couple de A, EDIP9 (0,2(9) ; 0,(9)). Il justifie son choix en écrivant la limite : $\lim_{x\to 0,3} f(x) = 1$. Nous ne trouvons pas de calcul algébrique de cette limite dans les fiches personnelles. La justification par la limite montre une association entre une problématique d' « approximation de x » et la notion de limite $\lim_{x\to 0,3} f(x) = 1$. Le binôme suivant éclaire cette justification.

• Binôme III.4



Cặp số « tốt nhất » của A : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của A	0,2(9)
Cặp số « tốt nhất » của B : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của B	0,3(0)1
Cặp số « tốt nhất » của nhóm đề cử trước lớp	0,2(9)
Giải thích tại sao lại quyết định chọn cặp số này làm cặp số tốt nhất của nhóm	Với 0,2(9) càng nhiều số 9 được tuần hoàn thì f(x) càng gần 1 và tương tự với 0,3(0)1

…**couple de A**…	0,2(9) ⇒ $f(x)$ = 0,(9)
…**couple de B** …	0,3(0)1 ⇒ $f(x)$ = 1,(0)76
…**couple de l'équipe**…	0,2(9) et 0,3(0)1
Justifier … **couple de l'équipe**	Dans 0,2(9), plus le chiffre 9 se répète périodiquement, plus $f(x)$ s'approche 1. De même pour 0,3(0)1.

Le binôme III.4 ne peut pas décider quel est le meilleur couple parmi les deux couples individuels, c'est-à-dire quel $f(x)$ est le plus proche de 1. Ils proposent donc les deux couples. L'aspect « infini » des écritures finies « 0,(9) » et « 1,(0)76 » bloque le calcul des distances à 1. Cet aspect permet d'exprimer une problématique d'« approximation x » dans leur justification : l'approximation de x à 0,3 par l'augmentation des *9* dans 0,2(9) « tire » l'approximation de $f(x)$ à 1. Dans le travail collectif, ils donnent les raisons de leur non choix par : « Nous proposons les deux couples parce que les deux $f(x)$ tendent vers 1. On ne sait pas lequel est le meilleur ».

- Quels EDI sont présents ?

Dans les 2 copies des binômes supra, nous retrouvons les types des réponses suivants en « EDI » selon $f(x)$: 0,(9) ; 1,(0)76 ; 1,(0)1.

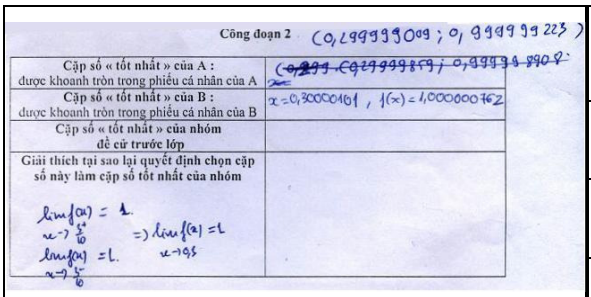
Par rapport à l'ingénierie de 2004, il manque le type EDI avec le pointillé « … ». Pourtant, on peut rapprocher ce type manquant de celui de 0,(9). Nous avions vérifié par le questionnaire du chapitre C3, l'hypothèse de recherche H1.1 issu de l'analyse institutionnelle :

> Dans l'écriture décimale illimitée utilisant des pointillés « … », une succession de chiffres répétée quelques fois est la période.

Bien qu'il n'y ait que 2 réponses en « EDI » dans l'ingénierie présente, tous les types d'« EDI » possibles se trouvent formulés, ce qui permet de poser le problème de leur statut numérique.

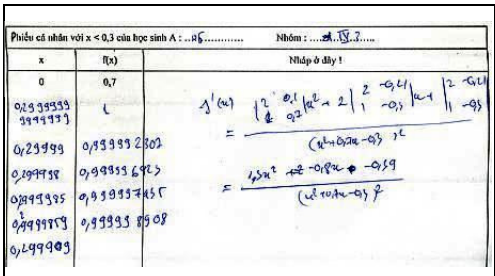
- Deux binômes (I.2 et IV.3) ne donnent pas de meilleur couple

• Le binôme IV.3 assemble deux élèves A et B répondant individuellement par deux couples *Dx.Décimaux calculatrice*. Ce binôme ne donne pas de meilleur couple, mais associe les calculs à la notion de limite.



Phase 2 (0,299999009 ; 0,999999223)	
…**couple de A** …	~~(0,299 (0,29999859; 0,999998908~~
…**couple de B**…	x = 0,30000101, f(x) = 1,000000762
…**couple de l'équipe**	
Justifier …**couple de l'équipe** $\lim\limits_{x\to\frac{3}{10}^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{10}^-} f(x)=1$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0,3} f(x)=1$	

Dans la fiche de A sont présents des essais des u_6 et u_7 dans la colonne de x, et l'affichage de 1 dans la colonne de $f(x)$. Commence alors une exploration de l'intervalle $[u_4 ; u_5[$ selon la suite croissante 0,29999-0,299998-0,2999985-0,29999859 ; cette exploration s'arrête à u_5 dans la dernière ligne « 0,299~~99~~9 » de la colonne de x. Le calcul de la dérivée dans la partie brouillon met en évidence un contrôle par la monotonie théorique de f.

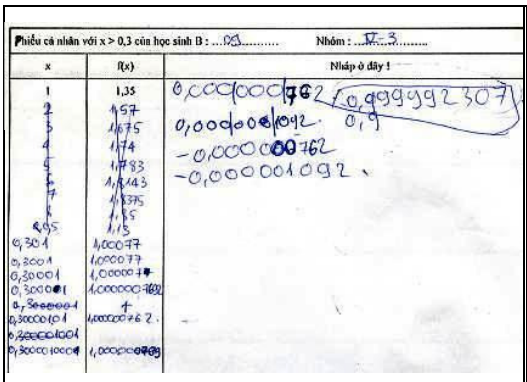


Fiche personnelle avec x < 0,3 de A : 06 Binôme IV.3

x	$f(x)$	Brouillon
0	**0,7**	
0,2999999 9999999	1	$f'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix}2 & 0,1\\1 & 0,7\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}2 & -0,21\\1 & -0,3\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}2 & -0,21\\1 & -0,3\end{vmatrix}}{(x^2+0,7x-0,3)^2}$
0,29999	0,999992307	
0,299998	0,999996923	
0,2999985	0,999997435	
0,2 9999859	0,999998908	
0,299~~99~~9		$= \dfrac{1,3x^2-0,8x-0,39}{(x^2+0,7x-0,3)^2}$

Le travail individuel de A le conduit au couple (0,29999859 ; 0,999998908).

La suite des nombres 0,30000101-0,3000001001-0,3000010001 dans les dernières lignes de la colonne de x montre que B comme A contrôle la monotonie de f. Le calcul et la comparaison des distances dans la partie brouillon de B pousse A dans une nouvelle exploration.



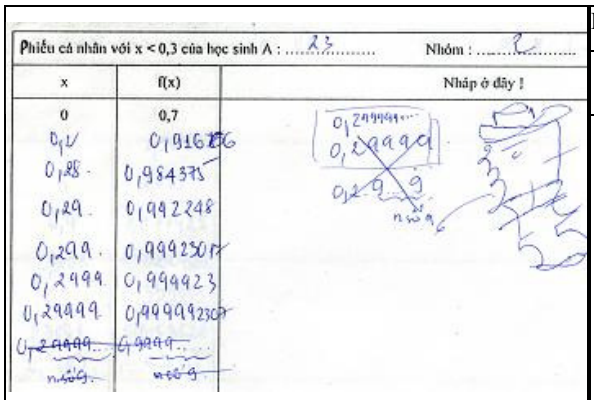
Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : 09 Binôme IV.3

x	$f(x)$	Brouillon
1	**1,35**	0,000 | 000 | 762 $\boxed{0,999992307}$
[…]	[…]	0, 000 | 00~~0~~ | 1092 0,9
0,301	1,00077	- 0,000000762
0,3001	1,000077	- 0,000001092
0,30001	1,0000077	
0,300001	1,0000007692	
~~0,3000001~~	~~1~~	
0,30000101	1,000000762	
~~0,300001001~~		
0,3000010001	1,000000769	

Les nombres « 0,000001092 » et « 0,000000762 » correspondent aux distances des nombres 0,999998908 et 1,00000762 à 1 : la distance « 0,000001092 » (cas A) a un zéro de moins que celle de « 0,000000762 » (cas B), différences notées ainsi « 0,000 | 000 | 762 » et « 0, 000 | 00~~0~~ | 1092 ». Le couple de B est donc meilleur que celui de A. L'élève A poursuit sa recherche en explorant l'intervalle $]u_5\,;\,u_6[$ et propose un nouveau couple (0,299999009 ; 0,999999223) toujours moins bon que celui de B.

Alors qu'ils ont la distance comme critère de comparaison, ces élèves ne décident pas du meilleur couple. Comme pour binôme II.1 (*Dx.EDI*), il n'y a aucun calcul de limite ne dans les fiches des élèves A et B mais une justification par les limites à droite ($x > 0{,}3$) et à gauche ($x < 0{,}3$) de la fonction f en 0,3 qui amène à conclure que $\lim\limits_{x\to 0{,}3} f(x) = 1$. Le calcul des distances à 1 et le respect de la monotonie théorique amènent donc ce binôme à abandonner *Dx.Décimaux.calculatrice* pour associer une problématique d'« approximation x » à l'écriture de limites.

• Le binôme I.2 rassemble un élève A avec une réponse *Dx.EDn* et un élève B avec une réponse *Dx.Décimaux calculatrice.*



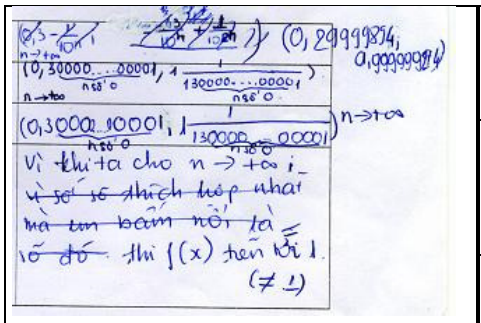
Fiche personnelle avec x < 0,3 de A : … Binôme I.2

x	$f(x)$	Brouillon
0	**0,7**	$\boxed{0,99999\ldots}$
0,2	0,91666	~~0,29999~~
0,28	0,984375	
0,29	0,992248	~~0,2 $\underbrace{9\ldots9}_{n \text{ chiffres } 9}$~~ […]
0,299	0,99923017	
0,2999	0,999923	
0,29999	0,999992307	
~~0,2 $\underbrace{9999\ldots}_{n \text{ chiffres } 9}$~~	~~0, $\underbrace{9999\ldots}_{n \text{ chiffres } 9}$~~	

Ce binôme ne donne ni meilleur couple ni explication. Les ratures sur le couple *Dx.EDn* de la fiche de A montre que l'élève A n'a pas convaincu l'élève B d'accepter sa généralisation, mais l'absence de décision montre aussi que le couple *Dx.Décimaux calculatrice* devient problématique.

-Un binôme I.3 propose un couple Dx.EF

Ce binôme réunit un élève A *Dx.Décimaux calculatrice* et un élève B *Dx.EF*.

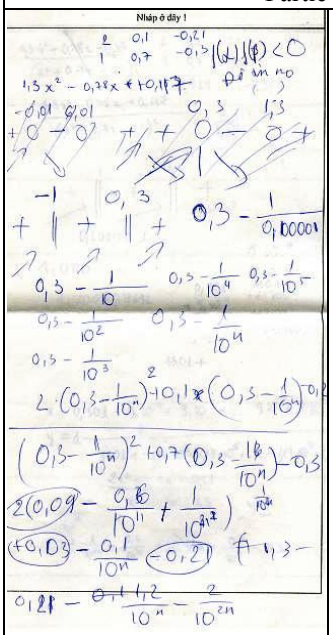
	…**couple de A** …	$(\cancel{0,3} - \frac{1}{10^n}\ ;\ \cancel{-\frac{3}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}})$ (0,29999894 ; 0,999999274) $n \to \cancel{+\infty}$
	…**couple de B** …	$(0,\underbrace{30000...0000}_{n \text{ chiffres } 0}1\ ;\ 1\frac{1}{1\underbrace{30000...0000}_{n \text{ chiffres } 0}1})$ $n \to +\infty$
	…**couple de l'équipe**…	$(0,\underbrace{30000...0000}_{n \text{ chiffres } 0}1\ ;\ 1\frac{1}{1\underbrace{30000...0000}_{n \text{ chiffres } 0}1})$ $n \to +\infty$
	Justifier … de l'équipe	Car si $n \to +\infty$, ~~Car c'est le meilleur nombre que je peux encore manipuler avec la calculatrice~~. $f(x)$ tend vers 1 ($\neq 1$).

La phrase raturée « Car c'est le meilleur nombre que je peux encore manipuler avec la calculatrice » dans la partie « justification … de l'équipe » montre une tentative de A d'imposer sa réponse *Dx.Décimaux calculatrice* dans un premier temps, tout en relativisant « le meilleur » à la manipulation de la calculatrice.

Mais l'élève B (dont la réponse individuelle est $(0,30001\ ;\ 1\frac{1}{130001})$) convainc l'élève A d'accepter la réponse *Dx.EF* : pour cela, il généralise les observables numériques des affichages fractionnaires de la calculatrice en couple $(0,3\underbrace{0000...0000}_{n \text{ chiffres } 0}1\ ;\ 1\frac{1}{13\underbrace{0000...0000}_{n \text{ chiffres } 0}1})$.

De plus, dans la partie brouillon de la fiche de B figure une étude correcte de la monotonie de *f* par le signe de la dérivée.

La rature « $\cancel{(0,3 - \frac{1}{10^n}\ ;\ -\frac{3}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}})}$ » dans le meilleur couple de A montre que les écrits B organise un milieu pour l'élève A dans l'apprentissage de la réponse *Dx.EF*. Pour l'attester, nous présentons simultanément les parties brouillons de A et de B.

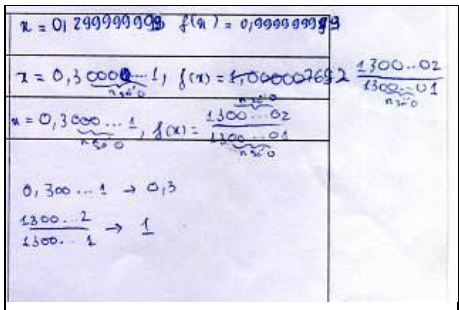
Partie brouillon de A		Partie brouillon de B
	2 0,1 -0,21 1 0,7 -0,3 […] $1{,}3x^2 - 0{,}78x + 0{,}117$ […] -1 0,3 + ‖ + ‖ + 0,3 - $\frac{1}{10}$ 0,3 - $\frac{1}{10^4}$ 0,3 - $\frac{1}{10^5}$ 0,3 - $\frac{1}{10^2}$ 0,3 - $\frac{1}{10^n}$ 0,3 - $\frac{1}{10^3}$ $\frac{2(0{,}3-\frac{1}{10^n})^2+0{,}1(0{,}3-\frac{1}{10^n})-0{,}21}{(0{,}3-\frac{1}{10^n})^2+0{,}7(0{,}3-\frac{1}{10^n})-0{,}3}$	$\frac{1{,}3x^2-0{,}78x+0{,}39}{(x^2+0{,}7x-0{,}3)^2}$ 2 0,1 - 0,21 1 0,7 - 0,3 $\frac{1{,}3x^2-0{,}78x+0{,}117}{(x^2+0{,}7x-0{,}3)^2}$ -1 0,3 + ‖ + ‖ + […] 0,3 0,3 -1

La confrontation des deux brouillons montre une coopération de A et de B dans l'étude de la monotonie de f : ils commettent des erreurs qu'ils rectifient.

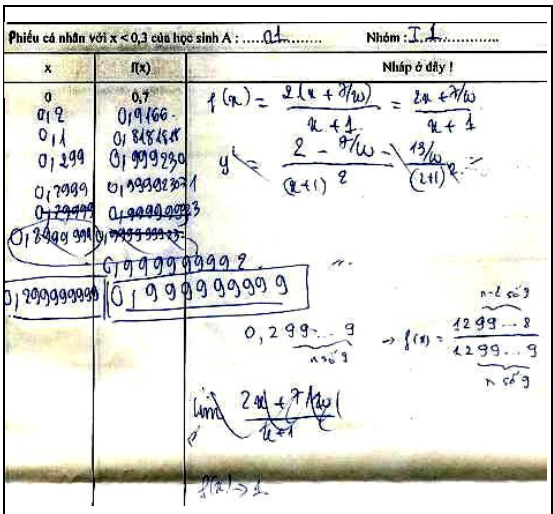
Après avoir validé la monotonie de f par l'étude de signe de la dérivée, l'élève A abandonne le couple *Dx.Décimaux calculatrice*. Il écrit les u_n sous la forme 0,3 - $\frac{1}{10^n}$ et tente de calculer exactement f(0,3 - $\frac{1}{10^n}$) par la formule F_1. La complexité de ce calcul l'empêche d'aller jusqu'à bout.

Les travaux coopératifs de A et de B fondent une problématique d'« approximation x » qui amène la justification finale : « Car si $n \to +\infty$, $f(x)$ tend vers 1 ($\neq$ 1) », l'écriture fractionnaire mixte de $f(x)$ « $1\frac{1}{13\underbrace{0000...0000}_{n \text{ chiffres } 0}1}$ » étant à l'origine de $f(x) \neq 1$.

- Un binôme I.1 produit un couple Dx.Calcul exact

	
… **couple de A** …	$x = 0{,}299999999$, $f(x) = 0{,}999999999$
… **couple de B**…	$x = 0{,}3\underbrace{0001...}_{n \text{ chiffres } 0}1$, $f(x) = \cancel{1{,}000007692}\ \frac{1300...02}{13\underbrace{00...0}_{n \text{ chiffres } 0}1}$
… **couple de l'équipe** …	$x = 0{,}3\underbrace{000...}_{n \text{ chiffres } 0}1$, $f(x) = \frac{13\overbrace{00...0}^{n \text{ chiffres } 0}2}{13\underbrace{00...0}_{n \text{ chiffres } 0}1}$
Justifier … de l'équipe	$0{,}300\ldots1 \to 0{,}3$ $\frac{1300...02}{1300..1} \to 1$

La rature dans la partie « meilleur couple de B » montre que l'élève B a d'abord proposé le couple (v_3 ; 1,000007692) : il prend la décision 1 dans la réponse *Dx.Décimaux calculatrice* en utilisant la formule « initiale » F_1. Le travail en binôme pousse l'élève B à changer de stratégie. La fiche personnelle de A permet d'expliquer la raison de ce changement.



Fiche personnelle avec x < 0,3 de A : 01 Binôme I.1

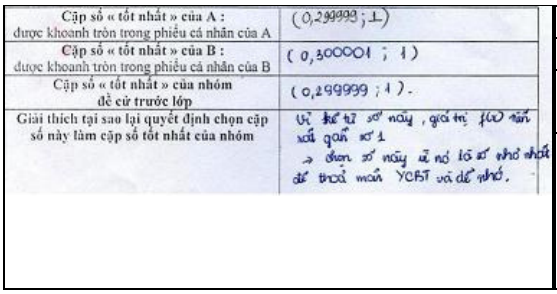
x	$f(x)$	Brouillon
0	**0,7**	$f(x)=\frac{2(x+7/20)}{x+1}=\frac{2x+7/10}{x+1}$
0,2	0,9166	
0,1	0,8181818	
0,299	0,999230	
0,2999	0,99992307	$y'=\frac{2-7/10}{(x+1)^2}=\frac{13/10}{(x+1)^2}$
~~0,29999~~	~~0,99999923~~	
~~0,2999 999~~	~~0,999999923~~	
	0,999999992	
$\boxed{0{,}299999999}$	$\boxed{0{,}999999999}$	$0{,}2\underbrace{99...9}_{n} \to f(x)=\frac{1\overbrace{299...8}^{n-1}}{1\underbrace{299...9}_{n}}$
		$\lim \cancel{\frac{2x+7/10}{x+1}}$
		$f(x)\to 1$

L'élève A utilise la formule simplifiée F_2 depuis la situation 2 (voir analyse *a posteriori*, question 1, situation 2). Dans l'essai des $x = u_n$, il choisit le couple (u_8, $0,\underbrace{9...9}_{9}$) parce que la calculatrice affiche de façon stable $\underbrace{9...9}_{9}$ à partir de $n \geq 8$ (voir tableau 10 de l'analyse *a priori*). Il calcule algébriquement $f(u_n)$.

L'utilisation de la formule F_2, les calculs de la dérivée, de $f(u_n)$ et de la limite permettent à l'élève A de convaincre l'élève B d'abandonner la formule F_2 et le couple (v_3 ; 1,000007692). Le couple ($0{,}3\underbrace{000...}_{n \text{ chiffres } 0}1$; $\frac{13\overbrace{00...0}^{n \text{ chiffres } 0}2}{13\underbrace{00...0}_{n \text{ chiffres } 0}1}$) est donc le fruit de l'interaction de A et B où A joue le rôle d'enseignant.

Comme dans les cas précédents, une problématique d'« approximation x » fonde la justification du binôme : le fait que « 0,300…1 → 0,3 » conduit le fait que « $\frac{1300...02}{1300..1} \to 1$ ».

- Un binôme IV.1 propose le couple (u_5 ; 1)



Cặp số « tốt nhất » của A : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của A	(0,299999 ; 1)
Cặp số « tốt nhất » của B : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của B	(0,300001 ; 1)
Cặp số « tốt nhất » của nhóm để cử trước lớp	(0,299999 ; 1).
Giải thích tại sao lại quyết định chọn cặp số này làm cặp số tốt nhất của nhóm	Vì kể từ số này, giá trị f(x) tiến xấp gần số 1 → chọn số này vì nó là số nhỏ nhất để thoả mãn YCBT và dễ nhớ.

...**couple de A**…	(0,299999 ; 1)
…**couple de B**…	(0,300001 ; 1)
…**couple de l'équipe**…	(0,299999 ; 1)
Justifier …**couple de l'équipe**	Car à partir de ce nombre, la valeur de $f(x)$ s'approche très près de 1. → Nous choissions ce nombre parce qu'il est le plus petit qui satisfait à la demande et est facile à mémoriser.

Dans ce binôme, l'élève A propose le couple (u_5 ; 1) et B propose (v_4 ; 1), u_5 ou v_4 étant les premiers décimaux pour lesquels la calculatrice affiche 1 dans le calcul de $f(x)$ (cas A ou B).

La justification « Car à partir de ce nombre, la valeur de $f(x)$ s'approche très près de 1 » exprime une problématique d' «approximation x ». L'affichage de la calculatrice dans le calcul de $f(u_5)$ ou $f(v_4)$ désigne une valeur « très près » de 1. Malgré tout, ils écrivent 1. Le couple (0,299999 ; 1) est choisi parce que x = 0,299999 est, d'après eux, le plus petit tel que la calculatrice affiche 1 dans le calcul de $f(x)$ (comme 0,300001) et « le plus facile à mémoriser » (contre 0,300001).

En résume

Les 7 binômes justifient leurs décisions par une problématique d'« approximation x » associée à la notion de limite. La suite de l'ingénierie cherchera à mettre en place une interprétation de la notion de limite par une problématique d'« approximation $f(x)$ » contre cette première conception.

I.3. Phase 3. Travail coopératif enseignant - élèves

a. Institutionnalisation de la notion de distance comme un critère de comparaison - Construction d'une problématique d'« approximation f(x)»

- L'enseignant commence le travail coopératif par les réponses *Dx.Décimaux calculatrice,* celles-ci étant la plus nombreuse. La notion de distance à 1 fonctionnant plus ou mois implicitement pour tous ces binômes, la validation de la notion de distance comme critère de comparaison n'est pas problématique : « *On calcule les différences de 1 aux f(x)* » institutionnaliser par « *Il faut donc calculer la différence à 1 pour décider quel nombre parmi deux nombres autour de 1 est le plus proche de 1* ».

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : - Attention ! Maintenant, on va synthétiser ensemble les réponses des binômes sur le tableau. Si j'appelle un binôme, un élève représentant de ce binôme se lève pour répondre aux questions de la classe. - Je vois d'abord que la majorité des binômes proposent des couples (x ; $f(x)$) des nombres décimaux. On commence donc par ce type des réponses pour la question : quel est le meilleur couple parmi les réponse de ce type ? - J'écris donc au tableau les valeurs $f(x)$ des binômes… *(l'enseignant les écrit au tableau sur deux colonnes)* - Ecrivez –les sur vos cahiers ! Pour faciliter la copie des nombres, je complète … (*L'enseignant numérote le nombres des chiffres de 9 dans la colonne de gauche et chiffres de 0 dans la colonne de droite*) - Alors, dans la première colonne, quel est le meilleur couple ? Es : c'est zéro virgule neuf neuf neuf… – six chiffres neuf-trois zéro huit ($0,\underbrace{999999}_{6}$ 308). P : La valeur $f(x)$ du binôme II.5 ? Es : Oui. P : - D'accord. *(L'enseignant écrit ce nombre dans la partie « le meilleur ? » de la première colonne*) - Et, pour la deuxième colonne ? Es : c'est $1,\underbrace{000000}_{6}$ 582 du dernier binôme, le binôme IV.4. *(L'enseignant écrit ce nombre dans la partie « le meilleur ? » de la deuxième colonne)* P : Comment décide-on le meilleur entre ces deux nombres ? Es : Soustraction. P : Binôme II.3, pouvez – vous expliquer comment décide-on le meilleur entre ces deux nombres ? *(Un élève du binôme II.3 se lève)* EII.3 : - On calcule les différences de 1 aux $f(x)$ *(EII.3 manipule la calculatrice et lit)* $1 - 0,\underbrace{999999}_{6}\ 308 = 6{,}92.10^{-7}$ - Et la différence de $1,\underbrace{000000}_{6}$ 582 à 1 est $5{,}82.10^{-7}$ - Le meilleur est donc $1,\underbrace{000000}_{6}$ 582. P : Vous êtes d'accord ? Es : Oui. P : Il faut donc calculer la différence à 1 pour décider quel nombre parmi deux nombres autour de 1 est le plus proche de 1. Certains binômes ont justifié le choix du meilleur couple de binôme par le calcul des différences à 1. Par exemple, le binôme II.3. *(L'enseignant présente la réponse du binôme II.3 à la classe à l'aide de la tablette de rétro-projection)*	Pour $x < 0{,}3$, $f(x) =$ II.2) $0,\underbrace{99999}_{5}$ 8905 II.5) $0,\underbrace{999999}_{6}$ 308 Pour $x > 0{,}3$, $f(x) =$ I.4) $1,\underbrace{000000}_{6}$ 699 I.5) $1,\underbrace{00000}_{5}$ 1538 II.3) $1,\underbrace{000000}_{6}$ 928 II.4) $1,\underbrace{000000}_{6}$ 7 III.1) $1,\underbrace{000000}_{6}$ 845 III.2) $1,\underbrace{000000}_{6}$ 769 III.3) $1,\underbrace{000000}_{6}$ 769 III.5) $1,\underbrace{00000}_{5}$ 7692 IV.2) $1,\underbrace{000000}_{6}$ 77 IV.4) $1,\underbrace{000000}_{6}$ 582 Le meilleur ? $0,\underbrace{999999}_{6}$ 308 Le meilleur ? $1,\underbrace{000000}_{6}$ 582

…couple de A …	(0,2999969 ; 0,999997766)
…couple de B…	(0,300001658 ; 1,000000928)
…couple de l'équipe…	(0,300001658 ; 1,000000928)
Justifier … de l'équipe	Car la différence entre 1 et $f(x)$ plus petit est $\Delta = 9{,}28.10^{-7}$ $\Rightarrow$ ce nombre est le plus proche de 1 que nous pouvons trouver.

- La problématique d'« approximation $f(x)$ » se pose implicitement dans la question de l'existence d'un couple (x ; $f(x)$) meilleur que le meilleur de la calculatrice. Elle permet de déstabiliser indirectement l'affichage de 1 de la calculatrice.

P : Alors, le binôme IV.4 a le meilleur couple (x ; $f(x)$). Le binôme IV.4 ! Expliquez –vous comment trouvez votre couple.
(L'enseignant présente la réponse du binôme IV.4 à la classe à l'aide de la tablette de rétro-projection)

…couple de A …	(0,299998765 ; 0,999999377)
… couple de B…	(0,300001321 ; 1,000000582)
…couple de l'équipe …	(0,300001321 ; 1,000000582)
Justifier … de l'équipe	Car ce couple a $f(x)$ plus proche de 1 que l'autre couple.

(Un élève du binôme E IV.4 se lève)
EIV.4 : J'ai essayé avec beaucoup de x en calculant $f(x)$ par la calculatrice. C'est le meilleur couple d'après la calculatrice.
P : La calculatrice dit ça ? Que se passe–t–il quand on augmente 0 dans la valeur de x de votre couple ?
EIV.4 : La calculatrice donne toujours 1.
P : Bon, je pose la question suivante à la classe : existe – il un couple meilleur que celui du binôme IV.4, par exemple, tel que $f(x) = 1,\underbrace{0...0}_{10}1$ ou $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{100}$ ou … ?
(les avis divergent)
Es : Oui/ Non/ Peut-être.
P : On va revenir à cette question à la suite de cette séance. On regarde maintenant les autres réponses.
[…]

Dans les échanges verbaux, l'enseignant propose directement des valeurs particulières pour $f(x)$: « … par exemple, tel que tel que $f(x) = 1,\underbrace{0...0}_{10}1$ ou $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{100}$ ou … ? ».

b. Quel statut numérique pour les EDI présents dans les réponses de deux binômes

- La présence des réponses *Dx.EDI* permet à l'enseignant de rendre en public les problématiques de l'infini dans les EDI et d' « approximation x » de la limite.

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : […] - Les réponses des binômes II.1 et III.4 sont du même type. *(L'enseignant les écrit au tableau)* - Binôme III.4 ! Quel est le meilleur couple de votre équipe ? EIII.4 : Nous proposons les deux couples parce que les deux $f(x)$ tendant vers 1. On ne sait pas lequel qui est le meilleur. P : C'est-à-dire, vous proposez les deux couples … *(L'enseignant complète en écrivant $f(x_1)$ et $f(x_2)$ au tableau)* EIII.4 : Oui. P : Que signifie – cette écriture ? *(L'enseignant montre 0,(9))* EIII.4 : C'est-à-dire, il y a une infinité de 9. P : et que signifie- cette écriture ? *(L'enseignant montre 3,(0)1)* EIII.4 : Il y a une infinité de zéro et 1 à la fin. P : Que se passe-t-il à l'infini ? EIII.4 : ils tendent vers 1.	II.1) $x = 0,2(9)$ et $f(x) = 0,(9)$ III.4) $\begin{cases} x_1 = 0,2(9) \\ f(x_1) = 0,(9) \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 0,3(0)1 \\ f(x_2) = 1,(0)76 \end{cases}$

- L'enseignant va s'appuyer sur une problématique de l'infini pour identifier l'écriture EDI à 1 par deux types de calculs :

- calcul des distances à 1 des suites numériques décimales associées à l'EDI
- calcul algébrique des limites qui est, rappelons-le, prédominant institutionnellement dans EMS.

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : - On va travailler maintenant avec le nombre 0,(9). Soit la suite numérique … *(L'enseignant écrit au tableau la colonne gauche)* - Quand n tend vers l'infini, il y a combien de 9 dans $u_n = 0,\underbrace{9...9}_{n}$? ES : Il y a une infinité de 9. P : Peut-on dire que u_n tend vers à 0,(9) quand n tend vers l'infini ? ES : Oui.	Soit la suite (u_n) où $u_1 = 0,9$ $u_2 = 0,99$ $u_3 = 0,999$ …. $u_n = 0,\underbrace{9...9}_{n}$ Différences des u_n à 1 $1 - u_1 = 10^{-1}$ $1 - u_2 = 10^{-2}$ $1 - u_3 = 10^{-3}$ … $1 - u_n = 10^{-n}$
(L'enseignant conclut au tableau « OUI ») P : - Si on calcule la différence de chaque u_n à 1 : $1 - u_1$, $1- u_2$, $1- u_3$, etc $1- u_n$ *(L'enseignant complète au tableau la colonne droite)* - Alors $1 - u_1$ est combien ? ES : 0,1. P : et $1 - u_2$ est … ES : 0,01 P : Peut-on écrit 10^{-2} ? ES : Oui. P : Alors, $1 - u_3$ est… ES : 10^{-3}. P : En général, $1- u_n$ est… ES : 10^{-n} P : Calculons $\lim_{n\to\infty}(1-u_n)$! $\lim_{n\to\infty}(1-u_n)$ est égal … ES : $\lim_{n\to\infty} 10^{-n}$. P : Et alors, $\lim_{n\to\infty} 10^{-n}$ est combien ? ES : zéro. P : Parlez plus haut ! ES : zéro. P : Dans ce cas, $\lim_{n\to\infty} u_n$ est combien ? ES : $\lim_{n\to\infty} u_n$ est égal à 1. P : - En effet, on peut écrire…. C'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. *(L'enseignant conclut dans la colonne droite)* - En confrontant les deux colonnes, on a : 0,(9) = 1. - Ecrivez dans vos cahiers, la conclusion suivante … *(L'enseignant lit et écrit au tableau)* - Alors, le couple $\begin{cases} x_1 = 0,3(0)1 \\ f(x_1) = 1,(0)76 \end{cases}$ est rejeté et $\begin{cases} x_1 = 0,2(9) \\ f(x_1) = 0,(9) \end{cases}$ est le couple interdit (0,3 ; 1).	Quand $n \to\infty$, est-ce que $(u_n) \to 0,(9)$? OUI $\lim_{n\to\infty}(1-u_n) = 0$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1$ $\lim_{n\to\infty}(1-u_n)$ $= \lim_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(1-u_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} u_n = 0$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1$ • Les mathématiciens admettent la notation 0,(9) comme une autre écriture de 1. On accepte que le nombre décimal admet deux écritures. Par exemple : 0,2(9) = 0,3. • L'écriture 3,(0)1 est impossible pour les mathématiciens. On peut dire « une infinité de zéro » ; mais jamais « une infinité de zéro, puis 1 à la fin » : l'infini n'a pas de fin ! De même, il faut rejeter les écritures comme 1,(0)76.

c. La problématique d'« approximation x » est de nouveau rendue publique ainsi que le problème de l'affichage de 1 de la calculatrice

La problématique d'« approximation *x* » de la limite associée à l'interprétation de l'affichage de 1 dans les réponses *Dx.EF* (généralisation de l'écriture fractionnaire) et *Dx.Calcul exact* sont rendues publiques et validées contre les réponses *Dx.Décimaux calculatrice*.

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : […] - On travaille maintenant avec les couples des binômes I.1 et I.3 *L'enseignant écrit au tableau :* On commence par le binôme I.3. Comment trouvez-vous votre couple ? EI.3 : Quand on ajoute un zéro dans x, il faut ajoute aussi un zéro dans $f(x)$. P : Vous n'avez pas calculé à la main ? EI.3 : Non. Nous conjecturons cela. P : Vous écrivez « $n \to +\infty$ », qu'est ce que ça veut dire ? EI.3 : C'est-à-dire, quand n tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers 1. P : Comment le savez-vous ? EI.3 : Quand on calcule avec la calculatrice, le résultat s'approche 1. P : Vous avez essayé avec x = 0,3000001, est-ce que la calculatrice affiche 1 ? EI3 : Elle donne 1, mais c'est un nombre proche de 1 et différent de 1. […] P : […] (*L'enseignant demande à la classe)* - Si on compare le couple du binôme I.1 et le couple du binôme I.3, lequel est le meilleur ? ES : Ils sont égaux. P : - C'est-à-dire …. (*l'enseignant écrit au tableau*) - Le binôme I.3 écrit « $n \to \infty$ », que se passe – il, quand n tend vers l'infini ? ES : Ils tendent vers à 0,3 et 1.	I.3) $(x = 0{,}3\underbrace{0000...0000}_{n \text{ chiffres } 0}1$; $f(x) = 1\dfrac{1}{13\underbrace{0000...0000}_{n \text{ chiffres } 0}1}$) n $\to +\infty$ I.1) $x = 0{,}3\ \underbrace{000...}_{n \text{ chiffres } 0}\ 1$, $f(x) = \dfrac{13\ \overbrace{00...0}^{n \text{ chiffres } 0}\ 2}{13\ \underbrace{00...0}_{n \text{ chiffres } 0}\ 1}$ $\dfrac{13\ \overbrace{00...0}^{n \text{ chiffres } 0}\ 2}{13\ \underbrace{00...0}_{n \text{ chiffres } 0}\ 1} = 1 + \dfrac{1}{13\ \underbrace{00...0}_{n \text{ chiffres } 0}\ 1}$

Ces échanges verbaux renforcent la problématique d' « approximation x » en interprétant l'affichage de 1 de la calculatrice comme du à la proximité à 1 quand on entre un nombre proche de 0,3 : *« Quand on calcule avec la calculatrice, le résultat s'approche 1* », « *Elle donne 1, mais c'est un nombre proche de 1 et différent de 1* ».
Il reste à mettre en place une raison d'être du passage de la problématique d' « approximation x » à celle d'« approximation $f(x)$ ».

Le refus de l'affichage de 1 comme valeur exacte est encore renforcé dans le travail collectif sur le couple (u_5 ; 1) du binôme VI.1.

P : […]
- On regarde le dernier couple du binôme IV.1 : (0,299999 ; 1).
ES : (sourire) Pourquoi 1 ?
P : Le binôme IV.1, pourquoi choisissez –vous ce couple qui a $f(x)$ interdit ?
EIV.1 : Nous avons expliqué que c'est une valeur très proche de 1, mais différente de 1. Car nous ne connaissons pas combien elle est.
P : C'est le deuxième couple qui dit que la valeur de 1 dans la calculatrice désigne une valeur très proche de 1, mais différente de 1. On va revenir sur ce point à la suite de cette séance.

d. Institutionnalisation de l'utilisation de la formule « simplifié » F_2

L'existence de la réponse *Dx.Calcul exact* permet à l'enseignant d'institutionnaliser l'utilisation de la formule « simplifié » F_2 contre F_1.

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : Et le binôme I.1, comment trouvez-vous votre couple ? EI.1 : Nous avons calculé avec $f(x) = \dfrac{2x+0{,}7}{x+1}$. Car $f(x) = \dfrac{(x-0{,}3)(2x+0{,}7)}{(x-0{,}3)(x+1)}$. P : C'est-à-dire, si $x \neq 0{,}3$, on peut calculer $f(x)$ soit par la formule initiale $\dfrac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3}$ soit par la formule simplifiée $\dfrac{2x+0{,}7}{x+1}$.	D_f = R \ {-1 ; 0,3} $f(x) = \dfrac{(x-0{,}3)(2x+0{,}7)}{(x-0{,}3)(x+1)} = \dfrac{2x+0{,}7}{x+1}$

Cette institutionnalisation encourage l'utilisation de la formule F_2 dans la situation 4 pour des raisons d'économie (hors du domaine de fonctionnement des règles d'action du calcul de la limite de fonction).

II. Questions pour la conclusion du jeu

II.1. Question 3 – Inexistence de meilleur couple

Le tableau 19 présente les effectifs des réponses individuelles à la question :

> Est-ce qu'il existe un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 1 ?
>
> Justifiez votre réponse.

selon « NON », « OUI » ou « je ne sais pas » et le type d'argumentations.

NON (Ordre dense)			OUI (ordre discret)		Je ne sais pas	Total
Approximation x	Approximation $f(x)$	Sans relation fonctionnelle	Préd/succ	Dernier élément d'une partie		
19	10	1	3	4		
29			7			
30					1	38

Tableau 19. Réponses individuelles et types d'argumentations sur l'existence de meilleur couple

Nous nous centrons d'abord sur les réponses par « OUI » qui atteste de difficultés persistantes malgré le travail coopératif, puis nous nous interrogeons sur la signification de réponses par « NON » : comment les arguments du travail coopératifs ont-ils été repris ?

a. Difficultés sous-jacentes aux réponses « OUI » : *persistance d'un ordre discret (obstacle de **N** dans **D**, puis $\mathbf{D}_\infty$)*

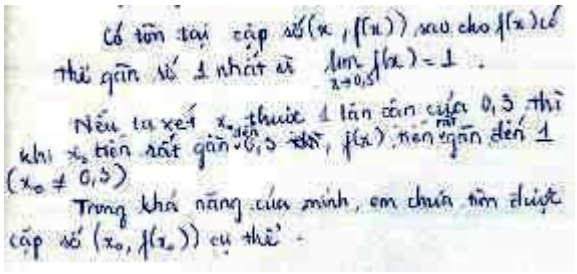
- Existence d'un successeur et d'un prédécesseur

3 réponses par « OUI » proviennent de la persistance d'un ordre discret de **N** dans **D**. L'exemple suivant l'exprime sans ambiguïté.

> Oui. Car n'importe quel nombre possède un précédent et un successeur. Il existe certainement 2 nombres les plus proches de 1. Dans ce cas, on a $f(x)$, on peut trouver x. (Elève 16)[2]

- Existence d'un dernier élément lié à l'existence de la limite « approximation x »

Par exemple :

 Có tồn tại cặp số $(x, f(x))$ sao cho $f(x)$ có thể gần số 1 nhất là $\lim_{x\to 0,3} f(x) = 1$. Nếu ta xét x_0 thuộc 1 lân cận của 0,3 thì khi x_0 tiến rất gần 0,3 thì $f(x)$ mới tiến gần đến 1 $(x_0 \neq 0,3)$ Trong khả năng của mình, em chưa tìm được cặp số $(x_0, f(x_0))$ cụ thể.	Il existe un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 1 parce que $\lim_{x\to 0,3} f(x) = 1$ Si on prend un x_0 dans un voisinage de 0,3 alors quand x_0 ($x_0 \neq 0,3$) s'approche de 0,3, $f(x)$ s'approche très près de 1. Avec mes possibilités, je ne peux pas trouver de couple (x_0 ; $f(x_0)$) concret. (Elève 13)

Cette argumentation suppose l'existence d'une dernière valeur x_0 telle que $f(x_0)$ soit le plus proche de 1. Nous complétons par un autre exemple qui rend encore plus clair ce point.

[2] Nous ne présentons pas l'original d'une réponse où il n'y a que du texte.

> Il existe un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ est le plus proche de 1
>
> Démonstration : pour une valeur initiale de x, on trouve une valeur de $f(x)$ correspondante.
> + Si on ne trouve aucune valeur x_1 telle que $f(x_1)$ soit plus proche de 1 que $f(x)$ alors (x ; $f(x)$) est le couple numérique cherché.
> + Si on trouve une valeur x_2 telle que $f(x_2)$ soit plus proche de 1 que $f(x)$ alors on continue à chercher : x_3, puis on compare $f(x_3)$ à $f(x_2)$
>
> · Si $f(x_3)$ n'est pas plus proche de 1 que $f(x_2)$ alors (x_2 ; $f(x_2)$) est le couple numérique cherché
>
> · Si $f(x_3)$ est plus proche de 1 que $f(x_2)$ alors on continue à chercher $x_4 \rightarrow f(x_4)$ …
>
> En continuant à chercher comme cela, on peut certainement trouver un couple (x_0 ; $f(x_0)$) le plus proche de 1.
> (Elève 24)

L'élève produit un algorithme de recherche d'un couple (x ; $f(x)$) : pour lui, cet algorithme est fini. Comme le premier élève, il croit à l'existence d'une dernière valeur de x telle que $f(x)$ soit le plus proche de 1.

Parmi les 7 élèves répondant « OUI », 5 élèves sont issus de binômes *Dx.Décimaux calculatrice* ; 2 élèves (codés 13 et 24 présentés haut) du binôme II.1 *Dx.EDI.*

L'identification des statuts numériques des EDI dans le travail coopératif déstabilise l'interprétation des 0,2(9) et 0,3(0)1 comme les plus proches de 0,3 ; cependant les 2 élèves du binôme II.1 continue à croire à l'existence d'un dernier élément juste avant 0,3 en prolongeant l'ordre de **N** à $\mathbf{D_\infty}$.

L'acquisition de l'ordre dense pour **D** puis pour $\mathbf{D_\infty}$ s'oppose à la construction de la notion de limite via l'approximation décimale.

b. Ordre dense dans les réponses par « NON »

La plupart des réponses « NON » (30 sur 38) atteste du fonctionnement d'un ordre dense de **D**. Parmi elles, seul un cas prend en compte uniquement la structure numérique qu'il a explorée.

> Il n'existe pas un tel couple numérique. Car il n'y a pas de notion sur un nombre le plus proche de l'autre nombre (Car, sur l'axe numérique, il y a infinité de nombres, il n'y a ni minimum ni maximum ni nombre le plus proche d'un nombre quelconque).
> (Elève 19)

Plus des trois quarts des élèves de la classe observée (29 sur 38) utilisent une problématique d'approximation de la limite ainsi que l'ordre dense de **D** – fruit des conditions mises en place dans le jeu - pour conclure à l'inexistence de couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ est le plus proche de 1 : 19 sont du type « approximation x » et 10 du type « approximation $f(x)$ » :

- Le travail coopératif a donc permis l'émergence d'une problématique d'« approximation $f(x)$ » de la limite chez plus d'un quart des élèves de la classe (10 sur 38).

En voici deux exemples :

Ko tồn tại cặp số (x, f(x)) để f(x) có thể gần số 1 nhất bởi vì giá trị của f(x) gần số 1 nhất có thể là 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999; 0,999999; 0,9999999; 0,99999999... Khi đó thì giá trị của x cũng sẽ thay đổi theo f(x). => Vì vậy sẽ không có 1 cặp số thích hợp, chính xác I để f(x) gần số 1.	Il n'existe pas de couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 1 parce que les valeurs approchées de 1 sont 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; 0,9999 ; 0,99999 ; 0,999999 ; 0,9999999 ; 0,99999999 ; … Dans chaque cas, la valeur de x varie selon la valeur de $f(x)$ $\Rightarrow$ c'est pourquoi il n'existe pas un couple raisonnable et fixe tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1 (Élève 06)

Un élève (codé 26) utilise la problématique d'« approximation $f(x)$ » et les EDI pour expliquer sa réponse.

> Il n'existe pas de couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1 parce que 0,(9) est accepté comme 1. Il n'existe donc pas de nombre le plus proche de 1, il n'existe pas le meilleur couple (x ; $f(x)$) : plus on choisit $f(x)$ proche de 1, plus x est proche de 0,3.

- Parmi les 19 argumentations du type « approximation x » de la réponse « NON », 11 établissent un lien entre l'écriture de la limite (en l'accompagnant ou non d'un calcul algébrique de cette limite : 3 et 8 respectivement) et l'inexistence du couple le meilleur, les 8 autres s'appuient sur une interprétation des EDI.

• Ci-après un exemple d'argumentation « approximation x » sans calcul algébrique de la limite.

Tacó $\lim_{x\to 0,3} f(x) = \lim_{x\to 0,3} \frac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} = 1.$ Nhưng không tồn tại cặp x'(x, f(x)) nào để f(x) có thể gần 1 nhất vì ta càng tăng tha không thể tìm ra giá trị nào của x gần 0,3 nhất.	On a $\lim_{x\to 0,3} f(x) = \lim_{x\to 0,3} \frac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} = 1$ Alors il n'existe pas de couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 1. Car ~~quand x tend vers 0,3~~, il n'existe pas de valeur de x le plus proche de 0,3.

Dans l'extrait supra, l'inexistence de x le plus proche de 0,3 entraîne l'inexistence d'un couple le meilleur.

• Dans l'extrait ci-dessous, un exemple d'argumentation « approximation x » avec un calcul algébrique des deux limites pour les deux valeurs interdites : 0,3 et -1.

$\lim_{x\to 0,3} \frac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} = \lim_{x\to 0,3} \frac{2x+\frac{7}{10}}{x+1} = 1.$ $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2x+\frac{7}{10}}{x+1} = \infty$ Vậy khi $x \to 0,3$ thì $f(x) \to 1$. => không tồn tại 1 cặp (x, f(x)) nào cho f(x) có thể gần 1.	$\lim_{x\to 0,3} \frac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} = \lim_{x\to 0,3} \frac{2x+\frac{7}{10}}{x+1} = 1$ $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2x+\frac{7}{10}}{x+1} = \infty$ Donc quand $x \to 0,3$ alors $f(x) \to 1$ $\Rightarrow$ il n'existe pas de couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 1.

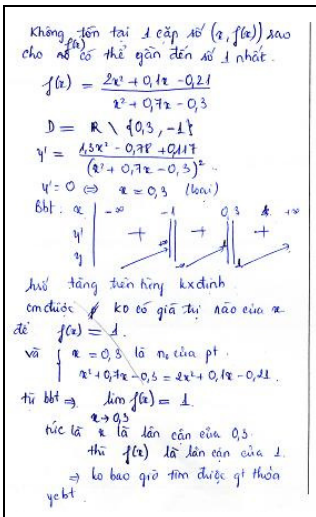
Le calcul algébrique de la limite justifie l'inexistence du meilleur couple par une problématique d'« approximation x » : « *quand $x \to 0,3$ alors $f(x) \to 1$* ».

L'apparition forte de l'écriture de la limite ici marque une évolution radicale dans le rapport institutionnel à la notion de limite qui rappelons-le :

> L'élève n'est pas responsable de l'étude de la fonction dont il calcule la limite : il n'a pas à prévoir la limite, ni à considérer la fonction, ni à s'intéresser à la pertinence de l'exercice.

> Par contre, l'élève doit savoir calculer les limites que le manuel ou l'enseignant lui fournissent, notamment sous la forme « calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$» (a fini ou infini), en identifiant leurs formes, puis en opérant par des *règles d'actions* sur les limites. (Le Thai Bao, 2004, p. 21)

Ici, l'élève prend en charge de conjecturer et/ou de calculer la limite pour répondre à la question centrale de la situation 3. De plus, 2 cas (sur 19) effectuent une étude complète de la fonction *f* pour justifier les réponses par « NON », comme par exemple :

	Il n'existe pas de couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 1. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$ D = **R**\{0,3, -1} $y' = \dfrac{1{,}3x^2 - 0{,}78x + 0{,}117}{(x^2 + 0{,}7x - 0{,}3)^2}$ y' = 0 ⇔ x = 0,3 (exclu) $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 0{,}3 & & +\infty \\ y' & & + & & + & & + & \\ y & & \nearrow & +\infty \,\|\, -\infty & \nearrow & 1 \,\|\, 1 & \nearrow & \end{array}$ La fonction est croissante dans chaque intervalle du domaine de définition. On a démontré qu'il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ = 1. Et $\begin{cases} x = 0{,}3 \text{ est la racine de l'équation} \\ x^2 + 0{,}7x - 0{,}3 = 2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 \end{cases}$ À partir du tableau de variations ⇒ $\lim\limits_{x \to 0{,}3} f(x) = 1$ c'est-à-dire, si x est un voisin de 0,3 alors $f(x)$ est un voisin de 1 ⇒ on ne trouvera jamais de meilleure valeur.	$\dfrac{2(\cancel{x-0{,}3})(x+0{,}35)}{(\cancel{x-0{,}3})(x+1)}$

Par ailleurs, dans la partie brouillon de l'unique réponse « je ne sais pas » figure aussi un calcul algébrique incorrect de la limite en x = 0,3. Ce calcul incorrect conduit à la réponse « je ne sais pas » en contradiction avec la conjecture de la limite et le résultat provenant du calcul algébrique.

- Identification du statut numérique des EDI

Comme pour l'élève 26, l'institutionnalisation du statut numérique des EDI dans le travail coopératif du jeu a permis à 8 élèves de surmonter l'obstacle de l'ordre de **N** dans $\mathbf{D_\infty}$. Par exemple :

> Domaine de définition D = R\ {0,3 ; -1}
> Il n'existe pas de couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 1
> Car pour que la valeur $f(x)$ tende vers 1 ⇒ x = 0,2(9) ou $x = 0{,}3\underbrace{0\ldots0}_{n}1$ sont les valeurs les plus convenables. Pourtant, ces valeurs sont acceptées comme 0,3 et n'appartiennent donc pas au domaine de définition.
> ⇒ il n'existe pas de couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1. (Réponse de l'élève 30)

Cela permet d'observer qu'avant l'identification des statuts numériques des EDI, le prolongement de l'ordre discret de **N** dans $\mathbf{D_\infty}$ – un entier a toujours un prédécesseur et un successeur, une partie de $\mathbf{D_\infty}$ a un plus petit et un plus grand élément – existe dans le rapport personnel (cf. questionnaire du chapitre B2).

c. Passage de la problématique d' « approximation *x* » à celle d' « approximation *f*(*x*) »

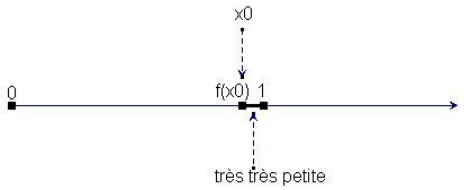
- Absence de la mise en relation entre la notation de la limite et une problématique d'« approximation f(x) »

Les argumentations « approximation *x* » apparaissent près de deux fois plus souvent que les argumentations « approximation *f*(*x*) ». Cela montre une difficulté de la construction d'une raison d'être de la problématique d'« approximation *f*(*x*) ».

Tandis que l'écriture de la limite apparaît fortement dans la problématique d' « approximation *x* » (11 sur 19), elle n'est présente dans aucune des 10 argumentations « approximation *f*(*x*) ».

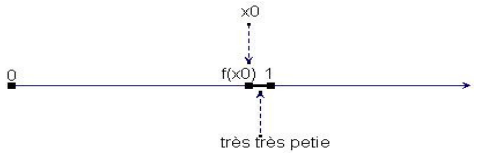
- Mise en place d'une raison d'être dans le travail coopératif enseignant -élèves

La présence des 4 réponses « OUI » par prolongement de la propriété de l'ordre discret de **N** à **D** – *existence d'un dernier élément pour une partie de* ***D*** - permet à l'enseignant de rendre publique cette réponse en l'associant à la justification de la réponse « NON » par la seule problématique d'« approximation *x* » (élève 13).

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P. - Je trouve dans les réponses de la classe des « NON » et les « OUI ». Voici une explication de la réponse « OUI » (*il résume la réponse de l'élève 13 au tableau*). - Voici une explication de la réponse « NON » (*il résume la réponse de l'élève 25 au tableau*). - Élève 13 ! Pourquoi répond –tu « OUI » E13 : Pour chaque *x* proche de 0,3, on calcule *f*(*x*). On fait comme ça comme ça… Peut-être très longtemps, on trouve le meilleur couple (x_0 ; $f(x_0)$). P : C'est-à-dire la recherche de la valeur de $f(x_0)$ s'arrête –elle ? E13 : Oui, mais très très proche de 1. P : C'est comme ça…. (*il trace un axe numérique…*) E13 : Oui. P : L'élève 25 ! Pourquoi dis -tu « NON » ? E25 : Car plus *x* est proche de 0,3, plus *f*(*x*) est proche de 1. P : C'est-à-dire, existe –t-il *x* tel que *f*(*x*) est meilleur que $f(x_0)$ de l'élève 13 ? E25 : Oui. (*l'enseignant demande à la classe*) P : Qui a raison ? ES : La réponse par « NON ». P : Mais rien n'assure que *f*(*x*) dépassera $f(x_0)$.	<u>L'élève 13 :</u> OUI. Car $\lim\limits_{x\to 0,3} f(x) = 1$ Si on prend un x_0 dans un voisinage de 0,3 alors quand x_0 ($x_0 \neq 0,3$) s'approche 0,3, *f*(*x*) s'approche très près de 1. Avec mes possibilités, je ne peux pas trouver de couple (x_0 ; $f(x_0)$).  <u>L'élève 25 :</u> NON. $\lim\limits_{x\to 0,3} f(x) = 1$. Donc quand $x \to 0,3$ alors $f(x) \to 1$ $\Rightarrow$ il n'existe pas de couple (x ; $f(x)$) tel que *f*(*x*) soit le plus proche possible de 1.

La justification de la réponse « NON » par la problématique d'« approximation *f*(*x*) » est publiquement l'argumentation la plus « convaincante »[3].

[3] En fait, la monotonie théorique de *f* est suffisante pour justifier la réponse « NON » par la problématique d'« approximation *x* ».

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : […] - On voit maintenant une autre explication pour la réponse « NON » (*il résume la réponse de l'élève 06 au tableau*). - Èlève 06 ! Est - tu sure de trouver une valeur de x selon chaque valeur approchée de $0,\underbrace{9...9}_{n}$ à 1 ? E06 : Oui, je crois ça. P : Pourquoi ? E06 et Es : Résoudre l'équation ! P : Laquelle ? Les Résoudre toutes ? Es : $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{n}$. P : - D'accord, on le fait ensemble … [*l'enseignant et les élèves résolvent ensemble l'équation* $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{n}$ *au tableau en utilisant la formule* F_2] - Est-ce que $0,\underbrace{9...9}_{n}$ dépasse $f(x_0)$? (*il montre l'axe numérique*) ES : Oui. Quand n tend vers l'infini. P : Existe-il un meilleur couple (x ; $f(x)$) ? ES : Non.	L'élève 06 : NON. Car les valeurs approchées de 1 sont : 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; 0,9999 ; … ; $0,\underbrace{9...9}_{n}$; … Pour chaque cas $0,\underbrace{9...9}_{n}$, la valeur de x varie selon la valeur de $f(x)$. […] $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{n} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\underbrace{9...9}_{n-1}}{\underbrace{10...0}_{n-1}1}$ 

II.2. Question 4 – Interprétation de l'affichage de 1

Pour la question :

> **Question 4.** (5 minutes)
>
> En utilisant la calculatrice : calculez $f(0,299999)$ par la formule F_1 et $f(0,3\underbrace{0...0}_{8}1)$ par la formule F_2. Que pensez-vous des résultats donnés par la calculatrice ?

les 38 élèves répondent en interprétant l'affichage de 1 comme une valeur approchée de 1 (mais différente de 1).

• 17 réponses sont du type : « *la calculatrice arrondit une valeur approchée très proche de 1 en 1* ».

• 20 réponses sont du type : « *l'affichage de la calculatrice n'est qu'une valeur approchée, pas exacte* ».

• 1 élève va plus loin en ajoutant « *on peut calculer plus exactement avec* F_2 *qu'avec* F_1 ».

L'enseignant conclut au tableau :

> L'affichage 1 de la calculatrice n'est pas un résultat exact : cet affichage représente un intervalle centré en 1, c'est-à-dire un voisinage de 1.
>
>

Le jeu se clôt par une représentation de l'intervalle centré en 1 sur l'axe numérique. L'enseignant finit la séance 2.

Conclusion de la situation 3

La prédominance des réponses *Dx.Décimaux calculatrice* (dans le travail individuel, puis en binôme) montre que dans un premier temps la majorité des élèves croient à l'existence d'un meilleur couple $(x, f(x))$ tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1, c'est-à-dire à l'existence d'un premier ou d'un dernier élément dans une partie de **D** (ordre discret).

Cette prédominance est renforcée par le fonctionnement d'une règle implicite du calcul instrumenté dans **Q** lié à la nouvelle génération des calculatrices dans l'EMS du Viêt-nam : *dans le calcul instrumenté par la calculatrice, si le résultat affiché est un entier ou affichable sous forme fractionnaire, alors ce résultat est exact*.

Notre situation didactique organise un milieu didactique dont les éléments, suite au calcul instrumenté de $f(x)$, sont issues de l'affichage des calculs à l'écran de la calculatrice. En particulier :

- rencontre de l'affichage de 1,
- valeur de $f(x)$ plus ou moins proche de 1 que la précédente,
- valeur stable de $f(x)$.

Dans le travail individuel, ces rétroactions du milieu conduisent :

- la plupart des 28 élèves *Dx.Décimal calculatrice* à effectuer une intercalation décimale systématique dans de petits intervalles par passage successif d'un D_i à un D_{i+k} ($i+k \leq 10$). Ces stratégies d'exploration de **D** sont une condition nécessaire mais non suffisante pour une déstabilisation de l'ordre discret en faveur de l'acquisition de l'ordre dense (non discret) dans **D** ;
- plus d'un quart des élèves de la classe (10 sur 38) à faire fonctionner une problématique d'« approximation x » fondée sur la monotonie théorique de f ;
- à l'émergence d'une problématique d' « approximation $f(x)$ » dans un cas.

Le travail coopératif en binôme enrichit le milieu didactique des productions écrites du travail individuel de chacun :

- couples $(x ; f(x))$ individuels : $f(x)$ décimal ou fractionnaire ou décimal illimité ;
- valeur de $f(x)$ pour le cas A ($f(x) < 1$), valeur de $f(x)$ pour le cas B ($f(x) > 1$) ;
- stratégies individuelles de recherche : calculatrice ; calculatrice avec généralisation ; calcul exact.

De cette interaction et en particulier de la nécessité de comparaison, le calcul de la distance à 1 devient le critère prédominant de décision. En effet :

- L'élaboration d'un tel critère de distance est présente plus ou moins explicitement chez les 12 binômes *Dx.Décimaux calculatrice* (sur 19).
- Pour les 7 autres binômes, ce critère permet la déstabilisation des couples *Dx.Décimaux calculatrice* en prenant en compte l'existence de couples $(x, f(x))$ tels que la distance de $f(x)$ à 1 puisse devenir infiniment petite. Les 7 binômes expriment plus ou moins explicitement une problématique d'« approximation x » en mentionnant la notion de limite et basée sur l'ordre dense dans **D**.

En s'appuyant sur le riche éventail des réponses des binômes, le travail coopératif enseignant – élèves permet :

- L'institutionnalisation du critère de distance de $f(x)$ à 1,
- L'organisation d'une identification du statut numérique des EDI comme limite d'une suite décimale
- la publicité d'une problématique d' « approximation x »,

- la diffusion d'une problématique d' « approximation $f(x)$ » pour interpréter l'affichage 1 de la calculatrice, et donc rejeter le calcul instrumenté, puis pour rejeter le prolongement de l'ordre discret de **N** dans **D** et D_∞ (ni de premier ni de dernier élément pour une partie non fermée de **D**).

La question de l'existence ou non d'un meilleur couple, dans les conditions de la situation 3, a permis finalement la mise en place de l'ordre dense dans **D** et D_∞ chez plus des trois quarts des élèves de la classe observée (29 sur 38).

Cependant, la persistance de l'ordre discret de **N** dans **D** et D_∞ chez 7 élèves sur 38 atteste de la force de l'obstacle épistémologique, qu'est la structure de **N**, comme mis en évidence par Brousseau (1987).

La prédominance de la problématique d' « approximation x » par rapport à la problématique d'« approximation $f(x)$ » dans cette situation significative de la notion de limite nous permet de formuler l'hypothèse suivante :

Pour la notion de limite, la problématique d'« approximation x » est candidate à être un obstacle épistémologique pour la problématique d'« approximation f(x) ».

La mise à l'épreuve d'une telle hypothèse exigerait une étude plus vaste que la nôtre : il nous semble cependant que les observables de la situation 3 sont autant d'indices du fonctionnement de cet obstacle.

Lors de la conclusion de la situation 3, une raison d'être de la problématique d'« approximation *f(x)* » est apparue : *la justification de l'absence d'un meilleur couple (x, f(x)) tel que f(x) soit le plus proche possible de 1 rend nécessaire une argumentation liée à la problématique d' « approximation f(x) » basée sur l'ordre dense (non discret) dans* ***D.***

Chapitre C4
Une introduction à la topologie métrique de la notion de limite

Première partie
Analyse *a priori* de la situation 4

Déroulement (60 minutes)

• L'enseignant résume brièvement au tableau les résultats du travail des situations 2 et 3 précédentes.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$.

Question 1 : Résolvez l'équation $f(x) = 1$

Condition : $x \neq 1$ et $x \neq 0{,}3$
$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1 ; 0{,}3\}$
Il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ soit égale à 1

Question 2 : Donner trois valeurs de x telles que $f(x)$ appartienne à [0,99 ; 1,01]

1. $f(x) = 0{,}99$; $f(x) = 1{,}01$; $f(x) = 1{,}001$
2. $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow f(x_1), f(x_2)$ et $f(x_3) \in [0{,}99 ; 1{,}01]$?
3. $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$

Question 3 : Est-ce qu'il existe un couple $(x ; f(x))$ tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 1 ? Justifiez votre réponse !

Non. Pour chaque entier n fixé, on peut trouver x_0 tel que $f(x_0) = 0{,}\underbrace{9...9}_{n}$ (ou $f(x_0) = 1{,}\underbrace{0...0}_{n}1$). En augmentant n, on peut toujours trouver un meilleur couple que le couple précédent.

Question 4 : En utilisant la calculatrice : calculez $f(0{,}299999)$ par la formule F_1 et $f(0{,}3\underbrace{0...0}_{8}1)$ par la formule F_2. Que pensez-vous des résultats donnés par la calculatrice ?

L'affichage 1 de la calculatrice n'est pas un résultat exact : cet affichage représente un intervalle centré en 1, c'est-à-dire un voisinage de 1.

1. Phase 1. Travail en binôme

La classe est partagée en binômes (les mêmes que dans la situation 3) pour élaborer une réponse à la question 5 : « Question 5 » (format A_4).

Question 5. (15 minutes) Donnez tous les x tels que $f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$. Expliquez comment vous trouvez ces valeurs de x.	**Brouillon**

• Au bout de 15 minutes, l'enseignant ramasse les réponses des binômes puis écrit une synthèse de ces réponses au tableau.

• L'enseignant organise un travail coopératif pour comparer les intervalles produits en réponse à la question 5 par les binômes et valider les réponses s'appuyant sur la croissance théorique de f.

2. Phase 2. Travail individuel

• La feuille « Question 6 » (format A_4) est distribuée aux élèves.

Question 6. (10 minutes)	**Brouillon**
Proposez un nombre d tel que : pour tout x, $x \neq 0{,}3$ et $x \in [0{,}3- d\ ;\ 0{,}3 + d]$, on soit sûr que $f(x) \in [0{,}99999\ ;\ 1{,}00001]$.	

• Les élèves travaillent individuellement. Au bout de 5 minutes, les réponses sont ramassées.

• L'enseignant s'appuie sur les réponses des élèves pour conclure : *il suffit de choisir* $d = 10^{-5}$.

3. Phase 3. Travail coopératif

• L'enseignant pose à la classe la question suivante écrite au tableau.

Question 7. Proposez un nombre d tel que pour tout x, $x \neq 0{,}3$ et $x \in [0{,}3 - d\ ;\ 0{,}3 + d]$, on soit sûr que $f(x) \in \left]0{,}\underbrace{9...9}_{12}\ ;\ 1{,}\underbrace{0...01}_{12}\right[$.

• L'enseignant organise un travail coopératif pour conclure : *il suffit de choisir* $d = 10^{-12}$

4. Pour clore l'ingénierie

Une feuille « Question finale » est distribuée individuellement aux élèves.

Ecrivez le plus brièvement possible (avec ce que vous avez appris en mathématiques) ce que vous avez découvert sur la fonction f pendant les deux séances ?

Réponse : ……...

• L'enseignant ramasse les réponses à la question finale, puis en interaction avec les élèves, conclut sur la signification de la notion de limite en relation avec les questions posées dans les deux séances.

I. Variables micro-didactiques

La situation 4 est générée à partir de valeurs de variables micro-didactiques du problème général suivant : en italique les variables du problème.

Trouver un *domaine de proximité de 0,3* dont l'image par une *fonction f* soit dans un *domaine de proximité donné de 1*.

Ce problème vise à la construction d'une signification topologique de la notion de limite. La fonction f résulte d'un choix macro didactique.

1) Domaine de proximité de 1

a. Dans cette situation, le domaine de proximité de 1 est un intervalle symétrique par rapport à 1.

Le choix d'un intervalle (contre le choix fait dans la situation 3 d'un domaine indéterminé « *le plus proche possible de 1* ») permet de rendre calculable la recherche d'un intervalle pointé autour de 0,3 par une étude de la fonction *f,* en particulier de sa monotonie (*f* strictement croissante).

Par contre, la variation non uniforme de la vitesse de croissance de *f* entraîne la dissymétrie de l'intervalle pointé autour de 0,3, malgré la symétrie de l'intervalle autour de 1.

b. Bornes de l'intervalle de proximité de 1 :

Nous choisissons des bornes décimales $0,\underbrace{9...9}_{n}$ et $1,\underbrace{0...01}_{n}$ (contre des bornes rationnelles ou irrationnelles). Dans la situation précédente, les suites décimales ($0,\underbrace{9...9}_{n}$) et ($1,\underbrace{0...01}_{n}$) ont été étudiées et la convergence de ces suites vers 1 quand $n \to +\infty$ a été institutionnalisée *via* des calculs algébriques. Ce choix rend économiques les calculs algébriques concernant ces bornes.

Le choix de l'écriture décimale pour les bornes (contre l'écriture $1 - 10^{-n}$ et $1 + 10^{-n}$) cache la notion de distance. On peut se demander si le fonctionnement de la distance à 1 comme critère de comparaison dans la situation 3 va permettre le passage de l'écriture décimale à l'autre écriture en cas de nécessité.

c. La valeur de l'indice *n* dans l'écriture des bornes décimales $0,\underbrace{9...9}_{n}$ et $1,\underbrace{0...01}_{n}$:

Le choix de la valeur *n* dans chaque phase de la situation 4 permet ($n \leq 6$ pour la formule F_1 et $n \leq 10$ pour la formule F_2) ou bloque ($n > 10$) le calcul instrumenté par la calculatrice (voir plus loin).

2) Domaine de proximité de 0,3

a. Nous choisissons deux domaines de proximité de 0,3 dans la situation 4 :

- L'*intervalle dissymétrique* autour de 0,3 résultant de la recherche de « tous les *x* tels que *f*(*x*) appartiennent à un domaine de proximité de 1 donné »,
- L'*intervalle symétrique* centré sur 0,3 (sous intervalle de l'intervalle précédent) résultant de la recherche d'un intervalle *suffisant* pour que l'image de cet intervalle soit un sous intervalle du domaine de proximité de 1 donné.

b. Dans la donnée de l'intervalle symétrique, les bornes peuvent s'écrire de 4 façons différentes :

- $0,2\underbrace{9...9}_{n}$ et $0,3\underbrace{0...01}_{n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)
- $0,3 - 10^{-n}$ et $0,3 + 10^{-n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)
- $0,3 - d$ et $0,3 + d$ ($d \in \mathbf{R}_+$)
- a et b tel que $\dfrac{a+b}{2} = 0,3$ (a, b $\in \mathbf{R}$)

Dans l'écriture des bornes de l'intervalle symétrique [0,3 – d ; 0,3 + d] (contre [a ; b] tel que $\frac{a+b}{2}$ = 0,3), la notion de distance devient présente explicitement. Ce choix favorise le fonctionnement d'une formalisation de l'approximation par la distance (métrique de **D**).

Dans ce même choix (contre $[0{,}2\underbrace{9...9}_{n}\,;0{,}3\underbrace{0...01}_{n}]$ ou [0,3 - 10^{-n} ; 0,3 + 10^{-n}]), la distance peut prendre n'importe quelle valeur réelle : quelle sera-elle ?

Le tableau 1 résume les valeurs prises par les variables « domaine de proximité de 0,3 » et « domaine de proximité de 1 » dans les différentes phases de la situation 4.

	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Bornes du domaine de proximité de 1 $[0{,}\underbrace{9...9}_{n}\,;1{,}\underbrace{0...01}_{n}]$	n = 5		n = 12
Domaine de proximité de 0,3	« tous les x…» (Dissymétrie)	Intervalle symétrique	

Tableau 1. Valeurs prises par les variables micro-didactiques dans la situation 4

Le passage de « tous les x... » à l'intervalle symétrique, un même domaine de proximité de 1 étant donné (n = 5), exige le passage d'un raisonnement par condition nécessaire à un raisonnement par condition suffisante comme nous le montrerons dans l'analyse qui suit.

Le choix d'un même intervalle symétrique [0,3 – d ; 0,3 + d] comme domaine de proximité de 0,3 pour des domaines de proximité de 1 à 10^{-n} près, n = 5, n = 12 permet de problématiser la notion de la limite d'un point de vue topologique (métrique de la distance) comme prolongement d'une problématique d'« approximation $f(x)$ ».

Ceci est renforcé par le fait que l'augmentation de la précision de l'approximation de 1 ($n = 5 \rightarrow n = 12$) en bloquant le calcul instrumenté par la calculatrice rend nécessaire l'étude de la fonction f et bloque l'« approximation x ».

II. Phase 1. Comparaison des intervalles : bornes décimales ou bornes fractionnaires

II.1. Stratégies possibles

Le choix de rechercher « tous les x tels que $f(x) \in$ [0,99999 ; 1,00001] » favorise des stratégies nommées *Dy,* c'est-à-dire des stratégies d'exploration de l'intervalle de proximité de 1- en rendant impossible la recherche de « tous les x … » par des stratégies *Dx*,c'est-à-dire des stratégies d'exploration de l'intervalle de proximité de 0,3

a. Stratégie Dx – Exploration du domaine de proximité de 0,3

Cette stratégie en étant présente atteste de la résistance de la problématique d' « approximation x » qui a fonctionné de façon prépondérante dans la situation 3. Montrons pourquoi nous la qualifions d'*incertaine*.

On cherche par tâtonnement des x décimaux tels que $f(x) \in$ [0,99999 ; 1,00001] selon une stratégie *Dx.Calculatrice.* Or la plupart des décimaux ont pour image par f un nombre non décimal. Cette propriété mathématique rend impossible l'aboutissement de cette recherche par tâtonnement.

b. Stratégies Dy

Deux stratégies sont possibles.

- Stratégie algébrique portant sur l'algèbre des inéquations « Dy.Inq ».
- Stratégie analytique, combinaison de l'algèbre des équations et de l'étude de la monotonie de la fonction f « Dy.Eq.Monotonie»,

Rappelons que, dans la question 2 (situation 2) « Donner trois valeurs de x telles que $f(x)$ appartienne à [0,99 ; 1,01] », une majorité d'élèves a interprété ce problème comme un type de tâche de l'algèbre des inéquations (*Inq*). La question 5 « Donnez tous les x tels que $f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$ » est institutionnellement proche de ce type de tâche.

Le contrat institutionnel fortement algébrisé dans l'EMS vietnamienne (cf. Le Van 2002, Nguyen 2005) assure la persistance de la stratégie *Inq* d'autant plus que le fonctionnement de la formule simplifiée F_2 institutionnalisée dans la situation 3 diminue son coût.

Cependant, nous pouvons nous attendre à la mise en place de la stratégie analytique *Dy.Eq.Monotonie* : en effet, une étude de la fonction *f,* centrée sur la monotonie (pragmatique ou théorique), a été conduite de façon implicite ou explicite au fur à mesure des questions de la situation 2 mais surtout, de la situation 3.

a.1 Stratégie analytique (Dy.Eq.Monotonie)

On résout d'abord les deux équations $f(x) = 0{,}99999$ et $f(x) = 1{,}00001$ en utilisant la formule $F_1 = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$ (initiale) ou la formule $F_2 = \dfrac{2x + 0{,}7}{x+1}$ (simplifiée).

Si a et b sont les solutions de ces équations, la stricte croissance de la fonction f (sous-jacente aux situations 2 et 3) permet de répondre à la question 5 par un intervalle pointé $[a ; b]\backslash\{0{,}3\}$ ou par l'encadrement $a \leq x \leq b$ et $x \neq 0{,}3$.

Nous pouvons prévoir la prédominance de la formule F_2 pour des raisons d'économie dans des calculs algébriques.

Résolution des équations par la formule F_2 (simplifiée)

- Sans transformation de l'intervalle de proximité de 1

- Pour $f(x) = 0{,}99999$; on a $\dfrac{2x+0{,}7}{x+1} = 0{,}99999 \Leftrightarrow (2 - 0{,}99999)x = 0{,}99999 - 0{,}7 \Leftrightarrow 1{,}00001x = 0{,}29999 \Leftrightarrow x = \dfrac{29999}{100001}$.

- Pour $f(x) = 1{,}00001$; on a $9{,}9999x = 3{,}0001 \Leftrightarrow x = \dfrac{30001}{99999}$.

Une première réponse est donc l'intervalle pointé fractionnaire $[\dfrac{29999}{100001} ; \dfrac{30001}{99999}]\backslash\{0{,}3\}$, ou l'encadrement $\dfrac{29999}{100001} \leq x \leq \dfrac{30001}{99999}$ et $x \neq 0{,}3$.

Le fait que les bornes de l'intervalle de proximité de 1 sont décimales conduit à prévoir la présence forte de la décimalisation instrumentée par la calculatrice. La décimalisation des racines des équations du premier degré par la calculatrice, produit l'intervalle pointé

décimal [0,299987 ; 0,300013]\{0,3} ou l'encadrement $0{,}299987 \leq x \leq 0{,}300013$ et $x \neq 0{,}3$.

Nous faisons l'hypothèse d'une assimilation du décimal 0,299987 à la fraction $\frac{29999}{100001}$ et 0,300013 à $\frac{30001}{99999}$ comme l'ont montré Digneau (1989) et Neyret (1995) pour les élèves français (cf. Chapitre A2).

• Avec transformation de l'intervalle de proximité de 1

La transformation de l'intervalle de proximité de 1 par celle de l'écriture des bornes en : [0,99999 ; 1,00001]\{0,3}, puis en $[1 - 10^{-5} ; 1 + 10^{-5}]\backslash\{0{,}3\}$ - peut être prévue, le recours au calcul instrumenté pouvant conduire à la décimalisation des bornes, et la distance à 1 ayant été institutionnalisée dans la situation 3.

Dans ce cas, la résolution des équations $f(x) = 1 - 10^{-5}$ et $f(x) = 1 + 10^{-5}$ peut conduire respectivement aux racines a et b en écritures $a = \frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}}$ et $b = \frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}}$. Un observable de la transformation de l'intervalle de proximité de 1 est donc la donnée de l'intervalle pointé fractionnaire $[\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}} ; \frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}}]\backslash\{0{,}3\}$ ou l'encadrement $\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}} \leq x \leq \frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}}$ et $x \neq 0{,}3$.

Résolution des équations par la formule F_1 (initiale)

La technique du type de tâche « Résoudre une équation se ramenant à une équation du second degré » (cf. Chapitre C2) pour les équations $f(x) = 0{,}99999$ et $f(x) = 1{,}00001$ conduit à la résolution des équations suivantes :

- $1{,}00001x^2 - 0{,}599993x + 0{,}089997 = 0$ pour $f(x) = 0{,}99999$
- $0{,}99999x^2 - 0{,}600007x + 0{,}090003 = 0$ pour $f(x) = 1{,}00001$

Il y a ici deux possibilités de résolution instrumentée.

- une exécution du programme « EQN -1 Degré 2 »,
- un calcul de Δ à l'aide de la calculatrice, un calcul de Δ à la main étant beaucoup trop coûteux (présence de nombres décimaux appartenant à Di, i ≥ 5).

Exécution: « EQN -1 Degré 2 »		Calcul de Δ à l'aide de la calculatrice	
$f(x) = 0{,}99999$	$f(x) = 1{,}00001$	$f(x) = 0{,}99999$	$f(x) = 1{,}00001$
$x_1 = 0{,}3$ et $x_2 = 0{,}299987$	$x_1 = 0{,}300013$ et $x_2 = 0{,}3$	$\Delta = 1{,}69.10^{-10} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1{,}3.10^{-5}$ $x_1 = 0{,}3$ et $x_2 = \frac{0{,}59998}{2{,}00002} = \frac{29999}{100001}$	$\Delta = 1{,}69.10^{-10} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1{,}3.10^{-5}$ $x_1 = \frac{0{,}60002}{1{,}99998} = \frac{300001}{99999}$ et $x_2 = 0{,}3$

Tableau 2. Résolution instrumentée des équations du second degré

Dans le cas de l'exécution du programme « EQN -1 Degré 2 », la touche d/c (ou ab/c) ne permet pas de passer de l'écriture décimale des racines : 0,299987 (pour le cas $f(x) = 0{,}99999$), 0,300013 (pour le cas $f(x) = 1{,}00001$) – à une écriture fractionnaire, le nombre de

caractères composant les fractions irréductibles $\frac{29999}{100001}$ et $\frac{30001}{99999}$ étant plus grand que 10 (hors de **PAF**)

Dans le cas du calcul instrumenté de Δ où l'on peut passer à l'écriture fractionnaire, nous faisons l'hypothèse que des bornes décimales seront produites comme réponse. En effet, dans la plupart des exemples du guide d'usage de la calculatrice CASIO fx-570MS (près de 70%), quand la calculatrice affiche un décimal de moins de 10 chiffres, ce décimal est une valeur exacte.

a.2. Stratégies algébriques (Dy.Inq)

La résolution du système de deux inéquations associé à l'encadrement $0{,}99999 \leq f(x) \leq 1{,}00001$ peut s'effectuer avec la formule F_1 ou la formule F_2. Les réponses peuvent être aussi des intervalles à bornes décimales ou fractionnaires (sous les mêmes conditions que précédemment). Bien évidemment, la résolution avec F_1 comporte plus de risques d'échec que celle avec F_2.

Résumé des réponses possibles

Les deux stratégies *Dy.Eq.Monotonie* et *Dy.Inq* peuvent conduire à la donnée d'un intervalle pointé (ou un encadrement) avec différentes écritures des bornes. L'analyse précédente permet de prévoir que seul le calcul à la main, accompagné ou non de la transformation de l'écriture des bornes de l'intervalle [0,99999 ; 1,00001] par la distance à 1, peut produire comme réponse des intervalles à bornes non décimales, c'est-à-dire fractionnaires.

Observable de	Intervalle pointé décimal (*Erroné*) Calcul instrumenté	Intervalle pointé fractionnaire 1 (*Exact*) « Résolution à la main »	Intervalle pointé fractionnaire 2 (*Exact*) « Résolution à la main » et « distance à 1 »
	[0,299987 ; 0,300013]\{0,3}	$[\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]\backslash\{0{,}3\}$	$[\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}} ; \frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}}]\backslash\{0{,}3\}$
	$0{,}299987 \leq x \leq 0{,}300013$ et $x \neq 0{,}3$	$\frac{29999}{100001} \leq x \leq \frac{30001}{99999}$ et $x \neq 0{,}3$	$\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}} \leq x \leq \frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}}$ et $x \neq 0{,}3$

Tableau 3. Domaines de proximité de 0,3

Les deux intervalles à bornes fractionnaires représentent le même ensemble de solutions. Comme nous l'avons démontré dans le cas général (cf. Chapitre 3), les fractions irréductibles $\frac{29999}{100001}$ et $\frac{30001}{99999}$ ne sont pas décimales : $\frac{29999}{100001} = 0,(2999870001)$ et $\frac{30001}{99999} = 0,(30001)$.

La décimalisation des bornes fractionnaires par un calcul instrumenté par la calculatrice conduit à « 0,299987 » pour la division de 29999 par 1000001 et à « 0,300013 » pour la division de 30001 par 99999. L'intervalle pointé obtenu (bornes décimales) contient des x qui n'appartiennent pas à l'ensemble des solutions : $0{,}299987 < \frac{29999}{100001}$ et $0{,}300013 < \frac{30001}{99999}$. Il est donc erroné.

Ce fait permet de problématiser la comparaison des intervalles par la comparaison des bornes dans le travail coopératif qui suit cette question.

II.2. Travail coopératif sur la comparaison des intervalles de proximité de 0,3

L'institutionnalisation de la monotonie de la fonction *f* par l'étude de la variation de la fonction s'appuie sur la présence de réponses issues de la stratégie *Dy.Eq.Monotonie*. Elle peut aussi prendre en compte certains résultats de l'étude de la fonction *f* établis dans la situation 3, lors de la question 3.

La comparaison des intervalles est organisée comme suit :

1) Démonstration de l'équivalence des deux intervalles pointés fractionnaires.

Calcul à la main	$\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} = \frac{0,29999}{1,00001} = \frac{29999}{100001}$	$\frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}} = \frac{3,0001}{9,9999} = \frac{30001}{99999}$
Conclusion	$[\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]\backslash\{0,3\} = [\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} ; \frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}}]\backslash\{0,3\}$	

Tableau 4. Équivalence des deux intervalles fractionnaires

2) Comparaison de l'intervalle pointé à bornes décimales [0,299987 ; 0,300013]\{0,3} à l'intervalle pointé à bornes fractionnaires $[\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]\backslash\{0,3\}$.

Pour cette comparaison, deux techniques présentes dans l'institution du collège (cf. Chapitre B1), sont concurrentes :

- l'une est la réduction des fractions au même dénominateur,
- l'autre est la décimalisation des fractions (non décimales) par la division euclidienne.

- *Par réduction des fractions au même dénominateur (technique fractionnaire : ordre dans **Q**)*

$0,299987 = \frac{0,299987\times100001}{100001} = \frac{0,299987\times(100000+1)}{100001} = \frac{29998,7+0,299987}{100001} = \frac{29998,999987}{100001}$	$0,300013 = \frac{0,300013\times99999}{99999} = \frac{0,300013\times(100000-1)}{99999} = \frac{30001,3-0,300013}{99999} = \frac{30000,999987}{99999}$
$\Rightarrow 0,299987 < \frac{29999}{100001}$	$\Rightarrow 0,300013 < \frac{30001}{99999}$

Tableau 5. Comparaison par réduction des fractions au même dénominateur

*- Par décimalisation des fractions (non décimales) par division euclidienne (technique décimale : ordre dans **D**)*

Dans la division de 29999 par 100001 :

Etape	29999	100001
1	299990	0,2999870001
2	999880	
3	998710	
4	987010	
5	870010	
6	700020	
7	130	
8	1300	
9	13000	
10	130000	
11	29999	

• Il suffit de s'arrêter à l'étape 6 (reste non nul 13) pour conclure 0,299987 $< \frac{29999}{100001}$.

• La répétition du reste « 29999 » à l'étape 10 permet de conclure : $\frac{29999}{100001} = 0,(2999870001)$.

Dans la division de 30001 par 99999 :

Etape	30001	99999
1	300010	0,30001
2	130	
3	1300	
4	13000	
5	130000	
6	30001	

• La répétition du reste « 30001 » à l'étape 5 permet de conclure : $0,300013 < \frac{30001}{99999}$

et $\frac{30001}{99999} = 0,(30001)$

Tableau 6. Comparaison des bornes par la division euclidienne

La comparaison des bornes conduit à la représentation des deux intervalles sur l'axe numérique :

Figure 1. Axe des réels de la représentation de l'ordre des bornes

Les questions suivantes sont alors posées :

- Quel intervalle pointé (à bornes décimales ou à bornes fractionnaires) donne l'ensemble de « tous les x tels que $f(x) \in [0,99999 ; 1,00001]$? Pourquoi ?
- Dans la division euclidienne, quelles informations apporte l'arrêt à un reste non nul dans la division euclidienne ? (cf. tableau 6)

III. Phase 2 – Symétrisation de l'intervalle de proximité de 0,3 : métrique de la notion de limite

Dans cette phase, on demande aux élèves de proposer un nombre d tel que : « *pour tout x, $x \neq 0,3$ et $x \in [0,3- d ; 0,3 + d]$, on soit sûr que $f(x) \in [0,99999 ; 1,00001]$* ».

Nous prévoyons que la réponse s'appuie sur la symétrisation de l'intervalle pointé de proximité de 0,3 représentant « tous les x tels que $f(x) \in [0,99999 ; 1,00001]$ » calculé lors de la phase précédente et validé publiquement. Nous notons cet intervalle pointé « *$[a ; b]\backslash\{0,3\}$* ».

Deux stratégies de symétrisation s'opposent par le positionnement de d par rapport à la plus petite distance des bornes a et b à 0,3, soit min $\{0,3 - a, b - 0,3\}$.

- $d \leq \min \{0,3 - a, b - 0,3\}$

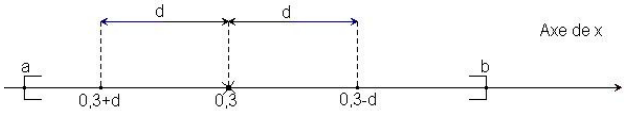


Figure 2. Intervalle pointé $[0,3 - d\ ;\ 0,3 + d] \backslash \{0,3\}$ où $d \leq \min\ \{0,3 - a,\ b - 0,3\}$

Pour que $f(x) \in [0,99999\ ;\ 1,00001]$, il suffit que $x \in [0,3 - d\ ;\ 0,3 + d]\backslash\{0,3\}$,

- $d > \min\ \{0,3 - a,\ b - 0,3\}$

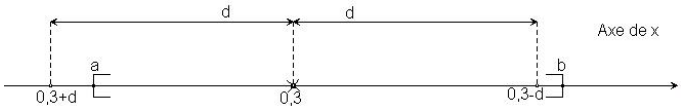


Figure 3. Intervalle pointé $[0,3 - d\ ;\ 0,3 + d]\backslash\{0,3\}$ où $d > \min\ \{0,3 - a,\ b - 0,3\}$

Il existe alors des x, $x \in [0,3 - d\ ;\ 0,3 + d]\backslash\{0,3\}$, tels que $f(x) \notin [0,99999\ ;\ 1,00001]$

a. $d \leq \min\ \{0,3 - a,\ b - 0,3\}$: raisonnement par condition suffisante

Le choix de n'importe quel $d \leq \min\ \{0,3 - a,\ b - 0,3\}$ suffit pour que le domaine de proximité de 0,3, $[0,3 - d\ ;\ 0,3 + d]\backslash\{0,3\}$ soit inclus dans $[\frac{29999}{100001}\ ;\ \frac{30001}{99999}]\backslash\{0,3\}$ (ou $[\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}}\ ;\ \frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}}]\backslash\{0,3\}$) et donc pour que $f(x) \in [0,99999\ ;\ 1,00001]$.

Cependant, on peut envisager les réponses particulières suivantes.

• *Distance de la borne la plus proche de 0,3, notée d_a*

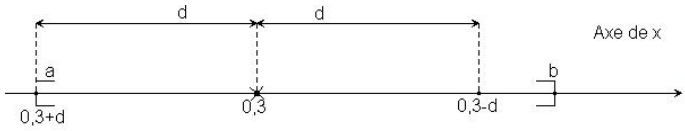


Figure 4. Intervalle pointé $[0,3 - d_a\ ;\ 0,3 + d_a]\backslash\{0,3\}$

- Calcul de d_a et d_b et comparaison dans **Q**

En écriture $a = \frac{29999}{100001}$ et $b = \frac{30001}{99999}$		En écriture $a = \frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}}$ et $b = \frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}}$	
$0,3 - \frac{29999}{100001} = \frac{0,3(10^5+1)-29999}{100001} = \frac{1,3}{100001}$	$\frac{30001}{99999} - 0,3 = \frac{30001-0,3(10^5-1)}{99999} = \frac{1,3}{99999}$	$0,3 - \frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} = \frac{0,3(1+10^{-5})-(0,3-10^{-5})}{1+10^{-5}} = \frac{1,3.10^{-5}}{1+10^{-5}}$	$\frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}} - 0,3 = \frac{0,3+10^{-5}-0,3(1-10^{-5})}{1-10^{-5}} = \frac{1,3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$
$\frac{1,3}{100001} < \frac{1,3}{99999} \Rightarrow d = 0,3 - a = \frac{1,3}{100001}$		$\frac{1,3.10^{-5}}{1+10^{-5}} < \frac{1,3.10^{-5}}{1-10^{-5}} \Rightarrow d = 0,3 - a = \frac{1,3.10^{-5}}{1+10^{-5}}$	

Tableau 7. Calcul et comparaison des distances des bornes a et b à 0,3

Dans ce cas, il faut calculer à la main les deux distances des bornes a et b à 0,3 pour comparer ces deux distances par l'ordre dans **Q**.

- Calcul de d_a et d_b et comparaison dans **D**

La décimalisation des bornes d_a et d_b par la division euclidienne à la main est plus coûteuse que la décimalisation instrumentée par la calculatrice. Cependant le problème posé par l'affichage de la calculatrice dans la phase précédente contrarie le recours au calcul instrumenté. Examinons s'il permet la comparaison.

La calculatrice affiche :

- « $1{,}299987.10^{-5}$ » pour le calcul de « $0{,}3 - \frac{29999}{100001}$ » ou de « 1,3 : 100001 »,

- « $1{,}300013.10^{-5}$ » pour le calcul de « $\frac{30001}{99999}$ - 0,3 » ou de « 1,3 : 99999 ».

Ces affichages suffisent pour conclure que certainement $d_b > d_a$.

- Comparaison de d_a et d_b basée sur l'ordre déduit de l'axe des réels

Le schéma de l'axe des réels ci-après (figure 1) tracé par l'enseignant lors de la phase de synthèse reste au tableau durant toute la question 6. On peut donc envisager son usage.

Les deux nombres 0,299987 et 0,300013 sont symétriques par rapport à 0,3, la distance commune à 0,3 étant $1{,}3.10^{-5}$. L'intervalle $]0{,}3 - 1{,}3.10^{-5} ; 0{,}3 + 1{,}3.10^{-5}[$ est donc une boule de voisinage de 0,3. La lecture sur l'axe des réels montre que $\frac{29999}{100001}$ appartient à cette boule de voisinage de 0,3 alors que $\frac{30001}{99999}$ ne lui appartient pas : $\frac{29999}{100001}$ est donc plus près de 0,3 que $\frac{30001}{99999}$ (*propriété des boules de voisinage*).

Il reste à calculer : $d_a = 0{,}3 - \frac{29999}{100001} = \frac{1{,}3}{100001}$ (ou $\frac{1{,}3.10^{-5}}{1+10^{-5}}$)

• *Distance d* = 10^{-n}, *n étant tel que d soit strictement inférieur à* d_a

Cette réponse est prévisible du fait de la présence de cette notation pour la distance à 1.

$\frac{29999}{100001} < \frac{29999}{100000} = 0{,}29999 = 0{,}3 - 10^{-5}$ et $\frac{30001}{99999} > \frac{30001}{100000} = 0{,}30001 = 0{,}3 + 10^{-5}$ (ordre dans **Q**). On a donc $n \geq 5$ telle que $10^{-n} < d_a$.

Dans ce cas, on peut envisager une justification s'appuyant sur le calcul de $f(x)$ instrumenté par la calculatrice pour $5 \leq n < 10$ (formule F_2)

$f(0{,}3-10^{-5})$ et $f(0{,}3+10^{-5})$ appartiennent à [0,99999 ; 1,00001] selon les affichages décimaux de la calculatrice (cf. Tableaux 10 et 11, chapitre C3). Pour tout $x \in [0{,}3-10^{-5} ; 0{,}3 + 10^{-5}]\backslash\{0{,}3\}$, on a donc $f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$ car la fonction f est croissante.

En résumé, le raisonnement par condition suffisante s'appuie sur les techniques de majoration / minoration des bornes a et b pour trouver un intervalle pointé symétrique

centre en 0,3 et inclus dans [*a* ; *b*]\{0,3}, c'est-à-dire pour calculer des bornes plus proches de 0,3 que *a*, *b*.

Dans la préface de son livre « Calcul infinitésimal », Dieudonné (1979) identifie le sens de l'analyse au processus de majoration, minoration et approximation ; c'est-à-dire à l'usage d'*inégalités* plutôt que d'*égalités*.

> […] pour acquérir le « sens de l'Analyse » indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est « grand » de ce qui est « petit », ce qui est « prépondérant » et ce qui est « négligeable ». En d'autres termes, le Calcul infinitésimal, tel qu'il se présente dans ce livre, est l'apprentissage du maniement des *inégalités* bien plus que des *égalités*, et on pourrait le résumer en trois mots :
>
> MAJORER, MINORER, APPROCHER.
>
> (Op. cité, p. 15)

En France, les noosphériens en réaction à la réforme des mathématiques modernes proposent de laisser une place importante à l'enseignement de l'analyse et préconisent, à la suite de Dieudonné, de mettre au centre de cet enseignement *le champ « majorer, minorer, approcher »* aussi bien dans des problèmes que dans les techniques de base.

> L'approximation est au cœur des grands problèmes de l'analyse : approximation de nombres, de fonctions… Elle est aussi au cœur des méthodes et technique du champ. 'Majorer, minorer, approcher', comme l'affirme Dieudonné, sont ici les techniques de base. (Artigue 1996, p. 166)

b. d > min {0,3 - a, b – 0,3} : transgression de la demande «… on soit sûr que $f(x) \in$ [0,99999 ; 1,00001] »

On peut envisager deux types de réponses qui sont des observables de la difficulté du raisonnement par condition suffisante qui exige d'accepter de perdre de l'information.

• *Distance des bornes de l'intervalle symétrique [0,299987 ; 0,300013]* ($d_a < d < d_b$)

Cette réponse peut résister à l'invalidation publique de la synthèse précédente du fait de la symétrie des bornes de cet intervalle par rapport à 0,3. L'observable est $d = 1{,}3.10^{-5}$.

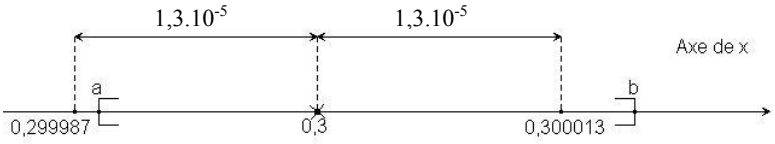
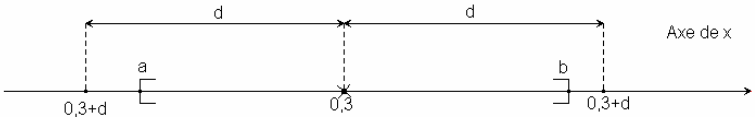


Figure 5. Intervalle pointé [0,299987 ; 0,300013]\{0,3}

• *$d \geq$ max {0,3 - a, b – 0,3} : refus de perte d'information* (figure 3)



Le choix d'un nombre d > max {0,3 - a, b – 0,3} vise à donner un intervalle symétrique *sans perte d'information*, c'est-à-dire à fournir un intervalle qui conserve « tous les x tels que $f(x) \in$ [0,99999 ; 1,00001] ».

Un cas particulier est le choix de la distance $d_b = \dfrac{1{,}3}{99999}$ (ou $\dfrac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$) de la borne la moins proche de 0,3 : c'est la plus prévisible du fait que l'intervalle pointé [0,3 – d_b ; 0,3 +

$d_b]\backslash\{0,3\}$ est le plus petit intervalle *symétrique* de proximité de 0,3 contenant « le moins » des x qui enfreint la demande «… on soit sûr que $f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$ ».

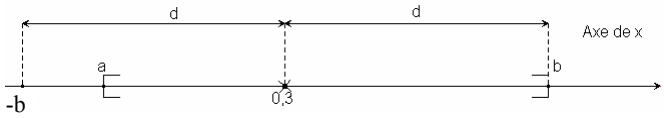


Figure 6. Intervalle pointé $[0{,}3 - d_b ; 0{,}3 + d_b]\backslash\{0,3\}$

Viallard (1981) explique la difficulté du raisonnement par condition suffisante par la fait que l'enseignement en vigueur privilégie les conditions nécessaires et suffisantes. Ce fait reste aussi vrai pour l'institution EMS du Vietnam où les problèmes s'appuyant sur les conditions suffisantes restent marginaux.

> Apprendre à perdre volontairement de l'information pour faciliter l'obtention d'un résultat. Trop souvent notre enseignement privilégie les conditions nécessaires et suffisantes, les propriétés caractéristiques et les élèves ne sont pas habitués à remplacer un problème par un problème plus simple […] (Op. cité, p. 30)

Pour Legrand (1991), le raisonnement par condition suffisante est spécifique à l'analyse et représente un saut épistémologique très important du fait d'accepter de perdre volontairement une information particulière.

> […] les raisonnements propres à l'analyse présentent un saut épistémologique très important. En effet, entrer dans le jeu de l'analyse, c'est pour l'essentiel accepter à partir de quelques principes directeurs de **perdre volontairement une information particulièr**e très forte pour en déduire une plus faible mais plus significative et plus manipulable (majorations, minorations) […] (Op. cité, p. 27- 28)

IV. Phase 3. Renforcement du raisonnement par condition suffisante : enclenchement d'un processus avec l'idée implicite que c'est possible quelque soit la distance de *f*(*x*) à 1

Dans cette phase, on demande aux élèves de proposer un nombre d tel que : « *pour tout x, $x \neq 0{,}3$ et $x \in [0{,}3- d ; 0{,}3 + d]$, on soit sûr que $f(x) \in]0{,}\underbrace{9...9}_{12} ; 1{,}\underbrace{0...01}_{12}[$* ».

Rappelons que le choix $n = 12$ pour le domaine de proximité de 1 bloque l'aide de la calculatrice (cf. Chapitre C3).

La résolution à la main des équations $f(x) = 0{,}\underbrace{9...9}_{12}$ et $f(x) = 1{,}\underbrace{0...01}_{12}$ avec la même technique de résolution des équations que dans la phase 1 ou le fonctionnement d'une loi arithmétique régissant l'écriture fractionnaire des racines successives des équations $f(x) = 0{,}\underbrace{9...9}_{n}$ ou $f(x) = 1{,}\underbrace{0...0}_{n-1}1$ pour le cas $n = 12$ (cf. Chapitre 3 : stratégie *Dy.Eq*) permet le calcul « à la main » des bornes de l'intervalle de « tous les x tels que $f(x) \in]0{,}\underbrace{9...9}_{12} ; 1{,}\underbrace{0...01}_{12}[$ ».

• $x = \dfrac{2\underbrace{9...9}_{11}}{1\underbrace{0...01}_{11}}$ (ou $\dfrac{0{,}3 - 10^{-12}}{1 + 10^{-12}}$) pour le cas $f(x) = 0{,}\underbrace{9...9}_{12}$ (ou $f(x) = 1 - 10^{-12}$).

• $x = \dfrac{\underbrace{30...01}_{11}}{\underbrace{99...9}_{12}}$ (ou $\dfrac{0{,}3+10^{-12}}{1-10^{-12}}$) pour le cas $f(x) = 1{,}\underbrace{0...01}_{12}$ (ou $f(x) = 1 + 10^{-12}$)

L'intervalle pointé « tous les x tels que $f(x) \in \left]0{,}\underbrace{9...9}_{12}\ ;1{,}\underbrace{0...01}_{12}\right[$ » est noté]A ; B[\{0,3}.

Nous donnons ci-après deux écritures possibles de cet intervalle selon l'explicitation ou non de la distance à 1.

Intervalle pointé fractionnaire 1 (*Exact*) « Résolution à la main »	Intervalle pointé fractionnaire 2 (*Exact*) « Résolution à la main » et « distance à 1 »
$\left]\dfrac{\underbrace{29...9}_{11}}{\underbrace{10...0}_{11}1} ; \dfrac{\underbrace{30...01}_{11}}{\underbrace{99...9}_{12}}\right[\backslash\{0{,}3\}$	$\left]\dfrac{0{,}3-10^{-12}}{1+10^{-12}} ; \dfrac{0{,}3+10^{-12}}{1-10^{-12}}\right[\backslash\{0{,}3\}$

Dans la donnée de cette question, l'intervalle de proximité de 1, $\left]0{,}\underbrace{9...9}_{12} ; 1{,}\underbrace{0...01}_{12}\right[$, est ouvert alors que l'intervalle symétrique de proximité de 0,3, [0,3 – d ; 0,3 + d], est fermé. Cela interdit le choix de la distance $d = \min\{|0{,}3 - A| ; |0{,}3 - B|\} = \dfrac{1{,}3.10^{-12}}{1+10^{-12}}$ comme une condition suffisante et exige donc la mise en place d'une technique de la minoration pour trouver une distance inférieure à $\dfrac{1{,}3.10^{-12}}{1+10^{-12}}$.

Ces restrictions rendent prévisibles les réponses par $d = 10^{-12}$ ou $d = \dfrac{10^{-12}}{1+10^{-12}}$ dans le prolongement de la phase 2. On peut envisager deux justifications à ces réponses, relevant de l'ordre dans **Q**.

• Par minoration de la distance $d = \min\{|0{,}3 - A| ; |0{,}3 - B|\}$.

$$\frac{1{,}3.10^{-12}}{1+10^{-12}} > \frac{10^{-12}}{1+10^{-12}} > 10^{-2}.$$

Dans ce cas, il faut calculer et ordonner les distances $|0{,}3 - A|$ et $|0{,}3 - B|$.

• Par minoration / majoration des bornes A et B.

$$\frac{0{,}3-10^{-12}}{1+10^{-12}} < 0{,}3 - \frac{10^{-12}}{1+10^{-12}} < 0{,}3 - 10^{-12} \text{ et } 0{,}3 + 10^{-12} < 0{,}3 + \frac{10^{-12}}{1+10^{-12}} < \frac{0{,}3+10^{-12}}{1-10^{-12}}$$

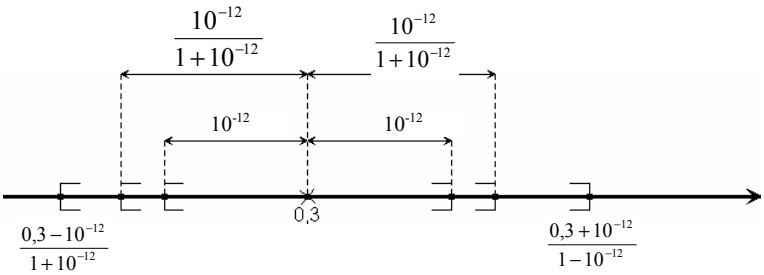


Figure 7. Représentation sur l'axe des réels des intervalles obtenus par minoration / majoration

Chapitre C4

Deuxième partie
Analyse *a posteriori* de la situation 4

I. Phase 1. Comparaison des intervalles : bornes décimales ou bornes fractionnaires

I.1. Intervalles de proximité de 0,3 des binômes

Dans le tableau 8, nous récapitulons les réponses des 19 binômes selon les intervalles de proximité de 0,3 : à bornes décimales ou fractionnaires - et les stratégies prévues dans l'analyse *a priori.*

Réponse	[0,299987 ; 0,300013] \{0,3} ou encadrement (erroné)	Autre domaine (erroné)	$[\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]\backslash\{0,3\}$ ou encadrement (correct)	$[\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} ; \frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}}]\backslash\{0,3\}$ ou encadrement (correct)	Total
Stratégie	*Calcul instrumenté*		*Calcul à la main*		
Dy.Eq. Monotonie	7	0	1	0	8
Dy.Inq	5	3	1	1	10
Dx	0	1	0	0	1
Total	12	4	2	1	19
	16		3		

Tableau 8. Domaines de proximité de 0,3 et stratégies des binômes

a. Prédominance des stratégies Dy

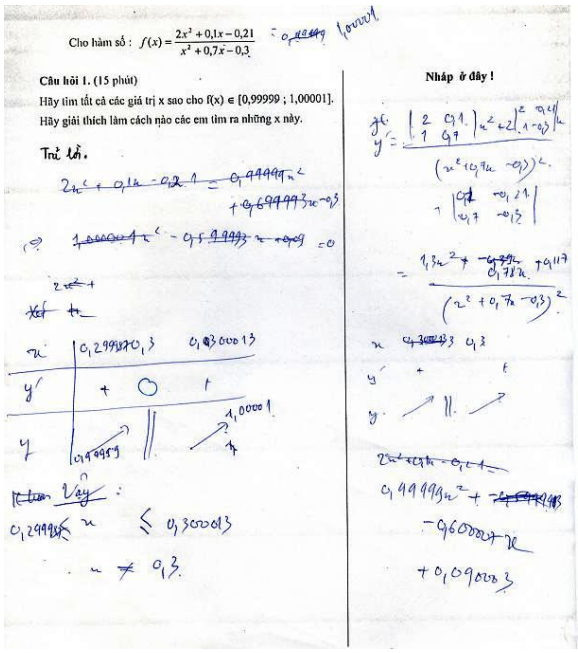
Un seul binôme utilise la stratégie *Dx*. Ce binôme ne prend en compte que les valeurs décimales de *x* des suites ($0,2\underbrace{99...9}_{n}$) et ($0,3\underbrace{00...0}_{n}1$) comme valeurs approchées de 0,3.

Thế từng giá trị x vào f(x) rồi chọn ra những x thỏa f(x) ∈ [0,99999 ; 1,00001]. Các giá trị x đó là: $x = 0,2\underbrace{99...9}_{n}$ $x = 0,3\underbrace{00...0}_{n}1$ Khi n → ∞ thì $x = 0,2\underbrace{99...9}_{n} = 0,3$ và $x = 0,3\underbrace{00...0}_{n}1 = 0,3$. ⇒ ở tìm được TẤT CẢ các giá trị x đó	Essayer chaque valeur de *x* pour calculer *f*(*x*), puis choisir des *x* tels que *f*(*x*) ∈ [0,99999 ; 1,00001]. Les valeurs de x sont : $x = 0,2\underbrace{99...9}_{n}$ $x = 0,3\underbrace{00...0}_{n}1$ Quand n → ∞ alors $x = 0,2\underbrace{99...9}_{n} = 0,3$ et $x = 0,2\underbrace{99...9}_{n} = 0,3$ ⇒ On ne peut pas trouver TOUTES les valeurs de *x* (Binôme III.2)

Comme les 18 autres binômes, ce binôme a conscience que sa procédure ne lui permet pas de trouver « tous les *x* tels que *f*(*x*) ∈ [0,99999 ; 1,00001] » : « *On ne peut pas trouver TOUTES les valeurs de x* ».

Comme nous l'avions prévu, la stratégie analytique *Dy.Eq.Monotonie* apparaît à peu près aussi souvent que la stratégie *Dy.Inq* (8 contre 10) alors qu'il n'y avait que 3 tentatives (sur 38) de mise en place de la stratégie *Eq.Dérivée* dans la question 2 de la situation 2.

• Les 8 binômes *Dy.Eq.Monotonie* (sur 19) rompent le contrat institutionnel fortement algébrisé de la résolution des inéquations dans l'EMS vietnamienne. Voici un exemple de la réponse d'un tel binôme.



Soit … $f(x) = \frac{2x^2 + 0,1x - 0,21}{x^2 + 0,7x - 0,3}$ = ~~0,99999~~ 1,00001

Question […]
Réponse.

~~$2x^2 + 0,1x - 0,21 = 0,99999x^2 + 0,699993x - 0,3$~~

[…]

x	0,299987		0,300013
y'	+	0	+
y	↗ 0,99999	‖	1,00001 ↗

Conclusion :

$0,299987 \le x \le 0,300013$
$x \ne 0,3$

Brouillon

$y' = […]$

$= \frac{1,3x^2 - 0,78x + 0,117}{(x^2 + 0,7x - 0,3)^2}$

[…]

$0,99999x^2$ + ~~0,599993~~
$- 0,600007x$
$+ 0,090003$

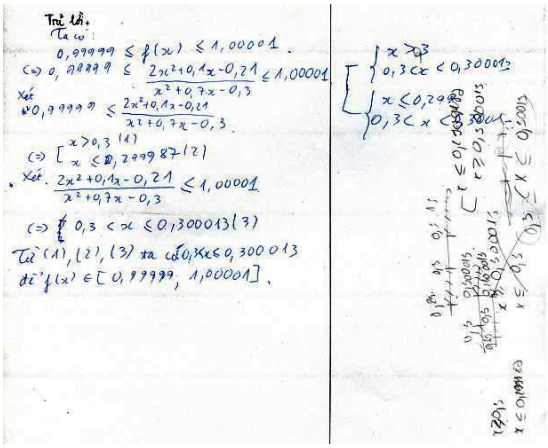
(Binôme IV.4)

Ce binôme (codé IV.4) utilise la formule initiale F_1. Les transformations algébriques dans la partie raturée et dans la partie brouillon montrent qu'il ramène les équations $f(x) = k$ (k = 0,99999 ou 1,00001) aux équations du second degré, puis exécute le programme « EQN-1 Degré 2 » : il trouve donc les racines décimales 0,299987 (pour le cas $f(x)$ = 0,99999) et 0,300013 (pour le cas $f(x)$ = 1,00001).

L'étude de la monotonie de la fonction f par le tableau de variation permet à ce binôme de conclure par l'encadrement $0,299987 \le x \le 0,300013$, $x \ne 0,3$.

• Parmi les 10 binômes *Dy.Inq*, 7 binômes utilisent la formule simplifiée F_2 et 3 binômes utilisent la formule initiale F_1.

Trois binômes (1 avec F_2 et 2 avec F_1) produisent des domaines erronées (non prévus) en ne prenant pas en compte le signe du dénominateur dans les transformations algébriques conduisant au système d'inéquations à résoudre (cf. Chapitre 2) : nous les avons classés dans « autre domaine ». Voici l'exemple du binôme codé II.2.

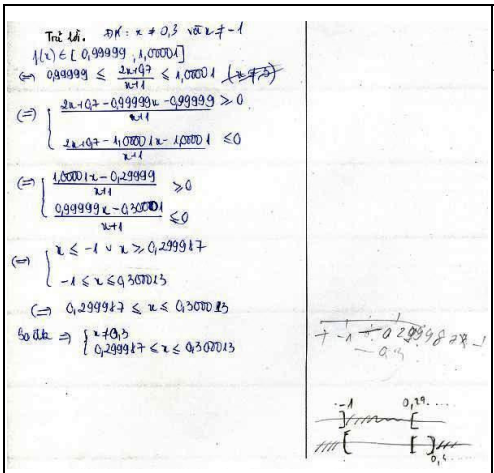
	**Réponse.** On a : $0{,}99999 \le f(x) \le 1{,}00001$ $\Leftrightarrow$ […] Considérons $0{,}99999 \le \dfrac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0{,}3 \ \ (1) \\ x \le 0{,}299987 \ \ (2) \end{array}\right.$ Considérons $\dfrac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3} \le 1{,}00001$ $\Leftrightarrow 0{,}3 < x \le 0{,}300013$ (3) De (1), (2), (3) on a $0{,}3<x \le 0{,}300013$ pour que $f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$ (Binôme II.2)	[…] [*Intersection des intervalles de solution par l'axe numérique*]

Ce binôme répond par l'intervalle $0{,}3 < x \le 0{,}300013$: cet intervalle représente une partie de l'ensemble des solutions. Comme dans l'exemple précédent (Binôme IV.4), il recopie les racines décimales affichées par le programme « EQN-1 Degré2 » de la calculatrice.

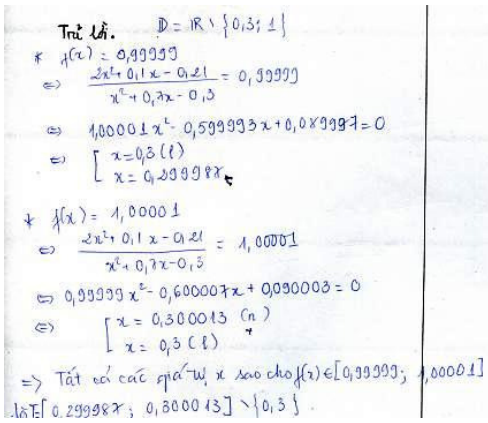
b. Prédominance du calcul instrumenté produisant des intervalles à bornes décimales

La majorité des binômes (16 sur 19) répond par l'intervalle pointé [0,299987 ; 0,300013]\{0,3}. Comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, les bornes décimales proviennent de :

- la décimalisation des racines des équations du premier degré instrumentée par la calculatrice, comme dans la réponse du binôme I.4 (stratégie *Dy.Inq*)

	**Réponse.** Condition : $x \ne 0{,}3$ et $x \ne -1$ $f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$ $\Leftrightarrow 0{,}99999 \le \dfrac{2x+0{,}7}{x+1} \le 1{,}00001$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2x+0{,}7-0{,}99999x-0{,}99999}{x+1} \ge 0 \\ \dfrac{2x+0{,}7-1{,}00001x-1{,}00001}{x+1} \le 0 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1{,}00001x-0{,}29999}{x+1} \ge 0 \\ \dfrac{0{,}99999x-0{,}30001}{x+1} \le 0 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \le -1 \vee x \ge 0{,}299917 \\ -1 \le x \le 0{,}300013 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow 0{,}299987 \le x \le 0{,}300013$ Avec la condition $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ne 0{,}3 \\ 0{,}299987 \le x \le 0{,}300013 \end{array}\right.$	[*Intersection des intervalles de solution par l'axe numérique*]

- la résolution instrumentée des équations du second degré par le programme « EQN-1 Degré 2 » de la calculatrice, comme dans la réponse de binôme II.1 (stratégie *Dy.Eq.Monotonie*).

 Trả lời. D = ℝ \ {0,3; 1} * f(x) = 0,99999 ⇔ (2x² + 0,1x − 0,21)/(x² + 0,7x − 0,3) = 0,99999 ⇔ 1,00001x² − 0,599993x + 0,089997 = 0 ⇔ [x = 0,3 (l) ; x = 0,299987] * f(x) = 1,00001 ⇔ (2x² + 0,1x − 0,21)/(x² + 0,7x − 0,3) = 1,00001 ⇔ 0,99999x² − 0,600007x + 0,090003 = 0 ⇔ [x = 0,300013 (n) ; x = 0,3 (l)] ⇒ Tất cả các giá trị x sao cho f(x) ∈ [0,99999; 1,00001] là T = [0,299987; 0,300013] \ {0,3}.	**Réponse.** D = R \ {0,3 ; 1} ∗ $f(x) = 0{,}99999$ $\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3} = 0{,}99999$ $\Leftrightarrow 1{,}00001x^2 - 0{,}599993x + 0{,}089997 = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0{,}3 \text{ (exclu)} \\ x = 0{,}299987 \end{array}\right.$ ∗ $f(x) = 1{,}00001$ $\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3} = 1{,}00001$ $\Leftrightarrow 0{,}99999x^2 - 0{,}600007x + 0{,}090003 = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0{,}300013 \text{ (accepté)} \\ x = 0{,}3 \text{ (exclu)} \end{array}\right.$ ⇒ Toutes les valeurs de x tels que $f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$ sont T = [0,299987 ; 0,300013]\{0,3}.

Ce binôme s'appuie implicitement sur la croissance de la fonction f pour conclure que le domaine de proximité de 0,3 est l'intervalle pointé [0,299987 ; 0,300013]\{0,3}. Nous faisons cette hypothèse parce que, dans la situation 3, ce binôme avait répondu par le couple *Dx.EDI* en contrôlant la monotonie pragmatique de f.

Pour tous ces binômes, mais aussi pour les 3 autres, les bornes décimales sont des valeurs exactes (moins de 10 chiffres décimaux) : cela les conduit à assimiler 0,299987 à $\dfrac{29999}{100001}$ et 0,300013 à $\dfrac{30001}{99999}$ comme le montre clairement le travail coopératif :

Après avoir fait une synthèse des intervalles de proximité de 0,3 des binômes au tableau, l'enseignant pose la question

P : Je vous demande maintenant de comparer les trois intervalles proposés !

L'enseignant montre les trois intervalles écrits au tableau :

$$R1 : [\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]\backslash\{0{,}3\}$$

$$[\frac{2{,}9999}{1{,}00001} ; \frac{3{,}0001}{9{,}9999}]\backslash\{0{,}3\}$$

$$R2 : [\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}} ; \frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}}]\backslash\{0{,}3\}$$

$$R3 : [0{,}299987 ; 0{,}300013] \backslash\{0{,}3\})$$

Es : Ils sont les mêmes.

[…]

P : Ensuite, l'intervalle de R3 et l'intervalle de R1 …

Es : Ils sont aussi les mêmes

P : Binôme IV.4, sont –ils les mêmes ?

EIV.4 : Oui.

P : Pourquoi ?

EIV.4 : Car la division de 29999 par 100001 est égale à 0,299987 et la division de 30001 par 99999 est égale à 0,300013.

P : Comment sais – tu ça ?

EIV.4 et Es : On manipule la calculatrice.

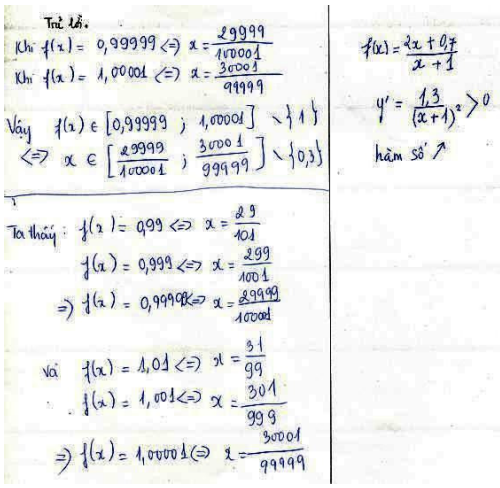
P : Vous êtes d'accord ? (*L'enseignant demande à la classe*)

Es : Oui, ils sont les mêmes.

c. *Existence du calcul à la main produisant des intervalles à bornes fractionnaires*

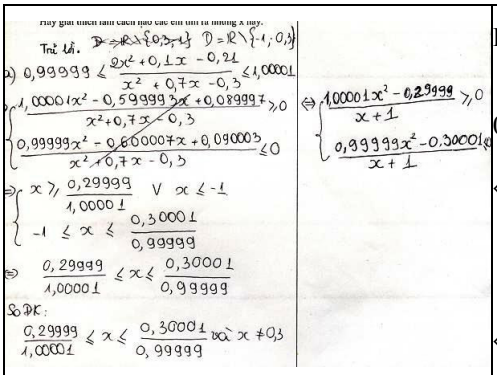
Trois binômes seulement répondent par des intervalles pointés à bornes fractionnaires (avec la formule simplifiée F_2) :

- une réponse $[\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]\backslash\{0,3\}$: binôme I.2 (stratégie *Dy.Eq.Monotonie*)

<table>
<tr>
<td rowspan="2"> 
Trả lời.
Khi $f(x) = 0,99999 \Leftrightarrow x = \frac{29999}{100001}$
Khi $f(x) = 1,00001 \Leftrightarrow x = \frac{30001}{99999}$
Vậy $f(x) \in [0,99999 ; 1,00001] \backslash \{1\}$
$\Leftrightarrow x \in [\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}] \backslash \{0,3\}$
Ta thấy : $f(x) = 0,99 \Leftrightarrow x = \frac{29}{101}$
$f(x) = 0,999 \Leftrightarrow x = \frac{299}{1001}$
$\Rightarrow f(x) = 0,99999 \Leftrightarrow x = \frac{29999}{100001}$
Và $f(x) = 1,01 \Leftrightarrow x = \frac{31}{99}$
$f(x) = 1,001 \Leftrightarrow x = \frac{301}{999}$
$\Rightarrow f(x) = 1,00001 \Leftrightarrow x = \frac{30001}{99999}$
$f(x) = \frac{2x+0,7}{x+1}$
$y' = \frac{1,3}{(x+1)^2} > 0$
hàm số ↗</td>
<td>Réponse.
Quand $f(x) = 0,99999 \Leftrightarrow x = \frac{29999}{100001}$
Quand $f(x) = 1,00001 \Leftrightarrow x = \frac{30001}{99999}$
Alors $f(x) \in [0,99999 ; 1,00001]\backslash\{1\}$
$\Leftrightarrow x \in [\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]\backslash\{0,3\}$</td>
<td rowspan="2">$f(x) = \frac{2x+0,7}{x+1}$
$y' = \frac{1,3}{(x+1)^2} > 0$
La fonction ↗</td>
</tr>
<tr>
<td>On voit : $f(x) = 0,99 \Leftrightarrow x = \frac{29}{101}$
$f(x) = 0,999 \Leftrightarrow x = \frac{299}{1001}$
$\Rightarrow f(x) = 0,99999 \Leftrightarrow x = \frac{29999}{100001}$
Et $f(x) = 1,01 \Leftrightarrow x = \frac{31}{99}$
$f(x) = 1,001 \Leftrightarrow x = \frac{301}{999}$
$\Rightarrow f(x) = 1,00001 \Leftrightarrow x = \frac{30001}{99999}$</td>
</tr>
</table>

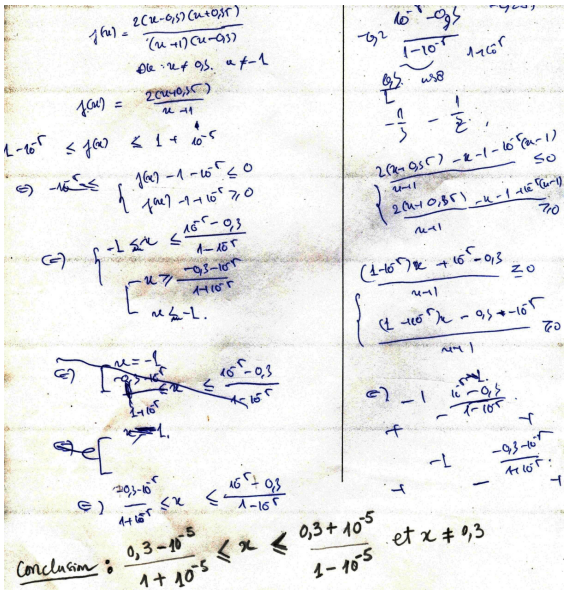
Ce binôme reconnaît une loi arithmétique régissant l'écriture fractionnaire des racines successives des équations $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{n}$ ou $f(x) = 1,\underbrace{0...0}_{n-1}1$ (cf. Chapitre 3 : stratégie *Dy.Eq*). Il fait fonctionner cette loi pour obtenir les racines des équations $f(x) = 0,99999$ et $f(x) = 1,00001$.

- une réponse $\frac{2,9999}{1,00001} \leq x \leq \frac{3,0001}{9,9999}$ et $x \neq 0,3$: binôme II.3 (stratégie *Dy.Inq*)

<table>
<tr>
<td> 
Trả lời. $D = \mathbb{R}\backslash\{-1;0,3\}$
a) $0,99999 \leq \frac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} \leq 1,00001$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1,00001x^2-0,59999x+0,08999}{x^2+0,7x-0,3} \geq 0 \\ \frac{0,99999x^2-0,600007x+0,090003}{x^2+0,7x-0,3} \leq 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1,00001x^2-0,29999}{x+1} \geq 0 \\ \frac{0,99999x^2-0,30001}{x+1} \leq 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{0,29999}{1,00001} \vee x \leq -1 \\ -1 \leq x \leq \frac{0,30001}{0,99999} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \frac{0,29999}{1,00001} \leq x \leq \frac{0,30001}{0,99999}$
Số đk:
$\frac{0,29999}{1,00001} \leq x \leq \frac{0,30001}{0,99999}$ và $x \neq 0,3$</td>
<td>Réponse. […] D = R\{-1 ; 0,3}
$0,99999 \leq \frac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3} \leq 1,00001$
$\Leftrightarrow$ […]
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{0,29999}{1,00001} \vee x \leq -1 \\ -1 \leq x \leq \frac{0,30001}{0,99999} \end{cases}$
Avec la condition :
$\frac{2,9999}{1,00001} \leq x \leq \frac{3,0001}{9,9999}$ et $x \neq 0,3$</td>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1,00001x^2-0,29999}{x+1} \geq 0 \\ \frac{0,99999x^2-0,30001}{x+1} \leq 0 \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

Ce binôme écrit les racines sous une forme fractionnaire non canonique.

- une réponse $\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} \leq x \leq \frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}}$ et $x \neq 0,3$: binôme IV.3 (stratégie *Dy.Inq*)

	$f(x) = \frac{2(x-0,3)(x+0,35)}{(x+1)(x-0,3)}$ Condition : $x \neq 0,3 \quad x \neq -1$ $f(x) = \frac{2(x+0,35)}{x+1}$ $1- 10^{-5} \leq f(x) \leq 1 + 10^{-5}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-1-10^{-5} \leq 0 \\ f(x)-1+10^{-5} \geq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq \frac{10^{-5}-0,3}{1-10^{-5}} \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{-0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases}$ […] $\Leftrightarrow \frac{-0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} \leq x \leq \frac{10^{-5}-0,3}{1-10^{-5}}$	[…] [Transformations algébriques] [Tableau de signe]
	Conclusion : $\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} \leq x \leq \frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}}$ et $x \neq 0,3$	

La transformation de l'intervalle [0,99999 ; 1,00001] en l'encadrement $1- 10^{-5} \leq f(x) \leq 1 + 10^{-5}$ montre une appropriation de la notion de distance pour écrire un voisinage de 1.

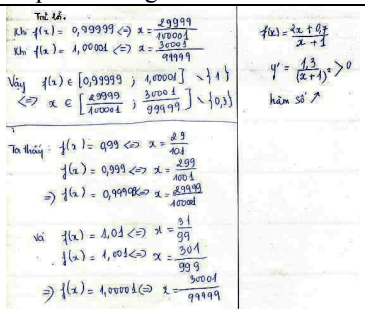
Le binôme se trompe sur le signe de 0,3 lors du travail algébrique conduisant à la résolution d'inéquations du premier degré. Cependant, lors de la synthèse avec l'enseignant, il corrige cette erreur. La conclusion en grisé a été écrite au tableau par l'enseignant (et recopié par le binôme) sous la dictée de l'élève représentant ce binôme.

Aucun des trois binômes ne décimalise les racines à partir de leur écriture fractionnaire, et aucun ne conteste l'assimilation du décimal 0,299987 à la fraction $\frac{29999}{100001}$ et 0,300013 à $\frac{30001}{99999}$ dans le travail de synthèse.

I.2. Comparaison des intervalles de proximité de 0,3 : travail coopératif

a. Institutionnalisation de la stratégie analytique s'appuyant sur la monotonie de la fonction f

La présence de 8 réponses *Dy.Eq.Monotonie* permet à l'enseignant d'institutionnaliser la monotonie théorique de la fonction *f* et la limite de la fonction quand *x* tend vers 0,3.

<table>
<tr><th>Echanges verbaux</th><th>Ce que l'enseignant écrit au tableau</th></tr>
<tr><td>
P : […]
- Je trouve différents résultats. Je commence par les moins nombreux.
- Regardons la réponse du binôme I.1 !
L'enseignant présente la réponse du binôme I.1 à l'aide de la tablette de rétro-projection
[…]
Il demande à la classe
-Avez –vous des questions pour le binôme I.1 ?
ES : Non. La réponse est juste.
P : Bon, il faut établir le tableau de variation pour $x \in [\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]\backslash\{0,3\}$. (Il établit le tableau de variation sous la dictée des élèves)
- Et alors, le binôme I.1, qu'est ce qu'il se passe quand x tend vers 0,3
EI.1 : $f(x)$ tend vers 1.
P : Vous êtes d'accord (il demande à la classe)
ES : Oui, quand x tend vers 0,3, $f(x)$ tend vers 1
L'enseignant complète le tableau de variation
P : On accepte donc le premier résultat ?
Es : Oui.
P : - On a aussi que… (Il écrit au tableau)
</td><td>


[…]
<table>
<tr><td>x</td><td>$\frac{29999}{100001}$</td><td>0,3</td><td>$\frac{30001}{99999}$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0,99999 ↗</td><td></td><td>↗ 1,00001</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>$\frac{29999}{100001}$</td><td>0,3</td><td>$\frac{30001}{99999}$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0,99999 ↗ 1</td><td></td><td>1 ↗ 1,00001</td></tr>
</table>
∗ la fonction f est croissante dans chaque intervalle du domaine de définition.
</td></tr>
</table>

Le fruit du travail de la situation 3 permet aux élèves de conclure que la limite de la fonction f quand x tend vers 0,3 est 1 sans calcul algébrique de la limite. Cette conclusion est nécessaire à la validation des réponses *Dy.Eq.Monotonie*. Car elle assure que les bornes 0,99999 et 1,00001 sont le minimum et le maximum pour tout $x \in [\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}] \backslash \{0,3\}$.

b. Comparaison des intervalles de proximité de 0,3

Après avoir rendu publique trois types d'intervalles proposés dans les réponses, l'enseignant pose le problème de leur comparaison. Les élèves sont convaincus qu'« ils sont le même » :

<table>
<tr><th>Echanges verbaux</th><th>Ce que l'enseignant écrit au tableau</th></tr>
<tr><td>
L'enseignant vient d'écrire au tableau une synthèse des réponses au tableau : il écrit ces réponses sous forme d'intervalles.
P : […]- Je vous demande maintenant de comparer les trois intervalles proposés !
Es : Ils sont les mêmes.
P : D'abord, pourquoi les résultats 1 et 2 sont-ils les mêmes ?
Es : (les élèves lisent)
$0,3 - 10^{-5} = 0,29999$ et $1 + 10^{-5} = 1,00001$
$0,3 + 10^{-5} = 0,30001$ et $1 - 10^{-5} = 9,9999$
L'enseignant écrit au tableau.
P : Ensuite, l'intervalle de R3 et l'intervalle de R1 …
Es : Ils sont aussi les mêmes
P : Binôme I.4, sont –ils les mêmes ?
EI.4 : Oui.
P : Pourquoi ?
EI4 : Car la division de 29999 par 100001 est égale à 0,299987 et la division de 30001 par 99999 est égale à 0,300013.
P : Comment connais – tu ça ?
</td><td>
R1 : $[\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]\backslash\{0,3\}$
$[\frac{2,9999}{1,00001} ; \frac{3,0001}{9,9999}]\backslash\{0,3\}$
R2 : $[\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} ; \frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}}]\backslash\{0,3\}$
R3 : [0,299987 ; 0,300013]\{0,3}
<u>R1 et R2 sont les mêmes</u>
∗ $\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} = \frac{0,29999}{1,00001} = \frac{29999}{100001}$
∗ $\frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}} = \frac{3,0001}{9,9999} = \frac{30001}{99999}$
<u>R3 et R1</u>
$\frac{29999}{100001} \overset{\text{Calculatrice}}{=} 0,299987$
</td></tr>
</table>

EI4 et Es : On manipule la calculatrice. (*L'enseignant écrit au tableau)* P : Vous êtes d'accord ? (*l'enseignant demande à la classe*) Es : Oui, ils sont les mêmes.	$\frac{30001}{99999} \overset{\text{Calculatrice}}{=} 0{,}300013$

La conjecture « R1 et R2 sont les mêmes » est validée par le fait que les bornes des deux intervalles sont les écritures d'un même nombre décimal, l'une des écritures faisant intervenir la distance à 0,3 : « $0{,}3 - 10^{-5} = 0{,}29999$ », « $1 + 10^{-5} = 1{,}00001$ », « $0{,}3 + 10^{-5} = 0{,}30001$ » et « $1 - 10^{-5} = 9{,}9999$ ». Ces égalités peuvent être établies aussi bien par un calcul à la main (ou mental) de $0{,}3 - 10^{-5}$ (par exemple), que par un calcul instrumenté, la calculatrice affichant 0,29999.

Ce calcul instrumenté va dans le sens de la croyance que l'affichage décimal de la calculatrice est un *résultat exact* quand le nombre de chiffres est strictement inférieur à 10 : ce qui est le cas des divisions « 29999 : 100001 » et « 30001 : 99999 ».

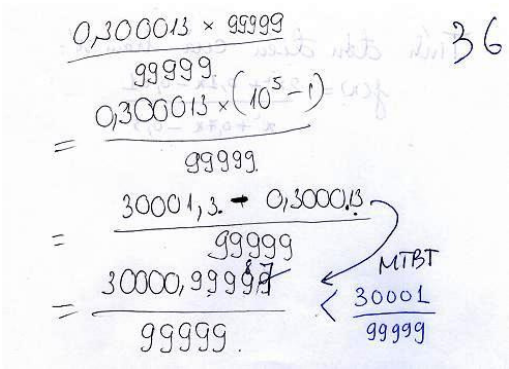
Comparaison des intervalles à bornes décimales et à bornes fractionnaires

L'enseignant pose le problème de la comparaison *sans calculatrice* des bornes décimales (0,299987 et 0,300013) aux bornes fractionnaires (respectivement à $\frac{29999}{100001}$ et $\frac{30001}{99999}$).

> P : Maintenant, je vous propose de comparer ces nombres sans calculatrice. Comment peut – on comparer ces nombres au collège ?
> Es : Réduire au même dénominateur.
> P : Qui veut le faire ? (*Beaucoup d'élèves lèvent la main*)
> - Bon, j'attends quelques minutes. Faites la réduction au même dénominateur au brouillon. J'exposerais la réponse de la personne la plus rapide.

La référence au collège conduit immédiatement les élèves à interpréter le problème comme une tâche de comparaison de deux fractions dont la technique institutionnelle est la réduction au même dénominateur. En effet, ce type de tâche occupe une place importante au collège : dans le manuel *Mathématique 6* (vol. 2, 1998), 32 exercices (sur 57) du *chapitre I -Fraction* – comporte des sous questions relevant de ce type de tâches.

Ci-après la réponse de l'élève 36 qui a fini le plus vite :

	$\frac{0{,}300013 \times 99999}{99999}$ 36 $= \frac{0{,}300013 \times (10^5 - 1)}{99999}$ $= \frac{30001{,}3 - 0{,}300013}{99999}$ Calculatrice $= \frac{30001{,}99987}{99999} < \frac{30001}{99999}$

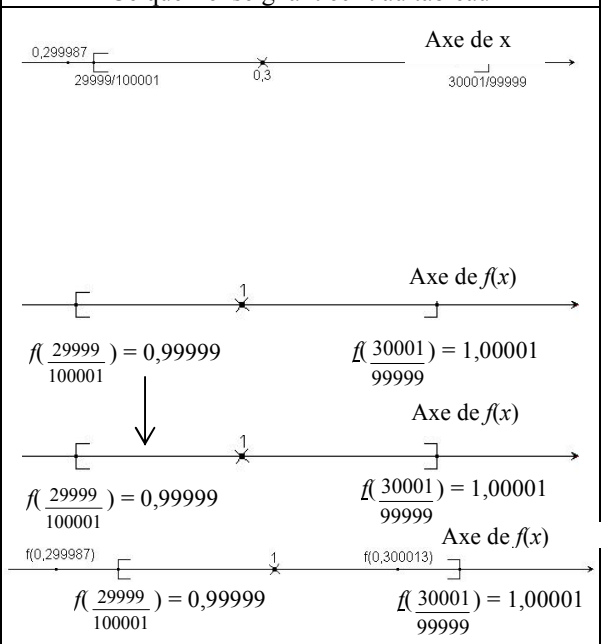
En grisé : ce qui est complété dans le travail coopératif

Cet élève calcule la soustraction « 30001,3 – 0,300013 » avec la calculatrice qui affiche « 30000,99999 ». Le fait que cette réponse soit rendu publique permet à l'enseignant de problématiser une deuxième fois (la première fois étant l'affichage de 1 dans la situation 3) l'affichage de la calculatrice dans les calculs instrumentés.

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
L'enseignant présente la réponse de l'élève 36 (le plus rapide) à l'aide de la tablette de rétro-projection P : Regardez chaque étape de la transformation de l'élève 36 ! Vous êtes d'accord ? Certains élèves : il est impossible d'avoir le chiffre 9 en dernier (*L'enseignant demande à l'un des élèves du binôme I.2*) P : Pourquoi dis – tu ça ? EI2 : Il faut le chiffre 7 en dernier dans le numérateur. P : Élève 36, comment passes – tu de la troisième étape à la quatrième étape ? Es : (*sourire*) Il utilise la calculatrice. E36 : Oui, je manipule la calculatrice. Es : Il faut 87 en dernier. E36 : Oui, c'est 30000,99987. P : et alors ? E36 : Il est inférieur à $\frac{30001}{99999}$. P : Vous êtes d'accord ? (*Il demande à la classe*) Es : Oui P : De la même façon, on va comparer 0,299987 et $\frac{29999}{100001}$. *L'enseignant écrit au tableau sous la dictée des élèves*	$\frac{0{,}300013\times 99999}{99999}$ 36 $=\frac{0{,}300013\times(10^5-1)}{99999}$ $=\frac{30001{,}3-0{,}300013}{99999}$ Calculatrice $=\frac{30000{,}99987}{99999} < \frac{30001}{99999}$ $0{,}299987=\frac{0{,}299987\times 100001}{100001}=$ $\frac{0{,}299987\times(10^5+1)}{100001}=\frac{29998{,}7+0{,}299987}{100001}$ $=\frac{29998{,}999987}{100001}<\frac{29999}{100001}$

c. Quel intervalle (à bornes décimales ou à bornes fractionnaires) donne l'ensemble de « tous les x tels que f(x) ∈ [0,99999 ; 1,00001] ? Pourquoi ?

L'institutionnalisation de la croissance théorique de *f* et de la comparaison des intervalles pointés de proximités de 0,3 permet à l'enseignant de conduire l'étude de cette question. La continuité de la fonction, bien que nécessaire, reste absente.

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : […] - Quel intervalle (à bornes décimales ou à bornes fractionnaires) donne l'ensemble de « tous les *x* tels que *f*(*x*) ∈ [0,99999 ; 1,00001] ? ES : Les intervalles à bornes fractionnaires. P : Pourquoi ? ES : Car la calculatrice ne donne pas la valeur exacte. P : Entre $f(\frac{29999}{100001})$ ou *f*(0,299987), lequel donne exactement 0,99999 ? Es : $f(\frac{29999}{100001})$. P : Entre $f(\frac{30001}{99999})$ ou *f*(0,300013), lequel est égale à 1,00001 ? Es : $f(\frac{30001}{99999})$. *(L'enseignant trace le deuxième axe numérique de f(x))* P : Où met-on la valeur *f*(0,299987) ? Es : Avant 0,99999 P : Pourquoi ? Es : Car la fonction est croissante. P : D'accord, où met -on la valeur *f*(0,300013) ?	

Es : Avant 1,00001. P : C'est ici ? (*il montre l'axe numérique*) Es : Non. Entre 1 et 1,00001 P : Bon, est-ce que $f(x) \in [0{,}99999\ ;\ 1{,}00001]$ pour toutes les valeurs de x appartenant à $[0{,}299987\ ;\ 0{,}300013]\backslash\{0{,}3\}$. Es : Non. Si on prend $x \in \left]0{,}299987\ ;\ \frac{29999}{100001}\right[$. P : Il y a combien de x dans cet intervalle Es : - Beaucoup - une infinité	

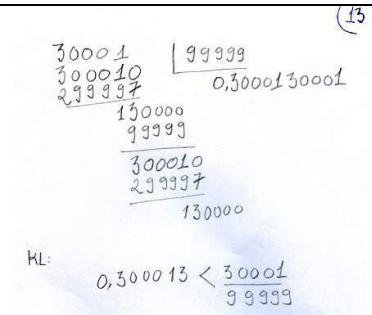
d. Dans la division euclidienne, quelles informations apporte l'arrêt à un reste non nul dans la division euclidienne ?

Aucun élève ne propose la technique de la division euclidienne à la main dans la comparaison d'une fraction à un décimal. Cela s'explique pas la place faible accordée par l'institution vietnamienne à la relation entre fraction et décimal *via* la division euclidienne (cf. Chapitre B2).
L'enseignant propose d'effectuer la division euclidienne à la main.

P : - Pour assurer notre comparaison, je vous propose d'effectuer à la main la division de numérateur à dénominateur des fractions $\frac{29999}{100001}$ et $\frac{30001}{99999}$.

- On n'a pas de temps de faire les deux. On ne vérifie qu'un cas, par exemple $\frac{30001}{99999}$. J'attends quelques minutes.

L'élève 13 est le plus rapide.

	30001 300010 299997 130000 99999 300010 299997 130000 Conclusion : $0{,}300013 < \frac{30001}{99999}$	99999 0,3000130001 **13**

En accord avec notre analyse institutionnelle (cf. Chapitre B2), cet élève ne prend pas en compte la répétition du reste. En s'appuyant sur l'inégalité « $0{,}300013 < \frac{30001}{99999}$ » écrite précédemment, il effectue la division jusqu'à obtenir un quotient décimal qui soit supérieur à 0,300013.

Les informations apportées par la réponse de l'élève 16 (reste dans la division euclidienne et suite de chiffres du quotient décimal) permettent à l'enseignant d'institutionnaliser la répétition du reste comme la *technologie* de la périodicité du quotient décimal dans le cas d'un rationnel ayant une écriture fractionnaire.

Dans la division euclidienne de deux entiers (générateurs de l'écriture décimale d'un rationnel) une succession de chiffres répétée 3 ou 4 fois est la période. (Hypothèse H.1.2 du chapitre B1)

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : Pourquoi arrêtes – tu la division ? E13 : Car il est supérieur à 0,300013. P : Mais, si on continue la division, que se passe –il ? Es et E13 : 30001 se répète. - Un nombre décimal périodique. P : - Pourquoi ? [*l'élève ne répond pas*] - Pourquoi le chiffre 0 se répète trois fois, mais il ne se répète pas indéfiniment ? (*il montre …*) E13 : Car il y a encore quelque chose à diviser. P : Lequel ? E13 : 13 et 130 et 1300 et 13000 P : Après ta dernière division, le reste est combien ? E13 : c'est 30001. (*L'enseignant complète : en grisé*) P : Si on continue encore une division … Es et E13 : On obtient 3, car c'est pareil que le précédent. P : Ce qui veut dire ? Es : On revient à la division de 30001 par 99999. P : C'est-à-dire, le reste 30001 dans la division assure la périodicité du quotient, n'est-ce pas ? Es : Oui.	**13** 30001 | 99999 300010 0,30001300013 299997 130000 99999 300010 299997 130000 30001 Conclusion : $0{,}300013 < \frac{30001}{99999}$

II. Phase 2 – Symétrisation de l'intervalle de proximité de 0,3 : Métrique de la notion de limite

Indépendamment des réponses des stratégies prévues dans l'analyse *a priori*, on trouve des réponses par calcul des distances $d_a = 0{,}3 - a$ et $d_b = b - 0{,}3$ *suivi de la réponse* « d_a & d_b ». Nous ajoutons donc cette réponse dans la catégorie « difficulté du raisonnement par condition suffisante.

Raisonnement par condition suffisante				Difficultés du raisonnement par condition suffisante					
$d \leq \min\{d_a, d_b\}$				$1{,}3.10^{-5}$	$d \geq \max\{d_a, d_b\}$		d_a & d_b	Rien	Total
d_a	10^{-n} (n =5 ou 6)	$\frac{10^{-5}}{1+10^{-5}}$	Inégalité $d \leq d_a$		10^{-4}	d_b			
12	4	1		5	1	1			
17			3	7			8		
20				15				3	38

Tableau 9. Distances d pour la symétrisation de l'intervalle pointé $[a\,;\,b]\backslash\{0{,}3\}$ « tous les x … »

a. Raisonnement par condition suffisante

Plus de la moitié des élèves (20 sur 38) ont calculé une distance d inférieure à min $\{d_a, d_b\}$ à partir de l'intervalle pointé [a ; b]\{0,3} de « tous les x … ».

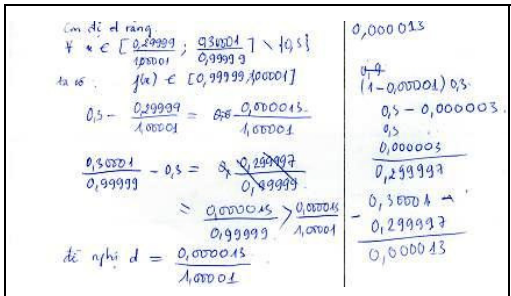
Prédominance du choix de d_a

Parmi ces 20 réponses, une majorité (12) choisissent la distance $d_a = a - 0{,}3 = \frac{1{,}3}{100001}$ (ou $\frac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$). Cela s'explique par deux raisons.

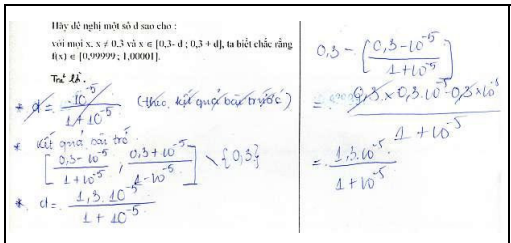
- L'intervalle pointé $[0{,}3 - d_a\,;\ 0{,}3 + d_a]\backslash\{0{,}3\}$ en étant le plus grand intervalle *symétrique* de proximité de 0,3 tel qu'« on soit sûr que $f(x) \in [0{,}99999\,;\ 1{,}00001]$ » fait perdre « le moins » d'information.
- Le choix de d_a est la condition suffisante la plus économique du point de vue des calculs effectués à partir de l'intervalle pointé $[a\,;\ b]\backslash\{0{,}3\}$.

Pour le choix de d_a :

- 7 élèves s'appuient sur le calcul de d_a et d_b et leur comparaison dans **Q**. Voici l'exemple de l'élève codé 28.

	On a démontré que $\forall$ x $\in$ $[\frac{2{,}9999}{1{,}00001}\ ;\ \frac{3{,}0001}{9{,}9999}]\backslash\{0{,}3\}$ On a : $f(x) \in [0{,}99999\ ;\ 1{,}00001]$ $0{,}3 - \frac{2{,}9999}{1{,}00001} = \frac{0{,}000013}{1{,}00001}$ $\frac{3{,}0001}{9{,}9999} - 0{,}3 = \cancel{[\ldots]}\ \frac{0{,}000013}{0{,}99999} > \frac{0{,}000013}{1{,}00001}$ Je propose d = $\frac{0{,}000013}{1{,}00001}$ (Elève 28)	[*calcul les distances à la main*]

- 5 élèves calculent seulement d_a, sans calculer d_b. Voici l'exemple de l'élève 30.

	[…] **Réponse.** ∗ ~~d = $\frac{10^{-5}}{1+10^{-5}}$ (d'après…la question précédente)~~ ∗ Résultat de la question précédente : $[\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}}\ ;\ \frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}}]\backslash\{0{,}3\}$ ∗ d = $\frac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$ (Elève 30)	$0{,}3 - (\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}})$ = […] = $\frac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$

Pour lui, d_a est plus petite que d_b par lecture de l'ordre sur l'axe numérique dessiné au tableau.

P : Pourquoi choisis – tu la différence $0{,}3 - (\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}})$?

E30 : Car 0,299987 est avant $\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}}$ et 0,300013 est avant $\frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}}$. Or la valeur absolue de 0,3 - 0,299987 (*il manipule la calculatrice*) est égale $1{,}3.10^{-5}$ égal à la deuxième valeur absolue. C'est-à-dire que la première borne est la plus proche de 0,3.
L'enseignant complète l'axe numérique.

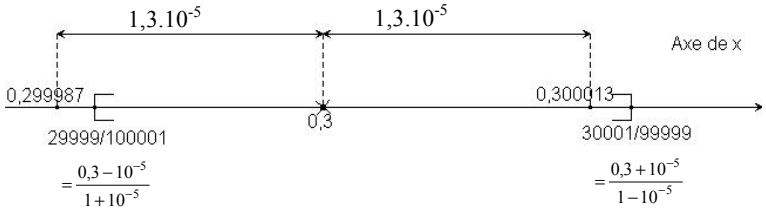


Figure 8. Ordre déduit de l'axe des réels

Autres choix : $d < d_a$

- Dans l'extrait précédent, l'élève (codé 30) a tenté de choisir la distance $d = \frac{10^{-5}}{1+10^{-5}}$ (cf. partie raturée de sa réponse).

L'élève codé 11 choisit aussi cette distance comme une condition suffisante.

$f(x) \in [0,99999 ; 1,00001]$ $\Leftrightarrow x \in [\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} ; \frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}}]\backslash\{0,3\}$ • $\frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} = \frac{0,3}{1+10^{-5}} - \frac{10^{-5}}{1+10^{-5}} \leq 0,3 - \frac{10^{-5}}{1+10^{-5}}$ $\Rightarrow$ Nombre d proposé $d = \frac{10^{-5}}{1+10^{-5}}$ (Elève 11)	

Sachant que la distance d_a est la plus petite que la distance d_b (a plus proche de 0,3 que b), cet élève utilise une *majoration* dans **Q** pour s'assurer que $0,3 - d$ est dans l'intervalle $[a ; 0,3[$.

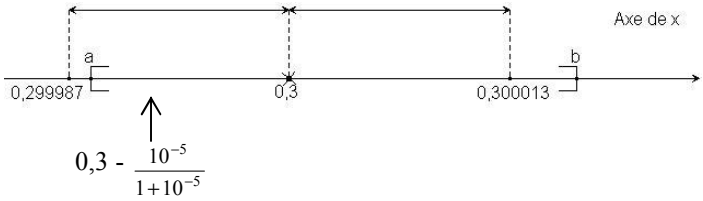


Figure 9. Représentation d'une *majoration* dans Q sur l'axe des réels

- 4 réponses donnent $d = 10^{-n}$, avec $n = 5$ pour 3 élèves et $n = 6$ pour 1 élève.

• Donnons l'exemple de l'élève codé 04 pour $d = 10^{-5}$: il utilise la même technique de majoration que l'élève 11.

	[...] **Réponse.** $f(x) = \frac{2(x+0,35)}{x+1}$ $(x \neq 0,3)$ $f(x) \in [0,99999 ; 1,00001]$ $\begin{cases} x \neq 0,3 \\ \frac{0,3-10^{-5}}{1+10^{-5}} \leq x \leq \frac{0,3+10^{-5}}{1-10^{-5}} \end{cases}$ $d = 10^{-5}$ (Elève 04)	**Brouillon** $0,3 - 0,29999 = 10^{-5}$ $\begin{cases} 0,3-10^{-5} \\ 0,3+10^{-5} \end{cases}$ $0.3\text{-}10^{-5}$ 0,3 $0,3 +10^{-5}$

• Les 3 autres cas (2 pour $n = 5$ et 1 pour $n = 6$) donnent le nombre d sans calcul ni explication écrite.

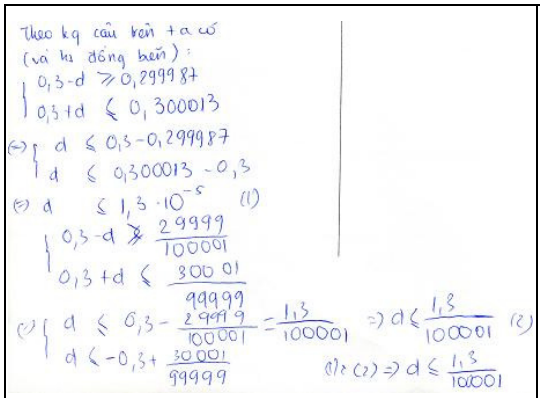
Dans la synthèse des réponses qui suit le relevé des réponses à cette question, l'enseignant interroge un de ces élèves.

P : Pourquoi choisis-tu $d = 10^{-5}$?
E08 : Car $f(0,3 - 10^{-5})$ et $f(0,3 + 10^{-5})$ appartiennent à [0,99999 ; 1,00001]. L'intervalle $[0,3 - 10^{-5} ; 0,3 + 10^{-5}]$ est donc inclus dans l'intervalle $[\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}]$.
P : Comment sais-tu ça ?
E08 : D'après la calculatrice.

L'élève 08 utilise donc la calculatrice pour vérifier sa conjecture (il suffit de choisir $d = 10^{-5}$). La croissance théorique de la fonction f lui permet de conclure que « $[0{,}3 - 10^{-5}\,;\, 0{,}3 + 10^{-5}]$ est donc inclus dans l'intervalle $[\frac{29999}{100001}\,;\,\frac{30001}{99999}]$ ».

Réponses par une inégalité

3 élèves ne donnent pas de nombre d mais la condition suffisante $d \leq d_a$. Voici l'exemple de l'élève codé 26.

	D'après le résultat de la question précédente, on a (la fonction f est croissante) $\begin{cases} 0{,}3 - d \geq 0{,}299987 \\ 0{,}3 + d \leq 0{,}300013 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ […] $\Leftrightarrow$ $d \leq 1{,}3.10^{-5}$ (1) $\begin{cases} 0{,}3 - d \geq \frac{29999}{100001} \\ 0{,}3 + d \leq \frac{30001}{99999} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} d \geq 0{,}3 - \frac{29999}{100001} = \frac{1{,}3}{100001} \\ d \leq -0{,}3 + \frac{30001}{99999} \end{cases} \Rightarrow d \leq \frac{1{,}3}{100001}$ (2) (1) et (2) $\Rightarrow d \leq \frac{1{,}3}{100001}$ (Elève 26)

Le traitement de la condition (1) « $\begin{cases} 0{,}3 - d \geq 0{,}299987 \\ 0{,}3 + d \leq 0{,}300013 \end{cases}$ » montre que cet élève n'a pas repéré la symétrie des bornes décimales avant le calcul de leurs distances à 0,3. Il ne calcule pas la distance d_b « $- 0{,}3 + \frac{30001}{99999}$ » : il sait que la distance d_b est supérieure à la distance de 0,300013 à 1 par lecture de l'axe numérique (au tableau).

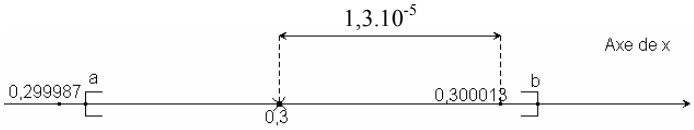


Figure 10. Ordre déduit de l'axe des réels

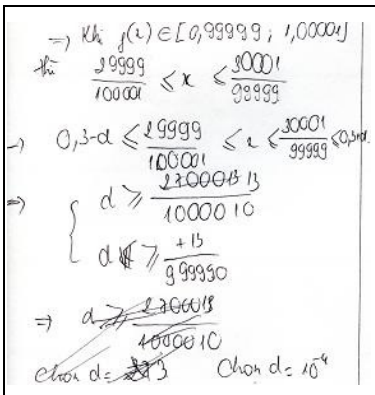
b. Difficulté du raisonnement par condition suffisante

18 élèves (sur 38) soit ne répondent pas (3), soit donnent la réponse « d_a *et* d_b » (8), soit donnent un intervalle symétrique contenant l'intervalle pointé $[a\,;\,b]\backslash\{0{,}3\}$ (7). Ce sont pour nous des observables de la difficulté du raisonnement par condition suffisante.

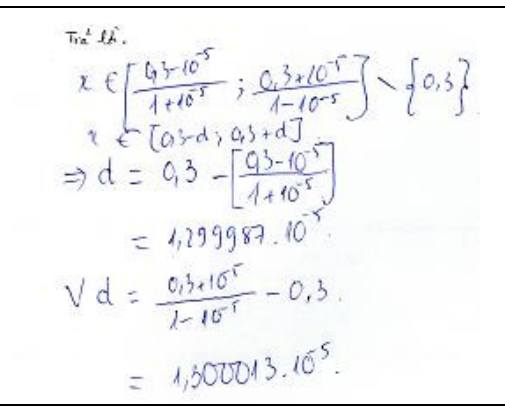
Refus de perte d'information

15 élèves répondent en tentant de conserver « tous les x tels que $f(x) \in [0{,}99999\,;\,1{,}00001]$ », ce qui pour 8 d'entre eux se traduit par un refus de choisir entre d_a et d_b.

• L'extrait d'une réponse par 10^{-4} de l'élève codé 12 montre la construction d'un intervalle symétrique contenant l'intervalle pointé $[a\,;\,b]\backslash\{0{,}3\}$ afin de ne perdre aucun des x tels que $f(x) \in [0{,}99999\,;\,1{,}00001]$.

	$\Rightarrow f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$ alors $\frac{29999}{100001} \leq x \leq \frac{30001}{99999}$ $\Rightarrow 0{,}3 - d \leq \frac{29999}{100001} \leq x \leq \frac{30001}{99999} \leq 0{,}3 + d$ $\Rightarrow \begin{cases} d \geq \frac{\cancel{2700013}\ 13}{1000010} \\ d \geq \frac{13}{999990} \end{cases}$ $\Rightarrow$ ~~[...]~~ ~~[...]~~ choisir $d = 10^{-4}$ (Elève 12)

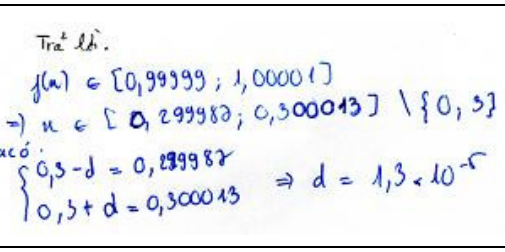
• 4 des 8 élèves que nous avons classés dans « d_a & d_b » décimalisent les distances d_a et d_b par la calculatrice et s'arrêtent là. Les autres donnent la réponse sans explication.

	**Réponse.** $x \in [\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}} ; \frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}}] \backslash \{0{,}3\}$ $x \in [0{,}3 - d ; 0{,}3 + d]$ $\Rightarrow d = 0{,}3 - \frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}}$ $= 1{,}299987.10^{-5}$ $\vee\ d = \frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}} - 0{,}3$ $= 1{,}300013.10^{-5}$ (Elève 18)

L'élève 18 calcule « $1{,}299987.10^{-5}$ » pour d_a «$1{,}300013.10^{-5}$ » pour et d_b : il sait donc que $d_b > d_a$. Pourtant, il refuse de choisir d_a ! Derrière cette indécision se cache un conflit : l'intervalle pointé $[0{,}3 - d_a ; 0{,}3 + d_a]\backslash\{0{,}3\}$ ne contient pas tous les x de $[a ; b]\backslash\{0{,}3\}$ et l'intervalle $[0{,}3 - d_b ; 0{,}3 + d_b]\backslash\{0{,}3\}$ contient des x tels que $f(x)$ est hors du domaine de proximité de 1.

• 5 élèves (sur 38) proposent l'intervalle pointé symétrique $[0{,}299987 ; 0{,}300013] \backslash\{0{,}3\}$ malgré son invalidation publique lors de la synthèse précédente.

Ci-après l'exemple de l'élève codé 20.

	**Réponse.** $f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$ $\Rightarrow x \in [0{,}299987 ; 0{,}300013] \backslash\{0{,}3\}$ On a : $\begin{cases} 0{,}3 - d = 0{,}299987 \\ 0{,}3 + d = 0{,}300013 \end{cases} \Rightarrow d = 1{,}3.10^{-5}$ (Elève 20)

Les 5 élèves argumentent par écrit (comme l'élève 20) par l'implication vraie « $f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001] \Rightarrow x \in [0{,}299987 ; 0{,}300013] \backslash\{0{,}3\}$ », c'est-à-dire par une relation logique inverse de celle qui est demandée « $x \in [0{,}3\text{-}d ; 0{,}3\text{+}d]\backslash\{0{,}3\} \Rightarrow f(x) \in [0{,}99999 ; 1{,}00001]$ ».

c. Institutionnalisation du raisonnement par condition suffisante

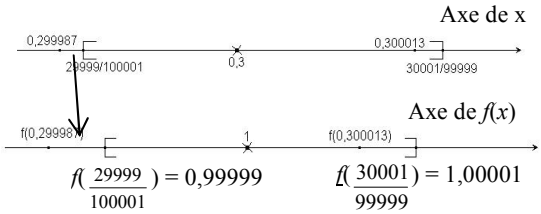
La réfutation des choix $d > min\ \{d_a ; d_b\}$ et la validation des choix $d \leq min\ \{d_a, d_b\}$ visent à institutionnaliser le raisonnement par condition suffisante.

Le nombre d proposé étant inférieur ou égale à d_a (la plus petit entre d_a et d_b), l'intervalle $[0{,}3- d\ ;\ 0{,}3 + d]$ est inclus dans $[a\ ;\ b]\backslash\{0{,}3\}$, l'intervalle « tous les x… ».

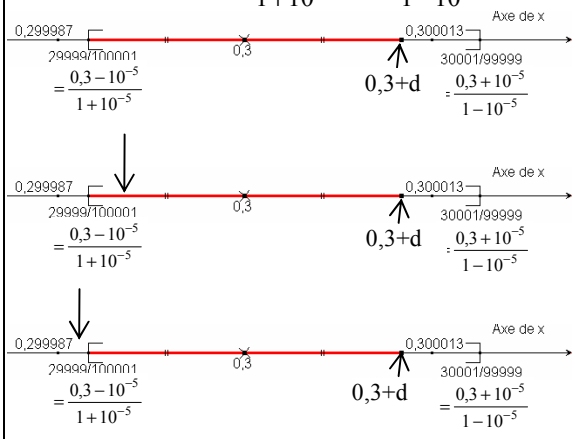
Il suffit donc de choisir ce nombre d tel que pour tout x, $x \neq 0{,}3$ et $x \in [0{,}3- d\ ;\ 0{,}3 + d]$, on soit sûr que $f(x) \in [0{,}99999\ ;\ 1{,}00001]$.

L'enseignant commence par réfuter les choix $d > \min\{d_a\ ;\ d_b\}$

- Le rejet de l'intervalle pointé $[0{,}299987\ ;\ 0{,}300013]\backslash\{0{,}3\}$ (ou du choix $d = 1{,}3.10^{-5}$) reprend les arguments avancés lors de la synthèse précédente, à savoir le recours à la représentation sur l'axe numérique de l'intervalle.

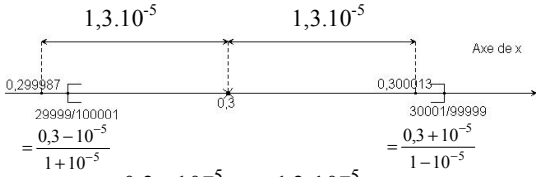
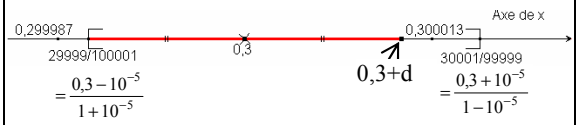
Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : L'élève 20 propose $d = 1{,}3.10^{-5}$. *Il écrit au tableau ce nombre* - L'élève 20 ! Où est ton intervalle $[0{,}3 - 1{,}3.10^{-5}\ ;\ 0{,}3 +1{,}3.10^{-5})$ sur l'axe numérique ? (*Il montre l'axe de x*) *E20 ne répond pas* Es : (*sourire*) c'est l'intervalle à bornes 0,299987 et 0,300013 exclu à la question précédente. P : Tu es d'accord ? (*Il demande l'élève 20*). E20 : Oui. P : Pourquoi est-il exclu ? E20 : Car x dans l'intervalle $[0{,}299987\ ;\ \frac{29999}{100001}]$, $f(x)$ est extérieur à l'intervalle $[0{,}99999\ ;\ 1{,}00001]$. P : (*il demande à la classe*) vous êtes d'accord ? Es : Oui. P : Dans ce cas, f(x) est où ? Es : Dans l'intervalle à bornes $f(0{,}299978)$ et 0,99999. *L'enseignant complète par une flèche entre les deux axes.* P : Alors, choisit-on la distance $d = 1{,}3.10^{-5}$? Es : Non. Il faut la rejeter. *L'enseignant barre la distance $1{,}3.10^{-5}$*	(*ce qui reste depuis de la synthèse précédente*) [*les intervalles pointé de 0,3*] […] ∗ la fonction f est croissante dans chaque intervalle du domaine de définition.  ~~$d = 1{,}3.10^{-5}$~~

- La validation du choix d_a basée sur l'ordre induit de l'axe numérique permet de rejeter le choix de d_b.

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
Après avoir validé le choix d_a et représenté $0{,}3 + d_a$ sur l'axe de x P : Certains camarades proposent aussi $d = \frac{30001}{99999}$ - 0,3. Est-ce que c'est possible ? Es : Non. Car il existe des x extérieurs à l'intervalle $[\frac{29999}{100001}\ ;\ \frac{30001}{99999}]$. P : Lesquelles ? Es : A gauche. Ps : Ici ? (*Il trace une flèche*) Es : Non Ps : Ici ? (*Il trace une flèche)* Es : Oui P : Pourquoi ? Es : Car le point symétrique de $\frac{30001}{99999}$ est avant de 0,299987	$d = 0{,}3 - (\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}}) = \frac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$ 

Puis l'enseignant conclut sur les choix $d \leq min\ \{d_a, d_b\}$

Après avoir validé le choix d_a et rejeté le choix d_b (présenté plus haut), l'enseignant s'appuie sur la comparaison des distances à 0,3 (basée toujours sur l'ordre induit de l'axe numérique) pour formuler un domaine des valeurs positives possibles $d \leq d_a$ pour le raisonnement par condition suffisante.

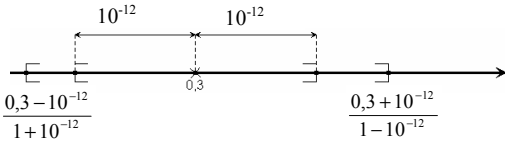
Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
L'enseignant présente la réponse de l'élève 30 à l'aide de la tablette de rétro-projection P : Pourquoi choisis – tu la différence $0{,}3 - (\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}})$? E30 : Car 0,299987 est avant $\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}}$ et 0,300013 est avant $\frac{0{,}3+10^{-5}}{1-10^{-5}}$. Or, la valeur absolue de 0,3 - 0,299987 (*il manipule la calculatrice*) est $1{,}3.10^{-5}$. Elle est égale à la deuxième valeur absolue. C'est-à-dire que la première borne est la plus proche de 0,3. *L'enseignant complète l'axe numérique et demande à la classe.* P : Vous êtes d'accord ? Es : Oui. *L'enseignant recopie d_a de l'élève 30 au tableau.* P : Où met-on le point 0,3 + *d* ? Es : Le symétrique de $\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}}$ par rapport à 0,3. P : Entre 0,300013 et $\frac{30001}{99999}$ **?** Es : Non. Avant. *L'enseignant complète l'axe numérique* […] (*Paragraphe de réfutation du choix d_b*) P : Quelle distance *d* peut – on choisir ? Es : Il faut que *d* soit inférieure à la distance entre $\frac{29999}{100001}$ à 0,3. P : Ou égale ? Es : Oui. *L'enseignant conclut au tableau…* P : Un élève propose $d = \frac{10^{-5}}{1-10^{-5}}$. Est-ce que c'est possible ? Es : Oui. P : Pourquoi ? Es : Car $\frac{10^{-5}}{1-10^{-5}} < \frac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$. P : L'élève 08 en utilisant la calculatrice propose $d = 10^{-5}$. Est-ce que c'est possible ? Es : Oui. Car $10^{-5} < \frac{10^{-5}}{1-10^{-5}} < \frac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$.	(*ce qui reste depuis de la synthèse précédente*) [*les intervalles pointé de 0,3*] […]  $d = 0{,}3 - (\frac{0{,}3-10^{-5}}{1+10^{-5}}) = \frac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$  […] tel que pour tout *x*, $x \neq 0{,}3$ et $x \in [0{,}3- d\ ;\ 0{,}3 + d]$, on soit sûr que $f(x) \in [0{,}99999\ ;\ 1{,}00001]$ $\Rightarrow$ Il suffit de choisir un nombre positif d $\leq \frac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$ - On peut choisir $d = \frac{1{,}3.10^{-5}}{1-10^{-5}}$ - On peut choisir $d = \frac{10^{-5}}{1-10^{-5}}$ - On peut choisir $d = 10^{-5}$

La validation des choix $\frac{10^{-5}}{1-10^{-5}}$ et $\frac{10^{-5}}{1-10^{-5}}$ s'effectue par la comparaison avec la distance d_a (basée sur l'ordre dans **Q**).

La validation du choix de 10^{-5} comme une condition suffisante s'appuie implicitement sur une formalisation de la notion de limite par la distance 10^{-n} en lui donnant le sens de l'approximation à 10^{-n} près.

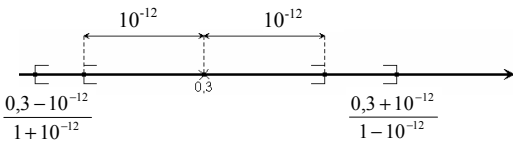
III. Phase 3. Renforcement du raisonnement par condition suffisante et enclenchement d'un processus avec l'idée implicite que c'est possible quelle que soit la distance de *f*(*x*) à 1

Sous la contrainte du temps, l'enseignant décide de ne pas poser individuellement la question 7, mais de la traiter collectivement. La réponse publique qui vient la première est la distance $d = 10^{-12}$. Les élèves reconnaissent donc le lien entre la distance à 1 dans $]0,\underbrace{9...9}_{n}\ ;\ 1,\underbrace{0...01}_{n}[$, et le choix de la distance 10^{-n} comme une condition suffisante : « $\forall\ x \in [0{,}3-10^{-n}\ ;\ 0{,}3+10^{-n}]\backslash\{0{,}3\} \Rightarrow f(x) \in\ ]0,\underbrace{9...9}_{n}\ ;\ 1,\underbrace{0...01}_{n}[$».

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
P : Je vous pose maintenant la question … (*il écrit la question 7 au tableau*) Es : $d = 10^{-12}$. […] *L'enseignant conclut au tableau et trace un axe numérique* P : Peut – on choisir $d = 10^{-13}$ ou $d = 10^{-14}$ ou $d = 10^{-200}$ Es : Oui. P : Où sont les bornes des intervalles avec ces distances ? Es : Elles sont de plus en plus proches de 0,3. P : Même question pour que $f(x) \in\ ]1-10^{-n}\ ;1+10^{-n}[$? Es : Il suffit de choisir $d = 10^{-n}$.	Proposez un nombre d tel que : pour tout x, $x \neq 0{,}3$ et $x \in [0{,}3 - d\ ;\ 0{,}3 + d]$, on soit sûr que $f(x) \in\ ]0,\underbrace{9...9}_{12}\ ;\ 1,\underbrace{0...01}_{12}[$. […] Il suffit de choisir $d = 10^{-12}$ tel que : $\forall x \in [0{,}3 - 10^{-12};0{,}3+10^{-12}]\backslash\{0{,}3\} \Rightarrow f(x) \in\ ]0,\underbrace{9...9}_{12}\ ;\ 1,\underbrace{0...01}_{12}[$. 

Le choix $n = 12$ met les calculs hors du champ de la calculatrice. La réponse $d = 10^{-12}$ provient donc d'un calcul algébrique et de majorations / minorations se justifiant théoriquement par la croissance de la fonction *f*. Comme le montre l'extrait de la chronique ci-après, l'enseignant conduit la classe à ce choix et à ces justifications par une maïeutique qui laisse peu de place à la responsabilité des élèves.

Echanges verbaux	Ce que l'enseignant écrit au tableau
[…] P : Peut – on utiliser la calculatrice pour calculer $f(0{,}3\text{-}10^{12})$ et $f(0{,}3 + 10^{-12})$ comme l'élève 08 ? Es : Non P : Pourquoi ? Es : Car les résultats sont égaux à 1. P : Sont-ils 1 dans réalité ? Es : Non. La calculatrice donne des valeurs approchées. P : Bon, comment faire pour justifier le choix de $d = 10^{-12}$? Es : On calcule comme dans les questions précédentes. P : Ce qui veut dire ? Es : Résoudre les équations $f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{12}$ et $f(x) = 1,\underbrace{0...01}_{12}$	[…]
L'enseignant écrit au tableau … P : Pourrait-on l'écrire à la façon du binôme IV.3 … Es : $f(x) = 1 - 10^{-12}$, $f(x) = 1 + 10^{-12}$…	$f(x) = 0,\underbrace{9...9}_{12}$

P : Déduisez la solution de chacune des équations ! - Regardez le résultat 2 de la question précédente ! Es : $x = \frac{0{,}3-10^{-12}}{1+10^{-12}}$, $x = \frac{0{,}3+10^{-12}}{1-10^{-12}}$. P : l'intervalle est-il $]\frac{0{,}3-10^{-12}}{1+10^{-12}}\ ;\frac{0{,}3+10^{-12}}{1-10^{-12}}[\backslash\{0{,}3\}$? Es : Tous les x tels que $f(x) \in]0{,}\underbrace{9...9}_{12}\ ;\ 0{,}\underbrace{9...9}_{12}[$. P : Comparez entre $\frac{0{,}3-10^{-12}}{1+10^{-12}}$ et $0{,}3 - 10^{-12}$! Es : $\frac{0{,}3-10^{-12}}{1+10^{-12}} < 0{,}3 - 10^{-12}$ P : Comparez entre $\frac{0{,}3+10^{-12}}{1-10^{-12}}$ et $0{,}3 + 10^{-12}$. Es : $0{,}3 + 10^{-12} < \frac{0{,}3+10^{-12}}{1-10^{-12}}$. *L'enseignant conclut au tableau et trace un axe numérique*	$f(x)= 0{,}\underbrace{9...9}_{12} = 1-10^{-12}$ $\Leftrightarrow x = \frac{0{,}3-10^{-12}}{1+10^{-12}}$ $]\frac{0{,}3-10^{-12}}{1+10^{-12}}\ ;\frac{0{,}3+10^{-12}}{1-10^{-12}}[\backslash\{0{,}3\}$: tous les x tels que $f(x) \in]0{,}\underbrace{9...9}_{12}\ ;\ 0{,}\underbrace{9...9}_{12}[$ Il suffit de choisir $d = 10^{-12}$ tel que : $\forall x \in [0{,}3 - 10^{-12};0{,}3+10^{-12}]\backslash\{0{,}3\} \Rightarrow$ $f(x) \in]0{,}\underbrace{9...9}_{12}\ ;\ 1{,}\underbrace{0...01}_{12}[$.  	$f(x)= 1{,}\underbrace{0...01}_{12} = 1+10^{-12}$ $\Leftrightarrow x = \frac{0{,}3+10^{-12}}{1-10^{-12}}$

IV. Question finale

La question finale est la suivante :

> Ecrivez le plus brièvement possible (avec ce que vous avez appris en mathématiques) ce que vous avez découvert sur la fonction *f* pendant les deux séances ?
>
> Réponse : ……...

Nous avons réduit volontairement la place réservée à la réponse à une seule ligne pour recueillir ce que les élèves de la classe observée ont découvert d'*essentiel* sur la fonction *f* lors de l'ingénierie didactique.

Nous regroupons les réponses selon les catégories exprimées.

Notion de limite	22
Ordre dense dans D et D_∞	9 (+7)
EDP9	2
Affichage de la calculatrice	3
Autres	2
Total	38

Tableau 10. Catégories des découvertes essentielles

• Plus de la moitié des élèves de la classe observée dit avoir (re)découvert la notion de limite. Parmi ces 22 réponses :

- 8 élèves n'écrivent que le symbole « $\lim_{x\to 0,3} f(x) = 1$ » ou la phrase « Notion de limite de fonction ».
- 3 élèves déclarent mieux comprendre ou avoir changé de point de vue sur la notion de limite

« Je comprends mieux la notion de limite de fonction ». (2 réponses)

« Cette fonction *f*(*x*) fait changer mon avis à propos de $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$. (1 réponse)

- 2 élèves écrivent le symbole « $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$ » en justifiant l'étude de cette limite par « il n'existe pas de x tel que $f(x) = 1$ ».
- 9 élèves précisent en quoi leur rapport à la notion de limite a changé.

7 associent l'écriture symbolique de la limite à la problématique d'« approximation $f(x)$ » et à l'ordre dense dans **R**, par exemple :

Trả lời : $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$ ... ∀ $f(x)$ rất gần 1 ta luôn tìm được giá trị x tg ứng nhưng không ∃ x / $f(x) = 1$ hoặc gần 1 nhất
Réponse : $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$. ∀ $f(x)$ est très proche de 1, on trouve toujours une valeur respective de x, mais il n'existe pas de x tel que $f(x) = 1$ ou soit le plus proche de 1 [non ∃ x / $f(x) = 1$ …] (Elève 26)

2 élèves seulement écrivent le symbole « $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$ » en lui donnant une signification d'« approximation x », par exemple :

Trả lời : $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$, k° tồn tại giá trị x nào làm cho $f(x) = 1$. cho 1 giá trị $x \in D$ → luôn tìm được $f(x)$. khi $x \to 0,3$; $f(x) \to 1$.
Réponse : $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$, il n'existe pas de x tel que $f(x) = 1$ Prendre une valeur $x \in$ D → on trouve toujours $f(x)$ Quand $x \to 0,3$; $f(x) \to 1$ (Elève 12)

• 16 élèves (sur 38) (dont 7 de la catégorie précédente) disent avoir découvert l'ordre dense dans **D** et $\mathbf{D}_\infty$.

- « Il n'existe pas de nombre le plus proche d'un autre nombre » (5 réponses).
- « Il n'existe pas de couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1 » (4 réponses).

• 2 élèves

- « 0,(9) = 1 » (1 réponse).
- « 2,(9) = 3, je comprends mieux la notion de limite (lim$f$) » (1 réponse).

• L'essentiel pour 3 élèves est que l'affichage de la calculatrice n'est pas toujours exact.

• Les 2 derniers élèves font des commentaires généraux.

- « Il faut prendre en compte le domaine de définition de la fonction f. »
- « Avec une seule fonction simple f, mais il y a beaucoup de connaissances à découvrir ».

Il reste à institutionnaliser la signification topologique de la notion de limite construite dans la situation 4 en relation avec l'écriture de la notion de limite.

Après avoir ramassé les réponses finales, l'enseignant prend position sur la signification qu'il attribue au travail pendant les deux dernières séances.

Bien qu'on aperçoive que plus x s'approche 0,3 plus $f(x)$ s'approche 1. Pourtant, cela ne suffit pas pour conclure que $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$. Car $f(x)$ peut s'arrêter à une valeur très proche de 1, par exemple 0,999….9 (il y a un million de chiffres 9).

L'écriture $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$ signifie que quelque soit un intervalle de bornes aussi proches de 1 que l'on veut, par exemple $[1 - 10^{-n} ; 1 + 10^{-n}]$ avec n très grand, il existe des x, par exemple $x \in [0,3 - 10^{-n} ; 0,3 + 10^{-n}]$, tel que $f(x)$ soit dans l'intervalle des bornes très proches de 1.

Conclusion de la situation 4

L'introduction à la topologie métrique de la notion de limite exige la mise en place d'un raisonnement par condition suffisante. La situation 4 vise à faire vivre ce raisonnement.

En premier lieu est posé implicitement le problème de la recherche d'une condition nécessaire et suffisante, recherche institutionnellement privilégiée dans EMS au Viêt-nam.

Le problème de « Donner tous les x tels que $f(x) \in [0,99999 ; 1,00001]$ » doit s'appuyer sur un savoir qui n'a pas encore été institutionnalisé dans les situations précédentes : « *la fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition* ». Pour les élèves, ce savoir reste une connaissance privée qui peut être de nature pragmatique ou théorique.

Tous les binômes fournissent un intervalle comme condition nécessaire et suffisante pour que $f(x) \in [0,99999 ; 1,00001]$, certains élèves écrivant même : « $x \in [0,299987 ; 0,300013] \backslash \{0,3\} \Leftrightarrow f(x) \in [0,99999 ; 1,00001] \backslash \{1\}$ »

Les affichages de la calculatrice dans le travail algébrique continuent à fournir des informations et des rétroactions lors de la décimalisation d'une fraction ou de la résolution d'une équation du second degré par le programme « EQN-1 degré 2 » (cf. Chapitre C2 : cohabitation entre la calculatrice et le travail algébrique).

Ce calcul instrumenté conduit à un intervalle pointé à bornes décimales $[0,299987 ; 0,300013] \backslash \{0,3\}$ résultant de l'affichage par la calculatrice. Un autre intervalle pointé $[\frac{29999}{100001} ; \frac{30001}{99999}] \backslash \{0,3\}$ est obtenu par la résolution d'équations à la main. Pour tous les élèves, ces deux intervalles pointés sont les mêmes. Cette identification montre que les nombres décimaux (de moins de 10 chiffres) affichés par la calculatrice continuent à être des valeurs exactes pour les élèves.

C'est l'enseignant lui-même qui doit mettre en doute cette identification en proposant la division euclidienne à la main du numérateur et du dénominateur.

La comparaison des deux intervalles pointés permet une reprise des techniques institutionnelles de comparaison des nombres rationnels par l'ordre dans **Q** ou l'ordre dans **D** (chapitre B1) qui fondent des techniques de *majoration* et *minoration* au travers de la production d'*inégalités.*

L'enseignant, pour conclure la comparaison, introduit la représentation des nombres (bornes décimales et fractionnaires) sur un axe graphique. Cette représentation des nombres devient un milieu matériel qui apporte informations et rétroactions pour le problème de la mise en relation entre l'ordre des bornes (décimales et fractionnaires) et l'inclusion des différents intervalles pointé proposés. Rappelons que les *praxéologies* de comparaison basée sur l'ordre induit de l'axe numérique sont complètement absentes dans l'institution vietnamienne (cf. Chapitre B1).

Le passage au raisonnement par condition suffisante est négocié à travers la recherche d'un intervalle pointé symétrique $[0,3 - d\ ;\ 0,3 + d]\backslash\{0,3\}$ qui assure l'appartenance de $f(x)$ au même intervalle pointé que précédemment. L'intervalle pointé ainsi symétrisé devient une boule de voisinage pointée de 0,3 de rayon d.

Les techniques de comparaison des nombres et la notion de distance travaillées précédemment permettent à un peu plus de la moitié des élèves (20 sur 38) de produire une distance $d \leq \min\{d_a, d_b\}$ en utilisant *majoration* et *minoration*.

Cependant, notre ingénierie atteste de la difficulté « à perdre volontairement de l'information » (Viallard 1981) qu'exige le raisonnement par condition suffisante puisque presque la moitié des élèves (18 sur 38) refuse de donner un intervalle pointé inclus dans l'intervalle pointé associé à la condition nécessaire et suffisante.

La formulation de la notion de limite à l'issue de la situation 4 fait intervenir l'approximation à 10^{-n} près de 1 et une approximation à 10^{-n} près de 0,3 déduite algébriquement, par majoration / minoration, des bornes de l'intervalle de « tous le x … ».

La recherche d'une dépendance « significative et manipulable » entre la distance à 1 et une distance suffisante à 0,3 caractérise aussi le raisonnement par condition suffisante.

> […] de **perdre volontairement une information particulièr**e très forte pour en déduire une plus faible mais plus significative et plus manipulable […] (Legrand, 1991)

En effet, cette dépendance assure que l'on peut toujours trouver une approximation de 0,3 qui suffit pour obtenir une approximation à 10^{-n} près de 1, quelque soit n.

Conclusion et perspectives

I. Les principaux résultats de la thèse

I.1. Les notions de nombre réel et de limite : une histoire commune

Les approches épistémologiques dans les travaux de références ainsi que notre enquête épistémologique mettent en évidence une relation dialectique entre la notion de nombre réel et la notion de limite.

Historiquement, les progrès de la notion de limite ont été nécessaires à ceux de la notion de nombre réel, et inversement, les progrès de la notion de limite se nourrissent de ceux de **R**.

La complétude de **R** s'appuie essentiellement sur l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes :

- Toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure
- Toute suite de Cauchy est convergente.
- Toute suite monotone et bornée est convergente.
- Il existe un nombre réel unique appartenant à tous les segments de chaque famille de segments emboîtés.

La relation dialectique entre la notion de nombre réel et la notion de limite se cristallise finalement dans l'unification de la notion de nombre réel et de la notion de limite : un nombre réel est défini par une classe de suites numériques équivalentes entre elles et toutes les suites numériques d'une même classe d'équivalence admettent ce nombre réel comme limite.

I.2. Des organisations mathématiques de référence

Les conclusions des analyses épistémologiques nous amènent à repérer des organisations mathématiques (OM) de référence qui abordent de façon directe ou indirecte les interrelations entre la notion de limite, la notion de nombres et la décimalisation des nombres dans le but de rechercher les traces de la reconstruction de ces interrelations dans EMS (Viêt-nam).

Bosch et al. (2002) proposent deux OM de référence sur la notion de limite : OM_1 *algèbre des limites* et OM_2 *topologie des limites* que les résultats de l'enquête épistémologique permettent de compléter.

- L'*algèbre des limites* évite la problématique de l'infini de la notion de limite et donc les problématiques d'approximation. Elle permet aussi d'associer l'écriture $\lim_{x \to a} f(x)$ à un nombre réel ou à l'infini.

- OM_2 porte sur *l'existence de la limite d'une fonction.* Sa restriction aux *suites numériques* ($OM_{2'}$) relève directement de la relation entre nombre et limite, la démonstration de l'existence de la limite d'une suite numérique s'appuyant sur les critères de complétude de **R**.

- Nous décrivons une troisième organisation mathématique locale de référence (OM_3) autour du *développement décimal d'un nombre réel* (Bourbaki 1960). Dans cette décimalisation des nombres réels, un encadrement décimal $[d_n, d'_n]$ d'un nombre réel x tel que $|d_n' - d_n| = 10^{-n}$ assure que d_n ou d'_n sont des valeurs approchées de x à 10^{-n} près.

I.3. La vie difficile des interrelations limite, nombres et décimalisation dans l'Enseignement Mathématique Secondaire (EMS) au Viêt-nam

A. L'étude des traces des OM de référence dans EMS au Viêt-nam nous permet de mettre en lumière les rapports institutionnels aux interrelations limite, nombres et décimalisation des nombres.

L'étude des nombres décimaux et de l'approximation décimale n'est pas objet d'enseignement dans l'EMS actuel. L'institution lycée ne prend pas en compte la relation entre nombre et limite dans les écritures décimales alors que l'ensemble des écritures décimales (ED) représente théoriquement l'ensemble des nombres réels depuis le collège. Le travail sur les nombres décimaux ne se réalise qu'à l'école primaire sur des nombres décimaux positifs ayant au maximum 3 chiffres après la virgule. L'ordre dense (non discret) dans **D** n'est donc étudié à aucun niveau de l'EMS du Viêt-Nam.

Dans la relation entre nombre et limite, la prédominance des traces de OM_1 « algèbre des limites » résulte du rapport institutionnel à l'ostensif « $\lim_{x \to a} f(x)$ » ou « $\lim u_n$ » : il faut opérer algébriquement pour associer cet ostensif à un nombre ou à l'infini.

Le rapport institutionnel à la notion de limite relevant exclusivement d'une problématique algébrique exclut toute problématique d'approximation et donc la topologie de **R** associée.

Cependant, les traces infimes et isolées de OM_2, « existence de la limite d'une suite numérique », au travers des critères de convergence par la définition (ε, N) et la propriété « monotone bornée » pourrait faire vivre une problématique d'approximation de la limite.

Les traces de OM_3 « développement décimal d'un nombre réel » sont présentes seulement au Collège et presque exclusivement pour les rationnels. La technique institutionnelle (division euclidienne généralisée) pour décimaliser une fraction à 10^{-n} près n'est jamais justifiée par une technologie liée à la relation « nombre réel - écriture décimale du nombre réel – valeur décimale approchée du nombre réel » : cette décimalisation ne conduit jamais à un encadrement d'une fraction par un couple décimal (d_n, d_n'), la distance entre les deux nombres décimaux étant inférieur à 10^{-n}.

B. L'utilisation de la calculatrice pour la décimalisation des nombres dans les calculs est préconisée de plus en plus fortement dans EMS. Cet usage ne s'accompagne d'aucun élément technologique (calcul des valeurs décimales approchées d'une fraction ou des racines carrées ou cubiques). Cette absence génère l'existence et le fonctionnement d'une règle implicite de décimalisation que nous avons énoncée comme suit : « Dans le calcul instrumenté par la calculatrice, si le résultat affiché est un décimal de moins de 10 chiffres, alors ce résultat est exact ». Nous avons mis en évidence le fonctionnement de cette règle dans l'ingénierie didactique où, par exemple, dans la décimalisation instrumentée de $\frac{29999}{100001}$ les élèves identifient l'affichage de la calculatrice 0,299987 à cette fraction.

C. Nous avons construit une expérimentation basée sur un questionnaire pour mettre à l'épreuve les conséquences supposées (hypothèses) de cette transposition didactique des interrelations nombre – limite sur la décimalisation au collège (début classe 10[1]), au lycée (classe 12[2]) et dans les institutions de formation des enseignants de collège et de lycée (écoles normales supérieures ENS) à Ho Chi Minh Ville (Sud du Viêt-nam).

[1] Début du lycée, équivalent de la seconde en France.
[2] Fin du lycée, équivalent de la terminale en France.

Notre analyse des résultats montre que le rapport institutionnel à la décimalisation des nombres réels reste inchangé depuis le Collège.

- La structure de l'ensemble des réels, c'est-à-dire dans EMS l'ensemble des écritures décimales, est celle de **N** ou de D_i.

En particulier l'ordre est discret et les opérations sont celles des Di. « 0,999… » est un *nombre, inférieur strictement à 1 et le plus proche de 1* et l'addition dans D_∞ « 1,(4) + 3,(7) = ? » et « 1 – 0,(9) = ? » est celle dans D_i. Une écriture décimale illimitée périodique est ainsi assimilée à un nombre décimal. Dans cette assimilation, l'écriture *infini –fini* « *n*,(*p*)*m* » (par exemple : 5,(2)1), indice de l'obstacle de l'infini, est prépondérante après enseignement des notions de suite et de limite (classe12 et ENS).

- Une écriture décimale illimitée de période 9 est *un nombre irrationnel*. Pour tous les sujets observés, la définition institutionnelle (Collège) de la notion de nombre irrationnel comme écriture décimale illimité non périodique est *vide de sens*.

- La division euclidienne généralisée de deux entiers n'est jamais l'occasion d'une rencontre avec une problématique de l'approximation d'un rationnel : la périodicité est déduite de la répétition de la même suite de nombres 2, 3 ou 4 fois dans le quotient décimal approché. Les propriétés des restes successifs de la division ne sont jamais prises en compte pour justifier cette technique.

Le fait que ce rapport aux écritures décimales soit aussi celui des futurs enseignants pose le problème de la formation dans les ENS. En effet, dans celles-ci, les enseignements de structures topologiques générales ou d'arithmétique, ne donnent pas d'outil ni pour l'ordre ni pour les opérations sur les EDI ni pour la décimalisation d'un rationnel qui restent déconnectés de **R**. Ce problème de formation s'avère d'autant plus crucial que la noosphère vietnamienne préconise l'introduction d'un nouveau dispositif « activités » qui, dans l'enseignement de l'analyse au Lycée, est mis en relation avec la décimalisation des nombres (*via* l'« expérimentation numérique »).

I.4. Conception, réalisation et analyse d'une ingénierie didactique

Le fil conducteur de notre ingénierie didactique est la construction simultanée d'une problématique d'approximation de la notion de limite et de l'ordre dense (non discret) dans **D** et D_∞ en approchant un réel par intercalation successive dans des intervalles emboîtés $[d_n, d'_n]$ à bornes décimales. Le passage de l'ordre discret dans **N** à l'ordre dense dans D_∞ fonde aussi le passage d'une problématique d'« approximation x » à celle d'« approximation $f(x)$ ».

Les situations didactiques de l'ingénierie sont donc générées par les variables d'un problème fondamental de l'approximation décimale lié à la notion de limite dont notre analyse institutionnelle a montré l'absence dans EMS. Les objets algébriques institutionnellement familiers comme équation, inéquation, expression algébrique et domaine de définition d'une fonction nourrissent le milieu de ces situations. La présence de la calculatrice favorise la décimalisation des résultats des calculs.

A. Distance, un premier critère de déstabilisation de l'ordre discret

Le jeu « A la recherche de meilleur couple (x ; $f(x)$) » tel que f(x) soit le plus proche possible de la valeur interdite 1 ($f(x) = 1$ n'a pas de solution) est la situation centrale de notre ingénierie (situation 3) : 1 est aussi de façon cachée la limite de f quand x tend vers 0,3.

Les procédures des élèves de la classe 12 où a eu lieu l'expérimentation montrent la prédominance de l'ordre discret dans **R** : pour une très grande majorité ce meilleur couple existe. Dans **R** un nombre a un prédécesseur et un successeur.

Mais ce jeu rend opératoire pour tous les élèves le concept de distance dans **R** comme critère de décision du meilleur couple : ce critère permet une première déstabilisation de l'ordre discret en mettant en évidence l'existence de couples ($x, f(x)$) tels que la distance de $f(x)$ à 1 puisse devenir aussi petite que l'on veut.

B. Le rôle central du milieu pour le passage à l'ordre dense (non discret) dans ***D*** et $\boldsymbol{D_\infty}$ *et à l'approximation f(x) de la limite*

Le milieu algébrique lié aux objets algébriques cités auparavant (équation, …) a été enrichi des éléments d'un milieu « calculatrice » liés à l'affichage des calculs à l'écran de la calculatrice officielle, CASIO fx-570MS, présente tout au long de l'ingénierie didactique.

Tous les élèves de la classe observée ont acquis aisément les connaissances instrumentales que nous leur avons enseignées (situation 1) : mémoires mathématiques (Nguyen 2005), édition et rectification d'une expression (touches Copy et Insert). Ce sont ces connaissances qui ont permis l'organisation d'un milieu « calculatrice » dans notre ingénierie.

Par exemple dans le jeu « A la recherche de meilleur couple (x ; $f(x)$) », les principaux éléments du milieu dans le calcul instrumenté de $f(x)$ pour des valeurs approchées de 0,3 sont les suivants :

- affichage de 1 pour des valeurs décimales approchées de 0,3 à 10^{-6} près (par exemple)
- interdit de la valeur 1 pour $f(x)$
- recopie de l'affichage de la succession de valeurs
- affichage stable de valeurs pour le calcul $f(x)$.

La stratégie d'approximation x qui consiste à intercaler systématiquement 0,3 dans de petits intervalles par passages successifs d'un D_i à un D_{i+k} pour la recherche d'un couple (x ; $f(x)$) tel que la distance de $f(x)$ à 1 soit le plus petite possible est donc déstabilisée. Les rétroactions du milieu conduisent les élèves à disqualifier le calcul instrumenté en faveur d'un calcul à la main privilégiant l'approximation $f(x)$ de la limite 1 : ce calcul à la main repose sur la résolution d'équations $f(x) = a$ pour calculer des valeurs approchées de 0,3 suffisantes pour approcher 1 « avec une précision donnée à l'avance » (problème 2 de l'approximation).

L'institutionnalisation d'une problématique d' « approximation $f(x)$ » et de l'identification analytique du type « 0,999… = 1 » (statut de limite d'une suite convergente) permet le rejet officiel de l'ordre discret de **N** pour **D** et D_∞ : il n'existe ni premier ni dernier élément pour une partie non fermée de **D**.

La plupart des élèves de la classe observée disentt avoir (re)découvert la notion de limite et associent l'écriture symbolique de la limite à la problématique d'« approximation $f(x)$ » et à l'ordre dense dans **R**.

> $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$. $\forall$ $f(x)$ est très proche de 1, on trouve toujours une valeur respective de x, mais il n'existe pas de x tel que $f(x) = 1$ ou soit le plus proche de 1. (Elève 26)

C. Topologie métrique de la notion de limite et raisonnement par condition suffisante

L'introduction à la topologie métrique de la notion de limite se fait à la fin de l'ingénierie (situation 4) : elle exige de renoncer au raisonnement par équivalence pour un raisonnement par condition suffisante.

La recherche d'une boule de centre 0,3 telle que $f(x)$ appartienne à une boule de centre 1 et de rayon 10^{-n} fonde le problème posé aux élèves. Ce problème a permis à la majorité des élèves de mettre en place des techniques de *majoration* et de *minoration* pour comparer les boules proposées et calculer les distances à 1 (rayon de la boule).

Le milieu a été enrichi de la représentation des nombres (bornes décimales et fractionnaires) sur un axe graphique (droite graduée). Les interactions élève - milieu ont fait apparaître des techniques de majoration et de minoration basées sur l'ordre des bornes (décimales et fractionnaires) induit par l'axe des réels.

Les élèves ont donc appris à « perdre volontairement une information particulière très forte pour en déduire une plus faible mais plus significative et plus manipulable » (Legrand, 1991).

En effet, accepter de « perdre volontairement une information particulière » permet de trouver une relation simple « plus manipulable » entre une approximation donnée de 1 pour $f(x)$ et une approximation de 0,3 pour x. Cette relation n'est d'autre que la formulation de la notion de limite : on peut toujours trouver une approximation de 0,3 suffisante pour obtenir une approximation à 10^{-n} près de 1, quelque soit n.

II. Limites de notre recherches et perspectives

A. *Problématique d' « approximation x » obstacle épistémologique à l'« approximation f(x) » ?*

La prédominance de la problématique d'« approximation x » par rapport à la problématique d'« approximation $f(x)$ » dans la situation significative de la notion de limite (situation 3) nous permet de formuler l'hypothèse que, pour la notion de limite, la problématique d'« approximation x » est candidate à être un obstacle épistémologique à la problématique d'« approximation $f(x)$ ».

Les observables du questionnaire sur les écritures décimales illimitées (EDI) sont autant d'indices du fonctionnement de cet obstacle.

> 42,49898… devient de plus en plus proche de 42,5 (Elève *L2T1-08*)
>
> 42,49898… est le plus proche de 42,5 (Elève *L1S1-35*)

Une étude plus vaste que la nôtre, en particulier de nature épistémologique, serait nécessaire pour mettre à l'épreuve une telle hypothèse.

B. *Notre ingénierie se limite à l'un des possibles pour la fonction f (choix macro didactique), celui d'une fonction monotone prolongeable par continuité.*

Comment élargir notre ingénierie au cas d'une fonction non monotone et/ou non prolongeable par continuité sur un intervalle pointé en une valeur de discontinuité de la fonction ?

Une telle fonction n'appartient plus à l'ensemble des fonctions usuelles dans EMS au Viêt-nam. L'interprétation graphique de la notion de limite (basée sur la représentation graphique des fonctions), absente de notre ingénierie, pourrait trouver là une raison d'être.

C. Rôle du professeur dans les phases d'institutionnalisation de l'ingénierie

L'étude de Margolinas (2004) met en avant le rôle du professeur dans les situations didactiques d'une ingénierie.

> Dans une perspective d'ingénierie issue de la théorie des situations, les situations adidactiques sont en quelque sorte le principe actif des situations didactiques. Le professeur, même s'il dévolue une situation adidactique à l'élève, reste le garant de la relation didactique adéquate. La nécessaire inclusion de la situation adidactique dans une situation didactique provoque donc *a priori* une tension entre les deux processus de dévolution et d'institutionnalisation, et une incertitude importante pour le professeur. (Op. cité, p. 34)

L'analyse des protocoles des phases d'institutionnalisation de notre ingénierie met en évidence la nécessité pour l'enseignant du choix organisé de ses interventions pour que les phases de conclusion engagent un processus de *validation*[3], et pas seulement d'*évaluation*[4].

> Le point central est celui-ci : *le professeur peut toujours conclure en évaluant* […], par contre : *le professeur ne peut laisser l'élève valider sa solution que si le milieu le permet*. Les formes de conclusion sont donc inégales en ce qui concerne le professeur. (Margolinas 2004, p. 43)

Les phases de validation reposent donc sur l'existence d'un milieu adéquat, c'est-à-dire d'un milieu pour la validation.

> […] De ce point de vue, le professeur doit faire confiance à l'interaction élève - milieu pour provoquer les modifications prévues, c'est pourquoi il assume en quelque sorte une position d'observateur de cette interaction. (Op. cité, p. 35)

Notre recherche n'a pas engagé d'analyse fine des modifications du milieu résultant des décisions de l'enseignant au moment des phases d'institutionnalisation, en relation avec les conditions et les contraintes qui pèsent sur le professeur à ce moment là. L'approfondissement de cette direction de recherche pourrait enrichir l'étude de la viabilité et de la reproductibilité de notre ingénierie didactique.

D. *Rappelons que le rapport aux EDI* et plus généralement à la décimalisation des nombres réels reste inchangé depuis le collège, y compris pour les futurs enseignants de collège et de lycée.

Comment faire vivre dans la formation des futurs enseignants le problème des interrelations « limite, nombre et décimalisation » que nous avons voulu poser *via* l'approximation dans notre ingénierie didactique ?

---

[3] Nous dirons que la phase de conclusion est une phase de validation si l'élève y décide lui-même de la validité de son travail. (Margolinas 2004, p. 43)

[4] Nous dirons que la phase de conclusion est une phase d'évaluation quand, dans cette phase, la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous forme d'un jugement sans appel. […] (Ibid., p. 43)

Pour qu'une vie des EDI existe au sein des organisations mathématiques autour de la notion de limite dans une EMS future, il est nécessaire de modifier le rapport de l'enseignant à l'ostensif « EDI ».

La conception d'une ingénierie de formation destinée aux futurs enseignants adaptée de notre ingénierie pourrait ouvrir une nouvelle direction de recherche pour la formation des enseignants et pour tenter de répondre à ce problème.

Résumé de la thèse en vietnamien

Số thực và giới hạn là hai khái niệm cơ bản của Toán học nói chung và Giải tích thực nói riêng. Từ thời Euclide, hai khái niệm này đã xuất hiện ngầm ẩn trong lý thuyết tỷ lệ các đại lượng và phương pháp vét kiệt. Nhưng phải đợi đến tận thế kỷ 19, chúng mới dần trở thành các tri thức toán học thực thụ. Cùng vào năm 1872, Dedekind và Cantor xây dựng một cách độc lập tập hợp số thực dựa trên khái niệm giới hạn dãy số đã được Cauchy hoàn thiện năm 1821.

> Những gì ngày nay chúng ta thống nhất gọi là số thực đã đụng chạm một cách sâu sắc đến các ý tưởng liên quan đến khái niệm liên tục, khái niệm thời gian, thuyết nguyên tử và phép chia vô hạn. Chính những chủ đề này thúc đẩy phần lớn các nhà triết học phương Tây tìm cách giải thích và làm tiến triển các hệ thống lý luận. (Dhombres 1995, trang 655)[1]

Nghiên cứu về hệ thống dạy học ở Pháp hiện tại (Bronner 1997, Birebent 2001) cho thấy : kể từ cuộc Chống Cải cách Toán học Hiện đại vào những năm 1980, chương trình môn Toán đã loại bỏ mọi khái niệm số vô tỷ và số thực. Những *noosphère* thời kỳ này, điển hình là Ovaert (1981), mong muốn giảng dạy Giải tích nói chung và số thực nói riêng bằng một cách đặt vấn đề mới : nghiên cứu chúng bằng các vấn đề xấp xỉ. Như vậy, các bài toán xấp xỉ thập phân sẽ đóng vai trò tiên phong trong giảng dạy môn Toán ở phổ thông Pháp.

> Xấp xỉ là trung tâm của các bài toán giải tích lớn : xấp xỉ số, xấp xỉ hàm… Chúng cũng là trung tâm của các phương pháp và kỹ thuật giải tích. Như Dieudonné đã khẳng định 'Chặn trên, chặn dưới, xấp xỉ' chính là các kỹ thuật cơ bản của giải tích. (Artigue 1996, trang 166)

Birebent chỉ ra *lý do tồn tại* của *xấp xỉ thập phân* (hay *thập phân hóa*) các số thực như sau :

> Chúng tôi xem việc xấp xỉ thập phân như một công việc Toán học. Lý do tồn tại của công việc này là *sử dụng một số thập phân thay thế số thực* trong những thao tác toán học như đánh giá, so sánh và thực hiện phép toán. (Birebent 2001, trang 7)

Khái niệm số thực và khái niệm giới hạn được giảng dạy như thế nào ở phổ thông Việt Nam ?

Ở trung học cơ sở, tập hợp số thực được định nghĩa là *tập hợp các dạng viết thập phân* (hữu hạn hay vô hạn). Trong khi đó, khái niệm giới hạn chỉ xuất hiện ở lớp 11 trung học phổ thông. Hai khái niệm này dường như xuất hiện độc lập trong thứ tự ngược với lịch sử. Nếu việc làm toán ở trung học cơ sở dựa trên cơ sở hình học và đại số thì các đối tượng mới của Giải tích ở trung học phổ thông, theo lẽ, sẽ mang đến các kiến thức Giải tích làm thay đổi sâu sắc những thực hành toán học. Thế mà, nghiên cứu của chúng tôi năm 2004 cho thấy học sinh hiểu khái niệm giới hạn (giảng dạy ở lớp 11) chủ yếu chỉ là thực hiện các thao tác đại số để tính giới hạn.

Cách đặt vấn đề xấp xỉ hoàn toàn vắng mặt trong giảng dạy môn Toán ở phổ thông Việt Nam.

> Nói về giải tích, đó là giải tích đại số hóa, nghĩa là vắng mặt cách đặt vấn đề xấp xỉ. Trong môn giải tích này, các dãy số có vị trí thứ yếu […] (Lê Văn Tiến 2001, trang 224).

Tuy nhiên, Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam cho phép và khuyến khích sử dụng máy tính bỏ túi. Như thế, điều kiện tính toán đã thay đổi : có thể sử dụng công cụ máy tính. Kết quả tính toán cũng thay đổi : máy tính thường chỉ cho kết quả thập phân gần đúng.

[1] Tất cả các trích dẫn trong phần tóm tắt này được chúng tôi dịch từ nguyên bản tiếng Pháp.

Trong bối cảnh đã nêu, chúng tôi trình bày đối tượng nghiên cứu của mình dưới dạng câu hỏi ban đầu :

1. Ở cấp độ Toán học, đâu là mối liên hệ giữa khái niệm số thực và khái niệm giới hạn ? Các dạng viết thập phân hiện diện như thế nào và có cương vị gì trong việc xây dựng số thực?
2. Sự xây dựng số thực, sự thập phân hóa các số thực và mối quan hệ giữa dạng viết thập phân với khái niệm giới hạn được chuyển đổi thế nào trong giảng dạy phổ thông? Đặc biệt, trong giảng dạy các khái niệm giới hạn và dãy số ở trung học phổ thông, các số thực (xây dựng bằng các dạng viết thập phân ở trung học cơ sở) có được nghiên cứu trở lại như một đối tượng của Giải tích hay không?
3. Dưới các ràng buộc và điều kiện thể chế dạy học phổ thông, làm sao để các đối tượng « dãy số » và « dạng viết thập phân » trở thành công cụ nghiên cứu số thực và khái niệm giới hạn thông qua cách đặt vấn đề xấp xỉ thập phân với sự giúp đỡ của máy tính bỏ túi?

Nhằm nghiên cứu các câu hỏi 1 và 2 liên quan đến « sự sống » của đối tượng số thực và mối liên hệ giữa chúng với khái niệm giới hạn, chúng tôi sẽ sử dụng chủ yếu các công cụ lý thuyết trong lý thuyết nhân chủng học didactic của Chevallard (1985, 1989, 1992, 1994, 1998).

Với mục đích tìm các yếu tố có thể trả lời câu hỏi 3, chúng tôi sẽ xây dựng, thực nghiệm và phân tích một *ingénierie didactique* (đồ án dạy học) nhắm vào định nghĩa tôpô metric của khái niệm giới hạn trong mối liên hệ với sự thập phân hóa các số thực trong một *môi trường máy tính bỏ túi* : một phương pháp nghiên cứu đặc trưng của Didactic Toán dựa trên các công cụ lý thuyết phát xuất từ lý thuyết tình huống didactic của Brousseau (1982a, 1982b, 1986, 1988, 1998).

I. Công cụ lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi giới thiệu vắn tắt các công cụ lý thuyết nổi tiếng trong lý thuyết nhân chủng học didactic : *tổ chức toán học* (Chevallard 1992, 1998) và *chuyển đổi didactic* (Chevallard 1985, 1994).

I.1. Tổ chức toán học : công cụ để nghiên cứu mối quan hệ thể chế về một đối tượng tri thức

Nhằm phân tích mối quan hệ thể chế về một đối tượng tri thức, Chevallard (1998) giới thiệu khái niệm *tổ chức toán học* (OM) liên quan đến một tri thức. Một OM được lập thành bởi bộ tứ : các kiểu nhiệm vụ $\boldsymbol{T}$ xuất hiện trong thể chế, các kỹ thuật $\boldsymbol{\tau}$ cho phép thực hiện các nhiệm vụ của $\boldsymbol{T}$, các công nghệ $\boldsymbol{\theta}$ giải thích các kỹ thuật $\boldsymbol{\tau}$, các lý thuyết $\boldsymbol{\Theta}$ giải thích cho các công nghệ $\boldsymbol{\theta}$.

Chevallard phân biệt các cấp độ khác nhau về OM.

- $[T/\tau/\theta/\Theta]$: OM *điểm* liên quan đến một kiểu nhiệm vụ duy nhất

Theo nguyên tắc, quanh một kiểu nhiệm vụ T, chúng ta sẽ tìm thấy một bộ ba tạo bởi một kỹ thuật (tối thiểu), τ, một công nghệ của τ, θ, và một lý thuyết của θ, Θ. Bộ tứ $[T/\tau/\theta/\Theta]$ tạo thành một tổ chức toán học *điểm*, nghĩa là một tổ chức toán học liên quan đến một kiểu nhiệm vụ duy nhất, T. (Chevallard 1998, trang 95)

- $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$: OM *địa phương* tập trung vào một công nghệ θ duy nhất.

- $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$: OM *vùng* được hợp thành quanh một lý thuyết Θ duy nhất.
- $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$: OM *toàn phần* được tích hợp từ nhiều OM vùng ứng với nhiều lý thuyết Θ_k.

Thật ra, chúng ta hiếm khi bắt gặp các OM điểm. Một cách tổng quát, trong một thể chế đang xét, một lý thuyết Θ đáp ứng *nhiều công nghệ* θ_j. Đến lượt mình, mỗi công nghệ giải thích và giúp hiểu được *nhiều kỹ thuật* τ_{ij} tương ứng với *chừng ấy kiểu nhiệm vụ* T_{ij}. Vậy là, các tổ chức toán học điểm được tích hợp lại, đầu tiên thành các tổ chức toán học *địa phương*, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, tập trung vào một công nghệ θ duy nhất, kế đến thành các tổ chức toán học *vùng*, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, được hợp thành quanh một lý thuyết Θ duy nhất. (Trên giới hạn này, chúng ta sẽ gọi sự phức hợp $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ là tổ chức toán học *toàn phần*. Tổ chức toán học toàn phần là sự tích hợp nhiều OM vùng ứng với nhiều lý thuyết Θ_k). (Chevallard 1998, trang 95).

Chúng tôi phát biểu lại câu hỏi 2 dưới dạng tổ chức toán học :

Các tổ chức toán học nào liên quan đến hai tri thức *số thực* và *giới hạn* hiện diện trong thể chế giảng dạy Toán ở phổ thông Việt Nam? Các kiểu nhiệm vụ nào tồn tại ? Các kỹ thuật nào được giảng dạy để giải quyết các kiểu nhiệm vụ? Các yếu tố công nghệ nào giải thích cho các kỹ thuật ? Đâu là mối liên hệ giữa số thực và giới hạn được tìm thấy trong các tổ chức toán học liên quan đến hai đối tượng này? Tại sao chúng tồn tại? Những mối liên hệ nào vắng mặt? Và tại sao?

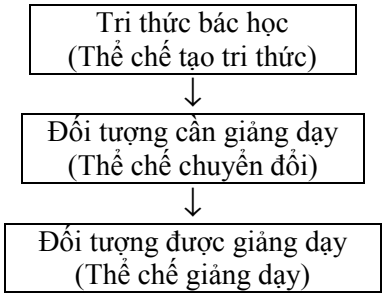
Để trả lời những câu hỏi này, chúng tôi tiến hành nghiên cứu thể chế phổ thông Việt Nam. Nghiên cứu thể chế cho phép xác định các dấu vết liên hệ giữa số thực và giới hạn, đặc biệt trong sự thập phân hóa các số thực.

Từ phân tích thể chế, chúng tôi phát biểu các giả thuyết nghiên cứu về mối liên hệ giữa sự thập phân hóa và khái niệm giới hạn.

Một bộ câu hỏi điều tra sẽ được xây dựng với mục đích kiểm chứng các giả thuyết nghiên cứu này.

I.2. Chuyển đổi didactic

Sơ đồ cổ điển mô tả sự chuyển đổi didactic theo ba mắc xích sau :



Hình 1. Sơ đồ chuyển đổi didactic cổ điển

Thể chế hướng đến trong chuyển đổi didactic là một thể chế giảng dạy.

Trong phạm vi của luận án này, chúng tôi xem xét hai thể chế: giảng dạy Toán ở trung học cơ sở và giảng dạy toán ở trung học phổ thông.

Chúng tôi sử dụng nhóm từ *tri thức bác học* để chỉ các kiến thức quy chiếu hợp thức hóa sự tồn tại và đảm bảo cuộc sống của một tri thức toán học trong thể chế giảng dạy. Một tri thức bác học của môn Toán được tổ chức trong thể chế tạo tri thức (thể chế gồm các nhà toán học), chẳng hạn các tổ chức toán học quy chiếu liên quan đến các tri thức số thực và giới hạn.

Lý thuyết chuyển đổi didactic làm rõ hai kiểu câu hỏi liên quan đến một tri thức được giảng dạy.

- Yếu tố nào cho phép tri thức này hiện diện, mà không phải tri thức khác? Yếu tố nào đảm bảo tính hợp thức của tri thức? Đâu là tri thức quy chiếu trong một thể chế tạo tri thức?

- Chuyển đổi didactic tạo ra sự chênh lệch giữa tổ chức toán học cần giảng dạy với tổ chức toán học quy chiếu (các điều kiện và ràng buộc của thể chế dạy học về một tri thức tạo nên sự chênh lệch): Đâu là sự chênh lệch giữa tri thức cần dạy với tri thức quy chiếu? Các điều kiện và ràng buộc nào giải thích sự chênh lệch này?

Trong luận án của chúng tôi, nghiên cứu chuyển đổi didactic trên các khái niệm giới hạn và số thực giữ vai trò chủ đạo.

Khởi đầu, chúng tôi thực hiện điều tra khoa học luận để trả lời cho câu hỏi 1: Ở cấp độ tri thức bác học, các mối liên hệ nào tồn tại giữa sự xây dựng số thực, khái niệm giới hạn và sự thập phân hóa các số thực (các dạng viết thập phân vô hạn)?

Từ các kết quả điều tra khoa học luận, chúng tôi mô tả các tổ chức toán học quy chiếu. Những tổ chức toán học này hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp đề cập đến mối liên hệ qua lại giữa khái niệm giới hạn, khái niệm số thực và sự thập phân hóa các số thực.

Từ đó, chúng tôi nghiên cứu câu hỏi 2. Bằng cách phân tích các chương trình và sách giáo khoa phổ thông Việt Nam, chúng tôi nhận dạng các tổ chức toán học *cần giảng dạy*; chúng chính là các dấu vết của các tổ chức toán học quy chiếu.

Cuối cùng, chúng tôi tìm cách giải thích sự chênh lệch từ các OM quy chiếu đến các OM cần giảng dạy thông qua các điều kiện và các ràng buộc của thể chế trung học cơ sở và trung học phổ thông.

I.3. Ingénierie didactique

Nhằm trả lời cho câu hỏi 3, chúng tôi theo đuổi một phương pháp nghiên cứu đặc thù của Didactic Toán: xây dựng, thực nghiệm và phân tích một *ingénierie didactique*.

> Khái niệm ingénierie didactique xuất hiện trong khoa học Didactic Toán từ đầu những năm 1980. Công việc didactic này mang tên ingénierie didactique vì nó có thể so sánh với công việc của một kỹ sư. Để thực hiện một dự án cụ thể nào đó, người kỹ sư dựa vào các kiến thức khoa học trong lĩnh vực liên quan và chịu sự kiểm soát của khoa học. Nhưng anh ta phải làm việc với những đối tượng phức tạp hơn nhiều so với những đối tượng khoa học thuần túy thuộc lĩnh vực của mình. Với tất cả các phương tiện hiện có, anh ta phải tiến hành giải quyết các bài toán vượt ngoài tầm lĩnh vực khoa học liên quan. (Artigue 1990, trang 283)

> Ingénierie didactique là một phương pháp nghiên cứu. Phương pháp này được đặc trưng bằng một sơ đồ thực nghiệm « thực hiện dạy học » trong lớp. Nói cách khác, sơ đồ thực nghiệm này bao gồm xây dựng, thực hiện, quan sát và phân tích các công đoạn dạy học. (Artigue 1990, trang 286)

Nói cách khác, *ingénierie didactique* là một tình huống dạy học (hay tập hợp các tình huống dạy học) do nhà nghiên cứu didactic thiết kế dựa trên các khái niệm cơ bản trong lý thuyết tình huống của Brousseau, như *tình huống cơ bản*, *biến didactic*, *môi trường*… Mục tiêu của một ingénierie didactique là:

- thực hiện việc giảng dạy trong thể chế dạy học sau khi đã nghiên cứu thể chế và khoa học luận,
- và kiểm chứng các giả thuyết hay trả lời các câu hỏi đề ra (bằng cách đối chiếu giữa các phân tích tiên nghiệm và phân tích hậu nghiệm).

Sau khi phát biểu một tình huống cơ bản của khái niệm giới hạn dựa trên một bài toán xấp xỉ thập phân, chúng tôi sẽ xây dựng và thực hiện một ingénierie didactique tại một lớp 12 với mục đích kiểm chứng khả năng nảy sinh mối liên hệ giữa sự thập phân hóa các số thực và khái niệm giới hạn trong thực nghiệm này. Mỗi tình huống didactic của ingénierie didactique vận hành một *môi trường*, đặc biệt chúng tôi sẽ khảo sát thật kỹ các yếu tố của « môi trường máy tính bỏ túi ».

> Môi trường trong tình huống didactic là hệ thống đối kháng với học sinh. Môi trường làm thay đổi tình trạng kiến thức của học sinh, tuy rằng học sinh không ý thức được […]
>
> Học sinh tác động (hay hành động) trên môi trường và môi trường phản hồi thông tin (tác động phản hồi) về hành động của học sinh. (Brousseau 1998, trang 90-92)
>
> Ta gọi *tác động phản hồi* là một thông tin cụ thể do môi trường cung cấp, tức là một thông tin được học sinh tiếp nhận như một sự đánh giá, tích cực hay tiêu cực, về hành động của học sinh. Thông tin này cho phép học sinh điều chỉnh, hợp thức hay loại bỏ lời giải của mình. (Tài liệu Song ngữ Didactic Toán của Đại học Sư phạm Tp HCM, *Tình huống didactic và tình huống adidactic*, các tác giả Claude Comiti, Annie Bessot, Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến, Đoàn Hữu Hải)

II. Cấu trúc luận án

Luận án được tổ chức thành ba phần: A, B và C.

Trong phần A, chúng tôi tiến hành các công việc sau:

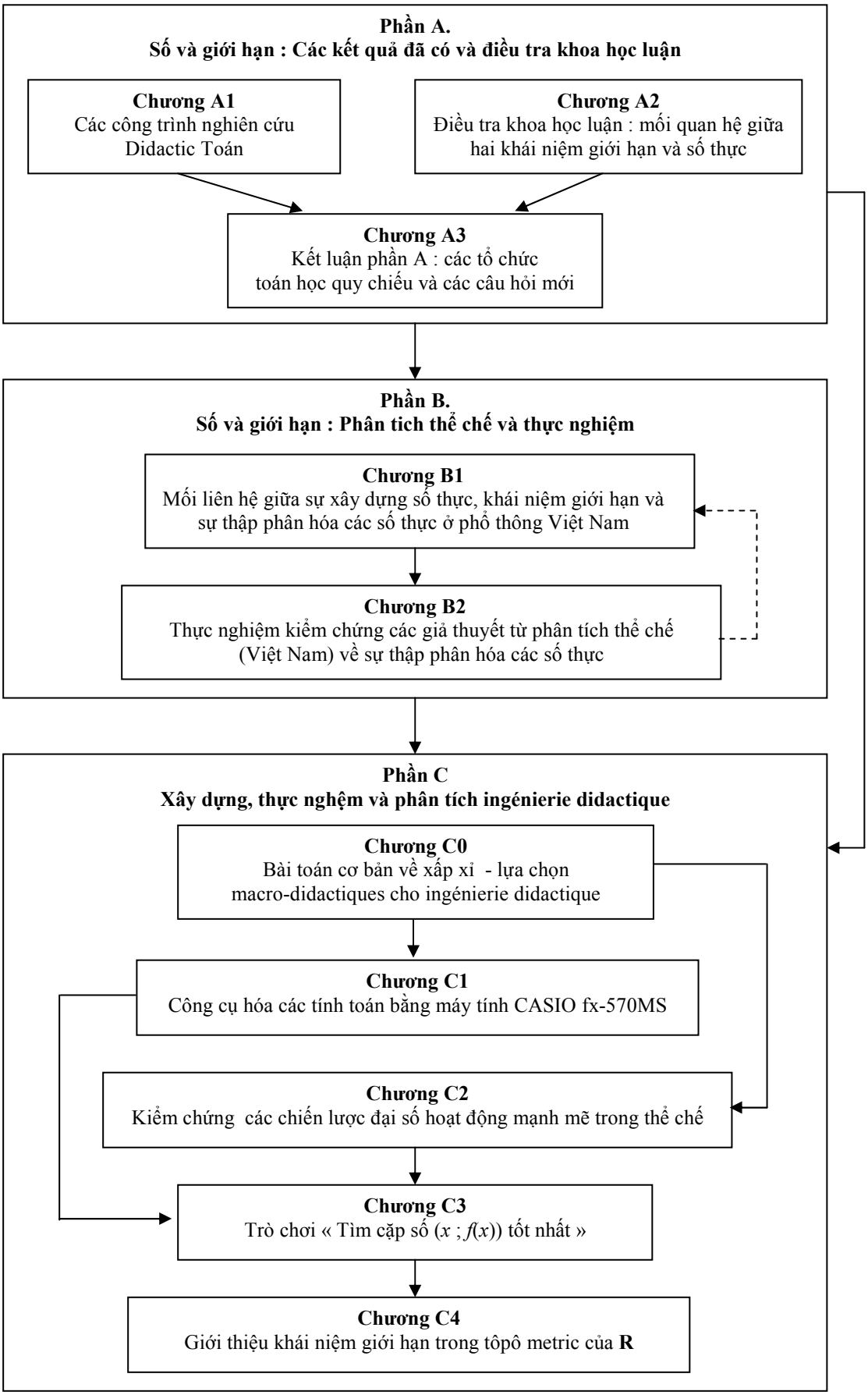
- Tổng hợp một số kết quả từ các công trình nghiên cứu trước đây theo hai trục: khái niệm giới hạn và khái niệm số.
- Điều tra khoa học luận về mối liên hệ giữa sự xây dựng số thực, khái niệm giới hạn và sự thập phân hóa các số thực (các dạng viết thập phân vô hạn) nhằm bổ sung vào các kết quả nghiên cứu khoa học luận trong các công trình nghiên cứu trước đây.
- Mô tả những tổ chức toán học quy chiếu đề cập trực tiếp hay gián tiếp đến mối liên hệ qua lại giữa khái niệm giới hạn, khái niệm số thực và sự thập phân hóa các số thực.
- Đặt ra các câu hỏi mới về dấu vết của các tổ chức tham chiếu ở cấp độ tri thức cần giảng dạy.

Trong phần B, chúng tôi thực hiện:

- Nghiên cứu các dấu vết của các tổ chức toán học tham chiếu.
- Phát biểu các giả thuyết nghiên cứu về mối quan hệ thể chế đối với sự thập phân hóa các số thực trong thể chế trung học cơ sở và trung học phổ thông Việt Nam.
- Kiểm chứng các giả thuyết nghiên cứu này bằng thực nghiệm.

Trong phần C, chúng tôi xây dựng, thực hiện và phân tích một ingénierie didactique nhằm vào định nghĩa tôpô metric của khái niệm giới hạn trong mối liên hệ với sự thập phân hóa các số thực trong môi trường « máy tính bỏ túi ».

Cấu trúc luận án được thể hiện qua sơ đồ sau:



Hình 2. Sơ đồ tổ chức luận án

III. Các kết quả chính của luận án

III.1. Khái niệm số thực và khái niệm giới hạn: cùng một lịch sử lâu đời

Điều tra khoa học luận của chúng tôi đã làm rõ mối quan hệ biện chứng giữa khái niệm số thực và khái niệm giới hạn.

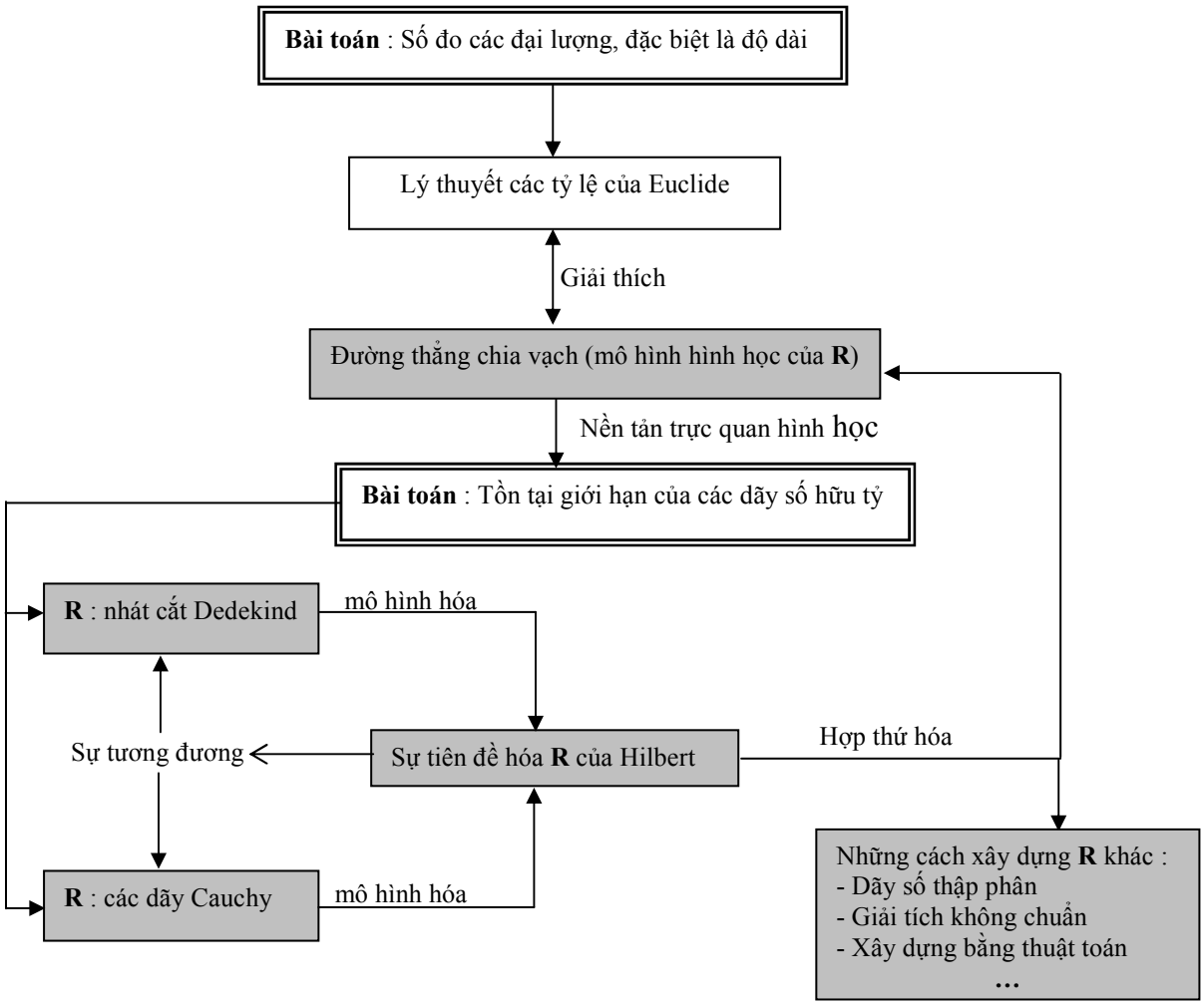
Trong lịch sử, sự tiến bộ của khái niệm giới hạn cần thiết cho sự tiến bộ của khái niệm số thực. Ngược lại, sự tiến bộ của khái niệm số thực nuôi dưỡng sự tiến bộ của khái niệm giới hạn. Chúng tôi tóm tắt quá trình đồng tiến triển của hai khái niệm này trước khi trở thành các tri thức toán học thực thụ qua bảng sau:

Thời điểm	Khái niệm số thực ngầm ẩn trong khái niệm tỷ lệ	Mối liên hệ giữa số thực và giới hạn	Tiến triển của khái niệm giới hạn
Euclide	*Khái niệm tiền toán học* của số thực Đặc trưng : thứ tự toàn phần, thiếu phép toán, thiếu tính đầy đủ		
	- Xây dựng các tỷ lệ bằng đẳng thức (tỷ lệ thức) - Tồn tại các tỷ lệ hữu ước (hữu tỷ) và một số tỷ lệ vô ước (vô tỷ) - Đối tượng vô tỷ chưa được nghiên cứu	Phương pháp vét kiệt để chứng minh đẳng thức giữa hai tỷ lệ và thực hiện một số tính toán gần đúng (ví dụ : xấp xỉ số π)	Phương pháp vét kiệt tránh dùng khái niệm vô tận. (*xấp xỉ đơn điệu*)
Stevin 1585	*Khái niệm cận toán học* của số thực Đặc trưng : thứ tự toàn phần, phép toán hình học, thiếu tính đầy đủ (liên tục hình học)		
	Mọi tỷ lệ được gọi là số	Mọi tỷ lệ đều có thể xấp xỉ bằng số thập phân	Xấp xỉ thập phân
Newton 1642-1727	Số là một tỷ lệ trừu tượng	Số và giới hạn đều là các tỷ lệ trừu tượng	Trong phương pháp vi phân, giới hạn là tỷ lệ « cuối cùng » của hai đại lượng giảm vô hạn (*xấp xỉ đơn điệu*)
D'Alembert 1717-1783	- Tỷ lệ hữu ước được gọi là số - Tỷ lệ vô ước không được gọi là số	Tỷ lệ vô ước là giới hạn của các số hữu tỷ (tỷ lệ hữu ước)	Khái niệm giới hạn của một đại lượng : có thể xấp xỉ gần như chúng ta mong muốn nhưng không vượt qua được. (*xấp xỉ đơn điệu*)
Cauchy 1821	- Mọi tỷ lệ được gọi là số - Số thêm các dấu (+/-) được gọi là lượng ⇒ Tồn tại các số dương và âm	Định nghĩa chính xác khái niệm « *a* là giới hạn của dãy (x_n) ».	Khái niệm giới hạn của một dãy số theo quan điểm *xấp xỉ không đơn điệu*

Bảng 1. Sự đồng tiến triển của hai khái niệm số thực và giới hạn từ thời Euclide đến Cauchy

Sự xây dựng hiện đại các số thực (tri thức toán học thực thụ) năm 1872 của Dedekind và Cantor dựa trên bài toán tồn tại giới hạn của các dãy số hữu tỷ. Năm 1899, Hilbert tiên đề hóa tập hợp các số thực.

Sơ đồ dưới đây thể hiện mối liên hệ khoa học luận giữa những sự xây dựng và định nghĩa số thực khác nhau:



Hình 3. Liên hệ khoa học luận giữa các lý thuyết xây dựng số thực khác nhau

Tính đầy đủ của **R** dựa vào một trong bốn tính chất tương đương sau đây :

- Mọi tập khác rỗng và bị chặn trên (dưới) đều có chặn trên (dưới) nhỏ nhất (lớn nhất).
- Mọi dãy Cauchy đều hội tụ.
- Mọi dãy đơn điệu và bị chặn đều hội tụ.
- Tồn tại một số thực duy nhất thuộc mọi đoạn của dãy các đoạn thắt.

Sau cùng, mối quan hệ biện chứng được đúc kết trong sự hợp nhất giữa hai khái niệm số thực và giới hạn : một số thực được định nghĩa bởi một lớp các dãy số tương đương và mọi dãy của lớp tương đương này lại chấp nhận số thực làm giới hạn khi *n* tiến ra vô cùng.

III.2. Vai trò của các dạng viết thập phân trong sự xây dựng số thực

Năm 1585, Stevin đã sử dụng các số thập phân để nghiên cứu các số không thập phân như phân số và số căn bậc hai. Nghĩa là, Stevin sử dụng một cách ngầm ẩn tính trù mật của tập **D** trong một tập con gồm các số xây dựng được (bằng thước và compa) của **R**.

Bằng cách sử dụng khái niệm duy nhất sai khác một đẳng cấu, sự tiên đề hóa của Hilbert cho phép hợp thức hóa các cách xây dựng **R** khác nhau, đặc biệt xây dựng **R** từ **D** và mô hình đường thẳng thực.

Nghiên cứu các sách chuyên luận[2] của Lebesgue (1931) và Bourbaki (1960) cho phép làm rõ vai trò của các dạng viết thập phân vô hạn (DVTPVH) trong sự xây dựng số thực.

Chúng tôi tóm tắt các vai trò khác nhau của DVTPVH trong bảng sau :

Sách chuyên luận	**Bourbaki :** **Số thực → DVTPVH**	**Lebesgue :** **DVTPVH → số thực**
Tri thức khởi đầu	- Tập **R** : không gian tôpô - Khái niệm giới hạn	- Tập **N** - Số đo độ dài và các tiên đề hình học (tiên đề Archimède và tiên đề dãy các đoạn thắt)
Vị trí của các DVTPVH	Khai triển các số thực theo một dãy cơ sở. Đặc biệt, khai triển thập phân số thực x thành tổng vô hạn : $x = d_0,d_1d_2\ldots d_n\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$	- Xây dựng số thực từ **N**. - Một số thực, số đo một độ dài, là dãy vô hạn các số thập phân : d_0 ; d_0,d_1 ; d_0,d_1d_2 ; … ; $d_0,d_1d_2\ldots d_n$, … với d_i là các chữ số. Dãy số này đến từ tiến trình so sánh độ dài với một hệ đơn vị được thập phân liên tiếp. Nó được biểu diễn bởi một DVTPVH « $d_0,d_1d_2\ldots d_n\ldots$» và hội tụ theo tiên đề dãy các đoạn thắt.
DVTPVH9[3] (VD: 0,999…)	Tồn tại như một *khai triển thập phân không chuẩn*	Bị loại trong cách xây dựng : mỗi số thực có một dạng viết thập phân duy nhất.
Thứ tự trên các DVTPVH	Thứ tự từ điển đi kèm với các nhận dạng kiểu « 0,999… = 1 »	Thứ tự từ điển nhờ vào tính duy nhất của DVTPVH ứng với mỗi số thực.
Phép toán trên các DVTPVH	Phép toán trên các dãy số thập phân rồi chuyển qua giới hạn	Phép toán trên các số nguyên với quy tắt đặt dấu phẩy, sau đó sử dụng tiên đề dãy các đoạn thắt.

Bảng 2. Vị trí của các dạng viết thập phân vô hạn trong sự xây dựng số thực

Như vậy, một dạng viết thập phân vô hạn có thể biểu diễn:

- hoặc một dãy số thập phân hội tụ « số hạng sau nhận được bằng cách viết thêm vào số hạng liền trước một chữ số ở bên phải »,
- hoặc giới hạn của dãy số thập phân trên.

Một dãy số thập phân như vậy thỏa mãn nhiều tiêu chuẩn hội tụ (nó là dãy Cauchy, dãy đơn điệu bị chặn và dãy liên kết[4] với một dãy khác). Điều này cho phép xây dựng **R** từ **D**.

III.3. Các tổ chức toán học quy chiếu

Các kết quả khoa học luận cho phép định vị các tổ chức toán học quy chiếu đề cập hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp đến mối liên hệ qua lại giữa khái niệm giới hạn, khái niệm số thực và sự thập phân hóa các số thực.

Nhóm nghiên cứu của Bosch (2002) đã đề nghị hai tổ chức toán học địa phương quy chiếu của khái niệm giới hạn sau đây:

- OM_1 *đại số các giới hạn* xoay quanh vấn đề tính các giới hạn đã tồn tại bằng các thao tác đại số.
- OM_2 *tôpô các giới hạn* xoay quanh vấn đề tồn tại giới hạn của một hàm số.

Điều tra khoa học luận của chúng tôi cho phép bổ sung rằng :

- *Đại số các giới hạn* (OM_1) là kết quả của việc mô hình hóa các quy tắc đại số về sự chuyển qua giới hạn trong các phép toán hàm số. OM_1 cho phép tránh vấn đề vô

[2] Sách chuyên luận (Neyret 1995) được viết bởi nhà toán học ở cấp độ tri thức bác học (hay rất gần với cấp độ này) với mục đích làm cơ sở cho các tri thức cần giảng dạy.

[3] Dạng viết thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì 9.

[4] Hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n < v_n$ $\forall n \in$ **N** được gọi là liên kết với nhau nếu $(u_n\text{-}v_n)$ hội tụ về 0 khi n tiến ra vô cùng.

hạn của khái niệm giới hạn và gắn ký hiệu $\lim_{x \to a} f(x)$ hoặc với một số thực hoặc với vô cùng.

- Trong sự thu hẹp của OM_2 *tôpô các giới hạn* trên các dãy số, chúng tôi giới thiệu tổ chức toán học $OM_{2'}$ *tồn tại giới hạn (trong **R**) của một dãy số*. $OM_{2'}$ đề cập trực tiếp hơn đến mối liên hệ giữa số thực và giới hạn. Vì sự tồn tại giới hạn của dãy số được chứng minh dựa vào một trong các tiêu chuẩn, chính là các tính chất đặc trưng cho tính đầy đủ của **R**.
- Liên quan đến sự thập phân hóa các số thực, chúng tôi miêu tả một tổ chức toán học địa phương OM_3 *khai triển thập phân các số thực*. Trong OM_3, một chặn thập phân $[d_n, d_n']$ của số thực x cần khai triển sao cho $|d_n' - d_n| = 10^{-n}$ đảm bảo rằng d_n và d_n' là các giá trị gần đúng sai kém 10^{-n} của x.

III.4. Các quan điểm khoa học luận của khái niệm giới hạn

Chúng tôi giới thiệu ba quan điểm khoa học luận về khái niệm giới hạn của hàm số $\lim_{x \to a} f(x) = l$ từ các công trình nghiên cứu của Bkoche (1996) và Trouche (1996) trong mối liên hệ với các tổ chức toán học quy chiếu của Bosch (2002).

- Quan điểm « đại số » gắn với tổ chức toán học quy chiếu OM_1. Theo quan điểm này khái niệm giới hạn chỉ là việc tính toán các giới hạn bằng các quy tắc đại số.
- Quan điểm « xấp xỉ x » : sự xấp xỉ x đến a kéo theo sự xấp xỉ $f(x)$ đến l.
- Quan điểm « xấp xỉ $f(x)$ » : độ xấp xỉ $f(x)$ với l mong muốn sẽ quyết định độ xấp xỉ x với a.

Chính quan điểm « xấp xỉ $f(x)$ » cho phép khái niệm giới hạn trở thành tri thức toán học thực thụ. Quan điểm này gắn với tổ chức toán học OM_2 ngầm ẩn trong định nghĩa khái niệm giới hạn bằng ngôn ngữ ε, δ.

Quan điểm « xấp xỉ x » là điều kiện cần và là bước trung gian để hiểu và tiếp cận quan điểm « xấp xỉ $f(x)$ » của khái niệm giới hạn.

III.5. Mối liên hệ « mong manh » giữa giới hạn, số và sự thập phân hóa trong giảng dạy Toán ở phổ thông Việt Nam

A. *Nghiên cứu dấu vết các tổ chức toán học quy chiếu* trong thể chế dạy học hiện hành ở Việt Nam cho phép làm rõ mối quan hệ thể chế về mối liên hệ « giới hạn - số - sự thập phân hóa ».

- Nghiên cứu các số thập phân và xấp xỉ thập phân không phải là mục tiêu của thể chế hiện hành. Thể chế trung học phổ thông không tính đến mối liên hệ giữa số và giới hạn trong các dạng viết thập phân vô hạn. Như chúng ta đã biết, ở trung học cơ sở tập hợp các dạng viết thập phân định nghĩa một cách lý thuyết tập hợp **R**.

Giảng dạy số thập phân chỉ chính thức được thực hiện ở tiểu học và bị giới hạn ở các số thập phân có 3 chữ số. Một thứ tự trù mật (không rời rạc[5]) trong **D** chưa từng được nghiên cứu ở phổ thông Việt Nam.

- Dấu vết của tổ chức toán học OM_1 *đại số các giới hạn* lấn át tổ chức toán học OM_2 *tôpô các giới hạn* trong thể chế trung học phổ thông hiện hành : mối quan hệ thể chế đối với ký

[5] Các phát biểu sau đây là tương đương để định nghĩa một thứ tự không rời rạc (trù mật) trong **D**:
- Luôn tồn tại một số thập phân giữa hai số thập phân đã cho.
- Không tồn tại số liền trước và liền sau một số thập phân đã cho.
- Không tồn tại các phần tử lớn nhất hay nhỏ nhất trong một tập con khác rỗng không đóng của **D**.

hiệu $\lim_{x \to a} f(x)$ chỉ là thực hiện các thao tác đại số để gắn ký hiệu này với một số hay ký hiệu vô cùng « ∞ ». Như vậy, quan điểm « đại số » lấn át và loại đi các quan điển xấp xỉ của khái niệm giới hạn.

Chúng tôi đã thực nghiệm kiểm chứng mối quan hệ thể chế này trong một nghiên cứu năm 2004. Với câu hỏi « Hãy viết một đoạn ngắn để giải thích cho các em học sinh lớp 10 biết $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ có nghĩa là gì », hầu hết các học sinh lớp 11 đã học khái niệm giới hạn được hỏi đều soạn một chỉ dẫn các bước tính giới hạn. Chú ý rằng, giới hạn này nằm trong thí dụ mở đầu bài « Giới hạn hàm số » của sách giáo khoa Đại số Giải tích 11 hiện hành.

- Tuy nhiên, các dấu vết ít ỏi và đơn độc của tổ chức toán học $OM_{2'}$ - chứng minh sự tồn tại giới hạn của dãy số bằng định nghĩa (ε, N) hay bằng tiêu chuẩn « đơn điệu bị chặn » trong thể chế hiện hành - tiềm tàng các quan điểm xấp xỉ của khái niệm giới hạn.

- Các dấu vết của tổ chức toán học OM_3 *khai triển thập phân các số thực* chỉ tồn tại ở trung học cơ sở và chủ yếu trong khai triển thập phân các số hữu tỷ bằng việc thực hiện các phép chia Euclide liên tiếp. Tuy kỹ thuật này (thực hiện phép chia) sinh ra các giá trị thập phân gần đúng của phân số với sai số 10^{-n}, nhưng lại thiếu một công nghệ giải thích cho kỹ thuật. Mối liên hệ « số thực – giá trị thập phân gần đúng của số thực – biểu diễn thập phân của số thực » hoàn toàn mờ ảo. Hơn nữa, trong sự thập phân hóa các số hữu tỷ, môt chặn thập phân [d_n, d_n'] không bao giờ xuất hiện.

B. *Thể chế hiện hành (nhất là trung học phổ thông) cho phép sử dụng máy tính bỏ túi* trong các tính toán. Nhưng việc sử dụng máy tính bỏ túi, chẳng hạn để tính gần đúng các số hữu tỷ, các căn bậc hai hay căn bậc ba, lại không đi kèm với công nghệ nào. Vắng bóng các công nghệ giải thích cho các kỹ thuật sử dụng công cụ máy tính bỏ túi làm xuất hiện một quy tắc ngầm ẩn : « Trong tính toán bằng công cụ máy tính bỏ túi, nếu kết quả hiển thị là một số thập phân ít hơn 10 chữ số, thì đó là kết quả chính xác ».

Chúng tôi đã chỉ ra sự vận hành của quy tắc trên khi phân tích ingénierie didactique, ví dụ như : khi sử dụng máy tính bỏ túi để thập phân hóa phân số $\frac{29999}{100001}$, mọi học sinh của lớp thực nghiệm đều cho rằng kết quả hiển thị trên màn hình 0,299987 bằng $\frac{29999}{100001}$.

C. *Chúng tôi xây dựng một bộ câu hỏi điều tra* để kiểm chứng các hậu quả của sự chuyển đổi didactic về mối liên hệ giữa số thực và giới hạn liên quan đến sự thập phân hóa các số thực. Bộ câu hỏi đã được thực nghiệm ở các lớp 10 (đầu học kỳ 1), các lớp 12 (học sinh đã học khái niệm giới hạn) và các sinh viên năm thứ ba của trường Cao đẳng Sư phạm và Đại học Sư Phạm Tp HCM.

Phân tích các câu trả lời cho thấy mối quan hệ thể chế với sự thập phân hóa các số thực không hề thay đổi kể từ trung học cơ sở.

- Cấu trúc (thứ tự và các phép toán) của tập hợp số thực, nghĩa là tập các dạng viết thập phân, được vay mượn từ cấu trúc của tập số tự nhiên **N** hay D_i[6].

Nói cách khác, tập **R** trong thể chế phổ thông có thứ tự rời rạc và các phép toán được thực hiện giống như trong D_i :

- « 0,999… » là một *số, nhỏ hơn hẳn 1 và gần 1 nhất*.

[6] D_i là tập các số thập phân có *i* chữ số sau dấu phẩy. Các cấu trúc thứ tự và đại số của D_i đẳng cấu với các cấu trúc của **N.**

- Các phép cộng trong D_∞[7] « 1,(4) + 3,(7) = ? » và « 1 – 0,(9) = ?» được thực hiện như trong D_i mà không có sự tham gia của khái niệm giới hạn.
- Một dạng viết thập phân vô hạn tuần hoàn được đồng nhất với một số thập phân. Trong sự đồng nhất này, các dạng viết không toán học như 5,(2)1 hay 0,(0)1 là dấu hiệu của chướng ngại khoa học luận gắn với khái niệm vô hạn của giới hạn và số thực. Các dạng viết này được tìm thấy nhiều nhất, nhất là nơi các học sinh lớp 12 và nơi các sinh viên.

- Một dạng viết thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kỳ 9 là một *số vô tỷ*. Đối với tất cả các học sinh và sinh viên được thực nghiệm thì khái niệm số vô tỷ được định nghĩa bằng dạng viết thập phân vô hạn không tuần hoàn ở trung học cơ sở *chẳng có ý nghĩa gì*.

- Trong kỹ thuật thực hiện phép chia giữa hai số nguyên để tìm dạng viết thập phân vô hạn tuần hoàn của số hữu tỷ, chu kỳ của dạng viết thập phân vô hạn này lại được phần lớn học sinh suy ra từ sự kiện *một chuỗi các số lặp đi lặp lại 2, 3 hay 4 lần trong thương thập phân*. Nghĩa là tính chu kỳ không được suy ra từ tính chất toán học đúng : tính chất lặp lại của các số dư trong các phép chia Euclide của kỹ thuật.

Như vậy, mối quan hệ thể chế của các giáo viên tương lai với các dạng viết thập phân không thay đổi kể từ trung học cơ sở. Thực tế này cho phép đặt câu hỏi về việc đào tạo giáo viên ở các trường sư phạm : tại sao việc giảng dạy các cấu trúc tôpô tổng quát và các tri thức số học trong các trường sư phạm lại không cung cấp cho người giáo viên tương lai công cụ để nhận dạng cấu trúc thứ tự và phép toán trong tập các dạng viết thập phân vô hạn? Tại sao tập các dạng viết thập phân vô hạn hoàn toàn tách hẳn với không gian tôpô **R** được giảng dạy?

Câu hỏi này trở nên hết sức cần thiết bởi vì hiện nay các noosphère Việt Nam khuyến khích việc dạy học bằng các « hoạt động », đặc biệt trong giảng dạy Giải tích ở trung học phổ thông. Để điều khiển tốt các hoạt động « khảo sát số » với sự giúp đỡ của máy tính bỏ túi thì mối quan hệ cá nhân của giáo viên đối với các dạng viết thập phân cần phải được điều chỉnh.

III.6. Xây dựng, thực nghiệm và phân tích một ingénierie didactique

Ingénierie didactique của chúng tôi là một hoạt động xấp xỉ số thực bằng kỹ thuật chèn số thập phân vào mỗi đoạn $[d_n, d'_n]$ liên tiếp của dãy các đoạn thắt (với d_n và d'_n là các biên thập phân). Phải xây dựng đồng thời các quan điểm xấp xỉ của khái niệm giới hạn và thứ tự trù mật (không rời rạc) trong các tập **D** và D_∞ chính là ý tưởng chủ đạo của ingénierie didactique. Với ý tưởng này, bước chuyển từ quan điểm « xấp xỉ x » sang quan điểm « xấp xỉ $f(x)$ » của khái niệm giới hạn đặt cơ sở cho bước chuyển từ thứ tự rời rạc trong **N** sang thứ tự trù mật trong D_∞.

Các tình huống didactic trong ingénierie didactique nảy sinh từ một bài toán xấp xỉ, một tình huống cơ bản mang nghĩa của khái niệm giới hạn, và từ việc chọn giá trị cho các biến didactic. Bài toán này chưa tồn tại trong thể chế Việt Nam hiện hành. Các đối tượng đại số quen thuộc của thể chế như phương trình, bất phương trình, biểu thức đại số và tập xác định của hàm số tạo nên các yếu tố môi trường cho các tình huống didactic. Cho phép sử dụng máy tính bỏ túi trong tính toán sẽ tạo thuận lợi cho các kết quả thập phân xuất hiện.

A. *Khoảng cách, tiêu chuẩn đầu tiên cho phép vượt qua thứ tự rời rạc*

Tình huống trung tâm của ingénierie didactique (tình huống 3) là trò chơi « Tìm cặp số (x ; $f(x)$) tốt nhất » sao cho giá trị $f(x)$ có thể gần số 1 nhất. Trong trò chơi này giá trị 1 đã bị

[7] D_∞ là tập các dạng viết thập phân vô hạn.

cấm vì phương trình $f(x) = 1$ không có nghiệm (tình huống 2) và 1 cũng chính là giới hạn của hàm số f khi x tiến về 0,3 mà học sinh cần phải khám phá.

Trong thời điểm ban đầu, các câu trả lời của các học sinh lớp 12 (lớp thực nghiệm) cho thấy sự lấn át của thứ tự rời rạc trong tập **R** : với hầu hết học sinh của lớp này, cặp số tốt nhất tồn tại ; nghĩa là tồn tại một số liền trước và một số liền sau số 1.

Tuy nhiên, môi trường của trò chơi bắt buộc học sinh phải tính khoảng cách từ các giá trị $f(x)$ đến 1 như một tiêu chuẩn để quyết định cặp số tốt nhất. Tiêu chuẩn này cho phép học sinh nghi ngờ thứ tự rời rạc vì rõ ràng tồn tại các cặp số $(x ; f(x))$ sao cho khoảng cách từ $f(x)$ đến 1 có thể trở nên nhỏ như ta mong muốn.

B. *Vai trò trung tâm của môi trường trong sự thiết lập thứ tự trù mật (không rời rạc) trong* ***D*** *và* D_∞ *cùng với quan điểm « xấp xỉ f(x) » của khái niệm giới hạn.*

Ngoài môi trường đại số (phương trình, bất phương trình …), chúng tôi tổ chức bổ sung các yếu tố của « môi trường máy tính bỏ túi » sinh ra từ những kết quả hiển thị trên màn hình máy tính CASIO fx-570MS.

Tất cả các học sinh của lớp thực nghiệm chiếm lĩnh dễ dàng các kiến thức sử dụng công cụ máy tính bỏ túi được giảng dạy trong tình huống 1. Các kiến thức này bao gồm : các bộ nhớ toán học (các phím A, B, C, …) ; viết và sửa chữa một biểu thức đại số trên màn hình soạn thảo (các phím COPY và INSERT) ; tính toán liên tiếp các giá trị của biểu thức (phím CALC). Các kiến thức này cho phép tổ chức một « môi trường máy tính bỏ túi ».

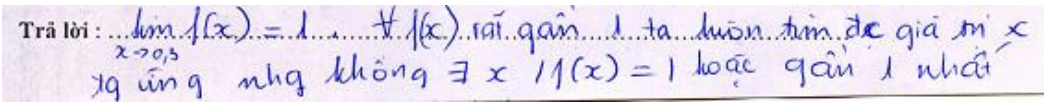
Đặc biệt, trong trò chơi « Tìm cặp số $(x ; f(x))$ tốt nhất », các yếu tố chính của môi trường sinh ra từ hành động tính các giá trị $f(x)$ bằng máy tính bỏ túi tại các giá trị x gần 0,3 của học sinh. Thông tin phản hồi bao gồm :

- hiển thị kết quả 1 trên màn hình máy tính bỏ túi khi tính $f(x)$ (khi x gần 0,3 với sai số 10^{-6} chẳng hạn)
- 1 là giá trị đã bị cấm
- chép lại kết quả từ màn hình và so sánh với giá trị $f(x)$ trước đó (giá trị sau gần hơn hay xa 1 hơn giá trị trước)
- kết quả hiển thị không thay đổi khi tính $f(x)$ (khi thêm các chữ số vào một số thập phân x hơn 10 chữ số)

Chiến lược « xấp xỉ x » thúc đẩy học sinh tìm cách chèn 0,3 vào một hệ thống các khoảng ngày càng nhỏ. Trong chiến lược này học sinh phải chuyển liên tiếp từ các số thập phân thuộc D_i sang các số thập phân khác thuộc D_{i+k} để tìm cặp số $(x ; f(x))$ tốt hơn. Hạn chế của máy tính bỏ túi (hiển thị kết quả 1 hay kết quả hiển thị không thay đổi) cho phép đặt vấn đề thay đổi chiến lược « xấp xỉ x » bằng chiến lược « xấp xỉ $f(x)$ ». Như vậy, phải từ bỏ tính toán bằng máy tính bỏ túi để áp dụng chiến lược « xấp xỉ $f(x)$ »: giải phương trình $f(x) = a$ (xấp xỉ 1) để suy ra giá trị x xấp xỉ 0,3 ; nghĩa là ngầm ẩn đi tìm một độ xấp xỉ x với 0,3 đủ để đảm bảo rằng $f(x)$ xấp xỉ 1 với sai số cho trước.

Sự thể chế hóa quan điểm « xấp xỉ $f(x)$ » và việc áp dụng kiến thức Giải tích để nhận dạng các đẳng thức kiểu « 0,999… = 1 » (trong cương vị giới hạn của một dạng viết thập phân vô hạn) cho phép chính thức loại bỏ thứ tự rời rạc trong các tập **D** và D_∞: không tồn tại phần tử đầu tiên cũng như cuối cùng của một tập không đóng của **D** và **R**.

Phần lớn học sinh của lớp thực nghiệm tuyên bố đã khám phá lại khái niệm giới hạn và gắn ký hiệu giới hạn với quan điểm « xấp xỉ $f(x)$ » cùng với thứ tự trù mật trong **R**.


Trả lời : $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$ ... ∀ f(x) rất gần 1 ta muốn tìm đc giá trị x tương ứng nhưng không ∃ x / f(x) = 1 hoặc gần 1 nhất

C. *Định nghĩa khái niệm giới hạn trong không gian tôpô metric* ***R*** *và lý luận bằng điều kiện đủ*

Việc giới thiệu khái niệm giới hạn bằng ngôn ngữ tôpô metric được thực hiện trong tình huống cuối cùng của công nghệ (tình huống 4). Định nghĩa khái niệm giới hạn bằng metric khoảng cách đòi hỏi phải chuyển từ lý luận tương đương (điều kiện cần và đủ) sang lý luận bằng điều kiện đủ.

Bài toán đặt ra cho học sinh là tìm kiếm một quả cầu tâm 0,3 sao cho các giá trị $f(x)$ của nó thuộc vào quả cầu tâm 1 với bán kính 10^{-n}. Bài toán này thúc đẩy phần lớn học sinh của lớp thực nghiệm vận dụng các kỹ thuật *chặn trên*, *chặn dưới* để so sánh các quả cầu (biên thập phân với biên hữu tỷ) và tính các khoảng cách đến 1 và đến 0,3 (bán kính các quả cầu).

Môi trường của tình huống 4 được bổ sung thêm các biểu diễn số (các biên hữu tỷ hay thập phân) trên trục số thực. Tương tác giữa học sinh với môi trường làm xuất hiện các kỹ thuật *chặn trên*, *chặn dưới* dựa vào thứ tự các số được suy ngược từ trục số thực (học sinh đã vận dụng ngầm ẩn các tính chất của quả cầu).

Trong trường hợp này, học sinh lớp thực nghiệm đã học được một lý luận đặc trưng của Giải tích « chủ ý làm mất một số trong các thông tin đầy đủ, giữ lại một số ít thông tin hơn, nhưng chúng mang nhiều ý nghĩa hơn và dễ thao tác hơn » (Legrand, 1991).

Thật vậy, chấp nhận « làm mất một số thông tin » cho phép học sinh tìm ra mối liên hệ đơn giản « dễ thao tác » giữa độ xấp xỉ $f(x)$ với 1 cho trước với độ xấp xỉ x với 0,3 đủ theo yêu cầu. Quan hệ này chính là phát biểu tương đương của khái niệm giới hạn bằng metric khoảng cách:

> Cách viết $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$ nghĩa là cho trước một khoảng $(1 - 10^{-n} ; 1 + 10^{-n})$ có các biên gần 1 như ta mong muốn (khi ta chọn $n \in \mathbf{N}$ đủ lớn), luôn tồn tại một khoảng $(0,3 - 10^{-n} ; 0,3 + 10^{-n})$ có các giá trị $f(x) \in (1 - 10^{-n} ; 1 + 10^{-n})$.

IV. Giới hạn của nghiên cứu và các hướng nghiên cứu mới

A. *Quan điểm « xấp xỉ x » có phải là chướng ngại khoa học luận của khái niệm giới hạn ?*

Trong các giai đoạn đầu của trò chơi « Tìm cặp số $(x ; f(x))$ tốt nhất », quan điểm « xấp xỉ x » xuất hiện vượt trội so với quan điểm « xấp xỉ $f(x)$ ». Chúng tôi phát biểu giả thuyết rằng : trong quá trình lĩnh hội khái niệm giới hạn, quan điểm « xấp xỉ x » có thể là *chướng ngại khoa học luận* của quan điểm « xấp xỉ $f(x)$ », quan điểm mang nghĩa chính xác của khái niệm giới hạn.

Một số câu trả lời của học sinh cho bộ câu hỏi liên quan đến các dạng viết thập phân vô hạn (DVTPVH) cũng cho phép quan sát các dấu hiệu của chướng ngại này. Thật vậy, các học sinh và sinh viên khẳng định « không tồn tại một số vô tỷ giữa 42,4 98 98… và 42,5 » giải thích như sau:

> « 42,49898… càng lúc càng tăng và tiến về 42,5 »
> « 42,49898… là số gần 42,5 nhất »

Muốn kiểm chứng giả thuyết đưa ra, chúng tôi cần thực hiện một nghiên cứu khoa học luận sâu hơn liên quan đến tri thức giới hạn.

B. *Trong luận án, chúng tôi đã giới hạn thực hiện ingénierie didactique* trên một hàm số đơn điệu, tại một điểm gián đoạn của hàm số và có thể bổ sung liên tục tại điểm này (thác triển liên tục hàm số).

Làm thế nào để mở rộng ingénierie didactique cho trường hợp các hàm số không đơn điệu và/ hay không bổ sung liên tục được trên một *khoảng thủng*[8] tại một giá trị làm gián đoạn hàm số?

Một hàm số như thế không nằm trong họ các hàm cơ bản quen thuộc ở phổ thông Việt Nam. Trong trường hợp này, công cụ đồ thị (biểu diễn đồ thị hàm số trên hệ trục tọa độ) giải thích cho khái niệm giới hạn chưa được triển khai trong nghiên cứu của chúng tôi sẽ có lý do để tồn tại.

C. *Vai trò của giáo viên trong các pha thể chế hóa của ingénnierie didactique*

Nghiên cứu của Margolinas (2004) nhấn mạnh vai trò của giáo viên trong các tình huống didactic của ingénierie didactique như sau:

> Liên quan đến triển vọng của ingénierie didactique xuất phát từ lý thuyết tình huống, các tình huống adidactic là một dạng nguyên lý hoạt động nào đó của các tình huống didactic. Ngay cả khi giáo viên ủy thác một tình huống adidactic cho học sinh thì giáo viên vẫn phải đảm bảo các quan hệ dạy học thích đáng. Sự cần thiết phải lồng tình huống adidactic vào tình huống didactic làm xuất hiện một áp lực giữa các tiến trình ủy thác và thể chế hóa, gây ra sự bấp bênh cho giáo viên. (Margolinas 2004, trang 34)

Phân tích biên bản các pha thể chế hóa trong ingénierie didactique của chúng tôi cũng chỉ rõ rằng giáo viên cần phải lựa chọn và tổ chức các can thiệp của mình nhằm đảm bảo tiến trình thể chế hóa bằng *pha hợp thức hóa*[9] chứ không chỉ bằng *pha đánh giá*[10]. Việc giáo viên có khuynh hướng kết luận bằng pha đánh giá được giải thích như sau:

> Trung tâm của vấn đề là : *giáo viên luôn có thể kết luận bằng cách đánh giá* […], ngược lại : *giáo viên chỉ có thể để cho học sinh tự hợp thức hóa lời giải của mình nếu môi trường cho phép*. Đối với giáo viên, hai kiểu kết luận này không bình đẳng. (Margolinas 2004, trang 43)

Như vậy, để các pha hợp thức hóa có thể diễn ra, cần phải tổ chức một môi trường thích đáng.

> Từ quan điểm này, giáo viên phải tin tưởng vào sự tương tác giữa học sinh với môi trường nhằm đem lại sự điều chỉnh kiến thức ở học sinh như đã dự kiến. Chính vì vậy, giáo viên phải cáng đáng vị trí người quan sát sự tương tác [học sinh – môi trường]. (Margolinas 2004, trang 35)

Trong luận án, chúng tôi chưa nghiên cứu đầy đủ những điều chỉnh của môi trường gây ra do các quyết định của giáo viên trong các pha thể chế hóa, cũng như chưa nghiên cứu đầy đủ những điều kiện và ràng buộc của giáo viên tại các thời khắc này. Đào sâu hướng nghiên cứu trên sẽ củng cố « khả năng sống » và khả năng tái thực hiện ingénierie didactique của chúng tôi.

D. *Như chúng ta đã thấy, mối quan hệ thể chế với các dạng viết thập phân vô hạn (hay sự thập phân hóa số thực)* không hề thay đổi kể từ trung học cơ sở ; ngay cả đối với các giáo viên trung học cơ sở và trung học phổ thông tương lai.

Làm sao xây dựng các bài toán xấp xỉ để nêu bật các quan hệ qua lại giữa « giới hạn - số - sự thập phân hóa » trong công tác đào tạo giáo viên?

---

[8] Nghĩa là (b ; c)\{a} với b < a < c.

[9] Chúng ta sẽ gọi pha kết luận là pha hợp thức hóa nếu ở pha này, học sinh tự mình quyết định công việc của mình hợp thức hay không. (Margolinas 2004, trang 43)

[10] Chúng ta sẽ gọi pha kết luận là pha đánh giá nếu ở pha này, giáo viên là người đánh giá sự hợp thức công việc của học sinh. Giáo viên phán xét và học sinh không thể chống lại. (Margolinas 2004, trang 43)

Vì muốn giảng dạy các tổ chức toán học liên quan đến các dạng viết thập phân và khái niệm giới hạn trong thể chế phổ thông tương lai thì mối quan hệ thể chế của giáo viên đối với các dạng viết thập phân cần phải được điều chỉnh.

Nhằm giải quyết vấn đề đào tạo giáo viên đặt ra, triển vọng xây dựng một ingénierie đào tạo được phát triển từ ingénierie didactique của luận án và có thể áp dụng được ở các trường sư phạm sẽ mở ra một hướng nghiên cứu mới cho chúng tôi.

BIBLIOGRAPHIE

En français

Groupe AHA (1999a) – *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse. Manuel pour l'élève.* Bruxelles : De Boeck.

Groupe AHA (1999b) – *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse. Guide méthodologique.* Bruxelles : De Boeck.

Arnaudières J. M. et Fraysse H. (1989)– *Cours de mathématiques 2 : Analyse*, Dunod Université .

Artigue M. (1990) - Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématique*, vol 9/3 édition la Pensée Sauvage, Grenoble.

Artigue M. (1996) – Réformes et contre – réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902 -1994), *Les Sciences au lycée*, pp. 195 – 215, INRP.

Artigue M. (1998) – Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de Première S, *Actes du colloque francophone européen, Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*, pp. 15 -38, IREM de Montpellier.

Artaud, Crehsto et Orléans (1997) – *Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques*, École d'été 9.

Bacherlard G. (1986) – *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie philosophie J. Vrin.

Bessot A. et Le Thi H.A. (1994) – Une étude du contrat didactique à propos de la racine carée, *Petit x n° 36*, pp. 39 -60.

Bessot A. (1995) – Contrat didactique – Outil central pour l'analyse des situations d'enseignement, *Actes du Colloque « Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants »*, Université de Pédagogie de Ho Chi Minh Ville.

Bessot A. et Comiti C. (2002) – *Cours de Thac si Didactique des mathématiques*, U.P.H.C.M – U.J.F. Grenoble I .

Bessot A. et Nguyen C.T. (2003) – La prise en compte des notions de boucle et de variable informatique dans l'enseignement des mathématiques au lycée, *Petit x n° 62*, pp.7-32.

Bessot A. et Birebent A. (2003) – Modèles didactiques des situations d'apprentissage, *cours de DEA EIAHD module D3*, U.J.F. Grenoble I.

Bessot A. et Nguyen C. T. (2005) – L'ingénierie didactique, l'exemple d'une recherche coopérative franco-vietnamienne », *Actes du premier séminaire franco – vietnamien en Didactique des Mathématiques*, Juin 2005, Université de Pédagogie de Ho Chi Minh Ville.

Berthelot C. R., (1983), *Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe de 1ère A, mémoire de D.E.A*, Université de Bordeaux I.

Bkouche R. (1996) – Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement. *Repères- IREM n°24*, pp. 67-76. Point – à - Mousson : Topiques éditions.

Birebent A. (2001) – *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français: choix des calculs trigonométriques pour une ingénierie didactique en classe de Première scientifique*, Thèse, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Bolzano B. (1817)- La théorie des nombres dans un ouvrage posthume manuscrit de Bernard Bolzano (traduction en français par Sebestik J.), *Revue d'Histoire Des Sciences*, t. XVII, 1964, pp. 129- 164.

Borel E. (1958) – *Les nombres premiers*, Presses Universitaire De France.

Bosch M., Espinoza L. et Gascon J. (2002) *El profesor como director de procesos de estudio: analisis de organizaciones didacticas espontaneas*, RDM 23/1, pp.79 –135, Edition la Pensée Sauvage, Grenoble.

Bourbaki N. (1960) –*Livre III Topologie général*, Hermann & Cie, Editeurs.

Bourbaki N. (1969) – *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, Hermann.

Boualem H. et Brouzet R. (2002) - *La Planète R*, Dunod.

Brézinski C. (1988) – *Introduction à la pratique du calcul numérique*, Dunod Université.

Bronner A. (2005) – Vers la recherche d'un milieu perdu pour l'apprentissage des nombres réels au collège : racine carrée et idécimalité, *Sur la théorie des situations didactiques : questions réponses, ouvertures*, Edition la Pensée Sauvage, Grenoble.

Bronner A. (1997) – *Etude didactique des nombres réels*, thèse, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Brousseau G. (1982 a) - Les objets de la didactique des mathématiques, in *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*, Olivet.

Brousseau G. (1982 b) - Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique, in *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*.

Brousseau G. (1986) –Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7.2, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau G. (1988) - Didactique fondamentale, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire,* Actes de l'université d'été, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux.

Brousseau G. (1998) - *Théorie des situations didactiques*, Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau G. et Nadine (1987) – *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*, Document pour les enseignants et pour les formateurs, IREM de Bordeaux.

Cauchy A. L. (1821) - *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, Paris, Gauthiers-Villars et Fils, Imprimeurs –Libraires du Bureau Des Longitudes, de l'Ecole Royale Polytechnique éd. (1847).

Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1989a), Le concept de rapport au savoir – Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD2-IMAG, n° 108, 211 – 235, IMAG, Grenoble.

Chevallard Y. (1989b), *Note de synthèse – Aspect d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Étude du cas de l'algèbre élémentaire*, Habilitation à diriger des recherches, 10/1/1989.

Chevallard Y. (1991) – La *transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, édition la Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par un approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 83 – 121, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, in Arsac et al. (éds.), *La transposition didactique à l'épreuve*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique, *Actes de l'U.E. de la Rochelle*.

Chevallard Y. (2000), Évaluation, véridiction, objectivation, in Colomb et Marsenach (dir.), *L'évaluation en révolution*, INRP éditions.

Combette E. (1882) - *Cours d'arithmétique à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences et des candidats aux écoles du gouvernement*, Librairie Germer de Baillière et Cie, Paris.

Cornu B. (1983) - *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*, Thèse, Université Scientifique Et Médicale De Grenoble.

Cornu B. (1982) - Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite, *Bulletin n° 335 APMEP*, Septembre 1982.

Cousquer E. (1995) – *Les constructions des nombres réels*, Actes de l'Université d'Eté.

D'Alembert, Le Rond J. et al. (1785) - *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, Panckoucke, Paris (rééd. Par ACL Editions, Paris, 1987).

Daumas M. et Muller J-M. (1997) – *Qualité des calculs sur ordinateur : Vers des arithmétiques plus fiables ?*, Masson, Paris.

Delahaye J. P. (2000) – *Merveilleux nombres premiers*, Belin. Pour La Science.

Descartes R. (1637) – *La Géométrie* (Paris, Librairie Scientifique A. Hermann, Rééd. 1886.)

Dieudonné J. (1979) – *Eléments d'analyse 1*, Gauthier – Villars.

Dieudonné J. (1979) – *Calcul infinitésimal*, Hermann.

Digneau. J.M. (1989)- *Une étude des connaissances sur les nombres à l'entrée de la 2e*, Mémoire DEA, Université de Bordeaux I.

Dhombres J. (1995) - Réels (Nombres), *Encyclopaedia Universalis 19*, France S. A.

Dhombres J. (1978) - *nombre, mesure et continu. épistémologie et histoire*, Cedic/Fernand Nathan.

Dumont J. P. (1992) - Comment les Eléments d'Euclide traitent du continu sans recourir à l'infini, *Histoire d'infini*, Actes du 9ème Colloque INTER -IREM épistémologie et histoire des mathématiques, pp. 22-23, Mai 1992.

Euclide – *Les Eléments*, *Œuvres*, traduction française de Peyard, Blanchard, Paris, rééd. 1966.

Houzel C., Ovaert J.-L., Raymond P. et Sansuc J.-J. (1976) – *Philosophie et calcul de l'infini*, Maspero.

Izorche M. L. (1977) – *Les réels en classe de seconde*, Mémoire de DEA, Université de Bordeaux 1.

Laborde C. (2003) - Instrumental et instrumentalisation, *cours de DEA EIAHD module D2*, U.J.F. Grenoble I.

Lapierre C. (1999) – *Le trait de fraction et les rationnels non décimaux en classe de 6ième*, Mémoire professionnel de mathématiques, IUFM de Grenoble.

Lebesgue H. (1931) - *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard 1975.

Legrand M. (1991) – *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse*, Actes colloque de Nice.

Le Thai Bao T.T. (2004) – *Etude sur la notion de limite de fonction dans l'enseignement des mathématiques : Ingénierie didactique dans environnement calculatrice*, Mémoire DEA, Université de Pédagogie de HCM ville.

Le Thai Bao T.T. (2005) – Etude didactique des relations entre l'enseignement de la notion de limite et la programmation d'algorithmes de calcul dans un environnement « calculatrice », *Actes du premier séminaire franco – vietnamien en Didactique des mathématiques*, Université de Pédagogie de HCM ville, Juin 2005.

Le Van T. (2001) - *Etude didactique de lien entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématique au lycée en France et au Vietnam*, Thèse, Université Joseph Fourier – Grenoble I .

Léonhard et Epistemon (collection) (1982) – *Mathématique : Savoir – faire en 1er année*, Cedic/Fernand Nathan.

Matheron Y. (1999) - Analyser les praxéologies: Quelques exemples d'organisations mathématiques, *Petit x n^{0} 54*, pp. 51 - 78.

Margolinas C. (1985) – *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4e, le nombre dans tous ses états*, Mémoire DEA, Université de Bordeaux I.

Margolinas C. (1988) – Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels, *Petit x n°16*, pp. 51 - 66.

Margolinas C. (1993) – *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

Margolinas C. (2004) – *Point de vue de l'élève et du professeur – Essai de développement de la théorie des situations didactiques*, Habilitation à diriger les recherches en Sciences de l'Education, Université de Provence.

Michel A. et Tison P. (1981) – Exemples d'approximations de nombres réels par des suites, *Bulletin Inter IREM n° 20*, décembre 1981.

Neyret R. (1995) – *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts Universitaire de Formation des Maîtres*, thèse, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Newton I. (1671) - *La méthode des fluxions et des suites infinies* (traduit par Buffon), Blanchard, Paris, 1994).

Newton I. (1707)– *Arithmétique universelle* (traduite du latin en français par Noël Beaudeux, vol.2, P. Bernard, 1802).

Nguyen C.T. (2002) - *La notion d'algorithme dans l'enseignement des mathématiques au lycée: Comment l'émergence des notions de boucle et de variable en Informatique s'articule à des connaissances en Mathématiques?* Mémoire de DEA, Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Nguyen C.T. (2005) – *Etude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*, thèse, Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Ovaert J.-L. et Lazet D. (1981) - Pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'analyse, *Bulletin Inter IREM n° 20*, Décembre 1981.

Ovaert J. L. (1981) – Approximation des nombres réels par des suites : recherche de solutions approchées d'équations numériques, *Bulletin Inter IREM n° 20*, décembre 1981.

Perrin – Glorian M. J. (1992) – *Aires de surfaces planes et nombres décimaux, Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*, thèse, Université de Paris VII.

Reisz D. (1981) – Interpolation et approximation de fonction, *Bulletin Inter IREM n° 20*, Décembre 1981.

Robert A. (1982) - L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 3.3, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert A. (1983) – Convergence des suites numériques en DEUG, *Bulletin n°340 AMEP*, septembre.

Robinet J. (1983) – Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 4.3, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

Schneider M. (2001) – Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 21/1.2, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

Sierpinska A. (1985) - Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol.6.1 Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

Stein K. (1967) - *Mathématiques ce monde que créa l'homme*, Dunod.

Stevin S. (1585)– *Traité des incommensurables grandeurs*, De Thiende.

Trouche L. (1996) - *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans "un environnement calculatrice": Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse, Université Montpellier II.

Viallard M. (1981), Majorer – Minorer – Encadrer. *Bulletin Inter IREM n° 20*, Décembre 1981.

Vergnaud G. (1990) - La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol.10 n°2-3, pp.133-170, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

En anglais

Dedekind R. (1872)- Continuity and irrational numbers. Edition Dover (1963) (Traduction en francais par Sinaceur H.)

Bessot A. et Comiti C. (2005) – « Some comparative studies betwen France and Vietnam Curriculums » in *Mathématics Education in different tradition : A comparative study in Asian and Western countries*, Edition Kluwer.

Boyer C. B. (1968), *A history of mathematics*, Wiley & Sons.

Lakatos I. (1978) – *Cauchy and the continuum dans Mathematics*, Science & Epistemology, Cambridge University Press.

Lipschutz S. (1965) - *General Topology*, Schaum's Outlines.

En vietnamien

Nguyen Van T., Ta Duy P. (2001) - « Kì thi giải toán trên máy tính bỏ túi, 5 năm nhìn lại » (Le concours de la résolution des problèmes mathématiques sur la calculatrice, un regard rétrospectif sur cinq dernières années) in Actes du colloque *Quelques réflexions pour une amélioration de la pratique de calcul sur la calculatrice de la marque Casio* (pp 25-31), Ministère de l'Education et de la Formation du Viêt-nam.

Nguyen Van T. et *al.* (2003) – « *Hướng dẫn thực hành toán trên máy tính bỏ túi Casio Fx-500MS, Fx-570MS »* (Guide pratique sur la résolution des problèmes mathématiques sur la calculatrice Casio Fx-500MS, Fx-570MS), Département de l'enseignement secondaire du Ministère de l'Education et de la Formation au Viêt-nam.

Nguyen Van T. et *al.* (2005) – « *Máy Tính CASIO fx 570MS : Hướng dẫn sử dụng và giải toán, dùng cho các lớp 10 – 11 -12* » (La calculatrice Casio Fx-570MS : Guide pratique sur la résolution des problèmes mathématiques dans les classes 10-11-12), Département de l'enseignement secondaire duMinistère de l'Education et de la Formation au Viêt-nam.

Nguyen T. C. (2000) – « *Giải phương trình và hệ phương trình bằng máy tính bỏ túi »* (Résolution des équations et inéquations par la calculatrice », Edition « Nhà xuất bản Giáo dục », Ho Chi Minh Ville, Viêt-nam.

Nguyen Ba K, Vu D.T. (1992), *Phương pháp dạy học môn Toán* (Méthodologie de l'enseignement des mathématiques), Edition « Nhà xuất bản Giáo dục », Hanoi, Viêt-nam

Nguyen Ba K, Le Khac T. (1993), *Dạy học một số yếu tố của Toán học tính toán và Tin học* (Enseignement quelques éléments de l'Analyse numérique et de l'Informatique), Edition « Nhà xuất bản Giáo dục », Hanoi Viêt-nam.

Pham Huy N., Phan Huy K., Tạ Duy P. (2001) - *Cơ sở giải tích phổ thông : Lý thuyết và thực hành tính toán* (fondement de l'analyse dans l'EMS : théorie et pratique des calculs, Edition « Khoa học và Kỹ thuật », Hanoi Viêt-nam.

Phan Thanh Q. (1998) – « *Giải bài tập Toán 6*, tập 2 » (Résolution des exercices de Mathématique 6, vol 2), Edition « Nhà xuất bản TP HCM »

Le T. H. C. (2003) – « Nghịch lý « Asin đuỗi rùa » và khái niệm giới hạn trong Hình học » (Paradoxe « Achille et le tortue » et concept de limite dans Géométrie », *Thế giới Toán – Tin học* (Monde mathématique –informatique), tập san số 3 của Khoa Toán – Tin học ĐHSP TP HCM (Bulletin n°3 du Département des Mathématiques –Informatique de l'UPHCM), tr 5 –8 (pp. 5- 8).

Manuels scolaires français

Girard G., Lentin A. (1964), *Mathématiques élémentaires (deux tomes)*, Cours Maillard, Editions Hachette.

Collection Queysanne-Revuz de Collège et de Lycée du programme de la Réforme des Mathématiques Modernes (1968/1977).

Collection Dimathème de Lycée (1982) du programme de la Contre -Réforme des Mathématiques Modernes.

Misset – Delaruelle (1990) - *Maths Seconde* (Collection Déclic), Hachette.

Manuels et programmes scolaires vietnamiens (édition du Ministère d'Education et de Formation)

Programmes de la « réforme de l'éducation » du Collège (1994 -2002) et leur collection de manuels.

Nouveau programme du Collège (à partir des 2002) et collection de ses manuels.

Programme de la « réforme de l'éducation » du Lycée (1990 -1999) et ses trois collections de manuels.

Programme en vigueur de la « harmonisation et unification » (à partir des 2000) et sa collection de manuels.

Nouveau programme du Lycée (applicable 2008) et sa collection expérimentée de manuels.