



HAL
open science

Du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques: combinatoire de surfaces par la géométrie algébrique.

Nicolas Orantin

► **To cite this version:**

Nicolas Orantin. Du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques: combinatoire de surfaces par la géométrie algébrique.. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT: . tel-00173162

HAL Id: tel-00173162

<https://theses.hal.science/tel-00173162>

Submitted on 19 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 6 – Pierre et Marie Curie
et
Service de Physique Théorique, Commissariat à l'Énergie Atomique

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : **Physique théorique**

présentée par **Nicolas ORANTIN**

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 6

Du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques : combinatoire de surfaces par la géométrie algébrique.

Soutenue le 13 Septembre 2007 devant le jury composé de

M. AKEMANN Gernot, rapporteur
M. BRÉZIN Édouard, président
M. EYNARD Bertrand, directeur
M. KONTSEVICH Maxim
M. KOSTOV Ivan
M. NEKRASOV Nikita, rapporteur

Résumé.

Le modèle à deux matrices a été introduit pour étudier le modèle d'Ising sur surface aléatoire. Depuis, le lien entre les modèles de matrices et la combinatoire de surfaces discrétisées s'est beaucoup développé. Cette thèse a pour propos d'approfondir ces liens et de les étendre au delà des modèles de matrices en suivant l'évolution de mes travaux de recherche. Tout d'abord, je m'attache à définir rigoureusement le modèle à deux matrices hermitiennes formel donnant accès aux fonctions génératrices de surfaces discrétisées portant une structure de spin. Je montre alors comment calculer, par des méthodes de géométrie algébrique, tous les termes du développement topologique des observables comme formes différentielles définies sur une courbe algébrique associée au modèle : la courbe spectrale. Dans un second temps, je montre comment, imitant la construction du modèle à deux matrices, on peut définir de telles formes différentielles sur n'importe quelle courbe algébrique possédant de nombreuses propriétés d'invariance sous les déformations de la courbe algébrique considérée. En particulier, on peut montrer que si cette courbe est la courbe spectrale d'un modèle de matrices, ces invariants reconstituent les termes des développements topologiques des observables du modèle. Finalement, je montre que pour un choix particulier des paramètres, ces objets peuvent être rendus invariants modulaires et sont solutions des équations d'anomalie holomorphe de la théorie de Kodaira-Spencer donnant un nouvel élément vers la preuve de la conjecture de Dijkgraaf-Vafa.

Mots clés : matrices aléatoires, combinatoire, théorie des cordes, espaces des modules, intégrabilité, géométrie algébrique

Summary

The 2-matrix model has been introduced to study Ising model on random surfaces. Since then, the link between matrix models and combinatorics of discrete surfaces has strongly tightened. This manuscript aims to investigate these deep links and extend them beyond the matrix models, following my work's evolution. First, I take care to define properly the hermitian 2 matrix model which gives rise to generating functions of discrete surfaces equipped with a spin structure. Then, I show how to compute all the terms in the topological expansion of any observable by using algebraic geometry tools. They are obtained as differential forms on an algebraic curve associated to the model : the spectral curve. In a second part, I show how to define such differentials on any algebraic curve even if it does not come from a matrix model. I then study their numerous symmetry properties under deformations of the algebraic curve. In particular, I show that these objects coincide with the topological expansion of the observable of a matrix model if the algebraic curve is the spectral curve of this model. Finally, I show that fine tuning the parameters ensure that these objects can be promoted to modular invariants and satisfy the holomorphic anomaly equation of the Kodaira-Spencer theory. This gives a new hint that the Dijkgraaf-Vafa conjecture is correct.

Key words : random matrices, combinatorics, string theory, moduli space, integrability, algebraic geometry

Remerciements

Je tiens avant toutes choses à remercier mon directeur de thèse Bertrand Eynard. Il a passé énormément de temps à me transmettre une partie de ses connaissances sur ce très vaste domaine que représentent les matrices aléatoires tout au long de l'évolution de mes travaux. J'ai également pu profiter de sa large connaissance du sujet, de son impressionnante intuition et de sa vision globale des applications possibles à travers les sujets qu'il m'a proposés : tous très riches, passionnants et pleins de perspectives. Je tiens aussi à le remercier pour sa disponibilité, sa gentillesse et sa patience. Je suis également très reconnaissant envers Kirone Mallick pour ses nombreux conseils depuis que j'ai eu le plaisir de travailler avec lui il y a maintenant 4 ans. Il a toujours été là pour me guider lorsque j'ai eu des choix à faire.

Je remercie Édouard Brézin et Maxim Kontsevich d'avoir accepté de faire partie de mon jury et tout particulièrement Nikita Nekrasov et Gernot Akemann qui ont accepté la lourde tâche de rapporter mon manuscrit ainsi que Ivan Kostov avec qui j'ai eu la chance de pouvoir interagir très fréquemment.

Merci également à Michel Bergère, Philippe Di Francesco et Aleix Prats-Ferrer d'avoir accepté de relire des versions préliminaires de ma thèse. J'ai aussi pris beaucoup de plaisir à discuter régulièrement avec eux et les nombreuses questions de Michel m'ont souvent permis de clarifier mes idées. Je voudrais également remercier mes collaborateurs Leonid Chekhov et Marcos Mariño qui m'ont aussi beaucoup appris dans leurs sujets respectifs et se sont toujours montrés disponibles pour répondre à mes questions.

Merci enfin au SPhT, qui m'a permis d'effectuer cette thèse dans un cadre toujours agréable et stimulant sans avoir à me préoccuper d'autre chose que mes travaux de recherche, ainsi qu'à tous ses membres et plus particulièrement à Jérémie Bouttier, François David, Vincent Pasquier, Pierre Vanhove et Jean-Bernard Zuber que j'ai régulièrement dérangés par mes questions ainsi qu'au Niels Bohr Institute qui m'a hébergé pendant deux mois durant lesquels j'ai eu le plaisir de pouvoir apprendre auprès de Charlotte Kristjansen.

Le travail présenté dans cette thèse a profité des financements du réseau européen ENIGMA MRT-CT-2004-5652, du projet ANR Géométrie et Intégrabilité en Physique Mathématique ANR-05-BLAN-0029-01, du réseau européen ENRAGE MRTN-CT-2004-005616, de l'ESF à travers le programme Misgam ainsi que par les gouvernements français et japonais à travers le projet PAI Sakura.

Avant propos et plan.

Les modèles de matrices aléatoires, depuis leur apparition dans le monde de la physique en 1951, n'ont eu de cesse de trouver des applications dans des domaines très variés des sciences parmi lesquels on peut citer quelques exemples en vrac : la physique nucléaire, la physique statistique, l'étude des systèmes chaotiques, la théorie des cordes, les théories conformes, la combinatoire, la théorie des nombres, la théorie des noeuds, l'intégrabilité, l'étude des problèmes de Riemann Hilbert ...

La richesse et la variété des domaines liés aux matrices aléatoires en font un objet d'étude passionnant et enrichissant, particulièrement pour un étudiant, tant les perspectives de recherche sont nombreuses. Au cours de ma thèse j'ai ainsi pu toucher à des problèmes très différents les uns des autres et côtoyer des gens d'horizons très divers. Ce mémoire n'a pas pour but de cataloguer l'état de l'art dans l'ensemble des domaines où les modèles de matrices ont apporté une contribution, le volume nécessaire à un tel exposé étant bien trop grand et mes connaissances trop limitées.

Je me restreindrai donc à un domaine que j'ai plus particulièrement étudié et sur lequel ont porté mes travaux au cours de cette thèse : le lien entre les modèles de matrices hermitiennes et la combinatoire de surfaces. J'essaierai de montrer que ces deux problèmes sont profondément reliés et combien la structure sous-jacente est riche, mélangeant géométrie algébrique et intégrabilité. J'ai essayé de rendre ce mémoire aussi accessible que possible, quel que soit le domaine d'expertise du lecteur, qu'il soit mathématicien ou physicien, et j'espère avoir réussi à faire un exposé ne nécessitant que des connaissances élémentaires de physique et mathématiques. Je suis en effet très heureux que ce domaine puisse donner naissance à des discussions entre mathématiciens et physiciens et j'espère donc que ce mémoire puisse être lisible par les différentes communautés liées, de près ou de loin, à ce vaste sujet.

Les résultats que j'ai obtenus au cours de ma thèse ont tous été le fruit de travaux avec mon directeur de thèse, B. Eynard. Ils découlent pour la plupart d'un résultat qu'il a obtenu dans le cadre du modèle à une matrice hermitienne au moment où j'ai entamé ma thèse sous sa direction : il a montré dans [42], comment calculer tout le développement topologique des fonctions de corrélations de ce modèle grâce à des outils de géométrie algébrique et à une représentation diagrammatique élégante du résultat. Mes travaux ont essentiellement consisté en l'exploration de certaines des nombreuses perspectives ouvertes par cette construction.

Cette thèse suit l'évolution de mes travaux au cours de ces trois dernières années :

- Le chapitre 1 consiste en une courte introduction sur les modèles de matrices présentant un historique et quelques applications motivant les travaux présentés dans la suite ;
- Le chapitre 2 est entièrement consacré au sujet principal de ma thèse : le modèle à deux matrices hermitiennes. Après avoir défini sans ambiguïté le modèle et les observables étudiées, je montre comment, en généralisant la méthode de [42], on peut calculer le développement topologique complet de toutes les observables en termes de la courbe spectrale classique. Ce chapitre est basé sur mes travaux avec Chekhov et Eynard [II][III][I][51] .
- Le chapitre 3 montre comment cette même méthode permet de résoudre le modèle à une matrice ainsi que le modèle à une matrice en champ extérieur. La dérivation

des résultats du modèle de matrice en champ extérieur est basé sur mon travail avec Eynard [IV].

- Dans le chapitre 4, je présente une généralisation de cette construction au delà des modèles de matrices. Je montre comment, partant d’une courbe algébrique quelconque, on peut construire une famille infinie de formes différentielles imitant les résultats obtenus dans les deux chapitres précédents. Lorsque la courbe considérée est la courbe spectrale d’un modèle de matrices, ces formes différentielles coïncident avec les termes du développement topologique des observables de ce modèle. J’étudie également le comportement de ces formes différentielles sous les déformations de la courbe ainsi que les propriétés de symétrie induites et comment ces propriétés permettent de comparer différents modèles et de retrouver facilement des résultats classiques dans l’étude d’intégrales matricielles. Ces résultats ont été obtenus avec Eynard dans [IV][VI].
- Après une très brève introduction entre le lien entre modèles de matrices et théorie des cordes, je montre que les objets introduits dans le chapitre précédent satisfont les équations d’anomalie holomorphe pour les cordes fermées de BCOV [15] et je propose des équations pour les cordes ouvertes satisfaites par les fonctions de corrélation définies précédemment. Ces résultats viennent d’une collaboration avec Eynard et Mariño [V].
- Le chapitre 6 est une conclusion où je résume les principaux résultats présentés dans cette thèse et certaines perspectives ouvertes par ces travaux.

Ces chapitres correspondant au cœur de la thèse sont suivis d’un chapitre comportant quelques appendices techniques et d’une partie où j’ai regroupé mes articles. Ces deux derniers chapitres permettent, entre autres choses, de regrouper toutes les démonstrations nécessaires aux résultats présentés ici. Ainsi, j’ai présenté les résultats sans démonstration dans le corps du texte. Lorsque cela peut aider à une meilleure compréhension du résultat, j’ai cependant parfois présenté une idée des démonstrations.

Liste d'articles utilisés pour ce mémoire.

[I]B.Eynard, N.Orantin, “Mixed correlation functions in the 2-matrix model, and the Bethe Ansatz”, **JHEP** 0508 028 (2005), math-ph/0504058.

[II]B.Eynard, N.Orantin, “Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions : diagrammatic rules for a residue formula”, *J. High Energy Phys.* **JHEP12**(2005)034, math-ph/0504058.

[III]L.Chekhov, B.Eynard and N.Orantin, “Free energy topological expansion for the 2-matrix model”, *J. High Energy Phys.* **JHEP12** (2006) 053, math-ph/0603003.

[IV]B.Eynard, N.Orantin, “Invariants of algebraic curves and topological expansion”, à paraître dans *Communication in Number Theory and Physics*, volume 1, n 2, math-ph/0702045.

[V]B.Eynard, M.Mariño, N.Orantin, “Holomorphic anomaly and matrix models”, *J. High Energy Phys.* **JHEP06** (2007) 058, hep-th/0702110.

[VI]B.Eynard, N.Orantin, “Topological expansion of mixed correlations in the hermitian 2 Matrix Model and x-y symmetry of the F_g invariants”, soumis à *JHEP*, arXiv :0705.0958 .

[VII]B.Eynard, N.Orantin, “Weil-Petersson volume of moduli space, Mirzakhani’s recursion and matrix models”, arXiv :0705.3600.

Table des matières

1	Introduction.	15
1	Petit historique des modèles de matrices.	15
1.1	Matrices aléatoires et physique nucléaire.	15
1.2	Modèles de matrices et combinatoire.	16
1.3	Matrices aléatoires et surfaces continues.	18
2	Applications des modèles de matrices aléatoires.	19
2.1	Volume symplectique de l'espace des modules de surfaces de Riemann.	19
2.2	Théorie de la gravitation quantique bidimensionnelle.	20
2.3	Théories des cordes.	21
2.4	Théories conformes et modèles minimaux.	22
2.5	De l'émergence de la géométrie algébrique et des systèmes intégrables.	24
2	Modèle à deux matrices hermitiennes.	27
1	Définition du modèle.	28
1.1	Intégrale sur l'ensemble des matrices hermitiennes.	28
1.2	Intégrale sur un chemin de valeurs propres.	30
1.3	Intégrale formelle.	31
2	Combinatoire des cartes, surfaces discrétisées.	42
2.1	Génération de surfaces discrétisées bicolores fermées.	43
2.2	Surfaces ouvertes et conditions de bord.	44
3	Développement topologique.	48
4	Cas particulier : modèle d'Ising.	49
5	Double limite d'échelle et limite continue.	50
6	Equations de boucles.	51
6.1	Dérivation des équations de boucles.	52
7	Limite planaire.	54
7.1	Equation de boucle maîtresse et courbe spectrale.	54
7.2	Limite planaire des fonctions de corrélation mixtes.	56
8	Développements topologiques et géométrie algébrique.	62
8.1	Rappels de géométrie algébrique.	62
8.2	Propriétés de la courbe spectrale du modèle à deux matrices.	71
9	Développement topologique du modèle à deux matrices.	73
9.1	Définitions, solutions des équations de boucles et feuillet physique.	74
9.2	Quelques propriétés des fonctions de corrélation.	75
9.3	Courbe spectrale complète.	76

9.4	Fonctions de corrélation simples et représentation diagrammatique.	77
9.5	Développement topologique de l'énergie libre.	84
9.6	Développement topologique des fonctions de corrélation mixtes.	86
10	Solution générale des équations de boucles.	88
10.1	Représentation diagrammatique	90
10.2	Retour sur le développement topologique des traces simples. . .	92
10.3	Retour sur la limite planaire des traces mixtes.	92
10.4	Interprétation des relations de récurrence.	93
11	Conclusion du chapitre.	95
3	Autres modèles de matrices.	97
1	Modèle à une matrice.	97
1.1	Interprétation combinatoire.	99
1.2	Courbe spectrale classique.	99
1.3	Solution des équations de boucles.	101
1.4	Lien avec le modèle à deux matrices.	102
2	Modèle de matrices en champ extérieur.	103
2.1	Définition et interprétation combinatoire.	103
2.2	Résolution du modèle.	104
3	Conclusion du chapitre.	107
4	Invariants algébriques.	109
1	Définition des modules de la courbe.	110
2	Déformation par κ	110
3	Fonctions de corrélation et énergies libres.	112
3.1	Définitions.	112
3.2	Représentation diagrammatique.	115
3.3	Propriétés.	115
3.4	Cas particuliers : genres 0 et 1.	117
4	Déformations de la courbe.	119
4.1	Invariance symplectique.	119
4.2	Variation par rapport aux modules de la courbe.	120
4.3	Opérateur d'insertion de boucle et son inverse.	125
4.4	Transformations modulaire.	126
4.5	Variation par rapport à κ	127
5	Limite singulière.	128
6	Applications.	129
6.1	Double limite d'échelle et modèles minimaux des théories conformes.	129
6.2	Application à l'intégrale de Kontsevich.	134
6.3	Exemple : courbe d'Airy.	136
6.4	Exemple : la gravité pure (3,2)	138
7	Intégrabilité des invariants algébriques.	140
7.1	Fonction de Baker-Akhiezer.	140
7.2	Relation de Sato.	142
7.3	Equations de Hirota	142
8	Conclusion du chapitre.	143

5	Modèles de matrices et théorie des cordes.	145
1	Théorie des cordes critiques et doubles limites d'échelle.	145
2	Théories de cordes topologiques.	146
3	Conjecture de Dijkgraaf-Vafa et modèle B local.	149
3.1	Variétés de Calabi-Yau locales.	149
3.2	Conjecture de Dijkgraaf-Vafa.	150
3.3	Miroirs de géométries toriques.	152
4	Théorie de Kodaira-Spencer et anomalie holomorphe.	152
5	Conclusion du chapitre.	155
6	Conclusion.	157
1	Résultats principaux : du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques.	157
1.1	Calcul d'intégrales à deux matrices formelles.	157
1.2	Invariants et déformations de courbes algébriques.	158
1.3	Théories conformes et intégrabilité.	158
1.4	Conjecture de Dijkgraaf-Vafa.	159
2	Perspectives.	159
2.1	Etude d'autres modèles de matrices.	159
2.2	Lien avec l'intégrale de matrice convergente.	160
2.3	Lien avec un système intégrable quantique.	160
2.4	Interprétation des invariants algébriques : calcul du volume de l'espace des modules de surfaces.	161
2.5	Symétrie miroir, théories topologiques de type A et courbe de Seiberg-Witten.	162
7	Appendices.	165
1	Modèle Gaussien et théorème de Wick.	165
2	Fonction de partition formelle et surfaces discrétisées.	168
3	Intégrale formelle et équations de boucles.	170
4	Variations de $F^{(0)}$ par rapport aux modules.	171
4.1	Dérivées premières de $F^{(0)}$	171
4.2	Dérivées secondes de $F^{(0)}$	171

Chapitre 1

Introduction.

Avant toute intrusion dans le monde des matrices aléatoires, il semble indispensable de rappeler leur surprenante apparition dans le monde de la physique ainsi que leurs si nombreuses et non moins surprenantes applications par la suite. La première partie de ce chapitre a donc pour but de rappeler l'origine des modèles de matrices aléatoires en général et des objets étudiés dans la suite plus particulièrement. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous présenterons divers problèmes mathématiques et théories physiques liés aux modèles de matrices, que ce soit des applications directes ou bien simplement des problèmes comportant une structure similaire. Nous nous attacherons particulièrement à montrer les points communs à ces différentes théories.

1 Petit historique des modèles de matrices.

1.1 Matrices aléatoires et physique nucléaire.

Les matrices aléatoires sont arrivées en physique presque par hasard. En effet, au cours des années 50, les physiciens nucléaires tentent d'étudier des noyaux de plus en plus gros, c'est-à-dire de déterminer le spectre de l'Hamiltonien caractérisant chaque noyau. La complexité du problème et la taille de l'opérateur à diagonaliser croissant avec la taille du noyau, ils se sont finalement trouvés face à un problème qu'ils ne pouvaient pas résoudre ni même décrire théoriquement. Ils étaient cependant capables d'avoir accès à ce spectre expérimentalement en étudiant la diffusion de neutrons lancés sur ce noyau. Ainsi l'expérience donnait accès à la répartition des niveaux d'énergie, la manière dont ils sont corrélés entre eux, leur densité $\rho(E)$ (i.e. le nombre moyen de niveaux dans un intervalle d'énergie)...

L'étude de ces résultats expérimentaux a fait apparaître une structure très robuste et universelle de la répartition statistique des niveaux d'énergie ne dépendant pas directement du noyau étudié ni de la région du spectre observée (voir [84] et les nombreuses références à l'intérieur). En effet, si les niveaux avaient été décorrélés, on se serait par exemple attendu à trouver une distribution de Poisson qui ne fut pas du tout observée. Au contraire, la distribution observée a été retrouvée par Wigner en partant d'une statistique bien différente. Puisque l'Hamiltonien d'un noyau lourd est trop complexe pour être décrit explicitement, Wigner a proposé de le modéliser par une matrice de taille $N \times N$ dont les coefficients sont des variables aléatoires décorrélées suivant chacune une

loi gaussienne adoptant ainsi une approche statistique. Lorsque la taille de la matrice N tend vers l'infini, il a observé que le spectre devient (quasi-)continu sur un intervalle $[a, b]$ et que la densité d'énergie suit la célèbre loi du "demi-cercle" de Wigner [105] :

$$\rho(E) = \frac{4}{\pi(b-a)} \sin \phi \quad \text{avec} \quad E = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \phi. \quad (1-1)$$

Or, les corrélations issues de cette densité correspondent exactement aux observations expérimentales obtenues par diffusion de neutrons lents. L'existence d'une approche statistique de ce problème n'est pas due au hasard mais bien aux propriétés particulières de ce type de diffusion. En effet, les neutrons bombardant le noyau à étudier apportent ici chacun une faible énergie. Il faut alors en accumuler beaucoup pour pouvoir arracher un neutron au noyau. L'énergie individuelle des neutrons incidents est donc totalement absorbée par le noyau au cours de cette réaction avant d'être restituée à travers un neutron diffusé. L'étude des neutrons diffusés ne doit donc plus caractériser les comportements individuels des neutrons incidents mais leur comportement collectif impliquant un caractère statistique.

Cette approche statistique peut s'appliquer à d'autres problèmes physiques liés à un Hamiltonien trop compliqué pour être décrit exactement. On a alors pu observer que les caractéristiques générales du spectre ne dépendent pas des détails du problème étudié mais simplement de ses symétries, chaque cas correspondant à l'intégration sur un ensemble de matrices particulier ([84] est une nouvelle fois une source formidable d'informations sur ce point). En effet, l'étude des matrices aléatoires elles-mêmes a permis d'observer des propriétés d'universalités : lorsque la taille des matrices tend vers l'infini, on peut trouver certaines caractéristiques du spectre (par exemple l'espacement entre deux valeurs propres successives) qui ne dépendent absolument pas des détails de la mesure d'intégration mais seulement de l'ensemble des matrices sur lequel on intègre.

Il peut donc être intéressant d'étudier les matrices aléatoires en posant une mesure sur l'ensemble de matrices présentant des caractéristiques communes plutôt que de les voir comme un ensemble de coefficients aléatoires réels corrélés. C'est cette approche que nous considérerons dans cette thèse en considérant une mesure d'intégration sur l'ensemble des matrices hermitiennes.

1.2 Modèles de matrices et combinatoire.

Pour bien comprendre comment le modèle qui nous intéresse a vu le jour, il est nécessaire de rappeler comment un résultat de Chromodynamique Quantique (QCD) s'est avéré être fondamental dans le cadre des matrices aléatoires. Cette théorie est une théorie des champs où les particules sont des quarks portant une charge de couleur qui est un objet tridimensionnel. Ils interagissent donc à travers des matrices de jauge de taille 3×3 , les gluons, présentant une symétrie $SU(3)$. La résolution de cette théorie est un problème extrêmement complexe et si l'on peut obtenir des résultats perturbatifs aux petites échelles où la constante de couplage est faible, l'étude aux grandes échelles ne peut être décrite de la même façon. En 74, 't Hooft [100] a proposé d'aborder le problème différemment en le généralisant : au lieu de considérer seulement trois couleurs, on peut étudier le même problème avec un nombre de couleurs arbitraire N .

On peut alors faire tendre ce nombre $N \rightarrow \infty$ et exprimer les observables du modèle à travers leur développement en $\frac{1}{N}$ pour obtenir finalement des informations sur la valeur $N = 3$. 't Hooft a alors découvert que les graphes de Feynman contribuant à un ordre donné dans ce développement ont une topologie fixée.

Le type de modèles que nous allons étudier dans ce mémoire a été introduit bien plus tard. Partant des techniques classiques de théorie des champs, Brézin, Itzykson, Parisi et Zuber [22] ont interprété les intégrales matricielles issues de la théorie des matrices aléatoires comme des fonctions génératrices de graphes épais lorsque la taille des matrices tend vers l'infini. Pour cela, ils ont développé les intégrales considérées autour d'un col pour se ramener au calcul de valeurs moyennes d'opérateurs par rapport à une mesure gaussienne. L'application du théorème de Wick (voir l'appendice 1) permet alors de représenter le résultat comme une somme sur un ensemble de graphes où les vertex sont orientés. Nous reviendrons plus précisément sur cette construction dans le début du chapitre 2 puisqu'elle est la base des objets étudiés ici.

L'étude des modèles de matrices a connu un regain d'intérêt quelques années plus tard grâce à une simple observation. Plusieurs domaines très différents de la physique, tels que la théorie des cordes, la gravitation quantique ou bien l'étude de membranes, nécessitent de pouvoir caractériser des surfaces et, plus particulièrement, de pouvoir mettre une mesure sur cet ensemble. En 1985, plusieurs chercheurs étudiant de telles surfaces ont observé que l'interprétation introduite par [22] permet d'approcher ce type de problème à partir des intégrales de matrices [9, 30, 65]. En effet, considérant un graphe épais, il existe une procédure très simple permettant de remplacer tout vertex à k pattes par un polygone à k côtés. A un graphe consistant en un recollement de vertex, on fait donc correspondre une surface formée de polygones collés entre eux par leurs arêtes. La théorie des matrices aléatoires permet ainsi de calculer des objets de la forme :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mathcal{S}} \mathcal{P}(\mathcal{S}) \quad (1-2)$$

où \mathcal{S} est une surface discrétisée construite comme un recollement de polygones et \mathcal{P} est un poids associé à toute surface de ce type. Pour passer à de "vraies" surfaces, c'est-à-dire continues, il faut alors faire tendre le nombre de polygones vers l'infini et réduisant leur taille de manière à garder l'aire de la surface considéré finie.

Dans ce cadre, la propriété découverte par 't Hooft en QCD signifie que, lorsque la taille des matrices tend vers l'infini, le développement en $\frac{1}{N}$ permet de sélectionner le genre des surfaces générées. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \sum_{\mathcal{S}_g} \mathcal{P}(\mathcal{S}_g) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \mathcal{Z}^{(g)} \\ &= N^2 \left(\text{disque} \right) + \left(\text{anneau} \right) + N^{-2} \left(\text{double anneau} \right) + \dots \end{aligned} \quad (1-3)$$

où l'on somme maintenant sur l'ensemble des surfaces \mathcal{S}_g de genre g donné pour obtenir chaque terme de ce développement topologique. Cette propriété s'est avérée fondamentale dans l'étude des matrices aléatoires et a permis de faire de grands progrès.

1.3 Matrices aléatoires et surfaces continues.

Revenons maintenant à une éventuelle procédure permettant d'atteindre des surfaces continues à partir des modèles de matrices. Une telle limite est atteinte en faisant tendre le nombre moyen de polygones constitutifs des surfaces vers l'infini. Ceci est en général obtenu en approchant un point critique dans l'espace des paramètres du modèle. En effet, on peut montrer [47] que le nombre moyen de polygones $\langle n \rangle$ est donné par une relation de la forme

$$\langle n \rangle = g \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial g} \quad (1-4)$$

où g est un paramètre du modèle de matrices et \mathcal{Z} la fonction génératrice de surfaces discrétisées issue de ce modèle. Il faut donc atteindre une singularité de $\ln \mathcal{Z}$ comme fonction de g pour faire diverger cette quantité. On détermine ainsi un point critique g_c tel que pour tout terme du développement topologique $\mathcal{Z}^{(h)}$ défini dans Eq. (1-3), il existe un exposant critique α_h tel que

$$\mathcal{Z}^{(h)} = (g - g_c)^{-\alpha_h} \mathcal{Z}_{sing}^{(h)} + \text{termes sous dominants.} \quad (1-5)$$

On peut alors définir une constante cosmologique liant l'aire moyenne des polygones ϵ^2 et la distance au point critique :

$$\Lambda \epsilon^2 := (g - g_c). \quad (1-6)$$

La fonction génératrice totale est alors donnée par le comportement

$$\mathcal{Z} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} (g - g_c)^{-\alpha_h} \mathcal{Z}_{sing}^{(h)} \quad (1-7)$$

au voisinage de la singularité g_c . Il a été montré [23, 39, 55] que l'exposant critique α_h est linéaire en le genre h : il existe un exposant γ tel que

$$\alpha_h = (\gamma - 2)(1 - h). \quad (1-8)$$

Les exposants de $\frac{1}{N^2}$ et $(g - g_c)$ sont donc comparables et ceci permet de définir une variable combinant les deux $\kappa := N(g - g_c)^{1-\frac{\gamma}{2}}$ permettant d'exprimer :

$$\mathcal{Z} = \sum_{h=0}^{\infty} \kappa^{2-2h} \mathcal{Z}_{sing}^{(h)} \quad (1-9)$$

et ainsi de mélanger les contributions des surfaces de genres différents à travers une double limite d'échelle obtenue par $N \rightarrow \infty$ et $g \rightarrow g_c$ en gardant κ fini. Cette double limite d'échelle est intéressante puisqu'elle permet d'avoir accès aux surfaces continues depuis les modèles de matrices et de mélanger les surfaces de genres différents ce qui est un élément fondamental de la théorie des cordes où ces dernières interagissent en se séparant et se recollant créent des surfaces de genre plus élevé. Nous reviendrons sur ce point dans la partie suivante dédiée aux applications des matrices aléatoires.

2 Applications des modèles de matrices aléatoires.

Les matrices aléatoires sont un outil formidable tant ses applications sont nombreuses aussi bien en physique qu'en mathématiques. Dans cette partie nous présentons seulement une petite partie de celles-ci plus particulièrement reliées aux résultats présentés dans ce mémoire.

2.1 Volume symplectique de l'espace des modules de surfaces de Riemann.

En mathématiques, on peut être intéressé par décrire et compter des surfaces partageant une même topologie. Lorsque ces surfaces sont discrétisées, ceci se ramène à de la pure combinatoire mais lorsque les surfaces sont continues, on ne peut plus aborder le problème de la même manière. Il faut définir un certain nombre de paramètres, appelés modules, dont la valeur permet de caractériser chaque surface ou type de surface. L'ensemble des surfaces est donc mis en bijection avec l'espace de toutes les valeurs possibles de ces paramètres : l'espace des modules [31]. Un premier ensemble de modules peut être identifié comme le genre g et le nombre de bords k d'une surface. On peut alors découper l'ensemble des surfaces en des sous-ensembles $\mathcal{S}_k^{(g)}$ contenant toutes les surfaces de genre g donné et ayant k bords. A chacun de ces ensembles on peut associer un ensemble de modules tels que la longueur de chaque bord par exemple dont les différentes valeurs forment un espace $\mathcal{M}_k^{(g)}$. Alors que dans le cas des surfaces discrétisées, on les compte en associant à chaque assemblage de polygones un poids et en effectuant la somme de ces poids, l'équivalent continu consiste à munir l'espace des modules d'une mesure et à calculer le volume de ce dernier par rapport à cette mesure. En effet, chaque point de l'espace des modules correspond à une surface et imposer une mesure sur cet espace consiste à associer un poids à chaque surface, l'intégration remplaçant alors la somme discrète.

Dans l'étude de ces espaces, Riemann lui-même a été le premier à étudier l'espace \mathcal{M}_g de toutes les structures complexes sur une surface orientée de genre g modulo l'ensemble des difféomorphismes préservant l'orientation. Il a ainsi pu montrer que l'espace \mathcal{M}_g a pour dimension réelle $6g - 6$. Beaucoup plus récemment, démontrant ainsi une conjecture précédemment établie par Witten [108], Kontsevich [72] a montré que l'on pouvait calculer le volume de tels espaces par le calcul d'intégrales de matrices du type

$$\mathcal{Z}(\Lambda) = \frac{\int dM \exp - \text{Tr} \left(\frac{\Lambda M^2}{2} - i \frac{M^3}{6} \right)}{\int dM - \text{Tr} \frac{\Lambda M^2}{2}} \quad (2-1)$$

où Λ est une matrice de champ extérieur en utilisant la propriété disant que les volumes $v_n^{(g)} := \text{Vol} \left(\mathcal{M}_n^{(g)} \right)$ satisfont les équations de Korteweg-de Vries (KdV).

Le fait que cette hiérarchie intégrable d'équations apparaisse dans l'étude des matrices aléatoires est connu depuis longtemps et beaucoup de travaux ont montré que de telles hiérarchies intégrables sont fondamentalement liées à différents modèles de matrices aléatoires [23, 55, 39, 13]. Au contraire, l'émergence de telles contraintes dans le cadre de l'étude de l'espace des modules de surfaces continues était plus surprenante et

n'est toujours pas comprise et fait l'objet de nombreux travaux. Très récemment, Mirzakhani [87, 88] a proposé une relation de récurrence permettant de retrouver la valeur de ces volumes avec une approche mélangeant géométrie algébrique et géométrie hyperbolique. Ces relations semblent être un premier pas vers une meilleure compréhension de ce lien entre hiérarchies intégrables et espaces de modules.

2.2 Théorie de la gravitation quantique bidimensionnelle.

La gravitation est sûrement la force fondamentale la plus facilement observable à l'échelle macroscopique puisqu'elle a toujours été ressentie par tout le monde et a été formalisée très tôt à travers les lois de Newton. Cependant son comportement à petites échelles est plus problématique. Il paraîtrait en effet naturel de vouloir quantifier cette interaction fondamentale comme l'électromagnétisme et les autres forces, mais les techniques de théorie des champs utilisées ne peuvent s'appliquer dans ce cas là puisque la gravitation est une théorie non renormalisable.

Comment quantifier cette théorie en pratique ? On peut tenter d'imiter ce qui se fait déjà dans les autres théories en utilisant les intégrales de chemins, c'est-à-dire sommer sur tous les chemins d'états possibles entre un état initial et un état final donné. On sait depuis Einstein que le champ gravitationnel est un champ courbant l'espace temps. Pour le caractériser il faut donc se donner une variété \mathcal{E} de dimension 4, des coordonnées $\{x_i\}_{i=1}^4$ sur celle-ci et une métrique g_{ij} donnée par une matrice 4×4 . Son action est alors donnée par la courbure de \mathcal{E} :

$$S := \frac{-c^3}{16\pi G} \int_{\mathcal{E}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \sqrt{-\det g} R \quad (2-2)$$

où R est la courbure scalaire de la métrique g et G un nombre appelé constante gravitationnelle. Une intégrale de chemin sera alors de la forme :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mathcal{E}} \exp\left(-i \frac{S(\mathcal{E})}{\hbar}\right) \quad (2-3)$$

où la somme porte sur toutes les variétés \mathcal{E} satisfaisant les conditions initiale et finale. Le calcul d'une telle somme est extrêmement compliqué et un tel problème n'a pas encore pu être résolu, en particulier parce qu'on ne sait pas bien décrire les différentes topologies de \mathcal{E} intervenant dans cette somme.

On peut cependant essayer de simplifier le problème pour tenter de le résoudre en diminuant la dimension de l'espace temps : on peut considérer l'espace temps comme une variété de dimension 2 : une dimension d'espace et une dimension de temps. On va également faire une rotation de Wick $t \rightarrow it$, faisant passer dans l'espace des temps complexes et rendant la métrique Euclidienne. Dans ce cas là, le problème se rapproche d'un problème de calcul de volume d'espace de modules de surfaces continues décrit plus haut. On doit en effet calculer des intégrales de chemin de la forme :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mathcal{E}} \exp\left(-\frac{\int dx^2 \sqrt{-\det g} (\Lambda + GR)}{\hbar}\right) \quad (2-4)$$

où la somme porte sur toutes les surfaces satisfaisant les conditions aux limites et Λ est la constante cosmologique. En fait, le symbole de somme est ici un peu abusif puisqu'il

sous entend une somme discrète alors que l'espace des surface n'est pas à priori discret. En fait, il faudrait plutôt réécrire \mathcal{Z} comme une intégrale sur l'espace des modules des surfaces de Riemann \mathcal{E} .

C'est justement sur ce point que les intégrales de matrices s'avèrent efficaces à condition de donner un sens précis à cette somme discrète. Une idée naturelle pour décrire une surface, fréquemment utilisée par exemple en mécanique dans les méthodes de modélisation en éléments finis, consiste à discrétiser cette dernière en la remplaçant par une surface "proche" composée uniquement de polygones collés entre eux par leurs arêtes. La somme \mathcal{Z} consiste alors à sommer sur de telles surfaces discrétisées en donnant un poids particulier à chacun des polygones les composant ainsi qu'à l'opération de recollement d'arêtes : on peut donc voir \mathcal{Z} comme une fonction génératrice de telles surfaces. Or comme nous le verrons, c'est exactement le type de fonctions génératrices que l'on peut obtenir à partir des intégrales de matrices. Notons qu'il faut alors faire très attention à cette discrétisation des surfaces et pouvoir caractériser son impact sur les observables du modèle.

Pour la suite, remarquons que l'on peut également introduire des champs de "matière" scalaires $X_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ couplés à la gravité, par exemple à travers l'action modifiée :

$$S = \int dx^2 \sqrt{-\det g} (\Lambda + GR + \sum_i g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_i \partial_\beta X_i). \quad (2-5)$$

2.3 Théories des cordes.

Une autre théorie peut se mettre sous une forme similaire et se ramener au même problème consistant en une intégrale sur l'espace des modules des surfaces de Riemann : la théorie des cordes [54]. Celle-ci est une généralisation des théories des champs habituelles où les particules ne sont plus des points de l'espace temps mais des objets à une dimension, i.e. des cordes paramétrées par des coordonnées $X_i(s, t)_{i=1, \dots, 3}$ où s est une abscisse curviligne sur la corde. Pour définir une intégrale de chemin il faut alors intégrer sur tous les états $X_i(t)$ entre une corde initiale $X_i(s, t_0)$ et une corde finale $X_i(s, t_f)$. Or, lorsqu'une corde évolue dans le temps, elle dessine une surface (bi-dimensionnelle) dans l'espace temps. L'intégrale de chemin correspond donc comme dans le paragraphe précédent à sommer sur toutes les surfaces entre les états initiaux et finaux :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mathcal{E}} \exp \left(-i \frac{S(\mathcal{E})}{\hbar} \right). \quad (2-6)$$

Plusieurs actions $S(\mathcal{E})$ peuvent alors être choisies et plusieurs mesures pour la sommation. Nous n'allons pas nous attarder sur toutes les actions possibles. Notons que parmi toutes celles-ci, Polyakov [94] a proposé une action invariante sous les changements de coordonnées de la surface :

$$S := -\frac{\mu c}{2} \int ds dt \sqrt{-\det g} \left(\sum_i G_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X_\nu \right) \quad (2-7)$$

où G est la métrique de Minkowski sur l'espace-temps et g la métrique induite sur la feuille d'univers (i.e. la surface dessinée par l'évolution de la corde dans le temps). Notons que l'on reconnaît ici exactement la même somme sur les surfaces que celle

introduite dans le paragraphe précédent dans le cadre de la gravitation quantique bidimensionnelle dans Eq. (2-5).

Cependant, cette théorie des cordes présente de nombreux défauts. Non seulement, elle ne peut être vérifiée expérimentalement mais au niveau théorique, les symétries nécessaires impliquent de fortes contraintes. En effet, on ne peut pas construire une telle théorie dans un espace temps de dimension 4 mais 26 ! Il faut donc éliminer 22 dimensions. Une partie du chemin a déjà été fait par Ramond [95] et Neveu et Schwarz [92] en introduisant la supersymétrie : ils ont ramené le problème à une théorie à dix dimensions. Il reste donc 6 dimensions à éliminer pour revenir aux 4 dimensions de l'espace temps réel. Ceci peut être fait en réduisant la taille des 6 directions supplémentaires, en les compactifiant. Les nombreux travaux dans ce domaine font apparaître une très riche structure intéressante au moins au niveau mathématique si ce n'est pour retrouver les propriétés physiques du monde réel.

Remarque 2.1 Nous n'avons évoqué ici qu'un exemple parmi bien d'autres de modèle de théorie des cordes lié aux modèles de matrices aléatoires. Nous verrons un autre exemple dans le chapitre 5 qui lui est totalement dédié : les théories des cordes topologiques. Ce cas correspond à une théorie des cordes où seule la topologie de la feuille d'univers (i.e. la surface générée par l'évolution temporelle de la corde) entre en compte dans le calcul de la fonction de partition. Si deux types de théories des cordes apparaissent dans ce cadre, tous deux sont fortement reliés aux modèles de matrices [81] : que ce soit par les propriétés de variation de la fonction de partition du type A sous les déformations de la feuille d'univers ou par la conjecture de Dijkgraaf et Vafa [36] identifiant directement un modèle de matrice équivalent au type B, les points communs entre modèles de matrices et théories des cordes topologiques sont frappants.

2.4 Théories conformes et modèles minimaux.

Explicitons un peu plus comment ces dimensions critiques pour l'espace temps sont obtenues. Au niveau local, l'action de Polyakov a une symétrie sous le changement de la métrique :

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow e^{\varphi} g_{\alpha\beta}, \quad (2-8)$$

la symétrie conforme. Cependant cette symétrie est brisée par la quantification : la sommation sur les surfaces introduit une anomalie. On peut caractériser cette anomalie par un unique scalaire : la charge centrale c . Celle-ci s'annule lorsque la théorie quantique est invariante conforme. Pour la définir, il est nécessaire d'étudier plus précisément les transformations conformes de la métrique. Ce sont les transformations qui changent la métrique par un facteur scalaire et donc laissent invariante l'action de la théorie [62] : elles sont données par

$$z \rightarrow z(1 + \epsilon f(z)) \quad (2-9)$$

où f est une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$ avec x et y des coordonnées sur la surface considérée. Elles sont donc générées par les opérateurs $l_n := z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z}$. En fait, comme souvent, pour obtenir les bons générateurs des transformations conformes, on doit introduire un ordre normal pour préciser l'ordre dans lequel les différents opérateurs agissent. On obtient ainsi les générateurs $L_n := l_n$: qui satisfont

les relations de commutation :

$$[L_n, L_m] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{m+n}Id, \quad (2-10)$$

c'est-à-dire qu'ils forment une extension de l'algèbre de Virasoro avec une charge centrale c .

On peut construire une représentation de cette algèbre en partant d'un opérateur primaire $|0\rangle$:

$$L_0|0\rangle = h|0\rangle \quad \text{et} \quad \forall n > 0, L_n|0\rangle = 0 \quad (2-11)$$

considéré comme le vide de la représentation. L'ensemble des états engendrés par les autres opérateurs L_{-n} :

$$|n_1 n_2 \dots n_k\rangle := L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_k} |0\rangle \quad (2-12)$$

engendrent alors, en général, une représentation de dimension infinie irréductible de l'algèbre de Virasoro. Cependant ceci n'est plus vrai dans certains cas particuliers où la représentation engendrée est réductible puisque les états engendrés ne sont pas linéairement indépendants. En effet, pour les valeurs de h particulières :

$$h_{r,s} = \frac{1}{48} \left(12(r-s)^2 + (1-c)(r^2 - s^2 - 2) + (r^2 - s^2)\sqrt{(25-c)(1-c)} \right) \quad (2-13)$$

où r et s sont entiers, on obtient de telles représentations réductibles.

Remarque 2.2 Certains modèles ne font intervenir qu'un nombre fini de représentations réductibles de ce type et sont ainsi entièrement solubles : les modèles minimaux indexés par deux entiers p et q premiers entre eux. Dans ce cas, la charge centrale est de la forme :

$$c = 1 - 6 \frac{(p-q)^2}{pq} \quad (2-14)$$

et les dimension des champs primaires sont données par la table de Kac [62] :

$$h_{r,s} = \frac{(rq - sp)^2 - (p-q)^2}{4pq} \quad (2-15)$$

où s et r sont deux entiers strictement positifs et strictement inférieurs respectivement à q et à p .

Nous verrons comment résoudre ces modèles grâce aux modèles de matrice dans le chapitre 4 de cette thèse.

On peut montrer que l'on peut associer une telle charge centrale à chaque champ suivant sa statistique : à un boson, on associe une charge 1 tandis qu'à un fermion on associe une charge $\frac{1}{2}$. On peut également montrer que le champ de jauge $g_{\alpha\beta}$ a une dimension négative égale à -26 due, entre autres choses, à l'introduction de fantômes de Fadeev-Popov. La charge totale d'une théorie des cordes D dimensionnelle avec l'action de Polyakov est donc égale à :

$$c = D - 26 \quad (2-16)$$

puisque'il y a D champs bosoniques dans cette théorie. On voit ainsi qu'il est nécessaire d'avoir une théorie avec un espace temps de dimension $D = 26$ pour que la symétrie conforme soit préservée au niveau quantique. Pour réduire la dimension critique, on peut introduire la supersymétrie et donc D fermions. Ceci induit de plus de nouveaux fantômes de Fadeev-Popov avec une charge $+11$. On a alors la charge centrale

$$c = D - 26 + \frac{D}{2} + 11 \quad (2-17)$$

ce qui donne une dimension critique $D = 10$ comme annoncé plus haut.

En fait, les modèles de matrices permettent non seulement d'avoir accès aux théories des cordes critiques mais également à celles qui ont une dimension non critique et donc une charge centrale non nulle. En particulier, les modèles minimaux correspondent à une charge centrale $c < 1$.

Dans tous les cas, pour comparer les résultats des théories conformes introduites ici et des modèles de matrices vus comme fonctions génératrices de surfaces discrétisées, il faut pouvoir trouver un langage commun. Dans les deux cas on peut se ramener à une unité de comparaison possible : l'aire des surfaces générées. On peut se demander comment se comportent les observables de ces différents modèles en termes de l'aire \mathcal{A} des surfaces considérées. Plus particulièrement comment divergent ces observables quand $\mathcal{A} \rightarrow \infty$. En général, pour les théories conformes, on peut montrer que pour un genre h et une aire \mathcal{A} fixée pour les surfaces \mathcal{E} , on a un comportement du type [71] :

$$\mathcal{Z}^{(h)} = \sum_{\mathcal{E}} \exp\left(-i\frac{S(\mathcal{E})}{\hbar}\right) \sim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} \mathcal{A}^{\gamma_h - 3} \quad (2-18)$$

où l'exposant γ_h est linéaire en le genre et donné par¹ :

$$\gamma_h = 2h + \gamma_{string}(1 - h). \quad (2-19)$$

Le coefficient γ_{string} , appelé susceptibilité de corde dépend de la théorie considérée. Par exemple, pour un modèle minimal de type (p, q) , on peut montrer qu'il vaut :

$$\gamma_{string} = -2 \frac{|p - q|}{p + q - |p - q|}. \quad (2-20)$$

On peut calculer un tel exposant critique pour n'importe quelle autre observable $\langle \mathcal{O} \rangle$ du modèle et ainsi le comparer avec les résultats de modèles de matrices.

Nous verrons ainsi que la comparaison de ces exposants, à condition de bien normaliser les observables et variables, permet de montrer que les modèles de matrices donnent accès aux théories conformes (en particulier en prenant certaines limites où les surfaces discrétisées deviennent continues).

2.5 De l'émergence de la géométrie algébrique et des systèmes intégrables.

Si les applications présentées jusqu'ici ont toutes un lien avec la combinatoire de surfaces discrétisées ou continues, les modèles de matrices sont liés à de nombreux

¹On peut noter la similitude entre cette équation et Eq. (1-8).

autres problèmes qui ne seront pas ou très peu abordés dans cette thèse. Si elle ne semble pas aussi directement reliée à notre problème, l'une des propriétés des modèles de matrices qui semble fondamentale dans toutes les constructions introduites ici est son intégrabilité. En effet, cette propriété, que l'on retrouve sous différentes formes suivant l'aspect des modèles de matrices étudiés, assure que le problème est soluble : cela signifie que l'on est en principe capable de calculer toutes les observables du modèle considéré (ce qui ne signifie pas que l'on puisse le faire facilement en pratique).

Il a été observé que les observables des modèles de matrices sont, en général, solutions d'équations différentielles appartenant à des hiérarchies intégrables telles que les hiérarchies KP, la hiérarchie de Toda 2 dimensionnelle, celle de Whitham ... En fait, lorsque l'on intègre sur une matrice de taille finie N , on trouve un système intégrable quantique caractérisé par $\hbar \sim \frac{1}{N}$. On s'attend donc à retrouver un système intégrable classique lorsque la taille $N \rightarrow \infty$ et ainsi tous les ingrédients le caractérisant comme une courbe algébrique appelée courbe spectrale ou la fonction τ satisfaisant des relations bilinéaires.

Nous verrons que nous retrouvons effectivement tous ces ingrédients dans le cadre des intégrales formelles qui sont liées à la limite des intégrales de matrices convergentes lorsque la taille des matrices tend vers l'infini. On ira même plus loin puisque nous montrerons que ces éléments classiques permettent de calculer toutes les corrections en $\frac{1}{N}$, i.e. toutes les corrections semi-classiques².

Si le lien entre intégrabilité et modèles de matrices semble bien compris à présent, le lien direct entre combinatoire de surfaces et intégrabilité restait jusqu'à récemment assez obscur. Pourtant cet outil semble fondamental dans l'étude de l'espace des modules de surfaces de Riemann. En effet, si l'approche de Kontsevich a été de réinterpréter ce problème en termes d'intégrales matricielles, ceci est principalement dû au fait que les volumes d'espaces de modules sont solutions d'équations différentielles de la hiérarchie KdV et donc à l'intégrabilité. Si des travaux récents [93, 79, 91] ont permis de comprendre un peu mieux ce lien à la lumière de l'étude de partitions aléatoires et leur lien avec les fonctions tau de systèmes intégrables, j'espère que cette thèse permettra de donner de premiers éléments de compréhension utilisant le formalisme des matrices aléatoires.

²Nous verrons que ceci n'est pas exact puisque le modèle étudié n'est pas exactement l'intégrale de matrice dont on s'attend à ce qu'elle soit la fonction tau d'un système intégrable quantique. Il reste donc une dernière étape à franchir pour pouvoir reconstruire le système quantique lui-même par resommation des termes semi-classiques.

Chapitre 2

Modèle à deux matrices hermitiennes.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de résolution du modèle à deux matrices hermitiennes formel. Ce modèle est souvent décrit comme la limite d'une intégrale matricielle convergente où la taille des matrices tend vers ∞ puisqu'il correspond à un développement perturbatif de cette intégrale par rapport à un paramètre qui est de l'ordre de l'inverse de la taille des matrices considérées. Nous allons donc montrer comment calculer tous les termes du développement de toutes les observables de ce modèle par rapport à ce paramètre. Cette méthode, basée sur les travaux de Eynard pour le modèle à une matrice [42] et ses méthodes générales de résolution des équations de boucles, montrera toute sa puissance dans les chapitres suivants où nous la généraliserons au delà des modèle de matrices aléatoires.

Le modèle à deux matrices hermitiennes a fait l'objet de différentes approches dans la littérature. En effet, les nombreux domaines où ce problème, qui consiste essentiellement à évaluer des intégrales matricielles, semble apparaître ont permis à différentes spécialités de se retrouver sur un même terrain. Ainsi chacun a pu utiliser ses méthodes favorites et l'on peut facilement imaginer que les contributions de physiciens, probabilistes ou combinatoriciens vont apporter des points de vue bien différents. Le modèle étudié ici a été introduit en premier par Kazakov comme un modèle de physique statistique [66] : il a été utilisé pour modéliser le modèle d'Ising sur surface aléatoire, i.e. décrire un système de spins en interactions vivant sur un réseau triangulaire aléatoire.

La méthode développée ici consiste à résoudre un ensemble d'équations satisfaites par les observables du système. Ces équations sont connues sous le nom d'équations de boucles [86, 99, 34, 8, 43] dans le milieu des matrices aléatoires mais elles se retrouvent en fait dans diverses spécialités de physique ou de mathématiques sous des noms aussi divers que contraintes de Virasoro, identités de Ward, équations de Schwinger Dyson, équations de Tutte [102, 103] ou même équations de Baxter [11]. Si des méthodes ont été proposées pour les résoudre dans des cas particuliers [5, 4, 3] ou même totalement [8] dans le cas du modèle à une matrice, l'approche de Eynard [42, 27] a pour avantage la simplicité et la généralité. En effet, en utilisant un langage approprié, celui de la géométrie algébrique, on peut résoudre ces équations de manière intrinsèque de façon à ne plus faire apparaître les spécificités de tel ou tel modèle en se ramenant à l'étude d'une courbe algébrique associée au modèle [67].

Cependant, ces équations sont très générales et admettent des solutions présentant des structures bien différentes les unes des autres. Il existe ainsi plusieurs définitions non équivalentes de ce qui est usuellement dénommé "intégrale matricielle" dans la littérature. Toutes satisfont les équations de boucles mais elles ne coïncident pas de manière générale. Cette imprécision dans la définition, récurrente dans la littérature, a mené à des contradictions flagrantes particulièrement mises en avant par [5] et [63, 32, 21] et expliquées plus tard par [18].

Nous débuterons donc ce chapitre en précisant ce que nous entendons par "intégrale de matrice". Ceci nous permettra ensuite d'interpréter ces intégrales comme fonctions génératrices de surfaces constituées de polygones de couleurs différentes. Enfin, je présenterai le principal résultat de cette partie : comment, en utilisant des concepts de géométrie algébrique, on peut calculer de manière explicite toutes ces "intégrales de matrices formelles" en termes d'objets fondamentaux définis sur une courbe algébrique appelée courbe spectrale.

1 Définition du modèle.

Considérons deux potentiels polynômiaux¹ :

$$V_1(x) := \sum_{k=0}^{d_1+1} \frac{t_k}{k} x^k \quad \text{et} \quad V_2(x) := \sum_{k=0}^{d_2+1} \frac{\tilde{t}_k}{k} x^k \quad (1-1)$$

et définissons l'intégrale

$$\mathcal{Z}_{2MM} := \int_{H_N \times H_N} dM_1 dM_2 e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr}(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2)}, \quad (1-2)$$

où M_1 et M_2 sont deux matrices hermitiennes de taille $N \times N$, dM_1 et dM_2 sont les produits des mesures de Lebesgues des composantes réelles de M_1 et M_2

$$dM := \prod_i dM_{ii} \prod_{i < j} d\text{Re}(M_{ij}) d\text{Im}(M_{ij}) \quad (1-3)$$

et $\hbar = \frac{T}{N}$ est un paramètre de développement perturbatif. Une telle intégrale ne semble a priori pas souffrir de défaut de définition. Cependant, suivant la spécialité dans laquelle elle est étudiée ou bien même le régime d'étude, le signe intégrale a plusieurs significations différentes dans la littérature. Il est donc important de préciser quel objet se cache vraiment sous cette dénomination.

1.1 Intégrale sur l'ensemble des matrices hermitiennes.

La définition la plus naturelle consiste à diagonaliser les matrices $M_1 = U_1^\dagger \Lambda_1 U_1$ et $M_2 = U_2^\dagger \Lambda_2 U_2$ pour ensuite intégrer sur les valeurs propres réelles,

$$\Lambda_i = \text{diag}(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,N}), \quad (1-4)$$

¹Toute la méthode présentée ici peut s'étendre au cas de potentiels dont la dérivée est une fonction rationnelle. Cependant, les quelques subtilités techniques induites par cette généralisation n'apportent rien de nouveau à la compréhension du problème et entrent dans le cadre du chapitre 4. Le lecteur intéressé pourra aisément adapter la description faite du modèle à une matrice avec potentiel rationnel ou bien se reporter à la démonstration de [IV].

d'une part et le groupe unitaire, $U_i^\dagger U_i = 1$, d'autre part. Dés lors l'intégrale 1-2 s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{herm} &:= \\ &:= \int_{U(N) \times U(N)} dU_1 dU_2 \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d\Lambda_1 d\Lambda_2 \Delta(\lambda_1)^2 \Delta(\lambda_2)^2 e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr}(V_1(\Lambda_1) + V_2(\Lambda_2) - U_1^\dagger \Lambda_1 U_1 U_2^\dagger \Lambda_2 U_2)} \end{aligned} \quad (1-5)$$

où le déterminant de Vandermonde

$$\Delta(\lambda_1) := \prod_{i>j} (\lambda_{1,i} - \lambda_{1,j}) \quad (1-6)$$

vient du Jacobien du changement de variable :

$$dM_1 = \Delta(\lambda_1)^2 dU_1 d\Lambda_1 \quad (1-7)$$

avec $d\Lambda_1 = \prod_{i=1}^N d\lambda_i$ et dU est la mesure de Haar sur le groupe $U(N)$.

Sous cette forme, un seul terme contient encore un couplage entre les valeurs propres et les matrices unitaires de changement de base par l'intermédiaire de la combinaison $U_1 U_2^\dagger$. Cette contribution peut être totalement explicitée en utilisant la

Théorème 1.1 *Formule d'Harish Chandra-Itzykson-Zuber (HCIZ) [56, 59] :*

$$\int_{U(N)} dU e^{\text{Tr} \Lambda_1 U \Lambda_2 U^\dagger} = \frac{\det E}{2^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\lambda_1) \Delta(\lambda_2)} \prod_{k=1}^{N-1} k! \quad (1-8)$$

où la matrice E , de taille $N \times N$, est définie par :

$$E_{ij} = \exp(\lambda_{1,i} \lambda_{2,j}). \quad (1-9)$$

On peut ainsi réexprimer la fonction de partition comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{herm} &= (\pi \hbar)^{\frac{N(N-1)}{2}} \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \det(e^{\frac{1}{\hbar} \lambda_{1,i} \lambda_{2,j}}) \Delta(\lambda_1) \Delta(\lambda_2) \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^N d\lambda_{1,i} d\lambda_{2,i} e^{-\frac{1}{\hbar} [V_1(\lambda_{1,i}) + V_2(\lambda_{2,i})]} \\ &= (\pi \hbar)^{\frac{N(N-1)}{2}} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \Delta(\lambda_1) \Delta(\lambda_2) \prod_{i=1}^N d\lambda_{1,i} d\lambda_{2,i} e^{-\frac{1}{\hbar} [V_1(\lambda_{1,i}) + V_2(\lambda_{2,i}) - \lambda_{1,i} \lambda_{2,i}]}. \end{aligned} \quad (1-10)$$

Cette expression permet, entre autres choses, d'identifier des critères de convergence de cette intégrale : il faut que les potentiels V_1 et V_2 soient pairs et que leur termes de plus haut degrés t_{d_1+1} et \tilde{t}_{d_2+1} aient une partie réelle strictement positive si $d_1 > 1$ ou $d_2 > 1$. Plus généralement, il faut que la partie réelle de la fonction $V_1(x) + V_2(y) - xy$ soit bornée inférieurement sur \mathbb{R}^2 .

Le calcul d'une telle intégrale peut être ramené à l'étude de deux familles de polynômes moniques

$$\pi_n(x) = x^n + \dots \quad \text{et} \quad \sigma_n(y) = y^n + \dots \quad (1-11)$$

biorthogonaux par rapport à la mesure :

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dy \pi_n(x) \sigma_n(y) e^{-\frac{1}{\hbar}[V_1(x)+V_2(y)-xy]} = h_n \delta_{nm}. \quad (1-12)$$

Cette méthode de résolution a été beaucoup étudiée dans la littérature [85, 20] et a permis de faire le lien avec certains problèmes de Riemann-Hilbert (voir [50] pour une revue sur le sujet). Cependant, je voudrais encore rappeler que cette définition de l'intégrale de matrices ne coïncide pas avec l'objet d'étude de cette thèse et les résultats obtenus dans ce contexte ne peuvent s'appliquer aux problèmes de combinatoire de cartes.

Remarque 1.1 Cette intégrale n'a pas forcément de développement en \hbar^2 !

Remarque 1.2 Un résultat récent permet de calculer une grande classe d'observables de ce modèle grâce à une formule de type HCIZ. Cette formule, dont une première extension a été mise en avant par Morozov [89] suivant Shatashvili [97], a été fortement généralisée par [48] :

Théorème 1.2 *Formule de Eynard-Prats Ferrer : pour toute fonction F composée d'un produit de traces contenant chacune un produit de deux matrices :*

$$\begin{aligned} & \int_{U(N)} F(\Lambda_1, U \Lambda_2 U^\dagger) e^{-\text{Tr } \Lambda_1 U \Lambda_2 U^\dagger} dU = \\ & = \frac{\prod_{i=1}^N k!}{N!(-2\pi)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\lambda_1) \Delta(\lambda_2)} \sum_{\sigma, \tau \in S_N} (-1)^{\sigma\tau} e^{-\text{Tr } \Lambda_{1,\sigma} \Lambda_{2,\tau}} \times \\ & \quad \times \int_{T_N} dT F(\Lambda_{1,\sigma} + T, \Lambda_{2,\tau} + T^\dagger) e^{-\text{Tr } T T^\dagger} \end{aligned} \quad (1-13)$$

où T_N est l'ensemble des matrices complexes triangulaires supérieures strictes muni de la mesure dT du produit des mesures de Lebesgues des parties réelles et imaginaires de tous les éléments de la matrice, S_N est l'ensemble des permutations de taille N et

$$\Lambda_{i,\sigma} = \text{diag}(\lambda_{i,\sigma(1)}, \lambda_{i,\sigma(2)}, \dots, \lambda_{i,\sigma(N)}) \quad (1-14)$$

pour toute permutation $\sigma \in S_N$.

Cette généralisation donne accès à toute les intégrales matricielles du type :

$$\int_{H_N \times H_N} dM_1 dM_2 F(M_1, M_2) e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr}(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2)} \quad (1-15)$$

où F est contraint par les propriétés de la formule de Eynard-Prats Ferrer.

1.2 Intégrale sur un chemin de valeurs propres.

Dans le paragraphe précédent, nous avons imposé aux valeurs propres un critère de réalité contraignant ainsi fortement les potentiels acceptables. On peut retourner le problème en fixant des potentiels arbitraires et contraindre les chemins d'intégration possibles pour les valeurs propres par ces potentiels. L'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} \Delta(\lambda_1) \Delta(\lambda_2) \prod_{i=1}^N d\lambda_1 d\lambda_2 e^{-\frac{1}{\hbar}[V_1(\lambda_{1,i}) + V_2(\lambda_{2,i}) - \lambda_{1,i} \lambda_{2,i}]} \quad (1-16)$$

est convergente si les chemins d'intégration \mathcal{C} pour les couples de valeurs propres $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i})$ sont choisis de manière appropriée, c'est-à-dire tels que $Re(V_1(x) + V_2(y) - xy)$ est bornée inférieurement sur tout chemin $\mathcal{C}_{1,i} \times \mathcal{C}_{2,i}$ parcouru par le couple $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i})$. Si les potentiels ne sont pas triviaux ($d_1 > 1$ ou $d_2 > 1$), cette condition revient à rechercher les chemins \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 tels que

$$\int_{\mathcal{C}_1} e^{-\frac{1}{\hbar} V_1(x)} dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{C}_2} e^{-\frac{1}{\hbar} V_2(y)} dy \quad (1-17)$$

soient absolument convergentes. Génériquement, il existe d_1 (resp. d_2) chemins homotologiquement indépendants $\mathcal{C}_{1,i}, i = 1 \dots d_1$ (resp. $\mathcal{C}_{2,j}, j = 1 \dots d_2$) allant de l'infini à l'infini satisfaisant cette propriété. On peut donc décomposer n'importe quel chemin \mathcal{C} acceptable en :

$$\exists! \kappa, \quad \mathcal{C} = \sum_{i,j} \kappa_{i,j} \mathcal{C}_{1,i} \times \mathcal{C}_{2,j} \quad (1-18)$$

où κ est une matrice à coefficients complexes. Ce qui nous permet de réexprimer la fonction de partition sur le chemin correspondant comme

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{conv}(\kappa) &= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} (-1)^\sigma \sum_{k_1, \dots, k_N} \sum_{l_1, \dots, l_N} \prod_{i=1}^N \int_{\lambda_{1,i} \in \mathcal{C}_{1,i}, \lambda_{2,\sigma(i)} \in \mathcal{C}_{2,\sigma(i)}} \\ &\quad \Delta(\lambda_1) \Delta(\lambda_2) \prod_i \kappa_{k_i, l_{\sigma(i)}} e^{-\frac{1}{\hbar} [V_1(\lambda_{1,i}) + V_2(\lambda_{2,i}) - \lambda_{1,i} \lambda_{2,\sigma(i)}]} d\lambda_{1,i} d\lambda_{2,i} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_N} \sum_{l_1, \dots, l_N} \prod_i \kappa_{k_i, l_i} \prod_{i=1}^N \int_{\lambda_{1,i} \in \mathcal{C}_{1,k_i}, \lambda_{2,i} \in \mathcal{C}_{2,l_i}} \\ &\quad \Delta(\lambda_{1,i}) \Delta(\lambda_{2,i}) \prod_i e^{-\frac{1}{\hbar} [V_1(\lambda_{1,i}) + V_2(\lambda_{2,i}) - \lambda_{1,i} \lambda_{2,i}]} d\lambda_{1,i} d\lambda_{2,i}. \end{aligned} \quad (1-19)$$

La méthode de polynômes orthogonaux peut se généraliser directement à ce cadre en changeant simplement le chemin d'intégration dans la condition d'orthogonalité des polynômes :

$$\int_{\mathcal{C}^2} dx dy \pi_n(x) \sigma_n(y) e^{-\frac{1}{\hbar} [V_1(x) + V_2(y) - xy]} = h_n \delta_{nm}. \quad (1-20)$$

1.3 Intégrale formelle.

Si les deux définitions données précédemment sont intimement liées, l'objet de notre étude est d'une toute autre nature, inspirée par les techniques de calcul de théorie des champs utilisées par les physiciens. On la définit comme une **intégrale de matrice formelle**, i.e. une série formelle dont chacun des termes est bien défini et correspond à la fonction génératrice de cartes bicoloriées.

Dans un premier temps, je tâcherai d'expliquer comment des approximations (non rigoureusement justifiées) inspirées de la physique ont naturellement mené à voir les intégrales de matrices comme des objets combinatoires. Je m'appliquerai ensuite à présenter la définition tout à fait rigoureuse de ce que l'on entend par **intégrale formelle**.

Lien intuitif entre intégrale de matrice et combinatoire.

Naïvement, pour calculer une intégrale de la forme $I := \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{1}{\hbar}V(x)}$ où V est un polynôme, un physicien est tenté d'utiliser la méthode dite du col. Celle-ci consiste, en gros, à dire que l'intégrale est dominée par la valeur de l'intégrand en son maximum, le reste étant considéré comme une perturbation sous dominante du fait de la décroissance exponentielle de $e^{-\frac{1}{\hbar}V(x)}$. Plus précisément, on choisit un "point col" s_i comme solution de :

$$V'(s_i) = 0. \quad (1-21)$$

Le développement de Taylor du potentiel au voisinage de ce col peut alors s'écrire :

$$V(x + s_i) = V(s_i) + gx^2 + \delta V(x) \quad (1-22)$$

où $\delta V(x)$ ne contient que des termes de degré ≥ 3 en x et $g = \frac{V''(s_i)}{2}$. Le changement de variable $x \rightarrow x + s_i$ donne alors :

$$I = e^{-\frac{1}{\hbar}V(s_i)} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{g}{\hbar}x^2} e^{-\frac{1}{\hbar}\delta V(x)}. \quad (1-23)$$

Le développement de Taylor de la partie non quadratique implique alors :

$$I = e^{-\frac{1}{\hbar}V(s_i)} \int_{\mathbb{R}} \sum_k \frac{(\delta V(x))^k}{k!} e^{-\frac{g}{\hbar}x^2} dx \quad (1-24)$$

qui peut être ramenée à une somme d'intégrales gaussiennes si l'on inverse la sommation et l'intégration :

$$I = e^{-\frac{1}{\hbar}V(s_i)} \sum_k \int_{\mathbb{R}} \frac{(\delta V(x))^k}{k!} e^{-\frac{g}{\hbar}x^2} dx. \quad (1-25)$$

Si l'on représente chaque intégrale $\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-\frac{g}{\hbar}x^2} dx$ par un vertex à k pattes, le théorème de Wick² nous dit que I est alors la fonction génératrice de tous les graphes composés de vertex de valence au moins 2 et au plus $\deg(V)$ dont les poids respectifs dépendent des coefficients du potentiel V et du point col autour duquel on développe.

Comment s'étend une telle méthode dans le cas qui nous intéresse ?

En premier lieu, on doit déterminer les extrema $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ de l'action

$$\mathcal{S}(M_1, M_2) = V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2. \quad (1-26)$$

Ceux-ci sont donnés par les solutions du système

$$\begin{cases} V_1'(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2 \\ V_2'(\mathcal{M}_2) = \mathcal{M}_1 \end{cases}. \quad (1-27)$$

Sans perte de généralité, on peut considérer que ces matrices sont des matrices diagonales dont les valeurs propres sont solutions du système (1-27) vu comme un système numérique. On peut résoudre celui-ci en éliminant \mathcal{M}_2 grâce à la première équation. On obtient ainsi une équation polynomiale de degré $d_1 d_2$ en \mathcal{M}_1

$$V_2'(V_1'(\mathcal{M}_1)) = \mathcal{M}_1. \quad (1-28)$$

²Voir l'appendice 1 dédié à ce théorème dans le cadre des intégrales de matrices gaussiennes.

Il existe donc de manière générique $d_1 d_2$ "points cols" (ξ_i, η_i) ³ solution de cette équation où ξ_i est une valeur propre de \mathcal{M}_1 et η_i la valeur propre de \mathcal{M}_2 correspondante. Pour construire un point col dans l'espace des couples de matrices hermitiennes $H_N \times H_N$, il faut alors distribuer leurs N valeurs propres entre ces différents points cols :

$$\mathcal{M}_1 = \text{diag} \left(\overbrace{(\xi_1, \dots, \xi_1)}^{n_1 \text{ fois}}, \overbrace{(\xi_2, \dots, \xi_2)}^{n_2 \text{ fois}}, \dots, \overbrace{(\xi_{d_1 d_2}, \dots, \xi_{d_1 d_2})}^{n_{d_1 d_2} \text{ fois}} \right) \quad (1-29)$$

et

$$\mathcal{M}_2 = \text{diag} \left(\overbrace{(\eta_1, \dots, \eta_1)}^{n_1 \text{ fois}}, \overbrace{(\eta_2, \dots, \eta_2)}^{n_2 \text{ fois}}, \dots, \overbrace{(\eta_{d_1 d_2}, \dots, \eta_{d_1 d_2})}^{n_{d_1 d_2} \text{ fois}} \right) \quad (1-30)$$

avec $\sum_{i=1}^{d_1 d_2} n_i = N$. Ainsi, un point col est caractérisé par des **fractions de remplissage** $\frac{n_i}{N}$ qui représentent la proportion de valeurs propres $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ situées au point col (ξ_i, η_i) : on a choisi la configuration où le comportement de (ξ_i, η_i) est dominant pour n_i valeurs propres. En fixant une configuration, on a brisé la symétrie $U(N)$ de l'intégrale en la symétrie $\prod_{i=1}^{d_1 d_2} U(n_i)$ chaque élément du produit se rapportant à la symétrie entre les valeurs propres au voisinage du même point col.

Remarque 1.3 On considère tous les extrema de l'action et non pas seulement ses minima comme on devrait intuitivement le faire.

Remarque 1.4 On peut voir le système d'équations 1-27 comme la condition d'équilibre des valeurs propres de \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 soumis au potentiels $V_1(x) + V_2(y) - xy$. Le choix de fractions de remplissage consiste à distribuer les valeurs propres dans les différents puits formés par ce potentiel (voir l'exemple 1.1).

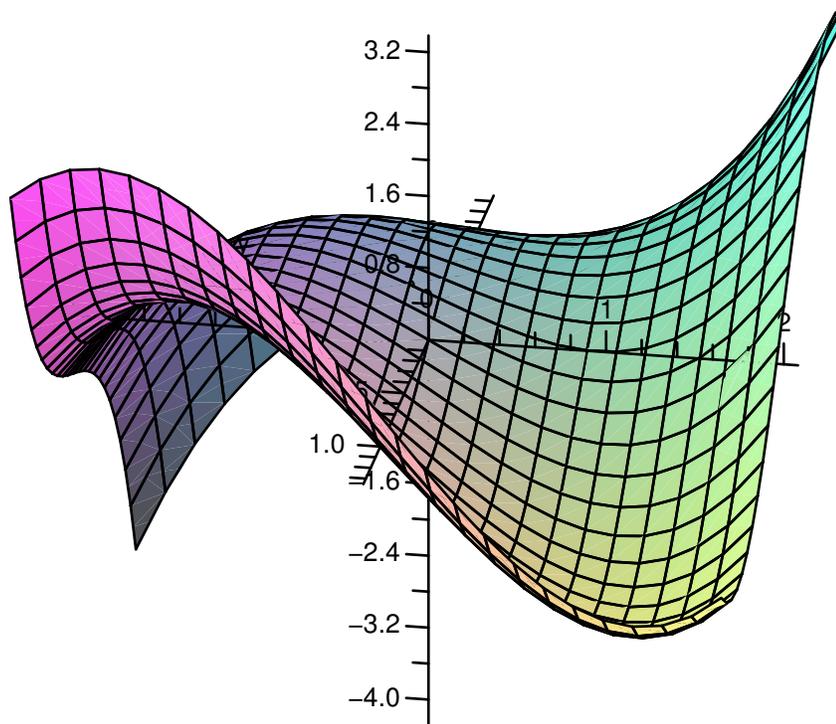
Remarque 1.5 Notons que ces fractions de remplissage ont une influence sur le résultat de l'approximation du col. Nous verrons que ce sont effectivement des paramètres qu'il faut se donner pour définir l'intégrale formelle de manière unique. On retrouvera ces paramètres tout au long de ce chapitre et il est important de garder à l'esprit que ce sont des données du problème au même titre que les potentiels V_1 et V_2 .

Exemple 1.1 *Considérons les potentiels*

$$\begin{cases} V_1(x) = x^3 - x \\ V_2(y) = \frac{y^3}{3} - 1.01y \end{cases} \quad (1-31)$$

³Chaque point col est un couple de nombres complexes.

La surface $z = V_1(x) + V_2(y) - xy$ est alors :



(1-32)

et l'on a quatre points cols :

$$\begin{aligned} p_1 &= (0, 8904; 1, 3786) & , & & p_2 &= (-0, 0107; -0, 9997) \\ p_3 &= (-0, 7168; 0, 5415) & , & & p_4 &= (-0, 1629; -0, 9204). \end{aligned}$$

(1-33)

On peut voir que parmi ceux-ci, seul p_1 est un vrai minimum alors que p_2 et p_3 sont des points selle et p_4 est un maximum.

Une fois les fractions de remplissage fixées, l'approximation du col consiste à effectuer un développement autour du col correspondant en réécrivant les matrices à intégrer comme une perturbation autour de celui-ci :

$$M_1 = \mathcal{M}_1 + m_1 \quad , \quad M_2 = \mathcal{M}_2 + m_2 \quad (1-34)$$

puis à considérer que l'intégrale est dominée par la valeur de l'intégrand en ce point. Le développement de Taylor de l'action au voisinage de ce point col permet de mettre à

part sa partie quadratique. Si l'on commute les signes d'intégration et de sommation du développement de Taylor, on peut réécrire cette intégrale comme une série dont chacun des terme est une fonction de corrélation par rapport à une mesure gaussienne :

$$\mathcal{Z} = e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr} [V_1(\mathcal{M}_1) + V_2(\mathcal{M}_2) - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2]} \sum_{k,l} \frac{(-\hbar)^{-k+l}}{k!l!} \left\langle [\text{Tr} \delta_{\mathcal{M}_1} V_1(m_1)]^k [\text{Tr} \delta_{\mathcal{M}_2} V_2(m_2)]^l \right\rangle_g \quad (1-35)$$

où $\delta_{\mathcal{M}_1} V_1(m_1)$ et $\delta_{\mathcal{M}_2} V_2(m_2)$ représentent les parties non quadratiques de V_1 et V_2 dans le développement de Taylor autour du point col et $\langle . \rangle_g$ la valeur moyenne par rapport à une mesure gaussienne. Le théorème de Wick (voir l'appendice 1) et la représentation du résultat sous forme de diagrammes de Feynman impliquent alors que \mathcal{Z} est la fonction génératrice de graphes fermés coloriés portant une structure de spin.

C'est cette approche que nous allons rendre rigoureuse dans le paragraphe suivant pour définir les intégrales de matrices formelles.

Définition de l'intégrale de matrices formelle.

En se basant sur l'intuition fournie par le paragraphe précédent, on définit l'intégrale de matrice formelle par la fonction de partition résultant de la décomposition de l'intégrale convergente en intégrales gaussiennes par développement en série de Taylor au voisinage d'un point col. Pour cela, il est nécessaire de donner un sens à ce développement de Taylor en précisant l'interaction entre les différentes solutions du système d'équations numériques :

$$\begin{cases} V_1'(\xi_i) = \eta_i \\ V_2'(\eta_i) = \xi_i \end{cases} \quad (1-36)$$

Definition 1.1 Soit un entier N et deux potentiels polynômiaux⁴ V_1 et V_2 définis comme précédemment par Eq. (1-1).

Soit \vec{n} une $d_1 d_2$ -partition de N :

$$\vec{n} := \{n_1, n_2, \dots, n_{d_1 d_2}\} \quad \text{tels que} \quad \sum_{i=1}^{d_1 d_2} n_i = N. \quad (1-37)$$

Soient $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{d_1 d_2}$, les $d_1 d_2$ solutions du système de deux équations numériques :

$$\begin{cases} V_1'(\xi_i) = \eta_i \\ V_2'(\eta_i) = \xi_i \end{cases} \quad (1-38)$$

On définit les parties non quadratiques des développements autour de ces points cols par

$$\delta V_{1,i}(x) = V_1(x) - V_1(\xi_i) - \frac{V_1''(\xi_i)}{2} (x - \xi_i)^2 \quad (1-39)$$

⁴On pourrait en pratique seulement demander que ces potentiels aient une dérivée rationnelle et tous les résultats resteront valables (voir par exemple [IV]). Cependant, par soucis de simplicité je me restreind ici au cas polynomial.

et

$$\delta V_{2,i}(y) = V_2(y) - V_2(\eta_i) - \frac{V_2''(\eta_i)}{2}(y - \eta_i)^2. \quad (1-40)$$

Pour tout l , on définit le polynôme en T :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=l/2}^{d/2} A_{k,l} T^k = \\ & = \frac{(-1)^l N^l}{l! T^l} \int dM_1 \dots dM_d d\tilde{M}_1 \dots d\tilde{M}_d \left(\sum_i \text{Tr} \delta V_{1,i}(M_i) + \delta V_{2,i}(\tilde{M}_i) \right)^l \\ & \prod_{i=1}^d e^{-\frac{N}{T} \left(\text{Tr} \frac{V_1''(\xi_i)}{2} (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})^2 + \frac{V_2''(\eta_i)}{2} (\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i})^2 - (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i}) \right)} \\ & \prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j) \prod_{i>j} \det(\tilde{M}_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes \tilde{M}_j) \end{aligned} \quad (1-41)$$

comme une intégrale gaussienne sur les matrices **hermitiennes** M_i et \tilde{M}_i de taille $n_i \times n_i$.

La fonction de partition du modèle à deux matrices formel est alors définie comme la série en T ([49, 50]) :

$$\mathcal{Z}_{form} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \left(\sum_{j=0}^{2k} A_{k,j} \right). \quad (1-42)$$

Lien avec l'intégrale normale à symétrie brisée.

Ecrivons explicitement la fonction de partition formelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{form} & = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l N^l}{l! T^l} \int \prod_{\alpha=1}^d dM_{\alpha} d\tilde{M}_{\alpha} \left(\sum_i \text{Tr} \delta V_{1,i}(M_i) + \delta V_{2,i}(\tilde{M}_i) \right)^l \\ & \prod_{i=1}^d e^{-\frac{N}{T} \left(\text{Tr} \frac{V_1''(\xi_i)}{2} (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})^2 + \frac{V_2''(\eta_i)}{2} (\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i})^2 - (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i}) \right)} \\ & \prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j) \prod_{i>j} \det(\tilde{M}_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes \tilde{M}_j). \end{aligned} \quad (1-43)$$

Si l'on échange l'ordre de la sommation sur l et de l'intégration sur les matrices, on reconnaît le développement de Taylor de

$$\begin{aligned} & \int \prod_{\alpha=1}^d dM_{\alpha} d\tilde{M}_{\alpha} \prod_{i=1}^d e^{-\frac{N}{T} \left(\text{Tr} V_1(M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i}) + \text{Tr} V_2(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i}) - (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i}) \right)} \\ & \prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j) \prod_{i>j} \det(\tilde{M}_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes \tilde{M}_j) \end{aligned} \quad (1-44)$$

qui par changement des variable d'intégration $X_i := M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i}$ et $Y_i := \tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i}$ prend la forme de la fonction de partition du **modèle à deux matrices à symétrie brisée** [50] :

$$\mathcal{Z}_{normb} := \int dX_1 \dots dX_d dY_1 \dots dY_d \prod_{i=1}^d e^{-\frac{N}{T} \left(\text{Tr} V_1(X_i) + \text{Tr} V_2(Y_i) - X_i Y_i \right)} \prod_{i>j} \det(X_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes X_j) \prod_{i>j} \det(Y_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes Y_j). \quad (1-45)$$

Cette dernière consiste à briser la symétrie $U(N)$ en une symétrie $\prod_i U(n_i)$ en considérant l'intégrale matricielle comme l'intégrale sur $d_1 d_2$ ensembles de couples de matrices (X_i, Y_i) dont les valeurs propres appartiennent respectivement à des couples de contours $(\mathcal{C}_{1,i}, \mathcal{C}_{2,i})$ acceptables au sens de Eq. (1-16). Ainsi, par opposition au modèle de la partie 1.2 où toutes les matrices avaient des valeurs propres conditionnées à vivre sur un seul chemin acceptable $\mathcal{C} := \kappa_{ij} \mathcal{C}_{1,i} \times \mathcal{C}_{2,j}$ quelconque, les différentes matrices ont des valeurs propres sur un chemin différent.

Attention :

Malgré cette proximité entre les deux modèles, le modèle normal à symétrie brisée et le modèle formel ne coïncident pas en général, ne serait-ce que par le problème posé par l'échange de la sommation des termes de la série de Taylor et de l'intégration gaussienne.

Remarque 1.6 Le lien exact entre ces différents modèles ainsi que leurs différences sont peu connus au moment de la rédaction de ce mémoire et vont bien au delà de la portée de ce dernier. Je ne m'attarderai donc pas plus sur ceux-ci me concentrant à présent uniquement sur le modèle formel. Le lecteur intéressé par ces aspects peut trouver une plus longue discussion dans [50] par exemple.

Remarque 1.7 On abusera dès à présent et tout au long de cette thèse de la notation intuitive :

$$\mathcal{Z}_{form} = \int_{form} e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr}(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2)} dM_1 dM_2 \quad (1-46)$$

tout en gardant à l'esprit que l'intégrale n'est ici qu'une notation rappelant l'origine de cette fonction de partition. On ne devra jamais oublier que ce n'est pas une intégrale sur l'ensemble des matrices hermitiennes à proprement parler.

Interprétation combinatoire.

Comme nous l'avons vu plus haut, le modèle formel a été défini de manière à correspondre au développement de Feynman de l'intégrale du modèle normal à symétrie brisée. A ce titre, il est naturel d'en chercher une interprétation combinatoire comme fonction génératrice de graphes et, par extension, de surfaces discrétisées. C'est d'ailleurs cette interprétation qui a motivé l'introduction de ce modèle dans le cas de l'étude du modèle d'Ising sur surface aléatoire [66], ainsi que l'engouement des physiciens pour les modèles de matrices aléatoires en général dans le cadre des théories de gravitation quantique.

Etant donnés les deux potentiels V_1 et V_2 et un point col dans l'espace $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, c'est-à-dire l'ensemble des $d_1 d_2$ solutions (ξ_i, η_i) du système

$$\begin{cases} V_1'(\xi_i) = \eta_i \\ V_2'(\eta_i) = \xi_i \end{cases} \quad (1-47)$$

et un ensemble de fractions de remplissage $\{\epsilon_i\}_{i=1, \dots, d_1 d_2}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{d_1 d_2} \epsilon_i = 1, \quad (1-48)$$

on définit les poids :

Definition 1.2 Pour tout $i = 1, \dots, d_1 d_2$, on définit :

$$\forall k = 1, \dots, d_1 + 1, \quad t_{k,i} := \frac{V_1^{(k)}(\xi_i)}{(k-1)!} \quad (1-49)$$

et

$$\forall k = 1, \dots, d_2 + 1, \quad \tilde{t}_{k,i} := \frac{V_2^{(k)}(\eta_i)}{(k-1)!}. \quad (1-50)$$

Pour tout couple $i, j = 1, \dots, d_1 d_2$ avec $i \neq j$ et tout couple $k, l = 1, \dots, \infty$, on définit :

$$h_{k,i} := \sum_{j \neq i} \frac{\epsilon_j}{(\xi_j - \xi_i)^k}, \quad \tilde{h}_{k,i} := \sum_{j \neq i} \frac{\epsilon_j}{(\eta_j - \eta_i)^k}, \quad (1-51)$$

$$h_{k,i;l,j} := \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!(l-1)!} \frac{1}{(\xi_j - \xi_i)^k (\xi_i - \xi_j)^l} \quad (1-52)$$

et

$$\tilde{h}_{k,i;l,j} := \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!(l-1)!} \frac{1}{(\eta_j - \eta_i)^k (\eta_i - \eta_j)^l}. \quad (1-53)$$

Remarque 1.8 Les poids $t_{k,i}$ (resp. $\tilde{t}_{k,i}$) ne sont rien d'autre que les coefficients de la partie non-quadratique du développement de Taylor de V_1 (resp. V_2) autour du point ξ_i (resp. η_i) introduite dans le paragraphe précédent :

$$\delta V_{1,i}(x) = \sum_{k=3}^{d_1+1} \frac{t_{k,i}}{k} (x - \xi_i)^k, \quad \delta V_{2,i}(y) = \sum_{k=3}^{d_2+1} \frac{\tilde{t}_{k,i}}{k} (y - \eta_i)^k, \quad (1-54)$$

alors que les $h_{k,i;l,j}$ (resp. $\tilde{h}_{k,i;l,j}$) viennent du développement de $\prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j)$ (resp. $\prod_{i>j} \det(\tilde{M}_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes \tilde{M}_j)$) dans Eq. (1-41).

Ces poids nous permettent d'associer une valeur à chaque graphe de l'ensemble :

Definition 1.3 Soit \mathcal{G} l'ensemble des graphes fermés formés de vertex épais⁵ de valence $k \geq 1$, portant une "couleur" $i = 1, \dots, d_1 d_2$ et un "spin" (i.e. un signe + ou -) et collés selon les prescriptions suivantes :

- Deux vertex peuvent être collés par leurs pattes si et seulement si ils ont la même couleur ;
- Deux vertex peuvent être collés par leurs centres si et seulement si ils sont de même spin et de couleur différente.

On peut résumer les éléments apparaissant dans la construction de ces graphes par le tableau suivant :

⁵Un vertex épais est un vertex dont les pattes sont des rubans comme présentés dans l'appendice 1. Ce sont donc des vertex orientés.

Elément	Figure
vertex k -valent de spin + et couleur i	
vertex k -valent de spin - et couleur i	
lien entre deux pattes de vertex de spin + et couleur i	
lien entre deux pattes de vertex de spin - et couleur i	
lien entre deux pattes de vertex de couleur i et spins différents	
lien entre les centres d'un vertex k -valent de couleur i et de spin + et d'un vertex l -valent de couleur j et de spin +	
lien entre les centres d'un vertex k -valent de couleur i et de spin - et d'un vertex l -valent de couleur j et de spin -	
Boucle indépendante de couleur i	

Un tel graphe peut être vu comme un ensemble de $d_1 d_2$ graphes non coloriés construits comme dans l'appendice 1 et liés entre eux par le centre de certains vertex de même spin. Ainsi, pour obtenir tous les graphes de \mathcal{G} , on commence par dessiner tous les graphes fermés formés de vertex épais de valence $k \geq 1$ et portant chacun un spin et collés entre eux par leurs pattes. On recolle alors de toutes les manières possibles $d_1 d_2$ de ces graphes (en autorisant la présence de plusieurs exemplaires du même graphe et le graphe vide) par le centre de vertex de même spin.

Pour caractériser un graphe de \mathcal{G} , on utilise les notations suivantes :

Definition 1.4 Soit un graphe $G \in \mathcal{G}$. On note :

- $n_{k,i}(G) :=$ nombre de vertex de valence k , de spin + et de couleur i dont le centre est libre⁶ ;

⁶Un centre est dit libre si il n'est pas relié à un autre centre par un lien.

- $\tilde{n}_{k,i}(G) :=$ nombre de vertex de valence k , de spin - et de couleur i dont le centre est libre ;
- $n_{++,i}(G) :=$ nombre d'arêtes liant deux vertex de couleur i et de spin + par leurs pattes ;
- $n_{--,i}(G) :=$ nombre d'arêtes liant deux vertex de couleur i et de spin - par leurs pattes ;
- $n_{+-,i}(G) :=$ nombre d'arêtes liant deux vertex de couleur i et de spins différents par leurs pattes ;
- $n_{a,i}(G) = n_{+-,i}(G) + n_{++,i}(G) + n_{--,i}(G) :=$ nombre total d'arêtes liant deux vertex de couleur i par leurs pattes quelque soit leurs spins ;
- $n_{k,i;l,j}(G) :=$ nombre de paires de vertex de spin + collés par leurs centres de valences et de couleurs respectives (k, i) et (l, j) ⁷ ;
- $\tilde{n}_{k,i;l,j}(G) :=$ nombre de paires de vertex de spin - collés par leurs centres de valences et de couleurs respectives (k, i) et (l, j) ⁸ ;
- $G_i :=$ composante de couleur i du graphe obtenue en brisant tous les liens entre centres de polygones ;
- $l_i(G) :=$ nombre de boucles indépendantes dans le graphe G_i ;
- $\#Aut(G) :=$ cardinal du groupes d'automorphismes de G ;
- $\chi(G) :=$ caractéristique d'Euler-Poincaré de G :

$$\begin{aligned} \chi(G) &= \sum_i [l_i(G) - n_{a,i}(G) + \sum_k (n_{k,i}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G))] \\ &= \sum_{i=1}^{d_1 d_2} \chi(G_i) - 2 \sum_{i,j,k,l} (n_{k,i;l,j}(G) + \tilde{n}_{k,i;l,j}(G)). \end{aligned} \quad (1-55)$$

Definition 1.5 A chaque graphe $G \in \mathcal{G}$, on associe un poids :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(G) &:= \frac{N^{\chi(G)}}{\#Aut(G)} T^{n_T(G)} \prod_{i=1}^{d_1 d_2} \prod_{k=3}^{d_1+1} (t_{k,i} + Th_{k,i})^{n_{k,i}(G)} \prod_{k=3}^{d_2+1} (\tilde{t}_{k,i} + T\tilde{h}_{k,i})^{\tilde{n}_{k,i}(G)} \\ &\quad \prod_{i=1}^{d_1 d_2} h_{1,i}^{n_{1,i}(G)} \tilde{h}_{1,i}^{\tilde{n}_{1,i}(G)} h_{2,i}^{n_{2,i}(G)} \tilde{h}_{2,i}^{\tilde{n}_{2,i}(G)} \prod_{k>d_1+1} h_{k,i}^{n_{k,i}(G)} \prod_{l>d_2+1} \tilde{h}_{l,i}^{\tilde{n}_{l,i}(G)} \\ &\quad \prod_{i=1}^{d_1 d_2} \epsilon_i^{l_i(G)} t_{2,i}^{n_{++,i}(G)} \tilde{t}_{2,i}^{n_{--,i}(G)} (t_{2,i} \tilde{t}_{2,i} - 1)^{-n_{v,i}(G)} \prod_{j>i} \prod_k \prod_l h_{k,i;l,j}^{n_{k,i;l,j}(G)} \tilde{h}_{k,i;l,j}^{\tilde{n}_{k,i;l,j}(G)} \end{aligned} \quad (1-56)$$

où

$$\begin{aligned} n_T(G) &:= \sum_i \left(\sum_k \frac{k}{2} (n_{k,i}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G)) - \sum_{k=3}^{d_1+1} n_{k,i}(G) - \sum_{l=3}^{d_1+1} \tilde{n}_{l,i}(G) \right) \\ &\quad + \sum_i \sum_{j>i} \sum_k \sum_l \frac{k+l}{2} (n_{k,i;l,j}(G) + \tilde{n}_{k,i;l,j}(G)). \end{aligned} \quad (1-57)$$

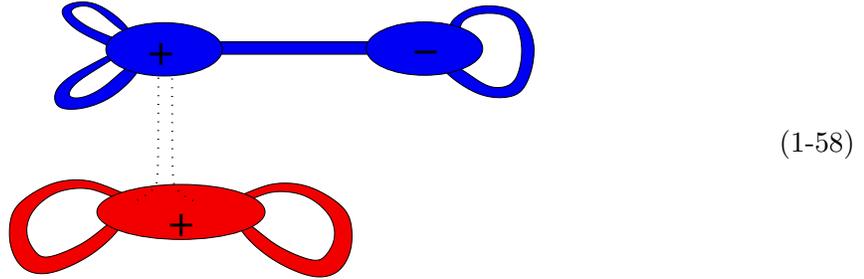
Associer un tel poids à un graphe G correspond à associer un poids à chacun des éléments composant le graphe comme suit :

⁷Le nombre total de vertex de spin + est donné par $\sum_{k,l,i,j} 2n_{k,i;l,j}(G) + n_{k,i}(G)$.

⁸Le nombre total de vertex de spin - est donné par $\sum_{k,l,i,j} 2\tilde{n}_{k,i;l,j}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G)$.

Élément	Poids
vertex k -valent de spin + et couleur i dont le centre est libre	$\begin{cases} \frac{N}{T}t_{k,i} + Nh_{k,i} & \text{si } k \in [3, d_1 + 1] \\ Nh_{k,i} & \text{sinon} \end{cases}$
vertex k -valent de spin - et couleur i dont le centre est libre	$\begin{cases} \frac{N}{T}\tilde{t}_{k,i} + Nh_{k,i} & \text{si } k \in [3, d_2 + 1] \\ Nh_{k,i} & \text{sinon} \end{cases}$
lien entre deux pattes de vertex de spin + et couleur i	$\frac{1}{N} \frac{t_{2,i}}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
lien entre deux pattes de vertex de spin - et couleur i	$\frac{1}{N} \frac{\tilde{t}_{2,i}}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
lien entre deux pattes de vertex de couleur i et spins différents	$\frac{1}{N} \frac{1}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
Paire composée d'un vertex k -valent de couleur i et de spin + et d'un vertex l -valent de couleur j et de spin +	$h_{k,i;l,j}$
Paire composée d'un vertex k -valent de couleur i et de spin - et d'un vertex l -valent de couleur j et de spin -	$\tilde{h}_{k,i;l,j}$
Boucle indépendante de couleur i	$N\epsilon_i$

Exemple 1.2 *Considérons un exemple de graphe apparaissant lorsque l'on a deux couleurs : bleu, représenté par l'indice 1 et rouge représenté par l'indice 2 :*



Il est constitué d'un vertex bleu de valence 5 et de spin +, d'un vertex bleu de valence 3 et de spin - et d'un vertex rouge de valence 4 et de spin + reliés entre eux par 6 arêtes formant 3 + 4 boucles indépendantes, i.e. :

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{3,1} = n_{--,1} = n_{+-,1} = n_{5,1;4,2} = 1 & , \\ n_{++ ,1} = \tilde{n}_{++ ,2} = 2 & , \quad l_1 = 4 \quad \text{et} \quad l_2 = 3. \end{aligned} \quad (1-59)$$

et son poids est donc donné par :

$$N^2 T^{\frac{15}{2}} (\tilde{t}_{3,1} + T\tilde{h}_{3,1}) \epsilon_1^4 \epsilon_2^3 t_{2,1}^2 \tilde{t}_{2,1} (t_{2,1}\tilde{t}_{2,1} - 1)^4 (t_{2,2}\tilde{t}_{2,2} - 1)^2 h_{5,1;4,2}. \quad (1-60)$$

Ces poids nous permettent de contrôler la quantité de chaque élément dans un graphe, et l'on définit la fonction génératrice correspondante comme :

Théorème 1.3 *La fonction de partition du modèle à deux matrices hermitiennes formel est égale à*

$$\mathcal{Z}_{form} = \prod_i e^{-\frac{N^2}{T} \epsilon_i (V_1(\xi_i) + V_2(\eta_i) - \xi_i \eta_i)} \prod_{j>i} [(\xi_i - \xi_j)(\eta_i - \eta_j)]^{N^2 \epsilon_i \epsilon_j} \sum_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{W}(G). \quad (1-61)$$

Preuve:

Ce théorème résulte directement du théorème de Wick décrit en appendice.

On peut cependant remarquer que cette fonction est bien une série formelle en puissances de T . En effet, l'inégalité :

$$n_T(G) \geq \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_k (n_{k,i} + \tilde{n}_{k,i}) + \sum_{j>i} \sum_{k,l} (n_{k,i,l,j} + \tilde{n}_{k,i,l,j}) \right) \quad (1-62)$$

assure que seul un nombre fini de graphes contribue à une puissance donnée de T . On peut donc bien écrire :

$$\mathcal{Z}_{form} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m T^m \quad (1-63)$$

où chaque A_m est une somme finie de termes donnée dans le langage du paragraphe précédent par :

$$A_m = \sum_{j=0}^{2m} A_{m,j} \quad (1-64)$$

où les $A_{m,j}$ sont donnés par Eq. (1-41). \square

On définit également la fonction génératrice des graphes connexes par la procédure classique :

Definition 1.6 *L'énergie libre :*

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{N^2} \ln \mathcal{Z}_{form} \quad (1-65)$$

est la fonction génératrice des graphes **connexes** G de \mathcal{G} comptés avec un poids $\mathcal{W}(G)$.

C'est également une série formelle en T qui prend la forme :

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n T^n. \quad (1-66)$$

2 Combinatoire des cartes, surfaces discrétisées.

Nous avons défini la fonction génératrice de graphes épais dérivés des diagrammes de Feynman. On peut aisément voir que ces derniers sont en bijection avec un ensemble de cartes (ou surfaces discrétisées dans le langage des physiciens) coloriées portant une structure de spins semblable à celle d'un modèle d'Ising [30, 65, 66].

2.1 Génération de surfaces discrétisées bicolores fermées.

En effet, on peut utiliser une description duale en remplaçant simplement tout vertex k -valent par le k -gone dont les côtés sont les perpendiculaires aux pattes du vertex. Ainsi, les graphes sont remplacés par des surfaces composées de polygones suivant :

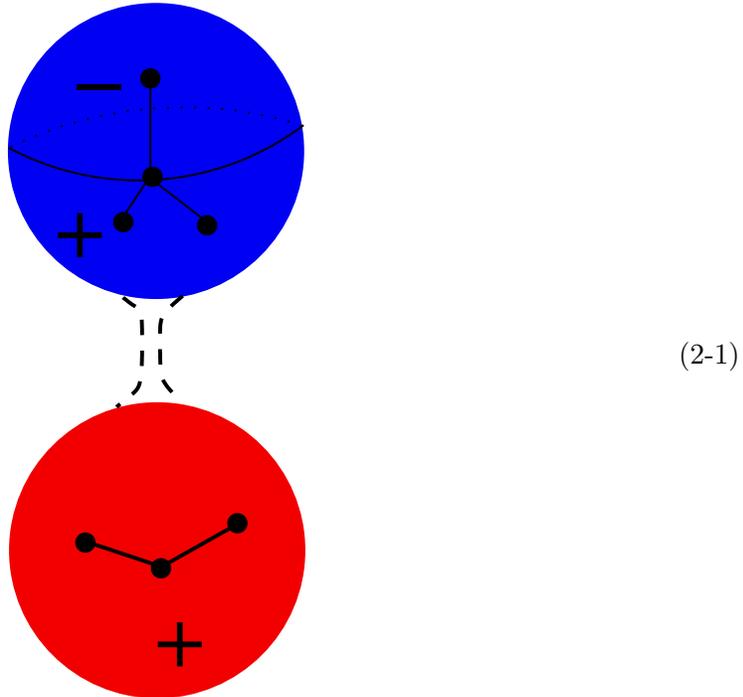
Definition 2.1 Soit \mathcal{S} l'ensemble des surfaces fermées formées de polygones orientés à $k \geq 1$ côtés, portant une "couleur" $i = 1, \dots, d_1 d_2$ et un "spin" (i.e. un signe + ou -) et collés selon les prescriptions :

- Deux vertex peuvent être collés le long de leurs arêtes si et seulement si ils ont la même couleur ;
- Deux vertex peuvent être collés par leurs centres si et seulement si ils sont de même spin et de couleur différente.

La bijection élément par élément est résumée dans le tableau :

Diagramme de Feynmann	Surface discrétisée
vertex k -valent de spin + et couleur i	k -gone de spin + et couleur i
vertex k -valent de spin - et couleur i	k -gone de spin - et couleur i
lien entre deux pattes de vertex de spin + et couleur i	arête commune à deux polygones de spin + et couleur i
lien entre deux pattes de vertex de spin - et couleur i	arête commune à deux polygones de spin - et couleur i
lien entre deux pattes de vertex de couleur i et spins différents	arête commune à deux polygones de spin différents et couleur i
lien entre les centres d'un vertex k -valent de couleur i et de spin + et d'un vertex l -valent de couleur j et de spin +	centre commun à un k -gone de couleur i et de spin + et un l -gone de couleur j et de spin +
lien entre les centres d'un vertex k -valent de couleur i et de spin - et d'un vertex l -valent de couleur j et de spin -	centre commun à un k -gone de couleur i et de spin - et un l -gone de couleur j et de spin -
Boucle indépendante de couleur i	Sommet de couleur i

Exemple 2.1 *Le diagramme 1-58 est ainsi envoyé sur la surface :*



et l'on peut vérifier que l'on obtient bien le même poids que précédemment. Notons que l'on a pu dessiner chacun des deux graphes sur une sphère, leurs caractéristiques d'Euler étant toutes deux égales à 2. On peut également voir que la sphère bleue est divisée en deux faces de spins opposés séparées par un équateur correspondant au seul lien $+ -$ du graph dual.

La fonction de partition du modèle formel peut donc être vue comme la fonction génératrice des surfaces de l'ensemble \mathcal{S} , c'est-à-dire des recollements de surfaces discrétisées monocolores sur lesquelles vit une structure de spin, en associant à chaque surface un poids qui peut être facilement retrouvé par l'utilisation de la bijection entre graphes et surfaces discrétisées. La description complète de cette procédure est décrite dans l'appendice 2.

2.2 Surfaces ouvertes et conditions de bord.

Il est également intéressant de pouvoir générer des surfaces ouvertes (par exemple pour des applications à la théorie des cordes ou bien à l'étude des théories conformes ou simplement avec un objectif combinatoire d'énumération de cartes). Ces fonctions peuvent être obtenues simplement par variation des poids associés aux différents éléments des graphes. En effet, la fonction génératrice des surfaces dont on a enlevé (ou marqué) un k -gone de spin $+$ (resp. de spin $-$) et de couleur i est donnée par $k \frac{\partial}{\partial t_{k,i}} \ln \mathcal{Z}_{form}$ (resp. $k \frac{\partial}{\partial t_{k,i}} \ln \mathcal{Z}_{form}$). Or, compter toutes les surfaces auxquelles on a enlevé un k -gone revient à compter toutes les surfaces ouvertes avec un bord de longueur k et une condition de bord imposée par le spin et la couleur du k -gone à retirer.

Cependant, ces fonctions génératrices ne sont pas pratiques à manipuler dans les faits et par soucis de simplicité ainsi que pour des raisons historiques issues de la

représentation sous forme d'intégrale matricielle de \mathcal{Z}_{form} , il est préférable de travailler avec les fonctions de corrélations de la forme :

$$k_1 \dots k_m l_1 \dots l_n \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial t_{k_m}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{l_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{l_n}} \ln \mathcal{Z}_{form} \quad (2-2)$$

où les t_i et \tilde{t}_j sont les coefficients des potentiels V_1 et V_2 respectivement (voir Eq. (1-1)).

En effet, le poids d'un k -gone de spin + (resp. de spin -) et de couleur i est encodé dans les coefficient t du potentiel V_1 et \tilde{t} du potentiel V_2 par l'intermédiaire de $t_{k,i}$ (resp. $\tilde{t}_{k,i}$).

Il est également utile de définir les résolvantes du type

$$\sum_k \frac{k}{x^{k+1}} \partial_{t_k} \ln \mathcal{Z}_{form} \quad , \quad \sum_k \frac{k}{y^{k+1}} \partial_{\tilde{t}_k} \ln \mathcal{Z}_{form} \quad (2-3)$$

pour considérer toutes les longueurs de bords possibles. Les paramètres x et y sont alors des fugacités associées aux bords. On a ici introduit les **opérateurs d'insertion de boucle**⁹ consistant en une dérivée formelle par rapport à tous les coefficients des potentiels V_1 et V_2 respectivement :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial V_1(x)} := \sum_k \frac{k}{x^{k+1}} \partial_{t_k} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial V_2(y)} := \sum_k \frac{k}{y^{k+1}} \partial_{\tilde{t}_k}} \quad (2-4)$$

Les fonctions de corrélation ainsi définies :

$$\overline{W}_{k,l}(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_L) := - \frac{\partial}{\partial V_1(x_1)} \dots \frac{\partial}{\partial V_1(x_k)} \frac{\partial}{\partial V_2(y_1)} \dots \frac{\partial}{\partial V_2(y_l)} \mathcal{F} \quad (2-5)$$

génèrent donc des surfaces ouvertes à $k+l$ bords dont chacun a une condition de bord homogène : k d'entre eux viennent de l'extraction d'un polygone de spin + et les l autres de l'extraction d'un polygone de spin -.

Remarque 2.1 On utilisera ici encore abondamment la notation d'intégrale matricielle pour désigner les fonctions de corrélation. En effet, l'action de la dérivation par rapport à l'un des coefficients des potentiels est facile à représenter :

$$\begin{aligned} k \frac{\partial}{\partial t_k} \ln \mathcal{Z}_{form} &= \frac{k}{\mathcal{Z}_{form}} \frac{\partial}{\partial t_k} \int dM_1 dM_2 e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr} (V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2)} \\ &= -\frac{1}{\hbar \mathcal{Z}_{form}} \int dM_1 dM_2 \text{Tr} M_1^k e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr} (V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2)} \\ &= \frac{1}{\hbar} \left\langle \text{Tr} M_1^k \right\rangle \end{aligned} \quad (2-6)$$

L'action de l'opérateur d'insertion de boucles peut alors être représentée par :

$$\frac{\partial}{\partial V_1(x)} \mathcal{F} = -\hbar \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} \right\rangle, \quad (2-7)$$

⁹Ce nom provient du fait qu'un tel opérateur agit sur les surfaces générées en ajoutant un bord, c'est-à-dire en insérant une boucle dans le graphe dual. Nous reviendrons plus longuement sur la description de son action dans la partie 9 de ce chapitre.

et plus généralement les fonctions de corrélations $\overline{W}_{k,l}$ sont données par :

$$\overline{W}_{k,l}(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_L) = \hbar^{2-k-l} \left\langle \prod_{i=1}^k \text{Tr} \frac{1}{x_i - M_1} \prod_{j=1}^l \text{Tr} \frac{1}{y_j - M_2} \right\rangle_c, \quad (2-8)$$

où l'indice c signifie que l'on ne tient compte que de la partie connexe. Ces fonctions de corrélation sont dites "simples" car elles ne font apparaître qu'un seul type de matrice (M_1 ou M_2) à l'intérieur de chaque trace.

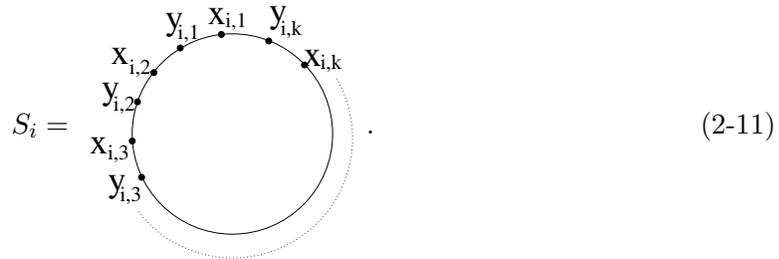
Il est naturel de vouloir étendre cette définition à la valeur moyenne d'une classe plus grande de fonctions de M_1 et M_2 invariantes par action du groupe $U(N)$ en mélangeant les deux types de matrices :

$$\begin{aligned} \overline{H}_{k_1, \dots, k_l; m; n}(S_1, S_2, \dots, S_l; x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) := & \hbar^{2-l-m-n} \\ & \left\langle \prod_{i=1}^l \text{Tr} \left(\frac{1}{x_{i,1}-M_1} \frac{1}{y_{i,1}-M_2} \frac{1}{x_{i,2}-M_1} \frac{1}{y_{i,2}-M_2} \cdots \frac{1}{x_{i,k_i}-M_1} \frac{1}{y_{i,k_i}-M_2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \prod_{j=1}^m \text{Tr} \frac{1}{x_j - M_1} \prod_{s=1}^n \text{Tr} \frac{1}{y_s - M_2} \right\rangle_c \end{aligned} \quad (2-9)$$

où S_i représente la suite de longueur $2k_i$

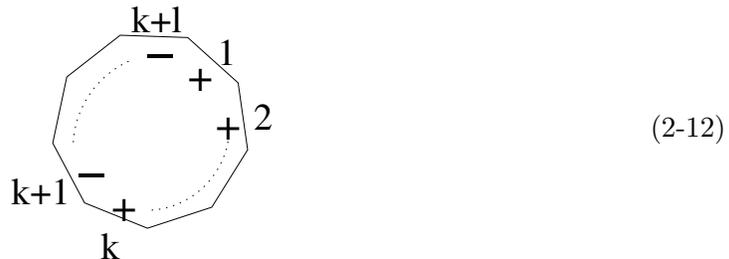
$$S_i := [x_{i,1}, y_{i,1}, x_{i,2}, y_{i,2}, x_{i,3}, y_{i,3}, \dots, x_{i,k_i}, y_{i,k_i}] \quad (2-10)$$

dans laquelle les variables de type x et y alternent. A cause de l'invariance cyclique de la trace, ce n'est pas S_i à proprement parler qui intervient dans la fonction de corrélation mais sa classe d'équivalence sous les permutations cycliques et il sera utile de représenter cette dernière graphiquement par



Ces fonctions de corrélation plus compliquées sont dites "mixtes" puisqu'elles mélangent des matrices M_1 et M_2 à l'intérieur d'une même trace.

Que signifient ces nouvelles fonctions en termes combinatoires ? Considérons le cas le plus simple : $\langle \text{Tr} M_1^k M_2^l \rangle$. Si l'on développe en diagrammes de Feynman l'intégrale correspondante, on génère des surfaces qui comportent toutes un polygone à $k+l$ côtés, k d'entre eux portant un spin + suivis de l spin - :



Les surfaces générées par cette fonction de corrélation sont donc des surfaces à un bord de longueur $k + l$ mais avec une condition de bord changeant deux fois. Cela signifie que, pour calculer les poids des surfaces générées, on fait comme si elles étaient entourées d'une couronne de longueur $k + l$ composée de k polygones de spin $+$ successifs suivis de l polygones de spin $-$ ¹⁰.

D'un point de vue purement combinatoire, de telles fonctions de corrélation ne peuvent être simplement définies à l'aide des poids \mathcal{W} considérés jusqu'à présent : on doit considérer une légère généralisation des cartes. On doit introduire des polygones à $\sum_{\alpha=1}^K k_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^L l_{\beta}$ côtés de spins différents donnés par la séquence :

$$\overbrace{+, +, \dots, +}^{k_1}, \overbrace{-, -, \dots, -}^{l_1}, \overbrace{+, \dots, +}^{k_2}, \overbrace{-, \dots, -}^{l_2}, \dots, \overbrace{+, +, \dots, +}^{k_K}, \overbrace{-, -, \dots, -}^{l_L}, \quad (2-13)$$

et de couleur i avec un poids $t_{(k_1, l_1, k_2, \dots, k_K, l_L), i}$. Les polygones considérés jusqu'à présent correspondent à $(K, L) = (1, 0)$ pour ceux de spin $+$ et $(K, L) = (0, 1)$ pour ceux de spin $-$. Dés lors, la généralisation de la fonction de partition est évidente : on considère l'ensemble des graphes construits avec ces nouveaux polygones¹¹ muni des poids $\mathcal{W}_{general}$ induits par l'introduction des $t_{(k_1, l_1, k_2, \dots, k_K, l_L), i}$. La fonction de partition correspondante est alors donnée par :

$$\mathcal{Z}_{general} := \prod_i e^{-\frac{N^2}{T} \epsilon_i (V_1(\xi_i) + V_2(\eta_i) - \xi_i \eta_i)} \prod_{j>i} [(\xi_i - \xi_j)(\eta_i - \eta_j)]^{N^2 \epsilon_i \epsilon_j} \sum_{G \in \mathcal{G}_{general}} \mathcal{W}_{general}(G). \quad (2-14)$$

Les fonctions de corrélation mixtes sont alors obtenues en dérivant la fonction de partition par rapport aux nouveaux poids avant de prendre ces derniers égaux à 0. Par exemple :

$$\left. \frac{\partial \ln \mathcal{Z}_{general}}{\partial t_{(k,l), i}} \right|_{t_{(k_1, l_1, k_2, \dots, k_K, l_L), i} = 0} \rightarrow \langle \text{Tr } M_1^k M_2^l \rangle. \quad (2-15)$$

Remarque 2.2 Les résolvantes introduites ici comme fonctions de corrélations, qu'elles soient mixtes ou non, sont des séries formelles en leurs paramètres x et y , définies quand ces derniers tendent vers l'infini. Ainsi, en tant que fonctions de ces paramètres complexes, elles sont en général multivaluées. Dans tous les cas, la bonne valeur est sélectionnée par la règle suivante :

$$\left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} B \right\rangle \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \langle \text{Tr } B \rangle. \quad (2-16)$$

Ceci permet également de voir les fonctions de corrélation simples comme des limites des fonctions de corrélations mixtes par :

$$\left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle \sim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} \right\rangle. \quad (2-17)$$

¹⁰On ne doit pas tenir compte du poids de la couronne elle même mais seulement des contributions venant de l'interaction entre la couronne et la surface.

¹¹Ces polygones portant plusieurs spins ne peuvent être liés par leurs centres à aucun autre élément de la carte. Ils ne peuvent être liés que par leurs côtés à des polygones de même couleur.

3 Développement topologique.

Chaque terme B_k de la série formelle en T , $\mathcal{F} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k T^k$, est un polynôme en $\frac{1}{N^2}$ car l'exposant k majore le nombre de vertex formant les graphes G contribuant à B_k (voir la discussion dans la preuve du théorème 1.3). Ainsi, on peut noter :

$$B_k = \sum_h B_{k,h} N^{-2h}, \quad (3-1)$$

et définir les termes :

$$\mathcal{F}^{(h)} := \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,h} T^k \quad (3-2)$$

pour tout h positif ou nul.

Or, en s'attardant sur la définition combinatoire de la fonction de partition Eq. (1-61), on peut observer que ces termes correspondent au coefficient de N^{-2h} dans l'énergie libre. Par ailleurs, l'exposant de N dans le poids d'un graphe donné est sa caractéristique d'Euler-Poincaré. Ainsi, en sélectionnant un exposant particulier de N par $\mathcal{F}^{(h)}$, on impose que les surfaces aient un genre h fixé : $\mathcal{F}^{(h)}$ est la fonction génératrice des surfaces connexes de \mathcal{S} de genre h en utilisant le même poids que pour \mathcal{Z}_{form} . On peut donc écrire le **développement topologique** :

$$\boxed{\mathcal{F} = \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(h)} N^{-2h}} \quad (3-3)$$

comme une série formelle en $\frac{1}{N^2}$.

De manière analogue, on peut écrire un développement topologique

$$\overline{H}_{k_1, k_2, \dots, k_l; m; n} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{-2h} \overline{H}_{k_1, k_2, \dots, k_l; m; n}^{(h)} \quad (3-4)$$

pour toutes les fonctions de corrélation sélectionnant le genre h des surfaces ouvertes générées.

Remarque 3.1 Le développement topologique est une série formelle en $\frac{1}{N^2}$ et n'a donc aucune raison de converger. Cependant, chacun des coefficients $\mathcal{F}^{(h)}$ est une fonction analytique de ses paramètres avec un rayon de convergence non nul comme nous allons le montrer dans ce chapitre.

L'essentiel du travail présenté dans ce chapitre consiste à calculer explicitement les différents termes $\mathcal{F}^{(h)}$ et $\overline{H}^{(h)}$ du développement topologique de n'importe quelle fonction de corrélation ainsi que de l'énergie libre.

4 Cas particulier : modèle d'Ising.

Nous avons considéré dans la partie précédente un modèle de matrices formel pour deux potentiels V_1 et V_2 génériques et des fractions de remplissage quelconques. Dans cette partie nous étudions le cas particulier où les valeurs propres de la matrice col autour de laquelle on développe sont toutes égales : la matrice est totalement dégénérée et une seule fraction de remplissage est non nulle et donc égale à l'unité. Il n'y a alors qu'une seule couleur sur les surfaces générées. Sans perte de généralité, on peut supposer que cet unique point col (i.e. l'unique couple de valeurs propres des deux matrices col) se situe en $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Alors, la fonction de partition \mathcal{Z}_{form} est la fonction génératrice des surfaces fermées (connexes ou non) formées de k_1 -gones de spin +, avec $k_1 \leq d_1$, et de k_2 -gones de spin -, avec $k_2 \leq d_2$, recollés par leurs arêtes, en utilisant les poids suivants :

- les k -gones de spin + sont comptés avec un poids $\frac{N}{T}t_k$;
- les k -gones de spin - sont comptés avec un poids $\frac{N}{T}\tilde{t}_k$;
- les arêtes communes à deux polygones de spin + sont comptées avec un poids $\frac{1}{N} \frac{t_2}{t_2\tilde{t}_2-1}$;
- les arêtes communes à deux polygones de spin - sont comptées avec un poids $\frac{1}{N} \frac{\tilde{t}_2}{t_2\tilde{t}_2-1}$;
- les arêtes communes à deux polygones de spins différents sont comptées avec un poids $\frac{1}{N} \frac{1}{t_2\tilde{t}_2-1}$;
- les sommets sont comptés avec un poids N.

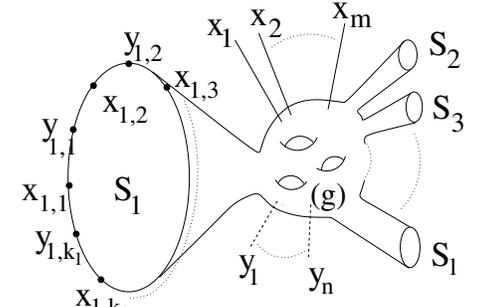
Les fonctions de corrélation $\overline{H}_{k_1, \dots, k_l; m; n}(S_1, S_2, \dots, S_l; x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ sont alors les fonctions génératrices de telles surfaces connexes avec $l + m + n$ bords et des conditions de bord différentes¹² :

- Les m bords associés aux variables x_i ont une condition homogène de type + ;
- Les n bords associés aux variables y_i ont une condition homogène de type - ;
- Les l bords associés aux cycles S_i ont une condition de bord non homogène donnée par l'alternance de condition + et de condition - suivant l'alternance des variables $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ dans le cycle S_i .

Leur développement topologique permet alors de sélectionner le genre des surfaces générées : $\overline{H}_{k_1, \dots, k_l; m; n}^{(g)}(S_1, S_2, \dots, S_l; x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ est la fonction génératrice des surfaces décrites plus haut avec la condition supplémentaire qu'elles soient de genre g .

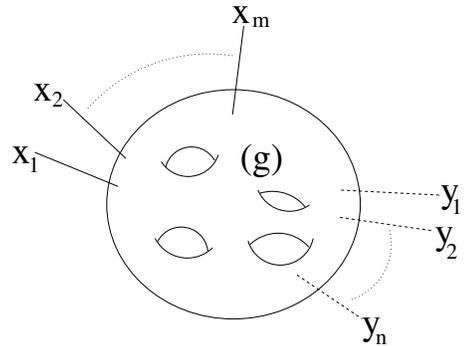
¹²Il y a deux conditions de bord possibles décrites dans la partie 2. On appellera condition de type + (resp. de type -) la condition obtenue en fixant un polygone de spin + (resp. -) à l'extérieur de la surface

Dans la suite, il sera parfois utile de représenter graphiquement ces fonctions de corrélation en référence aux surfaces générées. On représente la fonction de corrélation :

$$\overline{H}_{k_1, \dots, k_l; m; n}^{(g)}(S_1, S_2, \dots, S_l; x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) :=$$


(4-1)

par une "surface" de genre g avec $l + m + n$ bords sur lesquels les conditions de bords + et - sont représentées par les variables x et y respectivement. Les bords où la condition est homogène ont été réduits en un point par souci de simplicité. De même, les fonctions de corrélation simples sont représentées par :

$$\overline{W}_{m,n}^{(g)}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) :=$$


(4-2)

Remarque 4.1 Cette représentation prend tout son sens quand les fonctions de corrélation sont effectivement fonctions génératrices de surfaces discrétisées, c'est-à-dire lorsque l'on a un seul point col. Cependant, elle sera utile tout au long de cette thèse et sera reprise même lorsque l'interprétation combinatoire des fonctions de corrélation est légèrement modifiée par l'existence de fractions de remplissage.

5 Double limite d'échelle et limite continue.

Si le modèle à deux matrices formel permet de compter les surfaces discrétisées, leur succès vient en partie de la conviction que ces surfaces composées de polygones donnent accès aux surfaces continues par une procédure de passage à la limite. Une telle procédure peut être obtenue intuitivement en faisant croître le nombre de polygones composant les surfaces tout en réduisant leur taille de manière à garder l'aire de la surface constante.

Plus précisément, en gravitation quantique (ou théorie des cordes), on veut pouvoir calculer une intégrale de la forme

$$Z_{cont} = \sum_g \int_{\Sigma_g} \mathcal{D}\Sigma_g e^{-E(\Sigma_g)} \quad (5-1)$$

où l'intégrale porte sur toutes les surfaces fermées de genre g et $E(\Sigma_g)$ est l'action d'Einstein-Polyakov définie par Eq. (2-7) du chapitre 1 :

$$E(\Sigma_g) := 4\pi G(2 - 2g) + \Lambda \text{Aire}(\Sigma_g) + \text{Champ de matière couplé}. \quad (5-2)$$

Pour pouvoir approcher cette quantité par les intégrales de matrices formelles, on discrétise les surfaces Σ_g en les découpant en polygones d'aire moyenne ϵ^2 . En effet, on peut alors approcher chacun des termes constituant Z_{cont} par le terme de genre g , $\mathcal{F}_{2MM}^{(g)}$ du développement topologique de l'énergie libre d'un modèle à deux matrices¹³ (si l'on a besoin d'imposer une structure de spin de type Ising pour la matière couplée à la gravité) à condition d'identifier les paramètres des deux théories :

- La taille des matrices à considérer N est liée au paramètre G par :

$$\ln N \propto G; \quad (5-3)$$

- On associe une constante cosmologique couplée à chaque type de polygone¹⁴ :

$$\Lambda_k \epsilon^2 = \ln(t_k) - \frac{k}{2} \ln(T) \quad , \quad \tilde{\Lambda}_k \epsilon^2 = \ln(\tilde{t}_k) - \frac{k}{2} \ln(T). \quad (5-4)$$

Il faut maintenant faire tendre la taille des polygones ϵ^2 vers 0 tout en gardant l'aire totale finie, i.e. il faut faire tendre le nombre moyen de polygones vers l'infini de manière à compenser leur petite taille. Or, on peut voir aisément que le nombre moyen de polygones dans une surface de genre g est donné par :

$$\langle n_k \rangle = t_k \frac{\partial \mathcal{F}_{2MM}^{(g)}}{\partial t_k} \quad , \quad \langle \tilde{n}_k \rangle = \tilde{t}_k \frac{\partial \mathcal{F}_{2MM}^{(g)}}{\partial \tilde{t}_k}. \quad (5-5)$$

Il est donc nécessaire que le nombre total de polygones $\sum_k t_k \frac{\partial \mathcal{F}_{2MM}^{(g)}}{\partial t_k} + \tilde{t}_k \frac{\partial \mathcal{F}_{2MM}^{(g)}}{\partial \tilde{t}_k}$ diverge comme ϵ^{-2} , ce qui peut être obtenu en réglant de manière appropriée les coefficients des potentiels du modèle à deux matrices considéré.

On voit en particulier qu'il existe plusieurs façons d'approcher cette limite continue : on peut favoriser certains types de polygones au détriment des autres ou bien tous leur donner la même importance. Ces différentes limites correspondent à approcher des points critiques ou multi-critiques correspondant à des singularités de types différents dans l'espace des modules du modèle à deux matrices et permettent d'atteindre différentes théories conformes couplées à la gravité.

Nous reviendrons en détail sur cette procédure de passage à la limite dans la partie 6 du chapitre 4 lorsque nous aurons tous les outils nécessaires pour la décrire rigoureusement.

6 Equations de boucles.

Parmi les nombreuses approches utilisées pour tenter de résoudre les modèles de matrices¹⁵, l'une a apporté des résultats très concluants dans l'étude de différentes

¹³ Lorsqu'il pourra y avoir confusion sur le modèle auquel se rapport l'énergie libre, nous utiliserons l'indice $2MM$ pour identifier le modèle à deux matrices.

¹⁴ On considère ici le cas présenté dans la partie précédente où il n'y a pas de fraction de remplissage à fixer.

¹⁵ Ce terme générique inclut et confond de manière abusive les différentes définitions de l'intégrale matricielle \mathcal{Z} .

intégrales de matrices formelles : la méthode dite des équations de boucles. Celle-ci consiste à obtenir une hiérarchie d'équations satisfaites par les fonctions de corrélations et l'énergie libre par "intégration par partie" de \mathcal{Z} . Ces équations portent en fait plusieurs noms suivant la manière dont elles ont été obtenues et surtout le contexte dans lequel elles ont été dérivées. Du point de vue des physiciens, elles sont appelées équations de Schwinger-Dyson en théorie des champs et furent obtenues en combinatoire des cartes triangulées sous le nom d'équations de Tutte ([102, 103]).

Formellement, en utilisant les notations en termes d'intégrales matricielles, ces équations signifient que l'intégrale de matrice reste inchangée par un changement de variable $M_i \rightarrow M_i + \epsilon \delta M_i$. En considérant un choix de δM assez large, on peut refermer l'ensemble d'équations obtenu et ainsi résoudre le modèle¹⁶.

6.1 Dérivation des équations de boucles.

Dans ce paragraphe, je présente la recette à utiliser pour dériver les équations de boucles satisfaites par les fonctions de corrélation et l'énergie libre. La dérivation rigoureuse, plus technique, consiste à effectuer un changement de variables dans les intégrales gaussiennes composant la fonction de partition. Elle peut être trouvée dans [49]. Cependant, le lecteur uniquement intéressé par la résolution de ce modèle peut se contenter de cette partie.

Lorsque l'on effectue un changement de variable

$$M_1 \rightarrow \tilde{M}_1 := M_1 + \epsilon f(M_1, M_2), \quad (6-1)$$

on change l'action dans \mathcal{Z} , d'une part, ainsi que la mesure par l'intermédiaire du jacobien du changement de variable d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int dM_1 dM_2 e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr}(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2)} \\ &= \int d\tilde{M}_1 dM_2 e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr}(V_1(\tilde{M}_1) + V_2(M_2) - \tilde{M}_1 M_2)} \\ &= \int dM_1 dM_2 e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr}(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2)} \times \\ &\quad \times (1 + \epsilon(J(M_1, M_2) - K(M_1, M_2)) + O(\epsilon^2)) \end{aligned} \quad (6-2)$$

où $J(M_1, M_2)$ et $K(M_1, M_2)$ correspondent à l'ordre 1 en ϵ respectivement du jacobien du changement de variable et de la variation de l'action et sont définis par

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial \tilde{M}_1}{\partial M_1} &= 1 + \epsilon J(M_1, M_2) + O(\epsilon^2) \\ \frac{1}{\hbar} \text{Tr} \left(V_1(\tilde{M}_1) + V_2(M_2) - \tilde{M}_1 M_2 \right) &= \frac{1}{\hbar} \text{Tr} \left(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2 \right) \\ &\quad + \epsilon K(M_1, M_2) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (6-3)$$

¹⁶En fait, les équations obtenues ne semblent pas être fermées à première vue. Pour réellement les fermer, il faut faire appel à des notions de géométrie algébrique et à la courbe spectrale définie dans la partie suivante.

A l'ordre 1 en ϵ , cette invariance se traduit par

$$\langle J(M_1, M_2) \rangle = \langle K(M_1, M_2) \rangle. \quad (6-4)$$

Détermination de $J(M_1, M_2)$ et de $K(M_1, M_2)$.

– Le terme correspondant à la variation de l'action est obtenu facilement et s'écrit

$$K(M_1, M_2) = \frac{1}{\hbar} Tr [V_1'(M_1)f(M_1, M_2) - M_2f(M_1, M_2)]. \quad (6-5)$$

– La détermination de $J(M_1, M_2)$ est quant à elle moins évidente, mais peut être résumée par deux règles simples, que nous désignerons par le noms de règles "split" et "merge" ([47]). Celles-ci correspondent en fait aux deux types de changement de variables effectués en pratique. Il est intéressant de redériver ces règles comme un exercice par le calcul explicite du Jacobien du changement de variables. Pour ce faire, il est important de noter que les variables indépendantes de la matrices M sont les éléments $M_{i,i}$ ainsi que $Re(M_{i,j})$ et $Im(M_{i,j})$ pour $i < j$ (voir [49]). A ces deux règles vient également s'ajouter la règle de chaîne valable pour tout type de changement de variable.

Règle de chaîne.

Pour un changement de variable faisant apparaître plusieurs facteurs, on applique les règles Split et Merge successivement à chacun des termes en suivant la règle de Leibnitz : le résultat est la somme des termes obtenus en utilisant les règles Split et Merge à chacun des facteurs en gardant le reste constant.

Règle Split.

Le premier type de changement de variable que nous devons considérer correspond à $f(M_1, M_2) = A \frac{1}{x-M_1} B$ où A et B sont des fonctions de M_1 et M_2 . Alors la correction issue du Jacobien s'écrit :

$$J(M_1, M_2) = Tr \left(A \frac{1}{x-M_1} \right) Tr \left(\frac{1}{x-M_1} B \right) + \text{contributions venant de } A(M_1) \text{ et } B(M_1). \quad (6-6)$$

Ainsi, chaque fois que l'on rencontre un terme du type $\frac{1}{x-M_1}$ en dehors d'une trace, on "coupe" l'expression en deux traces en introduisant un facteur $\frac{1}{x-M_1}$ dans chaque trace.

Règle merge.

On rencontre également des changements de variable du type $f(M_1, M_2) = A Tr \left(\frac{1}{x-M_1} B \right)$. On a alors :

$$J(M_1, M_2) = Tr \left(A \frac{1}{x-M_1} B \frac{1}{x-M_1} \right) + \text{contributions venant de } A(M_1) \text{ et } B(M_1). \quad (6-7)$$

C'est-à-dire que, chaque fois que l'on rencontre un terme $\frac{1}{x-M_1}$ dans une trace, on regroupe toute l'expression à l'intérieur d'une même trace en remplaçant "Tr" par un duplicata du facteur $\frac{1}{x-M_1}$.

7 Limite planaire.

Chacune des fonctions de corrélation entrant dans les équations de boucles a un développement topologique en $\frac{1}{N^2}$. Ainsi chaque équation de boucle peut être décomposée en une hiérarchie infinie d'équations portant sur les termes développement de 't Hooft de ces observables¹⁷. Nous nous intéresserons dans cette partie aux fonctions génératrices des surfaces de genre nul, c'est-à-dire aux termes dominants dans les développements en $\frac{1}{N^2}$. Nous n'étudierons donc que la première équation de chacune de ces hiérarchies : celle qui correspondrait à la limite obtenue lorsque la taille de la matrice tend vers l'infini.

Attention.

Considérer la limite planaire des équations de boucles ne veut pas dire que les coefficients d'ordre inférieur dans le développement topologique sont négligeables par rapport à ceux d'ordre supérieur. Cela signifie juste que l'on travaille avec les termes de l'ordre 0 des séries formelles définissant les observables du modèle et rien de plus. Il faut donc se méfier de ce terme "limite planaire" qui ne désigne en fait aucune limite.

7.1 Equation de boucle maîtresse et courbe spectrale.

Considérons dans un premier temps le changement de variables le plus simple faisant intervenir la matrice M_1 :

$$M_2 \rightarrow M_2 + \epsilon \frac{1}{x - M_1}. \quad (7-1)$$

L'équation de boucle associée s'écrit alors simplement en utilisant la règle split Eq. (6-6) :

$$x\overline{W}_{1,0}(x) - 1 = \frac{1}{N} \left\langle Tr \frac{1}{x - M_1} V_2'(M_2) \right\rangle. \quad (7-2)$$

Le changement de variable, polynômial en y :

$$M_1 \rightarrow M_1 + \epsilon \left(\frac{1}{x - M_1} \frac{V_2'(y) - V_2'(M_2)}{y - M_2} \right) \quad (7-3)$$

donne, en utilisant (7-2), l'équation de boucle :

$$(y - Y(x))U(x, y) = V_2'(y)\overline{W}_{1,0}(x) - P(x, y) - x\overline{W}_{1,0}(x) + 1 - \frac{1}{N^2}U(x, y; x) \quad (7-4)$$

¹⁷C'est la manière intuitive de voir les choses. Ici, les équations de boucles ressommées, où tous les termes du développement topologique sont regroupés dans une série infinie, ne sont qu'une notation pratique pour décrire de manière concise l'ensemble de la hiérarchie d'équations correspondant à chaque coefficient des puissance de $\frac{1}{N^2}$.

où l'on a noté :

$$U(x, y) := \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{V_2'(y) - V_2'(M_2)}{y - M_2} \right\rangle, \quad (7-5)$$

$$P(x, y) := \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{V_1'(x) - V_1'(M_1)}{x - M_1} \frac{V_2'(y) - V_2'(M_2)}{y - M_2} \right\rangle, \quad (7-6)$$

$$U(x, y) := \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{V_2'(y) - V_2'(M_2)}{y - M_2} \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} \right\rangle_c \quad (7-7)$$

et

$$Y(x) := V_1'(x) - \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} \right\rangle. \quad (7-8)$$

$U(x, y)$ étant un polynôme en y , il n'a pas de singularité pour y fini, et l'équation (7-4) prise en $y = Y(x)$ s'écrit :

$$\begin{cases} y = Y(x) \\ (V_2'(y) - x)(V_1'(x) - y) - P(x, y) + 1 = \frac{1}{N^2} U(x, y; x) \end{cases}. \quad (7-9)$$

En notant le polynôme de degrés $(d_1 + 1)$ en x et $(d_2 + 1)$ en y :

$$E(x, y) = (V_2'(y) - x)(V_1'(x) - y) - P(x, y) + 1, \quad (7-10)$$

on peut réécrire l'équation précédente en :

$$\boxed{E(x, Y(x)) = \frac{1}{N^2} U(x, Y(x); x)} \quad (7-11)$$

appelée **équation de boucle maîtresse**.

Lorsque l'on considère la limite planaire, i.e. l'ordre 0 de cette équation, on obtient une équation algébrique :

$$\mathcal{E}(x, Y^{(0)}(x)) = 0 \quad (7-12)$$

où

$$\boxed{\mathcal{E}(x, y) := (V_2'(y) - x)(V_1'(x) - y) - P^{(0)}(x, y) + 1} \quad (7-13)$$

est l'ordre dominant du développement topologique de E . On a ainsi associé une courbe algébrique au modèle à deux matrices :

$$\mathcal{E}(x, y) = 0 \quad (7-14)$$

que nous nommerons **courbe spectrale classique** puisqu'elle correspond à la limite planaire $N \rightarrow \infty$, i.e. la limite classique $\hbar \rightarrow 0$.

Cette courbe algébrique est un objet fondamental de la résolution des équations de boucles. En effet, tous les termes du développement topologique des fonctions de corrélations (et pas seulement leur limite planaire) seront obtenus en termes de fonctions définies sur la surface de Riemann compacte associée à \mathcal{E} . En d'autres termes, les modules de \mathcal{E} contiennent toute l'information nécessaire à la détermination de l'intégrale matricielle \mathcal{Z} .

Remarques :

- L'équation $\mathcal{E}(x, Y^{(0)}(x)) = 0$ permet de fixer de manière implicite la fonction $Y^{(0)}(x)$ et donc $\overline{W}_{1,0}^{(0)}(x)$. Cependant, cette équation a $d_2 + 1$ solutions à x donné. Ceci montre que $\overline{W}_{1,0}(x)$ est a priori une fonction multivaluée dans \mathbb{C} . Cependant celle-ci est monovaluée en tant que fonction sur la surface de Riemann associée à \mathcal{E} : les différentes valeurs pour un x donné correspondent alors à la structure en feuillets de \mathcal{E} (voir la partie 8.1). Il ne faut cependant pas oublier que $\overline{W}_{1,0}(x)$ est défini comme une série infinie en x qui n'a de sens que pour $x \rightarrow \infty$. Cette contrainte supplémentaire permet de retrouver quelle est la bonne valeur de $\overline{W}_{1,0}(x)$ pour un x donné.
- Pour dériver la courbe spectrale classique, nous avons pris le parti de privilégier M_1 . Mais nous aurions pu effectuer exactement la même dérivation en privilégiant M_2 dans les changements de variables, auquel cas la limite planaire de l'équation de boucle maitresse aurait donné :

$$\mathcal{E}(X^{(0)}(y), y) = 0, \quad (7-15)$$

où l'on note

$$X(y) := V_2'(y) - \left\langle \text{Tr} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle. \quad (7-16)$$

Ainsi, au lieu de travailler avec $\mathcal{E}(x, y)$, il faudrait travailler avec $\mathcal{E}(y, x)$. Cependant, par définition, les résultats ne doivent pas dépendre de ce choix et l'on voit apparaître une première propriété de symétrie des fonctions de corrélations.

7.2 Limite planaire des fonctions de corrélation mixtes.

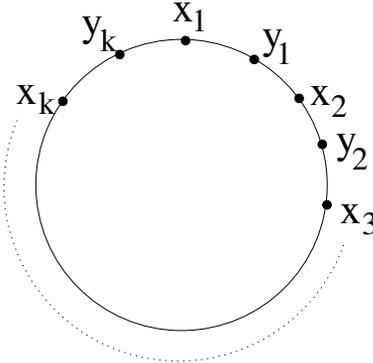
De manière générale, le développement topologique des fonctions de corrélation ne peuvent pas s'exprimer sans faire appel à des notions de géométrie algébrique et aux spécificités de la courbe spectrale \mathcal{E} . Cependant, ceci n'est plus vrai si l'on se limite à l'étude de la limite planaire, i.e. l'ordre dominant quand $N \rightarrow \infty$. Grâce à une jolie formule similaire à une Ansatz de Bethe, il est possible d'exprimer n'importe quelle fonction de corrélation mixte en termes de produits de traces mixtes à deux points $\left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle$ avec des coefficients rationnels.

Dans cette partie, par souci de brièveté dans les notations, on les simplifiera en notant l'ordre dominant des traces mixtes par

$$H_k^{(0)} := \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x_1 - M_1} \frac{1}{y_1 - M_2} \frac{1}{x_2 - M_1} \frac{1}{y_2 - M_2} \cdots \frac{1}{x_k - M_1} \frac{1}{y_k - M_2} \right\rangle + \delta_{k1}, \quad (7-17)$$

i.e. $H_k^{(0)}$ est la fonction génératrice des surfaces de genre zéro avec un bord et $2k$ opérateur de bords, i.e. des disques avec $2k$ opérateur de bords que l'on représente

comme dans Eq. (2-11) par :



$$H_k^{(0)} := \quad (7-18)$$

Un résultat classique donne la fonction de corrélation mixte la plus simple en termes de la courbe spectrale par :

Lemme 7.1 *La fonction génératrice des disques avec deux opérateurs de bords est donnée par :*

$$H_1^{(0)}(x, y) := \frac{\mathcal{E}(x, y)}{(X^{(0)}(y) - x)(y - Y^{(0)}(x))}. \quad (7-19)$$

On peut alors montrer que pour tout k , $H_k^{(0)}$ est décomposable sur la base des $H_1^{(0)}$ suivant le théorème :

Théorème 7.1 *Pour tout $k \geq 1$, la fonction à k points $H_k^{(0)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)$*

$$H_k^{(0)}(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) = \sum_{\sigma \in \bar{S}_k} C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \prod_{i=1}^k H_1^{(0)}(x_i, y_{\sigma(i)}) \quad (7-20)$$

où les coefficients $C_\sigma^{(k)}$ sont des fractions rationnelles des x_i et des y_i indépendantes des potentiels et avec des pôles, au plus simples, situés à points coïncidents et où \bar{S}_k est l'ensemble des permutations planaires de $(1, 2, \dots, k)$.

Précisons tout d'abord ce que l'on entend par permutation planaire :

Définition 7.1 *Une permutation σ de $(1, 2, \dots, k)$ est dite planaire si*

$$n_{cycles}(\sigma) + n_{cycles}(S \circ \sigma) = k + 1 \quad (7-21)$$

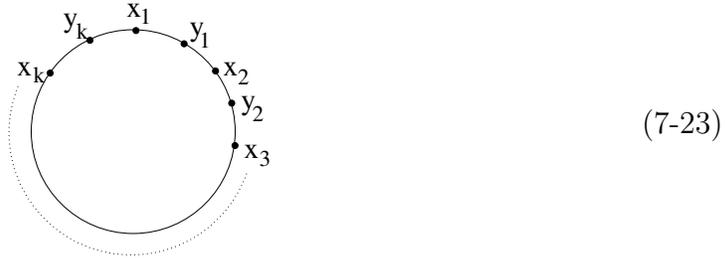
où S est la permutation cyclique :

$$S(i) = i + 1 [k] \quad (7-22)$$

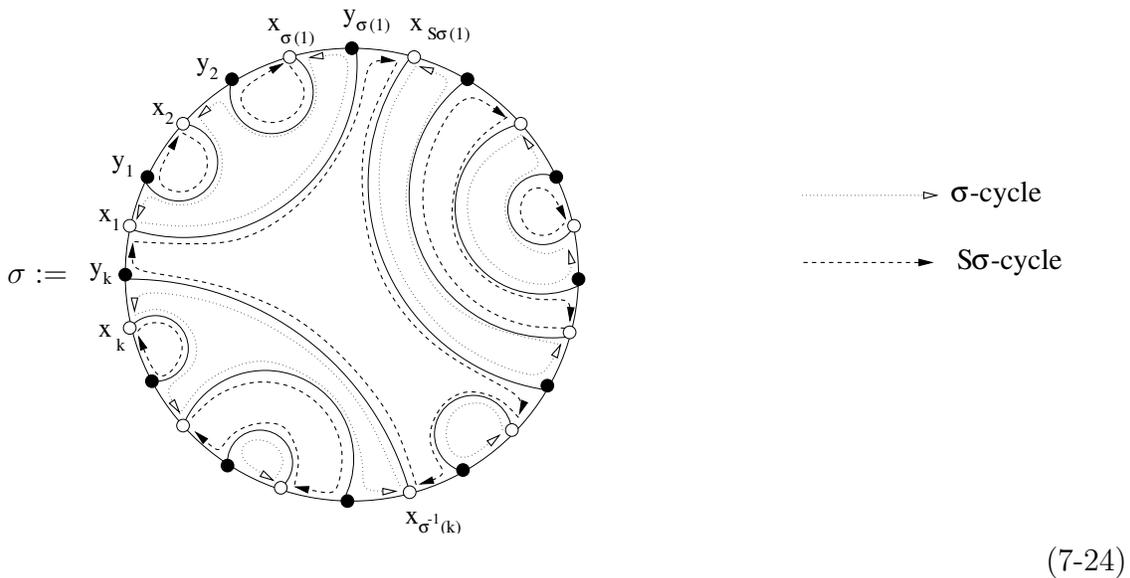
et $n_{cycles}(\sigma)$ est le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles irréductibles. On note \bar{S}_k l'ensemble des permutations planaires de $(1, 2, \dots, k)$.

Cette notion de planarité se réfère à une représentation des permutations par des systèmes d'arches qui nous sera utile tout au long de cette partie.

Soit une permutation σ de $(1, 2, \dots, k)$. Pour la représenter, plaçons les variables $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)$ sur un disque en préservant leur ordre :



La permutation σ est alors simplement représentée en reliant les points x_i aux points $y_{\sigma(i)}$ ¹⁸ :



La condition de planarité signifie alors que le système d'arches représentant σ est planaire, i.e. ne présente aucun croisement. En effet, chaque face ainsi dessinée dans le disque correspond à un cycle de la décomposition de σ et de $S \circ \sigma$ et l'on a traduit la condition de planarité par la relation d'Euler-Poincaré. Le nombre d'éléments de \overline{S}_k est donné par les nombres de Catalan :

$$Card(\overline{S}_k) = Cat(k) = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}. \tag{7-25}$$

Cette représentation en termes de systèmes d'arches est également utile pour calculer la valeur des termes $C_\sigma^{(k)}$.

Preuve:

¹⁸Dans cette représentation, les variables x et y marquent des démarcations sur le bord alors qu'ils ont été introduits comme fugacités associées à la longueur des différentes conditions de bords. Ainsi, en termes de surfaces discrétisées, elles ne devraient pas se situer à des interfaces mais entre deux interfaces.

Je vais montrer ici d'où vient cette décomposition sans montrer comment calculer les coefficients $C_\sigma^{(k)}$. La dérivation montrée ici est bien plus simple et élégante que celle présentée dans [I]. Elle est due à L. Cantini [24].

Les $H_k^{(0)}$ satisfont l'équation de boucles obtenue par le changement de variable $\delta M_2 = \frac{1}{x_1 - M_1} \frac{1}{y_1 - M_2} \cdots \frac{1}{x_k - M_1} \frac{1}{y_k - M_2}$ en ne gardant que les coefficients de N dans le développement topologique :

$$(7-26) \quad \begin{aligned} & (X(y_k) - x_1) H_k^{(0)}(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) \\ = & \sum_{j=1}^{k-1} \frac{H_{k-j}^{(0)}(x_{j+1}, \dots, y_k) - H_{k-j}^{(0)}(x_{j+1}, \dots, x_k, y_j)}{y_k - y_j} H_j^{(0)}(x_1, \dots, y_j) \\ & - Pol_{y_k} V_2'(y(k)) H_k^{(0)}(x_1, \dots, y_k) \end{aligned}$$

où $Pol_x f(x)$ indique la partie polynômiale de $f(x)$.

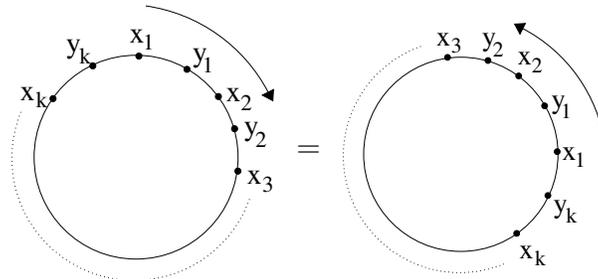
Si l'on effectue le changement de variable $\delta M_2 = \frac{1}{x_k - M_1} \frac{1}{y_k - M_2} \cdots \frac{1}{x_1 - M_1} \frac{1}{y_1 - M_2}$ qui consiste à lire la suite $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ dans l'autre sens, on obtient l'équation de boucles :

$$(7-27) \quad \begin{aligned} = & \sum_{j=1}^{k-1} \frac{H_j^{(0)}(x_j, y_{j-1}, \dots, y_1, x_1, y_j) - H_j^{(0)}(x_j, y_{j-1}, \dots, y_1, x_1, y_k)}{y_j - y_k} \times \\ & \times H_{k-j}^{(0)}(x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, \dots, x_{j+1}, y_j) \\ & - Pol_{y_k} V_2'(y(k)) H_k^{(0)}(x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, \dots, y_2, x_2, y_1, x_1, y_k). \end{aligned}$$

Or, $H_k^{(0)}(x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, \dots, y_2, x_2, y_1, x_1, y_k)$ décrit les mêmes objets combinatoires que $H_k^{(0)}(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k)$ mais avec l'orientation du bord inversée. En effet, ces deux fonctions sont les fonctions génératrices des disques avec $2k$ opérateurs de bords mais si l'un les décrit vus du dessus, l'autre les décrit vus du dessous :

$$H_k^{(0)}(x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, \dots, y_2, x_2, y_1, x_1, y_k) = H_k^{(0)}(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) \quad (7-28)$$

car



$$(7-29)$$

Cette propriété permet d'écrire la seconde équation de boucle Eq. (7-27) sous la forme :

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(X^{(0)}(y_k) - x_k) H_k^{(0)}(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) - H_j^{(0)}(x_1, y_1, \dots, x_j, y_j) - H_j^{(0)}(x_1, y_1, \dots, x_j, y_k)}{y_j - y_k} \times$$

$$(7-30) \quad \begin{aligned} & \times H_{k-j}^{(0)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \dots, y_{k-1}, x_k, y_j) \\ & - Pol_{y_k} V_2'(y(k)) H_k^{(0)}(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k). \end{aligned}$$

La différence avec Eq. (7-26) prouve le théorème :

$$(7-31) \quad \begin{aligned} & H_k^{(0)}(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) = \\ & = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{H_j^{(0)}(x_1, y_1, \dots, x_j, y_j) H_{k-j}^{(0)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \dots, x_k, y_k) - \text{idem}(y_k \leftrightarrow y_j)}{(x_k - x_1)(y_k - y_j)} \end{aligned}$$

□

Les coefficients rationnels $C_\sigma^{(k)}$ sont facilement décrits en termes des $C_{Id}^{(k)}$ uniquement par le théorème :

Théorème 7.2 *Pout tout $k \geq 1$, et toute permutation $\sigma \in S_k$, $C_\sigma^{(k)}$ est une fonction rationnelle de ses arguments x_1, \dots, y_k , par :*

- $C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) := 0$ si σ n'est pas planaire ;
- Si σ est planaire, on décompose σ et $S \circ \sigma$ en leurs produits de cycles :

$$(7-32) \quad \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l \quad , \quad S \circ \sigma = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_{\tilde{l}}$$

tels que :

$$(7-33) \quad \sigma_j = (i_{j,1}, i_{j,2}, \dots, i_{j,l_j}) \quad , \quad \sigma(i_{j,m}) = i_{j,m+1}$$

$$(7-34) \quad \tilde{\sigma}_j = (\tilde{i}_{j,1}, \tilde{i}_{j,2}, \dots, \tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}) \quad , \quad \sigma(\tilde{i}_{j,m}) = \tilde{i}_{j,m+1} - 1$$

$$(7-35) \quad \begin{aligned} C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) & := \prod_{j=1}^l C_{Id}^{(l_j)}(x_{i_{j,1}}, y_{i_{j,2}}, x_{i_{j,2}}, y_{i_{j,3}}, \dots, x_{i_{j,l_j}}, y_{i_{j,1}}) \\ & \prod_{j=1}^{\tilde{l}} C_{Id}^{(\tilde{l}_j)}(x_{\tilde{i}_{j,1}}, y_{\tilde{i}_{j,2}-1}, x_{\tilde{i}_{j,2}}, \dots, y_{\tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}-1}, x_{\tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}}, y_{\tilde{i}_{j,1}-1}) \end{aligned}$$

où $C_{Id}^{(1)} := 1$.

Ce théorème signifie que pour calculer un coefficient $C_\sigma^{(k)}$, ils suffit de dessiner les système d'arches correspondant à la permutation σ . Si deux arches se croisent, le coefficient a pour valeur 0, sinon il est égal au produit des C_{Id} pris sur chacune des faces¹⁹.

Exemple 7.1 *Considérons la permutation $\sigma \in \overline{S}_{12}$ donnée par :*

$$(7-36) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 & 12 & 10 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

¹⁹Attention! Les faces correspondant à σ et $S \circ \sigma$ doivent être orientées de manières opposées. Par exemple, l'identité et a permutaion cyclique ne donnent pas le même résultats à cause de cette orientation.

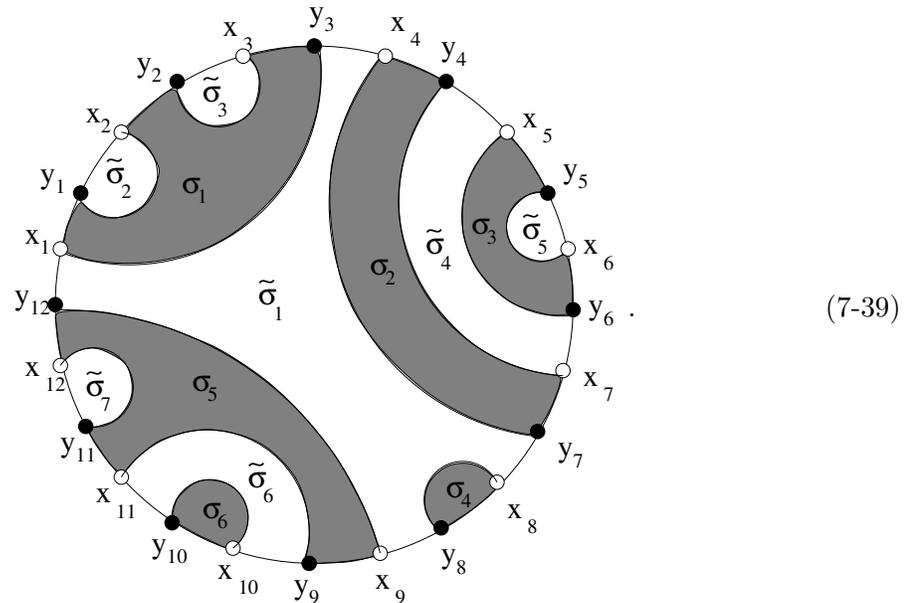
Sa décomposition en cycles s'écrit :

$$\sigma = (1, 3, 2)(4, 7)(5, 6)(8)(9, 12, 11)(10) \quad (7-37)$$

et celle de $S \circ \sigma$ est donnée par

$$S \circ \sigma = (1, 4, 8, 9)(2)(3)(5, 7)(6)(10, 11)(12). \quad (7-38)$$

Il en résulte le découpage du disque en faces par le système d'arches associé à σ :



Celui-ci nous permet de déterminer le coefficient :

$$\begin{aligned} C_{\sigma}^{(12)} &= C_{Id}^{(3)}(x_1, y_3, x_3, y_2, x_2, y_1) C_{Id}^{(2)}(x_5, y_6, x_6, y_5) \\ &\quad C_{Id}^{(3)}(x_9, y_{12}, x_{12}, y_{11}, x_{11}, y_9) C_{Id}^{(2)}(x_4, y_7, x_7, y_4) \\ &\quad C_{Id}^{(4)}(x_1, y_3, x_4, y_7, x_8, y_8, x_9, y_{12}) C_{Id}^{(2)}(x_5, y_6, x_7, y_4) \\ &\quad C_{Id}^{(2)}(x_{10}, y_{10}, x_{11}, y_9). \end{aligned} \quad (7-40)$$

Il reste maintenant à déterminer les briques de bases $C_{Id}^{(k)}$. Elles sont données par

Lemme 7.2 Les $C_{(Id)}$ sont définis de manière unique par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} C_{(Id)}^{(1)}(x_1, y_1) &:= 1, \\ C_{(Id)}^{(k)}(x_1, \dots, y_k) &:= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{C_{(Id)}^{(j)}(x_1, y_1, \dots, x_j, y_j) C_{(Id)}^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \dots, x_k, y_k)}{(x_k - x_1)(y_k - y_j)}. \end{aligned} \quad (7-41)$$

Il existe une manière efficace et simple de décrire les solutions de cette équation à l'aide d'une représentation sous forme d'arbres. La procédure à mettre en oeuvre est décrite en appendice de [I].

8 Développements topologiques et géométrie algébrique.

Cette partie représente le coeur de cette thèse. Après avoir rappelé les définitions et propriétés de géométrie algébrique nécessaires à la compréhension des résultats principaux de ce chapitre, nous montrerons comment calculer les expressions explicites de tout le développement topologique d'une grande famille d'observables du système ainsi que de l'énergie libre comme fonctions sur la courbe spectrale classique.

8.1 Rappels de géométrie algébrique.

Le propos de cette thèse n'étant pas la géométrie algébrique à proprement parler, nous ne présenterons ici que les notions nécessaires à la lecture des paragraphes suivants. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux ouvrages [53] et [52] pour les approfondir.

Equation algébrique et surface de Riemann compacte associée.

Soit une équation algébrique

$$\mathcal{E}(x, y) = 0 \quad (8-1)$$

où \mathcal{E} est un polynôme de degrés $d_1 + 1$ et $d_2 + 1$ en ses deux variables x et y . On appelle $\bar{\Sigma}$ la surface de Riemann compacte associée, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions méromorphes $x : \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ et $y : \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\mathcal{E}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \exists p \in \bar{\Sigma} \text{ tel que } \begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}. \quad (8-2)$$

On associe ainsi à une courbe algébrique \mathcal{E} une surface de Riemann compact $\bar{\Sigma}$. Dans toute la suite, on parlera donc indistinctement de surface de Riemann ou de courbe algébrique.

Remarque 8.1 Lorsque l'équation algébrique est de la forme

$$y^2 = \prod_{i=0}^{nbp} (x - a_{2i})(x - a_{2i+1}), \quad (8-3)$$

on parle de courbe hyperelliptique. Ces courbes ont des propriétés particulières que nous décrirons dans la partie 1 du chapitre suivant.

Polytope de Newton.

La courbe algébrique \mathcal{E} peut être caractérisée par les coefficients de son développement autour de $x, y \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{E}(x, y) = \sum_{i=0}^{d_1+1} \sum_{j=0}^{d_2+1} E_{ij} x^i y^j. \quad (8-4)$$

Un outil très utile à l'étude des propriétés de $\bar{\Sigma}$ consiste à représenter graphiquement ces coefficients : on associe à tout $E_{ij} \neq 0$ un point à la position (i, j) du plan. Le polygone ainsi obtenu est appelé **polytope de Newton** de \mathcal{E} .

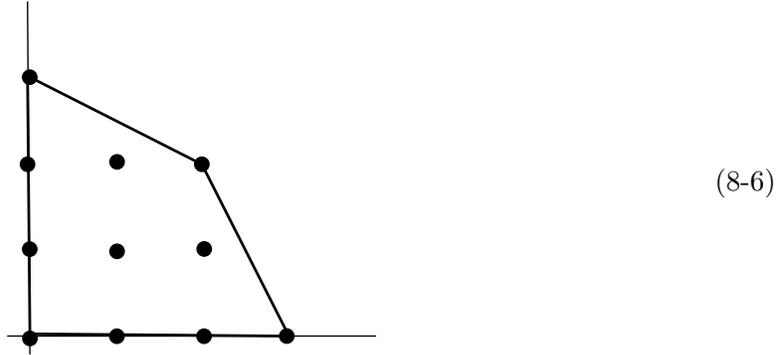
On peut directement lire sur ce polytope certaines propriétés de $\bar{\Sigma}$. Par exemple le genre maximal de la surface $\bar{\Sigma}$ associée est égal au nombre de points strictement contenus à l'intérieur du polytope.

On peut également y lire les propriétés des points à l'infini de $\bar{\Sigma}$, c'est-à-dire des pôles de x et de y . Pour ce faire, il faut regarder l'enveloppe externe du polytope, i.e. la frontière du plus petit domaine convexe contenant tous les points du polytope. Cette frontière est composée des deux segments $[(0, 0), (d_1 + 1, 0)]$ et $[(0, 0), (0, d_2 + 1)]$ d'une part mais aussi d'un ensemble de segments $\{Seg_i = [u_i, u_{i+1}]\}_{i=1 \dots p-1}$ ordonnés tels que $u_1 = (0, d_2 + 1)$ et $u_p = (d_1 + 1, 0)$. On peut alors montrer que chaque segment Seg_i correspond à un pôle de la forme ydx dont le degré est donné par la pente du segment correspondant.

Exemple 8.1 *Considérons la courbe*

$$\mathcal{E}(x, y) = x + x^3 + x^2y^2 + y^3 + xy^2. \quad (8-5)$$

Son polytope est



On peut y voir par exemple que \mathcal{E} a un genre $g < 3$ et deux points à l'infini.

Structure en feuillets.

Considérons l'équation algébrique Eq. (8-1) comme une équation en y à x fixé. Elle a $d_2 + 1$ solutions, i.e. pour tout x (ou presque)

$$\exists (p^0, p^1, \dots, p^{d_2}) \in \bar{\Sigma}^{d_2+1} \text{ tels que } \forall i \ x(p^i) = x. \quad (8-7)$$

On a donc une structure en $d_2 + 1$ feuillets en x , c'est-à-dire que l'on a, de manière générique, $d_2 + 1$ copies de \mathbb{C} superposées se projetant toutes sur la base x .

De même, on notera les différents feuillets en y par :

$$\exists (\tilde{p}^0, \tilde{p}^1, \dots, \tilde{p}^{d_2}) \in \bar{\Sigma}^{d_1+1} \text{ tels que } \forall i \ y(\tilde{p}^i) = y. \quad (8-8)$$

On peut exprimer \mathcal{E} de manière à faire apparaître explicitement ces structures en feuillets :

$$\mathcal{E}(x(p), y(q)) = E_{0, d_2} \prod_{i=0}^{d_2} (y(q) - y(p^i)) = E_{d_1, 0} \prod_{i=0}^{d_1} (x(p) - x(\tilde{q}^i)). \quad (8-9)$$

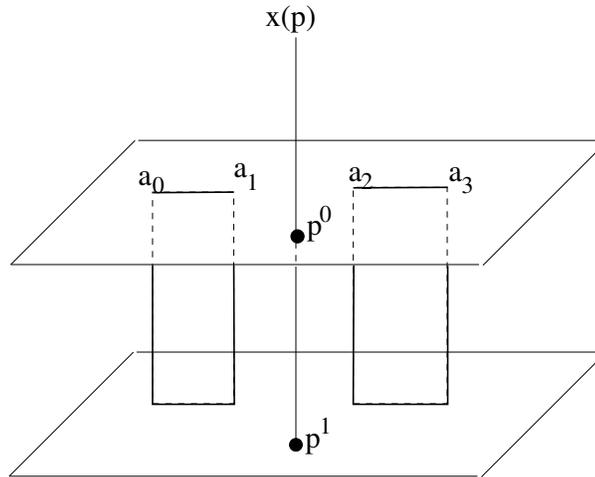


FIG. 2.1 – Représentation du tore sous la forme de deux feuillets en x reliés par deux coupures, c'est-à-dire deux sphères de Riemann recollées le long de deux segments.

Points de branchement :

On nomme **point de branchement** en x tout point a_i où la différentielle dx s'annule :

$$dx(a_i) = 0. \quad (8-10)$$

Dans cette thèse, nous supposons toujours que les points de branchements sont des zéros simples de dx , c'est-à-dire qu'au voisinage d'un point de branchement a_i , x se comporte comme le carré de y :

$$y(p) \sim_{p \rightarrow a_i} \sqrt{x(p) - x(a_i)}. \quad (8-11)$$

Ces points correspondent aux points où deux feuillets se croisent : deux points p^i correspondant au même x se rencontrent. En effet, pour tout point p au voisinage d'un point de branchement a_i , il existe un unique point \bar{p} tel que $x(p) = x(\bar{p})$ et \bar{p} approche a_i quand $p \rightarrow a_i$ (voir fig. 2.2). La courbe algébrique \mathcal{E} peut alors être vue comme $d_2 + 1$ sphères de Riemann recollées entre elles par des segments reliant les points de branchement en x . On passe de l'une à l'autre en traversant ces segments.

Remarque 8.2 La définition du **point conjugué** \bar{p} de p dépend en général du point de branchement a_i considéré (voir par exemple la figure 2.2). Cependant, dans la mesure où il sera toujours clair à quel point de branchement on se réfère, nous omettrons de préciser celui-ci dans la suite.

Remarque 8.3 La représentation de la surface de Riemann sous forme de feuillets reliés par des coupures semble indiquer qu'il existe une relation entre le nombre de points de branchements et le genre de la surface. Ce lien est obtenu par le théorème de Riemann-Hurwitz qui dit que le nombre de points de branchements $\#b.p$ et le genre g sont reliés par l'équation :

$$g = -d_2 + \frac{\#b.p}{2}. \quad (8-12)$$

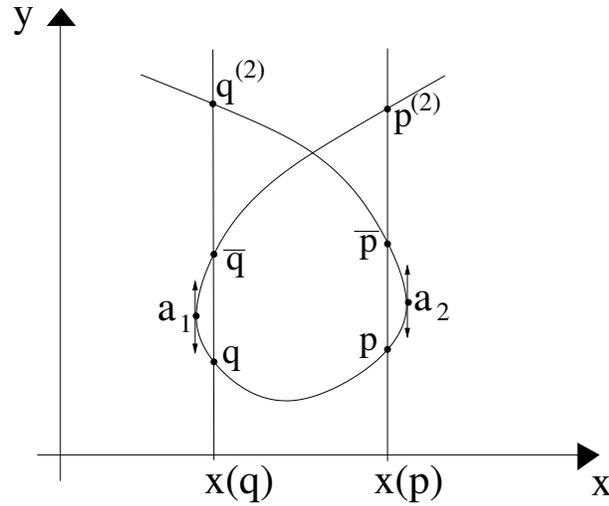


FIG. 2.2 – Exemple de courbe $\mathcal{E}(x, y)$ présentant deux points de branchements en x . On peut voir que le point conjugué n'est pas globalement défini.

Structure modulaire.

• Base de cycles.

Lorsque la courbe \mathcal{E} a pour genre g , il existe $2g$ cycles non triviaux homologiquement indépendants. On peut alors choisir une base symplectique $\{(\underline{\mathcal{A}}_i, \underline{\mathcal{B}}_i)\}_{i=1\dots g}$ telle que

$$\underline{\mathcal{A}}_i \cap \underline{\mathcal{B}}_j = \delta_{ij} \quad , \quad \underline{\mathcal{A}}_i \cap \underline{\mathcal{A}}_j = 0 \quad , \quad \underline{\mathcal{B}}_i \cap \underline{\mathcal{B}}_j = 0. \quad (8-13)$$

En découpant la surface le long des cycles \mathcal{A} et \mathcal{B} ainsi choisis, on obtient un domaine simplement connexe comme décrit sur la figure 2.3 : le **domaine fondamental**.

Sur cette courbe, il existe g formes holomorphes linéairement indépendantes du_1, \dots, du_g , que l'on choisit normalisées sur les cycles \mathcal{A} :

$$\oint_{\underline{\mathcal{A}}_j} du_i = \delta_{ij}. \quad (8-14)$$

Ces différentielles permettent de définir la **matrice des périodes de Riemann** caractéristique de la surface $\bar{\Sigma}$. C'est une matrice τ de taille $g \times g$ dont les éléments sont les intégrales des différentielles holomorphes sur les cycles $\underline{\mathcal{B}}$:

$$\tau_{ij} = \oint_{\underline{\mathcal{B}}_j} du_i. \quad (8-15)$$

Cette matrice τ est symétrique et satisfait

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad , \quad \text{Im } \tau > 0. \quad (8-16)$$

Dés lors, considérant un point $p \in \bar{\Sigma}$ n'appartenant à aucun cycle $\underline{\mathcal{A}}$ ni $\underline{\mathcal{B}}$, on définit l'application d'Abel

$$u_i(p) = \int_{p_0}^p du_i \quad (8-17)$$

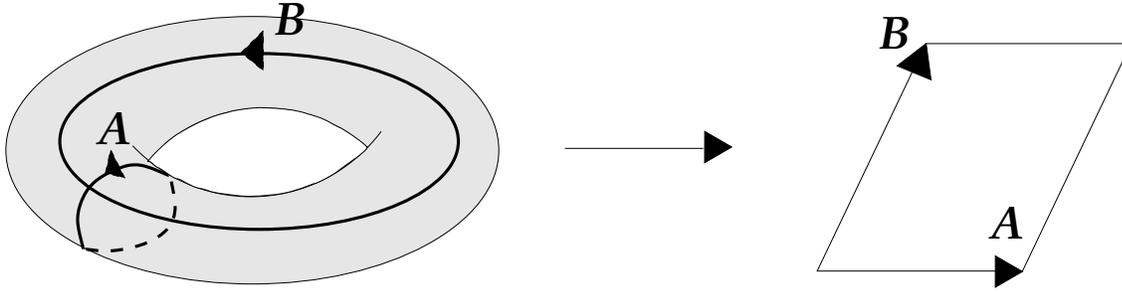


FIG. 2.3 – Le domaine fondamental du tore est un losange obtenu par découpage de la surface de départ suivant les cycles \mathcal{A} et \mathcal{B} .

où le contour d'intégration est dans le domaine fondamental.

Le vecteur à g composantes $\mathbf{u}(p) = (u_1(p), \dots, u_g(p))$ transporte la courbe dans sa jacobienne.

Notons que l'application d'Abel dépend du point de base p_0 mais celui-ci n'aura aucune influence dans toute la suite.

Fonctions theta et formes premières

On appelle **caractéristique** tout vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^g$ s'il existe deux vecteurs à coefficients entiers $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^g$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^g$ tels que :

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{a} + \tau \cdot \mathbf{b}}{2}. \quad (8-18)$$

On dit que \mathbf{z} est une caractéristique impaire si

$$\sum_{i=1}^g a_i b_i = \text{impair}. \quad (8-19)$$

Etant données une caractéristique $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{a} + \tau \mathbf{b}}{2}$, une matrice symétrique $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ telle que $\text{Im} \tau$ est définie positive et un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$, on définit la **fonction théta**

$$\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{v}, \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} e^{i\pi(\mathbf{n} - \mathbf{b}/2)^t \tau (\mathbf{n} - \mathbf{b}/2)} e^{2i\pi(\mathbf{v} + \mathbf{a}/2)^t \cdot (\mathbf{n} + \mathbf{b}/2)}. \quad (8-20)$$

Si \mathbf{z} est une caractéristique impaire, $\theta_{\mathbf{z}}$ est une fonction impaire de \mathbf{v}^{20} et on définit la forme holomorphe

$$dh_{\mathbf{z}}(p) = \sum_{i=1}^g du_i(p) \cdot \left. \frac{\partial \theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{v})}{\partial v_i} \right|_{\mathbf{v}=0}. \quad (8-21)$$

Elle a $g - 1$ zéros qui sont des zéros doubles. On peut donc considérer leurs racines carrées définies dans le domaine fondamental et la **forme première** :

$$E(p, q) = \frac{\theta_{\mathbf{z}}(u(p) - u(q))}{\sqrt{dh_{\mathbf{z}}(p) dh_{\mathbf{z}}(q)}}. \quad (8-22)$$

²⁰En particulier, on a alors $\theta_{\mathbf{z}}(0, \tau) = 0$

On peut montrer qu'elle est **indépendante de \mathbf{z}** et qu'elle n'a qu'un zéro sur la diagonale $p = q$ et aucun pôle.

Structure complexe.

En plus de la structure modulaire de $\bar{\Sigma}$, on doit également décrire sa structure complexe, c'est-à-dire les propriétés des fonctions méromorphes $x(p)$ et $y(p)$. Plus précisément, il nous suffit ici de préciser les modules caractérisant la forme différentielle ydx : sa structure de pôles, son comportement au voisinage de ceux-ci ainsi que son comportement le long des cycles \mathcal{A} .

On note $\{\alpha_i\}_{i=1\dots\mathcal{P}}$ les pôles de ydx ²¹ et z_{α_i} une variable locale au voisinage de α_i . Pour définir cette dernière, considérons trois cas :

- soit α_i est un pôle de degrés d_i de x , auquel cas on définit :

$$z_{\alpha_i}(p) := x(p)^{\frac{1}{d_i}}; \quad (8-23)$$

- soit α_i n'est ni un pôle de x ni un point de branchement en x mais un pôle de y . Alors, on définit :

$$z_{\alpha_i}(p) := \frac{1}{x(p) - x(\alpha_i)}; \quad (8-24)$$

- soit α_i est un point de branchement en x (i.e. un zéro simple de dx) et donc un pôle de y . Dans ce cas

$$z_{\alpha_i}(p) := \frac{1}{\sqrt{x(p) - x(\alpha_i)}}. \quad (8-25)$$

Dans tous les cas, $z_{\alpha_i}(p)$ a un pôle simple quand $p \rightarrow \alpha_i$ et donc $\zeta_{\alpha_i}(p) := \frac{1}{z_{\alpha_i}(p)}$ a un zéro simple, définissant ainsi une bonne variable locale au voisinage du point α_i .

Les températures.

Un premier ensemble de modules est simplement donné par les résidus de ydx en ses pôles :

$$t_{0,i} := \operatorname{Res}_{p \rightarrow \alpha_i} y(p) dx(p). \quad (8-26)$$

Remarque 8.4 Les températures ne sont pas des modules indépendants. En effet, il est facile de voir que

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{P}} t_{0,i} = 0. \quad (8-27)$$

Les modules aux pôles.

Les ordres sous-dominants dans le développement de Taylor de ydx donnent les autres modules de cette forme liés aux points à l'infini sur la surface. Pour les décrire, on introduit un "potentiel" associé à chacune des singularités de la surface :

$$V_i(p) := \operatorname{Res}_{q \rightarrow \alpha_i} y(q) dx(q) \ln \left(1 - \frac{z_{\alpha_i}(p)}{z_{\alpha_i}(q)} \right). \quad (8-28)$$

²¹Rappelons que le nombre de points à l'infini, \mathcal{P} , peut être connu en représentant le polytope de Newton de \mathcal{E} .

C'est un polynôme en $z_{\alpha_i}(p)$. On peut donc l'écrire :

$$V_i(p) := \sum_{j=1}^{\deg V_i} t_{j,i} z_{\alpha_i}^j(p). \quad (8-29)$$

Remarque 8.5 La donnée de ces modules caractérise bien le comportement de ydx aux voisinage des pôles car

$$ydx(p) \sim_{p \rightarrow \alpha_i} dV_i(p) - t_{0,i} \frac{dz_{\alpha_i}(p)}{z_{\alpha_i}(p)} + O\left(\frac{dz_{\alpha_i}(p)}{z_{\alpha_i}^2(p)}\right) \quad (8-30)$$

où la différentielle

$$dV_i(p) = \operatorname{Res}_{q \rightarrow \alpha_i} y(q) dx(q) \frac{dz_{\alpha_i}(p)}{z_{\alpha_i}(p) - z_{\alpha_i}(q)} \quad (8-31)$$

satisfait

$$\operatorname{Res}_{p \rightarrow \alpha_i} dV_i(p) = 0. \quad (8-32)$$

Les fractions de remplissage²².

On définit les fractions de remplissage ϵ_i pour $i = 1 \dots g$ comme les intégrales sur les cycles $\underline{\mathcal{A}}$ de la différentielle ydx :

$$\epsilon_i = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\underline{\mathcal{A}_i}} ydx. \quad (8-33)$$

Fonctions et différentielles fondamentales sur la courbe.

Les fonctions de corrélation et les termes du développement topologique de l'énergie libre peuvent être exprimés uniquement à l'aide de deux briques élémentaires, deux différentielles définies sur la courbe spectrale : le noyau de Bergmann et la différentielle Abélienne de troisième espèce.

Noyau de Bergmann.

Sur la surface $\bar{\Sigma}$, il existe une unique différentielle bilinéaire $\underline{B}(p, q)$ ayant un unique pôle double sur la diagonale $p = q$ sans résidu et avec des cycles $\underline{\mathcal{A}}$ nuls. C'est-à-dire qu'il est donné par les contraintes :

$$\underline{B}(p, q) = \frac{dz(p)dz(q)}{(z(p) - z(q))^2} + \text{terme fini} \quad \text{et} \quad \oint_{\underline{\mathcal{A}}} \underline{B}(p, q) = 0 \quad (8-34)$$

où z est n'importe quelle variable locale au voisinage de q .

Différentielle Abélienne de troisième espèce.

De même, pour tout couple de points (q_1, q_2) de $\bar{\Sigma}$, il existe une unique forme différentielle $\underline{dS}_{q_1, q_2}(p)$ sur la surface avec deux pôles simples en $p \rightarrow q_1$ et $p \rightarrow q_2$ avec

²²Cette dénomination vient directement de l'interprétation des modèles de matrices comme un gaz de particules fermioniques (voir [84, 47]).

résidus respectifs 1 et -1 et normalisée par l'annulation de ses intégrales sur les cycles $\underline{\mathcal{A}}$:

$$\operatorname{Res}_{q_1} \underline{dS}_{q_1, q_2} = 1 = - \operatorname{Res}_{q_2} \underline{dS}_{q_1, q_2} \quad , \quad \oint_{\mathcal{A}_i} \underline{dS}_{q_1, q_2} = 0. \quad (8-35)$$

Propriétés.

On peut tout d'abord remarquer que la différentielle Abélienne de troisième espèce peut être obtenue par intégration du noyau de Bergmann sur un chemin du domaine fondamental allant de q_2 à q_1 :

$$\underline{dS}_{q_1, q_2}(p) = \int_{q_2}^{q_1} \underline{B}(p, q) \quad (8-36)$$

ou bien dans sa version dérivée

$$d_{q_1} (\underline{dS}_{q_1, q_2}(p)) = \underline{B}(q_1, p). \quad (8-37)$$

Le noyau de Bergmann, en tant que dérivée seconde d'une fonction θ , est symétrique :

$$\underline{B}(p, q) = d_p d_q \ln (\theta_{\mathbf{z}}(u(p) - u(q))) = \underline{B}(q, p) \quad (8-38)$$

où \mathbf{z} est une caractéristique impaire quelconque. Par intégration, on obtient :

$$\underline{dS}_{q_1, q_2}(p) = d_p \ln \left(\frac{\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}(p) - \mathbf{u}(q_1))}{\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}(p) - \mathbf{u}(q_2))} \right) \quad (8-39)$$

et

$$\underline{dS}_{q_1, q_2} = -\underline{dS}_{q_2, q_1}. \quad (8-40)$$

Les intégrales sur les cycles $\underline{\mathcal{B}}$ sont données par

$$\oint_{q \in \underline{\mathcal{B}}_i} \underline{B}(p, q) = 2i\pi du_i(p) \quad \text{et} \quad \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i} \underline{dS}_{q_1, q_2} = 2i\pi(u_i(q_1) - u_i(q_2)). \quad (8-41)$$

Formules de Cauchy.

Pour une fonction méromorphe $f(p)$, les formules de Cauchy ainsi que les propriétés de \underline{dS} et \underline{B} permettent d'écrire

$$f(p) = - \operatorname{Res}_{q_1 \rightarrow p} \underline{dS}_{q_1, q_2}(p) f(q_1) \quad (8-42)$$

ainsi qu'une expression pour la différentielle de f :

$$df(p) = \operatorname{Res}_{q \rightarrow p} \underline{B}(p, q) f(q). \quad (8-43)$$

Identité bilinéaire de Riemann.

Tout au long de ce chapitre, nous aurons besoin de déplacer des contours d'intégration sur une surface de Riemann. Si l'intégrand a des intégrales non nulles le long de cycles non-triviaux, celles-ci doivent être prises en compte lorsque l'on déplace le contour d'intégration. L'identité bilinéaire de Riemann [52] explicite cette dépendance.

Soient ω_1 et ω_2 deux formes méromorphes sur la surface $\bar{\Sigma}$ et un point p_0 arbitraire. Considérons la fonction Φ_1 définie sur le domaine fondamental par

$$\Phi_1(p) = \int_{p_0}^p \omega_1 \quad (8-44)$$

où le chemin d'intégration reste à l'intérieur du domaine fondamental.

On a alors l'**identité bilinéaire de Riemann** :

$$\operatorname{Res}_{p \rightarrow \text{tous les poles}} \Phi_1(p) \omega_2(p) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^g \oint_{\mathcal{A}_i} \omega_1 \oint_{\mathcal{B}_i} \omega_2 - \oint_{\mathcal{B}_i} \omega_1 \oint_{\mathcal{A}_i} \omega_2. \quad (8-45)$$

En particulier, pour $\omega_1(p) = B(p, q)$, on obtient :

$$\operatorname{Res}_{p \rightarrow \text{tous les poles}} dS_{p,p_0}(q) \omega(p) = - \sum_{i=1}^g du_i(q) \oint_{\mathcal{A}_i} \omega \quad (8-46)$$

ainsi que :

$$\omega(q) = \operatorname{Res}_{p \rightarrow \text{poles de } \omega} dS_{p,p_0}(q) \omega(p) + \sum_{i=1}^g du_i(q) \oint_{\mathcal{A}_i} \omega. \quad (8-47)$$

Décomposition de ydx sur les modules de la structure complexe.

En utilisant l'équation bilinéaire de Riemann Eq. (8-47), on peut réécrire ydx de manière à faire apparaître explicitement les modules de la courbe \mathcal{E} :

$$ydx = \sum_{i,j} t_{j,i} B_{j,i} + \sum_i t_{0,i} dS_{\alpha_i,o} + 2i\pi \sum_i \epsilon_i du_i \quad (8-48)$$

avec

$$B_{j,i}(p) = - \operatorname{Res}_{q \rightarrow \alpha_i} \underline{B}(p, q) z_{\alpha_i}(q)^j. \quad (8-49)$$

Cette décomposition est très utile puisqu'elle nous permet de reporter toute variation des modules introduits jusqu'ici en une variation de la forme différentielle ydx seule.

Briques élémentaires.

A partir de ces fonctions, on définit deux éléments qui seront la base de la résolution des équations de boucles. Pour un point $p \in \bar{\Sigma}$ quelconque et un point q proche d'un point de branchement a_i (i.e. tel que l'on puisse définir un point conjugué \bar{q}), on définit les formes différentielles :

$$\omega(q) := (y(q) - y(\bar{q})) dx(q) \quad (8-50)$$

et

$$dE_q(p) = \frac{1}{2} \int_q^{\bar{q}} B(\cdot, p) \quad (8-51)$$

où le chemin d'intégration reste dans un voisinage du point de branchement a_i .

Fonction tau de Bergmann.

La **fonction tau de Bergmann**, τ_{Bx} , a été introduite dans [75, 76, 45] pour l'étude des espaces de Hurwitz et de la première correction de l'énergie libre des modèles de matrices. Elle est définie de manière unique par les contraintes :

$$\frac{\partial \ln(\tau_{Bx})}{\partial x(a_i)} = \operatorname{Res}_{p \rightarrow a_i} \frac{B(p, \bar{p})}{dx(p)} \quad (8-52)$$

pour tout point de branchement a_i . La formule variationnelle de Rauch [96] assure que le membre de droite est une forme fermée et donc que cette définition n'est pas caduque. Cependant, notons que cette fonction est définie à une constante multiplicative près qui ne jouera aucun rôle dans la suite.

8.2 Propriétés de la courbe spectrale du modèle à deux matrices.

Dans ce paragraphe nous allons nous attarder sur les propriétés particulières de la courbe spectrale classique d'un modèle à deux matrices dont nous rappelons la forme :

$$\mathcal{E}_{2MM}(x, y) = (V_1'(x) - y)(V_2'(y) - x) + P(x, y) \quad (8-53)$$

où V_1 et V_2 sont des polynômes de degrés respectifs $d_1 + 1$ et $d_2 + 1$ et $P(x, y)$ est un polynôme en ses deux variables de degré $d_1 - 1$ en x et $d_2 - 1$ en y .

Polytope de Newton.

Le développement de \mathcal{E}_{2MM} peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_{2MM} = t_{d_1} x^{d_1+1} + \tilde{t}_{d_2} y^{d_2+1} + x^{d_1} (t_{d_1} V_2'(y) + t_{d_1-1}) + y^{d_2} (\tilde{t}_{d_2} V_1'(x) + \tilde{t}_{d_2-1}) + P(x, y). \quad (8-54)$$

Il est alors clair que $P(x, y)$ est contenu strictement à l'intérieur du polytope et que ce dernier prend la forme représentée dans la figure (2.4).

La simple lecture de ce polytope nous permet de conclure que la surface de Riemann correspondante a un genre g majoré par

$$g \leq d_1 d_2 - 1. \quad (8-55)$$

On peut également voir que sa frontière est composée de deux segments, donc la forme ydx a deux pôles dont nous étudions les propriétés dans le paragraphe suivant.

Points à l'infini.

Il y a deux points à l'infini sur la surface $\bar{\Sigma}$, c'est-à-dire deux points qui sont des pôles de la fonction méromorphe $x(p)$ ou de $y(p)$:

- L'un, noté ∞_x , est un pôle simple pour $x(p)$ et de degrés d_1 pour $y(p)$ (on peut le voir d'après le facteur $y - V_1'(x)$ dans \mathcal{E}_{2MM} par exemple) ;
- L'autre, noté ∞_y , est un pôle simple pour $y(p)$ et de degrés d_2 pour $x(p)$ (d'après le facteur $x - V_2'(y)$ dans \mathcal{E}_{2MM}).

Si l'on s'intéresse maintenant à la structure de pôles de la forme différentielle ydx , on voit qu'elle a un pôle de degrés $d_1 + 2$ en ∞_x et de degrés $d_2 + 2$ en ∞_y .

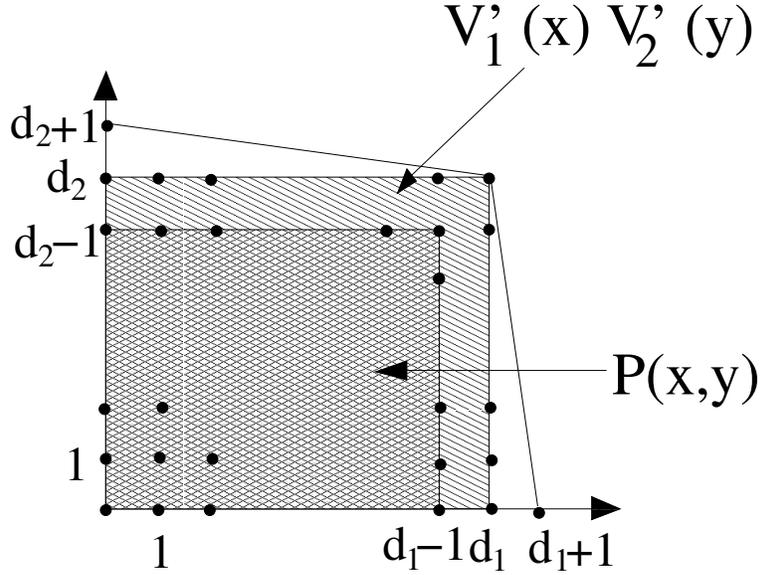


FIG. 2.4 – Polytope de Newton de \mathcal{E}_{2MM} . Les parties hachurées mettent en valeur les contributions des différents termes, $P(x, y)$ et $V'_1(x)V'_2(y)$ respectivement. La partie non hachurée correspond à la contribution exclusive de $xV'_1(x) + yV'_2(y)$.

Structure en feuillets.

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la structure en feuillets en x , c'est à dire que nous fixons la variable complexe x dans l'équation algébrique $\mathcal{E}_{2MM}(x, y) = 0$ et regardons les différentes solutions correspondantes en y .

De manière générique $\mathcal{E}_{2MM}(x, y) = 0$ a $d_2 + 1$ solutions en y . Il existe donc $d_2 + 1$ points $\{p^i\}_{i=0\dots d_2}$ de la surface algébrique compacte $\bar{\Sigma}$ se projetant sur un même point $x = x(p^i)$ dans le plan complexe : il y a $d_2 + 1$ feuillets en x , chacun étant associé à un p^i différent. Chaque exposant se référera donc à partir de maintenant à un feuillet. Ces feuillets ne sont cependant pas tous équivalents. En effet, l'un de ces feuillets est caractérisé par le fait qu'il contient le point ∞_x alors que tous les autres feuillets se rejoignent en ∞_y . On appelle **feuillet physique** le feuillet contenant ∞_x et on lui associe l'exposant 0. Nous expliquerons cette dénomination dans la partie 9.1.

Cas particulier : Courbe de genre 0.

Si l'on est intéressé par la combinatoire des cartes portant une structure de spin, on se place dans le cadre décrit dans la partie 4 et la courbe \mathcal{E}_{2MM} est alors de genre nul. Il n'y a alors plus de fraction de remplissage ϵ_i ni de base de cycles $(\underline{A}, \underline{B})$. Ce cas correspond vraiment à traiter un modèle d'Ising sur surface aléatoire.

La condition de genre 0 assure également que l'on peut trouver une paramétrisation rationnelle de la courbe $\mathcal{E}_{2MM}(x, y)$. Cela signifie que l'on peut trouver deux fonctions rationnelles $P(z)$ et $Q(z)$ définies dans le plan complexe telles que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \mathcal{E}_{2MM}(P(z), Q(z)) = 0. \quad (8-56)$$

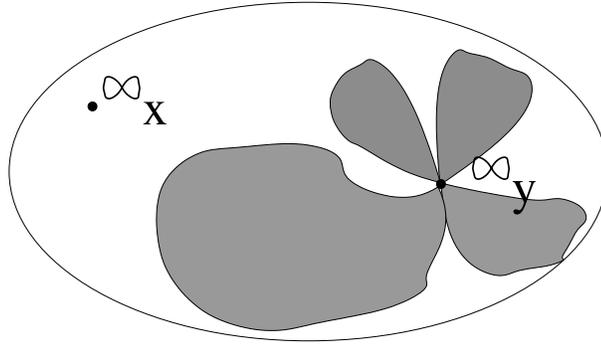


FIG. 2.5 – La structure en feuillets en x de \mathcal{E}_{2MM} fait apparaître un unique feuillet contenant ∞_x alors que les quatre autres (en grisé) contiennent ∞_y . On a représenté ici l'exemple d'une surface de genre 0 par souci de simplicité, mais le même type de description s'applique bien sûr à des surfaces de genre plus élevé.

On représente donc \mathcal{E}_{2MM} par cette paramétrisation :

$$\mathcal{E}_{2MM} := \begin{cases} x = P(z) \\ y = Q(z) \end{cases} \quad (8-57)$$

Dés lors, toute fonction et différentielle sur $\bar{\Sigma}$ s'exprime simplement en termes de ces fonctions rationnelles. En particulier le noyau de Bergmann est donné par :

$$\underline{B}(z_1, z_2) = \frac{P'(z_1)P'(z_2)dz_1dz_2}{(P(z_1) - P(z_2))^2} \quad (8-58)$$

où $P'(z)$ est la dérivée de la fonction rationnelle $P(z)$ par rapport à sa variable complexe z .

9 Développement topologique du modèle à deux matrices.

Dans cette partie, nous allons montrer comment on peut calculer tous les termes du développement topologique de n'importe quelle fonction de corrélation du modèle à deux matrices hermitiennes, y compris l'énergie libre. Nous ne présenterons ici que les résultats avec parfois des idées des démonstrations, les preuves complètes étant assez techniques et écrites dans nos articles avec L. Chekhov et B. Eynard [II][III].

Nous allons présenter les résultats par ordre de complexité croissante :

- Dans un premier temps, nous montrons comment définir une courbe spectrale semi-classique à partir des corrections en $\frac{1}{N^2}$ de la courbe spectrale classique ;
- Nous verrons ensuite comment celle-ci nous permet de calculer tout le développement topologique des fonctions de corrélation simples ;
- L'introduction d'un nouvel opérateur nous permet alors de remonter jusqu'au développement topologique de l'énergie libre ;
- Enfin, nous présenterons une formule permettant le calcul de n'importe quelle fonction de corrélation à n'importe quel ordre de correction en $\frac{1}{N^2}$.

9.1 Définitions, solutions des équations de boucles et feuillet physique.

Comme nous l'avons vu plus tôt dans la partie 7.1 consacrée à l'équation de boucles maîtresse, la résolution des équations de boucles donne généralement plusieurs solutions pour les fonctions de corrélation : ce sont donc des fonctions multivaluées du plan complexe. Dans toute la suite, nous allons résoudre les équations de boucles en étudiant les fonctions de corrélations comme des différentielles sur la courbe spectrale classique où elles sont monovaluées. Le fait que ces dernières donnent lieu à plusieurs solutions différentes dans le plan complexe vient alors tout simplement de la structure en feuillets (que ce soit en x ou en y) de la surface de Riemann. En effet, pour une valeur complexe de $x(p)$ ou de $y(p)$, il existe plusieurs points p correspondant sur la courbe \mathcal{E}_{2MM} , chacun d'eux induisant une valeur différente pour les fonctions de corrélation.

Cependant, en revenant à la définition même de ces objets, on peut sélectionner la solution physiquement (ou combinatoirement) intéressante. En effet, les fonctions de corrélation sont des séries génératrices valables uniquement comme séries formelles quand leur paramètre de développement x (resp. y) tend vers l'infini avec un pôle simple²³. Or, parmi les différents antécédents p^i de $x(p)$ (resp. \tilde{p}^j de $y(p)$), un seul satisfait cette condition : c'est l'antécédent se trouvant dans le feuillet physique en x , p^0 (resp. le feuillet physique en y , \tilde{p}^0), expliquant ainsi cette dénomination.

Dés à présent, et ce tout au long de ce chapitre, le terme fonction de corrélation ne se rapportera plus aux fonctions complexes $\overline{H}_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}$ définies plus haut mais aux différentielles

$$H_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}(S_{k_1}, \dots, S_{k_i}; \mathbf{p}_L; \mathbf{q}_M) \quad (9-1)$$

dont les arguments $\{p_{i,j}, q_{i,j}\}_{j=1}^{k_i}$ pour $i = 1, \dots, k$, $\{p_i\}_{i=1}^l$ et $\{q_i\}_{i=1}^m$ sont des points de la surface de Riemann $\overline{\Sigma}$ et satisfaisant la condition

$$\begin{aligned} & H_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}(S_{k_1}, \dots, S_{k_i}; \mathbf{p}_L; \mathbf{q}_M) = \\ & \overline{H}_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}(S_{k_1}, \dots, S_{k_i}; \mathbf{x}(\mathbf{p}_L); \mathbf{y}(\mathbf{q}_M)) \prod dx(p_{i,j}) dy(q_{i,j}) dx(p_i) dy(q_j) \\ & + \delta_{h,0} \delta_{l,0} \delta_{m,0} \delta_{i,1} \delta_{k_1,1} dx(p_{1,1}) dy(q_{1,1}) \\ & + \delta_{h,0} \delta_{i,0} \delta_{k,2} \delta_{l,0} \frac{dx(p_1) dx(p_2)}{(x(p_1) - x(p_2))^2} \\ & + \delta_{h,0} \delta_{i,0} \delta_{k,0} \delta_{l,2} \frac{dy(q_1) dy(q_2)}{(y(q_1) - y(q_2))^2} \end{aligned} \quad (9-2)$$

pour des arguments p dans le feuillet physique en x et q dans le feuillet physique en y .

On notera également les fonctions de corrélation simples :

$$W_{k,l}^{(g)} := H_{0;k;l}^{(g)}. \quad (9-3)$$

Dans la suite, nous allons donc calculer ces fonctions de corrélation en n'importe quel point de la surface de Riemann, mais il ne faudra pas oublier que l'on n'obtient de valeur physique que pour des arguments dans leurs feuillets physiques respectif.

²³Cette condition est souvent résumée par le comportement asymptotique de la résolvante : $W_{1,0}(x) \sim \frac{1}{x} + O(x^{-2})$ quand $x \rightarrow \infty$.

On introduit finalement les fonctions auxiliaires suivantes :

$$\tilde{U}_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}(S_{k_1}, \dots, S_{k_i}; \mathbf{p}_L; \mathbf{q}_M) := Pol_{x(p_{1,1})} V_1'(x(p_{1,1})) H_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}(S_{k_1}, \dots, S_{k_i}; \mathbf{p}_L; \mathbf{q}_M), \quad (9-4)$$

$$U_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}(S_{k_1}, \dots, S_{k_i}; \mathbf{p}_L; \mathbf{q}_M) := Pol_{y(q_{1,k})} V_2'(y(q_{1,k})) H_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}(S_{k_1}, \dots, S_{k_i}; \mathbf{p}_L; \mathbf{q}_M) \quad (9-5)$$

et

$$P_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}(S_{k_1}, \dots, S_{k_i}; \mathbf{p}_L; \mathbf{q}_M) := Pol_{x(p_{1,1})} V_1'(x(p_{1,1})) U_{\mathbf{k};l;m}^{(h)}(S_{k_1}, \dots, S_{k_i}; \mathbf{p}_L; \mathbf{q}_M) \quad (9-6)$$

qui sont des polynômes respectivement en $x(p_{1,1})$, $y(q_{1,k})$ et $x(p_{1,1})$ et $y(q_{1,k})$.

9.2 Quelques propriétés des fonctions de corrélation.

Dans ce paragraphe nous résumons quelques propriétés importantes des fonctions de corrélation.

Lemme 9.1 *Les fonctions de corrélation simples ont toute des intégrales nulles autour des cycles \underline{A} :*

$$\int_{p \in \underline{A}} W_{k+1;l}^{(h)}(p, \mathbf{p}_K; \mathbf{q}_L) = 0 \quad (9-7)$$

pour tout $k + l + h > 0$.

Cette propriété vient directement du fait que les fractions de remplissage ϵ_i sont les intégrales de ydx et donc de $W_{1;0}^{(0)}$ sur ces cycles et qu'elles sont indépendantes des coefficients des potentiels V_1 et V_2 .

Lemme 9.2 *Les fonctions de corrélation simples $W_{k+1;l}^{(h)}(p, \mathbf{p}_K; \mathbf{q}_L)$ ont des pôles seulement aux points de branchement $p \rightarrow a_i$.*

Ce résultat s'obtient par récurrence grâce aux équations de boucles.

Un autre résultat classique donne la fonction à deux points de genre 0 comme une fonction fondamentale sur la courbe spectrale classique :

Lemme 9.3 *La fonction à deux points de genre 0 est le noyau de Bergmann sur la courbe spectrale \mathcal{E} :*

$$\boxed{W_{2;0}^{(0)}(p, q) = W_{0;2}^{(0)}(p, q) = -W_{1;1}^{(0)}(p; q) = \underline{B}(p, q).} \quad (9-8)$$

Ce résultat est fondamental puisqu'il nous servira de base dans toute la suite. Nous nous servirons de cette fonction à deux points comme donnée initiale pour une résolution par récurrence.

9.3 Courbe spectrale complète.

Reprenons l'équation de boucle maitresse Eq. (7-11), mais conservons le terme correctif en $\frac{1}{N^2}$:

$$E(x, Y(x)) = \frac{1}{N^2} U(x, Y(x); x) \quad (9-9)$$

avec

$$E(x, y) = \mathcal{E}_{2MM}(x, y) + \sum_{g=1}^{\infty} N^{-2g} E^{(g)}(x, y). \quad (9-10)$$

On peut montrer que les deux fonctions E et U apparaissant dans cette équation peuvent s'écrire :

Théorème 9.1

$$E(x(p), y) = -\tilde{t}_{d_2+1} \left\langle \prod_{i=0}^{d_2} (y - V_1'(x(p^i)) + \hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p^i) - M_1}) \right\rangle \quad (9-11)$$

et

$$U_0(p, y) = -\tilde{t}_{d_2+1} \left\langle \prod_{i=1}^{d_2} (y - V_1'(x(p^i)) + \hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p^i) - M_1}) \right\rangle. \quad (9-12)$$

où les guillemets " $\langle \cdot \rangle$ " signifient que chaque fois que l'on rencontre une fonction à deux points en développant en cumulants, on la remplace par

$$W_{2,0}(x, x') := \left\langle \operatorname{Tr} \frac{1}{x - M_1} \operatorname{Tr} \frac{1}{x' - M_1} \right\rangle + \frac{1}{(x - x')^2}. \quad (9-13)$$

Ce résultat est obtenu simplement en montrant que Eq. (9-9) a une unique solution, étant données les propriétés de U et E , et que les formules données dans le théorème sont effectivement solutions (voir [III] pour plus de détails).

A priori cette formule définit une fonction $E(x(p), y)$ polynômiale en y mais dont le comportement en son autre variable p est moins évident : sa symétrie sur tous les feuillets p^i permet juste de conclure qu'il s'agit d'une fonction rationnelle de $x(p)$. Néanmoins, une étude approfondie de la structure de ses pôles permet de vérifier qu'il s'agit bien d'un polynôme en $x(p)$ [III]. On peut même aller plus loin et démontrer que

Lemme 9.4 $E(x, y)$ est symétrique dans le rôle de x et y :

$$\begin{aligned} E(x(p), y(q)) &= -\tilde{t}_{d_2+1} \left\langle \prod_{i=0}^{d_2} (y(q) - V_1'(x(p^i)) + \hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p^i) - M_1}) \right\rangle \\ &= -t_{d_1+1} \left\langle \prod_{i=0}^{d_1} (x(p) - V_2'(y(q^i)) + \hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{y(q^i) - M_2}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (9-14)$$

Cette propriété, très forte à première vue, est tout à fait naturelle. En effet, la courbe spectrale, qu'elle soit classique ou semi-classique, est obtenue par la dérivation d'équations de boucles par changement de variable dans l'intégrale matricielle. Nous avons ici choisi d'effectuer le changement $\delta M_1 := \frac{1}{x-M_1} \frac{V_2'(y)-V_2'(y)}{y-M_2}$ brisant la symétrie naturelle du modèle en M_1 et M_2 . Mais nous aurions tout aussi bien pu considérer le changement de variable $\delta M_2 := \frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2}$ pour obtenir la même information à travers une autre courbe spectrale correspondant à la première par l'échange des rôles respectifs de x et de y . Déjà au niveau classique la courbe est explicitement symétrique :

$$\mathcal{E}_{2MM}(x, y) = (V_1'(x) - y)(V_2'(y) - x) + P^{(0)}(x, y). \quad (9-15)$$

Il n'est donc pas surprenant que cette symétrie se retrouve dans tout le développement topologique de cette courbe spectrale qui contient toute l'information nécessaire à la résolution du modèle (mis à part un petit nombre de paramètres : les fractions de remplissage).

9.4 Fonctions de corrélation simples et représentation diagrammatique.

Première relation de récurrence.

Sachant que $E(x, y)$ est un polynôme en ses deux variables, étudions un à un les coefficients des différentes puissances de y et en rappelant que

$$E(x, y) = (V_1'(x) - y)(V_2'(y) - x) + P(x, y) \quad (9-16)$$

où $P(x, y)$ est une série formelle en $\frac{1}{N^2}$ dont chacun des termes est un polynôme en x et en y . A l'ordre h dans le développement topologique de cette équation, le développement en $y \rightarrow \infty$ des membres de gauche et de droite de cette équation donnent les égalités suivantes :

- **Coefficient de y^{d_2+1}** : Le résultat est une égalité triviale du type "0 = 0".
- **Coefficient de y^{d_2}** : On obtient une équation liant fortement les différents feuillets et très utile dans toute la suite :

$$\forall h \geq 1, \quad \sum_{i=0}^{d_2} W_{1,0}^{(h)}(p^i) = 0. \quad (9-17)$$

- **Coefficient de y^{d_2-1}** : On obtient cette fois-ci une équation bilinéaire :

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=0}^{d_2} y(p^i) W_{1,0}^{(h)}(p^i) dx(p) = \\ & = \sum_{i=0}^{d_2} \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p^i) W_{1,0}^{(h-m)}(p^i) + \sum_{i=0}^{d_2} \overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p^i, p^i) + 2Q^{(h)}(x(p)) (dx(p))^2 \end{aligned} \quad (9-18)$$

où $Q(x) = \sum_h N^{-2h} Q^{(h)}(x) := \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1} \right\rangle$ est un polynôme en x de degré $d_1 - 1$.

Etant données les intégrales sur les cycles \mathcal{A}_i des fonctions de corrélation :

$$\forall (i, k, h), \oint_{p \in \mathcal{A}_i} W_{k+1,0}^{(h)}(p, \mathbf{p}_K) = 0 \quad (9-19)$$

et la structure de pôles de ces dernières décrite par le lemme 9.2, on peut en déduire

$$\begin{aligned} W_{1,0}^{(h)}(q) &= - \sum_i \operatorname{Res}_{p \rightarrow a_i} \frac{dE_p(q) (\overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p, p) + \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p) W_{1,0}^{(h-m)}(p))}{(y(p) - y(\bar{p})) dx(p)} \\ &= \sum_i \operatorname{Res}_{p \rightarrow a_i} \frac{dE_p(q) (W_{2,0}^{(h-1)}(p, \bar{p}) + \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p) W_{1,0}^{(h-m)}(\bar{p}))}{(y(p) - y(\bar{p})) dx(p)}. \end{aligned} \quad (9-20)$$

On a ainsi exprimé la fonction de corrélation à un point de genre h en termes de fonctions de corrélation de genres moins élevés. Cependant, ce système d'équations n'est évidemment pas fermé puisqu'il ne donne pas accès aux fonctions à plusieurs points nécessaires à la construction d'une récurrence. Pour fermer ce système, il faut donc être capable de passer de $W_{k,0}^{(h)}$ à $W_{k+1,0}^{(h)}$.

Opérateur d'insertion de boucle.

Ces opérateurs faisant passer de $W_{k,l}$ à $W_{k+1,l}$ et $W_{k,l+1}$ sont connus et étudiés depuis longtemps : ce sont les opérateurs d'insertion de boucle introduits dans Eq. (2-4) permettant d'obtenir toutes les fonctions de corrélation simples lorsqu'ils sont appliqués successivement sur l'énergie libre (voir Eq. (2-5)).

Ainsi pour obtenir toutes les fonctions de corrélation à partir de la fonction à un point, il suffit de savoir comment ces opérateurs agissent sur les différents éléments composant les règles de récurrence. Nous n'aurons donc besoin que de deux propriétés déjà bien connues de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial V_1}$, à savoir son action sur les fonctions fondamentales :

$$\frac{\partial y(p)}{\partial V_1(x(r))} dx(r) = - \frac{B(p, r)}{dx(p)} \quad (9-21)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(p, q)}{\partial V_1(x(r))} dx(r) &= \sum_{\alpha} \operatorname{Res}_{\xi \rightarrow \mu_{\alpha}} \frac{2dE_{\xi}(q) \underline{B}(p, \bar{\xi}) \underline{B}(\xi, r)}{(y(\xi) - y(\bar{\xi})) dx(\xi)} \\ &= \sum_{\alpha} \operatorname{Res}_{\xi \rightarrow \mu_{\alpha}} \frac{dE_{\xi}(q) [\underline{B}(p, \bar{\xi}) \underline{B}(\xi, r) + \underline{B}(r, \bar{\xi}) \underline{B}(\xi, p)]}{(y(\xi) - y(\bar{\xi})) dx(\xi)}. \end{aligned} \quad (9-22)$$

En appliquant cet opérateur plusieurs fois sur Eq. (9-20), on obtient un ensemble de relations de récurrence fermé :

Théorème 9.2

$$\boxed{W_{k+1,0}^{(h)}(q, p_K) = \sum_{\alpha} \operatorname{Res}_{p \rightarrow \mu_{\alpha}} \frac{dE_{p, \bar{p}}(q)}{(y(p) - y(\bar{p})) dx(p)} \left(W_{k+1,0}^{(h-1)}(p, \bar{p}, p_K) + \sum_{j,m} W_{j+1,0}^{(m)}(p, p_J) W_{k+1-j,0}^{(h-m)}(\bar{p}, p_{K-J}) \right),} \quad (9-23)$$

La démonstration tient au fait que cette règle est stable sous l'application de $\frac{\partial}{\partial v_1}$.

Représentation de la règle de récurrence.

Ces relations de récurrence peuvent être représentées de manière diagrammatique permettant une meilleure compréhension du résultat. Pour ce faire, on reprend les représentations des fonctions de corrélations sous forme diagrammatique introduites dans la partie 4.

Commençons par représenter la fonction de corrélation $W_{k,0}^{(g)}(\mathbf{p}_K)$ par une surface de genre g avec k pattes marquées par les points $\{p_i\}_{i=1\dots k}$ par analogie avec les surfaces qu'elle génère :

$$W_{k+1,0}^{(g)}(p, \mathbf{p}_K) := \text{Diagram} \quad (9-24)$$

La fonction à deux points de genre 0, $W_{2,0}^{(0)}(p, q)$, est alors une sphère à deux pattes : on la représente plus simplement par une arête non-orientée joignant p et q :

$$W_{2,0}^{(0)}(p, q) := p \text{ --- } q = \underline{B}(p, q). \quad (9-25)$$

Introduisons un dernier élément graphique composé d'une arête orientée allant d'un point p vers un vertex trivalent dont les deux autres pattes sont associées à q et \bar{q} respectivement :

$$\sum_i \text{Res}_{q \rightarrow a_i} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} := p \text{ --- } \bullet \begin{matrix} q \\ \bar{q} \end{matrix} \quad (9-26)$$

On repère par un point la patte correspondant à \bar{q} et on la dénommera enfant droit dans toute la suite pour la différencier de l'enfant gauche associé à q .

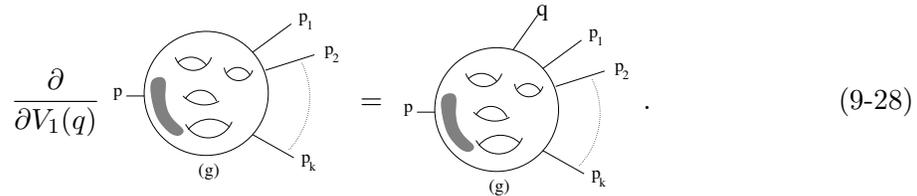
La relation de récurrence Eq. (9-23) est alors représentée par

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram} \quad (9-27)$$

Sous cette forme, il est clair que l'ensemble des relations de récurrence Eq. (9-23) forme un système triangulaire puisqu'à chaque étape on réduit soit le nombre de "trous" dans la surface ou le nombre de pattes (ou les deux). Ainsi, après un nombre fini d'étapes, on sera réduit au calcul de la fonction à deux points $W_{2,0}^{(0)}$ qui est déjà connue.

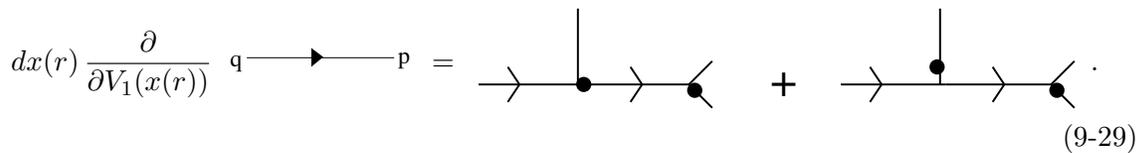
Remarque 9.1 Cette représentation diagrammatique est également pratique pour expliquer comment passer de la relation pour la fonction à un point à la règle de récurrence générale. En effet, il suffit de voir comment l'opérateur d'insertion de boucles agit sur les différents éléments de cette méthode diagrammatique.

Par définition, l'opérateur d'insertion de boucle ajoute une patte à n'importe quel objet à k pattes et g trous :



$$\frac{\partial}{\partial V_1(q)} \text{ (diagram) } = \text{ (diagram with q) } . \quad (9-28)$$

Les propriétés Eq. (9-21) et Eq. (9-22) permettent quant à elles de déterminer comment l'opérateur d'insertion de boucles agit sur le vertex :



$$dx(r) \frac{\partial}{\partial V_1(x(r))} \text{ (vertex) } = \text{ (diagram 1) } + \text{ (diagram 2) } . \quad (9-29)$$

Il est alors facile de vérifier que si l'on applique $\frac{\partial}{\partial V_1}$ à l'équation Eq. (9-27) définissant $W_{k+1,0}^{(g)}$, on obtient bien l'équation donnant $W_{k+2,0}^{(g)}$.

Résultat de la récurrence.

En itérant $2g + k - 2$ fois la relation de récurrence pour le calcul de $W_{k,0}^{(g)}$, on obtient une expression exacte de $W_{k,0}^{(g)}$ comme somme sur un ensemble de diagrammes trivalents à g boucles et k pattes dont le poids est donné par les règles précédentes :

Théorème 9.3 Pour tout $k \geq 0$ et tout $g \geq 0$ tels que $2g + k - 2 \geq 1$ et tout ensemble de points $\{p, p_1, \dots, p_k\} \in \bar{\Sigma}^{k+1}$, la fonction de corrélation à $k + 1$ points de genre g est donnée par :

$$W_{k+1,0}^{(g)}(p, \mathbf{p}_k) = \sum_{G \in \mathcal{G}_k^g(p, \mathbf{p}_k)} \mathcal{P}(G) \quad (9-30)$$

où $\mathcal{G}_k^g(p, \mathbf{p}_k)$ est l'ensemble des graphes connexes trivalents définis par les contraintes :

1. ils comportent $2g + k - 1$ vertex trivalents que l'on appelle **vertex** ;
2. ils comportent un unique vertex monovalent marqué par le point p appelé **racine** ;
3. ils comportent k vertex monovalents marqués par p_1, p_2, \dots, p_k appelés **feuilles** du graph ;
4. il sont constitués de $3g + 2k - 1$ arêtes ;
5. les arêtes peuvent être soit orientées par une flèche soit non orientées. Il y a $k + g$ arêtes non orientées ;

6. l'arête partant de la racine p est orientée par une flèche partant de p ;

7. les arêtes partant des feuilles p_1, \dots, p_k ne sont pas orientées ;

8. les arêtes orientées forment un "squelette d'arbre binaire planaire couvrant"²⁴. L'orientation des arêtes va de la racine vers les feuilles munissant le graphe d'un ordre partiel sur les vertex ;

9. parmi les $k + g$ arêtes non orientées, k d'entre elles lient un vertex à une feuille et les g autres lient deux vertex trivalents entre eux. Deux vertex trivalents peuvent être liés entre eux seulement si ils sont comparable selon l'ordre fournit par les flèches²⁵ ;

10. si les enfants d'un vertex sont une arête orientée et une arête non orientée, alors l'arête orientée est l'enfant de gauche. Cette prescription ne s'applique que si l'arête non orientée lie ce vertex à l'un de ses descendants (et non à l'un de ses parents).

et le poids $\mathcal{P}(G)$ d'un graphe G est donné par les règles suivantes :

– On marque tout vertex trivalent du graphe par un point courant r_i de $\bar{\Sigma}$ et on associe r_i à son enfant de gauche et \bar{r}_i à son enfant de droite. Toute arête relie alors deux points de la surface $\bar{\Sigma}$;

– A une arête non orientée liant r et r' , on associe le facteur $\underline{B}(r, r')$;

– A toute arête orientée allant de r vers r' , on associe le facteur $\frac{dE_{r'}(r)}{(y(r') - y(\bar{r}'))dx(r')}$;

– Suivant les flèches en sens inverse (des feuilles vers la racine), à chaque vertex r , on calcule la somme sur tous les points de branchement a_i des résidus quand $r \rightarrow a_i : \sum_i \text{Res}_{r \rightarrow a_i}^{26}$.

– Après avoir calculé l'ensemble de ces résidus, on obtient le poids du graphe.

Grâce à ce théorème, on a une méthode rapide, simple et aisée à se souvenir pour calculer n'importe quel terme dans le développement topologique des fonctions de corrélation simples $W_{k,0}$, c'est-à-dire les fonctions génératrices des surfaces discrétisées avec k bords sans opérateurs de bords de genre quelconque. Cette technique est simple car elle ne nécessite qu'une fonction de base et le calcul de résidus, i.e. le développement de Taylor du noyau de Bergmann au voisinage des points de branchement. Elle est également rapide car elle nécessite le calcul d'un nombre très restreint de termes et est facile à programmer pour une résolution informatique.

Remarque 9.2 Par construction les quantités ainsi définies sont bien symétrique en toutes leurs variables sauf la première. Il est cependant possible de montrer qu'elles sont en fait heureusement bien symétriques en toutes leurs variables comme attendu.

²⁴Un squelette d'arbre binaire est un arbre binaire dont on a oté toutes les feuilles, i.e. un arbre dont les vertex ont pour valence 1, 2 ou 3. La condition de planarité signifie que les enfants droit (marqué par un point) et gauche (non marqué) d'un vertex ne sont pas équivalents. Enfin, le fait que l'arbre soit couvrant signifie qu'il passe par tous les vertex.

²⁵C'est-à-dire si on peut aller de l'un à l'autre en suivant des arêtes orientés suivant leur orientation. Dans ce cas le vertex de départ est appelé parent et le vertex d'arrivée descendant.

²⁶Notons que ceci donne un sens au poids donné aux arêtes fléchées ainsi qu'au choix d'associer \bar{r} à l'un des enfants de chaque vetex. En effet, l'application $p \rightarrow \bar{p}$ n'est définie localement qu'au voisinage des points de branchement. On peut vérifier qu'ici cette application ne sera invoquée que pour des points marquant un vertex et donc proches d'un point de branchement.

Ces graphes ainsi que les poids qui leur sont associés ont d'autres propriétés peu évidentes à première vue et nous les discuterons dans le chapitre 5.

Remarque 9.3 Comment construire de manière pratique les graphes correspondant à la fonction à $k + 1$ points de genre g ?

- On commence par tracer tous les arbres enracinés en p possibles composés de $2g + k - 1$ arêtes et $2g + k$ vertex de valence 1, 2 ou 3 avec la contrainte que la racine soit un vertex de valence 1.
- On oriente ensuite toutes les arêtes en partant de la racine.
- On branche de toutes les manières possibles les k arêtes correspondant aux feuilles p_1, \dots, p_k sur les vertex de manière à ce que leur valence ne dépasse toujours pas 3.
- On complète le graph en branchant g arêtes non orientées de manière à ce que tous les vertex aient valence 3 en interdisant aux arêtes de relier deux vertex non comparables.
- Il ne reste plus qu'à marquer de toutes les manières non équivalentes possibles les enfants droits et gauches en suivant la prescription 10.

Etudions explicitement les premiers exemples :

Exemple 9.1 Commençons par le calcul de $W_{3,0}^{(0)}(p, p_1, p_2)$ et donc la construction des éléments de $\mathcal{G}_3^0(p, p_1, p_2)$. On représente tous les arbres enracinés à 2 vertex et 1 arête, orientés depuis la racine p :

$$p \longrightarrow \longrightarrow \quad (9-31)$$

On ajoute ensuite les deux feuilles p_1 et p_2 :

$$p \longrightarrow \begin{array}{l} \nearrow p_1 \\ \searrow p_2 \end{array} \quad (9-32)$$

On marque finalement l'enfant droit et l'enfant gauche :

$$W_{3,0}^{(0)}(p, p_1, p_2) = \mathcal{P} \left(p \longrightarrow \begin{array}{l} \bullet \nearrow p_1 \\ \bullet \searrow p_2 \end{array} \right) + \mathcal{P} \left(p \longrightarrow \begin{array}{l} \bullet \nearrow p_1 \\ \bullet \searrow p_2 \end{array} \right). \quad (9-33)$$

Calculons le poids du premier graphe. Notons r la variable d'intégration associée à l'unique vertex trivalent de ce graphe. Les trois arêtes le composant ont alors pour poids respectifs $\underline{B}(\bar{r}, p_1)$, $\underline{B}(r, p_2)$ et $\frac{dE_r(p)}{(y(r) - y(\bar{r}))dx(r)}$. Donc

$$\mathcal{P} \left(p \longrightarrow \begin{array}{l} \bullet \nearrow p_1 \\ \bullet \searrow p_2 \end{array} \right) = \sum_i \operatorname{Res}_{r \rightarrow a_i} \frac{dE_r(p)}{(y(r) - y(\bar{r}))dx(r)} \underline{B}(\bar{r}, p_1) \underline{B}(r, p_2), \quad (9-34)$$

ce qui donne finalement :

$$W_{3,0}^{(0)}(p, p_1, p_2) = \sum_i \operatorname{Res}_{r \rightarrow a_i} \frac{dE_r(p)}{(y(r) - y(\bar{r}))dx(r)} [\underline{B}(\bar{r}, p_1) \underline{B}(r, p_2) + \underline{B}(\bar{r}, p_2) \underline{B}(r, p_1)]. \quad (9-35)$$

De la même manière, il est facile de construire le seul élément de \mathcal{G}_1^1 et d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 W_1^{(1)}(p) &= p \longrightarrow \bullet \text{---} \bigcirc \\
 &= \operatorname{Res}_{q \rightarrow a} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} B(q, \bar{q}).
 \end{aligned}
 \tag{9-36}$$

Étudions un dernier exemple : $W_{1,0}^{(2)}(p)$.

La première étape de la construction donne :

$$p \longrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array}, \quad p \longrightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} .
 \tag{9-37}$$

On complète alors les vertex par des arêtes non orientées de manière à ce qu'ils soient tous trivalents. Déjà ici, la prescription 9) interdit une possibilité.

$$\begin{array}{ccc}
 p \longrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}, & p \longrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \bigcirc, & p \longrightarrow \bigcirc \text{---} \bigcirc.
 \end{array}
 \tag{9-38}$$

Il reste alors à spécifier les enfants droits et gauches en respectant la contrainte 10) :

$$\begin{array}{ccc}
 p \longrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}, & p \longrightarrow \begin{array}{l} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}, & p \longrightarrow \begin{array}{l} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \bigcirc \\
 p \longrightarrow \begin{array}{l} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}, & p \longrightarrow \begin{array}{l} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}, & p \longrightarrow \begin{array}{l} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \bigcirc.
 \end{array}
 \tag{9-39}$$

Ce qui s'écrit en indiquant l'enfant droit par un point :

$$\begin{array}{ccc}
 p \longrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \bullet \text{---} \bigcirc \\ \bullet \text{---} \bigcirc \end{array}, & p \longrightarrow \begin{array}{l} \bullet \text{---} \bigcirc \\ \bullet \text{---} \bigcirc \end{array}, & p \longrightarrow \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \\
 p \longrightarrow \begin{array}{l} \bullet \text{---} \bigcirc \\ \bullet \text{---} \bigcirc \end{array}, & p \longrightarrow \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc, & p \longrightarrow \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc
 \end{array}
 \tag{9-40}$$

On peut remarquer que sans les contraintes 9) et 10), on aurait obtenu 13 graphes différents au lieu de 5.

Ceci nous donne la valeur de la fonction à un point de genre 2 :

$$\begin{aligned}
W_1^{(2)}(p) &= \operatorname{Res}_{q \rightarrow \mathbf{a}} \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \operatorname{Res}_{s \rightarrow \mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \frac{dE_r(q)}{\omega(r)} \frac{dE_s(\bar{q})}{\omega(s)} \underline{B}(r, \bar{r}) \underline{B}(s, \bar{s}) \\
&+ \operatorname{Res}_{q \rightarrow \mathbf{a}} \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \operatorname{Res}_{s \rightarrow \mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \frac{dE_r(q)}{\omega(r)} \frac{dE_s(\bar{r})}{\omega(s)} \underline{B}(r, \bar{q}) \underline{B}(s, \bar{s}) \\
&+ \operatorname{Res}_{q \rightarrow \mathbf{a}} \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \operatorname{Res}_{s \rightarrow \mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \frac{dE_r(q)}{\omega(r)} \frac{dE_s(r)}{\omega(s)} [\underline{B}(\bar{q}, \bar{r}) \underline{B}(s, \bar{s}) \\
&+ \underline{B}(\bar{s}, \bar{q}) \underline{B}(s, \bar{r}) + \underline{B}(s, \bar{q}) \underline{B}(\bar{s}, \bar{r})]
\end{aligned}
\tag{9-41}$$

9.5 Développement topologique de l'énergie libre.

On a maintenant une expression exacte pour tous les $W_{k,0}^{(g)}$ avec $k > 0$ à partir des $W_{1,0}^{(g)}$ grâce à l'opérateur d'insertion de boucles $\frac{\partial}{\partial V_1}$. Pour obtenir les termes du développement topologique de l'énergie libre $F^{(g)}$, pouvant être vus comme les $W_{0,0}^{(g)}$, il faut être capable de passer de $W_{k+1,0}^{(g)}$ à $W_{k,0}^{(g)}$, c'est-à-dire trouver l'opérateur inverse de $\frac{\partial}{\partial V_1}$ dans la base des $W_{k,0}^{(g)}$.

Inversion de l'opérateur d'insertion de boucles.

Definition 9.1 Soit l'opérateur H_x tel que pour toute différentielle méromorphe ϕ :

$$H_x \cdot \phi := \operatorname{Res}_{\infty_x} V_1(x) \phi - \operatorname{Res}_{\infty_y} (V_2(y) - xy) \phi + \int_{\infty_x}^{\infty_y} \phi + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} \phi.
\tag{9-42}$$

Son action sur les fonctions de corrélation est décrite par

Théorème 9.4 Pour tout $h \geq 0$ et $k \geq 0$:

$$H_x \cdot W_{k+1,0}^{(h)}(\cdot, \mathbf{PK}) = (2 - k - 2h) W_{k,0}^{(h)}(\mathbf{PK}).
\tag{9-43}$$

où l'on a adopté la notation :

$$W_{0,0}^{(h)} := -F^{(h)}.
\tag{9-44}$$

Corollaire 9.1 Pour tout $h \geq 0$ et $k \geq 0$ et une primitive quelconque de ydx :

$$\phi := \int ydx,
\tag{9-45}$$

on a

$$\operatorname{Res}_{q \rightarrow \mathbf{a}} \phi(q) W_{k+1}^{(h)}(q, \mathbf{PK}) = (2 - 2h - k) W_k^{(h)}(\mathbf{PK}).
\tag{9-46}$$

Preuve:

La démonstration complète de ce théorème est donnée dans [III]. Je ne vais présenter ici qu'une idée de celle-ci en évitant les détails techniques.

On peut tout d'abord remarquer que si les graphes composant $W_{k+1,0}^{(h)}$ ont plusieurs pattes externes, on peut choisir d'agir sur l'une des feuilles plutôt que sur la racine.

Étudions alors comment H_x agit sur les différents éléments composant les diagrammes. On peut montrer que l'on a :

$$\begin{array}{c} \text{H}_x \\ | \\ \text{q} \rightarrow \bullet \rightarrow \text{p} \\ \text{r} \end{array} + \begin{array}{c} \text{H}_x \\ | \\ \text{q} \rightarrow \bullet \rightarrow \text{p} \\ \text{r} \end{array} = - \text{q} \longrightarrow \text{p} \quad (9-47)$$

et

$$\begin{array}{c} \text{H}_x \\ | \\ \text{q} \rightarrow \bullet \rightarrow \text{p} \\ \text{r} \end{array} = 0. \quad (9-48)$$

On peut alors en déduire que

$$H_x \cdot W_{k+1,0}^{(h)}(\cdot, \mathbf{PK}) = H_x \cdot \frac{\partial}{\partial V_1} W_{k,0}^{(h)}(\mathbf{PK}) = (2 - k - 2h) W_{k,0}^{(h)}(\mathbf{PK}). \quad (9-49)$$

où le facteur combinatoire $2h + k - 2$ vient du fait qu'il y a $2h + k - 2$ arêtes orientées composant les diagrammes de $W_{k,0}^{(h)}$ et donc autant de possibilités de faire apparaître une nouvelle patte externe par l'action de $\frac{\partial}{\partial V_1}$ que l'on fait ensuite disparaître par H_x .

La formule pour énergie libre

$$(2 - 2h) \mathcal{F}^{(h)} = -H_x \cdot W_{1,0}^{(h)} \quad (9-50)$$

est obtenue en montrant qu'elle redonne bien la fonction à un point sous l'action de $\frac{\partial}{\partial V_1}$.

Le corrolaire est obtenu par des combinaisons d'intégrations par partie et de changement de contours d'intégration. \square

Expression de $\mathcal{F}^{(g)}$ pour $g > 1$.

Ce théorème nous donne donc accès à une formule explicite pour n'importe quel terme du développement topologique de l'énergie libre sauf le terme sous-dominant, c'est-à-dire la première correction en $\frac{1}{N^2}$:

$$\boxed{(2 - 2h) \mathcal{F}^{(h)} = -H_x \cdot W_{1,0}^{(h)}} \quad (9-51)$$

En effet, pour $h = 1$, le facteur combinatoire s'annule et cette équation ne nous donne aucune information quant à la forme de $\mathcal{F}^{(1)}$.

Expression de $\mathcal{F}^{(0)}$.

Pour ce qui est de $\mathcal{F}^{(0)}$, sa valeur est connue depuis longtemps (voir par exemple [17]) sous la forme :

$$2\mathcal{F}^{(0)} = \operatorname{Res}_{\infty_x} (V_1(x) + V_2(y) - xy) y dx + T \int_{\infty_x}^{\infty_y} y dx + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} y dx \quad (9-52)$$

i.e

$$2\mathcal{F}^{(0)} = H_x \cdot y dx. \quad (9-53)$$

Cette formulation correspond à la définition :

$$W_{1,0}^{(0)} := -y dx \quad (9-54)$$

naturelle lorsque l'on considère l'ordre dominant de la définition :

$$Y dx = V_1' - W_{1,0}. \quad (9-55)$$

Expression de $\mathcal{F}^{(1)}$.

L'expression de l'énergie libre de genre 1 ne peut évidemment pas être obtenue à partir de l'action de H_x puisque le préfacteur $\frac{1}{2-2g}$ diverge dans ce cas. Elle a en effet été obtenue par une méthode bien différente dans [45] et peut être mise sous la forme :

$$\mathcal{F}^{(1)} = \frac{-1}{2} \ln(\tau_{Bx}) - \frac{1}{24} \ln \left(\prod_i \frac{dy}{dz_i}(a_i) \right) \quad (9-56)$$

où τ_{Bx} est la fonction τ de Bergmann associée à x définie par Eq. (8-52).

9.6 Développement topologique des fonctions de corrélation mixtes.

Dans cette partie, nous allons résoudre l'équation de boucle la plus générale donnant accès au développement topologique de n'importe quelle fonction de corrélation $H_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(h)}$. Nous allons une nouvelle fois présenter le résultat sous forme d'un système triangulaire que nous représenterons de manière diagrammatique par souci de simplicité.

Equations de boucles.

Le changement de variables

$$\delta M_1 := \frac{1}{x(p_{1,1})-M_1} \frac{1}{y(p_{1,1})-M_2} \frac{1}{x(p_{1,2})-M_1} \frac{1}{y(p_{1,2})-M_2} \cdots \frac{1}{x(p_{1,k_1})-M_1} \frac{1}{y(p_{1,k_1})-M_2} \prod_{i=2}^l \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{x(p_{i,1})-M_1} \frac{1}{y(p_{i,1})-M_2} \frac{1}{x(p_{i,2})-M_1} \frac{1}{y(p_{i,2})-M_2} \cdots \frac{1}{x(p_{i,k_i})-M_1} \frac{1}{y(p_{i,k_i})-M_2} \right) \prod_{j=1}^m \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p_j)-M_1} \prod_{s=1}^n \operatorname{Tr} \frac{1}{y(q_s)-M_2} \quad (9-57)$$

donne l'équation de boucles générale :

$$\begin{aligned}
 & (Y(p_{1,1}) - y(q_{1,k_1}) - \text{Pol}_{x(p_{1,1})} V_1'(x(p_{1,1}))) H_{k_1, \dots, k_l; m; n}(\mathbf{S}_L; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) = \\
 & \sum_{A \cup B = \{2, \dots, l\}} \sum_{I, J} H_{k_1, \mathbf{k}_A; |I|; |J|}(S_1, \mathbf{S}_A; \mathbf{P}_I; \mathbf{Q}_J) H_{\mathbf{k}_B; m - |I| + 1; n - |J|}(\mathbf{S}_B; p_{1,1} \mathbf{P}_M / I; \mathbf{Q}_N / J) \\
 & + \sum_{A \cup B = \{2, \dots, l\}} \sum_{\alpha=2}^{k_1} \sum_{I, J} H_{k_1 - \alpha + 1, \mathbf{k}_B; m - |I|; n - |J|}(\{p_{1,\alpha}, q_{1,\alpha}, \dots, p_{1,k_1}, q_{1,k_1}\}, \mathbf{S}_B; \mathbf{P}_M / I; \mathbf{Q}_N / J) \\
 & \times \frac{H_{\alpha-1, \mathbf{k}_A; |I|; |J|}(\{p_{1,1}, q_{1,1}, \dots, p_{1,\alpha-1}, q_{1,\alpha-1}\}, \mathbf{S}_A; \mathbf{P}_I; \mathbf{Q}_J) - H_{\alpha-1, \mathbf{k}_A; |I|; |J|}(\{p_{1,\alpha}, q_{1,1}, \dots, p_{1,\alpha-1}, q_{1,\alpha-1}\}, \mathbf{S}_A; \mathbf{P}_I; \mathbf{Q}_J)}{x(p_{1,\alpha}) - x(p_{1,1})} \\
 & \sum_{i=2}^l \sum_{\alpha=1}^{k_i} \frac{1}{x(p_{i,\alpha}) - x(p_{1,1})} \\
 & \left[H_{k_1 + k_i, \mathbf{k}_L / \{1, i\}; m; n}(\{S_1, p_{i,\alpha}, q_{i,\alpha}, p_{i,\alpha+1}, \dots, q_{i,k_i}, p_{i,1}, \dots, p_{i,\alpha-1}, q_{i,\alpha-1}\}, \mathbf{S}_L / \{1, i\}; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) \right. \\
 & \quad \left. - \text{Idem} \Big|_{p_{1,1} := p_{i,\alpha}} \right] \\
 & - \sum_{i=1}^m \partial_{p_i} \left[\frac{H_{\mathbf{k}_L; m-1; n}(\mathbf{S}_L; \mathbf{P}_M / \{i\}; \mathbf{Q}_N) - H_{\mathbf{k}_L; m-1; n}(\mathbf{S}_L; \mathbf{P}_M / \{i\}; \mathbf{Q}_N) \Big|_{p_{1,1} := p_i}}{x(p_i) - x(p_{1,1})} \right] \\
 & + \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=2}^{k_1} \frac{1}{x(p_{1,\alpha}) - x(p_{1,1})} \times \\
 & \left[H_{\alpha-1, k_1 - \alpha + 1, \mathbf{k}_L / \{1\}; m; n}(S_{1|\alpha}, \mathbf{S}_L / \{1\}; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) \right. \\
 & \quad \left. - H_{\alpha-1, k_1 - \alpha + 1, \mathbf{k}_L / \{1\}; m; n}(S_{1|\alpha}, \mathbf{S}_L / \{1\}; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) \right] \Big|_{p_{1,1} := p_{1,\alpha}} \\
 & + \frac{1}{N^2} H_{\mathbf{k}_L; m+1; n}(\mathbf{S}_K; p_{1,1}, \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N).
 \end{aligned} \tag{9-58}$$

où $S_{1|\alpha}$ est le couple de cycles obtenu en coupant le cycle S_1 avant $p_{1,\alpha}$ et avant $p_{1,1}$:

$$S_{1,\alpha} := \{p_{1,1}, q_{1,1}, \dots, p_{1,\alpha-1}, q_{1,\alpha-1}\}, \{p_{1,\alpha}, q_{1,\alpha}, \dots, p_{1,k_1}, q_{1,k_1}\}. \tag{9-59}$$

Le coefficient de $\frac{1}{N^{2g}}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& (y(p_{1,1}) - y(q_{1,k_1}) - Pol_{x(p_{1,1})} V_1'(x(p_{1,1}))) H_{k_1, \dots, k_l; m; n}^{(g)}(S_1, S_2, \dots, S_l; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n) = \\
& \sum_{h=1}^g H_{0; 1; 0}^{(h)}(p_{1,1}) H_{k_1, \dots, k_l; m; n}^{(g-h)}(S_1, S_2, \dots, S_l; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n) \\
& + \sum_h \sum_{A \cup B = \{2, \dots, l\}} \sum_{I, J}^{k_1} H_{k_1, \mathbf{k}_A; |I|; |J|}^{(h)}(S_1, \mathbf{S}_A; \mathbf{P}_I; \mathbf{Q}_J) H_{\mathbf{k}_B; m - |I| + 1; n - |J|}^{(g-h)}(\mathbf{S}_B; p_{1,1} \mathbf{P}_M / I; \mathbf{Q}_N / J) \\
& + \sum_h \sum_{A \cup B = \{2, \dots, l\}} \sum_{\alpha=2}^{k_1} \sum_{I, J} H_{k_1 - \alpha + 1, \mathbf{k}_B; m - |I|; n - |J|}^{(h)}(\{p_{1,\alpha}, q_{1,\alpha}, \dots, p_{1,k_1}, q_{1,k_1}\}, \mathbf{S}_B; \mathbf{P}_M / I; \mathbf{Q}_N / J) \\
& \quad \times \frac{H_{\alpha-1, \mathbf{k}_A; |I|; |J|}^{(g-h)}(\{p_{1,1}, q_{1,1}, \dots, p_{1,\alpha-1}, q_{1,\alpha-1}\}, \mathbf{S}_A; \mathbf{P}_I; \mathbf{Q}_J) - H_{\alpha-1, \mathbf{k}_A; |I|; |J|}^{(g-h)}(\{p_{1,\alpha}, q_{1,1}, \dots, p_{1,\alpha-1}, q_{1,\alpha-1}\}, \mathbf{S}_A; \mathbf{P}_I; \mathbf{Q}_J)}{x(p_{1,\alpha}) - x(p_{1,1})} \\
& + \sum_{i=2}^l \sum_{\alpha=1}^{k_i} \frac{1}{x(p_{i,\alpha}) - x(p_{1,1})} \\
& \left[H_{k_1 + k_i, \mathbf{k}_L / \{1, i\}; m; n}^{(g)}(\{S_1, p_{i,\alpha}, q_{i,\alpha}, p_{i,\alpha+1}, \dots, q_{i,k_i}, p_{i,1}, \dots, p_{i,\alpha-1}, q_{i,\alpha-1}\}, \mathbf{S}_L / \{1, i\}; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) \right. \\
& \quad \left. - \text{Idem} \Big|_{p_{1,1} := p_{i,\alpha}} \right] \\
& + \sum_{i=1}^m \partial_{p_i} \left[\frac{H_{\mathbf{k}_L; m-1; n}(\mathbf{S}_L; \mathbf{P}_M / \{i\}; \mathbf{Q}_N) \Big|_{p_{1,1} := p_i}}{x(p_i) - x(p_{1,1})} \right] \\
& + \sum_{\alpha=2}^{k_1} \frac{1}{x(p_{1,\alpha}) - x(p_{1,1})} \times \\
& \left[H_{\alpha-1, k_1 - \alpha + 1, \mathbf{k}_L / \{1\}; m; n}^{(g-1)}(S_1 |_{\alpha}, \mathbf{S}_L / \{1\}; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) \right. \\
& \quad \left. - H_{\alpha-1, k_1 - \alpha + 1, \mathbf{k}_L / \{1\}; m; n}^{(g-1)}(S_1 |_{\alpha}, \mathbf{S}_L / \{1\}; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) \right] \\
& + H_{\mathbf{k}_L; m+1; n}^{(g-1)}(\mathbf{S}_K; p_{1,1}, \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N).
\end{aligned} \tag{9-60}$$

10 Solution générale des équations de boucles.

Pour résoudre l'équation de boucle Eq. (9-60), remarquons tout d'abord que le membre de droite ne contient que des fonctions de corrélation d'ordre inférieur à $H_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(g)}$ dans le sens où elles correspondent à un genre strictement inférieur à g ou bien décrivent des surfaces avec moins de bords, i.e. elles contiennent moins de facteurs de la forme $\text{Tr}(\cdot)$. Nous allons donc procéder par récurrence sur le genre et le nombre de traces, plus précisément sur $2g + l + m + n$.

Considérons donc tous les termes du membre de droite de Eq. (9-60) connus et calculons les termes du membre de gauche. Par définition le dernier terme du membre de gauche est un polynôme en $x(p_{1,1})$ de degré $d_1 - 1$. Or, $H_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(g)}$ n'a pas de pôle en $p_{1,1} := \tilde{q}_{1,k_1}^j$ pour $j = 1, \dots, d_1$, on peut donc évaluer cette équation en ces points pour obtenir la valeur du polynôme

$$U_{k_1, \dots, k_l; m; n}^{(g)}(x(p_{1,1})) := Pol_{x(p_{1,1})} V_1'(x(p_{1,1})) H_{k_1, \dots, k_l; m; n}^{(g)}(\mathbf{S}_L; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N). \tag{10-1}$$

en ces points indépendamment de $H_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(g)}$ puisque sa contribution est annulée par son

préfacteur $y(p_{1,1}) - y(q_{1,k_1})$. La formule d'interpolation de Lagrange s'écrit alors :

$$U_{k_1, \dots, k_l; m; n}^{(g)}(x(p_{1,1})) = \sum_{j=1}^{d_1} \operatorname{Res}_{r \rightarrow \tilde{q}^j} \frac{H_{1;0;0}^{(0)}(p_{1,1}, q_{1,k_1}) U_{k_1, \dots, k_l; m; n}^{(g)}(x(r)) (y(p_{1,1}) - y(q)) dx(r)}{(x(p_{1,1}) - x(r))(y(r) - y(q)) H_{1;0;0}^{(0)}(r, q_{1,k_1})}, \quad (10-2)$$

pour ce polynôme de degré $d_1 - 1$ dont la valeur est connue en d_1 points.

En insérant cette solution dans Eq. (9-60), on obtient :

$$H_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(g)}(\mathbf{S}_L; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n) = \operatorname{Res}_{r \rightarrow p_{1,1}, \tilde{q}^j} \frac{H_{1;0;0}^{(0)}(p_{1,1}, q_{1,k_1}) \operatorname{RHS}|_{p_{1,1}:=r}}{(x(p_{1,1}) - x(r))(y(q) - y(r)) H_{1;0;0}^{(0)}(r, q_{1,k_1})} \quad (10-3)$$

où RHS est le terme de droite de Eq. (9-60).

On peut éliminer certains termes en déplaçant le contour d'intégration et en utilisant la structure de pôles des fonctions de corrélation ainsi que le caractère rationnel de certaines combinaisons de celles-ci pour finalement obtenir :

$$\begin{aligned} & H_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(g)}(\mathbf{S}_L; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n) = \\ & \operatorname{Res}_{r \rightarrow p_{i,\alpha}, p_j, \tilde{q}_{1,k_1}^j} \frac{H_{1;0;0}^{(0)}(p_{1,1}, q_{1,k_1})}{(x(p_{1,1}) - x(r))(y(q_{1,k_1}) - y(r)) H_{1;0;0}^{(0)}(r, q_{1,k_1})} \\ & \left\{ \sum_{h=1}^g H_{0;1;0}^{(h)}(r) H_{k_1, \dots, k_l; m; n}^{(g-h)}(S_1(r), S_2, \dots, S_l; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n) \right. \\ & + \sum_{A \cup B = \{2, \dots, l\}} \sum_{h, I, J} H_{k_1, \mathbf{k}_A; |I|; |J|}^{(h)}(S_1(r), \mathbf{S}_A; \mathbf{P}_I; \mathbf{Q}_J) H_{\mathbf{k}_B; m - |I| + 1; n - |J|}^{(g-h)}(\mathbf{S}_B; r, \mathbf{P}_{M/I}; \mathbf{Q}_{N/J}) \\ & + \sum_{A \cup B = \{2, \dots, l\}} \sum_{\alpha=2}^{k_1} \sum_{h, I, J} H_{k_1 - \alpha + 1, \mathbf{k}_B; m - |I|; n - |J|}^{(h)}(\{p_{1,\alpha}, q_{1,\alpha}, \dots, p_{1,k_1}, q_{1,k_1}\}, \mathbf{S}_B; \mathbf{P}_{M/I}; \mathbf{Q}_{N/J}) \\ & \quad \times \frac{H_{\alpha-1, \mathbf{k}_A; |I|; |J|}^{(g-h)}(\{r, q_{1,1}, \dots, p_{1,\alpha-1}, q_{1,\alpha-1}\}, \mathbf{S}_A; \mathbf{P}_I; \mathbf{Q}_J)}{x(p_{1,\alpha}) - x(r)} \\ & + \sum_{i=2}^l \sum_{\alpha=1}^{k_i} \frac{1}{x(p_{i,\alpha}) - x(r)} H_{k_1 + k_i, \mathbf{k}_L / \{1, i\}; m; n}^{(g)}(S_{1;i\alpha}(r), \mathbf{S}_L / \{1, i\}; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) \\ & + \sum_{\alpha=2}^{k_1} \frac{1}{x(p_{1,\alpha}) - x(r)} H_{\alpha-1, k_1 - \alpha + 1, \mathbf{k}_L / \{1\}; m; n}^{(g-1)}(S_{1|\alpha}(r), \mathbf{S}_L / \{1\}; \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) \\ & \left. + H_{\mathbf{k}_L; m+1; n}^{(g-1)}(\mathbf{S}_K(r); r, \mathbf{P}_M; \mathbf{Q}_N) \right\} \end{aligned} \quad (10-4)$$

où l'on a noté $S(r)$ lorsque l'on remplace $p_{1,1}$ par r dans S et $S_{1;i\alpha}$ pour le cycle obtenu en recollant S_1 et S_i à la position α de S_i :

$$S_{1;i\alpha} := \{S_1, p_{i,\alpha}, q_{i,\alpha}, p_{i,\alpha+1}, \dots, q_{i,k_i}, p_{i,1}, \dots, p_{i,\alpha-1}, q_{i,\alpha-1}\}. \quad (10-5)$$

Comme nous l'avons vu plus haut, ce système est triangulaire et admet une solution unique étant donnés $H_{1;0;0}^{(0)}$, $H_{0;1;0}^{(0)}$, $H_{0;0;2}^{(0)}$ et $H_{0;1;1}^{(0)}$ déjà déterminés dans la littérature de nombreuses fois (voir par exemple [43]).

10.1 Représentation diagrammatique

Nous allons à nouveau représenter ce résultat sous forme de diagramme en utilisant la représentation introduite dans la partie 4. Cette représentation a plusieurs avantages. Tout d'abord, elle permet de mettre en avant la structure de ce résultat et de bien voir que ce système d'équations est triangulaire. Elle est également très utile pour se souvenir du résultat qui semble a priori compliqué alors que sa structure est finalement assez simple. Enfin, cette représentation appelle une interprétation combinatoire et fait le lien entre les résultat précédemment obtenus sur l'ordre dominant des traces mixtes et le développement topologique des traces simples.

Blocs de base : deux nouveaux vertex

Représentons les fonctions de corrélation par des surfaces de genre g avec $l + m + n$ bords comme dans Eq. (4-1) :

$$H_{\mathbf{KL};m;n}^{(g)}(\mathbf{S}_L; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n) := \text{Diagram of a genus } g \text{ surface with } m \text{ marked points } p_1, \dots, p_m \text{ and } n \text{ marked points } q_1, \dots, q_n \text{ on its boundary. The boundary is divided into } l \text{ segments } S_1, S_2, S_3, \dots, S_l. \quad (10-6)$$

Introduisons également deux nouveaux vertex

- **Vertex fin :**

$$\text{Res}_{r \rightarrow p, \bar{q}^j} \frac{H_{1;0;0}^{(0)}(p, q)}{(x(p) - x(r))(y(q) - y(r))H_{1;0;0}^{(0)}(r, q)} := \text{Diagram of a vertex with an incoming edge } p \rightarrow q \text{ and two outgoing edges } r \text{ and } q. \quad (10-7)$$

- **Vertex épais :**

$$\text{Res}_{r \rightarrow p, \bar{q}^j, p'} \frac{H_{1;0;0}^{(0)}(p, q)}{(x(p) - x(r))(y(q) - y(r))(x(p') - x(r))H_{1;0;0}^{(0)}(r, q)} := \text{Diagram of a vertex with an incoming edge } p \rightarrow q \text{ and two outgoing edges } r \text{ and } p'. \quad (10-8)$$

Ces deux nouveaux vertex vont nous permettre de généraliser la représentation diagrammatique introduite précédemment. Nous aurons ainsi accès à une représentation graphique de toutes les fonctions de corrélation.

Représentation de la relation de récurrence.

La relation de récurrence Eq. (10-4) prend alors simplement la forme :

$$\begin{aligned}
 & \text{Surface}(g, S_1, S_2, \dots, S_m, p_1, p_2, \dots, p_m, q_1, q_2, \dots, q_n) \\
 &= P_{1,k_1} \rightarrow \text{Surface}(g-h, S_A, S_B, S_{L \setminus \{1,i\}}, q_{1,1}, q_{1,2}, \dots, q_{1,\alpha-1}, p_{1,2}, p_{1,\alpha-1}, p_{1,\alpha}, q_{1,\alpha+1}, p_{1,k_1}, p_{1,k_1}, r) \\
 &+ P_{1,k_1} \rightarrow \text{Surface}(g-1, S_2, \dots, S_1, q_{1,1}, q_{1,2}, \dots, q_{1,\alpha-1}, p_{1,\alpha-1}, p_{1,\alpha}, q_{1,\alpha+1}, p_{1,k_1}, p_{1,k_1}, r) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}
 \tag{10-9}$$

10.2 Retour sur le développement topologique des traces simples.

Ces relations générales doivent contenir les règles de récurrence pour les traces simples Eq. (9-23) puisque les traces simples peuvent être obtenues en étudiant le comportement des traces mixtes lorsque l'une des variables tend vers l'infini :

$$\left\langle \text{Tr} \frac{1}{x(p) - M_1} \frac{1}{y(q) - M_2} \right\rangle \sim_{q \rightarrow \infty_y} \frac{1}{y(q)} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x(p) - M_1} \right\rangle. \quad (10-10)$$

Plus précisément, les fonctions de corrélation simples et mixtes sont liées par le lemme

Lemme 10.1 *Les fonctions de corrélations simples peuvent être obtenues à partir des fonctions mixtes par :*

$$W_{k+1,0}^{(h)}(p, \mathbf{PK}) = \text{Res}_{q \rightarrow \infty_y} \frac{H_{1;k;0}^{(h)}(p, q; \mathbf{PK}) dy(q)}{H_{1;0;0}^{(0)}(p, q)}. \quad (10-11)$$

La fonction de corrélation n'ayant que des traces simples sauf une trace mixte est donnée par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} H_{1;k;0}^{(g)}(p, q; \mathbf{PK}) &= \text{Res}_{r \rightarrow p, \tilde{q}^j, \mathbf{PK}} \frac{H_{1;0;0}^{(0)}(p, q)}{(x(p) - x(r))(y(r) - y(q))H_{1;0;0}^{(0)}(r, q)} \left(H_{1;k+1;0}^{(g-1)}(r, q; r, \mathbf{PK}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{h,l} H_{0;l+1;0}^{(h)}(r, \mathbf{PL}) H_{1;k-l;0}^{(g-h)}(r, q; \mathbf{PK/L}) \right). \end{aligned} \quad (10-12)$$

Par définition, l'application du lemme 10.1 à cette relation redonne les relations de récurrence Eq. (9-27) qui n'en sont donc qu'un cas particulier. Cette propriété signifie que le passage à la limite $y \rightarrow \infty$ consiste à "écraser" le propagateur épais associé à y pour le rendre fin comme pour les fonctions de corrélation simples.

10.3 Retour sur la limite planaire des traces mixtes.

Lorsque l'on s'intéresse seulement au calcul de l'ordre dominant des traces mixtes la relation de récurrence se referme sur les $H_k := H_{k;0;0}^{(0)}$ et devient

$$\begin{aligned} H_k(p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_k, q_k) &= \\ &= \text{Res}_{r \rightarrow \tilde{q}_k^j, p_i} \frac{H_1(p_1, q_k)}{(x(p_1) - x(r))(y(q_k) - y(r))H_1(r, q_k)} \times \\ &\quad \times \sum_{l=2}^k \frac{H_{l-1}(r, q_1, p_2, q_2, \dots, q_{l-1}) H_{k-l+1}(p_l, q_l, \dots, p_k, q_k)}{x(p_l) - x(r)}. \end{aligned} \quad (10-13)$$

Cette formule semble faire explicitement appel à la structure de la courbe spectrale classique. Cependant nous allons montrer qu'elle peut simplement être ramenée à la relation de récurrence Eq. (7-20).

En effet, on peut mettre cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned}
H_k &= \sum_{l=2}^k \operatorname{Res}_{r \rightarrow \tilde{q}_k^j, p_l} \frac{H_1(p_1, q_k) H_{l-1}(r, q_1, \dots, q_{l-1}) H_{k-l+1}(p_l, \dots, q_k)}{(x(p_1) - x(r))(y(q_k) - y(r))(x(p_l) - x(r)) H_1(r, q_k)} \\
&= \sum_{l=2}^k \operatorname{Res}_{r \rightarrow \tilde{q}_k^j, p_l} \frac{H_1(p_1, q_k) H_{l-1}(r, q_1, \dots, q_{l-1}) H_{k-l+1}(p_l, \dots, q_k)}{(x(p_1) - x(r))(x(p_l) - x(r)) H_1(r, q_k)} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{(y(q_k) - y(r))} - \frac{1}{(y(q_k) - y(q_1))} + \frac{1}{(y(q_k) - y(q_1))} \right) \\
&= \sum_{l=2}^k \left[\operatorname{Res}_{r \rightarrow \tilde{q}_k^j, p_l, p_1} \frac{H_1(p_1, q_k) H_{l-1}(r, q_1, \dots, q_{l-1}) H_{k-l+1}(p_l, \dots, q_k)}{(x(p_1) - x(r))(x(p_l) - x(r))(y(q_k) - y(q_1)) H_1(r, q_k)} \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{Res}_{r \rightarrow \tilde{q}_k^j, p_l, p_1} \frac{H_1(p_1, q_k) H_{k-l+1}(p_l, \dots, q_k) (y(r) - y(q_1)) H_{l-1}(r, q_1, \dots, q_{l-1})}{(x(p_1) - x(r))(x(p_l) - x(r))(y(q_k) - y(q_1))(y(q_k) - y(r)) H_1(r, q_k)} \right] \\
(10-14)
\end{aligned}$$

Or, $(y(r) - y(q_1)) H_{l-1}(r, q_1, \dots, q_{l-1})$ et $(y(q_k) - y(r)) H_1(r, q_k)$ sont des polynômes en $x(r)$. L'intégrand dans le second terme est donc une fraction rationnelle en $x(r)$. On peut facilement vérifier que le contour d'intégration entoure tous ses pôles dans le plan complexe et ce second terme est donc nul. Le premier terme ne présente quant à lui que des pôles simples et on retrouve donc

$$H_k = \sum_{l=2}^k \operatorname{Res}_{r \rightarrow p_l, p_1} \frac{H_1(p_1, q_k) H_{l-1}(r, q_1, \dots, q_{l-1}) H_{k-l+1}(p_l, \dots, q_k)}{(x(p_1) - x(r))(x(p_l) - x(r))(y(q_k) - y(q_1)) H_1(r, q_k)} \quad (10-15)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation Eq. (7-31) avec les rôles de x et y inversés.

10.4 Interprétation des relations de récurrence.

Cette représentation sous forme de diagrammes des fonctions de corrélation, c'est-à-dire des fonction génératrices de surfaces discrétisées, pose la question de l'existence d'une théorie des champs sous-jacente dont les graphes présentés ici seraient les diagrammes de Feynman. En fait, une telle théorie n'existe probablement pas. En effet, le nombre de diagrammes ainsi créés croît beaucoup moins vite avec le nombre de boucles que ce que l'on devrait obtenir avec une théorie des champs standard. Ceci est lié aux prescriptions fortement non-locales dans la construction des diagrammes participant aux traces simples.

Par contre, il existe une façon de se rappeler simplement les différents termes apparaissant dans le terme de droite des relations de récurrences Eq. (10-4). Le terme de gauche $H_{\mathbf{kL};m;n}^{(g)}(\mathbf{S}_L; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n)$ représentant la fonction génératrices de

toutes les surfaces $\mathcal{S}_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(g)}$ du type

$$\mathcal{S}_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(g)} = \text{Diagram} \quad (10-16)$$

on peut le voir comme une intégrale sur l'espace des modules $\mathcal{M}_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(g)}$ de telles surfaces. Le terme de droite peut alors être vu comme les termes de bords venant de cette intégrale, c'est-à-dire la somme sur toutes les surfaces dégénérées de cet ensemble. Ils sont donc obtenus de manière pratique en "pinçant" tous les chemins non triviaux possibles sur la surface $\mathcal{S}_{\mathbf{k}_L; m; n}^{(g)}$. On voit alors qu'il existe plusieurs chemins ayant des rôles non équivalents :

- On peut tout d'abord pincer un cycle non trivial sur la surface. Deux cas de figure se présentent : soit l'on découpe ainsi la surface en deux composantes :

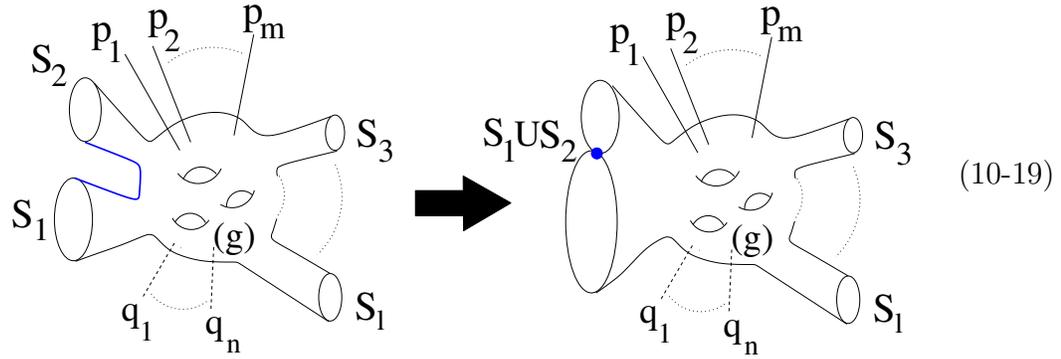
$$\text{Diagram} \rightarrow \text{Diagram} \quad (10-17)$$

et l'on obtient le premier terme de Eq. (10-4) ; soit l'on pince juste une jambe interne :

$$\text{Diagram} \rightarrow \text{Diagram} \quad (10-18)$$

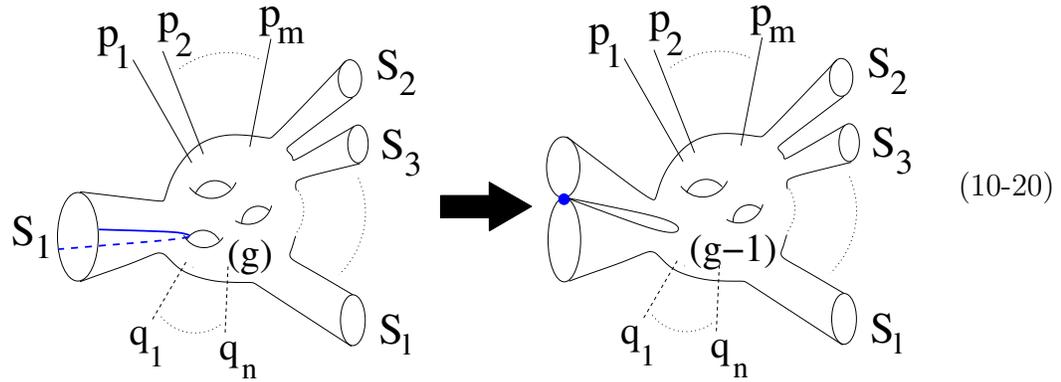
et l'on obtient le cinquième terme de Eq. (10-4).

- On peut également pincer un chemin allant d'un cycle S_i à un autre cycle S_j :



pour obtenir le troisième terme de Eq. (10-4)²⁷.

- Enfin, on peut pincer un cycle S_i lui-même



pour obtenir les deuxièmes et quatrièmes termes de Eq. (10-4) selon si cette dégénérescence coupe la surface en deux parties ou non.

11 Conclusion du chapitre.

Dans ce chapitre, nous avons montré comment résoudre entièrement le modèle à deux matrices hermitiennes, c'est-à-dire comment calculer tous les termes du développement topologique de toutes les fonctions de corrélation du modèle. Cette méthode de résolution, utilisant avantageusement le langage de la géométrie algébrique, présente plusieurs avantages :

- Elle est systématique et montre bien que toutes les observables du modèle à deux matrices hermitiennes ne dépendent que de la courbe spectrale et plus particulièrement de ses points de branchements. Le résultat prend la même forme que l'on soit dans un cas à une ou plusieurs coupures.
- Contrairement à d'autres méthodes de résolutions comme celle développée originellement dans [8], celle-ci est facilement programmable pour une résolution automatique. En effet, une fois la courbe spectrale connue, il suffit de calculer

²⁷Notons que ce cas est le seul correspondant à la règle merge des équations de boucles.

le noyau de Bergmann et effectuer des développements de Taylor au voisinage des points de branchement : il n'est pas nécessaire de reconstruire une base dans laquelle travailler à chaque étape du calcul.

- Comme on peut représenter le résultat de cette méthode sous forme de graphes, il est assez facile à retrouver avec très peu d'éléments (il suffit de connaître la valeur des vertex et propagateurs). En effet, on peut retrouver la forme des équations de récurrence grâce à une analogie avec les surfaces générées par les fonctions de corrélation et leurs dégénérescences possibles.

Si le modèle à deux matrices formel est résolu en termes de sa courbe spectrale ce chapitre appelle également des questions. D'une part, il serait intéressant de pouvoir utiliser ces résultats pour faire le lien avec ceux obtenus dans l'étude de l'intégrale convergente en s'intéressant aux effets d'instantons interdits dans le cas formel. D'autre part, si ces règles diagrammatiques sont efficaces, leur interprétation est plus délicate et nous ne sommes pas en mesure pour le moment d'expliquer leur origine combinatoire (ou géométrique). Enfin, la simplicité du résultat en terme de la courbe spectrale classique laisse supposer que cette méthode doit pouvoir s'adapter à d'autres modèles de matrices : c'est ce que nous montrons dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Autres modèles de matrices.

Le modèle à deux matrices hermitiennes est un modèle de matrices aléatoires particulier parmi bien d'autres. Cependant, la structure algébrique présentée dans le chapitre précédent est présente dans d'autres modèles de matrices hermitiennes. Dans ce chapitre, nous étudions d'autres exemples de modèles de matrices classiques reposant sur une même structure algébrique : chacun de ces modèles a une interprétation combinatoire et peut être associé et totalement caractérisé par une courbe algébrique et des fractions de remplissage. On peut alors montrer qu'ils peuvent être résolus par la même méthode que le modèle à deux matrices.

Si ces modèles présentent les propriétés nécessaires pour une résolution algébrique, la raison n'en est pas encore claire. Bien évidemment de tels miracles sont liés aux propriétés d'intégrabilité des modèles considérés mais le lien profond entre une intégrale de matrice donnée et l'existence d'une éventuelle structure algébrique associée n'est pour l'instant pas claire. On peut, par exemple, se demander si de tels résultats peuvent être étendus à des modèles équivalents avec des matrices appartenant à un autre groupe : par exemple à des matrices quaternioniques ou réelles symétriques. Nous ne discuterons pas cette question ici puisque la réponse n'en est pas encore connue en général : on a seulement observé, au cas par cas, que l'on retrouvait une structure similaire pour plusieurs modèles différents.

1 Modèle à une matrice.

Le modèle à une matrice hermitienne est très proche du modèle à deux matrices¹. Pour le définir, considérons la fonction de partition \mathcal{Z}_{1MM} définie par l'intégrale de matrices formelle

$$\mathcal{Z}_{1MM} := \int dM e^{-\frac{N}{T} \text{Tr} V(M)}, \quad (1-1)$$

¹En effet, comme nous le verrons dans la partie 1.4, ce modèle est un cas particulier du précédent.

où $V(x)$ est un potentiel dont la dérivée est une fonction rationnelle donnée par ses zéros $\{X_i\}_{i=1\dots d}$ et son dénominateur $D(x)$:

$$V'(x) = \frac{\prod_{i=1}^d (x - X_i)}{D(x)}, \quad (1-2)$$

et l'intégrale sur les matrices hermitiennes de taille $N \times N$ est à comprendre au sens formel de manière similaire à l'intégrale à deux matrices Eq. (1-2) du chapitre précédent.

Pour cela, choisissons une partition de N à d éléments :

$$\vec{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_d\} \quad (1-3)$$

telle que

$$N = \sum_{i=1}^d n_i, \quad (1-4)$$

à laquelle on associe une matrice diagonale

$$M_{\vec{n}} = \left(\overbrace{X_1, \dots, X_1}^{n_1}, \dots, \overbrace{X_d, \dots, X_d}^{n_d} \right) \quad (1-5)$$

solution de $V'(M_{\vec{n}}) = 0$. Décomposons également le potentiel $V(M_{\vec{n}} + M)$ en mettant à part sa partie quadratique en M dans son développement de Taylor pour un petit M :

$$\text{Tr } V(M) = \text{Tr} (V(M_{\vec{n}}) + V_{quad}(M) + \delta V(M)) \quad (1-6)$$

où $V_{quad}(M)$ contient tous les termes quadratiques en M . Le développement en série de la partie non quadratique s'écrit comme une série formelle

$$\exp -\frac{N}{T} \delta V(M) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T^{-j} N^j (\delta V(M))^j. \quad (1-7)$$

On définit alors la fonction de partition du modèle à une matrice comme la série formelle :

$$\mathcal{Z}_{1MM} := \sum_{k=0}^{\infty} T^k \sum_{j=0}^{2k} A_{k,j} \quad (1-8)$$

où les coefficients $A_{k,j}$ sont des polynômes de Laurent en N^2 définis par les valeurs moyennes par rapport à la mesure gaussienne $\exp(-\frac{N}{T} V_{quad}(M)) dM$ des termes du développement en série de Eq. (1-7) :

$$\frac{\int dM e^{-\frac{N}{T} V_{quad}(M)} \frac{1}{j!} T^{-j} N^j (\delta V(M))^j}{\int dM e^{-\frac{N}{T} V_{quad}(M)}} := \sum_{k=\frac{j}{2}}^{\frac{dj}{2}-1} A_{k,j} T^k. \quad (1-9)$$

Ce modèle, à première vue bien plus simple que le précédent, présente déjà beaucoup des ingrédients nécessaires à la résolution de ce dernier. Il a donc souvent servi de

premier test pour des nouvelles méthodes de résolutions. Ainsi, depuis l'introduction du développement topologique (et donc du modèle formel) dans [22], le modèle a été résolu par étapes successives. Il a d'abord été montré dans le cas à une coupure dans [99, 8, 25] que les observables du modèle sont plus facilement décrites en termes des points de branchements d'une courbe algébrique associée : la courbe spectrale. Cette méthode a été récemment améliorée par la technique diagrammatique développée par Eynard dans [42] permettant de calculer le développement topologique de toutes les fonctions de corrélation quel que soit le nombre de coupures. C'est cette méthode qui a servi de base à tous les travaux présentés dans cette thèse. Elle a ensuite été étendue dans [27] pour donner accès au développement topologique de l'énergie libre.

Dans cette partie, nous présentons donc les résultats obtenus dans ces deux articles [42, 27] par Chekhov et Eynard.

1.1 Interprétation combinatoire.

Tout comme le modèle à deux matrices, l'intégrale formelle \mathcal{Z}_{1MM} a une interprétation combinatoire en termes de comptage de cartes, i.e. de surfaces composées de polygones. En effet, de manière analogue on peut voir cette intégrale comme le développement en diagrammes de Feynman épais autour d'un point col gaussien. Alors, \mathcal{Z}_{1MM} est la fonction génératrice de toutes les surfaces fermées composées de polygones avec au plus d côtés. Comme il n'y a plus qu'une matrice, les polygones ne portent plus ici de spins.

On peut ainsi définir l'**énergie libre** comme la fonction génératrice des surfaces fermées connexes :

$$\mathcal{F}_{1MM} := -\frac{1}{N^2} \ln(\mathcal{Z}_{1MM}), \quad (1-10)$$

ainsi que les **fonctions de corrélation** à k points, $W_k(\mathbf{x}_K)$, comme les fonctions génératrices des surfaces avec k bords :

$$W_k(\mathbf{x}_K) := N^{k-2} \left\langle \prod_{i=1}^k \text{Tr} \frac{1}{x_i - M} \right\rangle_c. \quad (1-11)$$

On peut également sélectionner le genre h des surfaces générées en écrivant les développements topologiques respectifs de ces fonctions :

$$\mathcal{F}_{1MM} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} F^{(h)} \quad \text{et} \quad W_k(\mathbf{x}_K) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h-k} W_k^{(h)}. \quad (1-12)$$

1.2 Courbe spectrale classique.

Equations de boucles.

Considérons l'équation de boucles associée au changement de variable $\delta M = \frac{1}{x-M}$. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$Y(x)^2 - \frac{1}{N^2} W_2(x, x) = \frac{V'(x)^2}{4} - \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{V'(x) - V(M)}{x - M} \right\rangle \quad (1-13)$$

où l'on a défini la fonction $Y(x) = \frac{V'(x)}{2} - \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M} \right\rangle$.

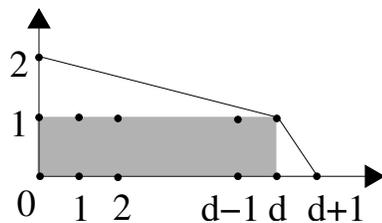


FIG. 3.1 – Le polytope de la courbe spectrale classique du modèle à une matrice.

En oubliant le terme en $\frac{1}{N^2}$, on construit la courbe spectrale classique associée au modèle à une matrice :

$$\mathcal{E}_{1MM}(x, y) = D(x)^2(y^2(x) - \frac{V'(x)^2}{4} + P(x)) \quad (1-14)$$

où $D(x)P(x)$ est un polynôme de degré au plus $d - 1$. Il est complètement fixé par le choix des fractions de remplissage \vec{n} par la prescription :

$$\forall i, \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_i} Y^{(0)}(x)dx = \frac{n_i T}{N} \quad (1-15)$$

pour un choix de base de cycles canonique $\{\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i\}$ sur $\mathcal{E}_{1MM}(x, y)$ et le comportement à petit T :

$$Y^{(0)}(x) \sim \frac{V'(x)}{2} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{x - X_i} + O(T^2). \quad (1-16)$$

Propriétés de la courbe spectrale.

La courbe spectrale $\mathcal{E}_{1MM}(x, y)$ est une courbe hyperelliptique puisque quadratique en l'une de ses variables. Cette simple observation a plusieurs implications directes qui permettent de simplifier son étude et la description des fonctions qu'elle engendre.

Comme dans le cas du modèle à deux matrices, \mathcal{E}_{1MM} peut être vue comme une surface de Riemann compacte $\bar{\Sigma}_{1MM}$ munie de deux fonctions méromorphes x et y de $\bar{\Sigma}_{1MM}$ dans \mathbb{C} telles que :

$$\forall p \in \bar{\Sigma}_{1MM}, \mathcal{E}_{1MM}(x(p), y(p)) = 0. \quad (1-17)$$

La simple lecture du polytope de \mathcal{E}_{1MM} de la figure 3.1 nous permet de voir que le genre maximal de \mathcal{E}_{1MM} est $d - 1$ et qu'il existe deux points à l'infini sur cette courbe comme dans le cas du modèle à deux matrices : ∞_x et ∞_y . Ces deux points sont caractérisés par le comportement de la fonction $y(x)$ en leur voisinage :

$$ydx \sim_{\infty_x} V'(x)dx \quad \text{et} \quad y \text{ a un pôle simple en } \infty_y. \quad (1-18)$$

La propriété d'hyperellipticité de la courbe spectrale en elle même signifie qu'il n'y a que deux feuilletés en x . En effet, pour un x générique fixé, $\mathcal{E}_{1MM}(x, y)$ est un polynôme

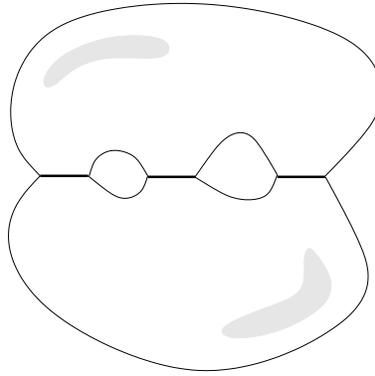


FIG. 3.2 – Exemple de courbe hyperelliptique avec 6 points de branchement. Elle forme une surface de genre 2.

de degrés 2 en y et l'équation $\mathcal{E}_{1MM}(x, y) = 0$ a deux solutions en y . Cependant, pour certaines valeurs particulières de x , cette équation peut avoir un unique zéro double en y : les deux feuillets se rejoignent donc en ces points $x(a_i)$, les **points de branchements**. Ils peuvent être caractérisés par l'annulation de la différentielle $dx(a_i) = 0$ en leur relèvement sur la surface $\bar{\Sigma}_{1MM}$ par la fonction x . La courbe \mathcal{E}_{1MM} peut donc être vue comme deux copies de la sphère de Riemann collées selon des coupures joignant les différents points de branchements (voir figure 3.2).

Remarque 1.1 Le nombre de points de branchements est directement lié au genre de $\bar{\Sigma}_{1MM}$ par la formule de Riemann-Hurwitz :

$$\text{Genre} = -1 + \frac{\text{Nombre de points de branchements}}{2}. \quad (1-19)$$

Pour tout point p de $\bar{\Sigma}_{1MM}$, il existe donc un unique autre point \bar{p} avec la même projection selon x :

$$\forall p \in \bar{\Sigma}_{1MM}, \exists! \bar{p} \text{ tel que } x(p) = x(\bar{p}). \quad (1-20)$$

La forme de la courbe $y^2 = f(x)$, permet même de dire que les valeurs de y dans les deux feuillets sont opposées

$$y(p) = -y(\bar{p}), \quad (1-21)$$

le choix d'un feuillet consistant à choisir l'une des deux racine de $f(x)$. Ainsi, les points de branchements coïncident avec les zéros de la fonction y .

La notation de \bar{p} pour représenter la deuxième solution de $\mathcal{E}_{1MM}(x(p), y) = 0$ n'a pas été prise au hasard puisqu'elle fait référence au point conjugué défini dans la partie 8.1 du chapitre 2. En effet, dans le cas d'une courbe hyperelliptique, puisqu'il n'existe que deux feuillets, l'application qui, à un point p associe son point conjugué \bar{p} , est globalement définie et elle coïncide avec la définition donnée ici.

1.3 Solution des équations de boucles.

On peut montrer que la méthode utilisée pour résoudre le modèle à deux matrices fonctionne encore pour le modèle à une matrice et que les développements topologiques

des fonctions de corrélation et de l'énergie libre sont donnés par le système triangulaire de relations de récurrence :

Théorème 1.1 *Les termes du développement topologique des fonctions de corrélation sont récursivement définis par*

$$\boxed{W_{k+1}^{(h)}(q, p_K) = \sum_{\alpha} \operatorname{Res}_{p \rightarrow \mu_{\alpha}} \frac{\frac{1}{2} dE_{p, \bar{p}}(q)}{(y(p) - y(\bar{p})) dx(p)} \left(W_{k+1}^{(h-1)}(p, \bar{p}, p_K) + \sum_{j,m} W_{j+1}^{(m)}(p, p_J) W_{k+1-j}^{(h-m)}(\bar{p}, p_{K-J}) \right),} \quad (1-22)$$

et ceux de l'énergie libre par

$$\forall h > 1, (2h - 2)F^{(h)} = H_x \cdot W_1^{(h)}, \quad (1-23)$$

avec l'opérateur H_x défini par son action sur une forme différentielle ϕ :

$$H_x \cdot \phi := \operatorname{Res}_{\infty_x} V_1(x) \phi + \operatorname{Res}_{\infty_y} xy \phi + \int_{\infty_x}^{\infty_y} \phi + \sum_i \epsilon_i \oint_{B_i} \phi. \quad (1-24)$$

On peut noter une légère simplification de ces règles grâce à l'hyperellipticité de la courbe qui assure une définition globale de \bar{p} satisfaisant :

$$\boxed{y(p) - y(\bar{p}) = 2y(p).} \quad (1-25)$$

Les premiers termes du développement topologique de l'énergie libre sont connus depuis longtemps (voir par exemple [25, 45, 17]) et s'écrivent :

Théorème 1.2

$$F^{(0)} = -\frac{1}{2} H_x \cdot y dx \quad (1-26)$$

et

$$F^{(1)} = \frac{-1}{2} \ln(\tau_{Bx}) - \frac{1}{24} \ln \left(\prod_i \frac{dy}{dz_i}(a_i) \right) \quad (1-27)$$

où τ_{Bx} est la fonction τ de Bergmann associée à x définie par Eq. (8-52) du chapitre 2.

1.4 Lien avec le modèle à deux matrices.

Revenons au modèle à deux matrices défini dans le chapitre précédent en considérant le cas particulier où l'un des potentiels est quadratique, par exemple :

$$V_2(y) := y^2. \quad (1-28)$$

On peut alors réécrire l'intégrale formelle Eq. (1-2) du chapitre 2 sous la forme :

$$\mathcal{Z} = \int dM_1 e^{-\frac{1}{\hbar} \operatorname{Tr} V_1(M_1)} \int dM_2 e^{-\frac{1}{\hbar} \operatorname{Tr} \left[\left(M_2 - \frac{M_1}{2} \right)^2 - \frac{M_1^2}{4} \right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \int dM_1 e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr} \left(V_1(M_1) - \frac{M_1^2}{4} \right)} \int dM e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr} M^2} \\
&\propto \int dM_1 e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr} \left(V_1(M_1) - \frac{M_1^2}{4} \right)} \\
(1-29)
\end{aligned}$$

où l'on est passé de la première ligne à la deuxième par un simple changement de variables dans la seconde intégrale et le coefficient de proportionnalité de la dernière ligne est simplement l'intégrale gaussienne sur M de la seconde ligne.

On voit ainsi que le modèle à une matrice est équivalent à un modèle à deux matrices dont l'un des potentiels est gaussien. Il est facile de vérifier que tous les éléments décrits dans cette partie à propos du modèle à une matrice coïncident bien avec les résultats d'un modèle à deux matrices avec potentiel quadratique. On peut par exemple vérifier que la courbe spectrale classique du modèle à deux matrices se réduit à celle du modèle à une matrice si V_2 est quadratique. Toutes les autres propriétés de cette partie peuvent en être dérivées.

2 Modèle de matrices en champ extérieur.

2.1 Définition et interprétation combinatoire.

Dans cette partie, nous abordons le modèle à une matrice en champ extérieur défini par l'intégrale formelle [109] :

$$Z_{\text{Mext}}(\hat{\Lambda}) = \int_{H_n} dM e^{-N \text{Tr}(V(M) - M\hat{\Lambda})} \quad (2-1)$$

où $V'(x) = \frac{\sum_{k=0}^d g_k x^k}{D(x)}$ est une fraction rationnelle de dénominateur $D(x)$, et $\hat{\Lambda}$ est une matrice extérieure de taille $N \times N$ supposée diagonale :

$$\hat{\Lambda} = \text{diag} \left(\overbrace{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_1}^{n_1}, \overbrace{\hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_2}^{n_2}, \dots, \overbrace{\hat{\lambda}_s, \dots, \hat{\lambda}_s}^{n_s} \right). \quad (2-2)$$

Ce modèle a une importance particulière du point de vue mathématique. En effet, le cas particulier où $V(x) = x^3$ et $\hat{\Lambda} = \Lambda^2$ a été introduit par Kontsevich [72] dans un contexte tout à fait différent pour calculer les nombres d'intersections de surfaces de Riemann. Ce rapprochement entre deux problèmes a priori très éloignés est principalement due au fait que l'on peut construire une bijection entre l'ensemble des classes de Chern des surfaces de Riemann et les cartes avec des bords marqués et que l'intégrale de Kontsevich est une réalisation explicite de la fonction τ de la hiérarchie intégrable de KdV [72].

De plus, ce modèle a été lié au précédent. En effet, en se basant sur une comparaison des équations de boucles, il a été montré que l'on pouvait obtenir cette intégrale comme le carré d'une double limite d'échelle d'un modèle à une matrice [83], avant de montrer qu'elle peut être obtenue également directement comme le résultat d'une autre double limite d'échelle du modèle à une matrice [10].

En fait, en considérant un modèle à une matrice en champ extérieur, on pourra avoir accès aux fonctions τ de n'importe quelle réduction de la hiérarchie KP et l'on ne sera pas limité à KdV . Ceci semble indiquer que le résultat des doubles limites d'échelles du modèle à deux matrices est contenu dans l'ensemble des modèles à une matrice en champ extérieur.

Dans cette partie, nous montrons comment on peut appliquer exactement la même méthode que précédemment pour résoudre ce modèle.

2.2 Résolution du modèle.

Comme dans les modèles à une et deux matrices, on définit de manière analogue les développements topologiques de l'énergie libre et des fonctions de corrélation par :

$$\bar{w}_k(x_1, \dots, x_k) := N^{k-2} \left\langle \prod_{i=1}^k \operatorname{tr} \frac{1}{x_i - M} \right\rangle_c + \frac{\delta_{k,2}}{(x_1 - x_2)^2}, \quad (2-3)$$

$$\bar{w}_k(\mathbf{x}_K) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2h}} \bar{w}_k^{(h)}(\mathbf{x}_K) \quad (2-4)$$

et

$$\mathcal{F}_{\text{Mext}} := -\frac{1}{N^2} \ln Z_{\text{Mext}} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} F_{\text{Mext}}^{(h)}. \quad (2-5)$$

Il est aussi important d'introduire le polynôme minimal de $\hat{\Lambda}$:

$$S(y) := \prod_{i=1}^s (y - \hat{\lambda}_i), \quad (2-6)$$

ainsi que les deux polynômes

$$u_k(x, y; \mathbf{x}_K) := N^{k-1} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M} \frac{S(y) - S(\Lambda)}{y - \Lambda} \prod_{r=1}^k \operatorname{tr} \frac{1}{x_{i_r} - M} \right\rangle_c - \delta_{k,0} S(y) \quad (2-7)$$

et

$$P_k(x, y; \mathbf{x}_K) := N^{k-1} \left\langle \operatorname{tr} \frac{V'(x) - V'(M_1)}{x - M} \frac{S(y) - S(\Lambda)}{y - \Lambda} \prod_{r=1}^k \operatorname{tr} \frac{1}{x_{i_r} - M} \right\rangle_c. \quad (2-8)$$

On voit que $u_k(x, y; \mathbf{x}_K)$ est un polynôme en y de degré $s - 1$ et que $D(x)P_k(x, y; \mathbf{x}_K)$ est un polynôme en x de degré $d - 1$ et en y de degré $s - 1$.

Equation de boucles maîtresse et courbe spectrale classique.

Le changement de variable

$$\delta M = \frac{1}{x - M} \frac{S(y) - S(\Lambda)}{y - \Lambda} \quad (2-9)$$

donne l'équation de boucles

$$(y + \bar{w}_1(x) - V'(x))(u_0(x, y) - S(y)) + \frac{1}{N^2} u_1(x, y; x) = (V'(x) - y)S(y) - P_0(x, y). \quad (2-10)$$

On définit la **courbe spectrale** du modèle de matrice en champ extérieur par

$$E_{\text{Mext}}(x, y) := ((V'(x) - y)S(y) - P_0(x, y)) D(x) \quad (2-11)$$

et la fonction

$$Y(x) := V'(x) - \bar{w}_1(x). \quad (2-12)$$

L'équation de boucles Eq. (2-10) s'écrit alors

$$E_{\text{Mext}}(x, Y(x)) = \frac{1}{N^2} u_1(x, Y(x); x) D(x) \quad (2-13)$$

et devient une équation algébrique à l'ordre dominant dans le développement en $\frac{1}{N^2}$:

$$E_{\text{Mext}}^{(0)}(x, Y(x)) = 0 \quad (2-14)$$

définissant ainsi la **courbe spectrale classique** de ce modèle.

Propriétés de la courbe spectrale classique.

Etudions les propriétés de la courbe algébrique $\mathcal{E}_{\text{Mext}}(x, y) = E_{\text{Mext}}^{(0)}(x, y) = 0$.

Puisque y est solution d'une équation de degré $s + 1$ à x fixé, la courbe $\mathcal{E}_{\text{Mext}}(x, y)$ présente $s + 1$ feuillets en x . Ceux-ci peuvent être discriminés par le comportement de $x(p)$ lorsque p approche un pôle :

- dans le feuillet physique, $y(p) \sim V'(x(p)) - 1/x + O(1/x^2(p))$ quand $x(p) \rightarrow \infty$;
- Dans les autres feuillets, $y(p) \sim \hat{\lambda}_i + \frac{n_i}{N} \frac{1}{x(p)} + O(1/x^2(p))$.

La courbe $\mathcal{E}_{\text{Mext}}$ est de genre maximal $g \leq s - 1$ et on définit les fractions de remplissages comme des paramètres du modèle :

$$\epsilon_i := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_i} y dx. \quad (2-15)$$

Equations de boucles et développement topologique.

Comme précédemment, on préfère travailler avec des fonctions de corrélations définies comme des différentielles sur la courbe spectrale classique plutôt qu'avec des fonctions multivaluées dans le plan complexe. On définit donc :

$$W_k(\mathbf{p}_K) := \bar{w}_k(\mathbf{x}(\mathbf{p}_K)) dx(p_1) \dots dx(p_k) \quad (2-16)$$

et

$$U_k(p, y; \mathbf{p}_K) := u_k(x(p), y; \mathbf{x}(\mathbf{p}_K)) dx(p) dx(p_1) \dots dx(p_k) \quad (2-17)$$

de même que leur développements topologiques :

$$W_k(\mathbf{pK}) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} W_k^{(h)}(\mathbf{pK}) \quad \text{and} \quad U_k(p, y; \mathbf{pK}) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} U_k^{(h)}(p, y; \mathbf{pK}). \quad (2-18)$$

Le développement topologique de Eq. (2-13) donne pour $h > 1$:

$$\begin{aligned} E^{(h)}(x, y) &= D(x)(y - Y(x))u_0^{(h)}(x, y) + D(x)w_{1,0}^{(h)}(x)u_0^{(0)}(x, y) \\ &\quad + D(x) \sum_{m=1}^{h-1} w_{1,0}^{(m)}(x)u_0^{(h-m)}(x, y) + D(x)u_1^{(h-1)}(x, y; x), \end{aligned} \quad (2-19)$$

où $E^{(h)}(x, y)$ est le développement topologique du polynôme E_{Mext} .

Cette équation est suffisante pour démontrer le théorème :

Théorème 2.1

$$\begin{aligned} E_{\text{Mext}}(x, y) &= \\ -D(x) \left\langle \prod_{i=0}^s (y - V'(x(p)) + \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{x(p^{(i)}) - M}) \right\rangle'' &= D(x) [(V'(x) - y)S(y) - P_0(x, y)] \end{aligned} \quad (2-20)$$

et

$$U_0(p, y) = - \left\langle \prod_{i=1}^s (y - V'(x(p)) + \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{x(p^{(i)}) - M}) \right\rangle'' \quad (2-21)$$

où " $\langle . \rangle''$ " est défini comme dans le théorème 9.1.

Preuve:

La preuve est complètement similaire à celle du théorème 9.1 du chapitre 2. \square

Comme dans les cas précédents, cette propriété nous permet de montrer que les équations de boucles sont résolues par le système triangulaire de définitions :

$$\begin{aligned} W_{k+1}^{(h)}(q, pK) &= \sum_{\alpha} \text{Res}_{p \rightarrow \mu_{\alpha}} \frac{\frac{1}{2} dE_{p, \bar{p}}(q)}{(y(p) - y(\bar{p})) dx(p)} \left(W_{k+1}^{(h-1)}(p, \bar{p}, pK) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j,m} W_{j+1}^{(m)}(p, pJ) W_{k+1-j}^{(h-m)}(\bar{p}, pK-J) \right), \end{aligned} \quad (2-22)$$

avec la donnée initiale de la fonction à deux points :

$$W_2^{(0)}(p_1, p_2) = \underline{B}(p_1, p_2), \quad (2-23)$$

où les notations sont les mêmes que dans les parties précédentes pour des objets définis cette fois ci sur la courbe algébrique $\mathcal{E}_{\text{Mext}}$.

On obtient également ainsi le développement topologique de l'énergie libre :

$$\forall h > 1, F_{\text{Mext}}^{(h)} = \frac{1}{2-2h} \text{Res}_{q \rightarrow \mathbf{a}} \phi(q) W_1^{(h)}(q), \quad (2-24)$$

où $\phi(q)$ est n'importe quelle primitive de ydq .

3 Conclusion du chapitre.

Nous avons montré dans ce chapitre comment il est possible d'appliquer la même procédure pour résoudre le modèle à une matrice et le modèle en champ extérieur que pour résoudre le modèle à deux matrices. Pour cela il suffit de **garder les mêmes résultats en changeant seulement la courbe spectrale**. On a donc obtenu une formule générale unique pour résoudre ces différents modèles de matrices formels.

Une première question se pose : à quelle catégorie de modèles de matrices peut-on appliquer la même procédure ? Pour le moment, la réponse à cette question n'est pas connue en général même si l'on connaît des modèles pour lesquels cette méthode semble fonctionner comme le modèle à plusieurs matrices couplées en chaîne.

Une autre question se pose alors : il paraît évident que l'on peut généraliser cette procédure au delà des modèles de matrices. A toute courbe algébrique, on peut associer des familles infinies d'énergies libres et de fonctions de corrélation par la même méthode. Que représentent alors ces objets lorsque la courbe algébrique n'est pas issue d'un modèle de matrice ? Ont-ils des propriétés particulières ? Nous tenterons de répondre autant que possible à ces questions dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Invariants algébriques.

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié différents modèles de matrices hermitiennes. Nous avons ainsi pu calculer les développements topologiques de l'énergie libre et des fonctions de corrélation respectifs de ces modèles. Etant donné un modèle, il était supposé depuis longtemps que les coefficients de ces développements pouvaient s'exprimer uniquement en termes des modules d'une courbe algébrique : la courbe spectrale classique associée au modèle considéré. Cependant il est plus surprenant que les résultats présentés précédemment montrent qu'il existe une formule unique pour résoudre ces différents modèles en changeant simplement la courbe algébrique sur laquelle travailler : c'est-à-dire que l'on est capable de définir des fonctions $F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Modele}})$ qui coïncident avec le développement de 't Hooft de l'énergie libre $F_{\text{Modele}}^{(g)}$ du modèle dont la courbe spectrale est $\mathcal{E}_{\text{Modele}}$.

Il est alors naturel de se poser la question d'une généralisation de cette procédure au delà des modèles de matrices. Etant donnée une courbe algébrique \mathcal{E} quelconque, nous définissons dans ce chapitre des nombres $F^{(g)}(\mathcal{E})$ par la même procédure que pour le calcul de l'énergie libre des modèles de matrices et étudions leurs propriétés. Tous les résultats présentés ici peuvent être trouvés dans [IV] avec les démonstrations associées.

Dans un premier temps, nous allons brièvement rappeler les différents paramètres définissant une courbe algébrique \mathcal{E} , c'est-à-dire les modules de notre problème. Nous définirons ensuite une famille de formes différentielles sur la courbe \mathcal{E} en imitant la résolution des équations de boucles des modèles de matrices hermitiennes. Nous nous attacherons ensuite à l'étude des variations de ces formes différentielles sous les déformations de la courbe algébrique. Nous montrerons enfin comment la connaissance de ces lois de déformation ainsi que des propriétés d'invariance en découlant, sont un outil très puissant, en particulier pour démontrer l'équivalence de différents modèles.

1 Définition des modules de la courbe.

Considérons une **courbe algébrique quelconque** définie comme dans la partie 8.1 du chapitre 2¹ par l'équation :

$$\mathcal{E}(x, y) = 0 \quad (1-1)$$

et qui peut être vue comme une surface de Riemann compacte Σ de genre donné \mathcal{G} muni de deux fonctions méromorphes x, y telles que :

$$\forall p \in \Sigma, \mathcal{E}(x(p), y(p)) = 0 \quad (1-2)$$

ainsi que d'une base symplectique de cycles $\{(\underline{\mathcal{A}}_i, \underline{\mathcal{B}}_i)\}_{i=1}^{\mathcal{G}}$.

Ceci fait, les pôles α_i de la forme différentielle ydx et les points de branchements a_i annulant $dx(a_i) = 0$ sont fixés. On peut alors décrire les modules de la courbe :

– Les fractions de remplissage :

$$\epsilon_i := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} ydx; \quad (1-3)$$

– Les températures :

$$t_{0,i} := \text{Res}_{\alpha_i} ydx; \quad (1-4)$$

– Les autres modules aux pôles : $t_{j,i}$ définis par les polynômes

$$V_i(z_{\alpha_i}(p)) := \sum_j t_{j,i} z_{\alpha_i}^j(p) := \text{Res}_{q \rightarrow \alpha_i} y(q) dx(q) \ln \left(1 - \frac{z_{\alpha_i}}{z_{\alpha_i}(q)} \right) \quad (1-5)$$

où $\frac{1}{z_{\alpha_i}}$ est une bonne variable locale au voisinage du pôle α_i indépendante de y .

2 Déformation par κ .

En plus de ces modules propres à la courbe algébrique elle-même, on introduit un paramètre supplémentaire permettant de changer la normalisation des fonctions de base.

Pour une **matrice symétrique quelconque** κ , on déforme les briques de bases de la construction des fonctions de corrélation du modèle à deux matrices en définissant :

Définition 2.1 *Pour toute matrice symétrique κ , on définit le noyau de Bergmann κ -déformé :*

$$B(p, q)[\kappa] := \underline{B}(p, q) + 2i\pi \sum_{i,j} du_i(p) \kappa_{ij} du_j(q) \quad (2-1)$$

ainsi que la déformée de la différentielle Abélienne de troisième espèce :

$$dS_{q_1, q_2}(p) = \int_{q_2}^{q_1} B(p, q) \quad (2-2)$$

¹Dans tout ce chapitre, nous reprendrons les notations de la partie 8.1 du chapitre 2 sauf indication contraire. On pourra s'y reporter directement sans avoir lu au préalable le reste du chapitre ayant traité au modèle à deux matrices.

où le chemin d'intégration se situe entièrement dans le domaine fondamental, et, au voisinage d'un point de branchement,

$$dE_q(p)[\kappa] := \underline{dE}_q(p) + 2i\pi \sum_{i,j} du_i(p) \kappa_{ij} (u_j(\bar{q}) - u_j(q)). \quad (2-3)$$

On définit également un ensemble de cycles dépendant de κ mélangeant les éléments de la base $\{(\underline{\mathcal{A}}_i, \underline{\mathcal{B}}_i)\}$:

Definition 2.2 Pour une matrice symétrique κ quelconque, on définit l'ensemble de cycles κ -déformés $\{(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)\}_{i=1}^{\mathcal{G}}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{A} := (1 + \kappa\tau)\underline{\mathcal{A}} - \kappa\underline{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} := \underline{\mathcal{B}} - \tau\underline{\mathcal{A}} \end{cases} \quad (2-4)$$

où l'on a utilisé une notation vectorielle pour décrire les cycles : $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_i)$.

Ceci nous permet de définir des fractions de remplissage associées à chaque valeur de κ :

Definition 2.3 On définit les fractions de remplissage κ déformées par :

$$\epsilon_i := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_i} y dx. \quad (2-5)$$

Ces cycles permettent également de mieux décrire les propriétés de normalisation des différentielles κ -déformées. Ces différentielles satisfont les propriétés suivantes :

- Symétrie et normalisation du noyau de Bergmann déformé :

$$B(p, q)[\kappa] = B(q, p)[\kappa] \quad , \quad \oint_{\mathcal{A}_i} B[\kappa] = 0 \quad , \quad \oint_{q \in \mathcal{B}_i} B(p, q)[\kappa] = 2i\pi du_i(p). \quad (2-6)$$

- Formule de Cauchy : pour toute fonction méromorphe $f(p)$, sa différentielle est donnée par

$$df(p) = \operatorname{Res}_{q \rightarrow p} B(p, q) f(q). \quad (2-7)$$

- $B(p, q)[0] = \underline{B}(p, q)$.
- Structure de pôles et normalisation de dS_{q_1, q_2} : C'est l'unique forme méromorphe avec seulement deux pôles simples en q_1 et q_2 , telle que

$$\operatorname{Res}_{q_1} dS_{q_1, q_2} = 1 = - \operatorname{Res}_{q_2} dS_{q_1, q_2} \quad , \quad \oint_{\mathcal{A}_i} dS_{q_1, q_2} = 0 \quad (2-8)$$

et elle satisfait :

$$\oint_{\mathcal{B}_i} dS_{q_1, q_2} = 2i\pi (u_i(q_1) - u_i(q_2)). \quad (2-9)$$

- Symétrie de dS :

$$dS_{q_1, q_2} = -dS_{q_2, q_1}, \quad (2-10)$$

- Expression de dS en termes des fonctions θ :

$$dS_{q_1, q_2}(p) = d_p \ln \left(\frac{\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}(p) - \mathbf{u}(q_1))}{\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}(p) - \mathbf{u}(q_2))} \right) + 2i\pi \sum_{i,j} du_i(p) \kappa_{ij} (u_j(q_1) - u_j(q_2)). \quad (2-11)$$

- Dérivation et intégration de dS :

$$d_{q_1} (dS_{q_1, q_2}(p)) = B(q_1, p) \quad (2-12)$$

et

$$\int_{p_1}^{p_2} dS_{q_1, q_2} = \int_{q_1}^{q_2} dS_{p_1, p_2}. \quad (2-13)$$

- Formule de Cauchy : pour toute fonction méromorphe f :

$$f(p) = - \operatorname{Res}_{q_1 \rightarrow p} dS_{q_1, q_2}(p) f(q_1). \quad (2-14)$$

- L'identité bilinéaire de Riemann reste vérifiée avec ces nouveaux cycles déformés. Considérant ω_1 et ω_2 deux formes méromorphes sur la surface Σ et un point p_0 arbitraire, on définit Φ_1 sur le domaine fondamental par

$$\Phi_1(p) = \int_{p_0}^p \omega_1 \quad (2-15)$$

où le chemin d'intégration reste à l'intérieur du domaine fondamental.

On a alors l'**identité bilinéaire de Riemann** :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p \rightarrow \text{all poles}} \Phi_1(p) \omega_2(p) &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^g \oint_{\mathcal{A}_i} \omega_1 \oint_{\mathcal{B}_i} \omega_2 - \oint_{\mathcal{B}_i} \omega_1 \oint_{\mathcal{A}_i} \omega_2 \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^g \oint_{\mathcal{A}_i} \omega_1 \oint_{\mathcal{B}_i} \omega_2 - \oint_{\mathcal{B}_i} \omega_1 \oint_{\mathcal{A}_i} \omega_2. \end{aligned} \quad (2-16)$$

- On peut également décomposer ydx (comme dans Eq. (8-48) du chapitre 2) sur les modules en tenant compte des κ déformations :

$$ydx = \sum_{i,j} t_{j,i} B_{j,i} + \sum_i t_{0,i} dS_{\alpha_i, o} + 2i\pi \sum_i \epsilon_i du_i \quad (2-17)$$

avec

$$B_{j,i}(p) = - \operatorname{Res}_{q \rightarrow \alpha_i} \underline{B}(p, q) z_{\alpha_i}(q)^j. \quad (2-18)$$

3 Fonctions de corrélation et énergies libres.

3.1 Définitions.

Dans les chapitres précédents, on a vu comment, étant donnée la courbe spectrale classique \mathcal{E}_{MM} d'un modèle de matrices aléatoires, on peut calculer les développements topologiques de ses fonctions de corrélations $W_{k, MM}$ et son énergie libre F_{MM} grâce à un

ensemble d'applications $F^{(g)}$ (resp. $W_k^{(g)}$) allant de l'ensemble des courbes algébriques \mathcal{E} dans l'ensemble des nombres complexes (resp. des k -formes sur \mathcal{E}) :

$$W_{k,MM} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} W_k^{(g)}(\mathcal{E}_{MM}) \quad , \quad F_{MM} := \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} F^{(g)}(\mathcal{E}_{MM}). \quad (3-1)$$

Si ces applications donnent des résultats convaincants lorsqu'elles sont utilisées dans le cadre des modèles de matrices, il est intéressant de les étendre au delà de ces derniers. Dans cette partie nous allons donc étudier leurs propriétés en toute généralité. Nous allons commencer par définir ces objets **sans supposer l'existence d'un quelconque modèle de matrices sous jacent**.

Par imitation du développement topologique des fonctions de corrélation et de l'énergie libre du modèle à deux matrices, on définit ainsi :

Definition 3.1 Fonctions de corrélation :

$$W_k^{(g)} = 0 \quad \text{if } g < 0 \quad (3-2)$$

$$W_1^{(0)}(p) = 0 \quad (3-3)$$

$$W_2^{(0)}(p_1, p_2) = B(p_1, p_2) \quad (3-4)$$

et on définit par récurrence sur k et g les formes multilinéaires méromorphes :

$$\begin{aligned} W_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{pK}) &= \\ &= \sum_i \operatorname{Res}_{q \rightarrow a_i} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \left(\sum_{m=0}^g \sum_{J \subset K} W_{j+1}^{(m)}(q, \mathbf{pJ}) W_{k-j+1}^{(g-m)}(\bar{q}, \mathbf{pK/J}) + W_{k+2}^{(g-1)}(q, \bar{q}, \mathbf{pK}) \right). \end{aligned} \quad (3-5)$$

Energies libres :

$$\forall g > 1, \quad F^{(g)} = \frac{1}{2-2g} \sum_i \operatorname{Res}_{q \rightarrow a_i} \Phi(q) W_1^{(g)}(q) \quad (3-6)$$

où Φ est une primitive quelconque de yx , et pour $g = 1$

$$F^{(1)} = -\frac{1}{2} \ln(\tau_{Bx}) - \frac{1}{24} \ln \left(\prod_i y'(a_i) \right) + \ln \left(\det \left(\frac{1}{\kappa} \right) \right) \quad (3-7)$$

où

$$y'(a_i) = \frac{dy(a_i)}{dz_i(a_i)} \quad , \quad z_i(p) = \sqrt{x(p) - x(a_i)} \quad (3-8)$$

et τ_{Bx} fonction τ de Bergmann définie par Eq. (8-52).

L'ordre dominant est quant à lui défini par :

$$F^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{Res}_{\alpha_i} V_i y dx + \frac{1}{2} \sum_i t_{0,i} \mu_{\alpha_i} - \frac{1}{4i\pi} \sum_i \oint_{\mathcal{A}_i} y dx \oint_{\mathcal{B}_i} y dx \quad (3-9)$$

où

$$\mu_{\alpha_i} = \int_{\alpha_i}^o (y dx - dV_i + t_{0,i} \frac{dz_{\alpha_i}}{z_{\alpha_i}}) + V_i(o) - t_{0,i} \ln(z_{\alpha_i}(o)). \quad (3-10)$$

Dans la suite, on notera :

$$\forall i = 1 \dots \mathcal{G}, \Gamma_i := \oint_{\mathcal{B}_i} y dx. \quad (3-11)$$

On définit également les **fonctions spéciales** correspondant au cas où $\kappa \rightarrow 0$:

Definition 3.2 Fonctions de corrélation spéciales :

$$\underline{W}_k^{(g)} = 0 \quad \text{if } g < 0 \quad (3-12)$$

$$\underline{W}_1^{(0)}(p) = 0 \quad (3-13)$$

$$\underline{W}_2^{(0)}(p_1, p_2) = \underline{B}(p_1, p_2) \quad (3-14)$$

où \underline{B} est le noyau de Bergmann non déformé, et on définit par récurrence sur k et g les formes multilinéaires méromorphes :

$$\begin{aligned} \underline{W}_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p}_K) &= \\ &= \sum_i \operatorname{Res}_{q \rightarrow a_i} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \left(\sum_{m=0}^g \sum_{J \subset K} \underline{W}_{j+1}^{(m)}(q, \mathbf{p}_J) \underline{W}_{k-j+1}^{(g-m)}(\bar{q}, \mathbf{p}_{K/J}) + \underline{W}_{k+2}^{(g-1)}(q, \bar{q}, \mathbf{p}_K) \right). \end{aligned} \quad (3-15)$$

Energies libres spéciales :

$$\forall g > 1, \underline{F}^{(g)} = \frac{1}{2-2g} \sum_i \operatorname{Res}_{q \rightarrow a_i} \Phi(q) \underline{W}_1^{(g)}(q) \quad (3-16)$$

et, pour $g = 1$,

$$\underline{F}^{(1)} = -\frac{1}{2} \ln(\tau_{Bx}) - \frac{1}{24} \ln \left(\prod_i y'(a_i) \right) \quad (3-17)$$

L'ordre dominant est quant à lui défini par :

$$F^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{Res}_{\alpha_i} V_i y dx + \frac{1}{2} \sum_i t_{0,i} \mu_{\alpha_i} - \frac{1}{4i\pi} \sum_i \oint_{\mathcal{A}_i} y dx \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i} y dx. \quad (3-18)$$

3.2 Représentation diagrammatique.

On reprend la représentation diagrammatique introduite dans la partie 9.4 du chapitre 2 en changeant légèrement les valeurs des propagateurs et vertex : on change par tout les noyaux de Bergmann par leurs κ déformées, y compris dans les différentielles abéliennes de troisième espèce.

Ainsi, les fonctions de corrélation et énergies libres sont obtenues en sommant sur le même ensemble de graphes que celui défini par le théorème 9.3 du chapitre 2 mais avec les poids définis par :

Définition 3.3 *Le poids $\mathcal{P}(G)$ d'un graphe G est donné par les règles suivantes :*

- On marque tout vertex trivalent du graphe par un point courant r_i de Σ et on associe r_i à son enfant de gauche et \bar{r}_i à son enfant de droite. Toute arête relie alors deux points de la surface Σ ;
- A une arête non orientée liant r et r' , on associe le facteur $B(r, r')$;
- A toute arête orientée allant de r vers r' , on associe le facteur $\frac{dE_{r'}(r)}{(y(r')-y(\bar{r}'))dx(r')}$;
- Suivant les flèches en sens inverse (des feuilles vers la racine), à chaque vertex r , on calcule la somme sur tous les points de branchement a_i des résidus quand $r \rightarrow a_i : \sum_i \text{Res}$.
- Après avoir calculé l'ensemble de ces résidus, on obtient le poids du graphe.

Cela peut simplement s'écrire :

$$\mathcal{P} \left(\text{p} \text{---} \text{q} \right) := B(p, q), \quad (3-19)$$

et

$$\mathcal{P} \left(\text{p} \text{---} \bullet \begin{array}{l} \swarrow \text{q} \\ \searrow \bar{\text{q}} \end{array} \right) := \sum_i \text{Res}_{q \rightarrow a_i} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)}. \quad (3-20)$$

Les fonctions de corrélations sont alors données par

Théorème 3.1

$$\boxed{W_{k+1,0}^{(g)}(p, \mathbf{PK}) = \sum_{G \in \mathcal{G}_k^g(p, \mathbf{PK})} \mathcal{P}(G).} \quad (3-21)$$

3.3 Propriétés.

Ces nouveaux objets possèdent de nombreuses propriétés dont certaines sont largement inspirées des modèles de matrices. Nous présentons ici un ensemble de caractéristiques utiles à la manipulation et à la compréhension de ces objets. Toutes les démonstrations peuvent être trouvées dans [IV].

Tout d'abord, et ceci est presque une définition, les chapitres précédents nous permettent d'écrire le théorème :

Théorème 3.2 *Les développements topologiques des énergies libres des modèles à une matrice, deux matrices et une matrice en champ extérieur définies respectivement par*

Eq. (1-10) du chapitre 3, Eq. (1-65) du chapitre 2 et Eq. (2-5) du chapitre 3 sont données par

$$\mathcal{F}_{1MM} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} \underline{F}^{(g)}(\mathcal{E}_{1MM}) \quad , \quad \mathcal{F}_{2MM} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} \underline{F}^{(g)}(\mathcal{E}_{2MM}) \quad (3-22)$$

et

$$\mathcal{F}_{\text{Mext}} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} \underline{F}^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Mext}}) \quad (3-23)$$

où \mathcal{E}_{1MM} , \mathcal{E}_{2MM} et $\mathcal{E}_{\text{Mext}}$ sont les courbes spectrales classiques des modèles à une matrice, deux matrices et une matrice en champ extérieur respectivement, définies par Eq. (1-14) du chapitre 3, Eq. (7-13) du chapitre 2 et Eq. (2-11) du chapitre 3 et κ a été prise égale à 0.

Les fonctions de corrélation ainsi définies sont évidemment symétriques en tous leurs arguments sauf le premier. Cependant, on peut voir que la fonction à trois points de genre 0 peut être mise sous une forme explicitement symétrique en tous ses arguments :

Théorème 3.3 La 3-forme $W_3^{(0)}$ s'écrit :

$$W_3^{(0)}(p, p_1, p_2) = \text{Res}_{q \rightarrow \mathbf{a}} \frac{B(q, p)B(q, p_1)B(q, p_2)}{dx(q)dy(q)}. \quad (3-24)$$

Cette formule est la généralisation de la formule donnée par Krichever dans le cadre des modèles de matrices [77].

Il est très important de connaître la structure de pôles des fonctions de corrélation pour pouvoir les manipuler. On peut montrer qu'elles sont données par :

Théorème 3.4 Pour tout couple $(k, g) \neq (1, 0)$, la fonction de corrélation $W_{k+1}^{(g)}$ n'a de pôle en chacune de ses variables qu'aux points de branchements en x, a_i .

Ce résultat qui est ici un théorème est une condition nécessaire pour que ces formes différentielles soient bien les observables voulues dans le cadre des modèles de matrices.

De même, dans le contexte des intégrales matricielles, ces observables doivent être bien définies sur chaque feuillet et donc avoir des intégrales nulles sur les cycles \mathcal{A}_i . Dans ce cadre plus général, on montre que :

Théorème 3.5 Pour tout couple (k, g) , on a :

$$\forall i = 1, \dots, \mathcal{G} \quad \oint_{p \in \mathcal{A}_i} W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k) = 0, \quad (3-25)$$

$$\forall i = 1, \dots, \mathcal{G}, \forall m = 1, \dots, k \quad \oint_{p_m \in \mathcal{A}_i} W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k) = 0. \quad (3-26)$$

Si dans le cadre particulier des modèles de matrices où, rappelons le, $\kappa = 0$, on considérait les intégrales sur les cycles \mathcal{A} de la base choisie au départ, on voit qu'il est important de considérer ici les cycles $\mathcal{A}[\kappa]$ pour $\kappa \neq 0$.

Deux propriétés également très utiles des modèles de matrices concernant la somme sur l'ensemble des feuillettes sont conservées :

Théorème 3.6 Pour tout couple (k, g) , on a :

$$\sum_i W_{k+1}^{(g)}(p^i, p_1, \dots, p_k) = \delta_{k,1} \delta_{g,0} \frac{dx(p)dx(p_1)}{(x(p) - x(p_1))^2} \quad (3-27)$$

et $k \geq 1$:

$$\sum_i W_{k+1}^{(g)}(p_1, p^i, p_2, \dots, p_k) = \delta_{k,1} \delta_{g,0} \frac{dx(p)dx(p_1)}{(x(p) - x(p_1))^2} \quad (3-28)$$

où la somme porte sur tous les feuilletts, c'est-à-dire tous les points p^i tels que $x(p^i) = x(p)$.

Théorème 3.7 Pour $(k, g) \neq (0, 1)$,

$$\begin{aligned} P_k^{(g)}(x(p), p_K) &= \frac{1}{dx(p)^2} \sum_i \left[-2y(p^i)dx(p)W_{k+1}^{(g)}(p^i, p_K) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^g \sum_{J \subset K} W_{j+1}^{(m)}(p^i, p_J) W_{k-j+1}^{(g-m)}(p^i, p_{K/J}) + W_{k+2}^{(g-1)}(p^i, p^i, p_K) \right] \\ (3-29) \end{aligned}$$

est une fonction rationnelle de $x(p)$ sans pôle aux points de branchements en x .

Ces propriétés nous permettent finalement de montrer la symétrie des fonctions de corrélation en tous leurs arguments :

Théorème 3.8 $W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k)$ est une fonction symétrique de toutes ses variables p_i .

Cette propriété est encore une fois naturelle dans le cadre des modèles de matrices mais je tiens à souligner à nouveau que rien n'assurait a priori qu'elle soit vraie dans un cadre plus général.

Ceci nous permet d'affiner la description du comportement des fonctions de corrélation en leurs pôles :

Corollaire 3.1

$$\forall i, \quad \text{Res}_{a_i} W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k) = 0, \quad (3-30)$$

$$\forall i, \quad \text{Res}_{a_i} x(p)W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k) = 0, \quad (3-31)$$

$$\sum_i \text{Res}_{a_i} y(p)W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k) = 0, \quad (3-32)$$

$$\sum_i \text{Res}_{a_i} x(p)y(p)W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k) = 0. \quad (3-33)$$

3.4 Cas particuliers : genres 0 et 1.

Dans cette partie nous montrons comment ces relations de récurrences s'écrivent explicitement dans les cas où la courbe algébrique \mathcal{E} est de genre 0 ou 1. En effet, dans ces cas là, on peut les exprimer dans un langage peut-être plus familier.

Genre 0.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, si l'on veut faire de la combinatoire de cartes par l'intermédiaire des modèles de matrices, il faut imposer que la courbe spectrale classique associée soit de genre 0 en imposant toutes les fractions de remplissage nulles sauf l'une d'elles. Alors, la surface de Riemann compacte Σ est équivalente à la sphère de Riemann sous les transformations conformes. Il existe donc une paramétrisation rationnelle de \mathcal{E} , c'est-à-dire que l'on peut trouver deux fonctions rationnelles $X(p)$ et $Y(p)$ telles que :

$$\mathcal{E}(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists p \in \mathbf{C}, \quad x = X(p), \quad y = Y(p). \quad (3-34)$$

Dans ce cas, le noyau de Bergmann est défini comme le noyau de Bergmann de la sphère par :

$$B(p, q) = \underline{B}(p, q) = \frac{dpdq}{(p-q)^2} = d_p d_q \ln(p-q) \quad (3-35)$$

et la forme première est simplement :

$$E(p, q) = \underline{E}(p, q) = \frac{p-q}{\sqrt{dpdq}}. \quad (3-36)$$

Les points de branchement sont les zéros de la fonction $X(p)$:

$$X(a_i) = 0. \quad (3-37)$$

Le vertex est alors donné par :

$$\text{Res}_{q \rightarrow a} \frac{dp}{2(Y(q) - Y(\bar{q}))X'(q)dq} \left[\frac{1}{q-p} - \frac{1}{\bar{q}-p} \right] \quad (3-38)$$

et les différentes fonctions de corrélation sont facilement obtenues par développement de Taylor des fonctions X et Y au voisinage des zéros de X' .

Genre 1.

Si la courbe est de genre $\mathcal{G} = 1$, alors on peut la paramétrer sur le losange correspondant au domaine fondamental d'un tore (cf. fig.2.3 du chapitre 2) i.e. on peut trouver une paramétrisation elliptique de \mathcal{E} . Ainsi il existe deux fonctions elliptiques $X(p)$ et $Y(p)$ [104] telles que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, y) = 0 &\quad \Leftrightarrow \quad \exists p \in \mathbf{C}, \quad x = X(p), \quad y = Y(p) \\ X(p+1) = X(p+\tau) = X(p) &\quad , \quad Y(p+1) = Y(p+\tau) = Y(p). \end{aligned} \quad (3-39)$$

Alors le noyau de Bergmann est quasiment la fonction de Weierstrass correspondante [104] :

$$\underline{B}(p, q) = \left(\wp(p-q, \tau) + \frac{\pi}{\text{Im}\tau} \right) dpdq. \quad (3-40)$$

La forme première est donnée par :

$$\underline{E}(p, q) = \frac{\theta_1(p-q, \tau)}{\theta_1'(0, \tau)\sqrt{dpdq}}. \quad (3-41)$$

Notons que si $\kappa = \frac{-1}{2i\text{Im}\tau}$, le noyau de Bergmann déformé se réduit à la fonction de Weierstrass

$$B(p, q) = \wp(p - q, \tau) dpdq \quad (3-42)$$

et est donc invariant modulaire. Nous verrons dans la prochaine partie que cette propriété s'étend à toutes les courbes algébriques et n'est pas un artefact du genre 1.

4 Déformations de la courbe.

Nous avons défini les fonctions de corrélation et énergies libres comme des fonctionnelles d'une courbe algébrique \mathcal{E} , on peut alors se poser la question de leur dépendance en les modules de cette courbe : comment varient ces quantités lorsque l'on change la paramétrisation de la courbe ou bien la courbe elle-même par l'intermédiaire de ses modules ?

4.1 Invariance symplectique.

Le théorème suivant montre que sous certaines transformations de la courbe algébrique \mathcal{E} , les énergies libres restent inchangées.

Théorème 4.1 *Pour tout g , $F^{(g)}$ reste inchangée lorsque l'on change \mathcal{E} par l'une des transformations suivantes :*

- $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ et $y \rightarrow \frac{(cx+d)^2}{ad-bc}y$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$;
- $x \rightarrow x$ et $y \rightarrow y + R(x)$ pour toute fonction rationnelle $R(x)$;
- $x \rightarrow -x$ et $y \rightarrow y$;
- $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$.

La démonstration des trois premières propriétés découle directement des définitions par l'intermédiaire de la représentation diagrammatique présentée dans la partie 3.2. La démonstration de la dernière symétrie est beaucoup plus difficile. Dans le cadre du modèle à deux matrices, elle correspond à dire que le calcul de l'énergie libre donne le même résultat que l'on résolve les équations de boucles obtenues par variation de la matrice M_1 ou par variation de M_2 , c'est-à-dire que le résultat ne dépend pas du mode de calcul. La démonstration passe ici par la généralisation des fonctions de corrélation mixtes $H_{1;k;l}^{(g)}$ dans ce cadre plus général et leur étude précise. Cette dérivation très technique peut être trouvée dans [VI].

Ce théorème montre que les énergies libres sont des invariants d'une certaine classe de courbes algébriques, c'est pourquoi nous nommerons dorénavant invariants algébriques les $F^{(g)}$ ². Il nous fournit un outil très puissant pour comparer différents modèles caractérisés par une courbe algébrique. Nous montrerons par exemple son utilité dans la comparaison de plusieurs modèles de matrices dans la partie 6 de ce chapitre.

Remarque 4.1 On parle ici d'invariance symplectique parce que toutes ces transformations conservent la forme symplectique

$$|dx \wedge dy|. \quad (4-1)$$

²En effet, le terme énergie libre inspiré des modèles de matrices n'a plus de sens ici tant qu'aucun système physique sous-jacent n'a été identifié.

Cependant, il n'est pas clair pour le moment si $F^{(g)}$ est conservée par toute transformation laissant cette forme inchangée. Plus précisément, on ne connaît pas de caractéristaion de l'ensemble des transformations conservant les $F^{(g)}$.

4.2 Variation par rapport aux modules de la courbe.

Considérons une variation infinitésimale de la courbe $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + \delta\mathcal{E}$, obtenue par une variation de $y(x)$ à x fixé :

$$\delta_{\Omega} y|_x dx = -\Omega. \quad (4-2)$$

Remarque 4.2 On peut travailler à n'importe quelle coordonnée locale z fixée plutôt que x fixé. On a alors une structure de Poisson :

$$\delta_{\Omega} y|_z dx - \delta_{\Omega} x|_z dy = -\Omega \quad (4-3)$$

où Ω est une forme différentielle quelconque dont nous restreignons les propriétés dans la suite.

Nous allons étudier comment les différentes formes différentielles et invariants introduits plus haut varient sous cette transformation. Pour ce faire, nous allons d'abord étudier comment varie l'élément de base de cette construction : le noyau de Bergmann.

Formule variationnelle de Rauch et variation du noyau de Bergmann.

Sous cette transformation, Eq. (4-3) montre que la variation de la projection des points de branchements dans le plan x est donnée par :

$$\delta_{\Omega} x(a_i) = \frac{\Omega(a_i)}{dy(a_i)}. \quad (4-4)$$

en supposant ici que $\frac{\Omega}{dy}$ n'a pas de pôle aux points de branchements.

La formule variationnelle de Rauch [96, 53] nous dit alors que la variation du noyau de Bergmann s'écrit

$$\delta_{\Omega} \underline{B}(p, q)|_{x(p), x(q)} = \sum_i \operatorname{Res}_{r \rightarrow a_i} \frac{\Omega(r) \underline{B}(r, p) \underline{B}(r, q)}{dx(r) dy(r)}. \quad (4-5)$$

En intégrant sur un cycle $\underline{\mathcal{B}}$, on obtient la variation des différentielles holomorphes :

$$\delta_{\Omega} du(p)|_{x(p)} = \sum_i \operatorname{Res}_{r \rightarrow a_i} \frac{\Omega(r) \underline{B}(r, p) \mathbf{du}(r)}{dx(r) dy(r)}, \quad (4-6)$$

puis, par une seconde intégration, la variation de la matrice des périodes de Riemann :

$$\delta_{\Omega} \tau = 2i\pi \sum_i \operatorname{Res}_{r \rightarrow a_i} \frac{\Omega(r) \mathbf{du}(r) \mathbf{du}^t(r)}{dx(r) dy(r)}. \quad (4-7)$$

Etudions de même la variation du noyau de Bergmann κ déformé. Il y a maintenant deux termes à faire varier : d'une part le noyau de Bergmann nu et d'autre part la déformation dont la variation se décompose elle-même en la variation des différentielles holomorphes et de κ lui même. En effet, aucune contrainte ne vient s'opposer à un choix de κ dépendant de la courbe algébrique elle même. La formule variationnelle de Rauch peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta_\Omega B(p, q)|_{x(p), x(q)} &= \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\Omega(r)B(r, p)B(r, q)}{dx(r)dy(r)} - 2i\pi \mathbf{du}^t(p)(\kappa \delta_\Omega \tau \kappa - \delta_\Omega \kappa) \mathbf{du}(q) \\ &= 2 \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(r, q)}{\omega(r)} - 2i\pi \mathbf{du}^t(p)(\kappa \delta_\Omega \tau \kappa - \delta_\Omega \kappa) \mathbf{du}(q) \end{aligned} \quad (4-8)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \left(\delta_\Omega + \operatorname{tr} [\kappa \delta_\Omega \tau \kappa - \delta_\Omega \kappa] \frac{\partial}{\partial \kappa} \right)_{x(p), x(q)} B(p, q) &= \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\Omega(r)B(r, p)B(r, q)}{dx(r)dy(r)} \\ &= -2 \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(r, q)}{\omega(r)} \end{aligned} \quad (4-9)$$

En définissant la **dérivée covariante** par :

$$D_\Omega = \delta_\Omega + \operatorname{tr} \left[(\kappa \delta_\Omega \tau \kappa - \delta_\Omega \kappa) \frac{\partial}{\partial \kappa} \right] \quad (4-10)$$

on peut résumer la variation du noyau de Bergmann déformé par :

$$\begin{aligned} D_\Omega B(p, q) &= -2 \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(r, q)}{\omega(r)} \\ &= \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)} [\Omega(r)B(\bar{r}, q) + \Omega(\bar{r})B(r, q)]. \end{aligned} \quad (4-11)$$

En intégrant au voisinage d'un point de branchement a_j , on obtient également :

$$\begin{aligned} D_\Omega dE_q(p)|_{x(p), x(q)} &= -2 \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)} \Omega(r)dE_q(r) \\ &= \operatorname{Res}_{r \rightarrow \mathbf{a}} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)} [\Omega(r)dE_q(\bar{r}) + \Omega(\bar{r})dE_q(r)]. \end{aligned} \quad (4-12)$$

Le sens de ces deux équations peut être éclairci en utilisant la représentation diagrammatique des fonctions de corrélation. En effet, le noyau de Bergmann et dE sont les deux types d'arêtes composant les diagrammes et les deux seules quantités variant

sous l'action de δ_Ω . Les équations Eq. (4-11) et Eq. (4-12) expliquent alors comment les diagrammes changent sous la variation Ω de la courbe algébrique \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \quad p \text{ --- } q &= p \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \Omega \end{array} \text{ --- } q + p \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \Omega \end{array} \text{ --- } q \\ &= p \text{ --- } \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \Omega \end{array} \text{ --- } q + p \text{ --- } \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \Omega \end{array} \text{ --- } q \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{D} \quad p \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } q = p \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } q + p \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } q.$$

On reconstruit alors la dérivée covariante des fonctions de corrélations ainsi que des invariants algébriques par le lemme suivant :

Lemme 4.1 *Pour toute forme bilinéaire symétrique $f(q, p) = f(p, q)$:*

$$\begin{aligned} D_\Omega \left(\sum_j \operatorname{Res}_{q \rightarrow a_j} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} f(q, \bar{q}) \right)_{x(p)} &= 2 \sum_{i,j} \operatorname{Res}_{r \rightarrow a_i} \operatorname{Res}_{q \rightarrow a_j} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)} \Omega(r) \frac{dE_q(r)}{\omega(q)} f(q, \bar{q}) \\ &+ \sum_j \operatorname{Res}_{q \rightarrow a_j} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} D_\Omega (f(q, \bar{q}))_{x(q)}. \end{aligned} \quad (4-13)$$

Ce lemme exprime en fait l'action de D_Ω sur le vertex :

$$\mathbf{D} \quad p \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } q = p \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } q + p \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } \begin{array}{c} \Omega \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ --- } q.$$

Graphiquement, cela signifie simplement que la variation d'un diagramme est obtenue en ajoutant une patte Ω à toutes les arêtes possibles.

En particulier, si la variation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$\Omega(p) = \int_{\partial\Omega} B(p, q) \Lambda(q) \quad (4-14)$$

où $\partial\Omega$ est un contour d'intégration assez éloigné des points de branchements³, on peut décrire les variations correspondantes par :

Théorème 4.2 *Variations des fonctions de corrélation et énergies libres : pour $g+k > 1$, elles sont données par :*

$$\boxed{D_\Omega W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) \Big|_{x(p_i)} = \int_{\partial\Omega} W_{k+1}^{(g)}(p_1, \dots, p_k, q) \Lambda(q)} \quad (4-15)$$

³Ceci exclut entre autres le cas où Ω correspond à la variation d'une "arête dure", cf [44, 26, 16].

et, pour $g \geq 1$,

$$D_{\Omega}F^{(g)} = - \int_{\partial\Omega} W_1^{(g)}(p)\Lambda(p). \quad (4-16)$$

Nous allons utiliser cette description pour étudier les variations des invariants algébriques par rapport aux modules de la courbe \mathcal{E} . En effet, Eq. (2-17) nous permet d'identifier les Ω correspondant à la variation de chacun des modules.

Variation des fractions de remplissage.

Considérons la variation de la courbe donnée par

$$\Omega(p) = -2i\pi du_i(p) = - \oint_{\mathcal{B}_i} B(p, q). \quad (4-17)$$

i.e. $\partial\Omega = \mathcal{B}_i$ et $\Lambda = -1$. Elle correspond à :

$$\delta_{\Omega}\epsilon_j = \delta_{ij} \quad , \quad \delta_{\Omega}t_{0,j} = 0 \quad , \quad \delta_{\Omega}V_j = 0. \quad (4-18)$$

Cette variation est donc équivalente à faire varier uniquement l'une des fractions de remplissage $\epsilon_i = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_i} y dx$:

$$D_{-2i\pi du_i} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_i}. \quad (4-19)$$

Le théorème 4.2 implique

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_i} W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) = - \oint_{\mathcal{B}_i} W_{k+1}^{(g)}(p_1, \dots, p_k, q), \quad (4-20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_i} F^{(g)} = \oint_{\mathcal{B}_i} W_1^{(g)}(q), \quad (4-21)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_i} F^{(0)} = - \oint_{\mathcal{B}_j} y dx + \frac{1}{4i\pi} \left(\kappa \oint_{\mathcal{B}} y dx \right)^t \delta_{-2i\pi du_i}(\tau) \kappa \oint_{\mathcal{B}} y dx. \quad (4-22)$$

Variation des températures.

Soient α_i et α_j deux pôles distincts de $y dx$. Considérons la variation de la courbe donnée par

$$\Omega(p) = -dS_{\alpha_i, \alpha_j}(p) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} B(p, q) \quad , \quad \text{i.e. } \partial\Omega = [\alpha_i, \alpha_j] \quad , \quad \Lambda = 1 \quad (4-23)$$

Elle correspond à :

$$\delta_{\Omega}\epsilon_j = 0 \quad , \quad \delta_{\Omega}t_{0,k} = \delta_{i,k} - \delta_{j,k} \quad , \quad \delta_{\Omega}V_k = 0. \quad (4-24)$$

Cette variation est donc équivalente à faire varier uniquement les températures $t_{0,i}$ et $t_{0,j}$:

$$D_{-dS_{\alpha_i, \alpha_j}} = \frac{\partial}{\partial t_{0,i}} - \frac{\partial}{\partial t_{0,j}}. \quad (4-25)$$

Remarque 4.3 Toutes les températures sont liées par la condition :

$$\sum_i t_{0,i} = 0. \quad (4-26)$$

On ne peut donc pas faire varier une seule d'elles indépendamment. C'est pourquoi nous avons dû en changer deux à la fois ici.

Le théorème 4.2 implique

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_{0,i}} - \frac{\partial}{\partial t_{0,j}} \right) W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} W_{k+1}^{(g)}(p_1, \dots, p_k, q), \quad (4-27)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_{0,i}} - \frac{\partial}{\partial t_{0,j}} \right) F^{(g)} = \int_{\alpha_j}^{\alpha_i} W_1^{(g)}(q) \quad (4-28)$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_{0,i}} - \frac{\partial}{\partial t_{0,j}} \right) F^{(o)} = \mu_{\alpha_i} - \mu_{\alpha_j} + \frac{1}{4i\pi} \left(\kappa \oint_{\mathcal{B}} y dx \right)^t \delta_{-dS_{\alpha_i, \alpha_j}}(\tau) \kappa \oint_{\mathcal{B}} y dx. \quad (4-29)$$

Variation des modules aux pôles

Soit α_i un pôle de $y dx$. Considérons la variation de la courbe donnée par

$$\Omega(p) = -B_{k,i} = \operatorname{Res}_{\alpha_i} B(p, q) z_{\alpha_i}^k(q), \quad (4-30)$$

i.e. $\partial\Omega$ est un petit cercle entourant α_i et $\Lambda = \frac{1}{2i\pi} z_{\alpha_i}^k$. On a alors :

$$\delta_{\Omega} \epsilon_j = 0 \quad , \quad \delta_{\Omega} t_{0,j} = 0 \quad , \quad \delta_{\Omega} t_{k',j} = \delta_{i,j} \delta_{k,k'} \quad (4-31)$$

Cette variation équivaut donc à ne changer que le coefficient $t_{k,i}$:

$$D_{-B_{k,i}} = \frac{\partial}{\partial t_{k,i}}. \quad (4-32)$$

Le théorème 4.2 donne

$$\frac{\partial}{\partial t_{k,i}} W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) = \operatorname{Res}_{\alpha_i} z_{\alpha_i}^k(q) W_{k+1}^{(g)}(p_1, \dots, p_k, q), \quad (4-33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{k,i}} F^{(g)} = - \operatorname{Res}_{\alpha_i} z_{\alpha_i}^k(q) W_1^{(g)}(q) \quad (4-34)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t_{k,i}} F^{(o)} = \operatorname{Res}_{\alpha_i} y dx z_{\alpha_i}^k + \frac{1}{4i\pi} \left(\kappa \oint_{\mathcal{B}} y dx \right)^t \delta_{B_{k,i}}(\tau) \kappa \oint_{\mathcal{B}} y dx. \quad (4-35)$$

Il peut être intéressant de connaître non seulement les dérivées premières mais également les dérivées secondes de $F^{(0)}$ par rapport aux modules de la courbe. En effet, dans le cadre des modèles de matrices, ce sont ces dernières qui sont "universelles". Nous les avons donc regroupées dans l'appendice 4 sous la forme d'un formulaire.

Homogénéité

On peut utiliser ces formules pour montrer une propriété d'homogénéité permettant de décomposer les invariants sur la base de ces modules :

Théorème 4.3 *Pour tout $g > 1$, $F^{(g)}$ satisfait la propriété d'homogénéité :*

$$(2 - 2g)F^{(g)} = \sum_{i,k} t_{k,i} \frac{\partial}{\partial t_{k,i}} F^{(g)} + \sum_i t_{0,i} \frac{\partial}{\partial t_{0,i}} F^{(g)} + \sum_i \epsilon_i \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} F^{(g)} \quad (4-36)$$

i.e. $F^{(g)}$ est homogène de degré $2 - 2g$.

4.3 Opérateur d'insertion de boucle et son inverse.

On peut également utiliser ces déformations de la courbe algébrique pour reconstruire les fonctions de corrélation $W_k^{(g)}$ à partir des invariants algébriques $F^{(g)}$.

En effet, pour tout point q situé loin de tout point de branchement, considérons la variation :

$$\Omega(p) = B(p, q). \quad (4-37)$$

Elle induit une variation des fonctions de corrélation donnée par :

Théorème 4.4

$$D_B W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) = W_{k+1}^{(g)}(p_1, \dots, p_k, q) \quad (4-38)$$

$$D_B F^{(g)} = -W_1^{(g)}(q) \quad (4-39)$$

et

$$D_B F^{(0)} = y(q)dx(q) + \frac{1}{4i\pi} \left(\kappa \oint_B ydx \right)^t \oint_B \oint_B W_{3,0\kappa} \oint_B ydx. \quad (4-40)$$

C'est à dire que l'opérateur $D_{B(\cdot, q)}$ agit sur les fonctions de corrélation en ajoutant une patte externe au point q . C'est exactement le rôle joué par l'opérateur $\frac{\partial}{\partial V_1}$ défini par Eq. (2-4) du chapitre 2. On a donc étendu la notion d'**opérateur d'insertion de boucle** à ce cadre plus général d'invariants algébriques : il consiste simplement à ajouter un pôle double à la forme ydx en un point marqué de la courbe spectrale.

Dans le chapitre 2, nous avons introduit l'opérateur H_x pour retirer une patte aux fonctions de corrélations, i.e. inverser l'opérateur d'insertion de boucles⁴.

Nous pouvons définir ici le même type d'opérateur par :

Théorème 4.5 *Pour $k \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p_{k+1} \rightarrow \mathbf{a}, p_1, \dots, p_k} \Phi(p_{k+1}) W_{k+1}^{(g)}(p_1, \dots, p_k, p_{k+1}) &= (2g + k - 2) W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) \\ &+ \delta_{g,0} \delta_{k,1} y(p_1) dx(p_1) \end{aligned} \quad (4-41)$$

où Φ est n'importe quelle primitive de ydx :

$$d\Phi = ydx. \quad (4-42)$$

Il est à noter que pour $k = 0$ et $g \geq 2$, ceci définit l'énergie libre comme la fonction de corrélation à 0 points $W_0^{(g)} = F^{(g)}$.

⁴Ce n'est pas à proprement parler l'inverse de $\frac{\partial}{\partial V_1}$ puisque cette propriété n'est valable que dans l'espace des fonctions de corrélations et qu'il apparaît un facteur dépendant de la fonction considérée.

4.4 Transformations modulaire.

Nous allons maintenant étudier comment les différentes fonctions de corrélation dépendent du choix d'une base de cycles $(\underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}})$.

Considérons une transformation modulaire quelconque des cycles :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{A}} \\ \underline{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'} & \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'} \\ \delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'} & \delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{A}'} \\ \underline{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{A}'} \\ \underline{\mathcal{B}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathcal{A}'\mathcal{A}} & \delta_{\mathcal{A}'\mathcal{B}} \\ \delta_{\mathcal{B}'\mathcal{A}} & \delta_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{A}} \\ \underline{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \quad (4-43)$$

où $\delta_{\mathcal{A}'\mathcal{A}} = \delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^t$, $\delta_{\mathcal{A}'\mathcal{B}} = -\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}^t$, $\delta_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}^t$, $\delta_{\mathcal{B}'\mathcal{A}} = -\delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'}^t$ et les matrices $\delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}$, $\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}$, $\delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'}$ et $\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ ont des coefficients entiers qui satisfont $\delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^t - \delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'}\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}^t = Id$.

Sous ce changement de base de cycles d'homologie, les différentiels holomorphes et la matrice des périodes de Riemann sont changées suivant

$$\mathbf{du}' = \mathcal{J} \mathbf{du}, \quad \mathbf{du} = \mathcal{J}^{-1} \mathbf{du}' \quad (4-44)$$

où

$$\mathcal{J} = (\delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}^t + \tau' \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}^t) = (\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} - \tau \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}^t)^{-1} \quad (4-45)$$

et

$$\tau' = (\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} - \tau \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}^t)^{-1} (-\delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'} + \tau \delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}^t), \quad \tau = (\delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}^t + \tau' \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}^t)^{-1} (\delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'}^t + \tau' \delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^t). \quad (4-46)$$

Nous commençons une nouvelle fois par étudier les variations induites sur les blocs de bases. Ainsi le noyau de Bergmann est changé en :

$$\underline{\mathcal{B}'} = \underline{\mathcal{B}} + 2i\pi \mathbf{du}^t \widehat{\kappa} \mathbf{du}. \quad (4-47)$$

où l'on a utilisé la matrice symétrique de taille $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$:

$$\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}^t = (\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}^{-1} - \tau)^{-1} = \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'} \mathcal{J}. \quad (4-48)$$

Le noyau de Bergmann κ -déformé change lui suivant :

$$\begin{aligned} B'(p, q) &= \underline{B}(p, q) + 2i\pi [\mathbf{du}^t(p) \kappa \mathbf{du}'(q) + \mathbf{du}^t(p) \widehat{\kappa} \mathbf{du}(q)] \\ &= \underline{B}(p, q) + 2i\pi \mathbf{du}^t(p) (\widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t \kappa \mathcal{J}) \mathbf{du}(q). \end{aligned} \quad (4-49)$$

En d'autres termes, une transformation modulaire est équivalente à un changement du paramètre κ par $\kappa \rightarrow \widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t \kappa \mathcal{J}$ dans la définition de la déformation du noyau de Bergmann $B(p, q)$. Ceci nous permet de connaître les variations modulaires des énergies libres :

Théorème 4.6 *Pour $g \geq 2$ la transformation modulaire de l'invariant $F^{(g)}$ consiste à changer κ en $\widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t \kappa \mathcal{J}$ dans les définitions des noyaux de Bergmann et différentielles Abéliennes déformés.*

Pour $g = 1$, $F^{(1)}$ est changée en :

$$F^{(1)'} = F^{(1)} - \frac{1}{2} \ln (\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} - \tau \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}^t). \quad (4-50)$$

Remarque 4.4 La transformation de $F^{(0)}$ sous ce changement de base de cycles d'homologie est bien plus compliquée puisque le résultat final dépend explicitement de la position des pôles de gdx dans le domaine fondamental et donc de tous les paramètres de la transformation modulaire.

Comme les transformations modulaires des énergies libres dépendent directement de κ par l'application :

$$\kappa \rightarrow \widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t \kappa \mathcal{J}, \quad (4-51)$$

on peut se demander si cette application a un point fixe, i.e. si il existe un choix de κ pour lequel les $F^{(g)}$ sont des invariants modulaires. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.7 *Pour le choix $\kappa = \frac{i}{2\text{Im}\tau}$, les $F^{(g)}[\kappa]$ sont des invariants modulaires.*

En effet, pour ce choix de κ , le noyau de Bergmann déformé est le noyau de Schiffer dont l'invariance modulaire est connue [14]. Comme la seule dépendance modulaire des $F^{(g)}$ se trouve dans la déformation du noyau de Bergmann, on obtient simplement le résultat.

Nous verrons dans le chapitre suivant que cette valeur de κ permet de faire le lien avec les fonctions de partition de théorie des cordes topologiques et nous reviendrons donc sur ce cas particulier dans la partie correspondante.

4.5 Variation par rapport à κ .

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la matrice κ peut être utilisée pour décrire les variations modulaires des énergies libres. On peut ainsi voir les variations de κ comme des transformations modulaires infinitésimales. Nous allons donc calculer la dépendance en κ des fonctions de corrélation et énergies libres.

Tout d'abord, en comptant le nombre d'arêtes dans leur représentation diagrammatique, il est facile de voir que $W_k^{(g)}$ est un polynôme en κ de degré $3g + 2k - 3$ tandis que $F^{(g)}$ est un polynôme de degré $3g - 3$ pour $g > 1$.

Leurs dérivées par rapport aux éléments de κ sont quant à elles données par :

Théorème 4.8

$$\begin{aligned} 2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_k^{(g)}(\mathbf{PK}) &= \frac{1}{2} \oint_{r \in \mathcal{B}_j} \oint_{s \in \mathcal{B}_i} W_{k+2}^{(g-1)}(\mathbf{PK}, r, s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_h \sum_{L \subset K} \oint_{r \in \mathcal{B}_i} W_{|L|+1}^{(h)}(\mathbf{PL}, r) \oint_{s \in \mathcal{B}_j} W_{k-|L|+1}^{(g-h)}(\mathbf{PK/L}, s) \end{aligned} \quad (4-52)$$

et, en particulier pour $g \geq 2$:

$$\begin{aligned} -2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} F^{(g)} &= \frac{1}{2} \oint_{r \in \mathcal{B}_j} \oint_{s \in \mathcal{B}_i} W_2^{(g-1)}(r, s) + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{g-1} \oint_{r \in \mathcal{B}_i} W_1^{(h)}(r) \oint_{s \in \mathcal{B}_j} W_1^{(g-h)}(s) \end{aligned} \quad (4-53)$$

alors que pour $g = 1$, on a

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} F^{(1)} = (\kappa^{-1})_{ij}.} \quad (4-54)$$

On peut noter une forte similitude entre ces équations et les équations d'anomalie holomorphe de la théorie de Kodaira–Spencer [1, 2, 15][V]. En fait, nous montrerons dans le chapitre suivant qu'elles coïncident effectivement pour la valeur de κ rendant les énergies libres invariantes modulaires.

5 Limite singulière.

Nous allons étudier dans cette partie comment les objets introduits jusqu'ici se comportent lorsque la courbe \mathcal{E} devient singulière.

Pour ce faire, considérons une famille de courbes algébriques paramétrée par une variable t permettant d'approcher une singularité :

$$\mathcal{E}(x, y, t) \quad (5-1)$$

telle que la courbe pour $t = 0$ a un point de branchement singulier a avec une singularité de type p/q , c'est-à-dire, décrite en termes d'une variable locale z au voisinage de a , par :

$$\begin{cases} t = 0 \\ x(z) \sim x(a) + (z - a)^q \\ y(z) \sim y(a) + (z - a)^p \end{cases} \quad (5-2)$$

Pour $t \neq 0$, la singularité disparaît et l'on a une paramétrisation en terme de la variable locale $\zeta = z t^{-\nu}$:

$$\begin{cases} x(z, t) \sim x(a) + t^{q\nu} Q(\zeta) + o(t^{q\nu}) \\ y(z, t) \sim y(a) + t^{p\nu} P(\zeta) + o(t^{p\nu}) \end{cases} \quad (5-3)$$

où Q et P sont des polynômes de degrés respectifs q et p et où ν est un exposant critique dépendant explicitement du choix du paramètre t .

La **courbe spectrale singulière**

$$\mathcal{E}_{\text{sing}}(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi(\zeta) = Q(\zeta) \\ \eta(\zeta) = P(\zeta) \end{cases} = \text{Resultant}(Q - \xi, P - \eta) \quad (5-4)$$

est définie comme la partie la plus divergente de la courbe lorsque $t \rightarrow 0$.

Si la courbe $\mathcal{E}(t)$ elle même présente une singularité, les énergies libres $F^{(g)}(\mathcal{E}(t))$ présentent elles aussi une singularité pour $t \rightarrow 0$. Elles se comportent suivant :

$$F^{(g)}(\mathcal{E}(t)) \sim t^{\gamma_g} F_{\text{sing}}^{(g)} + o(t^{\gamma_g}) \quad , \text{ for } g \geq 2 \quad (5-5)$$

$$F^{(1)}(\mathcal{E}(t)) \sim -\frac{1}{24} (p-1)(q-1)\nu \ln(t) + O(1) \quad , \text{ for } g = 1. \quad (5-6)$$

On appelle **double limte d'échelle** de $F^{(g)}$ la partie singulière $F_{\text{sing}}^{(g)}$ en référence aux modèles de matrices. Elle est déterminée ainsi que l'exposant γ_g par le théorème suivant :

Théorème 5.1 *La limite singulière de l'énergie libre est donnée par :*

$$\boxed{F_{\text{sing}}^{(g)}(\mathcal{E}) = F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{sing}}) \quad , \text{ for } g \geq 2} \quad (5-7)$$

et l'exposant critique s'écrit

$$\gamma_g = (2 - 2g)(p + q)\nu. \quad (5-8)$$

En d'autres termes, par une normalisation appropriée, notre construction des $F^{(g)}$ commute avec les limites singulières.

Cette propriété de passage à la limite a de nombreuses implications comme nous le verrons plus loin. Elle permet, entre autres choses, d'appliquer notre méthode à l'étude des théories conformes et permet de faire le lien entre différents modèles.

6 Applications.

Nous montrons dans cette partie l'efficacité de notre méthode dans deux cas particuliers. D'une part, nous montrons comment elle permet d'avoir accès de manière directe et systématique aux modèles minimaux (p, q) et nous montrons d'autre part comment elles permettent de retrouver très facilement des résultats classiques relatifs à l'intégrale de Kontsevich [72].

6.1 Double limite d'échelle et modèles minimaux des théories conformes.

On sait depuis longtemps que les limites singulières des modèles à une et deux matrices hermitiennes, connues sous le nom de doubles limites d'échelle, sont fortement liées aux modèles minimaux de type (p, q) obtenus en théorie des champs conforme [73, 34, 29, 38]. Dans cette partie, nous explicitons ce lien en montrant de manière précise comment traiter la singularité due à la double limite d'échelle grâce aux invariants définis plus haut. Nous montrons, entre autres, comment les exposants critiques correspondants aux modèles (p, q) apparaissent et quelles sont les courbes spectrales correspondantes.

Nous avons vu dans le chapitre 2 que, tant que la courbe spectrale classique associée à un modèle à deux matrices est régulière, tous les coefficients $F^{(g)}$ du développement topologique de l'énergie libre peuvent être calculés. Ainsi, le rayon de convergence en T de $F^{(g)}(T)$ est atteint pour certaines courbes singulières. Nous nous restreignons ici, comme dans la partie 5, aux singularités rationnelles.

Considérons donc le cas où les potentiels V_1 et V_2 sont choisis de manière à ce que la courbe spectrale classique $\mathcal{E}_{2\text{MM}}$ ait une singularité de type p/q lorsque T est égale à la valeur critique T_c .

$$\begin{cases} T = T_c \\ x(z) \sim_{p \rightarrow a} x(a) + (z - z(a))^q \\ y(z) \sim_{p \rightarrow a} y(a) + (z - z(a))^p \end{cases} \quad (6-1)$$

Notons que les valeurs de p et q sont majorées par les degrés des potentiels V_1 et V_2 . Ainsi, le modèle à une matrice donne seulement accès à $q = 2$.

On peut se ramener à la limite singulière décrite dans la partie précédente en utilisant la notation $t = T - T_c$. Ainsi, à $t \neq 0$, il n'y a pas de singularité et l'on décrit la courbe $\mathcal{E}_{2\text{MM}}$ en termes de la variable locale $\zeta = zt^{-\nu}$:

$$\begin{cases} x(z, t) \sim x(a) + t^{q\nu} Q(\zeta) + o(t^{q\nu}) \\ y(z, t) \sim y(a) + t^{p\nu} P(\zeta) + o(t^{p\nu}) \\ \zeta = zt^{-\nu} \end{cases} \quad (6-2)$$

où Q (resp. P) est un polynôme de degrés q (resp. p).

On définit alors la courbe spectrale singulière par

$$\mathcal{E}_{\text{sing}}(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi = Q(\zeta) \\ \eta = P(\zeta) \end{cases} = \text{Resultant}(Q - \xi, P - \eta). \quad (6-3)$$

Or, la dépendance en T du modèle à deux matrices se caractérise par

$$\left. \frac{d}{dT} y dx \right|_x = dS_{\infty_x, \infty_y} \quad (6-4)$$

où ∞_x et ∞_y sont les deux pôles de $y dx$ décrits dans la partie 8.1 du chapitre 2. Notons qu'ils sont loins des points de branchement, et en particulier du point de branchement devenant singulier. Au voisinage de la singularité, on a donc

$$\left. \frac{d}{dT} y dx \right|_x \sim C t^\nu d\zeta + O(t^{2\nu}) \quad (6-5)$$

où C est une constante d'ordre 1. En utilisant la paramétrisation Eq. (6-2), on obtient la relation de Poisson [29, 34] entre les polynômes :

$$pP(\zeta)Q'(\zeta) - qQ(\zeta)P'(\zeta) = \frac{C}{\nu} t^{1-(p+q-1)\nu} \quad (6-6)$$

qui fixe

$$\nu = \frac{1}{p+q-1}. \quad (6-7)$$

Alors le théorème 5.1 montre que le terme dominant des énergies libres est donné par

$$F_{2\text{MM}}^{(g)}(T) \underset{T \rightarrow T_c}{\sim} (T - T_c)^{(2-2g)(p+q)/(p+q-1)} F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{sing}}) \quad , \text{ pour } g \geq 2 \quad (6-8)$$

lorsque l'on s'approche de la singularité à $T = T_c$. Les deux premier termes du développement topologique sont aussi donnés par :

$$F_{2\text{MM}}^{(0)}(T) \underset{T \rightarrow T_c}{\sim} \frac{C^2}{2} \frac{(p+q-1)^2}{(p+q)(p+q+1)} (T - T_c)^{2+2\nu} + \text{reg} \quad , \text{ pour } g = 0 \quad (6-9)$$

et

$$F_{2\text{MM}}^{(1)}(T) \underset{T \rightarrow T_c}{\sim} -\frac{1}{24} (p-1)(q-1)\nu \ln(T - T_c) + O(1) \quad , \text{ pour } g = 1. \quad (6-10)$$

On a ainsi un moyen de calculer explicitement la double limite d'échelle des termes du développement topologique de l'énergie libre sans faire de passage à la limite : il suffit de calculer les quantités correspondantes directement sur la courbe spectrale singulière.

Modèles minimaux (p,q).

Etudions plus précisément la courbe singulière $\mathcal{E}_{(p,q)}$ correspondant à un modèle minimal (p, q) (cf [29]) donnée par

$$\mathcal{E}_{(p,q)}(x, y) = \begin{cases} x = Q(\zeta) \\ y = P(\zeta) \end{cases} = \text{Resultant}(Q - x, P - y). \quad (6-11)$$

où P et Q sont deux polynômes de degrés respectifs p et q satisfaisant la relation de Poisson :

$$pPQ' - qQP' = \frac{t_1}{\nu} \quad (6-12)$$

dont la solution peut être écrite [34] :

$$P = (Q^{p/q})_+ \quad (6-13)$$

et

$$(Q^{p/q})_- = \frac{t_1}{q} \zeta^{1-q} + O(\zeta^{-q}), \quad (6-14)$$

où nous avons utilisé les notations $f = f_+ + f_-$ avec f_+ et f_- désignant respectivement les parties positives et négatives du développement en série de Laurent de f , i.e. la partie polynômiale et la partie pôlaire. On voit aisément que cette dernière équation implique $q - 2$ contraintes pour les éléments de Q .

La courbe $\mathcal{E}_{(p,q)}$ ainsi définie est de genre nul et telle que les fonctions rationnelles x et y la paramétrisant n'ont qu'un seul pôle situé à l'infini : $\alpha := \infty$. Le noyau de Bergmann est alors (cf partie 8.1 du chapitre 2) :

$$B(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - \zeta_2)^2}. \quad (6-15)$$

Les modules au pôle de cette courbe sont alors les coefficients Q_k et P_k donnés par

$$Q(\zeta) = \sum_{k=0}^q Q_k \zeta^k \quad , \quad P(\zeta) = \sum_{k=0}^p P_k \zeta^k. \quad (6-16)$$

Par translation sur la variable locale ζ , on peut supposer que $Q_{q-1} = 0$ et, par changement d'échelle, que $Q_{q-2} = -qQ_q$ sans perte de généralité. La relation de Poisson Eq. (6-12) dit alors que $P_{p-1} = 0$ et $P_{p-2} = -pP_p$, et donc que :

$$Q_{q-1} = P_{p-1} = 0 \quad , \quad \frac{Q_{q-2}}{Q_q} = -q \quad , \quad \frac{P_{p-2}}{P_p} = -p. \quad (6-17)$$

On retrouve alors :

$$F^{(0)}(\mathcal{E}_{(p,q)}) = 0. \quad (6-18)$$

Remarque 6.1 L'invariance symplectique du théorème 4.1 autorisant l'échange des rôles respectifs de x et de y permet de montrer très simplement la propriété bien connue d'équivalence des modèles (p, q) et (q, p) .

Autres modules.

Dans un contexte plus général [34], on peut déformer les modèles minimaux (p, q) avec $p + q - 2$ autres modules t_1, \dots, t_{p+q-2} . Pour ce faire, considérons un polynôme Q monique de degré q :

$$Q(\zeta) = \zeta^q + \sum_{j=0}^{q-2} u_{q-j} \zeta^j \quad (6-19)$$

dont les coefficients u_2, \dots, u_q sont des fonctions de $q - 1$ modules t_1, \dots, t_{q-1} déterminées par la contrainte

$$(Q^{p/q})_- = \sum_{j=1}^{q-2} \frac{q-j}{q} t_{q-j} Q^{-j/q} + \frac{t_1}{q} \zeta^{1-q} + O(\zeta^{-q}). \quad (6-20)$$

Définissons alors un polynôme P monic de degré p par :

$$P(\zeta) = \zeta^p + \sum_{j=0}^{p-2} v_{p-j} \zeta^j = Q_+^{p/q} - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{j+q}{q} t_{q+j-1} Q_+^{j/q} \quad (6-21)$$

dépendant de $p - 1$ autres paramètres t_q, \dots, t_{q+p-2} .

La courbe spectrale classique correspondante est alors :

$$\mathcal{E}_{(p,q)}(x, y) = \text{Resultant}(x - Q, y - P). \quad (6-22)$$

Il est bien connu que cette courbe dépendant des paramètres t_1, \dots, t_{p+q-2} est la courbe spectrale de la hiérarchie intégrable de Witham sans dispersion [?] et l'on a ainsi accès aux observables de cette hiérarchie.

On peut vérifier que $t_2 = t_3 = \dots = t_{p+q-1} = 0$ redonne bien sûr le modèle minimal (p, q) .

Exemples de Modèles minimaux.

Décrivons les premiers exemples de modèles (p, q) en donnant à chaque fois la courbe spectrale correspondante ainsi que les polynômes permettant une paramétrisation rationnelle.

- **Courbe d'Airy** $(2, 1)$.

La courbe spectrale classique pour le modèle minimal $(2, 1)$ est

$$\mathcal{E}_{(2,1)}(x, y) = y^2 + t_1 - x, \quad (6-23)$$

i.e.

$$Q(\zeta) = \zeta^2 + t_1, \quad P(\zeta) = \zeta. \quad (6-24)$$

On l'étudiera plus en détail dans la partie 6.3 puisqu'elle décrit le comportement générique de n'importe quelle courbe au voisinage d'un point de branchement et coïncide avec la loi bien connue de Tracy-Widom [101].

- **Gravité pure** $(3, 2)$.

La paramétrisation

$$Q(\zeta) = \zeta^2 - 2v \quad , \quad P(\zeta) = \zeta^3 - 3v\zeta \quad , \quad t_1 = 3v^2 \quad (6-25)$$

donne la courbe spectrale classique

$$\mathcal{E}_{(3,2)}(x, y) = x^3 - 3v^2x - y^2 + 2v^3 \quad (6-26)$$

que nous étudierons dans la partie 6.4 .

• **Modèle d'Ising** (4, 3).

Si l'on habille la gravité pure d'une structure de spin, c'est-à-dire que l'on ajoute de la matière de la manière la plus simple possible, on obtient la paramétrisation

$$Q(\zeta) = \zeta^3 - 3v\zeta - 3w \quad , \quad P(\zeta) = \zeta^4 - 4v\zeta^2 - 4w\zeta + 2v^2 - \frac{5}{3}t_5(\zeta^2 - 2v) \quad (6-27)$$

avec

$$t_1 = 4v^3 + 6w^2 \quad , \quad t_2 = 6vw. \quad (6-28)$$

La courbe spectrale classique est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(4,3)}(x, y) = & x^4 - y^3 - 4v^3x^2 + 3v^4y + 2v^6 \\ & + 12wv(-xy + v^2x) + 6w^2(-x^2 + 2vy - 4v^3) + 8w^3x - 3w^4 \\ & + 5t_5(-x^2y - v^2x^2 + 2v^3y + 2v^5 - 2wyx + 2v^2wx + 3w^2y - 17v^2w^2) \\ & + \frac{25}{3}t_5^2(v^2y + 2v^4 - 4vwx - 12vw^2) \\ & + \frac{125}{27}t_5^3(-x^2 + 2v^3 - 6wx - 9w^2). \end{aligned} \quad (6-29)$$

Les variations par rapport aux modules t_5 , t_2 et t_1 correspondent à des variations de la forme ydx données respectivement par

$$\Omega_5 = -d\Lambda_5 = d(\zeta^5 - 5v\zeta^3 + 10v^2\zeta), \quad (6-30)$$

$$\Omega_1 = -d\Lambda_1 = d\left(\zeta + \frac{5}{12} \frac{t_5}{v^3 - w^2} (2v^2\zeta + 2vw - w\zeta^2)\right), \quad (6-31)$$

et

$$\Omega_2 = -d\Lambda_2 = d\left(\zeta^2 + \frac{5}{6} \frac{t_5}{v^3 - w^2} (v^2\zeta^2 - 2vw\zeta - 2w^2)\right) \quad (6-32)$$

en utilisant les notations de 4.2.

• **Modèles unitaires** ($q + 1, q$).

Lorsque $p := q + 1$, la courbe spectrale classique prend la forme :

$$\mathcal{E}_{(q+1,q)}(x, y) = T_{q+1}(x) - T_q(y) \quad (6-33)$$

où T_p est le p -ième polynôme de Tchebychev. Elle est alors paramétrée par

$$Q(\zeta) = T_q(\zeta) \quad , \quad P(\zeta) = T_{q+1}(\zeta). \quad (6-34)$$

6.2 Application à l'intégrale de Kontsevich.

Dans ce paragraphe nous étudions un cas particulier très simple de modèle à une matrice en champ extérieur introduit par Kontsevich dans le cadre de l'étude des nombres d'intersection des surfaces de Riemann [72]. Il serait intéressant de développer le profond lien entre les invariants introduits dans cette thèse et le calcul de ces nombres d'intersection et la conjecture de Witten-Kontsevich [108], mais ce n'est pas le propos de ce paragraphe et nous discuterons brièvement ce point au cours de la conclusion.

L'intégrale de Kontsevich est la fonction génératrice permettant de calculer les nombres d'intersection de l'espace des modules des surfaces de Riemann (cf. [72, 33]). Elle est définie par :

$$Z_{\text{Kontsevich}} = \int dM e^{-N \text{Tr} \left(\frac{M^3}{3} - M(\Lambda^2 + t_1) \right)} \quad , \quad t_1 = \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\Lambda} \quad (6-35)$$

où Λ a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Cette intégrale correspond donc au modèle à une matrice en champ extérieur Z_{Mext} introduit dans la partie 2 du chapitre 3 avec $V(x) = x^3/3$ et $\hat{\Lambda} = \Lambda^2 + t_1$. La courbe spectrale classique correspondante est donc

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevich}}(x, y) = (x^2 - y)S(y) - xS_1(y) - S_2(y) \quad (6-36)$$

où $S_1(y)$ et $S_2(y)$ sont des polynômes de degrés inférieurs strictement à s qui est le nombre de valeurs propres distinctes de Λ .

Pour que $F_{\text{Kontsevich}}^{(g)}$ soit bien la fonction génératrice des nombres d'intersection, cette courbe spectrale doit être de genre nul nécessairement. Alors, on peut écrire explicitement une paramétrisation rationnelle :

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevich}}(x, y) = \begin{cases} x(z) = z + \frac{1}{2N} \text{Tr} \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{z-\Lambda} \\ y(z) = z^2 + \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\Lambda} \end{cases} \quad (6-37)$$

Sous cette forme, on peut voir que les points de branchements en x sont nombreux et compliqués à décrire. Heureusement, l'invariance symplectique du th.4.1 nous permet de travailler avec les rôles de x et y inversés. Nous allons donc étudier la forme xdy et les points de branchement en y . En fait, il y a un unique point de branchement en y solution de $y'(z) = 0$: il est situé à l'origine $z = 0$. Or, les formules définissant les $F^{(g)}$ consistent en le calcul de résidus en ce point de branchement, on a donc uniquement besoin de connaître le développement de Taylor de $x(z)$ autour de $z = 0$ pour calculer tous les $F^{(g)}$, i.e.

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevich}}(x, y) = \begin{cases} x(z) = z - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+2} z^k \\ y(z) = z^2 + t_1 \end{cases} \quad (6-38)$$

où l'on a défini les temps de Kontsevich :

$$t_k = \frac{1}{N} \text{Tr} \Lambda^{-k} \quad (6-39)$$

de manière à ce que :

$$\boxed{F_{\text{Kontsevich}}^{(g)} = F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Kontsevich}})} \quad (6-40)$$

On peut une nouvelle fois utiliser l'invariance symplectique du théorème 4.1 et ainsi ajouter à $x(z)$ n'importe quelle fonction rationnelle de $y(z)$. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 6.1 $F_{\text{Kontsevich}}^{(g)}$ dépend uniquement des temps impairs t_{2k+1} , with $k \leq 3g - 2$:

$$\boxed{F_{\text{Kontsevich}}^{(g)} = F_{\text{Kontsevich}}^{(g)}(t_1, t_3, t_5, \dots, t_{6g-3})} \quad (6-41)$$

Supposons maintenant que $t_k = 0$ pour tout $k \geq p+2$. La courbe spectrale classique devient alors :

$$\begin{cases} x(z) = z - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p t_{k+2} z^k \\ y(z) = z^2 + t_1 \end{cases} \quad (6-42)$$

qui n'est autre que la courbe du modèle minimal $(p, 2)$ introduite dans le paragraphe précédent. D'une part cela démontre aisément le résultat obtenu par Ambjorn et Kristjansen [10] liant la double limite d'échelle du modèle à une matrice et l'intégrale de Kontsevich. D'autre part, cela démontre en une ligne le théorème classique

Théorème 6.2 $Z_{\text{Kontsevich}}$ est la fonction τ de la hiérarchie de KdV.

Quelques fonctions de corrélations et énergies libres.

Pour la courbe de Kontsevich, les éléments de base sont donnés par :

$$B(z, z') = \frac{dz dz'}{(z - z')^2} \quad , \quad dE_z(z') = \frac{z dz'}{z^2 - z'^2} \quad , \quad \omega(z) = 2z^2 dz \left(2 - \sum_j t_{2j+3} z^{2j} \right) \quad (6-43)$$

et l'unique point de branchement est situé en $z = 0$.

Suivant la définition 3.1, on calcule les premières fonctions de corrélation :

$$W_1^{(1)}(z) = -\frac{dz}{8(2-t_3)} \left(\frac{1}{z^4} + \frac{t_5}{(2-t_3)z^2} \right), \quad (6-44)$$

$$W_3^{(0)}(z_1, z_2, z_3) = -\frac{1}{2-t_3} \frac{dz_1 dz_2 dz_3}{z_1^2 z_2^2 z_3^2}, \quad (6-45)$$

$$W_2^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{8(2-t_3)^4 z_1^6 z_2^6} \left[(2-t_3)^2 (5z_1^4 + 5z_2^4 + 3z_1^2 z_2^2) + 6t_5^2 z_1^4 z_2^4 + (2-t_3)(6t_5 z_1^4 z_2^2 + 6t_5 z_1^2 z_2^4 + 5t_7 z_1^4 z_2^4) \right] \quad (6-46)$$

et

$$W_1^{(2)}(z) = -\frac{dz}{128(2-t_3)^7 z^{10}} \left[252 t_5^4 z^8 + 12 t_5^2 z^6 (2-t_3)(50 t_7 z^2 + 21 t_5) \right]$$

$$\begin{aligned}
& +z^4(2-t_3)^2(252t_5^2 + 348t_5t_7z^2 + 145t_7^2z^4 + 308t_5t_9z^4) \\
& +z^2(2-t_3)(203t_5 + 145z^2t_7 + 105z^4t_9 + 105z^6t_{11}) \\
& +105(2-t_3)^4].
\end{aligned}
\tag{6-47}$$

Les premiers termes du développement topologique de l'énergie libre sont alors donnés par

$$F_{\text{Kontsevich}}^{(1)} = -\frac{1}{24} \ln \left(1 - \frac{t_3}{2} \right) \tag{6-48}$$

et

$$F_{\text{Kontsevich}}^{(2)} = \frac{1}{1920} \frac{252t_5^3 + 435t_5t_7(2-t_3) + 175t_9(2-t_3)^2}{(2-t_3)^5}. \tag{6-49}$$

Ces expressions coïncident bien avec les résultats déjà connus dans la littérature [61].

Il est ici facile de calculer les termes suivants du développement topologique en utilisant la même méthode (on peut facilement écrire un programme faisant le travail).

6.3 Exemple : courbe d'Airy.

La courbe $y = \sqrt{x}$ est d'un intérêt particulier. En effet, non seulement elle correspond au modèle minimal le plus simple (cf [34, 35]), i.e. (2, 1), appelé également loi de Tracy-Widom [101], mais elle est le prototype du comportement de n'importe quelle courbe au voisinage de l'un de ses points de branchements.

Considérons la courbe

$$\mathcal{E}(x, y) = y^2 - x \tag{6-50}$$

et l'uniformisation $p = y$:

$$\begin{cases} x(p) = p^2 \\ y(p) = p \end{cases}. \tag{6-51}$$

Il n'y a ici qu'un pôle situé en $p = \infty$, et un seul point de branchement en $p = 0$. Le point conjugué est alors simplement $\bar{p} = -p$ et le noyau de Bergmann :

$$B(p, q) = \frac{dp dq}{(p-q)^2}, \quad dE_q(p) = \frac{q dp}{q^2 - p^2}, \quad \omega(q) = 4q^2 dq. \tag{6-52}$$

On peut aisément voir que toutes les fonctions de corrélations avec $2g + k \geq 3$ sont de la forme :

$$W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) = \omega_k^{(g)}(p_1^2, \dots, p_k^2) dp_1 \dots dp_k \tag{6-53}$$

On peut même observer que les règles diagrammatiques sont homogènes et donc les fonctions $W_1^{(g)}(p)$ doivent être homogènes en p . On peut montrer que :

$$W_1^{(g)}(p) = \frac{c_g dp}{p^{6g-2}} \tag{6-54}$$

et que la fonction de corrélation à un point resommée est

$$W_1(p, N) := -N y dx + \sum_{g=1}^{\infty} N^{1-2g} W_1^{(g)}(p) = W_1(N^{\frac{1}{3}} p, 1). \quad (6-55)$$

De même, la fonction à deux points est donnée par

$$W_2(p, q, N) := \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} W_2^{(g)}(p, q) = W_2(N^{\frac{1}{3}} p, N^{\frac{1}{3}} q, 1) \quad (6-56)$$

et plus généralement

$$W_k(p_1, \dots, p_k, N) := \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k} W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) = W_k(N^{\frac{1}{3}} p_1, \dots, N^{\frac{1}{3}} p_k, 1). \quad (6-57)$$

En fait, la solution de la relation de récurrence Eq. (3-5) peut s'exprimer explicitement en termes de la fonction d'Airy. Pour cela, considérons $g(x) = Ai'(x)/Ai(x)$ où $Ai(x)$ est la fonction d'Airy, i.e. $g'(x) + g^2(x) = x = p^2$. En termes de la variable p , on traduit cela par :

$$f(p) = g(p^2) \quad , \quad f^2 + \frac{f'}{2p} = p^2 \quad (6-58)$$

dont le développement à grand p donne :

$$f(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k p^{1-3k} = p - \frac{1}{4p^2} - \frac{9}{32p^5} + \dots \quad (6-59)$$

où les coefficients du développement satisfont :

$$\frac{4-3k}{2} f_{k-1} + \sum_{j=0}^k f_j f_{k-j} = \delta_{k,0}. \quad (6-60)$$

Les fonctions à un et deux points sont alors obtenues sous la forme :

$$W_1(p, 1) = -2 \frac{p^2 - f(p)f(-p)}{f(p) - f(-p)} p dp = -2p^2 dp + \frac{dp}{(2p)^4} + \frac{9!! dp}{3^2 (2p)^{10}} + \frac{15!! dp}{3^4 (2p)^{16}} \dots \quad (6-61)$$

et

$$W_2(p, p', 1) = -4 \frac{(f(p) - f(p'))(f(-p) - f(-p'))}{(p^2 - p'^2)^2 (f(p) - f(-p))(f(p') - f(-p'))} p dp p' dp'. \quad (6-62)$$

En particulier

$$W_2(p, p, 1) = \frac{f'(p)f'(-p)}{(f(p) - f(-p))^2} dp^2 \quad (6-63)$$

d'où la fonction à deux points non corrélée

$$W_2(p, p, 1) + W_1(p, 1)^2 = 4p^4 dp^2 = x dx^2. \quad (6-64)$$

De manière analogue, on trouve par exemple la fonction à trois points

$$\begin{aligned}
& W_3(p_1, p_2, p_3, 1) \\
= & \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(p_3^2 - p_2^2)(p_3^2 - p_1^2)(p_2^2 - p_1^2)} \times \\
& \times \frac{\sum_{i=1}^3 f(p_i) f(-p_i) (f(p_{i-1}) + f(-p_{i-1}) - f(p_{i+1}) - f(-p_{i+1}))}{(f(p_1) - f(-p_1))(f(p_2) - f(-p_2))(f(p_3) - f(-p_3))} \\
= & \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{2 p_1^2 p_2^2 p_3^2} + \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{2^6 p_1^8 p_2^8 p_3^8} + \dots \\
(6-65)
\end{aligned}$$

ainsi que des expressions similaires pour n'importe quel W_k .

En fait, on sait par ailleurs que toutes les fonctions de corrélations peuvent s'écrire sous forme de déterminant [40, 41] en utilisant le noyau de Tracy-Widom [101] :

$$K(x, x') = \frac{Ai(x)Ai'(x') - Ai'(x)Ai(x')}{x - x'}, \quad (6-66)$$

ce qui a un fort lien avec les propriétés d'intégrabilité de ces systèmes. En effet, le fait que la fonction d'Airy satisfasse l'équation différentielle $Ai'' = xAi$ peut être vu comme une conséquence du fait que A_i soit une fonction de Baker–Akhiezer ainsi que des équations de Hirota démontrées dans le théorème 7.2 de la partie suivante.

Remarque 6.2 Pour cette courbe, l'énergie libre est nulle :

$$\forall g \quad F^{(g)} = 0. \quad (6-67)$$

6.4 Exemple : la gravité pure (3,2)

Étudions maintenant en détails le modèle minimal (3, 2) souvent appelé modèle de la gravité pure [34]. Pour cela, considérons la courbe algébrique :

$$\mathcal{E}_{(3,2)} = \begin{cases} x(z) = z^2 - 2v \\ y(z) = z^3 - 3vz \\ t_1 = 3v^2 \end{cases} . \quad (6-68)$$

Remarquons tout d'abord que, puisque ce modèle est unitaire, l'uniformisation est obtenue par les polynômes de Tchebychev T_2 et T_3 , qui satisfont la relation de Poisson Eq. (6-12). Par changement d'échelle $z = \sqrt{v}p$, on peut écrire la courbe comme :

$$\mathcal{E}_{(3,2)} = \begin{cases} x(p) = v(p^2 - 2) \\ y(z) = v^{3/2}(p^3 - 3p) \\ t_1 = 3v^2 \end{cases} . \quad (6-69)$$

Il n'y a alors qu'un seul point de branchement situé en $p = 0$ et le point conjugué est alors défini par $\bar{p} = -p$. Comme précédemment le noyau de Bergmann est celui de la sphère :

$$B(p, q) = \frac{dp dq}{(p - q)^2} \quad , \quad dE_q(p) = \frac{q dp}{q^2 - p^2} \quad (6-70)$$

$$\omega(q) = (y(q) - y(\bar{q}))dx(q) = 4v^{5/2} (q^2 - 3) q^2 dq \quad (6-71)$$

$$\Phi(q) = v^{5/2} \left(\frac{2q^5}{5} - 2q^3 \right) \quad (6-72)$$

La variation de ydx correspondant à une variation de t_1 est donnée par :

$$\Omega_1(p) = - \left. \frac{\partial y(p)dx(p)}{\partial t_1} \right|_{x(p)} = v^{1/2} dp = -v^{1/2} \operatorname{Res}_{\infty} qB(p, q) \quad , \quad \Lambda_1(q) = -v^{1/2} q \quad (6-73)$$

donc l'effet de $\partial/\partial t_1$ sur les fonctions de corrélations est décrit par :

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_1} W_k^{(g)} \right|_x = -v^{1/2} \operatorname{Res}_{q \rightarrow \infty} qW_{k+1}^{(g)}. \quad (6-74)$$

Quelques fonctions de corrélation et énergies libres.

On trouve les premières fonctions de corrélations :

$$W_3^{(0)}(p_1, p_2, p_3) = -\frac{v^{-5/2}}{6} \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{p_1^2 p_2^2 p_3^2} \quad (6-75)$$

$$W_1^{(1)}(p) = -\frac{v^{-5/2}}{(12)^2} \frac{p^2 + 3}{p^4} dp \quad (6-76)$$

$$W_2^{(1)}(p, q) = v^{-5} \frac{15q^4 + 15p^4 + 6p^4 q^2 + 2p^4 q^4 + 9p^2 q^2 + 6p^2 q^4}{2^5 3^3 p^6 q^6} dp dq \quad (6-77)$$

$$W_1^{(2)}(p) = -v^{-15/2} 7 \frac{135 + 87p^2 + 36p^4 + 12p^6 + 4p^8}{2^{10} 3^5 p^{10}} dp \quad (6-78)$$

$$W_4^{(0)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{v^{-5}}{9p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2} \left(1 + 3 \sum_i \frac{1}{p_i^2} \right) dp_1 dp_2 dp_3 dp_4 \quad (6-79)$$

$$\frac{W_5^{(0)}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)}{dp_1 dp_2 dp_3 dp_4 dp_5} = \frac{v^{-15/2}}{9p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2 p_5^2} \left(1 + 3 \sum_i \frac{1}{p_i^2} + 6 \sum_{i < j} \frac{1}{p_i^2 p_j^2} + 5 \sum_i \frac{1}{p_i^4} \right) \quad (6-80)$$

Encore une fois, il est aisé d'obtenir de cette façon n'importe quelle fonction de corrélation.

On peut également calculer les différents termes du développement topologique de l'énergie libre Par exemple, le théorème 4.2 et Eq. (6-74), permettent de calculer :

$$\frac{\partial^3 F^{(0)}}{\partial t_1^3} = -\frac{1}{6v} = -\frac{1}{2\sqrt{3}t_1} \longrightarrow \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_1^2} = -\frac{t_1^{1/2}}{\sqrt{3}} \quad (6-81)$$

en utilisant eq.6-75.

De plus eq.6-76 implique :

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t_1} = -\frac{1}{(12)^2 v^2} = -\frac{1}{48 t_1} \longrightarrow \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial t_1^2} = \frac{1}{48 t_1^2} \quad (6-82)$$

et eq.6-78 donne :

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t_1} = -v^{-7} \frac{7}{2^8 3^5} = -\frac{7}{2^8 3^{3/2} t_1^{7/2}} \longrightarrow \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial t_1^2} = \frac{49}{2^9 3^{3/2} t_1^{9/2}}. \quad (6-83)$$

On peut alors vérifier que la dérivée seconde de l'énergie libre :

$$u = \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} = \sum_{g=0}^{\infty} t_1^{(1-5g)/2} u^{(g)} \quad , \quad F^{(g)} = \frac{4u^{(g)}}{5(1-g)(3-5g)}. \quad (6-84)$$

satisfait l'équation de Painlevé I ordre par ordre :

$$u^2 + \frac{1}{6} u'' = \frac{1}{3} t_1. \quad (6-85)$$

Il est bien connu que cette équation doit être satisfaite à tous les ordres [23, 39, 55, 34]. Ceci peut une nouvelle fois être vu comme une conséquence des équations de Hirota présentées dans le th.7.2.

7 Intégrabilité des invariants algébriques.

Comme nous l'avons vu, il existe plusieurs exemples identifiant des fonctions de partitions de modèles de matrices comme les fonctions τ d'un système intégrable. Nous allons montrer dans cette partie comment différents indices laissent supposer que notre construction donne accès à une fonction τ (formelle pour le moment) associée à une courbe algébrique quelconque.

7.1 Fonction de Baker-Akhiezer.

Etant donnés deux points ξ et η du domaine fondamental, on définit le noyau suivant comme une série formelle en $\frac{1}{N}$:

$$K_N(\xi, \eta) = \frac{e^{-N \int_{\eta}^{\xi} y dx}}{E(\xi, \eta) \sqrt{dx(\xi) dx(\eta)}} \exp \left(- \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{l=1, 2-2g-l < 0}^{\infty} \frac{1}{l!} N^{2-2g-l} \int_{\eta}^{\xi} \int_{\eta}^{\xi} \dots \int_{\eta}^{\xi} W_l^{(g)}(p_1, \dots, p_l) \right) \quad (7-1)$$

où le chemin d'intégration reste entièrement dans le domaine fondamental. Il satisfait les propriétés suivantes :

- On peut voir que $(x(\xi) - x(\eta)) K_N(\xi, \eta) \rightarrow 1$ quand $\eta \rightarrow \xi$.

– On a

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \left(K_N(\xi, \eta) - \frac{1}{(x(\xi) - x(\eta))} \right) = -Ny(\xi) + \frac{W_1(\xi)}{dx(\xi)} \quad (7-2)$$

$$\text{où } W_1 = \sum_{g=1}^{\infty} N^{1-2g} W_1^{(g)}.$$

– L'échange des deux arguments se traduit par :

$$K_N(\xi, \eta) = K_{-N}(\eta, \xi). \quad (7-3)$$

– A priori, K_N pourrait avoir des pôles aux points de branchement puisque son logarithme $\ln K_N$ en a. Cependant, d'après le théorème de passage à la limite th.5.1, on peut voir que le terme dominant de tous les $W_l^{(g)}$ est donné par les $W_l^{(g)}$ correspondant à la courbe d'Airy $y^2 = x$ étudiée dans la partie 6.3 du chapitre précédent. Ainsi, au voisinage d'un point de branchement a , le noyau K_N se comporte comme le noyau de Tracy-Widom [101] quand $\xi, \eta \rightarrow a$:

$$K_N(\xi, \eta) \sim \frac{Ai(\hat{\xi})Ai'(\hat{\eta}) - Ai'(\hat{\xi})Ai(\hat{\eta})}{\hat{\xi} - \hat{\eta}} \quad (7-4)$$

$$\hat{\xi} = N^{2/3}(x(\xi) - x(a)) \quad , \quad \hat{\eta} = N^{2/3}(x(\eta) - x(a))$$

Donc K_N n'est pas singulier aux points de branchements.

– Les seules singularités de $K_N(\xi, \eta)$ sont : d'une part, des singularités essentielles aux pôles de ydx avec une partie singulière égale à $\exp(-N \int_{\eta}^{\xi} ydx)$ et un pôle simple en $\xi = \eta$ d'autre part.

Considérons maintenant un pôle α de ydx . Pour ξ dans un voisinage de α , on définit :

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha, N}(\xi) &= \frac{e^{-NV_{\alpha}(\xi)} e^{-N \int_{\alpha}^{\xi} (ydx - dV_{\alpha} + t_{\alpha} \frac{dz_{\alpha}}{z_{\alpha}})}}{E(\xi, \alpha) \sqrt{dx(\xi) d\zeta_{\alpha}(\alpha)}} (z_{\alpha}(\xi))^{Nt_{\alpha}} \\ &\exp \left(- \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{l=1, 2-2g-l < 0} \frac{1}{l!} N^{2-2g-l} \int_{\alpha}^{\xi} \int_{\alpha}^{\xi} \dots \int_{\alpha}^{\xi} W_l^{(g)}(p_1, \dots, p_l) \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \alpha} \left(K(\xi, \eta) \sqrt{\frac{dx(\eta)}{d\zeta_{\alpha}(\eta)}} e^{-NV_{\alpha}(\eta)} (z_{\alpha}(\eta))^{Nt_{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (7-5)$$

où ζ_{α} est encore un paramètre local au voisinage de α , $\zeta_{\alpha} = \frac{1}{z_{\alpha}}$, et $\phi_{\alpha, N}(\xi) = \psi_{\alpha, -N}(\xi)$.

On appelle ces fonctions, **fonctions de Baker-Akhiezer** car elles possèdent les propriétés suivantes très similaires à celles des fonctions de Baker-Akhiezer introduites dans le cadre des systèmes intégrables classiques (cf [12]) :

– $\psi_{\alpha, N}$ est définie seulement dans le voisinage de α mais on peut facilement la prolonger analytiquement sur la courbe entière en choisissant un point de base arbitraire o dans le voisinage de α et en écrivant :

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\xi} (ydx - dV_{\alpha} + t_{\alpha} \frac{dz_{\alpha}}{z_{\alpha}}) + V_{\alpha}(\xi) - t_{\alpha} \ln(z_{\alpha}(\xi)) \\ &= \int_o^{\xi} ydx + \int_{\alpha}^o (ydx - dV_{\alpha} + t_{\alpha} \frac{dz_{\alpha}}{z_{\alpha}}) + V_{\alpha}(o) - t_{\alpha} \ln(z_{\alpha}(o)). \end{aligned} \quad (7-6)$$

- Comme K_N , ces fonctions pourraient à priori avoir des pôles aux points de branchements. Mais de façon similaire, le théorème 5.1 montre que lorsque les arguments approchent un point de branchement a , $\xi \rightarrow a$, les fonctions de Baker-Akhiezer se comportent suivant :

$$\psi_{\alpha,N}(\xi) \sim C Ai(\hat{\xi}) \quad , \quad \hat{\xi} = N^{2/3}(x(\xi) - x(a)) \quad (7-7)$$

où $C = \psi_{\alpha,N}(a)/Ai(0)$ est une constante de normalisation.

- Les seules singularités de $\psi_{\alpha,N}$ sont des singularités essentielles aux pôles de ydx où la partie singulière est donnée par $\exp(-N \int^\xi ydx)$.

Remarque 7.1 En fait, ces fonctions $\psi_{\alpha,N}$ ne sont pas à proprement parler des fonctions de Baker-Akhiezer. En effet, elle ont des intégrales non nulles autour de cycles non-triviaux : elles ne reprennent pas la même valeur après que leur argument ai fait un tour autour de l'un de ces cycles. Les fonctions de Baker-Akhiezer, quant à elles, ne doivent pas changer de valeur après un tour de leur variable autour de n'importe quel cycle. On peut donner cette propriété aux fonctions ψ par normalisation par des fonctions θ appropriées mais détruisant ainsi le développement en $\frac{1}{N^2}$. L'étude de cette normalisation est très intéressante mais sort largement du propos de cette thèse, c'est pourquoi nous n'aborderons pas plus le sujet.

Nous nous restreindrons donc aux $\psi_{\alpha,N}$ eux mêmes qui peuvent être vus comme des "fonctions de Baker-Akhiezer formelles", c'est-à-dire qu'elles satisfont des équations de Hirota ordre par ordre en $\frac{1}{N}$ comme nous le montrons dans le prochain paragraphe.

7.2 Relation de Sato.

Etant donnés deux points ξ et η de la surface de Riemann compacte Σ et un nombre complexe r , on définit la courbe :

$$\mathcal{E} + r[\xi, -\eta] = \left\{ \left(x(p), y(p) + r \frac{dS_{\xi,\eta}(p)}{dx(p)} \right) \quad , \quad p \in \Sigma \right\} \quad (7-8)$$

La différentielle $ydx + rdS_{\xi,\eta}$ a les mêmes intégrales autour des cycles \mathcal{A} que ydx . Elle a également les mêmes pôles avec la même partie singulière plus deux nouveaux pôles simples, l'un en $p = \xi$ avec résidu r et l'autre en $p = \eta$ avec résidu $-r$.

On peut alors démontrer la **relation de Sato** :

Théorème 7.1

$$K_N(\xi, \eta) = \frac{Z_N(\mathcal{E} + \frac{1}{N}[\xi, -\eta])}{Z_N(\mathcal{E})} \quad , \quad \psi_{\alpha,N}(\xi) = \frac{Z_N(\mathcal{E} + \frac{1}{N}[\xi, \alpha])}{Z_N(\mathcal{E})}. \quad (7-9)$$

Encore une fois, cette relation est à comprendre au sens des séries formelles en $\frac{1}{N}$.

7.3 Equations de Hirota

Considérons deux courbes algébriques $\mathcal{E}(x, y)$ et $\tilde{\mathcal{E}}(x, y)$ avec la même structure conforme, on a alors les relations bilinéaires :

Théorème 7.2

$$\operatorname{Res}_{\eta \rightarrow \zeta} dx(\eta) K_N(\xi, \eta) \tilde{K}_{\tilde{N}}(\eta, \zeta) = K_N(\xi, \zeta) \quad (7-10)$$

et

$$\operatorname{Res}_{\xi \rightarrow \alpha} dx(\xi) \psi_{\alpha, N}(\xi) \tilde{\psi}_{\alpha, -\tilde{N}}(\xi) = 0 \quad \text{if } \tilde{N}t_\alpha > Nt_\alpha + 1 \quad (7-11)$$

qui prennent la même forme que l'équation de Hirota des systèmes intégrables classiques [12, 74] en les considérant comme des relations entre séries formelles en $\frac{1}{N}$.

8 Conclusion du chapitre.

Nous avons montré dans ce chapitre comment construire, à partir de n'importe quelle courbe algébrique, un ensemble infini de nombres et de formes différentielles qui coïncident avec les développements topologiques de plusieurs modèles de matrices lorsque la courbe considérée est une courbe spectrale. Non seulement ceci permet d'unifier ces différents modèles dans une même classe mais de plus, connaissant les propriétés d'invariance de ces objets sous les déformations de la courbe algébrique considérée, nous avons ainsi construit un objet puissant pour comparer différents modèles : pour comparer deux modèles il suffit de voir si leurs courbes spectrales appartiennent à la même classe d'équivalence modulo les transformations conservant les $F^{(g)}$. De plus, nous avons vu que ces propriétés d'invariance sont un outil très puissant pour le calcul, comme le montre l'exemple de l'intégrale de Kontsevich où des résultats classiques sont retrouvés sans effort.

Nous avons également fait un premier pas en direction d'un système intégrable sous-jacent en construisant les briques élémentaires d'un système intégrable classique sur la courbe algébrique considérée. Cependant, si ce développement formel semble donner tous les termes d'un développement semi-classique, il n'en donne pas pour autant accès au système quantique sous-jacent. En effet, en fixant les fractions de remplissage (et donc en empêchant les instantons dans le cas des modèles de matrices), il semble que l'on a brisé une symétrie globale qu'il faut restaurer pour revenir au système quantique correspondant à une valeur de N finie. Il reste donc beaucoup à explorer dans cette direction.

Une autre direction à explorer consiste à se demander si cette construction peut s'étendre à des variétés autres que des surfaces de Riemann obtenues par l'intermédiaire d'une courbe algébrique. En effet, il semblerait que la construction développée ici ne dépende que des points de branchements et pourrait par exemple s'étendre à certaines courbes de la forme :

$$\mathcal{E}(x, y) = 0 \quad (8-1)$$

où \mathcal{E} n'est plus un polynôme mais une fonction analytique en ses deux variables.

Chapitre 5

Modèles de matrices et théorie des cordes.

Les modèles de matrices ont souvent joué un rôle, ou du moins tenté, dans l'étude de différentes théories des cordes. Au cours des dernières décennies, avec l'évolution de la compréhension de ces théories, l'interaction entre cordes et matrices aléatoires a pris de nombreuses formes dont nous allons donner ici quelques exemples. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux revues de Mariño sur le sujet [80, 81].

1 Théorie des cordes critiques et doubles limites d'échelle.

Les modèles de matrices tels qu'ils sont décrits dans cette thèse sont par exemple apparus de manière détournée dans l'étude de ce que l'on appelle la théorie des cordes critiques (voir la partie qui leur est consacrée dans le chapitre 1).

Considérons une théorie des cordes correspondant à mettre une théorie des champs conforme sur une surface de Riemann Σ_g . L'objet principal de cette théorie est alors l'énergie libre :

$$F = \sum_g g_s^{2g-2} F_g \quad , \quad F_g = \int \mathcal{D}h \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}[\phi, h]} \quad (1-1)$$

où g_s est la constante de couplage des cordes, h la métrique bidimensionnelle sur Σ_g , ϕ les champs de matière couplés à la gravité par l'action \mathcal{S} et l'intégrale de chemin dans F_g porte sur les configurations de champs sur Σ_g . On peut généraliser cette énergie libre en perturbant l'action de la théorie conforme par un ensemble d'opérateurs à l'aide de modules t_n :

$$\mathcal{S}[\phi, h, t] := \mathcal{S}[\phi, h] + \sum_n t_n \mathcal{O}_n. \quad (1-2)$$

Le calcul de l'énergie libre, très compliqué en général, se simplifie beaucoup lorsque la théorie conforme a une charge centrale égale à la charge centrale critique $c = 26$. En effet, dans ce cas, la métrique se découple et il ne reste plus qu'à intégrer sur l'espace

des modules \mathcal{M}_g des surfaces de genre g :

$$F_g = \int_{\mathcal{M}_g} d\tau \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi, \tau, t]} \quad (1-3)$$

où τ est un ensemble de $3g - 3$ coordonnées paramétrisant l'espace des modules. On voit qu'il est alors nécessaire de décrire toutes les surfaces Σ_g , ce qui peut être fait en utilisant les modèles de matrices et leur limite continue.

On peut aller plus loin puisque lorsque la charge centrale satisfait $c < 1$, bien que la théorie ne soit plus critique et donc compliquée par la présence du champ de Liouville – un degré de liberté dynamique –, on peut calculer tous les F_g grâce aux modèles de matrices.

L'idée de base est assez naturelle. Puisque l'on veut décrire la feuille d'univers de la corde, on va la discrétiser pour pouvoir la générer par une intégrale de matrice formelle comme définie dans les chapitres 2 et 3 de cette thèse. Les doubles limites d'échelle étudiées dans la partie 5 du chapitre 2 permettent alors d'atteindre des surfaces continues en imposant une charge centrale $c < 1$ à la théorie conforme. La partie divergente des différents termes du développement topologique du modèle de matrices sont alors identifiables avec les coefficients du développement en g_s de l'énergie libre de la théorie des cordes :

$$F_g = F^{(g)}(\mathcal{E}_{DSL}) \quad (1-4)$$

où \mathcal{E}_{DSL} est la courbe obtenue en prenant la double limite d'échelle de la courbe spectrale du modèle de matrices. De même, les $W_k^{(g)}$ peuvent être interprétés comme des fonctions de corrélation de la théorie des cordes : elles correspondent à des amplitudes de cordes ouvertes consistant à intégrer sur un ensemble de surfaces avec bord.

Notons que, jusqu'à maintenant, ce calcul s'effectuait en évaluant l'énergie libre du modèle de matrice lui-même avant de prendre la double limite d'échelle du résultat obtenu. Le résultat de [IV] résumé dans la partie 5 du chapitre 4, montre que ce passage à la limite n'est pas nécessaire. L'énergie libre de la théorie des cordes peut directement être obtenue en calculant les invariants $F^{(g)}$ de la courbe algébrique $\mathcal{E}_{(p,q)}$ du modèle minimal (p, q) voulu sans qu'elle ne vienne d'une quelconque limite ! Ce résultat est un premier indice révélant un lien plus profond entre les invariants algébriques $F^{(g)}$ et l'énergie libre de théories des cordes indépendamment de l'existence d'un quelconque modèle de matrice intermédiaire.

2 Théories de cordes topologiques.

Cette approche des théories des cordes par les modèles de matrices était, jusqu'il y a peu, limitée à ce secteur particulier correspondant aux doubles limites d'échelle. Mais l'engouement récent, en mathématiques et en physique, pour les théories des cordes topologiques a permis de montrer que l'interaction entre les deux modèles est bien plus profonde.

Les théories des cordes topologiques correspondent au cas où la théorie conforme couplée à la gravité est un modèle Sigma bidimensionnel non linéaire dont l'espace

cible X est une variété de Calabi-Yau¹ [78, 106, 107]. Cela signifie que les champs de base sont des applications :

$$\phi : \Sigma_g \rightarrow X. \quad (2-1)$$

Il existe en fait deux versions de telles théories : le modèle A lié à la théorie des invariants de Gromov-Witten et le modèle B lié aux déformations de la structure complexe de la Calabi-Yau X . C'est ce dernier modèle que nous allons étudier dans la suite.

Explicitons d'abord la structure complexe d'une variété de Calabi-Yau X de dimension complexe 3. La structure complexe d'une Calabi-Yau X est donnée par un ensemble de modules formant un espace \mathcal{M} de dimension $h^{1,2}(X)$ paramétrisable comme suit. On commence par choisir une base de $H_3(X, \mathbb{Z})$:

$$(A_I, B_I) \quad , \quad I = 0, 1, \dots, h^{1,2} \text{ tels que } A_I \cap B_J = \delta_{IJ}. \quad (2-2)$$

On définit alors les périodes de la Calabi-Yau par :

$$X_I := \int_{A_I} \Omega \text{ et } \mathcal{F}_I := \int_{B_I} \Omega \quad (2-3)$$

où Ω est une section holomorphe non nulle de la fibrée canonique $\Omega^{3,0}(X)^2$. On peut montrer que les X_I sont des coordonnées projectives de \mathcal{M} , et donc que les $\mathcal{F}_I = \mathcal{F}_I(X)$ en sont des fonctions. On peut même montrer que leur dépendance provient d'une unique fonction $\mathcal{F}(X)$ selon :

$$\mathcal{F}_I(X) = \frac{\partial \mathcal{F}(X)}{\partial X_I}. \quad (2-4)$$

Cette fonction est homogène de degré deux en X_I , on peut donc introduire des nouvelles coordonnées

$$t_I := \frac{X_I}{X_0} \quad , \quad I = 1, \dots, h^{1,2}(X) \quad (2-5)$$

de manière à définir le **prépotentiel** :

$$F_0(t) = \frac{1}{X_0^2} \mathcal{F}(X) \quad (2-6)$$

qui s'avère coïncider avec l'énergie libre de genre 0 des cordes topologiques de type B sur X que nous définissons maintenant.

L'action d'une théorie topologique de type B sur X est obtenue par une déformation de l'action standard :

$$S_{\mathcal{N}=2} := S(0) + \sum_{I=1}^n t_I \int_{\Sigma_g} \phi_I^{(2)} + \sum_{I=1}^n \bar{t}_I \int_{\Sigma_g} \bar{\phi}_I^{(2)} \quad (2-7)$$

par les opérateurs chiraux ϕ_I et anti-chiraux $\bar{\phi}_I$ de la théorie correspondant aux directions marginales.

¹Cette propriété est très importante pour que la théorie soit topologique. Nous ne la décrivons pas ici et le lecteur intéressé pourra se référer aux revues [80, 81] pour plus de détail.

²L'existence d'une telle section est assurée par la propriété de Calabi-Yau de la variété X .

Notons que la déformation de l'action par les \bar{t} peut s'écrire comme un terme BRST-exact par rapport à la symétrie topologique de la théorie. On s'attendrait alors à ce que l'énergie libre de genre g , $F^{(g)}$, ainsi que les fonctions de corrélation

$$C_{I_1 \dots I_k}^{(g)} := \left\langle \int_{\Sigma_g} \phi_{I_1}^{(2)} \dots \int_{\Sigma_g} \phi_{I_k}^{(2)} \right\rangle \quad (2-8)$$

ne dépendent pas de ces paramètres non-holomorphes \bar{t} . Cependant, le couplage à la gravité détruit cette indépendance en introduisant une anomalie connue sous le nom d'**anomalie holomorphe**. Cette anomalie provenant de termes de bord peut être entièrement caractérisée par des équations de récurrence : les **équations d'anomalie holomorphe** [15]. Celles-ci peuvent être écrites en utilisant les notations suivantes. La métrique de Zamolodchikov sur l'espace des modules peut être définie en termes d'une fonction de Kähler K par

$$G_{I\bar{J}} = \partial_I \partial_{\bar{J}} K \quad (2-9)$$

où l'on a utilisé la notation

$$\partial_I := \frac{\partial}{\partial t_I} \quad , \quad \partial_{\bar{I}} := \frac{\partial}{\partial \bar{t}_I}. \quad (2-10)$$

L'énergie libre de genre 0, $F^{(0)}$, donne accès aux fonctions holomorphes à deux et trois points :

$$\tau_{IJ} := \partial_I \partial_J F^{(0)} \quad , \quad C_{IJK} := \partial_I \partial_J \partial_K F^{(0)}. \quad (2-11)$$

Les équations d'anomalie holomorphes peuvent alors s'écrire :

$$\forall g \geq 2, \quad \partial_{\bar{K}} F^{(g)} = \frac{1}{2} C_{\bar{K}}^{IJ} \left(D_I D_J F^{(g-1)} + \sum_{h=1}^{g-1} D_I F^{(h)} D_J F^{(g-h)} \right) \quad (2-12)$$

où la dérivée covariante est définie par

$$D_I = \partial_I - \Gamma_I + (2 - 2g) \partial_I K \quad (2-13)$$

avec le symbole de Christoffel

$$\Gamma_{IJ}^K := G^{K\bar{M}} \partial_I G_{J\bar{M}} \quad (2-14)$$

et le tenseur

$$C_{\bar{K}}^{IJ} := e^{2K} G^{I\bar{M}} G^{J\bar{N}} \bar{C}_{\bar{M}\bar{N}\bar{K}}. \quad (2-15)$$

Pour le genre 1, l'équation s'écrit :

$$\partial_I \partial_{\bar{J}} F^{(1)} = \frac{1}{2} C_{I\bar{K}\bar{L}} C_{\bar{J}}^{KL} - \left(\frac{\chi}{24} - 1 \right) G_{I\bar{J}}. \quad (2-16)$$

Notons également que les fonctions de corrélation peuvent être obtenues par action de la dérivée covariante sur les énergies libres :

$$C_{I_1 \dots I_k}^{(g)} = D_{I_1} \dots D_{I_k} F^{(g)}. \quad (2-17)$$

On peut donc écrire des équations d'anomalie pour elles aussi :

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{K}} C_{I_1 \dots I_k}^{(g)} &= \frac{1}{2} C_{\bar{K}}^{MN} \left(C_{MN I_1 \dots I_k}^{(g-1)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=0}^g \sum_{s=0}^k \frac{1}{s!(n-s)!} \sum_{\sigma \in S_k} C_{MI_{\sigma(1)} \dots I_{\sigma(s)}}^{(r)} C_{NI_{\sigma(s+1)} \dots I_{\sigma(k)}}^{(g-r)} \right) \\
&\quad - (2g - 2 + n - 1) \sum_{s=1}^k G_{\bar{K} I_s} C_{I_1 \dots I_{s-1} I_{s+1} \dots I_k}^{(g)}.
\end{aligned}
\tag{2-18}$$

Une fois les équations d'anomalie holomorphes résolues, il reste à fixer une constante d'intégration, i.e. une fonction holomorphe des paramètres. Pour ce faire, on cherche à déterminer la limite holomorphe de $F^{(g)}(t, \bar{t})$ définie par :

$$F^{(g)}(t) := \lim_{\bar{t} \rightarrow \infty} F^{(g)}(t, \bar{t}). \tag{2-19}$$

Ce passage à la limite n'est pas anodin. En effet, si l'on transforme ainsi l'énergie libre en une fonction holomorphe des modules, on perd une propriété de symétrie : l'invariance modulaire de $F^{(g)}(t, \bar{t})$ est brisée. Nous avons vu dans le chapitre précédent que ce comportement se retrouve dans le cadre des invariants algébriques lorsque l'on fait varier κ .

Remarque 2.1 Les amplitudes définies ici ont pu être interprétées comme les amplitudes d'une théorie quantique des champs six dimensionnelle sur la Calabi-Yau X : la **théorie de Kodaira-Spencer** [15]. Dans la suite, nous ferons donc régulièrement référence à cette théorie pour parler des amplitudes du modèle de type B.

3 Conjecture de Dijkgraaf-Vafa et modèle B local.

3.1 Variétés de Calabi-Yau locales.

Parmi les différentes classes de variétés de Calabi-Yau possibles pour l'espace cible, il en existe une qui permet de rendre le lien entre modèle B et modèles de matrices (ou invariants algébriques) plus explicite encore. On appelle les variétés non compactes correspondantes des **variétés de Calabi-Yau locales** [69]. Il a été montré dans [69] que leurs propriétés sont alors encodées dans une surface de Riemann compacte $\bar{\Sigma}_n$ de genre n^3 par l'intermédiaire des modules

$$t_I \propto \int_{\mathcal{A}_I} y dx \quad , \quad I = 1, \dots, n \tag{3-1}$$

avec $\{(\mathcal{A}_I, \mathcal{B}_I)\}$ une base de cycles de $\bar{\Sigma}_n$ et la forme $y dx$ définie par une paramétrisation de $\bar{\Sigma}_n$ comme équation algébrique. Ainsi, au lieu de travailler sur une variété de dimension 3, on travaille sur une variété de dimension 1, une surface de Riemann, tout comme

³Attention, cette surface ne doit pas être confondue avec la feuille d'univers Σ_g sur laquelle portent les intégrales du paragraphe précédent.

dans le cadre des matrices aléatoires. Dans le paragraphe suivant, nous montrons sur un exemple précis comment passer de la Calabi-Yau à la surface de Riemann.

Dans ce contexte, la métrique de Zamolodchikov est donnée par

$$G_{I\bar{J}} = -i(\tau - \bar{\tau})_{IJ} \quad (3-2)$$

où la fonction à deux points τ est simplement la matrice des périodes de Riemann de $\bar{\Sigma}_n$. Le symbole de Christoffel et le tenseur $C_{\bar{K}}^{IJ}$ sont quant à eux donnés par :

$$\Gamma_{IJ}^L = [(\tau - \bar{\tau})^{-1}]^{LM} \partial_I \tau_{JM} \quad (3-3)$$

et

$$C_{\bar{K}}^{IJ} = - [(\tau - \bar{\tau})^{-1}]^{IM} [(\tau - \bar{\tau})^{-1}]^{JN} C_{\overline{MNK}}. \quad (3-4)$$

Les équations d'anomalie holomorphes sont alors toujours données par Eq. (2-12) pour les énergies libres en considérant la dérivée covariante :

$$D_I := \partial_I - \Gamma_I. \quad (3-5)$$

De même, les fonctions de corrélation satisfont toujours Eq. (2-18) mais sans le terme de la seconde ligne, i.e :

$$\partial_{\bar{K}} C_{I_1 \dots I_k}^{(g)} = \frac{1}{2} C_{\bar{K}}^{MN} \left(C_{MNI_1 \dots I_k}^{(g-1)} + \sum_{r=0}^g \sum_{s=0}^k \frac{1}{s!(n-s)!} \sum_{\sigma \in S_k} C_{MI_{\sigma(1)} \dots I_{\sigma(s)}}^{(r)} C_{NI_{\sigma(s+1)} \dots I_{\sigma(k)}}^{(g-r)} \right). \quad (3-6)$$

3.2 Conjecture de Dijkgraaf-Vafa.

Considérons un cas particulier de Calabi-Yau locale donnée par l'équation⁴

$$u^2 + v^2 = H(x, z) \quad \text{avec} \quad H(x, z) = z^2 - (W'(x))^2 + f(x) \quad (3-7)$$

où $W(x)$ et $f(x)$ sont deux polynômes de degrés respectifs $n + 1$ et $n - 1$. La section holomorphe est alors donnée par

$$\Omega = \frac{dx dz du}{2\pi v}. \quad (3-8)$$

Pour cette géométrie particulière, montrons que ses périodes sur les cycles d'une base symplectique de la Calabi-Yau peuvent se ramener à des intégrales sur les cycles de la courbe $\bar{\Sigma}_n$

$$y^2(x) = (W'(x))^2 + f(x). \quad (3-9)$$

Supposons que cette courbe est générique, c'est-à-dire qu'il y a $2n$ points de branchements distincts :

$$(W'(x))^2 - f(x) = \prod_{i=1}^{2n} (x - x_i). \quad (3-10)$$

⁴C'est bien une variété de dimension 3 complexe : une équations polynomiale liant 4 variables complexes u, v, x et z !

Considérons les cycles $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1\dots n}$ définis par

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \mathcal{A}_i := [x_{2i-1}, x_{2i}]. \quad (3-11)$$

On construit alors les cycles $\tilde{\mathcal{A}}_i$ de la Calabi-Yau par fibrations sur ces intervalles par l'équation :

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \forall x \in \mathcal{A}_j, \quad u^2 + v^2 + z^2 = \prod_{i=1}^{2n} (x - x_i). \quad (3-12)$$

Notons que ces cycles sont n 3-sphères de la variété de Calabi-Yau se projetant sur les cycles \mathcal{A}_i de la courbe $H(x, y) = 0$ dans le plan de x . De même, on définit les cycles $\tilde{\mathcal{B}}$ par fibration sur les cycles \mathcal{B}_i orthogonaux aux cycles \mathcal{A}_i . Calculons maintenant les périodes de la section Ω sur ces cycles.

Soit \mathcal{C} un cycle \mathcal{A} ou \mathcal{B} et $\tilde{\mathcal{C}}$ le cycle correspondant sur la variété de Calabi-Yau. Alors

$$\int_{\tilde{\mathcal{C}}} \Omega = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{dx dz du}{2\pi v}. \quad (3-13)$$

Puisque $\tilde{\mathcal{C}}$ peut être vu comme une 2-sphère

$$u^2 + v^2 + z^2 = y(x)^2 \quad (3-14)$$

paramétrisée par x se déplaçant sur \mathcal{C} , on peut décomposer cette intégrale en une intégrale sur cette 2-sphère de rayon $y(x)$ et une intégrale sur \mathcal{C}^5 :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \Omega &= \int_{\mathcal{C}} dx \int_0^{y(x)} \frac{r dr}{\sqrt{y(x)^2 - r^2}} \\ &= \int_{\mathcal{C}} y(x) dx. \end{aligned} \quad (3-15)$$

Nous avons ainsi montré que, en intégrant la partie "triviale" de la géométrie de la variété de Calabi-Yau, on peut se ramener à étudier la projection sur une courbe hyperelliptique.

Jusqu'ici, nous avons simplement vu une très forte similitude entre les propriétés de transformation des énergies libres sous les déformations de la Calabi-Yau et les propriétés de variations des invariants algébriques associés aux surfaces $\bar{\Sigma}_n$ sans pour autant aller plus loin. Dans ce cas précis, on peut aller plus loin. On reconnaît en effet dans l'équation de $\bar{\Sigma}_n$, la forme de l'équation de la courbe spectrale classique d'un modèle à une matrice avec un potentiel $W(x)$. Par ailleurs, Dijkgraaf et Vafa ont conjecturé dans [36] que les énergies libres holomorphes $F^{(g)}(t)$ de cette théorie sont données par les termes du développement topologique du modèle à une matrice hermitienne. Cette conjecture a été vérifiée aux ordres 0 [36], 1 [37, 70] et 2 [58].

⁵On a supposé ici que u , v et z sont réels lorsque $x \in \mathcal{C}$. On peut faire exactement la même chose dans le cas où ils ne le sont pas

3.3 Miroirs de géométries toriques.

Il existe une autre classe de Calabi-Yau intéressante. Celle-ci est liée à la **symétrie miroir** [57] qui est une symétrie très importante puisqu'elle permet de relier les modèles de type A et de type B, i.e. la théorie des invariants de Gromov-Witten et la théorie des déformations de variétés de Calabi-Yau. Elle dit qu'étant donnée une Calabi-Yau \tilde{X} , il existe une autre Calabi-Yau X telle que le modèle A sur \tilde{X} et le modèle B sur X coïncident :

$$F_A^{(g)}(t; \tilde{X}) = F_B^{(g)}(t, X). \quad (3-16)$$

Dans le cas où \tilde{X} a une géométrie torique [19], son image par la symétrie miroir est caractérisée par une surface de Riemann $\bar{\Sigma}_n$ définie par une courbe algébrique du type⁶ :

$$y^2 = M^2(x) \prod_{i=1}^l (x - x_i) \quad (3-17)$$

où $M(x)$ est une fonction transcendentale. De récents travaux [82], semblent indiquer que les amplitudes holomorphes des cordes ouvertes et fermées de telles modèles de type B sont également données par les énergies libres et fonctions de corrélations associées à la courbe Eq. (3-17).

4 Théorie de Kodaira-Spencer et anomalie holomorphe.

Nous montrons dans cette partie que, pour un choix⁷ particulier de

$$\kappa = -(\tau - \bar{\tau})^{-1}, \quad (4-1)$$

les invariants $F^{(g)}$ satisfont les équations d'anomalie holomorphe. Rappelons que pour ce choix, ce sont des invariants modulaires et ils possèdent ainsi une première propriété nécessaire pour les identifier aux fonction de partitions de la théorie de Kodaira-Spencer.

Pour ce choix de κ , les fonctions de corrélation et énergies libres ne sont plus des fonctions holomorphes des modules. En effet, par l'intermédiaire de κ , ils ont maintenant une partie non holomorphe. Nous nous intéressons donc à cette nouvelle dépendance en étudiant particulièrement leurs variations par rapport aux $\bar{\tau}_i$. Elles sont obtenues en utilisant les variations par rapport à κ calculées dans le chapitre 4 :

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \bar{\epsilon}} = \frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \kappa} \quad , \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\epsilon}} = -\kappa \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{\epsilon}} \kappa \quad , \quad \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \epsilon^2} = 2i\pi\tau \quad (4-2)$$

d'où

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \bar{\epsilon}} = -\frac{1}{2i\pi} \kappa \frac{\partial^3 \bar{F}^{(0)}}{\partial \bar{\epsilon}^3} \kappa \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \kappa}. \quad (4-3)$$

⁶En fait, il faut effectuer une transformation exponentielle sur les variables pour obtenir ce résultat.

⁷Dans toute cette partie nous allons utiliser une notation vectorielle pour décrire les fractions de remplissage ϵ et les cycles \mathcal{A} et \mathcal{B} sous forme de vecteurs de taille \mathcal{G} . Il sera ainsi plus aisé de manipuler leur lien avec les matrices de taille $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, τ et κ sans avoir à faire appel à de fastidieuses sommations sur des indices.

Ainsi, en utilisant le théorème 4.8 du chapitre 4 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \bar{\epsilon}} &= -\frac{1}{(2i\pi)^2} \kappa \frac{\partial^3 \bar{F}^{(0)}}{\partial \bar{\epsilon}^3} \kappa \frac{1}{2} \oint_{r \in \mathcal{B}_j} \oint_{s \in \mathcal{B}_i} \left(W_{k+2}^{(g-1)}(p_K, r, s) \right. \\ &\quad \left. + \sum_h \sum_{L \subset K} W_{|L|+1}^{(h)}(p_L, r) W_{k-|L|+1}^{(g-h)}(p_{K/L}, s) \right). \end{aligned} \quad (4-4)$$

Or, avec le choix $\kappa = 1/(\bar{\tau} - \tau)$, on a la propriété :

$$\kappa \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \kappa = \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon}, \quad (4-5)$$

ce qui implique que l'opérateur différentiel D^8 introduit dans Eq. (4-10) du chapitre 4 se réduit à la dérivée usuelle :

$$D_{\epsilon_I} = \partial / \partial \epsilon_I. \quad (4-6)$$

On peut alors calculer son action sur les fonctions de corrélations :

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \epsilon} = - \oint_{\mathcal{B}} W_{k+1}^{(g)} = - \oint_{\mathcal{B}} W_{k+1}^{(g)} + \tau \oint_{\mathcal{A}} W_{k+1}^{(g)}, \quad (4-7)$$

et, en dérivant une seconde fois, on trouve :

$$\frac{\partial^2 W_k^{(g)}}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \kappa \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \epsilon} = \oint_{\mathcal{B}} \oint_{\mathcal{B}} W_{k+2}^{(g)}. \quad (4-8)$$

On obtient finalement l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \bar{\epsilon}} &= -\frac{1}{(2i\pi)^2} \kappa \frac{\partial^3 \bar{F}^{(0)}}{\partial \bar{\epsilon}^3} \kappa \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W_k^{(g-1)}}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \kappa \frac{\partial W_k^{(g-1)}}{\partial \epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \sum_h \sum_{L \subset K} \frac{\partial W_l^{(h)}}{\partial \epsilon} \frac{\partial W_{k-l}^{(g-h)}}{\partial \epsilon} \right). \end{aligned} \quad (4-9)$$

Pour la comparer à l'équation d'anomalie holomorphe, utilisons les notations de théorie des cordes :

$$t^I = (2i\pi)^{\frac{1}{2}} \epsilon^I. \quad (4-10)$$

et la dernière équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \bar{t}} &= -\kappa \frac{\partial^3 \bar{F}^{(0)}}{\partial \bar{t}^3} \kappa \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W_k^{(g-1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \kappa \frac{\partial W_k^{(g-1)}}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \sum_h \sum_{L \subset K} \frac{\partial W_l^{(h)}}{\partial t} \frac{\partial W_{k-l}^{(g-h)}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4-11)$$

Pour les énergies libres, on prend le cas où $k = 0$ et on obtient :

$$\frac{\partial F^{(g)}}{\partial \bar{t}} = -\kappa \frac{\partial^3 \bar{F}^{(0)}}{\partial \bar{t}^3} \kappa \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F^{(g-1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \kappa \frac{\partial F^{(g-1)}}{\partial t} + \sum_{h=1}^{g-1} \frac{\partial F^{(h)}}{\partial t} \frac{\partial F^{(g-h)}}{\partial t} \right) \quad (4-12)$$

⁸Attention à ne pas confondre cet opérateur avec la dérivée covariante introduite dans cette partie.

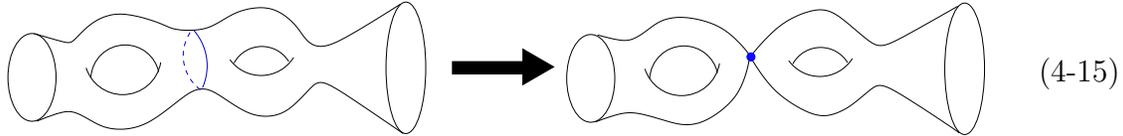
qui n'est rien d'autre que l'équation d'anomalie holomorphe pour les énergies libres Eq. (2-12) puisque

$$-\kappa^{IM} \frac{\partial^3 \bar{F}^{(0)}}{\partial \bar{t}^M \partial \bar{t}^N \partial \bar{t}^K} \kappa^{JN} = C_{\bar{K}}^{IJ}, \quad \frac{\partial \tau_{JM}}{\partial t^I} \kappa^{KM} = -\Gamma_{IJ}^K. \quad (4-13)$$

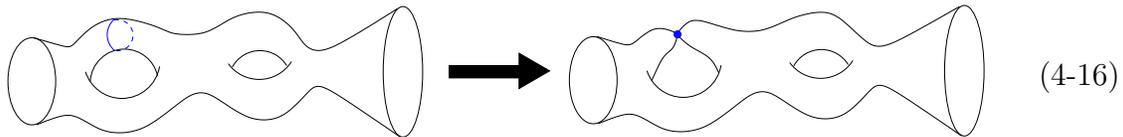
Remarquons que l'on a également obtenu une équation similaire pour les fonctions de corrélation elles-mêmes :

$$\partial_{\bar{K}} W_k^{(g)} = \frac{1}{2} C_{\bar{K}}^{IJ} \left(D_I D_J W_k^{(g-1)} + \sum_h \sum_{L \subset K} D_I W_l^{(h)} D_J W_{k-l}^{(g-h)} \right) \quad (4-14)$$

qui correspondent dans le cadre de la théorie des cordes topologiques aux amplitudes de cordes ouvertes par opposition aux cordes fermées décrites par les énergies libres (cf [82] pour des résultats explicites dans le cas de variétés miroirs de Calabi-Yau toriques). On peut alors voir cette équation comme une équation d'anomalie holomorphe pour les cordes ouvertes. Ce type d'équations a déjà été discuté dans un cadre général [15] où elles sont obtenues en étudiant les dégénérescences possibles des surfaces de Riemann avec bords : c'est-à-dire que l'on regarde ce qu'il se passe lorsque la surface est "pincée" suivant l'un des cycles non triviaux qui est alors ramené à un point. Partant d'une surface $\Sigma_{g,k}$ de genre g à k bords, les deux termes du membre de droite de Eq. (4-14) correspondent d'une part au cas où ce pincement coupe la surface en deux surfaces disconnectées :



et au cas où l'on a pincé un noeud interne à la surface :



On peut également montrer que les amplitudes $C_{I_1 \dots I_k}^{(g)}$ sont données par

$$C_{I_1 \dots I_k}^{(g)} = \frac{(-1)^k}{(2i\pi)^{\frac{k}{2}}} \oint_{\mathcal{B}_{I_1}} \dots \oint_{\mathcal{B}_{I_k}} W_k^{(g)}(p_K) \quad (4-17)$$

puisque la dérivée covariante $D_I = \partial_I - \Gamma_I$ commute avec les intégrales sur les cycles \mathcal{B} lorsque l'on agit sur une différentielle dont les intégrales sur les cycles \mathcal{A} sont nulles.

Ainsi, l'intégration de toutes les variables dans Eq. (4-14) sur les cycles \mathcal{B} redonne l'équation d'anomalie holomorphe pour les fonctions de corrélation dans le cas local. Cela montre que l'équation d'anomalie holomorphe n'implique que le secteur des cordes fermées dans les états intermédiaires.

5 Conclusion du chapitre.

Nous avons montré dans ce chapitre que les énergies libres et fonctions de corrélation calculées sur une courbe algébrique \mathcal{E} satisfont toujours les équations d'anomalie holomorphe Eq. (2-12) pour le choix de $\kappa = -(\tau - \bar{\tau})^{-1}$. Cela montre que leur partie non holomorphe coïncide bien avec la partie non-holomorphe d'un modèle de type B défini sur une Calabi-Yau locale caractérisée par la surface de Riemann \mathcal{E} . Par ailleurs, la limite holomorphe $\bar{t} \rightarrow \infty$ correspondant à $\kappa = 0$ fixe sans ambiguïté la partie holomorphe des invariants algébriques. Entre autres, si la courbe algébrique considérée est la courbe spectrale d'un modèle de matrices, cette limite correspond aux énergies libres et fonctions de corrélations dudit modèle.

Ainsi, la démonstration de la conjecture de Dijgraaf-Vafa est ramenée à montrer que la partie holomorphe de l'énergie libre des modèles locaux de type B sont bien les invariants algébriques définis dans le chapitre 4 pour $\kappa = 0$.

Chapitre 6

Conclusion.

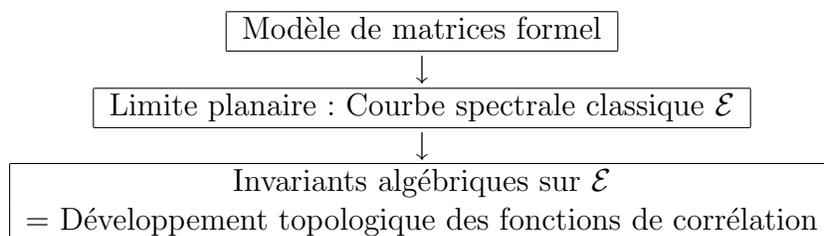
1 Résultats principaux : du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques.

1.1 Calcul d'intégrales à deux matrices formelles.

Dans ce mémoire, nous avons tout d'abord montré comment définir proprement un modèle à deux matrices formel comme fonction génératrice des surfaces discrétisées portant une structure de spin de type Ising. Nous avons particulièrement insisté sur le fait que ce modèle ne coïncide pas, en général, avec le développement d'une quelconque intégrale convergente quand la taille des matrices considérées tend vers l'infini.

Nous avons également montré comment associer une courbe algébrique à différents modèles de matrices formels ne dépendant que de l'ordre dominant du développement topologique du modèle considéré, c'est-à-dire de ce que l'on appelle habituellement limite classique ou limite planaire. Nous avons alors décrit une procédure unique pour calculer tous les termes du développement topologique des observables du modèle considéré.

On peut résumer cette procédure par le graphique suivant :



Nous avons donc montré que ces différentes intégrales formelles ne sont qu'un seul et même objet en tant que fonctionnelle d'une courbe algébrique et proposé une méthode simple et efficace pour les calculer.

Le fait qu'une telle procédure existe peut-être s'expliquer par la combinatoire. Un modèle de matrice formel correspond à compter des cartes. Ces cartes peuvent être vues comme recollement de disques entre eux. Pour construire de telles carte il faut deux éléments : le poids d'un disque (obtenu par $W_1^{(0)}$ et donc Ydx), et le poids d'un

recollement, encodé dans l'équation de la courbe spectrale classique. De ce point de vue, il n'est pas surprenant que la courbe spectrale classique possède toute l'information nécessaire au calcul de tout le développement topologique des observables du modèle et que la procédure à mettre en oeuvre pour passer de cette courbe aux fonctions de corrélation ne dépende pas du modèle.

1.2 Invariants et déformations de courbes algébriques.

Nous avons également montré comment généraliser cette procédure au delà des modèles de matrices en étendant cette construction à n'importe quelle courbe algébrique \mathcal{E} . Nous avons alors pu montrer que les nombres $F^{(g)}$ et les formes différentielles $W_k^{(g)}$ ainsi obtenues ont un comportement facile à décrire sous les déformations de \mathcal{E} :

- **Invariance symplectique** : les énergies libre $F^{(g)}$ sont invariantes sous de nombreuses transformations conservant la forme $dx \wedge dy$;
- **Transformations modulaires** : les transformations modulaires de la courbe peuvent être totalement absorbées dans la normalisation de la fonction à deux points $W_{2,0}^{(0)}$ par l'ajout d'un nouveau paramètre : une matrice symétrique κ ;
- **Variation de ydx** : toute variation de la forme différentielle ydx du type :

$$\delta ydx(p) := \int_{\mathcal{C}} B(\xi, p) \Lambda(\xi) \quad (1-1)$$

se traduit par une variation des fonctions de corrélation :

$$\delta W_k^{(g)}(\mathbf{p}_k) = \int_{\mathcal{C}} W_{k+1}^{(g)}(\xi, \mathbf{p}_k) \Lambda(\xi). \quad (1-2)$$

Ces invariants sont donc fortement liés à la théorie des déformations des courbes algébriques. Entre autres choses, il est très intéressant de noter que ces résultats permettent d'interpréter la fonction de corrélation à k points de genre g , $W_{k,0}^{(g)}(p_1, \dots, p_k)$, calculée sur une courbe \mathcal{E} comme l'énergie libre de genre g , $F(\tilde{\mathcal{E}})^{(g)}$, calculée sur une courbe $\tilde{\mathcal{E}}$ obtenue à partir de \mathcal{E} en ajoutant des pôles en k points marqués p_1, \dots, p_k . Cette remarque fait écho avec l'interprétation combinatoire des fonctions de corrélations dans le cadre des modèles de matrices. En effet, ces propriétés semblent faire un lien entre la courbe spectrale du modèle de matrices et les surfaces discrétisées générées par les fonctions de corrélation : ajouter un bord aux surfaces générées revient à ajouter un pôle à la courbe spectrale.

1.3 Théories conformes et intégrabilité.

Nous avons utilisé cette procédure générale pour retrouver des résultats déjà connus de manière simple et rigoureuse. Nous avons ainsi montré comment les doubles limites d'échelles de modèles à une et deux matrices coïncident avec des modèles de matrices en champ extérieur (obtenu sans prendre de limite). Nous avons donc montré comment avoir accès directement aux observables de modèles minimaux de type (p, q) sans avoir besoin de faire un quelconque passage à la limite. Il suffit de considérer la courbe algébrique $\mathcal{E}_{(p,q)}$ associée.

Ceci nous a également permis de montrer à nouveau que les intégrales de matrices, et donc nos invariants algébriques, fournissent une réalisation explicite des fonctions τ des hiérarchies intégrables KP et KdV par une simple comparaison des courbes algébriques associées.

Ce lien entre les invariants définis et l'intégrabilité a été rendu plus explicite, de manière générale, par la construction de fonction, de Baker-Akhiezer associées à une courbe algébrique quelconque. Ces fonctions permettent en effet de définir des équations de Hirota et des relations de Sato formelles associées à n'importe quelle courbe algébrique.

1.4 Conjecture de Dijkgraaf-Vafa.

Nous avons montré comment, en fixant le nouveau paramètre $\kappa = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau}$, on peut rendre les $F^{(g)}$ et $W_k^{(g)}$ invariants modulaires en leur faisant perdre leur propriété d'holomorphicité. Nous avons ainsi reproduit le comportement des fonctions de partition de la théorie de Kodaira-Spencer décrit dans [1]. Nous avons alors pu montrer que les $F^{(g)}$ sont solutions des équations d'anomalies holomorphes des cordes fermées de cette théorie appuyant ainsi un peu plus la conjecture de Dijkgraaf-Vafa liant théorie des cordes topologique et modèles de matrices. Grâce à ce résultat, il ne reste plus qu'à identifier la partie holomorphe de la fonction de partition de la théorie de Kodaira-Spencer et les invariants algébriques correspondants pour $\kappa = 0$ (qui est la valeur à prendre pour pouvoir obtenir les observables de modèles de matrices).

Nous avons également montré que les $W_k^{(g)}$ satisfont des équations d'anomalie du même type que l'on aimerait interpréter comme équations d'anomalies holomorphes pour des cordes ouvertes cette fois-ci.

2 Perspectives.

La construction générale d'invariants décrite dans cette thèse pose beaucoup de questions quant à son interprétation d'une part et appelle des généralisations naturelles d'autre part.

2.1 Etude d'autres modèles de matrices.

Deux questions viennent naturellement à l'esprit suite à cette construction. Etant donnée une courbe algébrique quelconque, existe-t-il un modèle de matrice dont les observables sont données par les invariants associés à la courbe? Au contraire, étant donné un modèle de matrice, dans quelle mesure peut-on utiliser la même procédure pour calculer le développement topologique de ses observables?

La réponse à la première question semble a priori négative. Il semble, en effet, difficile de construire un modèle de matrices dont la courbe algébrique n'aurait qu'un seul point à l'infini (i.e. tel que ydx n'ait qu'un seul pôle). Cependant, la question semble plus ouverte si l'on considère également les "limites" de modèles de matrices dans les théories acceptables. Se pose alors la question de savoir comment reconstruire l'action de ce modèle à partir de la courbe algébrique. Une partie de la réponse à cette

question a déjà été donnée dans cette thèse. En effet, nous avons montré comment associer un "potentiel" V_i à chaque pôle α_i de ydx , faisant ainsi un premier pas vers la construction d'une action. Cependant, il reste beaucoup à étudier pour pouvoir répondre à ce problème.

D'un autre côté, cette procédure semble très prometteuse pour l'étude d'autres modèles de matrices. Les études déjà menées sur le modèle de matrices couplées en chaîne ouverte [46] semblent, en effet, indiquer que les fonctions de corrélation prennent la même forme. On peut alors se demander à quels autres types de modèles on peut étendre cette construction. En premier lieu, il serait très intéressant d'étudier le modèle $O(n)$ [60] pour ses applications ainsi que pour le degré de complexité supplémentaire qu'il semble faire apparaître. Il est pour le moment impossible de dire si notre procédure pourra se généraliser à ce cadre là sans une résolution explicite du modèle. On voit qu'il serait très utile d'avoir un critère permettant de déterminer si l'on peut calculer une intégrale de matrice formelle donnée par cette méthode.

Enfin, nous n'avons étudié ici que des modèles de matrices hermitiennes. Peut-on trouver une procédure équivalente pour des ensembles de matrices présentant une symétrie différente? Existe-t-il une telle structure sous-jacente permettant de calculer des intégrales formelles sur l'ensemble des matrices réelles symétriques ou quaternioniques? Des premiers pas ont été faits dans cette direction par Chekhov et Eynard qui ont perturbé le modèle à une matrice hermitienne dans [28] pour étudier la combinatoire de surfaces discrétisées pas forcément orientables.

2.2 Lien avec l'intégrale de matrice convergente.

Comme nous l'avons montré dans ce mémoire, cette procédure donne accès au calcul d'intégrales formelles et non à celui d'intégrales convergentes sur l'ensemble des matrices hermitiennes. Il serait cependant intéressant de faire le lien entre ces résultats et les intégrales convergentes. Dans le cadre du modèle à une matrice, Bonnet, David et Eynard [18] avaient en effet pu faire le lien explicite entre intégrale formelle et intégrale convergente en sommant sur les instantons. Ils ont en quelque sorte montré comment obtenir un état physique de moindre énergie comme superposition de tous les états possibles.

Il serait donc intéressant de faire de même pour le modèle à deux matrices et dans le cadre général développé ici. On aurait ainsi accès, par exemple, aux asymptotiques des polynômes biorthogonaux étudiés dans [50] ainsi qu'aux termes correctifs quand la taille des matrices intégrées tend vers l'infini.

2.3 Lien avec un système intégrable quantique.

Ce lien avec l'intégrale convergente semble également être indispensable à une meilleure compréhension du système intégrable caché derrière cette construction. En effet, si, pour certaines courbes, on retrouve des réductions de hiérarchies intégrables et si nous avons été capable de construire des séries formelles dont le comportement rappelle les éléments de bases des systèmes intégrables classiques, la structure intégrable sous-jacente n'est pas comprise pour le moment. Hors, dans le cadre des modèles de matrices, on connaît très bien le système intégrable, et ce quelque soit la taille N de

la matrice. Ce système est en général quantique associé à une équation des cordes du type

$$[P, Q] = \frac{1}{N} \quad (2-1)$$

qui devient classique dans la limite des grandes matrices $N \rightarrow \infty$. On s'attend donc à avoir décrit le développement semi-classique d'un tel système par notre procédure et il serait intéressant de pouvoir reconstruire le système quantique total associé dans ce cadre plus général. Cependant, il faudra d'abord être capable de reconstruire l'équivalent d'une intégrale convergente puisque c'est cet objet qui est vraiment fonction τ du système intégrable. Pour ce faire, la nouvelle variable κ semble avoir un rôle très important à jouer dans une procédure consistant à resommer sur les fractions de remplissage.

2.4 Interprétation des invariants algébriques : calcul du volume de l'espace des modules de surfaces.

Le plus gros problème soulevé par cette construction consiste à comprendre ce que l'on a calculé dans un cadre général. Quels sont donc ces objets qui sont à la fois fonctions génératrices de surfaces discrétisées, fonctions de partitions de théorie des cordes topologique et fonction τ d'un système intégrable ? Si il était observé depuis longtemps que ces objets ont des points communs, il est surprenant qu'ils ne soient en fait qu'un seul et même objet paramétré par une courbe algébrique quelconque.

Cette unification des différents modèles de matrices avait déjà été pressentie dans les travaux de Alexandrov, Mironov et Morozov [6, 7] dans l'optique de définir une M-théorie matricielle.

Il me semble cependant qu'il existe un ingrédient, plus simple, commun aux différentes fonctions retrouvées par cette procédure faisant en plus le lien entre les intérêts des mathématiciens et des physiciens. En effet, en regardant de plus près les exemples de fonctions $F^{(g)}$ retrouvées par cette méthode, on peut voir qu'elles correspondent toutes à intégrer une certaine fonction (ou mesure) sur l'espace des modules de surfaces. En effet, reprenons quelques exemples :

- Modèles à une et deux matrices : $F^{(g)}$ est la fonction génératrice des surfaces discrétisées de genre g . On peut donc voir les énergies libres comme une intégrale sur l'espace des modules des surfaces avec une mesure donnant un poids non nul à un ensemble discret de surfaces seulement. En reprenant les notations introduites dans le chapitre 2 :

$$F^{(g)} = \int_{\Sigma_{g,0}} \chi_{\mathcal{S}_{g,0}}(\Sigma_{g,0}) \mathcal{W}(\Sigma_{g,0}) \quad (2-2)$$

où l'intégrale porte sur toutes les surfaces connexes fermées de genre g , $\chi_{\mathcal{S}_{g,0}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des surfaces discrétisées $\mathcal{S}_{g,0}$ défini par def.1.3 du chapitre 2 et \mathcal{W} est le poids associé.

- Intégrale de Kontsevich : l'introduction de ce modèle particulier de matrice en champ extérieur a été originellement motivé par le calcul des nombres d'intersection de surfaces de Riemann et donc du volume de l'espace des modules des surfaces de Riemann par rapport à la mesure de Weyl-Petersson. Les fonctions

de corrélation sont données dans ce cas par :

$$W_{k,0}^{(g)} = \int_{\mathcal{M}_{g,n}} d\omega_{WP} \quad (2-3)$$

où ω_{WP} est la mesure de Weil-Petersson sur l'espace des modules¹.

- Modèle minimal (p, q) : la fonction de partition est une intégrale sur l'espace des modules des surfaces de Riemann avec l'action d'Einstein-Polyakov :

$$F_g = \int_{\mathcal{M}_g} e^{-i \frac{S_p}{\hbar}}. \quad (2-4)$$

- Théorie des cordes topologique de type B : la fonction de partition est également une intégrale sur l'espace des modules des surfaces de genre g de la forme :

$$F_g := \int_{\mathcal{M}_g} d\tau \int \mathcal{D}\phi e^{-S_{\mathcal{N}=2}} \quad (2-5)$$

où $S_{\mathcal{N}=2}$ est l'action du modèle sigma définie par Eq. (2-7) du chapitre 5.

Il semblerait donc que les objets $W_{k,0}^{(g)}[\mathcal{E}]$ que nous avons définis peuvent être vus comme des intégrales sur l'espace $\mathcal{M}_{g,n}$ des modules des surfaces de genre g avec n bords à l'aide d'une métrique $d\mu[\mathcal{E}]$ dépendant de la courbe algébrique \mathcal{E} :

$$W_{k,0}^{(g)}[\mathcal{E}] = \int_{\mathcal{M}_{g,n}} d\mu[\mathcal{E}]. \quad (2-6)$$

Une telle interprétation aurait de nombreuses applications que ce soit en physique pour effectuer des calculs de théorie des cordes et comprendre certaines dualités ou en mathématiques où elle permettrait de faire plus explicitement le lien entre hiérarchies intégrables et volumes de $\mathcal{M}_{g,n}$ dans la continuité directe des travaux de Kontsevich. On aurait également là un outil pour étudier précisément les propriétés topologiques des cartes de grandes tailles.

2.5 Symétrie miroir, théories topologiques de type A et courbe de Seiberg-Witten.

Dans cette thèse nous n'avons étudié qu'un type de théorie des cordes topologique : le type B. Or, on sait que dans de nombreux cas, une théorie de type B a un dual équivalent de type A par la symétrie miroir. Il serait très intéressant de pouvoir identifier l'équivalent fermionique de notre construction algébrique pour les théories de type A, donnant ainsi accès au calcul des invariants de Gromov-Witten.

Des travaux récents de Mariño [82] ont montré que si l'on applique notre méthode à l'image par la symétrie miroir de théories de type A avec une Calabi-Yau de géométrie torique, on retrouve bien les résultats attendus par ailleurs. Notons que dans ce cas, le

¹Une approche géométrique du problème a permis à Mirzakhani [87, 88] de montrer que ces volumes satisfont une relation de récurrence. Nous avons montré dans [VII] que cette relation de récurrence n'est rien d'autre que l'équation 3-5 du chapitre 4 définissant les fonctions de corrélations pour la courbe $y = \sin 2\pi \sqrt{x}$.

modèle B correspondant ne fait apparaître aucune courbe algébrique mais une courbe bien plus compliquée. Ceci semble indiquer que notre méthode de construction d'invariants peut s'étendre encore au delà des courbes algébriques.

Par ailleurs, il serait très intéressant de comprendre le lien profond entre les énergies libres calculées sur les courbes hyperelliptiques apparaissant dans les théories de Seiberg-Witten [98] et les couplages gravitationnels introduits par Nekrasov [90] puisque ces derniers peuvent être déformés en des objets non holomorphes satisfaisant les équations d'anomalie holomorphe associées à cette courbe.

Chapitre 7

Appendices.

1 Modèle Gaussien et théorème de Wick.

Considérons la mesure gaussienne sur l'ensemble H_N des matrices hermitiennes M de taille $N \times N$:

$$d\mu = \left(\frac{g}{2\pi}\right)^{\frac{N^2}{2}} e^{-\frac{g}{2} \text{Tr} M^2} dM, \quad (1-1)$$

où dM est le produit des mesures de Lebesgues des éléments réels de M :

$$dM = \prod_i dM_{ii} \prod_{i < j} d\text{Re}(M_{ij}) d\text{Im}(M_{ij}) \quad (1-2)$$

et le facteur de normalisation $\mathcal{Z}_{\text{gauss}} := \left(\frac{2\pi}{g}\right)^{\frac{N^2}{2}}$ est obtenu par le calcul de la fonction de partition :

$$\mathcal{Z}_{\text{gauss}} := \int_{H_N} e^{-\frac{g}{2} \text{Tr} M^2} dM. \quad (1-3)$$

On peut aisément calculer la corrélation entre deux éléments de matrices :

$$\langle M_{ab} M_{cd} \rangle := \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{gauss}}} \int_{H_N} M_{ab} M_{cd} e^{-\frac{g}{2} \text{Tr} M^2} dM = \frac{\delta_{ad} \delta_{bc}}{g}. \quad (1-4)$$

Cette quantité très simple est en fait la seule dont le calcul est nécessaire pour obtenir la valeur moyenne du produit d'un nombre quelconque d'éléments de matrices grâce au théorème de Wick :

Théorème 1.1 *Théorème de Wick :*

La valeur moyenne du produit de $2n$ éléments de matrices est égale à la somme sur tous les appariements des éléments deux à deux du produit des valeurs moyennes des paires d'éléments correspondantes :

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2n} M_{a_i b_i} \right\rangle = \sum_{\cup_j (k_j, l_j) = \{1, 2, \dots, 2n\}} \prod_{j=1}^n \langle M_{a_{k_j} b_{l_j}} \rangle, \quad (1-5)$$

où la somme dans le membre de droite porte sur tous les appariements (k_j, l_j) deux à deux des éléments de $\{1, \dots, 2n\}$.

Dans les faits, les objets intéressants sont les corrélations de fonctions invariantes sous l'action du groupe $U(N)$, de manière générique, on aimerait calculer

$$\left\langle \prod_i (\text{Tr } M^i)^{k_i} \right\rangle, \quad (1-6)$$

où la somme porte sur un nombre fini de termes et les k_i sont des nombres entiers arbitraires. Puisque l'on peut réécrire les différentes traces comme un produit d'éléments de matrice :

$$\text{Tr } M^k = \sum_{\alpha_i=1}^N M_{\alpha_1\alpha_2} M_{\alpha_2\alpha_3} M_{\alpha_3\alpha_4} \dots M_{\alpha_k\alpha_1}, \quad (1-7)$$

on peut appliquer le théorème de Wick et décomposer cette fonction de corrélation sur la base des corrélations de deux éléments de matrices. Par exemple, on obtient :

$$\langle \text{Tr } M^2 \rangle = \sum_{i,j=1}^N \langle M_{ij} M_{ji} \rangle = \frac{N^2}{g}, \quad (1-8)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr } M^4 \rangle &= \sum_{i,j,k,l} \langle M_{ij} M_{jk} M_{kl} M_{li} \rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l} (\langle M_{ij} M_{jk} \rangle \langle M_{kl} M_{li} \rangle + \langle M_{ij} M_{kl} \rangle \langle M_{jk} M_{li} \rangle + \langle M_{ij} M_{li} \rangle \langle M_{kl} M_{jk} \rangle) \\ &= \frac{1}{g^2} \sum_{i,j,k,l} (\delta_{ik} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{ij} \delta_{lk} + \delta_{jl}) \\ &= \frac{1}{g^2} (N^3 + N + N^3) = \frac{N}{g^2} (1 + 2N^2). \end{aligned} \quad (1-9)$$

De manière générale, chaque terme non nul dans la décomposition de $\langle \prod_i (\text{Tr } M^i)^{k_i} \rangle$ par le théorème de Wick apporte la même contribution $\left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{\sum_i ik_i}{2}}$ si $\sum_i ik_i$ est paire et 0 sinon. Ainsi, il faut donc compter le nombre de termes non nuls entrant dans ce développement. Le résultat prend alors la forme :

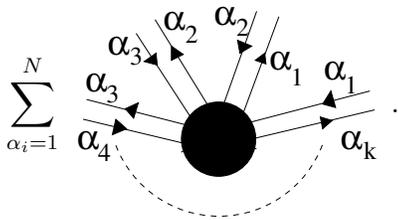
$$\left\langle \prod_i (\text{Tr } M^i)^{k_i} \right\rangle = \left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{\sum_i ik_i}{2}} \sum_{j \geq 0} c_j N^j, \quad (1-10)$$

où les c_j sont des nombres entiers qui appellent donc une interprétation combinatoire.

La célèbre représentation de Feynmann de ces fonctions de corrélation sous forme de diagramme nous fournit en effet une interprétation combinatoire de ces nombres c_j . Pour cela, on représente chaque objet matriciel par un élément graphique. Ainsi on représente chaque élément de matrice M_{ab} comme un ruban issu d'un point et marqué par les deux indices a et b :

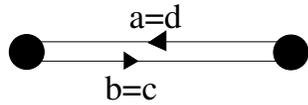
$$M_{ab} := \bullet \xrightarrow{\quad \begin{array}{c} \text{b} \\ \text{a} \end{array} \quad} . \quad (1-11)$$

De même on représente $\text{Tr} M^k$ par un vertex k valent portant des indices de sommation :

$$\begin{aligned} \text{Tr} M^k &= \sum_{\alpha_i=1}^N M_{\alpha_1\alpha_2} M_{\alpha_2\alpha_3} M_{\alpha_3\alpha_4} \dots M_{\alpha_k\alpha_1} \\ &= \sum_{\alpha_i=1}^N \text{Diagram} \end{aligned}$$


(1 – 12)

Sous cette représentation, l'expression de la corrélation de deux éléments de matrices Eq. (1-4) s'écrit comme une arête épaisse :

$$\begin{aligned} \langle M_{ab} M_{cd} \rangle &= \frac{\delta_{ad} \delta_{bc}}{g} \\ &= \frac{1}{g} \text{Diagram} \end{aligned}$$


(1 – 13)

c'est-à-dire que prendre la valeur moyenne de deux éléments de matrices correspond à recoller les rubans les représentant et de compter l'arête ainsi formée avec un poids $\frac{1}{g}$ si les indices associés aux bords sont les mêmes et un poids nul sinon.

Le théorème de Wick nous dit alors que le nombre de termes non nuls dans le développement de $\langle \prod_i (\text{Tr} M^i)^{k_i} \rangle$ est égal au nombre de diagramme formé de $\frac{\sum_i i k_i}{2}$ arêtes épaisses liées par $\sum_i k_i$ vertex dont k_i ont une valence i . A cela, il faut ajouter un facteur pour chaque diagramme venant du fait qu'il doit être étiqueté de toutes les manières possibles selon les prescriptions du théorème de Wick. Deux facteurs entrent en compte :

- Deux étiquetages peuvent être équivalents dans le sens où l'un peut être réobtenu à partir de l'autre par un simple changement du nom des étiquettes muettes¹. Ce facteur est le nombre d'automorphismes du graphe, noté $\#\text{Aut}$.
- L'opérateur de trace induit une sommation sur les indices de 1 à N . Les symboles de Kronecker apparaissant dans théorème de Wick réduisent certaines de ces sommes à un seul éléments. Il est facile de se convaincre que le nombre de sommes restant à effectuer après ces prescriptions est égal au nombre de boucles indépendantes² dans le graphe. Ainsi, on doit lui associer un facteur N à la puissance le nombre de boucles du graphe noté χ^3 .

¹Par étiquettes muettes, j'entends les indices sur lesquels la sommation de 1 à N est effectuée

²Le nombre de boucles indépendantes dans un graphe est le nombre de chemin différents que l'on parcourt en suivant le bord de tous les rubans.

³Cette notation prend son sens par l'observation de 't Hooft [100] selon laquelle ce nombre est la caractéristique d'Euler de la surface la plus simple sur laquelle on peut dessiner le graphe de manière à le rendre planaire

On obtient finalement l'expression pour les fonctions de corrélation gaussiennes :

Théorème 1.2

$$\left\langle \prod_i (\text{Tr } M^i)^{k_i} \right\rangle = \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{\sum_i i k_i}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_{\{k_i\}_{i=1}^N}} \# \text{Aut}(G) N^{\chi(G)} \quad (1-14)$$

où $\mathcal{G}_{\{k_i\}_{i=1}^N}$ est l'ensemble des graphes à $\frac{\sum_i i k_i}{2}$ arêtes et k_i vertex de valence i .

Pour notre exemple précédent, $\langle \text{Tr } M^4 \rangle$, on doit composer les graphes à 2 arêtes et un seul vertex tetravalent :

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr } M^4 \rangle &= \sum_{i,j,k,l} (\langle M_{ij} M_{jk} \rangle \langle M_{kl} M_{li} \rangle + \langle M_{ij} M_{kl} \rangle \langle M_{jk} M_{li} \rangle + \langle M_{ij} M_{li} \rangle \langle M_{kl} M_{jk} \rangle) \\ &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 1: A square with vertices } i, j, k, l \text{ and edges } (i,j), (j,k), (k,l), (l,i). \\ \text{Diagram 2: A square with vertices } i, j, k, l \text{ and edges } (i,j), (j,k), (k,l), (l,i) \text{ and a diagonal } (i,k). \\ \text{Diagram 3: A square with vertices } i, j, k, l \text{ and edges } (i,j), (j,k), (k,l), (l,i) \text{ and a diagonal } (j,l). \end{array} \\ &= \left(\frac{1}{g} \right)^2 \left[2 N^3 \text{Diagram 1} + N \text{Diagram 2} \right]. \end{aligned} \quad (1-15)$$

Remarque 1.1 Cette procédure diagrammatique peut facilement être étendue à un modèle gaussien avec plusieurs matrices en coloriant les vertex et arêtes suivant la matrice à laquelle ils se réfèrent.

2 Fonction de partition formelle et surfaces discrétisées.

Nous explicitons ici l'expression de la fonction de partition formelle, \mathcal{Z}_{form} , en termes de surfaces discrétisées. \mathcal{G} désigne ici l'ensemble des cartes défini par la définition 1.3 du chapitre 2.

Definition 2.1 Soit une carte $G \in CG$. On note :

- $n_{k,i}(G) :=$ nombre k -gones de spin + et de couleur i dont le centre est libre⁴ ;
- $\tilde{n}_{k,i}(G) :=$ nombre k -gones de spin - et de couleur i dont le centre est libre ;
- $n_{++,i}(G) :=$ nombre de polygones de spins + et de couleur i collés par un bord ;
- $n_{--,i}(G) :=$ nombre de polygones de spins - et de couleur i collés par un bord ;
- $n_{+-,i}(G) :=$ nombre de polygones de spins différents et de couleur i collés par un bord ;

⁴Un k -gone peut être lié à un autre par son centre. Son centre est dit libre si il n'est lié à aucun autre centre de cette façon.

- $n_{a,i}(G) = n_{+-,i}(G) + n_{++,i}(G) + n_{--,i}(G) :=$ nombre total d'arrêtes communes à deux polygones de couleur i .
- $n_{k,i;l,j}(G) :=$ nombre de paires de polygones composées d'un k -gone de spin + et couleur i lié par son centre à un l -gone de spin + et couleur j ;
- $\tilde{n}_{k,i;l,j}(G) :=$ nombre de paires de polygones composées d'un k -gone de spin - et couleur i lié par son centre à un l -gone de spin - et couleur j ;
- $G_i :=$ composante de couleur i de la surface obtenue en brisant tous les liens entre centres de polygones ;
- $l_i(G) :=$ nombre de sommet de couleur i ;
- $\#Aut(G) :=$ cardinal du groupes des automorphismes de G ;
- $\chi(G) :=$ caractéristique d'Euler-Poincaré de G :

$$\chi(G) = \sum_i \left[l_i(G) - n_{a,i}(G) + \sum_k (n_{k,i}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G)) \right]. \quad (2-1)$$

Definition 2.2 A chaque surface $G \in \mathcal{G}$, on associe un poids :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(G) := & \frac{N\chi(G)}{\#Aut(G)} T^{n_T(G)} \prod_{i=1}^{d_1 d_2} \prod_{k=3}^{d_1+1} (t_{k,i} + T h_{k,i})^{n_{k,i}(G)} \prod_{k=3}^{d_1+1} (\tilde{t}_{k,i} + T \tilde{h}_{k,i})^{\tilde{n}_{k,i}(G)} \\ & \prod_{i=1}^{d_1 d_2} h_{1,i}^{n_{1,i}(G)} \tilde{h}_{1,i}^{\tilde{n}_{1,i}(G)} h_{2,i}^{n_{2,i}(G)} \tilde{h}_{2,i}^{\tilde{n}_{2,i}(G)} \prod_{k>d_1+1} h_{k,i}^{n_{k,i}(G)} \prod_{l>d_2+1} \tilde{h}_{l,i}^{\tilde{n}_{l,i}(G)} \\ & \prod_{i=1}^{d_1 d_2} \epsilon_i^{l_i(G)} t_{2,i}^{n_{+,i}(G)} \tilde{t}_{2,i}^{n_{-,i}(G)} (t_{2,i} \tilde{t}_{2,i} - 1)^{-n_{v,i}(G)} \prod_{j>i} \prod_k \prod_l h_{k,i;l,j}^{n_{k,i;l,j}(G)} \tilde{h}_{k,i;l,j}^{\tilde{n}_{k,i;l,j}(G)} \end{aligned} \quad (2-2)$$

où

$$\begin{aligned} n_T(G) := & \sum_i \left(\sum_k \frac{k}{2} (n_{k,i}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G)) - \sum_{k=3}^{d_1+1} n_{k,i}(G) - \sum_{l=3}^{d_1+2} \tilde{n}_{l,i}(G) \right) \\ & + \sum_i \sum_{j>i} \sum_k \sum_l \frac{k+l}{2} (n_{k,i;l,j}(G) + \tilde{n}_{k,i;l,j}(G)). \end{aligned} \quad (2-3)$$

Associer un tel poids à une carte G correspond à associer un poids à chacun des éléments composant le graphe comme suit :

Elément	Poids
k -gone de spin + et couleur i dont le centre est libre	$\begin{cases} \frac{N}{T}t_{k,i} + Nh_{k,i} & \text{si } k \in [3, d_1 + 1] \\ Nh_{k,i} & \text{sinon} \end{cases}$
k -gone de spin - et couleur i dont le centre est libre	$\begin{cases} \frac{N}{T}\tilde{t}_{k,i} + Nh_{k,i} & \text{si } k \in [3, d_2 + 1] \\ Nh_{k,i} & \text{sinon} \end{cases}$
arête commune à deux polygones de spin + et couleur i	$\frac{1}{N} \frac{t_{2,i}}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
arête commune à deux polygones de spin - et couleur i	$\frac{1}{N} \frac{\tilde{t}_{2,i}}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
arête commune à deux polygones de spin différents et couleur i	$\frac{1}{N} \frac{1}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
centre commun à un k -gone de couleur i et de spin + et un l -gone de couleur j et de spin +	$h_{k,i;l,j}$
centre commun à un k -gone de couleur i et de spin - et un l -gone de couleur j et de spin -	$h_{k,i;l,j}$
Sommet de couleur i	$N\epsilon_i$

La bijection entre les graphes et les surfaces permet d'écrire que :

Théorème 2.1 *La fonction de partition du modèle à deux matrices hermitiennes formel est égale à :*

$$\mathcal{Z}_{form} := \prod_i e^{-\frac{N^2}{T}\epsilon_i(V_1(\xi_i)+V_2(\eta_i)-\xi_i\eta_i)} \prod_{j>i} [(x_i - x_j)(y_i - y_j)]^{N^2\epsilon_i\epsilon_j} \sum_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{W}(G). \quad (2-4)$$

3 Intégrale formelle et équations de boucles.

Dans cet appendice, nous allons montrer que les fonctions de corrélations du modèle à deux matrices satisfont les équations de boucles obtenues avec les règles Split et Merge.

Definition 3.1

Lemme 3.1 *Pour tout*

$$G_{k_1, \dots, k_l; m; n}(S_1, S_2, \dots, S_l; x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) := \frac{1}{x_{1,1}-M} \frac{1}{y_{1,1}-\tilde{M}} \frac{1}{x_{1,2}-M} \frac{1}{y_{1,2}-\tilde{M}} \cdots \frac{1}{x_{1,k_1}-M} \frac{1}{y_{1,k_1}-\tilde{M}} \prod_{j=1}^m \text{Tr} \frac{1}{x_j-M} \prod_{s=1}^n \text{Tr} \frac{1}{y_s-\tilde{M}} \quad (3-1)$$

$$\prod_{i=2}^l \text{Tr} \left(\frac{1}{x_{i,1}-M} \frac{1}{y_{i,1}-\tilde{M}} \frac{1}{x_{i,2}-M} \frac{1}{y_{i,2}-\tilde{M}} \cdots \frac{1}{x_{i,k_i}-M} \frac{1}{y_{i,k_i}-\tilde{M}} \right),$$

les équations

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{\alpha \leq \beta} \int dM_1 \dots dM_d d\tilde{M}_1 \dots d\tilde{M}_d \left(\frac{\partial}{\partial \operatorname{Re}(M_k)_{\alpha, \beta}} + \frac{\partial}{\partial \operatorname{Im}(M_k)_{\alpha, \beta}} \right) \\
& \left[\left(\sum_i \operatorname{Tr} \delta V_{1,i}(M_i) + \delta V_{2,i}(\tilde{M}_i) \right)^l G_{k_1, \dots, k_l; m; n}(S_1, S_2, \dots, S_l; x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) \right. \\
& \prod_{i=1}^d e^{-\frac{N}{T} \left(\operatorname{Tr} \frac{V_1''(\xi_i)}{2} (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})^2 + \frac{V_2''(\eta_i)}{2} (\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i})^2 - (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i}) \right)} \\
& \left. \prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j) \prod_{i>j} \det(\tilde{M}_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes \tilde{M}_j) \right]
\end{aligned} \tag{3-2}$$

4 Variations de $F^{(0)}$ par rapport aux modules.

Nous présentons ici un formulaire des dérivées premières et secondes de $F^{(0)}$ par rapport aux modules de la courbe algébrique. Ces résultats avaient déjà été dérivés dans le cadre des modèles de matrices de nombreuses fois [77, 16, 17]. Pour retrouver ces formules, nous prenons $\kappa = 0$.

4.1 Dérivées premières de $F^{(0)}$.

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial t_{k,i}} = \operatorname{Res}_{\alpha_i} z_{\alpha_i}^k y dx \tag{4-1}$$

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial t_{\alpha_i, \alpha_j}} := \left(\frac{\partial}{\partial t_{0,i}} - \frac{\partial}{\partial t_{0,j}} \right) F^{(0)} = \mu_{\alpha_i} - \mu_{\alpha_j} \tag{4-2}$$

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \epsilon_i} = - \oint_{\mathcal{B}_i} y dx \tag{4-3}$$

4.2 Dérivées secondes de $F^{(0)}$.

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{k,i} \partial t_{l,j}} = (\delta_{i,j} - 1) \operatorname{Res}_{p \rightarrow \alpha_i} \operatorname{Res}_{q \rightarrow \alpha_j} z_{\alpha_i}^k B(p, q) z_{\alpha_j}^l \tag{4-4}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{k,i} \partial t_{\alpha_j, \alpha_k}} = \operatorname{Res}_{\alpha_i} z_{\alpha_i}^k dS_{\alpha_j, \alpha_k} \tag{4-5}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{k,j} \partial \epsilon_i} = 2i\pi \operatorname{Res}_{\alpha_j} z_{\alpha_j}^k du_i = - \oint_{\mathcal{B}_i} B_{\alpha_j, k} \tag{4-6}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \epsilon_i \partial t_{\alpha_j, \alpha_k}} = 2i\pi (u_i(\alpha_k) - u_i(\alpha_j)) \tag{4-7}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j} = 0 \quad (-2i\pi \tau_{ij} \text{ for } \underline{F}^{(0)}) \tag{4-8}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha_i, \alpha_j}^2} = \ln (d\zeta_{\alpha_i}(\alpha_i) d\zeta_{\alpha_j}(\alpha_j) E(\alpha_i, \alpha_j)^2) \quad (4-9)$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha_i, \alpha_j} \partial t_{\alpha_i, \alpha_k}} = \ln \left(\frac{d\zeta_{\alpha_i}(\alpha_i) E(\alpha_i, \alpha_j) E(\alpha_i, \alpha_k)}{E(\alpha_j, \alpha_k)} \right) \quad (4-10)$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha_i, \alpha_j} \partial t_{\alpha_k, \alpha_l}} = \ln \left(\frac{E(\alpha_k, \alpha_j) E(\alpha_i, \alpha_l)}{E(\alpha_i, \alpha_k) E(\alpha_j, \alpha_l)} \right) \quad (4-11)$$

où $\zeta_\alpha = \frac{1}{z_\alpha}$ est une variable locale au voisinage de α .

Bibliographie

- [1] M.Aganagic, V.Bouchard and A.Klemm, “Topological strings and (almost) modular forms”, hep-th/0607100.
- [2] M.Aganagic, R.Dijkgraaf, A.Klemm, M.Mariño and C.Vafa, “Topological strings and integrable hierarchies”, *Commun. Math. Phys.* **261** (2006) 451, hep-th/0312085.
- [3] G.Akemann, “Universal correlators for multi-arc complex matrix models”, *Nucl. Phys.* **B507** (1997) 475, hep-th/9702005.
- [4] G.Akemann, “Higher genus correlators for the Hermitian matrix model with multiple cuts”, *Nucl. Phys.* **B482** (1996) 403, hep-th/9606004.
- [5] G.Akemann and J.Ambjørn, “New universal spectral correlators”, *J.Phys.* **A29** (1996) L555–L560, cond-mat/9606129.
- [6] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, “ M-Theory of Matrix Models”, hep-th/0605171.
- [7] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, “Instantons and Merons in Matrix Models”, hep-th/0608228.
- [8] J.Ambjørn, L.Chekhov, C.F.Kristjansen and Yu.Makeenko, “Matrix model calculations beyond the spherical limit”, *Nucl.Phys.* **B404** (1993) 127–172; Erratum *ibid.* **B449** (1995) 681, hep-th/9302014.
- [9] J. Ambjørn, B. Durhuus, J. Fröhlich, ”Diseases of triangulated random surface models, and possible cures”, *Nucl. Phys.* **B257**, p. 433-449.
- [10] J.Ambjørn, C.F.Kristjansen, “From 1-matrix model to Kontsevich model”, *Mod. Phys. Lett.* **A8**(1993)2875, hep-th/9307063.
- [11] O. Babelon, “ Petite introduction aux systèmes intégrables classiques et quantiques”, cours donné à Saclay, Janvier 2007, notes disponibles à <http://www.lpthe.jussieu.fr/~babelon/saclay/2007.pdf>.
- [12] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems* (Cambridge University Press).
- [13] T.Banks, M.R.Douglas, N.Seiberg, S.H.Shenker, *Phys. Lett.* **B238**(1990)279.
- [14] S. Bergman, M. Schiffer, “Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics”, Academic Press Inc., Publishers, New York, NY, 1953.
- [15] M.Bershadsky, S.Cecotti, H.Ooguri and C.Vafa, “Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes”, *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 311.

- [16] M. Bertola, "Two-matrix model with semiclassical potentials and extended Whitham hierarchy", *J.Phys.* **A39** 8823-8856 (2006), hep-th/0511295.
- [17] M. Bertola, "Free Energy of the Two-Matrix Model/dToda Tau-Function", preprint CRM-2921 (2003), hep-th/0306184.
- [18] G. Bonnet, F. David, B. Eynard, "Breakdown of universality in multi-cut matrix models", *J.Phys.* **A33** 6739-6768 (2000).
- [19] V.Bouchard, "Toric Geometry and String Theory", *Oxford University DPhil Thesis*, hep-th/0609123.
- [20] D.V.Boulatov, V.A.Kazakov, "The Ising model on a random planar lattice : the structure of phase transition and the exact critical exponents", *Phys. Lett.* **B186**(1987)379.
- [21] E. Brézin, N. Deo, *Phys. Rev.* **E59** (1999) 3901, cond-mat/9805096.
- [22] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, and J.B. Zuber, *Comm. Math. Phys.* **59**, 35 (1978).
- [23] E. Brézin, V.A. Kazakov, *Phys. Lett.* **B236**(1990)144.
- [24] L.Cantini, notes privées.
- [25] L.Chekhov, "Genus one corrections to multi-cut matrix model solutions", *Theor. Math. Phys.* **141** (2004) 1640–1653, hep-th/0401089.
- [26] L. Chekhov, "Matrix models with hard walls : Geometry and solutions", *J.Phys.* **A39** (2006) 8857-8894, hep-th/0602013.
- [27] L.Chekhov, B.Eynard, "Hermitian matrix model free energy : Feynman graph technique for all genera", *J. High Energy Phys.* **JHEP03** (2006) 014, hep-th/0504116.
- [28] L.Chekhov, B.Eynard, "Matrix eigenvalue model : Feynman graph technique for all genera", *J. High Energy Phys.* **JHEP 0612** (2006) 026, math-ph/0604014.
- [29] J.M.Daul, V.Kazakov, I.Kostov, "Rational Theories of 2D Gravity from the Two-Matrix Model", *Nucl.Phys.* **B409** (1993) 311-338, hep-th/9303093.
- [30] F. David, "Planar diagrams, two-dimensional lattice gravity and surface models", *Nucl.Phys.* **B257**(1985)45.
- [31] P. Deligne, D. Mumford, "The irreducibility of the space of curves of given genus", *IHES***36**(1969)75.
- [32] N. Deo, *Nucl. Phys.* **B504**(1997)609, cond-mat/9703136.
- [33] R.Dijkgraaf, "Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory", in J.Frohlich and al. (eds), *New symmetry principles in quantum field theory*, Plenum Press, p.95 ; hep-th/9201003.
- [34] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, "2D Gravity and Random Matrices", *Phys. Rep.* **254**, 1 (1995).
- [35] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, "Conformal field theory", Springer, 1999.

- [36] R.Dijkgraaf and C.Vafa, “Matrix Models, Topological Strings, and Supersymmetric Gauge Theories”, *Nucl.Phys.* **B644** (2002) 3–20, hep-th/0206255; “On Geometry and Matrix Models”, *Nucl.Phys.* **B644** (2002) 21–39, hep-th/0207106; “A Perturbative Window into Non-Perturbative Physics”, hep-th/0208048.
- [37] R.Dijkgraaf, A.Sinkovics, M.Temurhan, “Matrix models and gravitational corrections”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**(2004)1155, hep-th/0211241.
- [38] M. Douglas, *Phys. Lett.* **B238**(1990)176.
- [39] M. Douglas, S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B335**(1990)635.
- [40] F.J. Dyson, ”correlations between the eigenvalues of a random matrix”, *Comm. Math. Phys.* **19** (1970) 235-50.
- [41] B. Eynard, M.L. Mehta, ”Matrices coupled in a chain : eigenvalue correlations”, *J. Phys. A : Math. Gen.* **31** (1998) 4449-4456.
- [42] B. Eynard, “Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions”, *JHEP/024A/0904*, hep-th/0407261.
- [43] B. Eynard, “Large N expansion of the 2-matrix model”, *JHEP* **01** (2003) 051, hep-th/0210047.
- [44] B.Eynard, “Loop equations for the semiclassical 2-matrix model with hard edges”, *J.Stat.Mech.* **0510** (2005) P006, math-ph/0504002.
- [45] B. Eynard, A. Kokotov, and D. Korotkin, “ $1/N^2$ corrections to free energy in Hermitian two-matrix model”, hep-th/0401166.
- [46] B. Eynard, “Master loop equations, free energy and correlations for the chain of matrices”, *J. High Energy Phys.* **JHEP11**(2003)018, xxx, hep-th/0309036, ccsc-00000572.
- [47] B. Eynard “An introduction to random matrices”, cours donné à Saclay, Octobre 2000, notes disponibles à [http://www-spht.ccea.fr/articles/t01/014/](http://www-spht cea.fr/articles/t01/014/).
- [48] B.Eynard, A.Prats Ferrer, *Comm. Math. Phys.* **264**(2005) 115, hep-th/0502041.
- [49] B.Eynard, “ Formal matrix integrals and combinatorics of maps”, math-ph/0611087.
- [50] B. Eynard, “The 2-matrix model, biorthogonal polynomials, Riemann-Hilbert problem, and algebraic geometry”, thèse d’habilitation de l’Université Paris 7, en français, math-ph/0504034.
- [51] B.Eynard, N.Orantin, “Topological expansion of mixed correlation function in the hermitian 2 matrix model”, en préparation.
- [52] H.M. Farkas, I. Kra, ”Riemann surfaces” 2nd edition, Springer Verlag, 1992.
- [53] J.D. Fay, ”Theta functions on Riemann surfaces”, Springer Verlag, 1973.
- [54] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press (1987).
- [55] D. Gross, A. Migdal, *Phys. Rev. Lett.* **64**(1990)127; *Nucl. Phys.* **B340**(1990)333.
- [56] Harish-Chandra, *Amer. J. Math.* **79** (1957) 87.
- [57] K.Hori, S.Katz, A.Klemm, R.Pandharipande, R.Thomas, C.Vafa, R.Vakil, E.Zaslow, “Mirror symmetry”, American Mathematical Society, 2003.

- [58] M.x.Huang, A.Klemm, “Holomorphic anomaly in gauge theories and matrix models”, hep-th/0605195.
- [59] C.Itzykson, J.B.Zuber, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 411.
- [60] C.Itzykson, J.M.Drouffe, *Théorie statistique des champs*, Inter Editions, ed. du CNRS (1989).
- [61] C.Itzykson, J.B.Zuber, “Combinatorics of the Modular Group II : The Kontsevich integrals”, *Int.J.Mod.Phys.* **A7** (1992) 5661-5705, hep-th/9201001 .
- [62] V.G. Kac, *Spinger lecture notes in physics* **94**(1979)441.
- [63] E. Kanzielper, V. Freilikher, *Phys. Rev.* **E57** (1998) 6604, cond-mat/9709309.
- [64] V.A. Kazakov, I. Kostov, A.A. Migdal, ”Critical properties of randomly triangulated planar random surfaces”, *Physics Letters* **B**, 1985.
- [65] V.A. Kazakov, ”Bilocal regularization of models of random surfaces” *Physics Letters B* **150**(1985), Issue 4, p. 282-284.
- [66] V.A. Kazakov, “Ising model on a dynamical planar random lattice : exact solution”, *Phys Lett.* **A119**, 140-144 (1986).
- [67] V.A. Kazakov, A. Marshakov, ”Complex Curve of the Two Matrix Model and its Tau-function”, *J.Phys.* **A36** (2003) 3107-3136, hep-th/0211236.
- [68] S.Kharchev, A.Marshakov, “On $p - q$ duality and explicit solutions in $c < 1$ 2d gravity models”, hep-th/9303100.
- [69] A.Klemm, W.Lerche, P.Mayr, C.Vafa, N.P.Warner, “Self-dual Strings and N=2 Supersymmetric Field Theory”, *Nucl. Phys.* **B477**(1996)746, hep-th/9604034.
- [70] A.Klemm, M.Mariño, S.Theisen, “Gravitational corrections in supersymmetric gauge theory and matrix models”, *JHEP* **0303**(2003)051, hep-th/0211216.
- [71] V.G. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Mod. Phys. Lett* **A3** (1988) 819.
- [72] M.Kontsevich, “Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function”, *Funk. Anal. Prilozh.* **25** (1991) 50-57; Max-Planck Institut preprint MPI/91-47, MPI/91-77.
- [73] I.K.Kostov, “ Conformal field theory techniques in random matrix models”, hep-th/9907060.
- [74] I.K. Kostov, ”Bilinear functional equations in 2d quantum gravity”, hep-th/9602117.
- [75] A.Kokotov, D.Korotkin, “ Bergmann tau-function on Hurwitz spaces and its applications”, math-ph/0310008.
- [76] A.Kokotov, D.Korotkin, “ Tau functions on Hurwitz spaces”, *Math. Phys., Analysis and Geom.* **7** (2004), no. 1, 47-96 ,math-ph/0202034.
- [77] I.Krichever “The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories”, *Commun.Pure Appl.Math.* **47** (1992) 437; hep-th/9205110
- [78] J.M.F.Labatista, P.M.Llatas, “Topological matter in two dimensions”, *Nucl. Phys.* **B379**(1992)220, hep-th/9112051.

- [79] A.S.Losev, A.Marshakov, N.Nekrasov, “Small Instantons, Little Strings and Free Fermions”, hep-th/0302191.
- [80] M. Mariño, *Chern-Simons Theory, Matrix Models, and Topological Strings* (International Series of Monographs on Physics, 131, Oxford University Press).
- [81] M. Mariño, ”Les Houches lectures on matrix models and topological strings”, Lecture given in Les Houches, *applications of random matrices in physics*, june 2004, hep-th/0410165.
- [82] M. Mariño, “Open string amplitudes and large order behavior in topological string theory”, hep-th/0612127.
- [83] A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov, “On Equivalence of Topological and Quantum 2d Gravity”, *Phys. Lett.* **B274** (1992) 280, hep-th/9201011.
- [84] M.L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd edition, (Academic Press, New York, 1991).
- [85] M.L. Mehta, *Commun. Math. Phys.* **14**((1986)21.
- [86] A.A. Migdal, *Phys. Rep.* **102**(1983)199.
- [87] M. Mirzakhani, “Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli space of bordered Riemann surfaces”, preprint.
- [88] M. Mirzakhani, “Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves”, preprint.
- [89] A. Morozov, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 3503, hep-th/9209074.
- [90] N.Nekrasov, “Seiberg-Witten prepotential from instanton counting”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 831(2004), hep-th/0206161.
- [91] N.Nekrasov, A.Okounkov, “Seiberg-Witten Theory and Random Partitions”, hep-th/0306238.
- [92] A. Neveu, J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B31** 86.
- [93] A.Okounkov, R.Pandharipande, “Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and Matrix models,I”, math/0101147.
- [94] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.***B103**(1981)207.
- [95] P. Ramond, “ Dual theory for fermions”, *Phys. Rev.* **D3**(1971)2415.
- [96] H.E. Rauch, “ Weierstrass points, branch points, and moduli of Riemann surfaces”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12** (1959) 543-560.
- [97] S. Shatashvili, preprint IASSNS-HEP-92/61.
- [98] N.Seiberg, E.Witten, “Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, And Confinement In N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory”, hep-th/9401087.
- [99] M. Staudacher, “ Combinatorial solution of the 2-matrix model”, *Phys. Lett.* **B305** (1993) 332-338.
- [100] G. 't Hooft, *Nuc. Phys.* **B72**, 461 (1974).
- [101] C. Tracy, H. Widom, ”Level-spacing distributions and the Airy kernel”, *Comm. Math. Phys.* **159** (1994) 151-174.
- [102] W.T. Tutte, “A census of planar triangulations”, *Can. J. Math.* **14** (1962) 21-38.
- [103] W.T. Tutte, “A census of planar maps”, *Can. J. Math.* **15** (1963) 249-271.

- [104] Z.X. Wang, D.R. Guo, "Special Functions", World Scientific, 1989.
- [105] E. P. Wigner, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **47** (1951) 790, reprinted in C. E. Porter, *Statistical theories of spectra : fluctuation* (Academic Press, New-York, 1965).
- [106] E.Witten, "Topological Sigma Models", *Com. Math. Phys.* **118**(1988)411.
- [107] E.Witten, "Mirror manifolds and topological field theory", hep-th/9112056.
- [108] E. Witten, "Two-dimensional gravity and inersection theory on moduli space", *Surveys in Differential Geometry* **1**(1990)243.
- [109] P. Zinn-Justin, "Universality of correlation functions of hermitian random matrices in an external field", *Commun. Math. Phys.* 194, 631-650 (1998), cond-mat/9705044.