



**HAL**  
open science

# Contributions aux approches hamiltonienne et markovienne des systèmes quantiques ouverts

Ameur Dhahri

► **To cite this version:**

Ameur Dhahri. Contributions aux approches hamiltonienne et markovienne des systèmes quantiques ouverts. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2007. Français. NNT: . tel-00174273

**HAL Id: tel-00174273**

**<https://theses.hal.science/tel-00174273>**

Submitted on 22 Sep 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD (LYON I)  
préparée à l'Institut Camille Jordan  
Laboratoire de mathématiques  
UMR 5208 CNRS-UCBL

CONTRIBUTIONS AUX APPROCHES  
HAMILTONIENNE ET MARKOVIENNE DES  
SYSTÈMES QUANTIQUES OUVERTS

**Ameur DHAHRI**

Soutenue à Lyon le vendredi 13 juillet 2007 devant le jury :

Stéphane ATTAL (Université Lyon I), Directeur

Alain JOYE (Université Grenoble I)

Johannes KELLENDONK (Université Lyon I)

Yan PAUTRAT (Université Paris XI)

Au vu des rapports de :

Alain JOYE

Yan PAUTRAT

Claude Alain PILLET (Centre de Physique Théorique de Marseille)



CONTRIBUTIONS AUX APPROCHES  
HAMILTONIENNE ET MARKOVIENNE DES  
SYSTÈMES QUANTIQUES OUVERTS.

Ameur DHAHRI



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Éléments de la théorie générale des systèmes quantiques ouverts</b>	<b>13</b>
1.1	Approche hamiltonienne . . . . .	13
1.1.1	Théorie de Tomita-Takesaki . . . . .	14
1.1.2	Systèmes dynamiques quantiques . . . . .	19
1.1.3	États KMS . . . . .	20
1.1.4	Représentation cyclique d'un système fini . . . . .	22
1.1.5	Espace de Fock . . . . .	24
1.1.6	Algèbres des relations de commutations canoniques . . . . .	26
1.1.7	Représentation cyclique d'Araki-Woods d'un réservoir bosonique . . . . .	26
1.1.8	Retour à l'équilibre . . . . .	28
1.2	Approche markovienne . . . . .	29
1.2.1	Semigroupes dynamiques quantiques . . . . .	30
1.2.2	Existence, unicité, retour à l'équilibre . . . . .	33
1.2.3	Décohérence quantique . . . . .	35
1.2.4	Condition du bilan détaillé quantique . . . . .	35
1.3	Calcul stochastique quantique . . . . .	35
1.3.1	Bruits quantiques . . . . .	36
1.3.2	Intégrales stochastiques quantiques . . . . .	37
1.3.3	Équation de Langevin quantique . . . . .	40
1.3.4	Hamiltonien associé à une équation de Langevin quantique . . . . .	42
1.4	Modèles d'interactions quantiques répétées . . . . .	45
1.4.1	Modèle discret . . . . .	45
1.4.2	Structure du champ continu . . . . .	47
1.4.3	Théorèmes de convergence . . . . .	52
1.4.4	Hamiltoniens d'interactions répétées typiques . . . . .	55
<b>2</b>	<b>Contribution n° 1 : Propriétés markoviennes du modèle de spin-boson</b>	<b>57</b>
2.1	Le modèle . . . . .	58
2.1.1	Système spin-boson . . . . .	58

2.1.2	Représentation semistandard du système spin-boson . . . . .	59
2.1.3	Espace à une particule du réservoir . . . . .	61
2.2	Limite de couplage faible . . . . .	61
2.2.1	Théorie abstraite de la limite de couplage faible . . . . .	61
2.2.2	Application au système spin-boson . . . . .	62
2.3	Lindbladien du système spin-boson . . . . .	70
2.4	Propriétés de l'équation maîtresse . . . . .	74
2.4.1	Équation maîtresse du système spin-boson . . . . .	74
2.4.2	Décohérence quantique du spin . . . . .	76
2.4.3	Condition du bilan détaillé quantique . . . . .	76
2.5	Retour à l'équilibre du système spin-boson . . . . .	77
2.5.1	Cas hamiltonien . . . . .	77
2.5.2	Cas markovien . . . . .	78
2.5.3	Système spin-boson à la température zéro . . . . .	79
2.6	Équation de Langevin quantique du système spin-boson . . . . .	81
2.7	Modèle d'interactions répétées associé au système spin-boson . . . . .	83
2.7.1	Cas de la température zéro . . . . .	84
2.7.2	Cas d'une température strictement positive . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Contribution n° 2 : Propriétés markoviennes du modèle de Pauli-Fierz</b>	<b>89</b>
3.1	Le modèle . . . . .	89
3.1.1	Opérateurs de création/annihilation du système couplé . . . . .	90
3.1.2	Représentation semistandard du système de Pauli-Fierz . . . . .	91
3.2	Limite de couplage faible du système de Pauli-Fierz . . . . .	92
3.3	Lindbladien du système de Pauli-Fierz . . . . .	96
3.3.1	Équation maîtresse . . . . .	101
3.3.2	Condition du bilan détaillé quantique . . . . .	102
3.3.3	Retour à l'équilibre du système de Pauli-Fierz . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Contribution n° 3 : Un modèle lindbladien pour une chaîne de spins couplée à des bains thermiques</b>	<b>105</b>
4.1	Lindbladien d'une chaîne de $N$ spins . . . . .	105
4.1.1	Interactions répétées . . . . .	105
4.1.2	Chaîne de spins couplée à un seul bain thermique . . . . .	106
4.1.3	Chaîne de spins couplée à deux bains thermiques . . . . .	109
4.2	Propriétés markoviennes d'une chaîne de $N$ spins couplée à deux bains thermiques . . . . .	109
4.2.1	Équation maîtresse . . . . .	110
4.2.2	Retour à l'équilibre . . . . .	111
4.2.3	États locaux . . . . .	114

4.2.4	Production d'entropie . . . . .	118
4.2.5	Condition du bilan détaillé quantique . . . . .	121
4.3	Chaîne de spins couplée à plusieurs bains thermiques . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Contribution n° 4 : Interactions quantiques répétées et marches aléatoires sur les unitaires</b>	<b>125</b>
5.1	Dynamique discrète d'une chaîne atomique et marches aléatoires sur $\mathbb{R}^N$ . . . . .	125
5.1.1	Structure de la chaîne atomique . . . . .	126
5.1.2	Marches aléatoires sur $\mathbb{R}^N$ . . . . .	126
5.2	Marches aléatoires sur les unitaires . . . . .	129
5.3	Exemple : $N = 1$ . . . . .	134
5.4	Équations de Langevin quantiques . . . . .	137
5.4.1	Équations de structure multidimensionnelles . . . . .	137
5.4.2	Limite continue . . . . .	141
<b>6</b>	<b>Contribution n° 5 : Équations de Langevin quantiques associées à un bain thermique quantique</b>	<b>145</b>
6.1	Petit système en interaction avec un bain thermique quantique . . .	146
6.1.1	Modèle d'interactions répétées . . . . .	146
6.1.2	Représentation GNS . . . . .	147
6.2	Hamiltonien d'interactions répétées avec normalisation d'ordre $\sqrt{\hbar}$ .	148
6.3	Hamiltonien d'interactions répétées avec normalisation d'ordre $\hbar$ . .	151





# Remerciements

Je voudrais remercier en tout premier lieu Stéphane Attal pour avoir accepté de diriger cette thèse. Je ne saurais jamais assez le remercier pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués.

C'est un réel plaisir pour moi de remercier Alain Joye, Yan Pautrat et Claude Alain Pillet qui, en acceptant d'être les rapporteurs de ma thèse, m'ont fait un très grand honneur. Je leur suis extrêmement reconnaissant de leur lecture critique et attentive.

Alain Joye était l'un de mes meilleurs enseignants en DEA. C'est un grand honneur de le voir parmi les rapporteurs et le jury de ma thèse.

Je ne saurais également trop remercier Yan Pautrat qui a toujours manifesté un vif intérêt à l'égard de mon travail et qui m'a toujours donné de bons conseils.

Je voudrais profiter aussi de cette occasion pour exprimer toute ma gratitude à Claude Alain Pillet. Mon séjour à Marseille m'a permis d'apprécier sa vision des mathématiques, son accueil très chaleureux et ses qualités humaines exceptionnelles.

Johannes Kellendonk a eu la gentillesse d'accepter de faire partie du jury, je suis très sensible à l'honneur qu'il me fait.

Mes remerciements les plus sincères vont aussi à l'ensemble du personnel administratif de l'Institut Fourier et de l'Institut Camille Jordan. Je pense en particulier à Arlette Guttin-Lombard, Mahjoub Zamrani, Monique Gaffier, Thierry Dumont...

Je tiens à remercier également tous les thésards de l'Institut Camille Jordan, ainsi que tous mes camarades : Christophe, Clément (Dombry et Pellegrini), Guillaume, Dika, Houssam, Ion, Lucas, Xavier et tous ceux que j'aurais malheureusement oubliés et qui se reconnaîtront.

Je profite aussi de cette occasion pour remercier Alexis Tchoudjem qui a été un bon soutien et un véritable ami. Je tiens à remercier aussi Rouchdi Bahloul, Ricardo Biagioli, Lorenzo Brandolese, Jérôme Germoni, Frédéric Jouhet...

Je remercie aussi ma famille, mes parents, mes proches et tous mes amis pour m'avoir soutenu pendant cette thèse.



# Introduction

Un système quantique ouvert est un petit système  $\mathcal{H}_S$  en interaction avec un système extérieur  $\mathcal{H}_R$  typiquement : réservoir, bain thermique, environnement...

Dans la théorie des systèmes quantiques ouverts, les physiciens et les mathématiciens s'intéressent souvent à décrire l'interaction entre les deux systèmes ( $\mathcal{H}_S$  et  $\mathcal{H}_R$ ) et étudier les propriétés physiques qui y sont liées telles que : le retour à l'équilibre (cf [DJ2], [JP2], [FaR2], [Fr1]), l'existence d'un état stationnaire (cf [FaR1], [Fr2])...

Pour faire cette description, il y a dans la littérature essentiellement deux approches : l'approche hamiltonienne et l'approche markovienne.

L'approche hamiltonienne consiste à décrire l'ensemble du système : petit système, système extérieur et leur interaction. Le petit système est décrit par un hamiltonien  $H_S$  défini sur  $\mathcal{H}_S$ . Le système extérieur est décrit par un hamiltonien  $H_R$  défini sur  $\mathcal{H}_R$ . L'interaction entre les deux systèmes est décrite par un opérateur  $Q$  défini sur  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$ , qui est borné dans le cas d'un système extérieur fermionique et non borné dans le cas d'un système extérieur bosonique. Les outils essentiels de cette approche sont : la théorie modulaire (cf [BR1]), la théorie des systèmes dynamiques quantiques, des liouvilliens, des états KMS (cf [DJ2], [DJP], [JP2])...

L'approche markovienne consiste à se concentrer sur la dynamique effective du petit système (dans cette approche, on renonce à décrire le système extérieur, souvent trop compliqué, inconnu ou inaccessible). Cette dynamique effective est décrite par un semigroupe d'applications complètement positives  $(T_t^*)_{t \geq 0}$  agissant sur les états (matrice densité sur  $\mathcal{H}_S$ ) du petit système. Le générateur  $\mathcal{L}^*$  (lindbladien) de ce semigroupe permet de définir ce qu'on appelle l'équation maîtresse associée à un état initial  $\rho$  du petit système,

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}^*(\rho(t)), \quad \rho(0) = \rho.$$

Une telle équation permet d'étudier la décohérence quantique (cf [BO]), l'existence d'un état stationnaire... Les outils essentiels de cette approche sont : les semigroupes dynamiques quantiques (cf [ALL], [Fa2]), lindbladiens (cf [ALL], [L]), équations différentielles stochastiques quantiques (cf [HP], [M], [P])...

L'un des outils qui permettent de passer de l'approche hamiltonienne à l'approche markovienne est d'utiliser la limite de couplage faible. Dans le cas où  $\mathcal{H}_R$  est un système extérieur fermionique, il est prouvé dans [Da1], [Da2] que la limite de couplage faible donne lieu à une dynamique markovienne irréversible agissant sur les états du petit système. Il est prouvé aussi dans [DF] que par la limite de couplage faible, on peut obtenir une dynamique markovienne irréversible agissant

sur les observables associés au petit système. De plus, les auteurs ont montré qu'il y a équivalence entre les deux versions de la limite de couplage faible. Dans le cas d'un système extérieur bosonique avec un hamiltonien d'interaction dipolaire, il est prouvé dans [AcFrL1]–[AcFrL4] que la limite de couplage faible donne lieu à une équation de Langevin quantique. Dans [AcPV] et [Pe], les auteurs montrent aussi que par la loi de densité faible, on peut obtenir des équations différentielles stochastiques à partir de la description hamiltonienne des deux systèmes en interaction  $\mathcal{H}_S$  et  $\mathcal{H}_R$ .

À chaque équation de Langevin quantique de solution unitaire  $U$  est associée un groupe fortement continu à paramètre  $V$  (cf [Ma1], [Fr3]) de générateur  $K$ . L'hamiltonien  $K$  caractérise complètement  $V$  et la solution  $U$ . En effet, si  $\Theta$  est l'opérateur shift de générateur  $E_0$ , l'hamiltonien  $K$  permet de définir la solution  $U$  comme produit de deux groupes unitaires fortement continues à un paramètre

$$U(t) = \Theta_t^* V(t) = e^{itE_0} e^{-itK}, \quad t \geq 0.$$

Cela permet d'obtenir une évolution hamiltonienne à partir d'une évolution irréversible.

Récemment, dans les travaux d'Attal et Pautrat (cf [AtP1]), on modélise le système extérieur  $\mathcal{H}_R$  par une chaîne infinie de copies identiques  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}$ . L'interaction entre le petit système et la chaîne atomique  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}$  se fait de la manière suivante : le petit système interagit avec les copies  $\mathcal{H}$  l'une après l'autre durant le même intervalle de temps  $[0, h]$ . L'interaction entre le petit système et une copie de la chaîne est décrite par un hamiltonien  $H$  défini sur  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}$ . On obtient donc un modèle discret d'interactions : les interactions répétées. Dans [AtP1], il est prouvé que la limite continue ( $h$  tend vers 0) de l'équation d'évolution discrète associée au modèle discret donne lieu à une équation de Langevin quantique. Dans cette limite, il y a trois normalisations du temps : une d'ordre 1, une d'ordre  $\sqrt{h}$  et une d'ordre  $h$ . La relation entre la limite de couplage faible et la normalisation d'ordre  $\sqrt{h}$  a été traitée dans [AtJ].

Dans cette thèse, nous avons étudié les liens entre les deux approches dans des modèles particuliers. Dans les chapitres 2 et 3, nous sommes intéressés aux modèles de spin-boson et de Pauli-Fierz. Les approches hamiltoniennes de ces deux modèles ont été traitées respectivement dans [JP2] et [DJ2]. En particulier, ils ont montré le retour à l'équilibre pour toute température  $T > 0$ . De notre côté, nous avons étudié les propriétés markoviennes de ces deux modèles. Nous avons donné une preuve de la limite de couplage faible et nous avons calculé les lindbladiens associés. Nous avons prouvé quelques propriétés physiques des équations maîtresses associées telles que : la condition du bilan détaillé quantique et le retour à l'équilibre pour toute température  $T > 0$ . Le retour à l'équilibre à la température zéro a été prouvé dans le cas du modèle de spin-boson. De plus, nous avons présenté un modèle d'interactions répétées associé à ce dernier.

Dans la chapitre 4, nous avons présenté un modèle lindbladien associé à une chaîne de  $N$  spins en interaction avec  $r$  ( $1 \leq r \leq N$ ) bains thermiques de températures inverses  $\beta^{(k_1)}, \dots, \beta^{(k_r)}$ . Pour  $r \geq 2$  et  $\beta^{(k_1)} = \dots = \beta^{(k_r)}$ , nous avons donné explicitement l'état stationnaire et nous avons montré qu'il est unique. Ensuite, nous avons prouvé le retour à l'équilibre pour toutes températures inverses  $\beta^{(k_1)}, \dots, \beta^{(k_r)}$ . Les états locaux ont été calculés dans le cas où  $r = 2$  et  $N = 2, 3, 4$ . Finalement pour  $r \geq 2$  et  $\beta^{(k_1)} = \dots = \beta^{(k_r)}$ , nous avons donné la forme explicite de la production d'entropie.

Dans le chapitre 5, nous avons étudié des équations d'évolution discrètes associées aux modèles d'interactions répétées et qui sont dirigées par des bruits classiques discrets. Nous avons construit une famille d'opérateurs unitaires et nous avons montré que les solutions de ces équations sont des marches aléatoires sur le groupe unitaire. Ensuite, nous avons montré que la limite continue de ces équations donne lieu à des équations de diffusion classiques.

Dans la chapitre 6, nous avons traité l'hamiltonien d'interactions répétées avec une normalisation d'ordre  $h$ . Plus particulièrement, nous avons établi le lien entre cet hamiltonien et la loi de densité faible. Nous avons montré que par le passage à la limite continue de l'équation d'évolution discrète associée à ce modèle, nous obtenons une équation différentielle stochastique dirigée par des bruits de Poisson.



# Chapitre 1

## Éléments de la théorie générale des systèmes quantiques ouverts

Ce premier chapitre est consacré à rappeler quelques ingrédients mathématiques nécessaires qui permettent d'aborder les approches hamiltonienne, markovienne et les interactions quantiques répétées.

Dans la section 1.1, nous présentons les outils liés à l'approche hamiltonienne. Plus particulièrement, nous allons décrire les notions des algèbres de von Neumann, théorie modulaire, systèmes dynamiques quantiques, liouvillien standard, états KMS, représentation cyclique d'un système fini, représentation d'Araki-Woods et retour à l'équilibre.

Dans la section 1.2, nous rappelons les définitions des semigroupes dynamiques quantiques, décohérence quantique, condition du bilan détaillé quantique. Ensuite, nous donnons des résultats d'existence, d'unicité d'un état stationnaire et de retour à l'équilibre.

Dans la section 1.3, nous commençons par rappeler les éléments de bases du calcul stochastique quantique tels que : les bruits quantiques, intégrales stochastiques quantiques, équations de Langevin quantiques. Ensuite, nous décrivons l'hamiltonien associé à une équation de Langevin quantique.

Dans la section 1.4, nous décrivons les modèles d'interactions quantiques répétées et nous présentons les résultats essentiels.

### 1.1 Approche hamiltonienne

L'approche hamiltonienne consiste à décrire l'interaction entre un système quantique et un système extérieur (réservoir, bain thermique,...) par un modèle hamiltonien et étudier les propriétés ergodiques du système dynamique associé. Dans cette approche, les outils nécessaires sont typiquement : la théorie modulaire des al-



gèbres de von Neumann, les états KMS, les systèmes dynamiques, la représentation standard et le liouvillien standard...

### 1.1.1 Théorie de Tomita-Takesaki

Dans cette sous-section nous rappelons quelques définitions des topologies sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert séparable. Ensuite, nous définissons les notions de  $W^*$ -algèbres, états et représentations. Finalement, nous présentons quelques résultats liés à la théorie modulaire.

#### a) Topologies sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. On désigne par  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  l'algèbre des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ .

**Topologies forte et  $\sigma$ -forte sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  :** La *topologie forte* sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  est définie par la famille des semi-normes  $(P_\xi)_{\xi \in \mathcal{H}}$ , où

$$P_\xi(A) := \|A\xi\|, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Autrement dit, une suite généralisée  $(A_\alpha)$  d'opérateurs bornés converge fortement vers  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  si et seulement si

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|(A_\alpha - A)\xi\| = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Considérons maintenant une suite d'éléments  $(\xi_n)_n$  de  $\mathcal{H}$  telle que  $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$ . Alors, l'application

$$P_{\xi_n}(A) := \left( \sum_{n=0}^{\infty} \|A\xi_n\|^2 \right)^{1/2}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

est une semi-norme sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . L'ensemble de ces semi-normes définit la *topologie  $\sigma$ -forte* sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

**Topologies faible et  $\sigma$ -faible sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  :** La *topologie faible* sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  est définie par la famille des semi-normes  $(P_{\xi,\eta})_{\xi,\eta \in \mathcal{H}}$  vérifiant

$$P_{\xi,\eta}(A) := |\langle \xi, A\eta \rangle|, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Ainsi, une famille  $(A_\alpha)_\alpha$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  converge faiblement vers  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  si et seulement si

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle \xi, (A_\alpha - A)\eta \rangle = 0, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Une famille d'opérateurs  $(A_\alpha)_\alpha$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  converge  $\sigma$ -faiblement vers un élément  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  si et seulement si

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_n \langle u_n, (A_\alpha - A)v_n \rangle := 0,$$

pour toutes suites  $(u_n)_n$ ,  $(v_n)_n$  d'éléments de  $\mathcal{H}$  telles que les séries  $\sum_n \|u_n\|^2$  et  $\sum_n \|v_n\|^2$  convergent.

Il est clair que  $(A_\alpha)_\alpha$  converge  $\sigma$ -faiblement vers  $A$  si et seulement si, pour tout opérateur à trace  $\rho$  sur  $\mathcal{H}$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{Tr}(\rho(A_\alpha - A)) = 0.$$

Notons que dans la littérature, la topologie  $\sigma$ -faible est appelée parfois topologie  $w^*$ .

## b) Algèbres de von Neumann

On se propose dans cette partie de définir les notions de  $C^*$ -algèbres et de  $W^*$ -algèbres et pour plus de détails on renvoie le lecteur à [BR1].

### Définition 1.1

i) On appelle algèbre de Banach, tout espace de Banach complexe  $\mathcal{A}$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  tel que

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

ii) Une  $*$ -algèbre de Banach est une algèbre de Banach munie d'une involution  $*$  :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $A \mapsto A^*$  telle que pour tous  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} (A + B)^* &= A^* + B^*, \\ (\lambda A)^* &= \bar{\lambda} A^*, \\ (AB)^* &= B^* A^*, \\ (A^*)^* &= A. \end{aligned}$$

iii) Une  $C^*$ -algèbre est une  $*$ -algèbre de Banach telle que

$$\|A^* A\| = \|A\|^2.$$

Rappelons maintenant qu'une algèbre de von Neumann (ou  $W^*$ -algèbre) peut être définie d'une manière intrinsèque comme une  $C^*$ -algèbre spéciale. Cependant, nous allons considérer uniquement les algèbres de von Neumann concrètes, i.e : des sous- $*$ -algèbres unitaires d'opérateurs sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  faiblement,  $\sigma$ -faiblement ou fortement fermé (cf [BR1] pp.71-72, [Fa2] pp.10). Cela nous permet

de parler plutard des projecteurs spectraux d'un élément affilié à une algèbre de von Neumann, de définir la notion d'une  $W^*$ -dynamique, d'étudier les propriétés ergodiques d'un système quantique...

**Définition 1.2** Une algèbre de von Neumann est une sous- $*$ -algèbre de  $B(\mathcal{H})$ , contenant l'identité, qui est faiblement (ou  $\sigma$ -faiblement ou fortement ou  $\sigma$ -fortement) fermée.

Maintenant, on se propose de donner une caractérisation des algèbres de von Neumann. Considérons un sous-ensemble  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . On définit le centre de  $\mathcal{M}$ , noté  $\mathcal{M}'$  par

$$\mathcal{M}' := \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \text{ tel que } BM = MB, \forall M \in \mathcal{M}\}.$$

L'espace  $\mathcal{M}'$  est appelé aussi le *commutant* de  $\mathcal{M}$ . De manière analogue, on définit

$$\mathcal{M}'' := (\mathcal{M}')'.$$

Une caractérisation des algèbres de von Neumann est donnée par la théorème suivant (cf [BR1] pp.72).

**Théorème 1.3** (*Théorème du bicommutant*)

Si  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $\mathcal{M}$  une sous- $*$ -algèbre de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  contenant l'identité, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\mathcal{M}$  est une algèbre de von Neumann,
- ii)  $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ .

### c) États et représentations

L'état physique d'un système quantique est représenté par une forme linéaire positive  $\omega$ , appelé *état*, définie sur une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  telle que  $\omega(I) = 1$ . On dit que  $\omega$  est *fidèle* si

$$\omega(A^*A) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Un état  $\omega$  défini sur une  $W^*$ -algèbre  $\mathcal{M}$  agissant sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est dit *vecteur* s'il existe un vecteur unitaire  $\Omega$  dans  $\mathcal{H}$  tel que

$$\omega(A) := \langle \Omega, A\Omega \rangle, \forall A \in \mathcal{M}.$$

Un état  $\omega$  défini sur une  $W^*$ -algèbre  $\mathcal{M}$  agissant sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est dit *normal* s'il existe un opérateur à trace  $\rho$  positif sur  $\mathcal{H}$ , appelé *matrice densité* tel que  $\text{Tr}(\rho) = 1$  et

$$\omega(A) := \text{Tr}(\rho A), \forall A \in \mathcal{M}.$$

**Définition 1.4** On appelle représentation d'une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , tout couple  $(\mathcal{H}, \pi)$  où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert et  $\pi$  est un morphisme de  $*$ -algèbre de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

Une représentation  $(\mathcal{H}, \pi)$  d'une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est dite *fidèle* si

$$\pi(A^*A) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Soit  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une représentation. On dit que  $\pi$  est *normale* si  $\pi$  est  $\sigma$ -faiblement continue. Il suit de [DJP] que  $\pi(\mathcal{M})$  est une algèbre de von Neumann concrète si et seulement si  $\pi$  est normale.

Tout état  $\omega$  sur une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  peut être représenté comme un état vecteur. Ce résultat est décrit par le théorème suivant (cf [BR1]).

**Théorème 1.5** (*Représentation GNS*)

Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre unitaire et  $\omega$  un état sur  $\mathcal{A}$ . Alors, il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\omega$ , une représentation  $\pi_\omega$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$  et un vecteur unitaire  $\Omega_\omega$  dans  $\mathcal{H}_\omega$  tels que :

- i)  $\omega(A) = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle \quad \forall A \in \mathcal{A}$ ,
- ii)  $\{\pi_\omega(A)\Omega_\omega, A \in \mathcal{A}\}$  est dense dans  $\mathcal{H}_\omega$ .

Le triplet  $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$  est appelé la *représentation GNS* (ou *cyclique*) du couple  $(\mathcal{A}, \omega)$ . De plus, le vecteur  $\Omega_\omega$  est appelé *vecteur cyclique* de  $\omega$ .

En outre, cette représentation est unique à un isomorphisme près, i.e : s'il existe une autre représentation GNS  $(\mathcal{H}', \pi', \Omega')$ , alors l'opérateur

$$\begin{aligned} U : \mathcal{H}_\omega &\rightarrow \mathcal{H}' \\ \pi_\omega(A)\Omega_\omega &\mapsto \pi'(A)\Omega' \end{aligned}$$

est unitaire, ce qui implique que

$$\omega(A) = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle = \langle \Omega', \pi'(A)\Omega' \rangle.$$

Maintenant, nous allons rappeler quelques résultats liés à la théorie modulaire (cf [BR1], [DJP], [JP2]).

## b) Opérateurs modulaires

**Définition 1.6** Soit  $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$  une algèbre de von Neumann, où  $\mathcal{K}$  est un espace de Hilbert et soit  $\Omega$  un vecteur de  $\mathcal{K}$ .

- i) On dit que  $\Omega$  est *cyclique* pour  $\mathcal{N}$  si  $\mathcal{N}\Omega$  est dense dans  $\mathcal{K}$ ,
- ii) On dit que  $\Omega$  est *séparant* pour  $\mathcal{N}$  si  $A\Omega = 0 \Rightarrow A = 0$ .

Pour la preuve de la proposition suivante, on renvoie le lecteur à [BR1], pp. 85.

**Proposition 1.7** *Soient  $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$  une algèbre de von Neumann et  $\Omega$  un vecteur de  $\mathcal{K}$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $\Omega$  est cyclique pour  $\mathcal{N}$ ,*
- ii)  $\Omega$  est séparent pour  $\mathcal{N}'$ .*

Considérons maintenant un couple  $(\mathcal{M}, \omega)$ , où  $\mathcal{M}$  est une  $W^*$ -algèbre agissant sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et  $\omega$  un état normal fidèle sur  $\mathcal{M}$ . Alors, il existe une matrice densité  $\rho$  telle que  $\omega(A) = \text{Tr}(\rho A)$ , pour tout  $A \in \mathcal{M}$ . Soit  $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$  la représentation GNS associée au couple  $(\mathcal{M}, \omega)$ . Supposons que  $\pi_\omega$  est normale. Alors,  $\pi_\omega(\mathcal{M})$  est une algèbre de von Neumann concrète.

**Proposition 1.8** *Si  $\omega$  est un état fidèle, alors le vecteur  $\Omega_\omega$  est cyclique et séparent pour  $\pi_\omega(\mathcal{M})$  et  $\pi_\omega(\mathcal{M})'$ .*

Soit  $S_0$  l'opérateur anti-linéaire défini par

$$\begin{aligned} S_0 : \pi_\omega(\mathcal{M})\Omega_\omega &\longrightarrow \pi_\omega(\mathcal{M})\Omega_\omega \\ \pi_\omega(A)\Omega_\omega &\longmapsto \pi_\omega(A)^*\Omega_\omega. \end{aligned}$$

D'après la proposition énoncée ci-dessus,  $S_0$  est densément défini. De plus, il est fermable et on désigne par  $S$  sa fermeture. La décomposition polaire de  $S$  est donnée par

$$S = J\Delta^{1/2},$$

où  $J$  est un opérateur qui s'étend en un opérateur anti-unitaire sur  $\mathcal{H}$  et  $\Delta$  est un opérateur inversible vérifiant  $\Delta = SS^*$ .

Les opérateurs  $\Delta$  et  $J$  sont appelés respectivement *l'opérateur modulaire* et *la conjugaison modulaire* associés au couple  $(\mathcal{M}, \omega)$ .

Le résultat principal de la théorie modulaire est donné par le théorème suivant (cf [BR1]).

**Théorème 1.9** *(Théorème de Tomita-Takesaki)*

*Soient  $\mathcal{M}$  une  $W^*$ -algèbre et  $\omega$  un état sur  $\mathcal{M}$  de vecteur cyclique  $\Omega_\omega$  qui est séparent pour  $\mathcal{M}$ . On désigne respectivement par  $\Delta$  et  $J$  l'opérateur modulaire et la conjugaison modulaire associés au couple  $(\mathcal{M}, \omega)$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a*

$$\begin{aligned} J\pi_\omega(\mathcal{M})J &= \pi_\omega(\mathcal{M})', \\ \Delta^{it}\pi_\omega(\mathcal{M})\Delta^{-it} &= \pi_\omega(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

### c) Forme standard

La *forme standard* d'une  $W^*$ -algèbre  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert, est un quadruplet  $(\mathcal{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$ , où  $J$  est un opérateur anti-unitaire sur  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}^+$  est un cône auto-duale tels que :

- 1)  $J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$ ,
- 2)  $JAJ = A^*$  pour tout  $A \in \mathcal{M}'$ ,
- 3)  $J\Psi = \Psi$  pour tout  $\Psi \in \mathcal{H}^+$ ,
- 4)  $AJA\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$  pour tout  $A \in \mathcal{M}$ .

Notons que si  $\mathcal{M}$  est une  $W^*$ -algèbre, on dit alors que  $(\pi, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$  est la *représentation standard* de  $\mathcal{M}$  si  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  est une représentation injective et  $(\pi(\mathcal{M}), \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$  est une forme standard.

Maintenant, nous énonçons le théorème suivant (cf [DJP]).

**Théorème 1.10** *Soit  $\mathcal{M}$  une  $W^*$ -algèbre. Soient  $\omega$  un état fidèle et  $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$  la représentation GNS du couple  $(\mathcal{M}, \omega)$ . Soit  $J$  la conjugaison modulaire associée et  $\mathcal{H}_\omega^+ = \overline{\{\pi_\omega(A)J\pi_\omega(A)\Omega_\omega, A \in \mathcal{M}\}}$ . Alors,  $\mathcal{H}_\omega^+$  est un cône auto-duale et  $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, J, \mathcal{H}_\omega^+)$  est la représentation standard de  $\mathcal{M}$ .*

## 1.1.2 Systèmes dynamiques quantiques

Dans l'approche hamiltonienne, un système quantique est décrit par un système dynamique quantique.

### Définition 1.11

- i) Un  $W^*$ -système dynamique est un couple  $(\mathcal{M}, \tau)$ , où  $\mathcal{M}$  est une  $W^*$ -algèbre et  $\tau = (\tau^t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe d'automorphismes  $\sigma$ -faiblement continu sur  $\mathcal{M}$  appelé  $W^*$ -dynamique.
- ii) Un système dynamique est un triplet  $(\mathcal{M}, \tau, \omega)$ , où  $(\mathcal{M}, \tau)$  est un  $W^*$ -système dynamique et  $\omega$  est un état fidèle normal  $\tau$ -invariant, i.e :

$$\omega(\tau^t(A)) := \omega(A), \quad \forall t \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{M}.$$

Considérons maintenant une  $W^*$ -algèbre donnée dans sa forme standard  $(\mathcal{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$  et soit  $\tau$  une  $W^*$ -dynamique sur  $\mathcal{M}$ . Alors, la  $W^*$ -dynamique  $\tau$  est totalement déterminée par un opérateur auto-adjoint  $L$  (cf [DJP]).

**Théorème 1.12** *Il existe un unique opérateur auto-adjoint  $L$  sur  $\mathcal{H}$  tel que :*

- i)  $\tau^t(A) = e^{itL}Ae^{-itL}$ ,
- ii)  $e^{itL}\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

L'opérateur  $L$  défini par le théorème ci-dessus est appelé *liouvillien standard* (ou *liouvillien*) de la dynamique  $\tau$ .

Notons que si  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $(\mathcal{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$  est une forme standard et que si  $\tau$  est une  $W^*$ -dynamique sur  $\mathcal{M}$  de liouvillien standard  $L$ , qui possède un état invariant fidèle  $\omega$  de vecteur cyclique  $\Omega \in \mathcal{H}^+$ , alors  $\Omega$  est un vecteur propre de  $L$  associé à la valeur propre 0.

En mécanique quantique, un système physique est décrit par un système dynamique  $(\mathcal{M}, \tau, \omega)$  de liouvillien  $L$ . De plus, pour décrire l'interaction entre un réservoir bosonique et un petit système, nous avons besoin d'introduire une classe d'opérateurs donnée par la définition suivante (cf [DJP]).

**Définition 1.13** *Un opérateur auto-adjoint  $Q$  est dit affilié à  $\mathcal{M}$  si tous ses projecteurs spectraux sont des éléments de  $\mathcal{M}$ .*

Soit  $(\mathcal{M}, \tau, \omega)$  un système dynamique de liouvillien standard  $L$  et soit  $Q$  un opérateur affilié à  $\mathcal{M}$ . Le théorème suivant est démontré dans [DJP].

**Théorème 1.14** *Supposons que l'opérateur  $L + Q$  est essentiellement auto-adjoint sur  $D(L) \cap D(Q)$ . Alors, l'application*

$$\tau_Q^t(A) = e^{it(L+Q)} A e^{-it(L+Q)}; \quad A \in \mathcal{M},$$

*est une  $W^*$ -dynamique sur  $\mathcal{M}$ .*

Le liouvillien standard du système dynamique  $(\mathcal{M}, \tau_Q, \omega)$  est donné par la proposition suivante (cf [DJP]).

**Proposition 1.15** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- i)  $L + Q$  est essentiellement auto-adjoint sur  $D(L) \cap D(Q)$ ,*
- ii)  $L_Q = L + Q - JQJ$  est essentiellement auto-adjoint sur  $D(L) \cap D(Q) \cap D(JQJ)$ .*

*Alors,  $L_Q$  est le liouvillien standard de  $\tau_Q$ .*

### 1.1.3 États KMS

Considérons un système quantique décrit par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension finie  $\mathcal{H}$ . Alors, son énergie est représentée par un opérateur auto-adjoint  $H$  défini sur  $\mathcal{H}$  qu'on appelle *hamiltonien*. De plus, à une température inverse  $\beta = \frac{1}{kT}$ , où  $k$  est une constante appelée constante de Boltzmann et  $T$  est une température fixée, l'état d'équilibre thermodynamique de ce système est donné par

$$\omega_\beta(A) := \frac{\text{Tr}(e^{-\beta H} A)}{\text{Tr}(e^{-\beta H})}, \quad (1.1)$$

pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . L'état  $\omega_\beta$  est appelé *état de Gibbs* ou *état canonique*.

D'autre part, si on considère un état normal  $\omega$  défini sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  par

$$\omega(A) = \text{Tr}(\rho A)$$

et si on désigne par  $\tau$  la  $W^*$ -dynamique définie sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  par

$$\tau_t(A) = e^{-itH} A e^{itH},$$

alors on a la caractérisation suivante.

**Proposition 1.16** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $\omega(A\tau^{t+i\beta}(B)) = \omega(\tau^t(B)A)$ ,  $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ( $\dim \mathcal{H} < \infty$ ),
- ii)  $\rho$  est donné par

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$$

où  $Z = \text{Tr}(\exp(-\beta H))$ .

Un état  $\omega$  vérifiant la relation i) de la proposition ci-dessus est appelé état  $(\tau, \beta)$ -KMS.

Notons que caractériser les états d'équilibres thermodynamiques d'un système quantique par la relation (1.1) nécessite que  $\text{Tr}(e^{-\beta H}) < \infty$ , or ce n'est pas souvent le cas quand  $\mathcal{H}$  est de dimension infinie, d'où l'utilité de caractériser les états d'équilibres thermodynamiques par des états KMS.

**Définition 1.17** *Soient  $(\mathcal{M}, \tau)$  un  $W^*$ -système dynamique et  $\beta > 0$ . On dit qu'un état normal  $\omega$  est un état  $(\tau, \beta)$ -KMS si pour tous  $A, B \in \mathcal{M}$ , il existe une fonction  $F_{A,B}(z)$  analytique sur la bande  $\{z, 0 < \Im z < \beta\}$ , continue sur sa fermeture satisfaisant aux conditions suivantes :*

- $F_{A,B}(t) := \omega(A\tau^t(B))$
- $F_{A,B}(t + i\beta) := \omega(\tau^t(B)A)$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Le théorème suivant fournit quelques propriétés des états KMS (cf [DJP]).

**Théorème 1.18**

- i) *Si  $\omega$  est un état  $(\tau, \beta)$ -KMS, alors  $\omega$  est  $\tau$ -invariant.*
- ii) *Si  $\omega$  est un  $(\tau, \beta)$ -KMS de vecteur cyclique  $\Omega_\omega$ , alors  $\Omega_\omega$  est séparable pour  $\mathcal{M}$ . En particulier,  $\omega$  est fidèle et  $\Omega_\omega$  est cyclique pour  $\mathcal{M}'$ .*



iii) Si  $(\mathcal{M}, \tau, \omega)$  est un système dynamique de liouvillien standard  $L$  et si  $\omega$  est un  $(\tau, \beta)$ -KMS de vecteur cyclique  $\Omega_\omega$ , alors  $\Delta = \exp(-\beta L)$ , où  $\Delta$  est l'opérateur modulaire associé au couple  $(\mathcal{M}, \omega)$ .

Si  $\omega$  est un  $(\tau, \beta)$ -KMS sur une  $W^*$ -algèbre  $\mathcal{M}$  de vecteur cyclique  $\Omega_\omega$ , alors on dit parfois, par abus de langage, que  $\Omega_\omega$  est un vecteur  $\beta$ -KMS.

Maintenant, on se propose de donner un résultat lié à la théorie de perturbation des états KMS (cf [DJP]).

**Théorème 1.19** Soient  $\omega$  un état  $(\tau, \beta)$ -KMS défini sur une  $W^*$ -algèbre  $\mathcal{M}$ , de vecteur cyclique  $\Omega$  et  $Q$  un opérateur auto-adjoint affilié à  $\mathcal{M}$ . Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- i)  $L + Q$  est essentiellement auto-adjoint sur  $D(L) \cap D(Q)$ ,
- ii)  $L + Q - JQJ$  est essentiellement auto-adjoint sur  $D(L) \cap D(Q) \cap D(JQJ)$ ,
- iii)  $\|e^{-\beta Q/2}\Omega\| < \infty$ .

Alors, on a

$$\Omega \in D(e^{-\beta(L+Q)/2}) \quad \text{et} \quad \Omega_Q = e^{-\beta(L+Q)/2}\Omega.$$

De plus,

$$\omega_Q(A) = \langle \Omega_Q, A\Omega_Q \rangle / \|\Omega_Q\|^2$$

est un état  $(\tau_Q, \beta)$ -KMS sur  $\mathcal{M}$ .

### 1.1.4 Représentation cyclique d'un système fini

Dans cette sous-section, nous allons appliquer les résultats énoncés précédemment pour décrire un système quantique fini.

Soit  $\mathcal{K}$  un espace de Hilbert de dimension finie. On note  $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{K})$  la  $W^*$ -algèbre des opérateurs bornés sur  $\mathcal{K}$ . Considérons un état fidèle normal  $\omega$  sur  $\mathcal{M}$ . Alors, il existe une matrice densité  $\rho$  telle que

$$\omega(A) = \text{Tr}(\rho A).$$

Comme  $\rho$  est un opérateur à trace, on a  $\rho^{1/2}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Désignons maintenant par  $\mathcal{J}^2(\mathcal{K})$  l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur  $\mathcal{K}$  qu'on lui associe le produit scalaire suivant :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^*B).$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\omega &= \mathcal{J}^2(\mathcal{K}), \\ \pi_l(A)a &= Aa, \quad A \in \mathcal{M}, \quad a \in \mathcal{H}_\omega, \\ \Omega_\omega &= \rho^{1/2}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $\pi_l$  est une représentation de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{H}_\omega$  et que le triplet  $(\mathcal{H}_\omega, \pi_l, \Omega_\omega)$  est la représentation cyclique du couple  $(\mathcal{M}, \omega)$ . Notons aussi que  $\pi_r(A)a = aA^*$  est une anti-représentation de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{H}_\omega$ . De plus, si on considère l'opérateur

$$\begin{aligned} J_S : \mathcal{J}^2(\mathcal{K}) &\longrightarrow \mathcal{J}^2(\mathcal{K}) \\ a &\longmapsto a^*, \end{aligned}$$

alors il est facile de vérifier que

$$J_S^2 = I, \quad \pi_r(A) = J_S \pi_l(A) J_S.$$

L'opérateur  $J_S$  est un opérateur anti-unitaire sur  $\mathcal{J}^2(\mathcal{K})$ . D'autre part, il existe un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2(\mathcal{K}) &\longrightarrow \mathcal{K} \otimes \bar{\mathcal{K}} \\ |\psi \rangle \langle \phi| &\longmapsto \psi \otimes \bar{\phi}. \end{aligned}$$

Par suite, grâce à cette isomorphisme, on a les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2(\mathcal{K}) &\simeq \mathcal{K} \otimes \bar{\mathcal{K}} \\ \pi_l(A) &\simeq A \otimes I \\ \pi_r(A) &\simeq I \otimes \bar{A} \\ J_S : \psi \otimes \bar{\phi} &\longmapsto \phi \otimes \bar{\psi}. \end{aligned}$$

Posons

$$\mathcal{N} = \pi_l(\mathcal{M})$$

Il est clair que

$$\mathcal{N}' = J_S \mathcal{N} J_S = \pi_r(\mathcal{M}).$$

Considérons maintenant l'espace  $\mathcal{J}_+^2(\mathcal{K})$  engendré par la famille  $\{a \in \mathcal{J}^2(\mathcal{K}), a \geq 0\}$ . Alors, pour tout  $a \in \mathcal{J}_+^2(\mathcal{K})$ , on vérifie que

$$\begin{aligned} a &= a^{1/2} \rho^{-1/4} J_S a^{1/2} \rho^{-1/4} J_S \rho^{1/2} \Omega_\omega \\ &= (a^{1/2} \rho^{-1/4}) J_S (a^{1/2} \rho^{-1/4}) J_S \Omega_\omega, \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$a \in \{A J_S A J_S \Omega_\omega, A \in \mathcal{M}\}.$$

Réciproquement, si  $A \in \mathcal{M}$ , alors on a

$$A J_S A J_S \Omega_\omega = A \Omega_\omega A^* = (A \Omega_\omega^{1/2})(A \Omega_\omega^{1/2})^* \geq 0.$$

Comme  $\mathcal{J}^2(\mathcal{K})$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{B}(\mathcal{K}) = \mathcal{M}$ , on obtient donc

$$A J_S A J_S \Omega_\omega \in \mathcal{J}^2(\mathcal{K}).$$

Par conséquent, on a

$$\mathcal{H}_\omega^+ = \mathcal{J}_+^2(\mathcal{K}) \simeq (\mathcal{K} \otimes \bar{\mathcal{K}})_+$$

est le cône auto-dual associé au couple  $(\mathcal{M}, \omega)$ .

Ainsi, le quadruplet

$$(\pi_l, \mathcal{H}_\omega, J_S, (\mathcal{K} \otimes \bar{\mathcal{K}})_+)$$

est la représentation standard du couple  $(\mathcal{M}, \omega)$ .

Soit

$$\tau^t(A) = e^{-itK} A e^{itK}$$

où  $A \in \mathcal{M}$  et  $K$  est l'hamiltonien décrivant le système quantique. Il est facile de vérifier que  $(\mathcal{M}, \tau)$  est un  $W^*$ -système dynamique. De plus, on a

$$\begin{aligned} \pi_l(\tau^t(A))b &= e^{-itK} A e^{itK} b \\ &= e^{-itK} A (e^{itK} b e^{-itK}) e^{itK} \\ &= U_t^* \pi_l(A) U_t b, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} U_t : \mathcal{J}^2(\mathcal{K}) &\longrightarrow \mathcal{J}^2(\mathcal{K}) \\ b &\longmapsto e^{itK} b e^{-itK}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $(U_t)_t$  est un groupe unitaire à 1-paramètre fortement continu. Ainsi, d'après le théorème de Stone, il existe un opérateur auto-adjoint  $L$  sur  $\mathcal{J}^2(\mathcal{K})$  tel que

$$U_t = e^{itL}.$$

Notons que

$$Lb = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} U_t b = [K, b] \text{ et } L \simeq K \otimes I - I \otimes \bar{K}.$$

L'opérateur  $L$  est le liouvillien standard associé au système quantique.

Posons

$$\Omega_\beta = \frac{e^{-\beta K/2}}{\sqrt{\text{Tr}(e^{-\beta K})}}.$$

Alors, d'après la proposition 1.16, le vecteur  $\Omega_\beta$  est un vecteur  $(\tau, \beta)$ -KMS.

### 1.1.5 Espace de Fock

En mécanique quantique, une particule est décrite par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . L'espace à  $n$  particules est donné par le produit tensoriel  $n$  fois de  $\mathcal{H}$  défini par

$$\mathcal{H}^{\otimes n} := \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$$

et obtenu après complétion de l'espace préhilbertien des combinaisons linéaires finies des éléments de la forme  $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$  muni du produit scalaire

$$\langle u_1 \otimes \dots \otimes u_n, v_1 \otimes \dots \otimes v_n \rangle := \langle u_1, v_1 \rangle \dots \langle u_n, v_n \rangle.$$

Si  $A$  est un opérateur sur  $\mathcal{H}$ , alors le produit tensoriel  $n$  fois de  $A$  est défini sur  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  ( $A^{\otimes 0} = I$ ) par

$$A^{\otimes n} := A \otimes \dots \otimes A \text{ (} n \text{ fois)}.$$

Dans la suite, nous nous intéressons uniquement aux espaces de Fock symétriques qui permettent de décrire un gaz de bosons libres. On définit le produit tensoriel symétrique des éléments  $u_1, \dots, u_n$  de  $\mathcal{H}$  par

$$u_1 \circ \dots \circ u_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(n)},$$

où  $S_n$  est le groupe de permutations de  $\{1, \dots, n\}$ . L'espace fermé  $\mathcal{H}^{on} = \Gamma_s^n(\mathcal{H})$  engendré par  $\{u_1 \circ \dots \circ u_n, u_i \in \mathcal{H}\}$  est appelé *espace bosonique à  $n$  particules*. L'espace de *Fock symétrique (ou bosonique)* construit sur  $\mathcal{H}$  est le complété de l'espace

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{on} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_s^n(\mathcal{H}), \quad (\mathcal{H}^{o0} = \mathbb{C}),$$

qu'on note  $\Gamma_s(\mathcal{H})$ . Dans la suite,  $\Gamma_s(\mathcal{H})$  sera noté aussi  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{on}$ .

D'autre part, si  $H$  est l'hamiltonien d'un boson isolé, alors l'hamiltonien du réservoir est donné par la *seconde quantification différentielle* de  $H$  notée  $d\Gamma(H)$ , qui est défini sur  $D(d\Gamma(H)) \cap \Gamma_s^n(\mathcal{H})$  par

$$d\Gamma(H)\psi_1 \circ \dots \circ \psi_n := \sum_{i=1}^n \psi_1 \circ \dots \circ H\psi_i \circ \dots \circ \psi_n,$$

où pour tout  $i$ ,  $\psi_i \in D(H)$ . L'opérateur  $\Gamma(H) := e^{id\Gamma(H)}$  est appelé *seconde quantification* de  $H$ .

Maintenant, pour tout  $u \in \mathcal{H}$ , on définit le *vecteur cohérent (ou vecteur exponentiel)*  $e(u)$  de  $u$  par

$$e(u) := \sum_{n \geq 0} \frac{u^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}.$$

**Proposition 1.20** *Soit  $\mathcal{M}$  un domaine dense dans  $\mathcal{H}$ . Alors, l'espace vectoriel  $\mathcal{E}(\mathcal{M})$  des combinaisons linéaires finies de vecteurs cohérents d'éléments de  $\mathcal{M}$ , est dense dans  $\Gamma_s(\mathcal{H})$ .*

**Théorème 1.21** *Soient  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  deux espaces de Hilbert. Alors, il existe un unique isomorphisme unitaire*

$$\begin{aligned} U : \Gamma_s(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) &\longrightarrow \Gamma_s(\mathcal{H}_1) \otimes \Gamma_s(\mathcal{H}_2) \\ e(u \oplus v) &\longmapsto e(u) \otimes e(v). \end{aligned}$$

Finalement, l'interaction entre les différentes particules de bosons est décrite par des opérateurs  $a^*$ ,  $a$ ,  $\Lambda$  qui sont appelés respectivement les opérateurs de création, d'annihilation et de conservation. De plus, ils sont définis par

$$\begin{aligned} a^*(g)e(f) &:= \left. \frac{d}{d\varepsilon} e(f + \varepsilon g) \right|_{\varepsilon=0}, \quad f, g \in \mathcal{H}; \\ a(g)e(f) &:= \langle g, f \rangle e(f), \quad f, g \in \mathcal{H}; \\ \Lambda(K)e(f) &:= \left. -i \frac{d}{d\varepsilon} e(e^{i\varepsilon K} f) \right|_{\varepsilon=0}, \quad f \in \mathcal{H}, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

### 1.1.6 Algèbres des relations de commutations canoniques

On se propose dans cette sous-section de décrire l'algèbre des relations de commutations canoniques et pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [BR2].

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. On désigne par  $\Gamma_s(\mathcal{H})$  l'espace de Fock symétrique construit sur  $\mathcal{H}$ . On définit l'opérateur auto-adjoint  $\varphi(f)$  sur  $\Gamma_s(\mathcal{H})$  par

$$\varphi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(f)),$$

appelé *opérateur de champ de Segal*. L'opérateur de Weyl associé à un élément  $f$  de  $\mathcal{H}$  est l'opérateur unitaire

$$W(f) := e^{i\varphi(f)}.$$

Le théorème suivant fournit quelques propriétés des opérateurs de Weyl (cf [BR2]).

**Théorème 1.22** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $\mathcal{K}$  un sous-espace dense dans  $\mathcal{H}$ . Alors, il existe une  $C^*$ -algèbre qu'on note  $CCR(\mathcal{K})$  des opérateurs sur  $\Gamma_s(\mathcal{H})$ , unique à un isomorphisme près, engendré par les éléments  $W(f)$ ,  $f \in \mathcal{K}$  tels que :*

- i)  $W(f)^* = W(-f)$  pour tout  $f \in \mathcal{K}$ ,
- ii)  $W(f)W(g) = e^{-\frac{i}{2}\text{Im}\langle f, g \rangle} W(f+g)$  pour tous  $f, g \in \mathcal{K}$ .

### 1.1.7 Représentation cyclique d'Araki-Woods d'un réservoir bosonique

Considérons un réservoir bosonique décrit par un espace de Hilbert  $\mathcal{Z}$ . Soit  $\rho$  une matrice densité strictement positive définie sur  $\mathcal{Z}$ . On note  $Q(\rho)$  le domaine de  $\rho^{1/2}$ . Pour tout  $f \in Q(\rho)$ , on définit les opérateurs de Weyl  $W_{\rho,l}(f)$ ,  $W_{\rho,r}(\bar{f})$  sur  $\Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}})$  par

$$\begin{aligned} W_{\rho,l}(f) &= W((1 + \rho)^{1/2} f \oplus \bar{\rho}^{1/2} \bar{f}), \\ W_{\rho,r}(\bar{f}) &= W(\rho^{1/2} f \oplus (1 + \bar{\rho})^{1/2} \bar{f}). \end{aligned}$$

L'opérateur de champ associé à la représentation d'Araki-Woods à gauche est donné par

$$\varphi_{AW}(f) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a((1 + \rho)^{1/2} f \oplus \bar{\rho}^{1/2} \bar{f}) + a^*((1 + \rho)^{1/2} f \oplus \bar{\rho}^{1/2} \bar{f}) \right),$$

pour tout  $f \in Q(\rho)$ .

Désignons maintenant par  $\mathcal{M}_{\rho,l}$  (resp.  $\mathcal{M}_{\rho,r}$ ) l'algèbre d'Araki-Woods à gauche (resp. à droite) engendrée par l'ensemble d'opérateurs  $\{W_{\rho,l}(f), f \in Q(\rho)\}$  (resp. engendrée par l'ensemble d'opérateurs  $\{W_{\rho,r}(\bar{f}), f \in Q(\rho)\}$ ). Posons  $C_\rho = CCRQ(\rho)$ . Il est clair que l'application  $W(f) \mapsto W_{\rho,l}(f)$  (resp.  $W(\bar{f}) \mapsto W_{\rho,r}(\bar{f})$ ) est une représentation de  $C_\rho$  dans  $\mathcal{M}_{\rho,l}$  (resp. une anti-représentation de  $C_\rho$  dans  $\mathcal{M}_{\rho,r}$ ), qu'on appelle la *représentation d'Araki-Woods* (resp. *l'anti-représentation*) des CCR et qu'on note  $\pi_{\rho,l}$  (resp.  $\pi_{\rho,r}$ ). Notons aussi que  $\varphi_{AW}(f)$  est un élément affilié à  $\mathcal{M}_{\rho,l}$  (cf [DJ2]).

Soit  $\omega_\rho$  l'état défini sur  $C_\rho$  par

$$\begin{aligned} \omega_\rho(W(f)) &= \langle \Omega, W_{\rho,l}(f)\Omega \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2 - \frac{1}{2}\langle f, \rho f \rangle}, \end{aligned}$$

où  $\Omega$  est le vecteur vide de l'espace de Fock  $\Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}})$ . Comme  $\pi_{\rho,l}(C_\rho)\Omega$  (resp.  $\pi_{\rho,r}(C_\rho)\Omega$ ) est dense dans  $\Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}})$ , il suit que le triplet  $(\Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}), \pi_{\rho,l}, \Omega)$  (resp.  $(\Gamma(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}), \pi_{\rho,r}, \Omega)$ ) est la représentation (resp. anti-représentation) cyclique du couple  $(C_\rho, \omega_\rho)$ , qu'on appelle *représentation (anti-représentation) cyclique d'Araki-Woods*.

Définissons maintenant l'opérateur  $\eta$  sur  $\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}$  par

$$\eta(f_1 \oplus \bar{f}_2) = (f_2 \oplus \bar{f}_1).$$

Il est clair que

$$\eta^2 = I, \quad \eta = \eta^*.$$

De plus, l'opérateur  $J_R : \Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}) \longrightarrow \Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}})$  défini par  $J_R = \Gamma(\eta)$  est un opérateur anti-unitaire vérifiant :

$$J_R = J_R^*, \quad J_R^2 = I, \quad J_R\Omega = \Omega.$$

Notons aussi que

$$W_{\rho,r}(\bar{f}) = J_R W_{\rho,l}(f) J_R,$$

d'où  $\mathcal{M}_{\rho,r} = J_R \mathcal{M}_{\rho,l} J_R$ , et  $\mathcal{M}_{\rho,r} = \mathcal{M}'_{\rho,l}$ . Ainsi,  $J_R$  est la conjugaison modulaire associée au couple  $(C_\rho, \omega_\rho)$ .

Considérons maintenant l'espace de Hilbert Schmidt  $\mathcal{J}^2(\Gamma_s(\mathcal{Z}))$  muni du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^* B).$$

Alors, on a l'isomorphisme canonique suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2(\Gamma_s(\mathcal{Z})) &\longrightarrow \Gamma_s(\mathcal{Z}) \otimes \overline{\Gamma_s(\mathcal{Z})} \\ |\psi\rangle\langle\phi| &\longmapsto \psi \otimes \bar{\phi}. \end{aligned}$$

Par suite, grâce à cet isomorphisme, on identifie l'espace  $\mathcal{J}^2(\Gamma_s(\mathcal{Z}))$  à  $\Gamma_s(\mathcal{Z}) \otimes \overline{\Gamma_s(\mathcal{Z})}$ . D'autre part, on a

$$\Gamma_s(\mathcal{Z}) \otimes \overline{\Gamma_s(\mathcal{Z})} \simeq \Gamma_s(\mathcal{Z}) \otimes \Gamma_s(\bar{\mathcal{Z}})$$

et par la propriété exponentielle

$$\Gamma_s(\mathcal{Z}) \otimes \Gamma_s(\bar{\mathcal{Z}}) \simeq \Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}).$$

On obtient donc

$$\mathcal{J}^2(\Gamma_s(\mathcal{Z})) \simeq \Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}).$$

Notons que par un raisonnement analogue à celui de la sous-section 1.1.4, on montre que

$$\mathcal{J}_+^2(\Gamma_s(\mathcal{Z})) \simeq \Gamma_{s,+}(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}})$$

est le cône auto-dual associé au couple  $(C_\rho, \omega_\rho)$ . Par conséquent, le quadruplet

$$(\pi_{\rho,l}, \Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}), \Gamma(\epsilon), \Gamma_{s,+}(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}))$$

est la représentation standard du couple  $(C_\rho, \omega_\rho)$ .

Soit  $h$  un opérateur auto-adjoint qui représente l'hamiltonien d'un boson isolé et qui commute avec  $\rho$ . Ainsi, l'hamiltonien du réservoir est donné par la seconde quantification différentielle  $d\Gamma(h)$ . De plus, la relation

$$\pi_{\rho,l}(e^{itd\Gamma(h)}W(f)e^{-itd\Gamma(h)}) = e^{it[d\Gamma(h),\cdot]}W_{\rho,l}(f)e^{-itd\Gamma(h),\cdot]}$$

définit une  $W^*$ -dynamique sur  $\mathcal{M}_{\rho,l}$  de liouvillien standard

$$L_R = [d\Gamma(h), \cdot] \simeq d\Gamma(h \oplus (-\bar{h}))$$

Notons aussi que le vecteur  $\Omega$  est un vecteur  $(\tau, \beta)$ -KMS si et seulement si

$$\rho = (e^{\beta h} - 1)^{-1}.$$

### 1.1.8 Retour à l'équilibre

Soient  $(\mathcal{M}, \tau, \omega)$  un système dynamique de liouvillien standard  $L$  et  $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$  la représentation GNS associée. Dans la suite, nous présentons quelques résultats qui permettent d'examiner la propriété d'équilibre du système dynamique  $(\mathcal{M}, \tau, \omega)$  et qui sont liés aux propriétés spectrales du liouvillien.

**Définition 1.23** On dit que  $(\mathcal{M}, \tau, \omega)$  a la propriété du retour à l'équilibre si pour tout  $A \in \mathcal{M}$  et pour tout état normal  $\mu$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\tau^t(A)) := \omega(A).$$

Par le théorème suivant nous donnons des caractérisations de la propriété du retour à l'équilibre d'un système dynamique (cf [JP2]).

**Théorème 1.24** Si  $\omega$  est un état fidèle, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tous  $\mu$  état normal,  $A \in \mathcal{M}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\tau^t(A)) = \omega(A),$$

b) Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(A\tau^t(B)) = \omega(A)\omega(B),$$

c)  $w - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL} = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ .

Dans la pratique, la propriété du retour à l'équilibre d'un système dynamique peut être déduite des propriétés du spectre de liouvillien. Ce résultat est donné par le théorème suivant (cf [JP2]).

**Théorème 1.25** Soit  $(\mathcal{M}, \tau, \omega)$  un système dynamique de liouvillien standard  $L$ . Si le spectre de  $L$  est absolument continu sauf pour la valeur propre 0, alors le système dynamique  $(\mathcal{M}, \tau, \omega)$  possède la propriété du retour à l'équilibre.

## 1.2 Approche markovienne

Étant donné un système quantique en interaction avec un système extérieur, l'approche markovienne consiste à modéliser le système extérieur et se concentrer uniquement sur la dynamique effective du système quantique. Cette dynamique est supposée décrite par un semigroupe d'applications complètement positives, appelé semigroupe dynamique quantique (ou semigroupe markovien) (cf [Da1], [Da2], [FaR1], [R]). Notons que ces semigroupes peuvent être obtenus par dilatation des équations de Langevin quantique (cf [Fa1],[Ma1]).

Dans la suite, on se propose de présenter quelques propriétés des semigroupes dynamiques quantiques.



### 1.2.1 Semigroupes dynamiques quantiques

Les semigroupes dynamiques quantiques sont les modèles mathématiques naturels qui permettent d'étudier les évolutions irréversibles des systèmes quantiques ouverts. De plus, ils permettent de dériver les équations maîtresses qui décrivent l'évolution d'états de systèmes quantiques. Notons que dans ce contexte, l'irréversibilité signifie de point de vue mathématique que les applications  $T_t$  associées à un semigroupe dynamique quantique  $T = (T_t)_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$  ne sont pas des automorphismes de  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ .

#### a) Applications complètement positives

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux  $C^*$ -algèbres unitaires (avec unités). Une application linéaire  $\Phi$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$  est dite *positive* si

$$\Phi(\mathcal{A}_+) \subset \mathcal{B}_+,$$

où  $\mathcal{A}_+$  et  $\mathcal{B}_+$  sont respectivement les éléments positifs de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

**Définition 1.26** Une application linéaire  $\Phi$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$  est dite :

i) *n*-positive si pour toute famille  $a_1, \dots, a_n$  de  $\mathcal{A}$  et toute famille  $b_1, \dots, b_n$  de  $\mathcal{B}$

$$\sum_{i,j=1}^n b_i^* \Phi(a_i^* a_j) b_j \geq 0,$$

ii) Complètement positive si elle est *n*-positive pour tout  $n \geq 1$ .

Une caractérisation des applications complètement positives est donnée par le théorème suivant (cf [Fa2]).

**Théorème 1.27** (*Stinespring*)

Soient  $\mathcal{K}$  un espace de Hilbert et  $\mathcal{B}$  une sous- $*$ -algèbre de  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ . Supposons que  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre unitaire. Alors, une application linéaire  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est complètement positive si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$\Phi(x) = V^* \pi(x) V,$$

où  $(\eta, \pi)$  est une représentation de  $\mathcal{A}$  et  $V$  est un opérateur borné de  $\mathcal{K}$  dans  $\eta$ .

Une application complètement positive  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est dite *normale* si  $\Phi$  est  $\sigma$ -faiblement continue préservant l'identité. Pour la preuve du théorème suivant, on renvoie le lecteur à [Fa2].

**Théorème 1.28** (*Krauss*)

Soient  $\mathcal{K}$  et  $\eta$  deux espaces de Hilbert et  $\mathcal{A}$  une algèbre de von Neumann d'opérateurs de  $\mathcal{K}$ . Alors,  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\eta)$  est une application normale complètement positive si et seulement si il existe une suite d'opérateurs linéaires bornés  $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\eta$  dans  $\mathcal{K}$  telle que la série  $\sum_{j=1}^{\infty} V_j^* a V_j$  converge fortement pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et

$$\Phi(a) = \sum_{j=1}^{\infty} V_j^* a V_j.$$

**b) Générateur d'un semigroupe dynamique quantique**

Dans la théorie des évolutions irréversibles des systèmes quantiques ouverts, plusieurs propriétés physiques se déduisent de la forme explicite du générateur d'un semigroupe dynamique quantique.

**Définition 1.29** Un semigroupe dynamique quantique (au sens de Heisenberg) sur une algèbre de von Neumann  $\mathcal{A}$  est un semigroupe à un paramètre  $T = (T_t)_{t \geq 0}$  d'applications normales complètement positives de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  qui est  $\sigma$ -faiblement continu et vérifiant  $T_t(I) = I$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Soient  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  l'algèbre des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{T}(\mathcal{H})$  l'espace des opérateurs à trace sur  $\mathcal{H}$ . Si  $T : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  est un semigroupe dynamique quantique, alors son dual  $T^* = (T_t^*)_{t \geq 0}$  est un semigroupe à un paramètre qui préserve la trace et qui est fortement continu sur  $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ .

Le semigroupe  $T^*$  est appelé *semigroupe dynamique quantique au sens de Schrödinger*. De plus, on a la relation de dualité suivante :

$$\mathrm{Tr}(\rho T_t(A)) = \mathrm{Tr}(T_t^*(\rho)A), \quad (1.2)$$

pour tous  $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  et  $t \geq 0$ . Maintenant, nous énonçons les résultat suivante (cf [Bu]).

**Théorème 1.30** Si  $T$  est un semigroupe dynamique quantique au sens de Heisenberg, alors son dual  $T^*$  est un semigroupe dynamique quantique au sens de Schrödinger. Inversement, si  $T^*$  est un semigroupe dynamique quantique au sens de Schrödinger, alors il existe un unique semigroupe dynamique quantique  $T$  au sens de Heisenberg qui admet  $T^*$  comme semigroupe dual.

Soit  $T : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  un semigroupe dynamique quantique au sens de Heisenberg. Le domaine du générateur infinitesimal  $\mathcal{L}$  du semigroupe  $T$  est donné par

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \text{ tel que } w^* - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t(X) - X}{t} \text{ existe} \right\}.$$

De plus, pour tout  $X \in D(\mathcal{L})$ , on a

$$\mathcal{L}(X) = w^* - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t(X) - X}{t},$$

où la topologie  $w^*$  est la topologie  $\sigma$ -faible sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

Maintenant, afin d'avoir une forme explicite du générateur  $\mathcal{L}$ , on considère dans la suite un cas particulier de semigroupe dynamique quantique.

**Définition 1.31** *Un semigroupe dynamique quantique  $T = (T_t)_{t \geq 0}$  est dit uniformément continu si*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t - T_0\| = 0.$$

Notons que dans la théorie générale des semigroupes, un semigroupe dynamique quantique  $T$  est uniformément continu si et seulement si son générateur  $\mathcal{L}$  est un opérateur borné (cf [ALL], [Fa2], [Da3]).

**Théorème 1.32** *Si  $T$  est un semigroupe dynamique quantique uniformément continu sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  de générateur infinitesimal  $\mathcal{L}$ , alors il existe un opérateur  $G$  et une application complètement positive  $\Phi$  tel que*

$$\mathcal{L}(X) = G^*X + \Phi(X) + XG, \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Par le théorème suivant, nous donnons une autre forme du générateur infinitesimal d'un semigroupe dynamique quantique uniformément continu qui est dû à Lindblad et qu'on utilise souvent dans la pratique (cf [ALL], [L]).

**Théorème 1.33** *Soit  $T$  est un semigroupe dynamique quantique uniformément continu sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  de générateur infinitesimal  $\mathcal{L}$ , où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert séparable. Soit  $\rho$  un état sur  $\mathcal{H}$ . Alors, il existe un opérateur auto-adjoint  $H$  et une suite d'opérateurs  $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  tels que :*

- 1)  $\text{Tr}(\rho L_k) = 0$ , pour tout  $k$ ,
- 2)  $\sum_k L_k^* L_k$  converge fortement,
- 3) Si  $\sum_k |c_k|^2 < \infty$  et  $c_0 + \sum_k c_k L_k = 0$ , alors  $c_k = 0$  pour tout  $k$ ,
- 4) Le générateur  $\mathcal{L}$  du semigroupe  $T$  est de la forme

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k X + X L_k^* L_k - 2L_k^* X L_k),$$

pour tout  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

L'opérateur  $\mathcal{L}$  est appelé *lindbladien*.

Généralement dans les articles de physique, le générateur d'un semigroupe dynamique quantique apparaît sous sa forme préduale. Ainsi, si  $T$  est un semigroupe dynamique quantique de générateur  $\mathcal{L}$ , alors d'après la relation de dualité (1.2) on peut déterminer le générateur  $\mathcal{L}^*$  du semigroupe  $T^*$ . Cela nous permet de définir ce qu'on appelle *l'équation maîtresse* en mécanique quantique qui décrit l'évolution des états d'un système quantique et qui est donnée par

$$\frac{d\rho(t)}{dt} := \mathcal{L}^*(\rho(t)).$$

### 1.2.2 Existence, unicité, retour à l'équilibre

Dans cette sous-section, nous présentons un critère de retour à l'équilibre d'un semigroupe dynamique quantique, qui est dû à Fagnola et Rebolledo. De plus, nous donnons un critère d'unicité d'un état stationnaire.

**Définition 1.34** *Soit  $T$  un semigroupe dynamique quantique uniformément continu de générateur  $\mathcal{L}$  défini sur une  $W^*$ -algèbre  $\mathcal{M}$ .*

i) *On dit que  $\rho$  est un état stationnaire de  $T$  si*

$$T_t^*(\rho) := \rho, \quad \forall t \geq 0,$$

ii) *On dit que  $T$  a la propriété du retour à l'équilibre s'il admet un état stationnaire  $\rho$  et si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr}(\mu T_t(A)) := \text{Tr}(\rho A),$$

*pour tout  $A \in \mathcal{M}$  et pour tout état normal  $\mu$ .*

Notons que  $\rho$  est un état stationnaire de  $T$  si et seulement si  $\mathcal{L}^*(\rho) = 0$ , c'est à dire  $\rho$  est une solution de l'équation maîtresse

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}^*(\rho(t)) = 0.$$

Dans la théorie des évolutions irréversibles des systèmes quantiques ouverts, plusieurs propriétés physiques importantes découlent du formalisme des semigroupes dynamiques quantiques telles que le retour à l'équilibre, l'unicité de l'état stationnaire, décohérence quantique, condition du bilan détaillé quantique...

Dans la suite, nous présentons le résultat principal qui permet d'examiner la propriété du retour à l'équilibre et qui est basé sur la forme explicite du lindbladien. Considérons un semigroupe dynamique quantique uniformément continu

$T = (T_t)_{t \geq 0}$  de générateur  $\mathcal{L}$  défini sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert de dimension finie. Supposons que  $\mathcal{L}$  a la forme d'un lindbladien

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] - \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (L_k^* L_k X + X L_k^* L_k - 2L_k^* X L_k), \quad (1.3)$$

pour tout  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , où les opérateurs  $(L_k)_k$  et  $H$  satisfont les hypothèses du théorème 1.33. Le résultat suivant est dû à Fagnola et Rebolledo (cf [FaR2]).

**Théorème 1.35** (*Fagnola-Rebolledo*)

Supposons que  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert de dimension finie et que le semigroupe dynamique quantique  $T$  admet un état fidèle normal stationnaire dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  dont le générateur est donné par (1.3). Alors,  $T$  possède la propriété du retour à l'équilibre si et seulement si

$$\{L_k, L_k^*, H, k \geq 1\}' = \{L_k, L_k^*, k \geq 1\}'.$$

Notons que si  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , alors il existe toujours un état stationnaire (non nécessairement unique) pour le semigroupe dynamique quantique  $T$ . En effet, considérons l'application

$$\begin{aligned} E : \mathcal{T}(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H}) \\ A &\mapsto E(A) = \mathcal{L}^*(A^*A). \end{aligned}$$

Comme  $\text{Tr}(\mathcal{L}^*(A^*A)) = 0$  pour tout  $A \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ , l'application  $E$  est non surjective. Par conséquent,  $E$  est non injective, d'où il existe une matrice  $A$  non nulle de  $\mathcal{T}(\mathcal{H})$  telle que

$$E(A) = \mathcal{L}^*(A^*A) = 0.$$

Posons

$$\rho = \frac{A^*A}{\text{Tr}(A^*A)}.$$

Il est clair que  $\rho$  est une matrice positive vérifiant  $\text{Tr}(\rho) = 1$  et que  $\mathcal{L}^*(\rho) = 0$ .

Un résultat d'unicité est prouvé par Frigerio dans le théorème suivant (cf [Fr1]).

**Théorème 1.36** (*Frigerio*)

Soit  $T$  un semigroupe dynamique quantique uniformément continu sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert séparable. Supposons que son générateur  $\mathcal{L}$  a la forme (1.3) et que  $T$  possède un état stationnaire fidèle normal  $\rho$ . Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\rho$  est l'unique état stationnaire de  $T$ ,
- ii)  $\{H, L_k, L_k^*, k \geq 1\}' = \mathbb{C}I$ .

### 1.2.3 Décohérence quantique

Dans cette sous-section, nous allons définir la notion de décohérence quantique d'un système physique donné (cf [BO]).

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $T$  un semigroupe dynamique quantique sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  de générateur infinitesimal  $\mathcal{L}$ , décrivant un système quantique. L'équation maîtresse associée est donnée par

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}^*(\rho(t)),$$

pour toute matrice densité  $\rho$ .

**Définition 1.37** *On dit que l'évolution dynamique du système quantique décrit une décohérence, s'il existe une base orthonormée de  $\mathcal{H}$  telle que les coefficients non diagonaux de sa matrice densité  $\rho(t)$ , évoluée en temps, dans cette base, tendent vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ .*

### 1.2.4 Condition du bilan détaillé quantique

La dynamique irréversible d'un système quantique est décrite par un semigroupe dynamique quantique de générateur  $\mathcal{L}$ . La condition du bilan détaillé quantique consiste à partager cette dynamique en une partie hamiltonienne et une partie dissipative. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [FrGoV]. La définition de la condition du bilan détaillé quantique donnée ci-dessous, est due à Alicki et Lendi (cf [ALL]); il existe cependant d'autres définitions (cf [FrGoV]).

**Définition 1.38** *Soit  $\Theta$  le générateur d'un semigroupe dynamique quantique sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert, qui s'écrit*

$$\Theta = -i[H, \cdot] + \Theta_0,$$

avec  $H$  est un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ . On dit que  $\Theta$  satisfait la condition du bilan détaillé quantique par rapport à un état stationnaire fidèle  $\rho$  si

- i)  $[H, \rho] := 0$ ,
  - ii)  $\langle \Theta_0(A), B \rangle_\rho := \langle A, \Theta_0(B) \rangle_\rho$ , pour tous  $A, B \in D(\Theta_0)$ ,
- où  $\langle A, B \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho A^* B)$ .

## 1.3 Calcul stochastique quantique

Dans cette section, nous rappelons les éléments de base du calcul stochastique quantique (cf [Fa2], [M], [P]...). Nous commençons par décrire les bruits quantiques sur un espace de Fock, ceci est traité dans la sous-section 1.3.1. Dans la sous-section

1.3.2, nous rappelons la définition des intégrales stochastiques quantiques (cf [M], [P]). Ensuite, nous décrivons les équations de Langevin quantiques (équation de Hudson-Parthasarathy) (cf [HP], [P]), ceci est donné dans la sous-section 1.3.3. Finalement, dans la section 1.3.4, nous présentons l'hamiltonien associé à une équation de Hudson-Parthasarathy (cf [G]).

### 1.3.1 Bruits quantiques

Les opérateurs de création, d'annihilation et de conservation introduits dans la sous-section 1.1.5 permettent de définir ce qu'on appelle les bruits quantiques qui décrivent l'influence d'un système bosonique extérieur sur un petit système.

Soit  $\mathcal{Z}$  un espace de Hilbert séparable dont on fixe une base orthonormée  $\{e_k, k \in J\}$ . On note  $\Gamma(\mathbb{R}_+)$ , l'espace de Fock symétrique construit sur  $\mathcal{Z} \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ . Ainsi, d'après l'identification

$$\mathcal{Z} \otimes L^2(\mathbb{R}_+) \simeq L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}) \simeq L^2(\mathbb{R}_+ \times J),$$

on obtient

$$\Gamma(\mathbb{R}_+) = \Gamma_{\text{sym}}(L^2(\mathbb{R}_+ \times J)). \quad (1.4)$$

L'espace  $\mathcal{Z}$  est appelé *espace de multiplicité* et  $\dim \mathcal{Z}$  est appelée *multiplicité* de l'espace de Fock  $\Gamma(\mathbb{R}_+)$ .

Maintenant pour tous  $0 \leq s < t$ , nous introduisons les espaces suivants :

$$\Gamma_{(s,t)} = \Gamma_{\text{sym}}(\mathcal{Z} \otimes L^2(s, t)), \quad \Gamma_t = \Gamma_{\text{sym}}(\mathcal{Z} \otimes L^2(t, \infty)).$$

Notons que nous avons une identification naturelle

$$\Gamma = \Gamma_{(0,s)} \otimes \Gamma_{(s,t)} \otimes \Gamma_t$$

qui est donnée explicitement par la propriété de factorisation des vecteurs exponentiels

$$e(f) = e(f_{(0,s)}) \otimes e(f_{(s,t)}) \otimes e(f_t),$$

où

$$f_{(s,t)}(x) = \mathbf{1}_{(s,t)}(x)f(x), \quad f_t(x) = \mathbf{1}_{(t,\infty)}(x)f(x).$$

Dans la suite, nous allons voir que cette propriété de factorisation joue un rôle important pour définir les intégrales stochastiques quantiques.

**Définition 1.39** *Soit  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des vecteurs exponentiels des éléments de  $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z})$ . On dit qu'une famille d'opérateurs  $L(t)_{t \geq 0}$  sur  $\Gamma(\mathbb{R}_+)$  est  $\mathcal{E}$ -adaptée si elle satisfait aux conditions suivantes :*

- 1) Le domaine de  $L(t)$  contient  $\mathcal{E}$  pour tout  $t \geq 0$ ,  
 2) Pour tous  $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z})$ ,  $t \geq 0$ , on a  $L(t)e(f_{(0,t)}) \in \Gamma_{(0,t)}$  et

$$L(t)e(f) = \{L(t)e(f_{(0,t)})\} \otimes e(f_t).$$

Les bruits quantiques dans  $\Gamma(\mathbb{R}_+)$  sont les processus  $\mathcal{E}$ -adaptés définis par

$$\begin{aligned} a_0^i(t) &:= a(\mathbf{1}_{(0,t)} \otimes e_i), \\ a_i^0(t) &:= a^*(\mathbf{1}_{(0,t)} \otimes e_i), \\ a_i^j(t) &:= \Lambda(\pi_{(0,t)} \otimes |e_i\rangle\langle e_j|), \end{aligned}$$

où  $i, j \in J$ ,  $\mathbf{1}_{(0,t)}$  est la fonction indicatrice sur  $(0, t)$ , tandis que  $\pi_{(0,t)}$  est l'opérateur de multiplication par  $\mathbf{1}_{(0,t)}$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$ .

Maintenant, pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z})$ , on pose  $f_k(t) = \langle z_k, f(t) \rangle$ . Alors, il est facile de vérifier que les bruits quantiques introduits ci-dessus vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_0^i(t)e(f) &= \int_0^t f_i(s)ds e(f), \\ \langle e(g), a_i^0(t)e(f) \rangle &= \int_0^t \overline{g_i(s)}ds \langle e(g), e(f) \rangle, \\ \langle e(g), a_i^j(t)e(f) \rangle &= \int_0^t \overline{g_i(s)}f_j(s)ds \langle e(g), e(f) \rangle. \end{aligned} \tag{1.5}$$

avec  $a_0^0(t) = tI$  et  $h_0(s) = 1$  pour tout  $h \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z})$ . De plus, ces bruits vérifient la table d'Ito quantique :

$$da_i^j(t)da_k^l(t) = \hat{\delta}_{jk}da_i^l(t) \quad \text{pour tous } i, j, k, l \geq 0,$$

où

$$\hat{\delta}_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \text{ ou } k = 0 \\ \delta_{jk} & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

### 1.3.2 Intégrales stochastiques quantiques

Dans cette sous-section, nous allons conserver les mêmes notations que celles de la sous-section précédente et nous allons rappeler la définition d'une intégrale stochastique quantique d'un processus adapté par rapport aux bruits quantiques. Pour plus de détails on renvoie le lecteur à [M] et [P].

Soit  $\mathcal{Z}$  un espace de Hilbert séparable dont on fixe une base orthonormée  $\{e_k, k \in J\}$ . L'espace de Fock symétrique considéré le long de cette sous-section



est donné par la relation (1.4). Considérons maintenant un autre espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  qu'on appelle *espace initial*. L'interaction entre un petit système et un système extérieur (réservoir bosonique, bain thermique...) est décrite par l'espace

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbb{R}_+) &= \mathcal{H} \otimes \Gamma_{\text{sym}}(L^2(\mathbb{R}_+ \times J)) \simeq \mathcal{H} \otimes \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}_+ \times J)^{\otimes n} \\ &\simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R}_+ \times J)^{\otimes n} \\ &\simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H} \otimes L^2_{\text{sym}}((\mathbb{R}_+ \times J)^n) \\ &\simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\text{sym}}((\mathbb{R}_+ \times J)^n, \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Par conséquent, les éléments de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$  sont les vecteurs  $\Psi = (\Psi_n)_{n \geq 0}$  tels que  $\Psi_n \in L^2_{\text{sym}}((\mathbb{R}_+ \times J)^n, \mathcal{H})$  et

$$\|\Psi\|_{\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)}^2 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \|\Psi_n\|_{L^2_{\text{sym}}((\mathbb{R}_+ \times J)^n, \mathcal{H})}^2 < \infty.$$

Désignons par  $M$  l'un des opérateurs  $a_i^0, a_0^i, a_i^j$ . La propriété de factorisation

$$(M_t - M_s)e(f) = e(f_s) \otimes \{(M_t - M_s)e(f_{(s,t)})\} \otimes e(f_t), \quad 0 \leq s < t < \infty$$

permet de définir ce qu'on appelle l'intégrale stochastique d'un processus adapté par rapport à  $M$ . Soit

$$\mathcal{M} = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}) \mid f_i(t) = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } i\}.$$

**Définition 1.40** Soit  $D_0$  un domaine dense dans  $\mathcal{H}$ . Une famille d'opérateurs  $(L(t))_{t \geq 0}$  de  $\mathcal{H} \otimes \Gamma(\mathbb{R}_+)$  est dite  $(\mathcal{E}(\mathcal{M}), D_0)$ -adaptée si :

- i) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , le domaine de  $L(t)$  contient  $D_0 \underline{\otimes} \mathcal{E}(\mathcal{M})$  ( $\underline{\otimes}$  désigne le produit tensoriel algébrique),
- ii)  $L(t)u \otimes e(f_{(0,t)}) \in \mathcal{H} \otimes \Gamma_{(0,t)}$  et  $L(t)u \otimes e(f) = \{L(t)u \otimes e(f_{(0,t)})\} \otimes e(f_t)$ , pour tous  $t \geq 0, u \in D_0, f \in \mathcal{M}$ .

Elle est dite régulière si, en plus, l'application  $t \mapsto L(t)u \otimes e(f)$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathcal{H} \otimes \Gamma_{\text{sym}}(L^2(\mathbb{R}_+ \times J))$  est continue pour tous  $u \in D_0, f \in \mathcal{M}$ .

Dans la suite, le produit tensoriel  $u \otimes e(f)$  sera noté  $ue(f)$ . Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition de  $\mathbb{R}_+$ ,  $t_0 = 0$  et  $t_n$  tend vers  $\infty$  quand  $n$  tend vers  $\infty$ . Soit  $L$  un processus

$(\mathcal{E}(\mathcal{M}), D_0)$ -adapté dans  $\mathcal{H} \otimes \Gamma(\mathbb{R}_+)$ .  $L$  est dit *processus simple* par rapport à la partition  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si

$$L(t) := L(t_j) \quad \text{pour tous } t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Pour  $t_n \leq t < t_{n+1}$ , on définit l'intégrale stochastique de  $L$  par rapport à  $M$  par

$$\begin{aligned} \int_0^t L(s) dM(s) u e(f) &:= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} L(s) dM(s) u e(f) + \int_{t_n}^t L(s) dM(s) u e(f) \\ &:= \sum_{k=0}^{n-1} \{L(t_k) u e(f_{(0, t_k)})\} (M(t_{k+1}) - M(t_k)) e(f_{t_k}) \\ &\quad + \{L(t_n) u e(f_{(0, t_n)})\} (M(t) - M(t_n)) e(f_{t_n}), \end{aligned}$$

qu'on note

$$X_t = \int_0^t L(s) dM(s).$$

Notons que l'application  $t \mapsto X_t u e(f)$  est continue. De plus, on a

$$X_t u e(f) = \{X_t u e(f_{(0, t)})\} e(f_t).$$

Par conséquent,  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus  $(\mathcal{E}(\mathcal{M}), D_0)$ -adapté régulier.

Un processus  $(\mathcal{E}(\mathcal{M}), D_0)$ -adapté  $L$  est dit *mesurable* si pour tous  $u \in D_0$ ,  $f \in \mathcal{M}$ , l'application  $t \rightarrow L(t) u e(f)$  est borélienne.

Un processus  $(\mathcal{E}(\mathcal{M}), D_0)$ -adapté mesurable  $L$  est dit *stochastiquement intégrable* s'il existe une suite de processus simples  $(\mathcal{E}(\mathcal{M}), D_0)$ -adaptés  $\{L_n(s)\}_n$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \|(L_n(s) - L(s)) u e(f)\|^2 (1 + f(s))^2 ds = 0. \quad (1.6)$$

Notons que si (1.6) est satisfaite, alors la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^t L_n(s) dM(s) \right) u e(f)$$

existe pour tous  $u \in D_0$ ,  $f \in \mathcal{M}$ . Cette limite est notée  $\int_0^t L(s) dM(s)$  qui s'étend par linéarité sur  $D_0 \otimes \mathcal{E}(\mathcal{M})$ . De plus,  $\int_0^t L(s) dM(s)$  est un processus  $(\mathcal{E}(\mathcal{M}), D_0)$ -adapté régulier et l'application  $L \rightarrow \int_0^t L(s) dM(s)$  est linéaire.

**Proposition 1.41** *Soit  $L$  un processus  $(\mathcal{E}(\mathcal{M}), D_0)$ -adapté tel que pour tout  $u \in D_0$ ,  $f \in \mathcal{M}$  :*

*i) L'application  $t \rightarrow L(t) u e(f)$  est continue à gauche,*

ii)  $\sup_{0 \leq s \leq t} \|L(s)u e(f)\| < \infty$  pour tout  $t$ .

Alors,  $L$  est stochastiquement intégrable.

Une famille  $\{L_i^j(s), i, j \geq 0\}$  de processus  $(\mathcal{E}(\mathcal{M}), \mathcal{H})$ -adaptés stochastiquement intégrables est dite *stochastiquement intégrable* si

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \|L_i^j(s)u e(f)\|^2 (1 + \|f(s)\|^2) ds < \infty.$$

Notons qu'on a dans ce cas

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sum_{i,j \geq 0} L_i^j(s) da_i^j(s)$$

est un processus régulier. De plus, on a

$$\langle u e(g), [X_t - X(0)]v e(f) \rangle = \int_0^t \sum_{i,j \geq 0} \bar{g}_i(s) f_j(s) \langle u e(g), L_i^j(s)ve(f) \rangle ds$$

avec la convention  $h_0(s) = 1$  pour tout  $h \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z})$ .

### 1.3.3 Équation de Langevin quantique

En mécanique quantique, on décrit parfois l'évolution irréversible d'un système quantique en interaction avec un système bosonique extérieur (réservoir, bain thermique...) par une classe d'équations différentielles stochastiques quantiques qu'on appelle équations de Langevin quantique (ou équations de Hudson-Parthasarathy). Le système quantique est supposé décrit par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , tandis que le système extérieur est décrit par un espace de Fock symétrique  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}))$ , où  $\mathcal{Z}$  est un espace de Hilbert séparable dont on fixe une base orthonormée  $\{e_k, k \in J\}$ . Les ingrédients de l'équation de Langevin quantique, décrivant le système globale, sont des opérateurs bornés définis sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et des bruits quantiques définis sur  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}))$ .

L'un des objectifs du calcul stochastique quantique est d'étudier les équations différentielles stochastiques quantiques, qui sont des équations de Schrodinger perturbées par des bruits quantiques et qui s'écrivent sous la forme

$$dU_t := \sum_{i,j \in J \cup \{0\}} L_j^i U_t da_j^i(t),$$

avec  $U_0 = I$  et  $L_j^i$ ,  $i, j \in J \cup \{0\}$  sont des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ . Notons aussi que ces équations peuvent être écrites sous forme d'équations intégrales sur

$\mathcal{H} \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}))$ , soit

$$U_t := I + \int_0^t \sum_{i,j \in J \cup \{0\}} L_j^i U_t da_j^i(t).$$

Pour la preuve du théorème suivant, on renvoie le lecteur à [P].

**Théorème 1.42** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et soient  $L_j^i$ ,  $i, j \in J \cup \{0\}$  des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$  tels que*

$$\sum_{i,j \in J \cup \{0\}} \|L_j^i\|^2 < \infty.$$

Alors, l'équation différentielle stochastique quantique

$$U_t = I + \int_0^t \sum_{i,j \in J \cup \{0\}} L_j^i U_t da_j^i(t),$$

admet une unique solution définie sur  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E}$  est l'espace des vecteurs cohérents.

Soient maintenant  $H$ ,  $L_k$ ,  $k \geq 1$  et  $S_k^l$ ,  $k, l \geq 1$  des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$  tels que

$$H = H^*, \quad \sum_j S_j^{k*} S_j^l = \sum_j S_k^j S_l^{j*} = \delta_{kl} \quad (1.7)$$

et les séries  $\sum_j S_j^{k*} S_j^l$ ,  $\sum_j S_k^j S_l^{j*}$  et  $\sum_k L_k^* L_k$  convergent fortement. De tels opérateurs sont appelés les *opérateurs-système*.

Au travers des opérateurs  $H$ ,  $L_k$ ,  $k \geq 1$  et  $S_k^l$ ,  $k, l \geq 1$ , on définit les opérateurs suivants :

$$S \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{Z}), \quad L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{Z}), \quad G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

qui sont donnés par

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_k (L_k u) \otimes z_k, \quad \forall u \in \mathcal{H}, \\ S &= \sum_{kl} S_k^l \otimes |z_k\rangle \langle z_l|, \\ G &= -iH - \frac{1}{2} \sum_k L_k^* L_k = -iH - \frac{1}{2} L^* L. \end{aligned}$$

Le théorème suivant est dû à Hudson et Parthasarathy (cf [HP], [P]).

**Théorème 1.43** *Supposons que les opérateurs-système satisfont la relation (1.7). Alors, il existe un unique processus unitaire  $(\mathcal{E}(\mathcal{M}), \mathcal{H})$ -adapté et fortement continu  $(U(t))_t$  qui est solution de l'équation différentielle stochastique quantique définie sur  $\mathcal{K}(\mathbb{R}_+) = \mathcal{H} \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}))$  par*

$$\begin{cases} dU(t) = \{Gdt + \sum_k L_k da_k^0(t) + \sum_{kl} (S_k^l - \delta_{kl}) da_k^l(t) - \sum_{kl} L_k^* S_k^l da_0^l(t)\} U(t) \\ U(0) = I. \end{cases} \quad (1.8)$$

L'équation (1.8) est appelée *équation de Langevin quantique* qui permet de décrire l'influence d'un système extérieur  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}))$  (source de bruits quantiques) sur un petit système. De plus, cette équation dilate un semigroupe dynamique quantique  $T$ , décrivant la dynamique effective du petit système, de générateur  $\mathcal{L}$  au sens suivant : il existe un état  $\Omega$  dans  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}))$  tel que pour tout  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\langle \Omega, U_t(X \otimes I)U_t^*\Omega \rangle = T_t(X). \quad (1.9)$$

En outre,

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] - \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (L_k^* L_k X + X L_k^* L_k - 2L_k^* X L_k). \quad (1.10)$$

Réciproquement, si on se donne un semigroupe dynamique quantique  $T$ , décrivant la dynamique effective d'un petit système sous l'influence d'un système extérieur  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}))$ , de générateur  $\mathcal{L}$  admettant la forme (1.10), alors  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}))$  agit sur le petit système comme une source de bruits quantiques. Par conséquent, l'équation (1.8) est l'équation type qui permet de décrire l'évolution du petit système en tenant compte de ce qui se passe dans le système extérieur. De plus, si on note  $U$  la solution unitaire associée, alors la relation (1.9) est satisfaite indépendamment du choix des opérateurs  $(S_k^l)_{k,l \geq 1}$  vérifiant la relation (1.7).

### 1.3.4 Hamiltonien associé à une équation de Langevin quantique

À chaque équation de Langevin quantique de solution unitaire  $U$  est associé un groupe unitaire à un paramètre fortement continu  $V$  qui s'obtient comme produit de  $U$  avec la seconde quantification de l'opérateur shift  $\Theta$ . Ainsi, par le théorème de Stone, il existe un opérateur auto-adjoint  $K$  qui engendre le groupe  $V$ . Dans [G], Gregoratti donne une restriction essentiellement auto-adjointe de  $K$ . On se propose d'en donner une description globale dans la suite.

Soit  $\theta$  le groupe unitaire à un paramètre, fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ , défini par

$$\theta_t f(r) = f(r+t), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Z}).$$

On note  $\Theta$  sa seconde quantification définie sur  $\Gamma_s(\mathbb{R}) = \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Z}))$  par

$$\Theta_t e(f) = e(\theta_t f), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Z}). \quad (1.11)$$

Notons que  $\Theta$  et  $U$  peuvent être étendus à des opérateurs définis sur l'espace

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}) = \mathcal{H} \otimes \Gamma_s(\mathbb{R}_+) \otimes \Gamma_s(\mathbb{R}_-) = \mathcal{K}(\mathbb{R}_+) \otimes \Gamma_s(\mathbb{R}_-) = \mathcal{H} \otimes \Gamma_s(\mathbb{R}),$$

de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Theta_t &= 1 \otimes \Theta_t \text{ in } \mathcal{H} \otimes \Gamma_s(\mathbb{R}), \\ U(t) &= U(t) \otimes 1 \text{ in } \mathcal{K}(\mathbb{R}_+) \otimes \Gamma_s(\mathbb{R}_-).\end{aligned}$$

Maintenant, nous énonçons le théorème suivant (cf [Ba], [Ma1], [Ma2]).

**Théorème 1.44** *Soient  $\Theta$  le groupe à un paramètre, fortement continu donné par la relation (1.11) et  $U$  la solution de l'équation de Langevin quantique (1.8) telle que les opérateurs-système vérifient (1.7). Alors, on a*

$$U(t+s) = \Theta_s^* U(t) \Theta_s U(s), \quad \forall s, t \geq 0.$$

De plus, la famille  $V = \{V(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  telle que

$$V(t) = \begin{cases} \Theta_t U(t), & t \geq 0 \\ U^*(|t|) \Theta_t, & t \leq 0, \end{cases}$$

définit un groupe à un paramètre, fortement continu. La famille des opérateurs unitaires à deux paramètres

$$U(t, s) = \Theta_t^* V_{t-s} \Theta_s = \Theta_s^* U(t-s) \Theta_s, \quad \forall s \leq t,$$

est fortement continu en  $t$  et en  $s$ . Elle satisfait la loi de composition

$$U(t, s) U(s, r) = U(t, r), \quad \forall r \leq s \leq t.$$

L'opérateur  $U(t) = U(t, 0) = \Theta_t^* V(t)$  est le produit de deux groupes unitaires fortement continus. Il permet de décrire l'évolution dynamique de l'état du système globale, du temps  $t = 0$  au temps  $t$ . D'autre part, l'idée physique que l'on peut se faire de la représentation  $U(t) = \Theta_t^* V(t)$ , c'est que l'évolution irréversible donnée par l'équation de Langevin quantique est le produit d'une évolution hamiltonienne  $V(t)$  du couple petit système-réservoir et de l'adjoint du groupe unitaire  $\Theta_t$  dont le générateur est donné formellement par

$$E_0 = d\Gamma\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

qui représente l'énergie libre du réservoir. Nous allons maintenant décrire les générateurs des groupes  $\Theta_t$  et  $V(t)$ . Ainsi, d'après le théorème de Stone, on a

$$\begin{aligned}d\Theta_t &= -iE_0\Theta_t dt, \\ dV(t) &= -iKV(t)dt.\end{aligned}$$

Les opérateurs  $H$ ,  $E_0$  représentent respectivement les énergies associées au petit système et au réservoir. Tandis que, l'opérateur  $K$  représente l'énergie totale du

système combiné. De plus, les opérateurs  $L_k, S_{kl}$  contrôlent l'interaction entre les deux systèmes. Notons que si  $L_k = 0, S_{kl} = \delta_{kl}$  pour tous  $k, l \geq 1$ , alors on obtient

$$U(t) = e^{-itH}, \quad V(t) = e^{-itE_0} e^{-itH}.$$

Ainsi, on obtient dans ce cas,  $K = E_0 + H$ , qui représente l'hamiltonien libre du système combiné sans interaction.

Maintenant, nous allons décrire une restriction essentiellement auto-adjointe de l'hamiltonien  $K$  qui apparaît comme une perturbation singulière de  $E_0 + H$  (cf [G]). Notons  $\xi$  le générateur infinitésimal du groupe  $\theta$  sur  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ . Il est clair que  $\xi$  est défini sur  $D(\xi) = H^1(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$  par  $\xi u = iu'$ . D'autre part, afin d'expliciter le domaine de  $E_0$ , nous introduisons l'espace de Sobolev

$$H^\Sigma((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H}) = \{u \in L^2((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H}) \text{ tel que } \sum_{k=1}^n \partial_k u \in L^2((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H})\},$$

où les dérivées de  $u$  sont au sens des distribution sur  $(\mathbb{R} \times J)^n, n \geq 1$  et

$$H^\Sigma((\mathbb{R} \times J)^0, \mathcal{H}) = \mathcal{H}.$$

L'espace  $H^\Sigma((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H})$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^\Sigma((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H})} = \langle u, v \rangle_{L^2((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H})} + \left\langle \sum_{k=1}^n \partial_k u, \sum_{k=1}^n \partial_k v \right\rangle_{L^2((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H})}.$$

Définissons  $H_{\text{sym}}^\Sigma((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H})$  par

$$H_{\text{sym}}^\Sigma((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H}) = H^\Sigma((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H}) \cap L_{\text{sym}}^2((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H}).$$

Par conséquent, le domaine de  $E_0$  est donné par

$$D(E_0) = \{\Phi \in \mathcal{K} \text{ tel que } \Phi_n \in H_{\text{sym}}^\Sigma((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H}), \forall n \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left\| \sum_{k=1}^n \partial_k \Phi_n \right\|^2 < \infty\},$$

et pour tout  $\Phi \in \mathcal{K}$ , on a

$$(E_0 \Phi)_n = i \sum_{k=1}^n \partial_k \Phi_n.$$

Posons  $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et définissons les sous-espaces de  $\mathcal{K}$  suivants :

$$\mathcal{W} = \{\Phi \in \mathcal{K} \mid \Phi_n \in H_{\text{sym}}^\Sigma((\mathbb{R}_* \times J)^n, \mathcal{H}), \forall n, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left\| \sum_{k=1}^n \partial_k \Phi_n \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H}}^2 < \infty\},$$

$$\nu_s = \{\Phi \in \mathcal{W} \text{ tel que } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left\| \Phi_{n+1}|_{\{r_{n+1}=s\}} \right\|_{\mathcal{Z} \otimes L^2((\mathbb{R} \times J)^n, \mathcal{H})}^2 < \infty\},$$

$$\nu_{0^\pm} = \nu_{0^-} \cap \nu_{0^+},$$

où  $\Phi_{n+1}|_{\{r_{n+1}=s\}}$  est la trace (restriction) de la fonction  $\Phi_{n+1}$  sur l'hyperplan  $\{r_{n+1}=s\}$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}_* \cup \{0^-, 0^+\}$ . Il est clair que  $\nu_{0^\pm} \subseteq \mathcal{W}$ .

Soit  $a(s) : \nu_s \longrightarrow \mathcal{Z} \otimes \mathcal{K}$  l'opérateur trace défini par

$$(a(s)\Phi)_n = \Phi_{n+1}|_{\{r_{n+1}=s\}}.$$

Comme  $\mathcal{E}(H^1(\mathbb{R}^*, \mathcal{Z})) \subset \nu_s$ , on a

$$a(s)e(u) \otimes h = u(s) \otimes e(u) \otimes h, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}_*, \mathcal{Z}), \quad h \in \mathcal{H}.$$

Notons aussi que  $\mathcal{W} \supset D(E_0)$  et que  $E_0$  peut être étendu en un opérateur non borné sur  $\mathcal{W}$  défini par

$$(E\Phi)_n = i \sum_{k=1}^n \partial_k \Phi_n.$$

**Théorème 1.45** (*Gregoratti*)

Soit  $K$  l'hamiltonien associé à l'équation de Langevin quantique (1.8) tel que les opérateurs-système satisfont la relation (1.7). Alors, on a

- (1)  $D(K) \cap \nu_{0^\pm} = \{\Phi \in \nu_{0^\pm} \text{ tel que } a(0^-)\Phi = Sa(0^+)\Phi + L\Phi\}$ ,
- (2)  $K\Phi = (H + E - iL^*a(0^-) + \frac{i}{2}L^*L)\Phi, \quad \forall \Phi \in D(K) \cap \nu_{0^\pm}$ ,
- (3)  $K|_{D(K) \cap \nu_{0^\pm}}$  est un opérateur essentiellement auto-adjoint.

## 1.4 Modèles d'interactions quantiques répétées

Dans cette section, nous décrivons le modèle d'interactions répétées en mécanique statistique quantique, qui représente un système quantique (petit système)  $\mathcal{H}_0$  en interaction avec une chaîne infinie de copies identiques  $\mathcal{H}$ , l'une après l'autre, durant un même intervalle de temps fixé  $[0, h]$ . Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [AtP1]. Dans un premier temps, nous décrivons l'évolution discrète du système global. Ensuite, nous discutons le passage à la limite quand  $h$  tend vers 0, afin d'obtenir des interactions continues.

### 1.4.1 Modèle discret

Dans cette sous-section, nous introduisons le modèle des interactions quantiques répétées entre un système extérieur modélisé par une chaîne atomique infinie et un petit système. De plus, nous décrivons la structure de la chaîne atomique.



### a) Interactions quantiques répétées

Soit  $\mathcal{H}_0$  un système quantique en interaction avec un système extérieur (réservoir, bain thermique,...). On modélise le système extérieur par une chaîne atomique infinie de copies de  $\mathcal{H}$  dont on fixe une base orthonormée  $(e_i)_{i \in J \cup \{0\}}$  telle que  $0 \notin J$ . Le vecteur  $\Omega = e_0$  représente l'état vide de l'atome et les vecteurs  $e_i$ ,  $i \in J$  représentent les différents états excités possibles.

L'interaction entre les deux systèmes se fait de la manière suivante : le système quantique  $\mathcal{H}_0$  interagit avec les copies  $\mathcal{H}$ , l'une après l'autre, durant un même intervalle de temps assez petit  $[0, h]$ . L'hamiltonien décrivant l'énergie du système quantique en interaction avec une copie de  $\mathcal{H}$  est noté  $H$ . Notons que  $H$  est un opérateur défini sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$  qui dépend du temps  $h$ . L'évolution unitaire associée durant l'intervalle de temps  $[0, h]$  est donnée par

$$U = e^{-ihH}.$$

La suite des interactions répétées est décrite par l'espace

$$\mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H},$$

où le produit tensoriel infini  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}$  est défini par rapport à la suite stabilisatrice  $(\Omega)_{n \in \mathbb{N}}$ . L'évolution unitaire du système quantique en interaction avec la  $n$ -ième copie de  $\mathcal{H}$ , notée  $\mathcal{H}_n$ , est décrite par l'opérateur  $U_n$  défini sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}$  par

$$U_n = \begin{cases} U & \text{sur } \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_n \\ I & \text{ailleurs .} \end{cases}$$

L'équation de dévolution discrète du modèle d'interactions répétées est décrite par la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H})$  par

$$\begin{cases} V_{n+1} = U_{n+1} V_n \\ V_0 = I. \end{cases} \quad (1.12)$$

Maintenant afin de représenter l'équation (1.12) en termes de bruits quantiques discrets, nous introduisons la famille d'opérateurs  $\{a_j^i, i, j \in J \cup \{0\}\}$  définis par

$$a_j^i(e_k) = \delta_{ik} e_j.$$

Il est clair que cette famille forme une base orthonormée de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Les *bruits quantiques discrets* sont les opérateurs  $a_j^i(n)$ ,  $i, j \in J \cup \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , définis sur  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}$  et qui agissent comme  $a_j^i$ ,  $i, j \in J \cup \{0\}$  sur  $\mathcal{H}_n$  et comme l'identité ailleurs.

Notons que dans la base  $\{a_j^i, i, j \in J \cup \{0\}\}$ , l'opérateur  $U$  s'écrit

$$U = \sum_{i, j \in J \cup \{0\}} U_j^i \otimes a_j^i,$$

où  $U_j^i$ ,  $i, j \in J \cup \{0\}$ , sont des opérateurs sur  $\mathcal{H}_0$  qui sont les coefficients de la matrice de  $U$  dans la base  $(e_i)_{i \in J \cup \{0\}}$  de  $\mathcal{H}$ . Par conséquent, l'équation (1.12) est de la forme

$$\begin{cases} V_{n+1} = \sum_{i, j \in J \cup \{0\}} U_j^i V_n a_j^i(n+1) \\ V_0 = I. \end{cases} \quad (1.13)$$

## b) Structure d'une chaîne atomique

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable dont on fixe une base orthonormée  $(e_i)_{i \in J \cup \{0\}}$ , où  $e_0 = \Omega$  désigne l'état vide de l'atome. On se propose dans cette partie de décrire la structure mathématique de la chaîne atomique  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}$ , définie par rapport à la suite stabilisatrice  $(\Omega)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui modélise un système extérieur. Posons

$$T\Phi = \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}.$$

Considérons les vecteurs de type

$$X_A = \Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes e_{i_1} \otimes \Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes e_{i_2} \otimes \Omega \otimes \dots$$

où  $A = \{(n_1, i_1), \dots, (n_k, i_k)\} \subset \mathbb{N} \times J$  tel que  $n_i \neq n_j$  pour tous  $i \neq j$  et le vecteur  $e_{i_m}$ ,  $1 \leq m \leq k$ , apparaît dans la  $n_{i_m}$ -ième copie de  $\mathcal{H}$  tandis que  $\Omega$  apparaît dans les autres copies de  $\mathcal{H}$  dans le produit tensoriel infini  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}$ . Ainsi, si on pose  $\mathcal{P}_{\mathbb{N}^*, J}$  l'ensemble des sous-ensembles finis de type  $A$ , alors il est facile de vérifier que la famille  $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*, J}\}$  est une base orthonormée de  $T\Phi$ . Notons aussi que les bruits quantiques discrets agissent sur les éléments de cette base de la manière suivante :

$$a_j^i(n)X_A = \mathbb{1}_{(n,i) \in A} X_{A \setminus (n,i) \cup (n,j)} \text{ pour tous } i \neq 0, j \neq 0,$$

$$a_0^i(n)X_A = \mathbb{1}_{(n,i) \in A} X_{A \setminus (n,i)},$$

$$a_j^0(n)X_A = \mathbb{1}_{\{(n,k) \notin A, \forall k \in J\}} X_{A \cup (n,j)},$$

$$a_0^0(n)X_A = \mathbb{1}_{\{(n,k) \notin A, \forall k \in J\}} X_A.$$

## 1.4.2 Structure du champ continu

L'espace  $T\Phi$  défini précédemment admet une version continue dont on se propose de décrire sa structure et pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [At1].

Dans la suite, nous conservons les notations de la sous-section précédente et nous désignons par  $\mathcal{H}'$  le sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$  engendré par les vecteurs  $(e_i)_{i \in J}$ . Considérons l'espace de Fock symétrique,  $\Phi = \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}'))$ , construit sur  $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}')$ . On se propose maintenant de donner une autre représentation de  $\Phi$  afin de donner

un sens à l'égalité  $\Phi = \bigotimes_{\mathbb{R}_+} \mathcal{H}$ . Pour cela, nous commençons par introduire ce qu'on appelle *l'interprétation de Guichardet* de  $\Phi$ .

Soit  $\mathcal{P}_k$  ( $\mathcal{P}_0 = \{\emptyset\}$ ) l'ensemble fini de  $\mathbb{R}_+ \times J$ , constitué des éléments  $\sigma = \{(t_1, i_1), \dots, (t_k, i_k)\}$  tels que  $t_i \neq t_j$  pour tous  $i \neq j$  et soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble défini par  $\mathcal{P} = \cup_k \mathcal{P}_k$ . En ordonnant les composantes réelles des éléments  $\sigma$  de  $\mathcal{P}_k$ , l'ensemble  $\mathcal{P}_k$  peut être identifié à  $\Sigma_k \times J^k$ , où  $\Sigma_k$  est le simplexe standard à  $k$ -éléments. Ainsi,  $\mathcal{P}_k$  hérite la structure mesurée de  $\Sigma_k \times J^k$ . Pour  $k = 0$ , on note  $\delta_\emptyset$  la mesure définie sur  $\mathcal{P}_0$ . Par conséquent,  $\mathcal{P}$  admet une structure mesurée induite par celles définies sur  $\mathcal{P}_k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et on note  $d\sigma$  cette mesure. Finalement, la  $\sigma$ -algèbre associée est notée  $\mathcal{F}$ . Ainsi, l'espace de Fock  $\Phi$  est identifié à l'espace  $L^2(\mathcal{P}, \mathcal{F}, d\sigma)$  et les éléments de  $\Phi$  sont les fonctions mesurables  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(\sigma)|^2 d\sigma < \infty.$$

Dans la suite, nous allons identifier un élément  $\sigma$  de  $\mathcal{P}$  à une famille  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq N}$  des sous-ensembles de  $\mathbb{R}_+$  telle que

$$\sigma_i = \{s \in \mathbb{R}_+, (s, i) \in \sigma\}.$$

Maintenant, on se propose de décrire ce qu'on appelle les représentations prédictible et chaotique d'un élément  $f$  de  $\Phi$ . Pour cela, on a besoin d'introduire la famille des courbes  $\chi_t^i$  et définies par

$$\chi_t^i(\sigma) := \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,t]}(s) & \text{si } \sigma = \{(s, i)\} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que cette famille vérifie les propriétés suivantes :

- $\chi_t^i \in \Phi_{(0,t)} = \Gamma_s(L^2((0,t), \mathcal{H}'))$ ,
- $\chi_t^i - \chi_s^i \in \Phi_{(s,t)} = \Gamma_s(L^2((s,t), \mathcal{H}'))$  pour tous  $s, t$  tels que  $s \leq t$ .
- $\chi_t^i$  et  $\chi_s^j$  sont des éléments orthogonaux de  $\Phi$  pour tous  $i, j$  tels que  $i \neq j$ .

Notons que les propriétés citées ci-dessus nous permettent de définir ce qu'on appelle *l'intégrale d'Ito* dans  $\Phi$  (cf [At1]). Soit  $g = \{g_t^i, t \geq 0, i \in J\}$  une famille d'éléments de  $\Phi$  qui satisfont les hypothèses suivantes :

- i)  $t \mapsto \|g_t^i\|$  est mesurable, pour tout  $i$ ,
- ii)  $g_t^i \in \Phi_{(0,t)}$  pour tout  $t$ ,
- iii)  $\sum_{i \in J} \int_0^\infty \|g_t^i\|^2 dt < \infty$ .

Une telle famille est dite *Ito intégrable*. Ainsi, si on considère une partition  $\{t_j, j \in \mathbb{N}\}$  de  $\mathbb{R}_+$  admettant pour diamètre  $\delta$  et si on note  $P_t$  la projection

orthogonale sur  $\Phi_{(0,t)}$ , alors l'intégrale d'Ito de  $g$ ,  $I(g) = \sum_{i \in J} \int_0^\infty g_t^i d\chi_t^i$ , est la limite dans  $\Phi$  quand  $\delta$  tend vers 0 de

$$\sum_{i \in J} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} P_{t_j} g_s^i ds \otimes (\chi_{t_{j+1}}^i - \chi_{t_j}^i).$$

**Théorème 1.46** *L'intégrale d'Ito  $I(g) = \sum_{i \in J} \int_0^\infty g_t^i d\chi_t^i$  d'une famille Ito intégrable  $g = \{g_t^i, t \geq 0, i \in J\}$  est l'élément de  $\Phi$  donné par*

$$I(g)(\sigma) = \begin{cases} g_{\vee\sigma}^i(\sigma_-) & \text{si } \forall \sigma \in \sigma_i \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

où  $\vee\sigma = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ \text{ tel qu'il existe un entier } k \text{ vérifiant } (t, k) \in \sigma\}$  et  $\sigma_- = \sigma \setminus (\vee\sigma, i)$  si  $(\vee\sigma, i) \in \sigma$ . De plus, on a la formule d'isométrie suivante :

$$\|I(g)\|^2 = \left\| \sum_i \int_0^\infty g_t^i d\chi_t^i \right\|^2 = \sum_i \int_0^\infty \|g_t^i\|^2 dt.$$

Maintenant, si on considère une famille  $f = (f^i)_{i \in J}$  d'éléments de  $L^2(\mathcal{P}_1) = L^2(\mathbb{R}_+ \times J)$ , alors on vérifie facilement que la famille  $\{f^i(t)\Omega, t \in \mathbb{R}_+, i \in J\}$  est Ito intégrable. De plus, son intégrale d'Ito est donnée par

$$I(f) = \sum_{i \in J} \int_0^\infty f^i(t)\Omega d\chi_t^i$$

et on a

$$I(f)(\sigma) = \begin{cases} f^i(s) & \text{si } \sigma = \{s\}_i \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Par itération de la définition de l'intégrale d'Ito donnée ci-dessus, on peut définir de manière analogue l'intégrale d'Ito d'une famille  $f \in L^2(\mathcal{P}_k)$ , soit

$$\begin{aligned} I_k(f) &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \int_0^\infty \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} f_{i_1, \dots, i_k}(t_1, \dots, t_k)\Omega d\chi_{t_1}^{i_1} \dots d\chi_{t_k}^{i_k} \\ &= \int_{\mathcal{P}_k} f(\sigma) d\chi_{t_1}^{i_1} \dots d\chi_{t_k}^{i_k}. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$[I_k(f)](\sigma) = \begin{cases} f_{i_1, \dots, i_k}(t_1, \dots, t_k) & \text{si } \sigma = \{(t_1, i_1) \cup \dots \cup (t_k, i_k)\} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Finalement, si  $f = (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2(\mathcal{P})$ , alors  $I(f)$  est donnée par

$$f(\emptyset)\Omega + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(f).$$

Par le théorème suivant, nous énonçons la propriété de représentation chaotique d'un élément  $f$  de  $\Phi$  (cf [At1]).

**Théorème 1.47** *Tout élément  $f$  de  $\Phi$  admet une représentation chaotique abstraite*

$$f = \int_{\mathcal{P}} f(\sigma) d\chi_{\sigma}$$

satisfaisant la formule d'isométrie suivante

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(\sigma)|^2 d\chi_{\sigma}.$$

Définissons maintenant les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} [a_i^0(t)f](\sigma) &= \sum_{\substack{s \in \sigma_i \\ s \leq t}} f(\sigma \setminus \{s\}_i), \\ [a_0^i(t)f](\sigma) &= \int_0^t f(\sigma \cup \{s\}_i) ds, \\ [a_j^i(t)f](\sigma) &= \sum_{\substack{s \in \sigma_j \\ s \leq t}} f(\sigma \setminus \{s\}_j \cup \{s\}_i). \end{aligned}$$

Notons que ces opérateurs ont un domaine commun donné par

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \Phi, \int_{\mathcal{P}} |\sigma| |f(\sigma)| d\sigma < \infty \right\}.$$

Le vecteur cohérent  $e(f)$  associé à un élément  $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}')$  est donné par

$$[e(f)](\sigma) = \prod_{i \in J} \prod_{s \in \sigma_i} f_i(s).$$

Il est démontré dans [At4] que les opérateurs  $a_0^i(t)$ ,  $a_i^0(t)$  et  $a_j^i(t)$  satisfont les égalités données par la relation (1.5)

$$\langle e(f), a_j^i(t)e(g) \rangle = \int_0^t \bar{f}_i(s)g(s) ds \langle e(f), e(g) \rangle,$$

avec  $a_0^0(t) = tI$  et  $h_0(t) = 1$  pour tout  $s \geq 0$  et  $h \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}')$  et qu'ils sont identifiés aux bruits quantiques définis dans la sous-section 1.3.1.

Notons qu'on a le tableau suivant :

	$\Omega$	$d\chi_t^i$	$d\chi_t^j, i \neq j$
$da_i^0(t)$	$d\chi_t^i$	0	0
$da_0^i(t)$	$dtI$	0	0
$da_j^i(t)$	0	$d\chi_t^i$	0

Cela implique que les bruits quantiques continus  $da_i^j(t)$ ,  $i, j \in J \cup \{0\}$  agissent sur les éléments de la base  $\{d\chi_\sigma, \sigma \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}_+, J}\}$  de la même manière que les bruits discrets sur les éléments de la base  $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*, J}\}$  :

$$\begin{aligned} da_j^i(t)d\chi_\sigma &= d\chi_{\sigma \setminus \{(t,i)\} \cup \{(t,j)\}} \mathbf{1}_{(t,i) \in \sigma}, \text{ pour tous } i \neq 0, j \neq 0, \\ da_0^i(t)d\chi_\sigma &= d\chi_{\sigma \setminus \{(t,i)\}} dt \mathbf{1}_{(t,i) \in \sigma}, \\ da_j^0(t)d\chi_\sigma &= d\chi_{\sigma \cup \{(t,j)\}} \mathbf{1}_{(t,0) \in \sigma}, \\ da_0^0(t)d\chi_\sigma &= d\chi_\sigma dt \mathbf{1}_{\{(n,k) \notin A, \forall k \in J\}}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le théorème énoncé ci-dessus, l'espace  $\Phi$  peut être interprété comme la version continue de l'espace  $T\Phi$ . En effet, la base orthonormée dénombrable  $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*, J}\}$  est remplacée par la base orthonormée continue  $\{d\chi_\sigma, \sigma \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}_+, J}\}$ . La base orthonormée de  $\mathcal{H}_n$  dans  $T\Phi$  est remplacée par la base orthonormée  $\{\Omega, d\chi_t^i, i \in J\}$  de " $\mathcal{H}_t$ ". De plus, tout élément  $f$  de  $T\Phi$  est représenté par

$$f = \sum_{A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*, J}} f(A)X_A,$$

qui est la version discrète de la représentation chaotique dans  $\Phi$ .

On obtient donc

$$\Phi = \bigotimes_{\mathbb{R}_+} \mathcal{H},$$

d'où l'idée d'approcher un modèle d'interactions continu par un modèle discret.

Maintenant, pour tout élément  $f$  de  $\Phi$  et tous  $i \in J$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , on définit sur  $\mathcal{P}$  l'application

$$[D_t^i f](\sigma) := f(\sigma \cup \{(t, i)\}) \mathbf{1}_{\sigma \subset [0, t]}.$$

Alors, on a la représentation suivante (cf [At1]).

**Théorème 1.48** *Tout élément  $f$  de  $\Phi$  admet une représentation prévisible*

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_i \int_0^\infty D_t^i f d\chi_t^i$$

satisfaisant la formule d'isométrie

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_i \int_0^\infty \|D_s^i f\|^2 ds$$

### 1.4.3 Théorèmes de convergence

Dans cette sous-section, nous présentons les résultats essentiels qui permettent de décrire le passage à la limite quand  $h \rightarrow 0$  du modèle d'interactions répétées introduit précédemment (cf sous-section 1.4.1). Nous énonçons le théorème principal qui est dû à Attal-Pautrat et qui décrit la convergence de l'évolution discrète du modèle d'interactions répétées vers une équation de Langevin quantique définie sur l'espace de Fock  $\Phi$ . Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [AtP1].

Soit  $\mathcal{S} = \{nh, n \in \mathbb{N}\}$  une partition de  $\mathbb{R}_+$ . Posons  $\Phi_n = \Phi_{[(n-1)h, nh]}$ . Il est clair que l'espace  $\Phi$  s'identifie naturellement au produit tensoriel dénombrable  $\bigotimes_{n \in \mathbb{N}^*} \Phi_n$ , défini par rapport à la suite stabilisatrice  $(\Omega)_{n \in \mathbb{N}}$ . Pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in J$ , on définit  $X^i(n)$  par

$$X^i(n) = \frac{1}{\sqrt{h}}(\chi_{nh}^i - \chi_{(n-1)h}^i) \in \Phi_n.$$

Pour tout  $A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*, J}$ , on définit  $X_A$  de la même manière que dans  $T\Phi$ , soit

$$X_A = \Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes X^{i_1}(n_1) \otimes \Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes X^{i_2}(n_2) \otimes \Omega \otimes \dots$$

Ainsi, si on désigne par  $T\Phi(\mathcal{S})$  l'espace des éléments  $f \in \Phi$  tels que

$$f = \sum_{A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*, J}} f(A) X_A,$$

alors l'espace  $T\Phi(\mathcal{S})$  s'identifie à la chaîne atomique  $T\Phi$ .

Soit  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  la projection orthogonale de  $\Phi$  sur  $T\Phi(\mathcal{S})$ . Alors, on a le résultat suivant (cf [AtP1]).

**Théorème 1.49** (*Attal-Pautrat*)

Supposons qu'il existe des opérateurs bornés  $L_j^i$ ,  $i, j \in J \cup \{0\}$  définis sur  $\mathcal{H}_0$  tels que

$$\sum_{i, j \in J \cup \{0\}} \|L_j^i\|^2 < \infty$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i, j \in J \cup \{0\}} \left\| \frac{U_j^i(h) - \delta_{ij} I}{h^{\varepsilon_{ij}}} - L_j^i \right\|^2 = 0$$

où  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{0i} + \delta_{0j})$ . Supposons que l'équation de Langevin quantique

$$\begin{cases} dU_t &= \sum_{i,j} L_j^i U_t da_j^i(t) \\ U_0 &= I \end{cases} \quad (1.14)$$

admet une unique solution  $(U_t)_{t \geq 0}$  qui est un processus d'opérateurs bornés, de normes localement uniformément bornés.

Alors, pour tous  $t \geq 0$ ,  $\phi, \psi \in L^\infty([0, t], \mathcal{H}')$ , la solution  $V_{[t/h]}$  de l'équation d'évolution discrète (1.12) vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle a \otimes \varepsilon(\phi), \mathcal{P}_S V_{[t/h]} \mathcal{P}_S b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle = \langle a \otimes \varepsilon(\phi), U_t b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle.$$

Notons que dans les hypothèses du théorème énoncé ci-dessus, nous constatons qu'il y a trois normalisations de temps qui apparaissent dans l'hamiltonien d'interactions répétées. Une normalisation d'ordre 1, une d'ordre  $\sqrt{h}$  et une d'ordre  $h$ . Notons aussi que si les opérateurs limites  $(L_j^i)_{i,j}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} L_0^0 &= -(iH + \frac{1}{2} \sum_{k \in J} L_k^* L_k), \\ L_j^0 &= L_j, \\ L_0^i &= - \sum_{k \in J} L_k^* S_i^k, \\ L_i^j &= S_i^j - \delta_{ij} I, \end{aligned}$$

où  $(S_i^j)_{i,j \in J}$  est une matrice unitaire,  $H$  est un opérateur auto-adjoint et  $\sum_{k \in J} L_k^* L_k$  converge fortement vers un opérateur borné sur  $\mathcal{H}_0$ , alors d'après le théorème 1.43, l'équation de Langevin quantique, définie dans le théorème ci-dessus, admet une unique solution  $(U_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  qui est un processus d'opérateurs unitaires. Ainsi, dans ce cas particulier, nous énonçons le théorème suivant qui est une conséquence immédiate du théorème 1.49 (cf [AtP1]).

**Théorème 1.50** *Supposons que les coefficients de la représentation matricielle de  $U$  dans la base  $(e_i)_{i \in J \cup \{0\}}$  de  $\mathcal{H}$  satisfont les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} U_0^0 &= I - h(iH + \frac{1}{2} \sum_k L_k^* L_k) + o(h), \\ U_j^0 &= \sqrt{h} L_j + o(\sqrt{h}), \\ U_0^i &= -\sqrt{h} \sum_k L_k^* S_j^k + o(\sqrt{h}), \\ U_i^j &= S_i^j - \delta_{ij} I + o(h), \end{aligned}$$



où  $(S_i^j)_{i,j \in J}$  est une matrice unitaire,  $H$  est un opérateur auto-adjoint et  $\sum_{k \in J} L_k^* L_k$  converge fortement vers un opérateur borné sur  $\mathcal{H}_0$ . Alors, la solution  $V_{[t/h]}$  de l'équation d'évolution discrète (1.12) converge fortement, quand  $h$  tend vers 0, vers la solution unitaire  $U_t$  de l'équation (1.14).

Posons maintenant  $\Psi = \otimes_{\mathbb{N}^*} \Omega$ . Alors, il suit de [AtP1]

$$\langle \Psi, V_n^*(X \times I) V_n \Psi \rangle = L^n(X), \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0),$$

où  $L(X) = \sum_{i \in J \cup \{0\}} U_i^{0*} X U_i^0$  est une application complètement positive. Le résultat suivant est dû à [AtP1].

**Théorème 1.51** *Supposons qu'il existe des opérateurs  $L_0^0, L_i^0, i \in J$  tels que :*

- i)  $U_0^0 = I + hL_0^0 + o(h)$ ,
- ii)  $U_i^0 = \sqrt{h}L_i^0 + o(\sqrt{h})$ .

Alors, il existe un opérateur auto-adjoint  $H_0$  sur  $\mathcal{H}_0$  tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(X) - X}{h} = \mathcal{L}(X), \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0),$$

où

$$\mathcal{L}(X) = i[H_0, X] + \frac{1}{2} \sum_{i \in J} (2L_i^{0*} X L_i^0 - X L_i^{0*} L_i^0 - L_i^{0*} L_i^0 X).$$

**Preuve:** Soit  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ . On a donc

$$\begin{aligned} L(X) &= \sum_{i \in J \cup \{0\}} U_i^{0*} X U_i^0 \\ &= X + h(L_0^{0*} X + X L_0^0 + \sum_{i \in J} L_i^{0*} X L_i^0) + o(h). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Notons que l'opérateur  $U$  est unitaire. Alors, on a

$$U_0^{0*} U_0^0 + \sum_{i \in J} U_i^{0*} U_i^0 = I,$$

ce qui implique que

$$I + h(L_0^{0*} + L_0^0 + \sum_{i \in J} L_i^{0*} L_i^0) + o(h) = I$$

et

$$L_0^{0*} + L_0^0 = - \sum_{i \in J} L_i^{0*} L_i^0 + o(1).$$

Ainsi, on obtient

$$L_0^0 + \frac{1}{2} \sum_{i \in J} L_i^{0*} L_i^0 = -\left(L_0^0 + \frac{1}{2} \sum_{i \in J} L_i^{0*} L_i^0\right)^* + o(1).$$

Par conséquent, il existe un opérateur auto-adjoint  $H_0$  sur  $\mathcal{H}_0$  tel que

$$L_0^0 + \frac{1}{2} \sum_{i \in J} L_i^{0*} L_i^0 = -iH_0 + o(1). \quad (1.16)$$

Par suite, si nous tenons compte des relations (1.16) et (1.15), alors on obtient

$$L(X) = X + h \left\{ i[H_0, X] + \frac{1}{2} \sum_{i \in J} (2L_i^{0*} X L_i^0 - X L_i^{0*} L_i^0 - L_i^{0*} L_i^0 X) \right\} + o(h).$$

Cela prouve le théorème ci-dessus.  $\square$

#### 1.4.4 Hamiltoniens d'interactions répétées typiques

Dans la théorie usuelle des systèmes quantiques ouverts, la plupart des équations de Langevin quantiques décrivant un système quantique en interaction avec un système extérieur s'obtiennent par l'intermédiaire des limites de couplage faible et loi de densité faible. Pour un bon choix de l'hamiltonien d'interactions répétées, on démontre aussi que ces équations peuvent être obtenues par des modèles d'interactions répétées. Ainsi, nous constatons trois types d'hamiltoniens qui sont donnés par

$$\begin{aligned} H_w &= H_0 \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{i \in J} (V_i \otimes a_i^0 + V_i^* \otimes a_0^i), \\ H_l &= H_0 \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{h} \sum_{i,j \in J} D_{ij} \otimes a_j^i, \\ H &= H_0 \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{i \in J} (V_i \otimes a_i^0 + V_i^* \otimes a_0^i) + \frac{1}{h} \sum_{i,j \in J} D_{ij} \otimes a_j^i. \end{aligned}$$

où  $H_0, H_R$  sont respectivement les hamiltoniens du système quantique et d'une copie de la chaîne atomique associée au système extérieur,  $(V_i)$  et  $D_{ij}$  sont des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}_0$  tels que  $D_{ij} = D_{ji}^*$  pour tous  $i, j \in J$ .

Notons que pour décrire l'influence d'un système extérieur sur un petit système, les physiciens utilisent souvent un hamiltonien d'interaction dipolaire de type

$$V \otimes a^* + V^* \otimes a.$$

Ainsi, ce type d'hamiltonien peut être interprété de la manière suivante : à chaque état excité du petit système lui correspond un état désexcité du système extérieur et inversement. Cela explique le choix des hamiltoniens de type  $H_w$ . D'autre part, les opérateurs  $a_j^i$  permettent de décrire comment l'état d'une particule du système extérieur transite d'un état non vide vers un autre non vide tout en conservant le nombre total des particules, d'où le choix des hamiltoniens de type  $H_l$ . quant au choix de l'hamiltonien  $H$ , il s'agit de tenir compte des deux types d'interactions.

Une étude détaillée des hamiltoniens  $H_w$  et  $H_l$  sera donnée dans le chapitre 6.

## Chapitre 2

# Contribution n° 1 : Propriétés markoviennes du modèle de spin-boson

Dans ce chapitre, nous comparons systématiquement les approches hamiltonienne et markovienne dans le cas du modèle de spin-boson.

La description de l'approche hamiltonienne de ce modèle a été introduite dans [JP2]. Jacksic et Pillet ont montré dans ce papier que le système spin-boson a la propriété du retour à l'équilibre pour toute température strictement positive  $T$ . Ensuite, les hypothèses du retour à l'équilibre introduites dans [JP2] ont été améliorées dans [DJ2].

La limite de couplage faible consiste à abtenir une dynamique markovienne décrivant un petit système à partir de la description hamiltonienne de l'interaction entre ce petit système et un système extérieur. La première preuve rigoureuse de la limite de couplage faible a été développée par Davies (cf [Da1]) dans la cas d'un petit système en interaction avec un bain fermionique où l'opérateur d'interaction entre les deux systèmes est un opérateur borné. Notons aussi que la condition de la limite de couplage faible introduite dans [Da1] a été ensuite affaiblie dans [AcFrL1]–[AcFrL4] et [DF].

De notre côté, par la limite de couplage faible, nous obtenons le lindbladien associé de la description hamiltonienne du système spin-boson où l'opérateur d'interaction entre les deux systèmes est un opérateur non borné. Ensuite, nous étudions les propriétés physiques de l'équation maîtresse associée telles que la décohérence quantique, la condition du bilan détaillé quantique et nous montrons la propriété du retour à l'équilibre pour toute température  $T \geq 0$ . Finalement, nous explicitons l'hamiltonien associé à l'équation de Langevin quantique et nous donnons un hamiltonien d'interactions répétées qui permet de décrire le système spin-boson.

## 2.1 Le modèle

### 2.1.1 Système spin-boson

Le modèle que nous considérons dans ce chapitre est celui de spin-boson qui représente un atome à deux niveaux d'énergie en interaction avec un réservoir modélisé par un gaz de bosons libres en équilibre thermique à une température  $T = \frac{1}{k\beta}$ , où  $k$  est la constante de Boltzmann et  $\beta > 0$  ( $T = 0 \iff \beta = \infty$ ). Dans la suite, nous introduisons le spin isolé et le réservoir. Ensuite, nous décrivons le système couplé.

Le spin isolé est décrit par un hamiltonien  $h_s = \sigma_z$  défini sur  $\mathcal{K} = \mathbb{C}^2$  par

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les énergies propres associées sont  $e_{\pm} = \pm 1$  dont les états propres sont notés respectivement  $\Psi_{\pm}$ . L'algèbre des observables du spin est  $M_2$ , l'algèbre des matrices  $2 \times 2$  à coefficients complexes. À une température inverse  $\beta$ , l'état d'équilibre thermodynamique du spin est donné par

$$\omega_S(A) = \text{Tr}(\rho_{\beta}A), \text{ pour tout } A \in M_2,$$

où

$$\rho_{\beta} = \frac{e^{-\beta\sigma_z}}{\text{Tr}(e^{-\beta\sigma_z})}.$$

La dynamique associée est définie par le groupe d'automorphismes

$$\tau_S^t(A) = e^{it\sigma_z} A e^{-it\sigma_z}, \text{ pour tous } A \in M_2, t \in \mathbb{R}.$$

Le réservoir est modélisé par un gaz de bosons libres, décrit par l'espace de Fock symétrique  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Si on note  $\omega = \omega(k) = |k|$ ,  $k \in \mathbb{R}^3$ , l'énergie d'un boson isolé, alors l'hamiltonien du réservoir est la seconde quantification différentielle  $d\Gamma(\omega)$  de  $\omega$ .

L'opérateur de Weyl associé à un élément  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  est défini par

$$W(f) = \exp(i\varphi(f)),$$

où  $\varphi(f)$  est l'opérateur de champ donné par

$$\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(f)).$$

Soit  $\mathcal{D}_{\text{loc}}$  l'espace des éléments  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  dont les transformées de Fourier sont à support compact. L'ensemble des observables associés au réservoir est décrit

par l'algèbre de Weyl  $\mathcal{A}_{\text{loc}} = CCR(\mathcal{D}_{\text{loc}})$ , la  $C^*$ -algèbre engendrée par les éléments  $W(f)$ ,  $f \in \mathcal{D}_{\text{loc}}$  (cf [JP2]). Il suit de [JP2] que  $W(e^{it\omega} f) \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$ , pour tout  $f \in \mathcal{D}_{\text{loc}}$ .

L'état d'équilibre thermodynamique à une température inverse  $\beta$  du réservoir est défini par

$$\omega_R(W(f)) = \exp \left[ -\frac{\|f\|^2}{4} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |f(k)|^2 \rho(k) dk \right], \quad (2.1)$$

où  $\rho(k)$  est liée à  $\omega(k)$  par la loi de radiation de Planck

$$\rho(k) = \frac{1}{e^{\beta\omega(k)} - 1}.$$

Notons que  $\rho$  est une fonction singulière en  $k = 0$ . Ainsi, si on considère une fonction  $f$  dont la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(f)$  de  $f$  est à support  $C$  compact, alors on a

$$|f(k)| = |\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(k)| \leq \int_C |\mathcal{F}(f)(k')| dk'.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$|f(k)| \leq |C| \|f\|_2,$$

pour tout  $k \in \mathbb{R}^3$ , ce qui implique que  $f$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}^3$ . Par conséquent, la formule (2.1) est bien définie.

La dynamique du réservoir  $\tau_R^t$  induit une transformation de Bogoliubov,

$$\tau_R^t(W(f)) = \exp(itd\Gamma(\omega))W(f)\exp(-itd\Gamma(\omega)) = W(e^{it\omega} f).$$

Le système couplé est décrit par la  $C^*$ -algèbre  $M_2 \otimes \mathcal{A}_{\text{loc}}$ . La dynamique libre est donnée par

$$\tau_0^t(A) = \tau_S^t \otimes \tau_R^t(A), \quad \text{pour tout } A \in M_2 \otimes \mathcal{A}_{\text{loc}}.$$

### 2.1.2 Représentation semistandard du système spin-boson

Dans la représentation semistandard du système spin-boson, il s'agit de considérer uniquement la représentation GNS de la partie réservoir dans le système couplé.

Introduisons maintenant la représentation cyclique d'Araki-Woods du couple  $(\omega_R, \mathcal{A}_{\text{loc}})$ , qui est donnée par le triplet  $(\mathcal{H}_R, \pi_R, \Omega_R)$  où :

- $\mathcal{H}_R = \mathcal{J}^2(\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)))$ , l'espace de Hilbert-Schmidt sur  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3))$  qui est naturellement identifié à l'espace  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \overline{\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3))}$  et qui est muni du produit scalaire

$$(X, Y) = \text{Tr}(X^*Y),$$

- $\pi_R(W(f)) : X \in \mathcal{H}_R \mapsto W((1 + \rho)^{1/2}f)XW(\bar{\rho}^{1/2}\bar{f})$ ,
- $\Omega_R = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ , avec  $\Omega$  est le vecteur vide de  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

Notons que par un simple calcul, on montre que pour tout  $A = W(f)$ ,  $f \in \mathcal{D}_{\text{loc}}$ ,

$$\omega_R(A) = (\Omega_R, \pi_R(A)\Omega_R).$$

De plus, pour tout  $A = W(f)$ ,  $f \in \mathcal{D}_{\text{loc}}$ , la relation

$$\pi_R(\exp(itd\Gamma(\omega))A \exp(-itd\Gamma(\omega))) = \exp(it[d\Gamma(\omega), \cdot])\pi_R(A) \exp(-it[d\Gamma(\omega), \cdot])$$

définit une  $W^*$ -dynamique sur  $\mathcal{M}_R = \pi_R(\mathcal{A}_{\text{loc}})''$  dont le générateur est l'opérateur

$$L_R = [d\Gamma(\omega), \cdot].$$

Le semi-liouvillien libre associé à la représentation semistandard du système spin-boson est défini par

$$L_0^{\text{semi}} = \sigma_z \otimes 1 + 1 \otimes L_R.$$

Le semi-liouvillien total est l'opérateur

$$L_\lambda^{\text{semi}} = L_0^{\text{semi}} + \lambda\sigma_x \otimes \varphi_{AW}(\alpha),$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est appelée *constante de couplage*,  $\alpha \in L^2(\mathbb{R}^3)$  est appelée *fonction test* et  $\varphi_{AW}(\alpha)$  est l'opérateur de champ associé à la représentation cyclique d'Araki-Woods, que l'on identifie sur  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \overline{\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3))}$  à

$$\varphi_{AW}(\alpha) \simeq \varphi((1 + \rho)^{1/2}\alpha) \otimes 1 + 1 \otimes \varphi(\bar{\rho}^{1/2}\bar{\alpha}),$$

(cf [JP2], [DJ1]) et

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la preuve de la proposition suivante, on renvoie le lecteur à [JP2].

**Proposition 2.1** *Si  $(\omega + \omega^{-1})\alpha \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , alors  $L_\lambda^{\text{semi}}$  est un opérateur essentiellement auto-adjoint sur  $\mathbb{C}^2 \otimes D(d\Gamma(\omega)) \otimes D(d\Gamma(\omega))$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

Une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus est que le groupe d'automorphismes

$$\tau_\lambda^t(A) = e^{itL_\lambda^{\text{semi}}} A e^{-itL_\lambda^{\text{semi}}}$$

définit une  $W^*$ -dynamique sur  $\mathcal{M} = M_2 \otimes \mathcal{M}_R$ , i.e : le couple  $(\mathcal{M}, \tau_\lambda)$  est un  $W^*$ -système dynamique.

### 2.1.3 Espace à une particule du réservoir

Après avoir défini la représentation cyclique d'Araki-Woods  $(\mathcal{H}_R, \pi_R, \Omega_R)$  du couple  $(\omega_R, \mathcal{A}_{\text{loc}})$ , nous remarquons que l'état associé au réservoir n'est pas un état vecteur sur un espace de Fock et ce cas est très compliqué à traiter (cf [AcFrL1]). Cependant, d'après [DJ1], [DJ2] et [JP1], nous constatons que cet état peut être représenté comme un état vecteur sur un espace de Fock. De plus, on a les identifications suivantes :

- $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \overline{\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3))} \simeq \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \Gamma_s(\overline{L^2(\mathbb{R}^3)}) \simeq \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3) \oplus \overline{L^2(\mathbb{R}^3)})$ ,
- $L_R \simeq d\Gamma(\omega \oplus -\bar{\omega})$ ,
- $\varphi_{AW}(\alpha) \simeq \varphi((1 + \rho)^{1/2}\alpha \oplus \bar{\rho}^{1/2}\bar{\alpha})$ .
- $\Omega_R \simeq \Omega \oplus \bar{\Omega}$ .

Ainsi, l'état  $\omega_R$  est un état vecteur défini sur l'espace de Fock symétrique  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3) \oplus \overline{L^2(\mathbb{R}^3)})$ . De plus, la dynamique engendrée par  $L_R$  induit une transformation de Bogoliubov

$$e^{itd\Gamma(\omega \oplus -\bar{\omega})} \varphi_{AW}(\alpha) e^{-itd\Gamma(\omega \oplus -\bar{\omega})} = \varphi_{AW}(e^{it\omega} \alpha).$$

## 2.2 Limite de couplage faible

La limite de couplage faible consiste à remplacer l'interaction entre un petit système et un réservoir  $H_I$  par  $\lambda H_I$  et considérer la dynamique réduite du petit système obtenue, en faisant tendre  $\lambda$  vers 0. Une telle limite nous permet d'obtenir une dynamique markovienne irréversible définie sur l'algèbre associée au petit système. Le générateur de cette dynamique est appelé lindbladien. Notons dans ce cas que plus l'interaction est faible, plus le temps d'observer l'influence du réservoir sur le petit système est long. Ainsi, on obtient une nouvelle normalisation du temps :  $\tau = \lambda^2 t$ , où  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$  et  $\tau$  est une constante. La première preuve de la limite de couplage faible à été développée par Davies (cf [Da1]).

### 2.2.1 Théorie abstraite de la limite de couplage faible

Soit  $\mathcal{Y}$  un espace de Banach et  $\mathcal{X}$  son dual, i.e :  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}^*$ . Soient  $P$  une projection sur  $\mathcal{X}$  et  $e^{it\delta_0}$  un groupe d'isométries à un paramètre sur  $\mathcal{X}$  qui commute avec  $P$ . Posons  $E = P\delta_0$ . Il est clair que  $E$  est le générateur d'un groupe d'isométries à un paramètre sur  $\text{Im}P$ . Soit  $Q$  une perturbation de  $\delta_0$  telle que  $\mathcal{D}(Q) \supset \mathcal{D}(\delta_0)$ . Introduisons maintenant les hypothèses suivantes :

- (1)  $P$  est une projection  $w^*$ -continue sur  $\mathcal{X}$  de norme 1,
- (2)  $e^{it\delta_0}$  est un groupe d'isométries  $w^*$ -continu (ou un groupe  $C_0^*$ ) à un paramètre sur  $\mathcal{X}$ ,



- (3) Pour  $|\lambda| < \lambda_0$ ,  $i\delta_\lambda = i\delta_0 + i\lambda Q$  est le générateur d'un semigroupe de contractions  $C_0^*$    un paramètre.

Considérons maintenant l'opérateur

$$K_\lambda(t) = i \int_0^{\lambda^{-2}t} e^{-is(E+\lambda PQP)} PQ e^{is(1-P)\delta_\lambda(1-P)} QP ds.$$

Pour la preuve du théorème suivant, on renvoie le lecteur à [DF].

**Théorème 2.2** *Supposons que les conditions (1), (2) et (3) sont vraies. Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- (4)  $P$  est une projection de rang fini et  $PQP = 0$ ,  
(5) Pour tout  $t_1 > 0$ , il existe une constante  $c$  telle que

$$\sup_{|\lambda| < 1} \sup_{0 \leq t \leq t_1} \|K_\lambda(t)\| \leq c.$$

- (6) Il existe un opérateur  $K$  défini sur  $\text{Im}P$  tel que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} K_\lambda(t) = K$$

pour tout  $0 < t < \infty$ .

Posons

$$K^\sharp = \sum_{e \in \text{sp}E} \mathbb{1}_e(E) K \mathbb{1}_e(E) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{itE} K e^{-itE} dt.$$

Alors, on a

- i)  $e^{itK^\sharp}$  est un semigroupe de contractions,  
ii) Pour tout  $t_1 > 0$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq t_1} \|e^{-itE/\lambda^2} P e^{it(\delta_0 + \lambda Q)/\lambda^2} P - e^{itK^\sharp}\| = 0.$$

## 2.2.2 Application au système spin-boson

Rappelons que dans la représentation semistandard du système spin-boson, le semi-liouvillien libre est l'opérateur

$$L_0^{\text{semi}} = \sigma_z \otimes 1 + 1 \otimes L_R,$$

tandis que le semi-liouvillien total est donné par

$$L_\lambda^{\text{semi}} = L_0^{\text{semi}} + \lambda \sigma_x \otimes \varphi_{AW}(\alpha).$$

Soit  $V$  l'opérateur non borné donné par  $V = \sigma_x \otimes \varphi_{AW}(\alpha)$ . Posons  $Q = [V, \cdot]$  et notons  $\delta_\lambda$  le générateur de la dynamique  $\tau_\lambda^t$  défini par

$$\delta_\lambda = [L_\lambda^{semi}, \cdot] = \delta_0 + \lambda Q,$$

où  $\delta_0 = [L_0^{semi}, \cdot]$ .

Soit  $P$  la projection sur  $\mathcal{M}$  telle que

$$P(B \otimes C) = \omega_R(C)B \otimes 1_{\mathcal{H}_R}, \quad \forall B \otimes C \in \mathcal{M}.$$

Il est clair que  $P$  est de rang fini de norme 1. De plus, on a

$$E = P\delta_0 = \delta_0 P = [\sigma_z, \cdot]P \quad \text{et} \quad PQP = 0.$$

Soit  $P_1 = 1 - P$ . Ainsi, on obtient

$$K_\lambda(t) = i \int_0^{\lambda^{-2}t} e^{-isE} P[V, \cdot] e^{isP_1[L_\lambda^{semi}, \cdot]P_1} [V, \cdot] P ds.$$

Notons que  $P_1$  commute avec  $[L_0^{semi}, \cdot]$ . De plus, on a

$$e^{isP_1[L_0^{semi}, \cdot]P_1} = e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} P_1 + P. \quad (2.2)$$

Dans la suite, on se propose de montrer sous certaines conditions que l'opérateur

$$\begin{aligned} K &= i \int_0^\infty e^{-isE} P[V, \cdot] e^{isP_1[L_0^{semi}, \cdot]P_1} [V, \cdot] P ds \\ &= i \int_0^\infty e^{-isE} P[V, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V, \cdot] P ds. \end{aligned}$$

existe et que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} K_\lambda(t) = K.$$

Posons

$$U_t^\lambda = e^{itP_1[L_\lambda^{semi}, \cdot]P_1}, \quad U_t = e^{itP_1[L_0^{semi}, \cdot]P_1}.$$

**Lemme 2.3** *On a l'identité suivante*

$$K_\lambda(t) = i \int_0^{\lambda^{-2}t} e^{-isE} P[V, \cdot] e^{isP_1[L_0^{semi}, \cdot]P_1} [V, \cdot] P ds + i \sum_{n \geq 1} (i\lambda)^n R_n(t),$$

où

$$R_n(t) = \int_{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_0 \leq t} e^{-it_0 E} P[V, \cdot] U_{t_0} (P_1 Q_1 P_1) \dots (P_1 Q_n P_1) [V, \cdot] P dt_n \dots dt_0,$$

avec  $Q_k = U_{-t_k} [V, \cdot] U_{t_k}$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ .

**Preuve:** On a

$$U_t^\lambda = U_t + i\lambda \int_0^t U_{t-s} P_1[V, \cdot] P_1 U_s^\lambda ds.$$

Ainsi, l'opérateur  $U_{-t} U_t^\lambda$  satisfait l'équation

$$U_{-t} U_t^\lambda = I + i\lambda \int_0^t (U_{-s} P_1[V, \cdot] P_1 U_s) (U_{-s} U_s^\lambda) ds.$$

De plus, il s'exprime comme une série d'intégrales itérées

$$U_{-t} U_t^\lambda = I + \sum_{n \geq 1} (i\lambda)^n \int_{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_1 \leq t} (U_{-t_1} P_1[V, \cdot] P_1 U_{t_1}) \dots (U_{-t_n} P_1[V, \cdot] P_1 U_{t_n}) dt_n \dots dt_1.$$

Notons que l'opérateur  $U_{t_k}$  commute avec  $P_1$ . Ainsi, si on obtient

$$U_{-t} U_t^\lambda = 1 + \sum_{n \geq 1} (i\lambda)^n \int_{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_1 \leq t} (P_1 Q_1 P_1) \dots (P_1 Q_n P_1) dt_n \dots dt_1.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} K_\lambda(t) &= i \int_0^{\lambda^{-2}t} e^{-isE} P[V, \cdot] e^{isP_1[L_0^{semi}, \cdot] P_1[V, \cdot]} P ds \\ &+ i \sum_{n \geq 1} (i\lambda)^n \int_{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_0 \leq \lambda^{-2}t} e^{-it_0 E} P[V, \cdot] U_{t_0} (P_1 Q_1 P_1) \dots (P_1 Q_n P_1) [V, \cdot] P dt_n \dots dt_0. \end{aligned}$$

□

Rappelons que d'après la relation (2.2), on a  $PU_{-t_0} = P$ . Par suite, si on pose

$$Q_{n+1} = U_{-t_{n+1}} [V, \cdot] U_{t_{n+1}},$$

où  $t_{n+1} = 0$ , alors on obtient

$$R_n(t) = \int_{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_0 \leq t} e^{-it_0 E} P Q_0 (P_1 Q_1 P_1) \dots (P_1 Q_n P_1) Q_{n+1} P dt_n \dots dt_0. \quad (2.3)$$

**Lemme 2.4** On a

$$R_n(t) = \int_{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_0 \leq t} P[\sigma_{x,0} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_0 \omega} \alpha), \cdot] P_1 \dots P_1[\sigma_{x,n+1} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{n+1} \omega}), \cdot] P dt_n \dots dt_0,$$

où  $\sigma_{x,r} = e^{-it_r \sigma_z} \sigma_x e^{it_r \sigma_z}$ .

**Preuve:** Commençons par calculer  $P_1 Q_r P_1$  pour  $r \geq 1$ . On a

$$U_{t_r} = e^{it_r[\sigma_z, \cdot]} e^{it_r[L_R, \cdot]} P_1 + P$$

et

$$U_{t_r} P_1 = e^{it_r[\sigma_z, \cdot]} e^{it_r[L_R, \cdot]} P_1.$$

Par conséquent, il en résulte

$$P_1 U_{-t_r} [V, \cdot] U_{t_r} P_1 = P_1 e^{-it_r[\sigma_z, \cdot]} e^{-it_r[L_R, \cdot]} [V, \cdot] e^{it_r[\sigma_z, \cdot]} e^{it_r[L_R, \cdot]} P_1.$$

De plus, l'égalité suivante est satisfaite

$$e^{-it_r[\sigma_z, \cdot]} e^{-it_r[L_R, \cdot]} [V, \cdot] e^{it_r[\sigma_z, \cdot]} e^{it_r[L_R, \cdot]} (B \otimes C) = [\sigma_{x,r} \otimes e^{-it_r L_R} \varphi_{AW}(\alpha) e^{it_r L_R}, \cdot] (B \otimes C).$$

Rappelons la transformation de Bogoliubov

$$e^{-it_r L_R} \varphi_{AW}(\alpha) e^{it_r L_R} = \varphi_{AW}(e^{-it_r \omega} \alpha).$$

On obtient donc

$$P_1 Q_r P_1 = P_1 [\sigma_{x,r} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_r \omega} \alpha), \cdot] P_1.$$

Notons aussi que  $P e^{-it_0[\sigma_z, \cdot]} = P e^{-it_0[\sigma_z, \cdot]} e^{-it_0[L_R, \cdot]}$  et que

$$\begin{aligned} e^{-it_0 E} P Q_0 P_1 &= P e^{-it_0[\sigma_z, \cdot]} [V, \cdot] e^{it_0[\sigma_z, \cdot]} e^{it_0[L_R, \cdot]} P \\ &= P e^{-it_0[\sigma_z, \cdot]} e^{-it_0[L_R, \cdot]} [V, \cdot] e^{it_0[\sigma_z, \cdot]} e^{it_0[L_R, \cdot]} P \\ &= P [\sigma_{x,0} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_0 \omega} \alpha), \cdot] P_1. \end{aligned}$$

Ainsi, de la relation (2.3), nous pouvons conclure.  $\square$

Maintenant, pour tout entier  $n$ , on définit l'ensemble  $\mathcal{P}_n$  de permutations  $\sigma$  de  $(1, \dots, 2n)$  telle que

$$\sigma(2r-1) < \sigma(2r), \quad \sigma(2r-1) < \sigma(2r+1)$$

pour tout  $r$ .

Notons que l'état  $\omega_R$  est un état *quasi-libre*, i.e :

$$\omega_R(\varphi_{AW}(\alpha_1) \dots \varphi_{AW}(\alpha_{2n})) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \prod_{r=1}^n \omega_R(\varphi_{AW}(\alpha_{\sigma(2r-1)}) \varphi_{AW}(\alpha_{\sigma(2r)})), \quad (2.4)$$

De plus, on a

$$\omega_R(\varphi_{AW}(\alpha_1) \dots \varphi_{AW}(\alpha_{2n+1})) = 0.$$

(cf [BR2] pour plus de détails).

**Lemme 2.5** *Pour tout  $n \geq 0$ , on a*

$$R_{2n+1}(t) = 0.$$

**Preuve:** Notons que

$$\begin{aligned} & P[\sigma_{x,0} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_0\omega}\alpha), \cdot] P_1 \dots P_1[\sigma_{x,2n+2} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{2n+2}\omega}\alpha), \cdot] P \\ &= P[\sigma_{x,0} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_0\omega}\alpha), \cdot] (1-P)[\sigma_{x,1} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_1\omega}\alpha), \cdot] (1-P) \dots \\ & \dots (1-P)[\sigma_{x,2n+2} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{2n+2}\omega}\alpha), \cdot] P. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ainsi, le membre à droite de l'égalité (2.5) est une somme de termes tels que chaque terme est un produit d'éléments de la forme

$$P[\sigma_{x,p_k} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{p_k}\omega}\alpha), \cdot] \dots [\sigma_{x,p_m} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{p_m}\omega}\alpha), \cdot] P,$$

où  $0 \leq p_k \leq \dots \leq p_m \leq \dots \leq 2n+2$ . De plus, dans chaque produit, il existe au moins un élément de la forme

$$P[\sigma_{x,r_1} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{r_1}\omega}\alpha), \cdot] \dots [\sigma_{x,r_{2p+1}} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{r_{2p+1}}\omega}\alpha), \cdot] P,$$

où  $0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_{2p+1} \leq \dots \leq r_{2n+2}$ .

Notons aussi qu'il est facile de vérifier que

$$[\sigma_{x,r_1} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{r_1}\omega}\alpha), \cdot] \dots [\sigma_{x,r_{2p+1}} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{r_{2p+1}}\omega}\alpha), \cdot] P(B \otimes C)$$

est une somme de termes telle que la deuxième composante de chacun d'entre eux est le produit de  $2p+1$  vecteurs d'ondes. Comme la projection  $P$  agit uniquement sur la deuxième composante et l'état de Gibbs  $\omega_R$  est quasi-libre, on obtient

$$P[\sigma_{x,r_1} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{r_1}\omega}\alpha), \cdot] \dots [\sigma_{x,r_{2p+1}} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{r_{2p+1}}\omega}\alpha), \cdot] P(B \otimes C) = 0,$$

ce qui implique que  $R_{2n+1}(t) = 0$ . □

**Remarque 2.1** *De la preuve du lemme précédent, nous constatons que  $R_{2n}(t)$  est la somme de  $2^n$  termes, où chacun d'entre eux est un produit d'éléments la forme*

$$P[\sigma_{x,p_k} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{p_k}\omega}\alpha), \cdot] \dots [\sigma_{x,p_m} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_{p_m}\omega}\alpha), \cdot] P,$$

tel que  $0 \leq p_k \leq \dots \leq p_m \leq \dots \leq 2n+2$  et le nombre de commutateurs  $[\sigma_{x,r} \otimes \varphi_{AW}(e^{-it_r\omega}\alpha), \cdot]$  dans la produit compris entre deux projections  $P$  est pair.

La preuve du théorème suivant est une application directe du théorème de Lebesgue.

**Théorème 2.6** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- i)  $\|R_{2n}(t)\| \leq c_n t^n$ , où la série  $\sum_{n \geq 1} c_n t^n$  admet un rayon de convergence infini.
- ii) Il existe  $0 < \varepsilon < 1$  et une suite  $d_n \geq 0$  tels que

$$\|R_{2n}(t)\| \leq d_n t^{n-\varepsilon}.$$

Alors, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{n \geq 1} (i\lambda)^n R_{2n}(\lambda^{-2}t) = 0.$$

Introduisons maintenant la fonction à deux points  $h(t)$  définie par

$$\begin{aligned} h(t) &= \omega_R(e^{-itL_R} \varphi_{AW}(\alpha) e^{itL_R} \varphi_{AW}(\alpha)) \\ &= \omega_R(\varphi_{AW}(e^{-it\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha)). \end{aligned}$$

De plus, par un simple calcul, on montre que

$$h(t-s) = \omega_R(\varphi_{AW}(e^{-it\omega} \alpha) \varphi_{AW}(e^{-is\omega} \alpha)). \quad (2.6)$$

L'expression explicite de  $h(t)$  est donnée par

$$h(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-it\omega} \frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1} |\alpha(k)|^2 dk + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{it\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} |\alpha(k)|^2 dk.$$

La preuve du lemme suivant est analogue à celle du lemme 3.3 dans [Da1].

**Lemme 2.7** *Si  $\|h\|_1 \leq \infty$ , alors pour toute permutation  $\pi$  de  $(0, 1, \dots, 2n+1)$ ,*

$$\left| \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{(0,1,\dots,2n+1)}} \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \prod_{r=0}^n h(t_{\pi\sigma(2r)} - t_{\pi\sigma(2r+1)}) dt_{2n} \dots dt_0 \right| \leq \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!} \|h\|_1^{n+1} t^n,$$

avec  $t_{2n+1} = 0$ .

Maintenant, nous prouvons le théorème suivant.

**Théorème 2.8** *Si  $\|h\|_1 \leq \infty$ , alors on a*

$$\|R_{2n}(t)\| \leq 2^{2n+1} \|h\|_1^{n+1} \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

**Preuve:** Posons

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \varphi_{AW}(e^{-it_r\omega} \alpha), \quad \Phi_r^L C = \Phi_r C, \quad \Phi_r^R C = C \Phi_r, \\ \sigma_{x,r}^L B &= \sigma_{x,r} B, \quad \sigma_{x,r}^R B = B \sigma_{x,r}, \end{aligned}$$

$\beta$  : est une fonction de  $\{0, 1, \dots, 2n + 1\}$  dans  $\{L, R\}$ ,

$k_\beta = \#\{r \in \{0, 1, \dots, 2n + 1\} \text{ tel que } \beta(r) = R\}$ .

Dans la suite,  $\sigma_{x,r} \otimes \Phi_r$  sera noté  $\sigma_{x,r}\Phi_r$ . Ainsi, par cette notation, on obtient

$$[\sigma_{x,r}\Phi_r, \cdot] = \sigma_{x,r}^L \Phi_r^L - \sigma_{x,r}^R \Phi_r^R.$$

Notons que d'après le lemme 2.3 et la remarque 2.1,  $R_{2n}(t)$  est une somme de  $2^n$  termes dont chacun d'entre eux est de la forme

$$\begin{aligned} C_{2n,j}(t) = & (-1)^j \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \sum_{\beta} (-1)^{k_\beta} P(\sigma_{x,0}^{\beta(0)} \Phi_0^{\beta(0)}) (\sigma_{x,1}^{\beta(1)} \Phi_1^{\beta(1)}) \dots \\ & \dots (\sigma_{x,p_1-1}^{\beta(p_1-1)} \Phi_{p_1-1}^{\beta(p_1-1)}) P(\sigma_{x,p_1}^{\beta(p_1)} \Phi_{p_1}^{\beta(p_1)}) \dots (\sigma_{x,p_j-1}^{\beta(p_j-1)} \Phi_{p_j-1}^{\beta(p_j-1)}) \times \\ & P(\sigma_{x,p_j}^{\beta(p_j)} \Phi_{p_j}^{\beta(p_j)}) \dots (\sigma_{x,2n}^{\beta(2n)} \Phi_{2n}^{\beta(2n)}) (\sigma_{x,2n+1}^{\beta(2n+1)} \Phi_{2n+1}^{\beta(2n+1)}) P dt_{2n} \dots dt_0, \end{aligned}$$

où  $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_j < p_{j+1} = 2n+2$ ,  $p_k$  est un nombre pair,  $j = N-2$  avec  $N$  est le nombre des projections  $P$  qui apparaissent dans l'expression de  $C_{2n,j}(t)$ .

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \|C_{2n,j}(t)(B \otimes C)\| & \leq \|B \otimes C\| \sum_{\beta} \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \prod_{r=0}^j |\omega_R(\Phi_{p_r}^{\beta(p_r)} \dots \Phi_{p_{r+1}-1}^{\beta(p_{r+1}-1)})| dt_{2n} \dots dt_0, \\ & \leq \|B \otimes C\| \sum_{\beta} \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \prod_{r=0}^j |\omega_R(\Phi_{p_r}^{\beta(p_r)} \dots \Phi_{p_{r+1}-1}^{\beta(p_{r+1}-1)})| dt_{2n} \dots dt_0, \\ & \leq \|B \otimes C\| \sum_{\beta} \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \prod_{r=0}^j |\omega_R(\Phi_{\pi(p_r)} \dots \Phi_{\pi(p_{r+1}-1)})| dt_{2n} \dots dt_0, \end{aligned}$$

où  $\pi$  est une permutation qui dépend de  $\beta$ .

Ainsi, d'après le lemme 2.7, on obtient

$$\begin{aligned} \|C_{2n,j}(t)\| & \leq \sum_{\beta} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{(0,1,\dots,2n+1)}} \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \prod_{r=0}^n |\omega_R(\Phi_{\pi(\sigma(2r))} \Phi_{\pi(\sigma(2r+1))})| dt_{2n} \dots dt_0, \\ & \leq 2^{2n+2} \|h\|_1^{n+1} \frac{t^n}{2^{n+1}(n+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|R_{2n}(t)\| \leq 2^{2n+1} \|h\|_1^{n+1} \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

□

**Théorème 2.9** *Si*

$$\int_0^\infty (1+t^\varepsilon)|h(t)|dt < \infty$$

pour un certain  $0 < \varepsilon < 1$ , alors il existe  $d_n > 0$  tel que

$$\|R_{2n}(t)\| \leq d_n t^{n-\varepsilon}.$$

**Preuve:** On a  $R_{2n}(t)$  est la somme de  $2^n$  termes dont chacun d'entre eux a la forme de  $C_{2n,j}$ . Ainsi, afin de prouver le théorème ci-dessus, on regroupe ces termes deux à deux de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & (-1)^j \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \sum_{\beta} (-1)^{k_{\beta}} P(\sigma_{x,0}^{\beta(0)} \Phi_0^{\beta(0)}) \dots (\sigma_{x,p_1-1}^{\beta(p_1-1)} \Phi_{p_1-1}^{\beta(p_1-1)}) P \dots P(\sigma_{x,p_j}^{\beta(p_j)} \Phi_{p_j}^{\beta(p_j)}) \\ & \dots (\sigma_{x,2n-1}^{\beta(2n-1)} \Phi_{2n-1}^{\beta(2n-1)}) (\sigma_{x,2n}^{\beta(2n)} \Phi_{2n}^{\beta(2n)}) (\sigma_{x,2n+1}^{\beta(2n+1)} \Phi_{2n+1}^{\beta(2n+1)}) P dt_{2n} \dots dt_0 + \\ & (-1)^{(j+1)} \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \sum_{\beta} (-1)^{k_{\beta}} P(\sigma_{x,0}^{\beta(0)} \Phi_0^{\beta(0)}) \dots (\sigma_{x,p_1-1}^{\beta(p_1-1)} \Phi_{p_1-1}^{\beta(p_1-1)}) P \dots P(\sigma_{x,p_j}^{\beta(p_j)} \Phi_{p_j}^{\beta(p_j)}) \\ & \dots (\sigma_{x,2n-1}^{\beta(2n-1)} \Phi_{2n-1}^{\beta(2n-1)}) P(\sigma_{x,2n}^{\beta(2n)} \Phi_{2n}^{\beta(2n)}) (\sigma_{x,2n+1}^{\beta(2n+1)} \Phi_{2n+1}^{\beta(2n+1)}) P dt_{2n} \dots dt_0 = \\ & (-1)^j \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \sum_{\beta} (-1)^{k_{\beta}} P(\sigma_{x,0}^{\beta(0)} \Phi_0^{\beta(0)}) \dots (\sigma_{x,p_1-1}^{\beta(p_1-1)} \Phi_{p_1-1}^{\beta(p_1-1)}) P \dots \\ & \dots \left[ P(\sigma_{x,p_j}^{\beta(p_j)} \Phi_{p_j}^{\beta(p_j)}) \dots (\sigma_{x,2n-1}^{\beta(2n-1)} \Phi_{2n-1}^{\beta(2n-1)}) (\sigma_{x,2n}^{\beta(2n)} \Phi_{2n}^{\beta(2n)}) (\sigma_{x,2n+1}^{\beta(2n+1)} \Phi_{2n+1}^{\beta(2n+1)}) P - \right. \\ & \left. P(\sigma_{x,p_j}^{\beta(p_j)} \Phi_{p_j}^{\beta(p_j)}) \dots (\sigma_{x,2n-1}^{\beta(2n-1)} \Phi_{2n-1}^{\beta(2n-1)}) P(\sigma_{x,2n}^{\beta(2n)} \Phi_{2n}^{\beta(2n)}) (\sigma_{x,2n+1}^{\beta(2n+1)} \Phi_{2n+1}^{\beta(2n+1)}) P \right] dt_{2n} \dots dt_0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le membre à droite de l'égalité ci-dessus est majoré par

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta} \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \prod_{k=0}^{j-1} \left| \omega_R(\Phi_{p_k}^{\beta(p_k)} \Phi_{p_k+1}^{\beta(p_k+1)} \dots \Phi_{p_{k+1}-1}^{\beta(p_{k+1}-1)}) \right| \times \\ & \left| \left[ \omega_R(\Phi_{p_j}^{\beta(p_j)} \dots \Phi_{2n}^{\beta(2n)} \Phi_{2n+1}^{\beta(2n+1)}) - \omega_R(\Phi_{p_j}^{\beta(p_j)} \dots \Phi_{2n-1}^{\beta(2n-1)}) \langle \Phi_{2n}^{\beta(2n)} \Phi_{2n+1}^{\beta(2n+1)} \rangle \right] \right| dt_{2n} \dots dt_0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Notons que dans le terme situé entre les deux crochets de la relation (2.7), il n'y a aucun produit de fonctions à deux points, où  $2n$  est couplé à  $(2n+1)$ . De plus, ce terme est donné par

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{(p_j, \dots, 2n+1)}} \prod_{r=\frac{1}{2}p_j}^n \omega_R(\Phi_{\sigma(\pi(2r))} \Phi_{\sigma(\pi(2r+1))}),$$

où  $2n$  n'est pas couplé à  $(2n+1)$  et  $\pi$  est une permutation qui dépend de  $\beta$ . Ainsi, le terme dans la relation (2.7) est majoré par

$$\sum_{\sigma} \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \prod_{r=0}^n |\omega_R(\Phi_{\sigma(2r)} \Phi_{\sigma(2r+1)})| dt_{2n} \dots dt_0,$$



où  $\sum_{\sigma}$  est la somme sur tous les couples de  $\{0, 1, \dots, 2n+1\}$  telle que  $2n$  est non couplé à  $(2n+1)$ , ( $t_{2n+1} = 0$ ).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \prod_{r=0}^n |\omega_R(\Phi_{\sigma(2r)} \Phi_{\sigma(2r+1)})| dt_{2n} \dots dt_0 \\ &= \int_{0 \leq t_{2n} \leq \dots \leq t_0 \leq t} \prod_{r=0}^n |h(t_{\sigma(2r)} - t_{\sigma(2r+1)})| dt_{2n} \dots dt_0 \\ &\leq cst \|h\|_1^n t^k \int_0^t |h(s)| s^{n-k} ds \\ &\leq cst \|h\|_1^n t^{n-\varepsilon} \int_0^t |h(s)| s^{\varepsilon} ds, \end{aligned}$$

où  $0 \leq k \leq n-1$ , ce qui finit la preuve.  $\square$

Finalement, nous prouvons le théorème suivant.

**Théorème 2.10** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- (1)  $(\omega + \omega^{-1})\alpha \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ,
- (2)  $\int_0^{\infty} (1+t^{\varepsilon})|h(t)|dt < \infty$ , pour un certain  $0 < \varepsilon < 1$ .

Alors, les hypothèses du théorème 2.2 sont satisfaites. En outre, l'opérateur  $K^{\sharp}$  est donné par

$$K^{\sharp} = i \int_0^{\infty} \sum_{e \in sp([\sigma_z, \cdot])} e^{-isE} P \mathbb{1}_e([\sigma_z, \cdot])[V, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V, \cdot] \mathbb{1}_e([\sigma_z, \cdot]) P ds.$$

**Preuve:** La preuve du théorème ci-dessus est une conséquence immédiate des théorèmes 2.6, 2.8, 2.9.  $\square$

## 2.3 Lindbladien du système spin-boson

Posons

$$\mathcal{L} = iK^{\sharp}.$$

On se propose dans cette sous-section de prouver que l'opérateur  $\mathcal{L}$  a la forme d'un lindbladien (cf théorème 1.33). Pour cela, nous introduisons la formule suivante, connue en théorie des distributions

$$\int_0^{\infty} e^{\pm it\omega} dt = \frac{\pm i}{\omega \pm i0} = \pi \delta(\omega) \pm iV_p\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad (2.8)$$

où

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+i0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x+i\varepsilon}, \\ \int f(x)\delta(x) dx &= f(0), \\ \int f(x)V_p\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = PP \int \frac{f(x)}{x} dx, \\ \int f(x)\frac{1}{x+i0} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f(x)\frac{1}{x+i\varepsilon} dx.\end{aligned}$$

Ici on suppose que  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x)$  est une fonction continue, que les intégrales dans les membres à droite sont bien définies et que les limites existent.

Notons que  $[\sigma_z, \cdot]$  admet 2,  $-2$  comme valeurs propres simples et 0 comme valeur propre double. De plus, les états propres correspondants sont respectivement donnés par  $|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-|$ ,  $|\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|$  et  $|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|$ ,  $|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|$ .

Posons

$$\begin{aligned}n_+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ n_+^L X &= n_+ X, \quad n_+^R X = X n_+, \quad n_-^L X = n_- X, \quad n_-^R X = X n_-.\end{aligned}$$

Alors, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_2([\sigma_z, \cdot]) &= n_+^L n_-^R, \\ \mathbf{1}_{-2}([\sigma_z, \cdot]) &= n_-^L n_+^R, \\ \mathbf{1}_0([\sigma_z, \cdot]) &= n_+^L n_+^R + n_-^L n_-^R.\end{aligned}$$

La forme explicite du lindbladien est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 2.11** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- i)  $\int_0^\infty \left[ \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{it\omega} (1 + \rho(k)) |\alpha(k)|^2 dk \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{it\omega} \rho(k) |\alpha(k)|^2 dk \right| \right] dt < \infty$ ,
- ii)  $\alpha$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un voisinage de la sphère

$$B(0, 2) = \{k \in \mathbb{R}^3, |k| = 2\},$$

- iii)  $(1 + \omega)\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Alors,  $\mathcal{L} = iK^\sharp$  a la forme d'un lindbladien et pour tout  $X \in M_2$ , on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X) &= i(\text{Im}(\alpha, \alpha)_+^- - \text{Im}(\alpha, \alpha)_+^+)[n_+, X] \\ &+ i(\text{Im}(\alpha, \alpha)_-^- - \text{Im}(\alpha, \alpha)_-^+)[n_-, X] \\ &+ \text{Re}(\alpha, \alpha)_-^+(2\sigma_+ X \sigma_- - \{n_+, X\}) \\ &+ \text{Re}(\alpha, \alpha)_-^-(2\sigma_- X \sigma_+ - \{n_-, X\}),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^+ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(k) + 1}{\omega + 2} |\alpha(k)|^2 dk, \\
\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^- &= \frac{1}{2} PP \int \frac{\rho(k)}{\omega - 2} |\alpha(k)|^2 dk, \\
\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^+ &= \frac{1}{2} PP \int \frac{\rho(k) + 1}{\omega - 2} |\alpha(k)|^2 dk, \\
\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^- &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(k)}{\omega + 2} |\alpha(k)|^2 dk, \\
\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ &= \frac{\pi e^{2\beta}}{2(e^{2\beta} - 1)} \int_{\mathbb{R}^3} |\alpha(k)|^2 \delta(\omega - 2) dk, \\
\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^- &= \frac{\pi}{2(e^{2\beta} - 1)} \int_{\mathbb{R}^3} |\alpha(k)|^2 \delta(\omega - 2) dk.
\end{aligned}$$

**Preuve:** Par un simple calcul, on montre que pour tout  $X \in M_2$ , on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_2([\sigma_z, \cdot])[V, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V, \cdot] \mathbf{1}_2([\sigma_z, \cdot]) PX \\
&= [\varphi_{AW}(\alpha) \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) + \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha)] n_+ X n_-, \\
&\mathbf{1}_{-2}([\sigma_z, \cdot])[V, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V, \cdot] \mathbf{1}_{-2}([\sigma_z, \cdot]) PX \\
&= [\varphi_{AW}(\alpha) \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) + \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha)] n_- X n_+, \\
&\mathbf{1}_0([\sigma_z, \cdot])[V, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V, \cdot] \mathbf{1}_0([\sigma_z, \cdot]) PX \\
&= [e^{-2is} \varphi_{AW}(\alpha) \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) + e^{2is} \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha)] n_+ X n_+ \\
&+ [e^{2is} \varphi_{AW}(\alpha) \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) + e^{-2is} \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha)] n_- X n_- \\
&- [e^{-2is} \varphi_{AW}(\alpha) \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) + e^{2is} \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha)] \sigma_+ X \sigma_- \\
&- [e^{2is} \varphi_{AW}(\alpha) \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) + e^{-2is} \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha)] \sigma_- X \sigma_+.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $X \in M_2$ , on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{e \in \operatorname{sp}([\sigma_z, \cdot])} e^{-ise} P \mathbf{1}_e([\sigma_z, \cdot])[V, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V, \cdot] \mathbf{1}_e([\sigma_z, \cdot])(X) \\
&= [e^{-2is} \omega_R(\varphi_{AW}(\alpha) \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha)) + e^{-2is} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha))] n_+ X n_- \\
&+ [e^{2is} \omega_R(\varphi_{AW}(\alpha) \varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha)) + e^{2is} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha))] n_- X n_+ \\
&- 2\operatorname{Re}(e^{2is} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha))) [\sigma_+ X \sigma_- - n_+ X n_+] \\
&- 2\operatorname{Re}(e^{-2is} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} \alpha) \varphi_{AW}(\alpha))) [\sigma_- X \sigma_+ - n_- X n_-].
\end{aligned}$$

Par suite, l'opérateur  $\mathcal{L}$  est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) &= - \left[ \int_0^\infty e^{-2is} (\omega_R(\varphi_{AW}(\alpha)\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)) + \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)\varphi_{AW}(\alpha))) ds \right] n_+ X n_- \\ &\quad - \left[ \int_0^\infty e^{2is} (\omega_R(\varphi_{AW}(\alpha)\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)) + \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)\varphi_{AW}(\alpha))) ds \right] n_- X n_+ \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \left( \int_0^\infty e^{2is} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)\varphi_{AW}(\alpha)) ds \right) [\sigma_+ X \sigma_- - n_+ X n_+] \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \left( \int_0^\infty e^{-2is} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)\varphi_{AW}(\alpha)) ds \right) [\sigma_- X \sigma_+ - n_- X n_-]. \end{aligned}$$

Notons qu'on a

$$\begin{aligned} \omega_R(\varphi_{AW}(\alpha)\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{is\omega} (\rho(k) + 1) |\alpha(k)|^2 dk + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\omega} \rho(k) |\alpha(k)|^2 dk \\ &= \overline{\omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)\varphi_{AW}(\alpha))}. \end{aligned}$$

Alors, d'après les hypothèses du théorème ci-dessus, nous pouvons appliquer la formule (2.8), afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-2is} \omega_R(\varphi_{AW}(\alpha)\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)) ds &= \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ + i\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^+ - i\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^-, \\ \int_0^\infty e^{-2is} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)\varphi_{AW}(\alpha)) ds &= \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^- + i\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^- - i\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^+, \\ \int_0^\infty e^{2is} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)\varphi_{AW}(\alpha)) ds &= \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ - i\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^+ + i\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^-, \\ \int_0^\infty e^{2is} \omega_R(\varphi_{AW}(\alpha)\varphi_{AW}(e^{is\omega}\alpha)) ds &= \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^- + i\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^+ - i\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^-. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur  $\mathcal{L}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) &= \left\{ -\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ - \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^- + i(\operatorname{Im}(\alpha)_+^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^+) \right. \\ &\quad \left. - i(\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^+) \right\} n_+ X n_- + \left\{ -\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ - \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^- \right. \\ &\quad \left. - i(\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^+) + i(\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^+) \right\} n_- X n_+ \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ [\sigma_+ X \sigma_- - n_+ X n_+] + 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^- [\sigma_- X \sigma_+ - n_- X n_-] \\ &= i(\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^+) [n_+ X n_- - n_- X n_+] \\ &\quad + i(\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^+) [n_- X n_+ - n_+ X n_-] \\ &\quad + \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ [2\sigma_+ X \sigma_- - 2n_+ X n_+ - (n_+ X n_- + n_- X n_+)] \\ &\quad + \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^- [2\sigma_- X \sigma_+ - 2n_- X n_- - (n_+ X n_- + n_- X n_+)]. \end{aligned}$$

Comme nous avons

$$\begin{aligned} n_+ X n_- + n_- X n_+ &= \{n_+, X\} - 2n_+ X n_+ = \{n_-, X\} - 2n_- X n_-, \\ n_+ X n_- - n_- X n_+ &= [n_+, X], \\ n_- X n_+ - n_+ X n_- &= [n_-, X], \end{aligned}$$

l'opérateur  $\mathcal{L}$  a la forme d'un lindbladien et il est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) &= i(\text{Im}(\alpha, \alpha)_+^- - \text{Im}(\alpha, \alpha)_-^+)[n_+, X] \\ &\quad + i(\text{Im}(\alpha, \alpha)_-^- - \text{Im}(\alpha, \alpha)_+^+)[n_-, X] \\ &\quad + \text{Re}(\alpha, \alpha)_-^+(2\sigma_+ X \sigma_- - \{n_+, X\}) \\ &\quad + \text{Re}(\alpha, \alpha)_+^- (2\sigma_- X \sigma_+ - \{n_-, X\}), \end{aligned}$$

ce qui prouve notre théorème. □

## 2.4 Propriétés de l'équation maîtresse

Dans cette section, nous décrivons quelques propriétés physiques de l'équation maîtresse associée au système spin-boson telles que la décohérence quantique et la condition du bilan détaillé quantique.

### 2.4.1 Équation maîtresse du système spin-boson

Soit  $\rho \in M_2$  une matrice densité. Considérons l'équation maîtresse du système spin-boson

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= i(\text{Im}(\alpha, \alpha)_-^+ - \text{Im}(\alpha, \alpha)_+^-)[n_+, \rho(t)] \\ &\quad + i(\text{Im}(\alpha, \alpha)_+^+ - \text{Im}(\alpha, \alpha)_-^-)[n_-, \rho(t)] \\ &\quad + \text{Re}(\alpha, \alpha)_-^+(2\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \{n_+, \rho(t)\}) \\ &\quad + \text{Re}(\alpha, \alpha)_+^- (2\sigma_+ \rho(t) \sigma_- - \{n_-, \rho(t)\}). \end{aligned}$$

Posons

$$\rho(t) = \rho_{11}(t) n_+ + \rho_{12}(t) \sigma_+ + \rho_{21}(t) \sigma_- + \rho_{22}(t) n_-.$$

Alors, l'équation maîtresse définie ci-dessus est équivalente au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{11}(t) &= 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-} \rho_{22}(t) - 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{+} \rho_{11}(t) \\ \frac{d}{dt}\rho_{12}(t) &= [-i(\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_{+}^{\dagger} - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_{-}) + i(\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_{-}^{\dagger} - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_{+}) - \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-} \\ &\quad - \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{+}^{\dagger}] \rho_{12}(t) \\ \frac{d}{dt}\rho_{21}(t) &= [-i(\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_{-}^{\dagger} - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_{+}) + i(\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_{+}^{\dagger} - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_{-}) - \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-}^{\dagger} \\ &\quad - \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{+}^{\dagger}] \rho_{21}(t) \\ \frac{d}{dt}\rho_{22}(t) &= 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-}^{\dagger} \rho_{11}(t) - 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-} \rho_{22}(t).\end{aligned}$$

Comme  $\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-}^{\dagger} = e^{2\beta} \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-}$ , on vérifie facilement que l'état d'équilibre thermodynamique du spin  $\rho_{\beta}$  est une solution de l'équation

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = 0.$$

De plus,  $\rho_{\beta}$  est l'unique état stationnaire du semigroupe dynamique quantique associé au spin-boson si et seulement si  $\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{\pm}^{\dagger} > 0$ . En effet, si  $\rho$  est un état stationnaire associé au spin-boson, alors d'après le système d'équations différentielles donné ci-dessus, on a

$$\rho_{12}(t) = 0, \rho_{21}(t) = 0, \forall t \geq 0,$$

ce qui implique que  $\rho_{12}(0) = 0$  et  $\rho_{21}(0) = 0$ . D'autre part, on a

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-}^{\dagger} \rho_{11}(t) - 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-} \rho_{22}(t) &= 0, \\ 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-} \rho_{22}(t) - 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{-}^{\dagger} \rho_{11}(t) &= 0.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\rho_{22}(t) = e^{2\beta} \rho_{11}(t), \forall t \geq 0.$$

Comme  $\rho_{11}(t) + \rho_{22}(t) = 1$ , on a

$$\rho_{11}(t) + e^{2\beta} \rho_{11}(t) = 1, \forall t \geq 0.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\rho_{11}(t) &= \rho_{11}(0) = \frac{1}{1 + e^{2\beta}} = \frac{e^{-\beta}}{e^{-\beta} + e^{\beta}}, \\ \rho_{22}(t) &= \rho_{22}(0) = \frac{e^{2\beta}}{1 + e^{2\beta}} = \frac{e^{\beta}}{e^{-\beta} + e^{\beta}}.\end{aligned}$$

Notons que si  $\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_{\pm}^{\dagger} = 0$ , alors on obtient  $\rho_{12}(0) = 0$ ,  $\rho_{21}(0) = 0$ ,  $\rho_{11}(0) = \mu$  et  $\rho_{22}(0) = \xi$ , où  $\mu$  et  $\xi$  sont des constantes telles que  $\mu + \xi = 1$ . Ainsi, on n'a pas unicité de l'état stationnaire dans ce cas.

### 2.4.2 Décohérence quantique du spin

Dans cette sous-section, nous allons décrire la décohérence du spin (cf sous-section 1.2.3). Posons

$$\begin{aligned}\Gamma &= \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^- + \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_+^- \\ &= \pi \frac{e^{2\beta} + 1}{2(e^{2\beta} - 1)} \int_{\mathbb{R}^3} |\alpha(k)|^2 \delta(\omega - 2) dk, \\ \Omega &= \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^+ + \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^+ - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^-.\end{aligned}$$

Alors, d'après le système d'équations différentielles ordinaires donné ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\rho_{12}(t) &= e^{-(\Gamma+i\Omega)t} \rho_{12}(0), \\ \rho_{21}(t) &= e^{-(\Gamma-i\Omega)t} \rho_{21}(0).\end{aligned}$$

Ainsi, le système spin décrit une décohérence quantique si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\omega - 2) |\alpha(k)|^2 dk \neq 0.$$

Par conséquent, la décohérence du spin est contrôlée par la fonction test  $\alpha$ . De plus, si  $\int_{\mathbb{R}^3} |\alpha(k)|^2 \delta(\omega - 2) dk = 0$ , on n'a pas unicité de l'état stationnaire et il n'y plus de retour à l'équilibre.

### 2.4.3 Condition du bilan détaillé quantique

On se propose dans cette sous-section d'étudier la condition du bilan détaillé quantique du spin en interaction avec un réservoir modélisé par un gaz de bosons libres (cf sous-section 1.2.4). Ainsi, nous prouvons le théorème suivant.

**Théorème 2.12** *Le générateur du semigroupe dynamique quantique du système spin-boson,  $T_t^* = (e^{itK^{\dagger}})^*$ , vérifie la condition du bilan détaillé quantique par rapport à l'état d'équilibre thermodynamique du spin*

$$\rho_{\beta} = \frac{e^{-\beta\sigma_z}}{\operatorname{Tr}(e^{-\beta\sigma_z})}.$$

**Preuve:** Notons qu'on a

$$\mathcal{L}^*(A) = -i [H, A] + \mathcal{L}_D(A),$$

avec

$$H = (\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^+) n_+ + (\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^+) n_-$$

et

$$\mathcal{L}_D(X) = \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ (2\sigma_- X \sigma_+ - \{n_+, X\}) + \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^- (2\sigma_+ X \sigma_- - \{n_-, X\}).$$

Par conséquent, il est clair que  $H$  est un opérateur auto-adjoint et que  $[H, \rho_\beta] = 0$ . De plus, il est facile de vérifier que l'opérateur  $\mathcal{L}_D$  est un opérateur auto-adjoint pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\rho_\beta}$ . Cela finit la preuve de notre théorème.  $\square$

## 2.5 Retour à l'équilibre du système spin-boson

Dans cette section, nous commençons par rappeler les résultats du retour à l'équilibre du système spin-boson prouvés dans le cas hamiltonien (cf [JP2]). Ensuite, nous prouvons la propriété du retour à l'équilibre pour toute température  $T \geq 0$  dans le cas markovien. Finalement, nous faisons une comparaison entre les deux approches.

Dans les deux premières sous-sections, nous traitons le système spin-boson à une température inverse  $0 < \beta < \infty$ . Tandis que, dans la dernière sous-section, nous examinons le système spin-boson à la température zéro ( $\beta = \infty$ ).

### 2.5.1 Cas hamiltonien

Pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , nous définissons  $\tilde{f}$  sur  $\mathbb{R} \times S^2$  par

$$\tilde{f}(s, \hat{k}) = \begin{cases} -|s|^{1/2} \bar{f}(|s|\hat{k}), & s < 0, \\ s^{1/2} f(s\hat{k}), & s \geq 0. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\delta) &= \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}z| < \delta\}, \\ H^2(\delta, \eta) &= \{f : \mathcal{C}(\delta) \rightarrow \eta \mid \|f\|_{H^2(\delta, \eta)} = \sup_{|a| < \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x + ia)\|_\eta^2 dx < \infty\}, \end{aligned}$$

où  $\eta$  est un espace de Hilbert. Le théorème suivant est démontré dans [JP2].

**Théorème 2.13** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- (i)  $(\omega + \omega^{-1})\alpha \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ,
- (ii)  $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\omega - 2)|\alpha(k)|^2 dk > 0$ ,
- (iii) Il existe  $0 < \delta < \frac{2\pi}{\beta}$  tel que  $\tilde{\alpha} \in H^2(\delta, L^2(S^2))$ .



Alors, pour tout  $\beta > 0$ , il existe une constante  $\Lambda(\beta) > 0$  qui dépend uniquement de la fonction test  $\alpha$  telle que le système spin-boson a la propriété du retour à l'équilibre pour tout  $0 < |\lambda| < \Lambda(\beta)$ .

Notons que dans la preuve du théorème ci-dessus, les auteurs utilisent les propriétés spectrales du liouvillien pour démontrer le retour à l'équilibre du système spin-boson. Ainsi, grâce à la théorie de perturbation des états KMS (voir théorème 1.19), ils donnent la forme explicite du vecteur propre du liouvillien associé à la valeur propre 0. De plus, ils démontrent que le spectre du liouvillien est absolument continu pour tout  $\lambda \in ]0, \Lambda(\beta)[$  (en particulier pour une constante de couplage  $\lambda$  suffisamment petit) sauf pour la valeur propre 0. Par conséquent, le théorème 1.25 permet de conclure. Ainsi, pour tout  $\beta \in ]0, +\infty[$ , le système spin-boson faiblement couplé possède la propriété du retour à l'équilibre.

## 2.5.2 Cas markovien

Dans cette sous-section, nous comparons les conditions du retour à l'équilibre du système spin-boson à une température inverse  $\beta \in ]0, \infty[$  dans les deux approches hamiltonienne et markovienne.

À une température strictement positive  $\beta^{-1}$ , le retour à l'équilibre du système spin-boson est décrit par le théorème suivant.

**Théorème 2.14** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- i)  $\text{Im}(\alpha, \alpha)_{\pm}^{\pm} < \infty$ ,
- ii)  $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\omega - 2)|\alpha(k)|^2 dk > 0$ .

Alors, le semigroupe dynamique quantique du système spin-boson à une température inverse  $\beta \in ]0, \infty[$  possède la propriété du retour à l'équilibre.

**Preuve:** Posons

$$\begin{aligned} H &= (\text{Im}(\alpha, \alpha)_+^- - \text{Im}(\alpha, \alpha)_-^+)n_+ + (\text{Im}(\alpha, \alpha)_-^- - \text{Im}(\alpha, \alpha)_+^+)n_-, \\ L_1 &= (2\text{Re}(\alpha, \alpha)_-^+)^{1/2}\sigma_-, \\ L_2 &= (2\text{Re}(\alpha, \alpha)_-^-)^{1/2}\sigma_+. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Il est clair que  $H$  est un opérateur auto-adjoint. Rappelons aussi que le semigroupe dynamique quantique du système spin-boson admet l'état d'équilibre thermodynamique  $\rho_\beta$  du spin comme un état fidèle normal et stationnaire. Comme

$$\{L_k, L_k^*, H, k = 1, 2\}' = \{L_k, L_k^*, k = 1, 2\}' = \mathbb{C}I,$$

nous pouvons conclure grâce au théorème 1.35. □

Notons qu'en comparaison avec l'approche hamiltonienne du modèle de spin-boson, nous avons des simplifications de conditions du retour à l'équilibre. Ainsi, dans le théorème ci-dessus, nous avons uniquement besoin que les hypothèses i) et ii) soient satisfaites. En effet, l'hypothèse i) entraîne que les scalaires  $\text{Im}(\alpha, \alpha)_{\pm}^{\pm}$  existent et sont finis, tandis que si ii) est satisfaite, alors les scalaires  $\text{Re}(\alpha, \alpha)_{\pm}^{\pm}$  sont non nuls.

### 2.5.3 Système spin-boson à la température zéro

Dans le cas hamiltonien, l'étude de la propriété du retour à l'équilibre se base sur le théorème suivant (cf [JP2], [DJ2]) : " Si un système dynamique quantique  $(\mathcal{M}, \tau, \mu)$  ( $\mu$  est un état fidèle) dont le liouvillien admet un spectre absolument continu sauf pour la valeur propre 0, alors ce système possède la propriété du retour à l'équilibre". Malheureusement, ce résultat ne s'applique pas dans le cas du système spin-boson à la température zéro, puisque l'état d'équilibre thermodynamique associé (état fondamental),

$$\rho_{\infty} = |\Psi_{-}\rangle\langle\Psi_{-}| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas fidèle. Pour la même raison, le théorème 1.35 ne nous permet pas de conclure aussi la propriété du retour à l'équilibre dans le cas markovien. Nous allons donc démontrer la propriété du retour à l'équilibre du système spin-boson à la température zéro par des calculs directs.

Rappelons qu'à la température zéro, l'espace de Hilbert du système spin-boson est

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)).$$

L'hamiltonien libre du système couplé est défini par

$$h_0 = \sigma_z \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma(\omega),$$

et l'hamiltonien total du système global avec interaction est l'opérateur

$$h_{\lambda} = h_0 + \lambda \sigma_x \otimes \varphi(\alpha).$$

La limite de couplage faible du système spin-boson à la température zéro peut être prouvée de la même manière que lorsque la température est strictement positive. De plus, le lindbladien du système spin-boson à la température zéro peut être déduit en prenant  $\beta = \infty$  dans la forme explicite de celui à une température strictement positive. Ainsi, on obtient

$$\mathcal{L}_{\infty}(X) = -i\nu_1[n_+, X] - i\nu_2[n_-, X] + \nu_3(2\sigma_+ X \sigma_- - \{n_+, X\}),$$

où

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\omega + 2} |\alpha(k)|^2 dk, \\ \nu_2 &= PP \int \frac{1}{\omega - 2} |\alpha(k)|^2 dk, \\ \nu_3 &= \pi \int_{\mathbb{R}^3} |\alpha(k)|^2 \delta(\omega - 2) dk.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour toute matrice densité  $\rho \in M_2$ , l'équation maîtresse associée est donnée par

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = i\nu_1[n_+, \rho(t)] + i\nu_2[n_-, \rho(t)] + \nu_3(2\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \{n_+, \rho(t)\}) = \mathcal{L}_\infty^*(\rho(t)).$$

Maintenant, nous prouvons le théorème suivant.

**Théorème 2.15** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- i)  $\nu_2 < \infty$ ,
- ii)  $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\omega - 2) |\alpha(k)|^2 dk > 0$ .

Alors, le système spin-boson à la température zéro possède la propriété du retour à l'équilibre. De plus, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr}(e^{t\mathcal{L}_\infty^*} \rho A) = \text{Tr}(\rho_\infty A),$$

pour tout  $A \in M_2$  et pour toute matrice densité  $\rho$ .

**Preuve:** Considérons la base orthonormée de  $M_2$

$$\{|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|, |\Psi_+\rangle\langle\Psi_-|, |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|, |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|\}.$$

Ainsi, dans cette base, on a

$$\begin{aligned}[n_+, \cdot] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & [n_-, \cdot] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_- \cdot \sigma_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \{n_+, \cdot\} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$e^{t\mathcal{L}_\infty^*} = \begin{pmatrix} e^{-2t\nu_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t\nu_3} e^{it(\nu_1 - \nu_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t\nu_3} e^{-it(\nu_1 - \nu_2)} & 0 \\ -e^{-2t\nu_3} + 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui implique que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\mathcal{L}_\infty^*} = \Pi_\infty^*,$$

où

$$\Pi_\infty^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par un simple calcul, on montre que

$$\Pi_\infty^*(A) = \sigma_- A \sigma_+ + n_- A n_-, \quad \forall A \in M_2.$$

Considérons maintenant une matrice densité

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & 1 - \alpha \end{pmatrix},$$

où  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$ . Alors, on a

$$\Pi_\infty^*(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-| = \rho_\infty.$$

Finalement, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr}(e^{t\mathcal{L}_\infty^*} \rho A) = \text{Tr}(\Pi_\infty^*(\rho) A) = \text{Tr}(\rho_\infty A),$$

pour tout  $A \in M_2$ . Cela prouve notre théorème.  $\square$

## 2.6 Équation de Langevin quantique du système spin-boson

On se propose dans cette section de donner explicitement l'hamiltonien associé à l'équation de Langevin quantique du système spin-boson (cf sous-sections 1.3.3 et 1.3.4).

Considérons les opérateurs  $L_1, L_2$  et  $H$  donnés par la relation (2.9) et posons

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 L_k^* L_k - iH.$$

Alors, l'équation de Langevin quantique du système spin-boson est définie sur l'espace  $\mathbb{C}^2 \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2))$  par

$$\begin{cases} dU(t) = \{Gdt + \sum_{k=1}^2 L_k da_k^0(t) - \sum_{k=1}^2 L_k^* da_k^k(t)\}U(t) \\ U(0) = I. \end{cases} \quad (2.10)$$

Notons que l'équation (2.10) est un cas particulier des équations de Hudson-Parthasarathy, où  $S_i^j = \delta_{ij}I$ . De plus, d'après la sous-section 1.3.3, nous avons

$$\begin{aligned} S &= I, \\ Lu &= (2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_+^+)^{1/2} \sigma_- u \otimes \Psi_+ + (2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+)^{1/2} \sigma_+ u \otimes \Psi_-, \quad \forall u \in \mathbb{C}^2, \\ L^*u \otimes \varphi &= \langle \Psi_+, \varphi \rangle (2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_+^+)^{1/2} \sigma_+ u + \langle \Psi_-, \varphi \rangle (2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+)^{1/2} \sigma_- u, \\ &\forall u, \varphi \in \mathbb{C}^2, \\ L^*L &= 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_+^+ n_+ + 2\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ n_-. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\nu_{0\pm} \cap D(K_s) = \{\Phi \in \nu_{0\pm} \mid a(0^-)\Phi = a(0^+)\Phi + L\Phi\}$$

et

$$K_s \Phi = (H + E - iL^*a(0^-) + i(\operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_+^+ n_+ + \operatorname{Re}(\alpha, \alpha)_-^+ n_-))\Phi, \quad \forall \Phi \in \nu_{0\pm} \cap D(K_s),$$

où  $K_s$  est l'hamiltonien de Gregoratti associé à l'équation de Langevin quantique du système spin-boson.

Rappelons que l'hamiltonien du réservoir est l'opérateur  $E = d\Gamma(i\frac{\partial}{\partial x})$ . Donc d'après le théorème spectral, l'opérateur  $i\frac{\partial}{\partial x}$  est l'opérateur de multiplication par un scalaire  $\omega$ . Ainsi, on obtient

$$E = d\Gamma(\omega),$$

qui coïncide avec l'hamiltonien usuel du réservoir dans le cas où  $\omega \geq 0$ . D'autre part, l'opérateur

$$H = (\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^+)n_+ + (\operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_-^- - \operatorname{Im}(\alpha, \alpha)_+^+)n_-,$$

décrit l'énergie du spin. De plus, les coefficients  $\operatorname{Im}(\alpha/\alpha)_\pm^\pm$  jouent un rôle physique important. Dans un certain sens, ils contiennent des informations physiques sur l'hamiltonien original du spin. L'évolution libre du système combiné est décrite par l'opérateur  $\mathcal{H}_f = H + E$  et l'hamiltonien  $K_s$  apparaît comme une perturbation singulière de  $H_f$ , où l'opérateur  $L$  contrôle l'interaction entre le spin et le réservoir.

## 2.7 Modèle d'interactions répétées associé au système spin-boson

Dans cette section, nous nous proposons de donner un modèle d'interactions répétées décrivant le système spin-boson (cf section 1.4 pour plus de détails). Nous modélisons le réservoir par une chaîne infinie  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^2$ , définie par rapport à la suite stabilisatrice  $(\Omega)_n$ , où

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une base orthonormée de  $\mathbb{C}^2$ . Ainsi, l'hamiltonien d'interactions répétées associé est défini sur  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  par

$$H = \sigma_z \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{\sqrt{\hbar}}(\sigma_- \otimes a^* + \sigma_+ \otimes a),$$

où

$$\begin{aligned} H_R &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ est l'hamiltonien d'une copie } \mathbb{C}^2, \\ V &= \sigma_-, \\ a &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } a^* \text{ est l'adjoint de } a. \end{aligned}$$

Pour justifier le choix de cet hamiltonien, on renvoie le lecteur aux discussions faites dans la sous-section 1.4.3. Notons que l'hamiltonien d'interaction entre le spin et une copie de la chaîne est un hamiltonien dipolaire, où à chaque état excité du spin lui correspond un état désexcité d'une copie de la chaîne. Ici, les opérateurs  $a$  et  $a^*$  représentent les opérateurs de création et d'annihilation discrets sur  $\mathbb{C}^2$ . Comme dans le cas du temps continu, l'hamiltonien d'une copie de la chaîne est un multiple de l'opérateur nombre  $a^*a$ ,

$$H_R = \gamma a^*a.$$

L'évolution unitaire durant l'intervalle  $[0, \hbar]$  est donnée par

$$U = e^{-ihH}.$$

L'évolution discrète associée est définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = U_{n+1} u_n \\ u_0 = I. \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.7.1 Cas de la température zéro

**Théorème 2.16** *La solution  $u_{[t/h]}$  de l'équation d'évolution discrète (2.11) converge fortement, quand  $h$  tend vers 0, vers la solution unitaire de l'équation de Langevin quantique*

$$\begin{cases} dU(t) = \{G_0 dt + L da_1^0(t) - L^* da_0^1(t)\} U(t) \\ U(0) = I, \end{cases}$$

où  $L = -i\sigma_-$  et  $G_0 = -i\sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-$ .

**Preuve:**

Notons que les coefficients de la matrice de  $U = e^{-ihH}$  dans la base  $\{\Omega, X\}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} U_0^0 &= \langle \Omega, U\Omega \rangle = I - ih\sigma_z - \frac{1}{2}h\sigma_+\sigma_- + o(h), \\ U_0^1 &= \langle \Omega, UX \rangle = -i\sqrt{h}\sigma_+ + o(\sqrt{h}), \\ U_1^0 &= \langle X, U\Omega \rangle = -i\sqrt{h}\sigma_- + o(\sqrt{h}), \\ U_1^1 &= \langle X, UX \rangle = I - ih\sigma_z - ih\gamma I - \frac{1}{2}h\sigma_-\sigma_+ + o(h). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{U_0^0 - I}{h} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} G_0 = -i\sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-, \\ \frac{U_0^1}{\sqrt{h}} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} -L^* = -i\sigma_+, \\ \frac{U_1^0}{\sqrt{h}} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} L = -i\sigma_-, \end{aligned}$$

Par conséquent, grâce au théorème 1.50, nous pouvons conclure.  $\square$

**Théorème 2.17** *Le semigroupe dynamique quantique du modèle d'interactions répétées du système spin-boson à la température zéro a la propriété du retour à l'équilibre.*

**Preuve:** Notons que grâce à la relation (1.9), le lindbladien associé à l'équation de Langevin quantique définie par le théorème ci-dessus est donné par

$$\mathcal{L}_0(X) = i[\sigma_z, X] + \frac{1}{2}[2\sigma_+X\sigma_- - \{n_+, X\}]. \quad (2.12)$$

Ainsi, la suite de la preuve est analogue à celle du théorème 2.15.  $\square$

Notons que le lindbladien défini par la relation (2.12) ne dépend pas du choix de l'hamiltonien  $H_R$  d'une copie de la chaîne. De plus, ce lindbladien a les mêmes propriétés physiques que celui du spin-boson à la température zéro, obtenu par la limite de couplage faible.

## 2.7.2 Cas d'une température strictement positive

Dans cette sous-section, nous supposons que l'état d'équilibre thermodynamique d'une copie de la chaîne atomique associée au réservoir, à une température inverse  $\beta$ , est donné par

$$\rho = \frac{1}{1 + e^{-\beta}} e^{-\beta H_R} = \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

La représentation GNS du couple  $(\mathbb{C}^2, \rho)$  est le triplet  $(\pi, \tilde{\mathcal{H}}, \Omega_R)$  tel que

- $\Omega_R = I$ ,
- $\tilde{\mathcal{H}} = M_2$ , l'algèbre des matrices  $2 \times 2$  à coefficients complexes, qui est munie du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(\rho A^* B),$$

- $\pi : M_2 \longrightarrow \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$  est telle que  $\pi(M)A = MA$ ,  $\forall M, A \in M_2$ .

Posons  $\tilde{U} = \pi(U)$  et  $\tilde{u}_n = \pi(u_n)$ . Il est clair que l'opérateur  $\tilde{U}$  est défini sur  $\mathbb{C}^2 \otimes M_2$ . De plus, la suite  $(\tilde{u}_n)_n$  vérifie l'équation

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1} = \tilde{U}_{n+1} \tilde{u}_n \\ \tilde{u}_0 = I. \end{cases} \quad (2.13)$$

**Théorème 2.18** *La solution  $\tilde{u}_{[t/h]}$  de l'équation discrète (2.13) converge fortement, quand  $h$  tend vers 0, vers la solution unitaire  $U_t$  de l'équation de Langevin quantique*

$$\begin{cases} d\tilde{U}(t) = \left\{ - (i\sigma_z + i\gamma\beta_1 I + \frac{1}{2}\beta_0 \sigma_+ \sigma_- + \frac{1}{2}\beta_1 \sigma_- \sigma_+) dt - i\sigma_- (\sqrt{\beta_1} da_0^1(t) + \sqrt{\beta_0} da_2^0(t)) \right. \\ \quad \left. - i\sigma_+ (\sqrt{\beta_1} da_1^0(t) + \sqrt{\beta_0} da_0^2(t)) \right\} \tilde{U}(t) \\ \tilde{U}(0) = I. \end{cases}$$

**Preuve:** Posons

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0 \beta_1}} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que  $(\Omega_R, X_1, X_2, X_3)$  forme une base orthonormée de  $M_2$ . Donc les coefficients de la matrice de  $\tilde{U}$  dans cette base sont donnés par

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0^0 &= I - ih\sigma_z - ih\gamma\beta_1 I - \frac{1}{2}h\beta_0 \sigma_+ \sigma_- - \frac{1}{2}h\beta_1 \sigma_- \sigma_+ + o(h^2), \\ \tilde{U}_1^0 &= -i\sqrt{\beta_1} \sqrt{h} \sigma_+ + o(h^{3/2}), \\ \tilde{U}_2^0 &= -i\sqrt{\beta_0} \sqrt{h} \sigma_- + o(h^{3/2}), \\ \tilde{U}_3^0 &= o(h), \\ \tilde{U}_0^1 &= -i\sqrt{\beta_1} \sqrt{h} \sigma_- + o(h^{3/2}), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\tilde{U}_0^2 &= -i\sqrt{\beta_0}\sqrt{h}\sigma_+ + o(h^{3/2}), \\
\tilde{U}_0^3 &= o(h), \\
\tilde{U}_1^1 &= I + o(h), \\
\tilde{U}_2^2 &= I + o(h), \\
\tilde{U}_3^3 &= I + o(h), \\
\tilde{U}_1^2 &= \tilde{U}_2^1 = \tilde{U}_1^3 = \tilde{U}_3^1 = \tilde{U}_2^3 = \tilde{U}_3^2 = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{U}_0^0 - I}{h} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} L_0^0 = -i\sigma_z - i\gamma\beta_1 I - \frac{1}{2}\beta_0\sigma_+\sigma_- - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_-\sigma_+, \\
\frac{\tilde{U}_1^0}{\sqrt{h}} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} L_1^0 = -i\sqrt{\beta_1}\sigma_+, \\
\frac{\tilde{U}_2^0}{\sqrt{h}} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} L_2^0 = -i\sqrt{\beta_0}\sigma_-, \\
\frac{\tilde{U}_0^1}{\sqrt{h}} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} L_0^1 = -i\sqrt{\beta_1}\sigma_-, \\
\frac{\tilde{U}_0^2}{\sqrt{h}} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} L_0^2 = \sqrt{\beta_0}\sigma_+,
\end{aligned}$$

et les autres termes convergent vers 0. Par conséquent, d'après le théorème 1.50, nous pouvons conclure.  $\square$

D'après la relation (1.9), le lindbladien associé au modèle d'interactions répétées défini ci-dessus, à une température strictement positive  $\beta^{-1}$ , s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\beta(X) &= i[\sigma_z, X] + \frac{1}{2}\beta_0[2\sigma_-X\sigma_+ - \{n_-, X\}] \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta_1[2\sigma_+X\sigma_- - \{n_+, X\}],
\end{aligned}$$

pour tout  $X \in M_2$ . Notons que l'état d'équilibre thermodynamique  $\rho_\beta$  du spin est un état stationnaire du semigroupe  $(e^{t\mathcal{L}_\beta})_{t \geq 0}$  si et seulement si la différence des niveaux d'énergie d'une copie de la chaîne est égale à 2, soit  $\gamma = 2$ . On voit donc qu'on n'a pas trop de choix de l'hamiltonien  $H_R$ . Ainsi, pour que les propriétés physiques du système spin-boson soient encore les mêmes, il faut que  $\gamma = 2$ . Par conséquent, le modèle d'interactions répétées défini ci-dessus correspond au système spin-boson si et seulement si  $\gamma = 2$ .

**Théorème 2.19** *Le semigroupe dynamique quantique associé au modèle d'interactions répétées du système spin-boson, à une température strictement positive  $\beta^{-1}$ , a la propriété du retour à l'équilibre.*

**Preuve:** Notons d'abord que  $\gamma = 2$ . Il est facile de vérifier que l'état d'équilibre thermodynamique  $\rho_\beta$  du spin est l'unique état stationnaire du semigroupe  $(e^{t\mathcal{L}_\beta})_{t \geq 0}$ . De plus, on a

$$\{\sigma_z, \sigma_+, \sigma_-\}' = \{\sigma_+, \sigma_-\}' = \mathbb{C}I.$$

Par conséquent, d'après le théorème 1.35, nous pouvons conclure.  $\square$

Notons que le modèle défini ci-dessus est un cas particulier de celui introduit dans [AtJ] avec un choix particulier de l'hamiltonien d'une copie de la chaîne modélisant le réservoir.

Dans le cas de la température zéro, le lindbladien  $\mathcal{L}_0$  donné ci-dessus et le lindbladien  $\mathcal{L}_\infty$  obtenu par la limite de couplage faible sont les mêmes à des coefficients près indépendamment du choix de l'hamiltonien d'une copie de la chaîne  $H_R$ . De plus, il est facile de vérifier que les équations maîtresses associées possèdent les mêmes propriétés physiques.

Cependant, à une température strictement positive, les deux lindbladiens obtenus respectivement par la limite de couplage faible et par le modèle des interactions répétées sont aussi les mêmes à des coefficients près. Par contre, on n'a pas trop de possibilités concernant le choix de l'hamiltonien d'une copie de la chaîne. En effet, pour que les équations maîtresses associées possèdent les mêmes propriétés physiques, il faut et il suffit que la différence entre le deux niveaux d'énergies d'une copie de la chaîne  $\gamma$  soit égale à 2.



# Chapitre 3

## Contribution n° 2 : Propriétés markoviennes du modèle de Pauli-Fierz

Dans ce chapitre, on s'intéresse au système de Pauli-Fierz qui représente un petit système avec un nombre fini de degrés de liberté en interaction avec un réservoir modélisé par un gaz de bosons libres (cf [DJ1], [DJ2]). Dans un premier temps, nous décrivons le modèle de Pauli-Fierz et sa représentation semistandard. Ensuite, nous donnons une preuve de la limite de couplage faible et nous calculons le lindbladien associé. De plus, nous étudions les propriétés de l'équation maîtresse associée. Nous montrons que l'état d'équilibre thermodynamique  $\rho_s$  associé au petit système est un état stationnaire. Nous prouvons que la condition du bilan détaillé quantique par rapport à l'état d'équilibre thermodynamique  $\rho_s$  est vérifiée. Finalement, nous montrons la propriété du retour à l'équilibre pour toute température strictement positive.

### 3.1 Le modèle

Dans cette section, nous commençons par présenter le petit système qui est décrit par un hamiltonien  $H_0$  défini sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  de dimension finie. De plus, l'état d'équilibre thermodynamique associé, à une température inverse  $\beta$ , est donné par

$$\rho_s = \frac{e^{-\beta H_0}}{\text{Tr}(e^{-\beta H_0})}.$$

Le réservoir est décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{Z} = L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 3$ . De plus, si on note  $\omega(k) = |k|$ ,  $k \in \mathbb{R}^d$ , l'énergie d'un boson isolé, alors l'hamiltonien du réservoir est donné par la seconde quantification différentielle de  $\omega$ ,  $d\Gamma(\omega)$  qui agit sur l'espace

de Fock symétrique  $\Gamma_s(\mathcal{Z})$  construit sur  $\mathcal{Z}$ . L'état d'équilibre thermodynamique associé, à une température inverse  $\beta$ , est l'état quasi-libre  $\omega_R$  associé à

$$\rho = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}.$$

Finalement, l'hamiltonien libre de Pauli-Fierz est l'opérateur auto-adjoint défini sur  $\mathcal{K} \otimes D(d\Gamma(\omega))$  par

$$H_{\text{lib}} := H_0 \otimes I + I \otimes d\Gamma(\omega).$$

### 3.1.1 Opérateurs de création/annihilation du système couplé

Soit  $q \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z})$  une *facteur de forme*. Nous définissons les opérateurs de création et d'annihilation,  $q(a^*)$  et  $q^*(a)$  sur  $\mathcal{K} \otimes \Gamma_s(\mathcal{Z})$  par

$$\begin{aligned} q(a^*) : \quad \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z}^{on} &\longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z}^{o(n+1)} \\ \psi \otimes \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n &\mapsto q\psi \otimes \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n, \\ q^*(a) : \quad \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z}^{on} &\longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z}^{o(n-1)} \\ \psi \otimes \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n &\mapsto (q^*\psi \otimes \phi_1) \circ \dots \circ \phi_n. \end{aligned}$$

L'opérateur d'interaction de Pauli-Fierz est donné par

$$\varphi(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q(a^*) + q^*(a)),$$

qui est essentiellement auto-adjoint sur  $\mathcal{K} \otimes \Gamma_s^{\text{fin}}(\mathcal{Z})$  (cf [DJ2]), où  $\Gamma_s^{\text{fin}}(\mathcal{Z})$  est l'ensemble des vecteurs  $\Psi = (\psi_n)_{n \geq 0}$  de  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_s^n(\mathcal{Z})$  tel qu'il existe uniquement un nombre fini de  $\psi_n$  qui sont non nuls.

En particulier, si  $q$  est une *facteur de forme simple*, i.e :  $q\psi = (h\psi) \otimes f$ , où  $f \in \mathcal{Z}$ ,  $h \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ , alors on a

$$q(a^*) = h \otimes a^*(f), \quad q^*(a) = h^* \otimes a(f).$$

Si  $(f_n)_n$  est une base orthonormée de  $\mathcal{Z}$ , alors pour tout facteur de forme  $q \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z})$ , il existe des opérateurs  $q_n \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$  (cf DJ1) tels que

$$q\psi = \sum_n (q_n\psi) \otimes f_n, \quad \text{et} \quad \|q\psi\|^2 = \sum_n \|q_n\psi\|^2, \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{K}.$$

Dans la suite, nous allons supposer que la forme de facteur  $q$  possède la décomposition donnée ci-dessus et qu'il existe uniquement un nombre fini  $N$  d'opérateurs

$q_n$  non nuls. Ainsi, les opérateurs  $q(a^*)$  et  $q^*(a)$  s'écrivent

$$\begin{aligned} q(a^*) &= \sum_{n=1}^N q_n \otimes a^*(f_n), \\ q^*(a) &= \sum_{n=1}^N q_n^* \otimes a(f_n), \end{aligned}$$

où  $a^*(f_n)$ ,  $a(f_n)$  sont les opérateurs de création et d'annihilation définis sur  $\Gamma_s(\mathcal{Z})$ . De plus, nous supposons que pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , où  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  est l'espace de Schwartz sur  $\mathbb{R}^d$ .

L'hamiltonien de Pauli-Fierz avec interaction est donné par

$$H_\lambda = H_0 + d\Gamma(\omega) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^N (q_n \otimes a^*(f_n) + q_n^* \otimes a(f_n)).$$

Il est prouvé dans [DJ2] que si  $\omega^{-1/2}q \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z})$ , alors l'opérateur  $H_\lambda$  est un opérateur auto-adjoint sur  $D(H_{\text{lib}})$ . Dans notre cas, il est facile de vérifier que cette hypothèse est satisfaite puisque les fonctions tests  $f_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  sont des fonctions de Schwartz.

### 3.1.2 Représentation semistandard du système de Pauli-Fierz

Dans cette sous-section, nous présentons tous les résultats identifiés dans un espace de Fock que l'on précisera (cf [DJ2]).

Soit  $\mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \omega^{-1/2}f \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$  le domaine de  $\rho^{1/2}$ . Pour tout couple  $(z_1, z_2) \in \mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}$ , on note  $W(z_1, z_2)$  l'opérateur de Weyl associé. Ainsi, la représentation d'Araki-Woods du couple  $(\mathcal{Z}, \rho)$  est le triplet  $(\Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}), \pi_\rho, \Omega)$ , où

- $\pi_\rho : z \longrightarrow W_\rho(z)$ ,  $z \in \mathcal{D}$ , avec  $W_\rho(z) = W((1 + \rho)^{1/2}z \oplus \bar{\rho}^{1/2}\bar{z})$ ,
- $\Omega$  est le vecteur vide de  $\Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}})$ .

Notons que dans la représentation semistandard, on a

$$\varphi_{AW}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^N (q_n \otimes a^*((1 + \rho)^{1/2}f_n \oplus \bar{\rho}^{1/2}\bar{f}_n) + q_n^* \otimes a((1 + \rho)^{1/2}f_n \oplus \bar{\rho}^{1/2}\bar{f}_n)).$$

De plus, le semi-liouvillien Libre de Pauli-Fierz est donné par

$$L_0^{semi} = H_0 + d\Gamma(\omega \oplus -\bar{\omega}).$$

Le semi-liouvillien total est l'opérateur

$$L_\lambda^{semi} = H_0 + d\Gamma(\omega \oplus -\bar{\omega}) + \lambda\varphi_{AW}(q).$$

Introduisons maintenant  $\mathcal{M}_R$  l'algèbre d'Araki-Woods à gauche engendrée par  $\{W_\rho(z), z \in \mathcal{D}\}$ .

Pour la preuve de la proposition suivante, on renvoie le lecteur à [DJ2].

**Proposition 3.1** *Supposons que  $(1 + \omega)(1 + \rho)^{1/2}q \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z})$ , alors le groupe d'automorphismes*

$$\tau_\lambda^t(A) = e^{itL_\lambda^{semi}} A e^{-itL_\lambda^{semi}},$$

définit une  $W^*$ -dynamique sur  $\mathcal{M}_\rho = \mathcal{B}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{M}_R$ .

Notons que l'hypothèse  $(1 + \omega)(1 + \rho)^{1/2}q \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z})$  est satisfaite puisque les fonctions tests  $f_n$  sont des fonctions de Schwartz.

## 3.2 Limite de couplage faible du système de Pauli-Fierz

Notons d'abord que  $[H_0, \cdot]$  est un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$  muni du produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^*B)$ . Alors, il existe une base orthonormée  $\{A_1, \dots, A_l\}$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$  telle que

$$[H_0, A_j] = \omega_j A_j, \quad \forall j = 1, \dots, l.$$

Comme l'opérateur d'interaction  $q_n \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ , on obtient

$$q_n = \sum_{j=1}^l \alpha_{n_j} A_j,$$

ce qui implique que  $q_n = \sum_{j=1}^l v_{n_j}$ , où  $[H_0, v_{n_j}] = \omega_{n_j} v_{n_j}$ , i.e :

$$e^{itH_0} v_{n_j} e^{-itH_0} = e^{it\omega_{n_j}} v_{n_j}.$$

D'autre part, si  $[H_0, v_{n_j}] = \omega_{n_j} v_{n_j}$ , alors on a  $[H_0, v_{n_j}^*] = -\omega_{n_j} v_{n_j}^*$ . Cela implique que  $[H_0, v_{n_j} + v_{n_j}^*] = 0$ . Par conséquent, si  $q_n$  est un opérateur auto-adjoint, alors il s'écrit sous la forme :

$$q_n = \sum_{j=1}^k (v_{n_j} + v_{n_j}^*), \quad (3.1)$$

où

$$e^{itH_0} v_{n_j} e^{-itH_0} = e^{it\omega_{n_j}} v_{n_j} \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Dans la suite, nous allons supposer que les opérateurs d'interactions  $q_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  sont des opérateurs auto-adjoints qui s'écrivent sous la forme (3.1) et qui satisfont l'hypothèse suivante :

$$e^{itH_0} v_{n_j} e^{-itH_0} = e^{it\omega_{n_j}} v_{n_j}, \quad \omega_{n_j} > 0, \quad (3.2)$$

où  $\omega_{n_j} \neq \omega_{n'_j}$  pour tous  $j \neq j'$ . Ainsi, le semi-liouvillien total de Pauli-Fierz s'écrit

$$L_\lambda^{semi} = H_0 + d\Gamma(\omega \oplus -\bar{\omega}) + \lambda \sum_{n=1}^N q_n \otimes \varphi_{AW}(f_n),$$

où  $\varphi_{AW}(f_n)$  est l'opérateur de champ d'Araki-Woods, i.e :

$$\varphi_{AW}(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*((1+\rho)^{1/2}f_n \oplus \bar{\rho}^{1/2}\bar{f}_n) + a((1+\rho)^{1/2}f_n \oplus \bar{\rho}^{1/2}\bar{f}_n)).$$

Introduisons les hypothèses suivantes :

$$\langle f_n, e^{it\omega} f_m \rangle = \delta_{nm} \langle f_n, e^{it\omega} f_m \rangle, \quad (3.3)$$

$$\langle f_n, e^{it\omega} \rho f_m \rangle = \delta_{nm} \langle f_n, e^{it\omega} \rho f_m \rangle. \quad (3.4)$$

Les hypothèses (3.3) et (3.4) sont satisfaites pour les fonctions  $f_n(x) = Y_{l_n, m_n}(\hat{x})g_n(|x|)$  où les  $Y$  sont les harmoniques sphériques et  $l_n \neq l_r$  ou  $m_n \neq m_r$  pour tous  $n \neq r$ .

On se propose maintenant d'appliquer le théorème 2.2 au système de Pauli-Fierz.

Soient

$$V = \sum_{n=1}^N q_n \otimes \varphi_{AW}(f_n) = \sum_{n=1}^N V_n, \quad V_n = q_n \otimes \varphi_{AW}(f_n),$$

$$Q = [V, \cdot] = \sum_{n=1}^N Q^{(n)}, \quad Q^{(n)} = [V_n, \cdot],$$

$$\delta_0 = [L_0^{semi}, \cdot], \quad \delta_\lambda = [L_\lambda^{semi}, \cdot] = \delta_0 + \lambda Q,$$

$$P(B \otimes C) = \omega_R(C)B \otimes 1_{\Gamma_s(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}})}, \quad \forall B \otimes C \in \mathcal{M}_\rho.$$

Il est clair que  $P$  est de rang fini et de norme 1. De plus, on a

$$E = P\delta_0 = \delta_0 P = [H_0, \cdot]P \quad \text{et} \quad PQP = 0.$$

Posons  $P_1 = 1 - P$ . Alors, l'opérateur  $K_\lambda(t)$  s'écrit

$$K_\lambda(t) = i \int_0^{\lambda^{-2}t} e^{-isE} P[V, \cdot] e^{isP_1[L_\lambda^{semi}, \cdot]P_1} [V, \cdot] P ds.$$

**Lemme 3.2** *On a l'identité suivante*

$$K_\lambda(t) = i \int_0^{\lambda^{-2}t} e^{-isE} P[V, \cdot] e^{isP_1[L_0^{semi}, \cdot]P_1} [V, \cdot] P ds + i \sum_{p \geq 1} (i\lambda)^p R_p(t),$$

où

$$R_p(t) = \sum_{n=1}^N \int_{0 \leq t_p \leq \dots \leq t_0 \leq t} e^{-it_0 E} P[V_n, \cdot] U_{t_0} (P_1 Q_1^{(n)} P_1) \dots (P_1 Q_p^{(n)} P_1) [V_n, \cdot] P dt_p \dots dt_0,$$

avec  $Q_j^{(n)} = U_{-t_j} [V_n, \cdot] U_{t_j}$  pour tout  $j = 1, \dots, p$ .



**Preuve:** Notons d'abord que d'après les relations (3.3) et (3.4), on a

$$P[V, \cdot] e^{isP_1[L_\lambda^{semi}, \cdot] P_1} [V, \cdot] P(B \otimes C) = \sum_{n=1}^N P[V_n, \cdot] e^{isP_1[L_\lambda^{semi}, \cdot] P_1} [V_n, \cdot] P(B \otimes C).$$

Ainsi, l'opérateur  $K_\lambda(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} K_\lambda(t) &= i \sum_{n=1}^N \int_0^{\lambda^{-2}t} e^{-isE} P[V_n, \cdot] e^{isP_1[L_\lambda^{semi}, \cdot] P_1} [V_n, \cdot] P ds \\ &= \sum_{n=1}^N K_{\lambda,n}(t), \end{aligned}$$

où

$$K_{\lambda,n}(t) = i \int_0^{\lambda^{-2}t} e^{-isE} P[V_n, \cdot] e^{isP_1[L_\lambda^{semi}, \cdot] P_1} [V_n, \cdot] P ds.$$

Par suite, de manière analogue que dans le lemme 2.3, nous montrons que

$$K_{\lambda,n}(t) = i \int_0^{\lambda^{-2}t} e^{-isE} P[V_n, \cdot] e^{isP_1[L_0^{semi}, \cdot] P_1} [V_n, \cdot] P ds + i \sum_{p \geq 1} (i\lambda)^p R_p^{(n)}(t),$$

où

$$R_p^{(n)}(t) = \int_{0 \leq t_p \leq \dots \leq t_0 \leq t} e^{-it_0 E} P[V_n, \cdot] U_{t_0}(P_1 Q_1^{(n)} P_1) \dots (P_1 Q_p^{(n)} P_1) [V_n, \cdot] P dt_p \dots dt_0.$$

Cela achève la preuve du lemme énoncé ci-dessus.  $\square$

Introduisons maintenant la fonction à deux points

$$h(t) = \sum_{n=1}^N h_n(t),$$

où  $h_n(t) = \omega_R(\varphi_{AW}(e^{-it\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n))$ . Il est clair que

$$h_n(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-it\omega} \frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1} |f_n(k)|^2 dk + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{it\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} |f_n(k)|^2 dk.$$

Rappelons que l'hypothèse  $(1+\omega)(1+\rho)^{1/2}q \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K} \otimes \mathcal{Z})$  est satisfaite puisque les fonctions tests  $f_n$  sont des fonctions de Schwartz, ce qui implique que  $\tau_t^\lambda$  est une  $W^*$ -dynamique sur  $\mathcal{M}_\rho$ . Maintenant, nous prouvons le résultat suivant.

**Théorème 3.3** *Supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite :*

$$\sup_n \int_0^\infty (1+t^\varepsilon)|h_n(t)|dt < \infty,$$

*pour un certain  $0 < \varepsilon < 1$ . Alors, les hypothèses du théorème 2.2 sont satisfaites. De plus, l'opérateur  $K^\sharp$  est donné par*

$$K^\sharp = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{itE} K e^{-itE} dt,$$

où

$$K = \sum_{n=1}^N K_n,$$

avec

$$K_n = i \int_0^\infty e^{-isE} P[V_n, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V_n, \cdot] P ds.$$

**Preuve:** Rappelons que

$$K_\lambda = \sum_{n=1}^N K_{\lambda,n}(t).$$

Notons que d'après la preuve du théorème 2.10, nous prouvons de la même manière que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} K_{\lambda,n}(t) = K_n.$$

Ainsi, on obtient

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} K_\lambda = K,$$

où

$$\begin{aligned} K &= i \int_0^\infty e^{-isE} P[V, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V, \cdot] P ds \\ &= i \sum_{n=1}^N \int_0^\infty e^{-isE} P[V_n, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V_n, \cdot] P ds, \end{aligned}$$

ce qui prouve notre théorème. □

### 3.3 Lindbladien du système de Pauli-Fierz

Dans cette section, nous allons prouver que l'opérateur

$$\mathcal{L} = iK^\sharp$$

admet la forme d'un lindbladien (cf théorème 1.33).

**Théorème 3.4** *Supposons que*

$$\sup_n \int_0^\infty \left[ \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\omega} \frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1} |f_n(k)|^2 dk \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} |f_n(k)|^2 dk \right| \right] ds < \infty.$$

Alors, pour tout  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) = & \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^k i(\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^-) [v_{n_j}^* v_{n_j}, X] \\ & + i(\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^+) [v_{n_j} v_{n_j}^*, X] \\ & + \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ [2v_{n_j}^* X v_{n_j} - \{v_{n_j}^* v_{n_j}, X\}] \\ & + \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- [2v_{n_j} X v_{n_j}^* - \{v_{n_j} v_{n_j}^*, X\}], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ &= \frac{\pi e^{\beta\omega_{n_j}}}{e^{\beta\omega_{n_j}} - 1} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(k)|^2 \delta(\omega(k) - \omega_{n_j}) dk, \\ \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- &= \frac{\pi}{e^{\beta\omega_{n_j}} - 1} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(k)|^2 \delta(\omega(k) - \omega_{n_j}) dk, \\ \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ &= PP \int \frac{\rho(k) + 1}{\omega(k) - \omega_{n_j}} |f_n(k)|^2 dk, \\ \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^- &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho(k)}{\omega(k) + \omega_{n_j}} |f_n(k)|^2 dk, \\ \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^+ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho(k) + 1}{\omega(k) + \omega_{n_j}} |f_n(k)|^2 dk, \\ \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- &= PP \int \frac{\rho(k)}{\omega(k) - \omega_{n_j}} |f_n(k)|^2 dk. \end{aligned}$$

**Preuve:** Pour tout  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ , on a

$$\begin{aligned}
& e^{itE} e^{-isE} P[V_n, \cdot] e^{is[L_0^{semi}, \cdot]} [V_n, \cdot] P e^{-itE} (X) \\
= & \left[ e^{itH_0} e^{-isH_0} q_n e^{isH_0} q_n e^{-itH_0} X - e^{itH_0} e^{-isH_0} q_n e^{isH_0} e^{-itH_0} X e^{itH_0} q_n e^{-itH_0} \right] \\
& \times \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) \\
& - \left[ e^{itH_0} q_n e^{-itH_0} X e^{itH_0} e^{-isH_0} q_n e^{isH_0} e^{-itH_0} - X e^{itH_0} q_n e^{-isH_0} q_n e^{-itH_0} e^{isH_0} \right] \\
& \times \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)) \\
= & \left[ e^{i(t-s)H_0} q_n e^{-i(t-s)H_0} e^{itH_0} q_n e^{-itH_0} X - e^{i(t-s)H_0} q_n e^{-i(t-s)H_0} X e^{itH_0} q_n e^{-itH_0} \right] \\
& \times \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) \\
& - \left[ e^{itH_0} q_n e^{-itH_0} X e^{i(t-s)H_0} q_n e^{-i(t-s)H_0} - X e^{itH_0} q_n e^{-itH_0} e^{i(t-s)H_0} q_n e^{-i(t-s)H_0} \right] \\
& \times \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Notons que d'après la relation (3.2), on a

$$e^{i(t-s)H_0} q_n e^{-i(t-s)H_0} = \sum_{j=1}^k (e^{i(t-s)\omega_{n_j}} v_{n_j} + e^{-i(t-s)\omega_{n_j}} v_{n_j}^*), \tag{3.6}$$

$$e^{itH_0} q_n e^{-itH_0} = \sum_{j=1}^k (e^{it\omega_{n_j}} v_{n_j} + e^{-it\omega_{n_j}} v_{n_j}^*). \tag{3.7}$$

Rappelons que  $q_n = \sum_{j=1}^k (v_{n_j} + v_{n_j}^*)$ . Ainsi, en remplaçant les égalités (3.6) et (3.7) dans la relation (3.5), on obtient les résultats suivants :

- Le coefficient de  $v_{n_j} X v_{n_{j'}}$ ,  $j, j' = 1, \dots, k$  est donné par

$$\begin{aligned}
& -e^{i(t-s)\omega_{n_j}} e^{it\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) \\
& -e^{it\omega_{n_j}} e^{i(t-s)\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),
\end{aligned}$$

- Le coefficient de  $v_{n_j}^* X v_{n_{j'}}^*$ ,  $j, j' = 1, \dots, k$  est donné par

$$\begin{aligned}
& -e^{-i(t-s)\omega_{n_j}} e^{-it\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) \\
& -e^{-it\omega_{n_j}} e^{-i(t-s)\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),
\end{aligned}$$

- Le coefficient de  $v_{n_j}^* X v_{n_{j'}}$ ,  $j \neq j'$  est donné par

$$\begin{aligned}
& -e^{-i(t-s)\omega_{n_j}} e^{it\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) \\
& -e^{-it\omega_{n_j}} e^{i(t-s)\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),
\end{aligned}$$

- Le coefficient de  $v_{n_j} X v_{n_{j'}}^*$ ,  $j \neq j'$  est donné par

$$\begin{aligned} & -e^{i(t-s)\omega_{n_j}} e^{-it\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) \\ & -e^{it\omega_{n_j}} e^{-i(t-s)\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)), \end{aligned}$$

- Le coefficient de  $X v_{n_j} v_{n_{j'}}$  est donné par

$$e^{it\omega_{n_j}} e^{i(t-s)\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),$$

- Le coefficient de  $X v_{n_j}^* v_{n_{j'}}^*$  est donné par

$$e^{-it\omega_{n_j}} e^{-i(t-s)\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),$$

- Le coefficient de  $X v_{n_j} v_{n_{j'}}^*$ ,  $j \neq j'$  est donné par

$$e^{it\omega_{n_j}} e^{-i(t-s)\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),$$

- Le coefficient de  $X v_{n_j}^* v_{n_{j'}}$ ,  $j \neq j'$  est donné par

$$e^{-it\omega_{n_j}} e^{i(t-s)\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),$$

- Le coefficient de  $v_{n_j} v_{n_{j'}} X$  est donné par

$$e^{i(t-s)\omega_{n_j}} e^{it\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)),$$

- Le coefficient de  $v_{n_j}^* v_{n_{j'}}^* X$  est donné par

$$e^{-i(t-s)\omega_{n_j}} e^{-it\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)),$$

- Le coefficient de  $v_{n_j} v_{n_{j'}}^* X$ ,  $j \neq j'$  est donné par

$$e^{i(t-s)\omega_{n_j}} e^{-it\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)),$$

- Le coefficient de  $v_{n_j}^* v_{n_{j'}} X$ ,  $j \neq j'$  est donné par

$$e^{-i(t-s)\omega_{n_j}} e^{it\omega_{n_{j'}}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)),$$

- Le coefficient de  $v_{n_j} X v_{n_j}^*$  est donné par

$$-e^{-is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) - e^{is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),$$

- Le coefficient de  $v_{n_j}^* X v_{n_j}$  est donné par

$$-e^{is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) - e^{-is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),$$

- Le coefficient de  $X v_{n_j} v_{n_j}^*$  est donné par

$$e^{is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),$$

- Le coefficient de  $X v_{n_j}^* v_{n_j}$  est donné par

$$e^{-is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)),$$

- Le coefficient de  $v_{n_j} v_{n_j}^* X$  est donné par

$$e^{-is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)),$$

- Le coefficient de  $v_{n_j}^* v_{n_j} X$  est donné par

$$e^{is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)),$$

Notons que pour tout  $\alpha \neq 0$ , on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\alpha t} dt = 0. \quad (3.8)$$

Ainsi, d'après la relation (3.8), tous les termes  $v_{n_j} X v_{n_{j'}}$ ,  $v_{n_j}^* X v_{n_{j'}}$ ,  $v_{n_j}^* X v_{n_{j'}}$  ( $j \neq j'$ ),  $v_{n_j} X v_{n_{j'}}^*$  ( $j \neq j'$ ),  $X v_{n_j} v_{n_{j'}}$ ,  $X v_{n_j}^* v_{n_{j'}}$ ,  $X v_{n_j} v_{n_{j'}}^*$  ( $j \neq j'$ ),  $X v_{n_j} v_{n_{j'}}^*$  ( $j \neq j'$ ),  $v_{n_j} v_{n_{j'}} X$ ,  $v_{n_j}^* v_{n_{j'}} X$ ,  $v_{n_j} v_{n_{j'}}^* X$  ( $j \neq j'$ ),  $v_{n_j}^* v_{n_{j'}} X$  ( $j \neq j'$ ) disparaissent dans la forme explicite de  $K_n^\sharp$ , où

$$K_n^\sharp = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{itE} K_n e^{-itE} dt.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
K_n^\sharp &= i \sum_{j=1}^k - \left[ \int_0^\infty e^{-is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty e^{is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)) ds \right] v_{n_j} X v_{n_j}^* \\
&\quad - \left[ \int_0^\infty e^{is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty e^{-is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)) ds \right] v_{n_j}^* X v_{n_j} \\
&\quad + \left[ \int_0^\infty e^{is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)) ds \right] X v_{n_j} v_{n_j}^* \\
&\quad + \left[ \int_0^\infty e^{-is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n) \varphi_{AW}(f_n)) ds \right] X v_{n_j}^* v_{n_j} \\
&\quad + \left[ \int_0^\infty e^{-is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) ds \right] v_{n_j} v_{n_j}^* X \\
&\quad + \left[ \int_0^\infty e^{is\omega_{n_j}} \omega_R(\varphi_{AW}(f_n) \varphi_{AW}(e^{is\omega} f_n)) ds \right] v_{n_j}^* v_{n_j} X.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le même calcul utilisé dans la preuve du théorème 2.11, nous calculons d'une manière analogue l'expression de  $K_n^\sharp$  et nous montrons que pour tout  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n(X) &= iK_n^\sharp(X) \\
&= \sum_{j=1}^k i(\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^-) [v_{n_j}^* v_{n_j}, X] \\
&\quad + i(\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^+) [v_{n_j} v_{n_j}^*, X] \\
&\quad + \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ [2v_{n_j}^* X v_{n_j} - \{v_{n_j}^* v_{n_j}, X\}] \\
&\quad + \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- [2v_{n_j} X v_{n_j}^* - \{v_{n_j} v_{n_j}^*, X\}].
\end{aligned}$$

Comme on a  $K^\sharp = \sum_{n=1}^N K_n^\sharp$ , on obtient  $\mathcal{L} = i \sum_{n=1}^N K_n^\sharp = \sum_{n=1}^N \mathcal{L}_n$ . Cela achève la preuve du théorème ci-dessus.  $\square$

### 3.3.1 Équation maîtresse

Soit  $\rho$  une matrice densité dans  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ . Alors, l'équation maîtresse du système de Pauli-Fierz est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^k -i(\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^-) [v_{n_j}^* v_{n_j}, \rho(t)] \\ & -i(\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^+) [v_{n_j} v_{n_j}^*, \rho(t)] \\ & + \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ [2v_{n_j} \rho(t) v_{n_j}^* - \{\rho(t), v_{n_j}^* v_{n_j}\}] \\ & + \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- [2v_{n_j}^* \rho(t) v_{n_j} - \{\rho(t), v_{n_j} v_{n_j}^*\}]. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\mathcal{K}$  est un espace de Hilbert de dimension finie et que  $H_0$  est un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{K}$ . Soit  $c$  une constante réelle positive telle que le spectre de  $H_0$ ,  $\sigma(H_0) \subset [-c, c]$ . Notons que

$$e^{-\beta x} \mathbf{1}_{[-c, c]}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-its} e^{-\beta s} \mathbf{1}_{[-c, c]}(s) ds \right) dt.$$

Alors, par le théorème spectral, on a  $\mathbf{1}_{[-c, c]}(H_0) = I$ , puisque  $\sigma(H_0) \subset [-c, c]$ . De plus, par le calcul fonctionnel, on a

$$e^{-\beta H_0} = \int_{\mathbb{R}} e^{itH_0} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-its} e^{-\beta s} \mathbf{1}_{[-c, c]}(s) ds \right) dt.$$

Ainsi, grâce à la formule (3.2), on obtient

$$e^{-\beta H_0} v_{n_j} = e^{\beta \omega_{n_j}} v_{n_j} e^{-\beta K} \quad \text{et} \quad e^{-\beta H_0} v_{n_j}^* = e^{-\beta \omega_{n_j}} v_{n_j}^* e^{-\beta H_0}, \quad \forall n = 1, \dots, N; j = 1, \dots, k.$$

Par conséquent, pour tous  $n = 1, \dots, N; j = 1, \dots, k$ , on a

$$\begin{aligned} e^{-\beta H_0} v_{n_j}^* v_{n_j} &= v_{n_j}^* v_{n_j} e^{-\beta H_0}, \\ e^{-\beta H_0} v_{n_j} v_{n_j}^* &= v_{n_j} v_{n_j}^* e^{-\beta H_0}, \\ v_{n_j} e^{-\beta H_0} v_{n_j}^* &= e^{-\beta \omega_{n_j}} v_{n_j} v_{n_j}^* e^{-\beta H_0}, \\ v_{n_j}^* e^{-\beta H_0} v_{n_j} &= e^{\beta \omega_{n_j}} v_{n_j}^* v_{n_j} e^{-\beta H_0}. \end{aligned}$$

Il résulte que l'état d'équilibre thermodynamique à une température inverse  $\beta$  du petit système  $\rho_s$  vérifie

$$[v_{n_j}^* v_{n_j}, \rho_s] = [v_{n_j} v_{n_j}^*, \rho_s] = 0, \quad \forall n = 1, \dots, N; j = 1, \dots, k. \quad (3.9)$$

D'autre part, on a

$$\operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ e^{-\beta \omega_{n_j}} = \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^-. \quad (3.10)$$



Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ [2v_{n_j}\rho_s v_{n_j}^* - \{\rho_s, v_{n_j}^* v_{n_j}\}] \\
& + \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- [2v_{n_j}^* \rho_s v_{n_j} - \{\rho_s, v_{n_j} v_{n_j}^*\}] \\
& = \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ [2e^{-\beta\omega_{n_j}} v_{n_j} v_{n_j}^* \rho_s - 2v_{n_j}^* v_{n_j} \rho_s] \\
& + \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- [2e^{\beta\omega_{n_j}} v_{n_j}^* v_{n_j} \rho_s - 2v_{n_j} v_{n_j}^* \rho_s] \\
& = 2(\operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ e^{-\beta\omega_{n_j}} - \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^-) v_{n_j} v_{n_j}^* \rho_s \\
& + 2(e^{\beta\omega_{n_j}} \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- - \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+) v_{n_j}^* v_{n_j} \rho_s.
\end{aligned}$$

Par conséquent, grâce à la relation (3.10), le terme ci-dessus est nul. Ainsi,  $\rho_s$  est un état stationnaire.

### 3.3.2 Condition du bilan détaillé quantique

Rappelons que la condition du bilan détaillé quantique a été définie dans la sous-section 1.2.4.

**Théorème 3.5** *Le semigroupe dynamique quantique du système de Pauli-Fierz vérifie la condition du bilan détaillé quantique par rapport à l'état d'équilibre thermodynamique du petit système  $\rho_s$ .*

**Preuve:** Notons d'abord que d'après la sous-section précédente, le semigroupe dynamique quantique associé au système de Pauli-Fierz admet  $\rho_s$  comme état stationnaire fidèle.

Posons

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^k (\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^-) v_{n_j}^* v_{n_j} \\
&\quad + (\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^+) v_{n_j} v_{n_j}^* \\
\mathcal{L}_\omega^D(X) &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+ [2v_{n_j}^* X v_{n_j} - \{v_{n_j} v_{n_j}^*, X\}] \\
&\quad + \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- [2v_{n_j}^* X v_{n_j} - \{v_{n_j} v_{n_j}^*, X\}].
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la relation (3.9), il est clair que  $[H, \rho_s] = 0$ . De plus, il est facile de vérifier que  $\mathcal{L}_\omega^D$  est un opérateur auto-adjoint pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\rho_s}$ .  $\square$

### 3.3.3 Retour à l'équilibre du système de Pauli-Fierz

Dans cette sous-section, nous allons montrer la propriété du retour à l'équilibre du système de Pauli-Fierz. Notons que les coefficients de la partie hamiltonienne du lindbladien de Pauli-Fierz sont des nombres réels finis, puisque les fonctions tests  $f_n$  sont des fonctions de Schwartz. Maintenant, nous prouvons le résultat suivant.

**Théorème 3.6** *Si  $\operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^{\pm} > 0$ , pour tous  $j = 1, \dots, k$ ;  $n = 1, \dots, N$ , alors le semigroupe dynamique quantique associé au système de Pauli-Fierz possède la propriété du retour à l'équilibre.*

**Preuve:** Soient

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^k \left[ (\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^- - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+) v_{n_j}^* v_{n_j} \right. \\ &\quad \left. + (\operatorname{Im}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^- - \operatorname{Im}(f_n, f_n)_{\omega_{n_j}}^+) v_{n_j} v_{n_j}^* \right], \\ L_{n_j}^1 &= (2 \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^+)^{1/2} v_{n_j}, \\ L_{n_j}^2 &= (2 \operatorname{Re}(f_n, f_n)_{-\omega_{n_j}}^-)^{1/2} v_{n_j}, \\ G &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^k (L_{n_j}^{1*} L_{n_j}^1 + L_{n_j}^{2*} L_{n_j}^2) - iH. \end{aligned}$$

Alors, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} &\{v_{n_j}, v_{n_j}^*, v_{n_j} v_{n_j}^*, v_{n_j}^* v_{n_j}, n = 1, \dots, N; j, j' = 1, \dots, k\}' \\ &= \{v_{n_j}, v_{n_j}^*, n = 1, \dots, N; j, j' = 1, \dots, k\}'. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} &\{L_{n_j}^i, L_{n_j}^{i*}, i = 1, 2, n = 1, \dots, N; j, j' = 1, \dots, k\}' \\ &= \{H, L_{n_j}^i, L_{n_j}^{i*}, i = 1, 2, n = 1, \dots, N; j, j' = 1, \dots, k\}'. \end{aligned}$$

Comme  $\rho_s$  est un état stationnaire fidèle pour le semigroupe dynamique quantique du système de Pauli-Fierz, nous pouvons conclure grâce au théorème 1.35.  $\square$



# Chapitre 4

## Contribution n<sup>o</sup> 3 : Un modèle lindbladien pour une chaîne de spins couplée à des bains thermiques

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle XY décrivant une chaîne de  $N$  spins couplée à des bains thermiques. Nous modélisons le bain thermique par une chaîne infinie de spins. Le système total est décrit par un hamiltonien d'interactions répétées  $H$  défini sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \eta$  où  $\mathcal{H}_S = \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2$  et  $\eta = \mathbb{C}^2$ .

Dans la section 4.1, nous calculons le lindbaldien décrivant une chaîne de  $N$  spins en interaction avec un puis avec deux bains thermiques.

Dans la section 4.2, nous étudions les propriétés markoviennes de la chaîne de spins couplée à ses deux extrémités à deux bains thermiques de températures inverses respectives  $\beta$  et  $\beta'$ . Dans la cas où  $\beta = \beta'$ , nous donnons la forme explicite de l'état stationnaire  $\rho^\beta$  du semigroupe dynamique associé. Ensuite, nous étudions la propriété du retour à l'équilibre pour tous  $\beta, \beta'$  strictement positifs. De plus, nous donnons des formes explicites pour les états d'équilibre thermodynamique locaux et nous calculons la production d'entropie dans le cas où les températures sont égales.

Dans la section 4.3, nous étudions le cas d'une chaîne de  $N$  spins couplée à  $r$  bains thermiques,  $2 \leq r \leq N$ .

### 4.1 Lindbladien d'une chaîne de $N$ spins

#### 4.1.1 Interactions répétées

Dans cette sous-section, nous considérons le même modèle d'interactions répétées introduit dans la sous-section 1.4.1. Rappelons que ce modèle représente un système quantique  $\mathcal{H}_0$  en interaction avec une chaîne infinie de copies identiques  $\mathcal{H}$

dont on fixe une base orthonormée  $\{e_i, i \in J \cup \{0\}\}$ , où  $e_0 = \Omega$  représente l'état vide de l'atome. Le produit tensoriel infini  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}$  est défini par rapport à la suite stabilisatrice  $(\Omega)_n$ . L'évolution unitaire associée, durant l'intervalle de temps  $[0, h]$ , s'écrit

$$U = \sum_{i, j \in J \cup \{0\}} U_j^i \otimes a_j^i.$$

De plus, l'équation d'évolution discrète associée au modèle d'interactions répétées est décrite par la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est définie sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H})$  par

$$\begin{cases} V_{n+1} = U_{n+1} V_n \\ V_0 = I. \end{cases}$$

### 4.1.2 Chaîne de spins couplée à un seul bain thermique

Le système qu'on considère dans ce chapitre est une chaîne de  $N$  spins telle que chaque spin est décrit par l'espace de Hilbert  $\eta = \mathbb{C}^2$ . Par conséquent, l'espace de Hilbert décrivant la chaîne totale est  $\mathcal{H}_S = \bigotimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2$ . L'hamiltonien de ce système est l'opérateur

$$H_S = B \sum_{k=1}^N \sigma_z^{(k)} + \sum_{k=1}^{N-1} (J_x \sigma_x^{(k)} \otimes \sigma_x^{(k+1)} + J_y \sigma_y^{(k)} \otimes \sigma_y^{(k+1)}),$$

où

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $B$  est un nombre réel décrivant l'influence d'un champ magnétique extérieur dans la direction  $z$ , tandis que l'interaction entre deux spins voisins est décrite par  $J_x, J_y \in \mathbb{R}$ .

Dans la suite, nous allons supposer que  $J_x = J_y = J$  et que le scalaire  $B$  est égal à 1. De plus, nous modélisons le bain thermique par une chaîne infinie de spins. Considérons maintenant l'hamiltonien d'interactions quantiques répétées associé à la chaîne de spins couplée à sa première extrémité à un bain thermique

$$H = H_S \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{\sqrt{\hbar}} (\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x + \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y),$$

avec  $H_R = \sigma_z$ . Notons que si on suppose que  $B \neq 1$ , alors les propriétés physiques que nous allons prouver dans la suite restent vrai si et seulement si  $H_R = B\sigma_z$ .

Posons

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x + \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y &= (\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_+ - i\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_+) + (\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_- + i\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_-) \\ &= 2[\sigma_-^{(1)} \otimes \sigma_+ + \sigma_+^{(1)} \otimes \sigma_-].\end{aligned}$$

Ainsi, nous déduisons que l'hamiltonien d'interactions répétées donné ci-dessus est un cas particulier que celui obtenu dans [AtJ].

Considérons maintenant la base orthonormée  $\{\Omega, X\}$  de  $\mathbb{C}^2$  telle que

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de  $H$  dans cette base dont les coefficients sont des opérateurs définis sur  $\mathcal{H}_S$  est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} H_S + I & \frac{1}{\sqrt{h}} \sigma_-^{(1)} \\ \frac{1}{\sqrt{h}} \sigma_+^{(1)} & H_S - I \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'évolution unitaire durant l'intervalle de temps  $[0, h]$  s'écrit

$$U = \begin{pmatrix} I - ihI - ihH_S - 2h \sigma_-^{(1)} \sigma_+^{(1)} + o(h^2) & -2i\sqrt{h} \sigma_-^{(1)} + o(h^{3/2}) \\ -2i\sqrt{h} \sigma_+^{(1)} + o(h^{3/2}) & I + ihI - ihH_S - 2h \sigma_+^{(1)} \sigma_-^{(1)} + o(h^2) \end{pmatrix}.$$

Rappelons que  $M_2(\mathbb{C})$ , l'algèbre des matrices  $2 \times 2$  à coefficients complexes, est munie du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle_\beta = \text{Tr}(\rho_\beta A^* B), \quad \forall A, B \in M_2(\mathbb{C}),$$

où

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta\sigma_z}}{\text{Tr}(e^{-\beta\sigma_z})} = \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

est l'état d'équilibre thermodynamique à une température inverse  $\beta$  d'un spin isolé. De plus, la famille  $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$  telle que

$$X_0 = I, \quad X_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0\beta_1}} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_0 \end{pmatrix}.$$

est une base orthonormée de  $M_2(\mathbb{C})$  munie du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$ .

Considérons la représentation GNS du couple  $(\mathbb{C}^2, \rho_\beta)$ , qui est donnée par le triplet  $(\pi, \tilde{\mathcal{H}}, \Omega_R)$  tel que :

- $\Omega_R = I$ ,
- $\tilde{\mathcal{H}} = M_2(\mathbb{C})$ ,

- $\pi : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ , vérifiant  $\pi(M)A = MA, \forall M, A \in M_2(\mathbb{C})$ .

Maintenant, nous montrons le résultat suivant.

**Théorème 4.1** *Le lindbladien associé au modèle d'interactions répétées de la chaîne de spins couplée à un bain thermique à une température inverse  $\beta$  s'écrit*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(X) = i [H_S, X] &+ 2\beta_0 [2\sigma_-^{(1)} X \sigma_+^{(1)} - \{n_-^{(1)}, X\}] \\ &+ 2\beta_1 [2\sigma_+^{(1)} X \sigma_-^{(1)} - \{n_+^{(1)}, X\}], \end{aligned}$$

$\forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ .

**Preuve:** Soit  $\tilde{U} = \pi(U)$ . Ainsi, dans la base  $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0^0 &= I - ihH_S + ih(\beta_1 - \beta_0)I - 2h\beta_0\sigma_-^{(1)}\sigma_+^{(1)} - 2h\beta_1\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(1)} + o(h^2), \\ \tilde{U}_1^0 &= -2i\sqrt{\beta_0}\sqrt{h}\sigma_+^{(1)} + o(h^{3/2}), \\ \tilde{U}_2^0 &= -2i\sqrt{\beta_1}\sqrt{h}\sigma_-^{(1)} + o(h^{3/2}), \\ \tilde{U}_3^0 &= o(h). \end{aligned}$$

D'autre part, si on pose

$$\begin{aligned} H_0 &= H_S + (\beta_0 - \beta_1)I, \\ L_0^0 &= -iH_0 - 2\beta_0\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(1)} - 2\beta_1\sigma_-^{(1)}\sigma_+^{(1)}, \\ L_1^0 &= -2i\sqrt{\beta_0}\sigma_-^{(1)}, \\ L_2^0 &= -2i\sqrt{\beta_1}\sigma_+^{(1)}, \end{aligned}$$

alors il est clair que

$$L_0^0 = -iH_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 L_i^0.$$

Par conséquent, grâce au théorème 1.51, nous pouvons conclure.  $\square$

**Remarque 4.1** *Dans le cas où  $N = 1$ , le lindbladien ci-dessus s'écrit*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(X) = i [H_S, X] &+ 2\beta_0 [2\sigma_- X \sigma_+ - \{n_-, X\}] \\ &+ 2\beta_1 [2\sigma_+ X \sigma_- - \{n_+, X\}], \end{aligned}$$

$\forall X \in M_2(\mathbb{C})$ . Notons que ce lindbladien décrit un atome à deux niveaux d'énergie en interaction avec un bain thermique. De plus, nous prouvons, de manière analogue que dans le chapitre 2, que les propriétés du retour à l'équilibre pour toute température  $T \geq 0$ , le bilan détaillé quantique, la décohérence quantique sont encore vérifiées.

### 4.1.3 Chaîne de spins couplée à deux bains thermiques

Dans cette sous-section, nous supposons que la chaîne de spins est couplée à chacune de ses extrémités à un bain thermique. De plus, les deux bains thermiques sont supposés de températures strictement positives  $\beta^{-1}$  et  $\beta'^{-1}$ . Ainsi, l'hamiltonien d'interactions répétées associé s'écrit

$$H = H_S \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{\sqrt{\hbar}} (\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(L)} + \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(L)} + \sigma_x^{(N)} \otimes \sigma_x^{(R)} + \sigma_y^{(N)} \otimes \sigma_y^{(R)}),$$

où  $(R)$ ,  $(L)$  indiquent respectivement les bains thermiques à gauche et à droite.

La preuve du théorème suivant est analogue à celle du théorème 4.1.

**Théorème 4.2** *Le lindbladien associé à la chaîne de spins couplée à deux bains thermiques de températures respectives  $\beta^{-1}$  et  $\beta'^{-1}$  est donné par*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) = i [H_S, X] &+ 2\beta_0 [2\sigma_-^{(1)} X \sigma_+^{(1)} - \{n_-^{(1)}, X\}] \\ &+ 2\beta_1 [2\sigma_+^{(1)} X \sigma_-^{(1)} - \{n_+^{(1)}, X\}] \\ &+ 2\beta'_0 [2\sigma_-^{(N)} X \sigma_+^{(N)} - \{n_-^{(N)}, X\}] \\ &+ 2\beta'_1 [2\sigma_+^{(N)} X \sigma_-^{(N)} - \{n_+^{(N)}, X\}], \end{aligned}$$

$$\forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S).$$

## 4.2 Propriétés markoviennes d'une chaîne de $N$ spins couplée à deux bains thermiques

Dans cette section, nous étudions les propriétés markoviennes d'une chaîne de  $N$  spins couplée à chacune de ses extrémités à un bain thermique de températures respectives  $\beta^{-1}$  et  $\beta'^{-1}$ . Nous commençons par donner l'équation maîtresse associée. Ensuite, nous montrons la propriété du retour à l'équilibre et nous calculons les états locaux pour  $N = 1, 2, 3, 4$ . Finalement, pour  $\beta = \beta'$ , nous étudions la condition du bilan détaillé quantique et nous calculons la production d'entropie.

Notons que dans la littérature, pour examiner les deux dernières propriétés physiques, nous avons besoin de connaître explicitement l'état stationnaire. Comme il est très compliqué de déterminer l'état stationnaire pour  $\beta \neq \beta'$ , on se limite à étudier ces propriétés uniquement dans le cas  $\beta = \beta'$ .



### 4.2.1 Équation maîtresse

L'équation maîtresse de la chaîne de  $N$  spins liée de chacune de ses extrémités à un bain thermique de températures respectives  $\beta^{-1}$  et  $\beta'^{-1}$ , est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(\rho) = & -i [H_S, \rho] + 2\beta_0 [2\sigma_+^{(1)} \rho \sigma_-^{(1)} - \{n_-^{(1)}, \rho\}] \\ & + 2\beta_1 [2\sigma_-^{(1)} \rho \sigma_+^{(1)} - \{n_+^{(1)}, \rho\}] \\ & + 2\beta'_0 [2\sigma_+^{(N)} \rho \sigma_-^{(N)} - \{n_-^{(N)}, \rho\}] \\ & + 2\beta'_1 [2\sigma_-^{(N)} \rho \sigma_+^{(N)} - \{n_+^{(N)}, \rho\}], \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$  est une matrice densité.

Notons que  $\dim \mathcal{H}_S < \infty$ . Donc il existe un état stationnaire de l'équation maîtresse ci-dessus. De plus, dans le cas où  $\beta = \beta'$ , l'état stationnaire est donné par le théorème suivant.

**Théorème 4.3** *Si  $\beta = \beta'$ , alors l'équation maîtresse (4.1) admet un unique état stationnaire fidèle  $\rho^\beta$  donné par*

$$\rho^\beta = \otimes_{i=1}^N \rho_\beta,$$

où  $\rho_\beta$  est l'état d'équilibre thermodynamique d'un spin isolé.

**Preuve:** Notons d'abord que par un simple calcul, nous montrons que

$$[\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y, \rho_\beta \otimes \rho_\beta] = 0.$$

Ainsi, on obtient

$$[H_S, \rho^\beta] = 0.$$

De plus, si on note  $\mathcal{L}_d^*$  la partie dissipative de  $\mathcal{L}^*$ , alors il est facile de vérifier que  $\mathcal{L}_d^*(\rho^\beta) = 0$ . Cela implique que  $\mathcal{L}^*(\rho^\beta) = 0$ .

Considérons maintenant un opérateur

$$A \in \{H_S, \sigma_+^{(1)}, \sigma_-^{(1)}, \sigma_-^{(N)}, \sigma_+^{(N)}\}'.$$

En particulier, on a

$$A \in \{\sigma_+^{(1)}, \sigma_-^{(1)}, \sigma_-^{(N)}, \sigma_+^{(N)}\}',$$

ce qui implique que

$$A = I^{(1)} \otimes A_1 \otimes I^{(N)},$$

où  $A_1$  est un opérateur défini sur  $\otimes_{k=2}^{N-1} \mathbb{C}^2$ . D'autre part, l'opérateur  $A$  commute avec  $H_S$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} & \sigma_x^{(1)} \otimes [A_1, \sigma_x^{(2)}] \otimes I^{(N)} + \sigma_y^{(1)} \otimes [A_1, \sigma_y^{(2)}] \otimes I^{(N)} + \\ & I^{(1)} \otimes [A_1, \sigma_x^{(N-1)}] \otimes \sigma_x^{(N)} + I^{(1)} \otimes [A_1, \sigma_y^{(N-1)}] \otimes \sigma_y^{(N)} + \\ & I^{(1)} \otimes [A_1, \sum_{k=2}^{N-1} \sigma_z^{(k)} + \sum_{k=2}^{N-2} (\sigma_x^{(k)} \otimes \sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)} \otimes \sigma_y^{(k+1)})] \otimes I^{(N)} = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$[A_1, \sigma_x^{(2)}] = [A_1, \sigma_y^{(2)}] = [A_1, \sigma_x^{(N-1)}] = [A_1, \sigma_y^{(N-1)}] = 0.$$

Ainsi, l'opérateur  $A_1$  s'écrit

$$A_1 = I^{(2)} \otimes A_2 \otimes I^{(N-1)},$$

où  $A_2$  est un opérateur défini sur  $\otimes_{k=3}^{N-2} \mathbb{C}^2$ .

Répétons cet argument autant de fois jusqu'à ce qu'on trouve  $A = \lambda I$ . Finalement, on obtient

$$\{H_S, \sigma_+^{(1)}, \sigma_-^{(1)}, \sigma_+^{(N)}, \sigma_-^{(N)}\}' = \mathbb{C}I.$$

Par conséquent, la fin de la preuve découle du théorème 1.36.  $\square$

## 4.2.2 Retour à l'équilibre

L'objectif dans cette sous-section est de montrer que le semigroupe dynamique quantique de la chaîne de spins couplée à deux bains thermiques de températures inverses  $\beta$  et  $\beta'$  possède la propriété du retour à l'équilibre. Commençons par introduire le théorème suivant et pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [Bu].

**Théorème 4.4** *Soit  $L$  le générateur d'un semigroupe dynamique quantique uniformément continu  $(\Theta_t)_t$  sur  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$  qui s'écrit sous la forme*

$$L(A) = \sum_j V_j^* A V_j + K A + A K^*,$$

tel que  $V_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , le nombre d'indices  $j$  est fini,  $K = iH - \frac{1}{2} \sum_j V_j^* V_j$  et  $H = H^* \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$  ( $L(I) = 0$ ). Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- i) Le semigroupe dynamique quantique  $(\Theta_t^*)_t$  admet un état stationnaire  $\rho$ ,
- ii) L'espace vectoriel engendré par les opérateurs  $V_j$  est stable par l'opération "adjoint",
- iii) Si  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$  tel que  $\Theta_t(A^*A) = (\Theta_t A^*)(\Theta_t A)$  pour tout  $t \geq 0$ , alors on a  $A = \mathbb{C}I$ .

Alors, l'état  $\rho$  est un état fidèle et le semigroupe dynamique quantique  $(\Theta_t^*)_t$  possède la propriété du retour à l'équilibre, i.e :

$$w^* - \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta_t^* \xi = \rho, \quad \text{pour tout état normal } \xi.$$

Sous les hypothèses du théorème énoncé ci-dessus,  $\rho$  est l'unique état stationnaire pour le semigroupe dynamique quantique  $(\Theta_t^*)_t$ . En effet, considérons un élément  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$  tel que  $[H, A] = [V_j, A] = [V_j^*, A] = 0$ , pour tout  $j$ . Notons que d'après l'hypothèse ii),  $[V_j, A] = 0$  implique aussi que  $[V_j^*, A] = 0$ . On obtient donc

$$L(A) = L(A^*) = L(A^*A) = 0.$$

Par conséquent, on a  $\Theta_t A^* = A^*$ ,  $\Theta_t A = A$  et  $\Theta_t(A^*A) = A^*A$  pour tout  $t \geq 0$ . Cela implique que  $\Theta_t(A^*A) = (\Theta_t A^*)(\Theta_t A)$ , pour tout  $t \geq 0$ . Ainsi, d'après l'hypothèse iii), on a  $A = \lambda I$ . Comme  $\rho$  est un état fidèle, nous pouvons conclure grâce au théorème 1.36.

Comme conséquence du théorème ci-dessus, nous prouvons le résultat suivant.

**Théorème 4.5** *Le semigroupe dynamique quantique  $\{T_t^* = e^{t\mathcal{L}^*}, t \in \mathbb{R}_+\}$  associé à la chaîne de spins couplée à deux bains thermiques de températures respectives  $\beta^{-1}$  et  $\beta'^{-1}$  possède la propriété du retour à l'équilibre vers un unique état stationnaire fidèle  $\rho^{\beta, \beta'}$ .*

**Preuve:** Notons que  $\dim \mathcal{H}_S < \infty$ . Donc le semigroupe dynamique  $T^* = (T_t^*)_t$  admet un état stationnaire. De plus, l'espace engendré par  $\{\sigma_-^{(1)}, \sigma_+^{(1)}, \sigma_-^{(N)}, \sigma_+^{(N)}\}$  est stable par l'opération "adjoint". Ainsi, les hypothèses i) et ii) du théorème ci-dessus sont satisfaites.

Considérons un opérateur  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$  tel que

$$T_t(A^*A) = (T_t A^*)(T_t A), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.2)$$

En utilisant les propriétés du semigroupe, on en déduit que

$$\begin{aligned} T_s((T_t A)^*(T_t A)) &= T_s((T_t A^*)(T_t A)) \\ &= T_s(T_t(A^*A)) \\ &= T_{s+t}(A^*A) \\ &= (T_{s+t} A^*)(T_{s+t} A) \\ &= (T_s(T_t A)^*)(T_s(T_t A)), \end{aligned}$$

pour tout  $s \geq 0$ , ce qui implique que  $T_t A$  vérifie aussi la relation (4.2), pour tout  $t \geq 0$ .

Maintenant, par dérivation par rapport à la variable  $t$  dans la relation (4.2), on obtient

$$\mathcal{L}T_t(A^*A) = (\mathcal{L}T_t A^*)(T_t A) + (T_t A^*)(\mathcal{L}T_t A).$$

Comme  $T_t A^* = (T_t A)^*$ , on a

$$\mathcal{L}((T_t A^*)(T_t A)) = (\mathcal{L}(T_t A)^*)(T_t A) + (T_t A^*)(\mathcal{L}T_t A), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3)$$

En particulier, pour  $t = 0$ , on a

$$\mathcal{L}(A^*A) = (\mathcal{L}A^*)A + A^*(\mathcal{L}A). \quad (4.4)$$

Notons aussi que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A^*A) - (\mathcal{L}A^*)A - A^*(\mathcal{L}A) &= 4\beta_0[\sigma_+^{(1)}, A]^*[\sigma_+^{(1)}, A] + 4\beta_1[\sigma_-^{(1)}, A]^*[\sigma_-^{(1)}, A] \\ &\quad + 4\beta'_0[\sigma_+^{(N)}, A]^*[\sigma_+^{(N)}, A] + 4\beta'_1[\sigma_-^{(N)}, A]^*[\sigma_-^{(N)}, A]. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $A$  vérifie la relation (4.2), alors on obtient

$$A \in \{\sigma_-^{(1)}, \sigma_+^{(1)}, \sigma_-^{(N)}, \sigma_+^{(N)}\}'.$$

Par conséquent,

$$A = I^{(1)} \otimes \tilde{A} \otimes I^{(N)},$$

où  $\tilde{A}$  est un opérateur défini sur  $\otimes_{k=2}^{N-1} \mathbb{C}^2$ . D'autre part, de la relation (4.3), l'opérateur  $T_t A$  vérifie aussi la relation (4.4). Ainsi,  $T_t A$  a aussi la même forme que  $A$ ,

$$T_t A = I^{(1)} \otimes \tilde{S}_t \otimes I^{(N)},$$

où  $\tilde{S}_t$  est un opérateur défini sur  $\otimes_{k=2}^{N-1} \mathbb{C}^2$ . De plus, de la dérivée de  $T_t A$  par rapport à  $t$  prise au temps  $t = 0$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A) &= i [H_S, A] \\ &= i \sigma_x^{(1)} \otimes [\sigma_x^{(2)}, \tilde{A}] \otimes I^{(N)} + i \sigma_y^{(1)} \otimes [\sigma_y^{(2)}, \tilde{A}] \otimes I^{(N)} \\ &\quad + i I^{(1)} \otimes \left[ \sum_{k=2}^{N-2} (\sigma_x^{(k)} \otimes \sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)} \otimes \sigma_y^{(k+1)}), \tilde{A} \right] \otimes I^{(N)} \\ &\quad + i I^{(1)} \otimes [\sigma_x^{(N-1)}, \tilde{A}] \otimes \sigma_x^{(N)} + i I^{(1)} \otimes [\sigma_y^{(N-1)}, \tilde{A}] \otimes \sigma_y^{(N)} \\ &= I^{(1)} \otimes \tilde{B} \otimes I^{(N)}, \end{aligned}$$

où  $\tilde{B} = \frac{d}{dt} \tilde{S}_t \Big|_{t=0}$ . On obtient donc

$$[\sigma_x^{(2)}, \tilde{A}] = [\sigma_y^{(2)}, \tilde{A}] = [\sigma_x^{(N-1)}, \tilde{A}] = [\sigma_y^{(N-1)}, \tilde{A}] = 0.$$

Cela implique

$$\tilde{A} = I^{(2)} \otimes \tilde{A}_1 \otimes I^{(N-1)}.$$

Par conséquent, l'opérateur  $A$  s'écrit

$$A = I^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes \tilde{A}_1 \otimes I^{(N-1)} \otimes I^{(N)}.$$

Comme  $T_t A$  vérifie aussi la relation (4.2), par le même argument que celui utilisé pour  $A$ , on montre que l'opérateur  $T_t A$  s'écrit sous la forme

$$I^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes \tilde{R}_t \otimes I^{(N-1)} \otimes I^{(N)},$$

où  $\tilde{R}_t$  est un opérateur défini sur  $\otimes_{k=3}^{N-2} \mathbb{C}^2$ . Répétons ce raisonnement jusqu'à ce qu'on obtienne le seul cas possible pour que la relation (4.2) soit vérifiée, est que l'opérateur  $A$  soit un multiple de l'identité.

L'unicité de l'état stationnaire  $\rho^{\beta, \beta'}$  se déduit du fait que

$$\{H_S, \sigma_+^{(1)}, \sigma_-^{(1)}, \sigma_+^{(N)}, \sigma_-^{(N)}\}' = \mathbb{C}I.$$

Par conséquent, grâce au théorème 1.36, nous pouvons conclure.  $\square$

### 4.2.3 États locaux

Rappelons que le semigroupe dynamique quantique d'une chaîne de  $N$  spins couplée à deux bains thermiques de températures inverses  $\beta$  et  $\beta'$  admet un unique état stationnaire fidèle  $\rho^{\beta, \beta'}$ . Notons  $\rho^{(i)}$ , la trace partielle de  $\rho^{\beta, \beta'}$  sur la  $i$ -ième copie de  $\mathbb{C}^2$  définie par

$$\mathrm{Tr}(\rho^{(i)} A^{(i)}) := \mathrm{Tr}(\rho^{\beta, \beta'} (I \otimes A^{(i)} \otimes I)),$$

où  $A^{(i)}$  est un opérateur qui agit uniquement sur la  $i$ -ième copie de  $\mathbb{C}^2$ .

Notons qu'afin de déterminer ces états locaux, nous avons calculé l'état stationnaire  $\rho^{\beta, \beta'}$  dans les cas où la chaîne est composée respectivement de 2, 3 et 4 spins. Nous avons obtenu les résultats suivants :

- Pour  $N = 2$ , on a

$$\begin{aligned} \rho^{\beta, \beta'} &= \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) - \frac{1}{8}(\beta_0 - \beta'_0)^2 \sigma_z \otimes \sigma_z \\ &\quad + \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{4} [n_+ \otimes n_- - n_- \otimes n_+] + i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{4} [\sigma_+ \otimes \sigma_- - \sigma_- \otimes \sigma_+]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right), \\ \rho^{(2)} &= \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{\beta'} - \rho_\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

- pour  $N = 3$ , on a

$$\begin{aligned}
\rho^{\beta, \beta'} &= \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) - \frac{3}{4} \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \\
&+ \frac{3}{4} \left[ \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) - \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \right] \\
&+ \frac{\beta_0 - \beta'_0}{8} \left[ (\rho_\beta \otimes n_- \otimes n_+ - \rho_\beta \otimes n_+ \otimes n_-) + (n_- \otimes n_+ \otimes \rho_{\beta'} - n_+ \otimes n_- \otimes \rho_{\beta'}) \right] \\
&+ i \frac{\beta_0 - \beta'_0}{8} \left[ \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) - \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \right] \\
&+ i \frac{\beta_0 - \beta'_0}{8} \left[ \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- - \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \right] \\
&+ i \frac{\beta_0 - \beta'_0}{8} \left[ \rho_\beta \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- - \rho_\beta \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \right] \\
&+ i \frac{\beta_0 - \beta'_0}{8} \left[ \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes \rho_{\beta'} - \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes \rho_{\beta'} \right] \\
&- \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{16} \left[ \sigma_+ \otimes I \otimes \sigma_- + \sigma_- \otimes I \otimes \sigma_+ \right].
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)} &= \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right), \\
\rho^{(2)} &= \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} = \frac{\rho^{(1)} + \rho^{(3)}}{2}, \\
\rho^{(3)} &= \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{\beta'} - \rho_\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

- Pour  $N = 4$ , on a

$$\begin{aligned}
\rho^{\beta, \beta'} &= \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \\
&- \frac{7}{8} \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \right. \\
&\left. - \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \right] \\
&- \frac{1}{8} \rho_\beta \otimes \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \left(\frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes \rho_{\beta'} \\
&- \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} \left[ n_- \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes I \otimes n_+ + n_+ \otimes I \otimes \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes n_- \right] \\
&- \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{16} \left[ \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes n_+ \otimes n_+ \otimes n_- + \left(\frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2}\right) \otimes n_- \otimes n_- \otimes n_+ \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{16} \left[ n_- \otimes n_+ \otimes n_+ \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) + n_+ \otimes n_- \otimes n_- \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \right] \\
& + \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{16} \left[ n_- \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes n_+ \otimes n_- + n_+ \otimes n_- \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes n_+ \right] \\
& + \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} \left[ \rho_\beta \otimes n_- \otimes n_+ \otimes n_- + n_+ \otimes n_+ \otimes n_- \otimes \rho_\beta \right] \\
& + \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} \left[ \rho_{\beta'} \otimes n_- \otimes n_+ \otimes n_+ + n_- \otimes n_+ \otimes n_- \otimes \rho_{\beta'} \right] \\
& + \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} (\beta_0 + \beta'_0) n_+ \otimes n_+ \otimes n_- \otimes n_+ \\
& + \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} (\beta_1 + \beta'_1) n_- \otimes n_+ \otimes n_- \otimes n_- \\
& + \frac{3(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} \left[ n_+ \otimes n_- \otimes n_- \otimes n_+ + n_- \otimes n_+ \otimes n_+ \otimes n_- \right] \\
& - \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{16} \left[ n_+ \otimes n_+ \otimes n_- \otimes n_- + n_- \otimes n_- \otimes n_+ \otimes n_+ \right] \\
& + i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{32} \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- \\
& - i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{32} \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \\
& + i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{32} \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \\
& - i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{32} \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \\
& + i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{16} \left[ \rho_\beta \otimes \rho_{\beta'} \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- - \rho_\beta \otimes \rho_{\beta'} \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \right] \\
& + i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{16} \left[ \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes \rho_\beta \otimes \rho_{\beta'} - \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes \rho_\beta \otimes \rho_{\beta'} \right] \\
& + i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{8} \left[ \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \rho_{\beta'} - \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \rho_{\beta'} \right] \\
& + i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)}{8} \left[ \rho_\beta \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- - \rho_\beta \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \right] \\
& + i \frac{3(\beta_0 - \beta'_0)}{32} \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \\
& - i \frac{3(\beta_0 - \beta'_0)}{32} \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes \left( \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} \right) \\
& - i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} \left[ n_+ \otimes n_- \sigma_+ \otimes \sigma_- - n_+ \otimes n_- \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \right] \\
& + i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} \left[ n_- \otimes n_+ \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- - n_- \otimes n_+ \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \right] \\
& - i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} \left[ \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes n_+ \otimes n_- - \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes n_+ \otimes n_- \right] \\
& - i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} \left[ \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes n_- \otimes n_+ - \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes n_- \otimes n_+ \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} [n_+ \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes n_- - n_+ \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes n_-] \\
& +i \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{32} [n_- \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes n_+ - n_- \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes n_+] \\
& + \left( \frac{1}{64} (\beta_0 + \beta'_0)^2 - \frac{1}{16} \beta_0^2 \right) (\beta_0 - \beta'_0) [\sigma_z \otimes \sigma_+ \otimes I \otimes \sigma_- + \sigma_z \otimes \sigma_- \otimes I \otimes \sigma_+] \\
& - \left( \frac{1}{64} (\beta_0 + \beta'_0)^2 - \frac{1}{16} \beta_0'^2 \right) (\beta_0 - \beta'_0) [\sigma_+ \otimes I \otimes \sigma_- \otimes \sigma_z + \sigma_- \otimes I \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_z] \\
& - \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{16} [n_- \otimes \sigma_+ \otimes I \otimes \sigma_- + n_- \otimes \sigma_- \otimes I \otimes \sigma_+] \\
& - \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{16} [\sigma_+ \otimes I \otimes \sigma_- \otimes n_- + \sigma_- \otimes I \otimes \sigma_+ \otimes n_-] \\
& + \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^3}{64} [I \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes I + I \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes I] \\
& + \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{16} [\sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- + \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+] \\
& - \frac{(\beta_0 - \beta'_0)^2}{16} [\sigma_+ \otimes \sigma_- \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ + \sigma_- \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_-].
\end{aligned}$$

Ainsi, les états locaux sont donnés par

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)} &= \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2} \right), \\
\rho^{(2)} &= \rho^{(3)} = \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} = \frac{\rho^{(1)} + \rho^{(4)}}{2}, \\
\rho^{(4)} &= \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_{\beta'} - \rho_\beta}{2} \right).
\end{aligned}$$

Pour  $N \geq 5$ , il est très compliqué de calculer l'état stationnaire  $\rho^{\beta, \beta'}$ . D'autre part, d'après le calcul qu'on a fait pour les cas cités ci-dessus, nous observons qu'à chaque fois que  $N$  augmente, le nombre des éléments non-diagonaux augmente plus vite dans la forme explicite de la représentation matricielle de  $\rho^{\beta, \beta'}$  dans la base canonique de  $\mathcal{H}_S$ . De plus, les éléments non diagonaux n'interviennent pas dans le calcul des traces partielles sur n'importe quel site. Cependant, les formes des termes diagonaux donnés dans les cas  $N = 2, 3, 4$ , nous laissent croire que pour tout  $N \geq 5$ , les états locaux sont donnés par

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)} &= \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_\beta - \rho_{\beta'}}{2} \right), \\
\rho^{(2)} &= \dots = \rho^{(N-1)} = \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} = \frac{\rho^{(1)} + \rho^{(N)}}{2}, \\
\rho^{(N)} &= \frac{\rho_\beta + \rho_{\beta'}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_{\beta'} - \rho_\beta}{2} \right).
\end{aligned}$$



#### 4.2.4 Production d'entropie

Dans cette sous-section, nous traitons le cas d'une chaîne de spins couplée à deux bains thermiques à une même température inverse  $\beta$ . Rappelons que, d'après le théorème 4.3, le semigroupe dynamique quantique associé possède un unique état stationnaire fidèle  $\rho^\beta$  dans le cas  $\beta = \beta'$ .

Soit  $\rho$  une matrice densité sur  $\mathcal{H}_S$ . Posons  $\rho(t) = e^{t\mathcal{L}^*}(\rho)$ . Alors, l'entropie relative de  $\rho$  par rapport à  $\rho^\beta$  est définie par

$$S(\rho(t)|\rho^\beta) := \text{Tr}(\rho(t)(\log \rho^\beta - \log \rho(t))).$$

Par conséquent, la production d'entropie est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) &:= -\frac{d}{dt} S(\rho(t)|\rho^\beta)|_{t=0} \\ &:= \text{Tr}(\mathcal{L}^*(\rho)(\log \rho^\beta - \log \rho)), \end{aligned}$$

où  $\rho = \sum_j \rho_j |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|$  est la décomposition spectrale de la matrice densité  $\rho$  et  $\text{Tr}(\mathcal{L}^*(\rho) \log \rho)$  est défini par

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{L}^*(\rho) \log \rho) &= \sum_j \langle\Psi_j, \mathcal{L}^*(\rho)\Psi_j\rangle \log \rho_j, \\ \langle\Psi_j, \mathcal{L}^*(\rho)\Psi_j\rangle \log \rho_j &= \begin{cases} -\infty & \text{si } \langle\Psi_j, \mathcal{L}^*(\rho)\Psi_j\rangle \neq 0 \text{ et } \rho_j = 0 \\ 0 & \text{si } \langle\Psi_j, \mathcal{L}^*(\rho)\Psi_j\rangle = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [SL].

**Théorème 4.6** *La production d'entropie associée à une chaîne de  $N$  spins couplée à deux bains thermiques à une même température inverse  $\beta$  est donnée par*

$$\sigma(\rho) = 4\beta_0 \left[ \sum_{j,k} [|\langle\Psi_k, \sigma_+^{(1)}\Psi_j\rangle|^2 + |\langle\Psi_k, \sigma_+^{(N)}\Psi_j\rangle|^2] (e^{2\beta}\rho_k - \rho_j)(\log \rho_k - \log \rho_j + 2\beta) \right],$$

où  $\rho = \sum_j \rho_j |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|$  est la décomposition spectrale de la matrice densité  $\rho$ .

**Preuve:** Notons qu'on a

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_h^* + \mathcal{L}_d^*,$$

où  $\mathcal{L}_h^*$  désigne la partie hamiltonienne de  $\mathcal{L}^*$  et  $\mathcal{L}_d^* = \mathcal{L}_d^{*(1)} + \mathcal{L}_d^{*(N)}$  désigne sa partie dissipative, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d^{*(1)}(\rho) &= 2\beta_0 [2\sigma_+^{(1)}\rho\sigma_-^{(1)} - \{n_-^{(1)}, \rho\}] \\ &\quad + 2\beta_1 [2\sigma_-^{(1)}\rho\sigma_+^{(1)} - \{n_+^{(1)}, \rho\}], \\ \mathcal{L}_d^{*(N)}(\rho) &= 2\beta'_0 [2\sigma_+^{(N)}\rho\sigma_-^{(N)} - \{n_-^{(N)}, \rho\}] \\ &\quad + 2\beta'_1 [2\sigma_-^{(N)}\rho\sigma_+^{(N)} - \{n_+^{(N)}, \rho\}]. \end{aligned}$$

Posons

$$H^{(S)} = \sum_{k=1}^N \sigma_z^{(k)}.$$

Il est facile de vérifier que si  $A_1, \dots, A_n$  sont des opérateurs sur  $\mathbb{C}^2$ , alors on a

$$\mathrm{Tr}(A_1 \otimes \dots \otimes A_n) = \prod_{i=1}^n \mathrm{Tr}(A_i).$$

Par conséquent, l'état d'équilibre thermodynamique  $\rho^\beta$  vérifie

$$\rho^\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta H^{(S)}},$$

où  $Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H^{(S)}})$ . Ainsi, on obtient

$$\log \rho^\beta = -\beta H^{(S)} - \log Z.$$

D'autre part, par un simple calcul, on montre que

$$\mathrm{Tr}([H_S, \rho] \log \rho) = \mathrm{Tr}(H_S[\rho, \log \rho]) = 0.$$

De plus, on a

$$\mathrm{Tr}([H_S, \rho] \log \rho^\beta) = -\beta \mathrm{Tr}([H^{(S)}, H_S]\rho) = 0.$$

Par conséquent, on obtient

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_h^*(\rho(\log \rho^\beta - \log \rho))) = 0.$$

Cela implique

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) &= \sigma_1(\rho) + \sigma_N(\rho) \\ &= -\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_d^*(\rho) \log \rho) - \beta \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_d^*(\rho) H^{(S)}), \end{aligned} \tag{4.5}$$

où

$$\sigma_i(\rho) = -\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_d^{*(i)}(\rho) \log \rho) - \beta \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_d^{*(i)}(\rho) H^{(S)})$$

avec  $i = 1, N$ .

Maintenant, calculons les deux termes du second membre de la relation (4.5). Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{L}_d^{*(1)}(\rho) \log \rho) &= 4\beta_0 \left[ \sum_{j,k} \langle \Psi_j, \sigma_-^{(1)} \Psi_k \rangle \langle \Psi_k, \sigma_+^{(1)} \Psi_j \rangle \rho_j \log \rho_k \right. \\ &\quad \left. - \sum_j \langle \Psi_j, n_-^{(1)} \Psi_j \rangle \rho_j \log \rho_j \right] \\ &\quad + 4\beta_1 \left[ \sum_{j,k} \langle \Psi_j, \sigma_+^{(1)} \Psi_k \rangle \langle \Psi_k, \sigma_-^{(1)} \Psi_j \rangle \rho_j \log \rho_k \right. \\ &\quad \left. - \sum_j \langle \Psi_j, n_+^{(1)} \Psi_j \rangle \rho_j \log \rho_j \right], \\ \text{Tr}(\mathcal{L}_d^{*(1)}(\rho) H^{(S)}) &= 8\beta_0 \sum_j \langle \Psi_j, n_-^{(1)} \Psi_j \rangle \rho_j - 8\beta_1 \sum_j \langle \Psi_j, n_+^{(1)} \Psi_j \rangle \rho_j. \end{aligned}$$

Notons qu'on a

$$\begin{aligned} \langle \Psi_j, n_+^{(1)} \Psi_j \rangle &= \|\sigma_+^{(1)} \Psi_j\|^2 = \sum_k |\langle \Psi_k, \sigma_+^{(1)} \Psi_j \rangle|^2, \\ \langle \Psi_j, n_-^{(1)} \Psi_j \rangle &= \|\sigma_-^{(1)} \Psi_j\|^2 = \sum_k |\langle \Psi_j, \sigma_+^{(1)} \Psi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned} \sigma_1(\rho) &= 4\beta_0 \left[ \sum_{j,k} |\langle \Psi_k, \sigma_+^{(1)} \Psi_j \rangle|^2 \rho_j (\log \rho_j - \log \rho_k - 2\beta) \right] \\ &\quad + 4\beta_1 \left[ \sum_{j,k} |\langle \Psi_j, \sigma_+^{(1)} \Psi_k \rangle|^2 \rho_j (\log \rho_j - \log \rho_k + 2\beta) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Par suite, si nous remplaçons  $\beta_1$  par  $e^{2\beta}\beta_0$  dans la relation (4.6), alors on obtient

$$\sigma_1(\rho) = 4\beta_0 \left[ \sum_{j,k} |\langle \Psi_k, \sigma_+^{(1)} \Psi_j \rangle|^2 (e^{2\beta}\rho_k - \rho_j) (\log \rho_k - \log \rho_j + 2\beta) \right].$$

De manière analogue, nous prouvons que

$$\sigma_N(\rho) = 4\beta_0 \left[ \sum_{j,k} |\langle \Psi_k, \sigma_+^{(N)} \Psi_j \rangle|^2 (e^{2\beta}\rho_k - \rho_j) (\log \rho_k - \log \rho_j + 2\beta) \right].$$

Cela finit la preuve.

□

Comme corollaire du théorème ci-dessus, on a le résultat suivant.

**Corollaire 4.7** *On a*

$$\sigma(\rho) \geq 0,$$

*pour toute matrice densité  $\rho$  définie sur  $\mathcal{H}_S$ .*

### 4.2.5 Condition du bilan détaillé quantique

Dans cette sous-section, nous supposons que  $\beta = \beta'$  et nous nous proposons de démontrer que le semigroupe dynamique quantique associé, vérifie la condition du bilan détaillé quantique par rapport à  $\rho^\beta$ .

**Théorème 4.8** *Le semigroupe dynamique quantique associé à la chaîne de spins couplée à deux bains thermiques à une même température inverse  $\beta$ , vérifie la condition du bilan détaillé quantique par rapport à l'état stationnaire  $\rho^\beta$ .*

**Preuve:** On a

$$\mathcal{L}^* = -i[H_S, \cdot] + \mathcal{L}_d^*,$$

où  $\mathcal{L}_d^*$  est la partie dissipative de  $\mathcal{L}^*$ . De plus, on a  $[H_S, \rho^\beta] = 0$ . Notons aussi qu'il est facile de vérifier que  $\mathcal{L}_d^*$  est un opérateur auto-adjoint par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\rho^\beta}$ .  $\square$

## 4.3 Chaîne de spins couplée à plusieurs bains thermiques

Considérons une chaîne de  $N$  spins couplée à  $r$  bains thermiques de températures inverses  $\beta^{(k_1)}, \beta^{(k_2)}, \dots, \beta^{(k_r)}$ , où  $2 \leq r \leq N$  et  $k_j$  désigne le  $k_j$ -ième site de la chaîne. Le couplage se fait de la manière suivante : chaque  $k_j$ -ième spin de la chaîne est lié à un bain thermique de température inverse  $\beta^{(k_j)}$ . Ainsi, l'hamiltonien d'interactions répétées est donné par

$$H = H_S \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \sum_{j=1}^r (\sigma_x^{(k_j)} \otimes \sigma_x^{(k_j)} + \sigma_y^{(k_j)} \otimes \sigma_y^{(k_j)}).$$

De manière analogue que celle présentée dans la sous-section 4.1.2, nous montrons que le lindbladien associé s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) = i[H_S, X] &+ 2\beta_0^{(k_1)} [2\sigma_-^{(k_1)} X \sigma_+^{(k_1)} - \{n_-^{(k_1)}, X\}] \\ &+ 2\beta_1^{(k_1)} [2\sigma_+^{(k_1)} X \sigma_-^{(k_1)} - \{n_+^{(k_1)}, X\}] \\ &+ 2\beta_0^{(k_2)} [2\sigma_-^{(k_2)} X \sigma_+^{(k_2)} - \{n_-^{(k_2)}, X\}] \\ &+ 2\beta_1^{(k_2)} [2\sigma_+^{(k_2)} X \sigma_-^{(k_2)} - \{n_+^{(k_2)}, X\}] \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &+ 2\beta_0^{(k_r)} [2\sigma_-^{(k_r)} X \sigma_+^{(k_r)} - \{n_-^{(k_r)}, X\}] \\ &+ 2\beta_1^{(k_r)} [2\sigma_+^{(k_r)} X \sigma_-^{(k_r)} - \{n_+^{(k_r)}, X\}], \end{aligned}$$

pour tout  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ .

Maintenant, nous prouvons le théorème suivant.

**Théorème 4.9** *Si  $\beta^{(k_1)} = \beta^{(k_2)} = \dots = \beta^{(k_r)} = \beta$ , alors  $\rho^\beta = \rho_\beta \otimes \dots \otimes \rho_\beta$  est l'unique état stationnaire du semigroupe dynamique quantique  $T_t^* = e^{t\mathcal{L}^*}$ .*

**Preuve:** La preuve de ce théorème est analogue à celle du théorème 4.3.  $\square$

Le théorème suivant se démontre de la même manière que le théorème 4.5.

**Théorème 4.10** *Le semigroupe dynamique quantique  $\{T_t^* = e^{t\mathcal{L}^*}, t \in \mathbb{R}_+\}$  associé à la chaîne de spins couplée à  $r$  bains thermiques de températures inverses  $\beta^{(k_1)}, \beta^{(k_2)}, \dots, \beta^{(k_r)}$  possède la propriété du retour à l'équilibre vers un unique état stationnaire, fidèle.*

Maintenant, on se propose d'étudier la production d'entropie associée. Pour cela, nous supposons que  $\beta^{(k_1)} = \beta^{(k_2)} = \dots = \beta^{(k_r)} = \beta$ . Nous avons choisi de traiter uniquement ce cas, car nous connaissons explicitement l'état d'équilibre thermodynamique stationnaire.

Posons

$$\sigma_{k_i}(\rho) = 4\beta_0 \left[ \sum_{j,m} [|\langle \Psi_m, \sigma_+^{(k_i)} \Psi_j \rangle|^2 (e^{2\beta} \rho_m - \rho_j) (\log \rho_m - \log \rho_j + 2\beta)] \right].$$

Alors, il est clair que  $\sigma_{k_i}(\rho)$  est la production d'entropie de la chaîne de spins couplée à son  $k_i$ -ième spin au  $k_i$ -ième bain thermique.

**Théorème 4.11** *Si  $\beta^{(k_1)}, \beta^{(k_2)}, \dots, \beta^{(k_r)}$ , alors la production d'entropie de la chaîne de spins couplée à  $r$  bains thermiques est donnée par*

$$\sigma(\rho) = \sum_{i=1}^r \sigma_{k_i}(\rho). \quad (4.7)$$

**Preuve:** De manière analogue que dans la preuve du théorème 4.6, nous prouvons que

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) &= -\text{Tr}(\mathcal{L}_d^*(\rho) \log \rho) - \beta \text{Tr}(\mathcal{L}_d^*(\rho) H^{(S)}) \\ &= \sum_{i=1}^r [-\text{Tr}(\mathcal{L}_d^{*(k_i)}(\rho) \log \rho) - \beta \text{Tr}(\mathcal{L}_d^{*(k_i)}(\rho) H^{(S)})] \\ &= \sum_{i=1}^r \sigma_{k_i}(\rho), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d^{*(k_i)}(\rho) &= 2\beta_0^{(k_i)} [2\sigma_-^{(k_i)} X \sigma_+^{(k_i)} - \{n_-^{(k_i)}, X\}] \\ &\quad + 2\beta_1^{(k_i)} [2\sigma_+^{(k_i)} X \sigma_-^{(k_i)} - \{n_+^{(k_i)}, X\}]. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\sigma_{k_i}(\rho) = 4\beta_0 \left[ \sum_{j,m} [|\langle \Psi_m, \sigma_+^{(k_i)} \Psi_j \rangle|^2 (e^{2\beta} \rho_m - \rho_j) (\log \rho_m - \log \rho_j + 2\beta)] \right].$$

Cela finit la preuve de notre théorème.  $\square$

Comme corollaire de la relation (4.7), on en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 4.12** *On a*

$$\sigma(\rho) \geq 0,$$

*pour toute matrice densité  $\rho$ . De plus,  $\sigma(\rho) = 0$  si et seulement si  $\sigma_{k_i}(\rho) = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, r$ .*

Notons que si  $\beta^{(k_1)} = \beta^{(k_2)} = \dots = \beta^{(k_r)} = \beta$ , alors il est facile de vérifier que le semigroupe dynamique quantique associé à la chaîne de spins couplée à  $r$  bains thermiques, vérifie la condition du bilan détaillé quantique par rapport à l'état stationnaire  $\rho^\beta$ .



# Chapitre 5

## Contribution n<sup>o</sup> 4 : Interactions quantiques répétées et marches aléatoires sur les unitaires

On se propose dans ce chapitre d'étudier les équations d'évolution discrètes décrivant des modèles d'interactions répétées dans le cas où elles sont dirigées par des bruits classiques discrets.

Dans la section 5.1, nous rappelons quelques notions de bases concernant les marches aléatoires obtuses sur  $\mathbb{R}^N$ . Plus particulièrement, nous décrivons la construction de l'espace canonique  $T\Phi(X)$  associé à une variable aléatoire obtuse  $X$  dans  $\mathbb{R}^N$ .

Dans la section 5.2, nous construisons une famille d'opérateurs unitaires et nous montrons que la solution de l'équation d'évolution discrète, dirigée par des bruits classiques discrets, est une marche aléatoire sur le groupe unitaire associé à cette famille.

Dans la section 5.3, nous traitons l'exemple des marches aléatoires obtuses construites à partir des variables aléatoires de Bernoulli.

Dans la section 5.4, nous étudions les limites continues de ces modèles d'interactions répétées et nous examinons le cas des équations de structure multidimensionnelles.

### 5.1 Dynamique discrète d'une chaîne atomique et marches aléatoires sur $\mathbb{R}^N$ .

Dans cette section, nous donnons dans un premier temps une description de la chaîne atomique à  $N + 1$  niveaux. Ensuite, nous présentons quelques propriétés des variables aléatoires obtuses sur  $\mathbb{R}^N$ .



### 5.1.1 Structure de la chaîne atomique

Considérons un modèle d'interactions répétées décrivant un système quantique  $\mathcal{H}_0$  en interaction avec un système extérieur  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{N+1}$ . Fixons une base orthonormée  $\{e_0, e_1, \dots, e_N\}$  de  $\mathbb{C}^{N+1}$ . Nous notons parfois  $\Omega$  au lieu de  $e_0$ . La chaîne atomique à  $N + 1$  niveaux sera notée

$$T\Phi = \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^{N+1},$$

où le produit tensoriel infini est défini par rapport à la suite stabilisatrice  $(\Omega)_n$ .

Rappelons que si on note  $U$  l'opérateur unitaire décrivant l'évolution d'une copie de la chaîne atomique associée au système extérieur en interaction avec le système quantique durant un intervalle de temps  $[0, h]$ , alors l'équation d'évolution discrète associée est donnée par la relation (1.13),

$$\begin{cases} V_{n+1} = \sum_{i,j=0}^N U_j^i V_n a_j^i(n+1) \\ V_0 = I, \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $(U_j^i)_{i,j}$  est la matrice de  $U$  dans la base  $\{\Omega, e_1, \dots, e_N\}$  dont les coefficients sont des opérateurs sur  $\mathcal{H}_0$  et les opérateurs  $a_j^i(n)$  sont les bruits quantiques discrets associés (cf sous-section 1.4.1).

### 5.1.2 Marches aléatoires sur $\mathbb{R}^N$

Nous allons voir ici comment les bruits quantiques  $a_j^i(n)$  sont associés à des marches aléatoires classiques.

Soit  $X$  une variable aléatoire dans  $\mathbb{R}^N$  qui prend  $N + 1$  valeurs distinctes  $v_0, \dots, v_N$  avec des probabilités respectives  $p_0, \dots, p_N$  telles que  $p_i \neq 0$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Nous supposons que  $X$  est définie sur son espace canonique  $(A, \mathcal{A}, P)$ , où  $A = \{0, 1, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{A}$  est la  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles de  $A$  et  $P$  est la mesure de probabilité satisfaisant  $P(\{i\}) = p_i$ . Ainsi, la variable aléatoire  $X$  donnée par  $X(i) = v_i$ , vérifie  $P(X = v_i) = P(\{i\}) = p_i$ , pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ .

#### Définition 5.1

i) Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  est dite centrée réduite si

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \text{Cov}(X) = I,$$

ii) Une variable aléatoire  $X$  dans  $\mathbb{R}^N$  prenant  $N + 1$  valeurs distinctes  $v_0, \dots, v_N$ , est dite obtuse si

$$\langle v_i, v_j \rangle = -1 \quad \forall i \neq j. \quad (5.2)$$

Désignons par  $X^1, \dots, X^N$  les composantes de la variable aléatoire  $X$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^N$  et définissons la variable aléatoire  $X^0 = \mathbb{1}$  sur  $(A, \mathcal{A}, P)$  telle que  $X^0(i) = 1$  pour tout  $i \in A$ . Considérons les variables aléatoires  $\tilde{X}^i$  définies par  $\tilde{X}^i(j) = \sqrt{p_j}X^i(j)$  pour tous  $i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$ .

**Proposition 5.2** [AtP2] *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) La variable aléatoire  $X$  est centrée réduite,
- 2)  $X$  est une variable aléatoire obtuse et les probabilités  $p_i$  sont données par

$$p_i = \frac{1}{1 + \|v_i\|^2}, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\},$$

- 3) La matrice  $(\tilde{X}^0, \tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^N)$  est unitaire.

Comme corollaire de la proposition ci-dessus, les variables aléatoires  $X^0, X^1, \dots, X^N$  sont linéairement indépendantes et elles forment une base de  $L^2(A, \mathcal{A}, P)$ .

Maintenant, considérons un 3-tenseur  $T$  dans  $\mathbb{R}^N$ , i.e : une application linéaire de  $\mathbb{R}^N$  dans  $M_N(\mathbb{R})$ . Notons  $T_k^{ij}$  les coefficients de sa représentation matricielle dans la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . On dit que  $T$  est *sesqui-symétrique* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $(i, j, k) \mapsto T_k^{ij}$  est symétrique,
- ii)  $(i, j, l, m) \mapsto \sum_k T_k^{ij} T_k^{lm} + \delta_{ij} \delta_{lm}$  est symétrique.

Pour toute variable aléatoire centrée réduite  $X$  dans  $\mathbb{R}^N$  prenant  $N + 1$  valeurs, est naturellement associé un 3-tenseur sesqui-symétrique  $T$ . Ce résultat est donné par le théorème suivant.

**Théorème 5.3** *Si  $X$  est une variable aléatoire centrée réduite prenant exactement  $N + 1$  valeurs, alors il existe un 3-tenseur sesqui-symétrique  $T$  tel que*

$$X \otimes X = I + T(X).$$

**Preuve:** Rappelons que  $\{X^0, X^1, \dots, X^N\}$  est une base de  $L^2(A, \mathcal{A}, P)$ . Puisque la variable aléatoire  $X^i X^j$  est un élément de  $L^2(A, \mathcal{A}, P)$ . Alors,  $X^i X^j$  s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la base ci-dessus, soit

$$X^i X^j = \sum_{k=0}^N T_k^{ij} X^k. \quad (5.3)$$

Par un simple calcul, on voit que

$$T_k^{ij} = \mathbb{E}(X^i X^j X^k), \text{ pour tous } i, j, k = 0, 1, \dots, N.$$

En particulier

$$T_0^{ij} = \mathbb{E}(X^i X^j) = \delta_{ij}.$$

Par conséquent, le 3-tenseur sesqui-symétrique  $T$  associé à  $X$  est donné par  $T = (T_k^{ij})_{1 \leq i, j, k \leq N}$ , où les coefficients  $T_k^{ij}$  sont définis par la relation (5.3).  $\square$

Fixons maintenant une variable aléatoire centrée réduite  $X$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Sur l'espace  $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$ , on définit une suite  $(X(p))_{p \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires indépendantes de même loi que  $X$ . Une base orthonormée de l'espace de Hilbert  $T\Phi(X) = L^2(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$  est alors donnée par la famille des vecteurs

$$X_A = \prod_{(p,i) \in A} X^i(p),$$

où  $A$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N} \times \{0, 1, \dots, N\}$  et  $X_\emptyset = X^0$ . Notons que l'espace  $T\Phi(X)$  décrit ci-dessus est isomorphe à la chaîne atomique à  $N + 1$  niveaux  $T\Phi$  et l'isomorphisme entre les deux espaces consiste à identifier leurs bases canoniques.

Maintenant, si on note  $\mathcal{M}_{X^i(p)}$ , l'opérateur de multiplication par  $X^i(p)$  sur  $T\Phi(X)$ , alors dans le théorème suivant, il est prouvé que la variable aléatoire  $X^i(p)$  peut être représentée comme une combinaison linéaire des bruits quantiques discrets  $a_j^i(p)$ .

**Théorème 5.4** *Soient  $X$  une variable aléatoire obtuse dans  $\mathbb{R}^N$  et  $(X(p))_{p \in \mathbb{N}}$  la marche aléatoire associée, définie sur son espace canonique  $T\Phi(X)$ . Désignons par  $T$  le 3-tenseur sesqui-symétrique associé à  $X$ . Si on note  $V$  l'isomorphisme unitaire naturelle de  $T\Phi(X)$  dans  $T\Phi$ , alors pour tous  $p \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,*

$$V\mathcal{M}_{X^i(p)}V^* = a_i^0(p) + a_0^i(p) + \sum_{j,l=1}^N T_i^{jl} a_l^j(p).$$

**Preuve:** Posons  $J = \{1, \dots, N\}$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} X^i(p)X_A &= X^i(p)X_A \mathbb{1}_{\{(p,k) \notin A, \forall k \in J\}} + \sum_{j=1}^N X^i(p)X_A \mathbb{1}_{(p,j) \in A} \\ &= X_{A \cup \{(p,i)\}} \mathbb{1}_{\{(p,k) \notin A, \forall k \in J\}} + \sum_{j=1}^N X_{A \setminus \{(p,j)\}} X_i(p) X_j(p) \mathbb{1}_{(p,j) \in A} \\ &= X_{A \cup \{(p,i)\}} \mathbb{1}_{\{(p,k) \notin A, \forall k \in J\}} + \sum_{j=1}^N X_{A \setminus \{(p,j)\}} \left( \sum_{m=0}^N T_m^{ij} X_m(p) \right) \mathbb{1}_{(p,j) \in A} \\ &= X_{A \cup \{(p,i)\}} \mathbb{1}_{\{(p,k) \notin A, \forall k \in J\}} + \sum_{j=1}^N X_{A \setminus \{(p,j)\}} \left( \delta_{ij} + \sum_{m=1}^N T_m^{ij} X_m(p) \right) \mathbb{1}_{(p,j) \in A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X_{A \cup \{(p,i)\}} \mathbb{1}_{\{(p,k) \notin A, \forall k \in J\}} + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} X_{A \setminus \{(p,j)\}} \mathbb{1}_{(p,j) \in A} \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N T_m^{ij} X_{A \setminus \{(p,j)\}} X_m(p) \mathbb{1}_{(p,j) \in A} \\
&= X_{A \cup \{(p,i)\}} \mathbb{1}_{\{(p,k) \notin A, \forall k \in J\}} + X_{A \setminus \{(p,i)\}} \mathbb{1}_{(p,i) \in A} + \sum_{j,m=1}^N T_m^{ij} X_{A \setminus \{(p,j)\} \cup \{(p,m)\}} \mathbb{1}_{(p,j) \in A} \\
&= a_i^0(p) X_A + a_0^i(p) X_A + \sum_{j,m=1}^N T_m^{ij} a_m^j(p) X_A.
\end{aligned}$$

□

## 5.2 Marches aléatoires sur les unitaires

Dans la suite, nous allons identifier la variable aléatoire  $X^i(p)$  à l'opérateur  $a_i^0(p) + a_0^i(p) + \sum_{j,l=1}^N T_i^{jl} a_l^j(p)$ . De plus, nous notons  $X_p^i$  au lieu de  $X^i(p)$ .

Considérons maintenant le modèle d'interactions répétées introduit dans la section précédente. Parmi les équations d'évolution discrètes décrivant ce modèle, nous nous intéressons dans cette section à celles qui sont dirigées par des variables aléatoires classiques.

Sous certaines conditions, nous prouvons dans la proposition suivante que les équations d'évolutions discrètes (5.1) sont dirigées par des variables aléatoires classiques.

**Proposition 5.5** *Si  $U_l^j = \sum_{i=0}^N T_l^{ij} B_i$ , pour tous  $j, l \in \{0, 1, \dots, N\}$  où  $B_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  sont des opérateurs définis sur  $\mathcal{H}_0$ , alors l'équation d'évolution (5.1) s'écrit*

$$\begin{cases} V_{n+1} = \sum_{i=0}^N B_i X_{n+1}^i V_n \\ V_0 = I. \end{cases} \quad (5.4)$$

**Preuve:** On a

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= \sum_{i,j=0}^N U_j^i V_n a_j^i(n+1) \\
&= U_0^0 a_0^0(n+1) V_n + \sum_{i=1}^N U_0^i a_0^i(n+1) V_n + \sum_{i=1}^N U_i^0 a_i^0(n+1) V_n + \sum_{j,l=1}^N U_l^j a_l^j(n+1) V_n.
\end{aligned}$$

Comme on a

$$B_i = U_i^0 = U_0^i, \forall i \in \{1, \dots, N\}, B_0 = U_0^0,$$

$$U_l^j = \sum_{i=0}^N T_l^{ij} B_i, \text{ pour tous } j, l \in \{1, \dots, N\},$$

on obtient

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \sum_{j=0}^N B_j a_j^j(n+1) V_n + \sum_{i=1}^N B_i (a_0^i(n+1) + a_i^0(n+1)) V_n + \sum_{i=1}^N \sum_{j,l=1}^N T_l^{ij} B_i a_l^j(n+1) V_n \\ &= B_0 V_n + \sum_{i=1}^N B_i [a_0^i(n+1) + a_i^0(n+1) + \sum_{j,l=1}^N T_l^{ij} a_l^j(n+1)] \\ &= B_0 V_n + \sum_{i=1}^N B_i X_{n+1}^i V_n \\ &= \sum_{i=0}^N B_i X_{n+1}^i V_n, \end{aligned}$$

ce qui est la représentation annoncée.  $\square$

Introduisons maintenant la notation suivante : pour un élément  $v = (a_1, \dots, a_N)$  de  $\mathbb{R}^N$ , on note  $\hat{v}$  l'élément de  $\mathbb{R}^{N+1}$  donné par  $\hat{v} = (1, a_1, \dots, a_N)$ . Notons qu'il est facile de vérifier que  $v$  obtuse si et seulement si

$$\langle \hat{v}_k, \hat{v}_l \rangle = 0, \quad (5.5)$$

pour tous  $k \neq l$ .

Posons

$$W_l = \sum_{j=0}^N v_l^j B_j,$$

avec la convention  $v_i^0 = 1$ , pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$  et les opérateurs  $B_i$  sont donnés par la proposition précédente. Alors, il est clair que les opérateurs  $W_l$  sont définis sur  $\mathcal{H}_0$ .

Notre objectif dans la suite est de prouver que ces opérateurs sont unitaires si et seulement si l'évolution  $U$  décrivant le système quantique en interaction avec une copie de la chaîne atomique associée au système extérieur, durant un intervalle de temps  $[0, h]$ , est unitaire. Nous démontrons d'abord ce résultat dans une direction.

**Proposition 5.6** *Si  $U$  est un opérateur unitaire tel que  $U_l^j = \sum_{i=0}^N T_l^{ij} B_i$  pour tous  $j, l \in \{0, 1, \dots, N\}$ , où  $B_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  sont des opérateurs sur  $\mathcal{H}_0$ , alors pour tout  $l \in \{0, 1, \dots, N\}$ , l'opérateur  $W_l$  est unitaire.*

**Preuve:** On a

$$W_l W_l^* = \sum_{i,j=0}^N v_l^i v_l^j B_i B_j^*.$$

Notons que d'après la relation (5.3), on a

$$v_l^i v_l^j = \sum_{m=0}^N T_m^{ij} v_l^m.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} W_l W_l^* &= \sum_{i,j,m=0}^N T_m^{ij} v_l^m B_i B_j^* \\ &= \sum_{j,m=0}^N v_l^m \left( \sum_{i=0}^N T_m^{ij} B_i \right) B_j^*. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$U_m^j = \sum_{i=0}^N T_m^{ij} B_i, \quad B_j = U_j^0,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} W_l W_l^* &= \sum_{j,m=0}^N v_l^m U_m^j U_j^{0*} \\ &= \sum_{m=0}^N v_l^m \left( \sum_{j=0}^N U_m^j U_j^{0*} \right). \end{aligned}$$

Comme  $U$  est un opérateur unitaire, on obtient

$$\sum_{j=0}^N U_m^j U_j^{0*} = \delta_{m0} I.$$

Par conséquent, on a

$$W_l W_l^* = v_l^0 I = I.$$

Cela achève la preuve. □

Maintenant, afin de montrer la réciproque, nous avons besoin d'exprimer les coefficients de la matrice  $(U_j^i)_{i,j}$  en termes des opérateurs  $W_l$ . Ce résultat est donné par les deux lemmes suivants.

**Lemme 5.7** *Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ , on a*

$$B_i = \sum_{l=0}^N p_l v_l^i W_l.$$

**Preuve:** On a

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N p_l v_l^i W_l &= \sum_{l=0}^N p_l v_l^i \left( \sum_{j=0}^N v_l^j B_j \right) \\ &= \sum_{j=0}^N B_j \left( \sum_{l=0}^N p_l v_l^i v_l^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^N B_j \mathbb{E}(X^i X^j) \\ &= \sum_{j=0}^N B_j \delta_{ij} = B_i, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme énoncé ci-dessus. □

**Lemme 5.8** *Pour tous  $l, k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , on a*

$$U_l^k = \sum_{i=0}^N p_i v_i^k v_i^l W_i.$$

**Preuve:** Notons qu'on a

$$U_l^k = \sum_{j=0}^N T_j^{kl} B_j.$$

De plus, d'après la relation (5.3), on a

$$X^l X^k(v_i) = \sum_{j=0}^N T_j^{kl} X^j(v_i),$$

ce qui implique que

$$v_i^l v_i^k = \sum_{j=0}^N T_j^{kl} v_i^j. \tag{5.6}$$

Ainsi, d'après le lemme 5.7 et la relation (5.6), on obtient

$$\begin{aligned}
U_l^k &= \sum_{i,j=0}^N p_i T_j^{kl} v_i^j W_i \\
&= \sum_{i=0}^N p_i W_i \left( \sum_{j=0}^N T_j^{kl} v_i^j \right) \\
&= \sum_{i=0}^N p_i v_i^k v_i^l W_i.
\end{aligned}$$

□

Maintenant, nous pouvons prouver la réciproque de la proposition 5.6.

**Proposition 5.9** *Si  $W_i$  est un opérateur unitaire pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ , alors l'opérateur  $U$  est unitaire.*

**Preuve:** On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^N (U_k^l)(U_m^k)^* &= \sum_{i,j,k=0}^N p_i p_j v_i^k v_j^k v_i^l v_j^m W_i W_j^* \\
&= \sum_{i,k=0}^N p_i^2 (v_i^k)^2 v_i^l v_i^m I + \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i \neq j}}^N p_i p_j v_i^k v_j^k v_i^l v_j^m W_i W_j^* \\
&= \sum_{i=0}^N p_i (p_i (\|v_i\|^2 + 1)) v_i^l v_i^m I + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^N p_i p_j \left( \sum_{k=0}^N v_i^k v_j^k \right) v_i^l v_j^m W_i W_j^* \\
&= \sum_{i=0}^N p_i (p_i (\|v_i\|^2 + 1)) v_i^l v_i^m I + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^N p_i p_j \langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle v_i^l v_j^m W_i W_j^*.
\end{aligned}$$

Notons que de la proposition 5.2, on a

$$p_i (\|v_i\|^2 + 1) = 1.$$

De plus, d'après la relation (5.5), on a  $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle = 0$ , pour tous  $i \neq j$ . Par conséquent, on obtient

$$\sum_{k=0}^N (U_k^l)(U_m^k)^* = \mathbb{E}(X^l X^m) I = \delta_{ml} I.$$



□

Comme conséquence des propositions 5.6 et 5.9, on a obtenu le résultat suivant.

**Théorème 5.10** *L'opérateur  $U$  est unitaire si et seulement si pour tout  $l \in \{0, 1, \dots, N\}$ ,  $W_l$  est un opérateur unitaire.*

Maintenant, nous prouvons que la solution discrète de l'équation (5.4) est une marche aléatoire sur le groupe engendré par  $\{W_l, l = 0, 1, \dots, N\}$ .

**Proposition 5.11** *Si  $U$  est un opérateur unitaire tel que  $U_m^j = \sum_{i=0}^N T_m^{ij} B_i$ , pour tous  $j, m = 0, 1, \dots, N$ , alors on a*

$$V_{n+1} = W_l V_n$$

avec probabilité  $p_l$  pour tout  $l \in \{0, 1, \dots, N\}$ , où  $V_0 = I$ .

**Preuve:** Si  $X_{n+1}^i = v_l^i$ , alors  $P(X_{n+1}^i = v_l^i) = p_l$ . Ainsi, avec probabilité  $p_l$ , on a

$$V_{n+1} = \sum_{i=0}^N B_i v_l^i V_n = W_l V_n.$$

Cela prouve notre proposition. □

### 5.3 Exemple : $N = 1$

Nous allons spécialiser les résultats ci-dessus au cas particulier  $N = 1$ . Posons  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et désignons par  $\mathcal{F}$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les cylindres finis. Les applications coordonnées seront notées  $\nu_n, n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ , on définit la mesure de probabilité  $\mu_p$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  de telle sorte que  $(\nu_n)_n$  soit une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées de loi  $p\delta_1 + q\delta_0$ . Notons maintenant  $\mathbb{E}_p(\cdot)$  l'espérance par rapport à  $\mu_p$ . Alors, on a  $\mathbb{E}_p(\nu_n) = \mathbb{E}_p(\nu_n^2) = p$ .

Posons

$$X_n = \frac{\nu_n - p}{\sqrt{pq}}.$$

Alors, il est facile de vérifier que  $X_n$  est une variable aléatoire obtuse dans  $\mathbb{R}$  qui prend les valeurs  $v_0 = \sqrt{q/p}$  et  $v_1 = -\sqrt{p/q}$  avec des probabilités respectives  $p$  et  $q$ . De plus, il est clair que  $(X_n)_n$  est une suite de variables aléatoires indépendantes satisfaisant  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  et  $\text{Var}(X_n) = 1$ .

Dans ce cas particulier, l'espace canonique associé à la suite  $(X_n)_n$  est l'espace de Hilbert

$$T\Phi_p = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu_p).$$

Une base orthonormée de  $T\Phi_p$  est donnée par les éléments

$$X_A = X_{i_1} \dots X_{i_n}, \quad X_\emptyset = \mathbb{1},$$

où  $A = \{i_1, \dots, i_n\}$  est un ensemble fini de  $\mathbb{N}$ .

La chaîne atomique à deux niveaux est donnée par

$$T\Phi = \otimes_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^2,$$

appelé *bébé Fock*, où le produit tensoriel infini est défini par rapport à la suite stabilisatrice  $(\Omega)_n$  telle que

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une base de  $\mathbb{C}^2$ . Une base orthonormée du bébé Fock  $T\Phi$  est donnée par la famille  $\{X_A, A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$ , où  $X_A$  est décrit dans la sous-section 1.4.1 (partie b)).

Notons qu'il y a un isomorphisme naturel entre les deux espaces  $T\Phi_p$  et  $T\Phi$  qui consiste à identifier leurs bases canoniques. L'espace  $T\Phi_p$  est appelé *l'interprétation p-probabiliste* de  $T\Phi$ . Dans ce cas particulier, le tenseur  $T$  est un scalaire et il est donné par la proposition suivante (cf [At2]).

**Proposition 5.12** *On a*

$$X_n^2 = 1 + c_p X_n,$$

où  $c_p = \frac{q-p}{\sqrt{pq}}$ .

**Preuve:** On a

$$\begin{aligned} X_n^2 &= \frac{1}{pq} (\nu_n^2 - 2p\nu_n + 1) \\ &= \frac{1}{pq} (p^2 + pq - pq + (1 - 2p)\nu_n) \\ &= 1 + \frac{1}{pq} (p(p - q) + (q - p)\nu_n) \\ &= 1 + c_p \frac{\nu_n - p}{\sqrt{pq}}. \end{aligned}$$

□

Ainsi, d'après la proposition ci-dessus, on a  $T = c_p$ .

Notons maintenant  $a_1^0(n)$ ,  $a_0^1(n)$  et  $a_1^1(n)$ , les opérateurs de création, d'annihilation et de conservation sur  $T\Phi$ . Si on désigne par  $M_{X_n}^p$  l'opérateur de  $p$ -multiplication par  $X_n$ , alors la variable aléatoire obtuse  $X_n$  peut être représentée comme une combinaison linéaire des bruits discrets  $a_1^0(n)$ ,  $a_0^1$  et  $a_1^1(n)$ . Ce résultat est donné dans la proposition suivante.

**Proposition 5.13** *L'opérateur de  $p$ -multiplication par  $X_n$  est donné par*

$$M_{X_n}^p = a_1^0(n) + a_0^1(n) + c_p a_1^1(n).$$

**Preuve:** On a

$$\begin{aligned} X_n X_A &= X_n X_A \mathbf{1}_{n \notin A} + X_n X_A \mathbf{1}_{n \in A} \\ &= X_{A \cup \{n\}} \mathbf{1}_{n \notin A} + X_{A \setminus \{n\}} X_n^2 \mathbf{1}_{n \in A} \\ &= X_{A \cup \{n\}} \mathbf{1}_{n \notin A} + X_{A \setminus \{n\}} (1 + c_p X_n) \mathbf{1}_{n \in A} \\ &= X_{A \cup \{n\}} \mathbf{1}_{n \notin A} + X_{A \setminus \{n\}} \mathbf{1}_{n \in A} + c_p X_A \mathbf{1}_{n \in A} \\ &= a_1^0(n) X_A + a_0^1(n) X_A + c_p a_1^1(n) X_A. \end{aligned}$$

□

Notons que dans la base  $\{\Omega, e_1\}$ , la matrice de l'évolution unitaire  $U$  dont les coefficients sont des opérateurs sur  $\mathbb{C}^2$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} B_0 & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix},$$

où  $B_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$  sont des opérateurs sur  $\mathcal{H}_0$ . Ainsi, l'équation d'évolution discrète définie par la relation (5.4) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} V_{n+1} = B_0 V_n I + B_1 V_n X_{n+1} \\ V_0 = I \end{cases}$$

si et seulement si  $B_3 = B_0 + c_p B_1$  et  $B_1 = B_2$ . Comme  $U$  doit être un opérateur unitaire, on obtient les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} B_0^* B_0 + B_1^* B_1 = I \\ B_0 B_0^* + B_1 B_1^* = I \\ B_0 B_1^* + B_1 B_0^* + c_p B_1 B_1^* = 0 \\ B_0^* B_1 + B_1^* B_0 + c_p B_1^* B_1 = 0. \end{cases}$$

Notons qu'il est clair que

$$\begin{aligned} P(V_{n+1} = (\mathcal{B}_0 + \sqrt{q/p} B_1) V_n) &= p, \\ P(V_{n+1} = (B_0 - \sqrt{p/q} B_1) V_n) &= q. \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose

$$\begin{aligned} W_0 &= B_0 + \sqrt{q/p} B_1, \\ W_1 &= B_0 - \sqrt{p/q} B_1, \end{aligned}$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} B_0 &= pW_1 + qW_2, \\ B_1 &= B_2 = \sqrt{pq}(W_1 - W_2), \\ B_3 &= qW_1 + pW_2. \end{aligned}$$

Par un simple calcul, on vérifie que  $B_0$  et  $B_1$  vérifient le système donné ci-dessus.

La théorème suivant est alors un cas particulier du théorème 5.10.

**Théorème 5.14** *L'opérateur  $U$  est unitaire si et seulement si  $W_0$  et  $W_1$  sont des opérateurs unitaires.*

Notons aussi que le résultat suivant peut être vu comme une conséquence immédiate de la proposition 5.11.

**Proposition 5.15** *On a*

$$V_{n+1} = W_0 V_n$$

avec probabilité  $p$  et

$$V_{n+1} = W_1 V_n$$

avec probabilité  $q$ , où  $V_0 = I$ .

## 5.4 Équations de Langevin quantiques

Dans cette section, nous examinons le cas des équations de structure multidimensionnelles. Ensuite, nous montrons la convergence, quand  $h$  tend vers 0, de la solution de l'équation d'évolution discrète (5.4) vers la solution d'une équation différentielle stochastique classique dont on donne la forme explicite.

### 5.4.1 Équations de structure multidimensionnelles

Soit  $\Phi = \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N))$ . Alors,  $\Phi$  admet une interprétation probabiliste en termes de martingales normales multidimensionnelles. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [AtE] et [AtP2].

**Définition 5.16** Une martingale  $X = (X^1, \dots, X^N)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  est dite normale si  $X_0 = 0$  et si pour tous  $i, j$ , le processus  $X_t^i X_t^j - \delta_{ij}t$ ,  $t \geq 0$  est une martingale.

Une caractérisation des martingales normales est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 5.17** Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Une martingale  $X = (X^1, \dots, X^N)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  est normale,
- ii) Le processus  $[X^i, X^j]_t - \delta_{ij}t$  est une martingale,
- iii)  $\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij}t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Étant donné une martingale normale  $X = (X^1, \dots, X^N)$  dans  $\mathbb{R}^N$ , on dit que  $X$  satisfait une *équation de structure* si chacun des martingales  $[X^i, X^j]_t - \delta_{ij}t$  est une intégrale stochastique par rapport à  $X$ , i.e :

$$[X^i, X^j]_t = \delta_{ij}t + \sum_{k=1}^N \int_0^t T_k^{ij}(s) dX_s^k,$$

où  $T_k^{ij}$  est un processus prévisible.

Une famille  $\{A_k^{ij}, i, j, k \in \{1, \dots, N\}\}$  vérifiant :

- i)  $(i, j, k) \mapsto A_k^{ij}$  est symétrique sur  $\{1, \dots, N\}^3$ ,
- ii)  $(i, j, i', j') \mapsto \sum_{k=1}^N A_k^{ij} A_k^{i'j'}$  est symétrique sur  $\{1, \dots, N\}^4$ ,

est dite *doublement symétrique*.

Maintenant, nous énonçons le résultat suivant.

**Théorème 5.18** Soit  $X$  une martingale normale dans  $\mathbb{R}^N$  qui satisfait l'équation de structure

$$[X^i, X^j]_t = \delta_{ij}t + \sum_{k=1}^N \int_0^t T_k^{ij}(s) dX_s^k.$$

Alors, pour presque tout  $(t, \omega)$ , la famille  $\{T_k^{ij}(s, \omega), i, j, k = 1, \dots, N\}$  est doublement symétrique.

Notons qu'une martingale normale  $X$  dans  $\mathbb{R}^N$  qui satisfait une équation de structure à coefficients constants, i.e : les coefficients  $T_k^{ij}$  sont tous constants, peut être représentée en termes de bruits quantiques. Ce résultat est donné dans le théorème suivant (cf [At3]).

**Théorème 5.19** *Soit  $X$  une martingale normale dans  $\mathbb{R}^N$  qui satisfait l'équation de structure à coefficients constants*

$$[X^i, X^j]_t = \delta_{ij}t + \sum_{k=1}^N \int_0^t T_k^{ij} dX_s^k. \quad (5.7)$$

Alors,  $(X_t)_t$  possède la propriété de la représentation chaotique. De plus, si on note  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  l'espace canonique associé à  $(X_t)_t$ , alors l'espace  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est naturellement identifié à  $\Phi$ . En outre, l'opérateur de multiplication par  $X_t^k$  s'écrit

$$\mathcal{M}_{X_t^k} = a_k^0(t) + a_0^k(t) + \sum_{i,j=1}^N T_k^{ij} a_j^i(t).$$

Notons que dans le cas où  $X^k = (X_t^k)_{t \geq 0}$ ,  $k = 1, \dots, N$  est le mouvement brownien, Il est prouvé dans [At4] que

$$\mathcal{M}_{X_t^k} = a_k^0(t) + a_0^k(t).$$

Dans la suite, nous allons supposer que  $X$  satisfait l'équation de structure à coefficients constants (5.7). De plus,  $X_t^k$  sera identifiée à l'opérateur  $a_k^0(t) + a_0^k(t) + \sum_{i,j=1}^N T_k^{ij} a_j^i(t)$ .

Considérons maintenant l'équation d'évolution discrète donnée par (5.1).

**Théorème 5.20**  *$S_i$*

$$\begin{aligned} U_0^0 &= I + hL_0^0 + o(h), \\ U_0^i &= U_i^0 = \sqrt{h}L_i + o(\sqrt{h}), \text{ avec } L_i^* = -L_i, \\ U_j^i &= S_j^i + o(h), \end{aligned}$$

où  $S_j^i = \sum_{k=1}^N T_k^{ij} L_k + \delta_{ij}I$  et  $S = (S_j^i)_{1 \leq i, j \leq N}$  est un opérateur unitaire, alors il existe un opérateur  $H_0$  défini sur  $\mathcal{H}_0$  tel que  $L_0^0 = iH_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i^* L_i$ . De plus, la solution  $V_{[t/h]}$  de (5.1) converge fortement, quand  $h$  tend vers 0, vers la solution unitaire de l'équation différentielle stochastique classique

$$\begin{cases} dU_t &= L_0^0 U_t dt + \sum_{i=1}^N L_i U_t dX_t^i \\ U_0 &= I, \end{cases}$$

avec  $X$  est une martingale normale dans  $\mathbb{R}^N$  qui satisfait l'équation de structure à coefficients constants (5.7).

**Preuve:** Puisque  $U$  est un opérateur unitaire, alors on a

$$U_0^{0*}U_0^0 + \sum_{i=1}^N U_i^{0*}U_i^0 = I,$$

ce qui implique que

$$I + h(L_0^{0*} + L_0^0 + \sum_{i=1}^N L_i^*L_i) + o(h) = I.$$

On obtient donc

$$L_0^{0*} + L_0^0 = - \sum_{i=1}^N L_i^*L_i.$$

Par conséquent, on a

$$L_0^{0*} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i^*L_i = -(L_0^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i^*L_i).$$

Ainsi, il existe un opérateur  $H_0$  défini sur  $\mathcal{H}_0$  tel que

$$L_0^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i^*L_i = iH_0.$$

Il suit

$$L_0^0 = iH_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i^*L_i.$$

Maintenant, on se propose de prouver que

$$L_i = - \sum_{k=1}^N L_k^*S_i^k. \tag{5.8}$$

Notons qu'on a

$$U_0^{0*}U_i^0 + \sum_{k=1}^N U_k^{0*}U_i^k = \delta_{i0}I.$$

Alors, on obtient

$$\sqrt{h}(L_i + \sum_{k=1}^N L_k^*S_i^k) = \delta_{i0}I + o(h).$$

Par conséquent, pour tout  $i \neq 0$ , la relation suivante

$$-\sum_{k=1}^N L_k^* S_i^k = L_i + o(\sqrt{h})$$

est satisfaite. Finalement, en faisant tendre  $h$  vers 0, la relation (5.8) est satisfaite.

Ainsi, d'après le théorème 1.49, la solution de (5.1) qui satisfait les hypothèses du théorème ci-dessus, converge fortement vers la solution unitaire de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dU_t &= L_0^0 U_t dt + \sum_{i=1}^N L_i U_t (da_0^i(t) + da_i^0(t)) + \sum_{l,j=1}^N \sum_{i=1}^N T_i^{jl} L_i U_t da_j^i(t) \\ &= L_0^0 U_t dt + \sum_{i=1}^N L_i U_t (da_0^i(t) + da_i^0(t)) + \sum_{l,j=1}^N T_i^{jl} da_j^i(t) \\ &= L_0^0 U_t + dt \sum_{i=1}^N L_i U_t dX_t^i, \end{aligned}$$

de condition initiale  $U_0 = I$ . Cela prouve notre théorème.  $\square$

D'après le théorème ci-dessus, pour un bon choix des coefficients de l'évolution unitaire associé au modèle d'interactions répétées, la solution de l'équation d'évolution discrète converge, quand  $h$  tend vers 0, vers la solution d'une équation différentielle stochastique dirigée par une martingale normale vérifiant l'équation de structure à coefficients constants. Un cas particulier est décrit dans la sous-section suivante.

## 5.4.2 Limite continue

Considérons le modèle d'interactions répétées décrit précédemment tel que l'équation d'évolution discrète est donnée par la relation (5.4). Ainsi, nous prouvons le résultat suivant.

**Théorème 5.21** *Si pour tout  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $W_i$  est un opérateur unitaire et si on a*

$$W_i = I + \sqrt{h} \sum_{j=1}^N v_i^j L_j + hL_0^0 + h\omega_i(h),$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \|w_i(h)\| = 0$ , alors il existe un opérateur auto-adjoint  $H_0$  défini sur  $\mathcal{H}_0$  tel que la solution  $V_{[t/h]}$  de (5.4) converge fortement, quand  $h$  tend vers 0, vers la



solution unitaire  $U_t$  de l'équation différentielle stochastique brownienne

$$\begin{cases} dU_t = G U_t dt + \sum_{i=1}^N L_i U_t dB_i(t) \\ U_0 = I, \end{cases}$$

où  $G = -iH_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N L_k L_k^*$  et  $B_i(t) = a_i^0(t) + a_i^i(t)$  est le mouvement brownien.

**Preuve:** Puisque  $W_j$  est un opérateur unitaire, alors la relation suivante est satisfaite

$$W_j W_j^* = I,$$

ce qui implique que

$$I + h(L_0^0 + L_0^{0*} + \sum_{k,l=1}^N v_j^l v_j^k L_l L_k^*) + o(h) = I.$$

Par conséquent, on a

$$L_0^0 + L_0^{0*} + \sum_{k,l=1}^N v_j^l v_j^k L_l L_k^* = o(1).$$

Il suit

$$L_0^0 + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N v_j^l v_j^k L_l L_k^* = -(L_0^{0*} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N v_j^l v_j^k L_l L_k^*)^* + o(1).$$

Ainsi, il existe un opérateur auto-adjoint  $H_0$  défini sur  $\mathcal{H}_0$  tel que

$$L_0^0 = -iH_0 - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N v_j^l v_j^k L_l L_k^* + o(1).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} L_0^0 = \sum_{j=0}^N p_j L_0^0 &= -i \sum_{j=0}^N p_j H_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N p_j \left( \sum_{k,l=1}^N v_j^l v_j^k L_l L_k^* \right) + o(1) \\ &= -iH_0 - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N \left( \sum_{j=0}^N p_j v_j^l v_j^k \right) L_l L_k^* + o(1). \end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{E}(X^l X^k) = \sum_{j=0}^N p_j v_j^l v_j^k = \delta_{kl}$ , il suit

$$\begin{aligned} L_0^0 &= -iH_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N L_k L_k^* + o(1) \\ &= G + o(1). \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 5.8, on a

$$\begin{aligned}
U_0^0 &= \sum_{i=0}^N p_i W_i \\
&= I + hL_0^0 + \sqrt{h} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N p_i v_i^j L_j + o(h) \\
&= I + hL_0^0 + \sqrt{h} \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=0}^N p_i v_i^j \right) L_j + o(h).
\end{aligned}$$

Comme  $\sum_{i=0}^N p_i v_i^j = \mathbb{E}(X^j) = 0$ , on obtient

$$U_0^0 = I + hL_0^0 + o(h).$$

Maintenant, pour tout  $m \in \{1, \dots, N\}$ , on a

$$\begin{aligned}
U_m^0 = U_0^m &= \sum_{i=0}^N p_i v_i^m W_i \\
&= \mathbb{E}(X^m) I + h \mathbb{E}(X^m) L_0^0 + \sqrt{h} \sum_{i=0}^N p_i v_i^m \left( \sum_{j=1}^N v_i^j L_j \right) + o(h) \\
&= \sqrt{h} \sum_{j=1}^N L_j \mathbb{E}(X^m X^j) + o(h) \\
&= \sqrt{h} L_m + o(h).
\end{aligned}$$

Finalement, pour tous  $k, l \in \{1, \dots, N\}$ , les coefficients  $U_k^l$  sont donnés par

$$\begin{aligned}
U_k^l &= \sum_{i=0}^N p_i v_i^k v_i^l W_i \\
&= \delta_{kl} I + h \delta_{kl} L_0^0 + o(\sqrt{h}).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème 1.49, nous pouvons conclure. □



## Chapitre 6

# Contribution n<sup>o</sup> 5 : Équations de Langevin quantiques associées à un bain thermique quantique

Dans l'article [AtP1], nous observons deux normalisations du temps dans la partie interaction de l'hamiltonien associé à un modèle d'interactions répétées. Une normalisation d'ordre  $\sqrt{\hbar}$  et une normalisation d'ordre  $\hbar$ . Il est prouvé par Attal et Joye (cf [AtJ]) que pour un bon choix de l'hamiltonien d'interactions répétées, la normalisation d'ordre  $\sqrt{\hbar}$  correspond à la limite du couplage faible. De notre côté, nous avons montré que la normalisation d'ordre  $\hbar$  correspond à la loi de densité faible (cf [AtDh]). Ce chapitre est organisé comme suit :

Dans la section 6.1, nous décrivons le modèle d'interactions répétées introduit dans [AtJ] qui représente un petit système  $\mathcal{H}_S$  d'hamiltonien  $H_S$  en interaction avec une chaîne infinie de copies identiques  $\mathbb{C}^{n+1}$  modélisant un bain thermique. L'hamiltonien d'interactions répétées associé, noté  $H$ , est défini sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathbb{C}^{n+1}$ .

Dans la section 6.2, nous supposons que la partie interaction de  $H$  est d'ordre  $\sqrt{\hbar}$  et nous rappelons les résultats essentiels d'Attal et Joye.

Dans la section 6.3, nous supposons que la partie interaction de  $H$  est d'ordre  $\hbar$ . Nous montrons, dans ce cas, la convergence de l'équation d'évolution discrète associée à ce modèle vers la solution unitaire d'une équation de Langevin quantique poissonnienne.

## 6.1 Petit système en interaction avec un bain thermique quantique

Nous présentons dans cette section le modèle d'interactions répétées qui est l'objet de notre étude dans la suite. Ensuite, nous décrivons la représentation GNS.

### 6.1.1 Modèle d'interactions répétées

Considérons un petit système décrit par un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}_S$  en interaction avec un bain thermique quantique qu'on modélise par une chaîne infinie de copies identiques telles que l'espace d'états de chaque copie est l'espace de Hilbert  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Fixons une base orthonormée  $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , où  $e_0 = \Omega$  représente l'état vide de l'atome. Ainsi, la chaîne sera décrite par le produit tensoriel  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{n+1}$ , défini par rapport à la suite stabilisatrice  $(\Omega)_n$ . Supposons que l'interaction entre les deux systèmes se fait de la manière suivante : le petit système interagit avec les copies de la chaîne l'une après l'autre durant le même intervalle de temps  $[0, h]$ . Par suite, l'interaction totale est décrite par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{n+1}$ .

Une base orthonormée de  $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{n+1})$  est donnée par la famille  $\{a_j^i, 0 \leq i, j \leq n\}$  telle que

$$a_j^i e_k = \delta_{ik} e_j.$$

Les hamiltoniens respectifs du petit système et d'une copie de la chaîne atomique associée au bain thermique, sont les opérateurs auto-adjoints  $H_S$  défini sur  $\mathcal{H}_S$  et  $H_R$  défini sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  tel que

$$H_R = \sum_{i=0}^n \gamma_i a_i^0 a_0^i,$$

où les  $\gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , sont des nombres réels.

L'hamiltonien total du petit système en interaction avec une copie de la chaîne  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{n+1}$ , noté  $H$ , est défini sur  $\mathcal{H}_S \otimes \mathbb{C}^{n+1}$  par

$$H = H_S \otimes I + I \otimes H_R + H_I(h),$$

où  $H_I(h)$  est l'hamiltonien d'interaction.

L'évolution unitaire associée, durant l'intervalle de temps  $[0, h]$ , est donnée par

$$U = e^{-ihH}.$$

Notons maintenant  $\mathbb{C}_k^{n+1}$  la  $k$ -ième copie de  $\mathbb{C}^{n+1}$  dans la chaîne  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{n+1}$ . Alors, on définit l'opérateur  $U_k$  sur  $\mathcal{H}_S \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{n+1}$  par

$$U_k = \begin{cases} U & \text{sur } \mathcal{H}_S \otimes \mathbb{C}_k^{n+1} \\ I & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ainsi, l'équation d'évolution discrète, décrivant le modèle d'interactions répétées du petit système avec le bain thermique, est donnée par la suite  $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{n+1})$  qui satisfait

$$\begin{cases} V_{k+1} = U_{k+1} V_k \\ V_0 = I. \end{cases} \quad (6.1)$$

Notons que dans la base  $\mathcal{B}$ , l'opérateur  $U$  s'écrit

$$U = \sum_{i,j=0}^n U_j^i \otimes a_j^i,$$

où les  $U_j^i$ ,  $i, j = 0, \dots, n$ , sont des opérateurs sur  $\mathcal{H}_S$ . Par conséquent, en termes de bruits quantiques discrets, l'équation (6.12) s'écrit

$$\begin{cases} V_{k+1} = \sum_{i,j=0}^n U_j^i V_k a_j^i(k+1) \\ V_0 = I. \end{cases}$$

### 6.1.2 Représentation GNS

Soit  $\rho_\beta$  l'état d'équilibre thermodynamique à une température inverse  $\beta$  d'une copie de la chaîne associée au bain thermique qu'on explicitera dans chacun des deux sections suivantes. Notons que dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice densité  $\rho_\beta$  est diagonale

$$\rho_\beta = \text{diag}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n).$$

Maintenant, on se propose de décrire la représentation GNS du couple  $(\mathbb{C}^{n+1}, \rho_\beta)$ . Posons  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^{n+1})$ , l'algèbre des opérateurs bornés sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ , munie du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(\rho_\beta A^* B).$$

Ainsi, la représentation GNS du couple  $(\mathbb{C}^{n+1}, \rho_\beta)$  est le triplet  $(\pi, \tilde{\mathcal{H}}, \Omega_R)$  tel que :

- $\Omega_R = I$ ,
- $\pi : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$  telle que  $\pi(M)A = MA$  pour tous  $M, A \in \tilde{\mathcal{H}}$ .

Posons

$$\tilde{U} = \pi(U)$$

et désignons par  $\tilde{\mathcal{H}}_k$  la  $k$ -ième copie de  $\tilde{\mathcal{H}}$  dans la chaîne  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \tilde{\mathcal{H}}$ . Alors, il est facile de vérifier que  $\tilde{U}_k = \pi(U_k)$  agit comme  $\tilde{U}$  sur  $\mathcal{H}_S \otimes \tilde{\mathcal{H}}_k$  et comme l'identité ailleurs. De plus, si on note  $\tilde{V}_k = \pi(V_k)$ , alors il est clair que  $(\tilde{V}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \tilde{\mathcal{H}})$  vérifiant

$$\begin{cases} \tilde{V}_{k+1} = \tilde{U}_{k+1} \tilde{V}_k \\ \tilde{V}_0 = I. \end{cases} \quad (6.2)$$

Dans les deux sections suivantes, nous allons étudier la limite continue de la solution de l'équation (6.2). Pour cela, nous avons besoin d'explicitier une base de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Posons

$$\nu_k = 1 - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_k, \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Considérons la famille  $\{X_j^i, i, j \in \{0, 1, \dots, n\}\}$  telle que :

- $X_0^0 = I,$
- $X_j^i = \frac{1}{\sqrt{\beta_i}} a_j^i,$  pour tous  $i \neq j,$
- $X_k^k = \text{diag}(\lambda_k^0, \lambda_k^1, \dots, \lambda_k^{k-1}, \lambda_k^k, \dots, \lambda_k^n),$

où

$$\lambda_1^0 = \lambda_1^2 = \dots = \lambda_1^n = \frac{-\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\nu_1}}, \quad \lambda_1^1 = \frac{\sqrt{\nu_1}}{\sqrt{\beta_1}} \quad (6.3)$$

et pour tout  $k \in \{2, \dots, n\},$  on a

$$\lambda_k^0 = \lambda_k^{k+1} = \dots = \lambda_k^n = \frac{-\sqrt{\beta_k}}{\sqrt{\nu_{k-1}} \sqrt{\nu_k}}, \quad (6.4)$$

$$\lambda_k^k = \frac{\sqrt{\nu_k}}{\sqrt{\nu_{k-1}} \sqrt{\beta_k}}, \quad (6.5)$$

$$\lambda_k^1 = \lambda_k^2 = \dots = \lambda_k^{k-1} = 0. \quad (6.6)$$

Alors, il est clair que la famille  $\{X_j^i, i, j \in \{0, 1, \dots, n\}\}$  forme une base orthonormée de  $\tilde{\mathcal{H}}$  muni du produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(\rho_\beta A^* B)$ . Par conséquent, la matrice de  $\tilde{U}$  dans cette base est donnée par  $(\tilde{U}_{k,l}^{i,j})_{i,j,k,l \in \{0,1,\dots,n\}}$  telle que

$$\tilde{U}_{k,l}^{i,j} = \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}}(\rho_\beta (X_l^k)^* U X_j^i). \quad (6.7)$$

## 6.2 Hamiltonien d'interactions répétées avec normalisation d'ordre $\sqrt{\hbar}$

Dans cette section, nous allons présenter le résultat principal démontré dans [AtJ]. Nous supposons que la partie interaction  $H_I(\hbar)$  associée au modèle décrit ci-dessus est de la forme

$$H_I(\hbar) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \sum_{i=1}^n (V_i \otimes a_i^0 + V_i^* \otimes a_0^i),$$

où  $V_i, i = 1, \dots, n,$  sont des opérateurs sur  $\mathcal{H}_S$ . Ainsi, l'hamiltonien  $H$  s'écrit

$$H = H_S \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \sum_{i=1}^n (V_i \otimes a_i^0 + V_i^* \otimes a_0^i).$$

L'état d'équilibre thermodynamique d'une copie de la chaîne  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{n+1}$  est donné par

$$\rho_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_R},$$

où  $Z = \text{Tr}(e^{-\beta H_R})$ . Il est clair que dans la base  $\mathcal{B}$ ,  $\rho_\beta$  s'écrit

$$\rho_\beta = \text{diag}(\beta_0, \dots, \beta_n),$$

où

$$\beta_i = \frac{e^{-\beta \gamma_i}}{e^{-\beta \gamma_0} + \dots + e^{-\beta \gamma_n}}.$$

Supposons que  $\gamma_0 < \gamma_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ainsi, on obtient  $\beta_0 > \beta_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Considérons l'espace de Fock symétrique  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{(n+1)^2-1}))$  construit sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{(n+1)^2-1})$ . Notons  $da_{i,k}^{i,j}(t)$ ,  $i, j, k, l = 0, 1, \dots, n$ , les bruits quantiques définis sur  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{(n+1)^2-1}))$  par rapport à la base orthonormée  $\{X_j^i, i, j = 0, 1, \dots, n\}$ . Alors, nous énonçons le théorème suivant qui est dû à Attal et Joye (cf [AtJ]).

**Théorème 6.1** *La solution  $\tilde{V}_{[t/n]}$  de l'équation (6.2) converge fortement, pour tout  $t$ , vers la solution unitaire de l'équation de Langevin quantique définie sur l'espace  $\mathcal{H}_S \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{(n+1)^2-1}))$  par*

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t = & - \left[ iH_S + i \sum_{k=0}^n \beta_k \gamma_k I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\beta_0 V_k^* V_k + \beta_k V_k V_k^*) \right] \tilde{V}_t dt \\ & - i \sum_{k=1}^n \left[ \sqrt{\beta_k} V_k \tilde{V}_t da_{0,0}^{k,0}(t) + \sqrt{\beta_0} V_k^* \tilde{V}_t da_{0,0}^{0,k}(t) \right. \\ & \left. + \sqrt{\beta_k} V_k^* \tilde{V}_t da_{k,0}^{0,0}(t) + \sqrt{\beta_0} V_k \tilde{V}_t da_{0,k}^{0,0}(t) \right], \end{aligned} \quad (6.8)$$

avec la condition initiale  $\tilde{V}_0 = I$ .

Posons

$$\begin{aligned} A_k^0(t) &= \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta_k}} a_{0,k}^{0,0}(t) + \sqrt{\frac{\beta_k}{\beta_0 - \beta_k}} a_{0,0}^{k,0}(t), \\ A_0^k(t) &= \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta_k}} a_{0,0}^{0,k}(t) + \sqrt{\frac{\beta_k}{\beta_0 - \beta_k}} a_{k,0}^{0,0}(t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

et

$$W_k = -i \sqrt{\beta_0 - \beta_k} V_k.$$



Alors, grâce au regroupement donné par la relation (6.9), l'équation (6.8) s'écrit

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= -\left[ iH_S + i \sum_{k=0}^n \beta_k \gamma_k I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta_k} W_k^* W_k + \frac{\beta_k}{\beta_0 - \beta_k} W_k W_k^* \right) \right] \tilde{V}_t dt \\ &+ \sum_{k=1}^n (W_k \tilde{V}_t dA_t^0(t) - W_k^* \tilde{V}_t dA_0^k(t)). \end{aligned}$$

**Remarque 6.1** *Par le regroupement donné ci-dessus, l'équation de départ (6.8) qui est définie sur un espace de multiplicité  $(n+1)^2 - 1$ , est simplifiée en une équation de Langevin quantique définie sur un espace de multiplicité  $n$ ,  $\mathcal{H}_S \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n))$ .*

Maintenant, nous allons énoncer quelques propriétés des bruits définis par la relation (6.9), qui sont appelés *bruits thermiques quantiques*. Considérons l'espace  $\tilde{\Phi}$  qui consiste à doubler l'espace de Fock  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n))$ ,

$$\tilde{\Phi} = \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)) \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)).$$

Les bruits quantiques définis sur la première et la deuxième copie de  $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n))$  dans  $\tilde{\Phi}$  sont respectivement identifiés aux opérateurs  $a_j^i(t) \otimes I$  qu'on note  $a_j^i(t)$  et  $I \otimes a_j^i(t)$  qu'on note  $b_j^i(t)$ . Soient

$$\begin{aligned} A_i^0(t) &= \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta_i}} a_i^0(t) + \sqrt{\frac{\beta_i}{\beta_0 - \beta_i}} b_0^i(t), \\ A_0^i(t) &= \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta_i}} a_0^i(t) + \sqrt{\frac{\beta_i}{\beta_0 - \beta_i}} b_i^0(t). \end{aligned}$$

Au travers les opérateurs  $A_i^0(t)$  et  $A_0^i(t)$ , on définit

$$\begin{aligned} a^*(f) &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}_+} f_i(t) dA_i^0(t), \\ a(f) &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}_+} \overline{f_i(t)} dA_0^i(t), \end{aligned}$$

où  $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$  et  $f_i(t) = \langle e_i, f(t) \rangle$ .

La proposition suivante fournit des propriétés de bruits thermiques quantiques définis ci-dessus (cf [AtJ]).

**Proposition 6.2** *On a*

$$\begin{aligned} dA_0^i(t) dA_i^0(t) &= \frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta_i} dt, \\ dA_i^0(t) dA_0^i(t) &= \frac{\beta_i}{\beta_0 - \beta_i} dt. \end{aligned}$$

De plus, les opérateurs  $a(f)$ ,  $a^*(g)$  forment une représentation de l'algèbre des CCR sur  $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$ , i.e :

$$[a(f), a^*(g)] = \langle f, g \rangle I.$$

### 6.3 Hamiltonien d'interactions répétées avec normalisation d'ordre $\hbar$

Dans cette section, nous supposons que l'hamiltonien d'interactions répétées  $H$  s'écrit

$$H = H_S \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{\hbar} \sum_{i,j=1}^n D_{ij} \otimes a_j^i,$$

où  $D_{ij} = (D_{ji})^*$ .

Maintenant, nous allons décrire la matrice de  $U$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Posons  $D = (D_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  et considérons la matrice  $M = (M_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ , où  $M_{ij} = \delta_{ij}(H_S + \gamma_i I)$ . Notons que l'évolution unitaire  $U$  est donnée par

$$U = e^{-i\hbar H} = \sum_{m \geq 0} \frac{(-i)^m}{m!} \hbar^m H^m.$$

D'autre part, dans la base  $\mathcal{B}$ , les hamiltoniens  $H_R$  et  $H$  s'écrivent

$$\begin{aligned} H_R &= \text{diag}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n), \\ H &= \begin{pmatrix} H_S + \gamma_0 I & 0 \\ 0 & M + \frac{1}{\hbar} D \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$(hH)^2 = \begin{pmatrix} O(\hbar^2) & 0 \\ 0 & D^2 + O(\hbar) \end{pmatrix}.$$

De plus, pour tout  $m \geq 3$ , on a

$$(hH)^m = \begin{pmatrix} o(\hbar^2) & 0 \\ 0 & D^m + O(\hbar) \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$U = \begin{pmatrix} I - i\hbar(H_S + \gamma_0 I) + O(\hbar^2) & 0 \\ 0 & I - i\hbar M + (e^{-iD} - I) + O(\hbar) \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

ce qui donne les coefficients de la matrice de  $U$  dans la base  $\mathcal{B}$ , qui sont des opérateurs sur  $\mathcal{H}_S$ , à des précisions  $O(\hbar)$  et  $O(\hbar^2)$ .

Supposons que l'état d'équilibre thermodynamique à une température inverse  $\beta$  est donné par

$$\rho_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta(H_R - \mu N)},$$

où

- $Z = \text{Tr}(e^{-\beta(H_R - \mu N)})$ ,
- $N = \text{diag}(0, 1, \dots, n)$  est un opérateur sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ ,
- $\mu$  est un scalaire, appelé *potentiel chimique*.

Notons que le petit système interagit avec une copie de la chaîne atomique  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{n+1}$  si et seulement si  $\mu \leq 0$ . De plus, il est clair que la matrice densité  $\rho_\beta$  est une matrice diagonale dans la base  $\mathcal{B}$ ,

$$\rho_\beta = \text{diag}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n),$$

où

$$\beta_j = \frac{e^{j\mu\beta} e^{-\beta\gamma_j}}{e^{-\beta\gamma_0} + e^{\mu\beta} e^{-\beta\gamma_1} + \dots + e^{n\mu\beta} e^{-\beta\gamma_n}}, \quad \forall j = 0, \dots, n. \quad (6.11)$$

Maintenant, nous allons étudier la loi de densité faible du modèle décrit ci-dessus. Pour cela, nous introduisons l'hypothèse principale qui consiste à supposer que la durée d'interaction entre le petit système et une copie de la chaîne  $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathbb{C}^{n+1}$ ,  $h$ , est liée au potentiel chimique  $\mu$  de la manière suivante :

$$h^2 = e^{\beta\mu}.$$

Ainsi, il est clair que  $h$  tend vers 0 si et seulement si la fugacité  $e^{\beta\mu}$  tend vers 0, i.e : le potentiel chimique tend vers  $-\infty$ .

**Lemme 6.3** *On a*

$$\begin{aligned} \beta_0 \lambda_1^0 &= O(h), \\ \beta_0 \lambda_i^0 &= o(h), \quad \text{pour tout } i \geq 2, \\ \beta_1 \lambda_1^1 &= O(h), \\ \beta_k \lambda_i^k &= o(h), \quad \text{pour tous } i \geq 1, k \geq 1 \text{ tels que } (i, k) \neq (1, 1), \\ \beta_k \lambda_i^k \lambda_j^k &= o(h), \quad \text{pour tous } i, j \geq 1 \text{ tels que } i \neq j, \\ \beta_k (\lambda_i^k)^2 &= o(h), \quad \text{pour tous } i, k \geq 1 \text{ tels que } i \neq k, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \beta_k (\lambda_k^k)^2 &= 1, \quad \text{pour tout } k \geq 1. \end{aligned}$$

**Preuve:** La preuve du lemme ci-dessus est une conséquence immédiate des relations (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) et (6.11).  $\square$

Dans la suite, notons que la matrice de l'opérateur unitaire  $e^{-iD}$  est donnée dans la base  $\mathcal{B}$  par

$$e^{-iD} = (S_l^k)_{1 \leq l, k \leq n},$$

où  $S_l^k$ ,  $k, l \in \{1, \dots, n\}$  sont des opérateurs sur  $\mathcal{H}_S$ .

Maintenant, nous prouvons le résultat suivant.

**Théorème 6.4** *La solution  $\tilde{V}_{[t/h]}$  de (6.2) converge fortement, quand  $h$  tend vers 0, vers la solution unitaire de l'équation de Langevin quantique*

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t = & - i(H_S + \gamma_0 I)\tilde{V}_t dt \\ & + \sum_{j,k=1}^N (S_k^j - \delta_{jk} I)\tilde{V}_t \left( \sum_{i=1}^n da_{i,k}^{i,j}(t) \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

avec la condition initiale  $\tilde{V}_0 = I$ .

**Preuve:** D'après la relation (6.7), on a

$$\tilde{U}_{0,0}^{0,0} = \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}}(\rho_\beta U).$$

Ainsi, grâce à la relation (6.10), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{0,0}^{0,0} = & \beta_0(I - ihH_S + \gamma_0 hI) + \beta_1(I - ihH_S) \\ & + \beta_2(I - ihH_S) + \dots + \beta_n(I - ihH_S) + O(h^2). \end{aligned}$$

Cela implique

$$\tilde{U}_{0,0}^{0,0} = I - ih(H_S + \beta_0 \gamma_0 I) + o(h). \quad (6.13)$$

Maintenant, pour tous  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$  tels que  $(i, j) \neq (0, 0)$  et  $i \neq j$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{0,0}^{i,j} &= \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}}(\rho_\beta U X_j^i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta_i}} \langle e_i, \rho_\beta U e_j \rangle \\ &= \sqrt{\beta_i} \langle e_i, U e_j \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient deux cas :

- Si  $i = 0$  ou  $j = 0$ , alors on a

$$\tilde{U}_{0,0}^{i,0} = \tilde{U}_{0,0}^{0,j} = 0. \quad (6.14)$$

- Si  $i \neq 0$  et  $j \neq 0$ , alors on obtient

$$\tilde{U}_{0,0}^{i,j} = \begin{cases} O(h) & \text{si } i = 1 \\ o(h) & \text{si } i \neq 1. \end{cases} \quad (6.15)$$

De manière analogue, on prouve que

$$\tilde{U}_{0,l}^{0,0} = \tilde{U}_{k,0}^{0,0} = 0, \quad \forall k, l \in \{1, \dots, n\}. \quad (6.16)$$

et que pour tous  $k, l \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $k \neq l$ , on a

$$\tilde{U}_{k,l}^{0,0} = \begin{cases} O(h) & \text{si } k = l \\ o(h) & \text{si } k \neq l. \end{cases} \quad (6.17)$$

Notons maintenant que pour tous  $i \neq j$ ,  $k \neq l$  et pour tous  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\tilde{U}_{k,l}^{i,j} = \delta_{ik} \langle e_l, U e_j \rangle.$$

Ainsi, on obtient

$$\tilde{U}_{k,l}^{i,j} = 0, \quad \forall i \neq k. \quad (6.18)$$

De plus, on a

$$\tilde{U}_{i,l}^{i,j} = \langle e_l, U e_j \rangle = S_l^j + O(h). \quad (6.19)$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le coefficient  $\tilde{U}_{0,0}^{i,i}$  est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{0,0}^{i,i} &= \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}}(\rho_\beta U X_i^i) \\ &= \sum_j \beta_j \lambda_i^j \langle e_j, U e_j \rangle. \end{aligned}$$

Notons que d'après le lemme 6.3, on a  $\beta_0 \lambda_1^0 = O(h)$ ,  $\beta_1 \lambda_1^1 = O(h)$ ,  $\beta_0 \lambda_i^0 = o(h)$ ,  $\forall i \geq 2$  et  $\beta_j \lambda_i^j = o(h)$ , pour tous  $i \geq 1$ ,  $j \geq 1$  tels que  $(i, j) \neq (1, 1)$ . Ainsi, on obtient

$$\tilde{U}_{0,0}^{i,i} = \begin{cases} O(h) & \text{si } i = 1 \\ o(h) & \text{si } i \geq 2. \end{cases} \quad (6.20)$$

De la même manière, on prouve que

$$\tilde{U}_{k,k}^{0,0} = \begin{cases} O(h) & \text{si } k = 1 \\ o(h) & \text{si } k \geq 2. \end{cases} \quad (6.21)$$

Maintenant, pour tous  $i, k, l \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $k \neq l$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{k,l}^{i,i} &= \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}}(\rho_\beta (X_l^k)^* U X_i^i) \\ &= \sum_j \frac{\beta_j}{\sqrt{\beta_k}} \lambda_i^j \delta_{kj} \langle e_l, U e_j \rangle \\ &= \sqrt{\beta_k} \lambda_i^k \langle e_l, U e_k \rangle. \end{aligned}$$

Comme on a  $\sqrt{\beta_k \lambda_i^k} = o(h)$  pour tous  $i, k, l \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i \neq k$ , on obtient

$$\tilde{U}_{k,l}^{i,i} = o(h), \quad \forall i \neq k. \quad (6.22)$$

De plus, on a

$$\tilde{U}_{i,l}^{i,i} = \frac{\sqrt{\nu_k}}{\sqrt{\nu_{k-1}}} S_l^i + O(h). \quad (6.23)$$

De manière analogue, on montre que pour tous  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i \neq j$ ,

$$\tilde{U}_{k,k}^{i,j} = o(h), \quad \forall i \neq k \quad (6.24)$$

et

$$\tilde{U}_{i,i}^{i,j} = \frac{\sqrt{\nu_k}}{\sqrt{\nu_{k-1}}} S_i^j + O(h). \quad (6.25)$$

Soient  $i, k \in \{1, \dots, n\}$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{k,k}^{i,i} &= \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}}(\rho_\beta X_k^k U X_i^i) \\ &= \sum_{j=0}^n \beta_j \lambda_k^j \lambda_i^j \langle e_j, U e_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_k^j \lambda_i^j (S_j^j - I) + \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_k^j \lambda_i^j I + \beta_0 \lambda_k^0 \lambda_i^0 I + o(h). \end{aligned}$$

Notons qu'on a

$$\langle X_i^i, X_k^k \rangle = \sum_{j=0}^n \beta_j \lambda_k^j \lambda_i^j = \delta_{ik}.$$

Cela implique

$$\tilde{U}_{k,k}^{i,i} = \delta_{ik} I + \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_k^j \lambda_i^j (S_j^j - I) + o(h).$$

Ainsi, on obtient

$$\tilde{U}_{k,k}^{i,i} = o(h), \quad \forall i \neq k \quad (6.26)$$

et

$$\tilde{U}_{i,i}^{i,i} = I + \beta_i (\lambda_i^i)^2 (S_i^i - I) + o(h). \quad (6.27)$$

Maintenant, afin d'appliquer le théorème 1.49, nous allons calculer les limites suivantes

$$s - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}_{k,l}^{i,j} - \delta_{(i,j),(k,l)} I}{h^{\varepsilon_{k,l}^{i,j}}},$$

où  $\varepsilon_{0,0}^{0,0} = 1$ ,  $\varepsilon_{k,l}^{0,0} = \varepsilon_{0,0}^{i,j} = 1/2$  et  $\varepsilon_{k,l}^{i,j} = 0$ .

Notons que d'après (6.14), (6.16) et (6.18), on a  $\tilde{U}_{0,0}^{i,0} = \tilde{U}_{0,0}^{0,j} = 0$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  et  $\tilde{U}_{k,l}^{i,j} = 0$  pour tous  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i \neq k$ . De plus, les égalités (6.15), (6.17), (6.20) et (6.21) impliquent que pour tous  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}_{k,l}^{0,0}}{\sqrt{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}_{0,0}^{i,j}}{\sqrt{h}} = 0.$$

En utilisant les relations (6.19), (6.23) et (6.25), on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{U}_{i,l}^{i,j} = S_l^j,$$

pour tous  $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $j \neq l$ . De plus, en tenant compte des relations (6.22), (6.24) et (6.26), on a pour tous  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i \neq k$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{U}_{k,l}^{i,i} = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{U}_{k,l}^{i,j} = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{U}_{k,k}^{i,i} = 0.$$

L'égalité (6.13) implique

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}_{0,0}^{0,0} - I}{h} = -i(H_S + \gamma_0 I).$$

Finalement d'après les relations (6.19) et (6.27), on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\tilde{U}_{i,j}^{i,j} - I) = S_j^j - I, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Par conséquent, d'après le théorème 1.49, la solution de l'équation (6.2) converge fortement vers la solution unitaire de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= -i(H_S + \gamma_0 I) \tilde{V}_t dt \\ &+ \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n S_k^j \tilde{V}_t \sum_{i=1}^n da_{i,k}^{i,j}(t) \\ &+ \sum_{j=1}^n (S_j^j - I) \tilde{V}_t \sum_{i=1}^n da_{i,j}^{i,j}(t) \\ &= -i(H_S + \gamma_0 I) \tilde{V}_t dt \\ &+ \sum_{j,k}^n (S_k^j - \delta_{j,k} I) \tilde{V}_t \sum_{i=1}^n da_{i,k}^{i,j}(t), \end{aligned}$$

avec la condition initiale  $\tilde{V}_0 = I$ , ce qui prouve notre théorème. □

**Remarque 6.2** *Si on pose*

$$dA_k^j(t) = \sum_{i=1}^n da_{i,k}^{i,j}(t),$$

alors il est facile de vérifier que l'équation (6.12) peut être interprétée comme une équation de Langevin quantique définie sur  $\mathcal{H}_S \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n^2}))$ . Ainsi, sur cet espace, l'équation (6.12) s'écrit

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= -i(H_S + \gamma_0 I) \tilde{V}_t dt \\ &+ \sum_{j,k}^n (S_k^j - \delta_{jk} I) \tilde{V}_t dA_k^j(t). \end{aligned}$$

De plus, les bruits quantiques  $dA_k^j(t)$ ,  $j, k \geq 1$  satisfont la table d'Ito. En effet

$$\begin{aligned} dA_k^j(t) dA_l^m(t) &= \left( \sum_{i=1}^n da_{i,k}^{i,j}(t) \right) \left( \sum_{i=1}^n da_{i,l}^{i,m}(t) \right) \\ &= \sum_{i_1, i_2=1}^n da_{i_1,k}^{i_1,j}(t) da_{i_2,l}^{i_2,m}(t) \\ &= \sum_{i_1, i_2=1}^n \delta_{(i_1,j), (i_2,l)} da_{i_1,k}^{i_2,m}(t) \\ &= \delta_{jl} \sum_{i=1}^n da_{i,k}^{i,m}(t) \\ &= \delta_{jl} dA_k^m(t). \end{aligned}$$





# Bibliographie

- [AcFrL1] L. Accardi, A. Frigerio, Y.G. Lu : Weak coupling limit as a quantum functional central limit theorem, *Com. Math. Phys.* 131, 537-570 (1990).
- [AcFrL2] L. Accardi, A. Frigerio, Y.G. Lu : On the weak coupling limit problem, *quantum probability and Applications IV, SLNMNO. 1396 (1987) 20-58.*
- [AcFrL3] L. Accardi, A. Frigerio, Y.G. Lu : The weak coupling limit (II) : Langevin equation and finite temperature case, *Pub. RIMS Kyoto 31, 545-599 (1995).*
- [AcFrL4] L. Accardi, A. Frigerio, Y.G. Lu : Quantum Langevin equation in the weak coupling limit, *Lect. Notes in Math., 1442, Springer, Berlin, 1990.*
- [AcLV] L. Accardi, Y.G. Lu, I. Volovich : *Quantum theory and its stochastic limit.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- [AcPV] L. Accardi, A.N. Pechen, I. V. Volovich : A Stochastic Golden Rule and Quantum Langevin Equation For the Low Density Limit, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol. 6, No. 3 (2003) 431-453.*
- [AIL] R. Alicki, K. Lendi : *Quantum dynamical semigroups and applications*, Lecture Notes in physics, 286. Springer-Verlag Berlin, 1987.
- [At1] S. Attal : Extensions of the quantum stochastic calculus, *Quantum Probability Communications XI, 1-38, World Scientific (2003).*
- [At2] S. Attal : Approximating the Fock space with the toy Fock space. *Séminaire de Probabilités XXXVI, Springer L.N.M. 1801 (2003) , 477-497.*
- [At3] S. Attal : Semimartingales non commutatives et applications aux endomorphismes browniens, *Thesis of Strasbourg University, 1994*
- [At4] S. Attal : *Quantum noises theory, soumis.*
- [AtDh] S. Attal, A. Dhahri : Repeated quantum interaction model, quantum Langevin equation and the low density limit, *à paraître.*
- [AtDhR] S. Attal, A. Dhahri, R. Rebolledo : Repeated quantum interaction model and random walks on unitary operators, *à paraître.*
- [AtE] S. Attal, M. Emery : Equations de structure pour des martingales vectorielles. *Séminaire de Probabilités XXVIII, Springer L.N.M. 1583 (1994), p. 256-278.*
- [AtJ] S. Attal, A. Joye : The Langevin equation for a quantum heat bath. *Journal of Functional Analysis, à paraître*

- [AtP1] S. Attal, Y. Pautrat : From Repeated to Continuous Quantum Interactions. *Annales Henri Poincaré (Physique Théorique)* 7 (2006), p. 59-104.
- [AtP2] S. Attal, Y. Pautrat : From  $(n + 1)$ -level atom chains to  $n$ -dimensional noises. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* 41 (2005), p. 391-407.
- [Ba] A. Barchielli : Continual Measurements in Quantum Mechanics. *Quantum Open systems. Vol III : Recent developments. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1882 (2006)*.
- [BO] P. Blanchard, R. Olkiewicz : Decoherence as Irreversible Dynamical Process in Open Quantum systems. *Quantum Open systems. Vol III : Recent developments. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1882 (2006)*.
- [BR1] O. Bratteli, D.W. Robinson : *Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Volume 1. Springer-Verlag Berlin, second edition 1987.
- [BR2] O. Bratteli, D.W. Robinson : *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Volume 2, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo , second edition 1996.
- [Bu] B. Burmeister : *Transport Processus in quantum Spin Systems*. Ph.D. thesis, Oldenburg 1999.
- [Da1] E.B. Davies : Markovian Master equations. *Comm. Math. Phys.* 39 (1974), 91-110.
- [Da2] E.B. Davies : Markovian Master Equations II, *Math. Ann.* 219 (1976), 147-158.
- [Da3] E.B. Davies : *One-Parameter Semigroups*, Academic Press London New York Toronto Sydney San Francisco, 1980.
- [Da4] E.B. Davies : *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, New York and London, (1976).
- [DJ1] J. Dereziński, V. Jaksic : Spectral theory of Pauli-Fierz operators, *J. func. Anal.* 180, 241 (2001).
- [DJ2] J. Dereziński, V. Jaksic : Return to Equilibrium for Pauli-Fierz Systems. *Annales Institut Henri Poincaré* 4 (2003), 739-793.
- [DJP] J. Dereziński, V. Jaksic, C.A. Pillet : Perturbation theory of  $W^*$ -dynamics, KMS-states and Liouvillean, *Rev. Math. Phys.* 15 (2003), 447-489.
- [DF] J. Dereziński, R. Fruboës : Fermi Golden Rule and Open Quantum Systems, *Quantum Open systems. Vol III : Recent developments. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1882 (2006)*.
- [Dh1] A. Dhahri : Markovian Properties of the spin-boson model, *Séminaire de Probabilités, à paraître*.
- [Dh2] A. Dhahri : Markovian Properties of the Pauli-Fierz model, *à paraître*.
- [Dh3] A. Dhahri : A Lindblad model for a spin chain coupled to thermal heat baths, *à paraître*.

- [Fa1] F. Fagnola : Quantum Stochastic Differential Equations and Dilation of Completely Positive Semigroups, *Quantum Open systems. Vol II : The Markovian approach. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1881 (2006)*.
- [Fa2] F. Fagnola : *Quantum Markovian Semigroups and Quantum Flows*, Proyecciones, Journal of Math. 18, n.3 (1999) 1-144
- [Fa3] F. Fagnola : Characterization of Isometric and Unitary Weakly Differentiable Cocycles in Fock space. *Quantum Probability and Related Topics VIII 143 (1993)*
- [FaR1] F. Fagnola, R. Rebolledo : Nets of the Qualitative behaviour of Quantum Markov Semigroups, *Quantum Open systems. Vol III : Recent developments. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1882 (2006)*.
- [FaR2] F. Fagnola, R. Rebolledo : The Approach to equilibrium of a class of quantum dynamical semigroups, *Inf. Q. Prob. and Rel. Topics, 1(4), 1-12, 1998*.
- [Fr1] A. Frigerio : Quantum dynamical semigroup and approach to equilibrium, *Lett. Math. Phys, 2, 79-87, 1977*.
- [Fr2] A. Frigerio : Stationary states of Quantum Dynamical Semigroups, *Comm. Math. Phys. 63, 269-276 (1978)*.
- [Fr3] A. Frigerio : Covariant Markovian dilations of quantum dynamical semigroups. *Publ.RIMS Kyoto Univ. 21, 657-675 (1985)*.
- [FrGoV] A. Frigerio, V. Gorini, M. Verri : Quantum Detailed Balance and KMS Condition, *Comm. Math. Phys. 57, 97-110 (1977)*.
- [G] M. Gregoratti : The Hamiltonian Operator Associated with Some quantum Stochastic Evolutions, *Com. Math. Phys. 222, 181-200 (2001)*.
- [HP] R.L Hudson, K.R. Parthasarathy : Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, *Comm. Math. Phys. 93 (1984), 3, 301-323*.
- [Gu] A. Guichardet : Symmetric Hilbert spaces and related Topics. *Lectures Notes in Mathematics 261, Springer Verlag (1972)*.
- [JP1] V. Jaksic, C.A. Pillet : On a model for quantum friction II : Fermi's golden rule and dynamics at positive temperature. *Comm. Math. Phys. 178, 627 (1996)*.
- [JP2] V. Jaksic, C.A. Pillet : On a model for quantum friction III : Ergodic properties of the spin-boson system. *Comm. Math. Phys. 178, 627 (1996)*.
- [L] G. Lindblad : On the generators of quantum dynamical semigroups, *Comm. Math. Phys, 48, 119-130, 1976*.
- [Ma1] H. Maassen : The construction of continuous dilations by solving quantum stochastic differential equations, *Semesterbericht Funktionalanalysis Tübingen Sommersemester 1984(1984) 183-204*.
- [Ma2] H. Maassen : Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels, *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1136, (Springer, Berlin, 1985) 361-374*.
- [M] P. A. Meyer : *Quantum Probability for Probabilists* , Second edition. Lect Not. Math. 1538, Berlin : Springer-Verlag 1995.

- [P] K. R. Parthasarathy : *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Birkhäuser Verlag : Basel. Boston. Berlin.
- [Pe] A. N. Pechen : Quantum stochastic equation for test particle interacting with dilute bose gas, *J. Math. Phys.* 45 (2004), no. 1, 400-417.
- [R] R. Rebolledo : Complete Positivity and Open Quantum Systems. *Quantum Open systems, Vol II : The Markovian approach*. Springer Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, 1881 (2006).
- [SL] H. Spohn, J.L. Lebowitz : Irreversible thermodynamics for quantum systems weakly coupled to thermal reservoirs, *Adv. Chem. Phys.*, 38, 109-142, 1978.



## Résumé

En mécanique statistique quantique, un système quantique ouvert représente un petit système de degré fini de liberté en interaction avec un système extérieur très grand.

Pour décrire cette interaction, les physiciens et les mathématiciens utilisent souvent deux approches : l'approche markovienne et l'approche hamiltonienne.

Nous comparons systématiquement les approches hamiltonienne et markovienne dans les cas des modèles de spin-boson et de Pauli-Fierz. Ensuite, nous présentons un modèle lindbladien pour une chaîne de  $N$  spins couplée à des bains thermiques. Puis, nous étudions le lien entre les interactions quantiques répétées et la loi de densité faible. Finalement, nous étudions les propriétés des équations d'évolutions discrètes associées aux modèles d'interactions répétées, qui sont dirigées par des bruits discrets classiques.