



**HAL**  
open science

# Modélisations discrètes de la rupture dans les milieux granulaires

Luc Sibille

► **To cite this version:**

Luc Sibille. Modélisations discrètes de la rupture dans les milieux granulaires. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2006. Français. NNT: . tel-00174213

**HAL Id: tel-00174213**

**<https://theses.hal.science/tel-00174213>**

Submitted on 24 Sep 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INP Grenoble**

*Spécialité : « Mécanique : Conception, Géomécanique, Matériaux »*

préparée au laboratoire SOLS, SOLIDES, STRUCTURES  
dans le cadre de *l'Ecole Doctorale « Mécanique et Energétique »*

présentée et soutenue publiquement par

LUC SIBILLE

le 4 décembre 2006

## Modélisations discrètes de la rupture dans les milieux granulaires

Directeur de thèse: Félix DARVE

Co-directeur de thèse: Frédéric-Victor DONZÉ

## JURY

M. B.	CAMBOU	Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon	Président - Rapporteur
M. R.	NOVA	Professeur au Politecnico di Milano	Rapporteur
M. F.	DARVE	Professeur à l'INP Grenoble	Directeur de thèse
M. F.-V.	DONZÉ	Professeur à l'Université Joseph Fourier	Co-directeur
M. F.	NICOT	Maître de conférence à l'Université Joseph Fourier	Examineur
M. B.	CHAREYRE	Maître de conférence à l'INP Grenoble	Examineur
M. C.	TAMAGNINI	Professeur Associé à l'Università degli Studi di Perugia	Invité



---

## Remerciements

---

Ce mémoire constitue la synthèse des trois années de doctorat effectuées au Laboratoire Sols, Solides, Structures.

La réalisation de ce travail a été rendue possible grâce à Félix Darve qui n'a pas hésité, bien au contraire, à m'ouvrir sa porte lorsque je lui annonçais par un simple courriel que je cherchais un directeur de thèse, un financement et un sujet en mécanique des sols. Le résultat, vous le tenez entre vos mains. Je tiens donc à remercier Félix Darve, mon directeur de thèse, pour l'opportunité qu'il m'a offerte, son soutien et son expérience qu'il m'a fait partager. Je remercie également Frédéric Donzé, co-directeur de cette thèse, qui a également accepté de jouer le jeu et de me faire confiance du début jusqu'à la fin. Par ailleurs, de part son expérience en géophysique il a su apporter un regard de l'extérieur sur ce travail de thèse et le faire progresser ainsi vers une plus grande lisibilité. François Nicot s'est volontairement investi de manière importante dans ce projet. Son apport, d'un point de vue analytique en général, et en micro-mécanique plus particulièrement m'a été d'un grand secours. Je le remercie donc d'avoir participé à l'élaboration des résultats ici présents. Par ailleurs, il faut savoir que je suis venu chercher dans la recherche une certaine part de liberté. J'ai particulièrement apprécié que mes encadrants ne se soient jamais opposés aux voies que je suggérais d'explorer.

Mes plus sincères remerciements à tous les membres du Jury de soutenance, avec en premier lieu Bernard Cambou président du jury et rapporteur, et Roberto Nova également rapporteur. J'ai particulièrement apprécié qu'ils acceptent d'évaluer cette thèse car leurs personnes et leurs critiques (vis-à-vis de ce travail) reflètent à elles deux l'originalité de ce travail: l'étude de l'instabilité sur la base d'une approche discrète. Je remercie aussi Bruno Chareyre de sa participation, son approche des problèmes est souvent différente de la mienne; c'est pourquoi, par soucis de complémentarité, je suis toujours intéressé par son avis. Claudio Tamagnini a accepté l'invitation qui lui a été offerte de prendre place dans le jury. Je le remercie de s'être intéressé à mon travail mais aussi de sa disposition à faire partager son expérience et ses connaissances.

Je voudrais maintenant m'adresser à toutes les personnes qui ont rendu ces trois années de thèse agréables au jour le jour.

Commençons par les aquariums (les bureaux dans lesquels j'ai débuté cette thèse) où sévissaient tout particulièrement Cédric, Mark, King (Huynh), Cécile et Nicolas. Ils ont su créer une ambiance rocambolesque sans laquelle l'amorce de la thèse aurait pu être difficile. Cédric des plus humains, à la recherche des meilleurs coups. Mark heureux de vivre et toujours prêt à améliorer les stratagèmes de son prédécesseur. King largement ouvert, très amical et toujours

prêt à se prêter aux colles que je lui posais sur ce fameux travail du second ordre. Cécile, du Sud, ça ne paraît rien mais c'est important, entreprenante et fédératrice. Nicolas, redoutable en ski avec son casque mais aussi aux batailles inter-bureaux, dont je vous laisse imaginer les armes.

Venons-en aux nouveaux occupants des aquariums. Jane, spontanée, ouverte et motivée. Séverine qui elle seule est capable de comprendre l'accent normand. Luisa représentante du Mexique qui croyait ne pas revenir d'un tour de France dans ma superbe auto. Marcos, également représentant du Mexique et toujours très tranquille (enfin, il paraît que ce n'est qu'une apparence). Steve amical et à l'écoute; mais attention il est dangereux de le croiser dans un pub surtout accompagné de sa femme Pascale: le chemin du retour risque d'être tortueux.

Il y a aussi un bureau au fond d'un couloir au premier étage. Les résidents permanents en étaient Julien et Thomas. Julien excédant d'énergie, plein d'idées, et toujours prêt. Thomas, tout le temps content et aimable, ce que j'admire. Plus temporairement s'établissait Jean-Patrick qui m'a aidé à implémenter les procédures de simulation dans le code de calcul. Il y a aussi Thanh dans mon bureau actuel qui me fournit régulièrement en gourmandises vietnamiennes voire françaises! Luc (un autre) qui s'est prêté au jeu de travailler avec moi pendant son Master de recherche, ceci sans baisser les bras.

Je pense aussi à Cino, amical, qui s'est intéressé au travail que j'ai effectué et dont j'ai apprécié les nombreux conseils. Jack pour les mêmes raisons et débordant d'idées. Safwan qui a passé du temps à m'expliquer ces résultats expérimentaux de doctorat et attentif à mon travail. Etienne qui m'a fait partager ses connaissances en matière de comportement mécanique des sables. Pierre soucieux du bien-être de chacun. Denis, qui a toujours répondu à mes questions sur des problèmes analytiques. Alexandre, Gabriel et Pascal qui ont su m'aider lors des problèmes techniques que j'ai rencontrés.

J'ai également eu l'occasion de travailler avec des personnes de passage au laboratoire. Les résultats n'en ont pas été pour autant des moindres. Francesco, ensemble nous avons travaillé sur un "petit projet de recherche" par nous même pendant près de deux ans. L'objectif a été atteint pour mon plus grand plaisir, j'espère qu'il en est de même pour lui. L'interaction avec Francesco a été des plus enrichissantes. Qu'il y trouve ici toute ma reconnaissance. Elma avec qui les échanges ont été très agréables et qui a travaillé assidûment. Les efforts qu'elle a fournis m'ont été d'une grande utilité. Krzysztof très amical et qui m'a fait découvrir quelques bonnes vodkas polonaises.

A toutes ces personnes, ainsi qu'à toutes celles que je n'ai pas citées mais que j'ai pu côtoyer de près ou de loin pendant mon travail je veux leur dire merci.

Une pensée à ma famille qui m'a soutenue bien avant que commence cette thèse: mon père, ma mère, mon frère, ma soeur, maman de deux petites filles, et leur papa.

Dans le cas des sols et plus généralement des milieux granulaires, qui sont des matériaux non-associés, des ruptures diffuses existent pour des états de contrainte strictement inclus à l'intérieur de la condition limite de plasticité.

Les ruptures diffuses, par opposition aux ruptures localisées, sont caractérisées par une absence de figure de localisation des déformations. Ces ruptures observées in-situ et en laboratoire ne peuvent pas être décrites dans le cadre de l'élasto-plasticité classique habituellement utilisée en ingénierie. Il est donc nécessaire de mettre en place une approche adaptée. La principale application a pour objet la réduction des risques liés aux glissements de terrain initiés à partir de ruptures diffuses au sein de constructions anthropiques ou naturelles.

Nous proposons d'analyser les ruptures diffuses comme un phénomène de bifurcation : la rupture diffuse est un mode de déformation qui correspond à une branche bifurquée avec perte d'unicité constitutive au point de bifurcation. Les points de bifurcation sont détectés à l'aide du signe du travail du second ordre, soit la forme locale du critère de stabilité de Hill. Les analyses présentées portent principalement sur des simulations directes par la Méthode des Eléments Discrets. Pour des assemblages granulaires numériques de différentes densités, un domaine de bifurcation est mis en évidence à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. Des conditions de sollicitation conduisant à la rupture du matériau à partir d'un point de bifurcation sont données et des cas de rupture diffuse sont modélisés. On parvient ainsi à reproduire et prévoir des ruptures non décrites dans le cadre de l'élasto-plasticité classique.

Finalement les origines microscopiques du travail du second ordre sont analysées. Il est vérifié numériquement qu'une relation directe existe entre le travail du second ordre d'une part, et les forces de contact et les déplacements relatifs aux points de contact d'autre part, dans le cas de déformations en régime quasi-statique. Dans le cas de déformations en régimes dynamiques cette relation n'est plus numériquement vérifiée.

**Mots clefs:**

Rupture, bifurcation, instabilité matérielle, critère de stabilité de Hill, travail du second ordre, contrôlabilité, maintenabilité, recherches directionnelles, enveloppes réponses, milieux granulaires, Eléments Discrets, rouleaux de Schneebeli, mesures de champs discrets.



For granular media, which are non-associated materials, diffuse failures exist for stress states strictly included within the plastic limit condition.

Diffuse failure, in contrast to localized failure, is characterized by the lack of localization patterns. Diffuse failure is observed both in the field and in the laboratory and cannot be described in the framework of the classical elastoplasticity usually used in engineering. Hence a new approach dedicated to this kind of failure has to be developed. The main application is the reduction of hazards due to landslides initiated from diffuse failure in natural or man-made slopes.

This thesis is about the description and the prediction of diffuse failures and it is based on the idea that diffuse failure is the response path which is subjected to bifurcation with a loss of constitutive uniqueness at the bifurcation point. The sign of the second-order work (the local form of Hill's condition of stability) is used to detect bifurcation points. Analyses are mainly developed from direct simulations using the Discrete Element Method. For numerical granular assemblies of different densities a bifurcation domain is exhibited inside the plastic condition. Loading conditions leading to the failure of the material from a bifurcation point are given.

Finally the microscopic origins of second-order work are analysed. A direct relationship between the second-order work on the one hand, and the contact forces and the relative displacements at the intergranular contact points on the other hand is numerically verified for a quasi-static response of the material. When the response includes dynamic events the relationship is no longer verified from a numerical point of view.

**Keywords:**

Failure, bifurcation, material instability, Hill's stability criterion, second-order work, controllability, sustainability, stress probes, response envelopes, granular media, Discrete Element Method, 2D analogue granular material, Measurements of microscale kinematics.





<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xix</b>
<b>Notations et conventions</b>	<b>xxiii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Etude bibliographique</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Définitions . . . . .	8
1.3 Observations expérimentales de ruptures à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb . . . . .	9
1.3.1 Glissement de terrain sur modèle réduit	9
1.3.2 Essais de laboratoires homogènes	10
1.3.2.1 <i>Chemins non drainés sur sable lâche</i>	10
1.3.2.2 <i>Chemins proportionnels en déformation</i>	11
1.3.2.3 <i>Chemins drainés à déviateur de contrainte constant</i>	13
1.3.2.4 <i>Autres chemins</i>	14
1.3.3 Bilan des observations expérimentales	15
1.4 Description des ruptures à l'intérieur de la condition limite de plasticité	16
1.4.1 Introduction	16
1.4.2 Critères de stabilité	17
1.4.2.1 <i>Définition de stabilité de Lyapunov</i>	17
1.4.2.2 <i>Critère de stabilité de Drucker</i>	18
1.4.2.3 <i>Condition de stabilité de Hill: forme globale</i>	18
1.4.2.4 <i>Le travail du second ordre: forme locale de la condition de stabilité de Hill</i>	19
1.4.3 Vers la prédiction de la rupture "diffuse"	21
1.4.3.1 <i>Condition d'instabilité proposée par Lade</i>	21

1.4.3.2	<i>Lancelot et al.: valeurs expérimentales du travail du second ordre</i>	22
1.4.3.3	<i>Prédiction de l'effondrement par Gajo</i>	23
1.4.3.4	<i>Notion de rupture "diffuse" selon Darve et al.</i>	24
1.4.3.5	<i>La perte de contrôlabilité selon Nova</i>	27
1.4.4	Le travail du second ordre un indicateur de bifurcation généralisé?	28
1.5	Un outil numérique pour l'étude des matériaux granulaires: la Méthode des Eléments Discrets . . . . .	30
1.5.1	Introduction	30
1.5.2	Un aperçu des différentes approches discrètes	30
1.5.3	La Méthode des Eléments Discrets (MED)	32
1.5.3.1	<i>Cycle de calcul</i>	32
1.5.3.2	<i>Lois d'interaction de contact</i>	33
1.5.3.3	<i>Conditions de convergence</i>	35
1.5.4	Réalisation de simulations d'essais triaxiaux ou biaxiaux	36
1.5.4.1	<i>Formes des grains et granulométrie</i>	36
1.5.4.2	<i>Choix d'un Volume Elémentaire Représentatif</i>	38
1.5.4.3	<i>Génération de l'assemblage granulaire</i>	39
1.5.4.4	<i>Contrôle et vitesse de sollicitation de l'assemblage granulaire</i>	41
1.5.5	Quelques résultats sur le comportement mécanique des milieux granulaires idéalisés	42
1.5.5.1	<i>Une description biphasique des assemblages granulaires</i>	42
1.5.5.2	<i>La simulation de recherches directionnelles pour caractériser le comportement mécanique incrémental à l'échelle macroscopique</i>	43
<b>Chapitre 2</b>	<b>Introduction au modèle numérique discret</b>	<b>45</b>
2.1	Introduction . . . . .	46
2.2	Le code de calcul SDEC . . . . .	46
2.2.1	Caractéristiques du code	46
2.2.2	Adaptation du code pour la simulation d'essais triaxiaux	48
2.2.2.1	<i>Définition de l'assemblage granulaire et des états de contrainte-déformation</i>	48
2.2.2.2	<i>Implémentation d'éléments plaques</i>	48
2.2.2.3	<i>Implémentation de l'asservissement en contrainte des parois</i>	50
2.3	Développement et validation du modèle . . . . .	52
2.3.1	Génération des échantillons numériques	52
2.3.1.1	<i>Procédure de génération</i>	52
2.3.1.2	<i>Caractéristiques des échantillons générés</i>	53
2.3.2	Comparaison avec des essais expérimentaux et un modèle discret de la littérature – pré-validation	56
2.3.2.1	<i>Calibration du modèle discret</i>	56
2.3.2.2	<i>Prédiction des enveloppes réponses</i>	58
2.3.2.3	<i>Validation des performances du modèle et des procédures de simulation</i>	60

---

2.3.3	Présentation et validation du modèle retenu pour l'étude de la bifurcation homogène	60
2.3.3.1	<i>Motivation du choix du type de modèle de grain</i>	60
2.3.3.2	<i>Caractéristiques du modèle retenu</i>	60
2.3.3.3	<i>Vérification de l'influence de la vitesse de sollicitation et de l'amortissement</i>	65
2.3.3.4	<i>Validation du modèle à l'échelle microscopique</i>	66
2.4	Conclusion . . . . .	69
<b>Chapitre 3 Analyse du comportement incrémental du modèle</b>		<b>71</b>
3.1	Introduction . . . . .	72
3.1.1	Le travail du second ordre: une variable directionnelle	72
3.1.2	Définition d'une recherche directionnelle	73
3.1.3	Intérêt des recherches directionnelles	74
3.2	Caractérisation du comportement mécanique incrémental du modèle discret	75
3.2.1	La simulation des recherches directionnelles	75
3.2.1.1	<i>Procédure de simulation</i>	75
3.2.1.2	<i>Norme de l'incrément de sollicitation en contrainte</i>	76
3.2.2	Evolution des enveloppes réponses le long d'un chemin triaxial drainé	78
3.2.2.1	<i>Enveloppes réponses totales</i>	78
3.2.2.2	<i>Enveloppes réponses élastiques</i>	78
3.2.2.3	<i>Enveloppes réponses plastiques - Mise en évidence d'une règle d'écoulement non associée</i>	82
3.2.3	Déformations élastiques, plastiques et régimes quasi-statique, dynamique	86
3.2.4	Bilan	92
3.3	Etude du signe du travail du second ordre . . . . .	93
3.3.1	Expressions semi-Lagrangienne et eulérienne du travail du second ordre	93
3.3.2	Cônes de directions instables	95
3.3.2.1	<i>Résultats numériques</i>	95
3.3.2.2	<i>Résultats expérimentaux</i>	99
3.3.2.3	<i>Synthèse dans le plan d'axisymétrie des contraintes</i>	99
3.3.3	Comparaison avec une loi macroscopique phénoménologique	101
3.3.3.1	<i>Relation incrémentalement non linéaire du second ordre (INL2)</i>	101
3.3.3.2	<i>Modélisation constitutive pour un sable d'Hostun</i>	102
3.3.3.3	<i>Calibration de la relation INL2 sur le comportement de l'échantillon E2</i>	103
3.4	Conclusion . . . . .	106
<b>Chapitre 4 De la détection d'un point de bifurcation à la rupture</b>		<b>109</b>
4.1	Introduction . . . . .	110
4.2	Chemin à déviateur de contrainte $q$ constant . . . . .	110

4.2.1	Perte de contrôlabilité	111
4.2.1.1	<i>Paramètres de contrôle pour un chemin de chargement à <math>q</math> constant</i>	111
4.2.1.2	<i>Simulation de la perte de contrôlabilité</i>	113
4.2.2	Perte de maintenabilité	116
4.2.2.1	<i>Définition de la notion de perte de maintenabilité</i>	116
4.2.2.2	<i>Simulation de la perte de maintenabilité</i>	116
4.2.2.3	<i>Bilan</i>	119
4.3	Généralisation aux chemins proportionnels en contrainte . . . . .	120
4.3.1	Définition des paramètres de contrôle généralisés	120
4.3.2	Algorithme d'asservissement des parois en fonction des paramètres de contrôle $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$ et $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3$	120
4.3.3	Simulation de la perte de contrôlabilité	122
4.3.4	Simulation de la perte de maintenabilité	124
4.4	Chemin triaxial non drainé . . . . .	126
4.5	Chemins proportionnels en déformation . . . . .	127
4.5.1	Simulation de la perte contrôlabilité	128
4.5.2	Simulation de la perte de maintenabilité	130
4.5.3	Résultats expérimentaux sur un matériau analogique bidimensionnel	132
4.6	Conclusion . . . . .	136
<b>Chapitre 5 Origines microscopiques du travail du second ordre</b>		<b>137</b>
5.1	Introduction . . . . .	138
5.2	Avalanches de grains . . . . .	138
5.2.1	Une description liée aux grains	138
5.2.2	Une description liée aux contacts	140
5.2.2.1	<i>Etude d'un modèle simple</i>	140
5.2.2.2	<i>Application aux simulations numériques</i>	142
5.2.3	Simulation numérique de l'avalanche de grains	143
5.2.3.1	<i>Travail du second ordre attribué aux rouleaux</i>	146
5.2.3.2	<i>Travail du second ordre attribué aux contacts</i>	146
5.2.3.3	<i>Valeurs globales du travail du second ordre</i>	149
5.3	Travail du second ordre macroscopique et travail du second ordre global aux contacts . . . . .	151
5.3.1	Approche numérique	151
5.3.1.1	<i>Calcul du travail du second ordre au contact</i>	151
5.3.1.2	<i>Résultats et influence des composantes <math>d^2W_n^{ct}</math> et <math>d^2W_t^{ct}</math></i>	156
5.3.1.3	<i>Comparaison entre le travail du second ordre global aux contacts et du travail du second ordre macroscopique</i>	158
5.3.1.4	<i>Bilan énergétique</i>	161
5.3.1.5	<i>Bilan</i>	162

---

5.3.2	Approche analytique	164
5.3.2.1	<i>Présentation de la relation micro-macro</i>	164
5.3.2.2	<i>Influence du terme complémentaire</i>	165
5.4	Conclusion . . . . .	168
	<b>Conclusion générale</b>	<b>169</b>
	<b>Annexe A: une technique de photogrammétrie numérique pour la mesure des champs cinématiques discrets</b>	<b>175</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>186</b>



---

Table des figures

---

1	Dessins extraits du Codex Atlanticus mettant en évidence des recherches de Leonardo da Vinci sur la force de frottement; Truesdell [124]. . . . .	2
1.1	Exemples de deux modes de rupture dans les sables: effondrement d'un échantillon de sable lors d'un essai non drainé pour une "perturbation" après le pic de $q$ , la liquéfaction est totale (a), Servant et al. [114]; rupture par bande plane de cisaillement lors d'un essai triaxial classique (b), Desrues & Chambon [44] d'après les travaux de Colliat-Dangus [18]. . . . .	11
1.2	Réponse d'un sable lâche suite au passage de conditions drainées à des conditions non drainées sous déviateur de contrainte constant. A partir de l'état $A$ un nouvel équilibre est atteint pour un état $B$ proche du précédent. Pour un état de contrainte plus élevé $C$ l'échantillon s'effondre; Chu et al. [16]. . . . .	11
1.3	Tests de stabilité sur sable dense pour une valeur de $q$ fixée et une valeur de $\zeta_i = d\varepsilon_v/d\varepsilon_1$ imposée: pour $\zeta_i < \zeta_f$ l'échantillon s'effondre (a), dans la cas contraire la réponse du matériau reste stable (b); Chu et al. [17]. . . . .	12
1.4	Chemins drainés à $q$ constant sur sables lâches: évolution des contraintes effectives (a), Sasitharan et al. [110], et réponse en terme de déformation volumique (b), Gajo et al. [52]. . . . .	13
1.5	Région en forme de coin à l'intérieure de laquelle le travail du second ordre est négatif ou nul pour des chemins de contrainte "décroissants" à l'intérieur de la surface de rupture; Lade [68]. . . . .	22
1.6	Définition de la Ligne d'Instabilité d'après Lade [68] pour des conditions non drainées. . . . .	22
1.7	Tests d'instabilité, ligne $d^2W = 0$ , et chemins proportionnels en déformation pour $\zeta_i = -0,2$ ; Lancelot <i>et al.</i> [71]. . . . .	23
1.8	Chemins de réponse en déformation pour des sollicitations à $q$ constant: résultats expérimentaux (a) et théoriques (b); Gajo [51]. . . . .	24
1.9	Limite du domaine de bifurcation suivant le critère de positivité du travail du second ordre dans le plan déviatoire des contraintes. Calculs effectués pour des sables d'Hostun lâche et dense avec une relation constitutive incrémentalement non linéaire; Laouafa & Darve [73]. . . . .	25
1.10	Limite du domaine de bifurcation dans le plan d'axisymétrie des contraintes et cônes de directions instables; Darve et al. [42]. . . . .	26



1.11	Simulation de chemin à $q$ constant pour un sable d'Hostun lâche, les points sont remplacés par des symboles lorsque le travail du second ordre devient négatif; Darve et al. [42]. . . . .	27
1.12	Points de perte d'unicité (ou de contrôlabilité) représentés par des étoiles dans le plan déviatoire des contraintes; Imposimato & Nova [57]. . . . .	29
1.13	Loi de Signorini: les grains ne s'interpénètrent pas (a); frottement sec (b). . .	31
1.14	Schématisation du cycle de calcul de la Méthode des Eléments Discrets. . . .	33
1.15	Loi d'interaction de contact utilisée par Cundall & Strack [27] (a); modèle élastoplastique parfait dans la direction tangentielle au contact correspondant à la loi d'interaction de Cundall & Strack [27] (b); définition de l'interpénétration $\delta_c$ (c). . . . .	34
1.16	Loi d'interaction avec prise en compte de la déformation plastique du contact et d'une force de cohésion, $\delta$ représente ici l'interpénétration; Luding [80]. . .	34
1.17	Loi d'interaction modélisant la résistance au roulement au point de contact, par ce biais un moment est transmis entre les deux grains impliqués; Iwashita & Oda [58]. . . . .	35
1.18	Angle de frottement macroscopique en fonction de l'angle de frottement intergranulaire, compilation originale de Mahboubi et al. [82] augmentée par Chareyre [14]. . . . .	37
1.19	Exemples de raffinement du modèle géométrique des grains: (a) les disques sont collés deux à deux (Chareyre [14]), (b) ellipses (Olivera [94]), (c) polygones (Alonso-Marroquin [1]). . . . .	37
1.20	Dépendance de la déformation homogénéisée à l'aire de la surface d'homogénéisation; Calvetti <i>et al.</i> [8]. . . . .	39
1.21	Exemples de conditions aux limites pour des assemblages granulaires bidimensionnels: parois rigides, Calvetti & Emeriault [9] (a); Conditions souples Bardet & Proubet [5] (b); sphère déformable Kishino et al [66] (c). . . . .	41
1.22	Réseau des contacts appartenant à la phase forte dans un assemblage granulaire 2D, la largeur des traits est proportionnel à l'intensité de la force; Radjaï et al. [103]. . . . .	43
2.1	Repère fixe par rapport auquel sont définis la position des grains, le tenseur de contrainte et de déformation. . . . .	48
2.2	Représentation schématique de l'intersection entre un élément plaque et un élément sphère (a); vue 3D de sphères posées sur une paroi composée d'éléments plaques. . . . .	49
2.3	Algorithme d'asservissement en contrainte d'une paroi, il s'exécute à chaque pas de calcul de la MED. . . . .	51
2.4	Principales étapes de la génération d'un échantillon: création d'un assemblage régulier de sphères mono disperses (a), création du désordre par application de l'algorithme géométrique (b), compactage par compression isotrope pour un angle de frottement nul (c). . . . .	53
2.5	Courbe granulométrique des échantillons numériques et du sable d'Hostun. . .	53
2.6	Distribution des orientations de contact dans les plans $(x_1, x_2)$ , $(x_2, x_3)$ et $(x_3, x_1)$ . . .	54
2.7	Découpage des échantillons en couronnes d'épaisseur constante pour le calcul de la densité de contact en fonction de la profondeur $X_c$ . . . . .	55
2.8	Moyenne et écart type de la densité de contact normalisée pour chaque couche de contact à une profondeur normalisée $X_c/X_{max}$ (calculé sur 20 échantillons). . .	55
2.9	Simulation d'un même essai triaxial à 200 kPa de confinement sur 10 échantillons numériques réputés identiques. . . . .	56

2.10	Essai expérimental de référence (Royis & Doanh [108]) et simulation de l'essai par Calvetti <i>et al.</i> [10] et avec le modèle SDEC. . . . .	58
2.11	Comparaison des enveloppes réponses expérimentales (Royis & Doanh [108]) et simulées avec le modèle SDEC et par Calvetti <i>et al.</i> [10]. . . . .	59
2.12	Simulations d'essais triaxiaux drainés à $\sigma_3 = 100, 200, 300$ kPa: échantillon <i>E1</i> à gauche, échantillon <i>E2</i> à droite. . . . .	62
2.13	A gauche: Simulations d'essais triaxiaux drainés à $\sigma_3 = 100, 200, 300$ kPa sur l'échantillon <i>E1</i> . A droite: influence de l'indice des vides pour une pression de confinement de 100 kPa. . . . .	63
2.14	Enveloppes de rupture dans le plan de Mohr pour les échantillons <i>E1</i> , <i>E2</i> et <i>E3</i> . . . . .	63
2.15	Enveloppes de rupture dans le plan de Mohr pour les échantillons <i>E1</i> , <i>E2</i> et <i>E3</i> . . . . .	64
2.16	Vérification de l'influence de la vitesse de chargement et de l'atténuation sur un essai triaxial drainé (échantillon <i>E1</i> ) à 100 kPa de confinement. Cas 1: $\varepsilon_1 = 0.5$ et $\lambda^a = 0.05$ ; cas 2: $\varepsilon_1 = 0.05$ et $\lambda^a = 0.05$ ; cas 3: $\varepsilon_1 = 0.5$ et $\lambda^a = 0.0$ . . . . .	66
2.17	Densité de probabilité $P_n$ et $P_t$ des forces normales et tangentielles normalisées $F_n/\langle F_n \rangle$ et $F_t/\langle F_t \rangle$ : tracé semi-logarithmique (a) et log-log (b). . . . .	67
2.18	Valeur du rapport $q/p$ où $q$ est déduit uniquement des contacts vérifiant $F_n < \xi \langle F_n \rangle$ . . . . .	68
2.19	Distribution des orientations de contact suivant leur appartenance à la phase faible ou forte; $x_1$ est la direction de compression. . . . .	68
3.1	Définition des plans de Rendulic: recherche directionnelle en contrainte (gauche), enveloppe réponse en déformation (droite). . . . .	73
3.2	Chemins de déformation pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ( $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.30$ ; échantillon <i>E1</i> ) et pour $\ d\vec{\sigma}\  = 0.1, 1.0, 10$ kPa. . . . .	77
3.3	Chemins de déformation pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ( $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.85$ ; échantillon <i>E1</i> ) et pour $\ d\vec{\sigma}\  = 0.1, 1.0, 10$ kPa. Par souci de lisibilité, les représentations correspondant à $\ d\vec{\sigma}\  = 0.1$ et 10 kPa sont en partie tronquées. . . . .	77
3.4	Enveloppes réponse pour l'échantillon <i>E1</i> et $\sigma_3 = 100$ kPa. . . . .	79
3.5	Enveloppes réponse pour l'échantillon <i>E3</i> et $\sigma_3 = 100$ kPa. . . . .	80
3.6	Enveloppes réponses totale et élastique pour l'échantillon <i>E1</i> à $\sigma_3 = 200$ kPa et $\eta = 0.77$ . Les deux symboles circulaires pleins représentent les réponses en déformations totale $d\vec{\varepsilon}$ et élastique $d\vec{\varepsilon}_e$ suite au même incrément de chargement $d\vec{\sigma}$ de direction $\alpha = 150^\circ$ (cf. Fig. 3.7). . . . .	81
3.7	Chemin de sollicitation en contrainte, chargement puis déchargement (gauche); chemin de réponse en déformation (droite) pour un angle de frottement intergranulaire tendant vers $90^\circ$ (échantillon <i>E1</i> , $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.77$ ). . . . .	81
3.8	Enveloppes réponses élastiques pour un état isotrope et un état anisotrope ( $\sigma_1 = 100$ kPa). . . . .	82
3.9	Enveloppe réponse plastique pour l'échantillon <i>E1</i> à $\sigma_3 = 200$ kPa et $\eta = 0.77$ (voir les enveloppes réponse totales et élastiques sur la Fig. 3.6). . . . .	83
3.10	Norme des déformations plastiques $\ d\vec{\varepsilon}_p\ $ et élastiques $\ d\vec{\varepsilon}_e\ $ (a), direction des déformations plastiques $\beta_p$ et élastiques $\beta_e$ (b) en fonction de la direction de sollicitation $\alpha$ ; échantillon <i>E1</i> , $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.77$ . . . . .	84
3.11	Direction en contrainte engendrant un chargement au sens de l'élasto-plasticité classique (c'est-à-dire des déformations plastiques). . . . .	84

3.12	Norme des déformations plastiques $\ d\vec{\varepsilon}_p\ $ et élastiques $\ d\vec{\varepsilon}_e\ $ (a), direction des déformations plastiques $\beta_p$ et élastiques $\beta_e$ (b) en fonction de la direction de sollicitation $\alpha$ ; échantillon $E3$ , $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.63$ . . . . .	85
3.13	Directions de l'écoulement plastique et de la normale à la surface de limite élastique, le trait fin continu représente le critère de Mohr-Coulomb. . . . .	86
3.14	Normes des déformations plastiques $\ d\vec{\varepsilon}_p\ $ et valeur maximale de l'énergie cinétique $E_{c_{max}}$ (a), proportions de contacts glissants et non-permanents en fonction de la direction de sollicitation $\alpha$ (b); échantillon $E1$ $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.31$ . . . . .	87
3.15	Normes des déformations plastiques $\ d\vec{\varepsilon}_p\ $ et valeur maximale de l'énergie cinétique $E_{c_{max}}$ (a), proportions de contacts glissants et non-permanents en fonction de la direction de sollicitation $\alpha$ (b); échantillon $E1$ $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.77$ . . . . .	88
3.16	Evolution de l'énergie cinétique au cours de la simulation pour $\alpha = 150^\circ$ ; échantillon $E1$ , $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.77$ . . . . .	89
3.17	Représentation spatiale de l'énergie cinétique à différent instant de la simulation pour $\alpha = 150^\circ$ . Chaque instant est repéré par une lettre sur la Fig. 3.16. Les sphères rouges indiquent des grains impliqués dans le réseau fort, les sphères vertes des grains impliqués dans le réseau faible. Echantillon $E1$ , $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.77$ . . . . .	90
3.18	Evolution de l'énergie cinétique pour des grains impliqués respectivement dans le réseau fort et le réseau faible (a), évolution de la fraction $X$ de contacts entrant ou sortant du réseau fort (b); échantillon $E1$ , $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.77$ , $\alpha = 150^\circ$ . . . . .	91
3.19	Expressions semi-Lagrangienne et Eulérienne du travail du second ordre calculé à partir de recherches directionnelles. . . . .	94
3.20	Représentations circulaires du travail du second ordre normalisé $d^2W_n$ pour l'échantillon $E1$ . . . . .	96
3.21	Représentations circulaires du travail du second ordre normalisé $d^2W_n$ pour l'échantillon $E2$ . . . . .	97
3.22	Représentations circulaires du travail du second ordre normalisé $d^2W_n$ pour l'échantillon $E3$ . . . . .	98
3.23	Comparaison de la direction $\beta$ des réponses en déformation entre les échantillons $E1$ et $E3$ . . . . .	98
3.24	Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé $d^2W_n$ calculé d'après les recherches directionnelles réalisées par Royis et Doanh [108] sur un sable d'Hostun dense. . . . .	99
3.25	Cônes de directions instables dans le plan de Rendulic des contraintes. Les symboles circulaires pleins représentent les états de contrainte pour lesquels $d^2W > 0$ quelque soit la valeur de $\alpha$ testée, les cônes représentent les cônes de directions instables. . . . .	100
3.26	Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé $d^2W_n$ en conditions axisymétriques ( $\sigma_3 = 100$ kPa) calculé avec la relation INL2 pour un sable d'Hostun dense; Darve et Laouafa [36]. . . . .	102
3.27	Calibration de la relation INL2 sur la comportement triaxial simulé de l'échantillon numérique $E1$ ; Sholtès [112]. . . . .	104
3.28	Domaine de bifurcation pour la relation INL2 calibrée sur le comportement triaxial de l'échantillon $E1$ (a); Scholtès [112]. Rappel des cônes de directions instables pour l'échantillon $E1$ (b). . . . .	104

---

3.29	Comparaison entre la relation INL2 et le modèle discret (échantillon $E1$ ) de la norme $\ d\varepsilon\ $ (a), la direction $\beta$ (b) de l'incrément de déformation et de $d^2W_n$ (c) en fonction de la direction de chargement $\alpha$ ( $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.77$ ). . .	105
3.30	Représentations polaires du travail du second ordre normalisé $d^2W_n$ calculé avec le modèle micro-directionnel ( $\sigma_3 = 125$ kPa); Nicot & Darve [88]. . . . .	107
4.1	Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé $d^2W_n$ pour l'échantillon $E3$ à l'état de contrainte $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.46$ . . . . .	111
4.2	Evolution des paramètres $dq$ et $d\varepsilon_v$ au cours de la recherche directionnelle dans la direction $\alpha = 215.3^\circ$ à partir de l'état de contrainte $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.46$ (échantillon $E3$ ). . . . .	112
4.3	Comparaison de l'évolution des paramètres $dq$ et $d\varepsilon_v$ en fonction du mode de contrôle pour un chemin à $q$ constant (échantillon $E3$ , état initial: $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.46$ ). . . . .	114
4.4	Comparaison en fonction du temps et des paramètres de contrôle de la réponse de l'échantillon $E3$ pour un chemin à $q$ constant (état initial: $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.46$ ). . . . .	115
4.5	Découpage de l'échantillon numérique en huit sous-parallélépipèdes pour le choix des grains à perturber. . . . .	117
4.6	Simulation de perte de maintenabilité suite à une perturbation en énergie cinétique pour en contrôle en $dq = 0$ et $d\varepsilon_v = 0$ (échantillon $E3$ , état initial: $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.46$ ). . . . .	118
4.7	Principe de l'algorithme d'asservissement des parois en fonction des paramètres de contrôle $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$ et $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3$ . . . . .	121
4.8	Simulation de l'application sur l'échantillon $E3$ du programme de chargement $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$ et $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 < 0$ à partir de l'état de contrainte $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.46$ . . . . .	123
4.9	Simulation de la perturbation en énergie cinétique de l'échantillon $E3$ à l'état de contrainte $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.46$ gouverné par les paramètres de contrôle $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$ et $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$ . . . . .	125
4.10	Comparaison des réponses de l'échantillon $E2$ pour des compressions non drainées ( $d\varepsilon_v = 0$ ) contrôlées en $d\varepsilon_1 > 0$ et $dq > 0$ , à partir d'un état isotrope à 100 kPa de confinement. . . . .	127
4.11	Chemins proportionnels en déformation simulés avec l'échantillon $E1$ pour $R = 0.7; 0.8; 0.825; 0.85; 0.875; 0.9; 0.1$ . . . . .	128
4.12	Comparaison des réponses de l'échantillon $E1$ pour des chemins proportionnels en déformation ( $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$ , avec $R = 0.825$ ) contrôlés en $d\varepsilon_1$ et en $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$ , à partir d'un état isotrope à 100 kPa de confinement. . . . .	129
4.13	Evolution des déformations principales et des contraintes principales au cours de la simulation de l'essai proportionnel en déformation ( $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$ , avec $R = 0.825$ ) contrôlé en $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$ . . . . .	129
4.14	Comparaison des réponses de l'échantillon $E1$ suite à la perturbation par injection d'énergie cinétique des états d'équilibre $Et_a$ et $Et_b$ gouvernés par les paramètres de contrôle $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$ et $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$ avec $R = 0.825$ . . . . .	131
4.15	Compression biaxiale pour une pression de confinement $\sigma_2 = 50$ kPa sur un empilement de 1258 rouleaux. . . . .	132
4.16	Chemins proportionnels en déformation appliqués sur un empilement de rouleaux. Sur le diagramme présentant $\varepsilon_v$ en fonction de $\varepsilon_1$ , une droite indique la dilatance naturelle de l'empilement pour un essai de compression biaxial . . .	134

5.1	Configuration initiale de l'empilement de rouleaux; Darve <i>et al.</i> [39]. . . . .	139
5.2	Modèle représentant le comportement d'un contact. . . . .	141
5.3	Incréments de sollicitation $d\vec{s}$ et incréments de réponse $d\vec{r}$ pour différentes directions de chargement envisagées à partir d'un état limite $E_l$ . . . . .	142
5.4	Définition du repère local lié au contact entre deux grains $g1$ et $g2$ . . . . .	143
5.5	Champs de déplacements discrets incrémentaux de l'avalanche de grains: résultats expérimentaux à gauche, résultats numériques avec la méthode de la Dynamique du Contact (Darve <i>et al.</i> [39] au centre et avec la Méthode des Eléments Discrets à droite. Déplacement de la paroi: (a) 1.12 cm; (b) 1.68 cm; (c) 3.14 cm; (d) 3.36 cm; (e) 5.04 cm. . . . .	145
5.6	Comparaison entre la répartition spatiale de l'énergie cinétique (gauche) et les valeurs négatives du travail du second ordre attribué aux rouleaux $d^2w^{ro}$ (droite). Déplacement de la paroi: (a) 1.12 cm; (b) 1.68 cm; (c) 3.14 cm; (d) 3.36 cm; (e) 5.04 cm. . . . .	147
5.7	Comparaison entre la répartition spatiale de l'énergie cinétique (gauche) et les valeurs négatives du travail du second ordre attribué aux contacts $d^2w^{ct}$ (droite). Déplacement de la paroi: (a) 1.12 cm; (b) 1.68 cm; (c) 3.14 cm; (d) 3.36 cm; (e) 5.04 cm. . . . .	148
5.8	Comparaison entre l'évolution de l'énergie cinétique globale et le travail du second ordre global attribué aux grains et aux contacts en fonction du paramètre de chargement. . . . .	150
5.9	Algorithme de post-traitement pour le calcul du travail du second ordre aux contacts. . . . .	155
5.10	Travail du second ordre global aux contacts: composante normale $d^2W_n^{ct}$ , tangentielle $d^2W_t^{ct}$ , et valeur totale $d^2W^{ct}$ , pour un état de contrainte déformation isotrope ( $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.0$ ). . . . .	156
5.11	Travail du second ordre global aux contacts: composante normale $d^2W_n^{ct}$ , tangentielle $d^2W_t^{ct}$ , et valeur totale $d^2W^{ct}$ , pour trois états de contrainte déviatoires ( $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.31; 0.77; 0.81$ ). . . . .	157
5.12	Comparaison entre le travail du second ordre macroscopique et le travail du second ordre global aux contacts pour un état isotrope ( $\sigma_3 = 100$ kPa, $\eta = 0.0$ ). . . . .	158
5.13	Comparaison entre le travail du second ordre macroscopique et le travail du second ordre global aux contacts pour des états de contrainte déviatoires ( $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.31; 0.77; 0.81$ ). . . . .	159
5.14	Comparaison entre l'évolution de la valeur de l'expression $d^2W^{ct} - d^2W$ et de l'énergie cinétique au cours de la simulation du chargement dans une direction donnée ( $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.31$ , $\alpha = 130^\circ$ ). . . . .	160
5.15	Comparaison entre les évolutions de l'énergie externe et interne au cours de la simulation du chargement dans une direction donnée ( $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.31$ , $\alpha = 130^\circ$ ). . . . .	162
5.16	Comparaison des valeurs de l'énergie externe et interne pour des recherches directionnelles ( $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.31; 0.77$ ). . . . .	163
5.17	Chemins de contrainte (a) et de déformations (b) pour une recherche directionnelle pilotée en contrainte ( $\alpha = 130^\circ$ ) puis en déformation à partir de l'état initial: $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.31$ . . . . .	166
5.18	Chemins de contrainte (a) et de déformations (b) pour une recherche directionnelle pilotée en contrainte ( $\alpha = 150^\circ$ ) puis en déformation à partir de l'état initial: $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.77$ . . . . .	166

---

5.19	Comparaison du travail du second ordre macroscopique $d^2W$ et du travail du second ordre global aux contacts $d^2W^{ct}$ pour une recherche directionnelle pilotée en contrainte ( $\alpha = 130^\circ$ ) (gauche) puis en déformation (droite) à partir de l'état initial: $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.31$ . . . . .	167
5.20	Comparaison du travail du second ordre macroscopique $d^2W$ et du travail du second ordre global aux contacts $d^2W^{ct}$ pour une recherche directionnelle pilotée en contrainte ( $\alpha = 150^\circ$ ) (gauche) puis en déformation (droite) à partir de l'état initial: $\sigma_3 = 200$ kPa, $\eta = 0.77$ . . . . .	167



---

## Liste des tableaux

---

2.1	Comparaison des caractéristiques des modèles numériques après calibration sur le chemin triaxial drainé publié par Royis & Doanh [108]. . . . .	57
2.2	Caractéristiques communes aux échantillons numériques E1, E2 et E3. . . . .	61
2.3	Caractéristiques propres à chaque échantillon numérique E1, E2 et E3, sous un confinement isotrope de 100 kPa. La colonne “désordre” indique le numéro de la procédure de désordre dont sont issus les échantillons. . . . .	61
3.1	Quelques valeurs, relevées dans la littérature, de la norme de l’incrément de contrainte utilisée pour des recherches directionnelles. . . . .	76
4.1	Caractéristiques des essais proportionnels en déformation. . . . .	133
5.1	Paramètres mécaniques et numériques de la simulation de l’essai de poussée. .	143





### Notations

Les noms des différentes variables utilisées dans ce manuscrit sont explicités au fur et à mesure de sa lecture. On retiendra cependant les principales notations données ci-dessous.

Les scalaires sont notés en calligraphie simple:  $a$ ,  
les vecteurs avec une flèche:  $\vec{a}$ ,  
les tenseurs d'ordre 2 ou supérieur sont notés en caractère gras:  $\mathbf{a}$ .

Produit scalaire:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$ ,  
produit vectoriel:  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b}$ ,  
produit deux fois contracté:  $\mathbf{a} : \mathbf{b} = c$ .

### Convention

La convention “ mécanique des sols ” est adoptée: les contraintes de compression sont comptées positivement, les déformations correspondant à un raccourcissement sont également comptées positivement.



## Un peu d'histoire

Truesdell [124] dans son ouvrage *Essays in the history of mechanics* rapporte une note que l'on peut trouver dans le Codex Atlanticus (vers 1500) de Leonardo da Vinci:

*Every body resists in its friction with a power equal to the fourth of its heaviness if the motion is plane [or slow?] and the surfaces dense and polished [or clean?]*

En des termes plus modernes da Vinci affirme que la force de frottement d'un corps glissant est proportionnelle à la force normale au plan de contact. De plus il attribue une valeur au coefficient de frottement de 0.25. Il semble difficile de savoir si cette affirmation a été déduite d'expériences ou s'il s'agit d'une conjecture. Da Vinci n'a pas décrit d'expériences on retrouve juste certains dessins, tels que ceux présentés sur la Figure 1 faisant allusion à des expériences réalisées ou à des projets d'expériences.

Amontons (1699 [2]) a retrouvé deux siècles après Leonardo da Vinci que: les forces de frottement varient de façon proportionnelle aux forces normales aux surfaces de contact; elles sont indépendantes de l'aire de la surface apparente; elles dépendent des matériaux et de l'état de leurs surfaces.

Coulomb (1781 [23]) a complété les lois énoncées par da Vinci et Amontons, il a notamment remarqué la différence entre les forces de frottement statique et dynamique. Toutefois les développements de Coulomb qui nous concerne directement portent sur la description de la rupture dans les sols. Coulomb (1773 [22]) considère le sol comme un matériau homogène dont un des mécanismes de rupture est le glissement de deux parties séparées par une surface de glissement. Il divise la résistance en cisaillement du sol en une composante de cohésion ou d'adhésion et une composante due au frottement. Cette dernière composante est supposée être indépendante de l'aire de la surface de glissement et proportionnelle à l'effort agissant suivant la normale au plan de glissement. Coulomb supposait que les plans de glissement n'ont pas d'épaisseur et il semble qu'il n'ait envisagé qu'un unique mouvement dans le plan de glissement sans tenir compte d'un mouvement dans la direction normale au plan.

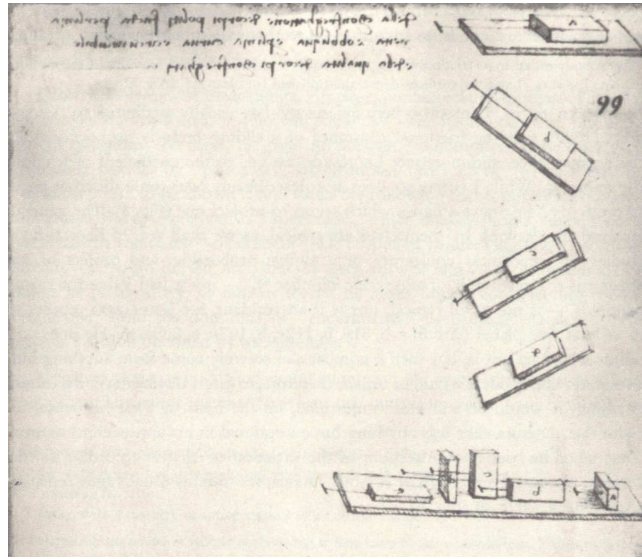


FIG. 1 – Dessins extraits du Codex Atlanticus mettant en évidence des recherches de Leonardo da Vinci sur la force de frottement; Truesdell [124].

Suite à l'introduction par Terzaghi de la notion de contrainte effective le critère de Mohr-Coulomb classiquement utilisé en mécanique des sols pour prédire la limite des contraintes admissibles s'écrit:

$$\tau = \sigma'_n \tan \phi' + c', \quad (1)$$

où  $\tau$  est la contrainte de cisaillement,  $\sigma'_n$  la contrainte effective normale,  $\phi'$  l'angle de frottement et  $c'$  la cohésion.

Notons que le critère de Mohr-Coulomb est une approximation de la limite des contraintes admissibles. Par exemple, dans le plan de Mohr ( $\tau$ ,  $\sigma'_n$ ) les essais de laboratoire ont montré que cette limite est en réalité courbe alors que le critère de Mohr-Coulomb est l'équation d'une droite définie par les deux paramètres  $\phi'$  et  $c'$ . Cette approximation reste cependant raisonnable dans bon nombre d'applications.

## Problématique et objectifs

A l'heure actuelle la mécanique des sols s'est fortement développée et des modèles, décrivant non seulement la rupture des sols mais également leur comportement au cours d'une histoire de sollicitation, ont vu le jour. On citera notamment l'ensemble des modèles élastoplastiques qui intègrent un critère de rupture que ce soit celui de Mohr-Coulomb ou d'autres plus particulièrement adaptés aux méthodes numériques. Ces modèles, associés à la Méthode des Eléments Finis, permettent de traiter des problèmes aux limites complexes. Toutefois, certaines ruptures dans les sols et plus généralement dans les milieux granulaires restent inexplicables. Les glissements de terrain sous faible, voire très faible pente constituent une illustration concrète et potentiellement lourde de conséquences. Sur des pentes constituées de charbon, Eckersley [50] a observé des glissements de terrain en conditions drainées pour un angle de frottement mobilisé de  $24^\circ$  à  $27^\circ$  alors que l'angle de frottement pour le critère de Mohr-Coulomb est de  $40^\circ$ . A partir d'essais en laboratoire réalisés dans des cellules triaxiales, plusieurs auteurs ont également mis en évidence, pour différents chemin de sollicitation, des ruptures diffuses d'échantillons de sable strictement à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb.

---

Ces observations, qui vont à l'encontre de la sécurité et qui contredisent les analyses classiques de la rupture dans les matériaux granulaires, impliquent d'étudier de nouvelles approches permettant de décrire ces modes de rupture particuliers voire de les prédire. L'exemple des glissements de terrain sur des pentes naturelles ou artificielles que nous avons cité est un problème difficile à traiter, non seulement parce qu'il fait intervenir des phases solides et fluides dont les interactions sont complexes, mais aussi parce qu'il s'agit de problèmes non-homogènes. Ainsi, nous pensons que le lien entre la rupture en un ou plusieurs points matériels de la pente et la rupture globale de la pente constitue en soit un problème bien spécifique. Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a été limité à l'étude de la rupture en un point matériel.

Nous proposons dans ce document d'aborder la rupture comme un problème de bifurcation: la rupture correspondrait à un des chemins de réponse du matériau issus d'un point de bifurcation. L'objectif est donc double: dans un premier temps il faut détecter les points de bifurcation, et dans un deuxième temps établir le lien susceptible d'exister entre ces points de bifurcation et la rupture. La détection des points de bifurcation est effectuée à l'aide du critère du travail du second ordre. L'étude du lien entre un point de bifurcation détecté par le critère du travail du second ordre et la rupture est réalisée à deux niveaux: à l'échelle macroscopique de l'assemblage granulaire et à l'échelle microscopique des contacts intergranulaires. La majeure partie des analyses présentées portent sur des simulations numériques directes basées sur la Méthode aux Eléments Discrets. Cette méthode nous a permis d'étudier le comportement d'un assemblage de grains soumis à une histoire de sollicitation. Le critère du travail du second ordre a été développé dans le cadre des milieux continus et s'applique à un point matériel. L'assemblage de grains considéré lors des simulations est de volume fini. Néanmoins, nous considérons que le comportement mécanique déduit des simulations présentées ici est assimilable au comportement mécanique d'un point matériel d'un milieu continu équivalent.

## Présentation du plan

Afin de compléter la description très succincte que nous avons donné d'exemples de ruptures à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb, une synthèse des cas que l'on peut trouver dans la littérature est établie dans la première partie du **Chapitre 1**. La deuxième partie est consacrée à la présentation du critère du travail du second ordre. Nous situons ce critère par rapport aux différents critères de bifurcations habituels, nous renseignons le lecteur sur le sens que lui attribuent certains auteurs et nous précisons l'utilisation qui en a déjà été faite jusqu'à présent pour décrire la rupture dans les sols. La dernière partie de ce chapitre est dévolue à la Méthode aux Eléments Discrets. Nous en décrivons le principe, les modalités de la simulation d'essais triaxiaux ou biaxiaux de laboratoire sont données ainsi que quelques résultats classiques qui nous ont servi de référence.

Le **Chapitre 2** est une introduction du modèle numérique discret. Il débute par une description des caractéristiques du code utilisé (Spherical Discrete Element Code) et des modifications apportées afin d'appliquer des chemins de sollicitation triaxiaux sur des assemblages granulaires de forme parallélépipédique. La plus grande partie du chapitre est consacrée à la présentation et à la validation de deux modèles discrets. Le second étant retenu pour la suite des travaux présentés dans ce mémoire. La validation des modèles s'est effectuée aussi bien à l'échelle de l'assemblage granulaire qu'à l'échelle de la micro-structure (en l'occurrence à l'échelle des contacts).

Le **Chapitre 3** constitue l'articulation centrale de ce mémoire. Certains des résultats qui y sont présentés et discutés ne sont pas directement en lien avec la problématique posée par le sujet de thèse mais ils mettent en relief des particularités du comportement mécanique du modèle discret qui sont à prendre en compte dans l'analyse des points traités dans ce même chapitre et les suivants.

Ce chapitre se divise en deux grandes parties. La première est consacrée à l'étude, que l'on pourrait qualifier de classique, du comportement mécanique incrémental du modèle discret. Sur la base de simulations de recherches directionnelles dans le plan d'axisymétrie des incréments de contrainte et en se référant au cadre de l'élasto-plasticité, les questions, entre-autre, de l'existence d'une règle d'écoulement ou non, associée ou non-associée sont discutées. Trois régimes de déformation de l'assemblage granulaire sont également mis en évidence. Le travail du second ordre est un scalaire, le critère du travail du second ordre porte sur le signe de celui-ci. Ainsi, dans la deuxième partie du chapitre nous nous intéressons à l'étude du signe du travail du second ordre dans le plan d'axisymétrie des contraintes. Darve et son équipe [35; 36; 42; 63; 73] ont déjà largement étudié le signe du travail du second ordre dans l'espace des contraintes pour des sables d'Hostun lâche et dense avec un modèle phénoménologique. Les résultats obtenus présentent des caractéristiques typiques. Il s'agit donc ici de vérifier si de tels résultats sont obtenus avec des simulations numériques directes. En d'autres termes, on ne cherche pas pour le moment à établir un lien entre le critère du travail du second ordre et la rupture mais de caractériser les conditions dans lesquelles le critère du travail du second ordre est violé.

Dans le **Chapitre 4**, deux questions principales sont traitées. Premièrement, nous vérifions, d'un point de vue numérique, si un phénomène de bifurcation est identifiable à partir des points pour lesquels le critère du travail du second ordre est violé. Deuxièmement, nous montrons que, sous certaines conditions que nous spécifions, la rupture se produit à partir de ces mêmes points. Dans le cadre des essais numériques réalisés les manifestations du phénomène de bifurcation et de la rupture sont en général confondues. Par conséquent les questions de la bifurcation et de la rupture sont traitées simultanément. Le chapitre est organisé en fonction des chemins de sollicitation étudiés. Il permet ainsi d'effectuer un parallèle entre la description des observations expérimentales de la rupture strictement à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb présenté dans la première partie du Chapitre 1. En fin du chapitre 4 sont aussi présentés les premiers résultats d'une approche expérimentale sur un matériau analogique bidimensionnel. A cette occasion une technique a été développée pour la mesure des champs cinématiques discrets et des propriétés de la texture dans des empilements de rouleaux de Schneebeli. Le détail en est donné dans l'Annexe A.

Un atout de la modélisation numérique discrète est de fournir des informations à l'échelle de la micro-structure (forces de contact intergranulaires, positions des grains). Le **Chapitre 5** présente une tentative d'établir un lien entre le travail du second ordre qui s'exprime à partir de variables tensorielles que sont l'incrément de contrainte et l'incrément de déformation et des variables micro-structurelles: les forces de contact et les déplacements relatifs aux contacts. L'établissement d'une relation directe entre ces grandeurs permet de mieux comprendre les causes micro-mécaniques au phénomène de bifurcation. Dans ce sens nous détaillons l'approche numérique qui a été réalisée. Les résultats et conclusions de cette approche sont comparés à une approche analytique développée en parallèle par Nicot & Darve [89].

Comme il se doit ce document se termine par une conclusion résumant les principaux résultats obtenus pendant ces trois années de travail, mais aussi les limites de l'approche qui a été

---

menée. Cette thèse ne constitue qu'une pièce parmi celles existantes autour du thème de la description de la rupture à l'aide du critère du travail du second ordre. Nous la replacerons donc dans son contexte en tenant compte notamment de l'ensemble des travaux effectués à ce sujet dans l'équipe de recherche qui m'a accueilli. Finalement les résultats présentés ici ouvrent de nouvelles perspectives que nous ne manquerons pas de présenter.





# CHAPITRE 1

---

Etude bibliographique

---

## 1.1 Introduction

Cette étude bibliographique se décompose en quatre parties principales qui présentent les informations, idées et outils sur lesquels nous nous sommes appuyés pour mener à bien ce projet de recherche.

En premier lieu, sont données les définitions de quelques termes clefs. Même si ces définitions ne sont pas le résultat à proprement dit d'une recherche bibliographique nous les croyons nécessaires à la compréhension de l'ensemble du manuscrit.

Nous présentons ensuite un ensemble d'observations expérimentales portant sur l'occurrence de ruptures non envisagées dans le cadre classique de la mécanique des sols. Ces observations constituent la base du problème posé par le sujet de cette thèse.

Dans une troisième partie sont exposés des critères qui seraient susceptibles de décrire les ruptures observées. Des auteurs ont essayé d'appliquer ces critères, parfois en les adaptant, au cas des matériaux granulaires. Leur travaux sont résumés en mettant l'accent sur ceux se référant à la condition de stabilité de Hill.

Pour finir, nous introduisons la Méthode aux Eléments Discrets qui constitue l'outil numérique choisi pour l'application et la vérification des idées portées par ce travail.

## 1.2 Définitions

Tout au long de ce mémoire seront mentionnés les termes: rupture, (in)stabilité, bifurcation, perte d'unicité. Il paraît donc essentiel, en préambule à toute discussion, de préciser ses termes dans le contexte de la mécanique des sols.

**Rupture:** on considère qu'un matériau est dans un état de rupture lorsqu'un petit accroissement de chargement conduit à des déformations très grandes voire non bornées. A ce titre le pic (ou le palier) présent sur une courbe contrainte-déformation lors d'un essai triaxial drainé sur un sable dense (ou lâche) constitue un exemple d'état de rupture. Nous utiliserons souvent, lors de la description d'expériences réelles ou numériques, le terme *effondrement* au lieu de rupture pour évoquer, en plus de la notion de rupture, un comportement post-rupture du matériau caractérisé par des vitesses de déformation très élevées et une perte totale de résistance.

**(In)stabilité:** précisons tout d'abord qu'il est possible de distinguer les instabilités géométriques impliquant un système mécanique et les instabilités matérielles se développant au niveau d'un point matériel et liées au comportement constitutif d'un matériau. Dans ce document nous ferons principalement référence à la notion de stabilité matérielle. La définition de la stabilité a été énoncée par Lyapunov [81]; sous une forme actualisée elle s'écrit (Darve & Laouafa [36]): *Pour un matériau non visqueux et une histoire de déformation donnée, un état de contrainte-déformation est considéré stable si pour toutes "petites" variations de sollicitation, la réponse engendrée reste "petite"*. De plus amples détails sur la définition de stabilité de Lyapunov sont donnés dans la Section 1.4.2.1 (p. 17).

**Bifurcation:** intéressons nous à un exemple physique simple: l'échauffement d'un liquide suite à un apport d'énergie constant. Tant que la température du liquide est inférieure à une température critique (dépendante de la pression) l'évolution de l'état du liquide est continue et graduelle avec l'augmentation de la température. Une fois la température critique, ou température d'ébullition, atteinte la température du liquide reste constante et l'énergie apportée au liquide est totalement consommée par le changement de phase de liquide en gaz. Le point d'ébullition, caractérisé par une température critique et une pression critique, constitue un point de bifurcation. Il est important de remarquer que ce phénomène de bifurcation est sensible aux impuretés et imperfections (modification de la température d'ébullition et du lieu d'apparition des bulles de vapeur). Nous retiendrons, dans le cas de cet exemple comme dans la cas plus général de la mécanique, qu'une bifurcation est un changement soudain et discontinu du mode de réponse (mode de déformation par exemple) pour une évolution continue et graduelle des paramètres de chargement.

**Perte d'unicité:** elle se produit lorsque, pour un état donné et une sollicitation donnée, des réponses différentes du matériau considéré peuvent être observées. La perte d'unicité peut être mise en évidence lors d'essais triaxiaux drainés sur sable dense. A proximité du pic du déviateur de contrainte une bande de cisaillement se forme et, si les essais sont poursuivis au-delà du pic, la réponse en terme de déviateur de contrainte et de variation de volume peut varier d'un essai à l'autre bien que le mode opératoire soit identique en terme de variables d'état, de caractéristiques géométriques et de paramètres de chargement. Notons que dans ce cas là le pic du déviateur constitue également un point de bifurcation. Le terme perte d'unicité est également utilisé dans la cas d'un problème mathématique (constituant à l'occasion une modélisation d'un problème réel) dont la solution n'est pas unique.

## 1.3 Observations expérimentales de ruptures à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb

### 1.3.1 Glissement de terrain sur modèle réduit

Eckersley [50] a observé en laboratoire des glissements de terrain à échelle réduite. La présentation de ses travaux comporte deux points intéressants: premièrement elle permet de donner au lecteur une application concrète du travail effectué au cours de cette thèse, deuxièmement c'est la seule qui portera sur des essais non homogènes.

La pente étudiée, constituée de charbon cokéfiant non compacté (état lâche), est de taille métrique. Les glissements sont provoqués par l'élévation lente de la nappe aquifère et consiste en une accélération soudaine de la masse en mouvement pour former un écoulement quasi fluide mêlé de débris. L'instrumentation de la pente permet de suivre en différents points la cinématique du glissement de terrain, l'état de contrainte et la pression interstitielle en temps réel.

Les résultats montrent que la rupture s'initie dans des conditions statiques et drainées. L'augmentation de la pression interstitielle dans la zone de rupture ne s'effectue qu'après ou pendant le phénomène de glissement mais pas avant (ce point a été vérifié par Darve *et al.* [43]): dans

ce cas la liquéfaction statique n'est donc qu'un phénomène post-rupture. De plus, la résistance effective mobilisée ( $\phi'_m = 24-27^\circ$ ) lors de la rupture est bien en dessous de la condition limite de Mohr-Coulomb déterminée lors d'essai triaxiaux non drainés ( $\phi'_{lim} = 40^\circ$ ), par contre elle correspond à peu près au pic du déviateur de contrainte pour des essais non drainés.

Eckersley[50] indique que les glissements observés sur le modèle de laboratoire sont très proches de ceux survenus sur des réserves de charbon de taille réelle. Cependant, aucune tentative de description du phénomène de rupture est avancée. En effet, d'après les observations faites par Eckersley, ces glissements de terrain ne peuvent pas être expliqués dans le cadre de l'élasto-plasticité classique. Les travaux menés dans cette thèse autour du travail du second ordre devraient permettre d'apporter des éléments d'analyse et d'interprétation plus précis.

### 1.3.2 Essais de laboratoires homogènes

De nombreux expérimentateurs ont observé la rupture d'un échantillon de sol (le plus souvent du sable) à l'intérieur de la condition limite de Mohr-Coulomb lors d'essais triaxiaux de révolution pour des chemins de sollicitations bien particuliers. Nous tentons ici d'en donner une classification.

#### 1.3.2.1 Chemins non drainés sur sable lâche

Un essais triaxial non drainé (i.e. à volume constant) sur un sable suffisamment lâche conduit à sa liquéfaction (annulation des contraintes effectives). Si l'essai est contrôlé en déformation l'évolution de la rupture jusqu'à l'annulation des contraintes effectives s'effectue de manière continue sans accélération significative des déformations. Lorsque l'essai est contrôlé en force (i.e. la force appliquée sur le piston) la rupture de l'échantillon au pic du déviateur des contraintes  $q$  s'effectue de manière brutale (effondrement) (Sladen *et al.* [121], Lindenberg & Koning [76]).

Les expériences décrites par Servant *et al.* [114] et Khoa *et al.* [64] montrent qu'en fournissant à l'échantillon, après le pic de  $q$ , l'énergie emmagasinée dans un ressort, l'échantillon passe d'un comportement quasi-statique menant à la liquéfaction à un comportement dynamique et brutal menant également à l'annulation des contraintes effectives (voir Fig. 1.1-a), ou presque suivant la capacité de l'échantillon à dissiper l'énergie qui lui a été fournie.

Dès lors il apparaît que la réponse du matériau peut dans certaines conditions être sensible à la méthode d'application du chargement et aux perturbations rencontrées.

Leong *et al.* [75], Chu *et al.* [15; 16], Lade & Pradel [70] et Sladen *et al.* [121] ont également observé l'effondrement d'un échantillon de sable lâche dans des conditions non drainées mais sans imposer un chemin de sollicitation: une fois un état de contrainte-déformation atteint le long d'un chemin triaxial drainé le déviateur de contrainte  $q$  est gardé constant et le drainage est fermé. Peu après un accroissement rapide des déformations est constaté, accompagné d'une décroissance de  $q$  si la force axiale est appliquée par l'intermédiaire d'un vérin pneumatique (Fig. 1.2, essai UD02) [75; 15; 16; 70; 121]. Toutefois l'effondrement ne se produit que si un certain niveau de contrainte caractérisé par exemple par le rapport  $q/p'$  (où  $p'$  est la pression moyenne effective) est dépassé (Fig. 1.2, essais UD01 et UD02) [75]. Remarquons que l'état de l'échantillon n'évolue pas si le drainage est laissé ouvert [75; 121; 70]. Sladen *et al.* [121]

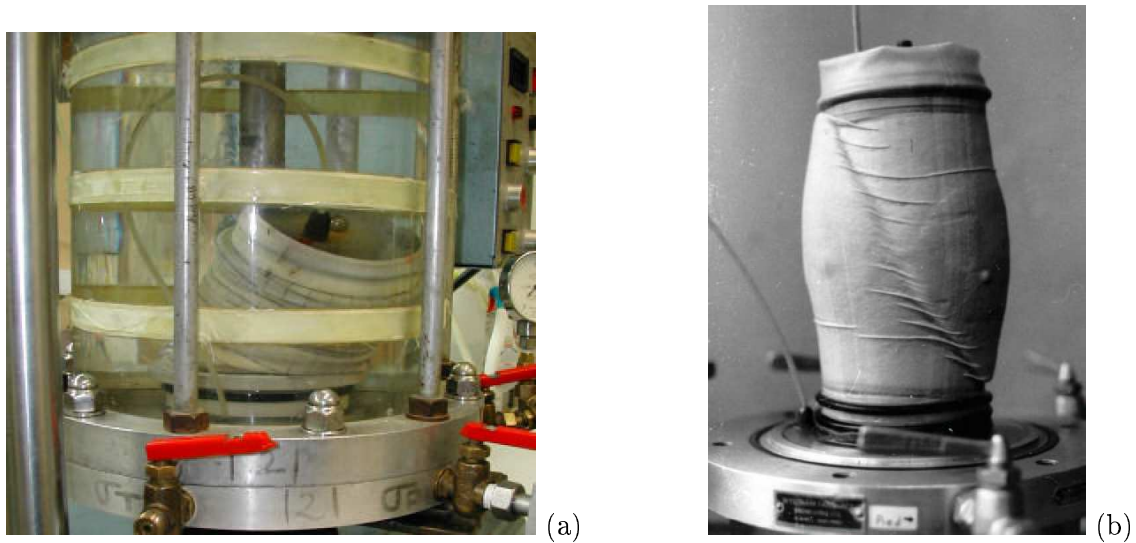


FIG. 1.1 – Exemples de deux modes de rupture dans les sables: effondrement d'un échantillon de sable lors d'un essai non drainé pour une "perturbation" après le pic de  $q$ , la liquéfaction est totale (a), Servant et al. [114]; rupture par bande plane de cisaillement lors d'un essai triaxial classique (b), Desrues & Chambon [44] d'après les travaux de Colliat-Dangus [18].

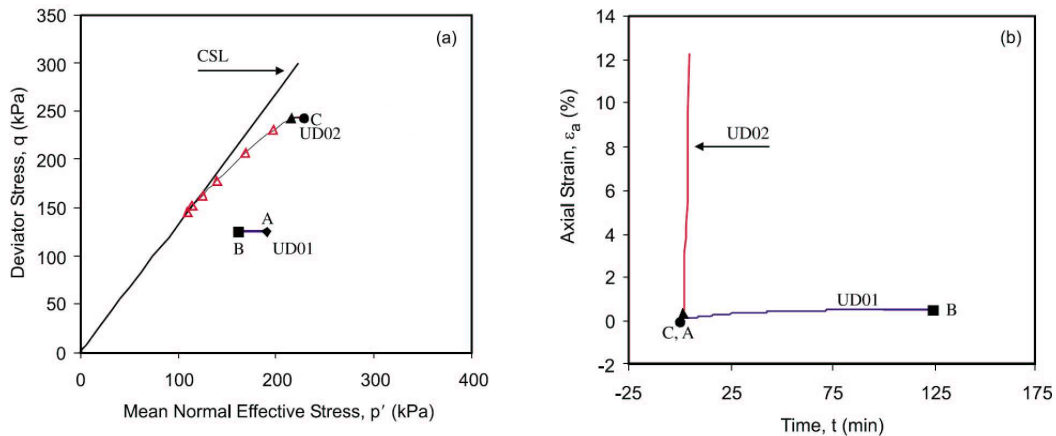


FIG. 1.2 – Réponse d'un sable lâche suite au passage de conditions drainées à des conditions non drainées sous déviateur de contrainte constant. A partir de l'état A un nouvel équilibre est atteint pour un état B proche du précédent. Pour un état de contrainte plus élevé C l'échantillon s'effondre; Chu et al. [16].

et Lade [69] expliquent que, à cause d'un très faible fluage volumique, le fait de fermer le drainage entraîne une légère hausse de la pression interstitielle. Cette hausse constituerait une "petite" perturbation nécessaire à révéler "l'instabilité" du matériau à l'état considéré.

### 1.3.2.2 Chemins proportionnels en déformation

Les chemins proportionnels en déformation consistent à contrôler la déformation volumique  $\varepsilon_v$  en imposant la valeur du rapport  $\zeta_i = d\varepsilon_v/d\varepsilon_1$ .  $\zeta_i = 0$  correspond à un essai non drainé, pour  $\zeta_i > 0$  le chemin suivi est contractant et pour  $\zeta_i < 0$  il est dilatant. Lancelot et al. [71]

montrent qu'il est possible d'obtenir la liquéfaction statique d'un sable lâche ou dense sous de faibles pressions de confinement sur des chemins proportionnels en déformation à partir d'un état de contrainte isotrope si  $\zeta_i$  est choisi tel que  $\zeta_i < \zeta_f$ , où  $\zeta_f$  est le taux de déformation volumique à la rupture mesuré sur un essai drainé. Cette condition peut également s'exprimer en terme d'angle de dilatance: la liquéfaction statique peut être atteinte si l'angle de dilatance imposé est supérieur à l'angle de dilatance du matériau (Darve & Pal [40]).

Sur la base de ces chemins proportionnels en déformation Lancelot *et al.* [71], Chu et coauteurs [15; 17] ont effectué ce qu'ils ont appelé des "tests d'instabilité": après avoir suivi un chemin triaxial drainé jusqu'à un état de contrainte caractérisé par le rapport  $q/p'$ , le déviateur de contrainte  $q$  est maintenu constant et une valeur de  $\zeta_i$  est imposée. Sous ces conditions l'échantillon est alors laissé libre d'évoluer. En toute rigueur si le matériau ne flue pas l'état de contrainte-déformation de celui-ci ne devrait pas évoluer. Toutefois les auteurs montrent que, pour une valeur du rapport  $q/p'$  suffisamment élevée, l'effondrement de l'échantillon se produit si  $\zeta_i < \zeta_f$  (Fig. 1.3).

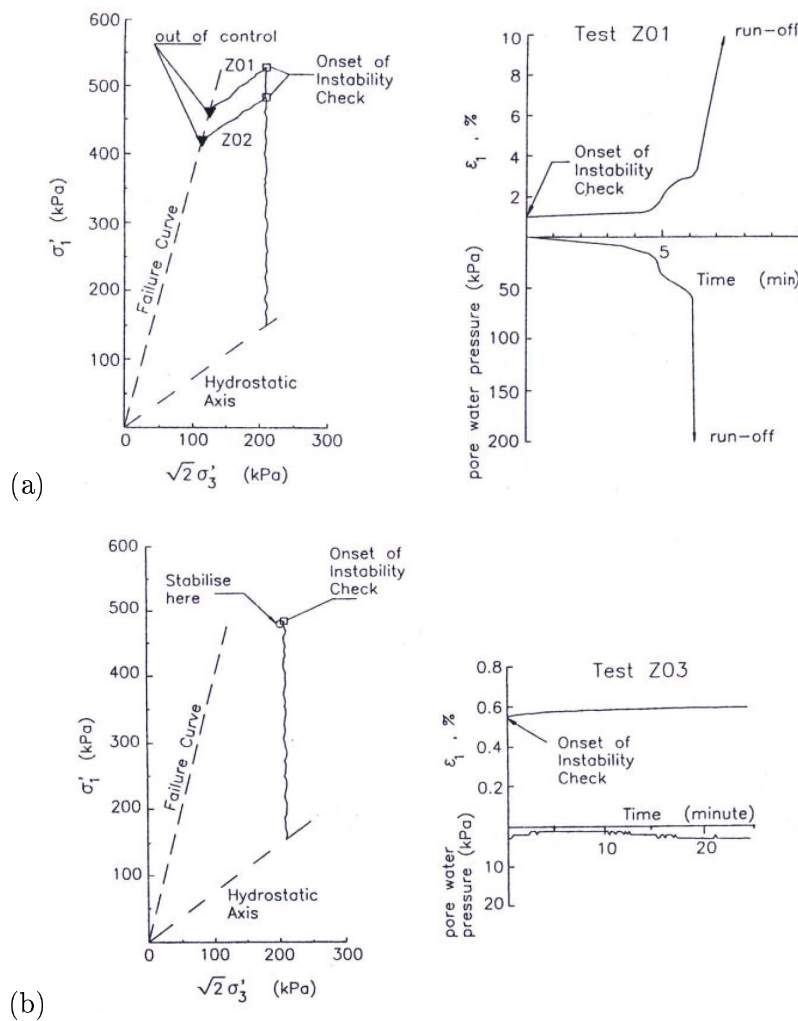


FIG. 1.3 – Tests de stabilité sur sable dense pour une valeur de  $q$  fixée et une valeur de  $\zeta_i = d\varepsilon_v/d\varepsilon_1$  imposée: pour  $\zeta_i < \zeta_f$  l'échantillon s'effondre (a), dans la cas contraire la réponse du matériau reste stable (b); Chu et al. [17].

Ces tests d'instabilité proportionnels en déformation sont une extension de ceux présentés dans le paragraphe précédent. Ils peuvent conduire à l'effondrement d'un matériau bien qu'il soit dilatant. Ici encore nous remarquons que le type de contrôle joue un rôle important sur l'évolution de l'état du matériau. Lorsque Lancelot *et al.* effectuent des essais proportionnels en déformation pilotés par l'intermédiaire de la déformation axiale l'évolution vers la rupture totale s'effectue de manière quasi-statique. Lors des tests d'instabilité où un contrôle en force est imposé la rupture est brutale.

### 1.3.2.3 Chemins drainés à déviateur de contrainte constant

Les glissements de terrains décrits par Eckersley [50] (*cf.* Sect. 1.3.1, p. 9) sont causés par la hausse lente de la nappe aquifère ce qui conduit à une augmentation de la pression interstitielle et une diminution des contraintes effectives. On peut donc en conclure que le chemin de contrainte suivi en un point du massif de la pente s'apparente à un chemin drainé à déviateur de contrainte  $q$  constant avec une diminution de la pression moyenne effective  $p'$  (i.e.  $d\sigma'_1 = d\sigma'_2 = d\sigma'_3 < 0$ ).

Sasitharan *et al.* [110], Chu *et al.* [16; 15], Di Prisco & Imposimato [46] et Gajo *et al.* [52] ont effectué des essais à  $q$  constant drainés sur des sables lâches. Pour cela la valeur du déviateur de contrainte  $q$  est dans un premier temps augmentée jusqu'à une valeur choisie en suivant un chemin drainé [16; 15; 46; 52] ou non drainé [110]. Ensuite la valeur de  $q$  est maintenue constante par l'intermédiaire d'un piston ou d'une charge morte (masses). Les contraintes effectives sont réduites en augmentant la pression d'eau interstitielle par exemple. Les auteurs montrent que dans de telles conditions il est possible d'obtenir la rupture plus ou moins brutale du matériau, ceci pour des angles de frottement mobilisés bien inférieurs à ceux prédits par la condition limite de Mohr-Coulomb (Fig. 1.4-a). Chu & Leong [15] et Lade [69] indiquent que des résultats semblables ont été obtenus sur des sables denses.

Le long d'un chemin drainé à  $q$  constant, sur un sable lâche, ce dernier est d'abord dilatant jusqu'à atteindre un volume maximal pour ensuite être contractant (Fig. 1.4-b). Il semblerait à la vue des résultats de Gajo *et al.* [52] et Chu *et al.* [16; 15] que les ruptures se produisent au plus tôt au maximum du volume ou sinon lors de la phase de contractance.

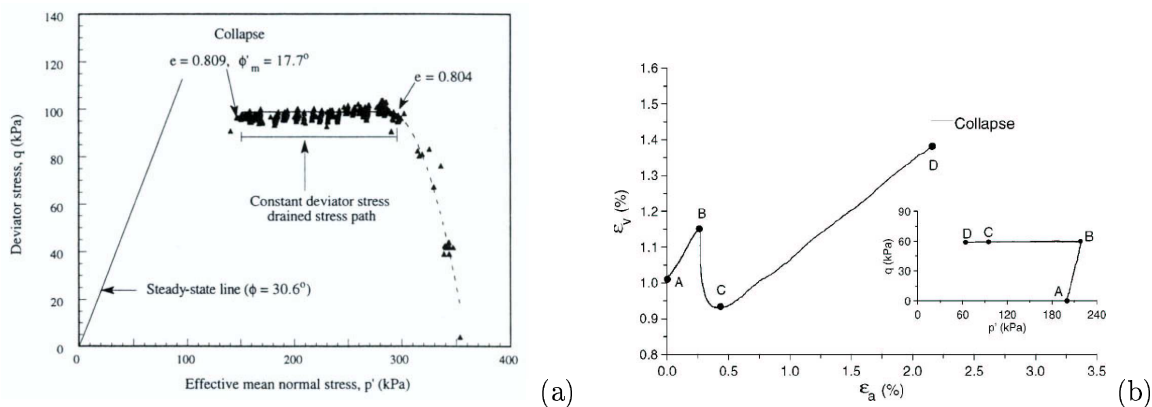


FIG. 1.4 – Chemins drainés à  $q$  constant sur sables lâches: évolution des contraintes effectives (a), Sasitharan *et al.* [110], et réponse en terme de déformation volumique (b), Gajo *et al.* [52].



Gajo *et al.* [52] ont étudié la sensibilité à la rupture des échantillons sur ce chemin de sollicitation en fonction de différents facteurs.

- Tout d'abord ils observent que la capacité de drainage a peu d'influence sur l'initiation de la rupture et qu'elle gouverne surtout le comportement post-rupture. La rupture semble donc s'effectuer en condition drainée. Ce point est confirmé par Chu *et al.* [16], qui n'observent pas de variation de la pression interstitielle lors de la rupture et par Skopek *et al.* [120] qui ont sollicité des échantillons lâches de sable sec: au-delà d'une certaine résistance mobilisée des sauts brutaux de variation de volume sont constatés. Ces observations corroborent les résultats de Eckersley [50] (*cf.* Sect. 1.3.1, p. 9).
- Le mode d'application de la force axiale afin d'imposer  $q = \text{cste}$  joue sur le caractère catastrophique de la rupture: l'utilisation d'une charge morte (masses) conduit à un effondrement totale de l'échantillon, alors que l'utilisation d'un vérin pneumatique retarde l'apparition de la rupture qui peut, dans ce cas, être totale ou se présenter sous la forme de sauts (en fonction du temps) des vitesses de déformation. En effet, lors de sollicitations rapides le vérin se comporte comme un ressort de rigidité non linéaire et la condition de contrôle en force n'est pas rigoureusement vérifiée.
- Pour finir, le précisaillement (charge/décharge le long d'un chemin drainé) ainsi que l'accroissement de la densité du matériau tendent également à retarder l'apparition de la rupture.

#### 1.3.2.4 Autres chemins

Lindenberg & Koning [76] et Gajo *et al.* [52] ont effectué des essais drainés sur sable lâche à pression moyenne effective  $p'$  constante. L'effondrement des échantillons est observé avant d'atteindre le critère de Mohr-Coulomb.

Di Prisco & Imposimato [46] présentent des essais triaxiaux drainés contrôlés en force: le déviateur de contrainte  $q$  est augmenté par paliers successifs séparés par des périodes de temps sans modification des paramètres de chargement. L'effondrement de l'échantillon survient pour une résistance mobilisée bien inférieure à celle atteinte pour un contrôle en déformation conventionnel. Ce type de test est en marge de ceux présentés précédemment car les périodes d'attente entre deux paliers de chargement peuvent atteindre plusieurs jours. Dans ce cas l'effondrement pourrait être expliqué en supposant une réponse du matériau dépendante du temps (fluage). Des résultats semblables ont été obtenus par Lindenberg & Koning [76] pour des essais triaxiaux drainés sur sable lâche contrôlés en force avec un taux d'accroissement de  $q$  continue mais faible. Il est alors possible d'imaginer que ces essais reviennent en fait à faire des essais à  $q$  constant en testant un grand nombre (voire une infinité) de valeurs de  $q$ . Ce type de sollicitation constituerait un biais pour rencontrer un état de contrainte-déformation qui aurait pu être atteint lors d'un essai à  $q$  constant et pour lequel un effondrement aurait été observé.

### 1.3.3 Bilan des observations expérimentales

Plusieurs constatations poussent à considérer les ruptures obtenues suivant les différents chemins de sollicitation présentés dans cette première partie comme des ruptures de modes identiques.

- D'une manière générale si les essais sont "contrôlés en force", quelque soit le chemin suivi parmi ceux cités, la rupture intervient pour une résistance mobilisée inférieure à celle prédite par le critère de Mohr-Coulomb, d'une manière brutale sans signes précurseurs.
- Aucune figure de localisation visible à l'oeil n'a été observée par Chu *et al.* [17] en ce qui concerne les chemins proportionnels en déformation, par Servant *et al.* [114] dans le cas des essais non drainés, par Di Prisco & Imposimato [46] pour les chemins triaxiaux drainés et à déviateur de contrainte constant. Les autres auteurs ne précisent pas la présence ou non de figures de localisation sans doute à cause d'une vitesse de déformation trop élevée lors de la rupture ne permettant pas de suivre l'état de déformation de l'échantillon. Lindenberg & Koning [76] parle de "liquéfaction soudaine" pour les effondrements qu'ils ont observés. En l'absence de contre exemple, nous qualifierons ces ruptures de ruptures diffuses à la différence des ruptures localisées par formation d'une bande de cisaillement (comparer les Figs. 1.1-a et -b, p. 11). Seul Eckersley [50] décrit des zones de glissement multiples donnant naissance à un écoulement rapide quasi-fluide.
- Lade [69] et Sladen *et al.* [121], en ce qui concerne les chemins en non-drainé et Gajo *et al.* [52] pour les chemins à  $q$  constant avancent l'idée que l'occurrence d'un effondrement dans ces conditions de chargement serait liée à l'existence d'une "petite" perturbation. Cette dernière correspondrait à une légère hausse de la pression interstitielle lors du passage de condition drainée à non-drainé [69; 121] dans les test pratiqués par Leong & Chu [75], Chu *et al.* [15; 16], Lade [70] et Sladen *et al.* [121]. Pour les chemins à  $q$  constant contrôlés par l'application de charges mortes, la perturbation correspondrait à la chute "inertielle" de la masse lors de très petits sauts en déformation de l'échantillon dûs à des séries de réarrangement de la micro-structure du sable. A la fin de la chute il y aurait une légère augmentation de la charge axiale à cause de la décélération de la masse [52].

Pour résumer, les effondrements présentés dans cette section sont des ruptures homogènes survenant en des points de bifurcation et de perte d'unicité: une petite perturbation suffirait à changer la réponse du matériau pour une variation continue voire nulle des paramètres de chargement. Ces ruptures ne sont pas décrites par le critère de Mohr-Coulomb.

## 1.4 Description des ruptures à l'intérieur de la condition limite de plasticité

### 1.4.1 Introduction

Dans la partie précédente nous avons insisté sur le fait que les ruptures auxquelles nous nous intéressons surviennent à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. Afin de se placer dans un contexte plus général nous préférons parler ici de condition limite de plasticité, condition au-delà de laquelle les états de contrainte ne peuvent pas être atteints. Dans le cadre des matériaux non visqueux on démontre<sup>1</sup> par l'application de l'identité d'Euler l'existence d'un tenseur constitutif  $\mathbf{M}$ , dépendant de l'histoire et de la direction du chargement (Darve [30]) tel que:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (1.1)$$

Pour une sollicitation  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  il existe une unique solution  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  à condition que le déterminant de  $\mathbf{M}$  soit non nul. La condition limite de plasticité s'écrit alors:

$$\det \mathbf{M} = 0. \quad (1.2)$$

Remarquons qu'un état limite est un point de bifurcation souvent appelé point de rupture bien que, comme nous l'avons vu, il existe des ruptures non décrites par la notion d'état limite de plasticité. L'Equation 1.2 correspond, dans le cadre des modèles élasto-plastiques classiques, à l'annulation du module d'érouissage, ou autrement dit, au fait que le taux de contrainte  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  est nul pour un taux de déformation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  non nul.

Considérons l'exemple suivant: Desrues & Viggiani [45] ont montrés expérimentalement pour du sable que la rupture par localisation des déformations en bandes de cisaillement peut se produire avant la condition limite de plasticité. Selon Rice [106] et Rudnicki & Rice [109] la localisation des déformations en bande de cisaillement est détectée par l'annulation du déterminant du tenseur acoustique, soit:

$$\det (\vec{n} \mathbf{M} \vec{n}) = 0, \quad (1.3)$$

avec  $\vec{n}$  le vecteur normal à la bande. Ce critère permet de détecter un mode de rupture particulier pouvant se produire à l'intérieur de la condition limite de plasticité. Malheureusement il ne peut pas être appliqué au problème traité ici mettant en jeux des ruptures homogènes. Il faut donc nous diriger vers d'autres critères.

Dans cette partie sont introduits des critères, souvent appelés conditions de stabilité qui pourraient répondre à notre attente. Bien que nous ayons parlé jusqu'à présent de rupture ou de bifurcation, nous utilisons ici le terme "stabilité" uniquement par fidélité au langage tenu par les auteurs des critères en question.

---

1. Le lecteur trouvera les grandes ligne de cette démonstration à la Section 3.1.1, p. 72

### 1.4.2 Critères de stabilité

Avant d'aborder les critères de stabilité, nous revenons en premier lieu sur la définition de stabilité de Lyapunov pour compléter la courte introduction qui en a été faite au début de ce chapitre.

#### 1.4.2.1 Définition de stabilité de Lyapunov

La définition de stabilité de Lyapunov [81] était destinée à l'étude du mouvement d'un système mécanique possédant un nombre fini de degrés de liberté et décrit par des fonctions dépendantes du temps. Le mouvement du système est considéré comme stable si une petite perturbation des conditions initiales (en position et en vitesse) ne va pas s'accroître indéfiniment au cours du temps mais rester bornée. Comme le font remarquer Chambon *et al.* [13], cette définition peut s'appliquer à des états d'équilibre dans le sens où un état d'équilibre est un cas particulier de mouvement pour lequel les positions à tout instant  $t$  correspondent aux positions initiales.

Darve & Laouafa [36] proposent l'extension suivante de la définition de Lyapunov au cadre de la mécanique des milieux continus:

*“Pour un matériau non visqueux et une histoire de déformation donnée, un état de contrainte-déformation est considéré stable si pour toutes ‘petites’ variations de sollicitation  $ds$ , la réponse engendrée  $dr$  reste ‘petite’ ”*, soit:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta = \eta(\epsilon) \quad \text{tel que} \quad \|ds\| < \eta \Rightarrow \|dr\| < \epsilon \quad (1.4)$$

Ainsi, tous les états limites de contrainte, communément appelé états de rupture sont instables au sens de Lyapunov. De même, le pic de  $q$  et toute la branche descendante de la courbe représentant le comportement en conditions non drainées d'un sable lâche dans un diagramme  $q-p'$  sont instable au sens de Lyapunov, puisque l'addition d'une “petite” force axiale entraîne l'effondrement de l'échantillon (*cf.* Sect. 1.3.2.1, p. 1.3.2.1).

Di Prisco & Imposimato [46], pour expliquer les effondrements qu'ils ont observés proposent une application de la définition de Lyapunov aux matériaux granulaires en tenant compte de leur micro-structure. Pour cela ils considèrent que chaque micro-configuration des grains est un point d'un ensemble. Chacun de ces points est relié de manière biunivoque à un point défini dans un espace dont les coordonnées sont des variables d'état (par exemple la densité relative ou le tenseur de texture). En utilisant une définition mathématique de la distance dans l'espace des variables d'état Di Prisco & Imposimato énonce le critère suivant:

*“Un système granulaire est défini stable si la distance entre le point initial et le point final, définis dans l'espace des variables d'état, décroît continûment en proportion directe avec la décroissance de la taille de la perturbation, de quelque sorte qu'elle soit”*.

Toutefois, nous ne connaissons pas d'applications pratiques basées sur cette définition.

### 1.4.2.2 Critère de stabilité de Drucker

Le critère de stabilité d'un matériau inélastique donnée par Drucker [49] est le suivant (d'après la traduction faite par Mandel [83]):

*“un agent extérieur superposé aux forces qui existent dans l'état d'équilibre actuel doit, pour que l'équilibre soit stable, effectuer un travail non négatif durant son application et aussi dans un cycle complet d'application et d'enlèvement de cet agent”.*

Pour un matériau non-visqueux le critère de Drucker [49] s'écrit:

$$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon}^p > 0 \quad \forall \dot{\epsilon}^p \neq 0 \quad (1.5)$$

où  $\dot{\epsilon}^p$  est le taux de déformation plastique. Drucker précise que l'utilisation de ce postulat impose une relation contrainte-déformation incrémentalement linéaire, et une règle d'écoulement associée. Mandel [83] montre également que le postulat de Drucker peut être violé lorsque des frottements internes du type de Coulomb sont considérés.

### 1.4.2.3 Condition de stabilité de Hill: forme globale

Hill [56] énonce un critère suffisant de stabilité pour un solide, de volume  $V$ , vérifiant la règle de normalité, dans un état d'équilibre, dont une partie de la frontière est bloquée en déplacement et l'autre partie soumise à l'action de charges mortes (charges maintenues constantes). Hill considère alors que:

*“le solide est stable si pour n'importe quel déplacement menant le solide dans une configuration géométrique infiniment proche de la configuration initiale l'accroissement de l'énergie interne excède l'accroissement du travail des forces extérieures”.*

avec l'hypothèse que le chemin, menant de la configuration initiale à la configuration finale, le plus critique pour le calcul de l'accroissement de l'énergie interne est un chemin linéaire et direct. De ce fait, Bigoni [6] explique que Hill analyse la stabilité directionnelle.

Formellement le Critère de Hill s'écrit de la façon suivante (selon Hill [56]):

$$\int_V \dot{s}_{ij} \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} dV > 0 \quad \forall \dot{u}_i(x_j) \neq 0, \quad (1.6)$$

où:

- $s_{ij}$  est appelé tenseur nominal de contrainte par Hill. C'est le transposé du premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff qui considère les forces de la configuration présente appliquées sur les facettes de la configuration de référence.  $\dot{s}_{ij}$  est donc le taux de contrainte nominale.
- $\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i}$  est le champ de gradient des vitesses cinématiquement admissibles associées au taux de contrainte  $\dot{s}_{ij}$ .

L'instabilité au sens de Hill peut être vue comme la capacité du solide, à partir d'un état d'équilibre, de continuer à se déformer sans apport d'énergie de l'extérieur.

Le tenseur nominal de contrainte  $\mathbf{s}$  peut s'exprimer en fonction du tenseur de contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  par :

$$\mathbf{s} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^t, \quad (1.7)$$

où :  $J$  est le jacobien de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$  qui fait passer de la configuration de référence à la configuration courante, soit  $F_{ij} = \partial x_i / \partial x_j^0$ .

Ainsi, pour de petites transformations et si l'on néglige les changements de configuration la condition suffisante de stabilité de Hill (Eq. 1.6) s'écrit (Nicot *et al.* [90]) :

$$\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0, \quad (1.8)$$

avec  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  respectivement les taux de contrainte et de déformation.

Osinov & Wu [95] ont étendu l'interprétation du Critère de stabilité de Hill en considérant soit une évolution quasi-statique, soit une évolution dynamique du solide, ceci sans faire d'hypothèse sur la linéarité incrémentale de la relation constitutive. Pour cela, Osinov & Wu considèrent comme Hill un solide dans un état d'équilibre dont une partie de la frontière extérieure est contrainte de manière cinématique et une autre partie est soumise à l'application de forces constantes.

- Dans le cas de l'interprétation quasi-statique, le solide est "perturbé" en imposant une déformation quasi-statique infinitésimale. Pour maintenir l'équilibre du solide pendant la perturbation, des forces additionnelles de volume et à la frontière du solide sont appliquées par des agents extérieurs. Osinov & Wu montrent que le signe du travail effectué par les agents extérieurs coïncide avec le signe de  $\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV$ . Ainsi, si une perturbation existe telle que l'intégrale soit négative, il est possible d'extraire de l'énergie du système solide-frontière et forces de volume par l'application des agents extérieurs.
- En ce qui concerne l'interprétation dynamique, le solide est perturbé par l'application d'un champ de vitesse qui sert de conditions initiales au problème. On considère alors le mouvement dynamique du solide. Osinov & Wu s'intéressent à l'évolution de l'énergie cinétique  $Ec$  et démontrent qu'à l'instant initial de l'application de la perturbation :

$$\frac{d^2 Ec}{dt^2} = - \int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (1.9)$$

Nicot *et al.* [90] parviennent également à une expression tout à fait similaire. Ainsi, si le condition de Hill est respectée pour tous champs de vitesse non nul, l'énergie cinétique du solide décroît sur un intervalle de temps infinitésimal après l'application de la perturbation.

#### 1.4.2.4 Le travail du second ordre: forme locale de la condition de stabilité de Hill

Une forme locale de la condition de stabilité de Hill peut être dérivée à partir de la forme globale présentée ci-dessus. Cette condition locale porte sur le signe du travail du second ordre  $d^2W$ . Elle pourrait s'appeler condition de stabilité matérielle au sens de Hill. L'adjectif "matériel" signifiant ici que l'on s'intéresse aux instabilités pouvant se développer à partir d'un point appartenant à un milieu continu (Bigoni [6]).

Un état de contrainte-déformation est considéré stable au sens de Hill si:

$$d^2W = \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0 \quad (1.10)$$

avec  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  reliés par la relation constitutive du matériau.

Remarquons que si la condition locale (1.10) est vérifiée en tous points du volume  $V$  alors la condition globale (1.8) est vérifiée. De plus, pour un problème homogène la condition locale et la condition globale sont équivalentes.

Si l'on suppose la décomposition du taux de déformation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  en une partie élastique  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$  et une partie plastique  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  alors le travail du second ordre s'écrit:

$$d^2W = \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p > 0 \quad (1.11)$$

et le Critère de Drucker (1.5) implique la condition locale de Hill car  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \geq 0$  en hyperélasticité.

En ce qui concerne la relation possible entre la condition de stabilité de Hill et la définition donnée par Lyapunov, Osinov & Wu [95] expliquent qu'une corrélation est difficile à établir car la condition de Hill nous informe sur l'évolution du solide (variation de l'énergie cinétique) sur un intervalle de temps infiniment petit après l'application de la perturbation à l'instant  $t_0$ , mais n'apporte aucune information sur l'évolution à plus long terme du solide. Au contraire, la définition de Lyapunov s'intéresse à l'évolution de la perturbation pour tous instants,  $t > t_0$ . La corrélation ne peut alors être établie que dans le cas de certains systèmes dynamiques avec des forces conservatives. Dans le cadre de l'élasto-plasticité il n'y a pas d'évolution du solide avec le temps physique, aussi la remarque formulée par Osinov & Wu perd son sens. L'équivalence a été prouvée en élasticité par Koiter [67].

La prédiction du comportement mécanique des sols a amené les chercheurs à produire des relations constitutives, le plus souvent sous une formulation incrémentale ou en vitesse. La positivité du travail du second ordre entraîne un certain nombre d'implications au niveau de ces relations constitutives. Nous ne souhaitons pas ici entrer dans le détail de ces implications. Une synthèse sur ce point peut-être trouvée, entre autres, dans les travaux de Bigoni [6] et Bigoni & Hueckel [7]. Notons tout de même que la positivité du travail du second ordre implique:

- si elle est vérifiée en tous points du solide, la condition suffisante d'unicité donnée par Hill [56]:

$$\int_V \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.12)$$

où  $\Delta$  est la différence entre deux champs admissibles. Cette implication a été prouvée pour les matériaux non associés par Raniecki [104] et Raniecki & Bruhns [105] par le biais de solides linéaires de comparaison et pour les relations hypoplastique par Chambon & Caillerie [12]. Valanis [125] montre toutefois que la réciproque est fautive: l'unicité peut être vérifiée même si le travail du second ordre est nul ou négatif.

- Le critère d'ellipticité forte, plus faible que la condition (1.10) mais suffisant pour exclure la localisation des déformations. Il peut s'écrire pour un solide homogène (d'après Bigoni & Hueckel [7]):

$$\vec{g} \otimes \vec{n} : \mathbf{D} : \vec{n} \otimes \vec{g} > 0 \quad \forall \vec{g} \neq \vec{0} \quad \forall \vec{n} \ni \|\vec{n}\| = 1 \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{D}$  est le tenseur constitutif incrémentalement linéaire du solide. Ceci revient à écrire la condition de positivité du travail du second ordre pour un mode de taux de déformation particulier défini par le produit tensoriel  $\vec{g} \otimes \vec{n}$  où  $\vec{g}$  représente le gradient de vitesse dans la direction  $\vec{n}$ . Si le tenseur  $\mathbf{D}$  est symétrique le critère (1.13) implique que toutes les valeurs propres du tenseur acoustique sont réelles et strictement positives. Mandel [83] considère que cette dernière condition constitue un seuil d'instabilité, condition qui est donc impliquée par la positivité du travail du second ordre.

- Le critère de localisation en bande de cisaillement qui est atteint lorsqu'il y a perte d'ellipticité du système d'équations différentielles gouvernant l'équilibre local ou, autrement dit, lorsque le déterminant du tenseur acoustique s'annule (Eq. 1.3, p. 16).

### 1.4.3 Vers la prédiction de la rupture "diffuse"

#### 1.4.3.1 Condition d'instabilité proposée par Lade

Sur la base d'essais expérimentaux en conditions drainées et non drainées, Lade [68] propose une condition d'instabilité, pour les sols avec une règle d'écoulement non associée, portant en partie sur le signe du travail du second ordre. L'instabilité survient lorsque:

$$d^2W < 0 \tag{1.14}$$

$$\text{et } \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} > 0 \tag{1.15}$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} < 0, \tag{1.16}$$

où  $g$  est le potentiel plastique,  $f$  la fonction de charge et  $\delta$  le tenseur de Kronecker.

L'Equation (1.15) exprime le fait que le matériau a un comportement plastique contractant. L'Equation (1.16) stipule que la normale à la surface de charge doit être dirigée vers les valeurs négatives de  $p'$  dans un plan  $q - p'$ : ce qui veut dire qu'un certain niveau de contrainte est atteint. La condition d'instabilité proposée par Lade met en valeur deux points. Premièrement, la négativité du travail du second ordre (Eq. 1.14) n'est qu'une condition d'instabilité nécessaire. Il faut lui adjoindre d'autres conditions pour détecter une rupture (Eqs. 1.16 et 1.15). Deuxièmement, la condition 1.14 contraint la plage possible de directions de sollicitation à la zone hachurée de la Figure 1.5 (remarquons ici que les déformation élastiques sont négligées et que par conséquent  $d^2W$  est assimilé à  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ ).

Lade [69; 68] définit une Ligne d'Instabilité ("Instability Line") dans le plan  $q - p'$  (Fig. 1.6). Le domaine entre la ligne de rupture et la Ligne d'Instabilité est une région potentiellement instable. La construction de la Ligne d'Instabilité repose sur le fait que le pic de  $q$  pour des essais triaxiaux non drainés sur des sols contractants est très proche du "sommet" de la surface de charge, sommet après lequel la condition 1.16 est vérifiée. De ce fait l'enveloppe des pics de  $q$  pour différentes pressions de confinement est appelée Ligne d'Instabilité et représente la limite à partir de laquelle la condition 1.16 est vérifiée. Rappelons que la Ligne d'Instabilité suppose des chemins de sollicitation non drainés (sols très peu perméables) pour des matériaux contractants.



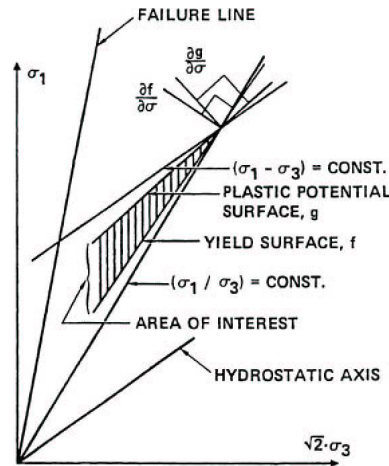


FIG. 1.5 – Région en forme de coin à l’intérieure de laquelle le travail du second ordre est négatif ou nul pour des chemins de contrainte “décroissants” à l’intérieure de la surface de rupture; Lade [68].

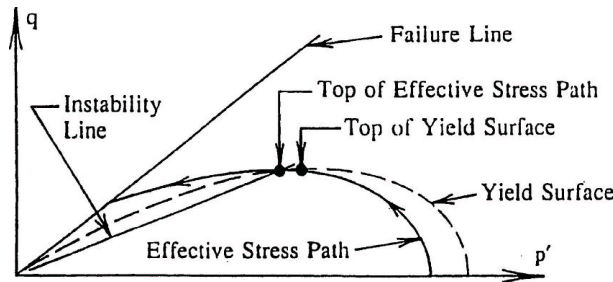


FIG. 1.6 – Définition de la Ligne d’Instabilité d’après Lade [68] pour des conditions non drainées.

1.4.3.2 Lancelot et al.: valeurs expérimentales du travail du second ordre

Comme cela a été présenté à la Section 1.3.2.2 (p. 11) Lancelot *et al.* [71] ont effectué des “tests d’instabilité” en imposant, pour un déviateur de contrainte maintenu constant, un changement des conditions de drainage, à savoir le passage de conditions drainées à un contrôle des déformations volumiques caractérisé par  $\zeta_i = d\varepsilon_v/d\varepsilon_1$ . Ils trouvent que pour un rapport  $\sigma'_1/\sigma'_3$  (noté  $\alpha$  sur la Fig. 1.7) au-dessus d’une valeur seuil il est possible, en fonction de  $\zeta_i$ , d’observer l’effondrement de l’échantillon (état instable).

Par ailleurs Lancelot *et al.* ont calculé le travail du second ordre, à partir de données expérimentales, le long de chemins proportionnels en déformation, cette fois-ci à partir d’états isotropes et en contrôlant la déformation axiale. Les auteurs remarquent que pour une valeur de  $\zeta_i$  donnée, les points pour lesquels  $d^2W$  s’annule s’alignent sur une droite dans le plan  $q - p'$  (Fig. 1.7). Cette droite est confondue avec celle formée par les points marquant le passage entre les états stables (tests d’instabilité négatifs) et les états instables (tests d’instabilité positifs). Finalement, les auteurs remarquent que cette droite est proche de l’enveloppe des pics de  $q$  obtenus lors des essais proportionnels en déformation. Cependant Darve *et al.* [42] ont montrés que  $d^2W$  s’annule au pic de  $q$  uniquement si  $\zeta_i = 0$ , dans ce cas la droite cor-

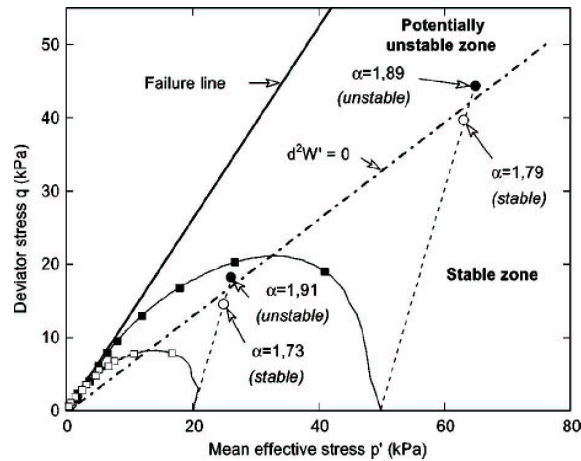


FIG. 1.7 – Tests d'instabilité, ligne  $d^2W = 0$ , et chemins proportionnels en déformation pour  $\zeta_i = -0,2$ ; Lancelot et al. [71].

respondant aux points  $d^2W = 0$  est confondue avec la Ligne d'Instabilité de Lade. Lorsque  $\zeta_i \neq 0$ ,  $d^2W$  s'annule pour un état de contrainte différent de celui correspondant au pic de  $q$  et qui peut s'exprimer en fonction de  $\zeta_i$ . Plus de détails seront donnés au sujet des chemins proportionnels en déformation au Chapitre 4.

#### 1.4.3.3 Prédiction de l'effondrement par Gajo

Gajo *et al.* [52] ont observé pour des chemins à déviateur de contrainte constant ou à pression moyenne constante l'effondrement total de l'échantillon ou, pour le moins, des sauts de déformation suivant le moyen technique utilisé pour contrôler les contraintes (masses ou vérin pneumatique, respectivement). Gajo [51] tente alors de retrouver analytiquement ces points d'effondrement ou de saut de déformation, qu'il qualifie d'instabilité dynamique, en prenant en compte non seulement le comportement de l'échantillon de sable testé mais aussi la rigidité de l'ensemble du système de chargement. En s'appuyant sur les travaux de Petryk [97], Gajo considère un critère de stabilité suffisant pour les matériaux non associés (à l'exclusion des instabilités par flottement):

$$d^2E = \int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + d^2\Omega > 0, \quad (1.17)$$

où  $\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV$  est la condition de stabilité de Hill associée à l'échantillon testé dont l'état de déformation est supposé rester homogène et  $d^2\Omega$  est une grandeur qui correspondrait à l'application de la condition de stabilité de Hill au système de chargement.

$\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV$  est évalué par l'intermédiaire d'un modèle élasto-plastique. En ce qui concerne le système de chargement: la cellule triaxiale, le vérin pneumatique d'application de la force axiale et le système de mesure de la variation de volume contiennent de l'air comprimé dont les régulateurs ont une capacité d'écoulement limitée. De ce fait, une variation de volume rapide de l'air comprimé conduit à une compression adiabatique de celui-ci. La rigidité du système de chargement mobilisé à l'initiation de l'effondrement dépend donc du taux de déformation de l'échantillon à l'initiation de l'effondrement.  $d^2\Omega_i$  pour le  $i^{\text{ème}}$  système de contrôle ou de

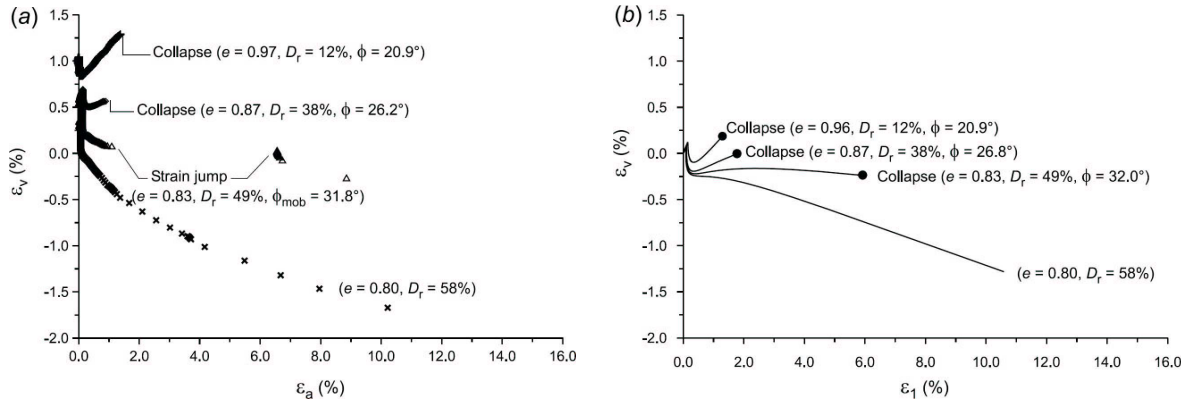


FIG. 1.8 – Chemins de réponse en déformation pour des sollicitations à  $q$  constant: résultats expérimentaux (a) et théoriques (b); Gajo [51].

mesure contenant un volume  $V_i$  d'air à la pression  $p_i$  est calculé de la manière suivante:

$$d^2\Omega_i = \dot{p}_i (-\dot{V}_i), \quad (1.18)$$

le plus difficile étant d'écrire la relation entre  $V_i$  et  $p_i$  en fonction des déformations de l'échantillon de sable.

La Figure 1.8 présente une comparaison, pour des chemins à  $q$  constant, entre des résultats expérimentaux (Fig. 1.8-a) et la simulation de l'occurrence possible d'une instabilité (Fig. 1.8-b) suivant le critère (1.17). La prédiction analytique de l'effondrement est étonnamment bonne: les angles de frottement mobilisés sont identiques ou quasiment identiques.

#### 1.4.3.4 Notion de rupture "diffuse" selon Darve et al.

Différents modes de bifurcation localisés sont observables dans les matériaux non associés: localisation par bande de cisaillement (Fig. 1.1-b, p 1.1), de compaction, de dilatation. Darve *et al.* [42] et Darve & Roguiez [41] opposent à ces "bifurcations discontinues" la notion de "bifurcation continue" associée à un mode de rupture sans localisation visible des déformations appelée "rupture diffuse" (Fig. 1.1-a). Ces ruptures diffuses correspondent aux chemins de réponse résultant d'une bifurcation avec perte d'unicité constitutive au point de bifurcation, le suivi de tel ou tel chemin de réponse dépendant des paramètres de contrôle de l'état de contrainte-déformation du matériau. L'importance des paramètres de contrôle a été discutée par Nova [92] et Imposimato & Nova [57] nous y reviendrons dans la section suivante. Nous pouvons déjà constater que, pour les types de ruptures et les matériaux auxquels nous nous intéressons, bifurcation et perte d'unicité sont deux notions liées alors que nous leur avons donné des définitions différentes.

D'après Darve et coauteurs [42] les bifurcations continues et les ruptures diffuses qui en résultent peuvent être détectées par la condition suffisante de stabilité de Hill qui correspond, sous sa forme locale, à la positivité du travail du second ordre. De plus, ils montrent [36; 33; 32] pour des relations incrémentalement linéaires, que le travail du second ordre (Eq. 1.10, p. 20)

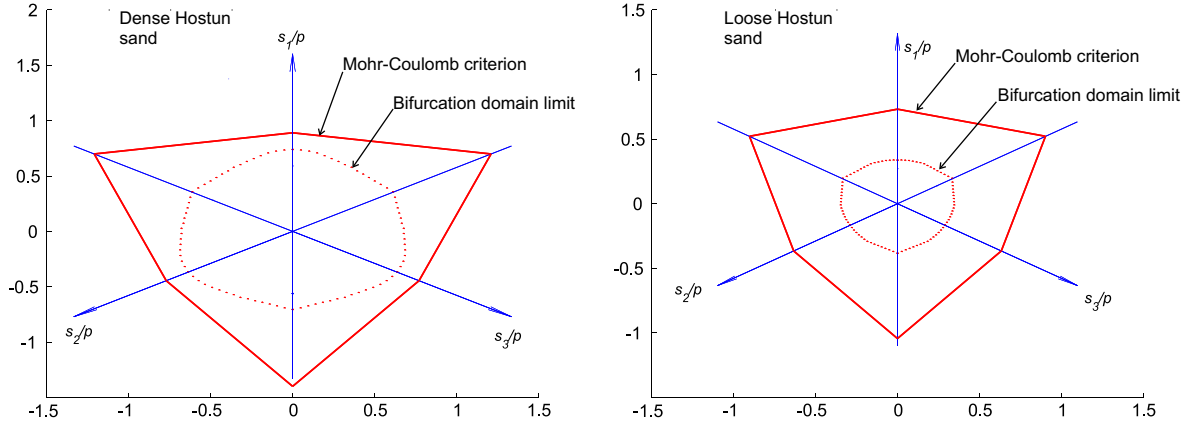


FIG. 1.9 – Limite du domaine de bifurcation suivant le critère de positivité du travail du second ordre dans le plan déviatoire des contraintes. Calculs effectués pour des sables d'Hostun lâche et dense avec une relation constitutive incrémentalement non linéaire; Laouafa & Darve [73].

dépend seulement de la partie symétrique du tenseur constitutif  $\mathbf{M}$ :

$$d^2W = d\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M} d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.19)$$

$$d^2W = d\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{M}^S + \mathbf{M}^A) d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.20)$$

$$d^2W = d\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}^S d\boldsymbol{\sigma}, \quad (1.21)$$

ou  $\mathbf{M}^S$  et  $\mathbf{M}^A$  sont respectivement la partie symétrique et antisymétrique de  $\mathbf{M}$ . Ainsi, la condition de positivité du travail du second ordre (Eq. 1.10) implique la condition:

$$\det \mathbf{M}^S > 0, \quad (1.22)$$

et pour des valeurs propres variant de manière continue à partir d'un état vierge le long du chemin de chargement les conditions 1.22 et 1.10 sont équivalentes. Etant donné que la condition limite de plasticité est donnée par  $\det \mathbf{M} = 0$ , on peut en déduire pour les matériaux associés, dont le tenseur constitutif  $\mathbf{M}$  est symétrique, que la violation de la condition locale de stabilité de Hill coïncide avec les états limites de plasticité. En ce qui concerne les matériaux non-associés, ceux-ci sont caractérisés entre autres par un tenseur constitutif non-symétrique. Pour un paramètre de chargement croissant et monotone le déterminant de la partie symétrique de  $\mathbf{M}$  s'annule avant le déterminant du tenseur lui-même. Le critère de Hill peut donc être violé avant la condition limite de plasticité.

Darve et coauteurs [35; 42; 73] sur la base de recherches directionnelles<sup>2</sup> ont calculé la limite d'un domaine, appelé domaine de bifurcation, dans l'espace des contraintes regroupant les états pour lesquels le travail du second ordre est négatif ou nul. Cette recherche a été effectuée avec une loi incrémentalement linéaire par morceaux et une loi incrémentalement non linéaire, toutes deux calées sur le comportement d'un sable d'Hostun lâche et dense. La Figure 1.9 présente, dans le plan déviatoire des contraintes, le domaine de bifurcation, situé entre la critère de Coulomb et la courbe en pointillés, calculé avec la loi incrémentalement non linéaire.

L'état de contrainte in-situ est souvent considéré axisymétrique. Darve et son équipe ont également calculé la limite du domaine de bifurcation dans le plan d'axisymétrie des contraintes comme le montre la Figure 1.10. Il apparaît également sur cette figure, pour différents états de contrainte à l'intérieur du domaine de bifurcation, des cônes. Etant donné que, pour des

2. La définition d'une recherche directionnelle est donnée dans la Sect. 3.1.2, p. 73.

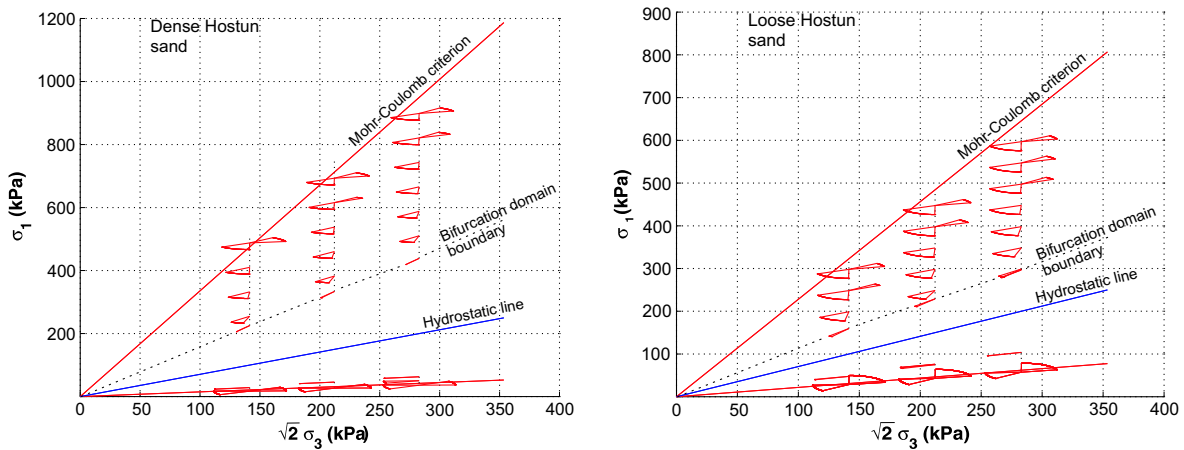


FIG. 1.10 – Limite du domaine de bifurcation dans le plan d'axisymétrie des contraintes et cônes de directions instables; Darve et al. [42].

lois incrémentales, le travail du second ordre s'écrit sous la forme de l'équation (1.19) il est nécessaire pour calculer  $d^2W$  de considérer un incrément de chargement  $d\sigma$ . Or le tenseur constitutif  $\mathbf{M}$  varie en fonction de la direction de chargement et du nombre de zones tensorielles considérées (2 zones dans le cas plus simple: charge et décharge; à une infinité de zones pour les lois incrémentalement non linéaires). De ce fait, pour un état donné la valeur du travail du second ordre dépend de la direction de chargement. Les cônes dessinés sur la Figure 1.10 représentent les directions de chargement pour lesquels le travail du second ordre s'annule ou devient négatif (une plus ample description de ces notions est donnée dans la Sect. 3.1.1, p. 72). Notons finalement qu'un domaine de bifurcation existe également à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb en condition de déformation plane [64; 73].

A partir de ces résultats Darve et coauteurs concluent qu'une rupture diffuse en un point matériel du sol considéré est possible pour les états de contraintes situés à l'intérieur du domaine de bifurcation et pour des directions de chargement incluses dans les cônes de directions instables. A ces conditions s'ajoute celle du choix des paramètres de contrôle qui doivent permettre le développement de déformations importantes ou, en d'autres termes, le mode d'application de la sollicitation doit correspondre à une charge morte, éventuellement dans un sens généralisé.

Darve et son équipe se sont intéressés à deux chemins de chargement particuliers: les chemins proportionnels en déformation et les chemins à déviateur de contrainte constant. Nous présentons ici quelques résultats concernant les chemins à  $q$  constant.  $\varepsilon_v$  et  $\sigma_3$  ainsi que  $q$  et  $\varepsilon_1$  étant des variables conjuguées au sens de l'énergie, le travail du second ordre peut s'écrire avec le formalisme des lois incrémentales:

$$d^2W = d\varepsilon_v d\sigma_3 + dq d\varepsilon_1 \quad (1.23)$$

puisque  $dq = 0$  alors:

$$d^2W = d\varepsilon_v d\sigma_3. \quad (1.24)$$

Lors d'un essai à  $q$  constant,  $\sigma_3$  est monotone décroissant.  $d^2W$  s'annule donc si et seulement si  $\varepsilon_v$  passe par un minimum (soit un maximum pour  $\Delta V/V_0$ ). La Figure 1.11 montre la simulation d'un essai à  $q$  constant avec une loi incrémentalement linéaire par morceaux pour un sable d'Hostun lâche. Les points sont remplacés par des symboles lorsque le travail du second ordre prend des valeurs négatives. La direction de chargement correspondant à un

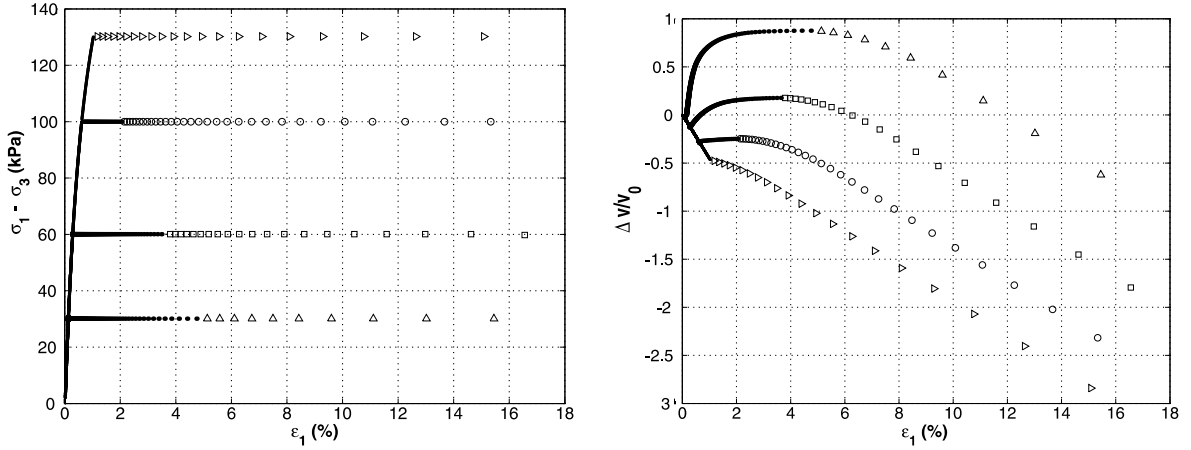


FIG. 1.11 – Simulation de chemin à  $q$  constant pour un sable d'Hostun lâche, les points sont remplacés par des symboles lorsque le travail du second ordre devient négatif; Darve et al. [42].

chemin à  $q$  constant est comprise dans les cônes de directions instables pour le sable lâche. On s'aperçoit que  $\Delta V/V_0$  passe effectivement par un maximum et que  $d^2W$  prend des valeurs négatives à partir de ce maximum. Si au maximum de  $\Delta V/V_0$  on contraint l'échantillon à une "petite" augmentation de volume (ce qui impliquerait un contrôle en variation de volume) on peut alors imaginer pour conséquence un effondrement de l'échantillon. En ce qui concerne le sable dense, le chemin à  $q$  constant n'est pas inclus dans les cônes de directions instables et la variation de volume ne passe pas par un extremum tout comme le travail du second ordre qui ne s'annule pas sur de tels chemins.

#### 1.4.3.5 La perte de contrôlabilité selon Nova

Nova [93; 92] et Imposimato & Nova [57] se sont intéressés à l'existence de la perte d'unicité au niveau constitutif. Leur objectif était de savoir si pour une perturbation donnée de l'état de contrainte-déformation considéré plusieurs ou aucune réponses du matériau existent auquel cas le programme de sollicitation imposé est dit devenir "incontrôlable". A la différence du critère de localisation en bande donné par Rudnicki et Rice, Nova et Imposimato suppose dans leur analyse que l'état de contrainte-déformation reste homogène avant et après la perturbation. Les idées évoquées par ces auteurs sont proches de celles avancées par Darve et son équipe qui considère les ruptures diffuses comme la conséquence d'une bifurcation avec perte d'unicité constitutive.

Les essais géotechniques sont contrôlés partiellement en contrainte et en déformation, voire par l'intermédiaire de combinaisons linéaires des composantes des contraintes et/ou des déformations. Par exemple, la somme des taux de déformations principales est maintenue à zéro lors d'essais non drainés. Imposimato et Nova propose d'utiliser des variables généralisés  $\dot{\eta}$  et  $\dot{\xi}$  définies par:

$$\dot{\eta} = \mathbf{T}_\epsilon \dot{\epsilon} \quad \text{et} \quad \dot{\xi} = \mathbf{T}_\sigma \dot{\sigma}, \quad (1.25)$$

où les deux matrices  $\mathbf{T}$  ne sont pas nécessairement orthogonales. Ils montrent ensuite qu'il est possible d'obtenir une relation contrainte déformation à l'aide d'une matrice de rigidité élastoplastique généralisée  $\Delta$  dépendant de la matrice élastoplastique constitutive du matériau:

$$\dot{\xi} = \Delta \dot{\eta}. \quad (1.26)$$

Afin d'imposer le chemin de sollicitation voulue on choisit de contrôler certaines composantes de  $\dot{\eta}$  et  $\dot{\xi}$ , les autres composantes constituant la réponse du matériau. Pour cela il est pratique de partitionner la matrice de rigidité généralisée:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

où les variables  $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$  et  $\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2$  sont des vecteurs colonne de  $j$  rangées et  $6 - j$  rangées avec  $1 \leq j < 6$ . Choisissons de contrôler par exemple  $\dot{\xi}_1$  et  $\dot{\eta}_2$  (variables que nous appellerons paramètres de contrôle). A condition que  $\Delta_{22}$  soit non singulière, l'Equation (1.27) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} - \Delta_{12}\Delta_{22}^{-1}\Delta_{21} & \Delta_{12}\Delta_{22}^{-1} \\ -\Delta_{22}^{-1}\Delta_{21} & \Delta_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Par conséquent, pour un couple de paramètres de contrôle  $(\dot{\xi}_1, \dot{\eta}_2)$  il existe une réponse unique  $(\dot{\eta}_1, \dot{\xi}_2)$  à condition que le déterminant de la matrice de l'Equation 1.28 soit non nul. Dans le cas contraire il n'est plus possible d'assigner arbitrairement les valeurs des paramètres de contrôle certaines menant à une infinité de réponses: il y a alors perte de contrôlabilité.

Notons que  $\dot{\xi}_1$  et  $\dot{\eta}_1$  ainsi que  $\dot{\xi}_2$  et  $\dot{\eta}_2$  sont des variables conjuguées au sens de l'énergie. Le travail du second ordre peut donc s'écrire:

$$d^2W = \dot{\xi}_1 : \dot{\eta}_1 + \dot{\xi}_2 : \dot{\eta}_2. \quad (1.29)$$

Pour un modèle élastoplastique à simple potentiel, Nova [92] a montré que la perte de contrôlabilité telle qu'elle vient d'être définie est équivalente à la perte de positivité du travail du second ordre. De plus, toujours en utilisant le même type de modèle, Imposimato & Nova [57] ont recherché des points de perte de contrôlabilité dans l'espace de contrainte en suivant différents chemins de sollicitations et en choisissant différents paramètres de contrôle. Sur la Figure 1.12 sont représentés par des étoiles tous les états pour lesquels une perte d'unicité (ou de contrôlabilité) a été détectée. Il faut cependant bien se rendre compte que ces points sont liés à une histoire de chargement et à des paramètres de contrôle spécifiques bien que les auteurs mentionnent que pour le modèle utilisé la matrice de rigidité dépende peu du chemin de contrainte suivi mais surtout de l'état de contrainte actuel. Finalement, la Figure 1.12 montre également que tous les points de perte de contrôlabilité sont situés dans le domaine entre la condition limite de plasticité et les points pour lesquels la partie symétrique de la matrice de rigidité devient singulière c'est-à-dire points pour lesquels le travail du second ordre s'annule.

#### 1.4.4 Le travail du second ordre un indicateur de bifurcation généralisé?

Tout d'abord précisons que, même si les critères présentés ont été dénommés "critère de stabilité" par leurs auteurs, nous nous efforcerons, autant que faire se peut, de parler en terme de bifurcation et de rupture, car nous nous en servons pour détecter des bifurcations ou des ruptures telles que nous les avons décrites en première partie.

Rappelons brièvement que l'objectif de ce travail de thèse était d'approfondir le lien entre la rupture (diffuse) dans les matériaux granulaires (sols) et l'annulation du travail du second ordre. Le but de cette revue de littérature n'est donc pas de choisir un critère parmi ceux proposés mais plutôt de se forger une opinion vis-à-vis de la pertinence de cette condition locale de stabilité de Hill.

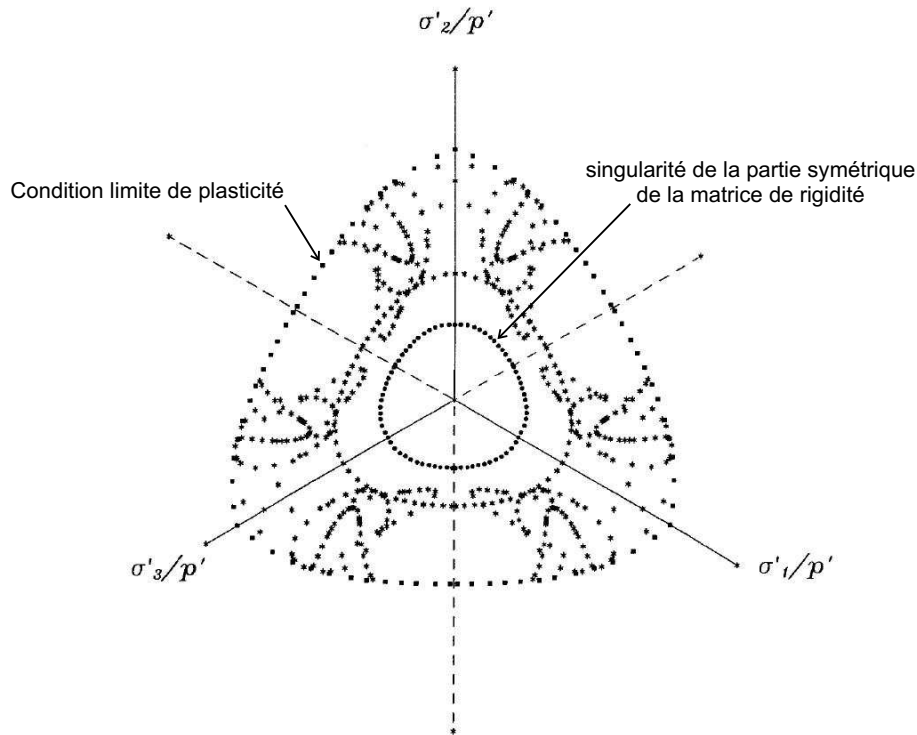


FIG. 1.12 – Points de perte d'unicité (ou de contrôlabilité) représentés par des étoiles dans le plan déviatoire des contraintes; Imposimato & Nova [57].

la positivité du travail du second ordre implique plusieurs conditions qui permettent entre autre de se garantir: des bifurcations à l'exclusion de celles provoquées par flottement, de la perte d'unicité constitutive notamment pour des chargements pilotés avec des paramètres de contrôle généralisés, de l'accroissement de l'énergie cinétique sur une période de temps infinitésimale après l'application de la perturbation. Certaines de ces implications sont sujettes à des hypothèses sur le type de relation constitutive considérée pour les démonstrations (élasto-plastique à un potentiel, incrémentalement linéaire par morceau, hypoplastique...) Toujours sur la base du signe du travail du second ordre nous avons vu que des auteurs sont capables de retrouver analytiquement des ruptures "diffuses" observées expérimentalement.

Nous ne nous aventurerons pas à dire que la positivité du travail du second ordre permet d'exclure dans un contexte général toutes les ruptures pouvant se développer dans les matériaux granulaires, notamment à cause du fait que certaines nous sont peut-être encore étrangères. Cependant, à l'heure actuelle, ce critère semble être suffisamment général pour couvrir les ruptures "diffuses" qui serait dues à une bifurcation par perte d'unicité constitutive. Il faut cependant garder à l'esprit que la violation de la positivité du travail du second ordre n'implique pas la perte d'unicité indépendamment de la direction de chargement et des paramètres de contrôle de l'état du matériau.



## 1.5 Un outil numérique pour l'étude des matériaux granulaires: la Méthode des Eléments Discrets

### 1.5.1 Introduction

Les méthodes numériques discrètes connaissent à l'heure actuelle un véritable engouement de la part des chercheurs travaillant sur le comportement mécanique des matériaux granulaires (poudre, sol). Leurs principaux intérêts résident dans le faible nombre de paramètres mécaniques qu'elles requièrent, la possibilité de créations de discontinuités matérielles en cours de simulations (fracturations par exemple), l'accès à des informations à l'échelle des grains et des contacts et la facilité de programmation pour certaines méthodes. Il existe également des inconvénients, le coût de calcul, par exemple, qui devient rapidement prohibitif ou la procédure de calage des paramètres mécaniques assez longue.

A la différence des Méthodes aux Eléments Finis qui font partie de la formation "scolaire" des mécaniciens, les méthodes numériques discrètes restent pour le moment moins connues. C'est pourquoi nous y consacrons une partie de cette bibliographie en insistant sur la méthode que nous avons employée (la Méthode des Eléments Discrets) et la simulation d'essais triaxiaux.

### 1.5.2 Un aperçu des différentes approches discrètes

Nous ne donnerons ici ni une liste exhaustive ni une description détaillée de l'ensemble des méthodes numériques discrètes existantes. Pour cela le lecteur peut se reporter, par exemple, au chapitre "Simulation numérique discrète" de l'ouvrage de Cambou & Jean [11].

Limitons nous à trois grandes classes de méthodes à savoir: la Dynamique des Contacts (DC), la Méthode des Eléments Discrets (MED), Les approches quasi-statiques.

#### Méthode des Eléments Discrets

Les méthodes dites de dynamique moléculaire sont utilisées depuis la deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle pour simuler des collections de particules de gaz en interaction, repérées par leur coordonnées. La Méthode des Eléments Discrets a très certainement trouvé son inspiration dans ces méthodes de dynamique moléculaire et a été appliquée au cas des géomatériaux au début des années 70 par Cundall et collaborateurs [24; 27]. Dans leurs publications ces auteurs utilisent la terminologie "méthode des éléments distincts" mais il semble à l'heure actuelle que l'appellation "discret" prenne le pas sur "distinct".

Nous reviendrons plus en détail sur la MED dans la partie suivante de cette bibliographie. Cependant nous pouvons déjà préciser que cette méthode demande de définir un modèle d'interaction de contact entre deux grains. Il est possible d'envisager des modèles d'interaction variés, toutefois la force de contact inter-granulaire doit s'exprimer de manière explicite en fonction de l'incrément ou de la vitesse de déformation du contact. Le mouvement des grains est régi par le principe fondamental de la dynamique mettant en jeu des équations différentielles intégrées selon un schéma explicite.

#### Dynamique des Contacts

Cette approche a été proposée par Moreau [84] et Jean [59] et se distingue de la MED principalement dans la manière de traiter les contacts. La DC ne décrit pas dans le détail

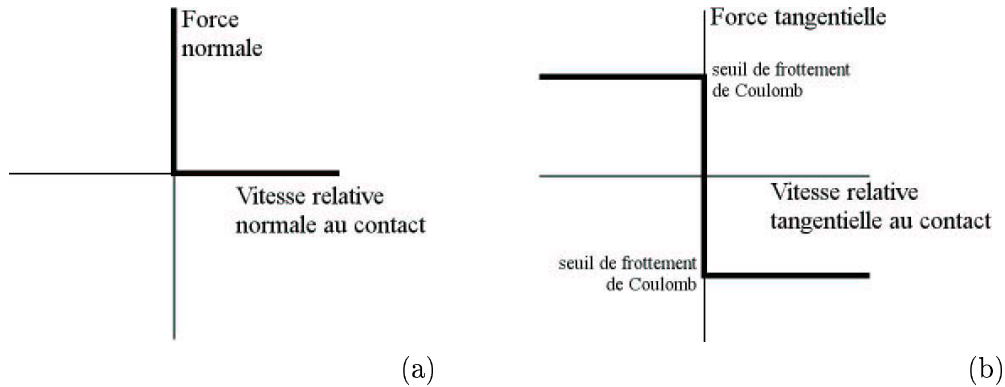


FIG. 1.13 – Loi de Signorini: les grains ne s'interpénètrent pas (a); frottement sec (b).

l'évolution des contacts mais s'attache à respecter les principes d'unilatéralité géométrique (non-interpénétrabilité des grains) et du frottement sec, tels que présentés sur la Figure 1.13. Le respect de ces principes conduit à l'introduction de fortes discontinuités dans l'évolution de l'assemblage granulaire: discontinuité des vitesses et discontinuité des forces. Par conséquent la résolution du problème permettant d'accéder aux mouvements des grains et aux forces de contacts nécessite des outils plus complexes que ceux utilisés par la MED. Ces outils appartiennent au cadre de la mécanique non régulière. Remarquons que la DC et la MED mettent toutes deux en oeuvre la discrétisation dans le temps des équations de la dynamique. Toutefois, étant donné que la DC conduit à des discontinuités en vitesse il faut éviter d'avoir à traiter les accélérations. On effectue donc le bilan des "impulsions" (forces  $\times$  temps) sur un intervalle de temps fini  $\Delta t$ :

$$m_i [\vec{v}_i(t + \Delta t) - \vec{v}_i(t)] = \sum_j \vec{R}_{ji}, \quad (1.30)$$

avec:

- $m_i$  la masse du grain  $i$ ,
- $\vec{v}_i$  la vitesse du grain  $i$ ,
- $\vec{R}_{ji}$  l'impulsion transmise par le grain  $j$  au grain  $i$ .

Un bilan semblable est effectué pour calculer les vitesses de rotation des grains en considérant le moment exercé par chacune des impulsions  $\vec{R}_{ji}$  sur le grain  $i$ .

### Approches statiques et quasi-statiques

Il faut bien garder à l'esprit que les méthodes présentées ci-dessus (MED et DC) sont des méthodes dynamiques: elles assurent à chaque pas de temps l'équilibre dynamique de l'assemblage granulaire. Si les termes d'accélération sont négligeables devant les autres termes on aura de bonnes raisons de supposer que ces méthodes numériques produisent une solution quasi-statique au problème traité.

Toutefois on peut avoir intérêt à utiliser une méthode dédiée à la recherche ou à la vérification d'un équilibre statique ou quasi-statique. Citons à titre d'exemple deux méthodes: la première est proposée par Ouaguenouni & Roux [96], elle implique une loi d'interaction visqueuse et néglige les termes d'accélération; la deuxième est une méthode purement géométrique (Méthode Géométrique Quasi-Statique) s'appliquant aux assemblages de grains non frottants, elle a été utilisée par Combe & Roux [21].

### 1.5.3 La Méthode des Eléments Discrets (MED)

#### 1.5.3.1 Cycle de calcul

Nous présentons ici le cycle de calcul (Fig. 1.14) généralement employé par la MED, que ce soit en deux ou trois dimensions. Deux étapes principales à caractère “mécanique” sont identifiables: le calcul de la position des grains et le calcul des forces de contact. A celles-ci s’ajoute une étape peu mise en relief par les mécaniciens mais qui est une des principales consommatrices de temps de calcul: la mise à jour de la liste des contacts. Commençons par cette dernière.

Connaissant en un instant donné la position des grains, leur orientation et leur forme il faut dresser la liste des contacts courants. Nous ne détaillons pas ici les différentes procédures existantes pour effectuer cette tâche. Notons simplement que certaines d’entre elles permettent de gagner du temps en construisant une liste intermédiaire de contacts potentiels en s’appuyant sur le découpage de l’espace avec une grille ou en utilisant des volumes englobants. Lorsque les grains sont sphérique (cas le plus simple) deux grains sont en contact lorsque la distance entre leur centre est inférieure à la somme de leurs rayons.

Chaque contact étant connu, les forces de contact normales et tangentielles sont calculées indépendamment pour chaque contact en utilisant une loi d’interaction telle que présentée dans le paragraphe suivant. Le torseur des efforts s’appliquant sur chaque grain  $x$  est déduit du bilan effectué sur les forces de contact s’exerçant sur le même grain  $x$ .

L’étape suivante consiste à gérer l’évolution cinématique des particules. Caractérisons le mouvement en translation d’un grain par sa position  $x_i$ , sa vitesse  $\dot{x}_i$ , son accélération  $\ddot{x}_i$ , où  $i$  dénote les 3 directions de l’espace, et de manière identique son mouvement en rotation par  $\omega_i$ ,  $\dot{\omega}_i$  et  $\ddot{\omega}_i$ . Le torseur résultant sur le grain  $x$  est composé d’une force  $\mathcal{F}_i$  et d’un moment  $\mathcal{M}_i$ . Plaçons nous dans le cas, qui sera le notre, de grains de forme sphérique. Par application du principe fondamental de la dynamique à chaque grain, les accélérations en translation et en rotation sont donnés par:

$$\ddot{x}_i = \mathcal{F}_i / m \quad (1.31)$$

$$\ddot{\omega}_i = \mathcal{M}_i / J, \quad (1.32)$$

où  $m$  et  $J$  sont respectivement la masse et le moment d’inertie du grain sphérique. Supposons que les accélérations ont été calculées en un instant  $t$ , par intégrations successives de celles-ci suivant un schéma aux différences finies centrées sur un pas de temps  $\Delta t$  on obtient les vitesses à  $t + \Delta t/2$ :

$$\dot{x}_i^{t+\Delta t/2} = \dot{x}_i^{t-\Delta t/2} + \ddot{x}_i^t \Delta t \quad (1.33)$$

$$\dot{\omega}_i^{t+\Delta t/2} = \dot{\omega}_i^{t-\Delta t/2} + \ddot{\omega}_i^t \Delta t. \quad (1.34)$$

Puis les nouvelles positions à  $t + \Delta t$ :

$$x_i^{t+\Delta t} = x_i^t + \dot{x}_i^{t+\Delta t/2} \Delta t \quad (1.35)$$

$$\omega_i^{t+\Delta t} = \omega_i^t + \dot{\omega}_i^{t+\Delta t/2} \Delta t. \quad (1.36)$$

Le cycle est maintenant fermé et la liste des contacts peut à nouveau être mise à jour.

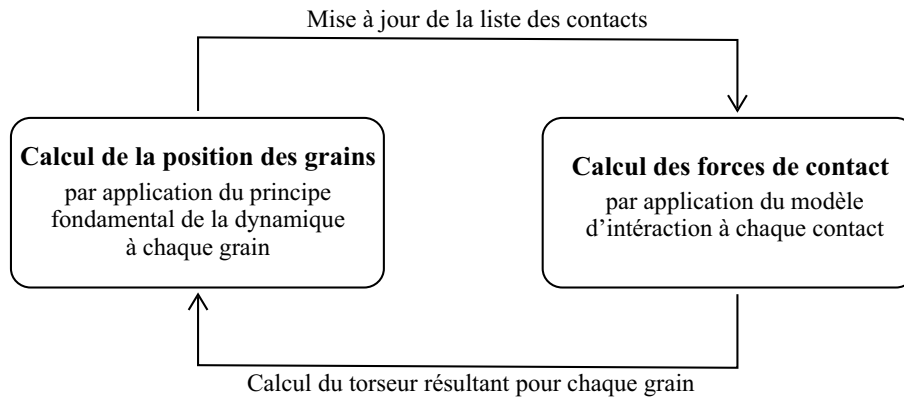


FIG. 1.14 – Schématisation du cycle de calcul de la Méthode des Eléments Discrets.

### 1.5.3.2 Lois d'interaction de contact

Les principales différences que l'on rencontre d'un modèle aux éléments discrets résident en deux points: la loi d'interaction (ou de contact) et la forme des grains. Ce sont ces deux aspects qui vont dicter le comportement à l'échelle globale et locale de l'assemblage granulaire. Laissons pour l'instant de côté la forme des grains pour y revenir un plus loin. Un des atouts de la MED tient dans la capacité de reproduction de phénomènes mécaniques complexes tout en conservant un nombre de paramètres mécaniques petit. Afin de conserver cet intérêt de la MED il est nécessaire d'implémenter des lois d'interaction simples. Nous donnons ici trois exemples de loi d'interaction s'appliquant à des grains de forme circulaire (2D) ou sphérique (3D), il en existe bien sûr beaucoup d'autres.

- Cundall & Strack [27] et Bardet [3] ont utilisé une des lois les plus simples qui soit pour modéliser un matériau frottant (Fig. 1.15-a). Ils considèrent que les deux grains impliqués sont reliés par des ressorts dans les directions normale et tangentielle au plan de contact, respectivement de rigidité linéaire  $k_n$  et  $k_t$ . Dans la direction tangentielle le ressort est monté en série avec un patin d'angle de frottement  $\varphi_c$ . Aucune force de traction dans la direction normale n'est autorisée. Suivant le direction tangentielle au contact cette loi d'interaction engendre un comportement élastoplastique parfait (Fig. 1.15-b). Formellement la force normale au contact  $F_n$  est donnée par:

$$F_n = k_n \delta_c \quad \text{et} \quad F_n > 0, \quad (1.37)$$

où  $\delta_c$  est l'interpénétration, c'est-à-dire la différence entre la distance entre les centres des grains et la somme des rayons (Fig. 1.15-c). La force tangentielle est calculée incrémentalement sur chaque pas de temps:

$$\Delta F_t = k_t \Delta u_t \quad \text{et} \quad |F_t| \leq F_n \tan \varphi_c. \quad (1.38)$$

L'incrément de déplacement tangentiel relatif  $\Delta u_t$  est la projection sur le plan tangent au contact de l'incrément du déplacement relatif au point de contact des deux grains impliqués. Un des enrichissements de cette loi d'interaction consiste à introduire des rigidités non linéaires en s'appuyant sur la théorie des contacts de Hertz. Cependant Cundall [26] a montré que des rigidités linéaires sont moins coûteuses en temps de calcul et mènent à des résultats comparables à l'échelle de l'assemblage granulaire. Luding [79] indique également que le choix de lois d'interaction non linéaires est préconisé

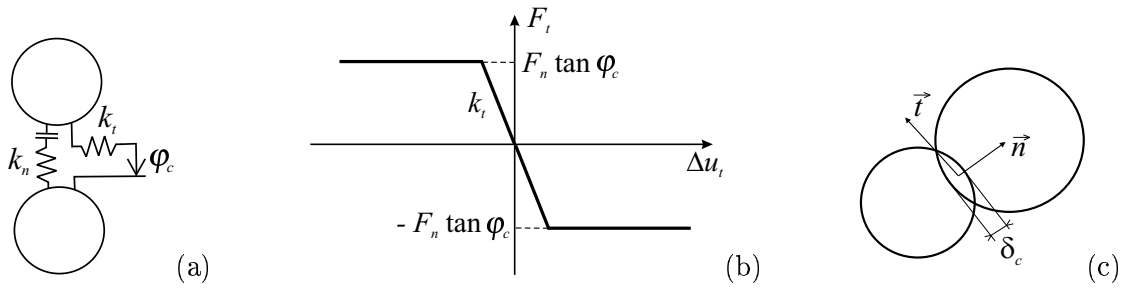


FIG. 1.15 – Loi d'interaction de contact utilisée par Cundall & Strack [27] (a); modèle élasto-plastique parfait dans la direction tangentielle au contact correspondant à la loi d'interaction de Cundall & Strack [27] (b); définition de l'interpénétration  $\delta_c$  (c).

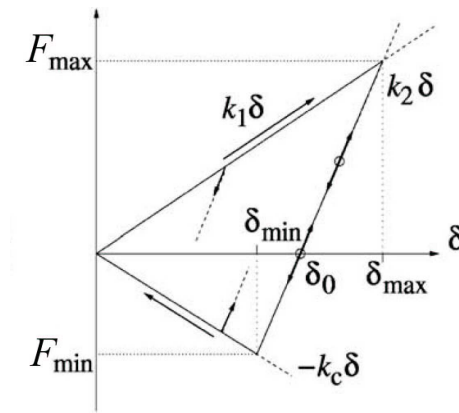


FIG. 1.16 – Loi d'interaction avec prise en compte de la déformation plastique du contact et d'une force de cohésion,  $\delta$  représente ici l'interpénétration; Luding [80].

pour l'étude des problèmes dynamiques tels que la transmission d'ondes, mais a moins d'importance dans le cas de problèmes quasi-statiques. Par ailleurs, certains auteurs utilisent dans la direction normale (Luding [78]) voire également dans la direction tangentielle (Iwashita & Oda [58]), un modèle rhéologique de Kelvin-Voigt : un amortisseur est monté en parallèle avec le ressort pour prendre en compte une dissipation d'énergie en plus de celle engendrée par le frottement sec.

- Luding [80] utilise une loi d'interaction modélisant la déformation plastique du contact ainsi que la cohésion. Cette dernière se traduit par une résistance du contact à la traction. Pour ce qui est de la direction normale au contact la relation force déplacement est schématisée sur la Figure 1.16. Trois rigidités différentes sont mises en jeu :  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_c$ .  $k_1$  intervient lors du chargement initial du contact pour représenter sa déformation plastique.  $k_2$ , de rigidité supérieure à  $k_1$ , est utilisé lors des phases de déchargement/rechargement pour prendre en compte la réponse élastique du contact. Finalement  $k_c$ , qui traduit la cohésion du contact, autorise une force d'attraction (de signe négatif) jusqu'à une valeur minimal  $F_{min}$ . En ne tenant pas compte de la viscosité du contact introduite par Luding, la force normale  $F_n$  est donnée par:

$$F_n = \begin{cases} k_1 \delta & \text{si chargement initial} \\ k_2 (\delta - \delta_0) & \text{si déchargement/rechargement} \\ -k_c \delta & \text{si déchargement} \end{cases} \quad (1.39)$$

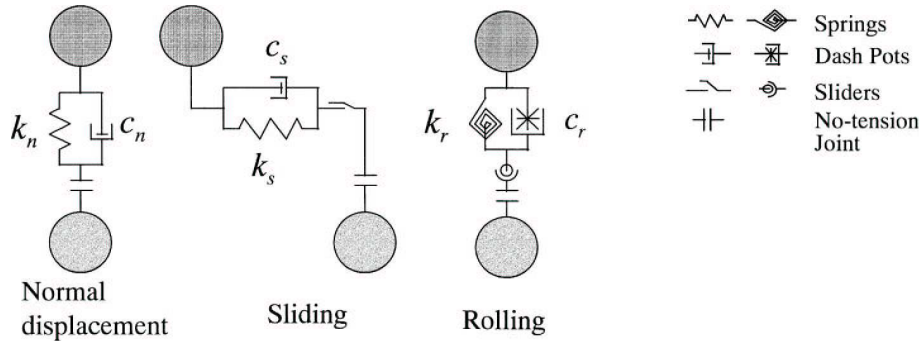


FIG. 1.17 – Loi d'interaction modélisant la résistance au roulement au point de contact, par ce biais un moment est transmis entre les deux grains impliqués; Iwashita & Oda [58].

- Partant du constat que le contact entre deux grains de sable ne s'effectue pas, de manière générale, strictement en un point mais s'étend plutôt sur une surface, Iwashita & Oda [58] se sont attachés à modéliser une résistance au roulement entre deux grains en contact. Pour cela, ils idéalisent toujours les grains comme des disques (2D) et utilisent une loi d'interaction classique dans la direction normale et tangentielle au contact (Fig. 1.17). Cependant ils autorisent la transmission d'un moment entre les grains en introduisant un ressort fonctionnant en rotation, de rigidité  $k_r$ , offrant une résistance au roulement. De même une viscosité en rotation  $c_r$  est introduite. La résistance au roulement est limitée par un patin en rotation.

### 1.5.3.3 Conditions de convergence

Dans le cas d'un assemblage de grains rigides en contact par l'intermédiaire de ressorts, des ondes sont susceptibles de se propager. Un calcul numérique par la MED sera stable à condition qu'il puisse reproduire la propagation de ces ondes. Chaque grain de l'assemblage peut être comparé à un oscillateur de masse  $m$  relié par un ressort de rigidité  $k$  à un corps fixe [11]. La période d'un tel oscillateur est  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Durant cette période  $T$  il est donc nécessaire d'utiliser un nombre de pas de temps suffisamment grand pour décrire cette oscillation sinusoïdale suite à l'intégration numérique du principe fondamental de la dynamique. De nombreux codes s'appuient sur cette idée pour déterminer un pas de temps critique  $\Delta t_{crit}$ . Détaillons la méthode implémentée dans SDEC [47] pour le cas de grains sphériques. Pour chaque cycle de calcul, pour chaque grain et pour chacune des directions  $i$  de l'espace un pas de temps critique est calculé en translation:

$$\Delta t_i^{trans} = \sqrt{\frac{m}{K_i^{trans}}}, \quad (1.40)$$

et en rotation:

$$\Delta t_i^{rot} = \sqrt{\frac{J}{K_i^{rot}}}, \quad (1.41)$$

où  $K_i^{trans}$  et  $K_i^{rot}$  sont les raideurs équivalentes des contacts qui entourent le grain dans la direction  $i$ , respectivement en translation et en rotation. Le pas de temps critique  $\Delta t_{crit}$  pour le cycle de calcul est choisi parmi tous les  $\Delta t_i^{trans}$  et  $\Delta t_i^{rot}$  de tous les grains comme le plus contraignant, c'est-à-dire le plus petit, affecté d'un coefficient de pondération  $p$  en général de l'ordre de 0.1. Par expérience, pour des sollicitations suffisamment lentes, on s'autorisera à augmenter la valeur de  $p$  en vérifiant que le résultat du calcul reste inchangé.

Comme nous l'avons déjà vu la MED assure à chaque cycle de calcul " l'équilibre dynamique " de l'assemblage granulaire. On peut toutefois souhaiter s'approcher d'un état d'équilibre statique en conservant le principe de la MED. Cependant, si les interactions de contact sont purement élastiques, ou du moins sollicitées uniquement de manière élastique, aucune énergie n'est dissipée. En général les codes de calcul permettent l'introduction d'un amortissement dans le système de grains. Nous discutons ici des amortissements dits "visqueux" et "non-visqueux".

- Une forme classique d'amortissement visqueux global consiste à relier chaque grain de l'assemblage au repère du laboratoire par des amortisseurs fonctionnant en translation et en rotation (Cundall & Strack [27]). Ce type d'amortissement est efficace mais dans le cas d'un écoulement à régime permanent il présente l'inconvénient de créer des forces de volume qui peuvent influencer la rupture de l'assemblage granulaire (Cundall [25]). L'amortissement local visqueux introduit de la dissipation d'énergie au niveau des interactions en reliant les grains en contact par des amortisseurs (Iwashita & Oda [58] par exemple, Fig. 1.17). Cet amortissement semble adapté s'il reflète la physique du comportement intergranulaire. Dans le cas contraire on peut se demander s'il ne va pas influencer à tort la réponse du modèle numérique.
- Cundall [25] a proposé un amortissement "non-visqueux" s'appliquant indépendamment à chaque grain dont la force (ou le moment) d'amortissement est proportionnelle à la force (ou au moment) résultante sur le grain. Le signe de la force d'amortissement est choisi de façon à amortir les vibrations plutôt que les mouvements permanents. Pratiquement, on ajoute au torseur résultant sur chaque grain, avant l'application du principe fondamental de la dynamique, une force d'amortissement  $\mathcal{F}^a$  et un moment d'amortissement  $\mathcal{M}^a$  tel que:

$$\mathcal{F}_i^a = -\lambda^a |\mathcal{F}_i| \text{sign}(\dot{x}_i), \quad (1.42)$$

$$\mathcal{M}_i^a = -\lambda^a |\mathcal{M}_i| \text{sign}(\dot{\omega}_i) \quad \text{avec} \quad \lambda^a \in [0,1]. \quad (1.43)$$

$\lambda^a$  est le coefficient d'amortissement adimensionnel est  $\text{sign}$  est une fonction renvoyant le signe d'un scalaire. Cet amortissement a pour effet de diminuer la force résultante si elle est motrice ou de l'accroître si la force s'oppose au mouvement. Etant donné qu'il ne porte pas de sens physique on veillera à ce qu'il n'influe pas la réponse du modèle.

## 1.5.4 Réalisation de simulations d'essais triaxiaux ou biaxiaux

### 1.5.4.1 Formes des grains et granulométrie

Les codes de calcul s'appuyant sur la MED utilisent classiquement des grains de forme circulaire en 2D ou sphérique en 3D. C'est évidemment cette forme de grain qui est la plus facile à implémenter tant au niveau de la recherche de contact que des lois d'interaction de contact. Cependant, si un utilisateur de la MED a pour objectif de décrire ou de prédire quantitativement le comportement d'un sol granulaire, des grains circulaires ou sphériques vont lui apporter quelques problèmes, notamment en ce qui concerne l'angle de frottement au pic du déviateur de contrainte  $\phi_{lim}$ . En effet, la relation entre l'angle de frottement macroscopique  $\phi_{lim}$  et l'angle de frottement inter-granulaire  $\varphi_c$  n'est pas linéaire (Fig. 1.18). Il existe une saturation de  $\phi_{lim}$  lorsque  $\varphi_c$  augmente limitant les valeurs maximales de  $\phi_{lim}$ . A l'inverse,  $\phi_{lim}$  ne s'annule pas avec  $\varphi_c$ .

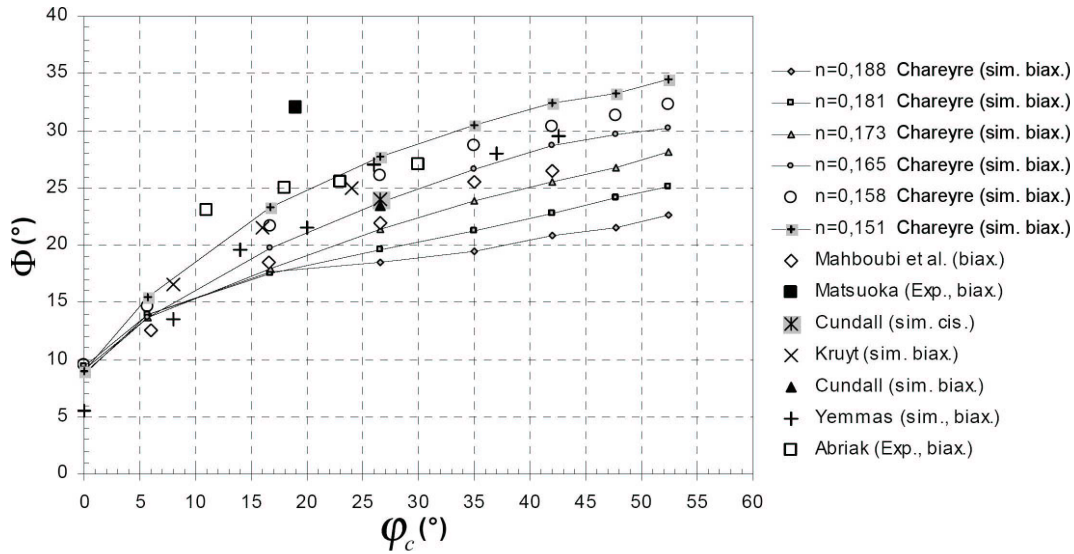


FIG. 1.18 – Angle de frottement macroscopique en fonction de l'angle de frottement intergranulaire, compilation originale de Mahboubi et al. [82] augmentée par Chareyre [14].

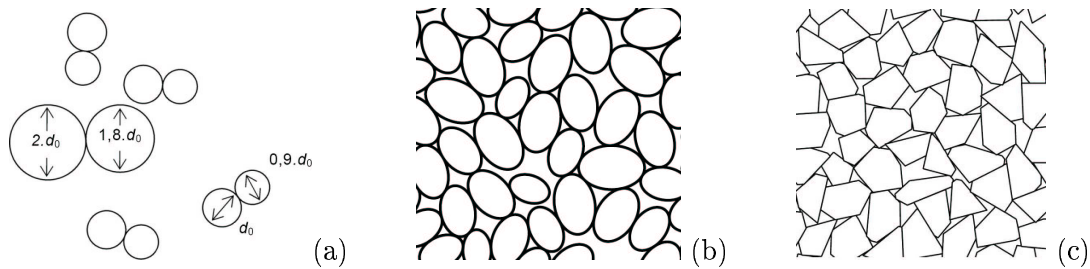


FIG. 1.19 – Exemples de raffinement du modèle géométrique des grains: (a) les disques sont collés deux à deux (Chareyre [14]), (b) ellipses (Olivera [94]), (c) polygones (Alonso-Marroquin [1]).

Une solution simple et efficace permettant d'atteindre un angle de frottement macroscopique réaliste consiste à bloquer les rotations des grains de forme circulaire ou sphérique (Calvetti *et al.* [10]). Toutefois, bien que cette solution apporte une réponse au problème à l'échelle de l'assemblage granulaire, elle ne traduit pas forcément la réalité physique de la cinématique à l'échelle des grains. Un autre moyen, originellement destiné par ses auteurs (Iwashita & Oda [58]) à l'étude des micro-mécanismes dans les bandes de cisaillement, est d'autoriser la transmission d'un moment entre deux grains en contact jusqu'à une certaine valeur seuil. Ce résultat est obtenu par l'utilisation d'une loi d'interaction adéquate (voir Sect. 1.5.3.2, p. 33 et Fig. 1.17, p. 35). Finalement, d'autres auteurs ont cherché à affiner le modèle géométrique des grains. Nous donnons quelques exemples en 2D: Chareyre [14] a collé les disques deux par deux pour n'en faire plus qu'un seul grain (Fig. 1.19-a), Olivera [94] utilise des grains de forme elliptique (Fig. 1.19-b) et Alonso-Marroquin [1] de forme polygonale (Fig. 1.19-c).

En ce qui concerne la granulométrie de l'assemblage granulaire, une taille unique de grains est à proscrire afin d'éviter les arrangements cristallins. Suivant les auteurs, on trouve des assemblage bi-disperse, tri-disperse, voire une distribution continue.



### 1.5.4.2 Choix d'un Volume Élémentaire Représentatif

Pour la réalisation d'essais de laboratoire (triaxiaux, oedométriques...) l'opérateur veille à choisir des échantillons de sols comportant un nombre suffisant de granulats et dont la taille du plus gros granulat soit petite par rapport à la taille de l'échantillon. En effet, quel serait la représentativité d'un essai sur un échantillon ne vérifiant pas ces conditions? Une attention identique doit être apportée aux échantillons numériques destinés aux simulations par la MED.

La notion que l'on vient d'effleurer dans le paragraphe précédent est la notion de séparation d'échelle. Cette dernière occupe une place importante dans l'étude des matériaux hétérogènes par des techniques décrivant le milieu à l'échelle de ses hétérogénéités (MED d'un point de vue numérique, techniques d'homogénéisation d'un point de vue analytique). Autrement dit, la dimension des hétérogénéités doit être petite par rapport à la dimension caractéristique de l'assemblage granulaire mais aussi de la sollicitation (par exemple: la longueur d'onde dans le cas de la propagation d'ondes). Cet assemblage granulaire, sur lequel on effectue des essais homogènes expérimentaux, numériques ou analytiques est qualifié de Volume Élémentaire Représentatif (VER). Le VER est Élémentaire parce qu'il est considéré comme un point matériel du milieu équivalent<sup>3</sup> (Cambou & Jean [11]), il est Représentatif parce qu'il représente le comportement du milieu équivalent: c'est le plus petit volume dont le comportement mécanique soit identique à celui du milieu macroscopique équivalent. Cette dernière condition est remplie si, comme nous l'avons vu, la séparation d'échelle est respectée ou, autrement dit, si le VER contient suffisamment d'hétérogénéités. Cependant il demeure la question: suffisamment signifie combien? Pour Cambou & Jean [11] le véritable test de séparation d'échelles consisterait à vérifier l'unicité de comportement du VER quelle soit la sollicitation homogène qui lui appliqué. Nous citons ci-après quelques auteurs qui ont tenté d'estimer le nombre d'hétérogénéités à prendre en compte dans un VER.

- Calvetti *et al.* [8] ont effectué des essais expérimentaux biaxiaux sur des rouleaux de Schneebeli. Ils se sont intéressés, entre autre, à la dépendance du calcul d'homogénéisation des déformations à partir du champ de déplacement discret des rouleaux, en fonction de la taille du domaine sur lequel est effectuée l'opération d'homogénéisation. La Figure 1.20 montre l'évolution de la composante homogénéisée  $\varepsilon_{yy}$  en fonction de la surface d'homogénéisation. Chacune des courbes correspond à une surface d'homogénéisation croissant à partir d'un point d'origine différent. Il apparaît qu'au delà d'une certaine valeur de surface la composante de la déformation homogénéisée converge vers la valeur mesurée aux frontières de l'échantillon et n'est plus influencée par la surface considérée. Cette surface limite correspondrait à la taille du VER que les auteurs estiment à dix fois le diamètre du plus gros rouleau.
- Le réseau de force dans un empilement de grains est hétérogène et des chaînes de forces importantes sont remarquables (Dantu [29]). Sur la base de simulations numériques en 2D, Radjaï [99] a étudié la corrélation des forces normales de contact en fonction de la distance entre les contacts. Il montre que pour une distance supérieure à dix fois le diamètre moyen des grains toute corrélation entre les forces normales de contact est perdue. Radjaï met ainsi en évidence des structures mésoscopiques intermédiaires entre l'échelle microscopique (du grain ou du contact) et macroscopique (de l'assemblage granulaire). Par conséquent un VER devrait comporter un nombre suffisant de

---

3. Le milieu équivalent est un milieu homogène "imaginaire" équivalent au milieu hétérogène pour ce qui concerne ses propriétés mécaniques.

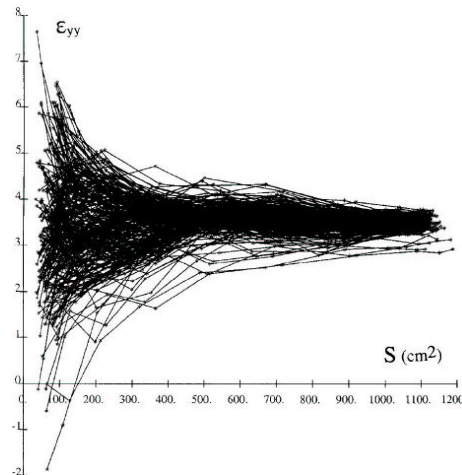


FIG. 1.20 – Dépendance de la déformation homogénéisée à l'aire de la surface d'homogénéisation; Calvetti et al. [8].

ces structures mésoscopiques (qui peuvent être vues comme des hétérogénéités) d'où une taille bien supérieure à dix fois le diamètre moyen des grains.

- Chareyre [14] a analysé sur des simulations d'essais biaxiaux (2D) l'influence du nombre de grains sur la dispersion de l'angle de frottement mesuré. C'est en quelque sorte un moyen de vérifier l'unicité du comportement macroscopique. Il trouve, pour des échantillons de 4000 grains, un écart type de 1 degré sur la valeur de l'angle frottement calculé, ce qu'il juge satisfaisant. Si l'on considère un échantillon rectangulaire d'élanancement deux avec une taille de grain unique cela correspond à un échantillon de 45 sur 90 grains.

Force est de constater que la taille du VER n'est pas un problème aisé à résoudre étant donné la diversité des résultats que l'on peut trouver dans la littérature. D'après les deux derniers exemples, il semblerait qu'un VER de la taille de 50 à 100 fois le diamètre moyen des grains serait une option raisonnable. Cependant, un autre facteur est à prendre en compte dans les simulations par la MED, le coût en calcul, facteur qui peut être limitant. Imaginons un VER en trois dimensions de taille environ 100 grains, ce qui fait au total 1 million de grains...

#### 1.5.4.3 Génération de l'assemblage granulaire

Que ce soit pour simuler des essais de laboratoire homogènes ou des problèmes aux limites, la première étape est de créer un assemblage granulaire dont les propriétés telles que la densité, la distribution de la taille des grains, l'homogénéité (ou l'hétérogénéité), l'isotropie (ou l'anisotropie), le nombre de coordination<sup>4</sup> répondent aux souhaits du modélisateur. Les techniques mises en oeuvre sont très variables d'un auteur à l'autre. Premièrement, on peut distinguer les méthodes géométriques et les méthodes dynamiques.

- Les méthodes géométriques utilisent comme leur nom l'indique un algorithme géométrique. Décrivons par exemple la méthode 3D implémentée dans le code SDEC [47] basée

4. Le nombre de coordination est le nombre moyen de contacts par grain.

sur un algorithme proposé par Jodrey & Tory [60].

1. Tout d'abord, les sphères, de taille unique, sont générées suivant un schéma cubique faces centrées garantissant une compacité élevée pour des éléments de même diamètre.
2. Toutes les sphères sont ensuite réduites d'un facteur identique pour permettre la perturbation de leur position spatiale en évitant les contacts. A chaque sphère est alors associé deux rayons: un rayon réel  $R_r$  égal au rayon après réduction et un rayon virtuel  $R_v$ , égal initialement à un rayon de référence  $R_{ref}$  supérieur à  $R_r$  et variable d'une sphère à l'autre. Le rayon  $R_{ref}$  est attribué à chaque sphère de manière à ce que la distribution de la taille des grains corresponde à celle souhaitée. Pour chaque rayon  $R_r$  et  $R_v$  sont calculées respectivement les compacités réelle  $c_r$  et virtuelle  $c_v$ .  $c_v$  est supérieure à  $c_r$ .
3. Ces valeurs étant données, l'algorithme géométrique est lancé, à chaque cycle le couple de sphères dont les centres sont les plus proches est sélectionné. S'il n'y a pas d'interpénétration le rayon  $R_r$  de toutes les sphères est augmenté de la moitié de la distance au contact à l'exception de celles qui ont atteint leur rayon de référence  $R_{ref}$ . S'il y a interpénétration les deux sphères sont écartées suivant la droite joignant leur centres. En fin de cycle le rayon  $R_v$  de toutes les sphères est réduit d'une quantité donnée et  $c_r$  et  $c_v$  sont recalculés.

Au cours des cycles,  $c_r$  augmente et  $c_v$  diminue, ils ont donc tendance à converger l'un vers l'autre. L'algorithme est stoppé lorsque  $c_r = c_v$  ou lorsque toutes les sphères ont atteint leur rayon de référence  $R_{ref}$ . C'est en général la première condition qui prévaut. Il résulte de cet algorithme géométrique des assemblages homogènes et isotropes en général peu denses. Il est d'ailleurs difficile d'agir sur la densité finale.

- Les méthodes dynamiques constituent en elles-mêmes des simulations numériques utilisant le cycle de calcul de la MED. Ces méthodes sont divisibles en deux sous catégories: le dépôt sous gravité (ou pluviation) et le compactage. La première technique (pluviation) consiste à faire tomber les grains sous l'effet de la gravité dans une boîte. Les grains peuvent être lâchés un par un ou positionnés initialement suivant une grille et lâchés simultanément [122]. Cette méthode conduit à une distribution des orientations de contacts anisotrope et la régularité de la surface libre n'est pas assurée, toutefois on peut imaginer qu'elle reflète, par exemple, la réalité d'un dépôt sédimentaire. Les méthodes par compactage consistent dans un premier temps à créer un arrangement aléatoire de grains, très lâche, voire sans contact. L'assemblage granulaire est ensuite compacté par compression isotrope (réduction de volume; Combe [20], Mahboubi [82], Thornton & Antony [123] par exemple) ou par grossissement des grains (volume constant; Chareyre [14] par exemple). Pour gérer la densité finale de l'assemblage granulaire Mahboubi [82], Thornton & Antony [123] et Chareyre [14] jouent sur la valeur de l'angle de frottement intergranulaire au cours du compactage: plus celui-ci est faible plus l'assemblage sera dense. La densité maximale serait donc atteinte pour un angle de frottement nul. Cette fois-ci les assemblages obtenus sont homogènes et isotropes et la densité peut être contrôlée via l'angle de frottement intergranulaire.

#### 1.5.4.4 Contrôle et vitesse de sollicitation de l'assemblage granulaire

Pour soumettre l'assemblage granulaire numérique à un programme de chargement il faut pouvoir contrôler son état de contrainte-déformation. Dans le cas de simulations d'essais triaxiaux (véritables ou axi-symétriques) en 3D ou biaxiaux en 2D le contrôle s'effectue, de manière générale, en imposant sur une partie de la frontière des conditions cinématiques (en vitesses de déplacement ou en déformations) et sur la partie complémentaire des conditions en force ou en contrainte.

La solution la plus classique consiste à placer l'assemblage granulaire dans une boîte déformable, un rectangle en 2D (Calvetti & Emeriault [9], Fig. 1.21-a) ou un parallélépipède en 3D (Calvetti *et al.* [10]): chaque face de la boîte est une paroi rigide en contact avec les grains extérieurs de l'assemblage. La position et l'orientation de chaque face est contrôlée soit directement afin d'imposer une ou plusieurs composantes de l'état de déformation soit indirectement à travers une boucle d'asservissement pour imposer une ou plusieurs composantes de l'état de contrainte.

Afin de se rapprocher des conditions expérimentales d'essais triaxiaux de révolution, où l'échantillon de sol est placé dans une membrane, certains auteurs (Bardet & Proubet [5], Iwashita & Oda [58], Fig. 1.21-b) ont implémenté des conditions aux limites souples. Une telle disposition serait plus favorable à la formation de bandes de cisaillement que des parois rigides qui ont tendance à forcer l'homogénéité du champ de déformation au sein de l'assemblage granulaire.

Des conditions aux limites périodiques implique l'idée que l'assemblage granulaire simulé fasse partie d'un espace périodique. En gardant un vocabulaire simple, Ng & Dobry [85] expliquent les conditions aux limites périodiques de la façon suivante: imaginons que l'assemblage granulaire puisse être contenu dans une boîte virtuelle de forme cubique. Si un grain de l'assemblage traverse une des parois du cube il est supprimé et réintroduit à travers la paroi opposée. Suivant une telle approche, une localisation dans le champ de déformation ne peut se développer que si elle vérifie les conditions de périodicité imposées aux frontières de l'échantillon.

Citons une approche originale de Kishino *et al.* [66] (Fig 1.21-b). Ces derniers, dans le but d'éviter toute dépendance du comportement de l'assemblage granulaire à une direction particulière (comme cela pourrait le cas avec des parois rigides), ont choisi de manipuler un assemblage de forme sphérique. Chacun des grains à la surface de l'assemblage voit sa position contrôlée pour imposer l'état de contrainte-déformation.

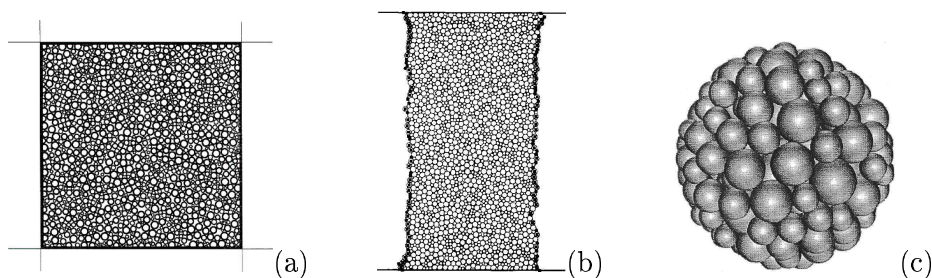


FIG. 1.21 – Exemples de conditions aux limites pour des assemblages granulaires bidimensionnels: parois rigides, Calvetti & Emeriault [9] (a); Conditions souples Bardet & Proubet [5] (b); sphère déformable Kishino *et al* [66] (c).

Lors de l'application du programme de chargement de l'assemblage granulaire, si la vitesse de sollicitation est élevée, la réponse quasi-statique de l'assemblage risque d'être affectée par l'effet inertiel. Le taux de déformation réduit  $I$ , grandeur adimensionnelle, permet de juger l'importance des effets dynamiques (da Cruz [28], Roux [107]):

$$I = \dot{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{P}} \quad \text{en 2D} \quad (1.44)$$

$$I = \dot{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{D_s \cdot P}} \quad \text{en 3D,} \quad (1.45)$$

avec  $m$  la masse du grain,  $D_s$  son diamètre (cas de sphères) et  $P$  la pression de confinement.  $I$  permet de comparer la contrainte inertielle avec la pression de confinement, plus sa valeur est élevée plus on s'éloigne d'un comportement quasi-statique. Dans des conditions expérimentales  $I$  est de l'ordre de  $10^{-9}$ , numériquement une valeur de  $10^{-5}$  signifie un chargement déjà très lent, la limite d'un chargement quasi-statique semble se situer à  $I = 10^{-2}$ . Mahboubi *et al.* [82] proposent un indice égal au rapport entre la moyenne des résultantes des forces agissant sur chaque grain (non équilibré) sur la moyenne des forces normales agissant sur le milieu. Les auteurs considèrent que le chargement est quasi-statique si cet indice ne dépasse pas un 1%. Ils remarquent aussi qu'un moyen de vérification est d'effectuer deux sollicitations à deux vitesses différentes: les résultats doivent être identiques. Chareyre [14] s'est basé sur ce dernier indicateur pour choisir une vitesse de sollicitation.

### 1.5.5 Quelques résultats sur le comportement mécanique des milieux granulaires idéalisés

#### 1.5.5.1 Une description biphasique des assemblages granulaires

Dantu [29] puis Drescher & de Josselin de Jong [48] ont montré par des essais mécaniques sur des assemblages de disques photoélastiques que les forces de contact présentent une distribution spatiale très hétérogène. Des chaînes de forces importantes se déploient pour reprendre les charges appliquées sur l'assemblage. En partant de ce constat, il est possible de diviser les forces de contact en deux phases: la phase faible et la phase forte. Radjaï et collaborateur [100; 103; 102; 101; 99] ont analysé les caractéristiques de ces deux phases. Nous donnons ici un bref résumé de leurs travaux et nous nous limitons au cas où l'assemblage est à l'équilibre statique.

La limite entre la phase faible et la phase forte est égale à la moyenne des forces, que ce soit pour les forces de contact tangentielles ou normales. Ainsi une force normale sera dite forte si son intensité est supérieure à la moyenne. Le nombre de forces normales appartenant à la phase faible suit une loi puissance soit:

$$F_n \propto \left( \frac{F_n}{\langle F_n \rangle} \right)^a \quad \text{si } F_n < \langle F_n \rangle, \quad (1.46)$$

où  $\langle F_n \rangle$  est la moyenne des forces normales. Le nombre de forces normales appartenant à la phase forte suit une loi exponentielle de la forme:

$$F_n \propto e^{b(1-F_n/\langle F_n \rangle)} \quad \text{si } F_n > \langle F_n \rangle. \quad (1.47)$$

Le nombre de forces tangentielles faibles et fortes suit des lois identiques avec des coefficients  $a$  et  $b$  sensiblement différents. Cette distribution des forces est valable en 2D et 3D.

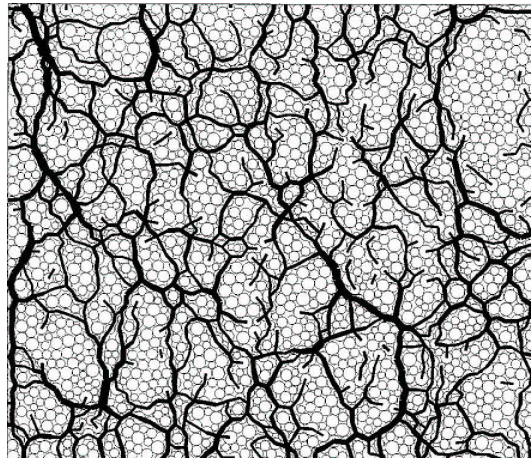


FIG. 1.22 – Réseau des contacts appartenant à la phase forte dans un assemblage granulaire 2D, la largeur des traits est proportionnel à l'intensité de la force; Radjaï *et al.* [103].

La phase faible implique le plus grand nombre de contacts, environ 60%, par contre elle ne contribue pas à la reprise des contraintes déviatoires et ne supporte qu'une pression isotrope (analogie avec un fluide). C'est également dans la phase faible que se situe la quasi totalité des contacts glissants c'est donc dans cette phase qu'est principalement dissipée l'énergie par glissement. Les contacts appartenant à la phase forte sont ceux formant les chaînes de forces observées par Dantu [29] (Fig. 1.22). Au cours du chargement, il y a un échange de contacts entre les phases faibles et fortes. Le taux d'échange de contacts n'est pas régulier et par moment d'importantes restructurations se développent modifiant le réseau de contacts forts sur tout ou partie de l'assemblage granulaire. C'est un autre mécanisme important de dissipation d'énergie liée à d'importantes collisions intergranulaires. La direction moyenne des contacts faibles est perpendiculaire à la direction moyenne des contacts forts. Ainsi les contacts faibles semblent soutenir des colonnes de contacts forts, responsables de la résistance mécanique de l'assemblage, pour leur éviter de flamber.

Une approche telle que celle menée par Radjaï et collaborateur devrait mener, entre autres, à mettre en évidence des mécanismes à l'échelle de l'amas de grains (une dizaine de grains) liés à la rupture à l'échelle globale d'un matériau granulaire. Citons le travail effectué par Staron [122], sur les mécanismes de déstabilisation des pentes granulaires, basé en partie sur cette vision biphasique du milieu.

#### 1.5.5.2 La simulation de recherches directionnelles pour caractériser le comportement mécanique incrémental à l'échelle macroscopique

Bardet et collaborateurs [4; 3] au début des années 90 et plus récemment Calvetti *et al.* [10] et Kishino et collaborateur [66; 65] ont décrit le comportement incrémental d'un assemblage de grains circulaires ou sphériques. Dans cet objectif ils ont simulé des recherches directionnelles (voir la définition dans le Sect. 3.1.2, p. 73) en 2D (Bardet et collaborateurs) ainsi qu'en 3D (Calvetti *et al.* et Kishino et collaborateurs) après, respectivement, des compressions biaxiales et triaxiales axisymétriques.

Pour un état isotrope vierge Bardet [3] trouve une réponse de l'assemblage de disques isotrope linéaire et élastique. Pour un état de contrainte anisotrope l'auteur montre que le comporte-

ment peut être décrit de manière satisfaisante par une loi élastoplastique classique à simple mécanisme (soit deux zones tensorielles) avec une règle d'écoulement non associée. Ce dernier point est confirmé en 3D, pour des recherches directionnelles dans le plan d'axisymétrie des contraintes, par Calvetti *et al.* [10] à condition que l'assemblage granulaire n'ait pas subi de préchargement. Dans le cas où il y a eu un chargement/déchargement, des déformations plastiques sont constatées pour toutes les directions de chargement (hormis deux directions neutres). Il semblerait que l'on puisse toujours appliquer une loi de comportement à deux zones tensorielles mais chacune des zones correspondrait à un comportement inélastique et chacune des zones serait caractérisée par une direction distincte de l'écoulement plastique.

Kishino [65] a effectué des recherches directionnelles en dehors du plan d'axisymétrie. Il semble alors que la direction de l'incrément de déformation plastique est dépendant de la direction de l'incrément de contrainte, il n'y aurait donc plus de règle d'écoulement régulière. Qui plus est, le comportement de l'assemblage de sphères dans ces conditions est incrémentalement non linéaire.

Les résultats présentés dans ce paragraphe montre à quel point la DEM est efficace pour reproduire et décrire, tout du moins qualitativement, des comportements macroscopiques très complexes observés dans les matériaux granulaires tels que les sables. Pour apprécier la capacité prédictive de ces méthodes il faut par ailleurs comparer la qualité des résultats avec le faible nombre de paramètres mécaniques introduits (trois dans les cas présents). Les formes de grains utilisées ici, disques ou sphères, ne permettent cependant pas de reproduire quantitativement des résultats expérimentaux. Des formes un peu plus complexes, moins propices à la rotation des grains, devraient permettre d'avoir de meilleurs résultats. Cependant ce développement implique l'introduction de nouveaux paramètres géométriques qui ont autant d'importance que les paramètres mécaniques vis-à-vis du comportement global de l'assemblage granulaire.

## CHAPITRE 2

---

Introduction au modèle numérique discret

---



## 2.1 Introduction

Comme nous avons pu le voir dans la bibliographie, l'exploration du lien entre la rupture diffuse dans les matériaux granulaires et le signe du travail du second ordre a été principalement traitée, jusqu'à présent, dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Un aspect original de ce travail de thèse est de proposer une approche discrète par le biais, entre autres, d'un modèle numérique discret. Des comparaisons avec une approche discrète analytique ont également été effectuées. Pour cette raison il est nécessaire de disposer d'un modèle qui réponde à nos attentes. Celui-ci doit produire un comportement à l'échelle de l'assemblage granulaire semblable, au moins qualitativement, à celui d'un matériau granulaire (sable par exemple) et les informations à l'échelle des grains et des contacts doivent être exploitables dans le sens où elles doivent témoigner autant que possible d'un comportement physique des grains et des contacts.

Ce chapitre rend compte des étapes successives qui nous ont conduit de l'adaptation de l'environnement de calcul, décrit dans une première partie, jusqu'à la définition et à la validation du modèle numérique utilisé, qui font l'objet d'une deuxième partie.

## 2.2 Le code de calcul SDEC

Le code de calcul SDEC (pour "Spherical Discrete Element Code", Donzé & Magnier [47]) propose un environnement développé en C++ pour construire ses propres modèles numériques discrets en trois Dimensions. La méthode de calcul utilisée est similaire à celle proposée par Cundall & Strack [27], elle fait partie de la catégorie des Méthodes aux Éléments Discrets (MED). Les caractéristiques du code SDEC et les options choisies sont détaillées dans la section suivante.

Par ailleurs, le travail de thèse présenté dans ce document, repose en grande partie sur des simulations d'essais triaxiaux. Bien que nous nous soyons limité à l'étude de cas axisymétriques, le code SDEC a été adapté pour simuler de véritables essais triaxiaux. Les modifications apportées sont également décrites dans cette partie.

### 2.2.1 Caractéristiques du code

Les grands traits de SDEC sont communs à de nombreux codes de calcul employant la MED. Ils ont été présentés dans la bibliographie: nous les citons ci-dessous sans les décrire en précisant des renvois au chapitre précédent si besoin est.

#### Cycle de calcul

Il est identique à celui présenté sur la Figure 1.14 (p. 33), et l'intégration du principe fondamental de la dynamique s'effectue suivant un schéma aux différences finies centrées détaillé dans la Section 1.5.3.1 (p. 32).

#### Amortissement

SDEC utilise un amortissement non visqueux s'appliquant indépendamment à chacun des grains, dont le moment et la force d'amortissement sont définis par les Equations 1.42 et

1.43 (p. 36).

### Grains et recherche de contacts

Les grains sont des sphères et il n'y a pas d'éléments dédiés aux conditions aux limites. Ces dernières sont simulées, si besoin est, par des éléments sphériques. SDEC propose une option de recherche des contacts par subdivision de l'espace grâce à une grille en trois dimensions. Une liste de sphères est associée à chaque maille de la grille en fonction de leur position. La recherche des contacts est ensuite effectuée uniquement entre les sphères d'une même maille et des mailles adjacentes. Cette technique est intéressante en terme de coût en calcul si la distribution de la taille des éléments est assez resserrée, que l'assemblage est plutôt compact et que la position des éléments varie peu au cours du temps. Nous avons utilisé la technique de recherche des contacts par grille pour l'ensemble de nos simulations.

### Lois d'interaction

Il existe une loi de type *lien* et une loi de type *contact*. Ces lois peuvent être choisies à l'exclusion l'une de l'autre ou bien se succéder au cours de la simulation: par exemple, une interaction peut être de type *lien* en début de simulation et devenir de type *contact*, sous certaines conditions, au cours de la simulation.

- Les interactions *liens* sont définies par: un rayon d'interaction<sup>1</sup> (égal ou supérieur au rayon de la sphère); des rigidités normales et tangentielles; un angle de frottement; une cohésion (permettant d'augmenter la résistance au glissement indépendamment de la force normale); une résistance à la traction dans la direction normale au contact; un adoucissement local pilotant la fragilité de la rupture en traction. De plus amples informations sont données dans la thèse de Hentz [55].
- Les interactions *contacts* sont définies par: des rigidités normales et tangentielles et un angle de frottement.

De plus, les interactions de type *lien* et *contact* peuvent tenir compte d'une déformation plastique du point de contact en adoptant une rigidité normale supérieure dans le cas d'un déchargement/rechargement que dans le cas d'un chargement initial.

Dans notre cas, toutes les simulations ont été effectuées uniquement avec des interactions de type *Contact* sans modélisation de la déformation plastique du point de contact. La loi d'interaction utilisée est donc celle représentée sur la Figure 1.15-a et -b (p. 34) et traduite par les relations (1.37) et (1.38) (p. 33). Les paramètres mécaniques introduits sont la rigidité normale  $k_n$ , tangentielle  $k_t$  et l'angle de frottement intergranulaire  $\varphi_c$ .

### Remarque

Le lecteur pourra s'apercevoir que les valeurs de  $k_n$  et  $k_t$  utilisées ne constituent pas des nombres "ronds". En effet, les valeurs de  $k_n$  et  $k_t$  ne sont pas directement entrées par l'opérateur mais estimées par SDEC à partir d'un module d'Young et d'un coefficient de Poisson à l'échelle de l'assemblage granulaire via des formules d'homogénéisation inversées. Bien qu'elles soient utilisées par SDEC nous n'avons pas tenu compte de ces formules et nous fournissons directement dans ce mémoire les valeurs des rapports  $k_n/D_s$  (où  $D_s$  est le diamètre de la sphère) et  $k_t/k_n$ .

---

1. Un rayon d'interaction supérieur au rayon des sphères permet à celles-ci d'interagir même si elles ne sont pas effectivement en contact. C'est une manière, par exemple, de modéliser l'interaction de deux granulats dans un béton via la matrice cimentaire.

## 2.2.2 Adaptation du code pour la simulation d'essais triaxiaux

### 2.2.2.1 Définition de l'assemblage granulaire et des états de contrainte-déformation

A l'instar de la presse TRITRI (véritable presse triaxiale du laboratoire 3S), nous avons pris le parti de modéliser des échantillons numériques de forme cubique contraints par des parois planes et rigides. Ce choix a été fait par souci de simplicité et pour conserver un état de déformation aussi homogène que possible. L'étude bibliographique (Sect. 1.5.4.2, p. 38) a montré que la largeur de l'assemblage granulaire, pour qu'il constitue un VER, doit comporter, suivant les auteurs, entre 10 et 100 grains. 100 grains serait un cas idéal cependant, cela conduit à un échantillon cubique de 1 million de grains, ce qui n'est pas réaliste en terme de coût en calcul. Nous nous sommes donc arrêtés sur un nombre total d'un peu plus de 10000 grains, soit environ 22 grains dans la largeur de l'échantillon.

L'espace est défini par le repère  $(O, x_1, x_2, x_3)$  (Fig. 2.1) considéré fixe. Les échantillons sont centrés sur l'origine du repère (et le restent au cours de la simulation) et chacune de leurs faces est normale aux axes du repère. Par ailleurs, les forces de contact tangentielles grains-parois sont nulles et si l'on suppose les échantillons mécaniquement homogènes (voir la section suivante) alors les directions principales des tenseurs de déformation  $\varepsilon$  et de contrainte  $\sigma$  coïncident avec les axes du repère  $(O, x_1, x_2, x_3)$ . Par conséquent, l'état de contrainte-déformation de l'échantillon numérique est défini par les déformations principales  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  et les contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  qui sont calculées aux frontières de celui-ci. Les déformations sont calculées directement à partir de la position des parois et les contraintes à partir des forces exercées sur ces dernières.

### 2.2.2.2 Implémentation d'éléments plaques

Les inconvénients d'une paroi composée de sphères pour le contrôle des conditions aux limites (en vitesse ou en contrainte) de l'assemblage granulaire sont les suivants:

- la paroi présente une rugosité qui peut engendrer des contraintes de cisaillement non contrôlées entre la paroi et l'assemblage granulaire,
- si les sphères constituant la paroi sont juxtaposées les unes par rapport aux autres la paroi est une sorte de membrane poreuse. La taille des pores doit être inférieure au diamètre minimal rencontré dans l'assemblage pour que les grains de l'assemblage ne

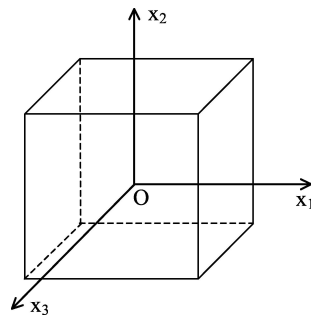


FIG. 2.1 – Repère fixe par rapport auquel sont définis la position des grains, le tenseur de contrainte et de déformation.

traversent pas la paroi. Pour réduire la taille des pores la paroi doit être composée d'un grand nombre de petites sphères juxtaposés ou de sphères superposées. Ces deux arrangements, composés d'un nombre important de sphères, sont préjudiciables en terme de coût de calcul.

Par conséquent, il a été choisi d'implémenter des conditions aux limites de type paroi rigide, plane et sans frictions. Afin de profiter de l'algorithme de recherche de contacts par grille, chacune des parois est composée de plaques carrées dont la taille est semblable à celle des grains de l'assemblage.

L'intersection entre une sphère, de centre  $G_s$  et de rayon  $r_s$ , et une plaque, de centre  $O_p$  et de coté  $2r_p$ , est présentée sur la Figure 2.2-a. Il y a contact si:

$$\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{O_p G_s} \right| < r_s \quad (2.1)$$

$$\text{et } \left| \vec{t}_1 \cdot \overrightarrow{O_p G_s} \right| < r_p \quad (2.2)$$

$$\text{et } \left| \vec{t}_2 \cdot \overrightarrow{O_p G_s} \right| < r_p, \quad (2.3)$$

où  $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$  est un repère lié à la plaque tel que défini sur la Figure 2.2.

Les plaques sont non pesantes, ne sont pas sujettes au principe fondamental de la dynamique et n'interagissent pas entre elles. Seule une force normale de contact  $F_n$  est exercée entre une plaque et une sphère via l'action d'un ressort de rigidité  $k_n$ :

$$F_n = \delta_c k_n \quad \text{avec} \quad \delta_c = (r_s - G_s H) = \left( r_s - \left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{O_p G_s} \right| \right). \quad (2.4)$$

Soit  $\vec{x}$  le vecteur position de la sphère, le vecteur position  $\vec{x}_{int}$  du point d'application de la force d'interaction (ici  $F_n$ ) est donnée par:

$$\vec{x}_{int} = \vec{x} - \left( r_s - \frac{\delta_c}{2} \right) \cdot \vec{n}. \quad (2.5)$$

Bien qu'il soit possible de les définir, les forces de contact tangentielles sont ici inexistantes. La Figure 2.2-b donne une illustration d'une paroi composée d'éléments plaque.

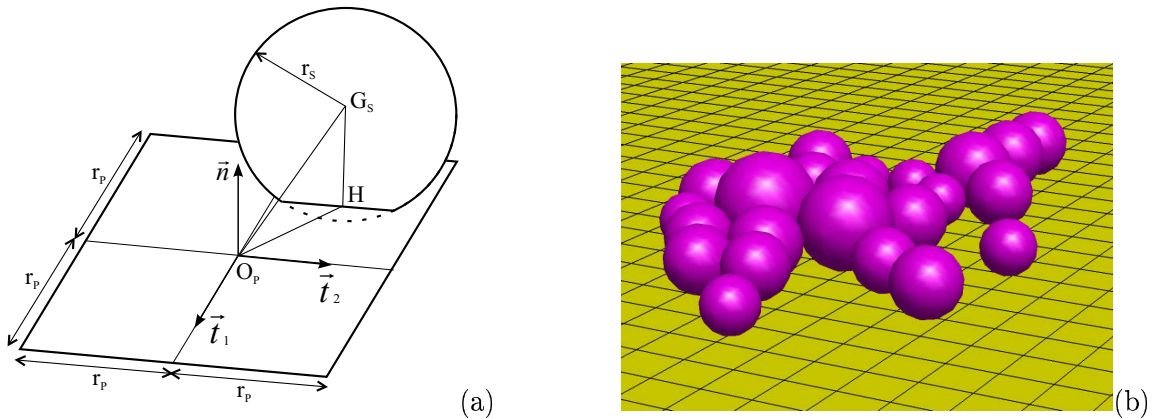


FIG. 2.2 – Représentation schématique de l'intersection entre un élément plaque et un élément sphère (a); vue 3D de sphères posées sur une paroi composée d'éléments plaques.

### 2.2.2.3 Implémentation de l'asservissement en contrainte des parois

Le contrôle de l'état de déformation de l'assemblage granulaire s'effectue directement en imposant la position d'un couple ou de plusieurs couples de parois. Le contrôle de la composante de la contrainte normale à une paroi est légèrement plus compliquée, il est effectué via un algorithme d'asservissement développé en collaboration avec Plassiard [98] et présenté sur la Figure 2.3.

Ici encore nous nous sommes inspiré du fonctionnement de la presse TRITRI du laboratoire 3S dont le principe, dans les grandes lignes, est le suivant: à chaque instant la pression exercée par l'échantillon sur les parois est mesurée, la position des parois est continûment ajustée pour s'approcher au plus près de la pression souhaitée avec une vitesse d'autant plus grande que l'écart entre la pression mesurée et la pression souhaitée est important. La MED nous donne un avantage par rapport à l'expérience: nous pouvons calculer à chaque pas de temps la raideur équivalente  $K_{eq}$  entre la paroi et l'ensemble des grains en contact avec celle-ci. Il suffit de sommer la raideur de chaque contact grain-paroi. Il est ainsi possible d'estimer l'ajustement à effectuer sur la position de la paroi. La procédure proposée ici est similaire à celle utilisée par PFC3D [53]. Les différentes étapes sont présentées sur le schéma de la Figure 2.3 auquel nous ajoutons les remarques ci-dessous.

- La pression de consigne  $P_{cons}$  évolue au cours de la simulation en fonction du chemin de contrainte que l'on souhaite imposer. L'asservissement fonctionne correctement que si les valeurs de  $P_{cons}$  évoluent de manière continue et graduelle. Par exemple, pour effectuer une compression isotrope jusqu'à 100 kPa on veillera à augmenter  $P_{cons}$  de 0 à 100 kPa par petits incréments à chaque pas de calcul.
- Dans le cas qui est le nôtre, l'assemblage granulaire vierge a une forme cubique (Fig. 2.4-c). Il est placé à l'intérieur d'une boîte constituée par des parois elles-mêmes composées d'éléments plaque. Aux cours de la sollicitation de l'assemblage, la boîte se déforme en un parallélépipède rectangle. La pression sur une des faces du parallélépipède est calculée en actualisant à chaque pas la valeur  $S_{paroi}$  égale à l'aire de la paroi interceptée par les quatre autres parois qui lui sont perpendiculaires.  $S_{paroi}$  n'est donc pas la somme des surfaces des éléments plaque.
- $\alpha_{red}$  est un coefficient réducteur défini à l'étape 3 de l'algorithme (Fig. 2.3), il permet d'assurer la stabilité et la convergence de l'algorithme d'asservissement en contrainte. Cependant, nous nous sommes rendus compte que si le chargement est suffisamment lent, c'est-à-dire si  $P_{cons}$  évolue suffisamment lentement, l'utilisation de ce coefficient n'est pas nécessaire. Nous avons opté pour cette dernière option, dans toutes les simulations présentées  $\alpha_{red} = 1$ .

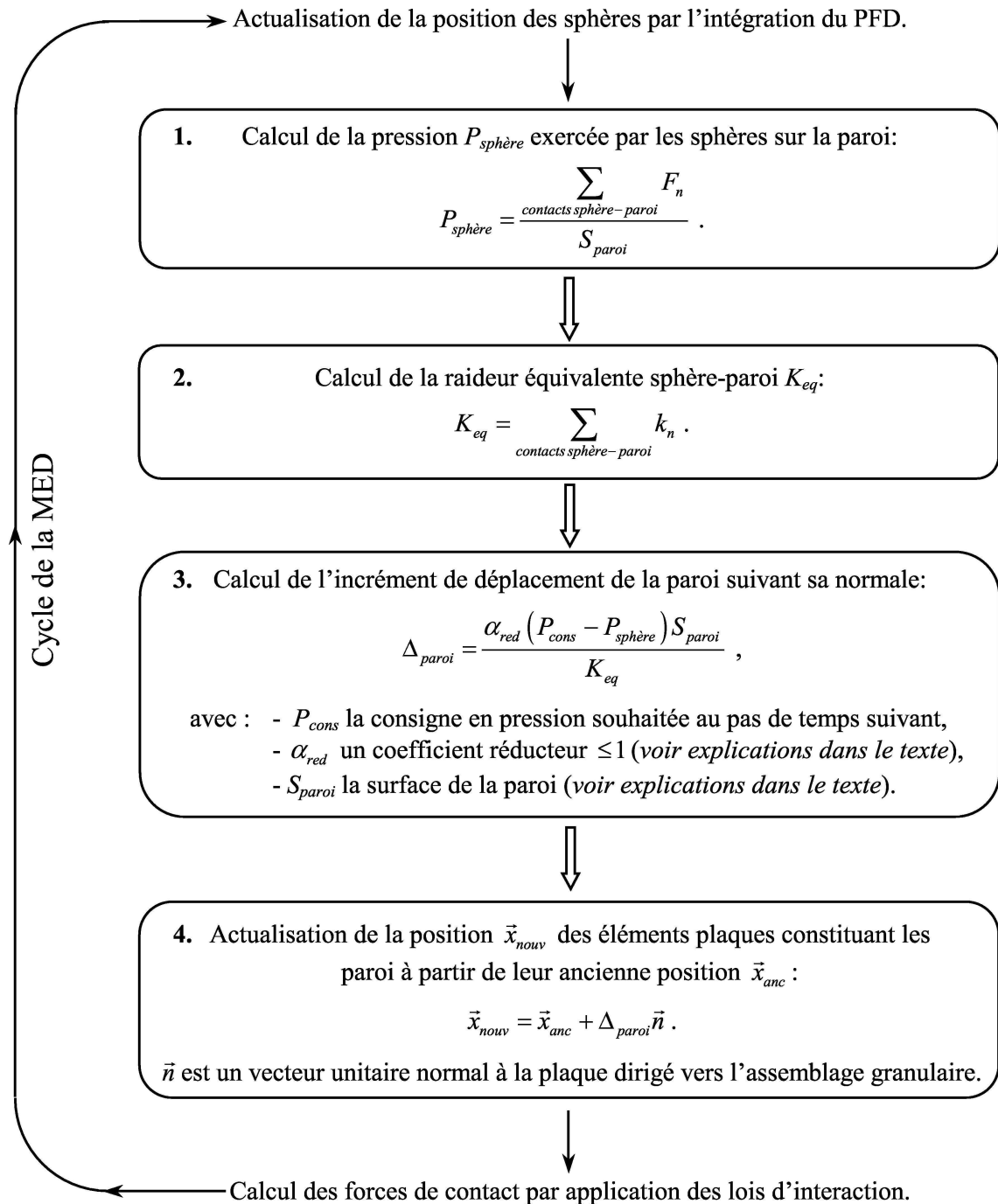


FIG. 2.3 – Algorithme d'asservissement en contrainte d'une paroi, il s'exécute à chaque pas de calcul de la MED.

## 2.3 Développement et validation du modèle

Nous venons d'exposer dans la première partie de ce chapitre la spécialisation qui a été faite du code de calcul. Cette spécialisation permet d'appliquer les sollicitations projetées à l'assemblage granulaire et d'en calculer ses réponses. Dans cette deuxième partie l'attention est portée sur le modèle discret dans son ensemble. On considère désormais le code de calcul avec des assemblages granulaires donnés et des paramètres mécaniques donnés.

La première étape avant l'exécution d'une simulation est la création de l'échantillon numérique. Cette étape fait l'objet de la section suivante. Nous considérons ensuite deux modèles peu différents. Une comparaison des réponses macroscopiques est réalisée entre le premier et un modèle de la littérature. Le deuxième modèle est celui qui a été retenu pour répondre aux objectifs de ce travail de thèse. Dans une dernière section, nous présentons son comportement mécanique sur des chemins triaxiaux axisymétriques drainés et nous nous assurons qu'il vérifie des résultats classiques de la micro-mécanique granulaire.

### 2.3.1 Génération des échantillons numériques

#### 2.3.1.1 Procédure de génération

Le code SDEC contient une procédure de génération d'assemblages de sphères basée sur un algorithme géométrique (Jodrey & Tory [60]) qui a été présenté dans la bibliographie (Sect. 1.5.4.3, p. 39). Toutefois, après plusieurs essais, il s'est avéré que cette méthode géométrique conduit à des assemblages trop lâches ne pouvant supporter une quelconque sollicitation mécanique. De ce fait, nous avons adjoint à l'algorithme géométrique un compactage des assemblages par compression isotrope. Le détail de la procédure de génération des échantillons est donné ci-dessous par ordre chronologique.

1. Création d'un assemblage régulier (cubique faces centrées) de sphères de taille unique et des éléments plaques constituant les conditions aux limites des futures simulations (Fig.2.4-a).
2. Exécution de l'algorithme géométrique implémenté dans SDEC: génération d'un échantillon très lâche respectant une distribution de tailles des grains continue imposée par l'opérateur (Fig.2.4-b).
3. Compression isotrope jusqu'à la densité souhaitée (Fig.2.4-c). Une compression isotrope de faible amplitude risque d'entraîner une densification de l'échantillon en surface et non en profondeur. Pour éviter ce problème l'angle de frottement intergranulaire est fixé à zéro pendant cette phase pour limiter au maximum les effets de voûte. De plus, la combinaison d'une vitesse de déformation plutôt élevée ( $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = 1 \text{ s}^{-1}$ ) et d'une atténuation faible ( $\lambda^a = 0.05$ ) a pour conséquence d'induire à l'assemblage qui est très lâche un régime dynamique collisionnel assurant une réorganisation des grains et une densification de l'assemblage même au cœur de celui-ci. La contrainte mesurée aux frontières de l'assemblage reste quasi-nulle, sauf si l'on s'approche de la densité maximale ce qui n'a pas été notre cas. On enregistre essentiellement de petits pics successifs de pression dus aux collisions grain-paroi.
4. Retour à un état de repos de l'assemblage granulaire sous volume constant. Pour obtenir rapidement une baisse de l'énergie cinétique en dessous du seuil souhaité ( $< 10^{-7} \text{ J}$ )

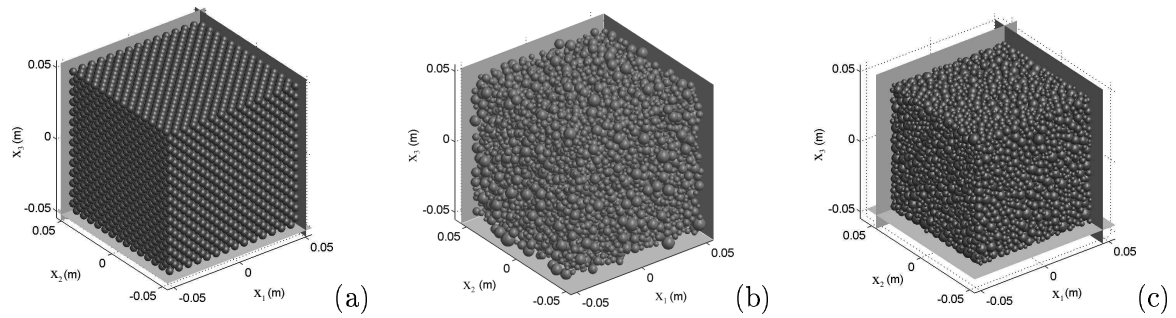


FIG. 2.4 – Principales étapes de la génération d'un échantillon: création d'un assemblage régulier de sphères mono disperses (a), création du désordre par application de l'algorithme géométrique (b), compactage par compression isotrope pour un angle de frottement nul (c).

l'atténuation est fixée à une valeur élevée ( $\lambda^a = 0.5$ ).

5. Compression isotrope jusqu'à la valeur de confinement souhaitée en ayant au préalable fixé l'angle de frottement inter-granulaire à la valeur utilisée pour les simulations.

Cette procédure comporte un nombre plutôt élevé d'étapes et est relativement longue. Les caractéristiques générales des échantillons obtenus sont présentées dans le paragraphe suivant.

### 2.3.1.2 Caractéristiques des échantillons générés

#### Granulométrie

La courbe granulométrique des échantillons créés est présentée sur la Figure 2.5. La distribution de la taille  $D_s$  des sphères est continue et s'étale de 2.0 à 9.5 mm. Pour comparaison, nous donnons sur le même graphique la courbe granulométrique d'un sable d'Hostun: la taille des grains s'étale entre 0.1 et 0.6 mm. La proportion en masse des petits grains par rapport au gros grains est plus importante pour le sable d'Hostun. Dans le cas de la MED, il est difficile d'introduire une proportion importante en masse de petits grains qui impliquerait un nombre important de grains et donc un coût élevé en calcul.

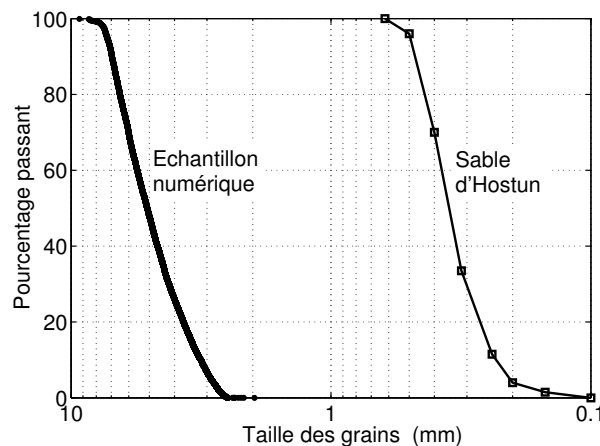


FIG. 2.5 – Courbe granulométrique des échantillons numériques et du sable d'Hostun.



### Isotropie

La Figure 2.6 donne la distribution des orientations de contact d'un échantillon après une compression isotrope. L'orientation des contacts à proximité de la frontière de l'assemblage granulaire est influencée par la présence des parois. Pour s'affranchir de cette influence les contacts à une distance d'une paroi inférieure à 1.5 fois le diamètre moyen des sphères ne sont pas pris en compte. Les échantillons présentent une bonne isotropie des directions de contact.

### Homogénéité

Pour quantifier de manière objective l'homogénéité des échantillons numériques, nous avons adopté une méthode proposée par Combe [20]. Le nombre moyen de contacts par unité de volume (densité de contact) est calculé en fonction de la profondeur dans l'échantillon. Pour ce faire, l'échantillon est découpé en couronnes d'épaisseur égale, telles qu'illustrées sur le schéma de la Figure 2.7. La profondeur moyenne de chaque couronne est donnée par la valeur de  $X_c$ ,  $X_{max}$  représente la frontière de l'échantillon. La Figure 2.8 montre la densité de contact normalisée par rapport à la densité moyenne (calculée sur l'ensemble de l'échantillon) en fonction de la profondeur normalisée  $X_c/X_{max}$ . La courbe est une moyenne effectuée sur 20 échantillons, les barres d'erreur ont pour hauteur deux fois l'écart type. Il s'avère que le coeur des échantillons est un peu moins dense que leur pourtour. A proximité de la frontière des échantillons, la densité de contact décroît à cause de la présence des parois.

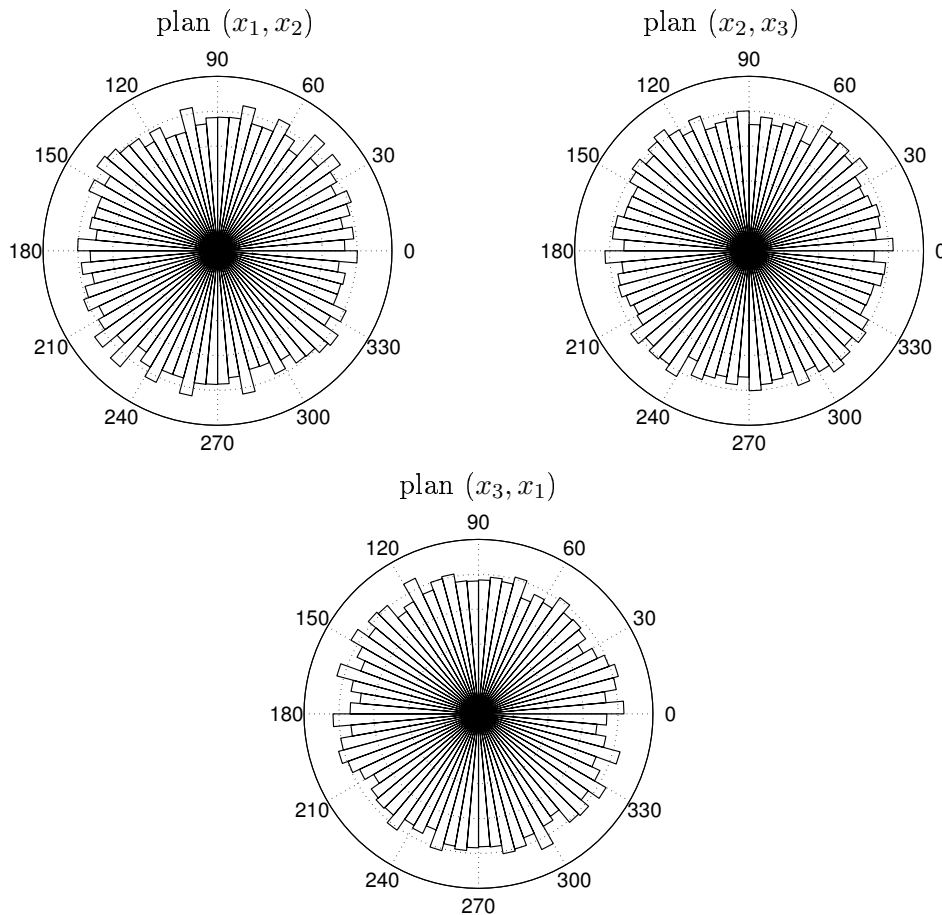


FIG. 2.6 – Distribution des orientations de contact dans les plans  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  et  $(x_3, x_1)$ .

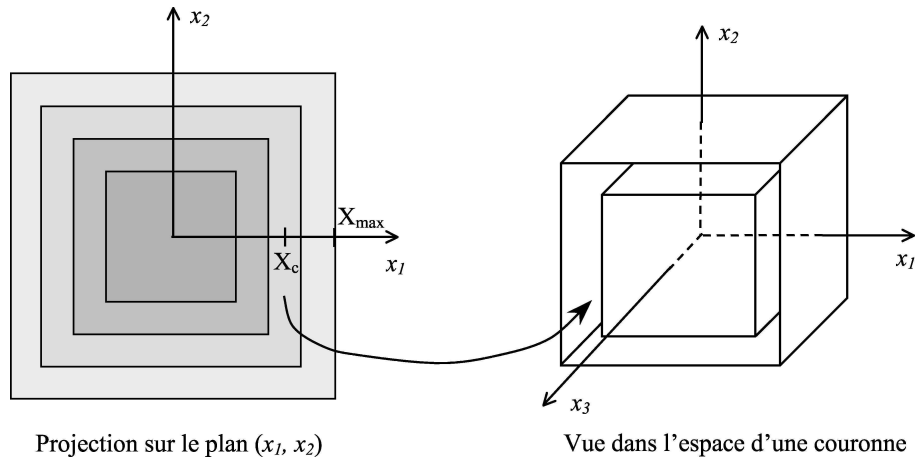


FIG. 2.7 – Découpage des échantillons en couronnes d'épaisseur constante pour le calcul de la densité de contact en fonction de la profondeur  $X_c$ .

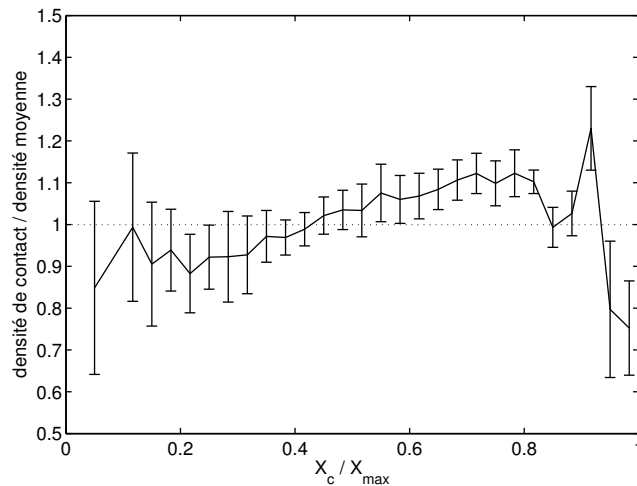


FIG. 2.8 – Moyenne et écart type de la densité de contact normalisée pour chaque couche de contact à une profondeur normalisée  $X_c / X_{max}$  (calculé sur 20 échantillons).

### Dispersion des résultats

Le nombre de grains composant l'échantillon numérique et la reproductibilité de la procédure de génération des échantillons conditionnent la dispersion des réponses à un même chemin de chargement d'échantillons réputés identiques. La Figure 2.9 présente la simulation d'un essai triaxial à 200 kPa de confinement pour 10 échantillons réputés identiques dont les caractéristiques sont les suivantes: indice des vides  $e = 0.708$ ,  $k_n = 3.56 \cdot 10^7 D_s \text{ N.m}^{-1}$ ,  $k_s = 0.42 k_n$  et  $\varphi_c = 35^\circ$ . La dispersion semble être plus importante vis-à-vis de la variation de volume que du déviateur de contrainte. Dans tous les cas nous estimons la dispersion suffisamment faible pour la poursuite de notre étude.

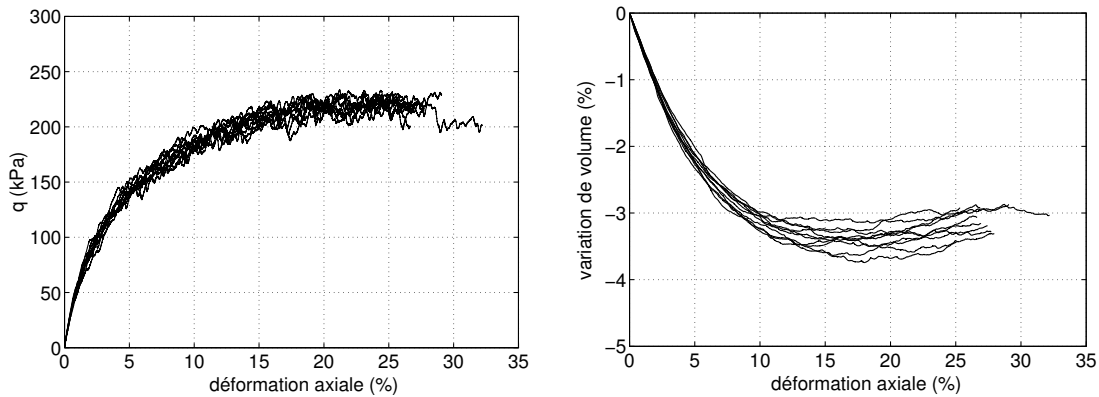


FIG. 2.9 – Simulation d’un même essai triaxial à 200 kPa de confinement sur 10 échantillons numériques réputés identiques.

### 2.3.2 Comparaison avec des essais expérimentaux et un modèle discret de la littérature – pré-validation

Lors de l’implémentation des modifications dans le code SDEC des vérifications d’ordre purement numérique ont été effectuées. Cependant nous avons souhaité juger les performances de l’ensemble formé par le code en lui-même, la procédure de génération des échantillons, les procédures développées pour la simulation des essais triaxiaux (entendus ici au sens large c’est-à-dire l’imposition d’un chargement défini en terme de contraintes et/ou déformations principales), soit tout ce qui donne “vie” au modèle discret.

Pour ce faire nous nous sommes basés sur des essais expérimentaux effectués par Royis & Doanh [108]. Il s’agit d’enveloppes réponse de Gudehus [54] (voir la définition donnée à la Sect. 3.1.2, p. 73) pour un sable d’Hostun dense dont le comportement type pour un chargement triaxial axisymétrique drainé est donné par les auteurs. Calvetti *et al.* [10] ont tenté de reproduire avec la MED (code PFC3D) les enveloppes réponse, le modèle numérique étant au préalable calibré sur le chemin triaxial drainé. Nous avons procédé de même avec notre modèle discret (très proche de celui de Calvetti *et al.* ). Les calibrations et les prédictions des enveloppes réponses par les deux modèles sont comparées entre elles et vis-à-vis des essais expérimentaux.

#### 2.3.2.1 Calibration du modèle discret

La procédure de calibration suivie est résumée ci-dessous.

- La géométrie des modèles de grain (sphères) est très éloignée de celle des grains de sable D’Hostun. De ce fait nous avons choisi une distribution arbitraire de la taille des grains qui est présentée sur le Figure 2.5. De même, nous n’avons pas cherché à reproduire l’indice des vides initial de l’échantillon de sable ( $e = 0,72$ ). La densité de l’échantillon numérique est choisie de telle façon que, pour des paramètres mécaniques initiaux considérés comme moyens, le chemin triaxial drainé simulé s’approche au plus près de celui du sable testé. Ceci nous a conduit à choisir un indice des vides  $e = 0.64$ . Calvetti *et al.* au contraire ont utilisé un échantillon numérique dont la granulométrie et la densité correspondent à celles du sable d’Hostun de l’essai.

- Les paramètres mécaniques ( $k_n$ ,  $k_t$  et  $\varphi_c$ ) sont ensuite ajustés de manière à affiner la calibration. Les paramètres sont calibrés dans l’ordre suivant:  $\varphi_c$ ,  $k_n$  puis  $k_t$  comme le préconise Chareyre [14] (bien que son analyse ait été menée en 2D). Tout comme Calvetti *et al.* [10], nous nous sommes heurtés au problème de la reproduction de l’angle de frottement macroscopique ( $\phi_{lim} = 37^\circ$ ) du sable d’Hostun du fait de la forme sphérique du modèle de grain. A l’instar de Calvetti *et al.* le mouvement des grains en rotation a été bloqué.
- Finalement, étant donné les nouveaux paramètres mécaniques, nous vérifions que la vitesse d’écrasement ainsi que la valeur de l’atténuation utilisée n’influencent pas, ou du moins très faiblement le comportement de l’échantillon numérique. Pour cela, deux simulations sont effectuées, l’une à une vitesse d’écrasement dix fois plus faible que celle utilisée, l’autre avec une atténuation nulle. Cette vérification sera illustrée et détaillée dans le paragraphe suivant au sujet des échantillons finalement retenus pour l’étude de la bifurcation.

Les caractéristiques du modèle discret (dénommé ici “modèle SDEC”) sont présentées dans le Tableau 2.1 et comparées avec celles utilisées par Calvetti *et al.* [10]. La Figure 2.10 présente une comparaison en terme de déviateur de contrainte  $q$  et de déformation volumique  $\varepsilon_v$  entre l’essai triaxial drainé réalisé expérimentalement par Royis & Doanh [108] et les deux modèles numériques. Bien que nous ayons tenté de reproduire au plus près l’essai expérimental et non la simulation qui en a été faite par Calvetti *et al.* le comportement des deux modèles numériques sur ce chemin de chargement est quasiment identique. Sans prendre en compte les paramètres mécaniques ( $k_n$ ,  $k_t$  et  $\varphi_c$ ), les échantillons numériques diffèrent par leur nombre de grains, leur granulométrie<sup>2</sup> et leur densité (Tab. 2.1). Pourtant nous avons rencontré des difficultés identiques que nous n’avons pas su résoudre en conservant une géométrie sphérique des grains. Les deux modèles numériques ne présentent pas un écrouissage suffisamment important et la valeur de l’angle de dilatançe simulée est trop importante. Les valeurs des raideurs normales  $k_n$  semblent cohérentes d’un modèle à l’autre puisque le modèle de Calvetti *et al.* présente la valeur la plus élevée du rapport  $k_n/D_s$  mais est aussi le moins dense. Les angles de frottement intergranulaire  $\varphi_c$  sont proches et seule la valeur du rapport  $k_t/k_n$  diffère. On aperçoit ici le fait que pour une même géométrie de grains il existe plusieurs jeux de paramètres (granulométrie et densité comprises) possibles pour reproduire une même réponse à l’échelle de l’assemblage granulaire.

	Nombre de grains	$D_s$ (mm)	$e$	$k_n/D_s$ (MPa)	$k_t/k_n$	$\varphi_c$ (deg)
Modèle SDEC	10000	2.0 à 9.5	0.64	178	0.42	18.0
Calvetti <i>et al.</i>	3500	0.15 à 0.45	0.72	222 à 667	0.25	19.3

TAB. 2.1 – Comparaison des caractéristiques des modèles numériques après calibration sur le chemin triaxial drainé publié par Royis & Doanh [108].

2. Le rapport du diamètre du plus gros grain sur le plus petit est de 3.0 pour le modèle de Calvetti *et al.* et de 4.75 pour le modèle SDEC.

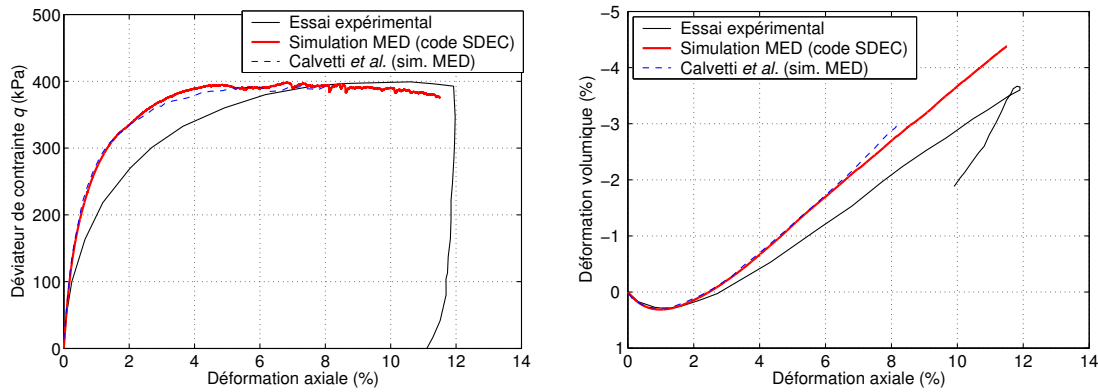


FIG. 2.10 – Essai expérimental de référence (Royis & Doanh [108]) et simulation de l’essai par Calvetti et al. [10] et avec le modèle SDEC.

### 2.3.2.2 Prédiction des enveloppes réponses

Royis & Doanh [108] ont effectué des recherches directionnelles<sup>3</sup> en contrainte pour trois états de contrainte initiaux atteints suite à des compression triaxiales axisymétriques drainées: pour  $q = 0$  kPa (soit après la compression isotrope,  $\sigma_1 = \sigma_3 = 100$  kPa),  $q = 100$  kPa et  $q = 300$  kPa. La norme de l’incrément de contrainte pour chaque recherche directionnelle est  $\|d\sigma\| = 10$  kPa. De manière identique à Calvetti *et al.* (hormis la direction des incréments de contrainte), nous avons simulé les recherches directionnelles avec le modèle SDEC, en respectant les états de contrainte initiaux et la valeur de  $\|d\sigma\|$ . Les directions des incréments de contrainte s’étalent de  $0$  à  $360^\circ$  dans le plan d’axisymétrie des incréments de contrainte, tous les  $5^\circ$  pour  $q = 0$  kPa et tous les  $10^\circ$  pour  $q = 100$  et  $300$  kPa. Les paramètres mécaniques utilisés sont ceux déduits de la procédure de calibration (Tab. 2.1).

La Figure 2.11 montre une comparaison entre les enveloppes réponses<sup>4</sup> obtenues suite aux recherches directionnelles réalisées expérimentalement et celles simulées avec le modèle SDEC et par Calvetti *et al.* [10]. Les deux modèles numériques donnent des enveloppes réponses très proches l’une de l’autre et encore une fois les défauts constatés vis-à-vis des données expérimentales sont identiques.

- Pour l’état de contrainte initial isotrope ( $q = 0$  kPa), les enveloppes réponses expérimentales et simulées sont des ellipses centrées par rapport à l’origine du repère dont les axes principaux correspondent entre eux. Cependant, les modèles discrets surestiment de manière importante la rigidité pour des directions voisines des directions de déformation déviatoire, que ce soit en compression ou en extension.
- Pour l’état initial caractérisé par  $q = 100$  kPa, les axes principaux des enveloppes réponses (expérimentales et simulées) correspondent à peu près. Toutefois, comme précédemment, la rigidité des modèles surestime celle du sable autour de la direction de déformation déviatoire en compression, et la sous-estime autour de la direction de déformation déviatoire en extension.
- Pour l’état de contrainte initial le plus élevé ( $q = 300$  kPa), la prédiction des modèles est bonne. La rigidité de l’échantillon de sable est correctement estimée quelque soit la direction de chargement. La forme des enveloppes réponses (expérimentales et simulées)

3. La définition d’une recherche directionnelle est donnée à la Sect. 3.1.2, p. 73.

4. La définition d’une enveloppe réponse est donnée à la Sect. 3.1.2, p. 73.

témoignent de l'existence d'une règle d'écoulement et les modèles prédisent correctement la direction de l'écoulement plastique (Calvetti *et al.* [10]).

Darve & Laouafa [36] ont cherché à décrire ces mêmes enveloppes réponses expérimentales avec le modèle INL2 (Darve [31], Darve *et al.* [34]). Le modèle INL2 est une relation constitutive phénoménologique appartenant à la famille des relations incrémentalement non linéaires du second ordre (une présentation en est faite dans la Sect. 3.3.3.1, p. 101). La description des enveloppes réponses est beaucoup plus précise avec le modèle INL2 qu'avec les modèles discrets présentés ici. Nous supposons que les limites que nous avons atteintes avec le modèle discret sont directement liées à la forme sphérique des grains utilisés.

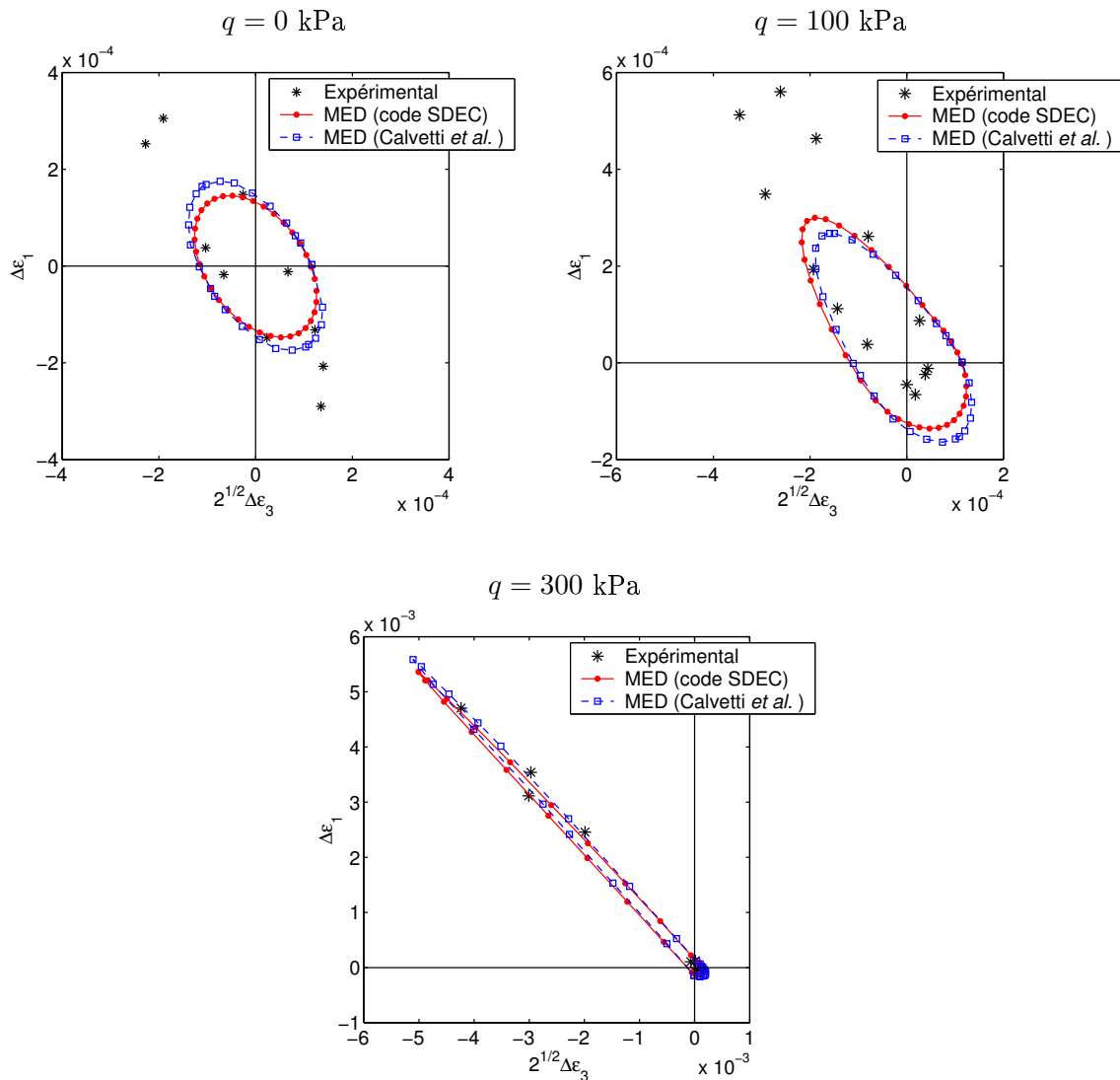


FIG. 2.11 – Comparaison des enveloppes réponses expérimentales (Royis & Doanh [108]) et simulées avec le modèle SDEC et par Calvetti *et al.* [10].

### 2.3.2.3 Validation des performances du modèle et des procédures de simulation

Nous venons de présenter une comparaison entre le modèle discret, entendu ici au sens large (forme de l'échantillon numérique, nombre de grains, présence d'éléments plaques, mesure et contrôle des états de contrainte-déformation...), que nous avons développé avec un modèle discret relevé dans la littérature. Cette comparaison montre que les deux modèles discrets fournissent des résultats très proches et présentent les mêmes défauts vis-à-vis du comportement mécanique d'un sable d'Hostun dense déduit de l'expérience ou prédit par le modèle INL2. Certes, ces défauts posent un problème pour la prédiction du comportement d'un tel matériau. Cependant, ils nous permettent d'affirmer que le comportement du modèle SDEC et de l'ensemble des procédures appliquées pour mener à bien les simulations (comme cela peut être le cas en expérimental) sont sains en regard du modèle discret de comparaison, à moins que des problèmes identiques soient présents dans les deux modèles ! Par ailleurs, notons que la granulométrie (bien que nous ne connaissions pas précisément celle employée par Calvetti *et al.* [10]) ne semble pas avoir d'importance majeure dans le comportement des modèles étudiés.

## 2.3.3 Présentation et validation du modèle retenu pour l'étude de la bifurcation homogène

### 2.3.3.1 Motivation du choix du type de modèle de grain

La comparaison, dans la partie précédente, entre le comportement mécanique incrémental (enveloppes réponses) d'un sable d'Hostun et sa simulation par le modèle discret SDEC nous amène au constat suivant: la prédiction reste d'une manière générale qualitative et non quantitative malgré l'usage d'un artifice numérique (le blocage des rotations des grains).

Cet artifice permet de rapprocher certains aspects du comportement du modèle discret à l'échelle de l'assemblage granulaire de celui du sable, mais engendre un mouvement des grains non dicté par les lois de la physique. Ce dernier point n'est pas acceptable dans le cadre de ce travail puisque nous souhaitons justement utiliser des informations fournies par la MED à l'échelle des grains et des contacts. Une solution plus "physique" serait d'utiliser des grains de forme non sphérique (ellipsoïde, polyèdre, assemblage de grains) pour se rapprocher de la géométrie d'un grain de sable. Par ailleurs, l'objectif est de garder un modèle aussi simple que possible pour ne pas compliquer, dans un premier temps, les analyses qui en découlent.

Par conséquent, le choix a été fait de conserver des grains de forme sphérique pour permettre la comparaison avec des études analytiques portant sur des assemblages de grains de la même forme. Nous étudierons donc un modèle discret qui reproduit qualitativement mais non quantitativement le comportement d'un matériau granulaire de type sable en s'affranchissant d'une inhibition non physique des rotations des grains.

### 2.3.3.2 Caractéristiques du modèle retenu

Les caractéristiques du modèle discret retenu pour l'étude du lien entre le signe du travail du second ordre et la rupture dans les milieux granulaire sont présentées dans le Tableau 2.2. Ce modèle est décliné en trois échantillons numériques qui diffèrent principalement par leur

Nombre de grains	Densité des grains (kg/m <sup>3</sup> )	$D_s$ (mm)	$k_n/D_s$ (MPa)	$k_t/k_n$	$\varphi_c$ (deg)	$\kappa$ ( $p = 100$ kPa)
10000	3000	2.0 à 9.5	356	0.42	35.0	3560

TAB. 2.2 – *Caractéristiques communes aux échantillons numériques E1, E2 et E3.*

	Désordre n°	$e$	$z$
<i>E1</i>	1	0.618	4.54
<i>E2</i>	2	0.633	4.45
<i>E3</i>	1	0.693	4.42

TAB. 2.3 – *Caractéristiques propres à chaque échantillon numérique E1, E2 et E3, sous un confinement isotrope de 100 kPa. La colonne “désordre” indique le numéro de la procédure de désordre dont sont issus les échantillons.*

densité. Les spécificités de chaque échantillon sont données dans le Tableau 2.3. Notons que les simulations sont réalisées sans gravité.

### Granulométrie

La granulométrie est toujours celle donnée à la Figure 2.5.

### Rigidité des contacts

Nous avons conservé les valeurs de  $k_n$  et  $k_t$  fixées par défaut avant leur calibration sur le comportement du sable d’Hostun dense (voir section précédente). La variable adimensionnelle  $\kappa$  est utilisée pour comparer le niveau de rigidité de différents assemblages granulaires sous une pression de confinement  $p$  donnée. En trois dimensions et pour une loi de contact élastique linéaire  $\kappa$  est défini par:

$$\kappa = \frac{k_n}{\langle D_s \rangle p}, \quad (2.6)$$

où  $\langle D_s \rangle$  est le diamètre moyen des grains. L’assemblage tridimensionnel étudié par Kishino [65] présente un niveau de rigidité  $\kappa \simeq 10000$  sous 100 kPa de confinement, pour celui de Calvetti *et al.* [10])  $\kappa \simeq 3300$ .  $\kappa$  peut également être calculé pour une loi de contact de Hertz: un assemblage de billes dont les propriétés mécaniques sont celles du verre ( $E = 70$  GPa,  $\nu = 0.3$ ) présente une valeur de  $\kappa \simeq 6000$  pour  $p = 100$  kPa. Finalement, Combe [20] a relevé dans la littérature des valeurs de  $\kappa$  dans des cas bidimensionnels s’étalant de 500 à 40000. La valeur de  $\kappa = 3560$  que nous utilisons apparaît donc comme une valeur moyenne.

### Angle de frottement intergranulaire

La valeur de l’angle de frottement inter-granulaire  $\varphi_c = 35^\circ$  permet de simuler une résistance mécanique “raisonnable” malgré la forme sphérique des grains. L’angle de frottement limite  $\phi_{lim}$  de l’assemblage granulaire est compris entre  $21.2^\circ$  et  $24.7^\circ$  en fonction de la densité de l’échantillon (Fig. 2.15).

### Densité et nombre de coordination

La densité des échantillons a été choisie de manière à obtenir un échantillon au comportement dilatant *E1* (Fig. 2.12-gauche) et un échantillon au comportement contractant *E3* (Fig. 2.13-gauche). Dans le cadre de notre étude nous avons également besoin d’un échantillon présentant une tendance à la liquéfaction statique sous une sollicitation triaxiale à volume constant (non drainé) (voir Chapitre 4). Bien que le comportement de l’échantillon *E3* soit contractant en conditions drainées il ne présente pas un comportement satisfaisant à volume constant: sa



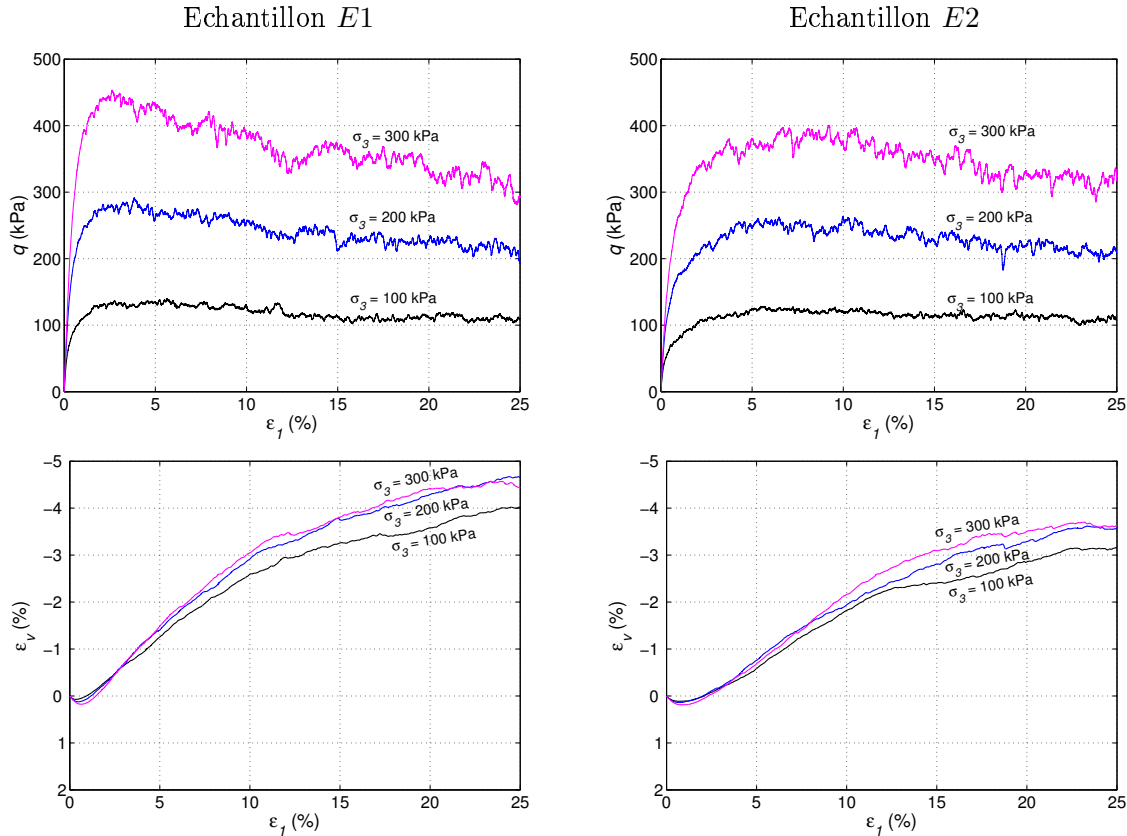


FIG. 2.12 – Simulations d'essais triaxiaux drainés à  $\sigma_3 = 100, 200, 300$  kPa: échantillon *E1* à gauche, échantillon *E2* à droite.

résistance quasi inexistante ne nous permet pas d'effectuer les simulations désirées. Nous attribuons ce résultat à la forme sphérique des grains ainsi qu'au faible nombre de coordination des assemblages. À l'inverse, l'échantillon *E1* ne tend pas à se liquéfier (Fig 2.14). Par conséquent, la densité de l'échantillon *E2* a été choisie vis-à-vis de son comportement mécanique à volume constant (Fig. 2.14). Le comportement de l'échantillon *E2* est également présenté sous conditions drainées à la Figure 2.12-droite. On remarque que le modèle discret à la densité de l'échantillon *E2* traduit une tendance à la liquéfaction à volume constant alors que son comportement est dilatant en conditions drainées.

Notons que le comportement du modèle discret est particulièrement sensible à la densité: pour une faible augmentation de l'indice des vides le modèle passe d'un comportement très dilatant à un comportement contractant. Le nombre de coordination  $z$  est calculé sans tenir compte des grains flottants<sup>5</sup>, soit des grains comportant moins de deux contacts<sup>6</sup>. Le Tableau 2.3 indique des valeurs de  $z$  faibles par rapport à celles que l'on peut trouver dans la littérature. Malgré cette caractéristique particulière à ce modèle discret nous verrons, dans la suite de ce chapitre (Sect. 2.3.3.4) et dans le prochain (Chapitre 3), que le modèle vérifie des résultats maintenant bien admis pour les milieux granulaires.

Les échantillons *E1* et *E3* sont issus du même assemblage de grains (les grains occupent des positions identiques) avant l'étape de compactage par compression isotrope (étape n° 3 de la

5. La simulation s'effectue sans gravité.

6. Le nombre de grains ne comportant qu'un seul contact est négligeable et n'influe pas sur le nombre de coordination.

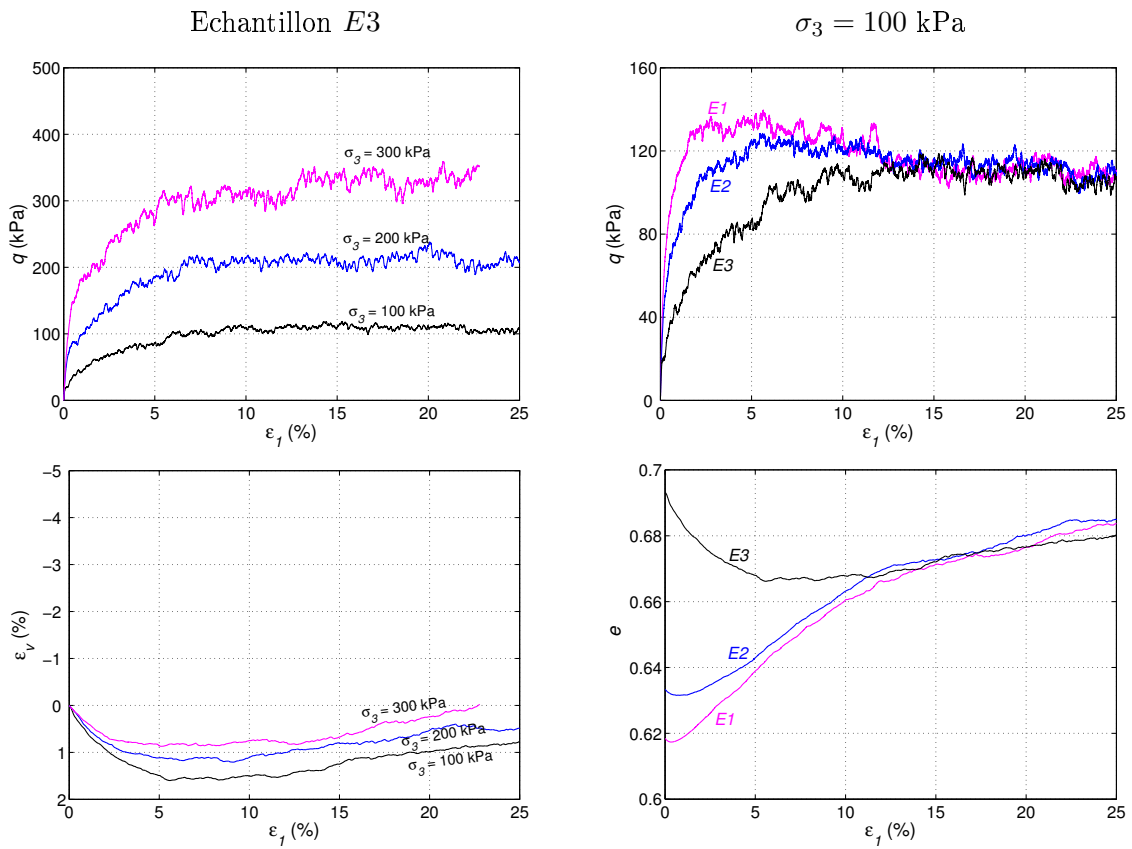


FIG. 2.13 – A gauche: Simulations d'essais triaxiaux drainés à  $\sigma_3 = 100, 200, 300$  kPa sur l'échantillon *E1*. A droite: influence de l'indice des vides pour une pression de confinement de 100 kPa.

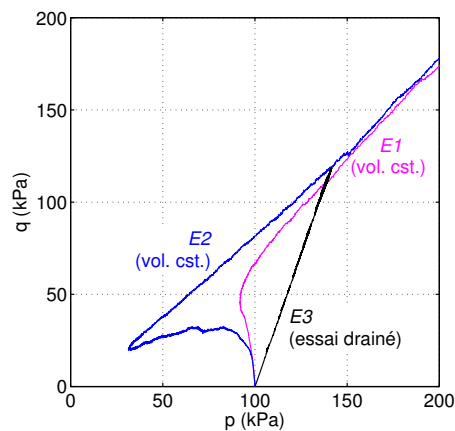


FIG. 2.14 – Enveloppes de rupture dans le plan de Mohr pour les échantillons *E1, E2* et *E3*.

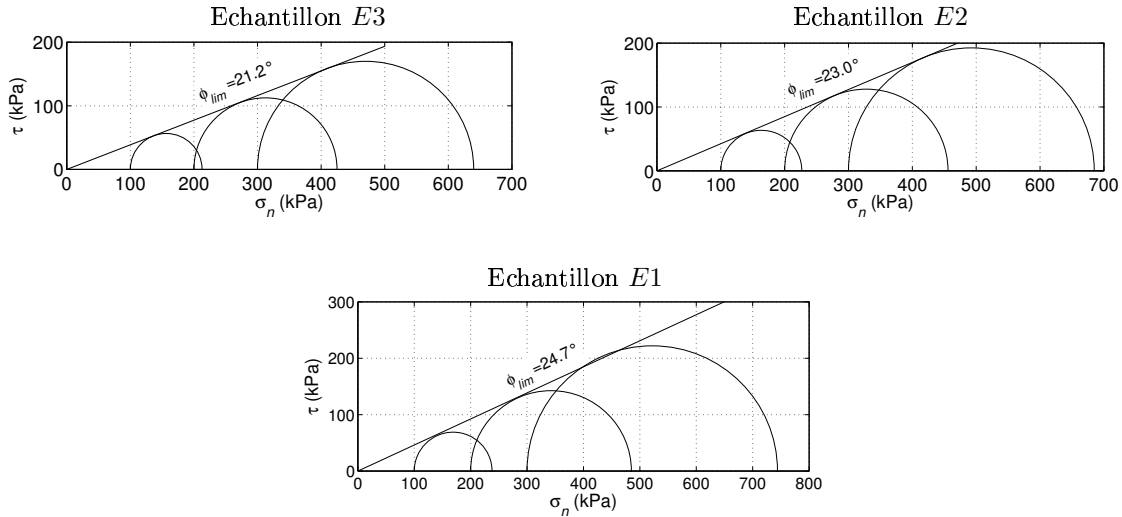


FIG. 2.15 – Enveloppes de rupture dans le plan de Mohr pour les échantillons  $E1$ ,  $E2$  et  $E3$ .

procédure de génération des échantillons, cf. Sect. 2.3.1.1, p. 52). Par contre, l'échantillon  $E2$  est issu d'un désordre différent de celui pratiqué pour les échantillons  $E1$  et  $E3$ : avant l'étape de compactage la granulométrie et la densité des assemblages granulaire sont très proches mais les grains occupent des positions différentes. L'étude d'échantillons issus de désordres différents, bien qu'ils n'aient pas la même densité, nous permettra dans une certaine mesure de ce faire une idée sur la reproductibilité des résultats.

### Remarques

- Une comparaison entre le modèle discret et le comportement général des sables nous amène à constater quelques particularités. Les échantillons  $E1$  et  $E2$ , qui sont dilatants, présentent un adoucissement qui s'accroît avec la pression de confinement (Fig 2.12). A l'opposé, un sable à une densité fixée a un adoucissement qui diminue avec l'augmentation de la pression de confinement. Il en est de même en ce qui concerne l'angle de dilatance: celui-ci augmente légèrement avec la pression de confinement pour le modèle, alors qu'il décroît pour un sable. Nous attribuons ce comportement au fait que le comportement du modèle est, comme nous l'avons déjà dit, particulièrement sensible à la densité, or cette dernière augmente avec la pression de confinement. Par exemple, pour l'échantillon  $E2$ ,  $e$  passe de 0.633 pour  $p = 100$  kPa à 0.628 pour  $p = 300$  kPa, cette diminution de l'indice des vides peut paraître faible pour un sable mais ne l'est pas vis-à-vis du modèle discret (voir l'étalement des valeurs de  $e$  dans le Tableau. 2.3). Pour la même raison, on peut expliquer la contractance de l'échantillon  $E3$  qui diminue lorsque la pression de confinement augmente.
- Quelque soit l'échantillon ( $E1$ ,  $E2$  ou  $E3$ ) nous n'avons pas réussi à mettre en évidence des champs de déformation organisés au cours de simulations d'essais triaxiaux drainés: les champs de rotations des grains sont plutôt hétérogènes sans être organisés. De la même façon une procédure d'homogénéisation des déformations donne des champs de déformation hétérogènes sans être organisés, ceci que l'état de contrainte se situe avant le pic de  $q$ , au pic de  $q$  ou après. On pourrait pourtant s'attendre pour les échantillons les plus denses ( $E1$  et  $E2$ ) à observer une localisation des déformations sous forme de bande de cisaillement. Les résultats obtenus sont peut-être liés à la combinaison d'un

nombre peu élevé de grains dans les échantillons (10000, soit  $\simeq 22$  grains dans la largeur de l'échantillon) et de l'utilisation de parois rigides.

- La Figure 2.13 montre une superposition des simulations des essais triaxiaux drainés à 100 kPa de confinement pour les trois échantillons  $E1$ ,  $E2$  et  $E3$ , c'est-à-dire pour trois densités différentes. Pour de grandes déformations l'angle de frottement et l'indice des vides tendent vers une valeur unique quelque soit la densité. Comme nous n'avons pas pu mettre en évidence des champs de déformations organisés, on peut supposer que le comportement du modèle discret reste rhéologique même après le pic de  $q$  et qu'un état critique est atteint pour de grandes déformations.
- Sur la Figure 2.15 sont tracées les enveloppes de ruptures du modèle suivant les différentes densités. Pour les échantillons  $E2$  et  $E3$  l'enveloppe est une droite qui tangente parfaitement les cercles de Mohr. Pour  $E1$  l'angle de frottement limite varie légèrement suivant la pression de confinement. Cependant, une enveloppe de rupture rectiligne tangente de manière satisfaisante les cercles de Mohr.

### 2.3.3.3 Vérification de l'influence de la vitesse de sollicitation et de l'amortissement

Les influences de la vitesse de chargement et de la valeur du coefficient d'atténuation  $\lambda^a$  ont été étudiées lors de la prise en main du code SDEC avec des valeurs des paramètres mécaniques différentes de celles données ici. Les valeurs de  $\dot{\varepsilon}_1 = 0.5 \text{ s}^{-1}$  et  $\lambda^a = 0.05$  utilisées pour l'ensemble des simulations exposées dans ce mémoire proviennent de cette étude préalable (sauf mention contraire). Nous présentons ci-après une vérification de l'influence de ces paramètres sur le comportement du modèle pour un chemin de chargement triaxial drainé à 100 kPa de confinement.

Pour  $\dot{\varepsilon}_1 = 0.5 \text{ s}^{-1}$  le taux de déformation réduit (Sect. 1.5.4.4, p. 41) est de  $I = 6.9 \cdot 10^{-4}$ . Cette valeur de  $I$  est inférieure à  $10^{-2}$  qui semble constituer la limite du chargement en mode quasi-statique.

La Figure 2.16 montre les résultats de trois simulations d'un même essai triaxial (échantillon  $E1$ ). Les trois cas correspondent aux valeurs suivantes de  $\dot{\varepsilon}_1$  et  $\lambda^a$ :

- cas 1,  $\dot{\varepsilon}_1 = 0.5$  et  $\lambda^a = 0.05$  (valeurs à priori retenues),
- cas 2,  $\dot{\varepsilon}_1 = 0.05$  et  $\lambda^a = 0.05$  (vitesse de chargement dix fois inférieure à la précédente),
- cas 3,  $\dot{\varepsilon}_1 = 0.5$  et  $\lambda^a = 0.0$  (pas d'amortissement).

Chareyre [14] a montré, dans un cas bidimensionnel que l'effet de la vitesse sur l'angle de frottement limite est d'autant plus important que la valeur de  $\lambda^a$  est grande. Il semble que la tendance soit la même pour notre modèle puisque les simulations dans les cas 2 et 3 sont presque identiques alors que la résistance limite (pic de  $q$ ) du modèle est très légèrement accrue dans le cas 1. A grande déformation la simulation dans le cas 1 prévoit une augmentation de volume plus importante que celle dans les cas 2 et 3.

Cependant, nous nous intéressons, dans le cadre de ce travail, au comportement du modèle entre l'état isotrope et le pic du déviateur de contrainte  $q$  (soit  $\varepsilon_1 < 5 \%$ ). L'influence des valeurs utilisées pour  $\dot{\varepsilon}_1 = 0.5$  et  $\lambda^a = 0.05$  est négligeable dans cet intervalle, elles sont donc conservées. Une valeur non nulle de  $\lambda^a$  permettra notamment d'accélérer l'atteinte d'un état de contrainte-déformation à l'équilibre quasi-statique.

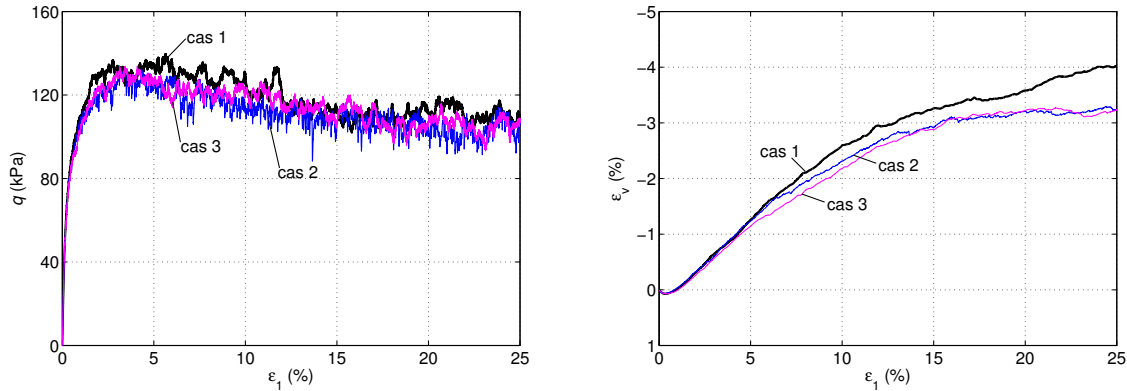


FIG. 2.16 – Vérification de l'influence de la vitesse de chargement et de l'atténuation sur un essai triaxial drainé (échantillon  $E1$ ) à 100 kPa de confinement. Cas 1:  $\dot{\epsilon}_1 = 0.5$  et  $\lambda^a = 0.05$ ; cas 2:  $\dot{\epsilon}_1 = 0.05$  et  $\lambda^a = 0.05$ ; cas 3:  $\dot{\epsilon}_1 = 0.5$  et  $\lambda^a = 0.0$ .

#### 2.3.3.4 Validation du modèle à l'échelle microscopique

Etant donné le choix qui a été fait à la Section 2.3.3.1, il n'est plus possible de valider le comportement mécanique du modèle discret vis-à-vis de celui d'un matériau réel de type sable. Toutefois, il paraît important de confronter notre modèle et les informations que l'on peut en tirer à des résultats de la littérature. Il s'agit ainsi d'une validation du modèle par positionnement de celui-ci dans le contexte actuel de la modélisation numérique discrète. Pour ce faire, nous nous sommes intéressés à la vérification de la description biphasique des milieux granulaires étudiée par Radjaï et collaborateurs [100; 103; 102; 101; 99]. Cette description biphasique et les caractéristiques qui y sont liées ont été choisies comme références car elles nous semblent constituer une base solide du fait qu'elles sont valables aussi bien en deux dimensions qu'en trois dimensions et qu'elles ont été vérifiées avec la Méthode des Eléments Discret et celle de la Dynamique des Contacts [101; 99].

Considérons l'échantillon  $E1$  à un état d'équilibre atteint après une sollicitation triaxiale axisymétrique sous un confinement de 200 kPa jusqu'à une valeur de  $q = 70$  kPa (soit  $q/p = 0.31$ ). Les Figures 2.17-a et -b présentent la densité de probabilité  $P_n$  et  $P_t$  des forces de contact normales et tangentielles  $F_n$  et  $F_t$  normalisées par rapport à leur moyenne respective  $\langle F_n \rangle$  et  $\langle F_t \rangle$ . Les densités de probabilité  $P_n$  et  $P_t$  sont presque confondues et suivent des lois différentes suivant que la force de contact (normale ou tangentielle) est supérieure ou inférieure à la moyenne des forces (normales ou tangentielles). On peut d'ores et déjà mettre en évidence deux types de forces de contact suivant qu'elles appartiennent à la phase forte,  $F_{nt} > \langle F_{nt} \rangle$ , ou à la phase faible,  $F_{nt} < \langle F_{nt} \rangle$ ,  $F_{nt}$  étant indifféremment une force de contact normale ou tangentielle.

Comme l'ont montré Radjaï *et al.* [100],  $P_n$  et  $P_t$  sont approximées par une loi exponentielle du type  $e^{b(1-F_{nt}/\langle F_{nt} \rangle)}$  si  $F_{nt} > \langle F_{nt} \rangle$  (Fig. 2.17-a) et une loi puissance du type  $(F_{nt}/\langle F_{nt} \rangle)^a$  si  $F_{nt} < \langle F_{nt} \rangle$  (Fig. 2.17-b). Dans le cas présent,  $b = 1.5$  et  $a = -0.05$  que se soit pour  $P_n$  et  $P_t$ . Ces coefficients dépendent de la valeur du déviateur appliqué, par exemple pour  $q = 208$  kPa (soit  $q/p = 0.77$ ) nous trouvons  $b = 1.1$  et  $a = -0.2$ . Ils restent cependant en accord avec les résultats obtenus par Radjaï *et al.* [100] ( $b = 1.4$  et  $a = -0.3$  pour  $P_n$  et  $b = 1.0$  et  $a = -0.5$  pour  $P_t$ ).

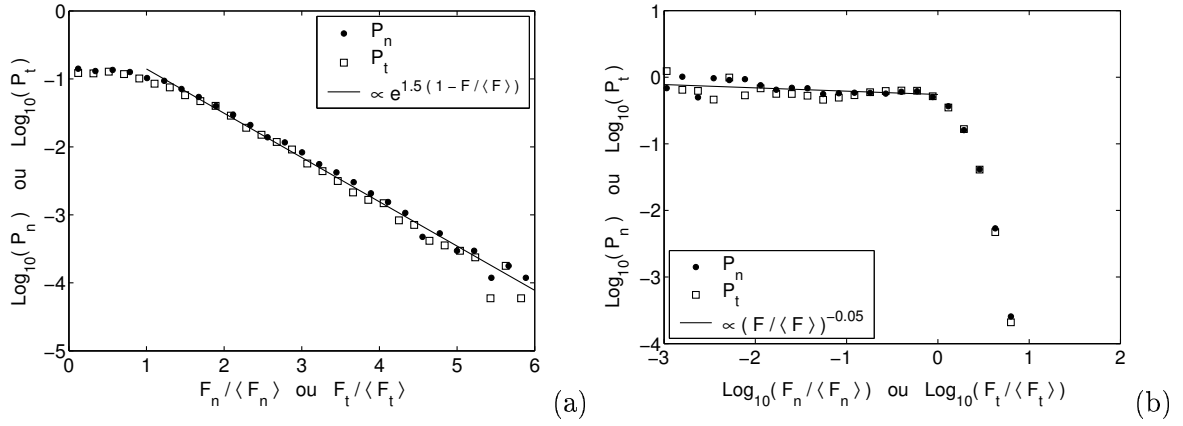


FIG. 2.17 – Densité de probabilité  $P_n$  et  $P_t$  des forces normales et tangentielles normalisées  $F_n/\langle F_n \rangle$  et  $F_t/\langle F_t \rangle$ : tracé semi-logarithmique (a) et log-log (b).

Afin d’appréhender le rôle mécanique joué par les phases faible et forte un tenseur de contrainte partiel  $\sigma(\xi)$  est considéré.  $\sigma(\xi)$  est associé uniquement aux contacts dont la force normale  $F_n$  est inférieure à un seuil égal à  $\xi \langle F_n \rangle$ . Pratiquement, le tenseur  $\sigma(\xi)$  est calculé en restreignant la formule d’homogénéisation des contraintes (Love [77], Weber [126]) donnée ci-dessous (Eq. 2.7) aux contacts vérifiant  $F_n < \xi \langle F_n \rangle$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{contacts} F_i l_j \quad (2.7)$$

avec:

- $V$  le volume total de l’assemblage granulaire,
- $F_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de la force de contact,
- $l_j$  la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur branche joignant les centres des grains en contact.

Nous notons  $\sigma_1(\xi)$ ,  $\sigma_2(\xi)$  et  $\sigma_3(\xi)$  les valeurs principales du tenseur de contrainte  $\sigma(\xi)$ . Sur la Figure 2.18 sont représentés les rapports  $[\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)]/p$  et  $[\sigma_1(\xi) - \sigma_3(\xi)]/p$  en fonction de  $\xi$ . La valeur du rapport  $q/p$  reste proche de zéro tant que les seuls contacts pris en compte appartiennent à la phase faible ( $\xi < 1$ ). Seuls les contacts appartenant à la phase forte ( $\xi > 1$ ) participent à la reprise de la partie déviatoire du tenseur des contraintes. Pour des valeurs élevées de  $\xi$  on vérifie bien que la valeur du rapport  $q/p$  calculé par homogénéisation tant vers celui “mesuré” aux frontières de l’échantillon soit  $q/p = 0.31$ . Ces résultats sont identiques à ceux publiés par Radjaï *et al.* [99].

Pour finir nous nous attardons sur la distribution des orientations de contact appartenant respectivement aux phases forte et faible. Les résultats sont d’autant plus probants que le rapport  $q/p$  est élevé, c’est pourquoi nous considérons un état d’équilibre caractérisé par  $q/p = 0.77$ . La Figure 2.19 montre la distribution des orientations de contact dans le plan  $(x_1 x_2)$ . La compression triaxiale a été effectuée suivant l’axe  $x_1$ . La majorité des contacts forts sont alignés parallèlement à la direction de compression et l’anisotropie de la texture est bien marquée. En ce qui concerne les contacts faibles bien que l’anisotropie soit moins remarquable, une petite majorité des contacts est dirigée suivant une direction perpendiculaire à l’axe de compression. Nous ne reprendrons pas ici les conclusions que l’on peut déduire de ces observations mais notons une fois encore que ces résultats sont typiques de ceux obtenus par

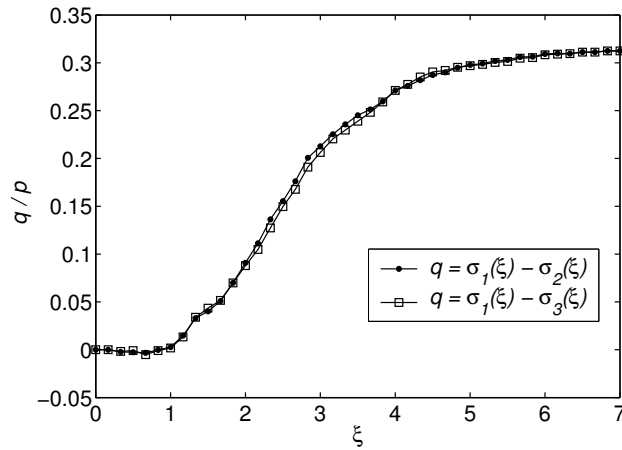


FIG. 2.18 – Valeur du rapport  $q/p$  où  $q$  est déduit uniquement des contacts vérifiant  $F_n < \xi \langle F_n \rangle$

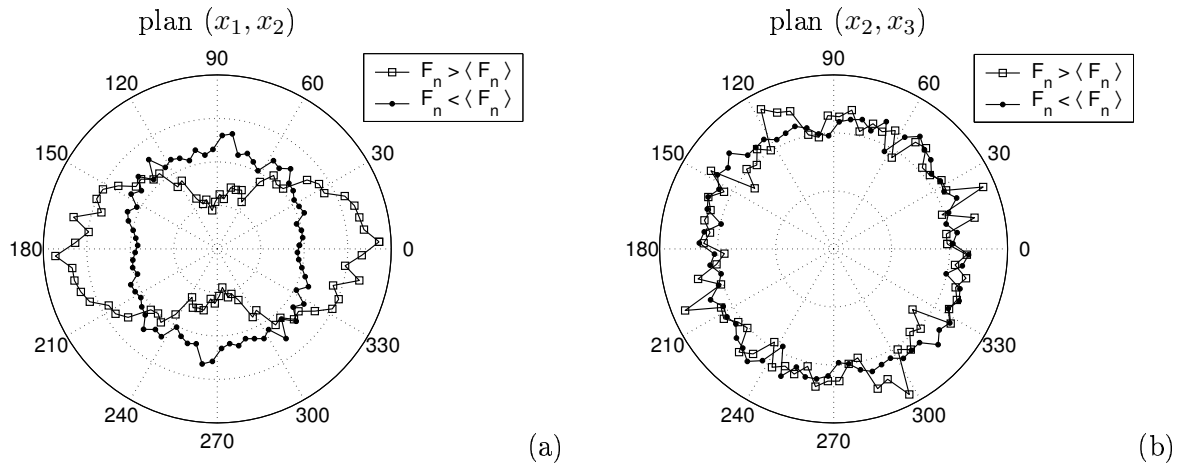


FIG. 2.19 – Distribution des orientations de contact suivant leur appartenance à la phase faible ou forte;  $x_1$  est la direction de compression.

Radjaï *et al.* [103]. Dans le plan  $(x_2, x_3)$ , normal à la direction de compression, les textures correspondant respectivement aux contacts forts et faibles sont sensiblement identiques et restent isotropes. En effet, l'essai triaxial étant axisymétrique, la texture de l'échantillon tend vers une orthotropie de révolution.

En reprenant quelques points des analyses effectuées par Radjaï et collaborateurs nous avons montré que le modèle discret destiné à l'étude de la bifurcation vérifie bien la description biphasique d'un milieu granulaire. La frontière entre contacts forts et contacts faibles est marquée par la force moyenne et la proportion de contacts faibles reste à peu près constante quelque soit l'état de contrainte (environ 60%).

## 2.4 Conclusion

Le dernier modèle présenté, avec les échantillons  $E1$ ,  $E2$  et  $E3$  compactés chacun à une densité différente, nous permet de simuler des comportements contractant ou dilatant dans des conditions drainées et non drainées. Toutes les simulations qui suivront dans ce mémoire ont été effectuées à partir de ce modèle.

Les choix qui nous ont conduit à l'utilisation d'un tel modèle, classique parmi ceux employant la MED, relèvent d'un compromis entre les différents souhaits formulés vis-à-vis de la description du comportement à l'échelle de l'assemblage granulaire (macroscopique); à l'échelle des contacts (microscopique); et vis-à-vis des possibilités de comparaison avec des développements analytiques. Les premiers résultats de simulations que nous avons donnés, portant sur des essais classiques de la mécanique des sols, montrent que le modèle respecte qualitativement le comportement macroscopique d'un sable. Il semble toutefois que la sensibilité de l'indice des vides du modèle à la pression moyenne soit accrue par rapport à celle d'un sable. Ce point sera éclairci dans le prochain chapitre. Le modèle vérifie également à l'échelle microscopique une description statistique robuste des forces de contact.

Après ce chapitre introductif sur le modèle numérique discret qui est notre principal outil de travail, nous allons aborder et traiter la problématique qui a fait l'objet de ce travail de thèse dans les chapitres suivants.





## CHAPITRE 3

---

Analyse du comportement incrémental du modèle

---

### 3.1 Introduction

Nous avons vu au cours de l'étude bibliographique que la positivité du travail du second ordre ( $d^2W > 0$ ) est un critère suffisamment général pour se garantir des ruptures diffuses par perte d'unicité constitutive. La notion de perte d'unicité constitutive doit paraître claire au lecteur dans le cadre d'un problème mathématique faisant intervenir une relation constitutive. Dans le cas d'une expérience de laboratoire, la notion de perte d'unicité est moins transparente: lors d'un essai donné le matériau "trouve" toujours une réponse unique. Ce n'est qu'en renouvelant l'expérience et par une modification des perturbations et des imperfections que la non unicité (si elle existe) de la réponse est révélée. Par ailleurs, nous avons vu que Nova [93; 92] et Imposimato & Nova [57] ont relié la notion de perte d'unicité constitutive en condition homogène à la perte de contrôlabilité (Sect. 1.4.3.5, p. 27). La notion de contrôlabilité est directement applicable à des expériences (ou à leur simulation par la MED) puisque cela revient à savoir s'il est possible d'appliquer un programme de chargement. Ainsi, par le biais de la notion de contrôlabilité, un des sens physiques de la notion de perte d'unicité constitutive est mis en valeur.

Dans ce chapitre, nous considérons le signe du travail du second ordre comme un critère permettant de détecter les points de bifurcation par perte d'unicité constitutive. Nous nous attachons ici à l'étude du signe du travail du second ordre en fonction de plusieurs paramètres dont les principaux sont: la densité du matériau, l'état de contrainte-déformation et la direction de sollicitation. Les thèmes de la rupture ou de l'effondrement et les liens susceptibles d'exister avec l'annulation du travail du second ordre seront abordés ultérieurement dans le Chapitre 4.

La dépendance de  $d^2W$  à la direction de sollicitation, a conditionné l'étude présentée. Ce n'est qu'après l'introduction dans les deux sections suivantes de cette dépendance de  $d^2W$  à la direction de sollicitation que nous présenterons la structure du chapitre.

#### 3.1.1 Le travail du second ordre: une variable directionnelle

Considérons un matériau non visqueux. L'incrément de déformation  $d\varepsilon$  et l'incrément de contrainte  $d\sigma$  sont reliés par une relation constitutive incrémentale  $\mathbf{R}_h$  qui dépend de l'histoire de contrainte-déformation antérieure caractérisée par les variables d'état et les paramètres de mémoire  $\mathbf{h}$  (Darve [30]):

$$\mathbf{R}_h(d\varepsilon, d\sigma). \quad (3.1)$$

Ecrivons par exemple l'incrément de déformation comme une fonction de l'incrément de contrainte:

$$d\varepsilon = \mathbf{G}_h(d\sigma). \quad (3.2)$$

L'hypothèse de non viscosité permet d'affirmer que  $\mathbf{G}$  est une fonction homogène d'ordre 1 et l'identité d'Euler implique (Darve [30]):

$$d\varepsilon \equiv \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial (d\sigma)} d\sigma. \quad (3.3)$$

Les dérivées partielles sont des fonctions homogènes d'ordre 0, elles sont donc des fonctions dépendant uniquement de la direction de l'incrément de contrainte, ainsi:

$$d\varepsilon = \mathbf{M}_h(\mathbf{u}) d\boldsymbol{\sigma}, \quad (3.4)$$

avec  $\mathbf{u} = d\boldsymbol{\sigma} / \|d\boldsymbol{\sigma}\|$  et  $\|d\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{d\sigma_{ij} d\sigma_{ij}}$ .

Par conséquent, le travail du second ordre s'écrit:

$$d^2W = d\boldsymbol{\sigma} : d\varepsilon = d\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_h(\mathbf{u}) d\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{u} \mathbf{M}_h(\mathbf{u}) \mathbf{u}) \|d\boldsymbol{\sigma}\|^2, \quad (3.5)$$

et le signe de  $d^2W$  dépend uniquement de la direction de sollicitation  $\mathbf{u}$ . Pour étudier le signe du travail du second ordre dans l'espace des contraintes il suffirait donc d'effectuer des recherches directionnelles. La notion de recherche directionnelle est définie dans la section suivante.

### 3.1.2 Définition d'une recherche directionnelle

Gudehus [54] en 1979 a défini la notion de recherche directionnelle pour tracer des enveloppes réponses qui permettent de comparer de manière géométrique la réponse incrémentale unitaire de différentes relations constitutives.

Dans notre cas, toutes les simulations respectent les conditions d'axisymétrie autour de l'axe  $x_1$  ( $\sigma_2 = \sigma_3$  et  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ). Par conséquent, les états de contrainte et de déformation peuvent être représentés respectivement dans le plan d'axisymétrie (ou de Rendulic) des contraintes  $(\sigma_1, \sqrt{2}\sigma_3)$  et le plan d'axisymétrie des déformations  $(\varepsilon_1, \sqrt{2}\varepsilon_3)$ . Une recherche directionnelle en contrainte est réalisée à partir d'un état de contrainte-déformation qualifié d'initial en appliquant, toujours à partir de ce même état, plusieurs incréments de chargement  $d\vec{\sigma}$  définis dans le plan de Rendulic des incréments de contrainte (Fig 3.1-gauche) par une norme  $\|d\vec{\sigma}\| = \sqrt{(d\sigma_1)^2 + 2(d\sigma_3)^2}$ , identique pour chaque incrément, et un angle  $\alpha$  entre l'axe  $\sqrt{2}d\sigma_3$  et  $d\vec{\sigma}$ . En faisant varier  $\alpha$  de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  chaque direction en contrainte est inspectée. Pour chaque incrément de chargement  $d\vec{\sigma}$  un vecteur réponse  $d\vec{\varepsilon}$  est associé. Ce dernier est défini dans le plan de Rendulic des incréments de déformation par sa norme  $\|d\vec{\varepsilon}\| = \sqrt{(d\varepsilon_1)^2 + 2(d\varepsilon_3)^2}$  et l'angle  $\beta$  formé entre l'axe  $\sqrt{2}d\varepsilon_3$  et  $d\vec{\varepsilon}$ . La définition d'une recherche directionnelle en déformation est la réciproque de celle qui vient d'être donnée.

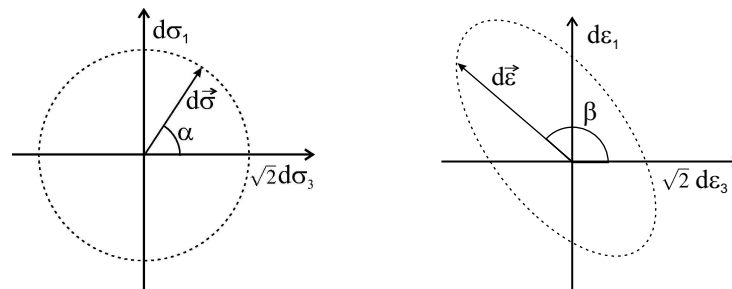


FIG. 3.1 – Définition des plans de Rendulic: recherche directionnelle en contrainte (gauche), enveloppe réponse en déformation (droite).

Une fois la recherche directionnelle effectuée, le travail du second ordre est évident à calculer pour chacune des directions testées. De plus, la recherche directionnelle nous donne également accès aux enveloppes réponses constituées par l'ensemble des extrémités des vecteurs réponses correspondant à un état initial donné.

### 3.1.3 Intérêt des recherches directionnelles

Les explications données dans cette introduction montrent que, pour un état initial donné, la simulation d'une recherche directionnelle nous donne accès, pour une même charge en calcul:

- au signe du travail du second ordre en fonction de la direction de sollicitation,
- à la caractérisation du comportement incrémental du modèle, entre autre par le tracé des enveloppes réponses.

Or, le signe du travail du second ordre est fortement lié au comportement mécanique du matériau, par exemple au fait que ce dernier soit associé ou non. Nous avons donc un grand intérêt à décrire le comportement mécanique du modèle discret avant d'étudier le signe du travail du second ordre.

Ce chapitre se décompose en deux grandes parties. La première est consacrée à la caractérisation du comportement mécanique du modèle (écoulement plastique, associativité ou non-associativité, caractéristiques des déformations élastiques et plastiques). La deuxième partie est dévolue à l'étude du signe du travail du second ordre à partir du modèle discret et par comparaison avec un relation macroscopique phénoménologique.

## 3.2 Caractérisation du comportement mécanique incrémental du modèle discret

### 3.2.1 La simulation des recherches directionnelles

Deux paramètres sont à fixer pour effectuer des recherches directionnelles: la taille de la norme de l'incrément de chargement et le nombre de directions investiguées. Cette dernière variable est, dans notre cas, directement fixée par les capacités de calcul à disposition. Nous nous sommes limités à une sollicitation tous les  $10^\circ$  (exceptionnellement tous les  $5^\circ$ ) soit 36 (ou 72) directions investiguées. Etant donné la vitesse lente de chargement imposée (voir le paragraphe suivant) une recherche directionnelle complète (36 directions) consomme entre 20 à 30 heures de calcul sur un processeur Pentium IV à 2.8 GHz. La taille de la norme de l'incrément de chargement est par contre une question plus difficile à trancher et est discutée dans la Section 3.2.1.2. Commençons par préciser la procédure suivie pour la simulation des recherches directionnelles.

#### 3.2.1.1 Procédure de simulation

Les états initiaux, à partir desquels sont simulées les recherches directionnelles, sont atteints après des compressions triaxiales axisymétriques menées jusqu'à un niveau de contrainte donné. Les états initiaux sont caractérisés par la pression confinement  $\sigma_3$  utilisée pour les compressions triaxiales et le niveau de contrainte  $\eta = q/p$  où  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  est le déviateur de contrainte et  $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$  est la pression moyenne. Trois pressions de confinement sont considérées:  $\sigma_3 = 100, 200$  et  $300$  kPa.

Les étapes de la procédure numérique pour atteindre les états initiaux et pour simuler les recherches directionnelles sont détaillées ci-dessous par ordre chronologique.

1. Après son compactage à la densité souhaitée (cf. Sect 2.3.1.1, p. 52), l'échantillon numérique subit une compression isotrope jusqu'à la valeur de la pression de confinement désirée. On laisse ensuite l'échantillon se relaxer tout en maintenant la pression de confinement constante.
2. La compression triaxiale est appliquée et stoppée lorsque la valeur de  $\eta$  choisie est atteinte. On laisse une nouvelle fois l'échantillon revenir à un état de repos ( $Ec < 10^{-7}$  J). Pour garantir un bon résultat de la simulation de la recherche directionnelle il est important de respecter cette période de relaxation.
3. L'application de l'incrément de chargement  $d\vec{\sigma}$  pour chacune des directions testées est effectuée progressivement lors de chaque cycle de calcul de la MED. L'état de contrainte atteint après application de la totalité de l'incrément de chargement est maintenu constant jusqu'à la stabilisation des déformations, ce qui correspond à un retour au repos de l'échantillon. Suivant la direction  $\alpha$  et le niveau de contrainte  $\eta$  les déformations peuvent être importantes. Afin de rester dans le cas d'un chargement en mode quasi-statique, la vitesse de chargement est volontairement choisie très faible, et d'autant plus faible que l'état de contrainte est proche du critère de Mohr-Coulomb. Le choix de la vitesse de chargement relève de l'expérience, la simulation de certaines recherches directionnelles étant renouvelée lorsque la vitesse de chargement est jugée trop importante au regard des déformations calculées.

3.2.1.2 Norme de l'incrément de sollicitation en contrainte

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce chapitre (Sect. 3.1.1), un incrément de chargement  $d\sigma$  (au sens des lois incrémentales) dans une direction donnée va produire un incrément de réponse  $d\varepsilon$  dont la direction est indépendante de la norme de  $d\sigma$  puisque la matrice  $\mathbf{M}_h$  (Eq. 3.4) est elle-même indépendante de la norme de  $d\sigma$ .

Dans le cas du modèle discret (tout comme dans celui d'essais de laboratoire) un incrément de chargement en contrainte  $d\sigma$ , tel qu'il est défini au sens des lois incrémentales, correspond en pratique à l'application d'un chemin de chargement rectilinéaire en contrainte comprenant un nombre important d'états (voire une infinité). L'incrément de réponse en déformation  $d\varepsilon$  associé n'est pas nécessairement rectilinéaire (Darve *et al.* [34]) et la direction de l'incrément de réponse (défini entre l'état initial et l'état final après application de l'incrément de chargement) dépend donc en partie de la norme de  $d\sigma$ .

A titre indicatif nous donnons dans le Tableau 3.1 quelques valeurs de  $\|d\vec{\sigma}\|$  relevées dans la littérature pour des réalisations expérimentales ou des simulations discrètes de recherches directionnelles. Par ailleurs, nous avons simulé des recherches directionnelles sur l'échantillon E1 pour  $\|d\vec{\sigma}\| = 0.1, 1.0, 10$  kPa. Les Figures 3.2 et 3.3 montrent les chemins de réponse en déformation pour des états initiaux correspondant respectivement à  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.30$  et  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.85$ . Les principales observations que l'on puisse en tirer sont:

- pour les directions de  $d\vec{\sigma}$  correspondant à un déchargement, les chemins de déformation restent rectilinéaires quelque soit la valeur de  $\|d\vec{\sigma}\|$ , dans ce cas la valeur de  $\|d\vec{\sigma}\|$  n'a pas d'influence sur les directions des vecteurs  $d\vec{\varepsilon}$ ,
- pour les directions de  $d\vec{\sigma}$  correspondant à un chargement, les chemins de déformation peuvent devenir fortement non rectilinéaires lorsque la valeur de  $\|d\vec{\sigma}\|$  augmente d'où une dépendance de la direction de  $d\vec{\varepsilon}$  à  $\|d\vec{\sigma}\|$ ; ce phénomène est particulièrement visible pour des directions de déformation  $\beta$  proches de  $90^\circ$  et  $180^\circ$ ,
- la non-linéarité des chemins de déformation est marquée principalement par des changements de direction ponctuels (voir par exemple l'angle d'environ  $90^\circ$  formé par un des chemins de déformation pour  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.85$  et  $\|d\vec{\sigma}\| = 1.0$  kPa) liés à des processus de déformations non continus au cours du temps qui sont discutés dans la Section. 3.2.3 (p. 86).

Bien que le choix d'une valeur de  $\|d\vec{\sigma}\|$  soit quelque peu arbitraire nous nous sommes basés sur le fait que l'incrément de chargement doit permettre de caractériser le comportement mécanique du matériau à l'état de contrainte-déformation considéré. Le modèle discret présente des

Auteurs	Type	$\ d\vec{\sigma}\ $ (kPa)	$\ d\vec{\sigma}\  / p_0$
Bardet [3]	sim. 2D	–	0.05
Royis & Doanh [108]	essais exp.	10	0.10
Calvetti <i>et al.</i> [10]	sim. 3D	10	0.10
Kishino [65]	sim. 3D	1	0.01
Alonso-Marroquin [1]	sim. 2D	0.016	$1.0 \cdot 10^{-4}$

TAB. 3.1 – Quelques valeurs, relevées dans la littérature, de la norme de l'incrément de contrainte utilisée pour des recherches directionnelles.

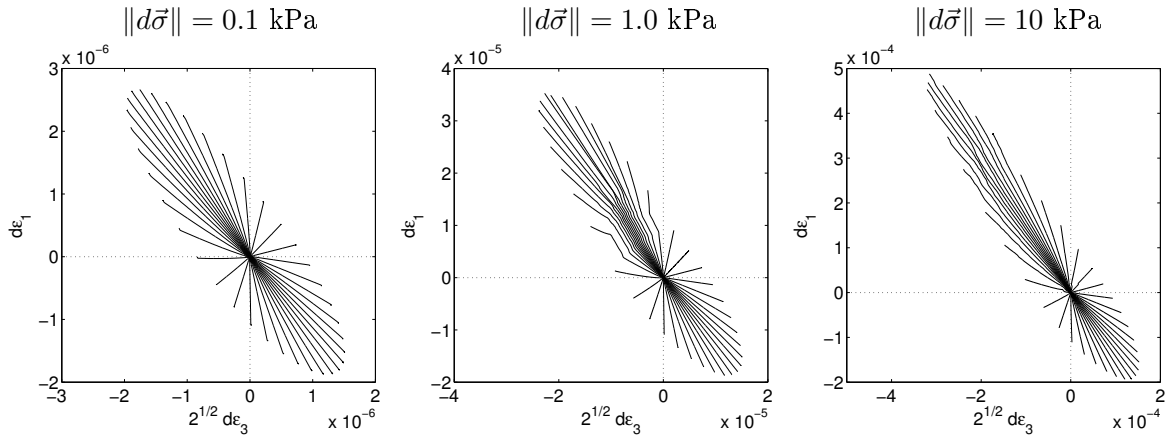


FIG. 3.2 – Chemins de déformation pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ( $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.30$ ; échantillon E1) et pour  $\|d\vec{\sigma}\| = 0.1, 1.0, 10$  kPa.

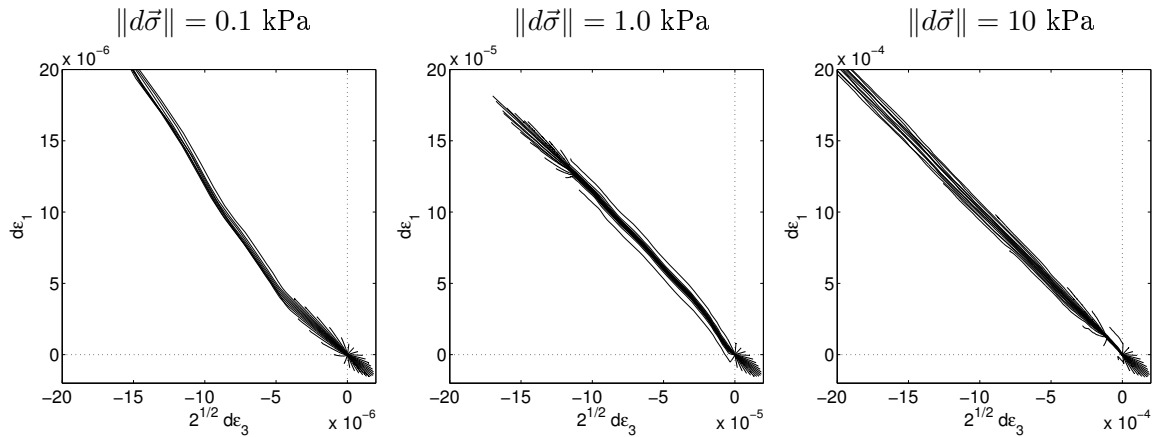


FIG. 3.3 – Chemins de déformation pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ( $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.85$ ; échantillon E1) et pour  $\|d\vec{\sigma}\| = 0.1, 1.0, 10$  kPa. Par souci de lisibilité, les représentations correspondant à  $\|d\vec{\sigma}\| = 0.1$  et  $10$  kPa sont en partie tronquées.

processus de déformation ponctuels au cours de la sollicitation qui risquent de ne pas être pris en compte pour une valeur de  $\|d\vec{\sigma}\|$  trop faible (cf. Fig. 3.2 et 3.3 pour  $\|d\vec{\sigma}\| = 0.1$  kPa) alors qu'ils sont représentatifs du comportement du modèle à l'état initial considéré.

Nous avons donc opté pour une valeur de  $\|d\vec{\sigma}\| = 1$  kPa qui permet de rester au plus près de l'état initial tout en prenant en compte, à la vue des Figure 3.2 et 3.3, les processus de déformation ponctuels que l'on qualifiera un peu plus loin de déformations plastiques en régime dynamique (Sect. 3.2.3).



### 3.2.2 Evolution des enveloppes réponses le long d'un chemin triaxial drainé

Il a été expliqué dans la bibliographie (Sect. 1.4.3.4, p. 24) que le travail du second ordre ne peut prendre des valeurs négatives avant la condition limite de plasticité que si le matériau considéré est non-associé. Dans cette section nous analysons les enveloppes réponses pour caractériser le comportement mécanique du modèle discret, en recherchant notamment si le modèle présente une règle d'écoulement non-associée.

#### 3.2.2.1 Enveloppes réponses totales

Les Figures 3.4 et 3.5 montrent les enveloppes réponses pour des recherches directionnelles simulées respectivement sur les échantillons *E1* et *E3* pour un confinement de 100 kPa et différentes valeurs de  $\eta$ .

Pour  $\eta = 0.0$ , c'est-à-dire pour un état isotrope, les enveloppes réponses sont des ellipses centrées sur l'origine du repère dont l'axe principal forme un angle  $\beta = 125^\circ$  environ. Le symbole en forme de croix sur chacune des ellipses représente la réponse en déformation due à un chargement en contrainte purement déviatoire ( $d\sigma_1 = -2 d\sigma_3 > 0$  soit  $dp = 0$  et  $\alpha = 125^\circ$ ), la direction de cette réponse est confondue avec l'axe principal ( $\beta = 125^\circ$ ). Bien que dans le cas de l'échantillon *E3* (le plus lâche) l'ellipse soit légèrement perturbée pour des directions de chargement déviatoire, on peut affirmer que ces enveloppes réponses sont typiques d'un comportement incrémentalement linéaire (i.e. élastique) isotrope (Gudehus [54], Bardet [3]).

Plus on s'éloigne d'un état isotrope, en augmentant la valeur de  $\eta$ , plus les enveloppes réponse s'allongent pour finalement dégénérer en une droite. Cette dégénérescence témoigne à priori d'une règle d'écoulement puisque, pour une certaine plage de directions de  $d\vec{\sigma}$ , la direction du vecteur  $d\vec{\varepsilon}$  reste inchangée. Ce point sera éclairci un peu plus loin lors du calcul des déformations plastiques.

Remarquons que la dégénérescence de l'enveloppe réponse en une droite apparaît dans le cas de l'échantillon *E3* (le plus lâche) plus tôt,  $\eta = 0.35$ , que dans le cas de l'échantillon *E1* (le plus dense),  $\eta = 0.55$ . De plus, lorsque les enveloppes réponses ont dégénéré en une droite, la direction de cette dernière n'est pas la même pour les échantillons *E1* et *E3*, elle dépend donc de la densité du matériau.

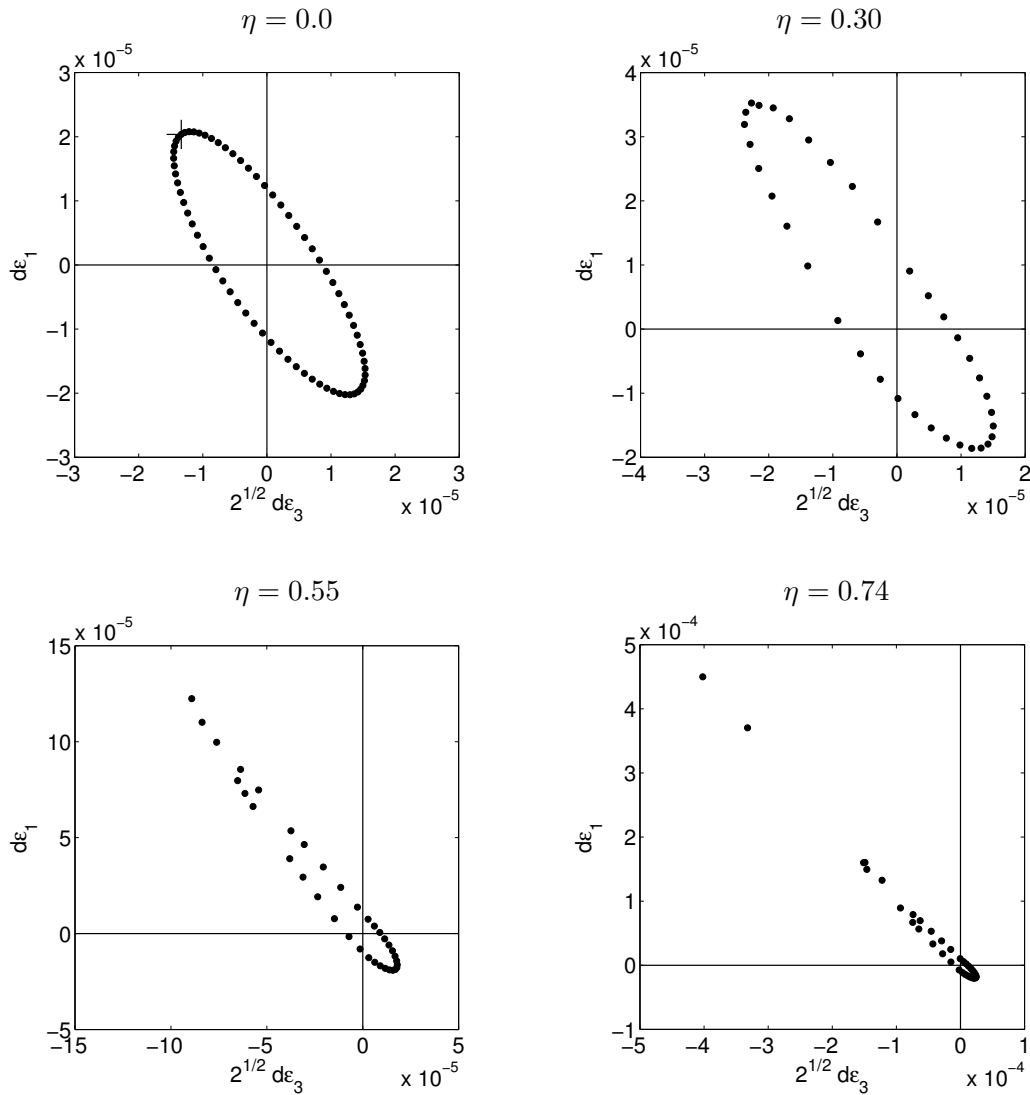
Pour pousser plus avant l'analyse des enveloppes réponses nous supposons la décomposition additive classique des déformations en une part élastique et une autre part plastique:

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p. \quad (3.6)$$

#### 3.2.2.2 Enveloppes réponses élastiques

D'un point de vue numérique il existe, à notre connaissance, deux méthodes pour calculer les déformations élastiques lors d'une recherche directionnelle.

- La première consiste à simuler un chargement puis un déchargement dans chacune des directions testées (Bardet [3], Kishino [65]). Les déformations élastiques sont supposées égales aux déformations totales après chargement moins les déformations résiduelles

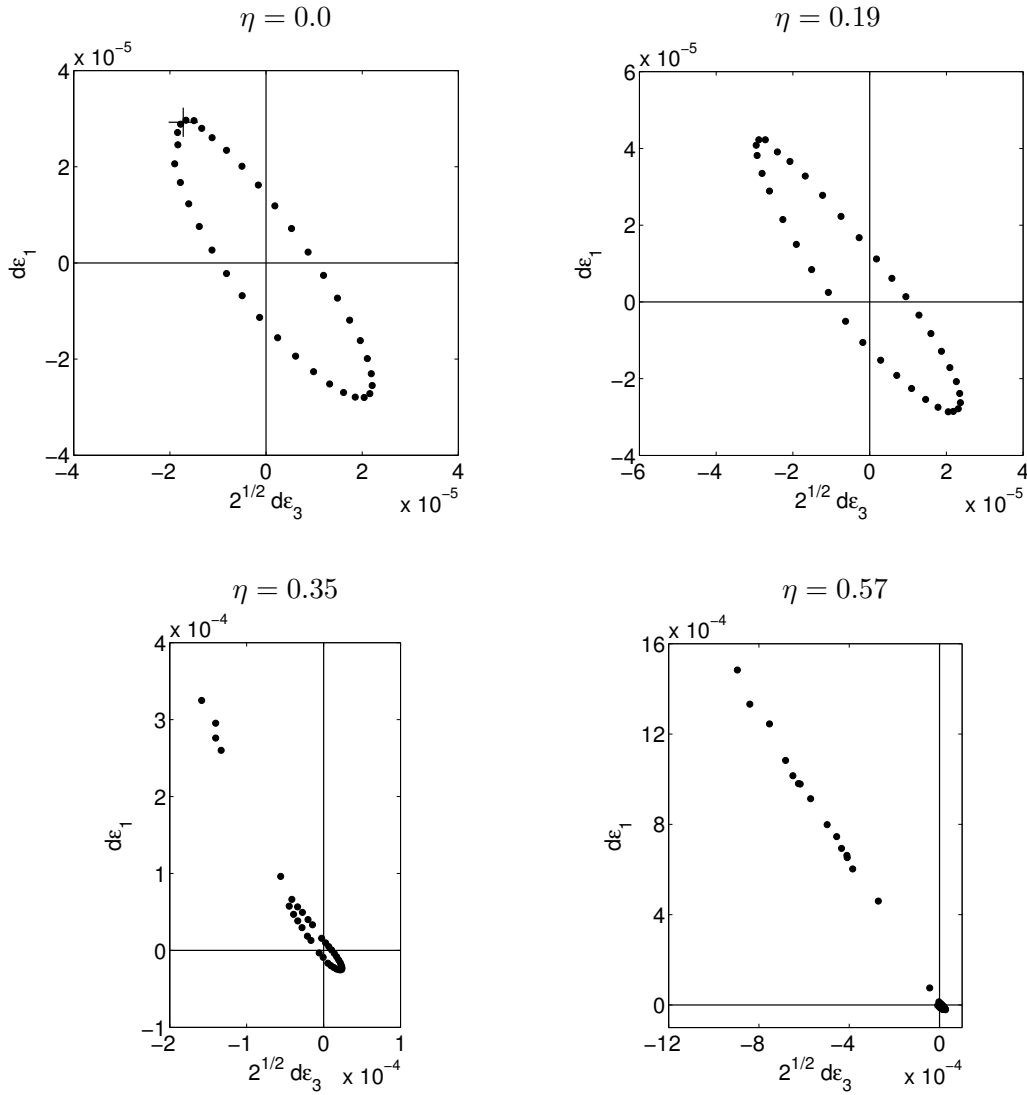

 FIG. 3.4 – Enveloppes réponse pour l'échantillon E1 et  $\sigma_3 = 100$  kPa.

après déchargement. Cette méthode repose sur deux hypothèses: les déformations au cours du déchargement doivent être uniquement des déformations réversibles, ce qui n'est pas vérifié dans notre cas, et il ne doit pas exister de déformation élastique bloquée durant la décharge.

- La deuxième méthode consiste à simuler une recherche directionnelle tout en interdisant les mécanismes locaux irréversibles, c'est-à-dire l'ouverture des contacts et les glissements intergranulaires.

Cette dernière méthode a été appliquée à ceci près que la condition de non-glissement intergranulaire a suffi pour calculer des déformations élastiques sur des recherches directionnelles (Calvetti *et al.* [10]).

La Figure 3.6 montre deux enveloppes réponses (échantillon E1,  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ ): la plus grande est calculée sans condition particulière (déformations totales) alors que la plus petite est calculée en interdisant le glissement intergranulaire aux contacts en spécifiant


 FIG. 3.5 – Envelopes réponse pour l'échantillon E3 et  $\sigma_3 = 100$  kPa.

un angle de frottement  $\varphi_c$  proche de  $90^\circ$  (déformations élastiques). Sur l'enveloppe réponse totale et élastique un des vecteurs  $d\vec{\varepsilon}$  est représenté par un symbole circulaire plein. Ce vecteur réponse correspond à une direction de chargement en contrainte  $\alpha = 150^\circ$ . Pour cette direction nous avons simulé un cycle de chargement/déchargement en imposant  $\varphi_c \rightarrow 90^\circ$ . Le chemin en contrainte est présenté sur la Figure 3.7 à gauche et le chemin de réponse en déformation à droite. Les chemins de réponse en déformation correspondant au chargement et au déchargement sont confondus (une seule courbe est visible) et les déformations résiduelles sont nulles après l'application du cycle. De plus, le nombre de contacts glissants<sup>1</sup> ou ouverts lors du chargement est négligeable<sup>2</sup>. Ces résultats montrent que l'interdiction du glissement intergranulaire est suffisant pour le calcul des déformations élastiques sur des incréments de

1. Bien qu'un angle de frottement au contact  $\varphi_c \rightarrow 90^\circ$  soit imposé, certains contacts dont la force normale est très faible (parmi les plus faibles de celles présentes dans l'assemblage granulaire) glissent suite à l'application du chargement.

2. Les proportions de contacts glissants et ouverts (par rapport au nombre de contacts avant chargement) sont respectivement de 0.38% et 0.47% pour  $\varphi_c \rightarrow 90^\circ$  et de 12.13% et 1.17% pour  $\varphi_c = 35^\circ$ .

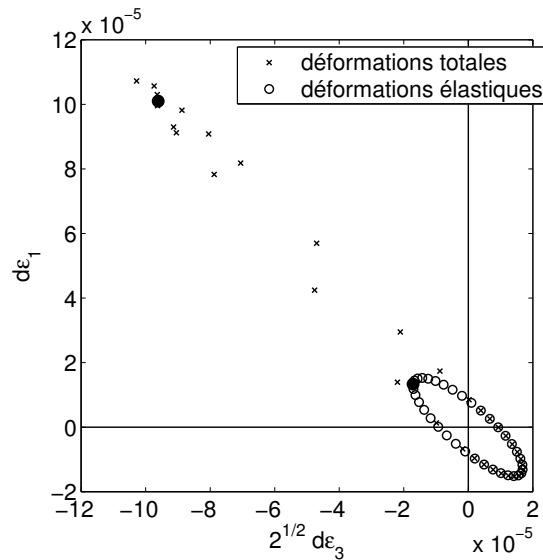


FIG. 3.6 – Enveloppes réponses totale et élastique pour l'échantillon E1 à  $\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$  et  $\eta = 0.77$ . Les deux symboles circulaires pleins représentent les réponses en déformations totale  $d\vec{\epsilon}$  et élastique  $d\vec{\epsilon}_e$  suite au même incrément de chargement  $d\vec{\sigma}$  de direction  $\alpha = 150^\circ$  (cf. Fig. 3.7).

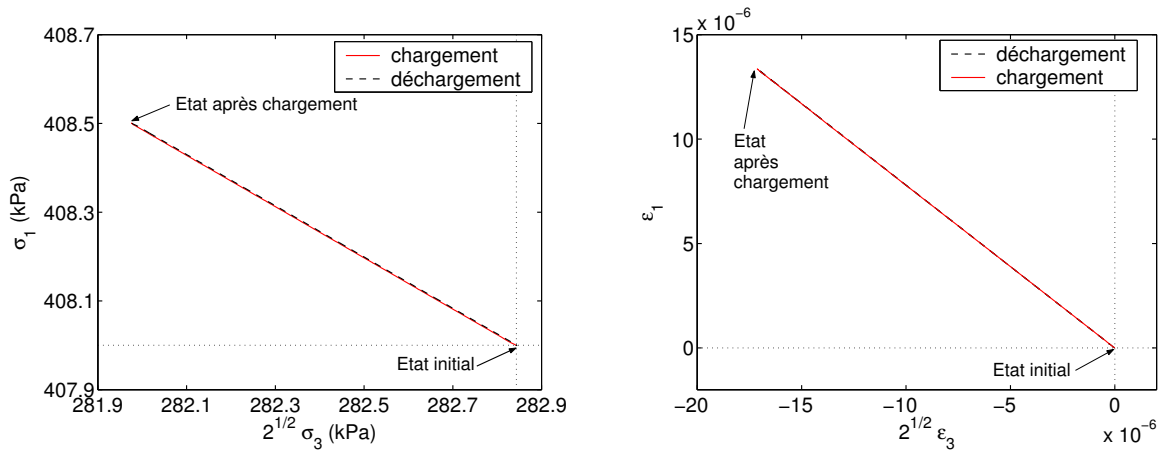


FIG. 3.7 – Chemin de sollicitation en contrainte, chargement puis déchargement (gauche); chemin de réponse en déformation (droite) pour un angle de frottement intergranulaire tendant vers  $90^\circ$  (échantillon E1,  $\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$ ,  $\eta = 0.77$ ).

chargement tels que ceux considérés lors de recherches directionnelle. D'ailleurs, les enveloppes réponses simulées dans ces conditions, telles que celles représentées sur les Figures 3.6 et 3.8, sont des ellipses centrées sur l'origine du repère comme cela est prédit pour des matériaux élastiques (Gudehus [54], Bardet [3]).

Sur la Figure 3.8 sont superposées les enveloppes réponse élastiques calculées à l'état isotrope et respectivement à  $\eta = 0.74$  et  $\eta = 0.57$  pour E1 et E3 (cf. les enveloppes réponses totales Figs. 3.4 et 3.5). Les croix sur les enveloppes réponses représentent les directions des réponses en déformation calculées pour un chargement en contrainte purement déviatoire ( $\alpha = 125^\circ$ ).

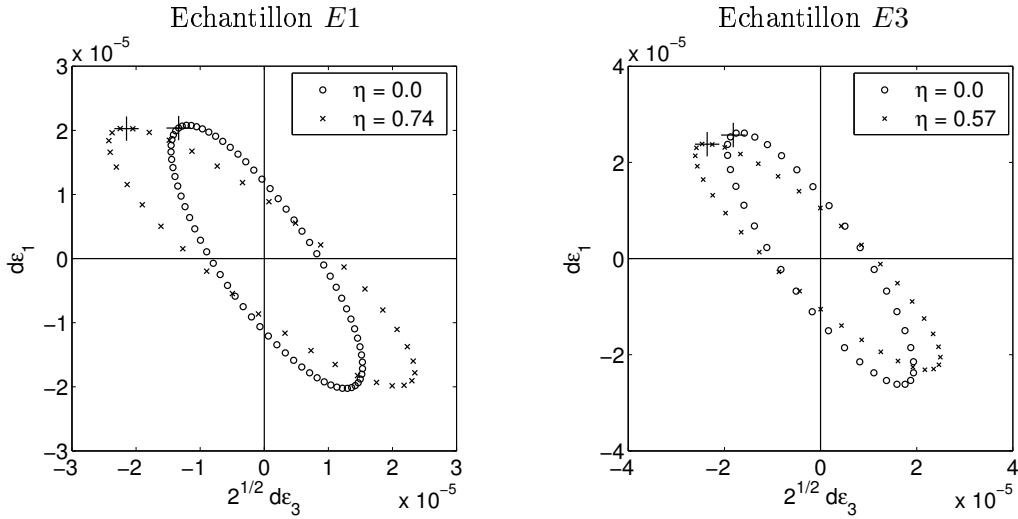


FIG. 3.8 – *Enveloppes réponses élastiques pour un état isotrope et un état anisotrope ( $\sigma_1 = 100 \text{ kPa}$ ).*

Comme nous l'avons déjà fait remarquer les enveloppes réponses élastique trouvées ici pour  $\eta = 0.74$  et  $\eta = 0.57$  sont des ellipses centrées sur l'origine du repère. Cependant, contrairement aux ellipses calculées pour des états isotropes, d'une part la direction de l'axe principal des ellipses forme un angle  $\beta > 125^\circ$ , d'autre part la déformation  $d\vec{\varepsilon}$  engendrée par un chargement purement déviatoire n'est pas aligné sur l'axe principal. Ces enveloppes réponses sont le reflet d'un comportement incrémental linéaire (i.e. élastique) anisotrope (Gudehus [54], Bardet [3]).

### 3.2.2.3 Enveloppes réponses plastiques - Mise en évidence d'une règle d'écoulement non associée

La partie plastique des enveloppes réponse est calculée en soustrayant les déformations élastiques aux déformations totales. La Figure 3.9 montre la partie plastique de l'enveloppe réponse totale présentée sur la Figure 3.6. Les points sont alignés sur une droite, la direction  $\beta_p$  des déformations plastiques  $d\vec{\varepsilon}_p$  est donc indépendante de la direction  $\alpha$  du vecteur contrainte  $d\vec{\sigma}$ . Comme cela avait été à priori déduit, le modèle numérique présente clairement une règle d'écoulement.

Cette enveloppe réponse plastique peut également être représentée à l'aide de deux diagrammes. Sur le premier est tracée la norme des déformations plastiques  $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$  en fonction de la direction  $\alpha$  du vecteur contrainte (Fig. 3.10-a); sur le second est tracé la direction  $\beta_p$  de  $d\vec{\varepsilon}_p$  (pour  $\|d\vec{\varepsilon}_p\| \neq 0$ ) en fonction de  $\alpha$  (Fig. 3.10-b). La courbe  $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$  en fonction de  $\alpha$  se présente sous la forme d'une cloche dont le sommet, dans ce cas, n'est pas tout à fait arrondi. Ce phénomène n'est pas la conséquence du calcul numérique qui n'aurait pas convergé vers un état d'équilibre mais est bien le résultat des sollicitations appliquées. On remarque d'ailleurs sur la Figure 3.10-b que la direction  $\beta_p$  reste à peu près constante même pour des directions  $\alpha$  correspondant aux variations irrégulières de  $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ .

La Figure 3.10-b nous informe sur la direction de l'écoulement plastique,  $\beta_p \approx 132^\circ$ . Dans le cadre de l'élasto-plasticité à simple potentiel cette direction d'écoulement plastique correspond

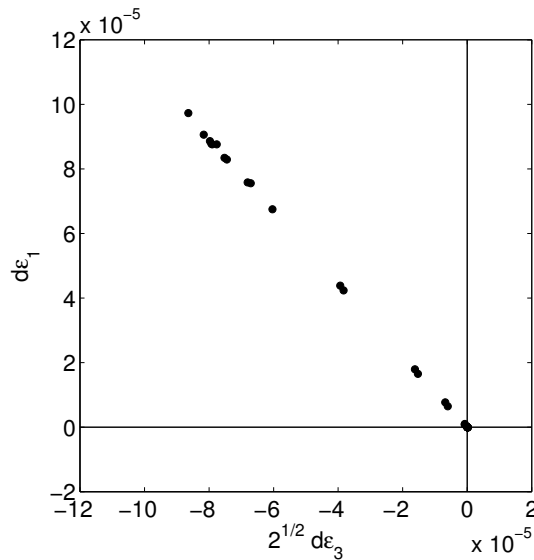


FIG. 3.9 – Enveloppe réponse plastique pour l'échantillon E1 à  $\sigma_3 = 200$  kPa et  $\eta = 0.77$  (voir les enveloppes réponse totales et élastiques sur la Fig. 3.6).

à la normale  $\partial g/\partial\sigma$  au potentiel plastique  $g$ . Pour savoir si le modèle numérique présente une règle d'écoulement associée ou non il faut connaître la normale  $\partial f/\partial\sigma$  à la surface de limite élastique  $f$ . Le schéma de la Figure 3.11 représente l'ensemble des directions en contrainte correspondant à un chargement au sens de l'élasto-plasticité, c'est-à-dire donnant lieu à des déformations plastiques. En parcourant ces directions dans le sens direct la première et la dernière direction de chargement sont tangentes à la surface de limite élastique. Il est donc possible de déduire les tangentes à la surface de limite élastique à droite et à gauche de l'état de contrainte considéré à partir de la Figure 3.10-a: les premières déformations plastiques sont trouvées pour  $\alpha = 60^\circ$  et les dernières pour  $\alpha = 240^\circ$ . Les tangentes à droite et à gauche sont colinéaires, la surface de limite élastique  $f$  au voisinage de l'état de contrainte considéré semble donc plane et sa normale  $\partial f/\partial\sigma$  est alignée suivant une direction  $\alpha = 150^\circ$ . La direction de  $\partial f/\partial\sigma$  déduite n'est qu'approximative puisque les recherches directionnelles ne sont simulées que tous les  $10^\circ$ . Cependant, les directions de  $\partial g/\partial\sigma$  et  $\partial f/\partial\sigma$  sont largement différentes et on peut affirmer que la règle d'écoulement est non associée.

Remarquons que pour tous les états de contrainte analysés les directions de chargement (au sens de l'élasto-plasticité) s'étalent sur un intervalle de  $180^\circ$ . Par conséquent, nous avons toujours considéré la direction de la normale à la surface de limite élastique comme la valeur médiane de cet intervalle. La valeur médiane correspond d'ailleurs au maximum de  $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$  calculé.

A titre d'exemple, les Figures 3.12-a et -b montrent respectivement les valeurs de  $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$  et  $\beta_p$  en fonction de  $\alpha$  pour l'échantillon E3 à  $\sigma_3 = 200$  kPa et  $\eta = 0.63$ . En appliquant l'analyse précédente on en déduit les directions de  $\partial g/\partial\sigma$  et  $\partial f/\partial\sigma$  respectivement égales à  $129^\circ$  et  $150^\circ$ .

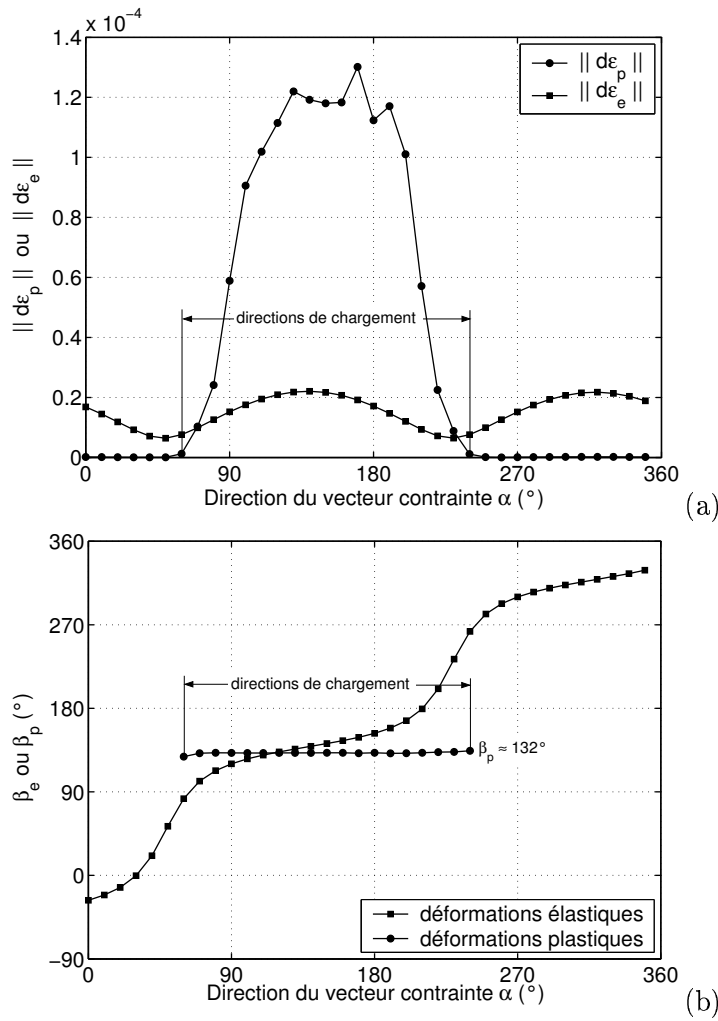


FIG. 3.10 – Norme des déformations plastiques  $\|d\vec{\epsilon}_p\|$  et élastiques  $\|d\vec{\epsilon}_e\|$  (a), direction des déformations plastiques  $\beta_p$  et élastiques  $\beta_e$  (b) en fonction de la direction de sollicitation  $\alpha$ ; échantillon E1,  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ .

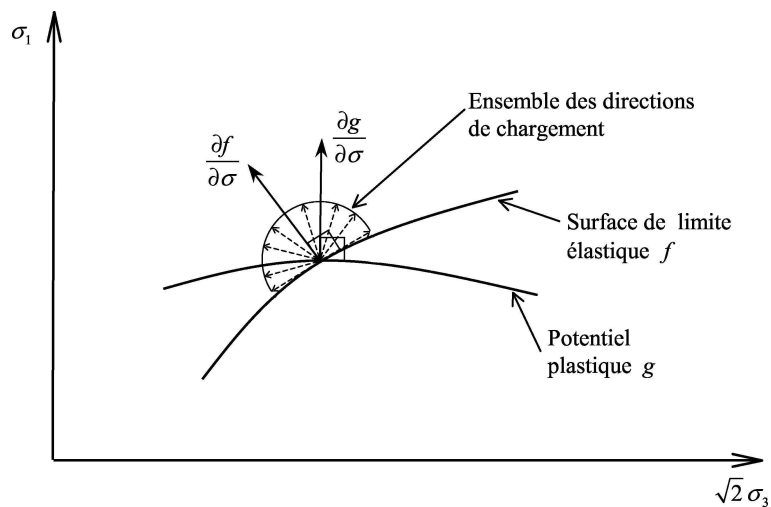


FIG. 3.11 – Direction en contrainte engendrant un chargement au sens de l'élasto-plasticité classique (c'est-à-dire des déformations plastiques).

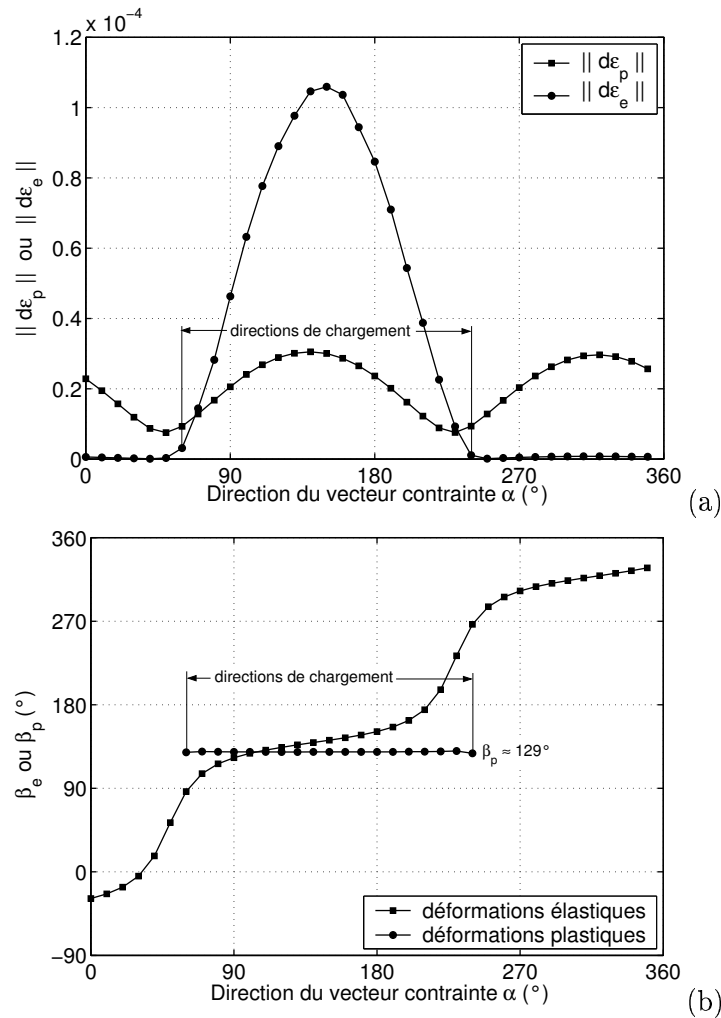


FIG. 3.12 – Norme des déformations plastiques  $\|d\vec{\epsilon}_p\|$  et élastiques  $\|d\vec{\epsilon}_e\|$  (a), direction des déformations plastiques  $\beta_p$  et élastiques  $\beta_e$  (b) en fonction de la direction de sollicitation  $\alpha$ ; échantillon E3,  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.63$ .

Les Figures 3.13-a et -b montrent respectivement pour E1 et E3 les directions de l'écoulement plastique et de la normale à la surface de limite élastique pour différents états de contrainte. Lorsque la valeur de  $\eta$  augmente, la tangente à la surface de limite élastique a tendance à s'aligner sur le critère de Mohr-Coulomb. Dans le même sens, Darve *et al.* [34] ont montrés pour des sables d'Hostun lâche et dense que la forme de la surface de limite élastique épouse la forme de la surface de limite de plasticité quand la surface de limite élastique s'en approche.



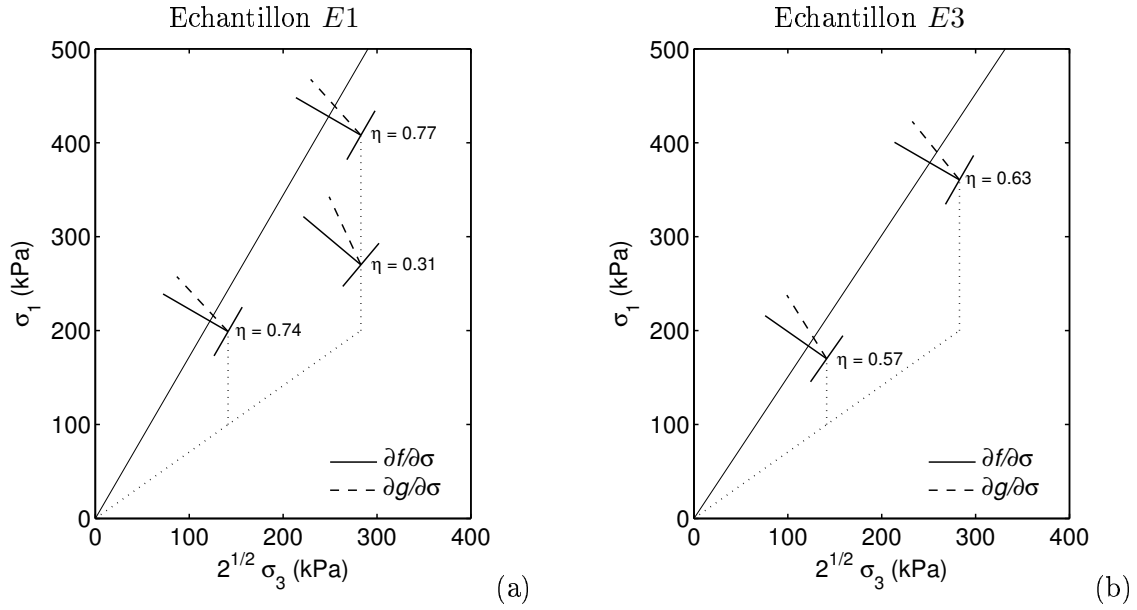


FIG. 3.13 – Directions de l'écoulement plastique et de la normale à la surface de limite élastique, le trait fin continu représente le critère de Mohr-Coulomb.

### 3.2.3 Déformations élastiques, plastiques et régimes quasi-statique, dynamique

Dans la section précédente nous avons dissocié les déformations totales  $\varepsilon$  en une part élastique  $\varepsilon_e$  et une part plastique  $\varepsilon_p$ . Dans cette section nous caractérisons de manière plus précise chacune de ces déformations toujours dans le cadre de simulations de recherches directionnelles.

#### Régime quasi-statique et régime dynamique

La Figure 3.14-a présente, pour l'échantillon  $E1$  ( $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31$ ), une comparaison entre la norme des déformations plastiques  $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$  et le maximum de l'énergie cinétique  $E_{c_{max}}$  (calculée au cours de la sollicitation dans une direction  $\alpha$ ) en fonction de la direction de sollicitation en contrainte  $\alpha$ . Dans le cas des directions  $\alpha$  pour lesquelles la déformation associée est uniquement élastique (soit  $\|d\vec{\varepsilon}_p\| = 0$ ),  $E_{c_{max}} \rightarrow 0^3$ . Les directions de sollicitation entraînant une réponse plastique peuvent être séparées en deux sous-groupes complémentaires:

- pour  $\alpha \in [50^\circ; 70^\circ]$  et  $[210^\circ; 220^\circ]$ ,  $\|d\vec{\varepsilon}_p\| \neq 0$  et  $E_{c_{max}} \rightarrow 0$ ,
- alors que pour  $\alpha \in [80^\circ; 200^\circ]$ ,  $\|d\vec{\varepsilon}_p\| \neq 0$  et  $E_{c_{max}}$  prend des valeurs entre  $7 \cdot 10^{-6}$  et  $8 \cdot 10^{-6}$  J.

A partir de ce constat, les déformations à l'échelle de l'assemblage granulaire peuvent être classées suivant trois catégories:

1. les déformations élastiques en régime quasi-statique ( $E_{c_{max}} \rightarrow 0$ ),
2. les déformations plastiques en régime quasi-statique ( $E_{c_{max}} \rightarrow 0$ ),
3. les déformations plastiques en régime dynamique.

3. Le code de calcul emploie une méthode dynamique, de ce fait, lors de la recherche d'un équilibre, l'énergie cinétique de l'assemblage granulaire n'est jamais nulle mais tend asymptotiquement vers une valeur nulle.

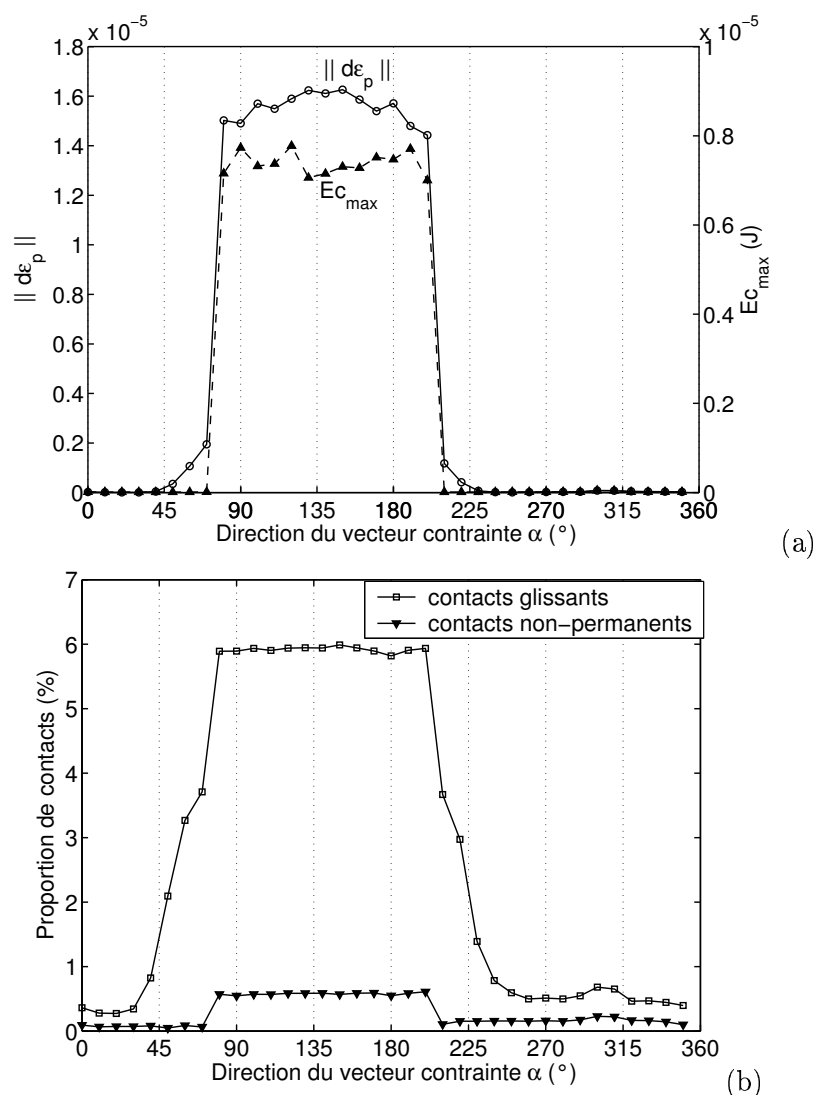


FIG. 3.14 – Normes des déformations plastiques  $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$  et valeur maximale de l'énergie cinétique  $Ec_{max}$  (a), proportions de contacts glissants et non-permanents en fonction de la direction de sollicitation  $\alpha$  (b); échantillon E1  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31$ .

### Contacts glissants et contacts non-permanents

Nous définissons un contact glissant comme un contact ayant atteint le critère de Coulomb sur au moins un cycle de calcul<sup>4</sup> de la MED parmi tous ceux effectués lors de la simulation d'une sollicitation dans une direction  $\alpha$ . De plus nous définissons un contact non-permanent comme un contact qui ne persiste pas (qui s'ouvre)<sup>5</sup> pendant la simulation d'une sollicitation dans une direction  $\alpha$ . Les pourcentages (par rapport au nombre de contacts à l'état initial) de contacts glissants et de contacts non-permanents en fonction de la direction  $\alpha$  sont représentés sur la Figure 3.14-b. La proportion de contacts glissants est corrélée avec l'existence de déformations plastiques que le régime soit quasi-statique ou dynamique. La proportion de contacts non-

4. Pour une sollicitation dans une direction  $\alpha$  donnée un contact glissant vérifie le critère de Coulomb, en général, sur chacun des cycles de calcul de la MED

5. Au cours de la simulation d'une sollicitation dans une direction  $\alpha$  donnée, le nombre total de contacts reste à peu près constant: le nombre de contacts ouverts est en général à peu près égal au nombre de contacts créés.

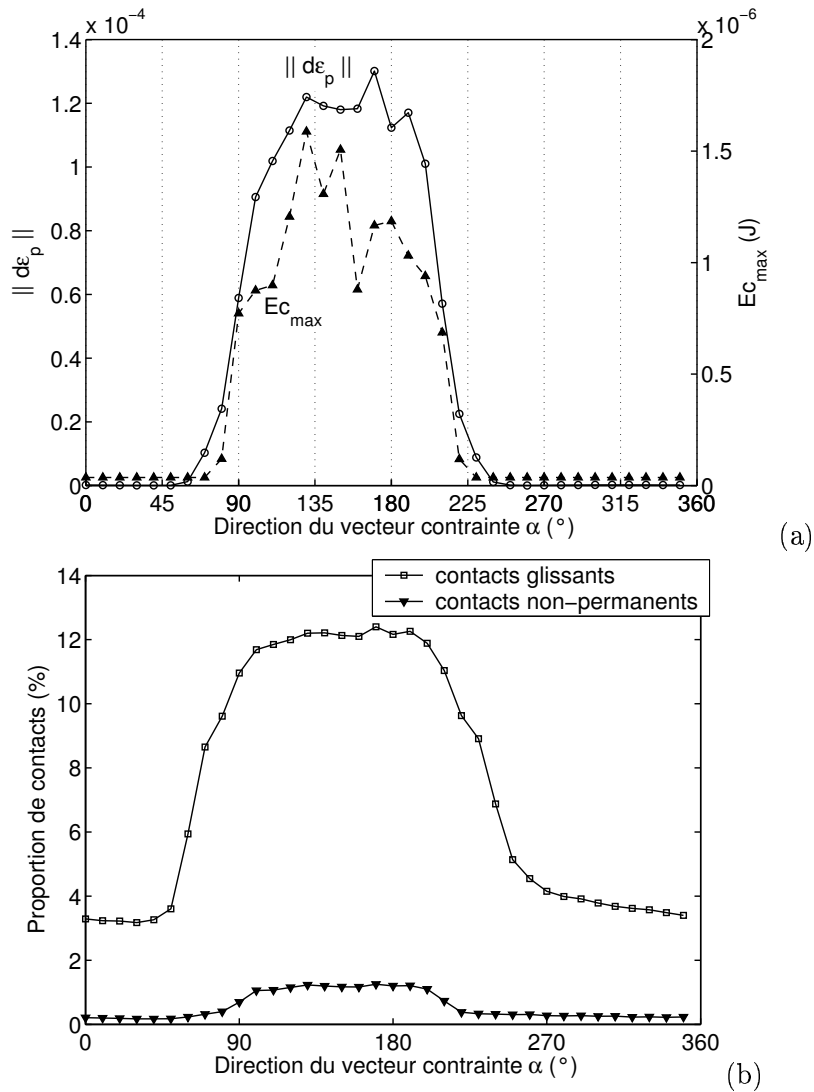


FIG. 3.15 – Normes des déformations plastiques  $\|d\vec{\epsilon}_p\|$  et valeur maximale de l'énergie cinétique  $Ec_{max}$  (a), proportions de contacts glissants et non-permanents en fonction de la direction de sollicitation  $\alpha$  (b); échantillon E1  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ .

permanents est corrélée avec l'existence de déformations plastiques en régime dynamique. Par conséquent, les déformations plastiques en régime quasi-statique sont principalement dues à des glissements intergranulaires aux contacts alors que les déformations plastiques en régime dynamique sont dues aux glissements intergranulaires et à des pertes et créations de contacts liés à priori à une réorganisation de la micro-structure.

Les Figures 3.15-a et -b sont semblables à celles présentées ci-dessus mais correspondent à l'état de contrainte  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ . Comme précédemment on distingue des déformations plastiques quasi-statiques pour  $\alpha \in [60^\circ; 70^\circ]$  et  $[230^\circ; 240^\circ]$  et des déformations plastiques dynamiques pour  $\alpha \in [80^\circ; 220^\circ]$ .

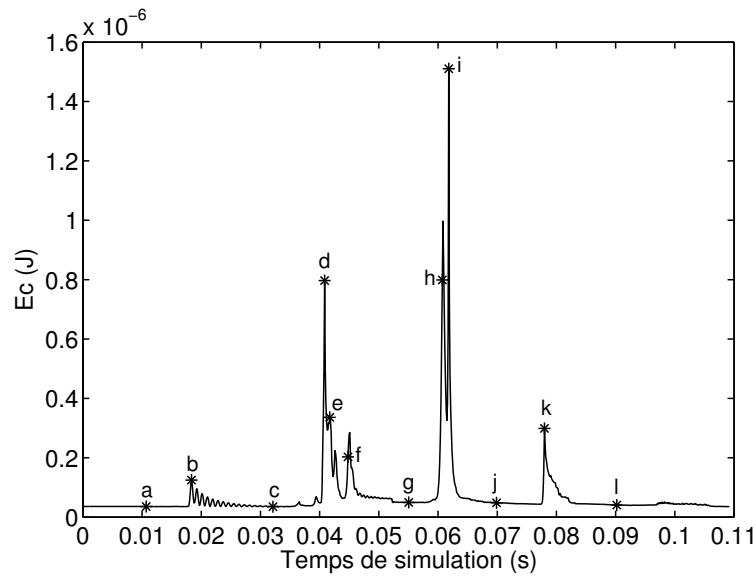


FIG. 3.16 – Evolution de l'énergie cinétique au cours de la simulation pour  $\alpha = 150^\circ$ ; échantillon E1,  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ .

### Réarrangements micro-structuraux ponctuels et locaux

Intéressons nous maintenant, non plus au maximum de l'énergie cinétique  $E_{c_{max}}$ , mais à l'évolution de l'énergie cinétique  $E_c$  au cours d'une simulation dans une direction  $\alpha$  pour laquelle des déformations plastiques dynamiques sont trouvées. La Figure 3.16 montre l'évolution de  $E_c$  en fonction du temps de simulation pour l'état initial  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$  et  $\alpha = 150^\circ$  (cf. Fig 3.15). L'évolution de l'énergie cinétique présente des pics soudains séparés par des plages de valeurs faibles et constantes. Le premier pic de  $E_c$  autour de 0.02 s est sans doute lié à un rebond purement élastique d'un grain flottant. Les symboles sur la courbe repérés par des lettres renvoient aux représentations de la Figure 3.17. Sur cette dernière figure est indiquée, pour différents instants de la simulation, l'énergie cinétique de chaque grain. Le diamètre des sphères est proportionnel à l'énergie cinétique, les sphères rouges correspondent à des grains entourés d'au moins un contact fort et les sphères vertes<sup>6</sup> à des grains entourés uniquement de contacts faibles.

Les pics temporels d'énergie cinétique (Fig. 3.16) correspondent à une zone (Figs 3.17-b, -d, -f, -h, -k) ou plusieurs zones (Figs 3.17-e, -i) spatiales très localisées de mouvement. Entre ces pics l'assemblage granulaire est, dans son ensemble, dans un état quasi-statique (Figs 3.17-a, -c, -g, -j, -l). Ainsi, les déformations plastiques en régime dynamique sont en partie dues à des réorganisations locales et successives (non continues) de la micro-structure.

Nous avons distingué les grains impliqués dans le réseau de contacts forts (en rouge) et ceux impliqués dans le réseau de contacts faibles (en vert). Il semblerait que l'énergie cinétique concerne plutôt des grains impliqués dans le réseau faible. Par ailleurs, l'évolution de l'énergie cinétique a été calculée en prenant en compte, d'une part uniquement les grains appartenant au réseau fort (entourés d'au moins un contact fort), d'autre part uniquement les grains appartenant au réseau faible. Les résultats sont présentés sur la Figure 3.18-a. L'énergie cinétique, même pour des états quasi-statiques, est plus élevée dans le réseau faible que le

6. Sur les impressions en noir et blanc, les sphères rouges sont les plus foncées et les sphères vertes les plus claires.

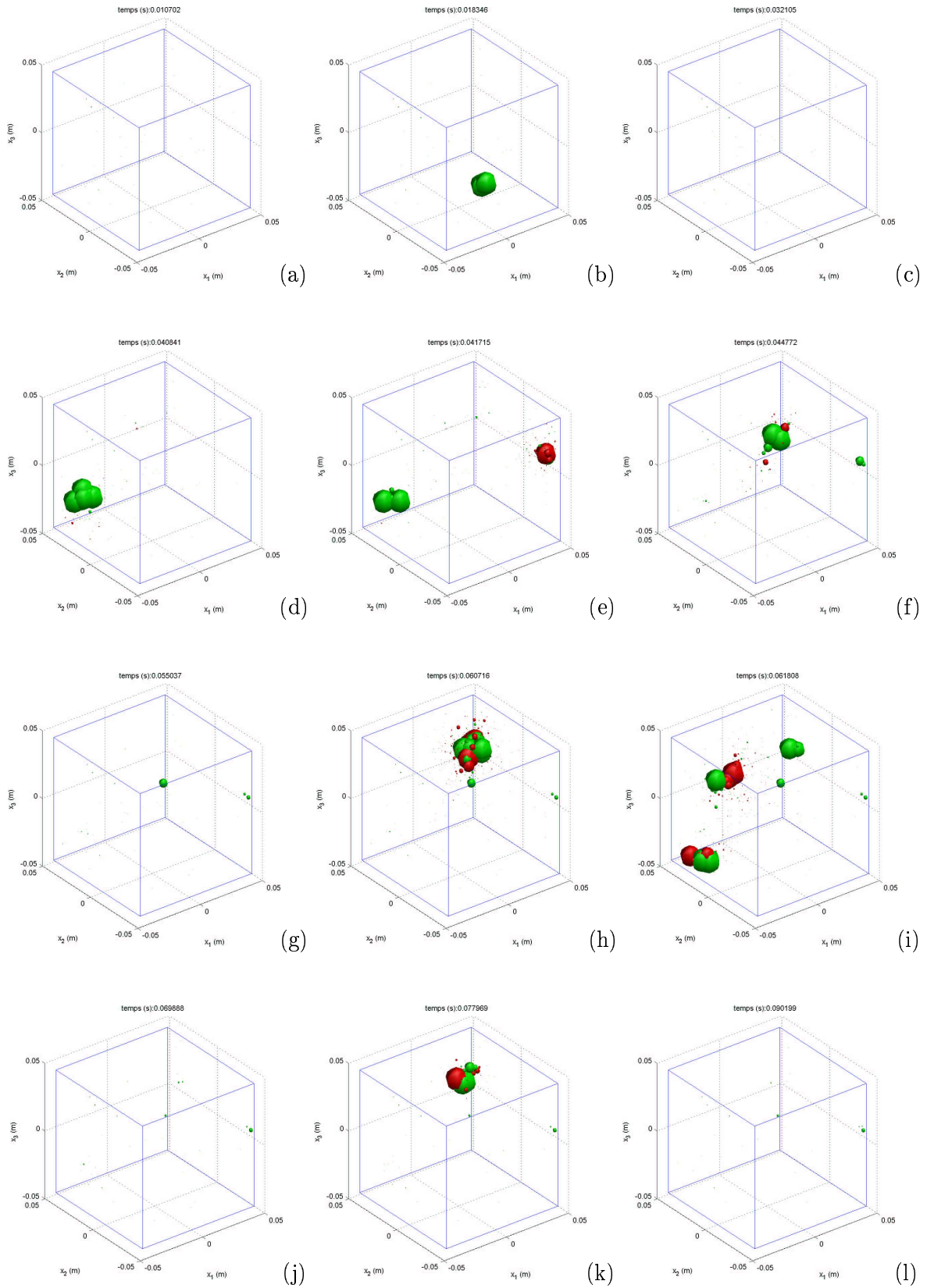


FIG. 3.17 – Représentation spatiale de l'énergie cinétique à différent instant de la simulation pour  $\alpha = 150^\circ$ . Chaque instant est repéré par une lettre sur la Fig. 3.16. Les sphères rouges indiquent des grains impliqués dans le réseau fort, les sphères vertes des grains impliqués dans le réseau faible. Echantillon E1,  $\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$ ,  $\eta = 0.77$ .

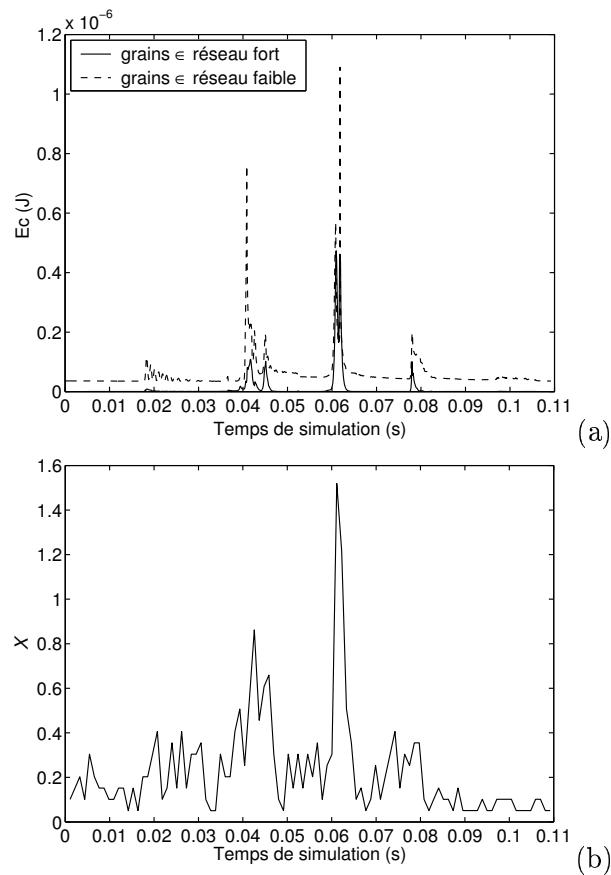


FIG. 3.18 – Evolution de l'énergie cinétique pour des grains impliqués respectivement dans le réseau fort et le réseau faible (a), évolution de la fraction  $X$  de contacts entrant ou sortant du réseau fort (b); échantillon E1,  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ ,  $\alpha = 150^\circ$ .

réseau fort. La cause en est sans doute la prise en compte, dans ce cas, des grains flottants dans le réseau faible. Malgré ce phénomène, il semblerait que le réseau faible soit plus agité que le réseau fort. Toutefois, les différences observées ne nous semblent pas suffisamment marquées pour conclure sur ce point.

Définissons la variable  $X$  comme la fraction de contact entrant ou sortant du réseau fort par unité de temps (Radjaï [99]). La Figure 3.18-b présente l'évolution de  $X$  au cours de la simulation. Les plus fortes valeurs de  $X$  sont corrélées en temps avec les pics d'énergie cinétique. Ces derniers sont donc bien le témoin d'un réarrangement micro-structurel local impliquant, entre autres, les chaînes de forces fortes.

### 3.2.4 Bilan

A mi-parcours de ce chapitre résumons les principaux points mis en évidence vis-à-vis du comportement mécanique du modèle discret.

- L'évolution des enveloppes réponses élastiques avec l'augmentation du niveau de contrainte  $\eta$  témoigne d'une évolution de la texture isotrope vers une texture anisotrope des assemblages granulaires lors de la compression triaxiale.
- Le modèle discret présente une règle d'écoulement non-associée en conditions axisymétriques. On peut donc s'attendre à trouver des valeurs négatives du travail du second ordre avant le critère de Mohr-Coulomb. D'une manière générale la direction de l'écoulement plastique s'effectue suivant un angle  $\beta$  plus faible pour l'échantillon le plus lâche (*E3*) que pour le plus dense (*E1*).
- A l'échelle de l'assemblage granulaire, trois types de déformations sont reconnues: des déformations élastiques en régime quasi-statique, des déformations plastiques en régime quasi-statique, des déformations plastiques en régime dynamique.
- Les déformations plastiques en régime quasi-statique sont essentiellement liées à des glissements intergranulaires aux contacts, alors que les déformations plastiques en régime dynamique sont liées à des glissement intergranulaires et à des réarrangements micro-structurels ponctuels et localisés.
- Les réarrangements micro-structurels semblent concerner aussi bien le réseau de contacts forts que le réseau de contacts faibles.

### 3.3 Etude du signe du travail du second ordre

#### 3.3.1 Expressions semi-Lagrangienne et eulérienne du travail du second ordre

Jusqu'à présent l'expression que nous avons considéré du travail du second ordre (Eqs. (3.5), p. 73 et (1.10), p. 20) est écrite en fonction de tenseur de contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  et du tenseur des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . En respectant le formalisme utilisé dans la définition de la condition de stabilité par Hill [56] le travail du second ordre, que nous nommons dans ce cas  $A$ , s'écrit:

$$A = ds_{ij} \frac{\partial(du_j)}{\partial x_i}, \quad (3.7)$$

où  $s_{ij}$  est le tenseur nominal de contrainte (Eq. (1.7), p. 19:  $\mathbf{s} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^t$ ),  $u_i$  est le champ de déplacement et  $x_i$  réfère au point matériel dans la configuration courante au temps  $t$ .

Dans le cas particulier des recherches directionnelles où l'état initial (avant l'application d'un incrément de chargement dans une direction donnée) est choisi comme la configuration de référence, la configuration courante et de référence correspondent momentanément à l'état initial.  $s_{ij}$  est le transposé du premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff  $\pi_{ij}$  et la quantité  $A$  peut alors s'exprimer de la façon suivante (Nicot *et al.* [90]):

$$A = d\pi_{ij} \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j^0}, \quad (3.8)$$

où  $x_i^0$  réfère au point matériel dans la configuration de référence. Le tenseur  $\pi_{ij}$  considère les forces de la configuration courante appliquées sur les facettes de la configuration de référence, ainsi  $\pi_{ij}$  est un tenseur semi-Lagrangien et l'expression (3.8) est appelée expression semi-Lagrangienne du travail du second ordre (Nicot *et al.* [90]).

Nicot *et al.* [90] montrent que le travail du second ordre peut également s'exprimer sous une forme Eulérienne. L'expression du premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\pi}$  en fonction du tenseur de contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est:

$$\boldsymbol{\pi} = J \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^t, \quad (3.9)$$

avec  $J$  le jacobien de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$  qui fait passer de la configuration de référence à la configuration courante, soit  $F_{ij} = \partial x_i / \partial x_j^0$ .

De plus:

$$d\boldsymbol{\pi} = J (d\boldsymbol{\sigma} + J \operatorname{div}(d\vec{u}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{L})^t dt) (\mathbf{F}^{-1})^t, \quad (3.10)$$

avec  $\mathbf{L}$  le tenseur gradient de vitesse, soit  $L_{ij} = \partial \dot{u}_i / \partial x_j$ .

En insérant l'Equation (3.10) dans (3.8) il vient:

$$A = (d\boldsymbol{\sigma} + \operatorname{div}(d\vec{u}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{L})^t dt) : \mathbf{L} dt \quad (3.11)$$

L'Equation (3.11) est une expression Eulérienne du travail du second ordre qui se compose de trois termes:  $d\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} dt$ ,  $\operatorname{div}(d\vec{u}) \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} dt$  (qui prend en compte la déformation volumique à travers le facteur  $\operatorname{div}(d\vec{u})$ ) et  $\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{L})^t dt : \mathbf{L} dt$ . Ce dernier terme peut être relié à l'évolution de la texture de l'assemblage granulaire (Nicot & Darve [89]).



A partir de l'expression Eulérienne (Eq. (3.11)), en se plaçant dans le cadre des petites transformations et en négligeant les variations de géométrie on retrouve l'expression classiquement utilisée du travail du second ordre à savoir:  $d^2W = d\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Les expressions semi-Lagrangienne et Eulérienne ainsi que chacun des termes composant l'expression Eulérienne ont été calculés à partir de recherches directionnelle. Les résultats sont présentés sur la Figure 3.19 pour les échantillons *E1* et *E3*. Notons que les directions de contraintes  $\alpha$  appartenant aux parties centrales des diagrammes conduisent à des déformations plastiques (cf. Sect 3.2.3) de grande ampleur par comparaison aux déformations élastiques ce qui explique les valeurs importantes du travail du second ordre trouvées pour ces mêmes directions. Premièrement on constate que les expressions Eulérienne et semi-Lagrangienne du travail du second ordre sont numériquement égales comme le prévoient les développements présentés ci-dessus. Concernant l'expression Eulérienne: le terme prépondérant est  $d\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} dt$ , le terme prenant en compte la variation de volume  $div(d\bar{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} dt$  est négligeable. Finalement le terme  $\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{L})^t dt : \mathbf{L} dt$  reste petit mais non négligeable.

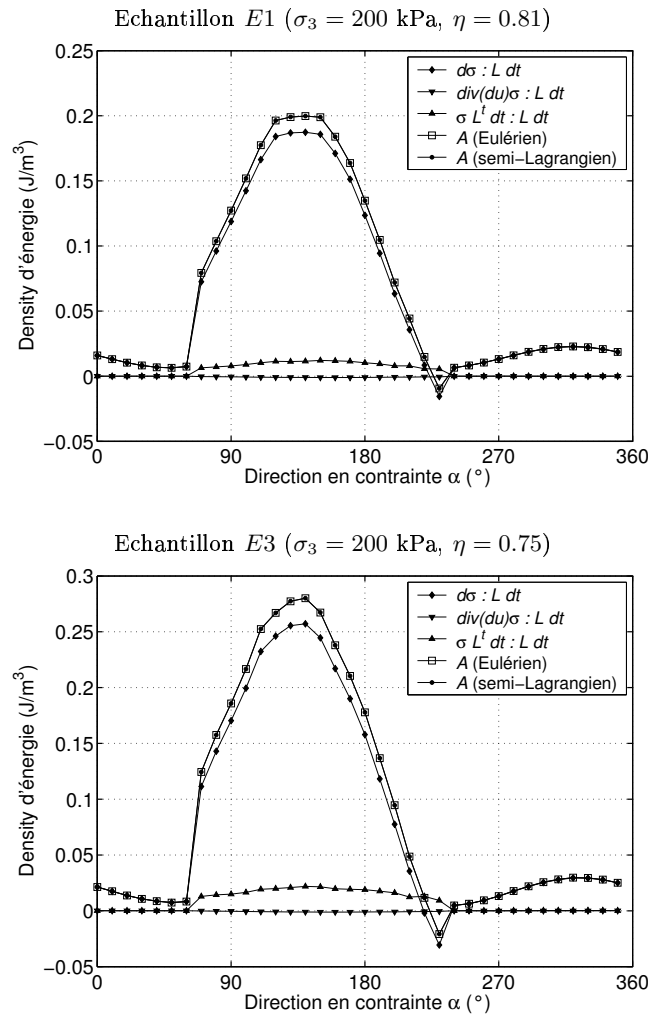


FIG. 3.19 – Expressions semi-Lagrangienne et Eulérienne du travail du second ordre calculé à partir de recherches directionnelles.

Dans le cas des recherches directionnelles présentées dans ce mémoire les déformations restent petites, il n'y a pas de rotation et les variations de géométrie peuvent être négligées par conséquent l'expression classique du travail du second ordre  $d^2W = d\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}$  est équivalente au terme  $d\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} dt$  et sous-estime légèrement les expressions semi-Lagrangienne et Eulérienne comme nous l'avons vérifié numériquement. Nous utiliserons donc l'expression classique de  $d^2W$  dans la suite de l'étude présentée ici.

### 3.3.2 Cônes de directions instables

Suite aux recherches directionnelles simulées pour chacun des échantillons à différents états de contrainte initiale, nous avons calculé la valeur du travail du second ordre  $d^2W$  en fonction de la direction de sollicitation en contrainte  $\alpha$ . Une représentation circulaire du travail du second ordre normalisé (Darve & Laouafa [36]) est adoptée afin de faciliter la lecture des figures.

Le travail du second ordre normalisé est défini par:

$$d^2W_n = \frac{d\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}}{\|d\vec{\sigma}\| \|d\vec{\varepsilon}\|} . \quad (3.12)$$

$d^2W_n$  est donc égal au cosinus de l'angle entre  $d\vec{\sigma}$  et  $d\vec{\varepsilon}$  ( $-1 \leq d^2W_n \leq 1$ ).

La représentation circulaire de la variable polaire  $d^2W_n(\alpha)$  consiste à représenter la fonction:

$$y(\alpha) = d^2W_n(\alpha) + \rho, \quad (3.13)$$

où  $\rho > 0$  est un paramètre constant choisi de telle façon que  $\forall \alpha, y > 0$ . Par conséquent un cercle en tireté est dessiné sur les diagrammes circulaires pour représenter les valeurs nulles de  $d^2W_n$ . A l'intérieur du cercle  $d^2W_n$  est négatif, à l'extérieur il est positif (voir par exemple la Fig. 3.20).

#### 3.3.2.1 Résultats numériques

Les représentations circulaires de  $d^2W_n$  pour les échantillons  $E1$ ,  $E2$  et  $E3$  sont respectivement montrées sur les Figures 3.20, 3.21 et 3.22 en fonction de l'état de contrainte initial des recherches directionnelles caractérisé par  $\sigma_3$  et  $\eta$ . Pour que les Figures soient lisibles les résultats de la totalité des recherches directionnelle ne sont pas montrés ici. Toutefois une synthèse de l'ensemble des résultats est faite un peu plus loin (Sect. 3.3.2.3).

D'une manière générale on observe que quelque soit le confinement et l'échantillon (c'est à dire la densité) les valeurs de  $d^2W_n$  diminuent dans les quarts sud-ouest et nord-est des diagrammes circulaires. Dans les quarts sud-ouest des diagrammes, des valeurs négatives de  $d^2W_n$  sont trouvées sauf pour les échantillons  $E1$  et  $E2$  à  $\sigma_3 = 300$  kPa. L'ensemble des directions  $\alpha$ , à un état donné, pour lesquelles  $d^2W_n \leq 0$  forme un cône, appelé par Darve *et al.* [42] cône de directions en contrainte instables. Les chemins en contrainte inclus dans ces cônes sont donc potentiellement instables au sens de Hill (la positivité du travail du second ordre n'est qu'une condition suffisante de stabilité) et les états initiaux des recherches directionnelles correspondantes sont des points de bifurcation.

Notons que les valeurs négatives (ou du moins minimales) de  $d^2W_n$  sont trouvées, que ce soit dans le quart sud-ouest ou le quart nord-est, pour des directions  $\alpha$  voisines des directions

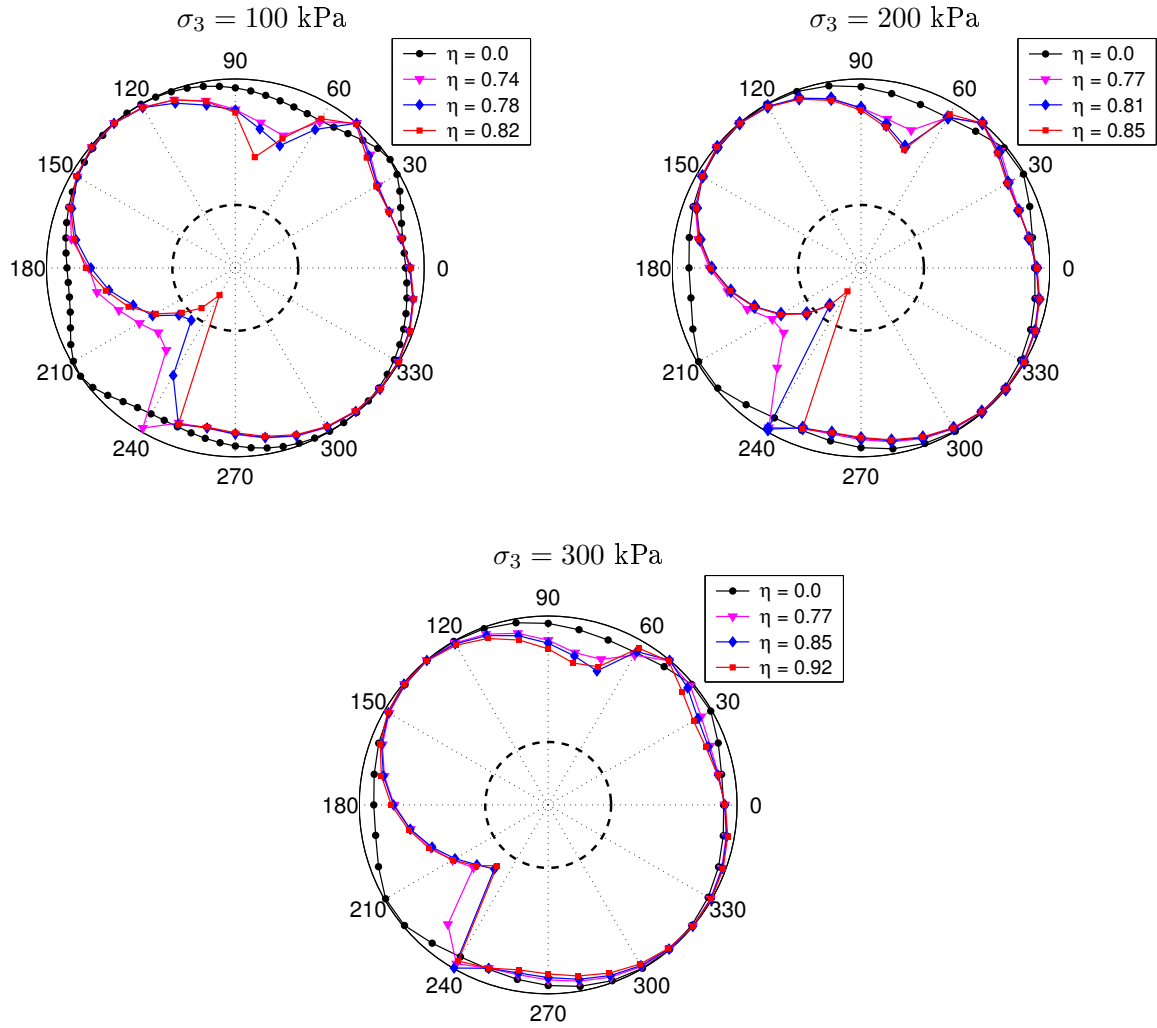


FIG. 3.20 – Représentations circulaires du travail du second ordre normalisé  $d^2W_n$  pour l'échantillon E1.

tangentes à la surface de limite élastique (cf. Sect. 3.2.2.3, p. 82). Kishino [65] a simulé des recherches directionnelles avec un modèle numérique discret. Bien qu'il n'ait pas trouvé de valeur négative du travail du second ordre<sup>7</sup> il remarque également que les valeurs minimales sont obtenues pour des directions en contrainte voisines des directions tangentes à la surface de limite élastique. En effet, rappelons que  $d^2W_n$  est égal au cosinus de l'angle entre  $d\vec{\sigma}$  et  $d\vec{\varepsilon}$  donc  $d^2W_n$  et  $d^2W$  prennent des valeurs négatives ou nulles si  $|\alpha - \beta| \geq 90^\circ$ . Pour des directions de chargement (au sens de l'élasto-plasticité) et en supposant les déformations élastiques petites par rapport aux déformations plastiques, la valeur de  $\beta$  est à peu près constante (du fait de la règle d'écoulement) et égale à la direction de l'écoulement plastique. Par conséquent,  $|\alpha - \beta|$  sera d'autant plus grand que  $\alpha$  sera proche d'une direction tangente à la surface de limite élastique (cf. Fig. 3.11, p. 84). Bien sûr, on aura  $|\alpha - \beta| > 90^\circ$  uniquement si la règle d'écoulement est non associée.

Moins l'échantillon est dense, plus les cônes apparaissent pour des valeurs de  $\eta$  faibles: pour E1 le premier cône est trouvé à  $\eta = 0.81$ , pour E2 à  $\eta = 0.74$  et pour E3 à  $\eta = 0.46$ . De même,

7. Kishino [65] précise que les recherches directionnelles ont été simulé pour des états de contrainte éloignés du critère de Mohr-Coulomb. Il est possible que, pour des états de contrainte plus proche du critère de Mohr-Coulomb, le travail du second ordre prenne des valeurs nulles ou négatives.

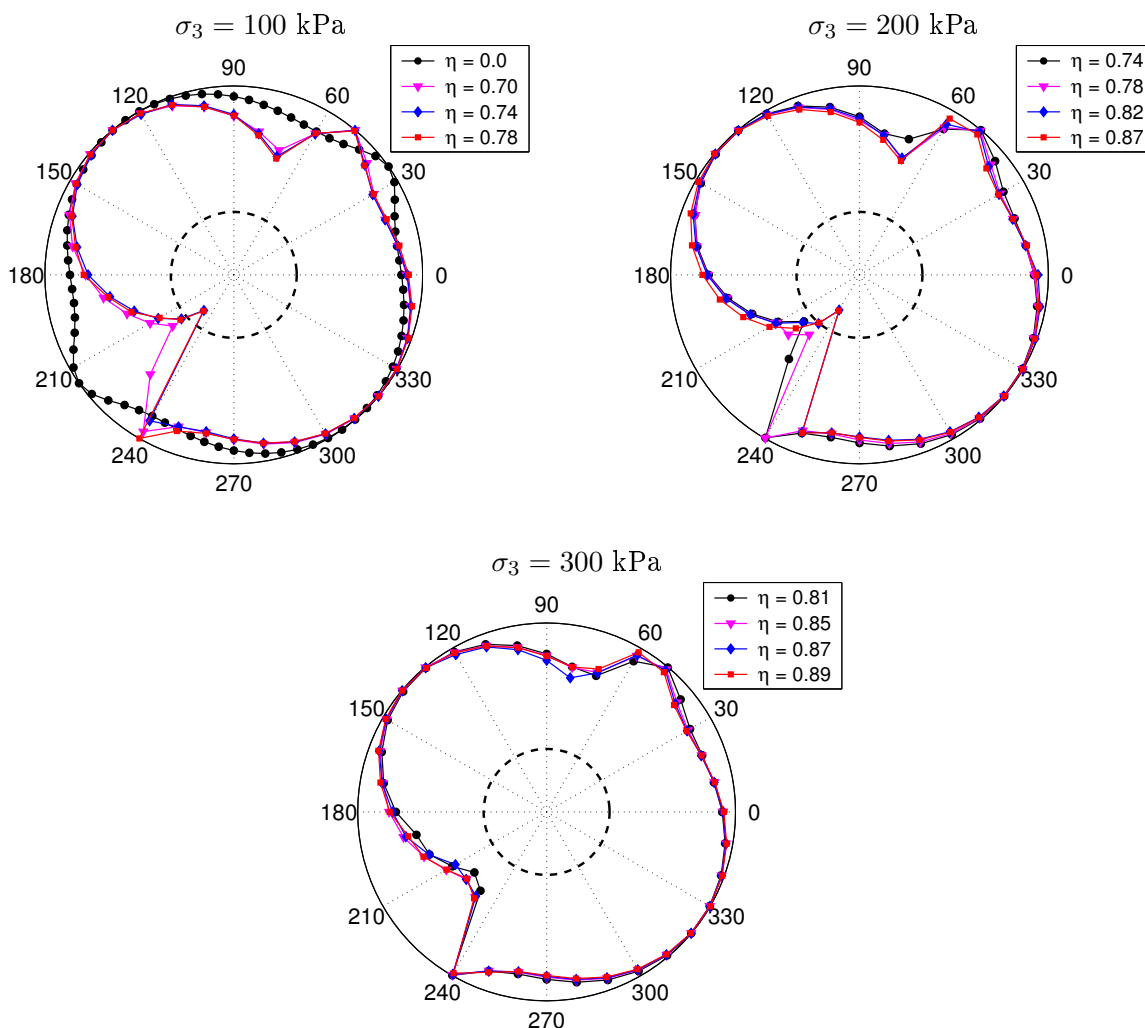


FIG. 3.21 – Représentations circulaires du travail du second ordre normalisé  $d^2W_n$  pour l'échantillon  $E2$ .

tous états de contrainte confondus, la plus petite valeur de  $\alpha$  pour laquelle le travail du second ordre s'annule diminue avec la densité: pour  $E1$ ,  $d^2W_n$  s'annule dès  $\alpha = 223^\circ$ ; pour  $E2$  dès  $\alpha = 222^\circ$ ; pour  $E3$  dès  $\alpha = 205^\circ$ . La première direction  $\alpha$  (dans le sens direct) pour laquelle le travail du second ordre s'annule est directement liée à la direction de l'écoulement plastique. Une illustration en est donnée sur la Figure 3.23: la direction  $\beta$  du vecteur des déformations totales  $d\vec{\varepsilon}$  est tracée en fonction de  $\alpha$  respectivement pour les échantillons  $E1$  ( $\sigma_3 = 100$  kPa et  $\eta = 0.82$ , voir le cône de direction instable sur la Fig; 3.20) et  $E3$  ( $\sigma_3 = 100$  kPa et  $\eta = 0.46$ , voir le cône sur la Fig. 3.22). Lorsque les courbes  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  franchissent les droites  $|\alpha - \beta| = 90^\circ$  le travail du second ordre prend des valeurs négatives. De plus, ces courbes présentent un plateau dépendant principalement de la direction de l'écoulement plastique (les déformations élastiques sont ici négligeables). Pour  $E3$  la valeur de  $\beta$  au plateau est plus faible que celle pour  $E1$ . Par conséquent, certaines directions  $\alpha$  ( $[208^\circ; 224^\circ]$ ) appartiennent au cône de direction instable pour  $E3$  alors qu'il est impossible de trouver un travail du second ordre négatif suivant ces mêmes directions pour  $E1$ , du fait de la direction de l'écoulement plastique.

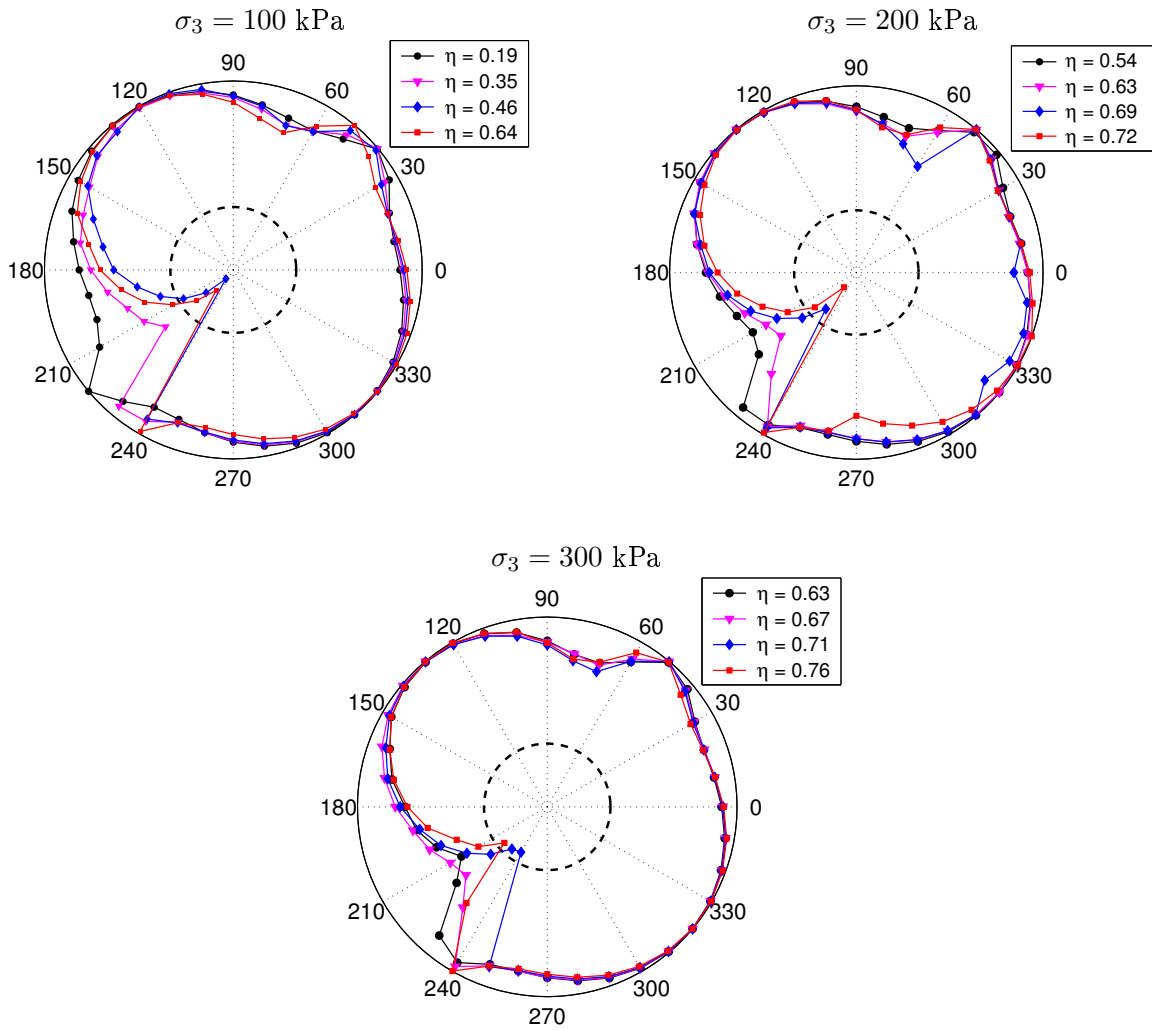


FIG. 3.22 – Représentations circulaires du travail du second ordre normalisé  $d^2W_n$  pour l'échantillon E3.

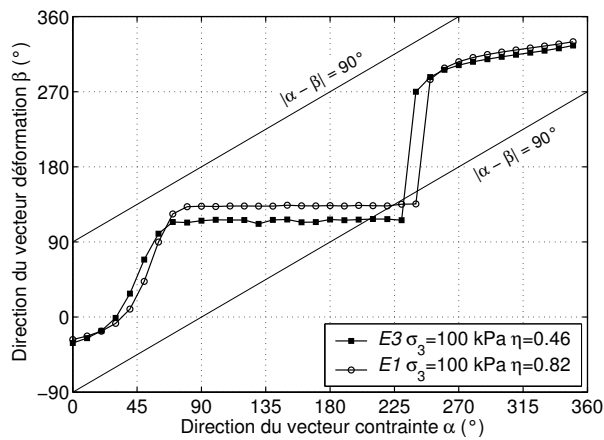


FIG. 3.23 – Comparaison de la direction  $\beta$  des réponses en déformation entre les échantillons E1 et E3.

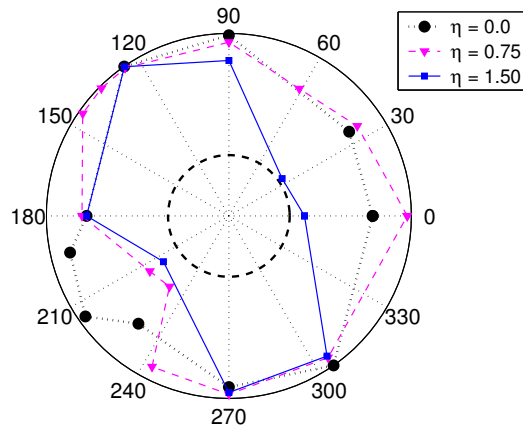


FIG. 3.24 – Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé  $d^2W_n$  calculé d'après les recherches directionnelles réalisées par Royis et Doanh [108] sur un sable d'Hostun dense.

### 3.3.2.2 Résultats expérimentaux

Les recherches directionnelles sont difficiles à réaliser d'un point de vue expérimental : pour chacune des sollicitations dans une direction à partir d'un état initial donné, un nouvel échantillon doit être fabriqué. Il faut donc pouvoir assurer une bonne reproductibilité des échantillons, notamment en ce qui concerne leur densité. Toutefois, Royis et Doanh [108] ont publié les résultats (Normes et directions des incréments de réponse en déformation) de recherches directionnelles en contrainte sur du sable d'Hostun que l'on a présentés au chapitre précédent (Sect. 2.3.2.1, p. 56). La Figure 3.24 montre les valeurs de  $d^2W_n$  calculées à partir de leurs données. Toutes les valeurs de  $d^2W_n$  sont positives. Cependant, peu de directions ont été testées (sans doute à cause de la difficulté de l'exercice) et on peut très bien imaginer des valeurs négatives de  $d^2W_n$  pour  $\eta = 1.50$ . Dans tous les cas la tendance est similaire à celle observée pour nos simulations : les valeurs de  $d^2W_n$  diminuent lorsque  $\eta$  augmente dans les quarts sud-ouest et nord-est du diagramme. Une différence est à noter : il semblerait que l'on puisse s'attendre à deux cônes de directions instables respectivement dans les deux quarts pré-cités, alors qu'un unique cône a toujours été trouvé avec le modèle discret.

### 3.3.2.3 Synthèse dans le plan d'axisymétrie des contraintes

Les résultats de l'ensemble des recherches directionnelles simulées sur les trois échantillons  $E1$ ,  $E2$  et  $E3$  sont présentés sur la Figure 3.25. D'une manière générale, Les cônes s'ouvrent soudainement à partir d'un niveau de contrainte donné. Comme on l'a déjà fait remarquer ce niveau de contrainte est d'autant plus faible que l'échantillon est lâche, (voir notamment la différence entre  $E1$  et  $E3$  pour  $\sigma_3 = 100$  kPa). Le domaine de bifurcation est relativement réduit dans le cas des échantillons  $E1$  et  $E2$  et est plus vaste pour  $E3$ . De même, l'ouverture des cônes est plus importante pour l'échantillon le plus lâche : un plus grand nombre de directions sont potentiellement instables au sens de Hill.

Deux points peu classiques sont à souligner :

- au delà d'un certain niveau de contrainte (d'une certaine valeur de  $\eta$ ) les cônes ont tendance à se refermer (voir, par exemple, l'échantillon  $E1$  à  $\sigma_3 = 100$  et  $200$  kPa),

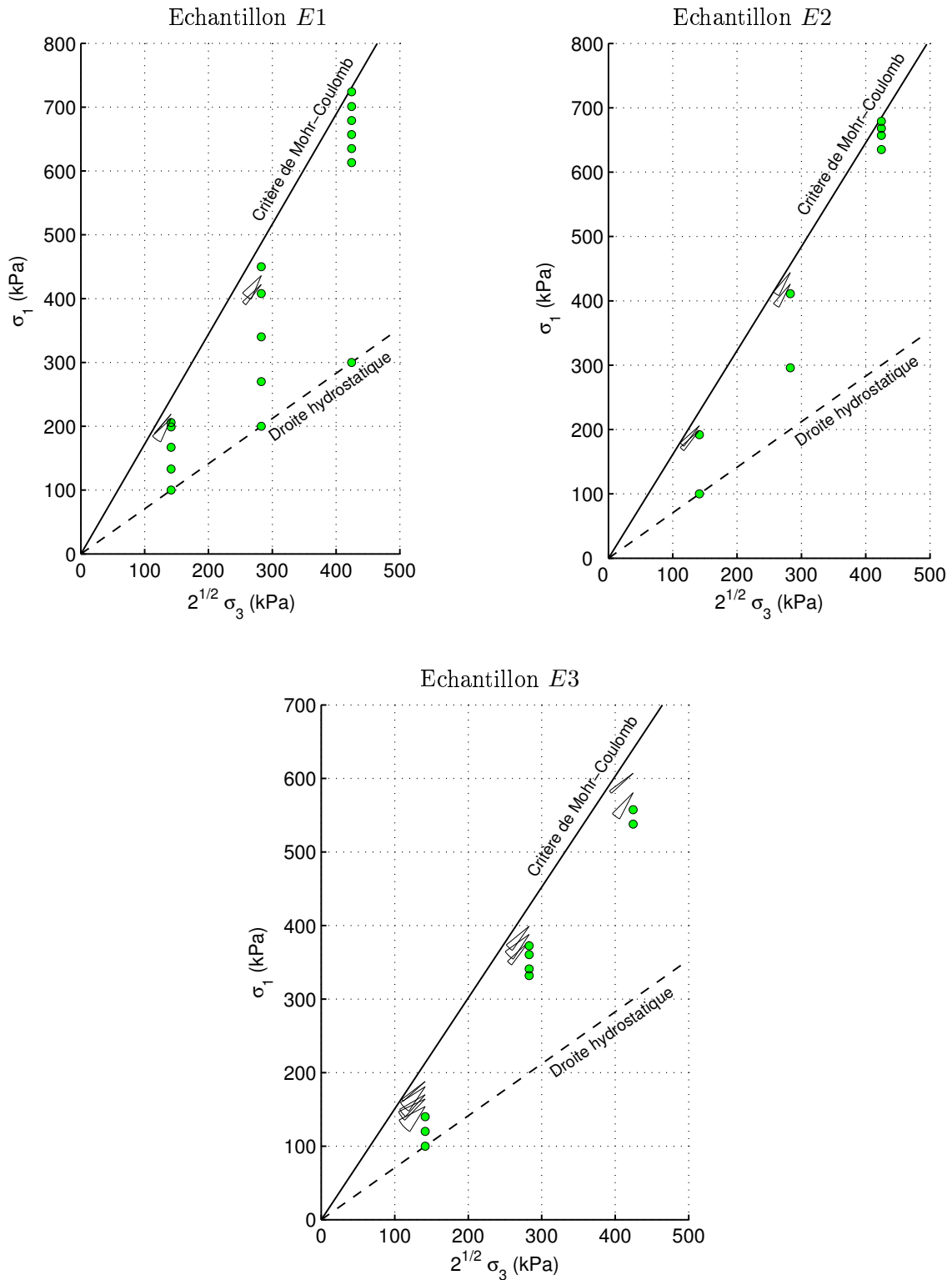


FIG. 3.25 – Cônes de directions instables dans le plan de Rendulic des contraintes. Les symboles circulaires pleins représentent les états de contrainte pour lesquels  $d^2W > 0$  quelque soit la valeur de  $\alpha$  testée, les cônes représentent les cônes de directions instables.

- pour les échantillons  $E1$  et  $E2$  aucun cône n'est trouvé pour une pression de confinement  $\sigma_3 = 300$  kPa.

On pourrait s'attendre à priori à une plus grande régularité dans les résultats, à ce que les cônes continuent à s'ouvrir lorsque le niveau de contrainte déviatoire augmente et que les résultats trouvés soient "transposables" d'une pression de confinement à une autre. Dans la prochaine section une comparaison est effectuée avec des résultats issus d'une relation phénoménologique. Cette comparaison permettra, entre autre, de confirmer ou d'infirmer les résultats précédents et nous tenterons alors d'en donner une explication.

### 3.3.3 Comparaison avec une loi macroscopique phénoménologique

Nous avons vu dans le bibliographie de ce mémoire (Sect. 1.4.3.4, p. 24) que de nombreuses modélisations constitutives concernant le travail du second ordre ont été réalisées avec une relation constitutive phénoménologique (INL2) par Darve et son équipe [35; 36; 42; 63; 73]. La relation INL2 est succinctement présentée dans la section suivante. Nous effectuons ensuite une comparaison entre les résultats obtenus avec notre modèle discret et ceux issus de la relation INL2 calibrée sur un sable d'Hostun respectivement dense et lâche. La relation INL2 a également été calibrée sur le comportement simulé de l'échantillon numérique  $E1$  (Scholtès [112]), ce qui autorise une comparaison plus fine (Sibille *et al.* [119]).

#### 3.3.3.1 Relation incrémentalement non linéaire du second ordre (INL2)

Une présentation détaillée de la relation constitutive incrémentalement non linéaire du second ordre, INL2, est donnée par Darve [31] et Darve *et al.* [34]. La relation INL2 est une relation macroscopique phénoménologique non-visqueuse qui a été conçue pour décrire et prédire le comportement mécanique des sables et des argiles, elle comporte une infinité de zones tensorielles.

L'expression générale de la relation INL2 est brièvement décrite ci-dessous. Considérons la relation constitutive qui a été donnée à l'Equation (3.4). Sous forme indicielle elle s'écrit:

$$d\varepsilon_{ij} = M_{ijkl}(u_{mn}) d\sigma_{kl} . \quad (3.14)$$

En supposant que chaque fonction  $M_{ijkl}$  de variables  $u_{mn}$  est continue et possède des dérivées partielles continues à tous les ordres, le développement en série donne:

$$M_{ijkl}(u_{mn}) = M_{ijkl}^1 + M_{ijklmn}^2 u_{mn} + M_{ijklmnpq}^3 u_{mn} u_{pq} + \dots \quad (3.15)$$

En se limitant aux deux premiers termes de l'Equation (3.15) et en reportant cette dernière dans l'Equation (3.14) il vient l'expression générale de la relation INL2:

$$d\varepsilon_{ij} = M_{ijkl}^1 d\sigma_{kl} + \frac{1}{\|d\boldsymbol{\sigma}\|} M_{ijklmn}^2 d\sigma_{kl} d\sigma_{mn} . \quad (3.16)$$

Dans les axes principaux fixes de contrainte-déformation elle prend sa plus simple expression:

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\mathbf{N}^+ + \mathbf{N}^-] \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\|d\boldsymbol{\sigma}\|} [\mathbf{N}^+ - \mathbf{N}^-] \begin{bmatrix} (d\sigma_1)^2 \\ (d\sigma_2)^2 \\ (d\sigma_3)^2 \end{bmatrix} , \quad (3.17)$$

où  $\mathbf{N}^+$  et  $\mathbf{N}^-$  sont des matrices constitutives  $3 \times 3$  dépendant des variables d'état et des paramètres de mémoire.



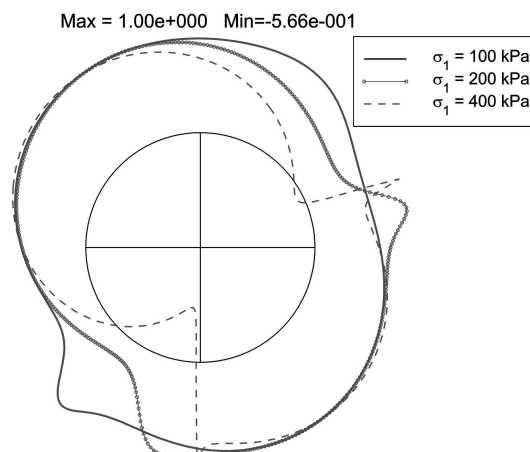


FIG. 3.26 – Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé  $d^2W_n$  en conditions axisymétriques ( $\sigma_3 = 100$  kPa) calculé avec la relation INL2 pour un sable d'Hostun dense; Darve et Laouafa [36].

### 3.3.3.2 Modélisation constitutive pour un sable d'Hostun

Sur la Figure 3.26 sont présentés les valeurs du travail du second ordre normalisé  $d^2W_n$  pour un sable d'Hostun dense. L'évolution des valeurs de  $d^2W_n$  est similaire à celle trouvée avec le modèle discret : lorsque  $\sigma_1$  augmente (i.e. lorsque  $\eta$  augmente) les valeurs du travail du second ordre décroissent dans les quarts sud-ouest et nord est du diagramme. Toutefois, deux cônes de directions instables sont trouvées pour la plus grande valeur de  $\sigma_1$  (i.e. la plus grande valeur de  $\eta$ ), alors qu'un unique cône a toujours été trouvé avec le modèle discret. La présence de ces deux cônes confirme les hypothèses émises vis-à-vis des résultats expérimentaux présentés à la Section 3.3.2.2 (p. 99).

Dans la bibliographie nous avons présenté deux figures synthétisant dans le plan d'axisymétrie des contraintes le résultat des recherches directionnelles modélisées avec la relation INL2 pour un sable d'Hostun respectivement dense et lâche (Fig 1.10, p. 26). Nous comparons de manière qualitative ces figures avec celles correspondant au modèle discret (Fig. 3.25, p. 100).

- Avec la relation INL2, les états de contrainte pour lesquels les premiers cônes sont trouvés (qui se résument à une direction unique) sont à peu près alignés sur une droite passant par l'origine de l'espace des contraintes et au-dessus de laquelle s'étend le domaine de bifurcation. Autrement dit, quelque soit la pression de confinement la première direction instable pour une densité donnée est obtenue pour une même valeur de  $\eta$ . Cette valeur de  $\eta$  est d'autant plus élevée que le sable modélisé est dense (Darve et Laouafa [37], Servant [113]). Avec le modèle discret les premiers cônes sont également trouvés pour des valeurs de  $\eta$  d'autant plus élevées que les échantillons sont denses. Par contre la limite du domaine incluant les cônes ne forme pas une droite passant par l'origine de l'espace des contraintes et la valeur de  $\eta$  marquant la limite du domaine semble dépendre de la pression de confinement. Dans tous les cas, on peut considérer comme admis que la limite du domaine de bifurcation correspond à une valeur de  $\eta$  d'autant plus élevée que le matériau est dense et que le domaine de bifurcation se réduit avec la densité (bien que la valeur de l'angle de frottement limite augmente également).

Nous avons constaté au chapitre précédent que le modèle discret présente un comportement d'autant plus dilatant que la pression de confinement est élevée. Ce phénomène

est sans doute lié à une sensibilité importante de la densité des échantillons numériques à la pression de confinement. Les résultats trouvés ici vis-à-vis du signe du travail du second ordre confirme cette dernière hypothèse: plus la pression de confinement est élevée plus l'échantillon numérique est dense, plus les cônes sont trouvés pour des valeurs de  $\eta$  élevées voire sont absents pour les échantillons  $E1$  et  $E2$  à  $\sigma_3 = 300$  kPa.

- Les modélisations constitutives avec la relation INL2 montrent que les cônes s'ouvrent de manière continue et monotone en fonction de  $\eta$  (Fig 1.10, p. 26 et Servant [113]). Le phénomène de fermeture des cônes pour des valeurs élevées de  $\eta$  est donc particulier au modèle discret .
- Pour une même valeur de  $\eta$  les cônes sont plus ouverts pour le sable d'Hostun lâche que pour le sable dense. Les cônes de directions instables impliquent un plus grand nombre de directions de sollicitation en contrainte dans le cas du sable lâche que dans celui du sable dense. Notamment le chemin à  $q$  constant qui correspond à une décharge hydrostatique ( $d\sigma_1 = d\sigma_3 < 0$ ) est inclus dans les cônes à partir d'un certain niveau de contrainte pour le sable lâche alors qu'il ne l'est jamais pour le sable dense. De manière similaire la direction  $d\sigma_1 = d\sigma_3 < 0$  qui correspond à un angle  $\alpha = 215.3^\circ$  n'est jamais incluse dans les cônes pour les échantillons  $E1$  et  $E2$ , qui sont les plus denses, alors qu'elle l'est pour la majorité des cônes de l'échantillon le plus lâche,  $E3$ .

### 3.3.3.3 Calibration de la relation INL2 sur le comportement de l'échantillon E2

Afin de mieux apprécier les différences et les similitudes citées dans la section précédente entre le modèle discret et la relation INL2, cette dernière a été calibrée (Scholtès [112]) sur le comportement triaxial en compression et en extension simulé à partir de l'échantillon  $E1$ . Les résultats de cette calibration sont présentés sur la Figure 3.27. Les cônes de directions instables calculés avec cette nouvelle calibration de la relation INL2 sont montrés sur la Figure 3.28-a. Un domaine de bifurcation apparaît clairement, sa frontière est rapportée sur les résultats obtenus par simulation avec le modèle discret (Fig. 3.28-b). Les différences observées précédemment entre les deux modèles subsistent (absence de cônes pour le modèle discret à  $\sigma_3 = 300$  kPa et pour les plus hauts niveaux de contrainte). Toutefois l'orientation des cônes est similaire pour les deux modèles et la calibration de la relation INL2 a permis d'approcher l'étendue du domaine de bifurcation pour  $E1$  qui est très restreint par comparaison à celui d'un sable d'Hostun.

Même si le domaine de bifurcation est assez bien approché, les cônes s'ouvrent pour un niveau de contrainte plus faible avec la relation INL2 qu'avec le modèle discret. Afin d'éclaircir ce point nous avons comparé les réponses en déformation suite à une recherche directionnelle à partir d'un état initial ( $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ ) pour lequel un cône de directions instables est trouvé avec la relation INL2 et non avec le modèle discret. Notons qu'il aurait été intéressant de comparer séparément les déformations élastiques et plastiques. Cependant, la relation INL2 ne permet pas cette dissociation des déformations, les déformations plastiques coexistent toujours avec les déformations élastiques. Les Figures 3.29-a et -b présentent respectivement la comparaison de la norme  $\|d\vec{\varepsilon}\|$  et de la direction  $\beta$  des déformations en fonction de la direction de chargement  $\alpha$ . La relation INL2 estime correctement les valeurs maximales de la norme des déformations et la valeur de  $\beta$  au plateau que l'on peut supposer proche de la direction de l'écoulement plastique. Par contre, la relation INL2 surestime la zone tensorielle plastique c'est-à-dire l'intervalle des directions  $\alpha$  pour lequel les déformations sont essentiellement plastiques et leur direction  $\beta$  quasi-constante pour cause de la vérification de la règle d'écoulement par les déformations plastiques. Ainsi la courbe  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  franchit la

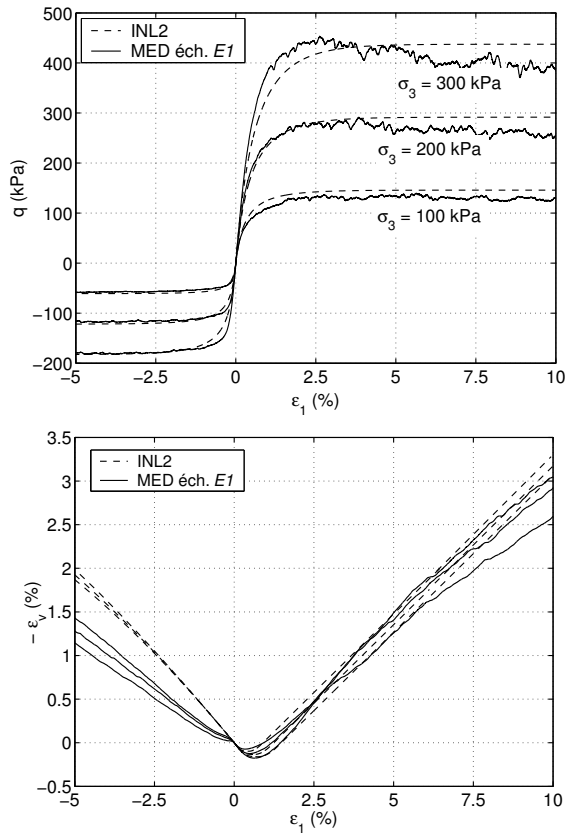


FIG. 3.27 – Calibration de la relation INL2 sur la comportement triaxial simulé de l'échantillon numérique E1; Sholtès [112].

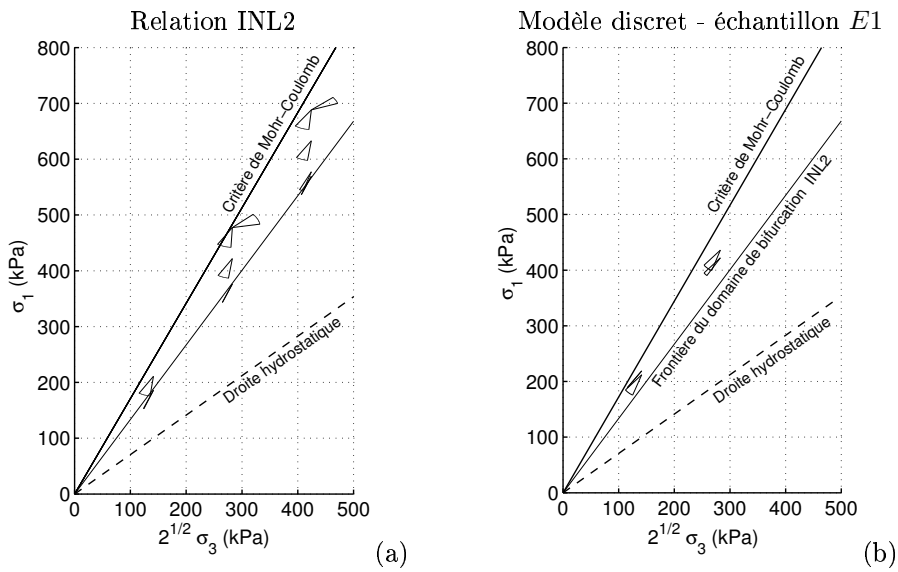


FIG. 3.28 – Domaine de bifurcation pour la relation INL2 calibrée sur le comportement triaxial de l'échantillon E1 (a); Scholtès [112]. Rappel des cônes de directions instables pour l'échantillon E1 (b).

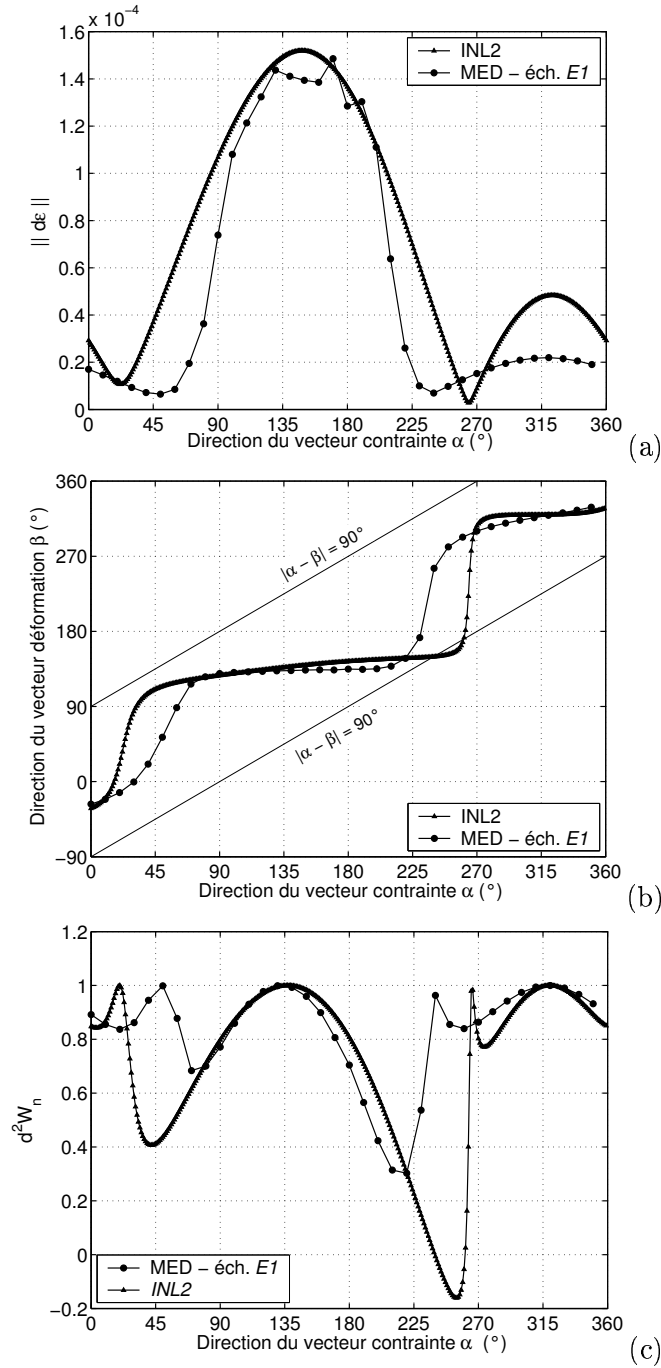


FIG. 3.29 – Comparaison entre la relation INL2 et le modèle discret (échantillon E1) de la norme  $\|d\bar{\epsilon}\|$  (a), la direction  $\beta$  (b) de l'incrément de déformation et de  $d^2W_n$  (c) en fonction de la direction de chargement  $\alpha$  ( $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ ).

droite  $|\alpha - \beta| = 90^\circ$  pour la relation INL2 et non pour le modèle discret. Un cône de directions instables est donc trouvé avec la relation INL2 et non avec le modèle discret comme le montre la représentation cartésienne  $d^2W_n$  sur la Figure 3.29-c.

### 3.4 Conclusion

Une synthèse sur l'analyse du comportement mécanique du modèle discret a déjà été donnée à la fin de la première partie de ce chapitre (Sect 3.2.4, p. 92), nous nous consacrons donc ici à l'étude réalisée sur le signe du travail du second ordre.

Des cônes de directions instables ont été mis en évidence, mais une certaine fluctuation sur l'ouverture des cônes a été observée. Ce point n'est pas particulier à un échantillon donné puisqu'il existe pour des échantillons issus de désordres différents<sup>8</sup> ( $E1$  et  $E3$  d'une part et  $E2$  d'autre part). Nous avons déjà avancé une explication concernant la sensibilité de la densité du modèle discret à la pression de confinement. On peut également évoquer le fait que, pour des états de contrainte proches des pics de  $q$  la variation de  $q$  avec  $\varepsilon_1$  n'est pas strictement monotone mais est marquée par de nombreux pics (voir par exemple la Fig 2.12, p. 62), sans doute liés au faible nombre de grains. On peut alors se poser la question de la validité d'une recherche directionnelle dans ces conditions.

Cependant, nous pouvons affirmer qu'un domaine de bifurcation est trouvé avec le modèle discret strictement à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. A partir d'un point de bifurcation seulement certaines directions de chargement (et non toutes) ne vérifient pas la condition de stabilité de Hill (Sibille *et al.* [115; 116; 117]). Des chemins en contrainte dans ces directions pourraient donc conduire à une rupture de l'assemblage granulaire. Notons que les directions correspondant aux chemins triaxiaux drainés et à pression moyenne constante ne sont jamais incluses dans les cônes<sup>9</sup>.

Un aspect remarquable de ces résultats, qui démontre leur robustesse, réside dans le fait qu'ils peuvent être mis en évidence avec des approches fondamentalement différentes (Nicot & Darve [88], Sibille *et al.* [119]). Nous avons considéré ici des simulations numériques directes et une relation constitutive phénoménologique. A ces approches s'ajoute un modèle micro-mécanique: le modèle micro-directionnel (Nicot [86], Nicot & Darve [87; 88]) qui s'appuie sur une description statistique des orientations de contacts dans un assemblage granulaire et une technique d'homogénéisation et de localisation analytique. Des résultats tout à fait similaires concernant le domaine de bifurcation et les cônes de directions instables ont été trouvés (Nicot & Darve [88], Sibille *et al.* [119]). A titre indicatif des représentations polaires (et non circulaires!) du travail du second ordre normalisé calculé avec le modèle micro-directionnel sont présentées sur la Figure 3.30. Ces trois approches diffèrent par l'échelle à laquelle est décrit le matériau (macro ou micro), les techniques (analytique ou numérique) et les hypothèses utilisées.

8. Pour les échantillons  $E1$  et  $E3$  les mêmes grains sont à la même position spatiale avant compactage, alors que pour  $E2$  les grains occupent des positions différentes bien que la granulométrie et la densité avant compactage soient identiques

9. Lindenberg & Koning [76] et Gajo *et al.* [52] ont observé expérimentalement sur des chemins à pression moyenne constante l'effondrement d'échantillons de sable lâche avant le critère de Mohr-Coulomb, or ce chemin n'est pas inclus dans les cônes de directions instables. Ce point bien qu'il ne soit pas traité dans ce travail de thèse mériterait d'être éclairci.

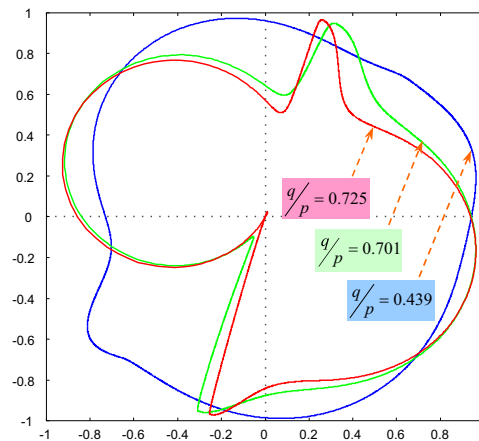


FIG. 3.30 – Représentations polaires du travail du second ordre normalisé  $d^2W_n$  calculé avec le modèle micro-directionnel ( $\sigma_3 = 125$  kPa); Nicot & Darve [88].

Plus précisément, nous avons montré que le domaine de bifurcation s'étend et l'ouverture des cônes augmente lorsque la densité du matériau diminue. Ces résultats s'accordent avec le fait que plus un matériau est lâche plus il est susceptible de s'effondrer à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. De plus, les directions instables dépendent en partie de la densité. Cette dernière semble jouer sur la direction de l'écoulement plastique à laquelle le signe du travail du second ordre est lié. Les matériaux les plus lâches seraient donc sensibles à certains chemins de chargement auxquels les matériaux denses ne le sont pas. Citons par exemple, comme cela est généralement constaté expérimentalement, les chemins à  $q$  constant et les chemins triaxiaux non-drainés.

Dans les chapitres suivants, d'une part nous préciserons les conditions nécessaires à la rupture à partir d'un point de bifurcation et d'autre part nous étudierons les liens entre le travail du second ordre et des variables microscopiques telles que les forces de contact et les déformations des contacts.



## CHAPITRE 4

---

De la détection d'un point de bifurcation à la rupture

---



## 4.1 Introduction

Ce chapitre a pour vocation de mettre en évidence le lien qui est susceptible d'exister entre un point de bifurcation détecté par le critère du travail du second ordre, la bifurcation en tant que telle et la rupture. L'attention sera notamment portée sur les conditions à remplir en plus de la violation du critère du travail du second ordre pour que le matériau évolue du point de bifurcation vers la rupture.

L'objet de ce chapitre peut également être décrit de la façon suivante: nous avons présenté dans l'étude bibliographique (Sect. 1.3.2, p. 10) des types d'essais triaxiaux axisymétriques (notamment les essais non drainés, proportionnels en déformation ou à déviateur de contrainte  $q$  constant) pouvant mener à la rupture d'échantillons de sable, en général lâches, à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. Il n'existe pas à l'heure actuelle de critère utilisé couramment pour décrire ces types de rupture. En ce qui concerne le modèle discret, nous avons mis en évidence au Chapitre 3 qu'un ensemble d'états de contrainte-déformation ne vérifie pas la condition de positivité du travail du second ordre. La question que l'on se pose alors est la suivante: peut-on effectivement décrire à l'aide du signe du travail du second ordre ces effondrements observés expérimentalement? Question que l'on peut compléter par: peut-on envisager d'autres chemins de sollicitation qui entraîneraient un effondrement à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb?

Ce chapitre est organisé par classes de chemins de sollicitation. Nous commencerons par étudier les chemins à déviateur de contrainte constant qui ont fait l'objet d'essais de laboratoire et qui connaissent une application pratique immédiate dans le cas des glissements de terrains suite à la hausse de la nappe aquifère. A partir de ces chemins nous effectuerons une généralisation de l'analyse aux chemins proportionnels en contrainte. C'est un moyen d'envisager d'autres chemins de sollicitation susceptibles de conduire à une rupture du matériau à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. Pour compléter, cette liste nous considérerons les chemins duaux des précédents, c'est à dire les chemins de sollicitation non drainés et proportionnels en déformation. Pour finir nous présentons les premiers résultats d'une approche expérimentale du problème traité basée sur un matériau analogique bidimensionnel.

## 4.2 Chemin à déviateur de contrainte $q$ constant

Rappelons tout d'abord que le chemin à déviateur de contrainte constant est caractérisé par  $d\sigma_1 = d\sigma_3 < 0$  (nous nous plaçons toujours en conditions axisymétriques,  $\sigma_2 = \sigma_3$  et  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ). Ainsi, dans le plan de Rendulic des incréments de contrainte, où  $\alpha$  est l'angle entre l'axe  $\sqrt{2}\sigma_3$  et le vecteur incréments de contrainte, le chemin à  $q$  constant correspond à la direction  $\alpha = 215.3^\circ$ . Il est parallèle à la trissectrice de l'espace des contraintes, c'est-à-dire également à la droite hydrostatique.

Suite aux simulations de recherches directionnelles sur l'échantillon numérique le plus lâche  $E3$  nous avons trouvé pour certains états de contrainte que la direction  $\alpha = 215,3^\circ$  est incluse dans le cône de directions instables, comme le montre par exemple la Figure 4.1. Cela signifierait qu'une bifurcation et une rupture de l'échantillon numérique peuvent potentiellement survenir pour un chargement à  $q$  constant à l'état de contrainte-déformation considéré. Cependant, lors de la simulation des recherches directionnelle en question nous n'avons pas constaté de bifurcation de la réponse du matériau ni d'effondrements tels qu'il peuvent être observés

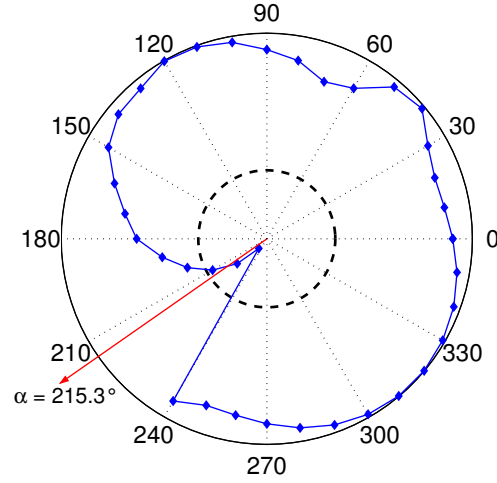


FIG. 4.1 – Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé  $d^2W_n$  pour l'échantillon  $E3$  à l'état de contrainte  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$ .

expérimentalement. En particulier, un état d'équilibre quasi-statique a bien été atteint à la suite du chargement en contrainte dans la direction  $\alpha = 215,3^\circ$ .

Pour que la bifurcation et l'effondrement se produisent, des conditions autres que celle portant sur le signe du travail du second ordre sont à considérer. Ces conditions font l'objet de la prochaine section et sont introduites par l'intermédiaire de la notion de perte de contrôlabilité.

#### 4.2.1 Perte de contrôlabilité

##### 4.2.1.1 Paramètres de contrôle pour un chemin de chargement à $q$ constant

La notion de perte de contrôlabilité proposée par Nova [92] a été présentée dans la bibliographie à la Section 1.4.3.5 (p. 27). Rappelons très brièvement que l'auteur a montré que certains programmes de chargement caractérisés par des paramètres de contrôle spécifiques ne sont pas contrôlables avant que la condition limite de plasticité soit atteinte. Les paramètres de contrôle peuvent s'écrire sous la forme de combinaisons linéaires des composantes principales de déformation d'une part, et de combinaisons linéaires des composantes principales de contrainte d'autre part.

Identifions ces paramètres dans le cas d'un chemin à  $q$  constant. Le premier paramètre de contrôle est  $dq = d\sigma_1 - d\sigma_3 = 0$ . Le travail du second ordre peut s'exprimer en fonction de ce paramètre de contrôle:

$$\begin{aligned} d^2W &= d\sigma_1 d\varepsilon_1 + 2d\sigma_3 d\varepsilon_3 &= d\varepsilon_1 (d\sigma_1 - d\sigma_3) + d\sigma_3 (d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3) \\ & &= d\varepsilon_1 dq + d\sigma_3 d\varepsilon_v. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Cette expression de  $d^2W$  fait apparaître le paramètre de réponse conjugué au sens de l'énergie avec  $dq$ , soit  $d\varepsilon_1$ . Les autres paramètres conjugués au sens de l'énergie sont  $d\sigma_3$  et  $d\varepsilon_v$ . La Figure 4.2 montre l'évolution de  $q$  et de  $\varepsilon_v$  en fonction de  $\varepsilon_1$  pour la direction  $\alpha = 215,3^\circ$  de la recherche directionnelle présentée sur le Figure 4.1 (échantillon  $E3$ ,  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$ ). On observe une légère variation de  $q$  au cours de la simulation, qui reste très faible, et on vérifie

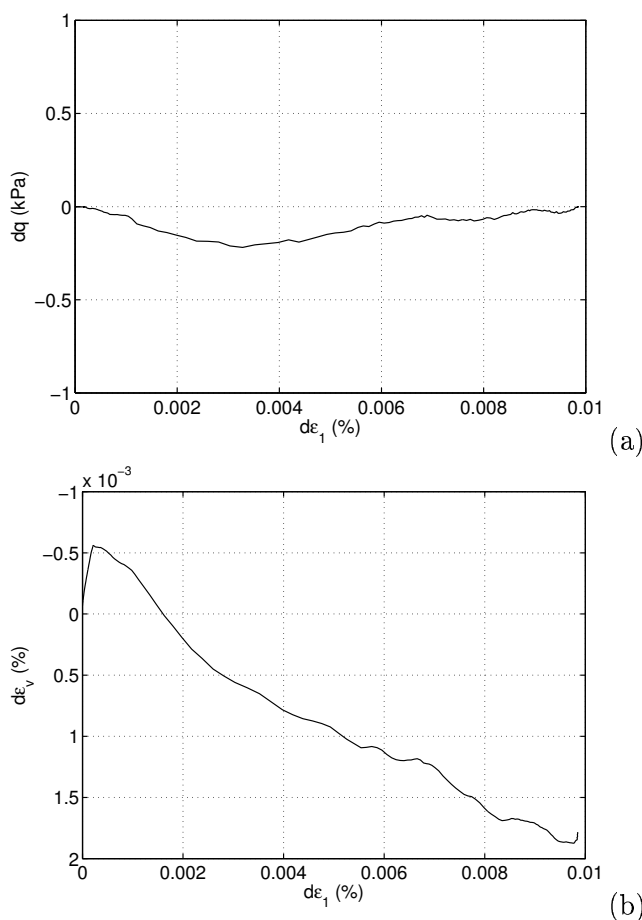


FIG. 4.2 – Evolution des paramètres  $dq$  et  $d\varepsilon_v$  au cours de la recherche directionnelle dans la direction  $\alpha = 215.3^\circ$  à partir de l'état de contrainte  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$  (échantillon E3).

bien après la fin de l'application du chargement que  $dq = 0$ . En ce qui concerne l'évolution de la déformation volumique  $\varepsilon_v$ , il y a au début de l'application du chargement une légère dilatance. Cependant il ne faut pas oublier, comme nous l'avons montré à la Section 3.2.3 (p. 86) que les processus de déformation et notamment de réorganisation de la micro-structure de l'échantillon numérique sont discontinus dans le temps. Cette dernière remarque a d'autant plus d'importance dans le cas présent du fait que l'on s'intéresse à des variations faibles d'états de contrainte et de déformation. Il faut donc plutôt s'intéresser à la variation globale de  $\varepsilon_v$  sur l'ensemble de l'application du chargement. Aussi l'échantillon numérique est dans ce cas contractant. On retrouve d'ailleurs à partir de l'expression (4.1) du travail du second ordre que  $d^2W$  est négatif dès lors que le matériau est contractant car le premier terme est nul ( $dq = 0$ ) et le deuxième terme est négatif si  $\varepsilon_v > 0$  puisque  $d\sigma_3 < 0$ . Ces résultats sont identiques à ceux calculés avec la relation phénoménologique INL2 pour un sable d'Hostun lâche par Darve *et al.* [42] et présentés sur la Figure 1.11 (p. 27): sur un chemin de chargement à  $q$  constant,  $d^2W$  s'annule puis prends négatives dès lors que le matériau se contracte.

L'un des paramètres de contrôle étant  $dq$  l'autre paramètre de contrôle peut être choisi parmi  $d\sigma_3$  et  $d\varepsilon_v$ . Lors des recherches directionnelles, comme c'est le cas sur les Figures 4.1 et 4.2,  $d\sigma_3$  constituait un paramètre de contrôle et nous n'avons pas observé de perte de contrôlabilité au sens de Nova. En tenant compte des remarques formulées dans le paragraphe précédent il apparaît que le fait d'imposer  $d\varepsilon_v < 0$  et  $dq = 0$ , à partir de l'état de contrainte initial de la

recherche directionnelle, devrait conduire à une perte de contrôlabilité qui s'accompagnerait d'un phénomène de bifurcation. C'est ce que nous proposons de vérifier ci-après.

#### 4.2.1.2 Simulation de la perte de contrôlabilité

Nous choisissons d'imposer  $dq = 0$  et  $d\varepsilon_v = -0.002\%$  (le module de  $d\varepsilon_v$  imposé est de l'ordre de celui simulé pour un contrôle en  $dq$  et  $d\sigma_3$ ). D'un point de vue numérique le contrôle simultané de  $dq$  et  $d\varepsilon_v$  s'effectue par le biais d'un algorithme qui sera présenté ultérieurement dans un cas plus général que le chemin de chargement particulier étudié ici (voir Sect. 4.3.2, p. 120).

Une comparaison des évolutions de  $dq$  et  $d\varepsilon_v$  suivant le mode de contrôle 1 (contrôle en  $dq$  et  $d\sigma_3$ ) et le mode 2 (contrôle en  $dq$  et  $d\varepsilon_v$ ) est montrée sur la Figure 4.3. Les encarts sur cette même figure présentent les évolutions uniquement pour le mode de contrôle 2 sur une échelle plus grande. Les évolutions de  $q$  et  $\varepsilon_v$  suivant les deux modes divergent rapidement après le début de l'application du chargement. Dans le cas du mode de contrôle 2 la dilatance ne dépasse pas  $d\varepsilon_v = -8 \cdot 10^{-4}\%$  bien que l'on tente d'imposer  $d\varepsilon_v = -2 \cdot 10^{-3}\%$  et la valeur de  $q$  décroît. Les courbes tracées dans les encarts montrent que l'incrément de déformation axiale devient très important par rapport à celui simulé dans le mode 1. De plus, avec l'accroissement de  $d\varepsilon_1$ , les valeurs de  $dq$  deviennent fortement négatives et celles de  $d\varepsilon_v$  fortement positives, elles ne correspondent plus aux valeurs que l'on souhaitait imposer. Il y a perte de contrôlabilité.

Afin de juger du caractère dynamique (ou non) et de l'effondrement (ou non) de l'échantillon numérique suivant les deux modes de contrôle, les évolutions de l'énergie cinétique de l'assemblage granulaire, des contraintes et des déformations en fonction du temps de simulation sont présentées dans la Figure 4.4. Quelque soit le mode de contrôle, l'énergie cinétique tend vers zéro avant l'application du chargement: l'échantillon est à l'équilibre. Dans le cas du mode 1 (contrôle en  $d\sigma_3$ ), après quelques faibles bouffées d'énergie cinétique (de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-5}$  J) l'énergie cinétique tend à nouveau vers zéro et l'échantillon retrouve un nouvel état d'équilibre. Pour le mode de contrôle 2 (en  $d\varepsilon_v$ ) l'énergie cinétique croît de manière exponentielle jusqu'à atteindre des valeurs très importantes, non visibles sur la figure (0.07 J). En ce qui concerne les déformations principales, celles-ci augmentent (en module) sans jamais se stabiliser dans le cas du mode de contrôle 2 alors qu'elles restent faibles (au maximum 0.01 %) et se stabilisent pour le mode 1. Finalement, les valeurs des contraintes principales décroissent brutalement pour s'annuler<sup>1</sup> dans le cas du mode de contrôle 2. Dans le cas du mode 1, bien qu'on ait l'impression (par effet d'échelle) que les valeurs des contraintes restent constantes, celle-ci diminuent légèrement pour respecter la condition  $dq = 0$ .

#### Remarque

Le lecteur peut s'étonner, dans le cas du mode de contrôle 2, d'une valeur non nulle de  $\sigma_1$  alors que  $\sigma_3$  est quasi nul. L'énergie cinétique et les déformations montrent une évolution extrêmement rapide de l'état de l'échantillon. On peut considérer que la réponse de l'échantillon est proche d'une réponse quasi-statique au début de l'application du chargement pour ensuite dévier vers une réponse totalement dynamique pour laquelle

1. L'algorithme utilisé pour le contrôle simultané de  $dq$  et  $d\varepsilon_v$  devient instable dès lors que l'une des contraintes principales s'annule. De ce fait, la simulation de l'application d'un chargement est stoppée lorsque cette dernière condition est vérifiée.

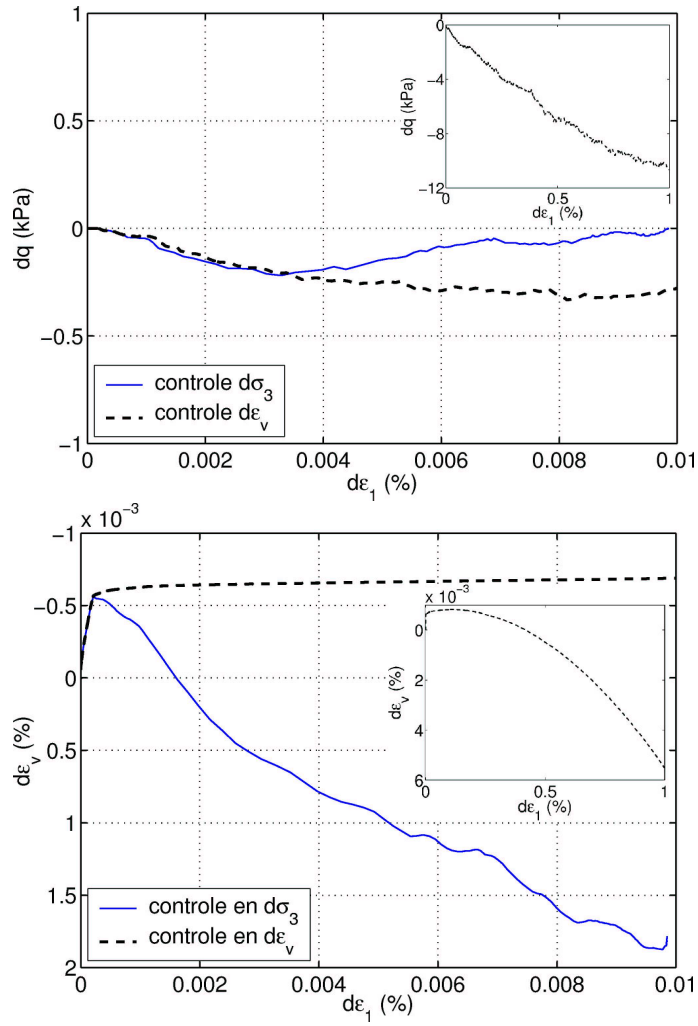


FIG. 4.3 – Comparaison de l'évolution des paramètres  $dq$  et  $d\varepsilon_v$  en fonction du mode de contrôle pour un chemin à  $q$  constant (échantillon E3, état initial:  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$ ).

les effets inertiels ne sont pas négligeables. D'où les valeurs non nulles de  $\sigma_1$  en fin de simulation.

Dans le cas où les paramètres de contrôle sont  $dq$  et  $d\varepsilon_v$  (mode de contrôle 2), les caractéristiques de la rupture mises en évidence sur la Figure 4.4, (annulation brutale des contraintes, taux de déformations élevés) correspondent au effondrements observés expérimentalement sur des chemins à  $q$  constant (cf. Sect. 1.3.2.3). Bien qu'il s'agisse ici d'une simulation, on peut considérer dans ce cas que l'effondrement est la manifestation physique de la perte de contrôlabilité. De plus, un changement soudain et discontinu du mode de réponse est mis en évidence pour une évolution continue et graduelle des paramètres de chargement, il s'agit donc également d'une bifurcation.

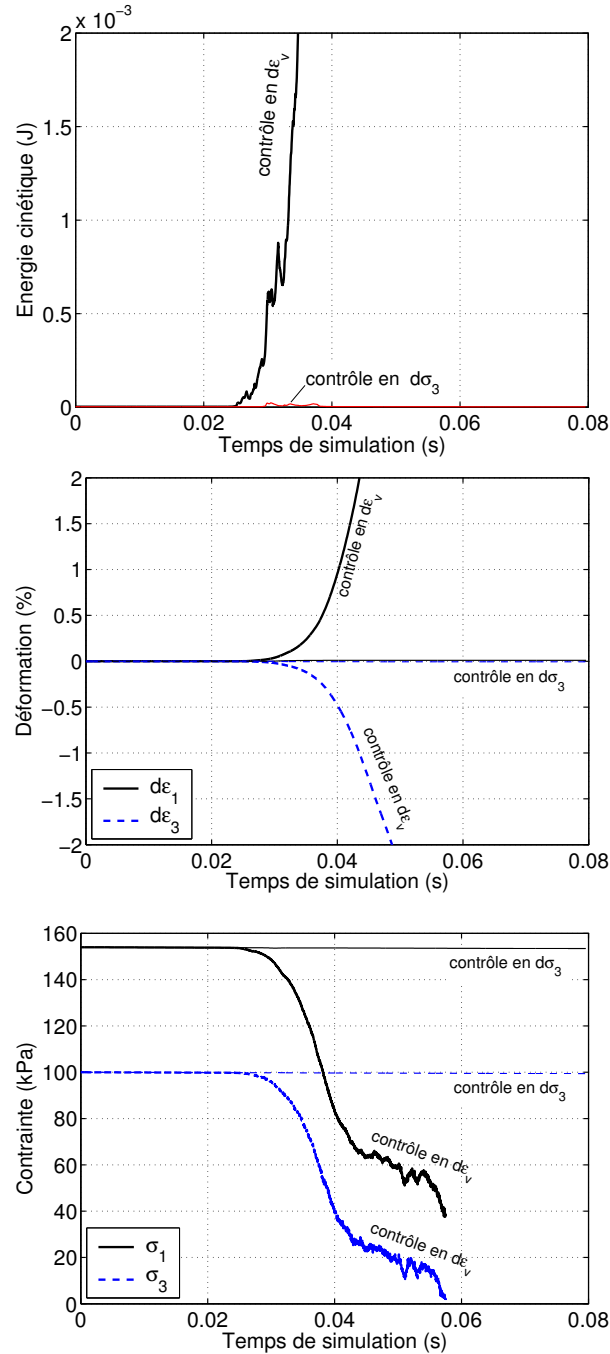


FIG. 4.4 – Comparaison en fonction du temps et des paramètres de contrôle de la réponse de l'échantillon E3 pour un chemin à  $q$  constant (état initial:  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$ ).

## 4.2.2 Perte de maintenabilité

Dans la section précédente l'effondrement de l'échantillon numérique a été simulé en imposant un chemin de chargement par l'intermédiaire des paramètres de contrôle  $dq = 0$  et  $d\varepsilon_v < 0$  (dilatance). Dans cette section nous proposons une description quelque peu différente de l'effondrement susceptible de survenir sur un chemin à  $q$  constant en se basant sur la notion de perte de maintenabilité. Il ne s'agit plus alors d'imposer un chemin de chargement au matériau mais plutôt de vérifier s'il est capable de se maintenir sous un état mécanique donné.

### 4.2.2.1 Définition de la notion de perte de maintenabilité

La notion de perte de maintenabilité a été proposée par Nicot & Darve [89] et Nicot *et al.* [90]. Ces auteurs partent de l'idée selon laquelle un point matériel développe de l'énergie cinétique lorsqu'il s'effondre. Bien que les auteurs se soient placés dans un contexte plus général, nous nous limitons au cadre des petites déformations et des changements de configuration géométrique négligeables.

Soit un point matériel dans un état d'équilibre, caractérisé par un tenseur de contrainte  $\sigma$  et un tenseur de déformation  $\varepsilon$ , gouverné par des paramètres de contrôle donnés. L'état mécanique du point matériel est dit non maintenable si et seulement si un incrément de contrainte  $d\sigma$  et un incrément de déformation  $d\varepsilon$  reliés par la relation constitutive du matériau existent tels que l'état défini par  $\sigma + d\sigma$  et  $\varepsilon + d\varepsilon$  peut être atteint par le point matériel sans variation des paramètres de contrôle. Dans un tel cas, de l'énergie cinétique est créée à partir de l'état d'équilibre, sans variation des paramètres de contrôle. Il y a donc une variation soudaine de la réponse du matériau pour une variation continue des variables d'état. De ce fait, il s'agit d'un état de bifurcation.

En s'appuyant sur la conservation de l'énergie lors de l'évolution instantanée de l'état du point matériel à partir de son état d'équilibre les auteurs montrent qu'un état est non maintenable si et seulement si le travail du second ordre  $d^2W$  calculé à partir de l'évolution instantanée de l'état du point matériel à partir de son état d'équilibre est négatif.

### 4.2.2.2 Simulation de la perte de maintenabilité

Considérons à nouveau l'état de contrainte  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$  (échantillon E3). Vérifions si cet état d'équilibre est non maintenable pour les paramètres de contrôle  $dq$  et  $d\varepsilon_v$ . Pour se faire, nous exécutons dans un premier temps une simulation en imposant  $dq = 0$  et  $d\varepsilon_v = 0$  sans soumettre l'échantillon à une quelconque sollicitation. L'échantillon demeure à son état d'équilibre initial sans variation de l'état de contrainte et de déformation. Dans un deuxième temps on impose toujours  $dq = 0$  et  $d\varepsilon_v = 0$  mais l'échantillon est perturbé en lui injectant une certaine quantité d'énergie, sous forme d'énergie cinétique en utilisant le procédé décrit ci-après.

### Méthode de perturbation

Rappelons que les simulations sont réalisées sans gravité. Il en résulte qu'un certain nombre de grains sont dit flottants: ils ne contribuent pas au réseau de forces de contact,

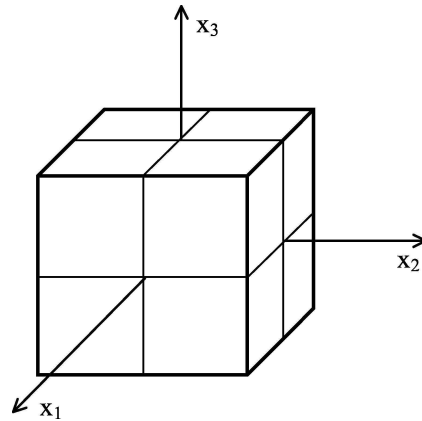


FIG. 4.5 – Découpage de l'échantillon numérique en huit sous-parallélépipèdes pour le choix des grains à perturber.

qu'il soit faible ou fort. Nous tirons partie de ces grains flottants pour injecter de l'énergie au sein de l'échantillon en attribuant une valeur égale d'énergie cinétique à huit de ces grains. Les huit grains sont choisis comme suit: l'échantillon, de forme parallélépipédique, est découpé virtuellement en huit sous-parallélépipèdes dont les côtés suivant les axes  $(x_1, x_2, x_3)$  ont respectivement pour dimension la moitié des côtés de l'échantillon suivant ces mêmes axes (voir Fig. 4.5). Un grain flottant est choisi aléatoirement dans chacun des huit sous-parallélépipèdes. Pour chacun des grains choisis est calculé, en fonction de sa masse et de l'énergie cinétique désirée, le module de la vitesse à lui attribuer<sup>2</sup>. Cette vitesse est attribuée au grain en un unique pas de temps numérique et appliquée dans une direction choisie aléatoirement. La vitesse des huit grains est modifiée au même pas de temps numérique et est appliquée dans des directions aléatoires différentes pour chacun des grains. Le choix des grains perturbés et la direction d'application de la vitesse n'affecte pas de manière qualitative la réponse de l'échantillon à la perturbation.

L'échantillon est perturbé en injectant une énergie de  $1 \cdot 10^{-5}$  J (soit une énergie cinétique de  $0.125 \cdot 10^{-5}$  J par grain perturbé). Pour juger de l'importance de cette perturbation, on peut comparer la quantité d'énergie injectée à l'énergie cinétique  $Ec$  "naturellement" développée au cours d'une simulation d'une recherche directionnelle à partir de l'état de contrainte initial considéré ici. Pour la direction  $\alpha = 215.3^\circ$  (soit pour le chemin à  $q$  constant) la valeur maximale de  $Ec$  est légèrement supérieure à  $2 \cdot 10^{-5}$  J. Pour toutes les directions  $\alpha$  confondues, la valeur maximale de  $Ec$  est de  $5 \cdot 10^{-4}$  J. On peut donc en conclure que la perturbation imposée est "petite".

La réponse de l'échantillon numérique à cette perturbation tout en lui imposant de conserver son état d'équilibre gouverné par les paramètres de contrôle  $dq = 0$  et  $d\varepsilon_v = 0$  est présentée sur la Figure 4.6. Les évolutions de l'énergie cinétique, de  $dq$ , de  $d\varepsilon_v$ , des déformations et des contraintes principales sont montrées en fonction du temps de simulation ce qui permet de juger du caractère dynamique du comportement de l'échantillon. Une flèche sur les diagrammes indique l'instant auquel est appliqué la perturbation. L'énergie cinétique, après une courte période de stabilisation augmente de manière exponentielle, ce qui indique que l'échantillon s'éloigne de son état d'équilibre quasi-statique initial sans jamais se rapprocher d'un nouvel

2. La vitesse du grain avant sa perturbation en énergie cinétique est négligeable, en effet l'échantillon numérique est à l'équilibre quasi-statique.



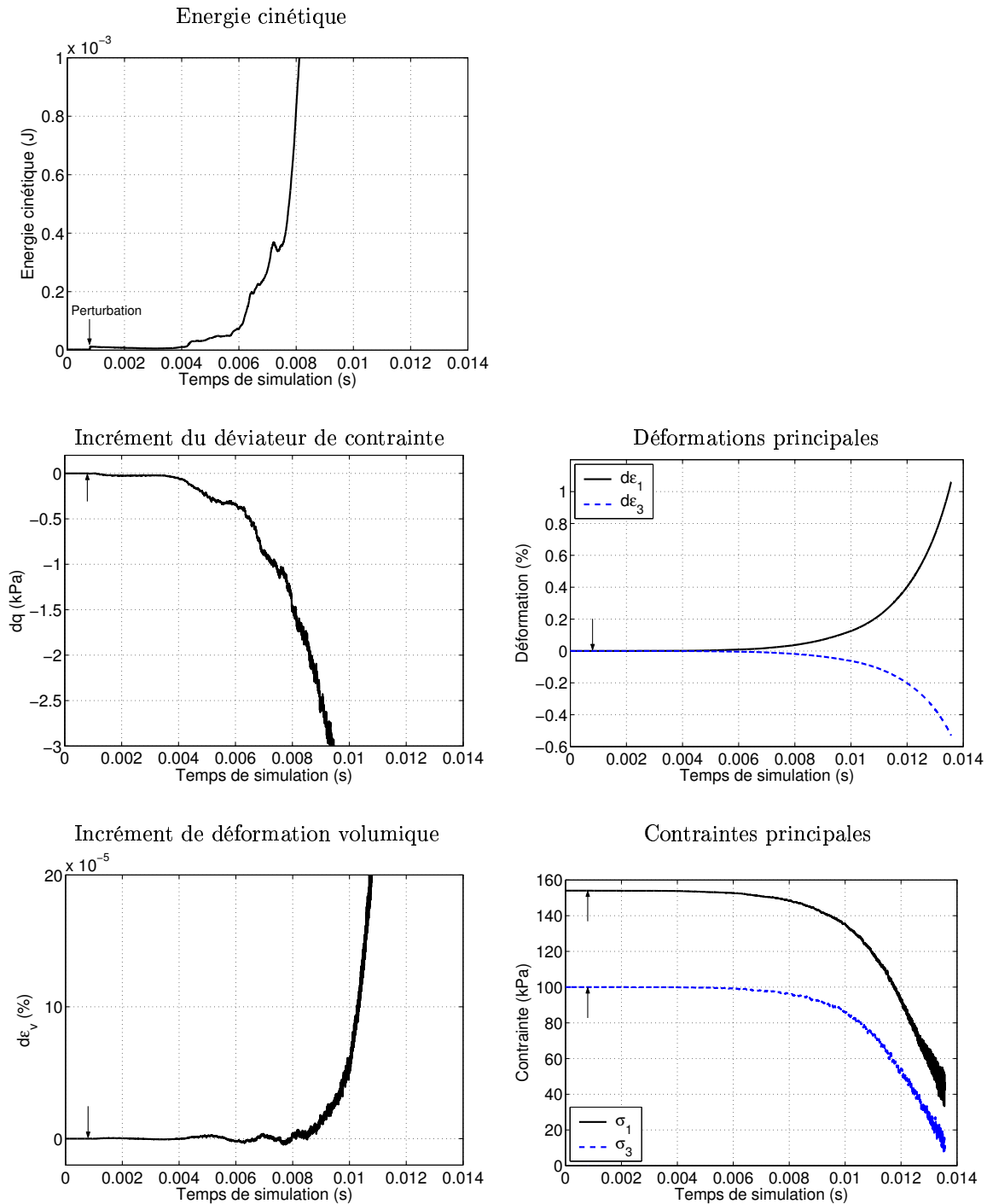


FIG. 4.6 – Simulation de perte de maintenabilité suite à une perturbation en énergie cinétique pour en contrôle en  $dq = 0$  et  $d\epsilon_v = 0$  (échantillon E3, état initial:  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$ ).

état d'équilibre. De façon similaire, les valeurs des paramètres de contrôle imposées  $dq = 0$  et  $d\epsilon_v = 0$  sont à peu près respectées sur une petite période après la perturbation, après quoi le déviateur de contrainte décroît rapidement et l'échantillon se contracte. Il n'est alors plus possible de gouverner l'état d'équilibre par ces deux paramètres de contrôle. Les taux de déformations deviennent de plus en plus importants, et les contraintes principales s'anulent. Cette dernière information nous semble importante vis-à-vis de l'état de l'échantillon numérique: en effet ce dernier a atteint un état de liquéfaction de manière brutale.

Ces résultats montrent que, étant donné les paramètres de contrôle choisis, il n'est pas possible de maintenir l'état d'équilibre considéré ni même de trouver un état d'équilibre voisin. Nous qualifions cette réponse de perte de maintenabilité. Une variation des paramètres de contrôle est observée au cours de la simulation, mais de manière différée, instantanément les paramètres ne varient que très légèrement. Notons de plus que les variations des paramètres de contrôle  $dq$  et  $d\varepsilon_v$  sont faibles par rapport aux variations des contraintes principales et des déformations principales. En particulier, après un temps de 0.01 s la valeur de  $d\varepsilon_v$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  % alors que celle de  $d\varepsilon_1$  est de l'ordre de  $10^{-1}$  %. Par ailleurs il faut savoir que le contrôle de  $dq$  s'effectue par le biais d'un asservissement et que le fait de contrôler  $dq$  à une incidence sur  $d\varepsilon_v$  que l'on corrige et ainsi de suite. L'algorithme utilisé ne permet donc pas un véritable contrôle en  $dq = 0$  et  $d\varepsilon_v = 0$  comme on pourrait le faire avec une cellule triaxiale et un échantillon de sable saturé en posant des masses en tête du piston et en fermant le drainage.

#### 4.2.2.3 Bilan

D'un point de vue expérimental, le long d'un chemin drainé à  $q$  constant, sur un sable lâche, ce dernier est d'abord dilatant jusqu'à atteindre un volume maximal pour ensuite être contractant. Il semblerait à la vue des résultats de Gajo *et al.* [52] et Chu *et al.* [16; 15] que les ruptures se produisent au plus tôt au maximum du volume ou sinon lors de la phase de contractance. Cette observation expérimentale s'accorde avec le fait que, le long d'un chemin à  $q$  constant, le travail du second ordre ne s'annule que lorsque  $d\varepsilon_v$  s'annule et prend des valeurs négatives si  $d\varepsilon_v > 0$  (contractance).

Lorsque le chemin à  $q$  constant est inclus dans le cône de directions instables, nous montrons que la rupture se produit à partir du point de bifurcation si le programme défini par  $dq = 0$  et  $d\varepsilon_v < 0$  est imposé ou si l'état mécanique, contrôlé par les paramètres  $dq = 0$  et  $d\varepsilon_v = 0$ , subit une petite perturbation. Au contraire, si le programme de chargement est défini totalement en contrainte ( $dq = 0$  et  $d\sigma_3 < 0$  par exemple) aucune rupture n'est observée avant le critère de Mohr-Coulomb.

Dans le cadre de l'usage qui en a été fait ici, la notion de perte de contrôlabilité et de perte de maintenabilité sont très proches. En effet, la variation de volume imposée lors de la simulation de la perte de contrôlabilité est très faible ( $d\varepsilon_v = -0.002$  %) elle peut donc être considérée comme une perturbation au lieu d'un chemin de chargement.

Les simulations qui viennent d'être présentées n'expliquent qu'en partie les effondrements observés expérimentalement. Dans notre cas, que se soit lors de la simulation de la perte de contrôlabilité ou de la perte de maintenabilité pour lesquelles la rupture est observée à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb,  $d\varepsilon_v$  est un paramètre de contrôle. En général, les auteurs qui ont réalisé des essais dans une cellule triaxiale à  $q$  constant impose une diminution des contraintes effectives, en faisant décroître la pression interstitielle. De ce fait,  $d\varepsilon_v$  n'est pas un paramètre de contrôle mais un paramètre de réponse et  $d\sigma_3$ , son conjugué, est un paramètre de contrôle. D'un point de vue expérimental, les systèmes de drainage et de régulation de la pression d'eau interstitielle ont un débit plus ou moins limité d'où une certaine inertie vis-à-vis des variations de volume de l'échantillon. Il se pourrait donc que la variation de volume de l'échantillon lors de petites perturbations brusques ne soit pas laissée totalement libre. Gajo [51] a d'ailleurs pris en compte, entre autres, la "rigidité" du système de mesure de variation de volume, pour retrouver analytiquement les effondrements qu'il a observé expérimentalement (voir Sect. 1.4.3.3, p 23).

## 4.3 Généralisation aux chemins proportionnels en contrainte

### 4.3.1 Définition des paramètres de contrôle généralisés

Dans la section précédente nous nous sommes intéressés à une direction de chargement bien particulière: celle correspondant au chemin à déviateur de contrainte constant. Toutefois, les recherches directionnelles qui ont été simulées couvrent l'ensemble des directions en contrainte pour  $\alpha$  variant de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ . Considérons à nouveau l'état de contrainte  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$  de l'échantillon *E3*. Des valeurs négatives du travail du second ordre ont été trouvées pour les directions  $\alpha = 210^\circ, 220^\circ, 230^\circ$  (cf. Fig 4.1) sans oublier la direction  $\alpha = 215.3^\circ$ . Ces directions comme toutes celles incluses dans les cônes de directions instables trouvés pour les différents états de contrainte et les différentes densités étudiées sont comprises entre  $180^\circ$  et  $270^\circ$ . Ces directions de chargement correspondent à des chemins proportionnels en contrainte que l'on peut définir en axisymétrie par:

$$d\sigma_1 < 0 \quad \text{et} \quad d\sigma_1 - \frac{d\sigma_3}{R} = 0, \quad (4.2)$$

où  $R$  est une constante pour un chemin de chargement donné relié à  $\alpha$  par:

$$R = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha \in ]180^\circ; 270^\circ]. \quad (4.3)$$

Pour  $\alpha = 215.3^\circ$ ,  $R = 1$  soit  $dq = 0$ , ce qui correspond au chemin à  $q$  constant. Pour  $0 < R < 1$ ,  $dq < 0$  et pour  $R > 1$  on a  $dq > 0$ .

Dans le cas considéré ici,  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  est un paramètre de contrôle et la variable qui lui est conjugué par rapport à l'énergie est  $d\varepsilon_1$ . Les deux autres variables conjuguées par rapport à l'énergie sont  $d\sigma_3/R$  et  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3$ . Le travail du second ordre s'écrit:

$$\begin{aligned} d^2W &= d\sigma_1 d\varepsilon_1 + 2 d\sigma_3 d\varepsilon_3 \\ d^2W &= d\varepsilon_1 \left( d\sigma_1 - \frac{d\sigma_3}{R} \right) + \frac{d\sigma_3}{R} (d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Remarquons que pour  $R = 1$ , on a  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = d\varepsilon_v$  et que la relation (4.1) est un cas particulier de l'expression (4.4).

### 4.3.2 Algorithme d'asservissement des parois en fonction des paramètres de contrôle $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$ et $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3$

Comme son nom l'indique cet algorithme ne permet pas un réel contrôle direct de l'état de l'échantillon numérique par les paramètres  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  et  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3$ . Il s'agit d'un asservissement de la position des parois en fonction de la valeur souhaitée des paramètres de contrôle cités précédemment. Cet asservissement s'effectue à chaque cycle de calcul de la MED.

Le principe de l'algorithme est présenté sur la Figure 4.7. Nous formulons ci-dessous deux remarques au sujet de cet algorithme.

- L'asservissement assuré par cet algorithme fonctionne correctement à la condition que les valeurs de consigne  $Cons_\sigma$  et  $Cons_\varepsilon$  imposées respectivement sur les paramètres

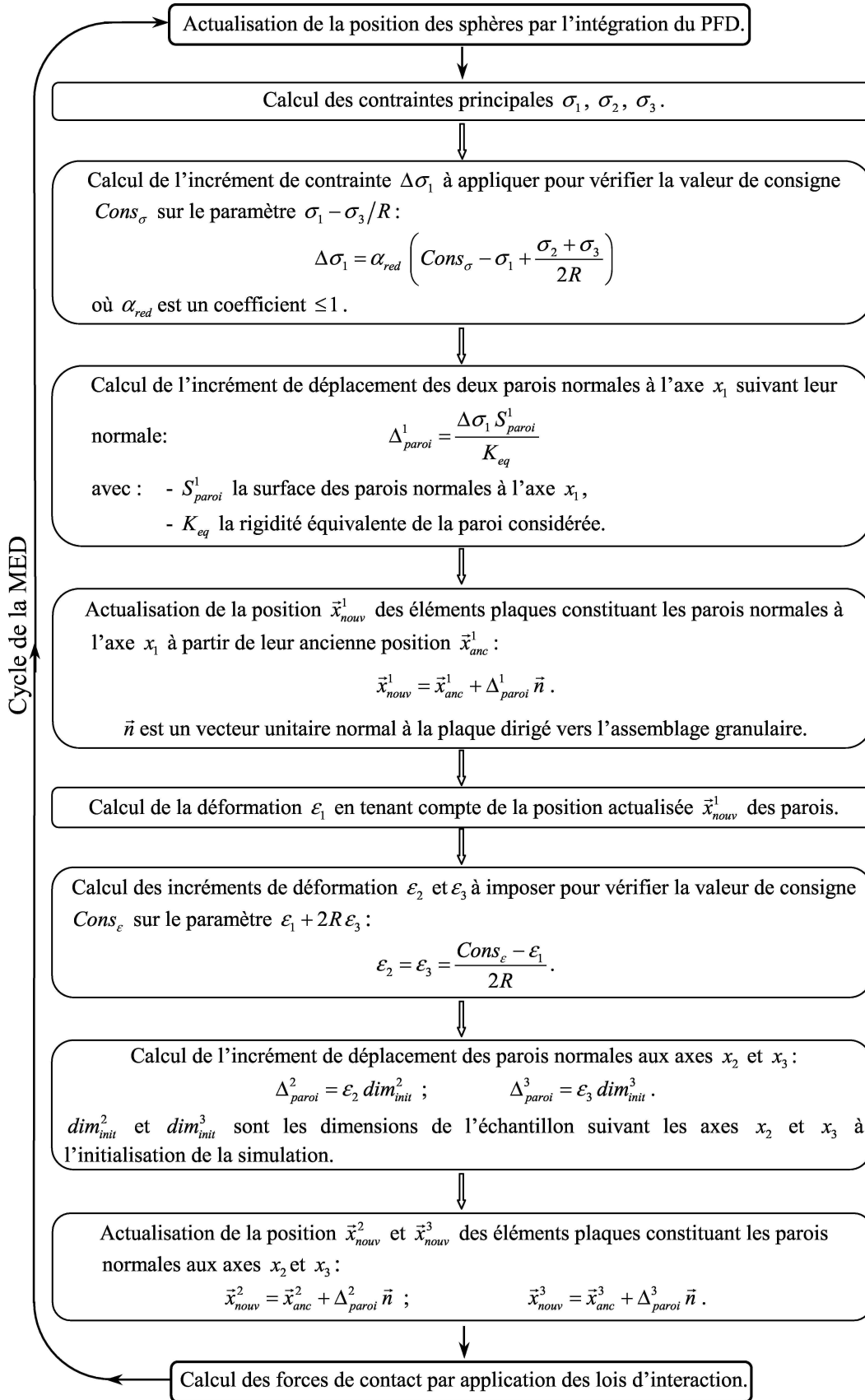


FIG. 4.7 – Principe de l'algorithme d'asservissement des parois en fonction des paramètres de contrôle  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  et  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3$ .

$d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  et  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3$  évoluent de manière continue et graduelle au cours de la simulation. On déconseille d'imposer sur un unique pas de temps numérique une variation importante de  $Cons_\sigma$  ou  $Cons_\varepsilon$ .

- $\alpha_{red}$  est un coefficient réducteur défini dans la deuxième étape de l'algorithme (Fig. 4.7). Il agit sur l'asservissement des parois normales à l'axe  $x_1$ . Il assure la stabilité de l'algorithme qui dépend de la valeur de  $R$ . Plus la valeur de  $R$  est petite plus nous choisissons une valeur faible pour  $\alpha_{red}$ : pour  $R > 0.8$  on choisit  $\alpha_{red} = 1$ ; pour  $0.5 < R < 0.8$ ,  $\alpha_{red} = 0.8$ ; pour  $0.3 < R < 0.5$ ,  $\alpha_{red} = 0.5$  et pour  $0.2 < R < 0.3$ ,  $\alpha_{red} = 0.3$ .

### 4.3.3 Simulation de la perte de contrôlabilité

Nous reprenons l'étude effectuée dans le cas des chemins à  $q$  constant et nous la généralisons aux cas des chemins proportionnels en contrainte. L'objectif est de comparer la contrôlabilité d'un chemin proportionnel en contrainte et le signe du travail du second ordre trouvé lors de la recherche directionnelle pour la direction en contrainte correspondante.

Le programme de chargement est défini par les paramètres de contrôle suivants:  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$  et  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3 = -0.002\%$  et pour des valeurs de  $R$  comprises entre 0.408 et 1.94 correspondant respectivement à des valeurs de  $\alpha$  entre  $240^\circ$  et  $200^\circ$ . Les résultats des simulations en terme d'évolution de l'énergie cinétique, de  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$ , de  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3$ , de  $d\varepsilon_3$  et de  $d\sigma_3$  en fonction du temps sont présentés sur la Figure 4.8 (une seule des composantes des déformations principales et des contraintes principales est représentée afin de ne pas surcharger les diagrammes).

#### Directions en contrainte à l'extérieur du cône de directions instables

Pour les directions  $\alpha = 200^\circ$  ( $R = 1.94$ ) et  $\alpha = 240^\circ$  ( $R = 0.408$ ) l'énergie cinétique reste très faible: l'échantillon reste proche d'un équilibre quasi-statique. On parvient à appliquer le programme de chargement désiré: les valeurs de  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  et  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3$  correspondent bien à celles que l'on souhaite imposer<sup>3</sup>. Enfin, les déformations restent faibles et l'état de contrainte final se stabilise à des valeurs proches de l'état initial.

#### Directions en contrainte incluses dans le cône de directions instables

Pour  $\alpha = 210^\circ$  ( $R = 1.22$ ), l'énergie cinétique atteint des valeurs élevées (0.002 J), mais l'échantillon retrouve un équilibre quasi-statique en fin de chargement. Les valeurs de  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  et  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3$  ont tendance à différer en cours de simulation de celles que l'on souhaite imposer. Les déformations sont importantes par rapport à celles trouvées pour les directions hors du cône mais finissent par se stabiliser. Les contraintes principales ( $\sigma_1$ ;  $\sigma_3$ ) se stabilisent également en fin de chargement à des valeurs non nulles. La réponse simulée montre que l'on se situe à la limite de la contrôlabilité mais que l'échantillon ne s'effondre pas. Ces résultats correspondent au fait que la direction  $\alpha = 210^\circ$  est située à la limite du cône de directions instable avec une valeur de  $d^2W_n$  faiblement négative. Pour  $\alpha = 215.3^\circ$  ( $R = 1.0$ ) et  $220^\circ$  ( $R = 0.843$ ) les réponses sont très proches l'une de l'autre. Le cas du chemin à  $q$  constant ( $\alpha = 215.3^\circ$ ) a déjà été discuté: on assiste à un effondrement brutal de l'échantillon numérique. Pour  $\alpha = 230^\circ$  l'énergie cinétique reste modérée, cependant la valeur de  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$  imposée n'est pas respectée et celle de  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3$  désirée n'est pas atteinte

---

3. Au cours d'une simulation, la valeur de  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3$  souhaitée n'est pas imposée directement sur un unique pas de temps numérique mais progressivement. C'est pourquoi sur la Figure 4.8 on observe pour  $\alpha = 200^\circ$  ou  $240^\circ$  une variation linéaire de  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3$  avec le temps de simulation et finalement une stabilisation à la valeur désirée de -0.002%.

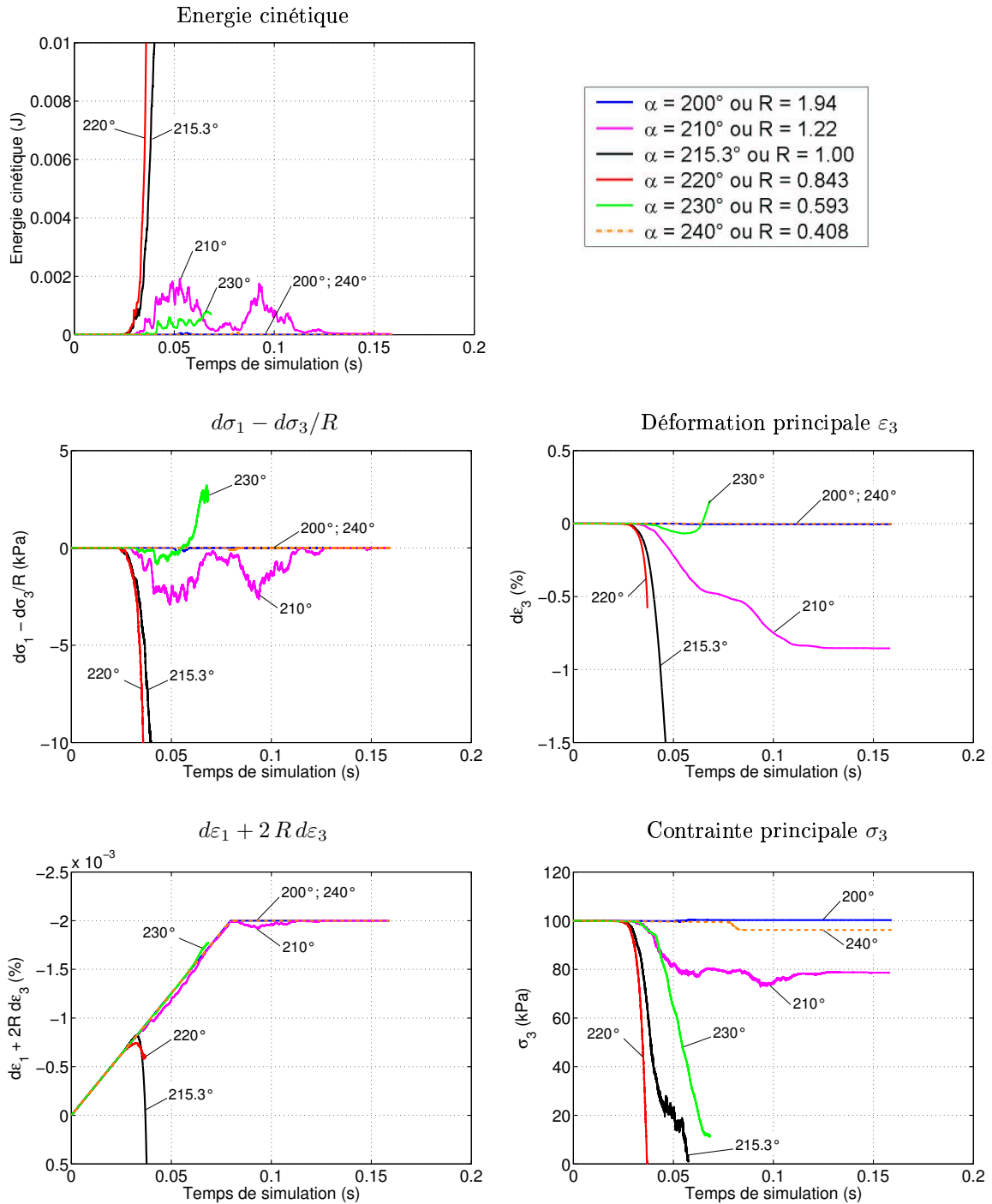


FIG. 4.8 – Simulation de l'application sur l'échantillon E3 du programme de chargement  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$  et  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 < 0$  à partir de l'état de contrainte  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$ .

alors que les contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_3$ ) tendent vers une valeur nulle. La simulation a été stoppée à cet instant là pour cause de non stabilité de l'algorithme permettant de contrôler simultanément  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  et  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3$ . Nous considérons cependant que l'échantillon se liquéfie (annulation des contraintes mais pour de faibles valeurs d'énergie cinétique à la différence des effondrements pour les directions  $215.3^\circ$  et  $220^\circ$ ).

En résumé, pour des directions de chargement à l'extérieur du cône de directions instables, le programme de chargement peut être appliqué sans qu'il y ait effondrement de l'échantillon. De même, aucun phénomène de bifurcation n'est constaté. Pour des directions de chargement à l'intérieur du cône il y a perte de contrôlabilité avec les paramètres de contrôle utilisés. Cette perte de contrôlabilité se traduit pas une liquéfaction (annulation des contraintes) qui peut être brutale et soudaine (effondrement), sauf pour un cas limite en bordure du cône. Ces résultats mettent en évidence que lorsque le travail du second est négatif ou nul il est possible de trouver un programme de chargement avec des paramètres de contrôle donnés qui conduit à un phénomène de bifurcation et une rupture totale du matériau.

#### 4.3.4 Simulation de la perte de maintenabilité

La démarche est similaire à celle utilisée dans le cas du chemin à  $q$  constant (Sect. 4.2.2.2): on impose à l'échantillon de rester à son état d'équilibre quasi-statique par le biais des paramètres de contrôle  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$  et  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$ . Cet état d'équilibre est perturbé par l'injection d'une quantité d'énergie cinétique égal à  $1 \cdot 10^{-5}$  J. La Figure 4.9 présente la réponse de l'échantillon numérique pour des valeurs de  $\alpha$  comprises entre  $190^\circ$  ( $R = 4.01$ ) et  $250^\circ$  ( $R = 0.257$ ).

##### **Directions en contrainte à l'extérieur du cône de directions instables**

Pour  $\alpha = 190^\circ; 200^\circ; 240^\circ; 250^\circ$  (respectivement  $R = 4.01; 1.94; 0.408; 0.257$ ), les valeurs maximales d'énergie cinétique atteintes au cours des simulation sont élevées (entre 0.001 et 0.002 J), cependant l'échantillon retrouve dans tous les cas un nouvel état d'équilibre quasi-statique. Entre ce nouvel état d'équilibre et l'état d'équilibre initial on vérifie bien que  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$  et  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$ . Enfin ce nouvel état d'équilibre est attesté par la stabilisation des déformations et des contraintes pour des valeurs peu éloignées des valeurs initiales.

##### **Directions en contrainte incluses dans le cône de directions instables**

Pour  $\alpha = 210^\circ; 215.3^\circ; 220^\circ; 230^\circ$  (respectivement  $R = 1.22; 1.00; 0.843; 0.593$ ) on retrouve des tendances similaires à celles mises en évidence dans la section précédente. Pour  $\alpha = 210^\circ$  l'échantillon présente un comportement à la limite de l'effondrement total bien qu'il retrouve finalement un état d'équilibre quasi-statique: l'énergie cinétique présente un pic très important (supérieur à 0.015 J). Au cours de la simulation les valeurs de  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  et  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3$  s'éloignent fortement des conditions imposées. Les déformations sont relativement importantes et l'état de contrainte se stabilise ( $\sigma_1, \sigma_3$ ) alors qu'il avait tendance à s'annuler rapidement. Pour  $\alpha = 215.3^\circ$  et  $220^\circ$  l'effondrement total ne fait pas de doute. On remarquera notamment que l'état de contrainte s'annule. Pour  $\alpha = 230^\circ$  l'état de contrainte s'annule également brutalement. Bien que les déformations et l'énergie cinétique restent faibles au moment de l'annulation des contraintes, nous considérons qu'il s'agit aussi ici d'un cas d'effondrement.

Les résultats présentés ci-dessus mettent clairement en évidence la correspondance entre le signe du travail du second ordre d'une part et la maintenabilité, la bifurcation et l'effondrement

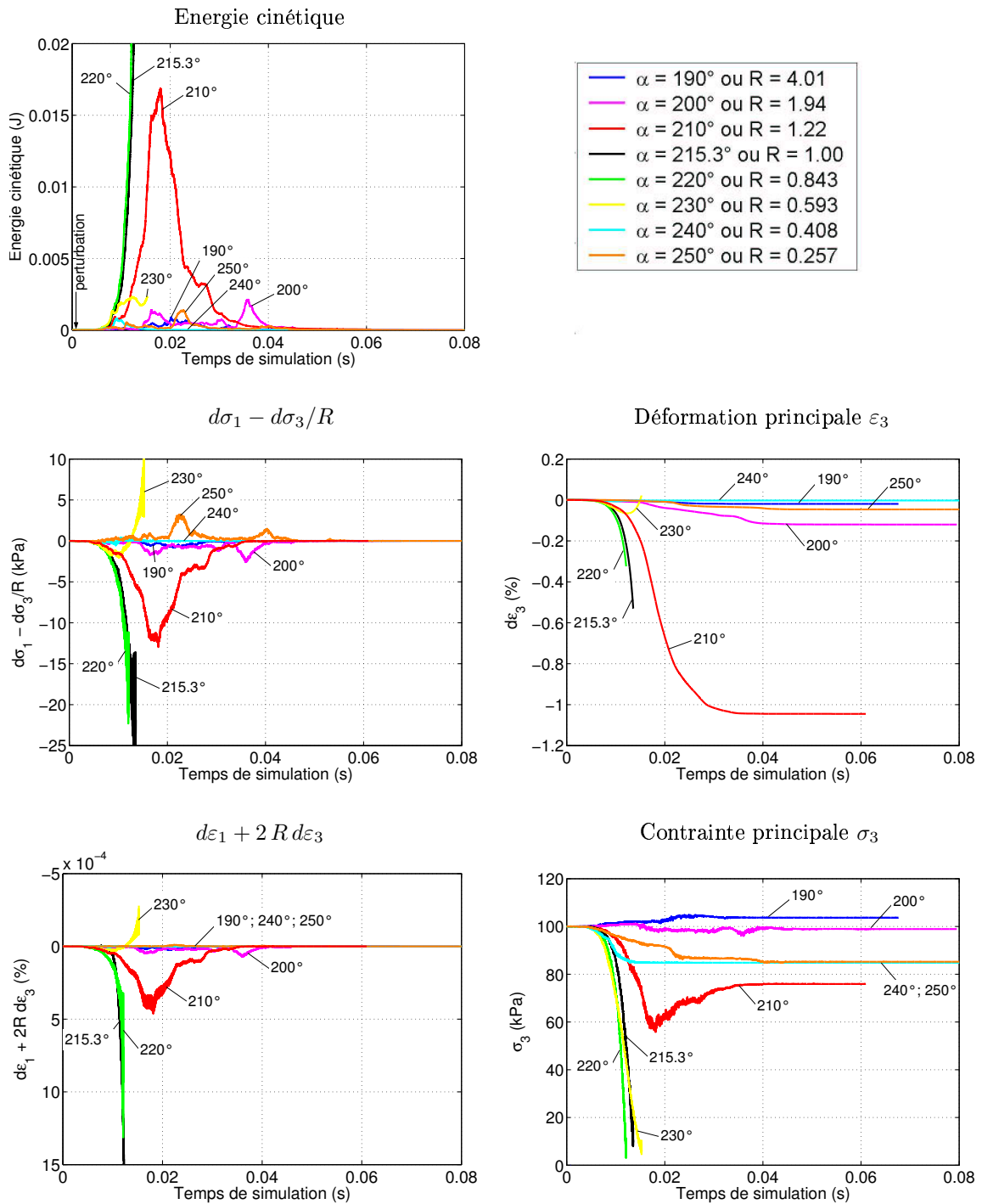


FIG. 4.9 – Simulation de la perturbation en énergie cinétique de l'échantillon E3 à l'état de contrainte  $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.46$  gouverné par les paramètres de contrôle  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$  et  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$ .



d'autre part. Lorsque le travail du second ordre est négatif ou nul, il est possible de trouver des paramètres de contrôle de cet état d'équilibre de façon à ce qu'il présente une perte de maintenabilité aboutissant à l'effondrement total de l'échantillon.

## 4.4 Chemin triaxial non drainé

Dans la première partie de ce chapitre nous avons établi un lien entre le signe du travail du second ordre la bifurcation et la rupture en prenant comme point de départ les valeurs du travail du second ordre trouvées suite aux simulations des recherches directionnelles. Ici nous considérons un chemin de chargement donné et nous nous intéressons à l'évolution du signe du travail du second ordre le long du chemin suivi.

Commençons par étudier le cas classique du chemin triaxial non drainé (à volume constant). Pour un tel essai les paramètres de contrôle sont  $d\varepsilon_v = 0$  et classiquement  $d\varepsilon_1 > 0$ . Compte tenu de ces paramètres le travail du second ordre s'écrit :

$$d^2W = d\varepsilon_1 dq + d\sigma_3 d\varepsilon_v .$$

Cette expression de  $d^2W$  est identique à l'expression (4.1) : les chemins à  $q$  constant et à volume constant sont duaux. La réponse dans un diagramme  $q-p$  de l'échantillon numérique *E2* à une compression triaxiale non drainée classique est présentée sur la Figure 4.10 (courbe : contrôle en  $d\varepsilon_1$ ). Lorsque le matériau est suffisamment lâche, comme c'est le cas ici, la réponse du matériau possède un maximum en  $q$ . Etant donné que l'on impose  $d\varepsilon_v = 0$  et  $d\varepsilon_1 > 0$  le signe de  $d^2W$  ne dépend que de  $dq$  et le travail du second ordre s'annule au pic de  $q$  et est négatif le long de la branche descendante de  $q$ .

Dans ce cas trivial, on peut donc s'attendre à une perte de contrôlabilité à partir du pic de  $q$ . Sur la Figure 4.10 est superposé au résultat de la compression triaxiale non drainée classique ( $d\varepsilon_v = 0$ ,  $d\varepsilon_1 > 0$ ) le résultat de la simulation d'un essai non drainé piloté en  $dq$  ( $d\varepsilon_v = 0$ ,  $dq > 0$ ). Comme on peut s'y attendre il n'est pas possible d'imposer une valeur de  $q$  supérieure au maximum trouvé lors de l'essai contrôlé en  $d\varepsilon_1$ . D'ailleurs, une fois la valeur de ce maximum atteinte, bien que l'on souhaite imposer  $dq > 0$ , la valeur de  $q$  calculée aux frontières de l'échantillon décroît jusqu'à ce que le critère de Mohr-Coulomb soit atteint. La perte de contrôlabilité n'est pas évidente à constater ici et elle ne se traduit pas par un effondrement total de l'échantillon (l'état de contrainte ne s'annule pas). La cause en est sans doute le contrôle de  $q$  par le biais d'un asservissement qui présente une certaine inertie. Lors d'un essai réel, un véritable contrôle en force consisterait à ajouter une petite masse en tête du piston de la cellule triaxiale pour un état de contrainte correspondant au pic de  $q$ . Il devrait alors en résulter l'effondrement total de l'échantillon.

### Remarque

En réalisant une recherche directionnelle pour l'état de contrainte-déformation correspondant au pic de  $q$  on devrait trouver un cône de directions instables incluant la direction en contrainte suivi lors de l'essai non drainé au pic de  $q$ , soit la direction  $\alpha = 215.3^\circ$  ( $dq = 0$ ). Toutefois, nous avons fait le choix de contrôler les recherches directionnelles en contrainte. Par conséquent, en imposant un incrément en contrainte dans la direction  $\alpha = 215.3^\circ$  on devrait retrouver une direction en déformation correspondant à une variation de volume nulle et une valeur du travail du second ordre nulle.

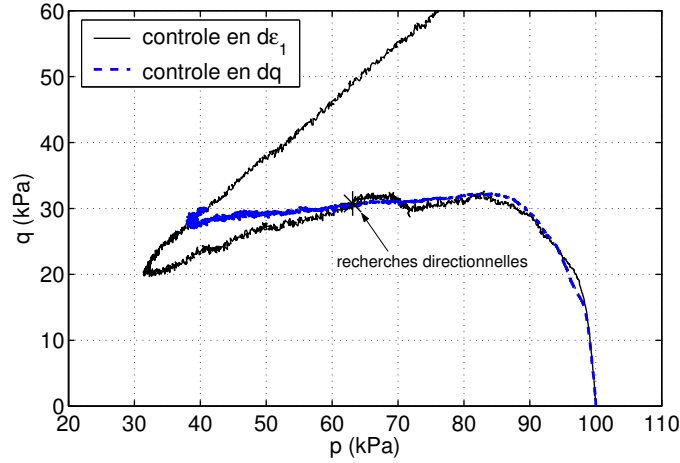


FIG. 4.10 – Comparaison des réponses de l'échantillon E2 pour des compressions non drainées ( $d\varepsilon_v = 0$ ) contrôlées en  $d\varepsilon_1 > 0$  et  $dq > 0$ , à partir d'un état isotrope à 100 kPa de confinement.

La simulation montre que ce n'est pas tout à fait vrai, à cause du fait que les incréments de sollicitation appliqués sont finis (ce sont en réalité des chemins de sollicitation) auxquels correspondent des incréments de réponse finis en général non linéaires. De ce fait, on ne vérifie pas d'un point de vue numérique l'inversion des variables de réponse et de sollicitation, sauf dans le cas d'un comportement essentiellement élastique ou bien, peut-être, en respectant scrupuleusement les non-linéarités. Une tentative de recherche directionnelle en contrainte dans la direction suivie lors de l'essai non drainé à partir de l'état signalé par une étoile sur la Figure 4.10 a fourni une valeur négative du travail du second ordre ( $d^2W_n = -0.205$ ).

## 4.5 Chemins proportionnels en déformation

Les chemins proportionnels en déformation sont une généralisation des chemins à volume constant. Ils sont définis en axisymétrie par (Darve & Laouafa [38]):

$$d\varepsilon_1 > 0 \quad \text{et} \quad d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0,$$

où  $R$  est une constante pour un chemin de chargement donné. Pour  $R = 1$  le chemin de chargement est non drainé (volume constant), pour  $0 < R < 1$  il s'agit d'un chemin dilatant alors que pour  $R > 1$  il est contractant.

Compte tenu de ces paramètres généralisés le travail du second ordre s'écrit:

$$d^2W = d\varepsilon_1 \left( d\sigma_1 - \frac{d\sigma_3}{R} \right) + \frac{d\sigma_3}{R} (d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3).$$

Cette expression du travail du second ordre est identique à l'expression (4.4). Les chemins proportionnels en déformation et proportionnels en contrainte sont des chemins duaux. Puisque l'on impose  $d\varepsilon_1 > 0$  et  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$ , le signe de  $d^2W$  est égal au signe de  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$ .

Des essais proportionnels en déformation ont été simulés avec l'échantillon E1 (le plus dense) à partir d'un état isotrope à 100 kPa. La Figure 4.11 montre les résultats pour des valeurs

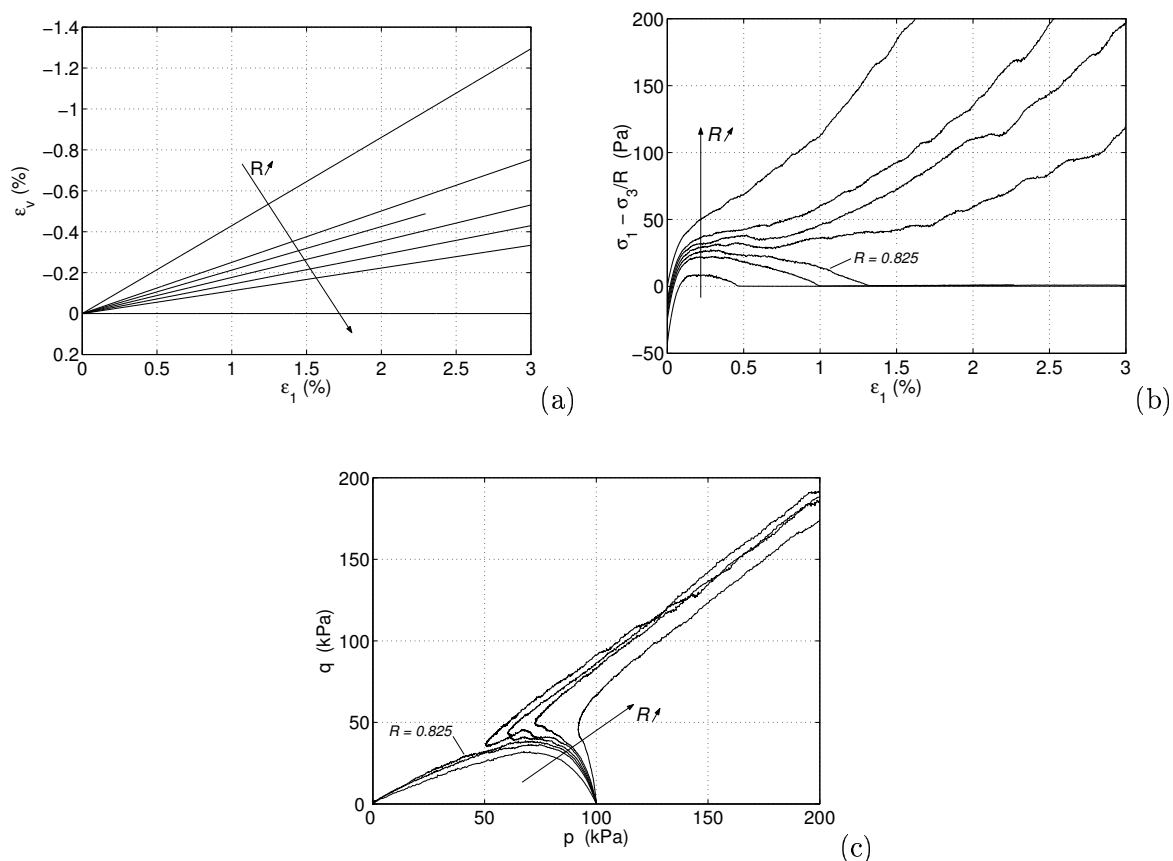


FIG. 4.11 – Chemins proportionnels en déformation simulés avec l'échantillon E1 pour  $R = 0.7; 0.8; 0.825; 0.85; 0.875; 0.9; 0.1$ .

de  $R$  comprises entre 0.7 et 1.0. Ces courbes sont tout à fait comparables à celles obtenues avec un modèle phénoménologique pour un sable dense (Darve *et al.* [42]). Pour des valeurs de  $R$  inférieures à 0.85,  $\sigma_1 - \sigma_3/R$  présente un maximum. Le travail du second ordre s'annule donc au pic de  $\sigma_1 - \sigma_3/R$  et prend des valeurs négatives le long de la branche descendante (Fig. 4.11-b).

#### 4.5.1 Simulation de la perte contrôlabilité

Dans la suite de cette section nous considérons le chemin proportionnel en déformation correspondant à la valeur  $R = 0.825$  (Figs. 4.11-b et -c).

Sur la Figure 4.12 sont comparées les réponses de l'échantillon numérique pour deux modes de contrôle différents: le premier en imposant  $d\varepsilon_1 > 0$  (comme c'est le cas sur la Fig. 4.11) et le second en imposant  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R > 0$ . Bien sûr dans les deux cas le deuxième paramètre de contrôle est  $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3 = 0$ . Tant que la valeur du pic de  $\sigma_1 - \sigma_3/R$  trouvée dans le cas du contrôle en  $d\varepsilon_1$  n'est pas atteinte, la réponse fournie par l'échantillon suivant les deux modes de contrôle est très proche. La valeur de ce pic est légèrement dépassée dans le cas du contrôle en  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  mais on observe peu après une perte de contrôlabilité: les valeurs de  $\sigma_1 - \sigma_3/R$  décroissent alors que l'on impose  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R > 0$ . Cette perte de contrôlabilité se traduit par un effondrement brutal de l'échantillon: son énergie cinétique s'accroît de manière

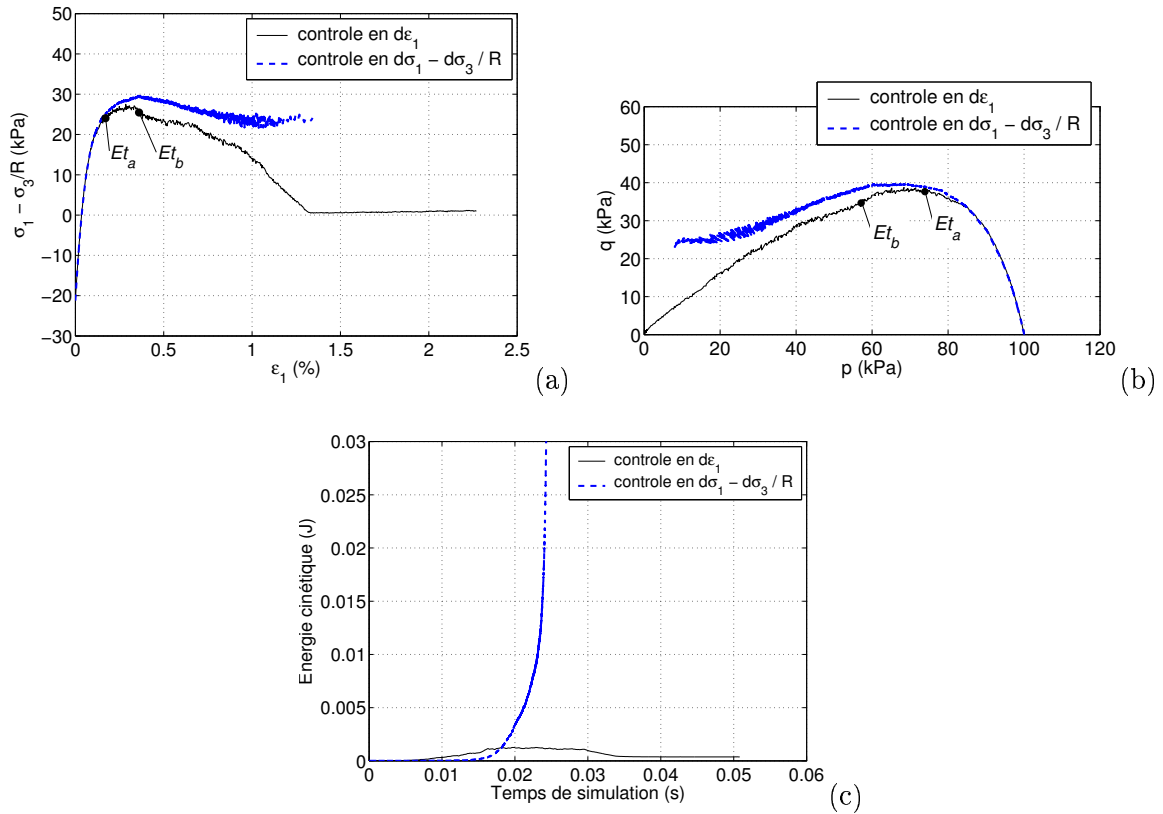


FIG. 4.12 – Comparaison des réponses de l'échantillon E1 pour des chemins proportionnels en déformation ( $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3 = 0$ , avec  $R = 0.825$ ) contrôlés en  $d\varepsilon_1$  et en  $d\sigma_1 - d\sigma_3 / R$ , à partir d'un état isotrope à 100 kPa de confinement.

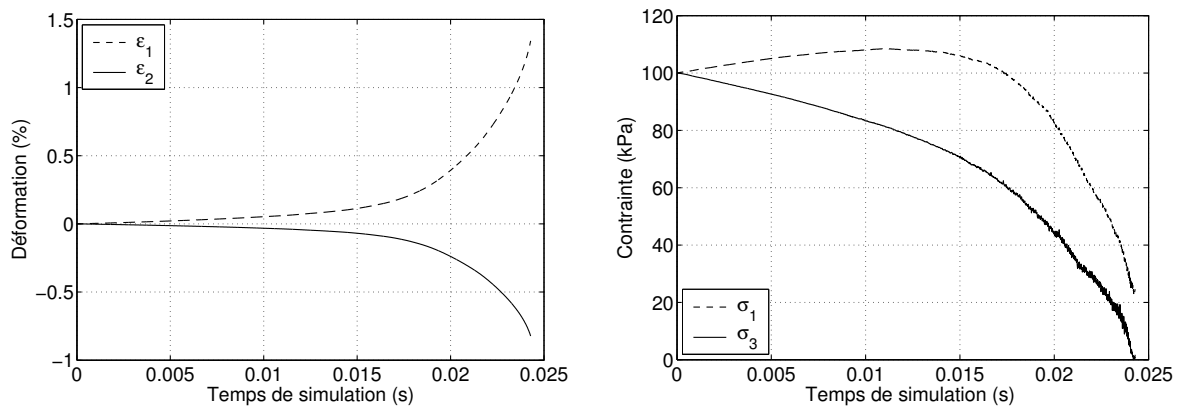


FIG. 4.13 – Evolution des déformations principales et des contraintes principales au cours de la simulation de l'essai proportionnel en déformation ( $d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3 = 0$ , avec  $R = 0.825$ ) contrôlé en  $d\sigma_1 - d\sigma_3 / R$ .

exponentielle. Les évolutions des déformation principales et des contraintes principales lors du contrôle en  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  sont montrées sur la Figure 4.13. Elles témoignent également d'un effondrement total de l'échantillon (annulation de  $\sigma_3$ ) et du caractère dynamique de la rupture. Ainsi, toute la branche descendante de  $\sigma_1 - \sigma_3/R$ , et sans doute le pic également, dans le cas du contrôle en  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R$  (Fig. 4.12) sont considérablement influencés par des effets inertiels.

#### 4.5.2 Simulation de la perte de maintenabilité

Nous choisissons de perturber deux états d'équilibre quasi-statique notés  $Et_a$  et  $Et_b$  et repérés sur la Figures 4.12-a et -b. L'équilibre quasi-statique a été atteint suite à une relaxation de l'assemblage granulaire aux états  $Et_a$  et  $Et_b$ . Pour  $R = 0.825$ , à l'état  $Et_a$ ,  $d^2W > 0$  alors qu'à l'état  $Et_b$  on a  $d^2W < 0$ .

Les états d'équilibre de  $Et_a$  et  $Et_b$  sont perturbés en injectant une quantité d'énergie cinétique égale à  $1 \cdot 10^{-4}$  J à l'échantillon (cf. Sect. 4.2.2.2) tout en imposant  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$  et  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$ , avec  $R = 0.825$ . A titre de comparaison la valeur maximale d'énergie cinétique pour le chemin proportionnel contrôlé par  $d\varepsilon_1$  est de  $1.25 \cdot 10^{-3}$  J. Les réponses de l'échantillon à cette perturbation respectivement pour les états  $Et_a$  et  $Et_b$  sont comparées sur la Figure 4.14.

En ce qui concerne l'état  $Et_a$ , l'énergie cinétique décroît rapidement après l'application de la perturbation et prend ensuite des valeurs très faibles. L'échantillon retrouve rapidement un état d'équilibre statique et les conditions imposées sur les paramètres de contrôle sont respectées. De même, les déformations principales et les contraintes principales se stabilisent rapidement. L'état  $Et_a$  est un état maintenable.

Suite à l'application de la perturbation à partir de l'état  $Et_b$ , l'énergie cinétique augmente constamment: l'échantillon ne retrouve pas un nouvel état d'équilibre. Les conditions imposées sur les paramètres de contrôle ne sont pas satisfaites. Les déformations augmentent de manière exponentielle et la contrainte  $\sigma_3$  s'annule. L'échantillon s'effondre donc totalement.

Ici encore on vérifie bien numériquement que pour des paramètres de contrôle donnés et pour des points de bifurcation détectés par le critère du travail du second ordre, une "petite" perturbation cause une forte discontinuité dans l'évolution de la réponse mécanique du matériau pour des paramètres de contrôle constants, ou du moins, que l'on tente de garder constant.

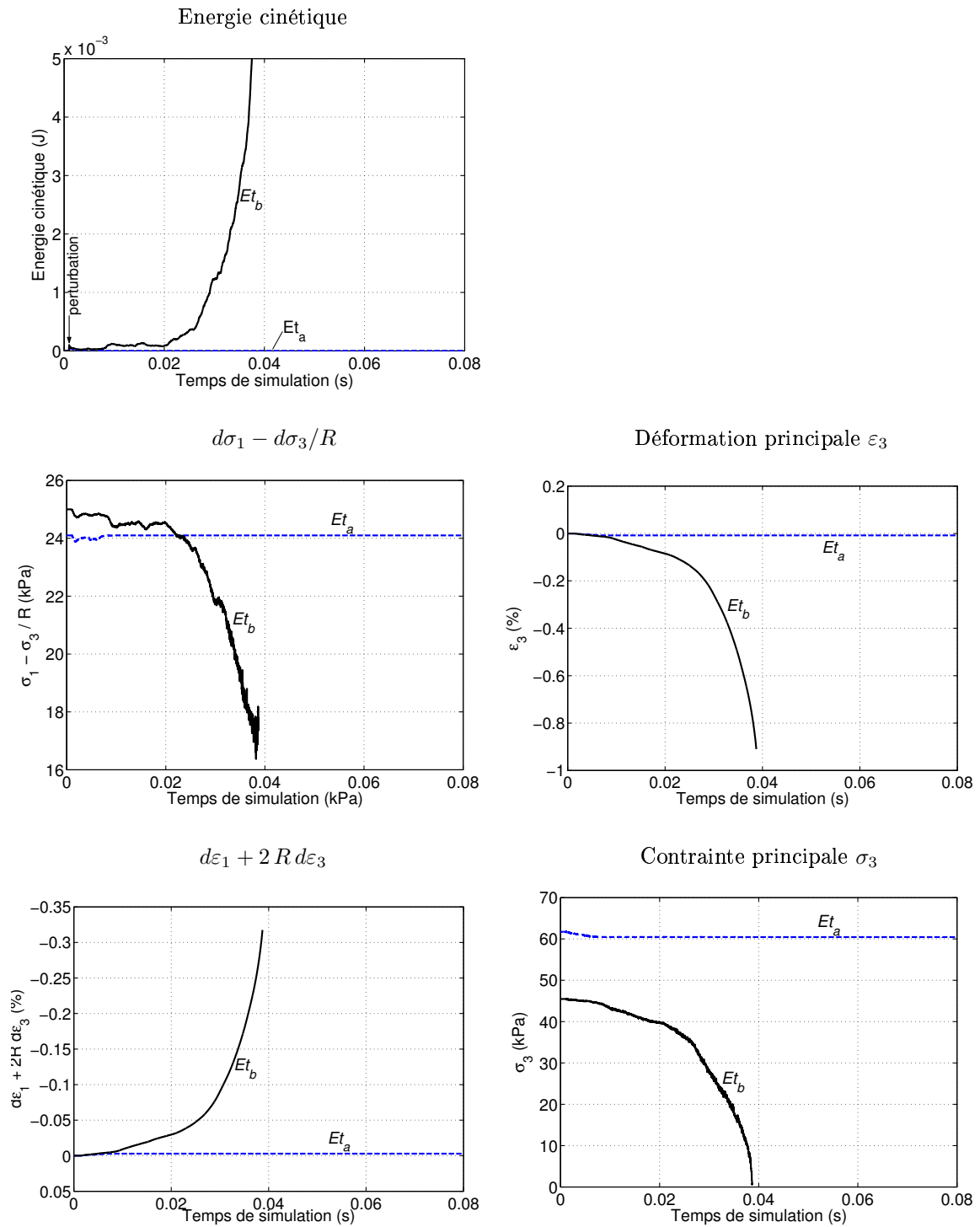


FIG. 4.14 – Comparaison des réponses de l'échantillon E1 suite à la perturbation par injection d'énergie cinétique des états d'équilibre  $Et_a$  et  $Et_b$  gouvernés par les paramètres de contrôle  $d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0$  et  $d\sigma_1 - d\sigma_3/R = 0$  avec  $R = 0.825$ .

### 4.5.3 Résultats expérimentaux sur un matériau analogique bidimensionnel

Les simulations avec le modèle numérique discret tout comme les modélisations constitutives avec la relation phénoménologique INL2 (Darve *et al.* [42]) montrent qu'un matériau granulaire dense se liquéfie (annulation des contraintes) pour des chemins proportionnels en déformation suffisamment dilatants. De même, si le chemin est suffisamment dilatant il y a annulation du travail du second ordre. Des essais ont été réalisés sur un matériau analogique bidimensionnel (rouleaux de Schneebeli [111]) pour vérifier ces résultats et pour caractériser le phénomène de liquéfaction à l'échelle de la micro-structure. Pour se faire, la cinématique de chaque rouleau composant le milieu analogique a été suivie au cours des essais. Cependant les résultats concernant les champs cinématiques discrets ont été dépouillés mais non analysés au moment où s'achève cette thèse. Par conséquent nous présentons uniquement les résultats à l'échelle de l'empilement (résultats macroscopiques). Une analyse plus poussée aussi bien à l'échelle de l'empilement qu'à l'échelle de la micro-structure sera effectuée ultérieurement à ce travail de thèse.

#### Le matériau analogique

Il est constitué de rouleaux de bois (hêtre) de 6 cm de long et de trois diamètres différents: 12; 14 et 20 mm. Le chemin de chargement est appliqué à la frontière de l'empilement de rouleaux de forme parallélépipédique grâce à l'appareil  $1\gamma 2\varepsilon$  (Joer [61]; Joer *et al.* [62]). La mesure des forces appliquées par l'empilement sur les parois de la  $1\gamma 2\varepsilon$ , et le déplacement de ces mêmes parois permet d'accéder à la réponse du matériau analogique à l'échelle de l'empilement. La Figure 4.15 montre le résultat d'une compression biaxiale ( $d\varepsilon_1 > 0$ ,  $\sigma_2 = 50$  kPa) sur un empilement de 1258 rouleaux, dont 423 de diamètre 12 mm, 420 de 14 mm et 415 de 20 mm. L'indice des vides, que nous posons égal dans ce cas bidimensionnel au rapport de la surface vide sur la surface solide, est  $e = 0.235$  après la compression isotrope. Toujours dans le cas bidimensionnel nous définissons la variation de volume comme  $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . La Figure 4.15 montre que l'empilement est fortement dilatant. Notons qu'il est difficile de créer des empilements de rouleaux à des compacités différentes et les valeurs de l'indice des vides sont toujours proches de 0.23–0.24. De ce fait, il est très difficile de créer des échantillons présentant un comportement contractant.

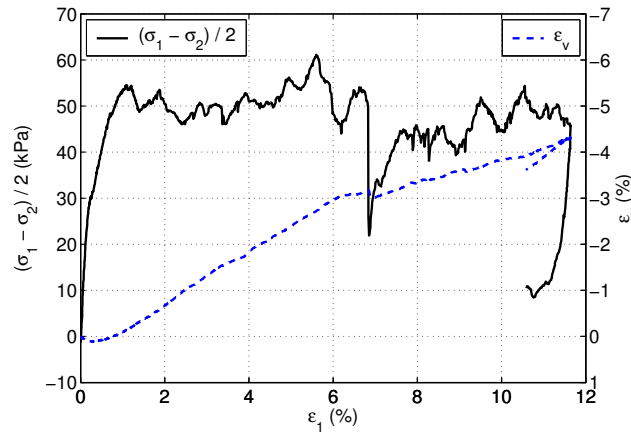


FIG. 4.15 – Compression biaxiale pour une pression de confinement  $\sigma_2 = 50$  kPa sur un empilement de 1258 rouleaux.

### Mesure des champs cinématiques discrets et de la texture

Une technique de photogrammétrie numérique a été développée en collaboration avec Froiio (Sibille & Froiio [118]) pour déterminer de manière semi-automatique les champs cinématiques discrets, c'est-à-dire la translation et la rotation de chaque rouleau, ainsi que les propriétés de la texture. Cette technique ainsi que des détails sur le matériau analogique utilisé sont présentés dans l'Annexe A. L'amélioration apportée par cette technique par rapport aux méthodes précédemment utilisées pour réaliser des mesures similaires repose sur le fait qu'elle est semi-automatique. Elle permet donc de traiter des essais comportant un nombre important de rouleaux (plusieurs milliers) et d'incrémentes de chargement. La capacité de traitement en terme de nombre de rouleaux permet d'étudier des empilements dont la taille s'approche de celle d'un Volume Élémentaire Représentatif. Pour les essais réalisés jusqu'à présent le nombre de rouleaux a été limité par la capacité de l'appareil de chargement.

### Essais proportionnels en déformation

Les essais proportionnels en déformation sur lesquels a été appliquée cette technique de photogrammétrie numérique ont été réalisés en collaboration avec Charalampidou.

Dans le cas bidimensionnel les chemins proportionnels en déformation sont définis par :

$$d\varepsilon_1 > 0 \quad \text{et} \quad d\varepsilon_1 + R d\varepsilon_2 = 0,$$

où  $R$  est constant pour un chemin donné.

Le nom des essais est composé de deux nombres dont le premier indique la valeur de  $R$  imposée et le deuxième la valeur de la pression de confinement isotrope  $p_0$  avant l'application du chemin proportionnel en déformation. Le Tableau 4.1 donne les caractéristiques de chaque essai. Le nombre de rouleaux utilisé est identique à celui de l'essai biaxial présenté précédemment.

La dilatance "naturelle" à la rupture développée par l'empilement de rouleaux pour une compression biaxiale correspond à une valeur de  $R = 0.63$ . Nous faisons abstraction ici de l'influence jouée par la pression de confinement initiale  $p_0$  qui semble négligeable pour la gamme de pressions considérée ici. La Figure 4.16 montre que pour les valeurs de  $R = 0.59; 0.56; 0.54$  et  $0.50$ , soit pour des valeurs inférieures à  $0.63$ , l'application du chemin proportionnel en déformation conduit à une annulation des contraintes. Autrement dit, la liquéfaction de cet empilement dense de rouleaux est obtenu si on impose une dilatance supérieure à sa dilatance naturelle. Remarquons que cette liquéfaction ne se produit pas brutalement mais correspond à une évolution que l'on peut qualifier de quasi-statique de l'empilement.

Nom de l'essai	$p_0$ (kPa)	$R$	$e$
R119-50	50	1.19	0.231
R070-50	50	0.70	0.240
R059-50	50	0.59	0.239
R056-50	50	0.56	0.234
R056-150	150	0.56	0.228
R050-150	150	0.50	0.231
œdométrique	50	$\rightarrow \infty$	0.234

TAB. 4.1 – Caractéristiques des essais proportionnels en déformation.



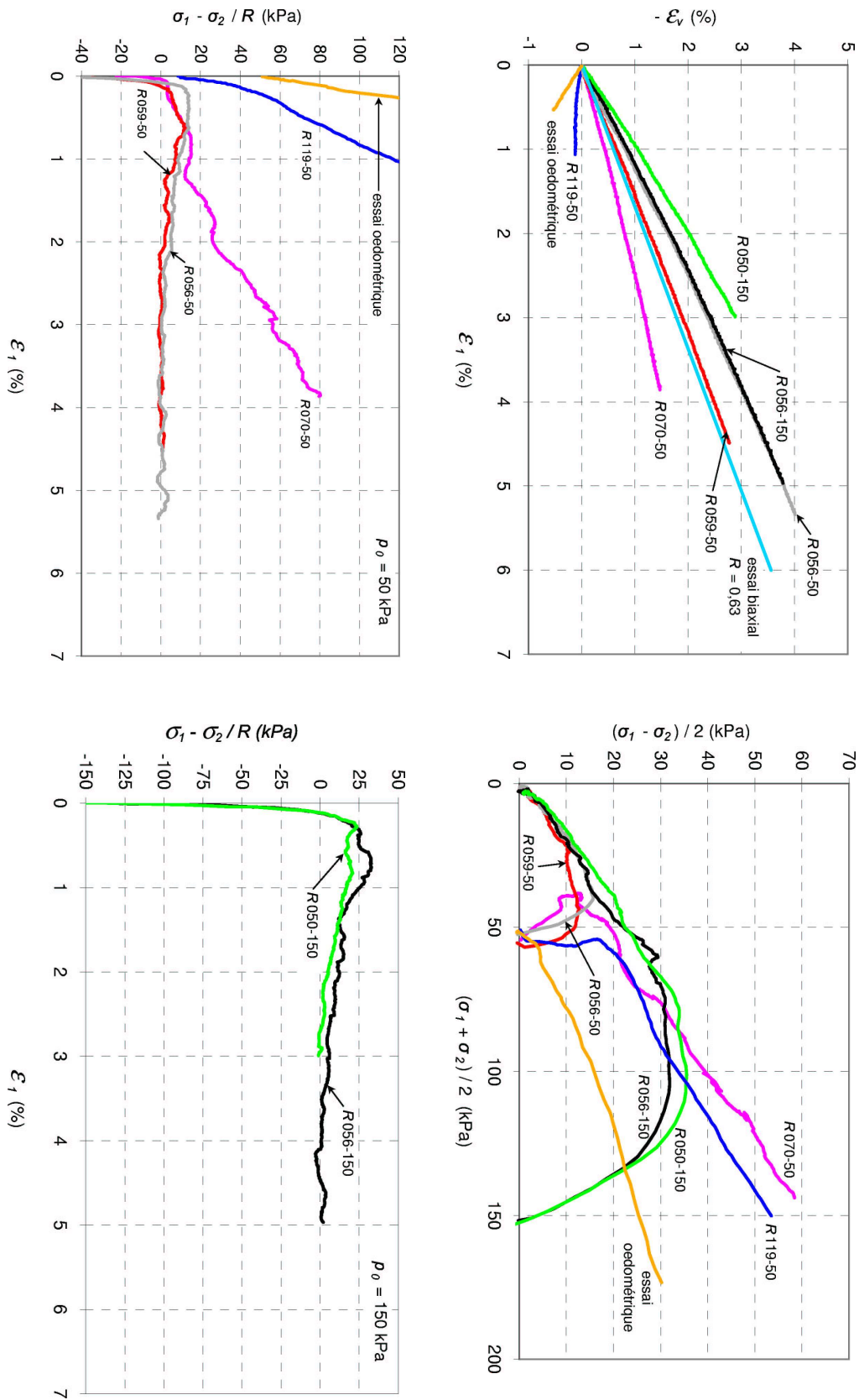


FIG. 4.16 – Chemins proportionnels en déformation appliqués sur un empilement de rouleaux. Sur le diagramme présentant  $\epsilon_v$  en fonction de  $\epsilon_1$ , une droite indique la dilatance naturelle de l'empilement pour un essai de compression biaxial

Dans le cas bidimensionnel, compte tenu du paramètre de contrôle que l'on impose  $d\varepsilon_1 + R d\varepsilon_2 = 0$ , le travail du second ordre s'écrit:

$$d^2W = d\varepsilon_1 \left( d\sigma_1 - \frac{d\sigma_2}{R} \right) + \frac{d\sigma_2}{R} (d\varepsilon_1 + R d\varepsilon_2). \quad (4.5)$$

Que ce soit pour  $p_0 = 50$  ou  $150$  kPa, la Figure 4.16 montre que pour des valeurs de  $R$  suffisamment faibles (inférieures à 0.63)  $\sigma_1 - \sigma_2/R$  possède un pic, le travail du second ordre s'annule donc à ce pic et prend des valeurs négatives le long de la branche descendante. Les états de contrainte-déformation à partir du pic en  $\sigma_1 - \sigma_2/R$  et le long de la branche descendante constituent autant de points de bifurcation. A partir de ces points de bifurcation, en tentant d'appliquer un chemin de chargement contrôlé par  $d\varepsilon_1 + R d\varepsilon_2 = 0$  et  $d\sigma_1 - d\sigma_2/R > 0$  on devrait observer un effondrement de l'empilement qui serait la manifestation d'une perte de contrôlabilité. De façon similaire à partir d'un de ces points de bifurcation, en tentant de maintenir un état d'équilibre par le biais des paramètres de contrôle  $d\varepsilon_1 + R d\varepsilon_2 = 0$  et  $d\sigma_1 - d\sigma_2/R = 0$  on devrait également assister à un effondrement, si besoin déclenché par une "petite" perturbation (par exemple une vibration). Dans les deux cas ces effondrements seraient la mise en évidence physique des points de bifurcation détectés par le critère du travail du second ordre.

## 4.6 Conclusion

Le premier point important auquel permettent d'aboutir les analyses présentées dans ce chapitre correspond au fait que, pour le modèle numérique considéré, les points de bifurcation détectés par le critère portant sur le signe du travail du second ordre correspondent bien à des points de bifurcation. C'est-à-dire que l'on observe bien un changement soudain et discontinu du mode de réponse du matériau, qui se traduit par un effondrement au caractère dynamique important, pour une variation continue et graduelle (voire nulle) des paramètres de chargement. Ces résultats obtenus par des simulations numériques directes correspondent bien avec ceux obtenus avec des modèles phénoménologiques par Darve *et al.* [42], Nova [92], Imposimato & Nova [57] et Gajo [51].

De plus, nous avons mis en évidence que le choix des paramètres de contrôle constitue une condition supplémentaire à associer au critère du travail du second ordre pour effectivement conduire à l'effondrement un matériau donné.

Cet effondrement se caractérise notamment par une annulation subite des contraintes, et correspond bien à l'état de liquéfaction soudain obtenu par les expériences décrites par Servant *et al.* [114] et Khoa *et al.* [64] (cf. Sect. 1.3.2.1, p. 10 et Fig. 1.1-a, p. 11). Il est intéressant d'ajouter qu'aucune figure de localisation des déformations n'a pu être mise en évidence lors des simulations d'effondrements. Par ailleurs, le nombre de coordination  $z$  de l'assemblage granulaire chute brutalement au moment de l'effondrement pour atteindre des valeurs très faibles ( $z \simeq 2$ ). Ces deux observations plaident en faveur d'une rupture diffuse.

Les résultats numériques présentés ici permettent d'expliquer tout ou partie des observations expérimentales présentées dans la bibliographie. Notamment la simulation des essais de maintenabilité avec pour paramètres de contrôle  $dq = 0$  et  $d\varepsilon_v = 0$  correspond exactement aux essais réalisés par Chu et coauteurs [75; 15; 16], Lade & Pradel [70] et Sladen *et al.* [121]. Ces derniers, après avoir mené un échantillon de sable à un état de contrainte-déformation le long d'un chemin triaxial drainé maintiennent le déviateur de contrainte  $q$  à une valeur constante et ferment le drainage. Ils observent un effondrement si le niveau de contrainte  $\eta$  est suffisamment élevé, autrement dit si l'état de contrainte déformation se situe dans le domaine de bifurcation et que la direction à  $q$  constant est incluse dans le cône de direction instable émanant de l'état de contrainte considéré.

Les simulations d'effondrement qui ont été présentées ne constituent qu'une première étape dans l'appréciation de l'influence des paramètres de contrôle. Il y a certainement des défauts: l'algorithme d'asservissement des parois ne permet pas de régir d'une manière directe les paramètres de contrôle. La formulation même du code utilisé n'est peut être pas la plus appropriée pour juger de l'état d'équilibre d'un assemblage granulaire: une approche statique ou quasi-statique serait peut-être plus appropriée.

## CHAPITRE 5

---

Origines microscopiques du travail du second ordre

---

## 5.1 Introduction

Dans les Chapitres 3 et 4 la détection des points de bifurcation et l'étude de l'occurrence de la bifurcation ont été étudiés à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle de l'assemblage granulaire sensé être un VER. Nous supposons que le comportement mécanique d'un assemblage granulaire peut être déduit du comportement de chacun des contacts présents dans l'assemblage. A titre d'exemple, Nicot [86] et Nicot & Darve [87; 88] ont développé un modèle micro-mécanique basé principalement sur la description statistique des orientations de contacts, Radjai *et al.* [100; 103] ont décrit la nature biphasique des forces de contact caractéristique d'un milieu granulaire et Staron [122] a proposé des mécanismes de déstabilisation des pentes granulaires basés sur cette description biphasique. A notre tour, nous nous posons la question des origines à l'échelle des contacts de la bifurcation telle que nous l'avons étudiée dans les chapitres précédents.

Dans ce chapitre, nous tentons de relier le travail du second ordre, qui est une grandeur traditionnellement définie dans le cadre des milieux continus à partir de variables tensorielles, à des variables à l'échelle de la micro-structure, et plus précisément à l'échelle des contacts.

Pour se faire, nous utilisons comme point de départ une idée originale de Laouafa *et al.* [74] et Darve *et al.* [39; 42; 35] qui ont analysé un problème 2D purement discret à l'aide d'une grandeur définie au niveau des grains par analogie avec le travail du second ordre. Sur un principe similaire, en connaissance de la " loi de comportement " attribuée aux contacts, nous définissons une grandeur définie au niveau des contacts représentant le travail du second ordre du contact. La présentation de ces définitions constitue la première partie de ce chapitre.

Dans la deuxième partie nous étudions le lien qui est susceptible d'exister entre le travail du second ordre et la grandeur que nous avons définie au niveau du contact. La recherche d'une relation entre le travail du second ordre et des variables microscopiques n'a pas été effectuée isolément mais en équipe avec des outils différents. Nous confrontons donc deux approches menées en parallèle: une approche numérique et une approche analytique. L'accent est mis sur l'approche numérique car c'est celle qui a été réalisée dans le cadre de cette thèse.

## 5.2 Avalanches de grains

### 5.2.1 Une description liée aux grains

Laouafa *et al.* [74] et Darve *et al.* [39; 42; 35] ont proposé une approche purement discrète de la description d'avalanches de grains. Nous rappelons la méthodologie employée et les conclusions auxquelles ils ont aboutit.

Les auteurs se sont basés sur la réalisation d'essais de poussée sur une pente constituée d'un milieu analogique bidimensionnel (rouleaux de Schneebeli [111]). La pente réelle est constituée de 335 rouleaux de diamètres 13, 18 et 28 mm. La sollicitation est appliquée à l'empilement de rouleaux avec l'appareil  $1\gamma 2\varepsilon$  qui permet d'effectuer dans un plan une distorsion et deux déformations normales indépendantes (pour plus de détail au sujet de cet appareil voir Joer [61], Joer *et al.* [62]). Une chaîne d'acquisition d'image et de traitement numérique des données permet de suivre le mouvement de chaque rouleau au cours de la sollicitation et donc d'en

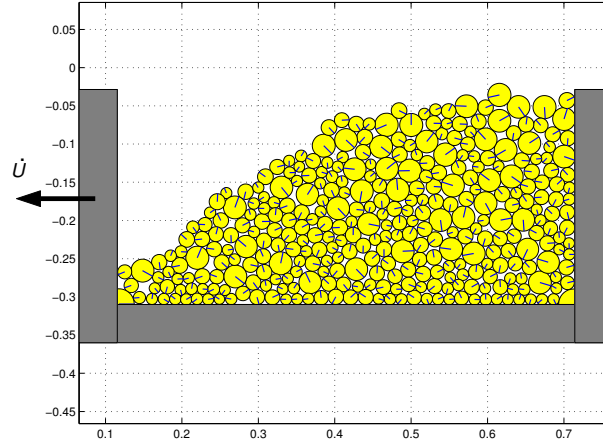


FIG. 5.1 – *Configuration initiale de l'empilement de rouleaux; Darve et al. [39].*

déduire les champs discrets de translation et de rotation de l'empilement. La Figure 5.1 représente la configuration initiale de la pente, la sollicitation consiste en un déplacement à vitesse imposée de la paroi gauche du bâti de l'appareil  $1\gamma 2\varepsilon$ .

L'analyse qualitative des mécanismes de glissement se fait grâce à l'étude des résultats expérimentaux. Cependant ces derniers ne nous informent que sur la cinématique de l'empilement. Les auteurs effectuent une analyse plus fine grâce à la simulation de l'essai de poussée avec une méthode numérique discrète de type Dynamique des Contacts (cf. Sect. 1.5.2, p. 30 et Lanier & Jean [72]). La configuration numérique initiale de l'empilement est imposée aussi proche que possible de la configuration initiale expérimentale. Le respect de cette condition est importante pour assurer une reproduction correcte par simulation de la cinématique expérimentale. La simulation est validée par comparaison des champs de déplacement expérimentaux et numériques. Ces derniers, qu'ils soient numériques ou expérimentaux mettent en évidence principalement deux types d'avalanches: de petites avalanches superficielles mettant en jeu seulement quelques rouleaux et des avalanches de larges dimensions impliquant la plupart des rouleaux de l'empilement.

Par analogie au travail du second ordre défini dans le cadre des milieux continus, les auteurs définissent une grandeur attribuée à chaque rouleau que nous nommons  $d^2w^{ro}$ :

$$d^2w^{ro} = d\vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{x} + d\vec{\mathcal{M}} \cdot d\vec{\omega}, \quad (5.1)$$

avec  $d\vec{\mathcal{F}}$  l'incrément total de force appliquée sur un rouleau,  $d\vec{x}$  son incrément de déplacement,  $d\vec{\mathcal{M}}$  l'incrément de moment total appliqué sur le rouleau et  $d\vec{\omega}$  son incrément de rotation<sup>1</sup>. Les auteurs présumant qu'il pourrait y avoir un lien entre les valeurs négatives de  $d^2w^{ro}$  et la rupture, qui se manifeste dans ce cas sous la forme d'avalanches de grains. L'énergie cinétique de chaque rouleau  $ec_r$  est utilisée comme indicateur de rupture, les pics spatiaux d'énergie cinétique indiquent des zones de mouvements importants. Les comparaisons entre les répartitions spatiales des valeurs négatives de  $d^2w^{ro}$  d'une part et les répartitions spatiales de l'énergie cinétique  $ec_r$  d'autre part, montrent une bonne corrélation spatiale entre ces deux grandeurs. Dans ce cas,  $d^2w^{ro}$  pourrait être vu comme un indicateur de zone instable.

1. Dans le cas du problème bidimensionnel traité ici les vecteurs  $d\vec{\mathcal{M}}$  et  $d\vec{\omega}$  sont évidemment normaux au plan d'empilement des rouleaux.

Les auteurs ont également calculé les valeurs globales:

$$d^2\overline{W}^{ro} = \sum_{rouleaux} d^2w^{ro} \quad \text{et} \quad Ec_r = \sum_{rouleaux} ec_r.$$

Leur évolution en fonction du paramètre de chargement est comparée. Les pics (ou bouffées) d'énergie cinétique  $Ec_r$  sont corrélés par rapport au paramètre de chargement avec les plus grandes valeurs négatives de  $d^2\overline{W}^{ro}$ . Ainsi, à partir de l'évolution de  $d^2\overline{W}^{ro}$  en fonction du paramètre de chargement on pourrait conjecturer les valeurs critiques de ce paramètre de chargement.

D'autres configurations initiales sujettes à des sollicitations différentes ont été étudiées par ces mêmes auteurs et ont conduit à des conclusions identiques.

## 5.2.2 Une description liée aux contacts

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction de ce chapitre nous souhaitons établir un lien entre le travail du second ordre à l'échelle macroscopique ( $d^2W$ ) et des variables à l'échelles des contacts (forces de contact et déformations des contacts) car nous estimons que les informations à l'échelle des contacts ou des amas de contacts dans un milieu granulaire dense sont fortement porteuses de sens (entre autres: Nicot [86], Nicot & Darve [87; 88], Radjai *et al.* [100; 103], Staron [122]). C'est par exemple au niveau des contacts qu'est dissipée l'énergie par frottement, ou bien une anisotropie des orientations de contact se traduit pas une anisotrope à l'échelle macroscopique du comportement mécanique de l'assemblage. De plus, nous avons l'opportunité dans notre cas de connaître la loi de comportement de chacun des contacts. Ainsi, chaque contact peut être considéré comme un corps dont le comportement constitutif est clairement défini et nous attribuons à ce corps un travail du second ordre. Comme nous connaissons la loi de comportement de ce corps nous pouvons discuter du signe du travail du second ordre. C'est ce qui est fait dans la section suivante après avoir défini l'expression du travail du second ordre attachée au contact.

### 5.2.2.1 Etude d'un modèle simple

Mandel [83] a utilisé un modèle simple constitué d'un ressort et d'un patin pour montrer que le Postulat de Drucker n'est pas une condition nécessaire de stabilité lorsqu'il existe des frottements intérieurs du type de Coulomb. Nous nous inspirons de la démarche de Mandel et de son modèle (en l'adaptant à notre cas) pour proposer et étudier une définition du travail du second ordre lié à un contact. Considérons le modèle de la Figure 5.2: il s'agit d'une représentation de la loi de contact utilisée dans le modèle discret (on a fait abstraction des deux grains impliqués). Le patin correspond au frottement de Coulomb caractérisé par un angle de frottement  $\varphi$ , nous supposons que les rigidités des deux ressorts  $a$  et  $b$  sont identiques pour faciliter les explications. On s'intéresse au mouvement du point  $M$  représenté suivant les deux directions de l'espace par  $p$  et  $q$  sous l'action de forces extérieures  $P$  et  $Q$ . Notons que la relation entre  $P$  et  $p$  est toujours élastique alors que la relation entre  $Q$  et  $q$  est élasto-plastique parfaite. Nous définissons le travail du second ordre attribué à ce modèle par la grandeur  $d^2w^{ct}$ :

$$d^2w^{ct} = dP dp + dQ dq. \tag{5.2}$$

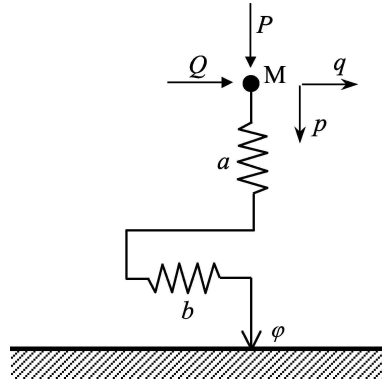


FIG. 5.2 – Modèle représentant le comportement d'un contact.

Du fait de la relation élastique entre  $P$  et  $p$ , le terme  $dP dp$  est toujours positif ou nul Seul le terme  $dQ dq$  peut être négatif.

Etudions dans quel cas la grandeur  $d^2w^{ct}$  prend des valeurs négatives. Le domaine d'élasticité du modèle défini par:

$$-P \tan \varphi \leq Q \leq P \tan \varphi, \quad (5.3)$$

est limité dans le plan  $P, Q$  par deux demi-droites  $D$  et  $D'$  (Fig. 5.3).  $D$  et  $D'$  représentent également des conditions limites. Plaçons nous à l'équilibre limite, le patin étant sur le point de se déplacer vers la droite ( $Q = P \tan \varphi$ ). Cet état est représenté par le point  $E_l$  dans le plan  $P, Q$ . Considérons un incrément de sollicitation  $d\vec{s}$  de composantes  $dP, dQ$  et l'incrément de réponse correspondant  $d\vec{r}$  de composantes  $dp, dq$ . Trois cas sont à envisager.

Cas 1: l'incrément de sollicitation  $d\vec{s}_{c1}$  est dirigé vers l'intérieur du domaine d'élasticité (Fig. 5.3).

L'incrément de réponse  $d\vec{r}_{c1}$  est purement élastique (le patin ne glisse pas) et colinéaire à l'incrément de sollicitation (car les rigidités des ressorts  $a$  et  $b$  sont identiques): on a alors  $d^2w^{ct} > 0$ .

Cas 2: On cherche à imposer un incrément de sollicitation dirigé vers l'extérieur du domaine d'élasticité. Le patin glisse vers la droite et puisque la demi-droite  $D$  constitue une condition limite, l'incrément de sollicitation est aligné sur celle-ci. L'incrément de réponse peut être dissocié en une partie élastique colinéaire à l'incrément de sollicitation et une partie plastique ( $dq^p$ ) parallèle à l'axe  $OOQ$ . Considérons le cas où l'on souhaite augmenter  $Q$  de  $dQ$  et simultanément  $P$  de  $dP$  tel que:

$$dQ > 0 \quad \text{et} \quad dP > 0 \quad \text{et} \quad dQ > dP \tan \varphi,$$

ou autrement dit, le cas où le critère de Coulomb est remonté.  $d\vec{s}_{c2}$  est aligné sur la demi-droite  $D$  dans la direction opposée à  $O$  et  $d\vec{r}_{c2}$  est contenu dans l'angle  $Y E_l D$ . Par conséquent,  $d^2w^{ct} > 0$ . Notons que dans le cas d'un contact pris isolément le déplacement plastique est infini et  $d\vec{r}_{c2}$  est colinéaire à  $E_l Y$ .

Cas 3: A l'opposé du cas précédent on cherche à diminuer  $Q$  de  $dQ$  et  $P$  de  $dP$  tel que:

$$dQ < 0 \quad \text{et} \quad dP < 0 \quad \text{et} \quad dQ > dP \tan \varphi.$$

Le critère de Coulomb est descendu et  $d\vec{s}_{c3}$  dirigé vers  $O$ .  $d\vec{r}_{c3}$  est contenu dans l'angle  $Y E_l O$ . Si l'angle entre  $d\vec{s}_{c3}$  et  $d\vec{r}_{c3}$  est supérieur à  $90^\circ$  alors  $d^2w^{ct} < 0$ . Or les composantes de  $d\vec{s}_{c3}$  sont  $dP < 0$  et  $dQ < 0$  avec  $dQ = dP \tan \varphi$ . Par conséquent si  $dq > -dp / \tan \varphi$  alors  $d^2w^{ct} < 0$ . Comme dans le cas précédent, si le contact est pris isolément le glissement est infini et la condition  $dq > -dp / \tan \varphi$  est toujours vérifiée.



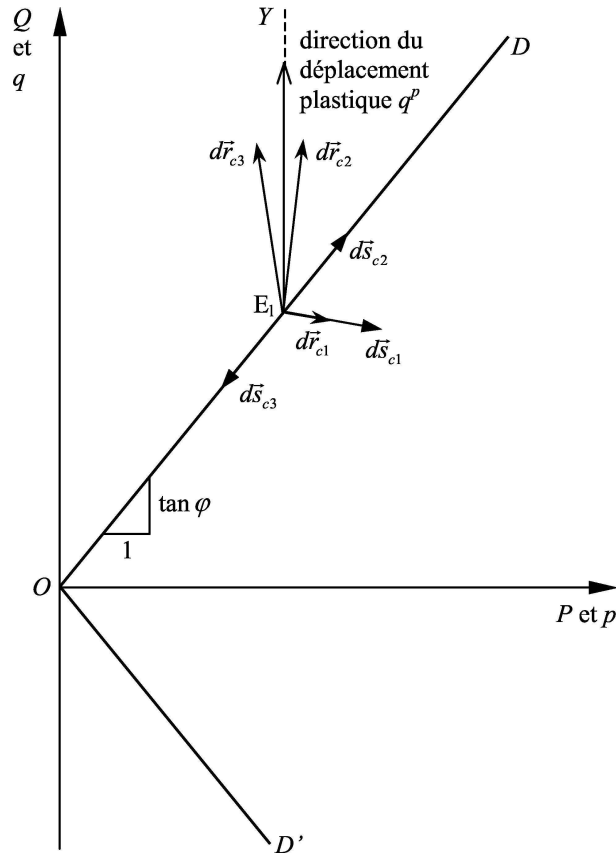
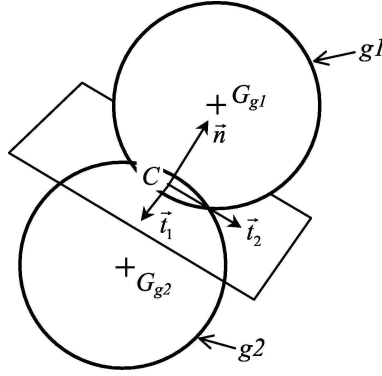


FIG. 5.3 – Incréments de sollicitation  $d\vec{s}$  et incréments de réponse  $d\vec{r}$  pour différentes directions de chargement envisagées à partir d'un état limite  $E_1$ .

En résumé, la grandeur  $d^2w^{ct}$  est négative uniquement lorsque les trois conditions suivantes sont remplies simultanément: glissement,  $dp < 0$  (ou de manière équivalente  $dP < 0$ ) et  $dq > -dp/\tan\varphi$ . En d'autres termes,  $d^2w^{ct} > 0$  n'est pas une condition de non glissement,  $d^2w^{ct} < 0$  est une condition suffisante de glissement "par descente du critère de Coulomb". Nicot & Darve [88] ont analysé dans le cas tridimensionnel les conditions d'annulation du travail du second ordre associé au contact. Ces conditions imposent qu'il y ait glissement avec décharge dans la direction normale (descente du Critère de Coulomb), elles portent également sur la direction et l'amplitude du glissement tangentiel. Ces conditions se réduisent dans le cas bidimensionnel à celles que nous avons données plus haut.

### 5.2.2.2 Application aux simulations numériques

Dans le cas du modèle étudié dans la section précédente la rotation de corps rigide que subit un contact au cours d'une simulation n'est pas prise en compte. Par conséquent, l'incrément (on pourrait parler tout aussi bien de dérivée temporelle) de la force de contact, par exemple, doit être calculé par rapport à un repère lié au contact et non par rapport à un repère global Galiléen. Nous notons  $\mathfrak{R}$  le repère Galiléen et  $\hat{\mathfrak{R}}$  le repère local lié au contact défini par  $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$  où  $\vec{n}$  est normal au plan tangent au contact et  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  appartiennent au plan tangent (Fig. 5.4). L'incrément de la force de contact  $\vec{F}$  calculé par rapport au repère  $\mathfrak{R}$  est noté  $d\vec{F}$ . Il est noté  $\hat{d}\vec{F}$  lorsque l'incrément est calculé par rapport au repère local  $\hat{\mathfrak{R}}$ .

FIG. 5.4 – Définition du repère local lié au contact entre deux grains  $g1$  et  $g2$ .

Ainsi, nous récrivons l'expression de  $d^2w^{ct}$  (Eq. 5.2) sous forme vectorielle en l'appliquant au cas des contacts considérés dans le modèle discret:

$$d^2w^{ct} = \hat{d}\vec{F} \cdot \hat{d}\vec{u}, \quad (5.4)$$

où  $\hat{d}\vec{F}$  est l'incrément de la force de contact du grain  $g1$  sur le grain  $g2$  et  $\hat{d}\vec{u}$  l'incrément de déplacement relatif du grain  $g1$  par rapport au grain  $g2$  au point de contact  $C$  (Fig. 5.4).

### 5.2.3 Simulation numérique de l'avalanche de grains

Dans l'objectif de comparer la description liée aux grains et la description liée aux contacts exposées dans les deux sections ci-dessus, nous avons simulé l'essai de poussée sur l'empilement de rouleau avec le code SDEC. Cette simulation n'est qu'approximative car nous n'avons pas connaissance de la vitesse de déplacement imposée expérimentalement à la paroi gauche de l'appareil  $1\gamma 2\varepsilon$ . A cause des effets inertiels, la vitesse de la paroi peut influencer la réponse de l'empilement de rouleaux. Le code SDEC est écrit en trois dimensions, pour se ramener à un problème bidimensionnel, les centres de chacune des sphères représentant un rouleau appartiennent tous au même plan. De plus, à chaque sphère d'un diamètre donné est attribuée non pas sa masse correspondante mais la masse du rouleau du même diamètre. Cette modification permet de respecter les rapports de masse entre les rouleaux de différents diamètres. La loi de contact est identique à celle utilisée pour la simulation des essais triaxiaux. La rigidité normale du contact entre deux rouleaux a été mesurée par Combe [19] et l'angle de frottement par Calvetti *et al.* [8]. La rigidité tangentielle  $k_t$  est fixée arbitrairement. Les paramètres de la simulation sont donnés dans le Tableau 5.1.

L'application du chargement (déplacement de la paroi) est divisé en 1080 incréments entre lesquels sont calculés les champs de déplacement discrets. L'analyse des résultats s'effectue sur 5 incréments parmi les 1080 correspondant respectivement à un déplacement de la paroi vers la gauche de 1.12; 1.68; 3.14; 3.36; 5.04 cm. La Figure 5.5 présente une comparaison entre

$k_n/D_s$ (MPa)	$k_t/k_n$	$\varphi_c$ (deg)	densité (kg/m <sup>3</sup> )	Vitesse de la paroi (m/s)	Atténuation $\lambda^a$
166	0.42	28	500	0.01	0.1

TAB. 5.1 – Paramètres mécaniques et numériques de la simulation de l'essai de poussée.

les champs de déplacement discrets incrémentaux expérimentaux, ceux calculés par Darve *et al.* [39] avec la méthode de la Dynamique des Contacts, et ceux calculé avec le code SDEC (MED).

Tout d'abord, on constate que la prédiction des champs de déplacement par la Dynamique des Contacts est très bonne. On retrouve notamment les deux avalanches superficielles pour un déplacement de 3.14 et 5.04 cm (Fig. 5.5-c et -e). Les champs de déplacement calculés avec la MED sont plus éloignés des champs expérimentaux. En particulier, on retrouve bien une avalanche superficielle pour un déplacement de 3.14 cm (Fig. 5.5-c) mais non pour un déplacement de 5.04 cm (Fig. 5.5-e). Nous avons tenté, sans succès, d'améliorer la prédiction des résultats expérimentaux, notamment en utilisant une dissipation d'énergie par augmentation de la rigidité normale dans le cas d'un déchargement/rechargement par rapport à un chargement initial (prise en compte d'une déformation plastique du contact cf. Sect. 1.5.3.2, p. 33).

Précisons que la cinématique observée ne correspond pas à une succession d'avalanches superficielles impliquant peu de grains et de larges avalanches mettant en jeu l'ensemble de l'empilement. Il n'y a en fait qu'une unique avalanche large qui évolue de manière continue avec le paramètre de chargement, la vitesse des grains impliqués est proche de la vitesse de déplacement de la paroi. Les avalanches superficielles sont aux contraire intermittentes et se superposent à l'avalanche large. Les grains impliqués dans les avalanches superficielles ont des vitesses élevées. Ainsi, par effet d'échelle l'avalanche large n'est pas visible à partir des champs de déplacement incrémentaux lorsque qu'une avalanche superficielle est en cours, ce qui ne veut pas dire que l'avalanche large n'existe pas.

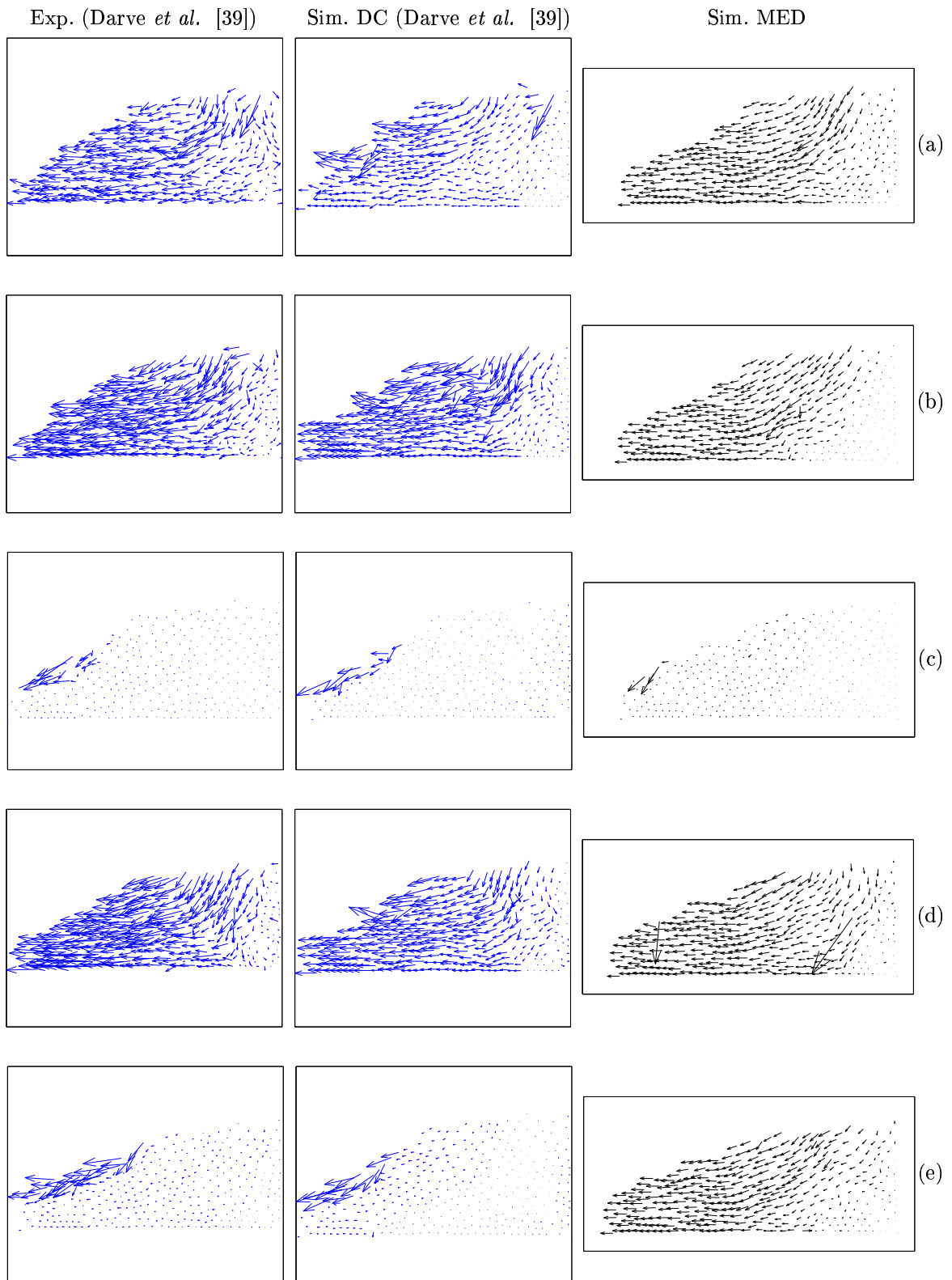


FIG. 5.5 – Champs de déplacements discrets incrémentaux de l'avalanche de grains: résultats expérimentaux à gauche, résultats numériques avec la méthode de la Dynamique du Contact (Darve *et al.* [39] au centre et avec la Méthode des Eléments Discrets à droite. Déplacement de la paroi: (a) 1.12 cm; (b) 1.68 cm; (c) 3.14 cm; (d) 3.36 cm; (e) 5.04 cm.

### 5.2.3.1 Travail du second ordre attribué aux rouleaux

Comme l'ont fait Laouafa *et al.* [74] et Darve *et al.* [39] nous comparons la répartition spatiale de l'énergie cinétique  $ec_r$  avec la répartition spatiale des valeurs négatives du travail du second ordre  $d^2w^{ro}$  attribué aux rouleaux (cf. Eq. 5.1). Ces répartitions sont montrées sur la Figure 5.6. Dans les cas où seule l'avalanche large est en cours (Fig. 5.6-a, -b, -e, le cas -d est particulier et sera traité dans la conclusion de cette section) la répartition de l'énergie cinétique révèle qu'un bloc de grains aval est en mouvement par rapport au bloc amont en forme de coin qui est à peu près fixe. Dans ces cas les valeurs négatives de  $d^2w^{ro}$  se situent grossièrement dans une zone à l'interface entre le bloc en mouvement et le bloc fixe. Les valeurs négatives de  $d^2w^{ro}$  semblent donc ici corrélées avec la zone de rupture à l'interface des deux blocs. Dans le cas où une avalanche superficielle est en cours (Fig. 5.6-c), les valeurs les plus importantes d'énergie cinétique sont situées dans la zone de cette avalanche superficielle et sont corrélées spatialement avec des valeurs négatives de  $d^2w^{ro}$ . D'autres valeurs négatives de  $d^2w^{ro}$  sont également trouvées plus en amont. Bien que l'avalanche large ne soit pas visible sur la carte de l'énergie cinétique montrée ici, ces valeurs négatives de  $d^2w^{ro}$  sont corrélées spatialement avec l'interface entre le bloc aval en mouvement et le bloc amont fixe.

### 5.2.3.2 Travail du second ordre attribué aux contacts

les valeurs du travail du second ordre attribuées aux contacts ( $d^2w^{ct}$ ) ont été approximées pour l'analyse de ce cas d'avalanche de grains qui ne constitue qu'une étude préalable. Le code SDEC fournit les valeurs des forces de contact exprimées dans un repère global  $\mathfrak{R}$ . Par conséquent, nous avons calculé les incréments des forces de contact et des déplacements relatifs par rapport au repère  $\mathfrak{R}$  même si le procédé n'est très rigoureux:

$$d^2w^{ct} \simeq d\vec{F} \cdot d\vec{u}, \quad (5.5)$$

où  $d\vec{F}$  est l'incrément de la force de contact du grain  $g1$  sur le grain  $g2$  et  $d\vec{u}$  l'incrément de déplacement relatif du grain  $g1$  par rapport au grain  $g2$  au point de contact  $C$ .  $d\vec{u}$  est calculé de la façon suivante:

$$d\vec{u} = (d\vec{x}_{g1} + d\vec{\omega}_{g1} \wedge \overrightarrow{G_{g1}C}) - (d\vec{x}_{g2} + d\vec{\omega}_{g2} \wedge \overrightarrow{G_{g2}C}), \quad (5.6)$$

avec  $\vec{x}$  et  $\vec{\omega}$  respectivement les vecteurs position et rotation d'un grain sphérique de centre  $G$  (cf. Fig 5.4).

La Figure 5.7 montre une comparaison entre la répartition spatiale de l'énergie cinétique et la répartition des valeurs négatives de  $d^2w^{ct}$ . En ce qui concerne l'avalanche large, de manière semblable aux valeurs négatives de  $d^2w^{ro}$ , les valeurs négatives de  $d^2w^{ct}$  se situent dans une zone intermédiaire entre le bloc aval en mouvement et le coin amont fixe (Fig. 5.7-a, -b, -e). Lorsqu'une avalanche superficielle est en cours (Fig. 5.7-c) la majorité des valeurs négatives de  $d^2w^{ct}$  se situent toujours à l'interface entre le bloc en mouvement (bien que celui-ci ne soit pas visible sur la représentation) et le bloc fixe. Toutefois, il n'y a pas de corrélation spatiale entre les bouffées d'énergie cinétique dues à l'avalanche superficielle et les valeurs négatives de  $d^2w^{ct}$ . Les grains en surface inclus dans cette avalanche ont tendance à "sauter" d'une position à une autre, par conséquent les contacts dans lesquels ils sont impliqués peuvent ne pas perdurer pendant un incrément sur lequel sont calculées les valeurs de  $d^2w^{ct}$ . Dans ce cas il ne sont pas pris en compte pour le calcul de  $d^2w^{ct}$  ce qui peut expliquer l'absence de valeurs négatives de  $d^2w^{ct}$  au voisinage de l'avalanche superficielle pour l'incrément présenté. Le cas particulier de la Figure 5.7-d sera traité dans la conclusion.

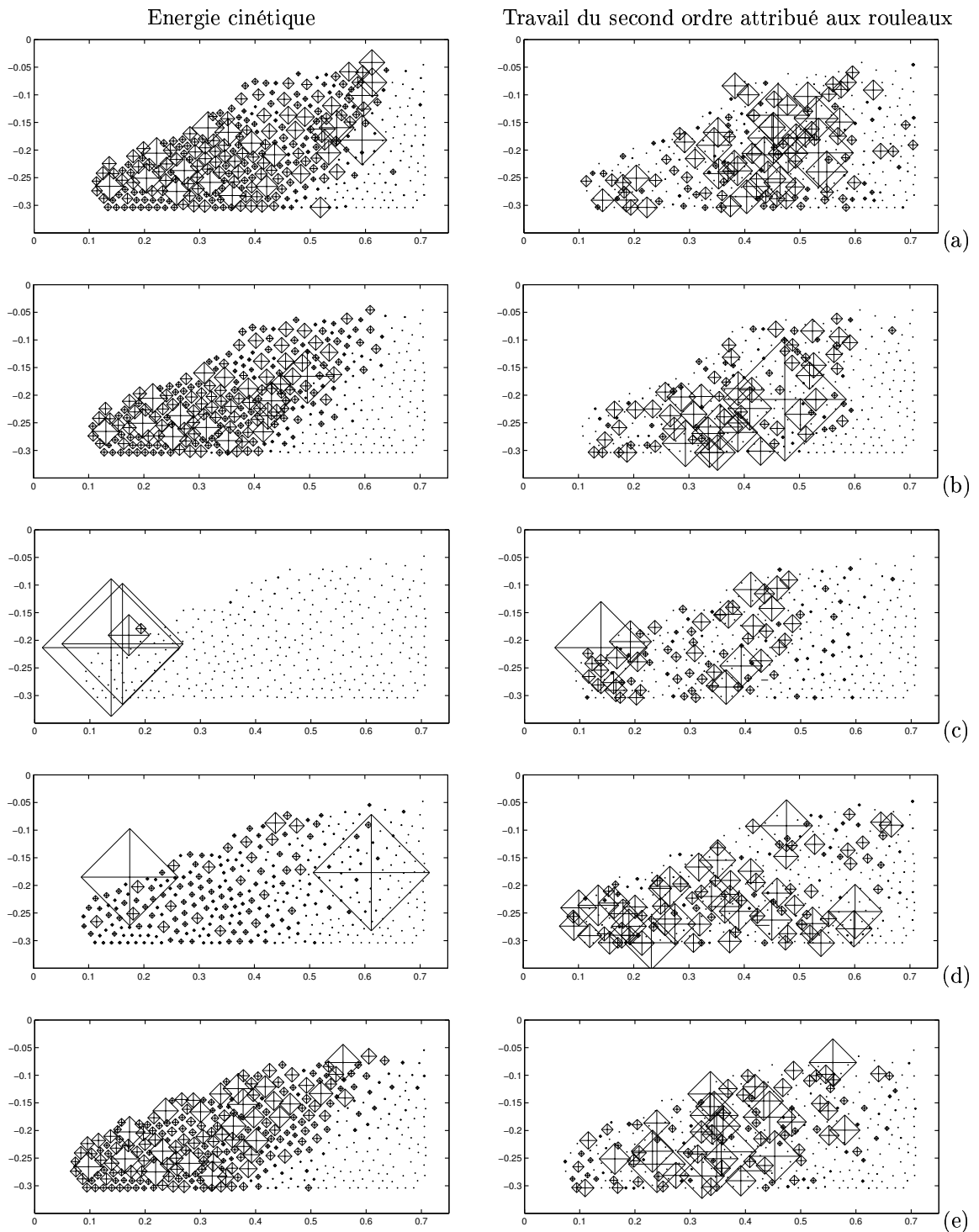


FIG. 5.6 – Comparaison entre la répartition spatiale de l'énergie cinétique (gauche) et les valeurs négatives du travail du second ordre attribué aux rouleaux  $d^2w^{ro}$  (droite). Déplacement de la paroi: (a) 1.12 cm; (b) 1.68 cm; (c) 3.14 cm; (d) 3.36 cm; (e) 5.04 cm.

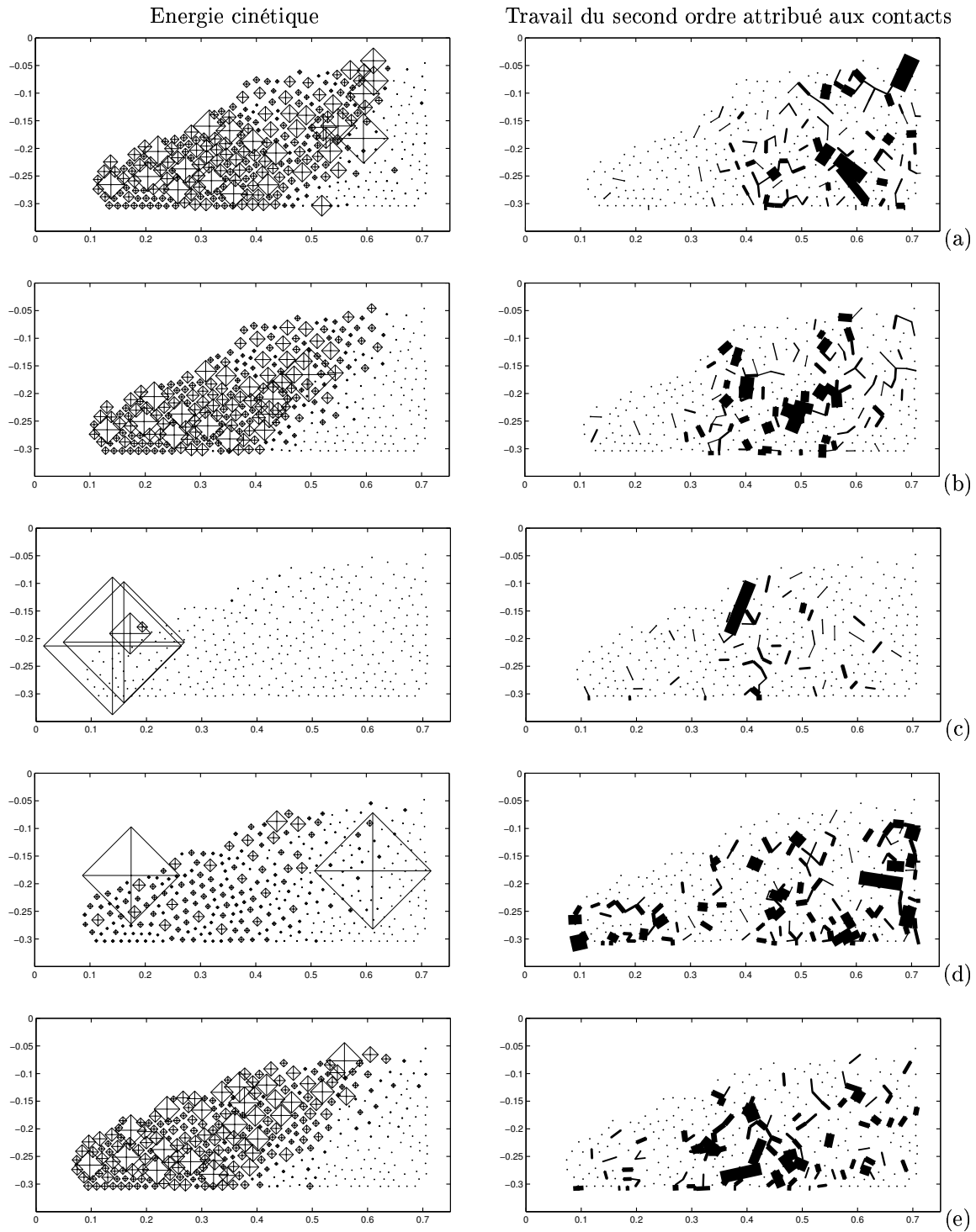


FIG. 5.7 – Comparaison entre la répartition spatiale de l'énergie cinétique (gauche) et les valeurs négatives du travail du second ordre attribué aux contacts  $d^2w^{ct}$  (droite). Déplacement de la paroi: (a) 1.12 cm; (b) 1.68 cm; (c) 3.14 cm; (d) 3.36 cm; (e) 5.04 cm.

## 5.2.3.3 Valeurs globales du travail du second ordre

Nous avons également calculé les valeurs globales de l'énergie cinétique  $E_{c_r} = \sum_{\text{rouleaux}} e_{c_r}$ , du travail du second ordre attribué aux rouleaux  $d^2\overline{W}^{ro} = \sum_{\text{rouleaux}} d^2w^{ro}$  et celui attribué aux contacts  $d^2\overline{W}^{ct} = \sum_{\text{contacts}} d^2w^{ct}$ . L'évolution de chacune des valeurs globales en fonction du déplacement de la paroi est présentée sur la Figure 5.8. Les valeurs absolues de  $d^2\overline{W}^{ro}$  sont plus grandes que celles de  $d^2\overline{W}^{ct}$ , ceci peut être lié au fait que les contacts créés ou perdus pendant un incrément de chargement ne sont pas pris en compte pour le calcul de  $d^2\overline{W}^{ct}$ . De plus, rappelons que le calcul de  $d^2w^{ct}$  est approximatif. Ces points seront corrigés dans l'étude présentée dans la prochaine partie de ce chapitre. En ce qui concerne l'évolution de l'énergie cinétique, les pics les plus importants correspondent à des avalanches superficielles impliquant peu de rouleaux caractérisés par des vitesses élevées. Les valeurs faibles mais non nulles de l'énergie cinétique que l'on observe entre les pics correspondent à l'avalanche large. L'évolution des valeurs globales  $d^2\overline{W}^{ro}$  et  $d^2\overline{W}^{ct}$  manifestent toutes deux de grandes variations de valeurs positives à des valeurs négatives. Par comparaison entre les évolutions de  $E_{c_r}$  d'une part et  $d^2\overline{W}^{ro}$  et  $d^2\overline{W}^{ct}$  d'autre part, on remarque que les pics les plus importants de  $E_{c_r}$  sont corrélés par rapport au paramètre de chargement avec les plus grandes valeurs négatives de  $d^2\overline{W}^{ro}$  et  $d^2\overline{W}^{ct}$ .

Suite à cette analyse plutôt sommaire, il est possible de conjecturer qu'un lien entre les valeurs négatives du travail du second ordre attribué aux contacts et les avalanches de grains existe, comme cela a été envisagé par Laouafa *et al.* [74] et Darve *et al.* [39] au sujet du travail du second ordre attribué aux grains. Ainsi,  $d^2w^{ct}$  pourrait être vu comme un indicateur de zone instable et  $d^2\overline{W}^{ct}$  comme un indicateur de valeurs critiques du paramètre de chargement. En supposant que  $d^2w^{ct}$  ou  $d^2w^{ro}$  soit effectivement des indicateurs de zones instables on peut donner une explication au sujet des Figures 5.6-d et 5.7-d. Les valeurs négatives de  $d^2w^{ct}$  ou  $d^2w^{ro}$  occupent une zone plus importante que dans les autres cas ce qui signifierait une rupture de l'ensemble de l'empilement. Cette explication est bien sûr à prendre avec le maximum de réserves.



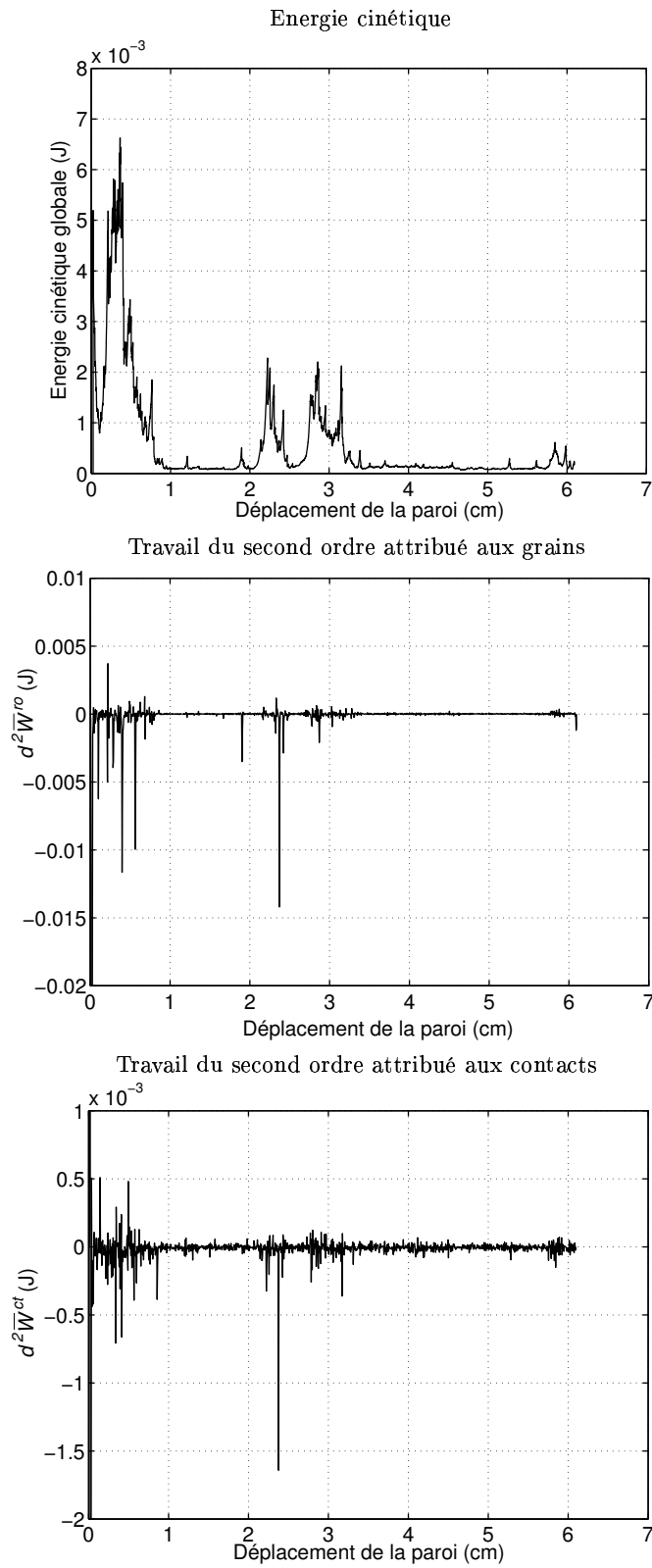


FIG. 5.8 – Comparaison entre l'évolution de l'énergie cinétique globale et le travail du second ordre global attribué aux grains et aux contacts en fonction du paramètre de chargement.

## 5.3 Travail du second ordre macroscopique et travail du second ordre global aux contacts

Dans la première partie de ce chapitre nous avons proposé de considérer chaque contact d'un assemblage granulaire comme un corps à part entière. Nous avons attribué à ce corps un travail du second ordre (qui n'est pas à priori celui classiquement défini dans le cadre des milieux continus) sous la forme de la grandeur  $d^2w^{ct}$ . Puisque le travail du second ordre attribué à un contact est défini par analogie au travail du second ordre classique ( $d^2W = d\sigma : d\varepsilon$ ) et que le comportement d'un assemblage granulaire dépend du comportement de chacun de ses contacts, on peut se demander s'il existe un lien entre  $d^2W$  et  $d^2w^{ct}$ . Un autre point de vue peut être adopté en se demandant quelle est l'origine microscopique (à l'échelle des contacts) du travail du second ordre  $d^2W$ . C'est d'ailleurs cette dernière interrogation qui nous a principalement motivés.

Le traitement de ce problème a été traité parallèlement suivant deux approches: une approche numérique avec la MED et une approche analytique. Nous développons dans la section suivante l'approche numérique. L'approche analytique a été effectuée par Nicot *et al.* [91] et Nicot & Darve [89; 88]. Il s'agit d'un travail conséquent dont nous ne donnerons que les principaux résultats dans une section ultérieure.

### 5.3.1 Approche numérique

#### Remarque sur les notations

Afin de faciliter les analyses qui vont suivre et d'éviter les confusions nous appelons le travail du second ordre défini dans le cadre des milieux continus *travail du second ordre macroscopique* et nous conservons la notation classique  $d^2W$ . Le travail du second ordre attribué à un contact est appelé *travail du second ordre au contact*, il sera noté  $d^2w^{ct}$ . Nous définissons le travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$ :

$$d^2W^{ct} = \frac{1}{V} \sum_{contacts} d^2w^{ct}, \quad (5.7)$$

où  $V$  est le volume de l'assemblage granulaire.  $d^2W^{ct}$  et  $d^2W$  sont de même dimension ce qui permet leur comparaison.

L'approche numérique est basée sur les simulations de recherches directionnelles présentées dans le Chapitre 3 avec le modèle discret décrit dans le Chapitre 2. Nous comparons pour les différentes directions de chargement les valeurs du travail du second ordre macroscopique  $d^2W$ , déterminées à partir des tenseurs de contrainte et de déformation calculés aux frontières de l'échantillon, et les valeurs du travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$ . Les résultats présentés ci-après ont été obtenus à partir de l'échantillon numérique  $E1$ .

#### 5.3.1.1 Calcul du travail du second ordre au contact

Pour cette étude et pour tous les résultats qui seront présentés dans la suite de ce chapitre, le travail du second ordre au contact  $d^2w^{ct}$  est calculé rigoureusement suivant l'expression (5.4)

(p. 143) que nous rappelons:

$$d^2w^{ct} = \hat{d}\vec{F} \cdot \hat{d}\vec{u}.$$

Les incréments  $\hat{d}\vec{F}$  et  $\hat{d}\vec{u}$  sont donc calculé par rapport au repère local  $\hat{\mathfrak{R}}$  lié au contact et défini par  $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$ .

Le travail du second ordre au contact  $d^2w^{ct}$  peut se décomposer en un terme correspondant à la direction normale au contact  $d^2w_n^{ct}$  et un terme correspondant au plan tangent au contact  $d^2w_t^{ct}$ :

$$d^2w^{ct} = d^2w_n^{ct} + d^2w_t^{ct}, \quad (5.8)$$

avec:

$$d^2w_n^{ct} = \hat{d}\vec{F}_n \cdot \hat{d}\vec{u}_n, \quad (5.9)$$

où  $\hat{d}\vec{F}_n$  et  $\hat{d}\vec{u}_n$  sont respectivement l'incrément de la force de contact et l'incrément du déplacement relatif dans la direction normale au contact,

et:

$$d^2w_t^{ct} = \hat{d}\vec{F}_t \cdot \hat{d}\vec{u}_t, \quad (5.10)$$

où  $\hat{d}\vec{F}_t$  et  $\hat{d}\vec{u}_t$  sont respectivement l'incrément de la force de contact et l'incrément du déplacement relatif dans le plan tangent au contact.

Par ailleurs, au cours de la simulation de l'application d'un chargement, il y a en général une réorganisation, même faible, de la micro-structure. Ainsi, certains contacts existant avant l'application du chargement s'ouvrent (i.e. sont perdus) au cours de l'application du chargement. D'autres, au contraire, n'existaient pas avant l'application du chargement mais sont présents après: ils sont gagnés. Finalement certains sont gagnés et perdus au cours de l'application du chargement. Cependant, lors de la simulation d'une recherche directionnelle dans une direction donnée, une très grande majorité des contacts (plus de 97%) sont permanents: ils perdurent du début jusqu'à la fin de l'application du chargement. Le calcul de  $d^2w^{ct}$  est effectué pour chacune des catégories de contacts suivants: les contacts permanents, les contacts perdus en cours de chargement, les contacts gagnés en cours de chargement. Une valeur nulle de  $d^2w^{ct}$  est attribuée aux contacts gagnés et perdus au cours du chargement. Le calcul de  $d^2w^{ct}$ , comme celui du travail du second ordre macroscopique, nécessite de considérer deux états du contact que nous qualifions d'état initial et d'état final. Pour un contact permanent, l'état initial correspond à l'état du contact avant l'application du chargement en contrainte dans une direction donnée, l'état final correspond à l'état du contact après application du chargement en contrainte. Pour un contact perdu, l'état initial correspond à l'état du contact avant application du chargement et l'état final à l'état du contact lors de son ouverture (la force de contact est alors nulle). Pour un contact gagné, l'état initial correspond à l'état du contact lors de sa création (la force de contact est alors nulle) et l'état final à l'état du contact après l'application du chargement.

Pratiquement, la composante normale  $d^2w_n^{ct}$  du travail du second ordre au contact est calculé de la manière suivante:

$$d^2w_n^{ct} = (f_n^{final} - f_n^{init}) (\delta_c^{final} - \delta_c^{init}), \quad (5.11)$$

avec  $f_n^{init}$  et  $f_n^{final}$  les composantes suivant  $\vec{n}$  de la force de contact  $\vec{F}$  respectivement dans l'état initial et l'état final du contact;  $\delta_c^{init}$  et  $\delta_c^{final}$  les interpénétrations au contact respectivement dans l'état initial et final du contact.

Le calcul pratique de la composante tangentielle  $d^2w_t^{ct}$  est le suivant:

$$d^2w_t^{ct} = (f_{t1}^{final} - f_{t1}^{init}) du_{t1} + (f_{t2}^{final} - f_{t2}^{init}) du_{t2}, \quad (5.12)$$

où  $f_{t1}$  et  $f_{t2}$  sont les composantes de la force de contact  $\vec{F}$  suivant les axes  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$ ,  $du_{t1}$  et  $du_{t2}$  sont les composantes suivant  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  du déplacement tangentiel relatif au point de contact  $d\vec{u}_t$  entre l'état initial et l'état final. Notons que la composante de  $d\vec{u}_t$  suivant  $\vec{n}$  est nulle. Par ailleurs,  $d\vec{u}_t$  est directement calculé à partir du déplacement tangentiel relatif fourni par le code SDEC à chaque cycle de calcul de la MED.

Du fait que le travail du second ordre au contact  $d^2w^{ct}$  soit décomposé en deux termes, l'un relatif à la direction normale au contact l'autre au plan tangent au contact, il peut en être fait de même avec  $d^2W^{ct}$ :

$$d^2W^{ct} = d^2W_n^{ct} + d^2W_t^{ct}, \quad (5.13)$$

avec:

$$d^2W_n^{ct} = \frac{1}{V} \sum_{contacts} d^2w_n^{ct}, \quad (5.14)$$

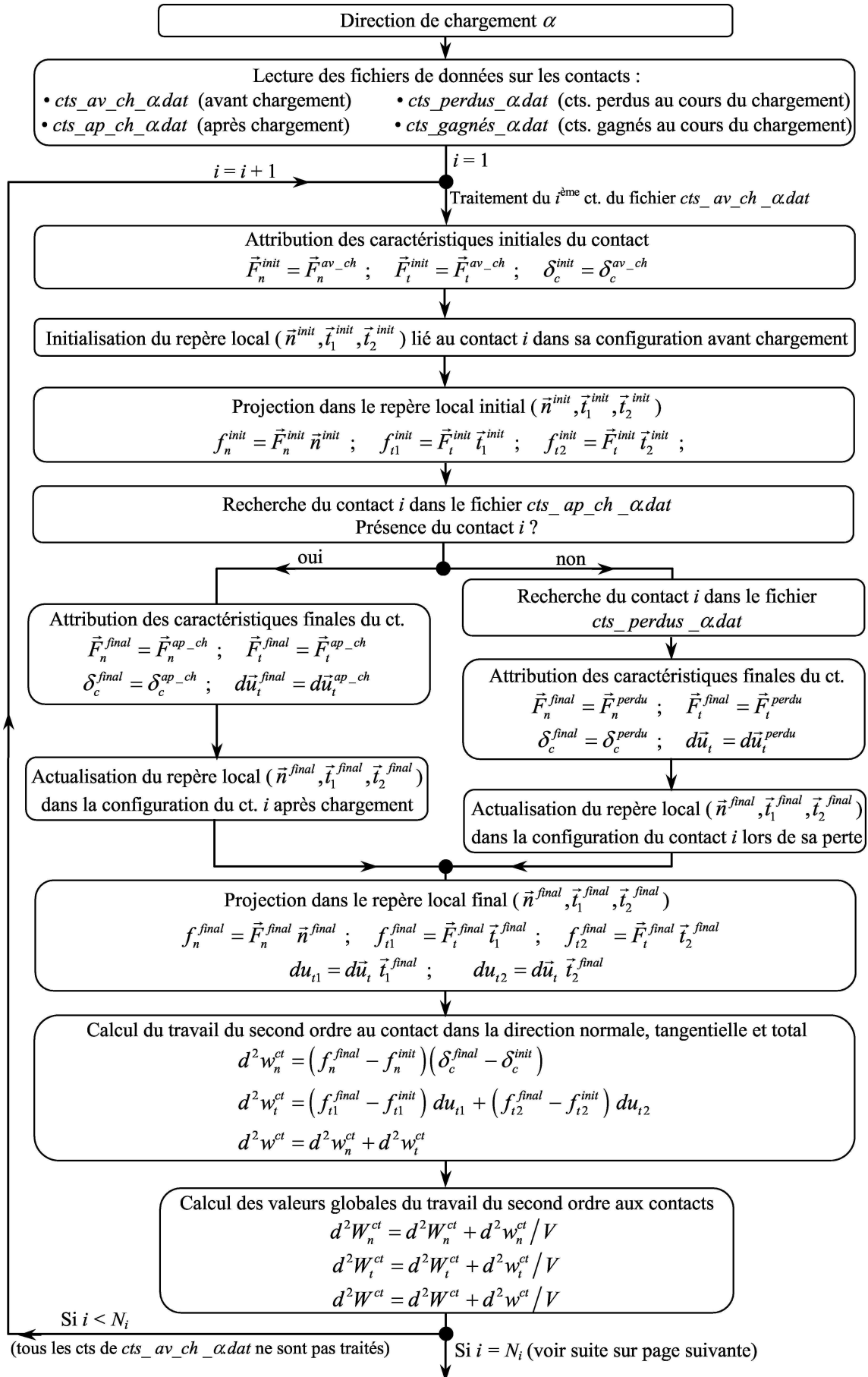
et

$$d^2W_t^{ct} = \frac{1}{V} \sum_{contacts} d^2w_t^{ct}. \quad (5.15)$$

Le travail du second ordre au contact  $d^2w^{ct}$  et sa forme globale  $d^2W^{ct}$  ont été calculés en post-traitement. En effet, la simulation d'une recherche directionnelle (36 directions) est une opération longue, le post-traitement présente l'avantage de pouvoir modifier le traitement des données issues de la simulation sans avoir à renouveler la simulation en elle-même. La Figure 5.9, qui s'étend sur deux pages, présente l'algorithme de calcul de  $d^2w^{ct}$  et  $d^2W^{ct}$  à partir des fichiers de données fournis par le code SDEC.

Donnons quelques précisions sur les notations utilisées dans la présentation de l'algorithme. L'exposant *av\_ch* fait référence à l'état du contact avant l'application du chargement. L'exposant *ap\_ch* fait référence à l'état après application du chargement. L'exposant *perdu* fait référence à l'état du contact lors de sa perte et *gagné* à son état lors de sa création. Les exposants *init* et *final* font références, comme on l'a déjà vu, aux deux états du contact entre lesquels est calculé  $d^2w^{ct}$ . Par exemple, suivant la catégorie de contact considéré l'exposant *init* peut faire référence au même état que l'exposant *av\_ch* ou bien au même état que l'exposant *gagné*.

L'algorithme de calcul du travail du second ordre au contact se divise en deux grandes parties constituées chacune par une boucle. La première partie (ou la première boucle) est représentée sur la première page de la Figure 5.9, la deuxième partie (ou deuxième boucle) apparaît sur la seconde page de la figure. La première boucle permet de traiter les contacts permanents et les contacts perdus alors que la seconde boucle assure le traitement des contacts gagnés.



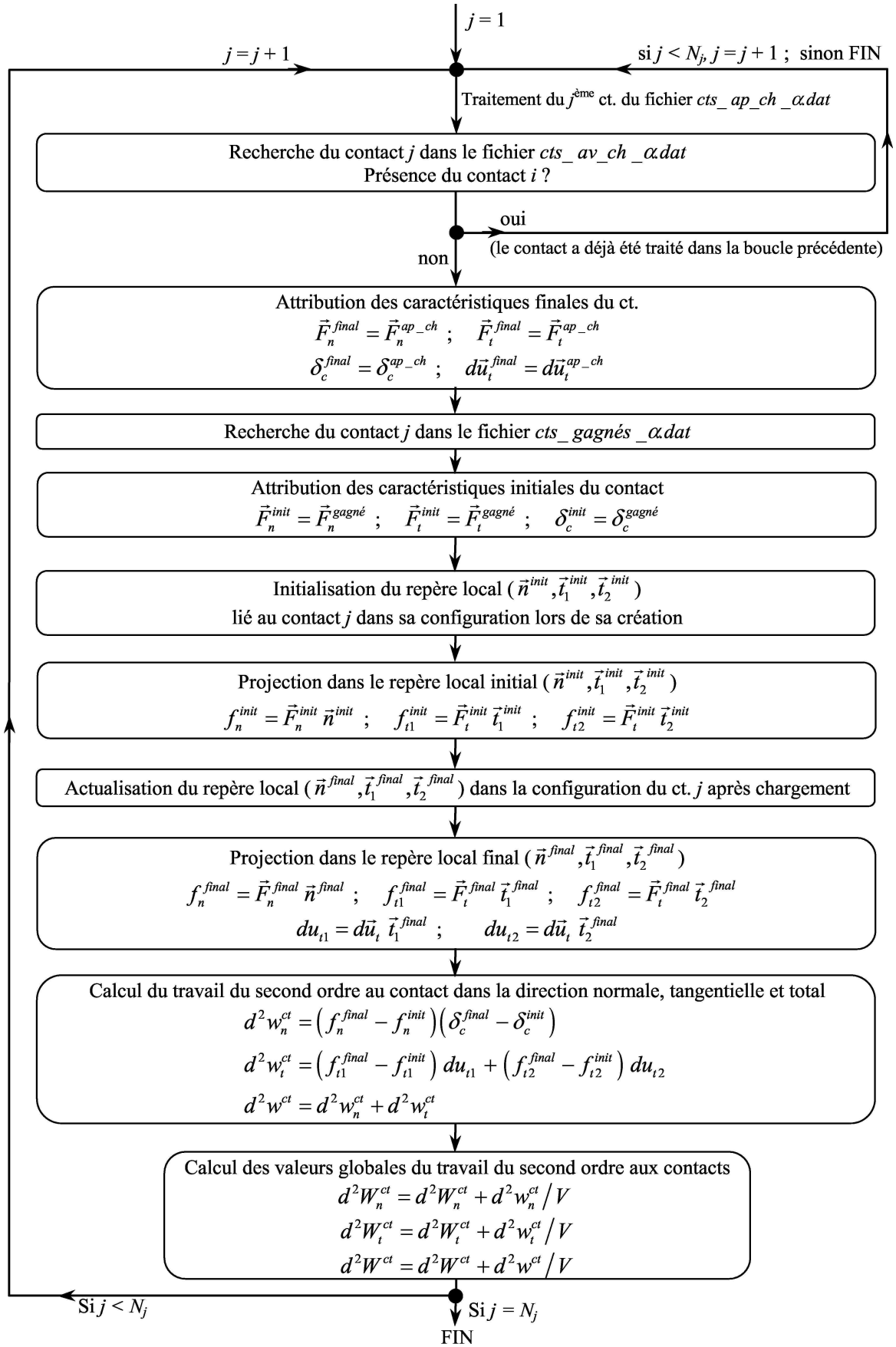


FIG. 5.9 – Algorithme de post-traitement pour le calcul du travail du second ordre aux contacts.

5.3.1.2 Résultats et influence des composantes  $d^2W_n^{ct}$  et  $d^2W_t^{ct}$ 

Nous présentons en premier lieu les résultats concernant la décomposition du travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$  en une composante liée à la direction normale des contacts  $d^2W_n^{ct}$  et l'autre liée à la direction tangentielle  $d^2W_t^{ct}$ . Etant donné que nous nous intéressons à des valeurs non normalisées du travail du second ordre nous préférons ici les représentations cartésiennes aux représentations circulaires utilisées dans le Chapitre 3. La lecture des tracés est ainsi plus aisée.

La Figure 5.10 montre dans un repère cartésien les valeurs de  $d^2W^{ct}$ ,  $d^2W_n^{ct}$  et  $d^2W_t^{ct}$  en fonction de la direction de chargement en contrainte  $\alpha$  pour un état de contrainte-déformation isotrope ( $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.0$ ). Quelque soit la direction de chargement  $\alpha$ ,  $d^2W_n^{ct}$  et  $d^2W_t^{ct}$  sont positifs, et par conséquent  $d^2W^{ct}$  également. La loi d'interaction utilisée dans la direction normale au contact est uniquement élastique, par conséquent  $d^2W_n^{ct}$  ne peut être que positif (voire nul si aucun contact ne travaille dans la direction normale). Nous avons vu que pour un état isotrope le comportement du modèle discret est essentiellement élastique (Sect. 3.2.2.1, p. 78). Seul un très faible nombre de contacts glisse, les autres travaillent dans la direction tangentielle de manière élastique, ce qui explique les valeurs positives de  $d^2W_t^{ct}$ .

Sur la Figure 5.11 sont présentées les valeurs  $d^2W^{ct}$ ,  $d^2W_n^{ct}$  et  $d^2W_t^{ct}$  pour un confinement  $\sigma_3 = 200$  kPa et pour  $\eta = 0.31, 0.77$  et  $0.81$ . Pour chacun des trois états de contrainte, les directions de chargement peuvent être séparées en deux ensembles complémentaires. Considérons par exemple l'état de contrainte correspondant à  $\eta = 0.31$ . Pour  $\alpha \in [80^\circ; 200^\circ]$  les valeurs absolues de  $d^2W^{ct}$ ,  $d^2W_n^{ct}$  et  $d^2W_t^{ct}$  sont importantes par rapport aux valeurs de ces mêmes grandeurs pour  $\alpha \in [0^\circ; 70^\circ] \cup [210^\circ; 360^\circ]$ . Dans le dernier ensemble les valeurs de  $d^2W^{ct}$ ,  $d^2W_n^{ct}$  et  $d^2W_t^{ct}$  sont faibles mais non nulles bien que la figure puisse le laisser penser. Les directions pour lesquels les valeurs absolues du travail du second ordre global aux contacts sont importantes correspondent aux directions engendrant des déformations plastiques en régime dynamique (cf. 3.2.3, p. 86), soit les directions pour lesquelles les déformations (à l'échelle de l'échantillon numérique) sont les plus importantes. C'est également dans ce dernier cas que les

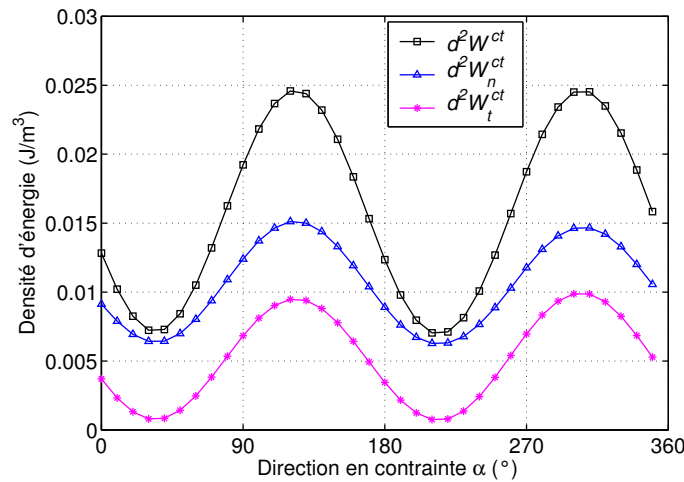


FIG. 5.10 – Travail du second ordre global aux contacts: composante normale  $d^2W_n^{ct}$ , tangentielle  $d^2W_t^{ct}$ , et valeur totale  $d^2W^{ct}$ , pour un état de contrainte déformation isotrope ( $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.0$ ).

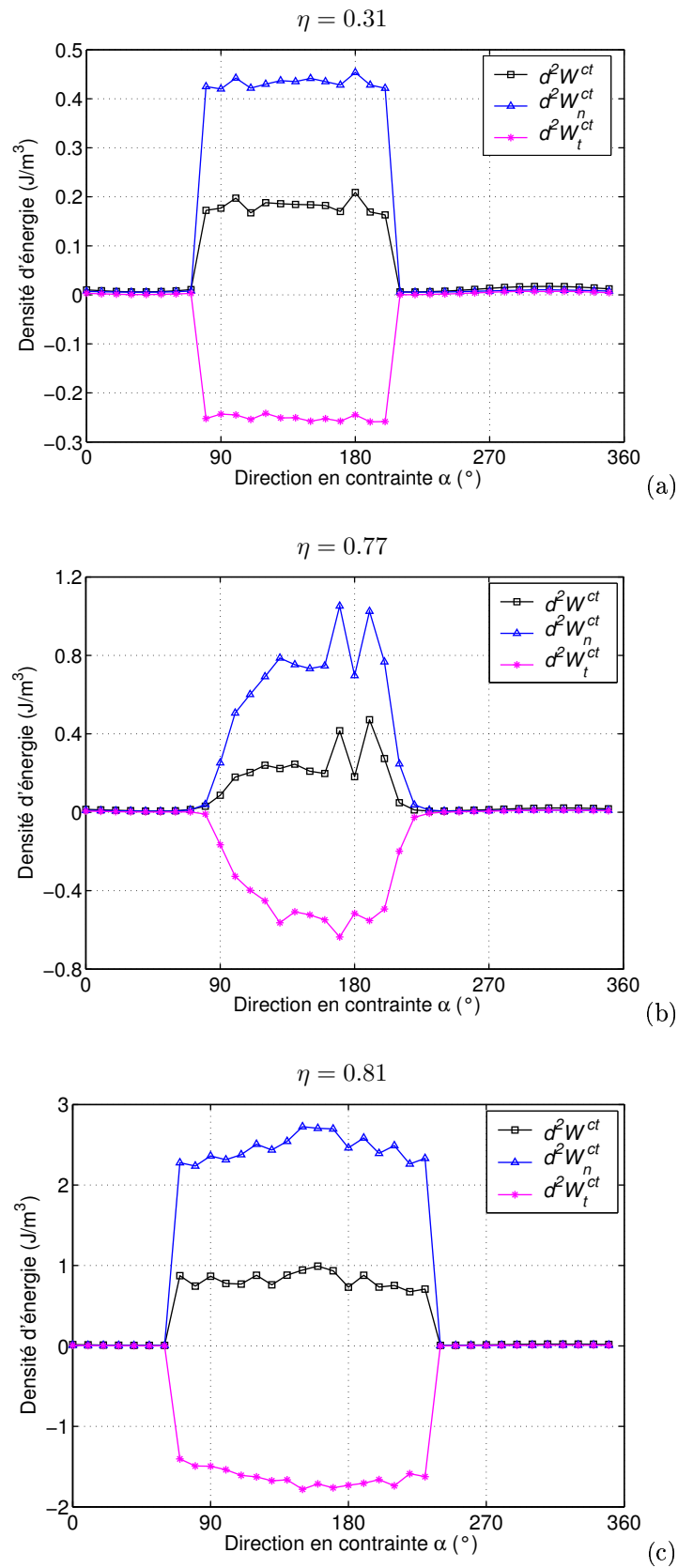


FIG. 5.11 – Travail du second ordre global aux contacts: composante normale  $d^2W_n^{ct}$ , tangentielle  $d^2W_t^{ct}$ , et valeur totale  $d^2W^{ct}$ , pour trois états de contrainte déviatoire ( $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31; 0.77; 0.81$ ).



déplacements relatifs aux contacts sont les plus importants et que l'on peut donc s'attendre aux valeurs (en module) les plus importantes de  $d^2W^{ct}$ ,  $d^2W_n^{ct}$  et  $d^2W_t^{ct}$ .

Nous remarquons ici encore que la composante normale du travail du second ordre global aux contacts  $d^2W_n^{ct}$  est toujours positive quelque soit la valeur de  $\alpha$ . Concernant la composante liée à la direction tangentielle  $d^2W_t^{ct}$ , celle-ci est toujours négative pour des directions de chargement conduisant à des déformations plastiques en régime dynamique (comparer les Figs. 5.11-a et -b respectivement avec les Fig. 3.14-a, p. 87 et 3.15-a, p. 88). Elle l'est quelques fois pour des déformations plastiques en régime quasi-statique. A l'inverse  $d^2W_t^{ct}$  est toujours positif lors de déformations élastiques. Finalement nous constatons que le travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$  est toujours positif quelque soit l'état de contrainte. Nous n'avons d'ailleurs jamais trouvé au cours de ce travail de thèse de valeurs négatives de  $d^2W^{ct}$  même si un nombre significatif de contacts ont individuellement une valeur de  $d^2w^{ct}$  négative (entre 6% et 7% lors de déformations plastiques en régime dynamique pour l'état de contrainte  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ ).

### 5.3.1.3 Comparaison entre le travail du second ordre global aux contacts et du travail du second ordre macroscopique

Les états de contrainte considérés sont identiques à ceux de la section précédente.

La comparaison entre le travail du second ordre macroscopique  $d^2W$  et le travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$  pour l'état isotrope ( $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.0$ ) est montrée sur la Figure 5.12. Dans ce cas où les déformations sont essentiellement élastiques quelque soit la direction de chargement  $\alpha$ , on établit numériquement que  $d^2W^{ct} = d^2W$ .

La Figure 5.13 présente la comparaison pour les états de contraintes caractérisés par  $\sigma_3 = 200$  kPa et  $\eta = 0.31, 0.77, 0.81$ . D'une manière générale on remarque que les valeurs de  $d^2W^{ct}$  sont égales aux valeurs de  $d^2W$  uniquement pour certaines directions de chargement. Les Figures 5.13-a et -b sont à comparer respectivement avec les Figures 3.14-a (p. 87) et 3.15-a (p. 88) qui montrent pour les mêmes états de contrainte la norme des déformations plastiques

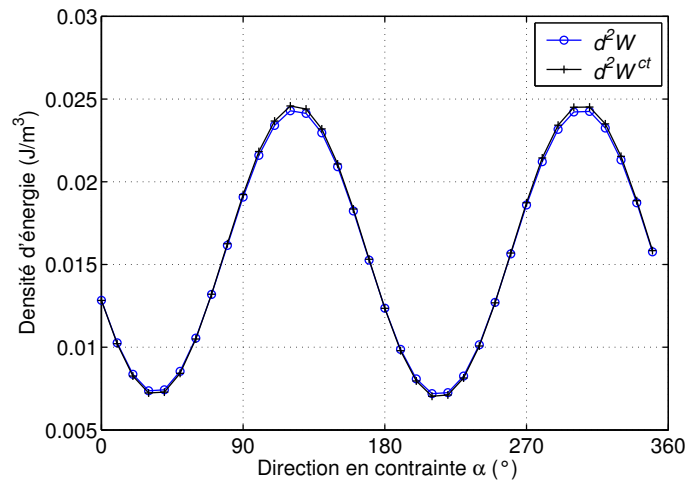


FIG. 5.12 – Comparaison entre le travail du second ordre macroscopique et le travail du second ordre global aux contacts pour un état isotrope ( $\sigma_3 = 100$  kPa,  $\eta = 0.0$ ).

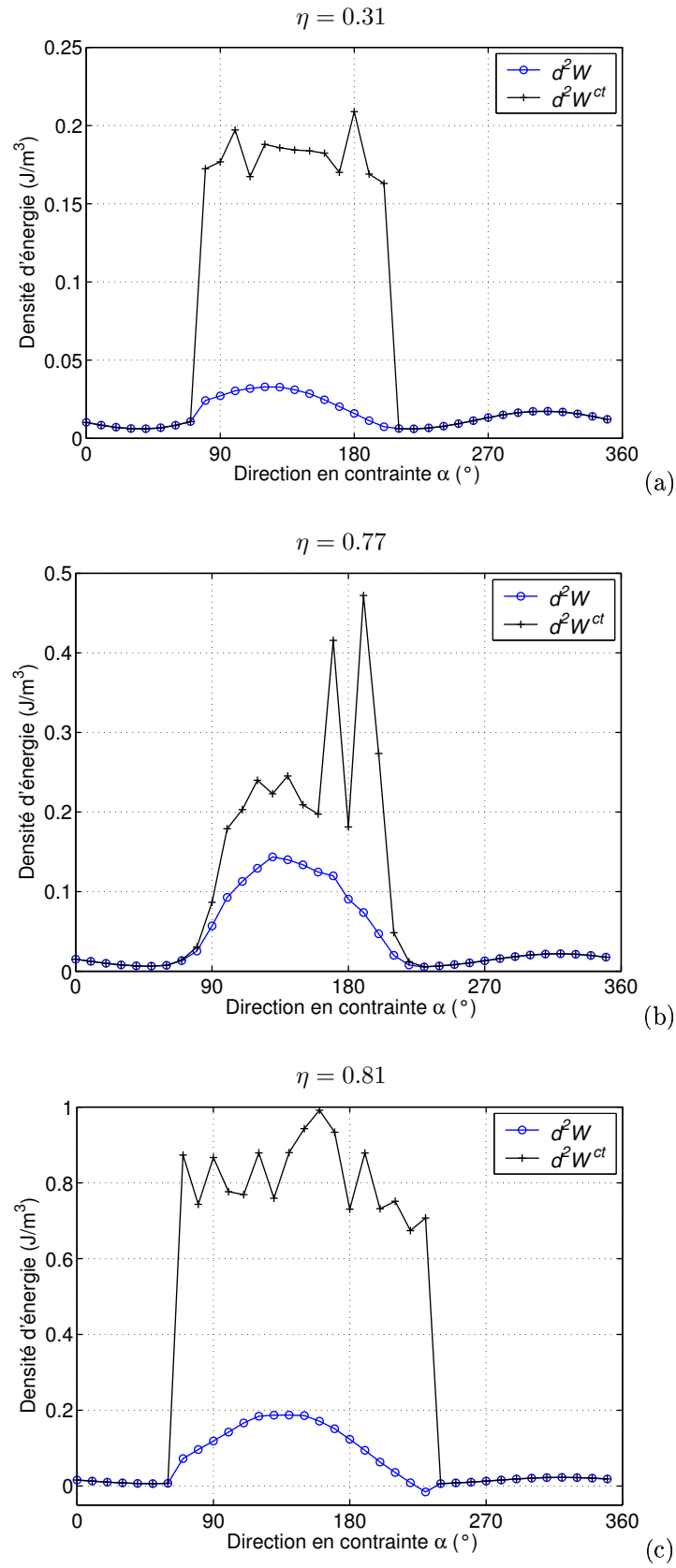


FIG. 5.13 – Comparaison entre le travail du second ordre macroscopique et le travail du second ordre global aux contacts pour des états de contrainte déviatoires ( $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31; 0.77; 0.81$ ).

et l'énergie cinétique maximale en fonction de la direction de chargement  $\alpha$ . On remarque alors que  $d^2W^{ct}$  n'est plus égal numériquement à  $d^2W$  dès lors que le maximum de l'énergie cinétique ne tend plus vers 0. C'est-à-dire dès lors que la sollicitation conduit à des déformations plastiques en régime dynamique. A l'inverse lorsque les déformations sont élastiques ou plastiques en régime quasi-statique on établit numériquement que  $d^2W^{ct} = d^2W$ . Notons que les valeurs négatives du travail du second ordre macroscopique  $d^2W$  ont toujours été trouvées lors de déformations plastiques en régime dynamique. Comme l'illustre la Figure 5.13-c nous n'avons pas trouvé d'égalité entre  $d^2W^{ct}$  et  $d^2W$  lorsque  $d^2W$  est négatif. Nous avons d'ailleurs mentionné précédemment que l'on a toujours trouvé des valeurs positives de  $d^2W^{ct}$ .

Intéressons nous à une direction de chargement donnée pour laquelle  $d^2W^{ct} > d^2W$ , par exemple la direction  $\alpha = 130^\circ$  de l'état de contrainte  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31$ . Nous avons calculé pour ce chargement l'évolution du travail du second ordre global au contact  $d^2W^{ct}$  au cours de la simulation. Pour ce faire on s'appuie sur le principe du calcul de  $d^2W^{ct}$  exposé dans la Section 5.3.1.1 (p. 151), à ceci près que l'algorithme présenté sur la Figure 5.9 (p. 155) est exécuté non pas directement sur la totalité de l'incrément de chargement mais successivement sur des incréments de plus en plus grands dont l'origine correspond toujours à l'état avant chargement et l'extrémité à un état intermédiaire compris entre l'état avant chargement et l'état après chargement. Le dernier des cent états intermédiaires considérés est confondu avec l'état après chargement. A partir de l'évolution de l'état de contrainte et de déformation à la frontière de l'échantillon nous calculons également l'évolution du travail du second ordre macroscopique  $d^2W$ . La Figure 5.14 montre l'évolution de l'expression  $d^2W^{ct} - d^2W$  au cours de la simulation de l'application du chargement. L'évolution de l'énergie cinétique est également représentée. Tant que la réponse de l'échantillon numérique à la sollicitation est quasi-statique la différence entre  $d^2W^{ct}$  et  $d^2W$  reste nulle. L'accroissement soudain de la différence  $d^2W^{ct} - d^2W$  est corrélée avec l'accroissement soudain de l'énergie cinétique. Dès que l'énergie cinétique tend à nouveau vers une valeur nulle la valeur de  $d^2W^{ct} - d^2W$  reste constante. Ces observations mettent clairement en relief que dans le cas des simulations discrètes pratiquées ici, le travail du second ordre global aux contacts n'est plus directement lié au travail du second ordre macroscopique dès lors que des événements dynamiques se produisent.

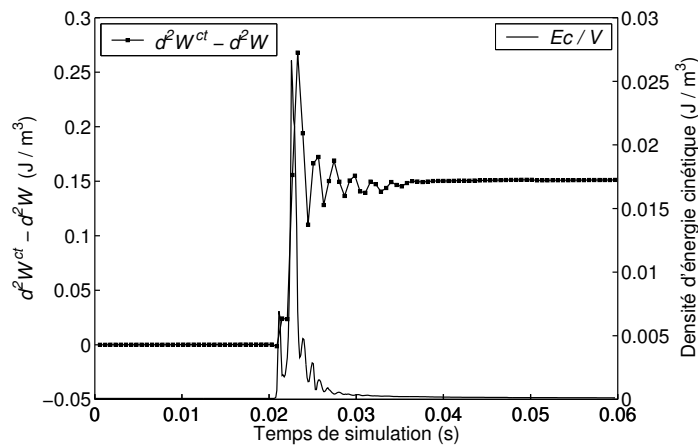


FIG. 5.14 – Comparaison entre l'évolution de la valeur de l'expression  $d^2W^{ct} - d^2W$  et de l'énergie cinétique au cours de la simulation du chargement dans une direction donnée ( $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31$ ,  $\alpha = 130^\circ$ ).

## 5.3.1.4 Bilan énergétique

Notons que la différence constatée entre  $d^2W^{ct}$  et  $d^2W$  lors d'évènements dynamiques pourrait être lié à un phénomène dissipatif non pris en compte. Pour vérifier ce point nous comparons l'énergie apportée à l'assemblage granulaire que nous appelons énergie externe  $dW$  et l'énergie interne  $dW^{ct}$  liée à la déformation de chacun des contacts de l'assemblage. En toute rigueur l'énergie cinétique serait à prendre en compte dans ce bilan énergétique. Cependant celle-ci est négligeable par rapport à  $dW$  et  $dW^{ct}$ , même lors d'évènements dynamiques.

Nous notons  $k$  le  $k^{\text{ième}}$  cycle de calcul de la MED effectué pour une simulation.  $t_k$  est alors le temps de simulation au cycle  $k$  et  $\Delta t_k$  le pas de temps numérique entre les cycles  $k - 1$  et  $k$ .  $dW$  est donnée par :

$$dW = \sum_{k=2}^{nb \text{ cycles}} \sigma^{t_k - \Delta t_k / 2} : \Delta \epsilon^{t_k}, \quad (5.16)$$

avec  $\sigma^{t_k - \Delta t_k / 2}$  le tenseur de contrainte au temps  $t_k - \Delta t_k / 2$  et  $\Delta \epsilon^{t_k}$  le tenseur d'incrément de déformation entre les temps  $t_k - \Delta t_k$  et  $t_k$ .

$dW^{ct}$  est calculé suivant l'expression ci-dessous :

$$dW^{ct} = \frac{1}{V} \sum_{k=2}^{nb \text{ cycles}} \left[ \sum_{contacts} \left( f_n^{t_k - \Delta t_k / 2} (\delta_c^{t_k} - \delta_c^{t_k - \Delta t_k}) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + f_{t_1}^{t_k - \Delta t_k / 2} \Delta u_{t_1}^{t_k} + f_{t_2}^{t_k - \Delta t_k / 2} \Delta u_{t_2}^{t_k} \right) \right], \quad (5.17)$$

avec :

- $f_n^{t_k - \Delta t_k / 2}$ ,  $f_{t_1}^{t_k - \Delta t_k / 2}$  et  $f_{t_2}^{t_k - \Delta t_k / 2}$  respectivement les composantes de la force de contact suivant  $\vec{n}$ ,  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  au temps  $t_k - \Delta t_k / 2$ ,
- $\delta_c^{t_k - \Delta t_k}$  et  $\delta_c^{t_k}$  les interpénétrations des sphères au point de contact respectivement aux temps  $t_k - \Delta t_k$  et  $t_k$ ,
- $\Delta u_{t_1}^{t_k}$  et  $\Delta u_{t_2}^{t_k}$  les composantes suivant  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  de l'incrément de déplacement tangentiel relatif  $\Delta \vec{u}_t^{t_k}$  entre les temps  $t_k - \Delta t_k$  et  $t_k$  fournit par SDEC.

La Figure 5.15 montre l'évolution de  $dW$  et  $dW^{ct}$  au cours de la simulation à partir de laquelle a été obtenue la Figure 5.14 ( $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31$ ,  $\alpha = 130^\circ$ ). On trouve une variation brutale de l'énergie de déformation peu après 0.02 s qui correspond au réarrangement micro-structurel mis en évidence par le pic d'énergie cinétique visible sur la Figure 5.14. Malgré ce fait les courbes représentant les évolutions de  $dW$  et  $dW^{ct}$  sont confondues. On vérifie donc bien que toute l'énergie fournie à l'assemblage granulaire est consommée par la seule déformation des contacts. A titre d'exemple nous présentons également sur la Figure 5.16 les valeurs de  $dW$  et  $dW^{ct}$  calculées à partir de la simulation des recherches directionnelles respectivement pour  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31$  et  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ . Ici encore nous vérifions numériquement que  $dW = dW^{ct}$ .

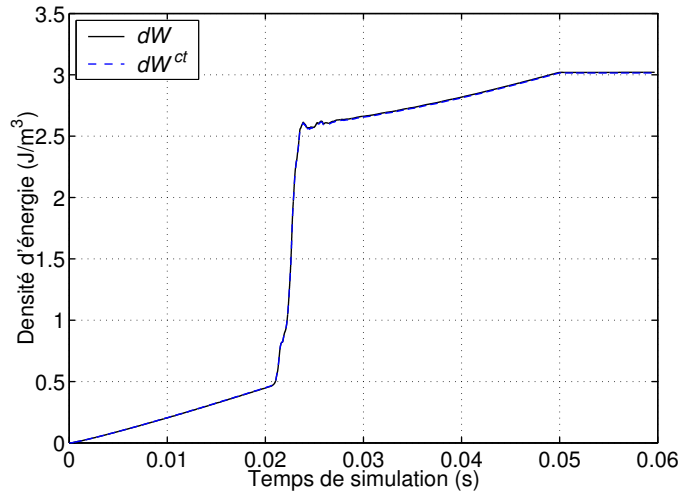


FIG. 5.15 – Comparaison entre les évolutions de l'énergie externe et interne au cours de la simulation du chargement dans une direction donnée ( $\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$ ,  $\eta = 0.31$ ,  $\alpha = 130^\circ$ ).

### 5.3.1.5 Bilan

Nous rappelons ci-dessous les principaux points mis en évidence lors de cette approche numérique.

- Lorsque les déformations (à l'échelle de l'assemblage granulaire) sont élastiques le travail du second ordre global aux contacts est toujours positif et chacune de ses composantes, normale et tangentielle, également. En effet, avec la loi de contact utilisée la composante normale est nécessairement positive et la composante tangentielle ne peut être négative que si des contacts glissent sous certaines conditions (entre autre: descente du critère de Coulomb). On vérifie numériquement que  $d^2W^{ct} = d^2W$ .
- Pour des déformations plastiques en régime quasi-statique la composante tangentielle du travail du second ordre global aux contacts peut être positive ou négative. Dans tous les cas le travail du second ordre global aux contacts est positif et on vérifie numériquement que  $d^2W^{ct} = d^2W$ .
- Lors de déformations plastiques en régime dynamique la composante tangentielle  $d^2W_t^{ct}$  est toujours négative. Le travail du second ordre aux contacts reste cependant positif. Dans ce dernier cas on ne vérifie plus numériquement l'égalité entre  $d^2W^{ct}$  et  $d^2W$ . L'accroissement de la différence entre ces deux dernières grandeurs est directement corrélé aux phases dynamiques de réarrangement de la micro-structure. Nous excluons que cette différence soit liée à un phénomène dissipatif non pris en compte car nous vérifions numériquement dans tous les cas que  $dW = dW^{ct}$ .

Avant d'avancer une explication vis-à-vis de la non égalité de  $d^2W^{ct}$  et  $d^2W$  pour des déformations plastiques en régime dynamique nous proposons de nous intéresser à l'approche analytique présentée dans la section suivante.

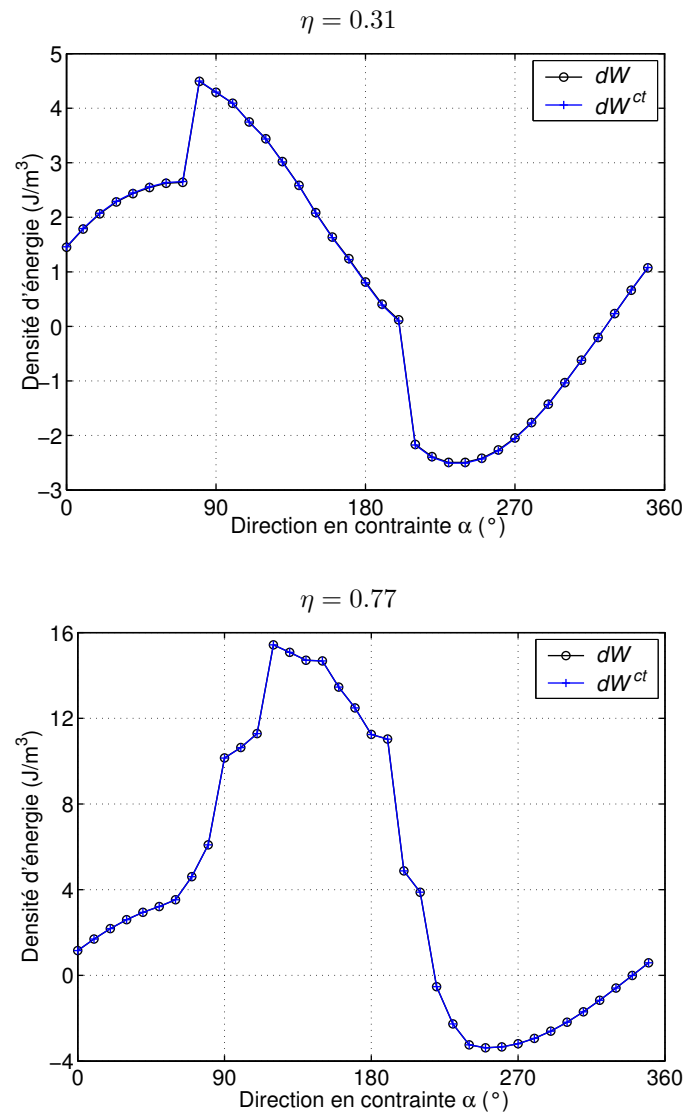


FIG. 5.16 – Comparaison des valeurs de l'énergie externe et interne pour des recherches directionnelles ( $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31; 0.77$ ).

### 5.3.2 Approche analytique

#### 5.3.2.1 Présentation de la relation micro-macro

A la suite de développements analytiques, Nicot & Darve [89] ont exprimé le travail du second ordre sous sa forme semi-Lagrangienne à partir de variables à l'échelle des contacts et des grains.

Rappelons tout d'abord l'expression semi-Lagrangienne du travail du second ordre (Eq. (3.8), p. 93):

$$A = d\pi_{ij} \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j^0},$$

où:

- $\pi_{ij}$  est le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff dont nous rappelons l'expression en fonction du tenseur de contrainte de Cauchy:  $\boldsymbol{\pi} = J \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^t$ ,
- $u_i$  est le champs de déplacement,
- $x_j^0$  réfère au point matériel dans la configuration de référence.

Résumons à présent la démarche suivie par Nicot & Darve [89].

Dans un premier temps les auteurs s'attachent à la description de la zone de contact entre deux grains  $g1$  et  $g2$  de forme convexe. Comme cela a été fait dans l'approche numérique, deux repères sont définis: le premier noté  $\mathfrak{R}$  est un repère global Galiléen. Le deuxième repère noté  $\hat{\mathfrak{R}}$  est un repère local lié au contact considéré défini par  $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$  où  $\vec{n}$  est normal au plan tangent au contact et  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  appartiennent au plan tangent. La dérivée temporelle d'une variable  $\psi$  par rapport au repère  $\mathfrak{R}$  est notée  $d\psi$ . Elle est notée  $\hat{d}\psi$  lorsque la dérivée temporelle est calculée par rapport au repère  $\hat{\mathfrak{R}}$ . La zone de contact entre les deux grains impliqués est considérée comme un corps de volume  $V^{ct}$  à l'intérieur duquel existe un champ de contrainte et de déformation. Sur la base d'une description semi-Lagrangienne le travail du second ordre  $a^{ct}$  associé à ce contact est défini comme:

$$a^{ct} = \int_{V^{ct}} \hat{d}\pi_{ij} \hat{d} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV^{ct}. \quad (5.18)$$

Par application de la formule de Green et en tenant compte du fait que l'état de contrainte-déformation du corps considéré dépend de la force de contact et du déplacement relatif au point de contact des grains, Nicot & Darve montrent que  $a^{ct}$  peut également s'écrire:

$$a^{ct} = \hat{d}\vec{F} \cdot \hat{d}\vec{u}, \quad (5.19)$$

où  $\hat{d}\vec{F}$  est l'incrément de force appliqué par le grain  $g1$  sur le grain  $g2$  et  $\hat{d}\vec{u}$  est l'incrément de déplacement relatif du grain  $g1$  par rapport au grain  $g2$ . Cette dernière expression de  $a^{ct}$  (Eq. (5.19)) est identique à celle que nous avons proposée pour  $d^2w^{ct}$  (Eq. (5.4), p. 143).

Dans un deuxième temps, les auteurs considèrent un assemblage granulaire de volume  $V$  et de frontière  $\Gamma$  constitué de grains sphériques. En considérant que, lors de l'évolution instantanée de l'assemblage granulaire à partir d'un état d'équilibre, l'énergie mécanique apportée au

système est transformée en énergie de déformation et en énergie cinétique, Nicot & Darve démontrent la relation suivante:

$$A = \frac{1}{V} \left[ \sum_{\text{contacts}} (\hat{d}\vec{F} \cdot \hat{d}\vec{u}) - \sum_{g \in \Gamma} (\vec{F}^{ext,g} \cdot d^2\vec{x}^g) \right] \quad (5.20)$$

où  $\vec{F}^{ext,g}$  est une force externe<sup>2</sup> appliquée à un grain  $g$  situé à la frontière  $\Gamma$  de l'assemblage granulaire et  $d^2\vec{x}^g$  l'accélération du même grain  $g$ .

Ainsi, le travail du second ordre d'un assemblage granulaire sous sa forme semi-Lagrangienne  $A$  exprimé à partir de variables tensorielles est égal à la sommation  $A^{ct} = \frac{1}{V} \sum_{\text{contacts}} a^{ct}$  sur l'ensemble des contacts de l'assemblage du travail du second ordre associés aux contact  $a^{ct}$ , moins un terme complémentaire  $\frac{1}{V} \sum_{g \in \Gamma} (\vec{F}^{ext,g} \cdot d^2\vec{x}^g)$  qui prend en compte l'accélération des grains situés à la frontière de l'assemblage.

Revenons sur l'approche numérique présentée précédemment, nous pouvons noter que la comparaison qui a été effectuée diffère de la relation (5.20) obtenue analytiquement sur deux points.

- Premièrement, l'approche analytique prend en compte la forme semi-Lagrangienne du travail du second ordre exprimé à partir de variables tensorielles alors que d'un point de vue numérique nous avons considéré l'expression classique  $d^2W = d\sigma : d\varepsilon$ . Nous avons vu à la Section 3.3.1 (p. 93) que  $d^2W$  sous-estime légèrement les valeurs de  $A$  lorsque les déformations sont importantes. Cependant cette différence entre  $d^2W$  et  $A$  reste petite en regard de la différence entre  $d^2W$  et le travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$  lorsqu'elle existe.
- Deuxièmement, nous n'avons pas pris en compte lors de l'approche numérique le terme complémentaire  $\frac{1}{V} \sum_{g \in \Gamma} (\vec{F}^{ext,g} \cdot d^2\vec{x}^g)$  de la relation (5.20).

Nous allons donc évaluer l'importance de ce terme dans la section suivante.

### 5.3.2.2 Influence du terme complémentaire

Au cours de la simulation, la vitesse de déplacement des parois en contact avec la frontière de l'échantillon numérique est contrôlée soit directement, soit indirectement par l'intermédiaire de l'algorithme d'asservissement en contrainte. On peut supposer que les grains de l'échantillon en contact avec les parois (soit les grains à la frontière de l'échantillon) ont une vitesse et une accélération identiques à celles des parois. Rappelons que les recherches directionnelles sont contrôlées en contrainte. De ce fait, la vitesse et l'accélération des parois et des grains à la frontière de l'échantillon peuvent subir de fortes variations, notamment lors d'évènements dynamiques. Dans ces conditions, il est difficile d'attribuer une valeur d'accélération sur un incrément de chargement aux grains à la frontière de l'échantillon.

---

2. Le terme *externe* signifie ici extérieur à l'assemblage granulaire. Imaginons que l'on isole un amas de grains d'un ensemble plus important, la force de contact exercée par un grain extérieur à l'amas sélectionné sur un grain appartenant à la frontière de l'amas est une force extérieure



A l'inverse, si la recherche directionnelle est contrôlée en déformation, on peut imposer une vitesse constante aux parois, on peut alors supposer que les grains en contact avec les parois ont également une vitesse à peu près constante, soit une accélération nulle. Le terme complémentaire  $\frac{1}{V} \sum_{g \in \Gamma} (\vec{F}^{ext,g} \cdot d^2 \vec{x}^g)$  de la relation (5.20) s'annule alors.

Nous comparons pour deux directions de chargement ( $\alpha = 130^\circ$  et  $150^\circ$ ) correspondant respectivement à deux états de contrainte ( $\sigma_3 = 200$ ,  $\eta = 0.31$  et  $\eta = 0.77$ ), les valeurs des travaux du second ordre macroscopique  $d^2 W$  et global aux contacts  $d^2 W^{ct}$  calculés numériquement pour un contrôle en contrainte et un contrôle en déformation. Pour le contrôle en déformation, sont imposées les valeurs de  $\|d\vec{\varepsilon}\|$  et  $\beta$  trouvées lors de la simulation du chargement en contrainte. Sur les Figures 5.17 et 5.18 sont présentés les chemins de contrainte et de déformation suivis dans le cas du contrôle en contrainte et celui du contrôle en déformation.

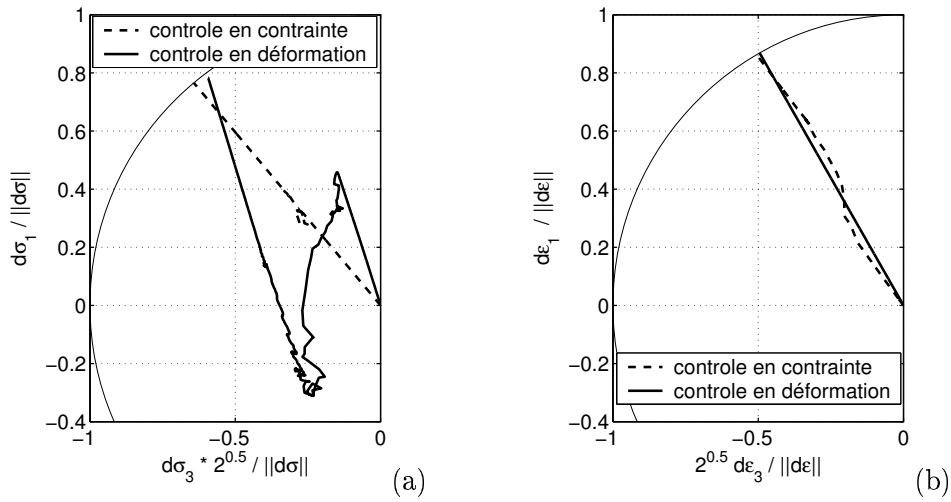


FIG. 5.17 – Chemins de contrainte (a) et de déformations (b) pour une recherche directionnelle pilotée en contrainte ( $\alpha = 130^\circ$ ) puis en déformation à partir de l'état initial:  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31$ .

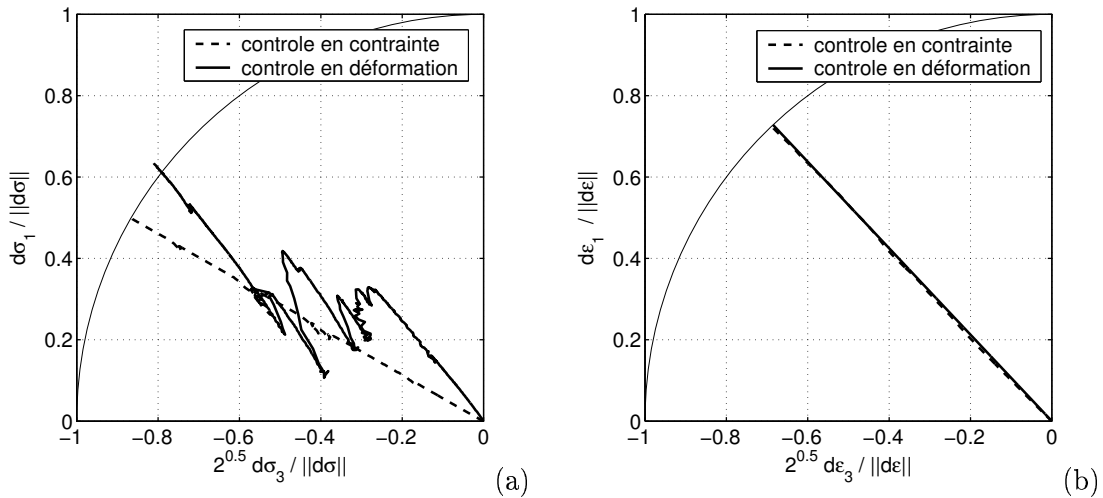


FIG. 5.18 – Chemins de contrainte (a) et de déformations (b) pour une recherche directionnelle pilotée en contrainte ( $\alpha = 150^\circ$ ) puis en déformation à partir de l'état initial:  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ .

Les Figures 5.19 et 5.20 montrent les évolutions de  $d^2W$  et  $d^2W^{ct}$  pour les contrôles en contrainte et en déformation respectivement pour les états de contraintes caractérisés par  $\eta = 0.31$  et  $\eta = 0.77$ . Que ce soit vis-à-vis du travail du second ordre macroscopique  $d^2W$  ou du travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$  les valeurs calculées en fin d'application du chargement sont peu influencées par le mode de contrôle (en contrainte ou en déformation). En effet, tant que la condition limite de Mohr-Coulomb n'est pas atteinte un contrôle de l'échantillon totalement en contrainte (sans combinaison mixte linéaire) et totalement en déformation (sans combinaison mixte linéaire) devrait mettre en évidence un comportement identique du matériau en question, ce qui est à peu près vérifié. Dans tous les cas, on remarque que la différence entre  $d^2W^{ct}$  et  $d^2W$  est presque inchangée en fonction du mode de contrôle. Nous en concluons que le terme complémentaire de la relation (5.20) est négligeable dans le cas des simulations discrètes présentées dans ce mémoire.

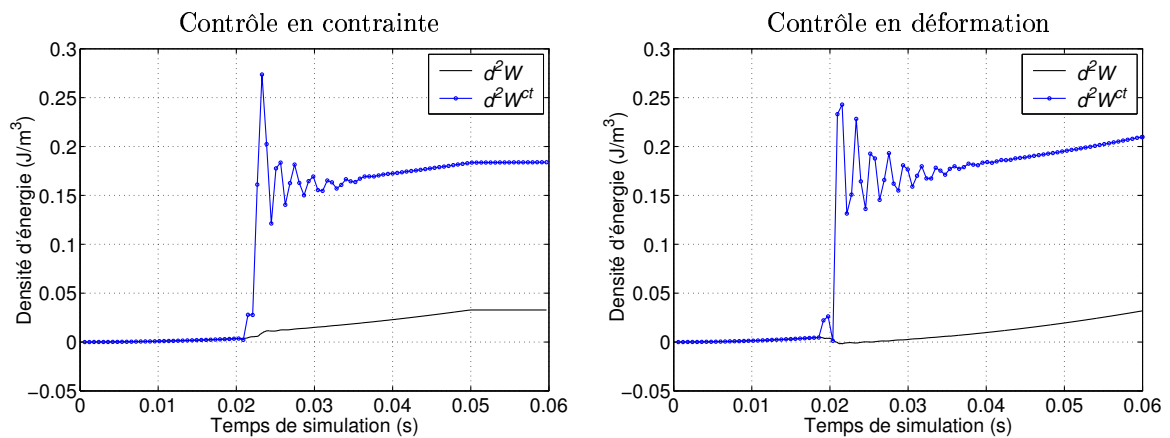


FIG. 5.19 – Comparaison du travail du second ordre macroscopique  $d^2W$  et du travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$  pour une recherche directionnelle pilotée en contrainte ( $\alpha = 130^\circ$ ) (gauche) puis en déformation (droite) à partir de l'état initial:  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.31$ .

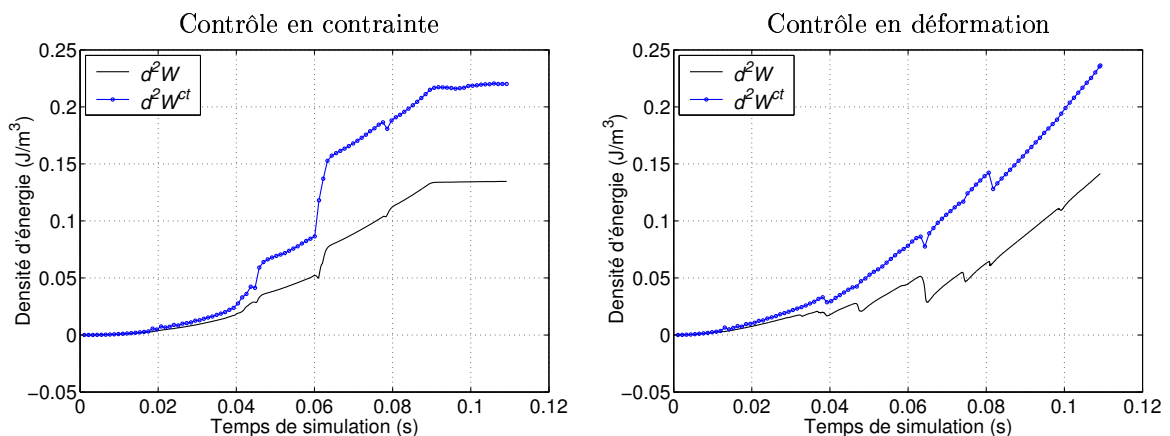


FIG. 5.20 – Comparaison du travail du second ordre macroscopique  $d^2W$  et du travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$  pour une recherche directionnelle pilotée en contrainte ( $\alpha = 150^\circ$ ) (gauche) puis en déformation (droite) à partir de l'état initial:  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$ .

## 5.4 Conclusion

L'approche analytique nous apprend qu'il existe manifestement un lien direct (Eq. (5.20)) entre le travail du second ordre exprimé de manière tensorielle (à l'échelle de l'assemblage granulaire) et le produit  $\hat{d}\vec{F}_c \cdot \hat{d}\vec{u}_c$  que nous nommons travail du second ordre au contact. Cette relation fait apparaître un terme complémentaire  $\frac{1}{V} \sum_{g \in \Gamma} (\vec{F}^{ext,g} \cdot d^2\vec{x}^g)$  que nous ne pouvons pas calculer directement mais que nous estimons négligeable. Pourtant, nous vérifions numériquement la relation (5.20) dans le cas de déformations élastiques et plastiques quasi-statiques mais non dans le cas de déformations plastiques en régime dynamique.

Nous expliquons cette divergence par le fait suivant: le travail du second ordre est une grandeur impulsionnelle valable à un temps initial  $t$  correspondant à un état d'équilibre. C'est d'ailleurs en considérant l'évolution instantanée à  $t$  de l'énergie du système que la relation (5.20) a été établie. D'un point de vue numérique (comme cela serait le cas d'un point de vue expérimental), le travail du second ordre macroscopique et aux contacts sont calculés sur un intervalle de temps fini. Lorsque des événements dynamiques surviennent, les chemins de contrainte et de déformation à l'échelle de l'assemblage granulaire, mais aussi les variations des forces de contact et des déplacements relatifs aux contacts sont fortement non linéaires. Le calcul de la variation de l'une de ces variables sur un incrément fini ne reflète plus alors son évolution instantanée et la relation (5.20) n'est plus vérifiée numériquement. C'est pour cette même raison qu'il n'est pas possible de calculer numériquement le terme complémentaire de la relation (5.20) lors d'événements dynamiques puisqu'il fait intervenir l'accélération instantanée des grains à la frontière de l'assemblage.

Etant donné que l'on ne vérifie pas numériquement l'égalité entre  $d^2W^{ct}$  et  $d^2W$  lorsque  $d^2W$  est négatif, soit lorsque  $d^2W$  indique un point de bifurcation, il paraît difficile de discuter des origines microscopiques de l'annulation de  $d^2W$  dans le cadre de l'approche numérique menée ici. Mentionnons toutefois quelques caractéristiques typiques correspondant à l'état de contrainte  $\sigma_3 = 200$  kPa,  $\eta = 0.77$  et des incréments de chargement donnant lieu à des déformations plastiques en régime dynamique. Entre 6 et 7% des contacts ont une valeur de  $d^2w^{ct}$  négative, ils représentent environ 58% des contacts glissants. La très grande majorité des contacts avec une valeur de  $d^2w^{ct}$  négative se situent dans le réseau de contacts faibles (97%) avec une proportion similaire à celle de l'ensemble des contacts glissant (97% également). D'après ces chiffres on se rend compte qu'un faible nombre de contacts contribuent au fait que  $d^2W_t^{ct}$  soit négatif. La plus grande partie de ces contacts sont dans le réseau faible au même titre que les contacts glissants.

Staron [122] a mis en évidence un mécanisme de ruine des chaînes de forces fortes suite au grossissement d'amas de contacts glissants sous l'action d'un chargement extérieur. Lorsque ces amas de contacts glissants sont de dimension trop importante ils ne permettent plus aux contacts faibles de soutenir les chaînes de forces fortes qui s'effondrent. Puisque les valeurs négatives de  $d^2w^{ct}$  se situent dans le réseau faible et dépendent directement des glissements au contact, on pourrait envisager un lien entre le scénario décrit par Staron et l'annulation de  $d^2W^{ct}$ .

---

## Conclusion générale

---

Dans le cas des sols et plus généralement dans celui des matériaux granulaires, qui sont des matériaux non associés, des ruptures diffuses existent pour des états de contrainte strictement inclus dans la condition limite de plasticité. Une approche permettant de décrire et de prédire ces ruptures mérite d'être développée. Celle considérée dans le présent document est basée sur l'idée selon laquelle une rupture diffuse correspond au chemin de réponse qui est sujet à bifurcation avec perte d'unicité constitutive au point de bifurcation. Dans cette approche, la première étape consiste à être capable de détecter l'ensemble des points de bifurcation. A l'heure actuelle, nous n'irons pas jusqu'à dire que le critère portant sur le signe du travail du second ordre permet de détecter tous les points de bifurcations. Cependant, d'après les travaux effectués par divers auteurs, dont une synthèse est donnée dans le premier chapitre, le critère du travail du second ordre est pour l'instant le critère le plus général dont on dispose pour détecter un point de bifurcation. Notamment, pour un matériau non associé, il est violé pour des états de contrainte qui peuvent être très largement inclus dans la condition limite de plasticité. La deuxième étape porte sur la réponse suivie par le matériau à partir du point de bifurcation. Pour que le critère du travail du second ordre soit réellement utile l'idéal serait de pouvoir identifier les conditions qui vont pousser le matériau à suivre une réponse plutôt qu'une autre, ou du moins la réponse qui va conduire sa rupture. Si l'on souhaite appliquer cette approche à des problèmes réels, ou plus formellement à des problèmes aux limites, une étape supplémentaire est à considérer: l'établissement du lien entre la rupture, ou du moins la rupture potentielle, en un point du massif du matériau considéré et la rupture du massif ou d'une de ses parties<sup>3</sup>.

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire s'inscrit dans la première et la deuxième étape de l'approche qui vient d'être décrite, soit la détection des points de bifurcation à l'aide du critère du travail du second ordre et le lien entre ces points de bifurcation et la rupture. Par ailleurs, l'utilisation d'une méthode numérique discrète basée sur une description dynamique du mouvement des grains présente trois avantages: premièrement c'est une approche originale du sujet traité qui jusqu'à présent avait été abordé principalement avec des modèles phénoménologiques (notons qu'une approche micro-mécanique, au sens analytique du

---

3. Une approche alternative à celle qui a été énoncée consiste à considérer le massif comme un système et à étudier directement sa stabilité à partir de la condition (globale) suffisante de stabilité de Hill (Eq. (1.6), p. 18).

terme, a également été effectuée depuis l'initiation de cette thèse (Nicot & Darve [88; 89]); deuxièmement la prise en compte du mouvement dynamique des grains permet de simuler des effondrements tels qu'ils pourraient être observés à partir d'essais expérimentaux; troisièmement la description du matériau à l'échelle de ses hétérogénéités autorise la recherche d'une signification physique à l'échelle microscopique d'une grandeur macroscopique.

Compte tenu des explications données dans les paragraphes précédents, les résultats obtenus peuvent être rappelés, discutés et mis en perspective en considérant trois parties: (i) la détection de points de bifurcation d'après le critère du travail du second ordre par des simulations numériques directes; (ii) des conditions d'évolution du matériau d'un point de bifurcation vers la rupture; (iii) les origines microscopiques de la bifurcation.

### **La détection de points de bifurcation d'après le critère du travail du second ordre par des simulations numériques directes**

Dans le cadre d'une relation phénoménologique indépendante du temps et avec la prise en compte de l'identité d'Euler pour la relation constitutive incrémentale, le travail du second ordre apparaît comme une grandeur dont le signe dépend uniquement de la direction de sollicitation. A partir de cette constatation, l'étude du signe du travail du second ordre et donc la recherche de points de bifurcation implique la réalisation de recherches directionnelles. Le code SDEC a été adapté pour répondre à ce besoin et une procédure numérique a été développée pour la simulation de ces recherches directionnelles dans le plan d'axisymétrie des incréments de contrainte. Bien qu'elles n'aient pas été réalisées, l'adaptation faite du code permet également de simuler des recherches directionnelles dans l'espace tridimensionnel des incréments de contrainte.

Les simulations des recherches directionnelles dans le plan d'axisymétrie des incréments de contrainte ont montré, pour le modèle numérique considéré, que des valeurs négatives du travail du second ordre existent à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. Un aspect remarquable de ce résultat réside dans le fait qu'il peut être retrouvé avec deux autres approches fondamentalement différentes (Nicot & Darve [88], Sibille *et al.* [119]): avec une relation constitutive phénoménologique (INL2) et un modèle micro-mécanique (le modèle micro-directionnel). Pour ces trois modèles, les directions issues d'un même état de contrainte-déformation et violant le critère du travail du second ordre, sont réunies dans un cône de directions instables dirigées vers l'origine du plan d'axisymétrie des contraintes (à l'exception de la relation INL2 avec laquelle deux cônes sont trouvés pour des niveaux de contrainte élevés). D'une manière générale, plus le niveau de contrainte est élevé (proche de la condition limite de plasticité) plus ces cônes sont ouverts. Plus particulièrement les mêmes tendances sont observées entre le modèle numérique discret et la relation INL2<sup>4</sup>: plus le matériau est lâche, plus le domaine de bifurcation est étendu et plus les cônes sont ouverts, c'est-à-dire plus le nombre de directions de chargement violant le critère du travail du second ordre est important. De plus, nous avons vu que les directions incluses dans les cônes dépendent de la densité. En effet, nous avons montré que le signe du travail du second ordre dépend en partie de la direction de l'écou-

4. La comparaison entre le modèle micro-directionnel d'une part et le modèle numérique discret et la relation INL2 d'autre part n'est pas discutée ici non pas parce que les résultats ne convergent pas mais parce que l'influence de certains facteurs sur le signe du travail du second ordre n'ont pas été étudiée avec le modèle micro-directionnel, notamment l'influence de la densité du matériau.

---

lement plastique et que cette dernière semble influencée par la densité. Par conséquent les directions de chargement qui vont conduire à une bifurcation possible voire à un effondrement dépendent de la densité du matériau.

Les sols sont très rarement composés d'une unique phase solide, ils sont le plus souvent saturés ou partiellement saturés. Nous savons que la teneur en eau par l'intermédiaire de la succion a une influence très importante sur le comportement mécanique des sols. Pour étendre le domaine d'application de l'approche proposée il serait bon d'étudier l'influence de la teneur en eau sur le domaine de bifurcation, et les directions instables.

### **Des conditions d'évolution du matériau d'un point de bifurcation vers la rupture**

La détection des points de bifurcation par le critère du travail du second ordre est quelque chose d'assez bien maîtrisée aujourd'hui même si des cas de chargements généraux dans l'espace des contraintes doivent encore être analysés. Les conditions d'évolution du matériau vers la rupture à partir d'un point de bifurcation reste une question plus ouverte. Pour étudier ce problème nous nous sommes basé sur les définitions de perte de contrôlabilité et de perte de maintenabilité proposées respectivement par Nova [92] et Nicot & Darve [89; 90]. La notion de paramètre de contrôle généralisé qui accompagne celle de perte de contrôlabilité et de perte de maintenabilité constitue une des clefs du problème. Le choix des paramètres de contrôle constitue à notre sens une condition à considérer avec le critère du travail du second ordre pour décrire et prédire les effondrements à l'intérieur de la condition limite de plasticité.

Nous avons mis en évidence qu'il est possible de trouver pour des directions en contrainte issues d'un point de bifurcation et incluses dans un cône de directions instables un programme de chargement conduisant à l'effondrement. Les programmes de chargement que nous avons étudiés en conditions axisymétriques sont définis par les paramètres de contrôle  $\sigma_1 - \sigma_3/R$  et  $\varepsilon_1 + 2R\varepsilon_3$ . Mais peut-être existe-il d'autres conditions qui permettent d'induire l'effondrement du matériau à partir d'un point de bifurcation. A ce titre, de prochains travaux sont à envisager.

A l'instar d'un essai expérimental, en cellule triaxiale par exemple, un modèle numérique discret basé sur une approche dynamique permet de " visualiser " directement l'effondrement. Néanmoins ce n'est peut-être pas le meilleur choix pour analyser l'équilibre d'un assemblage granulaire. L'interrogation mérite d'être étudiée: des approches quasi-statique ou statique telle que celles effectuées par Combe [20] autoriseraient peut-être une analyse plus fine.

Dans tous les cas, les résultats obtenus confirment que le critère de Mohr-Coulomb se révèle inadapté pour décrire tous les modes de rupture possible. Cela implique une nouvelle vision de la rupture en géomécanique, telle que celle qui est proposée ici, qui ne va pas du tout dans le sens d'une confirmation de la sécurité.

## Les origines microscopiques de la bifurcation

Le titre ci-dessus peut paraître ambitieux, pourtant c'est un résumé en quelques mots de l'idée sous-jacente que nous avons en cherchant une origine microscopique au travail du second ordre. D'un point de vue numérique nous vérifions que le travail du second ordre (macroscopique)  $d^2W$  est égal au travail du second ordre global aux contacts  $d^2W^{ct}$  tant qu'il n'y a pas de réorganisation micro-structurale. Lorsque des réorganisations micro-structurelles se produisent, ce qui se traduit à l'échelle de l'assemblage granulaire par ce que nous avons appelé des déformations plastiques en régime dynamique, l'égalité entre  $d^2W$  et  $d^2W^{ct}$  n'est plus vérifiée. Cependant les développements analytiques de Nicot & Darve [89] montrent que cette égalité existe à un terme complémentaire près faisant intervenir l'accélération des grains à la frontière de l'assemblage granulaire. Ce dernier terme a été jugé négligeable dans le cas de nos simulations.

Le travail du second ordre est une grandeur que nous qualifions d'impulsionnelle, elle s'exprime à partir d'un incrément de contrainte et d'un incrément de déformation qui sont infiniment petits, ils peuvent d'ailleurs être remplacés par un taux de contrainte et un taux de déformation. De même, la relation analytique donnée par Nicot & Darve entre le travail du second ordre et des variables définies à l'échelle microscopique est déduite de l'évolution instantanée de l'état du matériau à partir d'un point d'équilibre. Les expériences numériques que nous avons réalisées consistent en l'application d'incrémentes de chargement finis. Au cours de l'application de ces incrémentes de chargement finis des réarrangements micro-structuraux se développent. Ces derniers se traduisent à l'échelle de l'assemblage granulaire, entre autres, par des incrémentes de réponse non linéaires. Dans ces cas, le calcul de la variation de l'état de contrainte ou de déformation sur un incrément fini ne reflète plus leurs évolutions instantanées.

Toutes les valeurs négatives du travail du second ordre macroscopique  $d^2W$  que nous avons trouvées avec le modèle numérique discret correspondent à des réponses en déformation dites déformations irréversibles en régime dynamique. Aussi, nous n'avons pas pu établir de lien direct, d'un point de vue numérique, entre les valeurs nulles ou négatives de  $d^2W$  et le signe du travail du second ordre au contact  $d^2w^{ct}$ . Nous retiendrons cependant que, pour la loi de contact intergranulaire utilisée, le travail du second ordre au contact  $d^2w^{ct}$  ne peut être négatif que si il y a simultanément glissement dans la direction tangentielle et décharge dans la direction normale au plan de contact (descente du critère de Coulomb), plus des conditions supplémentaires sur la direction et l'amplitude du glissement tangentiel. Pour le cas étudié peu de contacts ont une valeur de  $d^2w^{ct}$  négatives (6 à 7 %), ils représentent environ 58 % des contacts glissants et se situent pour leur quasi totalité (97 %) dans la phase de contact faible.

Staron a étudié dans sa thèse la stabilité d'une pente bidimensionnelle constituée d'un empilement de disques. Elle a montré que la perte de stabilité de la pente peut se produire pour des états de contrainte situés à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. Elle conclut ses travaux en affirmant que *le comportement des empilements à la rupture résulte de la nature bi-phasique de la transmission des forces. La stabilité de pentes granulaires n'est pas le fait de la phase forte seulement, mais de l'interaction des deux phases, faible et forte.* La phase faible est selon Staron responsable du décalage entre l'état de contrainte mobilisé à la déstabilisation de la pente et l'état de contrainte à la rupture prédit par le critère de Mohr-Coulomb. La localisation de la quasi totalité des contacts pour lesquels  $d^2w^{ct} < 0$  dans la phase faible n'est pas contradictoire avec les travaux de Staron. Nous pensons qu'il existe sans doute un lien entre les mécanismes de déstabilisation des pentes mis en évidence par Staron et les ruptures que nous avons étudiées. La vérification et l'étude de ce lien entre l'approche plutôt physique de Staron et mécanique de Darve et son équipe constitue à notre sens une perspective intéres-

---

sante. Le traitement de cette problématique demandera en tous cas de reconsidérer l'approche que nous avons effectuée.

**Pour finir** je voudrais replacer ce travail de thèse dans son contexte. Le projet de recherche mené par Darve et son équipe autour du thème de la bifurcation et du travail du second ordre est en cours depuis plusieurs années. La grande majorité des études s'est effectuée à travers des développements analytiques, des modélisations constitutives, et des modélisations numériques avec la Méthode des Eléments Finis. A terme, l'objectif de ce projet de recherche est de décrire et de prédire des modes de rupture encore inexplicés sur des constructions anthropiques ou naturelles. L'approche discrète que nous avons suivie permet d'améliorer la connaissance et la compréhension du lien entre le signe du travail du second ordre, la bifurcation et la rupture au sens général du terme. Toutefois, la Méthode des Eléments Finis constitue à l'heure actuelle un outil extrêmement performant pour traiter des problèmes aux limites complexes. Aussi, en attendant un développement plus opératoire des méthodes numériques discrètes, il ne faut pas voir les résultats présentés ici comme une base pour des études de problèmes réels par des modèles numériques discrets mais plutôt comme une source d'enseignements pour nourrir les modélisations numériques par éléments finis (Laouafa & Darve [73], Servant [113], Khoa [63]) et pour améliorer leur analyse.





---

Annexe A: une technique de photogrammétrie numérique pour la mesure des  
champs cinématiques discrets

---

*Cette technique comme sa présentation sous forme d'article dans cette annexe est le résultat d'un travail en étroite collaboration avec Francesco Froiio (Sibille & Froiio [118]).*

---

# A numerical photogrammetry technique for measuring microscale kinematics and fabric in Schneebeli materials

**Abstract** We present a numerical photogrammetry technique for obtaining semi-automated measurements concerning kinematic fields, i.e. translation and rotation of each “grain”, and fabric properties of a two-dimensional analogue granular material. An example is given in which the technique is applied in a biaxial compression test on a specimen consisting of 1300 rods. The information that can be recorded by the technique is discussed along with its accuracy.

**Keywords** 2D Analogue Granular Materials · Numerical Photogrammetry · Semi-automated Measurements · Particle Translation and Rotation · Fabric

---

## 1 Introduction

It is nowadays commonly accepted that to improve the understanding of the behaviour of granular materials we need more information on the physics occurring at the microscale (i.e. at the grain-scale). This is further suggested by the fact that the observation scale at which the material “appears” as an assembly of grains refers to characteristic lengths that are close to those exhibited by some common but little-understood phenomena. For instance, evidence is being brought forward that shear bands are the (macroscale) expres-

sion of *mesoscale* structures [1–3]. The ability of particles to rotate would play a key role in allowing the alternate growth and failure of these structures inside the shear zone. Consistently with this, efforts have been made in the development of polar continuum models (e.g. [4–7]) able to cope with localization phenomena in granular media, but a clear link has not been established yet between the additional rotational degrees of freedom introduced by these theories and the rotations observed at a micro- or mesoscale level.

The development of Discrete Element Methods (DEMs), e.g. [8,9], provided powerful and flexible investigation tools. On the other hand, this has had the unfortunate effect that relatively few attempts have been made to develop finely-tuned experimental techniques for microscale investigations of granular materials. This has led to the paradox of micromechanics of granular materials as a science based almost entirely on “virtual evidence”. The use of two-dimensional, analogue granular materials consisting of assemblies of rods was first suggested by Schneebeli [10]. A variation of this technique with disks of photoelastic materials instead of rods was used in early experiments to show stress transmission through force chains in granular materials [11, 12]. Many other experiments have been performed, since then, using Schneebeli materials, but few attempts have been made to capture the full kinematics (translation and rotation of each particle) [13–15]. The focus has been on the kinematics of few elements (several hundred), and on very few time steps. This is due to the obvious difficulties in measuring translations and rotations for a relevant number of objects by means of a non-automated procedure. With this study, we try to overcome these difficulties and thus open the way to full-field measurements of particle translations and rotations, and of fabric properties, for 2D granular assemblies with a large, virtually unlimited, number of elements.

The objective of this work is to allow an increase in the number of discrete-element physical tests in order to complete the quite poor quantity of experimental data at the micro- and mesoscale. These data can be directly used to highlight micro-mechanisms, or can be used to feed DEM computation to study contact forces [16]. We introduce the technique by discussing its application to a biaxial compres-

---

This work is funded by the EU project *Degradation and Instabilities in Geomaterials with Application to Hazard Mitigation* (DIGA) in the framework of the Human Potential Program, Research Training Networks (HPRN-CT-2002-00220).

L. Sibille

Institut National Polytechnique de Grenoble  
Laboratoire Sols Solides Structures

F. Froiio

National Technical University of Athens  
School of Applied Mathematical and Physical Sciences  
Dept. of Mechanics – Lab. of Testing and Materials

sion test on a specimen of Schneebeli material. The experimental set-up is described in Section 2, with emphasis on the optical characterization of the material that is required by the photogrammetry algorithm. This algorithm is described in more detail in Section 3. Referring to the biaxial test, in Section 4, we show the information that can be recorded by our technique and we discuss its accuracy. The paper concludes with a summary in which we also address the range of applicability and the perspectives of the technique.

## 2 Experimental set-up

### 2.1 2D analogue granular material

The measuring technique introduced in the following was applied to a specimen of two-dimensional analogue granular material, i.e. to a vertical pile of wooden (beech) cylindrical rods, 6 cm in length, with circular sections. The cylindrical rods (in the following named simply “cylinders”) were sorted according to three different diameters (12, 14 and 20 mm) and equally distributed in terms of their population. The front faces of the cylinders, i.e. the faces exposed to image acquisition, were specially prepared for the application of the photogrammetry technique (see Fig. 1 and 2). For each cylinder, two coloured spots were drawn on a background of dark paint, in order to detect the rigid motion of the front face, i.e. its translation and rotation. The first spot was placed in the centre of the front face and the second near to the perimeter. The spots were almost circular and approximately 1.5 to 2 mm of diameter. A black (mat) acrylic paint was used for background and centre spots were coloured in red, green or blue depending on the cylinder diameter (for 12, 14 or 20 mm, respectively). The colours and the paints used (see Appendix A) were chosen after performing several tests: for the background, it was necessary to minimize the light reflection and avoid generating noise in the source image; for the spots, it was necessary to enhance the performance of the image processing software in separating the colour channels.

### 2.2 Testing device

A biaxial/shear apparatus named  $1\gamma 2\varepsilon$  and developed at the Laboratoire 3S in Grenoble, was used to impose the loading

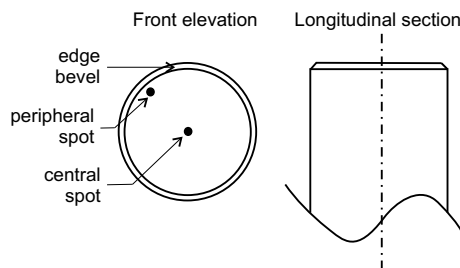


Fig. 1 Sketch of a cylinder

path to the specimen composed of the analogue material described above. The apparatus, designed for experiments on Schneebeli materials, has the freedom to perform both simple shear and biaxial compression. Figure 3 presents a sketch of the evolution of the geometrical boundary conditions imposed by the apparatus for the particular case of a biaxial compression test, as in the example discussed in this paper. The lengths  $L_1$  and  $L_2$  (Fig. 3) are controlled through the action of electric motors. A set of transducers provides a central unit with real time information on the stress/strain state of the specimen. On the basis of this information, the central unit continuously modifies the motor velocities in order to follow the desired stress/strain path. Further details on this apparatus can be found in [17–19]. It should be noticed that, in mentioning the concepts of “stress” and “strain” for the specimen, we are implicitly looking at it as a REV whose macroscale state variables (stress and strain) can be measured in the sense of proper averages at the boundary between the specimen and the loading device.

### 2.3 Image acquisition

A digital camera (Kodak DCS PRO 14n) was used to acquire images of the specimen during the biaxial test. This camera is equipped with a full-frame image sensor, which provides high resolution images ( $4500 \times 3000$  pixels, i.e. 13.5 Mpixels). By aligning the camera horizontally and vertically with the centre of the specimen, and using an appropriate lens (Sigma APO MACRO 180 mm, angle of view:  $13.7^\circ$ ) the image distortion was found to be negligible, i.e. the image formed on the sensor plane can be considered as a homothetic reproduction of the front face of the specimen.



Fig. 2 Picture of some cylinders

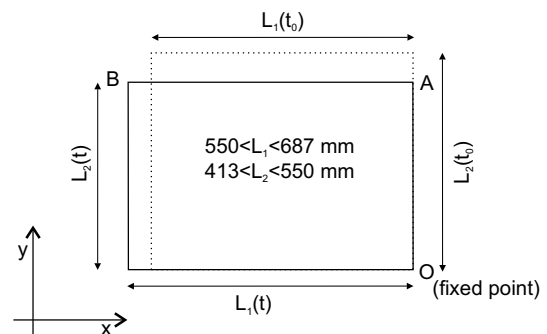


Fig. 3 Geometrical boundary-conditions imposed in biaxial tests performed with  $1\gamma 2\varepsilon$  (cf. Calvetti et al. [13])

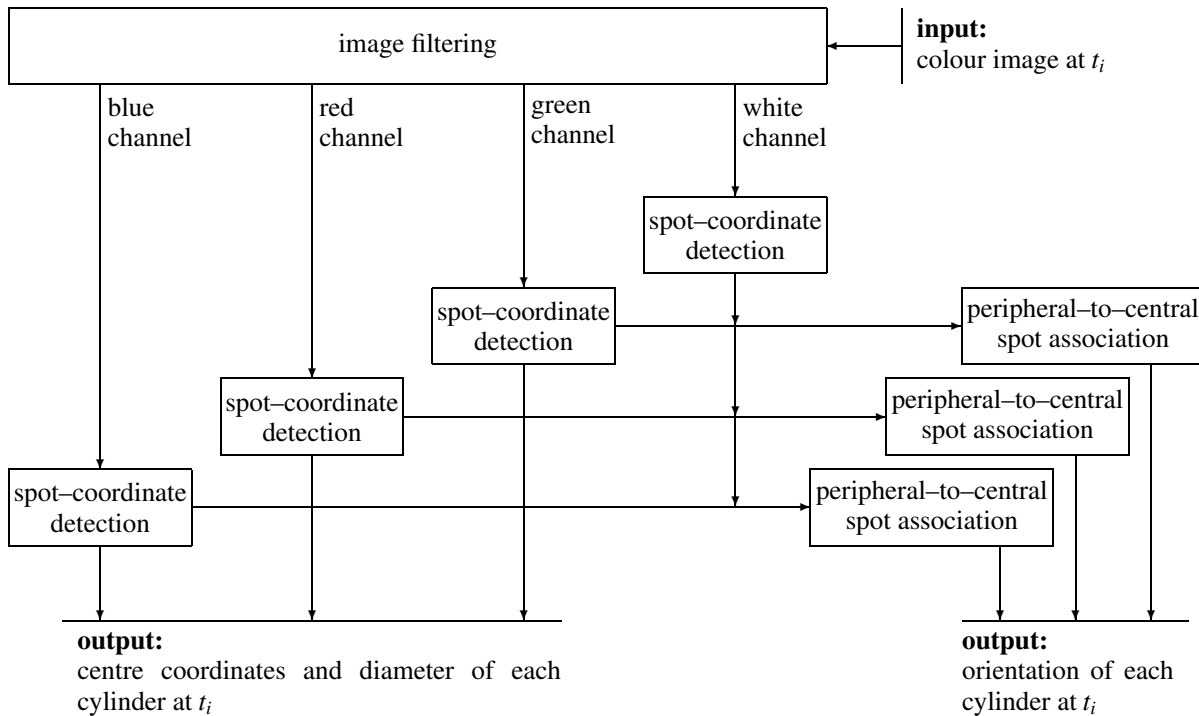


Fig. 4 Detection of the configuration at time  $t_i$

### 3 Measuring technique

The graph in Figure 4 is a schematic representation of the procedure by which the position and orientation of each cylinder is detected at each time, e.g. at the time labeled  $t_i$  corresponding to the  $i$ -th shot of the camera. Image filtering procedures (see Sec. 3.1) are applied to the colour image acquired at time  $t_i$  in order to separate the four colour channels (i.e. blue, green, red and white) into four respective black-and-white (B&W) images. A numerical algorithm is then applied to each of the four images to obtain, separately for each channel, the coordinates of each spot. By applying the algorithm to the B&W image obtained from the blue channel, one determines the coordinates of the centres of the 20-mm-diameter cylinders. Using the same algorithm, the B&W images of the green and red channels give the coordinates of the centres of the 14-mm- and 12-mm-diameter cylinders respectively. The list of the coordinates for the white spots, regardless for the cylinder size, is obtained analogously. Eventually, the nearest peripheral spot is associated to each central spot. These data are the information that is required to have a full plot of the configuration of the specimen at time  $t_i$ .

The incremental displacement  $\Delta_i^m \mathbf{x}$  and the incremental rotation  $\Delta_i^m \theta$  of the generic cylinder  $m$  between the times  $t_i$  and  $t_{i+1}$ , are computed by subtracting the position vector of the central spot and the orientation angle at the two acquisition times:

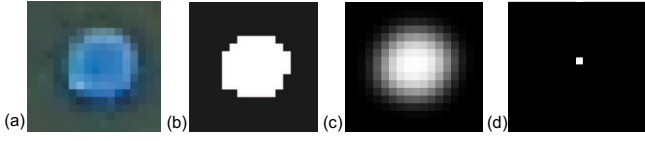
$$\Delta_i^m \mathbf{x} = \mathbf{x}_{i+1}^m - \mathbf{x}_i^m, \quad (1)$$

$$\Delta_i^m \theta = \theta_{i+1}^m - \theta_i^m. \quad (2)$$

where  $\mathbf{x}_i^m$  and  $\theta_i^m$  are, respectively, the position vector and the orientation angle. To compute (1) and (2), one needs an (automated) procedure to recognize the same cylinder  $m$  in two subsequent images. The procedure that we adopted is explained in Section 3.2. Notice that equation (2) is valid on the condition that incremental rotations of the cylinders between times  $t_i$  and  $t_{i+1}$  are less than  $180^\circ$ .

#### 3.1 From image filtering to spot coordinates

The filtering procedures are applied to the acquired images in order to separate the information carried by the four different colours used for the spots and prepare the images for the coordinate detection procedure. Figure 5 shows how the blue channel is extracted from the source image at time  $t_i$ . The same treatment is undergone in parallel by the red, green and white channels. A proper range of tones of blue is specified in the input to the image processing software. The pixels in the source images that fall into the specified range are turned to white and all the other pixels are turned to black (see Fig. 5a and 5b). In this way a B&W image is obtained, that retains only the information about the blue spots (at time  $t_i$ ). Random colour pixels appear in the source image that are not representative of any spot, but are generated as noise during the image acquisition. To avoid this source of error, such noise is cut out at three different levels: 1) on the material, e.g. using a black mat colour to avoid background light



**Fig. 5** Spot coordinate detection on the blue channel: (a) blue spot in the source image, (b) the corresponding area in the B&W image, (c) after applying the gaussian filter and (d) the maximum intensity pixel

reflections and minimizing diffraction by bevelling cylinder edges (see Fig. 1); 2) on the source image, by applying a standard noise filter; 3) after the colour channel extraction, by removing “false spots”, i.e. clusters of white pixels below a threshold diameter. We finally focus on the B&W image of a spot as in Figure 5b: to determine the coordinates of the centre of the spot we first smooth its image with a gaussian filter (see Fig 5c) and subsequently select the maximum intensity pixel (see Fig 5d).

### 3.2 Detection of cylinders in subsequent images

Consider the continuum field  $\mathbf{u}_i$  describing the incremental displacement field between times  $t_i$  and  $t_{i+1}$  of a 2D continuum undergoing a homogeneous deformation, subjected to the same geometrical constraints as those imposed to the specimen by the testing device. Let us assume that  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i^m)$  estimates the incremental displacement of the cylinder  $m$  up to an error smaller than the cylinder diameter [13]. Then, to recognize the position of the cylinder  $m$  at time  $t_{i+1}$ , knowing its position at time  $t_i$ , we seek among all  $p$  cylinders at  $t_{i+1}$  the one satisfying the condition:

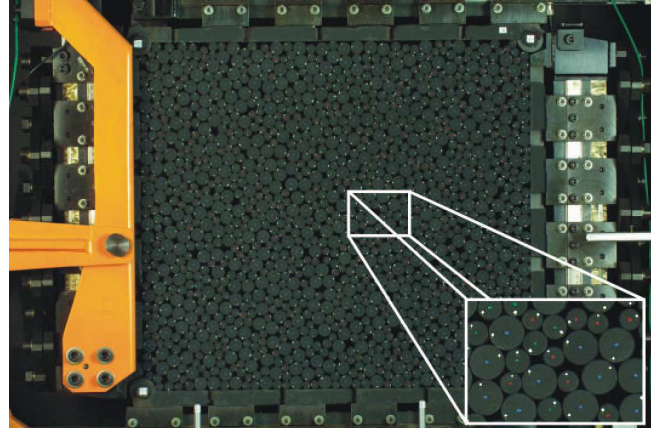
$$\min \left| \left( \mathbf{x}_i^m + \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i^m) \right) - \mathbf{x}_{i+1}^p \right|. \quad (3)$$

That is, we seek the nearest central spot in the image at  $t_{i+1}$  to the predicted position  $(\mathbf{x}_i^m + \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i^m))$ . Although the hypothesis described above is satisfied for the vast majority of the cylinders in the assembly, the discrete nature of the medium implies that some of them deviate significantly from this “average” behaviour. In such cases, we can still use (3) as long as we restrict the number of candidate cylinders  $p$  at  $t_{i+1}$  by some heuristic assumptions. In the case we studied, a limitation on the direction of the incremental displacement<sup>1</sup> allowed us to have an excellent number of correct detections (99.9% of the cylinders).

## 4 Experiment and measurements

We describe and comment on the results obtained by applying our technique for a biaxial test performed with the experimental set-up described in Section 2. The specimen (Fig. 6) was formed by filling the loading device by hand

<sup>1</sup> The angle between the predicted incremental displacement  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i^m)$  and the “candidate” incremental displacement  $(\mathbf{x}_{i+1}^p - \mathbf{x}_i^m)$  was imposed to be lower than a threshold angle.



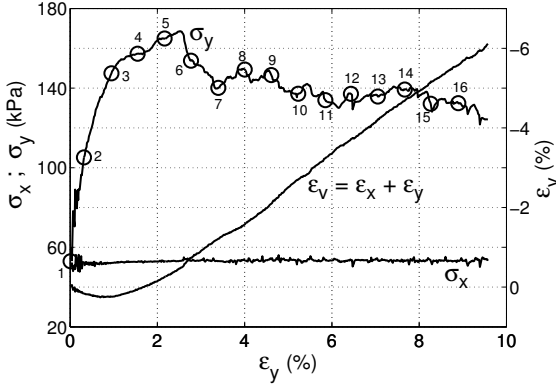
**Fig. 6** The specimen in the biaxial/shear apparatus

with cylinders. Particular care was taken to distribute the three populations of cylinders, corresponding to the three different diameters, homogeneously in the space. It should be noted at this point that one can not expect to reproduce two identical specimens, even if the cylinders are placed at exactly the same place. This is because, for frictional cylinders, the initially developed fabric of inter-particle forces is uncontrollable.

In describing the stress-strain path followed by the specimen during the biaxial test, we refer to the small-strain and small-displacement approximations. According to the system of reference adopted in Figure 3, we use  $\sigma_x$  for the horizontal component of the Cauchy-stress tensor on the vertical plane and define  $\sigma_y$  analogously. The strain state is measured in terms of the components  $\varepsilon_x$  and  $\varepsilon_y$  of the infinitesimal strain tensor, representing the stretches along the horizontal and vertical directions, respectively<sup>2</sup>. The definition of other stress/strain components is not required as only normal deformations are applied (i.e. no shear deformation is allowed) according to the usual procedure for biaxial tests. After a first isotropic compression of the specimen up to  $\sigma_x = \sigma_y = 50$  kPa, a phase of biaxial compression followed: a vertical strain rate  $\dot{\varepsilon}_y = 10^{-3} \text{ min}^{-1}$  was applied while the horizontal stress  $\sigma_x$  was kept constant by continuously adjusting the position of the right vertical boundary. Figure 7 shows the behaviour during the biaxial compression: the  $\sigma_y$ - $\varepsilon_y$  and  $\varepsilon_y$ - $\varepsilon_y$  curves,  $\varepsilon_y$  being the infinitesimal volumetric strain, can be referred to a typical test on an initially-dense specimen. Superposed (numbered) circles on the  $\sigma_y$ - $\varepsilon_y$  curve correspond to the shots of the camera.

The (macroscopic) peak friction angle is about  $31.5^\circ$  whereas the friction angle measured between two cylinders in contact is about  $25.5^\circ (\pm 2^\circ)$ . To measure the contact friction angle we followed the same procedure as in Calvetti et al. [13]). Analogously, a value of the peak friction angle higher than the (microscopic) contact friction angle was

<sup>2</sup> Following the convention usually adopted in Soil Mechanics, positive values of  $\varepsilon_x$  and  $\varepsilon_y$  refer herein to compression states in the respective directions, and the coherent convention is adopted for the dual stress components.



**Fig. 7** Phase of biaxial compression after the isotropic compression:  $\sigma_y$ - $\varepsilon_y$ ,  $\sigma_x$ - $\varepsilon_y$  and  $\varepsilon_v$ - $\varepsilon_y$  curves. Superimposed circles corresponds to the camera shots, e.g. circle number 6 corresponds to the image acquired at time  $t_6$

found with DEM simulations by Luding [20], who also suggests that a contribution to the macroscopic friction is due to geometric and structural effects. It is not possible to state that by the end of the test the stress had saturated, as important fluctuations can be observed (Fig. 7): it seems in particular that the stress component  $\sigma_y$  is still decreasing. Moreover, the volume is clearly increasing by the end of the test. Therefore, a critical state was not reached; almost certainly due to the limited range of (axial) strain allowed by the loading apparatus.

#### 4.1 Data analysis and plot

We give some examples of the micromechanical analyses of the behaviour of physical specimens that are allowed by the application of the measuring technique presented in this paper.

Figures 8 to 11 refer to the incremental deformation that occurred between times  $t_6$  and  $t_7$ , corresponding to the incipient softening branch of the  $\sigma_y$ - $\varepsilon_y$  curve in Figure 7. The incremental translation field (Fig. 8) clearly demonstrates the deformation mechanisms, whereas the incremental rotational field (Fig. 9) already suggests the localization patterns. To access continuum strain measures at the mesoscale we adopt now a different point of view and look at the specimen as a window on a continuum (i.e. not anymore as a REV, cf. Fig. 7). We feel free to fit its discrete incremental translation field  $\Delta \mathbf{x}$  with a continuum field  $\Delta \boldsymbol{\chi}$ . The latter is computed based on a Delaunay triangulation connecting the cylinder centres. The continuum field  $\Delta \boldsymbol{\chi}$  equates, at the vertices of each triangle, the incremental translation of the cylinder centres and it varies linearly inside the triangle. In the generic triangle  $k$ ,  $\Delta \boldsymbol{\chi}$  can be written as

$$\Delta \boldsymbol{\chi} = \mathbf{A}^k \mathbf{x} + \mathbf{B}^k, \quad (4)$$

where  $\mathbf{A}^k$  and  $\mathbf{B}^k$  are respectively the matrix and the vector that solve the system of three vector equations

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x}^m + \mathbf{B}^k = \Delta^m \mathbf{x}, \quad (5)$$

obtained for the index  $m$  spanning only the cylinders selected by the triangle  $k$ . Figure 10 is a plot of the deviatoric strain intensity  $\Delta \varepsilon_I - \Delta \varepsilon_{II}$  ( $\Delta \varepsilon_I > \Delta \varepsilon_{II}$ ), where  $\Delta \varepsilon_I$  and  $\Delta \varepsilon_{II}$  are the principal values of the infinitesimal strain tensor  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  associated with the continuum field fitting the incremental translations of the cylinders:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\text{grad } \Delta \boldsymbol{\chi} + (\text{grad } \Delta \boldsymbol{\chi})^T]. \quad (6)$$

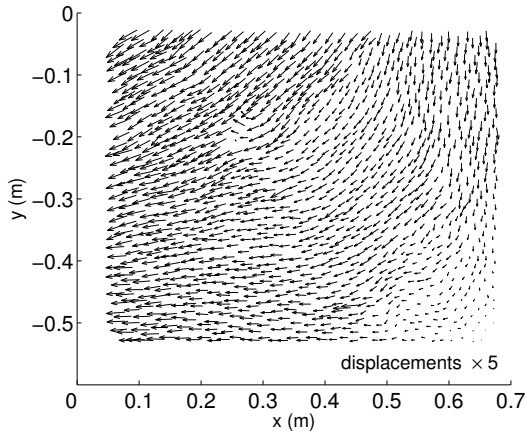
This plot (Fig. 10) confirms the localization patterns suggested by the (discrete) incremental-rotation field in Figure 9: multiple shear bands appear, as already observed with rigid boundaries [21,22], which is the case for the  $1\gamma 2\varepsilon$  apparatus. The comparison between Figure 9 and Figure 10 provides experimental evidence for the numerical analysis of Iwashita & Oda [24] who measure high gradients of particle rotations at shear band boundaries. This observation is linked to the discussion addressed in the introduction as to the role of grain rotation in the formation of mesoscale structures inside shear bands. To investigate further the relevance of particle rotations and their meaning from a continuum viewpoint, it is useful to compare them with the local rate of (incremental) “rigid rotation”, i.e. with a continuum field  $\Delta \varphi$ . This is computed as the curl of the continuum field fitting the incremental translations of the cylinders:

$$\Delta \varphi = \text{curl } \Delta \boldsymbol{\chi}. \quad (7)$$

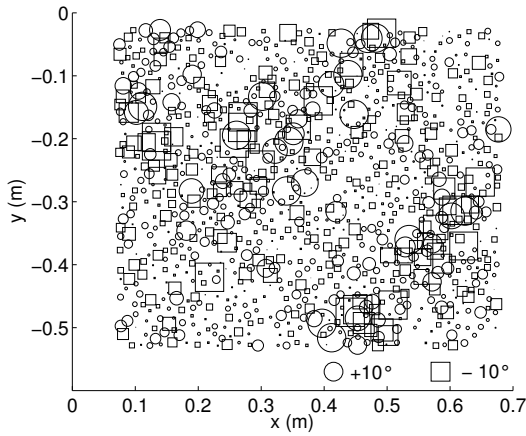
A “rigid rotation”  $\Delta \varphi(\mathbf{x})$  can be interpreted as the rotation of a cluster of cylinders located in the neighborhood of the position  $\mathbf{x}$ , regardless of the individual rotational degrees of freedom of the cylinders. As to the deformation between times  $t_6$  and  $t_7$ , the results are plotted in Figure 11. It is interesting to compare these results with those in Figure 9, which conversely represents the incremental rotations of individual cylinders in the same time interval. Although in both plots shear bands are emphasized, there is no quantitative agreement between them, nor can one claim for a qualitative correspondence considering the direction of rotation (cf. [13,25]). This suggests a systematic and extensive investigation of both kinds of rotation fields in physical specimens, as allowed by this technique. Such studies will provide information relevant to the introduction of additional rotational degrees of freedom in continuum theories, i.e. for the use of polar continua in the modelling of localization of deformation in granular materials [5].

As to the evolution of the strain, we point out that soon after the start of the test (i.e., from increment  $t_1$ - $t_2$ ) the deformation was not homogeneous, due to the discrete nature of the medium (see the incremental deviatoric-strain field in Fig. 12a). Since the increment  $t_3$ - $t_4$  (Fig. 12b), the incremental deviatoric-strain field appears to be organised in a network of bands; notice that  $t_3$ - $t_4$  is the time interval at which the specimen begins to dilate. This network is not persistent, but is gradually evolving until the end of the test (see Fig. 10 and Fig. 12c). It is worth mentioning that Kuhn [23] observes similar (non-persistent) deformation structures appearing at very small axial strains (between 0.02% and 0.60%)





**Fig. 8** Incremental translation field  $\Delta \mathbf{x}$  between times  $t_6$  and  $t_7$



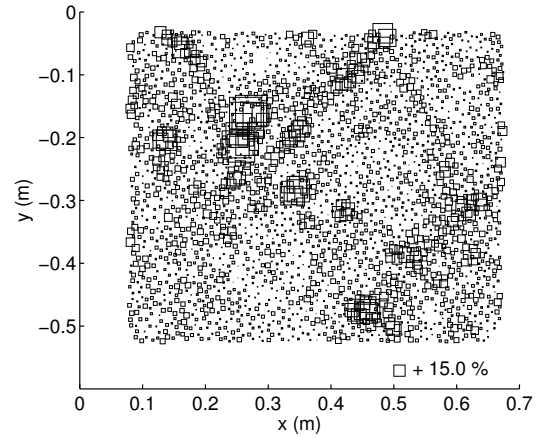
**Fig. 9** Incremental rotation field  $\Delta \theta$  between times  $t_6$  and  $t_7$

in a DEM simulation of a two-dimensional biaxial compression test (with 4008 disks).

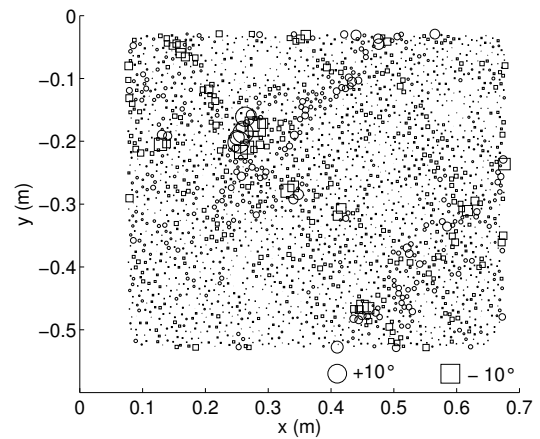
It is worth mentioning that the Eulerian description adopted so far herein, i.e. in terms of incremental displacements and rotations referred to the current configuration, is not the only one allowed by this technique. The development of mesoscale structures in shear bands (e.g. buckling columns, bearing pairs, vortexes) require, in particular, an Lagrangian approach to be adopted in terms of the tracking of the motion of individual cylinders. How the technique can be employed to this end is shown by the simple example in Figure 13, in which we track the bearing mechanism by which two cylinders (filled-in in grey in Fig. 14) participate in the deformation process inside one of the shear bands (cf. Fig. 9 and 10). Analogous plots can be produced to observe the sliding mechanism by which a complementary population of pairs of cylinders contribute to the same deformation process.

This technique can also provide insight into the fabric of the material<sup>3</sup>. A first example is given in Figure 15, in which

<sup>3</sup> It is worth mentioning in this context Majmudar & Behringer [26] who introduce an alternative method to detect the fabric of a 2D analogue material. They present an (automated) evolution of the technique



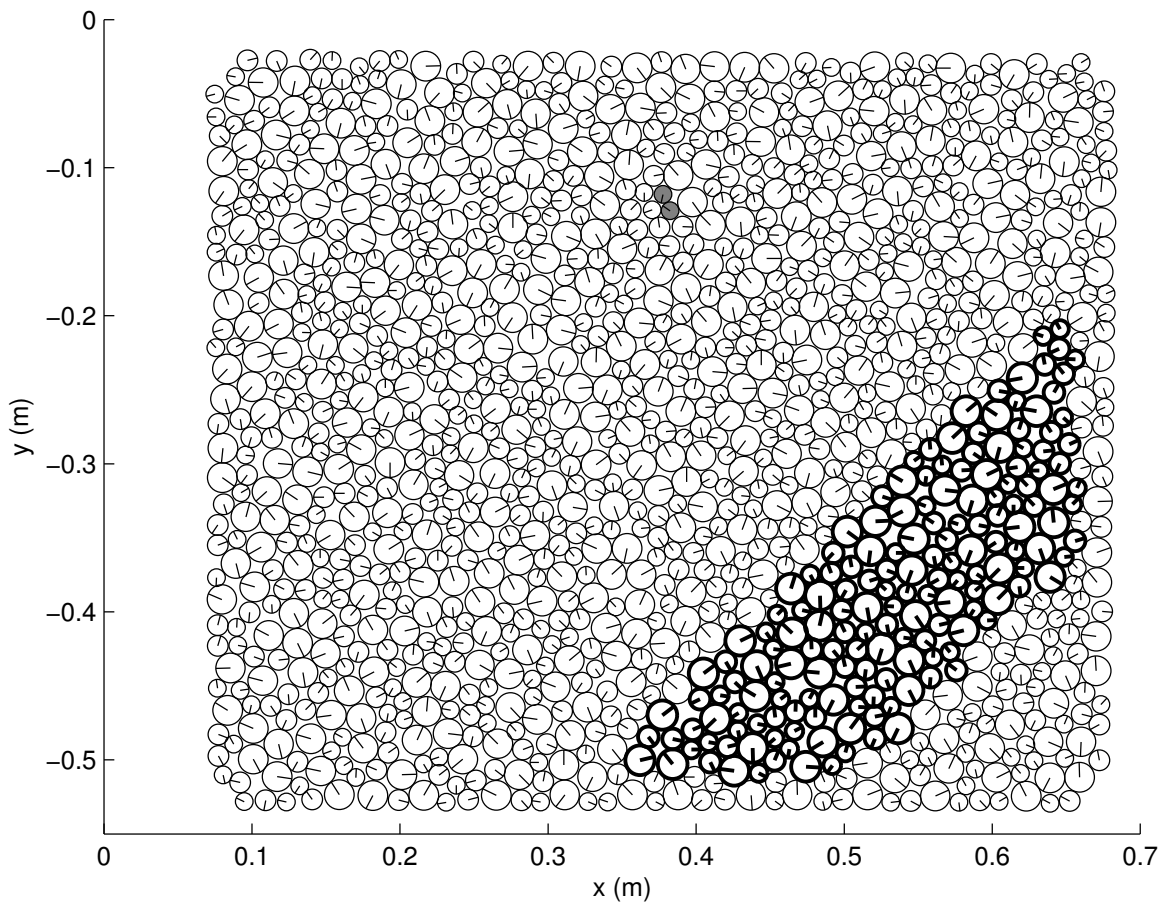
**Fig. 10** Incremental deviatoric-strain field  $\Delta \varepsilon_I - \Delta \varepsilon_{II}$  between times  $t_6$  and  $t_7$



**Fig. 11** Incremental rotation field  $\Delta \varphi$  between times  $t_6$  and  $t_7$

we represent the distributions of the contact orientations at several times during the test: before the isotropic compression, i.e. immediately after the specimen preparation; at the end of the isotropic compression (time  $t_1$ , cf. Fig. 7); at the peak of the  $\sigma_y - \varepsilon_y$  curve ( $t_5$ ); at the end of the test ( $t_{16}$ ). Despite the care in making the specimen as isotropic as possible during its preparation, Figure 15a (left) shows that, already before the test had started, slightly more contacts were oriented with an angle about  $45^\circ$ , than along the other directions. Comparing the right and left plots in Figure 15a we observe that the isotropic compression did not affect substantially the fabric. A decrease in the proportion of contacts around the horizontal direction (i.e. the extension direction) is observed near the peak of the  $\sigma_y - \varepsilon_y$  curve (Fig. 15b, left) and this tendency continues until the end of the test, leading to a marked anisotropy as shown in the right plot in Figure 15b (cf. Kruyt & Rothenburg [27]).

first used by Drescher & De-Josselin-de-Jong [12] to measure force networks in granular materials by means of photoelastic disks, where both normal and tangential forces are measured.



**Fig. 14** Configuration of the specimen at time  $t_6$ . Filled-in cylinders or cylinders with thick contour are chosen in correspondence of the shear bands (cf. Fig. 9, 10 and 11) and refer to the analyses in Figures 13 and 16, respectively

In obtaining information on the fabric of the specimen, the main practical difficulty to overcome is in determining the pairs of cylinders in contact; then the contact orientations are easily computed as the orientations of the relevant branch segments (from  $-90^\circ$  to  $+90^\circ$  with respect to the  $x$  axis). A contact is detected between two cylinders if the distance between the respective centres does not exceed the sum of their radii up to a tolerance  $e$ . A value of tolerance of 5 pixels ( $0.11 \text{ mm}$ )<sup>4</sup> was chosen according to the criterion commented further on in Section 4.2. In these conditions the values of the coordination number ( $z = 4.35$  at  $t_1$  and  $z = 3.90$  at  $t_{16}$ ) are close to the ones obtained using DEM simulation [25,27]. Notice that the evolution of the coordination number can be followed also in specific regions of the specimen. The plot in Figure 16 gives the coordination number during the biaxial compression, for the whole specimen and for one of the shear bands, i.e. the set of cylinders highlighted with thick contour in Figure 14. The localization of the deformation is expressed by the fabric through a persistent, local reduction of the coordination number inside the shear band.

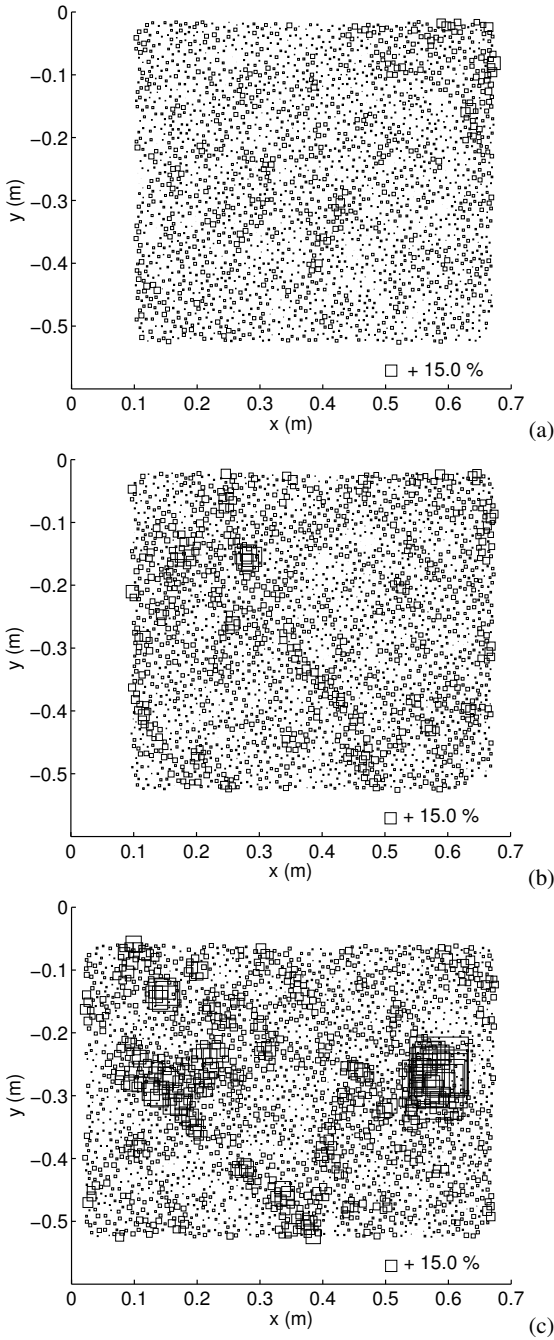
#### 4.2 Measurements and accuracy

An analysis of the precision of the technique is one of the main points under discussion. The issues one is concerned with are in particular: (i) an estimate of the error in measuring the representative position of each cylinder; (ii) an estimate of the error in measuring the orientation of each cylinder; (iii) a proper value of tolerance  $e$  for the distance between the surfaces of two cylinders in recognising the existence of a contact between the two. We start discussing the issues (i) and (iii) that, in being strictly related, were dealt with jointly.

Under the assumption that the maximum error in the representative positions of the cylinder is isotropic (the same in any directions), simple geometrical considerations lead to the fact that this error should be half of the maximum error in measuring the distance between the representative positions of two cylinders in contact. Equivalently, one can take the maximum error in the representative position to be half of the value of the maximum interpenetration between two cylinders in contact, the interpenetration  $\delta_{mn}$  for the cylinders  $m$  and  $n$  being defined as

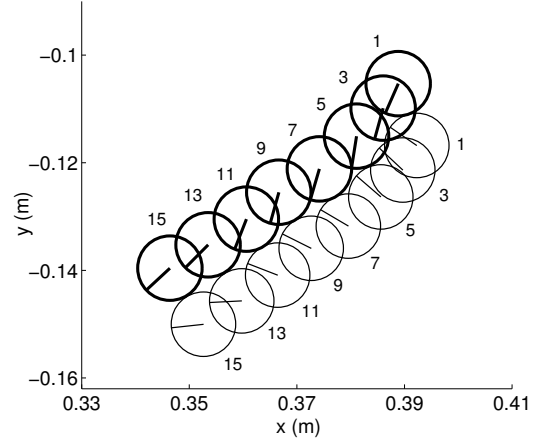
$$\delta_{mn} = R_m + R_n - L_{mn}, \quad (8)$$

<sup>4</sup> 1 pixel in the image corresponds to 0.216 mm.

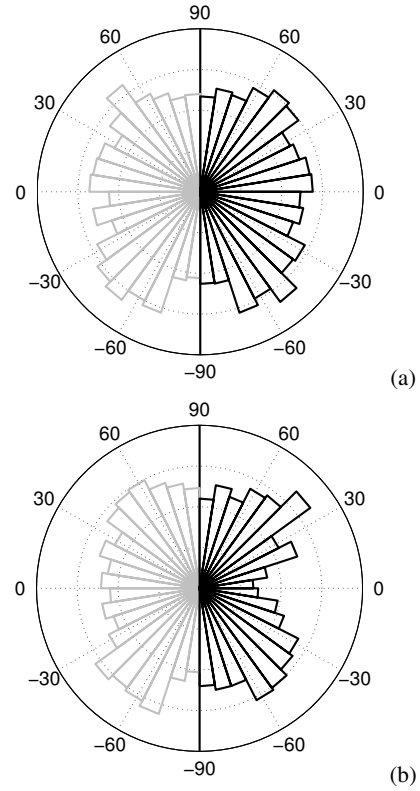


**Fig. 12** Incremental deviatoric-strain field  $\Delta\epsilon_I - \Delta\epsilon_{II}$  between times  $t_1$ - $t_2$  (a),  $t_3$ - $t_4$  (b) and  $t_{15}$ - $t_{16}$  (c)

with  $R_m$  and  $R_n$  the radii of the two cylinders and  $L_{mn}$  the distance between the measured positions of the respective central spots. In particular  $\delta_{mn} > 0$  if the images of the two cylinders in the measured configuration are overlapping and  $\delta_{mn} \leq 0$  otherwise. In judging the measurements of  $\delta_{mn}$  one should recall that non-null values of this quantity can be interpreted as errors linked to the idealisation of the specimen, or related to the accuracy of the photogrammetric procedure for the positions of the central spots (see Section 3.1). As

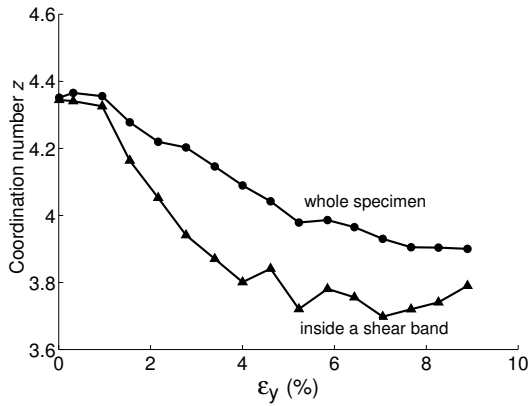


**Fig. 13** Lagrangian description of the motion: tracking of a pair of cylinders at times  $t_1, t_3, \dots, t_{15}$



**Fig. 15** Distribution of the contact orientations: before the isotropic compression (a-left), at times  $t_1$  (a-right),  $t_5$  (b-left) and  $t_{16}$  (b-right)

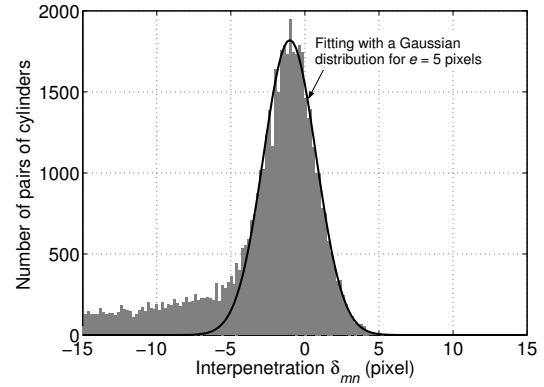
to the defects of the actual specimen we mention in particular: non-circular sections of the cylinders; variation of the diameters of the cylinders due to hygrometric factors; error in the correct location of the central spots on the faces of the cylinders. The diagram in Figure 17 represents the frequency distribution for the values of the interpenetration in the range  $\delta_{mn} \geq -e$ , with  $e = 15$  pixels. An extremely high value of tolerance  $e$  is considered in approaching the problem as the population of cylinders in contact has not



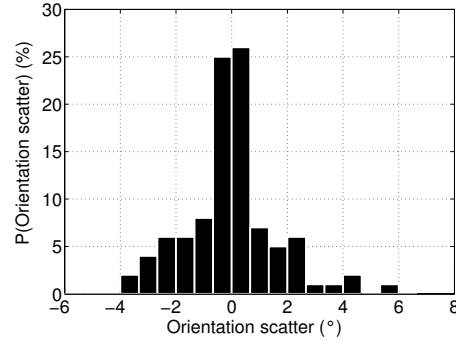
**Fig. 16** Evolution of the coordination number during the biaxial compression phase, for the whole specimen and inside a shear band

been selected yet from the total population of pairs of cylinders (i.e., all the pairs from about 1300 cylinders in each of the 16 images). A bell-like frequency distribution is observed on the right of the graph, which flattens for high, negative values of interpenetration. The bell-like branch is representative of the range in which the distribution of the values of interpenetration  $\delta_{mn}$  is shaped by the presence of actual contacts. Isolating this branch allows the detection of the appropriate value of tolerance  $e$  for the specimen. This value is chosen as the one giving the best-fitting, of the bell-like branch, with a Gaussian probability distribution. We obtained in particular  $e = 5$  pixels (Fig. 17), corresponding to an average interpenetration  $\langle \delta_{mn} \rangle = -1.02$  pixels (0.22 mm) and a standard deviation  $s = 1.78$  pixels (0.38 mm). Typically, for a Gaussian distribution, 99.7% of the population is enclosed within the range  $\langle \delta_{mn} \rangle \pm 3s$ , which directly suggests  $3s = 5.34$  pixels (1.15mm) as a measure of error for the interpenetration and  $3s/2 = 2.67$  pixels (0.58mm) as a measure of error for the representative positions of the cylinders, as commented before. A non-null value for the average interpenetration  $\langle \delta_{mn} \rangle$  is simply the manifestation of the diameters of the cylinders being systematically slightly bigger than originally measured, due probably to a variation of the hygrometric conditions that might have caused a slight dilation of the wooden cylinders.

The automated procedure for the determination of the spot coordinates (see Sec. 3.1) gives essentially the same accuracy as can be obtained by an operator who picks them visually on a screen. On a population of 99 cylinders (33 for each diameter), the scatter between the coordinates of the centre-spot detected via automated procedure or visually was 0 pixels for 50 cylinders, 1 pixel for 40 cylinders and  $\sqrt{2}$  pixels for 9 cylinders (i.e. when the two selections are the elements on the diagonal of a  $2 \times 2$  pixel matrix). Analogously, Figure 18 shows the statistical distribution of the scatter of the orientation angles, determined according to the automated procedure with respect to the visual procedure, for the same population of cylinders. For about 50% of the cylinders the scatter was lower than  $\pm 2/3^\circ$ . As the angles are computed in both cases from the centre- and the



**Fig. 17** Frequency distribution for the values of interpenetration  $\delta_{mn}$  lower than 15 pixels and fitting with a Gaussian probability distribution for  $e = 5$  pixels



**Fig. 18** Statistical distribution of the scatter of cylinder orientations

peripheral spot coordinates, the scatter depends on the cylinder diameters. A maximum value of about  $6^\circ$  was obtained for the smaller cylinders (12 mm diameter), while for the biggest cylinders (20 mm) the scatter did not exceed  $2.5^\circ$ .

## 5 Conclusions

We have presented in detail the use of a new numerical photogrammetry technique for measuring the microscale kinematics and the fabric properties of 2D analogue granular materials. In order to show the possibilities offered by this technique we have discussed the measurements obtained for an assembly of wooden rods (with circular section), consisting of approximately 1300 elements, subjected to a biaxial compression test. The technique offers the possibility to detect displacement and rotation of each “particle” in the analogue material during the whole deformation process, allowing a complete micromechanical analysis of the kinematics of the material. It is particularly suitable for investigating the role of particle rotation and mesoscale structures in the localization of deformation in granular materials. The properties of the material fabric (e.g. distribution of contact orientations, coordination number) and their evolution can also be captured, with reference to the whole specimen or to specific regions of interest.

Notably, the breakthrough with respect to previous methods used to get similar measurements, is that we have developed a technique semi-automated. Thus we can effectively investigate the kinematics and fabric of specimens in realistic tests, i.e. with a large number of particles and time steps. Notice that in the applicative example given herein, the size of the specimen in terms of number of “particles” was bounded by the dimension of the loading device, and not by the capability of the measuring technique. The role of the operator is reduced to a preliminary phase of parameter setting relative to the image filtering procedure. Furthermore, the accuracy of the technique was shown to be appropriate for the study of mesoscale kinematics and of fabric features of granular materials that are now being extensively — and almost exclusively — investigated by numerical simulation techniques.

It is worth saying that the application range of this technique is as wide as the class of 2D analogue granular materials. Tests have already been performed successfully with cylinders of different shapes than circular, with minor modifications of the method, to simulate more “realistic” granular materials. It is foreseen that this technique will provide, in the very near future, an experimental complement and validation of DEMs for investigating the microstructural kinematics and fabric features of granular materials.

**Acknowledgements** We are grateful to Jack Lanier of laboratoire 3S (Grenoble) for improving the results presented in this work with his important suggestions.

## A Painting references

spot/ background	colour	reference	cylinder diameter
central spot	blue	Humbrol gloss n° 14	20 mm
central spot	green	Revell colour n° 61	14 mm
central spot	red	Humbrol gloss n° 19	12 mm
periph. spot	white	Revell colour n° 70	—
background	matt black	Lefranc & Bourgeois, acrylic	—

## References

- Oda M. (1997) A micro-deformation model for the dilatancy of granular media. In: Chang C. S., Misra A., Liang R. Y. and Babic M. (ed) *Mechanics of Deformation and Flow of Particulate Material*, pages 24–87. ASCE and ASME, Springer, Berlin
- Åström J.A., Herrmann H.J., Timonen J. (2000) Granular packings and fault zones. *Phys. Rev. Lett.* 84: 4638–4641
- Alonso-Marroquín F., Vardoulakis I. (2005) Micromechanics of shear bands in granular media. In: García-Rojo R., Herrmann H. J., MacNamara S. (ed.) *Powders and Grains 2005*, Stuttgart, 18-22 July, pages 701–704. Taylor Francis Group, London
- Ehlers W., Volk W. (1998) On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar elastoplastic solid materials. *Int. J. Solids Struct.* 35:4597–4617
- Froio F., Tomassetti G., Vardoulakis I. (2006). Mechanics of granular materials: The discrete and the continuum descriptions juxtaposed. *Int. J. Solids Struct.* In Press.
- Gardiner B.S. , Tordesillas A. (2004) Micromechanics of shear bands. *International Journal of Solids and Structures* 41: 58855901
- Mühlhaus H.-B., Vardoulakis I. (1987) The thickness of shear band in granular materials. *Géotechnique* 37: 271–283
- Cundall P.A., Strack O.D.L. (1979) A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique* 29(1): 47–65
- Moreau J.J. (1994) Some numerical methods in multibody dynamics: application to granular materials. *Eur. J. Mech., A/Solids* 13(4): 93–114
- Schneebeli G. (1956) Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion. *C.R. Acad. Sci.*, 243, pages 125–126. Paris
- Dantu P. (1957) Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. In: *Proc. 4th Int. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering*, pages 144–148. Butterworths Scientific Publication, London
- Drescher A., de Josselin de Jong G. (1972) Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. *J. Mech. Phys. Solids* 20: 337–351
- Calvetti F., Combe G., Lanier J. (1997) Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material: relation between structure evolution and loading path. *Mech. Cohes.-Frict. Mater.* 2: 121–163
- Misra A., Jiang H., (1997) Measured kinematic fields in the biaxial shear of granular materials. *Computer and Geotechnics* 20(3/4): 267–285
- Oda M., Kazama H., Konishi J. (1998) Effects of induced anisotropy on the development of shear bands in granular materials. *Mech. Mater.* 28: 103-111
- Lanier J., Jean M. (2000) Experiments and simulations with 2D disks assembly. *Powder Technol.* 109: 206-221
- Joer H. (1991) “ $1\gamma 2\varepsilon$ ”: une nouvelle machine de cisaillement pour l'étude du comportement des milieux granulaires, PhD Thesis, UJF, Grenoble
- Joer H., Lanier J., Desrues J., Flavigny E. (1992) “ $1\gamma 2\varepsilon$ ”: a new shear apparatus to study the behavior of granular materials. *Geotech. Testing J.* 15(2): 129–137
- Joer H., Lanier J., Fahey M. (1998) Deformation of granular materials due to rotation of principal axes. *Géotechnique* 48(5): 605–619
- Luding S. (2005) Shear flow modeling of cohesive and frictional fine powder. *Powder Technology* 158: 45–50
- Bilotta E., Flora A., Lanier J., Viggiani G. (2002) Experimental observation of the behaviour of a 2D granular material with inclusions. *Riv. Ital. Geotecnica* 2: 9–22
- Desrues J., Viggiani G. (2004) Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 28: 279-321
- Kuhn M.R. (1999) Structured deformation in granular materials. *Mechanics of Materials* 31: 407–429
- Iwashita K., Oda M. (2000) Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method. *Powder Technology* 109: 192-205
- Bardet J.P., Proubet J. (1991) A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media. *Géotechnique* 41(4): 599–613
- Majmudar T.S., Behringer R.P. (2005) Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature* 435: 1079–1082
- Kruyt N.P., Rothenburg L. (2003) Statistics of forces and relative displacements at contacts in biaxial deformation of granular materials. In: K. Bagi (ed) *Proc. Quasi-static Deformations of Particulate Materials*, Budapest, 24-28 Aug., pages 141–150.

---

## Bibliographie

---

- [1] F. Alonso-Marroquin. *Micromechanical investigation of soil deformation: incremental response and granular ratcheting*. PhD thesis, University of Stuttgart, Stuttgart, 1998.
- [2] G. Amontons. *De la Résistance causée dans les machines tant par les frottements des parties qui les composent que par la roideur des cordes qu'on y employe et de la manière de calculer l'un et l'autre*. Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1699.
- [3] J.P. Bardet. Numerical simulations of the incremental responses of idealized granular materials. *International Journal of Plasticity*, 10(8):879–908, 1994.
- [4] J.P. Bardet and J. Proubet. Application of micromechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media. In Biarez & Gourvès, editor, *Powders and Grains*, Clermont-Ferrand, 4-8 Sept 1989. Balkema.
- [5] J.P. Bardet and J. Proubet. A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media. *Géotechnique*, 41(4):599–613, 1991.
- [6] D. Bigoni. Bifurcation and instability of non-associative elastoplastic solids. In H. Petryk, editor, *Material instabilities in elastic and plastic solids*, volume 414 of *CISM courses and lectures*, pages 1–52. Springer-Verlag, Wien New York, 2000.
- [7] D. Bigoni and T. Hueckel. Uniqueness and localization- I. Associative and nonassociative elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 28(2):197–213, 1991.
- [8] F. Calvetti, G. Combe, and J. Lanier. Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material: relation between structure evolution and loading path. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 2:121–163, 1997.
- [9] F. Calvetti and F. Emeriault. Interparticle forces distribution in granular materials: link with the macroscopic behaviour. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 4:247–279, 1999.
- [10] F. Calvetti, G. Viggiani, and C. Tamagnini. A numerical investigation of the incremental behavior of granular soils. *Rivista Italiana di Geotecnica*, 3:11–29, 2003.
- [11] B. Cambou and M. Jean. *Micromécanique des matériaux granulaires*. Hermes Science, 2001.
- [12] R. Chambon and D. Caillerie. Existence and uniqueness theorems for boundary value problems involving incrementally non-linear models. *Int. J. Solids Structures*, pages 5089–5099, 1999.
- [13] R. Chambon, D. Caillerie, and G. Viggiani. Loss of uniqueness and bifurcation vs

- instability: some remarks. *Failure, Degradation and Instabilities in Geomaterials, Revue Française de Génie Civil*, 8(5-6):517–535, 2004.
- [14] B. Chareyre. *Modélisation du comportement d'ouvrages composites sol-géosynthétique par éléments discrets - Application aux ancrages en tranchées en tête de talus*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2003.
- [15] J. Chu and W.K. Leong. Recent progress in experimental studies on instability of granular soil. In Labuz & Drescher, editor, *Int. Workshop on Bifurcations and Instabilities in Geomechanics*, pages 175–191. Swets & Zeitlinger, 2003.
- [16] J. Chu, S. Leroueil, and W.K. Leong. Unstable behaviour of sand and its implication for slope instability. *Can. Geotech. J.*, 40:873–885, 2003.
- [17] J. Chu, S-C.R. Lo, and I.K. Lee. Instability of granular soils under strain path testing. *J. Geotechnical Eng.*, 119(5):874–892, 1993.
- [18] J.L. Colliat-Dangus. *Comportement des matériaux granulaires sous fortes contraintes*. PhD thesis, USMG–INPG Grenoble, 1986.
- [19] G. Combe. Etude micromécanique d'un assemblage de rouleaux. Master's thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [20] G. Combe. *Origines géométriques du comportement quasi-statique des assemblages granulaires denses: étude par simulations numériques*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- [21] G. Combe and J.N. Roux. Strain versus stress in a model granular material: a devil's staircase. *Physical Review Letters*, 85(17):3628–3631, 2000.
- [22] C.A. Coulomb. *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*. Académie Royale des Sciences, 1773.
- [23] C.A. Coulomb. *Théorie des machines simples*. Académie Royale des Sciences, 1781.
- [24] P.A. Cundall. A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems. In *Proceedings of the symposium of the international society of rock mechanics*, volume 1, pages 132–150, 1971.
- [25] P.A. Cundall. Distinct element models of rock and soil structure. In E.T. Brown, editor, *Analytical and computational methods in engineering rock mechanics*, pages 129–163, London, 1987. George Allen and Unwin.
- [26] P.A. Cundall. Computer simulations of dense sphere assemblies. In M. Satake and J.T. Jenkins, editors, *Micromechanics of Granular Materials*, pages 113–123. Elsevier Science, 1988.
- [27] P.A. Cundall and O.D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1):47–65, 1979.
- [28] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J.N. Roux, and F. Chevoir. Rheophysics of dense granular materials: discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E*, 72(2):021309, 2005.
- [29] P. Dantu. Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. In *Proc. 4th Int. Conf. Soils Mech. Found.*, pages 144–148, London, 1957.
- [30] F. Darve. *Manuel de rhéologie des géomatériaux*, chapter L'écriture incrémentale des lois rhéologiques et les grandes classes de lois de comportement, pages 129–152. Presses ENPC, 1987.
- [31] F. Darve. *Manuel de rhéologie des géomatériaux*, chapter Les lois incrémentales non linéaires, pages 215–234. Presses ENPC, 1987.
- [32] F. Darve. Stability and uniqueness in geomaterials constitutive modelling. In Vardoulakis Chambon, Desrues, editor, *Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, pages 73–88. Balkema, 1994.

- 
- [33] F. Darve, E. Flavigny, and M. Méghachou. Constitutive modelling and instabilities of soil behaviour. *Computers and Geotechnics*, 17:203–224, 1995.
- [34] F. Darve, E. Flavigny, and M. Méghachou. Yield surfaces and principle of superposition: revisit through incrementally non-linear constitutive relations. *Int. J. Plasticity*, 11(8):927–948, 1995.
- [35] F. Darve and C. Lambert. Continuous and discrete modelling of failure in geomechanics. In F. Darve and I. Vardoulakis, editors, *Degradations and Instabilities in Geomaterials*, volume 461 of *CISM courses and lectures*. Springer, 2004.
- [36] F. Darve and F. Laouafa. Instabilities in granular materials and application to landslides. *Mech. Cohes. Frict. Mater.*, 5(8):627–652, 2000.
- [37] F. Darve and F. Laouafa. Slope failure analysis by a material instability criterion. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, ECCOMAS, 2000.
- [38] F. Darve and F. Laouafa. Modelling of granular avalanches as material instabilities. In Muehlhaus et al., editor, *Bifurcation and Localization in Geomechanics*, pages 29–36. Zwets and Zeitlinger, 2001.
- [39] F. Darve, F. Laouafa, and G. Servant. Discrete instabilities in granular materials. *Italian Geotechn. J.*, 37(3):57–67, 2003.
- [40] F. Darve and O. Pal. Liquefaction: a phenomenon specific to granular media. In Berhinger & Jenkins, editor, *Proc. 3<sup>th</sup> Int. Conf on Powders & Grains*, pages 69–73. Balkema, 1997.
- [41] F. Darve and X. Roguiez. Homogeneous bifurcation in soils. In Adachi et al., editor, *Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, pages 43–50. Balkema, 1998.
- [42] F. Darve, G. Servant, F. Laouafa, and H.D.V. Khoa. Failure in geomaterials: continuous and discrete analyses. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193(27-29):3057–3085, 2004.
- [43] F. Darve, L. Sibille, A Daouadji, and F. Nicot. Bifurcations in granular media: macro- and micro-mechanics approaches. *Comptes Rendus à l’Académie des Sciences*, 2007. Soumis.
- [44] J. Desrues and R. Chambon. Shear band analysis and shear moduli calibration. *International Journal of Solids and Structures*, 39:3757–3776, 2002.
- [45] J. Desrues and G. Viggiani. Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in grenoble using stereophotogrammetry. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 28:279–321, 2004.
- [46] C. di Prisco and S. Imposimato. Experimental analysis and theoretical interpretation of triaxial load controlled loose sand specimen collapses. *Mech. Cohes. Frict. Mater.*, 2:93–120, 1997.
- [47] F.V. Donzé and Magnier S.A. Spherical discrete element code. In *Discrete Element Project Report 2*, Laboratory GEOTOP, Université du Québec à Montréal, 1997.
- [48] A. Drescher and G. de Josselin de Jong. Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. *J. Mech. Phys. Solids*, 20:337–351, 1972.
- [49] D.C. Drucker. A definition of stable inelastic material. *J. Applied Mech.*, 26:101–106, 1959.
- [50] J.D. Eckersley. Instrumented laboratory flowslides. *Géotechnique*, 40(3):489–502, 1990.
- [51] A Gajo. The influence of system compliance on collapse of triaxial sand samples. *Can. Geotech. J.*, 41:257–273, 2004.
- [52] A. Gajo, L. Piffer, and F. De Polo. Analysis of certain factors affecting the unstable behaviour of saturated loose sand. *Mech. Cohes.-Frict. Mater.*, 5:215–237, 2000.



- [53] Itasca Consulting Group. *PFC3D Particle FLOW Code in 3 Dimensions user's guide*. Minneapolis, second edition, June 2003.
- [54] G. Gudehus. A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. In *Proc. 3rd Numer. Meth. in Geomechanics*, Aachen, 2-6 April. A. A. Balkema.
- [55] S. Hentz. *Modélisation d'une structure en béton armée soumise à un choc par la méthode des éléments discrets*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2003.
- [56] R. Hill. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. of the Mech. and Phys. of Solids*, 6:239–249, 1958.
- [57] S. Imposimato and R. Nova. An investigation on the uniqueness of the incremental response of elastoplastic models for virgin sand. *Mech. Cohes. Frict. Mater.*, 3:65–87, 1998.
- [58] K. Iwashita and M. Oda. Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method. *Powder Technology*, 109:192–205, 2000.
- [59] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 177(3-4):235–257, 1999.
- [60] W.S. Jodrey and Tory E.M. Computer simulation of close random packing of equal spheres. *Physical Review A*, 32(4):2347–2351, 1985.
- [61] H. Joer. “ $1\gamma 2\varepsilon$ ” : *une nouvelle machine de cisaillement pour l'étude du comportement des milieux granulaires*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1991.
- [62] H. Joer, J. Lanier, J. Desrues, and E. Flavigny. “ $1\gamma 2\varepsilon$ ” : A new shear apparatus to study the behavior of granular media. *Geotechn. Testing J.*, 15(2):129–137, 1992.
- [63] H.D.V. Khoa. *Modélisations des glissements de terrain comme un problème de bifurcation*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2005.
- [64] H.D.V. Khoa, I.O. Georgopoulos, F. Darve, and F. Laouafa. Diffuse failure in geomaterials: Experiments and modelling. *Computers and Geotechnics*, 33:1–14, 2006.
- [65] Y. Kishino. On the incremental nonlinearity observed in a numerical model for granular media. *Rivista Italiana di Geotecnica*, 3:30–38, 2003.
- [66] Y. Kishino, H. Akaizawa, and K. Kaneko. On the plastic flow of granular materials. In Kishino, editor, *Powders and Grains*, pages 199–202. Zwets and Zeitlinger, 2001.
- [67] W.T. Koiter. On the thermodynamic background of elastic stability theory. *Problems of Hydrodynamics and continuum Mechanics, SIAM, Philadelphia*, pages 423–433, 1969.
- [68] P.V. Lade. Static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes. *Journal of Geotechnical Engineering*, 118(1):51–71, 1992.
- [69] P.V. Lade. Instability, shear banding, and failure in granular materials. *International Journal of Solids and Structures*, 39(13-14):3337–3357, 2002.
- [70] P.V. Lade and D. Pradel. Instability and plastic flow of soil. I: Experimental observations. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(11):2532–2550, 1990.
- [71] L. Lancelot, I. Shahrour, and M. Al Mahmoud. Instability and static liquefaction on proportional strain paths for sand at low stresses. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(11):1365–1372, 2004.
- [72] J. Lanier and M. Jean. Experiments and numerical simulations with 2D-disks assembly. *Powder Technology*, 109:206–221, 2000.
- [73] F. Laouafa and F. Darve. Modelling of slope failure by a material instability mechanism. *Computer and Geotechnics*, 29(4):301–325, 2002.
- [74] F. Laouafa, F. Darve, and J. Lanier. Instabilités dans les milieux granulaires et application aux glissement de terrains. Laboratoire Sols, Solides, Structures, Grenoble, 2001. Rapport interne.

- 
- [75] W.K. Leong, J. Chu, and C.I. Teh. Liquefaction and instability of a granular fill material. *Geotechnical Testing Journal*, 23(2):178–192, 2000.
- [76] J. Lindenberg and H.L. Koning. Critical density of sand. *Géotechnique*, 31(2):231–245, 1981.
- [77] A.E.H Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- [78] S. Luding. Stress distribution in static two-dimensional granular model media in the absence of friction. *Physical Review E*, 55(4):4720–4729, 1997.
- [79] S. Luding. Micro-macro transition for anisotropic, frictional granular packings. *International Journal of Solids and Structures*, 41:5821–5836, 2004.
- [80] S. Luding. Shear flow modeling of cohesive and frictional fine powder. *Powder Technology*, 158:45–50, 2005.
- [81] A.M. Lyapunov. Problème général de la stabilité des mouvements. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 9:203–274, 1907.
- [82] A. Mahboubi, A. Ghaouti, and B Cambou. La simulation numérique discrète du comportement des matériaux granulaires. *Revue Française de Géotechnique*, 76:45–61, 1996.
- [83] J. Mandel. Conditions de stabilité et postulat de drucker. *Rheology and Soil Mechanics*, J. Kravtchenko and P. M. Sirieys (eds), Springer, Berlin:58–68, 1966.
- [84] J.J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics, application to granular materials. *Eur. J. Mech A.*, 13(4):93–114, 1994.
- [85] T.T. Ng and R. Dobry. A non-linear numerical model for soil mechanics. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 16:247–263, 1992.
- [86] F. Nicot. From a constitutive modelling of a snowcover to the design of flexible structures. part I, mechanical modelling. *Int. J. of Solids and Structures*, 41(11-12):3317–3337, 2004.
- [87] F. Nicot and F. Darve. A multiscale approach to granular materials. *Mechanics of Materials*, 37(9):980–1006, 2005.
- [88] F. Nicot and F. Darve. Micro-mechanical investigation of material instability in granular assemblies. *Int. J. of Solids and Structures*, 43(11-12):3569–3595, 2006.
- [89] F. Nicot and F. Darve. A micro-mechanical investigation of bifurcation in granular materials. *Int. J. of Solids and Structures*, 2007. Soumis.
- [90] F. Nicot, F. Darve, and H.D.V. Khoa. Bifurcation and second order-work in granular materials. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2007. A paraître.
- [91] F. Nicot, L. Sibille, F.D. Donzé, and F. Darve. From microscopic to macroscopic second-order work in granular assemblies. *Mechanics of Materials*, 2007. A paraître.
- [92] R. Nova. Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programmes. *J. Mech. behav. Mater.*, 5(2):193–201, 1994.
- [93] R. Nova. Controllability of geotechnical testing. *Failure, Degradation and Instabilities in Geomaterials, Revue Française de Génie Civil*, 8(5-6):613–634, 2004.
- [94] R. Olivera. *Numerical simulations of undrained granular media*. PhD thesis, University of Waterloo, Waterloo, 2004.
- [95] V.A. Osinov and W. Wu. Instability and ill-posedness in the deformation of plastic solids: some correlations through simple examples. In Y. Wang and K. Hutter, editors, *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, pages 361–370, Aachen, 2005. Shaker Verlag.
- [96] S. Ouaguenouni and J.N. Roux. Force distribution in frictionless granular packings at rigidity threshold. *Europhysics Letters*, 39(2):117–122, 1997.

- [97] H. Petryk. A consistent energy approach to defining stability of plastic deformation processes. In *Stability in the mechanics of continua*, IUTAM Symposium, pages 262–272, Numbrecht, 1982. Springer-Verlag.
- [98] J.-P. Plassiard. *Modélisation discrète du comportement de merlons de protection lors d’impacts de blocs rocheux*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2006. A paraître.
- [99] F. Rajai. Features of force transmission in granular media. In Kishino, editor, *Powders and Grains*, pages 157–160. Swets & Zeitlinger, 2001.
- [100] F. Rajai, M. Jean, J.J. Moreau, and S. Roux. Force distribution in dense two-dimensional granular systems. *Physical Review Letters*, 77(2):274–277, 1996.
- [101] F. Rajai, S. Roux, and J.J. Moreau. Contact forces in a granular packing. *Chaos*, 9(3):544–550, 1999.
- [102] F. Rajai and D.E. Wolf. Features of static pressure in dense granular media. *Granular Matter*, 1:3–8, 1998.
- [103] F. Rajai, D.E. Wolf, M. Jean, and J.J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Physical Review Letters*, 80(1):61–64, 1998.
- [104] B. Raniecki. Uniqueness criteria in solids with non-associated plastic flow laws at finite deformations. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Tech.*, XXVII(8-9):391, 1979.
- [105] B. Raniecki and O.T. Bruhns. Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain. *J. Mech. Phys. Solids*, 29:153, 1981.
- [106] J.R. Rice. The localization of plastic deformation. In W.T. Koiter, editor, *Theoretical and Applied Mechanics*, Delft, 1976. North-Holland Publishing Company.
- [107] J.N. Roux. Matériaux granulaires modèles Etude par simulations numériques discrètes Comparaisons avec résultats expérimentaux. *Séminaire du Laboratoire Sols Solides Structures*, Grenoble, 2006.
- [108] P. Royis and Doanh T. Theoretical analysis of strain response envelopes using incrementally non-linear constitutive equations. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 22:97–132, 1998.
- [109] J.W. Rudnicki and J.R. Rice. Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371–394, 1975.
- [110] S. Sasitharan, P.K. Robertson, D.C. Sego, and N.R. Morgenstern. Collapse behavior of sand. *Canadian Geotechnical Journal*, 30(4):569–577, 1993.
- [111] G. Schneebeli. Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 243:125–126, 1956.
- [112] L. Scholtès. Instabilités et rupture dans les matériaux granulaires. Master’s thesis, Université Joseph Fourier, 2005.
- [113] G. Servant. *Modèles en risques naturels, cas des glissements de terrain*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [114] G. Servant, F. Darve, J. Desrues, and I.O. Georgopoulos. Diffuse modes of failure in geomaterials. In Di Benedetto et al., editor, *Deformation characteristics of geomaterials*, pages 181–200. Taylor & Francis Group, 2005.
- [115] L. Sibille, F.V. Donzé, F. Darve, and F. Nicot. Failure in granular media: a discrete analysis. In Garcia-Rojo, Herrmann and McNamara, editor, *Powders and grains 2005*, pages 123–127. Taylor & Francis Group, 2005.
- [116] L. Sibille, F.V. Donzé, F. Darve, and F. Nicot. Une approche discrète de la rupture dans les matériaux granulaires. In *XVIIe Congrès Français de Mécanique*, Troyes, 2005.
- [117] L. Sibille, F.V. Donzé, F. Darve, and F. Nicot. Une utilisation de la MED: la description de la rupture dans les sols. In *XXIIIe Rencontres Universitaires de Génie Civil*, Grenoble, 2005.

- 
- [118] L. Sibille and F. Froiio. A numerical photogrammetry technique for measuring micro-scale kinematics and fabric in schneebeli materials. *Granular Matter*, 2007. A paraître.
- [119] L. Sibille, F. Nicot, F.V. Donzé, and F. Darve. Material instability in granular assemblies from fundamentally different models. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2007. A paraître.
- [120] P. Skopek, N.R. Morgenstern, P.K. Robertson, and D.C. Segoo. Collapse of dry sand. *Can. Geotech. J.*, 31:1008–1014, 1994.
- [121] J.A. Sladen, R.D. D’Hollander, and J. Krahn. The liquefaction of sands, a collapse surface approach. *Can. Geotech. J.*, 22:564–578, 1985.
- [122] L. Staron. *Etude numérique des mécanismes de déstabilisation des pentes granulaires*. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, Paris, 2002.
- [123] C. Thornton and S.J. Antony. Quasi-static shear deformation of a soft particle system. *Powder Technology*, 109:179–191, 2000.
- [124] C. Truesdell. *Essays in the history of mechanics*. Springer-Verlag, 1968.
- [125] K.C. Valanis. On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials. *J. Applied Mechanics*, 52:649–653, 1985.
- [126] J. Weber. Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. *Bulletin de Liaison des Ponts-et-Chaussées*, 20:1–20, 1966.

