



**HAL**  
open science

# Topologie Algébrique Dirigée et Concurrence

Emmanuel Haucourt

► **To cite this version:**

Emmanuel Haucourt. Topologie Algébrique Dirigée et Concurrence. Autre [cs.OH]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français. NNT: . tel-00172472

**HAL Id: tel-00172472**

**<https://theses.hal.science/tel-00172472>**

Submitted on 17 Sep 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS 7-DENIS DIDEROT  
UFR INFORMATIQUE

DOCTORAT  
Informatique Théorique

AUTEUR  
Emmanuel HAUCOURT

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE DIRIGÉE  
ET  
CONCURRENCE

Directeur de thèse  
Eric GOUBAULT

soutenu le  
11 Octobre 2005

Président du Jury  
Pierre-Louis CURIEN

Rapporteurs  
Kathryn HESS  
Daniel GUIN

Examineurs  
Albert BURRONI  
Marco GRANDIS





## REMERCIEMENTS

Au cours de ces trois dernières années, j'ai eu l'occasion de découvrir les plaisirs de la recherche scientifique dans le cadre d'un travail de thèse. En comparant mon expérience avec celles de certains autres thésards, j'ai pu me rendre compte de la qualité exceptionnelle des conditions de travail dont j'ai bénéficié, les personnes suivantes, que je tiens maintenant à remercier, y ont très largement contribué:

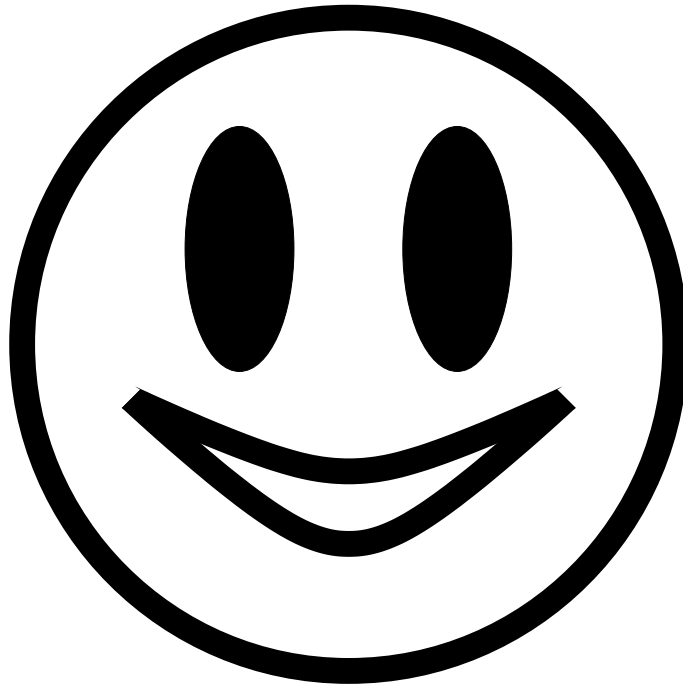
tout d'abord *Eric Goubault*, qui a encadré mon stage de DEA et m'a convaincu de faire une thèse qu'il a dirigée. Son soutien, ses encouragements et les efforts qu'il a déployés pour promouvoir mes travaux m'ont permis d'avancer avec sérénité,

les membres du LSL pour la chaleur de leur accueil et leur sympathie.

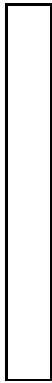
Mes remerciements vont également à *Lisbeth Fajstrup*, *Martin Raussen* et *Ulrich Fahrenberg* de l'université d'Aalborg ainsi qu'à *Kathryn Hess* et *Krzysztof Worytkiewicz* de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne qui m'ont accueilli en plusieurs occasions au Danemark et en Suisse. Collaborer avec chacun d'eux est un réel plaisir.

Je remercie les membres du jury d'avoir accepté d'y participer, et tout particulièrement les rapporteurs, *Kathryn Hess* et *Daniel Guin*, pour le temps qu'ils ont sacrifié à la lecture minutieuse de mon rapport de thèse.

Je remercie enfin mes parents, mon frère, mes amis et *Lucille* qui m'aident à garder les pieds sur terre tout en ayant la tête en l'air...







---

TABLE DES MATIÈRES

.1	La concurrence en général . . . . .	9
.2	Les modèles sans topologie . . . . .	11
.3	Objectifs . . . . .	17
.4	Pourquoi une notion de direction ? . . . . .	18
.5	Un rapide survol du contenu . . . . .	20
<b>I</b>	<b>TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE DES ESPACES ORDONNÉS</b>	<b>23</b>
<b>I</b>	<b>Espaces ordonnés</b>	<b>25</b>
I.1	La catégorie $\text{PoSpc}$ . . . . .	26
I.2	Propriétés catégoriques de $\text{PoSpc}$ . . . . .	36
<b>II</b>	<b>Catégorie fondamentale d'un espace ordonné</b>	<b>45</b>
II.1	Chemins et homotopies dirigés . . . . .	45
II.2	La catégorie fondamentale . . . . .	61
<b>III</b>	<b>Catégories sans boucle</b>	<b>71</b>
III.1	La catégorie des catégories sans boucle . . . . .	71
III.2	Stabilité . . . . .	80
III.3	Propriétés catégoriques de $\text{LfCat}$ . . . . .	85
III.4	Foncteurs hélices . . . . .	88
III.5	Le théorème de Van Kampen dans $\text{LfCat}$ . . . . .	90
III.6	Régularité du produit et de l'exponentiation . . . . .	91
<b>IV</b>	<b>Catégorie des composantes d'une petite catégorie</b>	<b>95</b>
IV.1	Système de morphismes : motivations . . . . .	95
IV.2	Morphismes inversibles au sens de <i>Yoneda</i> . . . . .	99

IV.3	Systèmes de morphismes de <i>Yoneda</i> . . . . .	104
<b>V</b>	<b>Comparaison de <math>\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]</math> et <math>\mathcal{C}/\Sigma</math></b>	<b>119</b>
V.1	Première réduction du problème . . . . .	125
V.2	Une autre description de $\mathcal{C}/\Sigma$ et de $\sim$ . . . . .	125
V.3	Quelques résultats à propos de $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ . . . . .	128
V.4	Preuve de théorème 13 . . . . .	130
V.5	Compléments du théorème 13 . . . . .	138
V.6	Préservation et reflet des isomorphismes . . . . .	145
<b>VI</b>	<b>Théorème de Van Kampen et catégories de composantes</b>	<b>147</b>
VI.1	Le problème de la functorialité . . . . .	147
VI.2	cas des petites catégories sans boucle . . . . .	149
VI.3	Applications . . . . .	150
<b>VII</b>	<b>Calculs</b>	<b>153</b>
VII.1	Coraux . . . . .	153
VII.2	Groupeïdes . . . . .	160
VII.3	Treillis . . . . .	160
VII.4	Préordres . . . . .	161
VII.5	Ensembles partiellement ordonnés . . . . .	162
VII.6	Les cubes unités dirigés . . . . .	164
VII.7	Les simplexes antidiagonaux dirigés . . . . .	164
VII.8	Espace ordonné de chemins dirigés . . . . .	164
<b>II</b>	<b>PROGRAMMATION D'UN OUTIL D'ANALYSE STATIQUE</b>	<b>167</b>
<b>VIII</b>	<b>Le langage PV et ses modèles géométriques</b>	<b>169</b>
VIII.1	Description du langage PV . . . . .	169
VIII.2	Points morts et inatteignables . . . . .	174
VIII.3	Langage PV et systèmes de transitions . . . . .	174
VIII.4	Automates de dimension supérieure . . . . .	175
VIII.5	Exemples . . . . .	180
VIII.6	Quelques remarques . . . . .	184
<b>IX</b>	<b>Analyseur embryonnaire</b>	<b>187</b>
<b>III</b>	<b>SUPPLÉMENTS THÉORIQUES ET QUESTIONS OUVERTES</b>	<b>191</b>
<b>X</b>	<b>Introduction à la troisième partie</b>	<b>193</b>
X.1	La gestion des boucles . . . . .	193
X.2	Les autres modèles géométriques . . . . .	194
<b>XI</b>	<b>Boucles dirigées algébriques</b>	<b>195</b>
XI.1	Cercle dirigé algébrique . . . . .	195
XI.2	Boucles et composantes . . . . .	204

<b>XII</b>	<b>Catégorie fondamentale généralisée</b>	<b>209</b>
XII.1	Catégorie à chemins . . . . .	210
XII.2	Homotopie dirigée abstraite . . . . .	216
XII.3	Catégories topologiquement concrètes . . . . .	223
<b>XIII</b>	<b>Modèles avec boucles</b>	<b>227</b>
XIII.1	Autres modèles topologiques de la concurrence . . . . .	228
XIII.2	Exemples de catégories à chemins . . . . .	232
XIII.3	Affaiblissement de la notion d'espace ordonné . . . . .	236
XIII.4	Espaces localement ordonnés . . . . .	246
<b>XIV</b>	<b>Conclusion</b>	<b>261</b>
XIV.1	Homotopie et Homologie . . . . .	261
XIV.2	L'approche axiomatique de l'homotopie . . . . .	263
<b>A</b>	<b>Théorie des catégories</b>	<b>269</b>
A.1	Catégories et foncteurs . . . . .	269
A.2	Limites et complétude . . . . .	287
A.3	Adjonctions . . . . .	292
A.4	Congruences généralisées . . . . .	303
A.5	Catégories monoïdales . . . . .	309
A.6	Singularisation/Réalisation . . . . .	312
<b>B</b>	<b>Topologie algébrique</b>	<b>317</b>
B.1	Topologie . . . . .	317
B.2	Topologie algébrique élémentaire . . . . .	329





## .1 LA CONCURRENCE EN GÉNÉRAL

Dans cette thèse, le sens que l'on donne au mot **concurrence** est “qui agissent simultanément”<sup>1</sup>. Le problème que l'étude de la concurrence se propose d'étudier est le suivant: en supposant qu'un ensemble *a priori* fini d'“agents” aient chacun une tâche connue à accomplir, comment peut-on prévoir le comportement de l'ensemble. Le cas “simple” est celui où la tâche de chaque agent ne peut interférer dans le déroulement de l'exécution de celles des autres. Dans ce cas on a un parallélisme fort et l'étude du comportement de l'ensemble se ramène à celui de l'étude du comportement de chacun des agents. Intéressons nous à un exemple simple que l'on retrouvera tout au long de cette thèse, celui du dîner de philosophes. Trois philosophes sont donc assis autour d'une table ronde devant un plat, chacun étant “programmé” pour agir ainsi:

1. Prendre la baguette de droite si elle est disponible, sinon attendre.
2. Prendre la baguette de gauche si elle est disponible, sinon attendre.
3. Ayant deux baguettes, finir son plat puis rendre les deux baguettes (afin que les deux convives de part et d'autre puissent éventuellement les utiliser) en reposant d'abord celle de droite puis celle de gauche.

Dans un premier temps on met deux baguettes entre chaque philosophe, chacun a donc une paire de baguettes et peut finir son repas. Dans un second, on ne met qu'une baguette entre deux philosophes de sorte que, pour chaque baguette, si le convive de droite s'en empare, celui de gauche n'a plus de baguette à sa droite et doit donc attendre. Alors que dans le premier cas il n'y a aucune interférence possible entre les tâches (chacun dégustant son repas à l'allure qui lui convient), dans le second, il se peut qu'aucun des

---

<sup>1</sup>En anglais (*programs that run simultaneously*)

philosophes ne puisse entamer son repas. C'est ce qui se produit si chacun se saisit de la baguette se trouvant à sa droite "en même temps", la baguette de gauche fait alors défaut à tous. On s'aperçoit très facilement que le repas se termine à la seule condition que l'un des philosophes soit assez rapide pour prendre sa baguette de droite puis sa baguette de gauche avant son voisin de gauche.

D'un point de vue plus formel, disons qu'un "état du repas" (on dira par la suite et plus généralement un "état du système"), est à un instant  $t$  donné, une liste qui comporte le nom de chacun des trois philosophes avec les baguettes qu'il a en sa possession. Pour chacun des philosophes, les situations possibles sont donc "avoir la baguette droite", "avoir celle de gauche", "avoir les deux" ou "n'en avoir aucune". On a 4 situations possibles. Dans le cas du repas où chaque convive a ses propres baguettes, il y a donc  $4 \times 4 \times 4$  états possibles du repas. Dans le second cas, les seuls états possibles sont parmi ceux où la somme des baguettes en possession des philosophes ne dépasse pas 3.

Nous retiendrons de cet exemple deux faits importants. Le premier est que, lorsque les agents agissent en totale indépendance les uns des autres (on parle alors de vrai parallélisme) la compréhension du fonctionnement de l'ensemble des agents se résume à la compréhension du fonctionnement de chacun d'eux séparé des autres. Du point de vue formel et en termes catégoriques, le vrai parallélisme est modélisé par la notion de produit cartésien. L'importance du formalisme des catégories dans l'étude des différents modèles de la concurrence est soulignée dans [93]. Cette situation est analogue à celle connue des familiers de la théorie des probabilités, en effet, dans ce cadre, on dit, et c'est alors une définition, qu'une famille de variable aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  est indépendante lorsque pour toute famille  $A_1, \dots, A_n$  de parties mesurables de l'univers des possibles  $\Omega$ , on a

$$\mu(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in A_n\}) = \mu(\{X_1 \in A_1\}) \times \dots \times \mu(\{X_n \in A_n\})$$

On a également une analogie en algèbre linéaire, où une famille de vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  d'un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$  est dite indépendante lorsque l'espace vectoriel qu'elle engendre est isomorphe à

$$\underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n \text{ fois}}$$

autrement dit le produit cartésien (dans la catégorie des espace vectoriels sur  $\mathbb{K}$  notée  $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ ) de  $n$  copies de  $\mathbb{K}$  vu comme un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1. Dans le cadre des espaces affines, une famille de points  $x_1, \dots, x_{n+1}$  est dite indépendante lorsque son enveloppe convexe est de dimension  $n$  (dans l'espace vectoriel sous-jacent). Enfin, en logique, une famille d'assertions  $A_1, \dots, A_n$  est dite indépendante lorsque pour toute sous-famille  $\mathcal{F}$  de  $A_1, \dots, A_n$  il existe un modèle (au sens de la théorie des modèles, voir [15]) qui satisfait toutes les assertions de  $A_1, \dots, A_n$  qui appartiennent à  $\mathcal{F}$  et seulement celles-là. Citons un dernier exemple qui peut être vu comme une généralisation du précédent. Etant donné un ensemble ordonné  $(X, \sqsubseteq)$ , on peut donner plusieurs notions d'indépendance, l'une affirme que  $(x_1, \dots, x_n)$  est indépendante lorsque  $(x_1, \dots, x_n)$  possède un majorant dans  $(X, \sqsubseteq)$ , une autre que  $(x_1, \dots, x_n)$  est indépendante lorsque pour toute sous-partie  $A$  de  $\{1, \dots, n\}$ , il existe un élément  $a$  de  $X$  tel que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \ x_k \leq a \iff k \in A$$

Le second fait important est que la réciproque du premier fait est également vraie, c'est-à-dire qu'en cas d'interdépendance, la connaissance de toutes les situations possibles de chacun des agents ne renseigne que très partiellement sur l'ensemble des états possibles du système. Là encore, l'analogie avec la théorie des probabilités est flagrante, on peut en effet trouver une famille de variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  dont toutes les sous-familles strictes sont indépendantes sans que la famille des trois ne le soit. Cette situation est aussi présente en algèbre linéaire où la famille de vecteurs  $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$  n'est pas indépendante bien que chacune de ses sous-familles le soit. Il se peut également qu'une famille d'axiome ne soit pas indépendante alors que toutes ses sous-familles strictes le soient, par exemple, si  $f$  est une fonction de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  les assertions

1.  $f$  est continue.
2.  $f$  est strictement monotone.
3.  $f$  est bijective.

ne forment pas une famille indépendante car deux de ces assertions impliquent la 3<sup>ème</sup> alors que chacune de ses sous-familles est indépendante. On peut en effet trouver des fonctions  $f$  définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$  qui satisfont une seule de ces trois propositions mais pas les deux autres.

La première idée qui ressort de ceci et qui peut être exprimée en une sorte de "méta-théorème" est que le vrai parallélisme est modélisé par la notion de produit cartésien (dans une catégorie à choisir). On peut, à ma connaissance, vérifier cette affirmation pour tous les principaux cadres d'étude de la concurrence dont les modèles sont les objets d'une catégorie. Plus précisément, si les agents  $X_1, \dots, X_n$  ont pour modèles respectifs  $M_1, \dots, M_n$  alors la mise en parallèle  $X_1 | \dots | X_n$  des ces agents est modélisée par le produit cartésien  $M_1 \times \dots \times M_n$ .

La seconde est que, de façon abstraite, on peut définir la relation d'indépendance sur un ensemble  $X$  comme une famille  $i_n$  de relation  $n$ -aires possédant les deux propriétés suivantes: tout d'abord, pour toute suite  $(x_1, \dots, x_n)$  d'éléments de  $X$  telle que  $i_n(x_1, \dots, x_n)$ , on a également  $i_k(x'_1, \dots, x'_k)$  quelquesoit la sous-suite  $(x'_1, \dots, x'_k)$  de  $(x_1, \dots, x_n)$ . Ensuite, pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on a

$$i_n(x_1, \dots, x_n) \iff i_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

On obtient en particulier un ensemble simplicial (voir [59], [25], [82], [49] ou la définition A.6.1) et on peut constater que si  $(x_1, \dots, x_n)$  est indépendante alors tous les groupes d'homologie (voir [44], [74] ou la sous-section A.6.4) de son ensemble simplicial associé sont triviaux. Dans l'exemple de la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  et des trois assertions la concernant, la représentation de l'ensemble simplicial associé est le bord d'un triangle non aplati, son deuxième groupe d'homologie est donc  $\mathbb{Z}$ . Dans cet exemple la réciproque est donc vraie mais ce n'est pas toujours le cas.

## .2 LES MODÈLES SANS TOPOLOGIE

Les modèles classiques de la concurrence, dont on trouve une étude comparative dans [93], sont tous combinatoires, c'est-à-dire qu'ils ne font aucune référence à la topologie. Par ailleurs, la plupart possèdent des définitions qui peuvent varier selon l'auteur. Par souci d'homogénéité, on se référera exclusivement à [93].

## .2.1 LES SYSTÈMES DE TRANSITIONS

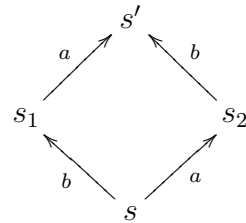
C'est peut-être le modèle le plus élémentaire. Par définition, un **système de transitions**  $T$  est un quadruplet  $T := (S, i, L, Tran)$  où  $S$  est l'ensemble des états,  $i$  un élément de  $S$  appelé l'état initial,  $L$  l'ensemble des étiquettes et  $Tran$  une sous-partie de  $S \times L \times S$  appelée relation de transition. Un morphisme de systèmes de transitions est une paire

$$(\sigma : S_0 \rightarrow S_1, \lambda : L_0 \rightarrow L_1 \cup \{*\})$$

où  $*$  est un symbole distingué dont la signification intuitive est "non défini". Les membres de ce couple doivent vérifier

1.  $\sigma_0(i_0) = i_1$ .
2.  $(s, a, s') \in Tran_0 \implies (\sigma(s), \lambda(a), \sigma(s')) \in Tran_{1,*}$ .

Les étiquettes sont des actions et on dit que deux actions  $a$  et  $b$  sont indépendantes, c'est-à-dire qu'elles agissent en parallèle, lorsque l'on a pour n'importe quel état  $s$  trois états  $s_1, s_2$  et  $s'$  comme sur le diagramme de droite. On identifie donc la notion de parallélisme à la possibilité d'intervertir l'ordre des actions. Cette notion de parallélisme se généralise à une famille  $a_1, \dots, a_n$  en affirmant qu'elle est indépendante lorsque pour tout état  $s$  il existe un état  $s'$  tel que pour toute permutation  $f$  de  $\{1, \dots, n\}$ , il existe une suite de transitions  $(s, a_{f(1)}, s_1), (s_1, a_{f(2)}, s_2), \dots, (s_{n-2}, a_{f(n-1)}, s_{n-1}), (s_{n-1}, a_{f(n)}, s')$ .



Cependant, cette notion ne représente pas exactement le vrai parallélisme mais plutôt le non-déterminisme de l'ordre d'exécution. C'est à dire que lorsqu'un agent  $A$  commence une action, ceux qui parmi les autres souhaitent effectuer une action simultanément doivent commencer au même moment que  $A$  et finir au même moment que  $A$ . Plus grave encore, une famille d'actions  $a_1, \dots, a_n$  telle que deux d'entre elles ne puissent jamais être déclenchées simultanément sera perçue comme indépendante pourvu que quel que soit l'ordre dans lequel on exécute les actions de cette famille, on puisse obtenir le même état final, c'est pourquoi on évoque le non-déterminisme. Donnons un exemple géométrique. L'ensemble des états est  $\{0, 1\}^3$  et celui des étiquettes  $\{*, a_1, a_2, a_3\}$ . Les transitions sont les triplets  $((x_1, x_2, x_3), a_k, (x'_1, x'_2, x'_3))$  où  $x_i = x'_i$  si  $i \neq k$  et  $x_k = 0, x'_k = 1$  sinon, auxquels on ajoute les transitions "identités"  $(s, *, s)$ . On souhaite ainsi représenter les différents chemins allant du sommet  $(0, 0, 0)$  au sommet  $(1, 1, 1)$  en ne se déplaçant que sur les arêtes. Il est clair que, dans ce système de transitions, la famille  $a_1, a_2, a_3$  est indépendante, mais il est aussi clair que deux actions ne peuvent pas être effectuées simultanément. La géométrie sous-jacente de cet exemple est un cube vide à faces vides, c'est-à-dire dont il ne subsiste que les arêtes. Formellement

$$(\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times [0, 1]) \cup (\{0, 1\} \times [0, 1] \times \{0, 1\}) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\} \times \{0, 1\})$$

Comparons maintenant avec le système de transitions suivant :

$$(0 \xrightarrow{a} 1) \times (0 \xrightarrow{a} 1) \times (0 \xrightarrow{a} 1)$$

dont l'ensemble des états est  $\{0, 1\}^3$  et les étiquettes

$$\{(*, *, *), (a, *, *), (*, a, *), (*, *, a), (a, a, *), (a, *, a), (*, a, a), (a, a, a)\}$$

La famille d'étiquettes  $a_1, a_2, a_3$  est encore une fois perçue comme indépendante et pour les mêmes (passablement mauvaises) raisons. Cette fois cependant, le parallélisme (synchrone) des trois actions  $(a, *, *), (*, a, *), (*, *, a)$ , qui correspondent à  $a_1, a_2, a_3$  dans l'exemple précédent, est plus légitime. En effet, on aimerait pouvoir exprimer le fait que la famille

$$(a, *, *), (*, a, *), (*, *, a)$$

est "équivalente" à  $(a, a, a)$ . Le formalisme des systèmes de transitions ne le permet pas, c'est pourquoi on l'enrichit d'une relation binaire sur les étiquettes pour pouvoir exprimer l'indépendance des actions comme une donnée primaire. Cette approche est également celle des traces de *Mazurkiewicz*. En écho aux remarques qui ont déjà été faites concernant la notion d'indépendance, il est clair qu'une simple relation binaire ne suffit pas. De plus, il n'est pas possible, par exemple, de représenter le fait qu'un agent  $A'$  commence une action alors qu'un autre agent  $A$  est en cours d'exécution d'une autre, d'où le qualificatif synchrone. On pourrait argumenter que cela est possible quitte à coder les instants dans les états du système, en considérant par exemple l'ensemble d'états

$$\left\{ (s, s', t) / t \in \mathbb{R} \text{ pour } s, s' \in S \text{ tels qu'il existe une transition de } s \text{ vers } s' \right\}.$$

Cela conduit à des systèmes de très grand taille, voire infinis. Ces dernières considérations laissent se profiler l'intervention de la topologie.

## .2.2 LES ARBRES DE SYNCHRONISATION

Un arbre de synchronisation est un système de transitions dont tous les états sont atteignables, dont le graphe sous-jacent est sans boucles (comparer avec la définition III.1.2)

et tel que si on a deux transitions 
$$\begin{array}{c} s' \xrightarrow{a} s \\ \uparrow_b \\ s'' \end{array}$$
 alors  $s' = s''$  et  $a = b$  (comparer avec VII.1.1).

Tout système de transitions donne lieu, *via* un "dépliage", à un arbre de synchronisation. On montre ainsi que la catégorie des arbres de synchronisation est coréfléchissante dans celle des systèmes de transitions (voir [93]). Sans entrer dans les détails, ce formalisme pâtit des mêmes insuffisances que celui des systèmes de transitions.

## .2.3 LES LANGAGES DE PROCESSUS

On se donne une grammaire dont un des constructeurs de termes est  $\times$  et qui comme on s'y attend, permet la mise en parallèle de deux processus. Cette grammaire est bien sûr équipée d'un système de règles dont certaines pour l'opérateur  $\times$  qui sont

$$\frac{t_0 \xrightarrow{a} t'_0 \quad t_1 \xrightarrow{b} t'_1}{t_0 \times t_1 \xrightarrow{a \times b} t'_0 \times t'_1} \quad \frac{t_0 \xrightarrow{a} t'_0}{t_0 \times t_1 \xrightarrow{a \times * } t'_0 \times t_1 \quad t_1 \times t_0 \xrightarrow{* \times a} t_1 \times t'_0}$$

Cette fois encore, il apparaît clairement qu'il n'est pas possible de représenter les "états intermédiaires" du système. L'application d'une règle est en effet l'analogue d'une transition et l'idée qu'une règle puisse commencée à être appliquée alors qu'une autre est

en train de l'être n'a pas de sens. Les applications en parallèle se font donc de façon entrelacée. Le  $\pi$ -calcul ou CCS sont des exemples de tels langages, voir [69], [70] et [71] de *Robin Milner*.

## .2.4 LES RÉSEAUX DE *Petri*

Un réseau de *Petri* est un quintuplet  $(B, M_0, E, pre, post)$  où  $B$  est un ensemble dont les éléments sont appelés conditions avec  $M_0 \subseteq B$  et  $M_0 \neq \emptyset$ ,  $E$  est un ensemble dont les éléments sont appelés évènements et où  $pre$  et  $post$  sont des fonctions de  $E$  à valeurs dans l'ensemble des sous-parties de  $B$  telle que  $\forall e \in E$   $pre(e)$  et  $post(e)$  ne sont pas vides, sauf pour  $*$  l'évènement identité qui vérifie  $pre(*) = \emptyset$  et  $post(*) = \emptyset$ . Pour  $M$  et  $M'$ , deux sous-ensembles de  $B$ , on peut alors "passer" de  $M$  à  $M'$  en exécutant  $e$  (on note  $M \xrightarrow{e} M'$ ) lorsque  $\forall e \in E$   $pre(e) \subseteq M$ ,  $post(e) \subseteq M'$  et  $M \setminus pre(e) = M' \setminus post(e)$ . L'idée est que l'on "consomme"  $pre(e)$  pour "produire"  $post(e)$ . De ce point de vue, la notion de concurrence qui émane des réseaux de *Petri* est exactement celle que l'on connaît habituellement, c'est-à-dire que des actions entre en concurrence lorsque les ressources dont elles ont besoin sont communes. Suivant cette remarque, on dit alors que  $e, e' \in E$  sont indépendants lorsque

$$(pre(e) \cup post(e)) \cap (pre(e') \cup post(e')) = \emptyset.$$

Il est naturel de dire que deux évènements indépendants  $e$  et  $e'$  peuvent être exécutés simultanément. La dynamique sous-jacente des réseaux de *Petri* est clairement discrète. Tout comme dans les autres modèles discrets, on ne peut pas vraiment représenter des états transitoires d'un système, c'est-à-dire ceux où plusieurs évènements ont lieu simultanément mais n'ont pas commencé et peuvent ne pas finir au même instant. On a cependant gagné, par rapport au système de transitions, une notion d'indépendance issue de l'idée très naturelle de partage des ressources.

## .2.5 LES LANGAGES DE TRACES

Dans tous les cadres que nous avons vus jusqu'à présent, le parallélisme était identifié à un entrelacement sans déterminisme d'action atomique. C'est cette atomicité même qui interdisait "l'exécution parallèle asynchrone". On se propose de remédier à cela. Un langage de traces de *Mazurkiewicz* est un triplet  $(M, L, I)$  où  $L$  est un ensemble et une sous-partie  $I$  de  $L \times L$  appelée relation d'indépendance. On suppose que  $I$  est symétrique et irreflexive. Enfin,  $M$  un sous-ensemble de  $L^*$ , c'est-à-dire l'ensemble des suites finies d'éléments de  $L$  équipé de la loi de concaténation (ou encore monoïde libre engendré par  $L$ ) tel que les propriétés suivantes soient satisfaites:

1.  $\forall s \in L^* \forall a \in L (sa \in M \Rightarrow s \in M)$
2.  $\forall s, t \in L^* \forall a, b \in L (sabt \in M \text{ et } aIb \Rightarrow sbat \in M)$
3.  $\forall s \in L^* \forall a, b \in L (sa \in M \text{ et } sb \in M \text{ et } aIb \Rightarrow sab \in M)$

Intuitivement,  $aIb$  signifie que les actions  $a$  et  $b$  sont indépendantes, on axiomatise cette idée par les propriétés 2 et 3 qui signifient que deux actions sont indépendantes

lorsqu'elles peuvent être effectuées dans n'importe quel ordre et que chaque fois que l'une est disponible, l'autre l'est aussi. Un morphisme de traces de *Mazurkiewicz* de  $(M, L, I)$  vers  $(M', L', I')$  est une fonction, notée  $\lambda$ , partiellement définie sur  $L$  à valeurs dans  $L'$  telle que

1.  $\forall a, b \in L$  si  $\lambda(a)$  et  $\lambda(b)$  sont définis et que l'on a  $aIb$  alors  $\lambda(a)I'\lambda(b)$ .
2.  $\forall s \in M, \lambda^*(s) \in M'$ .

On peut enrichir  $L$  à volonté, en regardant  $M$  comme l'ensemble des événements possibles. La notion d'indépendance n'est plus issue d'une propriété des étiquettes (i.e. les éléments de  $L$ ) mais une notion primaire. Le problème ici est que la notion d'indépendance est binaire et se traduit *grosso modo*, par la possibilité de faire commuter les étiquettes déclarées indépendantes par la relation  $I$ . En particulier, il n'y a pas de façon naturelle d'évoquer, dans ce contexte, l'indépendance d'une famille  $a_1, \dots, a_n$ . Il reste évidemment possible de définir non plus une seule relation binaire  $I$  mais une famille  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme cela est suggéré à la fin de la section .1. L'ordonnement du temps est implicitement contenu dans le fait que  $M$ , qui représente intuitivement l'ensemble des événements possibles, est un sous-ensemble d'un monoïde libre, à savoir  $L^*$ . L'atomicité des actions et donc du temps en découle directement.

## .2.6 LES STRUCTURES D'ÉVÈNEMENTS

En écho à la dernière remarque de la sous-section précédente, on présente maintenant un modèle dans lequel l'ordonnement n'est plus implicitement donné par un ensemble ordonné isomorphe à  $\mathbb{N}, \leq$ . Une **structure d'évènements** est un triplet  $(E, \leq, \#)$  où  $E$  est un ensemble dont les éléments sont les événements,  $\leq$  est un ordre partiel sur  $E$  et  $\#$  est une relation symétrique et irréflexive sur  $E$ , appelée relation de conflit satisfaisant pour n'importe quels éléments  $e, e', e''$  de  $E$

1.  $\{e' | e' \leq e\}$  est fini.
2.  $e \# e' \leq e'' \Rightarrow e \# e''$

On dit alors que  $e$  et  $e'$  sont concurrents lorsque l'on a  $e \not\leq e', e' \not\leq e$  et  $e \# e'$ .

Posons

$$E := \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x \in [0, \frac{1}{2}] \text{ ou } y \in [0, \frac{1}{2}] \right\}$$

et  $\leq$  induit sur  $E$  par l'ordre produit sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \# (x', y')$  lorsque  $x \in ]\frac{1}{2}, 1]$  et  $y' \in ]\frac{1}{2}, 1]$  ou  $x' \in ]\frac{1}{2}, 1]$  et  $y \in ]\frac{1}{2}, 1]$ . On vérifie immédiatement que le seul axiome mis en défaut est la finitude de  $\{e' | e' \leq e\}$ . Il est clair que  $\{e' | e' \leq e\}$  est infini, néanmoins, on a sur  $E$  la structure topologique induite par celle de  $\mathbb{R}^2$ . On pourrait alors enrichir la notion de structure d'évènements en demandant à ce que  $E$  soit un espace topologique (au lieu d'un simple ensemble), que le graphe de  $\leq$  soit fermé dans  $E \times E$  (voir la définition I.1.1), que  $\#$  soit ouverte dans  $E \times E$  et enfin que  $\{e' | e' \leq e\}$  soit compact (au lieu fini). Les hypothèses de fermeture et d'ouverture sont mises par souci de compatibilité avec la structure topologique de  $E$ . La structure proposée précédemment répond alors à notre nouvelle définition et, dans le cas où  $E$  soit un espace topologique discret, on retrouve la définition initiale de structure d'évènements. L'introduction de la topologie est donc une



extension de la définition initiale tout comme celle d'espace topologique (partiellement) ordonné est une extension de celle d'ensemble (partiellement) ordonné (voir la définition I.1.1). A cause de la finitude de  $\{e' | e' \leq e\}$ , la version originale (sans topologie) souffre, comme toutes les structures discrètes proposées dans les sections précédentes, d'imposer une échelle de temps discrète. Cette limitation tombe lorsque l'on passe à la version topologique.

Techniquement, le problème commun à toutes les structures discrètes que l'on a passées en revue est l'impossibilité de subdiviser de façon naturelle l'intervalle de temps que dure l'exécution d'une action. Ainsi on ne peut pas, par exemple, représenter le fait qu'un agent  $X$  a effectué une action entre les instants 10 et 11 alors qu'un autre agent effectuait simultanément une autre action entre les instants 9.5 et 10.7. Autrement dit, on ne peut pas vraiment modéliser le parallélisme asynchrone. Une première solution au problème consiste à représenter le temps par un ensemble ordonné isomorphe à  $(\{0, \dots, N\}, \leq)$  pour  $N \in \mathbb{N}$  "grand" ou même  $(\mathbb{Q}, \leq)$ , puis de considérer que l'ensemble des actions possibles n'est plus  $A$  mais  $A \times \{1, \dots, N\}$  ou  $A \times \mathbb{Q}$  selon le choix que l'on fait et d'adapter en conséquence les règles de réécriture qui donnent à chaque type de modèle sa "dynamique". L'inconvénient évident est que, lorsque l'on calculera des produits cartésiens de modèles, ceux-ci seront de très grande taille et contiendront une très grande quantité d'information redondante. On a alors un très grand nombre (voire une infinité) de traces d'exécutions possibles entre deux états donnés. En vue d'une analyse efficace, on aimerait pouvoir "identifier" deux traces synchrones, c'est-à-dire ayant les mêmes instants et états de départs et d'arrivée, dans la mesure où, de "proche en proche", on peut transformer la première en la seconde. Cette notion de transformation de proche en proche pourrait faire à son tour l'objet d'une axiomatisation dans le cadre discret, rendant les modèles encore plus lourd à gérer.

Pour en venir à la topologie algébrique, il n'y a alors qu'un pas que l'on se propose de franchir. En effet, l'idée de déformation de proche en proche d'une trace est exactement celle de l'homotopie et il est très probable que toute forme d'axiomatisation satisfaisante de ce concept dans un cadre discret se ramène à lister les propriétés naturelles de l'homotopie et de les prendre comme axiomes. Les traces deviennent des chemins continus et on comprend une homotopie d'un chemin vers un autre comme une déformation continue du premier vers le second (voir [44], [65] ou la définition B.2.3). L'idée directrice que l'on se propose de suivre est la suivante: après avoir construit un modèle topologique continu, on utilise des méthodes homotopiques pour se ramener à un modèle fini "fidèle à l'original" et de taille minimum.

D'une manière plus générale, il semble nécessaire, lorsque l'on souhaite représenter le "vrai" parallélisme, c'est-à-dire permettant toutes les formes possibles d'exécution asynchrone, de pouvoir subdiviser n'importe quel intervalle de temps. Cette nécessité implique que les modèles soient de taille infinie. De tels modèles ne peuvent être proprement manipulés sans intervention de la topologie. Il devient alors naturel d'avoir recours, *modulo* d'importantes adaptations, aux outils et idées de la topologie algébrique classique.

## .3 OBJECTIFS

### .3.1 COMPRENDRE L'ASPECT GÉOMÉTRIQUE DU PARALLÉLISME

A la fin des années soixante, quelques mathématiciens dont *Daniel Quillen* ont entrepris d'axiomatiser la topologie algébrique de façon à pouvoir exprimer très généralement les idées et résultats “classiques” de cette branche des mathématiques. La théorie des catégories s'est imposée comme le cadre idéal dans lequel formaliser ces axiomes. L'idée générale, très spécifique à la notion de catégorie, est d'étudier les objets d'une collection non pas individuellement mais dans leur ensemble d'après la façon dont il se comporte les uns vis-à-vis des autres. Ainsi est-on arrivé à une structure appelée catégorie de modèles, décrite à partir d'une catégorie sous-jacente (celle dont les objets sont ceux que l'on souhaite étudier) pourvue de trois familles de morphismes soumises à un ensemble d'axiomes. Si étonnant que cela puisse paraître, cette structure ne fait aucune référence à la topologie et malgré cela, décrit parfaitement la topologie algébrique “classique” dont les objets d'étude sont les espaces topologiques “pas trop pathologiques”. Cela se traduit par le résultat qui affirme que la catégorie de modèles des espaces topologiques est équivalente au sens de Quillen à celle des ensembles simpliciaux. Alors que, par construction même, la première repose entièrement sur la notion de topologie, la seconde est purement combinatoire. L'ouvrage de *P.Goerss* et *J.F.Jardine* [82] décrit ce phénomène en extrayant les axiomes des catégories de modèles à partir du cas de la topologie algébrique classique, à l'inverse de celui de *M.Hovey* [49], plus concis, qui décrit l'axiomatique des catégories de modèles et expose ensuite différents exemples non triviaux dont celui de la topologie algébrique classique.

#### CHOIX D'UNE COLLECTION DE MODÈLES

Autrement dit, on doit fixer une catégorie dont les objets, ou tout du moins certains d'entre eux, vont représenter les programmes d'un certain langage. Cette catégorie doit permettre une représentation assez “canonique” tout en restant suffisamment simple d'un point de vue mathématique, c'est-à-dire que la description des objets ne doit pas être trop compliquée. Par ailleurs, elle doit être suffisamment riche pour effectuer les constructions habituelles en topologie algébrique, en d'autres termes, elle doit être complète, cocomplète et si possible, cartésienne fermée. C'est par exemple le cas de la catégorie des espaces topologiques compactement générés (voir appendice B).

#### DÉTERMINATION DE LA STRUCTURE DE CATÉGORIE DE MODÈLES

Une fois que la catégorie sous-jacente a été choisie, il reste à la munir de trois familles de morphismes satisfaisant aux exigences des catégories de modèles. C'est techniquement très délicat et cela doit, si tout se passe bien, être guidé par l'intuition qui nous a fait choisir la catégorie sous-jacente. En effet, il est toujours possible de munir une catégorie de la structure de catégorie de modèles triviale. Le résultat n'a aucun intérêt puisqu'alors tous les objets de la catégorie sont vus comme équivalents.

## TROUVER UNE CATÉGORIE DE MODÈLES COMBINATOIRES ÉQUIVALENTE AU SENS DE *Quillen* À CELLE QUE L'ON A CHOISI POUR REPRÉSENTER LA CONCURRENCE

C'est l'étape finale de la compréhension, si l'on y parvient, les modèles combinatoires joueront le même rôle que les ensemble simpliciaux en topologie algébrique classique. Il faut également que ces modèles rendent fidèlement compte des propriétés intéressantes dans l'étude de la concurrence.

Bien sûr, ce programme linéaire idéal ne reflète pas la façon dont ont évolué mes idées sur le sujet, aussi ai-je, dans mon travail de thèse, touché plus ou moins directement à chacune de ces étapes de maturation. En fin de compte, il est possible que l'approche de la topologie algébrique dirigée par la méthode de *Quillen* ne soit pas appropriée, le chapitre XIV traite partiellement cette question. Les catégories que l'on va étudier dans cette thèse sont "construites" sur celles des espaces topologiques, elles offrent de fait un cadre naturel pour définir un analogue du groupoïde fondamental qui deviendra, dans les cas dirigé, une catégorie fondamentale, soulignant ainsi le fait que les morphismes de la petite catégorie obtenue ne sont pas nécessairement inversibles. Cette absence d'inversibilité apparaîtra comme une conséquence naturelle du fait que les objets de notre étude modélisent la notion d'avancement (localement ou globalement) irréversible du temps. Les seuls chemins pris en compte seront en effet ceux qui progressent continûment d'états en états et dans le sens du temps.

### .3.2 RÉDUIRE LA TAILLE DES MODÈLES DISCRETS DU PARALLÉLISME

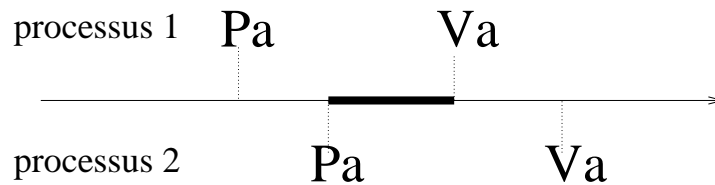
En pratique, les programmes que l'industrie aimerait analyser ont une taille de l'ordre de quelques centaines de milliers de lignes. Il est donc impératif d'être en mesure de fournir des modèles intéressants de taille minimale. L'un des buts poursuivis en introduisant la topologie pour modéliser la concurrence est d'optimiser la taille des modèles. Le procédé est, en mathématique, assez général et a déjà plusieurs fois fait ses preuves:

Lorsqu'un problème est difficile à résoudre au sein du cadre dans lequel il est exprimé, on le "plonge" dans un univers plus vaste et on vérifie *a posteriori* que la solution obtenue dans le cadre plus général peut-être projeté dans le cadre initial et donner une solution au problème original. Dans notre cas, l'élargissement consiste à introduire la topologie et la projection est fournie par la notion de catégorie de composantes.

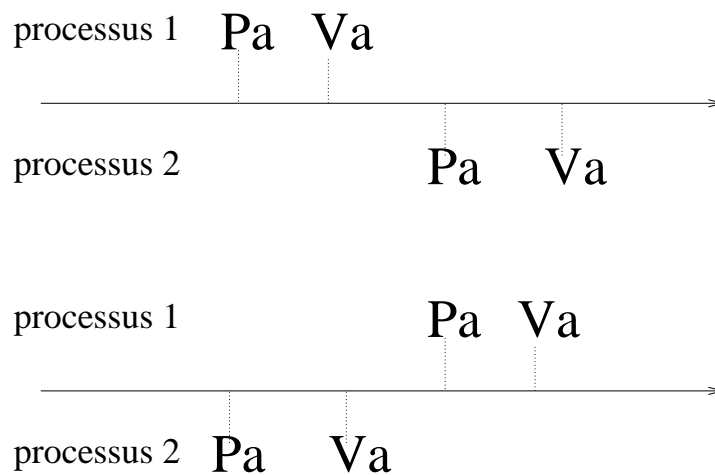
## .4 POURQUOI UNE NOTION DE DIRECTION ?

La notion de graphe de progression a été introduite par *E.W. Dijkstra* en 1968. On souhaite étudier les programmes écrits dans le langage que l'on décrit ci-après. Les processus sont des séquences d'instruction  $P$  et  $V$ , où  $P_a$  signifie que le processus "prend" une occurrence du sémaphore  $a$  qui, en fonction de son arité  $n \in \mathbb{N}$ , peut être "utilisée" simultanément au plus par  $n$  processus. L'occurrence du sémaphore  $a$  reste occupée jusqu'à ce que l'on rencontre l'instruction  $V_a$  qui la rend à nouveau disponible. Un programme est une mise en parallèle de processus. Par exemple, le programme  $P_a V_a | P_a V_a$  est constitué de deux processus qui prennent une occurrence du sémaphore  $a$ , que l'on supposera pour l'occasion d'arité 1, puis la libère. Sur l'axe réel du temps, on peut donc

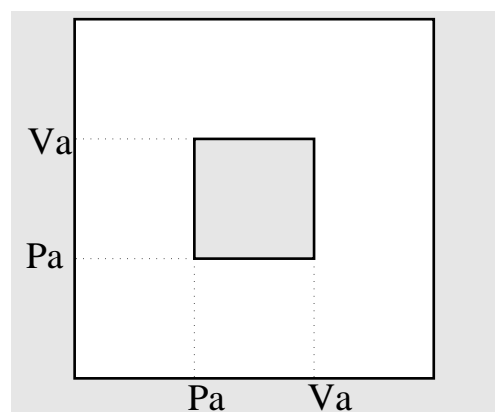
marquer à quels instants interviennent les différentes instructions des deux processus. La configuration ci-dessous est impossible puisque durant l'intervalle de temps surligné, les deux processus occupent le sémaphore  $a$  alors que ce dernier n'est pas utilisable par deux processus simultanément.



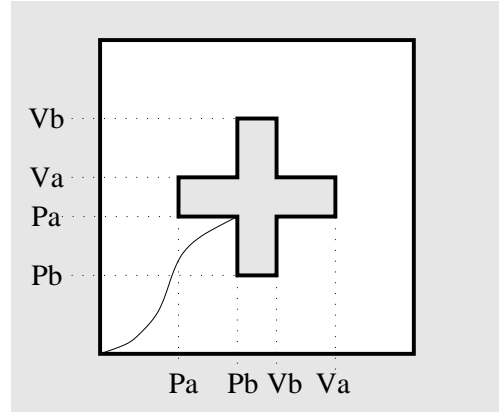
Les seules configurations possibles sont



En suivant l'idée que le parallélisme est modélisé par la notion de produit cartésien, on va attribuer à chaque processus un axe de temps "indépendant" ce qui conduit à la représentation continue des états du programme donnée par la figure de droite.



De même, la représentation du programme  $P_a P_b V_b V_a | P_b P_a V_a V_b$  est donnée par la figure de droite. On voudrait maintenant distinguer ces programmes qui doivent être différenciés car le premier, à la différence du second, n'a pas de point mort (un état dans lequel plus aucun des processus ne peut accomplir d'action bien qu'il n'ait pas terminé). Or les deux espaces topologiques représentant respectivement  $P_a V_a | P_a V_a$  et  $P_a P_b V_b V_a | P_b P_a V_a V_b$  sont isomorphes dans la catégorie des espaces topologiques.



Informellement, le problème vient du fait que dans un espace topologique, tous les chemins peuvent être parcourus en avant ou à reculons ce qui rend impossible la représentation de la notion de point mort. L'idée des graphes de progression, voir le document précurseur [17] ainsi que [14] et [81], est d'ajouter à la structure topologique une notion d'ordre (voir la définition I.1.1). Dans les deux cas précédemment exposés, la topologie et l'ordre sont ceux induits par  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  lui-même muni de la topologie et de l'ordre produit. Naturellement, les chemins autorisés sont les applications continues et croissantes définies sur  $[0, 1]$  à valeur dans le modèle géométrique du programme. Le chemin représenté sur la figure ci-dessus aboutit à un point mort qui traduit l'état du programme où la 1<sup>er</sup> processus a pris le sémaphore  $a$  tandis que le 2<sup>ème</sup> a pris le  $b$ .

## .5 UN RAPIDE SURVOL DU CONTENU

La première partie de cette thèse est dévolue à l'étude du cas sans boucle, dans notre contexte, on évitera le terme *acyclique* pour éviter toute confusion avec celui qu'il a dans [2]. Le chapitre I décrit la catégorie des espaces topologiques (partiellement) ordonnés, notée  $\text{PoSpc}$  (voir définition I.1.1), et fournit une étude détaillée de ses propriétés catégoriques ainsi que de celles de certaines de ses sous-catégories. En particulier, on montre la co-complétude de  $\text{PoSpc}$  (voir la proposition I.2.9, le théorème I.2.10 et le corollaire I.2.11), légitimant ainsi dans  $\text{PoSpc}$  un grand nombre de constructions usuelles de topologie algébrique classique, et tout particulièrement la réalisation géométrique. On note cependant que l'espace topologique sous-jacent d'une réalisation géométrique dans  $\text{PoSpc}$  n'est pas nécessairement la réalisation géométrique dans  $\text{Spc}$  des espaces sous-jacents. On retiendra tout de même que  $\text{PoSpc}$  et  $\text{Spc}$  ont de très nombreuses propriétés catégoriques en commun.

Le chapitre II décrit la notion d'homotopie dirigée ou dihomotopie la construction du foncteur catégorie fondamentale, noté  $\overline{\pi}_1$ , qui apparaît déjà dans [58], [33] et [84]. On note les grandes différences entre le groupoïde fondamental (défini sur  $\text{Spc}$ ) et la catégorie fondamentale (définie sur  $\text{PoSpc}$ ) et notamment que la groupoïdification de la catégorie fondamentale d'un espace topologique ordonné contient en général strictement plus d'informations que le groupoïde fondamental de son espace topologique sous-jacent. On donne également une classification des chemins dirigés d'un espace topologique ordonné (théorème II.1.25) dont une des conséquences frappantes est que deux dichemins sur un espace topologique ordonné ayant la même image sont dihomotopes (voir corollaire

II.1.27). Ceci est bien sûr faux pour l'homotopie classique.

En topologie algébrique classique, on montre que le groupoïde fondamental d'un espace topologique est, comme son nom l'indique, un groupoïde (voir [47]) tandis qu'en topologie algébrique dirigée, on montre que la catégorie fondamentale d'un espace topologique ordonné est une (petite) catégorie sans boucles. L'étude de ces dernières est le propos du chapitre III. En particulier, la collection de ces dernières induit une sous-catégorie réfléchissante de  $\mathbf{Cat}$  que l'on note  $\mathbf{LfCat}$  (théorème III.3.1). On note alors les analogies de comportement entre la réflexion de  $\mathbf{Cat}$  dans  $\mathbf{LfCat}$  et celle de  $\mathbf{RSpC}$  dans  $\mathbf{PoSpC}$ .

Le chapitre IV introduit et étudie la notion de systèmes de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* d'une catégorie sans boucles. La collection de ces systèmes sur une catégorie sans boucles donnée forme en particulier un treillis local (voir théorème IV.3.23). On utilisera le fait qu'un treillis local admet un plus grand élément pour définir, dans le chapitre IV.3.2, la catégorie de composantes d'une catégorie sans boucles et donc d'un espace topologique ordonné. On souligne le lien qui existe avec la topologie algébrique classique. Cette construction est cruciale, c'est en effet elle qui permet de ramener un modèle topologique continu (et donc infini) à un modèle discret fini. On prouve de surcroît dans le (très technique) chapitre V, que le passage à la catégorie de composantes préserve toutes les propriétés "intéressantes" de la catégorie initiale. Cette assertion est formalisée dans le théorème V.0.27 qui constitue l'un des résultats clés de cette thèse puisqu'il donne sa légitimité à la notion de catégorie de composantes.

Le chapitre VI présente un théorème (VI.3.1) à la *Van Kampen* pour les catégories de composantes. A cause des perspectives applicatives et calculatoires qu'il donne, ce théorème est un autre des résultats charnières de cette thèse.

Le chapitre VII est consacré à la détermination de la catégorie de composantes de plusieurs familles de catégories sans boucles particulières.

La seconde partie décrit le langage PV et comment on associe à chacun des programmes écrits dans ce micro-langage, un objet de  $\mathbf{PoSpC}$  qui donnera sa sémantique. On présente également l'embryon d'un outil d'analyse de ce langage écrit en Caml. C'est l'occasion d'appliquer les résultats de la théorie développée dans la première partie.

La troisième et dernière partie rassemble des résultats obtenus durant ma thèse mais qui, je pense, sont incomplets, mal compris ou que, d'une manière générale, je n'ai pas encore réussi à intégrer dans un cadre suffisamment "cohérent" à mon goût.

Le chapitre XI s'intéresse à la petite catégorie qui doit jouer, dans l'étude des modèles possédant des boucles, le rôle que joue  $([0, 1], \leq)$  dans l'étude de ceux qui n'en possèdent pas.

Le chapitre XIII étudie quelques extensions de  $\mathbf{PoSpC}$  dans lesquelles on trouve de "vraies" boucles, en effet, alors que  $\mathbf{PoSpC}$  s'impose naturellement comme objet d'étude lorsque l'on souhaite avoir des modèles sans boucles, on constate que, lorsque l'on veut intégrer ces dernières, il existe plusieurs alternatives possibles. L'une d'elles a été proposée par *Marco Grandis*, une autre par *Sanjeevi Krishnan* et une troisième par *L. Fajstrup*, *Martin Raussen* et *Eric Goubault*. On en propose une quatrième dont on montre qu'elle est très fortement liée à celle de *M. Grandis* (voir théorème XIII.1.2). Enfin, une dernière approche due à *Philippe Gaucher* mélange en quelque sorte modèle discret et topologique, elle se distingue des autres par le fait que l'espace des états est discret et que la structure topologique est mise *de facto* sur l'ensemble qui représente les traces d'exécution. La

relation qui existe entre cette dernière approche et les autres n'est pas encore claire.

---

#### CONVENTION DE NUMÉROTATION DES ARTICLES

---

La numérotation des articles du manuscrit, c'est-à-dire les théorèmes, propriétés, lemmes, définitions, axiomes, propositions et remarques, indique d'abord en chiffre romain le chapitre puis en chiffre arabe la section où se trouve l'article référencé, le dernier nombre indique le rang de l'article en comptant depuis le début de la section. Ainsi, le théorème V.4.8 est le 8<sup>ème</sup> article de la 4<sup>ème</sup> section du chapitre V.

On utilise le symbole ■ pour indiquer la fin d'une preuve.

# Partie I

## TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE DIRIGÉE DANS LE CADRE DES ESPACES PARTIELLEMENT ORDONNÉS





---

ESPACES ORDONNÉS

On trouve dans l'ouvrage de *Garrett Birkhoff* [8] et dans l'article de *Samuel Eilenberg* [18] les toutes premières traces de la notion d'espace partiellement ordonné. A la fin des années quarante, *Leopoldo Nachbin* a publié sur le même sujet les articles [75, 76, 77] et plus tard un livre [78]. Dans les années cinquante on trouve l'article [92] de *L.E. Ward* et dans les années soixante des articles de *H.A. Priestley* ainsi que la thèse de *Maarten Maurice* [66] publiée dans [67]. Les espaces ordonnés se sont révélés utiles concernant des questions d'algèbre topologique, d'analyse fonctionnelle (le dernier chapitre de [78] sur les espaces vectoriels topologiques ordonnés localement convexe en témoigne); on trouve également dans [78] des généralisations de célèbres résultats de la topologie classique, comme par exemple le lemme de prolongement de *Urysohn*, tandis que [66] focalise son étude sur les espaces totalement ordonnés compacts, menant à des considérations de théorie des ensembles assez fines. Notons à ce propos que quand *Maarten Maurice* soutint sa thèse en 1964, le problème de l'indépendance de l'hypothèse du continu était encore une conjecture, d'où l'intérêt de ses travaux. L'une des motivations de l'étude systématique des espaces ordonnés semble aussi avoir été le problème de l'indépendance de l'hypothèse de continu; en effet, parmi les premières références d'articles consacrés aux espaces partiellement ordonnés, beaucoup sont focalisées sur le cas particulier où l'espace topologique sous-jacent est compact et l'ordre total avec des préoccupations similaires à celles de la théorie descriptive des ensembles. Des références aux espaces ordonnés apparaissent également dans des ouvrages plus récents concernant la théorie des domaines comme [53] (chapitre VII) et [73] (chapitre VI). On va voir que, du point de vue de sa structure catégorique, la catégorie des espaces ordonnés  $\text{PoSpc}$  est en tout point similaire à la catégorie des espaces topologiques  $\text{Spc}$ .

## I.1 LA CATÉGORIE PoSpc

### I.1.1 OBJETS ET MORPHISMES DE PoSpc

#### I.1.1 DÉFINITION (ESPACE PARTIELLEMENT ORDONNÉ, [78])

Un **espace ordonné** ou encore **espace partiellement ordonné**<sup>1</sup> (ou même **po-espace**) est un couple  $(X, \sqsubseteq)$ , où  $X$  est un espace topologique et  $\sqsubseteq$  une relation d'ordre sur l'ensemble sous-jacent de  $X$ , que l'on note  $|X|$ , telle que

$$\{(x_1, x_2) \in |X| \times |X| \mid x_1 \sqsubseteq x_2\}$$

soit une sous-partie fermée de  $X \times X$ .

On notera souvent  $\vec{X}$  pour désigner un espace partiellement ordonné tandis que  $X$ ,  $\sqsubseteq_X$  et  $|X|$  feront respectivement référence à son espace topologique, à sa relation d'ordre partiel et à son ensemble sous-jacent. Par ailleurs, dans la définition précédente,  $X \times X$  est le produit cartésien dans **Spc**, la catégorie des espaces topologiques.

#### I.1.2 PROPRIÉTÉ (SOUS-ESPACE PARTIELLEMENT ORDONNÉ)

Etant donné un espace partiellement ordonné  $\vec{X}$ , tout sous-espace topologique  $Y$  de  $X$  muni de la relation d'ordre induite sur  $|Y|$  par  $\leq_X$  est encore un espace partiellement ordonné. On dit alors que  $\vec{Y}$  est un **sous-espace ordonné** ou **sous-po-espace** de  $\vec{X}$ .

Le résultat suivant est une des propriétés classiques des espaces partiellement ordonnés.

#### I.1.3 PROPRIÉTÉ ([78])

L'espace sous-jacent d'un espace partiellement ordonné est un espace de *Hausdorff*.

PREUVE. Soit un espace partiellement ordonné  $\vec{X}$ , d'après l'antisymétrie de  $\sqsubseteq$ , la diagonale de  $|X|$ , autrement dit  $\{(x, x) \mid x \in |X|\}$ , est égale à

$$\{(x, y) \in |X| \times |X| \mid x \sqsubseteq y\} \cap \{(x, y) \in |X| \times |X| \mid y \sqsubseteq x\}$$

Cette même diagonale est donc fermée dans  $X \times X$  comme intersection de deux fermés de  $X \times X$ . Ceci est équivalent à dire que  $X$  est un espace de *Hausdorff*. ■

Il est possible d'affiner la propriété I.1.3

#### I.1.4 PROPRIÉTÉ (SÉPARATION ORDONNÉE)

Soit  $X$  un espace topologique (quelconque) et  $\preceq_X$  un préordre sur  $|X|$ . Le graphe de  $\preceq_X$  est fermé (dans  $X \times X$ ) si et seulement si quels que soient les éléments  $a$  et  $b$  de  $|X|$ , le fait que  $a \not\preceq b$  implique l'existence d'un voisinage croissant  $V$  de  $a$  et d'un voisinage décroissant  $W$  de  $b$  qui soient disjoints. En particulier, si le graphe de  $\preceq_X$  est fermé alors pour tout élément  $x$  de  $|X|$  les ensembles  $\{a \in |X| \mid a \preceq_X x\}$  et  $\{a \in |X| \mid x \preceq_X a\}$  sont fermés (dans  $X$ ).

PREUVE. Voir [78] page 26. ■

---

<sup>1</sup>La terminologie anglo-saxonne précise par l'adverbe *partially* que l'ordre n'est pas nécessairement total.

### I.1.5 COROLLAIRE

Soit un espace ordonné compact  $\vec{K}$  (c'est-à-dire dont l'espace topologique sous-jacent est compact), alors toute sous-partie dirigée  $D$  de  $(|K|, \sqsubseteq)$  (c'est-à-dire telle que toute paire d'éléments de  $D$  admet un majorant dans  $D$ ) possède un plus grand élément.

PREUVE. Notons que  $D$  admet un plus grand élément si et seulement si

$$\bigcap_{x \in D} \uparrow x$$

n'est pas vide, où  $\uparrow x$  est par définition l'ensemble  $\{y \in K \mid x \sqsubseteq y\}$ . Puis par compacité de  $K$  et comme, d'après la propriété I.1.4, les ensembles  $\uparrow x$  sont fermés, pour que cette intersection ne soit pas vide, il faut et il suffit que pour toute sous-partie finie  $F$  de  $D$  ayant au moins un élément, l'intersection

$$\bigcap_{x \in F} \uparrow x$$

ne soit pas vide, ce qui est le cas puisque  $D$  est dirigée. ■

### I.1.6 DÉFINITION (MORPHISME D'ESPACE PARTIELLEMENT ORDONNÉ)

Un morphisme d'espace partiellement ordonné de  $\vec{X}$  vers  $\vec{Y}$  est une application de  $|X|$  vers  $|Y|$  croissante et continue. On parle aussi d'**application dirigée** ou de **dimap**. La collection des espaces ordonnés forme, avec les applications dirigées, une catégorie que l'on note  $\text{PoSpc}$ . On pose alors

$$\text{PoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}] := \{f \mid \text{application dirigée de } \vec{X} \text{ vers } \vec{Y}\}$$

Plus formellement, un morphisme de  $\vec{X}$  vers  $\vec{Y}$  est une fonction ensembliste  $f : |X| \rightarrow |Y|$  qui induit une fonction continue de  $X$  vers  $Y$  et une fonction croissante de  $(|X|, \sqsubseteq_X)$  vers  $(|Y|, \sqsubseteq_Y)$ .

La propriété I.1.4 a pour conséquence

### I.1.7 COROLLAIRE

Soit une application dirigée  $f$  appartenant à  $\text{PoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}]$ , pour toute sous-partie  $A$  de  $|X|$ , si  $\text{sup}(A)$  (respectivement  $\text{inf}(A)$ ) existe et que tout voisinage de  $\text{sup}(A)$  (respectivement  $\text{inf}(A)$ ) rencontre  $A$  alors  $\text{sup}(f(A))$  (respectivement  $\text{inf}(f(A))$ ) existe également et

$$\text{sup}(f(A)) = f(\text{sup}(A)) \quad \left( \text{respectivement } \text{inf}(f(A)) = f(\text{inf}(A)) \right)$$

PREUVE. On sait déjà que pour tout élément  $a$  de  $A$  on a  $f(a) \sqsubseteq_X f(\text{sup}(A))$ , donc  $f(\text{sup}(A))$  est un majorant de  $f(A)$ . Supposons que  $m$  soit un majorant de  $f(A)$  et que  $f(\text{sup}(A)) \not\sqsubseteq_X m$ . La propriété I.1.4 (p.26) donne un voisinage croissant  $V$  de  $f(\text{sup}(A))$  et un voisinage décroissant  $W$  de  $m$  disjoints. L'application  $f$  étant continue et croissante,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage croissant de  $\text{sup}(A)$  et  $f^{-1}(W)$  est une sous-partie décroissante de  $(X, \sqsubseteq_X)$  telle que  $A \subseteq f^{-1}(W)$ . En particulier,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $\text{sup}(A)$  qui ne rencontre pas  $A$ , ce qui contredit l'hypothèse faite à propos de  $\text{sup}(A)$ . ■

L'hypothèse "tout voisinage de  $\sup(A)$  rencontre  $A$ " n'est pas artificielle, les deux exemples qui suivent montrent que, en son absence, la conclusion peut être mise en défaut. Considérons tout d'abord  $\vec{A} := \{1 - \frac{1}{n+1}/n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\}$  muni de la topologie et de l'ordre induits par  $\vec{\mathbb{R}}$  (voir la section I.1.2 (p.30)) et  $f$  l'inclusion de  $\vec{A}$  dans  $\vec{\mathbb{R}}$ . La borne supérieure de  $\{1 - \frac{1}{n+1}/n \in \mathbb{N}\}$  dans  $\vec{A}$  est 2 tandis que celle de son image par  $f$  est 1. On peut même facilement adapter cet exemple de sorte que la borne supérieure de l'image n'existe pas, prenons  $\vec{A} := \{(1 - \frac{1}{n+1}, 0)/n \in \mathbb{N}\} \cup \{(2, 0)\}$ ,  $\vec{B} := \{(1 - \frac{1}{n+1}, 0)/n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 1)\} \cup \{(2, 0)\}$ , et  $f$  l'inclusion de  $\vec{A}$  dans  $\vec{B}$ . Il est clair que  $(1, 1)$  et  $(2, 0)$  sont deux majorants de l'image de  $f$  qui ne sont pas comparables entre eux. Voici deux autres résultats qui illustrent le fait que l'hypothèse de fermeture de la relation d'ordre crée un lien entre cette même relation et l'espace topologique sous-jacent.

### I.1.8 PROPRIÉTÉ

Soit  $D$  une sous-partie d'un espace ordonné  $\vec{X}$  et  $x_0$  un point de  $\vec{X}$ , si tout voisinage de  $x_0$  contient un majorant de  $D$ , alors  $x_0$  est un majorant de  $D$ . Si de plus, tout voisinage de  $x_0$  rencontre  $D$ , alors  $x_0$  est la borne supérieure de  $D$ .

PREUVE. Montrons la contraposée : soit un point  $d$  de  $D$  tel que  $d \not\sqsubseteq x_0$ , la relation  $\sqsubseteq$  étant fermée dans  $X \times X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  ainsi qu'un voisinage  $W$  de  $d$  tels que pour tout élément  $a$  de  $V$  et tout élément  $b$  de  $W$ , on a  $a \not\sqsubseteq b$ ,  $V$  est donc un voisinage de  $x_0$  qui ne contient pas de majorant de  $D$ .

Montrons maintenant, une fois encore par contraposée, la seconde partie de l'assertion : soit  $x_1$  un élément de  $X$  tel que  $x_1 \sqsubset x_0$ , c'est-à-dire que  $x_1$  est strictement inférieur à  $x_0$ , on a en particulier  $x_0 \not\sqsubseteq x_1$ , donc, comme  $\sqsubseteq$  est fermée dans  $X \times X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  et un voisinage  $W$  de  $x_1$  tels que pour tout élément  $a$  de  $V$  et tout élément  $b$  de  $W$ , on a  $a \not\sqsubseteq b$ . Cependant, on a supposé que tout voisinage de  $x_0$ , et donc en particulier  $V$ , rencontre  $D$  : mais alors un élément  $d$  de  $D \cap V$  est tel que  $d \not\sqsubseteq x_1$  et donc  $x_1$  n'est pas un majorant de  $D$ . On peut reformuler ce résultat de la façon suivante :

### I.1.9 PROPRIÉTÉ

Pour toute sous-partie  $D$  d'un espace ordonné  $\vec{X}$ , en notant  $M(D)$  l'ensemble, éventuellement vide, des majorants de  $D$ , l'adhérence de  $D$  et celle de  $M(D)$  ont au plus un point commun et lorsque c'est le cas, ce point est la borne supérieure de  $D$ .

### I.1.10 REMARQUE

Dans le cas où  $D = \emptyset$ , la borne supérieure de  $D$  peut exister bien que l'intersection des adhérences de  $D$  et de  $M(D)$  soient vides.

### I.1.11 PROPOSITION

Les espaces partiellement ordonnés et leurs morphismes forment, pour la composition des applications, une catégorie notée  $\text{PoSpc}$ .

PREUVE. Une composée de fonctions continues (respectivement croissantes) est continue (respectivement croissante). ■

### I.1.12 PROPRIÉTÉ

$\emptyset$  est l'objet initial de la catégorie  $\text{PoSpc}$  et  $\{*\}$  est son objet final.

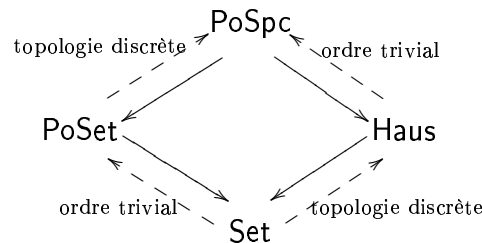
PREUVE. Trivial. ■

I.1.13 DÉFINITION (IMAGE D'UNE APPLICATION DIRIGÉE)

Etant donnée une application dirigée  $f$  de  $\text{PoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}]$  et  $\vec{A}$  un sous-espace ordonné de  $\vec{X}$ , on appelle **image** de  $\vec{A}$  par  $f$  et on note  $f(\vec{A})$  le sous-espace ordonné de  $\vec{Y}$  dont l'ensemble sous-jacent est  $\{f(a) | a \in |A|\}$ . L'image de  $f$  désigne  $f(\vec{X})$  que l'on note aussi  $Im(f)$ . En particulier,  $f$  induit deux applications dirigées  $g$  et  $h$  appartenant respectivement à  $\text{PoSpc}[\vec{A}, \vec{X}]$  et à  $\text{PoSpc}[\vec{A}, Im(f)]$  en posant, quelquesoit  $a$  appartenant à  $|A|$ ,  $g(a) := f(a)$  et  $h(a) := f(a)$ .

On note **Haus** la catégorie des espaces de *Hausdorff* (voir la définition B.1.13 (p.320)), **PoSet** la catégorie des ensembles ordonnés (voir la section A.1.3 (p.284)) et **Set** celle des ensembles. On donne un premier résultat reliant la catégorie **PoSpc** aux catégories **Haus**, **PoSet** et **Set**.

I.1.14 PROPOSITION



Dans le diagramme commutatif ci-dessus, chaque flèche pleine est un foncteur d'oubli et la flèche pointillée correspondante son adjoint à gauche.

I.1.15 LEMME

La catégorie **PoSpc** est complète.

PREUVE. C'est une démonstration de routine: on vérifie d'abord que si  $\vec{X}_i$  est une famille d'espaces ordonnés, le produit de cette famille a pour ensemble sous-jacent le produit des ensembles sous-jacents, pour topologie la topologie produit (dans **Spc**) des topologies sous-jacentes et pour relation d'ordre la relation d'ordre produit (dans **PoSet**). Enfin si  $f$  et  $g$  sont deux applications dirigées de  $\vec{X}$  vers  $\vec{Y}$ , leur égalisateur est donné par l'inclusion du sous-espace ordonné de  $\vec{X}$

$$\{x \in \vec{X} | f(x) = g(x)\}$$

dans  $\vec{X}$ . La proposition A.2.12 (p.290) permet de conclure que la catégorie **PoSpc** est complète. ■

I.1.16 LEMME

La catégorie **PoSpc** a tous les coproduits et les foncteurs d'oubli de **PoSpc** vers **Haus** et **PoSet** préservent les coproduits.

PREUVE. L'ensemble sous-jacent est donné par la réunion disjointe des ensembles sous-jacents que l'on muni de la plus fine topologie rendant toutes les inclusions ensemblistes continues et la plus petite relation d'ordre fermée rendant ces mêmes inclusions croissantes, il est très facile de vérifier que les deux existent. ■

### I.1.17 PROPRIÉTÉ (MONOMORPHISMES ET ÉPIMORPHISMES DE $\text{PoSpc}$ )

Les monomorphismes de  $\text{PoSpc}$  sont les applications dirigées  $\vec{f}$  dont l'application ensembliste sous-jacente  $|f|$  est injective. Les épimorphismes de  $\text{PoSpc}$  sont les applications dirigées  $\vec{f} : \vec{X} \longrightarrow \vec{Y}$  dont l'application continue sous-jacente  $f : X \longrightarrow Y$  a une image dense dans son espace topologique d'arrivée i.e.  $\{f(x)|x \in X\}$  est dense dans  $Y$ .

PREUVE. Chacun des foncteurs d'oubli de la proposition I.1.14 (p.29) est fidèle, il résulte de la proposition A.1.14 (p.276) que si l'application sous-jacente est injective (respectivement surjective) alors l'application dirigée est un monomorphisme (respectivement un épimorphisme). Par ailleurs, si l'application sous-jacente  $|h| : |X| \longrightarrow |Y|$  n'est pas injective, il existe deux éléments distincts  $x_1, x_2$  de  $|X|$  tels que  $|h|(x_1) = |h|(x_2)$ . Soit alors les applications dirigées  $f : \{*\} \longrightarrow \vec{Y}$  et  $g : \{*\} \longrightarrow \vec{Y}$  telles que  $f(*) = x_1$  et  $g(*) = x_2$ , on a  $f \neq g$  et  $h \circ f = h \circ g$ , donc  $h$  n'est pas un monomorphisme.

Les épimorphismes de  $\text{Haus}$  (voir appendice B (p.317)) sont les applications continues dont l'image est dense dans l'espace topologique d'arrivée. Puisque les foncteurs d'oubli de la proposition I.1.14 (p.29) sont fidèles, d'après la proposition A.1.14 (p.276), si l'image de l'application continue sous-jacente est dense dans l'espace d'arrivée, l'application dirigée correspondante est un épimorphisme de  $\text{PoSpc}$ . Reste à voir la réciproque, supposons que  $O$  soit un ouvert de  $Y$  disjoint de l'image de  $f$ . Considérons alors le sous-espace ordonné  $\vec{Y} \setminus \vec{O}$  de  $\vec{Y}$ , on pose  $\vec{Z} := \vec{Y} \setminus \vec{O} \coprod \{0, 1\}$  c'est-à-dire le coproduit de  $\vec{Y} \setminus \vec{O}$  et de  $\{0, 1\}$  (espace topologique discret muni de la relation d'ordre triviale) dans  $\text{PoSpc}$ . Soient  $g_0$  et  $g_1$ , les applications dirigées appartenant à  $\text{PoSpc}[\vec{Y}, \vec{Z}]$  définies pour tout élément  $y$  de  $|Y|$  par  $g_0(y) := g_1(y) := y$  dans le cas où  $y$  est un élément de  $Y \setminus O$  et par  $g_0(y) := 0$  et  $g_1(y) := 1$  dans le cas où  $y$  appartient à  $O$ . On a clairement  $g_0 \neq g_1$  bien que  $g_0 \circ f = g_1 \circ f$ . ■

## I.1.2 QUELQUES EXEMPLES

### ESPACES PARTIELLEMENT ORDONNÉS TRIVIAUX

Etant donné un espace topologique de *Hausdorff*  $X$ , on obtient un espace partiellement ordonné (dit **trivial**) en munissant  $X$  de la relation  $\Delta_X := \{(x, x)|x \in |X|\}$  qui est fermé car  $X$  est un espace de *Hausdorff*. Ce sont exactement les images de l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $U : \text{PoSpc} \longrightarrow \text{Haus}$ .

### DUAL D'UN ESPACE ORDONNÉ

#### I.1.18 LEMME

Si  $\vec{X} := (X, \sqsubseteq_X)$  est un espace ordonné, alors  $(X, \supseteq_X)$  est également un espace ordonné appelé **(po-espace) dual** de  $(X, \sqsubseteq_X)$  et noté  $(X, \sqsubseteq_X)^{op}$ .

### LA DROITE RÉELLE DIRIGÉE

La droite réelle  $\mathbb{R}$  munie de la topologie et de l'ordre classique est un espace partiellement ordonné. Supposons que l'on ait  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $x \not\leq y$ , on a donc  $x > y$ . Posons  $\varepsilon = \frac{|y-x|}{10}$ ,  $]x-\varepsilon, x-\varepsilon[$  et  $]y-\varepsilon, y-\varepsilon[$  sont des ouverts disjoints de  $\mathbb{R}$  contenant respectivement  $x$  et  $y$ . Enfin pour tout élément  $x'$  de  $]x-\varepsilon, x-\varepsilon[$  et tout élément  $y'$  de  $]y-\varepsilon, y-\varepsilon[$  on a  $x' > y'$  donc  $x' \neq y'$ . On note  $\vec{\mathbb{R}}$  cet espace partiellement ordonné et on l'appelle la

**droite réelle dirigée.**

L'application dirigée

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathbb{R}}^{op} \\ t & \longmapsto & -t \end{array}$$

est un isomorphisme de  $\text{PoSpc}$ .

**LE SEGMENT UNITÉ DIRIGÉ**

C'est le sous-espace partiellement ordonné de  $\overrightarrow{\mathbb{R}}$  dont l'espace topologique sous-jacent est  $[0, 1]$ . On le note  $\overrightarrow{[0, 1]}$  et on l'appelle le **segment unité dirigé**.

**L'ESPACE RÉEL DIRIGÉ DE DIMENSION  $n \in \mathbb{N}$**

C'est l'espace topologique  $\mathbb{R}^n$  muni de l'ordre produit, c'est à dire que  $(x_1, \dots, x_n) \sqsubseteq (y_1, \dots, y_n)$  si et seulement si pour tout entier  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, n\}$  on a  $x_k \leq y_k$ . On parle **d'espace dirigé de dimension  $n$** . C'est en particulier la produit dans  $\text{PoSpc}$  de  $n$  copies de  $\overrightarrow{\mathbb{R}}$ , on le note donc  $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$ . Le **carré unité dirigé** et le **cube unité dirigé** sont respectivement  $\overrightarrow{[0, 1]^2}$  et  $\overrightarrow{[0, 1]^3}$  et plus généralement, l'**hypercube unité dirigé de dimension  $n$**  est  $\overrightarrow{[0, 1]^n}$ .

Les applications dirigées suivantes sont un isomorphisme de  $\text{PoSpc}$ .

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}} & \quad & \overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}} \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) & & (x, y, z) & \longmapsto & (z, x, y) \end{array}$$

Plus généralement, quelquesoient les éléments  $n$  et  $m$  de  $\mathbb{N}$  et toute application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $f$  induit un morphisme de  $\text{PoSpc}$  si et seulement si sa matrice dans les bases canoniques est à coefficients (réels) positifs. En particulier, toute permutation des coordonnées de  $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$  engendre un isomorphisme de  $\text{PoSpc}$  : on peut changer l'orientation de l'espace sans altérer la direction du temps.

**PRODUIT TENSORIEL D'ESPACES ORDONNÉS**

Etant donné deux espaces ordonnés  $\overrightarrow{X}$  et  $\overrightarrow{Y}$ , notons  $X$  et  $Y$  leurs espaces topologiques sous-jacents respectifs puis  $\sqsubseteq_X$  et  $\sqsubseteq_Y$  leurs relations d'ordre sous-jacentes respectives. On note  $X \otimes Y$  l'espace topologique obtenu en munissant l'ensemble  $|X| \times |Y|$  de la topologie des astérisques (voir la définition B.1.29 (p.323)). Avec l'ordre produit sur  $|X| \times |Y|$ , l'espace topologique  $X \otimes Y$  devient un espace ordonné, en effet, la topologie des astérisques est plus fine que la topologie produit. On note  $\overrightarrow{X} \otimes \overrightarrow{Y}$  l'espace ordonné ainsi obtenu. On verra dans le théorème I.2.1 (p.36) que cette construction fournit le produit de la structure monoïdale symétrique fermée de  $\text{PoSpc}$ .

Les applications

$$\begin{array}{ccc} p_{\overrightarrow{X}} : \overrightarrow{X} \otimes \overrightarrow{Y} & \longrightarrow & \overrightarrow{X} & \quad \text{et} & p_{\overrightarrow{Y}} : \overrightarrow{X} \otimes \overrightarrow{Y} & \longrightarrow & \overrightarrow{Y} \\ (x, y) & \longmapsto & x & & (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$



sont des morphismes de  $\text{PoSpc}$ . En particulier, la propriété universelle du produit (catégorique) donne un unique morphisme  $p$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 & \vec{X} \otimes \vec{Y} & \\
 p_{\vec{X}} \swarrow & \downarrow p & \searrow p_{\vec{Y}} \\
 & \vec{X} \times \vec{Y} & \\
 \pi_{\vec{X}} \swarrow & & \searrow \pi_{\vec{Y}} \\
 \vec{X} & & \vec{Y}
 \end{array}$$

où  $\pi_{\vec{X}}$  et  $\pi_{\vec{Y}}$  sont les projections du produit catégorique. De plus, quels que soient les éléments  $x_0$  et  $y_0$  de  $X$ , les applications suivantes

$$\begin{array}{ccc}
 i_{x_0} : \vec{Y} \longrightarrow \vec{X} \otimes \vec{Y} & \text{et} & j_{y_0} : \vec{X} \longrightarrow \vec{X} \otimes \vec{Y} \\
 y \longmapsto (x_0, y) & & x \longmapsto (x, y_0)
 \end{array}$$

sont également des morphismes de  $\text{PoSpc}$ . La topologie des astérisques est en fait la plus fine sur  $|X| \times |Y|$  qui rende continues toutes les applications de la famille

$$(i_x)_{x \in |X|} \cup (j_y)_{y \in |Y|}$$

#### EXPONENTIELLE D'UN ESPACE ORDONNÉ

Etant donné deux espaces ordonnés  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$ , on munit  $\text{PoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}]$  de la topologie et de l'ordre point à point (voir la définition B.1.30 (p.323)). Il est facile de voir que l'on obtient ainsi un espace ordonné que l'on note  $\vec{Y}^{\vec{X}}$ . En outre cette construction fournit l'adjoint à droite au foncteur  $- \otimes \vec{X}$  (voir théorème I.2.1 (p.36)). En particulier, les applications d'**évaluation** et de **plongement**, c'est-à-dire respectivement :

$$\begin{array}{ccc}
 ev : \vec{Y}^{\vec{X}} \longrightarrow \vec{Y} & \text{et} & \vec{Y} \longrightarrow \vec{Y}^{\vec{X}} \\
 (f, x) \longmapsto f(x) & & y \longmapsto \bar{y}
 \end{array}$$

où  $\bar{y}$  est l'application dirigée constante de  $\vec{X}$  vers  $\vec{Y}$  qui prend la valeur  $y$ , sont des morphismes de  $\text{PoSpc}$ . Par ailleurs,  $\vec{X}$  étant un espace ordonné, si  $X$  (l'espace topologique sous-jacent de  $\vec{X}$ ) est exponentiable dans  $\text{Haus}$ , alors  $\vec{X}$  est exponentiable (au sens de la définition A.5.8 (p.311)) dans  $\text{PoSpc}$ , l'espace topologique sous-jacent étant  $\text{PoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}]$  muni de la topologie compacts-ouverts et de l'ordre point à point, une vérification très simple permet de s'en assurer. *A priori*, cet espace ordonné n'est cependant pas isomorphe à  $\vec{Y}^{\vec{X}}$  que l'on a défini précédemment.

#### FLOT DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Si  $\Phi$  est un champs de vecteurs  $C^\infty$  tangent à une surface différentiable  $\mathcal{S}$ , alors en tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$  et pour tout  $t_0$  appartenant à  $\mathbb{R}$  il passe un unique  $\Phi$ -chemin (ouvert)

maximal, c'est-à-dire ne pouvant être prolongé. Il est noté  $\gamma$  et défini sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  (où  $a$  peut être  $-\infty$  et  $b$  peut être  $+\infty$ ) passant par  $x_0$  à l'instant  $t_0$ . Autrement dit, quel que soit  $t$  appartenant à  $]a, b[$  on a  $\frac{d\gamma}{dt} = \Phi(\gamma(t))$  et  $\gamma(t_0) = x_0$ . On suppose que tous les chemins maximaux sont injectifs. Pour tous points  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{S}$ , on pose alors  $p \sqsubseteq q$  si et seulement s'il existe une solution  $\gamma$  passant par  $p$  puis par  $q$  i.e.

$$p \sqsubseteq q \Leftrightarrow \exists t, t' \in ]a, b[ \text{ tels que } t \leq t', \gamma(t) = p \text{ et } \gamma(t') = q$$

On obtient ainsi l'espace ordonné  $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ .

## COMPACTS D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Rappelons qu'un espace métrique est un ensemble  $X$  muni d'une application  $d$  de  $X \times X$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que pour tous éléments  $x, y$  et  $z$  de  $X$ , on a  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$  et  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . L'ensemble  $X$  peut alors être muni d'une topologie dont les ouverts sont les sous-parties  $U$  de  $X$  telles que pour tout élément  $u$  de  $U$ , il existe un réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que  $\{x \in X \mid d(u, x) < \varepsilon\}$  est inclus dans  $U$ . L'exemple standard est celui de  $\mathbb{R}^n$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , muni de la distance euclidienne. Notons  $\mathcal{K}X$  l'ensemble des sous-parties compactes de  $X$ . Etant donnés deux éléments  $K_1$  et  $K_2$  de  $\mathcal{K}X$ , la distance de *Hausdorff* entre  $K_1$  et  $K_2$  est, par définition, la borne inférieure de l'ensemble ci-dessous :

$$\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x_1 \in K_1 \exists y_2 \in K_2 \ d(x_1, y_2) \leq r \text{ et } \forall x_2 \in K_2 \exists y_1 \in K_1 \ d(x_2, y_1) \leq r \right\}$$

c'est-à-dire

$$\sup \left\{ d(x_1, K_2), d(x_2, K_1) \mid x_1 \in K_1 \ x_2 \in K_2 \right\} \text{ où } d(x, K) := \inf \{ d(x, y) \mid y \in K \},$$

ce réel  $r$  est encore noté  $d_H(K_1, K_2)$ . L'ensemble  $\mathcal{K}X$  muni de l'application  $d_H$  est un espace métrique dont on a la complétude dès que l'on a celle de  $(X, d)$ .

### I.1.19 PROPOSITION

L'ensemble  $\mathcal{K}X$  muni de la topologie induite par la métrique de *Hausdorff* et de la relation d'inclusion est un espace ordonné.

PREUVE. Il suffit de vérifier que le graphe de la relation d'inclusion est fermé pour la topologie induite par  $d_H$ . Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux éléments de  $\mathcal{K}X$  telles que  $K_1$  ne soit pas incluse dans  $K_2$ ; il existe donc un élément  $x_1$  de  $K_1$  qui n'appartient pas à  $K_2$ , posons  $r := d(x_1, K_2)$ . Fixons  $\varepsilon > 0$  dont on précisera ultérieurement la valeur en fonction de  $r$ . Soient  $K'_1$  et  $K'_2$  tels que  $d_H(K'_1, K_1) < \varepsilon$  et  $d_H(K'_2, K_2) < \varepsilon$ , il existe un point  $x'_1$  de  $K'_1$  tel que  $d(x_1, x'_1) \leq \varepsilon$ ; puis étant donné un point  $x'_2$  de  $K'_2$ , il existe un point  $x_2$  de  $K_2$  tel que  $d(x_2, x'_2) \leq \varepsilon$ ; on obtient alors

$$\begin{aligned} d(x'_1, x'_2) &\geq |d(x_1, x_2) - d(x'_1, x_1) - d(x_2, x'_2)| \\ &\geq d(x_1, x_2) - d(x'_1, x_1) - d(x_2, x'_2) \\ &\geq r - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser  $\varepsilon := \frac{r}{3}$  pour avoir  $d(x'_1, x'_2) \geq \frac{r}{3} > 0$  quels que soient  $x'_2$  appartenant à  $K'_2$ , donc  $x'_1$  n'appartient pas à  $K'_2$  et donc  $K'_1$  n'est pas inclus dans  $K'_2$ .

Etant donnée  $\mathbb{A}$  une  $\mathbb{C}^*$ -algèbre unitaire, l'ensemble  $P$  des éléments auto-adjoints de  $\mathbb{A}$  dont le spectre est inclus dans  $[0, +\infty[$  est un cône fermé et convexe de  $\mathbb{A}$ , en notant  $\mathbb{A}_h$  l'espace de *Banach* réel des éléments auto-adjoints de  $\mathbb{A}$ , on définit  $\sqsubseteq$  une relation d'ordre sur  $\mathbb{A}_h$  dont le graphe est fermé dans  $\mathbb{A}_h \times \mathbb{A}_h$  en posant  $x \sqsubseteq y$  lorsque  $y - x \in P$ . On a ainsi muni l'espace de *Banach* réel  $\mathbb{A}_h$  d'une structure d'espace ordonné. Dans le cas où  $\mathbb{A}$  est la  $\mathbb{C}^*$ -algèbre  $C(K)$ , c'est-à-dire celle des applications continues à valeurs dans  $\mathbb{C}$  définies sur un compact de *Hausdorff*  $K$ , le cône positif  $P$  n'est rien de plus que l'ensemble des éléments  $f$  de  $C(K)$  qui sont (en tant qu'application) à valeurs dans  $[0, +\infty[$ . L'exemple décrit précédemment est un cas particulier de la structure d'**espace vectoriel ordonné localement convexe** [78].

PEIGNES DIRIGÉS

Soient  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  deux espaces ordonnés, on suppose de plus que l'ensemble ordonné sous-jacent de  $\vec{Y}$  admet un plus petit élément noté 0. On équipe alors l'espace topologique  $X \times Y$  de la relation  $\sqsubseteq$  suivante : étant donnés deux points  $(x, y)$  et  $(x', y')$ , on pose  $(x, y) \sqsubseteq (x', y')$  lorsque  $(y = 0 \text{ et } x \sqsubseteq x')$  ou  $(x = x' \text{ et } y \sqsubseteq y')$ . On remarque au passage que l'on a ici utilisé le symbole  $\sqsubseteq$  pour désigner simultanément les relations d'ordre sous-jacentes de  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  ainsi que la relation que l'on vient de décrire; on va vérifier que cette relation est une relation d'ordre sur  $|X| \times |Y|$  dont le graphe est fermé dans  $X \times Y$ , c'est-à-dire que  $X \times Y$  équipé de  $\sqsubseteq$  est un espace ordonné. Dans le reste de cette preuve  $x, x'$  et  $x''$  désignent des éléments de  $X$  tandis que  $y, y'$  et  $y''$  désignent des éléments de  $Y$ . La réflexivité de  $\sqsubseteq$  est immédiate. Remarquons avant de poursuivre que si  $(x, y) \sqsubseteq (x', y')$ , alors  $x \sqsubseteq x'$ . Montrons l'antisymétrie de  $\sqsubseteq$  : en supposant que  $(x, y) \sqsubseteq (x', y')$  et  $(x', y') \sqsubseteq (x, y)$  on a déjà  $x = x'$  d'après la remarque précédente. Dans le cas où  $y = 0$ , pour avoir  $(x', y') \sqsubseteq (x, y)$ , il faut nécessairement que l'on ait aussi  $y' = 0$  car 0 est le plus petit élément de  $\vec{Y}$ . Le cas où  $y' = 0$  est analogue, on peut donc supposer que  $y$  et  $y'$  sont tous deux distincts de 0; mais alors on a  $y \sqsubseteq y'$  et  $y' \sqsubseteq y$  donc  $y = y'$ . Traitons la transitivité de  $\sqsubseteq$  : en supposant que  $(x, y) \sqsubseteq (x', y')$  et  $(x', y') \sqsubseteq (x'', y'')$  on a déjà  $x \sqsubseteq x''$  et dans le cas où  $y = 0$ , on a donc bien  $(x, y) \sqsubseteq (x'', y'')$ ; si maintenant on a  $y$  distinct de 0, alors puisque 0 est le plus petit élément de  $\vec{Y}$ , il est clair que ni  $y'$  ni  $y''$  n'est l'élément 0. On a donc forcément  $x = x'$ ,  $x' = x''$ ,  $y \sqsubseteq y'$  et  $y' \sqsubseteq y''$ , donc  $x = x''$  et  $y \sqsubseteq y''$ . Vérifions enfin que le graphe de  $\sqsubseteq$  est fermé dans  $X \times Y$ , c'est-à-dire que son complémentaire est ouvert : notons tout d'abord que  $(x, y) \not\sqsubseteq (x', y')$  équivaut à l'assertion suivante :

$$(y \neq 0 \text{ et } x \neq x') \text{ ou } (y \neq 0 \text{ et } y \not\sqsubseteq y') \text{ ou } (x \neq x' \text{ et } x \not\sqsubseteq x') \text{ ou } (x \not\sqsubseteq x' \text{ et } y \not\sqsubseteq y').$$

Comme 0 est l'élément minimum de  $\vec{Y}$  l'assertion  $(y \neq 0 \text{ et } y \not\sqsubseteq y')$  équivaut à  $y \not\sqsubseteq y'$ , de plus l'assertion  $(x \neq x' \text{ et } x \not\sqsubseteq x')$  est clairement équivalente à  $x \not\sqsubseteq x'$ ; en conséquence,  $(x, y) \not\sqsubseteq (x', y')$  équivaut à :

$$(y \neq 0 \text{ et } x \neq x') \text{ ou } (y \not\sqsubseteq y') \text{ ou } (x \not\sqsubseteq x').$$

Supposons donc que  $(x, y) \not\sqsubseteq (x', y')$  : on cherche un voisinage  $W$  de  $(x, y)$  et un voisinage  $W'$  de  $(x', y')$  dans  $X \times Y$  tels que  $W \times W'$  ne rencontre pas le graphe de  $\sqsubseteq$ . Dans le cas

où  $x \not\sqsubseteq x'$ , puisque  $\overrightarrow{X}$  est un espace ordonné, on trouve deux ouverts  $V_x$  et  $V_{x'}$  contenant respectivement  $x$  et  $x'$  tels que pour tous éléments  $t$  et  $t'$  respectivement pris dans  $V_x$  et  $V_{x'}$ , on ait  $t \not\sqsubseteq t'$ , les voisinages  $W := V_x \times Y$  et  $W' := V_{x'} \times Y$  conviennent alors. Le cas où  $y \not\sqsubseteq y'$  se traite de même. Reste à voir celui où ( $y \neq 0$  et  $x \neq x'$  et  $x \sqsubseteq x'$  et  $y \sqsubseteq y'$ ) : cette situation implique déjà que  $y'$  soit différent de 0 qui est le plus petit élément de  $\overrightarrow{Y}$ . Comme  $X$  est, en tant qu'espace topologique sous-jacent d'un espace ordonné, un espace de *Hausdorff*, on trouve deux ouverts disjoints  $V_x$  et  $V_{x'}$  contenant respectivement  $x$  et  $x'$ ; on peut alors prendre les voisinages  $W := V_x \times (Y \setminus \{0\})$  et  $W' := V_{x'} \times (Y \setminus \{0\})$ . L'espace ordonné ci-dessus, que l'on note  $\overrightarrow{P}$ , est appelé le **peigne** (dirigé) de **manche**  $\overrightarrow{X}$  à **dents** (de forme)  $\overrightarrow{Y}$ . Du point de vue informatique, cette construction se rapproche de celle qui représente la création d'un processus modélisé par  $\overrightarrow{Y}$  lors de l'exécution d'un autre processus modélisé par  $\overrightarrow{X}$ . La terminologie choisie prend tout son sens lorsque l'on prend  $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{[0, 1]}$ .

On note  $\overrightarrow{X}'$  l'espace ordonné ayant le même espace topologique sous-jacent que  $\overrightarrow{X}$  mais équipé de l'ordre trivial, c'est-à-dire que  $x \sqsubseteq_{\overrightarrow{X}'} x'$  lorsque  $x = x'$ . On note également  $\overrightarrow{(X \times Y)'}$  l'espace ordonné ayant pour espace topologique sous-jacent  $X \times Y$  et pour ordre  $(x, y) \sqsubseteq_{\overrightarrow{(X \times Y)'}} (x', y')$  lorsque  $x = x'$  et  $y \sqsubseteq y'$ ; alors le carré ci-dessous, où pour tous éléments  $x$  de  $|X|$  et  $y$  de  $|Y|$ , on pose  $i(x) := x$ ,  $i'(x, y) := (x, y)$ ,  $\theta(x) := (x, 0)$  et  $\theta'(x) := (x, 0)$ , est une somme amalgamée dans  $\text{PoSpc}$ .

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{X} & \xrightarrow{\theta'} & \overrightarrow{P} \\ i \uparrow & & \uparrow i' \\ \overrightarrow{X}' & \xrightarrow{\theta} & \overrightarrow{(X \times Y)'} \end{array}$$

Soient deux morphismes  $f$  et  $b$  appartenant respectivement aux ensembles  $\text{PoSpc}[\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z}]$  et  $\text{PoSpc}[\overrightarrow{(X \times Y)'}, \overrightarrow{Z}]$  tels que  $b \circ i = f \circ \theta$ . On a un unique morphisme  $h$  dans  $\text{PoSpc}[\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Z}]$  tel que  $b = h \circ \theta'$  et  $f = h \circ i'$  : l'application sous-jacente de  $h$  est définie pour tous élément  $x$  de  $|X|$  et  $y$  de  $|Y|$  par  $h(x, y) := f(x, y)$ . La continuité de  $h$  est immédiate. Pour vérifier sa croissance, supposons que  $(x, y) \sqsubseteq_{\overrightarrow{P}} (x', y')$  : dans le cas où  $x = x'$  et  $y \sqsubseteq y'$ , on a  $h(x, y) \sqsubseteq_{\overrightarrow{Z}} h(x', y')$  car  $h(x, y) = f(x, y)$  et  $h(x', y') = f(x', y')$ ; dans le cas où  $y = 0$  et  $x \sqsubseteq x'$ , on a en particulier  $(x, 0) \sqsubseteq_{\overrightarrow{P}} (x', 0)$  et  $(x', 0) \sqsubseteq_{\overrightarrow{P}} (x', y')$  car 0 est le plus petit élément de  $\overrightarrow{Y}$ . Comme  $x \sqsubseteq x'$ , on a donc  $i(x) \sqsubseteq_{\overrightarrow{P}} i(x')$  et donc  $b \circ i(x) \sqsubseteq_{\overrightarrow{Z}} b \circ i(x')$  ou encore  $f \circ \theta(x) \sqsubseteq_{\overrightarrow{Z}} f \circ \theta(x')$  i.e.  $f(x, 0) \sqsubseteq_{\overrightarrow{Z}} f(x', 0)$ . En outre, on a  $(x', 0) \sqsubseteq_{\overrightarrow{(X \times Y)'}} (x', y')$  donc  $f(x', 0) \sqsubseteq_{\overrightarrow{Z}} f(x', y')$ , d'où finalement  $f(x, 0) \sqsubseteq_{\overrightarrow{Z}} f(x', y')$ .

## MODÈLE D'UN PROGRAMME PV

On montrera, au chapitre VIII (p.169), que l'on peut associer à chaque programme écrit dans le langage PV, introduit par *Dijkstra*, un objet de  $\text{PoSpc}$  qui sera, par définition, son modèle géométrique. C'est bien sûr l'une des motivations premières de l'étude de la catégorie  $\text{PoSpc}$  menée dans ce chapitre.

## I.2 PROPRIÉTÉS CATÉGORIQUES DE PoSpc

Comme on va le voir, la catégorie des espaces partiellement ordonnés est, du point de vue de la théorie des catégories, en tout point similaire à Spc. De même que dans le cas classique le tableau ci-dessous récapitule les noms et objets de catégories d'espaces topologiques très utilisées en topologie algébrique dirigée :

Nom	Objets	Morphismes
PoSpc	espaces ordonnés	applications dirigées
CPoSpc	espaces ordonnés compacts	applications dirigées
CGPoSpc	espaces dirigés compactement générés	applications dirigées
CCPoSpc	espaces ordonnés	applications compactement continues croissantes

Le résultat qui suit récapitule les principales propriétés catégoriques de PoSpc et notamment sa structure symétrique monoïdale fermée dont le produit et l'exponentielle ont été décrits à la section I.1.2. En comparant avec la proposition B.1.32 (p.324) et le théorème I.2.1 (p.36), on constate la grande similitude entre Spc et PoSpc:

### I.2.1 THÉORÈME (PROPRIÉTÉS CATÉGORIQUES DE PoSpc)

La catégorie PoSpc est complète, cocomplète et possède une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée : étant donné deux espaces ordonnés  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$ ,  $\vec{X} \otimes \vec{Y}$  a pour ensemble sous-jacent  $|X| \times |Y|$  (produit de  $|X|$  et  $|Y|$  dans Set), pour topologie sous-jacente la topologie des astérisques sur  $|X| \times |Y|$  et pour relation d'ordre l'ordre produit (i.e.  $(x, y) \sqsubseteq_{\vec{X} \otimes \vec{Y}} (x', y')$  ssi  $x \sqsubseteq_{\vec{X}} x'$  et  $y \sqsubseteq_{\vec{Y}} y'$ ). L'adjoint à droite de  $- \otimes \vec{X}$  est donné par l'ensemble des di-applications de  $\vec{X}$  vers  $\vec{Y}$  (noté  $\vec{Y}^{\vec{X}}$  lorsque l'on calcule la partie objet de l'adjoint à droite en  $\vec{Y}$ ) muni de la topologie point à point et de l'ordre point à point (i.e.  $f \sqsubseteq_{\vec{Y}^{\vec{X}}} g$  si et seulement si  $\forall x \in |X| \quad f(x) \sqsubseteq_{\vec{Y}} g(x)$ ).

$$\vec{X} \otimes \vec{Y} := (|X| \times |Y|, \text{topologie des astérisques}, \text{ordre produit})$$

$$\vec{Y}^{\vec{X}} := (\text{PoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}], \text{topologie point à point}, \text{ordre point à point})$$

et on a canoniquement  $\vec{Y}^{\vec{X}_1 \otimes \vec{X}_2} \cong (\vec{Y}^{\vec{X}_2})^{\vec{X}_1}$  dans PoSpc.

De plus:

$$\text{PoSpc} \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{\kappa} \end{array} \text{CCPoSpc}$$

où  $i$  est le foncteur d'inclusion (noter qu'il n'est pas plein) et admet un adjoint à gauche  $\kappa$  qui est plein et fidèle. Les catégories CGPoSpc et CCPoSpc sont équivalentes, chacune d'elles est complète, cocomplète et cartésienne fermée. Le produit dans CCPoSpc est le produit dans PoSpc et le homset interne est l'ensemble des applications compactement continues croissantes de  $\vec{X}$  vers  $\vec{Y}$  muni de la topologie compact-ouvert et de l'ordre point à point. La catégorie CGPoSpc est une sous-catégorie coépirfléchissante de PoSpc.

La catégorie  $\text{CPoSpc}$  est une sous-catégorie épiréfléchissante de  $\text{PoSpc}$  dont  $\overrightarrow{[0, 1]}$  est un cogénérateur.

PREUVE. En admettant la proposition B.1.32 (p.324), les seules difficultés dans la démonstration du théorème I.2.1 (p.36) consistent à établir la cocomplétude de  $\text{PoSpc}$  et le fait que  $\overrightarrow{[0, 1]}$  est un cogénérateur de  $\text{CPoSpc}$ . Vérifions par exemple que les structures  $\overrightarrow{X} \otimes \overrightarrow{Y}$  et  $\overrightarrow{Y}^{\overrightarrow{X}}$  sont bien des espaces partiellement ordonnés. C'est évident pour  $\overrightarrow{X} \otimes \overrightarrow{Y}$  puisque l'ordre produit est fermé pour la topologie produit et que la topologie point à point est plus fine que la topologie produit. Quant à  $\overrightarrow{Y}^{\overrightarrow{X}}$ , si  $f \not\sqsubseteq_{\overrightarrow{Y}^{\overrightarrow{X}}} g$ , il existe un élément  $x$  de  $|X|$  tel que  $f(x) \not\sqsubseteq_{\overrightarrow{Y}} g(x)$ , en particulier, il existe deux ouverts de  $Y$ , notés  $O_1$  et  $O_2$ , tels que  $f(x)$  appartient à  $O_1$ ,  $g(x)$  appartient à  $O_2$  et quel que soient les éléments  $y_1$  de  $O_1$  et  $y_2$  de  $O_2$ , on a  $y_1 \not\sqsubseteq_{\overrightarrow{Y}} y_2$ . Donc

$$V := \left\{ (h_1, h_2) \in \text{PoSpc}[\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}] \times \text{PoSpc}[\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}] \mid h_1(x) \in O_1 \text{ et } h_2(x) \in O_2 \right\}$$

est un voisinage ouvert de  $(f, g)$  tel que quelquesoit l'élément  $(h_1, h_2)$  de  $V$ , on a  $h_1 \not\sqsubseteq_{\overrightarrow{Y}^{\overrightarrow{X}}} h_2$ . Pour tout ce qui concerne la partie "relation d'ordre" de la preuve, tout est trivial quoiqu'un peu long à écrire. En particulier, il faut vérifier que les fonctions d'évaluation et de transposition (ou curryfication) sont croissantes et aussi que les unités des réflexions et coréflexions décrites dans la proposition B.1.32 (p.324) deviennent croissantes une fois que l'on a "décoré" leurs espaces topologiques de départ et d'arrivée de la relation d'ordre donnée par le théorème I.2.1 (p.36). Il est facile de vérifier que les counités sont des épimorphismes puisque l'application sous-jacente de chaque composante est une identité. La complétude de la catégorie  $\text{PoSpc}$  est donnée par le lemme I.1.15.

■

### I.2.1 COGÉNÉRATEUR DE $\text{CPoSpc}$

La proposition qui suit généralise le lemme de prolongement de Urysohn

#### I.2.2 PROPOSITION (LEMME DE PROLONGEMENT DE URYSOHN DIRIGÉ)

Soit  $\overrightarrow{K}$  un espace ordonné compact et  $\overrightarrow{F}$  un sous-espace ordonné fermé de  $\overrightarrow{K}$ , quelle que soit l'application dirigée  $f$  appartenant à  $\text{CPoSpc}[\overrightarrow{F}, \overrightarrow{[0, 1]}]$  il existe une application dirigée  $g$  appartenant à  $\text{CPoSpc}[\overrightarrow{K}, \overrightarrow{[0, 1]}]$  telle que

$$\forall x \in |K| \quad g(x) = f(x)$$

PREUVE. Tous les détails se trouvent dans [78], qui donne même un résultat plus général. On trouve aussi ce résultat dans [53]. ■

#### I.2.3 COROLLAIRE

L'espace ordonné  $\overrightarrow{[0, 1]}$  est un cogénérateur de  $\text{CPoSpc}$ .

PREUVE. Soient deux morphismes distincts  $\vec{X} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} \vec{Y}$  de  $\mathbf{CPoSpc}$ , il existe un élément

$x$  de  $|X|$  tel que  $f(x) \neq g(x)$ , on peut supposer, par exemple, que  $g(x) \not\leq_{\vec{X}} f(x)$ , la fonction  $h$  définie sur  $\{f(x), g(x)\}$  par  $h(f(x)) = 0$  et  $h(g(x)) = 1$  est continue et croissante sur un fermé de  $\vec{Y}$  qui est compact. D'après la proposition I.2.2 (p.37), on peut prolonger  $h$  en  $h'$  défini sur  $\vec{Y}$  et on a bien sûr  $h' \circ f \neq h' \circ g$ . ■

## I.2.2 COCOMPLÉTUDE DE $\mathbf{PoSpc}$

C'est le premier point important et techniquement assez délicat de cette thèse, c'est aussi la première étape vers une structure de catégorie de modèles (voir [49]) sur  $\mathbf{PoSpc}$ . Pour cela, on va montrer que  $\mathbf{PoSpc}$  est une sous-catégorie réfléchissante d'une catégorie cocomplète, il suffira alors d'appliquer la proposition A.3.34 (p.302).

### I.2.4 DÉFINITION (ESPACES AVEC RELATION)

Un **espace avec relation** ou **r-espace**, est un espace topologique de *Hausdorff*  $X$  muni d'une relation réflexive  $\triangleright$  dont le graphe est fermé dans  $X \times X$ . Un morphisme de r-espaces  $f : (X, \triangleright_X) \longrightarrow (Y, \triangleright_Y)$  est une application continue entre les espaces topologiques sous-jacents qui préserve les relations, c'est-à-dire telle que :

$$\forall x_1, x_2 \in |X|, x_1 \triangleright_X x_2 \Rightarrow f(x_1) \triangleright_Y f(x_2)$$

Les espaces avec relation forment, avec leurs morphismes, une catégorie que l'on note  $\mathbf{RSp}$ .

Remarquons que l'on est obligé d'imposer que  $X$  soit un espace de *Hausdorff*, en effet,  $\triangleright$  n'étant pas supposée antisymétrique, on ne peut pas appliquer le raisonnement de la propriété I.1.3 (p.26). Une relation binaire réflexive est aussi appelée relation de **précédence**.

### I.2.5 PROPOSITION (TREILLIS COMPLET DES $r$ -ESPACES SUR $X$ )

Etant donné un espace de *Hausdorff*  $X$ , l'ensemble des relations sur  $|X|$  qui font de  $X$  un r-espace forme un treillis complet pour la relation  $\subseteq$  dont le plus petit élément est  $\Delta_X$  et le plus grand  $|X| \times |X|$ . De plus la borne inférieure d'une famille de telles relations sur  $X$  est l'intersection de ses membres.

$$\inf_{i \in \mathcal{I}} \triangleright_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \triangleright_i$$

PREUVE. Il suffit de noter que  $(X, \triangleright_X)$  est un espace avec relation si et seulement si le graphe de  $\triangleright_X$  est une sous-partie fermée de  $X \times X$  qui contient  $\Delta_X$ . ■

### I.2.6 PROPOSITION

Le foncteur d'oubli  $U$  de  $\mathbf{RSp}$  vers  $\mathbf{Haus}$  a un adjoint à gauche et un adjoint à droite.

PREUVE. Notons  $L$  et  $R$  les adjoints à gauche et à droite de  $U$ . Nous ne décrivons que la partie objet de  $L$  et de  $R$  : étant donné un espace de *Hausdorff*  $X$ , on a  $R(X) = (X, X^2)$ ,

c'est-à-dire que quels que soient les éléments  $x_1$  et  $x_2$  appartenant à  $X$ , on a  $x_1 \triangleright x_2$  et  $L(X) := (X, \Delta_X)$  i.e. quels que soient les éléments  $x_1$  et  $x_2$  de  $X$  on a  $x_1 = x_2$ . Noter que  $\Delta_X$  est fermé car  $X$  est un espace de *Hausdorff*. ■

### I.2.7 THÉORÈME (QUOTIENT DANS RSpC)

Soit  $(X, \triangleright_X)$  un objet de RSpC. Etant donné  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $|X|$ , il existe un unique, à isomorphisme près, objet  $(X, \triangleright_X)_\sim$  de RSpC ainsi qu'un unique morphisme  $q_\sim$  appartenant à  $\text{RSpC}[(X, \triangleright_X), (X, \triangleright_X)_\sim]$  vérifiant la propriété universelle suivante : quel que soit  $f$  appartenant à  $\text{RSpC}[(X, \triangleright_X), (Y, \triangleright_Y)]$  et satisfaisant

$$(x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$$

il existe un unique morphisme  $g$  appartenant à  $\text{RSpC}[(X, \triangleright_X)_\sim, (Y, \triangleright_Y)]$  tel que  $f = g \circ q_\sim$ , c'est-à-dire tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif dans RSpC.

$$\begin{array}{ccc} & (X, \triangleright_X)_\sim & \\ q_X \nearrow & & \searrow g \\ (X, \triangleright_X) & \xrightarrow{f} & (Y, \triangleright_Y) \end{array}$$

De plus :

1. l'espace topologique sous-jacent de  $(X, \triangleright_X)_\sim$  est  $X_\sim$ , c'est-à-dire le quotient de  $X$  par  $\sim$  dans Haus (voir la proposition B.1.16 (p.320)),
2. si  $\sim = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$  i.e.  $\{(x_1, x_2) / f(x_1) = f(x_2)\}$  alors  $|g|$  est injective,
3. en particulier, si  $\sim_1 \subseteq \sim_2$ , il existe un unique  $g : (X, \triangleright_X)_{\sim_1} \longrightarrow (X, \triangleright_X)_{\sim_2}$  qui rende le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} & (X, \triangleright_X)_{\sim_1} & \\ q_{\sim_1} \nearrow & & \searrow g \\ (X, \triangleright_X) & \xrightarrow{q_{\sim_2}} & (X, \triangleright_X)_{\sim_2} \end{array}$$

4. si  $f : (X, \triangleright_X) \longrightarrow (Y, \sqsubseteq_Y)$ , c'est-à-dire si le r-espace d'arrivée est un espace ordonné, alors on peut factoriser  $f$  comme suit

$$\begin{array}{ccc} & (X_\sim, \sqsubseteq) & \\ q_X \nearrow & & \searrow g \\ (X, \triangleright_X) & \xrightarrow{f} & (Y, \sqsubseteq_Y) \end{array}$$

où  $\sim := (f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$  et  $\sqsubseteq := (g \times g)^{-1}(\sqsubseteq_Y)$  est une relation d'ordre fermée.

PREUVE. Il suffit de munir  $X_\sim$  de l'intersection de toutes les relations réflexives et fermées  $\triangleright$  sur  $X_\sim$  telles que l'application  $q_\sim$  donnée par la proposition B.1.16 (p.320) induise un morphisme de RSpC de  $(X, \triangleright_X)$  vers  $(X_\sim, \triangleright)$ . Une telle intersection est bien définie car  $|X_\sim| \times |X_\sim|$  convient et donc la famille dont on calcule l'intersection n'est pas vide. Cette



relation est notée  $\triangleright_{\sim}$ . Ainsi  $q_{\sim}$  appartient à  $\mathbf{RSp}[(X, \triangleright), (X_{\sim}, \triangleright_{\sim})]$ . Maintenant, étant donné un morphisme  $f$  appartenant à  $\mathbf{RSp}[(X, \triangleright_X), (Y, \triangleright_Y)]$  et satisfaisant

$$x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

la proposition B.1.16 (p.320) fournit une unique application  $g$  entre les espaces topologiques sous-jacents telle que  $f = g \circ q_{\sim}$ . Il reste à vérifier que  $g$  induit un morphisme de  $\mathbf{RSp}$  : comme  $f$  est un morphisme de  $\mathbf{RSp}$ , on a  $\triangleright_X \subseteq (f \times f)^{-1}(\triangleright_Y)$  et puisque, dans Haus, on a  $f = g \circ q_{\sim}$ , on a  $(f \times f)^{-1}(\triangleright_Y) = (q_{\sim} \times q_{\sim})^{-1}((g \times g)^{-1}(\triangleright_Y))$  et donc  $\triangleright_X \subseteq (q_{\sim} \times q_{\sim})^{-1}((g \times g)^{-1}(\triangleright_Y))$ ; or  $(g \times g)^{-1}(\triangleright_Y)$  est une relation fermée et réflexive de  $X_{\sim}$  et donc par définition de  $\triangleright_{\sim}$ , on a  $\triangleright_{\sim} \subseteq (g \times g)^{-1}(\triangleright_Y)$ , ce qui signifie exactement que  $g$  est un morphisme de  $\mathbf{RSp}$ . On a au passage prouvé 1) et donc d'après la proposition B.1.16 (p.320) on a également 2).

Si  $\sqsubseteq_Y$  est une relation d'ordre fermée alors il en va de même de  $(g \times g)^{-1}(\sqsubseteq_Y)$ . Le seul point n'étant pas trivial est l'antisymétrie. En effet, si on a  $g(x_1) \sqsubseteq_Y g(x_2)$  et  $g(x_2) \sqsubseteq_Y g(x_1)$  alors  $g(x_1) = g(x_2)$  car  $\sqsubseteq_Y$  est, en tant que relation d'ordre, antisymétrique. On invoque alors, d'après le premier point, le fait que  $g$  soit injective pour conclure que  $x_1 = x_2$ . ■

Pour chaque relation d'équivalence  $\sim$  sur  $|X|$ , on choisit un représentant du quotient  $(X, \triangleright_X)_{\sim}$  que l'on note  $X(\sim)$  pour plus de simplicité. Par définition, on pose  $X(\sim_2) \sqsubseteq X(\sim_1)$  si et seulement si  $\sim_1 \subseteq \sim_2$ . D'après le troisième point du théorème I.2.7 (p.39), si  $\sim_1 \subseteq \sim_2$  alors on a un unique  $g : X(\sim_1) \rightarrow X(\sim_2)$  faisant commuter le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} & (X, \triangleright_X)_{\sim_1} & \\ q_{\sim_1} \nearrow & & \searrow g \\ (X, \triangleright_X) & \xrightarrow{q_{\sim_2}} & (X, \triangleright_X)_{\sim_2} \end{array}$$

Le treillis des relations d'équivalence sur  $|X|$  étant complet, avec pour borne inférieure d'une famille de relations d'équivalence l'intersection de ces relations, la borne supérieure d'une famille de quotients  $X(\sim_i)$  devient

$$X\left(\bigcap_i \sim_i\right)$$

L'ensemble des quotients de  $(X, \triangleright_X)$  ordonné par  $\sqsubseteq$ , forme donc un treillis complet dont le plus petit élément est  $\{*\}$  et le plus grand  $X$ ; d'après ce que l'on vient de voir, on peut donc représenter ce treillis dans  $\mathbf{RSp}$ .

On note  $\mathbf{CLat}$  la catégorie des treillis complets dont les morphismes sont les applications préservant les bornes supérieures et inférieures (voir la section A.1.3).

### I.2.8 COROLLAIRE (TREILLIS COMPLET DES QUOTIENTS D'UN $r$ -ESPACE)

La sous-catégorie de  $\mathbf{RSp}$  dont les objets sont les représentants  $X(\sim)$  des quotients de  $(X, \triangleright_X)$  et les morphismes les applications dirigées  $g$  données par le troisième point du théorème I.2.7 (p.39) est isomorphe dans  $\mathbf{Cat}$  et dans  $\mathbf{CLat}$  au treillis des quotients de  $(X, \triangleright_X)$  ordonné par  $\sqsubseteq$ . Par ailleurs, on a une correspondance de *Galois* entre le treillis des quotients de  $(X, \triangleright_X)$  ordonné par  $\sqsubseteq$  et le dual du treillis des relations d'équivalence sur  $|X|$  : l'application qui à  $\sim$  associe  $X(\sim)$  est le membre de gauche de cette correspondance.

PREUVE. On note que  $\bigcap_i \sim_i$  est la borne supérieure de la famille  $\sim_i$  dans le dual du treillis des relations d'équivalence sur  $|X|$ . Le seul point restant à vérifier est l'existence d'une correspondance de *Galois*, ce qui découle immédiatement de la proposition A.3.22 (p.300) car on a

$$\bigvee_i X(\sim_i) = X\left(\bigcap_i \sim_i\right)$$

Le foncteur  $X(-)$  admet donc un adjoint à droite. ■

### I.2.9 PROPOSITION

La catégorie  $\mathbf{RSpC}$  est complète et cocomplète.

PREUVE. Désignons par  $U$  le foncteur d'oubli de  $\mathbf{RSpC}$  vers  $\mathbf{Haus}$ . D'après la proposition I.2.6 (p.38) nous savons que  $U$  est à la fois un adjoint à gauche et un adjoint à droite, donc, d'après la propriété A.3.14 (p.298), il préserve les limites et les colimites. Ainsi, pour trouver la limite (respectivement la colimite) d'un foncteur  $F$  à valeurs dans  $\mathbf{RSpC}$ , il suffit de calculer la limite (respectivement la colimite) de  $U \circ F$  qui est à valeurs dans  $\mathbf{Haus}$  et d'équiper l'espace topologique ainsi obtenu de la relation réflexive fermée adéquate. Pour les produits, coproduits et égalisateurs, c'est évident. Construisons le coégalisateur

de  $(X, \triangleright_X) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} (Y, \triangleright_Y)$  : posons  $\sim$  la relation d'équivalence sur  $|Y|$  engendrée par la

relation  $\{(f(x), g(x)) \mid x \in |X|\}$ ; il est clair que quels que soient les éléments  $y$  et  $y'$  de  $|Y|$  et le morphisme  $h$  appartenant à  $\mathbf{RSpC}[(Y, \triangleright_Y), (A, \triangleright_A)]$  tel que  $h \circ f = h \circ g$ , si  $y \sim y'$  alors  $h(y) = h(y')$ . D'après le théorème I.2.7 (p.39) on a un unique morphisme  $h'$  de  $\mathbf{RSpC}[(Y, \triangleright_Y)_{\sim}, (A, \triangleright_A)]$  tel que  $h = h' \circ q_{\sim}$ . Le morphisme  $q_{\sim}$  fournit donc le coégalisateur voulu. On conclue en appliquant les propositions A.2.12 (p.290) et A.2.13 (p.290). ■

### I.2.10 THÉORÈME

La catégorie  $\mathbf{PoSpC}$  est une sous-catégorie épiréfléchissante de  $\mathbf{RSpC}$ .

PREUVE. Nous allons montrer que le foncteur d'inclusion  $i$  de  $\mathbf{PoSpC}$  vers  $\mathbf{RSpC}$  satisfait les hypothèses du théorème du foncteur adjoint (proposition A.3.17 (p.298)). Tout d'abord, nous avons besoin de la complétude de  $\mathbf{PoSpC}$ , qui est donnée par le lemme I.1.15 (p.29). Nous avons également besoin de montrer que  $i$  préserve les limites ce qui est équivalent à prouver qu'il préserve les produits et les égalisateurs, (voir la proposition A.3.15 (p.298)). Il suffit pour cela de se référer à la preuve du lemme I.1.15 (p.29), les produits et égalisateurs sont calculés dans  $\mathbf{RSpC}$  de la même façon que dans  $\mathbf{PoSpC}$ . Dans les deux cas, l'espace sous-jacent du produit est le produit des espaces sous-jacents et la relation sous-jacente est le produit (ensembliste) des relations sous-jacentes. On a juste à remarquer qu'un produit (ensembliste) de relations d'ordre est une relation d'ordre sur le produit des ensembles sous-jacents. L'égalisateur de  $f, g : (X, \triangleright_X) \longrightarrow (Y, \triangleright_Y)$  est donné par la structure induite sur  $\{x \in U(X) \mid f(x) = g(x)\}$ , il suffit alors de constater que si  $\triangleright_X = \sqsubseteq_X$  est une relation d'ordre, alors il en va de même de la structure induite. La propriété d'ensemble des solutions s'exprime ici en disant que pour tout espace avec relation  $(X, \triangleright_X)$ , il existe un ensemble  $\mathcal{S}$  d'espaces ordonnés tel que tout morphisme de  $\mathbf{RSpC}$  dont la source est  $(X, \triangleright_X)$  et le but un espace ordonné peut être factorisé au travers de l'un

des espaces ordonnés appartenant à l'ensemble  $\mathcal{S}$  : ceci nous est directement donné par le quatrième point du théorème I.2.7 (p.39). Ainsi  $i$  a un adjoint à gauche que l'on note  $r$ .

Le preuve de l'existence du foncteur adjoint que nous avons donné est loin d'être explicite, aussi ne fournit-elle aucune intuition du comportement ni de la "construction" du foncteur  $r$ . En fait, l'unité de l'adjonction  $\eta_{(X, \triangleright_X)}$  est la limite dans  $\mathbf{RSpC}$  du foncteur  $F$  suivant: sa catégorie de départ est l'ensemble ordonné par l'inclusion  $\subseteq$  (vu comme une petite catégorie) des relations d'équivalences  $\sim$  sur  $|X|$  telles que  $(|X|, \triangleright_X)_\sim$  soit un espace ordonné. Alors  $F(\sim) := (X, \triangleright_X)_\sim$  et  $F(\sim_1 \subseteq \sim_2) := g$  donné par le troisième point du théorème I.2.7 (p.39). C'est la manière catégorique de dire que  $\eta_{(X, \triangleright_X)}$  est le plus grand quotient de  $(X, \triangleright_X)$  (i.e. le plus petit  $\sim$  sur  $|X|$ ) tel que  $(X, \triangleright_X)_\sim$  soit un espace ordonné (voir le corollaire I.2.8 (p.40)). Ceci a un sens car la relation qui identifie tout aboutit à un singleton qui, si simple soit-il, est un espace ordonné. Il faut cependant vérifier que, si l'image d'un foncteur est dans  $\mathbf{PoSpc}$  alors sa limite dans  $\mathbf{RSpC}$  est encore dans  $\mathbf{PoSpc}$ . Cela semble très naturel et c'est évident si l'on considère seulement des produits et des égalisateurs. Formellement, il suffit de (re)lire la preuve de la proposition A.2.12 (p.290), disponible dans [9] ou [59]. Alors le quatrième point du théorème I.2.7 (p.39) permet de conclure. ■

On a finalement le résultat attendu :

#### I.2.11 COROLLAIRE

La catégorie  $\mathbf{PoSpc}$  est cocomplète.

PREUVE. C'est une conséquence immédiate du théorème I.2.10 (p.41) et de la proposition A.3.34 (p.302). ■

Le théorème I.2.7 (p.39) peut être adapté à  $\mathbf{PoSpc}$ :

#### I.2.12 THÉORÈME (QUOTIENT DANS $\mathbf{PoSpc}$ )

Soit  $\vec{X}$  un objet de  $\mathbf{PoSpc}$ . Etant donné  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $|X|$ , il existe un unique, à isomorphisme près, objet  $\vec{X}_\sim$  de  $\mathbf{PoSpc}$  ainsi qu'une unique application dirigée  $q_\sim$  appartenant à  $\mathbf{PoSpc}[\vec{X}, \vec{X}_\sim]$  et vérifiant la propriété universelle suivante :

quelle que soit l'application dirigée  $f$  appartenant à  $\mathbf{PoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}]$  et satisfaisant  $(x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$ , il existe une unique application dirigée  $g$  appartenant à  $\mathbf{PoSpc}[\vec{X}_\sim, \vec{Y}]$  telle que le diagramme ci-dessous soit commutatif dans  $\mathbf{PoSpc}$ .

$$\begin{array}{ccc} & \vec{X}_\sim & \\ q_\sim \nearrow & & \searrow g \\ \vec{X} & \xrightarrow{f} & \vec{Y} \end{array}$$

De plus :

1. Si  $\sim = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$ , i.e.  $\{(x_1, x_2) | f(x_1) = f(x_2)\}$ , alors  $g$  est injective
2. En particulier, si  $\sim_1 \subseteq \sim_2$ , il existe un unique morphisme  $g : \vec{X}_{\sim_1} \longrightarrow \vec{X}_{\sim_2}$  qui fasse

commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & \vec{X}_{\sim_1} & \\
 q_{\sim_1} \nearrow & & \searrow g \\
 \vec{X} & \xrightarrow{q_{\sim_2}} & \vec{X}_{\sim_2}
 \end{array}$$

PREUVE. Le quotient est  $r((X, \sqsubseteq_X)/\sim)$  où  $(X, \sqsubseteq_X)/\sim$  est le quotient dans  $\mathbf{RSpc}$  donné par le théorème I.2.7 (p.39) et  $r$  l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion  $i$  décrit dans la théorème I.2.10 (p.41). ■

On reprend les notations de la construction des treillis de quotients dans  $\mathbf{RSpc}$  et du corollaire I.2.8 (p.40). Etant donné un espace ordonné  $(X, \sqsubseteq_X)$  et  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $|X|$ ,  $i(X, \sqsubseteq_X)$  est un r-espace dont le quotient par  $\sim$  sera encore noté, par abus d'écriture,  $X(\sim)$ . Alors  $r(X(\sim))$  sera, par définition, le quotient de  $(X, \sqsubseteq_X)$  par  $\sim$  dans  $\mathbf{PoSpc}$ . On pose alors  $r(X(\sim_2)) \sqsubseteq r(X(\sim_1))$  si et seulement si  $\sim_1 \sqsubseteq \sim_2$ . D'après le deuxième point du théorème I.2.12 (p.42), si  $r(X(\sim_2)) \sqsubseteq r(X(\sim_1))$ , alors on a un unique morphisme  $g$  dans  $\mathbf{PoSpc}$  qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \vec{X}_{\sim_1} & \\
 q_{\sim_1} \nearrow & & \searrow g \\
 \vec{X} & \xrightarrow{q_{\sim_2}} & \vec{X}_{\sim_2}
 \end{array}$$

on peut alors représenter le treillis des quotients de  $(X, \sqsubseteq_X)$  dans  $\mathbf{PoSpc}$  comme une sous-catégorie de  $\mathbf{PoSpc}$

#### I.2.13 COROLLAIRE (TREILLIS COMPLET DES QUOTIENTS D'UN ESPACE ORDONNÉ)

La sous-catégorie de  $\mathbf{PoSpc}$  dont les objets sont de la forme  $r(X(\sim))$  et les morphismes les applications dirigées  $g$  données par le troisième point du théorème I.2.12 (p.42) est isomorphe dans  $\mathbf{Cat}$  et dans  $\mathbf{CLat}$  au treillis des quotients de  $\vec{X}$  ordonné par  $\sqsubseteq$ . Par ailleurs, on a une correspondance de *Galois* entre le treillis des quotients de  $(X, \sqsubseteq_X)$  ordonné par  $\sqsubseteq$  dans  $\mathbf{RSpc}$  et le treillis des quotients de  $(X, \sqsubseteq_X)$  ordonné par  $\sqsubseteq$  dans  $\mathbf{PoSpc}$ . Cette correspondance est induite par l'adjonction  $r \dashv i$  décrite au théorème I.2.10 (p.41). Par ailleurs on a une correspondance de *Galois* entre le treillis des quotients de  $\vec{X}$  ordonné par  $\sqsubseteq$  dans  $\mathbf{PoSpc}$  et le dual du treillis des relations d'équivalence sur  $|X|$  : l'application qui a  $\sim$  associe  $X(\sim)$  est le membre de gauche de cette correspondance.

PREUVE.  $r(X(-))$  est un adjoint à gauche comme composition d'adjoints à gauche. ■

#### I.2.14 REMARQUE

Soit  $(X, \triangleright)$  un r-espace, on a

$$\forall x_1, x_2 \in |X|, x_1 \triangleright x_2 \text{ et } x_2 \triangleright x_1 \Rightarrow \eta_{(X, \triangleright)}(x_1) = \eta_{(X, \triangleright)}(x_2)$$

Plus généralement, si on a une suite finie  $x_0 \triangleright x_1 \triangleright \dots \triangleright x_n \triangleright x_0$  alors  $\eta_{(X, \triangleright)}(x_0) = \eta_{(X, \triangleright)}(x_1) = \dots = \eta_{(X, \triangleright)}(x_n)$ , où  $\eta_{(X, \triangleright)}$  est la composante  $(X, \triangleright)$  de la counité  $\eta$  de l'adjonction  $i \dashv r$ .

PREUVE. Ceci découle du fait que  $\eta_{(X, \triangleright_X)}$  préserve les relations et que son r-espace d'arrivée est en fait un espace ordonné. ■

Le théorème I.2.10 (p.41) décrit une situation analogue à celle que nous rencontrerons dans le cadre de l'étude et de la comparaison des catégories  $\text{LfCat}$  (voir la définition III.1.2) et  $\text{Cat}$ . En particulier, cette situation est parfaitement illustrée par l'exemple suivant. Considérons les trois espaces ordonnés  $\overrightarrow{X_1} := \overrightarrow{X_2} := \overrightarrow{[0, 1]}$  et  $\{0, 1\}$ , c'est-à-dire la paire  $\{0, 1\}$  muni de la topologie discrète et de l'ordre trivial, donc 0 et 1 ne sont pas comparables. Alors les deux applications

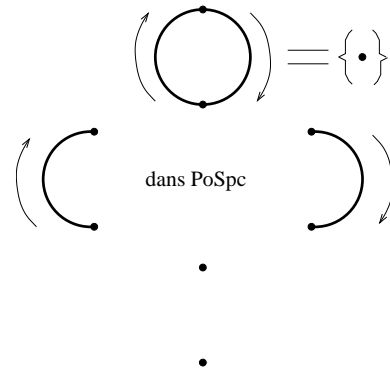
$$\begin{array}{ccc}
 f_1 : \{0, 1\} \longrightarrow \overrightarrow{X_1} & \text{et} & f_2 : \{0, 1\} \longrightarrow \overrightarrow{X_2} \\
 x \longmapsto x & & x \longmapsto 1 - x
 \end{array}$$

induisent des morphismes de  $\text{PoSpc}$ . Notons  $\overrightarrow{X_3}$  la somme amalgamée de

$$\begin{array}{ccc}
 \overrightarrow{[0, 1]} & & \overrightarrow{[0, 1]} \\
 & \swarrow f_1 & \searrow f_2 \\
 & \{0, 1\} &
 \end{array}$$

d'après la remarque I.2.14 (p.43), il est immédiat que  $|X_3|$  est un singleton. La "boucle" que l'on a essayé de créer dans  $\text{PoSpc}$  est "écrasée" et réduite à un singleton. Notons que, si on calcule cette somme amalgamée dans  $\text{RSpc}$ , l'espace topologique sous-jacent est  $S^1$ , on a une "vraie" boucle.

La figure du dessus à droite schématise le phénomène décrit précédemment, le symbole d'égalité est à comprendre comme "le reflet dans  $\text{PoSpc}$  de la somme amalgamée décrite précédemment calculée dans  $\text{RSpc}$  est un singleton."



Ce chapitre est consacré à la construction et aux propriétés les plus marquantes du foncteur qui associe à chaque espace ordonné  $\vec{X}$  sa catégorie fondamentale, notée  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ . Cette dernière est l'analogue du groupoïde fondamental d'un espace topologique  $X$ , noté  $\pi_1(X)$ . Si la construction de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  est formellement la même que celle de  $\pi_1(X)$  décrite dans la définition B.2.6, les résultats relatifs à  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  se démarquent radicalement de ceux auxquels la topologie algébrique classique nous a habitué. Alors que le chapitre I indiquait les similitudes entre les catégories  $\mathbf{Spc}$  et  $\mathbf{PoSpc}$ , celui-ci met en évidence et insiste sur les différences majeures qui existent entre la topologie algébrique classique et son pendant dirigé dans le cas de  $\mathbf{PoSpc}$ . Tout d'abord nous verrons qu'une pathologie comme la courbe de *Peano* est exclue dans  $\mathbf{PoSpc}$  et que deux chemins dirigés ayant la même image sont nécessairement dihomotopes. Ceci découle du théorème de classification des images d'un chemin dirigé qui est en rapport d'une part avec le problème de *Suslin* (voir [52]) et d'autre part avec l'étude des arcs généralisés (voir [79]). On exposera également un exemple dans lequel la catégorie fondamentale détecte des trous de dimension supérieure. Enfin, on montrera que la groupoïdification de la catégorie fondamentale est "plus fine" que le groupoïde fondamental de l'espace topologique sous-jacent et même, sur certains exemples, strictement plus fine.

## II.1 CHEMINS ET HOMOTOPIES DIRIGÉS

### II.1.1 DÉFINITION (CHEMIN DIRIGÉ)

Soit un espace ordonné  $\vec{X}$ . On appelle **chemin dirigé** ou **dichemin** sur  $\vec{X}$  tout élément de  $\mathbf{PoSpc}[[0, 1], \vec{X}]$ .

### II.1.2 REMARQUE (CHEMINS ET DICHEMINS)

Remarquons que  $[0, 1]$  muni de la topologie classique et de l'ordre trivial est un espace ordonné que l'on note encore  $[0, 1]$  (c'est donc l'image de l'espace de *Hausdorff*  $[0, 1]$  par

l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de  $\text{PoSpc}$  vers  $\text{Haus}$ , voir la proposition I.1.14). Alors, si  $\overrightarrow{X}$  est un espace ordonné, un chemin sur  $X$  est un dichemin de  $[0, 1]$  sur  $\overrightarrow{X}$  et *vice versa*.

### II.1.3 DÉFINITION (HOMOTOPIE DIRIGÉE)

Etant donnés deux dichemins  $\gamma_0, \gamma_1$  sur  $\overrightarrow{X}$  tels que

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) =: x \text{ et } \gamma_0(1) = \gamma_1(1) =: y$$

une **homotopie dirigée** ou **dihomotopie** de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$  est par définition un morphisme  $H$  appartenant à  $\text{PoSpc}[[\overrightarrow{[0, 1]}] \times \overrightarrow{[0, 1]}, \overrightarrow{X}]$  tel que

$$\forall s, t \in [0, 1] \begin{cases} H(0, t) = \gamma_0(t) \text{ et } H(1, t) = \gamma_1(t) \\ H(s, 0) = x \text{ et } H(s, 1) = y \end{cases}$$

### II.1.4 PROPRIÉTÉ (RÉFLEXIVITÉ ET TRANSITIVITÉ DE L'EXISTENCE D'UNE DIHOMOTOPIE)

Pour tout dichemin  $\gamma$  il existe une dihomotopie de  $\gamma$  vers  $\gamma$ . S'il existe une dihomotopie de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$  et une dihomotopie de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_2$  alors il existe une dihomotopie de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_2$ .

PREUVE. L'application

$$H : \overrightarrow{[0, 1]} \times \overrightarrow{[0, 1]} \longrightarrow \overrightarrow{X} \\ (s, t) \longmapsto \gamma(t)$$

donne la réflexivité et si  $H_0$  et  $H_1$  sont des dihomotopies respectivement de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$  et de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_2$  alors

$$H_2 : \overrightarrow{[0, 1]} \times \overrightarrow{[0, 1]} \longrightarrow \overrightarrow{X} \\ (s, t) \longmapsto \begin{cases} H_0(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_1(2s - 1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est une dihomotopie de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_2$ . ■

Comme le laisse penser la propriété II.1.4 (p.46), la notion d'homotopie dirigée de la définition II.1.3 (p.46) n'engendre pas une relation symétrique. Par exemple, dans  $\overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}}$ , il n'existe pas de dihomotopie de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$  ni même de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_0$  où

$$\gamma_0 : \overrightarrow{[0, 1]} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}} \qquad \gamma_1 : \overrightarrow{[0, 1]} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}} \\ t \longmapsto \begin{cases} (2t, 0) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad t \longmapsto \begin{cases} (0, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2t - 1, 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Supposons que  $H$  soit une telle dihomotopie, pour chaque paramètre de déformation  $s$  dans  $\overrightarrow{[0, 1]}$  on peut poser  $t_s := \min\{t \in [0, 1] \mid \pi_1(H(s, t_s)) = 1\}$  et  $t'_s := \min\{t \in [0, 1] \mid \pi_2(H(s, t_s)) = 1\}$ , de tels minima existent car  $H$ ,  $\pi_1$  et  $\pi_2$  (les projections) sont continues, en conséquence  $(\pi_1 \circ H(s, -))^{-1}(\{1\})$  et  $(\pi_2 \circ H(s, -))^{-1}(\{1\})$  sont compacts comme fermés de  $[0, 1]$  et donc admettent un minimum. Supposons maintenant, par

exemple, que  $t_s \leq t'_s$ , on en déduit que  $H(s, t_s) \leq H(s, t'_s)$ . Sachant que  $\pi_1(H(s, t_s)) = 1$  et  $\pi_2(H(s, t'_s)) = 1$ , on a  $H(s, t_s) = H(s, t'_s) = (1, 1)$ . Mais alors  $H(0, -) \neq \gamma_0$ ,  $H(0, -) \neq \gamma_1$ ,  $H(0, -) \neq \gamma_1$  et  $H(1, -) \neq \gamma_1$ . On parvient à la même conclusion en supposant que  $t'_s \leq t_s$ .

Cependant, il existe une dihomotopie de  $\gamma_0$  vers

$$\begin{aligned} \gamma_2 : \overrightarrow{[0, 1]} &\longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}} \\ t &\longmapsto (t, t) \end{aligned}$$

un exemple d'une telle dihomotopie étant donné par

$$\begin{aligned} H : \overrightarrow{[0, 1]} \times \overrightarrow{[0, 1]} &\longrightarrow \overrightarrow{[0, 1]} \times \overrightarrow{[0, 1]} \\ (s, t) &\longmapsto \begin{cases} \left( \frac{2t}{1+s}, \frac{2ts}{1+s} \right) & \text{si } t \in [0, \frac{1+s}{2}] \\ (1, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

De même, il existe une dihomotopie de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_2$ . En revanche, il n'existe pas de dihomotopie de  $\gamma_2$  vers  $\gamma_1$ , en effet, si une telle dihomotopie existait, on aurait, d'après la propriété II.1.4 (p.46) une dihomotopie de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$ . Déjà, le cas dirigé se distingue du cas classique par cette absence de symétrie.

Une des autres différences majeures de la topologie algébrique dirigée par rapport à la topologie algébrique classique est son aspect "local". Plus explicitement, on a la propriété

### II.1.5 PROPRIÉTÉ

Soit un espace ordonné  $\overrightarrow{X}$  et deux chemins dirigés  $\gamma_0, \gamma_1$  tels que  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) =: x$  et  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) =: y$  alors toute homotopie dirigée de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$  est à valeurs dans

$$\{z \in X \mid x \sqsubseteq_{\overrightarrow{X}} z \sqsubseteq_{\overrightarrow{X}} y\}$$

PREUVE. Soit  $H$  une telle homotopie dirigée,  $H$  étant en particulier une application croissante telle que  $H(0, 0) = x$  et  $H(1, 1) = y$ , pour tout  $(x, y)$  appartenant à  $\overrightarrow{[0, 1]} \times \overrightarrow{[0, 1]}$  on a

$$H(0, 0) \sqsubseteq_{\overrightarrow{X}} H(x, y) \sqsubseteq_{\overrightarrow{X}} H(1, 1)$$

■

Observons l'exemple du sous-espace ordonné du cube unité dirigé  $\overrightarrow{X}$  dont l'espace topologique sous-jacent est

$$X := ([0, 1] \times [0, 1] \setminus ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[ \times ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[) \times ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$$

C'est donc une sorte de "tore carré de section carrée". Soient les chemins dirigés

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \overrightarrow{[0, 1]} &\longrightarrow \overrightarrow{X} \\ t &\longmapsto \begin{cases} (0, 2t, \frac{1}{2}) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2t - 1, 1, \frac{1}{2}) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$



et

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \overrightarrow{[0, 1]} &\longrightarrow \overrightarrow{X} \\ t &\longmapsto \begin{cases} (2t, 0, \frac{1}{2}) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1, 2t - 1, \frac{1}{2}) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

On note aussi  $|\gamma_0|$  et  $|\gamma_1|$  leurs chemins sous-jacents. Il n'existe pas d'homotopie classique entre  $|\gamma_0|$  et  $|\gamma_1|$  donc il n'en existe pas non plus de dirigée de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$ . Ajoutons maintenant à  $\overrightarrow{X}$  un "plancher" et un "plafond", c'est-à-dire que l'on considère le cube unité troué dirigé dont  $\overrightarrow{X}$  est clairement un sous-espace ordonné. En vertu de la propriété II.1.5 (p.47), il n'y a toujours pas d'homotopie dirigée de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$ , en revanche,  $|\gamma_0|$  et  $|\gamma_1|$  sont homotopes au sens classique.

### II.1.1 IMAGES DES DICHEMINS

L'étude et la classification des images des dichemins est un des points importants de la topologie algébrique dirigée dans  $\text{PoSpc}$ . Les conséquences du théorème II.1.25 (p.59) sont très fortes et interdisent des situations pathologiques connues en topologie algébrique classique.

#### ENSEMBLE TOTALEMENT ORDONNÉS COMPLETS ET SÉPARABLES

##### II.1.6 DÉFINITION (ENSEMBLE TOTALEMENT ORDONNÉ)

Soit  $X$  un ensemble et  $\leq_X$  une relation d'ordre sur  $X$ , si quels que soient  $x_1$  et  $x_2$  appartenant à  $X$  on a  $x_1 \leq x_2$  ou  $x_2 \leq x_1$ , on dit que  $(X, \leq)$  est un **ensemble totalement ordonné**. La sous-catégorie pleine de  $\text{PoSet}$  dont les objets sont les ensembles totalement ordonnés est notée  $\text{TLat}$ . Une sous-partie  $A$  de  $X$  est appelée **segment final** (respectivement **segment initial**) lorsque:

$$\forall a \in A \forall x \in X a \leq x \Rightarrow x \in A \quad (\text{respectivement } \forall a \in A \forall x \in X x \leq a \Rightarrow x \in A)$$

Dans certains ouvrages, et pour le cas plus général des ensembles partiellement ordonnés, on parle de sous-partie **croissante** (respectivement **décroissante**). En particulier, la famille réunissant les segments initiaux sans maximum et les segments finaux sans minimum génère une topologie appelée topologie de l'ordre et notée  $\tau(\leq_X)$ . Un sous-partie  $C$  de  $X$  est dite **convexe (pour  $\leq_X$ )** quand

$$\forall a, b \in C \forall x \in X a \leq_X x \leq_X b \Rightarrow x \in C$$

Un ensemble totalement ordonné est dit **non borné** s'il n'a ni maximum ni minimum.

##### II.1.7 REMARQUE

Tout convexe non borné appartient à  $\tau(\leq_X)$ , mais l'ensemble des convexes non bornés n'engendre pas forcément  $\tau(\leq_X)$ , voir par exemple  $\{\frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  muni de l'ordre classique de  $\mathbb{R}$ . En revanche si on y ajoute les segments initiaux sans maximum et les segments finaux sans minimum, on a une base de  $\tau(\leq_X)$ . Dans le contre-exemple précédent,  $\{\frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$  ne peut pas s'écrire comme une union d'intersections finies de convexes non bornés. Comparer avec la remarque B.1.38 (p.327).

On note  $\text{Lat}$  la catégorie des ensembles ordonnés dont toute paire d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure, les morphismes de  $\text{Lat}$  sont les applications qui préservent les bornes supérieures et inférieures binaires, la catégorie  $\text{Lat}$  est également définie dans la section A.1.3 (p.285).

### II.1.8 PROPOSITION

$\text{TLat}$  est une sous-catégorie pleine de  $\text{Lat}$

PREUVE. Il suffit de remarquer que pour toute paire  $\{x, y\}$  d'un ensemble ordonné, on a

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \text{ et } x \vee y = y$$

donc si  $f$  préserve  $\wedge$  et  $\vee$ , elle préserve aussi l'ordre entre deux ensembles totalement ordonnés. ■

### II.1.9 REMARQUE (ISOMORPHISMES DE CHAÎNES ET D'ENSEMBLES ORDONNÉS)

Les isomorphismes de  $\text{TLat}$  sont les morphismes de  $\text{TLat}$  dont l'application ensembliste sous-jacente est une bijection, en effet, si  $f$  appartenant à  $\text{PoSet}[(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)]$  induit une application ensembliste bijective, notons  $g$  l'inverse, dans  $\text{Set}$ , de  $f$ . Si  $y_1 <_Y y_2$  dans  $(Y, \leq_Y)$ , alors on a  $g(y_1) <_X g(y_2)$  ou  $g(y_2) <_X g(y_1)$ , le second cas est impossible, sinon on aurait  $f(g(y_2)) <_Y f(g(y_1))$ , c'est-à-dire  $y_2 <_Y y_1$ . Ceci est faux en général dans  $\text{PoSet}$ , pour s'en convaincre, observer  $f : \{a, b\} \longrightarrow \{0, 1\}$  tel que  $f(a) = 0$  et  $f(b) = 1$  et où  $0 < 1$  alors que  $a$  et  $b$  ne sont pas comparables. Un isomorphisme de  $\text{PoSet}$  est un morphisme  $f$  de  $\text{PoSet}$  dont l'application ensembliste sous-jacente est une bijection et telle que pour toute paire d'éléments  $\{x_1, x_2\}$  du poset de départ de  $f$  on a :

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Etant donné  $(X, \leq_X)$  un ensemble totalement ordonné, pour  $a, b \in X$  on introduit les notations suivantes

- $]a, \rightarrow [ := \{x \in X \mid x > a\}$
- $] \leftarrow, b[ := \{x \in X \mid x < b\}$
- $]a, b[ := ]a, \rightarrow [ \cap ] \leftarrow, b[ = \{x \in X \mid a < x < b\}$

et de façon analogue  $[a, \rightarrow [$ ,  $] \leftarrow, b]$  et  $[a, b]$ .

Remarquons que  $]a, b[$  peut être vide, avoir des bornes ou être réduit à un singleton même si  $a < b$ , cela se produit par exemple dans  $\mathbb{N}$ . On va relier les ensembles totalement ordonnés aux espaces ordonnés.

### II.1.10 PROPOSITION

Si  $(X, \leq_X)$  est un ensemble totalement ordonné et si on note  $\mu(\leq_X)$  la topologie sur  $X$  engendrée par la famille

$$\left( ]x, \rightarrow [ \right)_{x \in X} \cup \left( ] \leftarrow, x[ \right)_{x \in X}$$

alors,

1.  $(X, \mu(\leq_X), \leq_X)$  est un espace ordonné,

2. pour toute topologie  $\tau_X$  sur  $X$  telle que  $(X, \tau_X, \leq_X)$  soit un espace ordonné, on a

$$(\mu(\leq_X) \subseteq \tau_X)$$

On peut donc définir  $\mu(\leq_X)$  comme la plus grossière des topologies faisant de  $(X, \leq_X)$  un espace ordonné,

3. la topologie  $\mu(\leq_X)$  admet pour base la famille des  $]x, \rightarrow [$ ,  $] \leftarrow, x[$  et  $]x_1, x_2[$  où  $x_1, x_2 \in X$ ,

4. par ailleurs, pour toute sous-partie  $A$  de  $X$ , si  $\sup(A)$  (respectivement  $\inf(A)$ ) existe, tout voisinage (au sens de  $\mu(\leq_X)$ ) de  $\sup(A)$  (respectivement  $\inf(A)$ ) rencontre  $A$ .

PREUVE. Soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $X$  tels que  $x \neq y$ . Comme l'ordre  $\leq$  est total, on peut supposer que  $x < y$ . On a deux cas à examiner:

Si  $]x, y[ = \emptyset$  alors on pose  $I := \{t \in X \mid t > x\}$  et  $J := \{t \in X \mid t < y\}$ .

Si  $]x, y[ \neq \emptyset$ , soit un élément  $z$  de  $]x, y[$ , on pose  $I := \{t \in X \mid t > z\}$  et  $J := \{t \in X \mid t < z\}$ . Dans les deux cas on prouve que  $y$  est un élément de  $I$ , que  $x$  est un élément de  $J$ , que  $I$  et  $J$  sont des ouverts de  $(X, \mu(\leq_X))$  et que

$$\forall u \in I \forall v \in J \ u \not\leq v$$

Donc  $I \times J$  est un ouvert de  $(X, \mu(\leq_X)) \times (X, \mu(\leq_X))$  disjoint du graphe de  $\leq_X$ . Donc  $(X, \mu(\leq_X), \leq_X)$  est un espace ordonné.

Supposons que  $(X, \tau_X, \leq_X)$  soit un espace ordonné et que  $x$  soit un élément de  $X$ . Soit  $x'$  appartenant à  $]x, \rightarrow [$ , on a  $x <_X x'$  donc  $x' \not\leq_X x$  et donc, d'après la propriété I.1.4 (p.26), il existe un voisinage (au sens de  $\tau_X$ ) croissant  $V$  de  $x'$  et un voisinage (au sens de  $\tau_X$ ) décroissant  $W$  de  $x$  tels que

$$V \cap W = \emptyset,$$

en particulier  $x$  n'appartient pas à  $V$ . Soit alors un élément  $v$  de  $V$ , on a  $v \not\leq_X x$  sinon, par croissance de  $V$ , on aurait  $x \in V$ . On en déduit, comme l'ordre  $\leq_X$  est total, que  $x <_X v$  et donc  $x'$  est un élément de  $V$  qui est inclus dans  $]x, \rightarrow [$ , d'où il vient que  $]x, \rightarrow [$  est un ouvert de  $(X, \tau_X)$ . On montre de même que  $] \leftarrow, x[$  est un ouvert de  $(X, \tau_X)$  et donc  $\mu(\leq_X) \subseteq \tau_X$ .

Prouvons maintenant le dernier point, si  $\sup(A)$  appartient à  $A$ , tout voisinage de  $\sup(A)$  rencontre trivialement  $A$ . Dans le cas contraire, soit  $V$  un voisinage de  $\sup(A)$ , on peut supposer que  $V$  est de la forme  $]x, \rightarrow [$  où  $x <_X \sup(A)$ . Si  $V$  ne rencontre pas  $A$ , alors, puisque l'ordre  $\leq_X$  est total,  $x$  est un majorant de  $A$ , ce qui est contradictoire. ■

Notons bien qu'alors, le corollaire I.1.7 (p.27) est applicable. Il faut également faire attention au fait que la proposition II.1.10 (p.49) n'induit pas de foncteur, en effet, en considérant  $(\mathbb{R}, \leq)$  et l'application

$$H_2 : (\mathbb{R}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$$

$$t \longmapsto \begin{cases} t & \text{si } t < \sqrt{2} \\ t + 1 & \text{si } \sqrt{2} \leq t \end{cases}$$

On a bien un morphisme de  $\mathbb{T}\text{Lat}$  mais qui n'est pas continu au sens de la topologie décrite dans la proposition II.1.10 (p.49), c'est-à-dire la topologie classique de  $\mathbb{R}$ . Jusqu'à la fin de la preuve du théorème II.1.25 (p.59) les notions de densité et de séparabilité vont avoir un sens différent de celui donné dans la définition B.1.7 (p.319).

### II.1.11 DÉFINITION (DENSITÉ)

Une sous-partie  $D$  d'un ensemble totalement ordonné  $(X, \leq)$  est dite **dense** dans  $(X, \leq)$  lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in X \ (x_1 < x_2 \Rightarrow \exists d \in D \ x_1 < d < x_2)$$

En particulier, on dira que  $(X, \leq)$  est dense lorsque  $X$  est dense dans  $(X, \leq)$ .

Avec les notations de la définition II.1.6 (p.48) et de la proposition II.1.10 (p.49) on a la proposition:

### II.1.12 PROPOSITION

Soit  $(X, \leq_X)$  un ensemble totalement ordonné. La topologie  $\mu(\leq_X)$  est plus fine que la topologie  $\tau(\leq_X)$  (i.e.  $\tau(\leq_X) \subseteq \mu(\leq_X)$ ). De plus, les quatre assertions suivantes sont équivalentes

1.  $\mu(\leq_X)$  et  $\tau(\leq_X)$  sont aussi fines l'une que l'autre (voir définition B.1.2 (p.318)),
2.  $(X, \leq_X)$  est dense,
3.  $(X, \tau(\leq_X), \leq_X)$  est un espace ordonné,
4. La famille  $(]x, \rightarrow [ \leftarrow, x[)_{x \in X}$  engendre  $\tau(\leq_X)$ .

PREUVE. La première assertion implique la troisième d'après la proposition II.1.10 (p.49) et aussi la seconde. En effet, soient  $x < y$ , comme  $] \leftarrow, y[$  est un ouvert de  $(X, \tau(\leq_X))$ , on peut écrire  $] \leftarrow, y[$  comme une réunion de segments initiaux sans maximum et donc  $] \leftarrow, y[$  n'a pas de maximum. Ainsi on trouve un élément  $z$  de  $] \leftarrow, y[$  tel que  $x < z$ , donc  $x < z < y$ . La deuxième assertion implique la première puisqu'alors les intervalles  $] \leftarrow, y[$  n'ont pas de maximum et les intervalles  $]x, \rightarrow [$  n'ont pas de minimum. La troisième implique la seconde car l'espace topologique sous-jacent de tout espace ordonné est de *Hausdorff*, donc si  $x < y$ , on a en particulier  $x \neq y$ . On trouve donc deux éléments  $O_x$  et  $O_y$  de la base de  $\tau(\leq_X)$  décrite dans la remarque II.1.7 (p.48), disjoints et tels que  $x$  soit un élément de  $O_x$  et  $y$  un élément de  $O_y$ . L'ouvert  $O_x$  ne peut pas être un segment final, sans quoi on aurait  $y \in O_x$ , donc  $O_x$  est nécessairement un convexe sans maximum. De même  $O_y$  est un convexe sans minimum. Comme  $O_x$  n'a pas de maximum, il existe un élément  $z$  de  $O_x$  tel que  $x < z$ , on ne peut pas avoir  $y \leq z$ , sinon on aurait en particulier  $x < y \leq z$  et donc, par convexité de  $O_x$ ,  $y$  serait un élément de  $O_x$ , ce qui est contradictoire. L'ordre étant total, on a  $z < y$  d'où  $x < z < y$ . La seconde assertion implique la quatrième, en effet, les intervalles  $]x, \rightarrow [$  et  $] \leftarrow, x[$  sont alors respectivement des segments finaux sans minimum et des segments initiaux sans maximum. Puis tout segment initial sans maximum  $I$  peut s'écrire

$$\bigcup_{x \in I} ] \leftarrow, x[$$

de même que tout segment final sans minimum s'écrit

$$\bigcup_{x \in I} ]x, \rightarrow [$$

La quatrième assertion entraîne trivialement la seconde car l'intervalle  $] \leftarrow, x[$  s'écrit alors, en tant qu'élément de  $\tau(\leq_X)$ , comme une réunion de segment initiaux sans maximum et l'intervalle  $]x, \rightarrow [$  comme une réunion de segments finaux sans minimum. Ces deux intervalles sont donc respectivement sans maximum et sans minimum. Donc, si  $x < y$ , il existe un élément  $z$  de  $]x, \rightarrow [$  tel que  $z < y$ , d'où  $x < z < y$ . ■

Dans toute cette thèse **dénombrable** signifie en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

### II.1.13 PROPOSITION (CLASSIFICATION DES CHAÎNES DENSES ET DÉNOMBRABLES)

Tout ensemble totalement ordonné, dense et dénombrable est isomorphe, dans PoSet, à l'un des posets suivants, en fonction de la présence de maximum et/ou de minimum:

- $\mathbb{Q} \cap ]0, 1[$
- $\mathbb{Q} \cap [0, 1[$
- $\mathbb{Q} \cap ]0, 1]$
- $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

PREUVE. Tout repose sur le

### II.1.14 LEMME (CLASSIFICATION DES CHAÎNES DENSES, NON BORNÉES ET DÉNOMBRABLES)

Tout ensemble totalement ordonné, dense, non borné et dénombrable est isomorphe à  $(\mathbb{Q}, \leq)$ .

PREUVE. Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des énumérations respectives de  $(X, \leq_X)$  (totalement ordonné, dense, non borné et dénombrable) et de  $(\mathbb{Q}, \leq)$ . Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on pose  $I_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ . On va maintenant construire par récurrence un isomorphisme (dans PoSet) de  $(X, \leq_X)$  vers  $(\mathbb{Q}, \leq)$ .

Au rang 0, On pose  $\phi_0 : I_0 \longrightarrow J_0$  où  $J_0 := \{y_0\}$ .

Au rang  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , on suppose construit une suite finie d'isomorphismes  $\phi_k; I_k \longrightarrow J_k$  de PoSet telle que

$$\phi_0 \subseteq \dots \subseteq \phi_k \subseteq \dots \subseteq \phi_n,$$

donc en particulier

$$J_0 \subseteq \dots \subseteq J_k \subseteq \dots \subseteq J_n.$$

On veut construire  $\phi_{n+1}$ , on pose déjà pour chaque élément  $x$  de  $I_n$ ,  $\phi_{n+1}(x) := \phi_n(x)$ . On a alors l'une des trois éventualités suivantes:

1.  $x_{n+1} > \max(I_n)$ , dans ce cas on pose  $\phi_{n+1}(x_{n+1}) := q_k$  où  $k$  est le plus petit entier tel que  $q_k > \phi_n(\max(I_n))$ , c'est possible car  $\mathbb{Q}$  n'a pas de borne supérieure,
2.  $x_{n+1} < \min(I_n)$ , dans ce cas on pose  $\phi_{n+1}(x_{n+1}) := q_k$  où  $k$  est le plus petit entier tel que  $q_k < \phi_n(\min(I_n))$ , c'est possible car  $\mathbb{Q}$  n'a pas de borne inférieure,

3. il existe deux éléments  $a$  et  $b$  de  $I_n$  tels que  $I_{n+1} \cap ]a, b[ = \{x_{n+1}\}$ , dans ce cas on pose  $\phi_{n+1}(x_{n+1}) := q_k$  où  $k$  est le plus petit entier tel que  $\phi_n(a) < q_k < \phi_n(b)$ , c'est possible car  $\mathbb{Q}$  est dense.

Dans tous les cas,  $J_{n+1} = J_n \cup \{q_k\}$ . L'application  $\phi_{n+1}$  est alors un isomorphisme (dans PoSpc) de  $I_{n+1}$  vers  $J_{n+1}$  avec les ordres respectivement induits par ceux de  $(X, \leq_X)$  et de  $(\mathbb{Q}, \leq)$ . On pose enfin

$$\phi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n$$

Alors,  $\phi$  est alors un morphisme de PoSet dont l'application ensembliste sous-jacente est une bijection, donc un isomorphisme de PoSet d'après la remarque II.1.9 (p.49). Le seul point non trivial est la surjectivité. Elle se prouve également par récurrence. Au rang 0,  $q_0$  est clairement atteint car par construction,  $\phi_0(x_0) = q_0$ . Supposons, au rang  $k \in \mathbb{N}$ , que  $q_0, \dots, q_k$  soit dans l'image de  $\phi$ . Soit  $n_k$  le plus petit entier tel que  $\{q_0, \dots, q_k\} \subseteq J_{n_k}$ . On veut s'assurer que  $q_{k+1}$  est aussi dans l'image de  $\phi$ . Si  $q_{k+1} \in J_{n_k}$  alors  $q_{k+1}$  est dans l'image de  $\phi$ . Dans le cas contraire, on a trois situations à étudier:

1. si  $q_{k+1}$  majore  $J_{n_k}$ , soit  $n$ , le plus petit entier naturel tel que  $n > n_k$  et que  $x_{n+1}$  majore  $I_n$ , un tel  $n$  doit exister car  $(X, \leq_X)$  n'a pas de maximum (cf non borné). C'est alors le cas 1 de la construction qui s'applique et on a  $\phi_{n+1}(x_{n+1}) = q_{k+1}$ ,
2. le cas où  $q_{k+1}$  minore  $J_{n_k}$  est similaire, on applique le fait que  $(X, \leq_X)$  n'a pas de minimum (cf non borné).
3. Soit enfin le cas où l'on a deux éléments  $c$  et  $d$  de  $J_{n_k}$  tels que

$$]c, d[ \cap J_{n_k} = \{q_{k+1}\},$$

il suffit de considérer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $n > n_k$  et que

$$I_n \cap ]a, b[ = \{x_{n+1}\}$$

où  $a$  et  $b$  sont les deux éléments de  $I_n$  tels que  $\phi_n(a) = c$  et  $\phi_n(b) = d$ . Un tel  $n$  existe car  $(X, \leq_X)$  est dense. C'est alors le dernier cas de la construction qui s'applique et on a  $\phi_{n+1}(x_{n+1}) = q_k$ .

■

Il est alors facile de conclure. Si  $(X, \leq_X)$  est totalement ordonné, dense et dénombrable, on "enlève" ses éventuelles extrémités, il en résulte un ensemble totalement ordonné non borné et dénombrable  $(Y, \leq_Y)$  qui d'après le lemme II.1.14 (p.52) est isomorphe dans PoSet à  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire aussi à  $\mathbb{Q} \cap ]0, 1[$ . Si on ajoute un minimum ou un maximum ou les deux à  $(Y, \leq_Y)$ , on aura un ensemble totalement ordonné respectivement isomorphe à  $\mathbb{Q} \cap [0, 1[$ ,  $\mathbb{Q} \cap ]0, 1]$  ou  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  dans PoSet. ■

On pourrait un peu hâtivement penser que le lemme II.1.14 (p.52) se généralise en remplaçant l'hypothèse de dénombrabilité par "ayant le même cardinal". Assez naturellement

interviennent alors des problèmes de complétude et de passage à la limite. Quoiqu'il en soit,  $\mathbb{R}$  et l'ensemble des irrationnels de  $\mathbb{R}$  fournissent un contre exemple à cette généralisation. Remarquons également que si on remplace l'hypothèse "dénombrable" par "au plus dénombrable", il faut ajouter aux quatre possibilités de la proposition II.1.13 (p.52) une cinquième qui est  $\{*\}$ .

Commençons par donner une définition équivalente à celle de treillis complet donnée dans le tableau A.1.3 (p.285)

#### II.1.15 REMARQUE

Un ensemble totalement ordonné  $(X, \leq_X)$  est un treillis complet si et seulement si le complémentaire dans  $X$  de tout segment initial sans maximum est un segment final avec minimum, ou encore si et seulement si le complémentaire dans  $X$  de tout segment final sans minimum est un segment initial avec maximum.

#### II.1.16 PROPRIÉTÉ

Si  $(X, \leq_X)$  est un ensemble totalement ordonné et complet alors tous les fermés de  $\mu(\tau_X)$  contiennent leur borne inférieure et leur borne supérieure.

PREUVE. C'est un corollaire direct de la proposition II.1.10 (p.49), en effet, si  $A$  est une sous-partie de  $X$ , tout voisinage de  $\sup(A)$  rencontre  $A$  et tout voisinage de  $\inf(A)$  rencontre  $A$ . Il s'ensuit que si  $A$  est fermé,  $\sup(A)$  et  $\inf(A)$  appartiennent à  $A$ . ■

Le tableau suivant récapitule les définitions de catégories dont nous aurons besoin, certaines ont déjà été introduites précédemment ou apparaissent dans l'appendice A (p.269).

Nom	Objets	Morphismes
CDTLat	chaînes denses et complètes	applications préservant toutes les bornes supérieures et inférieures
CTLat	chaînes complètes	applications préservant toutes les bornes supérieures et inférieures
DTLat	chaînes denses	applications croissantes
TLat	chaînes	applications croissantes
Lat	treillis	applications préservant $\vee$ et $\wedge$

#### II.1.17 PROPOSITION (COUPURES DE *Dedekind*)

Etant donné un ensemble totalement ordonné  $(X, \leq_X)$ , Une coupure de *Dedekind* de  $(X, \leq_X)$  est un couple  $(A, B)$  tel que:

- $A \cup B = X$ ,
- $\forall a \in A \forall b \in B \ a <_X \ b$ ,
- $A$  n'a pas de maximum (i.e. plus grand élément).

On pose alors, pour deux coupures  $(A, B)$  et  $(A', B')$  de  $(X, \leq_X)$ ,  $(A, B) \leq_C (A', B')$  si et seulement si  $A \subseteq A'$  ou encore  $B' \subseteq B$ , ce qui est équivalent. Alors,

- l'ensemble des coupures de  $(X, \leq_X)$ , noté  $C$  et ordonné par  $\leq_C$ , est un ensemble totalement ordonné complet dont le plus petit élément est  $(\emptyset, X)$  et le plus grand  $(X, \emptyset)$  dans le cas où  $(X, \leq_X)$  n'a pas d'élément maximum,  $(X \setminus \{\max X\}, \{\max X\})$  sinon,

- l'application

$$\begin{aligned} (X, \leq_X) &\hookrightarrow (C, \leq_C) \\ x &\longmapsto (\{t \in X/t < x\}, \{t \in X/t \leq x\}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de PoSet sur son image,

- si  $(X, \leq_X)$  est complet, alors  $(X, \leq_X)$  et  $(C, \leq_C)$  sont isomorphes dans CTLat,
- soit  $(C, \leq_C)$  et  $(C', \leq_{C'})$  deux ensembles totalement ordonnés complets et  $D$  une sous-partie dense de  $(C, \leq_C)$ , alors tout morphisme  $f$  appartenant à

$$\text{PoSet}[(D, \leq_C \cap D \times D), (C', \leq_{C'})]$$

admet au plus un prolongement  $g$  appartenant à  $\text{CTLat}[(C, \leq_C), (C', \leq_{C'})]$ ,

- tout isomorphisme (dans PoSet) d'une sous-partie dense  $D$  d'un ensemble totalement ordonné complet  $(C, \leq_C)$  vers une sous-partie dense  $D'$  d'un ensemble totalement ordonné complet  $(C', \leq_{C'})$  se prolonge de façon unique en un isomorphe (dans CTlat) de  $(C, \leq_C)$  vers  $(C', \leq_{C'})$ ,
- tout ensemble totalement ordonné complet contenant une sous-partie dense isomorphe (dans PoSet) à  $(X, \leq_X)$  est isomorphe (dans CTLat) à  $(C, \leq_C)$ .

PREUVE. La borne supérieure d'une famille  $(A_i, B_i)_i$  de coupures est donnée par

$$\bigvee_i (A_i, B_i)_i := \left( \bigcup_i A_i, \bigcap_i B_i \right).$$

Le second point est évident, de même que le troisième puisque l'image de l'inclusion donnée au deuxième point est alors  $(C, \leq_C)$ .

Prouvons le quatrième point, si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux prolongements de  $f$  et que  $x$  est un élément de  $C$ , comme  $g_1$  et  $g_2$  sont des morphismes de CTLat, ils préservent les bornes supérieures, on a

$$g_1(x) = \sup(\{f(d) \mid d \in D ; d < x\}) = g_2(x)$$

car, par densité de  $D$ ,  $\sup\{d < x \mid d \in D\} = x$ . En supposant le cinquième point, le sixième est immédiat. Reste donc à prouver le cinquième point. Soit  $D$  une sous-partie de  $C$  et  $D'$  une sous-partie de  $C'$  denses respectivement dans  $(C, \leq_C)$  et  $(C', \leq_{C'})$ . Soit  $f$  un isomorphisme dans PoSet de  $D$  vers  $D'$ , respectivement muni des relations d'ordre induites par celle de  $(C, \leq_C)$  et  $(C', \leq_{C'})$ . Pour tout élément  $x$  de  $C$ , on pose

$$A(x) := \{f(d) \mid d \in D ; d < x\} \text{ et } B(x) := \{f(d) \mid d \in D ; d > x\}$$

Il est clair que quel que soit  $a$  appartenant à  $A(x)$  et quel que soit  $b$  appartenant à  $B(x)$ , on a  $a < b$ , donc  $\sup(A(x)) \leq_{C'} \inf(B(x))$ . Montrons que l'on a en fait égalité. Soit  $x' >_{C'} \sup(A(x))$ , par densité de  $D'$ , il existe un élément  $d'$  de  $D'$  tel que  $\sup(A(x)) <_{C'} d' <_{C'} x'$ . On pose  $d := f^{-1}(d') \in D$ . On a nécessairement  $x \leq_C d$  sinon, comme l'ordre est total,  $d < x$  et par densité de  $D$ , il existe un élément  $d_2$  de  $D$  tel que  $d <_C d_2 <_C x$  et donc, comme  $f$  est un isomorphisme, on a  $f(d) <_{C'} f(d_2)$  d'où  $d' = f(d) <_{C'} \sup(A(x))$



ce qui est contradictoire. Donc  $x \leq_C d$  et ainsi  $\inf(B(x)) \leq_{C'} f(d) = d' \leq_{C'} x'$ . On a prouvé que pour tout  $x'$  appartenant à  $C'$ , on a

$$\sup(A(x)) <_{C'} x' \Rightarrow \inf(B(x)) <_{C'} x',$$

mais puisque l'on a déjà  $\sup(A(x)) \leq_{C'} \inf(B(x))$ , si cette égalité était stricte, on aurait  $\inf(B(x)) <_{C'} \inf(B(x))$ , ce qui est absurde, d'où l'égalité voulue

$$\sup(A(x)) = \inf(B(x))$$

On pose alors pour tout élément  $x$  de  $C$ ,  $g(x) := \sup(A(x))$ . On vérifie que  $g$  préserve bien les bornes supérieures, par définition de  $g$ , et inférieures car  $\sup(A(x)) = \inf(B(x))$ . On procède de même pour obtenir un prolongement de  $f^{-1}$  que l'on note  $h$ . Alors  $h \circ g$  est un prolongement de  $id_D$ , de même que  $id_C$ , par unicité du prolongement, on a  $h \circ g = id_C$ . De même  $g \circ h = id_{C'}$ . ■

Notons bien la différence avec la notion topologique pour laquelle l'ensemble sous-jacent de tout espace topologique est dense dans cet espace. De plus tout ensemble totalement ordonné dense induit un espace ordonné

#### II.1.18 DÉFINITION (SÉPARABILITÉ)

Un ensemble totalement ordonné  $(X, \leq)$  est dit **séparable** s'il possède une sous-partie dénombrable dense.

Notons qu'avec les définitions II.1.11 (p.51) et II.1.18 (p.56), la séparabilité implique la densité. La notion de complétude reste la même, autrement dit, un ensemble totalement ordonné est **complet** si toutes ses sous-parties ont une borne supérieure et inférieure, en particulier, il possède une borne supérieure et inférieure.

Il est alors clair que  $[0, 1]$ , muni de l'ordre induit par celui de  $\mathbb{R}$ , est totalement ordonné, séparable et complet. En fait, on peut prouver que

#### II.1.19 PROPOSITION

Tout ensemble totalement ordonné, complet et séparable est isomorphe à  $[0, 1]$  dans CT-Lat.

PREUVE. Soient  $D$  une sous-partie dense non bornée et dénombrable d'un ensemble totalement ordonné, complet et séparable  $(C, \leq_C)$ . D'après le lemme II.1.14 (p.52),  $D$  est isomorphe, dans PoSet, à  $\mathbb{Q} \cap ]0, 1[$  dense dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . D'après le sixième point de la proposition II.1.17 (p.54),  $(C, \leq_C) \cong ([0, 1], \leq)$  dans CTLat. ■

La proposition II.1.10 (p.49) peut être adaptée au cas de CDTLat

#### II.1.20 PROPOSITION

Soient  $(X, \leq_X)$ ,  $(Y, \leq_Y)$  deux ensembles totalement ordonnés et complets. Soit aussi  $f$  appartenant à  $\text{PoSet}[(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)]$ . Alors

$$\forall x \in X \begin{cases} f^{-1}(]x, \rightarrow [) = ] \inf(f^{-1}(]x, \rightarrow [), \rightarrow [ \\ \text{et} \\ f^{-1}(] \leftarrow, x]) = ] \leftarrow, \sup(f^{-1}(] \leftarrow, x]) [ \end{cases}$$

si et seulement si

$$\forall A \subseteq X \quad f(\sup(A)) = \sup(f(A)) \text{ et } f(\inf(A)) = \inf(f(A))$$

PREUVE. Etant donné la complétude de  $(Y, \leq_Y)$ , on peut définir

$$g, d \in \text{PoSet}[(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)]$$

par

$$\forall y \in Y \quad \begin{cases} g(y) := \inf(f^{-1}(\{y\})) \\ d(y) := \sup(f^{-1}(\{y\})) \end{cases}$$

Il est facile de déduire la croissance de  $g$  et de  $d$  de celle de  $f$ . On a donc bien des morphismes de  $\text{PoSet}$ . En outre,  $f$  étant croissante, continue et  $\{y\}$  convexe et fermé,  $f^{-1}(\{y\})$  est convexe et fermé. On peut alors prouver que les convexes fermés (pour  $\mu(\leq_X)$ ) sont de la forme  $[x_1, x_2]$  pour  $x_1, x_2 \in X$ . Soit  $C$  un convexe, il peut s'écrire comme la réunion des  $[x'_1, x'_2]$  pour tous les  $x'_1, x'_2 \in C$ . Soit alors  $x_1$  la borne inférieure des  $x'_1$  et  $x_2$  la borne supérieure des  $x'_2$ . Il ne reste qu'à vérifier que  $x_1, x_2 \in C$  ce qui découle de la fermeture de  $C$  et de la propriété II.1.16 (p.54). En particulier, pour tout élément  $y$  de  $Y$ , on a  $f(g(y)) = f(d(y)) = y$ . Il vient alors, par croissance de  $f, g$  et  $d$

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \begin{cases} g(y) \leq_X x \Leftrightarrow y \leq_Y f(x) \\ x \leq_X d(y) \Leftrightarrow f(x) \leq_Y y \\ f(x) = y \Leftrightarrow g(y) \leq_X x \leq_X d(y) \end{cases}$$

Le deux premières assertions affirment que l'on a deux correspondances de Galois  $(g, f)$  et  $(f, d)$  (voir définition A.3.19 (p.299)). En appliquant la proposition A.3.22 (p.300), on a que  $f$  préserve les bornes supérieures et les bornes inférieures. Réciproquement, si  $f$  préserve les bornes supérieures et les bornes inférieures, alors, en appliquant la proposition A.3.22 (p.300) (la contraposée de l'implication utilisée dans le sens direct), on a que  $f$  possède un adjoint à droite et un adjoint à gauche i.e. que l'on a deux correspondances de Galois  $(g', f)$  et  $(f, d')$  donc

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \begin{cases} g'(y) \leq_X x \Leftrightarrow y \leq_Y f(x) \\ x \leq_X d'(y) \Leftrightarrow f(x) \leq_Y y \\ f(x) = y \Leftrightarrow g'(y) \leq_X x \leq_X d'(y) \end{cases}$$

donc  $g' = g$  et  $d' = d$  puis, étant donné que  $f$  est croissante

$$\forall y \in Y \quad \begin{cases} f^{-1}([\leftarrow, y]) = X \setminus f^{-1}([y, \rightarrow]) = X \setminus [g(y), \rightarrow] = [\leftarrow, g(y)] \\ f^{-1}([y, \rightarrow]) = X \setminus f^{-1}([\leftarrow, y]) = X \setminus [\leftarrow, d(y)] = [d(y), \rightarrow] \end{cases}$$

■

## II.1.21 COROLLAIRE

La proposition II.1.20 (p.56) reste vraie en ajoutant l'hypothèse de densité de  $(X, \leq_X)$  et de  $(Y, \leq_Y)$  et en travaillant avec les topologies  $\tau(\leq_X)$  et  $\tau(\leq_Y)$ .

En termes concis, on a prouvé que les morphismes de treillis complets de  $(X, \leq_X)$  vers  $(Y, \leq_Y)$  sont les applications continues de  $(X, \mu(\leq_X))$  vers  $(Y, \mu(\leq_Y))$ , ou encore les applications dirigées (morphismes de  $\text{PoSpc}$ ) de  $(X, \mu(\leq_X), \leq_X)$  vers  $(Y, \mu(\leq_Y), \leq_Y)$ .

La proposition II.1.20 (p.56) et son corollaire II.1.21 (p.57) peuvent en fait encore être affinés. Supposons que  $(Y, \sqsubseteq_Y)$  ne soit qu'un ensemble ordonné. L'application  $f$  induit bien sûr une surjection sur son image que l'on note  $f'$ . D'après la proposition II.1.10 (p.49) on peut appliquer le corollaire I.1.7 (p.27) donc l'image de  $f$  munie de l'ordre induit, est totalement ordonnée, complète (et dense si  $(X, \leq_X)$  l'est, c'est facile à prouver). On peut alors appliquer la proposition II.1.20 (p.56).

Au vu de la proposition II.1.10 (p.49), la proposition II.1.19 (p.56) peut être affinée:

### II.1.22 PROPOSITION

L'espace ordonné induit par un ensemble totalement ordonné, complet et séparable est isomorphe à  $\overrightarrow{[0, 1]}$  dans  $\text{PoSpc}$ .

PREUVE. Soit  $(X, \leq_X)$  un tel ensemble ordonné. D'après la proposition II.1.19 (p.56), il est isomorphe, dans  $\text{PoSet}$  à  $[0, 1]$ . D'après la remarque II.1.9 (p.49) cet isomorphisme à pour application sous-jacente une bijection et donc, trivialement, préserve les bornes supérieures et les bornes inférieures. D'après la corollaire II.1.21 (p.57) cet isomorphisme devient un isomorphisme de  $\text{Spc}[(X, \mu(\tau_X)), [0, 1]]$  (il est immédiat que  $\mu(\leq_{[0,1]})$  est la topologie classique sur  $[0, 1]$ ) et donc un isomorphisme de  $\text{PoSpc}[(X, \mu(\leq_X), \leq_X), \overrightarrow{[0, 1]}]$ . ■

### LE PROBLÈME DE *Suslin*

J'ouvre maintenant une petite parenthèse sur un problème de théorie des ensembles directement lié à la proposition II.1.19 (p.56), uniquement pour le plaisir des curieux. Le problème de *Suslin* consiste à se demander si, en affaiblissant les hypothèses de la proposition II.1.19 (p.56), on garde la conclusion. Posons la

### II.1.23 DÉFINITION (CONDITION DE CHAÎNE DÉNOMBRABLE)

Un ensemble totalement ordonné  $(X, \leq)$  vérifie la **condition de chaîne dénombrable**, ou **ccd**, lorsque toute famille d'intervalles ouverts de  $(X, \leq)$  non vides et deux à deux disjoints est au plus dénombrable.

On a déjà dit que la séparabilité implique la densité, mais il est clair qu'elle implique aussi la condition de chaîne dénombrable. Vient alors la question:

si  $(X, \leq)$  est un ensemble totalement ordonné dense et qui satisfait la condition de chaîne dénombrable, est-il séparable ?

En fait, répondre à la question ci-dessus équivaut à répondre à la question suivante:

si  $(X, \leq)$  est un ensemble totalement ordonné dense et complet qui satisfait la condition de chaîne dénombrable, est-il isomorphe à  $[0, 1]$  dans  $\text{PoSet}$  ?

C'est presque exactement en ces termes que *Suslin* posait son problème. La seule différence (elle est infime et on voit clairement qu'elle aboutit à un problème équivalent),

est que traditionnellement dans les documents traitant ce genre de questions, la notion de complétude est légèrement affaiblie, elle devient:

toute sous partie non vide majorée admet une borne supérieure.

On a alors l'expression du problème original de *Suslin*: si  $(X, \leq)$  est un ensemble totalement ordonné dense, complet (au sens affaibli), non borné et qui satisfait la condition de chaîne dénombrable, est-il isomorphe à  $\mathbb{R}$  dans PoSet ?

On peut alors montrer, par la méthode de forcing (itéré), que la réponse au problème de *Suslin* est indépendante de la théorie ZFC, autrement dit qu'il n'est ni possible de prouver, ni possible de trouver un contre-exemple au problème de *Suslin* à partir des seuls axiomes de la théorie ZFC. On trouve tous les détails aux chapitres 3, 9 et 16 de [52]. On pose en particulier la

#### II.1.24 DÉFINITION (DROITE DE *Suslin*)

Une **droite de Suslin** est un ensemble totalement ordonné, dense qui satisfait la condition de chaîne dénombrable mais n'est pas séparable.

Le problème de *Suslin* devient donc "existe-t-il une droite de *Suslin*". Il est intéressant de comparer la question de l'existence d'une droite de *Suslin* avec les travaux entrepris par *Maarten Maurice* dans sa thèse [67].

#### CLASSIFICATION DES IMAGES DE DICHEMINS

Le résultat suivant illustre la rigidité de la notion de dichemin

#### II.1.25 THÉORÈME (CLASSIFICATION DES IMAGES DE DICHEMINS)

L'image d'un dichemin est soit isomorphe à  $\{*\}$  soit isomorphe à  $\overrightarrow{[0, 1]}$  dans PoSpc; plus formellement

$$\forall \overrightarrow{X} \in \text{Ob}(\text{PoSpc}) \forall \gamma \in \text{PoSpc}[\overrightarrow{[0, 1]}, \overrightarrow{X}]$$

on a

$$\gamma(\overrightarrow{[0, 1]}) \cong \{*\} \text{ dans PoSpc}$$

ou

$$\gamma(\overrightarrow{[0, 1]}) \cong \overrightarrow{[0, 1]} \text{ dans PoSpc}$$

où  $\gamma(\overrightarrow{[0, 1]})$  est muni de la structure induite par celle de  $\overrightarrow{X}$ .

PREUVE. On suppose que  $\gamma([0, 1])$  n'est pas réduit à un singleton. La première étape consiste à prouver que l'image d'un chemin dirigé muni de l'ordre induit satisfait les hypothèses de la proposition II.1.22 (p.58). L'ensemble  $\gamma([0, 1])$  muni de l'ordre induit est totalement ordonné car si  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ,  $\gamma(t_1)$  et  $\gamma(t_2)$  sont comparables. L'ensemble  $\gamma([0, 1] \cap \mathbb{Q})$  est dense dans  $\gamma([0, 1])$ . Si  $A$  est une sous-partie de  $X$ ,  $f^{-1}(A)$  est une sous-partie de  $[0, 1]$  qui admet donc une borne supérieure et une borne inférieure, le corollaire I.1.7 (p.27) garantit que  $\sup(A) = f(\sup(f^{-1}(A)))$  existe. Donc si  $\leq_{\gamma([0,1])}$  est l'ordre induit par  $\leq_X$  sur  $\gamma([0, 1])$ ,  $\overrightarrow{[0, 1]}$  et  $(\gamma([0, 1]), \mu(\leq_{\gamma([0,1])}), \leq_{\gamma([0,1])})$  sont isomorphes dans

PoSpc. Il suffit maintenant de vérifier que  $\mu(\leq_{\gamma([0,1])})$  est bien la topologie induite par celle de  $\overrightarrow{X}$  sur  $\gamma([0,1])$ . Elle est au moins aussi fine que  $\mu(\leq_{\gamma([0,1])})$  puisqu'elle donne lieu à un espace ordonné (voir proposition II.1.10 (p.49)). En outre, le segment unité  $[0,1]$  est compact et l'image d'un compact par une fonction continue (ici  $\gamma$ ) est compacte. Donc  $\gamma([0,1])$  muni de la topologie induite par celle de  $\overrightarrow{X}$  est compact, en outre, étant plus fine que  $\mu(\leq_{\gamma([0,1])})$  (qui est *Hausdorff*), elle est elle-même *Hausdorff*. Or toute topologie strictement plus fine qu'une topologie de *Hausdorff* compacte n'est pas compacte (voir proposition B.1.23 (p.322)). Donc la topologie induite sur  $\gamma([0,1])$  par celle de  $\overrightarrow{X}$  est  $\mu(\leq_{\gamma([0,1])})$ . ■

J'ai appris lors d'une discussion avec *Sanjeevi Krishnan* que le théorème de classification des images d'un dichemin (II.1.25 (p.59)) est un résultat connu d'une certaine partie de la communauté des topologues. On trouve dans l'introduction de [79] un bon résumé du sujet dont on donne ci-dessous un aperçu. On définit un **continuum** comme un espace topologique de *Hausdorff* compact et un **arc généralisé** comme un continuum  $C$  ayant exactement deux points qui ne le sépare pas, c'est-à-dire que

$$\{x \in C \mid C \setminus \{x\} \text{ n'est pas connexe}\} = \{a, b\} \text{ où } a \neq b$$

Etant donné un arc généralisé  $A$ ,  $A$  est homéomorphe à  $[0,1]$  si et seulement si il est mérisable si et seulement si il est séparable (au sens topologique, c'est-à-dire qu'il possède une sous-partie dénombrable dense). Par ailleurs, tout arc généralisé peut-être muni d'un ordre total qui en fait un espace ordonné et inversement, l'espace topologique sous-jacent à tout espace ordonné  $\overrightarrow{X}$  dont la topologie et l'ordre sous-jacent sont respectivement compact et total est un arc généralisé. Citons également, pour information, le théorème de *Hahn-Mazurkiewicz* qui affirme qu'un espace topologique est l'image de  $[0,1]$  par une application continue si et seulement si c'est un continuum localement connexe et métrisable.

Ajoutons la remarque suivante qui aura son importance dans le chapitre XII (p.209), si  $A$  est un arc généralisé dont les deux points non séparants sont  $a$  et  $b$  et que  $\phi$  est un homéomorphisme de  $A$  dans  $A$  alors  $\phi(\{a, b\}) = \{a, b\}$ . Autrement dit, avec la terminologie introduite au chapitre XII (p.209), tout arc généralisé peut être pris comme segment générique dans Spc.

Voici deux surprenants corollaires du précédent théorème

#### II.1.26 COROLLAIRE (PAS DE COURBE DE *Peano* DIRIGÉE)

Il n'existe pas de chemins dirigés qui recouvrent le carré unité. Plus formellement, quel que soit l'espace ordonné  $\overrightarrow{X}$  (c'est-à-dire objet de PoSpc) et quel que soit le chemin dirigé  $\gamma$  sur  $\overrightarrow{X}$ , si  $X = [0,1]^2$  (l'espace topologique sous-jacent) alors  $\gamma([0,1]) \neq X$ .

Il faut bien insister sur le fait que, dans le corollaire II.1.26 (p.60), la structure de l'espace ordonné sur  $[0,1]^2$  n'est pas forcément la structure "classique".

#### II.1.27 COROLLAIRE

Soient  $\gamma_1, \gamma_2$  deux dichemins sur un espace ordonné  $\overrightarrow{X}$ . Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont la même image

notée  $\vec{T}$  (i.e.  $\gamma_1([0, 1]) = \gamma_2([0, 1])$ ) alors en posant

$$\begin{array}{ccc} \gamma_3 : \overrightarrow{[0, 1]} & \longrightarrow & \vec{X} \\ t & \longmapsto & \max(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{array}$$

il existe deux dihomotopies  $H_1$  et  $H_2$  respectivement de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_3$  et de  $\gamma_2$  vers  $\gamma_3$ .

PREUVE. En notant  $\phi$  un isomorphisme de  $\text{PoSpc}$  de  $\overrightarrow{[0, 1]}$  vers  $\vec{T}$ ,  $H_1$  et  $H_2$  sont donnés par

$$\begin{cases} H_1(s, t) := \phi\left(s \cdot \phi^{-1}(\gamma_3(t)) + (1 - s) \cdot \phi^{-1}(\gamma_1(t))\right) \\ H_2(s, t) := \phi\left(s \cdot \phi^{-1}(\gamma_3(t)) + (1 - s) \cdot \phi^{-1}(\gamma_2(t))\right) \end{cases}$$

■

## II.2 LA CATÉGORIE FONDAMENTALE

On va construire la catégorie fondamentale de la même façon que le groupoïde fondamental (voir appendice B.2.1 (p.330)).

Soit  $\vec{X}$  un espace ordonné, donc un objet de  $\text{PoSpc}$ . Le **graphe des dichemins** de  $\vec{X}$  a pour ensemble de sommets  $|X|$  et quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $|X|$ , l'ensemble des flèches de  $x$  vers  $y$  est l'ensemble des chemins dirigés de  $x$  vers  $y$  sur  $\vec{X}$ , c'est à dire

$$\left\{ \gamma \in \text{PoSpc}[\overrightarrow{[0, 1]}, \vec{X}] \mid \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y \right\}$$

Pour toute flèche  $\gamma$  de ce graphe, on pose, bien entendu,  $\text{src}(\gamma) := \gamma(0)$  et  $\text{tgt}(\gamma) := \gamma(1)$ . Considérons alors  $\mathcal{F}(\vec{X})$  la catégorie libre engendrée par le graphe des chemins de  $\vec{X}$ . Rappelons que, par construction, tout morphisme de  $\mathcal{F}(\vec{X})$  est un triplet  $(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x)$  où  $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$  est suite composable de flèches du graphe des dichemins sur  $\vec{X}$ ,  $\gamma_1(0) = x$  et  $\gamma_n(1) = y$ . Etant donnés deux morphismes  $(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x)$  et  $(y', (\alpha'_{n'}, \dots, \alpha'_1), x')$  de  $\mathcal{F}(\vec{X})$ , on pose alors  $m := \max\{n, n'\}$ , puis

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \overrightarrow{[0, 1]} & \longrightarrow & \vec{X} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \alpha_k(mt - (k - 1)) \text{ si } mt \in [k - 1, k[ \\ \alpha_n(1) \text{ si } mt \geq n + 1 \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \beta : \overrightarrow{[0, 1]} & \longrightarrow & \vec{X} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \beta_k(mt - (k - 1)) \text{ si } mt \in [k - 1, k[ \\ \beta_{n'}(1) \text{ si } mt \geq n' + 1 \end{cases} \end{array}$$

On peut finalement poser  $(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x) \preceq_{dih} (y', (\alpha'_{n'}, \dots, \alpha'_1), x')$  lorsqu'il existe une homotopie dirigée de  $\alpha$  vers  $\beta$ . A la différence du cas classique,  $\preceq_{dih}$  n'est pas une relation d'équivalence, elle est cependant réflexive, transitive et compatible avec la concaténation.

En fait on vérifie même que  $\preceq_{dih}$  est antisymétrique. La réflexivité et la transitivité sont données par la propriété II.1.4 (p.46). La compatibilité n'est qu'une question de reparamétrisation affine de la variable de temps (noter que la transitivité provient d'une reparamétrisation affine de la variable de déformation). La relation de dihomotopie, notée  $\sim_{dih}$  est la plus petite congruence (voir définition A.4.2 (p.305) et corollaire A.4.6 (p.306)) sur  $\mathcal{F}(\vec{X})$  contenant  $\sim_{dih}$ . Puis on pose

### II.2.1 DÉFINITION

La **catégorie fondamentale d'un espace ordonné**  $\vec{X}$  est par définition  $\mathcal{F}(\vec{X})/\sim_{dih}$ . On la note  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ .

### II.2.2 PROPRIÉTÉ

Pour toute suite composable  $(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x)$ , il existe un chemin dirigé  $\alpha$  de  $x$  vers  $y$  tel que  $(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x) \sim_{dih} (y, (\alpha), x)$ .

PREUVE. Cela découle directement de la définition de  $\preceq_{dih}$  qui engendre  $\sim_{dih}$ .

■

La propriété qui suit est facile à prouver mais elle sera à la base de la notion de catégorie sans boucles qui sera développée au chapitre III (p.71).

### II.2.3 PROPRIÉTÉ

Soit un espace ordonné  $\vec{X}$ , quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ ,

1. l'ensemble  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, x]$  est réduit au singleton  $\{id_x\}$  et
2. si  $x \neq y$ , alors l'un des ensembles  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$  et  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[y, x]$  est vide.

PREUVE. Si  $\gamma$  est un dichemin de  $x$  vers  $x$  sur  $\vec{X}$ , alors l'antisymétrie de  $\leq_X$  fait que  $\gamma$  est constant. Il s'ensuit que les seuls morphismes de  $x$  vers  $x$  de  $\mathcal{F}(\vec{X})$  sont de la forme  $(x, (id_x, \dots, id_x), x) \sim_{dih} (x, (id_x), x)$ . En outre si  $(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x)$  est un morphisme de  $\mathcal{F}(\vec{X})$  et que  $x \neq y$ , on a nécessairement  $x < y$  car pour chaque chemin dirigé  $\gamma$ , la croissance de  $\gamma$  impose que  $\gamma(0) \leq_X \gamma(1)$ . Mais alors, on ne peut pas avoir de suite composable de  $y$  vers  $x$ , autrement dit  $\mathcal{F}(\vec{X})[y, x] = \emptyset$ . ■

On peut alors relire le corollaire II.1.27 (p.60) ainsi

### II.2.4 THÉORÈME

Deux dichemins ayant la même image sont dihomotopes.

PREUVE. Immédiat. ■

L'équivalent en topologie algébrique classique est bien sûr faux, par exemple, les deux chemins suivants

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)) \end{aligned}$$

ont la même image mais ne sont pas homotopes, l'un fait une fois le tour du cercle tandis que l'autre en fait deux. On peut maintenant construire le foncteur catégorie fondamentale.

### II.2.5 PROPOSITION

La définition II.2.1 (p.62) induit “canoniquement” un foncteur de  $\text{PoSpc}$  vers  $\text{Cat}$ .

PREUVE. Il ne reste plus qu'à définir la partie morphisme du foncteur. Si  $f$  appartient à  $\text{PoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}]$ ,  $f$  induit un morphisme de graphes du graphe des chemins dirigés de  $\vec{X}$  vers le graphe des chemins dirigés de  $\vec{Y}$ ; ce morphisme induit lui-même un foncteur de  $\mathcal{F}(\vec{X})$  vers  $\mathcal{F}(\vec{Y})$ , puis de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  vers  $\vec{\pi}_1(\vec{Y})$ . Le procédé est exactement le même que dans la preuve de la propriété B.2.7 (p.332). Plus précisément, si  $\gamma$  est un dichemin sur  $\vec{X}$ ,  $f \circ \gamma$  est un dichemin sur  $\vec{Y}$ . ■

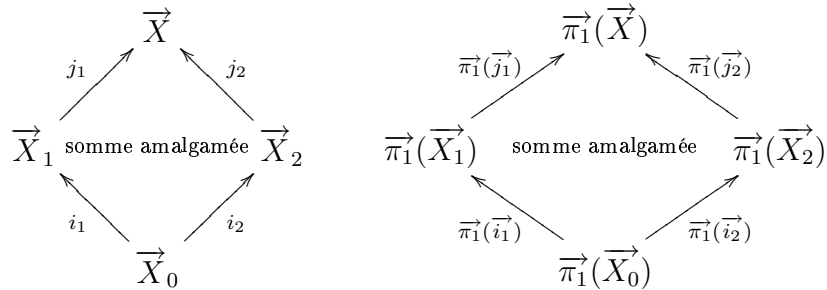
En outre la proposition B.2.12 (p.334) (théorème de Van Kampen) passe naturellement à la catégorie fondamentale

### II.2.6 PROPOSITION (THÉORÈME DE VAN KAMPEN POUR LES ESPACES ORDONNÉS)

Soient  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$  deux sous-espaces ordonnés d'un espace ordonné  $\vec{X}$  tels que l'espace topologique sous-jacent  $X$  soit la réunion des intérieurs de  $X_1$  et de  $X_2$ , les espaces topologiques sous-jacents de  $\vec{X}_1$  et  $\vec{X}_2$ .

$$X_1 \subseteq X \quad X_2 \subseteq X \quad X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$$

Posons  $\vec{X}_0 := \vec{X}_1 \cap \vec{X}_2$ .  $i_1 : \vec{X}_0 \hookrightarrow \vec{X}_1, i_2 : \vec{X}_0 \hookrightarrow \vec{X}_2, j_1 : \vec{X}_1 \hookrightarrow \vec{X}$  et  $j_2 : \vec{X}_2 \hookrightarrow \vec{X}$  les inclusions canoniques. Les diagrammes suivants



sont des sommes amalgamées respectivement dans  $\text{PoSpc}$  et  $\text{Cat}$ .

PREUVE. On peut adapter la preuve donnée dans [47] dans le cas classique. La notion d'homotopie étant remplacée par celle de dihomotopie et les reparamétrisations par les reparamétrisations dirigées. On note à ce propos que les homéomorphismes de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  sont les applications strictement monotones (i.e. croissantes ou décroissantes) continues. On les appelle reparamétrisations. Une reparamétrisation dirigée n'est rien d'autre qu'une reparamétrisation croissante. La preuve du cas classique passe par la notion de catégorie des chemins à reparamétrisation près. Dans le cas dirigé, on peut directement, en appliquant le théorème II.2.4 (p.62), travailler avec la catégorie des dichemins à image près, c'est-à-dire que deux dichemins ayant la même image sont identifiés. Cela rend la preuve beaucoup plus “lisible”.



### II.2.7 DÉFINITION (CATÉGORIE DES IMAGES DE DICHEMINS)

Etant donné un espace ordonné  $\vec{X}$ , la **catégorie des dichemins** de  $\vec{X}$ , notée  $\mathbb{D}(\vec{X})$ , a pour collection d'objets  $|X|$  et pour collection de morphismes les images des dichemins sur  $\vec{X}$ . En particulier, si  $x, y \in |X|$  on a

$$\mathbb{D}(\vec{X})[x, y] := \{\gamma([0, 1]) \mid \gamma \text{ est un dichemin de } \vec{X} \text{ de } x \text{ vers } y\}.$$

En particulier, si  $I$  est un morphisme de  $\mathbb{D}(\vec{X})$ , sa source est son élément minimum et son but est son élément maximum. Si  $I_1$  et  $I_2$  sont deux images de dichemins de  $\vec{X}$ , tels que  $\text{src}(I_2) = \text{tgt}(I_1)$  la composition  $I_2 \circ I_1$  est simplement la réunion de  $I_1$  et de  $I_2$ , qui est trivialement encore l'image d'un dichemin. Les identités sont bien sûr données par les singletons.

Soit alors la relation  $\preceq$  définie sur  $\mathbb{D}(\vec{X})$  par  $I_0 \preceq I_1$  si et seulement si (par définition) il existe  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , deux dichemins sur  $\vec{X}$  tel que  $\gamma_0([0, 1]) = I_0$ ,  $\gamma_1([0, 1]) = I_1$  et il existe une dihomotopie de  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$ . Soit alors  $\sim$  la plus petite congruence sur  $\mathbb{D}(\vec{X})$  contenant  $\preceq$ . Alors,  $\vec{\pi}_1(\vec{X}) \cong \mathbb{D}\vec{X}/\sim$  dans  $\text{Cat}$ .

La définition précédente sous-entend des résultats pas tout à fait triviaux que l'on démontre ci-après.

PREUVE. Soient  $I_0$  et  $I_1$  appartenant à  $\mathbb{D}(\vec{X})[x, y]$ . Le premier point à vérifier est que si  $I_0 \preceq I_1$ , alors pour tout couple de dichemins  $(\gamma_0, \gamma_1)$  tels que  $\gamma_0([0, 1]) = I_0$  et  $\gamma_1([0, 1]) = I_1$ ,  $(y, (\gamma_0), x) \sim_{dih} (y, (\gamma_1), x)$ , où  $\sim_{dih}$  est la congruence définie durant la construction de la catégorie fondamentale. C'est exactement ce qu'affirme le théorème II.2.4 (p.62). Réciproquement, si  $(x, (\gamma_0), y) \sim_{dih} (x, (\gamma_1), y)$  alors les images respectives de  $\gamma_0$  et de  $\gamma_1$  sont équivalentes au sens de  $\sim$ . Pour le voir, il suffit de noter que si  $(x, (\gamma_0), y) \sim_{dih} (x, (\gamma_1), y)$ , alors on a une suite de dichemins  $\delta_0, \dots, \delta_n$  telle que pour tout entier  $i$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$  on a une dihomotopie de  $\delta_i$  vers  $\delta_{i+1}$  ou bien de  $\delta_{i+1}$  vers  $\delta_i$ . Cette suite (finie) de dihomotopies donne alors des relations  $\preceq$  entre les images des  $\delta_i$ . L'isomorphisme peut alors être explicitement décrit, c'est l'identité entre les collections d'objets et si  $(y, (\gamma_1), x)$  est un représentant d'une  $\sim_{dih}$ -classe d'équivalence (les représentants de cette forme suffisent à définir tout le foncteur grâce à la propriété II.2.2 (p.62)), cette classe est envoyée par l'isomorphisme sur la  $\sim$ -classe d'équivalence de l'image de  $\gamma$ . ■

Cet aménagement est bien sûr impossible dans le cas classique car deux chemins ayant la même image ne sont pas forcément homotopes. ■

### II.2.1 QUELQUES EXEMPLES DE CALCULS

#### ORDRE TRIVIAL

Soit un espace ordonné  $\vec{X}$  dont la relation d'ordre sous-jacente est  $\Delta_{|X|}$  i.e.  $x \sqsubseteq_X y$  si et seulement si  $x = y$ . Alors les seuls dichemins dirigés de  $\vec{X}$  sont les chemins constants et  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  est alors la catégorie discrète dont l'ensemble des objets est  $|X|$ .

### LE SEGMENT UNITÉ DIRIGÉ

On a  $\vec{\pi}_1(\overrightarrow{[0, 1]}) = ([0, 1], \leq)$ , autrement dit, la catégorie fondamentale du segment unité dirigé est l'ensemble totalement ordonné  $[0, 1]$  muni de la relation d'ordre classique sur les réels, cet ensemble ordonné étant vu comme une petite catégorie. C'est une application directe du théorème II.2.4 (p.62).

### L'HYPERCUBE DIRIGÉ

Plus généralement,  $\vec{\pi}_1(\overrightarrow{[0, 1]^n}) = ([0, 1], \leq)^n$ , autrement dit le produit dans PoSet vu comme une petite catégorie ou directement le produit dans Cat.

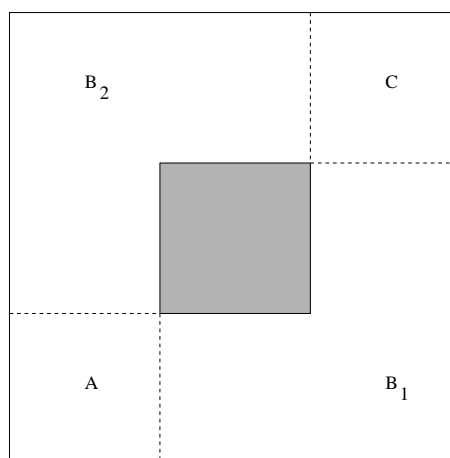
### LE CARRÉ TROUÉ EN SON CENTRE

Notons  $\vec{X}$  l'espace ordonné décrit dans l'alinéa VIII.5 (p.181). On va décrire localement, c'est-à-dire entre deux objets (éléments de  $|X|$ ) donnés,  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ . Pour chaque paire  $(x, y)$ , nous allons voir que  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  contient au plus deux morphismes. On va également donner la table qui décrit la loi de composition de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ . On réalise une partition de  $\vec{X}$  en quatre "composantes" disjointes

$$\left\{ \begin{array}{l} A := [0, \frac{1}{3}]^2 \\ C := [\frac{2}{3}, 1]^2 \\ B_1 := ([\frac{1}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}[) \setminus ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[ \\ B_2 := ([0, \frac{2}{3}[ \times ]\frac{1}{3}, 1]) \setminus ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[ \end{array} \right.$$

On obtient alors une partition de l'ensemble des morphismes non triviaux de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  en fonction de l'appartenance de leurs extrémités à  $A, B_1, B_2$  ou  $C$ . Tout d'abord, étant donné  $x$  et  $y$  appartenant à  $|X|$ , si  $x \not\sqsubset_X y$  alors  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y] = \emptyset$ , on suppose donc que  $x \sqsubset_X y$ . Noter bien que dans le cas où  $x = y$ , on a  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, x] = \{id_x\}$  d'après la propriété II.2.3 (p.62). Le tableau suivant décrit  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$ ,

$x \in$	$y \in$	$\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$
$A$	$A$	$\{\sigma_{x,y}\}$
$B_1$	$B_1$	$\{\sigma_{x,y}\}$
$B_2$	$B_2$	$\{\sigma_{x,y}\}$
$C$	$C$	$\{\sigma_{x,y}\}$
$A$	$B_1$	$\{r_{x,y}\}$
$A$	$B_2$	$\{h_{x,y}\}$
$B_1$	$C$	$\{h'_{x,y}\}$
$B_2$	$C$	$\{r'_{x,y}\}$
$B_1$	$B_2$	$\emptyset$
$B_2$	$B_1$	$\emptyset$
$A$	$C$	$\{u_{x,y}, d_{x,y}\}$



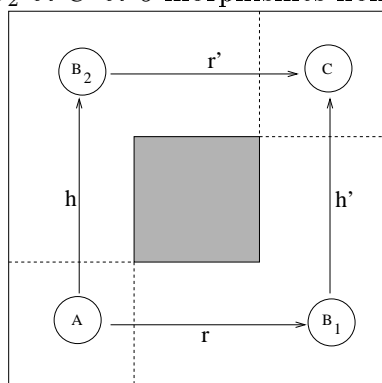
On décrit alors la loi de composition de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ , le morphisme de droite se lit verticalement, celui de gauche horizontalement, les cases restées vides indiquent que la paire considérée

n'est pas composable.

Le tableau de droite montre que  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  est générée par les  $h_{x,y}, r_{x,y}, h'_{x,y}, r'_{x,y}$ . On aurait pu décrire  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  de manière plus efficace, mais beaucoup moins lisible, en disant que pour tous couples de points  $(x, y)$  de  $X$ , si  $x \not\sqsubseteq_X y$ , alors  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y] = \emptyset$  et sinon  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$  est un singleton sauf dans le cas où  $x \in A$  et  $y \in C$  où  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$  est alors une paire. Il suggère en outre que, d'une certaine façon, les morphismes de type  $\sigma_{x,y}$ , qui ne "franchissent pas de frontières", n'influencent pas le "type" du morphisme avec lequel on les compose. Les  $\sigma_{x,y}$  se comportent comme des "éléments neutres". Ainsi, si on identifiait tous les points appartenant à la même "composante" et tous les morphismes  $\sigma_{x,y}$  à des identités, on aurait une nouvelle catégorie, finie (comparer avec  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  qui a la puissance du continu), et qui ne semble avoir perdu aucune information "importante" puisqu'on décrit sa loi de composition à partir du tableau de droite en enlevant simplement les indices et les  $\sigma_{x,y}$  qui sont alors des identités.

$\circ$	$\sigma_{y,z}$	$h_{y,z}$	$r_{y,z}$	$h'_{y,z}$	$r'_{y,z}$	$u_{y,z}$	$d_{y,z}$
$\sigma_{x,y}$	$\sigma_{x,z}$	$h_{x,z}$	$r_{x,z}$	$h'_{x,z}$	$r'_{x,z}$	$u_{x,z}$	$d_{x,z}$
$h_{x,y}$	$h_{x,z}$				$u_{x,z}$		
$r_{x,y}$	$r_{x,z}$			$d_{x,z}$			
$h'_{x,y}$	$h'_{x,z}$						
$r'_{x,y}$	$r'_{x,z}$						
$u_{x,y}$	$u_{x,z}$						
$d_{x,y}$	$d_{x,z}$						

On obtient donc une catégorie finie avec 4 objets correspondant aux "composantes"  $A, B_1, B_2$  et  $C$  et 6 morphismes non triviaux  $r, h, r', h', u = r' \circ h$  et  $d = h' \circ r$ .



$\circ$	$id$	$h$	$r$	$h'$	$r'$	$u$	$d$
$id$	$id$	$h$	$r$	$h'$	$r'$	$u$	$d$
$h$	$h$				$u$		
$r$	$r$			$d$			
$h'$	$h'$						
$r'$	$r'$						
$u$	$u$						
$d$	$d$						

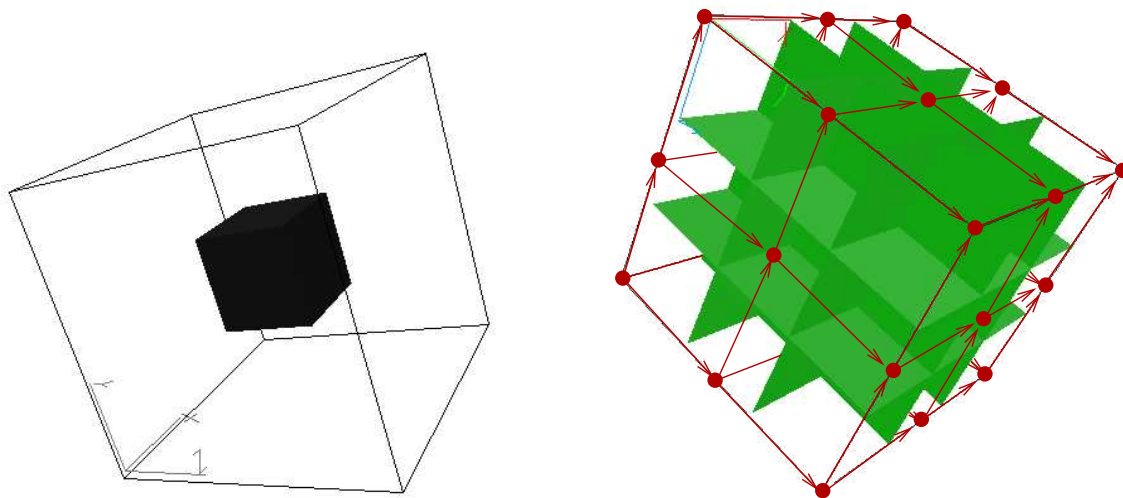
Ce qui n'est encore qu'une intuition deviendra, au chapitre IV.3.26 (p.118), une définition formelle dont nous étudierons les propriétés.

Avant d'étudier un autre exemple, notons que dans ce dernier, la groupoïdification (voir proposition A.4.11 (p.308)) de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  est isomorphe dans  $\mathbf{Cat}$  à  $\pi_1(X)$ , c'est-à-dire le groupoïde fondamental de l'espace topologique sous-jacent de  $\vec{X}$ . Comme nous le verrons, ce n'est pas toujours le cas.

#### LE CUBE TROUÉ EN SON CENTRE

L'ensemble sous-jacent est  $[0, 1]^3 \setminus \frac{1}{3}, \frac{2}{3} [^3$  que l'on munit de la topologie et de l'ordre classique i.e. induits par ceux  $\mathbb{R}^3$ . On note  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  l'espace ordonné obtenu. Cet espace

ordonné est le modèle géométrique du programme Pa.Va | Pa.Va | Pa.Va où a est un sémaphore ternaire. Une représentation graphique est donnée par le schéma de gauche ci-dessous.



Pour décrire la catégorie fondamentale de cet espace ordonné, on établit une partition de son ensemble sous-jacent en 26 "composantes", comme le suggère la figure de droite ci-dessus. Chacune de ces "composantes" est un cube qui contient certaines de ses faces mais pas forcément toutes. Les "composantes" seront notées  $A_{(i,j,k)}$  où  $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$  et  $i, j, k$  ne sont pas tous les trois égaux à 1 (sans quoi on désignerait le "trou" au centre de  $\vec{X}$ ), le triplet indiquant que  $A_{(i,j,k)} = I_i \times I_j \times I_k$  où  $I_0 := [0, \frac{1}{3}]$ ,  $I_1 := [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  et  $I_2 := [\frac{2}{3}, 1]$ . Tout comme dans le cas précédent, étant donné  $x, y \in X$ , on décrit  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$  en supposant que  $x <_X y$ . La description complète est très fastidieuse et donne une idée des problèmes d'explosion combinatoire que l'on peut rencontrer pour représenter dans la mémoire d'une machine ce qui sera défini comme le "catégorie de composantes" de  $\vec{X}$ . Le tableau ci-dessous, indique le nombre de morphismes de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$  en fonction de l'appartenance de  $x$  et  $y$  aux différentes composantes  $A_{(i,j,k)}$ .

$x \in$	$y \in$	cardinal de $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$	restrictions
$A_{(0,1,1)}$	$A_{(2,1,1)}$	0	-
$A_{(1,0,1)}$	$A_{(1,2,1)}$	0	-
$A_{(1,1,0)}$	$A_{(1,1,2)}$	0	-
$A_{(1,0,0)}$	$A_{(1,2,2)}$	2	-
$A_{(0,1,0)}$	$A_{(2,1,2)}$	2	-
$A_{(0,0,1)}$	$A_{(2,2,1)}$	2	-
$A_{(i,j,k)}$	$A_{(i',j',k')}$	1	dans tous les autres cas

Le tableau précédent et le découpage de  $X$  en 26 composantes décrit en fait complètement  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ . Ceci permet à nouveau de deviner ce que sera la catégorie de composante. Pour voir d'où viennent les paires de morphismes parallèles non identiques, il suffit de "faire une coupe" selon les hyperplans  $\{x = \frac{1}{2}\}$ ,  $\{y = \frac{1}{2}\}$  et  $\{z = \frac{1}{2}\}$ . Chacune de ses coupes donne un sous-espace ordonné de  $\vec{X}$  isomorphe (dans PoSpc) au carré troué.

## II.2.8 REMARQUE

La groupoïdification de la catégorie fondamentale du cube unité dirigé troué est isomorphe dans  $\text{Grd}$ , la catégorie des (petits) groupoïdes (voir section A.1.3), au groupoïde fondamental du cube unité troué. Plus formellement, en notant  $\vec{X}$  le cube unité dirigé troué, c'est un objet de  $\text{PoSpc}$ , et  $X$  le cube unité troué, c'est-à-dire l'espace topologique sous-jacent de  $\vec{X}$ , donc un objet de  $\text{Haus}$ , on a

$$r(\vec{\pi}_1(\vec{X})) \cong \pi_1(X) \text{ dans Grd}$$

où  $r$  est la réflexion de  $\text{Cat}$  dans  $\text{Grd}$ . Pour se convaincre de cela, il faut déjà voir que  $\pi_1(X)$  est simplement le préordre chaotique sur  $|X|$ , c'est-à-dire que pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $|X|$ ,  $\pi_1(X)[x, y]$  est un singleton. Puis, à homotopie dirigée près, il n'y a qu'un seul chemin dirigé de  $(0, 0, 0)$  vers  $(1, 1, 1)$ . Or, si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $\vec{X}$  et que  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux dichemins de  $x$  vers  $y$ , en notant  $\delta$  un dichemin de  $(0, 0, 0)$  vers  $x$  et  $\gamma$  un dichemin de  $y$  vers  $(1, 1, 1)$ , on a  $\gamma \circ \beta \circ \delta \sim_{dih} \gamma \circ \alpha \circ \delta$ , c'est-à-dire  $[\gamma]_{dih} \circ [\beta]_{dih} \circ [\delta]_{dih} = [\gamma]_{dih} \circ [\alpha]_{dih} \circ [\delta]_{dih}$ . Or en appliquant le terme d'indice  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  de l'unité de la groupoïdification (c'est un foncteur de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  vers  $\pi_1(X)$  que l'on note ici  $\eta$ ), on a

$$\eta([\gamma]_{dih}) \circ \eta([\beta]_{dih}) \circ \eta([\delta]_{dih}) = \eta([\gamma]_{dih}) \circ \eta([\alpha]_{dih}) \circ \eta([\delta]_{dih})$$

et comme  $\eta$  est à valeurs dans un groupoïde, on a  $\eta([\beta]_{dih}) = \eta([\alpha]_{dih})$ . Enfin,  $\eta$  étant surjective (c'est le cas pour toutes les termes de l'unité  $\eta$  de l'adjonction de  $\text{Grd}$  dans  $\text{Cat}$ ), on en déduit que  $r(\vec{\pi}_1(\vec{X}))[x, y]$  est un singleton, ce qui prouve que

$$r(\vec{\pi}_1(\vec{X})) \cong \pi_1(X) \text{ dans Grd.}$$

Il faut noter que, par exemple pour  $x \in A_{(1,0,0)}$  et  $y \in A_{(1,2,2)}$ , l'ensemble  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$  a deux éléments. Cet exemple met ainsi en évidence deux phénomènes, le premier étant que  $\vec{\pi}_1$  peut détecter des trous de dimension supérieure et le second que les termes de l'unité  $\eta$  ne sont pas tous fidèles.

L'exemple précédent ne se généralise pas, en effet, le diagramme suivant n'est pas commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{PoSpc} & \xrightarrow{\vec{\pi}_1(\vec{X})} & \text{LfCat} \\ U \downarrow & & \downarrow r \\ \text{Spc} & \xrightarrow{\pi_1(X)} & \text{Grd} \end{array}$$

où  $\text{LfCat}$  est la catégorie des petites catégories sans boucles (voir définition III.1.2 (p.72)) et  $U$  le foncteur d'oubli de l'ordre. Il suffit en effet de considérer un espace de *Hausdorff*  $X$  n'étant pas simplement connexe et de le munir de la relation d'égalité. Notons  $\vec{X}$  l'espace ordonné ainsi obtenu,  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  est la petite catégorie dont la collection des objets est  $|X|$  et les seuls morphismes sont les identités. D'autre part, puisque  $X$  n'est pas simplement connexe,  $\pi_1(X)$  possède un morphisme qui n'est pas une identité et on a  $r(\vec{\pi}_1(\vec{X})) \not\cong \pi_1(X)$  dans  $\text{Grd}$ .

Enfin, considérons le foncteur  $F$  de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  vers  $\pi_1(X)$  dont la partie objet est l'identité de  $|X|$  et qui envoie chaque  $\sim_{dih}$ -classe d'équivalence sur la classe d'homotopie de  $U(\gamma)$ ,

où  $\gamma$  est un représentant de la  $\sim_{dih}$ -classe d'équivalence dont on veut calculer l'image par  $F$  et  $U(\gamma)$  son application continue sous-jacente. Pour autoriser une telle construction, il faut remarquer au passage que si deux dichemins sont dihomotopes alors leurs chemins sous-jacents sont homotopes. En notant  $\eta$  l'unité de l'adjonction  $r \dashv i$  où  $i$  est le foncteur d'inclusion de  $\mathbf{Grd}$  dans  $\mathbf{Cat}$ , on a alors un unique foncteur  $G$  de  $r(\overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{X}))$  vers  $\pi_1(X)$  tel que  $F = G \circ \eta_{\overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{X})}$ . En un certain sens, on peut dire que  $r \circ \overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{X})$  est toujours plus fin que  $\pi_1(X)$ .



Dans ce chapitre, on revient à l'algèbre pour étudier en détail une sous-catégorie épircfléchissante de  $\mathbf{Cat}$  qui jouera dans l'étude de la topologie algébrique dirigée des espaces partiellement ordonnés le même rôle que celui des groupoïdes dans le cas de la topologie algébrique classique. En effet, si la construction du groupoïde fondamental peut laisser un instant penser que c'est une petite catégorie quelconque, on s'aperçoit très vite, et c'est très simple à prouver (voir la propriété B.2.5), que comme son nom l'indique, c'est un groupoïde. La question est alors de savoir s'il est possible de trouver une sous-catégorie épircfléchissante de  $\mathbf{Cat}$  qui contiendrait l'image du foncteur  $\overrightarrow{\pi}_1$ . On va donc chercher des propriétés communes à toutes les catégories fondamentales. Cette recherche aboutit à la notion de (petite) catégorie sans boucle qui, comme on le verra, généralise la notion d'ensemble partiellement ordonné. Au cours des derniers mois de ma thèse, j'ai appris de *Timothy Porter* que la notion de catégories sans boucle avait déjà été introduite dans un contexte totalement différent par *André Haefliger* dans [41, 42] et repris dans [12] (elles y sont appelées *small category without loops* ou *scwol*). Notons en outre qu'il n'est fait d'étude systématique de la catégorie des catégories sans boucle dans aucun des textes [41, 42] et [12]. On donne de nombreux exemples qui montrent que la catégorie des catégories sans boucle est très stable vis-à-vis des constructions classiques en théorie des catégories. En particulier, on pourra préciser la définition du foncteur  $\overrightarrow{\pi}_1$  et affiner le théorème de Van Kampen dirigé en composant  $\overrightarrow{\pi}_1$  avec le foncteur d'inclusion de la catégorie des catégories sans boucle dans  $\mathbf{Cat}$ .

### III.1 LA CATÉGORIE DES CATÉGORIES SANS BOUCLE

Comme annoncé dans le préambule, nous allons définir une collection de petite catégorie contenant toutes les catégories fondamentales de po-espaces possibles. On est pour cela guidé par la propriété II.2.3. On rappelle que (voir la définition A.1.17) une catégorie est dite discrète lorsque ses seuls morphismes sont ses identités.



### III.1.1 DÉFINITION

Un morphisme  $\gamma$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est dit **sans retour** lorsque l'ensemble  $\mathcal{C}[tgt(\gamma), src(\gamma)]$  est vide. Dans le cas contraire, on dit que  $\gamma$  est **avec retour** ou que  $\gamma$  est **admet un retour**.

### III.1.2 DÉFINITION

Une catégorie est dite **sans boucle** lorsque tous ses morphismes, à l'exception de ses identités, sont sans retour. La sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Cat}$  dont les objets sont les petites catégories sans boucle est notée  $\mathbf{LfCat}$ .

Sauf contre-indication explicite, toutes les catégories sans boucle auxquelles nous aurons l'occasion de nous intéresser sont petites. En conséquence, on appellera catégorie sans boucle une petite catégorie qui est sans boucle. La propriété II.2.3 peut alors s'exprimer en disant que la catégorie fondamentale de tout espace ordonné est sans boucle. On peut donc "redéfinir" le foncteur catégorie fondamentale; désormais, lorsque l'on fera référence au foncteur  $\vec{\pi}_1$ , ce sera un foncteur défini sur  $\mathbf{PoSpc}$  à valeurs dans  $\mathbf{LfCat}$ .

## III.1.1 CARACTÉRISATIONS DES CATÉGORIES SANS BOUCLE

On donne ici plusieurs approches équivalentes de la notion de catégorie sans boucle. Nous aurons besoin des définitions suivantes

### III.1.3 DÉFINITION (BOUCLE)

On rappelle qu'une suite  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0)$  de morphismes d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite **composable** lorsque:

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, tgt(\gamma_i) = src(\gamma_{i+1}).$$

Par soucis de concision, on écrira seulement "suite composable" lorsque le contexte est sans ambiguïté. En outre, on dit qu'une suite composable est **stricte** lorsqu'elle est non vide et que l'un au moins de ses éléments n'est pas une identité. Une **boucle** dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est une suite composable stricte telle que  $tgt(\gamma_n) = src(\gamma_0)$ .

Une suite  $(\gamma_0)$  est une boucle si et seulement si  $\gamma_0$  est un endomorphisme qui n'est pas une identité. En supprimant les identités, toute suite composable donne une suite composable stricte ou vide. En conséquence, toute boucle donne lieu à une boucle stricte. Si  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0)$  est une boucle (stricte) alors quel que soit l'entier  $i$  de  $\{0, \dots, n\}$ , la suite  $(\gamma_{i-1}, \dots, \gamma_0, \gamma_n, \dots, \gamma_i)$  est encore une boucle (stricte), ainsi, étant donné un morphisme  $\gamma$  d'une boucle (stricte), il est toujours possible de supposer que  $\gamma_i = \gamma$ , pour n'importe quel indice  $i$  de  $\{0, \dots, n\}$ .

### III.1.4 DÉFINITION (PURETÉ)

Soit  $\Sigma$  une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ , on dit que  $\Sigma$  est **pure** dans  $\mathcal{C}$  lorsque pour toute suite composable  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0)$ , on a

$$\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_0 \in \Sigma \implies \forall i \in \{0, \dots, n\}, \gamma_i \in \Sigma.$$

La pureté se révèle très importante dans l'étude des propriétés d'un quotient de catégorie et donc, comme on le verra, dans l'étude théorique des catégories de composantes. On peut voir cette notion comme une forme de convexité adaptée aux catégories. Notons également que si  $\mathbb{F}$  est un corps et  $\mathcal{L}$  le poset (c'est en fait en ensemble filtré complet ou

*filtered complete partial order* en termes anglo-saxons) de toutes les extensions de  $\mathbb{F}$ , le premier axiome de la définition d'une classe d'extensions distinguée<sup>1</sup> de  $\mathbb{F}$ , notée  $\mathcal{C}$ , telle qu'elle est décrite dans [85] (voir aussi [61]), peut être reformulé en disant que  $\mathcal{C}$  est pure dans  $\mathcal{L}$ .

### III.1.5 PROPRIÉTÉ (TRANSITIVITÉ DE LA PURETÉ)

Si  $\mathcal{C}_1$  est pure dans  $\mathcal{C}_2$ , elle-même pure dans  $\mathcal{C}_3$ , alors  $\mathcal{C}_1$  est pure dans  $\mathcal{C}_3$ .

PREUVE. Prenons  $\gamma$  un morphisme de  $\mathcal{C}_1$  et supposons que  $\gamma = \beta \circ \alpha$  avec  $\alpha, \beta$  des morphismes de  $\mathcal{C}_3$ . En particulier  $\gamma$  est un morphisme de  $\mathcal{C}_2$  qui est pure dans  $\mathcal{C}_3$ , donc  $\alpha, \beta$  sont des morphismes de  $\mathcal{C}_2$ . Maintenant,  $\gamma = \beta \circ \alpha$  avec  $\gamma$  morphisme de  $\mathcal{C}_1$ , et  $\alpha, \beta$  morphismes de  $\mathcal{C}_2$ , comme  $\mathcal{C}_1$  est pure dans  $\mathcal{C}_2$ ,  $\alpha, \beta$  sont des morphismes de  $\mathcal{C}_1$ , qui est ainsi pure dans  $\mathcal{C}_3$ . ■

Dans le théorème III.1.6 on pose pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ ,

$$x \sqsubseteq_{Ob(\mathcal{C})} y \text{ si et seulement si } \mathcal{C}[x, y] \neq \emptyset,$$

c'est la relation définie dans l'appendice A.1.3. On pose également pour tous morphismes  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\alpha \sqsubseteq_{Mo(\mathcal{C})} \beta$  si et seulement s'il existe  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , deux morphismes de  $\mathcal{C}$

tels que  $\beta = \gamma_2 \circ \alpha \circ \gamma_1$ . Schématiquement, on a  $\gamma_1 \left( \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ = \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \right) \gamma_2$ . Bien que les relations

précédemment définies soient notées avec des  $\sqsubseteq$ , ce ne sont en général que des préordres. On écrira aussi, chaque fois que le contexte est clair,  $x \sqsubseteq_o y$  au lieu de  $x \sqsubseteq_{Ob(\mathcal{C})} y$  et  $\alpha \sqsubseteq_m \beta$  au lieu de  $\alpha \sqsubseteq_{Mo(\mathcal{C})} \beta$ .

### III.1.6 THÉORÈME (CARACTÉRISATION DES CATÉGORIES SANS BOUCLE)

Etant donné une catégorie  $\mathcal{C}$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. aucune des suites composables de  $\mathcal{C}$  n'est une boucle.
2.  $\forall x, y \in Ob(\mathcal{C}), ((x \neq y) \Rightarrow (\mathcal{C}[x, y] = \emptyset \text{ ou } \mathcal{C}[y, x] = \emptyset))$  et  $\mathcal{C}[x, x] = \{id_x\}$ .
3.  $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in Mo(\mathcal{C}), (src(\gamma_1) = tgt(\gamma_2) \text{ et } src(\gamma_2) = tgt(\gamma_1)) \Rightarrow (\exists x \in Ob(\mathcal{C}), \gamma_1 = \gamma_2 = id_x)$ .
4. La catégorie  $Endo(\mathcal{C})$  est pure (dans  $\mathcal{C}$ ) et discrète (voir définition A.1.17).
5. Les catégories  $Endo(\mathcal{C})$  et  $Iso(\mathcal{C})$  sont discrètes.
6. Pour tout groupoïde  $\mathcal{G}$ , pour tout foncteur  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $im(F)$  est discrète (de plus, si  $\mathcal{G}$  est connexe alors  $im(F) = \{*\}$ ) et pour tout monoïde  $\mathcal{M}$ , pour tout foncteur  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $im(F) = \{*\}$ .
7. Pour tout foncteur  $F : \mathcal{G}_0 \mapsto \mathcal{C}$ , on a  $im(F) = \{*\}$ , où  $\mathcal{G}_0$  est l'une des deux petites catégories suivantes:

$$\{ x \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\alpha^{-1}} \end{array} y, \mathbb{N} \}$$

---

<sup>1</sup>C'est la classe d'extensions qui est distinguée, d'où le féminin singulier de l'adjectif.

,  $\mathbb{N}$  étant vu en tant que monoïde, c'est-à-dire comme une petite catégorie n'ayant qu'un seul objet.

8. Les relations  $\sqsubseteq_o$  et  $\sqsubseteq_m$  sont des ordres partiels et l'application

$$\begin{aligned} (Mo(\mathcal{C}), \sqsubseteq_m) &\longrightarrow ((Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{C})), \sqsubseteq_o \times \sqsubseteq_o) \\ \gamma &\longmapsto (src(\gamma), tgt(\gamma)) \end{aligned}$$

est strictement croissante.

9. La relation  $\sqsubseteq_o$  est un ordre partiel et

$$\forall \gamma \in Mo(\mathcal{C}) ((\gamma \neq id) \Rightarrow (src(\gamma) \sqsubseteq_o tgt(\gamma))).$$

10. Pour tout foncteur  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ , pour tout  $\gamma$  faisant partie d'une boucle de  $\mathcal{C}'$ ,  $F(\gamma)$  est une identité de  $\mathcal{C}$ . On dit qu'un morphisme  $\gamma$  **fait partie d'une boucle** ou **apparaît dans une boucle** si et seulement s'il existe une boucle  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0)$  et un indice  $i \in \{0, \dots, n\}$  tels que  $\gamma_i = \gamma$ .

11.  $\mathcal{C}$  est une catégorie sans boucle (au sens de la définition III.1.2).

12. La catégorie  $\mathcal{C}$  est isomorphe à son reflet dans  $LfCat$  (voir le théorème III.3.1).

La dernière assertion ne sera prouvée équivalente aux autres qu'ultérieurement, en même temps que l'on montrera que  $LfCat$  est une sous-catégorie épi-réfléchissante de  $Cat$ .

PREUVE. (11)  $\Rightarrow$  (3)

Soit un morphisme  $\gamma$  de  $\mathcal{C}$ , si  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{C}[x, x]$  pour un certain objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , d'après (11), les seuls endomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont les identités, donc  $\gamma$  en est une, et si  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{C}[x, y]$  pour deux objets distincts  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ , alors on déduit de (11) que  $\gamma$  est sans retour, et donc que  $\mathcal{C}[y, x]$  est vide.

(3)  $\Rightarrow$  (11)

Soit un morphisme  $\gamma$  de  $\mathcal{C}$ , si  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{C}[x, y]$  pour deux objets distincts  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{C}[y, x]$  est vide, autrement dit,  $\gamma$  est sans retour, et si  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{C}[x, x]$  pour un certain objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , alors  $\gamma$  est une identité. (1)  $\Rightarrow$  (2)

Si nous avons  $x \neq y$  deux objets de  $\mathcal{C}$  et deux morphismes  $\gamma_1, \gamma_2$  de  $\mathcal{C}$  tels que

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma_1} \\ \xleftarrow{\gamma_2} \end{array} y,$$

alors  $(\gamma_1, \gamma_2)$  serait une boucle, et si nous avons un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  et un morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, x]$  tel que  $\gamma \neq id_x$ , alors  $(\gamma)$  serait une boucle.

(2)  $\Rightarrow$  (3)

Supposons que l'on ait des morphismes  $\gamma_1, \gamma_2$  de  $\mathcal{C}$  avec  $x := src(\gamma_1) = tgt(\gamma_2)$ ,  $y := src(\gamma_2) = tgt(\gamma_1)$ , étant donné que  $\mathcal{C}[x, y] = \emptyset$  ou  $\mathcal{C}[y, x] = \emptyset$ , on a que  $x = y$  et il vient de  $\mathcal{C}[x, x] = \{id_x\}$  que  $\gamma_1 = \gamma_2 = id_x$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4)

Soit un endomorphisme  $\gamma$  de  $\mathcal{C}$  et deux morphismes  $\gamma_1, \gamma_2$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ , alors nous avons  $src(\gamma_1) = tgt(\gamma_2)$  et  $src(\gamma_2) = tgt(\gamma_1)$ , donc il existe un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $\gamma_1 = \gamma_2 = id_x$ , si bien que  $Endo(\mathcal{C})$  est pure. De plus, en posant  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ , nous déduisons qu'il existe un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = id_x$  et donc  $Endo(\mathcal{C})$  est discrète.

(4)  $\Rightarrow$  (5)

Supposons que  $x \xrightarrow{\alpha} y \in Iso(\mathcal{C})$ , alors  $\alpha^{-1} \circ \alpha \in Endo(\mathcal{C})$  qui est pure, donc  $\alpha^{-1}, \alpha \in Endo(\mathcal{C})$  qui est également discrète et donc  $\alpha^{-1} = \alpha = id_x$ .

(5)  $\Rightarrow$  (6)

L'image d'un isomorphisme (respectivement d'un endomorphisme) par un foncteur est un isomorphisme (respectivement un endomorphisme), on peut conclure car chaque morphisme d'un groupoïde est un isomorphisme et que chaque morphisme d'un monoïde est un endomorphisme.

(6)  $\Rightarrow$  (7)

Evident.

(7)  $\Rightarrow$  (1)

Supposons que  $(\gamma_n, \dots, \gamma_1, \gamma_0)$  soit une boucle de  $\mathcal{C}$ . Si  $\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1 \circ \gamma_0 = id_{src(\gamma_0)}$  alors  $n \geq 1$  (car les éléments d'une boucle ne sont pas des identités) et nous avons le foncteur  $F$  et l'inclusion  $G$  définis comme suit

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\alpha^{-1}} \end{array} y \xrightarrow{F} src(\gamma_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma_0} \\ \xleftarrow{\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1} \end{array} tgt(\gamma_0) \xrightarrow{G} \mathcal{C},$$

ainsi  $G \circ F$  est un foncteur de  $\mathcal{G}_0$  vers  $\mathcal{C}$  dont l'image n'est pas  $\{*\}$ . Si  $\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1 \circ \gamma_0 \neq id_{src(\gamma_0)}$ , alors nous avons le foncteur  $H$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathcal{C}$  entièrement déterminé par  $H(1) = \gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1 \circ \gamma_0$  dont l'image n'est pas  $\{*\}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (8)

On a  $x \sqsubseteq_o y$  et  $y \sqsubseteq_o x$  équivalent à  $\mathcal{C}[x, y] \neq \emptyset$  et  $\mathcal{C}[y, x] \neq \emptyset$ , d'où il vient  $x = y$  et donc l'antisymétrie de  $\sqsubseteq_o$ . Supposons que nous ayons  $\alpha \sqsubseteq_m \beta$  et  $\beta \sqsubseteq_m \alpha$  c'est-à-dire qu'il existe quatre morphismes  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  rendant les diagrammes

$$\gamma_1 \left( \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ & & \\ & \xrightarrow{\beta} & \end{array} \right) \gamma_4 \quad \text{et} \quad \gamma_2 \left( \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ & & \\ & \xrightarrow{\beta} & \end{array} \right) \gamma_3$$

commutatifs. Il vient de (2) que les morphismes  $\gamma_i$ , pour  $i$  appartenant à  $\{1, \dots, 4\}$ , sont des identités, alors  $\alpha = \beta$  et  $\sqsubseteq_m$  est antisymétrique. Si  $\alpha \sqsubseteq_m \beta$ , nous avons deux morphismes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tels que le diagramme suivant commute:

$$\gamma_1 \left( \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ & & \\ & \xrightarrow{\beta} & \end{array} \right) \gamma_2,$$

nous en déduisons que  $src(\beta) = src(\gamma_1) \sqsubseteq_o tgt(\gamma_1) = src(\alpha)$  et  $tgt(\alpha) = src(\gamma_2) \sqsubseteq_o tgt(\gamma_2) = src(\beta)$ , par ailleurs, si  $\alpha <_o \beta$  (donc  $\gamma_1$  n'est pas une identité ou bien  $\gamma_2$  n'est pas une identité) alors, étant donné que  $Endo(\mathcal{C})$  est discrète (d'après (5) qui est équivalent à (2)),  $src(\gamma_1) <_o tgt(\gamma_1)$  ou  $src(\gamma_2) <_o tgt(\gamma_2)$ , donc  $(src(\alpha), tgt(\alpha))$  est strictement inférieur à  $(src(\beta), tgt(\beta))$  par rapport à la relation  $\sqsupseteq_o \times \sqsubseteq_o$ .

(8)  $\Rightarrow$  (2)

La relation  $\sqsubseteq_o$  est antisymétrique, ce qui est équivalent à

$$((x \neq y) \Rightarrow (\mathcal{C}[x, y] = \emptyset \text{ ou } \mathcal{C}[y, x] = \emptyset)).$$

De plus  $\mathcal{C}[x, x] = \{id_x\}$ , sinon en considérant  $\gamma \in \mathcal{C}[x, x]$  distinct de  $id_x$ , nous avons le diagramme

$$id_x \left( \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma} \\ \xrightarrow{id_x} \end{array} \right) \gamma,$$

donc  $id_x <_o \gamma$  alors que  $src(id_x) = src(\gamma) = tgt(id_x) = tgt(\gamma)$ , ce qui contredit le fait que  $(src, tgt)$  soit strictement croissante.

(8)  $\Rightarrow$  (9)

Prenons  $\gamma \neq id_{src(\gamma)}$ , il vient alors  $id_{src(\gamma)} <_m \gamma$ , donc (car  $(src, tgt)$  est strictement croissante) nous avons  $src(id_{src(\gamma)}) <_o src(\gamma)$  ou  $tgt(id_{src(\gamma)}) <_o tgt(\gamma)$ , en d'autres termes  $src(\gamma) <_o src(\gamma)$  ou  $src(\gamma) <_o tgt(\gamma)$ , et ainsi  $src(\gamma) <_o tgt(\gamma)$ .

(9)  $\Rightarrow$  (2)

La relation  $\sqsubseteq_o$  est antisymétrique, ce qui est équivalent à

$$((x \neq y) \Rightarrow (\mathcal{C}[x, y] = \emptyset \text{ ou } \mathcal{C}[y, x] = \emptyset))$$

et si  $src(\gamma) = tgt(\gamma)$ , alors  $\gamma = id_{src(\gamma)}$ .

(1)  $\Rightarrow$  (10)

Si  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0)$  est une boucle de  $\mathcal{C}'$ , alors  $(F(\gamma_n), \dots, F(\gamma_0))$  est une suite composable de  $\mathcal{C}$  telle que  $src(F(\gamma_0)) = tgt(F(\gamma_n))$ , mais  $\mathcal{C}$  n'a, par hypothèse, pas de boucles, donc pour tout indice  $i$  dans  $\{0, \dots, n\}$ ,  $F(\gamma_i)$  est une identité de  $\mathcal{C}$ .

(10)  $\Rightarrow$  (1)

Si  $\mathcal{C}$  avait une boucle alors le foncteur identité de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}$  contredirait (10). ■

### III.1.2 PROPRIÉTÉS DES CATÉGORIES SANS BOUCLE

Citons quelques résultats quasiment immédiats à propos des catégories sans boucle.

#### III.1.7 PROPRIÉTÉ

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{L}$  deux catégories isomorphes, si l'une des deux est sans boucle, l'autre l'est aussi.

### III.1.8 PROPRIÉTÉ

Une sous-catégorie d'une catégorie sans boucle est sans boucle.

### III.1.9 PROPRIÉTÉ

Une catégorie est sans boucle si et seulement si sa catégorie duale est sans boucle.

### III.1.10 LEMME

Une (petite) catégorie  $\mathcal{C}$  est discrète si et seulement si  $\mathcal{C}$  est un groupoïde sans boucle, i.e. un groupoïde et une catégorie sans boucle.

PREUVE. Supposons que la catégorie  $\mathcal{C}$  soit discrète, les catégories  $Endo(\mathcal{C})$  et  $Iso(\mathcal{C})$  le sont également, donc  $\mathcal{C}$  est sans boucle. De plus, les seuls morphismes de  $\mathcal{C}$  sont les identités donc des isomorphismes, ainsi  $\mathcal{C}$  est un groupoïde. Réciproquement, si  $\mathcal{C}$  est un groupoïde sans boucle, alors pour chaque  $\gamma : x \rightarrow y$  on a  $\gamma^{-1} : y \rightarrow x$ . Mais comme  $\mathcal{C}$  n'a pas de boucle,  $x = y$  et  $\gamma = Id_x$ . Ainsi  $\mathcal{C}$  est discrète. ■

### III.1.11 REMARQUE

L'objet initial de  $LfCat$  est  $\emptyset$  et son objet final est  $\{*\}$ . Notons que ce sont aussi ceux de  $Cat$ .

### III.1.12 LEMME

Toute catégorie sans boucle est squelettique (voir définition A.1.17).

PREUVE. Etant donnée une catégorie sans boucle  $\mathcal{C}$ , nous avons  $Iso(\mathcal{C}) = Endo(\mathcal{C}) = \{id_x | x \in Ob(\mathcal{C})\}$ . ■

### III.1.13 COROLLAIRE

Etant données deux catégories sans boucle  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont isomorphes si et seulement si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont équivalentes.

PREUVE. Le squelette d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie squelettique  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}$  telle que chaque objet de  $\mathcal{C}$  est isomorphe à un objet de  $\mathcal{C}'$ . Or toute catégorie a un squelette et deux squelettes d'un même catégorie sont isomorphes. De plus, deux catégories sont équivalentes si et seulement si leurs squelettes sont isomorphes. Les preuves détaillées de ces faits sont disponibles dans [59] ou [47]. Le résultat est alors une conséquence du lemme III.1.12. ■

### III.1.14 REMARQUE

Une (petite) catégorie sans boucle peut être équivalente à une catégorie qui n'est pas une catégorie sans boucle; comme exemple, considérons  $\{*\}$  et le monoïde  $(\mathbb{N}, +, 0)$  (vu comme une petite catégorie), la première est sans boucle alors que la seconde ne l'est pas, cependant, elle sont équivalentes car le squelette de  $\mathbb{N}$  est  $\{*\}$ . Notons aussi que le théorème V.0.27 fournit une infinité de tels exemples: en effet, ce dernier affirme en particulier qu'une catégorie sans boucle  $\mathcal{C}$  est équivalente, sous certaines conditions sur  $\Sigma$ , à  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  qui, dès que  $\Sigma$  contient un morphisme qui n'est pas une identité, possède des boucles.

Il reste que, étant données une catégorie sans boucle  $\mathcal{C}_1$  et une catégorie  $\mathcal{C}_2$ , si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont équivalentes, alors le squelette de  $\mathcal{C}_2$  est sans boucle.

### III.1.15 LEMME

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie sans boucle et  $\sim$  une congruence sur  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{C}/\sim$  est encore sans boucle.

PREUVE. Nous avons  $(\mathcal{C}/\sim)[x, y] = (\mathcal{C}[x, y])/\sim_{x, y}$  donc  $\mathcal{C}[x, y] = \emptyset$  si et seulement si  $(\mathcal{C}/\sim)[x, y] = \emptyset$ . De plus,  $(\mathcal{C}/\sim)[x, x] = (\mathcal{C}[x, x])/\sim_{x, x}$  est un singleton car  $\mathcal{C}[x, x]$  l'est. ■

### III.1.3 ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS

Hormis l'exemple des catégories fondamentales d'espaces ordonnés, dont la notion est issue, les ensembles ordonnés sont des exemples de catégories sans boucle. En effet, si  $(P, \leq_P)$  est un ensemble ordonné vu comme une petite catégorie, il est clair que, en tant que préordre, quel que soit  $x$  appartenant à  $P$ , on a  $P[x, x] = \{id_x\}$  et, par antisymétrie, si  $x \neq y$  alors  $P[x, y] = \emptyset$  ou  $P[y, x] = \emptyset$ .

Parmi tous les ensembles ordonnés, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_n := \{0, \dots, n\}$  (muni de l'ordre usuel) et  $\square_n := \{0, 1\}^n$  (muni de l'ordre produit) sont d'un intérêt tout particulier. Ce sont en effet respectivement les simplexes et cubes de dimension  $n$  dans  $\text{LfCat}$ , ils amènent aux homologies (singulières) simpliciales et cubiques dans  $\text{LfCat}$ .

Par ailleurs on a:

### III.1.16 PROPOSITION (RÉFLEXION DE $\text{LfCat}$ DANS $\text{PoSet}$ )

$\text{PoSet}$  est une sous-catégorie épi-réfléchissante de  $\text{LfCat}$ .

PREUVE. La réflexion est donnée par la congruence qui identifie les morphismes ayant les mêmes extrémités. Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie sans boucle, alors d'après le lemme III.1.15,  $\mathcal{C}/\sim$  en est une aussi, où  $\sim$  est la congruence  $\alpha \sim \beta$  si et seulement si  $(src(\alpha) = src(\beta))$  et  $(tgt(\alpha) = tgt(\beta))$ . De plus, il est clair que d'un objet vers un autre objet de  $\mathcal{C}/\sim$ , il y a au plus un morphisme, autrement dit la catégorie  $\mathcal{C}/\sim$  peut-être vue comme un préordre, c'est donc un ensemble ordonné. La propriété universelle des adjonctions est donnée par la proposition A.4.3, autrement dit, la counité est le foncteur défini sur  $\mathcal{C}$  (une catégorie sans boucle) à valeurs dans  $\mathcal{C}/\sim$  qui envoie chaque morphisme de  $\mathcal{C}$  sur sa  $\sim$ -classe d'équivalence. ■

### III.1.17 REMARQUE

Au passage, on peut définir un ensemble partiellement ordonné comme un préordre sans boucle i.e. une petite catégorie qui est simultanément un préordre et une catégorie sans boucle.

### III.1.4 CATÉGORIE DES CHEMINS D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

On va donner une définition alternative du groupoïde fondamental basée sur le quotient d'une catégorie sans boucle par une certaine congruence généralisée. Soit  $X$  un espace

topologique et  $\mathbb{P}(X)$  la petite catégorie dont l'ensemble des objets est  $\mathbb{R} \times |X|$  et où

$$\mathbb{P}(X)[(a, x), (b, y)] := \begin{cases} \left\{ \gamma \in \text{Spc}[[a, b], X] \mid \gamma(a) = x \text{ et } \gamma(b) = y \right\} & \text{si } a \leq b \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

L'identité de  $(a, x)$  vers  $(a, x)$  dans cette catégorie est l'application définie sur le singleton  $\{a\}$  et dont l'image est  $\{x\}$ . Il est clair qu'une telle application est unique. De plus, si  $\mathbb{P}(X)[(a, x), (b, y)] \neq \emptyset$  et  $a = b$ , alors nécessairement  $x = y$ , et si  $a < b$ , alors  $b \not\leq a$  et donc  $\mathbb{P}(X)[(b, y), (a, x)] = \emptyset$ . Ainsi  $\mathbb{P}(X)$  est une petite catégorie sans boucle. La composition est donnée par le "collage directe" de fonctions, c'est-à-dire que si  $\gamma_1$  est défini sur  $[a, b]$  et  $\gamma_2$  sur  $[b, c]$  et que  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , alors on pose

$$\begin{aligned} \gamma_2 \circ \gamma_1 : [a, c] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c] \end{cases} \end{aligned}$$

L'associativité est immédiate. Notons alors  $\theta_{a,b}$  l'unique application affine qui envoie  $[0, 1]$  sur  $[a, b]$ , et posons, pour  $\gamma$  et  $\gamma'$  respectivement définis sur  $[a, b]$  et  $[a', b']$ ,  $\gamma \sim \gamma'$  dès qu'il existe une homotopie de  $\gamma \circ \theta_{a,b}$  vers  $\gamma' \circ \theta_{a',b'}$ . On vérifie aisément que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des morphismes de  $\mathbb{P}(X)$  et que  $\sim$  est compatible avec la composition de  $\mathbb{P}(X)$ . En effet,  $H(s, t) := \gamma(t)$  est une homotopie entre  $\gamma \circ \theta_{a,b}$  et  $\gamma \circ \theta_{a,b}$  ce qui donne la réflexivité. Si  $H$  est une homotopie de  $\gamma \circ \theta_{a,b}$  vers  $\gamma' \circ \theta_{a',b'}$ , alors  $H(1-s, t)$  est une homotopie de  $\gamma' \circ \theta_{a',b'}$  vers  $\gamma \circ \theta_{a,b}$ , d'où la symétrie. Si  $H$  et  $H'$  sont respectivement des homotopies de  $\gamma \circ \theta_{a,b}$  vers  $\gamma' \circ \theta_{a',b'}$  et de  $\gamma' \circ \theta_{a',b'}$  vers  $\gamma'' \circ \theta_{a'',b''}$ , alors

$$H''(s, t) := \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H(2s-1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie de  $\gamma \circ \theta_{a,b}$  vers  $\gamma'' \circ \theta_{a'',b''}$ , d'où la transitivité. Enfin, si  $H_1$  est une homotopie de  $\gamma_1 \circ \theta_{a,b}$  vers  $\gamma'_1 \circ \theta_{a',b'}$  et  $H_2$  est une homotopie de  $\gamma_2 \circ \theta_{c,d}$  vers  $\gamma'_2 \circ \theta_{c',d'}$ , et que  $\gamma_2(c) = \gamma_1(a)$ , alors on a  $\gamma'_2(c') = \gamma'_1(a')$  et

$$H''(s, t) := \begin{cases} H(s, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H(s, 2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie de

$$\gamma_3(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \text{ vers } \gamma'_3(t) := \begin{cases} \gamma'_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma'_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

que l'on peut facilement transformer en une homotopie de  $(\gamma_2 \cdot \gamma_1) \circ \theta_{a,c}$  vers  $(\gamma'_2 \cdot \gamma'_1) \circ \theta_{a',c'}$ , où  $\gamma_2 \cdot \gamma_1$  et  $\gamma'_2 \cdot \gamma'_1$  sont les composées dans  $\mathbb{P}(X)$ . On pose alors, pour deux points  $x, y$  de  $X$ ,  $x \sim y$  si et seulement si il existe deux morphismes  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $\mathbb{P}(X)$  tels que  $\gamma \sim \gamma'$  et  $(\text{src}(\gamma) = x \text{ et } \text{tgt}(\gamma) = y)$  ou  $(\text{tgt}(\gamma) = x \text{ et } \text{src}(\gamma) = y)$ . On vérifie que l'on a ainsi défini une congruence généralisée, que l'on note encore  $\sim$ , et le groupoïde fondamental de  $X$  est donné par  $\mathbb{P}(X)/\sim$ .



## III.2 STABILITÉ

On se propose de vérifier que la plupart des constructions usuelles de la théorie des catégories, lorsqu'elles sont mises en oeuvre à partir de catégorie sans boucle, donnent des catégories sans boucle, c'est en ce sens que j'entends l'expression "la notion de catégorie sans boucle est stable". Bien sûr, "stable" n'a pas ici un sens mathématique formel. Par ailleurs, on manipulera dans cette section des catégories qui satisfont aux conditions de la définition III.1.2 mais ne sont pas nécessairement petites. Ainsi, lorsque l'on parlera de catégories sans boucle, on pourra éventuellement désigner une grande catégorie. A de nombreuses reprises, j'ai mis l'adjectif "petite" entre parenthèses pour insister sur le fait que la taille de la catégorie n'a pas d'importance formelle, pourvu que l'on ait bien choisi le cadre ensembliste dans lequel on travaille.

### CATÉGORIES DIRECTES ET INVERSES

Cet exemple est importé de la théorie des catégories de modèles (voir [49] chapitre 5).

#### III.2.1 DÉFINITION (CATÉGORIE DIRECTE)

Une **extension linéaire** d'une (petite) catégorie  $\mathcal{C}$  est un foncteur  $f : \mathcal{C} \rightarrow \lambda$  tel que

$$\forall \gamma \in Mo(\mathcal{C}), f(\gamma) = id \Rightarrow \gamma = id$$

et où  $\lambda$  est un **ordinal** i.e. un ensemble ordonné dont chaque sous partie non vide a un élément minimum (des détails concernant les ordinaux sont disponibles dans [49] chapitre 2, [56] chapitre 3, [57] chapitre 1 ou encore [52] chapitre 2).

Une **catégorie directe** est une (petite) catégorie admettant une extension linéaire. Une **catégorie inverse** est une (petite) catégorie dont la catégorie duale est directe.

#### III.2.2 LEMME

Toute catégorie directe ou inverse est sans boucle.

PREUVE. Supposons que  $\mathcal{C}$  est directe et prenons  $f : \mathcal{C} \rightarrow \lambda$  une extension linéaire de  $\mathcal{C}$ ,  $\lambda$  est vu comme une petite catégorie. Soit  $\gamma \in Endo(\mathcal{C})$ , alors  $f(\gamma) \in Endo(\lambda)$ , mais  $\lambda$  est sans boucle (car c'est un ensemble ordonné, voir la section III.1.3), alors  $f(\gamma) = id$  (d'après le point (5) du théorème III.1.6) d'où, par hypothèse sur  $f$ ,  $\gamma = id$ . On a prouvé que  $Endo(\mathcal{C})$  est discrète. La même preuve reste valable en remplaçant  $Endo$  par  $Iso$ , d'où le fait que  $Iso(\mathcal{C})$  soit discrète. Ainsi d'après le point (5) du théorème III.1.6,  $\mathcal{C}$  est sans boucle. Si  $\mathcal{C}$  est sans boucle, il en va de même de  $\mathcal{C}^{op}$  (voir le corollaire III.1.9), donc toute catégorie inverse est sans boucle. ■

La réciproque du lemme III.2.2 est fautive, par exemple,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$  sont sans boucle (vu comme des petites catégories en tant qu'ensemble ordonnés) mais ne sont pas directes d'après le théorème suivant:

#### III.2.3 THÉORÈME

La catégorie  $\mathcal{C}$  est directe si et seulement si elle n'a pas de suite infinie d'objets strictement  $\sqsubseteq_o$ -décroissante, formellement, il n'existe pas de suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'objets de  $\mathcal{C}$  telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \sqsubseteq_o x_n \text{ et } x_n \neq x_{n+1}.$$

Insistons sur le fait que, si  $\mathcal{C}$  admet une boucle, alors  $\mathcal{C}$  admet une suite infinie d'objets strictement  $\sqsubseteq_o$ -décroissante; par exemple dans la catégorie  $x \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} y$ , la suite définie par

$x_{2n} := x$  et  $x_{2n+1} := y$  est une telle suite.

PREUVE. Si  $\mathcal{C}$  avait une telle suite, elle serait envoyée, *via* n'importe quelle extension linéaire  $f$  de  $\mathcal{C}$ , sur une suite infinie strictement décroissante de  $\lambda$ , ce qui est impossible car  $\lambda$  est un ordinal.

Réciproquement, en supposant que  $\mathcal{C}$  ne possède pas de telle suite, nous devons construire une extension linéaire  $f$  de  $\mathcal{C}$ . Etant donné un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , si  $\{y \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \mid y \sqsubseteq_o x\} = \emptyset$ , alors on pose  $f(x) := 0$  sinon  $f(x) := \text{Sup}(\{f(y) + 1 \mid y \in \text{Ob}(\mathcal{C}); y \sqsubseteq_o x\})$ ; implicitement,  $f(x)$  est défini si et seulement si  $f(y)$  est défini pour tout  $y \sqsubseteq_o x$ . En effet, cette construction génère des foncteurs partiellement définis, si nous appliquions cette construction au cercle dirigé dans le sens trigonométrique  $S^1$  (vu comme une petite catégorie), le foncteur partiellement défini  $f$  en résultant serait défini sur  $\emptyset$ .

Il nous reste donc à prouver que, dans notre cas,  $\text{dom}(f) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ :

supposons que  $x_0 \notin \text{dom}(f)$ , alors nous avons  $x_1 \sqsubseteq_o x_0$  tel que  $x_1 \notin \text{dom}(f)$ , sinon, par définition de  $f$ , nous aurions  $f(x_0) := \text{Sup}(\{f(y) + 1 \mid y \in \text{Ob}(\mathcal{C}); y \sqsubseteq_o x_0\})$  et  $x_0 \in \text{dom}(f)$ . Une construction par récurrence évidente nous donne ainsi une suite infinie d'objets strictement  $\sqsubseteq_o$ -décroissante ce qui contredit l'hypothèse faite sur  $\mathcal{C}$ . Donc  $\text{dom}(f) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

$f$  est un foncteur: supposons que l'on ait  $x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z$ , donc on a  $x \sqsubseteq_o y \sqsubseteq_o z$  et il nous reste simplement à voir que  $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$ , ce qui est évident par définition même de  $f$ .

$f$  est une extension linéaire: considérons  $y \xrightarrow{\alpha} x$  avec  $\alpha \neq \text{id}$ , alors  $y \sqsubseteq_o x$  d'où  $f(y) < \text{Sup}(\{f(z) + 1 \mid z \in \text{Ob}(\mathcal{C}); z \sqsubseteq_o x\}) = f(x)$ . ■

Si  $f$  est une extension linéaire d'une catégorie directe  $\mathcal{C}$ ,  $f + 1$ ,  $f + f$ ,  $f \times f$  (c'est de l'arithmétique ordinaire, encore une fois, tous les détails sont disponibles dans [56], [57] ou [52]) sont aussi des extensions linéaires de  $\mathcal{C}$  et sont (par rapport à l'ordre point par point sur la collection des extensions linéaires de  $\mathcal{C}$ ) strictement supérieure à  $f$ . En fait, l'extension linéaire décrite dans la preuve du théorème III.2.3 est la plus petite ( toujours par rapport à l'ordre point par point) et, en un certain sens, donne une notion de "hauteur" sur  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  qui dépend intrinsèquement et uniquement de  $\mathcal{C}$ .

## CATÉGORIES DES ÉLÉMENTS

Etant donné un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ , on définit la catégorie des éléments de  $F$ , notée  $\text{Elt}_s(F)$ , comme il suit: les objets sont les couples  $(A, a)$  où  $A$  est un objet de  $\mathcal{A}$  et  $a \in F(A)$ . Les morphismes de  $(A, a)$  vers  $(B, b)$  sont les morphismes  $f : A \rightarrow B$  tels que  $(F(f))(a) = b$ . On a alors:

### III.2.4 PROPOSITION

Si  $\mathcal{A}$  est sans boucle, alors il en va de même de  $\text{Elt}_s(F)$ . Autrement dit, la catégorie des éléments de tout foncteur (à valeurs dans  $\text{Set}$ ) défini sur une catégorie sans boucle est sans boucle.

## TRANCHE D'UNE CATÉGORIE (IDÉAL) AU-DESSUS DE $x$

Etant donné un objet  $x$  d'une (petite) catégorie  $\mathcal{C}$ , on pose  $Ob(\mathcal{C}/x) := \{f \in Mo(\mathcal{C}) \mid tgt(f) = x\}$  et  $Mo(\mathcal{C}/x)[f, g] := \{h \in Mo(\mathcal{C}) \mid src(f), src(g) \mid f = g \circ h\}$ . On dit alors que  $\mathcal{C}/x$  est une tranche de  $\mathcal{C}$  au dessus de  $x$ , schématiquement,

$$\begin{array}{ccc} src(f) & \xrightarrow{h} & src(g) \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & x \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ = \end{array}$$

Il est clair que si  $\mathcal{C}$  est sans boucle alors  $\mathcal{C}/x$  l'est aussi.

Remarquons que si  $\mathcal{C}$  est un ensemble ordonné vu comme une catégorie,  $\mathcal{C}/x$  n'est rien d'autre que  $\uparrow x := \{y \in \mathcal{C} \mid y \geq x\}$ , c'est pourquoi, une tranche de catégorie au dessus de  $x$  peut aussi être vu comme un idéal au dessus de  $x$ .

## CATÉGORIE VIRGULE

Etant donnés deux foncteurs  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}, G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ , la catégorie virgule<sup>2</sup>  $(F, G)$  est défini de la façon suivante: les objets sont les triplets  $(A, f, B)$  où  $A, B$  sont respectivement des objets de  $\mathcal{A}$  et de  $\mathcal{B}$  et où  $f : F(A) \rightarrow G(B)$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$ . Dans la catégorie virgule, les morphismes de  $(A, f, B)$  vers  $(A', f', B')$  sont les couples  $(a : A \rightarrow A', b : B \rightarrow B')$  où  $a, b$  sont respectivement de morphismes de  $\mathcal{A}$  et de  $\mathcal{B}$  tels que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f} & G(B) \\ F(a) \downarrow & = & \downarrow F(b) \\ F(A') & \xrightarrow{f'} & G(B') \end{array}$$

Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont sans boucle, alors la catégorie virgule  $(F, G)$  l'est également.

La catégorie (virgule) **torsadée** a la même collection d'objets que la catégorie virgule, mais ses morphismes sont les couples  $(a, b)$  avec  $a \in \mathcal{A}[A', A]$  et  $b \in \mathcal{B}[B, B']$  tels que le diagramme commute:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f} & G(B) \\ F(a) \uparrow & = & \downarrow F(b) \\ F(A') & \xrightarrow{f'} & G(B') \end{array}$$

Une fois encore, si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont sans boucle, alors la catégorie virgule torsadée  $(F, G)$  l'est aussi. Un cas particulier intéressant est obtenu lorsque  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$  et  $F = G = Id_{\mathcal{C}}$ , la catégorie virgule (respectivement virgule torsadée) est alors appelée la catégorie des carrés (respectivement carré torsadés, voir l'exemple suivant) de  $\mathcal{C}$ . On peut vérifier que la catégorie des carrés de  $\mathcal{C}$  est sans boucle si et seulement si la catégorie  $\mathcal{C}$  est elle-même sans boucle.

<sup>2</sup>ou *comma category* dans la terminologie anglo-saxonne voir [59] ou [9]

III.2.5 DÉFINITION

Etant donnée une petite catégorie  $\mathcal{C}$ , on définit la **catégorie des factorisations** de  $\mathcal{C}$  (notée  $FC$ ) en posant,  $Ob(FC) = Mo(\mathcal{C})$  et  $FC[\alpha, \beta]$  la collection des couples  $(\gamma_2, \gamma_1) \in \mathcal{C}[tgt(\alpha), tgt(\beta)] \times \mathcal{C}[src(\beta), src(\alpha)]$  tels que  $\beta = \gamma_2 \circ \alpha \circ \gamma_1$ .

III.2.6 LEMME

Si  $\mathcal{C}$  est petite, alors  $FC$  l'est aussi. De plus, si  $\mathcal{C}$  est sans boucle, alors  $FC$  l'est aussi.

PREUVE. La première assertion est évidente. Supposons que  $(\gamma_2, \gamma_1)$  soit un morphisme de  $\alpha$  vers  $\alpha$  i.e.  $\alpha = \gamma_2 \circ \alpha \circ \gamma_1$ , alors  $\gamma_1, \gamma_2 \in Endo(\mathcal{C})$  donc ce sont des identités (d'après le point (5) du théorème III.1.6). Supposons que  $(\gamma_2, \gamma_1)$  soit un isomorphisme de  $\alpha$  vers  $\beta$ , il vient  $src(\alpha) \sqsubseteq_o src(\beta) \sqsubseteq_o src(\alpha)$  ainsi,  $\sqsubseteq_o$  étant un ordre partiel (d'après le point cf (9) du théorème III.1.6),  $src(\alpha) = src(\beta)$ , de la même façon on prouve que  $tgt(\alpha) = tgt(\beta)$  donc  $\gamma_1, \gamma_2$  sont des identités de même que le morphisme  $(\gamma_2, \gamma_1)$  de  $FC$ . La catégorie  $FC$  est sans boucle (cf (5) du théorème III.1.6). ■

III.2.7 REMARQUE

Etant donnés deux morphismes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\mathcal{C}$ , on note que l'on a  $\gamma_1 \sqsubseteq_{Mo(\mathcal{C})} \gamma_2$  si et seulement si  $\gamma_1 \sqsubseteq_{Ob(FC)} \gamma_2$ , où  $\sqsubseteq_{Mo(\mathcal{C})}$  et  $\sqsubseteq_{Ob(FC)}$  sont les mêmes relations que celles apparaissant dans le théorème III.1.6. On peut résumer de façon très compacte en écrivant

$$\sqsubseteq_{Mo(\mathcal{C})} = \sqsubseteq_{Ob(FC)} .$$

III.2.8 REMARQUE

Supposons que  $\gamma, \delta \in \mathcal{C}[x, y]$  et  $\gamma \neq \delta$ , alors  $\gamma \not\sqsubseteq_{Mo(\mathcal{C})} \delta$ .

PREUVE. Puisque  $\mathcal{C}$  est une catégorie sans boucle, s'il y avait une factorisation  $(\sigma_2, \sigma_1)$  de  $\gamma$  vers  $\delta$ , i.e.  $\delta = \sigma_2 \circ \gamma \circ \sigma_1$ , nous aurions  $\sigma_1 \in \mathcal{C}[x, x] = \{id_x\}$ ,  $\sigma_2 \in \mathcal{C}[y, y] = \{id_y\}$  et donc  $\gamma = \delta$ . ■

En fait, on peut prouver que la catégorie  $FC$  est sans boucle si et seulement si aucun des morphisme  $g$  de  $\mathcal{C}$  ne possède de décomposition propre dont l'un des termes est  $g$ . Les catégories des factorisations apparaissent dans [6], [3] et [4] dans le contexte de la cohomologie des petites catégories.

CATÉGORIE DES FONCTEURS D'UNE (PETITE) CATÉGORIE VERS UNE (PETITE) CATÉGORIE SANS BOUCLE

Etant donné deux catégories  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ , on note  $Fun(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{C}_1$  vers  $\mathcal{C}_2$  avec les transformations naturelles entre eux comme morphismes. Nous donnons cette définition sans égards pour les problèmes de taille des collections issus de la théorie des ensembles. Le contexte ensembliste mis en place dans l'appendice A.1.1 règle le problème. Quoiqu'il en soit, le lemme suivant montre que, pourvu que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  soient petites,  $Fun(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  l'est aussi.

III.2.9 LEMME

Etant données deux petites catégories  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ ,  $Fun(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  est petite. De plus, si  $\mathcal{C}_2$  est sans boucle, alors  $Fun(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  l'est également.

PREUVE. Puisque  $Ob(\mathcal{C}_1), Ob(\mathcal{C}_2), Mo(\mathcal{C}_1)$  et  $Mo(\mathcal{C}_2)$  sont des ensembles, nous avons  $Fun(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \subseteq \text{Set}[Ob(\mathcal{C}_1), Ob(\mathcal{C}_2)] \times \text{Set}[Mo(\mathcal{C}_1), Mo(\mathcal{C}_2)]$  qui est donc un ensemble.

Supposons que  $f : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  soit un foncteur et  $\eta$  une transformation naturelle de  $f$  vers  $f$  i.e. un endomorphisme de  $Fun(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ . Alors, quel que soit l'objet  $x$  de  $\mathcal{C}_1$  on a que  $\eta_x$  appartient à  $\mathcal{C}_2[f(x), f(x)]$  qui se trouve être réduit au singleton  $\{id_{f(x)}\}$  car  $\mathcal{C}_2$  est sans boucle (voir (5) du théorème III.1.6). Ainsi  $\eta = id_f$ .

Supposons que  $f, g : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  soient des foncteurs,  $\eta$  une transformation naturelle de  $f$  vers  $g$  et  $\nu$  une transformation naturelle de  $g$  vers  $f$  telle que  $\nu = \eta^{-1}$ . Pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}_1$ , nous avons  $\eta_x$  dans  $\mathcal{C}_2[f(x), g(x)]$  et  $\nu_x$  dans  $\mathcal{C}_2[g(x), f(x)]$ , en d'autres termes,  $f(x) \sqsubseteq_{o, \mathcal{C}_2} g(x)$  et  $g(x) \sqsubseteq_{o, \mathcal{C}_2} f(x)$ , d'après le point (9) du théorème III.1.6, il vient  $f(x) = g(x)$ , donc, puisque  $\mathcal{C}_2$  est sans boucle,  $\eta_x = \nu_x = id_{f(x)} = id_{g(x)}$  d'après le point (5) théorème III.1.6. De plus,  $\eta$  est une transformation naturelle, ainsi pour tout morphisme  $\alpha \in \mathcal{C}_1[x, y]$  on a

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{f(\alpha)} & f(y) \\ \eta_x \downarrow & = & \downarrow \eta_y \\ g(x) & \xrightarrow{g(\alpha)} & g(y) \end{array},$$

d'où  $f(\alpha) = g(\alpha)$ . Finalement  $f = g$  et  $\eta = \nu = id_f = id_g$ . Ainsi, par la réciproque du point (5) du théorème III.1.6,  $Fun(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  est sans boucle. ■

### III.2.10 COROLLAIRE

Pour toutes petites catégories  $\mathcal{C}$ , nous avons un foncteur  $Fun(\mathcal{C}, -) : \text{LfCat} \rightarrow \text{LfCat}$  que l'on note aussi  $(-)^{\mathcal{C}}$ .

PREUVE. L'endofoncteur usuel  $Fun(\mathcal{C}, -)$  de  $\text{Cat}$ , dont la description se trouve dans [9] ou [59] et qui est étroitement lié au lemme de Yoneda (voir le lemme A.1.28), induit d'après le lemme III.2.9 un endofoncteur de  $\text{LfCat}$ . ■

### III.2.11 LEMME (OBJET INTERNE DES MORPHISMES DE $\mathcal{C}_1$ VERS $\mathcal{C}_2$ DANS $\text{LfCat}$ )

Pour toutes petites catégories  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ ,  $\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}$  et  $(\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_2})^{\mathcal{C}_1}$  sont isomorphes dans  $\text{Cat}$ . De plus, si  $\mathcal{C}_3$  est sans boucle, alors  $\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}$  et  $(\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_2})^{\mathcal{C}_1}$  sont isomorphes dans  $\text{LfCat}$ .

PREUVE. Notons  $\Phi$  le foncteur de  $\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}$  vers  $(\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_2})^{\mathcal{C}_1}$  définit ainsi: pour tous les  $F, x_1$  et  $x_2$  respectivement pris dans  $\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}, \mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , on pose  $((\Phi F)(x_1))(x_2) := F((x_1, x_2))$  et pour tous les morphismes (donc transformations naturelles)  $\eta$ ,  $((\Phi \eta)_{x_1})_{x_2} := \eta_{(x_1, x_2)}$ .  $\Phi$  admet un foncteur inverse, noté  $\Psi$ , et défini comme il suit: pour tous les objets  $G, x_1$  et  $x_2$  respectivement pris dans  $(\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_2})^{\mathcal{C}_1}, \mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , nous posons  $(\Psi G)(x_1, x_2) := (G(x_1))(x_2)$  et pour tous les morphismes (donc transformations naturelles)  $\mu$ , nous posons  $(\Psi \mu)_{(x_1, x_2)} := (\mu_{x_1})_{x_2}$ . Le cas  $\text{Cat}$  est prouvé. Si  $\mathcal{C}_3$  est sans boucle alors, d'après le lemme III.2.9,  $\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}$  et  $(\mathcal{C}_3^{\mathcal{C}_2})^{\mathcal{C}_1}$  le sont aussi et l'isomorphisme est dans  $\text{LfCat}$ . ■

### III.3 PROPRIÉTÉS CATÉGORIQUES DE LfCat

On propose ici une étude systématique de LfCat. Nous allons voir que cette catégorie partage une grande partie de sa structure avec Cat.

#### III.3.1 THÉORÈME (REFLET DE Cat DANS LfCat)

1. La catégorie LfCat est une sous-catégorie épiréfléchissante de Cat, en particulier, LfCat est complète et cocomplète.
2. En outre, si  $r$  est la réflexion de Cat dans LfCat, alors pour toute petite catégorie  $\mathcal{C}$ , ( $\mathcal{C}$  est sans boucle si et seulement si  $r(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ )
3. La catégorie LfCat est cartésienne fermée et sa structure est héritée de celle de Cat.
4. La catégorie LfCat admet pour cogénérateur la petite catégorie:

$$\perp \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \neq \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} \top$$

et pour générateur la petite catégorie:

$$\perp \xrightarrow{\alpha} \top .$$

5. La catégorie LfCat a une bonne notion de sous-objet.

PREUVE. Commençons par décrire la réflexion de Cat dans LfCat. Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie, pour tout morphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{C}$  qui fait partie d'une boucle (voir définition le point (10) du théorème III.1.6), on identifie  $\gamma$  à l'identité de sa source et à l'identité de son but. Formellement, on considère  $\sim$ , la congruence généralisée (voir définition A.4.1) engendrée par

$$\{\gamma \in Mo(\mathcal{C}) \mid \gamma \text{ apparaît dans une boucle de } \mathcal{C}\}$$

Cette congruence généralisée peut être décrite ainsi: pour tous objets  $x, y$  de  $\mathcal{C}$ , on pose  $x \sim_o y$  si et seulement si il existe un morphisme de  $\mathcal{C}$  de  $x$  vers  $y$  faisant partie d'une boucle de  $\mathcal{C}$ . Deux suites finies  $\sim_o$ -composables sont  $\sim_m$ -équivalentes si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie de transformations élémentaires, ces transformations élémentaires étant

$$\begin{array}{ll} (\gamma_n, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_0) \sim_m (\gamma_n, \dots, id_{src(\gamma_i)}, \dots, \gamma_0) & \text{si } \gamma_i \text{ fait partie d'une boucle de } \mathcal{C} \\ (\gamma_n, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_0) \sim_m (\gamma_n, \dots, id_{tgt(\gamma_i)}, \dots, \gamma_0) & \text{si } \gamma_i \text{ fait partie d'une boucle de } \mathcal{C} \\ (\gamma_n, \dots, \gamma_{i+1}, \gamma_i, \dots, \gamma_0) \sim_m (\gamma_n, \dots, \gamma_{i+1} \circ \gamma_i, \dots, \gamma_0) & \text{si } (\gamma_{i+1}, \gamma_i) \text{ est composable dans } \mathcal{C} \end{array}$$

On a alors la composante  $\mathcal{C}$  de la counité donnée par le foncteur quotient  $Q_\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_\sim$  (voir la proposition A.4.3). Le foncteur  $Q_\sim$  vérifie la propriété universelle des adjoints à droite d'après le point (10) du théorème III.1.6 et la proposition A.4.3. La proposition A.3.12 donne l'adjoint à gauche que l'on note  $r$ . Le second point est immédiat puisque, si  $\mathcal{C}$  est une catégorie sans boucle, alors aucun des morphismes de  $\mathcal{C}$  n'apparaît dans une boucle et donc la congruence généralisée décrite au dessus est triviale, i.e. elle n'identifie que ce qui est égal. Réciproquement, on va vérifier que, si  $\sim$  est la congruence généralisée décrite

au dessus, alors  $\mathcal{C}_{\sim}$  est sans boucle. Remarquons déjà que chaque  $\sim$ -classe d'équivalence a un représentant qui est une suite composable de  $\mathcal{C}$  (et pas seulement)  $\sim_o$ -composable et donc qu'on a un représentant de la forme  $(y, (\gamma), x)$ , où bien sûr  $src(\gamma) = x$  et  $tgt(\gamma) = y$ . Si on a  $x \sim_o y$ , alors  $\gamma$  fait partie d'une boucle de  $\mathcal{C}$  et donc  $(y, (\gamma), x) \sim_m (x, (id_x), x) \sim_m (y, (id_y), y)$ . Donc  $Endo(r(\mathcal{C}))$  est une catégorie discrète. De plus, si on a  $(y, (\gamma), x)$  et  $(x', (\gamma'), y')$  avec  $x \sim_o y'$  et  $y \sim_o x'$ , alors  $\gamma$  et  $\gamma'$  font partie d'une (même) boucle de  $\mathcal{C}$  et sont donc des représentant d'une classe identité. Donc  $Endo(r(\mathcal{C}))$  est une catégorie discrète et pure dans  $r(\mathcal{C})$ , d'après le théorème III.1.6,  $r(\mathcal{C})$  est donc sans boucle. On a ainsi prouvé les deux premiers points. Le troisième nous est donné essentiellement par le lemme III.2.9. Le fait que la petite catégorie

$$\perp \xrightarrow{\alpha} \top$$

soit un générateur est trivial, en effet, c'est déjà un générateur de  $\mathbf{Cat}$  et il est immédiat que c'est une catégorie sans boucle. Voyons maintenant que la petite catégorie

$$\perp \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \neq \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} \top$$

est un cogénérateur de  $\mathbf{LfCat}$ .

Notons  $\mathcal{E}$  la catégorie suivante

$$\perp \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \neq \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} \top .$$

Etant donnés  $f, g : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  deux foncteurs distincts entre deux catégories sans boucle, il nous faut montrer qu'il existe un foncteur  $h : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{E}$  tel que  $h \circ f \neq h \circ g$ . Ainsi, il est suffisant de prouver que pour chaque (petite) catégorie sans boucle  $\mathcal{C}$  et tout couple d'objets distincts  $(x, y)$  de  $\mathcal{C}$  et tout couple de morphismes distincts  $\gamma, \delta$  de  $\mathcal{C}[x, y]$ , on a deux foncteurs  $h, h' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  tels que  $h(x) \neq h(y)$  et  $h'(\gamma) \neq h'(\delta)$ .

On définit  $h$  de la façon suivante: pour tout objet  $z$  de  $\mathcal{C}$ ,

- si  $z \sqsubseteq_o x$ , alors  $h(z) = \perp$
- sinon  $h(z) = \top$

et  $\forall \gamma \in Mo(\mathcal{C})$

- si  $src(\gamma), tgt(\gamma) \sqsubseteq_o x$ , alors  $h(\gamma) = id_{\perp}$
- si  $src(\gamma), tgt(\gamma) \not\sqsubseteq_o x$ , alors  $h(\gamma) = id_{\top}$
- sinon, on a nécessairement  $src(\gamma) \sqsubseteq_o x$  et  $tgt(\gamma) \not\sqsubseteq_o x$  (car  $\mathcal{C}$  est sans boucle donc  $\sqsubseteq_o$  est une relation d'ordre partiel et  $src(\gamma) \sqsubseteq_o tgt(\gamma)$ ) et on pose  $h(\gamma) = \alpha$ . Dans ce cas on a évidemment  $h(x) = \perp$  et  $h(y) = \top$ .

On constate alors que  $h$  est un foncteur puisque si  $\gamma$  et  $\delta$  sont des morphismes de  $\mathcal{C}$  avec  $src(\delta) = tgt(\gamma)$ , alors on ne peut pas avoir  $h(\gamma) = \alpha$  et  $h(\delta) = \alpha$ , une fois encore, c'est une conséquence du fait que  $\mathcal{C}$  soit sans boucle.

Dans le cas où l'on a deux morphismes  $\gamma, \delta$  de  $\mathcal{C}$ , supposons que  $\gamma, \delta$  n'aient pas les mêmes extrémités, alors en appliquant ce qui précède, on a  $h'$  tel que  $h'(\gamma)$  et  $h'(\delta)$  aient des sources ou des buts différents, donc  $h'(\gamma) \neq h'(\delta)$ .

Ainsi, on peut supposer que  $\gamma, \delta \in \mathcal{C}[x, y]$ . Nous définissons alors  $h'$  ainsi: pour un objet  $z$  de  $\mathcal{C}$

- si  $z \sqsubseteq_o x$ , alors  $h'(z) := \perp$
- sinon  $h'(z) := \top$

Pour un morphisme  $\zeta$ ,

- si  $\text{src}(\zeta), \text{tgt}(\zeta) \sqsubseteq_o x$ , on pose  $h'(\zeta) := \text{id}_\perp$ .
- si  $\text{src}(\zeta), \text{tgt}(\zeta) \not\sqsubseteq_o x$ , on pose  $h'(\zeta) := \text{id}_\top$ .
- si  $\text{src}(\zeta) \sqsubseteq_o x$ ,  $\text{tgt}(\zeta) \not\sqsubseteq_o x$  et s'il existe  $\zeta'$  tel que  $\zeta' \sqsubseteq_m \zeta$ ,  $\zeta' \sqsubseteq_m \gamma$  et  $\zeta' \not\sqsubseteq_m \delta$ , alors on pose  $h'(\zeta) := \alpha$ .
- dans tous les autres cas, on pose  $h'(\zeta) := \beta$ .

Vérifions que  $h'$  est effectivement un foncteur: étant donné  $\zeta_1, \zeta_2$  avec  $\text{src}(\zeta_2) = \text{tgt}(\zeta_1)$ , nous avons  $\text{src}(\zeta_1) \sqsubseteq_o \text{tgt}(\zeta_1) = \text{src}(\zeta_2) \sqsubseteq_o \text{tgt}(\zeta_2)$ . Ainsi, si  $\text{tgt}(\zeta_2) \sqsubseteq_o x$ , alors  $h'(\zeta_1) = h'(\zeta_2) = \text{id}_\perp$ , si  $\text{src}(\zeta_1) \not\sqsubseteq_o x$ , alors  $h'(\zeta_1) = h'(\zeta_2) = \text{id}_\top$ , si  $\text{src}(\zeta_1) \sqsubseteq_o x$  et  $\text{tgt}(\zeta_2) \not\sqsubseteq_o x$ , alors nous avons deux sous-cas à étudier: si  $\text{tgt}(\zeta_1) \sqsubseteq_o x$ , alors  $h'(\zeta_1) = \text{id}_\perp$  et  $h'(\zeta_2) \in \{\alpha, \beta\}$ , sinon  $\text{tgt}(\zeta_1) \not\sqsubseteq_o x$ , alors  $h'(\zeta_2) = \text{id}_\top$  et  $h'(\zeta_1) \in \{\alpha, \beta\}$ . Dans tous les cas,  $h'(\zeta_2 \circ \zeta_1) = h'(\zeta_2) \circ h'(\zeta_1)$  est satisfait donc  $h'$  est un foncteur. Alors,  $h'(\gamma) = \alpha$  puisque  $\gamma \not\sqsubseteq_m \delta$  (voir l'exemple des catégories des factorisations). De plus, il vient immédiatement d'après la définition de  $h'$  que  $h'(\delta) = \beta$ .

Pour se convaincre de l'avant-dernier point, il suffit de remarquer que les monomorphismes de  $\text{LfCat}$  sont, tout comme ceux de  $\text{Cat}$ , les foncteurs dont la partie objet et la partie morphisme sont injectives. Le dernier point est, à quelques aménagements près, une conséquence de [50]. ■

En pratique, le dernier point du théorème III.3.1 ne sera pas utilisé dans le reste de cette thèse.

### III.3.1 QUELQUES EXEMPLES DE REFLETS DANS $\text{LfCat}$

#### MONOÏDES

Pour tout monoïde  $\mathcal{M}$  (vu comme une petite catégorie),  $r(\mathcal{M}) = \{*\}$ , autrement dit, le reflet de tout monoïde dans  $\text{LfCat}$  est l'objet terminal de  $\text{LfCat}$ .

#### GROUPOÏDES

Pour tout groupoïde  $\mathcal{G}$  (vu comme une petite catégorie),  $r(\mathcal{G}) = \{*\}$ , autrement dit, le reflet de tout groupoïde dans  $\text{LfCat}$  est l'objet terminal de  $\text{LfCat}$ .

#### UNE CARACTÉRISATION DES CATÉGORIES SANS BOUCLE

Pour toute petite catégorie  $\mathcal{C}$ ,  $r(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  est sans boucle (c'est le 11<sup>ème</sup> point du théorème III.1.6). C'est le second point du théorème III.3.1.



## POLYGONES DIRIGÉS

On a

$$\{*\} = r(\text{⤵}) = r(\text{⤴}) = r(\text{⤵⤴}) = \dots$$

## INFLUENCE DES RELATIONS ENTRE MORPHISMES DE $\mathcal{C}$

On a

$$r\left(\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ \left( \right) & & \left( \right) \\ & \xleftarrow{\beta} & \end{array}\right) = \begin{array}{c} \xrightarrow{[\alpha]} \\ \xleftarrow{[\beta]} \end{array}$$

si il n'y a aucune relation impliquant  $\alpha$  ou  $\beta$ , c'est-à-dire qu'aucun des diagrammes dans lesquels apparaissent  $\alpha$  et  $\beta$  n'est commutatif.

## III.4 FONCTEURS HÉLICES

Etant donnée une (petite) catégorie  $\mathcal{C}$ , la catégorie  $Helix_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$  est définie comme suit: la collection des objets de  $Helix_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$  est  $Ob(\mathcal{C}) \times \mathbb{N}$  et celle des morphismes de  $(x_1, n_1)$  vers  $(x_2, n_2)$  est

- $\emptyset$  si  $n_1 \not\leq n_2$
- $\emptyset$  si  $n_1 = n_2$  et  $x_1 \neq x_2$
- $\{(n_1, id_{x_1}, n_1)\}$  si  $n_1 = n_2$  et  $x_1 = x_2$
- $\{(n_1, f, n_2) / f \in \mathcal{C}[x_1, x_2]\}$  si  $n_1 < n_2$ .

Comme on peut s'y attendre, on pose

$$\begin{aligned} src(n_1, f, n_2) &:= (src(f), n_1) = (x_1, n_1) \\ tgt(n_1, f, n_2) &:= (tgt(f), n_2) = (x_2, n_2) \\ id_{(x,n)} &:= (n, id_x, n) \\ (n_2, g, n_3) \circ (n_1, f, n_2) &:= (n_3, g \circ f, n_1), \text{ où } src(g) = tgt(f) \text{ dans } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout foncteur  $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ , nous avons un foncteur

$$Helix_{\mathbb{N}}(F) : Helix_{\mathbb{N}}(\mathcal{C}_1) \rightarrow Helix_{\mathbb{N}}(\mathcal{C}_2)$$

en posant

$$Helix_{\mathbb{N}}(F)(x, n) := (F(x), n) \text{ et } Helix_{\mathbb{N}}(F)(n_1, f, n_2) := (n_1, F(f), n_2).$$

En particulier,  $Helix_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$  est une sous-catégorie de la catégorie produit  $\mathcal{C} \times \mathbb{N}$ , où  $\mathbb{N}$  est ensemble ordonné vu comme une petite catégorie.

### III.4.1 LEMME

On a un foncteur  $Helix_{\mathbb{N}}$  de  $\mathbf{Cat}$  vers  $\mathbf{LfCat}$  et  $proj_{\mathbb{N}, \mathcal{C}} : Helix_{\mathbb{N}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ , qui est défini par  $proj_{\mathbb{N}}(x, n) := x$  et  $proj_{\mathbb{N}}(n_1, f, n_2) := f$  est une transformation naturelle de  $I \circ Helix_{\mathbb{N}}$  vers  $Id_{\mathbf{CAT}}$ , où  $I$  est le foncteur d'inclusion de  $\mathbf{LfCat}$  vers  $\mathbf{Cat}$ .

PREUVE. Il reste à voir que  $Helix_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$  est sans boucle. Si  $Helix_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})[(x_1, n_1), (x_2, n_2)] \neq \emptyset$  et  $(x_1, n_1) \neq (x_2, n_2)$ , alors  $n_1 < n_2$ , conséquemment,  $Helix_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})[(x_2, n_2), (x_1, n_1)] = \emptyset$  et, par définition,  $Helix_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})[(x, n), (x, n)] = \{(n, id_x, n)\}$ , donc, d'après le point (2) du théorème III.1.6,  $Helix_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$  est sans boucle. La naturalité est évidente. ■

Ainsi,  $Helix_{\mathbb{N}}$  est “presque” l'adjoint à droite de  $I$ , mais, comme  $I$  ne préserve pas les colimites, nous savons que  $I$  n'a pas d'adjoint à droite. Remarquons que, dans tout ce qui précède, on peut remplacer  $\mathbb{N}$  par n'importe quel ensemble partiellement ordonné  $(P, \leq)$  et ainsi définir  $Helix_P$ .

### III.4.2 PROPOSITION

On a un foncteur  $Helix : \text{Cat} \times \text{PoSet} \rightarrow \text{LfCat}$  dont la partie objet est définie pour toute petite catégorie  $\mathcal{C}$  et tout ensemble ordonné  $P$  par  $Helix(\mathcal{C}, P) := Helix_P(\mathcal{C})$ , et dont la partie morphisme est définie pour tout foncteur  $F$  appartenant à  $\text{Cat}[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ , pour toute application  $G$  appartenant à  $\text{PoSet}[P_1, P_2]$ , pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}_1$  et tout élément  $n$  de l'ensemble ordonné  $P_1$ , par  $Helix(F, G)(x, n) := (F(x), G(n))$ , et pour tout  $\gamma$  appartenant à  $Mo(\mathcal{C})$  et tout  $n_1, n_2$  appartenant à  $P_1$ , par  $Helix(F, G)(n_1, \gamma, n_2) := (G(n_1), F(\gamma), G(n_2))$ .

PREUVE. C'est une vérification routinière. ■

En fait, le résultat précédent peut encore être généralisé

### III.4.3 THÉORÈME

Le foncteur  $Helix$  de la proposition III.4.2 peut être prolongé en un foncteur  $Helix' : \text{Cat} \times \text{LfCat} \rightarrow \text{LfCat}$ . En notant  $I$  le foncteur d'inclusion de  $\text{PoSet}$  vers  $\text{LfCat}$  et  $Helix'$  le prolongement de  $Helix$ , il vient  $Helix = Helix' \circ (Id_{\text{Cat}}, I)$ , soit encore le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \text{Cat} \times \text{PoSet} & \xrightarrow{Id_{\text{Cat}} \times I} & \text{Cat} \times \text{LfCat} \\ & \searrow Helix & \swarrow Helix' \\ & & \text{LfCat} \end{array}$$

PREUVE.

Etant données une (petite) catégorie  $\mathcal{C}$  et une catégorie sans boucle  $\mathcal{L}$ ,  $Ob(Helix(\mathcal{C}, \mathcal{L})) := Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{L})$  et  $Helix(\mathcal{C}, \mathcal{L})[(x_1, n_1), (x_2, n_2)] := \emptyset$  si  $(n_1 \not\sqsubseteq_o n_2$  ou  $(n_1 = n_2$  et  $x_1 \neq x_2))$ ,  $Mo[(x, n), (x, n)] := \{id_{(x,n)}\}$  et  $Mo[(x_1, n_1), (x_2, n_2)] := Mo[x_1, x_2] \times Mo[n_1, n_2]$  si  $n_1 \sqsubseteq_o n_2$ . Ainsi nous avons défini une sous-catégorie de  $\mathcal{C} \times \mathcal{L}$ , les sources, cibles et compositions étant héritées de ce produit. Etant donné  $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  un morphisme de  $\text{Cat}$  et  $G : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  un morphisme de  $\text{LfCat}$ , on pose

$$Helix(F, G)(x, y) := (F(x), G(y))$$

$$Helix(F, G)(x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2, n_1 \xrightarrow{\beta} n_2) := (F(x_1) \xrightarrow{F(\alpha)} F(x_2), G(n_1) \xrightarrow{G(\beta)} G(n_2)).$$

■

En fait, la définition de  $Helix$  peut faire penser à un analogue catégorique de ce qui est connu des topologues algébristes comme le “revêtement universel”. L'exemple standard est celui du cercle  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ , dont le revêtement universel est l'hélice  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ . Fixons  $x_0$  comme le point base du cercle et  $y_0$  celui de l'hélice. Il y a

une projection évidente de l'hélice sur le cercle et il est un fait bien connu de la topologie algébrique élémentaire que tout chemin  $\gamma$  sur le cercle et partant de  $x_0$  a un unique "relèvement" sur l'hélice partant de  $y_0$ . C'est à dire qu'il y a un unique chemin  $lift(\gamma)$  sur l'hélice et partant de  $y_0$  dont la projection est  $\gamma$ . Nous avons donc une application de "relèvement" qui envoie tout chemin du cercle partant de  $x_0$  sur un chemin de l'hélice partant de  $y_0$ . En choisissant un "objet base" de  $\mathcal{C}$  et un "objet base" de  $Helix_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$  on peut adapter le résultat de la topologie algébrique à notre cadre d'étude. Néanmoins, en général, l'application de "relèvement" n'est pas fonctorielle parce que la source de chaque "relèvement" est  $y_0$ . Dans [22], *Lisbeth Fajstrup* développe une notion de revêtement universel dirigé.

### III.5 LE THÉORÈME DE VAN KAMPEN DANS LfCat

On a déjà dit au début de ce chapitre, que désormais, le foncteur catégorie fondamentale est à valeurs dans LfCat. Plus précisément, si  $r$  est la réflexion de Cat dans LfCat, en notant  $\vec{\pi}_1$  le foncteur catégorie fondamentale tel qu'il a été décrit dans le chapitre II, le nouveau foncteur catégorie fondamentale est  $\pi_1 := r \circ \vec{\pi}_1$  et on a, pour tout espace ordonné  $\vec{X}$ ,  $\vec{\pi}_1(\vec{X}) = \pi_1(\vec{X})$  d'après la propriété II.2.3 et le point (2) du théorème III.3.1. D'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \text{LfCat} & \\ \vec{\pi}_1 \nearrow & & \searrow r \\ \text{PoSpc} & \xrightarrow{\pi_1} & \text{Cat} \end{array}$$

La proposition II.2.6 (Van Kampen dirigé) devient alors, avec les notations introduites ci-dessus

#### III.5.1 PROPOSITION (RAFFINEMENT DU THÉORÈME DE VAN KAMPEN)

Soient  $\vec{X}_1$  et  $\vec{X}_2$ , deux sous-espaces ordonnés d'un espace ordonné  $\vec{X}$  tels que l'espace topologique sous-jacent de  $\vec{X}$ , noté  $X$ , soit la réunion des intérieurs de  $X_1$  et de  $X_2$ , les espaces topologiques sous-jacents de  $\vec{X}_1$  et  $\vec{X}_2$ ,

$$X_1 \subseteq X \quad X_2 \subseteq X \quad X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2 .$$

Posons  $\vec{X}_0 := \vec{X}_1 \cap \vec{X}_2$ ,  $i_1 : \vec{X}_0 \hookrightarrow \vec{X}_1$ ,  $i_2 : \vec{X}_0 \hookrightarrow \vec{X}_2$ ,  $j_1 : \vec{X}_1 \hookrightarrow \vec{X}$  et  $j_2 : \vec{X}_2 \hookrightarrow \vec{X}$  les inclusions canoniques. Les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} & \vec{X} & \\ j_1 \nearrow & & \nwarrow j_2 \\ \vec{X}_1 & \text{somme amalgamée} & \vec{X}_2 \\ i_1 \nwarrow & & \nearrow i_2 \\ & \vec{X}_0 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \vec{\pi}_1(\vec{X}) & \\ \vec{\pi}_1(j_1) \nearrow & & \nwarrow \vec{\pi}_1(j_2) \\ \vec{\pi}_1(\vec{X}_1) & \text{somme amalgamée} & \vec{\pi}_1(\vec{X}_2) \\ \vec{\pi}_1(i_1) \nwarrow & & \nearrow \vec{\pi}_1(i_2) \\ & \vec{\pi}_1(\vec{X}_0) & \end{array}$$

sont des sommes amalgamées respectivement dans PoSpc et LfCat.

PREUVE. La proposition II.2.6 donne le résultat pour  $\overrightarrow{\pi}_1$ , puis  $r$  est un adjoint à droite, il préserve donc les colimites et il se trouve qu'une somme amalgamée est une colimite, d'où le résultat. ■

### III.6 RÉGULARITÉ DU PRODUIT ET DE L'EXPONENTIATION

Dans le cadre de  $\text{LfCat}$ , on va s'intéresser au problème catégorique suivant: étant données trois catégories sans boucle  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , sous quelles conditions a-t-on

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \times \mathcal{C} \implies \mathcal{B} \cong \mathcal{C}.$$

En suivant l'idée selon laquelle le produit cartésien est la représentation catégorique de la mise en parallèle de deux processus, la propriété précédente affirme alors que l'opérateur de mise en parallèle est régulier. De tels problèmes de régularité semblent avoir été posé très tôt (autour de 1940) par *Garrett Birkhoff*. L'article de *Ralph McKenzie* ([68]) fournit un historique précis de ces questions et donne les preuves de résultats les concernant. On y trouve notamment une version du théorème de *Hashimoto* qui affirme que si  $C$  est un ensemble ordonné connexe et que  $\phi$  et  $\psi$  sont respectivement des isomorphismes de  $C$  vers  $A_0 \times A_1$  et  $B_0 \times B_1$  (dans  $\text{PoSet}$ ), alors il existe quatre ensembles ordonnés  $X, Y, Z$  et  $W$  ainsi que quatre isomorphismes

$$\begin{aligned} \beta_0 &: X \times Y \cong A_0 \\ \beta_1 &: Z \times W \cong A_1 \\ \gamma_0 &: X \times Z \cong B_0 \\ \gamma_1 &: Y \times W \cong B_1 \end{aligned}$$

tels que pour tout quadruplet  $(x, y, z, w) \in X \times Y \times Z \times W$  on a

$$\psi \circ \phi^{-1}(\beta_0(x, y), \beta_1(z, w)) = (\gamma_0(x, z), \gamma_1(y, w)).$$

Par ailleurs la catégorie des ensembles ordonnés finis admet les produits et les coproduits de deux ensembles ordonnés finis  $A$  et  $B$ , respectivement notés  $A \times B$  et  $A + B$ , ainsi qu'un objet initial et final, respectivement notés  $0$  (ensemble ordonné vide) et  $1$  (ensemble ordonné n'ayant qu'un seul élément) et on a

1.  $\oplus$  est associatif, commutatif,
2.  $\times$  est distributif par rapport à  $+$ ,
3.  $\times$  est associatif, commutatif,
4.  $1$  est neutre pour  $\times$ ,
5.  $0$  est neutre pour  $+$  et absorbant pour  $\times$ .

La classe d'équivalence à isomorphisme près à laquelle appartient un ensemble ordonné est appelé son type. Le type d'un ensemble ordonné fini est dit fini. Une structure  $(S, +, \times, 1, 0)$  qui vérifie les points précédents est appelé **semi-anneau commutatif unitaire**. Les assertions précédentes affirment donc que la collection des types de ensembles

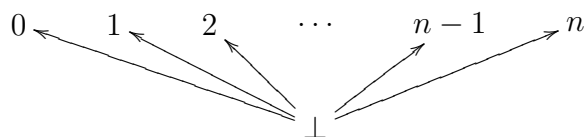
ordonnés muni de  $\oplus$ ,  $\times$ , 0 et 1 forme un semi-anneau commutatif unitaire dont on obtient une sous-structure en ne considérant que les ensembles ordonnés finis. On dit alors qu'un ensemble ordonné  $P$  est **indécomposable** lorsque

$$P \cong A \times B \Rightarrow A \cong 1 \text{ ou } B \cong 1, \text{ et } P \cong A + B \Rightarrow A \cong 0 \text{ ou } B \cong 0.$$

### III.6.1 REMARQUE

Tout ensemble ordonné fini totalement ordonné est indécomposable. En effet, un tel ensemble ordonné est isomorphe (dans PoSet) à  $\{0 < \dots < n\}$ . Il est immédiat que si  $\{0 < \dots < n\} \cong A + B$ , alors  $A \cong \emptyset$  ou  $B \cong \emptyset$ , car  $\{0 < \dots < n\}$  possède un minimum et un maximum alors que si  $A \not\cong \emptyset$  et  $B \not\cong \emptyset$ ,  $A + B$  ne possède ni minimum ni maximum. Par ailleurs, si  $\{0 < \dots < n\} \cong A \times B$ , en supposant que  $A$  et  $B$  contiennent chacun au moins deux éléments  $a_1, a_2 \in A$  et  $b_1, b_2 \in B$ , comme  $\{0 < \dots < n\}$  est un ordre total, il est nécessaire que  $A$  et  $B$  le soient aussi. On peut supposer que  $a_1 < a_2$  et  $b_1 < b_2$ , mais dans ce cas,  $(a_1, b_2)$  et  $(a_2, b_1)$  ne sont pas comparables.

Le ensemble ordonné suivant, noté  $X$ ,



est également indécomposable. La hauteur d'un ensemble ordonné fini est la longueur de la plus longue suite strictement croissante d'éléments de l'ensemble ordonné. Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles ordonnés finis, la hauteur de leur produit est la somme de leurs hauteurs,  $X$  ayant un minimum et étant de hauteur 1, il est indécomposable. Plus généralement, tout ensemble ordonné connexe de hauteur 1 est indécomposable.

Il y a une famille dénombrable  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de ensembles ordonnés finis indécomposables. L'une des conséquences du théorème de *Hashimoto* est que le semi-anneau commutatif unitaire des ensembles ordonnés finis est isomorphe au semi-anneau unitaire  $\mathbb{N}[\overline{X}]$ , c'est-à-dire celui dont les éléments sont des polynômes ayant un nombre fini mais arbitrairement grand de variables et à coefficients dans  $\mathbb{N}$ , plus formellement, c'est la colimite dans la catégorie des semi-anneaux de la suite

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}[X_1] \hookrightarrow \mathbb{N}[X_1, X_2] \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathbb{N}[X_1, \dots, X_n] \hookrightarrow \mathbb{N}[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}] \hookrightarrow \dots$$

L'isomorphisme étant induit par l'application

$$\{0, 1\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \{\text{ensembles ordonnés finis}\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ x_n \end{array} \right\} \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{le type de l'ensemble ordonné vide} \\ \text{le type de l'ensemble ordonné n'ayant qu'un élément} \\ \text{le type de l'ensemble ordonné } P_n \end{array} \right.$$

La conséquence immédiate de ceci est que, pour tous ensembles ordonnés finis  $A, B$  et  $C$ , on a

$$A \times B \cong A \times C \implies B \cong C \text{ et } A \oplus B \cong A \oplus C \implies B \cong C.$$

A la lecture des preuves données dans [68], il est possible que le résultat d'isomorphisme précédent puisse s'étendre aux catégories sans boucle finies. En effet, on a une famille dénombrable  $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de catégories sans boucle finies indécomposables (la définition peut être directement adaptée), on obtient l'isomorphisme voulu de la même manière que précédemment. Essentiellement, le seul fait dont on a besoin pour adapter la preuve du résultat précédent est que, si  $\mathcal{A}$  est une catégorie sans boucle et  $\mathcal{B}$  est une catégorie quelconque, alors pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$  et tous objets  $b_1$  et  $b_2$  de  $\mathcal{B}$ , on a

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B}[(a, b_1), (a, b_2)] \cong \mathcal{B}[b_1, b_2] \text{ dans Set.}$$

Hormi son intérêt théorique, ce résultat permet de définir des algèbres de processus munies d'un opérateur de mise en parallèle  $|$ , d'un opérateur de branchement  $\oplus$  et d'un opérateur de mise en séquence  $\cdot$ , que l'on interprète dans la catégorie des petites catégories sans boucle respectivement par les opérateurs  $\times$ ,  $+$  et  $\rightarrow$ . Pour définir ce dernier, on remarque déjà que toute catégorie sans boucle finie  $\mathcal{C}$  possède des **entrées**, c'est-à-dire des objets  $x$  tels que pour tout morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[z, x]$ , on a  $z = x$  et  $\gamma = id_x$  ainsi que des **sorties**, c'est-à-dire des objets  $y$  tels que pour tout morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, z]$ , on a  $z = y$  et  $\gamma = id_y$ . Si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux catégories sans boucle, on considère la catégorie, notée  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ , dont la collection des objets est la réunion disjointe de  $Ob(\mathcal{C}_1)$  et  $Ob(\mathcal{C}_2)$ , et la collection des morphismes la réunion disjointe de  $Mo(\mathcal{C}_1)$  et  $Mo(\mathcal{C}_2)$  à laquelle on l'ensemble

$$\left\{ (y_1, x_2) \middle| y_1 \text{ est une sortie de } \mathcal{C}_1 \text{ et } x_2 \text{ une entrée de } \mathcal{C}_2 \right\},$$

dont chaque élément  $(y_1, x_2)$  est appelé **flèche de transition** (de  $y_1$  vers  $x_2$ ). On a donc un plongement de  $\mathcal{C}_1$  dans  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ , un plongement de  $\mathcal{C}_2$  dans  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  et tout morphisme de  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  est dans l'une des trois familles suivantes: la famille des morphismes de  $\mathcal{C}_1$  (au plongement près), la famille des morphismes de  $\mathcal{C}_2$  (au plongement près) ou un triplet  $(\beta, (y_1, x_2), \alpha)$  dont la source et le but sont respectivement  $src(\alpha)$  et  $tgt(\beta)$ . Il est clair que deux morphismes de la troisième famille ne sont jamais composables, on prolonge les compositions de  $\mathcal{C}_1$  et de  $\mathcal{C}_2$  (toujours au plongement près), en une composition sur  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  de la seule façon possible. En termes profanes, cela signifie que l'on peut commencer un processus depuis n'importe laquelle de ses entrées et que lorsque l'on a fini le premier, on saute à l'une des entrées du suivant. Dans cette représentation, on a, outre les propriétés de semi-anneau commutatif unitaire, la régularité des interprétations de  $|$  et de  $\oplus$ . Formellement, la seule contre indication théorique à cela est que l'on pourrait avoir un processus  $A$  qui soit la mise en parallèle d'un infini de tâche  $B$  alors que  $C = B|B$ . Formellement, on aurait alors  $A|B = A|C$  bien que  $B \neq C$ . Dans un cadre finitaire, ceci ne peut pas se produire, la régularité de  $|$  est donc raisonnable. On définit ainsi un langage de processus dont il faudrait étudier les liens avec d'autres plus classiques comme CCS ou le  $\pi$ -calcul. La première différence est que, *a priori*, le langage que l'on propose ici ne permet pas l'envoi ou la réception de messages.



La notion de systèmes de morphismes telle qu'elle est définie dans ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec *Lisbeth Fajstrup*, *Martin Raussen* et *Eric Goubault*. Les raisons qui poussent à l'adopter sont très techniques et en partie liées à la notion de catégorie de fractions [9], outil omniprésent dans la théorie des catégories modèles [48, 49] dont la finalité est d'inverser "formellement" les membres d'une classe de morphismes d'une catégorie donnée. Bien que cette procédure soit applicable sans aucune restriction sur la catégorie et la collection de morphismes à inverser choisies, ce n'est que lorsque cette dernière possède certaines propriétés que l'on peut appréhender celles de la catégorie résultant de cette construction. En homologie algébrique, les quasi-isomorphismes forment une telle collection [87]. Avant de préciser la définition formelle des systèmes de morphismes auxquels on va s'intéresser, essayons de donner une idée intuitive de ce qu'ils doivent représenter. Signalons aussi dès maintenant que cette notion présente certaines similitudes avec celle de classe d'extensions distinguée d'un corps  $\mathbb{F}$  telle qu'elle est présentée dans le 2<sup>ème</sup> chapitre de [85] et dans [61].

## IV.1 SYSTÈME DE MORPHISMES : MOTIVATIONS

### IV.1.1 RÉDUIRE LA TAILLE DE LA CATÉGORIE FONDAMENTALE

Le principal problème de la catégorie fondamentale est sa taille : en effet, même pour un exemple aussi simple que le carré troué  $\vec{X}$ , la catégorie fondamentale a un ensemble d'objets ayant autant d'éléments que  $\mathbb{R}$  alors que, comme on l'a vu au chapitre II, étant donnés deux points  $x, y$  du carré troué, le cardinal de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$  n'excède pas 2 et ne dépend, quand  $x \leq_{\vec{X}} y$ , que de l'appartenance de  $x$  et de  $y$  aux différentes composantes  $A, B_1, B_2$  et  $C$ . On voudrait donc identifier tous les points appartenant à une même composante. En particulier, si un dichemin  $\gamma$  est tel que quel que soit  $t$  appartenant à  $[0, 1]$ ,  $\gamma(t)$  appartient à la même composante, alors sa classe de dihomotopie devrait être



identifiée à une identité. En cela on se démarque déjà des catégories de fractions qui ne visent qu'à inverser des morphismes sans pour autant identifier leurs extrémités. Il semble donc que tout dépende du choix des composantes que l'on a fait. La problême que l'on se pose est alors de définir de façon canonique les composantes de la catégorie fondamentale d'un espace partiellement ordonné  $\vec{X}$ . Ce choix canonique doit être tel que la catégorie résultant de l'identification soit fortement liée à la catégorie fondamentale. Ce lien sera établi en toute généralité dans le chapitre V. En attendant, on peut remarquer que, en posant  $\Sigma$  la famille des morphismes de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  (où  $\vec{X}$  est toujours le cube dirigé troué) dont les représentants sont les dichemins qui "restent" dans la même composante, alors la catégorie de fractions de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  sur  $\Sigma$  est équivalente à la catégorie libre engendrée par le graphe ci-dessous, qui, on le verra ultérieurement, est la catégorie de composantes de  $\vec{X}$ .

$$\begin{array}{ccc} B_2 & \longrightarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B_1 \end{array}$$

#### IV.1.2 IDENTIFIER LES MORPHISMES DE $\Sigma$

Pour réduire la taille de la catégorie fondamentale, l'idée est donc d'identifier les objets de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  que l'on estime être "équivalents". Pour donner un sens à cette opération, on va définir, comme un sous-produit des congruences généralisées, une notion de quotient d'une catégorie par une collection de morphismes de cette catégorie.

##### IV.1.1 DÉFINITION ( $\Sigma$ -ZIGZAG)

On dit que deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$  sont **reliés par un  $\Sigma$ -zigzag** lorsque  $x = y$  ou qu'il existe une suite finie  $(z_0, \dots, z_{n+1})$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ) d'objets de  $\mathcal{C}$  telle que  $\{z_0, z_{n+1}\} = \{x, y\}$  et pour tout indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$  on ait l'un des ensembles  $\Sigma[z_k, z_{k+1}]$  et  $\Sigma[z_{k+1}, z_k]$  qui ne soit pas vide; on définit ainsi une relation d'équivalence sur les objets de  $\mathcal{C}$  dont les classes sont appelées les  $\Sigma$ -composantes de  $\mathcal{C}$ . Un  $\Sigma$ -zigzag entre  $x$  et  $y$  est une suite  $(\sigma_n, \dots, \sigma_0)$  d'éléments de  $\Sigma$  telle que pour tout indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$ , on ait  $\{src(\sigma_k), tgt(\sigma_k)\} = \{z_k, z_{k+1}\}$ . Notons que si la collection  $\Sigma$  contient toutes les identités de  $\mathcal{C}$ , alors la condition  $x = y$  peut être omise. Par ailleurs, si  $\Sigma$  est stable par composition, alors tout  $\Sigma$ -zigzag peut donner lieu à un  $\Sigma$ -zigzag dont deux éléments consécutifs ne sont jamais composables.

##### IV.1.2 LEMME

En posant  $x \sim_o y$  si et seulement s'il existe un  $\Sigma$ -zigzag de  $x$  vers  $y$ , on définit une relation d'équivalence sur les objets de  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. La réflexivité tient au fait que  $(id_x, id_x)$  soit toujours un  $\Sigma$ -zigzag de  $x$  vers  $x$ . En outre, si  $(\sigma_n, \dots, \sigma_0)$  est un  $\Sigma$ -zigzag de  $x$  vers  $y$ , alors  $(\sigma'_n, \dots, \sigma'_0)$  est un  $\Sigma$ -zigzag de  $y$  vers  $x$  en posant  $\sigma'_k := \sigma_{n-k}$ . Enfin, si  $(\sigma_n, \dots, \sigma_0)$  est un  $\Sigma$ -zigzag de  $x$  vers  $y$  et  $(\sigma'_n, \dots, \sigma'_0)$  est un  $\Sigma$ -zigzag de  $y$  vers  $z$ , alors  $(\sigma'_n, \dots, \sigma'_1, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_0)$  est un  $\Sigma$ -zigzag de  $x$  vers  $z$ . ■

### IV.1.3 PROPOSITION (CONGRUENCE GÉNÉRALISÉE ENGENDRÉE PAR $\Sigma$ )

Soient une catégorie  $\mathcal{C}$  et une collection  $\Sigma$  de morphismes de  $\mathcal{C}$ . On équipe la collection des objets de  $\mathcal{C}$  de la relation  $\sim_o$  donnée par la définition IV.1.1 (p.96). Sur l'ensemble des suites  $\sim_o$ -composables (on écrit aussi  $\Sigma$ -composables) on définit la relation réflexive et symétrique  $\sim_m^1$  engendrée par :

1. pour tout morphisme  $\sigma$  appartenant à  $\Sigma[a, b]$ ,

$$\begin{cases} (y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, \sigma, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0), x) \sim_m^1 (y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, id_a, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0), x) \\ (y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, \sigma, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0), x) \sim_m^1 (y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, id_b, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0), x) \end{cases}$$

2. pour tout indice  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, n-1\}$  tel que  $s(\gamma_{k+1}) = t(\gamma_k)$ ,

$$(y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, \gamma_k, \dots, \gamma_0), x) \sim_m^1 (y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1} \circ \gamma_k, \dots, \gamma_0), x).$$

Pour toutes suites  $\sim_o$ -composables  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0)$  et  $(\delta_p, \dots, \delta_0)$ , on pose alors  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0) \sim_m (\delta_p, \dots, \delta_0)$  lorsqu'il existe une suite finie de suites  $\sim_o$ -composables  $\vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\alpha}_N$  (où  $N \in \mathbb{N}$ ) telle que :

1. on a  $\vec{\alpha}_0 = (\gamma_n, \dots, \gamma_0)$  et  $\vec{\alpha}_N = (\delta_p, \dots, \delta_0)$ ,

2. pour tout indice  $K$  appartenant à  $\{0, \dots, N-1\}$ , on a  $\vec{\alpha}_K \sim_m^1 \vec{\alpha}_{K+1}$ .

Une telle suite  $\vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\alpha}_N$  est appelée suite de  $\sim_m^1$ -transformations. Le couple  $(\sim_o, \sim_m)$  est alors une congruence généralisée sur  $\mathcal{C}$ . La relation  $\sim_m$  est la congruence engendrée par  $\sim_m^1$ . Dans ce cas, la catégorie quotient et le foncteur quotient sont respectivement notés  $\mathcal{C}/\Sigma$  et  $Q/\Sigma$ , de plus, ce dernier est caractérisé par la propriété universelle suivante : pour tout foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  qui envoie tout morphisme de  $\Sigma$  sur une identité de  $\mathcal{D}$ , il existe un unique foncteur  $G$  de  $\mathcal{C}/\Sigma$  vers  $\mathcal{D}$  tel que  $F = G \circ Q_\Sigma$ .

PREUVE. Par récurrence sur la longueur du  $\Sigma$ -zigzag, on vérifie que si  $x \sim_o y$ , alors  $(id_x) \sim_m (id_y)$ . S'il est de longueur 0, c'est-à-dire réduit à  $(id_x, id_x)$ , alors nécessairement  $x = y$ . En supposant que de tout  $\Sigma$ -zigzag de longueur au plus égale à  $n \in \mathbb{N}$  on puisse déduire que  $(id_x) \sim_m (id_y)$ , si  $(id_y, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_1, id_x)$  est un  $\Sigma$ -zigzag de longueur  $n+1$ , alors en supposant que  $\sigma_{n+1}$  soit un morphisme de  $\mathcal{C}$  (se trouvant de surcroît dans  $\Sigma$ ) de  $z$  vers  $y$ , par hypothèse de récurrence, on trouve une suite finie de suites  $\sim_o$ -composables comme celles décrites dans l'énoncé de la proposition IV.1.3 (p.96) et telle que  $\vec{\alpha}_N = (id_z)$ , puis  $(id_z) \sim_m^1 (\sigma_{n+1}) \sim_m^1 (id_y)$  d'où la satisfaction du premier point de la définition A.4.1 (p.304).

Pour prouver le second point, on effectue une récurrence en analysant les transformations permises par  $\sim_m^1$ . Si on a

$$(y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, \sigma, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0), x) \sim_m^1 (y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, id_a, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0), x)$$

pour un certain  $\sigma \in \mathcal{C}[a, b] \cap \Sigma$  et  $0 < k < n$ , on a rien à faire. Si  $k = 0$ , alors  $\gamma_0 = \sigma \in \Sigma$  et  $(id_{src(\sigma)}, (\sigma), id_{tgt(\sigma)})$  est un  $\Sigma$ -zigzag. Si  $k = n$ , on traite le cas de la même façon que pour  $k = 0$ . Si on a

$$(y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, \gamma_k, \dots, \gamma_0), x) \sim_m^1 (y, (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1} \circ \gamma_k, \dots, \gamma_0), x)$$

pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  tel que  $src(\gamma_{k+1}) = tgt(\gamma_k)$ , c'est trivial puisque les extrémités sont inchangées. On a donc le deuxième point de la définition A.4.1 (p.304).

Le troisième point de la définition A.4.1 (p.304) est immédiat.

Supposons que l'on ait  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0) \sim_m (\gamma'_n, \dots, \gamma'_0)$ ,  $(\delta_p, \dots, \delta_0) \sim_m (\delta'_p, \dots, \delta'_0)$  et  $src(\delta_0) \sim_o tgt(\gamma_n)$ . D'après le deuxième point, on a  $src(\delta_0) \sim_o src(\delta'_0)$  et  $tgt(\gamma_n) \sim_o tgt(\gamma'_n)$ , par transitivité de  $\sim_o$ , on a donc  $src(\delta'_0) \sim_o tgt(\gamma'_n)$ , ainsi la suite  $(\delta'_p, \dots, \delta'_0, \gamma'_n, \dots, \gamma'_0)$  est  $\sim_o$ -composable. Puis, si  $\vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\alpha}_N$  et  $\vec{\beta}_0, \dots, \vec{\beta}_P$  sont des suites (finies) de suites  $\sim_o$ -composables, que pour tout indice  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, N-1\}$ , on a  $\vec{\alpha}_k \sim_m^1 \vec{\alpha}_{k+1}$ , et que pour tout indice  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, P-1\}$ , on a  $\vec{\beta}_k \sim_m^1 \vec{\beta}_{k+1}$ , et finalement que  $\vec{\alpha}_0 = (\gamma_n, \dots, \gamma_0)$  et  $\vec{\beta}_0 = (\delta_n, \dots, \delta_0)$ , alors  $(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\alpha}_N, \dots, \vec{\beta}_P \cdot \vec{\alpha}_N)$  est telle que  $\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\alpha}_0 = (\delta_p, \dots, \delta_0, \gamma_n, \dots, \gamma_0)$  et  $\vec{\beta}_P \cdot \vec{\alpha}_N = (\delta'_p, \dots, \delta'_0, \gamma'_n, \dots, \gamma'_0)$ ; ce qui montre que  $(\delta_p, \dots, \delta_0, \gamma_n, \dots, \gamma_0) \sim_m (\delta'_p, \dots, \delta'_0, \gamma'_n, \dots, \gamma'_0)$ . ■

Les idées de la preuve ci-dessus sont brièvement esquissées dans [24]. On a alors des résultats similaires aux propositions A.4.3 (p.305) et A.4.5 (p.306).

#### IV.1.4 PROPOSITION

Etant donné une collection  $\Sigma$  de morphismes de  $\mathcal{C}$ , il existe une catégorie, unique à isomorphisme près et notée  $\mathcal{C}/\Sigma$ , ainsi qu'un unique foncteur  $Q_\Sigma$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}/\Sigma$  tels que, pour tout foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{A}$  qui envoie tout morphisme de  $\Sigma$  sur une identité de  $\mathcal{A}$ , il existe un unique foncteur  $G$  de  $\mathcal{C}/\Sigma$  vers  $\mathcal{A}$  tel que  $F = G \circ Q_\Sigma$ .

PREUVE. Les hypothèses données dans la proposition IV.1.4 (p.98) permettent, via la proposition IV.1.3 (p.96), de prouver celles de la proposition A.4.3 (p.305) qui donne alors directement le résultat. ■

On a aussi

#### IV.1.5 PROPOSITION

Etant donnée une catégorie  $\mathcal{C}$ , la classe des collections de morphismes  $\Sigma \subseteq Mo(\mathcal{C})$  forme un treillis complet pour l'inclusion  $\subseteq$ . De même, la collection des  $\mathcal{C}/\Sigma$  ordonnée par  $\mathcal{C}/\Sigma_1 \leq \mathcal{C}/\Sigma_2$  si et seulement si  $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$  forme un treillis complet représenté par une sous-catégorie de  $\mathbf{Cat}$  dont les objets sont les  $\mathcal{C}/\Sigma$  et avec pour unique flèche de  $\mathcal{C}/\Sigma_1$  vers  $\mathcal{C}/\Sigma_2$  (quand  $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$ ) le foncteur  $G$  faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}/\Sigma_2 & \\ Q_{\Sigma_2} \nearrow & & \searrow G \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{Q_{\Sigma_1}} & \mathcal{C}/\Sigma_1 \end{array}$$

En outre, les applications  $\Sigma \mapsto \mathcal{C}/\Sigma$  et  $\mathcal{C}/\Sigma \mapsto Q_\Sigma^{-1}(Idt(\mathcal{C}/\Sigma))$  induisent des morphismes de treillis complets et forment une correspondance de Galois où la première est l'adjoint à droite et la seconde l'adjoint à gauche. A noter, dans l'écriture de la seconde application,  $Q_\Sigma$  doit être compris comme l'unique morphisme de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}/\Sigma$  dans la représentation du treillis des quotients. A noter également, la composée de la seconde application suivie de la première est l'identité.

PREUVE. L'unique morphisme entre deux quotients dans la représentation est donné par la proposition IV.1.4 (p.98). ■

#### IV.1.6 PROPOSITION (QUOTIENTS ET FRACTIONS)

Soient une catégorie  $\mathcal{C}$  et une sous-partie  $\Sigma$  de  $Mo(\mathcal{C})$ , il existe un unique foncteur  $P_\Sigma : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}/\Sigma$  faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] & \\ I_\Sigma \nearrow & & \searrow P_\Sigma \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{Q_\Sigma} & \mathcal{C}/\Sigma \end{array}$$

où  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  est la catégorie de fractions de  $\mathcal{C}$  sur  $\Sigma$ ,  $\mathcal{C}/\Sigma$  la catégorie quotient de  $\mathcal{C}$  sur  $\Sigma$ .

PREUVE. On applique la proposition A.4.12 (p.309) avec  $F := Q_\Sigma$ . ■

Dans le chapitre V (p.119), on verra que, sous certaines conditions sur  $\Sigma$  qui vont faire l'objet du reste de ce chapitre,  $P_\Sigma$  est en fait une équivalence de catégorie.

#### L'EXEMPLE DU CARRÉ TROUÉ

Notons  $\vec{X}$  le carré unité dirigé troué. Comme indiqué au début de ce chapitre, on pose

$$\Sigma := \left\{ \sigma \in Mo(\vec{\pi}_1(\vec{X})) / \begin{array}{l} src(\sigma), tgt(\sigma) \in A \text{ ou} \\ src(\sigma), tgt(\sigma) \in B_1 \text{ ou} \\ src(\sigma), tgt(\sigma) \in B_2 \text{ ou} \\ src(\sigma), tgt(\sigma) \in C \end{array} \right\}$$

Alors la petite catégorie

$$\mathcal{C}/\Sigma = \begin{array}{ccc} & B_2 & \longrightarrow & C \\ & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{C}/\Sigma = & A & \longrightarrow & B_1 \end{array}$$

est le squelette de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[\Sigma^{-1}]$ , donc  $\vec{\pi}_1(\vec{X})/\Sigma$  et  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[\Sigma^{-1}]$  sont des catégories équivalentes.

## IV.2 MORPHISMES INVERSIBLES AU SENS DE *Yoneda*

La section précédente nous fournit tout l'équipement théorique nécessaire pour formaliser la notion d'identification des morphismes d'une famille  $\Sigma$ . Les exemples de catégories fondamentales que nous avons traités au chapitre II (p.45) de même que celui du carré troué que nous avons approfondi ci-dessus donne l'intuition que, pour trouver la "bonne" famille  $\Sigma$ , il faut établir une partition de l'ensemble des objets de la catégorie fondamentale puis poser  $\Sigma$  comme la collection des morphismes de la catégorie fondamentale dont les extrémités sont dans la même composante. Cependant, une telle approche suppose implicitement que les "composantes" de la partition satisfassent une certaine propriété de "connexité". En effet, il se pourrait qu'un morphisme ait ses deux extrémités dans une même composante de la partition mais que l'on puisse écrire ce morphisme comme la composée de deux autres tels que l'un des deux ait ses extrémités dans deux composantes différentes de la partition. Graphiquement, en notant  $A$  et  $B$  deux composantes distinctes de la partition, on pourrait avoir, pour  $a_1$  et  $a_2$  appartenant à  $A$  et  $b$  appartenant à  $B$ ,

le digramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 \alpha \nearrow & & \searrow \beta \\
 a_1 & \xrightarrow{\gamma} & a_2
 \end{array}$$

L'idée sous-jacente est que le morphisme  $\gamma$  "passe" par  $b$ . On voudrait donc en fait que tout morphisme  $\sigma$  appartenant à  $\Sigma$  ait ses deux extrémités dans la même composante de la partition et que tout objet par lequel passe  $\sigma$  soit encore dans cette même composante. En conséquence, dès que  $\sigma$  peut être écrit comme la composée de  $\alpha$  suivi de  $\beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  ont eux aussi leurs extrémités la composante à laquelle les extrémités de  $\sigma$  appartiennent. En outre, tout objet par lequel passe  $\alpha$  ou  $\beta$  est un objet par lequel passe  $\gamma$  et donc doit encore appartenir à la même composante. Ainsi, selon la définition de  $\Sigma$  que l'on a pris,  $\alpha$  et  $\beta$  sont eux aussi des éléments de  $\Sigma$ . On retrouve la notion de pureté de la définition III.1.4 (p.72). Réciproquement, si l'on a une collection de morphismes  $\Sigma$ , on peut établir une partition de l'espace selon la relation  $\sim_o$ , voir la définition IV.1.1 (p.96). Si de plus  $\Sigma$  satisfait la propriété de pureté, i.e.

$$\beta \circ \alpha \in \Sigma \implies \alpha, \beta \in \Sigma,$$

alors on peut dire que les composantes de la partition ont une certaine forme de connexité. Dans ce qui suit, on va privilégier l'approche consistant à chercher  $\Sigma$  pour en déduire les composantes, j'ai également décrit une construction qui détermine directement les composantes (dont on peut alors déduire  $\Sigma$ ). Sur tous les exemples que j'ai traités, les deux approches ont donné le même résultat mais je n'ai pas pu prouver que c'était le cas en toute généralité. En outre, cette construction fait appel à des récurrences transfinites, c'est-à-dire sur les ordinaux. Cette construction est expliquée à la fin de la thèse à titre informatif.

Remarquons que, si l'on a une catégorie sans boucle  $\mathcal{C}$ , la collection des isomorphismes de  $\mathcal{C}$  constitue une sous-approximation de  $\Sigma$  puisque, dans ce cas,  $Iso(\mathcal{C})$  est pure dans  $\mathcal{C}$ . Bien sûr, l'intérêt est minime puisque les seuls isomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont les identités. Or le quotient d'une catégorie  $\mathcal{C}$  par sa collection d'identité est isomorphe à  $\mathcal{C}$ .

On va maintenant décrire une sur-approximation très fine de la famille  $\Sigma$  adéquate. Avant cela, rappelons que pour deux objets  $x, y$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , on pose  $x \preceq_{\mathcal{C}} y$  si et seulement si, par définition, l'ensemble  $\mathcal{C}[x, y]$  n'est pas vide. On a ainsi défini un préordre sur la collection des objets de  $\mathcal{C}$ . On dit également qu'un morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, y]$  **pass**e par un objet  $z$  de  $\mathcal{C}$  lorsque l'on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc}
 & z & \\
 \alpha \nearrow & = & \searrow \beta \\
 x & \xrightarrow{\gamma} & y
 \end{array}$$

On pose aussi

#### IV.2.1 DÉFINITION (CÔNE CATÉGORIQUE FUTUR ET PASSÉ)

Étant donné une catégorie  $\mathcal{C}$  et un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}[\leftarrow, x]$  est définie comme la sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  engendrée par les morphismes de  $\mathcal{C}$  dont le but est  $x$ . De façon analogue,

on définit  $\mathcal{C}[x, \rightarrow [$  comme la sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  engendrée par les morphismes de  $\mathcal{C}$  dont la source est  $x$ .

Par ailleurs, étant donnés deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ , on définit  $\mathcal{C}] \leftarrow, x, y]$  comme la sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  engendrée par les morphismes de  $\mathcal{C}$  passant par  $x$  et dont le but est  $y$ . Et de façon analogue,  $\mathcal{C}[x, y, \rightarrow [$  est la sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  engendrée par les morphismes de  $\mathcal{C}$  passant par  $y$  et de source  $x$ .

On pose également la définition suivante:

#### IV.2.2 DÉFINITION (FONCTEUR FUTUR ET PASSÉ ENGENDRÉ PAR UN MORPHISME)

Soient une catégorie  $\mathcal{C}$  et un morphisme  $\sigma$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, y]$ , le foncteur **futur** de  $\sigma$  est par définition un foncteur de  $\mathcal{C}[y, \rightarrow [$  vers  $\mathcal{C}[x, y, \rightarrow [$ , dont la partie objet est l'inclusion

$$Ob(\mathcal{C}[y, \rightarrow [) \hookrightarrow Ob(\mathcal{C}[x, y, \rightarrow [),$$

et la partie morphisme est définie par la famille d'applications indexée par  $y$  à valeurs dans  $Ob(\mathcal{C}[y, \rightarrow [)$  suivante:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[y, y'] & \longrightarrow & \mathcal{C}[x, y'] \\ \gamma \longmapsto & & \gamma \circ \sigma \end{array}$$

De façon analogue, le foncteur **passé** de  $\sigma$  est un foncteur de  $\mathcal{C}] \leftarrow, x]$  dans  $\mathcal{C}] \leftarrow, x, y]$  dont la partie objet est donnée par

$$Ob(\mathcal{C}] \leftarrow, x]) \hookrightarrow Ob(\mathcal{C}] \leftarrow, x, y]),$$

et la partie morphisme par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[x', x] & \longrightarrow & \mathcal{C}[x', y] \\ \delta \longmapsto & & \sigma \circ \delta \end{array}$$

Les foncteurs décrits dans la définition IV.2.2 (p.101) sont des particularisations du foncteur de *Yoneda*. On a alors le résultat suivant:

#### IV.2.3 PROPOSITION

Soient une catégorie  $\mathcal{C}$  et un morphisme  $\sigma \in \mathcal{C}[x, y]$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- pour tous objets  $y'$  et  $x'$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $\mathcal{C}[y, y']$  et  $\mathcal{C}[x', x]$  ne soient pas vides, les applications ci-dessous sont des bijections,

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(y'))(\sigma) : \mathcal{C}[y, y'] & \longrightarrow & \mathcal{C}[x, y'] & (\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(\sigma))(x') : \mathcal{C}[x', x] & \longrightarrow & \mathcal{C}[x', y] \\ \gamma \longmapsto & & \gamma \circ \sigma & \delta \longmapsto & & \sigma \circ \delta \end{array}$$

- Les foncteurs futur et passé de  $\sigma$  sont des isomorphismes.

PREUVE. Tout d'abord notons que le "futur" et le "passé" peuvent se traiter indépendamment. Supposons donc que la partie "futur" de la troisième assertion soit satisfaite par  $\sigma$  et que  $\mathcal{C}[y, y'] \neq \emptyset$ , et  $\gamma \in \mathcal{C}[y, y']$ . Puisque le foncteur futur est un isomorphisme, il existe un unique morphisme de  $\mathcal{C}[y, \rightarrow [$  dont l'image par  $-\circ\sigma$  soit  $\gamma\circ\sigma$ , ce morphisme

est bien sûr  $\gamma$ . Réciproquement, on suppose que l'on a la partie "futur" de la seconde assertion, soit un morphisme  $\alpha$  de  $\mathcal{C}[x, y, \rightarrow ]$ , étant donné que  $\alpha$  passe par  $y$ ,  $\mathcal{C}[y, y'] \neq \emptyset$  où  $y'$  est le but de  $\alpha$ . Dans ce cas, il existe un unique  $\gamma \in \mathcal{C}[y, y']$  tel que  $\alpha = \gamma \circ \sigma$ . On raisonne de même sur le "passé". ■

#### IV.2.4 DÉFINITION (MORPHISMES INVERSIBLES AU SENS DE *Yoneda*)

Dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , un morphisme  $\sigma$  est dit **inversible au sens de *Yoneda*** lorsqu'il satisfait l'une des trois assertions équivalentes de la proposition IV.2.3 (p.101). On dit encore que  $\sigma$  est un morphisme de *Yoneda* et on note  $Yoneda(\mathcal{C})$  la collection des morphismes de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ . On dit aussi que  $\sigma$  est ***Yoneda* inversible** ou que  $\sigma$  est un morphisme de *Yoneda*.

#### IV.2.5 PROPRIÉTÉ

Soient une catégorie  $\mathcal{C}$ ,  $x$  et  $y$  deux de ses objets  $\mathcal{C}$  et  $\sigma_1, \sigma_2$ , deux morphismes *Yoneda* inversibles appartenant à  $\mathcal{C}[x, y]$ , on a un unique morphisme  $f_1$  (respectivement  $f_2, g_1$  et  $g_2$ ) appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$  (respectivement à  $\mathcal{C}[y, y], \mathcal{C}[x, x]$  et  $\mathcal{C}[x, x]$ ) tel que  $\sigma_2 = f_1 \circ \sigma_1$  (respectivement  $\sigma_1 = f_2 \circ \sigma_2, \sigma_2 = \sigma_1 \circ g_1$  et  $\sigma_1 = \sigma_2 \circ g_2$ )

PREUVE. L'ensemble  $\mathcal{C}[y, y]$  n'est pas vide d'où, en appliquant la définition des morphismes *Yoneda* inversibles à  $\sigma_1$ , l'existence d'un unique  $f_1$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma_2 = f_1 \circ \sigma_1$ . En échangeant les rôles de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$ , on prouve l'existence d'un unique  $f_2$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma_1 = f_2 \circ \sigma_2$ . En particulier,  $\sigma_2 = f_1 \circ (f_2 \circ \sigma_2) = (f_1 \circ f_2) \circ \sigma_2$  et  $\sigma_1 = f_2 \circ (f_1 \circ \sigma_1) = (f_2 \circ f_1) \circ \sigma_1$ , or, par définition des morphismes *Yoneda* inversibles,  $id_y$  est le seul morphisme  $h \in \mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma_2 = h \circ \sigma_2$ . C'est aussi le seul morphisme  $h \in \mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma_1 = h \circ \sigma_1$ . Il s'ensuit que  $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = id_y$  c'est-à-dire  $f_1, f_2 \in Iso(Mo(\mathcal{C}))$ . On raisonne de la même façon pour obtenir les isomorphismes  $g_1$  et  $g_2$ . ■

#### IV.2.6 COROLLAIRE

Soit une catégorie  $\mathcal{C}$  telle que  $Iso(\mathcal{C})$  est discret, étant donné deux objets  $x, y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}[x, y] \cap Yoneda(\mathcal{C})$  contient au plus un élément.

#### IV.2.7 REMARQUE

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie sans boucles et  $\sigma$  un morphisme *Yoneda* inversible de  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{C}[src(\sigma), tgt(\sigma)] = \{\sigma\}$ .

Il suffit de noter que  $\gamma \in \mathcal{L}[src(\sigma), src(\sigma)] \mapsto \sigma \circ \gamma \in \mathcal{L}[src(\sigma), tgt(\sigma)]$  est une bijection. En pratique, la propriété suivante montre que la notion d'inversibilité au sens de *Yoneda* n'a d'intérêt que lorsqu'on n'est pas dans une boucle.

#### IV.2.8 PROPRIÉTÉ

Soit une catégorie  $\mathcal{C}$  et un morphisme inversible au sens de *Yoneda*  $\sigma$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, y]$ ; le morphisme  $\sigma$  est un isomorphisme de  $\mathcal{C}$  si et seulement si l'ensemble  $\mathcal{C}[y, x]$  n'est pas vide.

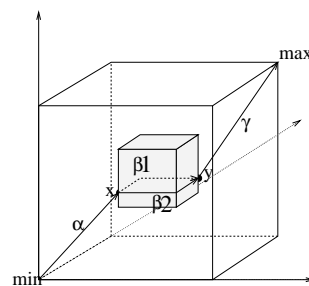
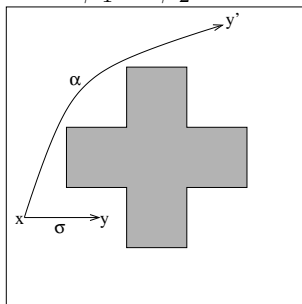
PREUVE. En supposant que  $\sigma$  est inversible au sens de *Yoneda*, il existe un unique morphisme  $g$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, x]$  tel que  $g \circ \sigma = id_x$  et un unique morphisme  $h$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, x]$  tel que  $\sigma \circ h = id_y$ , puis  $g = g \circ id_y = g \circ (\sigma \circ h) = (g \circ \sigma) \circ h = id_x \circ h$ ,

donc  $g = h$  et  $\sigma$  est inversible. La réciproque est immédiate. ■

La terminologie vient de la première assertion de la proposition IV.2.3 (p.101) et fait référence au plongement de *Yoneda* [9, 59, 60, 31]. La troisième assertion de la proposition IV.2.3 (p.101) est celle qui donne l'intuition de l'idée que l'on souhaite formaliser au travers de la notion de morphismes inversibles au sens de *Yoneda*. Précisément, on veut que les morphismes  $\sigma$  candidats à l'identification soient ceux qui ne changent ni les choix qui peuvent être fait, ni les choix qui ont été fait, à la source et au but de  $\sigma$ . On peut se demander ce qu'apportent les restrictions " $y \preceq_C y'$  implique " et " $x' \preceq_C x$  implique " dans la définition IV.2.4 (p.102) des morphismes inversibles au sens de *Yoneda*. Il y a là une difficulté technique, si on les omet, on a en particulier pour  $y' = x$ , l'existence d'un unique morphisme  $\gamma$  tel que  $\gamma \circ \sigma = id_x$  et pour  $x' = y$ , celle d'un unique morphisme  $\delta$  tel que  $\sigma \circ \delta = id_y$ . Il s'ensuit que  $\gamma = \gamma \circ (\sigma \circ \delta) = (\gamma \circ \sigma) \circ \delta = \delta$  et donc que  $\sigma$  est un isomorphisme (voir proposition A.1.30 (p.287)). Si l'on se replace dans le cadre des catégories fondamentales d'espaces ordonnés, il ne nous resterait que les identités. Via la troisième assertion de la proposition IV.2.3 (p.101), ces restrictions se manifestent dans la définition IV.2.2 (p.101) par le fait que les catégories cibles des foncteurs futur et passé sont respectivement  $\mathcal{C}[x, y, \rightarrow [$  et  $\mathcal{C} \leftarrow, x, y]$  et non pas  $\mathcal{C}[x, \rightarrow [$  et  $\mathcal{C} \leftarrow, y]$ . Par rapport à ce que l'on souhaitait initialement formaliser, on peut donc avoir une perte d'information et on constate d'ailleurs qu'il y en a effectivement une. Pour illustrer ce fait plus concrètement, revenons à l'exemple du drapeau Suisse puis à celui du cube dirigé troué.

Sur le "drapeau suisse" ci-dessous, noté pour la circonstance  $\vec{X}$ , on a tracé deux flèches représentent respectivement (à dihomotopie près) l'unique morphisme  $\sigma$  de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$  et l'unique morphisme  $\alpha$  de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y']$ . Il est clair que  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[y, y']$  est vide et que  $\alpha$  ne passe pas par  $y$ , c'est-à-dire que  $\alpha$  n'appartient pas à  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y, \rightarrow [$  mais que  $\sigma$  est *Yoneda* inversible. En revanche, depuis le point  $x$ , on peut aller en  $y$  ou en  $y'$  alors que depuis  $y$ , il n'est pas possible d'atteindre  $y'$ . Ainsi, bien qu'étant inversible au sens de *Yoneda*,  $\sigma$  ne devrait pas être retenu comme un morphisme à identifier.

L'autre difficulté technique est liée au fait que la composée de deux morphismes qui ne sont pas inversibles au sens de *Yoneda* peut être inversible au sens de *Yoneda*, avec la terminologie introduite précédemment (définition III.1.4 (p.72)), cela signifie que la collection des morphismes de *Yoneda* n'est pas nécessairement pure. L'espace ordonné du cube dirigé troué que l'on note  $\vec{X}$  (voir ci-dessous) permet de s'en convaincre : en considérant  $\delta$  l'unique morphisme de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[(0, 0, 0), (1, 1, 1)]$ , on peut écrire  $\delta = \gamma \circ \beta_2 \circ \alpha = \gamma \circ \beta_1 \circ \alpha$  où  $\alpha$  est l'unique morphisme de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[(0, 0, 0), (0, 1, 0)]$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont les deux seuls morphismes de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[(0, 1, 0), (2, 1, 2)]$  et  $\gamma$  l'unique morphisme de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[(2, 1, 2), (1, 1, 1)]$ . Les morphismes  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ne sont évidemment pas inversibles au sens de *Yoneda*.





Au vu des deux cas ci-dessus, la collection des morphismes inversibles au sens de *Yoneda* ne peut former qu'une sur-approximation de la collection des morphismes que l'on veut identifier. Avant de raffiner cette collection, donnons quelques propriétés des morphismes inversibles au sens de *Yoneda*.

#### IV.2.9 PROPRIÉTÉ

Tout isomorphisme est inversible au sens de *Yoneda*.

PREUVE. Immédiat au vu de la proposition IV.2.3 (p.101) et de la définition IV.2.4 (p.102). ■

#### IV.2.10 PROPRIÉTÉ

Tout morphisme inversible au sens de *Yoneda* est un bimorphisme (voir définition A.1.11 (p.274)).

PREUVE. Cela revient à affirmer que les applications décrites au deuxième point de la proposition IV.2.3 (p.101) sont injectives, ce qui est le cas puisque si le morphisme que l'on considère est inversible au sens de *Yoneda*, elles sont même bijectives. ■

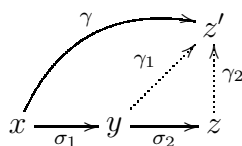
#### IV.2.11 PROPRIÉTÉ (COMPOSITION DE MORPHISMES *Yoneda* INVERSIBLES)

La composée de deux morphismes inversibles au sens de *Yoneda* est inversible au sens de *Yoneda*.

PREUVE. Supposons que l'on ait deux morphismes composables  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , inversibles au sens de *Yoneda*

$$x \xrightarrow{\sigma_1} y \xrightarrow{\sigma_2} z$$

et soit  $z'$  un objet de  $\mathcal{C}$  tel que  $z \preceq_{\mathcal{C}} z'$  et  $\gamma \in \mathcal{C}[x, z']$ . En particulier, on a  $y \preceq_{\mathcal{C}} z'$  donc il existe un unique  $\gamma_1 \in \mathcal{C}[y, z']$  tel que  $\gamma = \gamma_1 \circ \sigma_1$ , puis  $y \preceq_{\mathcal{C}} z$  (à cause de  $\sigma_2$ ) donc il existe un unique  $\gamma_2 \in \mathcal{C}[y, z]$  tel que  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma_2$ , donc  $\gamma = \gamma_2 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1)$ . Un tel  $\gamma_2$  est unique puisque, d'après la propriété IV.2.10 (p.104),  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des bimorphismes. La composition  $- \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1)$  est donc bien une bijection de  $\mathcal{C}[z, z']$  sur  $\mathcal{C}[x, z']$ . En diagramme, on a



On traite de la même manière le cas  $x' \preceq_{\mathcal{C}} x$ . ■

Ces propriétés mettent en évidence la subtilité de la notion d'inversibilité au sens de *Yoneda*, elle est en effet "prise en étau" entre celle d'isomorphisme qui est plus forte et celle de bimorphisme qui est plus faible.

$$\text{isomorphisme} \implies \text{inversible au sens de } Yoneda \implies \text{bimorphisme}$$

### IV.3 SYSTÈMES DE MORPHISMES DE *Yoneda*

Comme on l'a vu dans les exemples du drapeau Suisse et du cube troué dirigés, la collection de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* contient des morphismes que l'on ne

souhaite pas identifier, ceci est, pour l'essentiel, une conséquence du fait que cette collection n'est pas pure. Une difficulté inhérente à la technique des congruences généralisées et des catégories quotients est d'avoir à travailler avec des suites  $\sim_o$ -composables de longueur *a priori* quelconque. On aimerait donc, si cela est possible, avoir des critères sur  $\Sigma$  permettant d'assurer que l'on peut se restreindre à travailler avec des  $\sim_o$ -représentants de longueur 1. Tous ces problèmes seront résolus d'un coup par une axiomatique adéquate. Le problème soulevé dans l'exemple du drapeau Suisse est lié à la question des "points morts", en effet, dans cet exemple, on trouve deux points  $y, y'$  du drapeau Suisse tels que  $y \sqsubseteq y'$  en tant que points de  $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$  alors qu'il n'y a pas de dichemin allant de  $y$  à  $y'$  dans le drapeau Suisse (dirigé). Le problème est que l'ordre  $\sqsubseteq$  de l'espace ordonné est en partie "perdu" quand on passe à la catégorie fondamentale et que c'est exactement cette "perte" qui fait que certains morphismes *Yoneda* inversibles ne devraient pas être identifiés. Une solution serait de changer les restrictions  $x' \preceq_c x$  et  $y \preceq_c y'$  de la proposition IV.2.3 (p.101) par  $x' \sqsubseteq_{\overrightarrow{X}} x$  et  $y \sqsubseteq_{\overrightarrow{X}} y'$ . Cette solution présente l'énorme inconvénient technique de rendre la notion de *Yoneda* inversibilité directement dépendante de celle d'espace ordonné alors que dans sa forme actuelle, elle ne dépend que de celle de catégorie. En outre un tel choix technique rendrait la notion de morphisme de *Yoneda* difficile à manipuler. La question de la pureté est abordée dans [24] en imposant à la collection  $\Sigma$  (des morphismes que l'on souhaite transformer en identités) d'être pure et celle d'avoir des représentants faciles à manipuler en imposant à  $\Sigma$  d'être un calcul de fractions à gauche et à droite (voir [9] ou [25]). La notion obtenue est extrêmement insatisfaisante du point de vue de l'universalité de la construction, en effet, on ne peut pas garantir l'existence d'un plus grand calcul de fractions à gauche et à droite qui soit pure et ne contienne que des morphismes inversibles au sens de *Yoneda*. On rappelle ci-dessous ce qu'est un calcul de fractions à gauche et/ou à droite, ceci est à rapprocher de la proposition A.4.12 (p.309).

#### IV.3.1 DÉFINITION (CALCULS DE FRACTIONS)

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\Sigma$  une collection de morphismes de  $\mathcal{C}$ , on dit que  $\Sigma$  admet un **calcul de fractions à droite** dans  $\mathcal{C}$  lorsque les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. toutes les identités de  $\mathcal{C}$  sont dans la collection  $\Sigma$ ,
2. la collection  $\Sigma$  est stable par composition,
3. pour tous morphismes  $f$  et  $\sigma$  appartenant respectivement à  $\mathcal{C}[x, y]$  et à  $\Sigma[y', y]$ , il existe deux morphismes  $f'$  et  $\sigma'$  appartenant respectivement à  $\mathcal{C}[x', y']$  et à  $\Sigma[x', x]$  tels que le diagramme 1 commute,
4. pour tous morphismes  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{C}[x, y]$  et tout morphisme  $\sigma$  de  $\Sigma[y, y']$  tels que  $\sigma \circ f = \sigma \circ g$ , il existe dans  $\Sigma[x', x]$  un morphisme  $\sigma'$  tel que  $f \circ \sigma' = g \circ \sigma'$  : voir le diagramme 2.

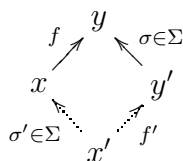


Diagramme 1

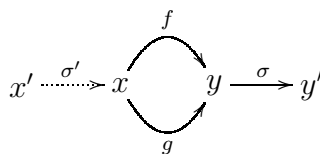


Diagramme 2

La propriété 3 est appelée **propriété d'extension à droite** de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{C}$ . En changeant le sens de toutes les flèches dans la définition ci-dessus, on obtient la notion de **calcul de fractions à gauche**. Lorsque  $\Sigma$  satisfait simultanément les axiomes du calcul de fractions à droite et du calcul de fractions à gauche, on dit que  $\Sigma$  admet un **calcul de fractions à droite et à gauche** dans  $\mathcal{C}$ .

#### IV.3.2 REMARQUE

La 3<sup>ème</sup> propriété de la définition IV.3.1 (p.105) est vérifiée dès que tous les membres de  $\Sigma$  sont des monomorphismes. En effet, dans ce cas, il suffit de prendre  $x' := x$  et  $\sigma' := id_x$ . La propriété duale dans le cas d'un calcul de fractions à gauche est, quant à elle, vérifiée dès que tous les membres de  $\sigma$  sont des épimorphismes.

On donne un dernier résultat, dont il sera fait usage dans cette thèse, concernant les catégories de fractions.

#### IV.3.3 PROPOSITION

Soient une catégorie  $\mathcal{C}$  et une collection  $\Sigma$  de morphismes admettant un calcul de fractions à droite, alors la catégorie de fractions  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  peut être décrite ainsi :

- la collection des objets de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  est la même que celle de  $\mathcal{C}$ ,
- l'ensemble  $(\mathcal{C}[\Sigma^{-1}])[x, y]$  est donné par  $\left\{ (f, \sigma) \mid \sigma \in \Sigma, t(\sigma) = x, t(f) = y, s(\sigma) = s(f) \right\} / \sim_{x,y}$ , où la paire  $((f, \sigma), (f', \sigma'))$  est dans la relation d'équivalence  $\sim_{x,y}$  lorsqu'il existe deux morphismes  $\tau$  et  $\tau'$  appartenant à  $\Sigma$  tels que le diagramme 3 commute. Puis la composée de la  $\sim_{x,y}$ -classe d'équivalence de  $(f, \sigma)$  suivie de la  $\sim_{y,z}$ -classe d'équivalence de  $(g, \tau)$  est la  $\sim_{x,z}$ -classe de  $(g \circ f', \sigma \circ \tau')$  où les morphismes  $f'$  et  $\tau'$  proviennent de la propriété d'extension à droite de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{C}$  : d'où la commutativité du diagramme 4.

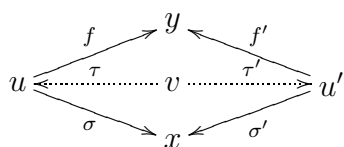


Diagramme 3

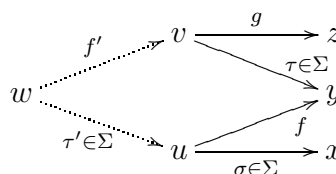


Diagramme 4

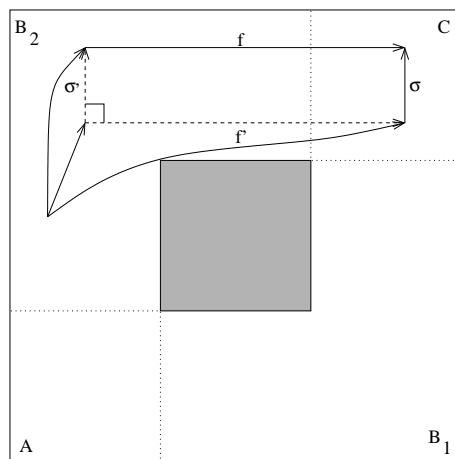
Les détails de la preuve de la proposition IV.3.3 (p.106) sont disponibles dans [25], [9] ou [87]. Remarquons enfin que la 4<sup>ème</sup> propriété de la définition IV.3.1 (p.105) ne sert qu'à valider la relation  $\sim_{x,y}$ . En son absence, on peut quand même montrer que dans la description de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  tout morphisme possède un représentant de la forme  $(f, \sigma^{-1})$  où  $\sigma^{-1}$  est l'inverse formel de  $\sigma \in \Sigma$ . On peut également déterminer un représentant de la forme  $(f, \sigma)$  d'une composée de deux morphismes dont on a des représentants respectifs  $(f_1, \sigma_1^{-1})$  et  $(f_2, \sigma_2^{-1})$  en utilisant la loi de composition décrite dans la proposition IV.3.3 (p.106). Cependant, il n'est plus aussi aisé de savoir quand  $(f, \sigma^{-1})$  et  $(f', \sigma'^{-1})$  désignent le même morphisme. Dans le chapitre V (p.119), la description de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  fournie par la proposition IV.3.3 (p.106) sera très utile. On note que dans [9] et [59], la notion de catégorie filtrée ne "correspond" pas à celle de filtre dans le cadre des ensembles partiellement ordonnés. En

effet, si  $(X, \sqsubseteq)$  est un filtre i.e. un ensemble ordonné tel que pour tous  $x$  et  $y$  appartenant à  $X$ , il existe  $z$  dans  $X$  tel que  $z \sqsubseteq x$  et  $z \sqsubseteq y$ , c'est le dual de sa petite catégorie associée qui est filtrée.

#### IV.3.4 PROPOSITION

La collection des morphismes inversibles au sens de Yoneda d'une catégorie  $\mathcal{C}$  satisfait les 1<sup>er</sup>, 2<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> points de la définition de calcul de fractions à droite et de calcul de fractions à gauche (voir définition IV.3.1 (p.105)).

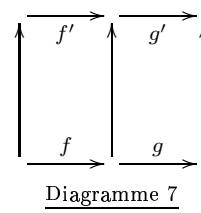
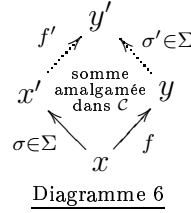
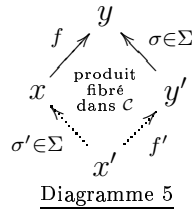
PREUVE. Le premier point est satisfait grâce à la propriété IV.2.10 (p.104), car toute identité est un isomorphisme. Le second est donné par la propriété IV.2.11 (p.104) et le troisième par la propriété IV.2.10 (p.104), en effet, si on a  $\sigma \circ f = \sigma \circ g$  ou  $f \circ \sigma = g \circ \sigma = g$ , alors  $f = g$  car  $\sigma$  est un bimorphisme, il suffit alors de prendre une identité pour  $\sigma'$ . ■ En fait, c'est le troisième point de la définition IV.3.1 (p.105) qui est intéressant puisque c'est lui qui permet de décrire facilement la catégorie de fractions  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  (voir [9]), en outre il a une certaine signification informatique. En supposant que les éléments de  $\Sigma$  soient d'un certain point de vue "sans importance", cet axiome affirme que l'on peut effectuer une action "sans importance" à n'importe quel moment. Dans les cas extrêmes, toutes les effectuer en premier ou en dernier. D'un point de vue géométrique, on veut pouvoir faire "glisser" tout morphisme de  $\mathcal{C}$  le long de tout morphisme de  $\Sigma$  pourvu que les deux aient la même source (calcul de fractions à droite) ou le même but (calcul de fractions à gauche). La seule hypothèse à ajouter est celle de pouvoir faire ce "glissement" de façon canonique. Formellement, le troisième point de la définition IV.3.1 (p.105) donne l'existence de  $f'$  et de  $\sigma'$  tels que  $f \circ \sigma' = \sigma \circ f'$  or on voudrait pouvoir prendre  $\sigma'$  et  $f'$  de telle sorte que tout autre couple  $(\sigma'', f'')$  tel que  $f \circ \sigma'' = \sigma \circ f''$  se factorise à travers  $(\sigma', f')$ . Autrement dit, on ne veut plus seulement que le digramme de la définition IV.3.1 (p.105) soit un carré commutatif mais un produit fibré. Dans le cas du calcul de fractions à gauche, on exigera des sommes amalgamées. L'idée de substituer des produits fibrés et des sommes amalgamées m'a été suggérée par *Eric Goubault*, elle fait suite aux nombreuses observations de cas concrets dans lesquels ces constructions sont clairement possibles. En reprenant l'exemple du carré dirigé troué, sur la figure de droite,  $\sigma, \sigma', f$  et  $f'$  forment un diagramme de produit fibré (et aussi, c'est à noter, de somme amalgamée). Sur tous les exemples de ce "type", c'est-à-dire le carré dirigé dont on a retiré des parties rectangulaires dont les côtés sont parallèles aux axes, on peut faire un constat de même nature. On note également l'analogie qu'il y a avec les notions de fibrations (triviales ou pas) dans le cadre des catégories de modèles qui sont "stables par produits fibrés", les cofibrations (triviales ou pas) étant, quant à elles, "stables par sommes amalgamées". On pose alors:



#### IV.3.5 DÉFINITION (SYSTÈMES DE MORPHISMES INVERSIBLES AU SENS DE Yoneda)

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\Sigma$  une collection de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Les variables  $x, y, x'$  et  $y'$  sont à valeurs dans l'ensemble des objets de  $\mathcal{C}$ . La collection  $\Sigma$  est appelée **système de morphismes inversibles au sens de Yoneda** de  $\mathcal{C}$  lorsque :

1. on a les inclusions  $Iso(\mathcal{C}) \subseteq \Sigma \subseteq Yoneda(\mathcal{C})$ ,
2. (a) pour tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}[x, y]$ , tout morphisme  $\sigma$  de  $\Sigma[y', y]$ , il existe un morphisme  $f'$  de  $\mathcal{C}[x', y']$  ainsi qu'un morphisme  $\sigma'$  de  $\Sigma[x', x]$  tels que le diagramme 5 soit un produit fibré dans  $\mathcal{C}$ ,
- (b) pour tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}[x, y]$ , tout morphisme  $\sigma$  de  $\Sigma[x, x']$ , il existe un morphisme  $f'$  de  $\mathcal{C}[x', y']$  ainsi qu'un morphisme  $\sigma'$  de  $\Sigma[y, y']$  tels que le diagramme 6 soit une somme amalgamée dans  $\mathcal{C}$



3. et enfin la collection  $\Sigma$  est stable par composition.

On écrira aussi, par soucis de concision, que  $\Sigma$  est un **système de Yoneda** de  $\mathcal{C}$ .

#### IV.3.6 REMARQUE

Tout système de Yoneda  $\Sigma$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$  est un calcul de fractions à droite et à gauche sur  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. Montrons que  $\Sigma$  est un calcul de fractions à droite. Le seul point de la définition IV.3.1 qui ne soit pas trivialement satisfait par  $\Sigma$  est le quatrième : supposons que l'on ait  $\sigma \circ f = \sigma \circ g$  avec les notations de la définition IV.3.1,  $\sigma$  est donc un morphisme de Yoneda et d'après la propriété IV.2.10, on sait alors que  $f = g$ , il suffit donc de poser  $\sigma' := id_x$ . On procède de même pour le calcul de fractions à gauche.  $\square$  Pour une collection de morphismes  $\Sigma$  de  $\mathcal{C}$ , on dit que  $\Sigma$  a la propriété de **changement de base** lorsque  $\Sigma$  vérifie la propriété 2a. On dit aussi que  $\Sigma$  a la propriété de **co-changement de base** lorsque  $\Sigma$  vérifie la propriété 2b.

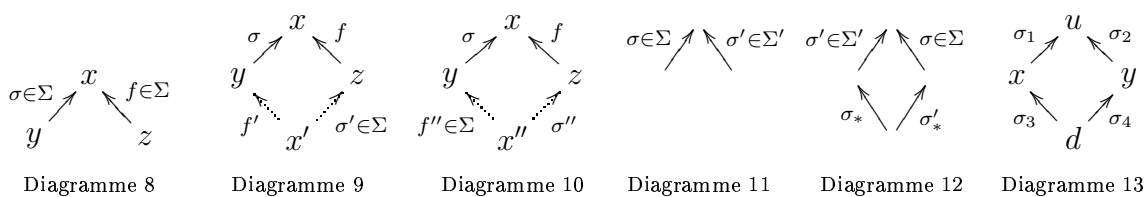
#### IV.3.7 REMARQUE

La collection  $\Sigma$  étant un système de morphismes Yoneda inversibles, dans la définition IV.3.5 (p.107) le point (2a) affirme *a priori* seulement qu'il existe un représentant  $(\sigma', f')$  du produit fibré de  $(f, \sigma)$  tel que  $\sigma' \in \Sigma$ . En réalité, tous les représentants du produit fibré de  $(f, \sigma)$  ont cette propriété, en effet, on sait que deux représentants d'une même limite ne diffère que d'un isomorphisme, or par définition, tout isomorphisme est dans  $\Sigma$  et  $\Sigma$  est stable par composition. La même remarque est évidemment valable pour le point (2b) en faisant référence aux sommes amalgamées et aux colimites. En outre, si  $\mathcal{C}$  est une catégorie dont les seuls isomorphismes sont les identités, toutes les limites et colimites sont définies de façon strictement unique, c'est-à-dire pas seulement unique à isomorphisme près. Formellement, si deux objets sont la limite, ou la colimite d'un foncteur, alors ils sont égaux.

#### IV.3.8 REMARQUE

Supposons que  $\Sigma$  soit un système de Yoneda d'une catégorie sans boucle  $\mathcal{C}$  et que l'on ait le diagramme 8, d'après le point (2a) de la définition IV.3.5 on obtient, grâce au fait que

$\sigma$  appartient à  $\Sigma$ , un représentant d'un produit fibré donné par le diagramme 9 où  $\sigma'$  est dans  $\Sigma$ . Or, en invoquant cette fois l'hypothèse selon laquelle  $f$  est un élément de  $\Sigma$ , on obtient un autre représentant de ce même produit fibré, à savoir le diagramme 10, dans lequel le morphisme  $f''$  est dans  $\Sigma$ . Or deux représentants d'une même limite ne diffère qu'à un isomorphisme près, plus précisément, on a un isomorphisme  $h$  dans  $\mathcal{C}[x'', x']$  tel que  $\sigma'' = \sigma' \circ h$  et comme  $\Sigma$  est stable par composition et contient tous les isomorphismes de  $\mathcal{C}$ , le morphisme  $f'$  est également dans  $\Sigma$ . Pouvons encore un peu le raisonnement en supposant que l'on ait deux systèmes de *Yoneda*, notés  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . Considérons le diagramme 11, pour tout produit fibré dont la forme est celle du diagramme 12, on a  $\sigma_* \in \Sigma$  et  $\sigma'_* \in \Sigma'$ . Il en va de même des sommes amalgamées.

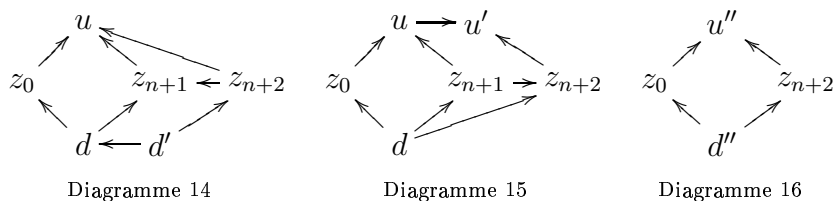


Cette dernière remarque a un corollaire très intéressant quant à la description des objets de  $\mathcal{C}$  reliés par un  $\Sigma$ -zigzag

#### IV.3.9 LEMME

Soit  $\Sigma$  un système de *Yoneda* sur une catégorie sans boucle  $\mathcal{C}$ . Etant donnés deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $x$  et  $y$  sont reliés par un  $\Sigma$ -zigzag si et seulement si il existe deux objets  $u$  et  $d$  appartenant à  $\mathcal{C}$  ainsi que quatre morphismes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  appartenant respectivement à  $\Sigma[x, u], \Sigma[y, u], \Sigma[d, x]$  et  $\Sigma[d, y]$  tels que le diagramme 13 soit commutatif.

PREUVE. Avec les notations du lemme IV.1.2, on montre par récurrence sur  $n$  que si  $(\sigma_n, \dots, \sigma_0)$  est un  $\Sigma$ -zigzag, alors on a la conclusion du lemme IV.3.9 avec  $\{x, y\} = \{z_0, z_{n+1}\}$ . Le cas où  $n = 0$  est trivial. Supposons le résultat pour un entier naturel  $n$  fixé. En supposant maintenant que l'on ait un terme de plus, c'est-à-dire une suite d'objets  $(z_0, \dots, z_{n+2})$  avec un  $\Sigma$ -zigzag  $(\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_0)$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence et, selon que  $\Sigma[z_{n+2}, z_{n+1}]$  ou  $\Sigma[z_{n+1}, z_{n+2}]$  ne soit pas vide, les points 2a ou 2b de la définition IV.3.5, on obtient les diagrammes 14 ou 15; dans un cas comme dans l'autre, le carré de sommets  $d, z_0, u$  et  $z_{n+1}$  est commutatif par hypothèse de récurrence. Les triangles de sommets  $u, z_{n+1}, z_{n+2}$  d'une part et  $d, z_{n+1}, z_{n+2}$  d'autre part sont commutatifs par construction car  $\Sigma$  est stable par composition; les losanges de sommets  $d, d', z_{n+1}, z_{n+2}$  d'une part et  $u, u', z_{n+1}, z_{n+2}$  d'autre part sont respectivement une somme amalgamée et un produit fibré, donc commutatifs et d'après la remarque IV.3.8 les flèches issues de  $d'$  et allant vers  $u'$  sont dans  $\Sigma$ . Dans un cas comme dans l'autre, on a la commutativité du diagramme 16, dans lequel le couple  $(d'', u'')$  est  $(d', u)$  ou bien  $(d, u')$  et toutes les flèches sont dans la collection  $\Sigma$ .



### IV.3.1 LE TREILLIS COMPLET DES SYSTÈMES DE MORPHISMES

On va maintenant montrer que pour n'importe quelle petite catégorie  $\mathcal{C}$ , la collection des systèmes de *Yoneda* sur  $\mathcal{C}$  n'est pas vide et que munie de l'inclusion, c'est un treillis complet. On verra ultérieurement que dans le cas où  $\mathcal{C}$  est sans boucle, c'est même un treillis local. Avant d'en venir au théorème suivant, on rappelle qu'un **treillis complet** est un ensemble ordonné  $(\mathcal{T}, \subseteq)$  dont toutes les sous-parties ont une borne supérieure et une borne inférieure. On introduit également la notation suivante : si  $(\Sigma_i)_{i \in I}$  est une famille de collections de morphismes d'une catégorie quelconque  $\mathcal{C}$ , on note  $\biguplus_{i \in I} \Sigma_i$  la plus petite collection de morphismes de  $\mathcal{C}$  stable par composition et incluant la collection  $\bigcup_{i \in I} \Sigma_i$ .

#### IV.3.10 THÉORÈME (TREILLIS COMPLET DES SYSTÈMES DE *Yoneda* SUR $\mathcal{C}$ )

Soit une catégorie  $\mathcal{C}$ , la collection  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$  des systèmes de *Yoneda* sur  $\mathcal{C}$  n'est pas vide et on a les propriétés suivantes :

1. la collection  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$  munie de la relation d'inclusion  $\subseteq$  est un treillis complet,
2. la borne inférieure dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$  est donnée par l'intersection  $\cap$ ,
3. la borne supérieure dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$  est donnée par  $\biguplus$  et enfin
4. le plus petit élément de  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$  est le système de *Yoneda* constitué des identités de  $\mathcal{C}$ .

On décrit le plus grand élément de  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ , noté  $\bar{\Sigma}$ , comme l'intersection des éléments de la famille  $S_\alpha$ , indexée par la collection des ordinaux, dont chaque membre est un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  et définie comme suit à l'aide d'une induction transfinie [56, 57, 16] :

- $S_0$  est l'ensemble des morphismes de *Yoneda* sur  $\mathcal{C}$  puis étant donné un ordinal  $\lambda$  tel que pour tout ordinal  $\alpha < \lambda$  l'ensemble  $S_\alpha$  soit déjà fixé, on définit l'ensemble  $S_\lambda$  de la façon suivante :
- si  $\lambda$  est un ordinal successeur, c'est-à-dire que  $\lambda = \alpha + 1$  pour un certain ordinal  $\alpha$ , alors  $S_{\alpha+1}$  est l'ensemble des morphismes  $f$  de  $\mathcal{C}$  appartenant à  $S_\alpha$  tels que :
  - pour tout morphisme  $g$  vérifiant  $t(g) = t(f)$ , il existe un morphisme  $f'$  appartenant à  $S_\alpha$  et un morphisme  $g'$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $t(f') = s(g)$ ,  $t(g') = s(f)$ ,  $s(f') = s(g')$  et le carré formé par  $f$ ,  $g$ ,  $f'$  et  $g'$  soit un produit fibré dans  $\mathcal{C}$ ; dualement
  - pour tout morphisme  $g$  vérifiant  $s(g) = s(f)$ , il existe un morphisme  $f''$  appartenant à  $S_\alpha$  et un morphisme  $g''$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $s(f'') = t(g)$ ,  $s(g'') = t(f)$ ,  $t(f'') = t(g'')$  et le carré formé par  $f$ ,  $g$ ,  $f''$  et  $g''$  soit une somme amalgamée dans  $\mathcal{C}$ .
- si  $\lambda$  est un ordinal limite, c'est-à-dire qu'il n'est le successeur d'aucun ordinal, alors l'ensemble  $S_\lambda$  est l'intersection de la famille constituée des ensembles  $S_\alpha$  pour  $\alpha < \lambda$ .

PREUVE. On vérifie immédiatement que la collection des identités d'une catégorie est un système de *Yoneda* sur cette même catégorie, en outre, c'est évidemment le plus petit pour l'inclusion. Soit un ensemble  $I$  possédant au moins un élément et une famille  $(\Sigma_i)_{i \in I}$  de systèmes de *Yoneda* sur  $\mathcal{C}$  indexée par  $I$ . La collection  $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$  est évidemment stable par composition et satisfait non moins clairement le premier point de la définition IV.3.5. Soient deux morphismes  $\sigma$  et  $f$  de  $\mathcal{C}$  partageant la même source, le premier appartenant à  $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ ; soient encore deux indices  $i_1$  et  $i_2$  de  $I$ , puisque  $\sigma$  est à la fois un élément de  $\Sigma_{i_1}$  et de  $\Sigma_{i_2}$  nous avons les sommes amalgamées suivantes :

$$\begin{array}{ccc} & f'_1 \dashrightarrow x_1 \leftarrow \sigma'_1 \in \Sigma_{i_1} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \sigma & \text{somme amalgamée} & f \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & f'_2 \dashrightarrow x_2 \leftarrow \sigma'_2 \in \Sigma_{i_2} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \sigma & \text{somme amalgamée} & f \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \end{array}$$

Par unicité à isomorphisme près de la somme amalgamée, nous avons un isomorphisme  $\tau$  appartenant à  $\mathcal{C}[x_2, x_1]$  tel que  $\sigma'_1 = \tau \circ \sigma'_2$ , comme  $\Sigma_{i_2}$  est stable par composition et contient tous les isomorphismes, le morphisme  $\sigma'_1$  appartient également à  $\Sigma_{i_2}$ . Il s'ensuit que  $\sigma_1$  appartient à la collection  $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ . On raisonne de la même manière pour les produits fibrés.

Par définition, la collection de morphismes de  $\mathcal{C}$  décrite ci-dessous est stable par composition et vérifie le premier point de la définition IV.3.5 puisqu'une composée de morphismes de *Yoneda* (respectivement d'isomorphismes) est un morphisme de *Yoneda* (respectivement un isomorphisme) (propriété IV.2.11).

$$\bigoplus_{i \in I} \Sigma_i := \left\{ \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1 \mid n \in \mathbb{N}^*, \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\} \sigma_k \in \Sigma_{i_k} \right\}$$

Prenons un élément  $\sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1$  de  $\bigoplus_{i \in I} \Sigma_j$ , où  $n$  est un entier naturel distinct de 0,  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  et où pour tout indice  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , le morphisme  $\sigma_k$  appartient à  $\Sigma_{i_k}$ ; soit également  $f$  un morphisme de  $\mathcal{C}$  ayant la même source que  $\sigma_1$ . Nous avons donc le diagramme 17.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} f \uparrow & & \\ \sigma_1 \in \Sigma_{i_1} \dashrightarrow & \dots & \sigma_n \in \Sigma_{i_n} \\ \text{Diagramme 17} & & \end{array} & \begin{array}{ccc} \sigma'_n \circ \dots \circ \sigma'_1 \in \bigoplus_{i \in I} \Sigma_i & & \\ f \uparrow & \text{somme amalgamée} & \uparrow f_n \\ \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1 \in \bigoplus_{i \in I} \Sigma_i & & \end{array} & \begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & & \nwarrow f' \\ u & \xleftarrow{\tau} u \wedge u' \xrightarrow{\tau'} & u' \\ \sigma \searrow & & \swarrow \sigma' \\ & x & \end{array} \\ \text{Diagramme 18} & & \text{Diagramme 19} \end{array}$$

À l'aide d'une récurrence finie (on applique consécutivement le point (2b) de la définition IV.3.5 pour  $\Sigma_{i_1}, \dots, \Sigma_{i_n}$ ), on obtient le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} & \sigma'_1 \in \Sigma_{i_1} & & \sigma'_n \in \Sigma_{i_n} & \\ & \dashrightarrow & & \dashrightarrow & \\ f \uparrow & \text{somme amalgamée} & \uparrow f_1 & \text{somme amalgamée} & \uparrow f_n \\ & \dashrightarrow & \dots & \dashrightarrow & \\ \sigma_1 \in \Sigma_{i_1} & & & & \sigma_n \in \Sigma_{i_n} \end{array}$$

En outre, il est un fait général qu'une "composée" de sommes amalgamées est une somme amalgamée [9] d'où le diagramme 18 . Un raisonnement analogue s'applique au cas des



produits fibrés à l'aide du point (2a) au lieu de (2b). Ainsi les points (2a) et (2b) de la définition IV.3.5 sont satisfaits. Notons que les opérateurs  $\cap$  et  $\uplus$  sont associatifs sur la collection des systèmes de *Yoneda* sur  $\mathcal{C}$ , cela étant vrai en toute généralité et indépendamment du fait que les familles de morphismes considérées soient des systèmes de *Yoneda* ou pas. Vérifions enfin que la description de  $\overline{\Sigma}$  que l'on a donnée est valide. Il est clair que si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux ordinaux tels que  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , alors  $S_{\lambda_2} \subseteq S_{\lambda_1}$  : on définit alors  $\overline{\Sigma}$  comme l'intersection indexée par la classe ordinaire des ensembles  $S_\alpha$  et on sait d'ores et déjà que  $\overline{\Sigma}$  ne contient que des morphismes de *Yoneda*. Il faut tout d'abord vérifier que l'ensemble  $Iso(\mathcal{C})$  est inclus dans  $\overline{\Sigma}$ . Pour cela, on prouve à l'aide d'une induction transfinie que  $Iso(\mathcal{C})$  est inclus dans chacun des ensembles  $S_\alpha$ . C'est vrai pour  $S_0$  d'après la propriété IV.2.8. Si c'est vrai pour  $S_\alpha$ , alors ça l'est encore pour  $S_{\alpha+1}$  : il suffit d'appliquer le fait que dans les diagrammes 5 et 6, si  $\sigma$  est un isomorphisme, alors  $\sigma'$  en est également un (c'est un résultat général de la théorie des catégories [9]), alors  $\sigma'$  appartient à  $S_\alpha$  par hypothèse d'induction et donc par définition de  $S_{\alpha+1}$ , l'isomorphisme  $\sigma$  est dans  $S_{\alpha+1}$ . Le cas où  $\lambda$  est un ordinal limite est trivial. Encore par induction transfinie, on montre que chacun des ensembles  $S_\alpha$  est stable par composition : le cas de  $S_0$  est donné par la propriété IV.2.11. Puis, si  $S_\alpha$  est stable par composition et que  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $S_{\alpha+1}$  tels que la composée  $g \circ f$  existe, alors dans le diagramme 7, si les deux carrés sont des sommes amalgamées, il en va de même du contour extérieur [9], par construction de  $S_{\alpha+1}$ , on peut supposer que  $f'$  et  $g'$  appartiennent à  $S_\alpha$  qui, par hypothèse d'induction, est stable par composition et donc contient  $g' \circ f'$ . On raisonne de même pour les produits fibrés et on obtient la stabilité par composition de  $S_{\alpha+1}$ . Le cas où  $\lambda$  est un ordinal limite est trivial. Etant donné que  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, la collection  $S_\alpha$  indexée par la classe ordinaire, qui est décroissante pour l'inclusion, stationne à partir d'un certain ordinal  $\lambda$  : dans le cas contraire, les ensembles  $S_{\alpha+1} \setminus S_\alpha$  contiendraient tous au moins un élément et seraient deux à deux disjoints, on aurait autant de morphisme dans  $\mathcal{C}$  que d'ordinaux dans l'univers, c'est une contradiction. On a donc  $S_{\lambda+1} = S_\lambda$  pour un certain ordinal  $\lambda$ . Par construction, il est immédiat que l'ensemble  $S_\lambda$  est stable par changement et co-changement de base et qu'il ne contient que des morphismes de *Yoneda*, puis, avec ce que l'on a vu, il contient tous les isomorphismes de  $\mathcal{C}$  et est stable par composition. Pour conclure que  $S_\lambda$  est le plus grand système de *Yoneda*, il reste à montrer, toujours par induction transfinie, que dans chaque ensemble  $S_\alpha$  est inclus n'importe quel système de *Yoneda* sur  $\mathcal{C}$ . C'est immédiat pour  $S_0$ . En supposant qu'un système de *Yoneda*  $\Sigma$  soit inclus dans  $S_\alpha$ , si  $\sigma$  appartient à  $\Sigma$  et  $g$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$  ayant le même but que  $\sigma$ , alors d'après la définition IV.3.5 (diagramme 5) et avec les notations utilisées pour décrire la construction de  $S_{\alpha+1}$ , on peut prendre  $g'$  dans  $\Sigma$  et donc, par hypothèse d'induction, dans  $S_\alpha$ . On raisonne de même si  $g$  a la même source que  $f$ , cette fois-ci avec le diagramme 6, pour montrer que l'on peut prendre  $g''$  dans  $S_\alpha$  et donc, par construction de  $S_{\alpha+1}$ , que  $\sigma$  appartient à ce dernier. Ainsi  $\Sigma$  est inclus dans  $S_{\alpha+1}$ .  $\square$

On appelle **endofoncteur** d'une petite catégorie  $\mathcal{C}$  un foncteur de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}$ . Un endofoncteur qui de plus admet un inverse dans  $\mathbf{Cat}$  est appelé un **autofoncteur** de  $\mathcal{C}$ .

#### IV.3.11 COROLLAIRE (ACTION DU GROUPE DES AUTOFONCTEURS SUR $\overline{\Sigma}$ )

Le plus grand système de *Yoneda*  $\overline{\Sigma}$  d'une petite catégorie  $\mathcal{C}$  et son complémentaire dans l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{C}$  sont stables par tout autofoncteur de  $\mathcal{C}$ , autrement dit

$\overline{\Sigma}$  et son complémentaire dans l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{C}$  sont stables sous l'action (à droite) de  $\text{Aut}(\mathcal{C})$  sur l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. Soit un autofoncteur  $\Phi$  de  $\mathcal{C}$ , il est clair que si  $\sigma$  est un morphisme de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ , il en va de même de  $\Phi(\sigma)$ . Ainsi, l'image directe de  $S_0$  par  $\Phi$ , notée  $\Phi(S_0)$ , est incluse dans  $S_0$ . Etant donné un ordinal  $\alpha$ , en supposant que  $\Phi(S_\alpha) \subseteq S_\alpha$ , on vérifie immédiatement, d'après la construction de  $S_{\alpha+1}$ , que  $\Phi(S_{\alpha+1}) \subseteq S_{\alpha+1}$  : c'est en effet une conséquence du fait qu'un autofoncteur préserve les produits fibrés et les sommes amalgamés. Enfin, si  $\lambda$  est un ordinal limite tel que pour tout ordinal  $\alpha < \lambda$ , on a  $\Phi(S_\alpha) \subseteq S_\alpha$ , alors

$$\Phi(S_\lambda) = \Phi\left(\bigcap_{\alpha < \lambda} S_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} \Phi(S_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} S_\alpha = S_\lambda .$$

Tout autofoncteur de  $\mathcal{C}$  induit en particulier une permutation sur l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{C}$ , d'où la stabilité du complémentaire de  $\overline{\Sigma}$ . L'action de  $\text{Aut}(\mathcal{C})$  sur l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{C}$  est définie par  $f \cdot \Phi := \Phi(f)$ .  $\square$

Notons que le corollaire IV.3.11 n'est pas vérifié pour n'importe quel système de *Yoneda*. Soit l'ensemble ordonné  $(\mathbb{R}, \leq)$  vu comme une petite catégorie, les morphismes de cette catégorie sont les paires de réels  $(x, y)$  telle que  $x \leq y$ , on a un système de *Yoneda* de  $(\mathbb{R}, \leq)$  en posant  $\Sigma := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy \geq 0\}$ . Il est clair que  $\Sigma$  n'est stable par aucune "translation" stricte de  $(\mathbb{R}, \leq)$ , c'est-à-dire un autofoncteur de  $(\mathbb{R}, \leq)$  de la forme  $x \mapsto x + t$  où  $t$  est un réel distinct de 0. La construction de  $\overline{\Sigma}$  *via* une induction transfinie est similaire à celles que l'on rencontre fréquemment en théorie des catégories de modèles, c'est par exemple ainsi que l'on montre l'existence des catégories de modèles à engendrement cofibrant/fibrant. Dans notre cas, le fait de ne traiter que des petites catégories rend la preuve de terminaison de la construction moins technique alors que "l'argument du petit objet" est un passage obligé dans le cadre des catégories de modèles [49, 48].

## IV.3.2 CATÉGORIE DES COMPOSANTES

On va maintenant récolter les fruits des efforts théoriques que l'on a déployé précédemment. Tout a été mis en place pour poser les définitions dans le cadre adéquat. On vérifiera sur un exemple concret que l'on a effectivement réduit la taille de la catégorie fondamentale et que la catégorie de composantes obtenue est bien ce à quoi on s'attendait. *Marco Grandis* a également donné dans [39] une construction permettant de réduire la taille d'une catégorie, cependant, les résultats obtenus ne coïncident pas avec ceux que l'on obtient. Actuellement, les liens entre ces deux constructions ne sont pas clairement compris.

### IV.3.12 DÉFINITION (CATÉGORIE DES COMPOSANTES D'UNE PETITE CATÉGORIE)

Etant donnée une catégorie  $\mathcal{C}$ , une conséquence du théorème IV.3.10 est qu'il existe, au regard de l'inclusion, un plus grand système de *Yoneda* sur  $\mathcal{C}$  : on le note  $\overline{\Sigma}$ . On définit alors la **catégorie de composantes** de  $\mathcal{C}$  comme le quotient de  $\mathcal{C}$  par  $\overline{\Sigma}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{C}/\overline{\Sigma}$ .

Plus généralement, dès que  $\Sigma$  est un élément du treillis complet des systèmes de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ , on peut définir le quotient  $\mathcal{C}/\Sigma$  et pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , la  $\Sigma$ -composante de  $x$

(dans  $\mathcal{C}$ ) est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  dont la collection des objets est la collection de tous les  $y \in Ob(\mathcal{C})$  tels qu'il existe un  $\Sigma$ -zigzag (voir la définition IV.1.1) de  $x$  vers  $y$ .

Etant donné un autofoncteur  $\Phi$  de  $\mathcal{C}$ , une conséquence du corollaire IV.3.11 est que le foncteur  $Q_{\overline{\Sigma}} \circ \Phi$  envoie tout élément de  $\overline{\Sigma}$  sur une identité de  $\mathcal{C}/\overline{\Sigma}$  et donc, d'après la proposition IV.1.3, il existe un unique endofoncteur  $\Phi/\overline{\Sigma}$  de  $\mathcal{C}/\overline{\Sigma}$  tel que  $Q_{\overline{\Sigma}} \circ \Phi = \Phi/\overline{\Sigma} \circ Q_{\overline{\Sigma}}$ .

#### IV.3.13 PROPOSITION

L'application qui à tout autofoncteur  $\Phi$  de  $\mathcal{C}$  associe l'endofoncteur  $\Phi/\overline{\Sigma}$  de  $\mathcal{C}/\overline{\Sigma}$  est un morphisme du groupe  $\text{Aut}(\mathcal{C})$  vers le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{C}/\overline{\Sigma})$ .

PREUVE. Soit  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  deux autofoncteurs de  $\mathcal{C}$ , on a  $Q_{\overline{\Sigma}} \circ \Phi_2 \circ \Phi_1 = \Phi_2/\overline{\Sigma} \circ \Phi_1/\overline{\Sigma} \circ Q_{\overline{\Sigma}}$ . Il s'ensuit, par unicité de  $(\Phi_2 \circ \Phi_1)/\overline{\Sigma}$ , que  $\Phi_2/\overline{\Sigma} \circ \Phi_1/\overline{\Sigma} = (\Phi_2 \circ \Phi_1)/\overline{\Sigma}$ . En prenant  $\Phi_2 = \Phi_1^{-1}$ , on vérifie en particulier que  $\Phi_1$  est un autofoncteur de  $\mathcal{C}/\overline{\Sigma}$ .  $\square$

#### IV.3.14 REMARQUE

Si quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble  $\mathcal{C}[x, y]$  n'est vide que lorsque l'ensemble  $\mathcal{C}[y, x]$  l'est aussi, alors la propriété IV.2.8 montre que  $\overline{\Sigma}$  est l'ensemble des isomorphismes de  $\mathcal{C}$  et donc que  $S_0 = \overline{\Sigma}$ . De même, dans les cas concrets [35], la construction inductive donnée par le théorème IV.3.10 s'achève après un nombre fini d'itérations.

On va maintenant donner des conditions sur la petite catégorie  $\mathcal{C}$  qui garantissent que chacun de ses systèmes de *Yoneda*, en particulier le plus grand, soit pure dans  $\mathcal{C}$  : le lemme IV.3.16 (p.114) est dû à *Eric Goubault*, c'est à l'origine à cause de ce lemme que l'on a posé la définition IV.3.5 (p.107). Comme cela a déjà été souligné, il était nécessaire dans [24] d'imposer axiomatiquement la pureté de  $\Sigma$ , malheureusement, la définition qui en résultait n'était pas "stable" dans le sens où la sous-catégorie engendrée par deux sous-catégories pures ne l'étaient en général pas.

#### IV.3.15 DÉFINITION

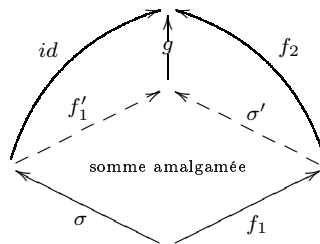
Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite **géométrique** lorsque  $\text{Iso}(\mathcal{C})$  est pure dans  $\mathcal{C}$ . La sous-catégorie pleine de  $\text{Cat}$  dont les objets sont les catégories géométriques est notée  $\text{GeoCat}$ .

Le choix de la terminologie de la définition IV.3.15 sera expliqué ultérieurement.

#### IV.3.16 LEMME

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie géométrique, alors chacun de ses systèmes de *Yoneda* est pure dans  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. Prenons  $\sigma \in \Sigma$  et  $f_1, f_2 \in Mo(\mathcal{C})$  tels que  $\sigma = f_2 \circ f_1$ . D'après le point (2b) de la définition IV.3.5 (p.107), nous avons  $\sigma' \in \Sigma$  et  $f'_1$  qui forment un diagramme de somme amalgamée ainsi qu'un unique  $g \in Mo(\mathcal{C})$  rendant le diagramme suivant commutatif:



Par hypothèse de pureté de  $Iso(\mathcal{C})$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $f'_1$  et  $g$  sont des isomorphismes, qui, d'après le 1<sup>er</sup> point de la définition IV.3.5 (p.107), appartiennent à  $\Sigma$ . Puis la stabilité par composition de  $\Sigma$  (3<sup>ème</sup> point de la définition IV.3.5 (p.107)) implique que  $f_2$ , qui est égal à  $g \circ \sigma'$ , appartient à  $\Sigma$ . De la même manière, en utilisant le point (2a) au lieu du point (2b), c'est-à-dire la stabilité par produit fibré, on prouve que  $f_1$  appartient à  $\Sigma$ . Ainsi  $\Sigma$  est pure dans  $\mathcal{C}$ . ■

En fait, comme on le verra dans le chapitre XIII (p.227), le lemme IV.3.16 (p.114) reste valable sans l'hypothèse de pureté de  $Iso(\mathcal{C})$  dans  $\mathcal{C}$  et avec une famille de morphismes  $\Sigma$  vérifiant des axiomes plus faibles que ceux d'un système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda*.

#### IV.3.17 PROPOSITION

1. Toute catégorie sans boucles est géométrique.
2. Toute catégorie libre est géométrique.
3. Tout groupoïde  $\mathcal{G}$  est géométrique et on a  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \{Mo(\mathcal{G})\}$ , c'est-à-dire que le seul système de morphismes *Yoneda* inversibles est  $Mo(\mathcal{G})$  la collection de tous les morphismes de  $\mathcal{G}$ .

PREUVE. Pour prouver le premier point, supposons que  $\alpha$  soit un isomorphisme et que l'on puisse écrire  $\alpha = \gamma \circ \beta$ . Alors  $(\alpha^{-1}, \gamma, \beta)$  est une suite composable dont les extrémités, c'est-à-dire dans notre cas  $src(\beta)$  et  $tgt(\alpha^{-1})$ , sont égales. Comme  $\mathcal{C}$  est sans boucles,  $\alpha^{-1}, \beta$  et  $\gamma$  sont des identités. On a donc prouvé que la collection des isomorphismes d'une catégorie sans boucles  $\mathcal{C}$  est pure dans  $\mathcal{C}$  et réduite aux identités de  $\mathcal{C}$ .

Le second point est tout aussi facile à prouver, en effet, dans une catégorie libre, la composée de deux morphismes ne peut être une identité que si les deux morphismes sont eux-mêmes des identités, on peut s'en convaincre en raisonnant sur la longueur des suites  $\sim_o$ -composables qui en sont les morphismes dans la construction proposée dans l'appendice A (p.269), la longueur d'une composition est la somme des longueurs des membres de la composition et les identités sont les seules à être de longueur 0.

$Mo(\mathcal{G})$  est trivialement un système *Yoneda* inversibles de  $\mathcal{G}$  et le fait que ce soit le seul découle immédiatement du 1<sup>er</sup> point de la définition IV.3.5 (p.107). ■

#### IV.3.18 COROLLAIRE

Soit une catégorie sans boucles  $\mathcal{C}$ , tout système de morphismes *Yoneda* inversibles de  $\mathcal{C}$  est pure dans  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. Il suffit d'appliquer la proposition IV.3.17 (p.115) et le lemme IV.3.16 (p.114). ■

#### IV.3.19 LEMME

Soit une catégorie  $\mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{A}$  est une sous-catégorie pure de  $\mathcal{C}$ , alors pour toute famille  $(\mathcal{C}_j)_{j \in J}$  de sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{A} \cap \left( \biguplus_{j \in J} \mathcal{C}_j \right) = \biguplus_{j \in J} (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_j)$

PREUVE. L'inclusion  $\mathcal{A} \cap \left( \biguplus_{j \in J} \mathcal{C}_j \right) \supseteq \biguplus_{j \in J} (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_j)$  est toujours satisfaite. En effet, si  $f$  est un élément du membre de droite, alors on a  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{j_1, \dots, j_n\} \subseteq J$ ,

$\forall k \in \{1, \dots, n\} \sigma_k \in \mathcal{A} \cap \Sigma_{j_k}$  et  $f = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1$ . De plus,  $\mathcal{A}$  étant une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ , on a en particulier  $\forall k \in \{1, \dots, n\} \sigma_k \in \mathcal{A}$ , d'où  $f \in Mo(\mathcal{A})$ . Réciproquement, supposons que nous ayons  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{j_1, \dots, j_n\} \subseteq J$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, n\} \sigma_k \in \Sigma_{j_k}$  et  $f = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1 \in Mo(\mathcal{A})$ , par pureté de  $\mathcal{A}$ ,  $\sigma_n, \dots, \sigma_1 \in Mo(\mathcal{A})$ . Alors  $\forall k \in \{1, \dots, n\} \sigma_k \in \mathcal{A} \cap \Sigma_{j_k}$  et  $f$  est un élément du membre de gauche. ■

#### IV.3.20 REMARQUE

Si  $\mathcal{C}$  satisfait la propriété suivante:  $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in Mo(\mathcal{C}), \gamma_2 \circ \gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = id$  et  $\gamma_2 \circ \gamma_1 = \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 = id$ , alors la réciproque du lemme IV.3.19 (p.115) est vraie.

PREUVE. Prenons  $\gamma_2 \circ \gamma_1 \in Mo(\mathcal{A})$  où  $\gamma_2, \gamma_1 \in Mo(\mathcal{C})$ . On pose  $\mathcal{C}_1 := \{\gamma_1\}$ ,  $\mathcal{C}_2 := \{\gamma_2\}$ , ce sont des abus de notation pour dire que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont des sous-catégories de  $\mathcal{C}$  respectivement engendrées par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , et on applique la distributivité à la famille  $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ . Si  $\gamma_1 \notin Mo(\mathcal{A})$  et  $\gamma_2 \notin Mo(\mathcal{A})$ , alors  $(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_1) \uplus (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_2) = \emptyset$  tandis que  $\mathcal{A} \cap (\mathcal{C}_1 \uplus \mathcal{C}_2) = \{\gamma_2 \circ \gamma_1\}$ . Si  $\gamma_1 \notin Mo(\mathcal{A})$  et  $\gamma_2 \in Mo(\mathcal{A})$ , alors  $(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_1) \uplus (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_2) = \{\gamma_2\}$  tandis que  $\mathcal{A} \cap (\mathcal{C}_1 \uplus \mathcal{C}_2) = \{\gamma_2, \gamma_2 \circ \gamma_1\}$  et  $\gamma_2 \neq \gamma_2 \circ \gamma_1$  d'après la propriété de  $\mathcal{C}$ , précisément, si on avait  $\gamma_2 = \gamma_2 \circ \gamma_1$ , on aurait également  $\gamma_1 = id_{src(\gamma_1)}$  donc  $id_{src(\gamma_1)} \in Mo(\mathcal{A})$  car  $\mathcal{A}$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ . ■

Notons que la propriété requise est vérifiée si  $\mathcal{C}$  est un groupoïde ou une catégorie sans boucles. En fait, avoir  $\mathcal{A} \cap \left( \biguplus_{j \in J} \mathcal{C}_j \right) = \biguplus_{j \in J} (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_j)$  est équivalent à l'existence de l'adjoint à droite du foncteur  $\mathcal{A} \cap \_ : (\{\text{sous-catégories de } \mathcal{C}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{\text{sous-catégories de } \mathcal{C}\}, \subseteq)$ , où le treillis complet  $(\{\text{sous-catégories de } \mathcal{C}\}, \subseteq)$  est vu comme une petite catégorie complète et cocomplète. L'équivalence vient directement du théorème du foncteur adjoint particularisé. Cette équivalence est à rapprocher du lien entre les locales et les **algèbres de Heyting** complètes, voir [11] pour plus de détails.

#### IV.3.21 COROLLAIRE

Soit  $(\Sigma_j)_{j \in J}$  une famille de systèmes de *Yoneda* d'une catégorie géométrique  $\mathcal{C}$  et  $\Sigma$  un autre système de morphismes *Yoneda* inversibles de  $\mathcal{C}$ . Alors  $\Sigma \cap \left( \biguplus_{j \in J} \Sigma_j \right) = \biguplus_{j \in J} (\Sigma \cap \Sigma_j)$ .

PREUVE. D'après le lemme IV.3.16 (p.114),  $\Sigma$  est pure dans  $\mathcal{C}$ , le résultat suit d'après le lemme IV.3.19 (p.115). Notons que l'hypothèse selon laquelle pour tout  $j$  appartenant à  $J$ ,  $\Sigma_j$ 's est un système de morphismes *Yoneda* inversibles, n'est pas utilisée dans la preuve. ■

#### IV.3.22 REMARQUE

$\cap$  et  $\uplus$  sont associatives sur la collection de toutes les sous-catégories d'une catégorie  $\mathcal{C}$ .

On va pouvoir préciser le théorème IV.3.10, rappelons pour cela qu'un **treillis local**<sup>1</sup> est un treillis complet  $(\mathcal{L}, \sqsubseteq)$  dans lequel pour toute famille  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathcal{L}$  indexée par un ensemble  $I$  et tout élément  $y$  de  $\mathcal{L}$ , on a la propriété de distributivité ci-dessous :

$$y \wedge \left( \bigvee_{i \in I} x_i \right) = \bigvee_{i \in I} (y \wedge x_i)$$

<sup>1</sup>locale dans la terminologie anglo-saxonne, le terme français m'a été suggéré par *François Lamarche*.

#### IV.3.23 PROPOSITION

Soit une catégorie géométrique  $\mathcal{C}$  (i.e. telle que  $Iso(\mathcal{C})$  soit pure dans  $\mathcal{C}$ ), la collection  $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$  des systèmes de Yoneda sur  $\mathcal{C}$ , ordonnée par l'inclusion, est un treillis local.

PREUVE. Toutes les propriétés d'un treillis complet sont données par le théorème IV.3.10, la distributivité découle du corollaire IV.3.21.  $\square$

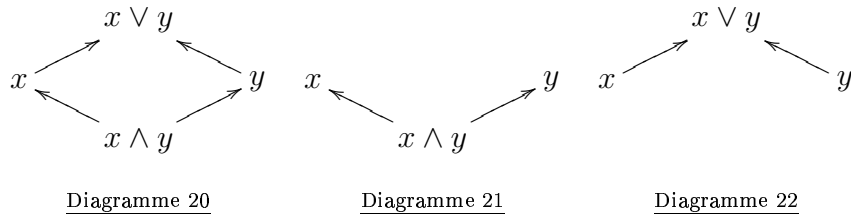
Un treillis local est une abstraction de la notion de famille des ouverts d'un espace topologique, de plus amples détails sont disponibles dans [11], [53], [72] ou [73]. En conclusion, lorsque  $\mathcal{C}$  est une catégorie géométrique, la collection de ses systèmes de Yoneda s'apparente à une topologie, d'où la terminologie de la définition IV.3.15, sachant que l'expression "catégorie topologique", qui pouvait sembler plus appropriée, a déjà un sens formel en théorie des catégories : voir [10]. On va maintenant se focaliser sur le cas des petites catégories sans boucle.

#### IV.3.24 THÉORÈME (STRUCTURE D'UNE $\Sigma$ -COMPOSANTE)

Soit une catégorie sans boucles  $\mathcal{C}$  et  $\Sigma$  un système de Yoneda sur  $\mathcal{C}$ . Soit  $X$  une  $\Sigma$ -composante de  $\mathcal{C}$ , on note  $\mathcal{X}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les élément de  $X$ . Les propriétés suivantes sont alors satisfaites :

1. la catégorie  $\mathcal{X}$  est isomorphe à l'ensemble ordonné  $(X, \sqsubseteq)$ , vu comme une petite catégorie, où pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $X$ ,  $x \sqsubseteq y$  signifie que  $\mathcal{C}[x, y]$  n'est pas vide.
2. L'ensemble ordonné  $(X, \sqsubseteq)$  est un treillis au sens où toute paire  $\{x, y\}$  d'éléments de  $X$  possède une borne inférieure et une borne supérieure dans  $(X, \sqsubseteq)$  respectivement notées  $x \wedge y$  et  $x \vee y$ .

De plus, si deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$  sont dans la même  $\Sigma$ -composante, alors le diagramme 20 est à la fois la somme amalgamée et le produit fibré (dans  $\mathcal{C}$ ) des diagrammes 21 et 22, en outre toutes les flèches qui apparaissent dans les trois diagrammes ci-dessous appartiennent à  $\Sigma$ .



PREUVE. La réflexivité et la transitivité de la relation  $\sqsubseteq$  sont immédiates, son antisymétrie découle du fait que  $\mathcal{C}$  soit sans boucle, en effet, si  $x$  et  $y$  sont distincts, l'un des deux ensembles  $\mathcal{C}[x, y]$  et  $\mathcal{C}[y, x]$  est vide. Notons  $\mathcal{X}'$  la catégorie induite par  $(X, \sqsubseteq)$ , c'est-à-dire celle dont la collection des objets est  $X$  et telle que pour deux éléments  $x$  et  $y$  de  $X$ , l'ensemble  $\mathcal{X}'[x, y]$  est un singleton si  $x \sqsubseteq y$  et vide dans le cas contraire. Par définition de la relation  $\sqsubseteq$ , on a alors un foncteur de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}'$  dont la partie objet est l'application identité de  $X$  dans  $X$  et dont la partie morphisme envoie tout élément de  $\mathcal{X}[x, y]$  sur l'unique élément de  $\mathcal{X}'[x, y]$ . Pour conclure que ce foncteur est un isomorphisme, il suffit de vérifier que  $\mathcal{X}[x, y]$ , c'est-à-dire  $\mathcal{C}[x, y]$ , soit un singleton. Soit  $\gamma$  un élément de  $\mathcal{C}[x, y]$ , comme  $x$  et  $y$  sont dans la même  $\Sigma$ -composante, on a, d'après le lemme IV.3.9,

le diagramme 23 dans lequel les morphismes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  appartiennent à  $\Sigma$ . D'après la remarque IV.2.7, le diagramme 23 est commutatif, on déduit alors du lemme IV.3.16 que  $\gamma$  est un élément de  $\Sigma$  et donc, encore une fois comme conséquence de la remarque IV.2.7, que  $\mathcal{C}[x, y]$  est un singleton. On a montré au passage que tout morphisme de  $\mathcal{C}$  joignant deux objets d'une même  $\Sigma$ -composante est dans  $\Sigma$ . Montrons maintenant que  $(X, \sqsubseteq)$  est un treillis. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments d'une même  $\Sigma$ -composante. D'après le lemme IV.3.9 on a en particulier le diagramme 24 qui d'après la remarque IV.3.8, admet un produit fibré dans  $\mathcal{C}$  donné par le diagramme 25 avec  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$  appartenant à  $\Sigma$ . En fait  $d = x \wedge y$ , en effet, il est déjà clair que  $d$  appartient à la même  $\Sigma$ -composante que  $x$  et  $y$  et que  $d$  est un minorant de  $\{x, y\}$ . Supposons maintenant que  $d'$  soit un élément de la  $\Sigma$ -composante  $X$  qui minore  $\{x, y\}$ , d'après ce que l'on a déjà prouvé et l'ordre que l'on a mis sur  $X$ , on a deux morphismes  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\Sigma$  respectivement de  $d'$  vers  $x$  et de  $d'$  vers  $y$ . Comme  $(X, \sqsubseteq)$  est un ensemble ordonné, le diagramme 26 est commutatif.

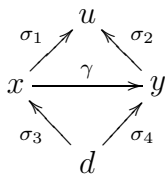


Diagramme 23

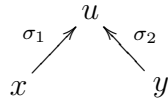


Diagramme 24

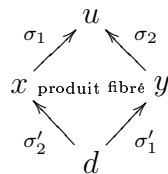


Diagramme 25

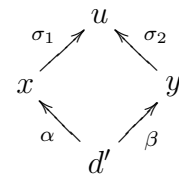


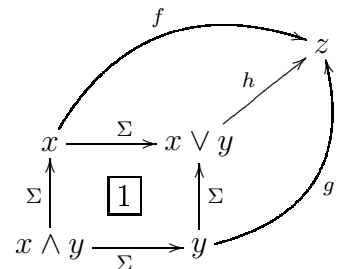
Diagramme 26

Par la propriété universelle des produits fibrés, on a un unique morphisme de  $\mathcal{C}$  (qui encore une fois d'après ce que l'on a déjà prouvé est un élément de  $\Sigma$ ) de  $d'$  vers  $d$ , autrement dit  $d' \sqsubseteq d$  et  $d$  est bien le plus grand minorant de  $\{x, y\}$ . On montre de façon analogue l'existence de  $x \vee y$ . Par construction même, les objets  $x \wedge y$  et  $x \vee y$  de  $\mathcal{C}$  sont respectivement le produit fibré et la somme amalgamée que l'on avait annoncés.  $\square$

#### IV.3.25 COROLLAIRE

Soit une catégorie sans boucles  $\mathcal{C}$  et  $\Sigma$  un système de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ . La relation d'ordre  $\sqsubseteq$  définie dans le théorème IV.3.24 se prolonge à toutes la catégorie  $\mathcal{C}$  en posant  $x \sqsubseteq' y$  ssi l'ensemble  $\mathcal{C}[x, y]$  n'est pas vide. Si  $x$  et  $y$  appartiennent à la même  $\Sigma$ -composante, alors la borne supérieure de  $x$  et  $y$  donnée par le théorème IV.3.24 pour l'ordre  $\sqsubseteq$  est aussi la borne supérieure de  $x$  et  $y$  pour le prolongement  $\sqsubseteq'$ .

PREUVE. Tout d'abord, le théorème IV.3.24 nous donne la somme amalgamée  $\boxed{1}$ . Soit alors  $f \in \mathcal{C}[x, z]$ , comme  $\mathcal{C}[y, z] \neq \emptyset$  et que  $a \wedge b \xrightarrow{\Sigma} b$  est un morphisme inversible au sens de *Yoneda*, il existe un unique morphisme  $g \in \mathcal{C}[x, z]$  qui fasse commuter le contour du diagramme ci-contre. On applique alors la propriété universelle de la somme amalgamée pour obtenir un unique  $h \in \mathcal{C}[x \vee y, z]$  qui fasse commuter tout le diagramme. En particulier,  $\mathcal{C}[x \vee y, z] \neq \emptyset$ , c'est ce que l'on voulait démontrer.  $\blacksquare$



#### IV.3.26 DÉFINITION (CATÉGORIE DE COMPOSANTES D'UN ESPACE ORDONNÉ)

La catégorie de composantes d'un espace ordonné  $\vec{X}$  est par définition la catégorie de composantes de sa catégorie fondamentale  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ .

---

CATÉGORIE DE FRACTIONS ET QUOTIENT DE  $\mathcal{C} \in \text{LfCat}$   
SUR UN SYSTÈME DE MORPHISMES *Yoneda* INVERSIBLES

Ce chapitre est consacré au résultat qui donne sa “légitimité” aux notions de systèmes de *Yoneda* et de catégorie de composantes. L’objectif est la preuve du théorème suivant :

## V.0.27 THÉORÈME

Soit une catégorie sans boucle  $\mathcal{C}$  et un système de *Yoneda*  $\Sigma$  de  $\mathcal{C}$ , les catégories  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  et  $\mathcal{C}/\Sigma$  sont équivalentes. Plus précisément, l’équivalence de catégorie est donnée par le foncteur  $P_\Sigma : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}/\Sigma$  défini dans la proposition IV.1.6 comme le seul faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] & \\
 I_\Sigma \nearrow & & \searrow P_\Sigma \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{Q_\Sigma} & \mathcal{C}/\Sigma
 \end{array}$$

On peut alors trouver un représentant  $J_\Sigma$  de l’adjoint de  $P_\Sigma$  tel que  $P_\Sigma \circ J_\Sigma = Id_{\mathcal{C}/\Sigma}$ . Enfin,  $P_\Sigma$  est une fibration (au sens de [10]) faisant de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  une catégorie fibrée de base  $\mathcal{C}/\Sigma$  et pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}/\Sigma$ , la fibre de  $P_\Sigma$  au-dessus de  $x$  n’est autre que la sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  dont les objets sont ceux de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  (i.e. ceux de  $\mathcal{C}$ ) isomorphe dans  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  à  $x$ .

Rappelons que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  est la catégorie de fractions de  $\mathcal{C}$  sur  $\Sigma$  (voir la proposition A.4.12, [9] ou [25]) et  $\mathcal{C}/\Sigma$  la catégorie quotient de  $\mathcal{C}$  sur  $\Sigma$  (voir proposition IV.1.4). La notion d’équivalence de catégorie est rappelée par la définition A.3.3, on la trouve aussi dans [9] ou [59].

## V.0.28 REMARQUE

Notez bien que les fibres des  $P_\Sigma$  sont des sous-catégories pleines de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ , ce qui est en général faux pour des catégories fibrées quelconques. Ce fait est clairement exprimé dans



[9] en ces termes :

*Obviously, the fibers of  $F$  are by no means full subcategories of  $\mathcal{F}$*

où  $F$  est une fibration de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{B}$ . En général, toute projection est une fibration et si l'on considère le cube dirigé plein, les fibres de la projection de la groupoïdification de la catégorie fondamentale du cube dirigé sur une de ses faces sont des sous-catégories pleines. Notons  $\overrightarrow{X}_1$  le cube troué dirigé et  $\overrightarrow{X}_2$  le cube dirigé plein et  $r$  le foncteur de groupoïdification, le fait que l'on ait dans le second cas des fibrations pleines et pas dans le premier est dû au fait que  $r(\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_1))[(0, 0, \frac{1}{2}), (1, 1, \frac{1}{2})]$  n'est pas un singleton alors que pour tout couple de points  $a, b$  de  $\overrightarrow{X}_2$ , l'ensemble  $r(\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_1))[a, b]$  en est un. On peut ainsi détecter des trous en trouvant des fibres de la projection qui ne sont pas des sous-catégories pleines. De plus, l'image de  $J_\Sigma$  donne une représentation de  $\mathcal{C}/\Sigma$  dans  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  faisant de  $P_\Sigma$  une fibration scindée, voir [10]. *Grosso modo*, on a une fibration scindée lorsque l'on a une représentation effective de la base de la fibration  $\mathcal{B}$  dans la catégorie fibrée  $\mathcal{F}$ .

#### V.0.29 REMARQUE (EN TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE CLASSIQUE)

Soit un groupoïde  $\mathcal{G}$  et  $\Sigma := Mo(\mathcal{G})$  son plus grand (et unique) système de morphismes *Yoneda* inversibles (voir la proposition IV.3.17), rappelons que  $\mathcal{G} = \mathcal{G}[\Sigma^{-1}]$  puisque  $\mathcal{G}$  est un groupoïde (voir la remarque A.4.13). Notons déjà que pour tout objet  $c$  de  $\mathcal{G}/\Sigma$  et pour tout objet  $x$  appartenant à la  $\Sigma$ -composante  $c$ , la fibre de  $P_\Sigma$  au-dessus de  $c$  est le groupe fondamental de  $\mathcal{G}$  au point  $x$  (voir la définition A.1.26). Considérons alors une fonction de choix  $J_\Sigma$  qui associe à chaque  $\Sigma$ -composante l'un de ses éléments.  $J_\Sigma$  induit un foncteur (encore noté  $J_\Sigma$ ) de la catégorie de composantes de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{G}$  puisque la première catégorie est discrète. On vérifie immédiatement que  $P_\Sigma$  est plein et  $J_\Sigma$  fidèle. On vérifie tout aussi facilement que l'image de  $P_\Sigma$  est  $\mathcal{G}/\Sigma$  et tout objet de  $\mathcal{G}$  est isomorphe (dans  $\mathcal{G}$ ) à un objet de l'image de  $J_\Sigma$ . Enfin, par construction de  $P_\Sigma$  et  $J_\Sigma$  on a  $P_\Sigma \circ J_\Sigma = Id_{\mathcal{G}/\Sigma}$ . Il vient alors la proposition suivante:

#### V.0.30 PROPOSITION

Soit un groupoïde  $\mathcal{G}$  et  $\Sigma$  son plus grand (et unique) système de morphismes *Yoneda* inversibles  $\Sigma$ . Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. Le groupoïde  $\mathcal{G}$  est un préordre.
2. Les foncteurs  $P_\Sigma$  et  $J_\Sigma$  sont des équivalences de catégories adjointes l'une à l'autre.
3. Le foncteur  $J_\Sigma$  est une équivalence de catégories.
4. Le foncteur  $P_\Sigma$  est une équivalence de catégories.
5. Le foncteur  $J_\Sigma$  est plein.
6. Le foncteur  $P_\Sigma$  est fidèle.
7. Il existe une transformation naturelle de  $Id_{\mathcal{G}}$  vers  $J_\Sigma \circ P_\Sigma$ .
8. Il existe une transformation naturelle de  $J_\Sigma \circ P_\Sigma$  vers  $Id_{\mathcal{G}}$ .
9. Les catégories  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}/\Sigma$  sont équivalentes.

PREUVE. Le 2<sup>ème</sup> point implique trivialement les 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup>. D'après la proposition A.3.4, les 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> points impliquent respectivement les 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup>. Réciproquement, si l'on sait que  $J_\Sigma$  est plein (c'est-à-dire si on suppose le 5<sup>ème</sup> point), il est facile, à l'aide de la proposition A.3.4, de vérifier que  $J_\Sigma$  est une équivalence de catégories. De même, à partir de la fidélité de  $P_\Sigma$  (6<sup>ème</sup> point) et de la proposition A.3.4, on vérifie que  $P_\Sigma$  est une équivalence de catégories. Supposons que  $J_\Sigma$  soit plein et montrons que  $\mathcal{G}$  est un préordre. Soient  $x, y \in Ob(\mathcal{G})$  et  $\alpha, \beta \in \mathcal{G}[x, y]$ , on a en particulier  $P_\Sigma(x) = P_\Sigma(y)$  que l'on note  $c$  et puisque  $\mathcal{G}/\Sigma$  est discrète,  $\mathcal{G}/\Sigma[c, c] = \{id_c\}$ . Puis comme  $J_\Sigma$  est plein,  $\mathcal{G}[J_\Sigma(c), J_\Sigma(c)] = \{id_{J_\Sigma(c)}\}$ , en particulier  $\beta^{-1} \circ \alpha = id_{J_\Sigma(c)}$  et donc  $\alpha = \beta$ . Le 5<sup>ème</sup> point implique donc le 1<sup>er</sup>.

Supposons que  $P_\Sigma$  soit fidèle et montrons que  $\mathcal{G}$  est un préordre. Soient  $x, y \in Ob(\mathcal{G})$  et  $\alpha, \beta \in \mathcal{G}[x, y]$ , on a en particulier  $P_\Sigma(x) = P_\Sigma(y)$  que l'on note  $c$  et puisque  $\mathcal{G}/\Sigma$  est discrète,  $\mathcal{G}/\Sigma[c, c] = \{id_c\}$ . Donc  $P_\Sigma(\alpha) = P_\Sigma(\beta) = id_c$  et comme  $P_\Sigma$  est fidèle, on a  $\alpha = \beta$ . Le 6<sup>ème</sup> point implique donc le 1<sup>er</sup>.

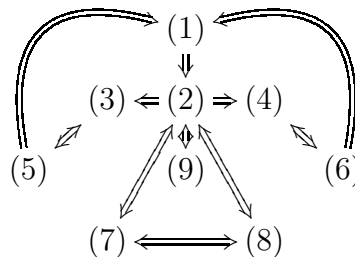
Supposons que  $\mathcal{G}$  soit un préordre. Pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{G}$ , par construction de  $P_\Sigma$  et  $J_\Sigma$ ,  $\mathcal{G}[x, J_\Sigma \circ P_\Sigma(x)] \neq \emptyset$  et comme  $\mathcal{G}$  est un préordre, posons  $\eta_x$  l'unique élément de  $\mathcal{G}[x, J_\Sigma \circ P_\Sigma(x)] \neq \emptyset$ . Puisque  $\mathcal{G}$  est un préordre, tous les carrés de  $\mathcal{G}$  sont commutatifs donc  $\eta$  est une transformation naturelle et comme  $\mathcal{G}$  est un groupoïde, c'est un isomorphisme de  $Id_{\mathcal{G}}$  vers  $J_\Sigma \circ P_\Sigma$ . En outre, puisque  $P_\Sigma \circ J_\Sigma = Id_{\mathcal{G}/\Sigma}$  on a aussi un isomorphisme de  $P_\Sigma \circ J_\Sigma$  vers  $Id_{\mathcal{G}/\Sigma}$ . D'où le 2<sup>ème</sup> point.

Les 7<sup>ème</sup> et 8<sup>ème</sup> points sont équivalents car  $\mathcal{G}$  est un groupoïde, donc toute transformation naturelle d'un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{G}$  vers un foncteur  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{G}$  tous deux à valeurs dans le groupoïde  $\mathcal{G}$  est nécessairement un isomorphisme (de  $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ ).

Le 7<sup>ème</sup> point implique le 2<sup>ème</sup> puisqu'une telle transformation naturelle est, comme on l'a déjà remarqué, nécessairement un isomorphisme et qu'en outre, on a  $P_\Sigma \circ J_\Sigma = Id_{\mathcal{G}/\Sigma}$  (on se réfère à la définition A.3.3). Réciproquement et selon la définition A.3.3, le 2<sup>ème</sup> point implique les 7<sup>ème</sup> et 8<sup>ème</sup>.

Le 2<sup>ème</sup> point implique trivialement le 9<sup>ème</sup>, réciproquement, soit  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\Sigma$  une équivalence de catégorie. En particulier, il faut que tout objet de  $\mathcal{G}/\Sigma$  soit isomorphe à un objet de l'image de  $F$  mais comme  $\mathcal{G}/\Sigma$  est discrète, cela signifie que  $Ob(F)$  doit être surjective. En outre, comme  $F$  est un foncteur et que  $\mathcal{G}/\Sigma$  est discrète, pour toute paire d'objets  $\{x, y\}$  si  $\mathcal{G}[x, y] \neq \emptyset$ , alors  $F(x) = F(y)$ . Et si  $F(x) = F(y)$ , alors puisque  $F$  est une équivalence de catégorie,  $\mathcal{G}[x, y]$  et  $\mathcal{G}/\Sigma[F(x), F(y)]$  doivent en particulier être en bijection et donc  $\mathcal{G}[x, y] \neq \emptyset$ . Il s'ensuit qu'il existe une permutation  $\phi$  de la famille des composantes connexes de  $\mathcal{G}$  qui induit un isomorphisme de  $\mathcal{G}/\Sigma$  sur  $\mathcal{G}/\Sigma$  et tel que  $P_\Sigma = \phi \circ F$ . D'où le fait que  $P_\Sigma$  soit une équivalence de catégories. ■

On a prouvé



Enfin

V.0.31 PROPOSITION

Soit un groupoïde  $\mathcal{G}$  et son plus grand (et unique) système de morphismes *Yoneda* inversibles  $\Sigma$ ,  $P_\Sigma$  est une fibration.

PREUVE. Prouvons tout d'abord que tout morphisme de  $\mathcal{G}$  est cartésien au-dessus de son image par  $P_\Sigma$ . Soit  $f \in \mathcal{G}[y, x]$ , on pose  $\alpha := P_\Sigma(f)$  et  $c := P_\Sigma(x)$ . Supposons que  $g \in \mathcal{G}[z, x]$  et  $\beta \in \mathcal{G}/\Sigma$  tel que  $P_\Sigma(g) = \beta \circ \alpha$ , par construction de  $P_\Sigma$  on a  $P_\Sigma(g) = P_\Sigma(\alpha) = id_c$  et donc nécessairement  $P_\Sigma(\beta) = id_c$ . En posant  $h := f^{-1} \circ g$ , on a  $P_\Sigma(h) = \beta = id_c$  et c'est le seul puisque  $f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$  ( $f$  est un isomorphisme car  $\mathcal{G}$  est un groupoïde). Pour que  $P_\Sigma$  soit une fibration, il (faut et il) suffit donc que tout morphisme de  $\mathcal{G}/\Sigma$  soit dans l'image de  $P_\Sigma$ , ce qui est découle de  $P_\Sigma \circ J_\Sigma = Id_{\mathcal{G}/\Sigma}$ . ■

Supposons maintenant que  $\mathcal{G}$  soit le groupoïde fondamental d'un espace topologique  $X$ . La proposition V.0.30 peut être relue ainsi:

V.0.32 PROPOSITION

Soit un espace topologique  $X$ ,  $\pi_1(X)$  son groupoïde fondamental et  $\Sigma$  le plus grand système *Yoneda* de  $\pi_1(X)$ . En posant  $\mathcal{G} := \pi_1(X)$  et en définissant  $P_\Sigma$  et  $J_\Sigma$  comme dans la proposition V.0.30, les assertions suivantes sont équivalentes:

1. L'espace topologique  $X$  est simplement connexe.
2. Les foncteurs  $P_\Sigma$  et  $J_\Sigma$  sont des équivalences de catégories adjointes l'une à l'autre.
3. Le foncteur  $J_\Sigma$  est une équivalence de catégories.
4. Le foncteur  $P_\Sigma$  est une équivalence de catégories.
5. Le foncteur  $J_\Sigma$  est plein.
6. Le foncteur  $P_\Sigma$  est fidèle.
7. Le groupoïde  $\pi_1(X)$  est équivalent à l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$  vu comme une petite catégorie discrète.

PREUVE. On se réfère au lemme B.2.11 pour faire le lien entre la simple connexité de  $X$  et le fait que  $\pi_1(X)$  soit un préordre. ■

Revenons au théorème V.0.27. Le reste de ce chapitre est purement technique et exploite à fond les hypothèses faites sur  $\mathcal{C}$  et  $\Sigma$ . L'intérêt du théorème V.0.27 est théorique, il affirme en particulier qu'il n'y a pas de perte d'information lorsque l'on remplace une catégorie sans boucle par sa catégorie de composantes. Notons cependant bien que son application ne nécessite pas que  $\Sigma$  soit le plus grand système de morphismes *Yoneda* inversibles mais seulement un élément de  $\mathcal{L}_\mathcal{C}$  (voir théorème IV.3.23). Sur des exemples concrets, c'est-à-dire les représentations  $\vec{X}$  de programmes PV dans CPoSpc, on peut d'une part vérifier que le passage à la catégorie de composantes réduit la taille de la catégorie fondamentale de  $\vec{X}$  et d'autre part que le théorème V.0.27 confirme que cette réduction a préservé les propriétés intéressantes de la catégorie fondamentale de  $\vec{X}$ .

A première vue, puisque la construction de la catégorie de fractions consiste à inverser formellement les éléments de  $\Sigma$  alors que la construction de la catégorie de quotient transforme les éléments de  $\Sigma$  en identités, on pourrait imaginer que l'équivalence annoncée par le théorème V.0.27 est toujours vraie, c'est-à-dire que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  et  $\mathcal{C}/\Sigma$  sont toujours équivalentes. Puisque la première construction engendre des  $\Sigma$ -composantes et que la seconde consiste à ne garder qu'un objet de chaque  $\Sigma$ -composante, il semblerait que la seconde catégorie soit une sorte de " $\Sigma$ -squelette" de la première. Les exemples suivants montrent que c'est faux, prenons tout d'abord la catégorie  $\mathcal{C}$  suivante

$$\mathcal{C} := \text{catégorie libre engendrée par } \left( \begin{array}{c} \alpha \circlearrowleft x \xrightarrow{\sigma} y \circlearrowright \beta \end{array} \right) \\ \text{avec } \Sigma := \{\alpha, \beta\}$$

Immédiatement on voit que  $\mathcal{C}/\Sigma = \longrightarrow$  alors que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  a deux objets  $x, y$  et que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][x, x]$  et  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][y, y]$  sont tous deux isomorphes au groupe libre engendré par un singleton.  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  et  $\mathcal{C}/\Sigma$  sont clairement squelettiques et pas isomorphes donc pas équivalentes non plus (voir proposition A.4.8). Cependant, on constate que  $\mathcal{C}$  possède des boucles, qu'aucun des éléments de  $\Sigma$  n'est inversible au sens de *Yoneda* et que  $\Sigma$  ne satisfait pas le 2<sup>ème</sup> point de la définition IV.3.5. L'exemple suivant est plus subtil, en effet, on peut voir que  $\mathcal{C}$  est sans boucle et que  $\Sigma$  satisfait les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> points de la définition IV.3.5.

$$\mathcal{C} := \left( \begin{array}{ccc} & a & \xrightarrow{f} & b & \\ \sigma_1 \curvearrowright & & & & \sigma_2 \curvearrowright \\ x & \xrightarrow{\tau_1} & & & y \\ & \searrow g & & & \nearrow \tau_2 \\ & & h & & \end{array} \right) \text{ avec les relations } \begin{cases} g \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ f \\ h \circ \tau_1 = \tau_2 \circ f \end{cases} \\ \text{et } \Sigma := \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2\}$$

Il est alors facile de voir que  $\mathcal{C}/\Sigma := \longrightarrow$  en effet, on a

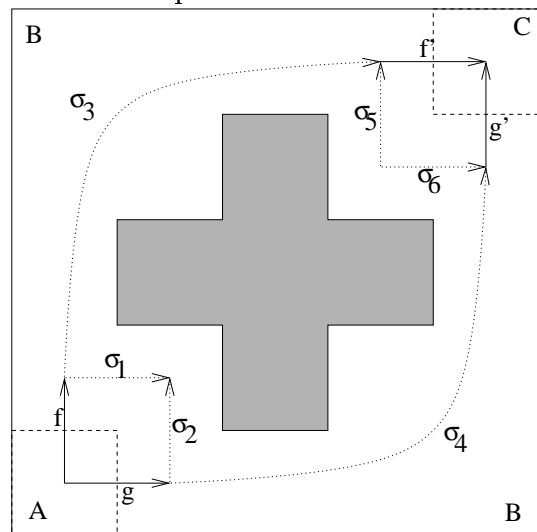
$$\begin{aligned} (g) &\sim^1 (g, id_{src(g)}) \\ (g, id_{src(g)}) &\sim^1 (g, \sigma_1) \\ (g, \sigma_1) &\sim^1 (g \circ \sigma_1) \\ (g \circ \sigma_1) &= (\sigma_2 \circ f) \\ (\sigma_2 \circ f) &\sim^1 (\sigma_2, f) \\ (\sigma_2, f) &\sim^1 (id_{tgt(f)}, f) \\ (id_{tgt(f)}, f) &\sim^1 (id_{tgt(f)} \circ f) \\ (id_{tgt(f)} \circ f) &= (f) \end{aligned}$$

Ainsi on a  $(f) \sim_m (g)$  et de même en remplaçant  $\sigma$  par  $\tau$  dans ce qui précède, on obtient  $(f) \sim_m (h)$ . Donc  $\mathcal{C}/\Sigma$  est squelettique et pour que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  et  $\mathcal{C}/\Sigma$  soient équivalentes, la condition nécessaire et suffisante est que le squelette de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  soit (à isomorphisme près)  $\mathcal{C}/\Sigma$  (voir proposition A.4.8). Or le squelette de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  a exactement deux objets que

l'on notons les encore  $x$  et  $y$ , enfin  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][x, x]$  et  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][y, y]$  sont isomorphes au groupe libre engendré par un ensemble à deux éléments, dans le cas présent, ces ensembles sont respectivement  $\{\tau_1 \circ \sigma_1^{-1}, \sigma_1 \circ \tau_1^{-1}\}$  et  $\{\sigma_2 \circ \tau_2^{-1}, \tau_2 \circ \sigma_2^{-1}\}$ .  $\mathcal{C}/\Sigma$  est squelettique mais pas isomorphe au squelette de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ .

Le dernier cas d'étude est celui du drapeau suisse, c'est le plus intéressant puisqu'il implique la catégorie fondamentale d'un espace ordonné qui représente un programme PV, montrant ainsi que le théorème V.0.27 peut être mis en défaut sur des exemples "concrets". Posons donc  $\vec{X}$  pour désigner l'espace ordonné du drapeau suisse dirigé,  $\mathcal{C} = \vec{\pi}_1(\vec{X})$  et  $\Sigma$  la collection de tous les morphismes inversibles au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ . Notons d'ores et déjà que  $\Sigma$  ne satisfait que les 1<sup>er</sup> et 3<sup>ème</sup> points de la définition IV.3.5.

Sur la figure de droite on a représenté le drapeau suisse dirigé partitionné en trois  $\Sigma$ -composantes respectivement notées  $A := [0, \frac{1}{5}] \times [0, \frac{1}{5}]$ ,  $C := [\frac{4}{5}, 1] \times [\frac{4}{5}, 1]$  et  $B$  tout le reste de l'espace ordonné  $\vec{X}$ . On peut déjà remarquer que la  $\Sigma$ -composante  $B$  "encerclé" le trou de  $\vec{X}$ . Les éléments de  $\Sigma$  sont alors les morphismes de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$  dont les extrémités sont dans la même  $\Sigma$ -composante. On note en particulier que ces morphismes représentent des chemins dirigés sur  $\vec{X}$  dont l'image est incluse dans une seule  $\Sigma$ -composante, il en résulte que  $\Sigma$  est pure dans  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ .



Effectuons quelques calculs. Tout d'abord on montre que dans  $\mathcal{C}/\Sigma$  on a  $(f', \sigma_3, f) \sim^1 (g', \sigma_4, g)$ . La relation  $\sim^1$  est décrite dans la proposition IV.1.3 et on note  $(\sim_o, \sim_m)$  la congruence généralisée engendrée par  $\Sigma$ . On a déjà  $(f) \sim_m (g)$  en effet

$$\begin{aligned}
(f) &\sim^1 (id_{tgt(f)}, f) \\
(id_{tgt(f)}, f) &\sim^1 (\sigma_1, f) \\
(\sigma_1, f) &\sim^1 (\sigma_1 \circ f) \\
(\sigma_1 \circ f) &= (\sigma_2 \circ g) \quad \text{voir la figure ci-dessus} \\
(\sigma_2 \circ g) &\sim^1 (\sigma_2, g) \\
(\sigma_2, g) &\sim^1 (id_{tgt(g)}, g) \\
(id_{tgt(g)}, g) &\sim^1 (g)
\end{aligned}$$

De la même façon on montre que  $(f') \sim_m (g')$ . Puis

$$\begin{aligned}
(\sigma_3) &\sim^1 (id_{src(\sigma_3)}) \\
(id_{src(\sigma_3)}) &\sim^1 (\sigma_1) \quad \text{car } src(\sigma_3) = src(\sigma_1) \\
(\sigma_1) &\sim^1 (id_{tgt(\sigma_1)}) \\
(id_{tgt(\sigma_1)}) &\sim^1 (\sigma_2) \quad \text{car } tgt(\sigma_1) = tgt(\sigma_2) \\
(\sigma_2) &\sim^1 (id_{src(\sigma_2)}) \\
(id_{src(\sigma_2)}) &\sim^1 (\sigma_4) \quad \text{car } src(\sigma_2) = src(\sigma_4)
\end{aligned}$$

donc  $(\sigma_3) \sim_m (\sigma_5)$  et puisque  $(\sim_o, \sim_m)$  est une congruence généralisée on a  $(f', \sigma_3, f) \sim^1 (g', \sigma_4, g)$ . Donc  $\mathcal{C}/\Sigma[A, C]$  est un singleton. De manière analogue on vérifie que  $\mathcal{C}/\Sigma[A, B]$

et  $\mathcal{C}/\Sigma[B, C]$  sont également des singletons. D'où la conclusion

$$\mathcal{C}/\Sigma \text{ est la catégorie libre engendrée par } A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

Par ailleurs, il est facile de voir que le squelette de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  possède des boucles et ne peut donc pas être isomorphe à  $\mathcal{C}/\Sigma$ . Pour être précis, le squelette de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  est la catégorie

engendrée par  $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\gamma} C$  avec  $\beta \circ \beta^{-1} = \beta^{-1} \circ \beta = id_B$ .

$$\begin{array}{c} \beta \\ \circlearrowleft \\ \beta^{-1} \end{array}$$

La preuve du théorème V.0.27 pourra paraître assez compliquée pour un résultat qui semble très naturel. Les trois contre-exemples exposés précédemment ont pour but de faire ressortir les difficultés que ce théorème dissimule et de convaincre le lecteur que les étapes parfois laborieuses de la preuve ci-dessous sont probablement inévitables. Notons tout d'abord que d'après la proposition V.0.30, on ne peut pas espérer généraliser le théorème V.0.27 à n'importe quelle catégorie géométrique  $\mathcal{C}$ . En effet, il suffit pour mettre cette généralisation en défaut de considérer un groupoïde qui ne soit pas un préordre. En particulier n'importe quel groupe non trivial fournit un contre-exemple.

En vertu de la remarque IV.2.7, si  $\mathcal{C}[x, y] \cap \Sigma \neq \emptyset$ , alors  $\mathcal{C}[x, y]$  est un singleton. On notera alors  $x \xrightarrow{\Sigma} y$  pour désigner le seul morphisme de  $\mathcal{C}$  de  $x$  vers  $y$  sachant que c'est un élément du système de morphismes *Yoneda* inversibles  $\Sigma$ .

## V.1 PREMIÈRE RÉDUCTION DU PROBLÈME

Vérifions tout d'abord qu'avec la notion d'équivalence fibrée introduite dans la proposition A.3.5, les conclusions du théorème V.0.27 se reformulent en une phrase :

$$\boxed{P_\Sigma \text{ est une } \underline{\text{équivalence fibrée}}}$$

Si les conclusions du théorème V.0.27 sont satisfaites, alors  $P_\Sigma$  est en particulier une équivalence de catégories et puisque  $P_\Sigma \circ J_\Sigma = Id_{\mathcal{C}/\Sigma}$ , c'est une équivalence fibrée. Réciproquement, si  $P_\Sigma$  est une équivalence fibrée, alors la proposition A.3.5 nous donne  $J_\Sigma$  et la proposition A.3.9 affirme que  $P_\Sigma$  est une équivalence de catégorie. On a donc réduit le problème à prouver que  $P_\Sigma$  est une équivalence fibrée, c'est-à-dire que l'image de  $P_\Sigma$  est  $\mathcal{C}/\Sigma$ , ce qui découle immédiatement de la construction de  $P_\Sigma$ , et que  $\boxed{P_\Sigma \text{ est fidèle}}$ . C'est ce dernier point qui va nous occuper pour le reste de cette partie.

## V.2 UNE AUTRE DESCRIPTION DE $\mathcal{C}/\Sigma$ ET DE $\sim$

A partir de maintenant,  $\mathcal{C}$  désigne une petite catégorie sans boucle tandis que  $\Sigma$  est un système de *Yoneda* sur  $\mathcal{C}$ ; par ailleurs, le couple  $(\sim_o, \sim_m)$  est la congruence généralisée décrite dans la proposition IV.1.3.

La première étape de la preuve consiste à donner une construction alternative de  $\mathcal{C}/\Sigma$  et de  $\sim_o$  la congruence généralisée engendrée par  $\Sigma$ . Cette "reformulation" est un premier pas vers une caractérisation "manipulable" des suites  $\Sigma$ -composables (proposition IV.1.3)

qui sont  $\sim_m$ -équivalentes. Pour prouver que la présentation que l'on va proposer décrit la catégorie  $\mathcal{C}/\Sigma$ , on aura besoin du fait que  $\mathcal{C}$  est sans boucle et que  $\Sigma$  est un système de morphismes *Yoneda* inversibles.

On introduit quelques nouvelles notations

### V.2.1 DÉFINITION

Etant donnée une suite  $\Sigma$ -composable  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0)$  ayant au moins un terme et dont aucun élément n'est dans  $\Sigma$ , c'est-à-dire une suite  $\Sigma$ -composable normalisée, on écrit

$$(\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, \gamma_k, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0) \sim_m^1 (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+1}, \gamma'_k, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0)$$

lorsqu'il existe un indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$  et un morphisme  $\gamma'_k$  de  $\mathcal{C}$  tels que le diagramme 27 commute,

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\gamma_k} & y & \xrightarrow{\Sigma} & y \vee y' \\ \Sigma \uparrow & & & & \uparrow \Sigma \\ x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' & \xrightarrow{\gamma'_k} & y' \end{array}$$

Diagramme 27

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\alpha_k} & y & \xrightarrow{\Sigma} & y \vee x' \\ & & \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\ & & y \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' \xrightarrow{\alpha_{k+1}} y' \end{array}$$

Diagramme 28

ou bien  $(\gamma_n, \dots, \gamma_{k+2}, \gamma_{k+1}, \gamma_k, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0) \sim_m^1 (\gamma_n, \dots, \gamma_{k+2}, \gamma_{k+1} \circ \gamma_k, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_0)$  lorsqu'il existe un indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$  tel que  $t(\gamma_k) = s(\gamma_{k+1})$ . Les notations  $x \wedge x'$  et  $y \vee y'$  font référence au théorème IV.3.24. Notons déjà que la pureté de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{C}$  et sa stabilité par composition font que dans le premier cas comme dans le second, si l'une des deux suites se trouvant de part et d'autre de  $\sim_m^1$  est  $\Sigma$ -composable normalisée, alors l'autre l'est également.

On note alors  $\sim'_m$  la congruence engendrée par  $\sim_m^1$  sur l'ensemble des suites  $\Sigma$ -composables normalisées, c'est-à-dire qu'étant données deux telles suites, par exemple  $\vec{\gamma}_0$  et  $\vec{\gamma}_N$ , on note  $\vec{\gamma}_0 \sim'_m \vec{\gamma}_N$  si et seulement s'il existe une suite de suites  $\Sigma$ -composables normalisées notée  $(\vec{\gamma}_0, \dots, \vec{\gamma}_K, \dots, \vec{\gamma}_N)$  telle que pour tout indice  $K$  de  $\{0, \dots, N-1\}$ , on a  $\vec{\gamma}_K \sim_m^1 \vec{\gamma}_{K+1}$ . Une telle suite  $(\vec{\gamma}_0, \dots, \vec{\gamma}_K, \dots, \vec{\gamma}_N)$  est appelée suite de  $\sim_m^1$ -transformations. Etant donnée une suite  $\Sigma$ -composable  $\vec{\gamma}$  dont au moins un élément n'est pas dans  $\Sigma$ , on note  $\vec{\gamma}'$  la sous-suite de  $\vec{\gamma}$  obtenue en ne gardant que les éléments de  $\vec{\gamma}$  qui ne sont pas dans  $\Sigma$ .

### V.2.2 LEMME

Soient  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  deux suites  $\Sigma$ -composables qui possèdent au moins un élément qui n'est pas dans  $\Sigma$ , alors les assertions suivantes sont satisfaites :

1. la suite  $\vec{\alpha}'$  est  $\Sigma$ -composable normalisée;
2. on a  $\vec{\alpha} \sim_m \vec{\alpha}'$ ;
3. si  $\vec{\gamma} \sim_m^1 \vec{\delta}$ , alors  $\vec{\gamma}' \sim_m^1 \vec{\delta}'$  ou  $\vec{\gamma}' = \vec{\delta}'$  et enfin
4. si  $\vec{\gamma}' \sim_m^1 \vec{\delta}'$ , alors  $\vec{\gamma} \sim_m \vec{\delta}$ .

En particulier on a  $\vec{\alpha} \sim_m \vec{\beta}$  si et seulement si  $\vec{\alpha}' \sim_m \vec{\beta}'$ .

### V.2.3 REMARQUE

Si  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  sont deux suites  $\Sigma$ -composables  $\sim_m$ -équivalentes dont l'une possède un élément qui n'est pas dans  $\Sigma$ , alors l'autre possède également un élément qui n'est pas dans  $\Sigma$  car une suite  $\Sigma$ -composable  $\vec{\gamma}$  est  $\sim_m$ -équivalente à une suite ayant pour seul élément une identité si et seulement si tous ses éléments sont dans  $\Sigma$ . Une récurrence très simple permet en effet de vérifier que si tous les éléments de  $\vec{\gamma}$  sont dans  $\Sigma$  et que  $\vec{\gamma} \sim_m \vec{\delta}$ , alors tous les éléments de  $\vec{\delta}$  sont également dans  $\Sigma$  : il faut traiter tous les cas possibles qu'offre la relation  $\sim_m^1$ . Supposons que l'on ait une transformation  $(\dots, \gamma_{k+1} \circ \gamma_k, \dots) \sim_m^1 (\dots, \gamma_{k+1}, \gamma_k, \dots)$ , alors :

1. si on suppose que la composée  $\gamma_{k+1} \circ \gamma_k$  appartient à  $\Sigma$ , c'est-à-dire que  $\vec{\gamma}$  est le membre de gauche, alors par pureté de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{C}$ , les morphismes  $\gamma_{k+1}$  et  $\gamma_k$  appartiennent à  $\Sigma$  et donc tous les éléments de  $\vec{\delta}$ , le membre de droite, sont encore dans  $\Sigma$ ,
2. si on suppose que  $\gamma_{k+1}$  et  $\gamma_k$  appartiennent à  $\Sigma$ , c'est-à-dire que  $\vec{\gamma}$  est le membre de droite, alors puisque  $\Sigma$  est stable par composition, le morphisme  $\gamma_{k+1} \circ \gamma_k$  est dans  $\Sigma$  et donc tous les éléments de  $\vec{\delta}$ , le membre de gauche, sont encore dans  $\Sigma$ .

Enfin, le cas où l'on effectue la transformation qui suit sous l'hypothèse que  $\gamma_k$  appartienne à  $\Sigma$  est trivial.

$$(\dots, \gamma_k, \dots) \sim_m^1 (\dots, id_{s(\gamma_k)}, \dots) \text{ ou } (\dots, \gamma_k, \dots) \sim_m^1 (\dots, id_{t(\gamma_k)}, \dots)$$

Donnons maintenant une démonstration du lemme V.2.2 :

PREUVE. Le premier point et le second sont faciles à vérifier, tout d'abord, puisque  $\vec{\alpha}$  possède au moins un élément qui n'est pas dans  $\Sigma$ , la suite  $\vec{\alpha}'$  n'est pas vide. Il faut encore vérifier que  $\vec{\alpha}'$  est  $\Sigma$ -composable. Pour ce faire, notons que le fait de supprimer un élément de  $\vec{\alpha}$  qui appartient à  $\Sigma$  revient à effectuer plusieurs transformations  $\sim_m^1$ . Plus précisément supposons que  $\alpha_k$  appartient à  $\Sigma$ , comme le suggère la commutativité du diagramme 28 où le carré commutatif central provient du théorème IV.3.24, on a  $\alpha_k \sim_m id_{s(\alpha_{k+1})}$ . D'où il vient

$$(\dots, \alpha_{k+1}, \alpha_k, \dots) \sim_m^1 (\dots, \alpha_{k+1}, id_{s(\alpha_{k+1})}, \dots) \sim_m^1 (\dots, \alpha_{k+1} \circ id_{s(\alpha_{k+1})}, \dots) \sim_m^1 (\dots, \alpha_{k+1}, \dots)$$

En conclusion  $\vec{\alpha}'$  est  $\Sigma$ -composable puisque chaque transformation  $\sim_m^1$  préserve la  $\Sigma$ -composabilité. On a aussi prouvé dans la foulée que  $\vec{\alpha} \sim_m \vec{\alpha}'$ . Passons au troisième point. Supposons tout d'abord que  $\vec{\gamma} \sim_m^1 \vec{\delta}$ . On a alors une disjonction de cas en fonction de la nature de la transformation  $\sim_m^1$  qui permet de passer de  $\vec{\gamma}$  à  $\vec{\delta}$ . Supposons que l'on ait

$$\vec{\beta} \cdot (\gamma_{k+1}, \gamma_k) \cdot \vec{\alpha} \sim_m^1 \vec{\beta} \cdot (\gamma_{k+1} \circ \gamma_k) \cdot \vec{\alpha}$$

où l'un des deux membres est  $\vec{\gamma}$  et l'autre  $\vec{\delta}$ . Si la composée  $\gamma_{k+1} \circ \gamma_k$  est dans  $\Sigma$ , alors la pureté de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{C}$  implique que les deux morphismes  $\gamma_{k+1}$  et  $\gamma_k$  sont encore dans  $\Sigma$  et on a  $\vec{\gamma} = \vec{\delta} = \vec{\beta}' \cdot \vec{\alpha}'$ . Si la composée  $\gamma_{k+1} \circ \gamma_k$  n'est pas dans  $\Sigma$ , alors d'après la stabilité par composition de  $\Sigma$ , au moins un des deux morphismes  $\gamma_{k+1}$  et  $\gamma_k$  n'est pas dans  $\Sigma$ . Si aucun des deux n'y est, alors l'une des deux suites  $\vec{\gamma}'$  et  $\vec{\delta}'$  est  $\vec{\beta}' \cdot (\gamma_{k+1}, \gamma_k) \cdot \vec{\alpha}'$  tandis



que l'autre est  $\vec{\beta}' \cdot (\gamma_{k+1} \circ \gamma_k) \cdot \vec{\alpha}'$  et on a bien  $\vec{\gamma}' \sim_m^1 \vec{\delta}'$  d'après la définition V.2.1. Si un seul des deux morphismes, disons  $\gamma_k$ , n'est pas dans  $\Sigma$ , alors l'une des deux suites  $\vec{\gamma}'$  et  $\vec{\delta}'$  est  $\vec{\beta}' \cdot (\gamma_k) \cdot \vec{\alpha}'$  tandis que l'autre est  $\vec{\beta}' \cdot (\gamma_{k+1} \circ \gamma_k) \cdot \vec{\alpha}'$  et on a bien  $\vec{\gamma}' \sim_m^1 \vec{\delta}'$  d'après le diagramme 29 et la définition V.2.1. Supposons maintenant que l'on ait

$$\vec{\beta} \cdot (\sigma) \cdot \vec{\alpha} \sim_m^1 \vec{\beta} \cdot (id_z) \cdot \vec{\alpha}$$

où l'un des deux membres est  $\vec{\gamma}'$  tandis que l'autre est  $\vec{\delta}'$ , où le morphisme  $\sigma$  appartient à  $\Sigma$  et où  $z$  est la source ou le but de  $\Sigma$ , alors  $\vec{\gamma}' = \vec{\delta}' = \vec{\beta}' \cdot \vec{\alpha}'$ . Vérifions le quatrième point : on suppose que  $\vec{\gamma}' \sim_m^1 \vec{\delta}'$  et on veut en déduire que  $\vec{\gamma}' \sim_m \vec{\delta}'$ . Il suffit pour cela de constater que si le diagramme 30 est commutatif, alors  $(\gamma_k) \sim_m (\delta_k)$  puis d'appliquer le fait que  $\sim$  soit une congruence généralisée.  $\square$

$$\begin{array}{ccc} y \xrightarrow{\gamma_{k+1}} z \xrightarrow{id_z} z = z \vee z & & x \xrightarrow{\gamma_k} y \xrightarrow{\Sigma} y \vee y' \\ \gamma_k \in \Sigma \uparrow & & \Sigma \uparrow \\ x = x \wedge y \xrightarrow{id_x} x \xrightarrow{\gamma_{k+1} \circ \gamma_k} z & & x \wedge x' \xrightarrow{\Sigma} x' \xrightarrow{\delta_k} y' \\ \text{Diagramme 29} & & \text{Diagramme 30} \end{array}$$

### V.3 QUELQUES RÉSULTATS À PROPOS DE $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$

Dans cette section, on profite du fait que  $\Sigma$ , d'après la remarque IV.3.6, admette un calcul de fractions à droite pour adopter la description de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  donnée par la proposition IV.3.3. On rappelle en particulier que la collection des objets de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  est celle de  $\mathcal{C}$ .

#### V.3.1 LEMME

Soit un morphisme  $f$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, y]$  et un objet  $z$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $y \sim_o z$  et  $\mathcal{C}[x, z]$  ne soit pas vide. Il existe alors un unique morphisme  $f'$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, y \wedge z]$  tel que le diagramme 31 commute.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ & \searrow f' & \uparrow \Sigma \\ & & y \wedge z \end{array}$$

Diagramme 31

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \xrightarrow{\sigma_1 \in \Sigma} y \vee z \\ & & \uparrow \sigma_2 \in \Sigma \\ & & z \end{array}$$

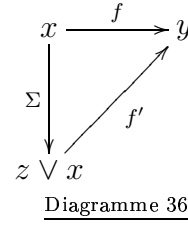
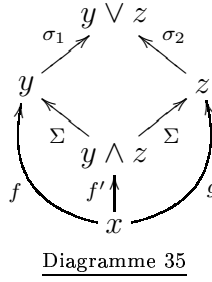
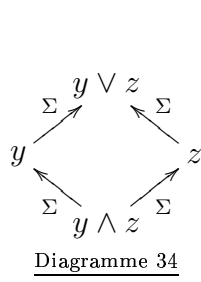
Diagramme 32

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \xrightarrow{\sigma_1 \in \Sigma} y \vee z \\ & \searrow g & \uparrow \sigma_2 \in \Sigma \\ & & z \end{array}$$

Diagramme 33

PREUVE. On a le diagramme 32 et puisque par hypothèse l'ensemble  $\mathcal{C}[x, z]$  n'est pas vide et qu'en tant qu'élément de  $\Sigma$ ,  $\sigma_2$  est un morphisme de *Yoneda*, il existe un unique morphisme  $g$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, z]$  et faisant commuter le diagramme 33. Or d'après le théorème IV.3.24, le diagramme 34 est un produit fibré. Donc il existe un unique morphisme  $f'$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, y \wedge z]$  tel que le diagramme 35 commute, d'où le résultat.

□



Au renversement du sens des flèches près, on montre de la même manière le lemme suivant :

### V.3.2 LEMME

Soit un morphisme  $f$  appartenant  $\mathcal{C}[x, y]$  et un objet  $z$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $x \sim_o z$  et  $\mathcal{C}[z, y]$  ne soit pas vide. Il existe alors un unique morphisme  $f'$  appartenant à  $\mathcal{C}[x \vee z, y]$  qui fasse commuter le diagramme 36.

A partir de maintenant et pour le reste de cet article,  $\sim_{x,y}$  désigne la relation d'équivalence définie dans la proposition IV.3.3.

### V.3.3 LEMME

Soit  $x$  et  $y$  deux objets de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  tels que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][x, y]$  ne soit pas vide, alors :

1. il existe un morphisme  $\sigma$  de  $\Sigma$  tel que  $\mathcal{C}[s(\sigma), y]$  ne soit pas vide et  $t(\sigma) = x$ ,
2. pour tout morphisme  $\sigma$  appartenant à  $\Sigma$  tel que  $\mathcal{C}[s(\sigma), y]$  ne soit pas vide et  $t(\sigma) = x$ , l'application 3 est une bijection,
3. il existe un morphisme  $\sigma$  appartenant à  $\Sigma$  tel que  $\mathcal{C}[x, t(\sigma)]$  ne soit pas vide et  $s(\sigma) = y$ ,
4. pour tout  $\sigma$  appartenant à  $\Sigma$  tel que  $\mathcal{C}[x, t(\sigma)]$  ne soit pas vide et  $s(\sigma) = y$ , l'application 4 est une bijection.

$$\mathcal{C}[s(\sigma), y] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][x, y]$$

$$f \longmapsto (f, \sigma)$$

Application 3

$$\mathcal{C}[x, t(\sigma)] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][x, y]$$

$$f \longmapsto (\sigma, f)$$

Application 4

PREUVE. Le premier point n'est que la formulation déployée de l'hypothèse qui affirme que l'ensemble  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][x, y]$  n'est pas vide. Voyons maintenant le deuxième point. On pose  $u := s(\sigma)$ , supposons que le diagramme 37 commute, comme  $\sigma$  est un morphisme de *Yoneda*, c'est en particulier un monomorphisme de  $\mathcal{C}$  (d'après la propriété IV.2.10) donc  $\tau_1 = \tau_2$  et, par le même argument,  $\tau_1$  est aussi un monomorphisme et donc  $f = g$ . L'application est donc injective, vérifions qu'elle est aussi surjective : supposons que  $(g, \tau)$  appartienne à  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][x, y]$  et posons  $v := s(\tau)$ . En particulier,  $\sigma$  et  $\tau$  forment un  $\Sigma$ -zigzag entre  $u$  et  $v$ , autrement dit on a  $x \sim_o y$  avec les notations de la proposition IV.1.3. Puisque par hypothèse, l'ensemble  $\mathcal{C}[u, y]$  n'est pas vide, on applique le lemme V.3.2 dont on tire l'existence d'un unique morphisme  $f'$  de  $\mathcal{C}[u \vee v, y]$  tel que le triangle

$\boxed{1}$  du diagramme 38 commute. Quant à la commutativité des triangles  $\boxed{2}$  et  $\boxed{3}$  du même diagramme, elle nous est donnée par la proposition IV.2.11 et la remarque IV.2.7. Ainsi le diagramme 38 est-il commutatif et donc, en posant  $f := f' \circ u \xrightarrow{\Sigma} u \vee v$ , on a  $(g, \tau) \sim_{x,y} (f, \sigma)$  d'où la surjectivité de l'application décrite dans l'énoncé du lemme V.3.3. Le troisième et le quatrième point se démontrent de façon duale.  $\square$

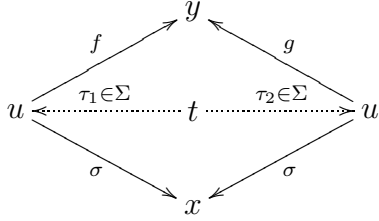


Diagramme 37

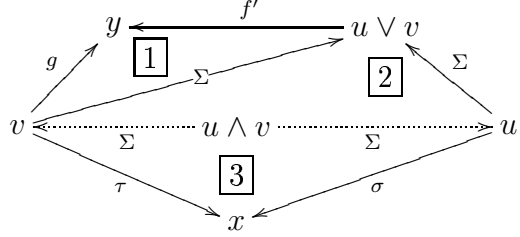


Diagramme 38

## V.4 PREUVE DE THÉORÈME 13

Cette section est entièrement dévolue aux preuves de résultats techniques qui mènent à celle du théorème V.0.27 c'est-à-dire, compte tenu de la section V.2, à la preuve de la fidélité de  $P_\Sigma$ . Tout au long de cette section, on fera une utilisation abondante du fait que  $\Sigma$  est un système de morphismes *Yoneda* inversibles en invoquant le 2<sup>ème</sup> point de la définition IV.3.5. En fait, chaque fois que l'on évoquera un produit fibré ou une somme amalgamée sans préciser pour quelle raison celui ou celle-ci existe, c'est à l'argument précédent qu'il faudra se référer. De même, l'emploi des symboles  $\wedge$  et  $\vee$  fait toujours référence au théorème IV.3.24.

### V.4.1 LEMME

Etant donnés quatre morphismes  $f, f', g$  et  $g'$  appartenant respectivement à  $\mathcal{C}[x, y]$ ,  $\mathcal{C}[x', y']$ ,  $\mathcal{C}[y, z]$  et  $\mathcal{C}[y', z']$ . Si  $x \sim_o x', y \sim_o y', z \sim_o z'$  et si les diagrammes 39 et 40 commutent, alors il en va de même de diagramme 41.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \xrightarrow{\Sigma} y \vee y' \\ \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\ x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' \xrightarrow{f'} y' \end{array}$$

Diagramme 39

$$\begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{g} & z \xrightarrow{\Sigma} z \vee z' \\ \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\ y \wedge y' & \xrightarrow{\Sigma} & y' \xrightarrow{g'} z' \end{array}$$

Diagramme 40

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g \circ f} & z \xrightarrow{\Sigma} z \vee z' \\ \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\ x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & y' \xrightarrow{g' \circ f'} z' \end{array}$$

Diagramme 41

PREUVE. D'après le diagramme 39 et puisqu'en vertu du théorème IV.3.24 le diagramme 43 est un produit fibré, il existe un unique morphisme  $f''$  appartenant à  $\mathcal{C}[x \wedge x', y \wedge y']$  faisant commuter le diagramme 42. Par ailleurs d'après le diagramme 40 et puisqu'en vertu du théorème IV.3.24 le diagramme 44 est aussi une somme amalgamée, il existe un unique morphisme  $g''$  dans  $\mathcal{C}[y \vee y', z \vee z']$  faisant commuter le diagramme 44, d'où le résultat attendu.  $\square$

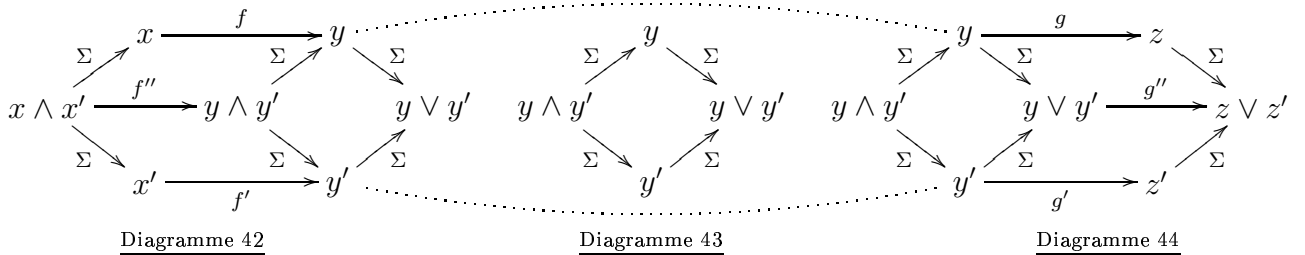


Diagramme 42

Diagramme 43

Diagramme 44

### V.4.2 LEMME

Soient deux morphismes  $f$  et  $f'$  appartenant respectivement à  $\mathcal{C}[x, y]$  et à  $\mathcal{C}[x', y']$  où  $x, x', y$  et  $y'$  sont des objets de  $\mathcal{C}$  tels que  $x \sim_o x'$  et  $y \sim_o y'$ , alors le diagramme 45 est commutatif si et seulement s'il existe deux objets  $x''$  et  $y''$  de  $\mathcal{C}$  tels que les ensembles  $\Sigma[x'', x], \Sigma[x'', x'], \Sigma[y, y'']$  et  $\Sigma[y', y'']$  ne soient pas vide et que le diagramme 46 commute.

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{\Sigma} & y \vee y' \\ \Sigma \uparrow & & & & \uparrow \Sigma \\ x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' & \xrightarrow{f'} & y' \end{array}$$

Diagramme 45

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{\Sigma} & y'' \\ \Sigma \uparrow & & & & \uparrow \Sigma \\ x'' & \xrightarrow{\Sigma} & x' & \xrightarrow{f'} & y' \end{array}$$

Diagramme 46

PREUVE. Supposons l'existence de  $x''$  et de  $y''$  qui fassent commuter le diagramme 46, d'après le théorème IV.3.24 et la remarque IV.2.7 on a le diagramme 47 dans lequel les triangles en pointillés ainsi que, par hypothèse, le contour extérieur, commutent. De plus,  $x'' \xrightarrow{\Sigma} x \wedge x'$  et  $y \vee y' \xrightarrow{\Sigma} y''$  sont, en tant que morphismes de Yoneda et d'après propriété IV.2.10, des bimorphismes et donc le rectangle intérieur du diagramme 47 commute également.  $\square$

Diagramme 47

Diagramme 48

### V.4.3 LEMME

Etant donnés trois morphismes  $f, f'$  et  $f''$  appartenant respectivement à  $\mathcal{C}[x, y], \mathcal{C}[x', y']$  et  $\mathcal{C}[x'', y'']$  où  $x, x', x'', y, y'$  et  $y''$  sont des objets de  $\mathcal{C}$  tels que  $x \sim_o x', x' \sim_o x'', y \sim_o y'$  et  $y' \sim_o y''$ ; si les diagrammes 49 et 50 commutent, alors il en va de même du diagramme 51.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \xrightarrow{\Sigma} y \vee y' \\ \Sigma \uparrow & \boxed{1} & \uparrow \Sigma \\ x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' \xrightarrow{f'} y' \end{array}$$

Diagramme 49

$$\begin{array}{ccc} x' & \xrightarrow{f'} & y' \xrightarrow{\Sigma} y' \vee y'' \\ \Sigma \uparrow & \boxed{2} & \uparrow \Sigma \\ x' \wedge x'' & \xrightarrow{\Sigma} & x'' \xrightarrow{f''} y'' \end{array}$$

Diagramme 50

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \xrightarrow{\Sigma} y \vee y'' \\ \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\ x \wedge x'' & \xrightarrow{\Sigma} & x'' \xrightarrow{f''} y'' \end{array}$$

Diagramme 51

PREUVE. Dans le diagramme 48, les rectangles  $\boxed{1}$  et  $\boxed{2}$  commutent par hypothèse. L'existence des contours des rectangles commutatifs  $\boxed{3}$  et  $\boxed{4}$  de ce même diagramme nous est donnée par le théorème IV.3.24. Notons que la commutativité de ces deux rectangles est aussi un conséquence immédiate de la remarque IV.2.7. On conclue en appliquant le lemme V.4.2 au contour extérieur du diagramme 48.  $\square$

On en vient maintenant à l'un des points les plus techniques de cette section, bien que les idées contenues dans le résultat suivant demeurent simples et, sur un exemple "concret", assez faciles à visualiser.

#### V.4.4 LEMME (D'INTERPOLATION)

Soient  $x, y, x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$  des objets de  $\mathcal{C}$ . Si toutes les assertions ci-dessous à gauche sont satisfaites, alors il existe des objets  $z_1, \dots, z_n$  de  $\mathcal{C}$  tels que les assertions ci-dessous à droite le soient également.

$$1. x \sqsubseteq y, x \sim_o x_0, y_n \sim_o y,$$

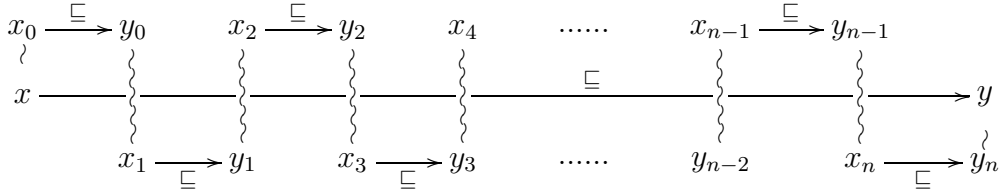
$$1. x \sqsubseteq z_1 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq z_n \sqsubseteq y \text{ et}$$

$$2. \forall k \in \{1, \dots, n\}, y_{k-1} \sim_o x_k,$$

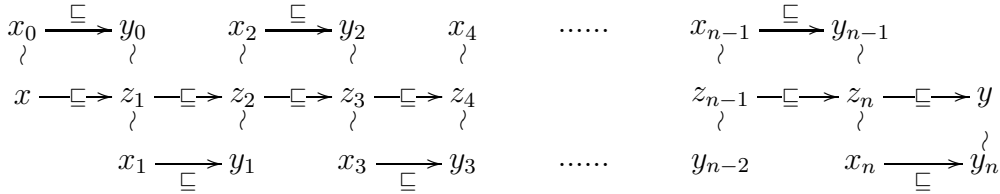
$$2. \forall k \in \{1, \dots, n\}, z_k \sim_o x_k$$

$$3. \forall k \in \{0, \dots, n\}, x_k \sqsubseteq y_k,$$

Graphiquement, si

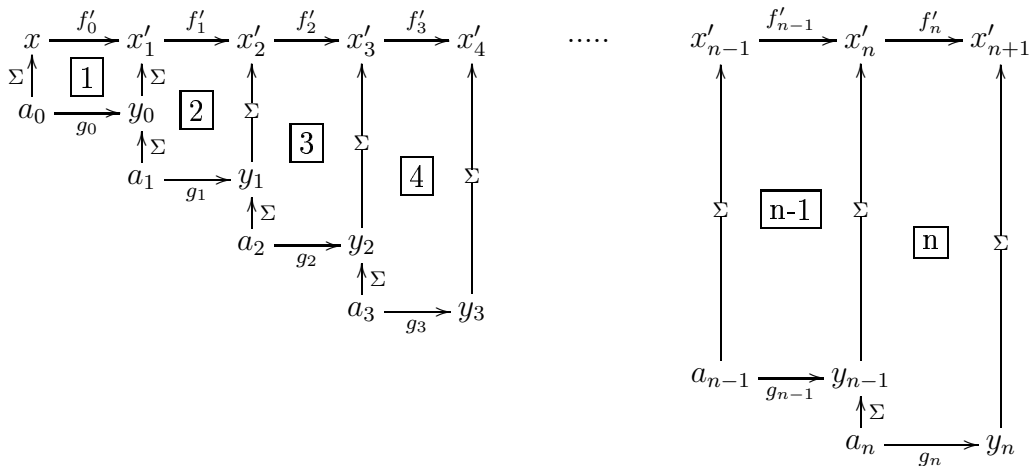


alors il existe des objets  $z_1, \dots, z_n$  de  $\mathcal{C}$  tels que



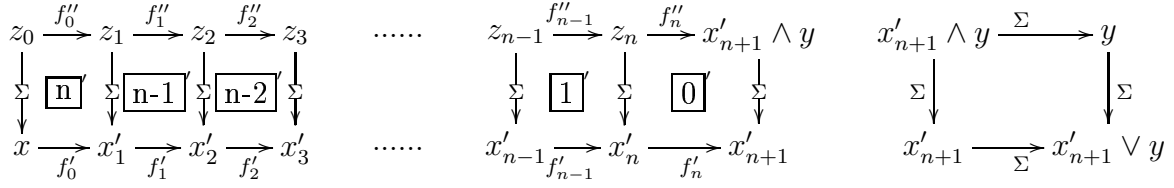
où  $\sim$  est mis pour  $\sim_o$  et  $x \sqsubseteq y$  signifie que l'ensemble  $\mathcal{C}[x, y]$  n'est pas vide.

PREUVE. Tout d'abord on choisit pour chaque indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$  un morphisme  $f_k$  appartenant à  $\mathcal{C}[x_k, y_k]$ . On pose alors  $a_0 := x \wedge x_0$  et  $a_k := y_{k-1} \wedge x_k$  pour chaque indice  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, n\}$ . Puis on note  $\sigma_0$  l'unique élément de  $\Sigma[a_0, x_0]$  et  $\sigma_k$  l'unique élément de  $\Sigma[a_k, x_k]$  pour tout indice  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ . On note enfin  $g_k := f_k \circ \sigma_k$  pour tout indice  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, n\}$ . On construit alors récursivement les sommes amalgamées  $\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{n}$  comme indiqué ci-dessous.

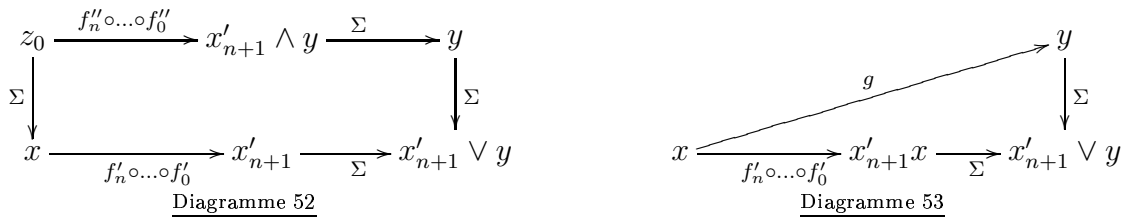


Puis, comme on a  $x'_{n+1} \sim_o y$ , on peut construire récursivement les produits fibrés  $\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{n-1}, \boxed{n}$  comme indiqué ci-dessous à gauche auxquels on ajoute le produit

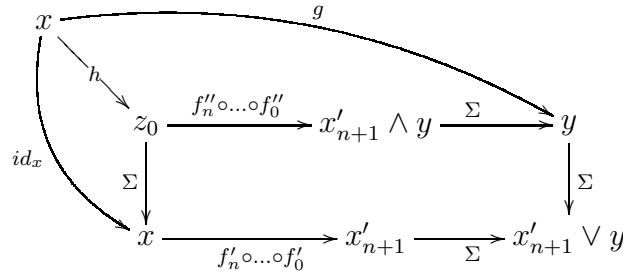
fibré ci-dessous à droite, qui nous est donné par le théorème IV.3.24.



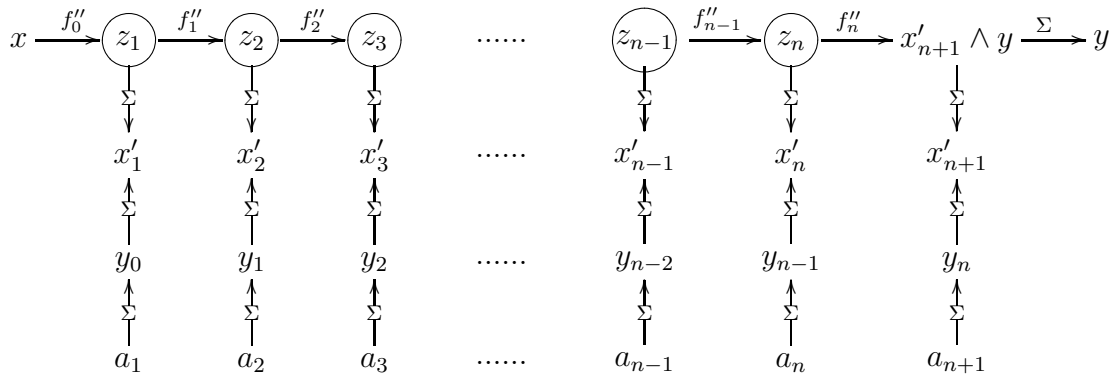
On “compose” alors ces produits fibrés pour finalement obtenir le produit fibré indiqué par le diagramme 52. Par ailleurs, puisque  $y \xrightarrow{\Sigma} x'_{n+1} \vee y$  est un morphisme de *Yoneda* et que par hypothèse l'ensemble  $\mathcal{C}[x, y]$  n'est pas vide, il existe un unique morphisme  $g$  dans  $\mathcal{C}[x, y]$  tel que le diagramme 53 soit commutatif.



On peut alors appliquer la propriété universelle du produit fibré pour obtenir un unique morphisme  $h$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, z_0]$  tel que le diagramme qui suit commute.



On a en particulier  $x \sqsubseteq z_0 \sqsubseteq x$  ce qui implique, puisque  $\mathcal{C}$  est sans boucle, que  $h = id_x$ . Il vient finalement



et  $z_1, \dots, z_n$  nous donne la suite recherchée.  $\square$

#### V.4.5 LEMME (DE TRANSLATION)

Soient un morphisme  $f$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, y]$  et deux objets  $x'$  et  $y'$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $x' \sim_o x$ ,  $y' \sim_o y$  et l'ensemble  $\mathcal{C}[x', y']$  ne soit pas vide. Il existe alors un unique morphisme  $f'$  dans  $\mathcal{C}[x', y']$  tel que le diagramme 54 commute.

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{\Sigma} & y \vee y' \\
 \Sigma \uparrow & & & & \uparrow \Sigma \\
 x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' & \xrightarrow{f'} & y'
 \end{array}$$

Diagramme 54

$$\begin{array}{ccc}
 & & y \vee y' \\
 & \nearrow f_0 & \uparrow \Sigma \\
 x \wedge x' & \xrightarrow{f_1} & y'
 \end{array}$$

Diagramme 55

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{f_1} & \\
 x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' \xrightarrow{f'} y'
 \end{array}$$

Diagramme 56

PREUVE.

Posons  $f_0$  la composée des trois morphismes  $x \wedge x' \xrightarrow{\Sigma} x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\Sigma} y \vee y'$ . Puisque  $y \xrightarrow{\Sigma} y \vee y'$  est un morphisme de *Yoneda*, il existe un unique morphisme  $f_1$  dans  $\mathcal{C}[x \wedge x', y']$  tel que le diagramme 55 commute. Puis, comme  $x \wedge x' \xrightarrow{\Sigma} x'$  est également un morphisme de *Yoneda*, il existe un unique morphisme  $f'$  dans  $\mathcal{C}[x', y']$  tel que le diagramme 56 commute.  $\square$

#### V.4.6 LEMME (DE RECOLLEMENT)

Etant donnée une suite  $\Sigma$ -composable  $(f_n, \dots, f_0)$  dont chaque terme  $f_k$  appartient à  $\mathcal{C}[x_k, y_k]$  et deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$  tels que,  $x \sim_o x_0$ ,  $y \sim_o y_n$  et l'ensemble  $\mathcal{C}[x, y]$  ne soit pas vide; alors il existe une suite composable  $(g_n, \dots, g_0)$  telle que  $s(g_0) = x$ ,  $t(g_n) = y$  et pour chaque indice  $k$  de  $\{0, \dots, n\}$ , le morphisme  $g_k$  appartient à  $\mathcal{C}[z_k, z_{k+1}]$  où  $z_k$  et  $z_{k+1}$  sont des objets de  $\mathcal{C}$  tels que  $x_k \sim_o z_k$ ,  $y_k \sim_o z_{k+1}$  et le diagramme 57 commute.

$$\begin{array}{ccccc}
 x_k & \xrightarrow{f_k} & y_k & \xrightarrow{\Sigma} & y_k \vee z_{k+1} \\
 \Sigma \uparrow & & & & \uparrow \Sigma \\
 x_k \wedge z_k & \xrightarrow{\Sigma} & z_k & \xrightarrow{g_k} & z_{k+1}
 \end{array}$$

Diagramme 57

$$\begin{array}{ccc}
 x_0 & \xrightarrow{f_0} & y_0 \xrightarrow{\Sigma} y_0 \vee y \\
 \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\
 x_0 \wedge x & \xrightarrow{\Sigma} & x \xrightarrow{g_0} y
 \end{array}$$

Diagramme 58

$$\begin{array}{ccc}
 x_k & \xrightarrow{f_k} & y_k \xrightarrow{\Sigma} y_k \vee y'_k \\
 \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\
 x_k \wedge x'_k & \xrightarrow{\Sigma} & x'_k \xrightarrow{f'_k} y'_k
 \end{array}$$

Diagramme 59

De plus, si  $(g'_n, \dots, g'_0)$  est une autre telle suite composable, alors  $g'_n \circ \dots \circ g'_0 = g_n \circ \dots \circ g_0$ . Toute suite  $(g_n, \dots, g_0)$  qui satisfait les conclusions de ce lemme est appelé un **recollement** de  $(f_n, \dots, f_0)$ .

PREUVE. On applique le lemme d'interpolation (V.4.4). On obtient une suite  $z_1, \dots, z_n$  d'objets de  $\mathcal{C}$  telle que pour tout indice  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, n\}$ ,  $z_k \sim_o x_k$  et  $x \sqsubseteq z_1 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq z_n \sqsubseteq y$ . On prolonge cette suite en posant  $z_0 := x$  et  $z_{n+1} := y$ . On applique alors pour chaque indice  $k$  de  $\{0, \dots, n+1\}$  le lemme de translation (V.4.5) à  $f_k$  entre  $z_k \sim_o x_k$  et  $z_{k+1} \sim_o x_{k+1} \sim_o y_k$  pour obtenir un morphisme  $g_k$  de  $\mathcal{C}[z_k, z_{k+1}]$ . La suite composable  $(g_n, \dots, g_0)$  a les propriétés annoncées dans la conclusion. Par ailleurs, supposons que  $(g'_n, \dots, g'_0)$  soit une autre suite composable satisfaisant les conclusions du lemme, on prouve que  $g'_n \circ \dots \circ g'_0 = g_n \circ \dots \circ g_0$  en appliquant récursivement le lemme V.4.1.  $\square$

### V.4.7 COROLLAIRE

Etant donnée une suite  $\Sigma$ -composable  $(f_n, \dots, f_0)$  dont chacun des termes  $f_k$  appartient à  $\mathcal{C}[x_k, y_k]$  et deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $y \sim_o y_n$ ,  $x \sim_o x_0$  et l'ensemble  $\mathcal{C}[x, y]$  ne soit pas vide, on peut alors, d'après le lemme V.4.6, définir  $Val_{x,y}(f_n, \dots, f_0) := g_n \circ \dots \circ g_0$  où la suite  $(g_n, \dots, g_0)$  est un recollement de  $(f_n, \dots, f_0)$ . De plus,

1. si  $y = t(f_n)$ ,  $x = s(f_0)$  et  $(f_n, \dots, f_0)$  est composable, alors  $Val_{x,y}(f_n, \dots, f_0) := f_n \circ \dots \circ f_0$ ,
2. si  $n = 0$ , c'est-à-dire que la suite  $(f_n, \dots, f_0)$  est réduite à  $(f_0)$ , alors  $Val_{x,y}(f_0)$  est l'unique morphisme  $g_0$  telle que le diagramme 58 commute,
3. si  $x \sim_o y$ , alors  $Val_{x,y}(f_n, \dots, f_0)$  appartient à  $\Sigma[x, y]$  et enfin
4. si la suite  $(f_n, \dots, f_0)$  est normalisée et que  $\vec{\delta}$  est une suite de morphismes de  $\mathcal{C}$  telle que  $(f_n, \dots, f_0) \sim_m^1 \vec{\delta}$ , alors  $Val_{x,y}(f_n, \dots, f_0) = Val_{x,y}(\vec{\delta})$ .

PREUVE. La définition de  $Val_{x,y}(f_n, \dots, f_0)$  est directement due au fait que la composée  $g_n \circ \dots \circ g_0$  ne dépend pas du recollement de  $f_n, \dots, f_0$ . Le premier point est immédiat puisque si on suppose les hypothèses qu'il propose, on peut prendre  $g_n := f_n, \dots, g_0 := f_0$  comme recollement de  $(f_n, \dots, f_0)$ . Le deuxième point découle directement du lemme de translation (V.4.5). Le troisième point est dû au théorème IV.3.24 (qui montre que l'un des morphismes de  $\mathcal{C}[x, y]$  appartient à  $\Sigma$ ) et à la remarque IV.2.7. Vérifions le quatrième point, puisque  $(f_n, \dots, f_0) \sim_m^1 \vec{\delta}$ , d'après la définition de  $\sim_m^1$  (V.2.1), on peut avoir  $\vec{\delta} = (f_n, \dots, f_{k+1} \circ f_k, \dots, f_0)$ , mais dans ce cas, d'après le lemme V.4.1, la suite  $(g_n, \dots, g_{k+1} \circ g_k, \dots, g_0)$  est un recollement de la suite  $(f_n, \dots, f_{k+1} \circ f_k, \dots, f_0)$  et donc  $Val_{x,y}(f_n, \dots, f_{k+1} \circ f_k, \dots, f_0) = g_n \circ \dots \circ (g_{k+1} \circ g_k) \circ \dots \circ g_0 = Val_{x,y}(f_n, \dots, f_0)$ . On peut également avoir  $\vec{\delta} = (f_n, \dots, f_{k+1}, f'_k, f_{k-1}, \dots, f_0)$  où  $f'_k$  est un morphisme de  $\mathcal{C}[x'_k, y'_k]$  tel que le diagramme 59 commute. Mais alors par définition du recollement  $(g_n, \dots, g_0)$  de  $(f_n, \dots, f_0)$ , le diagramme 60 est aussi commutatif. Puis d'après le lemme V.4.3, le diagramme 61 commute également.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 x_k & \xrightarrow{f_k} & y_k \xrightarrow{\Sigma} y_k \vee z_{k+1} \\
 \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\
 x_k \wedge z_k & \xrightarrow{\Sigma} & z_k \xrightarrow{g_k} z_{k+1}
 \end{array} & \text{Diagramme 60} & \\
 \begin{array}{ccc}
 x' & \xrightarrow{f'_k} & y' \xrightarrow{\Sigma} y' \vee z_{k+1} \\
 \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\
 x' \wedge z_k & \xrightarrow{\Sigma} & z_k \xrightarrow{g_k} z_{k+1}
 \end{array} & \text{Diagramme 61} & \\
 \begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{f} & y \xrightarrow{\Sigma} y \vee y' \\
 \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\
 x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' \xrightarrow{f'} y'
 \end{array} & \text{Diagramme 62} & 
 \end{array}$$

La suite  $(g_n, \dots, g_0)$  est donc aussi un recollement de la suite  $(f_n, \dots, f_{k+1}, f'_k, f_{k-1}, \dots, f_0)$  et donc

$$Val_{x,y}(f_n, \dots, f_{k+1}, f'_k, f_{k-1}, \dots, f_0) = g_n \circ \dots \circ g_0 = Val_{x,y}(f_n, \dots, f_0). \quad \square$$

On peut enfin conclure par le théorème suivant:

### V.4.8 THÉORÈME (FIDÉLITÉ DE $P_\Sigma$ )

Etant donnés une catégorie sans boucle  $\mathcal{C}$ , un système de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$  noté  $\Sigma$ ,  $f \in \mathcal{C}[x, y]$



et  $f' \in \mathcal{C}[x', y']$ , on a

$$(f) \sim_m (f') \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} x \sim_o x' \\ \text{et} \\ y \sim_o y' \\ \text{et } \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \xrightarrow{\Sigma} y \vee y' \\ \Sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \\ x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' \xrightarrow{f'} y' \end{array} \end{array} \right.$$

PREUVE. On étudie d'abord le cas où  $x = x'$  et  $y = y'$ . Deux cas se présentent alors: 1<sup>er</sup> cas,  $f \in \Sigma$  ou  $f' \in \Sigma$  : d'après la remarque IV.2.7 on a  $f = f'$ .

2<sup>ème</sup> cas,  $f \notin \Sigma$  et  $f' \notin \Sigma$  : donc  $(f)$  et  $(f')$  sont deux suites  $\Sigma$ -composables normalisées telles que  $(f) \sim_m (f')$ , d'après le lemme V.2.2, il existe une suite de suites  $\Sigma$ -composables normalisées notée  $(\vec{\gamma}_0, \dots, \vec{\gamma}_K, \dots, \vec{\gamma}_N)$  telle que pour tout indice  $K$  appartenant à  $\{0, \dots, N-1\}$  on a  $\vec{\gamma}_K \sim_m^1 \vec{\gamma}_{K+1}$ ,  $\vec{\gamma}_0 = (f)$  et  $\vec{\gamma}_N = (f')$ . Mais alors d'après le corollaire V.4.7 on a pour tout indice  $K$  appartenant à  $\{0, \dots, N-1\}$   $Val_{x,y}(\vec{\gamma}_K) = Val_{x,y}(\vec{\gamma}_{K+1})$ ,  $Val_{x,y}(\vec{\gamma}_0) = Val_{x,y}(f) = f$  et  $Val_{x,y}(\vec{\gamma}_N) = Val_{x,y}(f') = f'$ , d'où  $f = f'$ .

Passons maintenant au cas général, puisque  $(f) \sim_m (f')$  on a en particulier  $x \sim_o x'$  et  $y \sim_o y'$  (puisque  $(\sim_o, \sim_m)$  est une congruence généralisée) et  $f' \in \mathcal{C}[x', y'] \neq \emptyset$  donc d'après le lemme V.4.5 de translation, il existe un unique morphisme  $g$  appartenant à  $\mathcal{C}[x', y']$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{\Sigma} & y \vee y' \\ \Sigma \uparrow & & & & \uparrow \Sigma \\ x \wedge x' & \xrightarrow{\Sigma} & x' & \xrightarrow{g} & y' \end{array}$$

commute, ce dont on peut déduire d'après le lemme V.2.2 que  $(f) \sim_m (g)$  et donc par transitivité de  $\sim_m$ , que  $(f') \sim_m (g)$ . En appliquant le 1<sup>er</sup> cas, on a  $f' = g$ . ■

#### V.4.9 COROLLAIRE

Avec les notations des théorèmes V.0.27 et V.4.8, le foncteur  $P_\Sigma$  est fidèle.

PREUVE. Soient  $x, y$  deux objets de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  tels que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][x, y] \neq \emptyset$ , d'après le lemme V.3.3,  $\exists \sigma \in \Sigma$  tel que tout élément de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  (qui est une  $\sim_{x,y}$ -classe d'équivalence d'après la proposition IV.3.3) possède un unique représentant de la forme  $(f, \sigma)$  où  $f \in \mathcal{C}[u, y]$  et  $u := src(\sigma)$ .

Soient donc  $f, f' \in \mathcal{C}[u, y]$  tels que  $P_\Sigma(f, \sigma) = P_\Sigma(f', \sigma)$  c'est-à-dire  $(f) \sim_m (f')$ . D'après les théorèmes V.4.8 et IV.3.24, on a le diagramme commutatif ci-dessous:

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{id_y} & y \vee y = y \\ id_u \uparrow & & & & \uparrow id_y \\ u = u \wedge u & \xrightarrow{id_u} & u & \xrightarrow{f'} & y \end{array}$$

c'est-à-dire  $f = f'$  et donc  $(f, \sigma) = (f', \sigma)$ , d'où la fidélité de  $P_\Sigma$ . ■

Avec la preuve du corollaire V.4.9 s'achève celle du théorème V.0.27 énoncé au début de ce chapitre.

#### V.4.10 COROLLAIRE (NATURE DU QUOTIENT $\mathcal{C}/\Sigma$ )

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie sans boucle et  $\Sigma$  un système de *Yoneda* sur  $\mathcal{C}$ , alors la catégorie quotient  $\mathcal{C}/\Sigma$  est sans boucle. Par ailleurs, si la catégorie  $\mathcal{C}$  est un ensemble ordonné, c'est-à-dire que  $\mathcal{C}$  est sans boucle et que quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble  $\mathcal{C}[x, y]$  contient au plus un élément, alors  $\mathcal{C}/\Sigma$  est aussi un ensemble ordonné. En particulier, la catégorie de composantes d'une catégorie sans boucle est elle-même sans boucle et celle d'un ensemble ordonné est un ensemble ordonné.

PREUVE. Soit  $\alpha$  un morphisme de  $\mathcal{C}/\Sigma$  admettant un retour, il existe donc un morphisme  $\beta$  de  $\mathcal{C}/\Sigma$  tel que  $\beta \circ \alpha$  soit un endomorphisme de  $\mathcal{C}/\Sigma$ . Compte tenu de la construction de la catégorie  $\mathcal{C}/\Sigma$ , explicitée dans les définitions A.4.1, A.4.4 et la proposition IV.1.3, il existe deux suites  $\Sigma$ -composables  $(f_n, \dots, f_0)$  et  $(g_p, \dots, g_0)$  dont les  $\sim_m$ -classes d'équivalence sont respectivement  $\alpha$  et  $\beta$ , en outre, la suite  $(g_p, \dots, g_0, f_n, \dots, f_0)$  est également  $\Sigma$ -composable et la source de  $f_0$  est dans la même  $\Sigma$ -composante que la cible de  $g_p$ . En application du théorème IV.3.24, on pose  $x := s(f_0) \wedge t(g_p)$ ,  $y := s(f_0) \vee t(g_p)$  et on sait, d'après la remarque IV.2.7 et le fait que tous les éléments de  $\Sigma$  soient des morphismes de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ , que l'ensemble  $\mathcal{C}[x, y]$  est réduit à un singleton dont l'unique élément est noté  $\sigma$ . D'après le corollaire V.4.7, on a alors

$$\text{Val}_{x,y}(g_p, \dots, g_0, f_n, \dots, f_0) = \sigma,$$

ce qui signifie que  $\beta \circ \alpha$  est une identité de  $\mathcal{C}/\Sigma$ . Puis, d'après la remarque V.2.3, tous les membres de la suite  $(g_p, \dots, g_0, f_n, \dots, f_0)$  appartiennent à  $\Sigma$ , ce qui signifie en particulier que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des identités de  $\mathcal{C}/\Sigma$  qui est donc sans boucle.

Supposons maintenant que  $\mathcal{C}$  soit un ensemble ordonné dont  $x$  et  $y$  sont deux objets. Supposons qu'il existe deux objets  $u$  et  $u'$  de  $\mathcal{C}$  tels que les ensembles  $\mathcal{C}[u, y]$ ,  $\mathcal{C}[u', y]$ ,  $\Sigma[x, u]$  et  $\Sigma[x, u']$  ne soient pas vides : considérons alors quatre morphismes  $f, f', \sigma$  et  $\sigma'$  appartenant respectivement à chacun des quatre ensembles précédemment cités. Le théorème IV.3.24 et le fait que tous les ensembles de morphismes de  $\mathcal{C}$  d'un objet vers un autre contiennent au plus un élément nous donne deux morphismes  $\tau$  et  $\tau'$  appartenant respectivement à  $\Sigma[u \wedge u', u]$  et à  $\Sigma[u \wedge u', u']$  tels que le diagramme 19 commute. On a ainsi montré, au vu de la description de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  donnée par la proposition IV.3.3, que l'ensemble  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  contient au plus un élément. Puis, si  $a$  et  $b$  sont deux objets de  $\mathcal{C}/\Sigma$ , on sait, d'après le théorème V.4.9, qu'il existe deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  tels que  $P_\Sigma(x) = a$  et  $P_\Sigma(y) = b$ ; et puisque d'après le lemme V.4.8, le foncteur  $P_\Sigma$  est fidèle, l'ensemble  $\mathcal{C}/\Sigma[x, y]$  contient au plus un élément. □

En particulier, si  $\mathcal{C}$  est une catégorie sans boucle,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}/\Sigma$  sont toutes les deux squelettiques et donc ne peuvent être équivalentes que si elles sont isomorphes. La catégorie fondamentale du carré dirigé a  $2^{\aleph_0}$  objets tandis que sa catégorie des composantes n'en possède que 4 : elles ne sont donc pas équivalentes. L'exemple précédent met en lumière le fait que l'on ne peut pas espérer avoir un résultat d'équivalence entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}/\Sigma$ .

## V.5 COMPLÉMENTS DU THÉORÈME 13

Les résultats qui suivent sont ciblés sur les propriétés de préservation et de réflexion du foncteur  $I_\Sigma$ . Notons spécialement que la conjecture V.5.3 permet d'inférer presque tous les résultats proposés à partir du théorème V.0.27. Hormis le lemme V.5.10, tous peuvent cependant être prouvés sans y avoir recours mais au prix de quelques détours techniques assez fastidieux. Enfin, l'outil d'analyse statique développé par *Eric Goubault* réalise la représentation dont le lemme V.5.3 affirme l'existence dans tous les cas pratiques, ce qui laisse supposer que, même si la conjecture V.5.3 est mise en défaut, ce doit être en considérant des situations "pathologiques".

### V.5.1 LEMME

Le foncteur  $I_\Sigma$  est fidèle.

PREUVE. D'après l'exercice 5.9.2 (1) p.248 de [9], il suffit pour cela que tous les éléments de  $\Sigma$  soient des monomorphismes et que  $\Sigma$  admette un calcul de fractions à gauche. Puisque tous les éléments de  $\Sigma$  sont par la définition IV.3.5 des morphismes inversibles au sens de *Yoneda*, on conclut donc grâce à la propriété IV.2.10 et la remarque IV.3.6. ■

### V.5.2 LEMME

1. Le foncteur  $Q_\Sigma$  induit une surjection de la collection des objets de  $\mathcal{C}$  sur celle des objets de  $\mathcal{C}/\Sigma$ .
2. (a) Pour tout objet  $y$  de  $\mathcal{C}$  et tout objet  $x'$  de  $\mathcal{C}/\Sigma$  tels que  $\mathcal{C}/\Sigma[x', y'] \neq \emptyset$  (où  $y' := Q_\Sigma(y)$ ), il existe un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $x' := Q_\Sigma(x)$  et  $\mathcal{C}[x, y] \neq \emptyset$ .  
 (b) Pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  et tout objet  $y'$  de  $\mathcal{C}/\Sigma$  tels que  $\mathcal{C}/\Sigma[x', y'] \neq \emptyset$  (où  $x' := Q_\Sigma(x)$ ), il existe un objet  $y$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $y' := Q_\Sigma(y)$  et  $\mathcal{C}[x, y] \neq \emptyset$ .
3. Quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $\mathcal{C}[x, y]$  n'est pas vide, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[x, y] & \longrightarrow & \mathcal{C}/\Sigma[Q_\Sigma(x), Q_\Sigma(y)] \\ f & \longmapsto & Q_\Sigma(f) \end{array}$$

PREUVE. Le premier point est dû au fait que  $Q_\Sigma$  est un foncteur quotient (cf proposition IV.1.4).

Montrons le premier alinéa du 2<sup>ème</sup> point, supposons que  $Q_\Sigma(y) = y'$  et que  $\mathcal{C}/\Sigma[x', y'] \neq \emptyset$  soit  $a$  tel que  $Q_\Sigma(a) = x'$ , comme  $P_\Sigma$  est plein et fidèle (cf théorème V.0.27) l'application  $f \in \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, y] \mapsto P_\Sigma(f) \in \mathcal{C}/\Sigma[x', y']$  est une bijection, en particulier  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, y] \neq \emptyset$ . On conclue alors en appliquant le 1<sup>er</sup> point du lemme V.3.3 et en posant  $x := src(\sigma)$ . Voyons maintenant le 3<sup>ème</sup> point. Si  $\mathcal{C}/\Sigma[x, y] \neq \emptyset$ , alors le 2<sup>ème</sup> point du lemme V.3.3 (avec  $\sigma = id_x$ ) montre que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[x, y] & \longrightarrow & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][x, y] \\ f & \longmapsto & I_\Sigma(f) \end{array}$$

est une bijection et comme  $Q_\Sigma = P_\Sigma \circ I_\Sigma$  et que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, y] &\longrightarrow \mathcal{C}/_\Sigma[Q_\Sigma(x), Q_\Sigma(y)] \\ g &\longmapsto P_\Sigma(g) \end{aligned}$$

est une bijection, on a le résultat voulu. ■

En fait, le lemme V.5.2 découle directement de la conjecture suivante

### V.5.3 CONJECTURE

Il existe un représentant de  $J_\Sigma$  dont l'image est incluse dans celle de  $I_\Sigma$ . Autrement dit, on peut supposer que

$$\forall x', y' \in \mathcal{C}/_\Sigma \quad \mathcal{C}/_\Sigma[x', y'] \neq \emptyset \iff \mathcal{C}[J_\Sigma(x'), J_\Sigma(y')] \neq \emptyset.$$

Formellement,  $J_\Sigma$  est à valeurs dans  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  mais  $Ob(\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]) = Ob(\mathcal{C})$ .

Une preuve de ce résultat, si elle est possible, est très certainement basée sur une application fine de l'axiome du choix sous la forme du lemme de *Zorn* (qui lui est équivalent). C'est en effet de cette manière que l'on exhibe un représentant de nombreux objets dont intuitivement l'existence ne fait aucun doute. L'obtention des bases des espaces vectoriels, des clôtures algébriques des anneaux commutatifs, des prolongements des formes linéaires continues en analyse fonctionnelle (lemme de *Hahn-Banach*), des topologies compactes sur les ensembles et bien sûr des ordinaux cardinaux isomorphes aux ensembles sont autant d'exemples d'application de cette méthode. Pour revenir au cas qui nous intéresse, dans toutes les situations pratiques, la conjecture V.5.3 est trivialement vérifiée, de plus, *Martin Raussen* a étudié en détail le cas de la dimension 2 dans [84]. Cette conjecture peut-être vue comme une généralisation du lemme d'interpolation V.4.4. Esquisons un début de preuve. On pose  $\mathcal{Z}$  la collection de toutes les sous-catégories de  $\mathcal{C}/_\Sigma$  que l'on peut représenter dans  $\mathcal{C}$ . On prouve ensuite que si on a une famille croissante de représentations, on obtient une représentation de la réunion et enfin, c'est là le point délicat, que si un membre  $S$  différent de  $\mathcal{C}/_\Sigma$  de  $\mathcal{Z}$  admet une représentation, alors on peut trouver un membre de  $\mathcal{Z}$  strictement supérieur à  $S$  qui admet également une représentation. Le lemme de *Zorn* permet alors d'affirmer que  $\mathcal{C}/_\Sigma$  est un élément de  $\mathcal{Z}$ .

### V.5.4 LEMME

Le foncteur  $Q_\Sigma$  préserve les morphismes inversibles au sens de *Yoneda*, c'est-à-dire que si  $\sigma$  est un morphisme inversible au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ , alors  $Q_\Sigma(\sigma)$  est un morphisme inversible au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}/_\Sigma$ .

PREUVE. Soit  $\sigma \in \mathcal{C}[x, y]$  un morphisme inversible au sens de *Yoneda*. Posons  $\sigma' := Q_\Sigma(\sigma) \in \mathcal{C}/_\Sigma[x', y']$ . Soit  $z'$  tel que  $\mathcal{C}/_\Sigma[y', z'] \neq \emptyset$  et  $f' \in \mathcal{C}/_\Sigma[x', z']$ . D'après le lemme V.5.2, il existe  $z$  tel que  $Q_\Sigma(z) = z'$  et  $\mathcal{C}[y, z] \neq \emptyset$ . Puis, étant donné que  $\sigma$  est inversible au sens de *Yoneda*, il existe un unique morphisme  $g$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, z]$  tel que  $f = g \circ \sigma$ . Donc  $f' = g' \circ \sigma'$  où  $g' = Q_\Sigma(g) \in \mathcal{C}/_\Sigma[y', z']$ . En outre, un tel  $g'$  est unique. En effet, supposons que l'on ait  $g'_1, g'_2 \in \mathcal{C}/_\Sigma[y', z']$  deux morphismes tels que  $g'_1 \circ \sigma' = g'_2 \circ \sigma' = f'$ . On a donc  $Q_\Sigma(g_1 \circ \sigma) = Q_\Sigma(g_2 \circ \sigma) = Q_\Sigma(f)$  et donc, d'après le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2, on a  $g_1 \circ \sigma = g_2 \circ \sigma = f$ . Puisque  $\sigma$  est inversible au sens de *Yoneda*, on a  $g_1 = g_2$

et donc  $g'_1 = g'_2$ . On raisonne de même dans le cas où  $z'$  est tel que  $\mathcal{C}/\Sigma[z', x'] \neq \emptyset$ . ■

### V.5.5 LEMME

Le foncteur  $Q_\Sigma$  préserve les co-égalisateurs, c'est-à-dire que si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ a & \curvearrowright & b \\ & g & \\ & \gamma & \\ & & c \end{array}$$

est un co-égalisateur dans  $\mathcal{C}$ , alors l'image de ce diagramme par  $Q_\Sigma$  est un co-égalisateur dans  $\mathcal{C}/\Sigma$ .

PREUVE. Le diagramme  $a' \begin{array}{ccc} & f' & \\ & \curvearrowright & \\ & g' & \end{array} b' \xrightarrow{\gamma'} c'$  est l'image par  $Q_\Sigma$  du co-égalisateur décrit

dans l'énoncé du lemme V.5.5. Soit  $h' \in \mathcal{C}/\Sigma[b', z']$  tel que  $h' \circ f' = h' \circ g'$ . D'après le lemme V.5.2 il existe  $z$  tel que  $Q_\Sigma(z) = z'$  et  $\mathcal{C}[b, z] \neq \emptyset$ . Puis d'après le 3<sup>ème</sup> point du même lemme, il existe un unique morphisme  $h$  appartenant à  $\mathcal{C}[b, z]$  tel que  $Q_\Sigma(h) = h'$ . Mais comme on a un diagramme co-égalisateur, il existe un unique morphisme  $k$  appartenant à  $\mathcal{C}[c, z]$  tel que  $h = k \circ \gamma$ . Donc on a  $h' = k' \circ \gamma'$  (où  $k' := Q_\Sigma(k)$ ). Un tel  $k'$  est unique, en effet, supposons que l'on ait  $k'_1 \circ \gamma' = k'_2 \circ \gamma' = h'$ , c'est-à-dire  $Q_\Sigma(k_1 \circ \gamma) = Q_\Sigma(k_2 \circ \gamma) = Q_\Sigma(h)$ , alors d'après le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2, on a  $k_1 \circ \gamma = k_2 \circ \gamma = h$  et donc, d'après le diagramme co-égalisateur,  $k_1 = k_2$  donc  $k'_1 = k'_2$ . ■

### V.5.6 LEMME

Le foncteur  $Q_\Sigma$  préserve les co-produits finis, c'est-à-dire que si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \alpha & \nearrow & \\ a & & b \\ & \searrow & \\ & \beta & \end{array}$$

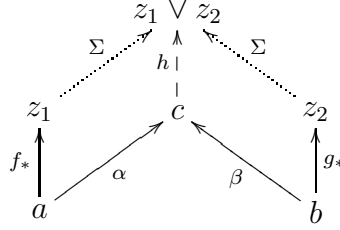
est un co-produit dans  $\mathcal{C}$ , alors l'image de ce diagramme par  $Q_\Sigma$  est un co-produit dans  $\mathcal{C}/\Sigma$ .

PREUVE. Le diagramme qui suit

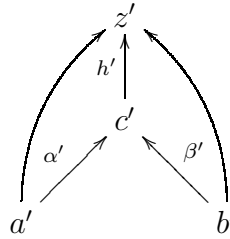
$$\begin{array}{ccc} & c' & \\ \alpha' & \nearrow & \\ a' & & b' \\ & \searrow & \\ & \beta' & \end{array}$$

est l'image par  $Q_\Sigma$  du co-produit décrit dans l'énoncé du lemme V.5.6. Soit alors  $f' \in \mathcal{C}/\Sigma[a', z']$  et  $g' \in \mathcal{C}/\Sigma[b', z']$ , d'après le lemme V.5.2 on a  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $Q_\Sigma(z_1) = z'_1$ ,  $Q_\Sigma(z_2) = z'_2$ ,  $\mathcal{C}[a, z_1] \neq \emptyset$  et  $\mathcal{C}[b, z_2] \neq \emptyset$ . D'après le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2, il existe un unique morphisme  $f_*$  appartenant à  $\mathcal{C}[a, z_1]$  tel que  $Q_\Sigma(f_*) = f'$  et il existe un unique

morphisme  $g_*$  appartenant à  $\mathcal{C}[b, z_2]$  tel que  $Q_\Sigma(g_*) = g'$ . Comme  $Q_\Sigma(z_1) = Q_\Sigma(z_2) = z'$ , on peut appliquer le théorème IV.3.24 et on a le diagramme **1** suivant (sans la flèche  $h$ ):



On pose alors  $f := \Sigma \circ f_*$  et  $g := \Sigma \circ g_*$ . On a donc  $Q_\Sigma(f) = f'$  et  $Q_\Sigma(g) = g'$ . On applique alors la propriété universelle du co-produit dans  $\mathcal{C}$ , on a un unique  $h \in \mathcal{C}[c, z_1 \vee z_2]$  qui fait commuter **1**. En posant  $h' := Q_\Sigma(h)$  on a alors un morphisme qui fait commuter le diagramme **2** suivant



Vérifions l'unicité d'un tel  $h'$ . Supposons que  $h'_1, h'_2$  fassent commuter le diagramme **2** et  $h_1$ , respectivement  $h_2$ , l'unique élément de  $\mathcal{C}[c, z_1 \vee z_2]$  tel que  $Q_\Sigma(h_1) := h'_1$ , respectivement  $Q_\Sigma(h_2) := h'_2$ . On a alors  $f' = h'_i \circ \alpha'$  et  $g' = h'_i \circ \beta'$  pour  $i \in \{1, 2\}$  donc, d'après le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2, on a  $f = h_i \circ \alpha$  et  $g = h_i \circ \beta$  pour  $i \in \{1, 2\}$  et donc, d'après la propriété universelle du co-produit, on a  $h_1 = h_2$ , donc  $h'_1 = h'_2$ . ■

#### V.5.7 REMARQUE

La preuve ne s'adapte pas au cas infini à cause du fait que le théorème IV.3.24 ne donne dans chaque composante que les bornes supérieures de familles finies. Cependant, la conjecture V.5.3 permet de prouver que  $Q_\Sigma$  préserve tous les co-produits (et donc aussi les produits). Il en résulte que  $Q_\Sigma$  préserve toutes les limites et colimites. De surcroît, en pratique, la propriété d'ensemble des solutions (voir définition A.3.16) est vérifiée puisque les catégories (fondamentales) que l'on manipule sont petites. On pourrait donc être tenté, en appliquant le théorème A.3.17, d'affirmer que  $Q_\Sigma$  a un adjoint à gauche et à droite. Il faut alors se souvenir que la catégorie  $\mathcal{C}/_\Sigma$  n'est pas nécessairement complète ni co-complète. En pratique, ce n'est effectivement pas le cas puisque les catégories qui nous intéressent sont censées être les catégories fondamentales d'espaces ordonnés et que justement, les "trous" d'un espace ordonné apparaissent dans sa catégorie fondamentale comme des carrés non commutatifs. Le théorème A.3.17 ne s'applique donc pas et on peut même vérifier sur l'exemple du carré unité troué dirigé que  $Q_\Sigma$  n'a d'adjoint ni à gauche ni à droite.

#### V.5.8 COROLLAIRE

Le foncteur  $Q_\Sigma$  préserve les produits finis et les égalisateurs.

PREUVE. Par passage au dual. ■

V.5.9 LEMME

Le foncteur  $Q_\Sigma$  reflète les morphismes inversibles au sens de *Yoneda*, c'est-à-dire que si  $\sigma'$  est un morphisme inversible au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}/_\Sigma$ , alors tout morphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $Q_\Sigma(\sigma) = \sigma'$  est un morphisme inversible au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. Soit  $\sigma' \in \mathcal{C}/_\Sigma[x', y']$  un morphisme inversible au sens de *Yoneda* et  $\sigma \in \mathcal{C}[x, y]$  tel que  $Q_\Sigma(\sigma) = \sigma'$ . Soit alors  $z$  tel que  $\mathcal{C}[y, z] \neq \emptyset$  et  $f \in \mathcal{C}[x, z]$ . Puisque  $\sigma'$  est inversible au sens de *Yoneda*, il existe un unité morphisme  $g'$  appartenant à  $\mathcal{C}/_\Sigma[y', z']$  tel que  $f' = g' \circ \sigma'$  où  $f' := Q_\Sigma(f)$ . Soit alors l'unique  $g \in \mathcal{C}[y, z]$  tel que  $Q_\Sigma(g) = g'$  (d'après le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2), on a  $Q_\Sigma(g \circ \sigma) = Q_\Sigma(f)$  donc (toujours d'après le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2)  $g \circ \sigma = f$ . De plus, si  $g_1, g_2 \in \mathcal{C}[y, z]$  vérifient  $g_1 \circ \sigma = g_2 \circ \sigma = f$ , alors on a  $g_1' \circ \sigma' = g_2' \circ \sigma' = f'$  donc  $g_1' = g_2'$  (parce que  $\sigma'$  est *Yoneda* inversible) puis d'après le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2,  $g_1 = g_2$ . On raisonne de la même manière dans le cas où  $z$  est tel que  $\mathcal{C}[z, x] \neq \emptyset$ . ■

V.5.10 LEMME (DÉPEND DE LA CONJECTURE V.5.3)

Si  $\Sigma'$  est un système de *Yoneda* de  $\mathcal{C}/_\Sigma$ , alors  $Q_\Sigma^{-1}(\Sigma')$  est un système de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. D'après le lemme V.5.9, on a déjà  $Q_\Sigma^{-1}(\Sigma') \subseteq \text{Yoneda}(\mathcal{C})$  c'est-à-dire la collection des morphismes inversibles au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ . De plus  $Q_\Sigma^{-1}(\Sigma')$  est clairement stable par composition puisque  $Q_\Sigma$  est un foncteur et que  $\Sigma'$  est stable par composition. Soit le diagramme

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \sigma \\ \downarrow \\ \xrightarrow{f} \end{array}$$

où  $Q_\Sigma(\sigma) \in \Sigma'$ . Ce diagramme est envoyé *via*  $Q_\Sigma$  sur le diagramme

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \sigma' \\ \downarrow \\ \xrightarrow{f'} \end{array}$$

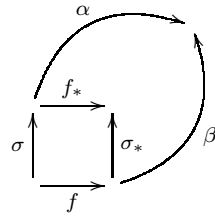
Comme  $\Sigma'$  est un système de *Yoneda*, on a la somme amalgamée suivante:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f''} & \\ \sigma' \uparrow & & \uparrow \sigma'' \\ & \xrightarrow{f'} & \end{array}$$

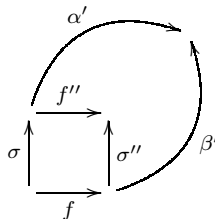
D'après la conjecture V.5.3 et le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2, on pose  $f_*$  et  $\sigma_*$  respectivement l'unique morphisme de  $\mathcal{C}[J_\Sigma(\text{src}(f'')), J_\Sigma(\text{tgt}(f''))]$  tel que  $I_\Sigma(f_*) = J_\Sigma(f'')$  et l'unique morphisme de  $\mathcal{C}[J_\Sigma(\text{src}(\sigma'')), J_\Sigma(\text{tgt}(\sigma''))]$  tel que  $I_\Sigma(\sigma_*) = J_\Sigma(\sigma'')$ , d'après le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2, le diagramme qui suit est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f_*} & \\ \sigma \uparrow & & \uparrow \sigma_* \\ & \xrightarrow{f} & \end{array}$$

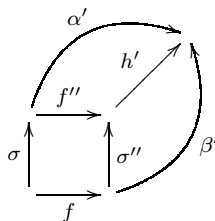
Soit alors  $\alpha, \beta$  de telle sorte que le diagramme



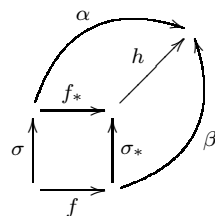
soit commutatif, ce diagramme est envoyé *via*  $Q_\Sigma$  sur le diagramme (commutatif)



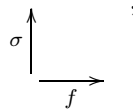
et, d'après la propriété universelle de la somme amalgamée, on a un unique  $h'$  tel que



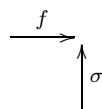
commute. D'après le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2, on a alors un unique morphisme de  $h \in \mathcal{C}[J_\Sigma(\text{tgt}(\sigma'')), J_\Sigma(\text{tgt}(\beta'))]$  tel que  $I_\Sigma(h) = J_\Sigma(h')$ , et encore par le 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2, le diagramme



commute. En outre le morphisme  $h$  faisant commuter le diagramme précédent est (cf 3<sup>ème</sup> point du lemme V.5.2) unique. On a montré que tout diagramme de la forme



où  $Q_\Sigma(\sigma) \in \Sigma'$ , s'étend en une somme amalgamée et on montre de même, en passant au dual, que tout diagramme de la forme





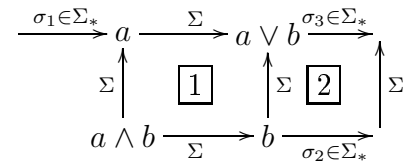
s'étend en un produit fibré. La collection de morphismes  $Q_{\Sigma}^{-1}(\Sigma')$  est donc bien un système de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ . ■

V.5.11 LEMME

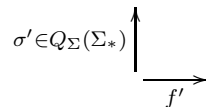
Si  $\Sigma_*$  est un système de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$  tel que  $\Sigma \subseteq \Sigma_*$ , alors  $Q_{\Sigma}(\Sigma_*)$  est un système de *Yoneda* de  $\mathcal{C}/_{\Sigma}$ .

PREUVE. On a déjà  $Q_{\Sigma}(\Sigma_*) \subseteq \text{Yoneda}(\mathcal{C}/_{\Sigma})$ . Soit  $\sigma'_1, \sigma'_2 \in Q_{\Sigma}(\Sigma_*)$  tels que  $\text{tgt}(\sigma'_1) = \text{src}(\sigma'_2)$ . On a alors  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_*$  tels que  $Q_{\Sigma}(\sigma_1) = \sigma'_1$  et  $Q_{\Sigma}(\sigma_2) = \sigma'_2$ , cependant, on a pas forcément  $\text{tgt}(\sigma_1) = \text{src}(\sigma_2)$ .

Pour remédier à cela, le théorème IV.3.24 nous donne le carré commutatif  $\boxed{1}$  (à la fois somme amalgamée et produit fibré) et on utilise le fait que  $\Sigma$  soit un système de *Yoneda* pour construire la somme amalgamée  $\boxed{2}$ , la remarque IV.3.8 nous permet de conclure que  $\sigma_3 \in \Sigma_*$ . On a alors  $(a \xrightarrow{\Sigma} a \vee b) \in \Sigma_*$  (car  $\Sigma \subseteq \Sigma_*$ ) et  $Q_{\Sigma}(\sigma_3 \circ a \xrightarrow{\Sigma} a \vee b) = \sigma'_2$ .



Enfin, pour tout diagramme

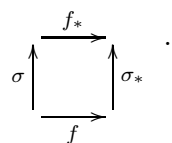


de  $\mathcal{C}/_{\Sigma}$ , on peut trouver un diagramme



dont l'image par  $Q_{\Sigma}$  est le diagramme précédent. Plus précisément, on a  $\sigma_0 \in \Sigma_*$  et  $f_0$  tels que  $Q_{\Sigma}(\sigma_0) = \sigma'$  et  $Q_{\Sigma}(f_0) = f'$ . On a en particulier  $Q_{\Sigma}(\text{src}(\sigma_0)) = Q_{\Sigma}(\text{src}(f_0))$ , d'après le théorème IV.3.24 on a donc le diagramme ci-contre

et comme on a  $\Sigma \subseteq \Sigma_*$ ,  $\sigma_0 \circ (a \wedge b \xrightarrow{\Sigma} a) \in \Sigma_*$  et son image par  $Q_{\Sigma}$  est  $\sigma'$  de même que celle de  $f \circ (a \wedge b \xrightarrow{\Sigma} b)$  est  $f'$ . Comme  $\Sigma_*$  est un système de *Yoneda*, on a dans  $\mathcal{C}$  la somme amalgamée suivante:



Puis d'après le lemme V.5.6, l'image par  $Q_\Sigma$  du diagramme précédent nous donne la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f''} & \\ \sigma' \uparrow & & \uparrow \sigma'' \\ & \xrightarrow{f'} & \end{array}$$

où  $Q_\Sigma(\sigma_*) = \sigma''$  et  $Q_\Sigma(f_*) = f''$ .

■

#### V.5.12 COROLLAIRE (DÉPEND DE LA CONJECTURE V.5.3)

Si  $\Sigma$  est le plus grand système de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ , alors le plus grand (et unique) système de *Yoneda* de  $\mathcal{C}/\Sigma$  est la collection des identités de  $\mathcal{C}/\Sigma$ .

PREUVE. Soit  $\Sigma'$  un système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}/\Sigma$ , d'après le lemme V.5.10,  $Q_\Sigma^{-1}(\Sigma')$  est un système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$  et comme  $\Sigma$  est le plus grand d'entre eux, on a  $Q_\Sigma^{-1}(\Sigma') \subseteq \Sigma$  c'est-à-dire  $\Sigma' \subseteq Q_\Sigma(\Sigma) = \{id_x/x \in Ob(\mathcal{C}/\Sigma)\}$ . ■

En fait, le corollaire V.5.12 dépend d'une propriété plus faible que celle apportée par la conjecture V.5.3, il suffit en effet que  $\Sigma'$  soit l'image par  $Q_\Sigma$  d'un système de *Yoneda*  $\Sigma_*$ .

## V.6 PRÉSERVATION ET REFLET DES ISOMORPHISMES

La notion de catégorie de composantes permet par exemple de définir une relation d'équivalence entre les catégories sans boucle, et plus généralement les catégories géométriques, en posant que deux catégories sans boucle  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont équivalentes lorsque leurs catégories de composantes respectives sont isomorphes. En fait, en s'inspirant de la topologie algébrique classique, on dit plutôt que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont équivalentes lorsqu'il existe deux foncteurs

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_2 \\ & \xleftarrow{g} & \end{array}$$

qui induisent une équivalence de catégories

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \\ \mathcal{C}_1/\Sigma_1 & & \mathcal{C}_2/\Sigma_2 \\ & \xleftarrow{\tilde{g}} & \end{array}$$

où  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont respectivement les plus grands systèmes de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . On dira que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont équivalentes aux composantes près. Il est évident que deux catégories sans boucle isomorphes sont équivalentes aux composantes près. On dit que l'équivalence aux composantes près préserve la relation d'isomorphisme. Cette propriété est un "minimum exigible" en ce sens qu'une relation d'équivalence qui n'aurait pas cette propriété n'aurait, dans l'optique des thèmes développés dans cette thèse, aucun intérêt. Qu'en est-il de la réciproque? Par exemple, si  $\overrightarrow{X}_1$  et  $\overrightarrow{X}_2$  sont deux espaces ordonnés dont les catégories de composantes sont isomorphes,  $\overrightarrow{X}_1$

et  $\overrightarrow{X}_2$  ne sont pas nécessairement isomorphes. Et plus généralement, deux catégories sans boucle peuvent avoir des catégories de composantes isomorphes sans qu'elles le soient elles même. Il suffit pour se convaincre de cela, de considérer  $\overrightarrow{I}$ ,  $\{*\}$  et leurs catégories fondamentales. Ainsi, l'équivalence aux composantes près ne reflète pas la relation d'isomorphisme. Cela signifie que l'équivalence aux composantes près est strictement plus grossière que la relation d'isomorphisme qui est, quant à elle, beaucoup trop fine.

---

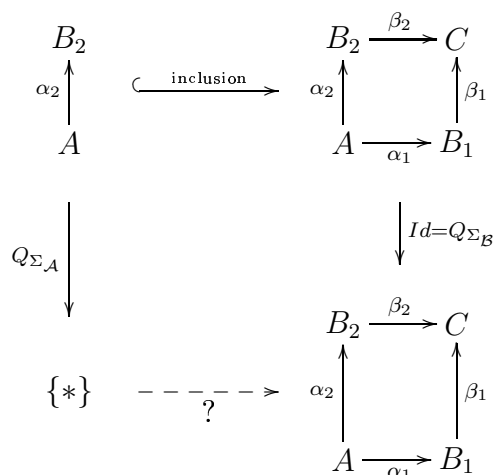
 THÉORÈME DE VAN KAMPEN POUR  
 LES CATÉGORIES DE COMPOSANTES

Le but de ce chapitre est d'établir un théorème qui affirme que certaines sommes amalgamées dans  $\text{PoSpc}$  sont préservées par passage à la catégorie des composantes. Une partie de la preuve sera donnée directement par le théorème de *Van Kampen* pour le foncteur  $\overrightarrow{\pi}_1$  de  $\text{PoSpc}$  vers  $\text{LfCat}$  (proposition III.5.1). L'idée naïve est de composer à gauche de  $\overrightarrow{\pi}_1$  un foncteur  $\overrightarrow{\pi}_0$  qui associe à chaque catégorie sans boucle sa catégorie des composantes et qui, de plus, possède un adjoint à droite : le foncteur  $\overrightarrow{\pi}_0$  préserve alors toutes colimites donc en particulier les sommes amalgamées... La mise en oeuvre de cette idée nécessitera quelques aménagements qui se manifesteront, dans l'énoncé final, par l'ajout d'hypothèses très naturelles à celle de la proposition III.5.1.

## VI.1 LE PROBLÈME DE LA FONCTORIALITÉ

Le problème qui se pose est de savoir si la définition IV.3.12 induit un foncteur défini sur  $\text{Cat}$  (ou l'une de ses sous-catégories  $\mathbf{X}$ ) compatible avec les foncteurs  $Q_\Sigma$  (voir proposition IV.1.4) et s'il est possible de préciser sa catégorie d'arrivée, c'est-à-dire de trouver une sous-catégorie  $\mathbf{Y}$  de  $\text{Cat}$  qui contienne la catégorie de composantes de tout objet de  $\mathbf{X}$ . Plus formellement, on voudrait un foncteur "catégorie de composantes"  $\overrightarrow{\pi}_0$  qui à chaque objet de  $\mathbf{X}$  associe sa catégorie de composantes. On voudrait de surcroît que la collection des  $(Q_{\Sigma_C})_C$  où  $\Sigma_C$  est le plus grand système de morphismes *Yoneda* inversibles de  $\mathcal{C}$ , soit une transformation naturelle de  $Id_{\mathbf{Y}}$  vers  $I \circ \overrightarrow{\pi}_0$  ou bien de  $I \circ \overrightarrow{\pi}_0$  vers  $Id_{\mathbf{Y}}$  où  $I$  serait l'inclusion de  $\mathbf{Y}$  dans  $\text{Cat}$ . On cherche bien sûr à ce que ce foncteur soit en fait un adjoint à gauche ou à droite.

La réponse à la première question semble être non comme le montre l'exemple suivant : on note  $\mathcal{A}$  la catégorie de gauche et  $\mathcal{B}$  celle de droite. Toutes les deux sont des catégories libres donc géométriques (voir la proposition IV.3.17). Tous les morphismes de  $\mathcal{A}$  sont inversibles au sens de *Yoneda* et  $Mo(\mathcal{A})$  est le plus grand système de *Yoneda* de  $\mathcal{A}$ . A l'inverse, hormis les identités, aucun morphisme de  $\mathcal{B}$  n'est inversible au sens de *Yoneda* et la collection des identités de  $\mathcal{B}$  est le plus grand système de *Yoneda* de  $\mathcal{B}$ . Il s'ensuit que la catégorie de composantes de  $\mathcal{A}$  est  $\{*\}$ , alors que celle de  $\mathcal{B}$  est (à isomorphisme près)  $\mathcal{B}$ .



Si la construction "catégorie des composantes" était "fonctorielle" et "compatible avec les  $Q_{\Sigma}$ ", l'inclusion décrite par le schéma ci-dessus devrait être transformée en un foncteur de  $\{*\}$  vers  $\mathcal{B}$  qui fasse commuter le carré, ce qui est impossible puisque l'une des deux composées envoie  $\alpha_2$  sur  $\alpha_2$  tandis que la seconde, si la flèche étiquetée d'un point d'interrogation existait, devrait envoyer  $\alpha_2$  sur une identité. Le problème est que le foncteur d'inclusion envoie deux objets appartenant à une même composante sur deux objets n'appartenant pas à une même composante. Même s'il existe un foncteur dont la partie objet consiste à envoyer une petite catégorie sur sa catégorie de composantes, il ne peut pas être compatible avec les petits foncteurs  $Q_{\Sigma}$  ou encore, en termes catégoriques, la famille constituée par les des petits foncteurs  $Q_{\Sigma}$  ne peut pas être une transformation naturelle de l'identité vers ce foncteur. Ceci est une conséquence du fait que la notion d'inversibilité au sens de *Yoneda* dépend directement de la catégorie qui contient le morphisme considéré. On "contourne" le problème de la façon suivante : on définit la catégorie  $\text{CatSys}$  comme celle dont les objets sont les couples  $(\mathcal{C}, \Sigma)$  où  $\Sigma$  est un système de *Yoneda* sur la petite catégorie  $\mathcal{C}$  et les morphismes de  $(\mathcal{C}_1, \Sigma_1)$  vers  $(\mathcal{C}_2, \Sigma_2)$  sont les éléments de  $\text{Cat}[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$  tels que pour tout  $\sigma$  appartenant à  $\Sigma_1$ ,  $f(\sigma)$  appartient à  $\Sigma_2$ . Dans ce cas, pour chaque couple  $(\mathcal{C}, \Sigma)$ , on choisit un représentant du quotient de  $\mathcal{C}$  par  $\Sigma$  que l'on note  $\overrightarrow{\pi}_0(\mathcal{C}, \Sigma)$ ; si  $f$  est un morphisme de  $\text{CatSys}$  de  $(\mathcal{C}_1, \Sigma_1)$  vers  $(\mathcal{C}_2, \Sigma_2)$ , alors par définition,  $\overrightarrow{\pi}_0(f)$  est l'unique petit foncteur  $g$  de  $\overrightarrow{\pi}_0(\mathcal{C}_1, \Sigma_1)$  vers  $\overrightarrow{\pi}_0(\mathcal{C}_2, \Sigma_2)$  tel que  $Q_{\Sigma_2} \circ f = g \circ Q_{\Sigma_1}$  : les petits foncteurs  $Q_{\Sigma_1}$ ,  $Q_{\Sigma_2}$  et  $g$  sont donnés par la proposition IV.1.4 et la functorialité de  $\overrightarrow{\pi}_0$  est alors une conséquence de l'unicité de  $g$ . Notons que la catégorie  $\text{CatSys}$  est similaire à la catégorie  $\text{Pair}(\mathcal{C})$  décrite dans [3] et [5], en dépit du fait que l'utilisation que l'on en fait ici est sensiblement différente de celle qui en est faite dans les ouvrages précédemment cités. On peut donc voir les objets de  $\text{CatSys}$  comme des inclusions

$$\Sigma \hookrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{i_{\Sigma}} \mathcal{C}$$

et les morphismes de  $\text{CatSys}$  de  $(\mathcal{C}, \Sigma)$  vers  $(\mathcal{C}', \Sigma')$  comme des paires de foncteurs

$$(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}', \Sigma \xrightarrow{G} \Sigma')$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma' & \xrightarrow{i_{\Sigma'}} & \mathcal{C}' \\ G \uparrow & & \uparrow F \\ \Sigma & \xrightarrow{i_{\Sigma}} & \mathcal{C} \end{array}$$

## VI.2 CAS DES PETITES CATÉGORIES SANS BOUCLE

Cette section est consacrée un résultat dont traite l'article [46] : il s'avère *a posteriori* que seul un cas particulier de ce résultat est ici utile. On définit la catégorie  $\text{LfCatSys}$  comme la sous-catégorie pleine de  $\text{CatSys}$  dont les objets sont les couples  $(\mathcal{C}, \Sigma)$  où  $\mathcal{C}$  est sans boucle. Dans le théorème qui suit, on note  $\text{Idt}(\mathcal{C})$  l'ensemble des identités de la petite catégorie  $\mathcal{C}$ .

### VI.2.1 THÉORÈME (LE FONCTEUR CATÉGORIE DE COMPOSANTES)

On note  $U$  le foncteur d'oubli de  $\text{LfCatSys}$  vers  $\text{LfCat}$ .

Etant donné un objet  $\mathcal{C}$  de  $\text{LfCat}$ , on pose  $F(\mathcal{C}) := (\mathcal{C}, \text{Idt}(\mathcal{C}))$  et  $\overrightarrow{\pi}_0(\mathcal{C}, \Sigma) := \mathcal{C}/_{\Sigma}$ , définissant ainsi les parties objets des foncteurs  $F$  et  $\overrightarrow{\pi}_0$ .

Etant donné un morphisme  $f$  de  $\text{LfCat}[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ ,  $F(f)$  est l'unique morphisme appartenant à  $\text{LfCatSys}[(\mathcal{C}_1, \text{Idt}(\mathcal{C}_1)), (\mathcal{C}_2, \text{Idt}(\mathcal{C}_2))]$  induits par  $f$ , c'est-à-dire que  $U(F(f)) = f$ , et enfin, pour tout morphisme  $f$  appartenant à  $\text{LfCatSys}[(\mathcal{C}_1, \Sigma_1), (\mathcal{C}_2, \Sigma_2)]$ , on pose  $\overrightarrow{\pi}_0(f) := f_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ <sup>1</sup>.

On a alors  $\overrightarrow{\pi}_0 \dashv F \dashv U$

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ & \curvearrowright & \\ \text{LfCatSys} & \xleftarrow{F} & \text{LfCat} \\ & \curvearrowleft & \\ & \overrightarrow{\pi}_0 & \end{array}$$

PREUVE. D'après le théorème IV.3.10, le plus petit système de *Yoneda* d'une petite catégorie  $\mathcal{C}$  est l'ensemble de ses isomorphismes, or ici, la catégorie  $\mathcal{C}$  est sans boucle donc  $\text{Idt}(\mathcal{C})$  est son plus petit système de *Yoneda* : il s'ensuit trivialement que  $F$  est l'adjoint à gauche de  $U$  et que l'unité de cette adjonction est une identité. Montrons maintenant que  $\overrightarrow{\pi}_0$  est l'adjoint à gauche de  $F$  et que l'unité de cette adjonction est donnée par la collection des foncteurs quotients  $Q_{\Sigma}$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}/_{\Sigma}$  (proposition IV.1.4) qui induisent des morphismes de  $\text{LfCatSys}$  de  $(\mathcal{C}, \Sigma)$  vers  $(\mathcal{C}/_{\Sigma}, \text{Idt}(\mathcal{C}/_{\Sigma}))$ , il faut ici s'assurer du fait que  $\mathcal{C}/_{\Sigma}$  soit bien une catégorie sans boucle ce qui est garanti par le corollaire V.4.10. Si  $f$  est un morphisme de  $\text{LfCatSys}$  de  $(\mathcal{C}, \Sigma)$  vers  $(\mathcal{C}', \text{Idt}(\mathcal{C}'))$ , alors toujours d'après la proposition IV.1.4, il existe un unique foncteur  $g$  de  $\mathcal{C}/_{\Sigma}$  vers  $\mathcal{C}'$  tel que  $f = g \circ Q_{\Sigma}$  et il est clair que  $g$  induit un unique morphisme de  $\text{LfCatSys}[(\mathcal{C}, \text{Idt}(\mathcal{C})), (\mathcal{C}', \text{Idt}(\mathcal{C}'))]$ , d'où l'adjonction annoncée. ■

<sup>1</sup>voir le lemme IV.1.4 pour les notations  $f/_{\Sigma}$  et  $f/_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ .

## VI.3 APPLICATIONS

D'après le théorème VI.2.1, le foncteur  $\overrightarrow{\pi}_0$  est un adjoint à gauche, il préserve donc toutes les colimites et en particulier les sommes amalgamées. On peut maintenant établir un théorème à la *Van Kampen* pour les catégories de composantes d'espaces partiellement ordonnés.

### VI.3.1 THÉORÈME (DE *Van Kampen* POUR $\overrightarrow{\pi}_0$ )

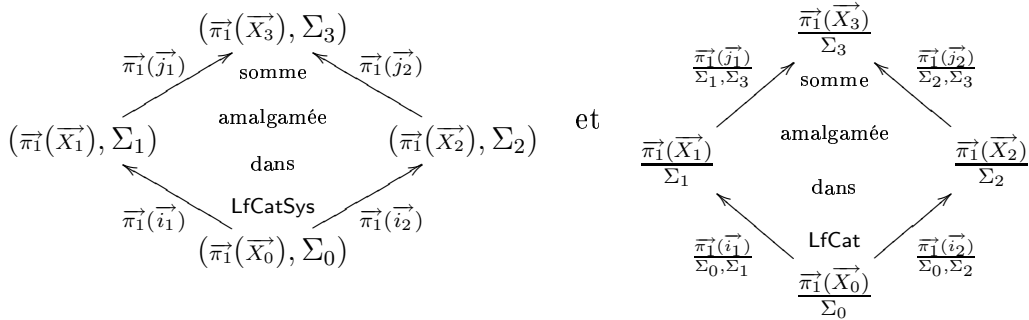
Soient  $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{X}_2$  deux sous-espaces d'un espace ordonné  $\overrightarrow{X}_3$  (i.e. un objet de  $Ob(\text{PoSpc})$ ) tels que l'espace topologique sous-jacent de  $\overrightarrow{X}_3$  soit la réunion des intérieurs des espaces topologiques sous-jacents de  $\overrightarrow{X}_1$  et de  $\overrightarrow{X}_2$ . Posons en outre  $\overrightarrow{X}_0 := \overrightarrow{X}_1 \cap \overrightarrow{X}_2$  puis  $\overrightarrow{i}_1 : \overrightarrow{X}_0 \hookrightarrow \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{i}_2 : \overrightarrow{X}_0 \hookrightarrow \overrightarrow{X}_2, \overrightarrow{j}_1 : \overrightarrow{X}_1 \hookrightarrow \overrightarrow{X}_3$  et  $\overrightarrow{j}_2 : \overrightarrow{X}_2 \hookrightarrow \overrightarrow{X}_3$  les inclusions canoniques. Supposons de plus que  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  soient respectivement des systèmes de *Yoneda* de  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_1)$  et de  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_2)$  et que  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{j}_1)(\Sigma_1) \uplus \overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{j}_2)(\Sigma_2)$  (que l'on notera aussi  $\Sigma_3$ ) soit un système de *Yoneda* de  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_3)$ . Supposons enfin que

$$\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{i}_1)(\Sigma_0) \subseteq \Sigma_1 \text{ et } \overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{i}_2)(\Sigma_0) \subseteq \Sigma_2$$

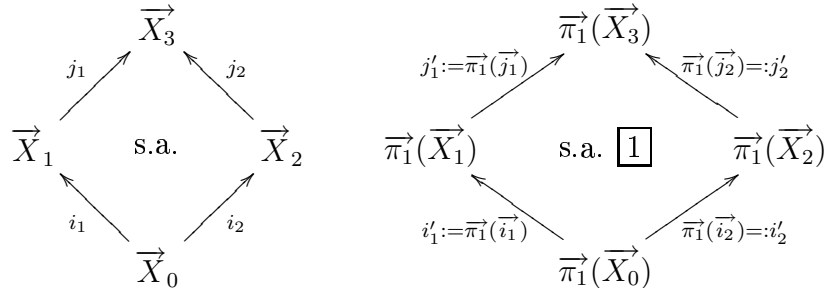
i.e.  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{i}_1), \overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{i}_2)$  sont des morphismes de  $\text{LfCatSys}$  avec les notations du théorème VI.2.1.

**Alors**

$\overrightarrow{i}_1, \overrightarrow{i}_2, \overrightarrow{j}_1$  et  $\overrightarrow{j}_2$  induisent (en prenant leurs images par le foncteur  $\overrightarrow{\pi}_1$ ) les morphismes  $\overrightarrow{i}'_1, \overrightarrow{i}'_2, \overrightarrow{j}'_1$  et  $\overrightarrow{j}'_2$  de  $\text{LfCatSys}$  et on a



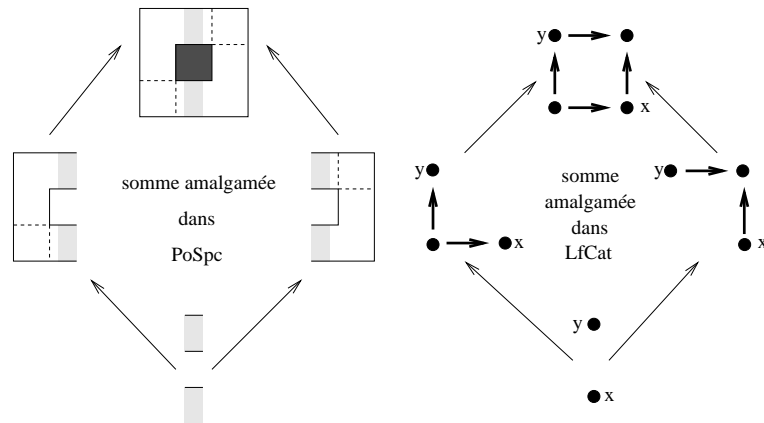
PREUVE. La proposition III.5.1 fournit des sommes amalgamées dans  $\text{PoSpc}$  et  $\text{LfCat}$  :



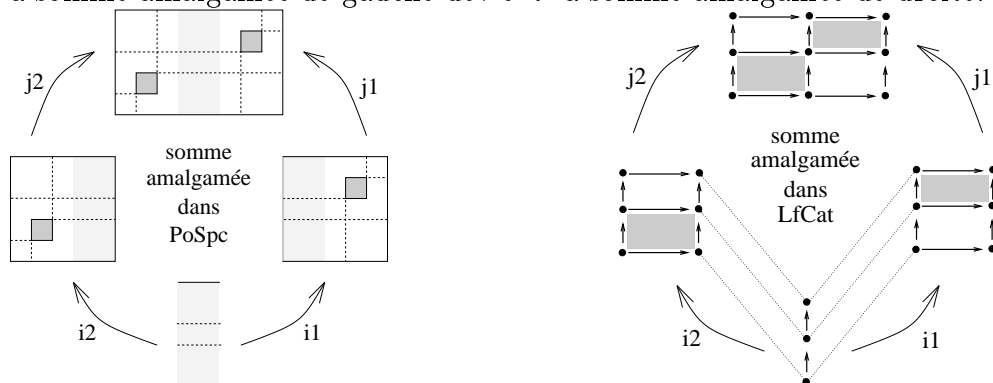
Il nous faut encore prouver que  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_0), \overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_1), \overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_2)$  et  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_3)$ , munis respectivement de  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma_3$ , induisent des sommes amalgamées dans  $\text{LfCatSys}$ . Etant donné  $f_1 : (\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_1), \Sigma_1) \longrightarrow (\mathcal{C}, \Sigma)$  et  $f_2 : (\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X}_2), \Sigma_2) \longrightarrow (\mathcal{C}, \Sigma)$  deux morphismes de  $\text{LfCatSys}$

tels que  $f_1 \circ i'_1 = f_2 \circ i'_2$ , en vertu de la somme amalgamée  $\boxed{1}$ , il existe un unique morphisme (de  $\mathbf{LfCat}$ )  $h : \overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{X_3}) \rightarrow \mathcal{C}$ , tel que  $f_1 = h \circ j'_1$  et  $f_2 = h \circ j'_2$ . Il reste à voir que  $h$  induit un morphisme de  $\mathbf{LfCatSys}$ , c'est-à-dire que  $h(\Sigma_3) \subseteq \Sigma$ . Par hypothèse,  $\Sigma_3 = j'_1(\Sigma_1) \uplus j'_2(\Sigma_2)$  ainsi, chaque élément de  $\Sigma_3$  peut être écrit comme  $j'_2(\alpha_{2n+1}) \cdot j'_1(\alpha_{2n}) \cdot \dots \cdot j'_2(\alpha_1) \cdot j'_1(\alpha_0)$  où quel que soit l'indice  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, n\}$ , on a  $\alpha_{2k} \in \Sigma_1$  et  $\alpha_{2k+1} \in \Sigma_2$ , alors  $h(j'_2(\alpha_{2n+1}) \cdot j'_1(\alpha_{2n}) \cdot \dots \cdot j'_2(\alpha_1) \cdot j'_1(\alpha_0)) = (h \circ j'_2)(\alpha_{2n+1}) \cdot (h \circ j'_1)(\alpha_{2n}) \cdot \dots \cdot (h \circ j'_2)(\alpha_1) \cdot (h \circ j'_1)(\alpha_0) = f_2(\alpha_{2n+1}) \cdot f_1(\alpha_{2n}) \cdot \dots \cdot f_2(\alpha_1) \cdot f_1(\alpha_0) \in \Sigma_3$  puisque  $f_1$  et  $f_2$  sont des morphismes de  $\mathbf{LfCatSys}$ . Donc  $h$  induit bien un morphisme de  $\mathbf{LfCatSys}$  de  $(\overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{X_3}), \Sigma_3)$  vers  $(\mathcal{C}, \Sigma)$ . On a ainsi une somme amalgamée dans  $\mathbf{LfCatSys}$ . Maintenant, en se référant au théorème VI.2.1, on sait que  $\overrightarrow{\pi_0}$  est un adjoint à gauche et donc qu'il préserve toutes les colimites et en particulier les sommes amalgamées. ■

Notons que le théorème VI.3.1 ne donne pas nécessairement le plus grand système de *Yoneda* de  $\overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{X_3})$ , il faut donc le deviner de façon à pouvoir choisir des sous-systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  appropriés. Le choix de  $\Sigma_0$  est sans importance, en effet, une fois que  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont fixés, il est possible de prendre pour  $\Sigma_0$  le plus grand système de *Yoneda* de  $\overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{X_0})$  satisfaisant  $\overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{i_1})(\Sigma_0) \subseteq \Sigma_1$  et  $\overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{i_2})(\Sigma_0) \subseteq \Sigma_2$ . On donne ci-dessous une illustration très simple du théorème VI.3.1.



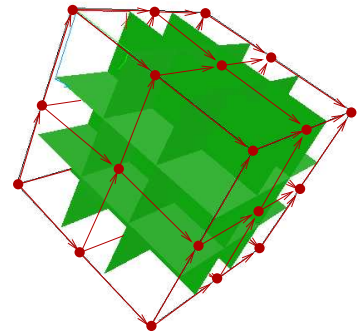
Revenons à l'exemple du rectangle avec deux trous : ci-dessous, d'après le théorème VI.3.1, la somme amalgamée de gauche devient la somme amalgamée de droite.



Sur la figure ci-dessus, on a grisé les rectangles qui ne sont pas commutatifs. Les trous de la forme géométrique sont représentés par des carrés de la catégorie de composantes qui ne commutent pas.



En appliquant le théorème VI.3.1 on peut également prouver que la catégorie de composantes du cube dirigé troué en son centre possède 26 objets<sup>a</sup>. On peut la représenter dans  $\mathbb{R}^3$  en mettant un objet au “centre” de chaque sommet, arête et face (8 sommets + 12 arcs + 6 faces = 26 objets) de  $\overrightarrow{[0, 1]^3}$ . Les morphismes sont engendrés par les flèches d’un point vers ses “plus proches voisins dans le futur”. Par exemple, ceux de  $(0, 0, 0)$  sont  $(0, 0, \frac{1}{2})$ ,  $(0, \frac{1}{2}, 0)$  et  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$  alors que  $(1, 1, 1)$  n’en a aucun. Pour pouvoir appliquer le théorème VI.3.1, on sépare le cube en deux parties de sorte que, en suivant les notations de la proposition II.2.6,  $X_0 := ]\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon[ \times [0, 1] \times [0, 1]$ . C’est en fait l’analogie, en dimension 3, de l’exemple précédent.




---

<sup>a</sup>Intuitivement, cette catégorie de composantes a un objet pour chaque élément visible d’un *Rubik’s* cube.

Pour clore la première partie, on va donner des exemples de calculs de catégories de composantes et ainsi vérifier que l'on obtient des résultats en accord avec l'intuition qui a motivé la théorie décrite dans les chapitres précédents.

Dans tout ce qui suit, les préordres (voir A.1.3) et donc à plus forte raison les ensembles partiellement ordonnés (voir A.1.3), seront vus comme des petites catégories selon le principe décrit dans A.1.3, on peut aussi consulter [9] ou [59].

### VII.0.2 LEMME

Etant donné un ensemble partiellement ordonné  $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ , tout morphisme de  $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$  est inversible au sens de *Yoneda*.

PREUVE. Quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{P}$ , l'ensemble  $\mathbb{P}[x, y]$  est soit vide soit réduit à un singleton. ■

## VII.1 CORAUX

Dans cette section, nous déterminons la catégorie de composantes d'un corail. La définition de corail est une variation de la notion d'arbre que l'on trouve habituellement dans les manuels de cours d'informatique. En perspective de l'étude de la notion de branchement que l'on souhaite faire, c'est de mon point de vue la structure la plus naturelle. On rappelle que deux éléments  $a$  et  $b$  d'un ensemble ordonné  $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$  sont dits **comparables** lorsque l'on a  $a \sqsubseteq b$  ou  $b \sqsubseteq a$ ; dans le reste de ce chapitre,  $a \parallel b$  signifie que  $a \not\sqsubseteq b$  et  $b \not\sqsubseteq a$ , c'est-à-dire que  $a$  et  $b$  ne sont pas comparables. Pour tout sous-ensemble  $\mathbb{A}$  d'un ensemble partiellement ordonné  $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ , on note  $\mathbb{M}\mathbb{A} := \{x \in \mathbb{P} \mid \forall a \in \mathbb{A} \ a \sqsubseteq x\}$  et de façon duale  $\mathbb{m}\mathbb{A} := \{x \in \mathbb{P} \mid \forall a \in \mathbb{A} \ a \geq x\}$ . Un élément  $x$  de  $\mathbb{P}$  est dit **minimal** dans  $\mathbb{P}$  lorsque

$$\forall y \in \mathbb{P}, \ y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y.$$

De façon duale, un élément  $x$  de  $\mathbb{P}$  est dit **maximal** dans  $\mathbb{P}$  lorsque

$$\forall y \in \mathbb{P}, y \geq x \Rightarrow x = y.$$

Avant de formaliser ce que l'on entend par "corail", remarquons un fait simple : étant donnés deux éléments  $a, b$  d'un ensemble partiellement ordonné  $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ , si  $M\{a, b\} = \emptyset$  ou  $m\{a, b\} = \emptyset$ , alors  $a \parallel b$ . En général la réciproque est fautive, par exemple, dans un treillis  $\mathbb{L}$ ,  $M\{a, b\} \neq \emptyset$  et  $m\{a, b\} \neq \emptyset$  bien que  $\mathbb{L}$  ne soit pas nécessairement linéaire.

### VII.1.1 DÉFINITION

Un **corail** est un ensemble partiellement ordonné  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  tel que

1. quels que soient les éléments  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{T}$ , si  $a \parallel b$ , alors au moins un des ensembles  $m\{a, b\}$  et  $M\{a, b\}$  est vide,
2. quels que soient les éléments  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{T}$ , tout élément  $x$  de  $M\{a, b\}$  est minoré par un élément minimal de  $M\{a, b\}$ ,
3. quels que soient les éléments  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{T}$ , tout élément  $x$  de  $m\{a, b\}$  est majoré par un élément maximal de  $m\{a, b\}$ .

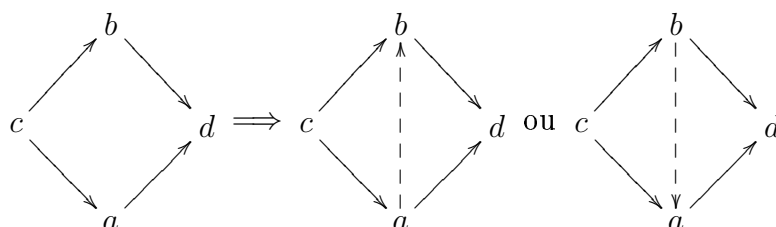
Notons que si  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  est un corail, alors  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)^{op}$  l'est aussi. Cette dernière propriété est bien sûr fautive lorsque l'on se réfère à la définition d'arbre des informaticiens. L'idée sous-jacente de la notion de catégorie de composantes est une classification des structures dirigées au "branchement" près. Comme nous le verrons, ce fait est tout spécialement intuitif dans le contexte des coraux. Les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> axiomes de la définition VII.1.1 des coraux nous permettent de distinguer les points où "un choix doit être fait", c'est-à-dire là où l'on rencontre un branchement. Remarquons aussi que le 1<sup>er</sup> axiome de la définition VII.1.1 est équivalent à l'assertion ci-dessous :

s'il existe deux éléments  $c$  et  $d$  de  $\mathbb{T}$  tels que  $c \sqsubseteq a \sqsubseteq d$  et  $c \sqsubseteq b \sqsubseteq d$ , alors  $a$  et  $b$  sont comparables.

### VII.1.2 DÉFINITION

Soit un corail  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$ . Par définition, un **point de branchement dans le futur** de  $\mathbb{T}$  (ou en abrégé **pbf**) est un élément maximal de  $m\{a, b\}$  pour quelque  $a, b \in \mathbb{T}$  tels que  $a \parallel b$ . De façon duale, un **point de branchement dans le passé** de  $\mathbb{T}$  (ou en abrégé **pbp**) est un élément minimal de  $M\{a, b\}$  pour quelque  $a, b \in \mathbb{T}$  tels que  $a \parallel b$ .

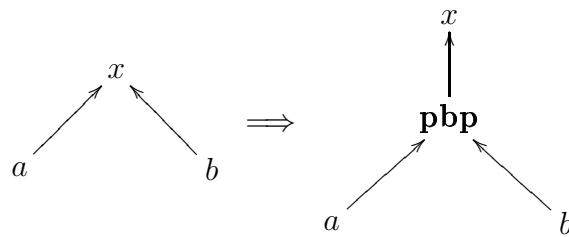
Graphiquement, le 1<sup>er</sup> axiome de la définition VII.1.1 s'exprime



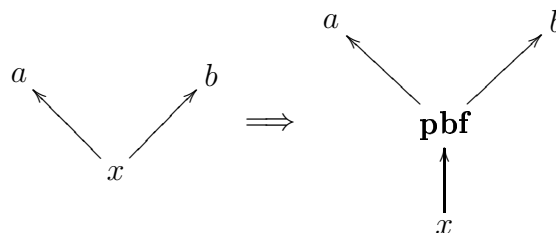
qui peut être écrit linéairement

$$c \longrightarrow a \dashrightarrow b \longrightarrow d \text{ ou } c \longrightarrow b \dashrightarrow a \longrightarrow d$$

En un certain sens, il n'y a pas de "2-cellules". Le 2<sup>ème</sup> axiome peut être vu comme



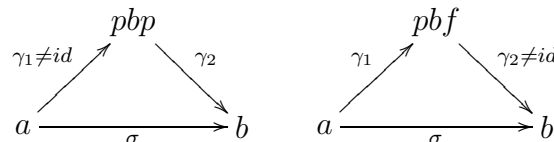
et le 3<sup>ème</sup>



Le théorème suivant formalise l'idée que les membres du plus grand système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* d'un corail sont les morphismes qui ne traversent aucun point de branchement, autrement dit, ceux le long desquels on a pas de choix à faire.

### VII.1.3 DÉFINITION

Soit un corail  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$ . On dit qu'un morphisme  $a \xrightarrow{\sigma} b$  **traverse un pbp** (respectivement un **pbf**) lorsque l'on a l'un au moins des deux diagrammes commutatifs suivants.



On dit que  $\sigma$  traverse un **point de branchement (pb)** si il traverse un **pbp** ou un **pbf**.

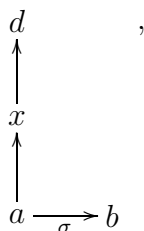
On trouve également dans [39] une notion de point de branchement basée sur les outils développés dans l'article. Les liens entre ces deux notions ne sont pas encore très clairs.

### VII.1.4 THÉORÈME

Etant donné un corail  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$ , il existe un plus grand système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* de  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$ , de plus, ses éléments sont les morphismes de  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  qui ne traversent aucun point de branchement. Nous dirons qu'un morphisme de  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  est **anodin** (dans  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$ ) s'il appartient au plus grand système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* de  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$ .

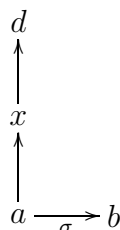
**PREUVE.** 1<sup>ère</sup> étape : Si  $\sigma$  traverse un point de branchement, il ne peut pas être anodin. Supposons que  $a \xrightarrow{\sigma} b$  traverse un point de branchement dans la futur  $x$ . Alors par définition VII.1.2 d'un pbf,  $x$  est un élément maximal de  $m\{c, d\}$  pour quelque  $c, d \in \mathbb{T}$  tels que  $c \parallel d$ . Il nous faut prendre trois cas en compte :  
si  $c \sqsubseteq b$ , alors nécessairement  $d \not\sqsubseteq b$ , sinon, puisque nous avons déjà  $a \sqsubseteq c$  et  $a \sqsubseteq d$ ,

nous devrions aussi avoir  $c \not\sqsubseteq d$  car  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  est un corail, voir le 1<sup>er</sup> axiome de la définition VII.1.1. On considère alors le diagramme qui suit:



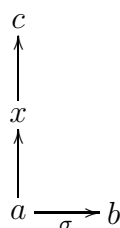
il n'existe pas de  $z \in \mathbb{T}$  tel que  $d \sqsubseteq z$  et  $z \sqsubseteq b$ , sinon, par le 1<sup>er</sup> axiome de la définition VII.1.1, on aurait ( $d \sqsubseteq b$  ou  $b \sqsubseteq d$ ), i.e.  $b \sqsubseteq d$  puisque le second cas est impossible. Mais alors, on aurait  $c \sqsubseteq b$  et  $b \sqsubseteq d$ , et donc  $c \sqsubseteq d$  ce qui est impossible car, par hypothèse,  $c \not\sqsubseteq d$ . Il s'ensuit que  $\sigma$  ne peut pas être un morphisme anodin.

Si  $b \sqsubseteq c$ , alors nécessairement  $b \not\sqsubseteq d$ , sinon on aurait  $x \sqsubseteq b$  et  $b \in m\{c, d\}$ , donc, puisque  $x$  est un élément maximal de  $\{c, d\}$ , nous aurions  $x = b$ , ce qui contredit le fait que  $\sigma$  traverse  $x$  comme cela était supposé au début de la preuve. Considérons alors



il n'existe pas de  $z \in \mathbb{T}$  tel que  $d \sqsubseteq z$  et  $z \sqsubseteq b$ , sinon, par le 1<sup>er</sup> axiome de la définition VII.1.1, on aurait ( $d \sqsubseteq b$  ou  $b \sqsubseteq d$ ), i.e.  $d \sqsubseteq b$  puisque le second cas est impossible. Mais alors on aurait  $b \sqsubseteq c$  et  $d \sqsubseteq b$ , donc  $d \sqsubseteq c$  ce qui est impossible car, par hypothèse,  $c \not\sqsubseteq d$ . Il s'ensuit que  $\sigma$  ne peut pas être un morphisme anodin.

Si  $b \not\sqsubseteq c$ , alors on considère

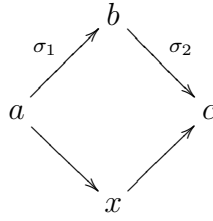


il n'existe pas de  $z \in \mathbb{T}$  tel que  $c \sqsubseteq z$  and  $z \sqsubseteq b$ , sinon, par le 1<sup>er</sup> axiome de la définition VII.1.1, on aurait  $b \not\sqsubseteq c$ . Il s'ensuit que  $\sigma$  ne peut pas être un morphisme anodin.

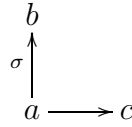
Bien sûr, en "dualisant" ce qui précède, on aurait pu supposer que  $a \xrightarrow{\sigma} b$  traverse un point de branchement dans le passé  $x$  et appliquer la même preuve que précédemment.

2<sup>ème</sup> étape : On vérifie que la famille  $\Sigma$  dont les membres sont les morphismes de  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  qui ne traversent aucun point de branchement est un système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda*. La collection de morphismes  $\Sigma$  incluse dans  $Yoneda(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  est donnée par le lemme VII.0.2. Prouvons maintenant que  $\Sigma$  est stable par composition: supposons que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  soient composables (i.e  $tgt(\sigma_1) = src(\sigma_2) = b$ ) et posons  $x$  un point de

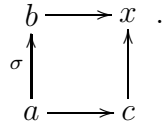
branchement tel que l'on ait le diagramme suivant



alors, puisque  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  est un corail, nous déduisons que  $b \sqsubseteq x$  ou  $x \sqsubseteq b$ . En étudiant les différents cas possibles, il vient que les seuls cas cohérents possibles sont  $x = a$  et c'est un *pbp* ou  $x = b$  et c'est un *pbf*, ainsi  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  ne traverse aucun point de branchement. Il reste à voir que la 3<sup>ème</sup> propriété de la définition IV.3.5 des systèmes de morphismes *Yoneda* inversibles est vérifiée. Concentrons nous sur le cas de la somme amalgamée, supposons que l'on a le diagramme



où  $\sigma$  ne traverse aucun point de branchement. Si  $b \parallel c$  était vérifié, alors on saurait d'après le 3<sup>ème</sup> axiome de la définition VII.1.1, que  $m$  est maximal dans  $m\{b, c\}$  tel que  $m \geq a$ , par définition,  $m$  est un point de branchement dans le futur. De plus,  $m \in m\{b, c\}$  et  $b \parallel c$  donc  $m < b$ . Ainsi  $\sigma$  traverse un point de branchement, ce qui est une contradiction. Donc  $b \not\parallel c$  ce qui nous fournit la somme amalgamée attendue, c'est-à-dire



Il reste à voir que  $c \rightarrow x$  ne traverse aucun point de branchement. Or  $\mathbb{T}$  est un corail donc nous avons  $b \sqsubseteq c$  ou  $c \sqsubseteq b^1$ . Dans le premier cas, nous avons  $c \rightarrow x = id_b$  qui ne traverse aucun point de branchement. Dans le second,  $c \rightarrow x = c \rightarrow b$  et ne traverse pas non plus de point de branchement, sinon,  $\sigma$  en traverserait un également.<sup>2</sup> Dualement nous avons la propriété pour les produits fibrés et le théorème est prouvé. ■

#### VII.1.5 DÉFINITION

Soient un corail  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  et deux éléments  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{T}$  vérifiant  $a < b$ . On suppose de plus que  $a$  et  $b$  sont respectivement des points de branchement dans le passé et dans le futur tels que  $Ma \cap mb \setminus \{a, b\}$  ne contienne aucun point de branchement. La **brindille** de  $\mathbb{T}$  allant de  $a$  vers  $b$ , notée  $T_{a,b}$ , est définie de la manière suivante

$T_{a,b}$	$a$ est un <b>pbf</b>	$a$ n'est pas un <b>pbf</b>
$b$ est un <b>pbp</b>	$Ma \cap mb \setminus \{a, b\}$	$Ma \cap mb \setminus \{b\}$
$b$ n'est pas un <b>pbp</b>	$Ma \cap mb \setminus \{a\}$	$Ma \cap mb$

<sup>1</sup>comme nous le verrons, c'est l'argument qui rend impossible la généralisation du théorème VII.1.4

<sup>2</sup>implicitement, on a prouvé que la famille des morphismes qui ne traversent aucun point de branchement est pure dans  $\mathbb{T}$

VII.1.6 LEMME

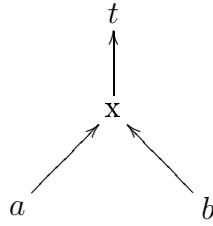
Toute brindille  $T$  d'un corail  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  est pure dans  $\mathbb{T}$ .

PREUVE. C'est une conséquence directe de la définition VII.1.5 de brindille. ■

VII.1.7 LEMME

Etant données deux brindilles  $T, T'$  d'un corail  $\mathbb{T}$ , on a  $T = T'$  ou  $T \cap T' = \emptyset$

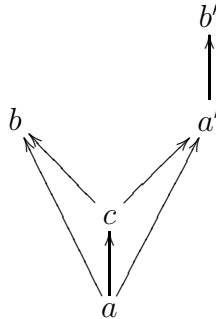
PREUVE. Prenons deux brindilles  $T_{a,b}$  et  $T_{a',b'}$  et supposons, par exemple, que  $a \parallel a'$ . Montrons que  $T_{a,b} \cap T_{a',b'} = \emptyset$ . Dans le cas contraire, nous aurions  $t \in M\{a, a'\}$ , or il existe un pbp  $x$  tel que  $x \sqsubseteq t$  (car  $\mathbb{T}$  est un corail) et  $x \in M\{a, a'\}$ , schématiquement



il s'ensuit que le morphisme  $a \rightarrow t$  est dans  $T_{a,b}$  sans être anodin, ce qui est une contradiction.

De plus,  $a < a' \Rightarrow b \sqsubseteq a'$ : supposons que  $a < a'$ :

nécessairement, on a  $a' \not\prec b$ , sinon,  $T_{a,b}$  ne serait pas une brindille car  $a'$  est un point de branchement. On peut donc avoir  $a' \parallel b$  ou  $b \sqsubseteq a'$ . Mais si on avait  $a' \parallel b$ , il s'ensuivrait que  $m\{a', b\} \neq \emptyset$ , donc, comme  $\mathbb{T}$  est un corail, nous aurions un pbp  $c \in m\{a', b\}$  tel que  $c \geq a$ , schématiquement



mais alors  $T_{a,b}$  ne serait pas une brindille. Il vient  $b \sqsubseteq a'$ , dans le cas où  $b$  est égal à  $a'$ , on a  $b = a' \notin T_{a,b}$  et  $a' = b \notin T_{a',b'}$ , et dans ce cas,  $\{a' = b\}$  est une brindille à lui seul puisque  $a' = b$  est simultanément un pbp et un pbf. Dans tous les cas, on a  $T \cap T' = \emptyset$ . Un argument dual montre que si  $b \neq b'$ , alors  $T \cap T' = \emptyset$ . ■

VII.1.8 LEMME

Toute brindille est totalement ordonnée.

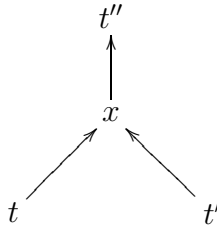
PREUVE. Soientt une brindille  $T$  d'un corail  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  et  $t_1, t_2 \in T$ , nous avons un pbp  $a$  et un pbf  $b$  tels que  $t_1, t_2 \in Ma \cap mb$ . Par définition VII.1.1 d'un corail, il s'ensuit que  $t_1 \sqsubseteq t_2$  ou  $t_2 \sqsubseteq t_1$ . ■

### VII.1.9 PROPOSITION

Etant données deux brindilles distinctes  $T$  et  $T'$  d'un corail, on a une et une seule des assertions suivantes:

- $\forall t \in T, \forall t' \in T', t < t'$ ,
- $\forall t \in T, \forall t' \in T', t > t'$ ,
- $\forall t \in T, \forall t' \in T', t \parallel t'$ .

PREUVE. Supposons que l'existence d'un élément  $t$  de  $T$  et d'un élément  $t'$  de  $T'$  tels que  $t \parallel t'$ . Etant donné  $t''$  appartenant à  $T$ , montrons que  $t'' \parallel t'$ . Supposons que  $t'' \geq t'$ , on a  $t \sqsubseteq t''$  ou  $t'' \sqsubseteq t$  d'après le lemme VII.1.8. On ne peut pas avoir  $t'' \sqsubseteq t$  car on aurait alors  $t' \sqsubseteq t'' \sqsubseteq t$  et donc  $t' \sqsubseteq t$ , ce qui est une contradiction. On ne peut pas non plus avoir  $t \sqsubseteq t''$  car alors, nous aurions un pbp  $x$  tel que



et donc  $t \rightarrow t'' \in T$  sans être anodin ce qui est encore une contradiction. Il s'ensuit que  $t'' \parallel t'$ . Bien sûr, on prouve de même qu'étant donné  $t''' \in T'$ ,  $t'' \parallel t'''$ . Donc en prenant  $t'' \in T$  et  $t''' \in T'$ , on a  $t'' \parallel t'''$ .

Supposons maintenant l'existence d'un élément  $t$  de  $T$  et d'un élément  $t'$  de  $T'$  tels que  $t \sqsubseteq t'$ . Etant donné  $t''$  appartenant à  $T$ , nous voulons prouver que  $t'' \sqsubseteq t'$ . On sait déjà que  $t'' \not\parallel t'$ , sinon, en appliquant la première partie de la preuve, nous aurions  $t \parallel t'$ . Enfin, l'assertion  $t'' \geq t'$  ne peut être satisfaite, sinon, nous aurions  $t'' \geq t' \geq t$ , donc  $t' \in T$  d'après le lemme VII.1.6. Mais ceci constitue une contradiction puisque deux brindilles distinctes sont disjointes d'après le lemme VII.1.7. ■

### VII.1.10 COROLLAIRE

L'ensemble des brindilles est ordonné par la relation  $T \sqsubseteq T'$  si et seulement si il existe un élément  $t$  de  $T$  ainsi qu'un élément  $t'$  de  $T'$  tels que  $t \sqsubseteq t'$ .

PREUVE. En vertu de la proposition VII.1.9, on a

$$\exists t \in T, \exists t' \in T', t \sqsubseteq t' \iff \forall t \in T, \forall t' \in T', t \sqsubseteq t'.$$

■

Soit un corail  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$ . Notons  $Comp(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$  la catégorie de composantes de  $(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$ . Le théorème suivant donne une description extrêmement simple de  $Comp(\mathbb{T}, \sqsubseteq)$ . C'est la raison pour laquelle il est intéressant de se pencher sur le calcul de la catégorie de composantes d'un corail. Bien sûr, tout ensemble partiellement ordonné a une catégorie de composantes en tant que catégorie sans boucle. Cependant, dans la plupart des cas, il est beaucoup plus délicat d'en donner une description.



### VII.1.11 THÉORÈME

La catégorie de composantes d'un corail est isomorphe, dans  $\mathbf{Cat}$ , à l'ensemble partiellement ordonné de ses brindilles (vu comme une petite catégorie).

PREUVE. Notons  $\Sigma$  le plus grand système de morphismes *Yoneda* inversibles d'un corail  $\mathbb{T}$ . Selon la définition VII.1.5, toute brindille est une  $\Sigma$ -composante, i.e. un élément maximal dans la famille des sous parties de  $\mathbb{T}$   $\Sigma$ -connexes. Nous avons déterminé les objets de la catégorie de composantes. Remarquons que, dans le cas des coraux, les  $\Sigma$ -zigzags sont simplement des éléments de  $\Sigma$ , en d'autres termes, tous les  $\Sigma$ -zigzags d'un corail sont de longueur au plus 1. La raison de ce phénomène est que les brindilles sont totalement ordonnées, i.e. les  $\Sigma$ -composantes sont des ordres totaux. Ainsi, étant données deux brindilles  $T, T'$ , d'après la proposition VII.1.9, on sait que l'ensemble des morphismes de  $T$  vers  $T'$  est soit  $\emptyset$  soit  $\{T \rightarrow T'\}$ . ■

## VII.2 GROUPOÏDES

Le cas des groupoïdes a déjà été traité dans les propositions V.0.30 et V.0.32, la catégorie de composantes d'un groupoïde est isomorphe à l'ensemble de ses composantes connexes. Plus précisément, une famille connexe d'un groupoïde  $\mathcal{G}$  est une famille d'objets  $C$  de ce groupoïde telle que pour tous  $x$  et  $y$  appartenant à  $C$ ,  $\mathcal{G}[x, y]$  n'est pas vide. Si de plus, pour toute famille connexe  $C'$  de  $\mathcal{G}$ , on a  $C \subseteq C' \implies C = C'$ , alors  $C$  est une composante connexe. Autrement dit, ce sont les éléments maximaux de la collection des familles connexes de  $\mathcal{G}$  ordonnée par l'inclusion.

## VII.3 TREILLIS

La notion de treillis est définie dans la section A.1.3 et correspond à celle que l'on trouve dans [73].

### VII.3.1 PROPOSITION

La catégorie de composantes d'un treillis est triviale, c'est à dire réduite à l'objet final de  $\mathbf{Cat}$ .

PREUVE. Soit un treillis  $\mathbb{L}$ . Il suffit pour conclure de prouver que le plus grand système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* de  $\mathbb{L}$  est la famille de tous les morphismes de  $\mathbb{L}$ . Nous savons déjà que dans un ensemble partiellement ordonné tout morphisme est inversible au sens de *Yoneda* (cf VII.0.2). De plus, dans un treillis, tous les produits fibrés et les sommes amalgammées existent, en effet, ils sont respectivement donnés par les bornes inférieures ( $\wedge$ ) et supérieures ( $\vee$ ). Donc la famille de tous les morphismes de  $\mathbb{L}$  est un système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda*. ■

Avant de quitter coraux et treillis, notons que tout ensemble totalement ordonné e.g.  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  ou tout ordinal (voir [57], [56], [52], [16] ou n'importe quel manuel de théorie des ensembles), est à la fois un corail et un treillis, sa catégorie de composantes est donc triviale.

## VII.4 PRÉORDRES

Rappelons qu'un préordre est un poset  $\mathbb{P}$  muni d'un relation réflexive et transitive  $\preceq$ . Cette relation n'est en général pas antisymétrique.

### VII.4.1 LEMME

Soient un préordre  $(\mathbb{P}, \preceq)$  et deux éléments  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{P}$ ,  $a \rightarrow b$  est un isomorphisme de  $\mathbb{P}$  si et seulement si  $a \preceq b$  et  $b \preceq a$  i.e.  $\mathbb{P}[b, a] \neq \emptyset$ .

PREUVE. Il suffit de noter que si  $\mathbb{P}[a, b] \neq \emptyset$  et  $\mathbb{P}[b, a] \neq \emptyset$ , alors nécessairement  $b \rightarrow a \circ a \rightarrow b = id_a$  et  $a \rightarrow b \circ b \rightarrow a = id_b$  car  $\mathbb{P}[a, a] = \{id_a\}$  et  $\mathbb{P}[b, b] = \{id_b\}$ . ■

### VII.4.2 LEMME

Soit un préordre  $(\mathbb{P}, \preceq)$ ,  $Iso(\mathbb{P})$  est pure dans  $\mathbb{P}$ . Autrement dit  $(\mathbb{P}, \preceq)$ , vu comme une catégorie, est géométrique.

PREUVE. Nous appliquons le lemme VII.4.1. Supposons que  $\mathbb{P}[a, b] \neq \emptyset$  et  $\mathbb{P}[b, a] \neq \emptyset$ , prenons  $c \in \mathbb{P}$  tel que  $a \preceq c \preceq b$ . Par transitivité de  $\preceq$ , il vient que  $\mathbb{P}[a, c]$ ,  $\mathbb{P}[c, a]$ ,  $\mathbb{P}[c, b]$ ,  $\mathbb{P}[b, c]$  ne sont pas vides. La pureté suit d'après le lemme VII.4.1. ■

Le lemme VII.4.2 nous permet de définir la catégorie de composantes de n'importe quel préordre puisqu'il suffit qu'une catégorie soit géométrique pour qu'elle admette un plus grand système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* (voir IV.3.23).

### VII.4.3 PROPOSITION

La catégorie de composantes d'un préordre est un préordre.

PREUVE. Soit un préordre  $(\mathbb{P}, \preceq)$ . Notons  $\Sigma$  sont plus grand système de morphismes *Yoneda* inversibles. D'après la remarque IV.3.6 et la proposition IV.3.3 tout morphisme de la catégorie de fractions peut être représenté par  $(\gamma, \sigma^{-1})$  où  $\sigma \in \Sigma$  (voir [25], [9] ou [24]). Considérons deux morphismes  $\alpha, \beta : C_1 \rightarrow C_2$  de la catégorie de composantes de  $\mathbb{P}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être représentés dans la catégorie de fractions  $\mathbb{P}[\Sigma^{-1}]$  par

$$\begin{array}{ccc} y & & z \\ & \swarrow \alpha' & \nearrow \beta' \\ & x & \end{array}$$

où  $y, z \in C_2$  et  $x \in C_1$ . Donc il y a un  $\Sigma$ -zigzag entre  $y$  et  $z$ , de plus, comme  $\Sigma$  admet un calcul de fractions à droite et à gauche, on peut réduire ce  $\Sigma$ -zigzag, c'est-à-dire que l'on peut compléter le diagramme précédent en un carré comme suit:

$$\begin{array}{ccc} & t & \\ \sigma \in \Sigma \nearrow & & \nwarrow \tau \in \Sigma \\ y & & z \\ \alpha' \swarrow & & \nearrow \beta' \\ & x & \end{array}$$

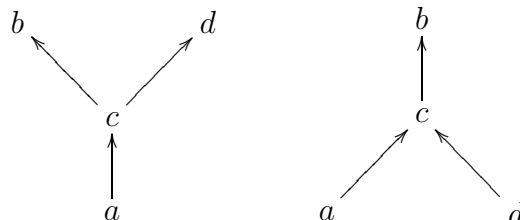
avec  $t \in C_2$ . Une fois envoyé sur la catégorie de composantes, le dernier carré donne  $\tau \circ \beta = \sigma \circ \alpha$  dans  $\mathbb{P}$  puisqu'il y a au plus un morphisme d'un objet de  $\mathbb{P}$  vers un autre. Alors  $(\tau, \beta')$  et  $(\sigma, \alpha')$  représente de même morphisme dans la catégorie de fractions  $\mathbb{P}[\Sigma^{-1}]$ , donc  $(id_t, \beta')$  et  $(id_t, \alpha')$  représente le même morphisme dans la catégorie de composantes de  $\mathbb{P}$  donc  $(\beta') \sim (\alpha')$  dans la catégorie de composantes de  $\mathbb{P}$ , d'où  $\beta = \alpha$  dans la catégorie de composantes de  $\mathbb{P}$ . ■

## VII.5 ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS

On rappelle que d'après le corollaire V.4.10, la catégorie des composantes d'un ensemble partiellement ordonné est encore un ensemble partiellement ordonné. La caractérisation du plus grand système de *Yoneda* donné par le théorème VII.1.4 peut être adaptée à une classe plus générale d'ensembles partiellement ordonnés, cependant, la description de la catégorie de composantes qui en résulte n'est pas aussi aisée qu'elle ne l'était dans le cas d'un corail.

### VII.5.1 DÉFINITION

Etant donnés deux éléments  $a \sqsubseteq b$  d'un ensemble partiellement ordonné  $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ , on dit que le morphisme  $a \rightarrow b$  bifurque dans le futur quand il existe  $c$  et  $d$  tels que  $a \sqsubseteq c \sqsubseteq b$  et  $M\{b, d\} = \emptyset$ . Dualement,  $a \rightarrow b$  bifurque dans le passé lorsqu'il existe  $c$  et  $d$  tels que  $a \sqsubseteq c \sqsubseteq b$  et  $m\{a, d\} = \emptyset$ .



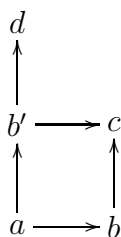
### VII.5.2 PROPOSITION

Etant donné un ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{P}$ , la famille des morphismes qui satisfont

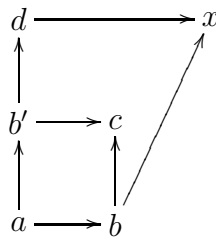
1.  $a \rightarrow b$  ne bifurque pas
2.  $\forall c \sqsubseteq b, a \wedge c$  existe dans  $\mathbb{P}$
3.  $\forall d \geq a, b \vee d$  existe dans  $\mathbb{P}$

est stable par composition.

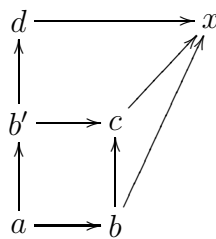
PREUVE. Supposons que  $a \rightarrow b$  et  $b \rightarrow c$  ne bifurquent pas dans le futur. Considérons  $b', d$  tels que



comme  $a \rightarrow b$  ne bifurque pas dans le futur, on a



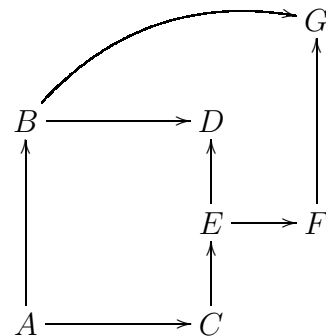
et  $b \rightarrow c$  ne bifurque pas dans le futur, donc nous avons



Il s'ensuit que  $a \rightarrow c$  ne bifurque pas dans le futur. La même preuve permet de traiter le cas des morphismes qui ne bifurquent pas dans le passé. Supposons que  $a \rightarrow b$  et  $b \rightarrow c$  satisfont la 2<sup>ème</sup> propriété, et prenons  $x \geq a$ , alors  $x \vee b$  est défini aussi bien que  $(x \vee b) \vee c = x \vee (b \vee c) = x \vee c$ , donc  $a \rightarrow c$  vérifie la 2<sup>ème</sup> propriété. La 3<sup>ème</sup> est également satisfaite pour la même raison. ■

La proposition VII.5.2 est une tentative de généralisation du théorème VII.1.4, cependant, la famille décrite dans la proposition VII.5.2 n'est pas nécessairement le plus grand système de morphismes *Yoneda* inversibles bien qu'elle soit incluse dedans. En effet, si un morphisme ne satisfait pas l'une des propriétés de la proposition VII.5.2, il n'est pas anodin puisqu'il ne satisfait pas soit la propriété de la somme amalgamée soit celle du produit fibré. Notons encore que les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> propriétés de la proposition VII.5.2 donne l'existence des sommes amalgamées et des produits fibrés le long de n'importe quelle membre de la famille décrite dans la proposition VII.5.2. Néanmoins, si  $\sigma$  est comme dans la proposition VII.5.2, on ne peut pas prouver que, dans une somme amalgamée ou un produit fibré le long de  $\sigma$ , le morphisme "parallèle" à  $\sigma$  ne bifurque pas. C'est même en général faux :

la figure de droite doit être comprise comme un ensemble partiellement ordonné où une flèche de  $A$  vers  $B$  signifie  $A \sqsubseteq B$ , tandis que l'absence de flèche indique que  $A \not\sqsubseteq B$ . On vérifie à vue que le morphisme  $A \rightarrow B$ , satisfait toutes les propriétés de la proposition VII.5.2, cependant, la somme amalgamée de  $A \rightarrow B$  le long de  $A \rightarrow C$  est  $C \rightarrow D$  qui bifurque à cause de  $E \rightarrow F$ . En dépit du fait que le plus grand système de morphismes *Yoneda* inversibles existe dans n'importe quel ensemble partiellement ordonné, il est généralement très difficile de le décrire.



Notons enfin que la difficulté décrite par la figure ci-dessus est couramment rencontrée en informatique dans les problèmes de réduction de la taille de l'espace des états.

## VII.6 LES CUBES UNITÉS DIRIGÉS

On rappelle que  $\vec{I}^n$  est le produit dans  $\text{PpSpc}$  de  $n$  copies de  $\vec{I}$ , i.e.  $[0, 1]^n$  équipé de la topologie et de l'ordre produit.

### VII.6.1 PROPOSITION

La catégorie  $\pi_1(\vec{I}^n)$  est isomorphe au treillis complet  $[0, 1]^n$  muni de l'ordre produit. Sa catégorie de composantes est donc triviale.

PREUVE. Si  $x \sqsubseteq y$ , il y a un chemin dirigé de  $x$  vers  $y$ . Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des chemins dirigés dans  $\vec{I}^n$  de  $x$  vers  $y$ , alors il en va de même de  $x \mapsto \text{Max}(\gamma_1(x), \gamma_2(x))$ . Par ailleurs  $H_1(s, x) := s \cdot \gamma_3(x) + (1 - s) \cdot \gamma_1(x)$  et  $H_2(s, x) := s \cdot \gamma_3(x) + (1 - s) \cdot \gamma_2(x)$  sont des homotopies dirigées respectivement de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$  vers  $\gamma_3$ , donc  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont dihomotopes (voir définition II.1.3).

■

Nous verrons ultérieurement que la proposition VII.6.1 peut être adaptée au cas de la dimension infinie.

## VII.7 LES SIMPLEXES ANTIDIAGONAUX DIRIGÉS

### VII.7.1 DÉFINITION

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $\nabla^n := \{(x_1, \dots, x_n) / x_1 \geq 0 ; \dots ; x_n \geq 0 ; x_1 + \dots + x_n \sqsubseteq 1\}$  équipé de la topologie et de l'ordre induits par ceux de  $[0, 1]^n$ .

### VII.7.2 PROPOSITION

La catégorie fondamentale et la catégorie de composantes de  $\nabla^n$  sont isomorphes (dans  $\text{Cat}$  et dans  $\text{PoSet}$ ) à l'ensemble partiellement ordonné  $\{(x_1, \dots, x_n) / x_1 \geq 0 ; \dots ; x_n \geq 0 ; x_1 + \dots + x_n \sqsubseteq 1\}$  avec l'ordre induit par l'ordre produit.

PREUVE. La même preuve que celle de la proposition VII.6.1 permet de déterminer la catégorie fondamentale. De plus, il est aisé de voir que tout chemin dirigé qui n'est pas constant ne peut pas satisfaire la propriété d'extension par somme amalgamée des systèmes de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* (3<sup>ème</sup> point de la définition IV.3.5). Il s'ensuit que le plus grand système de morphismes inversibles au sens de *Yoneda* ne contient que les identités et que la catégorie de composantes est isomorphe à la catégorie fondamentale. ■

Les espaces partiellement ordonnés  $\nabla^n$  sont des exemples où le passage à la catégorie de composantes ne réduit pas la taille de la catégorie fondamentale. Dans un espace ordonné  $\nabla^n$ , tout "mouvement" est une prise de décision qui réduit l'ensemble des états sur lesquels il est possible d'arriver depuis un état donné. On retrouve cet exemple pathologique pour  $n = 2$  dans [24].

## VII.8 ESPACE ORDONNÉ DE CHEMINS DIRIGÉS

Par définition,  $\vec{I}$  est le segment unité équipé de la topologie et de l'ordre classique. Posons  $\vec{I}^{\vec{I}}$  l'ensemble de chemins dirigés sur  $\vec{I}$  i.e. les applications dirigées de  $\vec{I}$  vers  $\vec{I}$ . L'ensemble ordonné  $\vec{I}^{\vec{I}}$  est équipé de la topologie compact-ouverte (voir la définition B.1.31). En outre,  $\vec{I}^{\vec{I}}$  est équipé de l'ordre point à point, i.e.  $\gamma_1 \sqsubseteq \gamma_2$  si et seulement si

quel que soit  $t$  appartenant à  $[0, 1]$ , on a  $\gamma_1(t) \sqsubseteq \gamma_2(t)$ . Il nous faut vérifier que le graphe de  $\sqsubseteq$  sur  $\vec{I}^{\vec{I}}$  est fermé, ce qui est une conséquence du fait que la topologie produit sur  $\vec{I}^{\vec{I}}$  est plus grossière que la topologie compact-ouverte. Sans aller beaucoup plus loin dans les détails, la raison en est qu'un singleton n'a qu'une topologie possible et elle est compact. A partir de maintenant,  $\vec{I}^{\vec{I}}$  désigne l'espace ordonné des chemins dirigés à valeurs dans  $\vec{I}$  avec la topologie compact-ouverte et l'ordre point à point. Notons encore que la topologie compact-ouverte sur  $\vec{I}^{\vec{I}}$  est métrique, en effet, la distance entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 \in \vec{I}^{\vec{I}}$  est donnée par  $\delta(\gamma_1, \gamma_2) := \max \{ |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| \mid t \in [0, 1] \}$ , qui est bien défini puisque  $|\gamma_2 - \gamma_1|$  est continue et  $[0, 1]$  compact.

### VII.8.1 PROPOSITION

D'une part, l'ensemble des applications dirigées de  $\vec{I}$  vers  $\vec{I}^{\vec{I}}$  équipé de la topologie compacte-ouverte et de l'ordre point à point est un espace ordonné noté  $(\vec{I}^{\vec{I}})^{\vec{I}}$ . D'autre part, l'ensemble des applications dirigées de  $\vec{I} \times \vec{I}$  vers  $\vec{I}$  équipé de la topologie compact-ouverte et de l'ordre point à point est aussi un espace ordonné noté  $(\vec{I})^{\vec{I} \times \vec{I}}$ . Ainsi, les espaces ordonnés  $(\vec{I}^{\vec{I}})^{\vec{I}}$  et  $(\vec{I})^{\vec{I} \times \vec{I}}$  sont dihoméomorphes i.e. isomorphes dans  $\text{PoSpc}$ .

PREUVE. C'est une conséquence directe d'un résultat classique de topologie qui affirme que  $[0, 1]$  muni de la topologie classique  $[0, 1]$  est exponentiable (voir la proposition A.5.9). ■

Dans le reste de cette section,  $\gamma$  désigne un élément de  $\vec{I}^{\vec{I}}$  tandis que  $\Gamma$  désigne un chemin dirigé dans  $\vec{I}^{\vec{I}}$  et  $H$  une dihomotopie dans  $\vec{I}^{\vec{I}}$ . Intuitivement,  $\gamma$  est un objet de dimension 1,  $\Gamma$  est de dimension 2 et  $H$  de dimension 3.

### VII.8.2 REMARQUE

Les chemins dirigés constants  $x \mapsto 0$  et  $x \mapsto 1$  sont respectivement les éléments maximum et minimum de  $\vec{I}^{\vec{I}}$ .

### VII.8.3 LEMME

Si  $\gamma_1 \sqsubseteq \gamma_2$ , alors on a un chemin dirigé dans  $\vec{I}^{\vec{I}}$  de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_2$ .

PREUVE. Il suffit de considérer  $\Gamma(s, x) := s \cdot \gamma_2(x) + (1-s) \cdot \gamma_1(x) = \gamma_1(x) + s \cdot (\gamma_2(x) - \gamma_1(x))$ . L'application  $\Gamma$  est clairement continue, croissante en  $s$  puisque  $\gamma_1(x) \sqsubseteq \gamma_2(x)$  et croissante en  $x$  puisque  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  le sont. ■

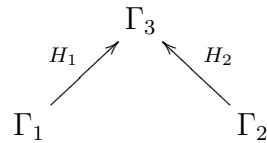
### VII.8.4 LEMME

Etant donnés  $\gamma_1 \sqsubseteq \gamma_2 \in \vec{I}^{\vec{I}}$  et  $\Gamma_1, \Gamma_2$  des dichemins dirigés dans  $\vec{I}^{\vec{I}}$  de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_2$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont dihomotopes.

PREUVE.

Posons  $\Gamma_3 := \text{Max}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ , i.e.  $\forall (s, x) \in \vec{I} \times \vec{I}$ ,  $\Gamma_3(s, x) := \text{Max}(\Gamma_1(s, x), \Gamma_2(s, x))$ ,  $\Gamma_3$  est clairement un chemin dirigé dans  $\vec{I}^{\vec{I}}$  de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_2$ . Ainsi  $H_1(t, s, x) := \Gamma_1(s, x) + t \cdot$

$(\Gamma_3(s, x) - \Gamma_1(s, x))$  et  $H_2(t, s, x) := \Gamma_2(s, x) + t \cdot (\Gamma_3(s, x) - \Gamma_2(s, x))$  sont des homotopies dirigées dans  $\vec{I}\vec{I}$ , respectivement de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  vers  $\Gamma_3$ . ■



### VII.8.5 THÉORÈME

L'ensemble de morphismes  $\pi_1(\vec{I}\vec{I})[\gamma_1, \gamma_2]$  est un singleton si  $\gamma_1 \sqsubseteq \gamma_2$ , dans le cas contraire, c'est l'ensemble vide. En d'autres termes, la catégorie fondamentale de  $\vec{I}\vec{I}$  est isomorphe au treillis  $\vec{I}\vec{I}$  muni de l'ordre point à point. En particulier, sa catégorie de composantes est triviale.

PREUVE. Si  $\gamma_1 \sqsubseteq \gamma_2$ , alors les lemmes VII.8.3 et VII.8.4 impliquent qu'il existe un unique, à dihomotopie près, morphisme de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_2$ . Si  $\gamma_1 \not\sqsubseteq \gamma_2$ , alors il ne peut pas y avoir de chemin dirigé de  $\gamma_1$  vers  $\gamma_2$ . Les éléments maximum et minimum du treillis sont donnés par la remarque VII.8.2. ■

# Partie II

## PROGRAMMATION

### D'UN OUTIL D'ANALYSE STATIQUE





On va maintenant appliquer la théorie développée précédemment à la définition d'une sémantique pour le langage PV "de" *Dijkstra*.

### VIII.1 DESCRIPTION DU LANGAGE PV

Ce langage fournit une surcouche à un langage séquentiel. L'idée est que chaque processus d'un programme PV peut s'attribuer une ressource  $a$  grâce à l'instruction  $\text{Pa}$ . Sémantiquement, si à l'instant où le processus fait sa requête, la ressource  $a$  est disponible, elle lui est attribuée. Une occurrence de cette ressource restera indisponible tant que le processus ne l'aura pas relâchée au moyen de l'instruction  $\text{Va}$ . La ressource  $a$  sera également appelée un sémaphore. L'arité d'un sémaphore  $a$  représente le nombre de processus pouvant simultanément détenir ce sémaphore. Par ailleurs, on interdit à un même processus de prendre plus d'une occurrence d'un sémaphore donné, c'est-à-dire qu'une séquence  $\dots\text{PaPa}\dots$  n'est pas autorisée. En conséquence, on interdira aussi toute séquence de la forme  $\dots\text{VaVa}\dots$  qui est bien sûr inutile. On rappelle que si  $E$  est un ensemble,  $E^*$  est l'ensemble des suites finies à valeurs dans  $E$ .

On se fixe d'abord, pour chaque  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , un ensemble  $\mathcal{S}_n$  dont les éléments sont appelés les **sémaphores d'arité**  $n$ , c'est-à-dire qui peuvent être simultanément utilisés par au plus  $n$  processus. L'ensemble des **sémaphores**, noté  $\mathcal{S}$ , se définit naturellement comme

$$\mathcal{S} := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \mathcal{S}_n$$

et celui des instructions comme  $\mathcal{I} := \{0, 1\} \times \mathcal{S}$ , où  $(0, a)$  et  $(1, a)$  seront respectivement notés  $P_a$  et  $V_a$ . Sémantiquement,  $P_a$  est la prise d'une occurrence du sémaphore  $a$  et  $V_a$  sa libération. On note au passage que la requête d'un sémaphore peut engendrer une attente dans le cas où celui-ci n'est pas disponible. La libération d'un sémaphore est toujours immédiat et sans condition puisqu'une telle instruction suppose qu'une occurrence

du sémaphore est en possession du processus qui le libère. On dit qu'un sémaphore  $a$  apparaît dans un élément  $X$  de  $\mathcal{I}^*$  lorsqu'il existe en entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X(n) \in \{P_a, V_a\}$ . On définit alors l'ensemble des processus, noté  $Prc$ , comme le plus petit sous-ensemble de  $\mathcal{I}^*$  tel que

1.  $() \in Prc$  ( $Prc$  contient la suite vide),
2. si  $X_1, X_2 \in Prc$ , alors  $X_1 \cdot X_2 \in Prc$  ( $Prc$  est stable par concaténation),
3. si  $X \in Prc$  et que  $a \in \mathcal{S}$  n'apparaît pas dans  $X$ , alors pour tout  $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{I}^*$  tels que  $X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$  on a  $X_1 \cdot P_a \cdot X_2 \cdot V_a \cdot X_3 \in \mathcal{S}$ .

Si  $X_1, \dots, X_p$  sont des suites finies à valeur dans un ensemble  $E$  ayant respectivement  $N_1, \dots, N_p$  éléments, on pose  $N := N_1 + \dots + N_p$  et un **entrelacement** des suites  $X_1, \dots, X_p$  est la donnée d'une famille d'injections

$$\phi_1 : \{1, \dots, N_1\} \longrightarrow \{1, \dots, N\}, \dots, \phi_p : \{1, \dots, N_p\} \longrightarrow \{1, \dots, N\}$$

dont les images sont deux à deux disjointes et recouvrent  $\{1, \dots, N\}$ . La suite entrelacée étant alors donnée par  $X(n) = X_k(p)$ , où  $k$  est l'unique élément de  $\{1, \dots, p\}$  tel que  $n$  est dans l'image de  $\phi_k$  et  $p$  l'unique élément de  $\{1, \dots, N_k\}$  tel que  $\phi_k(p) = n$ . D'un point de vue catégorique,  $(\{1, \dots, N\}, \phi_1, \dots, \phi_p)$  est un représentant dans  $\mathbf{Set}$  du coproduit de la famille  $\{1, \dots, N_1\}, \dots, \{1, \dots, N_p\}$  et  $X$  est l'unique application de  $\{1, \dots, N\}$  dans  $E$  telle que quel que soit l'indice  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, p\}$ , on a  $X_k = X \circ \phi_k$ .

#### VIII.1.1 LEMME

Tout processus PV (i.e.  $X \in Prc$ ) a un nombre pair d'éléments.

PREUVE. C'est une induction immédiate sur la longueur des éléments de  $Prc$ .

■

#### VIII.1.2 LEMME

Un processus PV (i.e.  $X \in Prc$ ) dans lequel apparaît au plus un sémaphore est de la forme

$$\underbrace{P_a V_a \dots P_a V_a}_{n \text{ copies de } P_a V_a} \text{ pour un certain entier } n \in \mathbb{N}.$$

PREUVE. C'est une induction immédiate sur la longueur des éléments de  $Prc$ .

■

On peut caractériser les processus du langage PV,

#### VIII.1.3 PROPOSITION

Soit  $X \in \mathcal{I}^*$ , les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $X$  est un processus PV,
2.  $\forall a \in \mathcal{S}$  la suite extraite de  $X$  en ne gardant que les termes  $P_a$  et  $V_a$  est un élément de  $Prc$ ,
3.  $\forall a \in \mathcal{S}$  la suite extraite de  $X$  en ne gardant que les termes  $P_a$  et  $V_a$  est de la forme  $P_a V_a \dots P_a V_a$ ,

4.  $X$  est un entrelacement d'une famille finie d'éléments de  $Prc$  de la forme  $P_a V_a \dots P_a V_a$ .

PREUVE. L'équivalence entre 2 et 3 est une conséquence immédiate du lemme VIII.1.2. L'équivalence entre 3 et 4 découle de la description d'un entrelacement. Pour montrer que 1 implique 3, il suffit de vérifier que la collection des éléments  $X$  de  $\mathcal{T}^*$  satisfaisant l'assertion 3 est un ensemble qui satisfait les axiomes 1,2 et 3 de la définition de  $Prc$ . La réciproque se prouve par induction sur la longueur de  $X$ .

■

On vérifie par exemple immédiatement à l'aide de la proposition VIII.1.3 que  $P_a P_b V_a V_b$  est un processus PV. L'ensemble des programmes PV est alors simplement  $Prc^*$ , c'est-à-dire qu'un programme PV est une suite finie, éventuellement vide, de processus PV. On notera une telle suite  $X_1 | \dots | X_n$ . On dit qu'un sémaphore  $a$  apparaît dans un programme PV lorsqu'il apparaît dans l'un de ses processus. On peut maintenant définir ce qu'est le modèle géométrique d'un programme PV.

Soient  $X_1 | \dots | X_n$  un programme PV et un sémaphore  $a \in \mathcal{S}_\alpha$ , c'est-à-dire d'arité  $\alpha$ . Pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$ , d'après le lemme VIII.1.2 et la proposition VIII.1.3, la famille des indices  $i \in \mathbb{N}$  tels que ( $X_k$  est défini en  $i$  et)  $X_k(i) = P_a$  et celle des indices  $j \in \mathbb{N}$  tels que ( $X_k$  est défini en  $j$  et)  $X_k(j) = V_a$  ont le même nombre d'éléments, que l'on note respectivement  $i_1^a < \dots < i_{N_k}^a$  et  $j_1^a < \dots < j_{N_k}^a$  et qui vérifient  $i_1^a < j_1^a < \dots < i_{N_k}^a < j_{N_k}^a$ . On pose

$$\chi_k^a := \sum_{l=1}^{N_k} 1_{]i_l^a, j_l^a[} = 1_{]i_1^a, j_1^a[ \cup \dots \cup ]i_{N_k}^a, j_{N_k}^a[}$$

où pour tout  $R \subseteq \mathbb{R}$ , la fonction  $1_R$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $1_R(x) = 1$  si  $x \in R$  et  $1_R(x) = 0$  si  $x \notin R$ . L'égalité précédente est due au fait que les intervalles sont disjoints. On a donc un vecteur  $\vec{\chi}^a := (\chi_1^a, \dots, \chi_n^a)$  de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de sorte que pour  $\vec{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  on peut définir un produit scalaire par

$$\vec{\chi}^a \cdot \vec{x} := (\chi_1^a, \dots, \chi_n^a) \cdot (x_1, \dots, x_n) := \sum_{k=1}^n \chi_k^a(x_k)$$

La région interdite par le sémaphore  $a$  d'arité  $\alpha$  est alors définie par

$$F_a := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{\chi}^a \cdot \vec{x} > \alpha \right\}$$

la région interdite est alors naturellement définie par

$$F := \bigcup_{a \in \mathcal{S}} F_a$$

et le modèle géométrique du programme  $X_1 | \dots | X_n$  est alors l'espace partiellement ordonné dont l'espace sous-jacent est  $\vec{\mathbb{R}} \setminus F$  muni de l'ordre produit sur  $\mathbb{R}^n$ , on la note  $\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket$ .

#### VIII.1.4 REMARQUE

Soit un programme  $X_1 | \dots | X_n$  tel que quel que soit  $a$  appartenant à  $\mathcal{S}$  on a  $\vec{\chi}^a \cdot \vec{x} \leq \alpha$ , où  $\alpha$  est l'arité de  $a$ . On a  $F = \emptyset$  et donc  $\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket = \vec{\mathbb{R}}^n$ . En particulier, pour tout

indice  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, n\}$  et quel que soit  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , on a  $\chi_k^a(x) \leq \alpha$  et donc (en considérant  $X_k$  comme un programme PV)  $\llbracket X_k \rrbracket = \overrightarrow{\mathbb{R}}$ . Donc

$$\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket = \overrightarrow{\mathbb{R}}^n = \llbracket X_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket X_n \rrbracket \text{ dans PoSpc}$$

Par définition, la famille de processus  $X_1, \dots, X_n$  est **indépendante** lorsque  $\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket = \llbracket X_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket X_n \rrbracket$ .

Par exemple, si  $a$  est un sémaphore d'arité 2, alors, en posant  $X_1 := X_2 := X_3 = P_a V_a$ , on constate que la famille  $X_1, X_2, X_3$  n'est pas indépendante bien que toutes ses sous-familles strictes le soient.

### VIII.1.5 LEMME

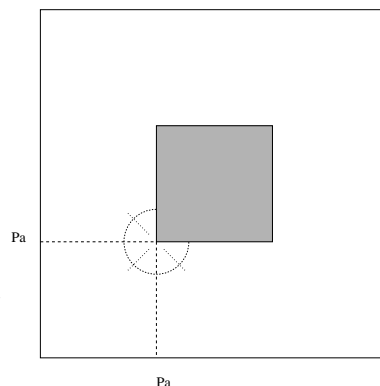
Pour tout sémaphore  $a$  appartenant à  $\mathcal{S}$ ,  $F_a$  est ouvert et borné, de plus, pour tout  $(x_1, \dots, x_n)$  appartenant à  $F_a$  et pour tout indice  $k$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , on a  $x_k > 0$ .

PREUVE. C'est une conséquence directe du fait que  $]i_1^a, j_1^a[\cup \dots \cup ]i_{N_k}^a, j_{N_k}^a[$  est ouvert dans  $\mathbb{R}$ .

■

Grâce au lemme VIII.1.5, on peut trouver  $r \in \mathbb{R}_+$  assez grand pour que  $F \subseteq [0, r]^n$  et que  $\partial F \cap \partial[0, r]^n = \emptyset$ , c'est-à-dire que les frontières topologiques de  $F$  et de  $[0, r]^n$  ne se rencontrent pas. L'intérêt de cette remarque est que  $[0, r]^n \setminus F$  est alors un fermé borné de  $\mathbb{R}^n$ , donc un espace topologique de Hausdorff compact.

Du point de vue sémantique, la simultanéité d'une prise de sémaphore pose problème. En effet,  $F$  est ouvert par définition pour ramener le modèle géométrique à une situation compacte. Cependant, cela a pour effet de laisser dans le modèle géométrique des points dont l'état associé n'est pas clair. En effet, le point signalé en bas à gauche de la région grisée signifie que les deux processus du programme  $P_a V_a | P_a V_a$  tente simultanément de prendre le sémaphore  $a$  d'arité 1. La légitimité physique des points se trouvant sur la frontière de la région interdite n'est pas claire.



On rencontre un problème similaire lors de l'étude des propriétés topologiques des composantes du modèle géométrique d'un programme PV, voir [24], cependant, ceci reste raisonnable lorsque l'on travaille à dihomotopie près. La description que nous venons de faire de la région interdite ne permet pas de modéliser un passage continu d'un état où le sémaphore  $a$  est libre à un état du système dans lequel il est réservé. Pour cela, on fixe  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, on peut alors remplacer les fonctions  $\chi_l^a$  par des fonctions continues (voire infiniment dérivable si besoin est) telles que quel que soit  $\vec{x}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , si la distance de  $\vec{x}$  à  $F$  est supérieure ou égale à  $\varepsilon$ , alors pour tout sémaphore  $a$  appartenant à  $\mathcal{S}$ , on a  $\vec{\chi}^a \cdot \vec{x} < \alpha + 1$ . Nous n'étudierons pas plus loin les perspectives offertes par cette dernière remarque.

On va maintenant munir la collection des programmes PV d'une structure de catégorie que l'on notera PV de sorte que l'application qui à chaque programme PV associe son modèle géométrique induise un foncteur de PV dans PoSpc. Etant donnés deux programmes

$X_1 | \dots | X_n$  et  $X'_1 | \dots | X'_{n'}$ , on définit pour tout indice  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  la longueur de  $X_k$  comme l'entier  $N_k$  et de même la longueur de  $X'_k$ . Un morphisme de la catégorie PV du premier programme vers le second est un  $(n+1)$ -uplet  $(\psi, \phi_1, \dots, \phi_n)$  tel que

1.  $\psi$  est une injection de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, n'\}$ ,
2.  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\phi_k$  est une application strictement croissante de  $\{1, \dots, N_k\}$  dans  $\{1, \dots, N'_{\psi(k)}\}$ ,
3.  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N_k\}$ ,  $X_k(i) = X'_{\psi(k)}(\phi_k(i))$ .

L'idée est que pour tout indice  $k$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,  $X_k$  est une sous-suite de  $X'_{\psi(k)}$ .

### VIII.1.6 CONJECTURE

L'application qui à tout programme PV  $X_1 | \dots | X_n$  associe son modèle géométrique  $\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket$  induit un foncteur de PV dans PoSpc dont tous les morphismes de l'image sont des monomorphismes de PoSpc.

D'une part, la conjecture VIII.1.6 donne une idée de la sémantique dénotationnelle du langage PV, d'autre part, elle ouvre une voie permettant de donner une sémantique dans PoSpc à des programmes PV comportant des boucles. Grossièrement, l'idée est de considérer la famille de tous les programmes PV obtenus en déroulant un certain nombre d'itérations des différentes boucles. Du point de vue de la structure de catégorie donnée à l'ensemble des programmes PV, cette famille constitue une sorte d'arbre dénombrable. On peut alors envisager un foncteur dont le domaine est cet arbre et le codomaine est PoSpc, de sorte que l'image de chaque noeud de l'arbre soit le modèle géométrique du noeud en question qui, on le rappelle, est un programme PV. Enfin, chaque  $A \rightarrow B$  de l'arbre est envoyé par ce foncteur sur une inclusion  $\llbracket A \rrbracket \hookrightarrow \llbracket B \rrbracket$ .

### VIII.1.7 CONJECTURE

Pour tout programme PV  $X_1 | \dots | X_n$ , tous les homsets de la catégorie fondamentale (voir la définition II.2.1) de l'espace ordonné  $\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket$  (autrement dit les ensembles

$$\overrightarrow{\pi}_1(\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket)[x, y]$$

où  $x$  et  $y$  sont des points de  $\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket$ ) sont finis et la catégorie de composantes (voir définition IV.3.12) de  $\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket$  est finie.

Les deux assertions précédentes peuvent sans doute être prouvées par induction, cependant la rédaction de ces démonstrations est certainement assez lourde. Les conjectures VIII.1.6 et VIII.1.7 n'en restent pas moins très intuitives, en effet, compte tenu de la définition de  $\llbracket - \rrbracket$ , il est naturel de penser que tout morphisme  $f$  de la catégorie PV induit, à permutation des coordonnées et homothéties près, un morphisme entre les modèles géométriques du domaine et du codomaine de  $f$ . Pour prouver la seconde assertion, il suffit de trouver un découpage fini de  $\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket$  qui soit plus fin que celui donné par les composantes de  $\llbracket X_1 | \dots | X_n \rrbracket$ .

Notons que les modèles géométriques des programmes PV dans lesquels n'apparaissent que des sémaphores binaires ont été étudiés en détail dans [30]. Leurs propriétés très spécifiques y sont mises en évidence.

## VIII.2 POINTS MORTS ET INATTEIGNABLES

Les concepts de points morts et inatteignables peuvent être définis pour n'importe quel objet de  $\text{PoSpc}$ , on ne les introduit que maintenant car c'est dans le cadre informatique qu'ils auront le plus d'intérêt.

### VIII.2.1 DÉFINITION

Soit un objet  $\vec{X}$  de  $\text{PoSpc}$ ,  $x \in \vec{X}$  est un **point mort** de  $\vec{X}$  si le seul dichemin  $\gamma$  sur  $\vec{X}$  tel que  $\gamma(0) = x$  est le dichemin constant de valeur  $x$ .

Par ailleurs, pour  $d \in \vec{X}$ , on dit que  $x$  est **atteignable** depuis  $d$  s'il existe un dichemin  $\gamma$  sur  $\vec{X}$  tel que  $\gamma(0) = d$  et  $\gamma(1) = x$ . Dans le cas contraire  $x$  est dit **inatteignable** depuis  $d$ .

### VIII.2.2 LEMME

Un point  $x$  de  $\vec{X}$  est mort si et seulement si quel que soit  $y$  dans  $X \setminus \{x\}$ ,  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y] = \emptyset$ , de plus,  $x$  est atteignable depuis  $d$  si et seulement si  $\vec{\pi}_1(\vec{X})[d, x] \neq \emptyset$ . Un point  $x$  est donc mort si et seulement si le seul point atteignable depuis  $x$  est  $x$ .

PREUVE. Immédiat.

■

### VIII.2.3 LEMME

Un maximum local de  $\vec{X}$  est un point  $x$  de  $\vec{X}$  dont il existe un voisinage  $V$  tel que  $x$  soit le plus grand élément de  $V$  pour l'ordre induit par celui de  $\vec{X}$ . Tout maximum local est un point mort mais la réciproque admet des contre-exemples.

PREUVE. Compte tenu de la définition de dichemin sur un l'espace ordonné (voir définition II.1.1) il est clair qu'un maximum local est un point mort. Le contre-exemple à la réciproque est donné par  $\vec{\mathbb{Q}}$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres rationnels muni de la topologie et de l'ordre induits par ceux de  $\mathbb{R}$ . En effet, tous les points de  $\vec{\mathbb{Q}}$  sont morts mais aucun n'est un maximum local d'après la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ . ■

## VIII.3 LANGAGE PV ET SYSTÈMES DE TRANSITIONS

On va associer à chaque programme PV un système de transitions puis comparer, sur plusieurs exemples, la taille du système de transitions obtenu avec celle de la catégorie de composantes du modèle géométrique. Etant donné un programme PV  $X_1 | \dots | X_n$ , pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$  on pose  $N_k$  la longueur (i.e. le nombre d'instructions) du processus  $X_k$ . Un  $n$ -uplet  $\vec{x} := (x_1, \dots, x_n)$  tel que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k \in \left\{ \frac{1}{2}, \dots, \frac{2m+1}{2}, \dots, \frac{2N_k+1}{2} \right\}$$

est appelé **état admissible** du programme  $X_1 | \dots | X_n$  lorsque

$$\forall a \in \mathcal{S} \quad \vec{\chi}^a \cdot \vec{x} \leq \alpha,$$

où  $\alpha$  est l'arité de  $a$ . L'ensemble  $S$  des états du système de transitions est l'ensemble des états admissibles du programme  $X_1 | \dots | X_n$ . Pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$  on note  $\vec{e}_k$  le  $n$ -uplet

$$\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\substack{1 \text{ en } k^{\text{ème}} \text{ position, } 0 \text{ partout ailleurs}}}$$

Les transitions du système sont alors les triplets  $(\vec{x}, k, \vec{x} + \vec{e}_k)$ , où  $k \in \{1, \dots, n\}$  et  $\vec{x}$  et  $\vec{x} + \vec{e}_k$  sont admissibles. L'ensemble  $L$  des étiquettes est donc  $\{1, \dots, n\}$ , c'est-à-dire que l'on a un identificateur pour chaque processus, c'est-à-dire pour chaque dimension. L'intuition géométrique est évidente, les instructions  $P$  et  $V$  d'un processus marquent une séquence de prises et de libérations de sémaphores, le modèle géométrique est conçu de sorte qu'ils interviennent à des instants  $t \in \mathbb{N}$  et pas à des instants quelconques  $t \in \mathbb{R}$ . Comme on l'a déjà remarqué, la sémantique en terme d'états d'occupation des sémaphores à un instant auquel se déclenche une prise ou une libération n'est pas claire, c'est pourquoi on ne considère que des états intermédiaires, c'est-à-dire dans  $\mathbb{N} + \{\frac{1}{2}\}$ . L'étiquette  $k$  signifie que le  $k^{\text{ème}}$  processus exécute l'instruction suivante. D'une certaine manière, les états admissibles sont tous les états possibles du pointeur d'instruction. Géométriquement, cela signifie que l'on se déplace "d'une unité" dans le modèle géométrique selon la  $k^{\text{ème}}$  coordonnée. Informellement, le système obtenu est "cubique" de dimension  $n$ .

## VIII.4 AUTOMATES DE DIMENSION SUPÉRIEURE

On se propose ici de comparer les programmes PV avec les automates de dimensions supérieures. Ces derniers, aussi appelés HDA pour *higher dimensional automata*, ont déjà fait l'objet de nombreuses études notamment par *Vaughan Pratt* qui les a introduits, *R.J. van Glabbeek* (voir la comparaison aux autres modèles discrets de la concurrence dans [91]), *Philippe Gaucher*, *Eric Goubault* et *Ulrich Fahrenberg* dans sa thèse ([19]). Signalons encore les recherches menées par *Krzysztof Worytkiewicz* concernant les structures de catégorie de modèles sur la catégorie HDA (définition VIII.4.5) "adaptées" à la concurrence. On va légèrement modifier la définition originale de manière à faire apparaître dans cette structure la notion d'indépendance *via* un ensemble simplicial comme cela a été suggéré dans la section .1 de l'introduction. Pour obtenir une analogie des systèmes de transitions en dimension supérieure, il est naturel de se baser sur les ensembles (pré-)cubiques. L'idée sous-jacente étant qu'un élément de dimension  $n \geq 2$  représente l'exécution simultanée de  $n$  actions. Quant aux éléments de dimension 1, ils représentent bien sûr les supports des transitions. L'idée suivante est de mettre des étiquettes sur les éléments de toutes les dimensions. Dans [34], on s'acquitte de cette tâche au moyen d'un morphisme de l'ensemble cubique  $C$  vers un ensemble pré-cubique d'étiquettes noté  $L$ . Cet ensemble n'est pas quelconque, en fait, on suppose que l'on a un ensemble totalelement ordonné  $\Sigma$  d'actions élémentaires,  $L_n$  est alors, par définition, l'ensemble des suites croissantes d'éléments de  $\Sigma$ . Notons alors que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des suites strictement croissantes d'éléments de  $\Sigma$  est isomorphe à l'ensemble des sous-parties à  $n$  éléments de  $\Sigma$ . De plus, dans la construction des opérateurs faces de l'ensemble pré-cubique d'étiquettes, [34] pose  $\delta_{i,0} = \delta_{i,1}$ , ce qui équivaut clairement à oublier la direction. En fait, le choix d'un ordre total sur  $\Sigma$  est arbitraire et l'on peut s'en passer si, au lieu de considérer un ensemble pré-cubique d'étiquettes, on considère plutôt un ensemble pré-simplicial, c'est ce que nous allons faire. L'objection



que l'on pourrait émettre est que l'on ne peut plus avoir des étiquettes comportant une répétition d'un élément de  $\Sigma$ . Cependant, si l'on imagine qu'un élément de dimension  $n$  de  $L$  représente une famille d'actions indépendantes, comme le suggère la section .1, alors cette suite ne devrait pas avoir de répétition car aucune action non triviale n'est indépendante d'elle même.

Ainsi, la donnée d'un ensemble (pré-)cubique  $C$  équivaut à celle d'une géométrie dirigée car tout élément  $x$  de dimension  $n$  a pour chaque coordonnée  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  un début donné par  $\partial_{i,0}^n(x)$  et une fin donnée par  $\partial_{i,1}^n(x)$ , voir [62] et [23]. De son côté, la donnée d'un ensemble pré-simplicial  $S$  fournit une notion d'indépendance. Bien sûr, un élément  $x \in C_n$  va représenter un cube dirigé plein, et donc l'exécution parallèle de  $n$  processus portant chacun une étiquette  $a_i$ . Si  $L$  est l'étiquetage, il est alors naturel que  $L(x) = \{a_1, \dots, a_n\}$  soit une famille d'actions indépendantes. On peut retenir que *grosso modo* les ensembles pré-cubiques donnent la géométrie dirigée alors que les ensembles pré-simpliciaux fournissent la notion d'indépendance.

Pour formaliser les idées précédentes nous avons besoin d'un résultat technique

#### VIII.4.1 LEMME (OUBLI DE LA DIRECTION)

Avec les définitions de  $\Delta$  et de  $\square$  données dans les propositions A.6.1 et A.6.2 et en posant par convention  $\Delta(-1) := \emptyset$  et  $\delta_0^{-1,\Delta}$  l'unique application de  $\emptyset$  dans  $\{0\}$ , on a le foncteur **d'oubli de la direction**, noté  $U$ , de  $\square$  dans  $\Delta$  (ici on entend donc  $\Delta$  étendu à  $-1$ ) défini par:

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, U(\square(n)) := \Delta(n-1)$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall \varepsilon \in \{0, 1\}, U(\delta_{i,\varepsilon}^{n,\square}) := \delta_i^{n-1,\Delta}$
3.  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{0, \dots, n\}, U(\sigma_i^{n,\square}) := \sigma_i^{n,\Delta}$ .

On a également pour  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  un foncteur  $F_\varepsilon$  de  $\Delta$  vers  $\square$  défini par

1.  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, F_\varepsilon(\Delta(n)) := \square(n+1)$
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, \forall i \in \{0, \dots, n+1\}, F_\varepsilon(\delta_i^{n,\Delta}) := \delta_{i,\varepsilon}^{n+1,\square}$
3.  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, \forall i \in \{0, \dots, n\}, F_\varepsilon(\sigma_i^{n,\Delta}) := \sigma_i^{n,\square}$ .

#### VIII.4.2 DÉFINITION (AUTOMATE DE DIMENSION SUPÉRIEURE)

Un **automate de dimension supérieure**, ou **HDA**, est un triplet  $(C, S, \lambda)$  où  $C$  est un ensemble pré-cubique,  $S$  est un ensemble pré-simplicial étendu (c'est-à-dire défini sur l'extension de  $\Delta$  donnée dans le lemme VIII.4.1) et  $\lambda$  une transformation naturelle de  $C$  vers  $S \circ U^{op}$  appelée **étiquetage**.

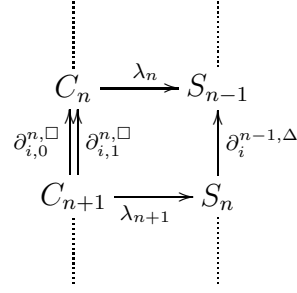
### VIII.4.3 REMARQUE

Si  $C$  est un ensemble pré-cubique et  $S$  un ensemble pré-simplicial étendu, on note

$$\partial_{i,\varepsilon}^{n,\square} := C(\delta_{i,\varepsilon}^{n,\square}) \text{ et } \partial_i^{n,\Delta} := S(\delta_i^{n,\Delta}).$$

Un étiquetage est alors une famille  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n \in \text{Set}[C_n, S_{n-1}]$  et  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\forall \varepsilon \in \{0, 1\}$ ,

$$\lambda_n \circ \partial_{i,\varepsilon}^{n,\square} = \partial_i^{n-1,\Delta} \circ \lambda_{n+1}$$



### VIII.4.4 REMARQUE

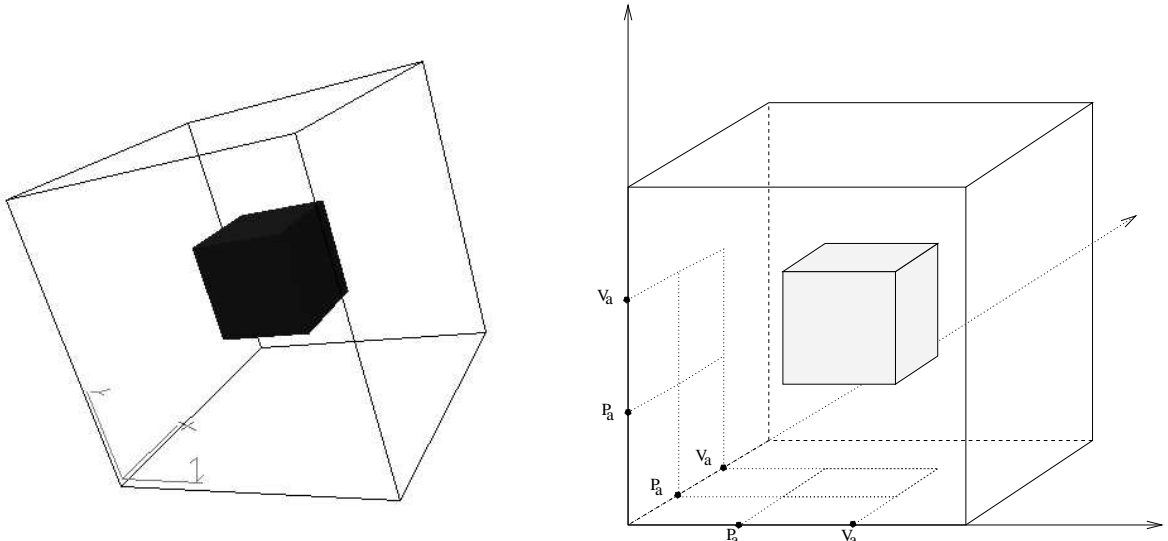
Etant donné un ensemble précubique  $(C_{n+1} \xrightarrow[\partial_{i,1}^{n,\square}]{\partial_{i,0}^{n,\square}} C_n ; n \in \mathbb{N} ; i \in \{0, \dots, n\})$  parmi

les étiquetages possibles, l'un consiste à considérer l'ensemble pré-simplicial dont tous les éléments sont un singleton, en effet, l'unique étiquetage possible donne un HDA.

Pour comprendre le formalisme précédent, examinons en détail l'exemple suivant: on considère le programme PV  $P_a V_a | P_a V_a | P_a V_a$  où  $a$  est un sémaphore ternaire, c'est-à-dire d'arité 2, on notera ce programme  $\Pi$ . Nous allons définir, à partir de ce programme, un HDA continu et un HDA discret. L'un comme l'autre seront de dimension 3, ce qui n'est guère surprenant. Commençons par le représentant continu. On considère  $\vec{X}$  le modèle géométrique du programme  $\Pi$ . Ce modèle est isomorphe, dans  $\text{PoSpc}$ , à

$$[0, 1]^3 \setminus \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$$

muni de la topologie et de l'ordre induit par ceux de  $\vec{\mathbb{R}}^3$ . On donne ci-dessous une représentation de ce modèle géométrique.



On définit alors l'automate de dimension supérieure continu associé de la façon suivante:  $C_0 := [0, 1]^3 \setminus \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$ ,  $C_1 := \left\{ \{x\} \times [a, b] \times \{y\} \subseteq \vec{X} \right\} \cup \left\{ [a, b] \times \{x\} \times \{y\} \subseteq \vec{X} \right\} \cup \left\{ \{x\} \times \{y\} \times [a, b] \subseteq \vec{X} \right\}$ ,  $C_2 := \left\{ \{x\} \times [a, b] \times [c, d] \subseteq \vec{X} \right\} \cup \left\{ [a, b] \times \{x\} \times [c, d] \subseteq \vec{X} \right\}$

$\vec{X}\} \cup \{[a, b] \times [c, d] \times \{x\} \subseteq \vec{X}\}$ , et enfin  $C_3 := \{[a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subseteq \vec{X}\}$ . Etant donné un élément  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f] \in C_3$ , son image par les  $C(\delta_{i,\varepsilon}^{2,\square})$  pour  $i \in \{0, 1, 2\}$  et  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ , que l'on notera  $\partial_{i,\varepsilon}^{2,\square}$ , est donnée par le tableau suivant (dans lequel on a omis les symboles  $\times$ )

$\partial_{0,0}^{2,\square}$	$\partial_{0,1}^{2,\square}$	$\partial_{1,0}^{2,\square}$	$\partial_{1,1}^{2,\square}$	$\partial_{2,0}^{2,\square}$	$\partial_{2,1}^{2,\square}$
$\{a\}[c, d][e, f]$	$\{b\}[c, d][e, f]$	$[a, b]\{c\}[e, f]$	$[a, b]\{d\}[e, f]$	$[a, b][c, d]\{e\}$	$[a, b][c, d]\{f\}$

L'image d'un élément  $\{x\} \times [a, b] \times [c, d]$  de  $C_1$  par les  $C(\delta_{i,\varepsilon}^{1,\square})$  pour  $i \in \{0, 1\}$  et  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ , que l'on notera  $\partial_{i,\varepsilon}^{1,\square}$ , est donnée par le tableau suivant (dans lequel on a omis les symboles  $\times$ )

$\partial_{0,0}^{1,\square}$	$\partial_{0,1}^{1,\square}$	$\partial_{1,0}^{1,\square}$	$\partial_{1,1}^{1,\square}$
$\{x\}\{a\}[c, d]$	$\{x\}\{b\}[c, d]$	$\{x\}[a, b]\{c\}$	$\{x\}[a, b]\{d\}$

un élément de la forme  $[a, b] \times \{x\} \times [c, d]$  a pour image

$\partial_{0,0}^{1,\square}$	$\partial_{0,1}^{1,\square}$	$\partial_{1,0}^{1,\square}$	$\partial_{1,1}^{1,\square}$
$\{a\}\{x\}[c, d]$	$\{b\}\{x\}[c, d]$	$[a, b]\{x\}\{c\}$	$[a, b]\{x\}\{d\}$

et un élément de la forme  $[a, b] \times [c, d] \times \{x\}$

$\partial_{0,0}^{1,\square}$	$\partial_{0,1}^{1,\square}$	$\partial_{1,0}^{1,\square}$	$\partial_{1,1}^{1,\square}$
$\{a\}[c, d]\{x\}$	$\{b\}[c, d]\{x\}$	$[a, b]\{c\}\{x\}$	$[a, b]\{d\}\{x\}$

Les images d'éléments de la forme  $[a, b] \times \{x\} \times \{y\}$ ,  $\{x\} \times [a, b] \times \{y\}$  et  $\{x\} \times \{y\} \times [a, b]$  de  $C_0$  par les  $C(\delta_{0,\varepsilon}^{0,\square})$  pour  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ , que l'on notera  $\partial_{0,\varepsilon}^{0,\square}$ , sont respectivement données par les tableaux suivants (dans lequel on a omis les symboles  $\times$ )

$\partial_{0,0}^{1,\square}$	$\partial_{0,1}^{1,\square}$	$\partial_{0,0}^{1,\square}$	$\partial_{0,1}^{1,\square}$	$\partial_{0,0}^{1,\square}$	$\partial_{0,1}^{1,\square}$
$\{a\}\{x\}\{y\}$	$\{b\}\{x\}\{y\}$	$\{x\}\{a\}\{y\}$	$\{x\}\{b\}\{y\}$	$\{x\}\{y\}\{a\}$	$\{x\}\{y\}\{b\}$

Pour obtenir un étiquetage, il nous faut déjà un ensemble pré-simplicial,  $S_2$  est l'ensemble des enveloppes convexes de triplets (ce sont donc des triangles)  $(b, c, e)$ ,  $(a, d, e)$ ,  $(a, c, f)$  où  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f] \in C_3$ , on pose bien sûr

$$\lambda_3([a, b] \times [c, d] \times [e, f]) := \text{le triplet } ((b, c, e), (a, d, e), (a, c, f)).$$

Puis  $S_1$  est l'ensemble des couples  $((b, c), (a, d))$  tels qu'il existe  $x \in \mathbb{R}$  de sorte que  $\{x\} \times [a, b] \times [c, d] \in C_2$  ou  $[a, b] \times \{x\} \times [c, d] \in C_2$  ou  $[a, b] \times [c, d] \times \{x\} \in C_2$ , on pose

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_2(\{x\} \times [a, b] \times [c, d]) \\ \lambda_2([a, b] \times \{x\} \times [c, d]) \\ \lambda_2([a, b] \times [c, d] \times \{x\}) \end{array} \right\} := \text{le couple } ((b, c), (a, d))$$

et

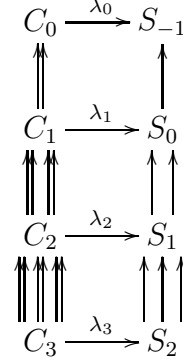
$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1([a, b] \times \{x\} \times \{y\}) \\ \lambda_1(\{x\} \times [a, b] \times \{y\}) \\ \lambda_1(\{x\} \times [c, d] \times [a, b]) \end{array} \right\} := \text{le point } (b)$$

avec  $S_0 := [0, 1]$ . Enfin, sachant que  $S_{-1}$  est un singleton,  $\lambda_0$  et  $\partial_0^{-1,\Delta}$  sont les uniques applications définies respectivement sur  $C_0$  et  $S_0$  à valeur dans le singleton  $S_{-1}$ . Noter bien que l'on a évoqué des triplets et des couples, l'ordre a donc une importance, noter que cet ordre est issu de celui que l'on met sur les coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ . On peut alors poser

$$\begin{aligned}\partial_0^{1,\Delta}((b, c, e), (a, d, e), (a, c, f)) &:= ((d, e), (c, f)) \\ \partial_1^{1,\Delta}((b, c, e), (a, d, e), (a, c, f)) &:= ((b, e), (a, f)) \\ \partial_2^{1,\Delta}((b, c, e), (a, d, e), (a, c, f)) &:= ((b, c), (a, d))\end{aligned}$$

et de manière similaire

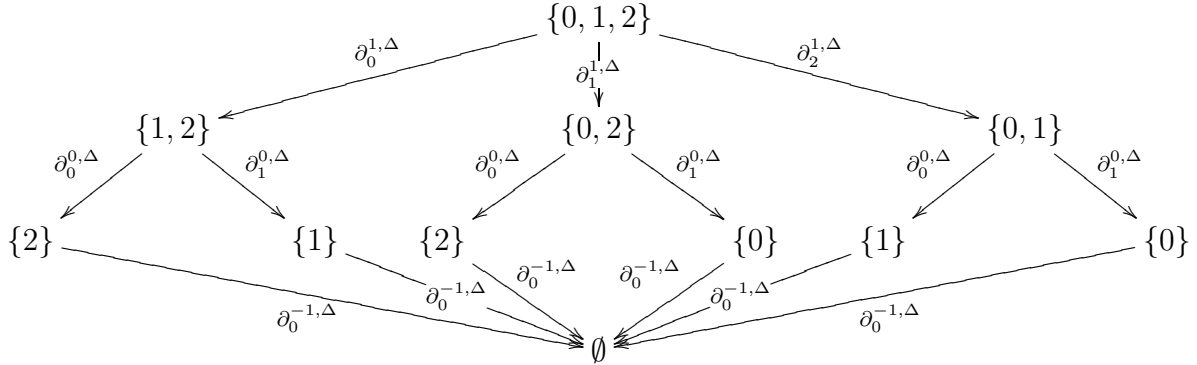
$$\begin{aligned}\partial_0^{0,\Delta}((b, c), (a, d)) &:= d \\ \partial_1^{0,\Delta}((b, c), (a, d)) &:= b\end{aligned}$$



puis vérifier la commutativité du diagramme de droite.

Les éléments de  $S_3$  sont des triplets de triplets de réels, on les comprend donc comme des triangles de  $\mathbb{R}^3$ , ceux de  $S_2$  sont des couples de couples de réels, ce sont donc des segments de  $\mathbb{R}^2$ , ceux de  $S_1$  sont des réels, ce sont des points de  $\mathbb{R}$  et enfin  $S^{-1}$  est un singleton autrement dit  $\mathbb{R}^0$ . On aimerait également que l'étiquetage soit tel que l'image d'un élément non aplati de  $C_3$  soit un élément de  $S_2$  dont les images par  $\partial_0^{1,\Delta}$ ,  $\partial_1^{1,\Delta}$  et  $\partial_2^{1,\Delta}$  soient distinctes. Or l'étiquetage que l'on vient de donner n'a pas cette propriété, en effet, tous les cubes de la forme  $[x, y] \times [x, y] \times [x, y]$  ont pour étiquette  $((y, x, x), (x, y, x), (x, x, y))$  et que l'image de cet élément de  $S_2$  par  $\partial_0^{1,\Delta}$ ,  $\partial_1^{1,\Delta}$  et  $\partial_2^{1,\Delta}$  est  $((y, x), (x, y))$ .

On propose un autre étiquetage, l'ensemble pré-simplicial des étiquettes est donné par  $S_i := \{ \text{sous-parties à } i + 1 \text{ éléments de } \{0, 1, 2\} \}$  pour  $i \in \{-1, 0, \dots, 2\}$  et les opérateurs faces sont décrits par le diagramme ci-dessous



L'étiquetage est donné par

$$\lambda_3([a, b] \times [c, d] \times [e, f]) := \{0, 1, 2\}$$

$$\lambda_2(\{x\} \times [a, b] \times [c, d]) := \{1, 2\}$$

$$\lambda_2([a, b] \times \{x\} \times [c, d]) := \{0, 2\}$$

$$\lambda_2([a, b] \times [c, d] \times \{x\}) := \{0, 1\}$$

$$\lambda_1([a, b] \times \{x\} \times \{y\}) := \{0\}$$

$$\lambda_1(\{x\} \times [a, b] \times \{y\}) := \{1\}$$

$$\lambda_1(\{x\} \times [c, d] \times [a, b]) := \{2\}$$

Cet étiquetage n'est pas satisfaisant non plus dans la mesure où il suffit que  $C_3$  soit non vide pour que l'ensemble des étiquettes soit "plein" dans le sens où tous les "triangles" de  $S$ , c'est-à-dire les triplets  $(x, y, z)$  tels que  $\partial_1(x) = \partial_0(y)$ ,  $\partial_1(y) = \partial_0(z)$  et  $\partial_1(z) = \partial_0(x)$  sont tels qu'il existe  $t \in S_2$  tel que  $\partial_0(t) = x$ ,  $\partial_1(t) = y$  et  $\partial_2(t) = z$ . Du point de vue de l'homologie, cela signifie bien sûr que tous les groupes d'homologie de  $S$  sont triviaux, ce qui est fâcheux car, en fin de compte, on espère pouvoir détecter les trous dirigés de  $C$  à l'aide de ceux de  $S$ . En effet, un "trou" dans  $C$  est une obstruction au parallélisme, ce qui signifie qu'il doit y avoir une famille d'action qui n'est pas indépendante. En pensant à  $S$  comme à la représentation géométrique de l'indépendance des actions du programme, la famille d'action évoquée précédemment devrait apparaître comme un triangle "vide".

#### VIII.4.5 DÉFINITION (CATÉGORIE DES AUTOMATES DE DIMENSION SUPÉRIEURE)

La collection des automates de dimension supérieure forme une catégorie notée HDA telle que  $\text{HDA} \left[ (C, S, \lambda), (C', S', \lambda') \right]$  est l'ensemble des paires de transformations naturelles  $(g, e)$  respectivement de  $C$  vers  $C'$  et de  $S$  vers  $S'$  telles que

$$\begin{array}{ccc} C'_n & \xrightarrow{\lambda'_n} & S'_{n-1} \\ g_n \uparrow & & \uparrow e_{n-1} \\ C_n & \xrightarrow{\lambda_n} & S_{n-1} \end{array}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_{n-1} \circ \lambda_n = \lambda'_n \circ g_n.$$

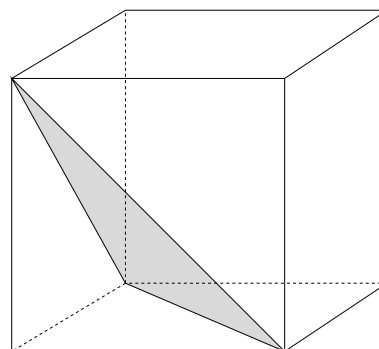
La catégorie HDA a tous les produits, ces derniers étant calculés "composante par composante" dans Set. Plus précisément, si  $(C^i, S^i, \lambda^i)_{i \in \mathcal{I}}$  est une famille d'objets de HDA, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$C_n^{\text{produit}} = \prod_{i \in \mathcal{I}} C_n^i, S_{n-1}^{\text{produit}} = \prod_{i \in \mathcal{I}} S_{n-1}^i \text{ et } \lambda_n^{\text{produit}} = \prod_{i \in \mathcal{I}} \lambda_n^i$$

De plus, avec les mêmes formules, si  $C$  est un ensemble pré-cubique et que l'on a une famille d'étiquetages sur  $C$ , alors on peut définir un étiquetage produit sur  $C$ . C'est à dire que pour  $x \in C_n$ , on pose

$$S_{n-1}^{\text{produit}} = \prod_{i \in \mathcal{I}} S_{n-1}^i \text{ et } \lambda_n^{\text{produit}} = \prod_{i \in \mathcal{I}} \lambda_n^i(x)$$

On équipe alors l'ensemble pré-cubique associé au programme  $P_a V_a | P_a V_a | P_a V_a$  (où  $a$  est un sémaphore ternaire, c'est-à-dire d'arité 2) de l'étiquetage produit des deux étiquetages que l'on a précédemment décrit.



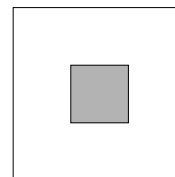
Le cube sur la figure de droite représente un élément de  $C_3$  tandis que le triangle grisé représente son étiquette, c'est-à-dire son image par  $\lambda_3$ .

### VIII.5 EXEMPLES

Dans les exemples suivants, les sémaphores d'arité 1 et 2 sont respectivement dits binaires et ternaires. De plus, en vertu du lemme VIII.1.5, on peut toujours à l'aide d'une homothétie se ramener à  $F \subseteq [0, 1]^n$ , c'est le choix que l'on a fait ici.

### LE CARRÉ UNITÉ TROUÉ

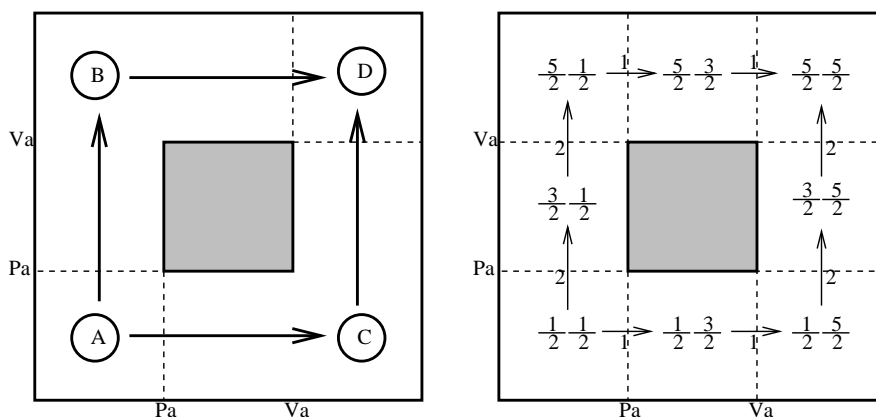
Formellement, le **carré unité (dirigé) troué** est  $[0, 1] \times [0, 1] \setminus ([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}])$  muni de la structure d'espace ordonné induite par celle de  $\overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}}$ . C'est le modèle géométrique du programme



$\text{Pa.Va} \mid \text{Pa.Va}$

où  $a$  est un sémaphore binaire.

Ci dessous-on trouve à gauche la catégorie de composantes associée au modèle géométrique et à droite le système de transitions associé à  $\text{Pa.Va} \mid \text{Pa.Va}$  selon le procédé décrit dans la section VIII.3.



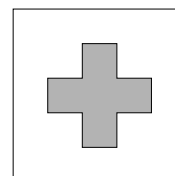
La catégorie de composantes contient 4 objets et est générée par 4 flèches, le système de transitions contient 8 états et 8 transitions.

### LE DRAPEAU SUISSE

Le **drapeau Suisse (dirigé)** est

$$[0, 1] \times [0, 1] \setminus \left( \left[ \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right] \times \left[ \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right] \cup \left[ \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right] \times \left[ \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right] \right)$$

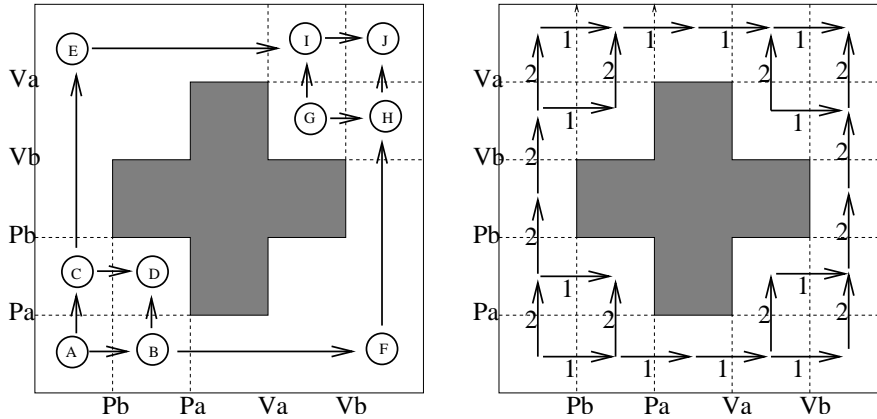
muni de la structure d'espace ordonné induite par celle de  $\overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}}$ . C'est le modèle géométrique du programme



$\text{Pa.Pb.Vb.Va} \mid \text{Pb.Pa.Va.Vb}$

où  $a$  et  $b$  sont des sémaphores binaires.

Ci dessous-on trouve à gauche la catégorie de composantes associée au modèle géométrique et à droite le système de transitions associé à  $\text{Pb.Pa.Va.Vb} \mid \text{Pa.Pb.Vb.Va}$  selon le procédé décrit dans la section VIII.3.



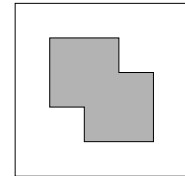
La catégorie de composantes contient 10 objets et est générée par 10 flèches, le système de transitions contient 20 états et 24 transitions.

### LES DEUX PHILOSOPHES

L'espace ordonné des **deux philosophes** est donné par

$$[0, 1] \times [0, 1] \setminus \left( \left[ \frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right] \times \left[ \frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right] \cup \left[ \frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right] \times \left[ \frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right] \right)$$

muni de la structure d'espace ordonné induite par celle de  $\vec{\mathbb{R}} \times \vec{\mathbb{R}}$ . C'est le modèle géométrique du programme



$$Pa.Pb.Va.Vb \mid Pb.Pa.Vb.Va$$

où a et b sont des sémaphores binaires.

La catégorie de composantes contient 10 objets et est générée par 10 flèches, tout comme dans l'exemple du drapeau Suisse. En revanche, le système de transitions contient 14 états et 16 transitions.

#### VIII.5.1 REMARQUE

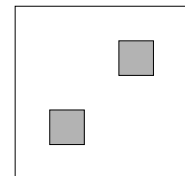
Le drapeau Suisse dirigé et l'espace ordonné des deux philosophes sont isomorphes dans PoSpc.

### DEUX TROUS SUR LA DIAGONALE PRINCIPALE

L'espace topologique suivant

$$[0, 1] \times [0, 1] \setminus \left( \left[ \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right] \times \left[ \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right] \cup \left[ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right] \times \left[ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right] \right)$$

muni de la structure d'espace ordonné induite par celle de  $\vec{\mathbb{R}} \times \vec{\mathbb{R}}$  est le modèle géométrique du programme



$$Pa.Va.Pb.Vb \mid Pa.Va.Pb.Vb$$

où a et b sont des sémaphores binaires.

La catégorie de composantes associée au modèle géométrique contient 9 objets et est générée par 12 flèches. Le système de transitions associé contient 23 états et 32 transitions.

La symétrie que comporte cet exemple le rend facile à généraliser. En effet, la catégorie de composantes du modèle géométrique associé au programme PV

$$P_{a_1}V_{a_1} \dots P_{a_n}V_{a_n} | P_{a_1}V_{a_1} \dots P_{a_n}V_{a_n}$$

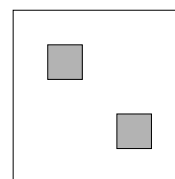
où les sémaphore  $a_k$  sont binaires (c'est-à-dire d'arité 1), contient  $(n + 1)^2$  objets et  $2n(n + 1)$  flèches génératrices tandis que le système de transitions associé a  $4n^2 + 3n + 1$  états et  $8n^2$  transitions.

#### DEUX TROUS SUR LA DIAGONALE ACHRONALE

L'espace topologique suivant

$$[0, 1] \times [0, 1] \setminus \left( \left[ \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right] \times \left[ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right] \cup \left[ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right] \times \left[ \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right] \right)$$

muni de la structure d'espace ordonné induite par celle de  $\vec{\mathbb{R}} \times \vec{\mathbb{R}}$  est le modèle géométrique du programme



$$Pa.Va.Pb.Vb \mid Pb.Vb.Pa.Va$$

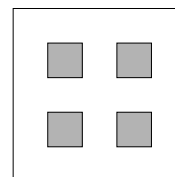
où **a** et **b** sont des sémaphores binaires.

#### QUATRE TROUS

L'espace topologique suivant

$$[0, 1] \times [0, 1] \setminus \left( \left( \left[ \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right] \cup \left[ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right] \right) \times \left( \left[ \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right] \cup \left[ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right] \right) \right)$$

muni de la structure d'espace ordonné induite par celle de  $\vec{\mathbb{R}} \times \vec{\mathbb{R}}$  est le modèle géométrique du programme



$$Pa.Va.Pa.Va \mid Pa.Va.Pa.Va$$

où **a** est un sémaphore binaire.

La catégorie de composantes associée au modèle géométrique a 13 objets et 16 flèches génératrices, le système de transitions a 21 états et 24 transitions. Là encore, la symétrie permet de généraliser cette exemple, en effet, c'est le modèle géométrique du programme PV  $P_aV_a \dots P_aV_a | P_aV_a \dots P_aV_a$  où  $a$  est un sémaphore binaire. La système de transitions associé a  $3n^2 + 4n + 1$  états et  $2n(n + 1)$  transitions. La catégorie de composantes associée au modèle géométrique a  $3n^2 + 1$  objets et  $4n^2$  flèches génératrices.

#### TROIS PHILOSOPHES

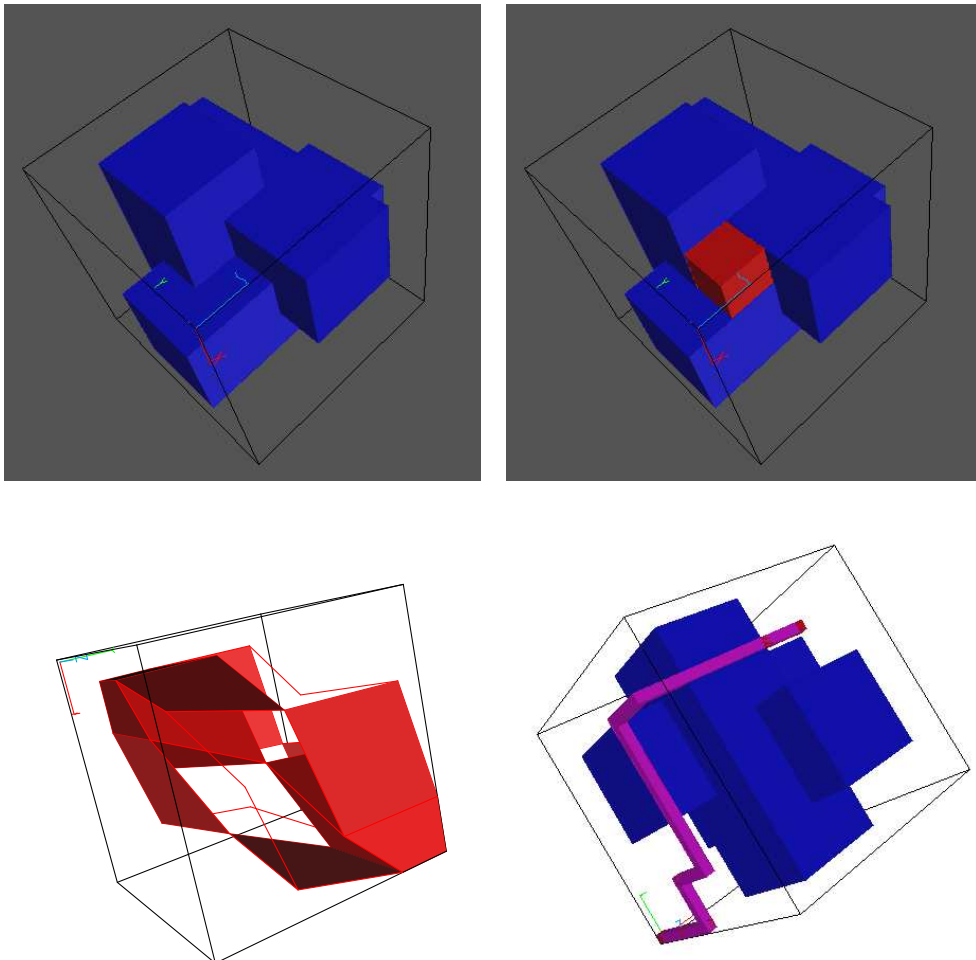
On suppose que l'on a trois sémaphores binaires  $a$ ,  $b$  et  $c$ , c'est-à-dire pouvant être occupés par au plus un processus, on considère alors le programme

$$P_aP_bV_aV_b | P_bP_cV_bV_c | P_cP_aV_cV_a.$$

De gauche à droite et de haut en bas, les figures qui suivent représentent respectivement, le modèle géométrique du programme (la forme cubique étant la zone interdite), le modèle



géométrique avec le “bassin d’attraction” du seul point mort du programme, la catégorie de composantes du modèle (avec une erreur d’affichage, en effet, les deux pointes en contact au centre de la figure ne devrait pas l’être) et enfin un chemin d’exécution maximal, c’est-à-dire un dichemin joignant le point de départ du modèle géométrique à son point d’arrivée.



## VIII.6 QUELQUES REMARQUES

### VIII.6.1 BOUCLE ET COMPACTITÉ

On a déjà noté que les modèles géométriques des programmes PV peuvent être supposés compacts. En fait, on peut envisager d’ajouter un opérateur dans la construction des processus du langage PV permettant d’avoir des boucles. Le problème est qu’alors, intuitivement, on s’attend à ce qu’une trace d’exécution, c’est-à-dire un chemin dirigé, puisse revenir à un état dans lequel il a déjà été. Ceci est bien sûr impossible si le modèle géométrique est un espace ordonné. On peut cependant envisager de “déplier” un programme PV contenant des boucles pour obtenir une famille de programme PV qui représente les différents dépliages de chacune des boucles. Informellement, chacun de ces dépliages a un modèle géométrique dans  $\text{PoSpc}$ , or la catégorie  $\text{PoSpc}$  est co-complète, en se laissant guider par la structure d’arbre (au sens classique) de la famille des dépliages du  $\Pi$  on peut alors “recoller” (c’est-à-dire considérer la co-limite d’un certain foncteur

défini sur l'arbre des dépliages de  $\Pi$  à valeurs dans  $\text{PoSpc}$ ) les modèles des dépliages de  $\Pi$  pour obtenir le modèle géométrique de  $\Pi$  dans  $\text{PoSpc}$ . L'arbre des dépliages étant infini dès que (et seulement si)  $\Pi$  contient effectivement une boucle, le modèle obtenu ne sera pas compact.

L'autre méthode consiste à généraliser la notion d'espace ordonné de façon à avoir des modèles géométriques permettant à certains chemins dirigés  $\gamma$  de satisfaire  $\gamma(0) = \gamma(1)$  sans que  $\gamma$  soit constante. On a alors une nouvelle catégorie qui en un certain sens contient  $\text{PoSpc}$  et qui permet de donner directement un modèle géométrique de  $\Pi$  sans passer par l'arbre des dépliages. Du point de vue topologique, l'intérêt est que l'espace topologique sous-jacent est compact, en contrepartie, on doit traiter des modèles géométriques possédant de "vraies boucles". Cette approche est l'un des problèmes étudiés dans la troisième partie de cette thèse.

## VIII.6.2 FINITUDE DE LA CATÉGORIE DE COMPOSANTES

On a développé dans la première partie une technique de réduction de la taille de la catégorie fondamentale d'un espace ordonné. Tous les modèles géométriques des programmes PV étant en particulier des espaces ordonnés, on va leur appliquer cette méthode. On sait également grâce à l'étude théorique faite dans la première partie que la réduction de taille qu'offre la catégorie de composante est, en un certain sens, optimal. Dans l'optique d'appliquer cette théorie à la réalisation d'un programme d'analyse statique du langage PV, il serait intéressant de prouver la conjecture suivante:

### VIII.6.1 CONJECTURE

La catégorie de composantes de la catégorie fondamentale du modèle géométrique de tout programme PV est fini.

Dans tous les cas pratiques, cette conjecture est trivialement vérifiée, par ailleurs, elle est extrêmement intuitive. En effet, on peut ébaucher une preuve par le raisonnement informel suivant. Puisque la catégorie de composantes d'un espace ordonné est sans boucle, il suffit de vérifier que l'ensemble de ses objets, c'est dire celui des composantes de l'espace ordonné, est fini. Pour cela, il suffit de trouver un raffinement de la partition donnée par les composantes qui soit lui-même fini. On peut admettre que cela est possible en considérant toutes les coupes possibles selon tous les hyperplans qui portent une face de la région interdite. La difficulté est alors de déterminer à quelle composante une "frontière" donnée doit appartenir, ce problème est lié à la topologie induite sur chaque composante par l'espace ordonné dont la catégorie de composantes que l'on étudie est le modèle. Ce problème a été abordé par *Martin Raussen* à plusieurs reprises. Il faut enfin prouver que quels que soient les points  $a$  et  $b$  du modèle géométrique  $\overrightarrow{X}$ , l'ensemble, à dihomotopie près, des dichemins sur  $\overrightarrow{X}$  allant de  $a$  vers  $b$  est fini.



Ce chapitre est consacré à la description du code d'un embryon d'analyseur que j'ai développé durant ma thèse. Celui-ci a été écrit en langage **CamL**. A partir d'un code écrit en langage PV contenu dans un fichier, cet analyseur détecte les erreurs de syntaxe, par exemple si l'un des processus contient une séquence  $\dots P_a \dots P_a \dots$  sans qu'il y ait d'instruction  $V_a$  entre les deux instructions  $P_a$ . Il génère le modèle géométrique sous la forme d'une liste de cubes qui représente la région interdite. Enfin, dans le cas où le programme contient trois processus, c'est à dire où le modèle géométrique associé est tridimensionnel, il génère un fichier `.geom` qui permet à l'aide du logiciel **geomview**, de visualiser ce modèle avec des mouvements de caméra. Enfin, une partie du code qui n'est pas encore incorporée permet la gestion d'arbres de segments ce qui devrait, dans d'éventuelles versions ultérieures, remplacer la représentation d'un segment sous forme de couple donnant les bornes du segments. En pratique, cela nécessite un plus grand espace mémoire mais devrait permettre d'accélérer certaines opérations.

Voici avant tout les types utilisés par l'analyseur:

```
type instruction =
  P of (string * int)
  | V of (string * int) ;;
```

```
type proc = instruction list ;;
```

```
type prog = proc list ;;
```

Fidèlement à la description de la grammaire du langage PV, les instructions sont données par  $P$  ou  $V$  selon que l'on veuille prendre où libérer une occurrence d'un sémaphore suivi d'un couple dont le premier terme est le nom du sémaphore et le second son arité. Un processus est une liste d'instructions et un programme une liste de processus mis en

parallèle.

```
type interval =  
| Interval of (int * int)  
| Empty_interval ;;
```

```
type cube =  
| Cube of interval list  
| Empty_cube ;;
```

```
type area = cube list ;;
```

On représente un intervalle comme un couple d'entier, un cube comme un produit d'intervalles et une région comme une réunion (comprendre une liste) de cubes.

```
type epsinteger = (int * bool) ;;
```

L'idée naïve du type `epsinteger` est de considérer les entiers comme "flou" au sens où  $(5, false)$  signifie que l'on est infinitésimalement proche de mais avant 5 alors que `true` signifie que l'on est après.

```
type statree =  
| Feuille of (interval list)  
| Noeud of (statree * (interval list) * statree) ;;
```

```
type sttr =  
| Fll of (interval * (int list))  
| Nd of (sttr * interval * (int list) * sttr) ;;
```

```
type sttr2 =  
| Fll2 of (interval * (int list list list))  
| Nd2 of (sttr2 * interval * (int list list list) * sttr2) ;;
```

On trouve ci-dessus trois représentations des arbres d'intervalles.

```
exception Cannot_extend of (int list) ;;
```

```
exception Dead_end ;;
```

Certains des algorithmes utilisés ont besoin, lorsqu'ils tombent sur une impasse, de renvoyer des données à la procédure qui les a appelés, on fait pour cela appel aux deux exceptions ci-dessus.

```
let cube2geomAux cub re gr bl tr= match cub with  
[] → failwith "on n'affiche que de la 3D"  
|(a,b)::[] → failwith "on n'affiche que de la 3D"  
|(a,b)::(c,d)::[] → failwith "on n'affiche que de la 3D"  
|(a,b)::(c,d)::(e,f)::[] →  
(* une procédure de mise au format .geom *)  
|_ → failwith "on n'affiche que de la 3D";;  
let rec area2geomAux a re gr bl tr= match a with
```

```
[] → ""  
|c::s→ (cube2geomAux c re gr bl tr)^\n"^(area2geomAux s re gr bl tr);;
```

```
let area2geom a re gr bl tr
```

```
let reper3D geomstr
```

Les fonctions ci-dessus convertissent le contenu d'une variable de type `area` en un fichier `.geom` lisible par l'outil de visualisation `geomview`.

J'ai par ailleurs utilisé **ocamlyacc** et **ocamllex** pour générer un analyseur syntaxique du langage PV. Etant donné un programme PV, on obtient alors une donnée de type `prg` que l'on passe en argument à une fonction qui teste si le programme répond bien aux critères syntaxiques selon lesquels un processus ne doit pas contenir deux instructions  $P_a$  entre lesquelles il n'y ait pas d'instruction  $V_a$ , de même qu'il n'est pas permis d'avoir une instruction  $V_a$  qui ne soit précédée d'aucune occurrence d'une instruction  $P_a$ . Une autre fonction vérifie que tous les sémaphores utilisés dans le programme ont bien été déclarés tandis qu'une seconde signale lorsqu'un sémaphore déclaré n'est pas utilisé.

Une fois cette analyse effectuée, le programme est passé sous la forme d'une donnée de type `prg` à une fonction qui en détermine le modèle géométrique sous la forme d'une donnée de type `area`. La fonction qui recherche les point morts à partir de ce modèle géométrique est en cours de développement.



# Partie III

SUPPLÉMENTS THÉORIQUES

ET

QUESTIONS OUVERTES





La dernière partie concerne des développements concernant différents points, d'ordre informatique et/ou mathématique, étudiés dans les deux parties précédentes. L'un de ses objectifs est de justifier le choix des outils mathématiques qui a été fait, autant auprès des informaticiens que des mathématiciens.

## X.1 LA GESTION DES BOUCLES

Puisque la catégorie  $\text{PoSpc}$  permet une “bonne” (du point de vue mathématique) généralisation dirigée de l’homotopie et puisque  $\text{PoSpc}$  possède une diversité d’objets suffisante pour représenter tout programme du langage PV, tout mathématicien raisonnable pourrait faire la remarque suivante : pourquoi vouloir étendre à des catégories telles que  $\text{dTop}$  (voir [37]) ou  $\text{RSp}$  (voir définition I.2.4) les notions d’homotopie dirigée, de catégorie fondamentale et de catégorie de composantes ?

La réponse est de nature informatique : le langage PV tel qu’il est présenté dans la deuxième partie n’a pas tous les traits communs à tout langage de programmation raisonnable, notamment, il ne permet pas l’utilisation de boucles (c’est-à-dire qu’il n’a pas d’instruction `while`, `do` ou `repeat`). On peut bien sûr ajouter à la syntaxe du langage PV une instruction qui remédie à cela, mais il faut alors pouvoir représenter les programmes PV qui font appel à cette instruction. Au regard de la représentation proposée dans la deuxième partie, il est naturel de penser que la trace d’un tour de boucle qui revient à l’état dans lequel se trouvait le système avant son exécution soit un chemin dirigé  $\gamma$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Si le modèle géométrique du programme en question est un objet de  $\text{PoSpc}$ , alors un tel  $\gamma$  est constant. On peut alors tenter, comme l’a fait *Lisbeth Fajstrup* dans [21], [23] et surtout dans [22], d’avoir recours à une forme de recouvrement dirigé, on perd alors la compacité de l’espace topologique sous-jacent du modèle. Une autre alternative est de voir la catégorie  $\text{dTop}$ , qui propose aussi une notion de catégorie fondamentale (voir [37]), comme une extension cohérente de la catégorie  $\text{PoSpc}$ , c’est un des propos du chapitre

XIII, qui explore les diverses extensions possible de  $\text{PoSpc}$  dans lesquelles on a des boucles qui ne sont pas triviales. En particulier, il est nécessaire d'avoir au préalable une idée de ce que doit-être la catégorie fondamentale du cercle dirigé (voir la sous-section XIII.1.1) et aussi de disposer d'une définition, en terme de petites catégories, de ce qu'est une boucle. Comme on a pu le voir dans la première partie, un résultat tel que le théorème V.0.27 n'est possible que si l'on restreint à  $\text{LfCat}$  le codomaine du foncteur catégorie fondamentale qui, de prime abord, est  $\text{Cat}$ . Pour étendre à des extensions de  $\text{PoSpc}$ , en gardant des résultats intéressants similaires au théorème V.0.27, les constructions de la première partie, il faut restreindre le codomaine du foncteur catégorie fondamentale défini sur ces extensions à une sous-catégorie pleine stricte de  $\text{Cat}$  qui, nécessairement, sera strictement plus vaste que  $\text{LfCat}$ . Le chapitre XI est consacré à ce problème.

A noter que, comme me l'a suggéré *Prakash Panangaden* lors d'une discussion, le fait que tout système informatique soit doté d'une horloge globale permet, en l'intégrant à la description des états du système, de considérer qu'aucune exécution d'un quelconque tour de boucle ne ramène le système dans l'état dans lequel il se trouvait avant l'exécution du tour en question, l'horloge globale ayant nécessairement avancé. C'est un point de vue informatique classique, que l'on retrouve par exemple dans le concept d'arbre de synchronisation et dans l'approche du problème des boucles adoptée par *Lisbeth Fajstrup*.

## X.2 LES AUTRES MODÈLES GÉOMÉTRIQUES

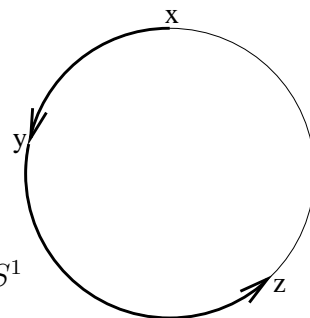
Pour disposer de vraies boucles dans nos modèles géométriques, il nous faut étendre  $\text{PoSpc}$ , or les diverses extensions  $E$  de  $\text{PoSpc}$ , à savoir les catégories  $\text{LPoSpc}$  (voir la définition XIII.4.7),  $\text{dTop}$  ou  $\text{RSpC}$ , proposent chacune la définition d'un foncteur catégorie fondamentale (de  $E$  dans  $\text{Cat}$ ) ainsi que, d'une certaine manière, un foncteur d'inclusion de  $\text{PoSpc}$  dans  $E$ . La question qui vient naturellement est : la catégorie fondamentale d'un espace ordonné est-elle isomorphe à la catégorie fondamentale de son image dans  $E$ ? Plus généralement, peut-on voir la construction du foncteur catégorie fondamentale proposée sur chaque  $E$  comme l'instance d'une construction plus générale? La réponse, positive, est apportée par le chapitre XII et a fait l'objet d'un article ([45]).

On veut trouver, dans le but de représenter les programmes PV possédant des boucles (voir la section X.1), une notion de catégorie de composantes définie sur une sous-catégorie de  $\mathbf{Cat}$  plus vaste que  $\mathbf{LfCat}$  et qui présente de "bonnes propriétés". La première étape consiste à trouver un analogue de l'ensemble ordonné  $([0, 1], \leq)$  (la catégorie fondamentale dans  $\mathbf{PoSpc}$  du segment dirigé "canonique"  $\overrightarrow{[0, 1]}$ ) qui soit la catégorie fondamentale du "cercle dirigé". L'une des difficultés du problème est que l'on a pas *a priori* de modèle "canonique" du cercle dirigé. En fait, la catégorie  $\mathbf{dTop}$  (voir [37] ou la définition XIII.1.1) contient d'une certaine manière un tel modèle. Elle possède en effet un objet noté  $\overrightarrow{S^1}$  dont l'espace topologique sous-jacent est le cercle euclidien  $S^1$  et sur lequel les chemins dirigés sont ceux qui "tournent dans le sens trigonométrique". Par ailleurs,  $\mathbf{dTop}$  contient aussi "le" segment unité dirigé c'est à dire l'objet dont l'espace topologique sous-jacent est  $[0, 1]$  et les chemins dirigés sont les applications continue croissantes de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ . Cet objet est par ailleurs l'image de l'espace ordonné  $\overrightarrow{[0, 1]}$  par le plongement  $\mathbf{PoSpc} \hookrightarrow \mathbf{dTop}$  et sa catégorie fondamentale dans  $\mathbf{dTop}$  est, comme on l'espère, l'ensemble ordonné  $([0, 1], \leq)$ .

## XI.1 CERCLE DIRIGÉ ALGÈBRIQUE

En écho à l'introduction de ce chapitre, on va définir une petite catégorie, notée  $\circlearrowright$  et appelée **cercle dirigé**, qui est en fait, selon les définitions de [37], la catégorie fondamentale de  $\overrightarrow{S^1}$  dans  $\mathbf{dTop}$ . Comme nous le verrons, la catégorie  $\circlearrowright$  et l'ensemble ordonné  $[0, 1]$ , vu comme une petite catégorie, ont de très nombreux points communs.

L'ensemble des objets de  $\circlearrowleft$  est  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  que l'on note  $S^1$ . Etant donnés deux points  $x$  et  $y$  de  $S^1$ , on note  $\widehat{xy}$  l'arc de cercle fermé joignant  $x$  à  $y$  dans le sens trigonométrique. L'ensemble des morphismes de  $\circlearrowleft$  est  $S^1 \times \mathbb{N} \times S^1$  avec  $s(x, n, y) = x$  et  $t(x, n, y) = y$ , la composition étant alors donnée par la règle ci-dessous.



$$(y, p, z) \circ (x, n, y) := \begin{cases} (z, n + p, x) & \text{si } \widehat{xy} \cap \widehat{yz} = \{y\} \text{ ou } S^1 \\ (z, n + p + 1, x) & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, les identités de la catégorie  $\circlearrowleft$  sont les morphismes de la forme  $(x, 0, x)$ . Intuitivement, cette description est facile à comprendre : le triplet  $(x, n, y)$  désigne un chemin qui part de  $x$  puis qui fait  $n$  fois le tour du cercle dans le sens trigonométrique et qui s'arrête en  $y$ . Lorsque l'on effectue la composition de deux morphismes allant respectivement de  $x$  à  $y$  et de  $y$  à  $z$ , on a deux situations possibles : dans la première, le "voyage" de  $x$  à  $z$  en passant par  $y$  nous fait faire "plus d'un tour de cercle" mais strictement moins de deux, c'est alors la seconde ligne qui s'applique. Dans la seconde, on fait "strictement moins d'un tour de cercle" ou exactement deux. L'idée de joindre un point à un autre *via* un troisième est à comparer avec la notion d'ordre cyclique décrite dans [40] par une relation ternaire. Notons enfin que lorsque  $\widehat{xy} \cap \widehat{yz}$  n'est ni  $\{y\}$  ni  $S^1$ , son nombre de composantes connexes est 2. En notant  $c$  le nombre de composantes connexes de  $\widehat{xy} \cap \widehat{yz}$  la règle de composition devient  $(y, p, z) \circ (x, n, y) = (x, n + p + c - 1, z)$ . On va donner, à isomorphisme près, une autre description de l'espace topologique  $S^1$  et du cercle dirigé  $\circlearrowleft$ , les deux étant liés.

#### XI.1.1 LEMME (DESCRIPTION ALTERNATIVE DES CERCLES)

On munit l'ensemble  $[0, 1[$  de la topologie engendrée par les sous-parties de  $[0, 1[$  de la forme  $]x, y[$  ou  $[0, x \cup ]y, 1[$ , avec  $0 \leq x \leq y < 1$ . L'espace topologique obtenu est isomorphe, dans  $\mathbf{Spc}$ , au cercle  $S^1$ . Les ouverts de cette topologie sont les ouverts classiques  $V$  de  $[0, 1[$  tels que si 0 appartient à  $V$ , alors il existe un réel  $\varepsilon$  dans  $[0, 1[$  tel que  $]1 - \varepsilon, 1[ \subseteq V$ . Cette topologie est donc strictement plus grossière que la topologie classique de  $[0, 1[$ .

La catégorie  $\circlearrowleft$  est isomorphe, dans  $\mathbf{Cat}$ , à la catégorie dont les objets sont les réels appartenant à  $[0, 1[$  et les morphismes les triplets  $(x, n, y)$ , où  $x, y \in [0, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}$ . La source et le but de  $(x, n, y)$  sont alors respectivement  $x$  et  $y$ . La composition est alors

$$\text{donnée par } (y, p, z) \circ (x, n, y) := \begin{cases} (x, n + p, z) & \text{si } y \text{ appartient à } [x, z] \\ (x, n + p + 1, z) & \text{sinon} \end{cases} .$$

PREUVE. Dans un cas comme dans l'autre, l'isomorphisme est donné par l'exponentielle complexe  $t \mapsto e^{i2\pi t}$ . ■

#### XI.1.2 REMARQUE

La construction donnée par le lemme XI.1.1 peut être faite à partir de n'importe quel ensemble totalement ordonné  $(X, \leq)$ . C'est à dire que l'on prend comme collection d'objets l'ensemble  $X$  et comme morphismes de  $x \in X$  vers  $y \in X$  l'ensemble  $\{(x, n, y) \mid n \in \mathbb{N}\}$  avec la même règle de composition que celle donnée dans le lemme XI.1.1.

Désormais, lorsque l'on fera référence à  $S^1$  ou à  $\circlearrowleft$  se sera, sauf mention contraire, à la représentation donnée dans le lemme XI.1.1.

### XI.1.3 LEMME (ROTATIONS)

Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , le morphisme de graphe suivant

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft & \longrightarrow & \circlearrowleft \\ x & \longmapsto & x + \varepsilon [1] \\ (x, n, y) & \longmapsto & (x + \varepsilon [1], n, y + \varepsilon [1]) \end{array} ,$$

est un automorphisme de  $\circlearrowleft$ , où  $x [1]$  signifie “ $x$  modulo 1”. L’inverse est obtenu en remplaçant  $\varepsilon$  par  $-\varepsilon$ .

PREUVE. Il (faut et il) suffit de prouver que  $x \mapsto x + \varepsilon [1]$  préserve les signatures que l’on a décrites dans le lemme XI.1.1, ce qui est évident. Remarquons au passage que ces automorphismes de  $\circlearrowleft$  n’ont aucun point fixe. Si  $\phi$  désigne l’isomorphisme de la description alternative de  $\circlearrowleft$  vers sa description initiale (voir lemme XI.1.1), on peut aussi montrer ce résultat en notant que le foncteur décrit dans le lemme XI.1.3 est la composée  $\phi^{-1} \circ \rho \circ \phi$  où  $\rho$  est la rotation d’angle  $2\pi\varepsilon$  c’est-à-dire l’automorphisme

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft & \longrightarrow & \circlearrowleft \\ x & \longmapsto & \rho(x) \\ (x, n, y) & \longmapsto & (\rho(x), n, \rho(y)) \end{array} ,$$

d’où l’appellation. ■

### XI.1.4 LEMME

Soit  $\phi$  une application ensembliste de  $[0, 1[$  vers  $[0, 1[$  telle que  $\phi(0) = 0$ . L’application  $\phi$  induit un homéomorphisme de  $S^1$  sur  $S^1$  si et seulement si  $\phi$  induit un homéomorphisme de  $]0, 1[$  sur  $]0, 1[$ .

PREUVE. Supposons que  $\phi$  induise un homéomorphisme de  $S^1$  sur  $S^1$ , comme  $\phi(0) = 0$  et que, en tant qu’homéomorphisme,  $\phi$  est en particulier une bijection de  $[0, 1[$  sur  $[0, 1[$ ,  $\phi$  induit une bijection  $\phi'$  de  $]0, 1[$  sur  $]0, 1[$ . Les intervalles  $]x, y[$  pour  $0 < x < y < 1$  forment une base de la topologie de  $]0, 1[$  et sont tous des ouverts de  $S^1$ , donc  $\phi^{-1}(]x, y[)$  est un ouvert de  $S^1$ . D’après le lemme XI.1.1,  $V := \phi^{-1}(]x, y[)$  est donc un ouvert de  $[0, 1[$  tel que si  $0 \in V$ , alors il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $]1 - \varepsilon, 1[ \subseteq V$ . Or en tant qu’homéomorphisme,  $\phi$  est en particulier une bijection de  $[0, 1[$  sur  $[0, 1[$ , et comme  $\phi(0) = 0$ ,  $0$  n’appartient pas à  $V$ , donc  $V$  est un ouvert de  $]0, 1[$  et  $\phi'$  est continue. Bien sûr, en considérant  $\phi^{-1}$  on montre de même que  $\phi'^{-1}$  est continue et donc que  $\phi'$  est bien un homéomorphisme. Réciproquement, si  $\phi$  induit un homéomorphisme  $\phi'$  de  $]0, 1[$  sur  $]0, 1[$ , alors d’après la proposition XI.1.7 (dont la preuve est complètement indépendante du résultat que l’on est en train de prouver),  $\phi'$  est une bijection monotone. De plus, comme  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi$  est une bijection. On notera cependant que  $\phi$  n’est pas forcément monotone. Supposons par exemple que  $\phi'$  est décroissante. Pour  $0 \leq x \leq y < 1$  on a  $\phi^{-1}(]x, y[) = ]\phi'^{-1}(y), \phi'^{-1}(x)[$  et  $\phi^{-1}([0, x[ \cup ]y, 1[) = \{0\} \cup ]\phi'^{-1}(1), \phi'^{-1}(y)[ \cup ]\phi'^{-1}(x), \phi'^{-1}(0)[$ . D’où la continuité de  $\phi$  de  $S^1$  dans  $S^1$ . On prouve de même la continuité de  $\phi^{-1}$  de  $S^1$  dans  $S^1$ .

XI.1.5 LEMME

Soit  $\phi$  une application ensembliste de  $]0, 1[$  vers  $]0, 1[$ . L'application  $\phi$  induit un isomorphisme de PoSet de  $(]0, 1[, \leq)$  dans  $(]0, 1[, \leq)$  si et seulement si en prolongeant  $\phi$  par  $\phi(0) = 0$  et  $\phi(1) = 1$ , on obtient un isomorphisme de PoSet de  $([0, 1], \leq)$  dans  $([0, 1], \leq)$ . De même  $\phi$  induit un isomorphisme de PoSet de  $(]0, 1[, \leq)$  dans  $(]0, 1[, \leq^{op})$  si et seulement si en prolongeant  $\phi$  par  $\phi(0) = 1$  et  $\phi(1) = 0$ , on obtient un isomorphisme de PoSet de  $([0, 1], \leq)$  dans  $([0, 1], \leq^{op})$ .

PREUVE. C'est immédiat. ■

XI.1.6 LEMME

Soit  $\phi$  une application ensembliste de  $]0, 1[$  vers  $]0, 1[$ .  $\phi$  induit un isomorphisme de PoSet de  $(]0, 1[, \leq)$  sur  $(]0, 1[, \leq)$  si et seulement si en prolongeant  $\phi$  en  $\phi'$  par  $\phi'(0) := 0$ ,  $\phi'$  induit un isomorphisme de Cat de  $\circlearrowleft$  sur  $\circlearrowleft$ . Plus formellement, le morphisme de graphe

$$\begin{array}{ccc} ]0, 1[, \leq & \longrightarrow & ]0, 1[, \leq \\ x & \longmapsto & \phi(x) \\ (x, y) & \longmapsto & (\phi(x), \phi(y)) \end{array}$$

est un isomorphisme de Cat si et seulement si en posant  $\phi'(0) := 0$  et pour tout  $x$  appartenant à  $]0, 1[$ ,  $\phi'(x) := \phi(x)$ , le morphisme de graphe

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft & \longrightarrow & \circlearrowleft \\ x & \longmapsto & \phi'(x) \\ (x, n, y) & \longmapsto & (\phi'(x), n, \phi'(y)) \end{array}$$

est un isomorphisme de Cat.

PREUVE. Si  $\phi$  induit un isomorphisme de PoSet, alors  $\phi$  est en particulier une bijection ensembliste et quels que soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $]0, 1[$ , on a

$$x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y) .$$

Les parties objets et morphismes du candidat foncteur sont donc des bijections ensemblistes. Il ne reste plus qu'à vérifier la functorialité, qui est tout aussi évidente puisque la signature d'un triplet  $(x, y, z)$  est aussi celle de  $(\phi(x), \phi(y), \phi(z))$  car  $\phi$  est strictement croissante. Réciproquement, si le foncteur proposé est un isomorphisme, la partie objet, c'est-à-dire  $\phi$ , est une bijection ensembliste. Il ne reste qu'à vérifier que  $\phi$  est croissante. Soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $]0, 1[$  tels que  $0 < x < y$ , l'application  $\phi$  étant une bijection, les images de  $0, x$  et  $y$  par  $\phi$  sont deux à deux distincts et, comme on a un foncteur de  $\circlearrowleft$  sur  $\circlearrowleft$ , les signatures de  $(0, x, y)$  et de  $(\phi(0), \phi(x), \phi(y))$  doivent être égales. Comme  $\phi(0) = 0$  on a nécessairement  $0 < \phi(x) < \phi(y)$  d'où la monotonie de  $\phi$ . ■

■

Avant de procéder à une étude plus détaillée de  $\circlearrowleft$ , on va donner pour le cercle dirigé un résultat comparable à la

XI.1.7 PROPOSITION (HOMÉOMORPHISMES DU SEGMENT)

Soit  $\phi$  une application ensembliste de  $]0, 1[$  dans  $]0, 1[$ , elle induit un homéomorphisme de  $]0, 1[$  dans  $]0, 1[$  (muni de la topologie classique) si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} (]0, 1[, \leq) \longrightarrow (]0, 1[, \leq) & \text{ou} & (]0, 1[, \leq) \longrightarrow (]0, 1[, \leq^{op}) \\ x \longmapsto \phi(x) & & x \longmapsto \phi(x) \\ (x, y) \longmapsto (\phi(x), \phi(y)) & & (x, y) \longmapsto (\phi(x), \phi(y)) \end{array} \quad \text{est un isomorphisme de Cat}$$

PREUVE. Rappelons qu'un homéomorphisme est un isomorphisme de **Spc** (voir définition B.1.11) et qu'une application ensembliste entre les ensembles sous-jacents de deux ensembles partiellement ordonnés est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante. Ici,  $(]0, 1[, \leq)$  est vu comme une petite catégorie. Ce résultat est en fait classique si l'on remplace la seconde condition par

$$\phi \text{ est une bijection monotone}$$

qui lui est équivalente. On a ici privilégié la formulation catégorique pour bien mettre en évidence l'analogie entre la proposition XI.1.7 et le théorème XI.1.9. ■

XI.1.8 REMARQUE

La proposition XI.1.7 reste valide si l'on remplace  $]0, 1[$  par  $[0, 1[$ . En particulier on a pour tout homéomorphisme  $\phi$  du segment unité,  $\phi^{-1}]x, y[ = ]\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)[$ ,  $\phi^{-1}]x, y[ = ]\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x)[$ ,  $\phi]x, y[ = ]\phi(x), \phi(y)[$  et  $\phi]x, y[ = ]\phi(y), \phi(x)[$  en fonction de la croissance ou de la décroissance de  $\phi$ . Notons enfin que les homéomorphismes de  $[0, 1[$  dans  $[0, 1[$  sont les bijections croissantes de  $[0, 1[$  dans  $[0, 1[$  et que les homéomorphismes de  $[0, 1[$  dans  $]0, 1]$  sont les bijections décroissantes.

Le résultat concernant  $\circlearrowleft$  annoncé précédemment est

XI.1.9 THÉORÈME (HOMÉOMORPHISMES DU CERCLE)

Soit  $\phi$  une application ensembliste de  $S^1$  dans  $S^1$ , elle induit un homéomorphisme de  $S^1$  dans  $S^1$  (muni de la topologie classique) si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft \longrightarrow \circlearrowleft & \text{ou} & \circlearrowleft \longrightarrow \circlearrowleft^{op} \\ x \longmapsto \phi(x) & & x \longmapsto \phi(x) \\ (x, n, y) \longmapsto (\phi(x), n, \phi(y)) & & (x, n, y) \longmapsto (\phi(x), n, \phi(y)) \end{array} \quad \text{est un isomorphisme de Cat}$$

PREUVE. D'après le lemme XI.1.1 on peut en fait supposer que  $\phi$  est une application ensembliste de  $[0, 1[$  dans  $[0, 1[$ . On suppose tout d'abord que  $\phi(0) = 0$ . D'après le lemme XI.1.4,  $\phi$  induit un homéomorphisme de  $S^1$  sur  $S^1$  si et seulement si  $\phi$  induit un homéomorphisme de  $]0, 1[$  sur  $]0, 1[$ . D'après la proposition XI.1.7,  $\phi$  induit un homéomorphisme de  $]0, 1[$  sur  $]0, 1[$  si et seulement si l'un des foncteurs ci-dessous est un isomorphisme de **Cat**.

$$\begin{array}{ccc} (]0, 1[, \leq) \longrightarrow (]0, 1[, \leq) & & (]0, 1[, \leq) \longrightarrow (]0, 1[, \leq^{op}) \\ x \longmapsto \phi(x) & & x \longmapsto \phi(x) \\ (x, y) \longmapsto (\phi(x), \phi(y)) & & (x, y) \longmapsto (\phi(x), \phi(y)) \end{array}$$



ce qui équivaut encore, d'après le lemme XI.1.6, à ce que l'un des deux foncteurs suivants soit un isomorphisme de  $\text{Cat}$

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft & \longrightarrow & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & \longrightarrow & \circlearrowright \\ x \vdash & \longrightarrow & \phi'(x) & & x \vdash & \longrightarrow & \phi'(x) \\ (x, n, y) \vdash & \longrightarrow & (\phi'(x), n, \phi'(y)) & & (x, n, y) \vdash & \longrightarrow & (\phi'(x), n, \phi'(y)) \end{array}$$

en posant  $\phi'(0) := 0$ . Or  $\phi' = \phi$  puisque l'on a supposé que  $\phi(0) = 0$ .

Dans le cas où l'on ne suppose plus que  $\phi(0) = 0$ , notons  $\rho$  l'unique rotation, vue comme un homéomorphisme de  $S^1$  (voir lemme XI.1.3) qui envoie  $\phi(0)$  sur 0. On peut appliquer ce qui précède à  $\rho \circ \phi$ . Notons  $\psi$  l'isomorphisme de  $\circlearrowleft$  sur  $\circlearrowleft$  induit par  $\rho \circ \phi$ . En notant alors  $\rho^{-1}$  la rotation inverse de  $\rho$ , vue cette fois comme un isomorphisme de  $\circlearrowleft$  sur  $\circlearrowleft$ ,  $\rho^{-1} \circ \psi$  est encore un isomorphisme de  $\circlearrowleft$  sur  $\circlearrowleft$  et c'est l'un des deux foncteurs décrit dans l'énoncé du théorème XI.1.9. ■

#### XI.1.10 REMARQUE

Dans la proposition XI.1.7 comme dans le théorème XI.1.9, si l'une des deux définitions proposées induit un foncteur, l'autre induit un foncteur contravariant. Cependant, dans un cas comme dans l'autre, les parties objets et morphismes sont des bijections. La petite subtilité vient donc du fait que seule une des deux définitions induit un foncteur au sens donné dans la définition A.1.4. J'ai opté pour cette formulation pour insister sur l'analogie croissante/décroissante avec sens trigonométrique/sens des aiguilles d'une montre. Par ailleurs, le théorème XI.1.9 et sa preuve mettent en évidence la nature "dirigée" de la topologie de  $S^1$ . En outre, on obtient une caractérisation formelle des notions de sens trigonométrique direct ou indirect qui ne dépend pas de la représentation du cercle dans un espace euclidien. On peut par exemple comparer  $\circlearrowleft$  avec le cercle dirigé tel qu'il est défini dans la catégorie des espaces dirigés  $d\text{Top}$  (voir [37] ou la section XIII.1.1) où un même morphisme allant de  $x$  à  $y$  dans le sens trigonométrique et sans faire le tour du cercle est l'image de tous les chemins dirigés  $t \mapsto e^{i2\pi\theta(t)}$  où  $\theta$  est une application croissante de  $a$  vers  $b$  où  $a \leq b$ ,  $b - a \leq 1$ ,  $e^{i2\pi a} = x$  et  $e^{i2\pi b} = y$ .

#### XI.1.11 COROLLAIRE

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et toute suite finie  $x_1, \dots, x_n$  d'objets deux à deux distincts de  $\circlearrowleft$ , il existe un automorphisme de  $\circlearrowleft$  dont l'ensemble des points fixes de la partie objet soit  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$  et toute suite finie  $x_1 < \dots < x_n$  d'objets deux à deux distincts de  $\circlearrowleft$  ( $<$  est l'ordre strict sur  $[0, 1[$  en utilisant la représentation fournie par le lemme XI.1.1), il existe un automorphisme  $\rho$  de  $\circlearrowleft$  qui n'a aucun point fixe et qui vérifie  $\rho(x_n) = x_1$  et  $\forall k \in \{1, \dots, n-1\} \rho(x_k) = x_{k+1}$ . On peut même construire  $\rho$  de telle sorte que  $\rho^n = \text{Id}_{\circlearrowleft}$ .

PREUVE. On utilise la représentation fournie par le lemme XI.1.1. Pour prouver le premier point on peut supposer que  $x_1 < \dots < x_n$  et découper  $[0, 1[$  en  $[0 = x_1, x_2[ \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n = 1[$ . On considère alors pour chaque  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  une bijection strictement croissante de  $[x_k, x_{k+1}]$  sur  $[x_k, x_{k+1}]$  dont les seuls points fixes sont  $x_k$  et  $x_{k+1}$ . Pour prouver le second, l'hypothèse  $x_1 < \dots < x_n$  nous est donnée, alors avec le même

découpage, on considère pour  $k \in \{1, \dots, n-2\}$  une bijection croissante de  $[x_k, x_{k+1}]$  sur  $[x_{k+1}, x_{k+2}]$  et une bijection croissante de  $[x_{n-1}, x_n]$  sur  $[x_1, x_2]$ . Dans les deux cas, d'après la proposition XI.1.7, ces bijections sont des homéomorphismes et il est clair qu'en les "recollant", on obtient deux homéomorphismes de  $S^1$  sur  $S^1$ , le premier ayant pour seuls points fixes  $\{x_1, \dots, x_n\}$  et le second induisant une action de la permutation  $(1\ 2 \dots n-1\ n)$  sur  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . On conclue en appliquant le théorème XI.1.9 qui fait de ces homéomorphismes des isomorphismes de  $\mathcal{O}$ . ■

#### XI.1.12 PROPRIÉTÉ (DE $\mathcal{O}$ )

1. Quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $S^1$ , l'ensemble  $\mathcal{O}[x, y]$  n'est pas vide.
2. La catégorie  $\mathcal{O}$  est isomorphe à sa catégorie duale.
3. Les seuls isomorphismes de  $\mathcal{O}$  sont les identités.
4. Les seuls morphismes de *Yoneda* de  $\mathcal{O}$  sont les identités.
5. Tous les morphismes de  $\mathcal{O}$  sont des bimorphismes.
6. (a) Pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{O}$ , le monoïde  $\mathcal{O}[x, x]$  est isomorphe à  $(\mathbb{N}, +, 0)$  dans *Mon*.  
 (b) Quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{O}$  et l'entier naturel  $n$ , on a  $(x, 0, y) \circ (x, n, x) = (y, n, y) \circ (x, 0, y)$ .  
 (c) Pour tout morphisme  $\theta$  appartenant à  $\mathcal{O}[x, y]$ , il existe un unique entier naturel  $n$  tel que  $\theta = (x, 0, y) \circ (x, n, x) = (y, n, y) \circ (x, 0, y)$ .
7. La catégorie  $\mathcal{O}$  est engendrée par les morphismes de la forme  $(x, 0, y)$  où  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $[0, 1[$ .
8. La catégorie  $\mathcal{O}$  n'a pas d'objet terminal, n'a aucun produit binaire et n'a aucun égalisateur hormis ceux qui sont triviaux.
9. La catégorie  $\mathcal{O}$  a tous les produits fibrés.
10. La catégorie  $\mathcal{O}$  est le co-égalisateur dans *Cat* du diagramme ci-dessous.

$$* \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} ([0, 1], \leq)$$

11. La catégorie  $\mathcal{O}$  est la somme amalgamée dans *Cat* du diagramme ci-dessous où  $i$  est l'inclusion  $\{0, 1\} \hookrightarrow [0, 1]$ .

$$([0, 1], \leq) \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{i} \end{array} \{0, 1\} \begin{array}{c} \xrightarrow{1-i} \\ \longrightarrow \end{array} ([0, 1], \leq) ,$$

12. La groupoïdification de  $\mathcal{O}$  est obtenue en remplaçant  $\mathbb{N}$  par  $\mathbb{Z}$  dans la construction de  $\mathcal{O}$ .

13. La groupoïdification de  $\circlearrowleft$  est le groupoïde fondamental (au sens de la définition B.2.6) de  $S^1$ .

PREUVE. Dans cette preuve, on se réfère à la description alternative de  $\circlearrowleft$  donnée dans le lemme XI.1.1. Pour tout couple  $(x, y)$  de réels de  $[0, 1[$ , le morphisme  $(x, 0, y)$  appartient à  $\circlearrowleft[x, y]$ , d'où (1) On obtient (2) par le foncteur qui suit.

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft & \longrightarrow & \circlearrowleft \\ x & \longmapsto & x \\ (x, n, y) & \longmapsto & (y, n, x) \end{array}$$

Soient un isomorphisme  $(x, n, y)$  et son inverse  $(y', p, x')$ . Par définition de la source et du but dans  $\circlearrowleft$ , on a  $x = x'$  et  $y = y'$ . En appliquant la règle de composition de  $\circlearrowleft$ , si on avait  $x \neq y$ , on aurait forcément  $(y, p, x) \circ (x, n, y) = (x, n + p + 1, y)$  avec  $n, p \in \mathbb{N}$ , ce qui est bien sûr absurde, il vient donc que  $x = y$  et  $n = p = 0$  et on a (3). Supposons que  $\sigma$  soit un morphisme de *Yoneda* appartenant à  $\circlearrowleft[x, y]$ , d'après (1), l'ensemble  $\circlearrowleft[y, x]$  n'est pas vide et donc, d'après la propriété IV.2.8,  $\sigma$  est un isomorphisme. Il s'ensuit que, d'après (3), c'est une identité et on a (4). L'assertion (5) découle immédiatement de la loi de composition de  $\circlearrowleft$  et du fait que  $(\mathbb{N}, +)$  soit un monoïde régulier. D'après la description des morphismes de  $\circlearrowleft$  et de leur composition, l'application suivante est un isomorphisme de *Mon*.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{N}, +) & \longrightarrow & (\circlearrowleft[x, x], \circ) \\ n & \longmapsto & (x, n, x) \end{array}$$

Le reste de l'assertion (6) est une conséquence de (5) et du fait que quels que soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x, y$  appartenant à  $[0, 1[$ , on a

$$(x, n, y) = (x, 0, y) \circ (x, n, x) = (y, n, y) \circ (x, 0, y).$$

Remarquons que pour n'importe quels objets  $x$  et  $y$  de la catégorie  $\circlearrowleft$ , on a  $(y, 0, x) \circ (x, 0, y) = (x, 1, x)$  ce qui, avec (6), donne (7). Avant de prouver (8), rappelons que les objets terminaux, les produits binaires et les égalisateurs sont préservés par les automorphismes et comme les seuls isomorphismes de la catégorie  $\circlearrowleft$  sont les identités, les objets précédemment cités sont définis de façon strictement unique, et pas seulement à isomorphisme près. Etant donnés  $x$  et  $y$ , deux points distincts de  $S^1$ , si  $\theta$  est l'angle  $\widehat{xOy}$ , alors la rotation d'angle  $\theta$  induit (voir théorème XI.1.9) un automorphisme  $\rho$  de la catégorie  $\circlearrowleft$  qui envoie  $x$  sur  $y$ . Si  $x$  était l'objet terminal de  $\circlearrowleft$ , on devrait avoir  $\rho(x) = x$ , ce qui n'est pas le cas puisque  $\rho(x) = y$  et que  $x \neq y$ . De même, supposons que  $z$  soit le produit binaire de deux objets distincts  $x$  et  $y$  de la catégorie  $\circlearrowleft$ , d'après le corollaire XI.1.11 il existe un automorphisme  $\rho$  de la catégorie  $\circlearrowleft$  qui n'a aucun point fixe et échange les objets  $x$  et  $y$ . Comme  $\rho$  préserve les produits binaires, on devrait avoir  $\rho(z) = z$  ce qui n'est pas le cas puisque  $\rho$  n'a aucun point fixe. Dans le cas où  $x = y$ , si le produit de  $x$  avec lui-même existe, c'est nécessairement  $x$ , sinon, l'existence d'un automorphisme de la catégorie  $\circlearrowleft$  dont le seul point fixe est  $x$  conduit à une contradiction. Mais alors, en appliquant la propriété universelle du produit binaire, on doit avoir deux morphismes  $(x, p, x)$  et  $(x, q, x)$ , qui sont les projections du produit sur ses composantes et satisfont l'assertion qui suit :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \exists h \in \mathbb{N}, n = p + h \text{ et } m = q + h,$$

ce qui est bien sûr impossible. Vérifions enfin que la catégorie  $\mathcal{O}$  n'a pas d'égalisateur non trivial. Dans le diagramme égalisateur suivant, on a nécessairement  $p + q = n + q$  donc  $n = p$ .

$$z \xrightarrow{q} x \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ \xleftarrow{p} \end{array} y$$

L'égalisateur est donc trivial et on a  $z = x$  et  $q = 0$ , c'est-à-dire que  $z \xrightarrow{q} x = x \xrightarrow{0} x = id_x$ . Ce qui achève la preuve de (8). Soient  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels et  $x, y$ , et  $z$  trois points de  $S^1$ , le diagramme commutatif ci-dessous prouve (9).

$$\begin{array}{ccc} & t & \\ & \downarrow & \\ & z & \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{n'} \\ \xleftarrow{p'} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{p'} \\ \xleftarrow{n'} \end{array} \\ & \downarrow & \\ x & & y \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ \xleftarrow{p} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{n} \end{array} \\ & z & \end{array}$$

Pour montrer (10), il suffit de considérer le foncteur qui suit en utilisant la représentation de  $\mathcal{O}$  donnée par le lemme XI.1.1 (où  $x [1]$  signifie  $x$  modulo 1). Plus précisément, on applique les assertions (6) et (7) pour conclure.

$$\begin{array}{ccc} ([0, 1], \leq) & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ x & \longmapsto & x [1] \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} (x [1], 0, y [1]) & \text{si } \{x, y\} \neq \{0, 1\} \\ (0, 1, 0) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

La propriété (11) se démontre de façon analogue en envoyant chacun des deux segments sur chacun des deux arcs  $\widehat{ab}$  et  $\widehat{ba}$  où  $a := e^{i0}$  et  $b := e^{i\pi}$ . La preuve de (12) est une vérification routinière. Pour démontrer (13), on commence par écrire  $S^1$  comme la somme amalgamée ci-dessous où  $i$  est l'inclusion de  $\{0, 1\}$  dans  $[0, 1]$ , puis on applique le théorème de *Van Kampen* pour les groupoïdes fondamentaux (voir proposition B.2.12 ou [47]). On obtient ainsi une somme amalgamée dans Grd (la catégorie des groupoïdes) et il se trouve que cette somme amalgamée est aussi l'image par le foncteur de groupoïdification qui, en tant qu'adjoint à gauche, préserve les colimites, de la somme amalgamée décrite dans l'assertion (11), d'où le résultat.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & & [0, 1] \\ & \swarrow i & \searrow 1-i \\ & \{0, 1\} & \end{array}$$

La démonstration de (13) que l'on vient de donner est très théorique, (13) peut aussi être vu comme est une conséquence du fait que le groupe fondamental de  $S^1$  est isomorphisme dans Gr (la catégorie des groupes) à  $(\mathbb{Z}, +)$ . Ce résultat élémentaire classique est disponible dans n'importe quel manuel de topologie algébrique dont [44]. ■

L'assertion (4) de la propriété XI.1.12 montre que la notion de morphisme inversible au sens de *Yoneda* ne peut pas être utilisée pour définir une notion de catégorie de composantes intéressante dans la cas d'une catégorie ayant des boucles. En particulier, même si formellement, la définition de catégorie de composantes donnée dans la première partie reste valide dans le cas de  $\circlearrowleft$ , elle est inutile puisqu'alors la catégorie de composantes de  $\circlearrowleft$  est  $\circlearrowleft$ . Notons cependant que pour tout objet  $p_0$  de  $\circlearrowleft$  fixé, on obtient une fibration  $F$  de  $\circlearrowleft$  sur  $(\mathbb{N}, +, 0)$  de la façon suivante : on pose  $F(x, n, y) = n + 1$  si  $p_0$  appartient à  $[x, y[$  et  $F_0(x, n, y) = n$  dans le cas contraire. En se basant sur la représentation de  $\circlearrowleft$  donnée par XI.1.1, on vérifie que  $F_0$  satisfait les conditions précédentes et donc que  $F_0$  se prolonge, d'une unique manière, en un foncteur de  $\circlearrowleft$  vers  $(\mathbb{N}, +, 0)$ . Intuitivement, le foncteur  $F$  "compte" combien de fois on "passe" par le point  $p_0$ . On vérifie facilement que c'est une fibration, essentiellement grâce aux propriétés XI.1.12. Au regard du théorème V.0.27, on voudrait que la catégorie de composantes de  $\circlearrowleft$  soit isomorphe à  $(\mathbb{N}, +, 0)$ . Notons que pour deux objets  $p_0$  et  $p_1$  de  $\circlearrowleft$ , les fibrations  $F_1$  et  $F_0$  obtenues par la construction précédente vérifie  $F_1 = F_0 \circ \theta$  où  $\theta$  est la rotation, au sens du lemme XI.1.3, qui envoie  $p_1$  sur  $p_0$ . Ceci constitue la première consigne qu'une éventuelle généralisation de la notion de catégorie de composantes devrait respecter.

## XI.2 BOUCLES ET COMPOSANTES

On souhaite obtenir une généralisation utile de la notion de morphisme inversible au sens de *Yoneda*. En effet, bien que l'on puisse formellement appliquer la construction de la catégorie de composantes (voir définition IV.3.12) à la petite catégorie  $\circlearrowleft$  puisque cette dernière est géométrique (au sens de la définition IV.3.15), le résultat n'a que peu d'intérêt du point de vue de la réduction du nombre d'objets. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que les seuls morphismes inversibles au sens de *Yoneda* de  $\circlearrowleft$  sont les identités et qu'en conséquence, la catégorie de composantes de  $\circlearrowleft$  telle qu'elle est donnée par la définition IV.3.12 n'est rien d'autre que  $\circlearrowleft$  elle-même. Or, comme on l'a déjà signalé, on aimerait que la catégories de composantes "généralisée" de  $\circlearrowleft$  soit, à isomorphisme près, le monoïde  $(\mathbb{N}, +, 0)$ . On va donner quelques pistes possibles, prolongeant les travaux de [46].

### XI.2.1 PROPOSITION (VOIR [46])

Soient une catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\sigma \in \mathcal{C}[x, y]$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ :

1. **si** pour tout morphisme  $\delta$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, x]$ , il existe un unique morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma \circ \delta = \gamma \circ \sigma$ , **alors** la fonction

$$\begin{array}{ccc} \Phi_\sigma : \mathcal{C}[x, x] & \longrightarrow & \mathcal{C}[y, y] \\ \delta & \longmapsto & \gamma \end{array}$$

est morphisme de monoïdes,

2. **si** pour tout morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$ , il existe un unique morphisme  $\delta$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, x]$  tel que  $\gamma \circ \sigma = \sigma \circ \delta$ , **alors** la fonction

$$\begin{array}{ccc} \Psi_\sigma : \mathcal{C}[y, y] & \longrightarrow & \mathcal{C}[x, x] \\ \gamma & \longmapsto & \delta \end{array}$$

est morphisme de monoïdes,

3. **si** pour tout morphisme  $\delta$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, x]$ , il existe un unique morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma \circ \delta = \gamma \circ \sigma$  **et si** pour tout morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$ , il existe un unique morphisme  $\delta$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, x]$  tel que  $\gamma \circ \sigma = \sigma \circ \delta$ , **alors** les applications  $\Phi_\sigma$  et  $\Psi_\sigma$  sont des isomorphismes de monoïdes inverse l'un de l'autre, c'est-à-dire que:

$$\Psi_\sigma \circ \Phi_\sigma = Id_{\mathcal{C}[x, x]} \text{ et } \Phi_\sigma \circ \Psi_\sigma = Id_{\mathcal{C}[y, y]}.$$

PREUVE. On a  $\sigma \circ id_x = id_y \circ \sigma$ , ainsi  $\Phi_\sigma(id_x) = id_y$ . De plus,  $\sigma \circ (\delta_2 \circ \delta_1) = (\Phi_\sigma(\delta_2 \circ \delta_1)) \circ \sigma$  et  $\sigma \circ (\delta_2 \circ \delta_1) = (\sigma \circ \delta_2) \circ \delta_1 = (\Phi_\sigma(\delta_2) \circ \sigma) \circ \delta_1 = \Phi_\sigma(\delta_2) \circ (\sigma \circ \delta_1) = (\Phi_\sigma(\delta_2)) \circ (\Phi_\sigma(\delta_1)) \circ \sigma$ . Par unicité,  $\Phi_\sigma(\delta_2 \circ \delta_1) = \Phi_\sigma(\delta_2) \circ \Phi_\sigma(\delta_1)$ , donc  $\Phi_\sigma$  est un morphisme de monoïdes. Les mêmes arguments, au dual près, montrent que  $\Psi_\sigma$  est aussi un morphisme de monoïdes. Supposons que l'on a les hypothèses du 3<sup>ème</sup> point, alors  $\sigma \circ \delta = \Phi_\sigma(\delta) \circ \sigma = \sigma \circ \Psi_\sigma(\Phi_\sigma(\delta))$ , donc, par unicité,  $\Psi_\sigma(\Phi_\sigma(\delta)) = \delta$ . De la même façon,  $\Phi_\sigma(\Psi_\sigma(\gamma)) = \gamma$ . ■

### XI.2.2 PROPOSITION

Soit une petite catégorie  $\mathcal{C}$ . Supposons que  $\sigma : x \longrightarrow y$  soit un morphisme de  $\mathcal{C}$  tel que les applications

$$\begin{array}{ccc} f_\sigma : \mathcal{C}[x, x] & \longrightarrow & \mathcal{C}[x, y] \\ \delta \longmapsto & \longrightarrow & \sigma \circ \delta \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g_\sigma : \mathcal{C}[y, y] & \longrightarrow & \mathcal{C}[x, y] \\ \gamma \longmapsto & \longrightarrow & \gamma \circ \sigma \end{array}$$

soient bijectives. Alors les hypothèses du 3<sup>ème</sup> point de la proposition XI.2.1 sont satisfaites.

PREUVE. Etant donné  $\delta \in \mathcal{C}[x, x]$ , par définition des bijections  $f_\sigma$  et  $g_\sigma$ ,  $\gamma := g_\sigma^{-1}(\sigma \circ \delta)$  est le seul élément de  $\mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma \circ \delta = \gamma \circ \sigma$ . Bien sûr, étant donné  $\gamma \in \mathcal{C}[y, y]$ , par définition des bijections  $f$  et  $g$ ,  $\delta := f_\sigma^{-1}(\gamma \circ \sigma)$  est le seul élément de  $\mathcal{C}[x, x]$  tel que  $\gamma \circ \sigma = \sigma \circ \delta$ . En particulier,  $\Phi_\sigma = g_\sigma^{-1} \circ f_\sigma$  et  $\Psi_\sigma = f_\sigma^{-1} \circ g_\sigma$ . ■

### XI.2.3 COROLLAIRE

Tout morphisme inversible au sens de *Yoneda* satisfait les hypothèses de la proposition XI.2.2.

En s'inspirant des résultats ci-dessus, on s'intéresse plus en détail aux trois familles de morphismes décrits ci-dessous.

### XI.2.4 DÉFINITION (VOIR [46])

Etant donné une catégorie  $\mathcal{C}$  et un morphisme  $\sigma \in \mathcal{C}[x, y]$ ,  $\sigma$  est un

1. morphisme **semi inversible** au sens de *Yoneda* lorsque  $\sigma$  est un bimorphisme et que les applications

$$\begin{array}{ccc} f_\sigma : \mathcal{C}[x, x] & \longrightarrow & \mathcal{C}[x, y] \\ \delta \longmapsto & \longrightarrow & \sigma \circ \delta \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g_\sigma : \mathcal{C}[y, y] & \longrightarrow & \mathcal{C}[x, y] \\ \gamma \longmapsto & \longrightarrow & \gamma \circ \sigma \end{array}$$

soient bijectives

2. morphisme **faiblement inversible** au sens de *Yoneda* lorsque  $\sigma$  est un bimorphisme, que pour tout morphisme  $\delta$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, x]$ , il existe un unique morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma \circ \delta = \gamma \circ \sigma$ , et enfin que pour tout morphisme  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$ , il existe un unique morphisme  $\delta$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, x]$  tel que  $\gamma \circ \sigma = \sigma \circ \delta$ .<sup>1</sup>

La propriété IV.2.5, le corollaire IV.2.6 ainsi que la remarque IV.2.7 restent valables en remplaçant "inversible au sens de *Yoneda*" par "semi inversible au sens de *Yoneda*", en outre, les preuves sont exactement les mêmes. On peut donc énoncer

### XI.2.5 PROPRIÉTÉ

Soit une catégorie  $\mathcal{C}$ . Soient  $x$  et  $y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . Soient enfin deux morphismes *Yoneda* semi inversibles  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, y]$ , alors il existe un unique isomorphisme  $f_1$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma_2 = f_1 \circ \sigma_1$  ainsi qu'un unique isomorphisme  $f_2$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, y]$  tel que  $\sigma_1 = f_2 \circ \sigma_2$ . Sous les mêmes hypothèses, il existe un unique isomorphisme  $g_1$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, x]$  tel que  $\sigma_2 = \sigma_1 \circ g_1$  ainsi qu'un unique isomorphisme  $g_2$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, x]$  tel que  $\sigma_1 = \sigma_2 \circ g_2$ . Si de plus  $Iso(\mathcal{C})$  est discret, alors étant donné deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}[x, y] \cap semiYoneda(\mathcal{C})$  contient au plus un élément, où  $semiYoneda(\mathcal{C})$  est la collection des morphismes semi inversibles au sens de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$ .

En particulier, si  $\mathcal{C}$  est sans boucle, un morphisme  $\sigma$  est *Yoneda* semi inversible si et seulement si  $\mathcal{C}[src(\sigma), tgt(\sigma)] = \{\sigma\}$ .

On vérifie facilement que

semi inversible au sens de *Yoneda*  $\Rightarrow$  faiblement inversible au sens de *Yoneda*

De plus

### XI.2.6 PROPOSITION

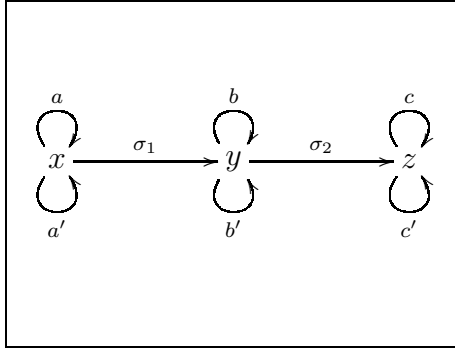
La famille des morphismes faiblement inversibles au sens de *Yoneda* est stable par composition.

PREUVE. On rappelle qu'un bimorphisme est, par définition, à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, ainsi, une composée de bimorphismes est un bimorphisme. Supposons que  $\sigma_1, \sigma_2$  soient faiblement inversibles au sens de *Yoneda* et tels que  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  soit défini. Soit  $\delta$  un morphisme de  $src(\sigma_1)$  vers  $src(\sigma_1)$ . Puisque  $\sigma_1$  est faiblement inversible au sens de *Yoneda*, on a  $\gamma_1$  tel que  $\sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \delta = \sigma_2 \circ \gamma_1 \circ \sigma_1$  et puisque  $\sigma_2$  est faiblement inversible au sens de *Yoneda*, on a  $\gamma_2$  tel que  $\sigma_2 \circ \gamma_1 \circ \sigma_1 = \gamma_2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ . De plus,  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  est un épimorphisme donc le morphisme  $\gamma_2$  tel que  $\sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \delta = \gamma_2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$  est unique. Etant donné un morphisme  $\gamma$  de  $tgt(\sigma_2)$  vers  $tgt(\sigma_2)$ , le même raisonnement fournit un unique  $\delta$  tel que  $\gamma \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \delta$ , en appliquant la fait que l'on ait un monomorphisme au lieu d'un épimorphisme pour obtenir l'unicité. ■

Notons que l'on est obligé d'exiger explicitement que  $\sigma$  soit un bimorphisme sans quoi on perd la stabilité par composition. Par exemple:

---

<sup>1</sup>voir le 3<sup>ème</sup> point de la proposition XI.2.1.



la catégorie engendrée par le graphe décrit à gauche est présentée par les relations suivantes :  
 $b\sigma_1 = \sigma_1 a$ ,  $c\sigma_2 = \sigma_2 b$ ,  $b'\sigma_1 = \sigma_1 a'$ ,  $c'\sigma_2 = \sigma_2 b'$  et  
 $\sigma_2\sigma_1 a = c\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1 a' = c'\sigma_2\sigma_1$ . Ainsi  $\sigma_1$  est faiblement inversible au sens de *Yoneda* dans la sous-catégorie pleine contenant  $\{x, y\}$  et  $\sigma_2$  dans celle contenant  $\{y, z\}$ . Cependant, leur composée ne l'est pas puisque l'on a pas l'unicité requise.

Par ailleurs, la famille des morphismes semi inversible au sens de *Yoneda* n'est pas forcément stable par composition, on peut facilement s'en convaincre en observant l'exemple de la catégorie libre  $\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ \uparrow & & \uparrow \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$ . On peut aussi noter que dans  $\circlearrowleft$ , d'après la propriété XI.1.12,

seuls les morphismes de  $\circlearrowleft$  de la forme  $(x, 0, y)$  sont semi inversibles au sens de *Yoneda*. Or, toujours d'après la propriété XI.1.12, les morphismes de la forme  $(x, 0, y)$  engendrent  $\circlearrowleft$ . Notons aussi que tous les morphismes de  $\circlearrowleft$  sont faiblement inversibles au sens de *Yoneda*, c'est encore un corollaire discret de la propriété XI.1.12.

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie sans boucle, alors chacun de ses morphismes est faiblement inversible au sens de *Yoneda* puisque tous les monoïdes  $\mathcal{C}[x, x]$  sont triviaux. Au passage, on remarque que les notions de morphisme inversible, semi inversible ou faiblement inversible ne sont pas équivalentes. Bien sûr, si  $\sigma$  est un isomorphisme, alors  $\sigma$  est faiblement inversible au sens de *Yoneda* et avec les notations de la définition XI.2.4  $\gamma = \sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1}$  et  $\delta = \sigma^{-1} \circ \gamma \circ \sigma$ . Dans le cas où l'on travaille avec un groupe,  $\gamma$  et  $\delta$  sont conjugués au sens usuel de la théorie des groupes.

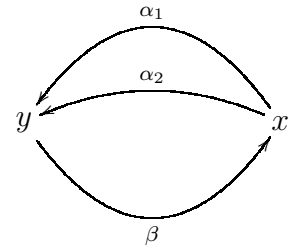
On étudie maintenant un exemple qui met en relief la différence entre morphismes faiblement et semi inversibles au sens de *Yoneda*:

La catégorie  $\mathcal{C}$  engendrée par le graphe décrit à droite est présentée par les relations  $\beta \circ \alpha_1 = \beta \circ \alpha_2$  et  $\alpha_1 \circ \beta = \alpha_2 \circ \beta$ . Nous posons  $e_y := \alpha_1 \circ \beta$  et  $e_x := \beta \circ \alpha_1$ . Il vient que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\alpha_1 \circ e_x^n = e_y^n \circ \alpha_1, \quad \alpha_2 \circ e_x^n = e_y^n \circ \alpha_2$$

et quels que soient  $n$  et  $p$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha_1 \circ e_x^n = \alpha_1 \circ e_x^p &\Leftrightarrow e_y^n \circ \alpha_1 = e_y^p \circ \alpha_1 \\ &\Leftrightarrow \alpha_2 \circ e_x^n = \alpha_2 \circ e_x^p \\ &\Leftrightarrow e_y^n \circ \alpha_2 = e_y^p \circ \alpha_2 \\ &\Leftrightarrow n = p. \end{aligned}$$



On déduit facilement de ces relations que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont faiblement inversibles au sens de *Yoneda* bien qu'ils ne soient pas semi inversibles au sens de *Yoneda* car  $\delta \in \mathcal{C}[x, x] \mapsto \alpha_i \circ \delta \in \mathcal{C}[x, y]$  n'est ni une bijection pour  $i = 1$  ni pour  $i = 2$ . Selon le cas, on constate en effet que  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  n'est pas dans leur image. On remarque également que  $\beta$  n'est ni un monomorphisme ni un épimorphisme mais que  $f_\beta$  et  $g_\beta$  (avec les notations du 1 de la définition XI.2.4) sont des bijections. Enfin, si l'on considère  $\mathcal{C}'$  la sous-catégorie



de  $\mathcal{C}$  engendrée par  $\alpha_1$  et  $\beta$ , on constate que  $\alpha_1$  et  $\beta$  sont tous les deux *Yoneda* semi inversibles sans être inverses l'un de l'autre au sens habituel (comparer avec la propriété IV.2.8). Pour finir, si l'on prend  $\mathcal{C}$  la catégorie libre engendrée par le graphe de droite, alors  $\mathcal{C}[x, x] \cong \mathcal{C}[y, y] \cong \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$  où  $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$  est la somme dans *Mon* de deux copies de  $(\mathbb{N}, +, 0)$  et  $\beta$  est semi *Yoneda* inversible alors que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ne le sont pas.

Pour résumer, la catégorie  $\circlearrowleft$  nous sert de boucle dirigée de référence, on sait que la notion d'inversibilité au sens de *Yoneda* tel qu'on l'a défini dans la première partie de cette thèse est sans intérêt pour réduire la taille de  $\circlearrowleft$  puisque les seuls morphismes *Yoneda* inversibles de  $\circlearrowleft$  sont ses identités. Par ailleurs, bien que plus partique (par rapport à la notion de *Yoneda* semi inversibilité) puisque stable par composition, la propriété d'inversibilité faible au sens de *Yoneda* se révèle insatisfaisante car tous les morphismes de  $\circlearrowleft$  la satisfont. Intuitivement, les morphismes de  $\circlearrowleft$  que l'on voudrait reconnaître comme "sans influence sur le futur ni le passé" sont ceux de la forme  $(x, 0, y)$ . Ce sont exactement les morphismes *Yoneda* semi inversibles de  $\circlearrowleft$ . Il semblerait donc que, bien qu'elle ne soit pas stable par composition, ce soit la notion qu'il faille retenir. En fait, en y réfléchissant bien, cette "mauvaise" propriété (du point de vue de l'ergonomie théorique) est rassurante. En effet, pour définir des modèles admettant des boucles dirigées, on a équipé un espace topologique soit d'une relation définie globalement mais pas transitive, soit d'une famille de relations transitives mais définies localement. On peut alors rapprocher les deux faits suivants :

1. La "bonne" généralisation de la notion de morphisme *Yoneda* inversible engendre une famille de morphismes qui n'est pas stable par composition.
2. On ne peut pas définir de modèles géométriques dirigés ayant des boucles par une relation transitive globale.

Un autre constat milite en faveur de ce choix. Notons  $\Sigma$  la famille des morphismes de  $\circlearrowleft$  qui, informellement, sont sans influence sur le futur ni le passé. Autrement dit  $\Sigma$  doit, dans le cas de  $\circlearrowleft$ , jouer le rôle que joue le plus grand système de morphismes inversible au sens de *Yoneda* dans le cas d'une catégorie sans boucle. En admettant que, même si l'on renonce à la stabilité par composition de  $\Sigma$ , on garde le fait que  $\Sigma$  soit pure dans  $\circlearrowleft$ , au moins un morphisme de la forme  $(x, 0, y)$  doit appartenir à  $\Sigma$  puisque ces morphismes engendrent  $\circlearrowleft$ . Puis, en admettant également que pour tout automorphisme  $\Phi$  de  $\circlearrowleft$  on ait  $\Phi(\Sigma) = \Sigma$ , tous les morphismes de la forme  $(x, 0, y)$  doivent appartenir à  $\Sigma$ . En effet, on peut toujours trouver un automorphisme de  $\circlearrowleft$  qui envoie  $(x, 0, y)$  sur  $(x', 0, y')$ . Il s'ensuit que toute famille  $\Sigma$  "raisonnable" doit contenir tous les morphismes de la forme  $(x, 0, y)$  et donc, si l'on veut qu'elle ne contienne pas tous les morphismes de  $\circlearrowleft$ , ne peut pas être stable par composition. Enfin, alors que dans le cadre des catégories sans boucle, on obtenait la catégorie de composantes en identifiant les éléments de  $\Sigma$ , on devra ici opter pour une autre construction car  $\circlearrowleft /_{\Sigma} = \{*\}$  (cette égalité est une conséquence directe du fait que  $\Sigma$  engendre  $\circlearrowleft$ ).

L'idée générale de ce chapitre est d'axiomatiser dans le cadre des catégories la notion de chemin de *Moore*, c'est-à-dire que si  $\delta$  et  $\gamma$  sont des applications continues respectivement définies sur les intervalles  $[a, b]$  et  $[b, c]$  à valeurs dans un espace topologique  $X$  et telles que  $\gamma(b) = \delta(b)$ , alors on peut définir leur concaténation de *Moore* par

$$\gamma \cdot \delta : t \in [a, c] \longmapsto \begin{cases} \delta(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma(t) & \text{si } t \in [b, c] \end{cases}$$

Supposons que  $\mathbf{C}$  soit une catégorie possédant un objet terminal  $*$  et dont on souhaite utiliser les objets pour représenter géométriquement les programmes d'un langage permettant le parallélisme des tâches. L'idée est alors de fixer  $\mathbb{I}$  un objet de  $\mathbf{C}$ , de préférence exponentiable (voir définition A.5.8), qui représente dans  $\mathbf{C}$  l'intervalle de temps de référence. On fixe également deux points de  $\mathbb{I}$  (cf définition A.2.14) notés  $s, t \in [* , \mathbb{I}]$  respectivement le début et la fin de  $\mathbb{I}$ . Si  $X$  est l'objet de  $\mathbf{C}$  qui représente le programme que l'on veut étudier, un fragment d'exécution du programme est représenté par un élément de  $\mathbf{C}[\mathbb{I}, X]$ . Un tel élément est, par définition, un chemin (dirigé) dans  $X$ . Le fait d'avoir choisi  $\mathbb{I}$  parmi les objets exponentiables de  $\mathbf{C}$  nous donne la représentation de tous les fragments d'exécution possibles comme l'objet  $X^{\mathbb{I}}$  de  $\mathbf{C}$ . On retrouve cela dans la notion de flots développée par *Philippe Gaucher* qui se focalise sur la topologie des chemins plutôt que celle des points. En se référant au vocabulaire de l'homotopie algébrique (voir [49] ou [3]), le choix de  $\mathbb{I}$  s'apparente à celui d'un objet-chemin<sup>1</sup>. Les notions d'homotopie (dirigée) et de catégorie fondamentale en découle selon un procédé standard (voir par exemple [3]). C'est d'ailleurs pourquoi *Marco Grandis* en a fait usage dans [37]. En particulier, pour tout chemin (dirigé)  $\gamma$  dans  $X$ ,  $\gamma \circ s$  et  $\gamma \circ t$  donnent respectivement la source et le but de  $\gamma$  dans la catégorie fondamentale de  $X$ .

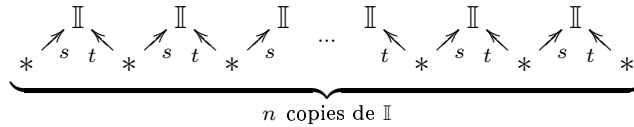
<sup>1</sup>traduction littérale du terme anglo-saxon "path-object"

## XII.1 CATÉGORIE À CHEMINS

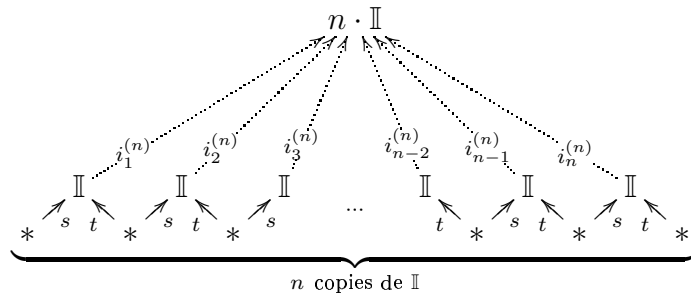
En écho à l'introduction de ce chapitre et en s'inspirant de certaines remarques de *Marco Grandis* ainsi que de l'homotopie algébrique à base d'objet-chemin telle qu'elle est décrite dans [3], on va définir de façon générale un foncteur catégorie fondamentale sur une catégorie  $\mathbf{C}$ , que l'on notera encore  $\overrightarrow{\pi}_1$ . Soit une catégorie  $\mathbf{C}$  possédant un objet terminal  $*$  que l'on fixe. On fixe également un objet  $\mathbb{I}$  de  $\mathbf{C}$ , que l'on appellera **objet-segment**, ainsi que deux morphismes  $s, t \in \mathbf{C}[*, \mathbb{I}]$  tels que pour tout automorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{I}$ ,

$$\left( (\phi \circ s = s \text{ et } \phi \circ t = t) \text{ ou } (\phi \circ s = t \text{ et } \phi \circ t = s) \right) \text{ c'est-à-dire } \{\phi \circ s, \phi \circ t\} = \{s, t\}$$

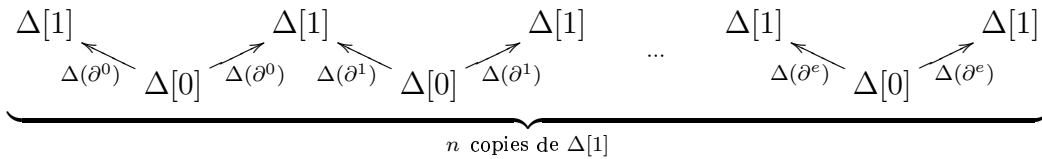
et tels que pour tout entier naturel  $n$ , le diagramme



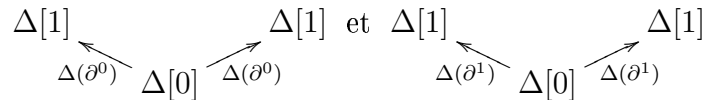
ait une colimite dans  $\mathbf{C}$ . Cette colimite, unique à isomorphisme de  $\mathbf{C}$  près, est notée  $n \cdot \mathbb{I}$ , avec le co-cône



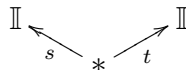
Notons que cette construction est similaire à celle que l'on trouve au chapitre IV de [25] où pour définir l'homotopie (dite “composée” dans l’ouvrage) entre deux morphismes d'ensembles simpliciaux, on a recours à la colimite (dans la catégorie des ensembles simpliciaux) du diagramme suivant (avec les notations de [25])



où la valeur finale de  $e \in \{0, 1\}$  dépend de la parité de  $n$ . Il y a cependant une grande différence avec le cas qui nous intéresse ici, en effet, dans [25], les “motifs” qui composent le diagramme sont alternativement



alors dans la construction proposée ici, on répète toujours le diagramme



ce qui signifie intuitivement que dans [25] les collages sont de la forme

$$\dots \longrightarrow \longleftarrow \longrightarrow \longleftarrow \longrightarrow \longleftarrow \dots$$

alors que dans cette thèse, ils sont de la forme

$$\dots \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \dots$$

Ceci ne pose pas de problème dans l'ouvrage [25] parce qu'il ne prend pas en compte de notion d'ordre, il en va tout autrement dans notre cas puisque l'on s'intéresse à la topologie dirigée.

On note également que, dans la définition précédente, on a omis les flèches issues des  $*$  et dont le but est  $n \cdot \mathbb{I}$ . Elles sont en fait implicites puisque contraintes de rendre le diagramme commutatif; à titre d'exemple, celle issue du  $*$  le plus à gauche est  $i_1^{(n)} \circ s$  tandis que celle issue du  $*$  le plus à droite est  $i_n^{(n)} \circ t$ .

La stabilité de  $\{s, t\}$  par automorphisme de  $\mathbb{I}$  est la formulation en termes catégoriques de l'idée que  $s$  et  $t$  sont le début et la fin du chemin  $\mathbb{I}$ . Par ailleurs, un automorphisme qui échange  $s$  et  $t$  est, en quelque sorte, une inversion du temps. Remarquons que si  $\phi$  est un isomorphisme de  $A$  vers  $\mathbb{I}$ , alors en considérant  $\phi^{-1} \circ s$  et  $\phi^{-1} \circ t$  et un automorphisme  $\psi$  de  $A$ , comme  $\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}$  est un automorphisme de  $\mathbb{I}$ , on a  $\{\phi \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ s, \phi \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ t\} = \{s, t\}$ , c'est-à-dire  $\{\psi \circ \phi^{-1} \circ s, \psi \circ \phi^{-1} \circ t\} = \{\phi^{-1} \circ s, \phi^{-1} \circ t\}$ . Enfin, si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont deux isomorphismes de  $A$  vers  $\mathbb{I}$ , alors  $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$  est un automorphisme de  $A$  et donc  $\{(\phi_1^{-1} \circ \phi_2) \circ \phi_2^{-1} \circ s, (\phi_1^{-1} \circ \phi_2) \circ \phi_2^{-1} \circ t\} = \{\phi_2^{-1} \circ s, \phi_2^{-1} \circ t\}$ , donc  $\{\phi_1^{-1} \circ s, \phi_1^{-1} \circ t\} = \{\phi_2^{-1} \circ s, \phi_2^{-1} \circ t\}$ . Donc a une "inversion du temps près", c'est-à-dire l'échange de leurs rôles,  $s$  et  $t$  sont entièrement déterminés par le choix de  $\mathbb{I}$ . En fait, on ne peut pas prendre pour objet-segment n'importe quel objet de  $\mathbf{C}$ . Par exemple, dans la catégorie  $\mathbf{Spc}$  le cercle euclidien  $S^1$  ne peut pas être pris pour objet-segment, en effet, quels que soient les points  $x$  et  $y$  de  $S^1$ , il est possible de trouver un automorphisme de  $S^1$ , par exemple une rotation, qui envoie  $x$  et  $y$  respectivement sur  $x'$  et  $y'$  avec  $\{x, y\} \cap \{x', y'\} = \emptyset$ . A l'inverse, un automorphisme de  $[0, 1]$  envoie bijectivement  $\{0, 1\}$  sur  $\{0, 1\}$ , c'est une conséquence de la proposition XI.1.7. On dira que la catégorie  $\mathbf{C}$  admet une notion de direction  $\mathbb{I}$  s'il n'y a pas d'inversion du temps dans  $\mathbf{C}$ , dans le cas contraire, on dira que  $\mathbf{C}$  admet une notion de connexion  $\mathbb{I}$ . On s'intéressera ultérieurement à l'influence d'une notion de direction ou de connexion sur les catégories de chemins et les catégories fondamentales.

La seconde hypothèse est là pour pouvoir définir une forme de concaténation généralisée de façon stricte et pas seulement à isomorphisme près. Pour cela, on fixe pour chaque entier  $n \in \mathbb{N}$  un co-cône  $(n \cdot \mathbb{I}, i_1^{(n)}, \dots, i_n^{(n)})$  représentant la colimite du diagramme

$$\underbrace{\begin{array}{ccccccc} & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ * & s & t & * & s & t & * & s & t & * & s & t & * & s & t & * \end{array}}_{n \text{ copies de } \mathbb{I}}$$

contenant  $n$  copies de  $\mathbb{I}$  et dont l'existence est assuré par hypothèse. Dans la suite, on notera le diagramme précédent  $V_n$ . De plus, pour  $n := 0$  on peut supposer que  $0 \cdot \mathbb{I} := *$  et pour  $n := 1$  que  $1 \cdot \mathbb{I} := \mathbb{I}$  et  $i_1^1 := id_{\mathbb{I}}$ . Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  on peut même, et c'est ce que l'on fait, fixer les co-cônes  $(n \cdot \mathbb{I}, i_1^{(n)}, \dots, i_n^{(n)})$  de sorte que si  $n \cdot \mathbb{I} \cong p \cdot \mathbb{I}$  dans  $\mathbf{C}$ , alors  $n \cdot \mathbb{I} = p \cdot \mathbb{I}$ .

### XII.1.1 LEMME (MONOÏDE DES CHEMINS)

En posant pour  $n, p \in \mathbb{N}$   $(n \cdot \mathbb{I}) + (p \cdot \mathbb{I}) := (n + p) \cdot \mathbb{I}$ , on fait de  $\{n \cdot \mathbb{I} | n \in \mathbb{N}\}$  un monoïde commutatif dont l'élément neutre est  $0 \cdot \mathbb{I}$ , c'est-à-dire  $*$ . En outre on a un morphisme de monoïde surjectif de  $(\mathbb{N}, +, 0)$  dans  $(\{n \cdot \mathbb{I} | n \in \mathbb{N}\}, +, *)$ . De plus, s'il existe  $n, p \in \mathbb{N}$  tels que  $n \cdot \mathbb{I} \neq p \cdot \mathbb{I}$ , alors  $\{n \cdot \mathbb{I} | n \in \mathbb{N}\}$  est fini. Dans le cas contraire il est isomorphe à  $\mathbb{N}$ . Noter bien que dans cette définition,  $n \cdot \mathbb{I}$  est seulement le sommet du co-cône distingué.

PREUVE. Le fait que l'on ait un monoïde commutatif est immédiat. Si on a  $n, p \in \mathbb{N}$  tels que  $n \cdot \mathbb{I} \neq p \cdot \mathbb{I}$ , supposons que  $n < p$  et posons  $q := p - n$ . Si  $q \in \mathbb{N}$  est supérieur ou égal à  $p$ , alors on effectue la division euclidienne de  $q$  par  $p$ , d'où  $q = ap + b$ ,  $a$  et  $b$  étant respectivement le quotient et le reste. Donc  $q \cdot \mathbb{I} = (ap + b) \cdot \mathbb{I} = (an + b) \cdot \mathbb{I}$  avec  $an + b < ap + b = q$ . Si  $an + b \geq p$ , on peut réitérer le procédé et continuer ainsi jusqu'à ce que l'on trouve  $q' < p$  tel que  $q' \cdot \mathbb{I} = q \cdot \mathbb{I}$ , d'où la finitude. Sinon, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \{n \cdot \mathbb{I} | n \in \mathbb{N}\} \\ n & \longmapsto & n \cdot \mathbb{I} \end{array}$$

est un isomorphisme. ■

Si l'on a choisit  $\mathbb{I} = *$ , ce monoïde est dégénéré, on verra que dans la plupart des cadres d'applications classiques il est isomorphe à  $(\{0, 1\}, \vee)$ , c'est-à-dire le monoïde à deux éléments dont l'un est neutre et l'autre idempotent. Signalons aussi que, dans l'un des cadres qui va nous intéresser, il est isomorphe à  $(\mathbb{N}, +, 0)$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on pose alors  $s^{(n)} := i_1^{(n)} \circ s$  et  $t^{(n)} := i_n^{(n)} \circ t$ . Puis, en exploitant la propriété universelle des colimites, pour toute paire d'entiers  $(n, p)$  on définit de façon unique  $l_n^{(n+p)} \in C[n \cdot \mathbb{I}, (n + p) \cdot \mathbb{I}]$  et  $r_p^{(n+p)} \in C[p \cdot \mathbb{I}, (n + p) \cdot \mathbb{I}]$  de sorte que

$$\begin{cases} l_n^{(n+p)} \circ i_k^{(n)} = i_k^{(n+p)} & \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n\} \\ r_p^{(n+p)} \circ i_k^{(p)} = i_{n+k}^{(n+p)} & \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\} \end{cases}$$

En particulier,  $l_0^{(n)} = i_1^{(n)} \circ s = s^{(n)}$ ,  $r_0^{(n)} = i_n^{(n)} \circ t = t^{(n)}$  et  $l_n^{(n)} = r_n^{(n)} = id_{n \cdot \mathbb{I}}$ . Il vient alors

### XII.1.2 PROPOSITION

Pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$ , le diagramme qui suit est une somme amalgammée dans  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccccc} & & (n + p) \cdot \mathbb{I} & & \\ & \nearrow^{l_n^{(n+p)}} & & \nwarrow_{r_p^{(n+p)}} & \\ n \cdot \mathbb{I} & & & & p \cdot \mathbb{I} \\ & \nwarrow_{t^{(n)}} & * & \nearrow_{s^{(p)}} & \end{array}$$

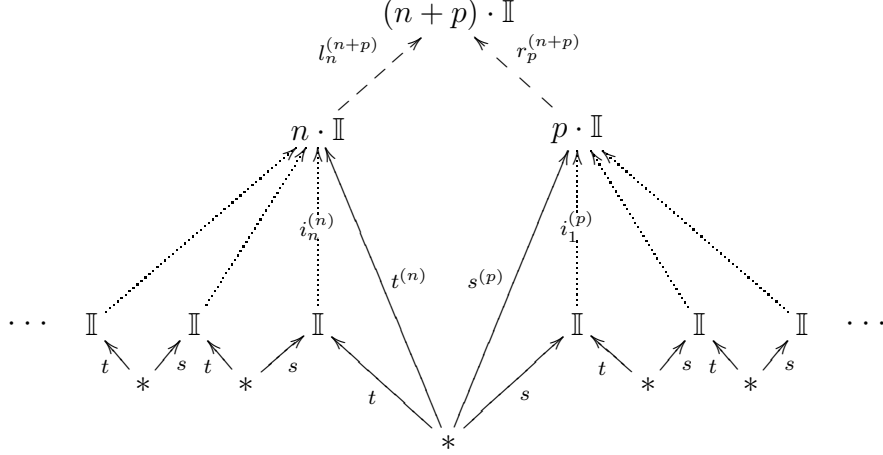
En outre, si  $\alpha \in C[n \cdot \mathbb{I}, X]$  et  $\beta \in C[p \cdot \mathbb{I}, X]$  vérifient  $\alpha \circ t^{(n)} = \beta \circ s^{(p)}$ , alors l'unique morphisme  $h \in C[(n + p) \cdot \mathbb{I}, X]$  tel que

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \nearrow^{\alpha} & \uparrow h & \nwarrow_{\beta} & \\ & & (n + p) \cdot \mathbb{I} & & \\ & \nearrow^{l_n^{(n+p)}} & & \nwarrow_{r_p^{(n+p)}} & \\ n \cdot \mathbb{I} & & & & p \cdot \mathbb{I} \\ & \nwarrow_{t^{(n)}} & * & \nearrow_{s^{(p)}} & \end{array}$$

est aussi l'unique morphisme  $h$  tel que

$$\begin{cases} \alpha \circ i_k^{(n)} = h \circ i_k^{(n+p)} & \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n\} \\ \beta \circ i_k^{(n)} = h \circ i_{n+k}^{(n+p)} & \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\} \end{cases}$$

PREUVE. La démonstration est entièrement contenue dans le diagramme commutatif suivant



Plus précisément,  $(\alpha \circ i_1^{(n)}, \dots, \alpha \circ i_n^{(n)}, \beta \circ i_1^{(p)}, \dots, \beta \circ i_p^{(p)})$  est un co-cône de base



on a donc un unique  $h \in \mathcal{C}[(n+p) \cdot \mathbb{I}, X]$  tel que

$$\begin{cases} \alpha \circ i_k^{(n)} = h \circ i_k^{(n+p)} = h \circ l_n^{(n+p)} \circ i_k^{(n)} & \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n\} \\ \beta \circ i_k^{(n)} = h \circ i_{n+k}^{(n+p)} = h \circ r_p^{(n+p)} \circ i_k^{(p)} & \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\} \end{cases}$$

En exploitant l'unicité dans la propriété universelle des colimites  $(n \cdot \mathbb{I}, i_1^{(n)}, \dots, i_n^{(n)})$  et  $(p \cdot \mathbb{I}, i_1^{(p)}, \dots, i_p^{(p)})$  on obtient que  $\alpha = h \circ l_n^{(n+p)}$  et  $\beta = h \circ r_p^{(n+p)}$ . Si  $h' \in \mathcal{C}[(n+p) \cdot \mathbb{I}, X]$  tel que  $\alpha = h' \circ l_n^{(n+p)}$  et  $\beta = h' \circ r_p^{(n+p)}$ , alors nécessairement, en utilisant cette fois l'unicité dans la propriété universelle de la colimite  $((n+p) \cdot \mathbb{I}, i_1^{(n+p)}, \dots, i_{n+p}^{(n+p)})$ , on a  $h = h'$ . ■

### XII.1.3 DÉFINITION (CATÉGORIE À CHEMINS)

Une **Catégorie à chemins** est la donnée de:

1. une catégorie  $\mathcal{C}$  ayant un objet terminal dont un représentant est fixé et noté  $*$ ,
2. un diagramme  $* \xrightarrow[t]{s} \mathbb{I}$  tel que pour tout automorphisme  $\phi \in \mathcal{C}[\mathbb{I}, \mathbb{I}]$  on ait  $\{\phi \circ s, \phi \circ t\} = \{s, t\}$ ,
3. pour tout entier naturel  $n$ , un diagramme  $V_n$  dont on suppose qu'il admet une colimite dans  $\mathcal{C}$ ,

4. pour chaque diagramme  $V_n$ , un co-cône fixé  $(n \cdot \mathbb{I}, i_1^{(n)}, \dots, i_n^{(n)})$ , colimite du diagramme  $V_n$ , de sorte que  $0 \cdot \mathbb{I} = *$ ,  $1 \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I}$ ,  $i_1^{(1)} = id_{\mathbb{I}}$  et que quels que soient les entiers naturels  $n$  et  $p$ , si  $n \cdot \mathbb{I} \cong p \cdot \mathbb{I}$  dans  $\mathbf{C}$ , alors  $n \cdot \mathbb{I} = p \cdot \mathbb{I}$ .

On fera référence à une catégorie à chemin, lorsque le contexte est clair, simplement avec  $\mathbf{C}$  sans préciser quels sont les co-cônes distingués et l'objet-segment.

#### XII.1.4 PROPOSITION (FORMULATION PRÉ-SIMPLICIALE D'UNE CATÉGORIE À CHEMINS)

Soit une catégorie à chemins  $\mathbf{C}$ , on a un foncteur  $D$  défini sur  $\Delta^+$  à valeurs dans  $\mathbf{C}$  en posant, pour tout entier naturel  $n$ ,  $D(n) := n \cdot \mathbb{I}$  et pour  $j \in \{0, \dots, n\} (= [n+1])$ ,  $D(\delta_j^{n,\Delta}) := \gamma_{n+1} \cdot \dots \cdot \gamma_1$  où

$$\gamma_k := \begin{cases} i_j^{(n)} & \text{si } k < j \\ c & \text{si } j = k \\ i_{j-1}^{(n)} & \text{si } j < k \end{cases}$$

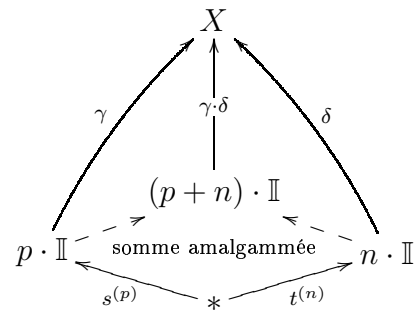
où  $c$  est le morphisme constant défini sur  $\mathbb{I}$  de valeur  $tgt(i_{j-1}^{(n)})$  (qui est aussi égal à  $src(i_j^{(n)})$ ). De plus,  $D$  induit un morphisme entre catégories monoïdales strictes en équipant l'image de  $D$  de la concaténation telle qu'elle a été définie précédemment dans cette section.

L'idée abstraitement formulée par la proposition XII.1.4 est que l'on allonge le temps de parcours d'un chemin en "faisant une pause".

Etant donné un objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ , on peut alors définir un

chemin sur  $X$  comme un élément  $(\gamma, n)$  de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X] \times \{n\}$

puis, le début et la fin de  $(\gamma, n) \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X] \times \{n\}$  respectivement comme  $\gamma \circ s^{(n)}$  et  $\gamma \circ t^{(n)}$ . Notons bien que, en tant que morphisme de  $\mathbf{C}$ , la première composante d'un chemin  $\gamma$  sur  $X$  a pour source  $n \cdot \mathbb{I}$  et pour but  $X$ . Dans ce qui va devenir la catégorie des chemins de  $X$  (à ne pas confondre avec la catégorie à chemin  $\mathbf{C}$ ), le début et la fin de  $\gamma$  seront une source et un but. On remarque donc que la définition de début et fin de  $\gamma$  dépend de  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $(\gamma, p) \in \mathbf{C}[p \cdot \mathbb{I}, X] \times \{p\}$  et  $(\delta, n) \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X] \times \{n\}$  sont deux chemins sur  $X$  et que  $src(\gamma) = tgt(\delta)$ , alors on peut définir la **concaténation** de  $(\delta, n)$  suivi de  $(\gamma, p)$ , notée  $(\gamma \cdot \delta, n+p)$ , en utilisant la propriété universelle d'une somme amalgamée comme indiqué par le diagramme de droite. La proposition XII.1.2 a pour corollaire immédiat que la concaténation que l'on vient de définir est associative au sens strict, c'est-à-dire pas seulement à isomorphisme près. Remarquer que le premier élément de la composition est le plus à droite dans l'écriture  $\gamma \cdot \delta$ .



#### XII.1.5 REMARQUE (DÉCOUPAGE DES CHEMINS)

Soit  $(\gamma, n) \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X] \times \{n\}$ , on a  $\gamma = (\gamma \circ i_n^{(n)}) \cdot \dots \cdot (\gamma \circ i_1^{(n)})$ . La seconde composante  $\{n\}$  est nécessaire, en effet, par définition d'une catégorie à chemins, si  $\mathbb{I} + \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$ , alors pour tout

entier naturel  $n$  on a  $n \cdot \mathbb{I} = 1 \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I}$ , or, à la manière des chemins de *Moore*, on souhaite avoir, avec chaque chemin, une information sur le nombre de chemins “élémentaires” dont il est la concaténation. Dans certaine catégorie, comme  $\mathbf{RSpC}$ , si  $n \neq p$ , on a  $n \cdot \mathbb{I} \not\cong p \cdot \mathbb{I}$ , donc le domaine de définition de  $\gamma$  contient cette information. Dans beaucoup d’autre cas, comme celui de  $\mathbf{SpC}$ , on a  $\mathbb{I} + \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$ , il faut donc que cette information soit préservée “à coté”. L’intérêt est de donner une définition stricte de la concaténation et pas seulement à isomorphisme près. Cela induit malheureusement une notation lourde dont on va se défaire en considérant que l’écriture  $\gamma \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X]$  signifie en fait  $(\gamma, n) \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X] \times \{n\}$ . On parlera aussi, lorsque l’on voudra insister, de  $n$ -chemin.

### XII.1.6 REMARQUE (INVERSION DU TEMPS)

Si la catégorie à chemins  $\left( \mathbf{C}, * \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \mathbb{I} \right)$  admet une inversion du temps, c’est-à-dire un automorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{I}$  tel que  $\phi \circ s = t$  et  $\phi \circ t = s$ , alors pour tous points  $x_1, x_2$  d’un objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ , l’application

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X)[x_1, x_2] & \longrightarrow & \Gamma(X)[x_2, x_1] \\ \gamma & \longmapsto & \gamma \circ \phi \end{array}$$

est une bijection. Il suffit de noter que  $\gamma \circ \phi \circ s^{(n)} = \gamma \circ t^{(n)}$  et  $\gamma \circ \phi \circ t^{(n)} = \gamma \circ s^{(n)}$  et que la réciproque est

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X)[x_2, x_1] & \longrightarrow & \Gamma(X)[x_1, x_2] \\ \gamma & \longmapsto & \gamma \circ \phi^{-1} \end{array}$$

On peut maintenant décrire la catégorie des chemins de  $X$ , que l’on note  $\Gamma(X)$ . Les objets de  $\Gamma(X)$  sont les points de  $X$  dans  $\mathbf{C}$  au sens de la définition A.2.14, c’est-à-dire que  $Ob(\Gamma(X)) = \mathbf{C}[*, X]$ . Puis, étant donnés  $x$  et  $y$  deux points de  $X$ , on a

$$\Gamma(X)[x, y] := \left\{ \gamma \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X] \mid src(\gamma) = x \text{ et } tgt(\gamma) = y \right\}.$$

La concaténation est alors définie comme précédemment et on vérifie que l’on a bien une catégorie dont les identités sont les points  $x : * \rightarrow X$ ,  $x$  pouvant être vu comme un dichemin sur  $X$  car  $* = 0 \cdot \mathbb{I}$ . Précisons ici que pour se prévenir d’un quelconque problème ensembliste, on a fait l’hypothèse que  $\mathbf{C}$  a une bonne notion de sous-objet (voir définition A.2.14), en effet, dans le cas contraire, on pourrait rencontrer une situation pathologique dans laquelle la collection des points d’un objet  $X$  ne soit pas un ensemble. Par ailleurs,

### XII.1.7 PROPOSITION

On a un foncteur des catégories des chemins  $\Gamma : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ , où pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ ,  $\Gamma(X)$  est la catégorie des chemins sur  $X$ . De plus si  $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ , alors on a un foncteur  $\Gamma(f) : \Gamma(X) \longrightarrow \Gamma(Y)$  défini par:

1. pour tout point  $x$  de  $X$ ,  $(\Gamma(f))(x) := f \circ x$ ,
2. pour tout chemin  $\gamma \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X]$  tel que  $\gamma$  est un chemin sur  $X$  de  $x_1$  vers  $x_2$ , i.e.  $\gamma \in (\Gamma(X))[x_1, x_2]$ ,  $(\Gamma(f))(\gamma) := f \circ \gamma$ .



PREUVE. C'est une vérification routinière, notamment, on a en vertu de la proposition XII.1.2

$$f \circ (\gamma \cdot \delta) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \delta)$$

ce qui justifie que  $\Gamma(f)$  est bien un foncteur de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbf{Cat}$ . ■

Pour résumer intuitivement,  $\mathbb{I}$  est l'intervalle de temps unité dans  $\mathbb{C}$ , un chemin sur  $X \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  est un élément de  $\mathbb{C}[n \cdot \mathbb{I}, X]$ , autrement dit un chemin parcouru en  $n$  unités de temps. Les points de  $X$  sont les chemins neutres au sens où en un temps "nul" ils effectuent un trajet "nul". Ainsi, un chemin constant  $\gamma \in \mathbb{C}[n \cdot \mathbb{I}, X]$  pour  $n \neq 0$  n'est pas neutre puisque pendant un intervalle de temps non "nul" (comprendre  $n \cdot \mathbb{I}$ ) il n'a pas bougé (car il est constant). D'une certaine manière, une notion rudimentaire de vitesse est ici présente.

## XII.2 HOMOTOPIE DIRIGÉE ABSTRAITE

On en vient alors à la partie délicate de la construction, celle qui donne tout son sens à la notion de catégorie fondamentale, c'est à dire le choix d'une notion d'homotopie. Au lieu d'imiter la définition II.1.3, on aborde la notion d'homotopie de la façon suivante: pour chaque objet  $X$  de  $\mathbb{C}$ , on associe à  $\Gamma(X)$  une congruence, que l'on note  $\sim_X$ , on a donc une fonction ( $X \in \text{Ob}(\mathbb{C}) \mapsto \sim_X$  une congruence sur  $\Gamma(X)$ ). On impose enfin que la **Propriété de Congruence Homotopique** ou **PCH** soit satisfaite, c'est-à-dire que

$$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathbb{C}), \forall f \in \mathbb{C}[X, Y], \forall x_1, x_2 \in \text{Ob}(\Gamma(X)), \forall \gamma, \delta \in \Gamma(X)[x_1, x_2], \\ \gamma \sim_X \delta \implies f \circ \gamma \sim_Y f \circ \delta.$$

et

$$\forall X \in \text{Ob}(\mathbb{C}), \forall x \in \text{Ob}(\Gamma(X)), \forall \gamma, \delta \in \Gamma(X)[x, x], \\ \text{si } \gamma \text{ et } \delta \text{ sont constants de valeur } x, \text{ alors } \gamma \sim_X \delta$$

Le sens du second axiome doit être éclairci: d'après la définition A.1.16 affirmer que  $\gamma$  est constant de valeur  $p$  implique que  $p \in \mathbb{C}[* , X]$  et donc que  $p$  peut être vu comme un dichemin car  $0 \cdot \mathbb{I} \cong *$ . On veut donc toujours identifier un point avec un chemin constant dont la valeur est ce point. Notons en particulier que, dans ce cas, on a  $x_1 = x_2 = x$ . Pour un objet  $X$  de  $\mathbb{C}$ , on pose alors  $\vec{\pi}_1(\vec{X}) := \Gamma(X)/\sim_X$  définissant ainsi la **catégorie fondamentale** de  $X$ . En vertu de la PCH, la construction

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Ob}(\mathbf{Cat}) \\ X &\longmapsto \vec{\pi}_1(\vec{X}) \end{aligned}$$

induit un foncteur de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbf{Cat}$ . En effet la PCH donne un sens à la définition suivante, tout objet  $X$  de  $\mathbb{C}$  est envoyé sur le quotient  $\vec{\pi}_1(\vec{X}) := \Gamma(X)/\sim_X$ . Tout morphisme  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$  est envoyé sur un foncteur  $\vec{\pi}_1(\vec{f}) \in \mathbf{Cat}[\Gamma(X)/\sim_X, \Gamma(Y)/\sim_Y]$  qui envoie un point  $(* \rightarrow X)$  sur un point  $f \circ (* \rightarrow X)$  et une  $\sim_X$ -classe d'équivalence  $[n \cdot I \xrightarrow{\alpha} X]_{\sim_X}$  sur la  $\sim_Y$ -classe d'équivalence  $[f \circ (n \cdot I \xrightarrow{\alpha} X)]_{\sim_Y}$ .

Alors que la définition d'un foncteur  $\Gamma$  de  $\mathbf{C}$  vers  $\mathbf{Cat}$  ne nécessite que très peu d'hypothèse, la PCH est extrêmement forte puisqu'elle suppose d'avoir fait de façon cohérente le choix d'une congruence sur tous les objets de  $\mathbf{C}$ . Dans les cas concrets, ce choix de congruences émane d'une notion d'homotopie (dirigée) définie de façon "canonique". Une fonction

$$\begin{array}{ccc} Ob(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \{\text{congruences sur un objet de l'image de } \Gamma\} \\ X & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \sim_X \end{array}$$

qui satisfait la PCH est appelée une **notion d'homotopie** sur  $\mathbf{C}$ .

Nous allons maintenant de donner un aperçu d'une représentation de  $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ .

### XII.2.1 REMARQUE

En supposant que  $\mathbb{I}$  est distinct de  $*$ . Soit un dichemin constant  $\alpha$  de valeur  $x$ ,  $\gamma$  un dichemin dont le début est  $x$  et  $\delta$  un dichemin dont la fin est  $x$ , alors on a

$$\left. \begin{array}{l} x \sim_X \alpha \\ \gamma \sim_X \gamma \end{array} \right\} \implies \gamma = \gamma \cdot x \sim_X \gamma \cdot \alpha \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{l} x \sim_X \alpha \\ \delta \sim_X \delta \end{array} \right\} \implies \delta = x \cdot \delta \sim_X \alpha \cdot \delta$$

Autrement dit, les dichemins  $\alpha \in \mathbf{C}[0 \cdot \mathbb{I}, X]$  peuvent être ignorés, c'est-à-dire que l'on peut redéfinir la catégorie fondamentale de  $X$  de la façon suivante: les objets sont toujours les points de  $X$  et  $\vec{\pi}_1(X)[x, y]$  est l'ensemble des  $\sim_X$ -classes d'équivalence  $[\gamma]_{\sim_X}$  où  $\gamma \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X]$  avec  $n$  différent de 0. Ceci nous sera d'une grande utilité au moment d'aborder les dihomotopies concrètes.

### XII.2.2 PROPOSITION (DICHEMINS CONSTANTS)

Etant donné un objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ , un point  $x$  de  $X$ , c'est-à-dire  $x \in \mathbf{C}[*, X]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $c_x^n$  l'unique morphisme de  $\mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, X]$  constant de valeur  $x$ . Si  $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ , alors  $f \circ c_x^n = c_{f \circ x}^n$ , si  $n, p \in \mathbb{N}$  et  $x$  un point de  $X$ , alors  $c_x^n \cdot c_x^p = c_x^{n+p}$  et  $c_x^0 = id_x$  dans  $\Gamma(X)$ . La relation sur les dichemins de  $X$  définie par  $\alpha \sim_X \beta$  si et seulement si il existe une suite finie de points  $x_n, \dots, x_0$  de  $X$ , où  $n \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq n$ , une suite finie de dichemins  $\gamma_n, \dots, \gamma_1$  telle que pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  le début et la fin de  $\gamma_k$  sont respectivement  $x_{k-1}$  et  $x_k$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = t_n \cdot \gamma_n \cdot \dots \cdot t_1 \cdot \gamma_1 \cdot t_0 \\ \beta = t'_n \cdot \gamma_n \cdot \dots \cdot t'_1 \cdot \gamma_1 \cdot t'_0 \end{array} \right. \quad \text{où } t_k \text{ et } t'_k \text{ sont constants de valeur } x_k \text{ pour } k \in \{0, \dots, n\}$$

satisfait la PCH.

PREUVE. La relation proposée est clairement une relation d'équivalence. Supposons que  $\alpha$  soit équivalent à  $\alpha'$  et que  $\beta$  soit équivalent à  $\beta'$ , alors, en suivant les notations de l'énoncé si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = t_n \cdot \gamma_n \cdot \dots \cdot t_1 \cdot \gamma_1 \cdot t_0 \\ \alpha' = t'_n \cdot \gamma_n \cdot \dots \cdot t'_1 \cdot \gamma_1 \cdot t'_0 \\ \beta = t_{p+n} \cdot \gamma_{p+n} \cdot \dots \cdot t_{1+n} \cdot \gamma_{1+n} \cdot t_{1+n} \\ \beta' = t'_{p+n} \cdot \gamma_{p+n} \cdot \dots \cdot t'_{1+n} \cdot \gamma_{1+n} \cdot t'_{1+n} \\ \text{la fin de } \alpha \text{ est le début de } \beta \end{array} \right.$$

alors la fin de  $\alpha'$  est le début de  $\beta'$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \cdot \alpha = t_{p+n} \cdot \gamma_{p+n} \cdot \dots \cdot t_{1+n} \cdot \gamma_{1+n} \cdot (t_{1+n} \cdot t_n) \cdot \gamma_n \cdot \dots \cdot t_1 \cdot \gamma_1 \cdot t_0 \\ \beta' \cdot \alpha = t'_{p+n} \cdot \gamma_{p+n} \cdot \dots \cdot t'_{1+n} \cdot \gamma_{1+n} \cdot (t'_{1+n} \cdot t'_n) \cdot \gamma_n \cdot \dots \cdot t'_1 \cdot \gamma_1 \cdot t'_0 \end{array} \right.$$

Comme  $(t_{1+n} \cdot t_n)$  et  $(t'_{1+n} \cdot t'_n)$  sont des chemins constants, on conclue que la relation proposée est bien une congruence. Comme  $f \circ (\gamma \cdot \delta) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \delta)$  d'après la preuve de la proposée XII.1.7, la première partie de la PCH est satisfaite. La seconde l'est également puisque si  $\gamma$  est un chemin constant de valeur  $x$ , alors  $\gamma = \gamma \cdot id_x \cdot id_x$ . ■

La notion d'homotopie de la proposition XII.2.2 revient à "supprimer les pauses durant le trajet".

### XII.2.3 PROPOSITION (REPARAMÉTRISATION)

Etant donné un objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ , la relation sur les dichemins de  $X$  définie par  $\alpha \sim_X \beta$  si et seulement si il existe une suite finie de points  $x_n, \dots, x_0$  de  $X$ , où  $n \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq n$ , une suite finie de dichemins  $\gamma_n, \dots, \gamma_1$  telle que pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  le début et la fin de  $\gamma_k$  sont respectivement  $x_{k-1}$  et  $x_k$  et

$$\begin{cases} \alpha = t_n \cdot \gamma_n \cdot \dots \cdot t_1 \cdot \gamma_1 \cdot t_0 \\ \beta = t'_n \cdot \gamma'_n \cdot \dots \cdot t'_1 \cdot \gamma'_1 \cdot t'_0 \end{cases}$$

où pour tout entier  $k \in \{0, \dots, n\}$

1.  $t_k$  et  $t'_k$  sont constants de valeur  $x_k$ ,
2.  $\gamma'_k = \gamma_k \circ \phi_k$  où  $\phi_k$  est un automorphisme,

satisfait la PCH.

PREUVE. La démonstration est rigoureusement analogue à celle de la proposition XII.2.2. ■

### XII.2.4 PROPOSITION (TREILLIS DES NOTIONS D'HOMOTOPIES)

La collection des notions d'homotopie sur une catégorie à chemins  $\mathbf{C}$  ayant pour objet segment  $* \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{matrix} \mathbb{I}$  est un treillis complet ordonné par l'inclusion. Son plus petit élément est la notion d'homotopie décrite dans la proposition XII.2.2 et la plus grande celle qui identifie deux chemins dès qu'ils ont la même source et le même but.

PREUVE. C'est une vérification routinière, il suffit de prouver qu'une intersection quelconque de notions d'homotopies est encore une notion d'homotopie. On notera cependant à cette occasion qu'implicitement on a ici fait usage de l'axiome de *Grothendieck* sur le modèle de théorie des ensembles dans lequel on travaille (voir section A.1.1) pour que la collection des notions d'homotopies sur  $\mathbf{C}$  soit un ensemble. ■

Le lemme fournit une méthode systématique pour définir de nouvelles notions d'homotopie sur  $\mathbf{C}$ .

### XII.2.5 LEMME

Soit une catégorie à chemins  $\mathbf{C}$ , soit une famille  $(\sim_X^i)_{i \in \mathcal{I}, X \in \text{Ob}(\mathbf{C})}$  telle que

1.  $\exists i \in \mathcal{I}$  tel que pour tout  $X$ ,  $\sim_X^i$  soit l'égalité sur  $X$ ,
2.  $\exists i \in \mathcal{I}$  tel que pour tous chemins  $\alpha, \beta$  de  $X$ ,  $\alpha \sim_X^i \beta$  lorsqu'il existe un point  $x$  de  $X$  tel que  $\alpha$  et  $\beta$  sont constants de valeur  $x$ ,

3. Pour tout  $i$  et tout  $X$  la relation  $\sim_X^i$  est symétrique sur l'ensemble des chemins de  $X$  c'est-à-dire  $Mo(\Gamma(X))$ ,
4. Pour tout  $i$ , tout  $X$  et tout  $\alpha, \beta$  chemins de  $X$ , si  $\alpha \sim_X^i \beta$ , alors  $\alpha$  et  $\beta$  ont le même début et la même fin,
5. Pour tout  $i$ , tous chemins  $\alpha, \beta$  de  $X$  et tout  $f \in C[X, Y]$   $\alpha \sim_X^i \beta \Rightarrow f \circ \alpha \sim_X^i f \circ \beta$ .

On dit alors qu'il y a une équivalence élémentaire entre deux chemins  $\alpha$  et  $\beta$  de  $X$  lorsque l'on peut écrire, pour un certain  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_n \cdot \dots \cdot \alpha_0 \\ \beta = \beta_n \cdot \dots \cdot \beta_0 \end{cases} \quad \text{où } \forall k \in \{0, \dots, n\} \exists i \in \mathcal{I} \alpha_k \sim_X^i \beta_k$$

On pose de plus  $\alpha \sim_X \beta$  lorsqu'il existe une suite finie de chemins sur  $X$ , dont les termes sont notés  $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ , et telle que  $\gamma_0 = \alpha$ ,  $\gamma_p = \beta$  et quel que soit l'indice dans  $\{0, \dots, n-1\}$ , il y a une équivalence élémentaire entre  $\gamma_k$  et  $\gamma_{k+1}$ . Alors  $(\sim_X)_{X \in Ob(\mathcal{C})}$  est une notion d'homotopie sur  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. La réflexivité de  $\sim_X$  découle de 1, tandis que la symétrie de  $\sim_X$  est une conséquence de 3. De plus,  $\sim_X$  est transitive par construction. Supposons que  $\alpha \sim_X \beta$ ,  $\alpha' \sim_X \beta'$  et que la fin de  $\alpha$  soit le début de  $\beta$ , en vertu de 4, on sait que  $\beta'$  et  $\alpha'$  ont le même début et la même fin. De plus, si  $\gamma_0, \dots, \gamma_p$  est une suite finie de chemins de  $X$  telle que  $\gamma_0 = \alpha$ ,  $\gamma_p = \beta$  et quel que soit l'indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$  il y a une équivalence élémentaire entre  $\gamma_k$  et  $\gamma_{k+1}$ , alors  $\beta \cdot \gamma_0, \dots, \beta \cdot \gamma_p$  est une suite finie de chemins de  $X$  telle que  $\beta \cdot \gamma_0 = \beta \cdot \alpha$ ,  $\beta \cdot \gamma_p = \beta \cdot \beta$  et quel que soit l'indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$  il y a une équivalence élémentaire entre  $\beta \cdot \gamma_k$  et  $\beta \cdot \gamma_{k+1}$ . Puis, si  $\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+n}$  est une suite finie de chemins de  $X$  telle que  $\gamma_{p+1} = \beta$ ,  $\gamma_{p+n} = \beta'$  et quel que soit l'indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$  il y a une équivalence élémentaire entre  $\gamma_{p+1+k}$  et  $\gamma_{p+2+k}$ , alors  $\gamma_{p+1} \cdot \alpha', \dots, \gamma_{p+n} \cdot \alpha'$  est une suite finie de chemins de  $X$  telle que  $\gamma_{p+1} \cdot \alpha' = \beta \cdot \alpha'$ ,  $\gamma_{p+n} \cdot \alpha' = \beta' \cdot \alpha'$  et quel que soit l'indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$  il y a une équivalence élémentaire entre  $\gamma_{p+1+k} \cdot \alpha'$  et  $\gamma_{p+2+k} \cdot \alpha'$ . Il suffit alors de considérer la suite

$$\beta \cdot \alpha = \beta \cdot \gamma_0, \dots, \beta \cdot \gamma_p = \beta \cdot \alpha' = \gamma_{p+1} \cdot \alpha', \dots, \gamma_{p+n} \cdot \alpha' = \beta' \cdot \alpha'$$

pour conclure que  $\sim_X$  est une congruence sur  $\Gamma(X)$ . Enfin, étant donné que  $f \circ (\gamma \cdot \delta) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \delta)$  (voir la preuve de la proposition XII.1.7) et grâce à l'hypothèse 5, on a la première partie de la PCH, la seconde étant directement donnée par 2. ■

Les deux notions d'homotopie extrêmes données dans la proposition XII.2.4 ont bien sûr un intérêt limité et reflète assez mal l'idée originale de l'homotopie, on va donc, moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur  $\mathcal{C}$ , donner un exemple qui, dans le cas de la catégorie des espaces topologiques muni de l'objet segment  $[0, 1]$ , donne l'homotopie classique. On va doter  $\mathcal{C}$  de quelques propriétés supplémentaires afin d'établir une notion d'homotopie proche de celle que l'on met classiquement sur  $\text{Spc}$ . Tout d'abord, il faut que  $\mathcal{C}$  possède des triangles

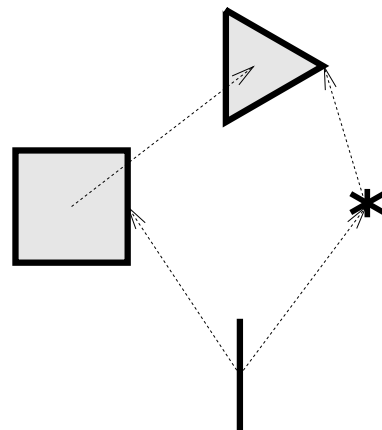
### XII.2.6 DÉFINITION (TRIANGLES)

On suppose que  $\mathcal{C}$  est une catégorie à chemins dans laquelle  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  existe. Un triangle est, par définition, la somme amalgamée dans  $\mathcal{C}$ , lorsqu'elle existe, de  $f$  avec l'unique

morphisme de  $\mathbb{C}$  de  $\mathbb{I}$  vers  $*$ , où  $f$  peut être l'un des quatre morphismes suivant:  $id_{\mathbb{I}} \times s$ ,  $id_{\mathbb{I}} \times t$ ,  $s \times id_{\mathbb{I}}$  ou  $t \times id_{\mathbb{I}}$ . En fonction du  $f$  choisi, on obtient des triangles auxquels on donne des noms différents

choix de $f$	triangle
$t \times id_{\mathbb{I}}$	vers la droite
$s \times id_{\mathbb{I}}$	depuis la gauche
$id_{\mathbb{I}} \times t$	vers le haut
$id_{\mathbb{I}} \times s$	depuis le bas

Attention, la définition précédente ne présuppose pas de l'existence des limites et colimites nécessaires à l'évocation des triangles. Cependant, dans les cas qui vont nous intéresser, cela ne posera pas de problème puisque  $\mathbb{C}$  sera toujours au moins finiment complète et cocomplète, excepté dans la cas de  $\text{LPoSpc}$  mais on peut alors appliquer la proposition XII.2.8. Par ailleurs, il faut noter que cette définition est inspirée par la somme amalgamée suivante dans  $\text{Spc}$  qui, dans notre cadre général, est un triangle vers la droite.



On va tout particulièrement s'intéresser aux triangles vers la droite et depuis la gauche, ce sont eux qui, avec  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  vont nous donner les objets de  $\mathbb{C}$  sur lesquels on va définir les homotopies dirigées. Notons donc respectivement  $T_d$  et  $T_g$  les triangles vers la droite et depuis la gauche, autrement dit on suppose l'existence dans  $\mathbb{C}$  des sommes amalgamées suivantes:



On définit alors le début et la fin de  $T_d$  respectivement comme  $j_d \circ (id_{\mathbb{I}} \times s)$  et  $j_d \circ (id_{\mathbb{I}} \times t)$ . De même le début et la fin de  $T_g$  sont respectivement définis comme  $j_g \circ (id_{\mathbb{I}} \times s)$  et  $j_g \circ (id_{\mathbb{I}} \times t)$ . On définit aussi le début et la fin de  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  comme  $id_{\mathbb{I}} \times s$  et  $id_{\mathbb{I}} \times t$ .

### XII.2.7 DÉFINITION (HOMOTOPIE DIRIGÉE GÉNÉRALISÉE)

Une **homotopie dirigée (généralisée)** de  $\alpha \in \mathbb{C}[n \cdot \mathbb{I}, X]$  vers  $\beta \in \mathbb{C}[p \cdot \mathbb{I}, X]$  est un morphisme  $H$  de  $\mathbb{C}$  défini sur la colimite, dont l'existence doit être vérifiée, du diagramme



dans lequel quel que soit l'indice  $k$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,  $X_k \in \{T_g, T_d, \mathbb{I} \times \mathbb{I}\}$ .

XII.2.8 PROPOSITION

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant un objet terminal  $*$ , un objet-segment  $* \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{matrix} \mathbb{I}$ . On suppose de plus que le produit cartésien  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  existe dans  $\mathcal{C}$  et que  $\mathbb{I} + \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$  dans  $\mathcal{C}$ , autrement dit, le monoïde  $(\{n \cdot \mathbb{I} | n \in \mathbb{N}\}, +, *)$  est isomorphe à  $(\{0, 1\}, \vee, 0)$ . Soient un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et deux chemins dirigés sur  $X$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , tels que  $\alpha$  et  $\beta$  ont le même début et la même fin que l'on note respectivement  $x$  et  $y$ . Une **homotopie dirigée** sur  $X$  de  $\alpha$  vers  $\beta$  est un morphisme  $H \in \mathcal{C}[\mathbb{I} \times \mathbb{I}, X]$  tel que

1.  $H \circ (s \times id_{\mathbb{I}}) \circ i = \alpha$  et  $H \circ (t \times id_{\mathbb{I}}) \circ i = \beta$  où  $i$  est l'isomorphisme canonique de  $\mathbb{I}$  vers  $* \times \mathbb{I}$ ,
2. pour tout point  $p \in \mathcal{C}[*, \mathbb{I} \times *]$ ,  $H \circ (id_{\mathbb{I}} \times s) \circ p = x$  et  $H \circ (t \times id_{\mathbb{I}}) \circ p = y$ .

On pose alors  $\sim_X$  la congruence sur  $\Gamma(X)$  engendrée par les couples  $(\alpha, \beta)$  tels qu'il existe une homotopie dirigée  $H$  de  $\alpha$  vers  $\beta$  ou  $\alpha$  et  $\beta$  sont constants de même valeur. Alors

$$\begin{array}{ccc} Ob(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \{ \text{congruences sur un objet de l'image de } \Gamma \} \\ X & \longmapsto & \sim_X \end{array}$$

est une notion d'homotopie.

Si de plus, la somme amalgamée  $\mathbb{I} \times \mathbb{I} \begin{matrix} \xleftarrow{t \times id_{\mathbb{I}}} \\ \xrightarrow{s \times id_{\mathbb{I}}} \end{matrix} * \times \mathbb{I}$  existe dans  $\mathcal{C}$  et est isomorphe à  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ , alors on peut définir la concaténation d'une homotopie dirigée  $H_1$  de  $\alpha$  vers  $\beta$  suivie d'une homotopie dirigée  $H_2$  de  $\beta$  vers  $\gamma$  pour obtenir une homotopie dirigée de  $\alpha$  vers  $\gamma$ , que l'on note  $H_2 \cdot H_1$ . On aura cette situation dès que le foncteur  $- \times \mathbb{I}$  préserve les sommes amalgamées, donc en particulier dès que  $\mathbb{I}$  est exponentiable dans  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. Supposons que  $\gamma$  soit un chemin constant de valeur  $x$ , comme  $\mathbb{I} + \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$ ,  $\gamma$  est défini sur  $\mathbb{I}$  ou sur  $*$ , si on est dans le deuxième cas, alors  $\gamma = x$  en tant que morphisme de  $\Gamma(X)$ , sinon l'application constante de valeur  $x$  définie sur  $T_d$  est une dihomotopie de  $\gamma$  vers  $x$ . On peut noter que l'application constante de valeur  $x$  définie sur  $T_g$  est une dihomotopie de  $x$  vers  $\gamma$ . Puis, pour  $f \in \mathcal{C}[X, Y]$  et  $H$  une homotopie dirigée sur  $X$  de  $\alpha$  vers  $\beta$ ,  $f \circ H$  est une homotopie dirigée sur  $Y$  de  $f \circ \alpha$  vers  $f \circ \beta$  et si le triangle suivant est commutatif

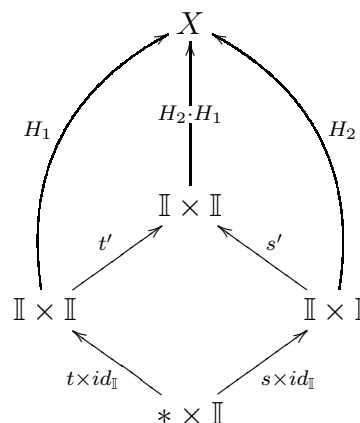
$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \beta & \uparrow \alpha \\ \mathbb{I} & \xrightarrow{i} & * \end{array} ,$$

alors le diagramme qui suit l'est également

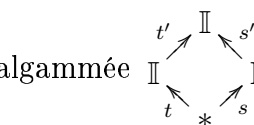
$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \nearrow \beta & & & \uparrow f \\ \mathbb{I} & \xrightarrow{i} & * & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array} .$$

Le fait que  $\mathbb{I} + \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$  est implicitement utilisé dans la définition d'homotopie dirigée, en effet, dans le cas contraire, il ne pourrait pas y avoir d'homotopie entre deux chemins dirigés définis respectivement sur  $n \cdot \mathbb{I}$  et  $m \cdot \mathbb{I}$  pour  $n, m \in \mathbb{N}$  et  $n, m \neq 1$ .

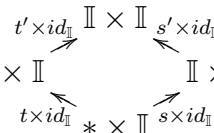
Si on a l'hypothèse concernant la somme amalgamée de  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  avec lui-même, alors le diagramme de droite donne la concaténation  $H_2 \cdot H_1$  des deux homotopies dirigées de l'énoncé de la proposition XII.2.8, qui donne clairement une homotopie dirigée de  $\alpha$  vers  $\gamma$ . Puis, si l'on a un zigzag d'homotopies dirigées  $H_n, \dots, H_1$  entre  $\alpha$  et  $\alpha'$  et un autre  $K_p, \dots, K_1$  entre  $\beta$  et  $\beta'$ , on vérifie au moyen d'une récurrence immédiate, que si  $\alpha \circ t = \beta \circ s$ , alors  $\alpha' \circ t = \beta' \circ s$ . On obtient alors un zigzag d'homotopies dirigées entre  $\beta \cdot \alpha$  et  $\beta' \cdot \alpha'$  en considérant  $K_p \cdot id_\alpha, \dots, K_1 \cdot id_\alpha, id_\beta \cdot H_n, \dots, id_\beta \cdot H_1$ . Par analogie avec ce que l'on rencontre en réécriture, cela revient à passer d'un mot  $\beta\alpha$  à un mot  $\beta'\alpha'$  en ne faisant que des réécritures sur  $\alpha$  sans toucher à  $\beta$  jusqu'à obtenir  $\beta\alpha'$  puis sur  $\beta$  sans toucher à  $\alpha'$  jusqu'à obtenir  $\beta'\alpha'$ .



Si  $- \times \mathbb{I}$  préserve les sommes amalgamées, alors la somme amalgamée



donnée par l'hypothèse  $\mathbb{I} + \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$  devient la somme amalgamée  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$



foncteur  $- \times \mathbb{I}$ . ■

Cette approche est assez naturelle lorsque l'on souhaite garder un grand niveau de généralité tout en imitant la notion classique d'homotopie, mais reste pour l'instant trop difficile à manipuler. C'est pourquoi nous ne la développerons pas plus dans le cadre de cette thèse. Cependant, dans les différents cas d'application auxquels nous allons nous confronter, nous disposerons de catégories construites à partir de sous-catégorie pleine de  $\text{Spc}$ . Nous allons profiter de ce fait pour approcher la notion de dihomotopie dans chacune d'entre elles de façon beaucoup plus simple. Mais avant cela, nous allons tenter de trouver un "bon" cadre algébrique pour traiter les modèles possédant éventuellement des boucles.

Grâce à l'approche abstraite que l'on vient de décrire, on peut maintenant formaliser la notion de cercle dirigé dans une catégorie dont on souhaite utiliser certains objets comme modèles géométriques de programmes.

### XII.2.9 DÉFINITION (REPRÉSENTATION DU CERCLE DIRIGÉ)

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant un objet terminal  $*$ , un objet-segment  $* \xrightarrow[t]{s} \mathbb{I}$  et une notion d'homotopie. On appelle **représentation du cercle dirigé** (trigonométriquement) tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  dont la catégorie fondamentale  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X})$  est isomorphe à la petite catégorie  $\circ$ . Par ailleurs, on appelle **représentation partielle du cercle dirigé** tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  dont la catégorie fondamentale  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X})$  est isomorphe à une sous-catégorie pleine non vide de la petite catégorie  $\circ$ . On dit enfin que  $X$  est une **représentation finie du cercle dirigé** si la catégorie fondamentale  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X})$  est isomorphe à une sous-catégorie pleine de  $\circ$  dont l'ensemble des objets est fini mais pas vide.

## XII.3 CATÉGORIES TOPOLOGIQUEMENT CONCRÈTES

On s'inspire de la définition de catégorie concrète que l'on adapte au cas topologique. Par définition, une catégorie concrète est une catégorie  $\mathbf{C}$  munie d'un foncteur fidèle  $U$  à valeurs dans  $\mathbf{Set}$ . Ce foncteur est alors généralement appelé **foncteur d'oubli**. Selon les auteurs on exige ou non que  $U$  ait un adjoint à gauche. On peut consulter [59] ou [80] pour de plus amples détails. On trouve également dans [43] une notion de catégorie concrète dont le foncteur d'oubli  $U$  est **représentable**, c'est-à-dire qu'il existe un objet  $C_0$  de la catégorie  $\mathbf{C}$  tel que  $U \cong \mathbf{C}[C_0, -]$ ,  $C_0$  est en particulier un générateur de la catégorie  $\mathbf{C}$ . Dans la plupart des cas que nous allons traiter, cet objet a pour ensemble sous-jacent un singleton. Par ailleurs, [43] développe un cadre général dans lequel il est possible d'obtenir des résultats de dualité. Ce cadre s'applique en particulier à la catégories des espaces topologiques et à celle des **frame**<sup>2</sup> et il serait intéressant de savoir si, en remplaçant la catégorie des *frame* par une autre, on peut encore appliquer l'approche de [43] à une catégorie telle que  $\mathbf{PoSpc}$ .

### XII.3.1 DÉFINITION (CATÉGORIE TOPOLOGIQUEMENT CONCRÈTE)

On appelle **catégorie topologiquement concrète** une catégorie  $\mathbf{C}$  munie d'un foncteur fidèle  $U$ , à valeurs dans une sous-catégorie réfléchissante de  $\mathbf{Spc}$ , admettant un adjoint à gauche  $F$ . Si  $\mathbf{T}$  est la sous-catégorie réfléchissante de  $\mathbf{Spc}$  dans laquelle  $U$  prend ses valeurs, on dit que  $\mathbf{C}$  est topologiquement concrète sur  $\mathbf{T}$ .

On rappelle en particulier que  $\mathbf{HauSpc}$  est une sous-catégorie réfléchissante de  $\mathbf{Spc}$  et ainsi,  $\mathbf{PoSpc}$ ,  $\mathbf{RSpc}$ ,  $\mathbf{LPoSpc}$  sont des exemples de catégories topologiquement concrètes sur  $\mathbf{HauSpc}$ . La catégorie des espaces dirigés  $\mathbf{dTop}$  de *Marco Grandis* peut être vu comme topologiquement concrète sur  $\mathbf{Spc}$  ou  $\mathbf{HauSpc}$  selon les restrictions que l'on demande sur l'espace topologique sous-jacent d'un espace dirigé.

### XII.3.2 DÉFINITION (COMPATIBILITÉ)

Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie topologiquement concrète avec  $U \dashv F$ , que l'on suppose de surcroît munie d'une structure de catégorie à chemins  $\mathbb{I}'$ ,  $s'$ ,  $t'$  avec les co-cônes distingués  $(n \cdot \mathbb{I}', i_1^{(n)}, \dots, i_n^{(n)})$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que les structures de catégorie topologiquement concrète et de catégorie à chemins sont **compatibles** si le foncteur  $U$  préserve les structures de catégorie à chemins. C'est-à-dire que  $\mathbf{T}$  est munie d'une structure de catégorie à chemins  $\mathbb{I}$ ,  $s$ ,  $t$  avec les co-cônes distingués  $(n \cdot \mathbb{I}, i_1^{(n)}, \dots, i_n^{(n)})$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et que

1.  $\forall n \in \mathbb{N} \ U(n \cdot \mathbb{I}') = n \cdot \mathbb{I}$  et donc en particulier  $U(\mathbb{I}') = \mathbb{I}$  et  $U(*) = *$ ,
2.  $U(s') = s$  et  $U(t') = t$ ,
3.  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \ U(i_k^{(n)}) = i_k^{(n)}$ ,

On résume ces données en disant que  $\mathbf{C}$  est une **catégorie à chemins topologiquement concrète**.

### XII.3.3 LEMME

Pour tout entier naturel  $n$ , pour tout indice  $k$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , on a  $U(s'^{(n)}) = s^{(n)}$  et  $U(t'^{(n)}) = t^{(n)}$ .

---

<sup>2</sup>je ne connais pas d'équivalent français à ce terme anglo-saxon



PREUVE. Il suffit de se rappeler que, par définition,  $s'^{(n)} = i_1'^{(n)} \circ s'$  et  $t'^{(n)} = i_n'^{(n)} \circ t'$ , le résultat s'ensuit car  $U(s') = s$ ,  $U(t') = t$ ,  $U(i_1'^{(n)}) = i_1^{(n)}$  et  $U(i_n'^{(n)}) = i_n^{(n)}$ . ■

Remarquons que, du simple fait que  $U$  admette un adjoint à gauche,  $U$  préserve (à isomorphisme près) l'objet terminal qui est en effet la limite du foncteur vide à valeurs dans  $\mathbf{C}$ . L'hypothèse  $U(*') = *$  est plus forte puisqu'elle impose une égalité stricte.

#### XII.3.4 DÉFINITION (DOMAINE DE DIHOMOTOPIE)

Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie à chemins topologiquement concrète (sur  $\mathbb{T}$ ), un objet  $D$  de  $\mathbf{C}$  est appelé **domaine de dihomotopie** (dans  $\mathbf{C}$ ) lorsque  $U(D) = [0, 1] \times [0, 1]$ , c'est-à-dire le produit cartésien de  $[0, 1]$  avec lui-même dans  $\mathbb{T}$ , et que quels que soient les couples  $(x, y)$  et  $(x', y')$  appartenant à  $[0, 1] \times [0, 1]$  tels que  $x \leq x'$  et  $y \leq y'$ , il existe un entier  $n$  naturel et un chemin dirigé  $\gamma$  appartenant à  $\mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, D]$  tels que

$$(U(\gamma))(0) = (x, y) \text{ et } (U(\gamma))(1) = (x', y').$$

On se fixe alors une collection  $\mathcal{D}$  de domaines de dihomotopies dont les éléments sont par définition les **domaines de dihomotopie admissibles**.

#### XII.3.5 DÉFINITION (DIHOMOTOPIE CONCRÈTE)

Soit une catégorie à chemins topologiquement concrète (sur  $\mathbb{T}$ ). Soit  $X$  un objet de  $\mathbf{C}$ . Soient  $\gamma \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}', X]$  et  $\delta \in \mathbf{C}[p \cdot \mathbb{I}', X]$  pour  $n, p \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire deux dichemins dans  $\mathbf{C}$  sur un objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ . On appelle **dihomotopie (concrète)** dans  $\mathbf{C}$  de  $\gamma$  vers  $\delta$  un morphisme  $H \in \mathbf{C}[D, X]$ , où  $D$  est un domaine de dihomotopie admissible dans  $\mathbf{C}$ , tel que  $U(H)$  soit une homotopie au sens classique de  $U(\gamma)$  vers  $U(\delta)$ .

La condition de la définition XII.3.4, si étrange qu'elle puisse paraître, donne tout son sens au préfixe “di” de dihomotopie: en effet, elle assure que la notion d'ordre sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  est en quelque sorte reflétée dans  $D$ . Elle assure en particulier que le carré unité muni de l'ordre trivial ne puisse pas être pris comme domaine de dihomotopie dans  $\mathbf{PoSpc}$ . En effet, si un tel choix était possible, on serait ramené à la topologie algébrique classique sur  $\mathbf{Spc}$ .

La définition XII.3.5 semble ramener la notion de dihomotopie à celle d'homotopie bi-pointée, ce n'est pas le cas ainsi qu'*Eric Goubault* l'avait déjà remarqué. En fait, la définition XII.3.5 revient à ne permettre que les homotopies classiques qui sont dans l'image de  $U$ . Ceci est en fait extrêmement restrictif. Notons également que les dichemins définis sur  $0 \cdot \mathbb{I}$  ne peuvent, dans la plupart des cas, pas être concrètement homotopes à des dichemins définis sur  $n \cdot \mathbb{I}$  pour  $n \neq \mathbb{N}$ . C'est une pathologie ennuyeuse dont la remarque XII.2.1 permet de s'affranchir.

#### XII.3.6 LEMME

Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie à chemins topologiquement concrète sur  $\mathbb{T}$ . Si on a une dihomotopie concrète de  $\gamma$  vers  $\delta$ , alors  $\gamma$  et  $\delta$  ont même début et même fin.

PREUVE. Soient  $\alpha \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}', X]$  et  $\beta \in \mathbf{C}[p \cdot \mathbb{I}', X]$ , on a donc  $U(\alpha) \in \mathbb{T}[n \cdot \mathbb{I}, U(X)]$  et  $U(\beta) \in \mathbb{T}[p \cdot \mathbb{I}, U(X)]$ . Par hypothèse, on a donc une homotopie au sens classique de  $U(\alpha)$  vers  $U(\beta)$ , donc  $(U(\alpha))(0) = (U(\beta))(0)$ , c'est-à-dire que  $(U(\alpha)) \circ t^{(n)} = (U(\beta)) \circ s^{(p)}$ ,

ou encore  $U(\alpha \circ t^{(n)}) = U(\alpha \circ s^{(p)})$  d'après le lemme XII.3.3. Mais alors, comme  $U$  est fidèle, on a  $\alpha \circ t^{(n)} = \alpha \circ s^{(p)}$ , c'est-à-dire que  $\alpha$  et  $\beta$  ont le même début. ■

### XII.3.7 LEMME

Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie à chemins topologiquement concrète,  $U$  préserve les morphismes constants, où  $U$  est le foncteur associé à  $\mathbf{C}$ , avec les notations de la définition XII.3.1.

PREUVE. Soit  $f \in \mathbf{C}[X, Y]$  constant (voir définition A.1.16). On peut donc écrire  $f$  sous la forme  $f = f' \circ \zeta_X$ , où  $\zeta_X$  est l'unique foncteur de  $X$  vers  $*$ . Comme  $U(*) = *'$ , on a  $U(f) = U(f') \circ U(\zeta_X)$ , donc  $U(f)$  est constant. ■

### XII.3.8 PROPOSITION

Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie à chemins topologiquement concrète. On écrit dihomotopie pour dihomotopie concrète dans  $\mathbf{C}$ . On suppose alors que pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ :

1. (Identités à gauche) pour tout  $\gamma \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}', X]$  où  $n \neq 0$  et  $\alpha \in \mathbf{C}[p \cdot \mathbb{I}', X]$  tels que  $\alpha$  soit constant de valeur  $\gamma \circ t^{(n)}$  (voir définition A.1.16), on a un zigzag de dihomotopies entre  $\alpha \cdot \gamma$  et  $\gamma$ ,
2. (Identités à droite) pour tout  $\gamma \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}', X]$  où  $n \neq 0$  et  $\alpha \in \mathbf{C}[p \cdot \mathbb{I}', X]$  tels que  $\alpha$  soit constant de valeur  $\gamma \circ s^{(n)}$ , on a un zigzag de dihomotopies entre  $\gamma \cdot \alpha$  et  $\gamma$ ,
3. (Réflexivité) si  $\gamma \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}', X]$  et  $\delta \in \mathbf{C}[p \cdot \mathbb{I}', X]$  pour  $n, p \neq 0$  et que  $U(\gamma) = U(\delta)$ , alors il existe un entier naturel  $q$  et un chemin dirigé  $\xi$  appartenant à  $\mathbf{C}[q \cdot \mathbb{I}', X]$  tel qu'il existe un zigzag de dihomotopies entre  $\gamma$  et  $\delta$ ,
4. (Compatibilité) si on a une dihomotopie de  $\alpha$  vers  $\alpha'$ , une dihomotopie de  $\beta$  vers  $\beta'$  et que le début de  $\beta$  est la fin de  $\alpha$ , alors on a un zigzag de dihomotopies entre  $\beta \cdot \alpha$  et  $\beta' \cdot \alpha'$ .

Alors la clôture transitive de

$$\left\{ (\gamma, \delta) \mid \text{il existe une dihomotopie de } \gamma \text{ vers } \delta \text{ ou de } \delta \text{ vers } \gamma \right\}$$

c'est-à-dire la relation

$$\left\{ (\gamma, \delta) \mid \text{il existe un zigzag de dihomotopies entre } \gamma \text{ et } \delta \right\}$$

définit une notion d'homotopie sur  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire que la famille  $(\sim_X)_{X \in \text{Ob}(\mathbf{C})}$  satisfait la PCH.

PREUVE. La relation  $\sim_X$  est réflexive d'après le 3<sup>ème</sup> point. Elle est symétrique et transitive par construction. Le fait que ce soit une congruence découle du 4<sup>ème</sup> point, modulo une astuce similaire à celle utilisée dans la preuve de la proposition XII.2.2. Si  $H$  est une dihomotopie concrète, il en va de même de  $f \circ H$  pour n'importe quel foncteur  $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ , d'où la première partie de la PCH. La seconde partie étant donnée par les 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> points. ■

Dans le chapitre suivant, on va voir que les catégories que l'on a proposée pour modéliser la concurrence sont des catégories à chemins topologiquement concrète dans lesquelles on retrouve les conditions d'application de la proposition XII.3.8.



Ce chapitre est consacré à l'étude des catégories dont les objets possèdent de "vraies" boucles. Ses objectifs sont multiples. Tout d'abord on va, à l'aide de la construction des catégories fondamentales généralisées, retrouver dans chacune des catégories  $\text{PoSpc}$ ,  $\text{LPoSpc}$ ,  $\text{dTop}$  et  $\text{Flot}$ , la notion de catégorie fondamentale qui lui est propre. En outre, étant donné que  $\text{PoSpc}$  se plonge naturellement dans la plupart de ces catégories, on va vérifier que cette construction "commute" dans chaque cas avec le plongement. Par exemple, on voudrait que la catégorie fondamentale d'un espace ordonné  $\vec{X}$  et la catégorie fondamentale de l'image de cet espace ordonné par le plongement  $\text{PoSpc} \hookrightarrow \text{dTop}$  soient comparables. Dans le cas où  $\mathbf{C} = \text{PoSpc}$ , l'objet-chemin naturel est bien sûr  $[0, 1]$ , dans

le cas où  $\mathbf{C} = \text{dSpc}$  (voir [37] ou la définition XIII.1.1 pour un rapide descriptif), et si l'on privilégie l'aspect dirigé, c'est  $[0, 1]$  muni de la collection de toutes les applications continues et croissantes de  $[0, 1]$  vers  $[0, 1]$ . Notons que l'on peut aussi ignorer la direction en considérant toutes les applications continues et ainsi retrouver la topologie algébrique classique. De façon générale, une boucle est alors un chemin dirigé dont la source et le but sont égaux. Il est clair que dans  $\text{PoSpc}$  et avec l'objet-chemin que l'on a choisi, les boucles (dirigées) sont constantes. Remarquons au passage que si on prend pour objet-chemin le segment unité  $[0, 1]$  avec la relation d'égalité, alors on retrouve la topologie algébrique classique. Selon cette approche, la distinction entre topologie algébrique classique et dirigée se fait par le choix de l'objet-chemin. On va donc se mettre en quête d'une catégorie  $\mathbf{C}$  munie d'un objet terminal et d'un objet-chemin qui modélise convenablement la notion de direction tout en permettant l'existence de boucles qui ne soient pas triviales. Trois solutions, issues de la notion d'espace ordonné, sont ici étudiées. Dans chaque cas, on vérifie que l'on a bien une catégorie à chemins topologiquement concrète. On évoquera aussi la notion de flot en notant bien que, *a priori*, la catégorie des flots n'est pas topologiquement concrète.

## XIII.1 AUTRES MODÈLES TOPOLOGIQUES DE LA CONCURRENCE

Cette section a pour but de donner un aperçu de quelques uns des autres modèles de topologie dirigée existants.

### XIII.1.1 ESPACES DIRIGÉS

Cette structure est due à *Marco Grandis* et permet de développer très facilement le concept de catégorie fondamentale. Tous les détails concernant les espaces dirigés sont disponibles dans [37] et [36].

#### XIII.1.1 DÉFINITION (ESPACES DIRIGÉS)

Un **espace dirigé** est un espace topologique de *Hausdorff*<sup>1</sup>  $X$  muni d'une famille de chemins de  $X$ , notée  $dX$ . Par ailleurs,  $dX$  doit satisfaire les propriétés suivantes:

1. tout chemin constant sur  $X$  est un élément de  $dX$ ,
2. la famille  $dX$  est stable par reparamétrisation croissante des sous-chemins, c'est-à-dire que si  $\delta$  appartient à  $dX$  et que  $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est continue et croissante, alors  $\delta \circ \theta$  est encore un élément de  $dX$ ,
3.  $dX$  est stable par concaténation, c'est-à-dire que si  $\delta_1$  et  $\delta_2$  appartiennent à  $dX$  et que  $\delta_1(1) = \delta_2(0)$ , alors l'application

$$\delta_3 : t \in [0, 1] \longmapsto \begin{cases} \delta_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta_2(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est encore un élément de  $dX$ .

Un morphisme d'un espace dirigé  $(X_1, dX_1)$  vers un espace dirigé  $(X_2, dX_2)$  est une application continue  $f$  de  $X_1$  vers  $X_2$  telle que pour tout chemin  $\delta$  appartenant à  $dX_1$ , le chemin  $f \circ \delta$  appartient à  $dX_2$ , on écrit abusivement

$$f(dX_1) \subseteq dX_2.$$

Les espaces dirigés et leurs morphismes forment la catégorie des espaces dirigés notée  $\mathbf{dTop}$  (d'après la notation de [37]).

Dans l'énoncé du 2<sup>ème</sup> axiome, il est très important de noter que  $\theta$  n'est pas nécessairement surjective, ainsi tout sous-chemin d'un élément de  $dX$  est encore un élément de  $dX$ , cette propriété de stabilité est à rapprocher de celle de pureté introduite dans la définition III.1.4. Par ailleurs, à la différence de  $\mathbf{PoSpc}$ ,  $\mathbf{dTop}$  possède de "vraie" boucle dirigée. On peut par exemple représenter le cercle dirigé dans  $\mathbf{dTop}$  comme  $S^1$ , c'est-à-dire le cercle unité euclidien, muni des tous les chemins de la forme

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) \end{array}$$

---

<sup>1</sup>Dans [37], il n'y a pas d'hypothèse de séparation sur  $X$ , cependant, du point de vue de cette thèse, seul de tels espaces ont un intérêt. En outre, il est toujours possible de se référer au reflet dans  $\mathbf{HauSpc}$  d'un espace topologique.

où  $\theta$  est une application continue croissante de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ .

Le foncteur d'oubli  $U$  de  $\mathbf{dTop}$  vers  $\mathbf{Spc}$  admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite. Le premier consiste à équiper  $X$  de l'ensemble des chemins constants de  $X$  et le second à équiper  $X$  de tous les chemins de  $X$ . En outre, on a un foncteur fidèle  $I$  défini sur  $\mathbf{RSpC}$  (voir la définition XIII.1.1) à valeurs dans  $\mathbf{dTop}$  construit comme suit: étant donné un objet  $(X, \rightarrow_X)$  de  $\mathbf{RSpC}$ , on pose  $dX := \{(\delta_n \cdot \dots \cdot \delta_1) \circ \theta \mid \theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ est continue, croissante et } \gamma_k \text{ vérifie } t \leq t' \Rightarrow \gamma_k(t) \rightarrow_X \gamma_k(t') \text{ et } \gamma_{k+1}(0) = \gamma_k(1)\}$ . On voit immédiatement que  $(X, dX)$  est un espace dirigé car la réflexivité de  $\rightarrow_X$  permet d'avoir les chemins constants. De plus, si  $f \in \mathbf{RSpC}[(X, \rightarrow_X), (Y, \rightarrow_Y)]$  et que  $(\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1) \circ \theta \in dX$ , alors  $f \circ (\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1) \circ \theta = ((f \circ \gamma_n) \cdot \dots \cdot (f \circ \gamma_1)) \circ \theta \in dY$  où  $dX$  et  $dY$  sont respectivement définis à partir de  $(X, \rightarrow_X)$  et de  $(Y, \rightarrow_Y)$  selon le procédé précédent, d'où la functorialité de  $I$ . La fidélité de  $I$  est immédiate au regard de l'application continue sous-jacente. On peut aussi définir une application  $R$  définie sur l'ensemble des objets de  $\mathbf{dTop}$  à valeurs dans l'ensemble des objets de  $\mathbf{RSpC}$ . Etant donné un espace dirigé  $(X, dX)$ , on pose  $\rightarrow_X$  la plus petite sous-partie fermée de  $X \times X$  contenant  $\{(x, y) \mid \exists \delta \in dX, \delta(0) = x, \delta(1) = y\}$ . Comme tous les chemins constants sont dans  $dX$ , on vérifie immédiatement que  $(X, \rightarrow_X)$  est un r-espace. On a alors deux résultats qui établissent un lien théorique entre les espaces dirigés et les espaces partiellement ordonnés.

### XIII.1.2 THÉORÈME

L'application  $R$  se prolonge en un foncteur, encore noté  $R$ , tel que  $R \dashv I$ , i.e.  $R$  est l'adjoint à gauche de  $I$ . De plus l'image de  $I$  est replète dans  $\mathbf{dTop}$ .

PREUVE. On prouve d'abord que l'application identité de  $X$  (en tant qu'espace topologique de *Hausdorff*), induit un morphisme de  $\mathbf{dTop}$  de  $(X, dX)$  vers  $I(R(X, dX))$ . Soit  $\delta \in dX$  et  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ . En prenant  $\theta$  l'application affine croissante qui envoie  $[0, 1]$  sur  $[t_1, t_2]$ , on montre que  $\delta \circ \theta \in dX$  et donc que  $\delta(t_1) \rightarrow_X \delta(t_2)$  où  $\rightarrow_X$  est défini à partir de  $(X, dX)$  selon le procédé précédent. Il s'ensuit que l'application

$$\begin{array}{ccc} \eta_{(X, dX)} : (X, dX) & \longrightarrow & I(R(X, dX)) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

est un bimorphisme de  $\mathbf{dTop}$ . Puis, si  $f$  appartient à  $\mathbf{dTop}[(X, dX), I(Y, \rightarrow_Y)]$ , alors  $(f \times f)^{-1}(\rightarrow_Y)$  est une relation réflexive et fermée qui contient  $\{(x, y) \mid \exists \delta \in dX, \delta(0) = x, \delta(1) = y\}$  par hypothèse sur  $f$ . Donc  $\rightarrow_X \subseteq (f \times f)^{-1}(\rightarrow_Y)$ , c'est-à-dire que  $(f \times f)(\rightarrow_X) \subseteq \rightarrow_Y$ . Donc  $f$  induit un morphisme  $g \in \mathbf{RSpC}[R(X, dX), (Y, \rightarrow_Y)]$  tel que  $f = I(g) \circ \eta_{(X, dX)}$ . Si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux tels morphismes de  $\mathbf{RSpC}$ , alors, comme  $\eta_{(X, dX)}$  est un bimorphisme, on a  $I(g_1) = I(g_2)$ , puis la fidélité de  $I$  implique que  $g_1 = g_2$ . On peut alors appliquer la proposition A.3.12 pour obtenir l'adjoint attendu. Enfin, si un espace dirigé  $(X, dX)$  est l'image par  $I$  d'un r-espace  $(X, \rightarrow_X)$  et que  $f : (X, dX) \rightarrow (X', dX')$  est un isomorphisme de  $\mathbf{dTop}$ , alors  $(X', dX')$  est l'image par  $I$  de  $(f(X), (f \times f)(\rightarrow_X))$  qui est r-espace isomorphe à  $(X, \rightarrow_X)$ . L'image par  $I$  de  $\mathbf{RSpC}$  est donc replète dans  $\mathbf{dTop}$ . ■

En composant la réflexion de  $\mathbf{RSpC}$  dans  $\mathbf{PoSpC}$  (voir le théorème I.2.10) avec la paire de foncteurs adjoints  $R \dashv I$  décrite dans le théorème XIII.1.2 on a le

### XIII.1.3 COROLLAIRE

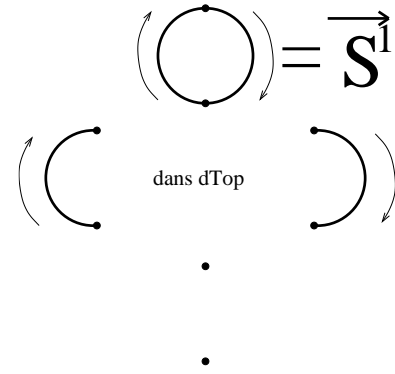
Il existe un foncteur fidèle  $I'$  de  $\text{PoSpc}$  dans  $\text{dTop}$  admettant un adjoint à gauche. En outre, la co-unité de cette adjonction est un bimorphisme et l'image de  $I'$  est replète dans  $\text{dTop}$ .

Notons que, pour que  $\text{RSpc}$  soit une sous-catégorie réfléchissante de  $\text{dTop}$ , il manque seulement au foncteur  $I$  la propriété d'être plein. En fait, *a priori*, ni  $R$  ni  $I$  n'est plein. On signale enfin que  $\text{dTop}$  est complète et co-complète, que son objet terminal est  $(\{*\}, \{*\})$  et son objet initial  $(\emptyset, \emptyset)$  et que, puisque le foncteur d'oubli  $U$  admet un adjoint à droite et un adjoint à gauche, on a  $U(\lim F) = \lim U \circ F$  et  $U(\text{colim} F) = \text{colim} U \circ F$  où  $F$  est un foncteur d'une petite catégorie dans  $\text{dTop}$ . Autrement dit, l'espace sous-jacent d'une limite (respectivement d'un co-limite) dans  $\text{dTop}$  est la limite (respectivement d'une co-limite) des espaces sous-jacents dans  $\text{Spc}$ .

En particulier, on peut comparer la somme amalgamée décrite ci-contre avec celle décrite à la fin du chapitre I. On a bien, dans  $\text{dTop}$ , le comportement de la somme amalgamée vis à vis des boucles que l'on espère dans une catégorie qui permet de représenter ces dernières. Notons enfin que l'un des grands avantages de la catégorie  $\text{dTop}$  est de proposer un représentant "canonique" du cercle dirigé. C'est-à-dire que toute structure d'espace dirigé dont l'espace topologique sous-jacent est  $S^1$  et dont les chemins dirigés sont les applications de la forme

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) \end{aligned}$$

où  $\theta$  est une application continue croissante de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ , est isomorphe à  $\overrightarrow{S^1}$ .



### XIII.1.2 FLOTS

Cette structure est due à *Philippe Gaucher*, *grosso modo*, un **flot** s'apparente à une petite catégorie amputée de ses identités et dont on a équipé l'ensemble des morphismes d'une topologie à engendrement compact, de sorte que les applications *source*, *but* et *composition* soient continues pourvu que l'on regarde l'ensemble des objets comme un espace topologique discret. On peut aussi voir un flot comme un objet en catégorie dans la catégorie des espace topologiques à engendrement compact, sans les identités et avec la contrainte que l'espace topologique des objets soit discret (voir le chapitre 8 de [9] pour la notion de théorie des catégories internes). Formellement un flot est la donnée d'un espace topologique à engendrement compact  $\mathbb{P}X$ , d'un ensemble  $X^0$  (vu comme un espace discret), de deux applications continues  $s, t : \mathbb{P}X \rightarrow X^0$  et d'une application continue  $*$  :  $\{\delta, \gamma \mid t(\delta) = s(\gamma)\} \rightarrow \mathbb{P}X$  telle que pour tout triplet  $(\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1)$  d'éléments de  $\mathbb{P}X$  tels que  $t(\gamma_1) = s(\gamma_2)$  et  $t(\gamma_2) = s(\gamma_3)$  on a

$$\gamma_3 * (\gamma_2 * \gamma_1) = (\gamma_3 * \gamma_2) * \gamma_1, \text{ autrement dit } * \text{ est associative}$$

et

$$t(\gamma_2 * \gamma_1) = t(\gamma_2) \text{ et } s(\gamma_2 * \gamma_1) = s(\gamma_1)$$

La définition d'un flot est donc similaire à celle d'une petite catégorie, excepté que l'on impose des hypothèses topologiques. En outre, on n'a pas nécessairement d'identité, cette lacune est intentionnelle, en effet, dans la théorie que développe *Philippe Gaucher*, la présence des identités provoque un comportement pathologique vis à vis de la classification des flots, en particulier, cette suppression est nécessaire pour rendre fonctoriel la construction de l'espace des branchements (voir [28]). Signalons également que le flot suivant est un objet-segment dirigé de la catégorie des flots (notée *Flot*): on prend pour espace des chemins  $\mathbb{P}(X) = \{x\}$ , pour espace des objets la paire  $\{0, 1\}$  et on pose  $s(x) := 0$  et  $t(x) := 1$ . Dans la terminologie de *Philippe Gaucher*, ce flot est noté  $Glob(\{x\})$ . Tout comme les espaces dirigés et les espaces partiellement ordonnés, les flots permettent ainsi une définition très naturelle de la catégorie fondamentale.

En outre, la catégorie des flots possède plusieurs structures de catégorie de modèles, on a ainsi différente classification à équivalence faible près. Pour plus de détails, consulter [27] et [28], elle est de plus, jusqu'à présent, la seule qui offre une notion d'équivalence de dihomotopie (voir [29]).

Dans la structure de flot, l'accent topologique est directement mis sur les ensembles de chemins alors que dans tous les autres modèles topologiques recensés dans cette thèse, il est mis sur l'ensemble des points (ou états dans le langage informaticien). Cette particularité rend difficile la comparaison des flots avec les autres modèles topologiques.

### XIII.1.3 COURANTS

*Sanjeevi Krishnan* a établi dans une note, pas encore publiée à ma connaissance, ainsi que dans [55], la définition d'une structure dirigée fortement inspirée par celle d'espace localement ordonné et dont la collection semble former une catégorie ne souffrant pas des pathologies que l'on rencontre dans *LPOSpC*. Tout comme la notion de espace localement ordonné, un **courant** (*stream* dans le texte original de *Sanjeevi Krishnan*) est définie de façon élégante *via* le formalisme des faisceaux (voir [9], [60] ou le chapitre VII de [90] pour des exposés très complet sur les faisceaux). Ainsi, un courant est la donnée d'un espace topologique (de Hausdorff)  $X$  ainsi que d'un faisceau dans la catégorie des espaces préordonnés. Formellement, on se donne un recouvrement d'ouverts  $(V_i)_{i \in \mathcal{I}}$  de  $X$ , stable par intersection finie, de sorte que chaque ouvert  $V_i$  soit équipé d'une relation de préordre  $\leq_{V_i}$  dont le graphe est fermé dans  $V_i \times V_i$  et que

$$\leq_{V_i \cap V_j} = \leq_{V_i} \cap \leq_{V_j} .$$

On impose enfin que si  $x \leq_{V_i} y \leq_{V_i} x$  pour  $x, y \in V_i$ , alors il existe un indice  $j$  dans  $\mathcal{I}$  tel que  $x, y \in V_i \cap V_j$  et  $x \not\leq_{V_i \cap V_j} y$ , c'est cette dernière condition qui confère à la notion de courant tout son intérêt. *Sanjeevi Krishnan* semble pour l'heure avoir obtenu d'intéressants résultats concernant une catégorie dont les objets sont les courants.



## XIII.2 EXEMPLES DE CATÉGORIES À CHEMINS

### XIII.2.1 LA CATÉGORIE DES ENSEMBLES

L'unique, à isomorphisme près, objet chemin non trivial de  $\text{Set}$  est  $\{0, 1\}$ , en effet, si  $P$  est un ensemble contenant au moins trois éléments, pour tout  $\{s, t\} \subseteq P$  on a une bijection  $\phi$  de  $P$  vers  $P$  telle que  $\phi(\{s, t\}) \neq \{s, t\}$ . Il s'ensuit que tout objet chemin dans  $\text{Set}$  a au plus deux points, i.e. deux éléments. Supposons que  $\mathbb{I} := \{0, 1\}$ . Clairement,  $n \cdot \mathbb{I} = \{0, \dots, n\}$ . Soient  $X$  un ensemble et  $a, b \in X$ , les chemins de  $a$  vers  $b$  sont les suites  $x \in X^{\{0, \dots, n\}}$  telles que  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ . La concaténation de  $x \in X^{\{0, \dots, n\}}$  suivi de  $y \in X^{\{0, \dots, p\}}$  est  $z \in X^{\{0, \dots, n+p-1\}}$  où  $z_k = x_k$  si  $0 \leq k \leq n$  et  $z_k = y_{k-n-1}$  si  $n < k < n+p-1$ , par exemple  $(3, 4, 5) \cdot (1, 2, 3) = (1, 2, 3, 4, 5)$ , 3 n'est pas répété. Le résultat montre à quel point la propriété de congruence homotopique est forte :

les seules notions d'homotopie sur  $\text{Set}$  muni de l'objet chemin  $\{0, 1\}$  sont les notions extrêmes. Cela signifie que si  $\sim_X$  est une notion d'homotopie, alors on a, soit

1. pour tout ensemble  $X$ , tout élément  $x$  de  $X^{\{0, \dots, n\}}$  et tout élément  $y$  de  $X^{\{0, \dots, p\}}$ ,  $x \sim_X y$  si et seulement si  $n = p$  et pour tout indice  $i$  dans  $\{0, \dots, n\}$  et tout indice  $j$  de  $\{0, \dots, p\}$  on a  $x_i = y_j$ ,  
soit
2. pour tout ensemble  $X$ , tout élément  $x$  de  $X^{\{0, \dots, n\}}$  et tout élément  $y$  de  $X^{\{0, \dots, p\}}$  on a  $x \sim_X y$ .

### XIII.2.2 LA CATÉGORIE DES PETITES CATÉGORIES

On s'intéresse ici au cas où  $\mathbf{C} := \text{Cat}$ . On pose  $\mathbb{I} := (0 \rightarrow 1)$ , c'est-à-dire la catégorie ayant deux objets 0 et 1 et une seule flèche non triviale de 0 vers 1, on peut aussi le voir comme le poset  $\{0 < 1\}$ . Un point d'un objet  $X$  de  $\mathbf{C}$  n'est rien d'autre qu'un objet de la petite catégorie  $X$ . Un chemin sur  $X$  est simplement un morphisme de  $X$ . Notons également que le seul automorphisme de  $\mathbb{I}$  dans  $\mathbb{I}$  est l'identité et donc que l'on n'a pas d'inversion du temps. De plus,  $\Gamma(X)$  est la catégorie libre engendrée par le graphe sous-jacent de  $X$  ou en d'autres termes, si  $U$  est le foncteur d'oubli de  $\text{Cat}$  vers  $\text{Grph}$  et  $F$  son adjoint à gauche (voir l'appendice A), alors  $\Gamma(X) := F \circ U(X)$ . Si on équipe  $(\text{Cat}, I)$  de la plus petite notion d'homotopie, alors le foncteur  $\overrightarrow{\pi}_1$  est simplement  $\text{Id}_{\text{Cat}}$ . La catégorie  $\text{Cat}$  admet donc dans ce cas une représentation du cercle dirigé. Si maintenant on équipe  $(\text{Cat}, I)$  de la plus grande notion d'homotopie, c'est-à-dire celle qui identifie de morphismes de  $\Gamma(X)$  ayant les mêmes extrémités, alors pour toute petite catégorie  $X$ ,  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X})$  est le préordre associé à  $X$  décrit dans la proposition A.1.24. Dans ce cas,  $\text{Cat}$  n'admet pas de représentation du cercle dirigé. Ceci souligne le fait que la présence d'une représentation du cercle dirigé dépend du choix de  $\mathbb{I}$  et de la notion d'homotopie. Par ailleurs, le monoïde  $(\{n \cdot \mathbb{I} | n \in \mathbb{N}\}, +)$  est ici isomorphe à  $(\mathbb{N}, +)$  et on remarque que, dans  $\text{Cat}$ ,  $n \cdot \mathbb{I}$  est, à isomorphisme près, le poset  $\{0 < \dots < n\}$ .

### XIII.2.3 LA CATÉGORIE DES MONOÏDES

Remarquons tout d'abord que tout monoïde  $\mathbb{M}$  possède un unique point car tout morphisme de monoïdes doit envoyer l'élément neutre du monoïde sur lequel il est défini sur

l'élément neutre du monoïde dans lequel il prend ses valeurs. Quel que soit le monoïde  $\mathbb{M}$ , choisi pour être l'objet segment, on aura  $s$  et  $t$  tous deux égaux à l'unique point de  $\mathbb{M}$ , qui est d'ailleurs préservé par tout automorphisme de  $\mathbb{M}$ . On peut alors, par exemple, poser  $\mathbb{I} := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^+$ , ou  $(\{0, 1\}, \vee)$ . Le monoïde des chemins est ici isomorphe à  $(\mathbb{N}, +, 0)$  puisque  $n \cdot \mathbb{I}$  n'est rien d'autre que la somme directe dans  $\text{Mon}$  de  $n$  copies du monoïde  $\mathbb{I}$ .

### XIII.2.4 LA CATÉGORIE DES GROUPES

Encore une fois, on aura nécessairement  $s = t$ . Les objets chemins qu'il semble naturel de considérer sont  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$ . Les chemins d'un groupe  $\mathbb{G}$  sont alors les éléments de son ensemble sous-jacent, ou bien ses morphismes s'il est vu comme une petite catégorie. Outre les deux notions d'homotopie canoniques, on peut aussi poser  $\alpha \sim \beta$  si et seulement si  $\alpha(1)$  et  $\beta(1)$  sont conjugués, c'est-à-dire s'il existe  $\gamma \in \mathbb{G}$  tel que  $\beta(1) = \gamma^{-1}\alpha(1)\gamma$ . En effet, dans tous les exemples d'objet segment que l'on a donné, on a un générateur que l'on peut noter 1. Un chemin de  $\mathbb{G}$  est par définition un morphisme  $\alpha$  de  $\mathbb{I}$  dans  $\mathbb{G}$ , on peut alors s'intéresser à  $\alpha(1) \in \mathbb{G}$ .

### XIII.2.5 LA CATÉGORIE DES PETITES 2-CATÉGORIES

Sans entrer précisément dans les détails formels de ce qu'est une 2-catégorie, disons seulement que c'est une catégorie à laquelle on a ajouté des 2-morphismes, c'est-à-dire des morphismes entre morphismes. On ajoute aussi une loi de composition des 2-morphismes. La seule restriction que l'on pose est que, s'il existe un 2-morphisme dont la source est un morphisme  $\alpha$  et le but un morphisme  $\beta$ , alors  $\alpha$  et  $\beta$  ont la même source et le même but. Etant donnée une 2-catégorie  $X$ , on pose  $\Gamma_2(X) := \Gamma(UX)$  où  $\Gamma$  est le foncteur défini dans l'exemple des petites catégories et  $UX$  la petite catégorie sous-jacente de  $X$ . On a donc un foncteur d'oubli  $U$  de la catégorie des petites 2-catégories dans celle des petites catégories. On pose alors pour toute petite 2-catégorie  $X$ ,  $\sim_X$  la congruence sur  $\Gamma(X)$  engendrée par la relation qui identifie deux morphismes  $\alpha, \beta$  de  $\Gamma(X)$  si et seulement si il existe un 2-morphisme de  $\alpha$  vers  $\beta$ . On a bien sûr une représentation du cercle dirigé.

### XIII.2.6 LA CATÉGORIE DES FLOTS

Cet exemple est en fait basé sur celui de 2-catégories: en effet, on peut associer à tout flot  $X$  une 2-catégorie dont toutes les 2-flèches sont des 2-isomorphismes. En fait, pour chaque couple de points  $(x, y)$  du flot  $X$ , on a un espace topologique  $X(x, y)$  des chemins de  $x$  vers  $y$ . Un chemin  $H$  sur  $X(x, y)$  à homotopie près est donc, en un certain sens, un homotopie de  $H(0)$  vers  $H(1)$ . En effet, pour  $\alpha, \beta \in X(x, y)$ , si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux chemins de  $\alpha$  vers  $\beta$  homotopes sur  $X(x, y)$ , alors l'homotopie  $\eta$  de  $H_1$  vers  $H_2$  peut être vue comme un 3-morphisme! Bien sûr, en considérant  $H(1 - t)$ , on a une homotopie de  $H(1)$  vers  $H(0)$  et donc tous les 2-morphismes sont inversibles.

### XIII.2.7 LA CATÉGORIE DES ESPACES TOPOLOGIQUES

On pose  $\mathbb{C} := \text{Spc}$ , la catégorie des espaces topologiques et  $\mathbb{I} := [0, 1]$  muni de la topologie classique. Les applications  $s$  et  $t$  envoient respectivement  $*$  :=  $\{0\}$  sur 0 et sur 1.

L'application

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto 1 - t \end{aligned}$$

est une inversion du temps.

Pour avoir une catégorie à chemins, il nous faut encore décrire les co-cônes distingués. En suivant les conventions de la section XII.1.3, on pose  $0 \cdot \mathbb{I} = \{0\}$ ,  $1 \cdot \mathbb{I} = [0, 1]$  et pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n \geq 2$ , on pose  $n \cdot \mathbb{I} := [0, 1]$ . On pose également pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et pour tout indice  $k$  dans  $\{1, \dots, n\}$ :

$$i_k^{(n)} \longrightarrow \mathbb{I} = [0, 1]x \longmapsto \frac{(k-1)+x}{n}$$

Le monoïde  $(\{n \cdot \mathbb{I} | n \in \mathbb{N}\}, +)$  est ici isomorphe à  $(\{0, 1\}, \vee)$  et il vient,

### XIII.2.1 LEMME

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $(n \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I}, i_1^{(n)}, \dots, i_n^{(n)})$  est un représentant de la colimite du diagramme

$$\underbrace{\begin{array}{ccccccc} & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ * & s & t & * & s & t & * & s & t & * & s & t & * & s & t & * \end{array}}_{n \text{ copies de } \mathbb{I}}$$

De plus, étant donnés  $\gamma_1 : n \cdot \mathbb{I} = [0, 1] \longrightarrow X$ ,  $\gamma_2 : m \cdot \mathbb{I} = [0, 1] \longrightarrow X$  et  $\gamma_3 : p \cdot \mathbb{I} = [0, 1] \longrightarrow X$  tels que les fins respectives de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$  soient les débuts respectifs de  $\gamma_2$  et de  $\gamma_3$ , i.e.  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$  et de  $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$ . On a alors  $\gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1) = (\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1$  où  $\cdot$  est la concaténation telle qu'elle est définie dans la section XII.1. Noter bien que cette égalité est stricte et pas seulement à isomorphisme près dans  $\mathbf{Spc}$  et que la loi  $\cdot$  dépend de  $n, m$  et  $p$ .

PREUVE. Quelques calculs montrent que

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0, \frac{n}{n+m+p}\right] & \quad \gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)(x) = (\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1(x) = \gamma_1\left(\frac{n+m+p}{n}x\right) \\ \forall x \in \left[\frac{n}{n+m+p}, \frac{n+m}{n+m+p}\right] & \quad \gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)(x) = (\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1(x) = \gamma_2\left(\frac{n+m+p}{m}x - \frac{n}{m}\right) \\ \forall x \in \left[\frac{n+m}{n+m+p}, 1\right] & \quad \gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)(x) = (\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1(x) = \gamma_3\left(\frac{n+m+p}{p}x - \frac{n+m}{p}\right) \end{aligned}$$

■

Le lemme XIII.2.1 nous donne donc une structure de catégorie à chemins sur  $\mathbf{Spc}$ . Implicitement, la loi  $\cdot$  est définie pour des couples  $(n, \gamma)$  où  $n \in \mathbb{N}$  et  $\gamma$  une application continue définie sur  $[0, 1]$  ou sur  $\{0\}$  à valeurs dans  $X$ , autrement dit, du point de vue de la loi  $\cdot$ ,  $(n, \gamma)$  et  $(p, \gamma)$  ne sont pas identiques lorsque  $n \neq p$ . Par exemple, si  $n \neq n'$  ou  $p \neq p'$ , et que l'on a  $\alpha, \beta, \alpha'$  et  $\beta'$  respectivement définis sur  $n \cdot \mathbb{I}$ ,  $p \cdot \mathbb{I}$ ,  $n' \cdot \mathbb{I}$ ,  $p' \cdot \mathbb{I}$  avec  $\alpha = \alpha'$  et  $\beta = \beta'$  dans  $\mathbf{Spc}$ , c'est-à-dire en "oubliant"  $n, p, n'$  et  $p'$ , on pourra avoir  $\beta \cdot \alpha \neq \beta' \cdot \alpha'$  dans  $\mathbf{Spc}$  bien que l'on conserve  $\beta \cdot \alpha \cong \beta' \cdot \alpha'$  dans  $\mathbf{Spc}$ , c'est-à-dire l'égalité à reparamétrisation près. Cette remarque met en avant l'importance de la structure de catégorie à chemins.

Soit  $X$  un objet de  $\mathbf{Spc}$ . Remarquons déjà que  $\Gamma(X)$  n'est alors rien d'autre que la catégorie des chemins de Moore de  $X$ . En particulier, on aurait obtenu la même structure à

chemins en posant  $n \cdot \mathbb{I} := [0, n]$  et

$$\begin{aligned} i_k^{(n)} : [0, 1] &\longrightarrow [0, n] \\ x &\longmapsto x + k - 1 \end{aligned}$$

mais que, dans ce cas, le monoïde des chemins est isomorphe à  $(\mathbb{N}, +, 0)$ . La relation qui équipe  $\Gamma(X)$  n'est alors rien de plus que la relation d'homotopie classique, voir définition B.2.3. On vérifie que  $\overrightarrow{\pi}_1(X)$  est alors le groupoïde fondamental de  $X$  tel qu'il est décrit dans la section B.2.1 ou dans [47]. La catégorie  $\mathbf{Spc}$  n'a bien entendu aucune représentation du cercle dirigé puisque toute catégorie fondamentale d'un objet de  $\mathbf{Spc}$  est un groupoïde. Remarquons également que si on équipe  $(\mathbf{Spc}, \mathbb{I})$  de la plus grande notion d'homotopie, alors pour tout espace topologique  $X$ ,  $\overrightarrow{\pi}_1(X)$  est la relation d'équivalence qui relie deux éléments de l'ensemble sous-jacent de  $X$  si et seulement si ceux-ci sont dans la même composante connexe par arcs. La même structure fournit à  $\mathbf{HauSpc}$  une structure de catégorie à chemins.

En outre,  $\mathbf{Spc}$  (de même que  $\mathbf{HauSpc}$ ) est une catégorie à chemin topologique concrète sur elle-même en prenant pour  $U$  le foncteur identité et pour seul domaine de dihomotopie admissible (voir définition XII.3.4)  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

### XIII.2.8 CATÉGORIE FONDAMENTALE D'UN ESPACE ORDONNÉ

On pose  $\mathbf{C} := \mathbf{PoSpc}$ , la catégorie des espaces ordonnés (voir définition I.1.1) et  $\mathbb{I} := \overrightarrow{[0, 1]}$  le segment unité dirigé standard. Les applications  $s$  et  $t$  envoient respectivement  $*$  sur 0 et sur 1. Tout automorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{I}$  vérifie  $\phi(0) = 0$  et  $\phi(1) = 1$ , il n'y a donc pas d'inversion du temps. Cette dernière affirmation découle de la proposition XI.1.7 et du fait qu'en tant que morphisme de  $\mathbf{PoSpc}$ ,  $\phi$  est croissante. En suivant les conventions de la section XII.1.3, on pose  $0 \cdot \mathbb{I} = \{0\}$ ,  $1 \cdot \mathbb{I} = \overrightarrow{[0, 1]}$  et pour  $n \in \mathbb{N}$   $n \geq 2$ ,  $n \cdot \mathbb{I} := \overrightarrow{[0, 1]}$ . On pose également pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$   $i_k^{(n)} : x \in \mathbb{I} = \overrightarrow{[0, 1]} \longmapsto \frac{(k-1)+x}{n} \in n \cdot \mathbb{I} = \overrightarrow{[0, 1]}$ . Le monoïde  $(\{n \cdot \mathbb{I} \mid n \in \mathbb{N}\}, +)$  est ici isomorphe à  $(\{0, 1\}, \vee)$ . Par ailleurs on a alors un résultat analogue au lemme XIII.2.1 qui donne à  $\mathbf{PoSpc}$  sa structure de catégorie à chemin.

Soit  $\overrightarrow{X}$  un objet de  $\mathbf{PoSpc}$ . La relation  $\sim_X$  qui équipe  $\Gamma(X)$  est la plus petite congruence engendrée par la relation d'homotopie dirigée, voir définition II.1.3. Il vient immédiatement que  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X})$  est la catégorie fondamentale de  $\overrightarrow{X}$  telle qu'elle est décrite dans le chapitre II. Si l'on équipe  $\mathbf{PoSpc}$  de la plus grande notion d'homotopie, alors pour tout espace ordonné  $\overrightarrow{X}$ ,  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X})$  est le préordre associé à la catégorie fondamentale de  $\overrightarrow{X}$  telle qu'elle est décrite dans le chapitre II, c'est en particulier une relation d'ordre puisque la catégorie fondamentale de  $\overrightarrow{X}$  au sens du chapitre II est sans boucle. Notons enfin que cette relation d'ordre est incluse dans la relation d'ordre de l'espace ordonné  $\overrightarrow{X}$  mais pas nécessairement égale. Ces deux relations peuvent effectivement être distinctes comme c'est le cas dans l'exemple du drapeau suisse dirigé.

Par ailleurs, supposons maintenant que l'on choisisse  $\mathbb{I} := [0, 1]$ , c'est-à-dire le segment unité muni de l'égalité. Alors  $\overrightarrow{\pi}_1(\overrightarrow{X})$  obtenu en équipant  $\Gamma(\overrightarrow{X})$  de la plus petite congruence engendrée par la relation d'homotopie dirigée est le groupoïde fondamental de l'espace topologique sous-jacent de  $\overrightarrow{X}$ . Cette dernière remarque mérite une explication.

Rappelons qu'une homotopie dirigée par rapport à  $\mathbb{I}$  est, en particulier, un morphisme  $H$  de  $\text{PoSpc}[\mathbb{I} \times \mathbb{I}, \overrightarrow{X}]$ , mais dans le cas où  $\mathbb{I} = ([0, 1], =)$ , toute homotopie au sens classique entre les chemins sous-jacents des dichemins induit trivialement une homotopie dirigée entre les dichemins. En effet, la condition  $x = y \implies H(x) \leq_{\overrightarrow{X}} H(y)$  est toujours trivialement vérifiée.

Dans tous les cas, le monoïde  $(\{n \cdot \mathbb{I} | n \in \mathbb{N}\}, +)$  est isomorphe à  $(\{0, 1\}, \vee)$  et on n'a pas de représentation du cercle dirigé.

En outre,  $\text{PoSpc}$  est une catégorie à chemin topologique concrète sur  $\text{HauSpc}$  en prenant pour  $U$  le foncteur d'oubli et pour seul domaine de dihomotopie admissible (voir définition XII.3.4)  $\overrightarrow{[0, 1]} \times \overrightarrow{[0, 1]}$ . On vérifie immédiatement que la notion de dihomotopie concrète donnée par la proposition XII.3.8 est celle de la définition II.1.3.

### XIII.2.9 ESPACES DIRIGÉS

La définition XIII.1.1 décrit la catégorie  $d\text{Spc}$  des espaces dirigés. On pose, comme le suggère *Marco Grandis* dans [37],

$$\mathbb{I} := ([0, 1], \{\text{applications continues croissantes de } [0, 1] \text{ dans } [0, 1]\})$$

et  $s, t$  qui envoient respectivement  $*$  sur 0 et 1. Cette fois encore, on note qu'il n'y a pas d'inversion du temps. Une homotopie dirigée de  $\alpha \in dX$  vers  $\beta \in dX$  est un morphisme de  $d\text{Top}[\mathbb{I} \times \mathbb{I}, (X, dX)]$  dont l'application continue sous-jacente est une homotopie classique de  $\alpha$  vers  $\beta$ . La relation  $\sim_X$  qui équipe  $\Gamma(X)$  est la plus petite congruence engendrée par la relation d'homotopie dirigée que l'on vient de décrire et le foncteur  $\overrightarrow{\pi}_1$  est celui que définit *Marco Grandis* dans [37]. Comme on l'a déjà signalé, on a dans ce cas un représentation du cercle dirigé. Le monoïde des chemins est isomorphe à  $(\{0, 1\}, \vee)$ . Si l'on se réfère à la définition originale de [37], cette catégorie est concrète sur  $\text{Spc}$  et l'homotopie concrète donnée par la définition XII.3.5 est celle que donne *Marco Grandis* dans [37]. En outre, la proposition XII.3.8 s'applique à ce cadre.

## XIII.3 AFFAIBLISSEMENT DE LA NOTION D'ESPACE ORDONNÉ

Après avoir lu l'introduction de ce chapitre, on peut relativiser le contenu "intuitif" de la propriété II.2.3. En effet, l'absence de boucles dans la catégorie fondamentale d'un espace ordonné pourrait n'être que la conséquence du choix de  $\overrightarrow{[0, 1]}$ , c'est-à-dire  $[0, 1]$  muni de l'ordre classique  $\leq$ , comme objet-segment. En fait, le résultat suivant montre que la catégorie  $\text{PoSpc}$  ne laisse aucune latitude quant au choix de l'objet segment dirigé.

### XIII.3.1 THÉORÈME

Soit  $\triangleright$  une relation sur  $[0, 1]$ , c'est-à-dire que  $\triangleright \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ , telle que  $\{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] | f \text{ est continue et } f \times f(\triangleright) \subseteq \triangleright\} = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1] | \gamma \text{ est continue et croissante}\}$ . Alors  $\triangleright = \leq$  ou  $\triangleright = \leq^{op}$ , en désignant par  $\leq$  la relation d'ordre classique sur  $[0, 1]$ .

PREUVE. Dans le reste de cette preuve,  $<$  désigne l'ordre strict classique sur  $[0, 1]$ . Supposons que l'on ait une paire  $(a, b) \in [0, 1]$  telle que  $a < b$  et  $a \triangleright b$ , alors pour toute paire  $(c, d) \in [0, 1]^2$  telle que  $c \leq d$ , il existe une application continue croissante  $\gamma$  de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  telle que  $\gamma(a) = c$  et  $\gamma(b) = d$ , on a alors par hypothèse  $c \triangleright d$ . Ainsi  $\leq \subseteq \triangleright$ . Dans le cas où l'on a une paire  $(a, b) \in [0, 1]^2$  telle que  $a < b$  et  $b \triangleright a$  on prouve de la même

manière que  $\triangleright \subseteq \leq^{op}$ . Et toujours de façon analogue, on montre que s'il existe  $a \in [0, 1]$  tel que  $a \triangleright a$ , alors pour tout  $x \in [0, 1]$  on a  $x \triangleright x$ .

Notons  $P_1$  la propriété d'existence d'une paire  $a < b$  telle que  $a \triangleright b$ ,  $P_2$  la propriété d'existence d'une paire  $a < b$  telle que  $b \triangleright a$  et  $P_3$  la propriété d'existence de  $a$  tel que  $a \triangleright a$ . Notons que  $P_1 \Rightarrow P_3$  et  $P_2 \Rightarrow P_3$ , il suffit en effet de considérer une application croissante qui envoie  $a$  et  $b$  sur un même élément  $x$  de  $[0, 1]$ . Remarquons également que la relation  $\triangleright$  ne peut pas être  $\emptyset$ ,  $\{(x, x) | x \in [0, 1]\}$  ou  $[0, 1] \times [0, 1]$ . En effet, dans chacun de ces cas,  $\{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] | f \text{ est continue et } f(\triangleright) \subseteq \triangleright\}$  est l'ensemble de toutes les fonctions continues de  $[0, 1]$  vers  $[0, 1]$ , ce qui contredit bien sûr l'hypothèse de l'énoncé. Il en résulte qu'une et une seule des deux propriétés  $P_1$  et  $P_2$  est satisfaite. Si c'est  $P_1$  on a  $\leq \subseteq \triangleright$  et si c'est  $P_2$ , on a  $\leq^{op} \subseteq \triangleright$ . Supposons par exemple que ce soit  $P_1$  et considérons  $a, b \in [0, 1]$  tel que  $a < b$ . On ne peut pas avoir  $b \triangleright a$  sinon  $P_2$  serait aussi satisfaite. Donc  $\triangleright = \leq$ . De la même manière, si on a  $P_2$ , on prouve que  $\triangleright = \leq^{op}$ .

■

Le théorème XIII.3.1 affirme en particulier que si l'on considère qu'un "bon" objet segment dirigé doit être tel que l'ensemble des morphismes de  $\text{PoSpc}$  de cet objet dans lui-même est l'ensemble des applications continues croissantes de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ , alors il n'y a, à isomorphisme près, qu'un choix possible dans  $\text{PoSpc}$ . Une manière naïve d'obtenir des boules consiste à relâcher l'hypothèse de fermeture de la relation d'ordre dans la définition I.1.1 d'un espace ordonné. On considère alors la famille  $\mathcal{F} := \{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} | n \in \mathbb{N}\}$ . Muni de l'ordre induit, cette famille est isomorphe, dans  $\text{PoSet}$ , à  $\mathbb{Z}$ . On prend alors comme objet segment  $[0, 1]$  muni de la relation d'ordre  $a \leq' b$  si et seulement si on a  $z \leq a \leq b < z'$  où  $z'$  est le successeur de  $z$  dans la famille  $\mathcal{F}$ . On peut alors munir  $S^1$  de la relation d'ordre  $\leq_{S^1} := \{(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) | 0 \leq \theta \leq \theta' < 2\pi\}$ . Alors il y a parmi les applications continues  $\gamma$  de  $[0, 1]$  vers  $S^1$  telles que  $\gamma(\leq') \subseteq \leq_{S^1}$  des boucles non triviales. Plus précisément, parmi ces applications, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il y en a au moins une qui effectue exactement  $n$  tours dans le sens trigonométrique. Les relations considérées ne sont bien sûr pas fermées et, comme le prévoit le théorème XIII.3.1, il existe des applications continues croissantes de  $[0, 1]$  vers  $[0, 1]$  qui ne préservent pas la relation  $\leq'$ .

Le fait de ne plus avoir l'hypothèse de fermeture dissocie complètement la relation d'ordre de la topologie que l'on met sur  $[0, 1]$ . Par exemple, on pourrait très bien imaginer que  $[0, 1]$  soit muni d'un bon ordre quelconque (l'existence d'un tel ordre sur n'importe quel ensemble est un équivalent de l'axiome du choix), et de la topologie classique. Hormis l'identité de  $[0, 1]$  et les applications constantes, il est alors très difficile de voir ce que peut être une application continue de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  qui préserve ce bon ordre. Pour préserver ce lien, on va relâcher les hypothèses de transitivité et d'antisymétrie dans la définition d'un espace ordonné. Ceci conduit à la notion d'espace avec relation déjà apparue dans le chapitre I (voir définition I.2.4) comme un outil technique permettant de prouver la co-complétude de  $\text{PoSpc}$ . On voudrait utiliser  $\vec{I}$  comme objet-segment mais cela pose quelques difficultés techniques, en effet, en supposant que l'on munisse  $S^1$  de la relation  $\triangleright = \{(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) | 0 \leq \theta \leq \theta' \leq 2\pi\}$  on a bien une relation réflexive et fermée, elle n'est bien sûr pas transitive mais permet d'avoir des boucles. En effet,

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{i2\pi x} \end{array}$$

est bien un morphisme de  $\mathbf{RSp}$ . Cependant, il n'est pas possible de faire plusieurs fois le tour du cercle, par exemple,

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{i4\pi x} \end{array}$$

n'est pas un morphisme de  $\mathbf{RSp}$ .

### XIII.3.1 CATÉGORIE FONDAMENTALE SUR $\mathbf{RSp}$

On va maintenant étendre la définition de catégorie fondamentale à  $\mathbf{RSp}$ . c'est-à-dire l'intersection d'un fermé et d'une union finie de fermés. On notera cet objet  $([0, 1], a_0 < a_1 < \dots < a_n)$ . On a alors

#### XIII.3.2 PROPOSITION

Soit  $\theta : (\mathbb{I}, a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_n < 1 = a_{n+1}) \longrightarrow (\mathbb{I}, b_0 = 0 < b_1 < \dots < b_p < 1 = b_{p+1})$ ,  $\theta$  est un isomorphisme de  $\mathbf{RSp}$  si et seulement si les trois assertions suivantes sont satisfaites:

1.  $n = p$ ,
2.  $\theta$  est strictement croissante,
3.  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \theta(a_i) = b_i$ .

PREUVE. La preuve du proposition XIII.3.2 est une conséquence directe du résultat classique suivant qui est en réalité une autre façon d'exprimer la proposition XI.1.7:

#### XIII.3.3 PROPOSITION

Etant donnée une application  $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ , deux des trois assertions suivantes impliquent la troisième

1.  $f$  est bijective,
2.  $f$  est continue,
3.  $f$  est strictement monotone, i.e.

$$\forall x < y \in [0, 1] f(x) < f(y) \text{ ou } \forall x < y \in [0, 1] f(x) > f(y).$$

Supposons que  $\theta$  soit un isomorphisme de  $\mathbf{RSp}$ , en particulier,  $U(\theta)$  est un homéomorphisme de  $[0, 1]$  sur  $[0, 1]$ . Ainsi, d'après la proposition XIII.3.3 et la notion de morphisme dans  $\mathbf{RSp}$ ,  $\theta$  est strictement croissante. Etant donné  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  tels que  $\theta(a_i) \in [b_j, b_{j+1}[$ , si on avait  $\theta(a_i) \neq b_j$ , alors nous aurions également  $b_j < \theta(a_i) < b_{j+1}$  et donc  $\theta^{-1}(b_j) < a_i < \theta^{-1}(b_{j+1})$ . En conséquence on aurait  $\theta^{-1}(b_j) \not\leq \theta^{-1}(b_{j+1})$  bien que  $b_j \leq b_{j+1}$ . Ainsi  $\theta$  induit une application de  $\{0, \dots, n\}$  sur  $\{0, \dots, p\}$ , envoyant chaque  $i$  sur l'unique  $j$  tel que  $\theta(a_i) = b_j$ . En outre, puisque  $\theta$  est injective et croissante, l'application induite l'est aussi. En particulier,  $n \leq p$ . Les mêmes arguments s'appliquent bien évidemment à  $\theta^{-1}$  et montrent que  $p \leq n$ . L'application induite par  $\theta$  - et donc aussi celle induite par  $\theta^{-1}$  - est une identité, c'est-à-dire que pour tout indice  $i$  dans  $\{0, \dots, n\}$ , on a  $\theta(a_i) = b_i$ . ■

### XIII.3.4 COROLLAIRE

Pour tout  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , tout objet  $(\mathbb{I}, 0 = a_0 < \dots < a_n = 1)$  de  $\mathbf{RSp}$  est isomorphe dans  $\mathbf{RSp}$  à  $(\mathbb{I}, 0 < \frac{1}{n} < \dots < \frac{k}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1)$ .

PREUVE. il suffit de considérer l'application suivante. ■

$$\begin{aligned} \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] &\longrightarrow [a_k, a_{k+1}] \\ x &\longmapsto (a_{k+1} - a_k) \cdot (n \cdot x - k) + a_k \end{aligned}$$

On voudrait maintenant définir la catégorie fondamentale d'un objet  $(X, \triangleright)$  de  $\mathbf{RSp}$ . Pour cela, on va appliquer la méthode décrite dans la section XII.1. Il nous faut tout d'abord choisir un objet-segment, ce sera l'espace ordonné  $\overrightarrow{[0, 1]}$  vu comme un objet de  $\mathbf{RSp}$ , quant à  $s$  et  $t$ , ils envoient respectivement  $*$  :=  $\{0\}$  sur 0 et 1. D'après la définition XII.1.3, pour avoir une catégorie à chemin, il nous faut encore décrire les cônes distingués. En suivant les conventions de la section XII.1.3, on pose  $0 \cdot \mathbb{I} = \{0\}$ ,  $1 \cdot \mathbb{I} = \overrightarrow{[0, 1]}$  et pour  $n \in \mathbb{N}$   $n \geq 2$ ,  $n \cdot \mathbb{I} := \left( [0, 1], 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{k}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1 \right)$ . On pose également pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$ , l'application

$$\begin{aligned} i_k^{(n)} : \mathbb{I} &\longrightarrow \mathbb{I} \\ x &\longmapsto \frac{(k-1)+x}{n} \end{aligned}$$

puis,

### XIII.3.5 LEMME

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $(n \cdot \mathbb{I}, i_1^{(n)}, \dots, i_n^{(n)})$  est un représentant de la colimite du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \dots & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} & & \mathbb{I} \\ & \nearrow & & \nwarrow & \nearrow & & \nwarrow & & \dots & & \nwarrow & & \nearrow & & \nwarrow & & \nearrow & & \nwarrow \\ * & & s & & t & & * & & \dots & & t & & * & & s & & t & & * \end{array}$$

De plus, étant donnés  $\gamma_1 : \mathbb{I}_n \longrightarrow (X, \triangleright)$ ,  $\gamma_2 : \mathbb{I}_m \longrightarrow (X, \triangleright)$  et  $\gamma_3 : \mathbb{I}_p \longrightarrow (X, \triangleright)$  tels que les fins respectives de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$  soient les débuts respectifs de  $\gamma_2$  et de  $\gamma_3$ , on a alors  $\gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1) = (\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1$ , où  $\cdot$  est la concaténation telle qu'elle est définie dans la section XII.1. Noter bien que cette égalité est stricte et pas seulement à isomorphisme près dans  $\mathbf{RSp}$ .

PREUVE. Quelques calculs montrent que

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[ 0, \frac{n}{n+m+p} \right] & \quad \gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)(x) = (\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1(x) = \gamma_1 \left( \frac{n+m+p}{n} x \right) \\ \forall x \in \left[ \frac{n}{n+m+p}, \frac{n+m}{n+m+p} \right] & \quad \gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)(x) = (\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1(x) = \gamma_2 \left( \frac{n+m+p}{m} x - \frac{n}{m} \right) \\ \forall x \in \left[ \frac{n+m}{n+m+p}, 1 \right] & \quad \gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)(x) = (\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1(x) = \gamma_3 \left( \frac{n+m+p}{p} x - \frac{n+m}{p} \right) \end{aligned}$$

■

Le lemme XIII.3.5 nous donne donc une structure de catégorie à chemins sur  $\mathbf{RSp}$ .

### XIII.3.6 REMARQUE

Etant donné un espace ordonné  $\overrightarrow{X}$  dont la relation d'ordre sous-jacente est  $\leq$ , si  $S_0, \dots, S_n$  est un recouvrement **fermé** de  $X$  (l'espace topologique sous-jacent de  $\overrightarrow{X}$ ), alors  $(X, \leq \cap (S_0^2 \cup \dots \cup S_n^2))$  est un objet de  $\mathbf{RSp}$ .



PREUVE. La relation  $\leq$  est fermé ainsi que  $S_0^2 \cup \dots \cup S_n^2$  car c'est une union finie de fermés. La diagonale est incluse dans  $\leq \cap (S_0^2 \cup \dots \cup S_n^2)$  car la famille  $(S_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$  recouvre  $X$ . ■

Dans  $\mathbf{RSpC}$ , on admet tous les domaines de dihomotopie (voir la définition XII.3.4), c'est-à-dire que tout objet  $X$  de  $\mathbf{RSpC}$  dont l'espace sous-jacent est  $[0, 1] \times [0, 1]$  et tel que pour tous couples  $(x, y)$  et  $(x', y')$  appartenant à  $[0, 1] \times [0, 1]$  vérifiant  $x \leq x'$  et  $y \leq y'$  on a un chemin dirigé de  $(x, y)$  vers  $(x', y')$  dans  $\mathbf{RSpC}$ , est un domaine de dihomotopie admissible. On peut maintenant définir une notion d'homotopie sur  $\mathbf{RSpC}$  en utilisant la dihomotopie concrète dans  $\mathbf{RSpC}$  (voir la définition XII.3.5) et la proposition XII.3.8. Pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{RSpC}$ , on note désormais  $\sim_X$  la relation

$$\left\{ (\gamma, \delta) \text{ dichemins de } \mathbf{RSpC} \mid \text{il existe un zigzag de dihomotopies entre } \gamma \text{ et } \delta \right\}$$

### XIII.3.7 REMARQUE

Etant donnés deux dichemins  $\alpha$  et  $\beta$  sur  $X$ ,  $\alpha \sim_X \beta \implies \alpha(0) = \beta(0)$  et  $\alpha(1) = \beta(1)$ . On obtient cela par une récurrence immédiate sur la longueur du zigzag de dihomotopies entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

### XIII.3.8 REMARQUE

Soient  $f \in \mathbf{RSpC}[X, Y]$ ,  $\alpha, \beta$  deux dichemins sur  $X$  et  $H$  une dihomotopie de  $\alpha$  vers  $\beta$ , alors  $f \circ H$  est une dihomotopie de  $f \circ \alpha$  vers  $f \circ \beta$ , et donc,  $\alpha \sim_X \beta \implies f \circ \alpha \sim_Y f \circ \beta$  et on a donc la première partie de la PCH.

### XIII.3.9 LEMME

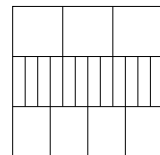
Soient deux entiers  $n, p \in \mathbb{N}$  non nuls, un objet  $X$  de  $\mathbf{RSpC}$  et deux dichemins  $\gamma \in \mathbf{C}[n \cdot \mathbb{I}, np \cdot \mathbb{I}]$  et  $\delta \in \mathbf{C}[p \cdot \mathbb{I}, np \cdot \mathbb{I}]$  tels que pour tout  $t$  appartenant à  $[0, 1]$ ,  $\gamma(t) = \delta(t)$ , c'est-à-dire ayant la même application continue sous-jacente. On a  $\delta \sim_X \gamma$ .

PREUVE. La famille des

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \text{ où } k \in \{1, \dots, n\} \text{ et des } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{k-1}{np}, \frac{k}{np}\right] \text{ où } k \in \{1, \dots, np\}$$

constitue un recouvrement fermé de  $[0, 1] \times [0, 1]$  et donc d'après la remarque XIII.3.6, induit un objet  $A$  de  $\mathbf{RSpC}$  qui est, on le vérifie facilement, un domaine de dihomotopie admissible. Notons  $h$  l'application continue sous-jacente commune à  $\gamma$  et  $\delta$ . Notons aussi  $\xi \in \mathbf{RSpC}[np \cdot \mathbb{I}, X]$  tel que pour tout  $t$  appartenant à  $[0, 1]$ , on a  $\xi(t) = h(t)$ . Il est facile de vérifier que  $\xi$  est bien un morphisme de  $\mathbf{RSpC}$  car la relation dont  $np \cdot \mathbb{I}$  est munie est incluse dans celle dont est munie  $n \cdot \mathbb{I}$  (tout comme dans celle dont est munie  $p \cdot \mathbb{I}$ ). L'application  $H : (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \mapsto h(t) \in X$  induit alors un élément de  $\mathbf{RSpC}[A, X]$  (on le vérifie de la même façon que l'on vérifie que  $\xi$  est bien un morphisme de  $\mathbf{RSpC}$ ) qui s'avère être une dihomotopie de  $\gamma$  vers  $\xi$ . On trouve bien sûr de la même manière une dihomotopie de  $\delta$  vers  $\xi$  et donc  $\delta \sim_X \gamma$ . Graphiquement, dans le cas où  $n = 3$  et  $p = 4$ ,

cela revient à découper le carré unité de la manière suivante



■

Le lemme XIII.3.9 affirme en substance que l'on peut changer le domaine de définition  $n \cdot \mathbb{I}$  d'un dichemin par n'importe quel  $np \cdot \mathbb{I}$  pour  $p \in \mathbb{N}$  non nul. Le problème des dichemins définis sur  $0 \cdot \mathbb{I}$  est une pathologie dont on pourra se défaire de plusieurs façon, la première étant tout simplement de ne pas considérer de tels dichemins, la seconde étant de les identifier *de facto* à tous les dichemins constants de même valeur, la troisième étant de généraliser la définition d'homotopie dirigée en permettant à ces dernières d'être définie sur un triangle. La troisième solution est la moins confortable, néanmoins, dans le cadre général de la section XII.1, c'est la seule dont nous disposons. Dans le cas présent, on va opter pour la première solution.

### XIII.3.10 COROLLAIRE

On a le 3<sup>ème</sup> point de la proposition XII.3.8.

Le corollaire XIII.3.10 peut en fait être démontré directement, il suffit en effet de considérer l'application  $H$  définie sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  par  $H(s, t) := \gamma(t)$  (avec les notations du lemme XIII.3.9), en munissant  $[0, 1] \times [0, 1]$  de la relation  $(s, t) \triangleright (s', t')$  si et seulement si  $t \leq t'$ .

### XIII.3.11 LEMME

Etant donnés  $\gamma : n \cdot \mathbb{I} \longrightarrow (X, \triangleright)$  et

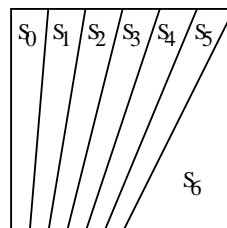
$$\tilde{\gamma} : (n+m) \cdot \mathbb{I} \longrightarrow (X, \triangleright)$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \gamma(\frac{n+m}{n}x) & \text{si } x \in [0, \frac{n}{n+m}] \\ \gamma(1) & \text{si } x \in [\frac{n}{n+m}, 1] \end{cases}$$

Il y a une dihomotopie (concrète) de  $\text{RSpc}$  de  $\tilde{\gamma}$  vers  $\gamma$ .

PREUVE.

$H(s, x) := \gamma(\frac{n+m}{n+sm}x)$  si  $x \in [0, \frac{n+sm}{n+m}] := \gamma(1)$  si  $x \in [\frac{n+sm}{n+m}, 1]$ . La carré  $[0, 1]^2$  est muni de la relation  $\leq^2 \cap (S_0^2 \cup \dots \cup S_n^2)$ , où quel que soit l'indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$ ,  $S_k$  est le quadrilatère délimité par les segments  $[(\frac{k}{n+m}, 0), (\frac{k}{n}, 1)] \cup [(\frac{k}{n}, 1), (\frac{k+1}{n}, 1)] \cup [(\frac{k+1}{n}, 1), (\frac{k+1}{n+m}, 0)] \cup [(\frac{k+1}{n+m}, 0), (\frac{k}{n+m}, 0)]$  et  $S_n$  le triangle délimité par les segments  $[(\frac{n}{n+m}, 0), (1, 1)] \cup [(1, 1), (1, 0)] \cup [(1, 0), (\frac{n}{n+m}, 0)]$ . La figure de droite montre ce à quoi les éléments de la famille  $(S_k)_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$  ressemblent.



■

### XIII.3.12 COROLLAIRE

On a les 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> points de la proposition XII.3.8.

### XIII.3.13 LEMME

Si on a une dihomotopie de  $\alpha$  vers  $\alpha'$ , une autre de  $\beta$  vers  $\beta'$  et que  $\beta(0) = \alpha(1)$ , alors on a une dihomotopie de  $\beta \cdot \alpha$  vers  $\beta' \cdot \alpha'$ .

PREUVE. Notons respectivement  $H_1$  et  $H_2$  les dihomotopies de  $\alpha$  vers  $\alpha'$  et de  $\beta$  vers  $\beta'$  puis  $[0, 1] \times [0, 1]_{\triangleright_1}$  et  $[0, 1] \times [0, 1]_{\triangleright_2}$  les domaines de dihomotopie sur lesquels sont définis  $H_1$  et  $H_2$ . On définit la relation  $\triangleright_3$  de la façon suivante, pour tous  $(s, t), (s', t') \in [0, 1] \times [0, 1]$ , on pose  $(s, t) \triangleright_3 (s', t')$  si et seulement si

$$(s, s' \in [0, \frac{1}{2}] \text{ et } (2s, t) \triangleright_1 (2s', t')) \text{ ou } (s, s' \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ et } (2s-1, t) \triangleright_2 (2s'-1, t'))$$

puis la dihomotopie

$$H(s, t) := \begin{cases} H_1(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s - 1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

On vérifie en effet très facilement que  $H$  est un morphisme de  $\mathbf{RSpc}$  qui induit une homotopie, au sens classique, entre  $\beta \cdot \alpha$  et  $\beta' \cdot \alpha'$ . ■

### XIII.3.14 COROLLAIRE

On a le 4<sup>ème</sup> point de la proposition XII.3.8.

Les corollaires XIII.3.12, XIII.3.10 et XIII.3.14 permettent d'appliquer la proposition XII.3.8 et ainsi fournissent une notion d'homotopie sur  $\mathbf{RSpc}$ . En particulier, on peut vérifier que  $\mathbf{RSpc}$  est une catégorie à chemins topologiquement concrète sur  $\mathbf{Haus}$ .

### XIII.3.15 LEMME

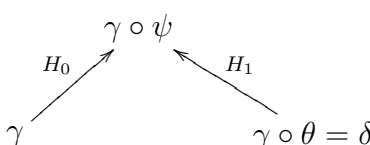
Soient  $\gamma, \delta : n \cdot \mathbb{I} \rightarrow n \cdot \mathbb{I}$  tels que  $\delta = \gamma \circ \theta$ , où  $\theta \in \mathbf{RSpc}[n \cdot \mathbb{I}, n \cdot \mathbb{I}]$  est un isomorphisme de  $\mathbf{RSpc}$ , alors  $\gamma \sim_{n \cdot \mathbb{I}} \delta$ .

PREUVE. Ce n'est qu'une adaptation du cas de  $\mathbf{PoSpc}$ . Posons  $\psi(t) := \max(t, \theta(t))$ ,  $\psi$  est encore un isomorphisme de  $\mathbf{RSpc}$  de  $n \cdot \mathbb{I}$  sur  $n \cdot \mathbb{I}$ . En effet, on a  $\psi(a_i) = \max(a_i, \theta(a_i)) = a_i$  d'après la proposition XIII.3.2, de plus si  $a_i \leq t < t' \leq a_{i+1}$ , alors  $a_i \leq \theta(t) < \theta(t') \leq a_{i+1}$  - encore d'après la proposition XIII.3.2 - donc  $a_i \leq \psi(t) < \psi(t') \leq a_{i+1}$ . Ainsi, toujours d'après la proposition XIII.3.2,  $\psi$  est un isomorphisme de  $\mathbf{RSpc}$ . Evidemment,  $t \leq \psi(t)$  et  $\psi(t) \leq \theta(t)$ . Alors on définit  $H_0(s, t) := \gamma((1-s)t + s\psi(t))$  et  $H_1(s, t) := \gamma((1-s)\theta(t) + s\psi(t))$ . Le domaine de définition commun à  $H_0$  et  $H_1$  est  $\vec{\mathbb{I}} \times (\mathbb{I}, a_0 < \dots < a_n)$  faisant de  $H_0$  et  $H_1$  des dihomotopies, principalement parce que pour tout  $s$  appartenant à  $[0, 1]$ , on a

$$a_i \leq t \leq a_{i+1} \implies a_i \leq (1-s)t + s\psi(t) \leq a_{i+1}$$

et

$$a_i \leq (1-s)\theta(t) + s\psi(t) \leq a_{i+1}.$$

Ainsi on a  et donc  $\gamma \sim_{\triangleright} \delta$ . ■

On a maintenant le matériel suffisant pour définir la catégorie fondamentale d'un objet de  $\mathbf{RSpc}$ .

Notre but est maintenant de comparer, étant donné un objet  $\vec{X}$  de  $\mathbf{PoSpc}$ , les notions de catégorie fondamentale de  $\vec{X}$  et de  $i(\vec{X})$ , où  $i$  est le foncteur d'inclusion de  $\mathbf{PoSpc}$  dans  $\mathbf{RSpc}$ . On parlera de dihomotopie, dichemin et catégorie fondamentale dans  $\mathbf{PoSpc}$  ou dans  $\mathbf{RSpc}$ . Le résultat de la comparaison sera finalement donné par le théorème XIII.3.19.

### XIII.3.16 LEMME

Soit  $H$  une dihomotopie dans  $\mathbf{RSpc}$  sur  $\vec{X}$ , alors  $H$  induit une dihomotopie  $H'$  dans  $\mathbf{PoSpc}$  sur  $(X, \leq_X)$ .

PREUVE. Par définition, quel que soit le couple  $(s, t)$  appartenant à (l'ensemble sous-jacent de)  $\overrightarrow{I^2}$ , on a  $H(s, t) = H'(s, t)$ . Ainsi, la seule chose qu'il nous faut vérifier est que  $H'$  préserve l'ordre. Prenons  $(s, t) \leq (s', t') \in \overrightarrow{I^2}$ , où  $\leq$  est l'ordre produit sur  $[0, 1]^2$ . D'après les définitions XII.3.4 et XII.3.5, il y a un dichemin de  $\mathbf{RSpC}$ , noté  $\gamma$ , sur le domaine de définition de  $H$  allant de  $(s, t)$  à  $(s', t')$ . D'après la définition de dichemin dans  $\mathbf{RSpC}$ ,  $\gamma$  est défini sur  $n \cdot \mathbb{I}$  pour un certain entier  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi on a  $\gamma(a_0) \leq_X \gamma(a_1) \leq_X \dots \leq_X \gamma(a_{n-1}) \leq_X \gamma(a_n)$ , donc  $\gamma(0) \leq_X \gamma(1)$ , i.e.  $H'(s, t) \leq_X H'(s', t')$ . ■

### XIII.3.17 COROLLAIRE

Etant donnés  $\gamma, \delta$  deux dichemins dans  $\mathbf{PoSpc}$  sur (un espace ordonné)  $\overrightarrow{X}$ , on a  $\gamma \sim_{dih} \delta$  si et seulement si  $\gamma \sim_{\overrightarrow{X}} \delta$

PREUVE. D'après le lemme XIII.3.16, la définition de  $\sim_X$  et celle de  $\sim_{dih}$  (voir la définition II.2.1), le zigzag de dihomotopies dans  $\mathbf{RSpC}$  entre  $\gamma$  et  $\delta$  induit un zigzag de dihomotopies dans  $\mathbf{PoSpc}$  entre  $\gamma$  et  $\delta$ . Il s'ensuit que si  $\gamma \sim_X \delta$ , alors  $\gamma \sim_{dih} \delta$ ; la réciproque est évidente. ■

### XIII.3.18 LEMME

Si  $\gamma$  est un dichemin dans  $\mathbf{RSpC}$  sur un espace ordonné  $\overrightarrow{X}$ , alors  $\gamma$  induit un dichemin  $\gamma'$  sur  $\overrightarrow{X}$  dans  $\mathbf{PoSpc}$ .

PREUVE. On emploie les mêmes arguments que dans la preuve du lemme XIII.3.16. ■ Les lemmes XIII.3.16 et XIII.3.18 fournissent les arguments permettant de prouver que la catégorie fondamentale d'un espace ordonné reste la même qu'elle soit calculée dans  $\mathbf{RSpC}$  ou dans  $\mathbf{PoSpc}$ . Avant d'aller plus loin, nous donnons quelques notations et rappelons quelques résultats. La catégorie  $\mathbf{LfCat}$  est une sous-catégorie réfléchissante de  $\mathbf{Cat}$ ,  $i$  désigne le foncteur d'inclusion de  $\mathbf{LfCat}$  dans  $\mathbf{Cat}$  et  $r \dashv i$  sa réflexion,  $\eta$  étant l'unité de l'adjonction. Nous rappelons aussi que  $\mathbf{PoSpc}$  est une sous-catégorie réfléchissante de  $\mathbf{RSpC}$ , que  $i'$  désigne le foncteur d'inclusion de  $\mathbf{PoSpc}$  dans  $\mathbf{RSpC}$  et que  $r' \dashv i'$  est sa réflexion,  $\eta'$  étant l'unité de l'adjonction.

### XIII.3.19 THÉORÈME

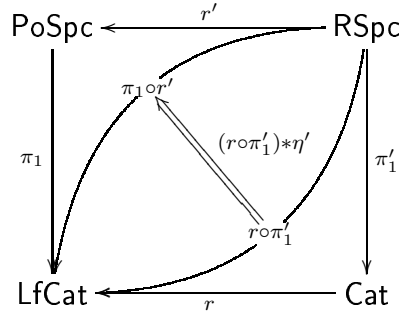
On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{PoSpc} & \xrightarrow{i'} & \mathbf{RSpC} \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi'_1 \\
 \mathbf{LfCat} & \xrightarrow{i} & \mathbf{Cat}
 \end{array}$$

ainsi qu'une transformation naturelle  $(r \circ \pi'_1) * \eta'^2$  de  $r \circ \pi'_1$  vers  $\pi_1 \circ r'$ . Autrement dit

<sup>2</sup>voir [9] ou la proposition A.1.20 pour la définition de l'opérateur \*

on a le diagramme commutatif suivant



Etant donné un objet  $X$  de  $\mathbf{RSpC}$ , pour  $x \in X$ ,  $\left((r \circ \pi'_1) * \eta'\right)(x) = \eta_{\pi'_1(X)}(x)$  et pour  $\alpha$ , chemin dirigé dans  $\mathbf{RSpC}$  sur  $X$ ,  $\left((r \circ \pi'_1) * \eta'\right)([\alpha]_{\sim_X}) = \eta_{\pi'_1(X)}([\eta'_X \circ \alpha]_{\sim_X}) = [r'(\alpha)]_{dih}$ .

PREUVE. Soit un espace ordonné  $\vec{X}$ ,  $\pi_1$  et  $\pi'_1$  désignent respectivement les foncteurs catégorie fondamentale de  $\mathbf{PoSpc}$  dans  $\mathbf{LfCat}$  et de  $\mathbf{RSpC}$  dans  $\mathbf{Cat}$ . Par définition,  $\pi_1(\vec{X})$  et  $\pi'_1(\vec{X})$  ont le même ensemble d'objets, à savoir  $U(X)$  l'ensemble sous-jacent de  $\vec{X}$ . On a un foncteur  $F$  de  $\pi_1(\vec{X})$  dans  $\pi'_1(\vec{X})$  dont la partie objet est l'identité et qui envoie un morphisme  $[\gamma]_{dih}$  de  $\pi_1(\vec{X})$  sur  $[\gamma]_{\sim_X}$ , où  $\gamma$  est un dichemin dans  $\mathbf{PoSpc}$  sur  $\vec{X}$ ,  $[\gamma]_{dih}$  la classe de dihomotopie dans  $\mathbf{PoSpc}$  de  $\gamma$  et  $[\gamma]_{\sim_X}$  la classe de dihomotopie dans  $\mathbf{RSpC}$  de  $\gamma$ . Etant donné un dichemin dans  $\mathbf{RSpC}$ , noté  $\gamma'$ , d'après le lemme XIII.3.18,  $\gamma'$  induit un dichemin dans  $\mathbf{PoSpc}$   $\gamma$  sur  $\vec{X}$  en posant  $\gamma(x) := \gamma'(x)$ . Clairement,  $F([\gamma]_{dih}) = [\gamma']_{\sim_X}$ . De plus, si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des dichemins dans  $\mathbf{PoSpc}$  qui sont dihomotopes dans  $\mathbf{RSpC}$ , alors d'après le corollaire XIII.3.17, ils sont encore dihomotopes dans  $\mathbf{PoSpc}$ . Donc la partie morphisme de  $F$  est bijective et  $F$  est un isomorphisme (de  $\mathbf{Cat}$ ). Nous avons prouvé la commutativité du premier diagramme pour la partie objet. Supposons maintenant que  $f \in \mathbf{PoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}]$ , afin de clarifier la suite, notons  $i$  le foncteur d'inclusion de  $\mathbf{PoSpc}$  dans  $\mathbf{RSpC}$  et  $j$  le foncteur d'inclusion de  $\mathbf{LfCat}$  dans  $\mathbf{Cat}$ . On veut prouver que  $\pi'_1 \circ i(f) = j \circ \pi_1(f)$ . On sait déjà que  $\pi'_1 \circ i(\vec{X})$  est isomorphe à  $j \circ \pi_1(\vec{X})$  et que  $\pi'_1 \circ i(\vec{X})$  est isomorphe à  $j \circ \pi_1(\vec{X})$ . Par soucis de simplicité, supposons qu'ils sont égaux et notons les  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Etant donné un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , on a clairement  $\pi'_1 \circ i(f) = j \circ \pi_1(f) = f(x)$ . Un morphisme  $\alpha$  de  $\mathcal{C}$  peut être représenté par  $[\gamma']_{\triangleright ho}$  ou  $[\gamma]_{dih}$  où  $\gamma'$  est un dichemin dans  $\mathbf{RSpC}$  et  $\gamma$  le dichemin dans  $\mathbf{PoSpc}$  correspondant, voir le lemme XIII.3.18 et le corollaire XIII.3.17. Maintenant, par définition,  $(\pi'_1 \circ i(f))([\gamma']_{\triangleright ho}) = [i(f) \circ \gamma']_{\triangleright ho}$  alors que  $(j \circ \pi_1(f))([\gamma]_{dih}) = [f \circ \gamma]_{dih}$ , en vertu du corollaire XIII.3.17,  $[f \circ \gamma]_{dih} = [i(f) \circ \gamma']_{\triangleright ho}$ . La commutativité du premier diagramme est prouvée.

On a une transformation naturelle <sup>3</sup>  $\eta' : Id_{\mathbf{RSpC}} \rightarrow i' \circ r'$ , de laquelle on déduit une transformation naturelle  $(r \circ \pi'_1) * \eta' : r \circ \pi'_1 \rightarrow (r \circ \pi'_1) \circ (i' \circ r')$ . Puis, en vertu du premier diagramme commutatif,  $(r \circ \pi'_1) \circ (i' \circ r') = r \circ (\pi'_1 \circ i') \circ r' = r \circ (i \circ \pi_1) \circ r' = (r \circ i) \circ (\pi_1 \circ r') = Id_{\mathbf{LfCat}} \circ (\pi_1 \circ r') = \pi_1 \circ r'$ . Les dernières égalités étant obtenues en "dépliant" les définitions des objets et opérateurs apparaissant dans les formules.

■

<sup>3</sup>Un · au-dessus d'une flèche indique une transformation naturelle.

Il serait intéressant de connaître quelques conditions à propos de  $(X, \triangleright_X)$  sous lesquelles  $\left( (r \circ \pi'_1) * \eta' \right)_{(X, \triangleright_X)}$  est un isomorphisme. Par exemple, en considérant le cercle dirigé  $\overrightarrow{S^1}$ , d'après la remarque I.2.14, on a  $r'(\overrightarrow{S^1}) = \{*\}$ , donc  $(\pi_1 \circ r')(\overrightarrow{S^1}) = \{*\}$ . Par ailleurs, on prouve que  $\pi'_1(\overrightarrow{S^1}) = \circlearrowleft$ , voir sous-section XII.2.9. Ainsi, selon la description de la réflexion  $r$  de  $\mathbf{Cat}$  dans  $\mathbf{LfCat}^4$ , on a  $r(\pi'_1(\overrightarrow{S^1})) = \{*\}$ . L'exemple du cercle dirigé peut être généralisé:

### XIII.3.20 PROPOSITION

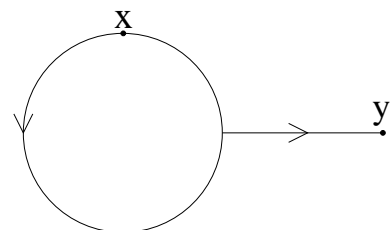
Soit  $X$  un objet de  $\mathbf{RSpC}$  tel que quels que soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $X$ , il existe un dichemin  $\gamma$  dans  $\mathbf{RSpC}$  sur  $(X, \triangleright_X)$  de  $x$  à  $y$ . Alors  $r \circ \pi'_1(X, \triangleright_X) = \pi_1 \circ r'(X, \triangleright_X) = \{*\}$

PREUVE. On a d'abord, d'après la remarque I.2.14,  $\pi_1 \circ r'(X, \triangleright_X) = \{*\}$ . D'autre part, quels que soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $X$ , on a  $\pi'_1(X, \triangleright_X)[x, y] \neq \emptyset$ , donc le même argument que celui utilisé pour prouver que  $r(\pi'_1(\overrightarrow{S^1})) = \{*\}$  est encore valide et on a  $r(\pi'_1(X, \triangleright_X)) = \{*\}$ . ■

### XIII.3.21 DÉFINITION

Le **monoïde fondamental** de  $(X, \triangleright_X)$  au point  $x \in X$ , noté  $M(X, \triangleright_X)[x]$ , est par définition  $\pi'_1(X, \triangleright_X)[x, x]$ .

Cette définition n'a aucun intérêt dans le cas où l'on étudie un espace ordonné, en effet, la catégorie fondamentale d'un espace ordonné étant sans boucle, ces seuls endomorphismes sont les identités. Comme son nom le suggère,  $M(X, \triangleright_X)[x]$  est un monoïde. Il est important de noter que, à la différence du groupe fondamental d'un espace topologique,  $M(X, \triangleright_X)[x]$  **dépend du point base**  $x$ . Il suffit d'observer l'exemple  $(A, \triangleright_A)$  décrit sur la figure de droite pour se convaincre de ce fait. En effet,  $M(A, \triangleright_A)[x] \cong (\mathbb{N}, +)$  dans  $\mathbf{Mon}$ , alors que  $M(A, \triangleright_A)[y] \cong \{*\}$ . La dépendance par rapport au point base rend impossible la généralisation directe de la notion de groupe fondamental. En outre, la catégorie des groupes, notée  $\mathbf{Gr}$ , est une sous-catégorie épi-réfléchissante de  $\mathbf{Mon}$ . Si  $r''$ , appelé foncteur de "groupification", est la réflexion de  $\mathbf{Mon}$  dans  $\mathbf{Gr}$ , alors  $r''(\mathbb{N}, +) = (\mathbb{Z}, +)$  donc, en général, la "groupification" du monoïde fondamental de  $(X, \triangleright_X)$  au point  $x$  n'est **pas** le groupe fondamental de l'espace topologique sous-jacent de  $(X, \triangleright_X)$ .



Cependant, dans certains cas particuliers, un lien entre monoïde et groupe fondamental de l'espace sous-jacent subsiste:

<sup>4</sup>Tout morphisme qui peut être étendu en un endomorphisme est envoyé par  $r$  sur une identité.

### XIII.3.22 PROPOSITION

Etant donné un espace de *Hausdorff*  $X$ , quel que soit  $x$  appartenant à  $X$ , on a

$$\pi_1(X) \cong M(X, X \times X)[x],$$

i.e. le groupe fondamental de  $X$  est le monoïde fondamental de  $(X, X \times X)$  basé au point  $x$  pour n'importe quel  $x \in X$ . D'un point de vue catégorique, quel que soit  $x$  appartenant à  $X$ , on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \text{HausSpc} & & \\ \downarrow \pi_1 & \curvearrowright M & \\ \text{Gr} & \longrightarrow & \text{Mon} \end{array}$$

où  $M$  est le foncteur de  $\text{HausSpc}$  dans  $\text{Mon}$  qui envoie un espace de *Hausdorff*  $X$  sur  $M(X, X \times X)$ .<sup>5</sup>

PREUVE. Considérons  $\Phi : M(X, X \times X)[x] \longrightarrow \Gamma_X$  défini par  $\Phi([\gamma]_{\triangleright ho}) := [U(\gamma)]_{ho}$ , pour chaque dichemin  $\gamma$  dans  $\text{RSpc}$ , où  $U$  est le foncteur d'oubli de  $\text{RSpc}$  dans  $\text{HausSpc}$ . Premièrement, on note que  $\Phi$  est bien défini car chaque dihomotopie dans  $\text{RSpc}$  induit un homotopie au sens classique. Considérons deux dichemin  $\gamma$  et  $\gamma'$  dans  $\text{RSpc}$  et supposons que  $H : I^2 \longrightarrow X$  est une homotopie (au sens classique) de  $U(\gamma)$  vers  $U(\gamma')$ . Alors  $H' : \vec{I}^2 \longrightarrow (X, X \times X)$  est une dihomotopie dans  $\text{RSpc}$  de  $\gamma$  vers  $\gamma'$  où  $H'(s, t) := H(s, t)$ . Donc  $\Phi$  est injective. Etant donné un chemin (au sens classique)  $\alpha : I \longrightarrow X$ ,  $\gamma : \vec{I} \longrightarrow (X, X \times X)$  est un dichemin dans  $\text{RSpc}$  et  $\Phi([\gamma]_{\triangleright ho}) = [\alpha]_{ho}$ . Donc  $\Phi$  est surjective. De plus,  $\Phi$  est un morphisme de monoïdes car  $[\gamma' \cdot \gamma]_{\triangleright ho} = [\gamma']_{\triangleright ho} \cdot [\gamma]_{\triangleright ho}$ ,  $[\alpha' \cdot \alpha]_{ho} = [\alpha']_{ho} \cdot [\alpha]_{ho}$  et  $\Phi([\text{const}]_{\triangleright ho}) = [\text{const}]_{ho}$ . Donc  $\Phi$  est un isomorphisme de  $\text{Mon}$ . Une vérification de routine montre que  $M$  est bien un foncteur. ■

## XIII.4 ESPACES LOCALEMENT ORDONNÉS

L'idée qui motive la définition d'espace localement ordonné est similaire à celle des variétés différentiables, c'est-à-dire que l'on veut étudier des objets qui, localement, ressemblent à des structures que l'on connaît bien : dans le cas de la géométrie différentielle, ce sont les espaces  $\mathbb{R}^n$ , dans le notre, ce sont les espaces ordonnés. La grande différence entre les notions de variété différentiable et d'espace localement ordonné est que dans la seconde, on n'impose pas l'homogénéité : autrement dit il est possible qu'en deux points distincts  $x$  et  $y$  d'un espace localement ordonné fixé, les structures ordonnées aux voisinages de  $x$  et de  $y$  ne soient pas isomorphes dans  $\text{PoSpc}$ ; au contraire d'une variété différentiable dont, par définition, tous les points admettent un voisinages isomorphe à  $\mathbb{R}^n$  pour un entier naturel  $n$  fixé. Plusieurs définitions d'espaces localement ordonnés ont déjà été proposées, voir [20], [58], [21] et [37]. Celle de *Marco Grandis* se distingue légèrement en ceci qu'à la différence des autres, elle admet  $(X, \tau_X, X^2)$  en tant qu'espace localement ordonné.

<sup>5</sup>Puisque  $M(X, X \times X)[x]$  ne dépend pas de  $x$ , on l'omet.

### XIII.4.1 DÉFINITION

Etant donné  $X$  un espace topologique de *Hausdorff*, un **atlas dirigé** de  $X$  est une famille d'espaces ordonnés  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$ , telle que :

1. la famille  $(V_i)_{i \in \mathcal{I}}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ . On affirme donc implicitement que  $V_i$  est un sous-espace topologique de  $X$  et
2. quels que soient les indices  $i_1$  et  $i_2$  de  $\mathcal{I}$  et les points  $x$  et  $y$  de  $V_{i_1} \cap V_{i_2}$ , on a  $x \sqsubseteq_{i_1} y$  si et seulement si  $x \sqsubseteq_{i_2} y$ .

Les espaces ordonnés  $(V_i, \sqsubseteq)$  sont appelés les **cartes** de l'atlas.

### XIII.4.2 PROPRIÉTÉ (ATLAS DIRIGÉ D'UN SOUS-ESPACE)

Soit un atlas dirigé  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sur  $X$  et  $Y$  un sous-espace de  $X$ , la famille  $(V_i \cap Y, \sqsubseteq_i \cap (Y \times Y))_{i \in \mathcal{I}}$  est un atlas dirigé sur  $Y$ . En particulier, pour tout indice  $i$  de  $\mathcal{I}$  tel que  $Y \subseteq V_i$ , la relation  $\sqsubseteq_i$  induit une relation d'ordre sur  $Y$  qui en fait un espace ordonné. Par ailleurs, en vertu du second point de la définition XIII.4.1, cette relation induite ne dépend pas de l'indice  $i$  pourvu  $Y$  soit inclus dans  $V_i$  : on parle alors de l'espace ordonné induit par l'atlas dirigé  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sur  $Y$ .

PREUVE. Il suffit de vérifier que la famille proposée satisfait les axiomes de la définition XIII.4.1 en appliquant la propriété I.1.2, ce qui se limite à une vérification routinière. ■

### XIII.4.3 LEMME

Soient un atlas dirigé  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sur  $X$  et une sous-famille  $(W_j, \sqsubseteq_j)_{j \in \mathcal{J}}$  de  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  totalement ordonné pour l'inclusion, c'est-à-dire que  $\mathcal{J}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{I}$  et quels que soient les indices  $j_1$  et  $j_2$  appartenant à  $\mathcal{J}$ , on a  $W_{j_1} \subseteq W_{j_2}$  ou  $W_{j_2} \subseteq W_{j_1}$ . Alors,

$$\left( \bigcup_{j \in \mathcal{J}} W_j, \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \sqsubseteq_j \right) \text{ est un espace ordonné.}$$

PREUVE. On vérifie tout d'abord que la relation obtenue comme la réunion des relations d'ordre  $\sqsubseteq_j$  est bien une relation d'ordre, ce qui est immédiat d'après le deuxième point de la définition XIII.4.1. Il faut également vérifier que cette relation, que l'on notera  $\sqsubseteq$ , est fermée dans le produit de la réunion des  $W_j$ , que l'on notera  $W$ , avec elle-même. Soient  $(x, y)$  appartenant à  $W \times W$  tels que  $x \not\sqsubseteq y$  et  $j_0$  un indice de  $\mathcal{J}$  tel que  $x$  et  $y$  appartiennent à  $W_{j_0}$ ; un tel  $j_0$  existe car la famille  $(W_j)_{j \in \mathcal{J}}$  est totalement ordonnée pour l'inclusion. Ainsi on a, par définition de  $\sqsubseteq$ , que  $x \not\sqsubseteq_{j_0} y$ . Donc il existe deux ouverts  $A$  et  $B$  de  $W_{j_0}$ , ce sont donc aussi des ouverts de  $W$  puisque les  $W_j$  sont en particulier des ouverts de  $X$ , tels que pour tout couple  $(x', y')$  de  $A \times B$ , on a  $x' \not\sqsubseteq_{j_0} y'$ . Toujours par définition de  $\sqsubseteq$ , pour tout couple  $(x', y')$  de  $A \times B$ , on a  $x' \not\sqsubseteq y'$ . Donc  $\sqsubseteq$  est fermée dans  $W \times W$ . ■

### XIII.4.4 REMARQUE

Etant donné un atlas dirigé  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sur un espace de *Hausdorff*  $X$ , la collection des paires  $(V_i \cap A, A \times A \cap \sqsubseteq_i)$  où  $i \in \mathcal{I}$  et  $A$  est un ouvert de  $X$  est encore un atlas dirigé de  $X$  qui contient en particulier toutes les cartes de l'atlas dirigé  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ; cet atlas dirigé est appelé le **saturé** de  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$ .



### XIII.4.5 REMARQUE

Si l'on omet l'hypothèse de séparation de *Hausdorff*, on peut toujours prouver qu'un espace topologique muni d'un atlas dirigé est T1. En effet, soient  $x$  et  $y$  dans  $X$  où  $(X, (V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}})$  est un atlas dirigé sur  $X$ , d'après la définition XIII.4.1, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  tel que  $(U, \sqsubseteq_U)$  est un espace ordonné. Ici,  $\sqsubseteq_U$  est l'ordre sur  $U$  engendré par n'importe quel  $(V_i, \sqsubseteq_i)$  pour un indice  $i$  de  $\mathcal{I}$  tel que  $U \subseteq V_i$ .

Premier cas:  $y \in U$ . Alors par la propriété I.1.3, on a deux voisinages ouverts  $V_x$  et  $V_y$  de (respectivement)  $x$  et  $y$  dans  $U$  tels que  $V_x \cap V_y = \emptyset$ . De plus,  $U$  est un sous-espace ouvert de  $X$ , donc  $V_x$  et  $V_y$  sont ouverts dans  $X$ . En particulier,  $y \notin V_x$ .

Deuxième cas:  $y \notin U$ .

Dans un cas comme dans l'autre, on a un voisinage (ouvert) de  $x$  qui ne contient pas  $y$ . Bien sûr, on peut échanger les rôles de  $x$  et de  $y$ .

Alors que l'on prouve que tout espace ordonné est T2 <sup>6</sup> (d'après la propriété I.1.3) on peut seulement prouver que l'espace sous-jacent d'un espace localement ordonné est T1, cependant, je ne connais pas d'exemple d'espace localement ordonné qui ne soit pas T2.

La description locale d'une structure mathématique présente souvent l'inconvénient de ne pas fournir de représentant canonique d'un objet donné, le lemme suivant ainsi que la définition de la catégorie des espaces localement ordonnés remédie en partie à cela.

### XIII.4.6 LEMME

Soient  $X$  un espace topologique de *Hausdorff* et  $x$  un point de  $X$ , on dit que deux atlas dirigés  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  et  $(W_j, \sqsubseteq_j)_{j \in \mathcal{J}}$  induisent le même ordre au voisinage de  $x$  lorsque  $x$  possède un voisinage ouvert sur lequel les deux atlas dirigés induisent le même espace ordonné; par extension, ces deux atlas sont dits **équivalents** lorsqu'ils induisent le même ordre au voisinage de chacun des points de  $X$  : la relation ainsi décrite est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas dirigés de l'espace topologique  $X$ .

PREUVE. Formellement, deux atlas sont équivalents lorsque pour chaque point  $x$  de  $X$ , il existe une carte  $(V, \sqsubseteq_V)$  du premier atlas, une carte  $(W, \sqsubseteq_W)$  du second et un voisinage ouvert  $A$  de  $x$  tels que  $A \subseteq V \cap W$  et  $(A \times A) \cap \sqsubseteq_V = (A \times A) \cap \sqsubseteq_W$ . La réflexivité et la symétrie sont évidentes, la transitivité découle du fait que l'intersection d'une famille finie de voisinage ouvert de  $x$  est encore un voisinage ouvert de  $x$ .

### XIII.4.7 DÉFINITION

Un **espace localement ordonné** est un espace topologique de *Hausdorff*  $X$  muni d'une classe d'équivalence d'atlas dirigés sur  $X$ . On écrit  $\tilde{X}$  pour désigner un espace localement sur  $X$ .

### XIII.4.8 DÉFINITION

Soient deux espaces topologiques de *Hausdorff*  $X$  et  $X'$ , respectivement munis des atlas dirigés  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  et  $(V'_i, \sqsubseteq'_i)_{i' \in \mathcal{I}'}$ . Une application continue  $f$  de  $X$  vers  $Y$  est dite **admissible** pour les atlas dirigés  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  et  $(V'_i, \sqsubseteq'_i)_{i' \in \mathcal{I}'}$  lorsque pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe un voisinage ouvert  $A$  de  $x$  et un voisinage ouvert  $B$  de  $f(x)$  tels que :

1. il existe un indice  $i$  de  $\mathcal{I}$  tel que  $A \subseteq V_i$ ,
2. il existe un indice  $i'$  de  $\mathcal{I}'$  tel que  $B \subseteq V'_{i'}$  et

---

<sup>6</sup>Dire qu'un espace topologique est T2 équivaut, par définition, à dire que c'est un espace de *Hausdorff*.

### 3. l'application

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{A}, \vec{B}} : \vec{A} &\longrightarrow \vec{B} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est un élément de  $\text{PoSpc}[\vec{A}, \vec{B}]$ , où  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont les espaces ordonnés induits sur  $A$  et  $B$  par  $(V_i, \sqsubseteq_i)$  et  $(V'_{i'}, \sqsubseteq'_{i'})$ .

#### XIII.4.9 LEMME

Si  $(V_i, \sqsubseteq_i)$  et  $(V'_{i'}, \sqsubseteq'_{i'})$  sont des atlas dirigés respectifs des espaces de *Hausdorff*  $X$  et  $Y$  et si  $f$  est une application continue de  $X$  vers  $Y$  admissible pour  $(V_i, \sqsubseteq_i)$  et  $(V'_{i'}, \sqsubseteq'_{i'})$ , alors  $f$  est encore admissible pour un atlas dirigé de  $X$  et un atlas dirigé de  $Y$  respectivement équivalents à  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  et à  $(V'_{i'}, \sqsubseteq'_{i'})_{i' \in \mathcal{I}'}$ .

PREUVE. Vérification routinière. ■

#### XIII.4.10 DÉFINITION (CATÉGORIE DES ESPACES LOCALEMENT ORDONNÉS)

Etant donné deux espaces localement ordonnés  $\tilde{X}$  et  $\tilde{X}'$ , un morphisme d'espaces localement ordonnés de  $\tilde{X}$  vers  $\tilde{X}'$  est une application continue  $f$  de  $X$  vers  $X'$  admissible pour un représentant des atlas dirigés de  $\tilde{X}$  et un représentant des atlas dirigés de  $\tilde{X}'$ . Bien sûr, d'après le lemme XIII.4.9, cette notion ne dépend pas des représentants choisis. Les espaces localement ordonnés et leurs morphismes forment une catégorie notée  $\text{LPoSpc}$ .

PREUVE. La composition est évidemment induite par la composition ensembliste, il suffit alors de vérifier que la composée de deux morphismes d'espaces localement ordonnés est un morphisme d'espaces localement ordonnés. Soient  $f$  de  $X, (V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  vers  $X', (V'_i, \sqsubseteq'_i)_{i \in \mathcal{I}'}$  et  $g$  de  $X', (V'_i, \sqsubseteq'_i)_{i \in \mathcal{I}'}$  vers  $X'', (V''_i, \sqsubseteq''_i)_{i \in \mathcal{I}''}$ . Soit  $x \in X$ , il existe  $A$  un voisinage de  $x$  inclus dans  $V_i$  et  $B_1$  un voisinage de  $f(x)$  inclus dans  $V'_{i'_1}$  tels que  $x \mapsto f(x)$  induise un morphisme de  $\vec{A}$  vers  $\vec{B}_1$ . Puis il existe  $B_2$  un voisinage de  $f(x)$  inclus dans  $V'_{i'_2}$  et  $C$  un voisinage de  $g(f(x))$  inclus dans  $V''_{i''}$  tels que  $y \mapsto g(y)$  induise un morphisme de  $\vec{B}_2$  vers  $\vec{C}$ . D'après la définition XIII.4.1,  $\sqsubseteq'_{i'_1}$  et  $\sqsubseteq'_{i'_2}$  coïncident sur  $V'_{i'_1} \cap V'_{i'_2}$ . Quitte changer  $A$  en  $A \cap f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ , qui sera encore un voisinage de  $x$  puisque  $f$  est continue, on peut supposer que  $V'_{i'_1} = V'_{i'_2}$  et  $B_1 = B_2$ , ce qui donne le résultat. ■

Définissons également la catégorie  $\text{AtPoSpc}$  des atlas dirigés : un objet de  $\text{AtPoSpc}$  est un espace de *Hausdorff* muni d'un atlas dirigé  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  tandis que les morphismes sont les applications admissibles au sens de la définition XIII.4.8. Alors on a un foncteur  $F$  de  $\text{AtPoSpc}$  vers  $\text{LPoSpc}$  qui associe à chaque objet de  $\text{AtPoSpc}$  sa classe d'équivalence, donc un objet de  $\text{LPoSpc}$ ; bien sûr, d'après de lemme XIII.4.9, tout morphisme de  $\text{AtPoSpc}$  induit canoniquement un morphisme de  $\text{LPoSpc}$  qui, par définition, est l'image de  $f$  par  $F$ . Le foncteur  $F$  est clairement plein et fidèle, en outre, tout objet de  $\text{LPoSpc}$  est l'image par  $F$  d'un certain objet de  $\text{AtPoSpc}$  : le foncteur  $F$  est donc une équivalence fibrée au sens de la proposition A.3.5.

#### XIII.4.11 LEMME

Le foncteur d'oubli de  $\text{LPoSpc}$  vers  $\text{HauSpc}$  admet un adjoint à gauche dont la partie objet consiste à équiper un espace de *Hausdorff*  $X$  de la famille  $\{(U, =) \mid U \text{ est un ouvert de } X\}$ . En particulier,  $\eta_X := id_X$ .

PREUVE. Vérification de routine. ■

XIII.4.12 LEMME (INCLUSION DE  $\text{PoSpc}$  DANS  $\text{LPoSpc}$ )

A tout objet  $\vec{X}$  de  $\text{PoSpc}$ , on associe l'espace localement ordonné  $X, (U, \sqsubseteq|_U)$ , où  $X$  est l'espace topologique sous-jacent de  $\vec{X}$ ,  $U$  parcourt l'ensemble des ouverts de  $X$  et  $\sqsubseteq_U$  est la relation d'ordre induite par celle de  $\vec{X}$  sur  $U$ . La fonction ainsi définie induit canoniquement un foncteur de  $\text{PoSpc}$  dans  $\text{LPoSpc}$  qui, en un certain sens, peut être vu comme un inclusion.

PREUVE. Vérification de routine. ■

XIII.4.13 REMARQUE

L'inclusion  $I$  décrite dans le lemme XIII.4.12 n'est pas pleine. Ce fait a été relevé la première fois par *Stefan Sokolowski*. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'espace ordonné  $\vec{X}$  dont l'espace topologique sous-jacent est  $[0, 1] \cup [2, 3]$  muni de l'ordre induit par celui de  $\mathbb{R}$ . La fonction continue

$$[0, 1] \cup [2, 3] \longrightarrow [0, 1] \cup [2, 3]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ x - 2 & \text{si } x \in [2, 3] \end{cases}$$

induit un morphisme de  $\text{LPoSpc}[I(\vec{X}), I(\vec{X})]$  mais pas de  $\text{PoSpc}[\vec{X}, \vec{X}]$ . En effet, on a  $1 < 2$  bien que  $f(1) = 1 > f(2) = 0$ .

L'inconvénient commun à toutes les approches "locales" d'un problème est qu'il est possible de donner une infinité de représentations différentes d'un même objet à isomorphisme près, le résultat suivant illustre ce phénomène.

XIII.4.14 LEMME (ISOMORPHISMES DE  $\text{LPoSpc}$ )

Les isomorphismes de  $\text{LPoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}]$  sont les morphismes de  $\text{LPoSpc}[\vec{X}, \vec{Y}]$  qui induisent un isomorphisme de  $\text{Spc}[X, Y]$  (i.e. un homéomorphisme de  $X$  sur  $Y$ ) et tels que dans la définition XIII.4.8, pour chaque  $x \in X$ , on peut choisir  $A$  et  $B$  de telle sorte que les morphismes d'espaces ordonnés  $\begin{cases} \vec{A} \longrightarrow \vec{B} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$  soient des isomorphismes de  $\text{PoSpc}$ .

PREUVE. Si l'on a un isomorphisme  $f$  de  $\text{LPoSpc}$ , il induit nécessairement un isomorphisme de  $\text{Spc}$  grâce au foncteur d'oubli de  $\text{LPoSpc}$  dans  $\text{HauSpc}$ . Soit alors  $\begin{cases} \vec{A}_1 \longrightarrow \vec{B}_1 \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$

et  $\begin{cases} \vec{B}_2 \longrightarrow \vec{A}_2 \\ y \longmapsto f^{-1}(y) \end{cases}$  donnés par la définition XIII.4.10. On peut alors poser  $A := A_1 \cap A_2$

et  $B := f(A)$ , qui sera un voisinage ouvert de  $f(x)$  car  $f$  est un homéomorphisme, pour obtenir l'isomorphisme voulu.

Le réciproque est triviale, les inverses des  $\begin{cases} \vec{A} \longrightarrow \vec{B} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$  permettant alors de prouver que l'inverse de  $f$  dans  $\text{Spc}$  induit bien un morphismes de  $\text{LPoSpc}$ . ■

### XIII.4.15 REMARQUE

En particulier, dans le lemme XIII.4.14, si  $X = Y$ , alors l'application identité de  $X$  induit un isomorphisme si et seulement si quel que soit  $x$  appartenant à  $\overline{X}$ , il existe un voisinage  $A$  de  $x$  tel que  $id_X$  induit un isomorphisme de  $\text{PoSpc}$  de  $\overline{A}$  vers  $\overline{A}$ , c'est-à-dire que l'on a  $i \in \mathcal{I}$  et  $i' \in \mathcal{I}'$  tels que  $A \subseteq V_i \cap V_{i'}$  et que  $\sqsubseteq_i$  et  $\sqsubseteq_{i'}$  induisent sur  $A$  la même relation d'ordre : ceci équivaut encore à  $\tilde{X} = \tilde{Y}$ . Ainsi, en appliquant le lemme XIII.4.3, la remarque XIII.4.4 et ce que l'on vient de noter, on peut toujours supposer dans la définition XIII.4.1 d'une part que la famille  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  est un idéal vers le bas, c'est-à-dire que si  $A$  est un ouvert inclus dans un certain  $V_i$ , alors  $(A, \sqsubseteq_A)$ , où  $\sqsubseteq_A$  est l'ordre induit par  $(V_i, \sqsubseteq_i)$  sur  $A$ , fait lui-même partie de la famille  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  et, d'autre part, qu'elle est stable par réunion croissante, c'est-à-dire que si  $(W_j, \sqsubseteq_j)_{j \in \mathcal{J}}$  est une sous-famille de  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  totalement ordonnée pour  $\subseteq$ , alors

$$\left( \bigcup_{j \in \mathcal{J}} W_j, \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \sqsubseteq_j \right)$$

est lui-même un élément de la famille  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$ .

### XIII.4.16 PROPOSITION

Etant donné un atlas dirigé  $\mathcal{A} := (V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sur un espace de *Hausdorff*  $X$ , la collection, notée  $\mathbb{P}$ , des atlas  $\mathcal{A}'$  sur  $X$  équivalents à  $\mathcal{A}$  (au sens du lemme XIII.4.6) est partiellement ordonnée par l'inclusion ensembliste  $\subseteq$ . L'ensemble ordonné  $(\mathbb{P}, \subseteq)$  admet toutes les bornes supérieures de sous-familles dirigées de  $\mathbb{P}$  qui ne sont pas vides. De plus, si l'espace localement ordonné  $\tilde{X}$  dont  $(X, \mathcal{A})$  est un représentant appartient à l'image de l'inclusion de  $\text{PoSpc}$  dans  $\text{LPoSpc}$ , alors  $(\mathbb{P}, \subseteq)$  est un treillis complet dont l'élément maximum est la collection de tous les ouverts de  $X$ , chacun étant équipé de l'ordre induit par celui de l'espace ordonné tandis que l'élément minimum est le singleton  $\{(X, \sqsubseteq_X)\}$  où  $\sqsubseteq_X$  est l'ordre partiel de l'espace ordonné.

PREUVE. Vérification de routine. ■

### XIII.4.17 PROPRIÉTÉ

En particulier, étant donné un espace localement ordonné  $\tilde{X}$ , si  $\mathcal{A}$  est maximal dans  $(\mathbb{P}, \subseteq)$ , alors toute sous-famille dirigée de  $\mathcal{A}$  admet une borne supérieure dans  $\mathcal{A}$  et pour tout  $(B, \sqsubseteq_B) \subseteq (A, \sqsubseteq_A) \in \mathcal{A}$ ,  $(\overline{B}, \overline{\sqsubseteq_B}) \in \mathcal{A}$  où  $\overline{\sqsubseteq_B}$  est la restriction de  $\sqsubseteq_A$  sur  $B$ .

PREUVE. C'est une conséquence directe de la remarque XIII.4.4, du lemme XIII.4.3 et de la proposition XIII.4.16. ■ En définitive, lorsque l'on travaille avec un espace localement ordonné  $\tilde{X}$ , on peut toujours, à isomorphisme près, supposer que son atlas est maximal. Ceci permet de retrouver une forme de canonicité dans la notion d'espace localement ordonné. Il faut cependant prendre garde qu'il n'existe pas forcément d'atlas maximum, c'est-à-dire qui contient tous les autres.

### XIII.4.18 LEMME (SEGMENT UNITÉ DIRIGÉ DANS LPoSpc)

On équipe  $[0, 1]$ , le segment unité fermé, de la structure d'espace localement ordonné suivante: on recouvre  $[0, 1]$  par tous les sous-intervalles ouverts de  $[0, 1]$  sur lesquels on met la relation induite par l'ordre classique. En particulier,  $[0, 1]$  étant un intervalle ouvert dans  $[0, 1]$ ,  $[0, 1]$  fait partie du recouvrement.

On notera  $\mathbb{I}$  l'espace localement ordonné décrit dans le lemme XIII.4.18. On va bien sûr utiliser  $\mathbb{I}$  comme objet-segment dans la catégorie  $\text{LPoSpc}$  dont l'objet terminal  $*$  est, à isomorphisme près, l'unique structure d'espace localement ordonné dont on puisse équiper un singleton. On définit naturellement les points de départ et d'arrivée de  $\mathbb{I}$  par  $s(*) := 0$  et  $s(*) := 1$ . Les chemins dirigés, ou dichemins, sur un objet  $\tilde{X}$  de  $\text{LPoSpc}$  seront donc les éléments de  $\text{LPoSpc}[\mathbb{I}, \tilde{X}]$ . On va appliquer la proposition XII.3.8.

### XIII.4.19 PROPOSITION

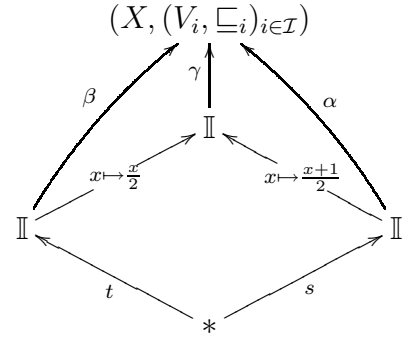
Avec les notations des catégories à chemins,  $\mathbb{I} + \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$  dans  $\text{LPoSpc}$ .

PREUVE.

Etant donnés  $\alpha, \beta \in \text{LPoSpc}[\mathbb{I}, (X, (V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}})]$  tels que  $\alpha(1) = \beta(0)$  on pose  $\gamma \in \text{Spc}[[0, 1], X]$  défini par

$$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que  $\gamma$  est induit par un morphisme de  $\text{LPoSpc}[\mathbb{I}, (X, (V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}})]$ . Pour cela, on doit pour chaque  $x \in [0, 1]$  trouver un voisinage ouvert  $A$  de  $x$ , que l'on peut supposer de la forme  $[0, 1] \cap ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  pour un certain  $\varepsilon > 0$  ainsi qu'un voisinage (ouvert)  $B \subseteq V_i$  de  $\gamma(x)$  tel que la restriction de  $\gamma$  à  $A$  soit à valeur dans  $B$  et induise un morphisme de  $\text{PoSpc}$ . Pour  $x < \frac{1}{2}$  on utilise le fait que  $\alpha$  soit un morphisme de  $\text{LPoSpc}$  tandis que pour  $x > \frac{1}{2}$  on utilise le fait que  $\beta$  soit un morphisme de  $\text{LPoSpc}$ .



Le cas  $x = \frac{1}{2}$  est un peu moins trivial. Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont des morphismes de  $\text{LPoSpc}$ , on trouve  $\varepsilon > 0$  et  $\varepsilon' > 0$  et deux voisinages  $B$  et  $B'$  de  $\gamma(\frac{1}{2})$  respectivement inclus dans  $V_i$  et  $V_{i'}$  tels que  $t \in ]\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}[ \mapsto \alpha(2t)$  et  $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1+\varepsilon'}{2}[ \mapsto \beta(2t - 1)$  soient des morphismes de  $\text{PoSpc}$  respectivement à valeurs dans  $B$  et dans  $B'$ . Quitte à considérer l'intersection  $B \cap B' \subseteq V_i \cap V_{i'}$ , sachant que, d'après la définition XIII.4.1,  $\sqsubseteq_i$  et  $\sqsubseteq_{i'}$  coïncident sur  $V_i \cap V_{i'}$ , on peut supposer que  $B = B'$  et  $V_i = V_{i'}$ . Reste à vérifier que la restriction de  $\gamma$  à l'intervalle  $] \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon'}{2}[$ , que l'on notera en cette circonstance  $\vec{I}$  après l'avoir équipé de l'ordre induit par celui de  $\mathbb{R}$ , induit bien un morphisme de  $\text{PoSpc}[\vec{I}, \vec{B}]$ . Soit donc  $t, t' \in \vec{I}$  tels que  $t \sqsubseteq t'$ . Si  $t' \sqsubseteq \frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{2} \sqsubseteq t$ , on a immédiatement  $\gamma(t) \sqsubseteq_{\vec{B}} \gamma(t')$ . Dans le cas contraire, on a  $t \sqsubseteq \frac{1}{2} \sqsubseteq t'$  donc  $\gamma(t) \sqsubseteq_{\vec{B}} \gamma(\frac{1}{2})$  et  $\gamma(\frac{1}{2}) \sqsubseteq_{\vec{B}} \gamma(t')$  donc, comme  $\sqsubseteq_{\vec{B}}$  est une relation d'ordre,  $\gamma(t) \sqsubseteq_{\vec{B}} \gamma(t')$ . On note en particulier que le foncteur d'oubli  $U$  préserve cette somme amalgamée. ■ De manière parfaitement analogue, on prouve que

XIII.4.20 PROPOSITION

Le diagramme ci-dessous est une somme amalgammée dans  $\mathbf{LPoSpc}$

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{I} \times \mathbb{I} & \\
 (x,y) \mapsto (\frac{x}{2}, y) \nearrow & & \nwarrow (x,y) \mapsto (\frac{x+1}{2}, y) \\
 \mathbb{I} \times \mathbb{I} & & \mathbb{I} \times \mathbb{I} \\
 t \times id_{\mathbb{I}} \nwarrow & & \nearrow s \times id_{\mathbb{I}} \\
 & * \times \mathbb{I} &
 \end{array}$$

PREUVE. Il suffit d'adapter la preuve de la proposition XIII.4.19 en remplaçant  $*$  et  $\mathbb{I}$  par  $* \times \mathbb{I}$  et  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ , puis en changeant la définition de  $\gamma$  de la façon suivante:

$$\gamma(t, x) := \begin{cases} \alpha(2t, x) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1, x) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

■

XIII.4.21 REMARQUE

Si  $\mathbb{I}$  est exponentiable dans  $\mathbf{LPoSpc}$ , alors  $- \times \mathbb{I}$  préserve en particulier les sommes amalgammées et la proposition XIII.4.20 devient un corollaire immédiat de la proposition XIII.4.19, malheureusement, bien que je n'en ai pas la preuve formelle, je pense que  $\mathbb{I}$  ne l'est pas. En effet, si cela était le cas, alors l'espace topologique sous-jacent de  $\tilde{X}^{\mathbb{I}}$  serait probablement  $\mathbf{LPoSpc}[\mathbb{I}, \tilde{X}]$  muni de la topologie compacts-ouverts (voir définition B.1.31). Pour obtenir un atlas dirigé, il faudrait alors être capable de mettre une relation d'ordre sur les ouverts de la forme

$$\{\gamma \in \mathbf{LPoSpc} / \gamma(K) \subseteq V_i\}$$

où  $K$  est un compact de  $[0, 1]$  et  $(V_i, \sqsubseteq_i)$  un élément de l'atlas dirigé de  $\tilde{X}$ . L'idée qui vient naturellement, comme dans le cas de  $\mathbf{PoSpc}$ , est l'ordre point à point. Mais ici, la difficulté est que seule une partie de l'image de  $\gamma$  est dans  $V_i$ , il se peut alors que pour deux dichemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tels que  $\gamma_1(K) \subseteq V_i$  et  $\gamma_2(K) \subseteq V_i$  on puisse trouver  $x \notin K$  tel que  $\gamma_1(x)$  et  $\gamma_2(x)$  n'appartiennent pas à un même élément de l'atlas dirigé de  $\tilde{X}$ .

XIII.4.22 THÉORÈME (CARACTÉRISATION DES CHEMINS DIRIGÉS CONSTANTS)

Un chemin dirigé sur un espace localement ordonné  $\tilde{X} := (X, (V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}})$  est constant si et seulement si ses extrémités sont égales et son image incluse dans  $V_i$  pour un certain indice  $i$  appartenant à  $\mathcal{I}$ .

PREUVE. Supposons que l'application  $\gamma$  ne soit pas constante. Posons  $y := \max \{x \in [0, 1] \mid \gamma([0, x]) = \{\gamma(0)\}\}$ , qui est bien défini par continuité de  $\gamma$ ; on a  $y < 1$  car l'application  $\gamma$  n'est pas constante. Posons  $U_0$  un intervalle ouvert (dans  $[0, 1]$ ) contenant  $y$  tel que la restriction de  $\gamma$  à  $U_0$  soit un chemin dirigé, c'est-à-dire un élément de  $\mathbf{PoSpc}[\vec{U}_0, (V_i, \sqsubseteq_i)]$ . Un tel  $U_0$  existe d'après la définition XIII.4.10. Etant donné un ordinal  $\beta$ , supposons que l'on ait défini une famille  $(U_\alpha)_{\alpha < \beta}$  d'intervalles ouverts connexes de  $[0, 1]$  telle que  $U_\alpha$  contient  $\sup_{\zeta < \alpha} \sup(U_\zeta)$  et que la restriction de  $\gamma$  à  $U_\alpha$  soit

un élément de  $\text{PoSpc}[\overrightarrow{U_\alpha}, (V_i, \sqsubseteq_i)]$ . On choisit alors  $U_\beta$  un intervalle ouvert (dans  $[0, 1]$ ) contenant  $\sup_{\alpha < \beta} \sup(U_\alpha)$  et tel que la restriction de  $\gamma$  à  $U_\beta$  soit un chemin dirigé, c'est-à-dire un élément de  $\text{PoSpc}[\overrightarrow{U_\beta}, (V_i, \sqsubseteq_i)]$  : on invoque pour cela les mêmes arguments que ceux ayant prouvé l'existence de  $U_0$ . Si  $\sup_{\alpha < \beta} \sup(U_\alpha) = 1$ , alors 1 est un élément de  $U_\beta$  et la l'induction s'arrête. Un argument de cardinalité montre que cette induction (en théorie des ensembles, on parle d'induction transfinie voir [16], [52], [56] ou [57]) se termine au plus tard à l'ordinal  $2^{\aleph_0}$ . Maintenant, puisque  $[0, 1]$  est compact, on peut extraire de la famille  $(U_\alpha)_\alpha$  un sous-recouvrement fini de  $[0, 1]$ , dont les éléments sont notés  $U_0, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ , avec les ordinaux  $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ . Puis, même s'il faut pour cela réduire à gauche certains éléments de la famille  $U_0, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ , c'est-à-dire considérer une famille  $W_0, W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_n}$  telle que pour tout indice  $k$ ,  $W_{\alpha_k} \subseteq U_{\alpha_k}$  et  $\sup(W_{\alpha_k}) = \sup(U_{\alpha_k})$ , on peut supposer que pour tout indice  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on a  $\inf(U_{\alpha_j}) \sqsubseteq \inf(U_{\alpha_{j+1}}) < \sup(U_{\alpha_j}) \sqsubseteq \sup(U_{\alpha_{j+1}})$ . Alors, pour chaque indice  $j$  de  $\{1, \dots, n-1\}$ , on prend  $x_j$  tel que  $\inf(U_{\alpha_{j+1}}) < x_j < \sup(U_{\alpha_j})$ . De plus, la restriction de  $\gamma$  à  $U_0$  est un chemin dirigé donc par construction de  $y$ , on a  $\gamma(0) = \gamma(y) \sqsubseteq_{V_i} \gamma(x_1)$  et comme la restriction de  $\gamma$  à  $U_{\alpha_j}$  est un dichemin et que  $x_j$  et  $x_{j+1}$  sont deux éléments de  $U_{\alpha_j}$ , pour tout indice  $j$  dans  $\{1, \dots, n-1\}$ , nous avons  $\gamma(x_j) \sqsubseteq_{V_i} \gamma(x_{j+1})$  et  $\gamma(x_{n-1}) \sqsubseteq_V \gamma(1)$ . Finalement, les points  $\gamma(0), \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_{n-1}), \gamma(1)$  appartiennent tous à  $\gamma([0, 1]) \subseteq V_i$  et  $(V_i, \sqsubseteq_i)$  est un espace ordonné (c'est l'argument clé), donc en particulier  $\sqsubseteq_{V_i}$  est un ordre partiel sur  $V_i$  et ainsi  $\gamma(0) \sqsubseteq_{V_i} \gamma(1)$ , ce qui implique que  $\gamma(0) \neq \gamma(1)$ . ■ Le théorème XIII.4.22 est à rapprocher du fait que sur un espace ordonné, un chemin dirigé est constant si et seulement si ses extrémités sont égales.

### XIII.4.23 PROPRIÉTÉ

L $\text{PoSpc}$  est finiment complète et admet tous les coproduits.

PREUVE. Si les espaces de *Hausdorff*  $X$  et  $Y$  sont respectivement muni des atlas dirigés  $(V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}}$  et  $(W_j, \sqsubseteq'_j)_{j \in \mathcal{J}}$ , on a donc deux espaces localement ordonnés notés  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$ , alors l'espace produit (dans  $\text{Spc}$ )  $X \times Y$  est un espace de *Hausdorff* et la famille  $(V_i \times W_j, \sqsubseteq_i \times \sqsubseteq'_j)_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}}$  est un atlas dirigé sur  $X \times Y$ . On vérifie que c'est, à isomorphisme près, le produit de  $\tilde{X}$  et de  $\tilde{Y}$  dans L $\text{PoSpc}$ . De plus, si  $f, g \in \text{L $\text{PoSpc}$ }[ $\tilde{X}, \tilde{Y}$ ]$ , alors  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  induit, d'après la propriété XIII.4.2, un sous-espace localement ordonné de  $\tilde{X}$  qui s'avère, après une vérification immédiate, être l'égalisateur de  $f$  et de  $g$  dans L $\text{PoSpc}$ .

Soit  $\tilde{X}_{\alpha \in A}$  une famille d'espace localement ordonnée. Le coproduit de cette famille dans L $\text{PoSpc}$  a pour espace topologique sous-jacent  $X$ , le coproduit (dans  $\text{Spc}$ ) des espaces sous-jacents  $X_\alpha$ . On muni  $X$  de la réunion disjointe (i.e. du coproduit dans  $\text{Set}$ ) des atlas dirigés de chacun des espaces localement ordonnés  $X_\alpha$  pour obtenir le coproduit souhaité. ■

En vertu de la propriété XIII.4.23 et des propositions XIII.4.19 et XIII.4.20, on peut appliquer la proposition XII.2.8 qui fournit une notion d'homotopie sur la catégorie L $\text{PoSpc}$ . Pour résumer, une homotopie dirigée d'un dichemin  $\alpha$  vers un dichemin  $\beta$  (tels que  $\alpha(0) = \beta(0)$  et  $\alpha(1) = \beta(1)$ ) sur un espace localement ordonnés  $\tilde{X}$  est un morphisme  $H \in \text{L $\text{PoSpc}$ }[ $\mathbb{I} \times \mathbb{I}, \tilde{X}$ ]$  tel que  $H(0, -) = \alpha$ ,  $H(1, -) = \beta$ ,  $H(-, 0) = \alpha(0) = \beta(0)$  et  $H(-, 1) = \alpha(1) = \beta(1)$ . On vérifie que cela correspond à la définition donnée dans la proposition XII.2.8. On retrouve une notion d'homotopie semblable à celle que propose

Marco Grandis dans ses travaux sur les espaces dirigés (voir [37]). On a un foncteur catégorie fondamentale qui en découle, noté  $\overrightarrow{\pi}_1$ , et défini sur la catégorie LPoSpc. Ce foncteur est *a priori* à valeurs dans Cat, les résultats qui suivent montrent que l'on peut se restreindre à une sous-catégorie épi-réfléchissante de Cat.

#### XIII.4.24 THÉORÈME

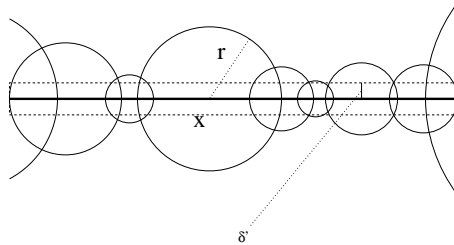
Soit un espace localement ordonné  $\tilde{X} := (X, (V_i, \sqsubseteq_i)_{i \in \mathcal{I}})$ , soit  $H$  une application continue de  $[0, 1] \times [0, 1]$  vers  $X$  telle que pour tout paramètre  $s$  de  $[0, 1]$ , on a :

1.  $H(s, 0) = H(s, 1)$  et
2. l'application  $H(s, -)$  est un chemin dirigé sur  $\tilde{X}$ , c'est-à-dire un élément de l'ensemble  $\text{LPoSpc}[\mathbb{I}, \tilde{X}]$ .

Dans ce cas, s'il existe un paramètre  $s$  de  $[0, 1]$  pour lequel  $H(s, -)$  est constant, alors pour tout paramètre  $s$  de  $[0, 1]$ ,  $H(s, -)$  est constant; autrement dit,  $H$  ne dépend que de  $s$ .

PREUVE. Supposons l'existence d'un paramètre  $s'$  dans  $[0, 1]$  tel que  $H(s', -)$  soit constant. Dans un premier temps et afin d'alléger les notations, supposons que  $s' = 1$ . On pose  $A := \{\delta \in [0, 1] \mid \forall s \in [\delta, 1], H(s, -) \text{ est constant}\}$ ; on sait donc déjà, par hypothèse, que 1 est un élément de  $A$ . Puis, si  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont deux éléments de  $[0, 1]$  tels que  $\delta_1$  soit dans  $A$  et que  $\delta_1 \sqsubseteq \delta_2$ , alors, par définition de  $A$ , il est clair que  $\delta_2$  est également dans  $A$ . Il s'ensuit qu'il existe un réel  $\delta'$  de  $[0, 1]$  tel que  $A = [\delta', 1]$  ou  $A = ]\delta', 1]$ ; par continuité de  $A$ , on a  $A = [\delta', 1]$ . Il reste à prouver que  $\delta' = 0$ . Notons  $x$  le point de  $X$  sur lequel stationne le chemin constant  $H(\delta', -)$ . Supposons que  $\delta'$  soit strictement positif et considérons  $(V_j, \sqsubseteq_j)$  un élément de l'atlas de  $\tilde{X}$  tel que  $x$  soit dans  $V_j$ , alors  $H^{-1}(V_j)$  est ouvert puisque  $H$  est continue et le segment  $\{\delta'\} \times [0, 1]$  est inclus dans  $H^{-1}(V_j)$ . Etant donné un instant  $t$  dans  $[0, 1]$ , il existe un réel  $r_t$  strictement positif tel que  $B((\delta', t), r_t) \subseteq H^{-1}(V_j)$  et puisque  $\{\delta'\} \times [0, 1]$  est compact, on peut extraire une sous-famille finie  $r_{t_1}, \dots, r_{t_n}$  telle que  $\{\delta'\} \times [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, n} B((\delta', t_i), r_{t_i})$ . On trouve ainsi  $\varepsilon > 0$  satisfaisant

$$] \delta' - \varepsilon, \delta' ] \times [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, n} B((\delta', t_i), r_{t_i}) \subseteq H^{-1}(V_j) \text{ et } 0 < \delta' - \varepsilon.$$



Si maintenant  $s$  est un paramètre de  $] \delta' - \varepsilon, \delta' ]$ , par hypothèse,  $H(s, -)$  est un élément de  $\text{LPoSpc}[\mathbb{I}, \tilde{X}]$  et d'après ce que l'on a vu,  $H(s, -)$  est à valeurs dans l'espace ordonné  $(V_j, \sqsubseteq_j)$  et satisfaisait  $s(H(s, -)) = t(H(s, -)) = x$ ; donc d'après le théorème XIII.4.22,  $H(s, -)$  est constant. Il s'ensuit que  $H(] \delta' - \varepsilon, \delta' ] \times [0, 1]) = \{x\}$  et donc que  $] \delta' - \varepsilon, \delta' ]$  est inclus dans  $A$  ce qui est une contradiction. Ainsi  $\delta' = 0$  et pour tout couple  $(s, t)$



de  $[0, 1] \times [0, 1]$ , la valeur de  $H(s, t)$  ne dépend pas de  $t$ . Dans le cas où  $s'$  est distinct de 1, la méthode précédente permet de prouver que quel que soit  $s$  appartenant à  $[0, s']$ , l'application  $H(s, -)$  est constante. On peut sans difficulté l'adapter pour montrer que l'on a également quel que soit  $s$  dans  $[s', 1]$ ,  $H(s, -)$  est constant. ■

#### XIII.4.25 COROLLAIRE

Dans le théorème XIII.4.24, si on remplace l'hypothèse 1 par l'hypothèse, plus forte, que la valeur commune de  $H(s, 0)$  et  $H(s, 1)$  ne dépend pas du paramètre  $s$ , alors on peut conclure que s'il existe un paramètre  $s$  dans  $[0, 1]$  pour lequel  $H(s, -)$  est constant, alors  $H$  est constant.

PREUVE. Immédiat. ■

#### XIII.4.26 COROLLAIRE

Le théorème XIII.4.24 reste valide lorsque l'on remplace  $[0, 1] \times [0, 1]$  par  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

PREUVE. Il suffit de noter que  $[0, 1] \times [0, 1]$  est dihoméomorphe à  $[0, +\infty[ \times [0, 1]$  puis que  $[0, +\infty[ \times [0, 1]$  est obtenu comme la réunion des carrés de la forme  $[n, n + 1] \times [0, 1]$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , sur chacun desquels on peut appliquer le théorème XIII.4.24; une récurrence triviale donne le résultat.

#### XIII.4.27 COROLLAIRE (UNE SURPRENANTE COLIMITE DANS LPOsPc)

Considérons l'espace partiellement ordonné dont l'espace topologique sous-jacent est  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ . Les éléments du recouvrement sont de la forme

$$V_{\theta_1, \theta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2} := \{\varepsilon e^{i\theta} \mid \varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2; \theta_1 < \theta < \theta_2\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

où  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ,  $0 < \theta_1 < \theta_2$  et  $\theta_2 - \theta_1 \subseteq 2\pi$ , que l'on ordonne par

$$\varepsilon e^{i\theta} \subseteq \varepsilon' e^{i\theta'} \text{ si et seulement si } \varepsilon \subseteq \varepsilon' \text{ et } 0 < \theta_1 \subseteq \theta_2$$

ici on applique de façon implicite le fait que l'application ci-dessous soit un homéomorphisme.

$$\begin{array}{ccc} ]\varepsilon_1, \varepsilon_2[ \times ]\theta_1, \theta_2[ & \longrightarrow & V_{\theta_1, \theta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2} \\ (\varepsilon, \theta) & \longmapsto & \varepsilon e^{i\theta} \end{array}$$

L'espace localement ordonné ainsi défini est noté  $\tilde{X}$ . Par ailleurs, on a, d'après le lemme XIII.4.31, le cercle dirigé noté  $\overrightarrow{S^1}$  que l'on inclus trivialement dans  $\tilde{X}$ . Alors le carré suivant est une somme amalgamée dans LPOsPc où pour tout point  $s \cdot e^{it}$  de  $X$ ,  $f(s \cdot e^{it}) := s$  et où  $u$  envoie l'unique élément de l'ensemble sous-jacent de  $*$  sur 1. Enfin, on note  $\overrightarrow{[1, +\infty[}$  l'image par l'inclusion  $\text{PoSpc} \hookrightarrow \text{LPOsPc}$  de l'espace ordonné  $[1, +\infty[$  muni de l'ordre et de la topologie classique.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \overrightarrow{[1, +\infty[} \\ \uparrow & & \uparrow u \\ \overrightarrow{S^1} & \xrightarrow{\quad} & * \end{array}$$

PREUVE. Soient un morphisme  $g$  dans  $\text{LPoSpc}$  de  $\tilde{X}$  vers  $\tilde{Y}$  et un point  $y$  de  $\tilde{Y}$  tels que le diagramme suivant, où  $p$  envoie l'unique élément de l'ensemble sous-jacent de  $*$  sur  $y$ , commute.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{g} & \tilde{Y} \\ \uparrow & & \uparrow p \\ \underset{!}{\downarrow} S^1 & \xrightarrow{\quad} & * \end{array}$$

Par construction de  $\tilde{X}$ , l'application ci-dessous induit un morphisme de  $\text{LPoSpc}$ .

$$\begin{aligned} \phi : [1, +\infty[ \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \tilde{X} \\ (s, t) &\longmapsto (s \cdot \cos(t), s \cdot \sin(t)) \end{aligned}$$

Posons  $H := g \circ \phi$ , il est clair que  $H(1, -)$  est constant égale à  $y$  et que pour tout paramètre  $s$  de  $[1, +\infty[$ , on a  $H(s, 0) = H(s, 2\pi)$ . On peut donc appliquer le corollaire XIII.4.26 dont la conclusion est que l'application  $H$  ne dépend pas de sa seconde variable, c'est-à-dire qu'il existe une application  $h$  de  $[0, +\infty[$  vers  $X$  telle que pour tout couple  $(s, t)$  de  $[1, +\infty[ \times [0, 2\pi]$ , on a  $g(s \cdot e^{it}) = H(s, t) = h(s)$ . On vérifie alors très facilement que l'application  $h$  induit un morphisme de  $\text{LPoSpc}$  qui fait commuter le diagramme suivant et que c'est le seul. ■

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{Y} \\ & \xrightarrow{g} & \uparrow h \\ \tilde{X} & \xrightarrow{f} & [1, +\infty[ \\ \uparrow & & \uparrow 1 \\ \underset{!}{\downarrow} S^1 & \xrightarrow{\quad} & * \end{array}$$

Si l'on équipe les voisinages  $V_{\theta_1, \theta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2}$  de la relation

$$\varepsilon e^{i\theta} \sqsubseteq \varepsilon' e^{i\theta'} \text{ si et seulement si } \varepsilon = \varepsilon' \text{ et } 0 < \theta_1 \sqsubseteq \theta_2$$

et que l'on note  $\tilde{X}'$  l'objet de  $\text{LPoSpc}$  ainsi obtenu, on prouve de façon similaire que le diagramme précédent, dans lequel  $\tilde{X}'$  remplace  $\tilde{X}$ , admet également une colimite et que cette dernière est donnée par  $[1, +\infty[$  muni de la relation d'égalité (au lieu de la relation d'ordre classique dans le cas précédent).

#### XIII.4.28 COROLLAIRE

Soit un espace localement ordonné  $\tilde{X}$ , pour chaque objet  $x$  de  $\overrightarrow{\pi}_1(\tilde{X})$  la  $\sim_{\tilde{X}}$ -classe d'équivalence du chemin dirigé constant  $c_x$ , c'est-à-dire celui dont l'application sous-jacente est constante égale à  $x$ , a pour seul élément  $c_x$ .

PREUVE. D'après le corollaire XIII.4.25, si l'on a une homotopie dirigée  $H$  depuis ou vers  $c_x$ , l'application  $H$  est constante; ainsi, si  $\alpha$  un représentant de la  $\sim_{\tilde{X}}$ -classe d'équivalence de  $c_x$ , puisque, par définition de  $\sim_{\tilde{X}}$ , il existe un zigzag d'homotopie dirigée entre  $\alpha$  et  $c_x$ , une récurrence immédiate montre que  $\alpha = c_x$ . ■

XIII.4.29 LEMME (HOMOTOPIE TRANSVERSALE)

Si  $H$  est un morphisme de  $\text{LPoSpc}$  de  $[0, 1] \times [0, 1]$  vers un espace localement ordonné  $\tilde{X}$ , alors en posant  $\phi$  comme ci-dessous, on a :

1. l'application  $H \circ \phi$  est continue,
2. pour tout paramètre  $s$  dans  $[0, 1]$ ,  $H \circ \phi(s, -)$  est un chemin dirigé sur  $\tilde{X}$  et
3. les applications  $H \circ \phi(-, 0)$  et  $H \circ \phi(-, 1)$  sont constantes.

$$\phi : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

$$(s, t) \longmapsto \begin{cases} (2ts, 2t(1-s)) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2(t - \frac{1}{2})(1-s) + s, 2(t - \frac{1}{2})s + (1-s)) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

PREUVE. C'est une vérification routinière, il suffit en fait de constater que l'application  $\phi$  est une homotopie classique dont les chemins intermédiaires sont croissants. ■

XIII.4.30 COROLLAIRE

Etant donné un espace localement ordonné  $\tilde{X}$ ,  $\text{Iso}(\overrightarrow{\pi}_1(\tilde{X}))$  est discrète et pure dans  $\overrightarrow{\pi}_1(\tilde{X})$ .

PREUVE. En vertu du théorème XIII.4.24, dans  $\text{LPoSpc}$ , s'il existe une homotopie dirigée d'un chemin dirigé  $\alpha$  vers un chemin dirigé constant ou l'inverse,  $\alpha$  est lui-même constant. De plus, les identités de  $\overrightarrow{\pi}_1(\tilde{X})$  sont exactement les  $\sim_{\tilde{X}}$ -classes d'équivalence des dichemins constants. En supposant que la  $\sim_{\tilde{X}}$ -classe d'équivalence de  $\alpha$  soit une identité de  $\overrightarrow{\pi}_1(\tilde{X})$ , on a  $\text{src}(\alpha) = \text{tgt}(\alpha)$  que l'on note  $x$ , il est alors clair que la  $\sim_{\tilde{X}}$ -classe d'équivalence du dichemin constant en  $x$  est l'identité en  $x$  de  $\overrightarrow{\pi}_1(\tilde{X})$ . Etant donnée la notion de dihomotopie que l'on a sur  $\text{LPoSpc}$  et le théorème XII.2.8, on sait que l'on a  $\alpha \sim_X \beta$  si et seulement si il existe un zigzag d'homotopies dirigées entre  $\alpha$  et  $\beta$ . Donc, si on a un zigzag d'homotopies dirigées entre un chemin dirigé  $\gamma_1$  et un chemin dirigé constant  $\gamma_2$ , alors  $\gamma_1$  est lui-même constant et l'on a  $\gamma_1 = \gamma_2$ . En particulier, si  $\alpha$  est un isomorphisme de  $\overrightarrow{\pi}_1(\tilde{X})$ , alors il existe un chemin dirigé  $\beta$  tel que  $\beta \cdot \alpha \sim_{\tilde{X}} id$ , c'est-à-dire un chemin constant donc  $\beta \cdot \alpha$  est lui-même un chemin constant ce qui n'est possible que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont eux-mêmes constants. ■

XIII.4.31 LEMME (LE CERCLE DIRIGÉ DANS  $\text{LPoSpc}$ )

On équipe  $S^1$ , le cercle euclidien, de la structure d'espace localement ordonné suivante: on recouvre  $S^1$  par ses arcs ouverts propres, puis sur chaque arc ouvert  $\widehat{xy}$ , on met la relation  $e^{i\theta_1} \sqsubseteq e^{i\theta_2}$  où  $\theta < \theta_1 \sqsubseteq \theta_2 < \theta'$  avec  $e^{i\theta_1} = x$ ,  $e^{i\theta'} = y$  et  $\theta' - \theta \sqsubseteq 2\pi$ . Cette structure est notée  $\overrightarrow{S^1}$ .

PREUVE. Vérification de routine. ■

*Krzysztof Worytkiewicz* a remarqué que la notion de faisceau offre un formalisme qui permet de manipuler confortablement celle d'espace localement partiellement ordonné. L'intérêt de ce formalisme, outre sa maniabilité du point de vue théorique, est de permettre différentes "complétions" de la catégorie  $\text{LPoSpc}$ . Cependant, les techniques mises en jeu sont extrêmement abstraites et fournissent des résultats difficilement utilisables en pratique. Compte tenu de la finalité applicative des travaux de cette thèse, nous

ne développerons pas plus cette approche en dépit du fait qu'elle soit extrêmement intéressante. Enfin, on vérifie aisément que la proposition XII.3.8 est applicable dans le cadre de  $\text{LPoSpc}$ , elle fournit ainsi une notion de dihomotopie pour  $\text{LPoSpc}$  et donc un foncteur catégorie fondamentale  $\overrightarrow{\pi}_1$  définie sur  $\text{LPoSpc}$  à valeurs dans  $\text{OwCat}$  d'après le corollaire XIII.4.30,  $\text{OwCat}$  étant la sous-catégorie pleine de  $\text{Cat}$  dont les objets sont les petites catégories  $\mathcal{C}$  telles que  $\text{Iso}(\mathcal{C})$  est pure et discret dans  $\mathcal{C}$ . En particulier, la notion d'homotopie induite par la proposition XII.3.8 correspond à celle de [37]. On note  $i$  l'inclusion de  $\text{LPoSpc}$  dans  $\text{PoSpc}$  (voir lemme XIII.4.12) et  $i'$  celle de  $\text{LfCat}$  dans  $\text{OwCat}$ . En désignant par  $\overrightarrow{\pi}_1$  à la fois le foncteur catégorie fondamentale défini sur  $\text{PoSpc}$  et celui défini sur  $\text{LPoSpc}$ , on a

### XIII.4.32 THÉORÈME

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{PoSpc} & \xrightarrow{i} & \text{LPoSpc} \\
 \downarrow \overrightarrow{\pi}_1 & & \downarrow \overrightarrow{\pi}_1 \\
 \text{LfCat} & \xrightarrow{i'} & \text{OwCat}
 \end{array}$$

PREUVE. La preuve repose sur les deux lemmes suivants qui sont les analogues du lemme XIII.3.18 et du corollaire XIII.3.17.

### XIII.4.33 LEMME

Soit  $\overrightarrow{X}$  un objet de  $\text{PoSpc}$ . Pour tout dichemin  $\beta$  sur  $i(\overrightarrow{X})$  il existe un dichemin  $\alpha$  sur  $\overrightarrow{X}$  tel que  $i(\alpha) = \beta$ .

### XIII.4.34 LEMME

Soit  $\overrightarrow{X}$  un objet de  $\text{PoSpc}$ . Pour tous dichemins  $\alpha_1, \alpha_2$  sur  $\overrightarrow{X}$  on a

$$\alpha_1 \sim_{\overrightarrow{X}} \alpha_2 \text{ si et seulement si } i(\alpha_1) \sim_{i(\overrightarrow{X})} i(\alpha_2)$$

■

Enfin, on vérifie que  $\text{LPoSpc}$  est une catégorie à chemin topologiquement concrète.



## XIV.1 HOMOTOPIE ET HOMOLOGIE

La topologie algébrique classique offre principalement deux outils de classification des espaces topologiques: l'homotopie et l'homologie. La première partie de cette thèse généralise la notion classique d'homotopie pour étudier les modèles géométriques des programmes PV. Dans l'introduction générale, on a déjà montré pourquoi on ne peut se contenter d'étudier l'homotopie classique de l'espace topologique sous-jacent au modèle géométrique d'un programme donné, c'est ce qui a conduit à la définition d'homotopie dirigée d'un espace ordonné. Il reste à expliquer pour quelle raison on s'est intéressé à l'homotopie plutôt qu'à l'homologie. En topologie algébrique classique, la notion d'homotopie fournit un outil théorique de classification des espaces topologiques extrêmement puissant. En contrepartie, le calcul pratique du type d'homotopie d'un espace topologique (c'est-à-dire la détermination de tous ses groupes d'homotopie) est extrêmement difficile.

Pour illustrer ce fait, soulignons que le calcul du  $p^{\text{ème}}$  groupe d'homotopie de la sphère  $S^n$  (où  $p, n \in \mathbb{N}$ ) est un problème difficile bien qu'il ne mette en jeu que des objets mathématiques dont la définition est très simple. Plus précisément, on sait que le  $p^{\text{ème}}$  groupe d'homotopie pour  $p \geq 2$  de n'importe quel espace topologique est abélien. Si de plus, il est de **type fini**<sup>1</sup>, alors on sait que ce groupe est le produit dans **Ab** d'une famille de groupes abéliens  $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$  où  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  et  $k \geq 1$ . Notons que l'on a  $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \cong \{0\}$  dans **Ab**, c'est pourquoi on peut supposer que si  $k \geq 2$ , alors quel que soit l'indice  $i$  dans  $\{1, \dots, k\}$ , on a  $n_i \neq 1$ . On est donc ramené à calculer une fonction définie sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  à valeurs dans l'ensemble des suites finies d'entiers naturels. En pratique, on ne connaît les valeurs de cette fonction que pour quelques familles particulières de couples  $(n, p)$  d'entiers naturels dont on trouve un récapitulatif au 4<sup>ème</sup> chapitre de [44].

<sup>1</sup>Un groupe  $\mathbb{G}$  est de type fini lorsqu'il existe une sous-partie finie  $F$  de  $\mathbb{G}$  telle que tout élément de  $\mathbb{G}$  puisse être écrit comme une composée d'éléments de  $F$ .

Dès que l'on souhaite effectuer des calculs, on préfère donc à la notion d'homotopie celle d'**homologie** d'un espace topologique qui pour chaque  $p \in \mathbb{N}$  donne un foncteur  $H_p$  de  $\mathbf{Spc}$  dans  $\mathbf{Ab}$  associant tout espace topologique  $X$  son  $p^{\text{ème}}$  groupe d'homologie. L'intérêt pratique des calculs d'homologie dans diverses branches des sciences informatiques est d'ailleurs l'objet de [54]. On retrouve cet argumentaire en faveur de l'homologie à la page 70 de [94]. La question qui vient alors naturellement à l'informaticien est: pourquoi avoir préféré une approche *via* un outil théorique qui, semble-t-il, mène à des problèmes indécidables même dans les cas les plus simples, ceci alors que d'une part, on veut en fin de compte avoir un outil pratique permettant l'étude de programme concret, et que d'autre part, un autre outil offre une alternative qui ne présente pas ce défaut? La réponse est de nature mathématique, en effet, jusqu'à présent, on a pas trouvé de "bonne" généralisation "dirigée" de l'homologie classique. En fait, plusieurs auteurs ont proposé diverses approches: citons [38], [26], [32], *Ulrich Fahrenberg* dans des communications privées et enfin la thèse de *Philippe Malbos* ([64]), dont les travaux sur l'homologie et la réécriture semblent avoir un lien assez étroit avec les questions qui nous préoccupent ici. Chacune des approches évoquées précédemment possèdent certains attraits bien qu'aucune ne semble être totalement satisfaisante. Donnons quelques repères techniques, pour définir une homologie sur une catégorie  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire définir des groupes d'homologie en toute dimension  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout objet de  $\mathbf{C}$ , il suffit d'avoir un foncteur de  $\mathbf{C}$  dans une catégorie abélienne  $\mathbf{A}$  (voir [59] ou [10]). Cette vision, très générale, est celle de l'homologie algébrique, voir [80] pour une introduction, [86] ou [87] pour plus d'informations et [63] pour aller vraiment plus loin. L'homologie algébrique trouve ses racines dans la topologie algébrique sous la forme de l'homologie singulière et de l'homologie simpliciale, les deux étant définies de façons très différentes mais finalement équivalentes, voir [74], [65] ou [44].

Toute la difficulté est alors de trouver, s'il existe, un foncteur de  $\mathbf{PoSpc}$  dans une catégorie abélienne donnant lieu à une "bonne" homologie. Notons à ce propos que la généralisation la plus naturelle de l'homologie singulière à  $\mathbf{PoSpc}$ , que l'on appelle homologie singulière dirigée, ne convient pas. En fait,

#### XIV.1.1 CONJECTURE

Pour tout espace partiellement ordonné  $\vec{X} \subseteq \vec{\mathbb{R}}^n$  modèle d'un programme PV et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\vec{H}_n(\vec{X}) \cong H_n(X) \text{ dans } \mathbf{Ab},$$

où le membre de gauche est l'homologie singulière dirigée tandis que celle de droite est l'homologie singulière classique (de  $X$ , l'espace sous-jacent de  $\vec{X}$ ).

Cette affirmation se vérifie sur des exemples simples qui suffisent à conclure que l'homologie singulière dirigée n'est pas celle que l'on souhaite.

Pour finir, il est possible que ce soit le fait d'avoir recours à des foncteurs dont le codomaine est une catégorie abélienne qui pose problème. Pour formaliser cette affirmation, il faudrait donner une liste des propriétés que l'on souhaite voir satisfaites par une homologie sur  $\mathbf{PoSpc}$  et montrer que, si l'on s'en tient à des foncteurs à valeurs dans une catégorie abélienne, une telle homologie n'existe pas. On pourrait alors, avec l'inconvénient majeur de perdre *a priori* tous les résultats élémentaires connus pour l'homologie algébrique, envisager de relâcher l'hypothèse selon laquelle le codomaine du

foncteur qui donne l'homologie doit être une catégorie abélienne.

Face aux difficultés de l'approche homologique, il semble dans un premier temps plus raisonnable d'explorer la voie homotopique puisque, comme on l'a vu dans la première partie, cette dernière s'adapte très naturellement et avec de bonnes propriétés au cas dirigé.

## XIV.2 L'APPROCHE AXIOMATIQUE DE L'HOMOTOPIE

---

Comme on l'a annoncé dans l'introduction de la thèse, trouver (ou prouver qu'il ne peut y avoir) une structure de modèles à la *Quillen* sur  $\text{PoSpc}$  dont l'homotopie sous-jacente induise l'homotopie dirigée entre les chemins dirigés est un objectif théorique à long terme. Etant plus préoccupé, dans l'idée du développement d'un outil informatique, par des méthodes de calcul concrètes, je n'ai investi qu'une partie limitée de mon temps de recherche à cette question. Cependant, au regard de l'importance de la notion de structure de modèles, je n'ai pas complètement éludé la question de savoir si une telle structure existe sur  $\text{PoSpc}$ . Voici les quelques idées que j'ai à ce sujet, elles sont, pour l'essentiel, le fruit d'une collaboration avec *Kathryn Hess*, *Krzysztof Worytkiewicz*, *Peter Bubenik* de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne et *Eric Goubault*.

La notion de catégorie de modèles, due à *Daniel Quillen*, est le résultat d'une axiomatisation de la topologie algébrique. Bien qu'il ne faille pas plus de deux pages pour en donner une définition formelle, il est impossible d'en saisir la signification à la seule lecture des axiomes qui la définissent. On trouve dans [82] une présentation très détaillée qui met en évidence le chemin par lequel on extrait des résultats de la topologie algébrique ceux que l'on prend pour axiome de la théorie des catégories de modèles tandis que [49] définit d'emblée la notion et l'illustre de plusieurs exemples. Quelque soit l'approche choisie, il ressort toujours que les structures de catégories de modèles sont très contraignantes, aussi est-il, pour les cas non triviaux, difficile de prouver que l'on a une telle structure. Parmi les ouvrages consacrés au sujet, on trouve [82], [49] et [48], lesquels adoptent une définition de catégorie de modèles légèrement plus forte que celle originalement proposée par *Daniel Quillen*. Notamment, dans l'approche originale, on exige que la catégorie sous-jacente soit finiment complète et co-complète alors que dans la nouvelle, on demande à ce qu'elle soit complète et co-complète. En effet, il est très fréquent en théorie des catégories de modèles d'avoir recours à des inductions transfinies, c'est pourquoi on a besoin d'avoir toutes les limites et colimites. De toute manière, c'est souvent l'existence des co-égalisateurs qui pose problème. Voici brièvement le principe de cette théorie:

Dans certaines catégories, dont  $\text{Top}$ , on peut définir de façon naturelle ce qu'est une homotopie (voir la définition B.2.3 dans le cas de  $\text{Top}$ ). On peut alors, dans certain cas, en déduire trois classes de morphismes  $WE$ ,  $Cof$  et  $Fib$  dont les éléments sont respectivement appelés équivalences faibles, cofibrations et fibrations et dont on prouve qu'elles satisfont un ensemble d'axiomes, exprimés en termes catégoriques, ne faisant plus intervenir directement l'homotopie mais seulement  $WE$ ,  $Cof$  et  $Fib$ . On a en particulier cette situation dans  $\text{Top}$ . Réciproquement, si  $WE$ ,  $Cof$  et  $Fib$  sont trois classes de morphismes qui satisfont les axiomes d'une structure de modèles, alors on a une sorte de "notion d'homotopie" correspondante.



En pratique, comme le souligne *Mark Hovey* et *Philip Hirschhorn* dans l'introduction de leurs ouvrages respectifs [49] et [48], les catégories de modèles permettent d'inverser formellement (voir [25]) et de façon "cohérente" (grâce aux axiomes vérifiés par une catégorie de modèles) certains morphismes d'une catégorie (les éléments de  $WE$ ) qui, dans un certain contexte, peuvent être considérés comme inversibles. En conséquence, on rend isomorphes des objets qui n'étaient qu'équivalents dans la catégorie initiale. Par exemple, dans  $Top$ , c'est l'homotopie qui dicte quels morphismes doivent être inversés. Donc quelque soit la méthode utilisée, il faut se focaliser sur ce que l'on souhaite rendre équivalent.

Comme on l'a vu au chapitre II, la catégorie  $PoSpc$  permet très naturellement de définir une notion d'homotopie (appelée homotopie dirigée dans la définition II.1.3). En outre, pour l'étude du parallélisme, c'est l'homotopie dirigée qui est importante. Au vu de l'introduction de ce chapitre, le problème est alors de savoir si elle induit une structure de catégorie de modèles sur  $PoSpc$ . Du point de vue du dogme de cette théorie, l'homotopie dirigée n'aura d'intérêt que si c'est le cas. Du point de vue pratique, c'est celui qu'adopte *Marco Grandis*, et puisque la définition d'homotopie dirigée est très naturelle et que c'est celle qui nous intéresse, on doit en tenir compte même s'il n'est pas possible d'avoir recours aux structure de catégorie de modèles pour l'étudier.

Nous allons maintenant voir que, même si l'homotopie dirigée induit une structure de catégorie de modèles sur  $PoSpc$ , celle-ci a de mauvaises propriétés. Ces difficultés ont été mises en évidence lors d'une collaboration avec *Kathryn Hess*, *Krzysztof Worytkiewicz* et *Peter Bubenik* à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Pour cela, commençons

par insister sur le fait qu'en aucun cas, les espaces ordonnés  $\mathbb{N}$  et  $\overrightarrow{[0, 1]}$

ne doivent être considérés comme faiblement équivalents. En particulier, l'inclusion du second espace ordonné dans le premier ne doit pas être une équivalence faible, c'est-à-dire un élément de  $WE$ . Doit-on alors considérer l'inclusion de l'objet terminal  $*$  de  $PoSpc$

à la source de la flèche  $\uparrow$ , c'est-à-dire  $* \mapsto 0 \in \overrightarrow{[0, 1]}$  comme une équivalence de catégorie ou une cofibration? Dans  $Top$ , il est évident que les inclusions induites entre les

espaces topologiques sous-jacents sont des cofibrations triviales, c'est-à-dire des éléments de  $WE \cap Cof$ . *A priori*, il est déraisonnable d'envisager une structure de catégorie de modèles sur  $PoSpc$  dans laquelle l'inclusion de  $*$  dans  $[0, 1]$  ne soit pas une cofibration. Supposons par ailleurs que c'est une équivalence faible. Alors la structure des modèles

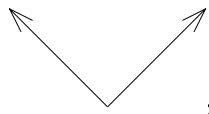
sur  $PoSpc$  ne peut pas être propre à gauche, c'est-à-dire être telle que si  $i \uparrow$  avec

$i \in Cof$  et  $f \in WE$ , alors la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f'} & Y \\ i \uparrow & & \uparrow j \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

existe dans la catégorie sous-jacente et  $f' \in WE$ . En effet, en prenant  $X := *$ ,  $A := B :=$

$\overrightarrow{[0, 1]}$  et  $i := f := * \mapsto 0 \in \overrightarrow{[0, 1]}$ , on obtient la somme amalgamée  $Y$  représentée ci-dessous



et  $f'$  est l'inclusion de  $\overrightarrow{[0, 1]}$  dans la "branche de gauche" de  $Y$ , qui d'après la propriété de propreté à gauche devrait être une équivalence faible puisque l'on a supposé que  $f$  en est une. Ainsi, à cause de la contrainte que l'on impose à une "bonne" structure de modèles  $(WE, Cof, Fib)$  sur  $PoSpc$  de vérifier, il est impossible que les trois assertions suivantes soient simultanément vérifiées:

1.  $(PoSpc, WE, Cof, Fib)$  est propre à gauche,
2.  $(* \mapsto 0 \in \overrightarrow{[0, 1]}) \in WE$ ,
3.  $(* \mapsto 0 \in \overrightarrow{[0, 1]}) \in Cof$ .

En particulier, supposons que l'on relève la<sup>2</sup> structure de modèles sur  $Spc^3$  via le foncteur d'oubli  $U$ , c'est-à-dire que  $f \in WE(PoSpc)$  respectivement  $Cof(PoSpc)$  ou  $Fib(PoSpc)$  si et seulement si  $f \in WE(Spc)$  respectivement  $Cof(Spc)$  ou  $Fib(Spc)$ , et que l'on obtienne ainsi, mais cela reste à prouver, une structure de modèles sur  $PoSpc$ . D'après les critères que l'on a imposé précédemment, cette structure sera sans intérêt puisqu'elle vérifiera les trois assertions précédentes.

Comme on l'a déjà signalé, on ne peut pas espérer de structure intéressante si l'on n'a pas la 3<sup>ème</sup> assertion. Pour ce qui est des deux autres, le choix est plus difficile. Si l'on renonce à la première, alors on a une structure moins maniable. Si l'on renonce à la seconde en gardant la première, alors les axiomes des catégories de modèles sont tels que l'on perd de nombreuses autres équivalences faibles. Cette difficulté est un sérieux frein à l'emploi des structures de modèles dans l'étude de  $PoSpc$ . Néanmoins, l'aspect positif est que, dans toutes les autres catégories qui ont été proposées pour étudier la topologie algébrique dirigée, on se heurte à un problème similaire. *Philippe Gaucher*, dans l'étude de *Flot* (voir l'appendice XIII.1), de même que *Krzysztof Worytkiewicz* dans celle des localisations des petites sous-catégories de la catégorie des espaces partiellement ordonnés locaux, ont fait le choix de conserver la propreté à gauche tandis que dans ses travaux sur *dTop* (voir l'appendice XIII.1) *Marco Grandis* n'utilise pas les catégories de modèles à la *Quillen* mais plutôt à la *Kan*.

Informellement, je pense que le problème de la propreté à gauche dans l'étude de la topologie algébrique dirigée a la même origine que celui que l'on rencontre lorsque l'on veut établir un théorème de *Van Kampen* pour les catégories de composantes (voir chapitre VI). En effet, pour obtenir la somme amalgamée dans la catégorie souhaitée, on est obligé d'ajouter des hypothèses qui portent sur la somme amalgamée dans une catégorie sous-jacente (voir théorème VI.3.1). Or, en un certain sens, ces hypothèses reviennent exactement à supposer, avec les notations précédentes, que  $f'$  est une équivalence faible. Je serai donc plutôt enclin à relâcher la 1<sup>ère</sup> assertion pour conserver la 2<sup>ème</sup>. En effet, une

<sup>2</sup>Il y en a en fait principalement deux, selon que l'on considère les fibrations de *Serre* ou de *Hurewicz*.

<sup>3</sup>ou plutôt l'une de ses sous-catégories.

structure de modèles sur  $\text{PoSpc}$  représentant de façon adéquate l’homotopie dirigée est plus vraisemblablement propre à droite, c’est-à-dire qu’elle satisfait la propriété duale de la propreté à gauche. En revanche, si  $*$  représente un programme “qui ne fait rien”, alors  $\overrightarrow{[0, 1]}$  représente un programme qui, du point de vue du parallélisme, n’offre aucune possibilité de branchement et donc est “équivalent” à un programme qui ne fait rien. D’une certaine manière, tout programme purement séquentiel est trivial vis à vis de l’étude du parallélisme. En admettant l’équivalence entre  $*$  et  $\overrightarrow{[0, 1]}$  on peut “localement” et sous certaines conditions qui restent à découvrir, identifier  $\overrightarrow{[0, 1]}$  et  $*$ . L’idée est d’avoir une sorte de “propreté à gauche restreinte” tout comme le théorème de *Van Kampen* pour les catégories de composantes (cf théorème VI.3.1) est restreint par rapport à son analogue pour les espaces ordonnés parce qu’il suppose des hypothèses plus fortes pour une conclusion similaire. Dans [13], *Peter Bubenik* propose une catégorie pour modéliser la concurrence issue de la topologie et d’une forme de “contrainte” sur les applications continues appelées *context* dans son article. Son approche généralise la notion de bipointage. Plus précisément, un *context* est un objet fixé  $A$  de  $\text{PoSpc}$ , la catégorie utilisée pour modéliser la concurrence est alors

$$A \downarrow \text{PoSpc}$$

Un autre aspect intéressant des catégories de modèles est qu’elles permettent de “compléter et co-compléter” certaines petites catégories en conservant une notion d’homotopie. Le procédé est très technique et fait en outre appel aux préfaisceaux, faisceaux (voir [60]) et à la méthode, propre aux catégories de modèles, de localisation (voir [48]). La catégorie des espaces localement ordonnés, notée  $\text{LPoSpc}$ , n’est pas complète et, très vraisemblablement bien que je n’en n’ai pas la preuve formelle, pas co-complète non plus; *Krzysztof Worytkiewicz* a cependant remarqué que les faisceaux fournissent un cadre pratique et élégant pour définir et manipuler les espaces localement ordonnés. Une idée assez naturelle consiste alors à extraire de  $\text{LPoSpc}$  une petite sous-catégorie qui contienne tous les objets “intéressants” de  $\text{LPoSpc}$ . Cependant, les techniques de complétion précédemment citées nécessitent une “machinerie” mathématique fine et sont difficilement contrôlables. Autrement dit, après complétion, il est très difficile de déterminer quelles sont, par exemples, les équivalences faibles, cofibrations et fibrations de la complétion. Cette voie de recherche a conduit à plusieurs rencontres avec *Kathryn Hess*, *Krzysztof Worytkiewicz* et *Peter Bubenik* à l’Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne et au centre CEA de Saclay. Toujours dans l’optique d’utiliser la notion de faisceaux comme support d’étude de la concurrence, *Sanjeevi Krishnan* a défini la notion de *stream*<sup>4</sup>. Son idée est de munir chaque ouvert d’un espace topologique (de *Hausdorff*)  $X$  d’un préordre (fermé) de sorte que si deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  appartenant à un même ouvert  $U \subseteq X$  sont tels que  $x \preceq y$  et  $y \preceq x$ , alors il existe un autre ouvert  $V$  tel que  $x, y \in V \subseteq U \subseteq X$  mais que  $x \not\preceq y$  ou  $y \not\preceq x$ . Bien entendu, si on a  $x \not\preceq y$  dans  $V$  et que l’on considère  $V'$ , on voudrait encore que  $x \not\preceq y$  dans  $V'$ . Cette idée est traduite formellement par le fait que l’on a un faisceau. Pour plus de détails voir [55].

---

<sup>4</sup>ou “courant” en français

Notons enfin, pour information, que *Hans Joachim Baues* définit dans [3] et [5] une notion de catégorie de cofibrations, et dualement de catégorie de fibrations. Elle est liée à celle de catégorie de modèles mais avec des hypothèses *a priori* plus faibles au sens où toute catégorie de modèles induit une catégorie de cofibration dont la catégorie sous-jacente peut cependant différer légèrement. Le problème est que, dans cette définition, la propriété à gauche est un axiome de la théorie. Dualement, la propriété à droite est incluse dans la définition d'une catégorie de fibrations.

En conclusion si une approche par l'homotopie algébrique est possible, c'est, semble-t-il, au moyen d'une catégorie de modèles propre à droite ou d'une catégorie de fibrations. Tout ceci est cependant très informel et purement spéculatif. Dans cette thèse, on s'est plutôt orienté vers l'approche de *Marco Grandis*, c'est-à-dire que l'on privilégie l'homotopie dirigée comme objet d'étude sans se préoccuper, au moins dans un premier temps, de la structure de modèles qu'elle pourrait induire.



Cet appendice récapitule tous les résultats classiques de la théorie des catégories qui sont utilisés dans cette thèse. Seules les congruences généralisées n'ont été, à ma connaissance, abordées dans aucun manuel, elles sont définies dans [7] afin d'étudier les épimorphismes de  $\text{Cat}$ . En fait, elles apparaissent déjà de façon implicite dans [50]. Pour tous les autres points qui traités, [9], [10], [11] et [59] ont été mes sources principales et couvrent très largement le spectre de ce que j'ai pu utiliser. La section consacrée à la théorie des ensembles requise pour gérer les grandes catégories n'est là que pour assurer un confort théorique. Etant donné l'omniprésence des catégories dans mon travail de thèse, j'ai inclus les notes qui suivent pour faciliter la lecture de l'ensemble en fixant les notations et la terminologie.

## A.1 CATÉGORIES ET FONCTEURS

### A.1.1 DÉFINITION (CATÉGORIE)

Une **petite catégorie**  $\mathcal{C}$  est définie par deux ensembles  $Ob(\mathcal{C})$  et  $Mo(\mathcal{C})$ , trois fonctions  $src$ ,  $tgt$  et  $id$  dont l'ensemble et le co-ensemble de définition sont précisées par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{src} & \\
 Mo(\mathcal{C}) & \xleftarrow{id} & Ob(\mathcal{C}) \\
 & \xrightarrow{tgt} & 
 \end{array}$$

ainsi que, pour chaque  $(a, b, c) \in Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{C})$ , une loi de composition

$$\mathcal{C}[b, c] \times \mathcal{C}[a, b] \xrightarrow{\circ_{a,b,c}} \mathcal{C}[a, c]$$

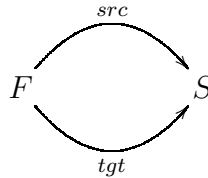
De plus, on demande que les données précédentes vérifient :

1.  $\forall(\gamma, \beta, \alpha) \in \mathcal{C}[c, d] \times \mathcal{C}[b, c] \times \mathcal{C}[a, b], \quad \gamma \circ_{a,c,d} (\beta \circ_{a,b,c} \alpha) = (\gamma \circ_{b,c,d} \beta) \circ_{a,b,d} \alpha,$
2.  $\forall(a, b) \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}), \quad \forall \alpha \in \mathcal{C}[a, b], \quad \text{id}(b) \circ_{a,b,b} \alpha = \alpha \circ_{a,a,b} \text{id}(a) = \alpha,$
3.  $\forall a \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \quad \text{src}(\text{id}(a)) = \text{tgt}(\text{id}(a)) = a.$

Dans la définition précédente, on a implicitement posé  $\mathcal{C}[a, b] := \{\alpha \in \text{Mo}(\mathcal{C}) \mid \text{src}(\alpha) = a \text{ et } \text{tgt}(\alpha) = b\}$ . Les éléments de  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  sont par définition les **objets** de  $\mathcal{C}$  tandis que ceux de  $\text{Mo}(\mathcal{C})$  en sont les **morphismes**. On notera aussi  $\text{id}_a$  au lieu de  $\text{id}(a)$  et, bien sûr  $\circ$  au lieu de  $\circ_{a,b,c}$  ou même, quelquefois,  $\circ$  sera simplement omis. La loi de composition  $\circ$  peut aussi être vu globalement comme une fonction partiellement définie sur  $\text{Mo}(\mathcal{C}) \times \text{Mo}(\mathcal{C})$  à valeurs dans  $\text{Mo}(\mathcal{C})$ . Le premier axiome exprime l'associativité de  $\circ$ , les second et troisième que, localement en chaque objet,  $\circ$  possède un élément neutre. D'une certaine façon, on peut voir une catégorie comme un graphe muni d'une loi de composition locale sur l'ensemble de ses flèches, qui sont alors les morphismes de la catégorie. Lorsque l'on fera référence à un graphe, ce sera toujours au sens suivant :

#### A.1.2 DÉFINITION (GRAPHE)

Un graphe est un quadruplet  $(S, F, s, t)$  où  $S$  et  $F$  sont des ensembles et où  $s$  et  $t$  des fonctions de  $F$  dans  $S$ .



Les éléments de  $S$  sont les **sommets** et ceux de  $F$  les **flèches** du graphe. Etant donné  $f$ , une flèche d'un graphe ou un morphisme d'une catégorie,  $\text{src}(f)$  et  $\text{tgt}(f)$  sont respectivement appelés la **source** et le **but** de  $f$ . Remarquons que, étant donnée une petite catégorie  $\mathcal{C}$ , en "oubliant"  $\circ$  et  $\text{id}$ , on obtient un graphe dit **sous-jacent**.

#### A.1.3 DÉFINITION (SUITE COMPOSABLE)

Dans un graphe  $(S, F, s, t)$ , une **suite composable** est une suite finie de flèches  $(f_n, \dots, f_1)$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , telle que quel que soit l'indice  $k$  de  $\{1, \dots, n-1\}$ , on a  $t(f_k) = s(f_{k+1})$

Par extension, une suite composable d'une catégorie est une suite composable de son graphe sous-jacent. Noter que la suite vide est composable. Graphes et catégories sont étroitement liés, en particulier, on peut associer de façon "canonique" une catégorie à un graphe  $\Gamma := (S, F, s, t)$  :

L'ensemble des objets est  $S$ , celui des morphismes est l'ensemble des triplets  $(b, (f_n, \dots, f_1), a)$  tels que :

- la suite  $(f_n, \dots, f_1)$  est composable,
- si la suite  $(f_n, \dots, f_1)$  n'est pas vide, alors  $t(f_n) = b$  et  $s(f_1) = a$ ,
- si la suite  $(f_n, \dots, f_1)$  est vide, alors  $a = b$ .

Naturellement, on pose

- $\text{id}_a := (a, a),$

- $src(b, (f_n, \dots, f_1), a) := a,$
- $tgt(b, (f_n, \dots, f_1), a) := b,$
- $(c, (g_m, \dots, g_1), b) \circ (b, (f_n, \dots, f_1), a) := (c, (g_m, \dots, g_1, f_n, \dots, f_1), a).$

On vérifie immédiatement que l'on a bien défini une catégorie appelée la **catégorie libre engendrée** par  $\Gamma$ . Enfin, une suite composable  $(f_n, \dots, f_1)$ , où  $n$  est un entier naturel distinct de 0, dont aucun terme n'est une identité et dont la composée est  $g$  est appelée une **décomposition** de  $g$ . Par ailleurs, si  $n$  est supérieur ou égal à 2, cette décomposition est dite **propre**.

#### A.1.4 DÉFINITION (FONCTEUR)

Un **foncteur**  $F$ , défini sur une catégorie  $\mathcal{C}_1$  à valeurs dans une catégorie  $\mathcal{C}_2$ , est une paire de fonctions  $(Ob(F), Mo(F))$  respectivement définies sur  $Ob(\mathcal{C}_1)$ ,  $Mo(\mathcal{C}_1)$  et respectivement à valeurs dans  $Ob(\mathcal{C}_2)$ ,  $Mo(\mathcal{C}_2)$

$$Ob(\mathcal{C}_1) \xrightarrow{Ob(F)} Ob(\mathcal{C}_2) \qquad Mo(\mathcal{C}_1) \xrightarrow{Mo(F)} Mo(\mathcal{C}_2)$$

telles que :

1. Pour toute suite composable  $(\beta, \alpha)$  de  $\mathcal{C}_1$ ,  $Mo(F)(\beta \circ_1 \alpha) = Mo(F)(\beta) \circ_2 Mo(F)(\alpha)$ ,
2. Pour tout morphisme  $\alpha$  de  $\mathcal{C}_1$ ,  
 $Ob(F)(src_1(\alpha)) = src_2(Mo(F)(\alpha))$  et  $Ob(F)(tgt_1(\alpha)) = tgt_2(Mo(F)(\alpha))$ ,
3. Pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{C}_1$ ,  $Mo(F)(id_1(a)) = id_2(Ob(F)(a))$ .

Si  $F$  est un foncteur de  $\mathcal{C}_1$  vers  $\mathcal{C}_2$  et  $G$  est un foncteur de  $\mathcal{C}_2$  vers  $\mathcal{C}_3$ , alors on définit la composée  $G \circ F$  par  $(Ob(G) \circ Ob(F), Mo(G) \circ Mo(F))$ .

Autrement dit, la composition de foncteurs se fait sur les objets et sur les morphismes en utilisant la composition des applications. Son associativité en découle trivialement.

### A.1.1 CADRE ENSEMBLISTE

#### LE PROBLÈME DES GRANDES CATÉGORIES

Au vu de la définition A.1.1, il est naturel de penser que, formellement, la collection de tous les ensembles, la collection des toutes les applications entre ensembles, la composition d'applications, les ensembles de définition, les co-ensembles de définition et les applications identités en guise d'objets, de morphismes, de composition, de source, de but et d'identités forment la "catégorie des ensembles". Malheureusement, le paradoxe de *Cantor* affirme que les collections mises en jeu ne sont pas des ensembles (voir [56], [57] ou n'importe quel manuel de théorie des ensembles). On ne peut donc pas appliquer directement la définition A.1.1. Pour que les catégories soient utiles à la topologie algébrique (qu'elle soit dirigée ou pas) et plus généralement aux mathématiques, il faut pouvoir gérer des catégories telles que celle des ensembles. Les collections des groupes, espaces topologiques, anneaux, ensembles (partiellement) ordonnés etc forment également, avec les morphismes convenables, des "catégories" présentant le même problème que celle des ensembles. D'une certaine manière, ces collections sont trop "grandes" par opposition à celles qui entrent dans le cadre de la définition A.1.7 qui sont qualifiées de "petites".



On va maintenant introduire une théorie des ensembles qui permet naturellement de donner un sens formel aux termes “petite catégorie” ou “grande catégorie”. Quelques notions de logique, et en particulier celles de modèle d’une théorie du premier ordre et de formule relativisée, sont nécessaires ici. Les ouvrages [15], [16] et [56] sont d’excellentes références en la matière. Soit donc  $(\Omega, \in)$  un modèle de la théorie des ensembles ZFC (Zermelo Fraenkel avec axiome du Choix, voir [56] ou [57]). Les membres de la collection  $\Omega$  sont traditionnellement appelés “ensemble”, on parle aussi de points de  $\Omega$ . Dans ce qui suit, on va différencier les deux terminologie. On note  $\in$  la relation d’appartenance du modèle. Un point  $\mathcal{U}$  de  $\Omega$  est appelé **univers** (de  $\Omega$ ) si, par définition, pour tous points  $x, y$  de  $\Omega$  et toute famille de points  $(x_i)_{i \in I} := \{x_i \mid i \in I\}$  de  $\Omega$  indexée par un point  $I$  de  $\Omega$ , les propriétés suivantes sont satisfaites :

1.  $x \in \mathcal{U}$  et  $y \in x \Rightarrow y \in \mathcal{U}$ ,
2.  $I \in \mathcal{U}$  et  $\forall i \in I \ x_i \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$ ,
3.  $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$ ,
4.  $x \in \mathcal{U}$  et  $f : x \rightarrow \mathcal{U} \Rightarrow \{f(z) \mid z \in x\} \in \mathcal{U}$ ,
5.  $\mathcal{U}$  est infini.

Cette définition diffère de celle que l’on trouve dans [9] et ne lui est pas équivalente à cause du quatrième point. Le cinquième point peut aussi être remplacé par l’assertion

$$\mathbb{N} \in \mathcal{U},$$

encore qu’il faille alors être très précis sur le sens que l’on donne à  $\mathbb{N}$ . En théorie des ensembles, on préférerait écrire  $\omega \in \mathcal{U}$  où  $\omega$  est le premier ordinal non fini. Dans les cinq points évoqués, les notations  $y \subseteq x$  et  $\bigcup_{i \in I} x_i$  sont à comprendre relativement à  $(\Omega, \in)$ . Le premier point se résume en disant que  $\mathcal{U}$  est transitif dans  $\Omega$ , cette idée est primordiale dans l’étude des modèles de la théorie des ensembles (cf [56] ou [57]). Elle permet de prouver que, pour une certaine famille de formules de la théorie des ensembles, être vérifiée relativement à  $(\Omega, \in)$  implique d’être vérifiée relativement à  $(\mathcal{U}, \{(x, y) \mid x \in \mathcal{U}; y \in \mathcal{U}; x \in y\})$ . En particulier, on peut prouver que  $(\mathcal{U}, \{(x, y) \mid x \in \mathcal{U}; y \in \mathcal{U}; x \in y\})$  est un modèle (c’est-à-dire satisfait tous les axiomes relativisés à  $(\mathcal{U}, \{(x, y) \mid x \in \mathcal{U}; y \in \mathcal{U}; x \in y\})$ ) de ZFC. On a

#### A.1.5 PROPOSITION

Tout univers  $\mathcal{U}$  d’un modèle  $(\Omega, \in)$  de ZFC est un modèle de ZFC. De plus  $\mathcal{U}$  est un sous-modèle de  $\Omega$ .

Sans détailler complètement la notion de sous-modèle, observons l’exemple suivant : considérons  $x, y \in \mathcal{U}$ ,  $\{x, y\}$  est le seul point de  $\Omega$  tel que pour tout point  $z$  de  $\Omega$ ,  $z \in \{x, y\}$  si et seulement si  $z = x$  ou  $z = y$ . C’est la paire relativisée à  $\Omega$ . Puisque  $\mathcal{U}$  est un modèle de ZFC, il existe  $p \in \mathcal{U}$  tel que pour tout élément  $z$  de  $\mathcal{U}$  (noter que l’on ne prend plus  $z$  dans  $\Omega$ ),  $z \in p$  si et seulement si  $z = x$  ou  $z = y$ . La question est, a-t-on  $p = \{x, y\}$ , ou encore, se pourrait-il qu’il existe un point  $z$  de  $\Omega$  tel que  $z \in p$  sans pour autant que

$z = x$  ou  $z = y$ ? Bien entendu, si un tel  $z$  existe, il ne peut pas être un élément de  $\mathcal{U}$ . Supposons qu'il existe et notons le  $z$ , on a  $z \in p$  et  $p \in \mathcal{U}$ , donc d'après le premier point  $z \in \mathcal{U}$ , ce qui est une contradiction. Finalement on a bien  $p = \{x, y\}$ . On peut aussi, de façon analogue, prouver que si  $z \in \mathcal{U}$ , alors le point  $p$  de  $\Omega$  qui joue le rôle d'ensemble des parties de  $z$  dans  $(\mathcal{U}, \{(x, y) | x \in \mathcal{U}; y \in \mathcal{U}; x \in y\})$  est  $\mathcal{P}(z)$ , autrement dit, le point de  $\Omega$  qui joue le rôle d'ensemble des parties de  $z$  dans  $\Omega$ . On peut encore constater ce phénomène pour l'union d'une famille d'éléments de  $\mathcal{U}$  etc.

Ainsi, du point de vue de "l'utilisateur", c'est-à-dire du mathématicien qui n'a pas besoin de plus de ressources que celles offertes par un modèle de ZFC, travailler dans  $\Omega$  ou dans  $\mathcal{U}$  ne fait aucune différence. L'axiome des univers, apparemment dû à *Grothendieck*, s'énonce alors ainsi :

#### A.1.6 AXIOME

Tout ensemble appartient à un univers.

Autrement dit, pour chaque point de  $\Omega$ , il existe un univers  $\mathcal{U}$  de  $\Omega$  tel que  $x \in \mathcal{U}$ . Dans le modèle  $\Omega$ , on peut alors décider de fixer un univers  $\mathcal{U}_0$ , qui d'après l'axiome A.1.6 est lui-même élément d'un univers (plus "grand")  $\mathcal{U}_1$  etc. A l'aide de l'axiome du choix on peut alors "fixer" une "hiérarchie" d'univers

$$\mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}_1 \in \dots \in \mathcal{U}_n \in \dots$$

ce qui implique en particulier, d'après la transitivité, que

$$\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{U}_n \subseteq \dots$$

En particulier

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$$

est un point de  $\Omega$ . Pour chaque élément  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ , on peut définir son rang comme le plus petit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in \mathcal{U}_n$ . On pose alors

#### A.1.7 DÉFINITION ( $\mathcal{U}_n$ -PETITE/GRANDE CATÉGORIE)

Une  $\mathcal{U}_n$ -**petite** catégorie est une catégorie  $\mathcal{C}$  (au sens de la définition A.1.1 dans laquelle le mot "ensemble" est compris comme "point de  $\Omega$ ") telle que  $Mo(\mathcal{C})$  (et donc nécessairement  $Ob(\mathcal{C})$ ) est un point de  $\mathcal{U}_n$ .

Une  $\mathcal{U}_n$ -**grande** catégorie est une catégorie  $\mathcal{C}$  telle que  $Ob(\mathcal{C})$  est un point de  $\mathcal{U}_{n+1}$  et quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $Ob(\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{C}[x, y]$  est un point de  $\mathcal{U}_n$ .

On a en particulier une hiérarchie basée sur la taille des catégories, plus précisément

#### A.1.8 PROPOSITION (RANG D'UNE CATÉGORIE)

Pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ , toute  $\mathcal{U}_n$ -petite catégorie est  $\mathcal{U}_n$ -grande et toute  $\mathcal{U}_n$ -grande catégorie est  $\mathcal{U}_{n+1}$ -petite. Le **rang** d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel  $\mathcal{C}$  est  $\mathcal{U}_n$ -grande.

Notons que, dans la plupart des cas pratiques rencontrés dans cette thèse, on sera en présence de  $\mathcal{U}_0$ -petites ou  $\mathcal{U}_0$ -grandes catégories. On écrira donc **petite catégorie** et **grande catégorie**, en omettant volontairement le préfixe " $\mathcal{U}_0$ ". A partir de maintenant, le terme **catégorie** désignera **toujours** une catégorie  $\mathcal{U}_n$ -grande pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . On pose

### A.1.9 DÉFINITION

Un **ensemble** est un point de  $\mathcal{U}_0$ . Une **classe** est un point de  $\mathcal{U}_n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .

En conséquence, lorsque l'on évoquera un groupe, un monoïde, un espace topologique etc, son ensemble sous-jacent sera **toujours** un point de  $\mathcal{U}_0$ . Le mot ensemble doit désormais être compris au sens de la définition A.1.9. Si, à l'occasion, on souhaitait faire référence à un membre générique de  $\Omega$ , ce serait sous l'appellation "point de  $\Omega$ ". Ainsi, comme on le verra, toutes les opérations que l'on effectuera sur les catégories ne pourront, dans le "pire" des cas, que construire une  $\mathcal{U}_n$ -grande catégorie à partir d'une  $\mathcal{U}_n$ -petite. L'intérêt de cette digression théorique est d'avoir un cadre dans lequel on contrôle la "taille" des catégories résultantes des constructions usuelles.

On peut donner un premier exemple de grande catégorie

### A.1.10 DÉFINITION

La catégorie des ensembles, notée  $\text{Set}$ , a pour classe d'objet  $\mathcal{U}_0$  et pour morphismes la classe de toutes les applications dont la source et le but sont dans  $\mathcal{U}_0$ .

### LE PROBLÈME DU CHOIX GLOBAL

La notion d'unicité à isomorphisme près est une des particularités de la théorie des catégories, cependant, il est parfois plus "confortable" d'avoir un représentant de la classe des objets qui satisfont une propriété universelle donnée. Dans certain cas, on a un représentant "canonique", mais pas toujours. Par exemple, on pourrait vouloir construire un foncteur  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  tel que pour chaque objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ ,  $FB$  satisfasse une propriété universelle paramétrée par  $B$  notée  $\Pi_B$ , dans ce cas, le choix du représentant doit être fait "simultanément" pour tous les objets de  $\mathcal{B}$ . Plus précisément, il faut une famille  $(A_B)$ , indexée par  $Ob(\mathcal{B})$ , telle que pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ , on a  $A_B \in [B]$  où  $[B]$  est la classe des objets de  $\mathcal{A}$  qui satisfont  $\Pi_B$ . Dans la théorie ZFC, on a des fonctions de choix uniquement sur les points du modèle, mais pas sur les collections de points. La hiérarchie des univers et le fait que l'on se soit interdit d'en sortir résout le problème, en effet, puisque

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$$

est un point de  $\Omega$ , il suffit d'appliquer l'axiome du choix à ce point. On peut même être plus précis en prenant une fonction de choix pour chaque  $\mathcal{U}_n$  et, à l'aide d'une construction par induction, obtenir une fonction de choix sur  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$  qui minimise le rang du point qu'elle retourne.

Le fait de disposer d'une fonction de choix "globale" est utilisé pour prouver la proposition A.3.12. Noter que cette question est rapidement abordée dans [9].

### A.1.2 VOCABULAIRE DES CATÉGORIES

On fixe ici la terminologie courante qui sera constamment utilisée dans cette thèse.

### A.1.11 DÉFINITION

Soit  $\mathcal{C}$  un catégorie et  $x, y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . Un morphisme  $\alpha \in \mathcal{C}[x, y]$  est

- un **monomorphisme** si quel que soient les morphismes  $\beta$  et  $\gamma$  de  $\mathcal{C}$ , on a

$$\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \Rightarrow \beta = \gamma,$$

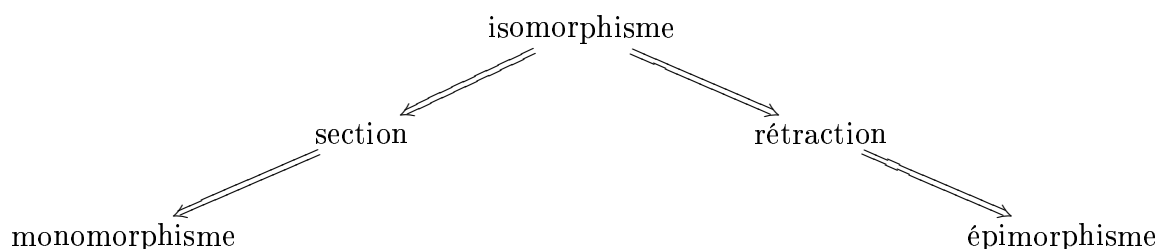
- un **épimorphisme** si quel que soient les morphismes  $\beta$  et  $\gamma$  de  $\mathcal{C}$ , on a

$$\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \Rightarrow \beta = \gamma,$$

- un **bimorphisme** s'il est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme,
- une **rétraction** s'il possède un inverse à droite, i.e.  $\exists \beta \in \mathcal{C}[y, x] \alpha \circ \beta = id_y$ . On dit que  $\alpha$  est une rétraction de  $\beta$ ,
- une **section** s'il possède un inverse à gauche, c'est-à-dire s'il existe un morphisme  $\beta$  appartenant à  $\mathcal{C}[x, y]$  tel que  $\beta \circ \alpha = id_x$ . On dit que  $\alpha$  est une section de  $\beta$ ,
- un **isomorphisme** s'il existe un morphisme  $\beta$  appartenant à  $\mathcal{C}[y, x]$  tel que  $\beta \circ \alpha = id_x$  et  $\alpha \circ \beta = id_y$ . Dans ce cas  $\beta$  est appelé inverse de  $\alpha$  et noté  $\alpha^{-1}$ ,
- un **endomorphisme** si  $src(\alpha) = tgt(\alpha)$ , i.e.  $x = y$ ,
- un **automorphisme** si c'est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme.

De plus, deux morphismes ayant la même source et la même but sont dits **parallèles**.

Le diagramme suivant récapitule les liens logiques entre les notions précédemment introduites :



On note respectivement  $Mono(\mathcal{C})$ ,  $Epi(\mathcal{C})$ ,  $Bi(\mathcal{C})$ ,  $Iso(\mathcal{C})$  et  $Endo(\mathcal{C})$  ces collections. On note également  $Idt(\mathcal{C})$  la collection des identités de  $\mathcal{C}$  qui est bien sûr en bijection avec  $Ob(\mathcal{C})$ .

#### A.1.12 LEMME

Soient  $f \in \mathcal{C}[x, y]$  et  $g \in \mathcal{C}[y, z]$ . Si  $f \circ g$  est un monomorphisme, alors  $g$  est un monomorphisme. Si  $f \circ g$  est un épimorphisme, alors  $f$  est un épimorphisme. De plus, si  $z = x$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  et  $g$  sont inverses l'un de l'autre dans  $\mathcal{C}$ .
2.  $f \circ g = id_y$ ,  $f$  est un monomorphisme et  $g$  est un de épimorphisme.
3.  $g \circ f = id_x$ ,  $f$  est un épimorphisme et  $g$  est un monomorphisme.
4.  $f \circ g = id_y$ ,  $f$  et  $g$  sont des bimorphismes.
5.  $g \circ f = id_x$ ,  $f$  et  $g$  sont des bimorphismes.

A.1.13 DÉFINITION (FONCTEUR PLEIN ET FONCTEUR FIDÈLE)

Soit un foncteur  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , pour chaque paire d'objets  $(A_1, A_2)$  de  $\mathcal{A}$ ,  $F$  induit une application

$$\Phi_{A_1, A_2} : \mathcal{A}[A_1, A_2] \rightarrow \mathcal{B}[Ob(F)(A_1), Ob(F)(A_2)]$$

$$\alpha \longmapsto Mo(F)(\alpha)$$

Le foncteur  $F$  est dit

- **fidèle** quand quels que soient les objets  $A_1$  et  $A_2$  de  $Ob(\mathcal{A})$ ,  $\Phi_{A_1, A_2}$  est injective,
- **plein** quand quels que soient les objets  $A_1$  et  $A_2$  de  $Ob(\mathcal{A})$ ,  $\Phi_{A_1, A_2}$  est surjective.

Une composition de foncteurs fidèles est trivialement un foncteur fidèle de même qu'une composition de foncteurs pleins est un foncteur plein.

A.1.14 PROPOSITION

Soit un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , pour tout morphisme  $\alpha$  de  $Mo(\mathcal{A})$  :

- si  $\alpha$  est un isomorphisme, alors  $Mo(F)(\alpha)$  en est un aussi,
- si  $F$  est fidèle et  $Mo(F)(\alpha)$  est un monomorphisme de  $\mathcal{B}$ , alors  $\alpha$  est un monomorphisme de  $\mathcal{A}$ ,
- si  $F$  est fidèle et  $Mo(F)(\alpha)$  est un épimorphisme de  $\mathcal{B}$ , alors  $\alpha$  est un épimorphisme de  $\mathcal{A}$ ,
- si  $F$  est plein, fidèle et si  $Mo(F)(\alpha)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{B}$ , alors  $\alpha$  est un isomorphisme de  $\mathcal{A}$ .

On dit que tout foncteur préserve les isomorphismes, que tout foncteur fidèle reflète les monomorphismes et les épimorphismes et enfin que tout foncteur plein et fidèle reflète les isomorphismes.

A.1.15 DÉFINITION

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $x, y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ , on dit que

- $x$  est **initial** si pour tout objet  $y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}[x, y]$  est un singleton,
- $x$  est **terminal** si pour tout objet  $y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}[y, x]$  est un singleton,
- $x$  et  $y$  sont **isomorphes** s'il existe, dans  $\mathcal{C}$ , un isomorphisme de  $x$  vers  $y$ . On note " $x \cong y$  dans  $\mathcal{C}$ ".

A.1.16 DÉFINITION

Dans une catégorie  $\mathcal{C}$  possédant un objet terminal noté  $*$ , on dit qu'un morphisme  $f \in \mathcal{C}[x, y]$  est **constant** si on peut le factoriser à travers  $*$ , c'est-à-dire s'il existe un morphisme  $\xi \in \mathcal{C}[x, *]$  tel que  $f = p \circ \xi$  où  $\xi$  est l'unique élément de  $\mathcal{C}[x, *]$ , l'unicité provenant du fait que  $*$  est l'objet terminal de  $\mathcal{C}$ . On dit aussi que le morphisme  $f$  est constant de valeur  $p$ .

Par exemple, dans la catégorie  $\text{Set}$ , un morphisme de  $X$  vers  $Y$  est constant au sens de la définition A.1.16 si et seulement si il existe un élément  $y \in Y$  tel que pour tout élément  $x$  de  $X$ , on a  $f(x) = y$ , on retrouve exactement la notion habituelle d'application constante. Dans la catégorie des espaces topologiques  $\text{Spc}$ , un morphisme est constant si et seulement si son application ensembliste sous-jacente est constante. Dans la catégorie des monoïdes  $\text{Mon}$  il existe pour tous monoïdes  $\mathbb{M}_1$  et  $\mathbb{M}_2$  un unique morphisme constant de  $\mathbb{M}_1$  vers  $\mathbb{M}_2$ , son application ensembliste sous-jacente envoie tous les éléments de l'ensemble sous-jacent de  $\mathbb{M}_1$  sur l'élément neutre de  $\mathbb{M}_2$ . Signalons enfin que, dans le cadre de l'homologie algébrique, par exemple dans la catégorie  $\text{Ab}$  des groupes abéliens, l'objet terminal est aussi initial et que tout morphisme de  $A$  vers  $B$  pouvant être factoriser à travers  $*$ , que l'on note dans le cadre des catégories abéliennes  $0$ , est appelé le zéro morphisme de  $A$  vers  $B$ .

#### A.1.17 DÉFINITION

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie :

- $\mathcal{C}$  est dite **discrète** si elle n'a pas d'autres morphismes que ses identités.
- $\mathcal{C}$  est dite **squelettique** lorsque deux de ses objets sont isomorphes si et seulement si ils sont égaux, c'est-à-dire quand  $\text{Iso}(\mathcal{C}) \subseteq \text{Endo}(\mathcal{C})$ .

#### A.1.18 DÉFINITION (ISOMORPHISMES DE CATÉGORIE)

Un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un **isomorphisme** si et seulement si, par définition, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont  $\mathcal{U}_n$ -petites et  $\text{Ob}(F)$  et  $\text{Mo}(F)$  sont des bijections de  $\mathcal{U}_n$ . Dans ce cas,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont dites **isomorphes** et on note  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ .

#### A.1.19 DÉFINITION

Etant donné deux foncteurs  $F$  et  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , une **transformation naturelle** de  $F$  vers  $G$  est une famille de morphismes de  $\mathcal{B}$  indexée par  $\text{Ob}(\mathcal{A})$ , notée  $\eta_x : Fx \rightarrow Gx$ , telle que pour tout morphisme  $x \xrightarrow{\alpha} y$  de  $\mathcal{A}$  on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{F\alpha} & Fy \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ Gx & \xrightarrow{G\alpha} & Gy \end{array} ,$$

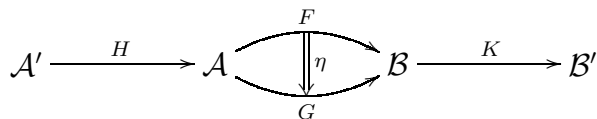
autrement dit,  $G\alpha \circ \eta_x = \eta_y \circ F\alpha$ . Schématiquement,

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{A} & \begin{array}{c} \eta \\ \downarrow \\ \eta \end{array} & \mathcal{B} \\ & \curvearrowleft & \\ & G & \end{array}$$

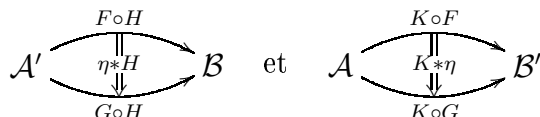
#### A.1.20 PROPOSITION

Etant donnés deux foncteurs  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$ , une transformation naturelle  $\eta$  de  $F$  vers  $G$ , un foncteur  $H$  de  $\mathcal{A}'$  vers  $\mathcal{A}$  et un foncteur  $K$  de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ ,  $(\eta_{HA'})_{A' \in \text{Ob}(\mathcal{A}' )}$  est une transformation naturelle de  $F \circ H$  vers  $G \circ H$  et  $(K\eta_A)_{A \in \text{Ob}(\mathcal{A})}$  est une transformation naturelle de  $K \circ F$  vers  $K \circ G$ .

Ces deux nouvelles transformations naturelles sont respectivement notées  $\eta * H$  et  $K * \eta$ , on a les diagrammes suivants



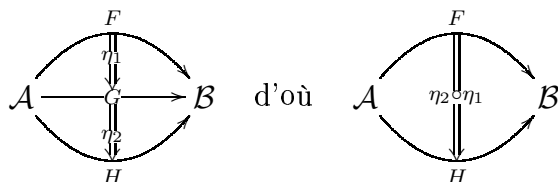
d'où



### A.1.21 PROPOSITION

Etant données  $\eta_1$  et  $\eta_2$  des transformations naturelles respectivement de  $F$  vers  $G$  et de  $G$  vers  $H$ , où  $F, G$  et  $H$  sont des foncteurs de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$ , on définit la composée  $\eta_2 \circ \eta_1$  par  $((\eta_2)_A \circ (\eta_1)_A)_{A \in \text{Ob}(\mathcal{A})}$

Schématiquement,



Autrement dit, la composition se fait composante par composante et donc, de l'associativité de la composition dans  $\mathcal{B}$  découle celle de la composition des transformations naturelles. En outre, on a des règles d'associativité et de distributivité pour les formules faisant intervenir la composition de foncteurs notée  $\circ$ , celle des transformations naturelles que nous noterons également  $\circ$  et l'opération  $*$  définie dans la proposition A.1.20.

$$\left. \begin{aligned} H_2 * (H_1 * \eta) &= (H_2 \circ H_1) * \eta \\ (\eta * K_1) * K_2 &= \eta * (K_1 \circ K_2) \\ (H * \eta) * K &= H * (\eta * K) \end{aligned} \right\} \text{associativité mixte}$$

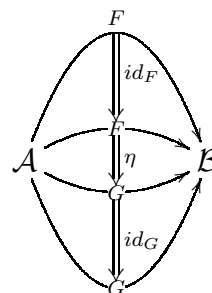
$$\left. \begin{aligned} H * (\eta_2 \circ \eta_1) &= (H * \eta_2) \circ (H * \eta_1) \\ (\eta_2 \circ \eta_1) * K &= (\eta_2 * K) \circ (\eta_1 * K) \end{aligned} \right\} \text{distributivité à gauche et à droite de } * \text{ sur } \circ$$

Par ailleurs, on a les comportements suivants vis-à-vis des identités :

L'opérateur  $\circ$  de composition des transformations naturelles vérifie

$$\eta \circ id_F = \eta = id_G \circ \eta$$

comme le suggère le diagramme de droite.



L'opérateur  $*$  satisfait pour sa part

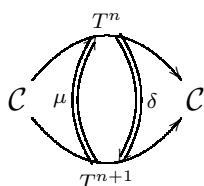
$$id_B * \eta = \eta = \eta * id_A \quad \begin{array}{c} \mathcal{A} \xrightarrow{id_A} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \eta \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{B} \xrightarrow{id_B} \mathcal{B} \end{array}$$

et

$$id_F * H = id_{F \circ H} \text{ et } K * id_F = id_{K \circ F}$$

comme le suggèrent les diagrammes de  $\mathcal{A}' \xrightarrow{H} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ id_F \\ \xrightarrow{F} \end{array} \mathcal{B} \xrightarrow{K} \mathcal{B}'$  droite.

Enfin, si  $T$  est un endofoncteur d'une catégorie  $\mathcal{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $\delta, \mu$  des transformations naturelles respectivement de  $T^n$  vers  $T^{n+1}$  et de  $T^{n+1}$  vers  $T^n$ , c'est-à-dire



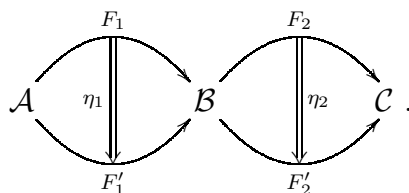
alors

$$\mu \circ (T * \mu) = \mu \circ (\mu * T) \text{ et } (T * \delta) \circ \delta = (\delta * T) \circ \delta$$

en effet,  $\mu$  et  $\delta$  étant des transformations naturelles, pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ , les diagrammes ci-dessous sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} T^{n+2}(C) \xrightarrow{T(\mu_C)} T^{n+1}(C) & T^n(C) \xrightarrow{\delta_C} T^{n+1}(C) & \\ \mu_{T(C)} \downarrow & \mu_C \downarrow & \delta_C \downarrow \\ T^{n+1}(C) \xrightarrow{\mu_C} T^n(C) & T^{n+1}(C) \xrightarrow{T(\delta_C)} T^{n+2}(C) & \delta_{T(C)} \downarrow \end{array} .$$

Noter bien que  $H * (\eta_2 \circ \eta_1)$  et  $(H * \eta_2) \circ \eta_1$ , de même que  $(\eta_2 \circ \eta_1) * K$  et  $\eta_2 \circ (\eta_1 * K)$ , ne sont la plupart du temps même pas simultanément définis. Nous allons encore définir une opération binaire entre transformations naturelles, elle sera notée  $\cdot$ . Supposons que  $F_1$  et  $F'_1$  soient des foncteurs de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$ , que  $F_2$  et  $F'_2$  soient des foncteurs de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$  et enfin que  $\eta_1$  et  $\eta_2$  soient des transformations naturelles respectivement de  $F_1$  et  $F'_1$  vers  $F_2$  et  $F'_2$ , ou encore schématiquement :



On a donc

$$\begin{array}{ccc} F_2 \circ F_1 \xrightarrow{F_2 * \eta_1} F_2 \circ F'_1 & & F_2 \circ F_1 \\ & \text{et} & \eta_2 * F_1 \downarrow \\ F'_2 \circ F_1 \xrightarrow{F'_2 * \eta_1} F'_2 \circ F'_1 & & F'_2 \circ F_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F_2 \circ F_1 & & F_2 \circ F'_1 \\ \parallel & & \parallel \\ F'_2 \circ F_1 & & F'_2 \circ F'_1 \end{array}$$



et on peut prouver que le diagramme de droite est un carré commutatif, autrement dit que l'on a :

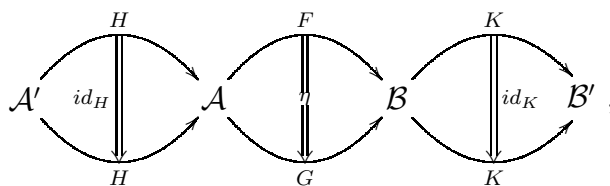
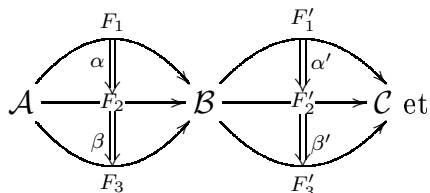
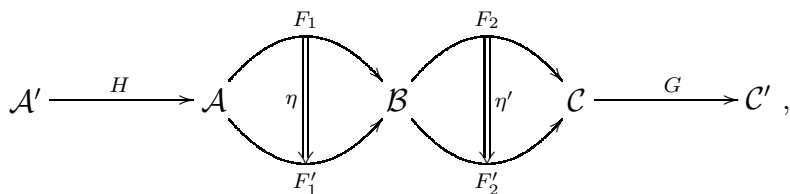
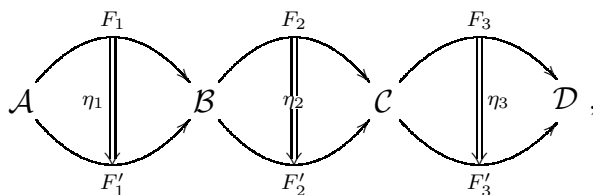
$$(\eta_2 * F'_1) \circ (F_2 * \eta_1) = (F'_2 * \eta_1) \circ (\eta_2 * F_1)$$

$$\begin{array}{ccc} F_2 \circ F_1 & \xrightarrow{F_2 * \eta_1} & F_2 \circ F'_1 \\ \eta_2 * F_1 \downarrow & = & \downarrow \eta_2 * F'_1 \\ F'_2 \circ F_1 & \xrightarrow{F'_2 * \eta_1} & F'_2 \circ F'_1 \end{array}$$

### A.1.22 DÉFINITION (APPLICATION DE TRANSFORMATIONS NATURELLES)

On définit  $\eta_2 \cdot \eta_1$  comme la transformation naturelle de  $F_2 \circ F_1$  vers  $F'_2 \circ F'_1$  définie ci-dessus. L'opérateur  $\cdot$  est appelé **application** et on dit que l'on a appliqué  $\eta_2$  à  $\eta_1$ .

Au regard des diagrammes suivants :



on a quelques nouvelles règles :

$$(\eta_3 \cdot \eta_2) \cdot \eta_1 = \eta_3 \cdot (\eta_2 \cdot \eta_1) \quad \left. \vphantom{(\eta_3 \cdot \eta_2) \cdot \eta_1} \right\} \text{ associativité de } \cdot$$

$$\left. \begin{array}{l} (\eta' \cdot \eta) * G = \eta' \cdot (\eta * G) \\ H * (\eta' \cdot \eta) = (H * \eta') \cdot \eta \end{array} \right\} \text{ associativité mixte de } \cdot \text{ et } *$$

$$(\beta' \circ \alpha') \cdot (\beta \circ \alpha) = (\beta' \cdot \beta) \circ (\alpha' \cdot \alpha) \quad \left. \vphantom{(\beta' \circ \alpha') \cdot (\beta \circ \alpha)} \right\} \text{ loi d'échange entre } \cdot \text{ et } \circ$$

$$\left. \begin{array}{l} id_K \cdot \eta = K * \eta \\ \eta \cdot id_H = \eta * H \end{array} \right\} \text{ comportement vis-à-vis des identités}$$

Les règles relatives à  $\circ$ ,  $*$  et  $\cdot$  sont appelées règles de *Godement*.

D'une certaine manière, au regard de son comportement vis-à-vis des identités, l'application (voir définition A.1.22) peut-être vue comme une extension de  $*$ .

### A.1.3 EXEMPLES

#### CATÉGORIE DUALE

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, alors on définit sa catégorie **duale** en échangeant les rôles de *src* et de *tgt*. Cette catégorie est notée  $\mathcal{C}^{op}$ .

#### PETITES CATÉGORIES

La classe des petites catégories (c'est un point de  $\mathcal{U}_1$ ) et celle des foncteurs entre petites catégories (c'est aussi un point de  $\mathcal{U}_1$ ) forment une grande catégorie (i.e.  $\mathcal{U}_0$ -grande). Il suffit pour s'en convaincre de vérifier qu'étant données deux petites catégories  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , la collection (i.e. le point de  $\Omega$ ) des foncteurs de  $\mathcal{C}_1$  vers  $\mathcal{C}_2$  est un ensemble (i.e. un point de  $\mathcal{U}_0$ ). On note cette catégorie *Cat*.

#### CATÉGORIES TRIVIALES

La catégorie dont la collection des objets ainsi que la collection des morphismes sont vides est notée par abus d'écriture  $\emptyset$ . La catégorie n'ayant qu'un seul objet et un seul morphisme (qui est nécessairement son identité) est notée, toujours par abus d'écriture,  $\{*\}$ . Ce sont bien sûr des petites catégories, elles sont respectivement l'objet initial et final de *Cat*.

#### CATÉGORIE DE FONCTEURS

Etant données deux catégories  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  respectivement  $\mathcal{U}_p$  et  $\mathcal{U}_n$  grandes, la collection des foncteurs de  $\mathcal{C}_1$  vers  $\mathcal{C}_2$  fournit les objets d'une catégorie dont les morphismes sont les transformations naturelles entre foncteurs de  $\mathcal{C}_1$  vers  $\mathcal{C}_2$ . La composition est donnée par la proposition A.1.21. Cette catégorie est notée  $\mathcal{C}_2^{\mathcal{C}_1}$  et elle est  $\mathcal{U}_m$ -petite pour  $m := \max\{n, p\} + 1$ . On peut noter que les monomorphismes, épimorphismes et isomorphismes sont les transformations naturelles dont toutes les composantes sont des monomorphismes, épimorphismes et isomorphismes.

#### MONOÏDES

Par définition, un monoïde est un ensemble (donc un élément de  $\mathcal{U}_0$ ) muni d'une loi de composition associative et d'un élément neutre. Tout monoïde peut être vu comme une petite catégorie n'ayant qu'un seul objet. Soit  $\mathcal{M}$  une telle catégorie, notons  $*$  son unique objet,  $Mo(\mathcal{M})$ ,  $\circ_{*,**}$  et  $id_*$  donnent respectivement les éléments, la loi de composition et l'élément neutre du monoïde associé. Réciproquement, si  $(M, \cdot, e)$  est un monoïde, alors en posant  $Ob(\mathcal{M}) := \{*\}$ ,  $Mo(\mathcal{M}) := M$ ,  $\circ_{*,**} := \cdot$  et  $id(*) := e$ , on obtient une catégorie n'ayant qu'un seul élément. Ainsi,

#### A.1.23 PROPOSITION

La catégories des monoïdes est isomorphe à la catégorie des petites catégories n'ayant

qu'un seul objet (notée **Mon**). En particulier, dans un monoïde  $\mathbb{M}$ , toutes les suites sont composables. Alors, si  $\mathbb{M}$  satisfait la propriété de **commutativité**

$$\forall \alpha, \beta \in Mo(\mathbb{M}), \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha,$$

on dit que  $\mathbb{M}$  est (un monoïde) abélien. Si un monoïde  $\mathbb{M}$  satisfait les propriétés d'**effacement** à droite et à gauche, i.e.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Mo(\mathbb{M}),$$

$$\alpha \circ \gamma = \beta \circ \gamma \implies \alpha = \beta \text{ (effacement à droite) et}$$

$$\gamma \circ \alpha = \gamma \circ \beta \implies \alpha = \beta \text{ (effacement à gauche),}$$

on dit que le monoïde  $\mathbb{M}$  est régulier. Enfin, si  $\mathbb{M}$  satisfait la propriété d'idempotence, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in Mo(\mathbb{M}) \alpha \circ \alpha = \alpha,$$

on dit que  $\mathbb{M}$  est **idempotent**.

### CATÉGORIES FINIES ET FINIMENT GÉNÉRÉES

Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite **finie** lorsque  $Mo(\mathcal{C})$  est un ensemble fini. Cela implique en particulier que  $Ob(\mathcal{C})$  est également fini et que, pour tout endomorphisme  $\alpha$  de  $\mathcal{C}$ , il existe  $n, p \in \mathbb{N}$  tels que  $n < p$  et  $\alpha^n = \alpha^p$ . Par ailleurs,  $\mathcal{C}$  est dite **finiment générée** s'il existe une famille finie  $\{f_1, \dots, f_N\}$  de morphismes de  $\mathcal{C}$  (où  $N \in \mathbb{N}$ ) telle que tout morphisme de  $\mathcal{C}$  soit une composée d'éléments de  $\{f_1, \dots, f_N\}$ . La collection des objets d'une catégorie finiment générée est un ensemble fini. Toute catégorie finie est bien sûr finiment générée, la réciproque est fautive comme en témoigne le monoïde  $(\mathbb{N}, +, 0)$ .

### PRÉORDRES

Un **ensemble préordonné** est un ensemble  $X$  muni d'une relation binaire  $\preceq$  réflexive et transitive, c'est-à-dire que l'on a

1.  $\forall x \in X, x \preceq x$  et
2.  $\forall x, y, z \in X, (x \preceq y \text{ et } y \preceq z) \implies x \preceq z$ .

La relation  $\preceq$  est appelée **préordre**. Un morphisme d'un ensemble préordonné  $(X, \preceq)$  vers un ensemble préordonné  $(X', \preceq')$  est par définition une application  $f \in \text{Set}[X, X']$  telle que

$$\forall a, b \in X, a \preceq b \implies fa \preceq' fb.$$

Soit  $(X, \preceq)$  un ensemble préordonné, on définit sa petite catégorie associée  $\mathcal{C}$  en posant  $Ob(\mathcal{C}) := X$  et quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ ,

$$\mathcal{C}[x, y] := \begin{cases} \{(x, y)\} & \text{si } x \preceq y \\ \emptyset & \text{si } x \not\preceq y \end{cases}$$

La réflexivité assure que l'on a bien les identités tandis que la transitivité fournit la loi de composition. Réciproquement, si  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, on obtient un ensemble

préordonné en posant  $X := Ob(\mathcal{C})$  et  $x \preceq y$  si et seulement si  $\mathcal{C}[x, y] \neq \emptyset$ , c'est l'ensemble préordonné associé à  $\mathcal{C}$ . Il est clair que si  $F$  est un foncteur d'une petite catégorie  $\mathcal{C}_1$  vers une petite catégorie  $\mathcal{C}_2$ , alors  $Ob(F)$  induit un morphisme d'ensemble préordonné de l'ensemble préordonné associé à  $\mathcal{C}_1$  vers celui associé à  $\mathcal{C}_2$ . Donc

#### A.1.24 PROPOSITION

La notion d'ensemble préordonné associé à une petite catégorie induit un foncteur de  $\mathbf{Cat}$  vers la catégorie des ensembles préordonnés. De plus, ce même foncteur induit, par restriction, un isomorphisme de la catégorie des petites catégories telle que pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}[x, y]$  contient au plus un élément (notée  $\mathbf{PreSet}$ ) vers la catégorie des ensembles préordonnés.

#### GROUPOÏDES

Un **groupeïde** est une petite catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes. La classe des groupeïdes avec la classe des foncteurs entre groupeïdes forme une catégorie notée  $\mathbf{Grd}$ . La notion qui suit aura son importance en topologie algébrique.

#### A.1.25 DÉFINITION (GROUPOÏDE CONNEXE)

Un groupeïde  $\mathcal{G}$  est dit **connexe** lorsque pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}[x, y]$  n'est pas vide. La sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Grd}$  dont les objets sont les groupeïdes connexes est notée  $\mathbf{CGrd}$ .

#### RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

Une relation d'équivalence  $\sim$  sur un ensemble  $X$  est une sous-partie de  $X \times X$  telle que, en notant  $x \sim y$  pour  $(x, y) \in \sim$ , on a

1.  $\forall x \in X, x \sim x$  (réflexivité),
2.  $\forall x, y \in X, x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$  (symétrie) et
3.  $\forall x, y, z \in X, (x \sim y \text{ et } y \sim z) \Rightarrow x \sim z$  (transitivité).

Un morphisme entre relations d'équivalence de  $(X, \sim_X)$  vers  $(Y, \sim_Y)$  est la donnée d'une application (ensembliste)  $f$  de  $X$  vers  $Y$  qui préserve les équivalences c'est-à-dire telle que

$$\forall x, y \in X, x \sim_X y \Rightarrow f(x) \sim_Y f(y).$$

Les relations d'équivalence et leurs morphismes forment une catégorie isomorphe à l'intersection (dans  $\mathcal{U}_1$ ) de  $\mathbf{Grd}$  et de  $\mathbf{PreSet}$ , on écrit abusivement  $\mathbf{Eq} := \mathbf{Grd} \cap \mathbf{PreSet}$ .

#### GROUPES

Un **groupe** est une petite catégorie qui est à la fois un monoïde et un groupeïde. La catégorie des groupes est notée  $\mathbf{Gr}$  et c'est l'intersection (dans  $\mathcal{U}_1$ ) des catégories  $\mathbf{Mon}$  et  $\mathbf{Grd}$ . On vérifie immédiatement que cette définition correspond à celle que l'on trouve dans n'importe quel manuel d'algèbre. De plus, si un groupe (en tant que monoïde) satisfait la propriété de commutativité on dit que ce groupe est **abélien**.

A.1.26 PROPOSITION (GROUPE FONDAMENTAL D'UN GROUPOÏDE CONNEXE)

Etant donné un groupoïde  $\mathcal{G}$  et un objet  $x$  de  $\mathcal{G}$ , la loi de composition de  $\mathcal{G}$  induit sur  $\mathcal{G}[x, x]$  une structure de groupe, de plus, si  $\mathcal{G}$  est connexe, alors quels que soient les objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{G}$ , les groupes  $\mathcal{G}[x, x]$  et  $\mathcal{G}[y, y]$  sont isomorphes dans  $\text{Gr}$ . Par définition,  $\mathcal{G}[x, x]$  est alors appelé **groupe fondamental** de  $\mathcal{G}$ , il n'est bien sûr défini qu'à isomorphisme de groupes près.

PREUVE. La première assertion est triviale au regard de la définition de groupe. Comme  $\mathcal{G}$  est connexe,  $\mathcal{G}[x, y]$  n'est pas vide et pour tout  $\theta$  appartenant à  $\mathcal{G}[x, y]$ , les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}[x, x] & \longrightarrow & \mathcal{G}[y, y] \\ \alpha & \longmapsto & \theta\alpha\theta^{-1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}[y, y] & \longrightarrow & \mathcal{G}[x, x] \\ \beta & \longmapsto & \theta^{-1}\beta\theta \end{array}$$

sont des isomorphismes de  $\text{Gr}$ . ■

Si le groupoïde  $\mathcal{G}$  n'est pas connexe, on peut toujours pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{G}$  définir la **composante connexe de  $x$  dans  $\mathcal{G}$**  comme la plus grande sous-catégorie (pleine) connexe de  $\mathcal{G}$  qui contienne  $x$ . Cette notion est bien définie puisque  $\mathcal{G}[x, x]$  est une telle catégorie et que toute union de telles catégories est encore connexe et contient  $x$ . La connexité vient du fait que si  $x, y$  sont dans la composante connexe de  $x$ , on peut toujours aller de  $y$  à  $z$  en "passant" par  $x$ . Puis on définit le **groupe fondamental de  $\mathcal{G}$  au point  $x$**  comme le groupe fondamental de la composante connexe de  $x$ .

CATÉGORIES SQUELETTIQUES

La classe des petites catégories squelettiques forme, avec les foncteurs entre catégories squelettiques, une catégorie notée  $\text{Skl}$ .

ORDRES (PARTIELS)

Un **ensemble (partiellement) ordonné** (on écrira aussi **poset**) est un ensemble préordonné dont la relation est **antisymétrique**, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in X \quad x \preceq y \text{ et } y \preceq x \implies x = y.$$

Dans ce cas on notera  $\sqsubseteq$  plutôt que  $\preceq$ . L'adjectif "partiel" vient du fait que, dans la littérature anglo-saxonne, on insiste sur la possibilité d'avoir deux éléments  $x$  et  $y$  dans  $X$  tels que  $x \not\sqsubseteq y$  et  $y \not\sqsubseteq x$ . Dans le cas où quels que soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $X$ , on a  $x \sqsubseteq y$  ou  $y \sqsubseteq x$ , on parle d'ordre **total** et on note plutôt  $\leq$ . Un ensemble muni d'un ordre total est aussi appelé une **chaîne**. Les ordres partiels avec les applications croissantes forment une catégorie isomorphe à  $\text{PreSet} \cap \text{Skl}$ , c'est-à-dire qu'un ensemble (partiellement) ordonné peut être vu comme un préordre squelettique. En effet, en supposant que l'on

ait  $x \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} y$ , les composées  $\alpha \circ \beta$  et  $\beta \circ \alpha$  sont nécessairement des identités, donc  $\alpha$  et  $\beta$

sont des isomorphismes, et comme la catégorie est squelettique par hypothèse,  $\alpha$  et  $\beta$  sont nécessairement des endomorphismes. Or les seuls endomorphismes d'un préordre sont les identités, il s'ensuit que  $x = y$ . On note  $\text{PoSet}$  la catégorie des préordres squelettiques.

## TREILLIS

Un ensemble partiellement ordonné  $(X, \sqsubseteq)$  dont toute paire d'élément  $\{x, y\}$  admet une borne supérieure, notée  $x \vee y$ , est appelé **treillis supérieur** ou  $\vee$ -**treillis**. De même on définit les **treillis inférieur** ou  $\wedge$ -**treillis**. On dit que  $(X, \sqsubseteq)$  est un treillis si c'est à la fois un treillis supérieur et inférieur. Si  $(X, \sqsubseteq)$  est tel que toute sous-partie admet une borne supérieure, alors on peut prouver que toute sous-partie admet également une borne inférieure et on dit dans ce cas que  $(X, \sqsubseteq)$  est un **treillis complet**. Pour ce qui concerne les treillis, on peut consulter [8], [53] ou [73]. On a alors les catégories suivantes

Nom	Objets	Morphismes
$\vee$ -Lat	$\vee$ -treillis	applications préservant $\vee$
$\wedge$ -Lat	$\wedge$ -treillis	applications préservant $\wedge$
Lat	treillis	applications préservant $\vee$ et $\wedge$
$\vee$ -CLat	treillis complet	applications préservant les bornes supérieures
CLat	treillis complet	applications préservant toutes les bornes supérieures et inférieures

## ESPACES TOPOLOGIQUES

Les espaces topologiques avec les applications continues forment une catégorie notée **Spc**.

### A.1.4 LE PLONGEMENT DE *Yoneda*

Le résultat qui suit permet d'associer à toute catégorie  $\mathcal{C}$  qui est  $\mathcal{U}_n$  grande une catégorie  $\mathcal{U}_{n+1}$ -grande, complète et cocomplète et qui, en un certain sens, contient  $\mathcal{C}$

#### A.1.27 DÉFINITION (CATÉGORIE DE PRÉFAISCEAU DE $\mathcal{C}$ )

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathcal{U}_0$ -grande. Un **préfaiseau** de  $\mathcal{C}$  est un foncteur de  $\mathcal{C}^{op}$  vers **Set**. La **catégorie des préfaiseaux** de  $\mathcal{C}$  est notée  $\hat{\mathcal{C}}$ , ses objets sont les préfaiseaux de  $\mathcal{C}$  et  $\hat{\mathcal{C}}[F, G]$  est constitué des transformations naturelles de  $F$  vers  $G$ .

L'exemple et les deux lemmes qui suivent mettent immédiatement en évidence l'intérêt des préfaiseaux, beaucoup d'autres arguments militent en leur faveur, nous ne les détaillons pas ici. Etant donné une catégorie  $\mathcal{C}$ , et un objet  $B$  de  $\mathcal{C}$ , on note  $\mathcal{C}[B, -]$  le foncteur de  $\mathcal{C}$  vers **Set** défini de la façon suivante, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $Ob(\mathcal{C}[B, -])(A) := \mathcal{C}[B, A]$  (d'où la notation), et si  $\alpha \in \mathcal{C}[A, A']$ , alors  $Mo(\mathcal{C}[B, -])(\alpha)$  est l'application qui à tout  $\beta \in \mathcal{C}[B, A]$  associe  $\alpha \circ \beta \in \mathcal{C}[B, A']$ . On a alors le

#### A.1.28 LEMME (DE *Yoneda*)

Soit  $F$  un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers **Set**, les applications

$$\Phi : Nat(\mathcal{C}[B, -], F) \longrightarrow F(B) \quad \text{et} \quad \Psi : F(B) \longrightarrow Nat(\mathcal{C}[B, -], F)$$

$$\eta \longmapsto \eta_B(id_B) \qquad u \longmapsto (F(g))(u)$$

sont réciproques l'une de l'autre, i.e.  $\Psi = \Phi^{-1}$  où  $(F(g))(u)$  est une "abréviation" de  $((Mo(F))(g))(u)$  et  $Nat(\mathcal{C}[B, -], F)$  est la collection des transformations naturelles de  $\mathcal{C}[B, -]$  vers  $F$ .

A.1.29 LEMME (DE PLONGEMENT DE *Yoneda*)

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathcal{U}_0$ -grande. Le plongement de *Yoneda* de  $\mathcal{C}$  (noté  $\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}$ ) est le foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\hat{\mathcal{C}}$  défini de la façon suivante :

Un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  est envoyé sur le foncteur

$$\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \text{Set}$$

$$y \text{ objet de } \mathcal{C}^{op} \longmapsto \mathcal{C}[y, x] \text{ objet de Set}$$

$$g^{op} : y \rightarrow y' \text{ morphisme de } \mathcal{C}^{op} \longmapsto \boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[y, x] & \longrightarrow & \mathcal{C}[y', x] \\ \gamma & \longmapsto & \gamma \circ g \end{array}} \text{ morphisme de Set}$$

qui est un objet de  $\hat{\mathcal{C}}$

et tout morphisme  $f : x \rightarrow x'$  de  $\mathcal{C}$ , est envoyé sur la transformation naturelle

$$\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(x) \xrightarrow{\bullet} \mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(x')$$

$$y \text{ objet de } \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[y, x] & \longrightarrow & \mathcal{C}[y, x'] \\ \delta & \longmapsto & f \circ \delta \end{array}} \text{ morphisme de Set}$$

qui est un morphisme de  $\hat{\mathcal{C}}$  de  $\mathbb{Y}(x)$  vers  $\mathbb{Y}(x')$ .

Le foncteur  $\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}$  est plein et fidèle.

PREUVE. Une preuve détaillée est disponible dans [9] et, en plusieurs parties, dans [59]. ■

On remarque que  $\hat{\mathcal{C}}$  est  $\mathcal{U}_1$ -petite. Plus généralement, si  $\mathcal{C}$  est une catégorie  $\mathcal{U}_n$ -grande, on redéfinit la notion de préfaisceau en disant que c'est un foncteur dont la catégorie d'arrivée est celle des points de  $\mathcal{U}_n$ , que l'on peut noter  $\text{Set}_n$  par exemple, alors  $\hat{\mathcal{C}}$  est  $\mathcal{U}_{n+1}$ -petite.

Etant donné un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , on note également  $\mathcal{C}[x, -]$  le foncteur de  $\mathcal{C}$  dans  $\text{Set}$  tel que pour tout objet  $y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $(\mathcal{C}[x, -])(y) := \mathcal{C}[x, y]$  et pour tout  $\gamma \in \mathcal{C}[y, y']$  on ait

$(\mathcal{C}[x, -])(\gamma) := \delta \in \mathcal{C}[x, y] \mapsto \gamma \circ \delta \in \mathcal{C}[x, y']$ .  $\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(x)$  et  $\mathcal{C}[x, -]$  sont liés mais pas égaux, le premier étant défini sur  $\mathcal{C}^{op}$  et le second sur  $\mathcal{C}$ . On peut vérifier que  $\mathcal{C}[x, -] = \mathbb{Y}_{\mathcal{C}^{op}}(x)$ . L'idée de morphisme "inversible au sens de *Yoneda*" développée au chapitre IV est directement liée aux foncteurs  $\mathcal{C}[x, -]$ .

### A.1.30 PROPOSITION (CARACTÉRISATION DES ISOMORPHISMES)

Soit une catégorie  $\mathcal{C}$ , un morphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{C}$  est un isomorphisme (de  $\mathcal{C}$ ) si et seulement si pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ ,  $(\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(x))(\sigma)$  et  $(\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(\sigma))(x)$  sont des isomorphismes.

PREUVE.  $\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(x)$  est un foncteur donc si  $g$  est un isomorphisme,  $(\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(x))(g)$  l'est aussi. De même  $\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}$  est un foncteur, donc si  $g$  est un isomorphisme,  $(\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(g))$  l'est aussi, or  $(\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(g))$  est une transformation naturelle, pour qu'elle soit un isomorphisme, il faut et suffit que toutes ses composantes le soit, c'est-à-dire que pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ ,  $(\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(g))(x)$  soit un isomorphisme. Réciproquement, si quelquesoit l'objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ ,  $(\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(x))(g)$  et  $(\mathbb{Y}_{\mathcal{C}}(g))(x)$  sont des isomorphismes, alors en particulier, en supposant que  $g \in \mathcal{C}[y', y]$ , on sait que les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[y, y'] \longrightarrow \mathcal{C}[y', y'] & \text{et} & \mathcal{C}[y, y'] \longrightarrow \mathcal{C}[y, y] \\ \gamma \longmapsto \gamma \circ g & & \delta \longmapsto g \circ \delta \end{array}$$

(il suffit de prendre  $x := y'$  et  $x := y$ ) sont des bijections. Donc il existe  $\gamma, \delta \in \mathcal{C}[y, y']$  tels que  $\gamma \circ g = id_{y'}$  et  $g \circ \delta = id_y$ . ■

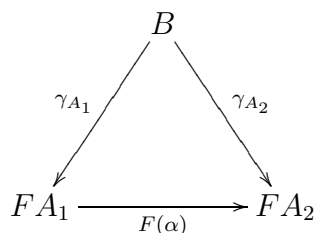
Le résultat précédent est à rapprocher de la définition IV.2.4.

## A.2 LIMITES ET COMPLÉTUDE

### A.2.1 LIMITE ET COLIMITE D'UN FONCTEUR $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$

#### A.2.1 DÉFINITION (CÔNE)

Soit un foncteur  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ , un **cône** de **base**  $F(\mathcal{A})$  est la donnée d'un objet  $B$  de  $\mathcal{B}$  (appelé **sommet**) et d'une famille  $(\gamma_A : B \rightarrow FA)_{A \in Ob(\mathcal{A})}$  de morphismes de  $\mathcal{B}$  indexée par  $Ob(\mathcal{A})$  telle que pour tous objets  $A_1$  et  $A_2$  de  $\mathcal{A}$  et pour tout morphisme  $\alpha$  appartenant à  $\mathcal{A}[A_1, A_2]$ , on a  $\gamma_{A_2} = F(\alpha) \circ \gamma_{A_1}$ .



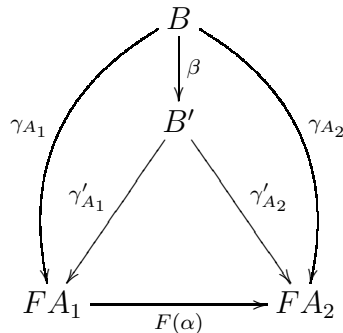
Le diagramme ci-dessus explique la terminologie.

#### A.2.2 DÉFINITION (CATÉGORIE DE CÔNES DE BASE FIXÉE)

Soit un foncteur  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ , la catégorie  $\text{Cônes}(F)$  a pour objets les cônes de base  $F(\mathcal{A})$ . Etant donné deux cônes  $(\gamma_A : B \rightarrow FA)_{A \in Ob(\mathcal{A})}$  et  $(\gamma'_A : B' \rightarrow FA)_{A \in Ob(\mathcal{A})}$  de base commune  $F(\mathcal{A})$  et de sommets respectifs  $B$  et  $B'$ , un morphisme du premier vers le



second est un morphisme  $\beta \in \mathcal{B}[B, B']$  tel que pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , on a  $\gamma_A = \gamma'_A \circ \beta$ . Graphiquement, le diagramme ci-dessous commute

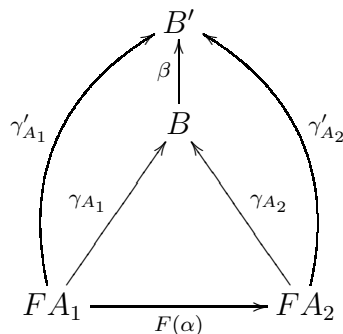


A.2.3 DÉFINITION

La **limite** d'un foncteur  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  est, s'il existe, l'objet terminal de  $\text{Cônes}(F)$ .

En particulier, une limite n'est définie qu'à isomorphisme près.

La notion de **colimite** est obtenue en considérant le dual de la notion de cône, que l'on appelle alors **cocône**. La colimite de  $F$  est alors, s'il existe, l'objet initial de  $\text{Cocônes}(F)$ . On peut résumer par le diagramme commutatif suivant



A.2.4 DÉFINITION

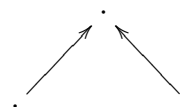
Dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , un **produit** (respectivement un **coproduit**) est la limite (respectivement la colimite) d'un foncteur défini sur une catégorie discrète.

A.2.5 DÉFINITION

Dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , un **égalisateur** (respectivement un **coégalisateur**) est la limite (respectivement la colimite) d'un foncteur défini sur  $\cdot \rightrightarrows \cdot$ .

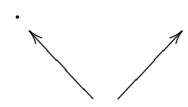
A.2.6 DÉFINITION (PRODUIT FIBRÉ)

On appelle **produit fibré** la limite d'un foncteur défini sur



A.2.7 DÉFINITION (SOMME AMALGAMÉE)

On appelle **somme amalgamée** la colimite d'un foncteur défini sur



## A.2.2 EXEMPLES DE LIMITES ET DE COLIMITES

### DANS Set

Le produit au sens de la définition A.2.4 est le produit usuel et le coproduit la réunion disjointe. De plus l'égalisateur de deux applications  $f$  et  $g$  définie sur l'ensemble  $X$  et à valeurs dans l'ensemble  $Y$  est

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

tandis que le coégalisateur est l'ensemble des classes d'équivalences selon  $\sim$ , la plus petite relation d'équivalence contenant

$$\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

Cet exemple est très important car c'est sur lui que repose de nombreuses constructions en algèbre.

### DANS Mon

Le produit au sens de la définition A.2.4 est le produit usuel et l'égalisateur de deux morphismes  $f$  et  $g$  de **Mon** défini sur  $(M, \cdot_M, e_M)$  et à valeurs dans  $(M', \cdot_{M'}, e_{M'})$  est le sous-monoïde de  $(M, \cdot_M, e_M)$  induit par

$$\{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$$

Le coproduit ainsi que le coégalisateur sont, sans l'aide des congruences généralisées, plus délicats à décrire.

### PLUS GÉNÉRALEMENT

On pourrait ainsi énumérer un grand nombre de catégories issues de l'algèbre, en particulier celle des monoïdes, groupes, ensembles ordonnés etc et montrer qu'elles admettent des produits, coproduits, égalisateurs et coégalisateurs, leurs descriptions seraient assez fastidieuses. Nous verrons que la notion de congruence généralisée unifie les méthodes utilisées pour chacune de ces constructions.

## A.2.3 COMPLÉTUDE ET COCOMPLÉTUDE D'UNE CATÉGORIE

Il pourrait sembler naturel de dire qu'une catégorie  $\mathcal{C}$  est complète lorsque tout foncteur à valeurs dans  $\mathcal{C}$  admet une limite au sens de la définition A.2.3. Cette définition s'avère être beaucoup trop restrictive, en effet, on peut prouver que (voir [9])

### A.2.8 PROPOSITION

Toute catégorie  $\mathcal{C}$  telle que tout foncteur à valeurs dans  $\mathcal{C}$  admet une limite est nécessairement un préordre.

Il faut, pour obtenir une notion intéressante, restreindre la taille des catégories sur lesquelles on définit les foncteurs pour lesquels on exige l'existence de la limite.

### A.2.9 DÉFINITION (COMPLÉTUDE)

Une catégorie  $\mathcal{C}$  de rang  $n \in \mathbb{N}$  est dite **complète** quand tout foncteur défini sur une catégorie  $\mathcal{U}_n$ -petite et à valeurs dans  $\mathcal{C}$  admet une limite dans  $\mathcal{C}$ .  $\mathcal{C}$  est dite **finiment complète** lorsque tout foncteur défini sur une catégorie finie et à valeurs dans  $\mathcal{C}$  admet une limite dans  $\mathcal{C}$ .

La proposition A.2.8 peut être affinée

### A.2.10 PROPOSITION

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de rang  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\mathcal{C}$  est  $\mathcal{U}_n$ -petite et complète, alors c'est un préordre.

PREUVE. Cette preuve est directement adaptée celle que l'on trouve dans [9]. Puisque  $\mathcal{C}$  est  $\mathcal{U}_n$ -petite,  $Mo(\mathcal{C})$  est un point de  $\mathcal{U}_n$ , soit  $\kappa$  son cardinal dans  $\mathcal{U}_n$ . Supposons que l'on puisse trouver deux morphismes distincts  $f, g \in \mathcal{C}[A, B]$ . Puisque  $\mathcal{C}$  est complète au sens de la définition A.2.9, le produit de  $\kappa$  copies de  $B$ , noté  $B^\kappa$  existe dans  $\mathcal{C}$ . Or par définition d'une limite, pour chaque suite  $(\zeta_k)_{k \in \kappa}$  de "longueur"  $\kappa$  à valeurs dans  $\{f, g\}$  (i.e. pour tout  $k$  appartenant à  $\kappa$ , on a  $\zeta_k \in \{f, g\}$ ) on a un unique morphisme  $h$  appartenant à  $\mathcal{C}[A, B^\kappa]$  tel que pour tout  $k$  appartenant à  $\kappa$ , on a  $\zeta_k = \pi_k \circ h$  où  $(\pi_k : B^\kappa \rightarrow B)_{k \in \kappa}$  est la limite du foncteur

$$\begin{array}{ccc} \kappa & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ k & \longmapsto & B \end{array}$$

où  $\kappa$  est considéré comme une catégorie discrète. En conséquence,  $\mathcal{C}[A, B^\kappa]$  contient au moins  $2^\kappa$  éléments ce qui contredit le théorème de Cantor. Bien entendu, si  $\mathcal{C}$  n'est pas  $\mathcal{U}_n$ -petite, cette preuve ne tient plus puisque  $Mo(\mathcal{C})$  n'est plus un point de  $\mathcal{U}_n$  et que la définition A.2.9 n'exige plus l'existence de la limite du foncteur  $k \in \kappa \mapsto B \in \mathcal{C}$ . ■

De façon duale

### A.2.11 DÉFINITION (COCOMPLÉTUDE)

Une catégorie  $\mathcal{C}$  de rang  $n \in \mathbb{N}$  est dite **cocomplète** quand tout foncteur défini sur une catégorie  $\mathcal{U}_n$ -petite et à valeurs dans  $\mathcal{C}$  admet une colimite.  $\mathcal{C}$  est dite **finiment cocomplète** lorsque tout foncteur défini sur une catégorie finie et à valeurs dans  $\mathcal{C}$  admet une colimite dans  $\mathcal{C}$ .

$\mathbf{Cat}$  et  $\mathbf{Spc}$  sont des exemples de catégories complètes et cocomplètes.

### A.2.12 PROPOSITION

Une catégorie  $\mathcal{C}$  de rang  $n \in \mathbb{N}$  est complète si et seulement si le produit de toute famille d'objets de  $\mathcal{C}$  indexée par un point de  $\mathcal{U}_n$  ainsi que l'égalisateur de toute paire de morphismes parallèles de  $\mathcal{C}$  existent dans  $\mathcal{C}$ . Elle est finiment complète si et seulement si le produit de toute paire d'objets de  $\mathcal{C}$  ainsi que l'égalisateur de toute paire de morphismes parallèles de  $\mathcal{C}$  existent dans  $\mathcal{C}$  et que  $\mathcal{C}$  a un objet terminal.

La proposition A.2.12 est encore vraie en remplaçant "complétude", "égalisateurs" et "terminal" par "cocomplétude", "coégalisateurs" et "initial".

### A.2.13 PROPOSITION

Une catégorie  $\mathcal{C}$  de rang  $n \in \mathbb{N}$  est cocomplète si et seulement si le coproduit de toute famille d'objets de  $\mathcal{C}$  indexée par un point de  $\mathcal{U}_n$  ainsi que le coégalisateur de toute paire

de morphismes parallèles de  $\mathcal{C}$  existent dans  $\mathcal{C}$ . Elle est finiment cocomplète si et seulement si le coproduit de toute paire d'objets de  $\mathcal{C}$  ainsi que l'égalisateur de toute paire de morphismes parallèles de  $\mathcal{C}$  existent dans  $\mathcal{C}$  et que  $\mathcal{C}$  a un objet initial.

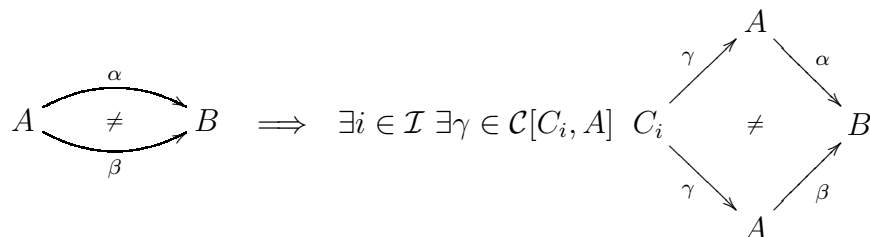
Voici un autre critère de complétude

#### A.2.14 DÉFINITION (SOUS-OBJETS D'UNE CATÉGORIE)

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . On dit que deux monomorphismes  $\alpha_1 : B_1 \rightarrow A$  et  $\alpha_2 : B_2 \rightarrow A$  de  $\mathcal{C}$  sont équivalents s'il existe un isomorphisme  $\theta : B_1 \rightarrow B_2$  tel que  $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \theta$ . On définit ainsi une relation d'équivalence  $\sim$  sur la classe des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  dont la but est  $A$ . Un **sous-objet** de  $A$  est une  $\sim$ -classe d'équivalence. On dit alors qu'une catégorie  $\mathcal{C}$  de rang  $n \in \mathbb{N}$  a une **bonne notion de sous-objet**, on écrira aussi **BNSO**, si pour chacun de ses objets  $A$ , la collection des sous-objets de  $A$  dans  $\mathcal{C}$  est un point de  $\mathcal{U}_n$ . On confondra souvent, par abus de langage, un monomorphisme et le sous-objet qu'il représente. En particulier, notons que si  $*$  est l'objet terminal de  $\mathcal{C}$ , tout morphisme dont la source est  $*$  est un monomorphisme de  $\mathcal{C}$  et quel que soit  $a$  appartenant à  $\mathcal{C}[*, A]$ ,  $a$  est appelé un **point** de  $A$ .

#### A.2.15 DÉFINITION (FAMILLE GÉNÉRATRICE)

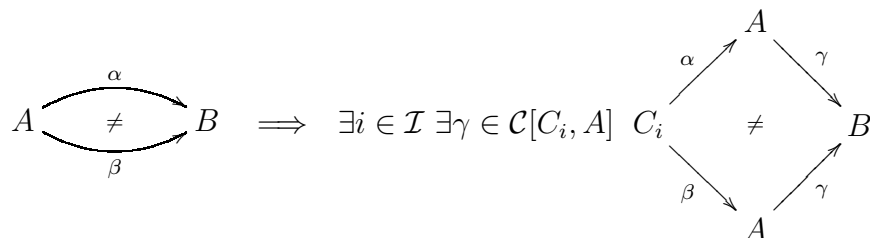
Une **famille génératrice** d'une catégorie  $\mathcal{C}$  de rang  $n \in \mathbb{N}$  est une famille  $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$  d'objets de  $\mathcal{C}$  indexée par un point de  $\mathcal{U}_n$  telle que pour toute paire de morphismes parallèles distincts  $\alpha, \beta : A \rightarrow B$  il existe  $i \in \mathcal{I}$  et un morphisme  $\gamma : C_i \rightarrow A$  tel que  $\alpha \circ \gamma \neq \beta \circ \gamma$ . Graphiquement



et de façon duale

#### A.2.16 DÉFINITION (FAMILLE CO-GÉNÉRATRICE)

Une **famille cogénératrice** d'une catégorie  $\mathcal{C}$  de rang  $n \in \mathbb{N}$  est une famille  $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$  d'objets de  $\mathcal{C}$  indexée par un point de  $\mathcal{U}_n$  telle que pour toute paire de morphismes parallèles distincts  $\alpha, \beta : A \rightarrow B$  il existe  $i \in \mathcal{I}$  et un morphisme  $\gamma : C_i \rightarrow A$  tel que  $\gamma \circ \alpha \neq \gamma \circ \beta$ . Graphiquement



Lorsqu'une famille génératrice (respectivement cogénératrice) est réduite à un objet, on parle de **générateur** (respectivement **cogénérateur**). Par exemple, dans  $\text{Set}$ , toute

paire est un cogénérateur et tout singleton un générateur. En fait une paire est également un générateur. Dans les catégories que l'on rencontre en pratique, il est souvent plus difficile de trouver une famille cogénératrice et de prouver la cocomplétude. En topologie, le segment unité  $[0, 1]$  est un cogénérateur de la catégorie des espaces de Hausdorff compacts. Ce résultat est généralement connu sous le nom de lemme de Urysohn ou lemme de prolongement et il n'est pas trivial. On peut maintenant donner un critère de cocomplétude

### A.2.17 PROPOSITION

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie, si

- $\mathcal{C}$  est complète
- $\mathcal{C}$  a une bonne notion de sous-objets
- $\mathcal{C}$  a une famille cogénératrice

alors  $\mathcal{C}$  est également cocomplète.

La proposition A.2.17 peut être appliquée pour prouver la cocomplétude de la catégorie des espaces de Hausdorff compacts. On utilise pour cela le lemme de Urysohn ainsi que le théorème de Tychonoff. Encore une fois, ces deux résultats ne sont pas triviaux.

## A.3 ADJONCTIONS

On donne ici plusieurs définitions équivalentes de la notion d'adjonction ainsi qu'un résultat permettant de prouver l'existence de l'adjoint d'un foncteur. A noter que, dans un cadre ensembliste trop inadéquat, ce résultat est faux. Par ailleurs, la notion d'adjonction est très fortement liée à celle de monade, on trouve de plus amples détails dans [59], [10] et dans [90].

### A.3.1 PROPOSITION

Etant donné deux foncteurs  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{U} \\ \xleftarrow{F} \end{array} \mathcal{B}$ , les assertions suivantes sont équivalentes.

- Il existe une transformation naturelle  $\eta$  de  $Id_{\mathcal{B}}$  vers  $U \circ F$  telle que pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , et pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ , l'application qui suit est une bijection.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[FB, A] & \longrightarrow & \mathcal{B}[B, UA] \\ \alpha \longmapsto & & (U\alpha) \circ \eta_B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} B & \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta_B} U(FB) \\ \xrightarrow{\beta} U(A) \end{array} & \xrightarrow{U(\alpha)} U(A) \\ & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FB & \xrightarrow{\alpha} & A \end{array}$$

- Il existe une transformation naturelle  $\varepsilon$  de  $F \circ U$  vers  $Id_{\mathcal{A}}$  telle que pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  et pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ , l'application qui suit est une bijection.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}[B, UA] & \longrightarrow & \mathcal{A}[B, UA] \\ \beta \longmapsto & & \varepsilon_A \circ (F\beta) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & F(UA) & \\
 \varepsilon_A \swarrow & & \swarrow F(\beta) \\
 A & \xleftarrow{\alpha} & F(B)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & UA & \\
 & \swarrow \beta & \\
 & & B
 \end{array}$$

- Il existe une transformation naturelle  $\eta$  de  $Id_{\mathcal{B}}$  vers  $U \circ F$  et une transformation naturelle  $\varepsilon$  de  $F \circ U$  vers  $Id_{\mathcal{A}}$  telles que

$$(U * \varepsilon) \circ (\eta * U) = Id_U \quad \text{et} \quad (\varepsilon * F) \circ (F * \eta) = Id_F$$

### A.3.2 DÉFINITION

On dit que  $F$  est **adjoint à gauche** de  $U$  ou que  $U$  est **adjoint à droite** de  $F$  si et seulement si l'une des assertions de la proposition A.3.1 est satisfaite. On note  $F \dashv U$ .

Les transformations naturelles  $\eta$  et  $\varepsilon$  sont respectivement appelées **unité** et **co-unité** de l'adjonction. En outre, il est important de noter que pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ ,  $\varepsilon_A$  est défini comme l'unique morphisme de  $\mathcal{A}[F \circ U(A), A]$  tel que  $U(\varepsilon_A) \circ \eta_{UA} = id_{UA}$  et pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ ,  $\eta_B$  comme l'unique morphisme de  $\mathcal{B}[B, U \circ F(B)]$  tel que  $\varepsilon_{F(B)} \circ F(\eta_B) = id_{F(B)}$ . De plus

### A.3.3 DÉFINITION (EQUIVALENCE DE CATÉGORIES)

Si l'unité et la co-unité sont des isomorphismes (respectivement dans  $\mathcal{A}^{\mathcal{A}}$  et  $\mathcal{B}^{\mathcal{B}}$ ) on dit que  $U$  est une **équivalence** de catégorie et que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont **équivalents**.

Notons bien que si  $U$  est une équivalence de catégorie, alors on a aussi  $U \dashv F$  et  $F$  est également une équivalence de catégorie, dans ce cas, on dit que  $F$  et  $U$  sont **adjoints** l'un de l'autre sans préciser si c'est à droite ou à gauche. On parle aussi quelquefois de **quasi-inverse** lorsque l'on est dans un cadre qui empêche toute confusion avec la notion de quasi-inverse de l'algèbre homologique, voir [87].

### A.3.4 PROPOSITION

Soit  $F$  un foncteur de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$ ,  $F$  est une équivalence de catégorie si et seulement si  $F$  est plein, fidèle et que tout objet de  $\mathcal{B}$  est isomorphe dans  $\mathcal{B}$  à un objet de l'image de  $F$ , c'est-à-dire que pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ , il existe un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  tel que l'on a  $B \cong F(A)$  dans  $\mathcal{B}$ .

PREUVE. Voir [9] ou [59]. ■

### A.3.5 PROPOSITION (EQUIVALENCE FIBRÉE)

Soit  $F$  un foncteur de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$  tel que  $F$  est plein, fidèle et que pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ , il existe un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $B = F(A)$  (autrement dit,  $F$  est fidèle et son image est  $\mathcal{B}$ ). Alors on peut trouver un représentant  $G$  de l'adjoint de  $F$  (on rappelle qu'un adjoint n'est unique qu'à isomorphisme de foncteur près) tel  $F \circ G = Id_{\mathcal{B}}$ . En notant  $\varepsilon$  la transformation naturelle identité de  $F \circ G$  vers  $Id_{\mathcal{B}}$ , le deuxième point de la proposition A.3.1 est satisfait. On dit alors, par définition, que  $F$  est une **équivalence (de catégorie) fibrée**.

PREUVE. Tout d'abord, pour chaque objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ , on choisit un objet noté  $G(B)$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(G(B)) = B$ . On pose alors  $\varepsilon_B := id_B$  pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ . Etant donné que le foncteur  $F$  est plein et fidèle, l'application ci-dessous est une bijection.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}[G(B_1), G(B_2)] & \longrightarrow & \mathcal{B}[B_1, B_2] \\
 \alpha \longmapsto & & F(\alpha)
 \end{array}$$

Etant donné un morphisme  $\beta$  appartenant à  $\mathcal{B}[B_1, B_2]$ , on peut donc poser  $G(\beta) = \alpha$  où  $\alpha$  est l'unique élément de  $\mathcal{A}[G(B_1), G(B_2)]$  tel que  $F(\alpha) = \beta$ . On a ainsi un foncteur  $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  tel que  $F \circ G = Id_{\mathcal{B}}$ . La collection de morphismes  $\varepsilon_B$  est alors une transformation naturelle de  $F \circ G$  vers  $Id_{\mathcal{B}}$  qui fait de l'application suivante une bijection.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[G(B_1), G(B_2)] & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{B}[B_1, B_2] \\ \alpha & \xrightarrow{\quad} & \varepsilon_B \circ F(\alpha) = F(\alpha) \end{array}$$

D'après la définition A.3.2,  $G$  est l'adjoint à droite de  $F$ . Or  $F$  est une équivalence de catégories donc son adjoint est simultanément son adjoint à droite et son adjoint à gauche (voir le commentaire faisant suite à la définition A.3.3). Par unicité (à isomorphisme près) de l'adjoint à droite (voir propriété A.3.10), l'adjoint de  $F$  est donc  $G$ . ■

Avant de donner quelques outils permettant de manipuler les adjonctions, on introduit la notion de fibration qui apparaît dans l'énoncé du théorème V.0.27. La définition donnée ici est issue de [10], on la trouve aussi dans [51] mais je ne suis pas sûr qu'elle soit équivalente à celle proposée ci-dessous.

#### A.3.6 DÉFINITION (FIBRE AU-DESSUS D'UN OBJET)

Etant donné un foncteur  $F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{B}$ , pour tout objet  $I$  de  $\mathcal{B}$ , on appelle **fibre de  $F$  au point/au dessus-de/à l'objet  $I$**  la sous-catégorie  $F^{-1}(\{I\})$  c'est-à-dire dont les objets sont ceux de  $\mathcal{F}$  dont l'image par  $F$  est  $I$  et dont les morphismes sont ceux de  $\mathcal{F}$  dont l'image par  $F$  est  $id_I$ . La fibre de  $F$  au-dessus de  $I$  est notée  $\mathcal{F}_I$ .

#### A.3.7 DÉFINITION (MORPHISME CARTÉSIEN)

Etant donné un foncteur  $F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{B}$  et  $\alpha \in \mathcal{B}[J, I]$ , un morphisme  $f \in \mathcal{F}[Y, X]$  est dit **cartésien** au-dessus de  $\alpha$  lorsque

1.  $F(f) = \alpha$ ,
2. pour tout morphisme  $g$  appartenant à  $\mathcal{F}[Z, X]$  et tel que  $F(g)$  se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & F(Y) & \\ \beta \nearrow & & \searrow \alpha \\ F(Z) & \xrightarrow{F(g)} & F(X) \end{array},$$

il existe un unique morphisme  $h$  dans  $\mathcal{F}[Z, Y]$  tel que  $F(h) = \beta$  et

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ h \nearrow & & \searrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}.$$

#### A.3.8 DÉFINITION (FIBRATION)

Un foncteur  $F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{B}$  est une **fibration de base  $\mathcal{B}$**  lorsque quels que soient les objets  $I$  et  $J$  de  $\mathcal{B}$ , le morphisme  $\alpha$  appartenant à  $\mathcal{B}[J, I]$  et l'objet  $X$  de  $\mathcal{F}_I$ , il existe un morphisme  $f$  appartenant à  $\mathcal{F}[Y, X]$  cartésien au-dessus de  $\alpha$ .

Le résultat suivant fait un lien entre équivalences de catégories et fibrations. De plus il justifie la terminologie adoptée dans la proposition A.3.5.

### A.3.9 PROPOSITION

Toute équivalence fibrée  $F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{B}$  est une fibration.

PREUVE. D'après la proposition A.3.5, le foncteur  $F$  admet un adjoint à droite tel que la co-unité  $\varepsilon$  de l'adjonction  $F \dashv G$  est l'identité (dans  $\mathcal{B}^{\mathcal{B}}$ ) de  $F \circ G$  vers  $Id_{\mathcal{B}}$ . L'unité de cette adjonction, notée  $\eta$ , est un isomorphisme (dans  $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ ) de  $Id_{\mathcal{A}}$  vers  $G \circ F$ . En particulier, on sait que  $\eta_X$  est l'unique morphisme de  $\mathcal{F}[X, GFX]$  tel que  $\varepsilon_{FX} \circ F(\eta_X) = id_{FX}$ , et comme  $\varepsilon_{FX} = id_{FX}$  on a  $F(\eta_X) = id_{FX}$  (voir définition A.3.2 et les commentaires qui suivent). On peut maintenant prouver que  $F$  est une fibration : soient  $I$  de  $\mathcal{B}$ , un objet  $X$  de  $\mathcal{F}$  appartenant à  $\mathcal{F}_I$  (c'est-à-dire que  $F(X) = I$ ) et un morphisme  $\alpha$  de  $\mathcal{B}[J, I]$ . Posons  $f := \eta_X^{-1} \circ G(\alpha)$ , on sait déjà que  $f$  appartient à  $\mathcal{F}[Y, X]$  où l'on a posé  $Y := G(J)$  et  $F(f) = F(\eta_X^{-1}) \circ F(G(\alpha)) = \alpha$  d'après ce que l'on a démontré en préambule. On va maintenant montrer que  $f$  est cartésien au-dessus de  $\alpha$ . Soient  $g$  et  $\beta$  deux morphismes appartenant respectivement à  $\mathcal{F}[Z, X]$  et à  $\mathcal{B}[F(Z), F(Y)]$  et faisant commuter le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 & F(Y) = J & \\
 & \nearrow \beta & \searrow F(f)=\alpha \\
 F(Z) & \xrightarrow{F(g)} & F(X) = I
 \end{array}$$

On pose  $h := G(\beta) \circ \eta_Z$ . On a donc  $F(h) = F(G(\beta)) \circ F(\eta_Z) = \beta$  car  $F(G(\beta)) = \beta$  et  $F(\eta_Z) = id_{FZ}$  (se référer au préambule). En outre on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & h=G(\beta) \circ \eta_Z \\
 & & & & \curvearrowright \\
 & & & GJ = Y & \\
 & & G\beta & \nearrow & G(\alpha) \\
 GFZ & \xrightarrow{GFg} & GI = GFX & & \\
 \uparrow \eta_Z & & \uparrow \eta_X & & \\
 Z & \xrightarrow{g} & X & & 
 \end{array}$$

puisque  $\eta$  est une transformation naturelle de  $Id_{\mathcal{F}}$  vers  $G \circ F$  et donc aussi le digramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & f=\eta_X^{-1} \circ G(\alpha) \\
 & & & & \curvearrowright \\
 & & & GJ = Y & \\
 & & G\beta & \nearrow & G(\alpha) \\
 GFZ & \xrightarrow{GFg} & GI = GFX & & \\
 \uparrow \eta_Z & & \downarrow \eta_X^{-1} & & \\
 Z & \xrightarrow{g} & X & & 
 \end{array}$$

D'où  $g = h \circ f$ . Il ne reste plus qu'à vérifier qu'un tel  $h$  est unique. Supposons que  $h_1$  et  $h_2$  soient deux morphismes de  $\mathcal{F}[Z, Y]$ , avec  $Y = G(J)$ , qui satisfont  $F(h_1) = F(h_2) = \beta$ .

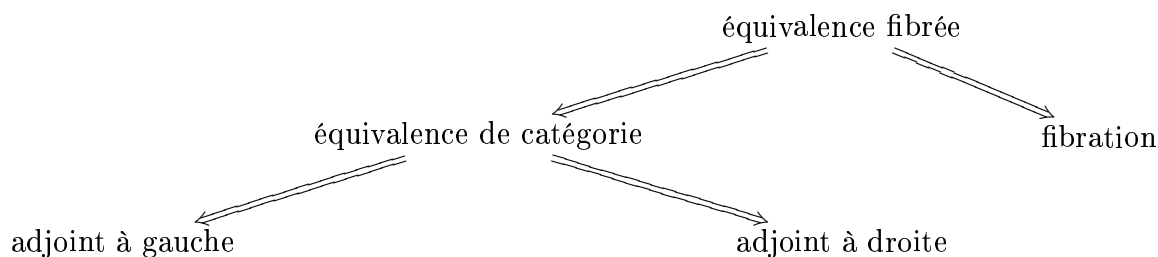


Comme on a l'adjonction  $F \dashv G$ , on a en particulier la bijection suivante,

$$\mathcal{B}[F(Z), J] \longrightarrow \mathcal{F}[Z, G(J)]\beta' \longmapsto G(\beta') \circ \eta_Z$$

donc il existe un unique morphisme  $\beta_1$  dans  $\mathcal{B}[F(Z), J]$  tel que  $G(\beta_1) \circ \eta_Z = h_1$  ainsi qu'un unique morphisme  $\beta_2$  dans  $\mathcal{B}[F(Z), J]$  tel que  $G(\beta_2) \circ \eta_Z = h_2$ . Il s'ensuit que  $F(h_1) = \beta_1$  et  $F(h_2) = \beta_2$ , donc que  $\beta_1 = \beta_2$  et finalement que  $h_1 = h_2$ . On aurait aussi pu conclure en utilisant le fait que, puisque  $F$  et  $G$  sont des équivalences de catégories,  $G$  est fidèle et  $\eta_Z$  est un isomorphisme. ■

Les propositions A.3.5 et A.3.9 sont résumées dans le diagramme suivant



### A.3.1 PROPRIÉTÉS DES ADJONCTIONS

#### A.3.10 PROPRIÉTÉ

Si  $F_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  et  $F_2 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  sont adjoints à gauche d'un même foncteur  $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , alors  $F_1$  et  $F_2$  sont isomorphes dans  $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ .

On dit que l'adjoint est unique à isomorphisme près.

#### A.3.11 PROPRIÉTÉ (COMPOSÉE D'ADJOINTS)

Si on a

$$\begin{array}{ccccc} & U_1 & & U_2 & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{C} \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ & F_1 & & F_2 & \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{ccc} & U_2 \circ U_1 & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{A} & & \mathcal{C} \\ & \curvearrowleft & \\ & F_1 \circ F_2 & \end{array}$$

Noter l'analogie avec la notion d'inverse.

#### A.3.12 PROPOSITION (EXISTENCE D'UN ADJOINT)

Etant donné un foncteur  $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Supposons que pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ , il existe un objet  $A_B$  de  $\mathcal{A}$  ainsi qu'un morphisme  $\eta_B$  appartenant à  $\mathcal{B}[B, UA_B]$  tels que quel que soit l'objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , l'application ci-dessous est une bijection,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[A_B, A] & \longrightarrow & \mathcal{B}[B, UA] \\ \alpha & \longmapsto & (U\alpha) \circ \eta_B \end{array}$$

alors  $U$  a un adjoint à gauche.

PREUVE. Notons  $F$  l'adjoint à gauche que l'on doit construire. Pour chaque  $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$  on choisit un objet  $A_B$  de  $\mathcal{A}$  ainsi qu'un morphisme  $\eta_B \in \mathcal{B}[B, UA_B]$  qui vérifie la propriété de bijectivité de la proposition A.3.12 et on pose  $\text{Ob}(F)(B) := A_B$ . Etant donné un morphisme  $\beta : B_1 \rightarrow B_2$  de  $\mathcal{B}$ , on a en particulier l'application bijective suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[FB_1, FB_2] &\longrightarrow \mathcal{B}[B_1, UFB_2] \quad , \\ \alpha &\longmapsto (U\alpha) \circ \eta_{B_1} \end{aligned}$$

il suffit alors de prendre  $Mo(F)(\beta)$  égal à l'unique  $\alpha \in \mathcal{A}[FB_1, FB_2]$  tel que  $\eta_{B_2} \circ \beta = (U\alpha) \circ \eta_{B_1}$ . Pour conclure, il faut encore vérifier que  $F$  est bien un foncteur, autrement dit, que pour chaque

$$\begin{array}{ccc} & B_2 & \\ \beta_1 \nearrow & & \searrow \beta_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_2 \circ \beta_1} & B_3 \end{array}$$

on a bien

$$F(\beta_2 \circ \beta_1) = F(\beta_2) \circ F(\beta_1).$$

Or  $F(\beta_1)$  est l'unique élément  $\alpha_1$  de  $\mathcal{A}[FB_1, FB_2]$  tel que  $\eta_{B_2} \circ \beta_1 = (U\alpha_1) \circ \eta_{B_1}$  et  $F(\beta_2)$  est l'unique élément  $\alpha_2$  de  $\mathcal{A}[FB_2, FB_3]$  tel que  $\eta_{B_3} \circ \beta_2 = (U\alpha_2) \circ \eta_{B_2}$ , donc on a en particulier le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 \\ \eta_{B_1} \downarrow & & \eta_{B_2} \downarrow & & \eta_{B_3} \downarrow \\ UFB_1 & \xrightarrow{U\alpha_1} & UFB_2 & \xrightarrow{U\alpha_2} & UFB_3 \\ & & & \searrow & \nearrow \\ & & & U(\alpha_2 \circ \alpha_1) & \end{array}$$

de sorte que  $\alpha_3 := \alpha_2 \circ \alpha_1$  est l'unique morphisme de  $\mathcal{A}$  tel que  $\eta_{B_3} \circ (\beta_2 \circ \beta_1) = (U\alpha_3) \circ \eta_{B_1}$ . De plus,  $\eta$  est une transformation naturelle de  $Id_{\mathcal{B}}$  vers  $U \circ F$  par construction même de  $F$ . ■

### A.3.13 DÉFINITION

Un foncteur  $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  où  $\mathcal{A}$  est de rang  $n \in \mathbb{N}$  **préserve les limites** si pour tout foncteur  $G$  défini sur une catégorie  $\mathcal{U}_n$ -petite  $\mathcal{C}$ , si  $(\gamma_C)_{C \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  est la limite de  $G$  dans  $\mathcal{A}$ , alors  $(U(\gamma_C))_{C \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  est la limite de  $U \circ G$  dans  $\mathcal{B}$ .

De façon duale on définit les foncteurs **préservant les colimites**. On note au passage que si  $\mathcal{A}$  est de rang  $n \in \mathbb{N}$  et que l'on a un foncteur de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$ , alors le rang de  $\mathcal{B}$  est au moins égal à  $n$ .

A.3.14 PROPRIÉTÉ

Si  $U : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  est un foncteur ayant un adjoint à gauche  $F \dashv U$ , alors toute limite dans  $\mathcal{A}$  est préservée par  $U$  et toute colimite dans  $\mathcal{B}$  est préservée par  $F$

A.3.15 PROPRIÉTÉ

Un foncteur préserve les limites, respectivement les colimites, si et seulement si il préserve les produits et les égalisateurs, respectivement les coproduits et les coégalisateurs.

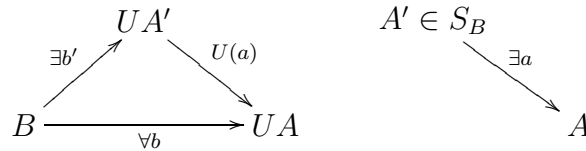
On donne un dernier et célèbre critère d'existence d'un adjoint à gauche

A.3.16 DÉFINITION (PROPRIÉTÉ DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS)

Soit un foncteur  $U : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ , on dit que  $U$  a la **propriété de l'ensemble des solutions** par rapport à un objet  $B$  de  $\mathcal{B}$  lorsqu'il existe un ensemble  $S_B$  d'objets de  $\mathcal{A}$  tel que

$$\forall A \in \text{Ob}(\mathcal{A}), \forall b \in \mathcal{B}[B, UA], \exists A' \in S_B, \exists a \in \mathcal{A}[A', A], \exists b' \in \mathcal{B}[B, UA'], U(a) \circ b' = b.$$

graphiquement



A.3.17 PROPOSITION (THÉORÈME DU FONCTEUR ADJOINT)

Soit une catégorie complète  $\mathcal{A}$  et un foncteur  $U : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $U$  a un adjoint à gauche.
2. (a)  $U$  préserve les limites.  
(b)  $U$  satisfait la propriété de l'ensemble des solutions pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ .

PREUVE. Voir [9] ou [59]. ■

A.3.2 EXEMPLES D'ADJONCTIONS

PRÉORDRES ET ENSEMBLES

Le foncteur d'oubli  $U$  qui a tout préordre associe son ensemble sous-jacent a un adjoint à gauche  $L$  ainsi qu'un adjoint à droite  $R$ . Plus précisément, étant donné un ensemble  $X$ ,  $R(X) := (X, X \times X)$ , c'est-à-dire que quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $X$ , on a  $x \preceq_{R(X)} y$ , c'est le préordre **chaotique** et  $L(X) := (X, \{(x, x) | x \in X\})$ , i.e. pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $X$ , on a  $x \preceq_{L(X)} y$  ssi  $x = y$ , c'est le préordre discret.

MONOÏDES ET ENSEMBLES

Le foncteur d'oubli  $U$  qui a tout monoïde  $(M, \cdot, e)$  associe son ensemble sous-jacent  $M$  a un adjoint à gauche  $F$ , l'unité étant donnée pour tout ensemble  $X$  par l'application

$$\begin{aligned} \eta_X : X &\longrightarrow U \circ F(X) \\ x &\longmapsto (x) \end{aligned}$$

où  $F(X)$  est le monoïde des suites finies à valeurs dans  $X$  avec la concaténation comme loi de composition et le mot vide comme élément neutre.  $F(X)$  est aussi appelé monoïde des mots de l'alphabet  $X$  ou encore monoïde libre sur  $X$ .

#### PETITES CATÉGORIES ET GRAPHES

Le foncteur d'oubli  $U$  qui a toute petite catégorie  $\mathcal{C}$  associe son graphe sous-jacent  $\Gamma$  a un adjoint à gauche  $F$ . Pour tout graphe  $\Gamma$ ,  $F(\Gamma)$  est la catégorie libre engendrée par  $\Gamma$ .

#### ADJONCTIONS ENTRE ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS

##### A.3.18 LEMME

Etant donnés deux ensembles ordonnés  $(A, \sqsubseteq_A)$  et  $(B, \sqsubseteq_B)$  ainsi que deux morphismes  $f$  et  $g$  appartenant respectivement à  $\text{PoSet}[(A, \sqsubseteq_A), (B, \sqsubseteq_B)]$  et à  $\text{PoSet}[(B, \sqsubseteq_B), (A, \sqsubseteq_A)]$ , on a

$$\left( \forall b \in B, b \sqsubseteq_B u(f(b)) \right) \text{ si et seulement si } \left( \forall a \in A, \forall b \in B ( f(b) \sqsubseteq_A a \Rightarrow b \sqsubseteq_B u(a) ) \right)$$

et

$$\left( \forall a \in A, f(u(a))b \sqsubseteq_A a \right) \text{ si et seulement si } \left( \forall a \in A, \forall b \in B, ( b \sqsubseteq_B u(a) \Rightarrow f(b) \sqsubseteq_A a ) \right)$$

PREUVE. Supposons le membre de gauche de la première assertion, soit alors  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que  $f(b) \sqsubseteq_A a$ , en particulier, puisque  $u$  est un morphisme de  $\text{PoSet}$  on a  $u(f(b)) \sqsubseteq_B u(a)$ , donc, d'après l'hypothèse fournie par le membre de gauche,  $b \sqsubseteq_B u(f(b)) \sqsubseteq_B u(a)$  et donc  $b \sqsubseteq_B u(a)$ .

Réciproquement, supposons le membre de droite de la première assertion, soit  $b \in B$ , posons  $a := f(b)$ , le membre de droite nous donne

$$( f(b) \sqsubseteq_A f(b) \Rightarrow b \sqsubseteq_B u(f(b)) )$$

dont il découle que  $b \sqsubseteq_B u(f(b))$ .

La seconde assertion se démontre de la même manière. ■

##### A.3.19 DÉFINITION (CORRESPONDANCE DE *Galois*)

On dit que la paire de morphismes d'ensembles ordonnés  $(f, u)$  est une **correspondance de Galois** lorsqu'elle vérifie

$$\forall a \in A, \forall b \in B, ( f(b) \sqsubseteq_A a \Leftrightarrow b \sqsubseteq_B u(a) )$$

Le lemme A.3.18 permet d'écrire d'autres formulations de la définition de correspondance de *Galois*. Cette appellation est issue de la théorie de *Galois*, si  $\mathbb{E}$  est une extension du corps  $\mathbb{F}$ , la collection des corps intermédiaires entre  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{E}$  forme un treillis complet. Pour  $\mathbb{F} < \mathbb{K} < \mathbb{E}$ , le groupe de *Galois* de l'extension  $\mathbb{K} < \mathbb{E}$ , noté  $G_{\mathbb{K}}(\mathbb{E})$  est le groupe des automorphismes de  $\mathbb{E}$  qui dont l'ensemble des points fixes contient  $\mathbb{K}$ . Alors la collection des sous-groupes de  $G_{\mathbb{F}}(\mathbb{E})$  forme également un treillis complet et les applications  $\mathbb{K} \mapsto G_{\mathbb{K}}(\mathbb{E})$  et  $H \mapsto \{x \in \mathbb{E} | \forall \sigma \in H \sigma(x) = x\}$  où  $H$  est un sous-groupe de  $G_{\mathbb{F}}(\mathbb{E})$ , forment une correspondance de *Galois*. Pour plus de détails, on pourra consulter le chapitre 5 de [85].

### A.3.20 PROPOSITION

La paire  $(f, u)$  est une correspondance de *Galois* si et seulement si on a  $f \dashv u$  en considérant  $(A, \sqsubseteq_A)$  et  $(B, \sqsubseteq_B)$  comme des petites catégories.

En particulier, on retrouve, à partir des résultats sur les adjonctions, des propriétés très connues sur les ensembles partiellement ordonnés.

### A.3.21 PROPOSITION (TREILLIS COMPLET)

Etant donné un ensemble partiellement ordonné  $(X, \sqsubseteq_X)$ , toute sous-partie de  $(X, \sqsubseteq_X)$  admet une borne supérieure si et seulement si toute sous-partie de  $(X, \sqsubseteq_X)$  admet une borne inférieure. On dit alors que  $(X, \sqsubseteq_X)$  est un **treillis complet**.

PREUVE. Il suffit d'appliquer la proposition A.2.17 et sa proposition duale en se remarquant qu'avec les conventions que l'on a faites, un produit (respectivement un coproduit) dans un poset est une borne inférieure (respectivement une borne supérieure). ■

Remarquons que la petite catégorie associée à un treillis complet est complète et cocomplète, l'existence d'égalisateur étant toujours vérifiée dans un préordre, on peut appliquer la proposition A.2.12. On obtient aussi un critère d'existence d'une correspondance de Galois

### A.3.22 PROPOSITION

Soit un treillis complet  $(A, \sqsubseteq_A)$ . Etant donné un morphisme  $u$  appartenant à  $\text{PoSet}[(A, \sqsubseteq_A), (B, \sqsubseteq_B)]$ , il existe un morphisme  $f$  appartenant à  $\text{PoSet}[(B, \sqsubseteq_B), (A, \sqsubseteq_A)]$  tel que  $(f, u)$  soit une correspondance de Galois si et seulement si  $u$  préserve les bornes inférieures, i.e.

$$u\left(\bigwedge_i a_i\right) = \bigwedge_i u(a_i)$$

et dualement, pour tout morphisme  $f$  appartenant à  $\text{PoSet}[(B, \sqsubseteq_B), (A, \sqsubseteq_A)]$ , il existe  $u$  appartenant à  $\text{PoSet}[(A, \sqsubseteq_A), (B, \sqsubseteq_B)]$  tel que  $(f, u)$  soit une correspondance de Galois si et seulement si  $f$  préserve les bornes supérieures, i.e.

$$u\left(\bigvee_i a_i\right) = \bigvee_i u(a_i)$$

PREUVE. C'est un cas particulier du théorème du foncteur adjoint (proposition A.3.17). ■

## A.3.3 SOUS-CATÉGORIES RÉFLÉCHISSANTES

### A.3.23 DÉFINITION

Soit une catégorie  $\mathcal{B}$ , une **sous-catégorie** de  $\mathcal{B}$  est une catégorie  $\mathcal{A}$  telle que

1.  $Ob(\mathcal{A}) \subseteq Ob(\mathcal{B})$ ,
2. quels que soient les objets  $A_1$  et  $A_2$  de  $\mathcal{A}$ , on a  $\mathcal{A}[A_1, A_2] \subseteq \mathcal{B}[A_1, A_2]$ ,
3. pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , l'identité de  $A$  dans  $\mathcal{A}$  est l'identité de  $A$  dans  $\mathcal{B}$ ,

4. pour tout morphisme  $\alpha$  de  $\mathcal{A}$ , la source et le but de  $\alpha$  dans  $\mathcal{A}$  sont la source et le but de  $\alpha$  dans  $\mathcal{B}$ ,
5. pour toute suite composable  $(\alpha_2, \alpha_1)$  de  $\mathcal{A}$ , la composée de  $\alpha_1$  suivi de  $\alpha_2$  dans  $\mathcal{A}$  est la composée de  $\alpha_1$  suivi de  $\alpha_2$  dans  $\mathcal{B}$ .

On note  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  pour résumer les cinq points précédents.

Noter que, d'après le quatrième point, la suite  $(\alpha_2, \alpha_1)$  est composable dans  $\mathcal{B}$  si et seulement si elle l'est dans  $\mathcal{A}$ . Toute inclusion de catégories  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  induit trivialement un foncteur **inclusion** noté  $i$ , défini sur  $\mathcal{A}$  à valeurs dans  $\mathcal{B}$  par  $Ob(i)(A) := A$  et  $Mo(i)(\alpha) := \alpha$ .

#### A.3.24 PROPRIÉTÉ (TREILLIS COMPLET DES SOUS-CATÉGORIES)

Etant donné une catégorie  $\mathcal{C}$ , la collection des sous-catégories de  $\mathcal{C}$  ordonnée par  $\subseteq$  forme un treillis complet dont le plus petit élément est  $\emptyset$  et le plus grand  $\mathcal{C}$ . En particulier, étant donné  $\Sigma \subseteq Mo(\mathcal{C})$ , il existe une plus petite sous-catégorie  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $\Sigma \subseteq Mo(\mathcal{A})$ , on l'appelle la **sous-catégorie engendrée** par  $\Sigma$ .

#### A.3.25 DÉFINITION (IMAGE D'UN FONCTEUR)

Si  $F$  est un foncteur de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$  et  $\Sigma \subseteq Mo(\mathcal{A})$ , l'**image** de  $\Sigma$  par  $F$  est par définition la sous-catégorie de  $\mathcal{B}$  engendrée par

$$\{Mo(f)(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma\}$$

On note  $F(\Sigma)$  l'image de  $\Sigma$  par  $F$  et  $Im(F)$  dans le cas où  $\Sigma = Mo(\mathcal{A})$ .

#### A.3.26 DÉFINITION (SOUS-CATÉGORIE PLEINE)

Une sous-catégorie  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}$  est dite **pleine** (dans  $\mathcal{B}$ ) lorsque quels que soient les objets  $A_1$  et  $A_2$  de  $\mathcal{A}$ , on a

$$\mathcal{A}[A_1, A_2] = \mathcal{B}[A_1, A_2]$$

#### A.3.27 PROPRIÉTÉ

Si  $\mathcal{C}_1$  est pleine dans  $\mathcal{C}_2$  elle-même pleine dans  $\mathcal{C}_3$ , alors  $\mathcal{C}_1$  est pleine dans  $\mathcal{C}_3$ .

#### A.3.28 LEMME

Soient  $\mathcal{C}_1$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}_2$  et  $F$  un foncteur de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{C}_1$ , si le cône  $(\gamma_B : X \rightarrow FB)_{B \in Ob(\mathcal{B})}$  est la limite de  $F$  dans  $\mathcal{C}_2$  et que  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}_1$ , alors ce même cône est également la limite de  $F$  dans  $\mathcal{C}_1$ .

On a bien sûr un résultat analogue au lemme A.3.28 pour les colimites.

#### A.3.29 DÉFINITION (SOUS-CATÉGORIE REPLÈTE)

Une sous-catégorie  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}$  est dite **replète** (dans  $\mathcal{B}$ ) lorsque quels que soient les objets  $B$  de  $\mathcal{B}$  et  $A$  de  $\mathcal{A}$ , si  $A$  et  $B$  sont isomorphes dans  $\mathcal{A}$ , alors  $B$  est un objet de  $\mathcal{A}$ .

#### A.3.30 DÉFINITION (SOUS-CATÉGORIE VASTE)

Une sous-catégorie  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}$  est dite **vaste** dans  $\mathcal{B}$  quand  $Ob(\mathcal{A}) = Ob(\mathcal{B})$ .

#### A.3.31 PROPRIÉTÉ

Si  $\mathcal{C}_1$  est vaste dans  $\mathcal{C}_2$  elle-même vaste dans  $\mathcal{C}_3$ , alors  $\mathcal{C}_1$  est vaste dans  $\mathcal{C}_3$ .

A.3.32 DÉFINITION (SOUS-CATÉGORIE RÉFLÉCHISSANTE)

Une sous-catégorie  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}$  est dite **réfléchissante** quand elle est pleine et replète dans  $\mathcal{B}$  et que l'inclusion  $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B}$  a un adjoint à gauche noté  $r$  et appelé **réflexion** de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{A}$ . Par extension, l'image par  $r$  d'un objet  $B$  de  $\mathcal{B}$  est appelé **reflet** de  $B$  dans  $\mathcal{A}$ . De plus, si l'unité est un épimorphisme on dit que la sous-catégorie est **épi-réfléchissante**.

Dans le cas où le foncteur d'inclusion admet un adjoint à droite au lieu d'un adjoint à gauche, on parle de sous-catégorie **co-réfléchissante**.

A.3.33 PROPRIÉTÉ

Si  $\mathcal{A}$  est une sous-catégorie réfléchissante de  $\mathcal{B}$  et que  $\mathcal{B}$  est une sous-catégorie réfléchissante de  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{A}$  est une sous-catégorie réfléchissante de  $\mathcal{C}$ .

PREUVE. C'est une conséquence immédiate de la propriété A.3.11. ■

Bien enentendu, la propriété A.3.33 reste valide pour les sous-catégories coréfléchissantes. La notion de réflexion est très importante dans cette thèse et, plus généralement, en mathématiques. En effet, elle offre une méthode systématique de recherche d'invariants : Supposons que l'on souhaite étudier les objets d'une catégorie  $\mathcal{B}$  et en particulier, être en mesure de déterminer lorsque deux de ses objets, par exemple  $B_1$  et  $B_2$ , ne sont pas isomorphes. Il suffit pour cela de trouver une sous-catégorie réfléchissante  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}$  dans laquelle  $B_1$  et  $B_2$  ont des reflets qui ne sont pas isomorphes. *Cat* a de très nombreuses sous-catégories réfléchissantes dont il est fait usage dans cette thèse.

Outre leur intérêt lors de la recherche d'invariants, les sous-catégories réfléchissantes permettent également de prouver la complétude et la cocomplétude :

A.3.34 PROPOSITION

Si  $\mathcal{A}$  est une sous-catégorie réfléchissante de  $\mathcal{B}$ , alors

- $\mathcal{B}$  complète  $\implies \mathcal{A}$  complète
- $\mathcal{B}$  cocomplète  $\implies \mathcal{A}$  cocomplète
- $\mathcal{B}$  finiment complète  $\implies \mathcal{A}$  finiment complète
- $\mathcal{B}$  finiment cocomplète  $\implies \mathcal{A}$  finiment cocomplète

PREUVE. Voir les propositions 3.5.3 p.118 et 3.5.4 p.119 dans [9]. ■

Par le biais de la proposition A.3.34 on prouvera que la catégorie des espaces partiellement ordonnés ainsi que toutes les sous-catégories réfléchissantes de *Cat* sont complètes et cocomplètes.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de sous-catégories réfléchissantes.

EXTRÉMITÉS DES INTERVALLES DE  $\mathbb{R}$

L'inclusion suivante induit une correspondance de *Galois*

$$(\mathcal{I}(\mathbb{R}), \subseteq) \xleftarrow{\quad} (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$$

où  $(\mathcal{I}(\mathbb{R}), \subseteq)$  et  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$  sont respectivement les treillis complets des intervalles et des parties de  $\mathbb{R}$ , tous deux vus comme des petites catégories. Le reflet d'une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est le plus petit intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $X$ . Dans ce cas, la réflexion distingue les parties de  $\mathbb{R}$  selon le critère de leurs extrémités. En particulier toutes les parties de  $\mathbb{R}$  n'ayant ni borne supérieure ni borne inférieure ont le même reflet.

#### LONGUEUR DES OUVERTS DE $\mathbb{R}$

Posons maintenant  $\mathcal{O}(\mathbb{R})$  la famille des ouverts de  $\mathbb{R}$  préordonnée de la façon suivante,  $O_1 \preceq O_2$  si et seulement si il existe une application croissante  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall x, y \in O_1, |y-x| \leq |f(y)-f(x)|$  et  $f(x), f(y) \in O_2$ . La longueur d'un intervalle  $]a, b[$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a \leq b$  est par définition  $b-a$ . Or, un résultat classique affirme que tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est une réunion disjointe d'intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ , on peut alors, par extension, en définir la longueur comme la somme des longueur des intervalles dont il est la réunion, c'est une somme de réels positifs donc à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . On peut alors prouver que

#### A.3.35 PROPOSITION

L'application ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \lambda : (\mathcal{O}(\mathbb{R}), \preceq) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \leq) \\ O & \longmapsto & \text{longueur de } O \end{array}$$

est l'adjoint à gauche de l'inclusion de  $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \leq)$  dans  $(\mathcal{O}(\mathbb{R}), \preceq)$  où chaque élément  $x \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \leq)$  est identifié à l'intervalle  $]0, x[$ .

On remarque que l'on a pas exactement une réflexion, en effet, l'image de l'inclusion n'est pas replète. Pourvu que l'on prenne quelques précautions, la proposition A.3.35 s'étend aux sous-ensembles boréliens de  $\mathbb{R}$  avec pour réflexion la mesure de *Lebesgues*. Donnons enfin un exemple moins "proche" d'une correspondance de *Galois* :

#### PETITES CATÉGORIES DISCRÈTES

**Set** peut être identifié à la catégorie des petites catégories discrètes à laquelle elle est isomorphe. Ainsi, **Set** est une sous-catégorie réfléchissante de **Cat**, la réflexion étant donnée par le foncteur  $Ob$  qui à chaque petite catégorie associe son ensemble d'objets et à chaque foncteur entre petites catégories sa partie objet. Cette réflexion est aussi appelée **discrétisation**.

## A.4 CONGRUENCES GÉNÉRALISÉES

Cette notion, introduite dans [7] pour étudier les épimorphismes de **Cat**, permet également de construire de nombreuses sous-catégories réfléchissantes de **Cat**. Dans le papier original, seules les petites catégories sont prises en compte et on peut effectivement, si l'on ne prend pas la précaution de limiter la taille des catégories avec lesquelles on travaille,



rencontrer des problèmes liés à la théorie des ensembles. La hiérarchie de catégories donnée par A.1.8 résout ces problèmes pourvu que le terme “catégorie” soit pris au sens de la définition A.1.7.

#### A.4.1 DÉFINITION (CONGRUENCE GÉNÉRALISÉE)

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathcal{U}_N$ -petite, une **congruence généralisée** sur  $\mathcal{C}$  est une paire de relations d'équivalence  $(\sim_o, \sim_m)$  respectivement définie sur  $Ob(\mathcal{C})$  et la classe des suites  $\sim_o$ -**composables** non vides de  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire

$$\left\{ (\alpha_n, \dots, \alpha_0) \mid n \in \mathbb{N}; \forall k \in \{0, \dots, n\} \alpha_k \in Mo(\mathcal{C}); \forall k \in \{0, \dots, n-1\} tgt(\alpha_k) \sim_o src(\alpha_{k+1}) \right\}$$

et qui satisfait :

1.  $x \sim_o y \Rightarrow (id_x) \sim_m (id_y)$ . Graphiquement,

2.  $(\alpha_n, \dots, \alpha_0) \sim_m (\beta_p, \dots, \beta_0) \Rightarrow tgt(\alpha_n) \sim_o tgt(\beta_p)$  et  $src(\alpha_0) \sim_o src(\beta_0)$

3.  $src(\beta) = tgt(\alpha) \Rightarrow (\beta, \alpha) \sim_m (\beta \circ \alpha)$

4.  $(\alpha_n, \dots, \alpha_0) \sim_m (\beta_p, \dots, \beta_0)$  et  $(\alpha'_{n'}, \dots, \alpha'_0) \sim_m (\beta'_{p'}, \dots, \beta'_0)$  et  $tgt(\alpha_n) \sim_o src(\beta'_0)$   
 $\Rightarrow (\beta_p, \dots, \beta_0, \alpha_n, \dots, \alpha_0) \sim_m (\beta'_{p'}, \dots, \beta'_0, \alpha'_{n'}, \dots, \alpha'_0)$

Notons que la paire  $(\sim_o, \sim_m)$  est alors un point de  $\mathcal{U}_N$  et aussi que, dans l'axiome 4,  $(\beta'_p, \dots, \beta'_0, \alpha'_n, \dots, \alpha'_0)$  est nécessairement une suite  $\sim_o$ -composable d'après l'axiome 2 et le fait qu'en tant que relation d'équivalence,  $\sim_o$  soit transitive. On retrouve la notion habituelle de congruence sur une catégorie en considérant les congruences généralisées qui n'identifient deux objets que s'ils sont égaux. Autrement dit

#### A.4.2 DÉFINITION (CONGRUENCE)

Etant donnée une catégorie  $\mathcal{C}$ , une congruence sur  $\mathcal{C}$  est une relation d'équivalence  $\sim$  sur  $Mo(\mathcal{C})$  telle que

1.  $\forall \alpha, \beta \in Mo(\mathcal{C}), \alpha \sim \beta \Rightarrow src(\alpha) = src(\beta) \text{ et } tgt(\alpha) = tgt(\beta),$
2.  $\forall \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in Mo(\mathcal{C}), \alpha \sim \alpha' \text{ et } \beta \sim \beta' \text{ et } tgt(\alpha) = src(\beta) \Rightarrow (\beta \circ \alpha) \sim (\beta' \circ \alpha')$

#### A.4.3 PROPOSITION (PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DES CONGRUENCES GÉNÉRALISÉES)

Etant donné une congruence généralisée  $(\sim_o, \sim_m)$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$ . Il existe une catégorie, unique à isomorphisme près et notée  $\mathcal{C}/\sim$  ainsi qu'un unique foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}/\sim$  noté  $Q_\sim$  tels que, pour tout foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{A}$  satisfaisant les deux propriétés suivantes

- $\forall x, y \in Ob(\mathcal{C}) \ x \sim_o y \Rightarrow Fx = Fy$
- pour toutes suites  $\sim_o$ -composables  $(\alpha_n, \dots, \alpha_0)$  et  $(\beta_p, \dots, \beta_0)$

$$(\alpha_n, \dots, \alpha_0) \sim_m (\beta_p, \dots, \beta_0) \Rightarrow F(\alpha_n) \circ \dots \circ F(\alpha_0) = F(\beta_p) \circ \dots \circ F(\beta_0)$$

il existe un unique foncteur  $G$  de  $\mathcal{C}/\sim$  vers  $\mathcal{A}$  tel que  $F = G \circ Q_\sim$ . On a le digramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}/\sim & \\ Q_\sim \nearrow & & \searrow G \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A} \end{array}$$

PREUVE. Les objets de la catégorie quotient  $\mathcal{C}_\sim$  sont les  $\sim_o$ -classes d'équivalence et ses morphismes les  $\sim_m$ -classes d'équivalence. La composée de deux  $\sim_m$  classes  $C_1$  et  $C_2$ , i.e.  $C_2 \circ C_1$  est la  $\sim_m$  classe de la concaténation d'un représentant de  $C_2$  et d'un représentant de  $C_1$ . Donc  $[(\beta_n, \dots, \beta_0)]_{\sim_m} \circ [(\alpha_n, \dots, \alpha_0)]_{\sim_m} = [(\beta_n, \dots, \beta_0, \alpha_n, \dots, \alpha_0)]_{\sim_m}$ ,  $src[(\alpha_n, \dots, \alpha_0)]_{\sim_m} = [src(\alpha_0)]_{\sim_o}$  et  $tgt[(\alpha_n, \dots, \alpha_0)]_{\sim_m} = [tgt(\alpha_n)]_{\sim_o}$ . Le choix d'un représentant est bien sûr insensible grâce aux axiomes de la définition A.4.1.

Par ailleurs, pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  on pose  $Q_\sim(x) := [x]_{\sim_o}$  et pour toute suite  $\sim_o$ -composable  $(\alpha_n, \dots, \alpha_0)$  on pose  $Q_\sim(\alpha_n, \dots, \alpha_0) = [(\alpha_n, \dots, \alpha_0)]_{\sim_m}$ . Par suite on pose  $G([x]_{\sim_o}) := F(x)$  et  $G([(\alpha_n, \dots, \alpha_0)]_{\sim_m}) := F(\alpha_n) \circ \dots \circ F(\alpha_0)$ . L'unicité est à isomorphisme près dans  $\mathcal{U}_N$  pour  $N \in \mathbb{N}$  assez grand et découle immédiatement de l'unicité de  $G$ , elle-même étant triviale. ■

#### A.4.4 DÉFINITION

$\mathcal{C}/\sim$  et  $Q_\sim$  sont la catégorie et le foncteur **quotient**.

L'idée des catégories quotients est que plus  $\sim$  identifie d'objets et de morphismes, plus le quotient est petit, cette idée est formalisée par la

#### A.4.5 PROPOSITION

Etant donné une catégorie  $\mathcal{C}$ , la classe des congruences généralisées sur  $\mathcal{C}$  forme un treillis complet pour l'inclusion  $\subseteq$ , i.e.  $(\sim_o, \sim_m) \subseteq (\sim'_o, \sim'_m)$  si et seulement si, par définition,  $\sim_o \subseteq \sim'_o$  et  $\sim_m \subseteq \sim'_m$ . Le plus petit élément est la congruence généralisée qui n'identifie que les objets et morphismes égaux, le plus grand est celui qui identifie tous les objets et tous les morphismes. En outre, si  $\sim \subseteq \sim'$ , alors  $Q_{\sim'}$  se factorise à travers  $Q_{\sim}$ , c'est-à-dire qu'il existe un unique foncteur  $G$  de  $\mathcal{C}_{\sim}$  vers  $\mathcal{C}_{\sim'}$  tel que  $Q_{\sim'} = G \circ Q_{\sim}$ . Il suit que la classe des catégories quotients de  $\mathcal{C}$  forme un treillis complet isomorphe au dual de celui des congruences généralisées sur  $\mathcal{C}$ , le plus grand élément étant la catégorie  $\mathcal{C}$  (le quotient de  $\mathcal{C}$  par la plus petite des congruences généralisées sur  $\mathcal{C}$ ) et le plus petit  $\{*\}$  (le quotient de  $\mathcal{C}$  par la plus grande congruence généralisée sur  $\mathcal{C}$ ). En particulier, si  $(\rho_o, \rho_m)$  est une paire de relation sur  $Ob(\mathcal{C})$  et la classe des suites non vides d'élément de  $Mo(\mathcal{C})$ , alors il existe une plus petite congruence généralisée  $(\sim_o, \sim_m)$  telle que  $(\rho_o, \rho_m) \subseteq (\sim_o, \sim_m)$ ; c'est la congruence généralisée engendrée par  $(\rho_o, \rho_m)$ .

PREUVE. Il suffit de remarquer qu'une intersection quelconque de congruences généralisées est encore une congruence généralisée. L'isomorphisme est donné par  $\sim \mapsto \mathcal{C}_{\sim}$ . ■  
On a également

#### A.4.6 COROLLAIRE

Etant donné une catégorie  $\mathcal{C}$ , la classe des congruences sur  $\mathcal{C}$  forme un treillis complet pour l'inclusion  $\subseteq$ . Le plus petit élément est la congruence qui n'identifie que les objets et morphismes égaux, le plus grand est celui qui identifie toutes les chaînes composables ayant la même source et le même but. En outre, si  $\sim \subseteq \sim'$ , alors  $Q_{\sim'}$  se factorise à travers  $Q_{\sim}$ , c'est-à-dire qu'il existe un unique foncteur  $G$  de  $\mathcal{C}_{\sim}$  vers  $\mathcal{C}_{\sim'}$  tel que  $Q_{\sim'} = G \circ Q_{\sim}$ . Il suit que la classe des catégories quotients de  $\mathcal{C}$  par une congruence forme un treillis complet isomorphe au dual de celui des congruences sur  $\mathcal{C}$ , le plus grand élément étant la catégorie  $\mathcal{C}$  (le quotient de  $\mathcal{C}$  par la plus petite des congruences généralisées sur  $\mathcal{C}$ ) et le plus petit le préordre associé à  $\mathcal{C}$  (voir proposition A.1.24). . En particulier, si  $\rho$  est une relation la classe des suites composables non vides de  $\mathcal{C}$ , alors il existe une plus petite congruence  $\sim$  telle que  $\rho \subseteq \sim$ ; c'est la congruence engendrée par  $\rho$ .

Il est clair que si  $\mathcal{C}$  est  $\mathcal{U}_N$ -petite, alors il en est de même pour n'importe lequel de ses quotients. Lorsque l'on cherchera des sous-catégories réfléchissantes de  $\text{Cat}$ , l'unité de la réflexion sera donnée par  $Q_{\sim(\mathcal{C})}$  où  $\sim(\mathcal{C})$  sera une famille de congruences généralisées indexée par la classe des petites catégories et définie de façon "canonique". Le résultat qui suit illustre ce propos

#### A.4.7 PROPOSITION (MONOÏDIFICATION)

Mon est une sous-catégorie épiréfléchissante de  $\text{Cat}$ . La réflexion est appelée **monoïdification**.

PREUVE. Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie, soit  $\sim(\mathcal{C})$  la plus petite congruence généralisée qui identifie tous les objets de  $\mathcal{C}$  (on invoque implicitement la proposition A.4.5). On insiste bien sur le fait qu'elle dépende de  $\mathcal{C}$  même si on notera seulement  $\sim$  dans la suite de la preuve. Alors  $\mathcal{C}/\sim$  est un monoïde et pour tout monoïde  $M$  et tout foncteur  $F$  de

$\mathcal{C}$  vers  $M$ , il existe un unique foncteur  $G$  de  $\mathcal{C}/\sim$  vers  $M$  tel que  $F = G \circ Q_\sim$ . Il suffit alors d'appliquer la proposition A.3.12. On aurait aussi pu directement, dans le treillis des quotients de  $\mathcal{C}$ , prendre le plus grand élément qui soit un monoïde. ■

Avant d'en finir avec les congruences généralisées, voici un dernier résultat, classique, mais qui vient immédiatement en appliquant cette notion.

#### A.4.8 PROPOSITION

Toute catégorie  $\mathcal{C}$  est équivalente à une catégorie squelettique unique à isomorphisme près appelée le **squelette** de  $\mathcal{C}$ . De plus, deux catégories sont équivalentes si et seulement si leurs squelettes sont isomorphes.

PREUVE. Voir [59]. Il suffit de choisir un représentant dans chaque classe d'objets à isomorphisme près et de considérer la sous catégorie pleine dont la collection des objets est donnée par les représentants que l'on a choisis. Pour la seconde assertion, il faut noter que deux catégories squelettiques sont équivalentes si et seulement si elles sont isomorphes. ■

On peut par exemple décrire le squelette d'un groupoïde à l'aide de ses groupes fondamentaux

#### A.4.9 PROPOSITION (SQUELETTE D'UN GROUPOÏDE)

Le squelette d'un groupoïde  $\mathcal{G}$  est le coproduit dans  $\mathbf{Grd}$  de la famille des groupes fondamentaux de ses composantes connexes. Plus formellement, le foncteur qui à chaque objet de la catégorie de composantes de  $\mathcal{G}$  associe son groupe fondamental est défini sur une catégorie discrète. Sa colimite est donc un coproduit et il s'avère que c'est le squelette de  $\mathcal{G}$ .

PREUVE. Notons  $\mathcal{G}'$  le coproduit défini dans l'énoncé de la proposition A.4.9. Tout d'abord les morphismes de  $\mathcal{G}'$  sont des endomorphismes donc  $\mathcal{G}'$  est une catégorie squelettique (voir définition A.1.17). Soit  $C$  une composante connexe de  $\mathcal{G}$ , d'après la proposition A.1.26 pour tout  $x, y \in C$ ,  $\mathcal{G}[x, x] \cong \mathcal{G}[y, y]$  in  $\mathbf{Gr}$ . On choisit  $x_C \in C$  d'où un foncteur d'inclusion  $F_C : \mathcal{G}[x_C, x_C] \hookrightarrow \mathcal{G}$ . Alors le coproduit des  $\mathcal{G}[x_C, x_C]$ 's est (à isomorphisme de groupoïde près)  $\mathcal{G}'$  et le foncteur  $F$  coproduit (dans  $\mathbf{Grd}$ ) des  $F_C$ 's est une équivalence de catégories. En effet, il vient immédiatement que  $F$  est plein, fidèle et que tout objet de  $\mathcal{G}$  est isomorphe à un objet de l'image de  $F$  puisque tout objet  $y$  de  $\mathcal{G}$  appartient à une composante  $C$  et que  $y \cong x_C$  dans  $\mathcal{G}$ .

$$F := \coprod_{\substack{C \text{ composante} \\ \text{connexe de } \mathcal{G}}} F_C$$

■

#### A.4.10 COROLLAIRE

Le squelette d'un groupoïde connexe est son groupe fondamental (voir la proposition A.1.26).

Attention, si plusieurs composantes connexes de  $\mathcal{G}$  ont un même groupe fondamental, il apparaîtra plusieurs copies "disjointes" de ce groupe dans la colimite. Attention aussi au fait que ce résultat devient faux si l'on effectue de coproduit dans  $\mathbf{Gr}$  au lieu de  $\mathbf{Grd}$ . Ces

remarques étant faites, on aurait pu aussi définir le groupe fondamental d'un groupoïde comme le coproduit décrit dans la proposition A.4.9 effectué dans  $\text{Gr}$  plutôt que dans  $\text{Grd}$  de sorte que le groupe fondamental soit toujours un groupe. Une telle définition est compatible avec celle donnée dans la proposition A.1.26 dans le cas des groupoïdes connexes.

Donnons enfin un exemple d'utilisation de la notion de congruence

#### A.4.11 PROPOSITION (GROUPOÏDIFICATION)

$\text{Grd}$  est un sous-catégorie réfléchissante de  $\text{Cat}$ . La réflexion est appelée **groupoïdification**.

PREUVE. Soit une catégorie  $\mathcal{C}$ . Notons  $\Gamma$  son graphe sous-jacent et  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$  la catégorie libre engendrée par le graphe  $\Gamma'$  dont les sommets sont ceux de  $\Gamma$ . Les flèches de  $\Gamma'$  sont toutes celles de  $\Gamma$  auxquelles on ajoute formellement, pour chaque flèche  $f$  de  $\Gamma$  allant de  $x$  vers  $y$ , une flèche  $\bar{f}$  de  $y$  vers  $x$ . On suppose que  $\{f \mid f \text{ flèche de } \Gamma\}$  et  $\{\bar{f} \mid f \text{ flèche de } \Gamma\}$  sont disjoints. Autrement dit, on a formellement ajouté à  $\Gamma$  une nouvelle flèche de sens contraire pour chaque flèche de  $\Gamma$ . On peut aussi définir  $\Gamma'$  comme la somme amalgamée de  $\Gamma$  et de  $\Gamma^{op}$  au-dessus de la discrétisation de  $\Gamma$  dans la catégorie des graphes ou même, puisque l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli préserve les colimites, comme la somme amalgamée dans  $\text{Cat}$  de la catégorie libre engendrée par  $\Gamma$  et de la catégorie libre engendrée par  $\Gamma^{op}$  au-dessus de la discrétisation de  $\mathcal{C}$ . On "quotiente" alors  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$  par la congruence engendrée par  $(f, \bar{f}) \sim (id_y)$ ,  $(\bar{f}, f) \sim (id_x)$  pour chaque  $f \in Mo(\mathcal{C})$  et  $(g, f) \sim (g \circ f)$  pour chaque paire composable de  $\mathcal{C}$ . Le résultat est évidemment un groupoïde noté  $r(\mathcal{C})$  et on montre que cette construction induit la réflexion de l'inclusion  $\text{Grd} \hookrightarrow \text{Cat}$ . En particulier, l'unité en  $\mathcal{C}$  est le foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $r(\mathcal{C})$  dont la partie objet est l'identité et la partie morphisme consiste à associer à chaque morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}$  la  $\sim$ -classe d'équivalence correspondante, en d'autres termes, cette unité est donnée par  $Q_{\sim}$  (voir la proposition A.4.3). On peut constater que ce foncteur peut prendre la même valeur pour des morphismes distincts de  $\mathcal{C}$ . En fait, si la partie morphisme de l'unité est injective pour une catégorie  $\mathcal{C}$ , tous les morphismes de  $\mathcal{C}$  sont des bimorphismes. Dans le cas contraire, si on a  $h \circ f = g \circ f$  pour  $g \neq h$  dans  $\mathcal{C}$ , alors, dans  $r(\mathcal{C})$ , on obtient  $h \circ f \circ \bar{f} = g \circ f \circ \bar{f}$  donc  $h = g$ . ■

La preuve de la proposition A.4.11 est un cas particulier de la construction d'une **catégorie de fractions** de  $\mathcal{C}$  sur une sous-famille de morphismes  $\Sigma$ . L'idée est d'inverser formellement dans une catégorie  $\mathcal{C}$  les morphismes qui, bien que n'étant pas des isomorphismes de plein droit, sont tout de même du point de vue de celui qui étudie les objets de  $\mathcal{C}$  tels que l'on voudrait pouvoir les "inverser". On reprend alors exactement la construction précédente à un seul détail près, au lieu d'ajouter une flèche  $\bar{f}$  pour chaque morphisme de  $\mathcal{C}$ , on l'en ajoute que pour chaque morphisme de  $\Sigma$ . Conséquemment, on aura des relations  $(f, \bar{f}) \sim (id)$  et  $(\bar{f}, f) \sim (id)$  uniquement pour les  $f \in \Sigma$ .

Cette méthode est extrêmement utile et apparaît en homologie algébrique pour construire les catégories dérivées (voir [87] chapitre III.2) où l'on inverse tous les "quasi-isomorphismes", c'est-à-dire ceux qui induisent des isomorphismes entre les groupes de (co-)homologie en toutes les dimensions. Il faut faire attention au fait que, dans cet ouvrage, on parle de localisation d'une catégorie à la place de catégorie de fractions, or il existe, dans le cadre de la théorie des catégories de modèles, une notion de localisation

plus fine (voir [48] et [82]). A ce propos, on prouve justement dans [87] (chapitre III.4) qu'une catégorie dérivée est la localisation d'une catégorie homotopique. Un résultat analogue, mais exprimé sans faire un usage explicite des localisations, figure dans [49] au chapitre 2.3. Les catégories de fractions sont aussi utilisées en théorie des catégories de modèles pour définir la notion de catégorie homotopique, cela consiste "simplement" à inverser les morphismes de la famille des équivalences faibles (voir [49] chapitre 1). La référence historique en matière de catégories de fractions et de leur lien avec la théorie de l'homotopie est [25]. Les catégories de fractions sont également décrites dans [9] et dans le 1<sup>er</sup> chapitre de [2]. Pour finir sur les catégories de fractions, celles-ci sont caractérisées par la propriété universelle

#### A.4.12 PROPOSITION (PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DES CATÉGORIES DE FRACTIONS)

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\Sigma \subseteq Mo(\mathcal{C})$ . Il existe une unique (à isomorphisme près) catégorie  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  et un unique foncteur  $I_\Sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  tel que pour tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  tel que  $F(\Sigma) \subseteq Iso\mathcal{A}$ , i.e.  $F$  envoie tout élément de  $\Sigma$  sur un isomorphisme de  $\mathcal{A}$  il existe un unique foncteur  $G$  faisant commuter le digramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] & \\ I_\Sigma \nearrow & & \searrow G \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A} \end{array}$$

#### A.4.13 REMARQUE

Soit une catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\Sigma \subseteq Iso(\mathcal{C})$ , alors  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  et  $\mathcal{C}$  sont isomorphes. En particulier, si  $\mathcal{G}$  est un groupoïde, alors quelquesoit la collection de morphismes  $\Sigma$  de  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}[\Sigma^{-1}]$  et  $\mathcal{G}$  sont isomorphes.

## A.5 CATÉGORIES MONOÏDALES

### A.5.1 DÉFINITION

Une **catégorie monoïdale** est une catégorie  $\mathcal{C}$  munie d'un foncteur  $\otimes$  défini sur  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  et à valeurs dans  $\mathcal{C}$  (on écrira  $A \otimes B$  plutôt que  $\otimes(A, B)$ ), d'un objet  $I$  de  $\mathcal{C}$  et de trois transformations naturelles  $l_A : (I \otimes A) \rightarrow A$ ,  $r_A : (A \otimes I) \rightarrow A$  et  $a_{ABC} : ((A \otimes B) \otimes C) \rightarrow (A \otimes (B \otimes C))$  dont chaque composante est un isomorphisme de  $\mathcal{C}$ . De plus, on demande que ces trois transformations naturelles soient telles que les diagrammes suivant commutent :

$$\begin{array}{ccc} ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \xrightarrow{a_{(A \otimes B)CD}} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \\ \downarrow a_{ABC} \otimes id_D & & \downarrow a_{AB(C \otimes D)} \\ (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & & (A \otimes I) \otimes B \xrightarrow{a_{AIB}} A \otimes (I \otimes B) \\ \downarrow a_{A(B \otimes C)D} & & \searrow r_A \otimes id_B \quad \downarrow id_A \otimes l_B \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{id_A \otimes a_{BCD}} & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \end{array}$$

Si  $a_{ABC}$ ,  $l_A$  et  $r_A$  sont des identités, la catégorie monoïdale est dite **stricte**.

### A.5.2 DÉFINITION

Une catégorie monoïdale  $\mathbf{C}$  est dite **symétrique** si de plus on a une transformation naturelle  $s_{AB} : (A \otimes B) \longrightarrow (B \otimes A)$  dont chaque composante est un isomorphisme de  $\mathbf{C}$  et que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{s_{AB} \otimes id_C} & (B \otimes A) \otimes C \\
 \downarrow a_{ABC} & & \downarrow a_{BAC} \\
 A \otimes (B \otimes C) & & B \otimes (A \otimes C) \\
 \downarrow s_{A(B \otimes C)} & & \downarrow id_B \otimes s_{AC} \\
 (B \otimes C) \otimes A & \xrightarrow{a_{BCA}} & B \otimes (C \otimes A)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes I & \xrightarrow{s_{AI}} & I \otimes A \\
 \searrow r_A & & \downarrow l_A \\
 & & A \\
 A \otimes B & \xrightarrow{s_{AB}} & B \otimes A \\
 \searrow id_{A \otimes B} & & \downarrow s_{BA} \\
 & & A \otimes B
 \end{array}$$

Si  $a_{ABC}$ ,  $l_A$ ,  $r_A$  et  $s_{AB}$  sont des identités, la catégorie monoïdale symétrique est dite **stricte**.

### A.5.3 DÉFINITION

Une catégorie monoïdale symétrique  $\mathbf{C}$  est dite **fermée** lorsque pour chaque objet  $B$  de  $\mathbf{C}$ ,  $- \otimes B$  a un adjoint à droite, on le note  $(-)^B$ .

### A.5.4 REMARQUE

Remarquons que dans une catégorie monoïdale symétrique  $\mathbf{C}$ , pour tout objet  $B$  de  $\mathbf{C}$ ,  $- \otimes B$  a un adjoint à droite si et seulement si  $B \otimes -$  a un adjoint à droite.

On a une notion analogue pour les catégories monoïdales

### A.5.5 DÉFINITION

Une catégorie monoïdale  $\mathbf{C}$  est dite **bifermée** lorsque pour tout objet  $B$  de  $\mathbf{C}$ ,  $- \otimes B$  et  $B \otimes -$  ont un adjoint à droite.

Dans ce cas bien sûr, l'existence d'un adjoint à droite de  $- \otimes B$  n'implique pas celle d'un adjoint à droite de  $B \otimes -$  et *vice versa*. Dans cette thèse on ne rencontrera que des catégories monoïdales symétriques dont la plupart seront fermées.

## A.5.1 EXEMPLES

### MONOÏDES

Tout monoïde  $(M, \mu, e)$ , vu comme une catégorie discrète, c'est-à-dire que la collection des objets est  $M$  et dont les seuls morphismes sont les identités, est un catégorie monoïdale stricte en posant  $\otimes := \mu$  et  $I := e$ .

### CATÉGORIES CARTÉSIENNES

#### A.5.6 DÉFINITION (CATÉGORIE CARTÉSIENNE)

Une catégorie  $\mathbf{C}$  est dite **cartésienne** lorsque que le produit de toute paire d'objets de  $\mathbf{C}$  existe dans  $\mathbf{C}$  et que  $\mathbf{C}$  a un objet terminal.

En comparant la définition A.5.6 avec la proposition A.2.12 on constate qu'il ne manque que les égalisateurs à une catégorie cartésienne pour qu'elle soit finiment complète.

### A.5.7 PROPOSITION

Toute catégorie cartésienne  $\mathbf{C}$  peut être munie d'une structure de catégorie monoïdale symétrique telle que pour tout couple d'objets  $(A, B)$  de  $\mathbf{C}$ ,  $A \otimes B$  soit un représentant du produit de la paire  $\{A, B\}$  dans  $\mathbf{C}$

PREUVE. Dans la cas général, on a besoin d'une version globale de l'axiome du choix, dont nous disposons justement grâce à la théorie des ensembles dans laquelle nous travaillons. En particulier, on a une relation de bon ordre  $\leq$  sur  $Ob(\mathbf{C})$  et donc, quels que soient les objets  $A$  et  $B$  de  $\mathbf{C}$ , les  $\leq$ -bornes inférieure et supérieure de  $\{A, B\}$  existent et sont respectivement notées  $A \wedge B$  et  $A \vee B$ . On note  $I$  un représentant de l'objet terminal de  $\mathbf{C}$  en demandant que  $I$  soit le plus petit élément de  $\leq$ . Pour chaque paire  $(A, B)$  d'objets de  $\mathbf{C}$  on choisit un représentant de la limite du foncteur

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow A \wedge B \\ 1 &\longrightarrow A \vee B \end{aligned}$$

où  $\{0, 1\}$  est la catégorie discrète ayant deux objets 0 et 1. De plus, on exige que pour tout objet  $A$  de  $\mathbf{C}$  on ait  $I \otimes A = A$ , c'est-à-dire que l'on choisit  $A$  comme représentant du produit de  $I$  et de  $A$ . On a donc déjà pour tous objets  $A$  et  $B$  de  $\mathbf{C}$ , les relations  $A \otimes B = B \otimes A$  et  $I \otimes A = A \otimes I = A$  et donc, les transformations naturelles  $l$ ,  $r$  et  $s$  sont des identités. Il ne reste plus qu'à construire la transformation naturelle  $a$ , ce qui se fait en utilisant la propriété universelle du produit de deux objets, les vérifications qui s'ensuivent sont fastidieuses mais ne présentent pas de difficultés. ■

Dans beaucoup de cas "pratiques", comme par exemple ceux de  $\mathbf{Set}$ ,  $\mathbf{Mon}$ ,  $\mathbf{PoSet}$  et plus généralement  $\mathbf{Cat}$ , la construction de  $\otimes$  est canonique.

### A.5.8 DÉFINITION

Dans une catégorie (quelconque)  $\mathbf{C}$ , on dit qu'un objet  $A$  de  $\mathbf{C}$  est **exponentiable** (dans  $\mathbf{C}$ ) lorsque le foncteur  $- \times A$  admet un adjoint à droite que l'on note  $(-)^A$ .

### A.5.9 PROPOSITION

Tout espace topologique localement compact est exponentiable dans  $\mathbf{Spc}$ . En particulier,  $[0, 1]$  muni de la topologie classique est exponentiable dans  $\mathbf{Spc}$ .

PREUVE. C'est un résultat classique en topologie, on le trouve par exemple dans [10]. Par ailleurs, la catégorie  $\mathbf{Spc}$  est décrite dans la définition B.1.11. ■

### A.5.10 DÉFINITION (CATÉGORIE CARTÉSIENNE FERMÉE)

Une catégorie cartésienne est dite fermée lorsque chacun de ses objets est exponentiable.

$\mathbf{Set}$ ,  $\mathbf{Mon}$ ,  $\mathbf{PoSet}$  et  $\mathbf{Cat}$  sont en fait des exemples de catégorie cartésienne fermée. Dans une catégorie cartésienne fermée  $\mathbf{C}$ , un objet  $X$  est dit **réflexif** lorsque  $X^X$  est une rétraction de  $X$ , c'est-à-dire qu'il existe  $f \in \mathbf{C}[X, X^X]$  et  $g \in \mathbf{C}[X^X, X]$  tels que  $f \circ g = id_{X^X}$ . Il est clair que si  $X$  est terminal, alors  $X^X$  l'est aussi en conséquence de quoi tout objet terminal est réflexif. Les objets réflexifs non triviaux donnent des modèles du  $\lambda$ -calcul, les détails sont disponibles dans le chapitre 5.5 de la partie I de [1]. Dans  $\mathbf{Set}$ ,  $B^A$  est l'ensemble des applications de  $A$  dans  $B$ , en conséquence, si  $X$  n'est pas un singleton (i.e. pas terminal), le théorème de cantor affirme que  $X$  ne peut pas être réflexif dans  $\mathbf{Set}$ .



Autrement dit,  $\text{Set}$  n'a pas d'objet réflexif non trivial.

Remarquons dès maintenant que  $\text{Spc}$  n'est pas cartésienne fermée. Les détails à propos de ce fait figurent dans [10].

## A.6 SINGULARISATION/RÉALISATION

La catégorie des espaces topologiques regorge d'objets qui, du point de vue de la topologie algébrique, sont pathologiques. En fait, on prouve que tout espace topologique est (homotopiquement) équivalent à un espace "raisonnable". Pour donner un sens à l'idée d'espace "raisonnable", on choisit un jeu de motifs <sup>1</sup> particuliers  $\mathbf{M}$  et on décide de n'étudier que les espaces topologiques qui peuvent être décrits comme un "collage" de copies d'éléments du jeu de motifs que l'on s'est fixé (réalisation). Inversement, on arrive à "découper" un espace topologique en morceaux dont la "forme" est un des motifs disponible dans  $\mathbf{M}$  (singularisation). Historiquement, les simplexes constituèrent le premier jeu de motifs auquel on s'est intéressé. On parlait alors de topologie algébrique combinatoire. Le formalisme de la théorie des catégories permet de transposer cette idée à n'importe quelle catégorie  $\mathbf{C}$  autre que celle des espaces topologiques, pourvu que les collages soient possibles dans la catégorie  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire qu'elle soit co-complète. En pratique, le choix d'un jeu de motifs est celui d'une petite catégorie  $\mathbf{M}$  et d'un foncteur de  $\mathbf{M}$  dans  $\mathbf{C}$ . Cette section présente les deux jeux de motifs les plus couramment rencontrés (les simplexes et les cubes) ainsi que la singularisation et la réalisation. Cet aspect général de la méthode est résumé de façon très abstraite dans la proposition 3.1.5 de [49]. On trouve le cas des simplexes et des espaces topologiques dans [25] et [82].

### A.6.1 LA CATÉGORIE SIMPLICIALE

Puisque les simplexes furent utilisés les premiers, c'est eux que nous présentons d'abord. Plus pratiquement, les résultats concernant les simplexes seront utilisés pour établir ceux qui relèvent des cubes.

#### A.6.1 PROPOSITION (CATÉGORIE SIMPLICIALE)

On note  $\Delta$  la (petite) catégorie dont les objets sont les segments initiaux propres de  $\mathbb{N}$  et ayant pour morphismes les applications croissantes entre segments initiaux de  $\mathbb{N}$ . En d'autres termes, la catégorie  $\Delta$  possède exactement un objet pour chaque entier naturel  $n$ , cet objet est noté  $[n]$  et par définition, il est égal à  $\{0, \dots, n-1\}$ ; les éléments de l'ensemble  $\Delta[[n], [p]]$  sont alors les applications croissantes (au sens large) de  $[n]$  vers  $[p]$ . Distinguons en particulier pour chaque entier naturel  $n$  les morphismes de  $\Delta$  suivants : pour  $i \in [n+1]$

$$\delta_i^{n,\Delta} : [n] \longrightarrow [n+1]$$

$$k \longmapsto \begin{cases} k & \text{si } k < i \\ k+1 & \text{si } k \geq i \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>le terme "motif" est ici à prendre au sens commun, c'est-à-dire en dehors du contexte mathématique.

et pour  $i \in [n]$

$$\sigma_i^{n,\Delta} : [n+1] \longrightarrow [n]$$

$$k \longmapsto \begin{cases} k & \text{si } k \leq i \\ k-1 & \text{si } k > i \end{cases}$$

Ce sont respectivement les opérateurs faces et dégénérescences simpliciales. On pose alors  $\Delta^+$  la sous-catégorie de  $\Delta$  engendrée par les morphismes  $\delta_i^{n,\Delta}$  et  $\Delta^-$  la sous-catégorie de  $\Delta$  engendrée par les morphismes  $\sigma_i^{n,\Delta}$ ; autrement dit, les catégories  $\Delta^+$  et  $\Delta^-$  sont respectivement obtenues en ne gardant des morphismes de  $\Delta$  que les applications injectives et surjectives. De plus, tout morphisme  $f$  de  $\Delta$  s'écrit de façon unique sous la forme  $f = f^+ \circ f^-$  où  $f^+$  et  $f^-$  sont respectivement des morphismes de  $\Delta^+$  et de  $\Delta^-$ . Enfin, les morphismes  $\delta_i^{n,\Delta}$  et  $\sigma_i^{n,\Delta}$  satisfont les relations suivantes :

$$\delta_j^{n+1,\Delta} \circ \delta_i^{n,\Delta} = \begin{cases} \delta_i^{n+1,\Delta} \circ \delta_{j-1}^{n,\Delta} & \text{si } 0 \leq i < j \leq n \\ \delta_{i+1}^{n+1,\Delta} \circ \delta_j^{n,\Delta} & \text{si } 0 \leq j \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$\sigma_j^{n+1,\Delta} \circ \sigma_i^{n,\Delta} = \begin{cases} \sigma_{i-1}^{n+1,\Delta} \circ \sigma_j^{n,\Delta} & \text{si } 0 \leq j < i \leq n \\ \sigma_i^{n+1,\Delta} \circ \sigma_{j+1}^{n,\Delta} & \text{si } 0 \leq i \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

$$\sigma_j^{n+1,\Delta} \circ \delta_i^{n,\Delta} = \begin{cases} \delta_i^{n+1,\Delta} \circ \sigma_{j-1}^{n,\Delta} & \text{si } 0 \leq i < j \leq n \\ id & \text{si } i \in \{j, j+1\} \\ \delta_{i-1}^{n+1,\Delta} \circ \sigma_j^{n,\Delta} & \text{si } 1 \leq j+1 < i \leq n-1 \end{cases}$$

On trouve d'autres définitions de la catégorie simpliciale qui ne diffèrent de celle-ci que par un décalage des indices, par exemple, dans [25, 49, 82, 87] et [2], le  $n^{\text{ème}}$  objet est  $\{0, \dots, n\}$  ce qui correspond plus à la notion géométrique de simplexe au sens où un simplexe affine de dimension  $n$  possède  $n+1$  sommets. Nous préférons cependant la définition de [59] en raison de ses propriétés algébriques. Tout d'abord, [0] est l'objet initial de la catégorie  $\Delta$  et [1] son objet final. De plus la catégorie  $\Delta$  est monoïdale stricte avec le produit  $\dot{+}$  (foncteur de  $\Delta \times \Delta$  sur  $\Delta$ ) défini pour  $f : [n] \longrightarrow [p]$  et  $f' : [n'] \longrightarrow [p']$  par

$$f \dot{+} f' : [n+n'] \longrightarrow [p+p']$$

$$k \longmapsto \begin{cases} f(k) & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ f'(k-n') & \text{si } n' \leq k \leq n+n'-1 \end{cases}$$

l'élément neutre étant bien sûr donné par  $id_{[0]} : [0] \longrightarrow [0]$ . En notant respectivement  $\mu$  et  $\eta$  les uniques éléments des ensembles  $\Delta[[2], [1]]$  et  $\Delta[[0], [1]]$ , le triplet  $(1, \mu, \eta)$  est un monoïde dans  $\Delta$ , universel au sens où pour tout monoïde  $(M, \mu', \eta')$  d'une catégorie monoïdale stricte  $(\mathcal{C}, \star, e)$ , il existe un unique morphisme  $F : (\Delta, \dot{+}, id_{[0]}) \longrightarrow (\mathcal{C}, \star, e)$  tel que  $F([1]) = M$ ,  $F(\mu) = \mu'$  et  $F(\eta) = \eta'$ , voir [59]. Par ailleurs, il existe un foncteur  $D$  de  $\Delta$  dans l'ensemble ordonné  $\mathbb{N}$  tel que pour tout morphisme  $f^+$  de  $\Delta^+$  et tout morphisme  $f^-$  de  $\Delta^-$ , on a  $D(src(f^+)) < D(tgt(f^+))$  et  $D(tgt(f^-)) < D(src(f^-))$ . On dit que  $\Delta$  est une catégorie de *Reedy* [49].

On définit un **ensemble simplicial** comme un foncteur de  $\Delta^{op}$  dans  $\text{Set}$ . La catégorie  $\Delta^+$

est aussi appelée **catégorie pré-simpliciale**. Informellement, on enlève les opérateurs dégénérescences simpliciales. La collection des ensembles simpliciaux forme, avec les transformations naturelles entre ensembles simpliciaux, une catégorie notée  $\mathbf{SSet}$ . La même assertion est valable en remplaçant "ensembles simpliciaux" par "ensembles pré-simpliciaux", la catégorie obtenue est notée  $\mathbf{PSSet}$ . Chacune de ces catégories est en fait un topos et en tant que telle, est donc complète (le produit étant calculé composantes par composantes), co-complète et cartésienne fermée, voir [60, 31].

A partir de n'importe quel ensemble  $X$ , on peut définir l'ensemble simplicial  $S$  suivant : pour chaque entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S(n) := X^{[n]}$  c'est-à-dire l'ensemble des suites de longueur  $n$  à valeurs dans  $X$ . En particulier,  $S(0)$  ne contient que la suite vide. Pour  $x \in S(n+1)$  on pose  $S(\delta_i^{n,\Delta})(x) := x \circ \delta_i^{n,\Delta}$ , c'est-à-dire que le  $i^{\text{ème}}$  élément de la suite  $x$  est supprimé, en effet  $x \circ \delta_i^{n,\Delta}(k)$  vaut  $x(k)$  si  $k < i$  et  $x(k+1)$  si  $i \leq k$ . Par ailleurs, pour  $x \in S(n)$   $S(\sigma_i^{n,\Delta})(x) := x \circ \sigma_i^{n,\Delta}$ , c'est-à-dire que le  $i^{\text{ème}}$  élément de la suite  $x$  est dupliqué, en effet  $x \circ \sigma_i^{n,\Delta}(k)$  vaut  $x(k)$  si  $k \leq i$  et  $x(k-1)$  si  $i < k$ .

## A.6.2 LA CATÉGORIE CUBIQUE

### A.6.2 PROPOSITION (CATÉGORIE CUBIQUE)

On note  $\square$  la (petite) catégorie dont les objets sont les ensembles de suites finies de longueur  $n \in \mathbb{N}$  à valeurs dans  $[2] = \{0, 1\}$ , c'est-à-dire que le  $n^{\text{ème}}$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) objet de  $\square$  est  $[2]^{[n]}$ . On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $\pi_{i,\varepsilon}^n$  l'application de  $[2]^{[n]}$  vers  $[2]^{[n]}$  définie par  $\pi_{i,\varepsilon}^n(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) := (x_0, \dots, x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$  c'est-à-dire qui "remplace" la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $(x_0, \dots, x_{n-1})$  par  $\varepsilon$ . On définit alors les opérateurs faces et dégénérescences cubiques par

$$\delta_{i,\varepsilon}^{n,\square}(c) := \pi_{i,\varepsilon}^{n+1}(c \circ \sigma_{\min\{i,n-1\}}^{n,\Delta}) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \ \varepsilon \in \{0, 1\} \text{ et } i \in [n+1]$$

$$\sigma_i^{n,\square}(c) := c \circ \delta_i^{n,\Delta} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } i \in [n]$$

Un **ensemble cubique** est par définition un foncteur de  $\square^{op}$  dans  $\mathbf{Set}$ .

L'avantage d'avoir décrit  $\square$  à l'aide de  $\Delta$  est de déduire les relations cubiques directement des relations simpliciales. La **catégorie pré-cubique** est par définition la sous-catégorie de  $\square$  engendrée par les faces cubiques. Un autre intérêt de cette construction est qu'elle est paramétrée par  $[2]$ . En effet, rien ne nous empêche de remplacer  $[2]^{[n]}$  par  $X^{[n]}$ , la définition de l'opérateur  $\pi_{i,\varepsilon}^n$  reste la même au détail près que  $\varepsilon \in X$ . On peut noter  $\square_X$  la petite catégorie ainsi obtenue, on a alors un foncteur de  $\mathbf{Set}$  dans  $\mathbf{Cat}$  qui à chaque ensemble  $X$  associe la petite catégorie  $\square_X$ .

## A.6.3 SINGULARISATION

Soit une catégorie  $\mathbf{C}$ , une petite catégorie  $\mathbf{M}$  et un foncteur  $\mathbb{D}$  de  $\mathbf{M}$  dans  $\mathbf{C}$ . On appelle **M-ensemble** une foncteur de  $\mathbf{M}^{op}$  dans  $\mathbf{Set}$ . Les **M-ensembles** muni des transformations naturelles entre eux forment donc une catégorie de préfaisceaux dont la catégorie des ensembles simpliciaux (notée  $\mathbf{SSet}$ ) et celle des ensembles cubiques (notée  $\mathbf{CSet}$ ) sont des cas particuliers. Ainsi, il n'est pas surprenant que le **foncteur singularisation**  $\mathbb{S}$  soit

défini de façon analogue au plongement de *Yoneda* (voir le lemme A.1.29) Un objet  $x$  de  $\mathbf{C}$  est envoyé sur le foncteur

$$\mathbf{M}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$m \text{ objet de } \mathbf{M}^{op} \longmapsto \mathbf{C}[\mathbb{D}(m), x] \text{ objet de } \mathbf{Set}$$

$$g^{op} : m \rightarrow m' \text{ morphisme de } \mathbf{M}^{op} \longmapsto \boxed{\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[\mathbb{D}(m), x] & \longrightarrow & \mathbf{C}[\mathbb{D}(m'), x] \quad \text{morphisme de } \mathbf{Set} \\ & & \gamma \longmapsto \gamma \circ \mathbb{D}(g) \end{array}}$$

qui est un objet de  $\mathbf{Set}^{\mathbf{M}^{op}}$  noté  $\mathbb{S}(x)$

et tout morphisme  $f : x \rightarrow x'$  de  $\mathbf{C}$ , est envoyé sur la transformation naturelle

$$\mathbb{S}(x) \xrightarrow{\quad \bullet \quad} \mathbb{S}(x')$$

$$m \text{ objet de } \mathbf{M}^{op} \longmapsto \boxed{\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[\mathbb{D}(m), x] & \longrightarrow & \mathbf{C}[\mathbb{D}(m), x'] \text{ morphisme de } \mathbf{Set} \\ & & \delta \longmapsto f \circ \delta \end{array}}$$

qui est un morphisme de  $\mathbf{Set}^{\mathbf{M}^{op}}$  de  $\mathbb{S}(x)$  vers  $\mathbb{S}(x')$  noté  $\mathbb{S}(f)$ . Tout est résumé dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[\mathbb{D}(m), x] & \xrightarrow{f \circ -} & \mathbf{C}[\mathbb{D}(m), x'] \\ \uparrow - \circ \mathbb{D}(g) & & \uparrow - \circ \mathbb{D}(g) \\ \mathbf{C}[\mathbb{D}(m'), x] & \xrightarrow{f \circ -} & \mathbf{C}[\mathbb{D}(m'), x'] \end{array}$$

## A.6.4 HOMOLOGIE SINGULIÈRE

### SIMPLICIALE

Dans cette section, on pose  $\mathbf{M} := \Delta$  et  $\mathbb{D}$  un foncteur de  $\Delta$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbb{S}$  est le foncteur singularisation décrit dans la section précédente. On veut définir  $H_n : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$  le  $n^{\text{ème}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) foncteur d'homologie singulière (simpliciale) de  $\mathbf{C}$  (selon  $\mathbb{D}$ ). Etant donné un objet  $x$  de  $\mathbf{C}$ , on appelle  $n$ -simplexe singulier de  $x$  tout élément de  $(\mathbb{S}(x))(n) = \mathbf{C}[\mathbb{D}([n]), x]$ . On note alors  $C_n(x)$  le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des  $n$ -simplexes singuliers de  $x$ . De plus, pour chaque  $\delta_i^{n, \Delta}$  on pose  $d_i^n := (\mathbb{S}(x))(\delta_i^n)$ , c'est-à-dire

l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\mathbb{D}([n+1]), x] &\longrightarrow \mathbb{C}[\mathbb{D}([n]), x] \\ s &\longmapsto s \circ \mathbb{D}(\delta_i^n) \end{aligned}$$

Les relations simpliciales et la functorialité de  $\mathbb{D}$  donnent alors

$$d_i^n \circ d_j^{n+1} = d_{j-1}^n \circ d_i^{n+1} \text{ pour } i < j$$

Chaque  $d_i^n$  induit donc un morphisme de groupe abélien encore noté  $d_i^n$  et défini sur  $C_{n+1}(x)$  à valeurs dans  $C_n(x)$ . Les morphismes induits satisfont donc aussi les relations précédentes. On peut alors poser

$$\partial_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n \quad \text{morphisme de } \mathbf{Ab}[C_{n+1}(x), C_n(x)]$$

et vérifier, grâce aux relations  $d_i^n \circ d_j^{n+1} = d_{j-1}^n \circ d_i^{n+1}$  pour  $i < j$ , que

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

Autrement dit,  $\text{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$  ce qui permet de définir le  $n^{\text{ème}}$  groupe d'homologie de  $x$  comme  $\ker(\partial_n) / \text{im}(\partial_{n+1})$ . On vérifie que cette construction est functorielle. Notons enfin qu'il suffit d'avoir un foncteur  $\mathbb{D}$  de  $\Delta^+$  dans  $\mathbf{Spc}$ , en effet, les dégénérescences n'apparaissent pas dans la construction.

#### CUBIQUE

Dans ce qui précède, la catégorie  $\Delta$  n'intervient que dans la forme de  $\partial_n$  et formellement, seul le fait que l'on ait  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$  a une importance. Bien sûr prendre  $\partial_n = 0$  convient à la construction mais n'a aucun intérêt. Il suffit donc, pour avoir une homologie singulière dans le cas cubique, de trouver un opérateur non trivial  $\partial_n$  construit à partir des morphismes "face" cubiques (i.e.  $d_i^{n, \square} := (\mathbb{S}(x))(\delta_i^n)$ ) qui vérifie  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ . Bien entendu, il ne faut pas perdre de vue que le choix du foncteur  $\mathbb{D}$  est crucial. On prend généralement

$$\partial_n := \sum_{i=1}^n (-1)^i (d_{i,1}^n - d_{i,0}^n)$$

#### A.6.5 RÉALISATION

Soit une catégorie  $\mathbf{C}$  co-complète, une petite catégorie  $\mathbf{M}$  et un foncteur  $\mathbb{D}$  de  $\mathbf{M}$  dans  $\mathbf{C}$ . On peut alors prouver que le foncteur de singularisation admet un adjoint à gauche appelé **foncteur réalisation**. Enfin, la catégorie  $\mathbf{C}^{\mathbf{M}}$  des foncteurs de  $\mathbf{M}$  vers  $\mathbf{C}$  est équivalente à la catégorie des adjonctions entre  $\mathbf{Set}^{\mathbf{M}^{op}}$  et  $\mathbf{C}$ . La preuve de ce résultat apparaît dans [49] (proposition 3.1.5) pour le cas  $\mathbf{M} := \Delta$ . Généralement, lorsque l'on mentionne le foncteur réalisation sans plus de précisions, on fait référence au cas où  $\mathbf{M} := \Delta$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{Spc}$  (la catégorie des espaces topologiques et des fonctions continues) et  $\mathbb{D}(n) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i \geq 0; x_1 + \dots + x_{n+1} = 1\}$  (cf [49], [82] ou [25]).

Cet appendice résume les résultats de topologie et de topologie algébrique auxquels il est fait référence dans cette thèse. On trouve dans [74], [44], [88], [65], [25], [49], [82] quasiment tout ce dont on aura besoin mais, selon l'ouvrage, sous des formes très diverses et plus ou moins élémentaires. Le premier est focalisé sur l'homologie, le second est un exposé élémentaire très clair des notions d'homotopie et d'homologie, les deux suivants sont très généraux et d'approche classique, le cinquième donne les outils de la topologie algébrique combinatoire, le sixième est consacré aux catégories de modèles (aboutissement axiomatique des aspects combinatoires de la topologie algébrique) et le dernier établit un pont entre les approches classiques et combinatoires. J'ai picoré de ci de là dans chacun d'eux. Quant à ce qui concerne la topologie, n'importe quel manuel traitant du sujet va sans doute plus loin que ce qu'il est ici nécessaire de connaître. Citons enfin [47] dans lequel on trouve la définition du groupoïde fondamental d'un espace topologique ainsi la preuve du théorème de *Van Kampen* correspondant. Les idées exposées dans ce livre et la façon dont il mêle théorie des catégories, groupoïdes et topologie algébrique, sont à l'origine de la notion de catégorie fondamentale d'un espace ordonné développée dans le chapitre II.

## B.1 TOPOLOGIE

### B.1.1 DÉFINITION (ESPACE TOPOLOGIQUE)

Un **espace topologique**  $X$  est une paire  $(|X|, \tau)$ , où  $|X|$  est un ensemble et  $\tau_X$  une famille de parties de  $X$  contenant  $\emptyset$  et  $|X|$ , stable par intersection finie et union quelconque.

Formellement :

- $\emptyset \in \tau$  et  $X \in \tau$ ,

- si  $n \in \mathbb{N}$  et  $U_0, \dots, U_n \in \tau$ , alors

$$\bigcap_{k \in \{0, \dots, n\}} U_k \in \tau,$$

- si  $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$  est une famille d'éléments de  $\tau$ , alors

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \tau.$$

Un élément de  $\tau$  est appelé **ouvert** de  $X$ . On dit aussi que  $\tau$  est la **topologie** de  $X$ , que  $|X|$  est muni de la topologie  $\tau_X$ , ou encore que  $\tau_X$  est une topologie sur  $|X|$ . Par définition, une sous-partie de  $X$  est dite **fermée** lorsque son complémentaire dans  $X$  est ouvert.

Chaque fois que le contexte est suffisamment explicite, on confondra  $X$  et son ensemble sous-jacent  $|X|$ .

#### B.1.2 DÉFINITION (COMPARAISON DE TOPOLOGIE)

Etant données deux topologies  $\tau$  et  $\tau'$  sur un même ensemble, on dit que  $\tau$  est **plus grossière** que  $\tau'$  (ou que  $\tau'$  est **plus fine** que  $\tau$ ) quand  $\tau \subseteq \tau'$ .

#### B.1.3 PROPOSITION (TREILLIS COMPLET DES TOPOLOGIES SUR $|X|$ )

Etant donné un ensemble  $|X|$ , l'ensemble de toutes les topologies sur  $|X|$  forme un treillis complet pour la relation  $\subseteq$  (qui se lit "est plus grossière que") dont le plus petit élément (i.e. la topologie la plus grossière) est  $\{\emptyset, |X|\}$  et le plus grand (i.e. la topologie la plus fine)  $\mathcal{P}(|X|)$  c'est-à-dire la topologie dans laquelle toute sous-partie de  $|X|$  est ouverte. De plus la borne inférieure d'une famille de topologies sur  $X$  est l'intersection de ses membres.

PREUVE. On vérifie immédiatement qu'une intersection de topologie est une topologie. ■

#### B.1.4 PROPOSITION (TREILLIS COMPLET DES OUVERTS)

Etant donné un espace topologique  $X$ , l'ensemble des ouverts de  $X$ , c'est-à-dire  $\tau_X$ , est un treillis complet pour  $\subseteq$  (i.e. l'inclusion des sous-parties de  $|X|$ ) dont le plus petit élément est  $\emptyset$  et le plus grand est  $|X|$ . De plus, la borne supérieure d'une famille d'ouverts est la réunion de ses éléments.

PREUVE. D'après le troisième point de la définition B.1.1, une réunion d'ouverts est un ouvert. ■

#### B.1.5 DÉFINITION

Une famille  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  est une **base** de  $\tau$  quand tout élément de  $\tau$  peut s'écrire comme une réunion d'éléments de  $\mathcal{B}$ , autrement dit si tout élément du treillis complet des ouverts s'écrit comme la borne supérieure d'une sous-famille de  $\mathcal{B}$ . La famille  $\mathcal{S}$  de sous-parties de  $\tau$  est une **sous-base** de  $\tau$  lorsque l'ensemble des intersections finies d'éléments de  $\mathcal{S}$  constitue une base de  $\tau$ , on dit alors que  $\mathcal{S}$  engendre  $\tau$ .

B.1.6 DÉFINITION (INTÉRIEUR)

Si  $A \subseteq |X|$ , d'après la proposition B.1.4, on peut définir le plus grand ouvert inclus dans  $A$ , cet ouvert est appelé **intérieur** de  $A$  et noté  $Int(A)$  ou  $\overset{\circ}{A}$ .

En particulier, dans le treillis des ouverts, la borne inférieure d'une famille d'ouverts est l'intérieur de l'intersection de ses membres. En passant au complémentaire, on obtient le treillis complet des fermés, dans lequel la borne inférieure d'une famille de fermés est l'intersection de ses membres. On peut alors définir l'**adhérence** ou **clôture** d'une sous partie  $A$  d'un espace topologique  $X$  comme le plus petit fermé dans lequel cette partie est incluse, on  $Adh(A)$  ou  $\overline{A}$ .

B.1.7 DÉFINITION (DENSITÉ ET SÉPARABILITÉ)

Un sous-espace  $D$  d'un espace topologique  $X$  est dit **dense** dans  $X$  lorsque toute sous-partie de  $X$  d'intérieur non vide rencontre  $D$ , c'est-à-dire que pour toute sous-partie  $A$  de  $|X|$ , si l'intérieur de  $A$  n'est pas vide, alors  $D \cap A$  n'est pas vide non plus. L'espace topologique  $X$  est dit **séparable** si il possède une sous-partie au plus dénombrable dense (dans  $X$ ).

B.1.8 PROPOSITION

Etant donné un espace topologique  $X$  et  $|A| \subseteq |X|$ ,  $(|A|, \{|A| \cap U | U \in \tau_X\})$  est encore un espace topologique.

B.1.9 DÉFINITION (SOUS ESPACES TOPOLOGIQUES)

Etant donné un espace topologique  $X$  et  $|A| \subseteq |X|$ ,  $A := (|A|, \{|A| \cap U | U \in \tau_X\})$  est appelé **sous-espace** de  $X$ . On dit également que  $A$  est muni de la topologie induite (par  $X$ ) ou que  $A$  hérite de la topologie de  $X$ . On note  $A \subseteq X$

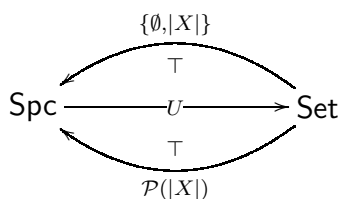
B.1.10 DÉFINITION (APPLICATIONS CONTINUES)

Etant donné deux espaces topologiques  $X_1$  et  $X_2$ , une application  $f$  de  $|X_1|$  vers  $|X_2|$  est dite **continue** de  $X_1$  vers  $X_2$  lorsque pour tout ouvert  $U$  de la topologie  $\tau_{X_2}$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de la topologie  $\tau_{X_1}$ . l'application (ensembliste)  $f$  est dite sous-jacente à l'application continue.

B.1.11 PROPOSITION (LA CATÉGORIE Spc)

La collection des espaces topologiques avec celle des applications continues forme une catégorie notée **Spc**. De plus le foncteur d'oubli  $U : \mathbf{Spc} \rightarrow \mathbf{Set}$  qui a tout espace topologique associe son ensemble sous-jacent et a toute application continue associe son application ensembliste sous-jacente admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite. Les isomorphismes de **Spc** sont aussi appelés **homéomorphismes**.

PREUVE. Une composée d'applications continues est continue. Etant donné un ensemble  $|X|$  l'adjoint à droite est obtenu en munissant  $|X|$  de la topologie réduite à  $\{\emptyset, |X|\}$  et l'adjoint à gauche en munissant  $|X|$  de la topologie  $\mathcal{P}(|X|)$  c'est-à-dire dans laquelle toute sous-partie de  $|X|$  est ouverte.





■

B.1.12 DÉFINITION (VOISINAGE)

Etant donné un espace topologique  $X$  et  $x \in |X|$ , un voisinage de  $x$  (dans  $X$ ) est un sous-ensemble  $V \subseteq |X|$  tel qu'il existe  $U \in \tau_X$  qui satisfasse  $x \in U \subseteq V$ .

B.1.13 DÉFINITION (ESPACE DE *Hausdorff*)

Un espace topologique est appelé **espace de *Hausdorff***, ou encore **espace séparé au sens de *Hausdorff***, lorsque pour tous points distincts  $x$  et  $y$  de  $X$ , il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  et un voisinage  $V_y$  de  $y$  tels que  $V_x \cap V_y = \emptyset$ . Les espaces de *Hausdorff* constituent les objets d'une sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Spc}$  notée  $\mathbf{Haus}$ .

B.1.14 PROPRIÉTÉ

Tout sous-espace d'un espace de *Hausdorff* est un espace de *Hausdorff*.

B.1.15 PROPRIÉTÉ

Le produit dans  $\mathbf{Spc}$  d'une famille d'espace de *Hausdorff* est un espace de *Hausdorff*.

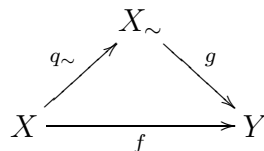
PREUVE. ■

B.1.16 PROPOSITION (QUOTIENT DANS  $\mathbf{Haus}$ )

Soit  $X$  un espace de *Hausdorff*. Etant donné  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $|X|$ , il existe un unique, à isomorphisme près, objet  $X_\sim$  de  $\mathbf{Haus}$  ainsi qu'une unique application continue  $q_\sim : X \rightarrow X_\sim$  telle que pour tout espace topologique  $Y$  de *Hausdorff* et toute application continue  $f$  de  $X$  vers  $Y$  (i.e.  $f \in \mathbf{Haus}[X, Y]$ ) satisfaisant

$$(x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)),$$

il existe une unique application continue  $g$  appartenant à  $\mathbf{Haus}[X_\sim, Y]$  telle que  $f = g \circ q_\sim$ .



est commutatif dans  $\mathbf{Haus}$ .

De plus, si  $\sim = \{(x_1, x_2) | f(x_1) = f(x_2)\}$ , alors  $g$  est injective.

PREUVE. Notons  $\sim^*$  l'intersection de toutes les relations d'équivalence sur  $|X|$  dont le graphe est fermé pour la topologie  $X \times X$ . Cette famille n'est pas vide car elle contient  $|X| \times |X|$ , i.e. la relation qui identifie tout. De plus, une intersection de sous-parties fermées est fermée, de même qu'une intersection de relations d'équivalence sur un ensemble fixé est une relation d'équivalence sur cet ensemble. La définition de  $\sim^*$  a donc un sens. Considérons maintenant le quotient ensembliste  $|X|/\sim^*$  que l'on munit de la plus fine des topologies rendant l'application ensembliste quotient  $q$  (i.e.  $q(x) := [x]_{\sim^*}$ ) de  $|X|$  vers  $|X|/\sim^*$  continue. Les ouverts de cette topologie sont exactement les sous-parties  $Y$  de  $|X|/\sim^*$  tel que  $q^{-1}(Y)$  est une sous-partie ouverte de  $X$ . L'espace topologique résultant est noté  $X_\sim$ . L'application ensembliste  $q$  induit une application continue de  $X$  vers  $X_\sim$

notée  $q_\sim$ . Soit maintenant  $f$  une application continue de  $X$  vers un espace de *Hausdorff*  $H$  vérifiant

$$\forall x_1, x_2 \in |X| \quad x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

comme  $H$  est un espace de *Hausdorff*,  $\Delta_H$  est fermé dans  $H \times H$  et comme  $f \times f$  est continue (car  $f$  l'est),  $(f \times f)^{-1}(\Delta_H)$  est fermé dans  $X \times X$ . En outre,  $\Delta_H$  étant une relation d'équivalence, il est facile de vérifier que  $(f \times f)^{-1}(\Delta_H)$  en est une aussi. Enfin, par hypothèse sur  $f$ , on a  $\sim \subseteq (f \times f)^{-1}(\Delta_H)$  et donc, par définition de  $\sim^*$ , on a  $\sim^* \subseteq (f \times f)^{-1}(\Delta_H)$ . Donc, il existe une unique application ensembliste  $|g| \in \text{Set}[|X|/\sim^*, |H|]$  telle que  $|f| = |g| \circ q$ . Pour conclure, il nous suffit de vérifier que  $|g|$  induit une application continue  $g$  de  $X_\sim$  (dont l'ensemble sous-jacent est  $|X|/\sim^*$ ) vers  $H$ . Or, étant donné un ouvert  $O$  de  $H$ ,  $|f|^{-1}(O) = q^{-1}(|g|^{-1}(O))$  est ouvert car  $f$  est continue. Par définition de la topologie dont on a muni  $|X|/\sim^*$ ,  $g^{-1}(O)$  est ouvert. Ainsi  $|g|$  induit effectivement une application continue  $g$  de  $X_\sim$  vers  $H$  satisfaisant  $f = g \circ q_\sim$ .

Par ailleurs, si  $\sim = \{(x_1, x_2) | f(x_1) = f(x_2)\}$ , alors nous avons  $\sim^* = \sim$  et il vient  $g([x_1]_\sim) = g([x_2]_\sim)$  si et seulement si  $f(x_1) = f(x_2)$  si et seulement si  $x_1 \sim x_2$  si et seulement si  $[x_1]_\sim = [x_2]_\sim$ , ainsi  $g$  est injective. En particulier, si  $X$  est un espace topologique quelconque, en appliquant ce qui précède à  $\sim := \Delta_X$ , on construit la counité de l'adjoint à gauche au foncteur d'inclusion  $\text{Haus} \hookrightarrow \text{Spc}$ . ■

#### B.1.17 DÉFINITION (RECOUVREMENT)

Un **recouvrement** d'un ensemble  $X$  est une famille  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  d'ensembles telle que

$$X \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$$

de plus, si tous les éléments de  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sont des ouverts (d'un espace topologique  $Y$ ), on parle de **recouvrement ouvert** de  $X$ . Une sous-famille de  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  qui est encore un recouvrement de  $X$  est appelé **sous-recouvrement** de  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ .

#### B.1.18 DÉFINITION (ESPACES COMPACTS)

Un espace topologie  $X$  est dit **compact** lorsque, de tous recouvrement ouvert de  $X$  on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Cette définition de la compacité est celle que l'on trouve dans les manuels anglo-saxons. Traditionnellement, l'école mathématique française définit un compact comme un espace de *Hausdorff* qui de plus satisfait la définition B.1.18.

#### B.1.19 PROPRIÉTÉ

Tout sous-espace fermé  $F$  d'un espace compact  $X$  est compact. Si de plus  $X$  est un espace (compact) de *Hausdorff*, alors tout sous-espace compact de  $X$  est fermé (dans  $X$ ).

PREUVE. Rappelons d'abord que, par définition, "A sous-espace fermé de  $X$ " signifie que  $A$  est un sous-espace de  $X$  et que  $|A|$  est une sous-partie fermée de  $X$ . Si  $(V_i)_{i \in \mathcal{I}}$  est un recouvrement ouvert de  $A$ , alors  $(V_i)_{i \in \mathcal{I}} \cup \{|X| - |A|\}$  est un recouvrement ouvert de  $X$  qui est compact, on peut donc en extraire un sous-recouvrement de  $X$  fini puis, si l'on enlève  $|X| - |A|$  à ce sous-recouvrement fini (si toutefois il en fait partie) on obtient un sous-recouvrement fini de  $A$ .

■

#### B.1.20 PROPRIÉTÉ

Tout sous-espace compact d'un espace de *Hausdorff*  $X$  est fermé dans cet espace.

PREUVE. Soit  $K$  un compact de  $X$ . Etant donné  $k \in K$  et  $x \in X \setminus K$ , on trouve un ouvert  $V_k$  contenant  $k$  et un ouvert  $W_{k,x}$  contenant  $x$  qui sont disjoints. En particulier,  $V_k$  recouvre  $K$  qui est compact, on peut donc extraire un sous-recouvre fini  $V_{k_j}$ . Mais alors, pour  $x \in X \setminus K$ ,  $\bigcap_j W_{k_j,x}$  est un ouvert contenant  $x$  disjoint de  $K$  (noter bien que l'intersection est finie). Donc  $K$  est fermé. ■

#### B.1.21 COROLLAIRE

Dans un espace de *Hausdorff* compact, les sous-espaces fermés sont les sous-espaces compacts.

PREUVE. Voir les propriétés B.1.19 et B.1.20. ■

#### B.1.22 PROPRIÉTÉ (IMAGE D'UN COMPACT)

L'image d'un compact par une application continue est compacte.

PREUVE. Soit  $f$  une application continue et  $K$  un compact de l'espace de départ de  $f$ . Si  $V_i$  est un recouvrement ouvert de  $f(K)$ ,  $(f^{-1}(V_i))$  est un recouvrement ouvert de  $K$  qui est compact, on peut donc extraire un sous-recouvrement (ouvert) fini  $f^{-1}(V'_i)$  de  $K$ , et donc  $V'_i$  est un sous-recouvrement (ouvert) de  $f(K)$ . ■

#### B.1.23 PROPRIÉTÉ (MAXIMALITÉ DES COMPACTS DE *Hausdorff*)

Etant donné un ensemble  $X$ , les topologies de *Hausdorff* compactes sont maximales dans l'ensemble des topologies compactes sur  $X$ .

PREUVE. Soit  $X$  et  $X'$  deux espaces topologiques compacts ayant le même ensemble sous-jacent. On suppose que  $X$  est un espace de *Hausdorff* et que  $X'$  est muni d'une topologies plus fine que celle de  $X$ . L'espace  $X'$  est donc séparé au sens de *Hausdorff*. La fonction identité sur l'ensemble sous-jacent induit donc une fonction continue  $\phi$  de  $X'$  vers  $X$ . Si  $F'$  est un fermé de  $X'$ , d'après la propriété B.1.19  $F'$  est un compact de  $X'$ , comme  $\phi$  est continue,  $\phi(F')$  est un compact de  $X$  séparé au sens de *Hausdorff*, donc d'après la propriété B.1.20,  $\phi(F') = F'$  est un fermé de  $X$ . Donc tout fermé de  $X'$  est aussi un fermé de  $X$  donc  $X = X'$  et  $\phi = id_X$ . ■

#### B.1.24 DÉFINITION (COMPACTEMENT OUVERT)

Soit un espace topologique  $X$ . Une sous-espace  $A$  de  $X$  est dit **compactement ouvert** lorsque pour toute sous-partie compacte  $K$  de  $X$  (i.e.  $K \subseteq |X|$  est compact avec la topologie induite),  $A \cap K$  est un ouvert de  $K$ , en d'autres termes, il existe un ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $A \cap K = U \cap K$ .

Tout ouvert est compactement ouvert mais la réciproque est fautive. Les espaces topologiques dans lesquels cette réciproque est vraie sont particulièrement intéressants

B.1.25 DÉFINITION (ESPACE COMPACTEMENT GÉNÉRÉ)

Un espace topologique  $X$  dans lequel toute sous-partie compactement ouverte est ouverte est dit **compactement généré**.

Là encore, la définition B.1.25 n'est pas standard, aussi la notion recouverte par le terme "espace compactement généré" varie-t-elle d'une source à l'autre. Dans cette thèse nous serons presque exclusivement confronté à des espaces *Hausdorff* satisfaisant la définition B.1.25.

B.1.26 PROPOSITION

Etant donné une application continue  $f : X_1 \longrightarrow X_2$  et un sous-espace  $A$  de  $X_1$ , la restriction de l'application  $|f|$  à  $|A|$  notée  $g$  (i.e. pour tout élément  $a$  de  $|A|$ , on a  $g(a) := f(a)$ ) induit une application continue de  $A$  vers  $X_2$ .

B.1.27 DÉFINITION (APPLICATION COMPACTEMENT CONTINUE)

Etant donné deux espaces topologiques  $X_1$  et  $X_2$ , une application  $f : |X_1| \longrightarrow |X_2|$  est dite **compactement continue** lorsque pour toute sous-partie compacte  $K$  de  $X_1$ , la restriction de  $f$  à  $K$  est continue (i.e.  $f_K : x \in K \longmapsto f(x) \in X_2$  est continue).

Toute application continue est compactement continue mais la réciproque est fautive, cependant

B.1.28 PROPOSITION

Si  $X_1$  est compactement engendré, alors toute application compactement continue  $f : |X_1| \longrightarrow |X_2|$  est continue.

B.1.29 DÉFINITION (TOPOLOGIE DES ASTÉRISQUES)

Etant donné deux espaces topologiques  $X_1$  et  $X_2$ , la **topologie des astérisques** sur  $|X_1| \times |X_2|$  (notée  $\tau^*$ ) est la plus fine (i.e. c'est-à-dire contenant toutes les topologies satisfaisant la propriété suivante) rendant les applications

$$\begin{array}{ccc} X_1 \longrightarrow (X_1 \times X_2, \tau^*) & \text{et} & X_2 \longrightarrow (X_1 \times X_2, \tau^*) \\ x \longmapsto (x, x_2) & & x \longmapsto (x_1, x) \end{array}$$

continues pour tout  $x_1 \in X_1$  et tout  $x_2 \in X_2$ . Cela signifie que  $V \subseteq X_1 \times X_2$  est un ouvert de la topologie des astérisques si et seulement si pour tout  $x_1 \in X_1$  et tout  $x_2 \in X_2$ ,  $\{x_1\} \times X_2 \cap V$  ainsi que  $X_1 \times \{x_2\} \cap V$  sont ouverts respectivement dans  $\{x_1\} \times X_2 \cong (X_2, \tau_{X_2})$  et dans  $X_1 \times \{x_2\} \cong (X_1, \tau_{X_1})$ .

B.1.30 DÉFINITION (TOPOLOGIE POINT À POINT)

Etant donné deux espaces topologiques  $X_1$  et  $X_2$ , la **topologie point à point** sur  $S \subseteq \text{Set}[|X_1|, |X_2|]$  est la plus petite topologie contenant

$$\left\{ f \in \text{Set}[|X_1|, |X_2|] \mid f(x) \in U \right\}$$

pour chaque  $x \in X_1$  et chaque  $U$  ouvert de  $X_2$

B.1.31 DÉFINITION (TOPOLOGIE COMPACT-OUVERT)

Etant donné deux espaces topologiques  $X_1$  et  $X_2$ , la **topologie compact-ouvert** sur  $S \subseteq \text{Set}[|X_1|, |X_2|]$  est la plus petite topologie contenant

$$\left\{ f \in \text{Set}[|X_1|, |X_2|] \mid f(K) \subseteq U \right\}$$

pour chaque sous-partie compacte  $K$  de  $X_1$  et chaque  $U$  ouvert de  $X_2$

Par définition, une base de la topologie point à point est donnée par la famille  $\{f \in S \mid f(x) \in U\}$  pour tout  $x \in X_1$  et tout  $U$  sous-partie ouverte de  $X_2$ . De même, une base de la topologie compact-ouvert est donnée par la famille  $\{f \in S \mid f(K) \subseteq U\}$  pour tout  $K$  sous-partie compacte de  $X_1$  et tout  $U$  sous-partie ouverte de  $X_2$ . Or tout singleton est compact, en conséquence la topologie point à point est plus grossière que la topologie compact-ouvert. On peut également noter que la topologie point à point est la topologie compact-ouvert où la topologie de l'espace de départ  $X_1$  est remplacée par  $\mathcal{P}(X_1)$ . Donc, plus la topologie sur  $|X_1|$  est fine, moins il y a de compact de  $X_1$  et donc plus la topologie compact-ouvert est grossière. En revanche, la topologie compact-ouvert est d'autant plus fine que l'est la topologie sur  $|X_2|$ .

Habituellement,  $S$  est inclus dans  $\text{Spc}[X_1, X_2]$  mais dans ce qui suit, nous aurons l'occasion de travailler avec  $S := \{f \text{ compactement continue de } X_1 \text{ dans } X_2\}$  qui, en général, contient strictement les applications continues ainsi qu'avec  $S := \{\text{applications dirigés de } \overline{X_1} \text{ vers } \overline{X_2}\}$  qui est en général strictement contenu dans  $\text{Spc}[X_1, X_2]$ . Insistons encore sur le fait que la topologie point à point ne dépend que de  $\tau_{X_2}$  alors que la topologie compact-ouvert dépend autant de  $\tau_{X_1}$  que de  $\tau_{X_2}$ .

Le tableau ci-dessous récapitule les noms et objets de catégories d'espaces topologiques très utilisées en topologie algébrique :

Nom	Objets (espaces)	Morphismes (applications)
Spc	topologiques	continues
Haus	de <i>Hausdorff</i>	continues
CHaus	compacts de <i>Hausdorff</i>	continues
CGHaus	de <i>Hausdorff</i> compactement générés	continues
CCHaus	de <i>Hausdorff</i>	compactement continues

Le résultat suivant récapitule quelques unes de leurs propriétés catégoriques les plus marquantes :

B.1.32 PROPOSITION

$\text{Spc}$  est complète, cocomplète et possède une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée : étant donné deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$ ,  $X \otimes Y$  est donné par la topologie des astérisques sur  $|X| \times |Y|$  (produit de  $|X|$  et  $|Y|$  dans  $\text{Set}$ ). L'adjoint à droite de  $- \otimes X$  est donné par la topologie point à point sur l'ensemble des applications continues de  $X$  vers  $Y$ .

$$X \otimes Y := (|X| \times |Y|, \text{topologie des astérisques})$$

$$Y^X := (\text{Spc}[X, Y], \text{topologie point à point})$$

De plus on a :

$$\text{Haus} \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{\kappa} \end{array} \text{CCHaus}$$

où  $i$  est le foncteur d'inclusion (noter qu'il n'est pas plein) et admet un adjoint à gauche  $\kappa$  qui est plein et fidèle.  $\text{CGHaus}$  et  $\text{CCHaus}$  sont équivalentes, chacune d'elles est complète, cocomplète and cartésienne fermée. Le produit dans  $\text{CCHaus}$  est le produit dans  $\text{Spc}$  et le homset interne est l'ensemble des applications compactement continues de  $X$  vers  $Y$  muni de la topologie compact-ouvert.  $\text{CGHaus}$  est une sous-catégorie épimorphisante de  $\text{Haus}$ .  $\text{CHaus}$  est une sous-catégorie épimorphisante de  $\text{Haus}$  dont le segment unité est un cogénérateur et  $\text{Haus}$  est une sous-catégorie épimorphisante de  $\text{Spc}$ .

PREUVE. Tous les détails sont disponibles dans [10] et [59], à part pour le résultat d'unicité que l'on trouve dans [83]. Etant donné un espace de Hausdorff  $X$ ,  $\kappa(X) := (|X|, \kappa(\tau))$  où  $\kappa(\tau)$  est la famille des sous-parties compactement ouvertes de  $(X, \tau)$ . L'unité de l'adjonction est

$$\begin{array}{ccc} \eta_{(X, \tau)} : X & \longrightarrow & \kappa(X) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

notons que  $\eta_x$  est compactement continue mais, en général, pas continue puisque  $\tau$  est plus grossière que  $\kappa(\tau)$ . En fait,  $\eta_x$  est continue si et seulement si  $\kappa(\tau) = \tau$ , i.e.  $(X, \tau)$  est compactement généré. L'application  $\eta_x$  admet de façon évidente un inverse dans  $\text{CCHaus}$  qui est trivialement continue. La co-unité de l'adjonction est

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_x : \kappa(X) & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

en particulier, si  $X$  est compactement généré, alors  $\kappa(\tau) = \tau$  et  $\varepsilon_x = id_x = \eta_x$  est un isomorphisme dans  $\text{Haus}$  aussi bien que dans  $\text{CGHaus}$ , d'où l'équivalence entre  $\text{CCHaus}$  et  $\text{CGHaus}$  qui est l'image de  $\kappa$ . L'évaluation et l'application transposée (respectivement notée  $ev$  et  $\bar{g}$  pour  $g : X \times Y \rightarrow Z$ ) sont donnée par leurs homologues dans  $\text{Set}$ , i.e.

$$\forall f : X \rightarrow Y, \forall x \in X, ev(f, x) := f(x)$$

et

$$\forall g : X \times Y \rightarrow Z, \bar{g} := (x \mapsto g(x, -)).$$

Les applications  $ev$  et  $\bar{g}$  sont compactement continues.

Nous donnons ci-dessous les lemmes clés et leurs preuves.

### B.1.33 LEMME

Soit  $X$  une espace topologique. Les espaces  $X$  and  $\kappa(X)$  ont les mêmes sous-parties compactes et pour chaque sous-partie compacte  $K \subseteq X$ , les topologies induites par  $\tau$  et  $\kappa(\tau)$  sur  $K$  sont les mêmes.

PREUVE. On a  $\tau \subseteq \kappa(\tau)$  donc être compact dans  $\kappa(X)$  implique d'être compact dans  $X$ . Réciproquement, supposons que  $K$  est compact dans  $X$  et  $K \subseteq \cup_{i \in \mathcal{I}} V_i$  où  $\forall i \in \mathcal{I} V_i \in \kappa(\tau)$ . Alors  $K \subseteq \cup_{i \in \mathcal{I}} (V_i \cap K)$  et par définition de  $\kappa(\tau)$ ,  $V_i \cap K$  est ouvert dans  $K$  muni

de la topologie induite par  $\tau$ . Mais  $K$  est compact dans  $X$  (i.e. compact avec la topologie induite par  $\tau$ ) donc il existe  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$  finie telle que  $K \subseteq \cup_{i \in \mathcal{F}} V_i$ , et donc  $K$  est également compact dans  $\kappa(X)$ .

Maintenant, étant donné un compact  $K$  de  $X$  (ou, de façon équivalente d'après la preuve précédente, de  $\kappa(X)$ ) on veut vérifier que  $\tau$  et  $\kappa(\tau)$  induise la même topologie sur  $K$ . Nous savons déjà que celle induite par  $\tau$  est plus grossière puisque  $\tau \subseteq \kappa(\tau)$ . Réciproquement, si  $V \in \kappa(\tau)$ , alors, par définition de  $\kappa(\tau)$ ,  $V \cap K$  est ouvert dans  $K$  muni de la topologie induite par  $\tau$ . Il s'ensuit que les deux topologies sont les mêmes. ■

#### B.1.34 LEMME

$f : X \rightarrow Y$  est compactement continue si et seulement si  $g : (X, \kappa(\tau)) \rightarrow (Y, \sigma)$  est continue où pour tout point  $x$  de  $X$ , on a  $f(x) = g(x)$ .

PREUVE. ( $f$  est compactement continue) si et seulement si (pour tout ouvert  $V$  de la topologie  $\tau_Y$  et pour tout compact  $K$  de  $X$ ,  $f^{-1}(V) \cap K$  est ouvert dans  $K$ ) si et seulement si ( $g$  est continue). ■

#### B.1.35 LEMME

Si  $X$  est un espace compactement généré, alors  $f : X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si  $g : X \rightarrow \kappa(Y)$  est continue où pour tout point  $x$  de  $X$ , on a  $f(x) = g(x)$ .

PREUVE. La continuité de  $g$  implique évidemment celle de  $f$  puisque  $\tau_Y \subseteq \kappa(\tau_Y)$ . Réciproquement, soit  $V \in \kappa(\tau_Y)$  et  $K$  compact de  $X$ ,  $g(K) = f(K)$  est compact dans  $Y$  car  $f$  est continue, de plus, par définition de  $\kappa(\tau_Y)$ ,  $V \cap g(K)$  est ouvert dans  $g(K)$  muni de la topologie induite par  $\tau_Y$ . Notons alors

$$\begin{array}{ccc} f_K : K \longrightarrow f(K) & & g_K : K \longrightarrow g(K) \\ x \longmapsto f(x) & \text{et} & x \longmapsto g(x) \end{array}$$

en fait  $f_K = g_K$  d'après le lemme B.1.33 et  $g_K$  est continue puisque  $f_K$  l'est. Il vient que  $(g_K)^{-1}(V \cap g(K)) = g^{-1}(V \cap g(K)) \cap K = g^{-1}(V) \cap g^{-1}g(K) \cap K = g^{-1}(V) \cap K$  est ouvert dans  $K$  (muni de la topologie induite par  $\tau$ ), et comme  $\tau$  est compactement généré nous avons  $g^{-1}(V)$  ouvert dans  $\tau$  et la continuité de  $g$  est prouvée. ■

#### B.1.36 COROLLAIRE

L'application  $f : X \rightarrow Y$  est compactement continue si et seulement si  $g : \kappa(X) \rightarrow \kappa(Y)$  est continue où pour tout point  $x$  de  $X$ , on a  $f(x) = g(x)$ .

PREUVE. Notons  $h : \kappa(X) \rightarrow Y$  où quel que soit le point  $x$  de  $X$ , on a  $f(x) = h(x)$ . D'après le lemme B.1.34,  $f$  est compactement continue si et seulement si  $h$  est continue. D'après le lemme B.1.35 et comme  $\kappa(\tau)$  est compactement généré,  $h$  est continue si et seulement si  $g$  est continue. ■

Remarquons que l'hypothèse *Hausdorff* n'est pas utilisée dans les preuves, néanmoins, tous les espaces topologiques auxquels nous serons confrontés sont séparés au sens de *Hausdorff*, c'est pourquoi nous laissons de côté les espaces qui ne le sont pas. Par ailleurs,

si  $X$  est séparé au sens de *Hausdorff*, il en est de même pour  $\kappa(X)$ . Nous pouvons maintenant facilement prouver que  $\kappa$  est l'adjoint à droite de  $i$ . Etant donné  $\varepsilon_Y : y \in \kappa(Y) \mapsto y \in Y$ , nous devons simplement vérifier que pour tout objet  $X$  de  $\text{CGHaus}$  et tout objet  $Y$  de  $\text{Haus}$ , on a

$$\begin{array}{ccc} \text{CGHaus}[X, \kappa(Y)] & \longrightarrow & \text{Haus}[i(X), Y] \\ f & \longmapsto & \varepsilon_Y \circ i(f) \end{array}$$

est une bijection. Au regard des applications ensemblistes sous-jacentes, on a l'injectivité. Le surjectivité découle du lemme B.1.35. ■

La catégorie  $\text{CGHaus}$  est aux yeux de beaucoup celle dans laquelle il est commode de faire de la topologie algébrique. Il faut cependant faire attention que le produit, même binaire, dans  $\text{CGHaus}$  n'est pas celui de  $\text{Spc}$ . Heureusement, lorsque l'un des deux termes d'un produit binaire est "raisonnable", les deux coïncident.

#### B.1.37 PROPOSITION

Soient  $X, Y \in \text{CGHaus}$  si  $X$  ou  $Y$  est localement compact, alors leur produit cartésien dans  $\text{Haus}$  et dans  $\text{CGHaus}$  coïncident.

Ce sera en particulier le cas avec toute sous-parties de  $\mathbb{R}^n$  qui sont les objets d'étude de la topologie algébrique classique.

#### B.1.38 REMARQUE

Donnons, sur un exemple, une idée du comportement de  $r$ , la réflexion de l'inclusion de  $\text{Haus}$  dans  $\text{Spc}$ . Soit  $X$  l'espace topologique dont l'ensemble de base est  $[0, 1]$  et dont la topologie est engendrée par la famille des  $]x, y[$  pour  $x, y \in [0, 1]$  et notée  $\tau$ . On note alors que, dans cette topologie,  $]0, 1[$  et  $]0, 1]$  ne sont pas des ouverts. Cette topologie est donc strictement plus grossière que celle induite par celle de  $\mathbb{R}$ . En fait, les intervalles  $]0, x[$  et  $]x, 1]$  pour  $x \in [0, 1]$  sont les seuls ouverts de la topologie classique à ne pas être dans  $\tau$ . En particulier,  $([0, 1], \tau)$  n'est pas un espace de *Hausdorff* car les seuls ouverts de  $\tau$  contenant 0 ou 1 sont de la forme  $]0, x[ \cup ]y, 1]$  pour  $x < y$ . De plus, pour tous réels  $x$  et  $y$  appartenant respectivement aux intervalles  $]0, 1[$  et  $]0, 1]$  on trouve un ouvert contenant  $x$  mais pas  $y$  ni  $y$ , ainsi qu'un ouvert contenant  $y$  mais pas  $x$ . D'une certaine manière, la topologie  $\tau$  "distingue" les points  $x$  et  $y$  de  $[0, 1]$  sauf si  $\{x, y\} = \{0, 1\}$ , on pourrait donc dire que 0 et 1 sont identifiés. On peut effectivement montrer que  $r(X) = S^1$ , autrement dit, les deux seuls points qui "posent problème" sont effectivement identifiés.

Pour illustrer la proposition A.2.17, on va donner une preuve de la cocomplétude de  $\text{CHaus}$  sans utiliser le fait que ce soit une sous-catégorie réfléchissante de  $\text{Haus}$  (dans ce cas il suffit d'appliquer la proposition A.3.34 et le fait que  $\text{Haus}$  est complète et cocomplète). Pour cela, nous rappelons deux résultats importants en topologie

#### B.1.39 LEMME (DE TYCHONOFF)

Le produit dans  $\text{Spc}$  d'une famille d'espace topologique compact est compact et c'est aussi le produit de cette famille dans  $\text{CHaus}$ .

Il en résulte immédiatement



B.1.40 COROLLAIRE

Le produit de toute famille d'objets de  $\mathbf{CHaus}$  existe (dans  $\mathbf{CHaus}$ ) et c'est le même que le produit dans  $\mathbf{Spc}$ .

B.1.41 LEMME

Dans  $\mathbf{CHaus}$  toute paire de morphismes parallèles a un égalisateur. En outre l'égalisateur dans  $\mathbf{CHaus}$  est le même que dans  $\mathbf{Spc}$ .

PREUVE. Soient  $X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$  deux morphismes parallèles, leur égalisateur est

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta_X)$$

où  $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$  autrement dit la diagonale de  $X$  muni de la topologie induite par  $X$ . Affirmer la fermeture de  $\Delta_X$  dans  $X \times X$  équivaut à affirmer que  $X$  est un espace de *Hausdorff*, donc  $\Delta_X$  est fermé. On note  $(f, g)$  le produit de  $f$  et de  $g$  dans  $\mathbf{CHaus}$ , c'est-à-dire que pour tout élément  $x$  de  $|X|$ , on a  $(f, g)(x) := (f(x), g(x))$ , c'est donc une application continue, ce dont on déduit que  $(f, g)^{-1}(\Delta_X)$  est fermé dans  $X$ . L'espace  $X$  étant compact, d'après la propriété B.1.19, on peut affirmer que  $(f, g)^{-1}(\Delta_X)$  l'est également. Enfin, c'est un sous-espace d'un espace de *Hausdorff*, il est donc lui-même séparé au sens de *Hausdorff* (cf propriété B.1.14). ■

B.1.42 COROLLAIRE

$\mathbf{CHaus}$  est complète.

PREUVE. On applique la proposition A.2.12 avec le corollaire B.1.40 et le lemme B.1.41. ■

B.1.43 DÉFINITION

Un espace topologique  $X$  est dit **normal** lorsque pour toutes sous-parties fermées disjointes  $F_1$  et  $F_2$  de  $X$ , il existe deux sous-parties ouvertes disjointes  $O_1$  et  $O_2$  de  $X$ , telles que  $F_1 \subseteq O_1$  et  $F_2 \subseteq O_2$ .

B.1.44 PROPRIÉTÉ

Tout espace de *Hausdorff* compact est normal

B.1.45 LEMME (DE SÉPARATION DE URYSOHN)

Un espace topologique  $X$  est normal si et seulement si pour toutes sous-parties fermées disjointes  $F_0$  et  $F_1$  de  $X$ , il existe une application continue  $f$  de  $X$  vers  $[0, 1]$  telle que

$$\forall x_0 \in F_0, f(x_0) = 0 \text{ et } \forall x_1 \in F_1, f(x_1) = 1.$$

B.1.46 LEMME (D'EXTENSION DE URYSOHN)

Un espace topologique  $X$  est normal si et seulement si pour toute sous-partie fermée  $F$  de  $X$  et pour toute application continue  $f$  de  $F$  vers  $\mathbb{R}$ , il existe une application continue  $g$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  qui prolonge  $f$ , c'est-à-dire que pour tout point  $x$  de  $F$ , on a  $g(x) = f(x)$ .

B.1.47 COROLLAIRE

Le segment unité est un cogénérateur de  $\mathbf{CHaus}$ .

PREUVE. Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues distinctes définies sur  $X$  et à valeurs dans  $Y$  (i.e.  $f, g \in \mathbf{Spc}[X, Y]$ ), il existe un point  $x$  de  $X$  tel que  $f(x) \neq g(x)$ , comme  $Y$  est un espace de *Hausdorff*, tout singleton de  $Y$  est fermé, d'après le lemme B.1.45, on a donc une application  $h \in \mathbf{Spc}[Y, [0, 1]] = \mathbf{CHaus}[Y, [0, 1]]$  (car  $Y$  et  $[0, 1]$  sont des espaces de *Hausdorff* compacts) telle que  $h(f(x)) = h(g(x))$ . ■

Pour finir, il nous faut caractériser les monomorphismes de  $\mathbf{CHaus}$ .

B.1.48 PROPRIÉTÉ

Les monomorphismes de  $\mathbf{CHaus}$  sont les morphismes de  $\mathbf{CHaus}$  dont l'application ensembliste sous-jacente est injective.

PREUVE. Soit une application  $h \in \mathbf{CHaus}[X, Y]$  telle qu'il existe deux points  $x_0$  et  $x_1$  de  $X$  tels que  $x_0 \neq x_1$  et  $h(x_0) = h(x_1)$ . Considérons alors le singleton  $\{*\}$ , muni de la

topologie discrète, c'est un espace compact de *Hausdorff*. Soient alors  $\{*\} \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} X$

tel que  $f(*) := x_0$ ,  $g(*) = x_1$ . On a clairement  $f \neq g$  alors que  $h \circ f = h \circ g$ . Donc l'application sous-jacente de tout monomorphisme de  $\mathbf{CHaus}$  est injective, la réciproque est triviale. ■

B.1.49 COROLLAIRE

$\mathbf{CHaus}$  a une bonne notion de sous-objet.

On peut maintenant conclure

B.1.50 PROPRIÉTÉ

$\mathbf{CHaus}$  est cocomplète.

PREUVE. Les corollaires B.1.42, B.1.47 et B.1.49 permettent d'appliquer la proposition A.2.17. ■

## B.2 TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE

On rappelle ici les définitions et résultats de base de la topologie algébrique, on donne en particulier les notions de groupes et groupoïdes fondamentaux et le théorème de Van Kampen pour les groupoïdes fondamentaux. Par la suite, on fera une comparaison avec la notion de catégorie fondamentale, celle-ci n'a de sens que par rapport à la notion de groupoïde fondamental.

B.2.1 DÉFINITION (DROITE RÉELLE ET SEGMENT UNITÉ)

La **droite réelle** est l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie classique, c'est-à-dire celle dont une base est la famille

$$\{]a, b[ \mid a < b \in \mathbb{R}\}$$

le **segment unité** est l'intervalle  $[0, 1]$  muni de la topologie induite par celle de la droite réelle.

De façon analogue, on définit le **carré unité**, le **cube unité** et plus généralement l'**hypercube unité** de dimension  $n \in \mathbb{N}$ .

### B.2.2 DÉFINITION (CHEMIN)

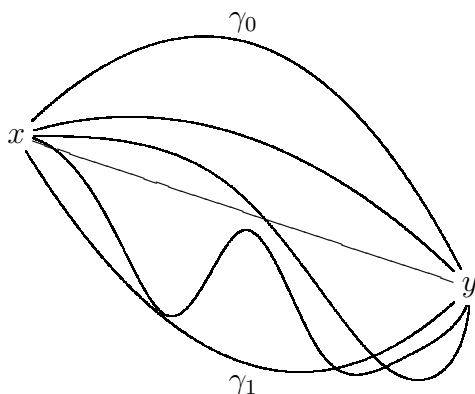
Un **chemin** est un morphisme de  $\mathbf{Spc}$  dont la source est le segment unité. Autrement dit c'est une application continue définie sur  $[0, 1]$ .

### B.2.3 DÉFINITION (HOMOTOPIE)

Etant donnés deux chemins  $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbf{Spc}[[0, 1], X]$  tels que  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) =: x$  et  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) =: y$ , une **homotopie** entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  est par définition un morphisme  $H$  appartenant à  $\mathbf{Spc}[[0, 1] \times [0, 1], X]$  dont la source est le carré unité et tel que pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} H(0, t) &= \gamma_0(t) \text{ et } H(1, t) = \gamma_1(t) \\ H(t, 0) &= x \text{ et } H(t, 1) = y. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on dit que  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont **homotopes**.



Une homotopie doit être vue comme une famille de chemins, c'est-à-dire les applications continues  $H(s, -)$ , qui “passe continuellement” de  $\gamma_0$  à  $\gamma_1$  et *vice versa*. Plus formellement, en profitant de la structure cartésienne fermée de  $\mathbf{CGHaus}$  et en supposant que  $X$  soit également l'un de ses objets, on peut voir  $H$  comme un chemin entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  dans  $X^{[0,1]}$ . Le schéma ci-dessus représente  $H(s, -)$  pour différentes valeurs de  $s$  d'une certaine homotopie  $H$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Il faut bien noter que, dans une homotopie, les rôles de la première et de la seconde variables ne sont pas les mêmes. La première variable est appelée **paramètre de déformation** le seconde **paramètre temps**

## B.2.1 GROUPES ET GROUPOÏDES FONDAMENTAUX

Pour tout ce qui concerne les groupoïdes fondamentaux, on pourra consulter [47]. Soit  $X$  un espace topologique, donc un objet de  $\mathbf{Spc}$ . Le **graphe des chemins** de  $X$  a pour ensemble de sommets  $|X|$  et pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $|X|$ , l'ensemble des flèches de  $x$  vers  $y$  est l'ensemble des chemins de  $x$  vers  $y$  sur  $X$ , i.e.

$$\left\{ \gamma \in \mathbf{Spc}[[0, 1], X] \mid \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y \right\}$$

Pour toute flèche  $\gamma$  de ce graphe, on pose bien entendu  $src(\gamma) := \gamma(0)$  et  $tgt(\gamma) := \gamma(1)$ . Considérons alors  $\mathcal{F}(X)$  la catégorie libre engendrée par le graphe des chemins de  $X$ . Rappelons que, par construction, tout morphisme de  $\mathcal{F}(X)$  est un triplet  $(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x)$  où  $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$  est suite composable de flèches du graphe des chemins sur  $X$  et  $\gamma_1(0) = x$  et  $\gamma_n(1) = y$ . Etant donnés deux morphismes  $(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x)$  et  $(y', (\beta_{n'}, \dots, \beta_1), x')$  de  $\mathcal{F}(X)$ , on pose alors  $m := \max\{n, n'\}$  puis

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \alpha_k(mt - (k - 1)) & \text{si } mt \in [k - 1, k[ \\ \alpha_n(1) & \text{si } mt \geq n + 1 \end{cases}$$

et

$$\beta : [0, 1] \longrightarrow X$$

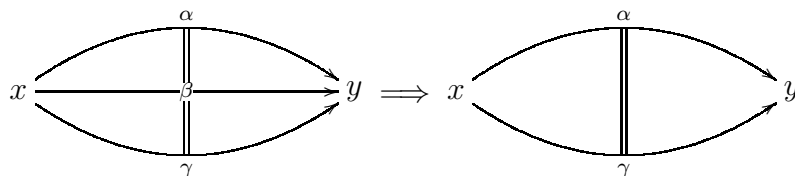
$$t \longmapsto \begin{cases} \beta_k(mt - (k - 1)) & \text{si } mt \in [k - 1, k[ \\ \beta_{n'}(1) & \text{si } mt \geq n' + 1 \end{cases}$$

On peut finalement poser  $(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x) \sim (y', (\beta_{n'}, \dots, \beta_1), x')$  si et seulement si, par définition,  $\alpha$  et  $\beta$  sont homotopes.

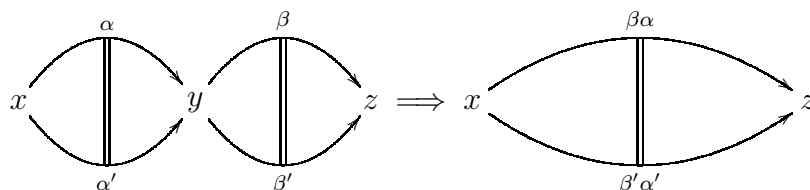
#### B.2.4 LEMME

La relation  $\sim$  définie précédemment est une congruence sur  $\mathcal{F}(X)$ .

PREUVE. La réflexivité et la symétrie de la relation  $\sim$  sont évidentes. La transitivité vient du fait que l'on peut "concaténer" les homotopies par rapport au paramètre de déformation tandis que la compatibilité découle de la concaténation par rapport au paramètre temps. Graphiquement



pour la transitivité et



pour la compatibilité. Dans les schémas précédents, les  $\parallel$  représente l'existence d'une homotopie entre les  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  qui doivent être pris comme dans la définition de  $\sim$ . La concaténation  $\beta\alpha$  n'est pas définie de façon canonique mais pour fixer les idées, on peut poser

$$\beta\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

On note la similitude avec les transformations naturelles. ■

### B.2.5 PROPRIÉTÉ

Avec les notations précédentes,  $\mathcal{F}(X)/\sim$  est un groupoïde.

PREUVE. Notons tout d'abord que les chemins constants représentent les identités. Puis, soit  $\gamma$  un chemin de  $X$ , autrement dit un représentant d'un  $\sim$ -classe d'équivalence, le chemin

$$\begin{aligned} \delta : [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \gamma(1 - t) \end{aligned}$$

induit l'inverse de  $\gamma$  dans  $\mathcal{F}(X)/\sim$ . ■

La propriété B.2.5 justifie la terminologie

### B.2.6 DÉFINITION (GROUPOÏDE FONDAMENTAL)

Le **groupoïde fondamental** d'un espace topologique  $X$  est, par définition,  $\mathcal{F}(X)/\sim$ .

### B.2.7 PROPRIÉTÉ (FONCTEUR $\pi_1$ )

La notion de groupoïde fondamental induit un foncteur de  $\mathbf{Spc}$  vers  $\mathbf{Grd}$  noté  $\pi_1$ .

PREUVE. Un morphisme  $f \in \mathbf{Spc}[X, Y]$  induit un morphisme du graphe des chemins de  $X$  vers le graphe des chemins de  $Y$ , en effet, si  $x, y \in |X|$ , alors  $f(x), f(y) \in |Y|$  et si  $\gamma$  est un chemin sur  $X$ , alors  $f \circ \gamma$  est un chemin sur  $Y$ . Ce morphisme de graphe est à son tour transformé en un morphisme de petites catégories (foncteur) de  $\mathcal{F}(X)$  vers  $\mathcal{F}(Y)$  et enfin, d'après la proposition A.4.3, le foncteur quotient  $q/\sim$  transforme ce morphisme en un morphisme de  $\mathcal{F}(X)/\sim$  vers  $\mathcal{F}(Y)/\sim$  car on vérifie que

$$(y, (\alpha_n, \dots, \alpha_1), x) \sim (y', (\alpha'_n, \dots, \alpha'_1), x')$$

↓

$$(y, (f(\alpha_n), \dots, f(\alpha_1)), x) \sim (y', (f(\alpha'_n), \dots, f(\alpha'_1)), x')$$

en effet, si  $H$  est, avec les notations utilisées dans la construction du groupoïde fondamental, une homotopie qui permet de montrer la prémisse de l'implication ci-dessus, alors  $f \circ H$  est une homotopie qui montre la conclusion. ■

### B.2.8 DÉFINITION (ESPACE CONNEXE PAR ARC)

Un espace topologique  $X$  est dit **connexe par arc** si et seulement si par définition, pour tous points  $x$  et  $y$  de  $X$ , il existe un chemin de  $x$  vers  $y$  dans  $X$ . En général, pour tout espace topologique  $X$  et tout point  $x \in X$ , la composante connexe par arc de  $x$  est le plus grand sous-espace connexe par arc de  $X$  contenant  $x$ .

$\{x\}$  est bien entendu toujours un sous-espace connexe par arc de  $X$  contenant  $x$  et une réunion quelconque de sous-espace connexe par arc contenant  $x$  est encore un tel sous-espace. Il suffit pour s'en convaincre de penser que l'on peut aller de n'importe quel point de cette réunion à n'importe quel autre en "passant" par  $x$ . Ceci justifie la définition de composante connexe par arc de  $x$ .

### B.2.9 LEMME

Un espace topologique est connexe par arc si et seulement si son groupoïde fondamental est connexe (au sens de la définition A.1.25).

PREUVE. Soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $|X|$ , puisque  $X$  est connexe par arc, il existe un chemin  $\gamma$  de  $x$  vers  $y$  dans  $X$ , il s'ensuit que  $(y, (\gamma), x)$  est une flèche du graphe des chemins de  $X$  et donc que  $\mathcal{F}(X)[x, y]$  n'est pas vide. Réciproquement, soient  $x$  et  $y$  deux points de  $X$ , puisque  $\pi_1(X)$  est connexe au sens de la définition A.1.25,  $\pi_1(X)[x, y]$  est non vide. Par construction de  $\pi_1(X)$ ,  $\mathcal{F}(X)[x, y]$  n'est pas vide non plus, il existe donc une suite finie  $(\gamma_n, \dots, \gamma_0)$  de chemins de  $X$  tels que pour tout indice  $k$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$ ,  $\gamma_k(1) = \gamma_{k+1}(0)$ ,  $\gamma_0(0) = x$  et  $\gamma_n(1) = y$ , on en déduit qu'il existe un chemin de  $x$  vers  $y$  dans  $X$ . L'espace topologique  $X$  est donc connexe par arc. ■

### B.2.10 DÉFINITION (GROUPE FONDAMENTAL)

Par définition, le **groupe fondamental** d'un espace topologique connexe par arc  $X$  est le groupe fondamental de son groupoïde fondamental. On étend cette notion aux espaces topologiques qui ne sont pas connexes par arc de façon évidente en définissant pour tout point  $x \in X$  le **groupe fondamental de  $X$  au point  $x$**  comme le groupe fondamental de la composante connexe par arc de  $x$ . On dit alors qu'un espace topologique est **simplement connexe** lorsque pour tout point  $x \in X$ , le groupe fondamental de  $X$  au point  $x$  est trivial.

Noter l'analogie de ces définitions avec celles de composante connexe d'un groupoïde et de groupe fondamental en un point  $x$  d'un groupoïde. Plus formellement, les notions de groupe fondamental du groupoïde  $\pi_1 X$  au point  $x$  et de groupe fondamental de l'espace topologique  $X$  au point  $x$  définissent deux groupes "canoniquement" isomorphes.

Dans la plupart des manuels de topologie algébrique, la définition de simple connexité contient l'hypothèse que l'espace topologique est également connexe par arc. En effet, la simple connexité au sens de la définition B.2.10 n'implique pas celle de connexité par arc. Tout espace topologique discret qui n'est pas réduit à un point est un exemple où l'on a la simple connexité sans la connexité par arc. On choisit la notion plus faible pour pouvoir énoncer la proposition V.0.32.

### B.2.11 LEMME

Un espace topologique  $X$  est simplement connexe si et seulement si son groupoïde fondamental est un préordre, autrement dit quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $X$ ,  $\pi_1(X)[x, y]$  contient au plus un élément.

PREUVE. Soit  $x, y \in X$ , supposons que  $\pi_1(X)[x, y]$  contienne au moins deux éléments distincts, par exemple  $\alpha$  et  $\beta$ . Alors  $\beta^{-1} \circ \alpha \neq id_x$  sinon on aurait  $\beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha \neq \beta \circ id_x$ , i.e.  $\alpha = \beta$  ce qui est une contradiction. La réciproque est triviale. ■

## B.2.2 EXEMPLES DE GROUPOÏDES ET DE GROUPES FONDAMENTAUX

### LE SEGMENT UNITÉ

Le groupoïde fondamental du segment unité  $\pi_1([0, 1])$  est le préordre chaotique sur  $[0, 1]$  et donc son groupe fondamental est trivial.

### LE CERCLE

Par définition  $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$  muni de la topologie induite par celle de  $\mathbb{R}^2$ . Les objets de  $\pi_1(S^1)$  sont les éléments de  $|S^1|$  et pour chaque couple d'objets  $(a, b)$  on a un morphisme distingué  $\gamma_{a,b}$  qui va de  $a$  vers  $b$  dans le sens trigonométrique et  $\delta_{a,b}$  qui va de  $a$  vers  $b$  dans le sens des aiguilles d'une montre. Le groupoïde  $\pi_1(S^1)$  est engendré par la famille  $\{\gamma_{a,b}, \delta_{a,b} \mid (a, b) \in |S^1| \times |S^1|\}$  avec les relations suivantes :

- $\gamma_{b,a} \circ \delta_{a,b} = id_a$
- $\delta_{b,a} \circ \gamma_{a,b} = id_a$
- $\gamma_{b,a} \circ \gamma_{a,b} = \gamma_{a,a}$
- $\delta_{b,a} \circ \delta_{a,b} = \delta_{a,a}$

$\gamma_{a,a}$  doit être compris comme le chemin qui tourne une fois autour du cercle dans le sens trigonométrique et  $\delta_{a,a}$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

## B.2.3 THÉORÈME DE VAN KAMPEN

On donne ici la version adaptée aux groupoïdes fondamentaux.

### B.2.12 PROPOSITION (THÉORÈME DE VAN KAMPEN)

Soit  $X_1, X_2$  deux sous-espaces d'un espace topologique  $X$  tels que  $X$  soit la réunion des intérieurs de  $X_1$  et de  $X_2$ .

$$X_1 \subseteq X \quad X_2 \subseteq X \quad X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$$

Posons  $X_0 := X_1 \cap X_2$ . Les applications  $i_1 : X_0 \hookrightarrow X_1, i_2 : X_0 \hookrightarrow X_2, j_1 : X_1 \hookrightarrow X$  et  $j_2 : X_2 \hookrightarrow X$  les inclusions canoniques. Les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 j_1 \nearrow & & \nwarrow j_2 \\
 X_1 & \text{somme amalgamée} & X_2 \\
 i_1 \searrow & & \swarrow i_2 \\
 & X_0 & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \pi_1(X) & \\
 \pi_1(j_1) \nearrow & & \nwarrow \pi_1(j_2) \\
 \pi_1(X_1) & \text{somme amalgamée} & \pi_1(X_2) \\
 \pi_1(i_1) \searrow & & \swarrow \pi_1(i_2) \\
 & \pi_1(X_0) & 
 \end{array}$$

sont des sommes amalgamées respectivement dans **Spc** et **Grd**.

PREUVE. Une démonstration détaillée est disponible au 17<sup>ème</sup> chapitre de [47]. ■



## INDEX

- $\sim_\circ$ -composables, 304
- $\vee$ -treillis, 285
- $\wedge$ -treillis, 285
- $n$ -simplexe singulier, 315
- $\mathcal{U}_n$ -grande (catégorie), 273
- $\mathcal{U}_n$ -petite (catégorie), 273
- égalisateur, 288
- épi-réfléchissante, 302
- épimorphisme, 275
- équivalence (de catégorie) fibrée, 293
- équivalence (de catégories), 293
- équivalence faible, 263
- équivalentes (catégories), 293
- état admissible, 174
- étiquetage, 176
- évaluation, 32
- Cantor* (paradoxe de), 271
- Hausdorff* (espace topologique (séparé au sens) de), 320
- Yoneda* inversible, 102
  
- adhérence, 319
- adjoint à droite, 293
- adjoint à gauche, 293
- adjoints (foncteurs), 293
- algèbre de Heyting, 116
- anodin (morphisme), 155
- antisymétrique (relation), 284
  
- application de transformations naturelles, 280
- application dirigée, 27
- astérisques (topologie des), 323
- atlas dirigé, 247
- atteignable (point), 174
- autofoncteur, 112
- Automate de dimension supérieure, 176
- automorphisme, 275
  
- base (d'une fibration), 294
- base (de topologie), 318
- base d'un cône dans une catégorie, 287
- base topologie, 318
- bifermée (catégorie monoïdale), 310
- bimorphisme, 275
- BNSO, 291
- bonne notion de sous-objet, 291
- boucle, 72
- brindille (d'un corail), 157
- but, 270
  
- cône dans une catégorie, 287
- calcul de fractions à droite et à gauche, 106
- calcul de fractions à gauche, 106
- Caml (langage de programmation), 187
- carré unité, 330



cartésien (morphisme), 294  
 cartésienne (catégorie), 310  
 catégorie, 269  
 catégorie de fractions, 308  
 catégorie topologiquement concrète, 223  
 catégorie (formelle), 269  
 catégorie à chemins, 213  
 catégorie à chemins topologiquement concrète, 223  
 catégorie de composantes d'un espace ordonné, 118  
 catégorie de modèles, 263  
 catégorie des composantes  
     d'une petite catégorie, 113  
 catégorie des dichemins, 64  
 catégorie des factorisations, 83  
 catégorie des préfaisceaux, 285  
 catégorie fondamentale (modulo une notion d'homotopie), 216  
 catégorie fondamentale d'un espace ordonné, 62  
 catégorie libre engendrée (par un graphe), 271  
 catégorie monoïdale, 309  
 catégorie pré-cubique, 314  
 catégorie pré-simpliciale, 314  
 ccd, 58  
 cercle dirigé (catégorie), 195  
 chaîne (ensemble ordonné), 284  
 changement de base, 108  
 chaotique (préordre), 298  
 chemin (sur un espace topologique), 330  
 chemin dirigé sur un espace ordonné, 45  
 clôture topologique, 319  
 classe, 274  
 co-égalisateur, 288  
 co-changement de base, 108  
 co-générateur, 291  
 co-réfléchissante (sous-catégorie), 302  
 co-unité (d'une adjonction), 293  
 cocône dans une catégorie, 288  
 cocomplète (catégorie), 290  
 cofibration, 263  
 colimite d'un foncteur, 288  
 compact (espace topologique), 321  
 compactement continue (application), 323  
 compactement généré, 323  
 compactement ouvert, 322  
 comparables, 153  
 compatible, 223  
 complète (catégorie), 290  
 complet (ensemble ordonné), 56  
 composante connexe d'un objet d'un groupoïde, 284  
 concaténation (dans une catégorie à chemins), 214  
 condition de chaîne dénombrable, 58  
 congruence généralisée (sur une catégorie), 304  
 connexe (groupoïde), 283  
 connexe par arc (espace topologique), 332  
 constant (morphisme), 276  
 continue (application), 319  
 convexe (pour  $\leq_x$ ), 48  
 coproduit (dans une catégorie), 288  
 corail, 154  
 correspondance de Galois, 299  
 courant, 231  
 cube unité, 330  
 cube unité dirigé, 31  
 décomposition, 271  
 dénombrable, 52  
 dense (sous-partie d'un espace topologique), 319  
 dents (d'un peigne dirigé), 35  
 dichemin sur un espace ordonné, 45  
 dihomotopie concrète, 224  
 dihomotopie dans un espace ordonné, 46  
 dimap, 27  
 directe (catégorie), 80  
 discrétisation, 303  
 discrète (catégorie), 277  
 domaine de dihomotopie, 224  
 domaine de dihomotopie admissible, 224  
 droite de *Suslin*, 59  
 droite réelle, 329  
 droite réelle dirigée, 31  
 duale (catégorie), 281  
 effacement (propriétés d'), 282  
 ehsemble cubique, 314  
 endofoncteur, 112

endomorphisme, 275  
 ensemble, 274  
 ensemble totalement ordonné, 48  
 ensemble partiellement ordonné, 284  
 ensemble préordonné, 282  
 ensemble simplicial, 313  
 entrelacement, 170  
 espace avec relation, 38  
 espace dirigé, 228  
 espace dirigé de dimension  $n$ , 31  
 espace localement ordonné, 248  
 espace partiellement ordonné, 26  
 exponentiable (objet), 311  
 extension linéaire, 80

faiblement inverible au sens de *Yoneda*,  
 206  
 famille co-génératrice, 291  
 famille de processus indépendante, 172  
 famille génératrice, 291  
 fermé d'un espace topologique, 318  
 fermée (catégorie monoïdale symétrique),  
 310  
 fibration, 263  
 fibration (foncteur), 294  
 fibre au-dessus, 294  
 fidèle (foncteur), 276  
 finie (catégorie), 282  
 finiment cocomplète (catégorie), 290  
 finiment complète (catégorie), 290  
 finiment générée (catégorie), 282  
 flèches (d'un graphe), 270  
 flot, 230  
 foncteur, 271  
 futur (foncteur), 101

générateur, 291  
 géométrique (catégorie), 114  
 geomview (outil de visualisation 3D), 187  
 grande catégorie, 273  
 graphe des dichemins, 61  
 groupe, 283  
 groupe fondamental (d'un espace topologique),  
 333  
 groupe fondamental (d'un groupoïde con-  
 nexé), 284  
 groupoïde, 283

groupoïde fondamental (d'un espace topologique),  
 332  
 groupoïdification, 308

HDA, 176  
 homéomorphisme, 319  
 homologie, 262  
 homotopes (chemins), 330  
 homotopie (classique), 330  
 homotopie dirigée dans un espace ordonné,  
 46  
 homotopie dirigée généralisée, 220  
 hypercube unité, 330  
 hypercube unité dirigé, 31

image d'un foncteur, 301  
 image d'une application dirigée, 29  
 inclusion (foncteur d'), 301  
 indécomposable (ensemble ordonné), 92  
 initial (objet), 276  
 intérieur (d'une sous-partie d'un espace  
 topologie), 319  
 inverse (catégorie), 80  
 inversible au sens de *Yoneda*, 102  
 isomorphisme, 275  
 isomorphisme de catégories, 277  
 isomorphismes (paire d'objets), 276

limite d'un foncteur, 288  
 loi d'échange entre  $\cdot$  et  $\circ$ , 280

manche (d'un peigne dirigé), 35  
 maximal (élément d'un poset), 154  
 minimal (élément d'un poset), 153  
 monoïde fondamental, 245  
 monoïdification, 306  
 monomorphisme, 274  
 monotone (application entre posets), 199  
 morphisme, 270  
 morphisme d'espace ordonné, 27  
 morphisme de po-espace, 27

non borné (ensemble), 48  
 normal (espace topologique), 328  
 normalisé (espace localement ordonné),  
 251  
 notion d'homotopie sur une catégorie à  
 chemins, 217

objet segment, 210  
 objets, 270  
 ordinal, 80  
 oublié (foncteur  $d'$ ), 223  
 oublié de la direction (foncteur  $d'$ ), 176  
 ouvert (d'un espace topologique), 318  
  
 parallèles (morphismes), 275  
 passé (foncteur), 101  
 pbf, 154  
 pbp, 154  
 PCH, 216  
 peigne dirigé, 35  
 petite catégorie, 273  
 philosophes (espace ordonné des deux ),  
     182  
 plein, 276  
 pleine (sous-catégorie), 301  
 plus fine que (comparaison de topologies),  
     318  
 plus grossière que (comparaison de topolo-  
     gies), 318  
 po-espace, 26  
 po-espace dual, 30  
 point (d'un objet d'une catégorie), 291  
 point à point (topologie), 323  
 point de branchement dans l futur, 154  
 point de branchement dans le passé, 154  
 point mort, 174  
 poset, 284  
 précédence, 38  
 préfaisceau, 285  
 préordre, 282  
 préservation des co-limites (foncteur), 297  
 préservation des limites (foncteur), 297  
 produit (dans une catégorie), 288  
 produit fibré, 288  
 propre (décomposition), 271  
 propriété de congruence homotopique, 216  
 propriété de l'ensemble des solutions, 298  
 pure, 72  
  
 quotient (foncteur), 305  
 quotients d'une catégorie, 305  
  
 r-espace, 38  
 réalisation (foncteur  $de$ ), 316  
  
 réfléchissante (sous-catégorie), 302  
 réflexif (objet), 311  
 réflexion, 302  
 rétraction, 275  
 rang (d'une catégorie), 273  
 recouvrement (d'un ensemble), 321  
 recouvrement ouvert, 321  
 reflet, 302  
 relation de précédence, 38  
 replete (sous-catégorie), 301  
 représentable (foncteur), 223  
 représentation du cercle dirigé, 222  
 représentation finie du cercle dirigé, 222  
 représentation partielle du cercle dirigé,  
     222  
  
 sémaphore, 169  
 séparable (ensemble ordonné), 56  
 séparable (topologie), 319  
 sans boucle (catégorie), 72  
 section, 275  
 segment final, 48  
 segment initial, 48  
 segment unité, 330  
 segment unité dirigé, 31  
 semi-inversible au sens de *Yoneda*, 205  
 semi-anneau commutatif unitaire, 91  
 simplement connexe (espace topologique),  
     333  
 singularisation (foncteur  $de$ ), 314  
 somme amalgamée, 288  
 sommet, 270  
 sommet d'un cône dans une catégorie, 287  
 source, 270  
 sous-base de topologie, 318  
 sous-catégorie, 300  
 sous-catégorie engendrée, 301  
 sous-espace (topologique), 319  
 sous-jacent (graphe d'une catégorie), 270  
 sous-objet, 291  
 sous-partie croissante, 48  
 sous-partie décroissante, 48  
 squelette d'une catégorie, 307  
 squelettique, 277  
 stricte (catégorie monoïdale symétrique),  
     310

stricte (catégorie monoïdale), 309  
Suisse (drapeau dirigé), 181  
suite composable (de morphismes), 270  
symétrique (catégorie monoïdale), 310

terminal (objet), 276  
topologie, 318  
topologie compact-ouvert, 324  
topologique (espace), 317  
torsadée (catégorie), 82  
total (ordre), 284  
transformation naturelle, 277  
traverser un point de branchement, 155  
treillis complet, 285, 300  
treillis inférieur, 285  
treillis supérieur, 285  
type fini (groupe abélien de), 261

unité (d'une adjonction), 293  
univers, 272

vaste (sous-catégorie), 301





## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Hendrik Pieter Barendregt. *The Lambda Calculus its syntax and semantics*, volume 103 de la série *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, édition corrigée, 1984. seconde impression.
- [2] Michael Barr. *Acyclic Models*, volume 17 de la série *CRM Monograph*. American Mathematical Society, 2002.
- [3] Hans Joachim Baues. *Algebraic Homotopy*. Numéro 15 de la série Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.
- [4] Hans Joachim Baues. *Combinatorial Homotopy and 4-Dimensional Complexes*, volume 2 de la série *De Gruyter expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter, 1991.
- [5] Hans Joachim Baues. *Combinatorial Foundation of Homology and Homotopy*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 1999.
- [6] Hans Joachim Baues et Gunther Wirsching. Cohomology of small categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 38, 1985.
- [7] M.A. Bednarczyk, A.M. Borzyszkowski et W. Pawlowski. Generalized congruences-epimorphisms in Cat. *Theory and Applications of Categories*, 5(11), 1999.
- [8] Garrett Birkhoff. *Lattice Theory*, volume 25 de la série *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, troisième édition, 1995. édition originale 1940.
- [9] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1 : Basic Category Theory*, volume 50 de la série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.

- [10] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2 : Categories and Structures*, volume 51 de la série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.
- [11] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 3 : Categories of Sheaves*, volume 52 de la série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.
- [12] Martin R. Bridson et André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 de la série *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1999.
- [13] Peter Bubenik. Context for models of concurrency. Dans *proceedings of GETCO'2004*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science. Elsevier, 2005. disponible sur internet <http://igat.epfl.ch/bubenik/papers/>.
- [14] Scott D. Carson et Paul F. Reynolds Jr. The geometry of semaphore programs. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 9(1):25–53, janvier 1987.
- [15] René Cori et Daniel Lascar. *Logique mathématique tome 1*. Sciences Sup. Dunod, 2003.
- [16] René Cori et Daniel Lascar. *Logique mathématique tome 2*. Sciences Sup. Dunod, 2003.
- [17] Edsger W. Dijkstra. Cooperating sequential processes. Dans *Programming Languages: NATO Advanced Study Institute*, pages 43–112. Academic Press.
- [18] Samuel Eilenberg. Ordered topological spaces. *American Journal of Mathematics*, (63):39–45, 1941.
- [19] Ulrich Fahrenberg. *Higher-Dimensional Automata from a topological viewpoint*. thèse de doctorat, Department of Mathematical Science at Aalborg University, août 2005.
- [20] L. Fajstrup et S. Sokolowski. Infinitely running processes with loops from a geometric view-point. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science, Proceedings of GETCO'00*, 2000.
- [21] Lisbeth Fajstrup. Loops, ditopology and deadlocks. *Mathematical Structures in Computer Science*, 10(4):459–480, août 2000.
- [22] Lisbeth Fajstrup. Discovering spaces. *Homology, Homotopy and Applications*, 5(2):1–17, 2003.
- [23] Lisbeth Fajstrup. Dipaths and dihomotopies in a cubical complex. *Advances in Applied Mathematics*. à paraître.
- [24] Lisbeth Fajstrup, Eric Goubault, Emmanuel Haucourt et Martin Raussen. Component categories and the fundamental category. *APCS*, 12(1):81–108, février 2004.

- [25] P. Gabriel et M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*, volume 35 de la série *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer Verlag, 1967.
- [26] P. Gaucher. About the globular homology of higher dimensional automata. disponible à [math.CT/0002216](http://math.CT/0002216), 2000.
- [27] Philippe Gaucher. A model category for the homotopy theory of concurrency. *Homology, Homotopy and Applications*, 5(1):549–599, 2003.
- [28] Philippe Gaucher. The homotopy branching space of a flow. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 100:95–109, 2004.
- [29] Philippe Gaucher. T-homotopy and refinement of observation : Introduction. ArXiv.math.AT/0505152, à paraître dans ENTCS, 2005.
- [30] Robert Ghrist et Valerie Peterson. A geometric approach to di-path classification on process graph. disponible sur internet <http://www.math.uiuc.edu/ghrist/preprints/>, 2005.
- [31] Robert Goldblatt. *Topoi The Categorical Analysis of Logic*, volume 98 de la série *Studies in Logic and The Foundations of Mathematics*. North-Holland, 1984. édition corrigée.
- [32] Eric Goubault. *The Geometry of Concurrency*. thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure, 1995. disponible sur internet <http://www.dmi.ens.fr/~goubault>
- [33] Eric Goubault. Geometry and concurrency: A users' guide. *Mathematical Structures in Computer Science*, 10(4):411–425, août 2000.
- [34] Eric Goubault. Labelled cubical sets and asynchronous transition systems: an adjunction. Dans *proceedings of CMCIM'02*, volume 68.1 de la série *ENTCS*. Elsevier, 2002.
- [35] Eric Goubault et Emmanuel Haucourt. A practical application of geometric semantics to static analysis of concurrent programs. Dans Martin Abadi et Luca de Alfaro, éditeurs, *CONCUR 2005 - San Francisco, CA, USA* 23-26 août. Proceedings, volume 3653 de la série *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2005.
- [36] Marco Grandis. Directed homotopy theory, II. homotopy constructs. *Theory and Applications of Categories*, 10(14):369–391, 2002.
- [37] Marco Grandis. Directed homotopy theory, I. the fundamental category. *Cahiers Top. Géom. Diff. Catég.*, 44:281–316, 2003. version préliminaire: Dip. Mat. Univ. Genova, Preprint 443 (octobre 2001). révision: 5 novembre 2001, 26 p.
- [38] Marco Grandis. Directed combinatorial homology and noncommutative tori. *Math.Proc.Cambridge Philos.Soc.*, (138):233–262, 2005. version préliminaire (preprint 480) sur internet <http://www.dima.unige.it/grandis/Bsy.ps>.
- [39] Marco Grandis. The shape of a category up to directed homotopy. *Theory and Applications of Categories*, 15(4):95–146, 2005. disponible sur internet.



- [40] Stephan Haar. On cyclic orders and synchronization graphs. Rapport technique 4007, INRIA, octobre 2000.
- [41] André Haefliger. Complexes of groups and orbihedra. Dans *Group theory from a geometrical viewpoint, 26 march-6 april 1990, Trieste*, pages 504–540. ICTP, World Scientific, 1991.
- [42] André Haefliger. Extension of complexes of groups. *Annales de l'institut Fourier*, 42(1-2):275–311, 1992. disponible sur internet <http://www.numdam.org/>
- [43] Walter Tholen Hans-E. Porst. *Category theory at work*, volume 18 de la série *Research and exposition in mathematics*, chapitre "Concrete dualities", pages 111–136. Heldermann, 1991.
- [44] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, février 2002. disponible sur internet.
- [45] Emmanuel Haucourt. Comparing topological models for concurrency. Dans *Preliminary Proceedings of the Workshop GETCO'05*, Basic Research in Computer Science. University of Aarhus, août 2005. disponible sur internet <http://www.brics.dk> ou <ftp://ftp.brics.dk> sous-répertoire NS/05/5.
- [46] Emmanuel Haucourt. A framework for component categories. Dans *proceedings of GETCO'2004*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science. Elsevier, 2005.
- [47] Philip J. Higgins. *Categories and Groupoids*. Van Nostrand Reinhold, 1971. libre d'accès sur internet à l'adresse <http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/>.
- [48] Philip S. Hirschhorn. *Model Categories and their Localizations*, volume 99 de la série *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2003.
- [49] Mark Hovey. *Model Categories*, volume 63 de la série *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 1999.
- [50] J.R. Isbell. Epimorphisms and dominions, iii. *Amer. J. Math.*, 90:1025–1030, 1968.
- [51] Bart Jacobs. *Categorical Logic and Type Theory*, volume 141 de la série *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North Holland, 1999.
- [52] Thomas Jech. *Set Theory, The Third Millenium Edition*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003.
- [53] Peter T. Johnstone. *Stone Spaces*, volume 3 de la série *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1982.
- [54] Tomasz Kaczynski, Konstantin Mischaikow et Marian Mrozek. *Computational Homology*, volume 157 de la série *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2004.
- [55] Sanjeevi Krishnan. A convenient category of locally ordered spaces. Dans *Preliminary Proceedings of the Workshop GETCO'05*, Basic Research in Computer Science. University of Aarhus, août 2005. disponible sur internet <http://www.brics.dk> ou <ftp://ftp.brics.dk> sous-répertoire NS/05/5.

- [56] Jean-louis Krivine. *Théorie des ensembles*. Nouvelle Bibliothèque Mathématique. Cassini, 1998.
- [57] Kenneth Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, volume 102 de la série *Studies in Logic and The Foundations of Mathematics*. North-Holland, 1980.
- [58] E. Goubault L. Fajstrup et M. Raussen. Detecting deadlocks in concurrent systems. Dans *Proceedings of the 9th International Conference on Concurrency Theory*. Springer-Verlag, 1998. disponible sur internet <http://www.dmi.ens.fr/~goubault>
- [59] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 de la série *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, seconde édition, 1998. édition originale 1971.
- [60] Saunders Mac Lane et Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Universitext. Springer-Verlag, 1992.
- [61] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 de la série *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, troisième édition revue, 2002. également publié en français aux éditions Dunod.
- [62] Eric Goubault Lisbeth Fajstrup et Martin Raussen. Algebraic topology and concurrency. *Theoretical Computer Science*, 2005. à paraître.
- [63] Jean-Louis Loday. *Cyclic Homology*, volume 301 de la série *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, seconde édition, 1998.
- [64] Philippe Malbos. *Critères de finitude homologique pour la non convergence des systèmes de réécriture de termes*. thèse de doctorat, Université Montpellier II, janvier 2004.
- [65] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, volume 127 de la série *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1991.
- [66] Maarten Maurice. *Compact Ordered Spaces*. thèse de doctorat, Universiteit van Amsterdam, 1964.
- [67] Maarten Maurice. *Compact Ordered Spaces*, volume 6. de la série *Mathematical Centre Tracts*, seconde édition, 1970.
- [68] Ralph McKenzie. The zigzag property and exponential cancellation of ordered sets. version préliminaire disponible sur internet <http://www.math.vanderbilt.edu/mckenzie/>, 2003.
- [69] R. Milner. *Calculus of Communicating System*. Numéro 92 de la série *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1980.
- [70] Robin Milner. *Communication and Concurrency*. International Series in Computer Science. Prentice Hall, 1989.

- [71] Robin Milner. *Communicating and Mobile Systems : The  $\pi$ -calculus*. Cambridge University Press, 1999.
- [72] G.Gierz K.H.Hofmann K.Keimel J.D.Lawson M.Mislove et D.S.Scott. *A Compendium of Continuous Lattices*. Springer, 1980.
- [73] G.Gierz K.H.Hofmann K.Keimel J.D.Lawson M.Mislove et D.S.Scott. *Continuous Lattices and Domains*, volume 93 de la série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2003.
- [74] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Advanced Book Program. Addison-Wesley, 1984.
- [75] Leopoldo Nachbin. Sur les espaces topologiques ordonnés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 226, 1948.
- [76] Leopoldo Nachbin. Sur les espaces uniformes ordonnés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 226, 1948.
- [77] Leopoldo Nachbin. Sur les espaces uniformisables ordonnés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 226, 1948.
- [78] Leopoldo Nachbin. *Topology and Order*, volume 4 de la série *Van Nostrand Mathematical Studies*. Van Nostrand, Princeton, 1965.
- [79] J. Nikiel, H. M. Tuncali et E. D. Tymchatyn. *Continuous Images of Arcs and Inverse Limit Methods*, volume 104 de la série *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, juillet 1993.
- [80] M. Scott Osborne. *Basic Homological Algebra*, volume 196 de la série *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2000.
- [81] Christos H. Papadimitriou. Concurrency control by locking. *SIAM Journal on Computing*, 12(2):215–226, 1983.
- [82] John F. Jardine et Paul G. Goerss. *Simplicial Homotopy Theory*, volume 174 de la série *Progress in Mathematics*. Birkhauser, 1999.
- [83] M.C. Pedicchio et S.Solomini. On a “good” dense class of topological spaces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, (42):287–295, 1986.
- [84] Martin Raussen. On the classification of dipaths in geometric models for concurrency. *Mathematical Structures in Computer Science*, 10(4):427–457, août 2000.
- [85] Steven Roman. *Field Theory*, volume 158 de la série *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.
- [86] Yuri I. Manin et Sergei I. Gelfand. *Homological Algebra*. Springer, 1999.
- [87] Yuri I. Manin et Sergei I. Gelfand. *Methods of Homological Algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. seconde édition.

- [88] Robert M. Switzer. *Algebraic Topology - Homology and Homotopy*. Classics in Mathematics. Springer, 2002. nouvelle impression de l'édition de 1975.
- [89] Masamichi Takesaki. *Theory of Operator Algebra I*, volume 124 de la série *Encyclopaedia of mathematical sciences*. Springer, seconde édition, 2002. première édition 1979.
- [90] Walter Tholen et Maria Cristina Pedicchio, éditeurs. *Categorical Foundations : Special Topics in Order, Topology, Algebra, and Sheaf Theory*, volume 97 de la série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2004.
- [91] Ron van Glabbeek. Higher-Dimensional Automata and other models of Concurrency. Dans *Preliminary Proceedings of the Workshop GETCO'05*, Basic Research in Computer Science. University of Aarhus, août 2005. disponible sur internet <http://www.brics.dk> ou <ftp://ftp.brics.dk> sous-répertoire NS/05/5.
- [92] L.E. Ward. Partially ordered topological spaces. *Proceedings of American Mathematical Society*, (5):144–161, février 1954.
- [93] Glynn Winskel. *Handbook of Logic in Computer Science : Semantic Modelling*, volume 4, chapitre 1. Oxford University Press, 1995.
- [94] Afra J. Zomorodian. *Topology for Computing*, volume 16 de la série *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, 2005.