



HAL
open science

**Réduction des systèmes à paramètres distribués.
Application à la commande optimale robuste des canaux
d'irrigation**

Hicham Ouarit

► **To cite this version:**

Hicham Ouarit. Réduction des systèmes à paramètres distribués. Application à la commande optimale robuste des canaux d'irrigation. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2004. Français. NNT: . tel-00169967

HAL Id: tel-00169967

<https://theses.hal.science/tel-00169967>

Submitted on 5 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REMERCIEMENTS	6
PUBLICATIONS	7
INTRODUCTION	8
CHAPITRE 1.....	13
LA PROBLEMATIQUE DE LA GESTION DES SYSTEMES D'IRRIGATION... 13	
1.1 Les différents systèmes d'irrigation existants	13
1.2 Structure générale d'un système d'irrigation	14
1.3 Etat de l'art.....	14
1.4 Les objectifs de la thèse et la méthodologie du travail	16
CHAPITRE 2.....	19
MODELISATION DES SYSTEMES DE CANAUX D'IRRIGATION A SURFACE LIBRE	19
2.1 Introduction.....	19
2.2 Modèle de Barré de Saint-Venant	21
2.3 Les lois d'ouvrages et conditions aux limites.....	23
2.3.1 Conditions aux limites	24
2.3.2 Lois d'ouvrages.....	26
2.4 Calcul des profils d'équilibre et modèle linéarisé de Saint - Venant	29
2.5 Modèle linéarisé de Saint-Venant.....	31
2.6 Différentes méthodes de résolutions des équations de Saint-Venant	33
2.6.1 Méthode de Preissmann	34
2.6.2 Méthode de collocation orthogonale.....	36

2.7	Simulations numériques	42
2.8	Comparaison des deux méthodes et conclusion	46
CHAPITRE 3.....		48
REDUCTION DU MODELE PAR COLLOCATION ORTHOGONALE.....		48
3.1	Introduction.....	48
3.2	Réduction du modèle	48
3.3	Erreur de réduction	51
3.4	Analyse de l'erreur de réduction	52
3.5	Conclusion.....	56
CHAPITRE 4.....		57
COMMANDE OPTIMALE ROBUSTE AUX ERREURS DE REDUCTION.....		57
4.1	Introduction.....	57
4.2	Normes matricielles.....	59
4.3	Analyse des systèmes bouclés.....	59
4.3.1	Stabilité nominale	60
4.3.2	Performances nominales	61
4.3.3	Robustesse en stabilité	62
4.3.3.1	Robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes non structurées.....	63
4.3.3.2	Théorèmes généraux de robustesse en stabilité	64
4.4	Synthèse du régulateur	66
4.4.1	Objectifs de synthèse : concept de « loop-shaping »	66
4.4.2	Commande LQG/LTR à pondérations fréquentielles	68
4.5	Application à notre modèle réduit de collocation	74
4.5.1	Validation de la commande.....	77

	3
4.5.2 Validation de l'observateur	79
4.6 Conclusion.....	81
CHAPITRE 5.....	83
REALISATION DE LA COMMANDE OPTIMALE VIA LA REGULATION DES VANNES.....	83
5.1 Introduction.....	83
5.2 Types de commande utilisés en irrigation	84
5.3 Modèle d'un bief avec prise en compte de la dynamique des deux vannes	85
5.4 Problème posé.....	86
5.5 Problème de régulation des vannes	87
5.6 Résultats numériques.....	88
5.7 Conclusion.....	92
CHAPITRE 6.....	93
COMMANDE OPTIMALE EN DIMENSION INFINIE.....	93
6.1 Introduction.....	93
6.2 Représentation sous forme de semigroupe	94
6.2.1 Homogénéisation	95
6.2.2 C_0 -semigroupe associé au modèle de Saint-Venant linéarisé	97
6.2.3 Sortie du système	100
6.3 Analyse dynamique du modèle de Saint-Venant linéarisé	101
6.3.1 Stabilité exponentielle.....	102
6.3.2 Stabilisabilité exponentielle	104
6.3.3 Détectabilité exponentielle.....	107

CHAPITRE 7.....	113
RESULTATS EXPERIMENTAUX SUR LE MICRO-CANAL	113
7.1 Introduction.....	113
7.2 Description du micro-canal.....	113
7.3 Adaptation de la commande optimale robuste LQG/H₂	115
7.3.1 Ecriture du programme sous forme Simulink.....	115
7.3.2 Conversion des commandes en ouverture de vannes.....	116
7.3.3 Résultats expérimentaux	118
7.3.3.1 Test de la commande LQG/H ₂ sur le micro-canal	118
7.4 Commande PI.....	120
7.4.1 Modélisation et identification	121
7.4.2 Synthèse des correcteurs	123
7.4.3 Test de la commande PI.....	125
7.5 Comparaison.....	125
7.5.1 Tests de robustesse.....	127
7.6 Conclusion.....	129
CHAPITRE 8.....	130
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	130
8.1 Introduction.....	130
8.2 Conclusion générale	130
8.2.1 Approche en dimension finie	131
8.2.2 Approche en dimension infinie	132
8.3 Perspectives.....	133
ANNEXE 1	135

A.1	Discrétisation du modèle de Saint-Venant linéarisé à l'aide du schéma aux différences finies de Preissmann	135
A.2	Modèle linéarisé de Saint-Venant dans le cas non uniforme	136
A.3	Modèle linéarisé sous forme adimensionnelle	138
ANNEXE 2	139
B.1	Caractère de C_0-semigroupe de l'opérateur associé $A_1 \frac{\partial}{\partial x}$	139
B.2	Calcul des valeurs propres de l'opérateur $A = A_1 \frac{\partial}{\partial x}$	150
B.3	Démonstration de non-stabilité exponentielle de $A_s = A_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x}$	151
ANNEXE 3	156
C.1	Environnement de Travail	156
ANNEXE 4	157
D.1	Identification des paramètres.....	157
D.1.1	Relation tension/ouverture des vannes.....	157
D.1.2	Identification	159
D.1.2.1	La pente	159
D.1.2.2	Le débit maximum	161
D.1.2.3	Les coefficients des ouvrages.....	163
D.1.2.4	Le coefficient de Strickler.....	165
D.1.2.5	Tableau récapitulatif des paramètres.....	167
D.1.3	Conclusion.....	167
REFERENCES	168

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé au sein du Laboratoire d'Automatique de Grenoble pendant la période comprise entre janvier 2001 et mai 2004.

Je voudrais tout d'abord exprimer ma gratitude à Monsieur Didier GEORGES, mon directeur de thèse, pour l'accueil qu'il m'a offert dans son équipe, pour ses qualités humaines et pour son efficacité dans la direction de mes travaux de recherche.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à Monsieur Laurent LEFEVRE, co-encadrant de ma thèse, qui m'a soutenu tout au long de mon doctorat, j'ai beaucoup appris de lui, notamment sa passion et son esprit rigoureux pour la recherche et la science, dans les parcours quotidiens du travail de thèse. Je tiens à le remercier aussi pour sa compréhension, sa disponibilité et ses qualités humaines.

Je souhaite remercier Mesdames Brigitte D'ANDREA NOVEL, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Irène ZAMBETTAKIS, Professeur à l'IUT-Tarbes, et Monsieur Bernhard MASCHKE, Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1, pour avoir accepté de rapporter sur ce travail, Monsieur Christian COMMAULT, Professeur à l'INP Grenoble pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'examiner mes travaux et de présider mon jury de thèse.

Je tiens à remercier mes amis, Boubker AIT BRIK, Abedrrahim SADIR, Mohammed WARGUI, et Claire WARGUI qui ont été ma deuxième famille durant mon séjour en France ; je les remercie aussi pour leur aide morale. Je tiens à remercier aussi tout le personnel de l'école ESISAR à Valence, notamment Didier Laubies, Damien Kœnig, pour leur accueil amical et pour l'ambiance agréable qui règne dans l'école, sans oublier Benoît Marx, pour les relations amicales que nous avons eues dans trois bureaux successifs et, surtout, pour son aide sur tous les plans.

J'ai laissé pour la fin les plus importants : mon père, ma mère et ma famille au Maroc, qui ont toujours été là pour moi et qui ont fait l'impossible pour que je puisse finir mes études. J'espère que Dieu me donnera la force de leur rendre ne fût-ce qu'un pour cent de ce qu'ils ont fait pour moi. Je tiens à remercier aussi mes amis du Maroc et surtout ma sœur Habiba OUARIT, pour son aide morale et sa présence toujours à côté de moi au cours de mes études. Ce travail est pour vous. A vous tous, **merci de tout mon cœur.**

Publications

Ce travail de thèse a donné lieu à 3 publications :

1. Hicham. Ouarit, Laurent Lefèvre et Didier Georges, “*Robust optimal control of open-reach open-channels*”. European Control Conference, ECC2003, Cambridge, UK, septembre 2003.

2. Hicham. Ouarit, Laurent Lefèvre et Didier Georges, “*Commande optimale robuste aux erreurs de réduction des systèmes à paramètres distribués : le cas d’un problème de commande aux frontières d’un écoulement à surface libre*”. JDA2003, Valenciennes, France, juin 2003.

3. Hicham.Ouarit, Laurent Lefèvre et Didier Georges, Ofelia Begovich, “*A way to deal with nonlinear boundary conditions in open-channel optimal control problems*”. 42th IEEE Conference on Decision and Control, CDC2003, Hawaii, USA, decembre 2003.

Introduction

Une meilleure gestion des ressources en eau, en raison des enjeux économiques, sociaux et environnementaux qui en dépendent, constitue un défi majeur du prochain siècle. L'irrigation des terres agricoles, la distribution d'eau potable et les réseaux d'assainissement sont au centre de ces enjeux. Une rationalisation de la gestion de l'eau est vitale pour les pays en voie de développement, mais également essentielle pour les pays industrialisés, car l'eau est très souvent une ressource limitée et fragile. Par ailleurs se développent de nombreux projets de conception ou de réhabilitation de réseaux (irrigation, distribution d'eau potable, traitement des eaux, réseaux d'assainissement), en particulier dans les pays en voie de développement (en Inde, au Pakistan, en Afrique), ou encore en Amérique Centrale ou du Sud. Tout ceci justifie pleinement qu'un effort de recherche important soit consenti dans le domaine de l'optimisation de la gestion de l'eau sous toutes ses formes (irrigation et drainage, distribution et assainissement). L'Automatique est tout particulièrement concernée par la gestion des systèmes de distribution d'eau : outre les problèmes de régulation qui apparaissent lorsqu'il s'agit de gérer des systèmes multivariables complexes (comportement fortement non-linéaire, nature fortement interconnectée des réseaux de distribution, systèmes à paramètres distribués dans le cas des systèmes hydrauliques à surface libre comme les canaux, les rivières), généralement soumis à de fortes entrées aléatoires (fluctuations de la demande ou des apports en eau liées au climat ou à la météo), ces systèmes nécessitent que soient mises en oeuvre des techniques de prévision (prédiction de la demande ou des apports), de supervision ou de diagnostic pour être capables de détecter des défauts de fonctionnement (fuites dans des canalisations d'un réseau sous pression ou encore pompages non autorisés dans le cas de canaux d'irrigation par exemple).

L'homme a donc depuis de nombreuses années mis en oeuvre ces capacités pour faire face à ces difficultés, et pour que cette ressource puisse être mieux utilisée, ceci en construisant des systèmes hydrauliques de distribution d'eau automatisés (canaux d'irrigation en l'occurrence).

Il y a trois groupes d'activités qui utilisent de l'eau : l'agriculture, l'industrie, et les usages domestiques. L'agriculture est l'activité qui consomme le plus grand volume [Malaterre P. O, 1994], de là l'intérêt porté aux systèmes d'irrigation.

L'irrigation, qui déjà permet à 16% des terres agricoles - 250 millions d'hectares - de fournir de 40 à 60% de l'alimentation de la planète, est un mode privilégié de valorisation de la ressource en eau.

Une bonne gestion de l'irrigation impose en préalable des réflexions approfondies sur la gestion de la ressource, sa répartition entre les usagers, les impacts sociaux des aménagements et des modes de répartition de l'eau.

Les principales qualités qu'on attend aujourd'hui d'un système moderne de distribution d'eau sont [Faye R. M, F. Mora, 1996] :

La disponibilité : le système doit fournir une ressource disponible en quantité et en qualité ;

La continuité : il s'agit de satisfaire les usagers en limitant au maximum les interruptions de la distribution de la distribution d'eau ;

L'économie : il s'agit de limiter le gaspillage de l'eau ;

La précision : lors de la mise en œuvre de l'économie et de la disponibilité ;

La sécurité : il s'agit de l'élimination des dangers (comme les crues par exemple) ;

L'intégrité : il s'agit de la détection des dysfonctionnements concernant la sécurité, la précision, l'économie et la disponibilité ;

Les coûts : l'objectif est de limiter les coûts de distribution pour les usagers.

Afin de permettre une meilleure gestion, l'automatique peut être appliquée avec profit pour les systèmes hydrauliques [Goussard J., 1993].

Actuellement la commande de la majorité des canaux d'irrigation est faite en opérant manuellement les ouvrages de régulation. Pour améliorer la gestion de ces systèmes il est important de pouvoir les automatiser d'une façon performante et sûre. Dans cette

perspective, le but principal des commandes que nous développons est de satisfaire la consommation d'eau demandée à chaque station de pompage.

Les approches de l'automatique dite « classique » ne sont pas pourtant applicables directement aux systèmes hydrauliques à surface libre qui sont des systèmes très complexes, de grande taille, distribués dans l'espace et difficiles à commander, en raison de leur caractère fortement non-linéaire et des phénomènes de retards variables en fonction du régime de fonctionnement. La dynamique de ces systèmes n'est pas représentée habituellement par des équations différentielles ordinaires, mais plutôt, le plus souvent, par des équations aux dérivées partielles issues de la mécanique des fluides qui font intervenir le temps et l'espace (les équations de Barré de Saint-Venant). Il est donc à priori délicat d'exploiter pour ces systèmes le cadre des systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles ordinaires généralement utilisés en automatique. Le système décrit par ces équations aux dérivées partielles qui sont non-linéaires est de dimension infinie, ce qui va nous poser un problème par la suite lorsque nous voulons les commander à l'aide de régulateurs développés à partir de modèles linéaires de dimension finie. C'est une des difficultés qui justifient que de nombreuses recherches en automatique soient consacrées au thème de l'automatisation des canaux d'irrigation à surface libre. L'erreur de modélisation peut introduire des dysfonctionnements dans la régulation automatique, pouvant aller jusqu'à générer une instabilité au sein du système. Le problème qui nous occupe peut donc se concevoir comme un problème de robustesse de ces régulateurs vis-à-vis de ces erreurs de modélisation.

Dans cette thèse qui comporte huit chapitres, nous nous intéressons à la commande optimale des canaux d'irrigation à surface libre.

Le premier chapitre présente la problématique de la gestion des systèmes d'irrigation, et décrit la structure générale des systèmes d'irrigation, ainsi que les différents types de systèmes d'irrigation. Ce chapitre décrit aussi les objectifs de la thèse et la méthodologie du travail.

Le deuxième chapitre traite de la modélisation des systèmes de canaux d'irrigation à surface libre (canaux, lois d'ouvrages: vannes, déversoir), du calcul du modèle linéarisé des équations de Saint-Venant (non-linéaires), et de l'intégration numérique de ces deux modèles par deux méthodes différentes. Les méthodes présentées ici sont, d'une part, la méthode de différences finies implicites de Preissmann [Preissmann A., 1965, P. O.

Malaterre, 1994] bien connue dans le domaine hydraulique et, d'autre part, la méthode de collocation orthogonale, méthode qui appartient à la famille de méthodes de résidus pondérés. Une comparaison de ces deux méthodes sur les deux modèles linéaire et non-linéaire de Saint-Venant est ensuite présentée. Pour conclure ce chapitre et compléter notre modélisation, nous étudions les différentes conditions aux limites possibles en introduisant les équations de vannes et de déversoirs.

Le troisième chapitre présente la réduction du modèle linéarisé des équations de Saint-Venant via la méthode de collocation. Le modèle ainsi obtenu est un modèle linéaire d'équations différentielles ordinaires de dimension finie (modèle réduit). Nous discutons du choix des points de collocation ainsi que du calcul et de l'analyse de l'erreur de réduction commise en passant du modèle de dimension infinie au modèle de dimension finie.

Le quatrième chapitre traite de la commande optimale robuste aux erreurs de réduction. Nous y présentons l'analyse de la performance et de la robustesse vis-à-vis de ces erreurs de réduction, ainsi que l'application de ces résultats à l'exemple d'un bief de canal d'irrigation à surface libre. Nous présentons ensuite une approche consistant à faire la synthèse de cette commande optimale robuste LQG/H₂ à l'aide d'un régulateur optimal à pondérations fréquentielles. Ce régulateur est développé à partir du modèle réduit obtenu par collocation orthogonale et est robuste vis-à-vis des erreurs engendrées par cette réduction de modèle. Les gabarits d'erreurs permettant le « loop shaping » (voir infra) sont obtenus en considérant l'erreur de modélisation entre les fonctions de transfert non rationnelles calculées à partir des équations de Saint Venant linéarisées (en régime uniforme) et les fonctions de transfert du modèle réduit par collocation. Un observateur est également développé dans ce chapitre. L'approche utilisée est une adaptation et un prolongement de la méthode LQG/LTR à pondérations fréquentielles. Elle permet de reconstruire l'état du système à partir des seuls états mesurés (sorties), tout en tenant compte des objectifs de robustesse.

Le cinquième chapitre traite de la réalisation de la commande optimale robuste par les actionneurs. Il s'agit d'adapter la commande calculée précédemment au cas d'un canal réel ainsi qu'au micro-canal de Valence, c'est-à-dire d'en transformer les entrées et les sorties, en tenant compte des lois d'ouvrage.

Le sixième chapitre présente l'étude de la stabilité et la commande optimale du système en utilisant la théorie des semigroupes. Dans ce chapitre, nous montrons en détail que l'opérateur associé aux équations de Saint-Venant linéarisées est un générateur de semigroupe. Enfin nous étudions la stabilité exponentielle, la stabilisabilité exponentielle, et la détectabilité exponentielle de ce système linéarisé, nous décrivons ensuite le moyen d'obtenir une approximation en dimension finie du régulateur LQ sur la base de l'équation de Riccati d'opérateurs associée au problème.

Le septième chapitre présente une description du micro-canal de Valence sur lequel ont été testées les différentes lois de commande. Ce travail s'appuie sur l'étude d'identification du micro-canal faite par Sylvie Chaussinand [Chaussinand S., 2003] pour déterminer les paramètres caractérisant la géométrie du canal et ceux intervenant dans les équations de Saint-Venant. Enfin nous présentons une comparaison des résultats expérimentaux obtenus lors de l'application sur le micro-canal des différentes lois de commande étudiées : commande PI + prédicteur, commande optimale robuste de dimension finie.

Finalement le dernier chapitre présente les conclusions générales et les perspectives de ce travail. Nous y survolons nos contributions personnelles et discutons des limitations de notre étude ainsi que des futures directions de recherche qu'elle suggère.

Chapitre 1

La problématique de la gestion des systèmes d'irrigation

1.1 Les différents systèmes d'irrigation existants

Commençons par une brève description d'un réseau d'irrigation. L'eau est prise à sa source pouvant être un barrage, une rivière, ou un puits, et ensuite elle est distribuée aux usagers. Le système d'irrigation, qui a pour rôle l'acheminement de l'eau, peut être constitué d'une partie à surface libre avec des canaux ouverts et des réservoirs, et d'une partie sous pression composée de stations de pompage et de conduites souterraines assurant la distribution sous pression. On peut aussi signaler le cas des rivières utilisées pour l'irrigation avec des infrastructures différentes de celle évoquées précédemment mais avec les mêmes objectifs de fonctionnement.

En général l'eau est acheminée depuis sa source d'origine jusqu'à aux usagers à travers des canaux construits ou à travers des cours d'eau naturels. Les systèmes d'irrigation « gravitaires », pour transporter l'eau aux consommateurs (exploitants agricoles), utilisent un ensemble de canaux (principaux, secondaires, tertiaires, etc.) ou, dans le cas des systèmes d'irrigation « barrage-rivières », les cours d'eau naturels. Ces systèmes barrages-rivières existent partout dans le monde et notamment en Europe, en Afrique, en Amérique du Nord et du Sud. En France on les trouve principalement dans le Sud-Ouest (voir [Litrico X., 1999]). Pour plus de détails sur les différents types de systèmes d'irrigation, nous renvoyons à l'étude [Cemagref, 1997].

Les systèmes d'irrigation auxquels nous nous intéressons dans ce rapport sont ceux qui utilisent des canaux artificiels de géométrie régulière pour le transport de l'eau. En particulier, il s'agit de canaux gravitaires à surface libre.

1.2 Structure générale d'un système d'irrigation

Un système d'irrigation est habituellement composé d'un réseau gravitaire de canaux à surface libre, comportant des réserves, raccordé à un réseau de canalisation sous pression assurant le transport et la distribution de l'eau du canal aux usagers par l'intermédiaire de stations de pompage [Dulhoste J. F., 2001]. Les réseaux sous pression sont des systèmes constitués de tuyaux fermés connectés entre eux. L'eau s'y déplace sous l'effet de la différence de pression produite par des stations des pompages ou par gravité. Par contre les réseaux gravitaires de canaux à surface libre sont des systèmes composés de canaux ouverts (des canaux principaux, des canaux secondaires) raccordés entre eux grâce à des ouvrages (vannes, déversoirs,...) et qui transportent de l'eau dont la surface est soumise à une pression constante (le plus souvent la pression atmosphérique). L'eau se déplace dans ce cas sous l'effet de la gravité (voir figure 1.1) [Chen M. L., 2001].

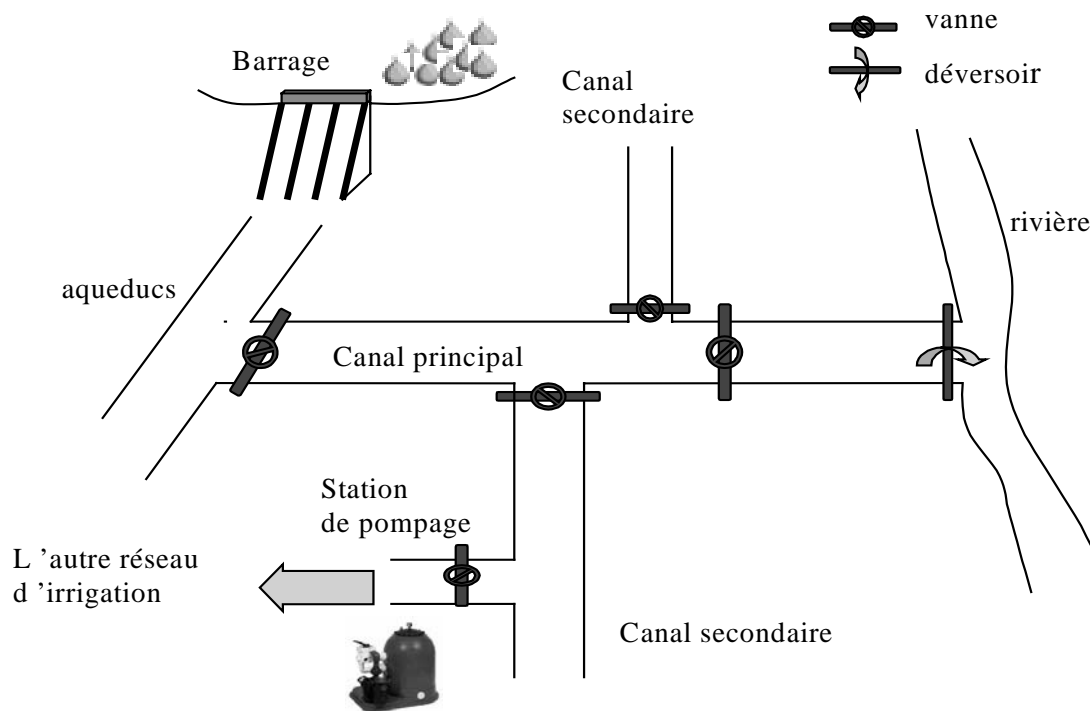


Figure 1.1 : Schéma d'un système d'irrigation.

1.3 Etat de l'art

L'objectif principal de la gestion des systèmes d'irrigation est de satisfaire la demande en eau des différents usagers avec un minimum de pertes et à moindre coût. La commande la plus répandue dans les systèmes d'irrigation actuels est manuelle. Elle est généralement fondée sur des informations locales concernant l'état des canaux et dépend étroitement de

la mobilité des opérateurs humains sur le terrain, de leur compétence ainsi que de leur expérience. L'efficacité de ces systèmes de distribution d'eau qui utilisent la commande manuelle est en général faible : les installations fonctionnent à 60% ou 70% de leurs performances potentielles. L'application de méthodes issues de l'automatique permet d'espérer une amélioration de la gestion de ces systèmes d'irrigation (atteindre les 80% des performances potentielles d'après une étude préliminaire du CEMAGREF [Cemagref, 1997]).

L'application de l'automatique à la gestion d'un système peut s'envisager en trois étapes importantes :

1. La modélisation.
2. L'analyse du modèle obtenu.
3. La synthèse d'une commande.

Dans la littérature, on peut regrouper en deux catégories les travaux qui concernent la commande des systèmes d'irrigation :

- La première catégorie sont les travaux qui utilisent des modèles linéarisés de dimension finie. Il s'agit souvent de modèles linéarisés autour d'un régime d'équilibre et obtenus à partir des équations aux dérivées partielles par des techniques de différences finies [Stekoff T., 1970], ou d'éléments finis [Colley R. L., 1976]. On trouve des travaux de recherche qui se basent sur des modèles linéaires décrits par des fonctions de transfert issues de l'identification du système [Litrico X., 1999], [El Fawal H., 1999]. Les lois de commande les plus utilisées dans cette catégorie sont la commande classique PID [Stertchly M., L. Miles, 1996], la commande linéaire quadratique [Balogun O. S., 1988], [Malaterre P. O., 1994], [Reddy J. M., 1996], [Litrico X., D. Georges, 1999], la commande prédictive [Sawadogo S., 1992, K. Akouz, 1995, K. Akouz, A. Benhammou, 1995].
- La deuxième catégorie regroupe les travaux qui utilisent des modèles de dimension infinie. On y trouve des travaux de recherches basés directement sur le modèle non-linéaire de Saint-Venant [Chen M. L., 2001], [Coron J. M., A. Novel, G. Bastin, 1999], [Antanov G. A., 1998, M. L. Chen, D. Georges, 1999, 2000, 2001]

où les approches utilisées pour la commande sont la commande optimale non-linéaire, la commande par approche de type Lyapunov. Les autres travaux utilisent des modèles linéaires [Xu C. Z., G. Sallet, 1999], [Bounit H., H. Hammouri ,1997] et les auteurs utilisent l'approche semigroupe pour l'analyse et la commande de ces systèmes, ou des techniques variationnelles.

Toutes les méthodes de commande automatique des canaux d'irrigation citées précédemment peuvent aussi être classées en fonction de trois autres critères [Malaterre P. O., D. C. Rogers, 1998, X. Litrico, 1999] :

- les variables considérées : variables régulées, variables mesurées, variables de commande.
- la logique de commande : boucle ouverte, boucle fermée, combinaison des deux.
- la méthode de synthèse : monovariante, multivariante.

Dans notre travail nous nous intéressons à une méthode de synthèse multivariante en boucle fermée et basée sur le prolongement de la méthode LQG classique. Nous précisons ultérieurement le choix des variables régulées, des variables mesurées et des variables de commande qui correspondent au micro-canal expérimental sur lequel les commandes développées ont été testées.

1.4 Les objectifs de la thèse et la méthodologie du travail

L'objectif principal de cette thèse est la commande optimale robuste des canaux d'irrigation à surface libre, et son application sur un canal réel. Nous prenons comme référence le micro-canal construit à Valence à l'ESISAR. Ce travail se situe dans le contexte de l'automatisation des systèmes d'irrigation dont l'enjeu principal est une meilleure utilisation de la ressource en eau, en limitant notamment son gaspillage. En général, dans la synthèse d'une telle commande, il y a deux types d'incertitudes à prendre en compte. L'étape de la modélisation est très souvent synonyme de simplifications, car la réalité est trop complexe pour pouvoir être représentée exactement par un modèle simple. A partir de considérations physiques, on peut aboutir à une représentation du système sous la forme d'un modèle non-linéaire. Comme tous les aspects de la réalité ne sont pas pris en compte dans ce modèle, on parle de modèle non-linéaire approché. Les paramètres utilisés dans ce modèle peuvent être mal définis (on parle alors de paramètres incertains) [Litrico X., 1999].

En outre, on utilise de préférence en automatique des modèles linéaires qui permettent de concevoir des régulateurs avec des méthodes éprouvées. Le modèle non-linéaire est donc approché autour d'un point de fonctionnement par un modèle linéaire tel que sa dynamique soit proche de celle du modèle non-linéaire dans un voisinage du point de linéarisation considéré. Si le système s'éloigne de ce point de fonctionnement, le modèle linéaire présente une dynamique moins proche du modèle non-linéaire. On parle encore dans ce cas d'incertitude de modélisation. Notons qu'un système réel est représenté soit par un modèle non-linéaire représentant bien sa dynamique non-linéaire, mais très difficile à exploiter pour le calcul de la commande robuste, soit par un modèle linéaire obtenu par linéarisation du premier et dans ce cas permettant de manière générique le calcul de la loi de commande [Litrico X., 1999]. Il y a, jusqu'à présent et à notre connaissance, peu de travaux de recherche publiés concernant l'application de commandes robustes aux canaux d'irrigation à surface libre [Gros P. P., 2003]. Par contre il existe beaucoup d'études sur la théorie de la robustesse en général.

Toutes les commandes développées jusqu'à maintenant pour les systèmes de canaux d'irrigation à surface libre sont calculées à partir de modèles de dimension finie (modèles réduits), sans tenir compte explicitement des erreurs de cette réduction. Nous avons donc cherché à développer une commande optimale robuste vis-à-vis des erreurs de réduction et l'avons ensuite appliquée sur le micro-canal. Nous avons par ailleurs comparé la commande obtenue à certaines autres lois de commande connues et vérifié sa robustesse en simulation et expérimentalement. A notre connaissance, l'objectif poursuivi ne pouvait être atteint par aucun des outils proposés jusqu'à présent dans la littérature.

Dans une première partie, nous considérons le modèle linéarisé des équations de Saint-Venant, dont on sait qu'il représente de façon satisfaisante le comportement dynamique d'un système hydraulique à surface libre [Baume J., P. O. Malaterre, 1998]. Une étude a été réalisée à l'aide de simulations numériques a montré que les effets non-linéaires observés sont dus en général aux lois des ouvrages (vannes, déversoirs) et non à la non-linéarité de l'écoulement au sein du bief (équations de Saint-Venant). Ainsi, plus précisément, dans le cas d'un bief de canal délimité par deux vannes, on peut modéliser de manière satisfaisante l'écoulement entre les vannes par un modèle linéarisé de dimension infinie. L'approche utilisée pour la synthèse d'une commande optimale robuste pour ce système, est de synthétiser une loi de commande optimale LQG/H2 (de dimension finie) avec pondérations fréquentielles à partir d'un modèle réduit de dimension finie des

équations de Saint-Venant linéarisées, qui soit robuste vis-à-vis des incertitudes engendrées par cette réduction de modèle. Le modèle réduit est obtenu par une technique de résidus pondérés : la collocation orthogonale. Une application de cette commande optimale robuste au micro-canal de Valence a été réalisée et a nécessité au préalable une identification des paramètres caractérisant la géométrie du canal et intervenant dans les équations de Saint-Venant.

Une seconde partie de ce travail est consacrée à une autre approche qui consiste à faire l'approximation en dimension finie du régulateur optimal LQ de dimension infinie calculé à partir des équations de Saint-Venant. Nous décrivons le moyen d'obtenir une telle approximation sur la base de l'équation de Riccati d'opérateurs associée au problème.

Chapitre 2

Modélisation des systèmes de canaux d'irrigation à surface libre

2.1 Introduction

Avant toute automatisation d'un système physique, il est nécessaire de mieux connaître ce système et de procéder à sa modélisation. Les systèmes de canaux d'irrigation à surface libre présentent des spécificités qui les rendent très complexes du point de vue de la commande automatique :

- La présence d'une dynamique fortement non-linéaire due aux ouvrages hydrauliques comme les vannes et les déversoirs.
- La présence de retards variables en fonction des régimes de fonctionnement, dus aux phénomènes de propagation d'ondes.
- La présence de perturbations climatiques « aléatoires » qui ont une influence significative sur la demande en eau, cette demande en eau étant rendue encore moins « prédictible » par les prélèvements illicites ou par les réactions spécifiques de certains agriculteurs initiateurs de tendances (phénomène semblable à celui des « price-leaders » sur un marché oligopolistique).
- la topologie fortement interconnectée des réseaux qui implique des interdépendances fortes entre les différents bassins et biefs des réseaux primaires, secondaires, tertiaires, etc., voire parfois la présence d'interactions entre les ouvrages (vannes, déversoirs).

La commande automatique d'un système donné nécessite la détermination d'un modèle de ce système, c'est-à-dire, en ce qui nous concerne, d'une représentation mathématique.

Cette détermination peut se faire selon deux types de modèles : un modèle de connaissance ou un modèle de représentation :

- *Modèle de connaissance* : c'est un modèle représentant les phénomènes qui se produisent à l'aide des lois de la physique. L'avantage de ce type de modèles est que les paramètres intervenant dans les équations ont un sens physique, donc présentent un domaine de validité large et contiennent toutes les informations nécessaires sur les régimes dynamiques et statiques. En revanche ils sont très difficiles à établir. Le modèle de connaissance le plus utilisé pour les canaux d'irrigation à surface libre est issu des principes de la mécanique et est formulé par les équations dites de Barré de Saint-Venant ([Saint-Venant, 1871], voir infra). Il existe de très nombreux travaux concernant la résolution des ces équations qui diffèrent soit par la méthode numérique utilisée, soit par les variables choisies. On peut citer ici comme référence générale sur le sujet [Graf W. H., Altinakar, 1996], pour la résolution de ces équations par éléments finis [Keuning D. H., 1976], pour l'application d'un schéma dissipatif de type Galerkin [Katapodes N. D., 1984], pour la résolution par différences finies classiques [Cunge J., 1980], et par différences finies implicites (schéma de Preissmann) [Baume J., P. O. Malaterre, 1997].
- *Modèle de représentation* : c'est un modèle de type « boîte noire » des relations mathématiques entre les entrées et les sorties, mais les paramètres utilisés n'ont pas, en général, de sens physique défini a priori : ils ne sont pas reliés à une loi de la physique. L'avantage de ce genre de modèles est d'être simple à identifier et à utiliser pour la commande. Par contre, leur domaine de validité est en général restreint. On trouve beaucoup de travaux de commande des canaux d'irrigations basés sur des modèles de représentation. On peut citer [El Fawal H., D. Georges, 1997] où est réalisée une modélisation mixte basée sur des techniques d'identification, ainsi que [Litrico X., 1999] où il est proposé un modèle de représentation non-linéaire pour un système barrage-rivière, en utilisant une méthode d'identification par optimisation avec relaxation, ou encore [Chaussinand S., 2003, H. Ouarit, 2004] qui propose une phase d'identification du micro-canal, il s'agit de déterminer les paramètres propres à la maquette.

Dans le cas des canaux d'irrigation les deux types de modélisation sont possibles. Le modèle choisi dans ce travail est celui du modèle de connaissance d'un système à partir des équations de Barré de Saint-Venant.

2.2 Modèle de Barré de Saint-Venant

Il existe deux sortes de canaux à surface libre [Dulhoste J. F., 2001] : les canaux naturels à géométrie et caractéristiques hydrauliques variables (fleuves, rivières, ruisseaux ...) et les canaux artificiels, construits par l'homme (irrigation, drainage, navigation ...). Ils peuvent être découverts ou couverts. Dans ce cas, à la différence des réseaux sous pression, la section du canal n'est pas entièrement sous eau.

La géométrie d'un canal est définie par divers éléments observés en coupe longitudinale et transversale du canal.

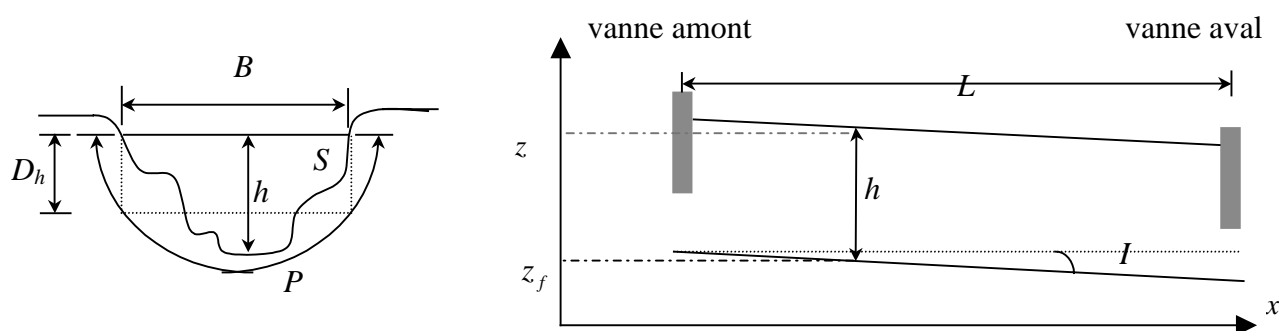


Figure 2.1: Section transversale (à droite) et longitudinale (à gauche) d'un canal à surface libre.

Sur ces deux coupes, nous pouvons voir apparaître l'ensemble des paramètres qui définissent la géométrie du canal : le tirant d'eau (h), la largeur du canal (B), la section mouillée (S), le périmètre mouillé (P), le rayon hydraulique ($R_h = S/P$), la profondeur hydraulique ($D_h = S/B$), la longueur du bief (L) et la pente du fond (I).

Le dernier élément qui caractérise la géométrie d'un canal est la rugosité de ses parois. Elle est définie pour chaque type de matériau et est exprimée par des coefficients empiriques ad hoc qui sont utilisés dans l'expression des frottements (voir infra, la formule de Manning, Kutter et Strickler).

Dans le cas du modèle de Saint-Venant, l'écoulement est supposé satisfaire les hypothèses « simplificatrices » (par rapport à celles qui définissent les écoulements de Navier-Stokes, par exemple) qui caractérisent les écoulements dits "*filaires*" ou encore "*graduellement variés*", à savoir :

- l'écoulement est unidimensionnel. La hauteur et le débit ne dépendent que de la coordonnée longitudinale x et du temps t ,

- la pente I du canal est suffisamment faible pour que l'on puisse supposer :
 $z(x,t) = z_f(x,t) + h(x,t)$ (cf. figure 2.1),
- la distribution des pressions sur une section transversale est considérée comme hydrostatique. Autrement dit, les accélérations verticales et transversales dues à l'écoulement sont négligées puisque celui-ci est supposé unidimensionnel,
- le fluide (eau) est supposé incompressible et homogène,
- les forces de frottement dues à la viscosité et aux turbulences (fond, berge) sont représentées empiriquement par la formule dite de Manning-Strickler :

$$J(Q,h) = \frac{Q|Q|}{K^2 S^2 \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{4}{3}}}, \quad (2.1)$$

où J désigne le coefficient de frottement, S la section mouillée (qui dépend du tirant d'eau h), Q le débit à travers la section S , P le périmètre mouillé (lui aussi dépendant de h) et K le coefficient de Strickler qui traduit la nature et la rugosité des berges et du fond.

Moyennant ces hypothèses, l'écoulement peut être caractérisé par les équations de Saint-Venant ci-dessous. Elles peuvent être exprimées en hauteurs ou sections mouillées et débits ou vitesses. Nous les exprimons ici en terme de section et de débit. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, non-linéaires, du premier ordre. Elles sont obtenues en exprimant sur un élément de longueur du canal deux lois de la mécanique des fluides : la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement. Le modèle obtenu est donc un modèle de dimension infinie.

Les équations sont [Chow V., 1988] :

$$\begin{cases} \text{Continuité :} & \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l \\ \text{Dynamique :} & \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/S)}{\partial x} + gS \frac{\partial z}{\partial x} + gSJ(Q,h) = kq_l \frac{Q}{S}, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec :

t la variable de temps [s],

x	la variable d'espace [m], orientée dans le sens de l'écoulement,
S	la section mouillée [m^2],
Q	le débit [m^3 / s],
q_l	le débit latéral (évaporation, infiltration) par unité de longueur [m^3 / s], $q_l > 0$ pour un apport et $q_l < 0$ pour une perte,
g	l'accélération de la pesanteur [m / s^2],
z	la cote absolue de l'eau [m],
J	le coefficient de frottement,
k	est un coefficient booléen qui vaut 0 si $q_l > 0$ (considérant que les apports d'eau sont perpendiculaires au sens de l'écoulement et n'apportent pas de quantité de mouvement) et 1 si $q_l < 0$ (considérant que les pertes sont parallèles au sens de l'écoulement et diminuent la quantité de mouvement).

La résolution analytique de ces équations n'est pas envisageable sauf pour des cas particuliers très simples (pente nulle, absence de frottements), cependant leurs solutions peuvent être approchées par des méthodes de résolution numérique classiques telles les méthodes de différences finies explicites et implicites [Malaterre P. O., A. Garcia, Mojarro, A. Preissmann], ou les méthodes de type éléments finis [Colley R. L., S. A. Moin, 1976]. Parmi ces méthodes de résolution, la méthode de différences finies implicites de Preissmann est la plus utilisée en raison de sa facilité de mise en œuvre et surtout de sa stabilité numérique inconditionnelle. Dans notre travail, nous utilisons également une autre méthode moins fréquemment appliquée aux équations de Saint-Venant : la méthode de collocation [Quarteron A., A.Valli, 1991]. Il s'agit d'une méthode pseudo-spectrale, de la famille des méthodes de résidus pondérés, qui fournit la solution approchée sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires, de taille très réduite (à précision comparable, et par rapport à la discrétisation par différences finies) et dont les inconnues sont directement les valeurs des solutions (profils de débits et de tirants d'eau) à certains points choisis.

2.3 Les lois d'ouvrages et conditions aux limites

Les équations de Saint-Venant décrivent correctement l'écoulement le long de canaux à géométrie régulière, sans ouvrage (vanne, déversoir, stations de pompage), ni singularité (élargissement brusque, prise d'eau). A chaque occurrence d'ouvrages ou de singularités, il faut introduire des équations d'interconnexions qui définissent les conditions aux limites de l'écoulement filaire qui les sépare. Lorsqu'on s'intéresse à la dynamique de

l'écoulement au sein d'un bief, ces équations d'interconnexions ou « conditions aux limites » sont classées en conditions aux limites amont, aval ou internes.

Dans notre cas, les conditions aux limites amont et aval seront introduites par le biais d'équations de vannes ou de déversoirs limitant le bief et seront variables (incluant notamment les variables de commande telles, par exemple, le débit amont et (ou) la cote aval). Les conditions aux limites internes sont souvent introduites lors de la présence d'une prise d'eau le long du bief (voir infra).

2.3.1 Condition aux limites

Afin de compléter les équations de Saint-Venant, nous avons besoin de conditions aux limites et de conditions initiales. Les conditions aux limites expriment les profils temporaires des variables aux valeurs de bord des coordonnées spatiales, et les conditions initiales expriment leurs profils spatiaux à l'instant initial. Dans les deux cas, les équations de Saint-Venant étant d'ordre 1 en temps et en espace, il convient de choisir des conditions aux limites d'ordre 0, c'est-à-dire des conditions de Dirichlet (une valeur des solutions sur le bord est imposée).

Il existe plusieurs possibilités « abstraites » de conditions aux limites, le choix des conditions qui s'appliquent dépendant notamment du régime de l'écoulement. Pour un canal à pente faible (régime fluvial) on utilise une condition limite à l'aval et une condition limite à l'amont, et donc on trouve les quatre possibilités suivantes :

$$\begin{array}{l} Q(x=0,t) = Q_0(t) \\ Q(x=L,t) = Q_L(t) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} Q(x=0,t) = Q_0(t) \\ h(x=L,t) = h_L(t) \end{array} \quad (2.3)$$

$$\begin{array}{l} h(x=0,t) = h_0(t) \\ Q(x=L,t) = Q_L(t) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} h(x=0,t) = h_0(t) \\ h(x=L,t) = h_L(t). \end{array} \quad (2.4)$$

Pour un canal à forte pente (régime torrentiel) on utilise deux conditions aux limites à l'amont, car la condition aval ne peut pas se transmettre dans le canal de l'aval vers l'amont. Dans ce cas la seule possibilité est :

$$\begin{array}{l} Q(x=0,t) = Q_0(t) \\ h(x=0,t) = h_0(t). \end{array} \quad (2.5)$$

Notons en régime d'équilibre uniforme qu'il est impossible d'imposer deux consignes de débit (ou bien de tirant d'eau) constantes et distinctes à l'amont et à l'aval d'un même bief. Pour cette raison, nous avons choisi dans notre étude les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(0,t)}{\partial t} = u_1(t) \\ \frac{\partial h(L,t)}{\partial t} = u_2(t). \end{cases}$$

Les formes dérivées ont été choisies (comme ce sera le cas dans la suite) afin que les perturbations constantes soient rejetées. De plus, ces formes dérivées permettent de résoudre élégamment le problème d'instabilité numérique qui apparaît dans le schéma de Preismann si les valeurs aux limites sont données de manière explicite. Néanmoins, si l'on souhaite imposer directement les valeurs des hauteurs et/ou débits aux limites, cela ne peut se faire que de manière approchée et en choisissant une approximation implicite de ces valeurs aux bords.

En ce qui concerne les conditions initiales, la seule solution possible est de fixer les profils initiaux de débit et de tirant d'eau, à savoir :

$$\begin{aligned} Q(x, t = 0) &= Q_0(x) \\ h(x, t = 0) &= h_0(x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Les canaux d'irrigation sont souvent sujet à des prises d'eau latérales (Figure 2.2) aussi appelées conditions limites internes, ce qui permet la distribution d'eau aux usagers.

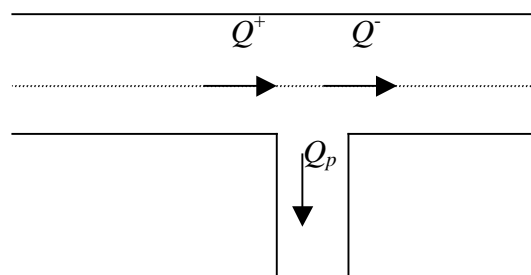


Figure 2.2 : Prise d'eau latérale.

Pour modéliser ces prises il faut ajouter une condition limite interne, et séparer ainsi le système d'équations en deux parties. Dans ce cas au point où est réalisée la prise d'eau, on ajoute les équations suivantes pour connecter les deux parties :

$$\begin{aligned} Q^- + Q_p &= Q^+ \\ h^- &= h^+. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.3.2 Lois d'ouvrages

Les ouvrages sont en général les éléments qui permettent l'interconnexions des différentes parties d'un système d'irrigation, comme par exemple la connexion de deux biefs à surface libre, ou le raccordement d'un réseau sous pression (en fait, une station de pompage) à un bief du canal primaire, etc. Ces ouvrages présentent certaines caractéristiques qui peuvent être traduites par des équations d'ouvrage. Ces équations d'ouvrage lient entre elles les valeurs du débit au sein de l'ouvrage et les valeurs des différences de pression et/ou de tirant d'eau de part et d'autres de l'ouvrage. Ces relations sont elles même paramétrées de manière à tenir compte de l'état et de la géométrie de l'ouvrage (ouverture d'une vanne, coefficient de rendement, etc.) ainsi que de la dynamique propre des ouvrages (par exemple celle d'un moteur de vanne).

Dans cette partie, nous présentons quelques ouvrages simples mais fondamentaux susceptibles d'être étudiés par la suite.

- **Modèle des vannes (noyées)**

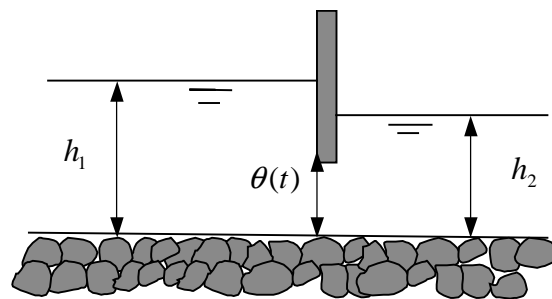


Figure 2.3 : Schéma d'une vanne en régime noyé.

Nous utilisons souvent la vanne pour réguler le débit du canal. Le débit à travers une vanne peut être calculé de la manière suivante [Cauvin A., H. Guerree, 1978] :

$$Q = \mu B_v \theta(t) \sqrt{2g(h_1 - h_2)}, \quad (2.8)$$

où μ est le coefficient de débit de la vanne (généralement, $0.6 \leq \mu \leq 0.7$), B_v est la largeur de la vanne, h_1 est le tirant d'eau amont, h_2 est le tirant d'eau aval, $\theta(t)$ est l'ouverture de la vanne en fonction du temps (donnée par la dynamique du mécanisme d'ouverture si elle est prise en compte, voir infra), g est l'accélération de la pesanteur.

- **Modèle des déversoirs**

Le schéma d'un déversoir est représenté à la figure 2.4.

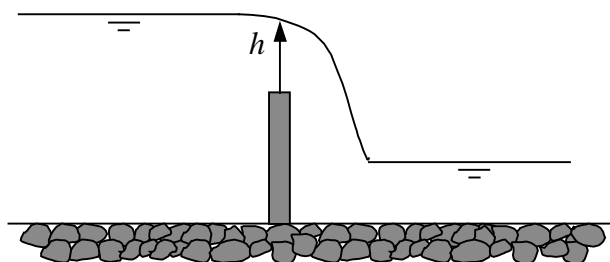


Figure 2.4 : Schéma d'un déversoir.

Le débit au niveau d'un déversoir dénoyé peut être calculé de la manière suivante [Cauvin A., H. Guerree, 1978] :

$$Q = \mu B_d h \sqrt{2gh}, \quad (2.9)$$

où μ est le coefficient de débit du déversoir, B_d est la largeur du déversoir, h est le tirant d'eau au-dessus du déversoir, et g est l'accélération de la pesanteur. Cette relation, relativement précise, permet d'estimer le débit stationnaire d'un bief. Les déversoirs sont le plus souvent utilisés pour garantir un tirant d'eau nécessaire au fonctionnement des installations (pompes, prises d'eau notamment).

- **Modèle des stations de pompes**

Le schéma d'une station de pompe est représenté à la figure 2.5 :

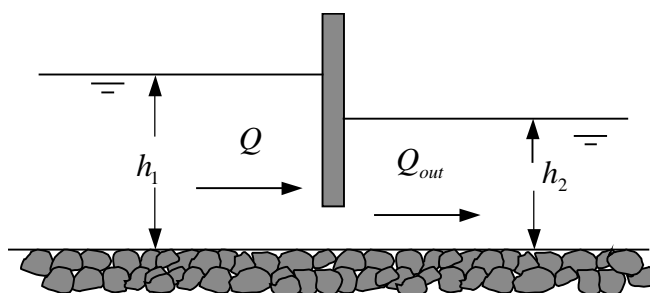


Figure 2.5 : Schéma d'une station de pompe.

Le comportement d'une station de pompe est représenté selon l'équation d'énergie suivante (vanne avec ouverture fixe, voir [Yi J., 1996]) :

$$h_1 + \mu_{pa} \frac{(Q / B h_1)^2}{2g} = h_2 + \mu_{pv} \frac{(Q_{out} / B_p h_2)^2}{2g}, \quad (2.10)$$

où Q_{out} est le débit de pompage demandé, B est la largeur du canal, B_p est la largeur à l'entrée de la station, μ_{pa} et μ_{pv} sont les coefficients de débit à l'amont et à l'aval de la vanne (voir figure 2.5).

- **Contraintes sur le fonctionnement des vannes**

Les vannes et en particulier leur ouverture servent le plus souvent de variables de commande. Il y a donc lieu de prendre en compte les contraintes de fonctionnement de ces vannes [Dulhoste J. F., 2001]. Trois types de contraintes seront ainsi considérées ici :

- les valeurs maximale et minimale d'ouverture, qui dépendent des dimensions de l'ouvrage : la vanne s'ouvrira au plus selon sa taille maximale, et au moins d'une valeur nulle,

$$0 \leq \theta \leq \theta_{\max}, \quad (2.11)$$

- la vitesse d'ouverture de la vanne qui dépend des performances du moteur qui l'actionne. Il existe donc en général une vitesse maximale et

$$-V_{\max} \leq \frac{d\theta}{dt} \leq V_{\max}, \quad (2.12)$$

avec V_{\max} vitesse maximale,

- la dynamique du moteur qui actionne les vannes, dont l'effet sur l'ouverture de la vanne peut souvent être approché par un filtre du second ordre :

$$\tau \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = k_v i_v, \quad (2.13)$$

avec τ : constante de temps de la réponse du moteur, k_v le gain statique et i_v le courant électrique. Sous forme d'état, on obtient donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_v = A_v x_v + B_v u_v \\ y_v = C_v x_v, \end{cases} \quad (2.14)$$

où
$$x_v = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{pmatrix}; \quad u_v = i_v, \quad (2.15)$$

$$A_v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_v = \begin{bmatrix} \frac{k}{\tau} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_v = [0 \quad 1]. \quad (2.16)$$

Notons bien que la dynamique du moteur est en général bien plus compliquée que cela ; elle est de plus non-linéaire. Mais, cette dynamique étant beaucoup plus rapide que celle de la partie hydraulique du canal, ce modèle se révélera largement suffisant pour notre étude.

2.4 Calcul des profils d'équilibre et modèle linéarisé de Saint - Venant

Dans cette thèse nous avons choisi comme procédé de référence le micro-canal construit à l'ESISAR-INPG à Valence. Il s'agit d'un canal à section rectangulaire inclinable d'une faible pente et délimité par deux vannes (une à l'amont et l'autre à l'aval) commandées par des moteurs électriques (voir le chapitre consacré aux essais expérimentaux pour plus de détails). Le système est instrumenté pour permettre la commande des vannes et l'acquisition des tirants d'eau en amont et en aval de chaque vanne, ainsi qu'en un point intermédiaire « libre ». L'état du système (profils de débit et de tirant d'eau) devra être estimé à partir de ces mesures. Si le point de mesure mobile intermédiaire n'est pas utilisé pour cette estimation, il peut éventuellement être utilisé à la validation des résultats obtenus.

Le modèle de Saint-Venant (2.2) est valable dans le cas d'un canal à section quelconque et d'une pente variable. Dans notre cas, la section est rectangulaire $S = Bh$; le périmètre mouillé vaut alors $P = B + 2h$. La pente I est constante, et vérifie :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - I.$$

De plus, nous considérons les infiltrations comme négligeables. Nous obtenons ainsi les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Continuité :} \\ \text{Dynamique :} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{h} \right) + gBh \frac{\partial h}{\partial x} + gBh(J(Q, h) - I) = 0. \end{array} \quad (2.17)$$

Les conditions d'équilibre sont obtenues en posant dans les équations de Saint-Venant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = 0. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Les points d'équilibre en hauteur et en débit sont alors solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_e(x)}{\partial x} = 0 \\ -\frac{Q_e(x)^2}{Bh_e(x)^2} \frac{\partial h_e(x)}{\partial x} + gBh_e(x) \left(\frac{\partial h_e(x)}{\partial x} - I + J(Q_e(x), h_e(x)) \right) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

A l'équilibre, le débit est donc constant quel que soit la valeur x (profil uniforme du débit à l'équilibre $Q_e(x) = Q_e, \forall x$) et la hauteur est obtenue par la résolution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dh_e(x)}{dx} \left(gBh_e(x) - \frac{Q_e^2}{Bh_e(x)^2} \right) + gBh_e(x) (J(Q_e, h_e(x)) - I) = 0. \quad (2.20)$$

Cette dernière est intégrée à partir de la consigne de hauteur fixée à l'une des deux extrémités. On obtient ainsi trois types de profils d'équilibre possibles caractérisés par soit une réserve d'eau, soit un assèchement à l'aval, soit un profil de hauteur uniforme.

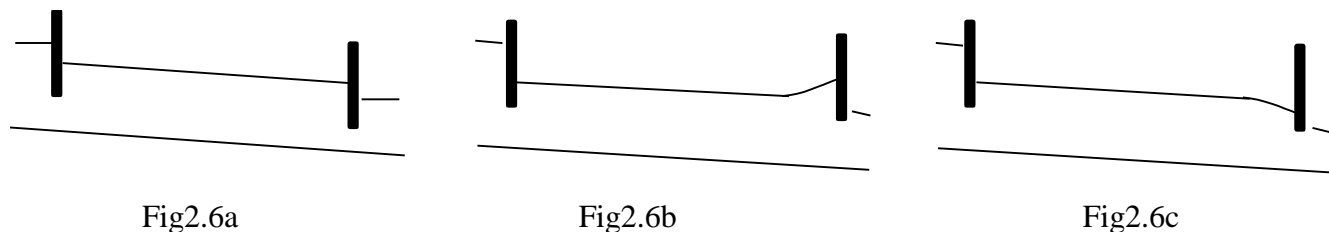


Figure 2.6 : Différents profils d'équilibre d'un canal.

Le profil de hauteur d'équilibre uniforme (voir Fig2.6a) correspond à la condition $\frac{dh_e(x)}{dx} = 0$. Reportée dans l'équation d'équilibre (2.20), cette condition devient :

$$J_e(Q_e, h_e) = I, \quad (2.21)$$

qui montre que le profil de hauteur uniforme n'est un équilibre du système que si les frottements compensent exactement l'effet de la pente. Ceci se traduit par une condition (relation (2.21)) entre le débit d'équilibre et le tirant d'eau d'équilibre uniforme qui ne peuvent donc être choisis arbitrairement. Si le terme de frottement n'est pas égal au terme de pente, nous nous trouvons dans le cas d'un régime non uniforme et nous observons les profils des figures 2.6b ou 2.6c.

2.5 Modèle linéarisé de Saint-Venant

Nous réécrivons les équations de Saint-Venant (2.17) sous la forme d'état suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h(x,t) \\ Q(x,t) \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} Q/B \\ Q^2/Bh + gBh^2/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ gBh(I - J(Q,h)) \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

ou, pour alléger les notations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ Q \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} f(h,Q) + g(h,Q), \quad (2.23)$$

avec

$$f(Q,h) = -\left(\frac{Q}{B}, \frac{Q^2}{Bh} + \frac{1}{2} gBh^2 \right)^t \text{ et } g(Q,h) = (0, gBh(I - J(Q,h)))^t.$$

En notant l'état $\psi = (h, Q)^t$ et on développant ces expressions autour d'un profil d'équilibre uniforme $\psi_e = (h_e, Q_e)^t$ (calculé à partir de la condition (2.21) et, par exemple, d'une consigne de débit Q_e), on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(\psi_e) + \frac{\partial f(\psi_e)}{\partial \psi} (\psi - \psi_e) + O((\psi - \psi_e)^2) \right] + \left[g(\psi_e) + \frac{\partial g(\psi_e)}{\partial \psi} (\psi - \psi_e) + O((\psi - \psi_e)^2) \right].$$

Comme le profil d'équilibre vérifie la relation :

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial t} = 0 = \frac{\partial f(\psi_e)}{\partial x} + g(\psi_e),$$

le modèle linéarisé s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{\partial f(\psi_e)}{\partial \psi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial g(\psi_e)}{\partial \psi} \tilde{\psi}, \quad (2.24)$$

où $\tilde{\psi} = \psi - \psi_e = (h - h_e, Q - Q_e)^t$. Le calcul des matrices jacobiennes apparaissant dans cette dernière expression à partir des expressions des fonctions f et g ci-dessus conduit finalement au modèle linéarisé :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = a_1 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} - a_2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} + a_3 \tilde{h} - a_4 \tilde{Q}, \end{cases} \quad (2.27)$$

avec $\tilde{h} = h - h_e$ et $\tilde{Q} = Q - Q_e$ et les coefficients

$$a_1 = \left(\frac{Q_e^2}{Bh_e^2} - gBh_e \right) ; \quad a_2 = \frac{2Q_e}{h_e} ; \quad a_3 = gB \left(I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e} \right) ; \quad a_4 = \frac{2gBh_e J_e}{Q_e}, \quad (2.25)$$

calculés à partir de la formule de Manning-Strickler (voir supra) :

$$J_e = J(Q_e, h_e) = \frac{Q_e}{K^2 B^2 h_e^2} \left(\frac{1}{R_e} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad R_e = \frac{Bh_e}{B + 2h_e}. \quad (2.26)$$

Afin de simplifier davantage les écritures dans la suite, et de n'avoir à manipuler que des grandeurs sans dimension, nous posons les changements de variables suivants :

$$\hat{h} = \frac{h - h_e}{h_e}, \quad \hat{Q} = \frac{Q - Q_e}{Q_e}, \quad t \rightarrow \frac{Q_e}{BLh_e} t, \quad x \rightarrow \frac{x}{L}. \quad (2.28)$$

On a donc pour les variables indépendantes réduites $t \geq 0$ et $x \in [0, 1]$. Avec ces nouvelles variables, le modèle linéarisé (2.27) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{Q}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = a'_1 \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} - a'_2 \frac{\partial \hat{Q}}{\partial x} + a'_3 \hat{h} - a'_4 \hat{Q}, \end{cases} \quad (2.29)$$

où

$$a'_1 = \left(1 - g \frac{B^2 h_e^3}{Q_e^2} \right) ; \quad a'_2 = 2 ; \quad a'_3 = g \frac{B^2 h_e^2 L}{Q_e^2} \left(I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e} \right) ; \quad a'_4 = \frac{2gB^2 h_e^2 J_e L}{Q_e^2}. \quad (2.30)$$

Afin d'alléger le texte, nous substituons dans la suite de cette thèse, les notations des variables réduites \hat{h} , \hat{Q} , a'_1 , a'_2 , a'_3 , a'_4 par les notations h , Q , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 . Notons que nous avons aussi calculé le modèle linéarisé de Saint-Venant pour un régime d'équilibre non uniforme (voir annexe 1).

2.6 Différentes méthodes de résolutions des équations de Saint-Venant

Le modèle de Saint-Venant décrit ci-dessus quoique linéaire est un modèle de dimension infinie (l'état du système à un instant donné est un couple de fonctions définies sur le domaine spatial). Pour des conditions aux limites et des valeurs des paramètres générales, il n'a pas de solution analytique connue. Ne fût-ce qu'à des fins de simulation, il est donc nécessaire de l'approcher, c'est-à-dire en dernier ressort de développer un modèle de dimension finie (discret dans le cas d'une discrétisation totale ou continu dans le cas d'une discrétisation spatiale uniquement) approchant au mieux le modèle réel. Il existe des méthodes variées pour parvenir à cette fin. Les plus utilisées dans le cas des équations de Saint-Venant qui nous occupent sont les méthodes d'éléments finis [Colley R. L., S. A Moin, 1976], les méthodes de différences finies [Malaterre P. O., A. Garcia, Mojarro, A. Preissmann] (particulièrement le schéma de Preissmann (voir infra)) et enfin la méthode de collocation orthogonale [Dulhoste J. F., 2001].

Les méthodes d'approximation basées sur les schémas de différences finies ou d'éléments finis conduisent en général à un vecteur d'état approché de très grande dimension, au contraire des méthodes dites spectrales ou pseudo-spectrales (développement dans une base de fonctions définies sur l'ensemble du domaine et judicieusement choisies).

Cependant, les variables d'état dans les méthodes pseudo-spectrales sont en général difficiles à interpréter (sans liens directs avec les grandeurs physiques recherchées, si l'on excepte bien sûr le cas du développement dans une base de fonctions propres). La méthode de collocation orthogonale combine les deux avantages : elle aboutit à une approximation sous la forme d'un système d'état en temps continu de dimension très modeste et dont les variables d'état sont précisément les valeurs des fonctions inconnues en certains points de discrétisation (appelé pour cette coïncidence points de collocation). Un des intérêts du présent travail est justement d'appliquer cette méthode aux systèmes hydrauliques, sachant qu'elle est utilisée avec succès pour traiter certains problèmes d'automatique en génie des procédés (réacteurs, colonnes, cristallisation, voir [Villadsen J., 1976], [Dochain D., 1992] et [Lefèvre L., 2000]). En ce sens, il s'agit d'une poursuite des travaux déjà entrepris dans [Dulhoste J. F., 2001] et qui se sont montrés encourageants.

2.6.1 Méthode de Preissmann

Le schéma de Preissmann est un schéma aux différences finies semi-implicite. C'est le schéma le plus utilisé pour la discrétisation des équations de Saint-Venant en hydraulique à surface libre. Ce schéma a la particularité de produire un algorithme numériquement stable pour n'importe quelle valeur du pas de temps (stabilité inconditionnelle en temps). Bien entendu, le prix à payer est qu'il nécessite à chaque pas de temps, dans le cas général, la résolution d'un système algébrique non-linéaire. Ce schéma est donc relativement onéreux en terme de temps de calcul.

Le plan (x, t) est discrétisé en un maillage rectangulaire avec un pas spatial Δx et un pas de temps Δt :

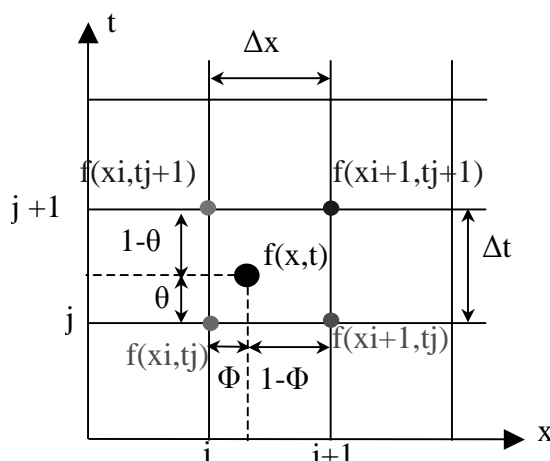


Figure 2.7 : Schéma de discrétisation de Preissmann.

Suivant le schéma de Preissmann, la valeur d'une fonction ou de ses dérivées en un point (x, t) est calculée comme une moyenne pondérée de sa valeur aux quatre points voisins du maillage (voir figure 2.7). Ainsi, avec la convention de notation $f(x_i, t_j) := f_i^j$, ce schéma est défini par :

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= \theta(\Phi f_{i+1}^{j+1} + (1-\Phi)f_i^{j+1}) + (1-\theta)(\Phi f_{i+1}^j + (1-\Phi)f_i^j) \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{\Delta x} [\theta(f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}) + (1-\theta)(f_{i+1}^j - f_i^j)] \\
 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) &= \frac{1}{\Delta t} [\Phi(f_{i+1}^{j+1} - f_{i+1}^j) + (1-\Phi)(f_i^{j+1} - f_i^j)].
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Les coefficients de pondération temporel (θ) et spatial (Φ) sont compris entre 0 et 1.

- Pour $\theta = 0$, le schéma est explicite.

- Pour $\theta = 0.5$, le schéma est dit schéma classique de Preissmann (centré à quatre points).

Le schéma est implicite en temps car les variables inconnues à l'instant $t + \Delta t$ ne peuvent être calculées directement en fonction des variables connues à l'instant t . La stabilité numérique de ce schéma est assurée pour tout pas de temps Δt à condition que $0.5 \leq \theta \leq 1$; on dit alors que le schéma est inconditionnellement stable. La valeur de $\theta = 0.66$ est recommandée par [Liggett J., J. Cunge, 1975] comme conduisant à une meilleure précision. Une valeur de $\Phi = 0.5$ est souvent utilisée pour le coefficient spatial.

En appliquant la discrétisation (2.31) du schéma de Preissmann aux équations de Saint-Venant non-linéaire (2.17), elles deviennent :

Equation de continuité :

$$B \left[\frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i+1}^j}{2\Delta t} + \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{2\Delta t} \right] + \left[\theta \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{Q_{i+1}^j - Q_i^j}{\Delta x} \right] = 0. \quad (2.32)$$

Equation dynamique :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j}{2\Delta t} + \frac{Q_i^{j+1} - Q_i^j}{2\Delta t} \right] + \\ & \frac{1}{B} \left[\frac{\theta}{\Delta x} \left(\left(\frac{Q^2}{h} \right)_{i+1}^{j+1} - \left(\frac{Q^2}{h} \right)_i^{j+1} \right) + \frac{1-\theta}{\Delta x} \left(\left(\frac{Q^2}{h} \right)_{i+1}^j - \left(\frac{Q^2}{h} \right)_i^j \right) \right] + \dots \quad (2.33) \\ & \frac{1}{2} gB \left[\theta (h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}) + (1-\theta)(h_{i+1}^j - h_i^j) \right] \left(\left[\theta \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{\Delta x} \right] - I \right) + \\ & \frac{1}{2} gB \left[\theta ((hJ)_{i+1}^{j+1} - (hJ)_i^{j+1}) + (1-\theta)((hJ)_{i+1}^j - (hJ)_i^j) \right] = 0. \end{aligned}$$

Après avoir transformé les équations de Saint-Venant en un système d'équations discrètes implicites non-linéaires, il est nécessaire de le résoudre. Pour cela, une méthode classique et rapide (de type Newton, par exemple) suffit en principe, d'autant que la solution au temps j constitue en général une bonne estimation initiale pour la recherche de la solution au temps $j+1$.

Remarque 2.1 :

Etant donnée la forme du terme de frottement (2.1), et afin d'éviter des problèmes de trop grande sensibilité numérique, il est préférable de ne pas discrétiser le terme $J(h, Q)$ en discrétisant chaque fonction h et Q apparaissant dans son expression mais plutôt l'ensemble $hJ(h, Q)$ comme une seule fonction, ce qui n'est pas équivalent si on utilise le schéma de discrétisation (2.31).

En appliquant le même schéma de Preissmann aux équations de Saint-Venant linéarisées, on obtient :

Equation de continuité linéarisée :

$$A_1 h_i^{j+1} + A_2 Q_i^{j+1} + A_3 h_{i+1}^{j+1} + A_4 Q_{i+1}^{j+1} = B_1 h_i^j + B_2 Q_i^j + B_3 h_{i+1}^j + B_4 Q_{i+1}^j. \quad (2.34)$$

Equation dynamique linéarisée :

$$A'_1 h_i^{j+1} + A'_2 Q_i^{j+1} + A'_3 h_{i+1}^{j+1} + A'_4 Q_{i+1}^{j+1} = B'_1 h_i^j + B'_2 Q_i^j + B'_3 h_{i+1}^j + B'_4 Q_{i+1}^j. \quad (2.35)$$

où, comme précédemment, h_i^j et Q_i^j désignent respectivement le tirant d'eau et le débit au temps t_j et au point x_i . Les calculs détaillés des valeurs A_k , A'_k , B_k , B'_k ($k=1$ à 4) sont donnés en annexe 1. Le système discrétisé se met facilement sous la forme matricielle usuelle implicite en temps :

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_i^{j+1} \\ Q_i^{j+1} \\ h_{i+1}^{j+1} \\ Q_{i+1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 & B'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_i^j \\ Q_i^j \\ h_{i+1}^j \\ Q_{i+1}^j \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

2.6.2 Méthode de collocation orthogonale

La méthode de collocation orthogonale appartient au groupe des méthodes de résidus pondérés qui sont des méthodes de discrétisation de problèmes différentiels très générales mais cependant peu utilisées pour l'intégration numérique des systèmes hydrauliques à surface libre. C'est une méthode puissante permettant d'établir un modèle approché d'équations différentielles ordinaires à partir d'un modèle initial d'équations aux dérivées partielles. En ce sens, on peut aussi la considérer comme une méthode de réduction de modèle de systèmes de dimension infinie. Villadsen et Michelsen [Villadsen J., M. L. Michelsen, 1978] ont montré que la collocation donnait à moindre coût (nombre

d'opérations) des résultats similaires (en précision, à ordre de discrétisation comparable) à ceux issus de la méthode de Galerkin (souvent considérée comme la méthode de référence) si certaines précautions sont prises pour son implémentation. Les atouts de la méthode de collocation sont, entre autres :

- Sa facilité d'implémentation.
- L'ordre très réduit du système différentiel approché obtenu (en comparaison à l'ordre obtenu à précision comparable pour la méthode de Preissmann, par exemple).
- La nature des variables d'état reste inchangée après la procédure de réduction (dans notre cas, les variables d'état restent la hauteur et le débit).

L'idée de base de la méthode de collocation orthogonale consiste à rechercher la solution approchée dans un espace d'approximation linéaire de telle manière que cette solution approchée satisfasse le problème différentiel initial en un certain nombre de points choisis du domaine spatial appelés pour cette raison points de collocation. En général, on utilise comme espace d'approximation à chaque instant l'espace linéaire engendré par un ensemble fini de fonctions de forme (de la variable d'espace) simples et linéairement indépendantes (le plus souvent, des polynômes). Les fonctions inconnues recherchées sont alors écrites sous la forme de combinaisons linéaires finies des fonctions de formes et les coefficients de ces combinaisons linéaires, variables dans le temps, sont les inconnues de notre problème différentiel approché (voir infra). Dans notre cas, les fonctions inconnues sont la hauteur $h(x,t)$ et le débit $Q(x,t)$, dépendant à la fois du temps et de l'espace. Elles sont approchées chacune par une combinaison linéaire finie de fonctions de forme orthogonales notées $L_i(x)$. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont justement les valeurs de h et de Q en différents points de collocation x_i , définis le long de la longueur du canal (voir infra).

Dans la mise en œuvre de la méthode de collocation de très nombreux choix doivent être faits, qui ont des conséquences cruciales (il s'agit en fait d'une faiblesse de cette méthode). Ces choix concernent : les fonctions de forme utilisées, la localisation des points de collocation et l'introduction des conditions aux limites.

- **Construction des fonctions de forme : polynômes de Lagrange**

Les fonctions de forme sont choisies en toute généralité pour être linéairement indépendantes et engendrer un espace linéaire « intéressant », mais dans la mise en œuvre ultérieure de ces fonctions de forme, il peut être intéressant d'utiliser des fonctions qui rendent plus simple le calcul de la solution approchée et permettent en outre une approximation précise de la solution du problème différentiel. Les fonctions de forme choisies dans la suite sont les fonctions d'interpolation de Lagrange. Leur intérêt est double : d'une part une expression plus simple du problème différentiel approché (gain en terme de nombre d'opérations), d'autre part un calcul direct des hauteurs $h_i(t)$ et des débits $Q_i(t)$ aux différentes points de collocation (ce sont les coefficients de l'approximation des profils de hauteurs et de débit dans la base des polynômes de Lagrange, qui est aussi base d'interpolation aux points de collocation).

Soient $\{x_i\}_{i=1}^N$, N points de collocation, il est possible de construire N polynômes, notés $\{L_j(x)\}_{j=1}^N$, de degré $N-1$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{ou } L_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad (2.37)$$

dont l'expression générale est donnée par :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}, \quad (2.38)$$

ou, sous une forme plus développée :

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{N-1})(x - x_N)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_{N-1})(x_1 - x_N)} \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_{N-1})(x - x_N)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_{N-1})(x_2 - x_N)} \\ &\vdots \\ L_N(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{N-2})(x - x_{N-1})}{(x_N - x_1)(x_N - x_2) \cdots (x_N - x_{N-2})(x_N - x_{N-1})}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

- **Choix des points de collocation**

Les points de collocation correspondent aux endroits où on impose que la solution approchée satisfasse le problème différentiel de départ (ce qui ne veut pas dire qu'elle est

exacte en ces points !). Il faut donc les positionner aux endroits où l'on souhaite avoir le plus de précision.

En général, les points de collocation sont choisis comme racines de polynômes orthogonaux. Ceci présente plusieurs avantages, le plus notable étant de réduire les phénomènes d'oscillations qui apparaissent lors de l'interpolation par des polynômes d'ordre élevé. Ce phénomène peut s'expliquer à l'aide des formules de quadrature usuelles qui montrent que ce choix permet l'intégration des fonctions approchées jusqu'à un ordre « maximal », pour un nombre de points d'interpolation donné. Un choix intéressant de points de collocation sont les zéros des polynômes de Jacobi (voir [Lefèvre L., D. Dochain, 2000], pour une étude détaillée sur le choix des points de collocation). En effet, les deux paramètres qui définissent cette famille permettent de contrôler facilement et relativement simplement la position des points de collocation (étalement, dissymétrie, concentration vers les bords, etc.). En général, on a recours à une plus forte concentration de points de discrétisation aux extrémités, ce qui réduit les effets de bords dus notamment aux conditions aux limites. Les polynômes de Jacobi sont définis par la récurrence à trois termes :

$$\begin{aligned}
 P_{Jac_0}(x) &= 1 \\
 P_{Jac_1}(x) &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \left(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)x \\
 &\vdots \\
 P_{Jac_N}(x) &= \frac{1}{2} \frac{(2N+a+b-1)(a^2-b^2 + (2N+a+b-2)(2N+a+b)x)}{N(N+a+b)(2N+a+b-2)} P_{Jac_{N-1}}(x) \cdots \\
 &\quad - \frac{(N+a-1)(N+b-1)(2N+a+b)}{N(N+a+b)(2N+a+b-2)} P_{Jac_{N-2}}(x),
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

où a et b des coefficients supérieurs à $-1/2$ (la valeur $a = b = -1/2$ correspond aux polynômes de Tchébycheff).

Dans cette thèse nous utilisons les polynômes de Legendre qui sont un cas particulier des polynômes de Jacobi avec $a = b = 0$:

$$\begin{aligned}
 P_{Jac_0}(x) &= 1 \\
 P_{Jac_1}(x) &= x \\
 &\vdots \\
 P_{Jac_N}(x) &= \frac{1}{2} \frac{(2N-1)x}{N} P_{Jac_{N-1}}(x) - \frac{2(N-1)}{N} P_{Jac_{N-2}}(x).
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Il faut bien noter qu'aucune des racines de ces polynômes n'est aux extrémités du canal, c'est pour cela qu'il faut ajouter deux points aux extrémités correspondant aux conditions aux limites. Finalement il faut donc calculer les $N - 2$ racines d'un polynôme de degré $N - 2$, pour obtenir N points de collocation.

- **Introduction des conditions aux limites**

On utilise les fonctions de forme de Lagrange. On s'arrange pour que toutes les combinaisons linéaires considérées satisfassent les conditions aux limites. Ces dernières s'expriment donc, en général, comme autant d'équations linéaires en les coefficients de la combinaison linéaire. Si, par exemple, on impose à un bief le débit amont Q_{amont} et la hauteur aval h_{aval} , pour N points de collocation, il reste $N - 1$ équations à résoudre pour déterminer les tirants d'eau en considérant qu'à l'extrémité aval $h_N = h_{aval}$ et $N - 1$ équations à résoudre pour déterminer les débits, sachant que $Q_1 = Q_{amont}$. Les $2N - 2$ équations à considérer sont issues de la discrétisation des équations de Saint-Venant considérées.

- **Mise en œuvre de la méthode de collocation**

Notons $h(x_i, t) = h_i(t)$ et $Q(x_i, t) = Q_i(t)$. Selon les considérations qui précèdent, on recherche la solution approchée sous la forme (notez la séparation des variables au passage) :

$$h(x, t) = \sum_{j=1}^N h_j(t) L_j(x) \quad ; \quad Q(x, t) = \sum_{j=1}^N Q_j(t) L_j(x), \quad (2.42)$$

où $h_a = \{h_j(t)\}_{j=1}^N$ et $Q_a = \{Q_j(t)\}_{j=1}^N$, sont les coefficients à calculer. Les fonctions de forme $\{L_j(x)\}_{j=1}^N$, utilisées sont les polynômes de Lagrange (2.38).

Comme les termes $L_j(x)$ dépendent seulement de x et les coefficients $h_i(t)$ et $Q_i(t)$ dépendent seulement de t , lorsque l'on introduit les expressions approchées (2.42) dans les équations de Saint-Venant non-linéaires, il vient (pour le cas linéaire, voir le chapitre suivant) :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N h'_j(t)L_j(x) &= -\frac{1}{B} \sum_{j=1}^N Q_j(t)L'_j(x) \\
\sum_{j=1}^N Q'_j(t)L_j(x) &= -\frac{2\left(\sum_{j=1}^N Q_j(t)L_j(x)\right)\left(\sum_{j=1}^N Q_j(t)L'_j(x)\right) + \left(\sum_{j=1}^N Q_j(t)L_j(x)\right)^2\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L'_j(x)\right)}{B\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x)\right) + B\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x)\right)^2} \dots \\
&\quad -gB\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x)\right)\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L'_j(x) - I + J\right),
\end{aligned} \tag{2.43}$$

avec

$$J = \frac{\left(\sum_{j=1}^N Q_j(t)L_j(x)\right)^2}{B^2 K^2 \left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x)\right)^2 \left(\frac{B\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x)\right)}{B + 2\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x)\right)}\right)^{\frac{4}{3}}}, \tag{2.44}$$

où

$$h'_j(t) = \frac{dh_j(t)}{dt} \quad ; \quad Q'_j(t) = \frac{dQ_j(t)}{dt} \quad ; \quad L'_j(t) = \frac{dL_j(x)}{dx}.$$

Le principe de la méthode de collocation est d'imposer que ces équations soient satisfaites aux points de collocation. Tenant compte des identités (2.38) qui résultent du choix des polynômes de Lagrange comme fonctions de forme, on obtient donc pour chaque point de collocation x_i , $i \in [1 : N]$, les équations :

$$\begin{aligned}
h'_i(t) &= -\frac{1}{B} \sum_{j=1}^N Q_j(t)L'_j(x_i) \\
Q'_i(t) &= -\frac{2\left(\sum_{j=1}^N Q_j(t)L_j(x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^N Q_j(t)L'_j(x_i)\right) + \left(\sum_{j=1}^N Q_j(t)L_j(x_i)\right)^2\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L'_j(x_i)\right)}{B\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x_i)\right) + B\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x_i)\right)^2} \dots \\
&\quad -gB\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^N h_j(t)L'_j(x_i) - I + J\right).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Bien sûr, les équations donnant l'évolution des tirants d'eau et débits déjà précisés dans les conditions aux limites ne sont pas à prendre en compte.

2.7 Simulations numériques

Nous avons choisi comme système de référence un modèle du micro-canal de l'ESISAR à Valence. En particulier, nous avons choisi la configuration illustrée à la figure 2.8 où un bief simple est délimité par deux vannes, une à l'amont et l'autre à l'aval

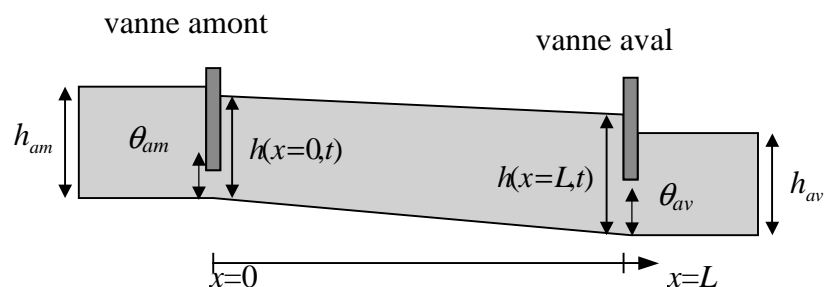


Figure 2.8 : Schéma du système considéré.

Les conditions aux limites sont déterminées par les équations des deux vannes considérées en régime noyé ; ces équations constitutives sont :

$$\begin{aligned} Q(x=0,t) &= \mu B_v \theta_{am}(t) \sqrt{2g(h_{am} - h(0^+,t))} \\ Q(x=L,t) &= \mu B_v \theta_{av}(t) \sqrt{2g(h(L^-,t) - h_{av})}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Pour les simulations numériques présentées, nous utilisons les deux méthodes citées précédemment : la méthode de collocation et la méthode de Preissmann. Nous prenons pour la simulation deux cas de conditions aux limites et choisissons pour valeurs des paramètres celles qui correspondent au micro-canal (voir tableau 2.1). Les profils initiaux de débit et de tirant d'eau sont choisis uniformes le long du canal. Pour information, le tirant d'eau maximum admissible du canal est $h_{\max} = 25 \text{ cm}$.

Longueur du canal	$L=8 \text{ m}$	Débit initial	$Q(x,t)= 0.0048 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$
Largeur du canal	$B=10 \text{ cm}$	Tirant initial	$h(x,t)=0.0945 \text{ m}$
Pente du canal	$I=2*10^{-3}$	Débit d'équilibre	$Q_e = 0.0111 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$
Coefficient de Strickler	$K=100$	Tirant d'équilibre	$h_e = 0.2 \text{ m}$

Tableau 2.1 : Paramètres du canal ESISAR-Valence.

Premier cas : les conditions aux limites sont directement spécifiées sur les variables d'état elles peuvent être, par exemple, la variation du débit amont $u_1(t)$ et la variation de la hauteur aval $u_2(t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(0,t)}{\partial t} = u_1(t) \\ \frac{\partial h(L,t)}{\partial t} = u_2(t). \end{cases} \quad (2.47)$$

Afin de rejeter les perturbations constantes des formes dérivées ont été choisies (comme ce sera le cas dans la suite, on peut considérer de manière équivalente que deux intégrateurs ont été placés en entrée). De plus, ces formes dérivées permettent de résoudre élégamment le problème d'instabilité numérique qui apparaît dans le schéma de Preissmann si les valeurs aux limites sont données de manière explicite. Néanmoins, si l'on souhaite directement les valeurs des hauteurs et/ou débits aux limites, cela ne peut se faire que de manière approchée et en choisissant une approximation implicite de ces valeurs aux bords.

Deuxième cas : les conditions aux limites sont fixées à l'amont par une équation de vanne et à l'aval directement sur la hauteur.

$$\begin{cases} Q(0,t) = \mu B_v u_1(t) \sqrt{2g(h_{am} - h(0^+,t))} \\ \frac{\partial h(L,t)}{\partial t} = u_2(t). \end{cases} \quad (2.48)$$

Les conditions aux limites dans ce cas sont l'ouverture de la vanne amont $u_1(t)$ et la variations de la hauteur aval $u_2(t)$ du canal. Bien entendu, on aurait pu considérer d'autres combinaisons de conditions aux limites. Il ne s'agit ici que de deux cas servant d'illustration.

- **Méthode de Preissmann appliquée aux modèles non-linéaire et linéarisé**

Premier cas : conditions aux limites (2.47)

Pour cette simulation, notons que le pas de discrétisation du temps est $\Delta t = 1$ s et le pas de discrétisation de l'espace est $\Delta x = 1$ m (alors le nombre de sections est de neuf). Nous utilisons les commandes : $u_1(t) = \frac{Q(x,0)}{4} \exp(\frac{1-t}{4})$; $u_2(t) = \frac{h(x,0)}{10} \exp(\frac{1-t}{10})$. Pour le modèle linéarisé, le point d'équilibre choisi est $h_e = 0.2$ m ; $Q_e = 0.0111$ m³s⁻¹.

Modèle non-linéaire de Saint-Venant

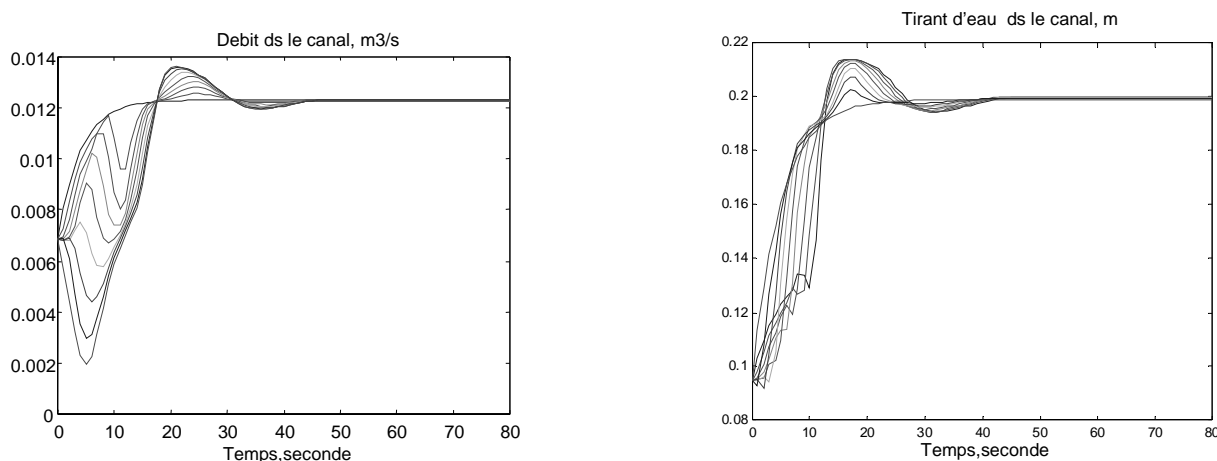


Figure 2.9a : Profils des débits et de tirant d'eau à chaque pas de discrétisation.

Modèle linéaire de Saint-Venant

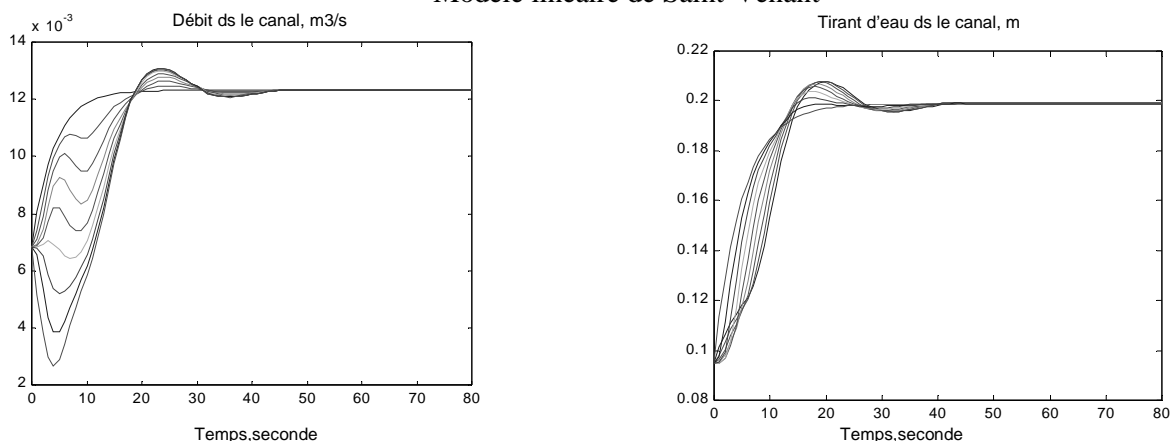


Figure 2.9b : Profils des débits et de tirant d'eau à chaque pas de discrétisation.

Deuxième cas : conditions aux limites (2.48)

Pour cette simulation, nous utilisons les conditions aux limites exponentielles suivantes :

$$u_1(t) = \frac{\theta(0)}{3} \exp\left(\frac{1-t}{3}\right) ; u_2(t) = \frac{h(x,0)}{10} \exp\left(\frac{1-t}{10}\right)$$

avec $\theta(0) = 0.066 \text{ m}$ la valeur initiale de l'ouverture de vanne amont, $h_{am} = 0.2 \text{ m}$ le tirant d'eau à l'amont de la vanne ; et $h(x,0) = 0.0225 \text{ m}$, $Q(x,0) = 8.6810 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ les deux profils initiaux uniformes en hauteur et débit. Pour le modèle linéarisé, le point d'équilibre choisi est $h_e = 0.05 \text{ m}$, $Q_e = 0.0019 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

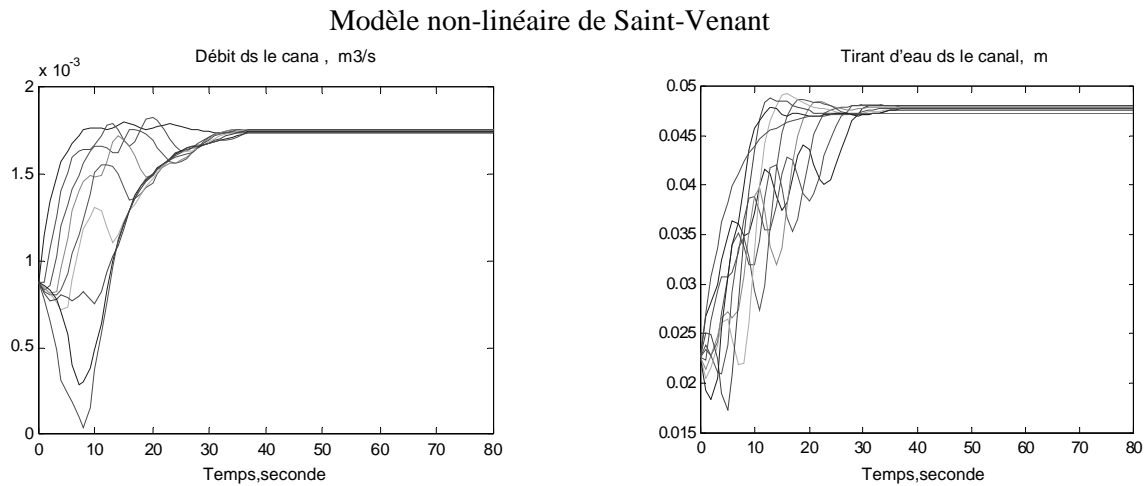


Figure 2.9c : Profils des débits et de tirant d'eau à chaque pas de discrétisation.

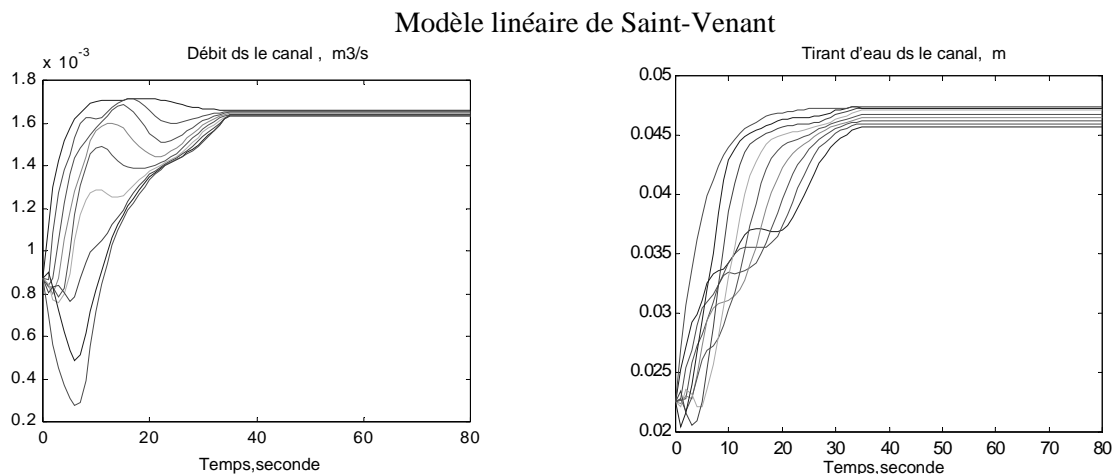


Figure 2.9d : Profils des débits et de tirant d'eau à chaque pas de discrétisation.

- **Méthode de collocation appliquée aux modèles non-linéaire et linéarisé**

A titre commpartaif pour cette simulation, nous prenons les mêmes conditions aux limites (2.47) que pour celles du premier cas de la méthode de Preissmann. Dans les figures 2.10a, 2.10b, nous traçons les mêmes profils de débits et de hauteurs que ceux représentés pour la méthode de Preissmann (au total neuf profils). Ces profils sont calculés par interpolation à partir des valeurs calculées aux points de collocation (collocation à 5 points, dont 3 points intérieurs). Notons que le pas d'échantillonnage du temps est $\Delta t = 1$ s et les points de collocation sont 0 ; 0.9016 ; 4 ; 7.0984 ; 8.

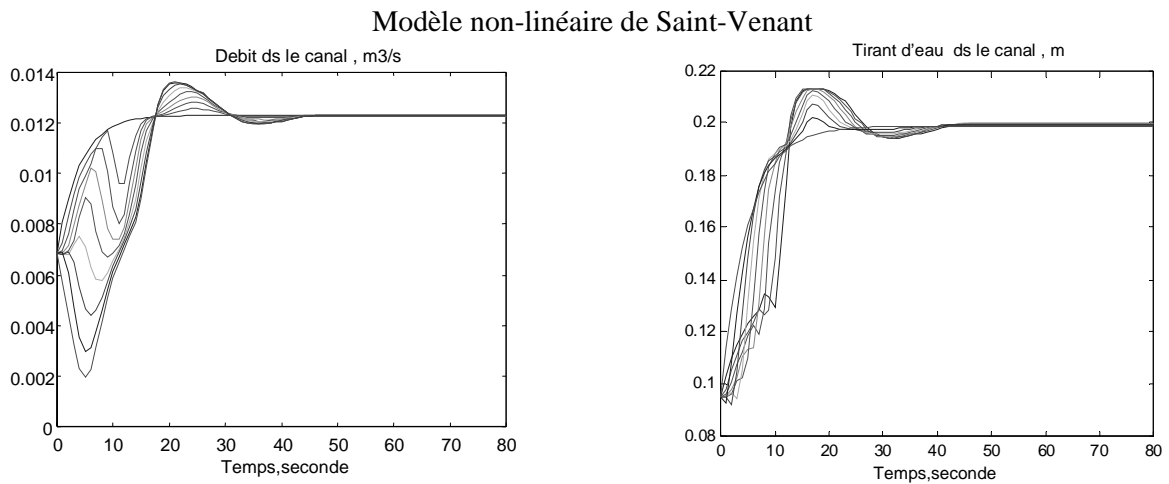


Figure 2.10a : Profils des débits et de tirant d'eau à chaque pas de discrétisation.

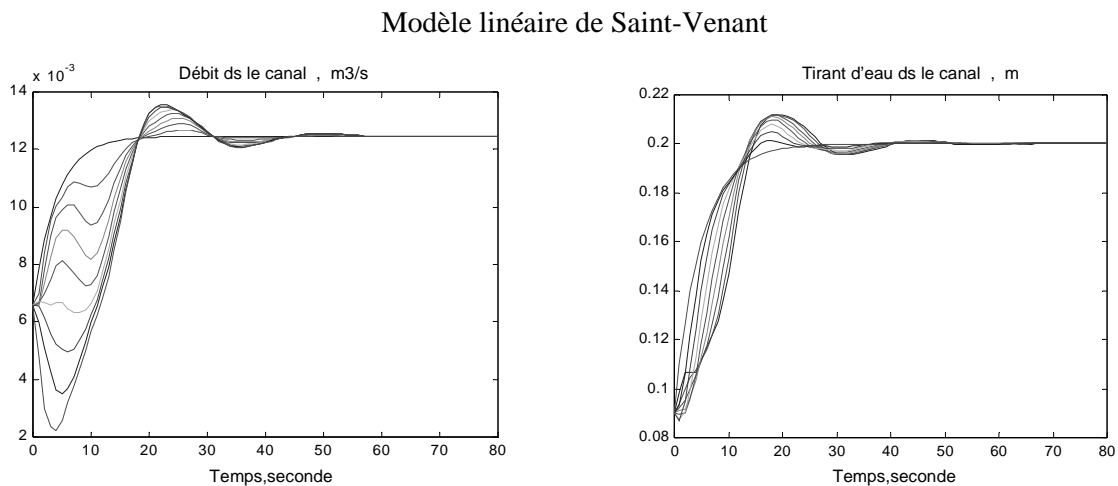


Figure 2.10b : Profils des débits et de tirant d'eau à chaque pas de discrétisation.

2.8 Comparaison des deux méthodes et conclusion

Nous avons présenté dans la section précédente les différentes solutions numériques obtenues par la méthode de Preissmann et par la méthode de collocation orthogonale dans le but d'illustrer deux points.

Premièrement, on peut observer que le modèle le modèle non-linéaire de Saint-Venant et le modèle linéarisé de Saint-Venant ont des comportements dynamiques proches et analogues, qu'ils soient simulés avec la méthode de collocation (voir figures 2.10a et 2.10b) ou avec la méthode de Preissmann (voir figures 2.9a et 2.9b). Mais la dynamique du modèle linéarisé de Saint-Venant et celle du modèle non-linéaire ne sont proches que si l'on n'introduit pas le modèle des ouvrages hydrauliques (vannes ou déversoirs). En effet, d'après les figures 2.9c et 2.9d, on voit que la dynamique du modèle non-linéaire de Saint-

Venant est très loin du modèle linéarisé de Saint-Venant en présence des équations des vannes (2.48). Cela peut s'expliquer car la forte non-linéarité n'est pas due spécialement aux équations de Saint-Venant même, mais aux équations des ouvrages (dans notre cas, les vannes). Ce fait avait déjà été établi et commenté dans [Baume J., P. O. Malaterre, 1997]. Dans la suite dans notre travail nous utilisons les conditions aux limites débit amont et hauteur aval sous forme dérivées pour pouvoir considérer le modèle linéarisé de Saint-Venant comme le modèle de référence pour la partie hydrodynamique. Les vannes sont traitées séparément (voir infra).

Deuxièmement, nous pouvons observer sur l'ensemble des simulations réalisées que la méthode de collocation fournit une bonne approximation de la solution. En effet, la méthode de Preissmann, utilisée comme référence par la plupart des auteurs, et la méthode de collocation fournissent des résultats très proches dans le cas du modèle non-linéaire ou linéarisé, avec ou sans équations de vannes. Or, c'est le modèle réduit obtenu par collocation qui nous sert de modèle pour la commande. Le simulateur de Preissmann nous sert quant à lui comme un « procédé réel » ou encore un « modèle perturbé » sur lequel cette loi de commande robuste aux erreurs de réduction que nous développons dans la suite sera testée. Etant donné que le modèle obtenu par collocation représente bien (en boucle ouverte et en simulation cependant !) la dynamique du modèle linéarisé (dont le comportement de référence est fourni par le schéma de Preissmann), l'avenir se présente sous les meilleurs auspices.

Chapitre 3

Réduction du modèle par collocation orthogonale

3.1 Introduction

Le modèle de Saint-Venant obtenu au chapitre précédent n'est pas facilement exploitable pour concevoir des lois de commandes car il s'agit d'un modèle non-linéaire à paramètres distribués (dont l'équation d'état est donnée sous la forme d'équations aux dérivées partielles). Les approches classiques de commande ne sont donc pas applicables directement sur ce modèle car elles nécessitent le plus souvent un modèle linéaire de dimension finie. Pour répondre à ce problème nous utilisons un modèle réduit de dimension finie obtenu par la méthode de collocation orthogonale à partir du modèle linéarisé de Saint-Venant de dimension infinie (2.29) dont nous avons déjà établi qu'il représente de façon satisfaisante le comportement dynamique de l'écoulement dans un bief de canal à surface libre, pour peu que l'on ne considère pas les ouvrages hydrauliques (vannes ou déversoirs). Cependant, en général, les erreurs de réduction peuvent, elles, introduire des perturbations de cette dynamique, non négligeables et qui peuvent éventuellement entraîner une déstabilisation du système étudié. C'est pour cela que nous proposons dans ce chapitre de calculer ces erreurs de réduction afin d'en tenir compte par la suite lors de la synthèse de lois de commande.

3.2 Réduction du modèle

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la méthode de collocation à partir du choix de N points de collocation $\{x_i\}_{i=1}^N$ dont $N-2$ sont racines d'un polynôme de Jacobi et les deux derniers sont les abscisses des extrémités du domaine spatial considéré. La méthode de collocation consiste alors à approcher la solution, à chaque instant, par un

développement dans la base (finie) formée par les N polynômes d'interpolation de Lagrange $\{L_j(x)\}_{j=1}^N$, de degré $N-1$.

Comme les termes $L_j(x)$ ne dépendent que de x et les coefficients $h_i(t)$ et $Q_i(t)$ que de t , le modèle linéarisé de Saint-Venant (2.29) s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N h'_j(t)L_j(x) &= - \sum_{j=1}^N Q_j(t)L'_j(x) \\ \sum_{j=1}^N Q'_j(t)L_j(x) &= a_1 \sum_{j=1}^N h_j(t)L'_j(x) - a_2 \sum_{j=1}^N Q_j(t)L'_j(x) + a_3 \sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x) - a_4 \sum_{j=1}^N Q_j(t)L_j(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

où

$$h'_j(t) = \frac{dh_j(t)}{dt} ; \quad Q'_j(t) = \frac{dQ_j(t)}{dt} ; \quad L'_j(t) = \frac{dL_j(x)}{dx}.$$

Ces équations sont valables quel que soit la valeur de x , donc pour chaque point de collocation $x_i \forall i \in [1 : N]$ on obtient :

$$\sum_{j=1}^N h'_j(t)L_j(x_i) = h'_i(t) ; \quad \sum_{j=1}^N h_j(t)L_j(x_i) = h_i(t) ; \quad \sum_{j=1}^N Q'_j(t)L_j(x_i) = Q'_i(t) ; \quad \sum_{j=1}^N Q_j(t)L_j(x_i) = Q_i(t).$$

Ainsi, le modèle décrit par la relation (3.1) peut se réduire à l'ensemble d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} h'_i(t) &= - \sum_{j=1}^N Q_j(t)L'_j(x_i) \\ Q'_j(t) &= a_1 \sum_{j=1}^N h_j(t)L'_j(x_i) - a_2 \sum_{j=1}^N Q_j(t)L'_j(x_i) + a_3 h_i(t) - a_4 Q_i(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Après avoir calculé le modèle réduit de dimension finie (3.6) obtenu par l'application de la méthode de collocation, il faut définir les variables de commande. Le choix des variables de commande est dû à des raisons physiques, car la commande d'un canal réel se fait à travers l'ouverture des vannes, et donc indirectement sur les débits ou les tirants d'eau aux extrémités de chaque bief. Dans notre cas nous avons choisi comme variables de commande u , les variations du débit amont et de la hauteur aval. Ce choix de placer un intégrateur sur les entrées de commande, en plus de permettre le rejet des perturbations constantes, facilite la prise en compte des conditions aux limites dans le schéma de collocation (voir infra) et permet aussi d'inclure simplement ces conditions aux limites dans le schéma de Preismann sans rendre ce dernier explicite en temps (et donc sans

risquer de le déstabiliser numériquement). Les variables de commande choisies sont donc dans la suite :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{\partial h}{\partial t}(x=1, t) \\ u_2(t) &= \frac{\partial Q}{\partial t}(x=0, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Avec ce choix, le modèle réduit (3.6) (modèle linéaire de dimension finie) peut s'écrire sous la forme

$$(S_c) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.8)$$

où le vecteur d'état $x(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t), Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_N(t))^t$ est maintenant composé des valeurs des tirants d'eau et des débits aux N points de collocation.

Le choix des variables de commande (3.7) permet de calculer directement la matrice de commande B de dimension $(N \times 2)$ à partir des équations suivantes :

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'_N(t) \\ Q'_1(t) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

d'où l'on tire

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^t. \quad (3.10)$$

Les sorties mesurées du système sont choisies pour être les conditions aux limites complémentaires des variables de commande choisies, ce qui permet par la suite d'utiliser simplement les équations de vannes comme conditions de raccordement des différents biefs constituant le réseau d'irrigation considéré. Ainsi la matrice de sortie C de dimension $(2 \times N)$ est définie par la relation suivante :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ Q_N(t) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

d'où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Si on note $L_{i,j} = L'_j(x_i)$ les éléments de la matrice des dérivées des polynômes de Lagrange évaluées aux points de collocation, la matrice dynamique A de dimension $(N \times N)$ du système est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,3} & \cdots & L_{1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{2,1} & L_{2,2} & L_{2,3} & \cdots & L_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{N-1,1} & L_{N-1,2} & L_{N-1,3} & \cdots & L_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 L_{2,1} & a_1 L_{2,2} + a_3 & a_1 L_{2,3} & \cdots & a_1 L_{2,N} & -a_2 L_{2,1} & -a_2 L_{2,2} - a_4 & -a_2 L_{2,3} & \cdots & -a_2 L_{2,N} \\ a_1 L_{3,1} & a_1 L_{3,2} & a_1 L_{3,3} + a_3 & \cdots & a_1 L_{3,N} & -a_2 L_{3,1} & -a_2 L_{3,2} & -a_2 L_{3,3} - a_4 & \cdots & -a_2 L_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 L_{N,1} & a_1 L_{N,2} & a_1 L_{N,3} & \cdots & a_1 L_{N,N} + a_3 & -a_2 L_{N,1} & -a_2 L_{N,2} & -a_2 L_{N,3} & \cdots & -a_2 L_{N,N} - a_4 \end{pmatrix}.$$

3.3 Erreur de réduction

Souvent, les approches de la commande sont développées à partir des modèles de dimension finie (modèles réduits), sans tenir compte des erreurs numériques dues à l'étape de réduction (approximation d'un modèle à paramètres distribués par un modèle d'état de dimension finie). Cependant dans notre travail nous tenons compte de ces erreurs de réduction entre le modèle linéarisé de Saint-Venant (2.29) et le modèle linéaire de dimension finie obtenu par la méthode de collocation orthogonale (3.8). Ces erreurs de réduction peuvent en effet être calculées explicitement dans le domaine de Laplace à l'aide des matrices de transfert des deux modèles linéaires.

La matrice $\tilde{G}(s)$ du modèle linéarisé de Saint-Venant (2.29) est solution du problème différentiel aux limites suivant obtenu par transformation de Laplace :

$$\begin{aligned} sh(x,s) &= -\frac{\partial Q(x,s)}{\partial x} \\ sQ(x,s) &= a_1 \frac{\partial h(x,s)}{\partial x} - a_2 \frac{\partial Q(x,s)}{\partial x} + a_3 h(x,s) - a_4 Q(x,s) \\ sh(1,s) &= u_1(s) ; \quad sQ(0,s) = u_2(s) \\ y_1(s) &= h(0,s) ; \quad y_2(s) = Q(1,s), \end{aligned} \quad (3.13)$$

où s est la variable de Laplace. Le problème différentiel (3.13) est un système de deux équations différentielles ordinaires en la variables x paramétrées par s qui peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} h(x,s) \\ Q(x,s) \end{pmatrix} = A_s \begin{pmatrix} h(x,s) \\ Q(x,s) \end{pmatrix} ; \quad A_s = \begin{pmatrix} -(a_3 + a_2 s)/a_1 & (s + a_4)/a_1 \\ -s & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

En utilisant la technique standard de diagonalisation, on obtient la solution $(h(x,s), Q(x,s))^t$ comme combinaison linéaire de la transformée de Laplace des conditions aux limites $u_1(s)$ et $u_2(s)$. En exprimant cette solution en $x=0$ et en $x=1$, on obtient :

$$y(s) = \tilde{G}(s)u(s) ; \quad \tilde{G}(s) = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{11}(s) & \tilde{G}_{12}(s) \\ \tilde{G}_{21}(s) & \tilde{G}_{22}(s) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11}(s) &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{s(\lambda_2 e^{\lambda_2} - \lambda_1 e^{\lambda_1})} ; \quad \tilde{G}_{12}(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2})}{s^2 (\lambda_2 e^{\lambda_2} - \lambda_1 e^{\lambda_1})}, \\ \tilde{G}_{21}(s) &= \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{(\lambda_2 e^{\lambda_2} - \lambda_1 e^{\lambda_1})} ; \quad \tilde{G}_{22}(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2})^2}{s(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 e^{\lambda_2} - \lambda_1 e^{\lambda_1})} + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2}}{s(\lambda_1 - \lambda_2)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$\Lambda = \left(\frac{a_2 s + a_3}{a_1} \right)^2 - 4 \frac{s(s + a_4)}{a_1} ; \quad \lambda_1 = \frac{-(a_2 s + a_3) + a_1 \sqrt{\Lambda}}{2a_1} ; \quad \lambda_2 = \frac{-(a_2 s + a_3) - a_1 \sqrt{\Lambda}}{2a_1}. \quad (3.17)$$

Il est donc possible de calculer, dans le domaine de Laplace, l'erreur de réduction entre le modèle linéarisé de Saint-Venant et le modèle réduit de dimension finie. Cette erreur de réduction peut s'exprimer comme une erreur relative de modèle sous les formes :

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= (I + \Delta_s(s))G(s) \\ \tilde{G}(s) &= (I + \Delta_{is}(s))^{-1}G(s), \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ est la matrice de transfert du modèle réduit et $\Delta_s(s)$ et $\Delta_{is}(s)$ sont respectivement matrices d'erreurs de réduction sous forme multiplicative directe en sortie et sous forme multiplicative inverse en sortie.

3.4 Analyse de l'erreur de réduction

Les formules d'erreurs ci-dessus sont utilisées pour représenter des incertitudes de natures diverses :

- présence de non-linéarités et variations des paramètres suivant le point de fonctionnement.

- erreurs de modélisation concernant les actionneurs et les capteurs (dont les dynamiques peuvent être mal connues, négligées ou qui peuvent introduire des retards).
 - utilisation d'un modèle simplifié en vue de faciliter le calcul de la commande (comme dans notre cas, l'utilisation d'un modèle réduit de dimension finie).
- **Calcul des erreurs de réduction dans le cas du régime uniforme**

Les deux matrices de transfert $\tilde{G}(s)$ et $G(s)$ calculées, on peut calculer numériquement à partir des expressions (3.18) les matrices d'erreurs de réduction de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\Delta_s(s) &= (\tilde{G}(s) - G_s(s))G(s)^{-1} \\ \Delta_{is}(s) &= (G(s) - \tilde{G}(s))\tilde{G}(s)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

La figure 3.1 ci-après représente les plus grandes valeurs singulières de chacune de ces deux erreurs de réduction, pour les mêmes valeurs des paramètres numériques que celles déjà utilisées au chapitre précédent.

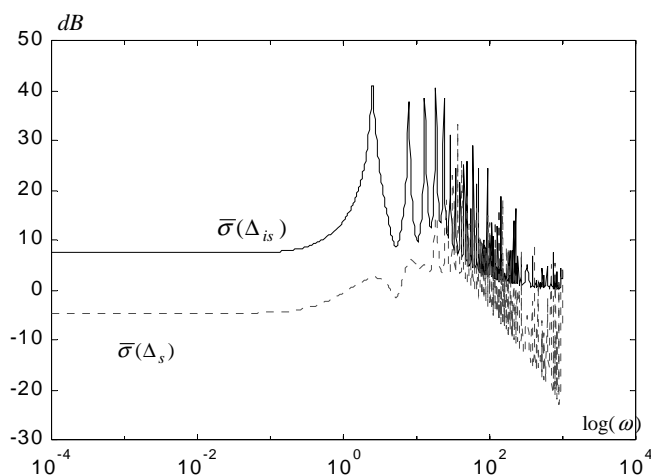


Figure 3.1 : Valeurs singulières supérieures des erreurs de réduction cas uniforme.

Les erreurs de réduction sont donc très importantes en hautes fréquences, ce dont nous tenons compte lors de la synthèse de la commande robuste que nous développons dans le prochain chapitre.

- **Calcul des erreurs de réduction dans le cas du régime non uniforme**

Notons que dans les canaux à surface libre réels, le régime d'équilibre est un régime non uniforme. Il est donc intéressant de calculer les erreurs de réduction entre le modèle réduit et le modèle linéarisé de Saint-Venant obtenu cette fois par linéarisation autour du régime

d'équilibre non uniforme $(h_e(x), Q_e)^t$ défini par l'équation (2.20). Ceci nous permet dans la suite de vérifier que la commande robuste développée dans le prochain chapitre est également robuste vis à vis des erreurs dues au caractère non uniforme des équilibres réels.

Le calcul du modèle linéarisé de Saint-Venant dans le cas d'un régime non uniforme est développé de manière détaillée à l'annexe 1.A.2. Il conduit au modèle adimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = a_1(x) \frac{\partial h}{\partial x} + a_2(x) \frac{\partial Q}{\partial x} + a_3(x)h + a_4(x)Q, \end{cases} \quad (3.20)$$

où, comme précédemment, h et Q représentent les écarts relatifs par rapports aux profils d'équilibre (cette fois non uniformes) et où les coefficients a_i , dépendant cette fois de x , sont donnés par :

$$a_1(x) = (1 - g \frac{B^2 h_e(x)^3}{Q_e^2}) ; \quad a_2(x) = -2; \quad a_4(x) = -\frac{2gB^2 h_e(x)^2 J_e(x)L}{Q_e^2} + \frac{BL}{h_e(x)} \frac{dh_e(x)}{dx}$$

$$a_3(x) = g \frac{B^2 h_e(x)^2 L}{Q_e^2} (I + J_e(x) + \frac{4J_e(x)R_e(x)}{3h_e(x)}) - (\frac{2L}{h_e(x)} + g \frac{B^2 h_e(x)^2 L}{Q_e^2}) \frac{dh_e(x)}{dx}.$$

Notons $\tilde{G}^{nu}(s)$ la matrice de transfert du modèle linéarisé de Saint-Venant (3.20) pour un régime non uniforme. En appliquant la transformée de Laplace aux équations (3.20) on obtient, de même que dans le cas du régime uniforme, un système de deux équations différentielles ordinaires en la variables x paramétrées par s , la variable de Laplace. Ces équations peuvent être écrites sous une forme matricielle :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} h(x, s) \\ Q(x, s) \end{pmatrix} = A_s(x) \begin{pmatrix} h(x, s) \\ Q(x, s) \end{pmatrix} ; \quad A_s(x) = \begin{pmatrix} -(a_3(x) + a_2(x)s)/a_1(x) & (s + a_4(x))/a_1(x) \\ -s & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Le problème aux limites est ensuite défini par la donnée des conditions aux limites :

$$h(1, s) = u_1(s)/s$$

$$Q(0, s) = u_2(s)/s,$$

Cependant, les difficultés liées à la résolution de ce problème aux deux bords peuvent être évitées car le système (3.21) est un système différentiel linéaire et parce que nous avons choisi pour sorties les conditions aux limites complémentaires. En effet, considérons

l'intégration du système linéaire (3.21) pour lequel les conditions aux limites sont données en $x=0$ uniquement ($h(0,s)$ et $Q(0,s)$). Il s'agit alors d'un problème de Cauchy dont la solution générale est donnée par :

$$\begin{pmatrix} h(x,s) \\ Q(x,s) \end{pmatrix} = \Gamma_s(x,0) \begin{pmatrix} h(0,s) \\ Q(0,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(x,s) & \gamma_{12}(x,s) \\ \gamma_{21}(x,s) & \gamma_{22}(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0,s) \\ Q(0,s) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

où $\Gamma_s(x,0)$ est une matrice de transition, qui peut être calculée analytiquement dans le cas du régime uniforme ($\Gamma_s(x,0) = \exp(A_s x)$), mais qui, dans le cas d'un régime non uniforme, doit être évaluée numériquement (voir, par exemple, [Litrico X., V. Fromion, 2002][Gantmacher F.R, 1974]).

Il est alors aisé, par le choix des sorties réalisé, de calculer à partir de la matrice de transition $\Gamma_s(1,0)$ la matrice de transfert $\tilde{G}^{nu}(s)$. On obtient :

$$y(s) = \tilde{G}^{nu}(s)u(s) ; \quad \tilde{G}^{nu}(s) = \begin{pmatrix} \tilde{G}^{nu}_{11}(s) & \tilde{G}^{nu}_{12}(s) \\ \tilde{G}^{nu}_{21}(s) & \tilde{G}^{nu}_{22}(s) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{nu}_{11}(s) &= \frac{-1}{s\gamma_{11}(1,s)} ; & \tilde{G}^{nu}_{12}(s) &= \frac{-\gamma_{12}(1,s)}{s\gamma_{11}(1,s)} ; \\ \tilde{G}^{nu}_{21}(s) &= \frac{\gamma_{21}(1,s)}{s\gamma_{11}(1,s)} ; & \tilde{G}^{nu}_{22}(s) &= -\frac{\gamma_{22}(1,s)}{s} + \frac{\gamma_{21}(1,s)\gamma_{12}(1,s)}{s\gamma_{11}(1,s)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Les coefficients γ_{ij} de la matrice de transition doivent, dans le cas non uniforme, être évalués numériquement. Pour cela on peut par exemple utiliser une méthode numérique qui consiste à approcher le régime non uniforme $(h_e(x), Q_e)^t$ en subdivisant l'intervalle spatial considéré en sous-intervalles et en considérant une série de régimes d'équilibre uniformes sur chacun de ces sous-intervalles. Cela revient à faire une subdivision de l'intervalle spatial $[0, 1]$ (variables réduites) en n points de discrétisations $\{x_k\}_{k=1}^n$ et de choisir sur chacun des sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ un profil d'équilibre uniforme $(h_e(x_k), Q_e)^t$. On obtient alors sur chacun de ces sous intervalle une matrice de transition de la forme $\exp(A_s^k(x_{k+1} - x_k))$, ce qui donne pour approximation de la matrice de transition complète :

$$\Gamma_s(1,0) \approx \prod_{k=0}^{n-1} (\exp(A_s(x_k))h_k). \quad (3.25)$$

Après avoir calculé la matrice du transfert $\tilde{G}^{nu}(s)$ (de manière approchée, mais numériquement précise), on peut maintenant calculer de la même façon que dans le cas uniforme, à partir des expressions (3.19), les matrices d'erreurs de réduction :

$$\begin{aligned}\Delta_{s}^{nu}(s) &= (\tilde{G}^{nu}(s) - G_s(s))G(s)^{-1} \\ \Delta_{is}^{nu}(s) &= (G(s) - \tilde{G}^{nu}(s))\tilde{G}^{nu}(s)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

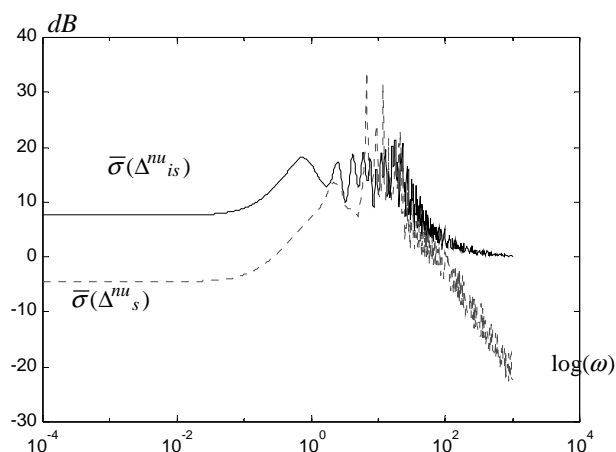


Figure 3.1 : Valeurs singulières supérieures des erreurs de réduction cas non uniforme.

La figure 3.1 ci-dessus représente les plus grandes valeurs singulières de chacune de ces deux erreurs de réduction, pour les mêmes valeurs numériques des paramètres que précédemment, et avec un nombre $n=9$ de points de discrétisations.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons calculé à l'aide de la collocation orthogonale un modèle réduit (donné sous forme de représentation d'état) du modèle linéarisé de Saint-Venant dans le cas du régime uniforme. Ce modèle réduit nous sert comme modèle de référence (modèle nominal) pour synthétiser une loi de commande optimale robuste. Les conditions de robustesses sont définies vis-à-vis des erreurs de réduction. Ces erreurs de réduction ont été calculées, aussi bien dans le cas d'un régime d'équilibre uniforme que dans le cas plus réaliste d'un régime non uniforme.

Chapitre 4

Commande optimale robuste aux erreurs de réduction

4.1 Introduction

Nous avons déjà vu dans le chapitre 2 que les canaux d'irrigation à surface libre sont des systèmes distribués de grande taille dont la dynamique est représentée par des équations aux dérivées partielles non-linéaires de dimension infinie (les équations de Saint-Venant), ce qui rend la synthèse directe de lois de commande très difficile en raison à la fois du caractère non-linéaire de la dynamique et de la dimension infinie. La plupart des techniques de commande utilisées jusqu'à présent dans le domaine des canaux d'irrigation sont basées sur des modèles de commande linéaires en dimension finie obtenus par linéarisation d'un modèle de dimension finie autour d'un régime de référence (d'équilibre). Des techniques de commande robuste ont été récemment utilisées pour assurer un comportement en boucle fermée robuste vis-à-vis de certaines incertitudes liées à la linéarisation, la réduction, ou bien lors à la modélisation. Les différents régulateurs sont en général testés sur des modèles de simulation résolvant numériquement les équations de Saint-Venant. Le lecteur est invité à se reporter à l'ouvrage de synthèse faisant le tour des méthodes de régulation connues à ce jour dans ce domaine [Georges D., 2002].

Notre objectif dans cette thèse est de concevoir un régulateur robuste à partir d'un modèle réduit de dimension finie, obtenu par collocation (voir chapitre 3). Nous testons ensuite ce régulateur sur les deux modèles de dimension infinie, les modèles linéaire et non-linéaire de Saint-Venant.

Pour concevoir un régulateur robuste pour un système donné nous avons trois problèmes à résoudre :

- Un problème de modélisation : il s'agit de trouver un modèle du système (appelé modèle nominal) et un modèle des incertitudes de ce modèle nominal.
- Un problème d'analyse : il s'agit d'étudier la capacité du système à conserver certaines propriétés nominales (stabilité, performances) pour un régulateur existant, malgré des incertitudes. On parle alors de robustesse en stabilité et en performance.
- Un problème de synthèse : il s'agit alors d'effectuer un choix des paramètres du régulateur qui permette d'obtenir un certain niveau de robustesse : c'est l'étape de conception même d'un régulateur robuste.

Nous détaillons ces trois différents problèmes par la suite, mais avant tout nous consacrons une première partie de ce chapitre à un rappel sur les normes matricielles et sur les outils d'analyse de performances et de robustesse des systèmes bouclés. Ainsi, après un bref rappel sur l'analyse de la stabilité et des performances du système bouclé nominal, nous nous intéressons à la notion de robustesse, nous rappelons les théorèmes du petit gain et de robustesse qui en découlent, théorèmes que nous utilisons par la suite pour synthétiser un régulateur robuste assurant les objectifs de robustesse et de performances. Nous faisons ici appel à la technique de mise en forme de la boucle, encore appelée « loop-shaping ». *La méthode de synthèse utilisée dans cette thèse est la commande LQG/LTR (encore appelée H2/LTR). La synthèse du régulateur optimal LQ se fait en utilisant une méthode de pondérations fréquentielles du critère qui nous permet d'effectuer le « loop shaping ».* Dans ce contexte et puisque les états du système ne sont pas tous disponibles, *un observateur d'état optimal LQ est utilisé* afin de reconstruire l'état du système à partir des seuls états disponibles aisément en pratique : le débit aval (obtenu en pratique en utilisant la loi de vanne et les mesures de niveau à l'amont et à l'aval de la vanne) et le tirant d'eau amont mesuré directement. *Nous utilisons la technique du « Loop Transfer Recovery » (LTR) pour retrouver les propriétés de la commande nominale LQ* lorsque cet observateur est introduit dans la boucle. Dans une troisième partie nous appliquons cette méthode de synthèse au système réduit que nous avons proposé et présenté dans le chapitre précédent pour calculer une loi de commande robuste vis-à-vis des erreurs de réduction issues de l'utilisation de la méthode de collocation. L'objectif principal de cette commande robuste est la régulation du niveau le long du canal autour d'un régime d'équilibre uniforme. Le régulateur LQ et l'observateur LQ associé (constituant la commande LQG) sont validés sur trois simulateurs différents

afin de vérifier leur bon fonctionnement. Le premier simulateur est développé à partir du modèle réduit (modèle de Saint-Venant linéarisé de collocation), il s'agit du modèle utilisé pour le développement de la commande (modèle de commande); ensuite le deuxième simulateur est synthétisé à partir du modèle de Saint-Venant linéarisé de Preissmann; enfin le troisième simulateur est développé à partir du modèle de Saint-Venant non-linéaire de Preissmann.

4.2 Normes matricielles

- Valeurs singulières

La norme de matrice induite par la norme euclidienne de vecteurs est la plus grande valeur singulière, notée $\bar{\sigma}(A)$, pour A matrice complexe non nécessairement carrée ($A \in \mathbb{C}^{n \times m}$). Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres de AA^* et de A^*A (A^* désigne la matrice transposée-conjuguée de A).

On montre que :

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{x \neq 0} \sqrt{\frac{x^* A^* A x}{x^* x}}.$$

On notera $\underline{\sigma}(A)$ la plus petite valeur singulière.

- Normes matricielles

Définition 4.1 – La norme H_2 d'une matrice de transfert G est définie par :

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(G(j\omega)^* G(j\omega)) d\omega \right)^{1/2}.$$

Définition 4.2 – La norme H_∞ d'une matrice de transfert G est définie comme la valeur maximale atteinte sur l'ensemble des fréquences par la valeur singulière supérieure:

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) ; \text{ avec } \omega \text{ désigne la pulsation.}$$

4.3 Analyse des systèmes bouclés

L'analyse de propriétés d'un système bouclé multivariable utilise les notions principales suivantes :

- La stabilité nominale est la première des propriétés à assurer : la commande, appliquée au modèle de commande du système (appelé modèle nominal), doit bien évidemment stabiliser celui-ci.
- Les performances nominales sont des propriétés plus exigeantes, qui consistent à garantir que le modèle nominal de commande bouclé possède des propriétés de performances (précision et rapidité de la réponse notamment) satisfaisantes.
- La robustesse en stabilité est obtenue si la commande calculée à partir du modèle nominal du système assure la stabilité en boucle fermée d'un système qui diffère du modèle nominal ; cela revient à vérifier que la stabilité continue à être assurée malgré les incertitudes de modèle. Pour étudier cette propriété, il convient au préalable de définir les incertitudes de modélisation vis-à-vis desquelles on veut garantir la stabilité.

4.3.1 Stabilité nominale

Considérons le système bouclé de la figure 4.1, dans lequel $G(s)$ représente la matrice de transfert d'un système multivariable, de dimensions $p \times m$ et $K(s)$ celle d'un régulateur de dimension $m \times p$. On appelle :

- r le signal de référence que doit suivre la sortie,
- y la sortie du système,
- u la commande (sortie du régulateur),
- d des perturbations affectant la sortie du système,
- w les bruits de mesure,
- $\varepsilon = r - y$ l'erreur d'asservissement,
- $Q(s) = G(s)K(s)$ la matrice de transfert de boucle ouverte,

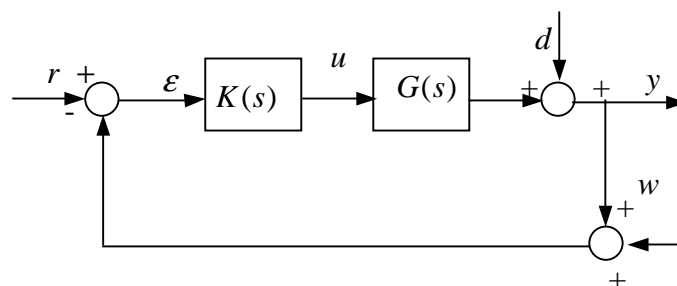


Figure 4.1 : Schéma bloc pour l'étude de la stabilité et des performances nominales.

Théorème 4.1 (critère de Nyquist multivariable) – Le système bouclé de matrice de transfert de boucle ouverte $Q(s)$ est stable si et seulement si l'image du contour de Nyquist par $\det(I_p + Q(s))$ entoure l'origine, dans le sens trigonométrique, un nombre de fois égal au nombre de pôles de $Q(s)$ à partie réelle strictement positive.

Le critère de Nyquist permet de garantir la stabilité du système bouclé au sens entrée bornée/sortie bornée. La stabilité interne est une notion plus exigeante :

Définition 4.3 – Un système bouclé est asymptotiquement stable de manière interne si toute matrice de transfert reliant deux points quelconques de la boucle n'a que des pôles à partie réelle strictement négative.

Théorème 4.2 (dit du faible ou petit gain) – Supposons que tous les pôles de $G(s)$ et $K(s)$ soient à partie réelle négative. Alors le système bouclé de matrice de transfert de boucle ouverte $Q(s)$ est stable de manière interne si :

$$\|Q\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(j\omega) < 1 \quad \forall \omega.$$

4.3.2 Performances nominales

Pour traduire mathématiquement les propriétés de performances nominales définies précédemment, un certain nombre de matrices de transfert caractéristiques du système en boucle fermée sont utiles pour l'analyse :

- **Matrices de sensibilité en sortie**

$S_y(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}$ est appelée matrice de sensibilité en sortie. Elle représente la matrice de transfert entre la référence r et l'erreur ε ; elle traduit l'influence des perturbations sur la sortie et sur l'erreur ε .

$T_y(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}G(s)K(s)$ est appelée matrice de sensibilité complémentaire en sortie. Elle représente la matrice de transfert entre la référence r et la sortie y ; elle traduit l'influence des bruits de mesure sur la sortie et sur l'erreur ε .

- **Matrices de sensibilité en entrée**

$S_u(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}$ est appelée matrice de sensibilité en entrée. Elle représente la matrice de transfert entre la perturbation d et l'erreur ε .

$T_u(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}K(s)G(s)$ est appelée matrice de sensibilité complémentaire en entrée. Elle représente la matrice de transfert entre la perturbation d et la commande u .

- **Objectif de performances**

Compte tenu de l'interprétation que nous avons donnée des matrices S_y et T_y (respectivement S_u et T_u), il est clair que lorsqu'on effectue la synthèse du régulateur K on doit chercher à :

- rendre S_y le plus faible possible afin de réduire l'influence des perturbations et d'assurer un bon suivi de la référence.
- rendre T_y le plus faible possible afin de réduire l'influence des bruits de mesure.

Il en va de même en ce qui concerne les fonctions de sensibilité en entrée.

Mais comme $S_y + T_y = I$ et $S_u + T_u = I$, il est clair que les objectifs sur les fonctions de sensibilité et leur complémentaire sont contradictoires. Il faut donc trouver un compromis, qui est obtenu en rendant faible S_y et T_y sur des plages de fréquences différentes.

Remarque 4.1 :

Nous allons voir par la suite que les matrices S_y et T_y n'interviennent pas seulement pour représenter le comportement du système bouclé « nominal », mais aussi dans les conditions de stabilité du système soumis à des incertitudes de modélisation. Ce sont donc aussi des notions importantes pour l'étude de la robustesse.

4.3.3 Robustesse en stabilité

Le modèle de commande d'un système, quelle que soit la façon dont il a été obtenu, n'est toujours qu'une approximation. Il subsiste en effet toujours un certain nombre d'incertitudes qui sont essentiellement de deux types : les incertitudes paramétriques et les incertitudes de modélisation (pour plus de détails, voir le chapitre 1). En général la représentation de ces incertitudes peut se faire de différentes façons : on peut utiliser une représentation sous forme non structurée ou sous forme structurée, ou encore une représentation sous forme de factorisations premières. Le lecteur intéressé par plus de détails peut se reporter à [Vidyasagar M., 1985, K. Glover, 1989, D. McFarlane, 1990, M. Morari, 1989, J. C. Doyle, 1985].

Comme la seule information dont on dispose sur les erreurs liées à la réduction de modèle est une borne supérieure de la norme de ces erreurs, on s'intéresse dans notre étude à la robustesse en stabilité vis-à-vis des incertitudes avec représentation sous forme non structurée.

4.3.3.1 Robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes non structurées

Nous savons que toute mise en équations d'un processus physique nécessite des approximations, d'où résultent par conséquent des erreurs de modèle. La représentation de celles-ci peut être exprimée sous différentes formes, suivant le degré d'information qu'on souhaite voir apparaître : la représentation de ces incertitudes qu'on adopte par la suite doit être sous une forme simple à utiliser sur le plan mathématique. Les incertitudes peuvent être modélisées sous forme :

- additive : on peut représenter toutes les incertitudes sous une forme globale, par exemple en considérant que la matrice de transfert du système $\tilde{G}(j\omega)$ s'écarte d'une matrice de transfert nominale $G(j\omega)$ d'une quantité $\Delta_a(j\omega)$, ce qui s'écrit :

$$\tilde{G}(j\omega) = G(j\omega) + \Delta_a(j\omega) \text{ avec } \|\Delta_a(j\omega)\| < \delta_a(\omega) \quad \forall \omega, \quad (4.1)$$

(où $\delta_a(j\omega)$ représente la borne supérieure d'une norme de l'incertitude de modèle)

- multiplicative : il peut s'avérer préférable de relativiser Δ_a par rapport à G , ce qui peut se faire en adoptant l'une des deux formes suivantes, dites *multiplicatives directes* :

$$\begin{aligned} \tilde{G}(j\omega) &= (I_p + \Delta_s(j\omega))G(j\omega) \text{ avec } \|\Delta_s(j\omega)\| < \delta_s(\omega) \quad \forall \omega, \\ \tilde{G}(j\omega) &= G(j\omega)(I_m + \Delta_e(j\omega)) \text{ avec } \|\Delta_e(j\omega)\| < \delta_e(\omega) \quad \forall \omega. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dans le premier cas, les incertitudes de modélisation sont ramenées en sortie du système, dans le second cas, elles apparaissent en entrée.

- multiplicative inverse : on peut aussi utiliser les deux formes suivantes, dites *multiplicatives inverses*, et dont on constate qu'elles complètent utilement les précédentes :

$$\begin{aligned} \tilde{G}(j\omega) &= (I_p + \Delta_{is}(j\omega))^{-1}G(j\omega) \text{ avec } \|\Delta_{is}(j\omega)\| < \delta_{is}(\omega) \quad \forall \omega, \\ \tilde{G}(j\omega) &= G(j\omega)(I_m + \Delta_{ie}(j\omega))^{-1} \text{ avec } \|\Delta_{ie}(j\omega)\| < \delta_{ie}(\omega) \quad \forall \omega. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Notons que dans les cinq formulations retenues, $\Delta \equiv 0$ correspond à l'absence d'incertitude de modélisation. L'utilisation de ces cinq formes d'incertitudes non structurées est générale, car elles permettent de traiter par le même formalisme des incertitudes de nature diverse, ainsi par exemple :

- les erreurs de modélisation concernent les actionneurs (dont la dynamique peut être mal connue ou négligée) ; elles sont prises en compte en utilisant l'une des deux formes directe ou inverse en entrée.
- de même les erreurs de modélisation concernent les capteurs ; elles sont prises en compte par l'une des deux formes en sortie.
- l'utilisation d'un modèle simplifié, en vue de faciliter le calcul de la commande, peut se représenter par n'importe laquelle des cinq formes.
- la présence de non-linéarité peut également être prise en compte par l'une des cinq formes.

4.3.3.2 Théorèmes généraux de robustesse en stabilité

Le but de ce paragraphe est de rappeler les résultats généraux sur la robustesse en stabilité d'un système soumis à des incertitudes de modélisation. Considérons un système bouclé dont la matrice de transfert nominale de boucle ouverte est $Q(s)$, soumis à des incertitudes de modélisation représentées par l'une quelconque des différentes formes citées auparavant. Soit $\tilde{Q}(s)$ la matrice de transfert de boucle ouverte du système ainsi perturbé (figure 4.2).

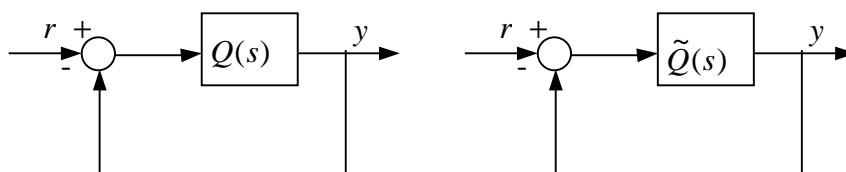


Figure 4.2 : Systèmes bouclés nominal et perturbé.

Théorème 4.3 ([Lentomaki N. A., 1981]) – Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) $Q(s)$ et $\tilde{Q}(s)$ ont le même nombre de pôles à partie réelle positive.
- 2i) $\tilde{Q}(s)$ a des pôles sur l'axe imaginaire, ceux-ci sont aussi pôles de $Q(s)$.
- 3i) le système bouclé nominal est stable.

alors le système bouclé perturbé est stable si pour tout s appartenant au contour de Nyquist et tout λ appartenant à $[0, 1]$: $\det[I + (1 - \lambda)Q(s) + \lambda\tilde{Q}(s)] \neq 0$.

Considérons à présent le schéma général représenté sur la figure 4.3, dans lequel la matrice $\Delta(s)$ représente les incertitudes de modélisation et $M(s)$ la matrice de transfert nominale du système bouclé, elle représente le transfert entre l'entrée v et la sortie z

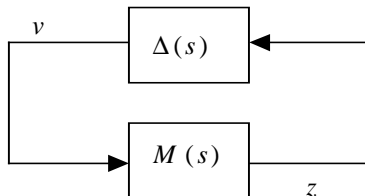


Figure 4.3 : Schéma d'un transfert nominal bouclé par des incertitudes.

Théorème 4.4 – Si $M(s)$ et $\Delta(s)$ ont leurs pôles à partie réelle strictement négative, alors le système de la figure 4.3 est stable pour toute matrice $\Delta(s)$ si

$$\|M\Delta\| < 1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(M(j\omega)\Delta(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega. \quad (4.4)$$

En appliquant le théorème 4.4 à chacune des cinq formes d'incertitudes non structurées introduites auparavant, nous obtenons cinq conditions de robustesse en stabilité du système bouclé suivant la forme adoptée.

Théorème 4.5 (forme additive) – Le système bouclé soumis à des incertitudes additives (4.1) est stable si :

$$\bar{\sigma}(\Delta_a(j\omega))\bar{\sigma}\left(K(j\omega)(I_p + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}\right) < 1 \quad \forall \omega. \quad (4.5)$$

Théorème 4.6 (forme multiplicative directe) – Le système bouclé soumis à des incertitudes multiplicatives directes (4.2) est stable si :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\Delta_s(j\omega))\bar{\sigma}\left(G(j\omega)K(j\omega)(I_p + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}\right) < 1 \quad \forall \omega, \\ \bar{\sigma}(\Delta_e(j\omega))\bar{\sigma}\left(K(j\omega)G(j\omega)(I_m + K(j\omega)G(j\omega))^{-1}\right) < 1 \quad \forall \omega. \end{aligned} \quad (4.6)$$

les conditions (4.6) peuvent s'écrire encore :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\Delta_s(j\omega))\bar{\sigma}(T_y(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega, \\ \bar{\sigma}(\Delta_e(j\omega))\bar{\sigma}(T_u(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Théorème 4.7 (forme multiplicative inverse) – Le système bouclé soumis à des incertitudes multiplicatives inverses (4.3) est stable si :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\Delta_{is}(j\omega))\bar{\sigma}\left((I_p + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}\right) &< 1 \quad \forall \omega, \\ \bar{\sigma}(\Delta_{ie}(j\omega))\bar{\sigma}\left((I_m + K(j\omega)G(j\omega))^{-1}\right) &< 1 \quad \forall \omega,\end{aligned}\tag{4.8}$$

les conditions (4.8) peuvent s'écrire encore :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\Delta_{is}(j\omega))\bar{\sigma}(S_y(j\omega)) &< 1 \quad \forall \omega, \\ \bar{\sigma}(\Delta_{ie}(j\omega))\bar{\sigma}(S_u(j\omega)) &< 1 \quad \forall \omega.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Remarque 4.2 :

Nous avons déjà souligné que les matrices de sensibilités sont liées par $S_y + T_y = I$ et $S_u + T_u = I$, et donc S_y et T_y (respectivement S_u et T_u), et ne peuvent donc pas être faibles dans la même plage de fréquences. On a donc intérêt à modéliser les incertitudes sous différentes formes (par exemple, une sous forme multiplicative directe et une sous forme multiplicative inverse).

Les résultats des paragraphes 4.2 permettent l'analyse de performances nominales et de la robustesse en stabilité d'un système de matrice de transfert nominale $G(s)$, pour un régulateur $K(s)$ donné. Nous nous intéressons dans le paragraphe qui suit, à la façon de traduire les conditions de performances et de robustesse citées précédemment sous une forme qui permet de guider le choix de ce régulateur et pour en faciliter aussi sa synthèse. On peut donc adopter comme objectif de déterminer un régulateur qui établisse un compromis entre les performances nominales et la robustesse en stabilité vis-à-vis des incertitudes. Le concept de « loop-shaping », introduit par la suite répond à cet objectif.

4.4 Synthèse du régulateur

4.4.1 Objectifs de synthèse : concept de « loop-shaping » ([Doyle J. C., 1991])

D'après la remarque 4.2 nous choisissons deux formes d'incertitudes, l'une, sous forme multiplicative directe en sortie, et l'autre, sous forme multiplicative inverse en sortie :

$$\begin{aligned}\tilde{G}(j\omega) &= (I_p + \Delta_s(j\omega))G(j\omega) \quad \text{avec } \|\Delta_s(j\omega)\| < \delta_s(\omega) \quad \forall \omega \\ \tilde{G}(j\omega) &= (I_p + \Delta_{is}(j\omega))^{-1}G(j\omega) \quad \text{avec } \|\Delta_{is}(j\omega)\| < \delta_{is}(\omega) \quad \forall \omega.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Les deux conditions de robustesse en stabilité correspondant aux deux incertitudes (4.10) sont :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\Delta_{is}(j\omega))\bar{\sigma}(S_y(j\omega)) &< 1 \quad \forall \omega \\ \bar{\sigma}(\Delta_s(j\omega))\bar{\sigma}(T_y(j\omega)) &< 1 \quad \forall \omega.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Les performances nominales sont obtenues lorsque qu'on a un bon suivi de la référence et une bonne réjection des perturbations pour le système nominal en cherchant à rendre la norme de $S_y = (I_p + GK)^{-1}$ la plus faible possible. Par ailleurs, d'après la première condition de (4.11), cet objectif est cohérent avec la recherche de robustesse en stabilité pour des incertitudes modélisées sous forme inverse. Toutefois, tout processus étant globalement passe-bas, GK est faible en hautes fréquences, où l'on a donc $S_y \approx I_p$. L'atténuation de la norme de S_y , et donc l'obtention de performances nominales satisfaisantes doit être recherchée en basses fréquences. Cet objectif peut être traduit par la condition suivante :

$$\bar{\sigma}(S_y(j\omega)) < \frac{1}{\bar{\sigma}(\Delta_{is}(j\omega))} \quad \forall \omega < \omega_b. \quad (4.12)$$

Par contre si l'on cherche la robustesse en stabilité, la deuxième condition de (4.11), indique que l'on doit chercher à minimiser $T_y = GK(I_p + GK)^{-1}$. Par ailleurs, cet objectif est cohérent avec la réjection des bruits de mesure, or GK est grand en basses fréquences, où l'on a donc $T_y \approx I_p$. L'atténuation de T_y doit donc être recherchée en hautes fréquences, où les erreurs de modélisation sont en général importantes. Cet objectif se traduit par la condition suivante :

$$\bar{\sigma}(T_y(j\omega)) < \frac{1}{\bar{\sigma}(\Delta_s(j\omega))} \quad \forall \omega > \omega_h. \quad (4.13)$$

Les deux conditions (4.12) et (4.13) peuvent aussi s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(\Delta_{is}(j\omega)) < \underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) & \forall \omega < \omega_b \\ \bar{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) < \frac{1}{\bar{\sigma}(\Delta_s(j\omega))} & \forall \omega > \omega_h, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\text{car } \begin{cases} \bar{\sigma}(T_y(j\omega)) \cong \bar{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) & \forall \omega > \omega_h \\ \bar{\sigma}(S_y(j\omega)) \cong \underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) & \forall \omega < \omega_b. \end{cases}$$

Notons que le choix des pulsations spécifiques ω_b et ω_h dépend des applications et des connaissances que l'on possède sur les valeurs des incertitudes (dans notre cas ces incertitudes sont les erreurs de réduction, que l'on sait bien calculer numériquement).

Les conditions de (4.14) définissent ainsi un gabarit qui doit être satisfait par les valeurs singulières de la matrice de transfert de boucle ouverte GK , ce qui facilite la synthèse du régulateur (la méthode de synthèse s'appelle synthèse par loop-shaping) : il est plus simple en effet de régler GK que S_y et T_y .

Remarque 4.3:

Les conditions (4.14) illustrent le compromis classique précision / stabilité : toute augmentation des valeurs singulières améliore les performances en basses fréquences (précision) mais peut entraîner l'instabilité. Donc le meilleur compromis est obtenu si l'on arrive à rapprocher le plus possible les valeurs singulières inférieures et supérieures de GK , et leurs donner une allure monotone décroissante.

La plupart des méthodes de synthèse de régulateur, monovariables ou multivariables, peuvent être interprétées en terme de « loop-shaping », il existe toujours dans toute bonne méthode de commande un certain nombre de degrés de liberté que doit gérer l'utilisateur, ce qu'il peut faire en tenant compte d'objectifs tels que ceux présentés ci-dessus. Nous montrons comment les techniques de la commande LQG peuvent être adaptées dans cet esprit. Afin de répondre à notre problème qui consiste à chercher un régulateur optimal robuste K qui vérifie les contraintes de la relation (4.14), nous utilisons la technique de la commande LQG/LTR à pondérations fréquentielles. C'est une méthode d'optimisation avec un coût quadratique dans laquelle les pondérations varient en fonction de la fréquence.

4.4.2 Commande LQG/LTR à pondérations fréquentielles

Les contraintes (4.14) obtenus précédemment constituent une base sur laquelle peut être élaborée une méthode de commande multivariable. L'approche que nous présentons ici, consiste en une adaptation et un prolongement de la méthode LQG classique afin de prendre en compte les objectifs de performances nominales et de robustesse en stabilité énoncés plus haut.

La synthèse d'un régulateur LQG classique comporte deux étapes, duales et indépendantes :

- la synthèse d'un retour d'état par optimisation d'un critère quadratique.

- la synthèse d'un filtre de Kalman permettant d'implanter la commande à partir des seules mesures disponibles.

L'approche LTR consiste à synthétiser l'un des deux éléments en prenant en compte les objectifs de performances et de robustesse, puis à calculer l'autre afin que la matrice de transfert de boucle ouverte de l'ensemble se rapproche progressivement de celle obtenue à la première étape, d'où son nom (LTR = « Loop Transfert Recovery »). L'approche la plus naturelle consiste à calculer d'abord le retour d'état puis le filtre de Kalman.

Si l'état d'un système est entièrement mesurable, le filtre de Kalman n'est pas nécessaire. On obtient alors le régulateur optimal LQ. Par contre lorsque l'état du système n'est pas entièrement mesurable, on implante la commande par l'intermédiaire d'un observateur. Comme dans le cas du système monovisible le régulateur optimal LQ du système multivariable possède aussi des propriétés de robustesse et de performances remarquables très intéressantes (condition de différence de retour). La question que l'on peut se poser maintenant est de savoir comment récupérer les mêmes propriétés de robustesse et de performances pour le régulateur optimal LQG, sachant que l'introduction, sans précaution particulière, d'un observateur fait perdre les propriétés de robustesse du régulateur LQ. Le théorème du LTR que nous présentons permet de répondre à cette question. Il été montré en effet que, même dans le cas monovisible, l'observateur pouvait amener une dégradation considérable des marges de stabilité [Doyle J. C, 1981], il convient donc de faire en sorte que le calcul de l'observateur ne dégrade pas ces propriétés, en particulier en ce qui concerne la robustesse. Différentes approches ont été envisagées pour traiter ce problème [Doyle J. C., J. B. Moore, B. D. Anderson, M. Athans, G. Stein, 1989]. Toutes partent du même principe : pour retrouver le compromis performances / robustesse du régulateur optimal LQ, il suffit que la matrice de transfert de boucle du régulateur LQ (sans observateur) soit voisine de la matrice de transfert de boucle du régulateur LQG.

- **Matrice de transfert de boucle du régulateur LQ**

Considérons le problème du régulateur optimal LQ classique, solution du problème de minimisation du critère quadratique J suivant :

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (4.15)$$

$$J = \int_0^{+\infty} \left(y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t) \right) dt, \quad Q \geq 0, \quad R > 0. \quad (4.16)$$

En utilisant le théorème de Parseval, le critère Sortie / Entrée (4.16) est équivalent à

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Y(j\omega)^* Q Y(j\omega) + U(j\omega)^* R U(j\omega) \right) d\omega. \quad (4.17)$$

Notons que les deux pondérations Q et R sont les mêmes dans tout le domaine de fréquences, ce qui paraît une vue simpliste étant donné la dépendance fréquentielle des différents signaux. Afin de répondre à nos objectifs de robustesse et de performances, ainsi que pour faciliter la synthèse de notre commande optimale robuste, nous introduisons des pondérations fréquentielles $Q(j\omega)$ et $R(j\omega)$, qui peuvent s'interpréter comme des filtres agissant sur l'entrée et la sortie du système, le critère J s'écrit donc :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Y(j\omega)^* Q(j\omega) Y(j\omega) + U(j\omega)^* R(j\omega) U(j\omega) \right) d\omega. \quad (4.18)$$

La décomposition spectrale suivante :
$$\begin{cases} Q(s) = Q^{1/2}(s)^* Q^{1/2}(s) \\ R(s) = R^{1/2}(s)^* R^{1/2}(s), \end{cases} \quad (4.19)$$

permet de définir deux variables auxiliaires :
$$\begin{cases} \bar{U}(s) = R^{1/2}(s) U(s) \\ \bar{Y}(s) = Q^{1/2}(s) Y(s). \end{cases} \quad (4.20)$$

Notons $G(s) = C(sI_n - A)^{-1} B$, la matrice de transfert du système (S), les deux variables auxiliaires pouvant être interprétées comme les nouvelles entrées et sorties d'un système augmenté représenté par un schéma bloc sur la figure 4.4a:

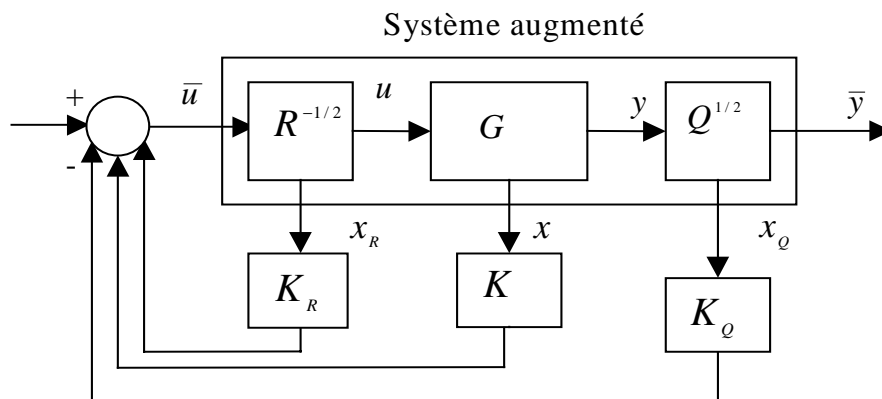


Figure 4.4 : Schéma du régulateur à pondérations fréquentielles.

Le critère (4.18) peut alors se mettre sous la forme :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{Y}(j\omega)^* \bar{Y}(j\omega) + \bar{U}(j\omega)^* \bar{U}(j\omega) \right) d\omega. \quad (4.21)$$

Le problème d'optimisation du critère (4.18) est donc équivalent à calculer le régulateur optimal LQ, solution du problème suivant :

$$\min_{\bar{u}} \int_0^{+\infty} \left(\bar{y}(t)^t \bar{y}(t) + \bar{u}(t)^t \bar{u}(t) \right) dt, \quad (4.22)$$

pour le système augmenté (S_{augm}) d'état $X = (x_R, x, x_Q)^t$, défini par

$$\begin{aligned} (R^{-1/2}) \quad & \begin{cases} \dot{x}_R = A_R x_R + B_R \bar{u} \\ u = C_R x_R + D_R \bar{u}, \end{cases} \\ (S) \quad & \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx, \end{cases} \\ (Q^{1/2}) \quad & \begin{cases} \dot{x}_Q = A_Q x_Q + B_Q y \\ \bar{y} = C_Q x_Q + D_Q y. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Le régulateur est alors de la forme : $\bar{u} = -K_R x_R - Kx - K_Q x_Q$.

Afin de choisir convenablement les filtres $R^{-1/2}$ et $Q^{1/2}$, on peut se baser sur les observations suivantes :

- Les pondérations sur la commande $R^{-1/2}(s)$ permettent une décroissance plus rapide des valeurs singulières de la matrice de transfert GK hors bande passante, améliorant la robustesse et le filtrage des bruits dans ce domaine de fréquence : si n_R est l'ordre du filtre $R^{-1/2}(s)$, on constate une décroissance en $(-1 - n_R) \times 20 \text{ dB/décade}$.
- Les pondérations sur la sortie $Q^{1/2}(s)$ agissant dans la bande passante permettent un accroissement de pente de $n_Q \times 20 \text{ dB/décade}$, où n_Q est l'ordre du filtre $Q^{1/2}(s)$. Elles permettent donc l'obtention de meilleures performances en basses fréquences, telles que le suivi de la consigne où le rejet des perturbations.

- **Matrice de transfert de boucle du régulateur LQG**

Avant de calculer l'observateur assurant le recouvrement souhaité (rapprochant les deux matrices de transfert des régulateurs LQ et LQG), nous rappelons tout d'abord quelques résultats fondamentaux obtenus par la théorie classique du régulateur LQG [Kawkernek H., R. Sivan, 1972] [G. Duc], [Anderson B. D. O., J. B. Moore, 1989].

Soit un système défini par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t), & x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^m, \\ y(t) = Cx(t) + w(t), & y \in \mathfrak{R}^p, \end{cases} \quad (4.24)$$

où v et w sont des bruits blancs centrés, de matrice de variance-covariance :

$$E\{vv^T\} = V \geq 0, \quad E\{ww^T\} = W > 0.$$

Le régulateur optimal LQG classique qui réalise l'optimisation du critère quadratique :

$$J = \lim_{t_f \rightarrow +\infty} E \left\{ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \right\}; \quad Q \geq 0, \quad R > 0, \quad (4.25)$$

est constitué de l'association d'un retour d'état et d'un filtre de Kalman, soit :

$$\begin{cases} u(t) = -K\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f(y(t) - C\hat{x}(t)), \end{cases} \quad (4.26)$$

où K et K_f sont solutions des deux équations de Riccati suivante :

$$\begin{aligned} K &= R^{-1}B^T P \\ PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q &= 0 \\ K_f &= \Sigma B^T W^{-1} \\ \Sigma A + A^T \Sigma - \Sigma C^T W^{-1} C \Sigma + V &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nous présentons ici l'approche la plus utilisée [Doyle J., B. D. O. Anderson, G. Stein, 1987], qui utilise un filtre de Kalman particulier, en choisissant comme matrices de variance-covariance de bruit (voir système (4.24)) :

$$\begin{aligned} E\{vv^T\} &= V = V_0 + q^2 BB^T \\ E\{ww^T\} &= W_0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

où V_0 et W_0 sont les matrices de variance-covariance nominales des bruits, et q est un paramètre scalaire qui, d'après (4.24), a pour effet d'augmenter la variance d'un bruit fictif agissant sur la commande.

D'après l'expression du filtre de Kalman donnée en (4.26), la matrice de transfert de boucle du régulateur LQ sans observateur s'écrit :

$$K_{LQ}(s) = K(sI_n - A)^{-1}B, \quad (4.29)$$

de la même façon, la matrice de transfert de boucle du régulateur LQG s'écrit :

$$K_{LQG}(s) = K(sI_n - A + BK + K_f C)^{-1}K_f C(sI_n - A)^{-1}B. \quad (4.30)$$

En considérant les matrices de variance-covariance (4.19), l'auteur dans [J. C. Doyle, 1981] a démontré le théorème du LTR suivant :

Théorème 4.8 (théorème du LTR) – Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $\dim y \geq \dim u$ ($p \geq m$)
 - $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ est à minimum de phase ($G(s)$ n'a aucun zéro dans le demi-plan droit $\operatorname{Re}(s) \geq 0$)
- alors lorsque $q \rightarrow +\infty$: $K_{LQG}(s) \rightarrow K_{LQ}(s)$.

En choisissons comme filtres, $R^{-1/2}(s)$ un filtre du premier ordre et $Q^{1/2}(s)$ un filtre à retard de phase :

$$R^{-1/2}(s) = \frac{k_R}{1 + \tau_R s} I_m, \quad Q^{1/2}(s) = k_Q \frac{1 + \tau_Q}{1 + 10\tau_Q s} I_p. \quad (4.31)$$

On obtient grâce au pré-filtre $R^{-1/2}(s)$ une décroissance rapide des valeurs singulières de la matrice de transfert GK hors bande passante (-40 dB/décade) améliorant ainsi la robustesse en hautes fréquences et le filtrage des bruits ; grâce au post-filtre $Q^{1/2}(s)$, on obtient une croissance des valeurs singulières dans la bande passante en (20 dB/décade) garantissant de meilleures performances en basses fréquences. Ces deux filtres sont utilisés aussi pour calculer le régulateur K (voir figure 4.4).

L'approche que nous utilisons est l'application du LTR au régulateur optimal LQG (4.21) : elle consiste à augmenter la valeur de q , jusqu'à ce que les deux transferts K_{LQ} et

K_{LQG} du régulateur LQ et du régulateur LQG se rapprochent (au sens des valeurs singulières).

Remarque 4.4 :

L'inconvénient de cette approche réside dans le fait qu'augmenter q revient à accorder plus d'importance au bruit d'état, et donc à dégrader le filtrage de bruit de mesure. Pour pouvoir donc limiter la sensibilité à ce bruit, on va tolérer en pratique, un écart entre la matrice de transfert du régulateur LQ et celle du régulateur LQG, il convient donc d'arrêter l'augmentation de q lorsqu'on a obtenu le recouvrement dans une bande de fréquence garantissant le niveau de performances et de robustesse souhaité. Dans le cas d'un système à déphasage non minimal ($G(s)$ a des zéros dans le demi-plan droit $Re(s) \geq 0$), le recouvrement exact ne peut pas être obtenu, mais on peut tenter d'appliquer la procédure LTR précédente, afin de trouver un recouvrement approché dans la bande de fréquence souhaitée, qui peut suffire à obtenir un compromis performances/robustesse satisfaisant [Zhang Z., J. Freudenberg, 1990].

• **Méthodologie utilisée**

1. Réglage du régulateur LQ par pondérations fréquentielles (Loop Shaping) ;
2. Calcul de l'observateur optimal $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B(C_R x_R + D_R \bar{u}) + K_f (y(t) - C\hat{x}(t))$, avec $\bar{u} = -K_R x_R - Kx - K_Q x_Q$ à partir de $W = W_0$ et $V = V_0 + q^2 BB^T$, pour q donné ;
3. Comparaison des valeurs singulières de K_{LQ} et K_{LQG} ;
4. Si OK, alors FIN, sinon : augmenter q et retour en 2 ;

K_{LQ} est calculé à partir de $\bar{u}(s) \rightarrow K_R x_R(s) + Kx(s) + K_Q x_Q(s)$.

K_{LQG} est calculé à partir de $\bar{u}(s) \rightarrow K_R x_R(s) + K\hat{x}(s) + K_Q x_Q(s)$.

4.5 Application à notre modèle réduit de collocation

Nous avons déjà calculé le modèle réduit (3.8) obtenu par la méthode de collocation, pour lequel nous avons déjà établi, à partir des simulations numériques, qu'il représente de façon satisfaisante le comportement dynamique du modèle linéarisé de Saint-Venant (2.29). Nous avons aussi calculé numériquement les erreurs de réduction qui se produisent

dans l'étape de réduction, et que nous avons exprimé sous forme multiplicative directe $\Delta_s(s)$ et sous forme multiplicative inverse $\Delta_{is}(s)$ (voir formule (3.18)). Dans notre cas, le modèle réduit représente le système nominal avec sa matrice de transfert $G(j\omega)$ (voir chapitre 3) et le modèle linéarisé de Saint-Venant représente le système perturbé avec sa matrice de transfert irrationnelle $\tilde{G}(j\omega)$, les erreurs de réduction correspondant aux incertitudes de modélisation. La méthodologie que nous avons développée ci-dessus a été appliquée à notre problème, mais avec un recouvrement approché car notre modèle réduit est un système à déphasage non minimal, donc on ne peut pas espérer un recouvrement total (voir théorème du LTR, Remarque 4.4).

Nous rappelons ici certaines notations et certains résultats que nous avons déjà utilisés dans le chapitre précédent :

Le modèle réduit est donné sous la forme suivante :

$$(S_c) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (4.32)$$

où le vecteur d'état $x(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t), Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_N(t))'$ est composé des valeurs des tirants d'eau et des débits aux N points de collocation. Les matrices A ; B ; C sont explicitées au chapitre 3.

Les variables de commande u sont les variations du débit amont et de la hauteur aval:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'_N(t) \\ Q'_1(t) \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Les sorties mesurées du système sont choisies pour être les variables complémentaires suivantes:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ Q_N(t) \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Pour les simulations numériques, nous utilisons les mêmes paramètres du micro-canal que ceux utilisés au chapitre 2 (voir tableau 2.1), les profils initiaux de débit et de tirant d'eau sont choisis uniforme le long du canal : $h(x,0) = 0.06 \text{ m}$; $Q(x,0) = 0.0021 \text{ m}^3 / \text{s}$; les profils d'équilibre uniforme de débit et de tirant d'eau, que nous souhaitons atteindre via la commande, sont donnés par : $h_e = 0.1 \text{ m}$; $Q_e = 0.0046 \text{ m}^3 / \text{s}$. Nous prenons comme matrices de variance-covariance nominales $W_0 = I$, $V_0 = I$.

Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure 4.5a. Les valeurs singulières supérieures de la matrice de transfert GK de boucle ouverte sont comparées aux valeurs singulières des deux erreurs afin de vérifier que les contraintes de robustesse et de performances sont satisfaites. Elle sont exprimées en fonction des valeurs singulières de la matrice de transfert de boucle ouverte GK , les paramètres choisis pour les filtres sont $k_R=1$, $\tau_R=50$, $k_Q=300$, $\tau_Q=0.01$.

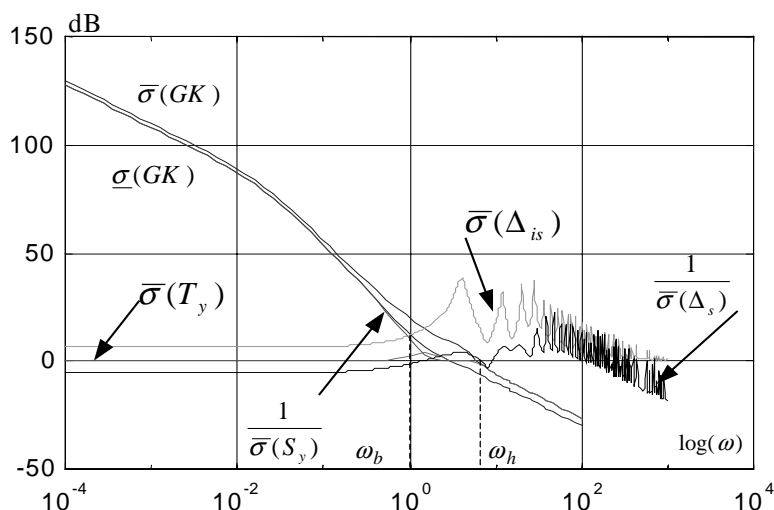


Figure 4.5a : Concept de « loop-shaping » dans le cas uniforme.

Nous avons déjà souligné au chapitre 3 que dans les canaux à surface libre réels, le régime d'équilibre est un régime non uniforme, donc il faut bien s'assurer que notre commande optimale déjà développée respecte aussi les contraintes de robustesse utilisées auparavant pour la synthèse de cette commande. De la même façon nous traçons sur la figure 4.5b, les contraintes de robustesses exprimées en fonction des valeurs singulières de la matrice de transfert GK , et les valeurs singulières des erreurs dans le cas d'un régime non uniforme (voir figure 4.5b). On constate que, même dans le cas du régime non uniforme, les erreurs de réduction respectent aussi les conditions de robustesse données par les relations (4.14).

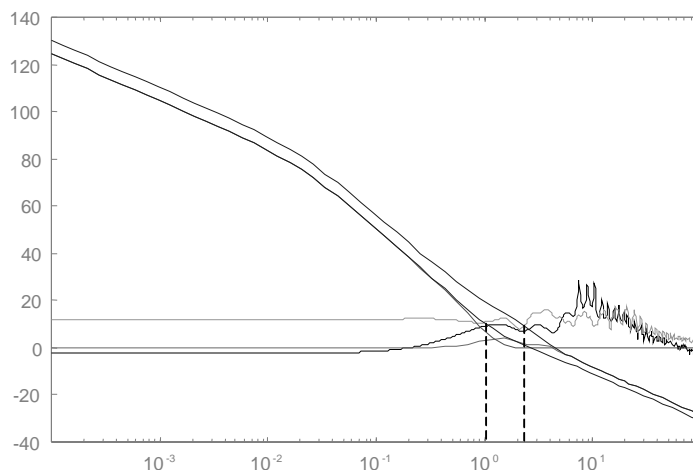


Figure 4.5b : Concept de « loop-shaping » dans le cas non uniforme.

4.5.1 Validation de la commande

La validation de la commande se fait en plusieurs étapes. La première étape consiste à valider la commande sur le modèle nominal (modèle de collocation des équations de Saint-Venant linéarisées) c'est-à-dire sur le modèle utilisé pour la calculer. Ensuite dans le but de tester la validité de cette commande sur des modèles complets, et donc sa robustesse par rapport au modèle nominal, la commande est appliquée à des modèles perturbés, modèle de Saint-Venant linéarisé de Preissmann et le modèle de Saint-Venant non-linéaire de Preissmann. Les résultats de ces validations sont représentés sur les figures 4.6 , 4.7 et sur la figure 4.8 et 4.9.

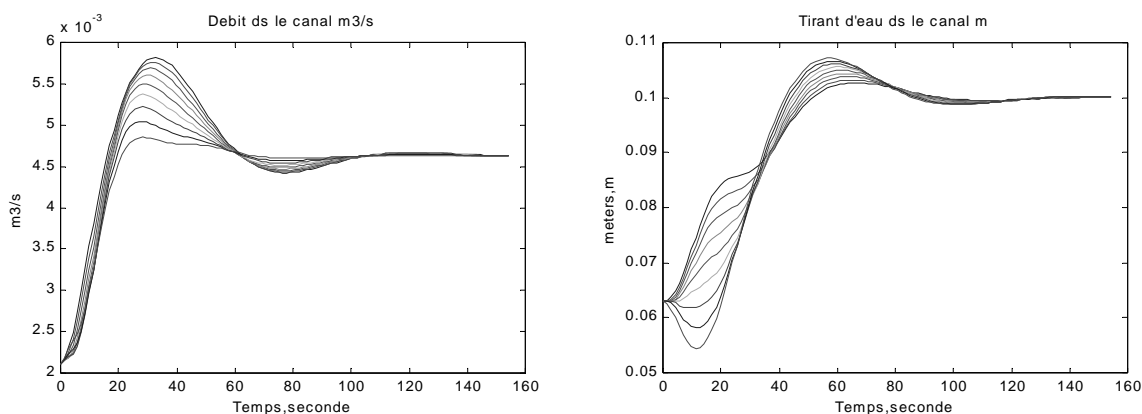


Figure 4.6 : Profils des débits et des tirants d'eau calculés tous les mètres pour le modèle de collocation des équations de Saint-Venant linéarisées.

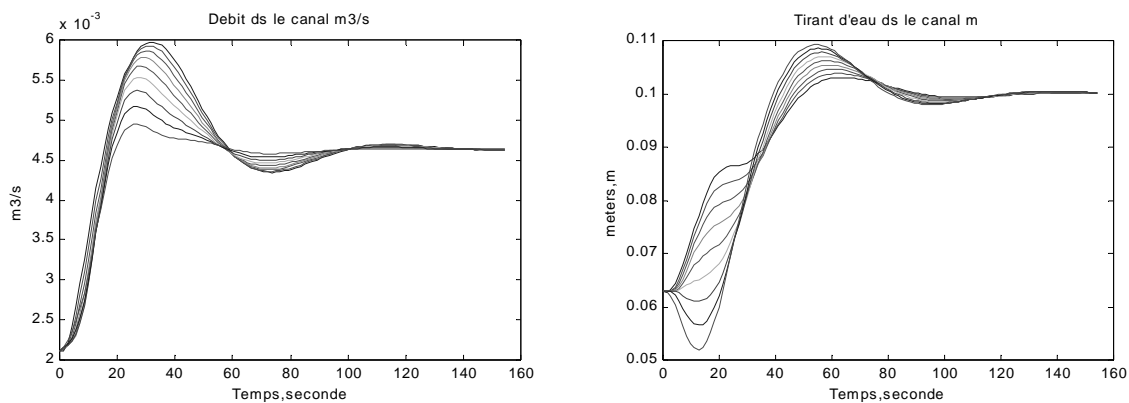


Figure 4.7 : Profils des débits et des tirants d'eau calculés tous les mètres pour le modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant linéarisées.

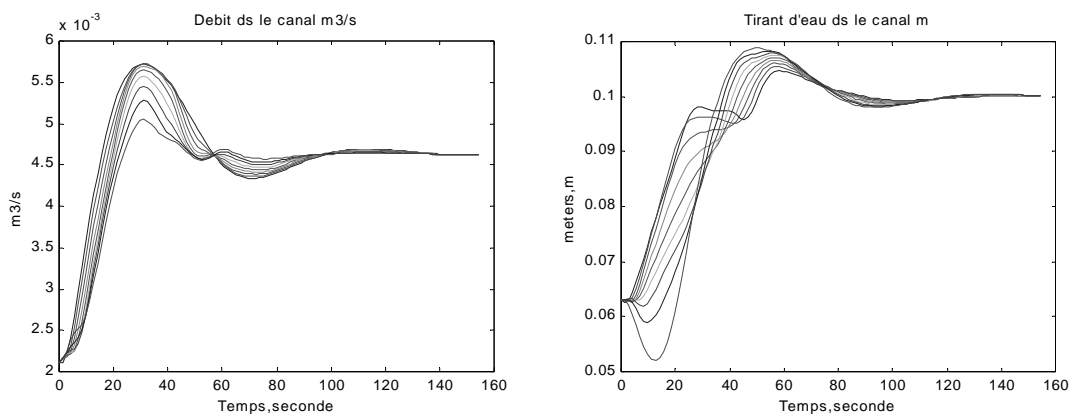


Figure 4.8 : Profils des débits et des tirants d'eau calculés tous les mètres pour le modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant non-linéaires.

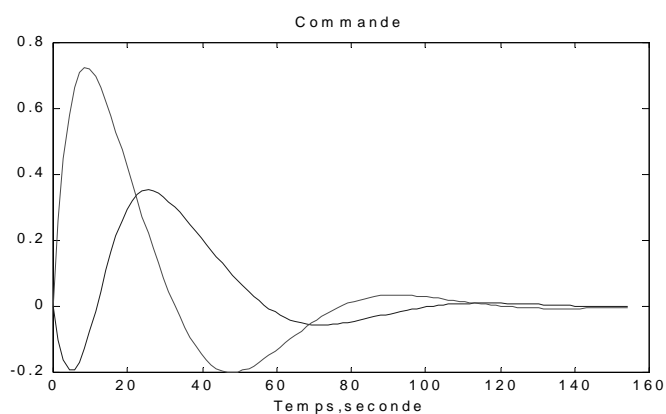


Figure 4.9: Commande en débit amont et tirant d'eau aval.

- **Validation de la commande sur un canal réel**

Dans ce paragraphe nous allons tester notre loi de commande optimale robuste sur un canal réel. Nous prenons comme exemple le canal utilisé dans [Dulhôte J. F., 2003], caractérisé par :

un canal de longueur $L = 20 \text{ km}$ et de largeur $B = 1 \text{ m}$; un tirant d'eau d'équilibre à atteindre $h_e = 1.5 \text{ m}$ et d'une débit d'équilibre $Q_e = 3.4884 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, avec un nombre de point collocation $N = 15$, et les conditions initiales $h(x,0) = 0.3376 \text{ m}$ $Q(x,0) = 1.5273 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

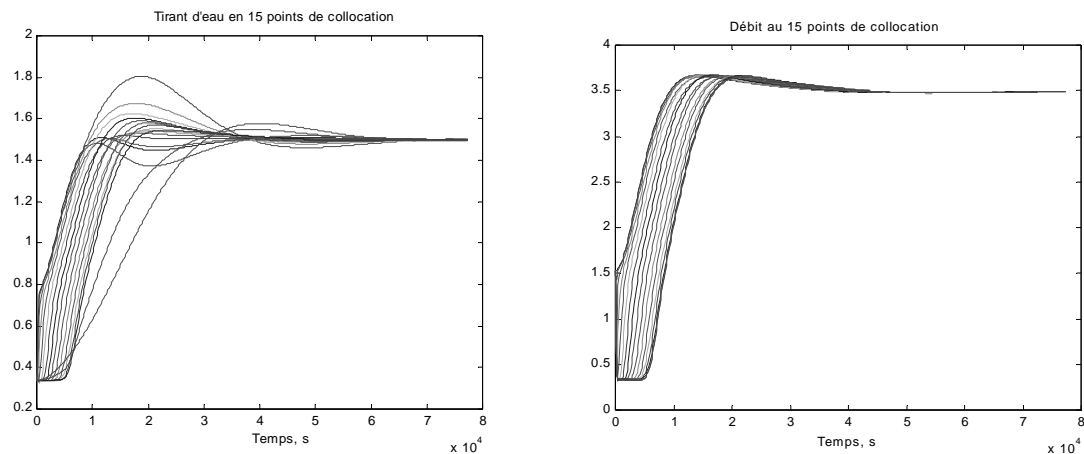


Figure 4.10 : Profils des débits et des tirants d'eau calculés en 15 points de collocation pour le modèle de Saint-Venant linéarisé de collocation.

4.5.2 Validation de l'observateur

D'après la figure 4.4, l'algorithme de commande avec l'observateur peut se mettre sous la forme du schéma bloc suivant :

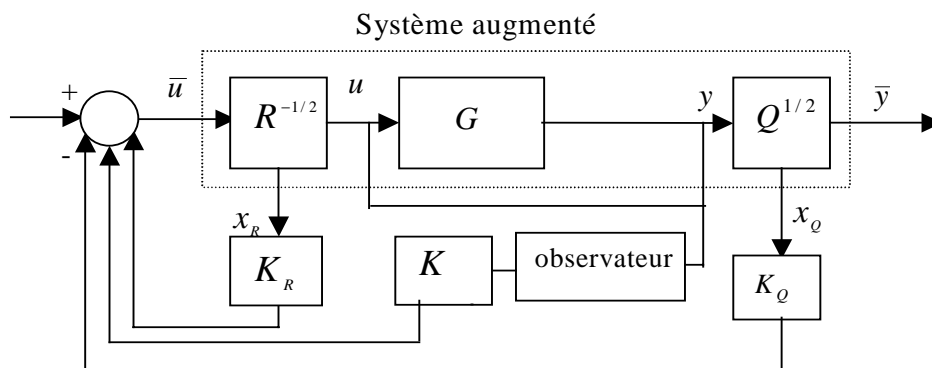


Figure 4.11 : Schéma du régulateur avec observateur.

En utilisant la technique de recouvrement approché développée auparavant, l'observateur peut être calculé à partir de la relation (4.26). Il permet la construction de l'état x du système à partir des seules variables mesurées : débit aval et tirant d'eau amont. La figure 4.12 illustre le recouvrement obtenu progressivement en augmentant la valeur de q , tandis que les figures 4.13, 4.14 représentent la validation de l'observateur sur les trois modèles déjà utilisés pour la validation de la commande.

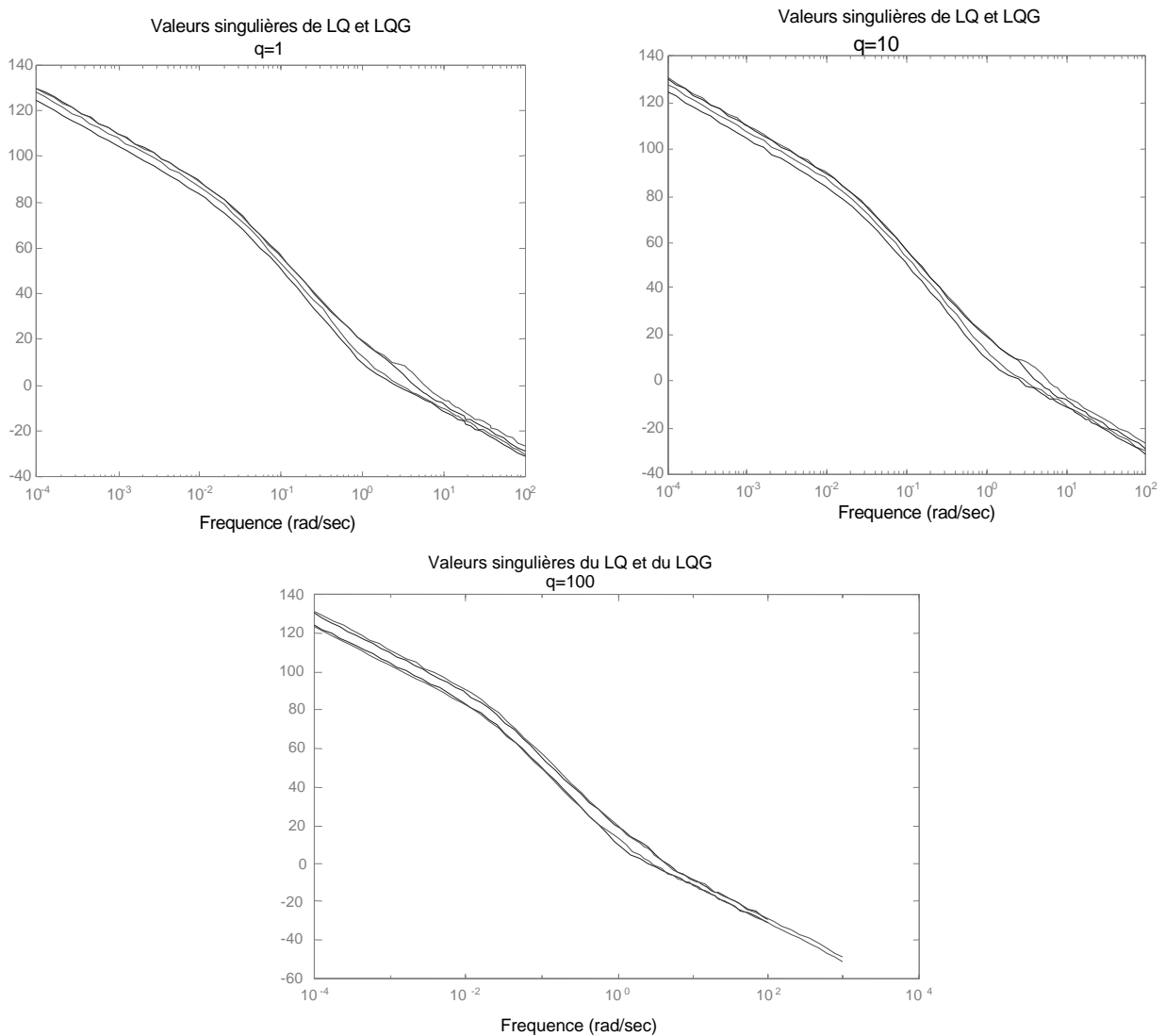


Figure 4.12 : Valeurs singulières de K_{LQ} et K_{LQG} .

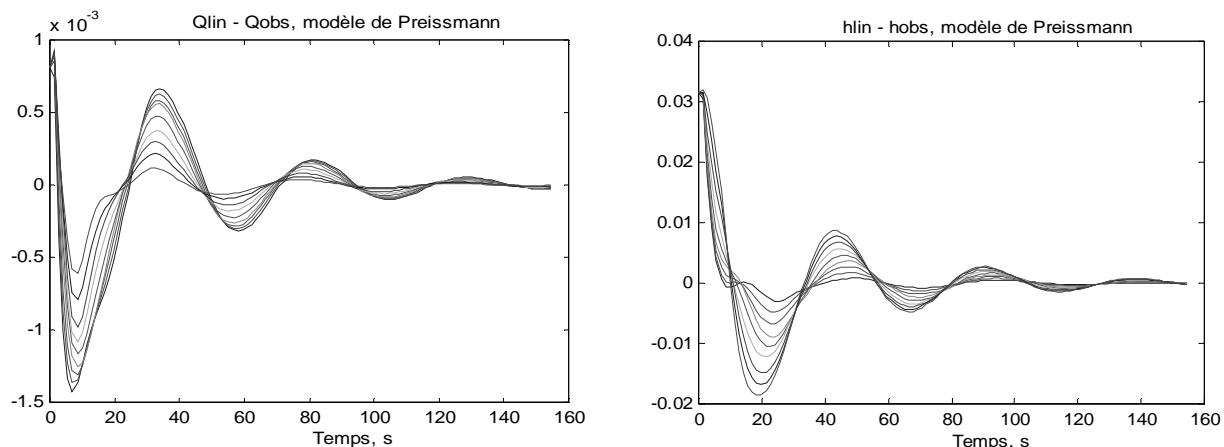


Figure 4.13 : Valeurs d'erreurs ($Q_{lin}-Q_{obs}$) et ($h_{lin}-h_{obs}$) entre les valeurs des débits réels et observés, ainsi les valeurs des hauteurs réelles et observées, tous les mètres pour le modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant linéarisées.

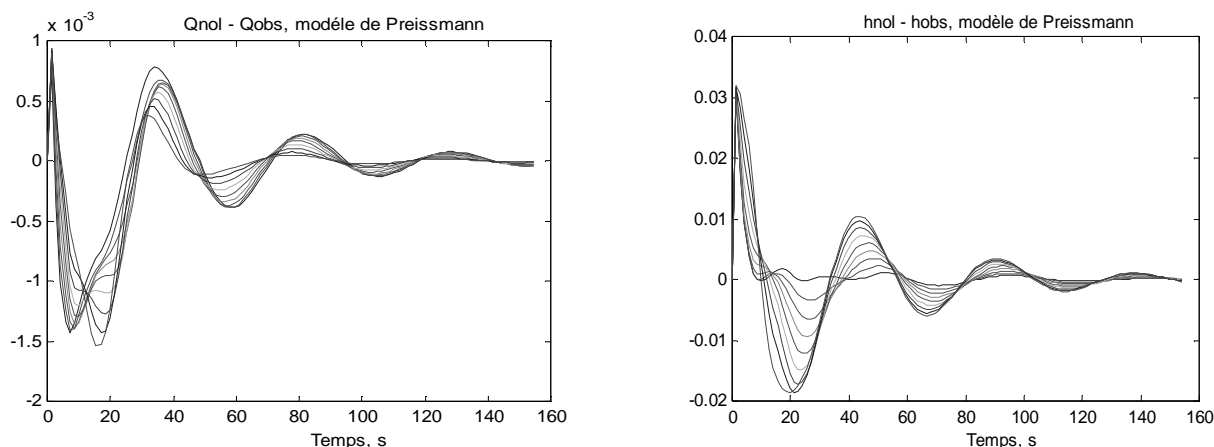


Figure 4.14 : Valeurs d'erreurs ($Q_{nol}-Q_{obs}$) et ($h_{nol}-h_{obs}$) entre les valeurs des débits réels et observés, ainsi les valeurs des hauteurs réelles et observées, tous les mètres pour le modèle de Preissmann de Saint-Venant non-linéaire.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué une méthode pour la conception d'une loi de commande robuste aux erreurs résultant de la réduction du modèle d'équations aux dérivées partielles de Saint-Venant. La commande a été développée en utilisant la méthode de commande LQG/LTR à pondérations fréquentielles. Un observateur optimal a été également développé ; il permet de reconstituer l'état du système à partir des seules mesures, en tenant compte des objectifs de robustesse et de performances. La commande et l'observateur ont été appliqués aux trois modèles : modèle de collocation des équations de Saint-Venant linéarisées, modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant

linéarisées, modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant non-linéaires. La robustesse a été étudiée par simulation sur des systèmes perturbés, éloignés du système nominal. Les résultats de simulations réalisés montrent un comportement très satisfaisant de la commande et de l'observateur. Il est à noter que, même si l'accent a été mis sur la robustesse vis-à-vis des erreurs de réduction, la méthodologie permet d'intégrer des gabarits d'incertitudes sur les paramètres physiques du système (pente, frottement ou géométrie du canal). De plus, il est possible d'appliquer la même méthodologie en utilisant une synthèse H_∞ , quelle que soit la méthode (LQG/H_2 ou H_∞) l'important est de satisfaire les gabarits fréquentiels permettant d'obtenir les performances et la robustesse désirées (Loop-Shaping). Dans le chapitre 7, nous présentons des résultats expérimentaux sur le micro-canal de Valence permettant de confirmer les performances et la robustesse de la méthodologie de commande. Une fois les entrées optimales calculées et exprimées en termes de débit amont et de tirant d'eau aval, elles doivent encore être réalisées à l'aide des deux vannes situées à chaque extrémité du bief, car en pratique les vraies entrées de commande sont les ouvertures des vannes. Ceci signifie qu'il est nécessaire de prendre en compte maintenant les lois des vannes. Le problème qui se pose alors est de trouver les deux ouvertures de vannes (voir les figures 2.1 et 2.8) telles que le débit amont et tirant d'eau aval soient le plus proche possible des valeurs optimales déjà calculées. La réponse à ce problème est présentée dans le prochain chapitre.

Chapitre 5

Réalisation de la commande optimale via la régulation des vannes

5.1 Introduction

En général, il existe deux types de commandes pour la commande des canaux d'irrigation à surface libre, selon que les ouvrages (vanne, déversoir, ...) sont pris en compte ou pas [Malaterre P.O., 1998] : les débits (Q) ou les ouvertures des vannes (θ). Dans le premier cas, il sera nécessaire de transformer le débit de commande en une valeur d'ouverture de vanne, car il s'agit, dans un système réel, de la seule variable physique de commande du bief. Nous avons vu précédemment (dans le chapitre 4) comment générer des commandes optimales en boucle fermée, exprimées en termes de débit amont et de tirant d'eau aval. Ces commandes doivent donc encore être réalisées à l'aide des deux vannes situées à chaque extrémité du bief (voir figure 5.1). L'objectif de ce chapitre est de montrer comment transformer ces deux variables de commande en deux ouvertures correspondant aux deux vannes, l'une située à l'amont et l'autre, à l'aval, en tenant compte de la dynamique propre des vannes (les vannes ne réagissent pas instantanément à une consigne d'ouverture). Notre approche consiste à déterminer ces deux ouvertures afin que le débit amont et le tirant d'eau aval calculés à partir des équations des vannes soient le plus proche possible des valeurs optimales, solutions du schéma de commande LQG/ H_2 (ne prenant pas en compte les équations de vannes). Pour résoudre ce problème, nous utilisons une méthode de régulation optimale LQ. La commande optimale ainsi calculée pour les deux vannes sera validée sur les trois modèles habituels : modèle de collocation des équations de Saint-Venant linéarisées (notre modèle de commande), le modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant linéarisées et le modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant non-linéaires.

5.2 Types de commande utilisés en irrigation

Rappelons que, dans cette étude, nous avons choisi comme système à surface libre un canal avec un seul bief délimité par deux vannes : une vanne à l'amont et une vanne à l'aval (voir figure 5.1).

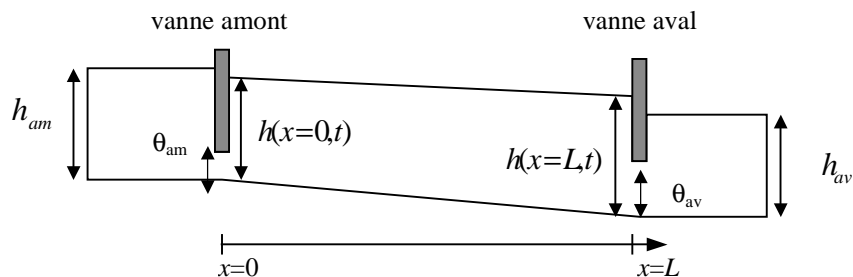


Figure 5.1 : Schéma du bief délimité par deux vannes.

Sur ce bief de canal, trois configurations sont possibles : l'utilisation de la vanne située à l'amont du bief comme commande (appelée commande par l'aval, car on cherche à réguler le niveau à l'aval du bief), l'utilisation de la vanne située à l'aval du bief comme commande (appelée commande par l'amont, car on cherche à réguler le niveau à l'amont immédiat de la vanne de commande), ou l'utilisation des deux vannes (appelée commande mixte), (voir figure 5.2).

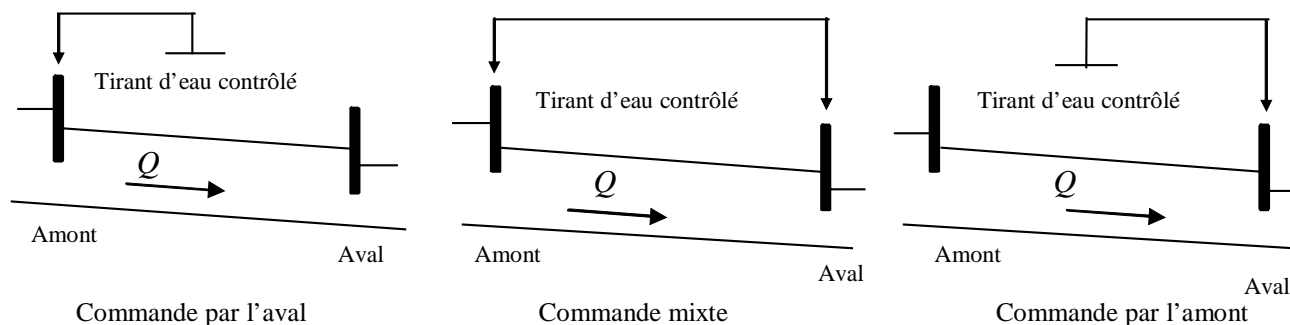


Figure 5.2 : Typologie de la commande d'un bief.

La commande (en tirant d'eau) par l'aval présente la particularité de conduire indirectement à une commande en débit. On trouve dans [Chevereau G., 1991, J. L. Deltour, 1992, X. Litrico, 1999, M. L. Chen, 2001] des exemples de ce type de commande.

Une commande (en tirant d'eau) par l'amont en revanche ne conduit pas indirectement à une commande en débit, et doit être complétée par une commande en débit [Malaterre P.

O., 1994]. Des exemples d'application de cette commande se trouvent dans [Buyalski C. P., 1991, J. Cardona, 1997, J. M. Compas, J. C. Pages, 1997][Akouz K., 1997].

La commande mixte quant à elle garde la particularité de conduire indirectement à une commande en débit. Quelques exemples récents de ce type de commande se trouvent dans [Reddy J. M., 1997, A. Garcia, 1992, P. O. Malaterre, 1995, S. Sawadogo, 1995][Malaterre P. O., J. M. Reddy, 1997, K. Akouz, 1997].

Dans cette thèse, nous avons adopté un schéma de commande mixte puisque nous agissons simultanément sur les deux vannes du bief en cherchant à le réguler autour d'un régime d'équilibre souhaité.

5.3 Modèle d'un bief avec prise en compte de la dynamique des deux vannes

Nous rappelons que le modèle de base (modèle réduit (S_c)) s'écrit sous la forme suivante :

$$(S_c) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (5.3)$$

où le vecteur d'état $x(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t), Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_N(t))'$ est composé des valeurs des tirants d'eau et des débits aux N points de collocation. La manière de calculer les matrices A, B, C est présentée au chapitre 3.

Rappelons également que les variables de commande u sont les variations de débit amont et de hauteur aval:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'_N(t) \\ Q'_1(t) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

La commande optimale robuste calculée au chapitre 4 a été développée à partir du modèle réduit (S_c) , sans tenir compte de la dynamique des deux vannes qui délimitent le bief. Comme nous l'avons souligné, dans un canal réel, les vraies variables de commande sont les ouvertures des vannes.

Les conditions aux frontières sont déterminées par les deux équations des vannes aux extrémités du canal, une vanne amont et une vanne aval, ces équations d'ouvrage sont données par :

$$\begin{aligned}
Q(x=0,t) &= \mu B_v \theta_{am}(t) \sqrt{2g(h_{am} - h(0^+,t))} \\
Q(x=L,t) &= \mu B_v \theta_{av}(t) \sqrt{2g(h(L^-,t) - h_{av})},
\end{aligned}
\tag{5.5}$$

avec :

μ : le coefficient de débit de la vanne ($0.6 \leq \mu \leq 0.7$),

B_v : la largeur de la vanne [m],

Q : le débit [m^3 / s],

g : l'accélération de la pesanteur [m / s^2],

$\theta_{am}(t)$: l'ouverture de la vanne amont [m],

$\theta_{av}(t)$: l'ouverture de la vanne aval [m],

h_{am} : le tirant d'eau à l'amont de la vanne amont [m],

h_{av} : le tirant d'eau à l'aval de la vanne aval [m],

$h(0^+,t)$: le tirant d'eau à l'aval de la vanne amont [m],

$h(L^-,t)$: le tirant d'eau à l'aval de la vanne amont [m],

Par ailleurs, il est nécessaire de prendre en compte la dynamique de fonctionnement de ces vannes [Dulhoste J. F., 2001], lorsque celle-ci ne peut pas être négligée par rapport à la dynamique du bief. Cette dynamique est celle du moteur (ou vérin) qui actionne ces vannes. Cette dynamique peut être représentée par un filtre du second ordre de la forme suivante (voir chapitre 2) :

$$\tau \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = k_v i_v(t), \tag{5.6}$$

où τ représente la constante de temps du moteur, k_v , le gain statique et i_v , le courant électrique fournissant le couple mécanique.

Sous forme d'état, on obtient :

$$(S_v) \begin{cases} \dot{x}_v(t) = A_v x_v(t) + B_v i_v(t) \\ y_v(t) = C_v x_v(t), \end{cases} \tag{5.7}$$

avec x_v , A_v , B_v et C_v sont donnés en chapitre 2 (relation (2.16)).

Les entrées de commande pour le système (S_v) sont maintenant les courants électriques des deux vannes.

5.4 Problème posé

Dans le chapitre 3, nous avons montré en simulation que la dynamique du modèle linéarisé de Saint-Venant est suffisamment proche de celle du modèle non-linéaire si nous

n'introduisons pas la dynamique des vannes. La principale cause de non-linéarité est en fait le comportement hydraulique non-linéaire des vannes, d'où l'idée de séparer le problème de commande du bief (voir figure 5.1) en deux niveaux :

- Premièrement, nous calculons une commande linéaire en boucle fermée, exprimée en débit amont et tirant d'eau aval (c'est le schéma de commande optimale développé au chapitre 4) à partir du modèle (S_c).
- Deuxièmement, nous effectuons la régulation de vannes pour garantir que ces commandes de débit amont et tirant d'eau aval sont obtenues. Notons Δt , la période d'échantillonnage de la commande LQG/H₂ (on note cette commande par $u_d = (h'_1(t), Q'_N(t))^t$), et dt , la période d'échantillonnage de la commande des vannes. Comme la dynamique des vannes est généralement plus rapide que celle du canal, nous avons généralement à faire à un problème à deux échelles de temps : $dt \ll \Delta t$. Nous pouvons poser le problème comme un problème de régulation des vannes autour de consignes constantes du débit amont et du tirant aval spécifiées sur chaque période Δt par la commande LQG/H₂, c'est-à-dire comme un problème de stabilisation du système (S_v) autour de l'état d'équilibre correspondant (à l'aide de commandes en courant des moteurs échantillonnées sur une période dt).

L'avantage de procéder ainsi réside dans le fait que l'on ne linéarise pas l'équation des vannes, ce qui est source d'approximation supplémentaire.

5.5 Problème de régulation des vannes

Nous cherchons ici à déterminer les ouvertures θ_{am} et θ_{av} des deux vannes telles que le débit amont réel et le tirant d'eau aval réel soient le plus proche possible des valeurs optimales fixées par la commande LQG/H₂.

A chaque période Δt de calcul de la commande LQG/H₂ désirée u_d , nous pouvons facilement exprimer les objectifs de débit amont et de tirant d'eau aval sous forme d'objectifs d'ouverture de vannes, θ_{am}^d et θ_{av}^d . En effet, connaissant $Q_1(\Delta t)$ et $h_1(\Delta t)$, ainsi que $Q_N(\Delta t)$ et $h_N(\Delta t)$, l'inversion des équations de vanne conduit aux expressions suivantes des ouvertures désirées :

$$\begin{aligned}\theta_{am}^d &= Q_1(\Delta t) / \mu B_v \sqrt{2g(h_{am} - h_1(\Delta t))} \\ \theta_{av}^d &= Q_N(\Delta t) / \mu B_v \sqrt{2g(h_N(\Delta t) - h_{av})}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Notre objectif est alors de déterminer, sur chaque période Δt , les deux entrées de commande des vannes (courant amont $i_{am}(t)$ et courant aval $i_{av}(t)$) afin de ramener les sorties du systèmes (S_{am}) et (S_{av}) respectivement aux valeurs θ_{am}^d et θ_{av}^d . Ceci peut être formulé comme un problème de régulation optimale (d'autres schémas de régulation sont bien entendu possibles). Il s'agit de trouver sur chaque période Δt les deux commandes optimales $i_{am}(t)$ et $i_{av}(t)$ solutions des deux problèmes :

$$\begin{aligned} \min_{i_{am}} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left((\theta_{am}(t) - \theta_{am}^d)^2 + \lambda^2 (i_{am}(t))^2 \right) dt \\ \min_{i_{av}} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left((\theta_{av}(t) - \theta_{av}^d)^2 + \lambda^2 (i_{av}(t))^2 \right) dt, \end{aligned} \quad (5.9)$$

avec la dynamique des vannes, donnée sous forme de représentation d'état

$$(S_{am}) \begin{cases} \dot{x}_{am} = A_v x_{am} + B_v i_{am} \\ y_{am} = C_v x_{am}, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$(S_{av}) \begin{cases} \dot{x}_{av} = A_v x_{av} + B_v i_{av} \\ y_{av} = C_v x_{av}, \end{cases} \quad (5.11)$$

avec: $x_{am} = (\dot{\theta}_{am}(t), \theta_{am}(t))^t$; $x_{av} = (\dot{\theta}_{av}(t), \theta_{av}(t))^t$. $x_{am}^d = (0, \theta_{am}^d)^t$; $x_{av}^d = (0, \theta_{av}^d)^t$.

Les deux commandes optimales $i_{am}(t)$ et $i_{av}(t)$ sont données par les commandes par retour d'état suivantes :

$$\begin{aligned} i_{am}(t) &= -P_v (x_{am}(t) - x_{am}^d) \quad \text{sur chaque période } \Delta t \\ i_{av}(t) &= -P_v (x_{av}(t) - x_{av}^d) \quad \text{sur chaque période } \Delta t, \end{aligned} \quad (5.12)$$

où P_v est la matrice solution de l'équation de Riccati associée au système (A_v, B_v, C_v) .

D'un point de vue pratique, la mise en œuvre se fait avec une version échantillonnée de ces lois de commande que nous ne détaillons pas ici.

5.6 Résultats numériques

Pour la simulation numérique nous prenons les mêmes paramètres et objectifs de commande que ceux utilisés pour les autres simulations (paramètres du micro-canal et objectifs de commande du chapitre 4) et nous choisissons pour les autres paramètres utilisés dans ce chapitre les valeurs suivantes :

$$B_g = 0.1 \text{ m} ; \mu = 0.7 ; h_{am} = 0.15 \text{ m} ; h_{av} = 0.03 \text{ m} ; k_v = 1 ; \tau = 5e^{-3} \text{ s} .$$

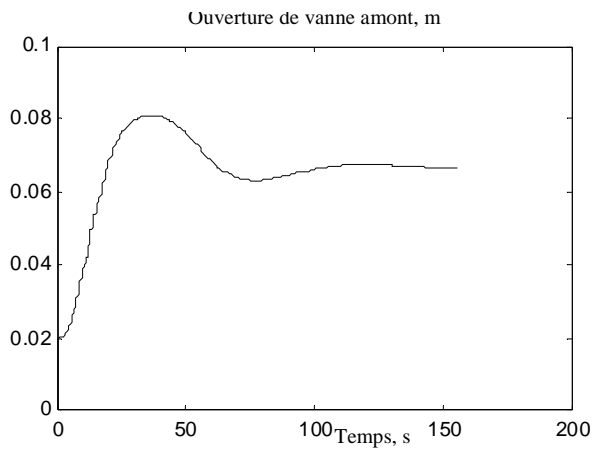


Figure 5.3a : Ouverture de vanne amont.

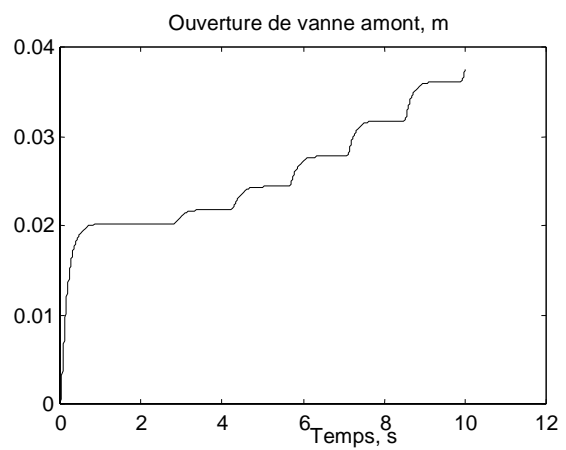
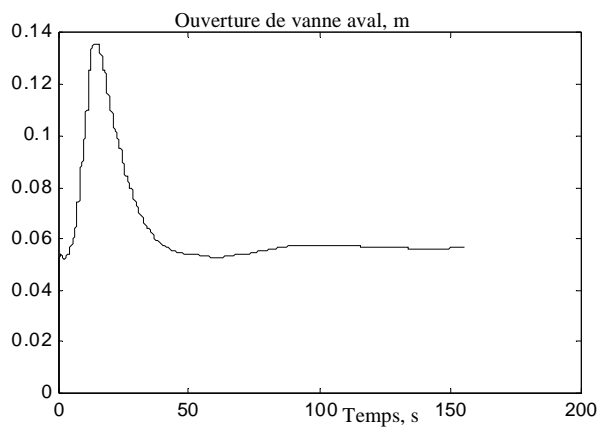
Figure 5.3b : Zoom : ouverture sur $[0,12s]$.

Figure 5.3c : Ouverture de vanne aval.

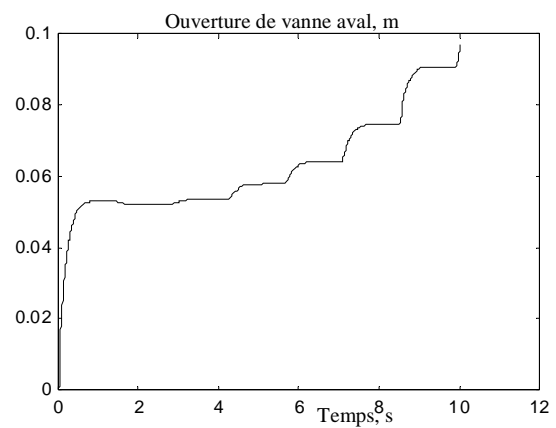
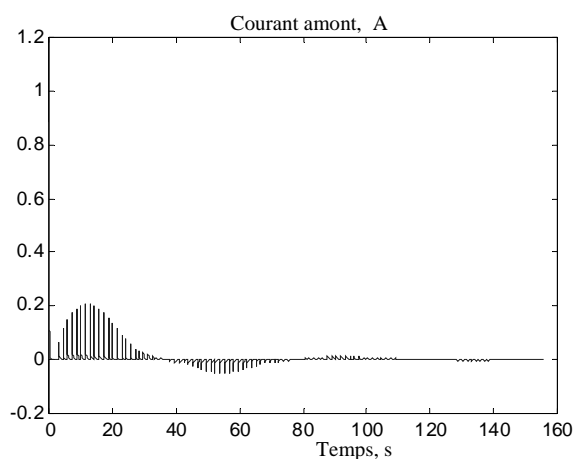
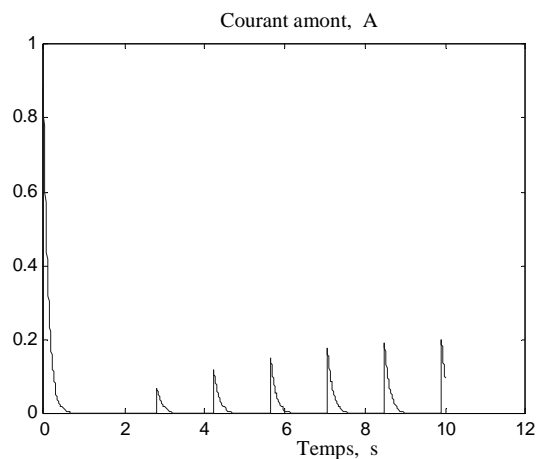
Figure 5.3d : Zoom : ouverture sur $[0,12s]$.

Figure 5.3e : Courant électrique.

Figure 5.3f : Zoom : courant sur $[0,12s]$.

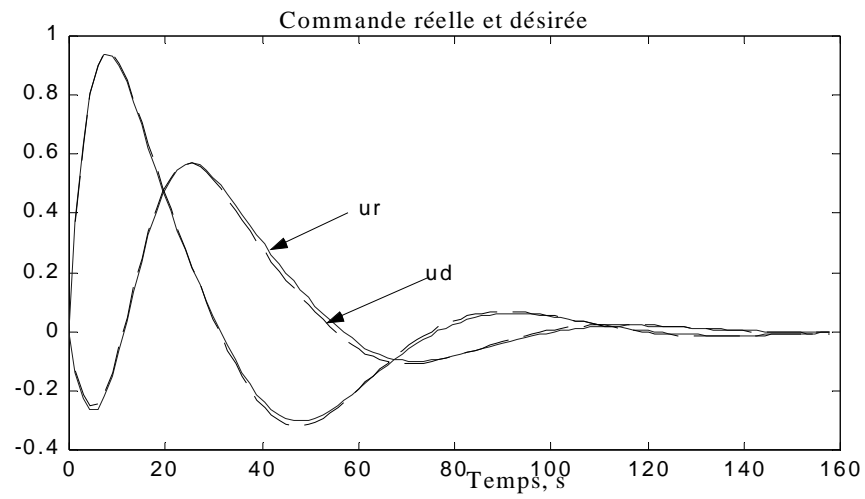


Figure 5.3g : Commandes réelle à partir des vannes et désirée $u_d = (h'_1(t), Q'_N(t))^t$.

Simulation avec vannes et sans vannes (en pointillé)

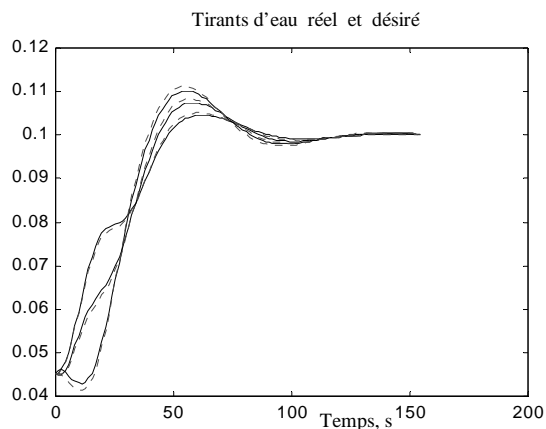


Figure 5.4a : Tirant d'eau réel (ligne continue) et désiré (ligne pointillé) aux mêmes trois points de collocation, modèle de collocation des équations de Saint-Venant linéarisées.

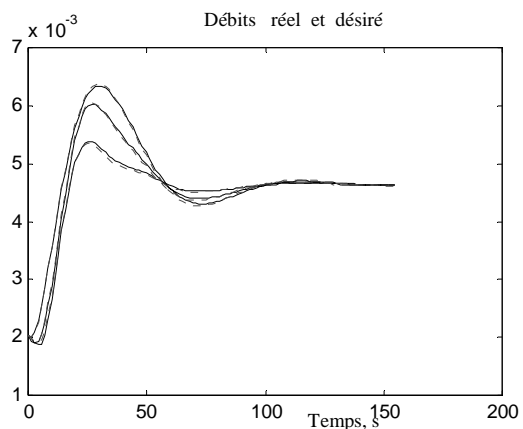


Figure 5.4b : Débit réel (ligne continue) et désiré (ligne pointillé) aux mêmes trois points de collocation, modèle de collocation des équations de Saint-Venant linéarisées.

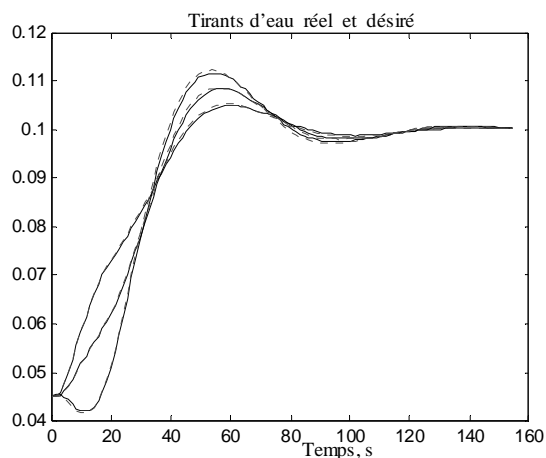


Figure 5.4c : Tirants d'eau réel (ligne continue) et désiré (ligne pointillé) aux mêmes trois points de collocation, modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant linéarisées.

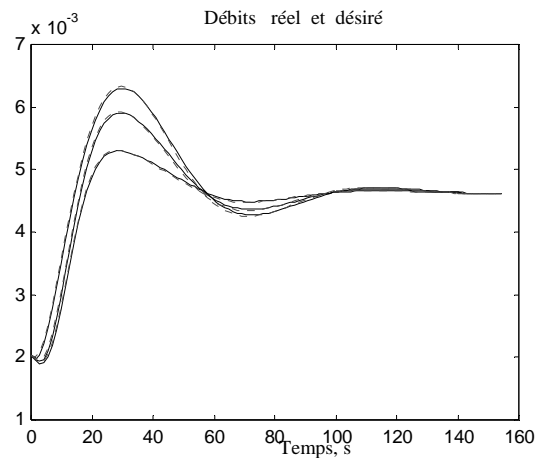


Figure 5.4d : Débits réel (ligne continue) et désiré (ligne pointillé) aux mêmes trois points de collocation, modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant linéarisées.

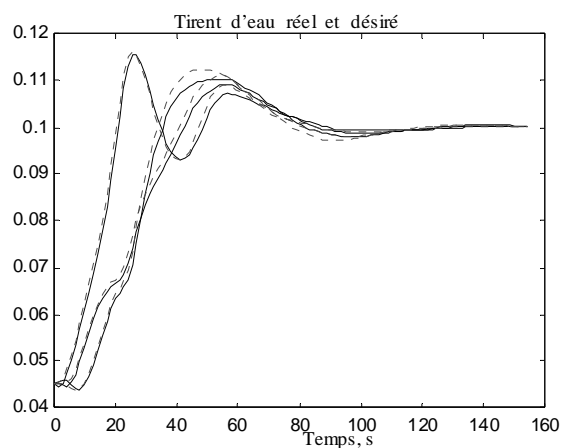


Figure 5.4c : Tirants d'eau réel (ligne continue) et désiré (ligne pointillé) aux mêmes trois points de collocation, modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant non linéaires.

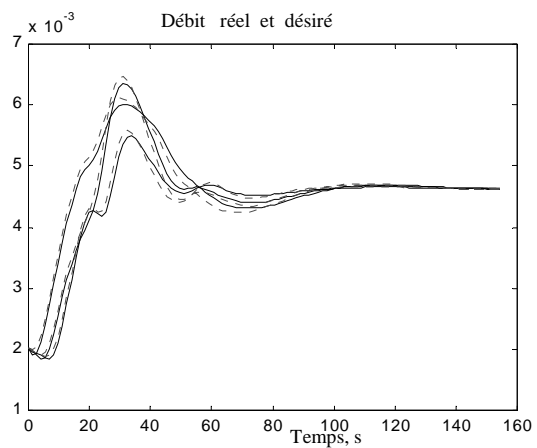


Figure 5.4d : Débits réel (ligne continue) et désiré (ligne pointillé) aux mêmes trois points de collocation, modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant non linéaires.

Les figures 5.3 et 5.4 montrent qu'il est possible d'assurer la régulation du bief en utilisant ce schéma de commande à deux niveaux : on constate en particulier que la régulation des vannes est efficace puisqu'elle n'introduit que très peu d'écarts entre le schéma de commande intégrant les régulations des vannes (réponses dites réelles) et le schéma n'intégrant pas ces vannes (réponses dites désirées).

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé, au niveau de chaque vanne, un régulateur optimal LQ permettant de réaliser les objectifs de commande en débit amont et en tirant d'eau aval fixés par la commande optimale LQG/H₂. Cette approche a été validée sur trois modèles : le modèle de collocation des équations de Saint-Venant linéarisées, le modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant linéarisé et le modèle de Preissmann des équations de Saint-Venant non-linéaires. Les résultats de simulation montrent clairement l'efficacité de l'approche utilisée. La validation de cette commande optimale (canal+deux vannes) en pratique sur le micro-canal de Valence est présentée au chapitre 7. Dans le prochain chapitre, nous nous intéressons à la commande optimale en dimension infinie du modèle de Saint-Venant linéarisé. Afin de répondre à cette question nous utilisons la théorie des semigroupes pour étudier la stabilité exponentielle, la stabilisabilité exponentielle, et la détectabilité exponentielle. Nous montrons également en détail que l'opérateur associé aux équations du modèle est un générateur de semigroupe. Enfin, nous décrivons le moyen d'obtenir une approximation en dimension finie du régulateur LQ en dimension infinie, sur la base de l'équation de Riccati d'opérateurs associée.

Chapitre 6

Commande optimale en dimension infinie

6.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre des résultats de recherche portant sur la commande optimale des systèmes en dimension infinie et son application au domaine particulier des canaux d'irrigation à surface libre. La commande optimale, en dimension infinie comme en dimension finie, nécessite une phase préalable importante : l'analyse dynamique des propriétés de ce système qui assurent une solution au problème. C'est pourquoi le début de ce chapitre est consacré à l'analyse du modèle linéarisé de Saint-Venant dont la dynamique est représentée par des équations aux dérivées partielles linéaires. Nous avons choisi, comme modèle, le modèle linéarisé complet de Saint-Venant autour d'un régime uniforme, c'est-à-dire tenant compte de la pente et du frottement, contrairement à ce qui se fait souvent lorsqu'il s'agit d'analyse (voir, par exemple, [Xu C. Z., D. X. Feng, 2000]). Ce chapitre est divisé en trois parties. Dans la première, nous présentons des rappels et des résultats originaux qui montrent que les opérateurs associés au modèle linéarisé de Saint-Venant satisfont les propriétés qui en font des générateurs de semigroupe. Dans la seconde partie, nous en étudions la stabilité, la stabilisabilité et la détectabilité exponentielles (ces deux dernières propriétés assurant l'existence et l'unicité de la solution du problème de commande optimale adressé ensuite). Enfin, dans la troisième partie, nous présentons le moyen d'obtenir une approximation en dimension finie du régulateur optimale LQ (commande optimale en dimension infinie) sur la base de l'équation de Riccati d'opérateurs associée au problème. La plupart des calculs et des démonstrations associés à ce chapitre sont reportés à l'annexe 2 pour plus de lisibilité.

6.2 Représentation sous forme de semigroupe

Les résultats que nous présentons dans ce paragraphe concernent l'analyse des systèmes distribués et utilisent la théorie dite des « semigroupes ». Afin de pouvoir appliquer cette théorie au modèle linéarisé de Saint-Venant, nous devons préalablement le reformuler sous la forme d'un problème linéaire abstrait de commande (voir équations (6.3)), en choisissant les espaces d'état, d'entrées et de sorties appropriés. Il faut ensuite vérifier que la solution obtenue est effectivement générée par un semigroupe d'opérateurs linéaires et bornés sur l'espace d'état choisi.

Dans le chapitre 2 nous avons déjà calculé le modèle de Saint-Venant linéarisé autour d'un régime d'équilibre uniforme. Il est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = a_1 \frac{\partial h}{\partial x} - a_2 \frac{\partial Q}{\partial x} + a_3 h - a_4 Q \\ h(x=1, t) = u_1(t) ; Q(x=0, t) = u_2(t) \\ h(x, t=0) = h_0(x) ; Q(x, t=0) = Q_0(x), \end{cases} \quad (6.1)$$

où

$$a_1 = (1 - g \frac{B^2 h_e^3}{Q_e^2}); a_2 = 2; a_3 = g \frac{B^2 h_e^2 L}{Q_e^2} (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e}); a_4 = \frac{2gB^2 h_e^2 J_e L}{Q_e^2}.$$

Le modèle linéarisé de Saint-Venant peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_2 \xi \\ \xi(x, 0) = \xi_0(x) \\ h(x=1, t) = u_1(t) ; Q(x=0, t) = u_2(t), \end{cases} \quad (6.2)$$

où

$$\xi(t) = (h(x, t), Q(x, t))^t \text{ et } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix}.$$

Le problème linéaire abstrait de commande que nous recherchons est un problème dans lequel la commande est distribuée et est présente dans l'équation d'état et non aux

frontières (comme dans le modèle linéarisé de Saint-Venant (6.2)). Nous recherchons donc un modèle de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t) \text{ avec } \xi(t) \in Z, \forall t \in [0, T] \\ y(t) = C\xi(t) \\ \xi(t) = \xi_0(x) \in Z, \end{cases} \quad (6.3)$$

où $\xi(t)$, l'état au temps t , doit être un espace de Hilbert séparable de fonctions définies sur le domaine spatial $\Omega = [0, 1]$. Nous adopterons pour la suite le choix usuel $Z = L_2(0, 1) \times L_2(0, 1)$ où $L_2(0, 1)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω . Dans les équations (6.3), $y(t)$ désigne la sortie du système et doit appartenir à un espace de Hilbert séparable Y , pour tout $t > 0$ (de type \mathfrak{R}^n , lorsque le système possède un nombre fini de sorties); $u(t)$ est le vecteur des commandes et appartient pour tout $t > 0$ à un espace U (généralement de type \mathfrak{R}^m). Les opérateurs A , B et C doivent être des opérateurs linéaires, définis entre les espaces appropriés et bornés en ce qui concerne B et C . Notons $\mathcal{L}(Z)$ l'espace des applications linéaires bornées de Z dans Z . Afin d'appliquer les résultats de la théorie des semigroupes, et ensuite de résoudre un problème de commande optimale qu'il nous reste à formuler, nous passons par les trois étapes suivantes :

- L'homogénéisation du problème de commande aux frontières (6.2), c'est-à-dire la transformation de ce problème en un problème « standard » où la commande agit dans l'équation d'état.
- La démonstration qui établit que l'opérateur A est bien le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe (c'est-à-dire d'un semigroupe d'opérateurs de $\mathcal{L}(Z)$, indexé par le paramètre t et fortement continu en t (voir définition ci-après).
- Le choix d'une sortie intéressante pour notre problème de commande et sa formulation à l'aide d'un opérateur de sortie $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$ sous la forme $y(t) = C\xi(t)$.

6.2.1 Homogénéisation

Il est clair que dans le modèle distribué linéarisé de Saint-Venant (6.2), l'entrée de commande du système $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^t$ n'apparaît que dans les conditions aux limites : en $x = 0$ pour le débit Q et en $x = 1$ pour le tirant d'eau h . Nous sommes donc dans le cas d'un problème de commande aux frontières.

Pour nous ramener à une formulation standard (6.3), nous devons utiliser une technique dite d'« homogénéisation ». Il y a plusieurs techniques d'homogénéisation possibles, mais nous utilisons la plus connue qui consiste à introduire un opérateur $B \in \mathcal{L}(U, Z)$ calculé de telle façon qu'il « absorbe » les conditions aux limites (voir infra). Dans notre cas, nous choisissons comme espace d'état $Z = L_2(0, 1) \times L_2(0, 1)$ et comme espace des sorties $U = \mathfrak{R}^2$. L'opérateur B peut alors être défini par :

$$Bu = I_2 u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad \|B\|_{\mathcal{L}(U, Z)} = 1. \quad (6.4)$$

et, avec le changement de variable $\xi = \tilde{\xi} + u$, $\tilde{\xi} = (\tilde{h}, \tilde{Q})^t$, les équations (6.2) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}(t) = A_1 \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} + A_2 \tilde{\xi} + A_2 u(t) - \dot{u}(t) \\ \tilde{\xi}(x, 0) = \tilde{\xi}_0(x) \\ \tilde{h}(x=1, t) = 0 ; \quad \tilde{Q}(x=0, t) = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Le processus d'homogénéisation fait donc apparaître naturellement les deux intégrateurs en amont des commandes qui ont déjà été utilisés dans le cas de la commande optimale robuste de dimension finie. Définissons l'espace d'état augmenté associé au problème (6.5) par $Z^e = \mathfrak{R}^2 \oplus Z$, et la nouvelle commande par $\tilde{u}(t) = \dot{u}(t)$. Le problème alors peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ A_2 B & A_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_2 \\ -B \end{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{\xi}(x, 0) = \tilde{\xi}_0(x) \\ \tilde{h}(x=1, t) = 0 ; \quad \tilde{Q}(x=0, t) = 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (6.6)$$

avec 0_2 est la matrice nulle dans \mathfrak{R}^2 et I_2 la matrice identité dans \mathfrak{R}^2 . Le problème peut donc aussi s'écrire maintenant sous la forme « étendue » :

$$(S^e) \begin{cases} \dot{\xi}^e(t) = A^e \xi^e(t) + B^e \tilde{u}(t) \\ \xi^e(0) = \xi^e_0(x), \end{cases} \quad (6.7)$$

où :

$$A^e = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ A_2 B & A_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}; B^e = \begin{pmatrix} I_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \text{ et } \xi^e = (u, \tilde{\xi})^t, \xi_0^e(x) = (u(0), \tilde{\xi}(x,0))^t.$$

L'opérateur A^e est défini sur le domaine : $D(A^e) = U \oplus D(A_s)$, avec

$$A_s = A_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \text{ et } D(A_s) = \left\{ \tilde{\xi} \in Z / \tilde{h}(x=1,t) = 0, \tilde{Q}(x=0,t) = 0 \right\}$$

Notons que l'opérateur B^e est bien borné ($B^e \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}^2, Z^e)$ et $\|B^e\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{R}^2, Z^e)} = \sqrt{2}$).

6.2.2 C_0 -semigroupe associé au modèle de Saint-Venant linéarisé

Avant de montrer que la solution du problème augmenté (S^e) est bien engendrée par un semigroupe, nous rappelons d'abord la définition d'un semigroupe et celle du générateur infinitésimal qui lui est associé [El Jai A., M. Amouroux, 1990], ainsi que certains résultats [Curtain R. F., H. J. Zwart, 1995] que nous utilisons par la suite.

Définition 6.1 (définition C_0 -semigroupe) – *Un semigroupe fortement continu d'opérateurs linéaires et bornés sur Z est une famille d'opérateurs linéaires $(T(t))_{t \geq 0}$ de $\mathcal{L}(Z)$ vérifiant :*

- (i) $T(0) = I$, (identité dans Z)
- (ii) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, $\forall t, s \geq 0$
- (iii) $\forall z \in Z$, $\|T(t)z - z\|_Z \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow 0^+$

On note simplement « $T(t)$ est un C_0 -semigroupe sur Z ».

Définition 6.2 (définition du générateur infinitésimal) – *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe fortement continu sur Z . L'opérateur A défini par :*

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t},$$

s'appelle le générateur infinitésimal du semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Il s'agit d'un opérateur linéaire dont le domaine est défini par :

$$D(A) := \left\{ z \in Z \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} \text{ existe} \right. \right\}.$$

En général, cet opérateur n'est pas borné sur son domaine.

Remarque 6.1:

Montrer qu'un opérateur $T(t)$ est un C_0 -semigroupe est souvent délicat et il est parfois plus aisé de montrer qu'un opérateur A apparaissant dans une équation d'état abstraite (telle que (6.7)) est un générateur infinitésimal et donc engendre un semigroupe qu'il n'est pas nécessaire ou possible de calculer explicitement. Il existe en effet de nombreuses caractérisations des opérateurs A qui sont générateurs infinitésimaux (voir [Curtain R. F., H. J. Zwart, 1995]).

Lemme 6.1 [Curtain R. F., H. J. Zwart, 1995] – Soient A_1 et A_2 deux générateurs infinitésimaux associés aux deux C_0 -semigroupes $T_1(t)$ et $T_2(t)$ définis respectivement sur les espaces Z_1 et Z_2 . Supposons que $D \in \mathcal{L}(Z_1, Z_2)$ et que

$$\|T_i(t)\| \leq M_i e^{\omega_i t}, \quad i = 1, 2$$

alors, l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ D & A_2 \end{pmatrix},$$

défini sur $D(A) = D(A_1) \oplus D(A_2)$ est le générateur infinitésimal associé au C_0 -semigroupe $T(t)$ défini sur $Z = Z_1 \oplus Z_2$ par :

$$T(t) = \begin{pmatrix} T_1(t) & 0 \\ S(t) & T_2(t) \end{pmatrix}, \quad S(t)x = \int_0^t T_2(t-s) D T_1(s) x ds.$$

De plus, il existe $M > 0$ tel que $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ avec $\omega = \max(\omega_1, \omega_2)$.

Théorème 6.1 [Curtain R. F., H. J. Zwart, 1995] – Si l'opérateur A engendre un C_0 -semigroupe $T(t)$ sur Z et si $D \in \mathcal{L}(Z)$. Alors $A + D$ engendre également un C_0 -semigroupe $T_D(t)$ sur Z . De plus, si $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$, alors

$$\|T_D(t)\| \leq M e^{(\omega + M \|D\|)t}.$$

- **Caractère de semigroupe du modèle linéarisé**

A notre connaissance, dans les travaux antérieurs, la « formulation semigroupe » du modèle linéarisé de Saint-Venant n'a été établie de manière précise que pour le cas simple du modèle sans frottement (voir, par exemple, [Xu C. Z., D. X. Feng, 2000]). C'est

pourquoi, nous allons dans ce paragraphe montrer que l'opérateur A^e défini par (6.7) engendre en effet C_0 -semigroupe $T^e(t)$ sur $Z^e = \mathfrak{R}^2 \oplus Z$.

Cet opérateur A^e peut s'écrire sous la forme :

$$A^e = \begin{pmatrix} A_1 & 0_2 \\ D & A_1 \end{pmatrix},$$

avec

$$A_1 = 0_2, A_2 = A_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \text{ et } D = A_2.$$

Nous avons donc $D \in \mathcal{L}(Z, U)$. D'après le lemme 6.1, pour montrer que l'opérateur A^e est un générateur infinitésimal il suffit de montrer que les opérateurs A_1 et A_2 le sont aussi. L'opérateur A_1 est un générateur infinitésimal trivial ; il reste donc à montrer que l'opérateur A_2 est aussi un générateur infinitésimal. Cet opérateur peut s'écrire :

$$A_2 = A + D, \quad A = A_1 \frac{\partial}{\partial x}, \quad D = A_2$$

notons que $D \in \mathcal{L}(Z, Z)$. D'après le théorème 6.1, il suffit donc de montrer que A est un générateur infinitésimal.

Finalement, pour montrer que l'opérateur A est un générateur infinitésimal, il suffit de montrer que la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}(t) = A_1 \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} \\ \tilde{\xi}(x, 0) = \tilde{\xi}_0(x) \end{cases} \quad (6.8)$$

peut s'écrire sous la forme $\tilde{\xi}(t) = T(t)\tilde{\xi}$ avec $T(t)$ un C_0 -semigroupe. Ce dernier résultat est démontré à l'annexe 2.

Conclusion 6. 1 :

L'opérateur A^e engendre bien un C_0 -semigroupe $T^e(t)$.

6.2.3 Sortie du système

Nous choisissons parmi les différentes possibilités de choix de sortie du système, la moyenne de l'état ξ autour d'un point d'observation $x_i \in [0, 1]$ définie par l'opérateur C :

$$C \xi(x) = \int_0^1 \delta_{x_i}(x) \xi(x) dx,$$

où

$$\delta_{x_i} = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & , \text{ si } x \in [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] \\ 0 & , \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

L'utilisation de la valeur moyenne de l'état sur un petit intervalle (i.e. $\varepsilon \rightarrow 0$), permet d'exprimer la sortie du système comme l'image de cet état par un opérateur linéaire borné. A l'inverse, le choix comme sortie de la valeur de l'état en un point x_i nous poserait problème car nous aurions alors un opérateur de sortie linéaire mais non continu (c'est-à-dire non borné) sur $Z^e = \mathfrak{R}^2 \oplus Z = \mathfrak{R}^2 \oplus L_2(0, 1) \times L_2(0, 1)$.

Le choix d'une valeur moyenne comme sortie peut par ailleurs se justifier par le fait que les mesures réelles sont toujours des valeurs moyennes de par la physique des capteurs utilisés.

Nous pouvons donc écrire les sorties de notre modèle de Saint-Venant linéarisé, qui sont le débit aval $Q(x = L, t)$ et le tirant d'eau amont $h(x = 0, t)$, sous la forme :

$$y(t) = C \xi(x) = \begin{pmatrix} \int_0^1 \delta_{x_0}(x) h(x, t) dx \\ \int_0^1 \delta_{x_L}(x) Q(x, t) dx \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} \int_0^1 \delta_{x_0}(x) \cdot dx & 0 \\ 0 & \int_0^1 \delta_{x_L}(x) \cdot dx \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

avec

$x_0 = 0$; $x_L = 1$ (variables adimensionnelles)

$$\delta_0 = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & , \text{ si } x \in [0, \varepsilon] \\ 0 & , \text{ ailleurs} \end{cases} ; \delta_1 = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & , \text{ si } x \in [1 - \varepsilon, 1] \\ 0 & , \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Les sorties du système augmenté (S^e) sont alors données par :

$$y(t) = C^e \xi^e(t) = \left(\int_0^1 \delta_{x_0}(x) h(x,t) dx, \int_0^1 \delta_{x_L}(x) Q(x,t) dx \right)^t; C^e = (0_2 \quad C). \quad (6.10)$$

Notons que l'opérateur C^e est borné (i.e. $C^e \in \mathcal{L}(Z^e, \mathfrak{R}^2)$) et un calcul rapide montre que en utilisant la norme induite par la norme canonique sur $\mathfrak{R}^2 \oplus L_2(0, 1) \times L_2(0, 1)$,

$$\|C^e\|_{\mathcal{L}(Z^e, \mathfrak{R}^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

Finalement le problème augmenté peut s'écrire sous la forme abstraite :

$$(S^e) \begin{cases} \dot{\xi}^e(t) = A^e \xi^e(t) + B^e \tilde{u}(t) \\ y(t) = C^e \xi^e(t) \\ \xi^e(0) = \xi^e_0(x). \end{cases} \quad (6.11)$$

6.3 Analyse dynamique du modèle de Saint-Venant linéarisé

De nombreux résultats existent concernant l'analyse dynamique des systèmes de dimension infinie en général (voir, par exemple, [Asch M., G. Lebeou, 1998, C. Bardos, 1992], [Clark S., Y. Latushkin, 2000, H. O. Fattorinni, 1966, 1975], [Keulen B. V., 1993, J. L. Lions, 1968] et [Russell D. L., 1973]). Cependant, ces travaux ont été peu appliqués au cas du modèle de Saint-Venant linéarisé. On peut néanmoins citer les publications récentes [Xu C. Z., D. X. Feng, 2000] et [Xu C. Z., G. Sallet, 1999]. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'analyse dynamique du modèle de Saint-Venant linéarisé complet tel que représenté par les équations (6.7), c'est-à-dire incluant la pente, les frottements et l'homogénéisation de la commande aux frontières. En particulier, nous étudions sur ce modèle les notions de stabilité exponentielle, de stabilisabilité exponentielle et de détectabilité exponentielle qui sont importantes pour la suite (elles impliquent l'existence et l'unicité de la solution au problème de commande LQ que nous adressons plus loin). Nous rappelons au fur et à mesure les définitions de ces notions ainsi que les résultats nécessaires pour les établir et notamment les résultats qui concernent les systèmes hyperboliques symétriques.

6.3.1 Stabilité exponentielle

Nous étudions les différentes notions citées précédemment pour des systèmes de la forme :

$$(S) \begin{cases} \dot{z}(t) = A z(t) + B u(t), & t > 0 \\ y(t) = C z(t) \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (6.11a)$$

où A engendre un C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$, $B \in \mathcal{L}(U, Z)$ et $C \in \mathcal{L}(Z, U)$. Nous particularisons cette étude à l'analyse du système homogénéisé (6.11).

Définition 6.3 [stabilité exponentielle] – *Le C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable s'il existe deux constantes strictement positives M et ω vérifiant :*

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Remarque 6.2:

Le système (S) est dit stable si le semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$ engendré par A est exponentiellement stable.

Pour analyser la stabilité exponentielle du système (S), il peut être utile de calculer explicitement le semigroupe $T(t)$ associé au système (6.11a), c'est-à-dire, en définitive, de calculer une expression explicite de la solution de ce problème de Cauchy abstrait. Malheureusement, la plupart du temps, cela s'avère laborieux, voire impossible. Pour le cas du modèle de Saint-Venant linéarisé s'il est possible de fournir une expression explicite de la solution dans le cas sans frottement (voir annexe 2) il n'est par contre plus possible de le faire pour le cas général. C'est pourquoi nous utilisons plutôt une approche basée sur la caractérisation de la stabilité exponentielle dans le domaine de Laplace (donnée à partir de l'opérateur résolvant $(sI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(Z)$).

Théorème 6.2 [Curtain R. F., H. J. Zwart, 1995] - *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur Z . Alors $(T(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si $(sI - A)^{-1} \in H_\infty(\mathcal{L}(Z))$ où l'espace*

$$H_\infty(\mathcal{L}(Z)) := \left\{ G : \mathcal{C}_0^+ \rightarrow \mathcal{L}(Z) \ / \ G \text{ est holomorphe, et } \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} \|G(s)\|_{\mathcal{L}(Z)} < \infty \right\}$$

avec $\mathcal{C}_0^+ := \{ s \in \mathcal{C} \ / \ \operatorname{Re}(s) > 0 \}$ le demi-plan (ouvert) complexe droit.

Par ce résultat, et du fait de la décomposition de l'espace $Z^e = \mathfrak{R}^2 \oplus Z$, nous pouvons conclure que le C_0 -semigroupe $T^e(t)$ associé au générateur A^e du problème homogénéisé n'est pas exponentiellement stable puisque l'opérateur résolvant présente nécessairement deux pôles en zéro correspondant aux intégrateurs qui apparaissent dans la phase d'homogénéisation de la commande aux frontières (voir équation (6.6) par exemple). Cependant, et bien plus fondamentalement, il est possible de montrer que le générateur du problème non homogénéisé engendre un semigroupe qui lui non plus n'est pas exponentiellement stable au sens défini ci-dessus. En effet, intéressons nous au générateur A_s qui définit la dynamique des équations de Saint-Venant linéarisées « hors homogénéisation » :

$$(S_s) \begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}(t) = A_s \tilde{\xi}(t) \\ \tilde{\xi}(0) = \tilde{\xi}_0(x), \end{cases} \quad (6.12)$$

avec

$$A_s = A_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad D(A_s) = \left\{ \tilde{\xi} \in Z \ / \ \tilde{h}(x=1, t) = 0, \tilde{Q}(x=0, t) = 0 \right\}$$

Il est possible de montrer que le C_0 -semigroupe $T_s(t)$ associé au générateur A_s est un opérateur non exponentiellement stable, c'est-à-dire, en utilisant le théorème 6.2 ci dessus de montrer que $(sI - A_s)^{-1} \notin H_\infty(\mathcal{L}(Z))$. La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'annexe 2.B.3.

Conclusion 6. 2 :

Le C_0 -semigroupe $T^e(t)$ associé au générateur A^e n'est pas exponentiellement stable.

La non stabilité exponentielle du modèle linéarisé ne résulte donc pas de la manière dont nous avons choisi d'homogénéiser la commande aux frontière mais est en quelque sorte « interne » au modèle de la dynamique de l'écoulement. Il convient cependant de noter que la stabilité exponentielle en dimension infinie est une notion extrêmement forte de stabilité (décroissance exponentielle en norme) et que le fait qu'elle ne soit pas satisfaite ici n'implique nullement l'instabilité usuelle (ponctuelle) du système.

Nous avons pris la peine d'énoncer ce résultat car il n'apparaît pas toujours clairement dans les travaux traitant de cette question. Cependant, dans l'approche de commande

optimale que nous voulons mettre en œuvre, la stabilité exponentielle du semigroupe $T^e(t)$ n'est pas nécessaire : sa *stabilisabilité* nous suffit.

6.3.2 Stabilisabilité exponentielle

Définition 6.4 (stabilisabilité exponentielle) – *Le système (S) ou la paire (A, B) est exponentiellement stabilisable s'il existe un opérateur $F \in \mathcal{L}(Z, U)$ tel que l'opérateur $(A - BF)$ engendre un semigroupe $(T_F(t))_{t \geq 0}$ exponentiellement stable.*

Du fait de la décomposition cartésienne de l'espace $Z^e = \mathfrak{R}^2 \oplus Z$ et du lemme 6.1, pour montrer que la paire (A^e, B^e) est exponentiellement stabilisable, il suffit de montrer que la paire (A_s, B) l'est. Afin de déterminer que c'est bien le cas, nous utilisons une théorie développée pour les systèmes hyperboliques symétriques dans [Xu C. Z., G. Sallet, 2002].

- **Mise sous forme d'un système hyperbolique symétrique**

Un système hyperbolique symétrique est un système décrit par des équations de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial R(x,t)}{\partial t} = G(x) \frac{\partial R(x,t)}{\partial x} + H(x)R(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times \mathfrak{R}^+ \\ R^-(0,t) = D_0 R^+(0,t) \\ R^+(1,t) = D_1 R^-(1,t) \\ R(x,0) = R_0(x), \end{cases} \quad (6.13)$$

où

(i) $R(x,t)$ est une fonction vectorielle de dimension $n \times 1$ pour tout $(x,t) \in (0,1) \times \mathfrak{R}^+$. Elle est décomposée en deux parties $R(x,t) = (R^+(x,t), R^-(x,t))^t$ avec $R^+(x,t) \in \mathfrak{R}^p$, $R^-(x,t) \in \mathfrak{R}^q$ et $p + q = n$.

(ii) $H(x)$ est une matrice réelle de dimension $n \times n$ pour tout x .

(iii) $G(x)$ est une matrice diagonale qui dépend de la variable x qui s'écrit :

$$G(x) = \begin{pmatrix} G^-(x) & 0 \\ 0 & G^+(x) \end{pmatrix},$$

avec $G^-(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_p(x))$ et $G^+(x) = \text{diag}(\lambda_{p+1}(x), \lambda_{p+2}(x), \dots, \lambda_{p+q}(x))$ où les valeurs propres λ_j de $G(x)$ satisfont :

$$\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_p(x) \leq \lambda_{p+1}(x) \leq \lambda_{p+2}(x) \leq \dots \leq \lambda_{p+q}(x).$$

(iv) D_0 et D_1 sont deux matrices réelles constantes.

Pour de tels systèmes hyperboliques, il est possible de caractériser facilement la stabilisabilité exponentielle. A cet effet, notons $G^*(x)$ la matrice adjointe de $G(x)$, $G_x(x)$ la matrice des dérivées de $G(x)$ par rapport à la variable x et I la matrice identité. La stabilisabilité exponentielle est établie en supposant les hypothèses suivantes :

(H.1) $H(\cdot) \in C^0([0,1]; \mathfrak{R}^{n \times n})$ et $G(\cdot) \in C^1([0,1]; \mathfrak{R}^{n \times n})$ (hypothèses de régularité).

(H.2) $\lambda_j(x) < 0$, pour $j = 1, 2, \dots, p$ et $\lambda_{p+j}(x) > 0$, pour $j = 1, 2, \dots, q$, et $\forall x \in [0, 1]$ (hypothèse de décomposition spectrale).

(H.3) Pour chaque $x \in [0, 1]$:

$$H(x) + H^*(x) - G_x(x) \leq 0 \quad (6.14)$$

$$G^-(1) + D_1^* G^+(1) D_1 \leq -r^- I \quad (6.15)$$

$$G^+(0) + D_0^* G^-(0) D_0 \geq r^+ I \quad (6.16)$$

où r^- et r^+ sont deux constantes telles que $r^- + r^+ > 0$ (ces hypothèses garantissent l'existence d'un retour d'état linéaire borné stabilisant).

En ce qui nous concerne, le problème hyperbolique symétrique que nous avons à traiter est défini sur un espace réel de Hilbert $X = (L^2(0,1))^n$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle_X = \int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(x) g_k(x) dx.$$

L'hypothèse de séparation du spectre en une partie positive et une partie négative est liée à l'hypothèse des écoulements fluviaux où les valeurs propres de A_s sont de signes contraires.

Théorème 6.3 [Rauch J., M. Taylor] – Si le système (6.13) vérifie les hypothèses (H.1) à (H.3), alors pour chaque $R_0 \in X$ le système a une solution unique $R(\cdot, t) \in C([0, +\infty); X)$, et le semigroupe $T_R(t)$ sur X tel que $R(\cdot, t) = T_R(t) R_0$ est exponentiellement stable, c'est-à-dire vérifie : $\|T_R(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\omega t}, t \geq 0$, pour $M > 0, \omega > 0$.

Nous voulons montrer que le système (6.12) est exponentiellement stabilisable ce qui revient à montrer qu'il existe un opérateur $F \in \mathcal{L}(Z, U)$ tel que l'opérateur $(A_s - BF)$ engendre un semigroupe $(T_F(t))_{t \geq 0}$ exponentiellement stable. Pour pouvoir appliquer le théorème 6.3 à notre système, nous devons encore l'écrire sous la forme hyperbolique symétrique. Le système associé au générateur A_s que nous considérons est décrit par l'équation d'état abstraite :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}(t) = A_1 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\xi}(t) + A_2 \tilde{\xi}(t) \\ \tilde{\xi}(0) = \tilde{\xi}_0(x). \end{cases}$$

Les valeurs propres de la matrice A_1 sont $\lambda_1 = (-a_2 - \sqrt{\Delta})/2$ et $\lambda_2 = (-a_2 + \sqrt{\Delta})/2$ avec $\Delta = a_2^2 - 4a_1$ et les constantes

$$a_1 = (1 - g \frac{B^2 h_e^3}{Q_e^2}) \quad ; \quad a_2 = 2,$$

définies précédemment. Il faut remarquer que c'est cette propriété fondamentale qui établit le lien entre l'hypothèse des écoulements fluviaux ($a_1 < 1$) et celle de la formulation hyperbolique symétrique. Nous posons ensuite :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -1 \\ \lambda_1 & 1 \end{pmatrix},$$

les matrices de passage permettant le changement de base entre le base canonique et la base des vecteurs propres de A_1 . Pour un choix $F \in \mathcal{L}(Z, U)$, le nouveau système bouclé associé au générateur $(A_s - BF)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}(t) = A_1 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\xi}(t) + A_2 \tilde{\xi}(t) - BF \tilde{\xi}(t) \\ \tilde{\xi}(0) = \tilde{\xi}_0(x), \end{cases} \quad (6.17)$$

avec $B = I_2$. En faisant le changement de variable :

$$R(x, t) = P^{-1} \tilde{\xi}(x, t) ; \quad \begin{pmatrix} R^-(x, t) \\ R^+(x, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -1 \\ \lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}(x, t) \\ \tilde{Q}(x, t) \end{pmatrix},$$

le système (6.17) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} R^-(x,t) \\ R^+(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} R^-(x,t) \\ R^+(x,t) \end{pmatrix} + (P^{-1}(A_2 - F)P) \begin{pmatrix} R^-(x,t) \\ R^+(x,t) \end{pmatrix} \\ R^-(0,t) = D_0 R^+(0,t) \\ R^+(1,t) = D_1 R^-(1,t) \\ R(x,0) = R_0(x), \end{cases}$$

qui est un système hyperbolique symétrique où

$$G(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; H(x) = P^{-1}(A_2 - F)P; D_0 = D_1 = 0$$

avec $G^-(x) = \lambda_1 < 0$; $G^+(x) = \lambda_2 > 0$. En ce qui concerne les hypothèses du théorème 6.2, il convient de remarquer que :

- les deux hypothèses (H.1) et (H.2) sont satisfaites par construction.
- L'hypothèse (H3) se décompose en les trois équations (6.14) à (6.16) :
 - o pour la relation (6.14) il suffit de choisir l'opérateur $F = A_2$ de telle sorte que $H(x) = 0$, d'où $H(x) + H^*(x) - G_x(x) = 0 \leq 0$.
 - o Pour la relation (6.15) il suffit de choisir $r^- \geq -\lambda_1$.
 - o Pour la relation (6.16) il suffit de choisir $r^+ \geq \lambda_2$.

D'après le théorème 6.2 nous pouvons donc conclure que le système (6.12) est exponentiellement stabilisable. Il en est donc de même du système augmenté (S^e).

Conclusion 6.3 :

Le système augmenté (S^e) est exponentiellement stabilisable si l'hypothèse des écoulements fluviaux est satisfaite.

Il convient de remarquer par ailleurs que dans le cas des écoulements torrentiels, cela n'a pas de sens d'essayer de stabiliser le système à partir d'une commande à l'aval.

6.3.3 Déteçtabilité exponentielle

Définition 6.5 (déteçtabilité exponentielle) – *Le système (S) ou la paire (A, C) est exponentiellement déteçtable s'il existe un opérateur $L \in \mathcal{L}(U, Z)$ tel que l'opérateur ($A - LC$) engendre un semigroupe $(T_L(t))_{t \geq 0}$ exponentiellement stable.*

De la même façon que pour la stabilisabilité, pour montrer la paire (A^e, C^e) est exponentiellement déteçtable, il suffit de montrer que la paire (A_s, C) l'est, ce qui revient

à montrer qu'il existe un opérateur $L \in \mathcal{L}(U, Z)$ tel que l'opérateur $(A_s - LC)$ engendre un semigroupe $(T_L(t))_{t \geq 0}$ exponentiellement stable.

Notons que l'opérateur C dans notre cas est celui qui a été défini par la relation (6.9) et qu'il s'agit bien d'un opérateur linéaire borné sur Z . L'opérateur $(A_s - LC)$ peut donc s'écrire sous la forme $A_s - LC = A + D$, avec

$$A = A_1 \frac{\partial}{\partial x} \text{ et } D = A_2 - LC.$$

Il est démontré à l'annexe 2.B.2 que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$ dont le spectre est inclus strictement dans le demi-plan complexe ouvert gauche. Donc, d'après le théorème 6.1, si l'opérateur D est borné alors l'opérateur $(A_s - LC)$ engendre aussi un C_0 -semigroupe $(T_L(t))_{t \geq 0}$ tel que

$$\|T_L(t)\| \leq M \exp[(-\omega + M\|D\|)t].$$

La stabilité exponentielle de $(T_L(t))_{t \geq 0}$ est donc établie si

$$-\omega + M\|D\| < 0.$$

Il suffit pour cela de choisir un opérateur L borné qui vérifie la condition

$$\|L\| < \frac{\omega}{M\|C\|} = \frac{\omega\sqrt{2\varepsilon}}{M},$$

qui peut être satisfaite par une matrice L constante bornée et suffisamment petite. Il suffit donc d'un opérateur linéaire borné $-LC$ où L vérifie la condition ci-dessus pour stabiliser le générateur

$$A_s = A_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x},$$

qui sans cela n'est pas exponentiellement stable (voir annexe 2.B.3).

Conclusion 6.4 :

Le système augmenté (S^e) est exponentiellement détectable.

6.4 Commande optimale en dimension infinie

La commande optimale d'un système se traduit par la détermination d'une loi de commande assurant la réalisation d'un objectif pour lequel le système a été conçu. Cet objectif est exprimé à l'aide d'une fonction « coût » dépendant de la dynamique du système, laquelle fonction coût représente le critère à optimiser. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la commande optimale en dimension infinie (en boucle fermée) du modèle de Saint-Venant linéarisé. Nous voulons garder le modèle linéarisé en dimension infinie le plus longtemps possible dans l'étude et ne procéder à une approximation que pour le calcul de la commande optimale. Contrairement à notre démarche des chapitres précédents où nous avons réduit le système linéaire à un système de dimension finie, il s'agit cette fois de réduire le retour d'état optimal, c'est-à-dire le régulateur LQ. Nous conservons comme objectif de régulation l'atteinte de consignes sur le débit aval et le tirant d'eau amont d'un bief, et nous souhaitons pour ce faire utiliser le « même » critère quadratique que précédemment, mais défini bien sûr pour un état dans Z . Pour cela nous utilisons la théorie existante concernant le calcul du régulateur optimal LQ en dimension infinie (voir, par exemple, [Curtain R. F., H. J. Zwart, 1995]).

Nous choisissons donc comme critère à minimiser, contraint par la dynamique (6.11), le même critère linéaire quadratique utilisé dans la première approche (commande optimale robuste LQG/H2), et qui est défini par :

$$J = \int_0^{+\infty} ([y(t)' y(t)] + [\tilde{u}(t)' \tilde{u}(t)]) dt. \quad (6.18)$$

Nous avons montré en détail que l'opérateur $T^e(t)$, associé au problème augmenté (S^e), est un C_0 -semigroupe et que le système est exponentiellement stabilisable et détectable. Dans ces conditions le théorème ci-après nous garantit l'existence et l'unicité d'une solution au problème que nous venons de définir. De plus, il garantit également que la commande optimale, solution de ce problème, peut être réalisée à l'aide d'un retour d'état semi-défini positif et solution unique d'une équation de Riccati d'opérateurs associée au problème augmenté (S^e).

Théorème 6.4 [Curtain R. F., H. J. Zwart, 1995] – *Si le système linéaire (6.11a) est exponentiellement stabilisable et détectable, alors l'équation de Riccati*

$$\forall z_1, z_2 \in Z \quad \langle A z_1, \Pi z_2 \rangle + \langle \Pi z_1, A z_2 \rangle + \langle C z_1, C z_2 \rangle - \langle B^* \Pi z_1, R^{-1} B^* \Pi z_2 \rangle = 0,$$

admet une solution unique $\Pi \in \mathcal{L}(Z)$ non négative. Elle est telle que l'opérateur $A - BR^{-1}B^*\Pi$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable. De plus, la commande optimale solution du problème linéaire quadratique défini ci-dessus existe, est unique et s'écrit :

$$u_{\min} = -R^{-1}B^*\Pi z, \forall z \in Z.$$

6.4.1 Application au problème de commande homogénéisé

Les résultats précédents s'appliquent directement à notre problème si nous choisissons comme produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ défini sur l'espace augmenté $Z^e = \mathbb{R}^2 \oplus Z$ par :

$$\langle \xi^{e_1}, \xi^{e_2} \rangle_e = (u_1^1(t)u_1^2(t)) + (u_2^1(t)u_2^2(t)) + \int_0^1 (\tilde{h}^1(x,t)\tilde{h}^2(x,t))dt + \int_0^1 (\tilde{Q}^1(x,t)\tilde{Q}^2(x,t))dt,$$

tels que $\xi^{e_1} = (u_1^1(t), u_2^1(t), \tilde{h}^1(x,t), \tilde{Q}^1(x,t))^t$; $\xi^{e_2} = (u_1^2(t), u_2^2(t), \tilde{h}^2(x,t), \tilde{Q}^2(x,t))^t$.

Le but de ce paragraphe est donc de calculer une loi de commande optimale en boucle fermée $\tilde{u}_{\min} = -R^{-1}B^{e*}\Pi^e\xi^e, \forall \xi^e \in Z^e$, telle que $\Pi^e \in \mathcal{L}(Z^e)$ est solution de l'équation de Riccati (6.19) suivante :

$$\forall \xi^{e_1}, \xi^{e_2} \in Z^e \quad \langle A^e \xi^{e_1}, \Pi^e \xi^{e_2} \rangle_e + \langle \Pi^e \xi^{e_1}, A^e \xi^{e_2} \rangle_e + \langle C^e \xi^{e_1}, C^e \xi^{e_2} \rangle_{\mathbb{R}^2} - \langle B^{e*} \Pi^e \xi^{e_1}, R^{e-1} B^{e*} \Pi^e \xi^{e_2} \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0. \quad (6.19)$$

Nous prenons comme opérateur $R = I$, et comme opérateur Π^e :

$$\Pi^e = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

où π_{km} sont des opérateurs à calculer pour $k, m \in \{1, 2, \dots, 4\}$.

6.4.2 Méthode de résolution

Dans ce paragraphe, nous présentons le moyen d'obtenir une approximation en dimension finie de la commande optimale en dimension infinie (du régulateur optimal LQ) sur la base de l'équation de Riccati d'opérateurs associée au problème augmenté. Etant donnée la difficulté à calculer la solution de l'équation de Riccati (6.19), car ce n'est plus une

équation matricielle, mais une équation d'opérateurs dont l'inconnue est l'opérateur Π^e , nous utilisons comme méthode de résolution la méthode de collocation orthogonale, que nous avons déjà utilisée dans les autres chapitres. Elle permet de calculer les projections des opérateurs π_{km} sur la base des polynômes de Lagrange (voir [MingQing X., T. Basar, 1999]).

De la même façon que dans les autres chapitres on note $\tilde{h}_i(t)$ et $\tilde{Q}_i(t)$ les valeurs des hauteurs $\tilde{h}(x,t)$ et des débits $\tilde{Q}(x,t)$ aux différents points de collocation $\{x_i\}_{i=1}^N$, et N est le nombre de points de collocation. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, $\tilde{h}(x,t)$ et $\tilde{Q}(x,t)$ peuvent s'écrire : $\tilde{h}(x,t) = \sum_{j=1}^N \tilde{h}_j(t) L_j(x)$; $\tilde{Q}(x,t) = \sum_{j=1}^N \tilde{Q}_j(t) L_j(x)$,

L'équation de Riccati (6.19) est vérifiée quels que soient $\xi^{e_1}, \xi^{e_2} \in Z^e$, donc il suffit de la vérifier pour les éléments de base (les polynômes de Lagrange), c'est à dire pour des valeurs

$$\begin{aligned} \xi^{e_1} &= \left(u_1^1(t), u_2^1(t), \tilde{h}^1_i(t) L_i(x), \tilde{Q}^1_i(t) L_i(x) \right)^t, \\ \xi^{e_2} &= \left(u_1^2(t), u_2^2(t), \tilde{h}^2_j(t) L_j(x), \tilde{Q}^2_j(t) L_j(x) \right)^t. \end{aligned}$$

L'idée principale pour le calcul des projections des opérateurs π_{km} sur la base des polynômes de Lagrange consiste à remplacer ξ^{e_1} et ξ^{e_2} par leurs valeurs précédentes dans l'équation de Riccati (6.19).

Dans ce paragraphe, nous présentons comment calculer les projections des opérateurs sur la base des polynômes de Lagrange.

Notons par $\pi_{km} L_j(x)$ l'image de $L_j(x)$ par l'opérateur π_{km} , qui peut s'écrire aussi dans la base des polynômes de Lagrange de la façon suivante : $\pi_{km} L_j(x) = \sum_{p=1}^N \pi_{km}^j L_p(x)$. Dans ce cas, les coefficients π_{km}^j , que nous cherchons à calculer, sont les projections de la fonction $\pi_{km} L_j(x)$ dans la base $\{L_j(x)\}_{j=1}^N$. Après avoir calculé tous les produits scalaires de l'équation de Riccati (6.19), on obtient un système bilinéaire à résoudre dont les inconnues sont les coefficients π_{km}^j , $\forall k, m \in \{1, \dots, 4\}$, $\forall p, j \in \{1, \dots, N\}$.

6.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre, une autre approche pour la synthèse de la commande optimale en dimension infinie (régulateur optimal LQ en dimension infinie). Cette approche est souvent moins connue dans le milieu de l'automatique et surtout dans le domaine qui nous intéresse : celui des canaux d'irrigation à surface libre. Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés uniquement au modèle de Saint-Venant linéaire qui est un système à paramètres distribués de grande taille dont la dynamique est représentée par les équations aux dérivées partielles linéaires de dimension infinie. Nous avons montré mathématiquement et en détail que le modèle linéarisé de Saint-Venant satisfait toutes les propriétés de semi-groupe, ce qui n'avait pas été fait, à notre connaissance. Ensuite, nous avons montré que ce modèle linéarisé de Saint-Venant est non exponentiellement stable, ainsi nous avons fait une étude complète sur l'analyse dynamique du modèle, en montrant qu'il est exponentiellement stabilisable et exponentiellement détectable afin de s'assurer de l'existence d'un opérateur Π^e solution unique de l'équation de Riccati associée à notre problème de commande. La commande optimale en dimension infinie pourra alors se calculer à partir de l'opérateur Π^e . Afin de mettre en œuvre cette loi de commande, il est nécessaire de résoudre l'équation de Riccati, qui est une équation d'opérateurs. Finalement nous avons décrit un moyen d'obtenir une approximation en dimension finie de l'opérateur Π^e . Nous avons utilisé comme méthode d'approximation, la méthode de collocation orthogonale, ainsi l'opérateur Π^e est approché par une somme de ces projections sur la base des polynômes de Lagrange. Faute de temps, nous n'avons pas pu résoudre l'équation de Riccati. Dans le prochain chapitre, nous présentons le micro-canal de Valence sur lequel nous testons les différentes lois de commande : commande PI + prédicteur, commande optimale robuste de dimension finie. Enfin nous présentons une comparaison des résultats expérimentaux obtenus.

Chapitre 7

Résultats expérimentaux sur le micro-canal

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une description du micro-canal de Valence, et les résultats des différentes lois de commande que nous avons testées, en particulier en suivant l'approche développée dans le chapitre 4. Dans un premier temps, nous présentons le micro-canal expérimental qui a servi de support à nos expérimentations. Dans un deuxième temps, nous montrons comment adapter la commande optimale robuste, qui a été développée au chapitre 4, au micro-canal ; c'est-à-dire comment il a fallu transformer les entrées et les sorties de cette commande, afin que celles-ci puissent s'adapter au canal. Enfin nous présentons une comparaison des résultats expérimentaux obtenus lors de l'application sur le micro-canal de différentes lois de commande étudiées : commande PI + prédicteur, commande optimale robuste de dimension finie développée précédemment dans le chapitre 4. Le lecteur est invité à se reporter à l'annexe 4 pour l'étude d'identification du micro-canal faite par Sylvie Chaussinand [Chaussinand S., 2003] pendant son stage de DEA, étude qui a permis de déterminer les paramètres caractérisant la géométrie du canal et ceux intervenant dans les équations de Saint-Venant.

7.2 Description du micro-canal

Le canal est constitué de deux biefs d'une longueur de 3,5 m, prolongés à l'amont et à l'aval par des extensions de 0,5 m. Les parois sont en polycarbonate. Au canal, vient s'ajouter un réservoir amont qui fait office de source dont le niveau est régulé de manière à être constant (simulation d'un réservoir de volume infini), et un réservoir aval permettant de simuler éventuellement un réservoir aval de volume infini (grâce à une régulation du niveau dans ce réservoir). Un réservoir intermédiaire, qui sert de cuve de stockage, complète le dispositif. La structure est supportée par une poutre en treillis

métallique. La circulation d'eau entre les réservoirs aval, intermédiaire et amont se fait dans des tuyaux fermés en PVC de type tuyau sanitaire. La partie canal peut être inclinée grâce à un vérin.

Ci-dessous se trouve un schéma complet de la maquette avec l'ensemble des capteurs actionneurs :

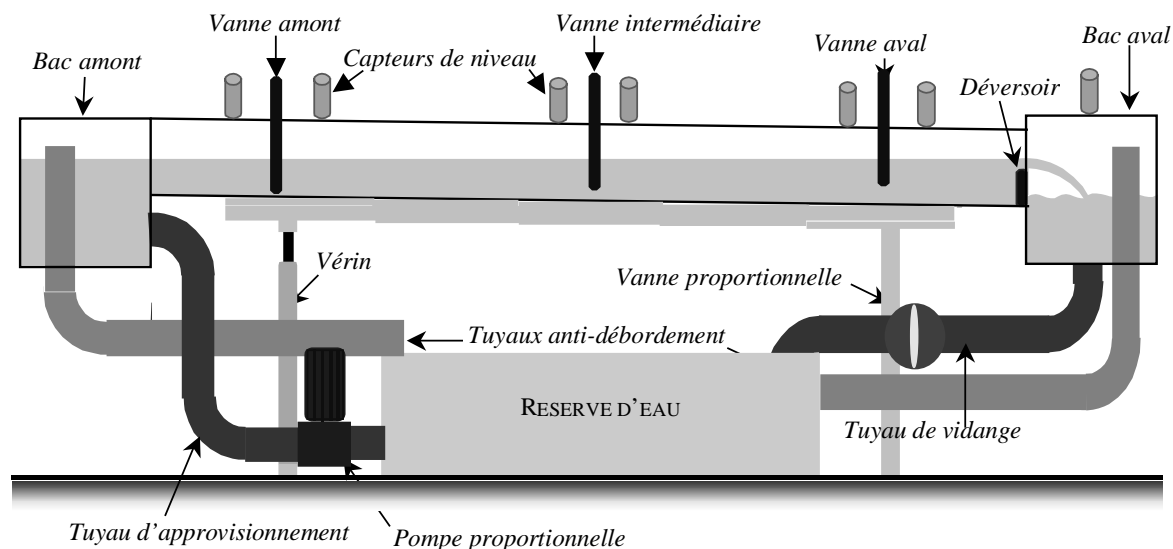


Figure 7.1 : Schéma de micro-canal de Valence.

Le canal est donc de longueur 8 m avec une section rectangulaire 100 x 250 mm, est inclinable avec une pente comprise entre de -0.013 à $+0.0045$ mm. Il est muni de capteurs de niveaux (ce sont des capteurs à ultrasons) qui délivrent après traitement une tension de 0 à 10 V correspondant à une hauteur d'eau de 0 à 20 cm. Les vannes sont actionnées par des moteurs à courant continu asservis qui, à la mise sous tension, vont chercher leurs butées et ensuite ouvrent la vanne de manière linéaire de 0 à 20 cm en fonction de leur tension d'entrée 0 – 10 V. La vanne et la pompe proportionnelles sont destinées à assurer un niveau constant respectivement à l'aval et à l'amont du canal. Elles font l'objet d'une régulation externe assurée par un automate Crouzet de type Millénium II.

Un PC de supervision récupère toutes les données issues des capteurs et gère tous les actionneurs via une interface MATLAB/dSPACE. Un exemple des fichiers d'échange et d'interface homme machine est donné en Annexe 3.

7.3 Adaptation de la commande optimale robuste LQG/H₂

Nous rappelons que les variables de la commande optimale robuste aux erreurs de réduction, développée précédemment dans le chapitre 4, sont exprimées en termes de débit amont et de tirant d'eau aval. Ces conditions de commande frontière doivent donc encore être réalisées à l'aide des deux vannes situées à chaque extrémité du bief voir figure (7.1). Un algorithme doit donc être développé pour transformer les variables de la commande en une valeur d'ouverture de vanne, c'est-à-dire transformer ces deux variables de commande en deux valeurs d'ouverture des deux vannes, l'une située à l'amont et l'autre située à l'aval.

La commande optimale et la sortie sont données par :

$$\begin{aligned} u(t) &= (u_1(t) \quad u_2(t))^t = \left(\frac{\partial h(L,t)}{\partial t} \quad \frac{\partial Q(0,t)}{\partial t} \right)^t \\ y(t) &= (y_1(t) \quad y_2(t)) = (h(0,t) \quad Q(L,t))^t. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Le travail d'adaptation consiste donc à écrire l'algorithme sous forme de fichier Simulink et à traduire la commande obtenue en ouverture de vannes.

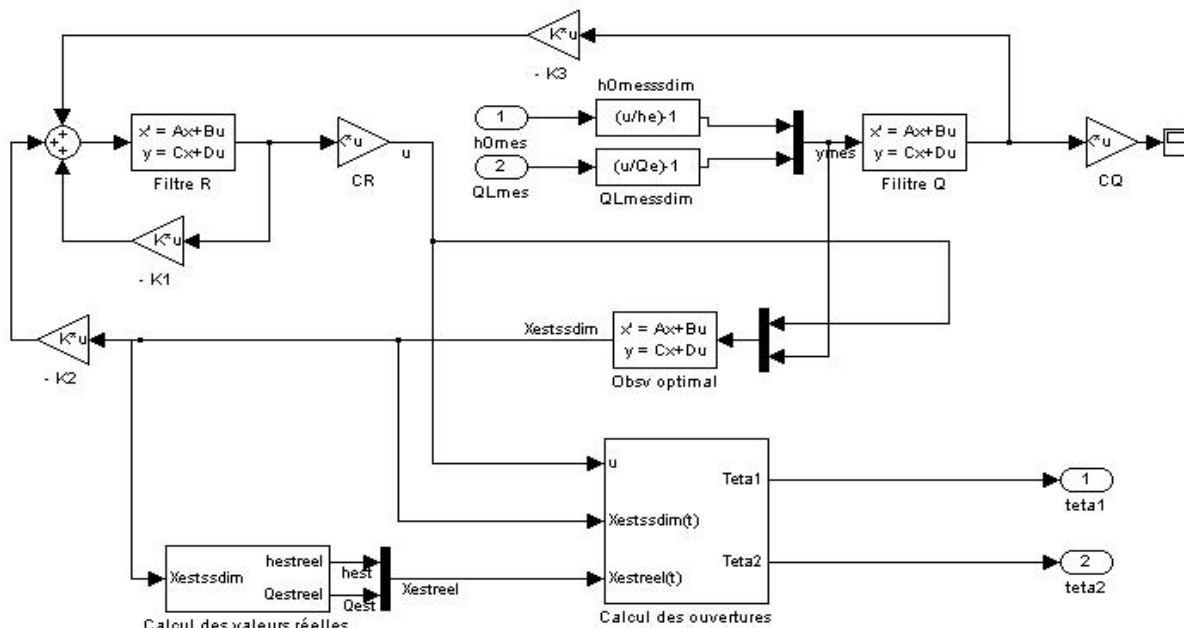
Remarque 7.1:

Notons que dans ce chapitre nous n'utilisons pas l'approche de la régulation via les deux vannes développées précédemment dans le chapitre 5, du fait que la dynamique des vannes est très rapide, il est donc plus simple d'utiliser la relation linéaire qui existe entre l'ouverture de la vanne et la tension (voir partie d'identification faite dans [Chaussinand S., 2003]).

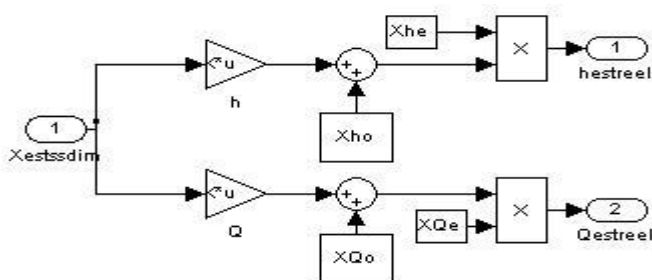
7.3.1 Ecriture du programme sous forme Simulink

Le programme qui fournit le calcul de la commande optimale robuste que nous avons développée (voir Figure 4.4b) peut se mettre sous la forme Simulink décrite par la figure 7.5.

Notons que les valeurs de commande sont des grandeurs adimensionnelles, ce qui nous oblige aussi à concevoir un bloc qui calcule les valeurs réelles.



Programme principal.
Modèle réduit de collocation/Commande des vannes.



Bloc calcul des valeurs réelles.

Figure 7.5 : Programme sous forme Simulink.

7.3.2 Conversion des commandes en ouverture de vannes

Les lois des deux vannes nous donnent directement une relation entre le débit, la hauteur et l'ouverture. Nous allons donc dériver ces lois de manière à faire intervenir $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Nous obtenons ainsi la dérivée de l'ouverture des vannes correspondantes qu'il est facile d'intégrer.

- **Pour la vanne amont**

La loi d'ouvrage nous donne :

$$Q(0,t) = \alpha_{v1} B \theta_1(t) \sqrt{2g(h_{am} - h(0,t))}$$

$$\Leftrightarrow \theta_1(t) = \frac{Q(0,t)}{\alpha_{v1} B \sqrt{2g(h_{am} - h(0,t))}}$$

$$\frac{d\theta_1(t)}{dt} = \frac{1}{\alpha_{v1} B \sqrt{2g(h_{am} - h(0,t))}} \frac{dQ(0,t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{-Q(0,t)}{\alpha_{v1} B \sqrt{2g(h_{am} - h(0,t))}^3} \frac{dh(0,t)}{dt}$$

$$\frac{d\theta_1(t)}{dt} = \frac{1}{\alpha_{v1} B \sqrt{2g(h_{am} - h(0,t))}} u_2(t) - \frac{1}{2} \frac{-Q(0,t)}{\alpha_{v1} B \sqrt{2g(h_{am} - h(0,t))}^3} \frac{dh(0,t)}{dt}. \quad (7.2)$$

- **Pour la vanne aval :**

La loi d'ouvrage nous donne :

$$Q(L,t) = \alpha_{v3} B \theta_2(t) \sqrt{2g(h(L,t) - h_{av})}$$

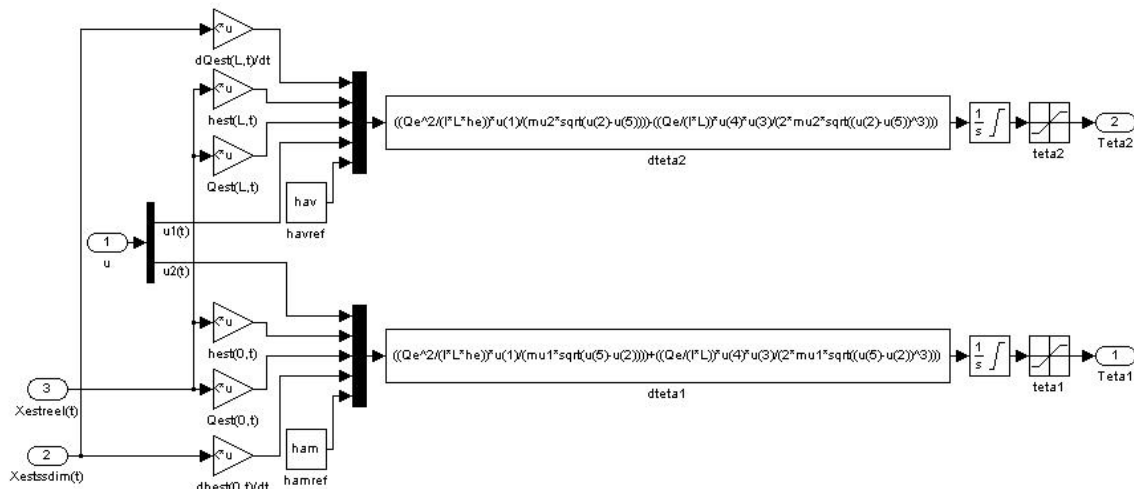
$$\Leftrightarrow \theta_2(t) = \frac{Q(L,t)}{\alpha_{v3} B \sqrt{2g(h(L,t) - h_{av})}}$$

$$\frac{d\theta_2(t)}{dt} = \frac{1}{\alpha_{v3} B \sqrt{2g(h(L,t) - h_{av})}} \frac{dQ(L,t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{Q(L,t)}{\alpha_{v3} B \sqrt{2g(h(L,t) - h_{av})}^3} \frac{dh(L,t)}{dt}$$

$$\frac{d\theta_2(t)}{dt} = \frac{1}{\alpha_{v3} B \sqrt{2g(h(L,t) - h_{av})}} \frac{dQ(L,t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{Q(L,t)}{\alpha_{v3} B \sqrt{2g(h(L,t) - h_{av})}^3} u_1(t), \quad (7.3)$$

où α_{v1} est le coefficient de débit de la vanne amont et α_{v3} est le coefficient de débit de la vanne aval.

Ensuite, dans l'algorithme sous Simulink, nous avons rajouté un bloc conversion contenant le bloc ci-dessus et se terminant par un intégrateur.



Bloc de calcul des ouvertures.

7.3.3 Résultats expérimentaux

7.3.3.1 Test de la commande LQG/H₂ sur le micro-canal

Plusieurs tests de la commande optimale robuste LQG/H₂ aux erreurs de réduction ont été réalisés sur le micro-canal et nous ne rapportons ici que deux de ces tests, premièrement un test qui correspond à des consignes en hauteur et en débit :

- la hauteur d'équilibre à l'amont initiale est de 0.113 m, on cherche à atteindre une hauteur de 0.123 m ;

- le débit d'équilibre initial est de $0.003 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ et on veut atteindre $0.002 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$.

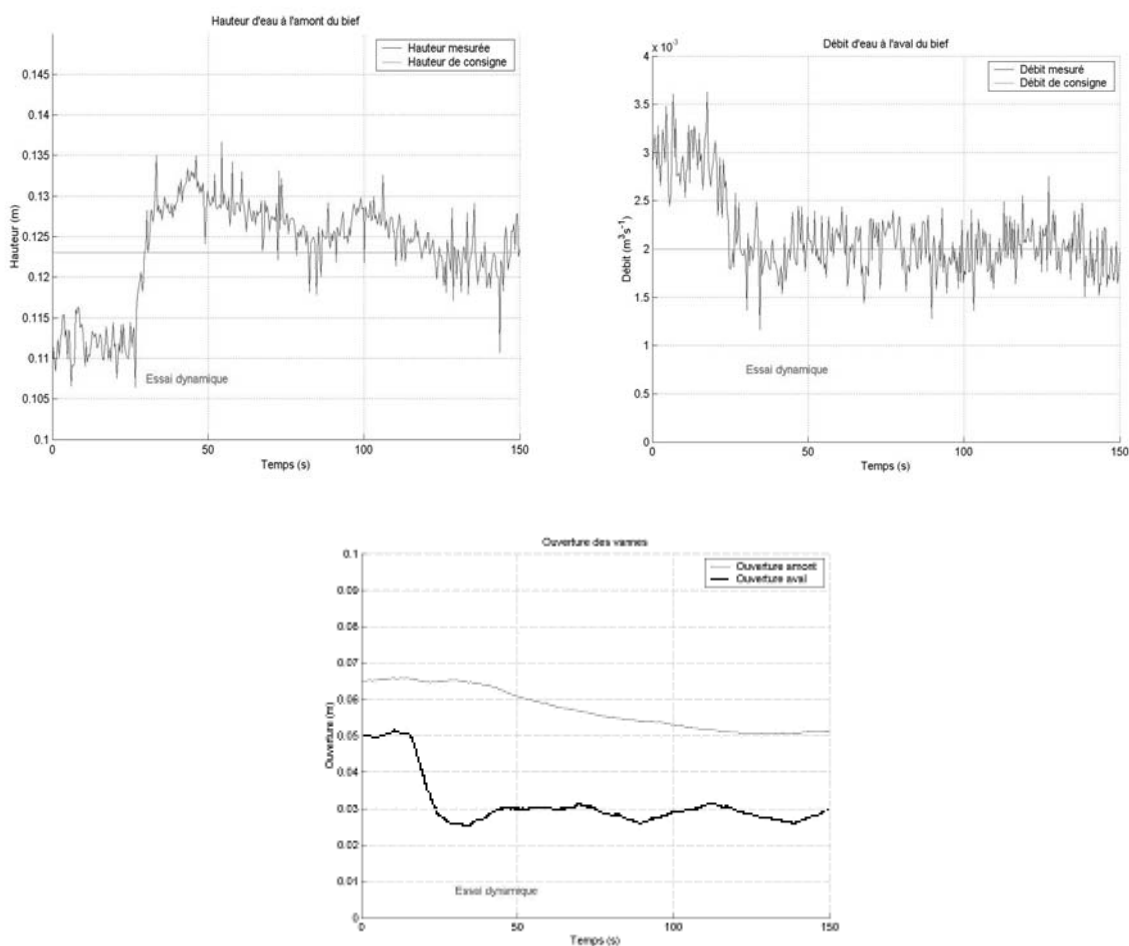


Figure 7.6a : Résultats pratiques de la commande LQG/H₂.

Et deuxièmement un test qui correspond à un essai en échelon sur les consignes en hauteur et en débit, soit :

- la hauteur d'équilibre à l'amont initiale est de 0.113 m, on cherche à atteindre une hauteur de 0.123 m ;
- le débit d'équilibre initial est de $0.003 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ et on veut atteindre $0.002 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

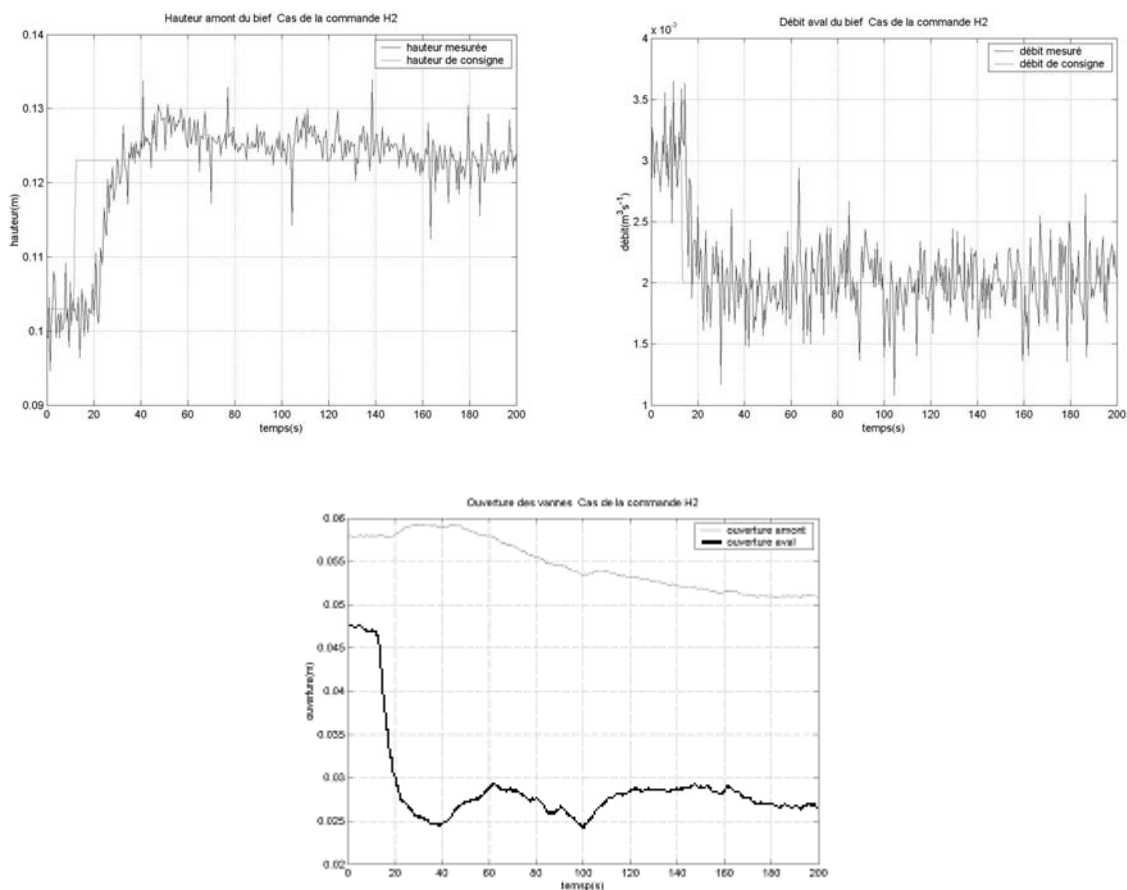


Figure 7.6b : Résultats pratiques de la commande LQG/H₂.

Les tests ont montré qu'il est possible d'atteindre des hauteurs allant de 0,105m à 0,135m, le point d'équilibre étant à 0,123m et des débits de $0,001 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ à $0,003 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ pour un point d'équilibre à $0,002 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Il est très facile d'adapter cette commande. En effet, dans le programme de calcul des gains de la commande, il suffit de rentrer un régime d'équilibre souhaité et le gain est recalculé automatiquement.

Remarque 7.2:

Il faut noter qu'en ce qui concerne la hauteur nous sommes limités par le régime noyé de la vanne. En effet, la hauteur d'eau à l'aval doit toujours être supérieure à l'ouverture de la vanne et logiquement la hauteur d'eau à l'aval d'une vanne ne doit pas être supérieure à la hauteur à l'amont d'une vanne. Pour cet essai, la hauteur d'eau à l'amont de la vanne est fixée à 0,14m. Sachant que cette hauteur contient une erreur de +/-0,005m. Cela explique le fait que nous ne puissions pas monter au dessus de 0,135m en aval de la vanne amont.

- **Conclusion**

Nous observons que cette commande est remarquable par sa rapidité (temps de réponse). D'autre part, elle donne des ouvertures de vanne très « lisses ». Les vannes ne sont pas fortement sollicitées par des oscillations ou de longues et grandes variations. Ceci est un avantage car elle ne sollicite pas les actionneurs à l'extrême. Finalement nous avons remarqué qu'il y a une grande différence entre la dynamique de la hauteur et la dynamique du débit. Cela peut s'expliquer par le fait que les vannes influent sur la hauteur et que le débit est très sensible à la variation de hauteur. Si bien qu'une petite variation de hauteur entraîne une grande variation du débit. Il est donc plus rapide d'atteindre le débit d'équilibre qui correspond à une faible variation de hauteur que de réaliser un échelon d'amplitude importante sur la hauteur.

7.4 Commande PI

L'objectif de cette étude est de synthétiser une commande permettant d'assurer un débit et une hauteur constant à l'aval. Le débit permet de fournir de l'eau en permanence à un utilisateur aval et la hauteur permet d'assurer une réserve d'eau suffisante pour fournir le débit voulu en cas de forte augmentation de la demande.

Comme commandes, nous intervenons uniquement sur les ouvertures des vannes. La vanne amont est utilisée pour réguler la hauteur d'eau à l'aval du bief, la vanne aval, pour réguler le débit en aval du bief.

Nous avons donc deux variables régulées : la hauteur et le débit à l'aval et deux variables de commandes : l'ouverture des vannes amont et aval.

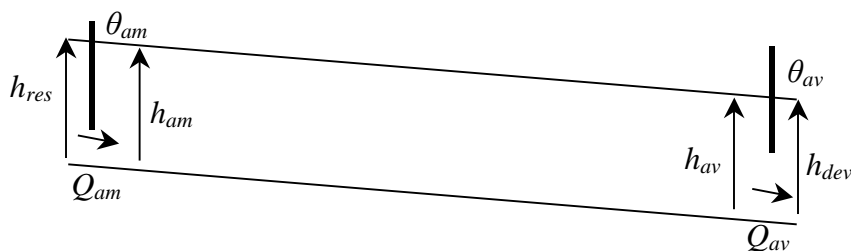


Figure 7.8 : Schéma annoté du bief à réguler.

Le schéma-bloc ci-dessous représente le système asservi.

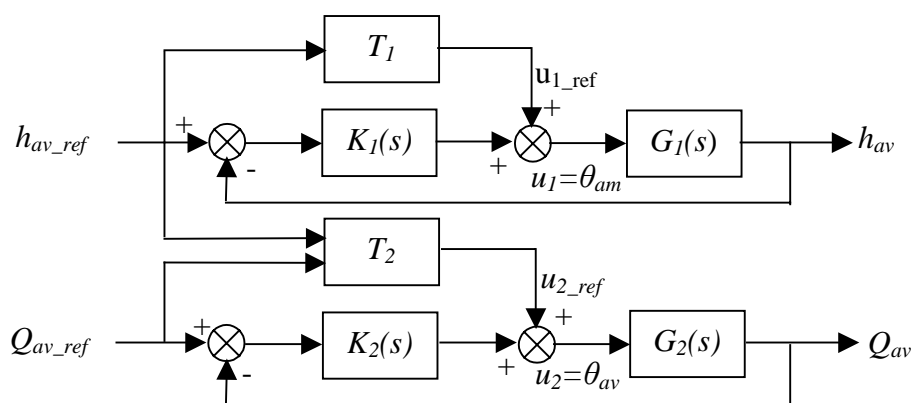


Figure 7.9 : Structure du système asservi.

Les transferts T_1 et T_2 sont des termes d'anticipation. Les deux correcteurs $K_1(s)$ et $K_2(s)$ servent alors à réguler autour de la valeur de consigne et donc à rejeter les perturbations. Les transferts $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sont les modèles de comportement de l'écoulement du canal identifier ci-dessous.

Dans le cas du sous-système θ_{am} vers h_{av} , nous sommes en présence d'un temps de retard égal au temps de propagation de l'onde de l'amont à l'aval du canal. Sur le correcteur $K_1(s)$, nous allons mettre en œuvre un prédictor de Smith associé à un PI, un simple PI étant inefficace en présence d'un retard, pour le sous système θ_{av} vers Q_{av} , un simple PI suffit, l'effet étant immédiat.

7.4.1 Modélisation et identification

Les transferts sont étudiés pour des petites variations autour du point d'équilibre suivant :

$$h_{av}^e = 0.123 \text{ m} ; Q_{av}^e = 2 \text{ l s}^{-1}.$$

Détermination de $G_1(s)$:

Le transfert $G_1(s) = \frac{h_{av}}{\theta_{am}}$ est déterminé à partir d'un essai en échelon réalisé en simulation.

La méthode d'identification de Vladimir Strejc nous donne le transfert suivant :

$$G_1(s) = \frac{0.313e^{-3.1s}}{(1+1.08s)^4}.$$

Détermination de $G_2(s)$:

Le transfert $G_2(s) = \frac{Q_{av}}{\theta_{av}}$ nous est donné par la loi de la vanne aval en régime établi auxquels nous ajoutons un premier ordre symbolisant le temps de montée de la vanne, soit :

$$G_2(s) = \frac{\hat{\alpha}_{av} \sqrt{h_{av_ref} - h_{dev_ref}}}{1+0.4s},$$

$$\text{où } \hat{\alpha}_{av} = \alpha_{av} B \sqrt{2g}.$$

Dans cette équation, il nous manque la valeur de h_{dev_ref} (hauteur d'eau au niveau du déversoir en régime statique) que l'on détermine par la loi du déversoir qui nous donne une relation liant h_{dev_ref} et Q_{av_ref} : $Q_{av_ref} = \hat{\alpha}_{dev} (h_{dev_ref} - 0.052) \sqrt{(h_{dev_ref} - 0.052)}$, avec $\hat{\alpha}_{dev} = \alpha_{dev} B \sqrt{2g}$.

Donc h_{dev_ref} solution de l'équation du troisième ordre :

$$h_{dev_ref}^3 - 0.156h_{dev_ref}^2 + 0.008h_{dev_ref} - \left(\frac{Q_{av_ref}^2}{\hat{\alpha}_{dev}^2} + 0.0001 \right) = 0$$

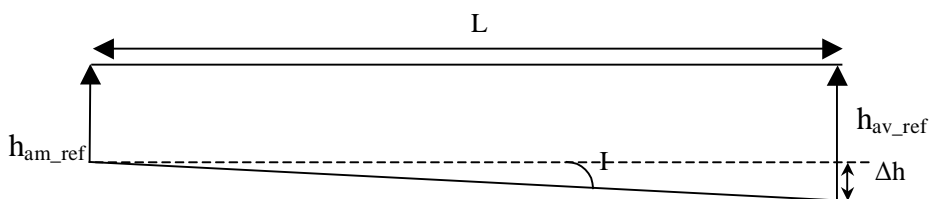
Détermination de u_{1_ref} :

Le terme d'anticipation u_{1_ref} est obtenu par la loi de la vanne amont à l'équilibre. A l'équilibre, le débit à l'amont est égal au débit à l'aval. De plus, nous considérons que h_{res} (hauteur en amont de la vanne amont) est fixée et constante.

$$u_{1_ref} = \frac{Q_{av_ref}}{\hat{\alpha}_{am} \sqrt{h_{res} - h_{am_ref}}},$$

$$\text{avec } \hat{\alpha}_{am} = \alpha_{am} B \sqrt{2g}.$$

Dans cette équation, il ne nous reste plus qu'à déterminer h_{am_ref} .



Nous avons donc d'après le schéma d'avant: $h_{am_ref} = h_{av_ref} - L \tan I$

Détermination de u_{2_ref} :

Le terme d'anticipation u_{2_ref} est obtenu par la loi de la vanne aval à l'équilibre, soit :

$$u_{2_ref} = \frac{Q_{av_ref}}{\hat{\alpha}_{av} \sqrt{h_{av_ref} - h_{dev_ref}}}$$

7.4.2 Synthèse des correcteurs

Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients des correcteurs.

Détermination de $K_I(s)$:

Nous avons vu dans le choix de la structure que le correcteur $K_I(s)$ est un prédicteur de Smith

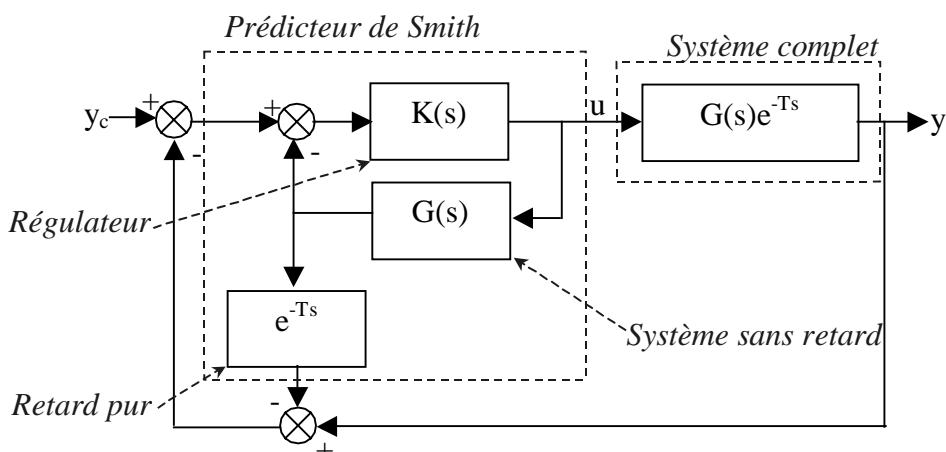


Figure 7.10 : Schéma d'un prédicteur de Smith.

Dans ce schéma $K(s)$ est un correcteur standard que nous choisissons sous forme de PI, soit : $K(s) = K_{PI} \left(\frac{1 + \tau_1 s}{s} \right)$. La constante τ est choisie de l'ordre de la pulsation du système, soit : $\tau_1 \approx \omega_0 = \frac{1}{T} = 0.93$.

Choisissons K_{PI} de manière à avoir une marge de gain et de phase convenable.

Pour $K_{PI} = 0.6$, il vient $MG = 11.04dB$ et $MP = 51.2^\circ$. Les marges de gain et de phase sont considérées correctes lorsqu'elles sont comprises entre 10 et 15 dB et 45 et 60°. Nous obtenons donc le correcteur : $K(s) = 0.6 \left(\frac{1 + 0.93s}{s} \right)$.

Détermination de $K_2(s)$:

Dans le cas du deuxième correcteur, nous ne sommes pas en présence d'un retard, un PI simple suffit. Afin de déterminer les coefficients de ce dernier, nous allons procéder par placement de pôles, c'est-à-dire que nous allons identifier le dénominateur de la fonction de transfert de boucle fermée à une fonction dont nous fixons la valeur des pôles par l'intermédiaire du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre.

La fonction de transfert de boucle fermée est :

$$F_{TBF} = \frac{K_2(s)G(s)}{1 + K_2(s)G(s)} \Leftrightarrow F_{TBF} = \frac{K_{P2} \left(\frac{1 + \tau_2 s}{s} \right) \hat{\alpha}_{av} \sqrt{h_{av_ref} - h_{dev_ref}}}{1 + K_{P2} \left(\frac{1 + \tau_2 s}{s} \right) \frac{\hat{\alpha}_{av} \sqrt{h_{av_ref} - h_{dev_ref}}}{1 + 0.4s}}$$

$$F_{TBF} = \frac{1}{K_{P2} \bar{G}} \frac{1 + \tau_2 s}{\frac{0.4}{K_{P2} \bar{G}} s^2 + \frac{(1 + K_{P2} \bar{G} \tau_2)}{K_{P2} \bar{G}} s + 1} \text{ avec } \bar{G} = \hat{\alpha}_{av} \sqrt{h_{av_ref} - h_{dev_ref}}$$

Nous allons donc identifier : $\frac{0.4}{K_{P2} \bar{G}} s^2 + \frac{(1 + K_{P2} \bar{G} \tau_2)}{K_{P2} \bar{G}} s + 1$ à $\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2m}{\omega_0} s + 1$

$$\text{Nous posons : } \begin{cases} m = 1 \\ \omega_0 = \frac{1}{(1/5)T_{montée}} = 4.2 \end{cases}$$

Ce qui nous donne : $K_2(s) = 70 \left(\frac{1 + 0.4s}{s} \right)$

7.4.3 Test de la commande PI

Plusieurs tests ont été effectués sur le micro-canal réel. Leurs différences portent sur les conditions initiales, les régimes d'équilibre à atteindre ou la présence d'une perturbation. Afin de ne pas alourdir ce rapport, nous n'avons rapporté ici qu'un résultat.

Ici, nous avons présentons des essais en échelon sur les consignes en hauteur et en débit, soit :

- la hauteur d'équilibre à l'aval initiale est de 0.125 m, on cherche à atteindre une hauteur de 0.141 m.

- le débit d'équilibre initial est de $0.003 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ et on veut atteindre $0.002 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

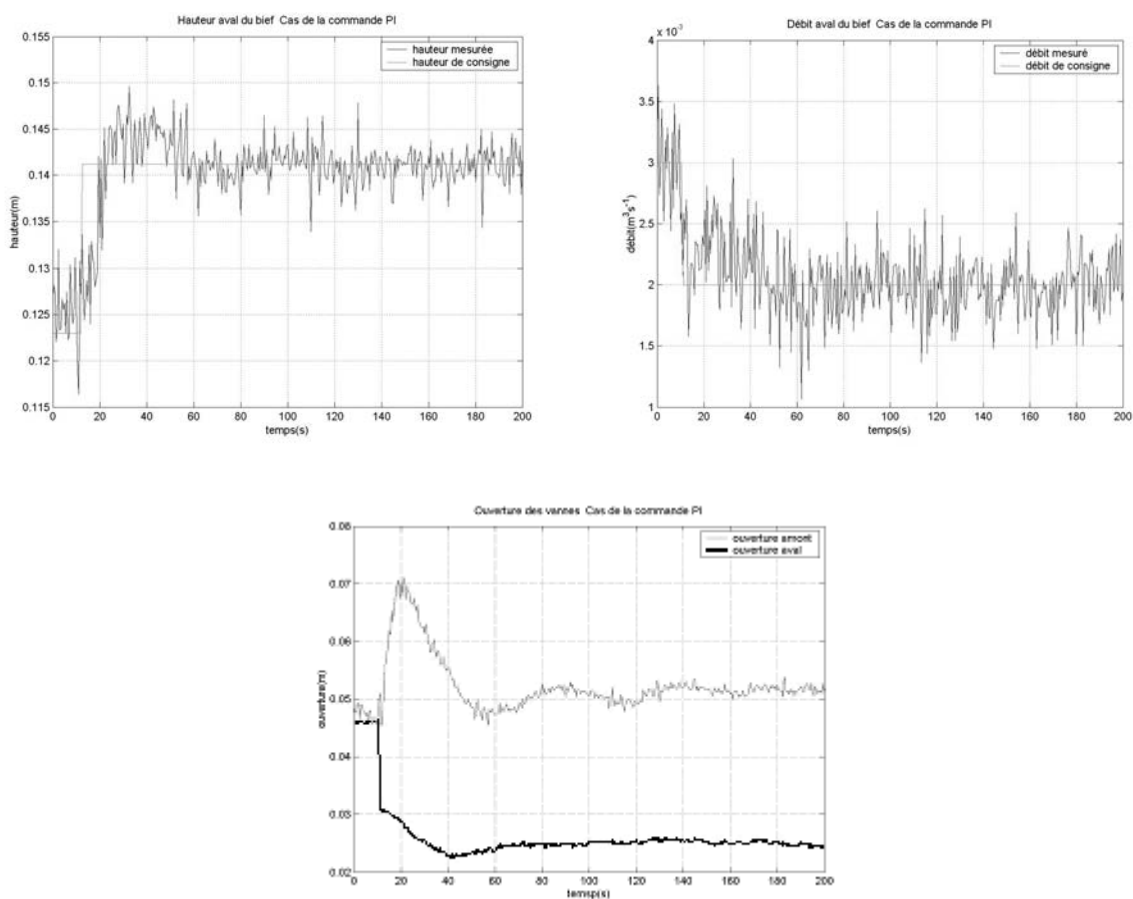


Figure 7.11 : Résultats pratiques de la commande PI

7.5 Comparaison

La commande PI régule la hauteur en aval du bief via la vanne amont et le débit en aval du bief via la vanne aval. La commande robuste aux erreurs de réduction régule quant à

elle la hauteur en amont du bief par la vanne amont et le débit en aval du bief via la vanne aval. La comparaison de ces deux commandes ne peut donc porter que sur la vanne aval et le débit aval.

Ci-dessous nous avons reporté les résultats d'un test expérimental sur le canal, pour lequel, nous avons demandé un changement de consigne en débit, passant ainsi d'une consigne de $0,003 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ à $0,002 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$.

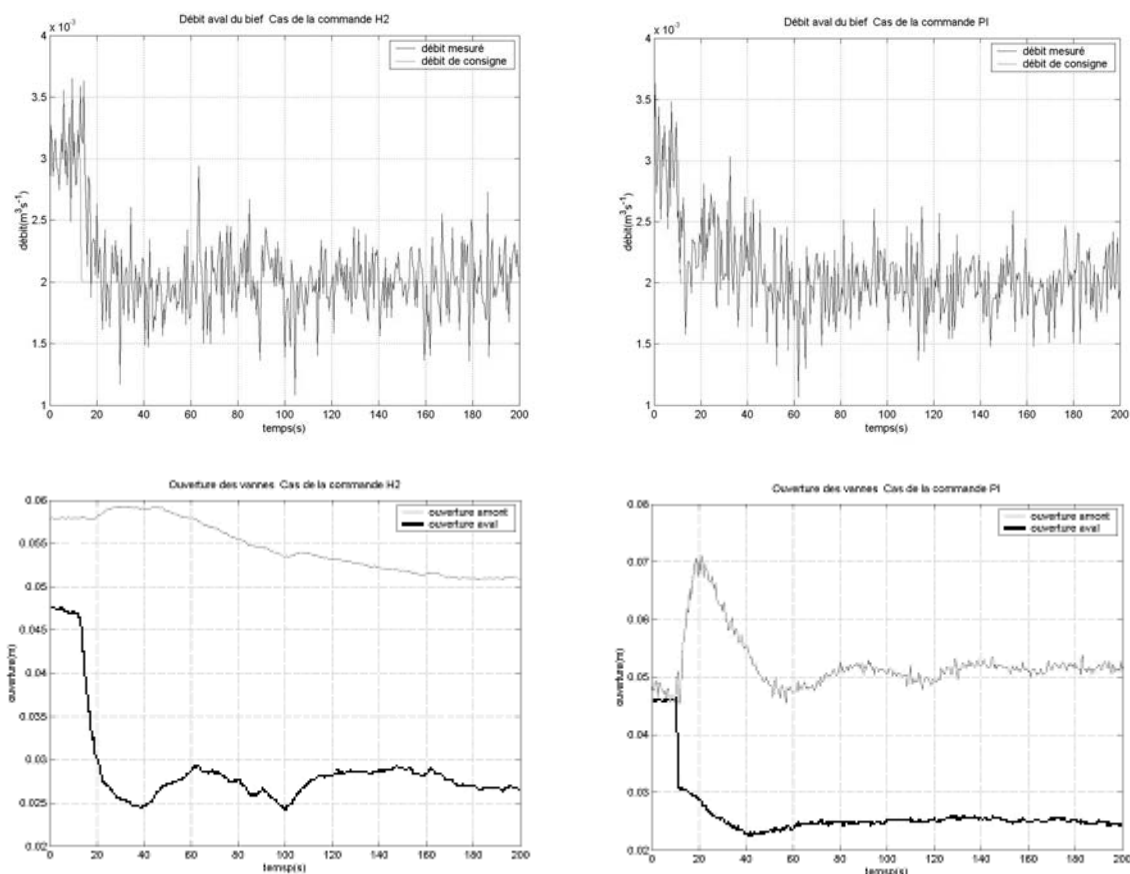


Figure 7.12 : Comparaison de la régulation du débit par les deux commandes étudiées.

Sur les deux courbes de débits, nous pouvons voir que dans le cas de la commande robuste (commande LQG/H₂), le débit d'équilibre est atteint plus rapidement (environ deux fois plus vite) que dans le cas de la commande PI. La remarque la plus importante est en terme d'énergie de la commande : la commande LQG/H₂ est beaucoup plus économique que la commande PI car moins bruitée. En plus d'une économie d'énergie, cela permet aussi de moins solliciter les moteurs.

Lors de l'étude de chaque commande nous avons vu que la commande PI est beaucoup plus difficile à régler que la commande LQG/H₂. Au niveau des débits atteignables autour de ce point d'équilibre, la commande PI accepte une plage légèrement inférieure à celle de la commande robuste.

7.5.1 Tests de robustesse

Des tests de robustesse ont également été réalisés sur le canal; nous avons appliqué au système des perturbations structurelles correspondant à l'introduction d'un obstacle sous forme d'un déversoir à l'amont de la vanne aval du canal; ces perturbations ajoutées se traduisent par l'ajout d'une équation d'ouvrage non-linéaire. L'objectif est de changer la dynamique de notre système et par la suite de changer la matrice de transfert nominale entrée/sortie $G(s)$ afin de tester la robustesse de notre commande LQG/H₂ et la commande PI. Les résultats de ces tests sont illustrés dans la figure 7.14.

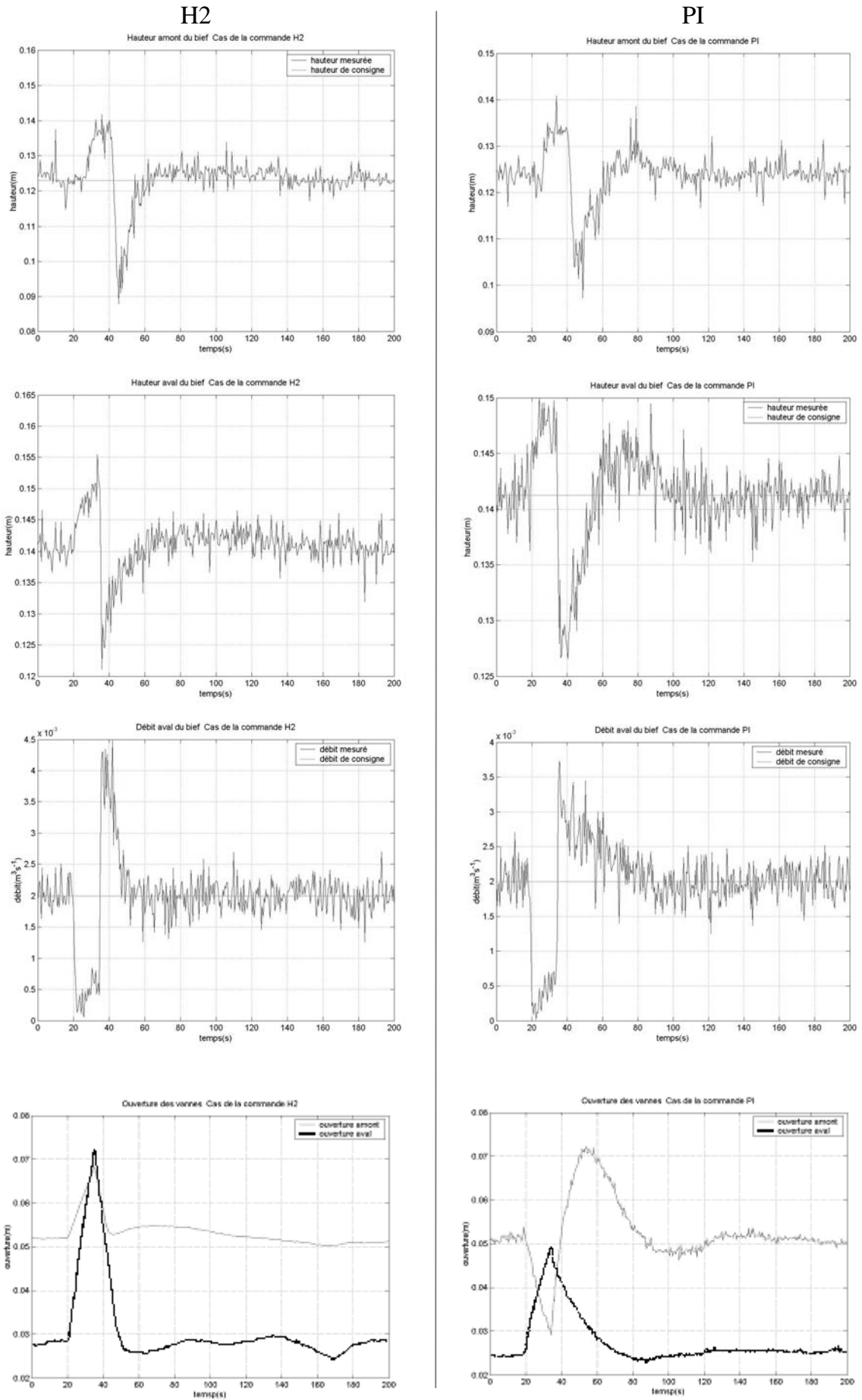


Figure 7. 14 : Comparaison de robustesse des deux commandes étudiées.

7.6 Conclusion

Dans une première partie de ce chapitre, nous avons montré comment adapter la commande optimale robuste développé au chapitre 4 au micro-canal. Dans une deuxième partie, nous avons testé sur le micro-canal deux lois de commande : la commande PI + prédicteur et la commande optimale robuste ; nous avons aussi comparé les résultats expérimentaux de ces deux commandes. Enfin nous avons analysé la robustesse pratique de ces deux lois de commande : nous avons montré expérimentalement que la commande optimale proposée dans cette thèse présente des propriétés de performances et de robustesse plus intéressantes que celles de la commande PI.

Chapitre 8

Conclusion générale et perspectives

8.1 Introduction

Ce dernier chapitre est séparé en deux parties. Nous parlons tout d'abord des conclusions générales de cette thèse, en en soulignant les contributions principales. Ensuite nous tracerons les axes de recherche futurs en tenant compte des limites de ce travail.

8.2 Conclusion générale

Bien que les conclusions particulières à chaque chapitre aient été déjà indiquées, il est fait ici un récapitulatif des conclusions les plus importantes du travail réalisé. Cette thèse entre dans le cadre des travaux sur la régulation des systèmes hydrauliques à surface libre (canaux d'irrigation) et dans le contexte de leur éventuelle automatisation. Nous nous sommes intéressés à deux approches de la synthèse d'une commande optimale : une première qui consiste à synthétiser une loi de commande optimale (de dimension finie) à partir d'un modèle réduit de dimension finie des équations de Saint-Venant et une seconde approche qui consiste à faire l'approximation en dimension finie d'une loi de commande (de dimension infinie) obtenue à partir des équations de Saint-Venant.

Dans les deux premiers chapitres de la thèse, les problématiques de la gestion et de la modélisation de systèmes d'irrigation ont été introduites. Ces systèmes sont complexes et souvent constitués d'un réseau de canaux à surface libre et d'un réseau de canalisations sous pression, raccordés à des stations de pompage et à des réserves. Notre étude s'est concentrée en particulier sur les canaux d'irrigation proprement dits ainsi que sur les ouvrages qui en délimitent les biefs (vannes, déversoirs, stations de pompage). Nous avons choisi dans ce travail un modèle de connaissance hydrodynamique dit « modèle de Saint-Venant. Il s'agit pour l'essentiel de deux équations d'état non-linéaires à paramètres

distribués. Elles sont connues pour représenter de manière satisfaisante les phénomènes significatifs dans les problèmes les plus courants liés à l'opération des canaux d'irrigation.

Afin de choisir un bon modèle réduit linéaire de notre système à partir duquel nous allons développer la synthèse de la loi commande, nous avons fait une comparaison entre deux méthodes d'approximation : la méthode de collocation et le schéma aux différences finies implicite de Preissmann, le plus utilisé dans ce domaine. L'utilisation de la méthode de collocation, motivée par l'idée d'obtenir un modèle simple pour pouvoir développer des méthodes de commande, s'est avérée numériquement satisfaisante et même plus performante en terme de complexité, donc de vitesse de calcul, ce qui présente un intérêt certain dans le cas de la commande en temps réel du micro-canal, par exemple.

La validation par simulation numérique de ce modèle réduit, par comparaison avec le modèle obtenu par le schéma de discrétisation de Preissmann, a montré quelques caractéristiques intéressantes :

- le schéma de collocation nécessite peu de sections de discrétisation (points de collocation) et même pour un nombre très petit de points, les résultats restent proche de la solution de référence.
- le modèle réduit obtenu par collocation reste un modèle très simple pour la commande tout en étant encore suffisamment proche de la dynamique du modèle de Saint-Venant non linéaire si l'on n'introduit pas le modèle des ouvrages hydrauliques (vannes ou déversoirs).

8.2.1 Approche en dimension finie

Dans le chapitre 3 nous avons calculé le modèle réduit, sous une forme d'état, obtenu par la méthode de collocation orthogonale appliquée au modèle linéarisé de Saint-Venant dans le cas du régime de référence uniforme. Le modèle réduit ainsi obtenu nous a servi de modèle nominal dans la synthèse d'une loi de commande optimale robuste vis-à-vis des erreurs commises pendant l'étape de réduction. Ces erreurs de réduction ont été calculées numériquement dans le domaine de Laplace, à partir des fonctions de transfert non rationnelles associées aux équations de Saint-Venant linéarisées, que ce soit dans le cas d'un régime uniforme ou d'un régime non uniforme.

Dans le chapitre 4, nous avons développé la synthèse d'une commande optimale par une approche de type H2-LQG/LTR. Des pondérations fréquentielles sur la fonction de coût ont été utilisées de manière à satisfaire des conditions de robustesse en stabilité et en performance explicitement calculées à partir du modèle des erreurs de réduction développé précédemment. Un observateur optimal a été également développé, permettant d'estimer l'état du système à partir des seules mesures disponibles et tenant compte aussi des objectifs de robustesse et de performances préalablement fixés. La commande et l'observateur ont été appliqués au modèle de Saint-Venant linéarisé et au modèle de Saint-Venant non-linéaire (tous deux intégrés numériquement par le schéma de Preissmann). Leur robustesse a été étudiée (en simulation) sur des systèmes perturbés éloignés du système nominal. Les résultats de simulation réalisés montrent un comportement très satisfaisant de la commande et de l'observateur.

Dans le chapitre 5 nous avons développé une méthode pour transformer les variables de la commande optimale (débit amont et tirant d'eau aval) en des valeurs d'ouverture des vannes, en tenant compte de la dynamique de ces vannes. Il s'agit là en effet des variables réellement commandées, tant sur le micro-canal que sur la plupart des installations « grandeur nature ». La méthode mise en œuvre est une méthode de poursuite optimale d'une trajectoire qui n'est autre que la commande optimale calculée au chapitre précédent. L'existence d'une différence d'ordre de grandeur entre les constantes de temps de la dynamique des vannes et de l'hydrodynamique du bief nous a ainsi permis de contourner le délicat problème de la commande aux frontières non-linéaire exprimée par les équations de vannes. A nouveau, la commande optimale ainsi calculée a été appliquée au modèle de Saint-Venant linéarisé et au modèle de Saint-Venant non-linéaire. Les résultats de simulation montrent clairement l'efficacité de l'approche utilisée.

Dans le chapitre 7 nous avons présenté une étude d'identification du micro-canal de Valence, puis nous avons appliqué la méthode de commande optimale robuste développée précédemment à ce micro-canal. Les résultats expérimentaux des lois de commande étudiées : commande PI + prédictiveur, commande optimale robuste, ont été comparés. La robustesse de la commande développée a également été testée expérimentalement.

8.2.2 Approche en dimension infinie

Le problème de la commande en dimension infinie pour les systèmes distribués est un sujet difficile, mal connu des automaticiens en général et peu appliqué dans le domaine

des canaux d'irrigation. Dans le chapitre 6, nous avons proposé une approche de synthèse d'une loi de commande optimale en dimension infinie (régulateur optimal LQ). Nous avons présenté une analyse détaillée des propriétés dynamiques du modèle linéarisé de Saint-Venant (stabilisabilité et détectabilité exponentielles) qui permet de conclure à l'existence d'une loi de commande optimale, solution unique d'une équation de Riccati d'opérateurs associée au modèle. Nous avons également décrit un moyen d'obtenir une approximation en dimension finie du régulateur LQ ainsi défini. La méthode d'approximation proposée pour résoudre cette équation de Riccati est basée sur la méthode de réduction par collocation orthogonale, ce qui permet une comparaison directe avec les résultats analogues en dimension finie : les observateurs, par exemple, seront les mêmes dans les deux cas car les états nécessaires à la détermination de la loi de commande sont les mêmes.

8.3 Perspectives

Comme chaque travail de recherche, celui-ci a proposé des solutions à quelques problèmes mais a aussi ouvert des voies futures de recherche intéressantes. Parmi ces perspectives, nous souhaitons faire ressortir les points suivants :

- La validation complète de la commande optimale robuste a été faite en simulation et sur le micro-canal de Valence et a donné de très bons résultats. Il serait très intéressant de pouvoir la valider sur un canal en « vraie grandeur » comme le canal de Bourne ou le canal de Gignac. A priori, le micro-canal expérimental est un problème plus délicat (dynamique présentant des modes à hautes fréquences, amortissement négligeable) et l'application en « vraie grandeur » devrait pouvoir se réaliser sans problème théorique majeur.
- L'extension des résultats de cette thèse au cas d'un canal à plusieurs biefs interconnectés et la comparaison entre les approches globale ou décentralisée sont des questions intéressantes. Il semble à priori pertinent de les aborder via l'étude de la détérioration éventuelle des performances et de la robustesse.
- Un travail important concernant l'identification et la modélisation des prélèvements est nécessaire pour obtenir un modèle complet permettant de développer une loi de commande « rejetant » les perturbations liées à ces prélèvements.

- La question de la robustesse des commandes proposées vis-à-vis des erreurs de modèles liées au transport et au dépôt des sédiments (et donc à la variation de la section mouillée utile) est d'une grande importance pratique. En particulier, il est nécessaire de déterminer si il convient de prendre en compte explicitement le modèle de ces transports sédimentaires.
- La question de la comparaison entre les deux approches de commande – commande du modèle réduit ou réduction de la commande – n'a pas trouvé encore de réponse théorique satisfaisante, même si les travaux menés durant cette thèse ont contribué à définir un cadre où elle pourra recevoir une réponse précise.

Annexe 1

A.1 Discrétisation du modèle de Saint-Venant linéarisé à l'aide du schéma aux différences finies de Preissmann

D'après le chapitre 2, le modèle linéarisé de Saint-Venant peut s'écrire sous la forme dimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = a'_1 \frac{\partial h}{\partial x} - a'_2 \frac{\partial Q}{\partial x} + a'_3 h - a'_4 Q, \end{cases}$$

où

$$a'_1 = (1 - g \frac{B^2 h_e^3}{Q_e^2}); \quad a'_2 = 2; \quad a'_3 = g \frac{B^2 h_e^2 L}{Q_e^2} (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e}); \quad a'_4 = \frac{2gB^2 h_e^2 J_e L}{Q_e^2}.$$

Nous notons respectivement h_i^{j+1} et Q_i^{j+1} les tirant d'eau et débit au temps $t + \Delta t$ au point i , et h_i^j , Q_i^j les tirant d'eau le débit au temps t et au point i . La discrétisation de l'équation de continuité du modèle de Saint-Venant linéarisé à l'aide du schéma de Preissmann (voir chapitre 2, équation (2.31)) donne :

Equation de continuité :

$$\frac{1}{2\Delta t} (h_{i+1}^{j+1} - h_{i+1}^j) + \frac{1}{2\Delta t} (h_i^{j+1} - h_i^j) = -\frac{\theta}{\Delta x} (Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}) - \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (Q_{i+1}^j - Q_i^j),$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$A_1 h_i^{j+1} + A_2 Q_i^{j+1} + A_3 h_{i+1}^{j+1} + A_4 Q_{i+1}^{j+1} = B_1 h_i^j + B_2 Q_i^j + B_3 h_{i+1}^j + B_4 Q_{i+1}^j,$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\Delta t} & ; & & A_2 &= -\frac{\theta}{\Delta x} & ; & & A_3 &= \frac{1}{2\Delta t} & ; & & A_4 &= \frac{\theta}{\Delta x} & ; \\ B_1 &= \frac{1}{2\Delta t} & ; & & B_2 &= \frac{(1-\theta)}{\Delta x} & ; & & B_3 &= \frac{1}{2\Delta t} & ; & & B_4 &= -\frac{(1-\theta)}{\Delta x} & . \end{aligned}$$

Comme pour l'équation de continuité, chaque terme de l'équation dynamique est discrétisé selon le schéma de Preissmann de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t}(Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j) + \frac{1}{2\Delta t}(Q_i^{j+1} - Q_i^j) &= a'_1 \frac{\theta}{\Delta x}(h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}) + a'_1 \frac{(1-\theta)}{\Delta x}(h_{i+1}^j - h_i^j) \\ &\quad - a'_2 \frac{\theta}{\Delta x}(Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}) - a'_2 \frac{(1-\theta)}{\Delta x}(Q_{i+1}^j - Q_i^j) \\ &\quad + a'_3 \frac{\theta}{2}(h_{i+1}^{j+1} + h_i^{j+1}) + a'_3 \frac{(1-\theta)}{2}(h_{i+1}^j + h_i^j) \\ &\quad - a'_4 \frac{\theta}{2}(Q_{i+1}^{j+1} + Q_i^{j+1}) + a'_4 \frac{(1-\theta)}{2}(Q_{i+1}^j + Q_i^j), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A'_1 &= a'_1 \frac{\theta}{\Delta x} - a'_3 \frac{\theta}{2} & ; & & A'_2 &= \frac{1}{2\Delta t} - a'_2 \frac{\theta}{\Delta x} + a'_4 \frac{\theta}{2} ; \\ A'_3 &= -a'_1 \frac{\theta}{\Delta x} - a'_3 \frac{\theta}{2} & ; & & A'_4 &= \frac{1}{2\Delta t} + a'_2 \frac{\theta}{\Delta x} + a'_4 \frac{\theta}{2} ; \\ B'_1 &= -a'_1 \frac{(1-\theta)}{\Delta x} + a'_3 \frac{(1-\theta)}{2} & ; & & B'_2 &= \frac{1}{2\Delta t} + a'_2 \frac{(1-\theta)}{\Delta x} - a'_4 \frac{(1-\theta)}{2} ; \\ B'_3 &= a'_1 \frac{(1-\theta)}{\Delta x} + a'_3 \frac{(1-\theta)}{2} & ; & & B'_4 &= \frac{1}{2\Delta t} - a'_2 \frac{(1-\theta)}{\Delta x} - a'_4 \frac{(1-\theta)}{2}. \end{aligned}$$

A.2 Modèle linéarisé de Saint-Venant dans le cas non uniforme

Pour calculer le modèle linéarisé de Saint-Venant dans le cas du régime d'équilibre non uniforme nous écrivons les équations de Saint-Venant (2.17) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi(x,t)) = -\frac{\partial}{\partial x} f(\psi(x,t)) + g(\psi(x,t)),$$

où

$$\psi = (h, Q)^t, \quad f(Q, h) = \left(\frac{Q}{B}, \frac{Q^2}{Bh} + \frac{1}{2} g B h^2 \right)^t \quad \text{et} \quad g(Q, h) = (0, g B h (I - J(Q, h)))^t,$$

Nous développons ensuite ces expressions autour d'un profil d'équilibre non uniforme $\psi_e(x) = (h_e(x), Q_e(x))^t$ où $Q_e(x) = Q_e$ (le débit à l'équilibre est nécessairement uniforme) et où la hauteur d'équilibre $h_e(x)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dh_e(x)}{dx} \left(g B h_e(x) - \frac{Q_e^2}{B h_e(x)^2} \right) - g B h_e(x) (J(Q_e, h_e(x)) - I) = 0.$$

intégrée numériquement à partir d'une valeur imposée à l'une des deux extrémités du bief (voir chapitre 2). On obtient alors, en développant le modèle non-linéaire de Saint-Venant ci-dessus au premier ordre :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[f(\psi_e) + \frac{\partial f(\psi_e)}{\partial \psi} (\psi - \psi_e) + o((\psi - \psi_e)^2) \right] \\ + \left[g(\psi_e) + \frac{\partial g(\psi_e)}{\partial \psi} (\psi - \psi_e) + o((\psi - \psi_e)^2) \right].$$

Et comme le profil d'équilibre vérifie la condition d'équilibre

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial t} = 0 = -\frac{\partial f(\psi_e)}{\partial x} + g(\psi_e),$$

le modèle linéarisé s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = -\frac{\partial f(\psi_e)}{\partial \psi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \left(\frac{\partial g(\psi_e)}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(\psi_e)}{\partial \psi} \right) \right) \tilde{\psi} \\ = A_1(x) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + A_2(x) \tilde{\psi},$$

où

$$\tilde{\psi} = \psi - \psi_e = (h - h_e, Q - Q_e)^t ; \tilde{h} = h - h_e ; \tilde{Q} = Q - Q_e,$$

et

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1/B \\ a_1(x) & a_2(x) \end{pmatrix}; \quad A_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3(x) & a_4(x) \end{pmatrix},$$

avec

$$a_1(x) = \left(\frac{Q_e^2}{Bh_e(x)^2} - gBh_e(x) \right); \quad a_2(x) = -\frac{2Q_e}{h_e}; \\ a_3(x) = gB \left(I + J_e(x) + \frac{4J_e(x)R_e(x)}{3h_e(x)} \right) + \frac{da_1(x)}{dx}; \quad a_4(x) = -\frac{2gBh_e(x)J_e(x)}{Q_e} + \frac{da_2(x)}{dx},$$

et

$$J_e(x) = J(Q_e, h_e(x)) = \frac{Q_e}{K^2 B^2 h_e(x)^2} \left(\frac{1}{R_e(x)} \right)^{\frac{4}{3}} \text{ et } R_e(x) = \frac{Bh_e(x)}{B + 2h_e(x)}.$$

Le modèle linéarisé de Saint-Venant s'écrit donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = a_1(x) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + a_2(x) \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} + a_3(x) \tilde{h} + a_4(x) \tilde{Q}. \end{cases}$$

A.3 Modèle linéarisé sous forme adimensionnelle

Afin de simplifier les écritures dans la suite, et de n'avoir à manipuler que des grandeurs sans dimension, nous posons les changements de variables suivants :

$$\hat{h} = \frac{h - h_e(x)}{h_e(x)}, \quad \hat{Q} = \frac{Q - Q_e}{Q_e}, \quad t \rightarrow \frac{Q_e}{BLh_e(x)} t, \quad x \rightarrow \frac{x}{L}.$$

On a donc $t \geq 0$ et $x \in [0, 1]$. Avec ces nouvelles variables, le modèle linéarisé devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{Q}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = a'_1(x) \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + a'_2(x) \frac{\partial \hat{Q}}{\partial x} + a'_3(x) \hat{h} + a'_4(x) \hat{Q} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} a'_1(x) &= \left(1 - g \frac{B^2 h_e(x)^3}{Q_e^2}\right); \quad a'_2(x) = -2; \quad a'_4(x) = -\frac{2gB^2 h_e(x)^2 J_e(x)L}{Q_e^2} + \frac{BL}{h_e(x)} \frac{dh_e(x)}{dx} \\ a'_3(x) &= g \frac{B^2 h_e(x)^2 L}{Q_e^2} \left(I + J_e(x) + \frac{4J_e(x)R_e(x)}{3h_e(x)}\right) - \left(\frac{2L}{h_e(x)} + g \frac{B^2 h_e(x)^2 L}{Q_e^2}\right) \frac{dh_e(x)}{dx}; \end{aligned}$$

Afin d'alléger le texte, nous substituons dans la suite de cette thèse, les notations des variables réduites \hat{h} , \hat{Q} , a'_1 , a'_2 , a'_3 , a'_4 par les notations h , Q , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 . Le modèle adimensionnel s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = a_1(x) \frac{\partial h}{\partial x} + a_2(x) \frac{\partial Q}{\partial x} + a_3(x) h + a_4(x) Q. \end{cases}$$

Annexe 2

B.1 Caractère de C_0 -semigroupe de l'opérateur associé $A_1 \frac{\partial}{\partial x}$

Dans cette annexe, nous montrons que la solution $T(t)$ du système

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}(t) = A_1 \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x}(t) \\ \tilde{\xi}(0) = \tilde{\xi}_0(x), \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad D(A_1 \frac{\partial}{\partial x}) = \left\{ \tilde{\xi} \in Z \mid \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} \in Z, \tilde{h}(x=1, t) = 0, \tilde{Q}(x=0, t) = 0 \right\},$$

avec

$$\tilde{\xi}(t) = (\tilde{h}(t), \tilde{Q}(t))^t; \tilde{\xi}_0 = (\tilde{h}_0, \tilde{Q}_0)^t \in Z = L_2(0, 1) \times L_2(0, 1),$$

est un C_0 -semigroupe sur $Z = L_2(0, 1) \times L_2(0, 1)$. Afin d'alléger la présentation nous remplaçons les notations $\tilde{\xi}, \tilde{h}, \tilde{Q}$ par ξ, h, Q .

En procédant au changement de variables $(\varphi_1, \varphi_2)^t = P^{-1}(h, Q)^t$, avec

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -1 \\ \lambda_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (-a_2 - \sqrt{\Delta})/2 \\ \lambda_2 &= (-a_2 + \sqrt{\Delta})/2, \end{aligned}$$

sont les valeurs propres de la matrice A_1 , le système (B.1) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Il s'agit donc d'une équation de propagation dont la solution générale s'écrit sous la forme $(\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t))^t = (F(x-v_1t), G(x-v_2t))^t$, avec $v_1 = -\lambda_1$, $v_2 = -\lambda_2$ et où F et G sont deux fonctions inconnues d'une variable. Notons que les deux vitesses de propagation $v_1 < 0$ et $v_2 > 0$ sont de signes contraires.

La solution générale du système (B. 2) fait apparaître deux fonctions inconnues F et G qui peuvent être déterminées à l'aide des conditions initiales et des conditions aux limites. En effet, les conditions initiales permettent d'écrire :

$$\begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,0) \\ \varphi_2(x,0) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix}, \quad \text{pour } x \in [0,1], \quad (\text{B.3})$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{v_2}{v_2 - v_1} h_0(x) - \frac{1}{v_2 - v_1} Q_0(x) \\ G(x) &= \frac{-v_1}{v_2 - v_1} h_0(x) + \frac{1}{v_2 - v_1} Q_0(x), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,t) &= \frac{v_2}{v_2 - v_1} h_0(x - v_1t) - \frac{1}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_1t) \\ \varphi_2(x,t) &= -\frac{v_1}{v_2 - v_1} h_0(x - v_2t) + \frac{1}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_2t), \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} h(x,t) &= F(x - v_1t) + G(x - v_2t) \\ Q(x,t) &= v_1 F(x - v_1t) + v_2 G(x - v_2t). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Les deux fonctions h_0 et Q_0 ne sont définies que sur $x \in [0,1]$. Il faut donc prolonger F et G définies ci-dessus respectivement sur \mathfrak{R}^+ et sur \mathfrak{R}^- . Pour ce faire, il est nécessaire de faire intervenir les conditions aux limites. Celles-ci peuvent s'exprimer d'après (B.5) sous la forme :

$$\begin{aligned} h(x=1,t) &= F(1 - v_1t) + G(1 - v_2t) \\ Q(x=0,t) &= v_1 F(-v_1t) + v_2 G(-v_2t). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Les deux conditions (B.6) permettent donc de prolonger la définition de $F(\zeta)$ sur $x \in [0, +\infty)$ et celle de $G(\zeta)$ sur $x \in (-\infty, 1]$. A cet effet, définissons les restrictions suivantes des fonctions F et G

$$\begin{aligned} F^0 &:= F \text{ sur } [0, 1] & ; & \quad G^0 := G \text{ sur } [0, 1] \\ F^1 &:= F \text{ sur } [1, 2 - \frac{v_1}{v_2}] & ; & \quad G^1 := G \text{ sur } [\frac{v_2}{v_1}, 0] \\ F^k &:= F \text{ sur } [k - (k-1)\frac{v_1}{v_2}, k + 1 - k\frac{v_1}{v_2}] & ; & \quad G^k := G \text{ sur } [k\frac{v_1}{v_2} - (k-1), (k-1)\frac{v_1}{v_2} - (k-2)], \end{aligned}$$

pour $k \geq 2$. Avec ces notations, les conditions aux limites (B.6) s'écrivent :

$$\begin{aligned} G^1(\zeta) &= F^0\left(\frac{v_1}{v_2}\zeta\right) & ; & \quad F^1(\zeta) = -G^1\left(1 - \frac{v_2}{v_1}(1 - \zeta)\right) \\ G^k(\zeta) &= -\frac{v_1}{v_2}F^{k-1}\left(\frac{v_1}{v_2}\zeta\right) & ; & \quad F^k(\zeta) = -G^k\left(1 - \frac{v_2}{v_1}(1 - \zeta)\right) \quad , \quad k \geq 2. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Posons

$$T_F = -2\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right) \text{ et } T_G = -2\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right).$$

Les relations (B.7) peuvent se regrouper de la façon suivante :

$$F^{k+2}(\zeta) = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k+2} F^k(\zeta - T_F) \quad , \quad k \geq 2; \quad G^{k+2}(\zeta) = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k+1} G^k(\zeta + T_G) \quad , \quad k \geq 1$$

avec $|v_1/v_2| < 1$. Donc lorsque k augmente F et G tendent vers zéro.

Notons \bar{F} et \bar{G} les deux fonctions F et G prolongées respectivement sur $x \in [0, +\infty)$ et sur $x \in (-\infty, 1]$. On a alors :

$$\bar{F}(\zeta) := \begin{cases} F^0(\zeta) & \text{si } \zeta \in [0, 1] \\ F^1(\zeta) & \text{si } \zeta \in [1, 2 - \frac{v_1}{v_2}] \\ F^2(\zeta) & \text{si } \zeta \in [2 - \frac{v_1}{v_2}, 3 - 2\frac{v_1}{v_2}] \\ \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \bar{F}(\zeta - T_F) & \text{si } \zeta \geq 3 - 2\frac{v_1}{v_2}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{G}(\zeta) := \begin{cases} G^0(\zeta) & \text{si } \zeta \in [0, 1] \\ G^1(\zeta) & \text{si } \zeta \in [\frac{v_2}{v_1}, 0] \\ G^2(\zeta) & \text{si } \zeta \in [2\frac{v_2}{v_1} - 1, \frac{v_2}{v_1}] \\ \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \bar{G}(\zeta + T_G) & \text{si } \zeta \leq 2\frac{v_2}{v_1} - 1. \end{cases}$$

Il faut noter que les fonctions \bar{F} et \bar{G} ainsi définies sont continues par construction. Cette construction est illustrée à la figure B.2 pour les profils initiaux de hauteur et de débit qui sont donnés à la figure B.1.

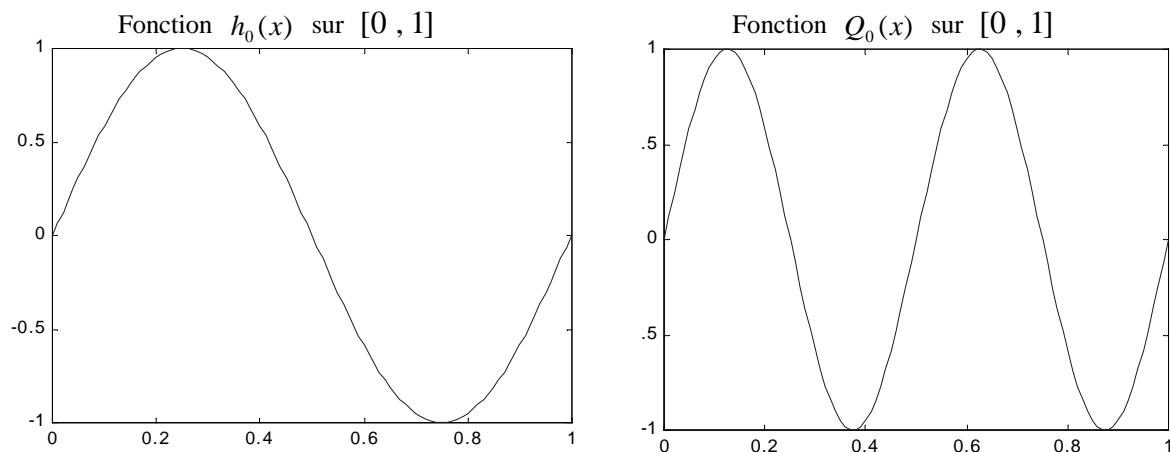


Figure B.1 : un choix particulier de conditions initiales $h_0(x)$ et $Q_0(x)$.

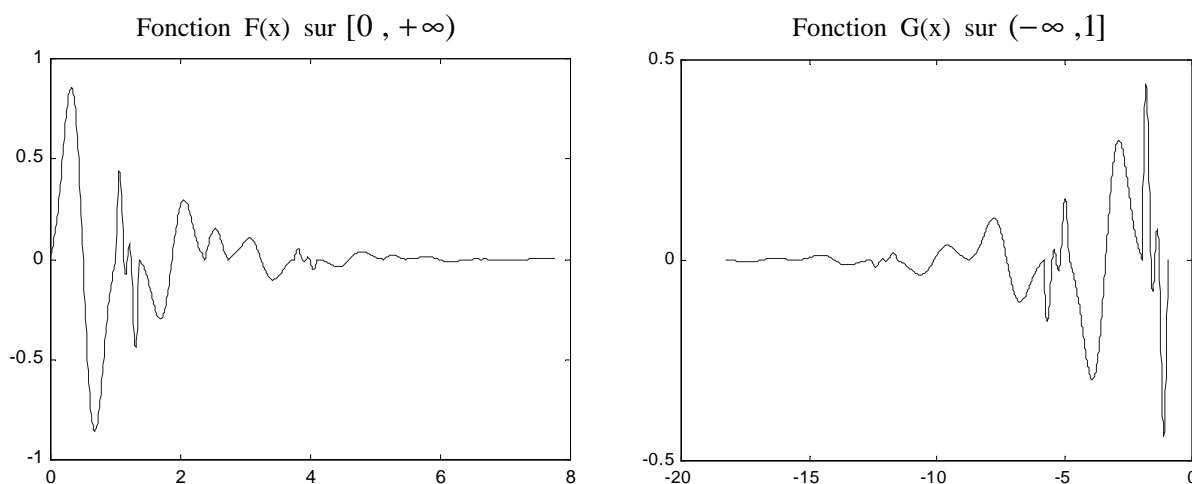


Figure B.2 : Les fonctions \bar{F} et \bar{G} qui en résultent.

- **Caractère semigroupe**

La solution du problème (B.1) est donc donnée d'après (B.5) par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h(x,t) \\ Q(x,t) \end{pmatrix} &= T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x-v_1t) + G(x-v_2t) \\ v_1F(x-v_1t) + v_2G(x-v_2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v_2}{v_2-v_1} h_0(x-v_1t) - \frac{v_1}{v_2-v_1} h_0(x-v_2t) - \frac{1}{v_2-v_1} Q_0(x-v_1t) + \frac{1}{v_2-v_1} Q_0(x-v_2t) \\ \frac{v_1v_2}{v_2-v_1} h_0(x-v_1t) - \frac{v_1v_2}{v_2-v_1} h_0(x-v_2t) - \frac{v_1}{v_2-v_1} Q_0(x-v_1t) + \frac{v_2}{v_2-v_1} Q_0(x-v_2t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Pour montrer qu'elle est engendrée par un C_0 -semigroupe $T(t)$, il faut montrer les 3 propriétés des C_0 -semigroupes de la définition (6.1).

D'après la relation (B.8) il est évident que l'opérateur $T(t)$ est un opérateur linéaire. Commençons à montrer le caractère stationnaire du système et donc la propriété de « groupe » $T(t+s) = T(t)T(s)$. On a :

$$\begin{aligned} T(t+s) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F(x-v_1t-v_1s) + G(x-v_2t-v_2s) \\ v_1F(x-v_1t-v_1s) + v_2G(x-v_2t-v_1s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v_2}{v_2-v_1} h_0(x-v_1t-v_1s) - \frac{v_1}{v_2-v_1} h_0(x-v_2t-v_2s) \\ \frac{v_1v_2}{v_2-v_1} h_0(x-v_1t-v_1s) - \frac{v_1v_2}{v_2-v_1} h_0(x-v_2t-v_2s) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -\frac{1}{v_2-v_1} Q_0(x-v_1t-v_1s) + \frac{1}{v_2-v_1} Q_0(x-v_2t-v_2s) \\ -\frac{v_1}{v_2-v_1} Q_0(x-v_1t-v_1s) + \frac{v_2}{v_2-v_1} Q_0(x-v_2t-v_2s) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} T(s) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F(x-v_1s) + G(x-v_2s) \\ v_1F(x-v_1s) + v_2G(x-v_2s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v_2}{v_2-v_1} h_0(x-v_1s) - \frac{v_1}{v_2-v_1} h_0(x-v_2s) \\ \frac{v_1v_2}{v_2-v_1} h_0(x-v_1s) - \frac{v_1v_2}{v_2-v_1} h_0(x-v_2s) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -\frac{1}{v_2-v_1} Q_0(x-v_1s) + \frac{1}{v_2-v_1} Q_0(x-v_2s) \\ -\frac{v_1}{v_2-v_1} Q_0(x-v_1s) + \frac{v_2}{v_2-v_1} Q_0(x-v_2s) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
T(t)T(s)\begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} &= \\
&= \begin{pmatrix} \frac{v_2}{v_2 - v_1} h_0(x - v_1 s - v_1 t) - \frac{v_1}{v_2 - v_1} h_0(x - v_2 s - v_2 t) \\ \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} h_0(x - v_1 s - v_1 t) - \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} h_0(x - v_2 s - v_2 t) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_1 s - v_1 t) + \frac{1}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_2 s - v_2 t) \\ -\frac{v_1}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_1 s - v_1 t) + \frac{v_2}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_2 s - v_2 t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$T(t+s)\begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} = T(t)T(s)\begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \quad \forall t, s \geq 0, \forall (h_0, Q_0)^t \in Z.$$

La propriété de stationarité est bien satisfaite. Par ailleurs, d'après la relation (B.4) nous avons $T(t=0) = I$ où I l'opérateur identité (neutre pour la composition dans $\mathcal{L}(Z)$).

Il faut encore montrer le caractère borné de l'opérateur $T(t)$, c'est-à-dire $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq M$. Pour cela nous définissons deux fonctions périodiques \bar{F}_{perd} et \bar{G}_{perd} de période T_F et T_G associées respectivement aux fonctions \bar{F} et \bar{G} et telles que :

$$\bar{F}_{perd}(\zeta) := \begin{cases} F^0(\zeta) & \text{si } \zeta \in [0, 1] \\ F^1(\zeta) & \text{si } \zeta \in [1, 2 - \frac{v_1}{v_2}] \\ F^2(\zeta) & \text{si } \zeta \in [2 - \frac{v_1}{v_2}, 3 - 2\frac{v_1}{v_2}] \\ \bar{F}_{perd}(\zeta - T_F) & \text{si } \zeta \geq 3 - 2\frac{v_1}{v_2} \end{cases} ; \bar{G}_{perd}(\zeta) := \begin{cases} G^0(\zeta) & \text{si } \zeta \in [0, 1] \\ G^1(\zeta) & \text{si } \zeta \in [\frac{v_2}{v_1}, 0] \\ G^2(\zeta) & \text{si } \zeta \in [2\frac{v_2}{v_1} - 1, \frac{v_2}{v_1}] \\ \bar{G}_{perd}(\zeta + T_G) & \text{si } \zeta \leq 2\frac{v_2}{v_1} - 1 \end{cases}$$

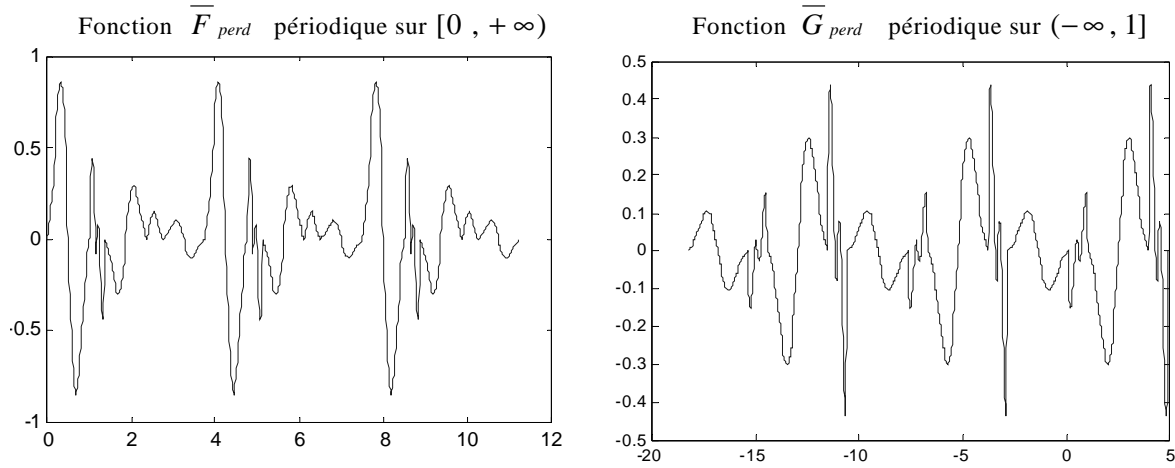


Figure B.3 : illustration des fonctions \overline{F}_{perd} et \overline{G}_{perd} sur des périodes $2T_F$ et $2T_G$.

Nous notons également $\|\mathcal{X}\|_2 = \left(\int_0^1 \mathcal{X}(\xi)^2 d\xi\right)^{1/2}$ la norme d'une fonction quelconque dans l'espace $L_2(0, 1)$. La relation (B . 7) devient pour les fonctions \overline{F}_{perd} et \overline{G}_{perd} :

$$G^1(\zeta) = F^0\left(\frac{v_1}{v_2}\zeta\right); F^1(\zeta) = -G^1\left(1 - \frac{v_2}{v_1}(1 - \zeta)\right)$$

$$\overline{G}_{perd}^k(\zeta) = \overline{F}_{perd}^{k-1}\left(\frac{v_1}{v_2}\zeta\right); \overline{F}_{perd}^k(\zeta) = -\overline{G}_{perd}^k\left(1 - \frac{v_2}{v_1}(1 - \zeta)\right), \quad k \geq 2.$$

Nous allons chercher à majorer la norme

$$\left\|T(t)\begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix}\right\|_2^2 = \int_0^1 [F(x - v_1 t) + G(x - v_2 t)]^2 dx + \int_0^1 [v_1 F(x - v_1 t) + v_2 G(x - v_2 t)]^2 dx.$$

On a tout d'abord

$$\begin{aligned} \left\|T(t)\begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix}\right\|_2^2 &\leq 2\int_0^1 [F(x - v_1 t)]^2 dx + 2\int_0^1 [G(x - v_2 t)]^2 dx \\ &\quad + v_1^2 \int_0^1 [F(x - v_1 t)]^2 dx + v_2^2 \int_0^1 [G(x - v_2 t)]^2 dx \\ &\leq (2 + v_1^2) \int_0^1 [F(x - v_1 t)]^2 dx \\ &\quad + (2 + v_2^2) \int_0^1 [G(x - v_2 t)]^2 dx. \end{aligned}$$

Ensuite, d'après la construction des fonctions périodiques \overline{F}_{perd} et \overline{G}_{perd} , et parce que $|v_1/v_2| < 1$, on peut écrire :

$$\int_0^1 [F(x - v_1 t)]^2 dx = \int_{-v_1 t}^{1-v_1 t} F(\xi)^2 d\xi \leq \int_{-v_1 t}^{1-v_1 t} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi = I_F$$

$$\int_0^1 [G(x - v_2 t)]^2 dx = \int_{-v_2 t}^{1-v_2 t} G(\xi)^2 d\xi \leq \int_{-v_2 t}^{1-v_2 t} \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi = I_G.$$

On a donc :

$$I_F := \int_{-v_1 t}^{1-v_1 t} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi$$

$$\leq \int_0^{T_F} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi = \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi + \int_1^{2(1-\frac{v_1}{v_2})} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi =: \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi + I_f$$

$$I_G := \int_{-v_2 t}^{1-v_2 t} \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi$$

$$\leq \int_{1-T_G}^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi = \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi + \int_{\frac{2-\frac{v_1}{v_2}}{v_1}}^0 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi =: \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi + I_g,$$

où l'intégrale I_f , par exemple peut être calculée comme suit.

$$I_f = \int_1^{2(1-\frac{v_1}{v_2})} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi$$

$$= \int_1^{\frac{2-\frac{v_1}{v_2}}{v_2}} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi + \int_{\frac{2-\frac{v_1}{v_2}}{v_2}}^{2(1-\frac{v_1}{v_2})} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi =: I_1 + I_2,$$

avec

$$I_1 = \int_1^{\frac{2-\frac{v_1}{v_2}}{v_2}} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi = \int_1^{\frac{2-\frac{v_1}{v_2}}{v_2}} \overline{G}_{perd} \left(\left(1 - \frac{v_2}{v_1} (1 - \xi)\right)^2 \right) d\xi = \frac{v_1}{v_2} \int_1^{\frac{v_2}{v_1}} \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi$$

$$= -\frac{v_1}{v_2} \int_{\frac{v_2}{v_1}}^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi = -\frac{v_1}{v_2} \int_{\frac{v_2}{v_1}}^0 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_1}{v_2} \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi$$

$$= -\frac{v_1}{v_2} \int_{\frac{v_2}{v_1}}^0 \overline{F}_{perd} \left(\frac{v_1}{v_2} \xi \right)^2 d\xi - \frac{v_1}{v_2} \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi = \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_1}{v_2} \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi,$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{2-\frac{v_1}{v_2}}^{2(1-\frac{v_1}{v_2})} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi = \int_{2-\frac{v_1}{v_2}}^{2(1-\frac{v_1}{v_2})} \overline{G}_{perd} \left(\left(1 - \frac{v_2}{v_1} (1-\xi)\right)^2 \right) d\xi = \frac{v_1}{v_2} \int_{\frac{v_2}{v_1}}^{\frac{v_2-1}{v_1}} \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= -\frac{v_1}{v_2} \int_{\frac{v_2}{v_1}}^{\frac{v_2-1}{v_1}} \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi = -\frac{v_1}{v_2} \int_{\frac{v_2}{v_1}}^{\frac{v_2-1}{v_1}} \overline{F}_{perd} \left(\frac{v_1}{v_2} \xi \right)^2 d\xi = -\int_{\frac{1-v_2}{1-v_1}}^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi = \int_1^{1-\frac{v_2}{v_1}} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= \int_1^{1-\frac{v_2}{v_1}} \overline{G}_{perd} \left(\left(1 - \frac{v_2}{v_1} (1-\xi)\right)^2 \right) d\xi = \frac{v_1}{v_2} \int_1^0 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi = -\frac{v_1}{v_2} \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi.
\end{aligned}$$

L'intégrale I_g peut être calculée de la même façon. On obtient :

$$\begin{aligned}
I_g &= \int_{\frac{2v_2-1}{v_1}}^0 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi = \int_{\frac{2v_2-1}{v_1}}^{\frac{v_2}{v_1}} \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi + \int_{\frac{v_2}{v_1}}^0 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= \int_{\frac{2v_2-1}{v_1}}^{\frac{v_2}{v_1}} \overline{F}_{perd} \left(\frac{v_1}{v_2} \xi \right)^2 d\xi + \int_{\frac{v_2}{v_1}}^0 \overline{F}_{perd} \left(\frac{v_1}{v_2} \xi \right)^2 d\xi \\
&= \frac{v_2}{v_1} \int_{2-\frac{v_1}{v_2}}^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi + \frac{v_2}{v_1} \int_1^0 \overline{F}_{perd} \left(\frac{v_1}{v_2} \xi \right)^2 d\xi = -\frac{v_2}{v_1} \int_1^{\frac{v_2-1}{v_1}} \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= -\frac{v_2}{v_1} \int_1^{\frac{v_2-1}{v_1}} \overline{G}_{perd} \left(\left(1 - \frac{v_2}{v_1} (1-\xi)\right)^2 \right) d\xi - \frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= -\int_1^{\frac{v_2}{v_1}} \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi = \int_{\frac{v_2}{v_1}}^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= \int_{\frac{v_2}{v_1}}^0 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi + \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= \int_{\frac{v_2}{v_1}}^0 \overline{F}_{perd} \left(\frac{v_1}{v_2} \xi \right)^2 d\xi + \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= \frac{v_2}{v_1} \int_1^0 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi + \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= -\frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi + \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Comme $\overline{F}_{perd} = F^0$ et $\overline{G}_{perd} = G^0$ sur l'intervalle $[0,1]$ nous pouvons donc nous ramener à une expression ne dépendant que des états initiaux :

$$\begin{aligned}
I_F &= \int_0^1 F^0(\xi)^2 d\xi + \int_0^1 F^0(\xi)^2 d\xi - \frac{v_1}{v_2} \int_0^1 G^0(\xi)^2 d\xi - \frac{v_1}{v_2} \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= 2\|F^0\|^2 - 2\frac{v_1}{v_2}\|G^0\|^2 \\
I_G &= \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi + -\frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi + \int_0^1 \overline{G}_{perd}(\xi)^2 d\xi - \frac{v_2}{v_1} \int_0^1 \overline{F}_{perd}(\xi)^2 d\xi \\
&= 2\|G^0\|^2 - 2\frac{v_2}{v_1}\|F^0\|^2.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

D'après la relation (B.4) on a

$$\begin{aligned}
\|F^0\|^2 &\leq \left(\frac{v_2}{v_2 - v_1}\right)^2 \|h_0\|^2 + \left(\frac{1}{v_2 - v_1}\right)^2 \|Q_0\|^2 \\
\|G^0\|^2 &= \left(\frac{v_1}{v_2 - v_1}\right)^2 \|h_0\|^2 + \left(\frac{1}{v_2 - v_1}\right)^2 \|Q_0\|^2.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

D'où la majoration sur la norme de la solution au temps t :

$$\begin{aligned}
\left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2 &\leq (2 + v_1^2) \left[2\|F^0\|^2 - 2\frac{v_1}{v_2}\|G^0\|^2 \right] + (2 + v_2^2) \left[2\|G^0\|^2 - 2\frac{v_2}{v_1}\|F^0\|^2 \right] \\
&\leq (2 + v_1^2) \left[2\left(\frac{v_2}{v_2 - v_1}\right)^2 \|h_0\|^2 + \left(\frac{1}{v_2 - v_1}\right)^2 \|Q_0\|^2 - 2\frac{v_1}{v_2} \left(\frac{v_1}{v_2 - v_1}\right)^2 \|h_0\|^2 + \left(\frac{1}{v_2 - v_1}\right)^2 \|Q_0\|^2 \right] \\
&+ (2 + v_2^2) \left[\left(\frac{v_1}{v_2 - v_1}\right)^2 \|h_0\|^2 + \left(\frac{1}{v_2 - v_1}\right)^2 \|Q_0\|^2 - 2\frac{v_2}{v_1} \left(\frac{v_2}{v_2 - v_1}\right)^2 \|h_0\|^2 + \left(\frac{1}{v_2 - v_1}\right)^2 \|Q_0\|^2 \right].
\end{aligned}$$

Finalement on obtient une majoration du type souhaité, à savoir :

$$\left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \leq M_1 \|h_0\|^2 + M_2 \|Q_0\|^2 \leq M \left\| \begin{pmatrix} h_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \right\|_2^2,$$

ce qui donne $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq M$ et montre que l'opérateur $T(t)$ est borné.

- **Caractère C_0**

Nous allons maintenant montrer que l'application $t \mapsto T(t)$ est fortement continue c'est-à-dire que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2 = 0 \quad \forall (h_0, Q_0)^t \in Z.$$

Nous commençons par montrer ce résultat dans l'espace des fonctions continues à support compact. Nous l'étendons ensuite par densité. Soient deux fonctions h_0 et Q_0 dans $C_c(Z)$, l'espace des fonctions continues à support compact. On a

$$\left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} h(x,t) \\ Q(x,t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \|h(x,t) - h_0(x)\|_2^2 + \|Q(x,t) - Q_0(x)\|_2^2,$$

avec :

$$h(x,t) = \frac{v_2}{v_2 - v_1} h_0(x - v_1 t) - \frac{v_1}{v_2 - v_1} h_0(x - v_2 t) - \frac{1}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_1 t) + \frac{1}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_2 t)$$

$$Q(x,t) = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} h_0(x - v_1 t) - \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} h_0(x - v_2 t) - \frac{v_1}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_1 t) + \frac{v_2}{v_2 - v_1} Q_0(x - v_2 t),$$

comme les fonctions h_0 et Q_0 sont continues à support compact, les fonctions h et Q le sont également. Elles sont donc bornées

$$|h(x,t)| \leq M_h$$

$$|Q(x,t)| \leq M_Q,$$

et telles que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(x,t) = h_0(x) ; \quad \lim_{t \rightarrow 0} Q(x,t) = Q_0(x).$$

D'après le théorème de convergence de dominée de Lebesgue, on peut conclure :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|h(x,t) - h_0(x)\|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|Q(x,t) - Q_0(x)\|_2 = 0,$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2 = 0.$$

Nous devons encore étendre ce résultat à l'ensemble des fonctions quelconques h_0 et Q_0 de Z . Comme l'espace $C_c(Z)$ est dense dans Z ($\overline{C_c(Z)} = Z$), ceci se fait de la manière habituelle. Soient $(h_0, Q_0) \in Z$. Par densité, il existe deux fonctions $(h_0^c, Q_0^c) \in C_c(Z)$ telles que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left\| h_0^c(x) - h_0(x) \right\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \left\| Q_0^c(x) - Q_0(x) \right\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} \left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2 &= \left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) - h_0^c(x) \\ Q_0(x) - Q_0^c(x) \end{pmatrix} + T(t) \begin{pmatrix} h_0^c(x) \\ Q_0^c(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_0^c(x) \\ Q_0^c(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_0^c(x) \\ Q_0^c(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) - h_0^c(x) \\ Q_0(x) - Q_0^c(x) \end{pmatrix} \right\|_2 + \left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0^c(x) \\ Q_0^c(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_0^c(x) \\ Q_0^c(x) \end{pmatrix} \right\|_2 + \left\| \begin{pmatrix} h_0^c(x) - h_0(x) \\ Q_0^c(x) - Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\leq M\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| T(t) \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2 = 0, \quad \forall (h_0, Q_0)^t \in Z.$$

• Conclusion

La famille d'opérateur $T(t)$ associée au générateur $A_1 \frac{\partial}{\partial x}$ qui définit la solution au temps t de l'équation (B.1) à partir des conditions initiales est bien un C_0 -semigroupe.

B.2 Calcul des valeurs propres de l'opérateur $A = A_1 \frac{\partial}{\partial x}$

Dans ce paragraphe nous allons calculer les valeurs propres de l'opérateur $A = A_1 \frac{\partial}{\partial x}$. Les valeurs propres de cet opérateur sont les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que le problème aux limites

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \\ f_1(1) = 0, \quad f_2(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

possède une solution $(f_1(x), f_2(x))^t$ non triviale. Le problème (B.11) est un problème aux limites linéaire. En procédant au même changement de variables $(f_1, f_2)^t = P(\psi_1, \psi_2)^t$ que dans l'annexe 2.B.1 précédente, on obtient comme solution générale :

$$(\psi_1(x), \psi_2(x))^t = (c_1 e^{-\frac{\lambda}{v_1} x}, c_2 e^{-\frac{\lambda}{v_2} x})^t$$

avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{C}$. En imposant à cette solution générale les conditions aux limites nulles, on obtient les conditions :

$$\begin{aligned} c_1 e^{-\frac{\lambda}{v_1}} + c_2 e^{-\frac{\lambda}{v_2}} &= 0 \\ v_1 c_1 + v_2 c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ce système linéaire homogène possède une solution non triviale si et seulement si :

$$\lambda_k = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} \ln\left(-\frac{v_2}{v_1}\right) + \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.12})$$

comme $v_1 < v_2$, ces valeurs propres λ_k sont situées sur la droite d'équation

$$\text{Re}(z) = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} \ln\left(-\frac{v_2}{v_1}\right),$$

et distribuées symétriquement par rapport à l'axe réel. Elles sont espacées entre elles d'une distance constante $2 \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} \pi$.

- **Conclusion**

Les valeurs propres de l'opérateur A sont à partie réelle strictement négative.

B.3 Démonstration de non-stabilité exponentielle de $A_s = A_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x}$

Dans ce paragraphe nous montrons que $A_s = A_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x}$ est un opérateur non exponentiellement stable, ce qui revient à montrer que $(sI - A_s)^{-1} \notin H_\infty(\mathcal{L}(Z))$. Nous allons donc commencer par calculer $(sI - A_s)^{-1}$. On a

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix},$$

sur le domaine

$$D(A_s) = \left\{ z = (z_1, z_2)^t \in Z, \frac{\partial z}{\partial x} \in Z / z_1(1) = 0, z_2(0) = 0 \right\}.$$

Soient $z = (z_1, z_2)^t \in D(A_s)$ avec $z_1(1) = 0, z_2(0) = 0$ et $y = (y_1, y_2)^t$ tels que $(sI - A_s)^{-1} y = z$. On a donc $(sI - A_s)z = y$. D'après l'expression de l'opérateur A_s cette dernière relation est équivalente à :

$$\begin{cases} s z_1 + \frac{\partial z_2}{\partial x} = y_1 \\ s z_2 - a_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z_2}{\partial x} - a_3 z_1 + a_4 z_2 = y_2, \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_3 + a_2 s) & (s + a_4) \\ a_1 & a_1 \\ -s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_2}{a_1} y_1 - \frac{1}{a_1} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Posons

$$Q(s) = \begin{pmatrix} -(a_3 + a_2 s) & (s + a_4) \\ a_1 & a_1 \\ -s & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{a_1} y_1 - \frac{1}{a_1} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

D'après le calcul qui a été fait dans le chapitre 3 , les valeurs propres de la matrice $Q(s)$ sont donnée par la formule suivante :

$$\lambda_1(s) = \frac{-(a_2 s + a_3) + a_1 \sqrt{\Lambda(s)}}{2a_1}, \quad \lambda_2(s) = \frac{-(a_2 s + a_3) - a_1 \sqrt{\Lambda(s)}}{2a_1},$$

avec

$$\Lambda(s) = \left(\frac{a_2 s + a_3}{a_1} \right)^2 - 4 \frac{s(s + a_4)}{a_1}.$$

En procédant au changement de variables $(z_1, z_2)^t = P_s (\Phi_1, \Phi_2)^t$, où la matrice P_s est définie par

$$P_s(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_1(s) & -\lambda_2(s) \end{pmatrix}, \quad P_s(s)^{-1} = \frac{1}{s(\lambda_1(s) - \lambda_2(s))} \begin{pmatrix} -\lambda_2(s) & -1 \\ \lambda_1(s) & 1 \end{pmatrix},$$

on observe que le système (B.14) à pour solution

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= c_1(s) e^{\lambda_1(s)x} + \int_0^x e^{\lambda_1(s)(x-u)} \hat{y}_1(u) du \\ \Phi_2(x) &= c_2(s) e^{\lambda_2(s)x} + \int_0^x e^{\lambda_2(s)(x-u)} \hat{y}_2(u) du, \end{aligned}$$

où c_1 et $c_2 \in \mathcal{C}$. sont des constantes à calculer à partir des conditions au limites nulles, à savoir :

$$\begin{aligned}\lambda_1(s)\Phi_1(1) + \lambda_2(s)\Phi_2(1) &= z_1(1) = 0 \\ -s\Phi_1(0) - s\Phi_2(1) &= z_2(0) = 0.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}c_2(s) &= -c_1(s) \\ c_1(s) &= \frac{\int_0^1 \lambda_1(s)e^{\lambda_1(s)(1-u)} \hat{y}_1(u) du + \int_0^1 \lambda_2(s)e^{\lambda_2(s)(1-u)} \hat{y}_2(u) du}{\lambda_2(s)e^{\lambda_2(s)} - \lambda_1(s)e^{\lambda_1(s)}}.\end{aligned}$$

La solution est donc, d'après la relation $(z_1, z_2)^t = P_s(\Phi_1, \Phi_2)^t$, donnée par :

$$\begin{aligned}z_1(x) &= \lambda_1(s)\Phi_1(x) + \lambda_2(s)\Phi_2(x) \\ z_2(x) &= -s\Phi_1(x) - s\Phi_2(x),\end{aligned}\tag{B . 15}$$

qui peut s'écrire de façon plus détaillée :

$$\begin{aligned}z_1(x) &= c_1(s) \left(\lambda_1(s)e^{\lambda_1(s)x} - \lambda_2(s)e^{\lambda_2(s)x} \right) + \int_0^x \lambda_1(s)e^{\lambda_1(s)(x-u)} \hat{y}_1(u) du \\ &\quad + \int_0^x \lambda_2(s)e^{\lambda_2(s)(x-u)} \hat{y}_2(u) du \\ z_2(x) &= c_2(s) \left(s e^{\lambda_2(s)x} - s e^{\lambda_1(s)x} \right) - \int_0^x s e^{\lambda_1(s)(x-u)} \hat{y}_1(u) du - \int_0^x s e^{\lambda_2(s)(x-u)} \hat{y}_2(u) du.\end{aligned}$$

Notons pour la suite :

$$f_1(x, s) = c_1(s) \left(\lambda_1(s)e^{\lambda_1(s)x} - \lambda_2(s)e^{\lambda_2(s)x} \right)$$

$$g_1(x, s) = c_1(s) \left(s e^{\lambda_2(s)x} - s e^{\lambda_1(s)x} \right)$$

$$f_2(x, s) = \int_0^x \lambda_1(s)e^{\lambda_1(s)(x-u)} \hat{y}_1(u) du + \int_0^x \lambda_2(s)e^{\lambda_2(s)(x-u)} \hat{y}_2(u) du$$

$$g_2(x, s) = - \int_0^x s e^{\lambda_1(s)(x-u)} \hat{y}_1(u) du - \int_0^x s e^{\lambda_2(s)(x-u)} \hat{y}_2(u) du.$$

Après avoir calculé la solution du problème étudié, nous allons montrer que l'opérateur $(sI - A_s)^{-1}$ qui en résulte n'est pas dans $H_\infty(\mathcal{L}(Z))$. Pour ce faire, d'après la définition $H_\infty(\mathcal{L}(Z))$, il faut montrer que $\sup_{\text{Re}(s) > 0} \|(sI - A_s)^{-1}\|$ n'est pas finie. On a :

$$\|(sI - A_s)^{-1}\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|(sI - A_s)^{-1} y\|_{\mathcal{L}(Z)},$$

Soit $\|y\| \leq 1$ tel que

$$\|(sI - A_s)^{-1} y\|_{\mathcal{L}(Z)} = \|z\|_{\mathcal{L}(Z)}.$$

On a par ailleurs

$$\|(sI - A_s)^{-1} y\|_{\mathcal{L}(Z)}^2 = \left\| \begin{matrix} f_1 + f_2 \\ g_1 + g_2 \end{matrix} \right\|_{\mathcal{L}(Z)}^2 = \|f_1 + f_2\|_{L_2}^2 + \|g_1 + g_2\|_{L_2}^2$$

Pour montrer alors que $\sup_{\text{Re}(s) > 0} \|(sI - A_s)^{-1}\|$ n'est pas finie, il suffit de montrer que $\|f_1 + f_2\|_{L_2}^2$ n'est pas bornée. Or,

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_{L_2}^2 &= \int_0^1 [f_1(x, s) + f_2(x, s)]^2 dx = \int_0^1 |f_1(x, s) + f_2(x, s)|^2 dx \\ &= \int_0^1 |f_1(x, s)|^2 dx + \int_0^1 |f_2(x, s)|^2 dx + \int_0^1 [\overline{f_1(x, s)} f_2(x, s) + f_1(x, s) \overline{f_2(x, s)}] dx. \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser les expressions de f_1 et f_2 déjà calculées. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_1(x, s)|^2 dx &= \int_0^1 |c_1(s) (\lambda_1(s) e^{\lambda_1(s)x} - \lambda_2(s) e^{\lambda_2(s)x})|^2 dx \\ &= |c_1(s)|^2 \int_0^1 (\lambda_1(s) e^{\lambda_1(s)x} - \lambda_2(s) e^{\lambda_2(s)x})^2 dx \\ &= |c_1(s)|^2 \int_0^1 |\lambda_1(s) e^{\lambda_1(s)x}|^2 dx + |c_1(s)|^2 \int_0^1 |\lambda_2(s) e^{\lambda_2(s)x}|^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 [\overline{\lambda_1(s) e^{\lambda_1(s)x}} (\lambda_2(s) e^{\lambda_2(s)x}) + (\lambda_1(s) e^{\lambda_1(s)x}) \overline{\lambda_2(s) e^{\lambda_2(s)x}}] dx. \end{aligned}$$

Afin de conclure, il nous suffit donc de montrer que

$$J = |c_1(s)|^2 \int_0^1 |\lambda_1(s) e^{\lambda_1(s)x}|^2 dx?$$

n'est pas bornée. On a

$$J = |c_1(s)|^2 \int_0^1 |\lambda_1(s) e^{\lambda_1(s)x}|^2 dx = |c_1(s)|^2 |\lambda_1(s)|^2 \int_0^1 |e^{\lambda_1(s)x}|^2 dx = |c_1(s)|^2 |\lambda_1(s)|^2 \frac{e^{2\operatorname{Re}(\lambda_1(s))x}}{\operatorname{Re}(\lambda_1(s))}.$$

Or nous savons que $\operatorname{Re}(\lambda_1(s)) > 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_2(s)) < 0$, donc J n'est pas bornée ce qui prouve que l'opérateur $(sI - A_s)^{-1} \notin H_\infty(\mathcal{L}(Z))$ et par conséquent que l'opérateur A_s n'est pas exponentiellement stable.

Annexe 3

C.1 Environnement de Travail

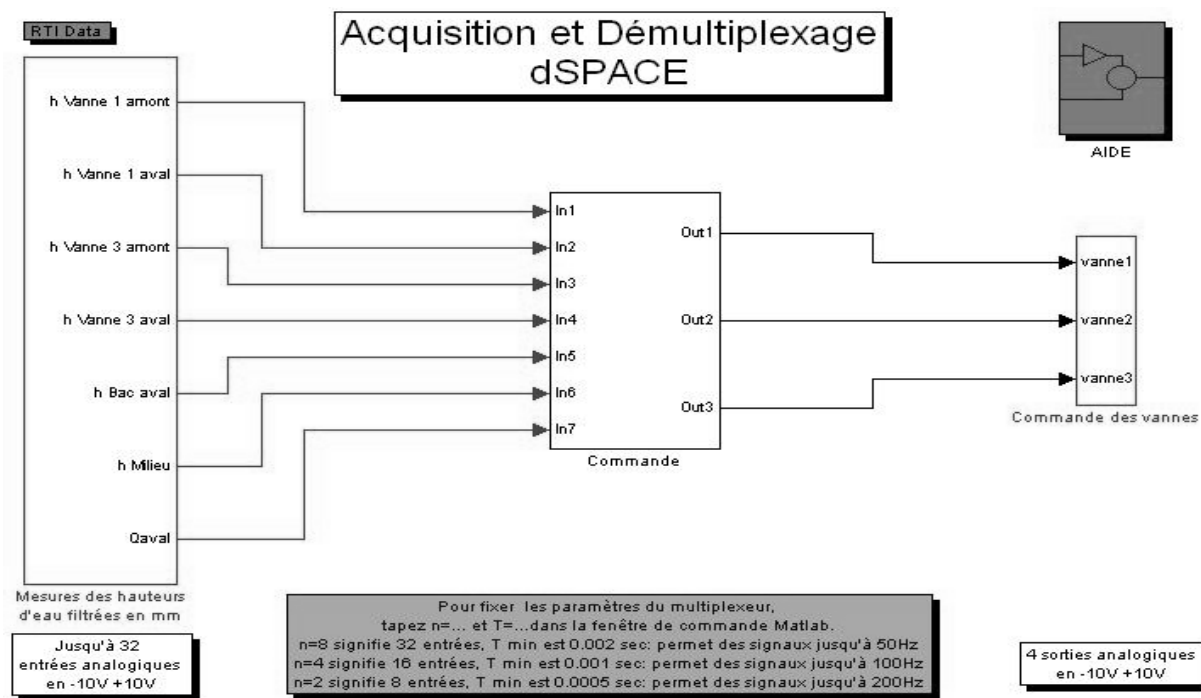


Figure C.1 : Fichier Simulink d'échange via la carte d'acquisition dSPACE.

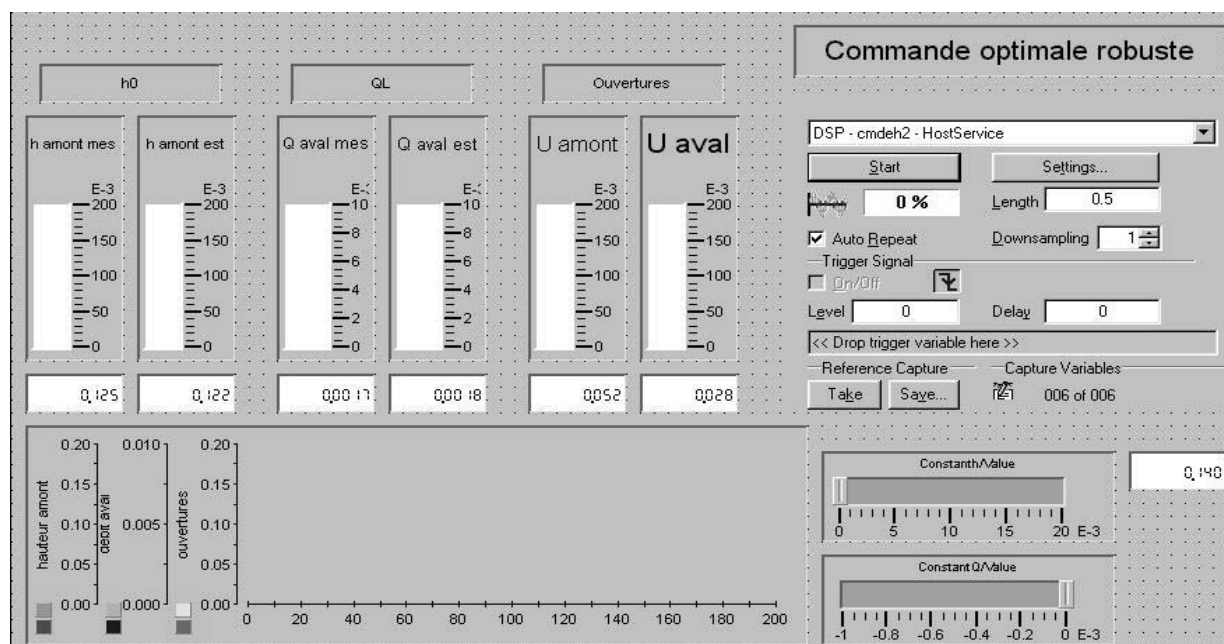


Figure C.2 : Fichier d'interface graphique homme-machine.

Annexe 4

D.1 Identification des paramètres

L'étude d'identification que nous présentons ici a été faite par S. Chaussinand [Chaussinand S., 2003] dans le cadre de son stage de DEA auquel j'ai participé. L'objectif de cette étude était de déterminer la valeur pratique de tous les paramètres caractérisant la géométrie du canal et intervenant dans les équations de Saint-Venant : il s'agit de la largeur du canal, de la longueur du canal, de la pente, du coefficient de Strickler K ; de plus, il fallait déterminer le coefficient de toutes les lois d'ouvrage (vannes et déversoir), ainsi que le débit maximum atteignable dans le canal.

La longueur et la largeur du canal sont accessibles par simple mesure sur le canal. Par contre les autres valeurs doivent faire l'objet d'expériences. Notons que les vannes sont commandées en tension et nous ne connaissons pas la relation qui lie la tension et l'ouverture, il faut donc mener une expérience permettant de déterminer cette relation. Une fois ces valeurs trouvées, une série d'expériences de validation devra avoir lieu.

D.1.1 Relation tension/ouverture des vannes

Les moteurs gérant l'ouverture des vannes sont pilotés en tension. Or, la commande que nous établissons est exprimée en "mm" représentant la hauteur d'ouverture de la vanne. Il nous faut donc trouver la relation liant la tension et l'ouverture désirée. D'après les données du constructeur cette relation est linéaire, mais les paramètres ne nous sont pas fournis. Cette expérience va nous permettre de vérifier les données constructeur et de déterminer les paramètres inconnus.

- **Protocole**

- mettre une consigne d'eau de 10cm à l'amont (ceci étant la consigne moyenne nous avons ainsi la résistance apportée par l'eau),

- appliquer la série de tensions à la vanne amont : 0-0.5-1-1.4-1.8-2-4-6-8-10 Volts.

Pour la vanne aval appliquer la série de tensions en V : 1-3-5-7,

- à chaque tension, relever l'ouverture de la vanne en mm.

Remarque D.1:

Les deux vannes étant sensiblement identiques, pour la seconde vanne, nous prendrons moins de points. L'objectif pour la vanne amont étant de vérifier sa linéarité aux faibles tensions.

Selon le protocole ci-dessus, nous avons obtenu les résultats suivants :

Pour la vanne amont :

Tension en V	0	0.4	0.5	0.6	0.6	1	1.4	1.8	2	4	6	8	10
Ouverture en mm	XX	XX	4	6	10	15	24	32.5	38	85	132	180	226

Pour la vanne aval :

Tension en V	1	3	5	7	9
Ouverture en mm	20	60	106	153.5	200

Ces mesures ont été réalisées avec la précision de ± 0.5 mm.

- **Interprétation**

Dans un premier temps, à l'aide du logiciel Matlab, nous avons tracé les courbes obtenues à partir de ces données :

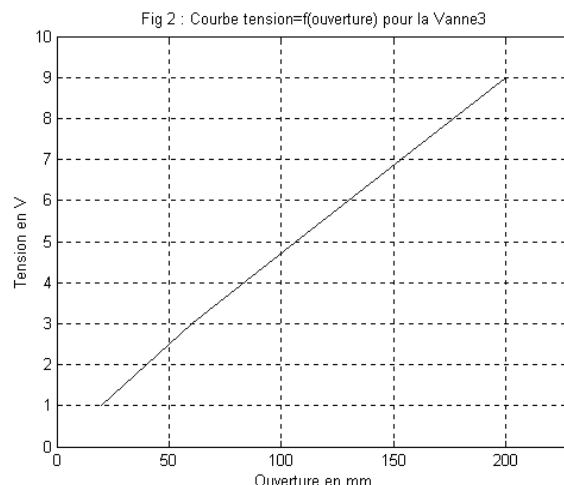
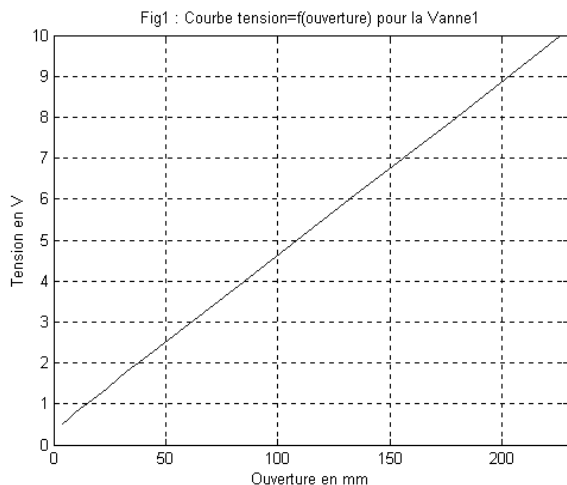


Figure D.1 : Evolution de l'ouverture en fonction de la tension.

Sur ces deux figures nous pouvons dire que les deux vannes sont linéaires par contre elles ne passent pas par zéro.

- **conclusion**

Nous avons vérifié que les vannes sont bien linéaires même en basses tensions. Par contre, le zéro d'ouverture ne peut être atteint. La relation de chacune des vannes est décrite par la loi. Notons que u représente la tension à appliquer et θ , l'ouverture désirée.

Vanne amont : $u = 0.0428\theta + 0.3272$.

Vanne aval : $u = 0.0444\theta + 0.12$.

D. 1.2 Identification

D.1.2.1 La pente

La pente est un paramètre important du canal. En effet, elle apparaît directement dans le modèle de Saint-Venant et permet de déterminer si le canal se trouve en régime fluvial (l'onde peut être décomposée en deux ondes se déplaçant en sens contraire) ou torrentiel (l'onde se déplace dans une seule direction). Pour le micro-canal, il a été déterminé que la limite entre ces deux régimes se trouve autour de 0,6 ‰. En dessous de cette limite, nous nous trouvons dans le cas « fluvial » et au dessus dans le cas « torrentiel ».

- **Protocole**

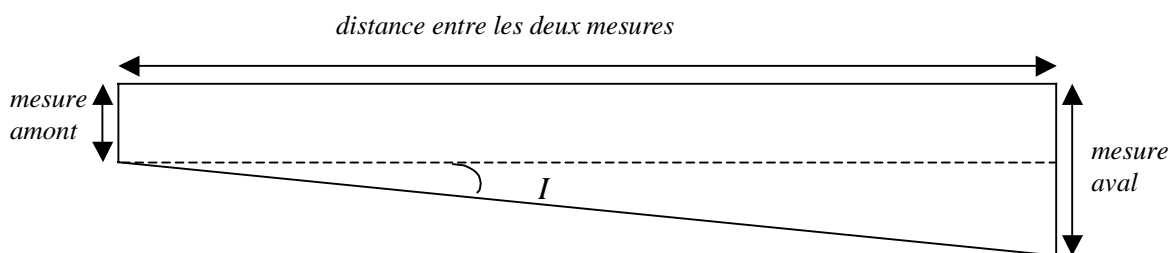
- fermer la vanne aval,
- ouvrir la vanne amont,
- appliquer une consigne à l'amont du canal,
- attendre la stabilisation,
- mesurer la hauteur à l'entrée du canal,
- mesurer la hauteur à la sortie du canal,
- mesurer la distance entre les deux mesures.

- **Observation**

Nous avons effectué plusieurs mesures afin d'avoir une pente moyenne. La distance entre les deux mesures est constante et égale à 7600 mm, les mesures de hauteurs sont reportées dans le tableau ci-dessous :

mesure amont	60	78	96.5	116
mesure aval	72.5	92	108.5	128

- **Interprétation**



La pente nous est donnée par : $I = \text{atg}\left(\frac{\text{mesure aval} - \text{mesure amont}}{\text{distance entre les deux mesures}}\right)$

Ce qui nous donne pour chacune de nos mesures :

mesure amont	60	78	96.5	116
mesure aval	72.5	92	108.5	128
pente	0.0016	0.0018	0.0016	0.0016

Pour avoir la valeur la plus proche de la réalité, nous avons effectué la moyenne de ces valeurs en enlevant au préalable les valeurs aberrantes.

Ce qui nous donne un angle de 0.0016° .

Soit une pente : $I = 1.6\%$.

D .1.2.2 Le débit maximum

Le calcul du débit va nous donner des indications sur l'ordre de grandeur des quantités d'eau qui peuvent transiter dans le canal. Cela nous servira pour le dimensionnement des commandes et nous évitera de faire des commandes atteignant des débits impossibles d'une part et de donner des consignes inatteignable de l'autre. De plus, cette information nous permettra de dimensionner le temps de parcours et le retard minimal d'une onde dans le canal.

- **Protocole**

- faire deux marques suffisamment éloignées sur le bac aval,
- mesurer la différence de hauteur entre les deux marques,
- ouvrir les vannes 1 et 3 au maximum,
- fixer la consigne amont à 200 mm,
- boucher le trou d'évacuation d'eau du bac aval,
- lancer la mesure du temps au passage du niveau d'eau à la hauteur min,
- arrêter la mesure de temps au passage de l'eau au niveau max,
- déboucher le trou d'évacuation.

- **Observation**

Nous avons fait plusieurs essais. Dans un premier temps, nous avons essayé de piloter la fermeture de la vanne aval pour boucher le trou, mais cela ne nous donnait pas de résultats satisfaisants. En effet, nous nous trouvions en présence d'un régime transitoire, ce qui faussait nos mesures. Ensuite, nous avons pris une plaque de plexiglass que nous avons directement placée sur le trou d'évacuation. Les résultats ainsi obtenus ont été corrects. Pour mesurer le temps, nous avons procédé de deux manières : avec un chronomètre et en calculant directement le Δh et le Δt à partir des mesures relevées via la carte dSPACE.

Les mesures visuelles au chronomètre ne sont pas très précises. En effet, le bac aval connaît de nombreuses perturbations, il est donc difficile de déterminer à quel instant exact l'eau franchit un niveau. De plus, nous travaillons à la seconde et la précision n'est pas très importante. Visuellement, nous avons obtenu 7 sec.

Via la carte dSPACE, nous avons obtenu le relevé suivant :

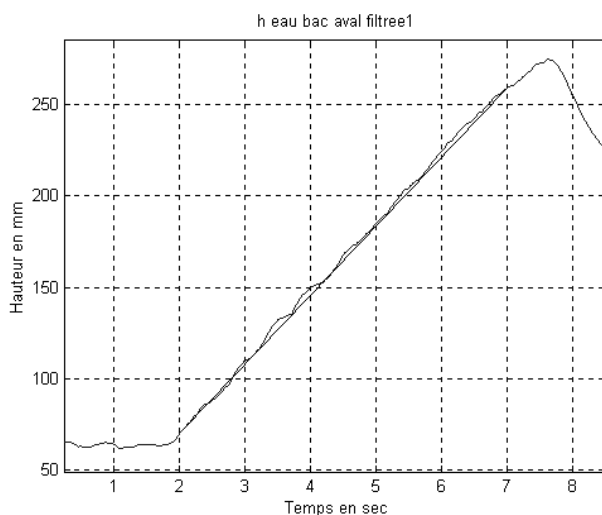


Figure D.2 : Hauteur d'eau dans le bac aval.

Sur cette figure, nous voyons que pour $\Delta h = 189 \text{ mm}$ il faut $\Delta t = 5 \text{ sec}$.

- **Interprétation**

Le débit est donné par la relation :

$$Q = \frac{\text{Volume rempli}}{\text{temps de remplissage}} = S \frac{\Delta h}{\Delta t} \text{ en } \frac{m^3}{s}$$

avec S = la section du bac aval. Dans notre cas :

$$\begin{aligned} S &= \text{surface du bac} - \text{surface du tuyau d'évacuation} \\ \Leftrightarrow S &= 0.5 * 0.495 - \pi * 0.055^2 \\ \Leftrightarrow S &= 0.238 m^2. \end{aligned}$$

$$\text{Nous avons donc : } Q = \frac{0.238 * 0.189}{5} = 0.009 m^3 s^{-1}.$$

Soit le débit maximum: $Q_{\max} = 9 \text{ ls}^{-1}$.

D .1.2.3 Les coefficients des ouvrages

Nous avons vu dans le chapitre 2 que la loi des ouvrages est décrit par : $Q = \alpha B_v \theta \sqrt{2g\Delta h}$

où α est le coefficient de la vanne, B_v , la largeur de la vanne, où θ représente l'ouverture de la vanne, Δh est la différence de niveau d'eau selon que nous sommes dans le cas d'une vanne ou d'un déversoir.

Ici, l'objectif est de déterminer le coefficient α qui est un coefficient de rendement propre à chaque vanne traduisant la perte de charge à son niveau.

- **Protocole**

- ouvrir la vanne 3 de 0.02 m,
- mettre une consigne amont de 0.15 m,
- ouvrir la vanne 1 de 0.01 m,
- noter les hauteurs à l'amont et à l'aval de chaque vanne et au niveau du déversoir,
- mesurer le débit,
- recommencer avec la vanne 1 ouverte de 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07 m,
- recommencer cette série avec une ouverture de la vanne 3 de 0.03, 0.04, 0.05m.

- **Observation**

Dans le tableau ci-dessous, nous avons reporté les mesures effectuées ainsi que le α calculé correspondant pour chacun des ouvrages : vanne amont, vanne aval et déversoir :

	feta V1(mm)		dh V1		h amont V1		h aval V1		alpha V1		feta V3(mm)		dh V3		h amont V3		h aval V3		alpha V3		Lielut	Lielit corrigé	H déversant	alpha déversc
essai 1	13	78	143	65	0,60	20	22	90	68	0,74	1	0,971	70	0,9081										
essai 2	30	40	140	100	0,51	20	53	123	70	0,67	1,4	1,36	72	1,0855										
essai 3	40	21	140	119	0,59	20	56	135	79	0,72	1,6	1,506	81	0,6883										
essai 4	50	15	140	125	0,57	20	60	140	80	0,72	1,6	1,554	82	0,6753										
essai 5	60	10	140	130	0,60	20	64	144	80	0,72	1,7	1,603	82	0,6964										
essai 6	70	7	140	133	0,62	20	64	145	81	0,72	1,7	1,603	83	0,6630										
essai 7	70	13	134	121	0,60	30	49	137	88	0,73	2,2	2,137	90	0,6513										
essai 8	60	18	136	118	0,60	30	46	134	88	0,75	2,2	2,137	90	0,6513										
essai 9	50	24	136	112	0,57	30	44	130	86	0,70	2	1,943	88	0,6422										
essai 10	40	28	138	110	0,62	30	43	128	85	0,67	1,9	1,846	87	0,6364										
essai 11	30	48	138	90	0,58	30	33	116	83	0,70	1,8	1,7	85	0,6402										
essai 12	20	67	142	75	0,64	30	24	104	80	0,71	1,5	1,457	82	0,6331										
essai 13	10	98	144	46	0,74	30	4	74	70	1,21	1,1	1,02	72	0,8142										
essai 14	10	99	143	44	0,63	40	3	72	69	0,90	0,9	0,874	71	0,7537										
essai 15	20	86	136	50	0,50	40	8	87	79	0,83	1,4	1,311	81	0,5995										
essai 16	30	66	136	70	0,55	40	18	102	84	0,80	2	1,894	86	0,6821										
essai 17	40	46	134	88	0,59	40	27	114	87	0,77	2,3	2,234	89	0,7087										
essai 18	50	34	131	97	0,59	40	30	120	90	0,79	2,5	2,429	92	0,6853										
essai 19	60	25	130	105	0,60	40	34	126	92	0,77	2,6	2,526	94	0,6625										
essai 20	70	17	130	113	0,65	40	37	130	93	0,77	2,7	2,623	95	0,6641										
essai 21	70	22	126	104	0,65	50	46	123	77	0,63	3,1	3,011	99	0,6672										
essai 22	60	34	130	96	0,59	50	44	119	75	0,63	3	2,914	98	0,6669										
essai 23	50	41	131	90	0,62	50	35	113	78	0,67	2,9	2,769	96	0,6772										
essai 24	40	55	131	76	0,58	50	29	107	78	0,64	2,5	2,429	94	0,6370										
essai 25	30	71	136	65	0,59	50	18	95	77	0,70	2,2	2,089	90	0,6365										
essai 26	20	85	140	55	0,62	50	11	86	75	0,69	1,7	1,603	83	0,6630										
essai 27	10	101	143	42	0,59	50	2,5	71	69	0,75	0,9	0,826	73	0,6126										
essai 28	20	22	76	54	0,52	30	4	68	64	0,81	0,7	0,68	89	0,2157										
essai 29	40	10	76	66	0,60	30	14	80	66	0,68	1,1	1,069	74	0,7393										

• Interprétation

Les trois courbes de la figure 7.7 montrent que les valeurs que nous avons obtenues sont toutes sensiblement identiques. Afin d'avoir une valeur pratique, nous allons considérer la moyenne de ces valeurs après avoir enlever les valeurs atypiques.

Pour la vanne amont : Nous enlevons le maximum et le minimum et nous effectuons la moyenne des valeurs restantes, ce qui nous donne : $\alpha_1 = 0.6$.

Pour la vanne aval : De la même manière, nous obtenons : $\alpha_3 = 0.73$.

Pour le déversoir : De même : $\alpha_D = 0.66$ (nous avons enlevé les valeurs qui différaient trop des autres).

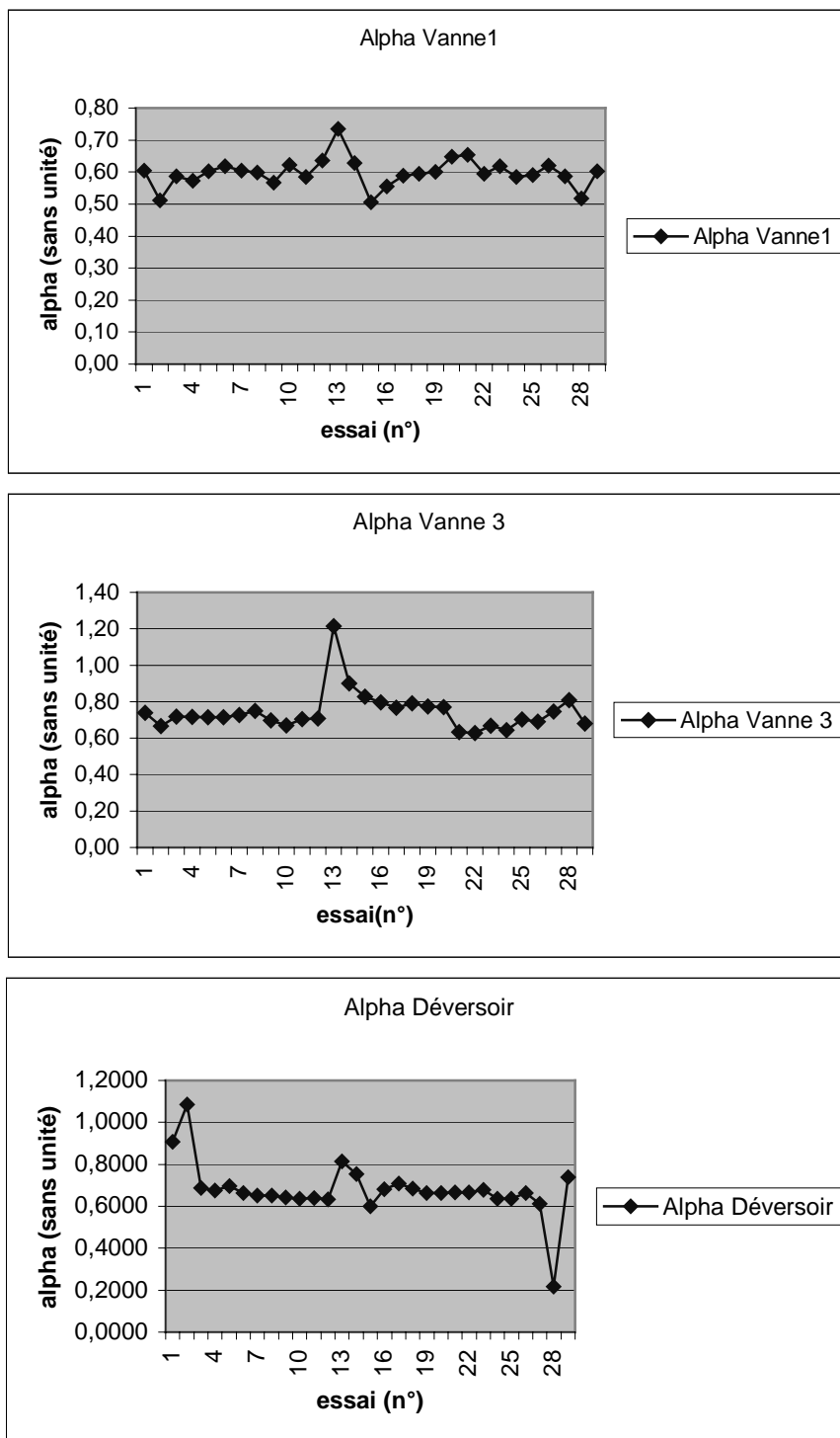


Figure D.3 : Coefficients des ouvrages en fonction de l'essai.

D .1.2.4 Le coefficient de Strickler

Le coefficient de Strickler K est un coefficient permettant de définir la rugosité du canal et donc de faire apparaître les forces de frottements intervenant tout au long du bief. Il s'exprime en $m^{1/3}s^{-1}$.

- **Protocole**

- ouvrir toutes les vannes,
- fixer une consigne à l'amont,
- attendre le régime d'équilibre,
- mesurer la hauteur à l'amont du bief,
- mesurer la hauteur à l'aval du bief,
- mesurer le débit,
- sous Matlab, résoudre l'EDO (équation différentielle ordinaire, voir chapitre 2) donnant le profil de hauteur d'équilibre non uniforme $h_e(x)$ avec pour paramètre : h_0 = hauteur à l'amont du bief et Q_e le débit mesuré à l'équilibre,
- faire varier K , jusqu'à trouver une hauteur à l'aval égale à celle que nous avons obtenu en pratique,
- recommencer avec trois hauteurs différentes.

- **Observation**

Dans le tableau ci-dessous, nous avons reporté les différentes mesures relevées lors de l'expérience auxquelles nous avons rajoutées le coefficient K identifié correspondant.

amont du bief	aval du bief	débit	coeff K
0,15	0,144	0,0073	99
0,13	0,123	0,0056	96
0,09	0,097	0,0024	98
0,07	0,076	0,0015	93

N.B : les hauteurs sont en mètres, les débits en m^3/s

Ces mesures ont été délicates, notamment au niveau du débit. C'est pourquoi nous avons réalisé plusieurs essais afin de déterminer la valeur moyenne du coefficient K .

- **Interprétation**

En réalisant la moyenne des quatre valeurs ainsi obtenues, nous obtenons : $K = 97m^{1/3}s^{-1}$.

D .1.2.5 Tableau récapitulatif des paramètres

paramètres	B (m)	L (m)	K(m ^{1/3} s ⁻¹)	α vanne 1	α vanne 3	α déversoir	pente (‰)	Q _{max} (m ³ s ⁻¹)
valeur	0.1	7	97	0.6	0.73	0.66	1.6	0.009

D .1.3 Conclusion

Cette étude d'identification a été très utile dans le sens où elle a permis de déterminer toutes les valeurs des paramètres nécessaires pour l'implantation des différentes lois de commande citées précédemment. Notons bien que dans cette étude une partie de validation statique et dynamique de ces paramètres a été faite. Les résultats obtenus en simulation et en pratique sont identiques, pour plus de détails, voir [Chaussinand S., 2003].

Références

1. Akouz K., A. Benhammou. *Modelling and predictive control of irrigation channels*. MSABI/IFAC First Int. Symposium on Mathematical Modelling and simulation in Agriculture and Bio-industries. Mai 1995.
2. Akouz K. *Commande prédictive d'un canal d'irrigation*. Rapport FSSEM-Cemagref. 1997.
3. Akouz K., A. Benhammou, P. O. Malaterre, B. Dahhou. *Predictive control of an irrigation channel*. International Workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
4. Akouz K. *Modélisation et commande d'un canal d'irrigation*. Rapport de thèse FSSM. Faculté de Sciences Semalia. Université Cadi Ayyad Marrakesh Morocco, Juin 1997.
5. Anderson B. D. O., J. B. Moore. *Optimal Control- Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, 1989.
6. Asch M., G. Lebeau. *Geometrical aspects of exact boundary controllability for the wave equation – a numerical study*. ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations, 3 :163-212, 1998.
7. Atanov G. A., E. G. Evseeva, P. A. Work. *Variational problem of water-level stabilization in open channel*. Journal of Hydraulic Engineering. Division ASCE Vol. 124, No. 1, pp.50-54, 1998.
8. Athans M. *A tutorial on the LQG/LTR method*. Proc. American Control Conference, 1986.
9. Balogun O. S. *Design of real-time feedback control for canal systems using linear quadratic regulator theory*, Ph.D thesis, Department of Mechanical Engineering, University of California at Davis, 230 p. 1985.

10. Balogun O. S., M. Hubbard, J. J. DeVries. *Automatic control of canal flow using linear quadratic regulator theory*. Journal of Hydraulic Engineering. Division ASCE Vol. 114, n° 1, p 75-102, 1988.
11. Bardos C., G. Lebeau, J. Rauch. *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*. SIAM.
12. Baume J. P., P. O. Malaterre. SIC. *Simulation des canaux d'irrigation. Vol II Guide théorique CEMAGREF*. Divison Irrigation, Novembre, 1997.
13. Baume J. P., S. Jacques, P. O. Malaterre. *Modeling of Irrigation Channel Dynamics for Controller Design*. IEEE Int. Conference on Systems, Man & Cybernetics (SMC98), San Diego, California, October 11 to 14, 1998, p. 3856-3861. 1998.
14. Begovich O., J. A. Salinas, V. M. Ruiz. *Real-time implementation of a fuzzy gain scheduling control in a multi-pool open irrigation canal prototype*. ISIC, Houston, USA, 2003.
15. Begovich O., J. C. Zapién, V. M. Ruiz. *Real-time control of a multi-pool open irrigation canal prototype*. IASTED, Cancun, Mexico, 2002.
16. Borne P., F. Rotella. *Cours de commande optimale*. Polycopié ECL, Lille.
17. Bounit H., H. Hammouri, J. Sau. *Regulation of an irrigation canal through the semigroup approach*. Workshop on Regulation of Irrigation Canals, RIC97, pages 261-267, 1997.
18. Buyalski C. P. *Canal systems automation manual*. Volume 1. A Water Resources Technical publication, U. S. Department of Interior, Bureau of reclamation, Denver Office, 1991.
19. Cardona J., M. Gomez M, J. Rodellar. *A decentralized adaptive predictive controller for irrigation canals*. International Workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morroco, 1997.
20. Cauvin A., H. Guerree. *Eléments d'hydraulique*. Eyrolles, 1978.
21. Cemagref. *Régulation et gestion des canaux à surface libre. Inventaire des canaux d'irrigation à surface libre dans le sud de la France. Enquête et étude des pratiques de régulation et des performances des canaux à but agricole*. Rapport DERF, Cemagref-Ministère de l'Agriculture et de la pêche, 1997.

22. Chaussinand S. *Rapport de diplôme d'études approfondies*. INPG Valence, 2002/2003.
23. Chen M. L., D. Georges. *Nonlinear optimal control of an open-channel hydraulic system based on an infinite-dimensional model*. IEEE Conference on Decision and Control, page 4313-4318, CDC99, Decembre 1999.
24. Chen M. L., D. Georges. *Discrete-time nonlinear optimal control of an open-channel hydraulic system*. IFAC Conf. on Control System Design, pages 82-87, Juin 2000.
25. Chen M. L., D. Georges. *Nonlinear robust control of an open-channel hydraulic system based on an infinite-dimensional model*. 11yh IFAC Workshop Control Applications of Optimization, pages 16-21, Juillet 2000.
26. Chen M. L., D. Georges. *Nonlinear feedback control of an open-channel hydraulic system based on an infinite-dimensional model*. European Control Conference ECC01, 2001.
27. Chen M. L. *Commandes optimale et robuste des équations aux dérivées partielles régissant le comportement des systèmes hydrauliques à surface libre*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
28. Chevereau H. *Contribution à l'étude de la régulation dans les systèmes hydrauliques à surface libre*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991.
29. Chow V. T. *Open-Channel hydraulics*. McGraw-Hill, 1959.
30. Clark S., Y. Latushkin, S. Montgomery- Smith, T. Randolph. *Stability radius and internal versus external stability in banach space : An evolution semigroup approach*. SIAM Journal on Control and Optimisation, 38 (6) :1757-1793, 2000.
31. Colley R. L., S. A. Moin. *Finite element solution of Saint-Venant equation*. Journal of Hydraulic Engineering. Division ASCE Vol. 102, No.HY4, 779-775, 1976.
32. Compas J. M., J. C. Pages. *Regulation by predictive control and embedded knowledge based models*. International Workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.

33. Coron J. M., B. A. Novel, G. Bastin. *A Lyapunov approach to control irrigation canals modeled by Saint-Venant equations*. European Control Conference ECC99, 1999.
34. Deltour J. L. *Application de l'automatique numérique à la régulation des canaux ; Proposition d'une méthodologie d'étude*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.
35. Dochain D., J. P. Babary , N. Tali-Maamar. *Modeling and adaptative control of nonlinear distributed parameter bioreactor via orthogonal collocation*. Automatica, Vol. 28, No. 5, pp. 873-883, 1992.
36. Doyle J. C., G. Stein. *Robustness with Observers*. IEEE Trans. Autom. Control, AC 24 n°4, 1979.
37. Doyle J. C., G. Stein. *Multivariable Feedback Desing: Concepts for a Classical /Modern Synthesis*. . IEEE Trans. Autom. Control, AC 26 n°1, 1981.
38. Doyle J. C. *Structured Uncertainty in Control Systems Design*. 24 th Conference on Decision and Control, Ft Lauderdale, Floride, 1985.
39. Doyle J. C. *Analysis of Control Systems with Structured Uncertainty*. IEEE Proc. Part D, vol 129, 1989.
40. Doyle J. C., B. Francis, A. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. McMillan Publishing Co, 1991.
41. Dulhoste J. F. *Contribution à la commande non- linéaire de systèmes d'irrigation*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
42. Duc G. *Commande Temporelle des Systèmes Linéaires*. Polycopié ESE.
43. El Fawal H. *Modélisation et gestion optimale d'un système d'irrigation complexe : le canal de la Bourne*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999.
44. El Jai A., M. Amouroux. *Automatique des systèmes distribués*. Edition Hermes, 1990.
45. Fattorini H. O. *Some remarks on complete controllability*. Journal Soc. Ind. Appl. Math, (4) :686-693, 1966.
46. Fattorini H. O. *Local controllability of a non linear wave equation*. Math, Syatems Theory, (9) :30-45, 1975.

47. Faye R. M., F. Mora Camino, and A K. Achaibou. *The contribution of intelligent systems to water resources management and control*. Journée Hispano-Française sur les systèmes intelligents et le contrôle avancé, Barcelone, 1996.
48. Gantmacher F. R. *Theory of matrices*. tome 2, Chelsea, New York, 1974.
49. Garcia A. *Control and regulation of open channel flow*. Master of Science University of California, Davis, 1988.
50. Garcia A., M. Hubbard, J. J. DeVries. *Open channel transient flow control by discrete-time LQR methods*. Automatica, Vol. 28, No. 2, pp. 255-264, 1992.
51. Georges D., X. Litrico. *Automatique pour la gestion des ressources en eau*. Ouvrage de la collection IC2, HERMES, octobre 2002.
52. Glover K., D. McFarlane. *Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Description with H_∞ -Bounded Uncertainty*. IEEE Trans. Autom. Control, AC 34 n°8, 1989.
53. Goussard J. *L'automatisation des réseaux d'irrigation en canaux*. Commission internationale des irrigations et du drainage. Groupe de travail sur les réseaux d'irrigation, 1993.
54. Graf W. H., Altinakar. *Hydraulique Fluviale, Tome I : Ecoulement permanent uniforme et non uniforme*. Traités de génie civil. Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne. Presses polytechnique et universitaires Romandes, 1993.
55. Graf W. H., Altinakar. *Hydraulique Fluviale, Tome II : Ecoulement non permanent et phénomènes de transport*. Traités de génie civil. Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne. Presse polytechnique et Universitaires Romandes, 1996.
56. Gros P. P. *De la réduction de modèles vers la commande robuste. Application à la commande des canaux d'irrigation*. Thèse de l'Université de Cean, 2003.
57. Katapodes N. D. *A dissipative Galerkin scheme for open channel*. Journal of Hydraulic Engineering. Division ASCE Vol. 110, No.4, pp. 450-466, 1984.
58. Keulen B. V. *H_∞ - control for distributed parameter systems : A state space approach*. Birkhäuser, 1993.
59. Keuning D. H. *Application of finite element method to open channel flow*. Journal of Hydraulic Engineering. Division ASCE Vol. 102, No.HY4, pp. 459-468, 1976.
60. Koenig D. *Commande optimale*. Polycopié ESISAR, 4 année, Valence, 2002.

61. Kwakernaak H., R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley Interscience, 1972.
62. Larminat P. D., Y. Thomas. *Automatique des systèmes linéaires*. Flammarion-Science, 1977.
63. Lee T.T., M. S. Chen. *Robustness Recovery of LQG-based Multivariable Control Design*. Int. J. Control, vol. 45 n°4, 1987.
64. Lefèvre L., D. Dochain, S. Feyo de Azevedo , A. Magnus. *Optimal selection of orthogonal polynomial applied to the integration of chemical reactor equations by collocation methods* » Elsevier Science, 2000.
65. Lehtomaki N. A., N.R. Sandell, M. Athans. *Robustness Results in Linear Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs*. IEEE Trans. Autom. Control, AC 26 n°1, 1981.
66. Liggett J., J. Cunge. *Numerical methods of solution of the unsteady flow equations*. Unsteady flow in open channels. K. Mahmood. Water Res. Publ. Fort Collins, Co, USA. 1975.
67. Lions J. L. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968.
68. Litrico X. *Modélisation, identification et commande robuste de systèmes hydrauliques à surface libre*. PhD thesis, Cemagref, avril 1999.
69. Litrico X., D. Georges. *Robust optimal control of a dam-river system with intermediate measurements*. European Control Conference ECC99, 1999.
70. Litrico X., V. Fromion. *Infinite dimensional modelling of open-channel hydraulic systems for control purposes*, IEEE Conference on Decision and Control, CDC02, Decembre 2002.
71. Litrico X., V. Fromion. *Variations autour de la performance optimale de systèmes hydrauliques à surface libre*. Colloque Automatique et Agronomie, Montpellier 22-23-24 Janvier 2003.
72. Majarro B. *Contribution à l'amélioration de la gestion des périmètres irrigués*. PhD thesis, Université des Siences et techniques de Languedoc, November 2001.
73. Malaterre P. O. *Modélisation, analyse de commande LQG d'un canal d'irrigation*. PhD. thesis LAAS-CNRS-ENGREF-Cemagref, INSBN 2-85362-368-8, 1994.

74. Malaterre P. O., D.C. Rogers, J. Schuurmans. *Classification of Canal Control Systems*. First International Conference on Water Resources Engineering, Irrigation and Drainage, San Antonio, Texas, USA, 14-18 August 1995.
75. Malaterre P. O., J. Rodellar. *Multivariable predictive control of irrigation canals. Design and evaluation on a 2-pool model*. International Workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
76. McFarlane D., K. Glover. *Robust Controller Design using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, 1990.
77. Morari M., E. Zafiriou. *Robust Process Control*. Prentice Hall, 1989.
78. Morre J. B., L. Xia. *Loop Recovery and Robust State Estimate Feedback Design*. IEEE Trans. Autom. Control, AC 32 n°1, 1981.
79. Najim K., G. Muratet. *Optimisation de la commande en génie des procédés*. Edition Masson, 1987.
80. Naslin P. *Théorie de la commande et conduite optimale*. Edition Dunod, 1969.
81. Palmor Z. J., Y. Halevi. *On the Recovery Procedure for LQG Systems*. Automatica, vol. 24 n° 2, 1988.
82. Ouarit H. *Rèduction des systèmes à paramètres distribués, application à la commande optimale robuste des canaux d'irrigation*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
83. Preissmann A. *Difficultés rencontrées dans le calcul des ondes de translation à front raide*. 11^{ème} congré IAHR, pages, 3-52, Leningrad, Vol 3, 1965.
84. Quarteroni A., A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, année de parution, 1991.
85. Rauch J., M. Taylor. *Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domain*. Indiana Univ. Math. J. 24 : 79-86, 1974.
86. Reddy J. M. *Design of global control algorithm for irrigation canals*. Journal of Hydraulic Engineering. Division ASCE Vol. 122, No. 9, pp.503-551, 1996.

87. Reddy J. M., A. Dia, A. Oussou. *Design of control algorithm for irrigation canals*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Division ASCE, vol, 118, No 6, pp. 852-867, 1992.
88. Russell D. L. *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*. Studies in Appl. Math, 52 : 189-211, 1973.
89. Saint-Venant A. J. C. *Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit*. Académie de Science de Paris, Comptes rendus V. 73, p 148-154, 237-240, 1871.
90. Sawadogo S. *Modélisation, commande prédictive et supervision d'un système d'irrigation*. PhD thesis, , LAAS-CNRS. 1992.
91. Sawadogo S. *Multivariable optimal control for on demand operation of irrigation canals*. International Workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
92. Skertchy M., L. Miles, J. P. *Control of an irrigation canal*. Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 122, No. 7, pp. 403-410, 1996.
93. Soroka E., U. Shaked. *The LQG Optimal Regulation Problem for Systems with Perfect Measurements*. IEEE Trans. Autom. Control, AC 33 n°10, 1988.
94. Stein G., M. Athans. *The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design. method*. IEEE Trans. Autom. Control, AC 32 n°2, 1987.
95. Streckoff T. *Numerical solution of Saint-Venant equation*. Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 9, No. HY1, pp.23-252, 1970.
96. Takh M., J. L. Speyer. *Modeling of Parameter Variations and Asymptotic LQG Synthesis*. IEEE Trans. Autom. Control, AC 32 n°9, 1987.
97. Tsui C. C. *New Approach for Robust Observer*. Int. J. Control, vol. 47 n°3, 1988.
98. Vidysagar M. *Control System Synthesis : A Coprime Factorization Approach*. MIT, Press, 1985.
99. Villadsen J., J. P. Sorensen. *Solution of parabolic partial differential equations by double collocation method*. Chemical Engineering Science, Vol. 24, pp. 1337-1349, Pergamm Press LTD, Oxford, 1969.
100. Villadsen J., M. L. Michelson. *Solution of differential equation models by polynomial approximation*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.

101. Yi J. *Hydraulique de canal Tome : I et II*. Don-Whao press, Taiwan, version chinoise, 1996.
102. Xu C. Z., G. Sallet. *Exponential stability and transfer functions of a heat-exchanger network system*. Rapport INRIA, 1999.
103. Xu C. Z., G. Sallet. *Proportional and integral regulation of irrigation canal systems governed by the Saint-Venant equation*. 14 th IFAC World Congress. Beijing, China, 1999.
104. Xu C. Z., D. X. Feng. *Symmetric hyperbolic systems and applications to exponential stability of heat exchangers and irrigation canals*. MTNS2000, 2000.
105. Xu C. Z., G. Sallet. *Exponential stability and Transfer functions of processes governed by Symmetric hyperbolic systems*. ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations, 7 : 421-442, 2002.

Résumé

Ce travail concerne la commande optimale robuste des systèmes hydrauliques à surface libre (canaux d'irrigation). Nous nous sommes intéressés à deux approches de synthèse de commande optimale. La première approche consiste à synthétiser une loi de commande optimale LQG /H2-LTR (de dimension finie) avec pondérations fréquentielles robuste vis-à-vis des erreurs engendrées par la réduction à un modèle de dimension finie des équations de Saint Venant. Le modèle réduit est obtenu par collocation orthogonale à partir du modèle linéarisé tangent de Saint Venant. Un observateur est également proposé qui permet de reconstruire l'état du système à partir des seuls états mesurés à l'amont et à l'aval de chaque bief. Le régulateur optimal robuste et l'observateur ont été testés sur différents modèles de référence ainsi que sur un micro-canal expérimental réel. Ils sont comparés aux résultats obtenus par d'autres méthodes de régulation connues. La seconde approche de synthèse consiste à faire l'approximation en dimension finie d'une loi de commande (de dimension infinie) obtenue à partir des équations de Saint Venant linéarisées mais non réduites. Nous présentons dans ce rapport des résultats liés à l'analyse et à la synthèse du régulateur optimal LQ en dimension infinie appliquée aux équations de Saint Venant. Nous décrivons ensuite le moyen d'obtenir une approximation en dimension finie du régulateur LQ sur la base de l'équation de Riccati d'opérateurs associée au problème.

Mots-clés : canaux d'irrigation à surface libre, commande LQG/LTR, méthodes de collocation orthogonale, systèmes à paramètres distribués, commande optimale aux frontières.

Abstract

This work deals with the robust optimal control problem of open-channel hydraulic system. Two approaches of this problem are developed. The first one is based on a reduced lumped parameters model obtained through an orthogonal collocation method applied to the linearized Saint-Venant model of the hydrodynamics within a reach. An optimal H2 control law is designed to be robust to the reduction error with the help of a frequency loop shaping approach. Using a loop transfer recovery technique, an observer is proposed to estimate the state from the measured water levels and flows at the ends of the channel reach. The whole control structure is then applied on various reference models as well as on an experimental small canal. Results are compared with those obtained from classical control strategies. The second approach is based on the semigroup theory for distributed parameter linear system. An optimal control law which minimizes the same criterion is computed on the linearized partial equations model. This infinite dimensional control law is then finally reduced using the same basis functions as in the first approach. We present results related to the optimal boundary control problem as exponential stabilizability and detectability and finally show the way to get a finite dimensional approximation of the optimal control law using a discretization of the associated operator-valued Riccati equation.

Keywords : open channel hydraulic system, optimal LQG/LTR robust control, orthogonal collocation, boundary control distributed parameter system