



**HAL**  
open science

# Processus de Markov diffusifs par morceaux: outils analytiques et numériques

Julien Bect

► **To cite this version:**

Julien Bect. Processus de Markov diffusifs par morceaux: outils analytiques et numériques. Automatique / Robotique. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT : . tel-00169791

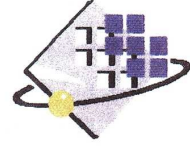
**HAL Id: tel-00169791**

**<https://theses.hal.science/tel-00169791>**

Submitted on 4 Sep 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° D'ORDRE : 8675

UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI  
Faculté des Sciences d'Orsay

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : physique

École Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information,  
des Télécommunications et des Systèmes »

Présentée par : Julien BECT

**Processus de Markov diffusifs par morceaux :  
outils analytiques et numériques.**

Soutenue le 18 juin 2007 devant les membres du jury :

M.	DUFOUR	François	Rapporteur
M.	MALHAMÉ	Roland	Rapporteur
M.	BERTOIN	Jean	Examineur
M.	WALTER	Éric	Président
M <sup>elle</sup>	BAILI	Hana	Encadrante
M.	FLEURY	Gilles	Directeur de thèse



## Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse Gilles FLEURY et mon encadrante Hana BAILI, pour m'avoir fait confiance et orienté vers un thème de recherche passionnant, pour leur disponibilité et leur gentillesse.

Je remercie vivement Roland MALHAMÉ et François DUFOUR, pour la spontanéité avec laquelle ils ont accepté de relire attentivement ce travail, pour leurs rapports très favorables et pour avoir fait le déplacement jusqu'à Gif-sur-Yvette pour faire partie de mon jury. J'ai été enchanté de faire (enfin) leur connaissance le jour de la soutenance !

Je remercie Jean BERTOIN pour sa disponibilité, pour ses réponses rapides et toujours éclairantes à mes questions naïves, et bien sûr pour sa participation à mon jury. J'espère avoir l'occasion de discuter à nouveau avec lui de cette petite balle qui rebondit (même si pour lui il s'agit d'un piéton dans une foule).

Je remercie également Éric WALTER, pour avoir accepté d'assister à la soutenance et d'en présider le jury.

Je remercie tous ceux avec qui j'ai partagé les bureaux A3-33 et A3-24 de m'avoir supporté. . . Dans un ordre plus ou moins chronologique, les « anciens » : Arnaud RIVOIRA, Morgan ROGER – courage, le bout du tunnel est proche – et Christophe WAKIM, et les petits nouveaux : Mabrouka EL GUEDRI, Julien VILLEMONTÉIX et Sylvain VINET.

Merci aussi à la team libanaise pour sa bonne humeur et ses petits gâteaux : Rawad ZGHEIB, Hassan EL HABIAD et Karin EL CASSIS. Le rire si particulier de Rawad résonnera encore longtemps dans ce couloir !

Merci aussi à José PICHERAL, Emmanuel VAZQUEZ et Jérôme JUILLARD, je ne sais pas trop pour quoi, mais leur nom se devait de figurer sur cette page.

Mon estomac remercie le CESFO, pour la qualité jamais démentie de ses repas, en espérant qu'il continue encore longtemps dans cette voie.

Je dédie ce travail à mes parents, à mes grand-parents,

À Élodie.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1	Présentation générale du sujet . . . . .	1
2	Dynamiques hybrides et processus de Markov . . . . .	2
3	Plan de la thèse . . . . .	7
4	Publications relatives à ce travail . . . . .	9
<b>II</b>	<b>Processus diffusifs par morceaux : définition, constructions, et propriétés</b>	<b>11</b>
1	Introduction . . . . .	11
1.A	Objectifs et plan du chapitre . . . . .	11
1.B	Le formalisme de la théorie des processus de Markov . . . . .	12
2	Définition et propriétés élémentaires . . . . .	15
2.A	Des processus de diffusion aux processus diffusifs par morceaux . . . . .	15
2.B	Pourquoi considérer des processus non conservatifs ? . . . . .	20
2.C	Sauts prévisibles et totalement inaccessibles . . . . .	22
2.D	Passé strict et noyaux de réinitialisation . . . . .	24
3	Constructions de processus diffusifs par morceaux . . . . .	25
3.A	Introduction . . . . .	25
3.B	Mise en œuvre du théorème de renaissance . . . . .	29
3.C	Construction à partir d'un processus de base conservatif . . . . .	34
3.D	Quelques lemmes techniques . . . . .	39
<b>III</b>	<b>Systemes hybrides stochastiques</b>	<b>43</b>
1	Introduction . . . . .	43
2	Quels ingrédients pour un système hybride stochastique ? . . . . .	44
2.A	L'espace d'état hybride . . . . .	45
2.B	Équation différentielle stochastique et processus de base . . . . .	48
2.C	Construction d'un SHS à partir de son processus de base . . . . .	51
2.D	Conditions suffisantes pour que le processus soit conservatif . . . . .	54
2.E	Formule d'Itô généralisée et réalisation canonique . . . . .	56
3	Générateur infinitésimal et formule de Dynkin . . . . .	60
3.A	Introduction, définitions et notations . . . . .	60
3.B	Compensation des sauts et système de Lévy . . . . .	65
3.C	Le processus $\bullet M^{\varphi, h}$ et la formule de Dynkin généralisée . . . . .	68
3.D	Un résultat concernant le deuxième générateur étendu . . . . .	71
4	Sauts forcés et phénomène de Zénon : deux exemples . . . . .	74
4.A	Le modèle de Malhamé-Chong étendu à deux pièces . . . . .	74
4.B	Le modèle de la balle qui rebondit, avec une force aléatoire . . . . .	78

<b>IV</b>	<b>Équations de Fokker-Planck-Kolmogorov généralisées</b>	<b>85</b>
1	Introduction . . . . .	85
1.A	De la formule de Dynkin à l'équation de Fokker-Planck . . . . .	86
1.B	Hypothèses et notations . . . . .	87
2	L'équation de FPK abstraite . . . . .	92
2.A	La notion d'intensité moyenne de sauts . . . . .	93
2.B	Établissement de l'équation de FPK abstraite . . . . .	95
2.C	Calcul des termes de l'équation lorsqu'une ddp régulière existe . . . . .	98
3	Quelques exemples d'équations de FPK généralisées . . . . .	102
3.A	Équation de Liouville, de Fokker-Planck, et équation maîtresse . . . . .	103
3.B	Diffusions alternantes et généralisation . . . . .	105
3.C	Une classe remarquable de modèles à sauts forcés . . . . .	107
<b>V</b>	<b>Application au calcul de la loi stationnaire pour des SHS à sauts forcés</b>	<b>111</b>
1	Introduction : résolution numérique de l'équation de FPK généralisée (pourquoi et comment) . . . . .	111
1.A	Un rapide état de l'art des méthodes numériques . . . . .	112
1.B	Choix d'une approche adaptée pour un problème donné . . . . .	113
1.C	Plan du chapitre . . . . .	114
2	Le modèle de Malhamé et Chong à deux dimensions . . . . .	115
2.A	Existence et unicité de la loi stationnaire, $f$ -ergodicité exponentielle . . . . .	115
2.B	Un schéma en volumes finis . . . . .	116
2.C	Référence Monte-Carlo : un schéma d'Euler amélioré . . . . .	119
2.D	Résultats numériques . . . . .	121
3	Étude d'un modèle d'éolienne à vitesse variable . . . . .	127
3.A	Description du modèle . . . . .	128
3.B	Construction d'un processus diffusif par morceaux . . . . .	133
3.C	L'équation de FPK généralisée . . . . .	137
3.D	Schéma de discrétisation . . . . .	141
3.E	Résultats numériques . . . . .	143
3.F	Conclusions . . . . .	149
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>151</b>
	<b>Notations</b>	<b>155</b>
1	Symboles alphabétiques . . . . .	155
2	Autres notations . . . . .	156
3	Abbréviations . . . . .	157
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>159</b>

## CHAPITRE I

# INTRODUCTION

## 1 Présentation générale du sujet

Les systèmes dynamiques « hybrides » sont au moins aussi anciens, observent Branicky, Borkar et Mitter (1998), que le relais électromécanique – inventé en 1835 par J. Henry. Néanmoins, des premiers travaux sur le sujet en automatique, dans les années soixante, jusqu’aux recherches récentes autour des systèmes hybrides stochastiques, aucun consensus ne semble avoir été trouvé quant à la définition de ce qu’est réellement un système dynamique hybride : disons donc, pour le moment, qu’il s’agit d’un système dont la dynamique est composée d’une partie « continue », typiquement modélisée par une équation différentielle provenant de la physique, et d’une partie « discrète », parfois qualifiée d’évènementielle, correspondant par exemple à la présence d’un contrôleur à états discrets.

Nous nous intéressons, dans ce travail, aux modèles probabilistes qui résultent de la prise en compte d’incertitudes dans des systèmes possédant une dynamique hybride : entrées bruitées, dynamique mal connue, événements aléatoires, etc. Ce type de modèle est, le plus souvent, qualifié de Système Hybride Stochastique (SHS) dans la littérature automatique ; nous avons cependant préféré intituler notre mémoire « processus de Markov diffusifs par morceaux », pour des raisons qui seront expliquées plus loin. Cette appellation, traduction du *piecewise diffusion processes* proposé par Blom (1988), fait évidemment référence aux fameux *piecewise deterministic processes* de Davis (1984).

La motivation pour considérer de tels modèles provient de nombreux domaines d’application. Les modèles à sauts de paramètres markoviens sont classiquement utilisés, entre autres, dans l’étude des problèmes de suivi de cibles manœuvrantes ou de contrôle optimal d’ateliers de production. Des modèles hybrides surviennent également, de manière générale, en lien avec les techniques de contrôle impulsif pour les processus de diffusion, qui trouvent des applications par exemple en mathématiques financières ou encore dans les problèmes de récolte optimale de ressources renouvelables. Plus généralement, des modèles stochastiques hybrides sont utilisés dans des situations où un système comportant une partie numérique – ou impliquant des prises de décision – interagit avec un environnement incertain. Récemment, les projets HYBRIDGE et COLUMBUS<sup>1</sup> ont mis en évidence la nécessité d’un cadre théorique unifié pour les modèles stochastiques hybrides dans le domaine des systèmes « critiques pour la sûreté » (*safety-critical*), par exemple les systèmes embarqués dans les transports aérien et automobile, ou encore les systèmes de gestion du trafic aérien

---

<sup>1</sup>Projets du 5<sup>e</sup> PCRD de la Commission Européenne, IST-2001-38314 et IST-2001-32460.  
<http://hosted.nlr.nl/public/hosted-sites/hybridge>  
<http://www.columbus.gr>



(Bujorianu et al., 2003 ; Lygeros, 2004). Les travaux publiés dans le cadre de ces deux projets, en particulier ceux de J. Lygeros et de ses collaborateurs, ont sans nul doute contribué à donner une nouvelle jeunesse à la recherche autour des SHS : ils ont été une source importante d’inspiration pour le travail présenté dans ce mémoire. Signalons également que les modèles stochastiques hybrides pourraient avoir un rôle à jouer en biologie des systèmes, notamment comme outil pour la modélisation et l’analyse des réseaux de régulation génétiques (Alur et al., 2002 ; Hu et al., 2004 ; Wolf et Arkin, 2003).

Dans tous ces domaines d’application, que ce soit comme solution à un problème de contrôle, ou bien du fait même de la modélisation choisie, on se ramène le plus souvent – à condition de choisir une représentation d’état convenable – à ce que nous appellerons un processus diffusif par morceaux, c’est-à-dire à un modèle qui se présente comme un processus de Markov  $X$  à temps continu, dont la dynamique est par morceaux celle d’un processus de diffusion. (Le mot « diffusion » est à prendre ici en un sens très large, la composante diffusive étant dans bien des applications dégénérée voire nulle.) La dynamique discrète correspond alors à des sauts de la trajectoire  $t \mapsto X_t$  dans l’espace d’état  $E$ , à des instants que nous noterons  $\tau_k$ , et l’expression « par morceaux » signifie qu’ils peuvent être ordonnés en une suite croissante  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ .

Un atout important des processus de diffusion, du point de vue des applications, est le lien très fort qu’ils entretiennent avec les Équations aux Dérivées Partielles (EDP). En effet, bon nombre de problèmes concernant les processus de diffusions peuvent se ramener à la résolution d’une EDP, ce qui permet – lorsque la dimension de l’état est suffisamment faible – de les résoudre sans passer par une méthode de type Monte-Carlo<sup>2</sup>. En particulier, l’équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK), souvent appelée simplement « équation de Fokker-Planck » ou encore « équation de Kolmogorov progressive », régit la propagation de l’incertitude sur l’état dans le temps : elle permet de calculer la loi  $\mu_t$  de l’état  $X_t$ , à chaque instant  $t > 0$ , connaissant la loi initiale  $\mu_0$ . Elle permet également, lorsqu’un régime stationnaire existe, de calculer la loi invariante correspondante : c’est donc un outil utile dans de nombreuses applications.

L’objectif initial du travail présenté dans ce mémoire était de comprendre comment l’équation de FPK se généralise à des modèles stochastiques « hybrides », c’est-à-dire possédant une dynamique diffusive par morceaux. Nos résultats dans cette direction constituent la deuxième partie de ce mémoire, composée des chapitres IV et V. Par ailleurs, nous avons été amenés, pour traiter ces questions de façon aussi générale que possible, à rechercher un cadre théorique unifié regroupant les différentes classes de modèles rencontrées dans la littérature : nous avons pour cela introduit la notion générale de processus diffusif par morceaux, poursuivant ainsi le travail engagé par Bujorianu et Lygeros (2003, 2004a,c) sur les SHS « généraux ». Notre contribution sur ce sujet fait l’objet de la première partie du mémoire, composée des chapitres II et III.

## 2 Dynamiques hybrides et processus de Markov

Avant de présenter plus en détail nos contributions, et afin de bien situer notre travail dans la littérature concernant les systèmes hybrides stochastiques, nous établissons dans la suite de cette section une typologie des différentes classes de modèles qui ont été considérées jusqu’à présent<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>La situation est inversée lorsque la dimension est élevée : on a alors plutôt tendance à considérer les processus de diffusion (et les méthodes de simulation associées) comme un outil pour résoudre certaines EDP.

<sup>3</sup>Précisons que nous n’essayons aucunement ici de faire une bibliographie exhaustive sur le thème des systèmes hybrides stochastiques, ce qui supposerait de couvrir des thèmes aussi variés que : la construction des modèles

Cette courte bibliographie s'inspire en partie du travail de Bujorianu et al. (2003) et Pola et al. (2003), à qui nous empruntons en particulier la distinction essentielle entre les *sauts forcés* et les *sauts spontanés*, que nous réutiliserons tout au long du mémoire : les sauts forcés sont ceux qui surviennent lorsque l'état  $X_t$  rencontre un certain sous-ensemble de l'espace d'état  $E$  (que l'on appelle généralement la garde) ; les sauts spontanés sont des sauts « imprévisibles », auxquels on peut – le plus souvent – associer une *intensité stochastique*  $\lambda(X_t)$  comme dans le cas d'une chaîne de Markov à temps continu (CMTC).

(2.1) **Remarque.** Nous avons pris d'emblée le parti de définir le caractère hybride d'un modèle par rapport à sa dynamique, d'une manière qui présuppose une représentation continue du temps. Cependant, certains auteurs parlent également de modèle hybride dès lors que l'espace d'état  $E$  n'est pas connexe, par exemple lorsqu'il est de la forme  $E = \Omega \times \mathbb{R}^n$ , où  $\Omega$  est un ensemble dénombrable : on peut alors tout à fait, de ce point de vue, qualifier d'hybrides certains modèles à temps discret, mais ils ne possèdent pas une « dynamique hybride » au sens où nous l'avons défini. Les deux points de vue sont bien sûr reliés, en temps continu, puisqu'un système évoluant sur un espace d'état hybride ne peut changer de mode (i.e. de composante connexe) sans effectuer un saut. Nous noterons systématiquement  $X_t = (Q_t, Z_t)$  l'état hybride lorsque  $E = \Omega \times \mathbb{R}^n$  : on appelle  $Q_t$  la composante discrète, ou mode, et  $Z_t$  la composante continue<sup>4</sup>.

### Années 60 et 70 : modèles à sauts de paramètres markoviens et EDS à sauts

Durant les années 60 et 70, la notion de système hybride correspondait essentiellement à ce que l'on appelle maintenant des modèles à « sauts de paramètres markoviens », c'est-à-dire des modèles construits sur un espace d'état de la forme  $E = \Omega \times \mathbb{R}^n$ , où  $\Omega$  est un ensemble fini, dans lesquels la composante discrète  $Q_t \in \Omega$  est une CMTC. La dynamique de la composante  $Z_t \in \mathbb{R}^n$  peut être décrite par une Équation Différentielle Ordinaire (EDO), auquel cas on parle de modèle « non diffusif », ou plus généralement par une Équation Différentielle Stochastique (EDS), auquel cas on parle de modèle « diffusif ».

Le contrôle optimal de tels systèmes, dans le cas non diffusif, a été étudié à partir du début des années 60 (Krasovskii et Lidskii, 1961 ; Lidskii, 1963) et a donné lieu ensuite à de nombreux travaux (voir, par exemple, Rishel, 1975a,b ; Sworder, 1969, 1976). Le cas où l'EDO est linéaire, par rapport à la composante continue de l'état et par rapport au contrôle, est traité en détail par Mariton (1990) sous le nom de *jump linear system*.

Des modèles diffusifs à sauts de paramètres markoviens ont été considérés à peu près à partir de la même époque, par différents auteurs (Davis, 1975 ; Fujishige et Sawaragi, 1974 ; Sawaragi et al., 1974 ; Shiryaev, 1966), du point de vue du filtrage et du contrôle optimal. Le terme brownien joue le rôle de bruit d'état et/ou d'observation. Lorsque la composante continue  $Z_t$  est observée, mais pas la composante discrète  $Q_t$ , on parle aussi de « modèle de Markov caché » (*Hidden Markov Model*, HMM), même si ce terme est le plus souvent réservé à des modèles à temps discret (voir par exemple Elliott et al., 1995, qui traite parallèlement les HMM à temps discret et à temps continu).

Les modèles à sauts de paramètres markoviens permettent de considérer des systèmes dont les caractéristiques sont susceptibles de varier soudainement, de façon imprévisible. De nombreux phénomènes peuvent être capturés de cette manière : le passage de nuages devant les héliostats

---

et propriétés fondamentales, l'étude des différentes formes de stabilité / ergodicité, l'estimation de paramètres, le filtrage, les problèmes de contrôle optimal, . . .

<sup>4</sup>L'adjectif continu se réfère seulement à la nature de l'espace dans lequel  $Z_t$  prend ses valeurs, la trajectoire  $t \mapsto Z_t$  pouvant très bien être discontinue.

d'une centrale solaire (Sworder et Rogers, 1983), les pannes dans un atelier de production (Malhamé et Boukas, 1991), ou encore les changements de modes de déplacement d'un piéton (Wakim et al., 2004) ou d'une cible manœuvrante (Lasdas et Davis, 1989).

(2.2) **Remarque.** Tous les processus de Markov que nous avons regroupés sous l'appellation « modèles à sauts de paramètres markoviens » sont des cas particuliers de la théorie des *évolutions aléatoires*, initiée par Griego et Hersh (1969, 1971), et exposée en détail par Pinsky (1991).

Par ailleurs, au cours des années 70, le calcul stochastique s'est généralisé aux processus à trajectoires discontinues, ce qui a permis d'envisager des « EDS à sauts » sur  $E = \mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire des EDS dirigées non plus seulement par un mouvement brownien, mais aussi par une mesure aléatoire de Poisson (Jacod, 1979). Des modèles non diffusifs, construits à l'aide d'une EDS dirigée par un processus de Poisson, ont ainsi été utilisés pour modéliser le bruit de grenaille en électronique (Gardiner, 1985), les catastrophes en théorie de l'assurance (Jang et Krvavych, 2004), ou encore la dynamique d'une ressource renouvelable sujette à des variations exceptionnelles (Hanson et Tuckwell, 1997). On qualifie, plus généralement, de *jump-diffusion* les modèles qui s'expriment sous la forme d'une EDS contenant à la fois un terme de diffusion et un terme de saut. L'utilisation de tels processus en mathématiques financières a été initiée par Merton (1976); consulter par exemple Cont et Tankov (2003) pour un exposé détaillé sur ce sujet. (Signalons que de telles EDS à sauts permettent de considérer des modèles dans lesquels l'ensemble des temps de sauts est dense dans  $\mathbb{R}_+$ , et ne peut donc pas être ordonné en une suite croissante  $\tau_1 < \tau_2 < \dots$  : par exemple une EDS dirigée par un processus de Lévy dont la mesure de Lévy n'est pas finie. Un tel processus ne possède pas une dynamique hybride au sens où nous l'entendons.)

### Années 80 et 90 : apparition de nouvelles classes de systèmes hybrides stochastiques

Brockett et Blankenship (1977) ont montré que l'on pouvait représenter un système à sauts de paramètres markoviens, à valeurs dans  $\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^n$ , comme solution d'une EDS à sauts sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ceci unifie donc, d'une certaine manière, les deux grandes classes de modèles hybrides connues dans la littérature des années 60 et 70 : les modèles à sauts de paramètres markoviens et les EDS à sauts. Il convient néanmoins de souligner que ces modèles possèdent une dynamique qui n'est que « faiblement hybride », puisque la composante continue  $Z_t$  n'a aucune influence sur la composante discrète  $Q_t$  ou sur la mesure aléatoire qui produit les sauts. Ces modèles ont donc été généralisés par la suite dans deux grandes directions que nous allons maintenant évoquer, conduisant à des dynamiques véritablement hybrides – et permettant ainsi de modéliser des situations où il existe une véritable rétroaction de la composante continue sur la composante discrète.

Dans le cas des sauts de paramètres markoviens, la dynamique de la CMTC  $Q_t$  est entièrement déterminée par son générateur infinitésimal  $(\lambda_{qq'})$ ,  $q, q' \in \mathcal{Q}$ . Une première façon d'introduire une rétroaction « en loi » de la composante continue  $Z_t$  sur la dynamique de la composante discrète  $Q_t$  consiste (formellement) à remplacer les intensités constantes  $\lambda_{qq'}$  par des fonctions  $\mathbb{R}^n \ni z \mapsto \lambda_{qq'}(z) \geq 0$  de la composante continue. Pour construire le processus de Markov correspondant à cette description, plusieurs approches ont été adoptées : la généralisation de la construction par renaissance des évolutions aléatoires (Siegrist, 1981), l'étude d'un problème de martingales (Bensoussan et Lions, 1981) ou encore la représentation sous forme d'une EDS à sauts (Blom, 1988), suivant une idée de Jacod et Protter (1982).

Les *diffusions alternantes*<sup>5</sup> de Ghosh et al. (1992, 1997) font partie de cette classe de modèles.

<sup>5</sup>Nous utiliserons « diffusion alternante » comme traduction de l'anglais *switching diffusion*. L'expression est

Il s'agit d'une généralisation assez immédiate des modèles diffusifs à sauts de paramètres markoviens : la composante  $Z_t$  évolue toujours continûment dans  $\mathbb{R}^n$ , selon une EDS dont les coefficients dépendent de  $Q_t$ , mais cette fois la dynamique de  $Q_t$  dépend, comme nous l'avons expliqué, de la composante  $Z_t$ . Les modèles de systèmes hybrides stochastiques proposés par Blom (2003) et Ghosh et Bagchi (2004, section 1) sont un peu plus généraux que les diffusions alternantes – ils autorisent des sauts de la composante  $Z_t$  aux instants  $\tau_k$  – mais relèvent de la même classe de processus, que nous appellerons des « diffusions à sauts spontanés ».

Une rétroaction de  $Z_t$  sur  $Q_t$  peut également être introduite à l'aide de sauts forcés, déclenchés par exemple lorsque  $Z_t$  franchit un certain seuil (si  $n = 1$ ), ou plus généralement lorsque  $X_t = (Q_t, Z_t)$  atteint un certain sous-ensemble  $E^B \subset E$  de l'espace d'état. (Observons que cette dernière formulation, très générale, est valable pour un espace d'état quelconque, et pas seulement pour une structure de la forme  $Q \times \mathbb{R}^n$ .) Il s'agit d'un type de sauts fondamentalement différent des sauts spontanés rencontrés jusqu'ici, dont le déclenchement n'est plus défini en loi mais trajectoirellement. De tels sauts sont typiques de l'interaction entre un système physique et un contrôleur numérique ; pourtant, à l'exception remarquable d'un article de Witsenhausen (1966), les modèles hybrides à sauts forcés n'ont fait l'objet à notre connaissance d'aucune recherche avant le début des années 80.

En ce qui concerne les modèles non diffusifs, Davis (1984) a introduit la classe des processus de Markov déterministes par morceaux, comme cadre général pour l'étude des problèmes de contrôle optimal stochastique qui se posent notamment en recherche opérationnelle. Ce faisant, il a généralisé très largement à la fois les systèmes à sauts de paramètres markoviens (non diffusifs) et les EDS à sauts (sans terme brownien)<sup>6</sup>. Le formalisme proposé par Davis offre une grande souplesse au niveau de la modélisation des sauts, en découplant clairement la cause de l'effet : le déclenchement d'un saut peut être spontané (caractérisé en loi par une intensité  $\lambda(q, z)$ ) ou forcé (caractérisé trajectoirellement par la garde  $E^B$ ) ; l'état du processus après un saut est décrit de manière très générale par un *noyau de réinitialisation*  $K(x, dx')$ , qui spécifie la loi conditionnelle de  $X_{\tau_k}$  sachant  $X_{\tau_k}^-$  (où  $X_t^- = \lim_{s \uparrow t} X_s$ ). L'étude générale des processus déterministes par morceaux a été poursuivie depuis, par Davis et d'autres auteurs<sup>7</sup> ; plus récemment, les « systèmes hybrides stochastiques » considérés par Hespanha (2005, 2006) n'en sont, en fait, qu'un cas particulier.

Avant la fin des années 90, aucun formalisme général (i.e. du même type que celui proposé par Davis) ne permettait de considérer des modèles combinant diffusion et sauts forcés. Pourtant, de tels modèles surviennent assez naturellement dans différents contextes : comme solution de problèmes de contrôle optimal impulsionnel pour des processus de diffusion (Bensoussan et Lions, 1973, 1982), avec des applications notamment en mathématiques financières (Korn, 1999) ou à la gestion de ressources naturelles renouvelables (Alvarez, 2004) ; comme solution de problèmes de commutation optimale entre plusieurs processus de diffusion (Lenhart et Belbas, 1983)<sup>8</sup>, avec des applications par exemple à des problèmes d'investissement en économie (Dixit, 1989) ; ou encore, lorsque l'on s'intéresse à l'interaction entre un système numérique (à états discrets) et un système physique « incertain » modélisée par une EDS, un exemple typique de cette situation étant donné

---

empruntée à Bismut (1979), qui l'utilise dans un sens quelque peu différent – ce qui ne devrait pas être gênant dans la mesure où cette expression n'a pas été réutilisée depuis lors.

<sup>6</sup>Comme prédécesseurs de ses processus déterministes par morceaux, Davis (1984) cite également les *processus linéaires par morceaux* de Gnedenko et Kovalenko (1968), en théorie des files d'attente.

<sup>7</sup>Citons, entre autres : Vermes (1985), Costa et Davis (1989), Costa (1991), Davis (1993) et Costa et al. (2000) en ce qui concerne le contrôle optimal, continu ou impulsionnel ; Costa (1990), Davis (1993), et Dufour et Costa (1999) en ce qui concerne la stabilité en loi.

<sup>8</sup>Le problème de la commutation optimale entre plusieurs processus de diffusion peut être vu comme une forme hybride – du point de vue de l'espace d'état – du contrôle impulsionnel d'un processus de diffusion.

par le modèle de consommation électrique de Malhamé et Chong (1985).

### Modèles contrôlables, non déterministes : quelques remarques

Dans les références citées jusqu'à présent, les modèles considérés sont soit des processus de Markov au sens usuel du terme, dont l'évolution est entièrement spécifiée (en un sens probabiliste) par le modèle, soit des processus de Markov « contrôlables », dans lesquels un certain nombre d'éléments de commande – commande appliquée à la dynamique continue, choix d'instants d'intervention, etc. – ne sont spécifiés que de manière ensembliste, i.e. à travers leur appartenance à un ensemble de commandes admissibles. Dans ce deuxième cas, il convient de préciser que le processus stochastique obtenu, une fois choisie une commande dans la classe des commandes admissibles, n'est pas markovien en général. Néanmoins, la résolution d'un problème de contrôle optimal stochastique conduit le plus souvent à choisir une commande qui préserve le caractère markovien : commande du type « retour d'état » dans le cas d'un contrôle de la dynamique continu, et impulsion à un temps de première entrée pour le contrôle impulsionnel (voir, par exemple, Bensoussan et Menaldi, 2000 ; Borkar et al., 1999). Ceci justifie que nous n'ayons pas distingué les deux types de modèles.

Par ailleurs, l'étude des systèmes hybrides s'est développée à partir de la fin des années 80 dans une toute autre direction, inspirée notamment des machines à états finis de l'informatique théorique, dans laquelle les probabilités ne jouent aucun rôle (consulter, par exemple, Grossman et al., 1993). Les modèles considérés, définis par exemple sous la forme d'un *automate hybride* (Alur et al., 1993 ; Henzinger et al., 1998), y sont de manière générale non-déterministes : on définit le système de manière déclarative (à travers l'ensemble de ses évolutions possibles, généralement appelées *exécutions*) plutôt qu'impérative (en spécifiant comment il évolue à partir d'une condition initiale donnée). Le caractère non déterministe de ces modèles peut être vu de différentes manières, selon le contexte :

- Comme dans le cas des processus de Markov contrôlables, il peut s'agir de degrés de liberté sur lesquels on peut intervenir : le formalisme permet ainsi de poser différents types de problèmes de contrôle optimal (Branicky et al., 1998 ; Tomlin et al., 2000).
- Un autre point de vue consiste à voir le non déterminisme de ces modèles comme une forme d'incertitude ensembliste : on s'intéresse alors à la vérification algorithmique (*model checking*) de certaines propriétés du système, par exemple des propriétés d'atteignabilité (Tomlin et al., 2003). En suivant Lygeros (2006), on peut voir ce type d'approche comme une analyse « au pire cas » des propriétés d'un système (hybride) incertain.

Tout ceci n'est pas, bien sûr, totalement déconnecté du point de vue des systèmes hybrides stochastiques adopté dans ce travail : en effet, on passe de manière générale d'un tel modèle déclaratif à un modèle de processus stochastique en « levant l'indétermination », que ce soit à travers le choix d'une loi de commande, ou bien à travers une quantification plus précise de l'incertitude en termes de probabilités.

### Et maintenant : vers un formalisme unifié

Venant compléter la panoplie déjà étendue des modèles de systèmes hybrides stochastiques, plusieurs auteurs ont, plus récemment, considéré des modèles combinant diffusion et sauts forcés, notamment Borkar et al. (1999)<sup>9</sup>, Hu et al. (2000), et Bensoussan et Menaldi (2000). Pourtant, dans

<sup>9</sup>Le modèle de Borkar et al. (1999) autorise également la présence de sauts spontanés du même type que dans les diffusions alternantes, c'est-à-dire des commutations de la composante discrète  $Q_t$  sans discontinuité dans la composante continue  $Z_t$ .

le cadre du projet HYBRIDGE, Bujorianu et al. (2003) et Pola et al. (2003) ont observé qu’aucun des formalismes existants ne permettait de combiner arbitrairement l’ensemble des ingrédients pouvant être utiles – par exemple – dans les différentes situations rencontrées en gestion du trafic aérien : un espace d’état hybride très général, dans lequel la dimension de la variable continue peut dépendre du mode discret ; une dynamique continue non-linéaire, modélisée par une EDS (ce qui inclut comme cas particulier une EDO) ; des sauts spontanés (possédant une intensité  $\lambda$  quelconque) et des sauts forcés ; et, enfin, des réinitialisations aléatoires pouvant affecter aussi bien la partie continue que la partie discrète de l’état.

Ceci a conduit Bujorianu et Lygeros (2003, 2004a,b,c) à proposer une classe très générale de systèmes hybrides stochastiques, qu’ils baptisent *general stochastic hybrid systems* ou encore parfois *general stochastic hybrid processes*. Ce formalisme, qui englobe les différentes formes de modèles hybrides que nous avons citées jusqu’ici, est celui que nous utiliserons dans la plus grande partie de ce mémoire (à l’exception du chapitre II, comme nous allons l’expliquer sous peu).

Terminons cette courte bibliographie en soulignant que ce formalisme, aussi général qu’il soit, laisse de côté certains ingrédients qui devraient pourtant faire partie d’une théorie générale des processus diffusifs par morceaux :

- Des processus de diffusion réfléchis (Menaldi et Robin, 1985), en particulier, interviennent dans de nombreuses situations où une grandeur doit être maintenue à l’intérieur d’un domaine, par exemple dans les approximations diffusives de files d’attente (Whitt, 2002). On peut donc considérer des modèles markoviens hybrides, dont la dynamique continue serait donnée non plus par une EDS classique mais par une EDS réfléchie ; de tels modèles sont considérés, notamment, dans le formalisme des réseaux de Pétri fluides du second ordre (Wolter, 1999 ; Wolter et Zisowsky, 2001).

- D’autres types de processus de diffusion, bien que beaucoup plus marginaux en termes d’applications connues, peuvent également décrire la dynamique continue d’un modèle hybride : par exemple les diffusions dites « biaisées », telles le *skew Brownian motion*, qui ont été utilisées pour modéliser la propagation d’un fluide dans un réseau de fissures (Lejay, 2003) ou encore la préférence d’une espèce pour un type d’habitat en écologie spatiale (Cantrell et Cosner, 1999).

- Enfin, les deux types de sauts prévus par Bujorianu et Lygeros, bien que couvrant la quasi-totalité des situations rencontrées jusqu’à présent dans les applications, ne sont pas les seuls types de sauts possibles dans le cadre d’une dynamique markovienne diffusive par morceaux. On pourrait par exemple considérer, à la manière du mouvement brownien élastique d’Itô et McKean (1965), des sauts spontanés possédant une intensité  $\lambda(X_t)$  non plus par rapport au temps usuel, mais par rapport au temps local de  $X$  en un point ; de tels sauts ont été utilisés notamment pour modéliser les périodes d’hyporéactivité dans l’activité d’un neurone (Buonocore et al., 2002).

### 3 Plan de la thèse

#### Première partie : élaboration d’un cadre théorique unifié

Dans la première partie de ce mémoire, composée des chapitres II et III, nous proposons un cadre théorique unifié pour l’étude des modèles markoviens hybrides. Ce travail s’inscrit dans le prolongement de celui de Bujorianu et Lygeros (2003, 2004a,b,c), et avant eux de Davis (1984) : il s’agit de fournir un formalisme général permettant de modéliser des problèmes provenant de domaines d’application extrêmement variés, mais partageant une certaine structure commune.

L’objectif du chapitre II est, précisément, de dégager aussi clairement que possible cette struc-

ture commune. Pour cela, en partant du cadre abstrait de la théorie axiomatique des processus de Markov, nous proposons et discutons une définition générale de la notion de processus de Markov diffusif par morceaux. Cette définition est nouvelle. Nous avons choisi de la formuler dans un cadre abstrait afin de ne pas noyer le lecteur sous un déluge de détails secondaires – structure de l’espace d’état, nature de la dynamique continue, etc. – les concepts réellement importants : elle recouvre, de ce fait, aussi bien les SHS généraux de Bujorianu et Lygeros que des modèles plus « exotiques » faisant intervenir, par exemple, une EDS réfléchie ou une diffusion biaisée. Nous montrons alors que l’on peut construire un processus diffusif par morceaux, de manière très générale, en ajoutant à un processus de diffusion des sauts spécifiés à travers une fonction de survie (fonctionnelle multiplicative de la diffusion) et un noyau de réinitialisation. Ce résultat, qui constitue – avec la définition elle-même – la principale contribution du chapitre II, repose sur le *théorème de renaissance* pour les processus de Markov (Ikeda et al., 1966 ; Meyer, 1975). Très concrètement, il signifie que l’on peut définir un modèle markovien hybride en spécifiant séparément sa dynamique continue (un processus de diffusion) et sa dynamique discrète (fonction de survie et noyau de réinitialisation), avec la garantie que le modèle obtenu possédera automatiquement un certain nombre de « bonnes » propriétés.

Nous poursuivons au chapitre III l’étude des processus de Markov diffusifs par morceaux, en nous restreignant au cas des SHS généraux de Bujorianu et Lygeros. Les contributions de ce chapitre touchent à plusieurs aspects de ces modèles :

- Nous reprenons en détail la construction d’un SHS par la méthode de renaissance du chapitre II (ce qui correspond, pour l’essentiel, à la construction proposée par Bujorianu et Lygeros (2003, 2004c)) et montrons que le processus obtenu peut être représenté comme la solution forte d’une EDS par rapport à un certain mouvement brownien et au processus de comptage associé à ses propres sauts. Cette représentation peut être vue comme une « formule d’Itô généralisée » pour les SHS généraux, mais il convient de souligner que le processus qui produit les sauts n’est pas indépendant du mouvement brownien qui dirige la dynamique continue.

- Nous étudions le *générateur étendu* associé à un système hybride stochastique, qui fournit un outil essentiel pour l’étude d’un tel modèle markovien : la formule de Dynkin. Nous établissons des conditions suffisantes pour qu’une fonction test, appartenant au domaine du générateur étendu pour le processus de base, appartienne au générateur étendu du processus diffusif par morceaux. Ce résultat est comparé à celui de Davis (1984, 1993), qui fournit quant à lui des conditions nécessaires et suffisantes, dans le cas particulier des processus diffusifs par morceaux. Nous introduisons également une « formule de Dynkin généralisée », dans laquelle apparaissent explicitement les sauts, ce qui permet de considérer une famille plus large de fonctions test : cette formule sera le point de départ, au chapitre IV, de notre étude de l’équation de FPK généralisée.

- Tout ce qui précède suppose que le processus étudié est bien défini pour tout  $t \geq 0$  : il est donc essentiel de s’assurer que le modèle construit ne souffre pas du phénomène de Zénon – en d’autres termes, que les instants de saut  $\tau_k$  ne s’accumulent pas en un temps fini. Ce problème est particulièrement délicat en présence de sauts forcés, l’accumulation des sauts résultant alors, en général, d’une interaction complexe entre la dynamique continue (i.e. l’EDS), la géométrie de l’espace d’état et le noyau de réinitialisation. Nous fournissons des conditions suffisantes, aisément vérifiables à partir des données du modèle, pour que le processus soit conservatif : ces conditions nous permettent, en particulier, de traiter le cas du modèle de (Malhamé et Chong, 1985) généralisé à deux dimensions. Nous étudions également un autre modèle, qui est la version diffusive de la classique « balle qui rebondit », pour lequel les conditions que nous avons données ne s’appliquent

pas : il faut dans ce cas employer des arguments plus raffinés, qui nous ont été communiqués par Jean Bertoin.

## Deuxième partie : équations de FPK généralisées

La deuxième partie du mémoire s'intéresse aux généralisations de l'équation de FPK pour différents types de SHS, d'abord d'un point de vue théorique au chapitre IV, puis à travers l'étude numérique de deux exemples au chapitre V.

De telles équations sont déjà connues pour un certain nombre de cas particuliers, dont les plus anciens ont été fournis par Kolmogorov (1931) dans le cas de sauts spontanés et par Feller (1952, 1954) dans le cas des sauts forcés. Nous établissons au chapitre IV une forme générale de l'équation de FPK, que nous appelons *équation de FPK abstraite* puisqu'il s'agit seulement d'une équation au sens des mesures : tel est le prix à payer pour pouvoir traiter de la même manière les sauts spontanés, qui possèdent une intensité stochastique  $\lambda(X_t)$ , et les sauts forcés, pour lesquels il n'y a pas d'intensité stochastique. On récupère alors, en explicitant les termes de cette équation pour différentes classes de SHS, l'ensemble des cas particuliers d'équations de FPK généralisées connus dans la littérature. De plus, l'équation de FPK abstraite nous permet de traiter une large classe de SHS multidimensionnels à sauts forcés, du même type que celui de Malhamé et Chong (1985), pour laquelle l'équation de FPK généralisée semble nouvelle.

Le chapitre V considère l'équation de FPK en tant qu'outil pour le calcul de la loi stationnaire ou quasi-stationnaire d'un SHS à sauts forcés. Deux exemples sont traités :

- Le premier est la généralisation à deux dimensions du modèle de Malhamé et Chong (1985). Nous établissons l'existence d'une unique loi stationnaire au moyen d'un résultat général de Meyn et Tweedie (1993a,b), puis calculons cette loi numériquement en utilisant une discrétisation en volumes finis. Une importance toute particulière est accordée à la comparaison, en termes de compromis précision / temps de calcul et en termes de mémoire, avec une méthode de type Monte-Carlo.
- Le deuxième exemple est un modèle d'éolienne à vitesse variable, fruit d'un travail en collaboration avec Yannick Phulpin du département Énergie de Supélec. L'objectif est d'étudier l'incertitude sur la puissance produite par une telle éolienne, pour une vitesse moyenne du vent donnée. En raison du risque de déstabilisation de l'éolienne par un vent trop fort, nous sommes amenés à rechercher non pas une loi stationnaire mais une loi quasi-stationnaire. Cette loi est obtenue numériquement en résolvant un problème aux valeurs propres pour l'opérateur de FPK, discrétisé à l'aide d'un schéma en volumes finis. Le résultat est une caractérisation simultanée de l'incertitude liée aux fluctuations à court terme de la vitesse du vent et du risque de déstabilisation de l'éolienne en vent fort.

## 4 Publications relatives à ce travail

Le travail présenté dans ce mémoire a fait l'objet, pendant le déroulement de la thèse, de deux communications orales dans des conférences internationales avec comité de lecture. La première, présentée à PMAPS 2006, portait sur la modélisation de la puissance produite par une éolienne à vitesse variable. Le travail présenté dans cette publication est repris, de manière beaucoup plus détaillée, dans la section V.3 de ce mémoire. La deuxième, présentée à MTNS 2006, concernait la généralisation de l'équation de FPK pour les SHS à sauts forcés. La partie théorique de cette publication se retrouve, sous une forme plus générale, dans le chapitre IV de ce mémoire. L'exemple



utilisé, pour illustrer l'application de l'équation de FPK généralisée au calcul de la loi stationnaire, est repris dans la section V.2.

J. Bect, Y. Phulpin, H. Baili, et G. Fleury. On the Fokker-Planck equation for stochastic hybrid systems : application to a wind turbine model. Dans *Proceedings of the 9th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS)*, Stockholm, Suède, juin 2006.

J. Bect, H. Baili, et G. Fleury. Generalized Fokker-Planck equation for piecewise-diffusion processes with boundary hitting resets. Dans *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Kyôto, Japon, juillet 2006.

## CHAPITRE II

# PROCESSUS DIFFUSIFS PAR MORCEAUX : DÉFINITION, CONSTRUCTIONS, ET PROPRIÉTÉS

## 1 Introduction

### 1.A Objectifs et plan du chapitre

La définition de la classe des processus de Markov déterministes par morceaux, telle qu'elle est donnée par Davis (1984), est une définition de nature constructive : un processus de Markov est dit déterministe par morceaux s'il peut être construit selon une certaine « recette », qui consiste – en simplifiant – à ajouter des sauts à la solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO), sur un espace d'état  $E$  possédant éventuellement une structure « hybride » (par exemple  $E = Q \times \mathbb{R}^n$ ,  $Q$  étant un ensemble fini). Par ailleurs, diverses classes de processus markoviens ont été proposées depuis les années 70, dans le même esprit constructif et avec une complexité croissante, afin d'incorporer au sein d'un même modèle une dynamique continue diffusible et des sauts : diffusions alternantes (i.e. à commutations markoviennes), diffusion à sauts, diffusions à sauts avec réflexions, systèmes hybrides stochastiques à sauts forcés, ... (cf. chapitre I).

L'intérêt de définir ainsi de telles classes de modèles, de plus en plus générales, réside dans la possibilité d'établir simultanément un certain nombre de résultats, qui seront autant d'outils disponibles pour les applications relevant du cadre théorique ainsi construit. Les résultats que l'on peut espérer vont des propriétés les plus fondamentales – existence du processus, propriété de Markov forte, régularité des trajectoires, etc. – à des résultats plus proches des applications – stabilité en loi, ergodicité, théorie du contrôle optimal, et bien d'autres choses encore.

Bujorianu et Lygeros (2003) ont proposé récemment une classe de systèmes hybrides stochastiques très générale, qui contient comme cas particulier les processus déterministes par morceaux de Davis (1984). Néanmoins, le choix des « ingrédients » de la construction, retenu par les auteurs, laisse de côté un certain nombre de modèles intéressants : par exemple ceux dont la dynamique continue fait intervenir une réflexion au bord – qui interviennent pourtant dans de nombreuses applications – ou encore ceux dont les sauts sont du type barrière élastique. Ceci reflète simplement l'impossibilité de capturer dans une telle approche constructive le concept de *processus diffusif par morceaux*, liée au fait qu'on ne sait pas – dans l'état actuel du sujet – décrire complètement la structure d'un processus de diffusion général en dimension  $n \geq 2$  (voir Itô et McKean, 1965, pour le cas de la dimension 1).

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'établir une définition générale de ce qu'il convient selon nous de nommer *processus diffusif par morceaux*, afin d'unifier l'ensemble des classes de modèle

qui viennent d'être évoquées. Pour ce faire, nous adopterons un point de vue « non constructif », c'est-à-dire que nous chercherons à caractériser une classe de modèles, englobant tous ceux que nous venons d'évoquer, à travers les propriétés que doivent posséder ces modèles et non plus en les construisant explicitement à partir d'éléments plus simples. La section 2 est consacrée à cet objectif : nous donnons dans un premier temps une définition aussi concise que possible de ce que nous appelons un processus diffusif par morceaux au § 2.A, qui n'est pas entièrement satisfaisante dans la mesure où elle laisse la porte ouverte à diverses « pathologies » indésirables dans les applications ; différents aspects de cette définition sont ensuite discutés aux §§ 2.B à 2.D, ce qui conduit à la formulation d'hypothèses un peu plus restrictives, qui seront satisfaites en particulier par les systèmes hybrides stochastiques qui seront l'objet des chapitres suivants. Moyennant ces restrictions supplémentaires, nous établissons dans la section 3, §§ 3.B et 3.C, que la classe des processus diffusifs par morceaux que nous avons caractérisé correspond, à quelques détails près, à l'ensemble des processus que l'on peut construire en ajoutant un certain type de sauts à un processus de diffusion général. Nous concluons ce chapitre par quelques lemmes techniques, § 3.D, qui seront mis à profit dans l'étude du générateur étendu au chapitre III.

Avant d'aborder les processus diffusifs par morceaux à proprement parler, nous allons rappeler quelques notions élémentaires de la théorie axiomatique des processus de Markov, telle qu'elle est exposée par Dynkin (1965), Blumenthal et Gettoor (1968) et Sharpe (1988) par exemple. Ceci nous permettra d'introduire un certain nombre de notations qui resteront en vigueur dans toute la suite du mémoire.

## 1.B Le formalisme de la théorie des processus de Markov

Dans tout ce chapitre,  $(E, d)$  désigne un espace métrique séparable et localement compact (LCS), et  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$  sa tribu borélienne. (Il peut s'agir par exemple de l'espace d'état d'un système hybride stochastique – voir le § III.2.A pour plus de détails à ce sujet.) Tous les processus stochastiques considérés sont, sauf mention explicite du contraire, des processus à temps continu paramétrés par  $\mathbb{R}_+$ .

### La propriété de Markov

Soit  $X$  un processus stochastique, défini sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$  et à valeurs dans  $E$ . On dira que  $X$  est *markovien*, relativement à une probabilité  $\mathbb{P}$  et à une filtration  $\mathcal{F}$ , si

- $X$  est un processus  $\mathcal{F}$ -adapté,
- pour tous  $t \geq 0$ ,  $A \in \mathcal{F}_t$  et  $B \in \sigma(X_u; u \geq t)$ ,

$$(1.1) \quad \mathbb{P} \{A \cap B \mid X_t\} = \mathbb{P} \{A \mid X_t\} \mathbb{P} \{B \mid X_t\} .$$

En d'autres termes, à chaque instant  $t \geq 0$ , le futur  $\sigma(X_u; u \geq t)$  du processus est conditionnellement indépendant de son passé  $\mathcal{F}_t$  connaissant son état présent  $X_t$ . On peut omettre de préciser la filtration considérée lorsqu'il s'agit de la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$ ,  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t)$ , auquel cas la première condition est trivialement vérifiée.

Notons maintenant  $P_{s,t}(x, dy)$  la loi conditionnelle<sup>1</sup> de  $X_t$  sachant  $X_s$ . On dit qu'un processus markovien est *homogène* lorsque les noyaux de transitions  $P_{s,t}$  ne dépendent que de la durée  $t-s$ , et on note alors  $P_t = P_{s,s+t}$ ,  $t \geq 0$ , la famille à un paramètre ainsi obtenue. On fera systématiquement

---

<sup>1</sup>Plus exactement, il s'agit d'un *représentant* de la loi conditionnelle. En effet, pour chaque  $\Gamma \in \mathcal{E}$ , la fonction  $x \mapsto P_{s,t}(x, \Gamma)$  n'est définie que  $\mathcal{L}(X_s)$ -presque sûrement.

cette hypothèse, à partir de maintenant et pour tout le reste de ce mémoire, le cas non homogène pouvant être traité en ajoutant le temps comme variable d'état supplémentaire.

### Qu'est-ce qu'un processus de Markov ?

La définition que nous venons de donner est celle que l'on trouve par exemple dans Doob (1953). Il se trouve qu'elle est largement insuffisante pour développer une « bonne » théorie des processus de Markov. Pour aller plus loin, la théorie moderne des processus de Markov suppose donnée non plus une probabilité  $\mathbb{P}$  mais une *famille de probabilités*  $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_x)_{x \in E}$ , vérifiant les hypothèses suivantes :

(P1) pour tous  $t \geq 0$  et  $\Gamma \in \mathcal{E}$ , la fonction  $x \mapsto \mathbb{P}_x \{X_t \in \Gamma\}$  est  $\mathcal{E}$ -mesurable<sup>2</sup> ;

(P2) pour tous  $x \in E$ ,  $\Gamma \in \mathcal{E}$  et  $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ ,

$$\mathbb{P}_x \{X_{t+s} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_t\} = \mathbb{P}_{X_t} \{X_s \in \Gamma\}, \quad \mathbb{P}_x\text{-ps.}$$

Ainsi, pour tout  $x \in E$ , le processus  $X$  est markovien relativement à la loi  $\mathbb{P}_x$  et à la filtration  $\mathcal{F}$ . De plus, les noyaux de transitions sont maintenant définis de manière unique par la relation  $P_t(x, \Gamma) = \mathbb{P}_x \{X_t \in \Gamma\}$ , et la propriété P2 permet d'établir la *propriété de Chapman-Kolmogorov* :

$$P_{t+s}(x, \Gamma) = \int_E P_t(x, dy) P_s(y, \Gamma).$$

En d'autres termes, la famille  $(P_t)_{t \geq 0}$  forme un semigroupe pour la composition des noyaux.

On dit que  $x \in E$  est un *point de branchement* pour le processus si  $P_0(x, \cdot) \neq \delta_x$ . Nous noterons  $E^B$  l'ensemble de ces points de branchement et  $E^0 = E \setminus E^B$  son complémentaire : on a ainsi  $\mathbb{P}_x \{X_0 = x\} = 1$  pour tout  $x \in E^0$ . On qualifie de *normal* un processus de Markov qui n'a pas de point de branchement<sup>3</sup>.

La théorie suppose par ailleurs que l'univers  $\Omega$  est suffisamment riche pour que l'on puisse y effectuer des « translations dans le temps » :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall t > 0, \exists \omega' \in \Omega \quad \text{tel que} \quad \forall u \geq 0, X_u(\omega') = X_{t+u}(\omega).$$

On suppose donc l'existence d'une famille d'*opérateurs de translation*  $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$ ,  $t \geq 0$ , telle que

(P3)  $\theta_0 = \text{Id}$ ,

(P4) pour tous  $s, t \geq 0$ ,  $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$ ,

(P5) pour tous  $\omega \in \Omega$  et  $s, t \geq 0$ ,  $X_{t+s}(\omega) = X_t(\theta_s \omega)$ .

Pour fixer les idées, lorsque  $\Omega$  est un espace de trajectoires  $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ , l'opérateur de translation  $\theta_t$  est simplement le décalage défini par  $(\theta_t \omega)(u) = \omega(t + u)$ .

Résumons tout cela de manière un peu plus formelle :

(1.2) **Définition.** *Un processus de Markov à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  est un sextuplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$ , tel que :*

---

<sup>2</sup>En d'autres termes,  $\mathbb{P}(x, d\omega) = \mathbb{P}_x(d\omega)$  est un noyau de transition de  $(E, \mathcal{E})$  dans  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X)$ . Dans les ouvrages sur les processus droits (Blumenthal et Gettoor, 1968 ; Sharpe, 1988), l'espace métrique  $E$  est muni en général de la tribu  $\mathcal{E}_u$  des ensembles universellement mesurables, plus fine que la tribu borélienne ; dans ce cas, un processus satisfaisant à P1 est dit *borélien*.

<sup>3</sup>La définition de Dynkin (1965) est légèrement différente, mais cette différence disparaît dès que l'on s'intéresse à des processus continus à droite.

- i)  $(\Omega, \mathcal{A})$  est un espace mesurable et  $\mathcal{F}$  une filtration sur cet espace ;
- ii)  $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow E$  est un processus stochastique  $\mathcal{F}$ -adapté ;
- iii)  $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_x)_{x \in E}$  est une famille de lois sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  qui vérifie les propriétés P1 et P2 ;
- iv)  $\theta = (\theta_t)_{t \geq 0}$  est une famille d'opérateurs de translations qui vérifie les propriétés P3–P5.

Comme souvent, trop de rigueur rime avec lourdeur, et en pratique on se permettra souvent de dire que «  $X$  est un processus de Markov », s'il n'y a pas d'ambiguïté quant aux autres éléments du sextuplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$ . Un peu de vocabulaire : on dit qu'un processus de Markov est continu (ou continu à droite, continu par morceaux, etc.) si les trajectoires  $t \mapsto X_t(\omega)$  possèdent cette propriété pour tout  $\omega \in \Omega$ . Par ailleurs, on dit qu'une propriété est vraie *presque sûrement* – sans préciser pour quelle loi – s'il existe un ensemble  $\Omega_0 \subset \Omega$  indépendant de  $x$ ,  $\mathbb{P}_x$ -négligeable pour tout  $x \in E$ , tel que la propriété est vraie pour tout  $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ . Pour toute probabilité  $\mu$  sur  $E$ , on définit la loi  $\mathbb{P}_\mu$  par la relation  $\mathbb{P}_\mu(d\omega) = \int_E \mu(dx) \mathbb{P}_x(d\omega)$ . Lorsque  $\mu$  est portée par  $E^0$ , l'interprétation de ces nouvelles lois est immédiate : l'état initial  $X_0$  du processus est distribué selon la probabilité  $\mu$  sous  $\mathbb{P}_\mu$ . (Plus généralement,  $X_0$  est distribué selon  $\mu P_0$  sous  $\mathbb{P}_\mu$ , ce qui permet de se restreindre sans perte de généralité à des distributions initiales portées par  $E^0$ .)

### Processus non conservatifs

On a parfois besoin de considérer des processus de Markov *non conservatifs*, ce qui signifie que les trajectoires  $t \mapsto X_t(\omega)$  ne sont plus définies sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier, mais seulement sur un intervalle de la forme  $[0; \zeta(\omega)[$ . Par opposition, les processus de Markov de la définition 1.2 seront dits *conservatifs*. Cela nous sera nécessaire dans la suite, afin de prendre en compte le phénomène de Zénon dans la construction des processus diffusifs par morceaux.

Plus précisément, étant donné un point isolé  $\partial \notin E$ , un processus de Markov non conservatif  $X$  à valeurs dans  $E$  est classiquement défini comme un processus de Markov conservatif à valeurs dans  $E_\partial = E \cup \{\partial\}$ , vérifiant les propriétés suivantes :

$$(P6) \quad \mathbb{P}_\partial \{X_0 = \partial\} = 1,$$

$$(P7) \quad X_s(\omega) = \partial \Rightarrow X_t(\omega) = \partial, \text{ pour tous } s < t \text{ et } \omega \in \Omega.$$

On dit alors que le point  $\partial$  joue le rôle du *cimetière*, et  $\zeta(\omega) = \inf\{t > 0 \mid X_t(\omega) = \partial\}$  s'appelle la *durée de vie*. Observons que, pour un processus continu à droite, on a  $\zeta > 0$   $\mathbb{P}_x$ -ps dès que  $x \in E^0$ . L'adjonction du point  $\partial$  est en général implicite ; par convention, une fonction  $f$  définie sur  $E$  est étendue à  $E_\partial$  en posant  $f(\partial) = 0$ .

### La propriété de Markov forte

La propriété de Markov P2 est valable à tout instant déterministe  $t \geq 0$ , ce qui est bien souvent insuffisant en pratique. On introduit donc la *propriété de Markov forte*, qui généralise la propriété de Markov « simple » aux temps d'arrêts relativement à une filtration admissible  $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}^X$ . Ceci n'est possible que si le processus  $X$  est progressivement mesurable (car il faut que  $X_T$  soit  $\mathcal{G}_T$ -mesurable), ce qui est vrai par exemple dès qu'il est continu à droite<sup>4</sup>.

(1.3) **Définition.** Soient  $X$  un processus de Markov progressivement mesurable et  $\mathcal{G}$  une filtration admissible (c'est-à-dire que  $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$  pour tout  $t \geq 0$ ). On dit que  $X$  possède la propriété de Markov

---

<sup>4</sup>En effet, un processus continu à droite (ou continu à gauche) et adapté est automatiquement progressivement mesurable. Voir par exemple Rogers et Williams (2000a, lemme 73.10).

forte, relativement à la filtration  $\mathcal{G}$ , si pour tout  $\mathcal{G}$ -temps d'arrêt  $T$ , quels que soient  $x \in E$ ,  $\Gamma \in \mathcal{E}$  et  $s \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}_x \{X_{T+s} \in \Gamma \mid \mathcal{G}_T\} = \mathbb{P}_{X_T} \{X_s \in \Gamma\}, \quad \mathbb{P}_x\text{-ps sur } \{T < \zeta\}.$$

On peut reformuler la propriété de Markov forte en utilisant les opérateurs de translation, ce qui permettra de l'appliquer à une classe beaucoup plus large d'évènements :

(1.4) **Théorème (Dynkin, 1965, théorème 3.11).**  *$X$  possède la propriété de Markov forte, relativement à la filtration  $\mathcal{G}$ , si et seulement si pour tout  $\mathcal{G}$ -temps d'arrêt  $T$ , quels que soient  $x \in E$ , et  $A \in \mathcal{F}_\infty^X$ ,*

$$\mathbb{P}_x \{\theta_T^{-1}A \mid \mathcal{G}_T\} = \mathbb{P}_{X_T} \{A\}, \quad \mathbb{P}_x\text{-ps sur } \{T < \zeta\}.$$

### Composition des temps d'arrêt

Soient  $s, t \geq 0$ . Le processus  $X$  étant par définition  $\theta$ -homogène, i.e.  $X_{t+s} = X_t \circ \theta_s$ , on vérifie facilement que la fonction  $\theta_t$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F}_{t+u}^X)$  dans  $(\Omega, \mathcal{F}_u^X)$ . Lorsque  $X$  est progressivement mesurable, cette propriété s'étend aux  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt, ce qui permet de définir une opération de composition des  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt dont nous aurons besoin à plusieurs reprises par la suite. Pour un temps aléatoire  $T$  quelconque, on utilise la notation habituelle :  $\theta_T(\omega) = \theta_{T(\omega)}(\omega)$ .

(1.5) **Lemme.** *Soient  $S$  et  $T$  des  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt. Si  $X$  est progressivement mesurable, alors :*

- i) *pour tout  $u \geq 0$ , la fonction  $\theta_T$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F}_{T+u}^X)$  dans  $(\Omega, \mathcal{F}_u^X)$  ;*
- ii) *la composition  $T \circ S$  de  $S$  et de  $T$ , définie par  $T \circ S = S + T \circ \theta_S$  sur  $\{S < +\infty\}$  et  $T \circ S = +\infty$  sur  $\{S = +\infty\}$ , est un  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt.*

## 2 Définition et propriétés élémentaires

Intuitivement, un processus de Markov discontinu mérite le nom de « diffusif par morceaux » si l'ensemble des instants où il saute ne possède pas de point d'accumulation, et s'il se comporte comme un processus de diffusion – par exemple la solution d'une EDS – entre deux sauts successifs. Nous commencerons par formaliser cette définition au § 2.A, en partant d'une définition assez large de la notion de processus de diffusion, afin d'englober entre autres les diffusions réfléchies et les diffusions biaisées (cf. chapitre I). Nous obtenons ainsi une première définition, qui n'est pas totalement satisfaisante dans le mesure où elle autorise un certain nombre de « pathologies » indésirables dans les applications pratiques. Celles-ci sont discutées aux §§ 2.B à 2.D, ce qui conduit à la formulation d'hypothèses un peu plus restrictives, qui seront satisfaites en particulier par les systèmes hybrides stochastiques introduits au chapitre III. Dans toute cette section,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$  désigne un processus de Markov à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ , non nécessairement conservatif, de durée de vie  $\zeta$ .

### 2.A Des processus de diffusion aux processus diffusifs par morceaux

Le sens précis du terme « diffusion » varie avec les auteurs et les ouvrages. Nous adoptons ici une définition très générale, adaptée de Itô et McKean (1965) et Ikeda et Watanabe (1981) :

(2.1) **Définition.** *On dit que  $X$  est un processus de diffusion si*

- i) *les trajectoires sont continues à droite sur  $\mathbb{R}_+$  et continues sur  $[0; \zeta[$ ,*

- ii)  $X$  est fortement markovien relativement à la filtration  $\mathcal{F}_+^X$ , définie par  $\mathcal{F}_{t+}^X = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^X$ ,
- iii)  $X$  est normal, i.e.  $E^B = \emptyset$ .

Cette définition abstraite conviendra tout à fait pour les considérations théoriques de ce chapitre, et permettra d'englober dans notre définition tous les processus présentés au chapitre I, y compris les plus « exotiques ». Bien entendu, ceci a un prix : même pour  $E = \mathbb{R}$ , la définition 2.1 englobe des processus extrêmement singuliers, comme par exemple la chaîne de Feller-McKean (Rogers et Williams, 2000a, section III.23). Nous nous restreindrons donc, dès le chapitre III, à une classe de processus plus maniables, pour lesquels la dynamique continue sera décrite par une EDS. Signalons que, lorsque l'espace d'état est  $\mathbb{R}^n$ , ou une variété différentiable de dimension  $n$ , certaines définitions imposent de plus des conditions de régularité supplémentaires, portant sur le générateur infinitésimal ; voir par exemple les diffusions de Feller-Dynkin (Rogers et Williams, 2000a, section III.13) ou encore l'approche par les problèmes de martingale (Stroock et Varadhan, 1979).

**(2.2) Remarques.**

- a) La définition 2.1 autorise un processus de diffusion à avoir une durée de vie finie : c'est le choix qui est fait, par exemple, par Itô et McKean (1965). Certains auteurs, notamment pour l'étude des solutions « explosives » d'une EDS dans  $\mathbb{R}^n$ , imposent une condition plus restrictive : le cimetière  $\partial$  n'est plus un point isolé mais le point  $\infty \in \overline{\mathbb{R}^n}$ , et la continuité des trajectoires est requise sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier. En d'autres termes, seuls sont admis les processus vérifiant  $X_t \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \zeta^-$  et  $\zeta < +\infty$ . Ainsi, par exemple, un mouvement brownien tué à un temps suivant la loi exponentielle est un processus de diffusion selon notre définition mais pas selon celle d'Ikeda et Watanabe (1981).
- b) Le fait d'exiger la propriété de Markov forte relativement à la filtration  $\mathcal{F}_+^X$ , et pas seulement relativement à  $\mathcal{F}^X$ , n'est pas anodin. Il s'agit en effet d'une hypothèse technique importante, qui garantit que la propriété de Markov forte n'est pas détruite par la procédure de complétion de la filtration (voir plus loin). L'exemple qui suit illustre le type de phénomène qui conduit à des processus fortement markovien pour  $\mathcal{F}^X$  mais pas pour  $\mathcal{F}_+^X$ .

**(2.3) Exemple<sup>5</sup>.** Soit  $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| = \max(x_1, 0)\}$  l'espace d'état représenté sur la figure 2.a, composé de trois demi-droites qui se rejoignent en  $(0, 0)$ . On définit

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{R} \times \{1; -1\}, \\ \mathcal{A} &= \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes 2^{\{-1; 1\}}, \end{aligned}$$

et, pour tout  $\omega = (x, \epsilon) \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} X_{1,t}(\omega) &= x + t, \\ X_{2,t}(\omega) &= \epsilon \max(x + t, 0), \\ \theta_t(\omega) &= (x + t, \epsilon). \end{aligned}$$

Enfin, pour  $(x_1, x_2) \in E$ , on définit une famille de lois par la relation

$$\mathbb{P}_{(x_1, x_2)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta_{(x_1, 1)} + \frac{1}{2} \delta_{(x_1, -1)} & \text{si } x_1 \leq 0, \\ \delta_{(x_1, \text{sgn}(x_2))} & \text{sinon.} \end{cases}$$

---

<sup>5</sup>Le processus un peu étrange décrit dans cet exemple apparaît dans Dellacherie et Meyer (1987, chap. XIV, §27), mais y sert à illustrer un autre phénomène que celui qui nous intéresse ici.

Le processus ainsi décrit se déplace continûment sur le graphe vers la droite, avec une vitesse horizontale constante, et choisit de manière équiprobable la branche inférieure ou la branche supérieure lorsqu'il arrive en  $(0, 0)$ . Il est facile de prouver qu'il s'agit d'un processus fortement markovien pour la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$ . Considérons maintenant le temps d'arrêt

$$T(\omega) = \inf \{t \geq 0 \mid X_{1,t}(\omega) \geq 0\} \\ = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \omega = (x, \epsilon), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

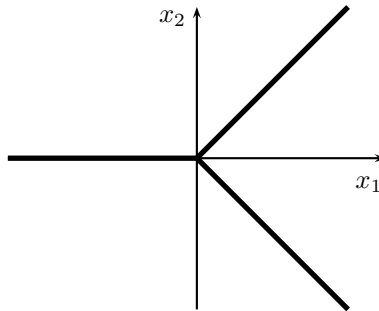
Soient  $x_1 \leq 0$ ,  $s > 0$  et  $f$  une fonction borélienne bornée sur  $E$ . En notant toujours  $\omega = (x, \epsilon)$  l'aléa, on a alors,  $\mathbb{P}_{(x_1, 0)}$ -presque sûrement,

$$\mathbb{E}_{(x_1, 0)} \{f(X_{T+s}) \mid \mathcal{F}_{T+}^X\}(\omega) = (f \circ X_{T+s})(\omega) = f(s, \epsilon s),$$

qui est en général différent de

$$\mathbb{E}_{X_T(\omega)} \{f(X_s)\} = \mathbb{E}_{(0,0)} \{f(X_s)\} = \frac{1}{2}f(s, s) + \frac{1}{2}f(s, -s).$$

Ceci prouve que le processus n'est pas fortement markovien relativement à  $\mathcal{F}_+^X$  : ce n'est donc pas un processus de diffusion au sens de la définition 2.1.



**Fig. 2.a** – Espace d'état  $E$  pour l'exemple 2.3. Le processus se déplace continûment sur le graphe vers la droite, avec une vitesse horizontale constante, et choisit de manière équiprobable la branche inférieure ou la branche supérieure lorsqu'il arrive en  $(0, 0)$ .

### Continuité par morceaux et temps de saut

Une fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ ,  $t \mapsto f(t)$ , est dite continue par morceaux si elle est réglée (c'est-à-dire qu'elle admet des limites à droite et à gauche en tout point) et possède au plus un nombre fini de discontinuités sur tout compact. Notons que l'on peut très bien avoir, en général, trois valeurs différentes pour  $f(t^-)$ ,  $f(t)$  et  $f(t+)$  en un point de discontinuité. Les processus de Markov que l'on considérera seront toujours supposés continus à droite, de sorte qu'un processus continu par morceaux est un cas particulier de processus càdlàg.

(2.4) **Remarque.** Les processus de Lévy ne sont pas, en général, des processus à trajectoires continues par morceaux. Plus précisément, un processus de Lévy possède presque sûrement des trajectoires continues par morceaux si et seulement si sa mesure de Lévy est finie (Sato, 1999, théorème 21.3). Dans le cas contraire, les temps de saut du processus forment un sous-ensemble dénombrable dense de  $\mathbb{R}_+$ .



À tout processus de Markov continu par morceaux, on peut associer la suite de ses instants de saut  $\tau_k$ ,  $1 \leq k \leq N(\omega)$ , où  $N(\omega)$  est le nombre de sauts de la trajectoire  $t \mapsto X_t(\omega)$  sur l'intervalle  $]0; \zeta(\omega)[$ . Par convention, on posera  $\tau_0 = 0$  et  $\tau_k(\omega) = \zeta(\omega)$  pour tout  $k > N(\omega)$ . On a alors les propriétés suivantes :

(2.5) **Proposition.**  $(\tau_k)_{k \geq 0}$  est une suite croissante – au sens large – de temps d'arrêt, relativement à la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$ . De plus, pour tout  $k \geq 0$ , on a :

- i)  $\tau_k < \tau_{k+1}$  si et seulement si  $\tau_k < \zeta$ ,
- ii)  $\tau_{k+1} = \tau_k + \tau_1 \circ \theta_{\tau_k}$  sur  $\{\tau_k < +\infty\}$ , i.e.  $(\tau_k)_{k \geq 1}$  est la suite des itérées de  $\tau_1$  au sens de la composition définie dans le lemme 1.5.

□ **Démonstration.** Seul le fait que les  $\tau_k$  sont des temps d'arrêt n'est pas évident (pour le reste, il suffit de constater que le  $k+1$ <sup>ième</sup> saut est le premier saut suivant le  $k$ <sup>ième</sup> saut!). On montre d'abord que  $\tau_1$  est un  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt,

$$\begin{aligned} \{\tau_1 > t\} &= \{t \mapsto X_t \text{ est continue sur } [0; t]\} \\ &= \{t \mapsto X_t \text{ est uniformément continue sur } [0; t]\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{\delta \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcap_{\substack{v \in \mathbb{Q} \cup \{t\} \\ 0 < v \leq t}} \bigcap_{\substack{u \in \mathbb{Q} \cap ]0; v[ \\ v-u < \delta}} \{d(X_u, X_v) < \varepsilon\}, \end{aligned}$$

puis on étend la propriété aux temps  $\tau_n$  par récurrence, en utilisant 2.5.ii et le lemme 1.5.ii. ■

### Processus diffusifs par morceaux

Nous pouvons maintenant formuler une définition générale de ce qu'est un processus diffusif par morceaux. En fait, nous verrons tout de suite après qu'elle est même un peu trop générale, au sens où elle autorise certaines pathologies indésirables en pratique. Nous conserverons néanmoins cette définition, qui a le mérite d'être concise, en la complétant par un certain nombre d'hypothèses techniques (cf. hypothèses 2.9, 2.15, et définition 2.19) qui seront vérifiées par construction au § 3.C.

(2.6) **Définition (Processus diffusif par morceaux).** On dira que  $X$  est un processus diffusif par morceaux si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- i) les trajectoires sont continues à droites sur  $\mathbb{R}_+$  et continues par morceaux sur  $[0; \zeta[$ ;
- ii) le processus est fortement markovien relativement à la filtration  $\mathcal{F}_+^X$ ;
- iii) l'ensemble des points de branchement  $E^B$  est borélien, et  $\mathbb{P}_x\{X_0 \in E^B\} = 0$  pour tout  $x \in E^B$ .

Observons que la définition autorise la présence de points de branchement : ainsi un processus diffusif par morceaux n'est pas, en général, un processus normal (plus précisément, il est normal si et seulement si  $E^B = \emptyset$ ). Ceci nous permettra de considérer des modèles présentant des sauts « forcés ».

Énonçons sans plus tarder une propriété élémentaire et néanmoins fondamentale (qui sera démontrée un peu plus loin) :

(2.7) **Propriété.** Presque sûrement, le processus ne visite jamais l'ensemble  $E^B$  :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{P}_x\{\exists t \geq 0, X_t \in E^B\} = 0.$$

Cette propriété permet de considérer le processus comme un processus normal à valeurs dans l'espace d'état  $E^0 = E \setminus E^B$ . Pourquoi alors ne pas considérer seulement des processus sans points de branchement ? Simplement parce que, même si on peut voir le processus comme étant à valeurs dans  $E^0$ , ses limites à gauche sont toujours dans  $E$  tout entier en général ! Chacun des deux choix – l'espace d'état  $E$  ou  $E^0$  – possède donc ses avantages et ses inconvénients. Nous avons adopté le premier qui nous a semblé plus commode à l'usage.

### Quelques précisions techniques

Les définitions 2.1 et 2.6 ne font pas intervenir la filtration  $\mathcal{F}$  du sextuplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$  : on requiert seulement que le processus soit fortement markovien relativement à la filtration  $\mathcal{F}_+^X$ . Toutefois, il est préférable en pratique de munir  $X$  d'une filtration  $\mathcal{F}$  un peu plus large que  $\mathcal{F}_+^X$ , qui possède de bien meilleures propriétés : il s'agit de la *complétion* de  $\mathcal{F}^X$ .

Commençons par fixer une loi  $\mu$  sur  $E$ . On note  $\mathcal{N}^\mu$  la classe des événements  $\mathbb{P}_\mu$ -négligeables de  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\mu)$ ,  $\mathcal{A}^\mu = \mathcal{A} \vee \mathcal{N}^\mu$  la  $\mathbb{P}_\mu$ -complétion de  $\mathcal{A}$ , et  $\mathcal{F}^\mu$  la filtration sur  $(\Omega, \mathcal{A}^\mu)$  définie par  $\mathcal{F}_t^\mu = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{N}^\mu$ . Le processus  $X$  étant markovien relativement à  $\mathcal{F}_+^X$ , la filtration complétée  $\mathcal{F}^\mu$  est continue à droite (Blumenthal et Gettoor, 1968, proposition 8.12). Le quadruplet  $(\Omega, \mathcal{A}^\mu, \mathcal{F}^\mu, \mathbb{P}_\mu)$  satisfait donc aux *conditions usuelles* de la théorie générale des processus<sup>6</sup>, ce qui n'est le cas en général ni pour  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}^X, \mathbb{P}_\mu)$  ni pour  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_+^X, \mathbb{P}_\mu)$ . En d'autres termes,  $(\Omega, \mathcal{A}^\mu, \mathcal{F}^\mu, \mathbb{P}_\mu)$  est l'augmentation usuelle  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu)$ .

On munit alors le processus  $X$  de la filtration  $\mathcal{F}$  définie par  $\mathcal{F}_t = \bigcap_\mu \mathcal{F}_t^\mu$ , où  $\mu$  parcourt l'ensemble des mesures de probabilité sur  $E$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est la *complétion*<sup>7</sup> de la filtration  $\mathcal{F}^X$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $\mathcal{A} = \bigcap_\mu \mathcal{A}^\mu$ , quitte à élargir un peu  $\mathcal{A}$  : la famille  $\mathcal{F}$  est alors une filtration continue à droite sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , plus large que  $\mathcal{F}_+^X$ . Il est connu que la procédure de complétion que nous venons de décrire préserve la propriété de Markov forte (Dynkin, 1965, théorème 3.12), ce qui signifie qu'aucune information concernant le futur du processus après l'instant  $t$  n'a été rajoutée en passant de  $\mathcal{F}_t^X$  à  $\mathcal{F}_t$ . Ceci permet, en particulier, de démontrer la propriété 2.7 :

□ **Démonstration de la propriété 2.7.** Supposons – sans perte de généralité – que  $\mathcal{F}_t = \bigcap_\mu \mathcal{F}_t^\mu$  pour tout  $t \geq 0$ , où  $\mu$  parcourt l'ensemble des mesures de probabilité sur  $(E, \mathcal{E})$ , et considérons le temps  $T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in E^B\}$ . D'après le théorème du début (Rogers et Williams, 2000a, théorème 76.1),  $T$  est un  $\mathcal{F}^\mu$ -temps d'arrêt pour tout  $\mu$ , donc un  $\mathcal{F}$ -temps d'arrêt. La propriété de Markov forte restant valable relativement à  $\mathcal{F}$ , on a

$$\mathbb{P}_\mu\{X_T \in E^B, T < +\infty\} = \mathbb{E}_\mu\{\mathbb{1}_{T < +\infty} \mathbb{P}_{X_T}\{X_0 \in E^B\}\} = 0,$$

ce qui prouve que  $T = +\infty$   $\mathbb{P}_\mu$ -ps, c'est-à-dire que  $X$  ne visite jamais  $E^B$  sous la loi  $\mathbb{P}_\mu$ . ■

Nous conviendrons que, pour tous les processus diffusifs par morceaux  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$  considérés dans la suite du mémoire, sauf mention explicite du contraire,  $\mathcal{A} = \bigcap_\mu \mathcal{A}^\mu$  et  $\mathcal{F}$  désigne la complétion de la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$ . Le processus  $X$  considéré, vu comme un processus normal sur l'espace d'état  $E^0$ , est alors un *processus borélien droit* au sens de Sharpe (1988, définition 8.1

<sup>6</sup>Rappelons ce que cela signifie :  $(\Omega, \mathcal{A}^\mu, \mathbb{P}_\mu)$  est un espace probabilisé complet,  $\mathcal{F}^\mu$  est une filtration continue à droite, et  $\mathcal{N}^\mu \subset \mathcal{F}_t^\mu$  pour tout  $t \geq 0$  (Rogers et Williams, 2000a, section 67)

<sup>7</sup>La terminologie est assez fluctuante sur ce point : certains auteurs parlent plutôt d'*augmentation*. Attention à ne pas confondre avec la notion d'*augmentation usuelle*, même si dans ce cas précis les deux coïncident. Attention également à ne pas confondre avec la notion habituelle de complétion d'une  $\sigma$ -algèbre, même s'il s'agit de quelque chose de très proche.

et § 20) : cela met à notre disposition tout un arsenal de résultats pour lesquels nous renverrons systématiquement à l'ouvrage de référence de Sharpe.

(2.8) **Remarques.**

- a) L'adjectif « droit » fait référence aux *hypothèses droites* de P.-A. Meyer. À quelques détails près, un processus de Markov est droit s'il est normal, continu à droite, et satisfait à une hypothèse technique supplémentaire<sup>8</sup> qui implique notamment la propriété de Markov forte. Signalons que les noyaux de transition  $P_t$  d'un processus droit ne sont pas en général supposés boréliens mais seulement universellement mesurables (voir plus bas). Un processus droit est alors dit *borélien* si ses noyaux de transitions sont boréliens – i.e., pour tous  $x \in E^0$  et  $t \geq 0$ , la restriction de  $P_t(x, \cdot)$  à la tribu borélienne est borélienne. Au delà de l'ouvrage de Sharpe sur lequel nous nous appuyons, signalons également les notes de cours de Gettoor (1975), et bien sûr l'incontournable traité de Dellacherie et Meyer (1987, chap. XVI).
- b) La convention concernant la filtration  $\mathcal{F}$  n'est pas vraiment une restriction. En fait, si  $X$  possède la propriété de Markov simple relativement à n'importe quelle filtration admissible  $\mathcal{G}$ , on peut remplacer  $\mathcal{F}$  par l'augmentation usuelle de  $\mathcal{G}$  : le processus obtenu est encore un processus borélien droit (Sharpe, 1988, théorème 7.10).
- c) Nous avons pris soin de préciser qu'un processus diffusif par morceaux  $X$  est borélien droit sur  $E^0$ , et pas sur  $E$ , puisque les hypothèses droites supposent le processus normal. On pourrait qualifier  $X$  de *processus droit avec branchement* (Dellacherie et Meyer, 1987, chapitre XVI, §5), mais cette notion est beaucoup moins répandue que la notion de processus droit, et signifie simplement que  $X$  ne visite jamais  $E^B$  et vérifie les hypothèses droites sur l'espace d'état  $E^0$ .

Terminons par une dernière définition, en lien avec l'augmentation des filtrations, dont nous aurons besoin dans la section suivante. Soit  $X$  un processus droit sur  $E^0$ , et soit  $\mathcal{E}^0$  la tribu borélienne sur  $E^0$  – qui n'est autre que la trace de  $\mathcal{E}$  sur  $E^0$ . On définit la tribu  $\mathcal{E}_u^0$  des ensembles universellement mesurables de  $E^0$  par  $\mathcal{E}_u^0 \triangleq \bigcap_{\mu} \overline{\mathcal{E}^0}^{\mu}$ , où  $\mu$  parcourt l'ensemble des mesures de probabilité sur l'espace  $(E^0, \mathcal{E}^0)$  et  $\overline{\mathcal{E}^0}^{\mu}$  désigne la complétion de  $\mathcal{E}^0$  par rapport à  $\mu$ . L'intérêt de cette nouvelle tribu sur  $E^0$ , plus grande que  $\mathcal{E}^0$ , est le suivant : pour  $A \in \mathcal{F}_{\infty}$ , l'application  $x \mapsto \mathbb{P}_x \{A\}$  n'est pas borélienne en général, mais il est cependant connu qu'elle est universellement mesurable (Sharpe, 1988, proposition 3.4). En d'autres termes le noyau  $\mathbb{P}(x, \cdot) = \mathbb{P}_x$  de  $(E^0, \mathcal{E}^0)$  dans  $(\Omega, \mathcal{F}_{\infty}^X)$  s'étend de manière unique en un noyau de  $(E^0, \mathcal{E}_u^0)$  dans  $(\Omega, \mathcal{F}_{\infty})$ .

## 2.B Pourquoi considérer des processus non conservatifs ?

La définition 2.6 autorise un processus diffusif par morceaux à ne pas être conservatif : il s'agit essentiellement d'une commodité qui nous permettra de formuler des résultats assez généraux d'existence, basés sur le théorème de renaissance, sans se préoccuper de savoir si le processus obtenu possède ou non une durée de vie finie (voir section 3). Nous allons maintenant préciser de quelle manière un processus diffusif par morceaux peut être non conservatif, et donner une condition suffisante pour qu'il le soit ; nous reviendrons sur cette question importante plus en détail au chapitre III.

En fait, la définition recouvre même des processus qui peuvent mourir avant même d'avoir effec-

---

<sup>8</sup>Hypothèse notée (HD2) dans Sharpe (1988, §7), dont l'énoncé précis nous entrainerait un peu loin et n'apporterait rien à la discussion.

tué un seul saut, ce qui est rarement utile en pratique<sup>9</sup>. On supposera donc à partir de maintenant que tous les processus diffusifs par morceaux considérés vérifient l'hypothèse suivante :

(2.9) **Hypothèse.**  $\tau_1 < \zeta$  presque sûrement sur  $\{\zeta < +\infty\}$ .

Ceci entraîne, par application répétée de la propriété de Markov forte, que le nombre de sauts  $N$  est presque sûrement infini sur  $\{\zeta < +\infty\}$ . En d'autres termes, le processus meurt lorsqu'il effectue un nombre infini de sauts en un temps fini. L'ensemble des instants de saut possède dans ce cas un point d'accumulation en  $t = \zeta$  : c'est précisément ce qui s'appelle, dans la littérature concernant les systèmes hybrides, le *phénomène de Zénon* (voir par exemple Zhang et al. (2001) et ses références pour une introduction au phénomène de Zénon dans le cas des systèmes hybrides déterministes).

(2.10) **Définition.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $E$ . On dira que  $X$  possède la propriété de Zénon  $\mathcal{Z}(\mu)$  si  $\mathbb{P}_\mu\{\zeta < +\infty, N = +\infty\} > 0$ .

Il est clair que, en raison de l'hypothèse 2.9, la propriété  $\mathcal{Z}(\mu)$  est fautive pour tout  $\mu$  si et seulement si le processus est conservatif. Pour travailler sur l'équation de Fokker-Planck au chapitre IV, on supposera que le nombre de sauts sur l'intervalle  $[0; t]$ , noté  $N_t(\omega)$ , possède une espérance finie. Ceci est plus restrictif que la simple absence de phénomène de Zénon, comme l'énonce la propriété suivante :

(2.11) **Propriété.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $E$  telle que

$$\mathbb{E}_\mu\{N_t\} < +\infty, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Alors la propriété  $\mathcal{Z}(\mu)$  est fautive.

□ **Démonstration.** Supposons que  $\mathcal{Z}(\mu)$  est vraie. Alors il existe  $t \geq 0$  tel que  $\mathbb{P}_\mu\{\zeta \leq t\} > 0$ . On a alors  $\mathbb{E}_\mu(N_t) \geq \mathbb{E}_\mu(N_t \mathbb{1}_{\zeta \leq t}) = +\infty$ , puisque  $N_t = N = +\infty$  sur l'évènement  $\{\zeta \leq t\}$  qui est de probabilité  $\mathbb{P}_\mu$  strictement positive. ■

La réciproque de la propriété 2.11 est bien entendu fautive. Il suffit pour s'en convaincre de considérer un processus conservatif pour lequel  $\mathbb{E}_x\{N_t\}$  n'est pas borné en  $x$ , pour un  $t$  fixé, puis de choisir la mesure  $\mu$  de façon à faire diverger l'intégrale  $\mathbb{E}_\mu\{N_t\}$ . Remarquons que, dans ce contre-exemple, nous avons supposé  $\mathbb{E}_x\{N_t\}$  fini pour tout  $x$  ; cela soulève une question à laquelle nous ne savons pas répondre : peut-on trouver un processus diffusif par morceaux conservatif, pour lequel  $\mathbb{E}_x\{N_t\} = +\infty$ , pour un  $x$  et un  $t$  donnés ?

La proposition suivante fournit une condition suffisante, qui permettra de s'assurer dans de nombreux cas que le processus considéré est conservatif :

(2.12) **Proposition.** Supposons qu'il existe un borélien  $\Gamma \subset E^0$ , des réels  $\alpha, h > 0$  et un entier  $k^* \geq 1$ , tels que :

i) pour tout  $x \in E$ ,  $\mathbb{P}_x\{\exists k \geq 0, X_{\tau_k} \in \Gamma\} = 1$  ;

ii) pour tout  $x \in \Gamma$ ,  $\mathbb{P}_x\{\tau_{k^*} \geq h\} \geq \alpha$ .

Alors le processus  $X$  est conservatif.

Ce résultat est énoncé sans démonstration – avec  $\Gamma = E^0$  et  $k^* = 1$  – par Ikeda et al. (1966, proposition 4.2.ii). Nous en donnerons une application concrète au chapitre III, § 2.C, dans le cas des systèmes hybrides stochastiques.

---

<sup>9</sup>À moins de vouloir considérer des processus dont la partie diffusive est définie par une EDS « explosive », c'est-à-dire des EDS dont les solutions s'échappent à l'infini en un temps fini.

□ **Démonstration.** Soit  $k(0), k(1), \dots$  la suite d'entiers aléatoires définie récursivement par

$$\begin{aligned} k(0) &= \inf \left\{ k \geq 0, X_{\tau_k} \in \Gamma \right\}, \\ k(i) &= \inf \left\{ k \geq k(i-1) + k^*, X_{\tau_k} \in \Gamma \right\}, \quad i \geq 1, \end{aligned}$$

et  $T_i = \tau_{k(i)}$  les temps de saut correspondants. L'hypothèse 2.12.i entraîne que  $k(i) < +\infty$  presque sûrement – il suffit de vérifier grâce à la propriété de Markov forte que la suite  $(X_{\tau_k})$  visite infiniment souvent l'ensemble  $\Gamma$ . Définissons maintenant les évènements

$$A_i = \left\{ T_{i+1} - T_i \geq h \right\} \in \mathcal{F}_{T_{i+1}}^X, \quad \forall i \geq 0,$$

qui vérifient la relation  $A_i = \theta_{T_i}^{-1} A_0$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu \left\{ A_i \mid \mathcal{F}_{T_i}^X \right\} &= \mathbb{P}_{X_{T_i}} \left\{ A_0 \right\} && \text{par la propriété de Markov forte,} \\ &= \mathbb{P}_{X_{T_i}} \left\{ T_1 \geq h \right\} && \text{car } X_{T_i} \in \Gamma, \\ &\geq \mathbb{P}_{X_{T_i}} \left\{ \tau_{k^*} \geq h \right\} && \text{car } T_1 = \tau_{k(1)} \geq \tau_{k^*}, \\ &\geq \alpha && \text{d'après l'hypothèse 2.12.ii.} \end{aligned}$$

On conclut alors, en utilisant le lemme de Borel-Cantelli étendu (Kallenberg, 1997, corollaire 7.20), qu'il existe presque sûrement une infinité d'indices  $i \geq 1$  tels que  $\tau_{k(i+1)} - \tau_{k(i)} \geq h$ . Ceci entraîne bien sûr que  $\zeta = +\infty$ . ■

## 2.C Sauts prévisibles et totalement inaccessibles

Nous regroupons ici quelques remarques concernant la « nature » des sauts d'un processus diffusif par morceaux  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$ , en lien avec les notions de temps d'arrêt *prévisibles* et *totalement inaccessibles* – notions qui correspondront, une fois prises quelques précautions, à ce que nous appelons ailleurs dans le mémoire des sauts « forcés » et « spontanés ». Rappelons brièvement de quoi il s'agit (Rogers et Williams, 2000b, § VI.12) :

(2.13) **Définition-propriété.** Soit  $T > 0$  un  $\mathcal{F}$ -temps d'arrêt.

- i)  $T$  est dit *prévisible* s'il existe une suite de  $\mathcal{F}$ -temps d'arrêt qui l'annoncent (en symboles :  $T_n \uparrow T$ ), i.e.  $T_n \leq T_{n+1} < T$  pour tout  $n$  et  $T_n \rightarrow T$ .
- ii)  $T$  est *prévisible* si et seulement si le processus  $t \mapsto \mathbb{1}_{t \geq T}$  est *prévisible*, c'est-à-dire  $\mathcal{P}$ -mesurable, où  $\mathcal{P}$  est la tribu sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  engendrée par les processus continus et  $\mathcal{F}$ -adaptés.
- iii)  $T$  est dit *totalement inaccessible* si, pour tout temps d'arrêt *prévisible*  $S$ , l'évènement  $\{S = T < +\infty\}$  est *négligeable*.
- iv)  $T$  est appelé un *temps de saut* si  $X_T \neq X_T^-$  ps sur  $\{T < +\infty\}$ .

(2.14) **Remarque.** Nous avons défini ici la notion de *prévisibilité* relativement à la filtration  $\mathcal{F}$  du processus de Markov considéré. On peut bien sûr considérer la notion de *prévisibilité* relativement à n'importe quelle filtration  $\mathcal{G}$ , auquel cas on précisera en parlant de temps  $\mathcal{G}$ -prévisibles.

Notons  $\tau_k^B$  le  $k^{\text{ième}}$  temps de passage de  $X^-$  dans  $E^B$ , qui est nécessairement un temps de saut puisque  $X$  ne visite jamais  $E^B$  (cf. proposition 2.7), et définissons  $\tau_k^0$  comme le  $k^{\text{ième}}$  temps de saut du processus  $X$  tel que  $X^- \in E^0$ . (On utilisera la même convention que pour la suite  $(\tau_k)$ , à savoir

que  $\tau_k^B = \zeta$  si  $X^-$  visite  $E^B$  moins de  $k$  fois, et de même pour les  $\tau_k^0$ .) Il est facile de voir que les  $\tau_k^B$  sont des temps  $\mathcal{F}^X$ -prévisibles (donc prévisibles), puisque  $\tau_1^B$  est le temps de première entrée de  $X^-$  dans le fermé  $E^B$ ,  $\tau_2^B = \inf\{t > \tau_1^B, X_t^- \in E^B\}$ , et ainsi de suite. Par contre, rien n'empêche un processus, diffusif par morceaux au sens de la définition 2.6, d'avoir des sauts prévisibles à l'intérieur de  $E^0$ . Cela ne sera jamais le cas avec les systèmes hybrides stochastiques du chapitre III; en effet, on s'assurera en étudiant la construction des processus diffusifs par morceaux, dans la section 3 de ce chapitre, que sous certaines conditions le processus obtenu vérifie l'hypothèse suivante :

(2.15) **Hypothèse.** *Pour tout temps d'arrêt prévisible  $T > 0$ , on a  $X_T = X_T^-$  presque sûrement sur l'évènement  $\{T < \zeta, X_T^- \in E^0\}$ .*

Cette hypothèse est très utile pour mener à bien l'étude des processus diffusifs par morceaux, comme on le verra dans la suite pour les systèmes hybrides stochastiques. Il est clair que, sous cette hypothèse, les temps de sauts  $\tau_k^0$  sont totalement inaccessibles (sur l'évènement  $\tau_k^0 < \zeta$ ). À partir de maintenant, sous réserve que l'hypothèse 2.15 soit vérifiée, on appellera sauts *forcés* les sauts qui ont lieu à partir de  $E^B$  et sauts *spontanés* ceux qui ont lieu à partir de  $E^0$ ; d'après ce qui précède, un temps de saut forcé est prévisible, tandis qu'un temps de saut spontané est totalement inaccessible.

(2.16) **Exemples.**

- a) Le plus simple exemple de processus à sauts spontanés (totalement inaccessibles) est fourni par le processus de Poisson, caractérisé par son intensité  $\lambda > 0$ . Plus généralement, les sauts spontanés des diffusions alternantes de Ghosh et al. (1992, 1997) ou des SHS considérés par Hespanha (2005, 2006) sont « similaires » à ceux d'un processus de Poisson, mais avec une intensité stochastique  $\lambda(X_t)$  dépendant éventuellement de l'état du processus (cf. chapitre III, § 2.C pour une définition plus rigoureuse).
- b) Les systèmes hybrides stochastiques de Hu et al. (2000) sont des modèles à sauts forcés. Plus généralement, les processus déterministes par morceaux de Davis (1984, 1993) et les systèmes hybrides stochastiques généraux de Bujorianu et Lygeros (2004a,b,c) autorisent la présence de sauts forcés et de sauts spontanés dans un même modèle.
- c) Terminons avec un exemple de processus diffusif par morceaux ne vérifiant pas l'hypothèse 2.15. Considérons pour cela l'espace d'état  $E = E^0 = \mathbb{R}$ . Le processus  $X$  se déplace vers la droite à vitesse constante  $v > 0$ , et saute de  $0^-$  en 1 lorsqu'il atteint le point 0 par la gauche. Le saut est clairement prévisible, et pourtant a lieu dans  $E^0$  : l'hypothèse 2.15 n'est donc pas vérifiée.

(2.17) **Remarque.** Dans l'exemple 2.16.c, une simple modification de l'espace d'état permet d'obtenir un modèle vérifiant l'hypothèse 2.15 : il suffit en effet de découper l'espace en deux demi-droites,  $] -\infty; 0[$  et  $[0; +\infty[$ , et d'adjoindre à la partie de gauche un point de branchement  $0^-$ . Il existe une procédure abstraite, la compactification de Ray-Knight (Sharpe, 1988, chapitre V), permettant d'obtenir un résultat similaire à partir de n'importe quel processus droit, mais cela exige en général de changer la topologie sur  $E$ , en remplaçant la topologie borélienne par la topologie dite « de Ray ». Il s'agit d'une méthode très puissante pour la théorie générale des processus de Markov, mais sans grand intérêt pour les applications pratiques.

## 2.D Passé strict et noyaux de réinitialisation

Nous allons maintenant restreindre un peu la classe des processus considérés en nous intéressant à la manière dont l'état du processus après un saut dépend du *passé strict* du processus avant ce saut. Commençons pour cela par rappeler quelques définitions :

(2.18) **Définition.** *Étant donné une filtration  $\mathcal{G}$  et un  $\mathcal{G}$ -temps d'arrêt  $T$ , on définit le passé strict  $\mathcal{G}_{T-}$  de  $T$  comme la tribu engendrée par  $\mathcal{G}_0$  et par les événements de la forme  $A \cap \{t < T\}$ , où  $t > 0$  et  $A \in \mathcal{G}_t$ .*

On trouvera quelques propriétés du passé strict dans Kallenberg (1997, pp. 491–492). Nous sommes maintenant prêts pour introduire la notion de noyau de réinitialisation :

(2.19) **Définition.** *Soit  $X$  un processus diffusif par morceaux et  $K$  un noyau markovien sur  $(E, \mathcal{E})$ . On dira que  $K$  est un noyau de réinitialisation pour le processus  $X$  si :*

- i)  $K(x, \{x\} \cup E^B) = 0$  pour tout  $x \in E$ ,
- ii)  $\mathbb{P}_x\{X_0 \in \Gamma\} = K(x, \Gamma)$  pour tous  $x \in E^B$  et  $\Gamma \in \mathcal{E}$ ,
- iii)  $\mathbb{P}_x\{X_T \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{T-}\} = K(X_{T-}, \Gamma)$ ,  $\mathbb{P}_x$ -ps sur  $\{T < \zeta\}$ , pour tous  $x \in E$ ,  $\Gamma \in \mathcal{E}$  et pour tout temps de saut  $T$ .

(2.20) **Remarques.**

- a) Il s'agit là d'une définition qui nous est propre, à ne pas confondre avec la notion plus générale de *noyau de renaissance* (Meyer, 1975). Les deux notions sont cependant étroitement liées : plus précisément, le noyau de réinitialisation  $K$  sera utilisé au § 3.B pour construire un noyau de renaissance (cf. équation 3.12).
- b) Le noyau de réinitialisation n'est pas unique en général. Considérons par exemple un processus qui n'a pas de saut spontané, et qui donc ne saute que lorsque  $X_t^- \in E^B$  : dans ce cas la définition n'impose aucune contrainte sur  $K(x, \cdot)$  pour  $x \in E^0$ .
- c) La propriété 2.19.i peut être déduite des propriétés 2.6.iii et 2.19.ii si l'on suppose simplement que  $K(x, \{x\}) = 0$  pour tout  $x \in E$ .
- d) Un processus diffusif par morceaux au sens de notre définition générale 2.6 n'admet pas nécessairement un tel noyau de réinitialisation. On peut par exemple construire un processus sur  $\mathbb{R}$ , avec un point de branchement en 0, pour lequel la position après le saut dépend du côté par lequel on est arrivé en 0. Cependant :
  - On peut, de manière assez générale, se ramener à la situation où l'on dispose d'un noyau de réinitialisation en changeant un peu l'espace d'état du processus (voir Meyer (1975, p. 490) pour une discussion plus détaillée à ce sujet ; ceci est lié à la technique de compactification déjà évoquée dans la remarque 2.17). Nous n'approfondirons pas plus loin cette question dans la mesure où, en pratique, le noyau de réinitialisation  $K$  est l'une des données de base à partir de laquelle on construit un processus diffusif par morceaux – comme on le verra au § 3.C.
  - $X$  étant un processus droit sur  $E^0$ , il existe toujours un noyau de réinitialisation pour les sauts spontanés : c'est une conséquence de l'existence d'un système de Lévy (Sharpe, 1988, § 73) et du fait que  $N_t < +\infty$  presque sûrement. Sous l'hypothèse 2.15, l'existence d'un noyau de réinitialisation  $K$  est donc, en réalité, une hypothèse sur le comportement du processus à ses points de branchement.

## 3 Contructions de processus diffusifs par morceaux

### 3.A Introduction

Maintenant que nous avons proprement défini ce que nous appelons un processus diffusif par morceaux, se pose naturellement la question de l'existence de tels processus. Bien sûr, les processus de diffusion sont des processus diffusifs par morceaux : il existe dans ce cas différents théorèmes d'existence et d'unicité, selon que l'on s'intéresse à une diffusion définie par une EDS « classique », à une EDS avec réflexion au bord d'un domaine, ou encore à une diffusion biaisée<sup>10</sup>. Il est donc naturel de vouloir s'appuyer sur ces résultats pour construire de *vrais* processus diffusifs par morceaux – vrai, c'est-à-dire avec des sauts ! Tel est l'objet de la présente section.

Avant de préciser ce dont nous allons parler, commençons plutôt par ce dont nous ne parlerons pas. En effet, il est possible de construire toute une classe de processus diffusifs par morceaux à sauts spontanés en considérant directement des EDS à sauts, faisant intervenir en plus du terme brownien une mesure aléatoire de Poisson (Jacod, 1979). Dans le cas où l'espace d'état est  $\mathbb{R}^n$ , on parle alors de *jump-diffusions* (Cont et Tankov, 2003 ; Øksendal et Sulem, 2005). La même approche se généralise sans trop de difficultés au cas d'un espace d'état de la forme  $\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^n$ , où  $\mathcal{Q}$  est un ensemble fini (Blom, 2003 ; Krystul et Blom, 2005), mais s'est révélée impossible à adapter au cas des sauts forcés (Blom, 1988). Fort heureusement, une autre approche est possible lorsqu'on se limite au cas « diffusif par morceaux », c'est-à-dire lorsque les temps de saut sont isolés. Elle est basée sur un résultat très général de la théorie des processus de Markov, le *théorème de renaissance* d'Ikeda, Nagasawa et Watanabe (1966) : c'est la solution que nous avons adoptée, suivant en cela la voie tracée par Heath (1969), Siegrist (1981) et plus récemment Bujorianu et Lygeros (2004c).

(3.1) **Remarque.** Deux mots encore, avant d'entrer dans le vif du sujet, concernant la construction de processus dont l'ensemble des temps de saut possède des points d'accumulation. La liste qui suit répertorie quelques approches permettant de construire des processus à sauts qui ne sont pas nécessairement continus par morceaux.

- Nous avons déjà évoqué les EDS à sauts, incluant en plus du terme brownien une mesure aléatoire de Poisson : cette approche de construire des processus dont les sauts ne sont pas astreints à former un ensemble sans point d'accumulation – à condition d'utiliser comme intégrateur, pour les sauts de faible amplitude, la mesure de Poisson *compensée*. (Les processus de Lévy sont, d'après le théorème de représentation de Lévy-Itô, des exemples de tels processus ; voir par exemple Kallenberg (1997), théorème 13.4).

- Une autre technique, de nature probabiliste également, permet de « recoller » des morceaux de trajectoires pour reconstituer un processus de Markov : il s'agit de la *théorie des excursions* (Blumenthal, 1991 ; Itô, 1972 ; Salisbury, 1986a,b). La fermeture de l'ensemble des instants de recollement – il ne s'agit pas forcément de sauts – est en général d'intérieur non vide. Ainsi, les *mouvements browniens de Feller* sur  $[0; \infty]$ , découverts analytiquement par Feller (1957), reçoivent une interprétation probabiliste en termes de mesures d'excursions dans Rogers et Williams (2000b, chapitre VI, §57) ; on retrouve comme cas particuliers certains processus diffusifs par morceaux construits à partir du mouvement brownien, mais les comportements au bord que l'on peut obtenir par cette méthode sont beaucoup plus généraux. Les mesures d'excursions sont également utilisées pour la construction du mouvement brownien biaisé (*skew Brownian motion*), voir par exemple Lejay (2002) et ses références.

---

<sup>10</sup>Le principal théorème d'existence et d'unicité pour les EDS sera rappelé au chapitre III, § 2.B. On pourra consulter, par exemple, Bass (1997) pour les EDS avec réflexion, et Lejay (2002, 2006) pour les diffusions biaisées.



– Signalons enfin l’approche analytique de Bass (1979), qui permet d’« ajouter des sauts » à un processus de Markov. Bass travaille directement au niveau des générateurs infinitésimaux : le processus obtenu est caractérisé par son générateur infinitésimal, qui est la somme du générateur du processus de base, et d’un opérateur décrivant les sauts à ajouter. Cette technique n’est pas capable de prendre en compte les sauts forcés, qui modifient le générateur infinitésimal d’une manière différente (c’est le domaine de l’opérateur qui est affecté). Par contre, elle peut – comme les EDS à sauts – constituer des processus à sauts spontanés dont les sauts forment un sous-ensemble dénombrable dense de  $\mathbb{R}_+$ .

### Processus tué et renaissance

Soit  $X$  un processus diffusif par morceaux, admettant un noyau de réinitialisation  $K$ . On peut isoler la « partie diffusive » du processus en le tuant à l’instant même où il s’apprête à faire son premier saut ; i.e., on définit un nouveau processus  $\widehat{X}$  en posant

$$\forall t \geq 0, \quad \widehat{X}_t = \begin{cases} X_t & \text{si } t < \tau_1, \\ \partial & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le processus  $\widehat{X}$  ainsi obtenu est un processus de diffusion<sup>11</sup> sur l’espace d’état  $E^0$ , non conservatif, et possédant une limite à gauche dans  $E$  au temps  $\hat{\zeta} = \tau_1$  (pour tout  $\omega \in \Omega$ ). On vérifie facilement, à l’aide de la propriété de Markov forte, que la connaissance du noyau  $K$  et de la loi du processus  $\widehat{X}$  suffit à caractériser de manière unique la loi du processus  $X$ .

Il est donc naturel de se poser la question suivante : *étant donné un processus  $\widehat{X}$ , possédant les propriétés que nous venons d’énumérer, et un noyau borélien  $K$  satisfaisant l’hypothèse 2.19.i, existe-t-il un processus diffusif par morceaux  $X$  qui admet  $K$  comme noyau de réinitialisation, et qui coïncide en loi avec  $\widehat{X}$  jusqu’à son premier saut ?* En notant  $\widehat{P}$  le semigroupe de noyaux associé à  $\widehat{X}$ , la deuxième condition signifie que, pour tous  $t \geq 0$ ,  $\Gamma \in \mathcal{E}$  et  $x \in E^0$ ,

$$\widehat{P}_t(x, \Gamma) = \mathbb{P}_x\{X_t \in \Gamma, t < \tau_1\}.$$

La réponse – affirmative – à cette question est donnée au § 3.B. Il s’agit, pour l’essentiel, du contenu du théorème de renaissance d’Ikeda, Nagasawa et Watanabe (1966). Notre contribution se trouve au niveau du théorème 3.18, qui précise dans le cas des processus diffusifs par morceaux les conclusions du théorème de renaissance tel qu’il est énoncé par Meyer (1975).

### Description du temps de premier saut par sa fonction de survie

La construction que nous venons de décrire suppose que les données de base du problème sont le processus tué  $\widehat{X}$  et le noyau de réinitialisation  $K$ , mais les choses se présentent rarement de cette manière dans la pratique. Nous décrivons donc au § 3.C une autre construction, qui correspond à la situation plus concrète où l’on ne dispose pas d’un processus  $\widehat{X}$  à durée de vie finie mais plutôt : 1) d’un processus de diffusion conservatif  $\widetilde{X}$  que nous appellerons le *processus de base*, 2) d’une *fonction de survie*  $t \mapsto F_t$  qui détermine la loi du temps  $\tau_1$  pour le processus  $X$  à construire, conditionnellement au processus de base  $\widetilde{X}$ , et toujours, bien entendu, 3) d’un noyau de réinitialisation  $K$ .

---

<sup>11</sup>On peut appliquer le corollaire 12.24 de Sharpe (1988), le temps  $\tau_1$  étant un temps terminal, parfait et exact. Le caractère borélien des noyaux de transition vient de ce que  $\tau_1$  est un  $\mathcal{F}^X$ -temps d’arrêt.

L'idée est la suivante : pour décrire un processus diffusif par morceaux, on commence le plus souvent par décrire la « partie diffusive » du modèle, par exemple à l'aide d'une EDS, puis on décrit la dynamique discrète en définissant quand et comment on veut rajouter des sauts dans la trajectoire du processus : le « quand » est défini par la fonction de survie  $F$ , et le « comment » par le noyau de réinitialisation  $K$ . Plus précisément,  $F_t$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t^{\tilde{X}}$ -mesurable qui s'interprète comme la probabilité de l'évènement  $\{\tau_1 > t\}$  sachant le processus  $\tilde{X}$  (il ne s'agit pour le moment que d'une interprétation puisque le temps  $\tau_1$  est à construire!). Le lien entre le processus de base  $\tilde{X}$  et le processus  $X$  à construire s'exprime donc par la relation

$$(3.2) \quad \mathbb{P}_x\{X_t \in \Gamma, t < \tau_1\} = \tilde{\mathbb{E}}_x\{\mathbb{1}_{\tilde{X}_t \in \Gamma} F_t\},$$

pour tous  $t \geq 0$ ,  $\Gamma \in \mathcal{E}$  et  $x \in E$ . Le problème peut donc se formuler ainsi : *existe-t-il un processus processus diffusif par morceaux  $X$  admettant  $K$  comme noyau de réinitialisation, et satisfaisant à la relation 3.2 ?*

On se ramène en fait à la situation précédente en tuant le processus de base  $\tilde{X}$ , de façon à ce que la durée de vie  $\hat{\zeta}$  du processus  $\hat{X}$  ainsi obtenu ait pour fonction de répartition  $1 - F$  conditionnellement à  $\tilde{X}$ . Sous réserve que  $\hat{X}$  soit bien un processus de diffusion, on obtient alors un processus répondant au problème posé en appliquant le théorème de renaissance du § 3.B. La construction du processus tué  $\hat{X}$  à partir de  $\tilde{X}$  et de  $F$  fait appel à une technique tout à fait classique en théorie des processus de Markov : la construction d'un processus tué défini par une fonctionnelle multiplicative (voir par exemple Sharpe, 1988, § 61). Le § 3.C contient donc essentiellement un rappel de cette construction bien connue, qui nous donne l'occasion d'énoncer clairement les hypothèses que nous faisons sur  $F$ , et de vérifier que sous ces hypothèses le processus obtenu satisfait à l'hypothèse 2.15.

### Repères bibliographiques

Les premiers résultats généraux, permettant de construire un processus de Markov en ressuscitant un processus à durée de vie finie, ont été établis par Moyal (1957). Il s'agit d'une approche analytique, qui s'intéresse uniquement aux semigroupes de noyaux  $\hat{P}$  et  $P$  associés respectivement à  $\hat{X}$  et  $X$ . Plus précisément, Moyal recherche  $P$  comme solution de l'équation de renouvellement suivante :

$$(3.3) \quad P_t(x, \Gamma) = \hat{P}_t(x, \Gamma) + \iint_{[0;t] \times E^0} \xi(x, ds \otimes dy) P_{t-s}(y, \Gamma),$$

où  $\xi(x, \cdot)$  est la loi jointe sous  $\mathbb{P}_x$  du couple  $(\tau_1, X_{\tau_1})$ . Cette équation découle d'une simple application de la propriété de Markov forte au temps  $\tau_1$ . Moyal montre qu'il existe toujours une solution minimale, non nécessairement conservative, donnée par la série

$$(3.4) \quad P_t(x, \Gamma) = \sum_{k \geq 0} \iint_{[0;t] \times E^0} \xi^k(x, ds \otimes dy) \hat{P}_{t-s}(y, \Gamma),$$

où l'on a introduit les fonctions  $\xi^k$  définies récursivement par  $\xi^0(x, \cdot) = \delta_{(0,x)}$ ,  $\xi^1 = \xi$ , et

$$\xi^{k+1}(x, dt \otimes dz) = \iint_{[0;t] \times E^0} \xi^k(x, ds \otimes dy) \xi(y, d(t-s) \otimes dz).$$

La solution 3.4 est minimale au sens où tout autre solution  $P'$  vérifie  $P'(x, \Gamma) \geq P(x, \Gamma)$  pour tous  $x \in E$  et  $\Gamma \in \mathcal{E}$ . Il s'agit donc clairement de l'unique solution du problème si elle est conservative. Il existe en général, dans le cas contraire, une infinité de solutions à l'équation 3.3.

Les résultats obtenus par Moyai sont de nature entièrement analytique : ils ne donnent aucun renseignement sur les trajectoires du processus stochastique associé. La construction probabiliste associée à la solution minimale 3.4 a été découverte quelques années plus tard par Ikeda, Nagasawa et Watanabe (1966, théorème 1.1) : il s'agit précisément du théorème de renaissance dont nous avons déjà parlé. On comprend mieux, de ce point de vue, ce que signifie l'absence d'unicité pour l'équation 3.3 : cela correspond en fait au cas où les sauts de la solution minimale s'accumulent en un temps fini (phénomène de Zénon) ; les autres solutions correspondent alors à des prolongements de la solution minimale, pour lesquels l'ensemble des temps de saut possède des points d'accumulation.

La façon dont le processus  $\widehat{X}$  renaît à l'instant  $\hat{c}$  est définie par un *noyau de renaissance*<sup>12</sup> (voir plus loin, étape 3.11, pour plus de détails). L'article d'Ikeda et al. fournit des conditions suffisantes très générales pour que le processus obtenu par renaissance hérite de la propriété de Markov forte. Meyer (1975) a repris et amélioré le théorème d'Ikeda et al., en travaillant notamment avec une filtration plus générale, et en montrant que les hypothèses droites sont préservées par la procédure de renaissance. Il a également montré que les hypothèses d'Ikeda et al. sont, en un certain sens, suffisantes (cf. pp. 274–282, « Le problème inverse »).

Bien qu'originellement motivé par la théorie des processus de branchement, le théorème de renaissance a très vite été appliqué à la construction de processus « hybrides » : les évolutions aléatoires (*random evolutions*) de Griego et Hersh (1969). L'étude de ces processus a été commencée par l'observation d'un fait assez surprenant : les évolutions aléatoires permettent de représenter de manière probabiliste la solution de certaines EDP hyperboliques (il était alors bien connu que les processus de diffusions permettent de représenter la solution de certaines EDP elliptiques et paraboliques, cf. Hersh, 2003). C'est Heath (1969) qui, selon Meyer<sup>13</sup>, a remarqué que les évolutions aléatoires peuvent être construites par le théorème de renaissance. La construction utilisée dans ce cas particulier, baptisée *mélange de processus de Markov* par Meyer (1975), est décrite en détail dans un article de Siegrist (1981) pour une classe plus étendue d'évolutions aléatoires – classe qui contient en fait le cas des processus diffusifs par morceaux lorsque les sauts sont de type spontané. La construction par Davis (1984) des processus déterministes par morceaux est un autre exemple d'application du théorème de renaissance, bien que celui-ci ne soit pas explicitement cité (l'espace probabilisé sur lequel Davis réalise son processus n'est pas non plus clairement défini, d'ailleurs).

La construction de processus par renaissance a été remise au goût du jour plus récemment par Bujorianu et Lygeros (2003, 2004c) pour la construction de processus de Markov définis par des systèmes hybride stochastique ; plus précisément, pour une classe de processus qu'ils baptisent *General Stochastic Hybrid Systems* (GSHS), et qui est essentiellement celle que nous considérerons à partir du chapitre III. Modulo une étape de préparation triviale<sup>14</sup>, la construction en question est celle que nous donnons au § 3.C, dont nous avons déjà dit qu'elle consiste simplement à mettre bout à bout deux constructions bien connues en théorie des processus de Markov. Il nous a néanmoins semblé utile de la reprendre pas à pas, et ce pour différentes raisons :

- L'article de Bujorianu et Lygeros (2004c) manque à notre avis de rigueur mathématique, et contient en particulier un certain nombre d'inexactitudes concernant les questions de mesurabilité (filtrations, caractère borélien du noyau de transition, etc.) ; de plus, la relative simplicité de la construction – une fois admis le théorème de renaissance – y est masquée par des notations inutile-

<sup>12</sup>En anglais : *instantaneous distribution* (Ikeda et al., 1966) ou encore *transfer kernel* (Sharpe, 1988).

<sup>13</sup>Nous reprenons ici une affirmation de Meyer (1975) faute d'avoir pu consulter la thèse en question.

<sup>14</sup>L'étape en question est aussi la première étape de la construction de Siegrist (1981) : il s'agit, étant donné un ensemble fini de processus de diffusion  $\tilde{X}_q$ , à valeurs dans des espaces  $E_q$  éventuellement différents, de former un processus « composite »  $\tilde{X}$ , à valeurs dans la somme disjointe des  $E_q$  (voir chapitre III, § 2.A)

ment compliquées, liées à la structure « hybride » de l'espace d'état qui ne joue en fait aucun rôle à ce niveau.

– L'article de Siegrist (1981) utilise des hypothèses qui ne permettent pas de prendre en compte les sauts forcés ; par ailleurs, il se base sur la version originale du théorème de renaissance (Ikeda et al., 1966) qui établit la propriété de Markov forte pour une filtration qui n'est pas assez grande pour nos besoins.

– Bien que l'essentiel de la difficulté soit prise en charge par les théorèmes généraux de Meyer (1975) et Sharpe (1988) auxquels nous feront appel, leur application à la construction de processus diffusifs par morceaux mérite d'être menée proprement au moins une fois, ne serait-ce que pour en énoncer rigoureusement les hypothèses et les conclusions. De plus, nous réutiliserons la réalisation construite dans cette section, dont nous établirons quelques propriétés au § 3.D, dans l'étude du générateur étendu au chapitre suivant.

### 3.B Mise en œuvre du théorème de renaissance

Nous allons maintenant, comme annoncé en introduction, mettre en œuvre le théorème de renaissance pour construire un processus diffusif par morceaux  $X$  à partir d'un processus de diffusion  $\widehat{X}$  non conservatif et d'un noyau de réinitialisation  $K$ . Nous nous appuyerons pour cela sur la version du théorème de renaissance présentée par Meyer (1975). Précisons les hypothèses de cette construction :

#### (3.5) Hypothèses.

- i)  $E$  est un espace métrique LCS,  $E^0$  un borélien de  $E$ , et  $E^B = E \setminus E^0$ .
- ii)  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{X}, \widehat{\theta}, \widehat{\mathbb{P}})$  est un processus de diffusion sur  $E^0$ , de durée de vie  $\widehat{\zeta}$ , tel que  $\lim_{t \uparrow \widehat{\zeta}} \widehat{X}_t$  existe dans  $E$  pour tout  $\widehat{\omega} \in \widehat{\Omega}$ .
- iii)  $K$  est un noyau de transition borélien sur  $E$ , satisfaisant à l'hypothèse 2.19.i, ie

$$K(x, \{x\} \cup E^B) = 0, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

- iv)  $\widehat{\mathcal{F}}$  est la complétion de  $\mathcal{F}^{\widehat{X}}$  (cf §2.A), de sorte que  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{X}, \widehat{\theta}, \widehat{\mathbb{P}})$  est un processus borélien droit au sens de Sharpe (1988).
- v) Il existe un élément  $\widehat{\omega}_\partial \in \widehat{\Omega}$ , de durée de vie  $\widehat{\zeta}(\widehat{\omega}_\partial)$  nulle, tel que  $\widehat{\mathbb{P}}_\partial = \delta_{\widehat{\omega}_\partial}$ .

#### (3.6) Remarques.

- a) On pourrait généraliser un peu l'hypothèse 3.5.iv, en considérant une filtration  $\widehat{\mathcal{F}}$  plus grande que la complétion de  $\mathcal{F}^{\widehat{X}}$ . Sous réserve que cette filtration soit complète et continue à droite, le sextuplet  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{X}, \widehat{\theta}, \widehat{\mathbb{P}})$  serait encore un processus borélien droit au sens de Sharpe (1988) ; mais il faudrait alors, de plus, supposer que l'application  $x \mapsto \widehat{\mathbb{P}}_x\{A\}$  est universellement mesurable pour tout  $A \in \widehat{\mathcal{F}}_\infty$ .
- b) Concernant l'hypothèse 3.5.v : il existe toujours un  $\widehat{\omega}_\partial \in \widehat{\Omega}$ , de durée de vie  $\widehat{\zeta}(\widehat{\omega}_\partial)$  nulle (sauf peut-être si le processus  $\widehat{X}$  est conservatif, mais alors il n'y a rien à ressusciter !). Rien n'impose cependant que  $\widehat{\mathbb{P}}_\partial = \delta_{\widehat{\omega}_\partial}$ , mais on peut toujours changer la mesure  $\widehat{\mathbb{P}}_\partial$  pour que cela soit vrai, sans rien changer à la loi du processus  $\widehat{X}$ .

### La construction du processus ressuscité, étape par étape

À la base du théorème de renaissance se trouve une idée simple et fort élégante : « ressusciter » un processus de Markov non conservatif  $\widehat{X}$ , défini sur un espace  $\widehat{\Omega}$ , revient à construire une chaîne

de Markov  $(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots)$  à valeurs dans  $\hat{\Omega}$ . (Pour visualiser cela, il est utile de considérer le cas où  $\hat{\Omega}$  est l'espace des trajectoires continues, à valeurs dans  $E^0$  et à durée de vie : la chaîne de Markov en question est alors une séquence de « morceaux de trajectoires ».) Si le noyau de transition  $H(\hat{\omega}, d\hat{\omega}')$  est bien choisi, le processus obtenu en « recollant » les morceaux  $\hat{X}(\hat{\omega}_k)$  est à nouveau un processus de Markov. La suite de cette section décrit en détail cette construction, adaptée de Meyer (1975) au cas particulier des processus diffusifs par morceaux.

(3.7) **L'espace mesurable**  $(\Omega, \mathcal{A}^\#)$ . L'espace le plus naturel pour construire une chaîne de Markov à valeurs dans  $\hat{\Omega}$  est bien sûr  $\hat{\Omega}^{\mathbb{N}}$ . Cependant, afin de fournir à notre chaîne de Markov un cimetière digne de ce nom, il convient de restreindre un peu cet espace<sup>15</sup> : on distingue pour cela un élément  $\hat{\omega}_\partial \in \hat{\Omega}$ , de durée de vie nulle, et on définit :

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots) \in \hat{\Omega}^{\mathbb{N}} \text{ tel que, pour tout } k \geq 0, \right. \\ &\quad \left. \hat{\zeta}(\hat{\omega}_k) = 0 \Rightarrow \forall l \geq k, \hat{\omega}_l = \hat{\omega}_\partial \right\}, \\ \mathcal{A}^\# &= \left( \hat{\mathcal{F}}_\infty^{\otimes \mathbb{N}} \right) \Big|_\Omega = \left\{ A \subset \Omega \mid \exists A' \in \hat{\mathcal{F}}_\infty^{\otimes \mathbb{N}}, A = A' \cap \Omega \right\}. \end{aligned}$$

(3.8) **Les instants**  $S_k$ . On munit l'espace  $(\Omega, \mathcal{A}^\#)$  d'une suite croissante de variables aléatoires  $S_k$ ,  $k \geq 0$ , à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  : pour  $\omega = (\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots) \in \Omega$ ,

$$S_k(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ S_{k-1}(\omega) + \hat{\zeta}(\hat{\omega}_{k-1}) & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

et on pose

$$S_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k.$$

Ces instants vont jouer le rôle de « temps de renaissance » dans la construction du processus ressuscité. Précisons dès à présent que ces temps  $S_k$  ne seront pas les temps de sauts  $\tau_k$  de la définition (mais on verra plus loin qu'ils coïncident presque sûrement). On peut maintenant définir le processus ressuscité  $X$  sur  $\Omega$ , en recollant les morceaux de trajectoire de  $\hat{X}$ .

(3.9) **Le processus  $X$  et les opérateurs de translation**  $\theta_t$ . Pour chaque  $\omega = (\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots)$  dans  $\Omega$ , on pose :

$$X_t(\omega) = \begin{cases} \hat{X}_t(\hat{\omega}_0) & \text{si } t < S_1(\omega), \\ \hat{X}_{t-S_1(\omega)}(\hat{\omega}_1) & \text{si } S_1(\omega) \leq t < S_2(\omega), \\ \dots & \\ \partial & \text{si } t \geq S_\infty(\omega). \end{cases}$$

Il est clair avec cette définition que les  $S_k$  ne sont pas nécessairement des instants de saut pour le processus  $X$  : rien n'empêche les morceaux de trajectoires de se recoller continûment en ces points – cela dit, on va tout faire pour que cela ne soit presque sûrement jamais le cas. On munit également  $(\Omega, \mathcal{A}^\#)$  d'une famille d'opérateurs  $\theta_t$ ,  $t \geq 0$  :

$$\theta_t(\omega) = \begin{cases} \omega_\partial & \text{si } t \geq S_\infty(\omega), \\ \left( \hat{\theta}_{t-S_k(\omega)} \hat{\omega}_k, \hat{\omega}_{k+1}, \dots \right) & \text{si } S_k(\omega) \leq t < S_{k+1}(\omega), \end{cases}$$

où  $\omega_\partial$  désigne la « trajectoire morte »  $(\hat{\omega}_\partial, \hat{\omega}_\partial, \dots)$ .

<sup>15</sup>La véritable raison pour cette restriction de  $\hat{\Omega}^{\mathbb{N}}$  à  $\Omega$  est à chercher du côté des opérateurs de translation  $\theta_t$  qui seront construits à l'étape 3.9. Signalons d'ailleurs l'espace  $\Omega$  tel que nous venons de le définir est légèrement plus petit que celui de Meyer (1975), ceci afin de garantir la propriété P3, à savoir  $\theta_0 = \text{Id}$ . Cela n'a aucune incidence sur le théorème de renaissance.

(3.10) **Propriétés.**

- i)  $X$  est un processus continu à droite, à valeurs dans  $E^0 \cup \{\partial\}$ , de durée de vie  $\zeta = S_\infty$ .
- ii) Pour tout  $\omega \in \Omega$ , la trajectoire  $t \mapsto X_t(\omega)$  est continue par morceaux sur  $[0; S_\infty(\omega)[$ , les limites à gauche  $X_t^-(\omega)$  étant prises dans  $E$  tout entier.
- iii)  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  est une famille d'opérateurs de translation pour  $X$ , c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés P3–P5. De plus, pour tous  $k \geq 0$  et  $(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots) \in \Omega$ , on a

$$\theta_{S_k}(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots) = (\hat{\omega}_k, \hat{\omega}_{k+1}, \dots).$$

- iv) Le temps  $S_1$  est terminal, i.e.  $S_1 \circ \theta_t = S_1 - t$  sur  $\{t < S_1\}$ .

□ **Démonstration.** Les propriétés trajectorielles 3.10.i et 3.10.ii découlent directement du fait que les trajectoires de  $\widehat{X}$  sont continues sur  $[0; \hat{\zeta}[$  et admettent une limite à gauche en  $\hat{\zeta}$ . La vérification de 3.10.iii est facile – c'est à ce niveau qu'intervient explicitement la condition

$$\hat{\zeta}(\hat{\omega}_k) = 0 \Rightarrow \forall l \geq k, \hat{\omega}_l = \hat{\omega}_\partial$$

introduite dans la définition de  $\Omega$ . Finalement, la propriété 3.10.iv découle du fait que  $\hat{\zeta}$  est un temps terminal, i.e.  $\hat{\zeta} \circ \theta_t = \hat{\zeta} - t$  sur  $\{\hat{\zeta} < t\}$ . ■

(3.11) **Le noyau de renaissance**  $N(\hat{\omega}, dx)$ . Dans le cas le plus général, le théorème de renaissance utilise un noyau de transition  $N$  de  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_\infty)$  dans  $(E^0, \mathcal{E}_u^0)$  pour déterminer la loi de l'état dans lequel le processus est ressuscité après sa mort. L'hypothèse essentielle à ce niveau, découverte par Ikeda et al. (1966), consiste à choisir pour  $N$  un *noyau de renaissance* : c'est-à-dire que, pour tout  $\hat{\omega} \in \widehat{\Omega}$ , on a :

- i) si  $\hat{\zeta}(\hat{\omega}) \in \{0, +\infty\}$ ,  $N(\hat{\omega}, \cdot) = \delta_\partial$ ,
- ii) si  $0 < t < \hat{\zeta}(\hat{\omega})$ ,  $N(\hat{\theta}_t(\hat{\omega}), \cdot) = N(\hat{\omega}, \cdot)$ .

Dans le cas qui nous intéresse ici, le noyau de renaissance est construit à partir du noyau de réinitialisation  $K$ , par la formule

$$(3.12) \quad N(\hat{\omega}, \cdot) = \begin{cases} K(\widehat{X}_{\hat{\zeta}^-}(\hat{\omega}), \cdot) & \text{si } \hat{\zeta}(\hat{\omega}) \notin \{0, +\infty\}, \\ \delta_{\hat{\omega}_\partial} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci définit bien un noyau de  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_\infty)$  dans  $(E^0, \mathcal{E}_u^0)$  : en effet,  $\hat{\omega} \mapsto \widehat{X}_{\hat{\zeta}^-}(\hat{\omega})$  est une application  $\mathcal{F}_\infty^{\widehat{X}}/\mathcal{E}$ -mesurable, donc  $N$  est clairement un noyau de  $(\widehat{\Omega}, \mathcal{F}_\infty^{\widehat{X}})$  dans  $(E^0, \mathcal{E}^0)$ . Un tel noyau s'étend de manière unique en un noyau sur les espaces annoncés (voir par exemple Sharpe, 1988, p. 376). Par ailleurs, la propriété 3.11.ii découle directement facilement du fait que  $\hat{\zeta}$  est un temps terminal, donc  $N$  est bien un noyau de renaissance.

(3.13) **La chaîne de Markov  $\pi_k$  et les lois  $\mathbb{P}_x$ .** Le noyau de renaissance  $N$  permet de construire un noyau de transition  $H$  sur  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_\infty)$  par la relation

$$H(\hat{\omega}, d\hat{\omega}') = \int_E N(\hat{\omega}, dx) \widehat{\mathbb{P}}_x(d\hat{\omega}').$$

On peut alors définir les lois  $\mathbb{P}_x$  sur  $(\widehat{\Omega}^{\mathbb{N}}, \widehat{\mathcal{F}}_\infty^{\otimes \mathbb{N}})$ , pour  $x \in E$  :

$$\mathbb{P}_x(d\omega) = \widehat{\mathbb{P}}_x(d\hat{\omega}_0) H(\hat{\omega}_0, d\hat{\omega}_1) H(\hat{\omega}_1, d\hat{\omega}_2) \cdots.$$

Il s'agit simplement de la loi d'une chaîne de Markov, comme on l'a annoncé plus haut. Plus précisément, si on introduit les coordonnées  $\pi_k(\omega) \triangleq \hat{\omega}_k$ , la mesure  $\mathbb{P}_x$  est la loi sous laquelle le processus  $(\pi_k)_{k \geq 0}$  est une chaîne de Markov à temps discret, de loi initiale  $\hat{\mathbb{P}}_x$  et de noyau de transition  $H$ . On vérifie facilement, grâce à l'hypothèse 3.5.v, que les mesures  $\mathbb{P}_x$  sont portées par  $\Omega \subset \hat{\Omega}^{\mathbb{N}}$ , ce qui permet de se restreindre à l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A}^\#)$ .

(3.14) **La notation  $\omega^k$ .** Dans toute la suite de mémoire, on utilisera la notation suivante : si  $\omega = (\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots)$  est un élément de  $\Omega$ , alors  $\omega^k$  désigne le  $k$ -uplet  $(\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{k-1}) \in \hat{\Omega}^k$ . On se permettra souvent l'abus de notation consistant à noter  $S_k(\omega^k)$  au lieu de  $S_k(\omega)$  pour faire apparaître clairement le fait que  $S_k$  ne dépend en réalité que de  $\omega^k$ . On se permettra également d'identifier la paire  $(\omega^k, \hat{\omega}_{k+1})$  et le  $(k+1)$ -uplet  $\omega^{k+1}$ .

(3.15) **La filtration  $\mathcal{F}^\#$ .** Soit  $t \geq 0$ . On note  $\mathcal{F}_t^\#$  l'ensemble des événements  $A \in \mathcal{A}^\#$  vérifiant la condition suivante : pour tout  $k \geq 0$ , il existe  $A_k \in \hat{\mathcal{F}}_\infty^{\otimes k+1}$  tel que

$$A \cap \{S_k \leq t < S_{k+1}\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega^{k+1} \in A_k\}$$

et, pour tout  $\omega^k \in \hat{\Omega}^k$  tel que  $S_k(\omega^k) \leq t$ , la section

$$A_k(\omega^k) \triangleq \{\hat{\omega} \in \hat{\Omega} \mid (\omega^k, \hat{\omega}) \in A_k\}$$

est  $\hat{\mathcal{F}}_{t-S_k}$ -mesurable. On vérifie aisément que ceci définit bien une filtration  $\mathcal{F}^\#$  sur  $\mathcal{A}^\#$ , et le théorème des classes monotones permet de montrer qu'elle coïncide avec la filtration introduite dans Meyer (1975) :

(3.16) **Lemme.** Une fonction  $\mathcal{A}^\#$ -mesurable  $f$  est  $\mathcal{F}_t^\#$ -mesurable si et seulement il existe pour tout  $k \geq 0$  une fonction  $h_k$  définie sur  $\hat{\Omega}^{k+1}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_\infty^{\otimes k+1}$ -mesurable, telle que

- i) pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $(f \mathbb{1}_{S_k \leq t < S_{k+1}})(\omega) = h_k(\omega^{k+1})$  ;
- ii) pour tout  $\omega^k \in \hat{\Omega}^k$  tel que  $S_k(\omega^k) \leq t$ , la fonction  $\hat{\omega} \mapsto h_k(\omega^k, \hat{\omega})$  est  $\hat{\mathcal{F}}_{t-S_k(\omega^k)}$ -mesurable.

De plus, on a les résultats suivants :

(3.17) **Propriétés.**

- i)  $\mathcal{F}^\#$  est une filtration continue à droite ;
- ii) les instants  $S_k$  sont des  $\mathcal{F}^\#$ -temps d'arrêt ;
- iii) le processus  $X$  est  $\mathcal{F}^\#$ -adapté.

□ **Démonstration.** Ces propriétés de base de la filtration  $\mathcal{F}^\#$  sont énoncées sans démonstration par Meyer (1975). La vérification de 3.17.i et de 3.17.ii est faite par Bujorianu et Lygeros (2004c, proposition 3)<sup>16</sup>, et le point 3.17.iii est un cas particulier du lemme 3.33.i qui sera démontré un peu plus loin. ■

<sup>16</sup>Les auteurs affirment à tort que  $\mathcal{F}^\#$  est la filtration naturelle du processus  $X$  – tout ce que l'on peut dire, c'est que  $X$  est  $\mathcal{F}^\#$ -adapté. La propriété énoncée au 3.18.iii incite cependant à penser que l'augmentation usuelle de  $\mathcal{F}^\#$  pourrait coïncider avec la complétion de la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$ , mais nous ne l'avons pas prouvé.

### Le théorème de renaissance

Munissons maintenant le processus  $X$  de la tribu  $\mathcal{A}$  et de la filtration  $\mathcal{F}$  obtenues en complétant respectivement  $\mathcal{F}^X$  et  $\mathcal{A}^\#$  relativement aux lois  $\mathbb{P}_\mu$  (où  $\mu$  parcourt l'ensemble des mesures de probabilité sur  $(E, \mathcal{E})$ ). On a alors le résultat suivant :

(3.18) **Théorème.** *Sous les hypothèses 3.5.i–3.5.v, le processus « ressuscité »  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$  est un processus borélien droit sur l'espace d'état  $E^0$ , tel que :*

- i) *les trajectoires sont continues à droites sur  $\mathbb{R}_+$ , et continues par morceaux dans  $E$  sur l'intervalle  $[0; \zeta[$ , où  $\zeta = S_\infty$  est la durée de vie ;*
- ii) *l'hypothèse 2.9 est satisfaite, i.e. le nombre de sauts de  $X$  est presque sûrement infini sur l'évènement  $\{\zeta < +\infty\}$  ;*
- iii) *les « instants de renaissance »  $S_k$ , introduits à l'étape 3.8, coïncident presque sûrement avec les instants de saut  $\tau_k$  définis au §2.A.*
- iv) *pour tous  $k \geq 1$  et  $\Gamma \in \mathcal{E}$ ,*

$$\mathbb{P}_x \left\{ X_{\tau_k} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{\tau_k^-} \right\} = K(X_{\tau_k^-}, \Gamma) \quad \mathbb{P}_x\text{-ps sur } \{\tau_k < +\infty\} .$$

- v) *pour tout  $x \in E^0$ , le processus  $X$  tué au temps  $\tau_1$  a la même loi sous  $\mathbb{P}_x$  que le processus  $\widehat{X}$  sous  $\widehat{\mathbb{P}}_x$  – i.e., pour tout  $t \geq 0$  et toute fonction  $\varphi$  borélienne bornée, le noyau de transition  $\widehat{P}_t$  vérifie*

$$(\widehat{P}_t \varphi)(x) = \mathbb{E}_x \{ \varphi(X_t) \mathbf{1}_{t < \tau_1} \} .$$

#### □ Démonstration.

▷ Le plus difficile a été fait par Meyer (1975) : le processus  $(\Omega, \mathcal{A}^\#, \mathcal{F}^\#, X, \theta, \mathbb{P})$  est simplement markovien et satisfait aux hypothèses droites (mais ce n'est pas exactement un processus droit au sens de Sharpe (1988) car  $\mathcal{F}^\#$  n'est pas une filtration complète). Cela entraîne que  $X$  est fortement markovien relativement à  $\mathcal{F}^\#$  donc aussi relativement à  $\mathcal{F}_+^X$  puisque  $\mathcal{F}_+^X \subset \mathcal{F}^\#$ . Admettons pour le moment que le processus est borélien : alors les hypothèses droites sont encore vérifiées si l'on remplace  $\mathcal{F}^\#$  par  $\mathcal{F}$  (Gettoor, 1975, théorème 9.4) ; en d'autres termes, le sextuplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$  est borélien droit. Les propriétés 3.18.i, 3.18.ii et 3.18.v étant des conséquences directes de la construction, il ne reste donc plus qu'à établir 3.18.iii, 3.18.iv, et le caractère borélien du noyau de transition  $P_t(x, dy) = \mathbb{P}_x \{ X_t \in dy \}$ .

▷ On commence en fait par prouver l'analogie de la propriété 3.18.iv pour les instants  $S_k$ . Pour cela, il est commode de remarquer que  $\mathcal{F}_{S_k^-} = \sigma(\pi_0, \dots, \pi_{k-1})$  et  $X_{S_k} = \widehat{X}_0 \circ \pi_k$ . Il ne reste plus qu'à calculer, pour  $\Gamma \in \mathcal{E}$  et  $\omega = (\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots) \in \{S_k < +\infty\}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x \left\{ X_{S_k} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{S_k^-} \right\} (\omega) &= \mathbb{P}_x \left\{ \widehat{X}_0 \circ \pi_k \in \Gamma \mid \pi_0, \dots, \pi_{k-1} \right\} (\omega) \\ &= \int H(\hat{\omega}_{k-1}, d\hat{\omega}) \mathbf{1}_{\widehat{X}_0 \in \Gamma}(\hat{\omega}) \\ &= \iint N(\hat{\omega}_{k-1}, dy) \widehat{\mathbb{P}}_y(d\hat{\omega}) \mathbf{1}_{\widehat{X}_0 \in \Gamma}(\hat{\omega}) \\ &= \int N(\hat{\omega}_{k-1}, dy) \widehat{\mathbb{P}}_y \left\{ \widehat{X}_0 \in \Gamma \right\} \\ &= N(\hat{\omega}_{k-1}, \Gamma) \\ &= K(X_{S_k^-}(\omega), \Gamma) . \end{aligned}$$



▷ On en déduit que l'évènement  $\Omega^* \triangleq \{\forall k \geq 0, X_{S_k} \neq X_{S_k^-}\}$  est presque sûr, puisque par hypothèse le noyau de réinitialisation  $K$  vérifie  $K(x, \{x\}) = 0$  pour tout  $x \in E$ . Ceci établit la propriété 3.18.iii, les trajectoires étant continues entre les instants  $S_k$ .

▷ Considérons maintenant une variable aléatoire bornée  $Z$ ,  $\mathcal{F}_{\tau_k^-}$ -mesurable. Une telle variable n'est pas en général  $\mathcal{F}_{S_k^-}$ -mesurable, mais elle est, d'après ce qui précède, presque sûrement égale à la variable  $Z \mathbb{1}_{\Omega^*}$ , qui est quant à elle  $\mathcal{F}_{S_k^-}$ -mesurable. On a alors, pour tout  $x \in E$  et pour toute fonction borélienne  $f$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \{Z f(X_{\tau_k})\} &= \mathbb{E}_x \{Z \mathbb{1}_{\Omega^*} f(X_{S_k})\} \\ &= \mathbb{E}_x \left\{ \mathbb{E}_x \left\{ Z \mathbb{1}_{\Omega^*} f(X_{S_k}) \mid \mathcal{F}_{S_k^-} \right\} \right\} \\ &= \mathbb{E}_x \left\{ Z \mathbb{1}_{\Omega^*} K f(X_{S_k^-}) \right\} \\ &= \mathbb{E}_x \left\{ Z K f(X_{\tau_k^-}) \right\}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété 3.18.iv.

▷ Finalement, il reste à montrer que les noyaux de transition sont boréliens. (On sait seulement, pour l'instant, qu'ils sont universellement mesurables.) Ceci équivaut à montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{F}_\infty^X$ , l'application  $x \mapsto \mathbb{P}_x(A)$  est borélienne. Rappelons que : d'une part, l'application  $x \mapsto \widehat{\mathbb{P}}_x(A)$  est borélienne pour tout  $A \in \mathcal{F}_\infty^{\widehat{X}}$ ; d'autre part,  $N$  est un noyau de  $(\widehat{\Omega}, \mathcal{F}_\infty^{\widehat{X}})$  dans  $(E^0, \mathcal{E}^0)$ . Donc la restriction du noyau  $H$  à  $\widehat{\Omega} \times \mathcal{F}_\infty^{\widehat{X}}$  est un noyau de transition sur  $(\widehat{\Omega}, \mathcal{F}_\infty^{\widehat{X}})$ . On en déduit que  $x \mapsto \mathbb{P}_x(A)$  est borélienne pour tout  $A \in (\mathcal{F}_\infty^{\widehat{X}})^{\otimes \mathbb{N}}$ , et il suffit alors pour conclure de remarquer que  $(\mathcal{F}_\infty^{\widehat{X}})^{\otimes \mathbb{N}} \supset \mathcal{F}_\infty^X$ . ■

Une simple reformulation du théorème 3.18 fournit le processus diffusif par morceaux souhaité :

(3.19) **Corollaire.** *Etendons la famille  $(\mathbb{P}_x)$ , définie pour  $x \in E^0$ , en posant  $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_{K(x, \cdot)}$  pour tout  $x \in E^B$ . Alors, toujours sous les hypothèses 3.5.i–3.5.v :*

- i) *Le sextuplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$  ainsi obtenu est un processus diffusif par morceaux sur  $E$ , satisfaisant à l'hypothèse 2.9.*
- ii)  *$E^B$  est l'ensemble de ses points de branchement, et  $K$  un noyau de réinitialisation (au sens de la définition 2.19).*
- iii) *Pour tout  $t \geq 0$ , toute fonction  $\varphi$  borélienne bornée et tout  $x \in E^0$ , on a la relation :*

$$(\widehat{P}_t \varphi)(x) = \mathbb{E}_x \{ \varphi(X_t) \mathbb{1}_{t < \tau_1} \}.$$

### 3.C Construction à partir d'un processus de base conservatif

Nous allons maintenant expliquer comment la deuxième construction évoquée en introduction, à partir du processus de base  $\widetilde{X}$  et de la fonction de survie  $F$ , peut se ramener à celle présentée au § 3.B (c'est-à-dire à une simple application du théorème de renaissance). Nous continuerons pour cela à nous appuyer sur l'ouvrage de Sharpe (1988), que nous désignerons simplement par « Sharpe » dans la suite ; on pourrait aussi à se référer à Dynkin (1965, chapitre 10, § 4) ou encore à Blumenthal et Gettoor (1968, chapitre III, § 3) par exemple.

#### Hypothèses de la construction

Précisons maintenant les données de base de cette construction :

(3.20) **Hypothèses.**

- i)  $E$  est un espace métrique LCS,  $E^0$  un borélien de  $E$ , et  $E^B = E \setminus E^0$ .
- ii)  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{X}, \tilde{\theta}, \tilde{\mathbb{P}})$  est un processus de diffusion conservatif sur  $E$ , vérifiant les hypothèses techniques 20.4.i–iii de Sharpe (ceci sans perte de généralité puisqu'on peut toujours priver  $\tilde{\Omega}$  d'un ensemble négligeable pour que cela soit vrai).
- iii)  $K$  est un noyau de transition borélien sur  $E$ , satisfaisant à l'hypothèse 2.19.i, i.e.

$$K(x, \{x\} \cup E^B) = 0, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

- iv)  $F$  est un processus à valeurs dans  $[0; 1]$ , presque sûrement décroissant.

(3.21) **Remarques.**

- a) Nos hypothèses ne précisent pas la nature de la filtration  $\tilde{\mathcal{F}}$ , pour la simple raison que celle-ci n'intervient pas dans ce qui suit. Le processus  $\hat{X}$  obtenu sera doté de la complétion de sa filtration naturelle  $\mathcal{F}^{\hat{X}}$ , ce qui est cohérent avec l'hypothèse 3.5.iv.
- b) On pourrait de manière plus générale considérer un processus de base  $\tilde{X}$  non conservatif, pour prendre en compte par exemple les solutions explosives d'EDS. Cela ne change rien à la démarche présentée, si ce n'est qu'il faut supposer en plus que  $F_t$  est nulle sur  $\{t \geq \tilde{\zeta}\}$ .

L'hypothèse 3.20.iv est bien sûr nécessaire pour que  $1 - F$  puisse être la fonction de répartition du temps  $\hat{\zeta}$  conditionnellement à  $\tilde{X}$ , mais elle est loin d'être suffisante pour mener à bien la construction d'un processus de Markov ayant de bonnes propriétés. Nous précisons donc maintenant les hypothèses sur  $F$ .

(3.22) **Hypothèses (suite).**

- i)  $F$  est un processus  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -adapté et presque sûrement càdlàg.
- ii)  $F$  est une fonctionnelle multiplicative presque parfaite, c'est-à-dire qu'on a presque sûrement la propriété :  $\forall s, t \geq 0, F_{t+s} = F_t F_s \circ \tilde{\theta}_t$ .
- iii)  $E^0$  est l'ensemble des points permanents de  $F$ , i.e.  $E^0 = \{x \in E \mid F_0 = 1, \tilde{\mathbb{P}}_x\text{-ps}\}$ .

(3.23) **Remarque.** On montre facilement qu'une fonctionnelle multiplicative continue à droite vérifie  $F_0 \in \{0, 1\}$  ps, donc l'hypothèse 3.22.iii équivaut à dire que  $E^B = \{x \in E \mid F_0 = 0, \tilde{\mathbb{P}}_x\text{-ps}\}$ .

**Construction du processus tué  $\hat{X}$**

La construction du processus tué  $\hat{X}$  nécessite en général de se placer sur un espace probabilisé plus grand que  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ . On considère pour cela l'espace  $\hat{\Omega} = \tilde{\Omega} \times [0; +\infty]$ , dont on notera systématiquement  $\hat{\omega} = (\tilde{\omega}, u)$  un élément générique. On construit alors le processus  $\hat{X}$  et les opérateurs de translation  $\hat{\theta}_t$  en posant

$$\hat{X}_t(\hat{\omega}) = \begin{cases} \tilde{X}_t(\tilde{\omega}) & \text{si } t < u, \\ \partial & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_t(\hat{\omega}) = (\tilde{\theta}_t \tilde{\omega}, (u - t)_+),$$

pour tous  $\hat{\omega} = (\tilde{\omega}, u) \in \hat{\Omega}$  et  $t \geq 0$ . On définit ensuite les lois  $\hat{\mathbb{P}}_x$  sur  $\mathcal{F}_\infty^{\hat{X}} \otimes \mathcal{B}([0; +\infty])$  par la formule

$$\hat{\mathbb{P}}_x(A) = - \iint \mathbf{1}_A(\tilde{\omega}, u) \tilde{\mathbb{P}}_x(d\tilde{\omega}) dF_u(\tilde{\omega}),$$

pour tout  $x$  dans l'ensemble  $E^0$  des points permanents de  $F$ , et  $\hat{\mathbb{P}}_\partial = \delta_{(\tilde{\omega}_\partial, 0)}$  pour un élément  $\tilde{\omega}_\partial \in \tilde{\Omega}$  quelconque. On termine la construction en munissant  $\hat{\Omega}$  de l'augmentation usuelle  $\hat{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}^{\hat{X}}$  et de la tribu  $\hat{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{F}}_\infty$ . Cette construction possède les propriétés que l'on attend d'elle :

(3.24) **Théorème.** *Sous les hypothèses 3.20 et 3.22, on a les résultats suivants :*

- i) *Le processus tué  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{X}, \widehat{\theta}, \widehat{\mathbb{P}})$  est un processus de diffusion sur l'espace  $E^0$ , de durée de vie  $\widehat{\zeta}(\tilde{\omega}, u) = u$ .*
- ii) *Les trajectoires  $t \mapsto \widehat{X}_t(\tilde{\omega})$  possèdent une limite à gauche dans  $E$  en  $\widehat{\zeta}(\tilde{\omega})$ , pour tout  $\tilde{\omega} \in \widehat{\Omega}$ .*
- iii) *Pour tout  $t \geq 0$  et toute fonction  $\varphi$  borélienne bornée sur  $E^0$ , le noyau de transition  $\widehat{P}_t$  de  $\widehat{X}$  est donné par la relation  $\widehat{P}_t \varphi(x) = \widehat{\mathbb{E}}_x \{ \varphi(\widehat{X}_t) F_t \}$ .*

(3.25) **Remarques.**

- a) Il est important de contruire le processus tué sur  $\widetilde{\Omega} \times [0; +\infty]$  et pas sur  $\widetilde{\Omega} \times [0; +\infty[$  car on n'a pas nécessairement  $F_t(\omega) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (lorsque  $\lim_{\infty} F > 0$ , il y a une probabilité conditionnelle non nulle pour que le processus ne soit pas tué).
- b) Le lien entre le processus de base  $\widetilde{X}$  et le processus tué  $\widehat{X}$  apparait plus clairement si l'on transporte  $\widetilde{X}$  et  $F$  sur le nouvel espace  $\widehat{\Omega}$ , par les identifications  $\widetilde{X}(\tilde{\omega}, u) \equiv \widetilde{X}(\tilde{\omega})$  et  $F(\tilde{\omega}, u) \equiv F(\tilde{\omega})$ . Ainsi les processus  $\widetilde{X}$  et  $\widehat{X}$  coïncident jusqu'au temps  $\widehat{\zeta}$ , dont la loi conditionnellement au processus  $\widetilde{X}$  est donnée par la relation  $\widehat{\mathbb{E}}_x \{ \widehat{\zeta} > t \mid \mathcal{F}_{\infty}^{\widetilde{X}} \} = F_t$  presque sûrement.

□ **Démonstration du théorème 3.24.**

- ▷ Sous les hypothèses 3.20.iv et 3.22, le processus  $F$  est une fonctionnelle multiplicative « droite » au sens de la définition 57.1 de Sharpe. Le processus tué  $\widehat{X}$  est donc un processus droit sur l'ensemble des points permanents de  $F$ , c'est-à-dire sur  $E^0$  (voir Sharpe, § 11 et théorème 61.5).
- ▷ Le fait qu'il soit de plus borélien découle simplement de l'hypothèse que  $F$  est adaptée à la filtration naturelle de  $\widetilde{X}$  : en effet, pour tous  $t \geq 0$  et  $\varphi$  borélienne sur  $E$ ,  $\widehat{\mathbb{E}}_x \{ \varphi(\widehat{X}_t) \} = \widehat{\mathbb{E}}_x \{ \varphi(\widetilde{X}_t) F_t \}$  est borélienne en  $x$  puisque  $\varphi(\widetilde{X}_t) F_t$  est  $\mathcal{F}_t^{\widetilde{X}}$ -mesurable et  $\widetilde{X}$  est borélien. ■

### Mort prévisible et continuité de la fonction de survie

Notons  $\tau^B = \inf \{ t \geq 0 \mid \widetilde{X}_t \in E^B \}$ . Le résultat suivant nous permettra de relier l'hypothèse 2.15 aux propriétés de la fonctionnelle multiplicative  $F$  :

(3.26) **Lemme.** *Supposons que le processus  $F$  est presque sûrement continu sur  $[0; \tau^B[$ . Alors le temps  $\widehat{\zeta}$  est totalement inaccessible sur  $\{ \widehat{X}_{\widehat{\zeta}-} \in E^0 \}$ , ce qui signifie que l'évènement  $\{ T = \widehat{\zeta} < +\infty, \widehat{X}_{\widehat{\zeta}-} \in E^0 \}$  est négligeable pour tout  $\widehat{\mathcal{F}}$ -temps d'arrêt prévisible  $T$ .*

□ **Démonstration.**

▷ Soit  $T$  un  $\widehat{\mathcal{F}}$ -temps d'arrêt prévisible, et soit  $(T_n)$  une suite croissante de  $\widehat{\mathcal{F}}$ -temps d'arrêt qui annonce  $T$  - i.e.  $T_n < T$  sur  $\{ T > 0 \}$  pour tout  $n$ , et  $T_n \rightarrow T$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Fixons une loi initiale  $\mu$  portée par  $E^0$ , et montrons que  $\widehat{\mathbb{P}}_{\mu} \{ T = \widehat{\zeta} < +\infty, \widehat{X}_{\widehat{\zeta}-} \in E^0 \} = 0$ .

▷ D'après le lemme 75.4 de Rogers et Williams (2000a), il existe une suite  $(T'_n)$  de  $\mathcal{F}_+^{\widehat{X}}$ -temps d'arrêt, tel que  $T_n = T'_n$  pour tout  $n$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}_{\mu}$ -presque sûrement. Pour tous  $t \geq 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un évènement  $A_t^n \in \mathcal{F}_{t+}^{\widehat{X}}$  tel que  $\{ T'_n > t \} \cap \{ \widehat{\zeta} > t \} = A_t^n \times ]t; +\infty]$ ; voir plus loin, lemme 3.32.i, pour plus de détails. Cela revient à dire qu'il existe pour tout  $n$  un  $\mathcal{F}_+^{\widehat{X}}$ -temps d'arrêt  $\widetilde{T}_n$  tel que, pour tout  $t \geq 0$  :  $T'_n \wedge \widehat{\zeta} > t$  si et seulement si  $\widetilde{T}_n \circ \pi \wedge \widehat{\zeta} > t$ , où  $\pi$  est la projection  $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}, u) \mapsto \tilde{\omega}$ . Comme par ailleurs  $T'_n = T_n < T$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}_{\mu}$ -ps sur  $\{ T > 0 \}$ , on en déduit que  $T_n = T'_n = \widetilde{T}_n \circ \pi$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}_{\mu}$ -ps sur  $\{ 0 < T \leq \widehat{\zeta} \}$ . En notant  $\widetilde{T}$  la limite de la suite  $(\widetilde{T}_n)$  lorsqu'elle existe (et  $+\infty$  lorsqu'elle n'existe pas), on a ainsi prouvé que  $T = \widetilde{T} \circ \pi$   $\widehat{\mathbb{P}}_{\mu}$ -ps sur  $\{ 0 < T \leq \widehat{\zeta} \}$ .

▷ Il ne reste plus alors qu'à calculer, en utilisant que  $0 < \hat{\zeta} \leq \tau^B$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}_\mu$ -ps :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}_\mu\{T = \hat{\zeta} < +\infty, \widehat{X}_{\hat{\zeta}-} \in E^0\} &= \widehat{\mathbb{P}}_\mu\{0 < T = \hat{\zeta} \leq \tau^B, \widehat{X}_{\hat{\zeta}-} \in E^0\} \\ &= \widehat{\mathbb{P}}_\mu\{0 < T = \hat{\zeta} < \tau^B\} \\ &\leq \widehat{\mathbb{P}}_\mu\{0 < \widetilde{T} \circ \pi = \hat{\zeta} < \tau^B\} \\ &= \widetilde{\mathbb{E}}_\mu\{(F_{\widetilde{T}}^- - F_{\widetilde{T}}) \mathbb{1}_{0 < \widetilde{T} < \tau^B}\}, \end{aligned}$$

la dernière expression étant nulle puisque  $F$  est, par hypothèse, continue ps sur  $[0; \tau^B[$ . ■

### Construction du processus $X$ diffusif par morceaux

On vérifie facilement, avec les conclusions du théorème 3.24, que le processus tué  $\widehat{X}$  vérifie les hypothèses 3.5.i–3.5.v de la construction par renaissance : on peut donc s'en servir pour construire un processus  $X$  diffusif par morceaux grâce au corollaire 3.19. De plus, le lemme 3.26 fournit une condition suffisante assurant que l'hypothèse 2.15 sur les temps d'arrêt prévisibles est vérifiée. Résumons tout cela de manière un peu plus formelle :

(3.27) **Corollaire.** *Sous les hypothèses 3.20 et 3.22 :*

- i) *Le sextuplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$  est un processus diffusif par morceaux sur  $E$ , satisfaisant à l'hypothèse 2.9.*
- ii)  *$E^B$  est l'ensemble de ses points de branchement, et  $K$  un noyau de réinitialisation (au sens de la définition 2.19).*
- iii) *Pour tous  $t \geq 0$ ,  $x \in E^0$  et toute fonction  $\varphi$  borélienne bornée,*

$$\mathbb{E}_x\{\varphi(X_t) \mathbb{1}_{t < \tau_1}\} = \widetilde{\mathbb{E}}_x\{\varphi(\widetilde{X}_t) F_t\}.$$

- iv) *Si on suppose de plus que la fonction de survie  $F$  est continue ps sur  $[0; \tau^B[$ , alors le processus  $X$  vérifie l'hypothèse 2.15 : pour tout temps d'arrêt prévisible  $T > 0$ , on a  $X_T = X_T^-$  presque sûrement sur l'évènement  $\{T < \zeta, X_T^- \in E^0\}$ .*

(3.28) **Remarques.**

- a) Dans le même esprit que la remarque 3.25.b, on peut transporter  $\widehat{X}$ ,  $\widetilde{X}$ , et  $F$  sur le nouvel espace  $\Omega$ . En notant  $\omega = (\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots) \in \Omega$ , avec  $\hat{\omega}_k = (\tilde{\omega}_k, u_k)$  pour tout  $k \geq 0$ , on procède donc aux identifications suivantes :  $\widetilde{X}(\omega) \equiv \widetilde{X}(\hat{\omega}_0)$ ,  $F(\omega) \equiv F(\hat{\omega}_0)$  et  $\widehat{X}(\omega) \equiv \widehat{X}(\hat{\omega}_0)$ . Dans ces conditions, les processus  $\widetilde{X}$ ,  $\widehat{X}$  et  $X$  sont indistinguables jusqu'à l'instant  $\tau_1$  du premier saut de  $X$ . De plus,  $\mathbb{P}_x$ -ps pour tout  $x \in E^0$ ,  $\tau_1$  est égal à la durée de vie  $\hat{\zeta}$  de  $\widehat{X}$ , et la loi de  $\tau_1$  conditionnellement à  $\widetilde{X}$  est donnée par la relation  $\mathbb{E}_x\{\tau_1 > t \mid \mathcal{F}_\infty^{\widetilde{X}}\} = F_t$ .
- b) On pourrait croire que plusieurs processus de base  $\widetilde{X}$  conduisent – en loi – au même processus diffusif par morceaux  $\widehat{X}$  (puisque on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe avant l'instant  $\hat{\zeta}$ ). C'est vrai en général, mais on peut en fait, sous l'hypothèse du lemme 3.26, dire quelque chose de plus précis :
  - Pour un processus diffusif par morceaux sans point de branchement, le processus de base est en fait unique en loi ! On l'obtient simplement en tuant le processus  $X$  à l'instant  $\tau_1$  et en le ressuscitant avec le noyau identité  $K(x, \cdot) = \delta_x$  selon la méthode décrite au §3.B. Intuitivement : lorsque le processus  $X$  s'apprête à sauter, on le tue et on le ressuscite aussitôt

au même endroit. Il s'agit précisément de la procédure de *suppression des sauts* d'un processus de Markov, étudié en détail du point de vue analytique<sup>17</sup> dans Bass (1979).

– En présence de points de branchement, il n'y a plus unicité en général. En effet, deux processus de diffusion sur  $E$ , qui coïncident en loi jusqu'à l'instant où ils atteignent  $E^B$ , donnent naissance au même processus diffusif par morceaux (pour une même fonction de survie  $F$  et un même noyau  $K$ , bien sûr). Par exemple, si on veut construire un processus sur  $\mathbb{R}_+$ , brownien sur  $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  et effectuant un retour instantané de 0 vers 1 (0 est donc un point de branchement), on peut prendre indifféremment comme processus de base le mouvement brownien stoppé en 0 ou le mouvement brownien réfléchi en 0.

### Exemples

Terminons par quelques exemples de fonctionnelles multiplicatives satisfaisant aux hypothèses 3.20.iv et 3.22. Les deux premiers exemples fournissent les principaux types de sauts rencontrés dans les applications (la fonctionnelle multiplicative utilisée au chapitre III, § 2.C, est une simple combinaison de ces deux exemples).

(3.29) **Exemple : processus tué à son entrée dans  $E^B$ .** Le cas le plus simple concerne la construction d'un processus qui n'a que des sauts forcés, c'est-à-dire des sauts à ses points de branchement. La fonctionnelle multiplicative correspondante est alors simplement définie par

$$F_t(\tilde{\omega}) = \mathbb{1}_{t < \tau^B(\tilde{\omega})}.$$

Signalons que, dans ce cas précis, la construction peut se faire beaucoup plus simplement, sans avoir à élargir l'espace  $\tilde{\Omega}$  : il suffit de tuer le processus  $\tilde{X}$  au temps terminal  $\tau^B$  (cf. Sharpe, § 12). Sans hypothèse supplémentaire, le processus obtenu n'est pas borélien : en effet, nous avons seulement jusqu'à présent supposé que  $E^0$  est borélien, ce qui n'entraîne pas nécessairement que  $F$  est  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -adapté. On obtient la propriété requise par exemple lorsque  $E^B$  est fermé (Revuz et Yor, 1999, proposition 4.5), hypothèse que nous ferons au chapitre III.

(3.30) **Exemple : fonctionnelle de « type Kac ».** Nous supposons dans cet exemple que le processus à construire ne possède pas de points de branchement, i.e.  $E^B = \emptyset$ . On dit que la fonctionnelle multiplicative  $F$  est de type Kac – du nom de Mark Kac – si elle s'écrit

$$F_t(\tilde{\omega}) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tilde{X}_s(\tilde{\omega})) ds\right),$$

où  $\lambda$  est une fonction mesurable positive, que nous supposons de plus localement bornée de sorte que  $F_t > 0$  pour tout  $t \geq 0$ . On interprète cela en disant que le processus  $\tilde{X}$  est tué au taux  $dF_t/F_t^- = \lambda(X_t) dt$  ; en effet, une simple application de la formule de Bayes donne

$$\hat{\mathbb{P}}_x\{\hat{\zeta} > t+h \mid \mathcal{F}_\infty^{\tilde{X}}, \hat{\zeta} \geq t\} = \frac{F_{t+h}}{F_t^-},$$

soit encore, sous forme différentielle :

$$\hat{\mathbb{P}}_x\{\hat{\zeta} \in [t; t+dt[ \mid \mathcal{F}_\infty^{\tilde{X}}, \hat{\zeta} \geq t\} = \frac{dF_t}{F_t^-} = \lambda(\tilde{X}_t) dt.$$

(Le signe «  $-$  » n'a aucune importance ici puisque  $F$  est continue, mais devient important lorsqu'on considère une fonctionnelle  $F$  discontinue.)

---

<sup>17</sup>L'approche analytique de Bass n'est pas limitée aux processus diffusifs par morceaux, et couvre par exemple le cas des processus de Lévy avec une intensité infinie. Il n'existe à notre connaissance aucune construction probabiliste généralisant l'approche présentée ici au cas où les instants de saut forment un sous-ensemble dense de  $\mathbb{R}_+$ .

(3.31) **Exemple : fonctionnelle définie par rapport à un temps local.** Terminons en décrivant la fonction de survie associée au modèle à barrière élastique de Buonocore et al. (2002), déjà évoqué au chapitre I. Le processus de base  $\tilde{X}$  est un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}_+$  réfléchi en 0. Soit  $L_t$  le temps local en 0 de  $\tilde{X}$ , défini à une constante multiplicative près. On construit alors une fonctionnelle multiplicative  $F$  par la relation  $F_t(\tilde{\omega}) = \exp(-\lambda L_t(\tilde{\omega}))$ , où  $\lambda$  est une constante strictement positive. On peut interpréter cela en disant que le mouvement brownien réfléchi  $\tilde{X}$  est tué en 0 au taux  $\lambda dL_t$  (voir Itô et McKean, 1965, § 2.3) ; autrement dit, la probabilité qu'un saut survienne augmente avec le temps passé par  $\tilde{X}$  au voisinage du point 0. Remarquons que ce type de saut est de nature très différente de ceux décrits dans les exemples 3.29 et 3.30 (qui sont, nous l'avons dit, les plus courants dans les applications) : il s'agit en effet d'un saut de type spontané au sens du § 2.C, puisque l'instant du saut est un temps totalement inaccessible, pour lequel on connaît par avance le point d'où partira le saut !

### 3.D Quelques lemmes techniques

Nous regroupons ici quelques résultats techniques, qui concernent les deux constructions qui viennent d'être présentées. Ces résultats sont utilisées à plusieurs reprises dans le mémoire, principalement au § 3.B de ce chapitre et aux §§ 2.E et 3.C du chapitre III. Il s'agit de pouvoir « transporter » filtrations et martingales depuis  $\tilde{\Omega}$  vers  $\hat{\Omega}$ , et depuis  $\hat{\Omega}$  vers  $\Omega$ .

#### Transport des filtrations et des martingales de $\tilde{\Omega}$ vers $\hat{\Omega}$

Soit  $\tilde{\mathcal{G}}$  une filtration sur  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ , telle que  $\mathcal{F}_t^{\tilde{X}} \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$  pour tout  $t \geq 0$ . Notons  $\mathcal{B}_t$  la tribu sur  $[0; +\infty]$  engendrée par les ensembles de la forme  $]u; v]$ ,  $0 \leq u \leq v \leq t$ ,  $\hat{\mathcal{G}}^0$  la filtration sur  $\hat{\Omega}$  définie par  $\hat{\mathcal{G}}_t^0 = \tilde{\mathcal{G}}_t \otimes \mathcal{B}_t$ , et  $\pi$  la projection  $\hat{\omega} = (\tilde{\omega}, u) \in \hat{\Omega} \mapsto \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ . Il est facile de voir que  $\hat{\mathcal{G}}^0$  est la plus petite filtration contenant  $\pi^{-1}\tilde{\mathcal{G}}$  pour laquelle  $\hat{\zeta}$  est un temps d'arrêt. (Rappelons que  $\hat{\zeta}(\tilde{\omega}, u) = u$  pour tout  $(\tilde{\omega}, u) \in \hat{\Omega}$ .) Définissons enfin la filtration  $\hat{\mathcal{G}}$  par  $\hat{\mathcal{G}}_t = \hat{\mathcal{G}}_{t \wedge \hat{\zeta}}^0$ .

(3.32) **Lemmes.**

- i) Pour tous  $t \geq 0$  et  $A \in \hat{\mathcal{G}}_t^0$ , il existe un événement  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{G}}_t$  tel que  $A \cap \{\hat{\zeta} > t\} = \tilde{A} \times ]t; +\infty]$ .
- ii) Soient  $t \geq 0$  et  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{G}}_t$ . Alors  $\hat{A} = \pi^{-1}\tilde{A} \cap \{\hat{\zeta} > t\} \in \hat{\mathcal{G}}_t$ . Si  $\tilde{A} \in \mathcal{F}_t^{\tilde{X}}$ , alors  $\hat{A} \in \mathcal{F}_t^{\tilde{X}}$ .
- iii) Si  $\tilde{T}$  est un  $\tilde{\mathcal{G}}$ -temps d'arrêt (resp. un  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -temps d'arrêt) alors  $\hat{T} : (\tilde{\omega}, u) \mapsto \tilde{T}(\tilde{\omega}) \wedge u$  est un  $\hat{\mathcal{G}}$ -temps d'arrêt (resp. un  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -temps d'arrêt).
- iv) Pour tout processus  $\tilde{Y}$  à valeurs dans un espace mesurable  $(E', \mathcal{E}')$  et  $\tilde{\mathcal{G}}$ -adapté, le processus tué  $\hat{Y}$ , défini par  $\hat{Y}_t(\tilde{\omega}, u) = \tilde{Y}_t(\tilde{\omega})$  si  $t < u$  et  $\hat{Y}_t(\tilde{\omega}, u) = \partial \notin \mathcal{E}'$  sinon, est  $\hat{\mathcal{G}}$ -adapté.
- v) Pour toute  $\tilde{\mathcal{G}}$ -martingale<sup>18</sup> continue  $\tilde{M}$ , le processus stoppé  $\hat{M}$  défini par  $\hat{M}_t(\tilde{\omega}, u) = \tilde{M}_{t \wedge u}(\tilde{\omega})$  est une  $\hat{\mathcal{G}}$ -martingale continue.

□ **Démonstration.** Passons rapidement sur les trois premières assertions qui sont faciles :

▷ La tribu  $\hat{\mathcal{G}}_t^0$  est engendrée par les ensembles de la forme  $\tilde{A} \times U$ , avec  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{G}}_t$  et  $U \in \mathcal{B}_t$ , qui vérifient la propriété 3.32.i puisque  $U \cap ]t; +\infty] \in \{\emptyset, ]t; +\infty]\}$  pour tout  $U \in \mathcal{B}_t$ . On passe au cas général par le théorème des classes monotones.

<sup>18</sup>Précisons qu'on appelle  $\tilde{\mathcal{G}}$ -martingale un processus qui est une  $(\tilde{\mathcal{G}}, \mathbb{P}_x)$ -martingale pour tout  $x$ .

▷ La première moitié de 3.32.ii découle directement de la définition de  $\widehat{\mathcal{G}}$ . Pour la deuxième moitié : on commence par le vérifier par définition de  $\widehat{X}$  pour  $\widetilde{A} \in \mathcal{F}_t^{\widetilde{X}}$  de la forme  $\cap_i \{\widetilde{X}_{t_i} \in \Gamma_i\}$ ,  $t_i \leq t$ ,  $\Gamma_i \in \mathcal{E}$ , puis on étend par le théorème des classes monotones. L'assertion 3.32.iii est une conséquence directe de 3.32.ii.

▷  $\mathcal{F}_t^{\widehat{Y}}$  est engendrée par les ensembles de la forme  $A = \{\widehat{Y}_s \in \Gamma\}$ , avec  $s \leq t$  et  $\Gamma \in \mathcal{E}'$ . Pour un ensemble de cette forme on vérifie sans difficulté que  $A \cap \{\widehat{\zeta} \wedge t \leq s'\} \in \widehat{\mathcal{G}}_{s'}$ , pour tout  $s' \geq 0$ , i.e.  $A \in \widehat{\mathcal{G}}_{t \wedge \widehat{\zeta}} = \widehat{\mathcal{G}}_t$ . On a ainsi prouvé le point 3.32.iv :  $\mathcal{F}_t^{\widehat{Y}} \subset \widehat{\mathcal{G}}_t$ .

▷ Venons en maintenant à la preuve du point 3.32.v. Le processus  $\widehat{M}$  étant obtenu en stoppant  $t \mapsto \widetilde{M}_t \circ \pi$  au temps  $\widehat{\zeta}$  qui est un  $\widehat{\mathcal{G}}^0$ -temps d'arrêt, il suffit d'après le théorème d'arrêt des martingales (Rogers et Williams, 2000a, théorème 77.4) de prouver que  $\widetilde{M} \circ \pi$  est une  $\widehat{\mathcal{G}}^0$ -martingale. Le processus  $\widetilde{M} \circ \pi$  est  $\widehat{\mathcal{G}}^0$ -adapté (car  $\pi^{-1}\widehat{\mathcal{G}}_t \subset \widehat{\mathcal{G}}_t^0$  pour tout  $t \geq 0$ ), et  $\widehat{\mathbb{E}}_x | \widetilde{M} \circ \pi | = \widetilde{\mathbb{E}}_x | \widetilde{M}_t | < +\infty$ . Il reste donc à vérifier que, pour tous  $x \in \mathbb{E}$ ,  $s < t$  et  $A \in \widehat{\mathcal{G}}_s^0$ ,

$$\widehat{\mathbb{E}}_x \left\{ (\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_s) \circ \pi \mathbf{1}_A \right\} = 0.$$

Vérifions-le pour  $A$  de la forme  $\widetilde{A} \times U$ ,  $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{G}}_s$  et  $U \in \mathcal{B}_s$ , le cas général s'en déduisant par un argument de classes monotones. Pour cela, on remarque que  $\mathcal{B}_s = \mathcal{B}([0; s]) \vee \{s; +\infty\}$ , ce qui permet de montrer que  $\int_U dF_u$  est  $\widetilde{\mathcal{G}}_s$ -mesurable car  $F$  est un processus  $\mathcal{F}^{\widetilde{X}}$ -adapté et  $\mathcal{F}_s^{\widetilde{X}} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_s$ . Il ne reste plus alors qu'à calculer :

$$\widehat{\mathbb{E}}_x \left\{ (\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_s) \circ \pi \mathbf{1}_A \right\} = \widetilde{\mathbb{E}}_x \left\{ (\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_s) \mathbf{1}_{\widetilde{A}} \int_U dF_u \right\} = 0,$$

car  $\mathbf{1}_{\widetilde{A}} \int_U dF_u$  est  $\widetilde{\mathcal{G}}_s$ -mesurable et  $\widetilde{M}$  est une  $(\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathbb{P}}_x)$ -martingale. ■

### Transport des filtrations et des martingales de $\widehat{\Omega}$ vers $\Omega$

La notation  $\widehat{\mathcal{G}}$  désigne maintenant n'importe quelle filtration sur  $\widehat{\Omega}$  pour laquelle  $\widehat{\zeta}$  est un temps d'arrêt, par exemple la filtration  $\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{\mathcal{G}}^0_{\cdot \wedge \widehat{\zeta}}$  du lemme précédent. Considérons alors la filtration  $\mathcal{G}$  sur  $\Omega$  définie comme à l'étape 3.15 de la construction du théorème de renaissance (en utilisant  $\widehat{\mathcal{G}}$  au lieu de  $\widehat{\mathcal{F}}$  bien entendu). Comme précédemment,  $S^k$  désigne le  $k^{\text{ième}}$  instant de renaissance (en particulier  $S_1(\omega) = \widehat{\zeta}(\widehat{\omega}_0)$ ) et  $\omega^k$  le  $k$ -uplet  $(\widehat{\omega}_0, \dots, \widehat{\omega}_{k-1})$ . On a alors les résultats suivants :

#### (3.33) Lemmes.

i) Soit  $(\rho^k)_{k \geq 0}$  une famille de processus à valeurs dans un espace mesurable  $(\mathbb{E}', \mathcal{E}')$ , où  $\rho^k$  est défini sur  $(\widehat{\Omega}^{k+1}, \widehat{\mathcal{G}}_{\infty}^{\otimes k+1})$ , mesurable, et  $t \mapsto \rho_t(\omega^k, \cdot)$  est  $\widehat{\mathcal{G}}$ -adapté pour tout  $\omega^k \in \widehat{\Omega}^k$ . Alors le processus  $Y$  défini sur  $\Omega$  par

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} \rho_{t-S_k(\omega^k)}^k(\omega^{k+1}) & \text{si } S_k(\omega) \leq t < S_{k+1}(\omega), \\ \partial & \text{si } t \geq S_{\infty}(\omega), \end{cases}$$

est  $\mathcal{G}$ -adapté.

ii) Soient  $k \geq 0$  et  $\widehat{M}$  une  $\widehat{\mathcal{G}}$ -martingale continue à droite, issue de zéro et bornée. Alors le processus  $M$  défini sur  $\Omega$  par

$$M_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < S_k(\omega), \\ \widehat{M}_{t-S_k(\omega^k)}(\widehat{\omega}_k) & \text{si } t \geq S_k(\omega), \end{cases}$$

est une  $\mathcal{G}$ -martingale continue à droite, issue de zéro et bornée.

□ **Démonstration.**

▷ Soient  $t \geq 0$ ,  $\Gamma \in \mathcal{E}'$  et  $A$  l'évènement  $\{Y_t \in \Gamma\}$ . Pour tout  $k \geq 0$ , l'évènement

$$A_k = A \cap \{S_k \leq t < S_{k+1}\} = \left\{ \rho_{t-S_k}^k(\omega^{k+1}) \in \Gamma \right\} \cap \{S_k \leq t < S_{k+1}\}$$

ne dépend que de  $\omega^{k+1}$ , et ce de façon  $\widehat{\mathcal{G}}_{\infty}^{\otimes k+1}$ -mesurable car  $\rho^k$  est mesurable. De plus, pour tout  $\omega^k$  tel que  $S_k(\omega^k) \leq t$ , la section  $A_k^{\omega^k}$  s'écrit

$$A_k^{\omega^k} = \left\{ \rho_{t'}(\omega^k, \cdot) \in \Gamma \right\} \cap \left\{ t' < \hat{\zeta} \right\},$$

où  $t' = t - S_k(\omega^k)$ , donc  $A_k^{\omega^k}$  est  $\widehat{\mathcal{G}}_{t'}$ -mesurable car  $\hat{\zeta}$  est un  $\widehat{\mathcal{G}}$ -temps d'arrêt et  $t' \mapsto \rho_{t'}(\omega^k, \cdot)$  est  $\widehat{\mathcal{G}}$ -adapté. Ceci prouve le point 3.33.i.

▷ Le processus  $M$  est clairement continu à droite, issu de zéro et borné. Il est de plus  $\mathcal{G}$ -adapté d'après ce qui précède, avec les processus  $\rho^j$  définis par  $\rho_t^j = 0$  si  $j < k$ ,  $\rho_t^k(\omega^k, \cdot) = \widehat{M}_t$ , et  $\rho_t^j(\omega^{j+1}) = \widehat{M}_t(\hat{\omega}_k)$  si  $j > k$ . Il reste donc à montrer que, pour tous  $x \in E$ ,  $s \geq 0$ ,  $t > s$  et  $A \in \mathcal{G}_s$ ,  $\mathbb{E}_x \{(M_t - M_s) \mathbb{1}_A\} = 0$ . Comme  $M$  est nul sur  $[0; S_k]$ , on a

$$\mathbb{E}_x \{(M_t - M_s) \mathbb{1}_A\} = \mathbb{E}_x \{M_t \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{s < S_k \leq t}\} + \mathbb{E}_x \{(M_t - M_s) \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{S_k \leq s}\}.$$

Par définition de  $\mathcal{G}_s$ , il existe des évènements  $A' \in \widehat{\mathcal{G}}_{\infty}^{\otimes k}$  et  $A'' \in \widehat{\mathcal{G}}_{\infty}^{\otimes k+1}$  tels que

$$A \cap \{s < S_k\} = \{\omega^k \in A'\}, \quad A \cap \{S_k \leq s < S_{k+1}\} = \{\omega^{k+1} \in A''\},$$

et pour tout  $\omega^k$  tel que  $S_k(\omega^k) \leq t$ , on a  $A''(\omega^k) = \{\hat{\omega} \mid (\omega^k, \hat{\omega}) \in A''\} \in \widehat{\mathcal{G}}_{s-S_k(\omega^k)}$ . On peut alors calculer le premier terme de la somme en intégrant sur  $\hat{\omega}_{k+1}$  à  $\omega^k$  fixé :

$$\mathbb{E}_x \left\{ M_t \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{s < S_k \leq t} \right\} = \mathbb{E}_x \left\{ \mathbb{1}_{A' \cap \{S_k \leq t\}}(\omega^k) \int_E K(X_{\tau_k}^-(\omega^k), dy) \widehat{\mathbb{E}}_y \left\{ \widehat{M}_{t-S_k(\omega^k)} \right\} \right\} = 0,$$

puisque  $\widehat{M}$  est une martingale issue de 0. Le deuxième terme se calcule de manière similaire :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left\{ (M_t - M_s) \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{S_k \leq s < S_{k+1}} \right\} \\ &= \mathbb{E}_x \left\{ \mathbb{1}_{S_k \leq s}(\omega^k) \int_E K(X_{\tau_k}^-(\omega^k), dy) \widehat{\mathbb{E}}_y \left\{ \left( \widehat{M}_{t-S_k(\omega^k)} - \widehat{M}_{s-S_k(\omega^k)} \right) \mathbb{1}_{A''(\omega^k)} \right\} \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque  $\widehat{M}$  est une martingale et  $A''(\omega^k) \in \widehat{\mathcal{G}}_{s-S_k(\omega^k)}$ . Ceci achève la démonstration de 3.33.ii. ■





## CHAPITRE III

# SYSTÈMES HYBRIDES STOCHASTIQUES

## 1 Introduction

Nous avons proposé, au chapitre II, une définition générale de la notion de « processus diffusif par morceaux ». Nous avons choisi de le faire dans un cadre aussi abstrait que possible, pour éviter toute restriction superflue et couvrir ainsi l'ensemble des classes de modèles existant dans la littérature (cf. chapitre I). Afin d'obtenir, dans ce chapitre et le suivant, des résultats plus précis et donc plus utiles pour les applications, nous focaliserons notre attention sur une sous-classe de la classe des processus diffusifs par morceaux, que nous qualifierons simplement de « systèmes hybrides stochastiques ». Plus précisément, la classe de processus considérée est celle des SHS généraux de Bujorianu et Lygeros (2004a,b,c), qui recouvre notamment les processus déterministes par morceaux de Davis (1984, 1993), les diffusions alternantes de Ghosh et al. (1992, 1997, 1996), et les SHS à sauts forcés de Hu et al. (2000).

La première section pose les bases de l'étude des SHS : un processus diffusif par morceaux est construit à partir des différents ingrédients – espace d'état, équation différentielle stochastique, intensité de sauts spontanés et noyau de réinitialisation – qui définissent le modèle ; des conditions suffisantes sont données pour établir la caractère conservatif ; enfin, une formule d'Itô généralisée est établie, ce qui revient à montrer que le processus que nous avons construit est solution d'une EDS à sauts. La construction de processus « hybrides » par renaissance n'est pas nouvelle (cf. état de l'art au chapitre II, § 3.A) : nos contributions personnelles dans cette section concernent donc essentiellement les conditions suffisantes assurant que le processus n'est pas de Zénon (§ 2.C), et la représentation comme solution d'une EDS à sauts d'un processus construit par renaissance (§ 2.E).

Le cœur de ce chapitre est constitué par sa deuxième section : nous y étudions le générateur étendu du processus. Il s'agit d'un outil essentiel, qui intervient par exemple dans les questions de stabilité (nous y reviendrons au chapitre V, § 2.A), mais aussi qui servira de point de départ à notre étude de l'équation de FPK généralisée au chapitre IV. Nous commençons par rappeler au § 3.B quelques résultats concernant le compensateur prévisible d'un processus ponctuel, de manière à obtenir un *système de Lévy* du processus diffusif par morceaux. Notre contribution est constituée des résultats énoncés aux §§ 3.C et 3.D, qui établissent une « formule de Dynkin généralisée » et caractérisent un sous-ensemble du générateur étendu. Ce dernier résultat est comparé avec celui de Davis (1984, théorème 5.5), qui a obtenu une caractérisation complète du générateur étendu dans le cas particulier des processus déterministes par morceaux.

Nous terminons ce chapitre en donnant deux exemples de SHS à sauts forcés, pour lesquels nous examinons la question du phénomène de Zénon. Le premier est une généralisation à deux dimensions du modèle de Malhamé et Chong (1985), sur lequel nous reviendrons également dans

les chapitres suivants. Le second est un exemple très classique de système hybride, qui modélise les rebonds d'une balle sur le sol : nous verrons qu'il est loin d'être facile, même pour un modèle aussi simple, de savoir si le processus que nous avons construit est conservatif ou pas.

*Les notations utilisées dans ce chapitre seront, sauf mention explicite du contraire, celles du chapitre II. En particulier, nous utiliserons aussi souvent que possible les identifications naturelles associées aux projections  $\Omega \xrightarrow{\hat{\pi}_0} \hat{\Omega} \xrightarrow{\pi} \tilde{\Omega}$ , cf. remarques II.3.25.b et II.3.28.a pour plus de détails.*

## 2 Quels ingrédients pour un système hybride stochastique ?

L'intitulé culinaire de cette section fait référence à la démarche « constructive » évoquée en introduction du chapitre II : les différentes classes de modèles diffusifs par morceaux existant dans la littérature sont apparues par complexifications successives, c'est-à-dire en ajoutant à une classe existante de nouveaux ingrédients ou en élargissant la palette de choix possibles pour un ingrédient donné. La définition proposée par Bujorianu et Lygeros (2004a,b,c) relève clairement de cette démarche : il s'agit d'ajouter aux processus déterministes par morceaux de Davis (1984) l'ingrédient « diffusion », c'est-à-dire offrir un degré de liberté supplémentaire pour modéliser l'incertitude dans une dynamique hybride en remplaçant les EDO par des EDS.

Plus précisément, les ingrédients qui composent un SHS général sont les suivants :

- un espace d'état hybride, que nous noterons  $E$ , c'est-à-dire un espace permettant de prendre en compte à la fois des variables discrètes et des variables continues ;
- une équation différentielle, ordinaire ou stochastique, qui définit la dynamique continue du modèle, c'est-à-dire dans les termes du chapitre II le « processus de base » associé au processus diffusif par morceaux considéré ;
- des sauts qui peuvent être forcés (déclenchés par un certain sous-ensemble  $E^B$  de l'espace d'état) ou bien spontanés (déclenchés aléatoirement suivant une intensité de saut  $\lambda$  pouvant dépendre de l'état du système) ;
- des réinitialisations aux instants de saut, qui peuvent être déterministes (définies par une fonction de réinitialisation  $\Psi$ ) ou bien stochastiques (définies par un noyau de réinitialisation  $K$ ).

La définition d'un système hybride stochastique fait ainsi intervenir de manière très naturelle la construction décrite au § 3.C du chapitre précédent : en effet, on se donne d'une part la dynamique continue du modèle par l'intermédiaire d'une équation différentielle, et d'autre part la dynamique discrète à travers l'ensemble  $E^B$ , l'intensité  $\lambda$  et le noyau de réinitialisation  $K$ .

La suite de cette section est organisée comme suit : dans un premier temps, nous décrivons l'espace d'état hybride (§ 2.A) et donnons des conditions suffisantes d'existence du processus de base, dérivées des conditions classiques d'existence d'une solution forte pour une EDS (§ 2.B). Puis nous définissons une fonction de survie  $F$  à partir de  $\lambda$  et de  $E^B$ , de manière à pouvoir construire par renaissance un processus diffusif par morceaux correspondant aux ingrédients donnés ci-dessus (§ 2.C), et donnons des conditions suffisantes permettant d'établir le caractère conservatif du processus ainsi construit (§ 2.D). Enfin, nous discutons de la représentation du processus ainsi construit comme solution d'une EDS à sauts, ce que l'on peut qualifier de « formule d'Itô généralisée » pour les systèmes hybrides stochastiques (§ 2.E).

## 2.A L'espace d'état hybride

### Modes, gardes et domaines invariants

L'état d'un système hybride est décrit de manière générale par une paire  $X_t = (Q_t, Z_t)$ , où  $Q_t$  est une variable discrète, à valeurs dans un ensemble dénombrable  $\mathcal{Q}$ , et  $Z_t$  une variable continue qui prend ses valeurs, lorsque  $Q_t = q$ , dans un espace métrique noté  $E_q$ . Précisons que le terme « continu » fait ici référence à la nature de l'espace  $E_q$  dans lequel  $Z_t$  prend ses valeurs, et n'a rien à voir avec les trajectoires du processus. La variable discrète  $Q_t$  est parfois appelée le *mode* du système.

À chaque mode  $q \in \mathcal{Q}$  on associe une *garde*  $E_q^B \subset E_q$  dont le rôle sera de déclencher les sauts forcés du système. On note  $E_q^0 = E_q \setminus E_q^B$  le complémentaire de la garde, souvent baptisé *domaine invariant* du mode  $q$ , au sens où le système ne peut rester dans le mode  $q$  que si sa composante continue est dans  $E_q^0$ .

Faisons maintenant quelques hypothèses concernant les espaces  $E_q$  et les gardes  $E_q^B$  :

(2.1) **Hypothèses.** *Pour tout  $q \in \mathcal{Q}$ , de deux choses l'une : soit l'espace  $E_q$  est un singleton, soit il existe un entier  $n_q \geq 1$  tel que*

- i) *l'espace  $E_q$  est un fermé de  $\mathbb{R}^{n_q}$ , munie de la structure induite d'espace métrique LCS;*
- ii) *l'intérieur  $D_q$  de  $E_q$  dans  $\mathbb{R}^{n_q}$  est connexe, et  $E_q$  coïncide avec la fermeture  $\overline{D}_q$  de son intérieur;*
- iii) *la garde  $E_q^B$  est un fermé  $\partial E_q$ , où  $\partial E_q$  désigne la frontière de  $E_q$  dans  $\mathbb{R}^{n_q}$ .*

*Par convention,  $n_q = 0$  et  $E_q^B = \emptyset$  lorsque  $E_q$  est un singleton.*

(2.2) **Remarques.**

- a) L'entier  $n_q$  permet de prendre en compte des situations où le nombre de degrés de liberté du système à modéliser dépend du mode dans lequel il se trouve. Il est clair qu'aucune évolution continue ne peut avoir lieu dans les modes purement discrets (ceux pour lesquels  $n_q = 0$ ); ceux-ci peuvent servir par exemple à représenter des états terminaux : « mission accomplie », « système totalement détruit », etc.
- b) Il n'est pas vraiment nécessaire de se restreindre à des ouverts  $D_q$  connexes, mais on peut le faire sans perte de généralité quitte à introduire des modes supplémentaires.
- c) Les hypothèses que l'on trouve dans les articles de Bujorianu et Lygeros (2004a,b,c) sont un peu plus restrictives : elles imposent que  $E_q^B = \partial E_q$  là où nous supposons seulement que  $E_q^B \subset \partial E_q$ . Nous les avons un peu affaiblies pour pouvoir prendre en compte des exemples intéressants comme la balle élastique stochastique du § 4.B ou encore le modèle d'éolienne développé dans la section V.3, pour lesquels la garde ne coïncide pas avec la frontière toute entière.

### Somme topologique disjointe

Le processus  $X_t$  prend donc ses valeurs dans la *somme disjointe*  $E$  des ensembles  $E_q$ , c'est-à-dire l'ensemble des couples  $(q, z)$  tels que  $q \in \mathcal{Q}$  et  $z \in E_q$ , que l'on note  $\coprod_{q \in \mathcal{Q}} E_q$  :

$$(2.3) \quad E = \coprod_{q \in \mathcal{Q}} E_q = \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} \{q\} \times E_q.$$

On identifie naturellement chacun des ensembles  $E_q$  à son image par l'injection  $i_q : z \in E_q \mapsto (q, z) \in E$ , c'est-à-dire à l'ensemble  $\{q\} \times E_q \subset E$ . On munit alors cet espace de la *topologie somme* (Bourbaki, 1971, I.2.4) :

(2.4) **Définition-propriété.** La topologie somme sur l'espace  $E$  défini par la formule 2.3 est la plus fine topologie qui rend continues toutes les injections  $i_q$ ,  $q \in Q$ . L'espace  $E$  muni de cette topologie s'appelle la somme topologique disjointe des espaces  $E_q$ . On a les propriétés suivantes :

- i) La topologie induite sur  $\{q\} \times E_q$  coïncide par  $i_q$  avec la topologie euclidienne sur  $E_q$ .
- ii) Les ensembles  $\{q\} \times E_q$ ,  $q \in Q$ , sont les composantes connexes de  $E$ , et sont donc à la fois ouverts et fermés.
- iii)  $E$  est un espace métrisable LCS. Par exemple, la métrique

$$d((q, z), (q', z')) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \neq q', \\ \|z - z'\| \wedge 1 & \text{si } q = q'. \end{cases}$$

est compatible avec sa topologie.

On parlera de *saut* du processus hybride  $X_t$  pour toute discontinuité relativement à la topologie ainsi introduite. En particulier, puisque les  $E_q$  – identifiés à partir de maintenant à leur image – sont des ouverts disjoints de  $E$ , tout changement de valeur de la composante discrète  $Q_t$  correspond à ce que nous appelons un saut.

(2.5) **Remarques.**

- a) Ces considérations sur ce qu'est l'espace d'état d'un système hybride montrent bien que la décomposition de l'état en une paire  $(Q_t, Z_t)$  est quelque peu artificielle, et indique simplement le fait que l'espace d'état comporte plusieurs composantes connexes. Ainsi le modèle de Malhamé et Chong peut-il être vu – modulo un simple changement de variable – comme un modèle scalaire à valeurs dans  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  : ce qui reste, c'est le nombre de composantes connexes, c'est-à-dire le fait qu'on ne puisse passer d'un mode à l'autre qu'en faisant un saut. La présence de sauts dans les trajectoires constitue donc, selon nous, la vraie spécificité des modèles dits « hybrides ». Ceci justifie que tout le chapitre II ait été traité dans le cadre un peu abstrait d'un espace métrique LCS : on a pu ainsi, sans perdre l'essentiel qui est la présence de sauts dans les trajectoires, simplifier agréablement bon nombre de notations, comme on peut le constater en comparant les notations « hybrides » de Bujorianu et Lygeros (2004c) avec la section II.3 de ce mémoire !
- b) Certains auteurs maintiennent toutefois une distinction dans leur vocabulaire concernant la nature des sauts<sup>1</sup>. Pour expliquer ceci, il faut considérer le cas particulier où  $n_q = n$  pour tout  $q \in Q$ , auquel cas l'espace  $E$  peut être vu comme un sous-ensemble de  $Q \times \mathbb{R}^n$ . On peut alors distinguer les simples « sauts » (discontinuités de  $Z_t$  à  $Q_t = q$  fixé) des « commutations » (*switchings*, changements de  $Q_t$  sans discontinuité de  $Z_t$ ) et des « sauts hybrides » (*hybrid jumps*, discontinuités simultanées de  $Q_t$  et de  $Z_t$ ).

<sup>1</sup>Voir par exemple Blom (2003) et Krystul et Blom (2005). Signalons que la distinction entre « commutations » et « sauts » qui est faite par Ghosh et Bagchi (2004) est importante dans le type de modèle qu'ils considèrent. Ils autorisent en effet les instants de sauts – au sein d'une même composante connexe de l'espace d'état – à former un sous-ensemble dense de  $\mathbb{R}_+$ , mais pas les commutations entre les différents modes.

**Notations : fonctions et champs de vecteurs sur E**

Commençons par quelques conventions concernant les fonctions définies sur E, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Comme au chapitre II, toute fonction  $\varphi$  définie sur E est implicitement étendue à  $E_\partial = E \cup \{\partial\}$ , où  $\partial \notin E$  est le cimetière, en posant  $\varphi(\partial) = 0$ . De plus, pour tous  $k \geq 1$  et  $A \subset E$ ,  $\mathcal{C}^k(A)$  désigne l'ensemble des fonctions  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant : pour tout  $q \in Q$  tel que  $n_q \geq 1$ , la restriction  $\varphi_q$  de  $\varphi$  à  $E_q$  possède une extension de classe  $\mathcal{C}^k$  à un voisinage ouvert de  $A \cap E_q$  dans  $\mathbb{R}^{n_q}$ . (En particulier, si  $A_q = A \cap E_q$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^{n_q}$  pour tout  $q \in Q$ , il s'agit simplement des fonctions dont les restrictions sont de classe  $\mathcal{C}^k$ .) Nous noterons  $\mathcal{C}_c^k(A)$  les fonctions de  $\mathcal{C}^k(A)$  à support compact.

Nous adoptons dans tout ce chapitre un point de vue « extrinsèque » sur l'espace d'état E, au sens où chaque  $E_q$  est vu comme un sous-ensemble de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n_q}$ . Dans ce contexte, on dira qu'une application  $\mathbf{g} : E \mapsto \cup_{q \in Q} \{q\} \times \mathbb{R}^{n_q}$  est un *champ de vecteur* sur E si, pour tout  $x = (q, z) \in E$ ,  $\mathbf{g}(q, z) \in \{q\} \times \mathbb{R}^{n_q}$ . En d'autres termes, un champ de vecteurs sur E associe à chaque point  $(q, z)$  de E un élément de  $\mathbb{R}^{n_q}$ . Nous conviendrons que  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ , c'est-à-dire que tous nos champs de vecteurs sont nuls sur les modes purement discrets (la définition d'un champ de vecteur sur un singleton n'ayant de toute façon aucun sens). Comme d'habitude, on dit qu'un champ de vecteurs est mesurable / continu / de classe  $\mathcal{C}^k$  si chacune de ses composantes possède la propriété correspondante.

Il sera toutefois utile au chapitre IV, pour bien saisir la signification géométrique de l'équation de Fokker-Planck et du courant de probabilité, d'adopter le point de vue « intrinsèque » de la géométrie différentielle. En effet, rien n'empêche de voir chaque  $E_q$  comme une variété à bord, ou plus généralement à coins, à condition bien sûr de supposer la frontière suffisamment lisse. On fait alors l'identification usuelle sur chaque mode de dimension  $n_q \geq 1$  :

$$\mathbf{g}(q, \cdot) = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{g}^1(q, \cdot) \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{n_q}(q, \cdot) \end{pmatrix}}_{\text{élément de } \mathbb{R}^{n_q}} \equiv \underbrace{\sum_{i=1}^{n_q} \mathbf{g}^i(q, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}}_{\text{opérateur différentiel}},$$

ce qui permet de définir l'action d'un champ de vecteurs  $\mathbf{g}$  sur une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  :

$$(2.6) \quad \mathbf{g}\varphi : (q, z) \mapsto \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_q} \mathbf{g}^i(q, z) \frac{\partial \varphi_q}{\partial z^i}(z) & \text{si } n_q \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci a bien une signification intrinsèque si, lors d'un changement de coordonnées  $z \mapsto \tilde{z}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on transforme les composantes de  $\mathbf{g}$  par la relation  $\tilde{\mathbf{g}}^i = \sum_j \mathbf{g}^j \frac{\partial \tilde{z}^i}{\partial z^j}$ . Remarquons que la sommation porte sur un nombre de termes variable, qui vaut  $n_q$  en  $x = (q, z)$ . Comme cela sera le cas à chaque fois que l'on fera une somme sur les coordonnées spatiales, nous omettrons de le préciser par la suite, en notant simplement  $\sum_i$ . Par ailleurs, on veillera à ne pas confondre la notation  $\mathbf{g}\varphi$ , définie par l'équation 2.6, avec la notation  $\varphi\mathbf{g}$  qui désigne le champ de vecteur obtenu en multipliant les composantes de  $\mathbf{g}$  par la fonction  $\varphi$ .

(2.7) **Remarque.** Nous nous permettrons un abus de langage bénin et fort commode : le coefficient de dérive (*drift*), noté  $\mathbf{f}$  et apparaissant dans les EDS formulées avec des intégrales d'Itô, sera qualifié de champ de vecteurs même s'il est bien connu qu'il ne s'agit pas d'un « vrai » champ de

vecteur au sens intrinsèque du terme – en raison du terme correctif dans la formule d'Itô. Dans le cas des EDS formulées avec des intégrales de Stratonovich (voir chapitre IV, § 1.B), le champ de vecteur  $\mathbf{g}_0$  qui remplace  $\mathbf{f}$  est, quant à lui, un vrai champ de vecteur.

## 2.B Équation différentielle stochastique et processus de base

La dynamique continue dans un SHS est décrite par une équation différentielle stochastique (avec une partie diffusive éventuellement dégénérée, voire nulle dans le cas des processus déterministes par morceaux). On suppose donc donnés un processus de Markov  $\tilde{X}$ , à valeurs dans  $E$ , un entier  $m \geq 0$  et  $m + 1$  champs de vecteurs  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$  sur  $E$ , satisfaisant aux conditions suivantes :

### (2.8) Hypothèses.

- i)  $\mathbf{f}$  est mesurable et les  $\mathbf{g}_l$  sont continus ( $1 \leq l \leq m$ ).
- ii)  $\tilde{X}$  est un processus de diffusion conservatif, constant à partir du temps

$$\tau^B = \inf\{t \geq 0 \mid \tilde{X}_t \in E^B\}.$$

- iii) L'univers  $\tilde{\Omega}$  porte un mouvement brownien  $m$ -dimensionnel  $\tilde{B}$ , indépendant de  $\tilde{X}_0$ , tel que pour tout  $x \in E^0$  le processus  $\tilde{X}$  est solution forte sous  $\tilde{\mathbb{P}}_x$  de l'EDS

$$(2.9) \quad \begin{cases} \tilde{X}_0 = x \\ d\tilde{X}_t = \mathbf{f}(\tilde{X}_t) dt + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\tilde{X}_t) d\tilde{B}_t^j \end{cases}$$

sur l'intervalle  $[0; \tau^B]$ .

L'EDS 2.9 est ici formulée avec des intégrales d'Itô, la formulation de Stratonovich n'ayant de sens que si les champs de vecteurs sont suffisamment réguliers (par exemple de classe  $\mathcal{C}^1$ ). Le fait que le processus  $\tilde{X}$  soit à valeurs dans l'espace hybride  $E$  ne pose en réalité aucun problème quant à l'interprétation de l'EDS 2.9, puisqu'étant continu il ne peut changer de composante connexe  $E_q$ . On peut ainsi reformuler l'hypothèse 2.8.iii en disant que, pour tout  $q \in \mathcal{Q}$  tel que  $n_q \geq 1$  et tout  $z \in E_q^0$ , le processus  $\tilde{Z}$  est solution forte sous  $\tilde{\mathbb{P}}_{(q,z)}$  de l'EDS

$$(2.10) \quad \begin{cases} \tilde{Z}_0 = z \\ d\tilde{Z}_t = \mathbf{f}(q, \tilde{Z}_t) dt + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(q, \tilde{Z}_t) d\tilde{B}_t^j, \end{cases}$$

à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_q}$ , sur l'intervalle  $[0; \tau^B]$ .

### (2.11) Remarques.

- a) Le comportement du processus après l'instant  $\tau^B$  ne jouera aucun rôle puisque le premier saut a lieu au plus tard à cet instant : la condition «  $\tilde{X}$  est constant à partir du temps  $\tau^B$  » est donc là simplement pour fixer les idées (cf. la remarque II.3.28.b sur l'unicité du processus de base associé à un processus diffusif par morceaux). Remarquons également que ce temps  $\tau^B$  est strictement positif –  $\tilde{\mathbb{P}}_x$ -presque sûrement, pour tout  $x \in E^0$  – puisqu'on a fait l'hypothèse que  $E^B$  est un fermé de  $E$  (en effet, si  $\tau^B(\omega) = 0$  il existe une suite de réels positifs  $t_n$ , tels que  $\tilde{X}_{t_n}(\omega) \in E^B$  et  $t_n \rightarrow 0$ , ce qui entraîne que  $\tilde{X}_0(\omega) \in E^B$  par continuité de  $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ ; or  $\tilde{X}_0 = x$  presque sûrement).

- b) Le processus  $\tilde{B}$  est supposé brownien sous chacune des lois  $\tilde{\mathbb{P}}_x$ . En d'autres termes, si on note  $(W^m, \mathcal{W}^m, \mathbb{W}^m)$  l'espace de Wiener  $m$ -dimensionnel, on a la relation  $\tilde{\mathbb{P}}_x \circ \tilde{B}^{-1} = \mathbb{W}^m$ , pour tout  $x \in E$ . Ceci sera de toute façon parfaitement évident dès que l'on considèrera la réalisation canonique du processus de base sur l'espace  $\tilde{\Omega} = E \times W^m$ , avec les lois  $\tilde{\mathbb{P}}_x = \delta_x \times \mathbb{W}^m$ .
- c) La condition 2.8.i est une condition très faible, qui permet de donner un sens à l'EDS 2.9 mais pas en général de prouver l'existence et l'unicité de la solution. Nous aurons besoin pour cela d'hypothèses plus fortes, voir par exemple le théorème 2.12 ci après.
- d) L'entier  $m$  est supposé ici indépendant du mode  $q \in \mathcal{Q}$ , comme dans Bujorianu et Lygeros (2004a,c). Afin de ne pas compliquer inutilement le formalisme, nous n'avons pas retenu l'extension proposée dans Bujorianu et Lygeros (2004b), qui considère un entier  $m(q) \geq 0$  éventuellement différent pour chaque mode. On peut de toutes façons se ramener à la situation considérée ici dès que  $m = \sup_q m(q) < +\infty$ , en posant  $\mathbf{g}_k = 0$  sur  $E_q$  pour tout  $k > m(q)$ .

### Rappel : la notion de solution forte pour une EDS

Quittons un instant l'espace hybride  $E$  pour rappeler ce que signifie la notion de solution forte pour une EDS de la forme 2.9 à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . On suppose donnés a priori un espace probabilisé complet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$ , un mouvement brownien  $m$ -dimensionnel  $B$  et un vecteur aléatoire  $\xi$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et indépendant de  $B$ . On dit alors que  $Z$  est solution forte de l'EDS 2.10, relativement au mouvement brownien  $B$  et avec la condition initiale  $\xi$ , si :

- $Z$  est un processus continu à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , adapté à la filtration complète  $\mathcal{G}^{\xi, B}$  engendrée par  $\xi$  et  $B$ , et  $Z_0 = \xi$  presque sûrement ;
- de plus, presque sûrement, on a pour tout  $t \geq 0$

$$\int_0^t \left( \|\mathbf{f}(Z_s)\| + \sum_{j=1}^m \|\mathbf{g}_j(Z_s)\|^2 \right) ds < +\infty$$

et

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \mathbf{f}(Z_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \mathbf{g}_j(Z_s) dB_s^j.$$

C'est le premier de ces deux points qui différencie une solution forte d'une solution faible : on s'est donné a priori un espace probabilisé et un mouvement brownien, et on exige que la solution au temps  $t$  ne dépende que de la condition initiale et de la trajectoire du brownien jusqu'au temps  $t$  (voir par exemple Kallenberg, 1997, chapitre 21, pour la notion de solution faible, dont nous ne nous servirons pas). La notion de solution forte sur un intervalle fermé  $[0; T]$ , où  $T$  est un  $\mathcal{G}^{\xi, B}$ -temps d'arrêt, est définie de manière similaire en restreignant simplement le deuxième point à l'évènement  $\{t \leq T\}$  (Cherny et Engelbert, 2003).

Le théorème suivant énonce les conditions classiques d'existence et d'unicité d'une solution forte, toujours pour le cas d'une équation à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (voir par exemple Kallenberg, 1997, chapitre 21) :

(2.12) **Théorème.** *Supposons que les champs de vecteurs  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$  vérifient :*

- i) (champs de vecteurs localement lipschitziens) pour tout entier  $N \geq 1$ , il existe un réel  $K^N > 0$  tel que les  $m + 1$  champs de vecteurs sont  $K^N$ -lipschitziens sur  $\{\|z\| \leq N\}$  ;*

<sup>2</sup>La notation  $\mathbb{P}$  désigne ici une simple probabilité, et pas une famille de probabilité comme dans le reste du texte.



ii) (champs de vecteurs à croissance linéaire) il existe une constante  $C > 0$  telle que,  $\forall z \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|\mathbf{f}(z)\| + \sum_{j=1}^m \|\mathbf{g}_j(z)\| \leq C(1 + \|z\|).$$

Alors il existe une fonction mesurable  $\Upsilon : \mathbb{R}^n \times W^m \rightarrow W^n$ , telle que :

- iii) pour tout quintuplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, B, \xi)$  vérifiant les mêmes hypothèses que précédemment, le processus  $\Upsilon(\xi, B)$  est solution forte de l'EDS;
- iv) toute autre solution de l'EDS définie sur le même espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , avec la même condition initiale  $\xi$  et le même mouvement brownien  $B$ , est indistinguishable de  $\Upsilon(\xi, B)$  (unicité trajectorielle);
- v) toutes les solutions de l'EDS avec la même loi initiale déterminent, indépendamment de l'espace sur lequel elles sont définies, la même mesure de probabilité sur  $W^n$  (unicité en loi).

Pour une loi initiale  $\mu$  donnée, la réalisation canonique de la solution (canonical set-up, Rogers et Williams (2000b)) est définie sur l'espace  $\Omega = \mathbb{R}^n \times W^m$ , muni de la tribu  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{W}^m$  et de la loi  $\mathbb{P}_\mu = \mu \otimes \mathbb{W}^m$ , en posant pour tout  $\omega = (z, w) \in \Omega$ ,

$$\xi(\omega) = z, \quad B(\omega) = w, \quad \text{et} \quad Z(\omega) = \Upsilon(z, w).$$

Il est alors bien connu que le processus  $Z$  ainsi construit, avec les lois  $\mathbb{P}_{z_0} \triangleq \mathbb{P}_{\delta_{z_0}}$  et les opérateurs de translation  $\theta_t : (z, w) \mapsto (Z_t(z, w), w(t + \cdot))$ , est un processus de diffusion conservatif (Ikeda et Watanabe, 1981, section IV.6).

(2.13) **Remarque.** La définition de la notion de solution forte, telle qu'on l'a énoncée plus haut, exige seulement que le processus solution  $Z$  soit adapté à la filtration  $\mathbb{P}_\mu$ -complète engendrée par  $\xi$  et  $B$ , pour tout  $\mu$ , donc à la filtration  $\mathbb{P}$ -complète  $\mathcal{G}^{\xi, B}$  définie par :

$$\mathcal{G}^{\xi, B} = \bigcap_{\mu} \overline{\sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t^B}^{\mu \otimes \mathbb{W}^m},$$

où  $\mu$  parcourt l'ensemble des mesures de probabilité sur  $(E, \mathcal{E})$ . En fait, il est possible d'être plus précis sous les hypothèses du théorème 2.12 : le processus  $Z$  est en fait adapté à la filtration  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \overline{\mathcal{H}_t^m}$ , où  $\mathcal{H}_t^m$  est la filtration naturelle sur l'espace de Wiener  $W^m$ , et  $\overline{\mathcal{H}_t^m}$  sa  $\mathbb{W}^m$ -complétion (Rogers et Williams, 2000b, §10 et §13).

### Conditions suffisantes d'existence pour le processus de base

On peut maintenant, à partir de ces résultats valables dans le cas euclidien, énoncer des conditions suffisantes pour l'existence d'un unique processus de base  $\tilde{X}$  correspondant à un  $(m+1)$ -uplet de champs de vecteurs  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$  sur l'espace hybride  $E$ .

(2.14) **Corollaire.** *Supposons que*

- i) les champs de vecteurs  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$  se prolongent sur  $\coprod_{q \in \Omega} \mathbb{R}^{n_q}$  en des champs de vecteurs  $\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \dots, \bar{\mathbf{g}}_m$  qui vérifient les hypothèses du théorème 2.12 sur chacun des modes  $\{q\} \times \mathbb{R}^{n_q}$  de dimension  $n_q \geq 1$ .

Pour chaque  $q \in \Omega$  tel que  $n_q \geq 1$ , notons alors  $Z^q$  le processus de diffusion associé à ces champs de vecteurs prolongés, définis sur l'espace canonique  $\Omega^q = \mathbb{R}^{n_q} \times W^m$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_q}$ , et introduisons le  $\mathcal{F}_+^{Z^q}$ -temps d'arrêt  $T_q$ , défini par  $T_q = \inf \{t \geq 0 \mid Z_t^q \notin E_q^0\}$ . Supposons de plus que

ii) pour tout  $z \in E_q^0$ ,  $\mathbb{P}_z^q$ -presque sûrement,  $Z_{T_q}^q \in E_q^B$ .

Alors il existe un processus de diffusion conservatif  $\tilde{X}$  sur  $E$  vérifiant les hypothèses 2.8.ii et 2.8.iii. De plus, ce processus est caractérisé de manière unique, en loi, par ces hypothèses.

□ **Démonstration.**

▷ Commençons par justifier que  $T_q$  est bien un  $\mathcal{F}_+^{Z^q}$ -temps d'arrêt. Fixons  $q \in \mathcal{Q}$  tel que  $n_q \geq 1$ , et introduisons les temps

$$D_{E^B}^q = \inf \{t \geq 0 \mid Z_t^q \in E_q^B\} \quad \text{et} \quad T_*^q = \inf \{t > 0 \mid Z_t^q \notin E_q\}.$$

Le processus  $Z^q$  étant continu, il est connu que  $D_{E^B}^q$  et  $T_*^q$  sont respectivement un  $\mathcal{F}^{Z^q}$ -temps d'arrêt et un  $\mathcal{F}_+^{Z^q}$ -temps d'arrêt, les ensembles  $E_q^B$  et  $E_q$  étant fermés par hypothèse (voir par exemple Revuz et Yor, 1999, propositions 4.5 et 4.6). On en déduit que  $T_q$  est bien un  $\mathcal{F}_+^{Z^q}$ -temps d'arrêt en observant que  $T_q = D_{E^B}^q \wedge T_*^q$ .

▷ Soit  $q \in \mathcal{Q}$  tel que  $n_q \geq 1$ . Notons  $\tilde{Z}^q$  le processus  $Z^q$  stoppé à l'instant  $T_q$ . Il est facile de vérifier que  $\tilde{Z}^q$  est encore un processus de diffusion, la propriété de Markov forte et le caractère borélien découlant du fait que  $T_q$  est un  $\mathcal{F}_+^{Z^q}$ -temps d'arrêt. Considérons maintenant l'évènement  $\tilde{\Omega}^q = E_q \times W^m$  dans  $\Omega^q$ . Pour tout  $\omega \in \tilde{\Omega}^q$ , on a  $Z_0^q(\omega) \in E_q$  par construction de la réalisation canonique, ce qui implique que  $t \mapsto \tilde{Z}_t^q(\omega)$  est à valeurs dans  $E_q$ . Comme  $\mathbb{P}_z^q(\tilde{\Omega}^q) = 1$  pour tout  $z \in E_q$ , on peut donc restreindre le processus  $\tilde{Z}^q$  à  $\tilde{\Omega}^q$  de façon à obtenir un processus de diffusion conservatif sur  $E_q$ . De plus, par l'hypothèse 2.14.ii, le temps  $T_q$  coïncide presque sûrement avec l'instant où le processus atteint  $E_q^B$  : le processus  $\tilde{Z}^q$  est donc solution sur  $[0; \tau^B]$  de l'EDS 2.10 (et ceci ne dépend bien sûr plus de l'extension des champs de vecteurs de l'hypothèse 2.14.i).

▷ Finalement, il ne reste plus qu'à réunir les processus  $\tilde{Z}^q$ ,  $q \in \mathcal{Q}$ , pour former un processus « composite »  $\tilde{X}$  sur  $E$ , comme cela est décrit par Siegrist (1981, section 3). Pour les modes purement discrets, on définit simplement  $\tilde{Z}^q$  comme le processus constant ayant pour valeur l'unique point de  $E_q$ . Le processus composite est alors construit sur  $\tilde{\Omega} = \prod_{q \in \mathcal{Q}} \tilde{\Omega}^q$  en posant  $\tilde{\mathbb{P}}_{(q,z)}^q = \mathbb{P}_z^q$ ,  $\tilde{X}_t(q, z, w) = (q, \tilde{Z}_t^q(z, w))$  et  $\tilde{B}_t(q, z, w) = w(t)$ . (Remarquons au passage que  $\tilde{\Omega} = E \times W^m$ .) Le processus ainsi obtenu est clairement un processus de diffusion conservatif vérifiant les hypothèses 2.8.ii et 2.8.iii. L'unicité en loi découle de la propriété d'unicité en loi pour l'EDS et du fait qu'on demande au processus d'être constant à partir du moment où il atteint  $E^B$ . ■

(2.15) **Remarque.** L'hypothèse 2.14.i peut en fait être un peu affaiblie : il est suffisant de pouvoir prolonger les champs de vecteur à un voisinage ouvert de  $E_q$  dans  $\mathbb{R}^{n_q}$ , pour chaque  $q \in \mathcal{Q}$ , pour obtenir le même résultat.

## 2.C Construction d'un SHS à partir de son processus de base

Etant donné un espace d'état hybride  $E$  et un processus de base  $\tilde{X}$ , vérifiant respectivement les hypothèses 2.1 et 2.8, il reste maintenant à définir une fonction de survie  $F$  et un noyau de réinitialisation  $K$  pour pouvoir appliquer la construction décrite au II.3.C. Pour cela, supposons donné une fonction  $\lambda$  et un noyau  $K$  satisfaisant aux hypothèses suivantes :

(2.16) **Hypothèses.**

i)  $K$  est un noyau markovien sur  $(E, \mathcal{E})$ , vérifiant l'hypothèse 2.19.i du chapitre II, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad K(x, \{x\} \cup E^B) = 0.$$

ii)  $\lambda : E^0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction mesurable et localement bornée (c'est-à-dire bornée sur les compacts de  $E^0$ ).

(2.17) **Remarques.**

- a) Pour simplifier, nous avons supposé comme Bujorianu et Lygeros (2004a,b,c) que la mesure  $K(x, \cdot)$  est définie pour tout  $x \in E$ , ce qui n'est pas nécessaire en général. En effet, il est facile dans certains cas de voir qu'aucun saut ne se produira dans une région donnée de l'espace d'état, pour laquelle il devient inutile de spécifier  $K$  (voir aussi la remarque 2.20.b du chapitre II). C'est le cas par exemple pour l'ensemble  $E^0$  tout entier lorsqu'il n'y a pas de sauts spontanés (i.e.  $\lambda \equiv 0$ ); c'est le cas également pour une partie de la garde  $E^B$  lorsque le processus est déterministe par morceaux (Davis, 1984, section 3) – plus précisément, il s'agit de la partie « inactive » de la garde, définie comme l'ensemble des points  $x \in E^B$  par lesquels aucun des flots déterministes ne quitte  $E^0$ .
- b) L'hypothèse 2.16.ii est vérifiée par exemple dès que  $\lambda$  est continue sur  $E^0$ . Plus généralement, on pourrait se contenter de supposer que  $t \mapsto \lambda(\tilde{X}_t)$  est presque sûrement localement intégrable en  $t = 0$ .

### Fonction de survie de premier saut

La fonction  $\lambda$  et la garde  $E^B$  vont nous permettre de construire une fonction de survie  $F$ , en combinant les exemples 3.29 et 3.30 du chapitre II : le premier correspond aux sauts forcés déclenchés par la garde  $E^B$ , le deuxième aux sauts spontanés qui se produisent avec une intensité stochastique  $\lambda(\tilde{X}_t)$ . La fonction de survie en question est définie par la relation

$$(2.18) \quad F_t = \mathbb{1}\{t < \tau^B\} \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tilde{X}_s) ds\right),$$

où  $\tau^B$  désigne le temps d'entrée de  $\tilde{X}$  dans  $E^B$ . Il s'agit de l'expression générale utilisée pour définir la fonction de survie aussi bien pour les processus déterministes par morceaux de Davis (1984) que pour les GSHS de Bujorianu et Lygeros (2004a,b,c). Rappelons que cette fonction de survie  $F_t$  s'interprète, dans la construction du II.3.C, comme la probabilité que le premier saut  $\tau_1$  du processus diffusif par morceaux  $X$  n'ait pas encore eu lieu à l'instant  $t$ , sachant la trajectoire toute entière du processus de base  $\tilde{X}$  (ou, de manière équivalente, sachant la trajectoire de  $\tilde{X}$  jusqu'à l'instant  $t$ , puisque la fonctionnelle  $F$  est  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -adaptée) :

$$(2.19) \quad \mathbb{P}_x\{\tau_1 > t \mid \mathcal{F}_\infty^{\tilde{X}}\} = F_t = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tilde{X}_s) ds\right) & \text{si } t < \tau^B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, le saut a lieu au plus tard lorsque  $\tilde{X}$  atteint  $E^B$ , et la probabilité qu'un saut spontané survienne avant cela est d'autant plus grande que la fonction  $\lambda$  prend des valeurs élevées sur la trajectoire de  $\tilde{X}$ . Nous avons seulement supposé  $\lambda$  localement bornée sur  $E^0$ , ce qui autorise  $\lambda(x)$  à tendre vers l'infini lorsque  $x$  se rapproche de  $E^B$ . Le lemme suivant nous sera donc utile un peu plus tard (cf. § 3.B) :

(2.20) **Lemme.**  $\int_0^{t \wedge \hat{\zeta}} \lambda(\tilde{X}_s) ds < +\infty$  presque sûrement, pour tout  $t \geq 0$ .

□ **Démonstration.** Par définition de  $F$ , on a  $\hat{\zeta} \leq \tau^B$  ps, donc aussi  $t \wedge \hat{\zeta} \leq \tau^B$  ps. Considérons alors le temps  $\tau^*$  défini sur  $\tilde{\Omega}$  par

$$\tau^* = \inf\left\{t \geq 0 \mid \int_0^{t \wedge \tau^B} \lambda(\tilde{X}_s) ds = +\infty\right\} \in [0; \tau^B] \cup \{+\infty\}.$$

Sur l'évènement  $\{t \wedge \hat{\zeta} < \tau^B\}$ , on a :

$$\int_0^{t \wedge \hat{\zeta}} \lambda(\tilde{X}_s) ds = \int_0^{t \wedge \hat{\zeta}} \lambda(\tilde{X}_s) ds \leq (t \wedge \hat{\zeta}) \sup_{s \leq t \wedge \hat{\zeta}} \lambda(\tilde{X}_s) < +\infty,$$

car  $\{\tilde{X}_s; s \leq t \wedge \hat{\zeta}\}$  est compact dans  $E^0$ . Donc  $\int_0^{t \wedge \hat{\zeta}} \lambda(\tilde{X}_s) ds = +\infty$  si et seulement si  $\tau^* = \hat{\zeta} = \tau^B \leq t$ , ce qui se produit avec une probabilité nulle car  $F_{\tau^*}^- = F_{\tau^*} = 0$  (en effet,  $F_t \rightarrow 0$  quand  $t \uparrow \tau^*$ , puisque  $\int_0^{\tau^*} \lambda(\tilde{X}_s) ds = +\infty$ ). ■

(2.21) **Remarque.** Dans le cas des processus déterministes par morceaux, le processus de base est déterministe, ce qui signifie que sa filtration naturelle est constante. Il existe donc, pour tout  $t \geq 0$ , une fonction  $F_t^* : E \rightarrow [0; 1]$  telle que  $F_t = F_t^* \circ X_0$  presque sûrement, ce qui permet d'avoir dans ce cas une interprétation de la fonction de survie sans passer par des lois conditionnelles :

$$\tilde{\mathbb{P}}_x \{\tau_1 > t\} = F_t^*(x).$$

On retrouve ainsi l'expression donnée par Davis (1984, p. 361).

### Construction du processus diffusif par morceaux

Il est facile de voir que la fonction de survie  $F$  ainsi définie est une fonctionnelle multiplicative du processus  $\tilde{X}$ , satisfaisant aux hypothèses du corollaire II.3.27 (les arguments sont les mêmes que pour les exemples 3.29 et 3.30 du chapitre II). Ceci nous assure de l'existence d'un processus diffusif par morceaux  $X$  associé au processus de base  $\tilde{X}$ , solution de l'EDS 2.9, et à la fonction de survie  $F$ . Avant d'aller plus loin, résumons les hypothèses et les conclusions de cette construction de façon un peu plus formelle (mais il n'y a rien à démontrer, tout à déjà été fait au chapitre II) :

(2.22) **Théorème.** *Supposons donnés*

- i) *un espace hybride  $E = \coprod_{q \in \mathcal{Q}} E^q$ , muni d'une garde  $E^B \subset E$ , satisfaisant aux hypothèses topologiques 2.1,*
- ii) *un entier  $m \geq 0$  et  $m + 1$  champs de vecteurs mesurables  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ , satisfaisant à l'hypothèse d'existence 2.8,*
- iii) *une fonction  $\lambda : E^0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , mesurable et localement bornée, et un noyau markovien  $K$  sur  $(E, \mathcal{E})$  tel que  $K(x, \{x\} \cup E^B) = 0$  pour tout  $x \in E$  (cf. hypothèses 2.16).*

*Alors il existe un processus diffusif par morceaux  $X$  sur  $E$ , satisfaisant aux hypothèses 2.9 et 2.15 du chapitre II, tel que :*

- iv) *la garde  $E^B$  est l'ensemble des points de branchement de  $X$ ,*
- v)  *$K$  est un noyau de réinitialisation pour  $X$ , et*
- vi) *pour tous  $t \geq 0$  et  $x \in E^0$ , et toute fonction  $\varphi : E^0 \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne bornée,*

$$\mathbb{E}_x \{\varphi(X_t) \mathbf{1}_{t < \tau_1}\} = \mathbb{E}_x \{\varphi(\tilde{X}_t) F_t\}.$$

Le fait que l'hypothèse II.2.15 soit vérifiée est important : cela justifie la distinction qui est faite entre les sauts *forcés* déclenchés par la garde  $E^B$ , qui sont prévisibles, et les sauts *spontanés* qui ont lieu dans  $E^0$ , et qui sont quant à eux totalement inaccessibles (voir chapitre II, § 2.C).

Le processus  $X$  ainsi construit n'est pas, en général, un processus conservatif. En effet, nous n'avons jusqu'à présent imposé aucune condition permettant d'exclure le phénomène de Zénon :

c'est justement le sujet du § 2.D. Par ailleurs, le processus  $X$  n'est pour le moment relié à l'EDS 2.9 que de manière indirecte, à travers la relation 2.22.vi : nous montrerons au § 2.E que l'on peut en fait écrire le processus  $X$  comme solution d'une EDS à sauts, ce qui est à la fois plus satisfaisant pour l'intuition et plus pratique pour les calculs !

## 2.D Conditions suffisantes pour que le processus soit conservatif

Davis (1984, exemple 3.1) observe que l'accumulation des instants de sauts d'un processus déterministe par morceaux dépend d'une interaction souvent complexe entre la géométrie de l'espace d'état, le champ de vecteurs  $\mathbf{f}$ , le noyau  $K$  et l'intensité  $\lambda$  : c'est d'autant plus vrai pour les systèmes hybrides stochastiques que nous étudions dans ce chapitre, dans lesquels la diffusion rend encore plus délicate la question du phénomène de Zénon.

La proposition 2.12 du chapitre II fournit néanmoins une condition suffisante assez générale assurant qu'un processus diffusif par morceaux est conservatif. Une fois trouvé un borélien  $\Gamma \subset E^0$  dans lequel le processus revient toujours après un nombre fini de sauts, il faut pour appliquer cette proposition exhiber des constantes  $\alpha, h > 0$  et un entier  $k^* \geq 1$  tels que  $\mathbb{P}_x\{\tau_{k^*} \geq h\} \geq \alpha$  pour tout  $x \in \Gamma$ . Nous énonçons dans ce qui suit deux conditions suffisantes permettant de vérifier cela. Il existe bien sûr des situations où il n'est pas possible de se ramener à la proposition 2.12 du chapitre II : il n'y a dans ce cas, à notre connaissance, aucune méthode générale pour établir que le processus est conservatif ; c'est le cas par exemple pour le modèle de la « balle élastique stochastique » qui sera analysée au § 4.B.

La première proposition permet de traiter les cas les plus simples, dans lesquels il est possible de minorer  $\mathbb{P}_x\{\tau_1 \geq h\}$  uniformément sur  $\Gamma$ , pour un certain  $h > 0$ . La démonstration repose sur des arguments classiques utilisant la formule d'Itô et l'inégalité maximale de Doob.

(2.23) **Proposition.** *Supposons qu'il existe une constante  $M > 0$  et une fonction  $\psi : \Gamma \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que, pour tous  $q \in \mathcal{Q}$  et  $x \in \Gamma \cap E_q$  :*

i) *La fonction partielle  $\psi_x = \psi(x, \cdot)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $E_q$ , nulle en  $x$ , et il existe un réel  $r_x > 0$  tel que*

ii) *l'ouvert  $B_x \triangleq \{x' \in E_q, \psi(x, x') < r_x\}$  est inclus dans  $E_q^0$  ;*

iii) *les majorations  $L_c \psi_x \leq M r_x$ ,  $\sum_{l=1}^m |\mathbf{g}_l \psi_x| \leq M r_x$  et  $\lambda \leq M$  sont valables sur  $B_x$ .*

*Alors il existe  $\alpha, h > 0$  tels que  $\mathbb{P}_x\{\tau_1 \geq h\} \geq \alpha$  pour tout  $x \in \Gamma$ .*

□ **Démonstration.**

▷ Soit  $q \in \mathcal{Q}$  un mode de dimension  $n_q \geq 1$ ,  $x \in \Gamma \cap E_q$ , et  $T$  le  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -temps d'arrêt défini par

$$T = \inf \left\{ t \geq 0, \psi(x, \tilde{X}_t) = r_x \right\}.$$

Pour tout  $t \leq T$ , on a alors

$$\begin{aligned} \psi(x, \tilde{X}_t) &= \psi(x, x) + \int_0^t (L_c \psi_x)(\tilde{X}_s) ds + \sum_{l=1}^m \int_0^t (\mathbf{g}_l \psi_x)(\tilde{X}_s) dB_s^l \quad \text{par la formule d'Itô,} \\ &\leq t M r_x + \sum_{l=1}^m \int_0^t (\mathbf{g}_l \psi_x)(\tilde{X}_s) dB_s^l \quad \text{d'après les hypothèses de la proposition.} \end{aligned}$$

Posons maintenant  $M_t^l = \int_0^t (\mathbf{g}_l \psi_x)(\tilde{X}_s) dB_s^l$ . En passant à la borne supérieure pour  $t \in [0; T]$ , on obtient l'inégalité  $r_x \leq MT r_x + \sum_{l=1}^m \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^l|$ . Pour tout  $h \leq 1/(2M)$ , on a donc

$$r_x \leq \frac{1}{2} r_x + \sum_{l=1}^m \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^l| \quad \text{sur } \{T < h\},$$

ce qui entraîne que

$$(2.24) \quad \mathbb{P}_x\{T < h\} \leq \mathbb{P}_x\left\{\sum_{l=1}^m \sup_{0 \leq t \leq h} |M_{t \wedge T}^l| \geq \frac{r_x}{2}\right\} \leq \sum_{l=1}^m \mathbb{P}_x\left\{\sup_{0 \leq t \leq h} |M_{t \wedge T}^l| \geq \frac{r_x}{2m}\right\}.$$

▷ Pour tout  $c > 0$ , l'inégalité maximale de Doob fournit la majoration

$$\mathbb{P}_x\left\{\sup_{0 \leq t \leq h} |M_{t \wedge T}^l| \geq c\right\} \leq \frac{1}{c} \mathbb{E}_x\{|M_{h \wedge T}^l|\}.$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}_x\{|M_{h \wedge T}^l|\}^2 \leq \mathbb{E}_x\{|M_{h \wedge T}^l|^2\} = \mathbb{E}_x\left\{\int_0^{h \wedge T} |(\mathbf{g}_l \psi)(\tilde{X}_s)|^2 ds\right\} \leq h \sup_{B_x} |\mathbf{g}_l \psi|^2,$$

donc

$$(2.25) \quad \mathbb{P}_x\left\{\sup_{0 \leq t \leq h} |M_{t \wedge T}^l| \geq c\right\} \leq \frac{M r_x \sqrt{h}}{c}.$$

▷ En appliquant l'inégalité 2.25 à chacun des termes de la somme 2.24 avec  $h = (2m^2 M)^{-2}$ , ce qui ne dépend pas de  $x$ , on a

$$\mathbb{P}_x\{T < h\} \leq 2m^2 M \sqrt{h} = \frac{1}{2}.$$

Remarquons maintenant que  $T \leq \tau^B$  puisque  $B_x \subset E_q^0$  par hypothèse. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x\{\tau_1 \geq h\} &= \mathbb{E}_x\left\{\mathbb{1}_{\tau^B \geq h} \exp\left(-\int_0^h \lambda(\tilde{X}_s) ds\right)\right\} \\ &\geq \mathbb{E}_x\left\{\mathbb{1}_{T \geq h} \exp\left(-\int_0^h \lambda(\tilde{X}_s) ds\right)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}_x\{T \geq h\} e^{-Mh} \geq \frac{1}{2} e^{-Mh} > 0, \end{aligned}$$

ce qui fournit la minoration annoncée avec  $\alpha = \frac{1}{2} e^{-Mh}$ . Cette même minoration reste valable pour les modes de dimension  $n_q = 0$ , puisque dans ce cas  $\tau_1$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda(x)$ , ce qui achève la démonstration. ■

(2.26) **Exemple.** Supposons qu'il n'y a pas de sauts spontanés (i.e.  $\lambda \equiv 0$ ) et que la distance euclidienne  $\text{dist}_{\mathbb{R}^{n_q}}$  entre  $\Gamma \cap E_q$  et  $E_q^B$  est strictement positive, pour chaque mode  $q \in \mathcal{Q}$  tel que  $n_q \geq 1$ . Il est alors naturel de choisir, pour chaque  $x = (q, z) \in \Gamma$ ,

$$\psi(x, (q', z')) = \begin{cases} \|z' - z\|^2 & \text{si } n_q \geq 1 \text{ et } q' = q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $r_x = \begin{cases} \text{dist}_{\mathbb{R}^{n_q}}(\Gamma \cap E_q, E_q^B)^2 & \text{si } n_q \geq 1 \text{ et } q' = q, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Si les champs de vecteurs sont bornées ou si l'ensemble  $\Gamma$  est compact, on peut trouver une constante  $M > 0$  ne dépendant pas de  $x$  telle que les majorations 2.23.iii soient vraies, ce qui prouve que le processus considéré est conservatif.

Malheureusement, il n'est pas toujours possible de minorer  $\mathbb{P}_x\{\tau_1 \geq h\}$  uniformément sur l'ensemble  $\Gamma$ . On peut dans certains cas s'en sortir en travaillant sur deux sauts au lieu d'un, c'est-à-dire en minorant  $\mathbb{P}_x\{\tau_2 \geq h\}$  uniformément sur  $\Gamma$  pour un certain  $h > 0$ . Une façon de faire est donnée par le lemme suivant, qui nous permettra de traiter le modèle Malhamé et Chong (1985) généralisé au § 4.A.

(2.27) **Lemme.** *Supposons que l'on puisse partitionner  $\Gamma$  en deux sous-ensembles, notés  $\Gamma_{fast}$  et  $\Gamma_{slow}$ , de sorte qu'il existe des constantes  $h, \alpha_{fast}, \alpha_{slow} > 0$  telles que :*

i) *pour tout  $x \in \Gamma_{fast}$ ,  $\mathbb{P}_x\{X_{\tau_1} \in \Gamma_{slow}\} \geq \alpha_{fast}$ ,*

ii) *et pour tout  $x \in \Gamma_{slow}$ ,  $\mathbb{P}_x\{\tau_1 \geq h\} \geq \alpha_{slow}$ .*

*Alors on a  $\mathbb{P}_x\{\tau_2 \geq h\} \geq \alpha_{fast} \alpha_{slow}$ , pour tout  $x \in \Gamma$ .*

□ **Démonstration.** C'est évident pour  $x \in \Gamma_{slow}$ , et cela découle de la propriété de Markov forte au temps  $\tau_1$  lorsque  $x \in \Gamma_{fast}$ . ■

## 2.E Formule d'Itô généralisée et réalisation canonique

Considérons un système hybride stochastique  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$ , construit sur un espace d'état hybride  $E$  (satisfaisant aux hypothèses 2.1), à partir d'un processus de base  $\tilde{X}$  solution d'une certaine EDS (hypothèses 2.8), et possédant une dynamique discrète définie par la garde  $E^B$ , l'intensité  $\lambda$  et le noyau de réinitialisation  $K$  (hypothèses 2.16). Tel qu'on l'a construit jusqu'à présent, le modèle est un processus diffusif par morceaux possédant suffisamment de bonnes propriétés pour qu'on puisse en étudier le générateur étendu – ce qui sera fait dans la section suivante – et partant de là s'intéresser à son équation de FPK généralisée. Néanmoins, il semblerait que l'on ait perdu, en passant de  $\tilde{X}$  à  $X$ , la représentation du processus à l'aide d'intégrales stochastiques – i.e. comme solution d'une EDS. Bien sûr il n'en est rien, et nous allons en apporter la preuve : en effet, on peut tout à fait appliquer au mouvement brownien  $\tilde{B}$ , qui vit sur  $\tilde{\Omega}$ , une transformation similaire à celle qui permet de passer de  $\tilde{X}$  à  $X$ , et utiliser le processus  $B$  ainsi obtenu pour munir  $X$  d'une formule d'Itô généralisée – c'est-à-dire, en quelque sorte, représenter  $X$  comme solution d'une EDS incluant un terme de sauts. Plus précisément, nous procéderons en deux temps : nous commencerons par établir que le processus est bien solution faible d'une EDS à sauts, à l'aide des lemmes établis au § 3.D du chapitre II, puis nous montrons qu'il s'agit en fait d'une solution forte (au moins dans le cas de la réalisation « canonique » que nous définirons à cette occasion).

### Représentation d'un SHS comme solution faible d'une EDS

Supposons pour simplifier que  $X$  est conservatif, et considérons le processus  $B$  défini sur  $\Omega$  par la relation  $B_t(\omega) = \tilde{B}_{t-S_k(\omega)}(\tilde{\omega}_k)$  sur  $\{S_k \leq t < S_{k+1}\}$ , où l'on note comme au chapitre II  $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots)$  et  $\tilde{\omega}_k = (\tilde{\omega}_k, u_k)$  pour tout  $k \geq 0$ . Les processus  $\tilde{X}$  et  $\tilde{B}$  sont adaptés à la filtration  $\tilde{\mathcal{G}}$  définie comme dans la remarque 2.13, c'est-à-dire

$$\tilde{\mathcal{G}}_t = \bigcap_{\mu} \overline{\sigma(\tilde{X}_0) \vee \mathcal{F}_t^{\tilde{B}}}^{\tilde{\mathbb{P}}_{\mu}},$$

où  $\mu$  parcourt l'ensemble des mesures de probabilité sur  $(E, \mathcal{E})$ , et la barre indique la complétion par rapport à la mesure  $\tilde{\mathbb{P}}_{\mu}$ . De plus, comme  $\tilde{B}$  et  $\tilde{X}_0$  sont indépendants,  $\tilde{B}$  reste un mouvement brownien relativement à la filtration  $\tilde{\mathcal{G}}$ . En définissant à partir de  $\tilde{\mathcal{G}}$  des filtrations  $\hat{\mathcal{G}}^0$ ,  $\hat{\mathcal{G}}$  et  $\mathcal{G}$  comme au § 3.D du chapitre II, on a alors le résultat suivant :

(2.28) **Proposition.**  $B$  est un  $\mathcal{G}$ -mouvement brownien, et  $X$  un processus  $\mathcal{G}$ -adapté. De plus, on a pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $E$  et tout  $t \geq 0$  la formule d'Itô généralisée

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t (L_c \varphi)(X_s) ds + \sum_{l=1}^m \int_0^t (\mathbf{g}_l \varphi)(X_s) dB_s^l + \sum_{\tau_k \leq t} (\varphi(X_{\tau_k}) - \varphi(X_{\tau_k}^-)),$$

où  $L_c$  est le générateur différentiel associé à l'EDS du processus de base, c'est-à-dire l'opérateur différentiel

$$L_c = \sum_i \mathbf{f}^i \frac{\partial}{\partial z^i} + \sum_{i,j} \sum_{l=1}^m \mathbf{g}_l^i \mathbf{g}_l^j \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial z^j}.$$

(2.29) **Remarques.**

a) En faisant intervenir le processus  $N_t$  de comptage des sauts (voir chapitre II, § 2.B), on a

$$\sum_{\tau_k \leq t} (\varphi(X_{\tau_k}) - \varphi(X_{\tau_k}^-)) = \int_0^t (\varphi(X_s) - \varphi(X_s^-)) dN_s,$$

ce qui permet de réécrire la formule d'Itô généralisée sous une forme différentielle :

$$d\varphi(X_s) = (L_c \varphi)(X_s) ds + \sum_{l=1}^m (\mathbf{g}_l \varphi)(X_s) dB_s^l + (\varphi(X_s) - \varphi(X_s^-)) dN_s.$$

b) En introduisant le processus ponctuel  $\nu = \sum_{k \geq 1} \delta_{(X_{\tau_k}, \tau_k)}$  sur  $E^0 \times \mathbb{R}_+$ , la formule d'Itô généralisée devient :

$$(2.30) \quad d\varphi(X_s) = (L_c \varphi)(X_s) ds + \sum_{l=1}^m (\mathbf{g}_l \varphi)(X_s) dB_s^l + \int_{E^0} (\varphi(y) - \varphi(X_s^-)) \nu(dy, ds).$$

La proposition 2.28 peut ainsi s'interpréter en disant que le processus  $X$  est solution faible d'une EDS à sauts sur l'espace hybride  $E$ , dirigée par  $B$  et  $\nu$  – mais attention,  $B$  et  $\nu$  ne sont pas indépendants comme c'est le cas classiquement pour ce genre d'EDS! Ceci est similaire à la manière dont Ikeda et Watanabe (1981, chapitre V) définissent la solution d'une EDS sur une variété, par l'intermédiaire de fonctions test  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  à support compact : l'écriture directe d'une EDS pour le processus  $X$  n'aurait pas de sens en général, l'espace hybride  $E$  n'étant muni d'aucune structure naturelle d'espace vectoriel. (On peut néanmoins écrire des EDS scalaires pour les coordonnées  $z^i$  lorsque  $E = \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^n$ , ce qui revient tout simplement à considérer les fonctions test  $\varphi(q, z) = z^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .)

□ **Démonstration de la proposition 2.28.**

▷ Notons  $\widehat{B}$  le mouvement brownien  $\widetilde{B}$  transporté sur  $\widehat{\Omega}$  et stoppé au temps  $\widehat{\zeta}$ , i.e. le processus défini par  $\widehat{B}_t(\widetilde{\omega}, u) = \widetilde{B}_{t \wedge u}(\widetilde{\omega})$ , et introduisons les  $\widehat{\mathcal{G}}$ -martingale  $\widetilde{M}^{ij} : t \mapsto \widetilde{B}_t^i \widetilde{B}_t^j - \delta_{ij} t$ , pour  $1 \leq i, j \leq m$ . En appliquant le lemme II.3.32.v à  $\widetilde{B}^i$  et  $\widetilde{M}^{ij}$ , on obtient que le processus  $\widehat{B}$  est une  $\widehat{\mathcal{G}}$ -martingale continue à  $m$  dimensions, issue de 0, de crochets  $\langle \widehat{B}^i, \widehat{B}^j \rangle_t = \delta_{ij}(t \wedge \widehat{\zeta})$ .

Fixons maintenant un entier  $k \geq 0$ , et considérons le processus translaté  $Y^k$ , continu et à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , défini par la relation

$$Y_t^{k,i}(\omega) = \begin{cases} \widehat{B}_{t-S_k(\omega)}^i(\widehat{\omega}_k) & \text{si } S_k \leq t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En appliquant le lemme II.3.33.ii aux  $\widehat{\mathcal{G}}$ -martingales continues  $\widehat{B}^i$  et  $t \mapsto \widehat{B}_t^i \widehat{B}_t^j - \delta_{ij}(t \wedge \widehat{\zeta})$ , que l'on rend bornées en les stoppant par exemple aux temps  $T_n = n \wedge \inf\{t < \widehat{\zeta} \mid \widehat{B}_t = n\}$ , on prouve



que le processus  $Y^k$  est une  $\widehat{\mathcal{G}}$ -martingale locale continue, issue de 0, et de crochets  $\langle Y^{k,i}, Y^{k,j} \rangle_t = \delta_{ij}(t \wedge S_{k+1} - S_k)_+$ .

Observons finalement que  $B = \sum_{k \geq 0} Y^k$ . Comme chacun des  $Y^k$  est constant en dehors de l'intervalle  $[S_k; S_{k+1}]$ , on en déduit que  $B$  est une  $\mathcal{G}$ -martingale locale continue, issue de 0, de crochets  $\langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{ij}(t \wedge S_\infty) = \delta_{ij}t$ . D'après le théorème de caractérisation de Lévy (Revuz et Yor, 1999, théorème IV.3.6), ceci entraîne que  $B$  est un  $\mathcal{G}$ -mouvement brownien.

▷ Le processus  $X$  est  $\mathcal{G}$ -adapté d'après les lemmes II.3.32.iv et II.3.33.i. De plus, des arguments tout à fait similaires à ce qui précède, appliqués aux  $\widetilde{\mathcal{G}}$ -martingales locales  $t \mapsto \int_0^t (\mathbf{g}_l \varphi)(\widetilde{X}_s) dB_s^l$ , permettent de montrer que la formule d'Itô valable pour le processus de base se transporte sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{G})$ , sous la forme

$$\varphi(X_{t \wedge S_{k+1}}) = \varphi(X_{S_k}) + \int_{S_k}^{t \wedge S_{k+1}} (L_c \varphi)(X_s) ds + \sum_{l=1}^m \int_{S_k}^{t \wedge S_{k+1}} (\mathbf{g}_l \varphi)(X_s) dB_s^l,$$

presque sûrement sur  $\{S_k \leq t\}$ , pour tout  $k \geq 0$ . La formule d'Itô généralisée s'obtient alors tout simplement en recollant les morceaux. ■

### Réalisation canonique et représentation comme solution forte d'une EDS à sauts

Le résultat de la proposition 2.28 n'est pas totalement satisfaisant, dans la mesure où on a seulement établi que  $X$  est  $\mathcal{G}$ -adapté. Sous les hypothèses du théorème d'existence 2.12, nous allons maintenant établir un résultat un peu plus fort, en utilisant explicitement la réalisation canonique<sup>3</sup> du processus de base  $\widetilde{X}$  sur l'espace  $\widetilde{\Omega} = E \times W^m$ . En effet, le processus  $\widetilde{X}$  est dans ce cas adapté à la filtration  $\widetilde{\mathcal{H}}$  définie par  $\widetilde{\mathcal{H}}_t = \mathcal{B}(E) \otimes \overline{\mathcal{H}}_t^m$ , où  $\overline{\mathcal{H}}^m$  est la  $W^m$ -complétion de la filtration naturelle  $\mathcal{H}^m$  sur l'espace de Wiener  $W^m$  (voir remarque 2.13). En notant  $\overline{\mathcal{F}}^B$  la filtration obtenue en complétant  $\mathcal{F}^B$  par rapport aux lois  $\mathbb{P}_\mu$ , on a le résultat suivant :

(2.31) **Proposition.** *Le processus  $X$  est adapté à la filtration  $\mathcal{F}^\nu \vee \overline{\mathcal{F}}^B$ , où  $\mathcal{F}^\nu$  est la filtration naturelle du processus ponctuel  $\nu = \sum_{k \geq 1} \delta_{(X_{\tau_k}, \tau_k)}$  sur  $E^0 \times \mathbb{R}_+$ .*

Le processus  $X$  s'interprète ainsi comme la solution forte – et non plus faible – de l'EDS à sauts 2.30. En d'autres termes, pour tout  $t \geq 0$ , l'état  $X_t$  ne dépend (à la complétion près) que de l'histoire jusqu'au temps  $t$  des processus  $B$  et  $\nu$ , qui alimentent respectivement la dynamique continue et la dynamique discrète du modèle.

Notons  $\widetilde{\pi}_k$  la projection  $\widetilde{\pi}_k = \pi \circ \widehat{\pi}_k : \omega \mapsto \widetilde{\omega}_k$ , et  $\widetilde{\omega}_k = (x_k, w_k)$ . Nous aurons besoin pour la démonstration de la proposition 2.31 du lemme suivant :

(2.32) **Lemme.** *Soient  $t \geq 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ .*

- i) *Pour tout  $A \in \widetilde{\mathcal{H}}_0$ ,  $\widetilde{\pi}_k^{-1} A \cap \{S_k = t < S_{k+1}\} \in \mathcal{F}_t^\nu \vee \overline{\mathcal{F}}_t^B$ .*
- ii) *Pour tous  $s_0 < t$  et  $A \in \widetilde{\mathcal{H}}_{t-s_0}$ ,  $\widetilde{\pi}_k^{-1} A \cap \{S_k \leq s_0 < t < S_{k+1}\} \in \mathcal{F}_t^\nu \vee \overline{\mathcal{F}}_t^B$ .*

<sup>3</sup>On qualifie habituellement de « canoniques » les réalisations d'un processus de Markov sur un espace de trajectoires possédant certaines propriétés. Par exemple, pour les processus droits, il s'agit de la réalisation sur l'ensemble des trajectoires continues à droites de  $\mathbb{R}_+$  dans  $E \cup \{\partial\}$ . L'utilisation que nous faisons ici du qualificatif « canonique » est différente, et provient de Rogers et Williams (2000b).

□ **Démonstration du lemme 2.32.**

▷ Soit  $s_0 \leq t$ . La tribu  $\tilde{\mathcal{H}}_{t-s_0}$  est engendrée par les fonctions  $\alpha : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  bornées de la forme :

$$\alpha(x, w) = f(x) \prod_{i=1}^r g_i(w(t_i)) + f(x)h(w),$$

où  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq t_i \leq t - s_0$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et les  $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions boréliennes bornées, et  $h : W^m \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\{h \neq 0\}$  est un ensemble négligeable de  $(W^m, \mathcal{W}^m, \mathbb{W}^m)$ . Pour toute fonction  $\alpha$  de cette forme, on a

$$(\alpha \circ \tilde{\pi}_k)(\omega) = f(x_k) \prod_{i=1}^r g_i(w_k(t_i)) + f(x_k)h(w_k),$$

donc

$$\alpha \circ \tilde{\pi}_k = f(X_{S_k}) \prod_{i=1}^r g_i(B_{t_i+S_k}) \quad \text{ps.}$$

En effet,  $\mathbb{P}_\mu\{\tilde{\pi}_k^{-1}(E \times A)\} = \mathbb{W}^m(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{W}^m$  et toute probabilité  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{E})$ .

▷ Dans le cas où  $s_0 = t$  :  $\alpha \circ \tilde{\pi}_k = f(X_{S_k})g(B_{S_k})$  ps, donc

$$\alpha \circ \tilde{\pi}_k \mathbb{1}_{S_k=t < S_{k+1}} = f(X_{\tau_k})g(B_t) \mathbb{1}_{\tau_k=t < \tau_{k+1}} \quad \text{ps,}$$

puisque l'évènement  $\{\exists k \geq 1, S_k \neq \tau_k\}$  est négligeable. Le membre de droite de l'égalité est clairement  $\mathcal{F}_t^\nu \vee \mathcal{F}_t^B$ -mesurable : en effet, les  $\tau_k$  sont des  $\mathcal{F}^\nu$ -temps d'arrêt et  $X_{\tau_k}$  est  $\mathcal{F}_{\tau_k}^\nu$ -mesurable, donc  $f(X_{\tau_k}) \mathbb{1}_{\tau_k=t < \tau_{k+1}}$  est  $\mathcal{F}_t^\nu$ -mesurable. Ceci entraîne – puisqu'il s'agit d'une égalité presque sûre – que  $\alpha \circ \tilde{\pi}_k \mathbb{1}_{S_k=t < S_{k+1}}$  est  $\mathcal{F}_t^\nu \vee \mathcal{F}_t^B$ -mesurable. Cette conclusion s'étend par le théorème des classes monotones à l'ensemble des fonctions  $\alpha$  qui sont  $\tilde{\mathcal{H}}_0$ -mesurables et bornées, ce qui achève la démonstration de l'assertion 2.32.i.

▷ Supposons maintenant que  $s_0 < t$ . On a alors

$$\alpha \circ \tilde{\pi}_k \mathbb{1}_{S_k \leq s_0 < t < S_{k+1}} = f(X_{\tau_k}) \mathbb{1}_{\tau_k \leq s_0 < t < \tau_{k+1}} \prod_{i=1}^r g_i(B_{t_i+(\tau_k \wedge s_0)}) \quad \text{ps,}$$

et  $f(X_{\tau_k}) \mathbb{1}_{\tau_k \leq s_0 < t < \tau_{k+1}}$  est  $\mathcal{F}_t^\nu$ -mesurable pour les mêmes raisons que précédemment. Introduisons maintenant la filtration  $\mathcal{M}_t = \mathcal{F}_t^\nu \vee \mathcal{F}_t^B$  : le temps  $\tau_k$  est un  $\mathcal{M}$ -temps d'arrêt et  $B$  est  $\mathcal{M}$ -adapté. Ceci entraîne que  $g_i(B_{t_i+(\tau_k \wedge s_0)})$  est mesurable relativement à  $\mathcal{M}_{t_i+(\tau_k \wedge s_0)}$ , et  $\mathcal{M}_{t_i+(\tau_k \wedge s_0)} \subset \mathcal{M}_t = \mathcal{F}_t^\nu \vee \mathcal{F}_t^B$  puisque  $t_i \leq t - s_0$ . On a ainsi établi que la fonction  $\alpha \circ \tilde{\pi}_k \mathbb{1}_{S_k \leq s_0 < t < S_{k+1}}$  est  $\mathcal{F}_t^\nu \vee \mathcal{F}_t^B$ -mesurable, et on conclut à nouveau par le théorème des classes monotones. ■

□ **Démonstration de la proposition 2.31.** Fixons  $t \geq 0$ . La  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}_t^X$  est engendrée par les évènements de la forme  $A = \{X_s \in \Gamma\}$ , où  $s \leq t$  et  $\Gamma$  est un fermé de  $E$ . Il suffit donc de vérifier que, pour évènement de cette forme, on a  $A \in \mathcal{F}_t^\nu \vee \mathcal{F}_t^B$ . Considérons pour cela la décomposition

$$\begin{aligned} \{X_s \in \Gamma\} &= \bigcup_{k \geq 0} \{(\tilde{X} \circ \tilde{\pi}_k)_{s-S_k} \in \Gamma\} \cap \{S_k \leq s < S_{k+1}\}, \\ &= \bigcup_{k \geq 0} \tilde{\pi}_k^{-1}\{\tilde{X}_0 \in \Gamma\} \cap \{S_k = s < S_{k+1}\} \\ &\quad \cup \bigcup_{k \geq 0} \{(\tilde{X} \circ \tilde{\pi}_k)_{s-S_k} \in \Gamma\} \cap \{S_k < s < S_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Pour les termes de la forme  $\tilde{\pi}_k^{-1}\{\tilde{X}_0 \in \Gamma\} \cap \{S_k = s < S_{k+1}\}$ , le lemme 2.32.i permet directement de conclure. Pour les autres, on utilise la continuité à gauche de  $\tilde{X}$  sur  $]0; +\infty[$  et le fait que  $\Gamma$  est fermé pour écrire que

$$\begin{aligned} & \{(\tilde{X} \circ \tilde{\pi}_k)_{s-S_k} \in \Gamma\} \cap \{S_k < s < S_{k+1}\} \\ = & \bigcap_{\epsilon, \delta \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{s_0 \in \mathbb{Q}_+} \{S_k \leq s_0 < s < S_{k+1}\} \cap \{|s_0 - S_k| \leq \epsilon\} \cap \{\text{dist}(\tilde{X}_{t-s_0} \circ \tilde{\pi}_k, \Gamma) \leq \epsilon\} \\ = & \bigcap_{\epsilon, \delta \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{s_0 \in \mathbb{Q}_+} \{s_0 - \epsilon \leq S_k \leq s_0 < s < S_{k+1}\} \cap \tilde{\pi}_k^{-1}\{\text{dist}(\tilde{X}_{t-s_0}, \Gamma) \leq \epsilon\}, \end{aligned}$$

et on conclut par le lemme 2.32.ii. ■

## 3 Générateur infinitésimal et formule de Dynkin

### 3.A Introduction, définitions et notations

Les différentes déclinaisons de la notion de *générateur infinitésimal* (fort, faible, plein, étendu, etc.) constituent un outil extrêmement important pour travailler avec les processus de Markov. Rappelons qu'une fonction  $\varphi$  borélienne bornée sur  $E$  appartient au domaine  $\text{Dom } L^X$  du *générateur infinitésimal fort* (Dynkin, 1965, chapitre I) d'un processus de Markov  $X$  s'il existe une fonction borélienne bornée  $h$  telle que :

$$\left\| \frac{P_t^X \varphi - \varphi}{t} - h \right\|_{\infty} \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0,$$

où  $\|\varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in E} \varphi(x)$ . Une telle fonction  $h$  est nécessairement unique, et on note dans ce cas  $h = L^X \varphi$ . Au delà de son rôle dans la construction et la caractérisation des processus de Markov (de façon purement analytique, par l'intermédiaire du semigroupe d'opérateurs qui lui est associé), le générateur est d'une grande utilité en raison du résultat suivant (Dynkin, 1965, chapitre V, p. 133) : si  $X$  est fortement markovien relativement à la filtration  $\mathcal{G}$ , et si  $T$  est un  $\mathcal{G}$ -temps d'arrêt, alors pour tout  $x \in E$  tel que  $\mathbb{E}_x T < +\infty$ , on a la *formule de Dynkin* :

$$(3.1) \quad \mathbb{E}_x \varphi(X_T) = \varphi(x) + \mathbb{E}_x \left\{ \int_0^T (L^X \varphi)(X_s) ds \right\}.$$

Pour un temps  $T = t$  déterministe, cela équivaut à la propriété

$$(P_t^X \varphi)(x) = \varphi(x) + \int_0^t (P_s^X L^X \varphi)(x) ds,$$

qui est de nature entièrement analytique – au sens où le processus  $X$  intervient seulement par l'intermédiaire de son semigroupe  $P^X$ .

Mais la formule de Dynkin possède aussi une interprétation probabiliste (voir par exemple Revuz et Yor, 1999, chapitre VII, proposition 1.6) : pour tout  $\varphi \in \text{Dom } L^X$ , le processus

$$M^\varphi : t \mapsto \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t (L^X \varphi)(X_s) ds$$

est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale, c'est-à-dire une  $(\mathcal{F}^X, \mathbb{P}_x)$ -martingale pour tout  $x \in E$ . La notion de *générateur étendu* est une généralisation du générateur fort basée sur cette propriété : on va s'intéresser

aux couples  $(\varphi, h)$  de fonctions boréliennes, non nécessairement bornées, tels que le processus

$$(3.2) \quad M^{\varphi, h} : t \mapsto \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t h(X_s) ds$$

est bien défini (il y a un problème d'intégrabilité concernant le dernier terme!) et possède la propriété de  $\mathcal{F}^X$ -martingale ou plus généralement de  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale. Avant de pouvoir préciser cela en des termes plus rigoureux, nous avons besoin de quelques définitions supplémentaires.

### Martingales et martingales locales d'un processus de Markov

Les notions de martingale et de martingale locale sont le plus souvent définies relativement à une filtration  $\mathcal{G}$  et à une loi  $\mathbb{P}$  données. Rappelons les définitions classiques :

(3.3) **Définitions.** Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé filtré et  $M$  un processus à valeurs réelles défini sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

- i) On dit que le processus  $M$  est une  $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$ -martingale s'il est  $\mathcal{G}$ -adapté, intégrable<sup>4</sup>, et vérifie la relation  $\mathbb{E}\{M_t \mid \mathcal{G}_s\} = M_s$  presque sûrement pour tous  $s \geq 0$  et  $t \geq s$ .
- ii) On dit que le processus  $M$  est une  $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$ -martingale locale s'il existe une suite croissante  $(T_n)$  de  $\mathcal{G}$ -temps d'arrêt telle que  $T_n \rightarrow +\infty$  et  $M^n : t \mapsto M_{t \wedge T_n} - M_0$  est une  $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$ -martingale pour tout  $n$ .

Ces définitions demandent à être précisées dans un contexte markovien où l'on dispose non plus d'une seule loi mais d'une famille de lois  $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_x)$ . Considérons un processus diffusif par morceaux  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, \theta, \mathbb{P})$ , vu comme un processus droit à valeurs dans l'ensemble  $E^0$  de points de  $E$  qui ne sont pas des points de branchement. La filtration  $\mathcal{F}$  désigne ici, comme convenu au § 2.A du chapitre II, la complétion de la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$ . Nous noterons  $\mathcal{F}^x$  la  $\mathbb{P}_x$ -complétion de  $\mathcal{F}^X$ . La notion de martingale locale d'un processus droit, généralisation de la notion usuelle de martingale locale sur un espace probabilisé filtré, est définie par Sharpe (1988, chapitre VI) de la manière suivante :

(3.4) **Définition.** Un processus réel  $M$  est une martingale locale de  $X$  s'il est continu à droite,  $\mathcal{F}$ -adapté, et s'il existe pour tout  $x \in E^0$  une suite croissante  $(T_n^x)$  de  $\mathcal{F}^x$ -temps d'arrêt telle que  $T_n^x \rightarrow +\infty$   $\mathbb{P}_x$ -ps et  $M^n : t \mapsto M_{t \wedge T_n^x} - M_0$  est une  $(\mathcal{F}^x, \mathbb{P}_x)$ -martingale.

Remarquons deux points importants de cette définition : 1) la continuité à droite fait maintenant partie de la définition, et 2) la suite  $T_n$  est autorisée à dépendre de  $x$ . Le premier point n'est absolument pas gênant, et c'est même l'hypothèse adoptée dans la plupart des ouvrages une fois démontrés les classiques théorèmes de régularisation. Le deuxième point poserait quant à lui un sérieux problème, pour la démonstration de notre théorème 3.23, s'il n'y avait le résultat suivant :

(3.5) **Proposition.** Soit  $M$  un processus réel continu à droite,  $\mathcal{F}^X$ -adapté et tel que  $M_0 = 0$  ps. Alors  $M$  est une martingale locale du processus  $X$  si et seulement si il existe une suite croissante  $(T_n)$  de  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt, telle que  $T_n \rightarrow +\infty$  ps et  $M^n : t \mapsto M_{t \wedge T_n}$  est une  $(\mathcal{F}^X, \mathbb{P}_\mu)$ -martingale pour toute mesure de probabilité initiale  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{E})$ .

□ **Démonstration.**

▷ Supposons qu'il existe une suite croissante  $(T_n)$  de  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt, telle que  $T_n \rightarrow +\infty$  ps et  $M^n : t \mapsto M_{t \wedge T_n}$  est une  $(\mathcal{F}^X, \mathbb{P}_\mu)$ -martingale pour toute mesure de probabilité initiale  $\mu$  sur

---

<sup>4</sup>au sens où  $\mathbb{E}\{|M_t|\} < +\infty$  pour tout  $t \geq 0$

$(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ , donc en particulier sous  $\mathbb{P}_x$  pour tout  $x \in \mathbb{E}^0$ . Alors les processus  $M^n$  sont aussi des  $(\mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ -martingales pour tout  $x \in \mathbb{E}^0$  : en effet, une  $\mathcal{F}^X$ -martingale continue à droite reste une martingale lorsqu'on remplace  $\mathcal{F}^X$  par son augmentation usuelle (Rogers et Williams, 2000a, lemme 67.10). Comme  $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$  pour tout  $t \geq 0$ , les  $T_n$  sont aussi des  $\mathcal{F}$ -temps d'arrêt, ce qui achève de prouver que  $M$  est une martingale locale de  $X$  au sens de la définition 3.4.

▷ La réciproque est un peu plus délicate. Elle est établie par Sharpe (1988, corollaire 50.17) avec  $\mathcal{F}$  au lieu de  $\mathcal{F}^X$ , et il est facile de vérifier dans la démonstration que les  $T_n$  peuvent être choisis comme des  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt lorsque  $M$  est  $\mathcal{F}^X$ -adapté. ■

Nous considérerons exclusivement, dans la suite, des martingales locales continues à droites, issues de zéro et  $\mathcal{F}^X$ -adapté : on pourra donc toujours grâce à la proposition 3.5 choisir une suite  $(T_n)$  indépendante de  $x$ . Tout ceci justifie les définitions que nous utiliserons dans la suite, où l'on s'intéresse exclusivement à des martingales issues de 0 et relativement à la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$  :

(3.6) **Définitions.** Soit  $M$  un processus réel tel que  $M_0 = 0$  ps.

- i) On dira que  $M$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale (issue de zéro) s'il est continu à droite,  $\mathcal{F}^X$ -adapté, et possède la propriété de  $(\mathcal{F}^X, \mathbb{P}_x)$ -martingale pour tout  $x \in \mathbb{E}^0$ .
- ii) On dira que  $M$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale (issue de zéro) s'il est continu à droite,  $\mathcal{F}^X$ -adapté, et s'il existe une suite croissante  $(T_n)$  de  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt, telle que  $T_n \rightarrow +\infty$  ps et  $M^n : t \mapsto M_{t \wedge T_n}$  est une  $(\mathcal{F}^X, \mathbb{P}_x)$ -martingale pour tout  $x \in \mathbb{E}^0$ .

(3.7) **Remarques.**

- a) D'après tout ce qui précède, dire qu'un processus  $M$ , réel et issu de zéro, est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale au sens de 3.6.ii équivaut à dire que  $M$  est un processus  $\mathcal{F}^X$ -adapté et une martingale locale du processus droit  $X$  au sens de la définition 3.4 (celle de Sharpe). Lorsque c'est le cas, on peut d'après la proposition 3.5 choisir les  $T_n$  de façon à ce que la propriété de  $\mathcal{F}^X$ -martingale soit vraie sous  $\mathbb{P}_\mu$  pour n'importe quelle loi initiale  $\mu$ . Par contre, dans le cas de la définition 3.6.i, remplacer le point de départ  $x \in \mathbb{E}^0$  par  $x \in \mathbb{E}$  (ou par une loi  $\mu$  quelconque) conduirait à une définition plus restrictive.
- b) Davis (1984, 1993) n'impose pas par définition que ses martingales locales soient continues à droite, mais son théorème de caractérisation des martingales locales issues de zéro (Davis, 1993, théorème 26.12) prouve qu'elles le sont effectivement, au moins presque sûrement.

### Premier et deuxième générateurs étendus

Considérons maintenant un processus diffusif par morceaux  $X$ . Pour une paire  $(\varphi, h)$  quelconque de fonctions boréliennes, on peut définir le processus  $M^{\varphi, h}$  de l'équation 3.2 dès que l'on a  $\int_0^t |h(X_s)| ds < +\infty$  presque sûrement, pour tout  $t \geq 0$ . Le processus obtenu est issu de 0, mais il n'est défini que modulo un processus évanescent, ce qui ne permet pas d'affirmer qu'il est  $\mathcal{F}^X$ -adapté. On peut en fait le choisir  $\mathcal{F}^X$ -adapté, en posant :

$$M_t^{\varphi, h} = \begin{cases} \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t h(X_s) ds & \text{si } \int_0^t |h(X_s)| ds < +\infty, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

puisque l'évènement  $\{\int_0^t |h(X_s)| ds < +\infty\}$  est  $\mathcal{F}_t^X$ -mesurable.

Venons-en aux définitions. Il existe essentiellement deux variantes de la notion de générateur étendu dans la littérature, que nous qualifierons pour les distinguer de premier et deuxième générateurs étendus, le deuxième générateur étendu étant une extension du premier<sup>5</sup>.

(3.8) **Définitions.** Soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne, non nécessairement bornée.

i) On dira que  $\varphi$  appartient au domaine  $\text{Dom } \mathcal{L}_X$  du premier générateur étendu  $\mathcal{L}_X$  s'il existe une fonction  $h : E^0 \rightarrow \mathbb{R}$ , borélienne, telle que

$$\mathbb{E}_x \left\{ \int_0^t |h(X_s)| ds \right\} < +\infty \quad \text{pour tous } t \geq 0 \text{ et } x \in E^0,$$

et telle que le processus  $M^{\varphi, h}$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale continue à droite. On note dans ce cas  $h \in \mathcal{L}_X \varphi$ .

ii) On dira que  $\varphi$  appartient au domaine  $\text{Dom } \mathcal{L}'_X$  du deuxième générateur étendu  $\mathcal{L}'_X$  s'il existe une fonction  $h : E^0 \rightarrow \mathbb{R}$ , borélienne, telle que

$$\int_0^t |h(X_s)| ds < +\infty \quad \text{ps pour tout } t \geq 0$$

et telle que le processus  $M^{\varphi, h}$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale (continue à droite). On note alors  $h \in \mathcal{L}'_X \varphi$ .

Dans le cas du premier générateur étendu, une simple application du théorème d'arrêt optionnel des martingales permet de voir que la formule de Dynkin 3.1 reste valide pour tout temps d'arrêt  $T$  borné et tout  $x \in E^0$ .

Le premier générateur étendu est utilisé en particulier dans les articles traitant des questions de stabilité à l'aide de critères de type Foster-Lyapunov (Costa et Dufour, 2005 ; Meyn et Tweedie, 1993b). Le deuxième générateur a été popularisé par les travaux de Davis sur les processus déterministes par morceaux (Davis, 1984, 1993) : en effet, il est en général beaucoup plus facile de trouver des conditions suffisantes d'appartenance au deuxième générateur étendu plutôt qu'au premier ou encore au générateur fort par exemple. (Il s'agit même de conditions nécessaires et suffisantes dans le cas des processus déterministes par morceaux ; nous y reviendrons au § 3.D.)

(3.9) **Remarques.**

- a) Insistons sur le fait que, contrairement au cas du générateur fort, on n'exige pas que les fonctions  $\varphi$  et  $h$  soient bornées. Cela permet d'élargir la classe des fonctions considérées, mais impose en contrepartie d'être plus attentif aux conditions d'intégrabilité.
- b) Les notations  $h \in \mathcal{L}_X \varphi$  et  $h \in \mathcal{L}'_X \varphi$  sont utilisées pour rappeler que les opérateurs considérés sont multivalués. En effet, pour une fonction  $\varphi \in \text{Dom } \mathcal{L}_X$  donnée, il existe plusieurs fonctions  $h$  – en général une infinité – qui satisfont à la définition 3.8.i. On peut toutefois être plus précis : si  $h$  et  $h'$  sont deux fonctions appartenant à  $\mathcal{L}_X \varphi$ , l'ensemble  $\Gamma = \{h \neq h'\}$  est de potentiel nul pour  $X$ , c'est-à-dire que  $\int_0^\infty P_s^X(x, \Gamma) ds = 0$  pour tout  $x \in E$ . Autrement dit, le temps passé par  $X$  dans l'ensemble  $\Gamma$  est nul presque sûrement (cf. Davis, 1993, p. 32). On utilisera la notation classique  $(\varphi, h) \in \mathcal{L}_X$  pour indiquer que  $\varphi \in \text{Dom } \mathcal{L}_X$  et  $h \in \mathcal{L}_X \varphi$ .
- c) La définition ne fait à aucun moment intervenir la valeur de  $\varphi$  sur  $E^B$ . Néanmoins, nous avons préféré la formuler ainsi de manière à faciliter les énoncés dans la suite : en effet la valeur de  $\varphi$  sur  $E$  tout entier intervient lorsque l'on s'intéresse aux générateurs étendus du

---

<sup>5</sup>qui est lui même une extension des générateurs fort et faible (Dynkin, 1965, chapitre I) et du générateur plein (Ethier et Kurtz, 1986, section 1.5).

processus de base  $\tilde{X}$ . Nous aurions tout aussi bien pu partir d'une fonction  $\varphi$  définie sur  $E^0$ , et énoncer les résultats sous la forme « il existe un prolongement  $\tilde{\varphi}$  de  $\varphi$  à  $E$  tout entier, tel que... ».

### Formule de Dynkin généralisée

Nous retrouverons, dans notre résultat sur le deuxième générateur étendu au § 3.D, une « condition aux bords » du même type que celle de Davis (1984, 1993) – ce qui n'est guère surprenant puisque ses processus déterministes par morceaux sont un cas particuliers des systèmes hybrides stochastiques étudiés dans ce chapitre. Plus précisément, il s'agira d'une condition sur les fonctions appartenant à  $\text{Dom } \mathcal{L}'_X$ , de la forme

$$(3.10) \quad \varphi(x) = \int_{E^0} K(x, dy) \varphi(y),$$

pour tout  $x$  appartenant à  $E^B$  ou au moins à un sous-ensemble de  $E^B$  « suffisamment grand ». L'apparition de contraintes de ce type, fort désagréables à manier en pratique, est directement liée à la présence de sauts prévisibles : on comprendra pourquoi en s'intéressant au *compensateur* de la mesure aléatoire  $\nu$  associée aux sauts du processus (voir § 3.B).

Nous considérerons donc également une variante de la notion de générateur étendu, dans laquelle le processus  $M^{\varphi, h}$  est remplacé par

$$(3.11) \quad \bullet M_t^{\varphi, h} = \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t h(X_s) ds - \sum_{0 < \tau_k \leq t} (\varphi(X_{\tau_k}) - \varphi(X_{\tau_k}^-)),$$

avec comme précédemment la convention :  $\bullet M_t^{\varphi, h} = 0$  si  $\int_0^t |h(X_s)| ds = +\infty$ . Comme pour le générateur étendu, nous nous intéresserons aux paires  $(\varphi, h)$  qui font de  $\bullet M^{\varphi, h}$  une martingale ou une martingale locale. Cependant, le fait d'avoir soustrait les sauts forcés permettra de s'affranchir des contraintes de la forme 3.10 sur les fonctions  $\varphi$  considérées, ce qui nous sera très utile au chapitre IV. En particulier, si  $\bullet M^{\varphi, h}$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale, avec  $\varphi$  et  $h$  bornées, alors on a pour tous  $t \geq 0$  et  $x \in E^0$  la *formule de Dynkin généralisée* :

$$\mathbb{E}_x \left\{ \varphi(X_t) - \varphi(X_0) \right\} = \int_0^t \mathbb{E}_x \left\{ h(X_s) \right\} ds + \mathbb{E}_x \left\{ \sum_{0 < \tau_k \leq t} (\varphi(X_{\tau_k}) - \varphi(X_{\tau_k}^-)) \right\}.$$

### Plan

Le reste de la section est organisé comme suit : nous commencerons au § 3.B par étudier rapidement le processus ponctuel  $\nu$  associé aux sauts du processus. Nous expliciterons son compensateur prévisible de façon à obtenir en particulier un système de Lévy pour le processus  $X$ , qui est en quelque sorte la partie « non locale » du générateur étendu. Nous donnerons ensuite au § 3.C notre principal résultat concernant le processus  $\bullet M^{\varphi, h}$  et la formule de Dynkin généralisée. Puis nous en déduirons, au § 3.D, un résultat concernant le deuxième générateur étendu de  $X$ , que l'on comparera avec celui de Davis (1984).

*On considère dans tout ce qui suit un processus diffusif par morceau  $X$  défini par un système hybride stochastique, comme dans le théorème 2.22 de la section précédente. On supposera que le processus  $X$  considéré est conservatif, mais pas nécessairement qu'il vérifie l'hypothèse  $\mathbb{E}_x N_t < \infty$  pour tous  $x \in E$  et  $t \geq 0$  (cf. chapitre II, § 2.B). Par ailleurs, la notion de prévisibilité sera toujours relative à la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$ , même lorsque cela ne sera pas explicitement précisé (cf. chapitre II, § 2.C).*

### 3.B Compensation des sauts et système de Lévy

Définissons une mesure aléatoire ponctuelle  $\nu$  sur  $\mathbb{E} \times ]0; +\infty[$  par la relation  $\nu = \sum_{k \geq 1} \delta_{(X_{\tau_k}, \tau_k)}$ , le temps  $\tau_0$  étant exclu car il ne correspond pas à un saut, et notons  $N_t$  le processus de comptage associé :

$$N_t(A) \triangleq \iint_{A \times ]0; t]} \nu(dy, ds) = \nu(A \times ]0; t]) .$$

Ceci est compatible avec les notations  $N_t$  et  $N$  déjà introduites, désignant respectivement le nombre de sauts dans l'intervalle  $]0; t]$  et le nombre total de sauts :

$$N_t = N_t(\mathbb{E}) = \nu(\mathbb{E} \times ]0; t]) , \quad \text{et} \quad N = \lim_{t \rightarrow +\infty} N_t = \nu(\mathbb{E} \times ]0; +\infty[) .$$

Introduisons par ailleurs les processus  $H^0$ ,  $H^B$  et  $H$  définis respectivement par

$$H_t^0 = \int_0^t \lambda(X_s) ds = \int_0^t \lambda(X_s^-) ds, \quad H_t^B = \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{1}_{X_s^- \in \mathbb{E}^B}, \quad \text{et} \quad H_t = H_t^0 + H_t^B .$$

(3.12) **Propriété.** *Les processus  $H^0$ ,  $H^B$  et  $H$  sont des fonctionnelles additives du processus  $X$ , prévisibles relativement à la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$ , positives, croissantes et finies.*

□ **Démonstration.** Il est clair que tous ces processus sont des fonctionnelles additives  $\mathcal{F}^X$ -adaptées, positives et croissantes. De plus,  $H^0$  est finie par le lemme 2.20 et la propriété de Markov forte, et prévisible car continue. Par ailleurs,  $H^B$  est prévisible car les sauts forcés de  $X$  le sont, et finie car  $N_t < +\infty$  pour tout  $t \geq 0$  (le processus étant supposé conservatif). ■

(3.13) **Proposition.** *Le compensateur prévisible de  $\nu$ , relativement à la filtration naturelle  $\mathcal{F}^X$ , est la mesure aléatoire  $\bar{\nu}$  définie par :*

$$\bar{\nu}(dy, dt) = K(X_t^-, dy) dH_t .$$

En d'autres termes :

- i)  $\bar{\nu}$  est une mesure aléatoire prévisible sur  $\mathbb{E} \times ]0; +\infty[$ ;
- ii) pour tout processus  $\Phi \geq 0$ , indicé par  $\mathbb{E} \times \mathbb{R}_+$  et prévisible, et pour tout  $x \in \mathbb{E}$ ,

$$\mathbb{E}_x \left\{ \int \Phi d\nu \right\} = \mathbb{E}_x \left\{ \int \Phi d\bar{\nu} \right\} ,$$

les intégrales étant éventuellement égales à  $+\infty$ .

En particulier, ceci entraîne – en anticipant un peu sur la propriété 3.16 – que, pour tout  $A \in \mathcal{E}$ , le processus  $t \mapsto N_t(A) - \bar{N}_t(A)$  est une martingale locale, où

$$(3.14) \quad \bar{N}_t(A) = \bar{\nu}(A \times [0; t]) = \int_0^t K(X_s^-, A) \lambda(X_s) ds + \sum_{0 < s \leq t} K(X_s^-, A) \mathbb{1}_{X_s^- \in \mathbb{E}^B} .$$

En d'autres termes,  $\bar{N}_t(A)$  est le compensateur prévisible de  $N_t(A)$ . Remarquons que l'équation 3.14 reste valable si on remplace  $X_s^-$  par  $X_s$  sous l'intégrale, puisque la trajectoire  $s \mapsto X_s$  a un nombre fini de discontinuités sur  $[0; t]$ .



□ **Démonstration de la proposition 3.13.** Par convergence monotone, il suffit pour établir 3.13.ii de vérifier l'identité

$$\mathbb{E}_x \left\{ \int \Phi \mathbb{1}_{E \times ]\tau_{k-1}; \tau_k]} d\nu \right\} = \mathbb{E}_x \left\{ \int \Phi \mathbb{1}_{E \times ]\tau_{k-1}; \tau_k]} d\bar{\nu} \right\},$$

pour  $k \geq 1$  et  $\Phi$  prévisible bornée. Grâce au théorème des classes monotones et au lemme 25.1.i de Kallenberg (1997), on peut même supposer que  $\Phi$  est de la forme  $\mathbb{1}_{\Gamma \times ]u; v] \times A}$ , avec  $\Gamma \in \mathcal{E}$ ,  $0 \leq u < v$  et  $A \in \mathcal{F}_u^X$ . Pour  $k = 1$ , l'identité découle alors de calculs similaires à ceux de Davis (1993, démonstration du théorème A4.4), et le cas général s'obtient en utilisant la propriété de Markov forte. ■

Introduisons maintenant, en suivant Davis (1984, section 4), des espaces de processus prévisibles que l'on notera  $L_1(\nu)$  et  $L_1^{\text{loc}}(\nu)$  :

(3.15) **Définitions.**

i)  $L_1(\nu)$  désigne l'ensemble des processus prévisibles  $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\mathbb{E}_x \left\{ \int |\Phi| \mathbb{1}_{E \times ]0; t]} d\nu \right\} < +\infty$$

pour tous  $t \geq 0$  et  $x \in E^0$ .

ii)  $L_1^{\text{loc}}(\nu)$  désigne l'ensemble des processus prévisibles  $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pour lesquels il existe une suite de temps d'arrêt  $T_n \uparrow +\infty$  telle que le processus  $\Phi \mathbb{1}_{[0; T_n]}$  est dans  $L_1(\nu)$ , pour tout  $n$ .

On définit de même les espaces  $L_1(\bar{\nu})$  et  $L_1^{\text{loc}}(\bar{\nu})$  relativement à la mesure  $\bar{\nu}$ , et on a alors les résultats suivants :

(3.16) **Proposition.** Soit  $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un processus prévisible.

i)  $\Phi \in L_1(\nu)$  si et seulement si  $\Phi \in L_1(\bar{\nu})$ . Dans ce cas, le processus

$$M^\Phi : t \mapsto \int \Phi \mathbb{1}_{E \times ]0; t]} d(\nu - \bar{\nu})$$

est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale, et en particulier on a, pour tous  $t \geq 0$  et  $x \in E$ ,

$$\mathbb{E}_x \left\{ \int \Phi \mathbb{1}_{E \times ]0; t]} d\nu \right\} = \mathbb{E}_x \left\{ \int \Phi \mathbb{1}_{E \times ]0; t]} d\bar{\nu} \right\}$$

(les intégrales étant cette fois-ci finies).

ii)  $\Phi \in L_1^{\text{loc}}(\nu)$  si et seulement si  $\Phi \in L_1^{\text{loc}}(\bar{\nu})$ . Lorsque c'est le cas, le processus  $M^\Phi$  défini ci-dessus est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale.

□ **Démonstration.**

▷ Par linéarité, on peut supposer sans perte de généralité que  $\Phi \geq 0$ . Alors  $\Phi \in L_1(\nu)$  si et seulement si  $\Phi \in L_1(\bar{\nu})$  d'après 3.13.ii. Lorsque c'est le cas,  $M_t^\Phi$  est intégrable pour tout  $t \geq 0$  par définition de  $L_1(\nu)$  et  $L_1(\bar{\nu})$ . Pour tous  $s \geq 0$ ,  $t \geq s$  et  $A \in \mathcal{F}_s^X$ , on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A (M_t^\Phi - M_s^\Phi) &= \mathbb{1}_A \int \Phi \mathbb{1}_{E \times ]s; t]} d(\nu - \bar{\nu}) \\ &= \int \Phi' \mathbb{1}_{]0; t]} d(\nu - \bar{\nu}), \end{aligned}$$

où  $\Phi'(x, u, \omega) = \Phi(x, u, \omega) \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{]s; +\infty]}(u)$ . Ceci entraîne que  $\mathbb{E}_x \{ \mathbb{1}_A (M_t^\Phi - M_s^\Phi) \} = 0$  pour tout  $x \in E^0$  d'après 3.13.ii, puisque  $\Phi'$  est un processus positif et prévisible. Donc  $M^\Phi$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale.

▷ L'assertion 3.16.ii découle directement de 3.16.i après localisation. ■

Le résultat suivant est une simple application de la proposition 3.16 à un cas particulier, qui nous sera fort utile dans la suite. La notion de *système de Lévy y* est définie à la manière de Walsh et Weil (1972, section 6) : il s'agit d'une extension de la définition usuelle pour les processus de Hunt, qui permet à la fonctionnelle additive d'être discontinue pour prendre en compte les points de branchement<sup>6</sup>.

(3.17) **Corollaire-définition.** *La paire  $(K, H)$  est un système de Lévy du processus  $X$ , où  $H$  est la fonctionnelle additive de la propriété 3.12. Cela signifie que :*

- i)  $H$  est une fonctionnelle additive de  $X$ , prévisible et finie.
- ii)  $K$  est un noyau sur  $E$ , tel que  $K(x, \{x\}) = 0$  pour tout  $x \in E$ .
- iii) Pour toute loi  $\mu$  sur  $E$  et toute fonction  $\varphi$  borélienne positive sur  $E \times E$ , on a

$$(3.18) \quad \mathbb{E}_\mu \left\{ \sum_{0 < s \leq t} \varphi(X_s^-, X_s) \mathbb{1}_{X_s^- \neq X_s} \right\} = \mathbb{E}_\mu \left\{ \int_0^t (K\varphi)(X_s^-) dH_s \right\},$$

où

$$(K\varphi)(x) = \int_E \varphi(x, y) K(x, dy).$$

□ **Démonstration.** On a déjà vu que  $H$  satisfait à l'hypothèse 3.17.i (propriété 3.12), et le noyau de réinitialisation satisfait par hypothèse au 3.17.ii (définition 2.19). Considérons alors le processus  $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  défini par

$$\Phi(y, s, \cdot) = \varphi(X_s^-, y) \mathbb{1}_{X_s^- \neq y},$$

qui est  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}$ -mesurable : en effet,  $(t, \omega) \mapsto X_t^-(\omega)$  est  $\mathcal{P}/\mathcal{E}$ -mesurable car  $X^-$  est continu à gauche, donc  $(y, t, \omega) \mapsto (X_t^-(\omega), y)$  est  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}/\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ -mesurable, et  $\varphi$  est  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurable. La proposition 3.13.ii fournit alors le résultat annoncé, en remarquant que :

$$\int \Phi \mathbb{1}_{E \times ]0; t]} d\nu = \sum_{0 < s \leq t} \varphi(X_s^-, X_s) \mathbb{1}_{X_s^- \neq X_s},$$

et

$$\begin{aligned} \int \Phi \mathbb{1}_{E \times ]0; t]} d\nu &= \iint_{[0; t] \times E} \varphi(X_s^-, X_s) K(X_s^-, dy) dH_s \\ &= \int_0^t (K\varphi)(X_s^-) dH_s. \end{aligned}$$

■

La signification pratique de ces résultats ne s'apprécie pleinement qu'en développant plus explicitement les intégrales présentes. Pour cela, exprimons le processus  $\Phi$  de la proposition 3.16 sous la forme  $\Phi = \Phi^0 + \Phi^B$ , où  $\Phi^0 = \Phi \mathbb{1}_{X_t^- \in E^0}$  et  $\Phi^B = \Phi \mathbb{1}_{X_t^- \in E^B}$ . Les expressions suivantes s'obtiennent

---

<sup>6</sup>Bujorianu (2004, section 3.3) fait une erreur à ce sujet. La notion de système de Lévy y est définie comme pour les processus de Hunt, avec une FA continue, alors que la classe de processus considérée n'autorise que des sauts forcés pour lesquels la FA est purement discontinue.

en revenant simplement à la définition des mesures  $\nu$  et  $\bar{\nu}$  :

$$\int \Phi \mathbb{1}_{[0;t]} d\nu = \sum_{0 < \tau_k \leq t} \Phi(X_{\tau_k}, \tau_k),$$

$$\int \Phi \mathbb{1}_{[0;t]} d\bar{\nu} = \iint_{[0;t] \times E} \Phi(y, s) \lambda(X_s) K(X_s, dy) ds + \sum_{0 < \tau_k \leq t} \mathbb{1}_{X_{\tau_k}^- \in E^B} \int_E \Phi(y, \tau_k) K(X_{\tau_k}^-, dy).$$

Ainsi, on a :

$$M_t^{\Phi^0} = \sum_{0 < \tau_k \leq t} \mathbb{1}_{X_{\tau_k}^- \in E^0} \Phi(X_{\tau_k}, \tau_k) - \iint_{[0;t] \times E} \Phi(y, s) \lambda(X_s) K(X_s, dy) ds,$$

$$M_t^{\Phi^B} = \sum_{0 < \tau_k \leq t} \mathbb{1}_{X_{\tau_k}^- \in E^B} \Phi(X_{\tau_k}, \tau_k) - \sum_{0 < \tau_k \leq t} \mathbb{1}_{X_{\tau_k}^- \in E^B} \int_E \Phi(y, \tau_k) K(X_{\tau_k}^-, dy).$$

Concrètement, lorsque  $\Phi \in L_1(\nu) = L_1(\bar{\nu})$ , la propriété 3.16.i fournit donc un outil pour calculer l'espérance d'un processus de la forme  $t \mapsto \sum_{0 < \tau_k \leq t} \Phi(X_{\tau_k}, \tau_k)$ . La séparation de  $M^\Phi$  en deux termes, portés respectivement par les sauts spontanés par les sauts forcés, fait apparaître très clairement la différence entre ces deux types de sauts. Dans le cas des sauts spontanés, les discontinuités sont compensées par l'existence d'une intensité stochastique  $\lambda(X_s)$  relativement à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$\mathbb{E}_x \left\{ \sum_{0 < \tau_k \leq t} \mathbb{1}_{X_{\tau_k}^- \in E^0} \Phi(X_{\tau_k}, \tau_k) \right\} = \mathbb{E}_x \left\{ \iint_{[0;t] \times E} \Phi(y, s) \lambda(X_s) K(X_s, dy) ds \right\}.$$

La sommation sur les sauts du processus a complètement disparu du membre de droite, qui est de plus bien souvent – moyennant quelques hypothèses supplémentaires – une fonction dérivable du temps. Le cas de sauts forcés semble beaucoup moins agréable à première vue :

$$\mathbb{E}_x \left\{ \sum_{0 < \tau_k \leq t} \mathbb{1}_{X_{\tau_k}^- \in E^B} \Phi(X_{\tau_k}, \tau_k) \right\} = \mathbb{E}_x \left\{ \sum_{0 < \tau_k \leq t} \mathbb{1}_{X_{\tau_k}^- \in E^B} \int_E \Phi(y, \tau_k) K(X_{\tau_k}^-, dy) \right\}.$$

Comme on peut le constater, le terme restant à calculer est toujours l'espérance d'une somme portant sur les sauts forcés du processus : ceci vient du fait que les sauts forcés sont des sauts prévisibles, et donc possèdent un compensateur prévisible discontinu (il s'agit simplement du processus de comptage des sauts forcés). La situation n'est pourtant pas aussi désespérée qu'il y paraît. En effet, bien que le processus apparaissant dans le membre de droite soit encore un processus discontinu, il est possible dans certains cas de dériver la fonction obtenue en prenant l'espérance ! En d'autres termes, bien qu'il n'existe pas d'intensité *stochastique* pour les sauts forcés, il peut exister une intensité *moyenne* de sauts, qui s'obtient comme on le verra au chapitre IV à l'aide de la notion de courant de probabilité.

### 3.C Le processus $\bullet M^{\varphi, h}$ et la formule de Dynkin généralisée

Nous allons maintenant montrer que le processus  $\bullet M^{\varphi, h}$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale dès que  $(\varphi, h)$  est dans le deuxième générateur étendu du processus de base. Il s'agit du résultat principal de cette section, dont découleront les résultats suivants sur les générateurs étendus, et qui servira de point de départ au travail du chapitre IV.

(3.19) **Théorème.** Soient  $\varphi$  et  $h$  deux fonctions boréliennes  $E \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que  $(\varphi, h) \in \mathcal{L}'_{\tilde{X}}$ . Alors

i)  $\int_0^t |h(X_s)| ds < +\infty$  ps, pour tout  $t \geq 0$ , et

ii) le processus  $\bullet M^{\varphi, h}$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale.

Supposons de plus que  $\varphi$  et  $h$  sont bornées. Alors

iii) pour toute mesure de probabilité  $\mu_0$  sur  $E$  telle que  $\mathbb{E}_{\mu_0}\{N_t\} < +\infty$  pour tout  $t \geq 0$ , on a la formule de Dynkin généralisée

$$\mathbb{E}_{\mu_0}\{\varphi(X_t) - \varphi(X_0)\} = \int_0^t \mathbb{E}_{\mu_0}\{h(X_s)\} ds + \mathbb{E}_{\mu_0}\left\{\sum_{0 < \tau_k \leq t} (\varphi(X_{\tau_k}) - \varphi(X_{\tau_k}^-))\right\}.$$

□ **Démonstration.**

▷ Soit  $(\varphi, h)$  une paire de fonctions mesurables sur  $E$ , telle que  $(\varphi, h) \in \mathcal{L}'_{\tilde{X}}$ . La propriété d'intégrabilité 3.19.i est facile à vérifier : en effet, dans l'expression

$$\int_0^t |h(X_s(\omega))| ds = \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\tau_k \leq t} \int_{\tau_k(\omega)}^{t \wedge \tau_{k+1}(\omega)} |h(\tilde{X}_s(\tilde{\omega}_k))| ds,$$

la somme ne contient presque sûrement qu'un nombre fini de termes (car le processus est continu par morceaux), et par la propriété de Markov forte ces termes sont finis presque sûrement puisque  $h \in \mathcal{L}'_{\tilde{X}} \varphi$ . Par ailleurs, si  $\bullet M^{\varphi, h}$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale et si les fonctions  $\varphi$  et  $h$  sont bornées, alors il existe une suite croissante de  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt  $T_n \uparrow +\infty$  telle que

$$\mathbb{E}_{\mu_0}\{\varphi(X_{t \wedge T_n}) - \varphi(X_0)\} = \mathbb{E}_{\mu_0}\left\{\int_0^{t \wedge T_n} h(X_s) ds\right\} + \mathbb{E}_{\mu_0}\left\{\sum_{0 < \tau_k \leq t \wedge T_n} (\varphi(X_{\tau_k}) - \varphi(X_{\tau_k}^-))\right\}.$$

pour toute loi initiale  $\mu_0$  et tout  $n \geq 0$ . L'assertion 3.19.iii s'obtient alors par convergence dominée, en faisant tendre  $n$  vers l'infini.

▷ Toute la suite de la démonstration est consacrée à l'assertion 3.19.ii : commençons par introduire quelques notations. Par définition du générateur étendu :  $\int_0^t |h(\tilde{X}_s)| ds < +\infty$  pour tout  $t \geq 0$ , presque sûrement, et le processus  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -adapté

$$\tilde{M} : t \mapsto \begin{cases} \varphi(\tilde{X}_t) - \varphi(\tilde{X}_0) - \int_0^t h(\tilde{X}_s) ds & \text{si } \int_0^t |h(\tilde{X}_s)| ds < +\infty, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est continu à droite. Introduisons maintenant les processus  $\widehat{M}$  et  $M = \bullet M^{\varphi, h}$  définis respectivement par

$$\widehat{M}_t = \begin{cases} \varphi(\widehat{X}_t^-) - \varphi(\tilde{X}_0) - \int_0^{t \wedge \hat{C}} h(\widehat{X}_s) ds & \text{si } \int_0^{t \wedge \hat{C}} |h(\tilde{X}_s)| ds < +\infty, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$(3.20) \quad M_t = \begin{cases} \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t h(X_s) ds \\ - \sum_{0 < \tau_k \leq t} (\varphi(X_{\tau_k}) - \varphi(X_{\tau_k}^-)) & \text{si } \int_0^t |h(X_s)| ds < +\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que  $\widehat{M}$  et  $M$  sont respectivement  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ - et  $\mathcal{F}^X$ -adaptés. De plus, ils héritent de  $\tilde{M}$  la continuité à droite des trajectoires.

▷ À nouveau par définition du générateur étendu, il existe une suite croissante de  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -temps d'arrêt  $\tilde{T}_n$  telle que  $\tilde{T}_n \uparrow +\infty$  et, pour tout  $n$ , le processus  $\tilde{M}^n : t \mapsto \tilde{M}_{t \wedge \tilde{T}_n}^n$  est une  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -martingale. En tant que martingale locale d'un processus du diffusion,  $\tilde{M}$  est presque sûrement continu (Sharpe, 1988, corollaire 50.25) : on peut donc choisir les  $\tilde{T}_n$  de façon à ce que  $\tilde{M}^n$  soit, de plus, bornée par  $n$ .

Considérons maintenant le processus  $\widehat{M}^n$  défini sur  $\widehat{\Omega} = \tilde{\Omega} \times [0; +\infty]$  par  $\widehat{M}_t^n(\cdot, u) = \tilde{M}_{t \wedge \tilde{T}_n}^n$ . D'après le lemme II.3.32, appliqué avec  $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{F}^{\tilde{X}}$ , on sait que  $\widehat{M}^n$  est une  $\tilde{\mathcal{G}}$ -martingale, pour une certaine filtration  $\widehat{\mathcal{G}}$  plus grande que  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ . Par ailleurs, en notant  $\widehat{T}_n$  le  $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$ -temps d'arrêt défini par  $\widehat{T}_n(\tilde{\omega}, u) = \tilde{T}_n(\tilde{\omega}) \wedge u$  (il s'agit bien d'un temps d'arrêt d'après II.3.32.iii), on a l'expression :

$$\widehat{M}_t^n = \widehat{M}_{t \wedge \widehat{T}_n}^n = \varphi\left(\widehat{X}_{t \wedge \widehat{T}_n}^-\right) - \varphi\left(\widehat{X}_0\right) - \int_0^{t \wedge \widehat{T}_n} h(\widehat{X}_s) ds.$$

Ceci entraîne que  $\widehat{M}^n$  est  $\mathcal{F}^{\widehat{X}}$ -adapté, et donc est aussi une  $\mathcal{F}^{\widehat{X}}$ -martingale. En résumé, pour tout  $n$  : le processus  $\widehat{M}^n$  est une  $\mathcal{F}^{\widehat{X}}$ -martingale continue à droite, bornée par  $n$  et stoppée au  $\mathcal{F}^{\widehat{X}}$ -temps d'arrêt  $\widehat{T}_n$ . Remplaçons maintenant  $\widehat{T}_n$  par le  $\mathcal{F}^{\widehat{X}}$ -temps d'arrêt  $\widehat{T}'_n = \widehat{T}_n \mathbb{1}_{\widehat{T}_n < \hat{\zeta}} + \infty \mathbb{1}_{\widehat{T}_n = \hat{\zeta}}$  : on a toujours la relation  $\widehat{M}_t^n = \widehat{M}_{t \wedge \widehat{T}'_n}^n$  puisque  $\widehat{M}$  est stoppée au temps  $\hat{\zeta}$ , et  $\widehat{T}'_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

▷ Définissons une famille de processus  $Y^{n,k}$ , pour  $n, k \geq 0$ , en posant  $Y_t^{n,k} = (\widehat{M}^n \circ \widehat{\pi}_k)_{t - S_k} \mathbb{1}_{t \geq S_k}$ . Les  $Y^{n,k}$  sont des  $\mathcal{G}$ -martingales d'après le lemme II.3.33.ii, où  $\mathcal{G}$  est la filtration obtenue à partir de  $\mathcal{F}^{\widehat{X}}$  par renaissance, comme au chapitre II, § 3.15. De plus, en notant  $T_{n,k} = S_k + \widehat{T}'_n \circ \widehat{\pi}_k$ , on a l'expression :

$$(3.21) \quad Y_t^{n,k} = \left( \varphi(X_{t \wedge T_{n,k} \wedge S_{k+1}}^-) - \varphi(X_{S_k}) - \int_{S_k}^{t \wedge T_{n,k} \wedge S_{k+1}} h(X_s) ds \right) \mathbb{1}_{S_k \leq t},$$

et les  $T_{n,k}$  sont des  $\mathcal{G}$ -temps d'arrêt tels que  $T_{n,k} \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , pour tout  $k \geq 0$ .

Notons ensuite  $T'_{n,k}$  les  $\mathcal{G}$ -temps d'arrêt définis par  $T'_{n,k} = \min_{0 \leq i \leq k} T_{n,i}$ . Pour tous  $n, k \geq 0$ , il existe un indice  $i_0 \leq k$  tel que  $T'_{n,k} = T_{n,i_0}$  et  $T_{n,i} = +\infty$  pour tout  $i < i_0$  ; on obtient donc, en comparant 3.20 et 3.21, la relation

$$M_t^{n,k} \triangleq \sum_{i=0}^k Y_{t \wedge T'_{n,k}}^{n,i} = M_{t \wedge T'_{n,k}}.$$

Chacun des processus  $Y_{\cdot \wedge T'_{n,k}}^{n,i}$  étant une  $\mathcal{G}$ -martingale bornée par  $n$ , le processus  $M^{n,k}$  est une  $\mathcal{G}$ -martingale bornée par  $n(k+1)$ .

Introduisons finalement de nouveaux  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt  $T''_{n,k}$ , en posant

$$T''_{n,k} = \min_{0 \leq i \leq k} (\tau_i + \widehat{T}_n \circ \widehat{\pi}_0 \circ \theta_{\tau_i}), \quad \forall n, k \geq 0.$$

Les temps de sauts et les temps de renaissance coïncidant presque sûrement, on a  $T'_{n,k} = T''_{n,k}$  pour tous  $n, k \geq 0$  presque sûrement. Ceci entraîne que le processus  $\mathcal{F}^X$ -adapté  $M_{\cdot \wedge T''_{n,k}}$ , indistinguable de  $M_{\cdot \wedge T'_{n,k}}$ , est une  $\mathcal{G}$ -martingale et donc une  $\mathcal{F}^X$ -martingale (puisque les  $T''_{n,k}$  sont des  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt et  $\mathcal{F}^X \subset \mathcal{G}$  par le lemme II.3.33.i). Le processus  $X$  étant supposé conservatif, on a  $T''_{n,k} \rightarrow +\infty$  ps quand  $n$  et  $k$  tendent vers l'infini, ce qui achève de prouver que le processus  $M$  est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale continue à droite. ■

### 3.D Un résultat concernant le deuxième générateur étendu

En combinant les résultats du § 3.B et du § 3.C, nous sommes maintenant en mesure de donner des conditions suffisantes pour qu'une fonction  $\varphi \in \text{Dom } \mathcal{L}'_X$  appartienne aussi à  $\text{Dom } \mathcal{L}'_X$ . Pour cela, introduisons l'application  $\mathcal{B}\varphi : E \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\mathcal{B}\varphi(y, t, \cdot) = \varphi(y) - \varphi(X_t^-),$$

qui est  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}$ -mesurable<sup>7</sup>, et décomposons-la sous la forme  $\mathcal{B}\varphi = \mathcal{B}^0\varphi + \mathcal{B}^B\varphi$ , avec

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^0\varphi(y, t, \cdot) &= \mathcal{B}\varphi(y, t, \cdot) \mathbb{1}_{X_t^- \in E^0}, \\ \mathcal{B}^B\varphi(y, t, \cdot) &= \mathcal{B}\varphi(y, t, \cdot) \mathbb{1}_{X_t^- \in E^B}. \end{aligned}$$

Nous aurons besoin dans la suite de la fonction  $K\varphi : x \mapsto \int_{E^0} \varphi(y) K(x, dy)$ , qui n'est pas définie pour toutes les fonctions  $\varphi$  mesurables. La proposition suivante nous assurera qu'elle est bien définie sauf peut être sur un ensemble « exceptionnel » (en un sens que nous allons préciser).

(3.22) **Proposition.**

i) Si  $\mathcal{B}^0\varphi \in L_1^{loc}(\nu)$ , alors l'ensemble

$$\Gamma^0 = \left\{ x \in E^0 \text{ tel que } K|\varphi|(x) = +\infty \right\} \in \mathcal{E}$$

est de potentiel nul pour la fonctionnelle additive  $H^0$ , ce qui signifie que

$$\mathbb{E}_x \left\{ \int_0^{+\infty} \lambda(X_s) \mathbb{1}_{X_s \in \Gamma^0} ds \right\} = 0, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

ii) Si  $\mathcal{B}^B\varphi \in L_1^{loc}(\nu)$ , alors l'ensemble

$$\Gamma^B = \left\{ x \in E^B \text{ tel que } K|\varphi|(x) = +\infty \right\} \in \mathcal{E}$$

n'est pas visité par  $(X_{\tau_k^-})_{k \geq 1}$ ,  $\mathbb{P}_x$ -presque sûrement pour tout  $x \in E$ .

□ **Démonstration.** Nous établissons seulement l'assertion 3.22.i, la preuve de 3.22.ii étant tout à fait similaire. Soit  $\varphi$  une fonction borélienne telle que  $\mathcal{B}^0\varphi \in L_1^{loc}(\nu)$ . D'après la proposition 3.16.ii, ceci entraîne que  $\mathcal{B}^0\varphi \in L_1^{loc}(\bar{\nu})$ . En notant  $\kappa_\varphi$  la fonction définie par

$$\kappa_\varphi(x) = \int_{E^0} |\varphi(y) - \varphi(x)| K(x, dy),$$

cela signifie qu'il existe une suite croissante  $T_n \uparrow \infty$  de  $\mathcal{F}^X$ -temps d'arrêt, telle que

$$\mathbb{E}_x \left\{ \int_0^{T_n \wedge t} \kappa_\varphi(X_s^-) dH_s^0 \right\} < +\infty$$

et donc

$$\mathbb{E}_x \left\{ \int_0^{T_n \wedge t} \mathbb{1}_{X_s^- \in \Gamma^0} dH_s^0 \right\} = 0,$$

pour tous  $t \geq 0$  et  $n \geq 0$ . On obtient le résultat annoncé en faisant tendre  $t$  et  $n$  vers l'infini. ■

<sup>7</sup>Voir la preuve du corollaire 3.17. La justification donnée par Davis (1984, p. 367) est que  $t \mapsto \mathcal{B}\varphi(y, t, \omega)$  est continu à gauche, ce qui est faux en général pour  $\varphi$  seulement mesurable.

Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes pour qu'une fonction  $\varphi \in \text{Dom } \mathcal{L}'_{\tilde{X}}$  soit dans le domaine du deuxième générateur étendu de  $X$ , et permet de calculer lorsque c'est le cas un élément  $h \in \mathcal{L}'_X \varphi$ . Il semble plus délicat de trouver des conditions suffisantes (utilisables) d'appartenance à  $\text{Dom } \mathcal{L}_X$  : nous nous contenterons de remarquer que c'est le cas si, en plus des hypothèses du théorème 3.23, on suppose que  $\varphi$  et  $h$  sont des fonctions bornées.

(3.23) **Théorème.** *Soit  $\varphi$  une fonction  $E \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne, telle que*

- i)  $\varphi \in \text{Dom } \mathcal{L}'_{\tilde{X}}$ ,
- ii)  $\mathcal{B}\varphi \in L_1^{\text{loc}}(\nu)$ ,
- iii)  $\Gamma^* = \{x \in E^B \setminus \Gamma^B, \varphi(x) \neq K\varphi(x)\}$  n'est pas visité par  $(X_{\tau_k^-})_{k \geq 1}$ ,  $\mathbb{P}_x$ -ps pour tout  $x \in E$ .

Alors  $\varphi \in \text{Dom } \mathcal{L}'_X$  et  $h = h_{|E^0}^c + h^d \in \mathcal{L}'_X \varphi$ , où  $h^d$  est la fonction définie sur  $E^0$  par

$$h^d(x) = \begin{cases} \lambda(x) (K\varphi - \varphi)(x) & \text{si } x \in E^0 \setminus \Gamma^0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $h^c$  n'importe quel élément de  $\mathcal{L}'_{\tilde{X}} \varphi$ . (Les ensembles  $\Gamma^B$  et  $\Gamma^0$  sont définis comme dans la proposition 3.22.)

(3.24) **Remarques.** Il existe plusieurs résultats similaires dans la littérature.

- a) Nous avons déjà évoqué celui de Davis (1984, 1993) : il porte sur une classe plus restreinte de processus, les processus déterministes par morceaux, mais il s'agit d'une *caractérisation* de  $\mathcal{L}'_X$  en fonction de  $\mathcal{L}'_{\tilde{X}}$  (voir plus loin).
- b) Un autre résultat du même type est présenté par Sawyer (1970), mais il concerne le générateur faible – notion intermédiaire entre le générateur fort et le générateur étendu – et s'applique seulement en l'absence de sauts forcés car la fonction de survie  $F$  est supposée ne pas s'annuler. Il s'agit de plus d'un résultat assez abstrait qui ne permet que très rarement d'explicitier vraiment les domaines des opérateurs impliqués.
- c) Bujorianu et Lygeros (2004c) énoncent caractérisation du générateur étendu d'un système hybride stochastique (du même type, à quelques détails près, que ceux considérés dans ce chapitre). Bien que l'expression soit correcte si la fonction  $\varphi$  est par exemple de classe  $\mathcal{C}^2$ , il est facile de se convaincre – en considérant par exemple le mouvement brownien – que les conditions énoncées ne sont ni nécessaires ni suffisantes.

□ **Démonstration.**

▷ Commençons par remarquer que

$$h^d(X_s^-) = \begin{cases} \lambda(X_s^-) \int_{E^0} \mathcal{B}^0 \varphi(y, s) K(X_s^-, dy) & \text{si } X_s^- \notin \Gamma^0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc  $\int_0^t |h^d(X_s)| ds \leq \iint_{E^0 \times ]0; t]} |\mathcal{B}^0 \varphi| d\bar{\nu}(dy, ds) < +\infty$  ps puisque  $\mathcal{B}\varphi$  est dans  $L_1^{\text{loc}}(\bar{\nu})$ . De plus, le processus

$$t \mapsto \int_0^t h^d(X_s) ds - \iint_{E^0 \times ]0; t]} \mathcal{B}^0 \varphi d\bar{\nu}$$

est évanescent car l'ensemble  $\Gamma^0$  est de potentiel nul pour  $H^0$  d'après la proposition 3.22.i. Ceci entraîne que

$$M^0 : t \mapsto \sum_{0 < \tau_k^0 \leq t} \left( \varphi(X_{\tau_k^0}) - \varphi(X_{\tau_k^0}^-) \right) - \int_0^t h^d(X_s) ds$$

est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale d'après la proposition 3.16.ii.

▷ Par ailleurs, le processus

$$M^B : t \mapsto \sum_{0 < \tau_k^B \leq t} \left[ \varphi(X_{\tau_k^B}) - \varphi(X_{\tau_k^B}^-) \right] - \sum_{0 < \tau_k^B \leq t} (K\varphi - \varphi)(X_{\tau_k^B}^-)$$

est une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale d'après la proposition 3.16, et la deuxième somme est en fait nulle ps puisque  $(X_{\tau_k^B}^-)$  ne visite presque jamais l'ensemble  $\Gamma^* \cup \Gamma^B$ .

▷ Finalement, rappelons que  $\bullet M^{\varphi, h^c}$  est aussi une  $\mathcal{F}^X$ -martingale locale d'après le théorème 3.19. Ceci achève la démonstration, puisque  $M^{\varphi, h}$  est indistinguable de  $\bullet M^{\varphi, h^c} + M^0 + M^B$ . ■

### Générateur du processus de base et comparaison avec Davis (1984)

Tous ces résultats ne seraient guère utiles si l'on ne connaissait aucune fonction appartenant au générateur étendu du processus de base. Fort heureusement, la formule d'Itô fournit une large classe de telles fonctions – les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  – et l'on peut même être plus précis dans le cas déterministe par morceaux :

#### (3.25) Proposition.

- i)  $\mathcal{C}^2(E) \subset \text{Dom } \mathcal{L}'_{\tilde{X}}$ , et pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^2(E)$  on a  $L_c \varphi \mathbb{1}_{E^0} \in \mathcal{L}'_{\tilde{X}} \varphi$  (où  $L_c$  désigne le générateur différentiel associé à l'EDS, défini dans la proposition 2.28).
- ii) Supposons que  $\tilde{X}$  est déterministe, et notons  $(\Upsilon_t)_{t \geq 0}$  le flot correspondant (i.e. le semigroupe d'applications  $E \rightarrow E$  tel que  $\tilde{X}_t = \Upsilon_t(\tilde{X}_0)$  ps). On a alors la caractérisation suivante :  $(\varphi, h) \in \mathcal{L}'_{\tilde{X}}$  si et seulement si pour tout  $x \in E^0$ , la fonction  $t \mapsto \varphi(\Upsilon_t(x))$  est absolument continue, de dérivée  $t \mapsto h(\Upsilon_t(x))$  presque partout sur  $\mathbb{R}_+$ .

Reformulons maintenant le théorème 5.5 de Davis (1984) à la lumière de cette proposition, de façon à pouvoir le comparer à notre théorème 3.23. Introduisons pour cela le sous-ensemble  $\Gamma^{\text{out}}$  de  $E^B$  défini par

$$\Gamma^{\text{out}} = \left\{ y \in E^B \text{ tel que } \exists x \in E^0, \Upsilon_{\tau^B}(x) = y \text{ et } \int_0^{\tau^B(x)} \lambda(\Upsilon_s(x)) \, ds < +\infty \right\}.$$

Le résultat de Davis est le suivant :

(3.26) **Théorème.** Soit  $\varphi$  une fonction  $E \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne. Alors  $\varphi \in \text{Dom } \mathcal{L}'_X$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i)  $\varphi \in \text{Dom } \mathcal{L}'_{\tilde{X}}$ ,
- ii)  $\mathcal{B}\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\nu)$ , et
- iii) pour tout  $x \in \Gamma^{\text{out}}$ ,  $K|\varphi|(x) < +\infty$  et  $\varphi(x) = K\varphi(x)$ .

Lorsque c'est le cas,  $h = h^c_{|\mathbb{E}^0} + h^d \in \mathcal{L}'_X \varphi$ , où  $h^d$  est la fonction définie dans le théorème 3.23 et  $h^c$  n'importe quel élément de  $\mathcal{L}'_{\tilde{X}} \varphi$ .

#### (3.27) Remarques.

- a) La condition 3.26.iii de ce théorème est en fait équivalente à la condition 3.23.iii de notre théorème : en effet, l'ensemble  $\Gamma^*$  n'est pas visité par  $(X_{\tau_k^B}^-)_{k \geq 1}$ ,  $\mathbb{P}_x$ -ps pour tout  $x \in E$ , si et seulement si  $\Gamma^* \subset \Gamma \setminus \Gamma^{\text{out}}$ .



- b) La principale différence entre ce théorème et 3.23 réside bien sûr dans le fait que les conditions sont non seulement suffisantes mais aussi nécessaires dans le cas déterministe par morceaux. Nous n'avons pas réussi à prouver l'analogie dans le cas des systèmes hybrides stochastiques<sup>8</sup>. Cela serait de toutes façons assez peu utile, dans le mesure où l'on connaît seulement un sous-ensemble de  $\text{Dom } \mathcal{L}'_{\tilde{X}}$  (cf. proposition 3.25.i).
- c) Nous avons corrigé quelques petites imprécisions dans l'énoncé original du théorème de Davis : 1) l'action  $\mathbf{f}\varphi$  du champ de vecteur  $\mathbf{f}$  sur la fonction  $\varphi$  n'est pas bien définie lorsque  $\varphi$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  (l'interprétation correcte fait intervenir le générateur du processus déterministe de base, cf. proposition 3.25.ii) ; et 2) la fonction  $\lambda(K\varphi - \varphi)$  n'est pas non plus bien définie sur tout  $E^0$ , mais on a vu qu'elle l'est sur un sous-ensemble  $\Gamma^0$  « suffisamment grand » pour que cela ne pose pas de problème (cf. proposition 3.22.i).

## 4 Sauts forcés et phénomène de Zénon : deux exemples

De nombreux exemples de systèmes hybrides stochastiques ont déjà été cités au chapitre I : nous disposons maintenant d'un formalisme unifié permettant de les définir rigoureusement en tant que processus diffusifs par morceaux, ainsi que d'un certain nombre de résultats généraux indispensables pour pouvoir travailler avec de tels modèles (formules d'Itô et de Dynkin généralisées, générateurs étendus, etc.).

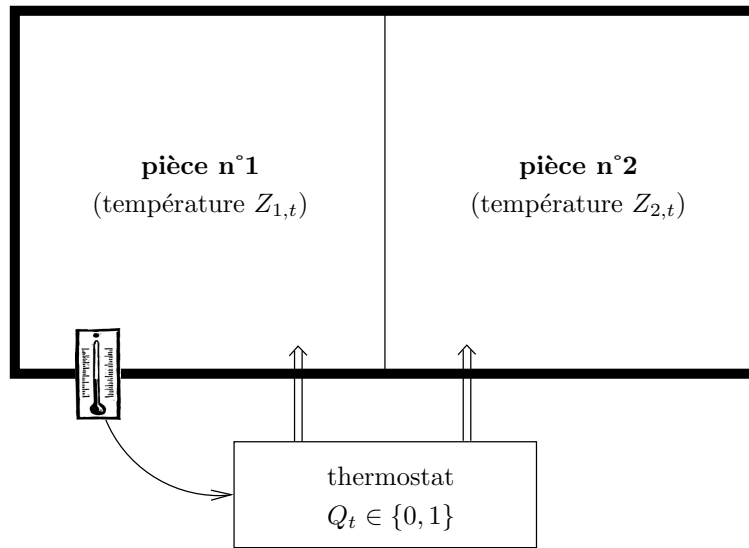
Il est en général assez facile, pour les SHS à sauts spontanés, d'appliquer les résultats de la section 2 pour établir l'existence et le caractère conservatif du processus diffusif par morceaux. Cela l'est beaucoup moins en présence de sauts forcés : en effet, le phénomène de Zénon résulte alors – s'il a lieu – d'une interaction complexe entre la dynamique continue, la géométrie de la garde, et le noyau de réinitialisation.

Nous détaillons donc, dans cette section, deux exemples de SHS à sauts forcés pour lesquels nous considérerons en particulier la question du phénomène de Zénon. Il s'agit de modèles qui sont « vraiment diffusifs », c'est-à-dire qui ne sont pas des processus déterministes par morceaux. Le premier (§ 4.A) est une généralisation du modèle de Malhamé et Chong (1985), qui sera repris dans les deux chapitres suivants comme illustration de l'équation de FPK généralisée. Le deuxième (§ 4.B) est l'analogie stochastique d'un modèle célèbre dans la littérature comme exemple du phénomène de Zénon : on s'intéresse à la dynamique d'une balle qui rebondit de façon inélastique, en perdant à chaque rebond une fraction de son énergie (caractérisée par un certain coefficient de restitution de la vitesse  $c \in ]0; 1[$ ). Nous verrons que le comportement de ce modèle devient beaucoup plus subtil si on le perturbe un peu avec une force aléatoire.

### 4.A Le modèle de Malhamé-Chong étendu à deux pièces

Généralisons le modèle de Malhamé et Chong (1985) en considérant une maison composée de deux pièces – au lieu d'une seule – dans laquelle le chauffage est contrôlé par un thermostat qui commute selon la température mesurée dans la première pièce (voir figure 4.a). On pourrait tout aussi bien imaginer que chaque pièce est équipée d'un capteur de température, le thermostat commutant par exemple en fonction de la valeur d'une combinaison linéaire des deux températures,

<sup>8</sup>Le résultat de Davis repose sur un théorème de représentation des martingales locales de  $X$  dans le cas déterministe par morceaux (cf. Davis, 1993, théorème A5.5), qu'il faudrait généraliser au cas des processus diffusifs par morceaux pour répondre à cette question.



**Fig. 4.a** – Représentation schématique du modèle décrit au § 4.A, qui généralise le modèle de Malhamé et Chong (1985). Le chauffage dans une maison – composée de 2 pièces – est contrôlé par un thermostat, qui commute selon la valeur de la température mesurée par un capteur situé dans la première pièce.

ou encore étendre le modèle à un nombre de pièces  $n > 2$  : cela ne changerait pas grand chose aux considérations théoriques de ce chapitre et du suivant. Cela dit, il est clair que la complexité de la méthode numérique décrite au chapitre V, dépend fortement de  $n!$  L'idée de considérer ce type de modèle nous a été suggérée par le professeur R. Malhamé de l'École Polytechnique de Montréal<sup>9</sup>.

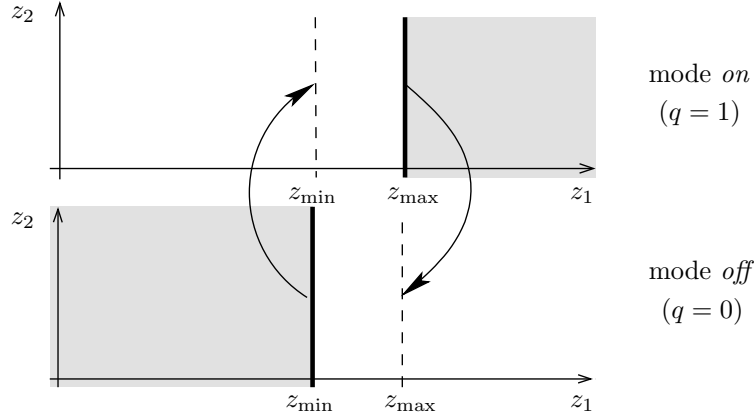
Nous nous occuperons uniquement dans ce chapitre des propriétés fondamentales du modèle : plus précisément, nous établirons qu'il s'agit d'un processus diffusif par morceaux, et qu'il est de plus conservatif – c'est-à-dire qu'il n'est pas de Zénon. Cela ne sera pas difficile, le travail ayant déjà été fait de manière beaucoup plus générale au chapitre II et dans la section 2 du chapitre III. Nous reviendrons par la suite sur cet exemple, qui sera l'une de nos principales illustrations pour l'équation de FPK généralisée aux chapitres IV et V.

### Espace d'état et noyau de réinitialisation

Nous supposons que les commutations de l'état du thermostat sont déclenchées – comme dans le modèle original – par une paire  $(z_{\min}, z_{\max}) \in \mathbb{R}^2$  de seuils portant sur la température dans la première pièce, avec une bande morte  $z_{\max} - z_{\min} > 0$ . Le modèle possède donc deux modes, correspondant aux états *on* ( $q = 1$ ) et *off* ( $q = 0$ ) du thermostat, et la composante continue est un couple  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  décrivant la température dans chacune des deux pièces de la maison. Le mécanisme de commutation conduit tout naturellement à choisir pour espace d'état le sous-ensemble  $E$  de  $\{0, 1\} \times \mathbb{R}^2$  défini par

$$E_0 = [z_{\min}; +\infty[ \times \mathbb{R}, \quad E_1 = ]-\infty; z_{\max}] \times \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad E = \{0\} \times E_0 \cup \{1\} \times E_1.$$

<sup>9</sup>Correspondance personnelle, juillet 2004



**Fig. 4.b** – Espace d'état hybride du modèle décrit au § 4.A. Les flèches courbes symbolisent la fonction de réinitialisation  $\Psi$ , qui agit sur le mode sans changer  $z_1$  et  $z_2$ , i.e.  $\Psi(q, z_1, z_2) = (1 - q, z_1, z_2)$ . Les sauts (forcés) sont déclenchés par les seuils  $z_{min}$  et  $z_{max}$ . Les traits épais symbolisent l'ensemble  $E^B$  des points de branchement.

Le thermostat passe de *off* à *on* lorsque la température dans la première pièce atteint  $z_{min}$ , et de *on* à *off* lorsqu'elle atteint  $z_{max}$ . On a donc

$$\begin{aligned} E^B &= \{0\} \times \{z_{min}\} \times \mathbb{R} \cup \{1\} \times \{z_{max}\} \times \mathbb{R}, \\ E^0 &= E \setminus E^B = \{0\} \times ]z_{min}; +\infty[ \times \mathbb{R} \cup \{1\} \times ]-\infty; z_{max}[ \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'état du système après une commutation est défini par le noyau de réinitialisation déterministe  $K(x, \cdot) = \delta_{\Psi(x)}$ , où  $\Psi$  est la fonction de réinitialisation  $(q, z) \mapsto (1 - q, z)$ . L'espace d'état  $E$ , l'ensemble  $E^B$  des points de branchement ainsi que la fonction de réinitialisation  $\Psi$  sont représentés schématiquement sur la figure 4.b.

### Équation différentielle stochastique

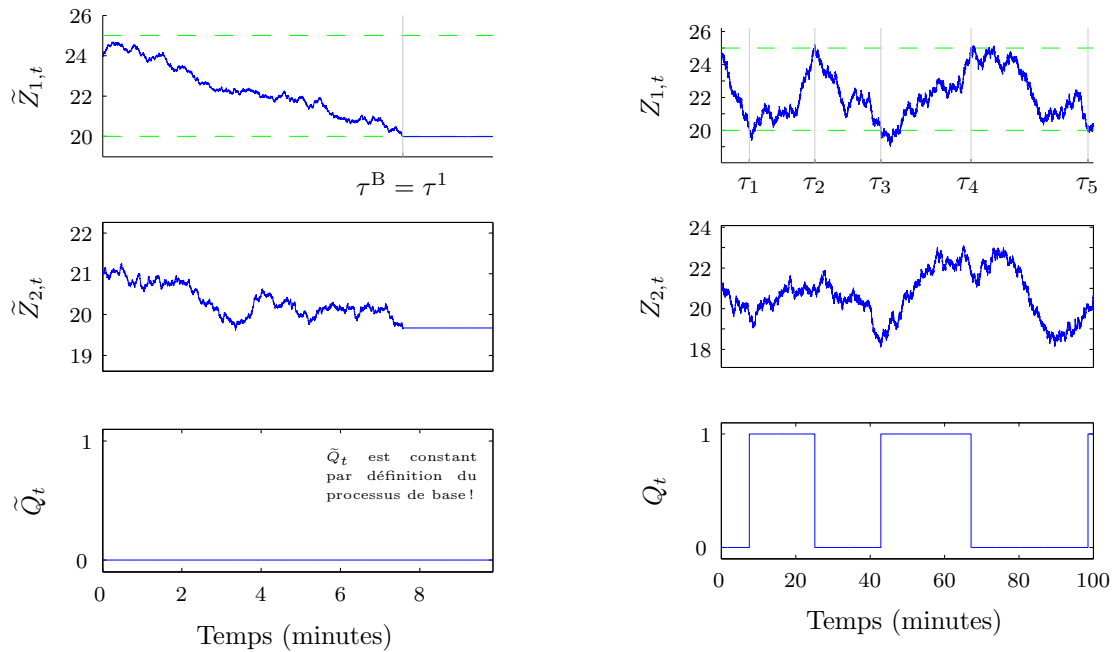
La dynamique du processus  $Z_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t})$  dans le mode  $q$  est définie par le système d'EDS

$$\begin{cases} C_1 dZ_{1,t} = -\alpha'_1 (Z_{1,t} - z_{ext}) dt - \alpha'_{12} (Z_{1,t} - Z_{2,t}) dt + \beta'_1 q dt + \sigma'_1 dB_t^1 \\ C_2 dZ_{2,t} = -\alpha'_2 (Z_{2,t} - z_{ext}) dt - \alpha'_{12} (Z_{2,t} - Z_{1,t}) dt + \beta'_2 q dt + \sigma'_2 dB_t^2, \end{cases}$$

où  $z_{ext}$  est la température extérieure (supposée constante),  $\alpha'_i > 0$  la conductance thermique globale entre la pièce  $i$  et l'extérieur,  $\alpha'_{12} > 0$  la conductance thermique globale entre les deux pièces,  $C_i > 0$  la capacité calorifique de la pièce  $i$ ,  $\beta'_i > 0$  la puissance du chauffage dans la pièce  $i$ ,  $\sigma'_i > 0$  un coefficient de volatilité et  $(B^1, B^2)$  un mouvement brownien standard bidimensionnel. Pour simplifier les notations, introduisons les coefficients rapportés à la capacité calorifique :  $\alpha_1 = \alpha'_1/C_1$ ,  $\alpha_2 = \alpha'_2/C_2$ , ..., de façon à pouvoir réécrire le système d'EDS sous la forme

$$\begin{cases} dZ_{1,t} = -\alpha_1 (Z_{1,t} - z_{ext}) dt - \alpha_{12} (Z_{1,t} - Z_{2,t}) dt + \beta_1 q dt + \sigma_1 dB_t^1 \\ dZ_{2,t} = -\alpha_2 (Z_{2,t} - z_{ext}) dt - \alpha_{21} (Z_{2,t} - Z_{1,t}) dt + \beta_2 q dt + \sigma_2 dB_t^2. \end{cases}$$

Remarquons que  $\alpha_{12}$  est en général différent de  $\alpha_{21}$ , les deux pièces n'ayant pas nécessairement la même capacité calorifique.



**Fig. 4.c** – Une trajectoire du processus de base  $\tilde{X}$  (à gauche) et du processus diffusif par morceaux  $X$  (à droite). Le processus de base coïncide simplement, sur cet exemple, avec le processus diffusif par morceaux stoppé à l’instant où il atteint  $E^B$ .

### Processus de base et processus diffusif par morceaux

L’existence du processus diffusif par morceaux  $X = (Q, Z)$  découle sans difficulté du théorème 2.22, étant donné que : 1) les ensembles  $E$  et  $E^B$  sont des fermés de  $\{0, 1\} \times \mathbb{R}^2$  donc vérifient les hypothèses 2.1 concernant l’espace d’état, 2) les coefficients de l’EDS sont globalement lipschitziens et à croissance linéaire, et 3)  $E^B$  est la frontière de  $E$  donc la condition de sortie 2.14.ii est trivialement vérifiée.

Une trajectoire du processus de base  $\tilde{X}$  et du processus diffusif par morceaux  $X$  est représentée sur la figure 4.c. Remarquons que pour ce modèle, comme pour tous les SHS ne présentant pas de saut spontané, le processus de base coïncide simplement avec le processus diffusif par morceaux stoppé à l’instant où il atteint  $E^B$ . Remarquons également que la composante  $Z_t$  évolue continûment dans ce modèle : les sauts, c’est-à-dire les discontinuités au sens de la topologie décrite au § 2.A, correspondent ici aux commutations de la variable discrète  $Q_t$ .

### Phénomène de Zénon ?

Concluons notre présentation de ce modèle en démontrant que le processus obtenu est conservatif. Considérons pour cela l’ensemble  $\Gamma = \Psi(E^B)$ , c’est-à-dire l’ensemble

$$\Gamma = \{0\} \times \{z_{\max}\} \times \mathbb{R} \cup \{1\} \times \{z_{\min}\} \times \mathbb{R}$$

représenté en trait discontinu sur la figure 4.b. Il est clair par construction que  $X_{\tau_1} \in \Gamma$  presque sûrement. Malheureusement, il est impossible de minorer  $\mathbb{P}_x\{\tau_1 \geq h\}$  uniformément sur  $\Gamma$ , et ce quelle que soit la valeur de  $h > 0$  : en effet, la durée  $\tau_1$  peut être arbitrairement faible avec une probabilité importante, si la différence initiale entre les deux températures est importante. Par

exemple, pour  $x = (0, z_{\max}, z_2)$ , il est facile de se convaincre que  $\mathbb{P}_x\{\tau_1 \geq h\}$  tend vers zéro lorsque  $z_2$  tend vers  $-\infty$ . . . même si cela n'a pas vraiment de sens physique!

Partitionnons donc  $\Gamma$  en trois parties, définies par

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{0\} \times \{z_{\max}\} \times ]-\infty; z_a[ \cup \{1\} \times \{z_{\min}\} \times ]z_b; +\infty[, \\ \Gamma_1 &= \{0\} \times \{z_{\max}\} \times ]z_a; z_b[ \cup \{1\} \times \{z_{\min}\} \times ]z_a; z_b[, \\ \Gamma_2 &= \{0\} \times \{z_{\max}\} \times ]z_b; +\infty[ \cup \{1\} \times \{z_{\min}\} \times ]-\infty; z_a[,\end{aligned}$$

où  $z_a$  et  $z_b$  sont des réels tels que  $z_a < z_b$ . La dérive n'est bornée ni sur  $\Gamma_0$  ni sur  $\Gamma_2$  : ce sont donc ces deux ensembles qui empêchent d'appliquer simplement la proposition 2.23 ; mais le rôle joué par la dérive n'est pas le même dans les deux cas. Plus précisément, il est en fait possible<sup>10</sup>, en choisissant  $-z_a$  et  $z_b$  suffisamment grands, d'assurer l'existence de constantes  $h, \alpha > 0$  telles que : 1)  $\mathbb{P}_x\{\tau_1 \geq h\} \geq \alpha$  pour tout  $x \in \Gamma_2$ , et 2)  $\mathbb{P}_x\{X_{\tau_1} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2\} \geq \alpha$  pour tout  $x \in \Gamma_0$ . Sur  $\Gamma_1$  on retrouve la situation dans l'exemple 2.26 : la distance entre  $\Gamma_1$  et  $E^B$  est précisément la largeur  $z_{\max} - z_{\min}$  de la bande morte, et  $\Gamma_1$  est compact. On peut donc appliquer la proposition 2.23 pour étendre la minoration de  $\mathbb{P}_x\{\tau_1 \geq h\}$  à  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  (quitte à changer les constantes). On peut ainsi appliquer le lemme 2.27, avec  $\Gamma_{\text{slow}} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  et  $\Gamma_{\text{fast}} = \Gamma_0$ , ce qui établit le caractère conservatif du processus.

## 4.B Le modèle de la balle qui rebondit, avec une force aléatoire

*Pour plus de clarté, nous nous écartons dans cet exemple de la notation  $X = (Q, Z)$  utilisée presque partout dans le reste du mémoire.*

Considérons une balle qui rebondit verticalement : son état à l'instant  $t \geq 0$  est décrit par un couple  $X_t = (Z_t, V_t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , où  $Z_t \geq 0$  est l'altitude de la balle – on suppose le sol à  $z = 0$  – et  $V_t$  sa vitesse verticale. La dynamique de la balle entre les rebonds est régie par la dynamique

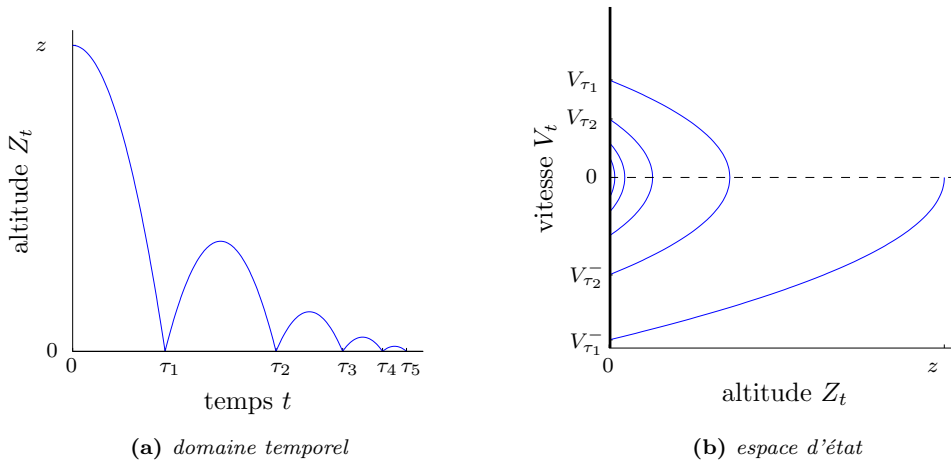
$$\begin{cases} dZ_t = V_t dt \\ dV_t = -g dt, \end{cases}$$

où  $g > 0$  désigne l'accélération gravitationnelle. On suppose que la balle rebondit à chaque fois qu'elle touche le sol, avec un coefficient de restitution  $c \in ]0; 1]$  pour la vitesse, c'est-à-dire que  $t \mapsto V_t$  est discontinue à chaque instant  $\tau$  où se produit un rebond, avec  $V_\tau = c |V_\tau^-|$ . La figure 4.d représente une même trajectoire du système à la fois dans le domaine temporel et dans l'espace d'état.

Il est bien connu – et facilement vérifiable – que la suite des instants de rebond  $\tau_k$  possède une limite finie si et seulement si  $c < 1$  (voir par exemple Johansson et al., 1999, dans lequel sont proposées diverses manières de « régulariser » le modèle pour supprimer le phénomène de Zénon). Une question vient alors naturellement à l'esprit, lorsqu'on s'intéresse aux systèmes hybrides stochastiques : que se passe-t-il si on perturbe un peu le système en lui ajoutant une force aléatoire (bruit blanc gaussien) ? La réponse à cette question – assez surprenante – nous a été communiquée par Jean Bertoin<sup>11</sup>, et soulève à son tour de nouvelles questions que nous évoquerons brièvement.

<sup>10</sup>Nous omettons la vérification rigoureuse de cette affirmation. L'idée est de montrer le processus de base  $\tilde{X}$  est très proche – pour  $h$  suffisamment petit – de la solution de l'EDO associée, obtenue en supprimant les termes browniens de l'EDS. Ceci peut se faire grâce au lemme de Gronwall, uniformément sur tout l'espace car la dérive est globalement lipschitzienne et les  $\mathbf{g}_t$  sont constants.

<sup>11</sup>Communication personnelle, novembre 2006



**Fig. 4.d** – Représentation d’une trajectoire de la balle qui rebondit (§ 4.B, version déterministe), dans le domaine temporel et dans l’espace d’état. La balle est lâchée à l’instant  $t = 0$  d’une hauteur  $z = 1$ , avec une vitesse nulle. Les autres paramètres du modèle valent  $c = 0.6$  et  $g = 9.8$ .

### Construction du modèle

Définissons maintenant la version stochastique de ce modèle. L’espace d’état reste le sous-ensemble fermé  $E = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^2$ , et  $E^B = \{0\} \times ]-\infty; 0]$ . L’EDS définissant le processus de base est la suivante :

$$(4.1) \quad \begin{cases} d\tilde{Z}_t = \tilde{V}_t dt, \\ d\tilde{V}_t = -g dt + \sigma d\tilde{B}_t, \end{cases}$$

avec  $\sigma > 0$ . Il est facile de voir que, pour tout  $x \in E^0 = E \setminus E^B$ , la solution partant de  $x$  quitte  $E$  au moment où elle atteint  $E^B$ , c’est-à-dire que  $\tilde{V}_T \leq 0$  si on note  $T = \inf\{t > 0 \mid \tilde{Z}_t \notin E^0\}$ . Les conditions du corollaire 2.14, assurant l’existence du processus de base au sens de l’hypothèse 2.8, sont donc vérifiées.

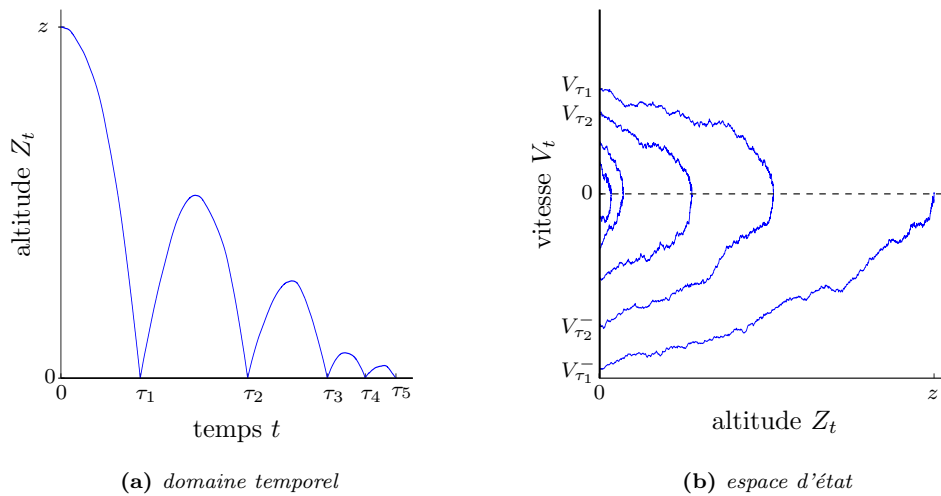
Il ne reste plus, pour construire un processus diffusif par morceaux, qu’à spécifier le noyau de réinitialisation, qui sera de la forme  $K(x, \cdot) = \delta_{\Psi(x)}$  puisque nous ne souhaitons pas introduire d’incertitude à ce niveau du modèle. La valeur de la fonction  $\Psi$  sur  $\{0\} \times ]-\infty; 0[$  a déjà été donnée dans la version déterministe du modèle : il s’agit de  $\Psi(0, v) = c|v|$ . Mais cela ne suffit pas : pour définir complètement le modèle, on doit en principe spécifier aussi la valeur de  $\Psi$  en  $(0, 0)$ . Il semble en effet possible – du moins aucun argument trajectorien « simple » ne semble l’interdire – que la vitesse soit nulle au moment de l’impact ! En fait, ce phénomène ne se produit presque jamais :

(4.2) **Lemme.**  $T < +\infty$  et  $\tilde{V}_T < 0$  presque sûrement.

□ **Démonstration.** Fixons  $x = (z, v) \in E^0$ , i.e.  $z > 0$  ou  $z = 0$  et  $v > 0$ .

▷ Introduisons le processus de Langevin  $X^\bullet = (Z^\bullet, V^\bullet)$  solution de l’EDS 4.1 avec  $g = 0$  :

$$\begin{cases} V_t^\bullet = \tilde{V}_0 + \sigma \tilde{B}_t, \\ Z_t^\bullet = \tilde{Z}_0 + \tilde{V}_0 t + \sigma \int_0^t \tilde{B}_s ds. \end{cases}$$



**Fig. 4.e** – Représentation d'une trajectoire de la balle qui rebondit (modèle décrit au § 4.B, version stochastique), dans le domaine temporel et dans l'espace d'état. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 4.d, et la volatilité du bruit vaut  $\sigma = 1$ .

Ce processus a été étudié par de nombreux auteurs : en particulier, si on note  $S = \inf\{t > 0 \mid Z_t^\bullet = 0\}$ , alors la loi jointe du couple  $(S, V_S^\bullet)$  a été calculée explicitement par Lachal (1991). L'expression est complexe, mais il nous suffira ici de savoir que  $S < +\infty$  et  $V_S^\bullet < 0$ ,  $\mathbb{P}_x$ -ps. En remarquant que

$$T = \inf\{t > 0 \mid \tilde{Z}_t = 0\} \leq S \quad \text{ps,}$$

on en déduit que  $T < +\infty$ ,  $\mathbb{P}_x$ -ps.

▷ Notons  $\tilde{\mathcal{G}}$  la filtration  $\mathbb{P}_x$ -complète engendrée par  $\tilde{X}_0$  et  $\tilde{B}$ . Pour  $\alpha = -g/\sigma$ , on définit classiquement une mesure  $\mathbb{P}'_x$  sur  $\tilde{\mathcal{G}}_\infty$ , équivalente à  $\mathbb{P}_x$  sur  $\tilde{\mathcal{G}}_t$  pour tout  $t \geq 0$ , en posant

$$\frac{d\mathbb{P}'_x}{d\mathbb{P}_x} \Big|_{\tilde{\mathcal{G}}_t} = \exp\left(\alpha\tilde{B}_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right), \quad \forall t \geq 0.$$

Par le théorème de Girsanov (Rogers et Williams, 2000b, théorème 38.5), le processus  $\tilde{B}' : t \mapsto \tilde{B}_t - \alpha t$  est un  $\tilde{\mathcal{G}}$ -mouvement brownien standard sous  $\mathbb{P}'_x$ . Comme  $\sigma\tilde{B}'_t = -gt + \sigma\tilde{B}_t$ , cela signifie que  $\tilde{X}$  est distribué sous  $\mathbb{P}'_x$  comme le processus de Langevin  $X^\bullet$  sous  $\mathbb{P}_x$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on a donc

$$\mathbb{P}'_x\{T \leq t, \tilde{V}_T = 0\} = \mathbb{P}_x\{S \leq t, V_S^\bullet = 0\} = 0.$$

Comme les mesures  $\mathbb{P}'_x$  et  $\mathbb{P}_x$  sont équivalentes sur  $\tilde{\mathcal{G}}_t$ , cela entraîne que  $\mathbb{P}_x\{T \leq t, \tilde{V}_T = 0\} = 0$ , pour tout  $t \geq 0$ , et donc que  $\mathbb{P}_x\{\tilde{V}_T = 0\} = 0$  puisque  $T < +\infty$ ,  $\mathbb{P}_x$ -ps. ■

### Existence d'une valeur critique du coefficient $c$

Il est maintenant naturel de se demander si, comme dans le cas déterministe, la suite  $\tau_k$  des instants de rebond va s'accumuler en un temps fini ou pas. Notons  $E_t = gZ_t + \frac{1}{2}V_t^2$  l'énergie totale du système. Entre les rebonds, on a par la formule d'Itô

$$dE_t = \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma V_t dB_t,$$

ce qui signifie qu'en moyenne le bruit apporte de l'énergie au système. La question posée revient donc à se demander si cet apport compense ou pas la perte d'énergie causée par les rebonds. La réponse exige des arguments plus fins que pour le modèle de Malhamé et Chong (1985) : en effet, aucune des conditions suffisantes données au § 2.D ne s'applique dans le cas présent.

Un changement de mesure comme dans la preuve du lemme 4.2 montre que le résultat ne dépend pas de l'accélération  $g$ , que l'on supposera donc nulle sans perte de généralité. Afin de mettre en évidence le rôle du paramètre  $\sigma$ , notons  $\mathbb{P}^\sigma$  la famille des lois du processus pour une valeur donnée de ce paramètre. On a alors les résultats suivants :

**(4.3) Proposition.**

- i) La loi du couple  $(\tau_1, V_{\tau_1}^-)$  sous  $\mathbb{P}_{(0,v)}^\sigma$ , pour  $v > 0$  et  $\sigma \neq 0$ , coïncide avec la loi du couple  $(v^2\tau_1/\sigma^2, vV_{\tau_1}^-)$  sous  $\mathbb{P}_{(0,1)}^1$ .
- ii) Notons  $\xi_k = |V_{\tau_k}^-|/V_{\tau_{k-1}}$  et  $\lambda_k = \sigma^2(\tau_k - \tau_{k-1})/V_{\tau_{k-1}}^2$ , pour tout  $k \geq 1$ . Les couples  $(\lambda_k, \xi_k)$  sont indépendants et identiquement distribués selon la loi de  $(\tau_1, |V_{\tau_1}^-|)$  sous  $\mathbb{P}_{(0,1)}^1$ .

□ **Démonstration.**

▷ Le processus de base  $(\tilde{Z}, \tilde{V})$  vérifie sous  $\mathbb{P}_{(0,v)}^\sigma$  les relations

$$\begin{cases} \tilde{Z}_t = \int_0^t \tilde{V}_s ds, \\ \tilde{V}_t = v + \sigma \tilde{B}_t. \end{cases}$$

Considérons maintenant un réel  $\alpha > 0$  et le processus  $\tilde{X}' = (\tilde{Z}', \tilde{V}')$  défini par  $\tilde{Z}'_u = \sigma^2 \tilde{Z}_{\alpha u}/v^3$  et  $\tilde{V}'_u = \tilde{V}_{\alpha u}/v$ . On a alors  $\tilde{V}'_u = 1 + \frac{\sigma}{v} \tilde{B}_{\alpha u}$ , et en raison de la propriété d'autosimilarité du mouvement brownien, le processus  $u \mapsto \frac{\sigma}{v} \tilde{B}_{\alpha u}$  est à nouveau un mouvement brownien standard si on choisit  $\alpha = (v/\sigma)^2$ . On trouve dans ce cas

$$\tilde{Z}'_u = \frac{\sigma^2}{v^3} \tilde{Z}_{\alpha u} = \frac{1}{\alpha v} \int_0^{\alpha u} \tilde{V}_s ds = \int_0^u \tilde{V}'_v dv,$$

ce qui montre que le processus  $\tilde{X}'$  est distribué sous  $\mathbb{P}_{(0,v)}^\sigma$  comme le processus  $\tilde{X}$  sous  $\mathbb{P}_{(0,1)}^1$ . Si on note  $\tau'_1$  l'instant où  $\tilde{Z}'$  s'annule pour la première fois, on a  $\tau_1 = \alpha\tau'_1 = v^2\tau'_1/\sigma^2$  et  $\tilde{V}_{\tau_1} = v\tilde{V}'_{\tau'_1}$ , ce qui établit 4.3.i.

▷ La deuxième assertion découle alors de la propriété de Markov forte, appliquée aux temps  $\tau_k$ . Plus précisément : on montre par récurrence que, pour toute famille presque nulle  $(\varphi_k)$  de fonctions  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  boréliennes bornées, on a la relation

$$\mathbb{E}_{(0,v)}^\sigma \left\{ \prod_k \varphi_k(\lambda_k, \xi_k) \right\} = \prod_k \mathbb{E}_{(0,1)}^1 \left\{ \varphi_k(\tau_1, |V_{\tau_1}^-|) \right\}.$$

■

Nous sommes maintenant en mesure de répondre partiellement à la question : le processus est-il conservatif? Cela ne dépend bien sûr pas de  $g$ , comme on l'a déjà expliqué. Ce qui est plus étonnant, c'est que le résultat ne dépend pas non plus de la volatilité  $\sigma$  !

**(4.4) Proposition.** Soit  $c^* = \exp(-\pi/\sqrt{3}) \approx 0.163$ .

- i) Si  $c^* < c \leq 1$ , alors  $V_{\tau_k} \rightarrow +\infty$  ps, et le processus est conservatif.
- ii) Si  $0 < c < c^*$ , alors  $V_{\tau_k} \rightarrow 0$  ps.



□ **Démonstration.** Fixons  $v > 0$ . Nous travaillerons sans perte de généralité sous la loi  $\mathbb{P}_{(0,v)}^\sigma$  : le résultat général s'en déduit par la propriété de Markov forte en remarquant que  $Z_{\tau_1} = 0$  et  $V_{\tau_1} > 0$  presque sûrement sous  $\mathbb{P}_x^\sigma$  pour tout  $x \in \mathbb{E}^0$ .

▷ D'après la définition de la fonction de réinitialisation  $\Psi$ , on a  $V_{\tau_k} = c|V_{\tau_k}^-| = c\xi_k V_{\tau_{k-1}}$  presque sûrement, pour tout  $k \geq 1$ . On en déduit par récurrence que  $V_{\tau_k} = v c^k \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k$ , soit encore :

$$\ln V_{\tau_n} = \ln v + \sum_{k=1}^n (\ln \xi_k + \ln c) \quad \text{ps.}$$

D'après la proposition 4.3.ii, les variables  $\xi_k$  sont indépendantes et distribuées comme  $|V_{\tau_1}^-|$  sous la loi  $\mathbb{P}_{(0,1)}^1$ . Par la loi forte des grands nombres, on peut ainsi distinguer deux cas :

- 1) si  $\mathbb{E}_{(0,1)}^1 \left\{ \ln |V_{\tau_1}^-| \right\} > -\ln c$ , alors  $V_{\tau_k} \rightarrow +\infty$  ps ;
- 2) si  $\mathbb{E}_{(0,1)}^1 \left\{ \ln |V_{\tau_1}^-| \right\} < -\ln c$ , alors  $V_{\tau_k} \rightarrow 0$  ps.

▷ Pour le calcul explicite de la quantité  $\mathbb{E}_{(0,1)}^1 \left\{ |\ln V_{\tau_1}^-| \right\}$ , nous utiliserons un résultat de Lachal (1997, lemme 2, p 8) sur le processus de Langevin :

$$\mathbb{E}_{(0,v)}^1 |V_{\tau_1}^-|^{s-1} = \frac{v^{s-1}}{2 \cos \frac{\pi s}{3}}, \quad \text{pour tous } v > 0 \text{ et } |s| < 3/2.$$

En dérivant par rapport à  $s$ , on obtient que

$$\mathbb{E}_{(0,v)}^1 |V_{\tau_1}^-|^{s-1} \ln |V_{\tau_1}^-| = \frac{v^{s-1}}{2} \frac{\ln v \cos \frac{\pi s}{3} + \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi s}{3}}{\cos^2 \frac{\pi s}{3}},$$

ce qui donne, pour  $v = 1$  et  $s = 1$ ,

$$\mathbb{E}_{(0,1)}^1 \ln |V_{\tau_1}^-| = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = -\ln c^*.$$

▷ Il reste à montrer que le processus est conservatif lorsque  $c \in ]c^*; +\infty]$ . Considérons pour cela les évènements  $A_k(h) = \{\tau_{k+1} - \tau_k > h\}$ , pour un quelconque  $h > 0$ . D'après la proposition 4.3.ii, on a

$$\mathbb{P}_{(0,v)}^\sigma \left\{ A_k(h) \mid \mathcal{F}_{\tau_k}^X \right\} = \mathbb{P}_{(0,V_{\tau_k})}^\sigma \left\{ \tau_1 > h \right\} = \mathbb{P}_{(0,1)}^1 \left\{ \tau_1 > h' \right\} \Big|_{h' = \sigma^2 h / V_{\tau_k}^2},$$

donc

$$\mathbb{P}_{(0,v)}^\sigma \left\{ A_k(h) \mid \mathcal{F}_{\tau_k}^X \right\} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{ps}} 1$$

puisque  $V_{\tau_k} \rightarrow +\infty$  ps. On en conclut par le lemme de Borel-Cantelli étendu (Kallenberg, 1997, corollaire 7.20) qu'il existe presque sûrement un infinié de  $k \geq 0$  tels que  $\tau_{k+1} - \tau_k > h$ , et donc que  $\tau_k \rightarrow +\infty$  ps. ■

#### (4.5) Remarques.

- a) De nombreuses questions sont laissées sans réponse par la proposition 4.4 : y'a-t-il effectivement accumulation des sauts pour  $c < c^*$  ? que se passe-t-il pour  $c = c^*$  ? pour  $c \in ]c^*; 1]$ , a-t-on  $\mathbb{E}_x \{N_t\} < +\infty$  ? si effectivement le modèle est de Zénon pour  $c < c^*$ , est-il possible de prolonger le processus ainsi construit en un processus fortement markovien, qui se comportera aussi comme la solution de 4.1 entre les rebonds mais qui ne sera plus continu par morceaux ?

- b) Bien que cela puisse paraître étrange de prime abord, on peut également considérer le cas de chocs totalement inélastiques, i.e.  $c = 0$ . Cela revient à dire que la vitesse après un choc est réinitialisée à 0, autrement dit que le processus recherché doit repartir de  $(0, 0)$  sous le seul effet de la force aléatoire : il est clair qu'un tel processus ne sera pas diffusif par morceaux, puisque la solution de l'EDS 4.1 issue de  $(0, 0)$  revient instantanément dans  $E^B$ . Néanmoins, un processus fortement markovien a pu être construit par Bertoin (2006b), dans le cas où  $g = 0$ , qui se comporte comme la solution de 4.1 entre les chocs et revient instantanément en  $(0, 0)$  à chaque choc. (L'ajout d'une accélération  $g > 0$  vers le bas ne pose aucune difficulté.) Il a été montré que ce processus est unique en loi si on impose que le temps passé en  $(0, 0)$  soit nul, et aussi que le processus peut être représenté comme l'unique solution faible d'une EDS à sauts qui s'écrit (Bertoin, 2006a)

$$\begin{cases} V_t = V_0 + \sigma B_t - \sum_{0 < s \leq t} V_s^- \mathbb{1}_{Z_s=0}, \\ Z_t = Z_0 + \int_0^t V_s \, ds. \end{cases}$$



## CHAPITRE IV

# ÉQUATIONS DE FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV GÉNÉRALISÉES

## 1 Introduction

À tout processus de Markov  $X$  on peut faire correspondre deux semigroupes d'opérateurs, en faisant agir la famille de noyaux  $(P_t)_{t \geq 0}$  sur l'ensemble des fonctions boréliennes bornées et sur l'ensemble des mesures signées. Ces deux semigroupes sont parfois qualifiés respectivement de « rétrograde » et « progressif », en anglais *backward* et *forward*. (Précisons que ces appellations n'ont réellement de sens que dans le cas non-homogène.) La section 3 du chapitre précédent était, d'une certaine manière, consacrée au semigroupe rétrograde – quoique de façon indirecte, probabiliste plutôt qu'analytique – dont nous avons déjà souligné l'importance. Nous allons maintenant nous intéresser au semigroupe progressif, qui traduit le comportement du modèle dynamique considéré en termes de propagation de l'incertitude sur l'état du système. En effet, l'action du noyau  $P_t$  sur une mesure de probabilité  $\mu_0$  est définie par

$$P_t : \mu_0 \mapsto \mu_t \triangleq \mu_0 P_t,$$

avec

$$(\mu_0 P_t)(\Gamma) = \int_{\mathbb{E}} \mu_0(dx) P_t(x, \Gamma) = \mathbb{P}_{\mu_0} \{X_t \in \Gamma\}, \quad \forall \Gamma \in \mathcal{E}.$$

Les mesures  $\mu_t$  étant le plus souvent impossibles à calculer explicitement, il est important en pratique de disposer d'outils permettant de les approcher numériquement. La simulation stochastique (méthode de Monte-Carlo) est bien sûr un tel outil, dont l'usage n'est d'ailleurs pas limité au cadre markovien. Une autre approche possible, lorsqu'on a affaire à un processus de Markov, consiste à établir dans un premier temps que la famille de mesures  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  est solution d'une certaine équation – système d'EDP ou d'équations intégro-différentielles – puis dans un deuxième temps à chercher une solution numérique approchée de cette équation. Nous nous efforcerons dans le présent chapitre de déterminer quelle est cette équation dans le cas (assez général) où le processus considéré est un SHS. La résolution numérique sera abordée au chapitre V.

Nous avons choisi de qualifier d'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) les équations d'évolution considérées dans ce chapitre, dans la mesure où elles redonnent, dans le cas particulier des processus de diffusion, l'équation de Fokker-Planck habituelle, aussi appelée équation de Kolmogorov progressive.

## 1.A De la formule de Dynkin à l'équation de Fokker-Planck

L'approche « classique » pour établir l'équation de FPK, dans le cas d'un processus de diffusion à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , procède par dualité à partir de la formule de Dynkin : on commence par écrire que, pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(1.1) \quad \mathbb{E}_{\mu_0} \{ \varphi(X_t) - \varphi(X_0) \} = \int_0^t \mathbb{E}_{\mu_0} \{ L_c \varphi(X_s) \} ds .$$

Puis, en supposant que  $\mu_t$  admet une densité suffisamment régulière par rapport à la mesure de Lebesgue, on passe de  $L_c$  à son adjoint formel  $L_c^*$  en utilisant deux intégrations par parties (par rapport aux variables d'espace), et on dérive par rapport au temps sous l'intégrale, ce qui donne

$$(1.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial p_t}{\partial t} - L_c^* p_t \right) \varphi = 0 .$$

Enfin, ceci étant vrai pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$ , on en déduit que

$$(1.3) \quad \frac{\partial p_t}{\partial t} = L_c^* p_t .$$

Une démarche tout à fait similaire s'applique en présence de sauts spontanés, par exemple dans le cas des diffusions alternantes, et plus généralement des SHS à sauts spontanés : à la formule de Dynkin 1.1 s'ajoute alors le terme

$$\int_0^t \mathbb{E}_{\mu_0} \{ \lambda(X_s) (K\varphi - \varphi)(X_s) \} ds ,$$

qui fait apparaître dans l'équation de FPK généralisée un terme supplémentaire, dont la forme exacte dépend fortement du noyau  $K$  considéré. En fait, ce terme supplémentaire est en général une mesure, mais dans certains cas particuliers il admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue dont on sait donner l'expression (cf. section 3). Venons-en maintenant au cas des sauts forcés, qui une fois encore est celui qui pose le plus de problèmes. Les premières étapes de la démarche que l'on vient de décrire peuvent être reproduites à l'identique, à condition toutefois de se restreindre à des fonctions  $\varphi$  appartenant au domaine du premier générateur étendu, et donc en particulier vérifiant la condition  $\varphi = K\varphi$  sur  $E^B$  (ou au moins sur un sous-ensemble suffisamment grand de  $E^B$ , cf. chapitre III, théorème 3.23). Malheureusement, l'analogue de l'équation 1.2 n'est alors établie que pour un sous-espace de  $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$ , ce qui n'est pas suffisant pour conclure (et pour cause, il manquerait un terme dans l'équation ainsi obtenue).

### Plan du chapitre

La section 2 a pour but de présenter la forme la plus générale de l'équation de FPK pour les systèmes hybrides stochastiques décrits au chapitre III. Nous la baptisons *équation de Fokker-Planck abstraite* par opposition à l'équation de Fokker-Planck usuelle qui est une EDP portant sur la densité de probabilité : l'équation considérée ici sera une équation entre mesures de Radon, qui contiendra en général à la fois des termes à densité et des termes singuliers. C'est à ce prix seulement que l'on parvient à donner une forme générale de l'équation de FPK, valable quels que soient la nature des sauts et le noyau de réinitialisation. Notre point de départ ne sera pas la formule de Dynkin usuelle 1.1 mais la formule de Dynkin généralisée du § III.3.C, qui permet de faire apparaître tout naturellement les « termes manquants » évoqués plus haut : il s'agit de ce que nous appellerons les termes de source et de drain, dont l'interprétation probabiliste repose sur

la notion d'intensité moyenne de sauts (§ 2.A). La démonstration de l'équation de FPK abstraite proprement dite se trouve au § 2.B, et le § 2.C est consacré à l'expression explicite des termes de cette équation lorsque les lois  $\mu_t$  possèdent une densité par rapport à la mesure de volume.

Le plus souvent, en pratique, on suppose<sup>1</sup> qu'une densité de probabilité (ddp) suffisamment régulière existe par rapport à une mesure de référence, le plus souvent par rapport à la mesure de volume  $\mathfrak{m}$  sur l'espace hybride  $E$  (cf. § 1.B pour la définition). Il est alors possible d'expliciter l'équation de FPK abstraite de façon à obtenir ce que nous appelons *l'équation de FPK généralisée* du modèle considéré. Il ne s'agit plus d'une équation entre mesures, mais d'une équation d'évolution portant sur la ddp, assortie d'un certain nombre de relations statiques<sup>2</sup> – c'est-à-dire ne faisant pas intervenir de dérivée par rapport au temps, ce que Feller (1952) appelle des *conditions latérales*. Nous verrons dans la section 3 comment l'équation de FPK abstraite nous permet de retrouver l'ensemble des équation de FPK généralisées connues dans la littérature (§§ 3.A et 3.B), mais aussi d'obtenir l'équation de FPK généralisée pour une classe intéressante de SHS à sauts forcés (§ 3.C) qui contient en particulier le modèle décrit au § III.4.A.

### Remarque concernant la nature des équations obtenues

Par rapport au cas habituel des processus de diffusion sur  $\mathbb{R}^n$ , deux complications s'ajoutent au niveau de l'équation d'évolution ainsi obtenue. D'une part, l'équation d'évolution en question est en réalité un système d'équations d'évolution, une pour chaque mode, les équations pouvant être couplées de différentes façons (selon la nature des sauts et le noyau de réinitialisation). D'autre part, il ne s'agit plus en général d'une EDP mais plus généralement d'une équation *intégro-différentielle*. Toutefois, il existe des classes de modèles pour lesquels la présence de sauts ne conduit pas à l'apparition d'un terme intégral dans l'équation d'évolution. Il est très intéressant de savoir reconnaître ces modèles, une EDP étant en général beaucoup plus simple à traiter numériquement qu'une équation intégro-différentielle. Ceci est lié, une fois encore, à la nature des sauts (forcés ou spontanés) ainsi qu'au noyau de réinitialisation. Il est bien connu que les diffusions alternantes possèdent cette propriété remarquable (§ 3.B) ; mais c'est aussi vrai – et cela semble très mal connu dans la littérature – pour certains modèles à sauts forcés, que nous étudierons au § 3.C.

## 1.B Hypothèses et notations

La notation  $\mu_0$  désigne dans tout ce chapitre une mesure de probabilité sur  $(E, \mathcal{E})$  qui sera la loi initiale du processus  $X$ . Toutes les grandeurs déterministes – la loi  $\mu_t$  de  $X_t$ , le courant de probabilité  $\mathbf{j}$ , etc. – calculées dans ce chapitre le sont relativement à la loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}$ , la référence explicite à  $\mu_0$  étant omise pour alléger les notations. On peut supposer sans perte de généralité que  $\mu_0(E^B) = 0$ , quitte à remplacer  $\mu_0$  par la loi de  $X_0$  sous  $\mathbb{P}_{\mu_0}$ . De plus, on supposera vérifiée l'hypothèse suivante :

$$(1.4) \text{ Hypothèse. } \mathbb{E}_{\mu_0}\{N_t\} < +\infty, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Ceci entraîne en particulier que le processus  $X$  a une durée de vie presque sûrement infinie sous  $\mathbb{P}_{\mu_0}$ .

---

<sup>1</sup>Il serait évidemment souhaitable de *prover* l'existence et la régularité de la ddp, mais nous ne disposons pas de résultat permettant de le faire. Voir la discussion à ce sujet en introduction de la section 3

<sup>2</sup>Ceci est tout à fait similaire à ce qui se passe en électromagnétisme, lorsque l'on veut par exemple analyser le champ électromagnétique au voisinage d'une surface chargée : les équations de Maxwell « abstraites », c'est-à-dire interprétées au sens des distributions, renferment à la fois les équations usuelles (là où les champs sont suffisamment réguliers) et les différentes conditions de transmission au niveau de la surface.

### Mesure de volume $\mathfrak{m}$ et densités modales

Nous considérons dans tout ce chapitre un espace d'état hybride  $E = \coprod_{q \in \mathcal{Q}} E_q$  satisfaisant aux mêmes hypothèses que dans le chapitre précédent (cf III.2.1). Nous noterons  $\mathcal{Q}^d$  l'ensemble des modes purement discrets, i.e. l'ensemble des  $q \in \mathcal{Q}$  tels que  $n_q = 0$ , et  $E^d = \coprod_{q \in \mathcal{Q}^d} E_q$  le sous-ensemble correspondant de l'espace d'état.

Nous nous intéresserons tout particulièrement au cas où les lois  $\mu_t$  du processus considéré possèdent une densité  $p_t$  par rapport à la mesure de volume  $\mathfrak{m}$  sur  $E$  définie par

$$\mathfrak{m}(\Gamma) = \sum_{q \notin \mathcal{Q}^d} \mathfrak{m}_q(\Gamma) + \sum_{x \in E^d} \delta_x(\Gamma),$$

où  $\mathfrak{m}_q$  est la mesure de Lebesgue sur  $E_q$ . La mesure d'un borélien  $\Gamma \in \mathcal{E}$  se décompose alors de la manière suivante :

$$\mu_t(\Gamma) = \sum_{q \notin \mathcal{Q}^d} \int_{\Gamma \cap E_q} p_t(q, \cdot) d\mathfrak{m}_q + \sum_{x \in E^d} p_t(x) \delta_x(\Gamma).$$

On appelle parfois *densités modales* les fonctions  $p_t(q, \cdot)$ , qui correspondent – à un coefficient près – aux densités conditionnelles de  $Z_t$  sachant  $Q_t = q$ , pour  $n_q \geq 1$ .

### Régularité du bord $\partial E$ , mesure de surface $\mathfrak{s}$ et théorème de la divergence

Une partie des calculs de ce chapitre repose sur l'utilisation d'intégrations par parties, pour passer de la formule de Dynkin à l'équation de FPK. Nous avons besoin pour cela d'hypothèses supplémentaires sur la géométrie de l'espace d'état, plus précisément sur la régularité de la frontière pour les modes de dimension  $n_q \geq 2$  :

(1.5) **Hypothèse.** *Pour tout  $q \in \mathcal{Q}$  tel que  $n_q \geq 2$ , le bord  $\partial E_q$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .*

Il résulte de cette hypothèse que, pour chaque  $q \notin \mathcal{Q}^d$ , le sous-espace  $E_q$  peut être vu comme une variété riemannienne de classe  $\mathcal{C}^2$  à bord, avec la métrique induite par la structure euclidienne de  $\mathbb{R}^{n_q}$ . La notion de champ de vecteurs sur l'espace hybride  $E$  a déjà été définie au chapitre III, § 2.A : pour tout  $q \in \mathcal{Q}$  tel que  $n_q \geq 1$ , la restriction d'un champ de vecteurs  $\mathbf{g}$  sur  $E$  à  $E_q$  est un champ de vecteur sur  $E_q$  au sens habituel de la géométrie différentielle. Il en va de même pour la mesure  $\mathfrak{m}$ , dont la restriction à chaque mode non discret est la mesure de Lebesgue, i.e. la mesure de volume riemannienne sur  $E_q$  vu comme une variété.

Nous allons maintenant définir de façon similaire une mesure de surface et un opérateur divergence, afin de pouvoir énoncer proprement une version du théorème de la divergence valable sur l'espace hybride  $E$ . Considérons pour cela un champ de vecteurs  $\mathbf{g}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $E$ , et notons  $\mathbf{g}^i$  ses composantes dans le repère orthonormé  $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^1}, \frac{\partial}{\partial z^2}, \dots \right\}$  (dont la dimension varie avec  $q$ ) : nous définissons alors la divergence de  $\mathbf{g}$  par

$$\operatorname{div}(\mathbf{g}) = \begin{cases} \sum_i \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial z^i} & \text{sur } E \setminus E^d, \\ 0 & \text{sur } E^d. \end{cases}$$

Définissons ensuite le bord  $\partial E$  de l'espace d'état en posant  $\partial E = \coprod_{q \notin \mathcal{Q}^d} \partial E_q$  (ce qui revient à convenir que les  $E_q$  de dimension 0 n'ont pas de bord) et notons, pour tout  $q \notin \mathcal{Q}^d$ ,  $\mathfrak{s}_q$  la mesure de surface riemannienne sur  $\partial E_q$  : il est alors naturel de construire une mesure  $\mathfrak{s}$  sur  $\partial E$  par la relation

$$\mathfrak{s}(\Gamma) = \sum_{q \notin \mathcal{Q}^d} \mathfrak{s}_q(\Gamma \cap \partial E_q).$$

En notant  $\mathbf{n}$  la normale sortante sur  $\partial E$  (i.e. le champ de vecteur défini sur  $\partial E$ , dont la restriction sur chaque mode de dimension  $n_q \geq 2$  est la normale sortante au sens usuel), nous pouvons maintenant énoncer le théorème de la divergence pour l'espace hybride  $E$ , qui n'est rien d'autre que le théorème de la divergence habituel appliqué à chacun des modes (voir par exemple Lee, 2003, théorème 14.23) :

(1.6) **Théorème.** *Pour tout champ de vecteurs  $\mathbf{g}$  sur  $E$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et à support compact, on a*

$$\int_E \operatorname{div}(\mathbf{g}) \, dm = \int_{\partial E} \langle \mathbf{g}, \mathbf{n} \rangle \, ds.$$

(1.7) **Remarques.**

- a) Les variétés  $E_q$  considérées ici sont particulièrement simples – elles sont plates! – mais on pourrait sans difficulté supplémentaire considérer des processus diffusifs par morceaux à valeurs dans des variétés riemanniennes plus générales<sup>3</sup> : les expressions en coordonnées de la mesure  $\mathbf{m}$  et de l'opérateur divergence feraient alors intervenir la métrique, mais les expressions intrinsèques resteraient les mêmes. Indépendamment d'une telle généralisation, dont l'intérêt pour les applications n'est pas évident, les quelques notations que nous venons d'introduire nous permettront dans toute la suite de manipuler presque exclusivement des notations intrinsèques dont la signification géométrique est – nous semble-t-il – beaucoup plus immédiate que celle des expressions en coordonnées correspondantes.
- b) Nous avons supposé par souci de simplicité que le bord de l'espace d'état est de classe  $\mathcal{C}^2$  : on rencontre fréquemment en pratique le cas où le bord est seulement de classe  $\mathcal{C}^2$  – et en fait même  $\mathcal{C}^\infty$  – par « morceaux ». En termes de géométrie, on n'a plus affaire dans ce cas à une variété à bords mais à une *variété à coins*, ce qui ne change rien aux arguments utilisés dans ce chapitre puisque le théorème de la divergence reste valable dans ce contexte (Lee, 2003, théorème 14.20).
- c) Pour finir, rappelons brièvement comment calculer une intégrale par rapport à la mesure  $\mathfrak{s}_q$ . Pour les modes de dimension  $n_q = 1$ , la mesure surfacique est simplement la mesure de comptage sur le bord qui est discret. Soit  $q \in \mathcal{Q}$  un mode tel que  $n_q \geq 2$ . En notant  $y = (y^1, \dots, y^{n_q-1}) \in \mathbb{R}^{n_q-1}$  les coordonnées dans une carte  $(U, \varphi)$  de  $\partial E_q$ , on a

$$\mathfrak{s}_q(dy^1, \dots, dy^{n_q-1}) = \sqrt{|\det \kappa_{\varphi^{-1}(y)}|} \, dy^1 \dots dy^{n_q-1}.$$

où  $\kappa_x$  désigne la matrice des composantes de la métrique de  $\partial E_q$  au point  $x \in U$  dans le repère naturel associé à  $(U, \varphi)$ , c'est-à-dire

$$(\kappa_x)_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n_q - 1.$$

### Régularité des champs de vecteurs et EDS de Stratonovich

Nous avons simplement supposé, au chapitre III, que la dérive  $\mathbf{f}$  et les champs de vecteurs  $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$  définissant le processus de base étaient suffisamment réguliers pour qu'existe le processus de base (cf. hypothèse III.2.8) : il nous faudra dans ce chapitre des hypothèses de régularité un peu plus fortes. Plus précisément, on suppose que :

---

<sup>3</sup>En fait, on pourrait même se passer de la structure riemannienne et travailler sur une variété différentiable complètement abstraite. Il n'y a plus alors de mesure de volume de référence : l'équation de Fokker-Planck dans un tel contexte se formule en termes de formes différentielles, à l'aide de la dérivée de Lie, et le théorème de Stokes se substitue au théorème de la divergence (qui en est un cas particulier).



(1.8) **Hypothèses.**

- i) La dérive  $\mathbf{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $E$ .
- ii) Les champs de vecteurs  $\mathbf{g}_l$ ,  $1 \leq l \leq m$ , sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $E$ .

En particulier, cela entraîne que  $\mathbf{f}$  et les  $\mathbf{g}_l$  sont localement lipschitziens, comme l'exige le théorème 2.12 du chapitre III. On peut sous ces hypothèses réécrire l'EDS

$$(1.9) \quad d\tilde{X}_t = \mathbf{f}(\tilde{X}_t) dt + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\tilde{X}_t) d\tilde{B}_t^j$$

du processus de base sous la forme équivalente

$$(1.10) \quad d\tilde{X}_t = \mathbf{g}_0(\tilde{X}_t) dt + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\tilde{X}_t) \mathfrak{d}\tilde{B}_t^j,$$

le champ de vecteurs  $\mathbf{g}_0$  étant défini dans le repère naturel  $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^1}, \frac{\partial}{\partial z^2}, \dots \right\}$  par

$$(1.11) \quad \mathbf{g}_0^i = \mathbf{f}^i - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \sum_j \mathbf{g}_l^j \frac{\partial \mathbf{g}_l^i}{\partial z^j}$$

et le symbole différentiel  $\mathfrak{d}$  indiquant une intégrale de Stratonovich (voir Rogers et Williams, 2000b, §§ IV.46 et V.30). Contrairement à la dérive  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}_0$  est un « vrai » champ de vecteurs au sens intrinsèque du terme<sup>4</sup>. Par ailleurs, l'hypothèse 1.8 implique que  $\mathbf{g}_0$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

L'hypothèse 2.1.iii du chapitre III ne suppose pas que la garde  $E^B$  coïncide avec la frontière tout entière, mais seulement que  $E^B$  est un fermé de  $\partial E$  : on montre facilement que cela n'est possible que si les coefficients de l'EDS vérifient sur  $\partial E \setminus E^B$  les relations

$$(1.12) \quad \begin{cases} \langle \mathbf{g}_0, \mathbf{n} \rangle \leq 0, \\ \langle \mathbf{g}_l, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad \forall l \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Nous supposons de plus que  $E^B$  vérifie l'hypothèse topologique suivante :

(1.13) **Hypothèse.** La garde  $E^B$  coïncide avec la fermeture de son intérieur dans  $\partial E$ .

(1.14) **Remarque.** Les conditions 1.12 sur les champs de vecteurs ne dépendent en fait pas de la métrique : la première exprime que le vecteur  $\mathbf{g}_0$  est dirigé vers l'intérieur de l'espace d'état, et la deuxième que chacun des  $\mathbf{g}_l$ ,  $1 \leq l \leq m$ , est tangent à  $\partial E$ . On peut également vérifier que, lorsque la deuxième condition est vérifiée, la première équivaut à dire que la dérive  $\mathbf{f}$  est dirigée vers l'intérieur de l'espace d'état dans n'importe quel système de coordonnées. (On obtient la dérive dans un système de coordonnées quelconque à partir des composantes de  $\mathbf{g}_0$  par la relation 1.11, ou encore à partir de la dérive dans un autre système de coordonnées à partir de la formule d'Itô.)

### Le générateur différentiel $L_c$ et son adjoint formel $L_c^*$

Le générateur différentiel  $L_c$  associé à l'EDS 1.9 a déjà été introduit au chapitre III (cf. proposition 2.28) : on peut maintenant le réécrire sous la forme dite « de Hörmander », qui fait intervenir

---

<sup>4</sup>Cela signifie que l'EDS 1.10 reste valable dans n'importe quel système de coordonnées si on applique à  $\mathbf{g}_0$  – et aussi aux  $\mathbf{g}_l$ ,  $l \geq 1$  – la transformation habituelle des composantes d'un champ de vecteur, i.e. la multiplication par le jacobien du changement de variable. Cela n'est pas vrai pour la dérive  $\mathbf{f}$  d'après la formule d'Itô.

uniquement les champs de vecteurs  $\mathbf{g}_l$ ,  $0 \leq l \leq m$ , vus comme des opérateurs différentiels du premier ordre :

$$(1.15) \quad L_c = \mathbf{g}_0 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \mathbf{g}_l \circ \mathbf{g}_l.$$

La régularité des champs de vecteurs nous assure que  $L_c$  envoie  $\mathcal{C}^2(\mathbb{E})$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{E})$  et  $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{E})$  dans  $\mathcal{C}_c(\mathbb{E})$ .

L'équation de Fokker-Planck usuelle 1.3 fait intervenir l'adjoint formel  $L_c^*$  de  $L_c$  (formel signifiant « sans tenir compte des termes de bord ») par rapport à la mesure de volume  $\mathbf{m}$ . Dans un système de coordonnées euclidien, cet opérateur différentiel s'écrit

$$(1.16) \quad L_c^* p = - \sum_i \frac{\partial}{\partial z^i} (\mathbf{g}_0^i p) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial z^i} \left( \mathbf{g}_l^i \frac{\partial}{\partial z^j} (\mathbf{g}_l^j p) \right),$$

où  $p \in \mathcal{C}^2(\mathbb{E})$ , ce qui devient en notation intrinsèque :

$$(1.17) \quad L_c^* p = - \operatorname{div} \left( p \mathbf{g}_0 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \operatorname{div} (p \mathbf{g}_l) \mathbf{g}_l \right).$$

Ceci conduit naturellement à introduire l'opérateur linéaire

$$\mathcal{J} : p \mapsto p \mathbf{g}_0 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \operatorname{div} (p \mathbf{g}_l) \mathbf{g}_l,$$

de sorte que  $L_c^* = - \operatorname{div} \circ \mathcal{J}$ . L'opérateur  $\mathcal{J}$  associe à toute fonction  $p \in \mathcal{C}^2(\mathbb{E})$  un champ de vecteurs  $\mathcal{J}p$  de classe  $\mathcal{C}^1$  (la régularité découle du fait que  $p$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et de l'hypothèse 1.8). Lorsque la mesure  $\mu_t$  admet une densité  $p_t$  par rapport à  $\mathbf{m}$ , on appelle *courant de probabilité* le champ de vecteur  $\mathbf{j}_t = \mathcal{J}p_t$ . Cette appellation est justifiée par l'interprétation physique de l'équation de Fokker-Planck usuelle comme équation de conservation de la probabilité :

$$(1.18) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, t) + \operatorname{div}(\mathbf{j}_t) = 0.$$

Notons que l'opérateur  $\mathcal{J}$  est un opérateur local, ce qui autorise à définir le champ de vecteurs  $\mathcal{J}p$  localement sur un ouvert de  $\mathbb{E}$  dès que la fonction  $p$  y est suffisamment régulière.

### L'opérateur $\underline{L}_c^*$

En lien avec l'opérateur différentiel  $L_c^*$ , introduisons un autre opérateur  $\underline{L}_c^*$ , qui associe à toute mesure de Radon  $\mu$  une distribution d'ordre 2

$$\begin{aligned} \underline{L}_c^* \mu : \mathcal{C}_c^2(\mathbb{E}) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi &\mapsto (\underline{L}_c^* \mu) \varphi = \mu(L_c \varphi). \end{aligned}$$

Cet opérateur interviendra de manière naturelle dans l'équation de FPK abstraite au § 2.B. Signalons dès à présent que, même lorsque la mesure  $\mu$  admet une densité  $p$  de classe  $\mathcal{C}^2$  relativement à la mesure de volume  $\mathbf{m}$ , l'opérateur  $\underline{L}_c^*$  ne s'identifie pas à l'opérateur différentiel  $L_c^*$ . Plus précisément :

$$(\underline{L}_c^* \mu) \varphi = \int_{\mathbb{E}} L_c^* p \varphi \, d\mathbf{m} + \text{termes de bord}.$$

Nous reviendrons sur ce point et calculerons explicitement les termes de bord au § 2.C.

(1.19) **Remarque.** Cette façon d'inclure les termes de bord est conforme avec les conventions adoptées par Schwartz (1966) concernant les distributions sur les variétés à bord. Par exemple, la dérivée d'une distribution  $L$  est définie par la relation de dualité

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \varphi = -L \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

En d'autres termes, l'opérateur  $\underline{L}_c^*$  est un opérateur différentiel défini formellement comme  $L_c^*$  par l'équation 1.16, mais avec une interprétation des dérivées au sens des distributions sur une variété à bord.

### Conventions concernant les modes purement discrets

Il est préférable d'introduire quelques conventions concernant les modes de dimension  $n_q = 0$ , pour éviter d'avoir à énoncer sans cesse des cas particuliers.

Rappelons d'abord que nous avons défini (chapitre III, § 2.A) l'ensemble  $\mathcal{C}^k(A)$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $A \subset E$  par la propriété : pour tout  $q \in \Omega \setminus \Omega^d$ , la restriction de  $\varphi$  à  $A \cap E_q$  possède une extension de classe  $\mathcal{C}^k$  à un voisinage ouvert de  $A \cap E_q$  dans  $\mathbb{R}^{n_q}$ . Cette propriété ne dépend pas de la valeur de  $\varphi$  sur  $E^d$ . Similairement, nous dirons qu'une fonction  $p$  est de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur  $A \times \mathbb{R}_+$  si : 1) pour tout  $q \in \Omega \setminus \Omega^d$ , la restriction de  $p$  à  $E_q \times \mathbb{R}_+$  est de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$ , et si 2) pour tout  $x \in E^d$ , la fonction  $p(x, \cdot)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Rappelons également que, par convention – chapitre III, § 2.A, encore une fois – un champ de vecteur sur  $E$  est supposé nul sur  $E^d$ . Cela reste vrai pour les opérateurs différentiels  $L_c$  et  $L_c^*$ , puisque ceux-ci n'ont pas de terme de degré 0. Ainsi, le terme de diffusion qui apparaîtra systématiquement dans nos équations disparaît en fait sur les modes purement discrets (dans lesquels il ne peut y avoir de diffusion!).

## 2 L'équation de FPK abstraite

Le point de départ de notre raisonnement est la formule de Dynkin généralisée

$$(2.1) \quad \mathbb{E}_{\mu_0} \{ \varphi(X_t) - \varphi(X_0) \} = \int_0^t \mathbb{E}_{\mu_0} \{ L_c \varphi(X_s) \} ds + \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \sum_{\tau_k \leq t} (\varphi(X_{\tau_k}) - \varphi(X_{\tau_k}^-)) \right\},$$

où  $\varphi$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  à support compact. Rappelons qu'une telle fonction n'est pas, en général, dans le domaine du premier générateur étendu, puisqu'elle ne vérifie pas nécessairement la condition  $\varphi = K\varphi$  sur  $E^B$  (cf. chapitre III, théorème 3.23.iii). La nouveauté par rapport à la démarche habituelle – décrite en introduction – se situe donc au niveau du dernier terme : en présence de sauts forcés, on ne peut plus remplacer de façon aussi immédiate la somme par une intégrale sur le temps. En effet, la manipulation d'expressions faisant intervenir des sauts forcés est en général plus délicate, en raison de l'absence d'une intensité stochastique de sauts (cf. chapitre III, § 3.B). Nous commencerons donc par introduire au § 2.A la notion d'intensité *moyenne* de sauts, qui permet de dépasser cette difficulté. Puis nous obtiendrons au § 2.B l'équation de FPK abstraite, dont les termes seront calculés de manière beaucoup plus explicite au § 2.C, en supposant qu'une ddp suffisamment régulière existe.

## 2.A La notion d'intensité moyenne de sauts

Considérons la mesure positive  $R$  sur  $E \times ]0; +\infty[$  définie par

$$R(A) = \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_A (X_{\tau_k}^-, \tau_k) \right\}.$$

Pour  $A$  de la forme  $\Gamma \times ]0; t]$ , où  $\Gamma \in \mathcal{E}$  et  $t > 0$ , la grandeur  $R(\Gamma \times ]0; t])$  s'interprète comme le nombre moyen de sauts issus de  $\Gamma$  dans l'intervalle de temps  $]0; t]$ . Cette mesure permet de calculer le terme de saut dans l'équation 2.1 :

(2.2) **Lemme.** *Pour toute fonction  $\vartheta$  borélienne bornée de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , on a la relation :*

$$\mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \sum_{\tau_k \leq t} \vartheta(X_{\tau_k}^-, X_{\tau_k}) \right\} = \iint_{E \times ]0; t]} (K\vartheta)(x) R(dx, ds),$$

où  $(K\vartheta)(x) = \int_E K(x, dy) \vartheta(x, y)$ .

On définit alors la notion d'intensité moyenne de sauts :

(2.3) **Définition.** *On dira que le processus admet une intensité moyenne de sauts, pour la mesure initiale  $\mu_0$ , s'il existe une application  $t \mapsto r_t$ , à valeurs dans l'ensemble des mesures positives sur  $E$ , telle que :*

- i) pour tout  $\Gamma \in \mathcal{E}$ , la fonction  $t \mapsto r_t(\Gamma)$  est mesurable ;
- ii) pour tous  $\Gamma \in \mathcal{E}$  et  $t > 0$ ,  $R(\Gamma \times ]0; t]) = \int_0^t r_s(\Gamma) ds$ .

La quantité  $r_t(\Gamma)$  s'interprète comme le nombre moyen de sauts partant de  $\Gamma$  par unité de temps, à l'instant  $t > 0$  (autrement dit,  $r_t(\Gamma) dt$  est le nombre moyen de sauts dans l'intervalle  $[t; t + dt]$ ). On peut bien sûr s'intéresser séparément au nombre moyen de sauts forcés et de sauts spontanés, en décomposant  $R$  en deux mesures portées respectivement par  $E^0$  et  $E^B$  :

$$\begin{aligned} R^0(A) &= R(A \cap E^0 \times ]0; +\infty[), \\ R^B(A) &= R(A \cap E^B \times ]0; +\infty[). \end{aligned}$$

On définit alors simplement l'intensité moyenne de sauts spontanés  $r^0$  (resp. l'intensité moyenne de sauts forcés  $r^B$ ) en remplaçant  $R$  par  $R^0$  (resp. par  $R^B$ ) dans la définition 2.3.

(2.4) **Remarques.**

- a) La relation 2.3.ii entraîne que  $R(dx, ds) = r_s(dx) ds$ , c'est-à-dire que pour toute fonction borélienne  $\Phi : E \times ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  on a :

$$\iint_{E \times ]0; +\infty[} \Phi(x, s) R(dx, ds) = \int_0^{+\infty} \left( \int_E \Phi(x, s) r_s(dx) \right) ds.$$

- b) La mesure  $R$  n'est pas bornée en général : en effet, la quantité  $R(E \times ]0; +\infty[) = \mathbb{E}_{\mu_0} \{N\}$  peut tout à fait être infinie. Par contre, la restriction de  $R$  à  $E \times ]0; t]$  est toujours une mesure bornée, puisque

$$R(E \times ]0; t]) = \mathbb{E}_{\mu_0} \{N_t\} < +\infty$$

d'après l'hypothèse 1.4. Il s'ensuit que  $r_t(E) < +\infty$  presque partout sur  $]0; +\infty[$ . On supposera donc sans perte de généralité que  $r_t$  est une mesure bornée pour tout  $t$ .

L'existence d'une intensité moyenne de sauts dépend a priori de la mesure  $\mu_0$  considérée. En fait, dans le cas des sauts spontanés, cela découle directement de l'existence d'une intensité *stochastique* de sauts, et ne dépend donc pas de  $\mu_0$  :

(2.5) **Proposition.** *Il existe une intensité moyenne  $r^0$  pour les sauts spontanés. Pour tout  $t \geq 0$ , la mesure  $r_t^0$  est portée par  $E^0$ , et vérifie  $dr_t^0 = \lambda d\mu_t$ , i.e.*

$$r_t^0(\Gamma) = \int \lambda \mathbb{1}_\Gamma d\mu_t = \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \lambda(X_t) \mathbb{1}_{X_t \in \Gamma} \right\}.$$

(2.6) **Remarque.** Observons que les champs de vecteurs  $\mathbf{g}_i$  qui définissent l'EDS n'apparaissent pas du tout dans l'expression de  $r_t^0$  : l'intensité moyenne des sauts spontanés est directement reliée à la loi de  $X_t$  à l'instant  $t$ , par l'intermédiaire de la fonction  $\lambda$ . On verra que, dans le cas des sauts forcés, l'intensité moyenne de sauts est – lorsqu'elle existe – fonction non seulement de  $\mu_t$  mais aussi des coefficients de l'EDS.

□ **Démonstration de la proposition 2.5.** Il suffit d'appliquer le corollaire III.3.17 à la fonction  $(x, y) \mapsto \mathbb{1}_\Gamma(x)$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} R^0(\Gamma \times ]0; t]) &= \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \sum_{\tau_k^0 \leq t} \mathbb{1}_\Gamma(X_s^-) \right\} \\ &= \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \int_0^t \mathbb{1}_\Gamma(X_s) \lambda(X_s) ds \right\} \\ &= \int_0^t \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \mathbb{1}_\Gamma(X_s) \lambda(X_s) \right\} ds. \end{aligned}$$

■

□ **Démonstration du lemme 2.2.** À nouveau d'après le corollaire III.3.17, appliqué cette fois à la fonction  $\vartheta$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \sum_{\tau_k \leq t} \vartheta(X_{\tau_k}^-, X_{\tau_k}) \right\} &= \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \int_0^t (K\vartheta)(X_s) \lambda(X_s) ds \right\} + \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \sum_{\tau_k^B \leq t} (K\vartheta)(X_s^-) \right\} \\ &= \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \int_0^t (K\vartheta)(X_s) \lambda(X_s) ds \right\} + \iint_{E \times ]0; t]} (K\vartheta)(x) R^B(dx, ds). \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme se calcule facilement en utilisant l'intensité moyenne  $r^0$  des sauts spontanés donnée par la proposition 2.5 : pour tout  $t > 0$ ,  $dr_t^0 = \lambda d\mu_t$ , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_0} \left\{ \int_0^t (K\vartheta)(X_s) \lambda(X_s) ds \right\} &= \iint_{E \times ]0; t]} (K\vartheta)(x) \lambda(x) \mu_s(dx) ds \\ &= \iint_{E \times ]0; t]} (K\vartheta)(x) r_s^0(dx) ds \\ &= \iint_{E \times ]0; t]} (K\vartheta)(x) R^0(dx, ds), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration puisque  $R = R^0 + R^B$ . ■

L'existence d'une intensité moyenne  $r^B$  semble beaucoup moins évidente dans le cas des sauts forcés, et pour cause : il se peut tout à fait qu'il n'y en ait pas. Ceci n'est pas vraiment surprenant puisqu'on sait qu'il n'existe pas d'intensité stochastique dans ce cas (cf. chapitre III, § 3.B). Est-il pour autant déraisonnable de supposer l'existence d'une intensité moyenne de sauts en présence de sauts forcés ? Nous verrons au § 2.C qu'il s'agit en fait d'une conséquence de l'existence d'une densité de probabilité assez régulière, ce que l'on devra de toutes façons supposer pour travailler

avec l'équation de FPK en pratique. Contentons-nous pour l'instant d'examiner un exemple très simple, qui met en lumière le rôle essentiel de la loi initiale  $\mu_0$  dans ce problème, particulièrement lorsque la partie diffusive du modèle est dégénérée (et à plus forte raison lorsqu'il s'agit d'un processus déterministe par morceaux).

(2.7) **Exemple.** Considérons sur  $E = [0; 1]$  le processus déterministe par morceaux  $X$  qui se déplace à une vitesse constante  $v > 0$  sur  $E^0 = [0; 1[$ , et qui retourne instantanément en 0 lorsqu'il atteint 1 – autrement dit, on a  $E^B = \{1\}$  et  $K(1, \cdot) = \delta_0$ .

Pour la loi initiale  $\mu_0 = \delta_0$ , le processus saute de 1 à 0 à chaque fois que  $t$  est multiple de  $1/v$ , i.e.  $\tau_k = k/v$  et  $X_{\tau_k}^- = 1$  presque sûrement. On a donc dans ce cas  $R = \sum_{k \geq 1} \delta_{(1, k/v)}$  : il n'existe pas d'intensité moyenne de sauts. Par contre, la situation est différente si l'on considère comme loi initiale la loi uniforme sur  $[0; 1]$ . On a alors

$$\begin{aligned} R(\Gamma \times ]0; t]) &= \delta_1(\Gamma) \int_0^1 \operatorname{argmax}_{k \geq 1} \left\{ \frac{k-x}{v} \leq t \right\} dx \\ &= \delta_1(\Gamma) \int_0^1 \lceil vt + x \rceil dx \\ &= vt \delta_1(\Gamma), \end{aligned}$$

où  $\lceil vt + x \rceil$  est le plus petit entier supérieur ou égal à  $vt + x$ . Il existe donc une intensité moyenne de sauts, qui vaut  $r_t = v \delta_1$ . En particulier, cela signifie que le nombre moyen de sauts par unité de temps vaut  $r_t(E) = v$ .

## 2.B Établissement de l'équation de FPK abstraite

En supposant qu'une intensité moyenne de sauts existe, on peut réécrire la formule de Dynkin généralisée 2.1 sous la forme :

$$(2.8) \quad (\mu_t - \mu_0) \varphi = \int_0^t \mu_s (L_c \varphi) ds + \int_0^t r_s (K \varphi - \varphi) ds.$$

En poursuivant formellement le programme décrit en introduction, on obtient la relation

$$(2.9) \quad \mu'_t \varphi = \mu_t (L_c \varphi) + r_t (K \varphi - \varphi),$$

où  $\mu'_t$  est la dérivée de  $t \mapsto \mu_t$  (en un sens que nous préciserons plus tard). Lorsque l'équation 2.9 est vérifiée pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(E)$ , on a l'égalité

$$(2.10) \quad \mu'_t = \underline{L}_c^* \mu_t + r_t (K - I)$$

au sens des distributions d'ordre 2, où  $I$  est le noyau identité sur  $E$ , i.e.  $I(x, \cdot) = \delta_x$ . Nous qualifierons la relation 2.10 d'*équation de FPK abstraite*. Remarquons que, si cette relation est vraie avec  $\mu'_t$  une mesure de Radon, alors la distribution  $\underline{L}_c^* \mu_t$  – qui est a priori d'ordre 2 – est en fait une mesure de Radon. Réciproquement, cela suggère que l'on doit pouvoir prouver l'existence d'une intensité moyenne de sauts en s'intéressant à la distribution  $\underline{L}_c^* \mu_t$ . Cette idée est au cœur du théorème suivant, qui est le principal résultat de cette section :

(2.11) **Théorème.** *Supposons qu'au moins deux des trois assertions suivantes sont vraies :*

- i) il existe une intensité moyenne  $r^B$  pour les sauts forcés (donc aussi une intensité moyenne  $r = r^0 + r^B$  pour l'ensemble des sauts, d'après la proposition 2.5);*

- ii) il existe une application  $t \mapsto \mu'_t$ , à valeurs dans l'espace des mesures de Radon, telle que : pour tout  $\Gamma \subset E$  compact, la fonction  $t \mapsto \mu_t(\Gamma)$  est absolument continue, de dérivée  $\mu'_t(\Gamma)$  presque partout sur  $\mathbb{R}_+$ , et  $t \mapsto |\mu'_t|(\Gamma)$  est localement intégrable.
- iii) la distribution  $\underline{L}_c^* \mu_t$  est une mesure de Radon, presque pour tout  $t \geq 0$ , et  $t \mapsto |\underline{L}_c^* \mu_t|(\Gamma)$  est localement intégrable pour tout  $\Gamma \subset E$  compact.

Alors les trois assertions sont vraies, et l'équation de FPK abstraite 2.10 est vérifiée, presque partout sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus, l'intensité moyenne  $r^B$  est donnée par la relation  $r_t^B = (\underline{L}_c^* \mu_t)(E^B \cap \cdot)$ .

(2.12) **Remarques.**

- a) La seule vraie difficulté est de montrer que 2.11.ii et 2.11.iii impliquent 2.11.i – mais c'est aussi le plus intéressant, puisque cela fournit un moyen pour prouver qu'il existe une intensité moyenne de sauts. Pour le reste, il s'agit essentiellement de reproduire la démarche formelle présentée en introduction, les hypothèses 2.11.ii et 2.11.iii justifiant respectivement la dérivation par rapport au temps et les intégrations par parties par rapport aux variables d'espace.
- b) Tout comme l'équation de Fokker-Planck usuelle, l'équation 2.10 possède une interprétation « physique » comme équation de conservation de la masse de probabilité. Pour comprendre chacun des termes de l'équation de ce point de vue, réécrivons-la sous la forme

$$\mu'_t = \underline{L}_c^* \mu_t + r_t^{\text{src}} - r_t,$$

où l'on a posé  $r_t^{\text{src}} = r_t K$ . Le terme  $\underline{L}_c^* \mu_t$ , correspondant à la partie diffusive du modèle, est une mesure de Radon signée, tandis que  $r_t$  et  $r_t^{\text{src}}$  sont des mesures positives bornées. L'intensité moyenne de saut  $r_t$  apparaît avec un signe moins dans l'équation, et joue donc le rôle de « drain » (*sink* en anglais) :  $r_t(\Gamma) dt$  correspond à la masse de probabilité prélevée par les sauts partant de  $\Gamma$  durant l'intervalle  $[t; t + dt]$ . Similairement,  $r_t^{\text{src}}$  est l'intensité moyenne des sauts arrivant dans  $\Gamma$ , et apparaît dans l'équation avec un signe plus : c'est un terme de « source », qui correspond à la réinjection dans l'espace d'état de la masse de probabilité prélevée par  $r_t$ . Ainsi, du point de vue de l'équation de FPK, les sauts du processus se présentent comme un mécanisme qui draine continûment de la probabilité au taux  $r_t$ , et la redistribue aussitôt dans l'espace d'état selon le noyau  $K$ . Bien entendu, ce mécanisme conserve la probabilité totale puisque  $K$  est un noyau de transition, ce qui se traduit par la relation  $r_t^{\text{src}}(E) = r_t(E)$  à chaque instant.

- c) Il est possible d'exprimer les termes de drain et de source d'une manière un peu plus symétrique en introduisant les mesures  $\mathscr{W}_t(dx, dy) = r_t(dx) K(x, dy)$ ,  $t \geq 0$ . On a alors

$$r_t = \int_E \mathscr{W}_t(\cdot, dy), \quad \text{et} \quad r_t^{\text{src}} = \int_E \mathscr{W}_t(dx, \cdot).$$

et l'équation 2.10 devient

$$(2.13) \quad \mu'_t = \underline{L}_c^* \mu_t + \int_E (\mathscr{W}_t(dx, \cdot) - \mathscr{W}_t(\cdot, dx)).$$

Dans le cas où il n'y a pas de sauts forcés dans le modèle, cela correspond à la formule baptisée *équation de Chapman-Kolmogorov différentielle* dans Gardiner (1985, eq. 3.4.22). La reformulation 2.13 n'apporte pas grand chose de plus dans l'étude des processus diffusifs par morceaux, mais présente l'avantage de rester valable – en un certain sens – pour des processus ayant une infinité de sauts en un temps fini (Gardiner, 1985, § 3.4.1).

□ **Démonstration du théorème 2.11.**

▷ Supposons pour commencer que les hypothèses 2.11.i et 2.11.ii sont vraies. On montre alors par un argument de classes monotones que, pour toute fonction  $\varphi$  borélienne bornée et à support compact,  $t \mapsto \mu_t \varphi$  est absolument continue de dérivée  $\mu'_t \varphi$  presque partout. Alors les deux membres de l'équation 2.8 sont absolument continus, et on obtient en dérivant que la relation 2.9 est vérifiée presque partout, pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{E})$ . En d'autres termes, on a l'égalité  $\underline{L}_c^* \mu_t = \mu'_t - r_t(K - I)$  dans l'espace des distributions d'ordre 2, ce qui prouve que  $\underline{L}_c^* \mu_t$  se prolonge en une mesure de Radon sur  $\mathbb{E}$ . De plus, on a

$$|\underline{L}_c^* \mu_t|(\Gamma) \leq |\mu'_t|(\Gamma) + 2r_t(\mathbb{E})$$

pour tout  $\Gamma \subset \mathbb{E}$  compact, ce qui prouve que  $t \mapsto |\underline{L}_c^* \mu_t|(\Gamma)$  est localement intégrable.

▷ Supposons maintenant que les hypothèses 2.11.i et 2.11.iii sont vraies. Soit  $\Gamma$  un compact de  $\mathbb{E}$ . Choisissons un ouvert  $U \subset \mathbb{E}$  relativement compact tel que  $\Gamma \subset U$ , et une suite de fonctions  $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{E})$  à support dans  $\bar{U}$  telles que  $0 \leq \varphi_n \leq 1$  et  $\varphi_n \rightarrow \mathbb{1}_\Gamma$ . Les  $\varphi_n$  sont dominées par  $\mathbb{1}_{\bar{U}}$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{E} \times [0; t]} \mathbb{1}_{\bar{U}}(x) |\underline{L}_c^* \mu_s|(\mathrm{d}x) \mathrm{d}s &= \int_0^t |\underline{L}_c^* \mu_s|(\bar{U}) \mathrm{d}s < +\infty, \\ \text{et } \iint_{\mathbb{E} \times [0; t]} \mathbb{1}_{\bar{U}}(x) |r_s(K - I)|(\mathrm{d}x) \mathrm{d}s &\leq 2 \int_0^t r_s(\mathbb{E}) \mathrm{d}s < +\infty. \end{aligned}$$

On peut donc passer à la limite dans 2.8 par convergence dominée, ce qui nous donne la relation

$$(\mu_t - \mu_0)(\Gamma) = \int_0^t (\underline{L}_c^* \mu_s)(\Gamma) \mathrm{d}s + \int_0^t r_s(K - I)(\Gamma) \mathrm{d}s.$$

Ceci montre que la fonction  $t \mapsto \mu_t(\Gamma)$  est absolument continue, de dérivée  $(\underline{L}_c^* \mu_s + r_s(K - I))(\Gamma)$  presque partout. Notons donc  $\mu'_t$  la mesure de Radon  $\underline{L}_c^* \mu_t + r_t(K - I)$ . On vérifie alors comme précédemment que  $t \mapsto |\mu'_t|(\Gamma)$  est localement intégrable, ce qui établit 2.11.ii.

▷ Supposons finalement que 2.11.ii et 2.11.iii sont vraies. On a alors, pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{E})$ ,

$$(2.14) \quad \iint_{\mathbb{E} \times [0; t]} (K\varphi - \varphi)(x) R(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) = \int_0^t (\mu'_s - \underline{L}_c^* \mu_s) \varphi \mathrm{d}s.$$

Posons  $\xi_s = \mu'_s - (\underline{L}_c^* \mu_s)(\mathbb{E}^0 \cap \cdot) - r_s(K - I)$ . Il est facile de vérifier que  $\xi_s$  est une mesure de Radon portée par  $\mathbb{E}^0$ , telle que  $s \mapsto |\xi_s|(\Gamma)$  est localement intégrable pour tout  $\Gamma \subset \mathbb{E}$  compact. En introduisant la notation  $R^{\mathbb{B}}K(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) = \int_{\mathbb{E}} R^{\mathbb{B}}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)K(x, \mathrm{d}y)$ , on a la décomposition

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \iint_{\mathbb{E}^{\mathbb{B}} \times [0; t]} \varphi(x) (R^{\mathbb{B}}(\mathrm{d}x, \cdot) - (\underline{L}_c^* \mu_s)(\mathrm{d}x)) \mathrm{d}s \\ = \iint_{\mathbb{E}^0 \times [0; t]} \varphi(x) ((R^{\mathbb{B}}K)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) - \xi_s(\mathrm{d}x) \mathrm{d}s), \end{aligned}$$

pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et à support compact. Chacune des deux mesures sur  $\mathbb{E} \times [0; t]$  apparaissant dans cette équation est une mesure de Radon (car  $t \mapsto |\xi_s|(\Gamma)$  et  $t \mapsto |\underline{L}_c^* \mu_s|(\Gamma)$  sont localement intégrables pour  $\Gamma$  compact).

Fixons maintenant un compact  $\Gamma \subset \mathbb{E}^{\mathbb{B}}$ . Soit  $U$  un ouvert relativement compact contenant  $\Gamma$ . Par des techniques classiques d'approximation (partition de l'unité et suite régularisante), on peut



construire une suite de fonctions  $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{E})$  à support dans  $U$ , telles que  $0 \leq \varphi_k \leq 1$ ,  $\varphi_k \rightarrow \mathbb{1}_\Gamma$  sur  $\mathbb{E}^B$  et  $\varphi_k \rightarrow 0$  sur  $\mathbb{E}^0$  – la convergence étant entendue au sens ponctuel. Chacune de ces fonctions  $\varphi_k$  vérifie la relation 2.15, et on peut comme précédemment passer à la limite sur  $k$  par convergence dominée :

$$(2.16) \quad \iint_{\mathbb{E}^B \times ]0; t]} \mathbb{1}_\Gamma(x) (R^B(dx, \cdot) - (\underline{L}_c^* \mu_s)(dx)) ds = 0,$$

ce qui prouve que

$$(2.17) \quad R^B(\Gamma \times ]0; t]) = \int_0^t (\underline{L}_c^* \mu_s)(\Gamma) ds$$

pour tout  $\Gamma \subset \mathbb{E}^B$  compact. De plus, comme  $t \mapsto R^B(\Gamma \times ]0; t])$  est croissante, cela implique que  $(\underline{L}_c^* \mu_s)(\Gamma) \geq 0$ , presque partout. On vérifie alors que la famille des  $\Gamma \subset \mathbb{E}^B$  mesurables, vérifiant 2.17 et  $(\underline{L}_c^* \mu_s)(\Gamma) \geq 0$  presque partout, forme une classe monotone. Donc 2.17 s'étend à tous les boréliens grâce au théorème des classes monotones, ce qui établit l'assertion 2.11.i avec l'intensité moyenne  $r^B = (\underline{L}_c^* \mu_s)(\mathbb{E}^B \cap \cdot)$ . ■

## 2.C Calcul des termes de l'équation lorsqu'une ddp régulière existe

Nous allons maintenant nous intéresser de plus près à l'expression explicite des termes de l'équation de FPK abstraite, lorsque  $\mu_t$  admet une ddp  $p_t$  par rapport à  $\mathfrak{m}$  suffisamment régulière. Pour ne pas avoir à énoncer de conditions trop compliquées de régularité et d'intégrabilité sur cette ddp, nous continuerons à supposer a priori que les hypothèses du théorème 2.11 sont vérifiées.

(2.18) **Lemme.** *Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{E} \setminus \mathbb{E}^d$  et  $t \geq 0$ . Si  $\mu_t$  admet une densité de probabilité  $p_t$  par rapport à  $\mathfrak{m}$  sur  $U$ , avec  $p_t \in \mathcal{C}^2(U)$ , alors*

$$(\underline{L}_c^* \mu_t)\varphi = \int_U L_c^* p_t \varphi d\mathfrak{m} + \underbrace{\int_{\partial \mathbb{E} \cap U} \langle \mathbf{j}_t, \mathbf{n} \rangle \varphi d\mathfrak{s} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \int_{\partial \mathbb{E} \cap U} \mathbf{g}_l \varphi \langle \mathbf{g}_l, \mathbf{n} \rangle p_t d\mathfrak{s}}_{\text{« termes de bord » annoncés au §1.B}}$$

pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(U)$ .

□ **Démonstration.** Cela se démontre sans difficulté par application du théorème de la divergence :

$$\begin{aligned} (\underline{L}_c^* \mu_t)\varphi &= \int_U L_c \varphi p_t d\mathfrak{m} \\ &= \int_U \mathbf{g}_0 \varphi p_t d\mathfrak{m} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \int_{\mathbb{E}} (\mathbf{g}_l \circ \mathbf{g}_l) \varphi p_t d\mathfrak{m} \\ &= \int_U \mathbf{j}_t \varphi d\mathfrak{m} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \int_{\partial \mathbb{E} \cap U} \mathbf{g}_l \varphi \langle \mathbf{g}_l, \mathbf{n} \rangle p_t d\mathfrak{s} \\ &= - \int_U \varphi \operatorname{div}(\mathbf{j}_t) d\mathfrak{m} + \int_{\partial \mathbb{E} \cap U} \langle \mathbf{j}_t, \mathbf{n} \rangle \varphi d\mathfrak{s} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \int_{\partial \mathbb{E} \cap U} \mathbf{g}_l \varphi \langle \mathbf{g}_l, \mathbf{n} \rangle p_t d\mathfrak{s}, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat annoncé puisque  $L_c^* p_t = -\operatorname{div}(\mathbf{j}_t)$ . ■

À l'aide de ce lemme nous allons pouvoir calculer explicitement l'intensité moyenne des sauts forcés, en fonction du courant de probabilité. Plus précisément, nous allons montrer que l'intensité moyenne de sauts forcés est absolument continue par rapport à la mesure de surface  $\mathfrak{s}$  sur  $E^B$ , la densité étant donnée par le courant sortant  $\mathbf{j}^{\text{out}} = \langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle$  (i.e., l'intensité moyenne de sauts forcés sur  $\Gamma \subset E^B$  à l'instant  $t$  est le flux de  $\mathbf{j}_t$  à travers  $\Gamma$ ). Nous continuons pour le moment à travailler localement : il serait en effet très restrictif de supposer l'existence d'une ddp régulière sur tout l'espace  $E$ , comme on pourra le constater avec les exemples de la section 3.

(2.19) **Proposition.** *Sous les hypothèses du théorème 2.11, supposons qu'il existe un ouvert  $U$  de  $E \setminus E^d$  tel que  $E^B \cap U \neq \emptyset$ , sur lequel  $\mu_t$  admet une densité  $p_t = p(\cdot, t)$  pour tout  $t \geq 0$ , avec  $p \in \mathcal{C}^{2,0}(U \times \mathbb{R}_+)$ . Alors*

- i) la fonction  $\mathbf{j}_t^{\text{out}} = \langle \mathbf{j}_t, \mathbf{n} \rangle$  est positive sur  $E^B \cap U$ , pour tout  $t \geq 0$ ;
- ii) pour tout borélien  $\Gamma \subset E^B \cap U$ , les fonctions  $t \mapsto r_t^B(\Gamma)$  et  $t \mapsto \int_{\Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} d\mathfrak{s}$  coïncident presque partout sur  $\mathbb{R}_+$  (donc  $\mathbf{j}_t^{\text{out}}$  est  $\mathfrak{s}$ -intégrable sur  $E^B \cap U$ , presque partout sur  $\mathbb{R}_+$ );
- iii) pour tout  $t \geq 0$ , la ddp  $p_t$  est nulle sur  $E_{\text{abs}}^B \cap U$ , où l'on a introduit

$$E_{\text{abs}}^B = \{x \in E^B \mid \exists l \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } \langle \mathbf{g}_l, \mathbf{n} \rangle_x \neq 0\}.$$

Nous avons ainsi obtenu, en même temps que l'expression de l'intensité moyenne de sauts, un résultat très important qui généralise ce que l'on appelle parfois la condition de « barrière absorbante » pour les processus de diffusion : la ddp s'annule sur le bord  $\partial E$  de l'espace d'état, dès qu'au moins l'un des champs de vecteurs  $\mathbf{g}_l$ ,  $1 \leq l \leq m$ , n'est pas tangent à la frontière. Remarquons que seuls les champs de vecteurs associés au phénomène de diffusion sont concernés par cette condition : sur une frontière franchie par le seul effet du drift, rien n'oblige la densité à s'annuler. En particulier, on ne rencontre pas ce genre de condition au bord pour les processus déterministes par morceaux.

□ **Démonstration.**

▷ Soit  $V = \partial E \cap U$ ; c'est un ouvert relatif de  $\partial E$ . Pour toute fonction  $\eta \in \mathcal{C}_c^2(V)$ , il existe une suite de fonctions  $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^2(U)$  dont les supports sont inclus dans un compact fixé, qui converge uniformément vers 0, et telle que  $\varphi_n = 0$  et  $\partial\varphi_n/\partial\mathbf{n} = \eta$  sur  $V$ , pour tout  $n$ . Chacune des  $\varphi_n$  vérifie donc, sur  $V$ ,

$$\mathbf{g}_l \varphi_n = \langle \mathbf{g}_l, \mathbf{n} \rangle \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{n}} = \langle \mathbf{g}_l, \mathbf{n} \rangle \eta.$$

Fixons maintenant  $t \geq 0$ . En passant à la limite dans le résultat du lemme 2.18, on obtient que  $\sum_{l=1}^m \int_V \langle \mathbf{g}_l, \mathbf{n} \rangle^2 \eta p_t d\mathfrak{s} = 0$ , et ceci pour toute fonction  $\eta \in \mathcal{C}_c^2(V)$ . Donc la fonction

$$x \mapsto p(x, t) \sum_{l=1}^m \langle \mathbf{g}_l, \mathbf{n} \rangle_x^2$$

est nulle sur  $V$ ,  $\mathfrak{s}$ -presque partout. On en déduit qu'elle est en fait nulle sur tout  $V$  : sur les modes de dimension 1 c'est évident, et pour  $n_q \geq 1$  cela provient de la continuité de la fonction. Ceci prouve l'assertion 2.19.iii.

▷ Le résultat du lemme 2.18 s'interprète maintenant comme une égalité entre mesures de Radon sur  $U$  : pour tout  $\Gamma \subset U$  compact, l'équation de FPK abstraite 2.10 se réécrit alors

$$\mu'_t(\Gamma) = \int_{\Gamma} L_c^* p_t d\mathfrak{m} + \int_{\partial E \cap \Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} d\mathfrak{s} + r_t(K - I)(\Gamma),$$

ce qui donne la relation  $r_t^{\text{B}}(\Gamma) = \int_{\partial E \cap \Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \, d\mathbf{s}$  pour tout  $\Gamma \subset U \cap E^{\text{B}}$  compact et pour presque tout  $t \in \mathbb{R}_+$  (toutes les autres mesures apparaissant dans l'équation étant portées par  $E^0$ ). Ceci entraîne que, presque partout sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{j}_t^{\text{out}}$  est positive  $\mathfrak{s}$ -presque partout et  $\mathfrak{s}$ -intégrable sur  $E^{\text{B}} \cap U$ , puisque  $r_t^{\text{B}}$  est une mesure positive bornée : l'égalité  $r_t^{\text{B}}(\Gamma) = \int_{\partial E \cap \Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \, d\mathbf{s}$  s'étend donc à tous les  $\Gamma \subset U \cap E^{\text{B}}$  boréliens, ce qui établit l'assertion 2.19.ii.

▷ Il ne reste plus qu'à vérifier que  $\mathbf{j}_t^{\text{out}}$  est en fait positive sur tout  $E^{\text{B}} \cap U$ . Pour les modes de dimension 1, c'est évident. Pour les autres, notons  $\text{int}_{\partial E_q} E_q^{\text{B}}$  l'intérieur de  $E_q^{\text{B}}$  dans  $\partial E_q$  : alors  $\mathbf{j}_t^{\text{out}}$  est positive sur  $U \cap \text{int}_{\partial E_q} E_q^{\text{B}}$  en raison de la continuité de  $\mathbf{j}_t^{\text{out}}$ , et donc sur  $E_q^{\text{B}} \cap U$  tout entier d'après l'hypothèse 1.13. ■

À l'aide du résultat local fourni par la proposition 2.19, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un résultat global, à condition de supposer que les points où  $p$  n'est pas régulière sont « suffisamment loin » de  $E^{\text{B}}$  pour pouvoir appliquer la proposition précédente. Le résultat obtenu est, comme annoncé en introduction, un système d'équations composé d'une équation d'évolution et d'un ensemble de relations statiques.

Pour les besoins de l'énoncé, rappelons ce qu'est la décomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym (Rudin, 1987, théorème 6.10) d'une mesure de Radon, ici par rapport à la mesure  $\sigma$ -finie  $\mathfrak{m}$  : pour toute mesure de Radon  $\xi$  sur  $(E, \mathcal{E})$ , il existe une fonction localement  $\mathfrak{m}$ -intégrable  $\frac{d\xi}{d\mathfrak{m}}$  et une mesure de Radon  $\xi^\perp$   $\mathfrak{m}$ -singulière, telles que  $\xi(\Gamma) = \int_\Gamma \frac{d\xi}{d\mathfrak{m}} \, d\mathfrak{m} + \xi^\perp(\Gamma)$  pour tout  $\Gamma \in \mathcal{E}$  relativement compact.

(2.20) **Proposition.** *Sous les hypothèses du théorème 2.11, supposons que  $\mu_t$  admet une ddp  $p_t$  à chaque instant  $t \geq 0$ . Supposons de plus qu'il existe un fermé  $H$  de  $E$ ,  $H \subset E^0 \setminus E^{\text{d}}$ ,  $\mathfrak{m}(H) = 0$ , tel que  $p$  est de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur  $(E \setminus H) \times \mathbb{R}_+$ , avec  $\frac{\partial p}{\partial t}$  et  $L_c^* p$  localement intégrables sur  $E \times \mathbb{R}_+$ . Alors les mesures de Radon  $\beta_t$  définies par*

$$\beta_t(\Gamma) = (L_c^* \mu_t)(\Gamma) - \int_\Gamma L_c^* p_t \, d\mathfrak{m} - \int_{E^{\text{B}} \cap \Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \, d\mathbf{s},$$

pour  $t \geq 0$  et  $\Gamma \subset E$  compact, sont portées par  $H \cup (\partial E \cap E^0)$ . De plus, pour tout  $t \geq 0$ , les équations suivantes sont vérifiées :

- i)  $\frac{\partial p}{\partial t} = L_c^* p_t + \frac{d(r_t K)}{d\mathfrak{m}} - \lambda p_t$  sur  $E \setminus H$ ,
- ii)  $\beta_t(\Gamma) = -(r_t K)^\perp(\Gamma)$  pour tout  $\Gamma$  compact,
- iii)  $r_t^{\text{B}}(\Gamma) = \int_{\Gamma \cap E^{\text{B}}} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \, d\mathbf{s}$  pour tout  $\Gamma$  borélien,
- iv)  $p_t = 0$  sur  $E_{\text{abs}}^{\text{B}}$ .

(2.21) **Remarques.**

- a) La fonction  $L_c^* p_t$  étant nulle sur  $E^{\text{d}}$  (par convention, cf. § 1.B), la proposition 2.20.i fournit une EDO pour la masse ponctuelle associée à chaque mode purement discret :

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = (r_t K)(\{x\}) - \lambda(x) p(x, t) \quad \forall t \geq 0, \forall x \in E^{\text{d}}.$$

- b) La signification de l'équation 2.20.ii n'est certainement pas la plus immédiate : elle est cependant très importante. En effet, les mesures  $\beta_t$  traduisent la non-différentiabilité de la fonction  $p$  – autrement dit : si  $p$  est de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur tout  $E \times \mathbb{R}_+$ , alors les mesures  $\beta_t$  sont nulles d'après le lemme 2.18 et la proposition 2.19.iii. L'équation 2.20.ii établit donc un lien direct entre la régularité de  $p$  et la présence d'une composante  $\mathfrak{m}$ -singulière dans le terme de source  $r_t K$ . L'intensité moyenne  $r_t$  étant connue (voir la proposition 2.5 et l'équation 2.20.iii), on a ainsi établi que la régularité de  $p$  est liée à la nature du noyau  $K$ .

□ **Démonstration.** Les assertions 2.22.ii et 2.22.iii ayant déjà été établies dans la proposition 2.19, il nous reste simplement à démontrer les deux autres.

▷ Considérons l'ensemble  $U = E \setminus (E^d \cup H)$ , qui est un ouvert de  $E \setminus E^d$  contenant la frontière  $\partial E$ . La densité  $p_t$  étant de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ , l'expression de la mesure de Radon  $\underline{L}_c^* \mu_t$  est donnée, pour tout  $t \geq 0$  et tout  $\Gamma \subset U$  compact, par le lemme 2.18 et la proposition 2.19 :

$$(\underline{L}_c^* \mu_t)(\Gamma) = \int_{\Gamma} L_c^* p_t \, d\mathbf{m} + \int_{\partial E \cap \Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \, d\mathbf{s}.$$

La mesure  $\beta_t$  ne chargeant pas  $E^d$ , on obtient ainsi que, pour tout  $\Gamma \in \mathcal{E}$ ,

$$\begin{aligned} \beta_t(\Gamma) &= \beta_t(\Gamma \cap U) + \beta_t(\Gamma \cap H) \\ &= \int_{(\partial E \setminus E^B) \cap \Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \, d\mathbf{s} + \beta_t(\Gamma \cap H), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\beta_t$  est portée par  $H \cup (\partial E \cap E^0)$ , et donc est  $\mathbf{m}$ -singulière.

▷ Réécrivons maintenant l'équation de FPK abstraite 2.10, en utilisant la régularité de  $t \mapsto p_t$  : pour tout  $\Gamma \subset E$  compact, presque partout sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial t} \, d\mathbf{m} &= (\underline{L}_c^* \mu_t)(\Gamma) + (r_t K)(\Gamma) - r_t(\Gamma) \\ &= \beta_t(\Gamma) + \int_{\Gamma} L_c^* p_t \, d\mathbf{m} + \int_{E^B \cap \Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \, d\mathbf{s} + (r_t K)(\Gamma) - r_t(\Gamma). \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition de Radon-Nikodym,  $\beta_t$  étant  $\mathbf{m}$ -singulière et  $r_t^0$  absolument continue de densité  $\lambda p_t$ , on obtient les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= L_c^* p_t + \frac{d(r_t K)}{d\mathbf{m}} - \lambda p_t, & \mathbf{m}\text{-pp sur } E \setminus H, \text{ et} \\ 0 &= \beta_t(\Gamma) + \int_{E^B \cap \Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \, d\mathbf{s} + (r_t K)^\perp(\Gamma) - r_t^B(\Gamma) & \text{pour tout } \Gamma \subset E \text{ compact.} \end{aligned}$$

La première équation correspond précisément à 2.20.i et 2.20.ii découle de la deuxième en utilisant 2.20.iii, ce qui achève la démonstration. ■

Le cas d'application le plus simple – et néanmoins fort utile – de la proposition 2.20 est celui où  $p$  est de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur  $E \times \mathbb{R}_+$  tout entier. En effet, il est alors facile de vérifier que les conditions 2.11.ii et 2.11.iii sont remplies, avec  $\mu_t(\Gamma) = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, t) \, d\mathbf{m}$  et  $\underline{L}_c^* p_t$  donné par le lemme 2.18. Les hypothèses de la proposition 2.20 sont donc vérifiées, avec  $H = \emptyset$  puisque  $p \in \mathcal{C}^{2,1}(E \times \mathbb{R}_+)$ . De plus,  $\beta_t = 0$  pour tout  $t \geq 0$ , d'après le lemme 2.18 et la proposition 2.19. Résumons tout cela de manière un peu plus formelle :

(2.22) **Corollaire.** *Supposons que  $\mu_t$  admet une ddp  $p_t$  à chaque instant  $t \geq 0$ , avec  $p \in \mathcal{C}^{2,1}(E \times \mathbb{R}_+)$ . Alors les hypothèses du théorème 2.11 sont vérifiées,  $r_t K$  est absolument continue par rapport à  $\mathbf{m}$  pour tout  $t \geq 0$ , et on a :*

- i)  $\frac{\partial p}{\partial t} = L_c^* p_t + \frac{d(r_t K)}{d\mathbf{m}} - \lambda p_t$  sur  $E$ ,
- ii)  $r_t^B(\Gamma) = \int_{\Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \, d\mathbf{s}$  pour tout  $\Gamma \subset E^B$  borélien,
- iii) et  $p_t = 0$  sur  $E_{abs}^B$ .

La proposition 2.20 et son corollaire 2.22 fournissent, comme nous l'avions annoncé, une équation d'évolution pour la ddp  $p_t$  assortie de plusieurs relations statiques. L'équation d'évolution 2.20.i

n'est pas encore complètement explicite : il reste à savoir calculer la contribution du terme source,  $\frac{d(r_t K)}{dm}$ , dont la forme dépend fortement du problème considéré. Nous étudierons dans la section suivante quelques classes de SHS pour lesquelles on peut calculer explicitement ce terme de source et ainsi obtenir une forme « utilisable » de l'équation de FPK généralisée.

### 3 Quelques exemples d'équations de FPK généralisées

L'équation de FPK abstraite de la section précédente peut maintenant être utilisée pour déterminer comment – selon quelle équation – se propage la densité de probabilité dans différentes classes de SHS. Nous commencerons par rappeler brièvement au § 3.A les cas particuliers bien connus correspondant aux processus déterministes, aux processus de diffusion et aux processus purement discontinus. Puis nous examinerons différentes classes de modèles pour lesquelles l'équation de FPK abstraite nous permettra d'obtenir ce que nous appelons une *équation de FPK généralisée*, c'est-à-dire une équation d'évolution, EDP ou plus généralement équation intégro-différentielle, assortie d'une ou plusieurs relations statiques (que l'on appelle parfois « conditions au bord », même si en l'occurrence elles ne concernent pas seulement le bord du domaine).

Nous considérons séparément, pour simplifier, les modèles à sauts spontanés dans un premier temps (§ 3.B) et les modèles à sauts forcés dans un deuxième temps (§ 3.C) : bien entendu, on peut tout à fait combiner les résultats des §§ 3.B et 3.C lorsque les deux types de sauts sont présents dans un même modèle. Dans le cas des SHS à sauts spontanés, les résultats que nous présentons se trouvent tous déjà, sous une forme ou une autre, dans la littérature : nous nous contenterons de les unifier en les obtenant à partir de l'équation de FPK abstraite. Par contre, le résultat présenté au § 3.C semble nouveau : il généralise au cas multidimensionnel l'équation obtenue – sur un exemple – par Malhamé et Chong (1985).

Il convient de préciser un peu la « philosophie » de cette section vis-à-vis des questions fondamentales que l'on est en droit de se poser concernant les équations que nous allons écrire, à savoir les questions d'existence et d'unicité de la solution. Les résultats de la section 2 nous permettent sous certaines hypothèses d'écrire l'équation de FPK abstraite 2.10, et même – avec des hypothèses de régularité supplémentaires – d'en expliciter les termes (à l'exception du terme de source auquel nous allons nous intéresser sur les exemples de cette section). Mais nous ne disposons malheureusement d'aucun résultat permettant d'établir a priori qu'une ddp existe, et de savoir quelles sont ses propriétés de régularité ! Nous pouvons néanmoins faire quelques remarques à ce sujet :

- L'existence et la régularité de la ddp, dans le cas d'un processus de diffusion défini par une EDS, peut être établie sous l'hypothèse dite d'*hypoellipticité* à l'aide du calcul de Malliavin (Nualart, 2006 ; Sanz-Solé, 2005). Cette technique a été étendue dans certains cas aux des diffusions à sauts spontanés sur  $\mathbb{R}^n$  (Bichteler et al., 1987). Nous ne sommes pas suffisamment compétents sur ce sujet pour dire dans quelle mesure cette approche pourrait se généraliser aux autres modèles étudiés dans ce mémoire.
- Toujours pour un processus de diffusion, même lorsque la matrice de diffusion est « très dégénérée » (i.e. quand l'hypothèse d'hypoellipticité n'est pas vérifiée), on s'attend à ce qu'il y ait une ddp régulière si la condition initiale est suffisamment régulière.
- Dans le cas des processus diffusif par morceaux apparaît un problème supplémentaire : il se peut que la nature même du mécanisme de réinitialisation soit responsable de l'apparition d'une discontinuité (dans  $p$  ou dans sa dérivée), ou même d'une singularité (densité infinie en un point, par exemple). Nous avons vu que ce phénomène est relié à l'absolue continuité du terme de source

par rapport à la mesure  $\mathbf{m}$  (cf. remarque 2.21.b) : on ne sera donc pas surpris de constater que les modèles pour lesquels l'équation de FPK généralisée est déjà connue sont justement des modèles pour lesquels ce terme de source est absolument continu. A contrario, pour la classe de SHS à sauts forcés que nous considérons au § 3.C, le terme de source n'est pas absolument continu (plus précisément, il est porté par une hypersurface), ce qui conduit à une équation assez différente de celles du § 3.C.

Forts de ces quelques remarques nous ferons, pour chacun des exemples de cette section, ce qui nous semble être des hypothèses « raisonnables » sur la fonction  $p : (x, t) \mapsto p_t(x)$ , hypothèses sous lesquelles on pourra appliquer le théorème 2.11 ou l'un de ses corollaires. Bien entendu, tout cela n'est pas complètement satisfaisant, dans le mesure où nous ne serons en mesure ni de prouver que ces conditions sont bien remplies, ni de prouver que l'équation obtenue (complétée par les conditions évidentes de positivité et de normalisation ainsi que par une condition initiale) possède une unique solution. Il reste donc un important travail à réaliser, du point de vue mathématique, pour pouvoir affirmer que les équations de FPK généralisées que nous allons écrire *caractérisent* effectivement la ddp du processus étudié pour une certaine loi initiale.

### 3.A Équation de Liouville, de Fokker-Planck, et équation maîtresse

On retrouve comme cas particuliers du corollaire 2.22 l'équation de Fokker-Planck usuelle et l'équation maîtresse (*master equation* en anglais), en considérant respectivement le cas où il n'y a pas de sauts et le cas purement discontinu. De plus, lorsque tous les  $\mathbf{g}_l$  sont nuls, i.e. lorsque l'EDS est en fait une EDO, l'équation de Fokker-Planck se simplifie en équation de Liouville. Pour mémoire, nous rappelons brièvement dans ce qui suit différentes expressions – bien connues – de ces équations, en supposant à chaque fois que  $\mu_t$  admet une ddp  $p_t$  assez régulière par rapport à la mesure de volume  $\mathbf{m}$ . Une présentation similaire de ces trois équations, comme cas particuliers d'une même équation générale<sup>5</sup>, se trouve chez Gardiner (1985, section 3.5). Nous ajouterons, aux trois équations « élémentaires » annoncées dans le titre, l'équation de FPK généralisée pour les diffusions à sauts spontanés, lorsque  $K$  admet une densité par rapport à la mesure  $\mathbf{m}$ . En effet, celle-ci s'obtient très simplement à partir de l'équation de Fokker-Planck et de l'équation maîtresse – la version monodimensionnelle de cette équation apparaissait déjà dans l'article fondateur de Kolmogorov (1931) !

On suppose, dans les exemples qui suivent, que les hypothèses du corollaire 2.22 sont vérifiées, i.e. que  $\mu_t$  admet une densité  $p_t = p(\cdot, t)$  pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $p$  étant de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur  $E \times \mathbb{R}_+$ .

#### L'équation de Fokker-Planck

Lorsqu'il n'y a ni saut spontané ni saut forcé, le modèle se réduit à un processus de diffusion défini par une EDS : sa ddp évolue alors selon l'équation de Fokker-Planck usuelle (Kolmogorov, 1931 ; Stratonovich, 1966). Nous l'avons déjà rencontrée aux §§1.A et 1.B, sous deux formes « compactes » équivalentes :  $\frac{\partial p}{\partial t} = L_c^* p$  et  $\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}) = 0$ . En utilisant l'expression 1.16 de  $L_c^*$ , on a en coordonnées euclidiennes :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial z^i} \left( \mathbf{g}_l^i \frac{\partial}{\partial z^j} \left( \mathbf{g}_l^j p \right) \right) - \sum_i \frac{\partial (\mathbf{g}_0^i p)}{\partial z^i},$$

---

<sup>5</sup>L'équation générale en question étant la « formule de Chapman-Kolmogorov différentielle » dont nous avons déjà parlé dans la remarque 2.12.c.

ou encore, en faisant intervenir la dérive  $\mathbf{f}$  au lieu du champ de vecteurs  $\mathbf{g}_0$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 (a^{ij} p)}{\partial z^i \partial z^j} - \sum_i \frac{\partial (\mathbf{f}^i p)}{\partial z^i},$$

les coefficients de diffusion  $a^{ij}$  étant définis par  $a^{ij} = \sum_{l=1}^m \mathbf{g}_l^i \mathbf{g}_l^j$ . Le cas particulier où les coefficients  $a^{ij}$  sont nuls correspond à un processus déterministe, solution d'une équation différentielle ordinaire : l'EDP du premier ordre obtenue dans ce cas est parfois baptisée *équation de Liouville* (Gardiner, 1985, § 3.5.3),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial (\mathbf{f}^i p)}{\partial z^i}.$$

### L'équation maîtresse

Considérons maintenant le cas purement discontinu, c'est-à-dire le cas où chacun des champs de vecteurs  $\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_m$  est nul : l'équation de FPK abstraite 2.10 se simplifie alors en  $\mu'_t = r_t (K - I)$ . Comme il ne peut pas y avoir de sauts forcés en l'absence de dynamique continue,  $r_t$  correspond à l'intensité moyenne de sauts spontanés :

$$r_t(\Gamma) = \int_{\Gamma} \lambda d\mu_t = \int_{\Gamma} \lambda p_t d\mathbf{m},$$

ce qui donne l'équation

$$\mu'_t(\Gamma) = \int_{\Gamma} \left( \int_{\mathbf{E}} \lambda(x) \mu_t(dx) K(x, dy) - \lambda(y) \mu_t(dy) \right).$$

En supposant que  $K(x, \cdot)$  admet une densité  $k(x, \cdot)$  par rapport à  $\mathbf{m}$ , pour tout  $x \in \mathbf{E}$ , on obtient l'équation intégral-différentielle

$$(3.1) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(y, t) = \int_{\mathbf{E}} \lambda(x) k(x, y) p_t(x) \mathbf{m}(dx) - \lambda(y) p_t(y).$$

Comme dans la remarque 2.12.c, on peut réécrire cette équation sous une forme un peu plus symétrique, en introduisant la fonction  $\gamma(x, y) = \lambda(x) k(x, y)$ . On retrouve alors l'équation maîtresse telle qu'elle apparaît dans Gardiner (1985, équation 3.5.2) :

$$\frac{\partial p}{\partial t}(y, t) = \int_{\mathbf{E}} \left( \gamma(x, y) p_t(x) - \gamma(y, x) p_t(y) \right) \mathbf{m}(dx).$$

### Diffusion à sauts spontanés, lorsque $K$ possède une densité

Venons-en maintenant au cas des diffusions à sauts spontanés, en supposant comme précédemment que  $K(x, \cdot)$  admet une densité  $k(x, \cdot)$  par rapport à  $\mathbf{m}$ , pour tout  $x \in \mathbf{E}$ . Comme pour l'équation maîtresse, les termes de drain et de source possèdent une densité par rapport à  $\mathbf{m}$  :

$$\frac{dr_t}{d\mathbf{m}}(y) = \lambda(y) p_t(y), \quad \text{et} \quad \frac{dr_t^{\text{src}}}{d\mathbf{m}}(y) = \int_{\mathbf{E}} \lambda(x) k(x, y) p_t(x) \mathbf{m}(dx).$$

On en déduit alors l'équation de FPK généralisée :

$$(3.2) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(y, t) = (L_c^* p_t)(y) + \int_{\mathbf{E}} \lambda(x) k(x, y) p_t(x) \mathbf{m}(dx) - \lambda(y) p_t(y),$$

dont le membre de droite est la somme de l'opérateur de Fokker-Planck usuel  $L_c^*$  et de l'opérateur intégral de l'équation maîtresse 3.1. Avec la même fonction  $\gamma$  que précédemment, on retrouve l'équation de Chapman-Kolmogorov différentielle de Gardiner (1985, équation 3.4.22) :

$$\frac{\partial p}{\partial t}(y, t) = (L_c^* p_t)(y) + \int_{\mathbf{E}} \left( \gamma(x, y) p_t(x) - \gamma(y, x) p_t(y) \right) \mathbf{m}(dx).$$

### 3.B Diffusions alternantes et généralisation

#### Le cas des diffusions alternantes

Nous venons de voir que, lorsqu'une diffusion à sauts spontanés possède un noyau  $K$  à densité, sa ddp évolue selon l'équation intégro-différentielle 3.2. Mais il arrive très souvent que cette hypothèse ne soit pas vérifiée, par exemple pour les diffusions alternantes sur  $\Omega \times \mathbb{R}^n$ , dont le noyau de réinitialisation est de la forme

$$K((q, z), \cdot) = \sum_{q' \neq q} \pi_{qq'}(z) \delta_{(q', z)}.$$

L'équation de FPK généralisée pour ce type de processus est néanmoins bien connue (voir par exemple Krystul et al., 2003) : sous réserve qu'il existe une densité  $p \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{E} \times \mathbb{R}_+)$ , pour tous  $x = (q, z) \in \mathbb{E}$  et  $t \geq 0$ ,

$$(3.3) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = (L_c^* p_t)(x) + \sum_{q' \neq q} \lambda_{q'q}(z) p_t(q', z) - \lambda(x) p_t(x)$$

avec  $\lambda_{q'q}(z) = \lambda(q', z) \pi_{q'q}(z)$ .

#### Généralisation

La similitude formelle entre 3.3 et 3.2 n'est pas fortuite : elle provient du fait que les deux modèles vérifient l'hypothèse

(3.4) **Hypothèse.** *Il existe un noyau borélien  $K^*$  sur  $\mathbb{E}$  tel que, pour toutes fonctions boréliennes positives  $\varphi_1, \varphi_2$  :*

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi_1 K \varphi_2 \, d\mathbf{m} = \int_{\mathbb{E}} K^* \varphi_1 \varphi_2 \, d\mathbf{m}.$$

Il est en effet facile de voir que, sous cette hypothèse, le terme de source  $r_t^{\text{src}} = r_t K$  est absolument continu par rapport à  $\mathbf{m}$  :

$$r_t^{\text{src}}(\Gamma) = \int_{\mathbb{E}} \lambda p_t K \mathbb{1}_{\Gamma} \, d\mathbf{m} = \int_{\Gamma} K^*(\lambda p_t) \, d\mathbf{m}.$$

En supposant qu'il existe un densité  $p \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{E} \times \mathbb{R}_+)$ , le corollaire 2.22 fournit alors l'équation de FPK généralisée

$$(3.5) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, t) = L_c^* p_t + K^*(\lambda p_t) - \lambda p_t.$$

Nous avons ainsi obtenu une formulation très générale de l'équation de FPK pour les diffusions à sauts spontanés – suffisamment générale, en tous cas, pour englober tous les cas particuliers connus dans la littérature. De plus, nous avons mis en évidence la propriété commune à tous ces exemples – l'existence du noyau  $K^*$  – qui permet d'obtenir l'équation 3.5.

#### Exemples

On retrouve les équations 3.2 et 3.3 comme cas particuliers de l'équation générale 3.5 en prenant respectivement  $K^*(x, dy) = k(y, x) \mathbf{m}(dy)$  et  $K^*((q, z), \cdot) = \sum_{q' \neq q} \pi_{q'q}(z) \delta_{(q', z)}$ . On retrouve aussi, en généralisant un peu l'exemple des diffusions alternantes, l'équation de FPK généralisée pour la classe de modèle décrite par Hespanha (2005) :



(3.6) **Exemple.** Considérons une diffusion à sauts spontanés sur un espace hybride de la forme  $\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^n$ , pour laquelle la position après un saut est déterminée en choisissant aléatoire une fonction de réinitialisation  $\Psi_k$  parmi un ensemble fini de possibilités. En notant  $\varrho_k(x)$  la probabilité d'utiliser la  $k^{\text{ième}}$  fonction de réinitialisation sachant  $X_{\tau_k}^- = x$ , le noyau de réinitialisation s'écrit alors

$$K(x, \cdot) = \sum_k \varrho_k(x) \delta_{\Psi_k(x)}.$$

Sous réserve que les  $\Psi_k$  soient des  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes locaux, un tel noyau vérifie l'hypothèse 3.4 avec  $K^*$  défini par la relation

$$K^*(x, \cdot) = \sum_k \sum_{y \in \Psi_k^{-1}(\{x\})} \varrho_k(y) |\det \text{Jac}_y \Psi_k|^{-1} \delta_y.$$

Définissons maintenant une intensité  $\lambda_k = \lambda \varrho_k$  pour chacune des fonctions de réinitialisation  $\Psi_k$ . En insérant l'expression de  $K^*$  dans l'équation 3.5, on retrouve alors l'équation de FPK généralisée établie par Hespanha (2005, p. 1364) :

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = (L_c^* p_t)(x) + \sum_k \left( \sum_{y \in \Psi_k^{-1}(\{x\})} \lambda_k(y) |\det \text{Jac}_y \Psi_k|^{-1} p(y, t) - \lambda_k(x) p(x, t) \right).$$

(3.7) **Remarques.**

- a) On retrouve le cas particulier des diffusions alternantes, à partir de l'exemple 3.6, en considérant la famille de fonctions  $\Psi_q$  indexée par  $\mathcal{Q}$  :

$$\Psi_{q_0} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, (q, z) \mapsto (q_0, z),$$

avec les poids

$$\varrho_{q_0}(q, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } q = q_0, \\ \pi_{q_0}(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

- b) Dans le cas des diffusions alternantes, et plus généralement dans l'exemple 3.6, l'équation obtenue est remarquablement simple : il s'agit en effet d'une EDP, ou plus exactement d'un système d'EDP lorsque  $|\mathcal{Q}| \geq 2$ , et non plus d'une équation intégrale-différentielle comme l'équation 3.2. Ceci vient de la forme particulière du noyau  $K^*$ , qui est à support fini dans tous ces exemples. (Plus précisément, c'est la mesure  $K^*(x, \cdot)$  qui est à support fini, pour tout  $x \in \mathbb{E}$ .)

Terminons en donnant un exemple de SHS à sauts spontanés pour lequel le noyau de réinitialisation ne vérifie pas l'hypothèse 3.4.

(3.8) **Exemple.** Considérons un SHS à valeurs dans  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ , construit à partir d'un processus de base brownien (i.e. avec l'EDS triviale  $d\tilde{X}_t = d\tilde{B}_t$ ), avec une intensité  $\lambda > 0$  constante et le noyau de réinitialisation  $K(x, \cdot) = \delta_0$ . Il est clair que ce noyau ne vérifie pas l'hypothèse 3.4.

Supposons que  $\mu_t$  admette une densité  $p_t$  pour tout  $t \geq 0$  : alors le terme de source dans l'équation de FPK abstraite vaut  $r_t K = \lambda \delta_0$ . Cette mesure étant singulière, on sait d'après le corollaire 2.22 que la densité  $p_t$  ne sera jamais de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  tout entier. Supposons donc<sup>6</sup> que la

<sup>6</sup>Sur cet exemple très simple on pourrait établir la régularité de la densité en utilisant la solution sous forme de série de l'équation de renouvellement de Moyal (cf. chapitre II, équation 3.4), mais une telle approche semble difficilement généralisable à des exemples plus intéressants.

densité est au moins de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+$  : on peut alors utiliser la proposition 2.20 avec  $H = \{0\}$ . On en déduit l'équation de FPK généralisée de ce modèle :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, t) = L_c^* p_t - \lambda p_t & \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \beta_t = -\lambda \delta_0. \end{cases}$$

La mesure  $\beta_t$  se calcule facilement à partir de sa définition, à l'aide d'une intégration par parties : en utilisant que le courant de probabilité vaut  $-\frac{1}{2} \frac{\partial p_t}{\partial x}$ , on obtient ainsi que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \frac{\partial p_t}{\partial x}(\varepsilon) - \frac{\partial p_t}{\partial x}(-\varepsilon) \right) = -2\lambda.$$

En particulier, on peut vérifier que cette EDP admet pour unique solution stationnaire (intégrable) la densité  $p(x) = \sqrt{\lambda/2} \exp(-\sqrt{2\lambda}|x|)$ . Ainsi, la présence d'une partie  $\mathfrak{m}$ -singulière dans le terme de source se traduit par une perte de régularité au niveau de la densité de probabilité. Il s'agit dans cet exemple d'une discontinuité dans la dérivée, mais on pourrait montrer en considérant le même modèle en dimension supérieure que la densité peut même devenir infinie avec ce type de noyau de réinitialisation.

### 3.C Une classe remarquable de modèles à sauts forcés

Par analogie avec ce qui précède, on peut dans le cas des SHS à sauts forcés s'intéresser aux modèles pour lesquels il existe un noyau  $K^*$  vérifiant la relation

$$(3.9) \quad \int_{E^B} \varphi_1 K \varphi_2 \, d\mathfrak{s} = \int_E K^* \varphi_1 \varphi_2 \, d\mathfrak{m}.$$

pour toutes fonctions boréliennes positives  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . C'est le cas par exemple si  $K$  admet une densité par rapport  $\mathfrak{m}$ . L'équation de FPK généralisée pour un tel modèle est alors donnée par le corollaire 2.22. Malheureusement, la plupart des SHS à sauts forcés que l'on rencontre dans les applications ne vérifient pas cette hypothèse : nous nous intéressons donc, dans ce qui suit, à une classe remarquable de modèles à sauts forcés et réinitialisations déterministes, pour laquelle l'équation de FPK généralisée est une simple EDP.

Dans le cas scalaire, avec pour espace d'état un intervalle de  $\mathbb{R}$ , l'équation que nous allons obtenir était déjà connue de Feller (1952, 1954). L'extension à un espace d'état hybride, toujours dans le cas scalaire, apparaît pour la première fois – à notre connaissance – chez Malhamé et Chong (1985). Notre principale contribution se situe donc au niveau de l'extension à plusieurs dimensions.

Considérons donc un SHS à sauts forcés et à réinitialisations déterministes, i.e.  $\lambda = 0$  et  $K(x, \cdot) = \delta_{\Psi(x)}$  pour tout  $x \in E^B$ , dans lequel tous les modes ont la même dimension  $n_q = n$ . Supposons de plus que  $E^B = \partial E$  pour simplifier. Pour un tel modèle, nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une équation de FPK généralisée « agréable » (une EDP) à condition de supposer que la fonction de réinitialisation vérifie l'hypothèse suivante :

(3.10) **Hypothèse.** *L'ensemble  $H = \Psi(\partial E)$  est une hypersurface fermée de  $E$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , et la fonction de réinitialisation  $\Psi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\partial E$  dans  $H$ .*

Nous noterons  $\mathfrak{s}_H$  la mesure de surface sur  $H$ , et  $\Psi_\sim$  (respectivement  $\Psi_\sim^{-1}$ ) l'application *push forward* associée à  $\Psi$  (respectivement à  $\Psi^{-1}$ ). Rappelons que  $\Psi_\sim$  est l'application linéaire qui à toute mesure borélienne  $\mu$  sur  $\partial E$  associe sa mesure image sur  $E^0$  par la fonction  $\Psi$ , et remarquons au passage que  $\Psi_\sim \mu = \mu K$ .

(3.11) **Remarques.** On pourrait sans grande difficulté supplémentaire autoriser la présence de modes purement discrets, c'est-à-dire supposer que  $n_q \in \{0, n\}$  pour tout  $q \in \mathcal{Q}$ . Il faut dans ce cas modifier l'hypothèse 3.10 en remplaçant  $H = \Psi(\partial E)$  par  $H = \Psi(\partial E) \cap (E \setminus E^d)$ . L'équation de FPK dans ce cas un peu plus général est donnée dans Bect et al. (2006a).

Le noyau  $K$  est porté par l'hypersurface  $H$ , ce qui entraîne automatiquement que le terme de source  $r_t K$  est porté par  $H$  et donc  $\mathfrak{m}$ -singulier. En conséquence, il paraît raisonnable de faire les hypothèses de régularité suivantes :

(3.12) **Hypothèses.**

- i)  $\mu_t$  admet une densité  $p_t$  par rapport  $\mathfrak{m}$  pour tout  $t \geq 0$ , et  $p$  est de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur  $(E \setminus H) \times \mathbb{R}_+$ .
- ii)  $p$  et  $dp_t$  possèdent au plus une discontinuité de première espèce sur  $H$ .

Ces hypothèses impliquent que le courant de probabilité  $\mathbf{j}_t$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $E \setminus H$ , et se prolonge par continuité à chacune des faces de l'hypersurface  $H$  (qui est orientable car difféomorphe à  $\partial E$ ). Par analogie avec le courant de probabilité sortant  $\mathbf{j}_t^{\text{out}}$ , nous pouvons ainsi définir sur  $H$  un scalaire  $\mathbf{j}_t^{\text{in}}$ , que nous appellerons le *courant de probabilité entrant*, en posant

$$\mathbf{j}_t^{\text{in}} = \langle \mathbf{j}_t^{(a)}, \mathbf{n}_{ba} \rangle + \langle \mathbf{j}_t^{(b)}, \mathbf{n}_{ab} \rangle = \langle \mathbf{j}_t^{(b)} - \mathbf{j}_t^{(a)}, \mathbf{n}_{ab} \rangle,$$

où  $\mathbf{j}_t^{(a)}$  et  $\mathbf{j}_t^{(b)}$  désignent la valeur de  $\mathbf{j}_t$  sur chacune des faces de  $H$ , et  $\mathbf{n}_{ab}$  (resp.  $\mathbf{n}_{ba}$ ) la normale unité orientée de la face  $a$  vers la face  $b$  (resp. de la face  $b$  vers la face  $a$ ). Il est clair que cette définition ne dépend pas de l'étiquetage choisi pour les faces de  $H$ . On a alors l'équation de FPK généralisée :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, t) = L_c^* p_t & \text{sur } E \setminus (E^B \cup H), \\ \mathbf{j}_t^{\text{out}} = \frac{d(\Psi_{\sim}^{-1} \mathfrak{s}_H)}{d\mathfrak{s}} \mathbf{j}_t^{\text{in}} \circ \Psi \geq 0 & \text{sur } \partial E, \\ p_t = 0 & \text{sur } E_{\text{abs}}^B \text{ (cf. proposition 2.19.iii),} \\ p_t^{(a)} = p_t^{(b)} & \text{sur } H_{\text{abs}}, \end{array} \right.$$

où  $H_{\text{abs}} \subset H$  est défini de la même manière que  $E_{\text{abs}}^B$ . Ce résultat est une conséquence de la proposition 2.20, qui s'obtient en calculant la mesure  $\beta_t$  à l'aide du théorème de la divergence 1.6 sur chacune des composantes connexes de  $E \setminus H$ . La deuxième équation exprime la conservation du courant de probabilité à travers le mécanisme de réinitialisation, que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\int_{\Gamma} \mathbf{j}_t^{\text{out}} d\mathfrak{s} = \int_{\Psi(\Gamma)} \mathbf{j}_t^{\text{in}} d\mathfrak{s}_H, \quad \text{pour tout } \Gamma \subset \partial E \text{ mesurable,}$$

ou encore

$$\mathbf{j}_t^{\text{in}} = \frac{d(\Psi_{\sim} \mathfrak{s})}{d\mathfrak{s}_H} \mathbf{j}_t^{\text{out}} \circ \Psi^{-1} \quad \text{sur } H.$$

(3.14) **Remarque.** Le facteur scalaire  $d(\Psi_{\sim}^{-1} \mathfrak{s}_H)/d\mathfrak{s}$  qui apparaît dans l'équation 3.13 quantifie la déformation de la mesure de surface lorsque l'on passe de  $H$  à  $\partial E$  avec la fonction de réinitialisation  $\Psi$ . Il vaut simplement 1 lorsque  $n_q = 1$ . Soit  $q \in \mathcal{Q}$  un mode tel que  $n_q \geq 2$ , et soient  $(U, \varphi)$  et  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  deux cartes, respectivement sur  $\partial E_q$  et  $H$ , avec  $\tilde{U} = \Psi(U)$ . Avec les mêmes notations que pour la remarque 1.7.c, on a alors pour tout  $y \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n_q-1}$  l'expression

$$\frac{d(\Psi_{\sim}^{-1} \mathfrak{s}_H)}{d\mathfrak{s}}(y) = \sqrt{\left| \frac{\det \tilde{\kappa}_{\Psi \circ \varphi^{-1}}(y)}{\det \kappa_{\varphi^{-1}}(y)} \right|} \left| \det \text{Jac } \tilde{\varphi} \circ \Psi \circ \varphi^{-1} \right|,$$

où  $\text{Jac } \tilde{\varphi} \circ \Psi \circ \varphi^{-1}$  désigne la matrice jacobienne de la fonction  $\tilde{\varphi} \circ \Psi \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$ .

(3.15) **Exemple.** Le modèle de Malhamé et Chong (1985) est un exemple typique de SHS vérifiant les hypothèses que nous venons de décrire. Nous revenons donc dans cet exemple sur la généralisation à deux dimensions de ce modèle, décrite au chapitre III, § 4.A, pour en expliciter l'équation de Fokker-Planck généralisée.

Les deux modes sont bien de la même dimension, en l'occurrence  $n_q = n = 2$ , et la garde coïncide avec la frontière  $\partial E$  :

$$E^B = \partial E = \{0\} \times \{z_{\min}\} \times \mathbb{R} \cup \{1\} \times \{z_{\max}\} \times \mathbb{R}.$$

L'image de  $\partial E$  par la fonction de réinitialisation  $\Psi : (q, z) \mapsto (1 - q, z)$  est l'ensemble

$$H = \Psi(\partial E) = \{1\} \times \{z_{\min}\} \times \mathbb{R} \cup \{0\} \times \{z_{\max}\} \times \mathbb{R}.$$

Il est clair que  $\Psi$  est un difféomorphisme de  $\partial E$  dans  $H$ . (En fait, dans les cartes « naturelles »  $(E_0, (q, z) \mapsto z)$  et  $(E_1, (q, z) \mapsto z)$ , il s'agit de l'application identité!)

Supposons maintenant que l'hypothèse de régularité 3.12 est vérifiée. Alors la densité se prolonge par continuité sur  $H$ , s'annule sur  $\partial E$ , et est solution de l'équation d'évolution

$$(3.16) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, t) + \text{div } j_t = 0 \quad \text{sur } E \setminus (E^B \cup H),$$

assortie des relations statiques

$$(3.17) \quad \begin{cases} -j_t^1(0, z_{\min}, z^2) = j_t^1(1, z_{\min}^+, z^2) - j_t^1(1, z_{\min}^-, z^2), \\ j_t^1(1, z_{\max}, z^2) = j_t^1(0, z_{\max}^+, z^2) - j_t^1(0, z_{\max}^-, z^2), \end{cases}$$

avec le courant de probabilité

$$\begin{cases} j_t^1(q, z^1, z^2) = -(\alpha_1(z^1 - z_{\text{ext}}) + \alpha_{12}(z^1 - z^2) + \beta_1 q) p_t - \frac{1}{2}(\sigma_1)^2 \frac{\partial p_t}{\partial z^1}, \\ j_t^2(q, z^1, z^2) = -(\alpha_2(z^2 - z_{\text{ext}}) + \alpha_{21}(z^2 - z^1) + \beta_2 q) p_t - \frac{1}{2}(\sigma_2)^2 \frac{\partial p_t}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Observons que l'expression du courant de probabilité se simplifie beaucoup sur le bord et sur  $H$ , la densité étant nulle sur le bord et continue sur  $E$ . Les relations statiques peuvent ainsi être réécrites sous la forme simplifiée :

$$\begin{cases} \frac{\partial p_t}{\partial z^1}(0, z_{\min}, z^2) = -\frac{\partial p_t}{\partial z^1}(1, z_{\min}^+, z^2) + \frac{\partial p_t}{\partial z^1}(1, z_{\min}^-, z^2), \\ -\frac{\partial p_t}{\partial z^1}(1, z_{\max}, z^2) = -\frac{\partial p_t}{\partial z^1}(0, z_{\max}^+, z^2) + \frac{\partial p_t}{\partial z^1}(0, z_{\max}^-, z^2). \end{cases}$$

Nous discuterons de la résolution numérique de l'EDP 3.16–3.17 au chapitre suivant.



## CHAPITRE V

# APPLICATION AU CALCUL DE LA LOI STATIONNAIRE POUR DES SHS À SAUTS FORCÉS

## 1 Introduction : résolution numérique de l'équation de FPK généralisée (pourquoi et comment)

Nous avons expliqué au chapitre IV comment obtenir, pour la plupart des SHS que l'on peut rencontrer dans les applications, l'équation de FPK généralisée qui régit l'évolution  $t \mapsto \mu_t$  de la loi marginale du processus  $X$ . Ceci met à la disposition des utilisateurs de SHS un outil qui, tout comme l'équation de Fokker-Planck pour les processus de diffusion, peut être utilisé aussi bien en régime transitoire qu'en régime stationnaire. La question qui a motivé le travail présenté dans ce chapitre est la suivante : dans quelles situations est-il pertinent d'envisager la résolution de l'équation de FPK généralisée, par rapport à une approche de type Monte Carlo a priori plus simple à mettre en œuvre ?

Dans le cas du régime transitoire, on s'intéresse au calcul de  $t \mapsto \mu_t$  sur un intervalle  $[0; T]$ , pour une loi initiale  $\mu_0$  donnée. Une fois calculée la loi  $\mu_t$  à chaque instant, on a facilement accès à  $t \mapsto \mathbb{E}_{\mu_0}\{\varphi(X_t)\}$  pour n'importe quelle fonction  $\varphi$  : on peut ainsi étudier la dynamique du processus, sous la loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}$ , en considérant par exemple sa moyenne, sa variance, les probabilités modales  $\mathbb{P}_{\mu_0}\{Q_t = q\}$ , etc. Quitte à modifier un peu le processus considéré, cela permet également de résoudre des problèmes d'atteignabilité, par exemple : quelle est la probabilité que le processus  $X$  ait atteint, à chaque instant  $t \in ]0; T]$ , un certain ensemble cible  $\Gamma_1 \in \mathcal{E}$  sans être passé par  $\Gamma_2 \in \mathcal{E}$  (voir Bect et al., 2006a, § III.B, pour plus de détails). À l'opposé, lorsqu'on s'intéresse à une fonction test  $\varphi$  en particulier, il est plus intéressant de résoudre l'équation rétrograde (obtenue en dérivant la formule de Dynkin) qui fournit directement  $t \mapsto \mathbb{E}_x\{\varphi(X_t)\}$  pour chaque valeur de  $x \in E$ , et pas seulement pour une loi initiale  $\mu_0$  fixée.

Dans le cas du régime stationnaire, on s'intéresse au calcul d'une loi  $\mu_{st}$  sur  $E^0$ , indépendante du temps, telle que  $\mu_{st}P_t = \mu_{st}$ , pour tout  $t \geq 0$ . Bien souvent, cette loi est unique et caractérise l'équilibre statistique dans lequel se trouve l'état  $X_t$  du processus après un temps suffisamment long (hypothèse d'ergodicité). Pour les processus non conservatifs, il n'y a pas en général de loi stationnaire, mais on peut s'intéresser dans ce cas à une éventuelle loi *quasi-stationnaire*, qui vérifie  $\mu_{qs}P_t = e^{-t/\tau_{qs}}\mu_{qs}$  pour un certain  $\tau_{qs} > 0$ .

Ce chapitre est consacré à la mise en œuvre, sur deux exemples, de l'équation de FPK généralisée

pour le calcul de la loi stationnaire ou quasi-stationnaire d'un processus diffusif par morceaux. C'est dans ce cadre, nous semble-t-il, que l'utilisation d'une approche basée sur la résolution numérique de l'équation de FPK est la plus pertinente : en effet, contrairement aux approches de type Monte Carlo qui utilisent explicitement l'ergodicité, l'équation de FPK stationnaire permet d'accéder directement aux quantités recherchées, sans *time-marching*.

## 1.A Un rapide état de l'art des méthodes numériques

Même dans le cas des processus de diffusion, c'est-à-dire en l'absence de sauts, il est assez rare que l'on sache expliciter la solution d'une équation de FPK, que ce soit en régime stationnaire ou – pire – en régime transitoire. Néanmoins, on peut consulter à ce sujet Soize (1994), qui répertorie un certain nombre d'exemples pour lesquels la loi stationnaire est connue explicitement. Dans tous les autres cas, on peut bien sûr avoir recours à une approche de type Monte Carlo, mais le coût calculatoire des simulations requises pour obtenir une bonne estimation de la ddp a motivé bon nombre de travaux sur la résolution numérique de l'équation de Fokker-Planck. Il est d'ailleurs intéressant de constater que les articles publiés sur ce sujet se répartissent dans des domaines aussi différents que la mécanique aléatoire, l'astrophysique, la chimie, et même la biologie cellulaire. L'éventail des méthodes employées est très large : éléments finis (Langley, 1985 ; Spencer Jr et Bergman, 1993), différences finies (Wojtkiewicz et al., 2008a,b), volumes finis<sup>1</sup> (Chang et Cooper, 1970 ; Ferm et al., 2006 ; Wang et al., 2003 ; Xing et al., 2005), méthodes spectrales (Bhandari et Sherrer, 1968 ; Blackmore et Shizgal, 1985 ; McWilliam et al., 2000 ; von Wagner et Wedig, 2000), *path integrals* (Drozdov et Brey, 1998 ; Drozdov et Talkner, 1998 ; Yu et Lin, 2004) et *distributed approximating functional* (Wei et al., 1997 ; Zhang et al., 1997).

Les tentatives de résolution numérique d'équations de FPK généralisées sont beaucoup plus rares dans la littérature, et concernent presque exclusivement des modèles à sauts spontanés. Citons, dans le domaine des réseaux de Pétri fluides du second ordre<sup>2</sup>, les articles de Wolter et Zisowsky (2001) et Chen et al. (2002), qui traitent des modèles de dimension 1 et 2 par des méthodes aux différences finies<sup>3</sup>. Citons également Wojtkiewicz et al. (1999), qui utilisent un schéma aux différences finies dans le domaine de Fourier (i.e. pour calculer la fonction caractéristique) en dimension 2, et Annunziato (2006) qui utilise également un schéma aux différences finies, mais cette fois pour calculer la fonction de répartition. Dans tous ces travaux, les processus diffusifs par morceaux qui sont considérés possèdent seulement des sauts spontanés. À notre connaissance, la seule référence mentionnant la résolution numérique d'une équation de FPK généralisée, en présence de sauts forcés, est Malhamé et Chong (1985) ; le modèle est de dimension 1, et la résolution utilise un schéma aux différences finies qui n'est pas précisé.

En pratique, les techniques de résolution numérique évoquées précédemment sont limitées à des modèles de dimension assez basse. Dans le cas des processus de diffusion, les résultats rapportés dans la littérature font état de résolution « précises » de l'équation de Fokker-Planck jusqu'à la dimension 4 (voir par exemple Kumar et Narayanan, 2006 ; Wojtkiewicz et Bergman, 2000). Bien entendu, ceci ne préjuge en rien de l'éventuel intérêt d'une approche de type EDP, par rapport à une approche de type Monte Carlo, pour la résolution d'un problème donné – seulement de sa

---

<sup>1</sup>En réalité on peut écrire un schéma aux volumes finis aussi bien dans un formalisme différences finies (ce qui est le cas de toutes les méthodes citées ici et aussi de celle que nous utiliserons) que dans un formalisme éléments finis (voir à ce sujet Morton, 1996, chapitre VI).

<sup>2</sup>En anglais : *Second Order Fluid Stochastic Petri Nets* (SO-FSPN)

<sup>3</sup>En réalité le schéma de Chen et al. est en fait un schéma aux volumes finis, mais cela n'apparaît pas explicitement.

faisabilité. Les modèles considérés dans la suite de ce chapitre seront respectivement de dimension 2 et 3, la dimension dont il est question ici étant le nombre de variables continues du modèle hybride.

## 1.B Choix d'une approche adaptée pour un problème donné

Nous l'avons dit précédemment : le choix d'une méthode basée sur la résolution numérique de l'équation de FPK ne se justifie que si on peut espérer obtenir un gain significatif, en précision et/ou en temps de calcul, par rapport à une approche de type Monte Carlo a priori plus simple à mettre en œuvre. La dimension du modèle considéré joue bien sûr un rôle fondamental dans ce choix. En effet, les quelques références citées plus haut, concernant la résolution numérique de l'équation de Fokker-Planck pour les processus de diffusion, indiquent clairement que la résolution n'est pas envisageable – à l'heure actuelle – pour des modèles possédant plus de quatre variables continues.

Ceci étant dit, pour un modèle de dimension  $n \leq 4$ , il n'est pas évident de déterminer de manière générale quelle approche sera la plus efficace. Il est clair cependant que la balance va pencher en faveur d'une approche de type Monte Carlo au fur et à mesure que la dimension augmente. Mais une comparaison précise est délicate, d'une part parce que les deux types de méthode font intervenir des paramètres qui sont le plus souvent ajustés manuellement (nombre de simulations, pas de discrétisation, etc.), et d'autre part parce que la nature des erreurs mises en jeu n'est pas la même : en particulier, les méthodes de type Monte Carlo font intervenir une erreur statistique qui n'a pas d'analogue dans les méthodes déterministes de résolution numérique de l'équation de FPK. Nous essaierons malgré tout, dans la section 2 de ce chapitre, d'en dire quelque chose dans le cas du calcul de la loi stationnaire pour un modèle de dimension 2.

Au delà du problème évident de la dimension du modèle, la nature même de l'équation de FPK généralisée, pour le modèle considéré, doit être prise en compte. En effet, il s'agit en général d'une équation intégro-différentielle, dont la résolution numérique est beaucoup plus délicate que celle d'une simple EDP. Dans le cas d'une discrétisation en volumes finis, nous verrons dans la section 2.B que la recherche de la loi stationnaire se ramène au calcul d'un vecteur propre (associé à la valeur propre 0) pour une matrice  $A$  de très grande dimension, et ne possédant a priori aucune structure particulière. Des algorithmes efficaces pour traiter ce problèmes existent uniquement lorsque  $A$  est une matrice creuse, ce qui se produit essentiellement lorsque l'équation de FPK généralisée est une EDP. Les deux modèles traités dans ce chapitre seront du type décrit au chapitre IV, § 3.C, pour lequel nous avons vu que l'équation de FPK généralisée est effectivement une EDP. Les conclusions que nous en tirerons, en terme de faisabilité d'une telle approche, ne seront donc pas a priori généralisables à n'importe quel type de SHS.

Signalons pour terminer que, de manière générale, on a plus facilement accès à travers une méthode de type Monte Carlo à des quantités qui ne dépendent pas seulement de la loi marginale du processus à un instant donné. Pour rester dans le cas du régime stationnaire qui est le sujet de ce chapitre, supposons par exemple que l'on souhaite calculer la fonction de corrélation  $\gamma(t) = \mathbb{E}_{\mu_{\text{st}}} \{X_s X_{s+t}\}$  du processus  $X$  en régime stationnaire. Par une approche EDP, on doit d'abord utiliser l'équation de FPK pour déterminer la loi stationnaire, puis l'équation rétrograde pour calculer  $\mathbb{E}_x \{X_t\}$ , et enfin  $\gamma(t) = \int_{\mathbb{E}} x \mathbb{E}_x \{X_t\} \mu_{\text{st}}(dx)$ , alors qu'une approche de type Monte Carlo permet de calculer  $\gamma(t)$  en utilisant l'ergodicité, avec un coût en calculs guère plus élevé que pour le calcul de quantités qui ne dépendent que des lois marginales à un instant.



(1.1) **Remarques.**

- a) Nous insistons ici sur l'importance du nombre de variables continues dans la mesure où la taille d'une grille sur un espace d'état hybride croît exponentiellement avec le nombre de variables continues – ou plus généralement avec  $n = \max_{q \in \mathcal{Q}} n_q$  si celui-ci est variable – et seulement linéairement avec  $|\mathcal{Q}|$ . Les exemples considérés dans la suite posséderont seulement deux modes discrets.
- b) Nous nous contenterons dans ce chapitre d'une méthode de Monte Carlo élémentaire, basée sur l'utilisation du schéma d'Euler à pas constant, pour servir de référence. Il existe au delà de cette méthode très simple une immense littérature sur les méthodes de Monte-Carlo, en particulier pour les modèles à base d'EDS : étude des schémas de discrétisation, techniques d'échantillonnage préférentiel, techniques particulières et processus de branchement, etc. On pourra consulter, comme références générales sur ces sujets, Kloeden et Platen (1998) ; Lapeyre et al. (1998) ; Milstein (1995). Des références plus précises, spécifiques au cas des processus diffusifs par morceaux, seront données au § 2.C.

## 1.C Plan du chapitre

Nous nous intéresserons exclusivement, dans ce chapitre, à des modèles diffusifs par morceaux du même type que le modèle de Malhamé et Chong (1985), c'est-à-dire des modèles à sauts forcés et réinitialisations déterministes du type décrit au § 3.C. Cela ne sous-entend nullement que les autres classes de modèles diffusifs par morceaux sont moins intéressantes, ou moins importantes ! Cela reflète simplement la progression chronologique de ce travail de thèse – bien différente de la progression logique des chapitres de ce mémoire. En effet, les modèles à sauts forcés ont, les premiers, attiré notre attention : d'une part parce qu'ils nous ont semblé beaucoup moins bien compris et étudiés dans la littérature que leurs analogues à sauts spontanés, d'autre part parce que nous avons – et avons toujours – le sentiment qu'ils constituent une généralisation naturelle au cadre stochastique des systèmes dynamiques hybrides étudié dans la communauté automatique (voir par exemple Branicky et al. (1998), et plus généralement les conférences HSCC<sup>4</sup> et ADHS<sup>5</sup>). Afin d'inscrire clairement notre travail dans l'évolution récente de la thématique des systèmes hybrides stochastiques (que nous avons retracée en introduction, cf. section I.2), les sauts forcés et les sauts spontanés ont été, dans la mesure du possible, traités sur un pied d'égalité dans tous les chapitres précédents : cela ne sera plus le cas dans celui-ci.

Le reste du chapitre est constitué de deux sections, chacune de ces sections étant consacrée à un modèle particulier, du type décrit ci-dessus. Le premier exemple (section 2) est la généralisation à deux dimensions du modèle de Malhamé et Chong (1985), définie au chapitre III, § 4.A et reprise au chapitre IV, § 3.C. Nous nous efforcerons de déterminer sa loi stationnaire par la résolution numérique de son équation de FPK généralisée, en comparant le résultat obtenu à une approche de type Monte Carlo (en termes de compromis précision / temps de calcul). Le deuxième exemple (section 3) est un modèle d'éolienne à vitesse variable, pour lequel nous chercherons à caractériser l'incertitude sur la puissance produite en fonction de la vitesse moyenne du vent. Le travail présenté sur ce sujet a été effectué en collaboration avec Yannick Phulpin, du département Énergie de Supélec, et a fait l'objet d'une communication à la conférence PMAPS 2006 (Bect et al., 2006b).

---

<sup>4</sup> *Hybrid Systems : Computation and Control*, voir Hespanha et Tiwari (2006) ; Morari et Thiele (2005).

<sup>5</sup> *Analysis and Design of Hybrid Systems*, voir Engell et al. (2003).

## 2 Le modèle de Malhamé et Chong à deux dimensions

L'équation de FPK généralisée, pour le modèle à deux dimensions décrit au § III.4.A, a été établie dans l'exemple IV.3.15. Ceci fournit un outil pour étudier le régime stationnaire du processus, qui caractérise son comportement en temps long : l'équation de FPK *stationnaire*, obtenue en remplaçant  $\partial p/\partial t$  par 0 dans l'EDP. L'objectif de la présente section est de mettre en œuvre une méthode effective de calcul de la loi stationnaire, basée sur la résolution numérique de l'équation de FPK stationnaire utilisant une discrétisation en volumes finis. La pertinence d'une telle approche sera discutée par comparaison avec une approche de type Monte Carlo, en apparence plus simple mais plus calculatoire.

### 2.A Existence et unicité de la loi stationnaire, $f$ -ergodicité exponentielle

L'existence d'une unique mesure stationnaire découle, comme nous allons le montrer, des résultats généraux sur la stabilité des  $T$ -processus établis par Meyn et Tweedie (1993a,b). Pour appliquer ces résultats, nous commencerons par justifier que le processus  $X$  est un  $T$ -processus irréductible, la mesure d'irréductibilité étant la mesure de Lebesgue  $\mathbf{m}$  sur  $(E, \mathcal{E})$ . L'existence d'une loi stationnaire, son unicité, ainsi que plusieurs autres propriétés utiles, découleront alors d'un critère de type Foster-Lyapunov. Les concepts utilisés dans cette section –  $T$ -processus, irréductibilité, etc. – sont définis par Meyn et Tweedie (1993a).

Des résultats classiques sur la récurrence des diffusions (Friedman, 1975), appliqués au processus de base  $\tilde{X}$ , montrent que la garde est atteinte en un temps fini,  $\mathbb{P}_x$ -ps pour tout  $x \in E^0$ . En d'autres termes,  $\mathbb{P}_x\{\tau_1 < +\infty\} = 1$  pour tout  $x \in E^0$ , ce qui entraîne par récurrence que le nombre de commutations du processus sur  $\mathbb{R}_+$  est presque sûrement infini (mais nous n'en aurons pas besoin). Par ailleurs, la théorie des EDP paraboliques permet d'établir que le semigroupe de noyaux  $(\hat{P}_t)$ , associé au processus tué  $\hat{X}$ , possède une densité de transition  $\hat{p}_t$  continue sur  $]0; +\infty[ \times E^0 \times E^0$ , vérifiant  $\hat{p}_t(x, y) > 0$  pour tous  $t > 0$ ,  $x = (q, z) \in E^0$  et  $y \in E_q^0$ . On a ainsi, pour tous  $t > 0$ ,  $x \in E^0$  et  $\Gamma \in \mathcal{E}$ ,

$$P_t(x, \Gamma) \geq \hat{P}_t(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} \hat{p}_t(x, y) dy,$$

ce qui montre que le noyau  $P_t$  possède une composante continue, donc que le processus  $X$  est un  $T$ -processus (Meyn et Tweedie, 1993a, § 3.3). Introduisons maintenant la fonction  $\eta$  définie par

$$\eta(x, \Gamma) = \mathbb{E}_x \left\{ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\hat{X}_t \in \Gamma} dt \right\}, \quad x \in E^0, \Gamma \in \mathcal{E}.$$

En considérant pour  $x = (q, z) \in E^0$  la relation

$$\eta(x, \Gamma) = \int_0^{+\infty} \hat{P}_t(x, \Gamma) dt = \iint_{]0; +\infty[ \times \Gamma} \hat{p}_t(x, y) dt dy,$$

il est clair que  $\eta(x, \Gamma) > 0$  dès que  $\Gamma \cap E_q$  possède une mesure de Lebesgue strictement positive. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left\{ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{X_t \in \Gamma} dt \right\} &= \mathbb{E}_x \left\{ \int_0^{\tau_1} \mathbb{1}_{X_t \in \Gamma} dt \right\} + \mathbb{E}_x \left\{ \mathbb{E}_{X_{\tau_1}} \left\{ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{X_t \in \Gamma} dt \right\} \right\} \\ &\geq \eta(x, \Gamma) + \mathbb{E}_x \left\{ \eta(X_{\tau_1}, \Gamma) \right\} \end{aligned}$$

est strictement positif dès que  $\Gamma$  possède une mesure de Lebesgue strictement positive, i.e. que  $X$  est irréductible.

Le système linéaire  $dZ_t = \mathbf{f}(q, Z_t) dt$  étant asymptotiquement stable, pour chaque valeur de  $q$ , on peut maintenant utiliser la théorie habituelle des fonctions de Lyapunov quadratiques pour les systèmes linéaires (voir par exemple Faurre et Robin, 1984, chapitre 6) pour exhiber des constantes  $c, d > 0$  et une matrice  $P$  symétrique définie positive, telles que la fonction  $V : (q, z) \mapsto z^\top P z$  (qui appartient clairement au domaine du deuxième générateur étendu d'après le théorème 3.23 du chapitre III) vérifie la condition de Foster-Lyapunov suivante :

$$\mathcal{L}'_X V(x) \leq -cV(x) + d, \quad \forall x \in E.$$

Ceci entraîne l'existence d'une unique loi stationnaire  $\mu_{\text{st}}$  et l'ergodicité<sup>6</sup> du processus (Meyn et Tweedie, 1993b, théorèmes 4.4 et 5.2). De plus, notons  $f = 1+V$ . Alors, pour toute fonction  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $|\varphi|/f$  est borné, on a  $\mu_{\text{st}}|\varphi| < +\infty$  et  $(P_t\varphi)(x)$  converge à une vitesse exponentielle – indépendante de  $x$  – vers  $\mu_{\text{st}}\varphi$  (propriété de  $f$ -ergodicité exponentielle, cf. Meyn et Tweedie, 1993b, théorème 6.1).

(2.1) **Remarque.** Dans le cas de modèles à sauts spontanés, des résultats d'existence de la loi invariante et de convergence en loi (ce qui est plus faible que la convergence en variation totale considérée ici) ont été établis par Yuan et Mao (2003) puis généralisés par Yuan et Lygeros (2004), sous le nom de *stabilité asymptotique en loi*.

Nous admettrons pour la suite que la loi stationnaire vérifie les hypothèses de régularité permettant d'écrire l'équation de FPK généralisée (cf. hypothèses IV.3.10), c'est-à-dire que  $\mu_{\text{st}}$  admet une densité de probabilité  $p$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $E \setminus H$ , telle que  $p$  et  $dp$  possèdent au plus une discontinuité de première espèce sur  $H$ .

## 2.B Un schéma en volumes finis

Nous utiliserons, pour la discrétisation de l'équation de FPK généralisée, un *schéma en volumes finis*. L'emploi de ce type de schéma est tout à fait classique en mécanique des fluides, ce qui inclut les équations de convection-diffusion – i.e. de Fokker-Planck – comme cas particulier : leur principal avantage est en effet de garantir par construction, à travers une discrétisation consistante des flux, la conservation de la masse (probabilité) totale. Dans le cas particulier des SHS à sauts forcés, les flux jouent également un rôle central dans les conditions au bord, qui ne sont rien d'autre que des équations de conservation du flux en lien avec le mécanisme de réinitialisation qui renvoie le processus de  $E^B$  dans  $E^0$ . Un schéma en volumes finis semble donc le choix le plus naturel. Nous renvoyons à Versteeg et Malalasekera (1995, chapitre 5) pour une présentation générale des schémas en volumes finis dans le cas des équations de convection-diffusion, ainsi qu'à Morton (1996, chapitre VI) et Li et al. (2000) pour l'analyse numérique de tels schémas.

### Description du schéma utilisé

Nous considérons une grille cartésienne sur le domaine hybride tronqué

$$E_{\text{tronc}} = \{(q, z) \in E \mid \forall i \in \{1, 2\}, z_L^i \leq z^i \leq z_U^i\},$$

où les bornes de troncature vérifient  $z_L^1 < z_{\min} < z_{\max} < z_U^1$  et  $z_L^2 < z_U^2$ . Si  $w$  et  $w'$  sont deux cellules de la grille, de centres respectifs  $z_w$  et  $z_{w'}$ , et possédant une face en commun, nous notons  $(w, w')$

<sup>6</sup>i.e. la convergence, pour la norme de la variation totale, de  $P_t(x, \cdot)$  vers  $\mu_{\text{st}}$ , pour tout  $x$ .

la face commune en question (c'est-à-dire l'ensemble  $\partial w \cap \partial w'$ ) munie de l'orientation définie par la normale

$$\mathbf{n}^{(w,w')} = \frac{z_{w'} - z_w}{\|z_{w'} - z_w\|}.$$

Nous noterons  $C$  l'ensemble des faces orientées  $c$  de la grille, et nous imaginerons que le domaine tronqué  $E_{\text{tronc}}$  est entouré d'une couche de cellules « fantômes », de sorte que même les faces incluses dans le bord  $\partial E_{\text{tronc}}$  peuvent être vues comme l'intersection de deux cellules de la grille (l'une des deux étant une cellule fantôme). Notons  $p_t^w$  la valeur moyenne de la densité  $p_t$  sur la cellule  $w$ , c'est-à-dire

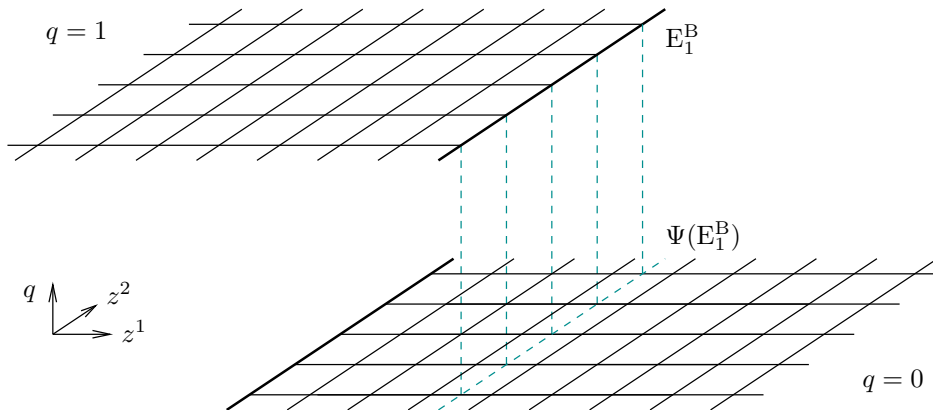
$$p_t^w = \frac{1}{\mathbf{m}(w)} \int_w p_t \, \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Pour les cellules à l'intérieur desquelles  $p_t$  possède une densité de classe  $\mathcal{C}^2$ , on a par l'équation de FPK généralisée IV.3.16 et le théorème de la divergence :

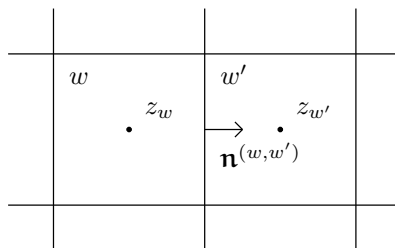
$$(2.2) \quad \mathbf{m}(w) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_t^w = \int_w \operatorname{div} \mathbf{j}_t \, \mathrm{d}\mathbf{m} = - \sum_{w' \sim w} \int_{\partial w \cap \partial w'} \langle \mathbf{j}_t, \mathbf{n}^{(w,w')} \rangle \, \mathrm{d}\mathbf{s},$$

où  $w' \sim w$  signifie que  $w$  et  $w'$  possèdent une face commune. Lorsque  $p$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ , i.e. lorsque l'intérieur de  $w$  intersecte l'image  $\Psi(E_{\text{tronc}}^{\text{B}})$  de la garde, un terme de flux entrant doit être ajouté à l'équation 2.2 : nous y reviendrons plus tard. L'écriture d'un schéma aux volumes finis consiste alors à discrétiser le membre de droite de l'équation, en proposant une approximation numérique de la composante normale du courant sur chaque face de la cellule  $w$ .

Avant cela, précisons la manière dont est choisie la grille, ou plutôt les grilles puisqu'il y en a une sur chaque mode. La discrétisation dans la direction  $z^2$  est la même sur les deux modes, tandis que la discrétisation dans la direction  $z^1$  est choisie différente sur chaque mode, de façon à ce que l'image  $\Psi(c)$  d'une face  $c \in C$  incluse dans la garde coupe en deux une cellule du mode d'arrivée. Ceci est schématisé sur la figure suivante (le pas de la grille est choisi constant sur cette figure, mais cela n'est pas obligatoire) :



Considérons alors deux cellules  $w$  et  $w'$  possédant une face commune. Supposons d'abord qu'il s'agit d'une face interne au domaine, les deux cellules étant disposées comme suit :



L'expression du courant de probabilité dans la direction  $\mathbf{n}^{(w,w')}$  a été donnée au § 3.C :

$$\mathbf{j}_t^1 = \mathbf{f}^1(x) p_t - \frac{1}{2} (\sigma_1)^2 \frac{\partial p_t}{\partial z^1}.$$

Nous utiliserons l'approximation numérique

$$(2.3) \quad \mathbf{j}_t^{(w,w')} = \mathbf{f}_{\text{mid}}^{(w,w')} \left\{ \begin{array}{l} p_t^w \quad \text{si } \mathbf{f}_{\text{mid}}^{(w,w')} \geq 0 \\ p_t^{w'} \quad \text{sinon} \end{array} \right\} - \frac{1}{2} (\sigma_1)^2 \frac{p_t^{w'} - p_t^w}{z_{w'}^1 - z_w^1},$$

où l'on a introduit la valeur  $\mathbf{f}_{\text{mid}}^{(w,w')}$  de la composante normale de la dérive, évaluée au milieu  $z_{w,w'} = (z_w + z_{w'})/2$  de la face, i.e.

$$\mathbf{f}_{\text{mid}}^{(w,w')} = \langle \mathbf{f}(z_{w,w'}), \mathbf{n}^{(w,w')} \rangle = \mathbf{f}^1(z_{w,w'}).$$

La première partie de l'expression 2.3 correspondant à l'approximation dite *décentrée* (en anglais : *upwind*), dont l'usage est fréquent pour la discrétisation des termes de convection<sup>7</sup>. Le courant dans la direction opposée est simplement défini par  $\mathbf{j}_t^{(w,w')} = -\mathbf{j}_t^{(w,w')}$ , et une approximation similaire est appliquée pour les faces parallèles à l'axe des abscisses.

Supposons maintenant que l'une des deux cellules, par exemple  $w'$ , est une cellule fantôme, c'est-à-dire que  $(w, w') \subset \partial E_{\text{tronc}}$ . Deux cas se présentent alors :

- si la face  $(w, w')$  est incluse dans la garde  $E^B$ , on utilise à nouveau l'approximation 2.3 avec cette fois-ci  $p_t^{w'} = 0$ ;
- il s'agit sinon d'une face correspondant à la troncature de l'espace d'état, pour laquelle on utilisera la condition  $\mathbf{j}_t^{(w,w')} = 0$  pour assurer la conservation de la probabilité totale dans le domaine tronqué  $E_{\text{tronc}}$ .

### Système d'EDOs. Existence et unicité de la solution stationnaire.

Ceci achève la discrétisation de l'équation de FPK généralisée par rapport aux variables d'espace : on s'est ainsi ramené à un système d'EDOs linéaires à coefficients constants, d'inconnues les densités moyennes  $t \mapsto p_t^w$ , dont nous allons maintenant expliciter l'expression.

Si  $w$  est une cellule telle que  $w \cap \Psi(E_{\text{tronc}}^B) = \emptyset$ , il s'agit simplement de l'équation obtenue à partir de 2.2 en approchant sur chaque face  $(w, w')$  le courant dans la direction normale par  $\mathbf{j}_t^{(w,w')}$ , ce qui donne

$$\mathbf{m}(w) \frac{d}{dt} p_t^w = - \sum_{w' \sim w} \mathbf{j}_t^{(w,w')} \mathbf{s}(w, w'),$$

<sup>7</sup>Plus précisément, la nécessité d'utiliser une approximation *upwind* pour le terme de convection dépend du nombre de Peclet dans la direction considérée, qui est défini dans la direction  $i$  par la relation  $\text{Pe} = 2 \mathbf{f}^i \Delta z^i / (\sigma^i)^2$ , où  $\Delta z^i$  est le pas de discrétisation dans la direction  $i$ . Il existe d'autres formes d'approximation décentrée, dont certaines prennent en compte explicitement le nombre de Peclet, par exemple : le schéma de Chang et Cooper (1970), le *hybrid differencing scheme*, le *power law scheme* ou encore le schéma QUICK (Versteeg et Malalasekera, 1995, sections 5.7 à 5.9).

où  $\mathfrak{s}(w, w')$  est la surface de la face. Si  $w \cap \Psi(\mathbb{E}_{\text{tronc}}^{\text{B}}) \neq \emptyset$ , alors il existe (d'après nos hypothèses sur la grille) une unique face  $c \subset \mathbb{E}_{\text{tronc}}^{\text{B}}$  orientée vers l'extérieur telle que  $w \cap \Psi(\mathbb{E}_{\text{tronc}}^{\text{B}}) = \Psi(c)$ . En appliquant le théorème de la divergence sur chacune des deux parties de  $w \setminus \Psi(c)$ , on obtient ainsi l'EDO

$$\mathbf{m}(w) \frac{d}{dt} p_t^w = - \sum_{w' \sim w} \mathbf{j}_t^{(w, w')} \mathfrak{s}(w, w') + \mathbf{j}_t^c \mathfrak{s}(c).$$

Considérons maintenant ce même système d'EDOs mis sous forme matricielle :  $d\boldsymbol{\mu}_t/dt = A\boldsymbol{\mu}_t$ , où  $\boldsymbol{\mu}_t$  est le vecteur des probabilités  $\mathbf{m}(w) p_t^w$ , rangés dans un ordre quelconque, et  $A$  la matrice carrée des coefficients. Le schéma de discrétisation choisi a une conséquence fort agréable : la matrice  $A$  peut s'interpréter comme le générateur infinitésimal (*Q-matrix*) d'une chaîne de Markov à temps continu, à valeur dans l'ensemble des cellules de la grille, et clairement irréductible en raison de la diffusion. Ceci entraîne que le noyau de la matrice  $A$  est de dimension 1, avec des vecteurs propres de signe constant. En d'autres termes, il existe donc un unique vecteur  $\boldsymbol{\mu}_{\text{st}} \geq 0$  tel que  $A\boldsymbol{\mu}_{\text{st}} = 0$  et  $\sum_w \boldsymbol{\mu}_{\text{st}}^w = 1$ , qui est l'unique loi stationnaire de la chaîne (voir exemple Norris, 1997, théorème 3.5.2).

## 2.C Référence Monte-Carlo : un schéma d'Euler amélioré

Il est également possible, bien sûr, de calculer un estimateur  $\check{\mu}$  de la loi stationnaire  $\mu_{\text{st}}$  en utilisant une méthode de Monte-Carlo, c'est-à-dire en simulant sur un horizon suffisamment long une approximation numérique  $\check{X}$  du processus  $X$  étudié. L'approche la plus simple – celle que nous utiliserons dans la suite de cette section – consiste à utiliser un schéma de discrétisation à pas de temps constant  $\delta t$ , et à estimer la loi stationnaire  $\mu_{\text{st}}$  par la loi empirique

$$\check{\mu}_N^{\delta t} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{\check{X}_n}.$$

Etant donnée une fonction test mesurable  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  (que nous supposons dans la suite à croissance au plus quadratique, puisque nous avons pris une fonction de Lyapunov quadratique au § 2.A), cela revient à dire que l'on estime la quantité  $\mathbb{E}_{\mu_{\text{st}}} \{\varphi(X_t)\}$  par la moyenne empirique

$$(2.4) \quad \check{\varphi}^{\text{MC}}(N, \delta t) = \check{\mu}_N^{\delta t}(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(\check{X}_n).$$

L'hypothèse sous-jacente à l'utilisation de cet estimateur est une forme d'ergodicité du processus discrétisé  $\check{X}$  :

$$(2.5) \quad \check{\varphi}^{\text{MC}}(N, \delta t) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}_{x\text{-ps}}} \mu_{\text{st}}(\varphi) + \epsilon_{\varphi}(\delta t), \quad \forall x \in \mathbb{E}^0,$$

où  $\epsilon_{\varphi} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction (déterministe) qui tend vers 0 quand  $\delta t$  tend vers 0. Nous supposons que cette propriété est vérifiée pour le modèle considéré, avec le schéma de discrétisation décrit plus bas, pour tout fonction  $\varphi$  à croissance au plus quadratique : cela nous permettra d'utiliser comme fonctions test les moments d'ordre 1 et 2, ainsi que diverses fonctions indicatrices.

### (2.6) Remarques.

- a) Dans le cas d'une « simple » EDS, i.e. en l'absence de sauts, des résultats du type 2.5 ont été établis par Talay (1990) et Mattingly et al. (2002), pour différents schémas de discrétisation à pas constant. Ces résultats ont été partiellement généralisés – existence d'une loi invariante pour le processus discrétisé, convergence faible vers la loi invariante exacte – à certaines EDS

à sauts spontanés, pour le schéma d'Euler à pas constant, par Yuan et Mao (2005) et Yin et al. (2005).

b) L'analogie en temps continu de l'hypothèse 2.5 s'écrit

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X_s) ds \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}_x\text{-ps}} \mathbb{E}_{\mu_{\text{st}}} \{ \varphi(X_0) \}, \quad \forall x \in E^0.$$

Bien que cela ne soit pas évident à première vue, il s'agit – pour toute fonction  $\varphi$  telle que  $\mathbb{E}_{\mu_{\text{st}}} \{ |\varphi(X_0)| \} < +\infty$ , donc en particulier à croissance au plus quadratique – d'une conséquence de la propriété d'ergodicité établie au § 2.A. (Cela se démontre avec les mêmes arguments que le théorème 20.21.i de Kallenberg (1997)).

c) Des méthodes utilisant un pas temporel  $\delta t_n$  décroissant pour la discrétisation, ainsi que des pondérations plus générales pour la construction de l'estimateur 2.4, ont été proposées par Lamberton et Pagès (2002, 2003) dans le cas d'EDS sans sauts, puis généralisées au cas d'EDS à sauts spontanés (Mao et al., 2005 ; Panloup, 2006 ; Yin et al., 2005). L'objectif est de supprimer le biais asymptotique liée à la discrétisation de l'EDS, et aussi si possible d'accélérer la convergence de l'estimateur. Nous nous contenterons dans la suite d'utiliser des discrétisations à pas constant.

### Schéma d'Euler et test de sortie « naïf »

L'étude des schémas de discrétisation pour les SHS est un champ de recherche encore très peu exploré. Une fois encore, il convient de distinguer les modèles à sauts spontanés des modèles à sauts forcés : la majeure partie des travaux existants porte en effet sur la discrétisation des EDS à sauts spontanés<sup>8</sup>. Bien qu'aucun article ne porte explicitement sur la discrétisation de SHS à sauts forcés, qui nous intéresse ici, il existe un certain nombre de travaux traitant de la discrétisation de diffusions stoppées ou tuées lorsqu'elles atteignent le bord d'un domaine (Buchmann, 2005 ; Gobet, 2000, 2001 ; Hausenblas, 2000 ; Mannella, 1999).

Nous utiliserons pour la dynamique continue un simple schéma d'Euler à pas constant  $\delta t$ , i.e. en notant  $\check{X}_n = (\check{Q}_n, \check{Z}_n)$  la valeur de la solution approchée au temps  $t_n = n \delta t$  :

$$\check{Z}_{n+1} = \check{Z}_n + \mathbf{f}(\check{Q}_n, \check{Z}_n) \delta t + \begin{bmatrix} \sigma_1 \xi_n^1 \\ \sigma_2 \xi_n^2 \end{bmatrix} \sqrt{\delta t},$$

où  $\{\xi_n^i, i \in \{1, 2\}, n \geq 0\}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi normale réduite. La détection des sauts est le point délicat de la discrétisation des SHS à sauts forcés : en effet, bien que le schéma d'Euler pour une EDS soit connu pour avoir une erreur faible de discrétisation qui décroît en  $O(\delta t)$ , ce taux est dégradé en  $O(\sqrt{\delta t})$  en présence de sauts forcés (Gobet, 2000 ; Gobet et Menozzi, 2004), si on emploie la méthode naïve :

$$(2.7) \quad \check{Q}_{n+1} = \begin{cases} \check{Q}_n & \text{si } \check{Z}_{n+1} \in E_{\check{Q}_n}^0, \\ 1 - \check{Q}_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'origine de ce problème est assez simple à comprendre : en procédant ainsi on néglige la possibilité que la trajectoire de la solution ait atteint la garde entre deux « observations » à l'intérieur de  $E^0$ .

<sup>8</sup>Voir par exemple Kubilius et Platen (2001), Yuan et Mao (2004) et Glasserman et Merener (2004) pour ce qui concerne l'approximation sur un intervalle de temps compact  $[0; T]$ , ainsi que les références déjà citées dans la remarque 2.6 pour ce qui concerne l'approximation de la loi stationnaire.

$z_{\min}$	$z_{\max}$	$z_{\text{ext}}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{21}$
20 °C	25 °C	15 °C	0.02 s <sup>-1</sup>	0.05 s <sup>-1</sup>	0.10 s <sup>-1</sup>	0.10 s <sup>-1</sup>

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\beta_1$	$\beta_2$
0.4 °C/s	0.4 °C/s	0.5 °C.s <sup>-1/2</sup>	0.4 °C.s <sup>-1/2</sup>

**Tab. 2.a** – Valeurs numériques utilisées pour les paramètres du modèle de Malhamé et Chong (1985) en dimension 2. La définition de ces paramètres a été donnée au chapitre III, § 4.A.

(2.8) **Remarque.** Pour être exacts, précisons que le résultat concernant l’erreur faible est établi seulement pour le cas d’un processus de diffusion tué lorsqu’il atteint la frontière d’un ouvert régulier, ce qui peut être vu comme un cas très particulier de SHS à sauts forcés.

### Le test de sortie de Mannella et Gobet

Pour corriger la méthode naïve 2.7, nous utiliserons le test de sortie proposé par Gobet (2001), qui étend au cas multidimensionnel le test de Gobet (2000) ; Mannella (1999). Supposons que les points  $\check{Z}_n$  et  $\check{Z}_{n+1}$  ont été simulés, et sont tous deux dans  $E_{\check{Q}_n}^0$ . L’idée est de considérer le processus  $Z'$  défini en loi sur l’intervalle  $[t_n; t_{n+1}]$  comme la solution de l’EDS à coefficients constants

$$\begin{cases} Z'_{t_n} = \check{Z}_n \\ dZ'_t = \mathbf{f}(\check{Q}_n, \check{Z}_n) dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 dB_t^1 \\ \sigma_2 dB_t^2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

conditionnée par l’évènement  $Z'_{t_{n+1}} = \check{Z}_{n+1}$ . L’intérêt de cette approximation est que le processus  $(Z')_{t_n \leq t \leq t_{n+1}}$  est un pont brownien, pour lequel la valeur de la probabilité de sortie

$$p_n = \mathbb{P}\{\exists t \in [t_n; t_{n+1}], Z'_t \notin E_{\check{Q}_n}^0\}$$

est connue explicitement. Si  $\check{Q}_n = 0$ , on a en effet

$$p_n = \exp\left(-2 \frac{(\check{Z}_n^1 - z_{\min})(\check{Z}_{n+1}^1 - z_{\min})}{(\sigma_1)^2 \delta t}\right),$$

et la même expression reste valable pour  $\check{Q}_n = 1$ , à condition de remplacer  $z_{\min}$  par  $z_{\max}$ . Remarquons que la valeur du drift « figé »  $\mathbf{f}(\check{Q}_n, \check{Z}_n)$  n’intervient pas dans ce résultat.

(2.9) **Remarque.** Le calcul exact de la probabilité de sortie est possible sur cet exemple car les domaines  $E_q$  sont des demi-plans. Lorsque la frontière est lisse mais plus nécessairement plate, Gobet (2000) propose de l’approcher localement par son hyperplan tangent, et montre que cela n’affecte l’ordre de l’erreur faible obtenue. Ceci n’est bien sûr plus possible lorsque le domaine possède des coins.

## 2.D Résultats numériques

### Quelques précisions concernant l’implémentation

Les valeurs numériques utilisées, pour les paramètres du modèle, sont données dans le tableau 2.a. Les limites du domaine tronqué sont fixées – au vu de quelques simulations – à  $z_L^1 =$



Grille $G_i$	Pas $\delta z_i$	$N_{\text{cells}}$	Densité
$G_1$	0.1	29 700	$1.4 \cdot 10^{-6}$
$G_2$	$\delta z_1/2$	119 400	$3.4 \cdot 10^{-7}$
$G_3$	$\delta z_1/3$	269 100	$1.5 \cdot 10^{-7}$
$G_4$	$\delta z_1/4$	478 800	$8.4 \cdot 10^{-8}$

**Tab. 2.b** – Caractéristiques des grilles utilisées pour la discrétisation en volumes finis de l’opérateur de FPK généralisé. Le domaine tronqué est le même à chaque fois. La dernière colonne indique la densité de remplissage de la matrice  $A$  obtenue, c’est-à-dire le nombre de coefficients non nuls divisé par la taille de la matrice (i.e.  $N_{\text{cells}}^2$ ).

$z_L^2 = 15$  °C et  $z_U^1 = z_U^2 = 30$  °C. Différentes grilles cartésiennes  $G_i$  seront considérées sur ce domaine tronqué ; il s’agit de grilles possédant un pas  $\delta z_i$  constant et identique dans les deux directions. Pour chacune de ces grilles, le nombre  $N_{\text{cells}}$  de cellules dans la grilles (i.e. la longueur du vecteur  $\underline{\mu}_{\text{st}}$ ), ainsi que la densité de remplissage de la matrice  $A$  correspondante, sont données par le tableau 2.b. Il s’agit comme prévu (en raison de l’absence de terme intégral dans l’équation de FPK généralisée) de matrices « très creuses ».

La recherche d’un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre 0 – c’est-à-dire, à un coefficient près, du vecteur  $\underline{\mu}_{\text{st}}$  – est faite numériquement grâce à l’algorithme IRAM<sup>9</sup>, implémenté en FORTRAN dans la bibliothèque ARPACK (Lehoucq, Sorensen et Yang, 1998) et accessible à travers la fonction `eigs` du logiciel Matlab. Il s’agit d’un algorithme itératif de type Krylov (voir par exemple Barrett et al., 1994), permettant de calculer efficacement un petit nombre de valeurs propres / vecteurs propres d’une matrice creuse de très grande taille.

Nous comparerons les deux approches, pour différentes valeurs des paramètres, en terme de compromis précision / temps de calcul :

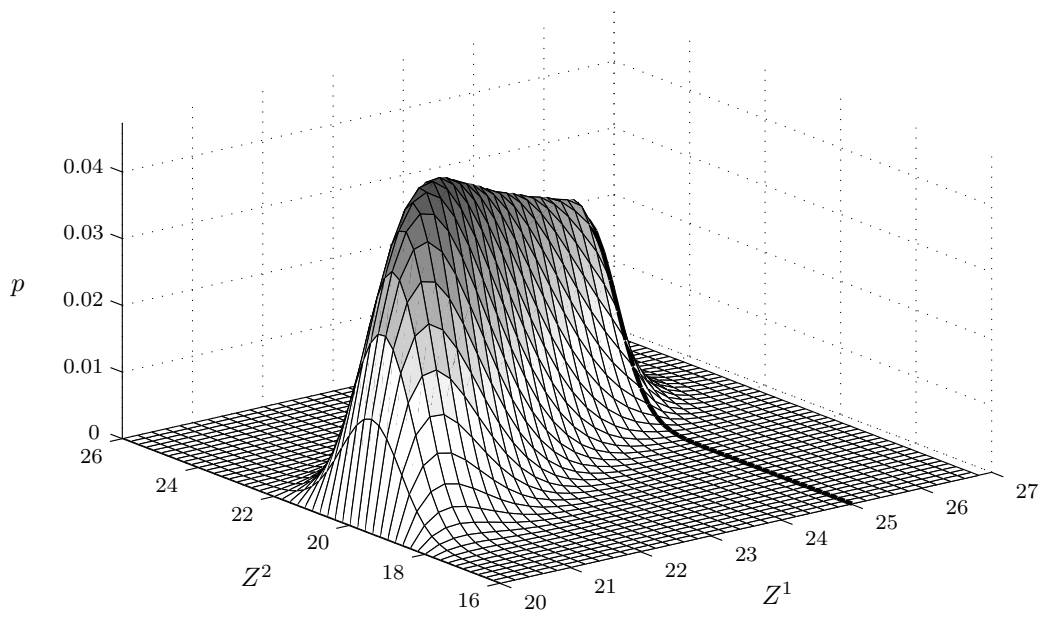
- Le temps de calcul que nous indiquerons est le « temps processeur » mesuré sous Matlab grâce à la fonction `cputime`. Bien entendu, le temps indiqué dépend de l’implémentation des algorithmes et de l’ordinateur utilisé : tous les calculs seront donc menés sur une même machine, en l’occurrence un Dual Core AMD Opteron 285 (2 GHz) avec 4 Go de mémoire vive. Par ailleurs, afin de ne pas biaiser la comparaison en faveur de l’approche « volumes finis », qui bénéficie de l’implémentation optimisée de la bibliothèque ARPACK, nous avons implémenté l’algorithme de simulation des trajectoires dans un *MEX-file* écrit en langage C.

- La précision sera quantifiée par l’erreur relative obtenue lors du calcul approché de quantités de la forme  $\mathbb{E}_{\mu_{\text{st}}} \{ \varphi_k(X_0) \}$ . Ne disposant de la valeur exacte pour aucune fonction test, nous avons calculé des valeurs approchées « de référence », que nous espérons suffisamment précises pour le calcul d’erreur (hypothèse confortée a posteriori par l’allure des courbes d’erreur obtenues, cf. figure 2.b). Ces valeurs de référence sont obtenues en moyennant la valeur de l’estimateur  $\check{\varphi}_k^{\text{MC}}$  du § 2.C sur un ensemble de 50 trajectoires, avec  $\delta t = 4 \cdot 10^{-4}$ , et une longueur de  $N = 10^{11}$  pas. (Le calcul de chacune de ces trajectoires a duré environ 150 minutes.) Les fonctions test  $\varphi_k$  utilisées, ainsi que les valeurs numériques obtenues, sont données dans le tableau 2.c.

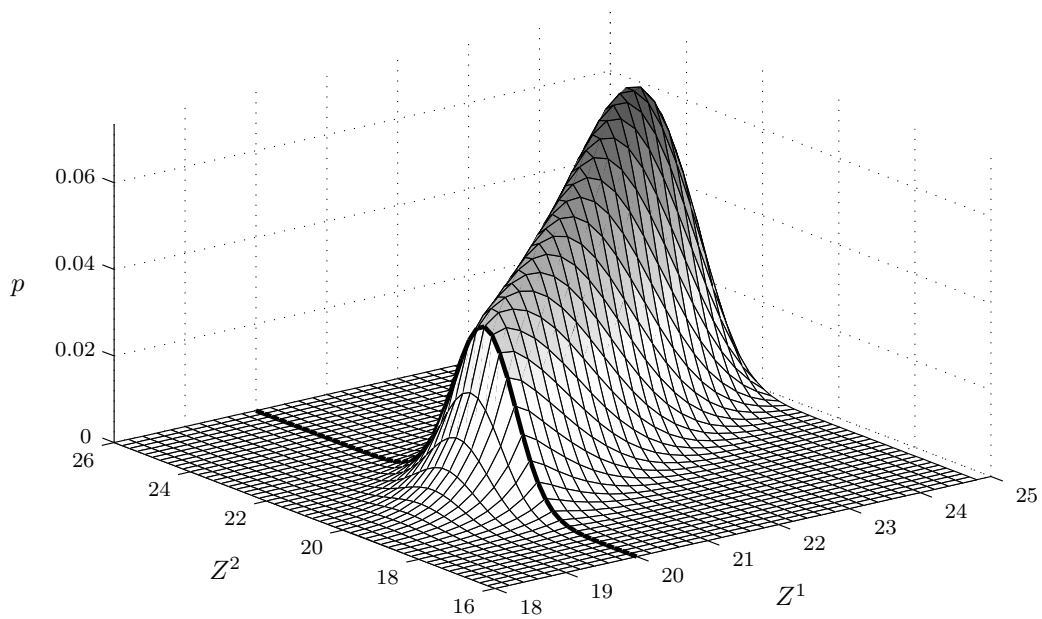
## Résultats et commentaires

Commençons par observer la loi stationnaire obtenue par la méthode des volumes finis, avec la grille  $G_2$ , représentée en figure 2.a sous la forme de deux densités de probabilité modales. (Les

<sup>9</sup>acronyme signifiant *Implicitly Restarted Arnoldi Algorithm*

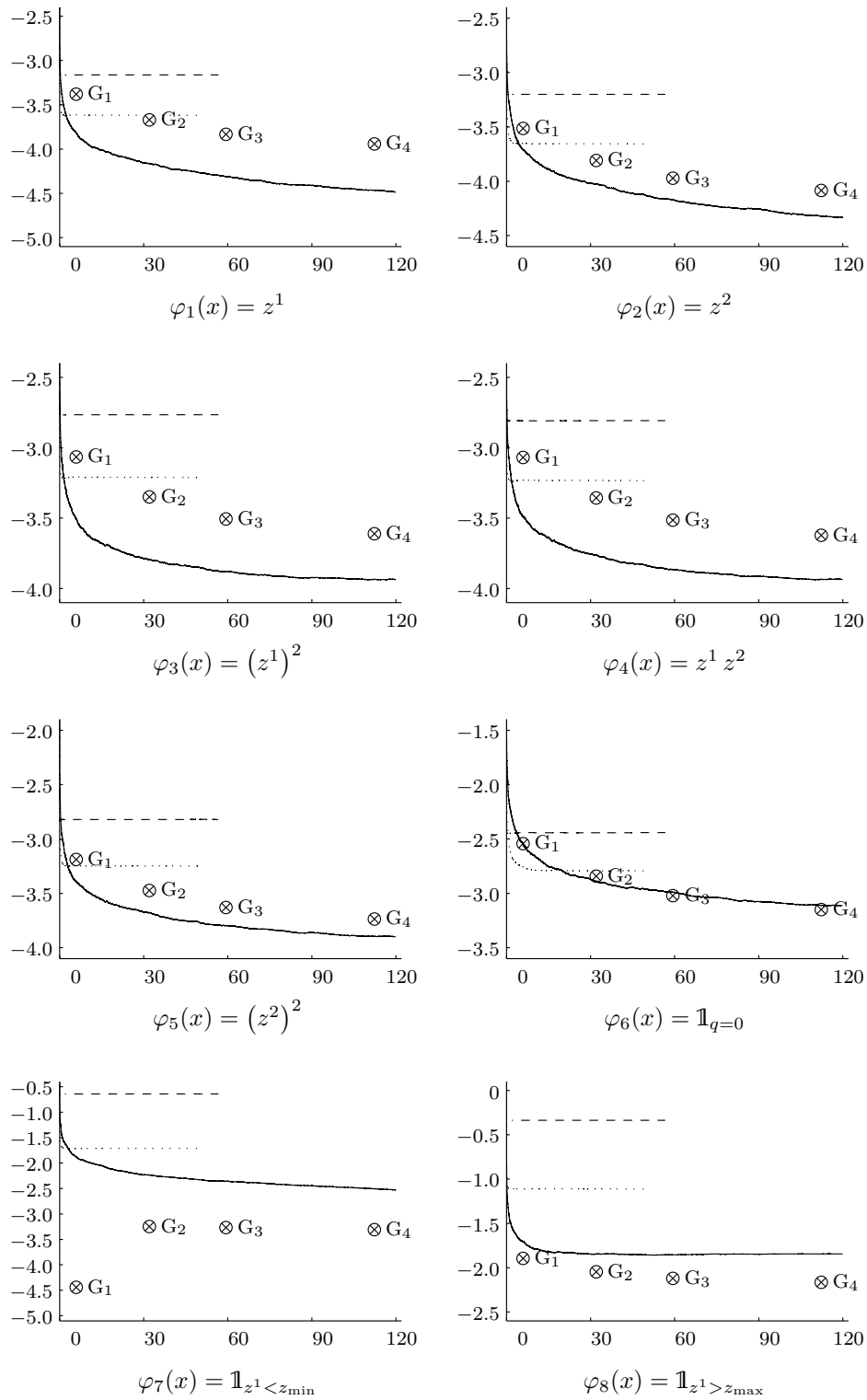


Densité de probabilité modale, mode  $q = 0$



Densité de probabilité modale, mode  $q = 1$

**Fig. 2.a** – Densités de probabilité modales, calculées par la méthode des volumes finis, avec la grille  $G_2$ . Les traits épais représentent l'image de la garde par la fonction de réinitialisation,  $\Psi(E^B)$ , sur laquelle  $dp$  est discontinue.



**Fig. 2.b** – Comparaison des résultats obtenus par l’approche « volumes finis » et par l’approche Monte Carlo, à travers le calcul approché de quantités du type  $\mathbb{E}_{\mu_{st}}\{\varphi_k(X_0)\}$ . Abscisses : temps de calcul (en secondes). Ordonnées :  $\log_{10}$  de l’erreur relative (référence M.C.). Légende : les courbes correspondent aux résultats obtenus par M.C. (tirets :  $\delta t = 5 \cdot 10^{-1}$ , pointillés :  $\delta t = 5 \cdot 10^{-2}$ , trait plein :  $\delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ ), les croix cerclées aux résultats obtenus par FPK, pour différentes grilles.

Fonctions test $\varphi_k$	Référence M.C.	
	Valeur $\check{\varphi}_k^{\text{réf}}$	Ecart-type norm. $\check{\sigma}_k^{\text{réf}}/\check{\varphi}_k^{\text{réf}}$
$\varphi_1(x) = z^1$	$2.2449 \cdot 10^{+1}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
$\varphi_2(x) = z^2$	$2.1555 \cdot 10^{+1}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
$\varphi_3(x) = (z^1)^2$	$5.0593 \cdot 10^{+2}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$
$\varphi_4(x) = z^1 z^2$	$4.8524 \cdot 10^{+2}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$
$\varphi_5(x) = (z^2)^2$	$4.6627 \cdot 10^{+2}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$
$\varphi_6(x) = \mathbb{1}_{q=0}$	$4.0409 \cdot 10^{-1}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$
$\varphi_7(x) = \mathbb{1}_{z^1 < z_{\min}}$	$3.0758 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
$\varphi_8(x) = \mathbb{1}_{z^1 > z_{\max}}$	$1.7712 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$

**Tab. 2.c** – Fonctions test  $\varphi_k$  et valeurs de références  $\check{\varphi}_k^{\text{réf}}$  obtenues par la méthode M.C. de référence décrite au § 2.D. Pour chaque fonction test, la valeur de référence est obtenue par une moyenne sur 50 trajectoires, avec un pas de  $\delta t = 4 \cdot 10^{-4}$ , et une longueur de  $N = 10^{11}$  pas ; l'écart-type empirique normalisé est donné à titre indicatif.

résultats obtenus avec les autres grilles sont, visuellement en tous cas, tout à fait similaires.) Le choix des bornes  $z_L^i$  et  $z_U^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , est validé a posteriori par l'allure de ces ddp modales, qui prennent des valeurs extrêmement faibles sur les bords correspondant à la troncature. Par ailleurs, on peut constater que la condition de barrière absorbante est bien vérifiée sur la garde<sup>10</sup> et que dp présente comme prévu une discontinuité sur l'image  $\Psi(E^B)$  de la garde.

(2.10) **Remarque.** Le vecteur propre  $\underline{\mu}_{\text{st}}$  obtenu grâce à ARPACK possède toujours quelques coefficients négatifs – de l'ordre de 1 ou 2 % du nombre total de cellules – mais ceux-ci se trouvent près des bords et possèdent une amplitude très faible (en général inférieure à  $10^{-17}$ ) : on peut donc les négliger.

Intéressons nous maintenant au compromis précision / temps de calcul offert par les deux approches considérées, la précision du résultat étant quantifiée par l'erreur relative par rapport aux valeurs de référence. (Plus précisément, dans le cas des méthodes de Monte-Carlo, il s'agit de l'espérance de l'erreur relative, i.e. de  $\mathbb{E}|\check{\varphi}_k^{\text{MC}}(N) - \check{\varphi}_k^{\text{réf}}|/\check{\varphi}_k^{\text{réf}}$ , estimée empiriquement à partir d'un ensemble de 500 simulations.) Les résultats obtenus sont présentés en figure 2.b. Nous avons considéré la méthode FPK / volumes finis du § 2.B, avec quatre grilles différentes notées  $G_1$  à  $G_4$ , et la méthode de Monte Carlo du § 2.C, avec trois pas de temps différents ( $\delta t = 5 \cdot 10^{-1}$ ,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-2}$ , et  $\delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ ).

Commençons par constater que la précision du résultat obtenu par la méthode de Monte Carlo dépend fortement du pas de temps  $\delta t$  choisi (ce qui n'est guère surprenant) : la convergence est d'autant plus rapide et l'erreur d'autant plus grande que le pas de temps est grand. Ceci nous ramène naturellement aux méthodes à pas décroissant (cf. remarque 2.6.c) mais là n'est pas notre propos. Deuxième observation : l'allure des courbes d'erreurs obtenues, pour les deux approches, suggère que les valeurs numériques de référence utilisées pour ces mesures d'erreur sont suffisamment précises. Concernant maintenant la comparaison entre les deux approches, il apparaît

<sup>10</sup>c'est-à-dire, rappelons-le, sur les droites  $z^1 = z_{\min} = 20$  °C dans le mode 0 et  $z^1 = z_{\max} = 25$  °C dans le mode 1

que l'approche Monte Carlo avec  $\delta t = 5 \cdot 10^{-3}$  est plus efficace que l'approche FPK / volumes finis pour le calcul des moments d'ordre 1 et 2, i.e. de  $\varphi_1$  à  $\varphi_5$ , et un peu moins efficace pour le calcul des quantités de la forme  $\mathbb{P}_{\mu_{st}} \{X_0 \in \Gamma\}$ , où  $\Gamma$  est par exemple un ouvert de  $E$ , i.e. de  $\varphi_6$  à  $\varphi_8$ . En fait, les résultats présentés en figure 2.b suggèrent que l'approche EDP n'est vraiment intéressante que pour le calcul de quantités du deuxième type<sup>11</sup>, lorsque la probabilité en question est faible (cf. tableau 2.c).

Un autre aspect à prendre en compte, pour comparer les deux types d'approches, est la quantité de « mémoire » requise. Il faut distinguer de ce point de vue la mémoire vive nécessaire à la mise en oeuvre de la méthode, et l'espace disque requis pour le stockage des résultats. Concernant la mémoire vive, l'approche Monte Carlo du § 2.C est clairement beaucoup moins coûteuse, puisque seul l'état courant du processus doit être mémorisé. En contraste, l'approche volume fini requiert pour son exécution une quantité de mémoire assez importante, qui dépend en particulier du nombre de cellules de la grille employée (qui détermine la taille du vecteur représentant la densité). Concernant l'espace disque requis, la question ne se pose que si l'on souhaite conserver l'approximation de la loi stationnaire (ddp dans un cas, loi empirique dans l'autre) pour un usage ultérieur. L'approche volumes finis est bien plus avantageuse de ce point de vue, puisque la représentation de la densité en volumes finis ne requiert que quelques Mo, alors que le stockage de l'ensemble des échantillons simulés dans l'approche Monte Carlo (avec  $\delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ ) pour obtenir une précision équivalente requiert plusieurs centaines de Mo<sup>12</sup>.

Les résultats de cette brève étude comparative montrent qu'il peut être intéressant d'envisager une approche de type FPK / volumes finis, pour l'étude du régime stationnaire d'un modèle de dimension 2, tout particulièrement si l'on cherche à obtenir une approximation « compacte » de la loi stationnaire, réutilisable par la suite. Néanmoins, la portée de ce type de méthode reste limitée à des situations où la discrétisation conduit à une matrice de transition  $A$  suffisamment creuse<sup>13</sup> et où le nombre de variables continues est suffisamment faible ( $n = 2$  dans cette section,  $n = 3$  dans la suivante). De plus, le calcul de quantité qui ne dépendent pas seulement de la loi marginale à un instant, comme par exemple l'autocorrélation du processus, ou encore la loi du temps séparant deux commutations du système, nécessite un travail supplémentaire à partir de la loi stationnaire ainsi obtenue, alors qu'il est possible directement dans une approche de type Monte Carlo. Enfin, la précision atteignable dans le cadre d'une approche de type EDP est limitée comme nous l'avons déjà dit par la quantité de mémoire vive disponible.

L'efficacité de l'approche Monte Carlo, pour le problème considéré ici, n'est guère surprenante dans la mesure où le processus est exponentiellement ergodique pour les fonctions test considérées. L'utilisation d'une approche basée sur l'équation de Fokker-Planck pourrait se révéler beaucoup plus pertinente dans des situations où la convergence vers l'équilibre est moins rapide, par exemple lorsque le drift à l'infini n'est pas suffisamment important (Lamberton et Pagès, 2003, remarque 2) ou lorsque le modèle présente des transitions de phases entre différents ensembles métastables (Huisinga et al., 2004). Par ailleurs, on pourrait se poser le même type de question en considérant pour chacun des approches des techniques plus évoluées, comme l'utilisation de grilles adaptatives

<sup>11</sup>La quantité  $\mathbb{P}_{\mu_{st}} \{X_0 \in \Gamma\}$  s'interprète aussi comme la proportion moyenne de temps que le processus passe dans l'ensemble  $\Gamma$  en régime stationnaire.

<sup>12</sup>On pourrait envisager de combiner l'approche Monte Carlo avec une procédure d'estimation de la densité, de manière à obtenir une approximation de la loi stationnaire moins coûteuse en termes de stockage, mais il faudrait alors prendre en compte le coût calculatoire de la procédure d'estimation choisie, ainsi que l'erreur ainsi introduite, dans l'évaluation du compromis précision / temps de calcul de la méthode obtenue.

<sup>13</sup>C'est-à-dire, essentiellement, à des situations où l'équation de FPK généralisée ne comporte pas de terme intégral, cf. discussion section IV.3.

pour les volumes finis, ou encore les schémas de discrétisation à pas décroissant pour l'approche Monte Carlo.

### 3 Étude d'un modèle d'éolienne à vitesse variable

Nous nous intéressons dans cette section à la modélisation d'une éolienne à vitesse variable, dans le but de quantifier l'incertitude induite sur la puissance produite, que nous noterons  $P_t^G$ , par le caractère stochastique de la vitesse du vent  $V_t$  à la surface du rotor de l'éolienne. Il s'agit d'un travail effectué en collaboration avec Yannick Phulpin, du département Énergie de Supélec, et présenté à la conférence PMAPS 2006 (Bect et al., 2006b).

L'éolienne en elle-même peut être vue comme un système dynamique déterministe, hybride pour des raisons que nous expliciterons plus loin, avec pour entrée la vitesse du vent et pour sortie la puissance produite :



Plus précisément, l'entrée  $V_t \geq 0$  représente la norme de la vitesse du vent à l'instant  $t$ , moyennée sur la surface du rotor : en supposant que l'éolienne fait toujours approximativement face au vent, ceci sera suffisant pour écrire un modèle simplifié de la dynamique de l'éolienne.

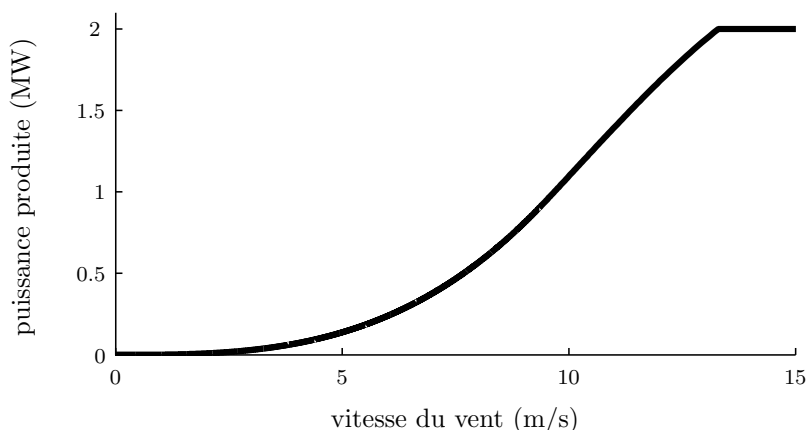
On rencontre fréquemment dans la littérature (voir par exemple Slootweg et al., 2003a,b ; Wellfonder et al., 1997) des caractéristiques statiques reliant la puissance  $P_t^G$  à la vitesse du vent  $V_t$ , qui sont du type de celle représentée en figure 3.c. Cette caractéristique représente le lieu des équilibres stables du système dynamique considéré<sup>14</sup> : l'intérêt d'une telle courbe semble alors assez limité, dans la mesure où le signal d'entrée présente des fluctuations très rapides, ce qui empêche de supposer que le système se trouve dans l'état d'équilibre. Il a néanmoins été constaté expérimentalement que les valeurs « instantanées » du couple  $(V_t, P_t^G)$  semblent se répartir aléatoirement autour de la courbe résultant de cette analyse statique (cf. figure 3.d).

Ceci suggère de s'intéresser à la distribution statistique de la puissance « instantanée », ou moyennée sur des intervalles assez courts ( $\leq 1$  minute), en fonction de la vitesse « moyenne » du vent, la moyenne étant prise sur des intervalles de temps plus longs, de l'ordre d'une demi-heure ou une heure par exemple. Précisons cela en écrivant le signal  $V_t$  comme la somme d'un terme  $\bar{V}_t$  variant lentement et d'un terme  $W_t$  de fluctuation rapides :  $V_t = \bar{V}_t + W_t$ , une telle séparation en deux échelles de temps étant naturellement suggérée par le modèle spectral de Van der Hoven (Nichita et al., 2002). Sur des intervalles de temps de l'ordre d'une heure, la composante lente  $\bar{V}_t$  peut être supposée constante – nous noterons simplement  $\bar{v}$  sa valeur – et le processus de fluctuations  $W_t$  stationnaire. On peut alors caractériser l'incertitude sur la puissance produite, en fonction de la vitesse moyenne  $\bar{v}$ , par la loi stationnaire de la sortie  $P_t^G$  du système dynamique déterministe lorsque l'entrée est le processus aléatoire stationnaire  $V_t = \bar{v} + W_t$ .

Le reste de la section est organisé comme suit. Nous commencerons par décrire au § 3.A le modèle employé, qui est composé d'un modèle de l'éolienne elle-même et d'un modèle du signal  $V_t$  : le système complet « vent + éolienne » que nous obtiendrons est un SHS, du type de ceux considérés

---

<sup>14</sup>C'est du moins de cette façon qu'a été obtenue la caractéristique représentée en figure 3.c. Dans les articles cités qui présentent des caractéristiques similaires, la signification précise de la courbe représentée n'est malheureusement pas définie clairement.



**Fig. 3.c** – Relation statique entre la vitesse du vent et la puissance produite par l'éolienne. Cette courbe correspond en fait au lieu des équilibres stables du modèle décrit au § 3.A, avec les valeurs numériques données au § 3.E. Des courbes similaires sont présentées par Slootweg et al. (2003b), Slootweg et al. (2003a) et Welfonder et al. (1997) par exemple. Le palier de puissance pour les valeurs élevées de  $v$  correspond à la puissance nominale  $P_{nom}^G$ .

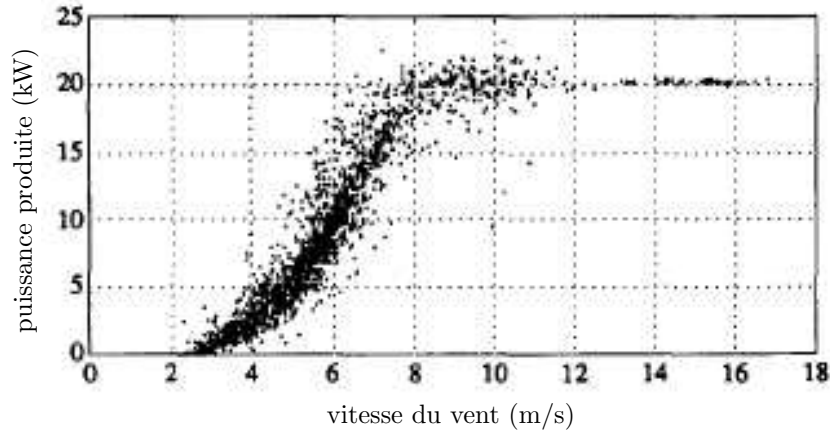
au chapitre III (à l'exception de la présence d'une barrière réfléchissante destinée à assurer la positivité de  $V_t$  à chaque instant). L'existence d'un processus diffusif par morceaux correspondant à la description donnée au § 3.A sera établie au § 3.B par une méthode ad hoc, les résultats généraux du chapitre III ne s'appliquant pas directement. Puis nous exprimerons au § 3.B l'équation de FPK généralisée associée à ce modèle et discuterons l'hypothèse de stationnarité évoquée plus haut. La méthode numérique employée et les résultats obtenus seront discutés aux §§ 3.D et 3.E. Finalement, nous concluons au 3.F sur l'intérêt de l'approche proposée.

### 3.A Description du modèle

Une éolienne à vitesse variable est un type d'éolienne capable d'ajuster son point de fonctionnement, i.e. essentiellement la vitesse de rotation  $\Omega_t$  de son rotor<sup>15</sup>, de façon à pouvoir être efficace dans une large plage de valeurs de la vitesse moyenne  $\bar{v}$  du vent – par opposition aux éoliennes à vitesse fixe, conçues pour fonctionner au voisinage d'une certaine valeur nominale. Ceci est en général réalisé grâce à la présence de plusieurs modes de fonctionnement (Ekelund, 1994 ; Muljadi et Butterfield, 2001), ce qui fait des éoliennes à vitesse variable un très bon exemple de système dynamique hybride.

Nous présenterons dans un premier temps un modèle simplifié de la dynamique d'une telle éolienne, munie d'un contrôleur hybride inspiré d'exemples de la littérature (principalement Muljadi et Butterfield, 2001 ; Slootweg et al., 2003a). Bien sûr, il s'agit simplement d'un exemple de contrôleur possible : la méthodologie présentée s'appliquerait tout aussi bien à pratiquement n'importe quel autre type de contrôle (sous réserve que le modèle obtenu soit un processus diffusif par morceaux), y compris au cas d'une éolienne à vitesse fixe.

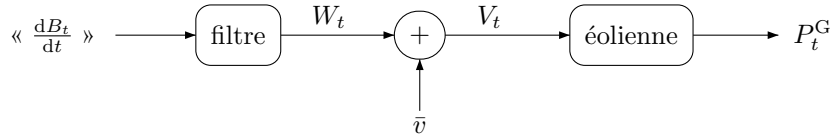
<sup>15</sup>Certaines notations employées dans cette section ne sont pas « compatibles » avec celles des chapitres précédents. En particulier, les lettres  $\Omega$  et  $\lambda$  désigneront respectivement la vitesse de rotation de l'éolienne et son TSR (dont la définition sera donnée plus loin). Néanmoins, ceci ne devrait pas causer d'ambiguïté.



**Fig. 3.d** – Relation mesurée expérimentalement entre la puissance électrique produite et la vitesse du vent pour une petite éolienne à vitesse variable ( $P_{nom}^G = 20 \text{ kW}$ ). Chaque point correspond à une moyenne sur un intervalle d'une minute. Cette figure est extraite de Thiringer et Linders (1993, figure 10).

Les fluctuations  $W_t$  de la vitesse du vent seront modélisées par la solution stationnaire d'une EDS à coefficients constants – en fait un processus d'Ornstein-Uhlenbeck – ce qui revient à représenter  $W_t$  comme la réponse d'un filtre rationnel à un bruit blanc gaussien.

Le système complet, modélisant à la fois le vent et l'éolienne, possède donc la structure suivante :



### La dynamique de l'éolienne

La dynamique mécanique de l'éolienne est donnée par le « théorème du moment cinétique » :

$$(3.1) \quad J d\Omega_t = \frac{P_{drive}(t) - P_{brake}(t)}{\Omega_t} dt,$$

où  $\Omega_t$  est la vitesse du rotor,  $J$  son moment d'inertie,  $P_{drive}$  la puissance aérodynamique capturée et  $P_{brake}$  la puissance de freinage due au générateur.

Nous supposons que le générateur possède un rendement  $\eta$  constant, c'est-à-dire que la puissance  $P^G$  produite par le générateur est liée à la puissance de freinage par la relation  $P^G = \eta P_{brake}$ . La puissance du vent est donnée par la relation

$$(3.2) \quad P_{drive}(t) = \frac{\pi}{2} \rho R^2 c_p(\Lambda_t, \Theta_t) V_t^3,$$

où  $\rho > 0$  est la densité de l'air,  $R > 0$  le rayon du rotor,  $\Theta_t \geq 0$  l'angle d'inclinaison des pales (*pitch*),  $\Lambda_t = R\Omega_t/V_t$  le *Tip Speed Ratio* (TSR) et  $c_p : [0; +\infty] \times [0; \theta_{max}] \rightarrow [0; 1]$  le coefficient de puissance (qui est une caractéristique de l'éolienne considérée). Un exemple numérique de fonction  $c_p$  est



fourni par Sloomweg et al. (2003b), et c'est celui que nous utiliserons dans la suite :

$$(3.3) \quad c_p(\lambda, \theta) = 0.73 \left( \frac{151}{\lambda_i} - 0.58\theta - 0.002\theta^{2.14} - 13.2 \right) e^{-18.4/\lambda_i},$$

avec  $\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda - 0.02\theta} - \frac{0.003}{\theta^3 + 1}$ .

La figure 3.e représente la caractéristique  $\lambda \mapsto c_p(\lambda, \theta)$ , pour différentes valeurs de l'angle  $\theta$ . Observons que cette courbe présente un unique maximum, pour chaque valeur de  $\theta$  : nous noterons  $c_{p,\text{opt}}$  la valeur maximale pour  $\theta = 0$ , et  $\lambda_{\text{opt}}$  le TSR pour lequel cette valeur est atteinte.

(3.4) **Remarque.** L'expression 3.3 présente quelques difficultés. En effet, pour chaque valeur de l'angle  $\theta$ , elle n'est pas définie pour  $\lambda = 0.02\theta$ , et prend des valeurs négatives sur  $[0; 0.02\theta[$  et aussi à partir d'une certaine valeur  $\lambda_{\text{max}}(\theta)$  du TSR. Ceci n'a pas de sens physique : il s'agit en fait de valeur du TSR auxquelles une éolienne ne devrait jamais fonctionner, ce qui est très certainement la raison pour laquelle Sloomweg et al. n'ont pas jugé utile de corriger leur expression. Nous utiliserons dans la suite la fonction  $c_p$  corrigée, obtenue en prenant la partie positive de l'expression 3.3. La fonction considérée n'est plus dans ce cas de classe  $\mathcal{C}^1$ , mais elle est néanmoins continue bornée sur  $[0; +\infty[ \times [0; \theta_{\text{max}}]$  et globalement lipschitzienne sur  $[0; +\infty[ \times [0; \theta_{\text{max}}]$ .

### Un contrôleur hybride à deux modes

Nous supposons que le fonctionnement de l'éolienne est régi par un contrôleur hybride similaire à celui qui est décrit par Muljadi et Butterfield (2001). Ce contrôleur possède deux modes discrets, que nous désignerons par 0 et 1 :

- Le mode 0 est utilisé lorsque la vitesse du vent ne permet pas de produire la puissance nominale  $P_{\text{nom}}^G$  de l'éolienne. La puissance de sortie  $P_t^G$  est alors ajustée instantanément en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega_t$ , selon une relation de la forme  $P_t^G = S(0, \Omega_t)$  que nous précisons plus loin, de façon à fonctionner en permanence au plus près du TSR optimal  $\lambda_{\text{opt}}$ . Ceci revient en fait, par rétroaction, à ajuster la vitesse de rotation de l'éolienne en fonction de la vitesse du vent. (Il pourrait sembler plus naturel d'ajuster directement la puissance  $P_t^G$  en fonction de la vitesse du vent, mais celle-ci est très délicate à mesurer en pratique.)

- Le mode 1 prend le relais lorsque la vitesse du vent est suffisante pour produire la puissance nominale  $P_{\text{nom}}^G$ . Dans ce mode, la fonction du contrôleur est de maintenir simultanément la valeur de  $P_t^G$  au voisinage de  $P_{\text{nom}}^G$ , et la valeur de  $\Omega_t$  au voisinage de la vitesse nominale  $\omega_{\text{nom}}$ . Comme dans le mode 0, on supposera que la puissance du générateur est ajustée instantanément selon une relation de la forme  $P_t^G = S(1, \Omega_t)$ , avec  $S(1, \omega_{\text{nom}}) = P_{\text{nom}}^G$ . Par ailleurs, afin de réduire la puissance capturée pour contrôler  $\Omega_t$ , il devient indispensable d'agir également sur l'inclinaison  $\Theta_t$  des pales.

Nous supposons que le contrôleur commute du mode 0 au mode 1 quand la vitesse de rotation  $\Omega_t$  atteint sa valeur nominale  $\omega_{01} = \omega_{\text{nom}}$ , et inversement lorsque  $\Omega_t = \omega_{10} < \omega_{\text{nom}}$ . L'inégalité stricte introduit de l'hystérésis dans le modèle, exactement comme dans celui de Malhamé et Chong (1985), de façon à éviter que le phénomène de Zénon ne se produise.

### Consigne de puissance $S(q, \omega)$

On essaie dans le mode 0 de maintenir le TSR  $\lambda_t$  au plus près du TSR optimal. Une façon de faire cela, connaissant la caractéristique  $c_p$  de l'éolienne, est de régler la puissance de sortie du

générateur selon la relation

$$(3.5) \quad P^G = S_{\text{opt}}(\omega) = \frac{\pi}{2} \eta \rho R^2 c_{p,\text{opt}} \left( \frac{R\omega}{\lambda_{\text{opt}}} \right)^3.$$

Ceci assure que, pour un angle  $\theta$  et une vitesse du vent  $v$  donnés, la vitesse  $\omega = \lambda_{\text{opt}}v/R$  est un point d'équilibre stable du système dynamique 3.1 avec  $P_{\text{brake}}(t) = S_{\text{opt}}(\Omega_t)/\eta$ . (En fait, on peut être plus précis : il existe exactement deux points d'équilibre stables, qui sont  $\omega = \lambda_{\text{opt}}v/R$  et  $\omega = 0$ . Ceci sera expliqué plus en détail au § 3.C, cf. figure 3.h.)

Pour des raisons pratiques, il n'est pas possible d'utiliser la relation 3.5 pour toutes les valeurs de  $\omega$  dans le mode 0. En effet, avec des valeurs réalistes des paramètres, on a en général  $S_{\text{opt}}(\omega_{\text{nom}}) \ll P_{\text{nom}}^G$ , ce qui entraînerait lors du changement de mode un freinage brutal de l'éolienne. Afin d'assurer une transition progressive entre les deux modes, la puissance  $P^G$  n'est déterminée par l'équation 3.5 qu'entre 0 et  $\omega_{10}$ , puis augmentée progressivement jusqu'à  $P_{\text{nom}}^G$  entre  $\omega_{10}$  et  $\omega_{\text{nom}}$ , comme cela est représenté sur la figure 3.f. Le point d'équilibre stable de 3.1, pour une valeur de  $v$  donnée, possède alors un TSR  $\lambda < \lambda_{\text{opt}}$  : on dit dans ce cas que l'éolienne fonctionne en *décrochage aérodynamique* (*stall* en anglais).

Dans le mode 1, nous supposons en suivant Muljadi et Butterfield (2001, figure 7, § III.C) que la puissance est réglée par

$$S(1, \omega) = P_{\text{nom}}^G + \beta (\omega - \omega_{\text{nom}}),$$

où  $\beta$  est une constante positive. La valeur de  $\beta$  résulte d'un compromis entre la stabilité de l'éolienne<sup>16</sup> aux fortes valeurs de  $v$  et l'amplitude des fluctuations (indésirables) de la puissance produite  $P_t^G$  autour de la valeur nominale  $P_{\text{nom}}^G$ .

### Contrôle de l'inclinaison des pales (*pitch control*)

Nous supposons par ailleurs, en suivant Sloomweg et al. (2003b), que l'inclinaison des pales est gérée – entre les limites  $\theta = 0$  et  $\theta = \theta_{\text{max}}$  – par un contrôleur proportionnel assorti d'un limiteur, selon l'équation

$$(3.6) \quad \frac{d\Theta_t}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Theta_t = 0 \text{ et } \Omega_t \leq \omega_{\text{nom}}, \\ 0 & \text{si } \Theta_t = \theta_{\text{max}} \text{ et } \Omega_t \geq \omega_{\text{nom}}, \\ h(K(\Omega_t - \omega_{\text{nom}})) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la fonction  $h$  est le limiteur

$$h(\dot{\theta}) = \min \left( \dot{\theta}_{\text{max}}, \max(\dot{\theta}_{\text{min}}, \dot{\theta}) \right), \quad \text{avec } \dot{\theta}_{\text{min}} < 0 < \dot{\theta}_{\text{max}}.$$

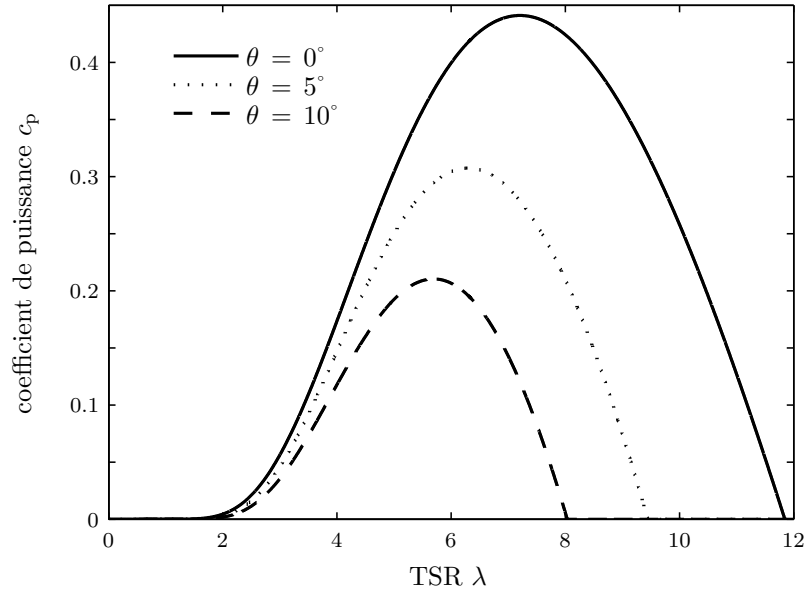
Notre modèle de la dynamique de l'éolienne est ainsi complet : il comporte deux variables continues, qui sont la vitesse de rotation  $\Omega_t$  et l'angle  $\Theta_t$ , et une variable discrète à valeurs dans  $\Omega = \{0, 1\}$ , que nous noterons comme d'habitude  $Q_t$ .

### Synthèse d'un signal « vitesse du vent » par filtrage d'un bruit blanc

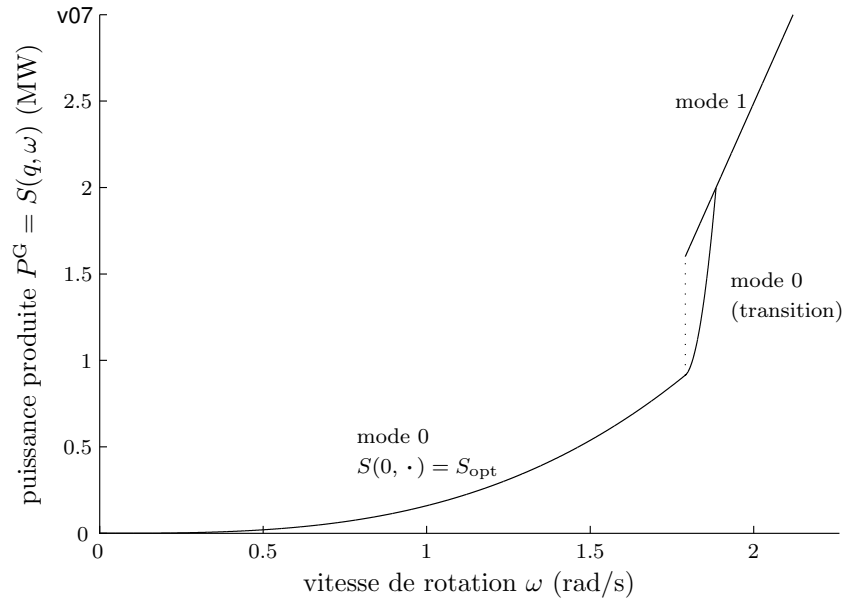
Un modèle réaliste de la vitesse du vent doit posséder un spectre très large, capable de rendre compte simultanément des turbulences locales très rapides et des fluctuations plus lentes à l'échelle

---

<sup>16</sup>Au sens où, plus  $\beta$  est grand, plus l'ensemble des valeurs de la vitesse du vent  $v$  pour lesquelles l'équation 3.1 admet un équilibre stable (différent de l'arrêt) est étendu.



**Fig. 3.e** – Représentation de la fonction  $\lambda \mapsto c_p(\lambda, \theta)$  pour différentes valeurs de l'angle  $\theta$ . On observe l'existence d'un unique maximum pour chaque valeur de  $\theta$ . La fonction  $c_p$  utilisée est tirée de Slootweg et al. (2003b), cf. équation 3.3 et remarque 3.4.



**Fig. 3.f** – Représentation de la consigne de puissance  $\omega \mapsto S(q, \omega)$  utilisée, dans les deux modes de fonctionnement de l'éolienne (i.e.  $q = 0$  et  $q = 1$ ). La transition entre  $\omega_{10}$  et  $\omega_{nom}$  est réalisée par un polynôme de degré 2, déterminé par les conditions  $S(0, \omega_{10}^+) = S_{opt}(\omega_{10})$ ,  $S'(0, \omega_{10}^+) = S'_{opt}(\omega_{10})$  et  $S(0, \omega_{nom}) = P_{nom}^G$ .

des heures et des jours (voir par exemple Nichita et al., 2002). Notre objectif ici est d'analyser l'incertitude sur la puissance produite  $P^G$  connaissant la vitesse « moyenne » du vent sur une plage de l'ordre de quelques dizaines de minutes à une heure – ce type de moyenne étant précisément le genre de prédiction fournie par les services météorologique. Sur de tels intervalles de temps, on sait (Welfonder et al., 1997) que la vitesse  $V_t$  du vent peut être assez bien modélisée par un processus gaussien stationnaire de moyenne constante  $\bar{v}$  et d'écart-type  $\sigma = \kappa \bar{v}$ , où  $\kappa$  est une constante qui dépend du site géographique sur lequel est implantée l'éolienne.

Il nous faut maintenant spécifier la densité spectrale de puissance de ce processus gaussien. Différentes formes paramétriques ont été proposées dans la littérature, les plus connues étant les spectres de Von Karman (Nichita et al., 2002 ; Veers, 1988) et de Kaimal (Slootweg et al., 2003b ; Veers, 1988). Nous utiliserons une approximation très simple, proposée par Ekelund (1994), par la solution stationnaire d'une EDS scalaire à coefficients constants :

$$(3.7) \quad dV_t = -\frac{V_t - \bar{v}}{T} dt + \kappa \bar{v} \sqrt{2/T} dB_t,$$

où  $T = L/\bar{v}$ , le paramètre  $L$  étant la distance caractéristique des turbulences (homogène à une longueur). Cela revient à simuler le signal  $V_t$  en filtrant un bruit blanc gaussien par un filtre rationnel d'ordre 1. Le spectre du processus obtenu ne reproduit pas le comportement asymptotique en  $f^{-5/3}$  des spectres plus réalistes de Von Karman et Kaimal. Bien sûr, une meilleure approximation de cette décroissance à l'infini pourrait être obtenue à l'aide de filtres d'ordres plus élevés, comme par exemple le filtre d'ordre 2 proposé par Nichita et al. (2002). Mais nous n'en ferons rien, et ce pour deux raisons : la première est fournie par Slootweg et al. (2003b), qui affirment que l'effet des fluctuations très rapides du vent peut être négligé du point de vue de la dynamique de l'éolienne, dans la mesure où elles se moyennent lorsqu'on intègre les contributions locales du vent sur la surface de l'éolienne. La deuxième raison est un peu moins avouable mais très concrète : l'utilisation de filtres d'ordre supérieur conduirait à l'augmentation du nombre de variables continues dans le modèle, rendant infaisable son analyse autrement que par simulation.

Afin de garantir la positivité du processus  $V_t$  sans pour autant compliquer l'EDS 3.7, nous ajoutons en  $v = 0$  une barrière réfléchissante. Précisons que cela a pour effet de changer la variance du processus  $V_t$ , qui n'est plus exactement  $\sigma^2 = \kappa^2 \bar{v}^2$ , mais l'erreur introduite est assez faible numériquement pour les valeurs de  $\kappa$  que nous considérerons.

### 3.B Construction d'un processus diffusif par morceaux

Il convient maintenant de s'assurer que le modèle que nous venons de décrire défini bien un processus diffusif par morceaux  $X = (Q, Z)$  sur un certain espace hybride  $E$ , où  $Q_t \in \mathcal{Q} = \{0, 1\}$  est la composante discrète et  $Z_t = (V_t, \Omega_t, \Theta_t)$  la composante continue. Nous commencerons par le reformuler avec les notations des chapitres précédents, en explicitant l'espace d'état et les champs de vecteurs. Puis nous établirons « manuellement » l'existence du processus de base, qui pour cet exemple ne découle pas directement des résultats généraux du chapitre III.

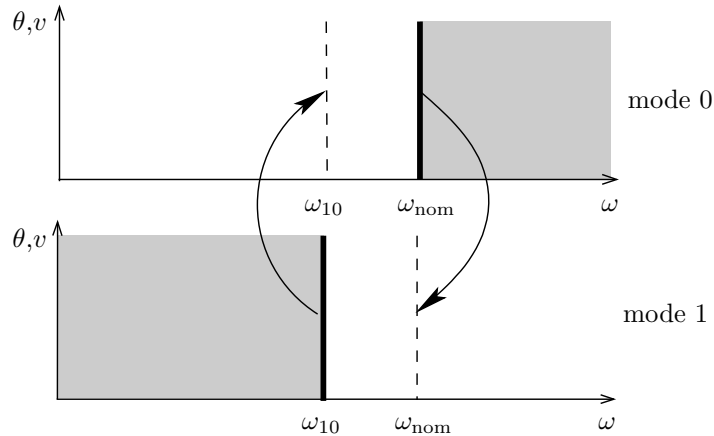
#### Espace d'état et champs de vecteurs

L'espace d'état hybride du modèle possède deux modes :

$$E_0 = \mathbb{R}_+ \times [0; \omega_{\text{nom}}] \times [0; \theta_{\text{max}}], \quad \text{et} \quad E_1 = \mathbb{R}_+ \times [\omega_{10}; +\infty[ \times [0; \theta_{\text{max}}].$$

Les commutations du contrôleur hybride ont lieu sur la garde

$$E^B = \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \{\omega_{\text{nom}}\} \times [0; \theta_{\text{max}}] \cup \{1\} \times \mathbb{R}_+ \times \{\omega_{10}\} \times [0; \theta_{\text{max}}],$$



**Fig. 3.g** – Espace d'état pour le modèle « éolienne + vent » décrit au § 3.A, qui possède deux modes discrets – notés 0 et 1 – et trois variables continues. Les flèches symbolisent l'action de la fonction de réinitialisation  $\Psi$ , qui envoie la garde  $E^B$ , représentée en traits épais, sur l'ensemble  $H = \Psi(E^B)$  représenté en pointillé.

avec la même fonction de réinitialisation que dans l'exemple de la section précédente, c'est-à-dire la fonction  $\Psi : (q, z) \mapsto (1 - q, z)$ . Remarquons que  $E^B \subsetneq \partial E$  dans ce modèle. Une représentation de l'espace  $E$  ainsi que de la fonction  $\Psi$  est fournie en figure 3.g. (Il s'agit d'une structure tout à fait similaire à celle de l'exemple précédent, cf. figure III.4.b.)

Les composantes de la dérive  $\mathbf{f}$ , au point  $x = (q, v, \omega, \theta)$ , sont

$$(3.8) \quad \mathbf{f}^v(x) = -\frac{v - \bar{v}}{T},$$

$$(3.9) \quad \mathbf{f}^\omega(x) = \frac{\frac{1}{2}\pi\rho R^2 c_p(\lambda, \theta) v^3 - \eta^{-1} S(q, \omega)}{J\omega}, \quad \text{avec } \lambda = R\omega/v,$$

et

$$(3.10) \quad \mathbf{f}^\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta = 0 \text{ et } \omega \leq \omega_{\text{nom}}, \\ 0 & \text{si } \theta = \theta_{\text{max}} \text{ et } \omega \geq \omega_{\text{nom}}, \\ h(K(\omega - \omega_{\text{nom}})) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, seule la composante  $v$  est directement affectée par la diffusion : on a donc besoin d'un seul mouvement brownien dans ce modèle ( $m = 1$ ). Le champ de vecteur correspondant est  $\mathbf{g}_1 = \kappa\bar{v}\sqrt{2/T} \frac{\partial}{\partial v}$  d'après l'équation 3.7.

(3.11) **Remarques.**

- a) La dérive dans la direction  $\omega$  n'est a priori bien définie par l'équation 3.9 que pour  $\omega > 0$  et  $v > 0$ . En fait, on vérifie facilement qu'avec la fonction  $c_p$  choisie on peut la prolonger par continuité sur tout  $E$  en posant

$$\mathbf{f}^\omega(q, 0, \omega, \theta) = -\frac{S(q, \omega)}{\eta J\omega} \quad \text{pour tous } q, \omega \text{ et } \theta \text{ tels que } (q, 0, \omega, \theta) \in E,$$

$$\mathbf{f}^\omega(0, v, 0, \theta) = 0 \quad \text{pour tous } v \text{ et } \theta \text{ tels que } (0, v, 0, \theta) \in E_0.$$

- b) Le champ de vecteur  $\mathbf{g}_1$  étant constant, il n'y a pas lieu ici de faire une différence entre intégrales d'Ito et de Stratonovich, i.e.  $\mathbf{g}_0 = \mathbf{f}$ .

### Existence et unicité du processus de base

Le modèle que nous venons de décrire n'est pas tout à fait un système hybride stochastique, au sens du chapitre III, en raison de la réflexion en  $v = 0$  destinée à maintenir  $V$  positif. De plus, la composante  $\mathbf{f}^\theta$  de la dérive est clairement discontinue. Nous allons donc devoir construire « manuellement » le processus diffusif par morceaux correspondant, ce qui revient par le théorème de renaissance à savoir construire le processus de base, c'est-à-dire la solution de l'EDS

$$dX_t = \mathbf{f}(X_t) dt + \mathbf{g}_1 dB_t$$

(au moins jusqu'au temps  $\tau^B$  où elle atteint  $E^B$ ). Nous omettrons la notation « tilde » associée dans les chapitres précédents au processus de base, afin d'alléger les notations.

Un processus réfléchi tel que  $V$  se définit trajectoriellement comme l'unique solution du *problème de Skorokhod* sur  $I = [0; \infty[$  associé à la solution forte  $\widehat{V}$  de l'EDS 3.7 sans réflexion. Comme nous utiliserons également un problème de Skorokhod pour traiter le problème lié à la discontinuité de la dérive, commençons par rappeler plus précisément de quoi il s'agit.

Soit  $\hat{\phi} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une trajectoire càdlàg, et soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , que nous supposons être  $\mathbb{R}_+$  ou bien  $[0; A]$  pour un certain  $A > 0$ . Le problème de Skorokhod consiste alors à chercher une fonction  $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  càdlàg, à variation bornée sur les compacts, telle que

- i)  $k_0 = 0$ .
- ii) Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\phi_t \triangleq \hat{\phi}_t + k_t \in I$ .
- iii) Si  $I = \mathbb{R}_+$ , la fonction  $k$  est croissante (au sens large) et vérifie  $\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\phi_t > 0} dk_t = 0$ .
- iv) Si  $I = [0; A]$ , alors on peut écrire  $k$  comme la somme d'une fonction croissante  $k^\uparrow$  et d'une fonction décroissante  $k^\downarrow$  telles que  $\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\phi_t > 0} dk_t^\uparrow = 0$  et  $\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\phi_t < A} dk_t^\downarrow = 0$ .

Il est bien connu que ce problème possède une et une seule solution pour tout  $\hat{\phi}$  càdlàg. De plus, l'application de Skorokhod  $\mathcal{S}_I$ , qui à la trajectoire libre  $\hat{\phi}$  associe la trajectoire contrainte  $\phi$ , possède les propriétés suivantes (Kruk et al., 2006) : 1) l'image d'une fonction  $\hat{\phi}$  continue est une fonction  $\phi = \mathcal{S}_I \hat{\phi}$  continue, 2)  $\mathcal{S}_I$  est adapté à la filtration naturelle de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , et 3) il existe une constante de Lipschitz  $K_I$  telle que pour tout  $t > 0$  et toute paire  $(\hat{\phi}, \hat{\phi}')$  de trajectoires continues,

$$\sup_{[0; t]} |\mathcal{S}_I \hat{\phi} - \mathcal{S}_I \hat{\phi}'| \leq K_I \sup_{[0; t]} |\hat{\phi} - \hat{\phi}'|.$$

Fixons maintenant une condition initiale  $\theta \in [0; \theta_{\max}]$  et une trajectoire continue  $\dot{\Theta} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\dot{\theta}_{\min}; \dot{\theta}_{\max}]$ , et considérons l'EDO

$$(3.12) \quad \frac{d\Theta_t}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Theta_t = 0 \text{ et } \dot{\Theta}_t < 0, \\ 0 & \text{si } \Theta_t = \theta_{\max} \text{ et } \dot{\Theta}_t > 0, \\ \dot{\Theta}_t & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le second membre étant discontinu, nous cherchons une solution au sens de Carathéodory (voir par exemple Bressan, 1988), c'est à dire une trajectoire  $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0; \theta_{\max}]$  absolument continue, dont la dérivée – qui existe presque partout sur  $\mathbb{R}_+$  – coïncide avec le second membre de l'équation 3.12. Il est facile de voir que ceci équivaut à résoudre le problème de Skorokhod sur  $I = [0; \theta_{\max}]$  pour la fonction

$$\widehat{\Theta} : t \mapsto \theta + \int_0^t \dot{\Theta}_s ds.$$

L'EDO 3.12 admet donc une unique solution  $\Theta = \mathcal{S}_T \widehat{\Theta}$  d'après ce qui précède, et on peut facilement dans ce cas expliciter les fonctions  $k^\uparrow$  et  $k^\downarrow$  :

$$\begin{aligned} k_t^\uparrow &= - \int_0^t \dot{\Theta}_s \mathbb{1}_{\Theta_s=0 \text{ et } \dot{\Theta}_s < 0} ds, \\ k_t^\downarrow &= - \int_0^t \dot{\Theta}_s \mathbb{1}_{\Theta_s=\theta_{\max} \text{ et } \dot{\Theta}_s > 0} ds. \end{aligned}$$

Soit maintenant une condition initiale  $(q, v, \omega, \theta) \in E^0$  et une trajectoire  $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  telle que  $V_0 = v$ . L'équation 3.1 peut être reformulée de la façon suivante :

$$(3.13) \quad \frac{d\Omega}{dt}(t) = \frac{\frac{1}{2}\pi\rho R^2 c_p(R\Omega_t V_t^{-1}, (\mathcal{S}_{[0;\theta_{\max}]} \mathcal{T}_\theta \Omega)_t) V_t^3 - \eta^{-1} S(q, \Omega_t)}{J\Omega_t},$$

où  $\mathcal{T}_\theta$  est l'opérateur  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  défini par :

$$(\mathcal{T}_\theta \Omega)_t = \theta + \int_0^t h(K(\Omega_s - \omega_{\text{nom}})) ds.$$

Notons  $\mathcal{R}\Omega$  le processus défini par le second membre de 3.13, qui est borné sur tout compact  $[0; T]$  par une constante indépendante de  $q, \theta$  et  $\Omega$ . (Le coefficient  $\Omega_t$  au dénominateur ne pose en fait aucun problème, et la constante en question dépend bien sûr de la trajectoire  $V$  jusqu'au temps  $T$ ). En utilisant le caractère lipschitzien de l'application de Skorokhod  $\mathcal{S}_{[0;\theta_{\max}]}$  et de la fonction  $c_p$ , on montre de plus les propriétés suivantes :

– Supposons que  $q = 1$ , et soit  $T > 0$ . Alors il existe une constante  $K_1(T, V)$  telle que, pour toute paire  $(\Omega, \Omega')$  de trajectoires  $\mathbb{R}_+ \rightarrow [\omega_{10}; +\infty[$  continues,

$$\sup_{[0;t]} |\mathcal{R}\Omega - \mathcal{R}\Omega'| \leq K_1(T, V) \sup_{[0;t]} |\Omega - \Omega'|, \quad \forall t \leq T.$$

– Supposons que  $q = 0$ , et soit  $T > 0$ . Alors il existe pour tout  $\epsilon > 0$  une constante  $K_2(T, V, \epsilon)$  telle que, pour toute paire  $(\Omega, \Omega')$  de trajectoires  $\mathbb{R}_+ \rightarrow [\epsilon; \omega_{\text{nom}}]$  continues,

$$\sup_{[0;t]} |\mathcal{R}\Omega - \mathcal{R}\Omega'| \leq K_2(T, V, \epsilon) \sup_{[0;t]} |\Omega - \Omega'|, \quad \forall t \leq T.$$

Ceci prouve l'existence d'une unique trajectoire  $\Omega$  solution de l'équation 3.13, pour tous  $(q, v, \omega, \theta) \in E^0$  et  $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  tel que  $V_0 = v$  (voir par exemple Kallenberg, 1997, théorème 21.3). Plus précisément : dans le cas  $q = 0$ , la solution est bien définie jusqu'au moment où  $\Omega$  s'annule ou atteint  $\omega_{\text{nom}}$  ; dans le cas  $q = 1$ , jusqu'au moment où  $\Omega$  atteint  $\omega_{\text{nom}} = \omega_{10}$ . Si  $\Omega$  s'annule, la solution se prolonge de manière unique à  $\mathbb{R}_+$  puisque la dérive  $f^\omega$  s'annule en  $\omega = 0$  (cf. remarque 3.11.a). Dans les autres cas on ne cherche pas à prolonger au-delà puisque la garde a été atteinte.

En résumé, pour tout  $x = (q, v, \omega, \theta) \in E^0$ , nous avons construit sur l'espace de Wiener un processus  $X = (q, V, \Omega, \Theta)$  issu de  $x$  et stoppé sur  $E^B$ , avec :  $V = \mathcal{S}_{[0;\infty]} \widehat{V}$  (où  $\widehat{V}$  est la solution forte de l'EDS 3.7 sans réflexion),  $\Omega$  la solution de l'EDO 3.13 et  $\Theta = \mathcal{S}_{[0;\theta_{\max}]} \mathcal{T}_\theta \Omega$ . Il s'agit bien d'une « solution forte » (i.e. adaptée à la filtration complétée du brownien  $B$ ) puisque  $\widehat{V}$  est une solution forte,  $\Omega$  est adapté à  $\mathcal{F}^V$  et les applications de Skorokhod sont adaptées. L'unicité trajectorielle découle de même du fait que  $\widehat{V}$  est unique et de ce que les problèmes de Skorokhod considérés ont une unique solution. La construction du processus de base est ainsi terminée.

### 3.C L'équation de FPK généralisée

Nous allons maintenant écrire, en utilisant le résultat du chapitre IV, § 3.C, une équation de FPK généralisée qui, bien que n'étant pas correcte comme nous l'expliquerons ensuite, nous permettra d'écrire un schéma aux volumes finis donnant des résultats numériques tout à fait satisfaisants (voir §§ 3.D et 3.E).

Oublions pour cela que la composante  $\mathbf{f}^\theta$  de la dérive n'est pas continue, et supposons que la loi du processus possède une densité  $p_t$  par rapport à la mesure de Lebesgue à chaque instant, la fonction  $p$  étant de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur  $E \setminus H$ , où  $H = \Psi(E^B)$  et possédant des limites de part et d'autre de l'hypersurface  $H$ . Le courant de probabilité s'écrit alors, sur  $E \setminus H$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{j}_t^\omega = \mathbf{f}^\omega p_t, \\ \mathbf{j}_t^\theta = \mathbf{f}^\theta p_t, \\ \mathbf{j}_t^v = \mathbf{f}^v p_t - D \frac{\partial p_t}{\partial v}, \end{cases}$$

où  $D = \kappa^2 \bar{v}^2 / T$ . On en déduit, comme au § 3.C, que la densité vérifie l'équation de FPK usuelle :

$$(3.14) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{j}_t) = D \frac{\partial^2 p_t}{\partial v^2} - \operatorname{div}(\mathbf{f} p_t)$$

à l'intérieur de chacune des quatre composantes connexes de  $E \setminus H$  (cf. figure 3.g). De plus, l'équation de conservation du courant associée à la fonction de réinitialisation implique que la densité  $p$  est en général discontinue sur l'hypersurface  $H$ . En effet, soit  $x_0 = (0, v, \omega_{\text{nom}}, \theta) \in E^B$  : on a alors la relation

$$(3.15) \quad \mathbf{f}^\omega(x_0) p_t(x_0) = \mathbf{f}^\omega(x_1) \left( p_t(x_1^+) - p_t(x_1^-) \right) \geq 0,$$

où  $x_1 = \Psi(x_0) = (1, v, \omega_{\text{nom}}, \theta)$  et  $x_1^\pm = (1, v, \omega_{\text{nom}}^\pm, \theta)$ . La relation 3.15 ne conduit pas toujours à la présence d'une discontinuité. En particulier, si la dérive est entrante au point  $x_0$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{f}^\omega(x_0) < 0$ , et si de plus  $\mathbf{f}^\omega(x_1) \neq 0$ , on a en fait  $p_t(x_0) = 0$  en raison de l'inégalité – qui signifie simplement, rappelons-le, que l'intensité moyenne de sauts est une quantité positive – et donc  $p_t(x_1^+) = p_t(x_1^-)$ . Une relation similaire est valable sur l'autre partie de la garde : avec  $x_0 = (1, v, \omega_{10}, \theta) \in E^B$ ,  $x_1 = \Psi(x_0) = (0, v, \omega_{10}, \theta)$  et  $x_1^\pm = (0, v, \omega_{10}^\pm, \theta)$ , on a :

$$(3.16) \quad -\mathbf{f}^\omega(x_0) p_t(x_0) = \mathbf{f}^\omega(x_1) \left( p_t(x_1^+) - p_t(x_1^-) \right) \geq 0.$$

Finalement, nous admettrons que la réflexion en  $v = 0$  se traduit simplement par l'absence de flux sortant, i.e.

$$(3.17) \quad \mathbf{j}_t^v(q, 0, \omega, \theta) = 0, \quad \text{pour tous } q, \omega \text{ et } \theta \text{ tels que } (q, 0, \omega, \theta) \in E.$$

Il s'agit intuitivement de la seule condition « physiquement raisonnable » que l'on peut associer à une barrière réfléchissante (voir par exemple Gardiner, 1985, § 5.3.2), mais nous ne l'avons pas prouvée rigoureusement.

(3.18) **Remarque.** L'équation 3.14 n'est en fait valable que presque partout sur l'intérieur des composantes de  $E \setminus H$ , en raison de la non-différentiabilité de  $c_p$  sur la courbe  $\lambda = \lambda_{\max}(\theta)$ . Il ne s'agit pas vraiment d'un problème dans la mesure où cela induit seulement une discontinuité du premier ordre dans  $\operatorname{div}(\mathbf{j}_t)$ .



### Pourquoi ce qui précède n'est pas correct

Nous avons supposé, afin de pouvoir écrire plus facilement l'équation de FPK du modèle, que les lois  $\mu_t$  possèdent une densité  $p_t$  avec des propriétés de régularité similaires à celles du modèle traité dans la section précédente (cf. § IV.3.C). En fait, il est facile de se rendre compte, en examinant les coefficients de l'EDS, que les lois  $\mu_t$  doivent posséder, en plus de la composante à densité  $p_t(x) \mathbf{m}(dx)$ , des composantes  $\mathbf{m}$ -singulières – et ce même si la loi initiale  $\mu_0$  possède une densité de class  $\mathcal{C}^2$ . Cela se produit pour deux raisons que nous allons maintenant discuter séparément, de façon quelque peu informelle (faute de pouvoir établir tout ce que nous avançons!).

Le premier problème est lié à un point que nous avons explicitement écarté plus haut, à savoir le fait que la composante  $\mathbf{f}^\theta$  de la dérive est en général discontinue en  $\theta = 0$  et en  $\theta = \theta_{\max}$ . Plus précisément, elle est discontinue sur

$$\partial E_{(a)} = \left\{ (q, v, \omega, \theta) \in E, \text{ tel que } \theta = 0 \text{ et } \omega < \omega_{\text{nom}} \right\},$$

et sur

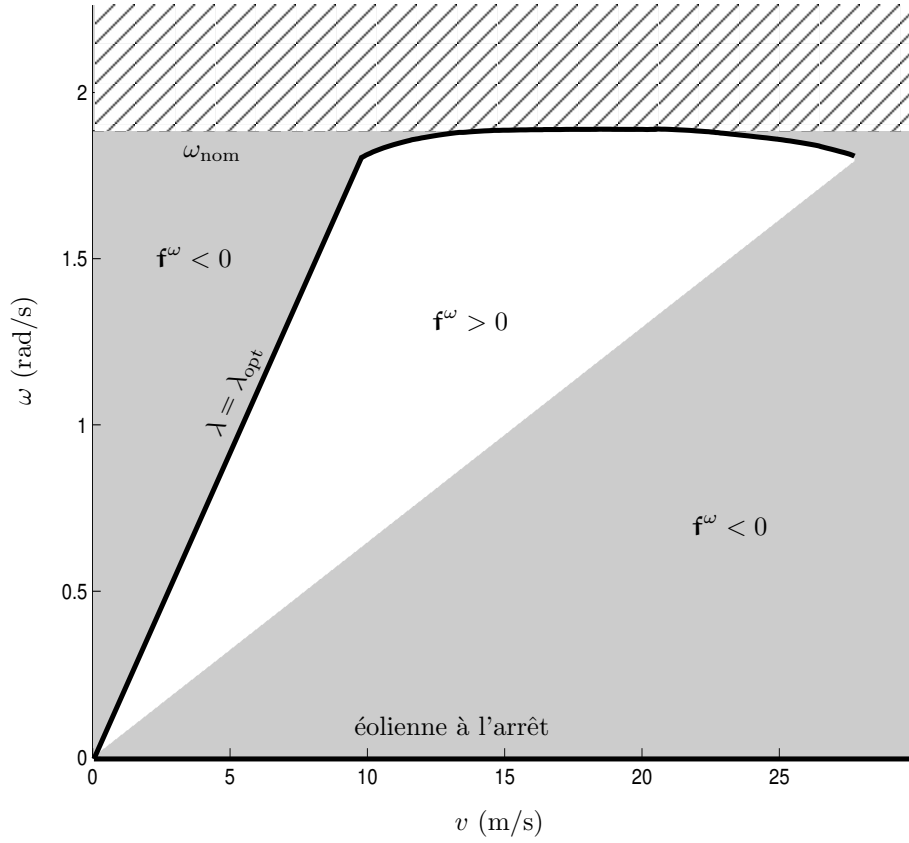
$$\partial E_{(b)} = \left\{ (q, v, \omega, \theta) \in E, \text{ tel que } \theta = \theta_{\max} \text{ et } \omega > \omega_{\text{nom}} \right\}.$$

Il faut donc s'attendre, en général, à voir apparaître une densité surfacique portée par  $\partial E_{(a)}$  et par  $\partial E_{(b)}$ . On peut justifier cela par des considérations « physiques » : considérons par exemple un point  $x = (0, v, \omega, 0) \in E_0 \cap \partial E_{(a)}$ . On a alors  $\mathbf{f}^\theta(0, v, \omega, 0^+) < 0$ . Cela implique, si la densité volumique n'est pas nulle en ce point (et il n'y a aucune raison en général pour qu'elle le soit), que le courant sortant de l'intérieur de  $E_0$  en ce point est non nul, et donc que la probabilité totale est en train de diminuer ! Ceci étant dit, il s'avère assez délicat d'écrire correctement l'équation de FPK correcte, prenant en compte l'existence de densités surfaciques sur  $\partial E_{(a)}$  et sur  $\partial E_{(b)}$ . (En particulier, il se produit un transfert de probabilité depuis le bord de  $\partial E_{(a)}$ , qui est de dimension 1, vers l'intérieur de  $E_1$ , qui est de dimension 3.) En fait, on peut tout à fait « ignorer » la présence de ces densités surfaciques et procéder à une discrétisation volumique  $\omega$  comme pour l'exemple précédent (voir section 2.B). Les densités surfaciques sont alors approchées numériquement par des densités volumiques, portées par les cellules externes de la grille.

La deuxième difficulté évoquée plus haut est de nature plus fondamentale vis-à-vis de l'objectif que nous nous sommes fixé en introduction, à savoir caractériser l'incertitude sur  $P_t^G$  par sa loi en régime stationnaire (pour une valeur donnée de la vitesse moyenne  $\bar{v}$ ). En effet, pour tout  $v \geq 0$ , on a  $\mathbf{f}^\omega(0, v, 0, 0) = 0$  et  $\mathbf{f}^\theta(0, v, 0, 0) = 0$  : cela entraîne que le processus admet pour loi invariante la mesure

$$\mu_{\text{inv}}(dv, d\omega, d\theta) = p_{\text{inv}}^V(v) \mathbf{m}(dv) \otimes \delta_0(d\omega) \otimes \delta_0(d\theta),$$

où  $p_{\text{inv}}^V$  désigne la densité stationnaire du processus de Markov  $V$ . La figure 3.h permet de comprendre pourquoi cette loi invariante est très certainement la seule de notre modèle, ce qui est fort ennuyeux car elle décrit le fonctionnement de l'éolienne... à l'arrêt ! En effet, le problème vient de ce que, pour une valeur de  $v$  donnée, le point d'équilibre stable « utile » de l'EDO  $d\Omega_t = \mathbf{f}^\omega(0, v, \Omega_t, 0) dt$  possède un bassin d'attraction borné du côté des faibles vitesses de rotation : une bourrasque de vent extrêmement violente et longue peut donc conduire le système dans la partie inférieure grisée de la figure 3.h et ainsi entraîner, asymptotiquement, l'arrêt de l'éolienne. En pratique, i.e. pour des valeurs réalistes des paramètres, ce type d'évènement est très rare et la loi empirique semble converger en simulation vers une mesure « quasi-stationnaire », qui correspond au comportement dynamique que nous souhaitons caractériser.



**Fig. 3.h** – Signe de la composante  $f^\omega$  de la dérive en fonction de  $v$  et  $\omega$ , dans le mode  $q = 0$  et avec une inclinaison  $\theta = 0$ . Les traits épais représentent le lieu des équilibres stables de l'EDO  $d\Omega_t = f^\omega(0, v, \Omega_t, 0) dt$  en fonction de  $v$ , la partie supérieure correspondant aux points d'équilibres « utiles » et la partie inférieure à l'éolienne arrêtée. La zone hachurée ne fait pas partie de  $E_0$ .

### Lois quasi-stationnaires

Nous avons donc quelque peu modifié notre objectif initial, puisque nous sommes maintenant à la recherche d'une loi *quasi-stationnaire* – notion que nous allons sans plus tarder définir – au lieu d'une loi stationnaire pour le processus de Markov  $X = (Q, V, \Omega, \Theta)$ . Fixons un seuil  $\omega_{\min}$  « proche » de  $\omega = 0$ , vérifiant  $0 < \omega_{\min} < \omega_{10} < \omega_{\text{nom}}$ , et considérons le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t \geq 0, \Omega_t \leq \omega_{\min}\}.$$

On dit alors (voir par exemple Glynn et Thorisson, 2002, section 3) qu'une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{E})$  est quasi-stationnaire (relativement au temps  $T$ ) si, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(3.19) \quad \mathbb{P}_\mu\{t < T\} > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_\mu\{X_t \in \cdot \mid t < T\} = \mu.$$

Considérons une telle loi  $\mu_{\text{qs}}$ , qui est nécessairement portée par  $E \cap \{\omega > \omega_{\min}\}$ . Il est alors facile de voir grâce à la propriété de Markov forte que, sous la loi  $\mathbb{P}_{\mu_{\text{qs}}}$ , le temps  $T$  est distribué exponentiellement : nous noterons  $1/\tau_{\text{qs}}$  le paramètre de cette distribution. Introduisons maintenant le processus  $X'$  obtenu en tuant  $X = (Q, V, \Omega, \Theta)$  lorsque  $\Omega_t$  atteint  $\omega_{\min}$  – ce qui revient à décider que l'on arrête l'éolienne lorsque sa vitesse de rotation tombe en dessous de  $\omega_{\min}$ , et à introduire

un nouveau mode  $q = \partial$ , purement discret, modélisant l'éolienne à l'arrêt (le « cimetièrre »). La loi de  $X'_t$  sous  $\mathbb{P}_{\mu_{\text{qs}}}$  à chaque instant  $t \geq 0$  se déduit alors de l'équation 3.19 :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{\mu_{\text{qs}}} \{ X'_t \in \Gamma \} = \mu_{\text{qs}}(\Gamma) e^{-t/\tau_{\text{qs}}}, & \forall \Gamma \in \mathcal{E}, \\ \mathbb{P}_{\mu_{\text{qs}}} \{ X'_t = \partial \} = 1 - e^{-t/\tau_{\text{qs}}}. \end{cases}$$

Si de plus  $\underline{L}_c^* \mu_{\text{qs}}$  est une mesure de Radon, alors les hypothèses du théorème 2.11 pour le processus tué  $X'$  – vu comme un processus conservatif sur  $E \cup \{\partial\}$  – sont remplies, et l'équation de FPK abstraite devient

$$(3.20) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{X'}^* \mu_{\text{qs}} = -\frac{1}{\tau_{\text{qs}}} \mu_{\text{qs}} & \text{sur } E^0 \cap \{\omega > \omega_{\min}\}, \\ \mathcal{L}_{X'}^* \mu_{\text{qs}} = \frac{1}{\tau_{\text{qs}}} & \text{sur } \{\partial\}, \end{cases}$$

où  $\mathcal{L}_{X'}^*$  désigne l'opérateur de FPK défini par le second membre de l'équation de FPK abstraite pour  $X'$ , qui s'exprime à partir de celui de  $X$  par la relation

$$\mathcal{L}_{X'}^* \mu = \mathcal{L}_X^* \mu(\{\omega > \omega_{\min}\} \cap \cdot) + \underline{L}_c^* \mu(\{\omega = \omega_{\min}\}) \delta_{\partial}$$

(pour toute probabilité  $\mu$  portée par  $E \cap \{\omega > \omega_{\min}\}$ , telle que  $\underline{L}_c^* \mu$  est une mesure de Radon). Ainsi, la loi  $\mu_{\text{qs}}$  est à chercher, si elle existe, parmi les vecteurs propres positifs de l'opérateur de FPK associés à une valeur propre strictement négative.

Le problème 3.20 possède en général plusieurs solutions. Revenons à la raison pour laquelle nous avons introduit la notion de mesure quasi-stationnaire : l'intuition physique et les simulations semblent indiquer la convergence des lois conditionnelles  $\mathbb{P}_{\mu_0} \{ X_t \in \cdot \mid t < T \}$  vers une mesure limite, qui est alors nécessairement une mesure quasi-stationnaire. Si plusieurs mesures quasi-stationnaires existent, la question se pose alors de déterminer l'ensemble de ces mesures quasi-stationnaires, et surtout de déterminer leur « bassin d'attraction », c'est-à-dire l'ensemble des mesures initiales  $\mu_0$  pour lesquelles on a la convergence  $\mathbb{P}_{\mu_0} \{ X_t \in \cdot \mid t < T \} \rightarrow \mu_{\text{qs}}$  (la mesure quasi-stationnaire  $\mu_{\text{qs}}$  est alors qualifiée de *loi conditionnelle limite* ou encore *limite de Yaglom*). Dans le cas d'un processus de Markov à temps continu, sur un espace d'état général (non dénombrable), il s'agit d'une question difficile pour laquelle peu de choses sont connues. Les résultats existants, pour un certain nombre de modèles scalaires<sup>17</sup>, suggèrent qu'il existe en général toute une famille de loi quasi-stationnaires, correspondant aux valeurs propres  $-1/\tau_{\text{qs}}$  pour  $\tau_{\text{qs}}$  variant dans un intervalle de la forme  $[\tau_{\text{qs}}^*, +\infty[$ , que la loi conditionnelle limite dépend de la loi initiale (plus précisément : de sa décroissance à l'infini), et que la loi conditionnelle limite pour une loi initiale à décroissance suffisamment rapide – par exemple un dirac – est la loi quasi-stationnaire *minimale*, c'est-à-dire celle correspondant à  $\tau_{\text{qs}} = \tau_{\text{qs}}^*$ .

Ce qui précède restant de l'ordre de la conjecture dans le cas du modèle qui nous intéresse ici, considérons plutôt le modèle approché obtenu après discrétisation spatiale de l'opérateur  $\mathcal{L}_{X'}^*$  sur  $E \cap \{\omega \geq \omega_{\min}\}$ , par un schéma aux volumes finis similaire à celui du § 2.B. L'équation de FPK est alors remplacée par un système d'EDO de la forme

$$\frac{d\mu_t}{dt} = \mu_t A,$$

<sup>17</sup>mouvement brownien (Martínez et al., 1998 ; Martínez et San-Martín, 1994), processus d'Ornstein-Uhlenbeck (Lladser et San-Martín, 2000) et certaines classes de processus de Lévy (Kyprianou et Palmowski, 2006)

où  $\underline{\mu}_t$  est le vecteur (ligne) des probabilités  $\mu_t^w = \mathbf{m}(w) p_t^w$ ,  $w$  parcourant l'ensemble des cellules de la grille, et  $A$  une matrice carrée. Il est facile de vérifier que, si la grille est suffisamment fine, l'expression utilisée pour la discrétisation du courant (cf. équation 2.3) conduit à une matrice  $A$  qui peut être vue comme le générateur infinitésimal d'une chaîne de Markov à temps continu, irréductible et non-conservative, à valeurs dans l'ensemble fini des cellules de la grille. Résoudre la version discrétisée du problème 3.20 revient donc à chercher une loi quasi-stationnaire pour cette chaîne de Markov. La réponse à ce problème est bien connu, et repose essentiellement sur le théorème de Perron-Frobenius pour les matrices positives irréductibles (Darroch et Seneta, 1967) : la loi conditionnelle limite  $\mu_{\text{qs}}$  ne dépend pas de la loi initiale, et il s'agit de l'unique loi quasi-stationnaire pour la chaîne. De plus, la valeur propre  $\alpha_{\text{qs}} = -1/\tau_{\text{qs}}$  correspondante est simple, et toute autre valeur propre  $\alpha$  de  $A$  vérifie  $\Re(\alpha) < \alpha_{\text{qs}}$ .

### 3.D Schéma de discrétisation

Nous utiliserons, pour la discrétisation spatiale de ce modèle, un schéma aux volumes finis similaire à celui de la section 2. Quelques détails diffèrent néanmoins, concernant l'expression du courant sur les bords et la prise en compte de la discontinuité sur  $\Psi(\mathbb{E}^{\text{B}})$ , que nous allons maintenant expliquer. Les notations utilisées seront les mêmes qu'au § 2.B.

#### Troncature du domaine, conditions aux bords

Un certain nombre de troncatures sont effectuées en pratique sur l'espace d'état du modèle. L'espace d'état tronqué que nous discrétiserons effectivement sera de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\text{tronc}} = & \{0\} \times [v_{\min}; v_{\max}] \times [\omega_{\min}; \omega_{\text{nom}}] \times [0; \theta_{\max}] \\ & \cup \{1\} \times [v_{\min}; v_{\max}] \times [\omega_{10}; \omega_{\max}] \times [0; \theta_{\max}]. \end{aligned}$$

L'introduction des troncatures à  $v_{\max}$  dans la direction  $v$  et à  $\omega_{\max}$  dans la direction  $\omega$  permettent d'obtenir des domaines bornés; le seuil  $\omega_{\min}$  est celui qui a été introduit au § 3.C; enfin, la troncature dans la direction  $v$  à  $v_{\min} > 0$  n'est pas indispensable, puisque les vitesses sont toujours positives, mais permet de réduire le volume total à discrétiser.

Précisons maintenant l'expression du courant sortant discrétisé, sur chaque partie du bord de  $\mathbb{E}_{\text{tronc}}$ . Soit  $w$  une cellule de bord, et  $w'$  la cellule fantôme correspondante. Si la face  $c = (w, w')$  fait partie de la garde  $\mathbb{E}_{\text{tronc}}^{\text{B}}$  ou bien de  $\mathbb{E}_{\text{tronc}} \cap \{\omega = \omega_{\min}\}$ , un courant sortant non nul peut exister. Dans les deux cas, la diffusion est nulle dans la direction normale au bord. Nous utiliserons donc l'expression suivante pour le courant sortant :

$$(3.21) \quad \mathbf{j}_t^{(w, w')} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{f}_{\text{mid}}^{(w, w')} \leq 0, \\ p_t^w \mathbf{f}_{\text{mid}}^{(w, w')} & \text{sinon.} \end{cases}$$

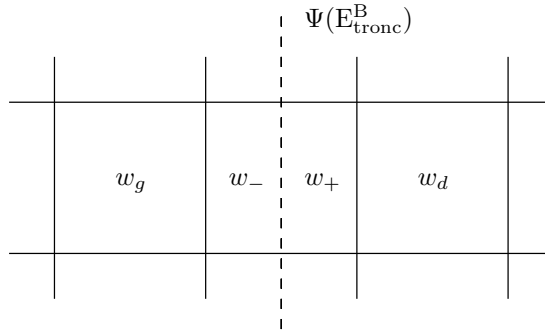
Partout ailleurs sur le bord, la condition  $\mathbf{j}_t^{(w, w')} = 0$  est utilisée, ce qui signifie qu'il n'y a pas de flux sortant. En particulier, dans la direction  $v$ , tout se passe donc comme s'il y avait maintenant deux barrières réfléchissantes, en  $v_{\min}$  et en  $v_{\max}$ , au lieu de la barrière en 0 prévue initialement (cf. § 3.C, équation 3.17).

Insistons sur le fait que le flux sortant à travers  $\mathbb{E}_{\text{tronc}} \cap \{\omega = \omega_{\min}\}$  n'est pas réinjecté dans l'espace d'état. Donc, là où la dérive  $\mathbf{f}$  est sortante (i.e. là où  $\mathbf{f}^\omega < 0$ ), il y a en général un flux sortant non-nul, ce qui signifie que le schéma n'est pas conservatif – ce qui est parfaitement naturel,

puisqu'on s'intéresse en fait à la loi du processus tué lorsqu'il atteint  $\omega_{\min}$  (cf. discussion concernant la quasi-stationarité).

### Réinjection du flux sortant : prise en compte de la discontinuité dans la densité

Soit maintenant une cellule  $w$  coupée par  $\Psi(E_{\text{tronc}}^B)$  en deux parties, que nous noterons  $w_+$  et  $w_-$ , et soient  $w_g$  et  $w_d$  les cellules adjacentes dans la direction perpendiculaire à  $\Psi(E_{\text{tronc}}^B)$  :



Par construction de la grille, cf. § 2.B, il existe une unique face  $c$  orientée vers l'extérieur et telle que  $w \cap \Psi(E_{\text{tronc}}^B) = \Psi(c)$ . En notant  $w_0$  l'unique cellule dont  $c$  est une face, le courant traversant la garde au niveau de la face  $c$  est approché d'après l'équation 3.21 par la formule

$$\mathbf{j}_t^c = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{f}_{\text{mid}}^c \leq 0, \\ p_t^{w_0} \mathbf{f}_{\text{mid}}^c & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $\mathbf{f}_{\text{mid}}^c \leq 0$ , il n'y a pas de courant réinjecté dans la cellule  $w$ , donc pas de discontinuité dans la densité d'après les équations 3.15 et 3.16. Supposons donc maintenant que  $\mathbf{f}_{\text{mid}}^c > 0$  : la densité est alors discontinue sur  $\Psi(c)$ , ce que nous souhaitons prendre en compte dans l'expression des courants  $\mathbf{j}_t^{w,w_d}$  et  $\mathbf{j}_t^{w_g,w}$ . Notons pour cela  $p_t^{w_+}$  et  $p_t^{w_-}$  les densités moyennes sur  $w_+$  et  $w_-$ , qui sont reliées à  $p_t^w$  par la relation

$$(3.22) \quad p_t^w = \gamma_+ p_t^{w_+} + \gamma_- p_t^{w_-},$$

avec

$$\gamma_+ = \frac{\mathbf{m}(w_+)}{\mathbf{m}(w)} \quad \text{et} \quad \gamma_- = \frac{\mathbf{m}(w_-)}{\mathbf{m}(w)} = 1 - \gamma_+.$$

Si l'on approche la valeur de la densité de chaque côté de  $\Psi(c)$  par les densités moyennes  $p_t^{w_+}$  et  $p_t^{w_-}$ , les équations 3.15 et 3.16 donnent la relation

$$(3.23) \quad \mathbf{f}_{\text{mid}}^c p_t^{w_0} = \mathbf{f}_{\text{mid}}^{\Psi(c)} (p_t^{w_+} - p_t^{w_-}).$$

La résolution du système 3.22–3.23 fournit alors l'expression de  $p_t^{w_+}$  et  $p_t^{w_-}$  en fonction de  $p_t^w$  et  $p_t^{w_0}$  :

$$\begin{cases} p_t^{w_+} = p_t^w + \gamma^- \frac{\mathbf{f}_{\text{mid}}^c}{\mathbf{f}_{\text{mid}}^{\Psi(c)}} p_t^{w_0}, \\ p_t^{w_-} = p_t^w - \gamma^+ \frac{\mathbf{f}_{\text{mid}}^c}{\mathbf{f}_{\text{mid}}^{\Psi(c)}} p_t^{w_0}. \end{cases}$$

Les expressions « corrigées » des courants  $\mathbf{j}_t^{w,w_d}$  et  $\mathbf{j}_t^{w_g,w}$ , prenant en compte la présence éventuelle d'une discontinuité, sont donc

$$\mathbf{j}_t^{w,w_d} = \mathbf{f}_{\text{mid}}^{w,w_d} \begin{cases} p_t^{w_d} & \text{si } \mathbf{f}_{\text{mid}}^{w,w_d} \leq 0, \\ p_t^w + \gamma^- \frac{\mathbf{f}_{\text{mid}}^c}{\mathbf{f}_{\text{mid}}^{\Psi(c)}} p_t^{w_0} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\mathbf{j}_t^{w_g,w} = \mathbf{f}_{\text{mid}}^{w_g,w} \begin{cases} p_t^{w_g} & \text{si } \mathbf{f}_{\text{mid}}^{w_g,w} \geq 0, \\ p_t^w - \gamma^+ \frac{\mathbf{f}_{\text{mid}}^c}{\mathbf{f}_{\text{mid}}^{\Psi(c)}} p_t^{w_0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 3.E Résultats numériques

#### Valeurs numériques des paramètres et grille de discrétisation

Nous utiliserons, pour les différents paramètres du modèle, des valeurs numériques inspirées de plusieurs références de la littérature : concernant la modélisation du vent (Welfonder et al., 1997) :  $L = 300$  m,  $\kappa = 0.15$ , et  $\rho = 1.134$  kg/m<sup>3</sup>; concernant les caractéristiques de l'éolienne (Slootweg et al., 2003b, table IV) :  $P_{\text{nom}}^G = 2$  MW,  $\omega_{\text{nom}} = 18$  RPM  $\approx 1.88$  rad/s,  $R = 75$  m,  $J = 1.41 \cdot 10^6$  kg.m<sup>2</sup>; et enfin, concernant le contrôleur (Muljadi et Butterfield, 2001 ; Slootweg et al., 2003b) :  $K = 200$ ,  $\dot{\theta}_{\text{max}} = -\dot{\theta}_{\text{min}} = 4$  °/s,  $\omega_{10} = 0.95 \omega_{\text{nom}}$  et  $\beta = 4.24$  MW.rad<sup>-1</sup>.s.

En dimension 3, le choix de la taille de la grille de discrétisation commence à devenir un problème critique, ce qui n'était pas le cas pour l'exemple de dimension 2 étudié précédemment. En effet, on se rend vite compte que le choix d'une grille uniforme conduit à un gaspillage inacceptable de ressources. Face à cela, nous nous sommes contentés d'ajuster « manuellement » la grille de discrétisation dans le cadre de ce travail (plus de détails seront données un peu plus loin, dans le cas particulier  $\bar{v} = 13$  m/s).

(3.24) **Remarque.** On pourrait très bien imaginer d'automatiser cela, par exemple en estimant une « bonne » grille à partir de quelques simulations du processus. Signalons également qu'il existe des méthodes prometteuses de volumes finis à *grille adaptative*, dans lesquelles le maillage est progressivement raffiné là où cela semble nécessaire (voir par exemple Ferm et Lötstedt, 2004 ; Ferm et al., 2006).

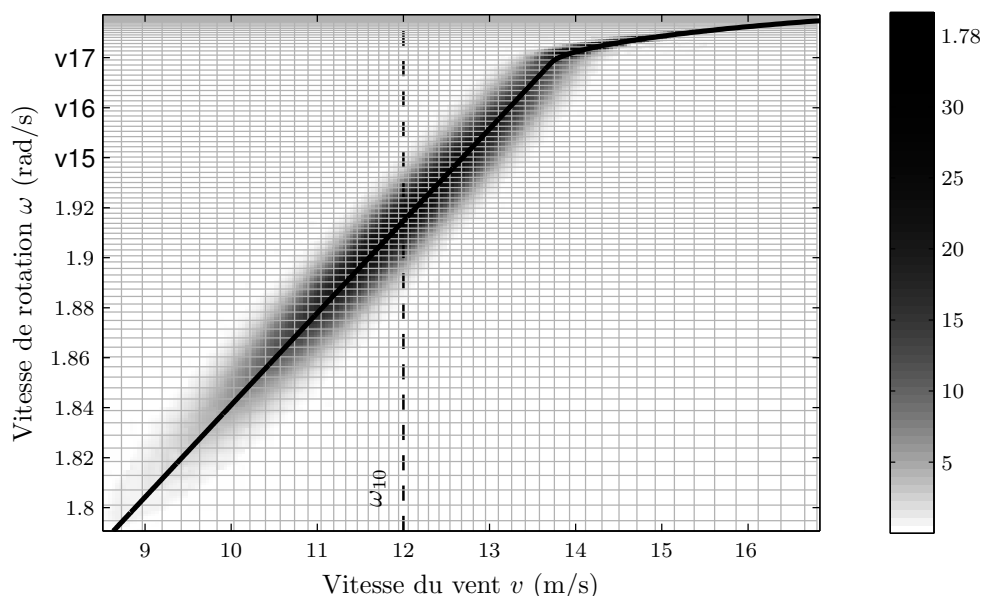
#### Résultats et commentaires

Commençons par fixer la vitesse moyenne du vent à  $\bar{v} = 13$  m/s, par exemple. Les caractéristiques de la grille utilisée, ajustée manuellement après quelques tâtonnements, sont regroupées dans la table 3.d. La matrice  $A$  obtenue est de taille  $N \times N$ , avec  $N = 58\,650$ , et contient 284\,083 entrées non nulles (soit un taux de remplissage d'environ  $8.3 \cdot 10^{-5}$ ). La densité recherchée est obtenue comme l'unique vecteur propre positif associé à la plus petite valeur propre de la matrice  $A$ , comme précédemment à l'aide de la fonction `eigs` de MATLAB. La durée du calcul est de l'ordre de quelques minutes sur un ordinateur récent<sup>18</sup>. On trouve que la plus petite valeur propre  $\alpha_{\text{qs}}$  de  $A$  vaut environ  $-1.3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , ce qui correspond à une durée de vie moyenne de  $\tau_{\text{qs}} \approx 214$  h : ceci valide a posteriori l'utilisation de cette loi quasi-stationnaire pour caractériser l'incertitude sur des

<sup>18</sup>Plus précisément : sur un Pentium IV cadencé à 3 GHz, avec 1 Go de mémoire vive, l'ensemble de la résolution prend environ 90 secondes, dont 20 secondes pour la création de la matrice creuse  $A$  et 70 secondes pour l'exécution de la fonction `eigs`.

	direction $v$	direction $\omega$	direction $\theta$
mode 0	[6.17; 22.75] $N_0^v = 51$	[0.75; 1.89] $N_0^\omega = 67$	[0.00; 30.00] $N_0^\theta = 10$
mode 1	[6.17; 22.75] $N_0^v = 51$	[1.78; 3.00] $N_0^\omega = 48$	[0.00; 30.00] $N_0^\theta = 11$

**Tab. 3.d** – Caractéristiques de la grille de discrétisation utilisée pour  $\bar{v} = 13$  m/s. Pour chaque mode et chaque direction, sont indiqués l'intervalle de discrétisation – résultant éventuellement d'une troncature – et le nombre de cellules. Le nombre total de cellules est de  $N = 58\,650$ .

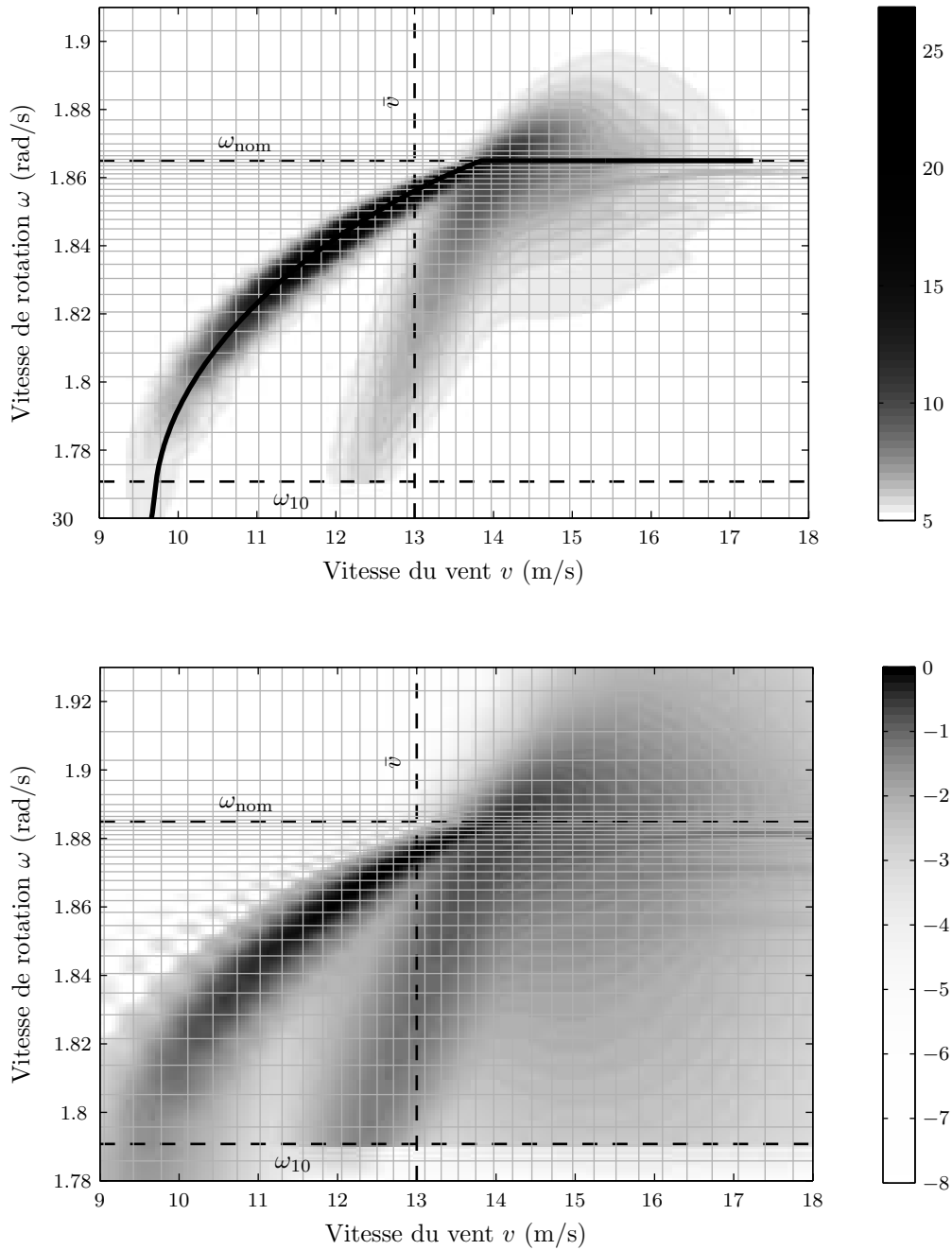


**Fig. 3.i** – Densité stationnaire jointe de  $V_t$  et  $\Omega_t$  pour  $\bar{v} = 8$  m/s, en échelle linéaire. La densité, ici entièrement portée par le mode 0, est effectivement concentrée autour du lieu des équilibres stables, tracé en trait épais (cf. figure 3.h).

intervalles de l'ordre d'une heure lorsque  $\bar{v} = 13$  m/s, puisque  $\tau_{qs} \gg 1$  h ; nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.

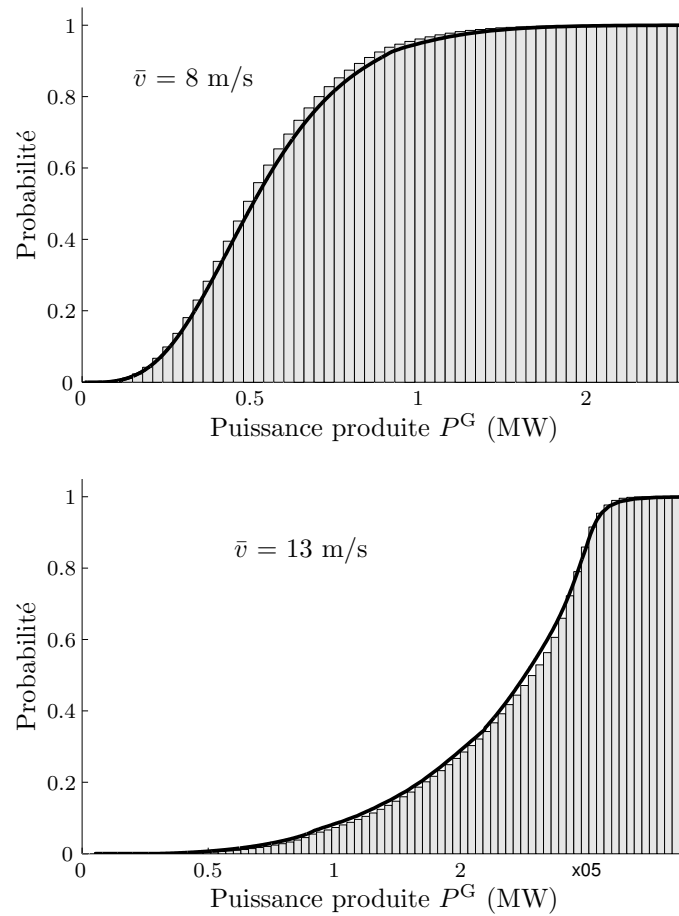
La densité stationnaire jointe de  $V_t$  et  $\Omega_t$ , obtenue en « intégrant » sur les variables  $q$  et  $\theta$ , est représentée en figure 3.i pour  $\bar{v} = 8$  m/s, et en figure 3.j pour  $\bar{v} = 13$  m/s. On peut constater, pour  $\bar{v} = 8$  m/s, que la densité – entièrement portée par le mode 0 – est fortement concentrée autour du lieu des équilibres stables ; c'est encore vrai dans le cas  $\bar{v} = 13$  m/s pour la partie de la densité située sur la gauche de la figure, c'est-à-dire celle correspondant au mode 0. La densité à également été représentée en échelle logarithmique sur la figure 3.j, de manière à faire apparaître plus clairement la discontinuité sur l'hypersurface  $\omega = \omega_{10}$  (cf. § 3.C).

Une fois calculée la loi stationnaire de  $X_t = (Q_t, Z_t)$ , pour une valeur donnée de  $\bar{v}$ , il est possible d'en déduire celle de la puissance  $P_t^G$ , puisque celle-ci est simplement une fonction de l'état :  $P_t^G = S(Q_t, \Omega_t)$ . Les fonctions de répartition obtenues, pour  $\bar{v} = 8$  m/s et  $\bar{v} = 13$  m/s, sont représentées en figure 3.k. Nous les comparons pour validation à des histogrammes cumulés,



**Fig. 3.j** – Densité stationnaire jointe de  $V_t$  et  $\Omega_t$  pour  $\bar{v} = 13$  m/s, en échelle linéaire (figure du haut) et logarithmique (base 10, figure du bas). La figure en échelle linéaire permet de constater que la partie gauche de la densité, qui correspond au mode 0, est effectivement concentrée autour du lieu des équilibres stables tracé en trait épais (cf. figure 3.h). La discontinuité de la densité sur les hypersurfaces  $\omega = \omega_{nom}$  et  $\omega = \omega_{10}$ , cf. § 3.C, est visible en échelle logarithmique. La probabilité du mode 0 est évaluée à environ 0.53.

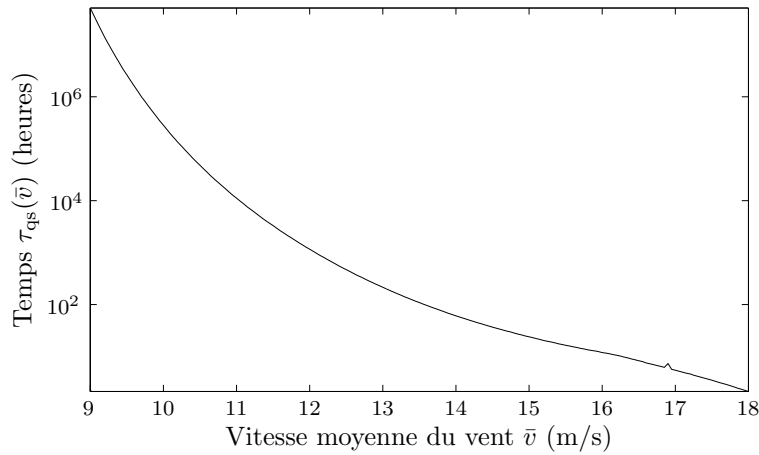




**Fig. 3.k** – Fonction de répartition de  $P_t^G$ , pour  $\bar{v} = 8$  m/s (figure du haut) et  $\bar{v} = 13$  m/s (figure du bas). Le résultat obtenu par résolution numérique de l'équation de FPK en régime quasi-stationnaire (trait épais) est comparé avec un histogramme cumulé, obtenu à partir de la simulation en temps long d'une trajectoire du processus (avec le schéma d'Euler de pas  $\delta t = 0.01$  seconde).

obtenus comme dans la section 2 grâce à la simulation en temps long d'une trajectoire du processus, discrétisé avec le schéma d'Euler de pas  $\delta t = 0.01$  s.

Revenons maintenant à notre objectif initial, qui est la caractérisation de l'incertitude sur la puissance produite en fonction de la valeur moyenne  $\bar{v}$  de la vitesse du vent. Nous calculons pour cela la fonction de répartition de  $P_t^G$  en faisant varier  $\bar{v}$  de 2 m/s à 18 m/s, par pas de 0.05 m/s. On obtient ainsi une famille de fonctions de répartition, paramétrée par  $\bar{v}$ , cf. figure 3.m, dont on peut extraire en particulier la moyenne et, par exemple, le 10<sup>e</sup> et le 90<sup>e</sup> percentiles. La figure 3.n compare ces caractéristiques de l'éolienne à la caractéristique « statique » qui a été présentée au début de cette étude (cf. figure 3.c). Il est intéressant de constater que la valeur moyenne s'écarte de la caractéristique statistique lorsque  $\bar{v}$  augmente, c'est-à-dire lorsque le mécanisme de commutation entre les deux modes commence à jouer un rôle important. Par ailleurs, les quantiles permettent de mesurer l'incertitude sur la puissance produite en fonction de  $\bar{v}$ . Plus précisément, puisque la loi que nous avons calculée est approximativement stationnaire sur les intervalles de temps considérés, on peut interpréter ces « bornes d'incertitude » en disant que la puissance produite reste comprise



**Fig. 3.1** – Valeur du temps  $\tau_{qs}$  en fonction de  $\bar{v}$ , obtenue par résolution numérique de l'équation de FPK en régime quasi-stationnaire. Ce temps est calculé par la relation  $\tau_{qs} = -1/\alpha_{qs}$ , où  $\alpha_{qs}$  est la valeur propre de l'opérateur de FPK associé à la loi quasi-stationnaire  $\mu_{qs}$  (cf. discussion concernant la quasi-stationnarité, § 3.C). Lorsque  $\bar{v}$  augmente, l'hypothèse  $\tau_{qs} \gg 1h$  n'est clairement plus vérifiée.

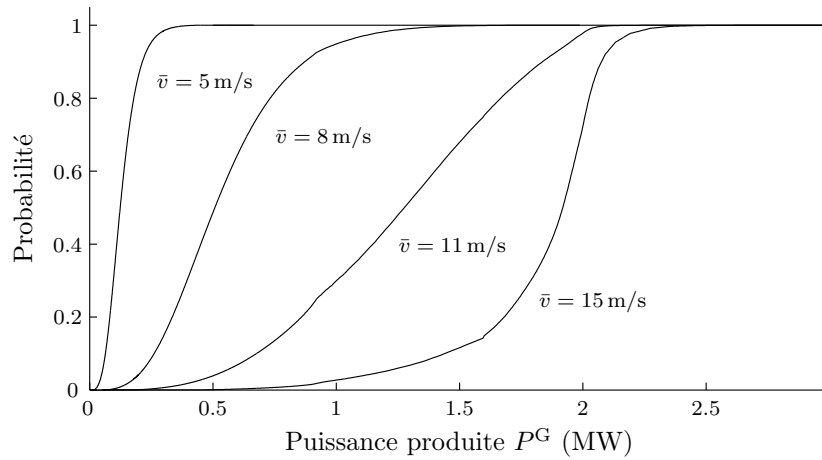
entre elles environ 80% du temps<sup>19</sup>.

Le résultat présenté en figure 3.n n'a de sens, pour une valeur donnée de  $\bar{v}$ , que si la constante de temps  $\tau_{qs}(\bar{v})$  correspondante est suffisamment grande par rapport à la durée des intervalles de temps considérés, de manière à pouvoir considérer approximativement la loi quasi-stationnaire obtenue comme une loi stationnaire. Malheureusement, on se rend compte sur la figure 3.l que, pour des valeurs du vent de l'ordre de 17 ou 18 m/s, la relation  $\tau_{qs}(\bar{v}) \gg 1$  heure n'est clairement plus valable. Cela n'est pas un problème lié spécifiquement à la modélisation utilisée dans ce travail : quelle que soit la technique de contrôle employée, il existe une valeur maximale du vent au delà de laquelle le système devient instable. En pratique, il est alors nécessaire d'arrêter l'éolienne, puis d'attendre que la vitesse du vent soit beaucoup plus faible pour redémarrer (voir par exemple Watson et al., 1994). Il s'agit donc d'une autre forme d'incertitude portant sur la puissance produite (nulle durant le temps qui sépare l'entrée dans la zone d'instabilité du redémarrage de l'éolienne), qui se trouve être, dans le cadre de l'approche proposée, quantifiée par la fonction  $\tau_{qs}(\bar{v})$ .

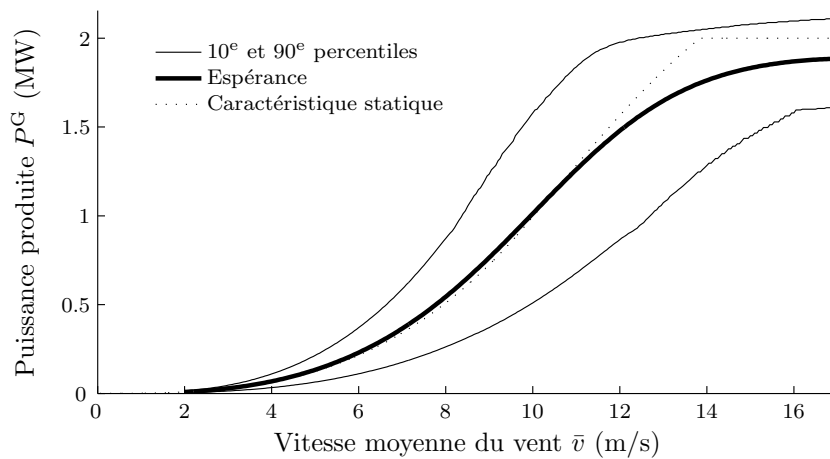
### Commentaires concernant l'approche par Monte-Carlo

Les histogrammes présentés en figure 3.k ont été obtenus, comme pour l'exemple de la section 2, à partir d'une unique trajectoire du processus, simulée sur un horizon suffisamment long (i.e. en utilisant l'ergodicité). Dans le cas présent, cela pouvait se justifier pour  $\bar{v} = 8$  ou 13 m/s, dans la mesure où  $\tau_{qs}$  était alors suffisamment grand pour que la loi quasi-stationnaire puisse être considérée comme approximativement stationnaire. Mais alors, un problème se pose si l'on cherche à appliquer la même technique pour des valeurs plus grandes de  $\bar{v}$ , la probabilité d'atteindre le seuil  $\omega_{\min}$  dans le temps de la simulation n'étant plus négligeable. Cela soulève la question de savoir calculer la loi quasi-stationnaire d'un processus de Markov par une méthode de type Monte-

<sup>19</sup>Ceci serait rigoureux, à  $\bar{v}$  fixé, si la loi calculée était réellement une loi stationnaire et non quasi-stationnaire. En effet, si  $\mu$  est une loi stationnaire et  $\Gamma \in \mathcal{E}$ , on a  $\mathbb{E}_\mu\{\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{X_s \in \Gamma} ds\} = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}_\mu\{X_s \in \Gamma\} ds = \mu(\Gamma)$ .



**Fig. 3.m** – Fonction de répartition de la puissance produite  $P^G$ , en régime quasi-stationnaire, pour différentes valeurs de la vitesse moyenne du vent  $\bar{v}$ .



**Fig. 3.n** – Représentation de l'incertitude sur la puissance produite  $P^G$ , en fonction de la vitesse moyenne du vent  $\bar{v}$ . On constate la puissance moyenne (trait épais) s'écarte de la caractéristique statique (trait pointillé) lorsque  $\bar{v}$  augmente, c'est-à-dire lorsque le mécanisme de commutation entre les deux modes commence à jouer un rôle important. Le 10<sup>e</sup> et le 90<sup>e</sup> percentiles fournissent une mesure de l'incertitude sur la puissance produite.

Carlo, question qui semble avoir été négligée jusqu'à présent dans la littérature<sup>20</sup>. Les résultats que nous avons obtenus montrent que l'approche proposée, qui passe par la résolution de l'équation de Fokker-Planck, est à même de fournir en un temps raisonnable à la fois la loi quasi-stationnaire  $\mu_{qs}$  et le temps caractéristique  $\tau_{qs}$ , tout au moins lorsque la dimension du système étudié n'excède pas 3.

### 3.F Conclusions

L'objectif de ce travail était de confronter les outils développés dans les chapitres précédents – modélisation par un processus diffusif par morceaux, équation de FPK généralisée – à un problème pratique, en l'occurrence la caractérisation de l'incertitude sur la puissance produite par une éolienne (à vitesse variable) en fonction de la vitesse moyenne du vent.

La première étape consistait à modéliser le système à étudier, c'est-à-dire le vent et l'éolienne, sous la forme d'un processus diffusif par morceaux — de dimension aussi faible que possible, de façon à pouvoir mettre en œuvre une approche basée sur l'équation de FPK généralisée. Le modèle que nous avons obtenu est de dimension trois, avec deux modes discrets. Ceci étant fait, notre idée initiale était de caractériser l'incertitude par la loi en régime stationnaire de la puissance produite : il s'est avéré que l'unique loi stationnaire du modèle est sans intérêt, et que la dynamique intéressante de l'éolienne apparaît en fait en régime quasi-stationnaire. La résolution numérique de l'équation de FPK quasi-stationnaire nous a alors permis d'obtenir simultanément, pour chaque valeur de  $\bar{v}$ , la loi quasi-stationnaire  $\mu_{qs}$  de la puissance et le temps moyen  $\tau_{qs}$  avant que l'éolienne ne soit déstabilisée par une bourrasque de vent. Deux formes d'incertitudes ont ainsi été quantifiées au lieu d'une : d'une part l'incertitude due aux fluctuations rapides de la vitesse du vent, qui est représentée par la loi quasi-stationnaire  $\mu_{qs}$ , et d'autre part le risque de voir l'éolienne s'arrêter en vent fort, quantifié par le temps  $\tau_{qs}$ .

Du point de vue calculatoire, on peut seulement dire que la résolution numérique de l'équation de FPK généralisée fournit, pour ce problème, une réponse qui est : 1) confortée, au moins approximativement, par des résultats obtenus en simulation, et 2) obtenue en un temps de calcul raisonnable – quelques minutes sur un ordinateur récent – à condition d'avoir choisi une grille de discrétisation bien adaptée au problème. On pourrait envisager de comparer plus avant, pour le problème considéré, les mérites respectifs de l'approche EDP proposée avec une approche de type Monte Carlo (en termes de précision et de temps de calcul), mais il faudrait pour cela : d'une part, pour l'approche EDP, mettre en œuvre des méthodes adaptatives qui raffinent la grille intelligemment en fonction de la précision souhaitée (voir par exemple Ferm et Lötstedt, 2004 ; Ferm et al., 2006) ; et d'autre part, pour l'approche de type Monte Carlo, disposer d'une méthode de simulation fiable pour calculer  $\mu_{qs}$  et  $\tau_{qs}$ .

Concernant l'application proprement dite, la méthodologie proposée et les résultats obtenus devraient pouvoir être mis à profit dans le cadre de travaux sur l'intégration de l'énergie éolienne dans les réseaux d'électricité. En effet, les travaux existants à notre connaissance utilisent la caractéristique statique de l'éolienne, dont nous avons montré qu'elle ne prend pas en compte l'incertitude – importante en vent fort – due aux fluctuations de la vitesse du vent  $V_t$  autour de sa moyenne à court terme  $\bar{v}$  (voir par exemple Watson et al., 1994). On peut résumer le lien entre ce type de travaux et ce que nous avons proposé par une question d'échelles de temps : les études concernant l'impact économique et énergétique de l'intégration des éoliennes se situent sur des intervalles de

---

<sup>20</sup>Signalons néanmoins quelques travaux récents (de Oliveira et Dickman, 2006 ; Souza Maia et Dickman, 2007) dans lesquels une technique de simulation a été proposée.

temps longs, par exemple sur une année, et utilisent en conséquence des pas de temps qui sont par exemple de l'ordre d'une heure ; l'analyse que nous avons réalisée, quant à elle, s'intéresse à des intervalles de temps de l'ordre d'une heure (pour que l'on puisse supposer  $\bar{V}_t \approx \bar{v}$ , cf. introduction) avec un modèle en temps continu à même de prendre en compte les fluctuations rapides de la vitesse du vent. On pourrait donc imaginer de réutiliser nos résultats pour construire un modèle simplifié de l'éolienne sur les simulations à long terme, de façon à véritablement prendre en compte l'incertitude liée aux fluctuations de la vitesse du vent qui, bien qu'ayant lieu à une échelle de temps inférieure au pas de temps de la simulation, aurait probablement un impact sur ses conclusions.

# Conclusions et perspectives

Nous avons présenté, dans ce mémoire, quelques aspects de la modélisation markovienne pour les systèmes possédant une dynamique hybride, c'est-à-dire une dynamique faisant intervenir à la fois une évolution continue et des sauts. Il s'agit d'un travail qui se situe à la frontière entre les mathématiques appliquées et les « sciences de l'ingénieur » – ce dernier terme étant entendu en un sens assez large puisque, comme nous l'avons indiqué en introduction, les domaines d'application s'étendent au-delà du champ traditionnel des sciences de l'ingénieur, par exemple en biologie.

Notre objectif premier était d'étudier la « propagation de l'incertitude » au sein de telles dynamiques hybrides, c'est-à-dire l'évolution en loi de l'état aléatoire du système au cours du temps. En effet, en dépit de la présence de systèmes hybrides stochastiques dans de nombreux domaines d'applications, seules quelques généralisations de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) étaient proposées dans la littérature, essentiellement pour certaines catégories de modèles diffusifs à sauts spontanés (les travaux de Feller (1952, 1954) puis de Malhamé et Chong (1985) étant des exceptions notables à cet égard). Afin de pouvoir mener une étude plus globale de cette question, autant que possible indépendante de la nature des sauts présents dans le modèle, nous avons été amenés à rechercher un cadre théorique unifié englobant l'ensemble des modèles markoviens hybrides connus dans la littérature. Nos contributions dans cette direction ont fait l'objet des chapitres II et III, tandis que la généralisation de l'équation de FPK, ainsi que son application au calcul de lois stationnaires et quasi-stationnaires, a été étudiée dans les chapitres IV et V. Nous concluons en résumant pour chacune de ces deux grandes parties les contributions de notre travail, et en proposant des perspectives pour continuer la recherche sur ces sujets.

## **Les processus diffusifs par morceaux : un cadre théorique unifié pour les modèles markoviens possédant une dynamique hybride**

Nous avons, dans le chapitre II, proposé une définition rigoureuse de la notion de processus diffusif par morceaux, qui généralise les processus déterministes par morceaux de Davis (1984, 1993), et montré qu'il s'agit d'une classe de modèles assez naturelle puisqu'on peut définir un processus diffusif par morceaux en spécifiant d'une part sa partie diffusive (qui est un processus de diffusion) et d'autre part ses sauts (à travers une fonctionnelle multiplicative et un noyau de réinitialisation). Il s'agit d'un pas de plus vers la création d'une théorie unifiée des modèles markoviens hybrides, qui s'inscrit clairement dans la continuité de travaux menés récemment au sein des projets HYBRIDGE et COLUMBUS, notamment par Bujorianu et Lygeros (2004a,c) sur les SHS « généraux ». En particulier, l'idée d'utiliser le théorème de renaissance d'Ikeda et al. (1966) pour la construction de tels processus était déjà présente dans ces travaux (et aussi dans certains travaux plus anciens sur les évolutions aléatoires). Notre principale contribution consiste donc en une présentation rigoureuse et épurée de ces idées, en insistant tout particulièrement sur le fait

que la réelle spécificité de ces modèles réside dans leur « dynamique » – trajectoires continues par morceaux, propriété de Markov forte, conditionnement par rapport au passé strict aux instants de sauts, etc. – plutôt que dans la structure de leur espace d'état.

Dans le chapitre III nous avons approfondi l'étude probabiliste des processus diffusifs par morceaux, en considérant plus particulièrement le cas des SHS généraux de Bujorianu et Lygeros, c'est-à-dire le cas où la dynamique de base est déterminée par une EDS « classique » et où les sauts sont déclenchés selon une fonctionnelle multiplicative de la forme  $F_t = \mathbb{1}_{t < \tau^B} \exp(-\int_0^t \lambda(X_s) ds)$ . Différents aspects de ces modèles ont été discutés : le phénomène de Zénon, la représentation du processus comme solution d'une EDS, et l'étude de son générateur étendu. Ce dernier point est bien sûr particulièrement important, puisque le générateur étendu – et son corollaire, la formule de Dynkin – joue un rôle dans de nombreux aspects de l'étude des modèles markoviens (par exemple dans les questions de stabilité en loi). Nous avons souligné néanmoins que le générateur étendu, comme d'ailleurs toutes les autres variantes plus restrictives de la notion de générateur infinitésimal, est mal adapté en général à l'étude de modèles à des sauts forcés : en effet, ce type de saut oblige à considérer des opérateurs dont le domaine de définition est fort peu maniable, avec des conditions de la forme  $\varphi(x) = \int K(x, dy) \varphi(y)$ ,  $x \in E^B$ , sur les fonctions test  $\varphi$ . Pour cette raison, nous avons mis en avant une formule de Dynkin « généralisée », dans laquelle on ne cherche pas à compenser les sauts. Cette formule permet de s'affranchir des restrictions évoquées, et nous sert de base dans la deuxième partie du mémoire pour étudier la généralisation de l'équation de FPK.

Bien qu'il semble possible d'améliorer le résultat d'existence donné au chapitre II, ou encore les résultats du chapitre III concernant le générateur étendu, aucune de ces améliorations – qui conduiraient certes à des énoncés plus satisfaisants d'un point de vue mathématique – ne semble essentielle du point de vue des applications. Il paraît en revanche important d'approfondir le travail concernant le phénomène de Zénon, c'est-à-dire le problème de l'accumulation d'un nombre infini de sauts en un temps fini : sans cela, les modèles construits sont en général non conservatifs donc difficilement utilisables. Les conditions suffisantes que nous avons données peuvent être vues comme les premiers éléments d'une boîte à outils, qui gagnerait à être étoffée. Par ailleurs, il serait intéressant d'obtenir des résultats plus précis sur un modèle tel que la « balle qui rebondit », pour lequel les conditions proposées ne s'appliquent pas : y'a-t-il effectivement accumulation des sauts lorsque le coefficient de restitution  $c$  est inférieur à la constante  $c^*$  déterminée par J. Bertoin ? Si oui, existe-t-il un prolongement naturel<sup>21</sup> du processus, conservatif et fortement markovien (qui ne serait pas, bien sûr, diffusif par morceaux) ? En admettant que ce prolongement existe, peut-on représenter le processus obtenu comme solution forte d'une EDS ? Peut-on le discrétiser pour le simuler, malgré la présence des accumulations de sauts ?

### Équations de Fokker-Planck-Kolmogorov généralisées et application au calcul de lois stationnaires et quasi-stationnaires

Nous nous sommes intéressés, dans le chapitre IV, à la généralisation de l'équation de FPK aux SHS, en nous appuyant sur le cadre théorique construit dans la première partie du mémoire – en particulier ce que nous avons appelé la formule de Dynkin généralisée. Cette approche nous a permis, en introduisant la notion d'intensité moyenne de sauts, de formuler une équation de FPK abstraite : il s'agit d'une équation faisant intervenir des mesures, qui est valable sous des conditions assez faibles (dérivabilité en un certain sens de  $t \mapsto \mu_t$  et existence de l'intensité moyenne de

<sup>21</sup>Par exemple un processus qui passe un temps nul en  $(0, 0)$ , et qui reparte de ce point sans « impulsion artificielle », c'est-à-dire sous le seul effet du bruit.

sauts, par exemple). Cette équation fait apparaître, à côté de l'opérateur de diffusion, un terme supplémentaire qui correspond à la présence de sauts. Le principal intérêt de ce traitement général est qu'il fait jouer un rôle comparable aux deux types de sauts, forcés et spontanés : nous avons ainsi unifié les différentes équations de FPK généralisées connues dans la littérature, et obtenu pour une classe de modèle à sauts forcés une généralisation de l'équation de FPK établie par Malhamé et Chong (1985). La notion de courant de probabilité joue un rôle particulièrement important dans cette dernière, ainsi que, de manière plus générale, dans tous les modèles possédant des sauts forcés.

Comme nous l'avons déjà souligné, ces résultats bien qu'intéressants sont incomplets du point de vue mathématique, puisqu'ils ne répondent pas à plusieurs questions importantes, en particulier : quelles propriétés doit posséder la loi initiale  $\mu_0$ , pour que  $t \mapsto \mu_t$  soit solution de l'équation de FPK abstraite ? existe-t-il une unique solution (en d'autres termes, l'équation caractérise-t-elle la loi du processus) ? Une voie de recherche intéressante consisterait à étudier ces questions dans le cadre de la théorie de semigroupes d'opérateurs sur des espaces localement convexes, en mettant notamment à profit les résultats obtenus récemment par Wu, Zhang et Lemle (voir la thèse de Lemle, 2007). Il faudrait pour cela résoudre la difficulté liée à la présence de sauts forcés, observée au chapitre III, qui impose de considérer des fonctions tests vérifiant une condition de la forme  $\varphi(x) = \int K(x, dy) \varphi(y)$ ,  $x \in \mathbb{E}^B$ .

Finalement, des méthodes numériques basées sur l'équation de FPK généralisée ont été mises en œuvre à travers deux exemples, au chapitre V, pour le calcul de lois stationnaires et quasi-stationnaires de modèles à sauts forcés. Dans les deux cas la discrétisation de l'équation a été effectuée par un schéma en volumes finis, qui possède des propriétés attrayantes pour ce type de problème du point de vue de la conservation de la probabilité. Une première conclusion de ces deux études de cas est d'abord qu'une telle méthode de résolution est tout à fait praticable et représente, au moins pour des modèles de dimension deux ou trois, une alternative viable aux méthodes de type Monte-Carlo. Néanmoins, une comparaison détaillée menée sur le premier exemple révèle que les deux approches sont en fait relativement comparable en termes de compromis précision / temps de calcul, lorsqu'on s'intéresse au calcul d'un certain nombre de quantités de la forme  $\mathbb{E}_{\mu_{st}} \{ \varphi(X_t) \}$ , ce qui semble faire pencher la balance en faveur des méthodes de type Monte-Carlo qui sont plus simple à mettre en œuvre et aussi généralisables à des dimensions plus élevées. Une méthode basée sur la résolution de l'équation de FPK reste avantageuse dans les cas où l'on souhaite non seulement calculer mais aussi stocker – pour un usage ultérieur – une approximation « compacte » de la densité de probabilité d'intérêt. Ajoutons que cette approche, dans le cas du calcul d'une loi quasi-stationnaire qui est traité dans l'exemple de l'éolienne, présente l'intérêt de fournir en même temps la constante de temps associée à la transition vers l'état absorbant (constante qui fournit une information intéressante et importante sur le comportement du système).

Les méthodes basées sur la résolution numérique de l'équation de FPK, en régime stationnaire ou quasi-stationnaire, peuvent donc se révéler intéressantes dans un certain nombre de situations. Mais le choix d'une grille de discrétisation bien adaptée au problème considéré est un point important, pour ne pas dire crucial lorsque la dimension vaut trois ou quatre. L'utilisation de grilles dites adaptives semble être une voie possible pour traiter cette difficulté ; de telles grilles ont été utilisées notamment par Ferm et Lötstedt (2004) ; Ferm et al. (2006) pour la résolution de l'équation de FPK usuelle en dimension deux. Un travail important de développement et de test reste à réaliser pour déterminer si le compromis précision / temps de calcul s'en trouve réellement amélioré.

Une autre direction de recherche suggérée par ce travail est l'étude de la stabilité en loi des systèmes hybrides stochastiques, c'est-à-dire la question de l'existence d'une loi stationnaire  $\mu_{st}$  et



de la convergence des lois  $\mu_t$  vers  $\mu_{st}$ . Des travaux existent dans le cas particulier des processus déterministes par morceaux (Dufour et Costa, 1999), ou pour certains types de modèles à sauts spontanés (Yuan et Mao, 2003), mais jamais à notre connaissance la question n'a été envisagée dans sa globalité pour un SHS général. Dans le cas du modèle de Malhamé et Chong généralisé à deux dimensions, nous avons pu établir l'existence de la loi stationnaire par les méthodes générales de Meyn et Tweedie, qui sont basées sur l'utilisation de critères de type Foster-Lyapunov. Mais ce type de critère fait intervenir une fonction énergie qui doit appartenir au domaine du générateur étendu, ce qui est assez peu commode en général en présence de sauts forcés (l'exemple considéré a pu être traité en raison de son noyau de réinitialisation qui était particulièrement simple). Il semblerait donc pertinent de chercher à établir des critères similaires, mais imposant seulement à la fonction énergie d'être dans le domaine du générateur étendu du processus de base, i.e. de la partie diffusive du modèle. Ceci rejoint l'idée des fonctions de Lyapunov multiples, déjà développée pour l'étude de la stabilité de certains systèmes « commutés » (*switched systems*, Branicky, 1998).

---

Des modèles markoviens possédant une dynamique hybride surviennent dans une grande variété d'applications : la notion de processus diffusif par morceaux que nous avons proposée fournit un cadre théorique unifié pour les étudier – cadre théorique qui contient notamment les SHS généraux de Bujorianu et Lygeros, mais aussi par exemple les modèles dont la dynamique continue est une diffusion réfléchie. On y gagne en termes de modélisation une flexibilité importante, qui se trouvait déjà dans le formalisme des processus déterministes par morceaux de Davis : tout processus de Markov construit en ajoutant à un processus de diffusion des sauts d'un type « raisonnable » est un processus diffusif par morceaux, ces sauts étant le plus souvent en pratique soit des sauts forcés déclenchés par une garde, soit des sauts spontanés possédant une intensité stochastique.

Les sauts forcés, bien que survenant très naturellement dans de nombreuses situations, sont une source de complications non négligeable qui appelle des outils nouveaux. C'est le cas en ce qui concerne la propagation de l'incertitude, que nous avons étudiée sous la forme d'une équation de FPK généralisée : cette équation fait intervenir la notion d'intensité moyenne de sauts, qui s'exprime à l'aide du courant de probabilité, pour résoudre la difficulté liée à l'absence d'intensité stochastique de sauts pour les sauts forcés. C'est le cas également pour les questions de stabilité en loi, puisque les critères usuels de type Foster-Lyapunov font intervenir des fonctions test appartenant au domaine du générateur étendu (qui n'est guère agréable en présence de sauts forcés). C'est le cas, enfin, en ce qui concerne la simulation stochastique : la discrétisation de modèles à sauts forcés fait apparaître des problèmes qui sont déjà connus, par exemple en mathématiques financières, en lien avec la simulation d'une diffusion tuée à sa sortie d'un domaine. Bien des aspects des processus diffusifs par morceaux, et en particulier des SHS généraux, restent donc maintenant à étudier plus en détail.

# Notations

## 1 Symboles alphabétiques

$d$	distance sur l'espace métrique $E$
$f$	dérive ( <i>drift</i> ) dans l'EDS au sens d'Itô
$g$	notation générique pour un « vrai » champ de vecteurs (cf. III.2.A)
$g_0$	champs de vecteur du terme en $dt$ dans l'EDS au sens de Stratonovich
$g_l$	$1 \leq l \leq m$ , champs de vecteur des termes browniens dans une EDS
$j$	courant de probabilité (cf. IV.1.B)
$n$	nombre de variables continues, lorsqu'il ne dépend pas du mode $q \in \Omega$
$n_q$	nombre de variables continues, lorsqu'il dépend du mode $q \in \Omega$
$m$	nombre de mouvements browniens dans l'EDS
$m$	mesure de volume (cf. IV.1.B)
$n$	champ de vecteurs normaux et de norme unité sur une hypersurface
$r_t$	mesure d'intensité moyenne de sauts à l'instant $t \geq 0$ (cf. IV.2.A)
$s$	mesure de surface (cf. IV.1.B)
$\mathcal{A}$	tribu sur $\Omega$
$B$	mouvement brownien
$B$	exposant utilisé pour les quantités liées à l'ensemble $E^B$ des points de branchement
$\mathcal{B}$	tribu borélienne (sur un espace topologique à préciser)
$\mathcal{C}$	classes de fonctions continues ou continûment différentiables (cf. III.2.A et IV.1.B)
$E$	espace d'état du processus $X$ (espace métrique LCS)
$E^B$	ensemble des points de branchement (aussi appelé <i>garde</i> )
$E^0$	espace d'état $E$ privé de ses points de branchement, i.e. $E \setminus E^B$
$\mathcal{E}$	tribu borélienne sur $E$ , i.e. $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$
$\mathcal{E}_u$	tribu des ensembles universellement mesurables de $E$
$\mathbb{E}$	notation générique pour l'espérance mathématique
$\mathbb{E}_\mu$	espérance par rapport à la loi $\mathbb{P}_\mu$ (on note $\mathbb{P}_x$ pour $\mu = \delta_x$ )
$\tilde{\mathbb{E}}_\mu$	espérance par rapport à la loi $\tilde{\mathbb{P}}_\mu$ (on note $\tilde{\mathbb{P}}_x$ pour $\mu = \delta_x$ )
$\hat{\mathbb{E}}_\mu$	espérance par rapport à la loi $\hat{\mathbb{P}}_\mu$ (on note $\hat{\mathbb{P}}_x$ pour $\mu = \delta_x$ )
$F_t$	fonction de survie (cf. II.3.C)
$K$	noyau de réinitialisation (cf. II.2.D)
$L_c$	générateur différentiel associé à l'EDS (cf. III.2.E et IV.1.B)
$L_c^*$	adjoint formel de $L_c$ (cf. IV.1.B)
$\underline{L}_c^*$	adjoint de $L_c$ au sens des distributions (cf. IV.1.B)
$\mathcal{L}_X$	premier générateur étendu (cf. III.3.A)

$\mathcal{L}'_X$	deuxième générateur étendu (cf. III.3.A)
$N$	processus de comptage des sauts de $X$ (cf. III.3.B)
$\bar{N}$	compensateur prévisible de $N$
$\mathcal{N}$	famille des ensembles négligeables d'un espace probabilisé
$P_t$	noyau de transition d'un processus de Markov
$\mathcal{P}$	tribu des ensembles prévisibles de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (par rapport à une filtration à préciser)
$Q$	composante discrète d'un processus à état hybride (cf. III.2.A)
$\mathcal{Q}$	ensemble des modes pour un espace d'état hybride (cf. 2.A)
$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\mathbb{R}_+$	ensemble $[0; +\infty[$ des réels positifs
$S_k$	$k^{\text{ième}}$ instant de renaissance
$X$	processus de Markov : quelconque au II.1, diffusif par morceaux ensuite
$\tilde{X}$	processus de base (cf. II.3.A)
$\hat{X}$	processus $X$ tué à l'instant de son premier saut (cf. II.3.A)
$Z$	composante continue d'un processus à état hybride (cf. III.2.A)
$\delta_x$	mesure de Dirac en $x$
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ , 0 sinon
$\zeta$	durée de vie d'un processus de Markov $X$
$\hat{\zeta}$	durée de vie du processus tué $\hat{X}$
$\theta_t$	$\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$ , opérateur de translation
$\mu_t$	loi du processus $X$ à l'instant $t \geq 0$
$\tau^B$	temps d'entrée de $\tilde{X}$ dans $E^B$ (cf. II.3.C)
$\tau_k$	$k^{\text{ième}}$ saut du processus $X$ , (cf. II.2.A)
$\tau_k^B$	$k^{\text{ième}}$ saut forcé de $X$ (cf. II.2.C)
$\tau_k^0$	$k^{\text{ième}}$ saut spontané de $X$ (cf. II.2.C)
$\Psi$	fonction de réinitialisation
$\Omega$	ensemble sur lequel est défini le processus diffusif par morceaux $X$
$\hat{\Omega}$	ensemble sur lequel est défini le processus tué $\hat{X}$
$\tilde{\Omega}$	ensemble sur lequel est défini le processus de base $\tilde{X}$

## 2 Autres notations

Les notations suivantes sont fréquemment utilisées dans ce mémoire :

$$\begin{aligned}
 s \wedge t &= \min(s, t) \\
 s \vee t &= \max(s, t) \\
 T_n \uparrow T & \quad T_n \rightarrow T \text{ et } T_n \leq T_{n+1} < T, \text{ pour tout } n
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, concernant les filtrations, la même convention que Kallenberg (1997) a été adoptée : typiquement, on parlera donc d'une filtration  $\mathcal{F}$  sur un espace  $(\Omega, \mathcal{A})$ , avec  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , là où la plupart des ouvrages consacrés aux processus de Markov parlent d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Dans un cas la lettre  $\mathcal{F}$  désigne la filtration elle-même, dans l'autre il s'agit d'une tribu sur  $\Omega$  contenant tous les  $\mathcal{F}_t$ .

### 3 Abréviations

càdlàg	continue à droite avec des limites à gauche
EDS	Équation Différentielle Stochastique
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
FA	Fonctionnelle Additive
FPK	Fokker-Planck-Kolmogorov
GSHS	<i>Generalized Stochastic Hybrid System</i>
JLS	<i>Jump Linear System</i>
LCS	Localement Compact Séparé
SHS	Systèmes Hybrides Stochastiques, ou <i>Stochastic Hybrid System</i>



# Références bibliographiques

- L. H. R. Alavarez. « Stochastic forest stand value and optimal timber harvesting ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42 : 1972–1993, 2004.
- R. Alur, C. Belta, V. Kumar, M. Mintz, G. J. Pappas, H. Rubin et J. Schug. « Modeling and analyzing biomolecular networks ». *Computing in Science and Engineering*, 4(1) : 20–31, 2002.
- R. Alur, R. Courcoubetis, T. A. Henzinger et P.-H. Ho. « Hybrid automata: an algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems ». In *Hybrid Systems* (Grossman et al., 1993, pp. 209–229).
- R. Alur et G. J. Pappas (éditeurs). *Hybrid Systems: Computation and Control. 7th International Workshop, HSCC 2004. Philadelphia, PA, USA, March 2004. Proceedings*, collection « Lecture Notes in Computer Science », numéro 2993, 2004. Springer.
- M. Annunziato. « A finite difference method for piecewise deterministic processes with memory ». Prépublication disponible sur <http://arxiv.org>, référence arXiv:math.NA/0610725 v2, 2006.
- R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine et H. Van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2<sup>nd</sup> Edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- R. F. Bass. « Adding and Subtracting Jumps form Markov Processes ». *Transactions of the American Mathematical Society*, 255 : 363–376, 1979.
- R. F. Bass. *Diffusions and Elliptic Operators*. Springer, 1997.
- J. Bect, H. Baili et G. Fleury. « Generalized Fokker-Planck equation for piecewise-diffusion processes with boundary hitting resets ». In *17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, 2006a.
- J. Bect, Y. Phulpin et G. Baili, H. and Fleury. « On the Fokker-Planck equation for stochastic hybrid systems: application to a wind turbine model ». In *Proceedings of the 9th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS)*, 2006b.
- A. Bensoussan et J.-L. Lions. « Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsif et applications ». *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Séries A et B. Sciences mathématiques et sciences physiques*, 276 : A1189–A1192, 1973.
- A. Bensoussan et J.-L. Lions. *Contrôle impulsif et inéquations quasi variationnelles*. Collection « Méthodes mathématiques de l'informatique », numéro 11. Gauthier-Villars, Paris, 1982.

- A. Bensoussan et P.-L. Lions. « Optimal control of random evolutions ». *Stochastics*, 5(3) : 169–199, 1981.
- A. Bensoussan et J. L. Menaldi. « Stochastic hybrid control ». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 249(1) : 261–88, 2000.
- J. Bertoin. « A second order SDE for the Langevin process reflected at a completely inelastic boundary ». Prépublication, disponible sur [http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00106365\\_v1](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00106365_v1), 2006a.
- J. Bertoin. « Reflecting a Langevin process at an absorbing boundary ». Prépublication, disponible sur [http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00018001\\_v1](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00018001_v1), 2006b.
- R. G. Bhandari et R. E. Sherrer. « Random vibrations in discrete non-linear dynamic systems ». *Journal of Mechanical Engineering Science*, 10 : 168–174, 1968.
- K. Bichteler, J.-B. Gravereaux et J. Jacod. *Malliavin Calculus for Processes with Jumps*. Gordon and Breach Science Publishers, 1987.
- J. M. Bismut. « Contrôle de processus alternants et applications ». *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 47(3) : 241–288, 1979.
- R. Blackmore et B. Shizgal. « Discrete-ordinate method of solution of Fokker-Planck equations with nonlinear coefficients ». *Physical Review A*, 31(3) : 1855–1868, 1985.
- H. A. P. Blom. « From piecewise deterministic to piecewise diffusion processes ». In *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pp. 1978–1983, 1988.
- H. A. P. Blom. « Stochastic Hybrid Processes with Hybrid Jumps ». In *ADHS 03, IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, St Malo, juin 2003.
- R. M. Blumenthal. *Excursions of Markov Processes*. Birkäuser, 1991.
- R. M. Blumenthal et R. K. Gettoor. *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, New York, 1968.
- V. S. Borkar, M. K. Ghosh et P. Sahay. « Optimal control of a stochastic hybrid system with discounted cost ». *Journal of Optimization Theory and Applications*, 101(3) : 557–580, 1999.
- N. Bourbaki. *Éléments de mathématiques : Topologie générale. Chapitres I à IV*. Hermann, 1971.
- M. S. Branicky. « Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) : 475–482, 1998.
- M. S. Branicky, V. S. Borkar et S. K. Mitter. « A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1) : 31–45, 1998.
- A. Bressan. « Unique solutions for a class of discontinuous differential equations ». *Proceedings of the American Mathematical Society*, 104(3) : 772–778, 1988.
- R. W. Brockett et G. L. Blankenship. « A representation theorem for linear differential equations with Markovian coefficients ». In *Proceedings of the Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, Urbana-Champaign, 1977.

- F. M. Buchmann. « Simulation of stopped diffusions ». *Journal of Computational Physics*, 202 (2) : 446–462, 2005.
- M. L. Bujorianu. « Extended stochastic hybrid systems and their reachability problem ». In *Hybrid Systems: Computation and Control. 7th International Workshop, HSCC 2004. Philadelphia, PA, USA, March 2004. Proceedings* (Alur et Pappas, 2004, pp. 234–249).
- M. L. Bujorianu et J. Lygeros. « Theoretical Foundations of General Stochastic Hybrid Processes ». Deliverable DSHS2, Columbus project, 2003.
- M. L. Bujorianu et J. Lygeros. « General stochastic hybrid systems ». In *12th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Kusadasi, Turquie, Juin 2004a.
- M. L. Bujorianu et J. Lygeros. « General stochastic hybrid systems: modelling and optimal control ». In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pp. 1872–1877, Atlantis, Bahamas, Décembre 2004b.
- M. L. Bujorianu et J. Lygeros. « Theoretical Foundations of Stochastic Hybrid Systems ». In *16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Leuven, Belgium, July 2004c.
- M. L. Bujorianu, J. Lygeros, W. Glover et G. Pola. « A stochastic hybrid system modeling framework ». Technical Report WP1, Deliverable 1.2, HYBRIDGE, May 2003.
- A. Buonocore, V. Giorno et L. M. Nobile, A. G. and Ricciardi. « A neuronal modeling paradigm in the presence of refractoriness ». *BioSystems*, 67 : 35–43, 2002.
- R. S. Cantrell et C. Cosner. « Diffusion models for population dynamics incorporating individual behavior at boundaries: applications to refuge design ». *Theoretical Population Biology*, 55 : 189–207, 1999.
- J. S. Chang et G. Cooper. « A practical difference scheme for Fokker-Planck equations ». *Journal of Computational Physics*, 6(1) : 1–16, 1970.
- D. Chen, Y. Hong et K. S. Trivedi. « Second-order stochastic fluid models with fluid-dependent flow rates ». *Performance Evaluation*, 49 : 341–358, 2002.
- A. S. Cherny et H.-J. Engelbert. « Singular Stochastic Differential Equations ». In *TMR Workshop on Evolution Equations*, Roscoff (France), May 2003.
- R. Cont et P. Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall / CRC Press, 2003.
- O. L. V. Costa. « Stationary distributions for piecewise-deterministic Markov processes ». *Journal of Applied Probability*, 27(1) : 60–73, 1990.
- O. L. V. Costa. « Impulse control of piecewise-deterministic processes via linear programming ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(3) : 371–375, 1991.
- O. L. V. Costa et M. H. A. Davis. « Impulse control of piecewise-deterministic processes ». *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2(3) : 187–206, 1989.



- O. L. V. Costa et F. Dufour. « A sufficient condition for the existence of an invariant probability measure for Markov processes ». *Journal of Applied Probability*, 42(3) : 873–878, 2005.
- O. L. V. Costa, C. A. B. Raymundo et F. Dufour. « Optimal stopping with continuous control of piecewise deterministic Markov processes ». *Stochastics and Stochastic Reports*, 70(1-2) : 41–73, 2000.
- J. N. Darroch et E. Seneta. « On quasi-stationary distributions in absorbing continuous-time finite Markov chains. ». *Journal of Applied Probability*, 4 : 192–196, 1967.
- M. H. A. Davis. « The application of nonlinear filtering to fault detection in linear systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(2) : 257–259, 1975.
- M. H. A. Davis. « Piecewise Deterministic Markov Processes : a General Class of Nondiffusion Stochastic Models ». *Journal of the Royal Statistical Society: series B*, 46 : 353–388, 1984.
- M. H. A. Davis. *Markov Models and Optimization*. Chapman & Hall, London, 1993.
- M. M. de Oliveira et R. Dickman. « Quasi-stationary simulation: the subcritical contact process ». *Brazilian Journal of Physics*, 36(3A) : 685–689, 2006.
- C. Dellacherie et P.-A. Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres XII à XVI : théorie du potentiel associée à une résolvante, théorie des processus de Markov. Édition entièrement refondue*. Hermann, 1987.
- A. Dixit. « Entry and exit decisions under uncertainty ». *Journal of Political Economy*, 97 : 620–638, 1989.
- J. L. Doob. *Stochastic Processes*. Wiley, 1953.
- A. N. Drozdov et J. J. Brey. « Accurate path integral representations of the Fokker-Planck equation with a linear reference system : Comparative study of current theories ». *Physical Review E*, 57(1) : 146–158, 1998.
- A. N. Drozdov et P. Talkner. « Path integrals for Fokker-Planck dynamics with singular diffusion : accurate factorization for the time evolution operator ». *Journal of Chemical Physics*, 109(6) : 2080–2090, 1998.
- F. Dufour et O. L. V. Costa. « Stability of piecewise-deterministic Markov processes ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(5) : 1483–1502, 1999.
- E. B. Dynkin. *Markov Processes*. Springer, 1965.
- T. Ekelund. « Speed control of wind turbines in the stall region ». In *Proceedings of the 3rd IEEE Conference on Control Applications*, pp. 227–232, Glasgow, UK, 1994.
- R. J. Elliott, L. Aggoun et J. B. Moore. *Hidden Markov Models: Estimation and Control*. Springer, 1995.
- S. Engell, H. Guégen et J. Zaytoon (éditeurs). *Analysis and Design of Hybrid Systems 2003 (IPV-IFAC Proceedings Volume)*, 2003. Elsevier.
- S. N. Ethier et T. G. Kurtz. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. Wiley, 1986.

- P. Faure et M. Robin. *Éléments d'automatique*. Dunod, 1984.
- W. Feller. « The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations ». *Annals of Mathematics*, 55(3) : 468–519, May 1952.
- W. Feller. « Diffusion processes in one dimension ». *Transactions of the American Mathematical Society*, 77 : 1–31, 1954.
- W. Feller. « Generalized second order differential operators and their lateral conditions ». *Illinois Journal of Mathematics*, 1 : 459–504, 1957.
- L. Ferm et P. Lötstedt. « Accurate and stable grid interfaces for finite volume methods ». *Applied Numerical Mathematics*, 49 : 207–224, 2004.
- L. Ferm, P. Lötstedt et P. Sjöberg. « Conservative solution of the Fokker-Planck equation for stochastic chemical reactions ». *BIT Numerical Mathematics*, 46 : 61–83, 2006.
- A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications. Volume 1*. Academic Press, 1975.
- S. Fujishige et Y. Sawaragi. « Optimal estimation for continuous system with jump process ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(3) : 225–228, 1974.
- C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- R. K. Gettoor. *Markov Processes: Ray Processes and Right Processes*, volume 440. Springer-Verlag, 1975.
- M. K. Ghosh, A. Arapostathis et S. I. Marcus. « Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 30(6) : 1–23, Novembre 1992.
- M. K. Ghosh, A. Arapostathis et S. I. Marcus. « Ergodic control of switching diffusions ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(6) : 1952–1988, Novembre 1997.
- M. K. Ghosh et A. Bagchi. « Modeling stochastic hybrid systems ». In *System Modeling and Optimization: Proceedings of the 21st IFIP TC7 Conference*, pp. 269–280. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- M. K. Ghosh, S. I. Marcus et A. Arapostathis. « Controlled switching diffusions as hybrid processes ». In R. Alur, T. A. Henzinger et E. D. Sontag (éditeurs), *Hybrid Systems III: Verification and Control, Proceedings of the DIMACS/SYCON Workshop.*, volume 1066 dans *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 64–75, Rutgers University, New Brunswick, NJ, USA, Octobre 1996.
- P. Glasserman et N. Merener. « Convergence of a discretization scheme for jump-diffusion processes with state-dependent intensities ». *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2041) : 111–127, January 2004.
- P. W. Glynn et H. Thorisson. « Structural characterization of taboo-stationarity for general processes in two-sided time ». *Stochastic Processes and their Applications*, 102 : 311–318, 2002.
- B. V. Gnedenko et I. N. Kovalenko. *Introduction to queueing theory*. Collection « Translated from Russian by R. Kondor. Translation edited by D. Louvish ». Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1968.

- E. Gobet. « Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes ». *Stochastic Processes and their Applications*, 87 : 167–197, 2000.
- E. Gobet. « Euler scheme and half-space approximation for the simulation of diffusion in a domain ». Rapport interne n°468, CMAP Polytechnique, 2001.
- E. Gobet et S. Menozzi. « Exact approximation rate of killed hypoelliptic diffusions using the discrete Euler scheme ». *Stochastic Processes and their Applications*, 112 : 201–223, 2004.
- R. J. Griego et R. Hersh. « Random evolutions, Markov chains, and systems of partial differential equations ». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 62 : 305–308, 1969.
- R. J. Griego et R. Hersh. « Theory of random evolutions with applications to partial differential equations ». *Transactions of the American Mathematical Society*, 156 : 405–418, 1971.
- R. L. Grossman, A. Nerode, A. P. Ravn et H. Rischel (éditeurs). *Hybrid Systems*. Collection « Lecture Notes in Computer Science », numéro 736. Springer, New York, 1993.
- F. B. Hanson et H. C. Tuckwell. « Population growth with randomly distributed jumps ». *Journal of Mathematical Biology*, 36(2) : 169–187, November 1997.
- E. Hausenblas. « Monte Carlo simulation of killed diffusion ». *Monte Carlo Methods and Applications*, 6(4) : 263–295, 2000.
- D. Heath. *Probabilistic analysis of hyperbolic systems of partial differential equations*. Mémoire de thèse, University of Illinois, 1969.
- T. A. Henzinger, P.-H. Ho et H. Wong-Toi. « Algorithmic analysis of nonlinear hybrid systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) : 540–554, 1998.
- R. Hersh. « The birth of random evolutions ». *The Mathematical Intelligencer*, 25(1) : 53–60, 2003.
- J. P. Hespanha. « A model for stochastic hybrid systems with application to communication networks ». *Non Linear Analysis*, 62 : 1353–1383, 2005.
- J. P. Hespanha. « Modelling and analysis of stochastic hybrid systems ». *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 153 : 520–535, 2006.
- J. P. Hespanha et A. Tiwari (éditeurs). *Hybrid Systems: Computation and Control. 9th International Workshop, HSCC 2006. Santa Barbara, CA, USA, March 29-31, 2006. Proceedings*, volume 3927 dans *Lecture Notes in Computer Science*, 2006. Springer.
- J. Hu, J. Lygeros et S. Sastry. « Towards a theory of stochastic hybrid systems ». In N. A. Lynch et B. H. Krogh (éditeurs), *Hybrid Systems: Computation and Control. 3rd International Workshop, HSCC 2000. Pittsburgh, PA, USA, March 23–25, 2000. Proceedings*, collection « Lecture Notes in Computer Science », numéro 1790, pp. 160–173. Springer, 2000.
- J. Hu, W.-C. Wu et S. Sastry. « Modeling subtilin production in *Bacillus subtilis* using stochastic hybrid systems ». In *Hybrid Systems: Computation and Control. 7th International Workshop, HSCC 2004. Philadelphia, PA, USA, March 2004. Proceedings* (Alur et Pappas, 2004).
- W. Huisinga, S. P. Meyn et C. Schütte. « Phase transitions and metastability in Markovian and molecular systems ». *Annals of Applied Probability*, 14(1) : 419–458, 2004.

- N. Ikeda, M. Nagasawa et S. Watanabe. « A construction of Markov processes by piecing out ». *Proceedings of the Japan Academy*, 42 : 370–375, 1966.
- N. Ikeda et S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North Holland-Kodansha, Tokyo, 1981.
- K. Itô. « Poisson point processes attached to Markov processes ». In L. M. Le Cam, J. Neyman et E. L. Scott (éditeurs), *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 3, pp. 225–240. University of California Press, 1972.
- K. Itô et H. P. McKean. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer Verlag, Berlin, 1965.
- J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. Collection « Lecture Notes in Mathematics », numéro 714. Springer Verlag, 1979.
- J. Jacod et P. E. Protter. « Quelques remarques sur un nouveau type d'équations différentielles stochastiques ». In *Séminaire de probabilité XVI, Université de Strasbourg 1980/81*, collection « Lecture Notes in Mathematics », numéro 920, pp. 447–458. Springer, 1982.
- J.-W. Jang et Y. Krvavych. « Arbitrage-free premium calculation for extreme losses using the shot noise process and the Esscher transform ». *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(1) : 97–111, 2004.
- K. H. Johansson, M. Egerstedt, J. Lygeros et S. Sastry. « On the regularization of Zeno hybrid automata ». *Systems & Control Letters*, 38 : 141–150, 1999.
- O.c Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, 1997.
- P. E. Kloeden et E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1998.
- A. N. Kolmogorov. « Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlich Keitrechnung ». *Mathematische Annalen*, 104 : 415–458, 1931.
- R. Korn. « Some applications of impulse control in mathematical finance ». *Mathematical Methods of Operations Research*, 50 : 493–518, 1999.
- N. N. Krasovskii et E. A. Lidskii. « Analytical design of controllers in systems with random attributes ». *Automation and Remote Control*, 22(9–11), 1961.
- L. Kruk, J. Lehoczyk, K. Ramanan et S. Shreve. « An explicit formula for the Skorokhod map on  $[0; a]$  ». To appear in *The Annals of Probability*, mars 2006.
- J. Krystul, A. Bagchi et H. A. P. Blom. « Risk decomposition and assessment methods ». Technical Report D8.1, HYBRIDGE (IST-2001-32460), Juin 2003.
- J. Krystul et H. A. P. Blom. « Generalised stochastic hybrid processes as strong solutions of stochastic differential equations ». Technical Report D8.3, HYBRIDGE (IST-2001-32460), Juillet 2005.
- K. Kubilius et E. Platen. « Rate of weak convergence of the Euler approximation for diffusion processes with jumps ». Research Paper Series 54, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney, 2001.

- P. Kumar et S. Narayanan. « Solution of Fokker-Planck equation by finite element and finite difference methods for nonlinear systems ». *Sādhanā*, 31(4) : 445–461, 2006.
- A. E. Kyprianou et Z. Palmowski. « Quasi-stationary distributions for Lévy process ». *Bernoulli*, 12 : 571–581, 2006.
- A. Lachal. « Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien ». *Annales de l'Institut Henry Poincaré*, 27(3) : 385–405, 1991.
- A. Lachal. « Les temps de passage successifs de l'intégrale du mouvement brownien ». *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et statistiques*, 33 : 1–36, 1997.
- D. Lamberton et G. Pagès. « Recursive computation of the invariant distribution of a diffusion ». *Bernoulli*, 8(3) : 367–405, 2002.
- D. Lamberton et G. Pagès. « Recursive computation of the invariant distribution of a diffusion: the case of a weakly mean reverting drift ». *Stochastics & Dynamics*, 3(4) : 435–451, 2003.
- R. S. Langley. « A finite element method for the statistics of non-linear random vibration ». *Journal of Sound and Vibration*, 101(1) : 41–54., 1985.
- B. Lapeyre, E. Pardoux et R. Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. Collection « Mathématiques et applications », numéro 29. Springer, 1998.
- V. Lasdas et M. H. A. Davis. « A piecewise deterministic process approach to target motion analysis ». In *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, 1989.
- J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Collection « Graduate Texts in Mathematics », numéro 218. Springer-Verlag, 2003.
- R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen et C. Yang. *ARPACK User's Guide – Solution of Large-scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. Collection « SIAM series in software, environments and tools ». SIAM, 1998.
- A. Lejay. « On the decomposition of excursions measures of processes whose generators have diffusion coefficients discontinuous at one point ». *Markov Processes and Related Fields*, 8(1) : 117–126, 2002.
- A. Lejay. « Simulating a diffusion on a graph. Application to reservoir engineering ». *Monte Carlo Methods and Applications*, 9(3) : 241–256, 2003.
- A. Lejay. « On the constructions of the skew Brownian motion ». *Probability Surveys*, 3 : 413–466, 2006.
- L. D. Lemle. *Semi-groupes intégrés d'opérateurs, l'unicité des pré-générateurs et applications*. Mémoire de thèse, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand et Université de l'Ouest de Timișoara, 2007.
- S. M. Lenhart et S. A. Belbas. « A system of nonlinear partial differential equations arising in the optimal control of stochastic systems with switching costs ». *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 43(3) : 465–475, 1983.

- R. Li, Z. Chen et W. Wu. *Generalized Difference Methods for Differential Equations: Numerical Analysis of Finite Volume Methods*. Marcel Dekker, 2000.
- E. A. Lidskii. « Optimal control of systems with random properties ». *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 27(1) : 42–59, 1963.
- M. Lladser et J. San-Martín. « Domain of attraction of the quasi-stationary distributions for the Ornstein-Uhlenbeck process ». *Journal of Applied Probability*, 37(2) : 511–520, 2000.
- J. Lygeros. « *Design of embedded controllers for safety critical systems* ». Rapport final du projet Columbus (IST-2001-38314), <http://www.columbus.gr/finalreport>, 2004.
- J. Lygeros. « Stochastic hybrid models in air traffic and biochemical processes ». Joint CTS-HYCON Workshop on Nonlinear and Hybrid Control, <http://www.cts-hycon-workshop.org>, Juillet 2006.
- R. Malhamé et E.-K. Boukas. « A renewal theoretic analysis of a class of manufacturing systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 : 580–587, 1991.
- R. Malhamé et C.-Y. Chong. « Electric load model synthesis by diffusion approximation of a high-order hybrid-state stochastic system ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(9) : 854–860, September 1985.
- R. Mannella. « Absorbing boundaries and optimal stopping in a stochastic differential equation ». *Physics Letters A*, 254 : 257–262, 1999.
- X. Mao, C. Yuan et G. Yin. « Numerical method for stationary distribution of stochastic differential equations with Markovian switching ». *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 174 (1) : 1–27, 2005.
- M. Mariton. *Jump Linear Systems in Automatic Control*. Dekker, 1990.
- S. Martínez, P. Picco et J. San-Martín. « Domain of attraction of quasi-stationary distributions for the Brownian motion with drift ». *Advances in Applied Probability*, 30(2) : 385–408, 1998.
- S. Martínez et J. San-Martín. « Quasi-stationary distributions for a Brownian motion with drift and associated limit laws ». *Journal of Applied Probability*, 31(4) : 911–920, 1994.
- J. C. Mattingly, A. M. Stuart et D. J. Higham. « Ergodicity for SDEs and approximations: locally Lipschitz vector fields and degenerate noise ». *Stochastic Processes and their Applications*, 101 : 185–232, 2002.
- S. McWilliam, D. J. Knappet et C. H. J. Fox. « Numerical solution of the stationary FPK equation using Shannon wavelets ». *Journal of Sound and Vibration*, 232(2) : 405–430, 2000.
- J.-L. Menaldi et M. Robin. « Reflected diffusion processes with jumps ». *Journal of Applied Probability*, 13(2) : 319–341, 1985.
- R. C. Merton. « Option pricing when underlying stock returns are discontinuous ». *Journal of Financial Economics*, 3(1-2) : 125–144, 1976.
- P.-A. Meyer. « Renaissance, recollements, mélanges, ralentissement de processus de Markov ». *Annales de l'institut Fourier*, 25(3–4) : 465–497, 1975.

- S. P. Meyn et R. L. Tweedie. « Stability of Markovian processes II: continuous-time processes and sampled chains ». *Advances in Applied Probability*, 25 : 487–517, 1993a.
- S. P. Meyn et R. L. Tweedie. « Stability of Markovian processes III: Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes ». *Advances in Applied Probability*, 25 : 518–548, 1993b.
- G. N. Milstein. *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- M. Morari et L. Thiele (éditeurs). *Hybrid Systems: Computation and Control. 8th International Workshop, HSCC 2005. Zurich, Switzerland, March 9-11, 2005. Proceedings*, collection « Lecture Notes in Computer Science », numéro 3414, 2005. Springer.
- K. W. Morton. *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*. Collection « Applied Mathematics and Mathematical Computation », numéro 12. Chapman & Hall, 1996.
- J. E. Moyal. « Discontinuous Markoff processes ». *Acta Mathematica*, 98 : 221–264, 1957.
- E. Muljadi et C. P. Butterfield. « Pitch-controlled variable-speed wind turbine generation ». *IEEE Transactions on Industry Applications*, 37 : 240–246, 2001.
- C. Nichita, D. Luca, B. Dakyo et E. Ceanga. « Large band simulation of the wind speed for real time wind turbine simulators ». *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 17(4) : 523–529, December 2002.
- J. R. Norris. *Markov Chains*. Collection « Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics », numéro 2. Cambridge University Press, 1997.
- D. Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer, Second edition, 2006.
- B. Øksendal et A. Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Springer, 2005.
- F. Panloup. *Approximation recursive du régime stationnaire d'une équation différentielle stochastique avec sauts*. Mémoire de thèse, université Paris-VI, 2006.
- M. A. Pinsky. *Lectures on Random Evolution*. World Scientific, 1991.
- G. Pola, M. L. Bujorianu, J. Lygeros et M. D. Di Benedetto. « Stochastic hybrid models: an overview with application to air traffic management ». In *IFAC Conference on the Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS'03)*, June 2003.
- D. Revuz et M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion, third edition*. Springer, 1999.
- R. Rishel. « Control of systems with jump Markov disturbances ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(2) : 241–244, 1975a.
- R. Rishel. « Dynamic programming and minimum principles for systems with jump Markov disturbances ». *SIAM Journal of Control*, 13(2) : 338–371, 1975b.
- L. C. G. Rogers et D. Williams. *Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Volume 1: Foundations. 2nd edition*. Cambridge University Press, 2000a.
- L. C. G. Rogers et D. Williams. *Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Volume 2: Itô Calculus. 2nd edition*. Cambridge University Press, 2000b.

- W. Rudin. *Analyse réelle et complexe. Troisième édition.* Dunod, 1987.
- T. S. Salisbury. « Construction of right processes from excursions ». *Probability Theory and Related Fields*, 73(3) : 351–367, 1986a.
- T. S. Salisbury. « On the Itô excursion process ». *Probability Theory and Related Fields*, 73(3) : 319–350, 1986b.
- M. Sanz-Solé. *Malliavin Calculus, with Applications to Stochastic Partial Differential Equations.* EPFL Press, 2005.
- K.-I. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, volume 68 dans *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, 1999.
- Y. Sawaragi, Katayama T. et S. Fujishige. « State estimation for continuous-time system with interrupted observation ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(4) : 307–314, 1974.
- S. A. Sawyer. « A Formula for Semigroups, with an Application to Branching Diffusion Processes ». *Transactions of the American Mathematical Society*, 152(1) : 1–38, 1970.
- L. Schwartz. *Théorie des distributions.* Hermann, 1966.
- M. Sharpe. *General Theory of Markov Processes.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- N. Shiraishi, M. Shinozuka et Y. K. Wen (éditeurs). *Proceedings of the 7th International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR'97.* Balkema Publications, 2008.
- A. N. Shiryaev. « Stochastic equations of non-linear filtering of jump-like Markov processes ». *Problemy Peredači Informacii*, 2(3) : 3–22, 1966.
- K. Siegrist. « Random Evolution Processes with Feedback ». *Transactions of the American Mathematical Society*, 265(2) : 375–392, Juin 1981.
- J. G. Slootweg, S. W. H. de Haan et W. L. Kling. « General model for representing variable speed wind turbine in power system dynamics simulations ». *IEEE Transactions on Power Systems*, 18 : 144–151, 2003a.
- J. G. Slootweg, H. Polinder et W. L. Kling. « Representing wind turbine electrical generating systems in fundamental frequency simulations ». *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 18 (4) : 516–524, December 2003b.
- C. Soize. *The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and its Explicit Steady State Solutions.* World Scientific, 1994.
- D. Souza Maia et R. Dickman. « Diffusive epidemic process: theory and simulation ». *Journal of Physics: theory and simulation*, 19, 2007.
- B. F. Spencer Jr et L. A. Bergman. « On the numerical solution of the Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic systems ». *Nonlinear Dynamics*, 4(4) : 357–372, 1993.
- R. L. Stratonovich. « A new representation for stochastic integrals and equations ». *SIAM Journal on Control*, 4(2) : 362–371, 1966.



- D. W. Stroock et S. R. S. Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes*. Springer, New York, 1979.
- D. D. Sworder. « Feedback control of a class of linear systems with jump parameters ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(1) : 9–14, February 1969.
- D. D. Sworder. « Control of systems subject to sudden change in character ». *Proceedings of the IEEE*, 64 : 1219–1225, 1976.
- D. D. Sworder et R. O. Rogers. « An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(10) : 971–978, 1983.
- D. Talay. « Second order discretization of stochastic differential systems for the computation of the invariant law ». *Stochastics and Stochastic Reports*, 29 : 13–36, 1990.
- T. Thiringer et J. Linders. « Control by variable rotor speed of a flex-pitch wind turbine operating in a wide speed range ». *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 8(3) : 520–526, 1993.
- C. J. Tomlin, J. Lygeros et S. Sastry. « A game theoretic approach to controller design for hybrid systems ». *Proceedings of the IEEE*, 88(7) : 949–70, July 2000.
- C. J. Tomlin, I. Mitchell, A. M. Bayen et M. Oishi. « Computational techniques for the verification of hybrid systems ». *Proceedings of the IEEE*, 91(7) : 986–1001, 2003.
- P. S. Veers. « Three-dimensional wind simulation ». Technical Report SAND88-0152, Sandia National Laboratories, Albuquerque, March 1988.
- D. Vermes. « Optimal control of piecewise deterministic Markov process ». *Stochastics*, 14(3) : 165–207, 1985.
- H. K. Versteeg et W. Malalasekera. *An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Longman Scientific & Technical, 1995.
- U. von Wagner et W. V. Wedig. « On the calculation of stationary solutions of multi-dimensional Fokker-Planck equations by orthogonal functions ». *Nonlinear Dynamics*, 21 : 289–306, 2000.
- C. F. Wakim, S. Capperon et J. Oksman. « A Markovian model of pedestrian behavior ». In W. Thissen, P. Wieringa, M. Pantic et M. Ludema (éditeurs), *IEEE SMC 2004 Conference proceedings. International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 4, pp. 4028–4033. IEEE Press, 2004.
- J. B. Walsh et M. Weil. « Représentation de temps terminaux et applications aux fonctionnelles additives et aux systèmes de Lévy ». *Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, 5(1) : 121–155, 1972.
- H. Wang, C. S. Peskin et T. C. Elston. « A robust numerical algorithm for studying biomolecular transport processes ». *Journal of Theoretical Biology*, 221(4) : 491–512, 2003.
- S. J. Watson, L. Landberg et J. A. Halliday. « Application of wind speed forecasting to the integration of wind energy into a large scale power system ». *IEE Proceedings: Generation, Transmission and Distribution*, 141 : 357–362, 1994.

- G. W. Wei, D. S. Zhang, D. J. Kouri et D. K. Hoffman. « Distributed approximating functional approach to the Fokker-Planck equation: time propagation ». *Journal of Chemical Physics*, 107 (8) : 3239–3245, 1997.
- E. Welfonder, R. Neifer et M. Spanner. « Development and experimental identification of dynamic models for wind turbines ». *Control Engineering Practice*, 5(1) : 63–73, 1997.
- W. Whitt. *Stochastic-process limits*. Collection « Springer Series in Operations Research ». Springer-Verlag, New York, 2002.
- H. Witsenhausen. « A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2) : 161–167, 1966.
- S. F. Wojtkiewicz et L. A. Bergman. « Numerical solution of high dimensional Fokker-Planck equations ». In *8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, 2000.
- S. F. Wojtkiewicz, L. A. Bergman et B. F. Spencer Jr. « Computational issues arising in the solution of the Fokker-Planck equation in higher dimension ». In *Proceedings of the 7th International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR'97* (Shiraishi et al., 2008).
- S. F. Wojtkiewicz, L. A. Bergman et B. F. Spencer Jr. « High fidelity numerical solution of the Fokker-Planck equation ». In *Proceedings of the 7th International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR'97* (Shiraishi et al., 2008).
- S. F. Wojtkiewicz, E. A. Johnson, L. A. Bergman, M. Grigoriu et B. F. Spencer Jr. « Response of stochastic dynamical systems driven by additive Gaussian and Poisson white noise: solution of a forward generalized Kolmogorov equation by a spectral finite difference method ». *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168 : 73–89, 1999.
- D. M. Wolf et A. P. Arkin. « Motifs, modules and games in bacteria ». *Current Opinion in Microbiology*, 6 : 125–134, 2003.
- K. Wolter. « Jump transitions in second order FSPNs ». In *MASCOTS '99. Proceedings of the Seventh International Symposium on Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunication Systems*, pp. 156–63, College Park, MD, USA, 1999. IEEE Computer Society.
- K. Wolter et A. Zisowsky. « On Markov reward modelling with FSPNs ». *Performance Evaluation*, 44 : 165–86, April 2001.
- J. Xing, H. Wang et G. Oster. « From continuum Fokker-Planck models to discrete kinetic models ». *Biophysical Journal*, 89 : 1551–1563, 2005.
- G. G. Yin, X. Mao et K. Yin. « Numerical approximation of invariant measures for hybrid diffusion systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(7) : 934–946, 2005.
- J. S. Yu et Y. K. Lin. « Numerical path integration of a non-homogeneous Markov process ». *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39 : 1493–1500, 2004.
- C. Yuan et J. Lygeros. « Invariant measure of stochastic hybrid processes ». In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, 2004.

- C. Yuan et X. Mao. « Asymptotic stability in distribution of stochastic differential equations with Markovian switching ». *Stochastic Processes and their Applications*, 103(2) : 277–291, 2003.
- C. Yuan et X. Mao. « Convergence of the Euler-Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching ». *Mathematics and Computers in Simulation*, 64(2) : 223–235, 2004.
- C. Yuan et X. Mao. « Stationary distributions of Euler-Maruyama-type stochastic difference equations with Markovian switching and their convergence ». *The Journal of Difference Equations and Applications*, 11(1) : 29–48, 2005.
- D. S. Zhang, G. W. Wei, D. J. Kouri et D. K. Hoffman. « Distributed approximating functional approach to the Fokker-Planck equation: eigenfunction expansion ». *Journal of Chemical Physics*, 106(12) : 5216–5224, 1997.
- J. Zhang, K. H. Johansson, J. Lygeros et S. Sastry. « Zeno hybrid systems ». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11(5) : 435–451, 2001.