



HAL
open science

SYSTEMES DE TENSEGRITE ET AUTOCONTRAINTES : QUALIFICATION, SENSIBILITE ET INCIDENCE SUR LE COMPORTEMENT

Jérôme Quirant

► **To cite this version:**

Jérôme Quirant. SYSTEMES DE TENSEGRITE ET AUTOCONTRAINTES : QUALIFICATION, SENSIBILITE ET INCIDENCE SUR LE COMPORTEMENT. Matériaux. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2000. Français. NNT : . tel-00174699

HAL Id: tel-00174699

<https://theses.hal.science/tel-00174699>

Submitted on 25 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADEMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITE MONTPELLIER II

"Sciences et Techniques du Languedoc"

THESE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Montpellier II

Discipline : **MECANIQUE, GENIE MECANIQUE, GENIE CIVIL**

Formation Doctorale : **MECANIQUE DES MATERIAUX ET DES MILIEUX
COMPLEXES, DES STRUCTURES ET DES SYSTEMES**

Ecole Doctorale : **INFORMATION, STRUCTURES ET SYSTEMES**

SYSTEMES DE TENSEGRITE ET AUTOCONTRAINTES : QUALIFICATION, SENSIBILITE ET INCIDENCE SUR LE COMPORTEMENT

Présentée et soutenue publiquement par

Jérôme QUIRANT

le **15 Juin 2000**, devant le jury composé de :

MM	O. MAISONNEUVE	Professeur Université Montpellier II	Président
	M. LEMAIRE	Professeur à l'I.F.M.A.	Rapporteur
	H. NGUYEN-DANG	Professeur Université de Liège, Belgique	Rapporteur
	N. M. KAZI-AOUAL	Maître de Conférences Université Montpellier	Examineur
	R. LAPORTE	Maître de Conférences Université Montpellier	Examineur
	R. MOTRO	Professeur Université Montpellier II	Directeur de Thèse

à ma famille, et tous ceux qui me sont chers...

Avant-propos

Cette thèse est l'aboutissement de trois ans de recherche au sein du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de l'Université de Montpellier II.

Ce travail de longue haleine a été réalisé en étroite collaboration avec M. Nadjib KAZI-AOUAL et sous la direction de René MOTRO.

Je tiens à remercier ici très sincèrement M. Olivier MAISONNEUVE, directeur du LMGC, non seulement pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, mais aussi pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de la soutenance.

J'exprime également ma gratitude envers MM. Hung NGUYEN DANG, Professeur à l'Université de Liège en Belgique, et Maurice LEMAIRE, Professeur à l'Institut Français de Mécanique Avancé de Clermont-Ferrand, qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de mes travaux. Qu'ils reçoivent l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je souhaite remercier tout particulièrement Roland LAPORTE qui, même s'il n'était pas officiellement encadrant, m'a été d'une aide très précieuse. Ses lumières sur beaucoup d'aspects mathématiques ont été décisives.

Bien sûr, M. Nadjib KAZI-AOUAL, en tant qu'encadrant, a pris une part très importante dans le suivi et la cohérence des travaux de recherche que j'ai pu mener. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude, non seulement pour ses conseils éclairés en tant que chercheur, mais aussi en tant que directeur des études de l'IUT de Génie Civil de Nîmes, pour son aide pédagogique.

En tant que Directeur de Thèse, René MOTRO a su me conseiller et me donner un point de vue toujours très pertinent sur l'avancement de mes travaux. Je tiens à lui exprimer mon extrême reconnaissance.

Enfin, je voudrais également associer tous ceux qui ont pu me soutenir tout au long de ces trois ans.

Bien sûr, cela comprend tous les membres du laboratoire, qui par leur accueil chaleureux ont su créer un environnement propice à l'accomplissement de mon travail.

Mais surtout, j'exprime mes plus chaleureux remerciements à mes parents sans qui jamais je n'aurais pu mener à bout mes études. Sans eux, ce manuscrit n'aurait jamais vu le jour. Encore merci.

Jérôme QUIRANT
Le 1^{er} Juillet 2000

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	9
1 INTRODUCTION AUX SYSTEMES DE TENSEGRITE	15
1.1 NOTIONS DE BASE	17
1.2 ETAT DE L'ART	21
1.2.1 LA RECHERCHE DE FORME	21
1.2.1.1 Les bases	21
1.2.1.2 La méthode itérative	24
1.2.1.3 La méthode analytique	25
1.2.1.4 Conclusion sur la recherche de forme	25
1.2.2 LE RECENSEMENT DES ETATS D'AUTOCONTRAINTTE ET DES MECANISMES	26
1.2.3 LE TEST DE STABILITE	27
1.2.4 CONCLUSION	28
1.3 OBJECTIFS DE L'ETUDE	29
2 CONCEPTION DE SYSTEMES DE TENSEGRITE COMPLEXES	33
2.1 QUALIFICATION DE L'AUTOCONTRAINTTE	35
2.1.1 QUELS ASSEMBLAGES POUR QUELLES STRUCTURES ?	35
2.1.1.1 Assemblages plans « nœud sur nœud »	37
2.1.1.2 Assemblages plans à barre unique par nœud	38
2.1.1.3 Assemblages à simple courbure	39
2.1.1.4 Assemblages à double courbure, assemblages polyédriques	40
2.1.2 DETERMINATION DES ETATS D'AUTOCONTRAINTTE ET DES MECANISMES	40
2.1.2.1 Le recensement pur	41
2.1.2.2 Le problème lié au comportement unilatéral des câbles	43
2.1.3 VERIFICATION DES RESULTATS	46
2.1.3.1 Rappels sur la détermination des états d'autocontrainte	46
2.1.3.2 Recherche d'un état d'autocontrainte total conforme	47
2.1.4 MISE EN EVIDENCE DES ETATS D'AUTOCONTRAINTTE CONFORMES	50
2.1.4.1 Une méthode intuitive	50
2.1.4.1.1 Cas le plus favorable	52
2.1.4.1.2 Cas général	54
2.1.4.1.3 Un point de vue mécanique	55
2.1.4.2 La méthode conditionnelle	57
2.1.5 UNE METHODE MATHEMATIQUE SYSTEMATIQUE	59
2.1.5.1 Les cas triviaux	60
2.1.5.2 Une interprétation géométrique	60
2.1.5.2.1 Cas $s=2$	60
2.1.5.2.2 Cas $s=3$	62
2.1.5.2.3 Cas $s=4$	65
2.1.5.3 Détermination des arêtes du cône de conformité	67
2.1.6 CONCLUSION	70
2.2 DIMENSIONNEMENT DES SYSTEMES DE TENSEGRITE	73
2.2.1 LE CALCUL DES SYSTEMES DE TENSEGRITE	73

2.2.1.1	Matrices de rigidité	74
2.2.1.2	La méthode de NEWTON-RAPHSON	75
2.2.1.3	La méthode de NEWTON-RAPHSON modifiée	77
2.2.1.4	Cas des câbles relâchés	78
2.2.1.5	Conclusion	78
2.2.2	PARAMETRES DE L'ETUDE	79
2.2.2.1	Les données de l'étude	79
2.2.2.2	Influence du niveau d'autocontrainte	80
2.2.2.3	Influence de la rigidité relative des éléments	82
2.2.3	CADRE REGLEMENTAIRE	84
2.2.3.1	Les codes déterministes	84
2.2.3.2	L'approche probabiliste	84
2.2.3.3	Le modèle semi-probabiliste	85
2.2.3.4	Application de l'Eurocode 3 aux systèmes de tenségrité	87
2.2.3.4.1	Les combinaisons d'actions	87
2.2.3.4.2	Critères aux ELS	88
2.2.3.4.3	Critères aux ELU	89
2.2.4	DIMENSIONNEMENT D'UNE GRILLE DE TENSEGRITE	89
2.2.4.1	Quelques idées pour le dimensionnement	92
2.2.4.2	Dimensionnement aux ELS	93
2.2.4.3	Vérification aux ELU	96
2.2.4.4	Optimisation	98
2.2.5	CONCLUSION	100

3 ETUDE DE LA SENSIBILITE ET DE LA MISE EN AUTOCONTRAINTTE 103

3.1	ETUDE DE LA SENSIBILITE	105
3.1.1	POSITION DU PROBLEME – ETUDE STATISTIQUE	106
3.1.1.1	Cas d'un câble isolé	106
3.1.1.2	Cas des systèmes de tenségrité	107
3.1.1.3	Echantillonnage des données et algorithme	107
3.1.1.4	Détermination d'un intervalle caractéristique	109
3.1.2	LA SENSIBILITE DE L'OCTAEDRE EXPANSE	115
3.1.2.1	Perturbation de l'état d'autocontrainte	115
3.1.2.1.1	L'octaèdre expansé isolé	115
3.1.2.1.2	Assemblage d'octaèdres expansés	122
3.1.2.1.3	Conclusion sur la sensibilité de l'autocontrainte	125
3.1.2.2	Influence sur le comportement.	125
3.1.2.3	Conclusion sur l'étude de l'octaèdre	127
3.1.3	LA SENSIBILITE DU DEMI-CUBOCTAEDRE	128
3.1.3.1	Perturbation de l'état d'autocontrainte	128
3.1.3.1.1	Le demi-cuboctaèdre isolé	128
3.1.3.1.2	Assemblages linéiques	129
3.1.3.1.3	Assemblage en grille à double nappe.	132
3.1.3.2	Influence sur le comportement.	134
3.1.4	CONCLUSION	135
3.2	SIMULATION DE LA MISE EN AUTOCONTRAINTTE	137
3.2.1	COMMENT AGIR POUR INSTAURER L'AUTOCONTRAINTTE ?	137
3.2.1.1	Algorithme de calcul	138
3.2.1.2	Exemple d'application	138
3.2.2	MISE EN EVIDENCE D'IMPOSSIBILITES	141
3.2.3	LE CHOIX DES CABLES	143
3.2.3.1	Un nombre suffisant de câbles : s	143
3.2.3.2	Cas du nombre de câbles actifs inférieur à s	144

3.2.4	MISE EN TENSION ET SENSIBILITE AUX IMPRECISIONS DE FABRICATION	146
3.2.4.1	Cas d'un demi-cuboctaèdre	146
3.2.4.2	Cas d'un assemblage de 3 demi-cuboctaèdres	147
3.2.4.3	Conclusion sur sensibilité et mise en tension	148
3.2.5	CONCLUSION SUR LA MISE EN AUTOCONTRAINTTE	148
CONCLUSION		151
ANNEXE A : GENERATION DE QUELOUES ASSEMBLAGES POLYEDRIQUES		153
ANNEXE B : DETERMINATION DU NOYAU DE LA MATRICE D'EQUILIBRE		159
ANNEXE C : RAPPELS SUR LA METHODE DU SIMPLEXE		163
ANNEXE D : CODE DES COULEURS POUR LES FIGURES		167
ANNEXE E : STRATEGIE DE PARCOURS DU DOMAINE ADMISSIBLE		169
ANNEXE F : COMPARAISON DES RESULTATS TENSEGRITE 2000-ABAQUS		173
ANNEXE G : CALCUL DE LA CHARGE DE FLAMBEMENT LIMITE POUR L'EC3		174
ANNEXE H : ORGANIGRAMME POUR LE DIMENSIONNEMENT		175
ANNEXE I : VALEUR CARACTERIS TIQUE DANS LE CAS D' UN MAXIMUM		176
ANNEXE J : MISE EN AUTOCONTRAINTTE DE TROIS DEMI-CUBOCTAEDRES		178
BIBLIOGRAPHIE		181
TABLE DES ILLUSTRATIONS		187

Notations

Symboles

$\{.\}$	Vecteur
$\{.\}^t$	Vecteur transposé
$[.]$	Matrice
$[.]^t$	Matrice transposée
$[.]^{-1}$	Matrice inverse
$\dim (.)$	Dimension d'un espace vectoriel
$\det [.]$	Déterminant d'une matrice
$\ker[.]$	Noyau d'une matrice
\cdot	Produit scalaire
$=$	Egalité exacte
\approx	Egalité approchée
(O_r)	
\approx	Egalité à l'ordre r
$\stackrel{\text{déf}}{=}$	Définition
$\sum_{j \in i}$	Sommation à effectuer sur tous les éléments j aboutissant au nœud i
$\sum_{x,y,z}$	Sommation à effectuer selon les trois directions de l'espace

Notations

Scalars

b	Nombre d'éléments du système considéré
b_j^i	Coefficient de la ligne j et la colonne i dans le tableau du simplexe
c	Nombre de câbles du système considéré
d_{ix}	Composante, sur l'axe X de l'espace, du déplacement d'un nœud
d_{iy}	Composante, sur l'axe Y de l'espace, du déplacement d'un nœud
d_{iz}	Composante, sur l'axe Z de l'espace, du déplacement d'un nœud
e_j	Coefficient de variation de longueur de l'élément j
f_{ix}	Action extérieure appliquée au nœud i suivant l'axe x
k	Nombre de degrés de liberté bloqués pour le système considéré
k	Probabilité de dépassement d'une variable d'une valeur caractéristique X_k donnée
k_s	Coefficient de sécurité pour l'estimation d'une valeur caractéristique
l_j^{lib}	Longueur libre de l'élément considéré (longueur de fabrication)
l_j^0	Longueur de l'élément j dans la géométrie de référence (assemblée, non chargée)
l_j	Longueur de l'élément j dans une géométrie chargée quelconque
m	Nombre de mécanismes indépendants de la structure
N	Nombre de degrés de liberté du système considéré
n	Nombre de nœuds du système
n	Nombre de simulations de l'échantillon considéré
p_j	Perturbation appliquée à la longueur de fabrication d'un élément
p	Confiance requise ou assurée dans la détermination d'une valeur caractéristique
q_j	Coefficient d'autocontrainte pour l'élément considéré
S	Ecart type de l'échantillon (estimateur biaisé de σ)
S^*	Estimateur non biaisé de σ

s	Nombre d'états d'autocontrainte indépendants de la structure
T_j	Tension dans un élément pour un système dans un état assemblé chargé
E_j	Module de YOUNG du matériau pour l'élément considéré
S_j	Aire de la section droite de l'élément considéré
u_k	Fractile de la loi normale centrée réduite pour une probabilité de dépassement k
V	Estimateur d'une variable caractéristique
W	Energie de déformation due à l'excitation d'un mécanisme
X_k	Valeur caractéristique d'une variable X pour une probabilité de dépassement k
\bar{X}	Valeur moyenne de l'échantillon considéré
x_i, x_h	Coordonnées, sur l'axe X de l'espace, des nœuds extrémités d'un élément
y_i, y_h	Coordonnées, sur l'axe Y de l'espace, des nœuds extrémités d'un élément
z_i, z_h	Coordonnées, sur l'axe Z de l'espace, des nœuds extrémités d'un élément
Y	Condition posée sur le vecteur $\{\alpha\}$ pour la méthode du simplexe
Δ_j^0	Variation de longueur d'un élément de sa longueur libre à sa longueur de référence
Δ_j	Variation de longueur d'un élément par rapport à sa longueur de référence
μ	Valeur moyenne d'une variable aléatoire
σ	Ecart type d'une valeur aléatoire donnée

Vecteurs

$\{c\}$	Vecteur condition pour la recherche d'un état d'autocontrainte
$\{f\}$	Vecteur constitué des N actions extérieures appliquées aux nœuds du système
$\{q\}$	Vecteur constitué des b coefficients d'autocontrainte
$\{u\}$	Vecteur des déplacements nodaux
$\{T\}$	Vecteur constitué des b tensions dans les éléments
$\{x\}$	Vecteur des coordonnées de chaque nœud du système
$\{\alpha\}$	Vecteur de combinaison des états d'autocontrainte
$\{\delta\}$	Vecteur mécanisme à N composantes
$\{\delta u\}$	Vecteur d'incrément de déplacement entre deux itérations
$\{\delta f\}$	Vecteur d'incrément d'actions extérieures entre deux itérations

Matrices

$[A]$	Matrice d'équilibre du système
$[C]$	Matrice de connectivité du système
$[Co]$	Matrice de condition pour la recherche d'un état d'autocontrainte
$[D^0]$	Matrice de connexion des coefficients d'autocontrainte
$[K]$	Matrice de rigidité de la structure
$[K_T]$	Matrice de rigidité tangente
$[K_E]$	Matrice de rigidité élastique
$[K_G]$	Matrice de rigidité géométrique
$[K_{NL}]$	Matrice de rigidité non linéaire
$[Q^0]$	Matrice diagonale formée des b coefficients d'autocontrainte du système
$[S]$	Matrice des états d'autocontrainte
$[S']$	Matrice des états d'autocontrainte transformée
$[\Delta A_\delta]$	Matrice des déplacements relatifs dus au mécanisme δ

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Depuis toujours, les hommes ont construit des édifices, que ce soit pour se protéger des intempéries, en hommage à des croyances, voire en guise de sépulture. Pour cela, ils ont utilisé dans un premier temps des matériaux très rudimentaires qui existaient à l'état brut dans la nature : pierre, bois, etc... L'évolution aidant, ils ont appris à transformer certains matériaux, à les combiner, la chaux puis le ciment furent utilisés comme liants.

L'évolution des principes architecturaux a permis également d'alléger ces structures : déjà, le style gothique permettait la construction de structures moins massives que le style roman. Mais c'est l'arrivée de l'acier dans la construction qui va permettre la conception de structures élancées et ne nécessitant que peu de main d'œuvre comparativement aux autres techniques.

Des considérations esthétiques poussant les architectes à créer des structures de plus en plus légères, ils se sont tournés vers des solutions utilisant la **précontrainte**. Dans le béton, elle permet de réduire fortement les sections et allège la structure ; dans la construction métallique elle est utilisée dans les structures haubanées ou pour créer des poutres câbles. La forme la plus raffinée étant l'utilisation de membranes textiles qui constituent de véritables peaux couvrant et protégeant les constructions.

Finalement, le poids propre des structures est devenu inférieur aux charges qu'elles sont capables de supporter, voire même aux actions que peut engendrer le vent sur une structure. C'est ce que SARGER [SAR67] appelle la révolution structurale (Figure 1).

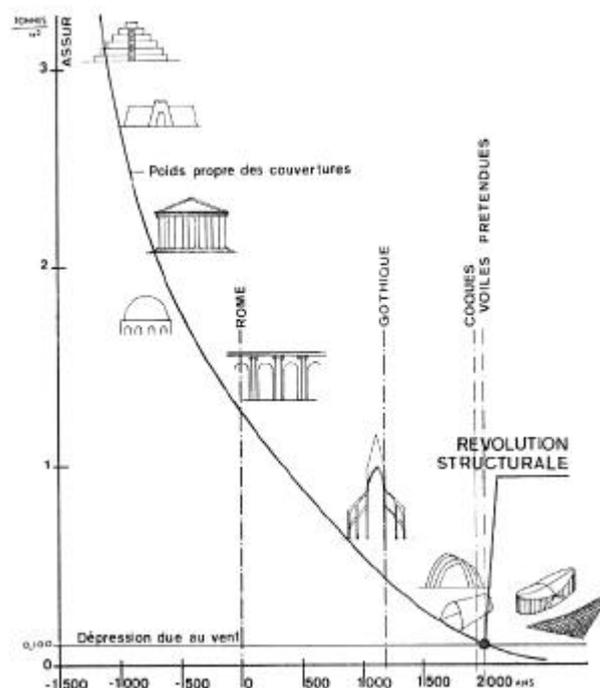


Figure 1 : Evolution du poids propre des constructions au fil des siècles [SAR67]

Même dans le domaine de la construction métallique des évolutions sont notables : des charpentes métalliques, l'architecture a évolué vers les systèmes triangulés, puis les treillis, pour aboutir aux réseaux de câbles. De structures qui n'étaient capables de supporter des actions que dans deux directions, on est ainsi passé à des systèmes reprenant des actions dans les trois directions de l'espace.

Le problème posé par les réseaux de câbles ou les membranes vient de la mise en tension qui nécessite, pour introduire les efforts, des massifs d'ancrage qui peuvent être importants. L'idée de créer des systèmes qui pourraient accepter un état de sollicitation interne sans massif d'ancrage extérieur vit alors le jour. On ne parla plus alors de précontrainte mais d'**autocontrainte**.

Si de plus les éléments constitutifs du système sont réticulés, ils ne sont soumis qu'à des sollicitations de traction ou compression (dans le cas d'actions extérieures nodales).

Ces systèmes, réticulés, spatiaux et autocontraints étant constitués d'éléments rectilignes, cela incita leurs concepteurs à utiliser des éléments câbles pour les éléments tendus et des barres pour les éléments comprimés. Il faut souligner que cette idée fut pour la première fois mise en application par un sculpteur, Kenneth SNELSON [SNE73]. Mais il fut vite rejoint par des ingénieurs comme Richard Buckminster FULLER ([FUL62] & [FUL73]) ou David Georges EMMERICH [EMM88].

Si EMMERICH utilisa le nom de "structures tendues et autotendantes", c'est aujourd'hui le terme de **tenségrité** qui fait l'unanimité. **Tenségrité** est une traduction libre du terme **tensegrity** qui est le résultat de la contraction des termes «Tensile Integrity». Il fait mieux référence à cet assemblage d'éléments tendus seulement maintenus par des éléments comprimés. FULLER parlera même "d'îlots de compression dans un océan de traction".

En outre, il faut souligner que pour certaines structures, l'assemblage est réalisé de telle façon que les barres forment un réseau discontinu. Elles donnent alors l'impression de flotter dans l'espace (Figure 2)...

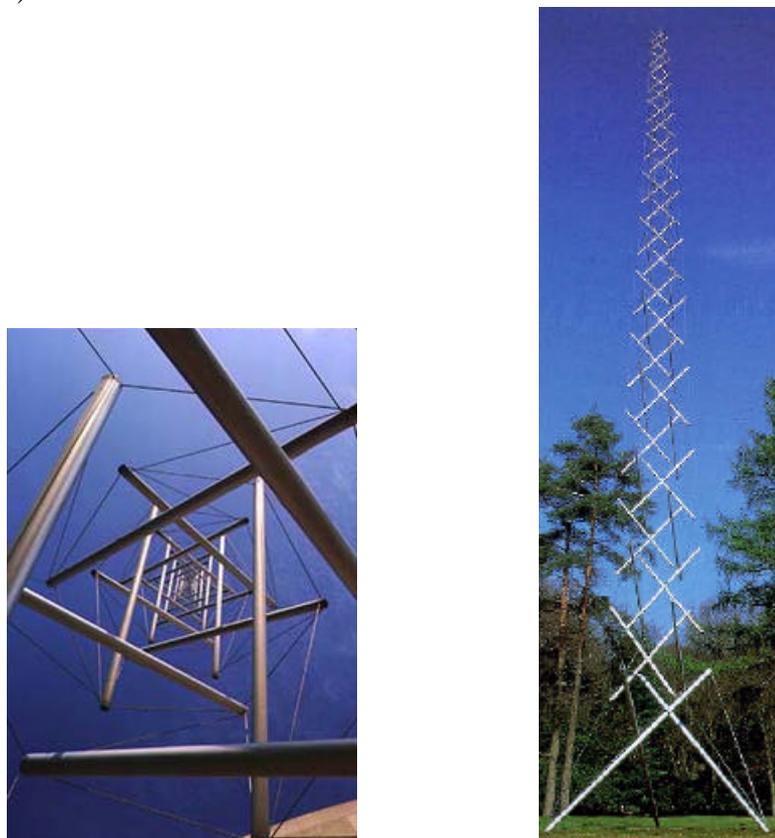


Figure 2 : Un système de tenségrité réalisé par Kenneth SNELSON "Needle Tower"

Cette classe particulière des systèmes réticulés a donné lieu à de nombreuses études. En France, René MOTRO [MOT83] fut le précurseur en la matière.

D'autres personnes y ont travaillé à l'étranger, en se basant sur des études expérimentales et théoriques : HANAOR en Israël [HAN94], ou KONO au Japon [KON99] qui a pu réaliser dernièrement des études dynamiques.

Des applications dans le domaine de la biologie sont même envisagées pour modéliser le comportement du cytosquelette [ING98].

Dans ce manuscrit de thèse, c'est en vue d'applications architecturales que nous souhaitons pousser plus loin l'étude des systèmes de tenségrité.

Nous nous baserons dans un premier temps sur les résultats théoriques antérieurs, puis, nous exposerons des méthodes permettant d'envisager la réalisation de structures destinées au Génie Civil.

La conception de tout système de tenségrité comporte une première étape appelée **recherche de forme**. Elle définit la géométrie du système qui permet la mise en place d'une autocontrainte. VASSART a fourni des méthodes permettant de réaliser cette recherche de façon multi-paramétrée [VAS 97].

Par la suite, pour ce qui est de l'étude du comportement, des méthodes ont été développées pour décrire le comportement des systèmes de tenségrité dans le cadre des grands déplacements [KEB 99]. Elles ont permis l'étude de modules élémentaires possédant un nombre peu important de modules [QUI96].

L'aptitude au pliage [BOU98] et au contrôle [DJO98] sont autant d'arguments en faveur du développement des systèmes de tenségrité mais ils ne seront pas abordés ici.

Les obstacles qui restent aujourd'hui à lever pour la réalisation concrète de systèmes constructifs sont de plusieurs natures.

➤ D'abord du point de vue purement mécanique, l'autocontrainte dans les systèmes de tenségrité n'a jamais été qualifiée. La plupart des chercheurs travaillant sur le sujet se sont restreints au recensement du nombre d'états d'autocontrainte indépendants. Si nous souhaitons aller plus loin dans la conception de ces systèmes, il faut procéder à une **qualification** des états d'autocontrainte. Par qualification, nous entendons une caractérisation et une validation à la fois *quantitative* et *qualitative* des états d'autocontrainte, sachant qu'ils doivent respecter le comportement unilatéral des éléments câbles pour pouvoir être mis en œuvre.

➤ Ensuite, il faut s'assurer que le système conçu pourra supporter les charges réglementaires définies dans les codes de calcul. Nous verrons que compte tenu des nombreux paramètres régissant le comportement de la structure, le dimensionnement n'est pas trivial et doit tenir compte de la variabilité de l'autocontrainte.

➤ En effet, l'autocontrainte étant introduite en agissant sur les longueurs des éléments, il faut quantifier les conséquences des tolérances de fabrication sur le comportement de la structure. C'est une étude de la sensibilité des systèmes à ces variations qui nous permettra d'en assurer ultérieurement la fiabilité.

➤ Enfin, il faut s'inquiéter de la faisabilité, c'est à dire la possibilité d'un montage aisé du système. Nous donnerons donc les premiers éléments permettant de choisir une procédure de mise en tension.

Dans ce manuscrit, une introduction aux systèmes de tensegrité permettra de rappeler les bases mécaniques essentielles et spécifiques à ces systèmes.

Une deuxième partie sera consacrée à l'étude et la qualification de l'autocontrainte en vue du dimensionnement qui sera traité sous un point de vue réglementaire.

Enfin, la troisième sera axée sur les problèmes liés à la réalisation avec d'une part, l'étude de la sensibilité aux tolérances de fabrication des éléments, et d'autre part quelques solutions pour la mise en autocontrainte.

Partie 1

INTRODUCTION AUX SYSTEMES DE TENSEGRITE

1 Introduction aux Systèmes de Tenségrité

La caractérisation des systèmes de tenségrité a donné lieu à de nombreuses définitions. Certaines étaient implicitement contenues dans les brevets, d'autres résultent de propositions de chercheurs qui sont de plus en plus nombreux à s'intéresser au sujet.

Aujourd'hui, MOTRO [MOT00] propose une définition conceptuelle très générale : *'Un système de tenségrité est un système dans un état d'autocontrainte stable, il comprend un ensemble discontinu de composants comprimés à l'intérieur d'un continuum de composants tendus'*.

Mais pour des systèmes destinés à la construction, il est loisible de donner une autre définition, qui est plus restrictive que la précédente. En introduisant le concept d'éléments linéaires et réticulés, la définition devient [MOT97] : *"les systèmes de tenségrité sont des systèmes réticulés, spatiaux en état d'autocontrainte. Les éléments ont une fibre moyenne rectiligne et des tailles du même ordre de grandeur. Les éléments comprimés forment un réseau discontinu. Les éléments tendus forment un réseau continu et n'ont pas de rigidité en compression"*.

Ce type de système peut être visualisé sur la Figure 3.

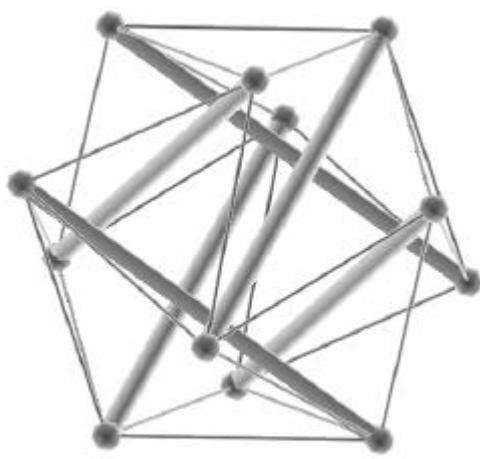


Figure 3 : Un système de tenségrité à six barres, l'octaèdre expansé.

Nous allons revenir dans ce chapitre sur les notions incluses dans ces définitions afin de préciser quelles sont les caractéristiques majeures des systèmes de tenségrité sur un plan mécanique.

1.1 Notions de base

Comme nous l'avons vu, les systèmes de tenségrité sont des systèmes réticulés spatiaux autocontraints :

- Ils sont **réticulés** dans la mesure où leurs éléments constitutifs sont associés par des liaisons autorisant de potentielles rotations. Ces liaisons seront appelées nœuds du système. Les fibres moyennes des éléments étant supposées coïncidentes au centre de gravité des liaisons, les sollicitations induites dans les éléments sont uniquement des sollicitations de traction ou de compression simple lorsque les charges extérieures sont appliquées aux nœuds. Du point de vue du calcul de structures, cela simplifie l'étude, trois paramètres seulement caractérisent un élément : la section droite (au sens large : aire, inertie, etc.), le module de YOUNG et la longueur de fabrication.
- Ils sont **spatiaux** car ils peuvent rester en équilibre sous des actions extérieures de direction quelconque. Nous avons vu que ces actions sont supposées appliquées sur les nœuds pour ne pas engendrer de sollicitation de flexion ou de torsion dans les éléments.
- Enfin, l'**autocontrainte** est un état de sollicitation qui est instauré dès le montage du système. Elle est indépendante de toute liaison avec l'extérieur et elle est définie à un coefficient multiplicatif près définissant le **niveau d'autocontrainte**.

Afin d'expliquer comment cet état de contrainte initial particulier peut exister, il est possible de faire une analogie entre la mise en pression d'un ballon et la mise en autocontrainte d'un système de tenségrité (Figure 4).

Lorsqu'un ballon est dégonflé, sa géométrie est quelconque et la pression de l'air à l'intérieur est égale à la pression atmosphérique p^0 . Pour lui donner la forme pour laquelle l'enveloppe a été conçue, il faut injecter une quantité d'air supplémentaire.

Pour un volume insufflé bien déterminé, égal au volume limité par l'enveloppe, le ballon a atteint quasiment sa forme définitive mais la membrane n'est toujours pas tendue.

Pour tendre l'enveloppe et donner de la rigidité au ballon, il faut accroître la pression interne en augmentant encore la quantité d'air contenue.

De la même façon, dans le cas des systèmes de tenségrité trois étapes peuvent être distinguées.

A partir d'une structure relationnelle donnée entre les éléments, une géométrie à contraintes initiales nulles est déterminée, géométrie pour laquelle le système est stable sans posséder de rigidité.

Il faut alors jouer sur les tailles relatives des éléments pour instaurer les sollicitations dans les éléments (T comme tension) qui vont rigidifier le système.

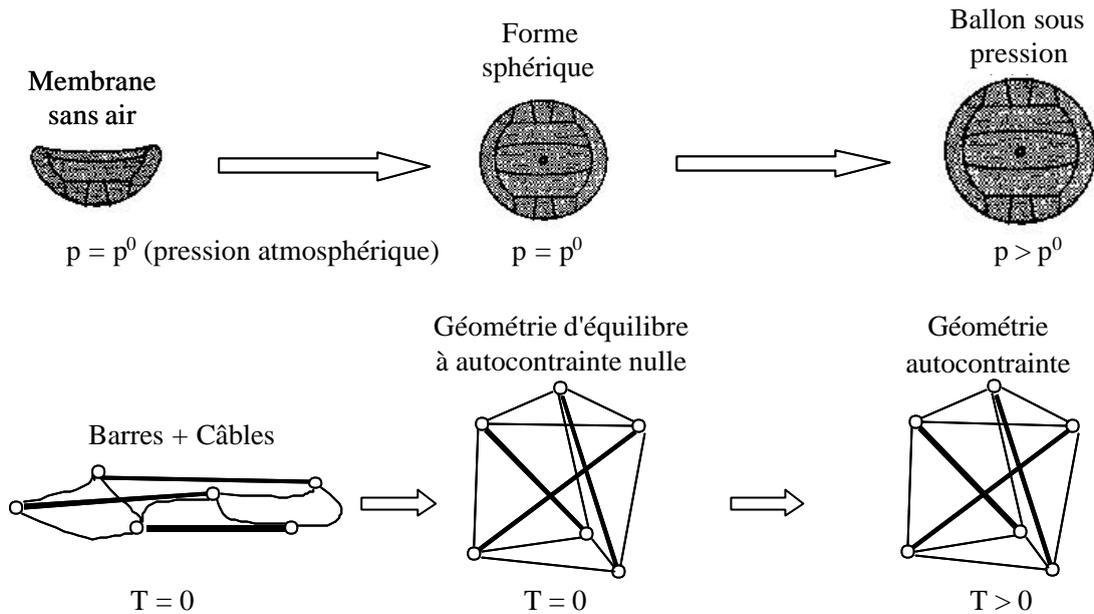


Figure 4 : Analogie entre la mise en pression d'un ballon et la mise en autocontrainte d'un système de tenségrité.

Une autre caractéristique importante des systèmes de tenségrité est qu'ils peuvent posséder des **mécanismes infinitésimaux**.

Un mécanisme est défini comme étant un déplacement particulier des nœuds tel que les variations de longueur des éléments induites sont nulles, au moins au premier ordre (ordre des déplacements nodaux).

Si ces déformations sont exactement nulles, le mécanisme est dit **fini**. Cela correspond à un mouvement de solide rigide.

Si elles ne sont nulles que jusqu'à un certain ordre, on parle de **mécanismes infinitésimaux**. L'ordre du mécanisme infinitésimal est défini comme étant le dernier ordre pour lequel les déformations sont nulles [VAS00].

Bien sûr, ces mécanismes sont des faiblesses pour la structure : les éléments se déformant peu, ils s'opposent peu aux déplacements. En fait, ce sont les contraintes initiales qui vont pallier cette souplesse en agissant comme des forces de rappel. Plus les contraintes initiales seront fortes, plus le mécanisme sera difficilement mobilisable (Figure 5).

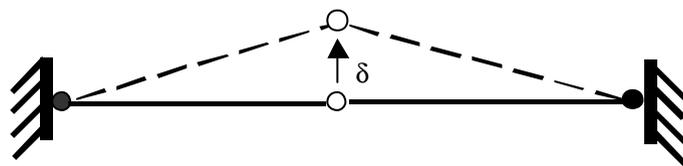


Figure 5 : Exemple d'un mécanisme pour une structure à deux éléments (mécanisme d'ordre 1, allongement des éléments d'ordre d^2).

Il est bien entendu que la mise en place de l'autocontrainte n'est possible que pour des configurations très particulières.

Dans le cas du ballon, la forme finale dépend de la forme de l'enveloppe. Une des premières phases de la conception des systèmes de tensegrité consiste donc à déterminer des configurations géométriques compatibles avec l'existence d'un état d'autocontrainte. C'est ce qui est appelé la *recherche de forme*.

Par la suite, le concepteur peut déterminer le nombre d'états d'autocontrainte du système et ses mécanismes. En dernier lieu, il faut s'assurer que le (ou les) états d'autocontrainte trouvés stabilisent le (ou les) mécanismes recensés.

Le paragraphe qui suit est consacré à la présentation des connaissances actuelles dans ce domaine de l'étude mécanique des systèmes de tensegrité.

1.2 Etat de l'Art

De nombreuses études ont déjà été menées dans le domaine de la mécanique des systèmes de tenségrité.

Le problème de la recherche de forme est traité dans la première partie.

Ensuite, nous verrons comment peuvent être recensés les états d'autocontrainte et les mécanismes qui caractérisent les systèmes de tenségrité.

Enfin, nous exposerons une méthode permettant de s'assurer que le système considéré est stable.

1.2.1 La recherche de forme

La recherche de forme peut s'opérer de différentes façons. Plusieurs méthodes ont été développées, que ce soit d'un point de vue statique ou dynamique. Dans les méthodes statiques, nous pouvons citer les méthodes expérimentales, graphiques ou cinématiques. Les méthodes dynamiques reposent, elles, sur la méthode de la relaxation dynamique [BAR75] avec ou sans atténuation de l'énergie cinétique.

Le principal handicap de ces méthodes est qu'elles ne permettent pas de faire de recherche de forme multi-paramétrée. C'est pourquoi VASSART [VAS97] a développé de nouvelles méthodes permettant d'effectuer la recherche de forme sur des structures à grand nombre de degrés de liberté.

1.2.1.1 Les bases

Les deux méthodes proposées par VASSART (itérative et analytique) sont basées sur la formulation des densités de forces initialisée par LINKWITZ [LIN71] et reprise par SHECK [SHE74].

Cette formulation est surtout utilisée dans l'étude et le calcul de réseaux de câbles tendus. Elle a été adaptée pour la recherche de forme des systèmes de tenségrité.

Avant de commencer l'exposé de ces méthodes, nous devons dans un premier temps présenter les notations qui seront utilisées par la suite.

Tout d'abord, le nombre total d'éléments d'un système sera noté \mathbf{b} . Ces éléments étant chacun reliés à deux nœuds, nous noterons \mathbf{n} le nombre total de nœuds dans la structure. Un élément courant sera noté j ($j \in [1, \dots, \mathbf{b}]$) et un nœud courant i ($i \in [1, \dots, \mathbf{n}]$).

Le nombre total de degrés de liberté bloqués par un bâti éventuel est noté \mathbf{k} . De ce fait, le nombre de degrés de liberté pour une structure spatiale sera de $\mathbf{N} = 3\mathbf{n} - \mathbf{k}$.

Il faut également définir à ce niveau les différentes notations concernant les longueurs des éléments. Elles peuvent être estimées, soit dans un état libre (longueur de fabrication), soit

dans un état de référence (géométrie assemblée, non chargée), soit dans un état chargé (la structure est soumise à des actions extérieures).

La variation de longueur Δl_j^0 est la variation de longueur entre l'état libre et l'état de référence, la variation de longueur Δl_j est la variation de longueur entre l'état de référence et l'état chargé.

Ces trois états sont schématisés sur la Figure 6.

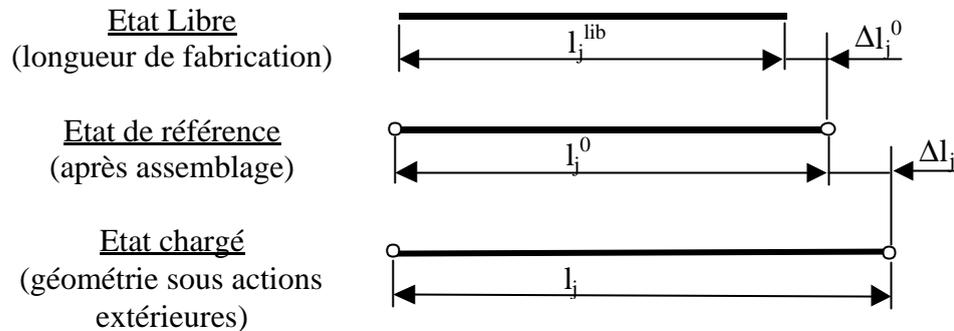


Figure 6 : Notation de la longueur d'un élément suivant son état

Les efforts dans chaque élément j sont notés T_j . L'ensemble de ces valeurs constitue un vecteur des efforts à b termes, $\{T\}$.

Les déplacements nodaux peuvent également être mis sous forme vectorielle, ils donnent un vecteur $\{d\}$ à N composantes. De la même façon, le vecteur des actions extérieures $\{f\}$ se présente comme un vecteur à N termes.

Notation 1 $\{T\} = \{T_1 \dots T_j \dots T_b\}^t$

Notation 2 $\{d\} = \{\dots d_{ix}, d_{iy}, d_{iz} \dots\}^t$

Notation 3 $\{f\} = \{\dots f_{ix}, f_{iy}, f_{iz} \dots\}^t$

A partir de ces notations, il est possible de définir une autre quantité caractérisant l'état de sollicitation pour chaque élément, c'est le **coefficient de densité de force**.

Équation 1 $q_j = \frac{T_j}{l_j^0}$

Où q_j est le coefficient de densité de force de l'élément j , l_j^0 la longueur de référence de l'élément et T_j l'effort dans l'élément.

De la même manière que précédemment un vecteur $\{q\}$ regroupant les b coefficients de densités de forces est défini.

Notation 4 $\{q\} = \{q_1 \dots q_j \dots q_b\}^t$

L'avantage de ces coefficients de densités de forces, est qu'ils vont permettre de simplifier l'écriture de l'équilibre statique des nœuds.

En effet, les équations d'équilibre du système se formulent pour chaque nœud libre du système suivant l'Équation 2 :

$$\text{Équation 2} \quad \vec{f}_i + \sum_{j \neq i} \vec{T}_j = 0$$

où les \vec{T}_j sont les actions exercées par chaque élément j connecté au nœud i , et \vec{f}_i l'action extérieure appliquée au nœud i .

En définissant pour chaque élément les coordonnées des nœuds suivant la Figure 7 (coordonnées globales) et en prenant comme convention de signe que la traction est positive, il est alors possible d'écrire les équations d'équilibre projetées sur les trois directions de l'espace (Équation 3).

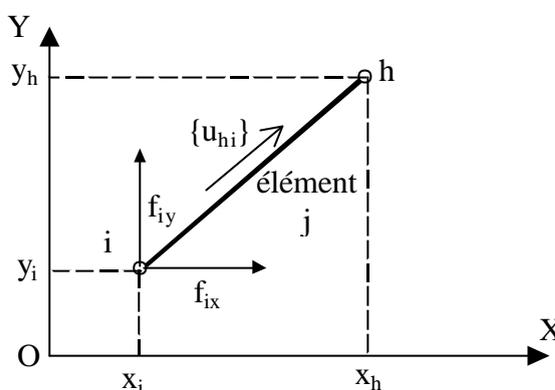


Figure 7 : Définition du nœud libre i connecté au nœud h par l'élément j , $\{u_{hi}\}$ est le vecteur directeur unitaire de l'élément. (Projection suivant la direction Z)

$$\text{Équation 3} \quad \begin{cases} \sum_{j \neq i} \frac{(x_h - x_i)}{l_j^0} T_j + f_{ix} = 0 \\ \sum_{j \neq i} \frac{(y_h - y_i)}{l_j^0} T_j + f_{iy} = 0 \\ \sum_{j \neq i} \frac{(z_h - z_i)}{l_j^0} T_j + f_{iz} = 0 \end{cases}$$

L'intérêt du coefficient de densité de force est évident lorsqu'il est intégré dans l'Équation 3 :

$$\text{Équation 4} \quad \begin{cases} \sum_{j \neq i} (x_i - x_h) q_j = f_{ix} \\ \sum_{j \neq i} (y_i - y_h) q_j = f_{iy} \\ \sum_{j \neq i} (z_i - z_h) q_j = f_{iz} \end{cases}$$

Les équations sont alors bi-linéaires et peuvent être écrites sous forme matricielle :

Bien sûr, la résolution de ce système linéaire n'est possible qu'après la définition complète de $[D^0]$. Cela suppose que la structure relationnelle du système $[C]$ et l'état d'autocontrainte $[Q^0]$ soient connus.

Cette nécessité de choisir, a priori, un état d'autocontrainte du système est un problème car elle n'amène pas forcément à des solutions acceptables. En effet, rien n'assure le concepteur de la non-dégénérescence de la solution : solution réduite à un point par exemple. Il faut alors poser des conditions sur le rang de la matrice $[D^0]$ pour obtenir un système réticulé spatial.

Il est possible de faire plusieurs essais, voire de proposer une résolution itérative (d'où le nom de la méthode), mais cela reste quelque peu aléatoire.

Si le concepteur désire gérer au mieux la géométrie de la structure, la méthode analytique est plus appropriée.

1.2.1.3 La méthode analytique

Cette méthode est basée sur l'équation d'équilibre issue de la définition des coefficients de densités de forces (Équation 5).

Comme nous l'avons vu, la recherche des états d'autocontrainte suppose que pour un chargement $\{f\}$ nul, il existe au moins un vecteur d'autocontrainte $\{q^0\}$ non nul. Ce qui revient à dire que le noyau de la matrice $[A]$ est non nul (Équation 7).

Pour ce faire, il faut que la dimension du noyau soit strictement supérieur à zéro, sachant qu'il ne peut excéder le minimum du nombre de lignes et de colonnes.

L'idée de la méthode est justement d'écrire analytiquement cette condition sur la matrice $[A]$ et de résoudre le problème de manière symbolique. Cela permet d'obtenir les relations sur les composantes autorisant l'introduction d'un état d'autocontrainte dans le système.

1.2.1.4 Conclusion sur la recherche de forme

Le concepteur a donc à ce jour au moins deux méthodes permettant de faire une recherche de forme multi-paramétrée. A partir d'une structure relationnelle donnée, il peut soit fixer un état d'autocontrainte et rechercher la géométrie correspondante, soit poser analytiquement les conditions de la présence d'un état d'autocontrainte dans la structure et en déduire la géométrie. Dans un cas, il maîtrise au mieux l'état d'autocontrainte, dans l'autre, la géométrie.

Le choix entre les deux méthodes se fera suivant les objectifs du concepteur et les outils informatiques dont il dispose. Il est bien sûr possible de les combiner.

Il faut également noter que pour **un vecteur $\{q^0\}$ donné**, il peut exister **plusieurs géométries autocontraintes**. De la même façon, pour une **géométrie donnée**, **plusieurs états d'autocontrainte** peuvent être présents.

Aussi, une fois cette géométrie autocontrainte définie, il faut passer à une autre étape de la conception qui est la recherche de tous les états d'autocontrainte et de tous les mécanismes de la structure. Elle est essentielle pour pouvoir vérifier la stabilité de la structure.

1.2.2 Le recensement des états d'autocontrainte et des mécanismes

La recherche de forme permet de définir une géométrie pour laquelle le concepteur est sûr de trouver un état d'autocontrainte. Mais il est important de vérifier a posteriori quels sont tous les états d'autocontrainte et les mécanismes présents dans le système.

D'ailleurs, comme nous le verrons par la suite, lorsque nous concevrons des systèmes par *assemblage de modules* élémentaires *autocontraints* bien connus, il ne sera pas nécessaire de procéder à une recherche de forme : nous recenserons directement les états d'autocontrainte et les mécanismes du système.

Ce recensement se fait là encore à partir de la matrice d'équilibre $[A]$. Comme nous l'avons vu, les états d'autocontrainte sont des vecteurs $\{q^0\}$ non nuls satisfaisant l'Équation 7, c'est à dire appartenant au noyau de $[A]$.

Le nombre d'états d'autocontrainte « s » d'un système est alors défini comme étant la dimension du noyau de $[A]$. Il correspond au nombre de vecteurs d'autocontrainte linéairement indépendants admissibles par le système.

Si le concepteur parvient à déterminer une base du noyau de la matrice $[A]$, il aura donc à sa disposition « s » vecteurs indépendants permettant de générer l'ensemble des états d'autocontrainte admissibles par la structure.

De la même façon, le nombre de mécanismes « m » d'un système est défini par la dimension du noyau de la transposée de $[A]$.

Pour comprendre d'où provient ce résultat, il faut construire la matrice qui traduit la compatibilité entre les déplacements des nœuds et les déformations dans les éléments.

Pour cela, nous définissons des coefficients de variation de longueur e_j :

$$\text{Équation 9} \quad e_j = \Delta l_j l_j^0$$

où Δl_j est la variation de longueur de l'élément j par rapport à l'état de référence.

Si nous posons (x_i, y_i, z_i) et (x_h, y_h, z_h) comme étant la position de référence des nœuds extrémités de l'élément j et (d_{ix}, d_{iy}, d_{iz}) et (d_{hx}, d_{hy}, d_{hz}) les composantes du déplacement des nœuds au cours d'un déplacement quelconque, nous pouvons, en faisant l'hypothèse de petites déplacements, écrire un développement à l'ordre un de l'Équation 9 ([VAS97], pp 12 & 13) :

$$\text{Équation 10} \quad e_j \approx (x_i - x_h)(d_{ix} - d_{hx}) + (y_i - y_h)(d_{iy} - d_{hy}) + (z_i - z_h)(d_{iz} - d_{hz})$$

Cette relation écrite pour tous les éléments, permet de constituer un système de la forme :

$$\text{Équation 11} \quad [A]^T \{d\} \approx \{e\}$$

où $\{d\}$ est le vecteur des composantes des déplacements des nœuds depuis l'état de référence et $\{e\}$ le vecteur à b composantes des coefficients de variation de longueur des éléments.

$$\text{Notation 5} \quad \{e\} = \{e_1 \dots e_j \dots e_b\}^t$$

Comme dans le cas de la recherche des états d'autocontrainte, la détermination des mécanismes (déplacements nodaux $\{d\}$ non nuls tels que les déformations dans les éléments soient nulles au moins au premier ordre) revient exactement à chercher le noyau de $[A]^T$. Dans la suite, les mécanismes seront notés sous la forme d'un vecteur $\{\delta\}$ à N composantes correspondant aux déplacements nodaux libres.

La question qui se pose alors, est de savoir si l'état d'autocontrainte du système permet de stabiliser ces mécanismes.

1.2.3 Le test de stabilité

Dans un premier temps, rappelons que la position d'équilibre d'un système est dite stable s'il revient à cette position d'équilibre quelle que soit la perturbation qui lui est imposée au voisinage de cette position.

Pour vérifier que tous les mécanismes du système sont stabilisés par un état d'autocontrainte, VASSART [VAS 97] propose plusieurs solutions suivant l'ordre des mécanismes.

Pour les mécanismes d'ordre 1 et dans l'hypothèse où le système est conservatif, il est possible de poser une condition de positivité sur l'énergie de déformation engendrée par un mécanisme $\{\delta\}$ par la condition suivante :

$$\text{Équation 12} \quad \forall \{\delta\} \in \text{Ker } [A]^T, \{\delta\} \neq \{0\} : W = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [\Delta A_\delta] \{q^0\} > 0$$

Où la matrice $[\Delta A_\delta]$ est la matrice des déplacements relatifs dus au mécanisme δ , et $\{q^0\}$ le vecteur d'autocontrainte dont on veut vérifier l'action stabilisante vis à vis des mécanismes.

Cette inéquation peut d'ailleurs s'écrire sous une forme quadratique à partir de la définition de la matrice de connexion globale des coefficients d'autocontrainte $[D^0]$ (cf. § 1.2.1.2).

$$\text{Équation 13} \quad W = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [D^0] \{\delta\}$$

avec : $D^0(q^0) = \begin{cases} D^0_{ix,hx} = -q_j^0 & \text{avec } i \neq h \text{ et } [i,h]=j \\ D^0_{ix,ix} = \sum q_j^0 & \text{où } j \text{ est un élément relié au noeud } i \\ D^0_{ix,hy} = 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$

Le système est stabilisable s'il existe $\{q^0\}$ différent de zéro tel que W soit définie positive.

Ce calcul, qui est valable dans le cas de mécanismes d'ordre un, a également été développé pour les ordres supérieurs.

1.2.4 Conclusion

Les études menées jusqu'alors ont permis une étude des systèmes de tenségrité basée sur l'écriture de leur équilibre statique.

Elles ont permis de trouver des géométries autocontraintes puis de recenser le nombre d'états d'autocontrainte et de mécanismes y étant attachés.

A partir de ces résultats il est possible, suivant l'ordre des mécanismes, de développer un calcul assurant la stabilité du système.

Néanmoins, pour des applications pratiques, il convient de procéder à une qualification plus complète des états d'autocontrainte, c'est à dire une validation vis à vis du comportement unilatéral des câbles.

Nous allons donc voir maintenant quelles sont les étapes à franchir pour concevoir des structures destinées au Génie Civil.

1.3 Objectifs de l'étude

Etant assurés de la stabilité mécanique des systèmes de tensegrité, nous pouvons maintenant nous intéresser à la conception de structures complexes, avec pour but ultime la réalisation de solutions architecturales légères et fiables.

Comme nous l'avons vu, il est possible de créer des formes autocontraintes et de vérifier qu'elles sont stables. Il doit donc être possible d'imaginer des structures de grande taille, de les dimensionner, de s'assurer de leur fiabilité et d'envisager un montage aisé.

Ce sont là les grandes étapes de la conception que nous développerons dans les prochains chapitres.

La partie 2 intitulée « **Conception de systèmes de tensegrité complexes** » est consacrée à la question primordiale de la qualification de l'autocontrainte pour des systèmes comportant un grand nombre d'éléments.

En raison du nombre également élevé d'états d'autocontrainte dans le système, il faut que le concepteur ait des outils pour pouvoir trier et combiner ces états, tout en respectant l'impératif de garder les câbles tendus.

Cette difficulté surmontée, nous verrons comment dimensionner la structure en fonction des nombreux paramètres à prendre en compte et notamment le niveau d'autocontrainte.

Le choix de l'état d'autocontrainte étant effectué, il faut s'assurer de son effectivité dans le système une fois assemblé. Les imprécisions de réalisation (des éléments et de leur assemblage) doivent être étudiées sur le plan théorique.

Ainsi, la partie 3, « **Etude de la sensibilité et mise en autocontrainte** », sera dans un premier temps dédiée à l'étude de la sensibilité des états d'autocontraintes aux tolérances de fabrication des éléments.

Enfin, nous donnerons les premières idées permettant la mise en tension du système.

Nous verrons en conclusion quelles sont les avancées ainsi réalisées et les applications immédiates envisageables.

Partie 2

CONCEPTION DE SYSTEMES DE TENSEGRITE COMPLEXES

2 Conception de systèmes de tensegrité complexes

Pour réaliser l'étude de systèmes de tensegrité complexes et pour proposer un dimensionnement, il est nécessaire d'adapter les processus de conception connus jusqu'alors pour tenir compte des spécificités des systèmes de tensegrité.

D'abord, comme nous l'avons vu, ces systèmes sont autocontraints et ne doivent leur rigidité qu'à cet état d'autocontrainte. Il faudra dans un premier temps étudier la façon dont va pouvoir être répartie l'autocontrainte dans la structure.

Ensuite, l'autocontrainte joue un rôle très important dans la rigidité de la structure et donc dans son comportement sous actions extérieures. Nous donnerons les idées de base permettant d'aller vers un dimensionnement rapide, en prenant en compte les nombreux paramètres pouvant intervenir.

Cette partie conception du manuscrit comporte donc deux chapitres.

Le premier nous permettra de montrer comment déterminer les états d'autocontrainte dans les structures à grand nombre d'éléments, et surtout, comment les rendre compatibles avec le comportement unilatéral des câbles. Le concepteur aura ainsi un grand nombre de possibilités pour combiner ces états d'autocontrainte et répartir l'autocontrainte comme il le souhaite dans la structure.

Dans le deuxième chapitre nous nous intéresserons plus à l'aspect comportement mécanique. Après avoir présenté l'influence des différents paramètres sur le comportement des structures, nous proposerons le dimensionnement d'une grille selon les règlements en vigueur, en donnant les règles simples pouvant guider le concepteur à chaque étape du processus de conception.

2.1 Qualification de l'autocontrainte

La recherche de forme ayant permis de trouver des géométries autocontraintes dans le cas de modules simples, nous pouvons maintenant nous poser la question de la conception de structures de grande échelle destinées au Génie Civil.

Il est certes possible d'envisager une recherche de forme sur une structure à grand nombre d'éléments, mais compte tenu des difficultés posées par l'une ou l'autre des méthodes exposées précédemment cela devient difficile dans le cas de structures complexes.

En pratique, la recherche de forme sert surtout à la création de modules simples, à faible nombre d'éléments et possédant une géométrie présentant des régularités susceptibles de permettre une prolifération uni, bi ou tridirectionnelle [RAD99].

Dans ce chapitre, nous verrons, dans un premier temps, comment nous pouvons envisager de créer des structures autocontraintes à grand nombre d'éléments par simple juxtaposition de modules autocontraints.

Ensuite, nous traiterons les problèmes sous-jacents à cet assemblage de modules, notamment la multiplication des états d'autocontrainte et le relâchement des câbles pour certains états d'autocontrainte.

Nous montrerons enfin qu'un tri des états d'autocontrainte est nécessaire, à la fois pour avoir une conformité des sollicitations vis à vis de la rigidité des éléments, mais aussi pour pouvoir adapter l'autocontrainte à la structure. Des méthodes seront exposées suivant le type de solution souhaitée par le concepteur.

2.1.1 Quels assemblages pour quelles structures ?

Les modules de tensegrité les plus simples sont ceux désignés sous le nom de « série prismatique ». Ils sont formés de deux nappes de câbles formant des *polygones réguliers* de forme triangulaire (simplex - Figure 8), carrée (quadruplex - Figure 9), pentagonale, etc.... Ces nappes sont reliées à la fois par des barres et des câbles d'entretoisement. Le nombre de sommets des polygones de chaque base définit le nombre de barres et de câbles d'entretoisement du système.

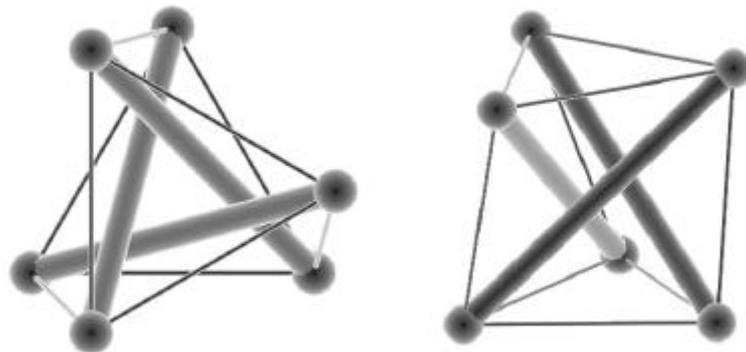


Figure 8 : Un système de tensegrité à 3 barres et 9 câbles, le Simplex

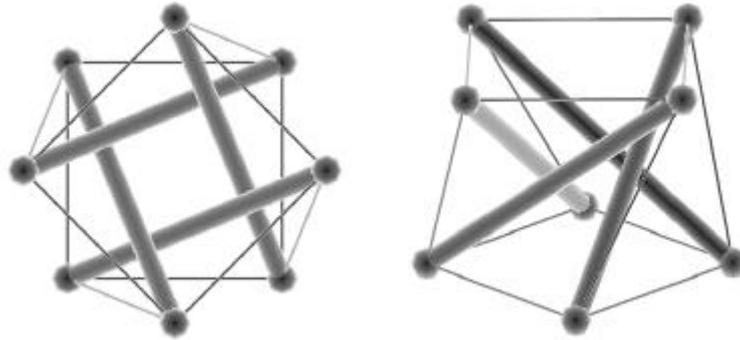


Figure 9 : Un système de tensegrité à 4 barres et 12 câbles, le Quadruplex

MOTRO a montré que pour avoir équilibre, la rotation de la base supérieure par rapport à la base inférieure, est fonction du nombre de barres et vaut [MOT83] :

Équation 14
$$\theta = \pm \frac{\pi(\eta - 2)}{2\eta}$$

où η est le nombre de barres dans le système.

Pour le concepteur qui souhaite assembler ce type de modules, il est flagrant qu'en vue de dessus, la face supérieure «déborde» par rapport à la face inférieure. Mais il est possible de faire varier les tailles relatives des nappes supérieures et inférieures sans remettre en cause la condition géométrique de rotation nécessaire à l'établissement de l'autocontrainte du module. Pour réaliser des assemblages plans, il suffit alors d'inscrire la face supérieure dans la face inférieure ([VAS97] - en vue de dessus, Figure 10). Dans ce cas bien sûr, les câbles de nappe inférieurs et supérieurs n'ont plus la même longueur.

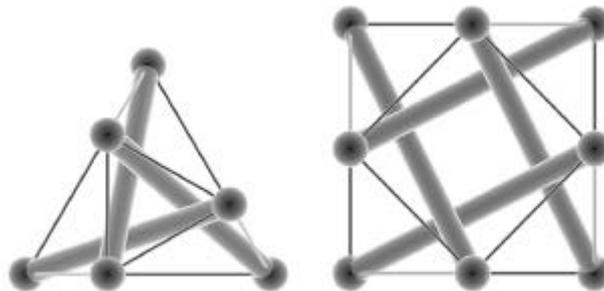


Figure 10: Simplex et Quadruplex à face supérieure inscrite

Remarque : le quadruplex à face supérieure inscrite est aussi appelé **demi-cuboctaèdre** car moyennant l'adaptation de la hauteur, les nœuds du module définissent effectivement les sommets d'un demi-cuboctaèdre (Cf. Annexe A).

Il est alors possible à partir de ces modules de base de créer des assemblages, soit par simple juxtaposition, nœud à nœud, soit en scindant certains éléments et en créant de nouveaux nœuds.

Nous allons voir maintenant quelques exemples d'assemblages conduisant à des systèmes à courbure gaussienne nulle ou non : grilles planes, voûtes cylindriques ou à double courbure, etc...

2.1.1.1 Assemblages plans « nœud sur nœud »

La plupart des modules prismatiques peuvent être assemblés « nœud sur nœud » pour créer des structures planes. Néanmoins, le concepteur a intérêt à se limiter à des modules possédant peu de faces pour faciliter les assemblages.

De plus, tous les polygones ne forment pas des pavages plans réguliers : seuls triangles, carrés et hexagones sont compatibles. Les autres polygones sont utilisables à condition de les combiner avec d'autres.

Cela peut être visualisé sur la Figure 11 où les carrés, triangles et hexagones se juxtaposent parfaitement alors que l'octogone laisse des « trous » de forme carrée.

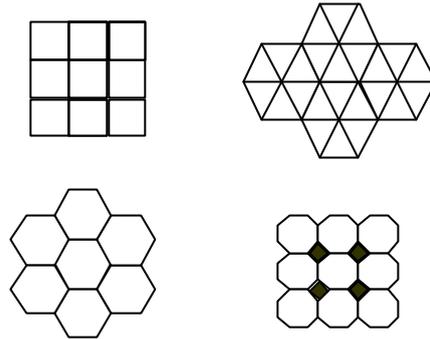


Figure 11 : Différents pavages plans au moyen de polygones

Pour l'assemblage de modules de tensegrité prismatiques, il va par conséquent en être de même. Nous utiliserons, de préférence, les trois premières figures géométriques.

VASSART a proposé plusieurs formes d'assemblage, et donné le nombre d'états d'autocontrainte et de mécanismes de ces systèmes. Il s'est uniquement intéressé aux cas du simplex et quadruplex à face supérieure inscrite (Figure 12), mais il est possible d'utiliser les systèmes de tensegrité hexagonaux (Figure 13).

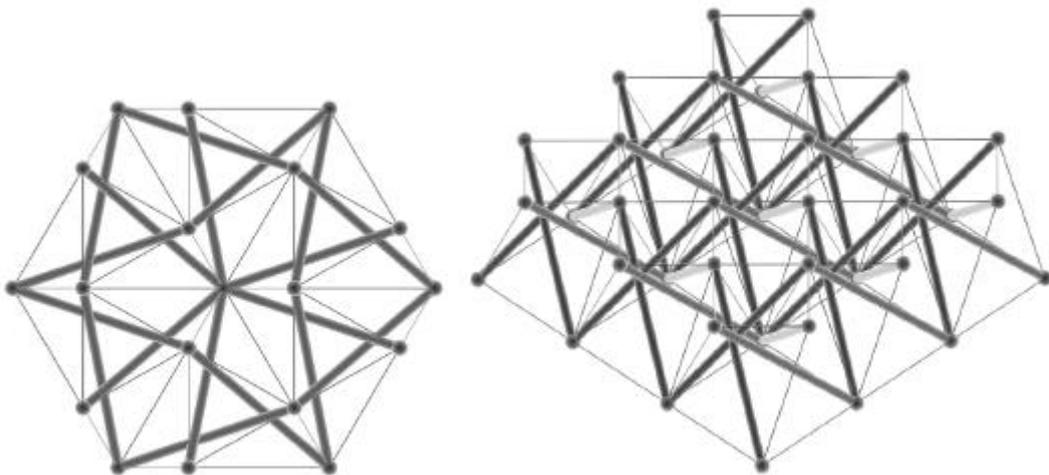


Figure 12: Grilles à double nappe plane formées de simplex et quadruplex à face supérieure inscrite

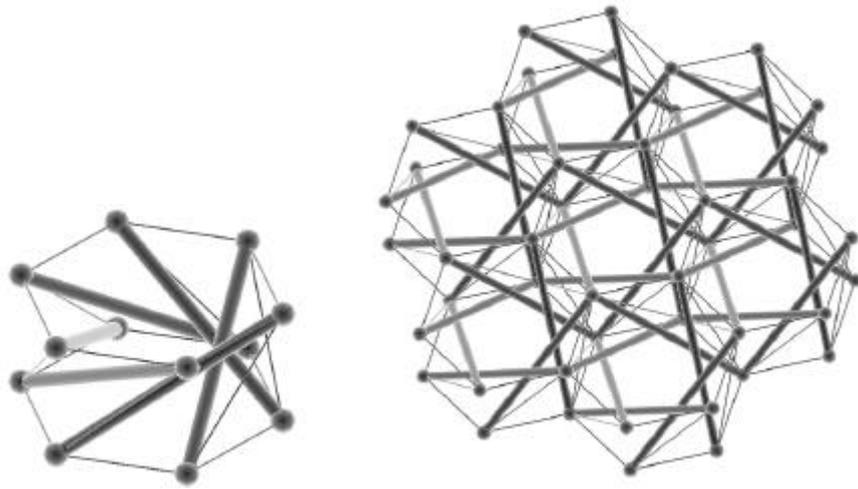


Figure 13 : Grille à double nappe plane formée de systèmes de tensegrité à six barres.

2.1.1.2 Assemblages plans à barre unique par nœud

Il est également envisageable de réaliser des assemblages par juxtaposition de modules mais non plus en confondant les nœuds. Certains éléments sont alors scindés pour assurer la liaison. Cela minimise ainsi le nombre de barres au niveau de chaque nœud. Néanmoins, ce faisant, le nombre de mécanismes augmente ce qui donne une plus grande souplesse à la structure.

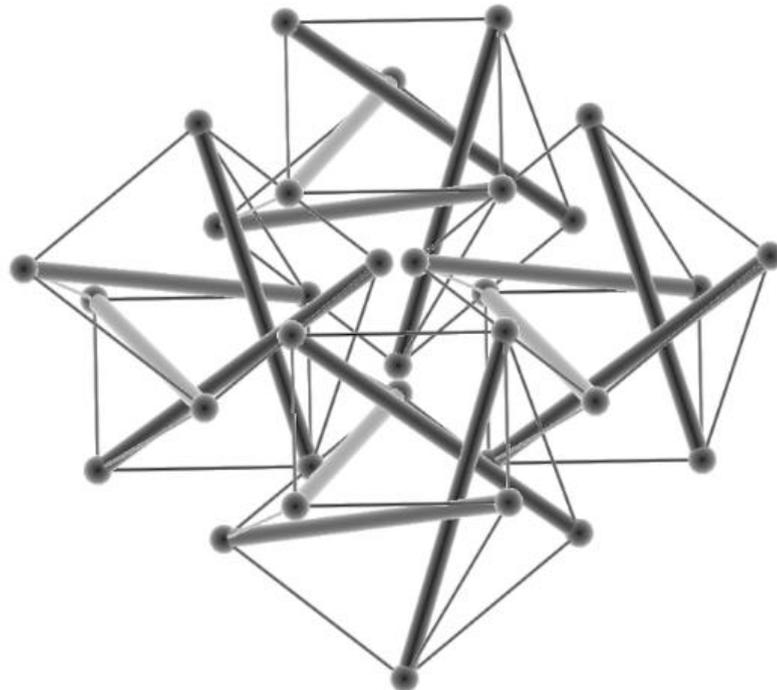


Figure 14: Système à base de quadruplex avec une seule barre par nœud.

2.1.1.3 Assemblages à simple courbure

Le concepteur peut également utiliser des modules de forme dissymétrique pour donner de la courbure à l'assemblage de modules [MOT90].

C'est le cas d'un quadruplex dont la face supérieure déborde de la face inférieure suivant un axe privilégié (Figure 15 et Figure 16).

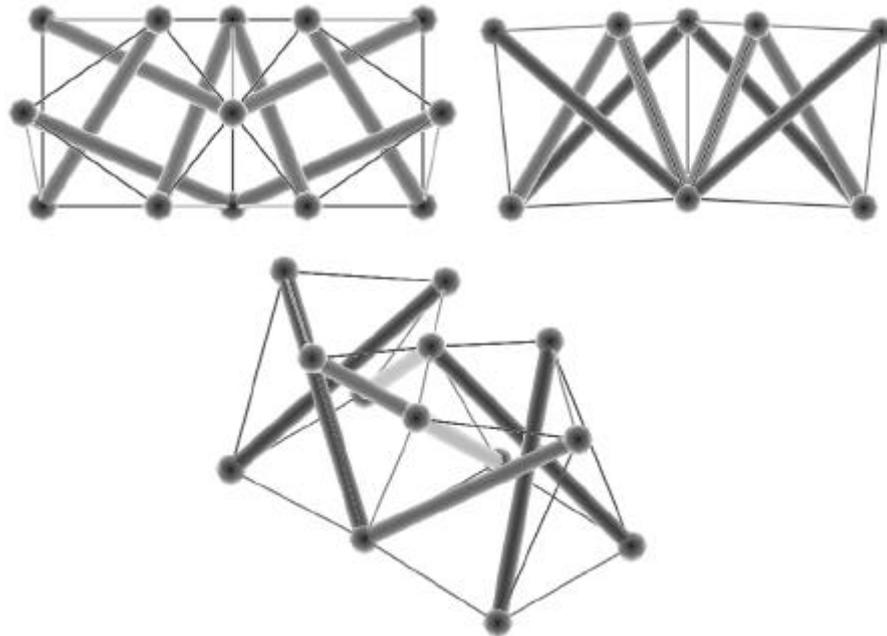


Figure 15 : Assemblage produisant une courbure

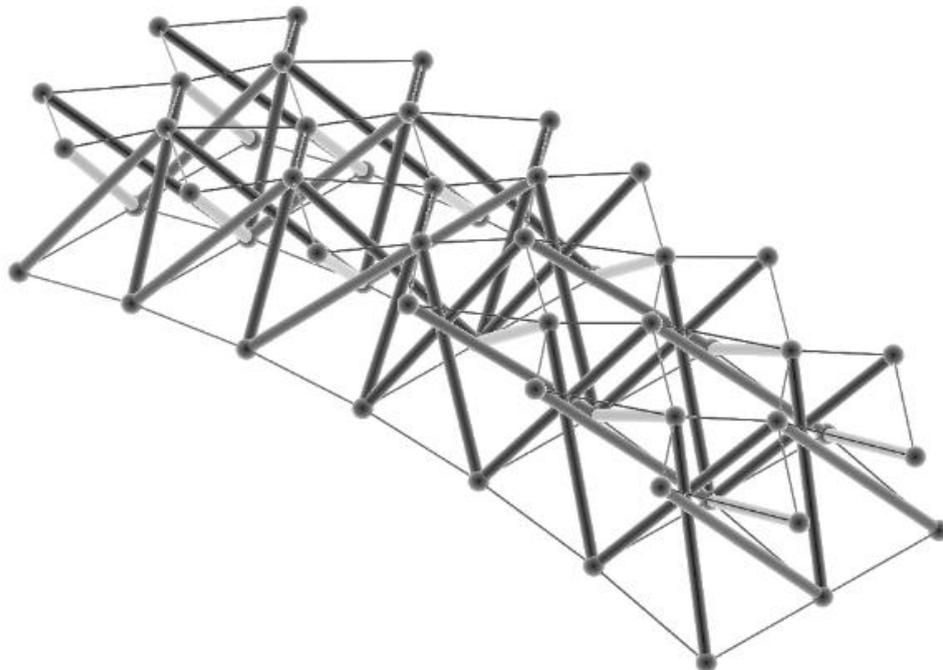


Figure 16 : Une voûte formée de quadruplex irréguliers.

2.1.1.4 Assemblages à double courbure, assemblages polyédriques

Le passage à des assemblages à double courbure est plus délicat car mis à part les cinq polyèdres réguliers, il est géométriquement impossible de générer une surface sphérique par un polygone répétitif constant.

Nous ne pouvons donc envisager de générer de grandes surfaces à double courbure positive constante par simple juxtaposition de modules prismatiques identiques.

Une solution peut consister effectivement à utiliser les polyèdres réguliers (nombre de modules très limités) ou semi-réguliers. Les modules de tensegrité prismatiques à 4 ou 6 barres doivent alors être utilisés préférentiellement pour réaliser un assemblage «nœud sur nœud » : ils épousent parfaitement les faces du polyèdre. L'utilisation d'autres modules est envisageable mais plus délicate.

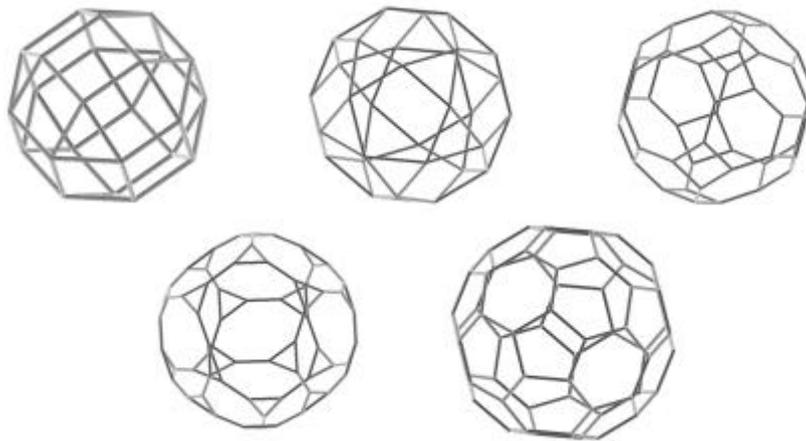


Figure 17 : Quelques polyèdres

L'annexe A montre comment générer quelques assemblages à partir des modules à quatre et six barres décrits précédemment.

L'autre solution pour introduire une double courbure dans les systèmes peut être, comme dans le cas de la voûte (Figure 16) de générer des "irrégularités" dans les modules [MOT89], voire par l'utilisation de structures tissées [RAD99].

2.1.2 Détermination des états d'autocontrainte et des mécanismes

Pour toute structure autocontrainte, il est essentiel d'identifier les états d'autocontrainte afin que le concepteur puisse décider quel est le type de sollicitation qui peut être instauré dans la structure et vérifier que l'équilibre associé est stable.

Mais avant de les identifier mécaniquement, nous allons voir qu'il est possible de les dénombrer d'un point de vue mathématique.

2.1.2.1 Le recensement pur

Pour déterminer le nombre d'états d'autocontrainte d'un système réticulé (s), il faut partir de l'équation de base issue de la formulation de l'équilibre au moyen des coefficients de densités de forces (Équation 1).

$$\text{Équation 15} \quad [A]\{q^0\} = 0$$

Nous avons vu que le nombre d'états d'autocontrainte est défini comme étant la dimension du noyau de la matrice $[A]$. PELLEGRINO et CALADINE [PEL 86] ont justement donné une méthode matricielle simple qui permet de déterminer le noyau d'une matrice. Elle nous fournit alors s états d'autocontrainte linéairement indépendants constituant une base du noyau de la matrice d'équilibre.

Pour la détermination, du nombre de mécanismes, il en est de même puisque la relation donnant le nombre de mécanismes est issue de l'Équation 16 :

$$\text{Équation 16} \quad [A]^T\{d\} = \{0\}$$

Le noyau de la matrice $[A]^T$ contient donc l'ensemble des mécanismes internes à la structure.

PELLEGRINO et CALLADINE donnent alors une équation reliant le nombre d'états d'autocontrainte du système (s), le nombre de mécanismes (m), le nombre d'éléments (b), le nombre de nœuds (n) et le nombre de degrés de liaisons de la structure avec l'extérieur (k) :

$$\text{Équation 17} \quad s - m = b - 3n + k$$

Cette relation peut être facilement établie. En effet, compte tenu des dimensions de la matrice $[A]$ (b lignes et N colonnes - Équation 6) les relations suivantes sont immédiates :

$$\text{Équation 18} \quad s = b - r_A \quad \text{et} \quad m = N - r_A \quad \text{avec} \quad N = 3n - k$$

où r_A est le rang de la matrice $[A]$

Ce qui permet bien de retrouver l'Équation 17.

Dans le cas des systèmes précédemment décrits, nous pouvons donc donner les valeurs concernant les états d'autocontrainte et les mécanismes.

Ainsi, pour les assemblages de simplex semblables (étude réalisée par VASSART [VAS97]) :

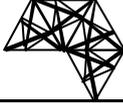
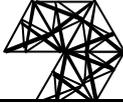
Structure	Nombre d'éléments	Nombre de barres	Nombre de câbles	Nombre de nœuds	s	m
	12	3	9	6	1	1
	22	6	16	9	2	1
	32	9	23	12	3	1
	42	12	30	15	4	1
	52	15	37	18	5	1
	60	18	42	19	10	1

Tableau 1 : Recensement des états d'autocontrainte (s) et des mécanismes (m) pour des assemblages de simplex (d'après [VAS 97]).

Ou dans le cas d'assemblages de demi-cuboctaèdres :

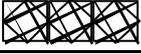
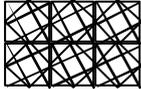
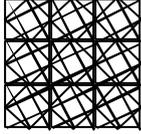
Structure	Nombre d'éléments	Nombre de barres	Nombre de câbles	Nombre de nœuds	s	m
	16	4	12	8	1	3
	31	8	23	13	2	4
	46	12	34	18	4	6
	60	16	44	21	4	1
	89	24	65	29	9	1
	132	36	96	40	19	1

Tableau 2 : Recensement des états d'autocontrainte (s) et des mécanismes (m) pour des assemblages de demi-cuboctaèdres (d'après [VAS 97]).

Enfin, nous avons poursuivi cette étude pour les assemblages polyédriques (voir annexe A pour les appellations et la construction) :

Dénomination	Polygones Générateurs	Type de modules assemblés	s	m
P2 : Cube	6 Carrés	Quadruplex (6)	30	0
P6 : Tétraèdre Tronqué	4 Triangles, 4 Hexagones	Hexagonal (4)	15	0
P7 : Cuboctaèdre	8 Triangles, 6 Carrés	Quadruplex (6)	30	0
P9 : Octaèdre Tronqué	6 Carrés, 8 Hexagones	Hexagonal (8)	27	1
P10 : Petit Rhombicuboctaèdre	8 Triangles, 18 Carrés	Quadruplex (18)	54	0
P14 : Icosaèdre Tronqué	12 Pentagones, 20 Hexagones	Hexagonal (20)	61	0

Tableau 3 : Assemblages polyédriques générés par assemblage de quadruplex et de modules hexagonaux.

Dans chacun de ces tableaux, il faut noter une nette augmentation du nombre d'états d'autocontrainte de chacune des structures par rapport au nombre de modules assemblés. S'il est normal que les modules assemblés gardent leur autocontrainte propre, il est intéressant de noter que l'assemblage crée de *nouveaux états d'autocontrainte*, imprévisibles par la seule description des modules.

Or, si le concepteur souhaite mettre en état d'autocontrainte une structure, le recensement du nombre d'états d'autocontrainte d'un système ne suffit pas : il lui faut parfaitement définir la sollicitation qui va être instaurée lors du montage du système.

Ces premiers résultats suscitent donc des questions importantes... Comment, en effet, faire le tri dans le nombre croissant d'états d'autocontrainte présents dans une structure ? Faut-il tous les utiliser ? Lesquels prendre ?

Si le concepteur souhaite optimiser l'autocontrainte et donc la rigidité de la structure, maîtriser au mieux la mise en tension du système, assurer la maintenance et le réglage de la structure, nous verrons qu'il doit identifier l'ensemble des états d'autocontrainte.

Au-delà de ce problème de reconnaissance des états d'autocontrainte valable pour tout système, un autre problème apparaît dans le cas des systèmes de tenségrité, c'est celui du comportement unilatéral des câbles. Nous allons voir que cela peut remettre en question les résultats du recensement.

2.1.2.2 Le problème lié au comportement unilatéral des câbles

Pour illustrer le problème posé par le comportement unilatéral des câbles, nous allons présenter un exemple simple.

La Figure 18 schématise une structure à cinq éléments. Dans le cas d'éléments à rigidité bilatérale, il existe deux états d'autocontrainte et zéro mécanisme. L'Équation 17 qui s'écrit : $(2 - 0 = 5 - 3*6 + 15)$ est ainsi vérifiée.

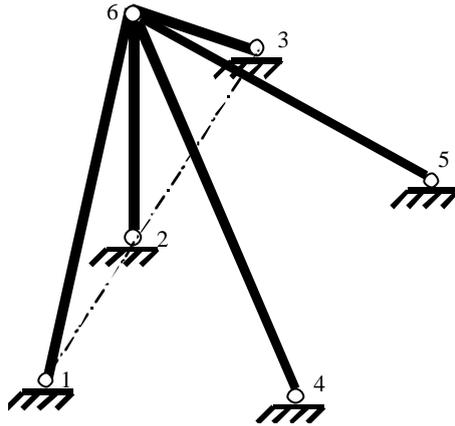


Figure 18 : Système à cinq éléments barre, les nœuds 1,2 & 3 sont alignés

Mais il est aussi possible d'imaginer que cette structure comprend des câbles dont la rigidité est nulle en compression.

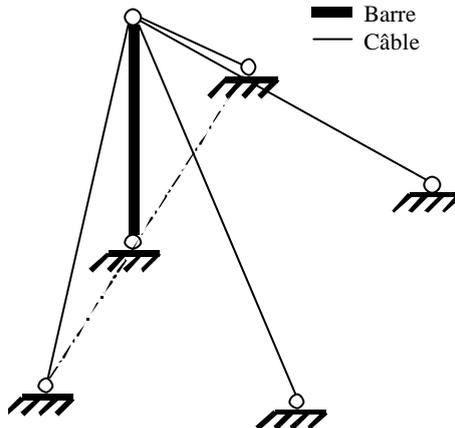


Figure 19 : Même configuration pour un système à 1 barre et 4 câbles

Dans ce cas, comme les câbles ne peuvent être comprimés, un seul état d'autocontrainte peut être introduit dans la structure (Figure 20).

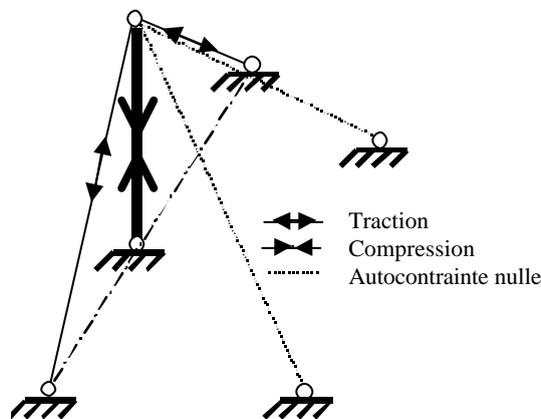


Figure 20 : Etat d'autocontrainte admissible

De plus, la présence des câbles fait apparaître un mécanisme rigide (rotation orientée autour de l'axe 1-2-3), illustré sur la Figure 21.

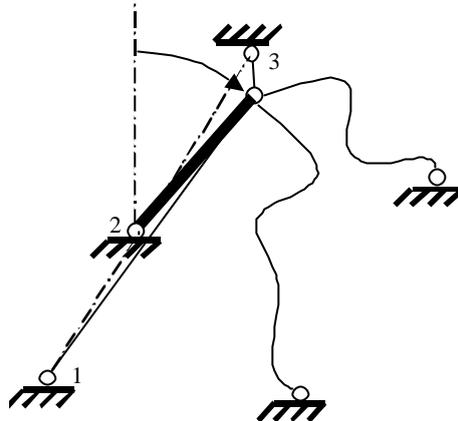


Figure 21 : Mécanisme rigide associé

Ainsi, l'Équation 17 n'est plus satisfaite puisque sans changer le second terme de l'équation, le premier a été annulé : $s = 1$ et $m = 1$.

Cette équation est prise en défaut, car les résultats sont acquis avec une hypothèse implicite de comportement bilatéral des éléments. Ils doivent donc être reconsidérés dans le cas des systèmes de tenségrité.

Dans notre exemple, un des deux états d'autocontrainte déterminé par la recherche du noyau de la matrice $[A]$ est tel que l'un des coefficient de densités de force est négatif pour l'un des câbles de la structure. Nous parlerons alors d'état d'autocontrainte **non conforme**.

Comme les câbles ne peuvent être comprimés, *cet état d'autocontrainte ne peut pas être mis en place*. Certains éléments ne participent plus alors à la rigidité de la structure et le mécanisme rigide apparaît.

Cela signifie que pour confirmer les résultats obtenus lors du recensement des états d'autocontrainte, il faut vérifier dans le cas des systèmes de tenségrité qu'il existe au moins un **état d'autocontrainte total conforme**. Par état d'autocontrainte total, nous désignons un état d'autocontrainte qui sollicite tous les éléments du système (tous les coefficients d'autocontrainte sont non nuls).

Si de plus il est conforme (tous les coefficients respectent les rigidités des éléments), nous pouvons dire que les résultats du recensement sont corrects.

En effet, imaginons que nous ayons trouvé **un état $\{q^0\}_1$ conforme** et tel que :

$$\text{Équation 19} \quad q_{j_1}^0 \neq 0 \quad \forall j$$

Dans ce cas, pour les $(s-1)$ autres vecteurs d'autocontrainte de la base, nous pouvons réaliser une combinaison linéaire :

$$\text{Équation 20} \quad \{q^0\}_k = \alpha_k \{q^0\}_k + \{q^0\}_1 \quad \text{avec } 0 < |\alpha_k| \ll 1 \quad \text{et } k \in [2 \dots s]$$

Au final, tous les vecteurs sont rendus conformes et constituent une base du noyau de $[A]$

Le nombre d'états d'autocontrainte est donc bien égal à s pour un système de tenségrité satisfaisant à l'énoncé et tous les câbles peuvent être tendus.

Par contre, si un tel état (total et conforme) ne peut être détecté, certains câbles ne pourront être tendus lors du montage de la structure. Le concepteur doit alors réaliser une **nouvelle étude** en supprimant les éléments surabondants pour vérifier qu'il n'y a pas apparition de nouveaux mécanismes dans le système. Il est tout à fait plausible qu'aucun mécanisme nouveau n'apparaisse, mais cela ne pourra être affirmé qu'après calcul sans les éléments non autocontraints.

Pour pouvoir confirmer dans un cas très général les résultats obtenus lors du recensement, nous allons dans un premier temps poser le problème de la détermination d'un état d'autocontrainte total conforme.

En exprimant ce problème mathématiquement, nous verrons qu'il existe des méthodes bien connues pour le résoudre.

Nous proposerons ensuite des solutions numériques permettant au concepteur d'aller aussi loin qu'il le souhaite dans le tri et la compréhension de **l'ensemble** des états d'autocontrainte.

2.1.3 Vérification des résultats

Avant d'aborder la question de la recherche d'un état d'autocontrainte total conforme, nous allons, dans un premier temps, présenter un rappel sur la détermination des états d'autocontrainte.

2.1.3.1 Rappels sur la détermination des états d'autocontrainte

Nous avons vu précédemment que le noyau de la matrice d'équilibre [A] constitue l'ensemble des états d'autocontrainte de la structure. La dimension de ce noyau donne ce que nous appelons le nombre d'états (ou vecteurs) d'autocontrainte linéairement indépendants du système, s . Pour pouvoir générer l'ensemble des états d'autocontrainte de la structure, il nous faut donc trouver exactement s vecteurs indépendants qui forment une base du noyau de [A].

Ces vecteurs peuvent être associés pour former une matrice des états d'autocontrainte [S] (Équation 21), matrice à b lignes (correspondant chacune à un élément de la structure), et s colonnes (correspondant au nombre d'état d'autocontrainte de la structure). Toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient alors au noyau de [A].

Équation 21

$$[S] = \begin{bmatrix} q_1^1 & q_1^2 & \dots & q_1^s \\ q_2^1 & q_2^2 & \dots & q_2^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_c^1 & q_c^2 & \dots & q_c^s \\ q_{c+1}^1 & q_{c+1}^2 & \dots & q_{c+1}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_b^1 & q_b^2 & \dots & q_b^s \end{bmatrix}$$

Remarque : Il faudrait noter les coefficients de densité de force q^0 et non q , puisqu'ils sont déterminés dans une configuration dite de «référence», assemblée, non chargée. Nous conserverons toutefois cette notation dans un souci de simplification de l'écriture.

Pour trouver numériquement ce noyau de la matrice $[A]$, deux solutions (parmi d'autres) s'offrent à nous.

La première est d'utiliser des fonctions prédéfinies dans un logiciel de calcul tel MATLAB ou MAPLE. Elles ne tiennent pas compte de considérations mécaniques ou géométriques, le calcul est purement numérique.

L'inconvénient principal de cette méthode réside dans le fait qu'on ne maîtrise pas parfaitement la précision du calcul. Comment en effet s'assurer qu'une valeur égale par exemple à 5.10^{-8} sera prise comme étant nulle ? Le système d'unités joue alors un grand rôle...

L'importance de cette question est liée à la précision d'évaluation des coordonnées des nœuds. Le calcul ne doit pas se faire avec une précision très inférieure (nombre d'états d'autocontrainte sous-évalué) ou très supérieure (nombre d'états d'autocontrainte surévalué) à celle des données (Cf. Annexe B).

La deuxième possibilité est d'utiliser la méthode matricielle exposée par PELLEGRINO et CALLADINE [PEL 86]. Elle permet de trouver des vecteurs indépendants engendrant le noyau. L'avantage de cette méthode est de laisser à l'utilisateur la possibilité de gérer au mieux la précision du calcul pour ne pas 'oublier' ou 'créer' des états d'autocontrainte (Annexe B).

Cependant, que nous prenions l'une ou l'autre des méthodes, aucune ne tient compte de la rigidité unilatérale des éléments. Le calcul fournit donc une matrice des états d'autocontrainte $[S]$ qui n'est sûrement pas exploitable car elle possède vraisemblablement des vecteurs d'autocontrainte non conformes.

Il n'est par conséquent pas possible de savoir a priori si la structure peut être autocontrainte dans sa totalité. Néanmoins, nous pouvons dire que si nous trouvons au moins un état (vecteur) d'autocontrainte total compatible avec la rigidité des éléments, alors tous les autres pourront être rendus conformes. Il suffira pour cela de combiner chacun des vecteurs d'autocontrainte avec celui que nous avons qualifié de total et conforme pour obtenir s vecteurs indépendants et conformes (Équation 20).

De plus, cet état d'autocontrainte pourra être utilisé pour vérifier la stabilité de la structure selon la procédure décrite au paragraphe 1.2.3.

Le problème à résoudre est donc maintenant de trouver un état d'autocontrainte total et conforme à partir de la matrice $[S]$.

Nous allons voir qu'en posant mathématiquement le problème nous allons retrouver un problème bien connu de programmation linéaire.

2.1.3.2 Recherche d'un état d'autocontrainte total conforme

Rechercher un état d'autocontrainte total conforme consiste à trouver un vecteur du noyau de la matrice $[A]$ tel que tous les éléments soient sollicités : les barres comprimées et les câbles tendus. Par convention, nous avons pris les termes de compression négatifs et ceux de traction positifs.

Ce vecteur conforme, s'il existe, peut être décomposé sur la base du noyau que constituent les vecteurs colonnes de la matrice [S]. La forme de la matrice [S] étant donnée par l'Équation 21, le problème peut s'écrire de la façon suivante :

Problème 1 Trouver un vecteur $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}^t$ tel que

$$\left. \begin{array}{l} q_1^1 \alpha_1 + q_1^2 \alpha_2 + \dots + q_1^s \alpha_s > 0 \\ q_2^1 \alpha_1 + q_2^2 \alpha_2 + \dots + q_2^s \alpha_s > 0 \\ \dots \\ q_c^1 \alpha_1 + q_c^2 \alpha_2 + \dots + q_c^s \alpha_s > 0 \end{array} \right\} \text{Câbles}$$

$$\left. \begin{array}{l} q_{c+1}^1 \alpha_1 + q_{c+1}^2 \alpha_2 + \dots + q_{c+1}^s \alpha_s < 0 \\ \dots \\ q_b^1 \alpha_1 + q_b^2 \alpha_2 + \dots + q_b^s \alpha_s < 0 \end{array} \right\} \text{Barres}$$

Remarques :

- **c** est le nombre de câbles et **b** est le nombre d'éléments de la structure
- avec l'hypothèse d'une rigidité bilatérale des barres, il est possible de se limiter à la première partie du problème en ne posant des conditions que sur les éléments câbles.

La première opération à effectuer pour avoir les mêmes conditions de positivité sur tous les éléments est de multiplier la partie de la matrice [S] correspondant à des éléments barres par (-1). A partir de cette nouvelle matrice [S'], le problème s'écrit alors avec des inégalités de même sens.

Problème 2 Trouver un vecteur $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}^t$ tel que

$$\left. \begin{array}{l} q_1^1 \alpha_1 + q_1^2 \alpha_2 + \dots + q_1^s \alpha_s > 0 \\ q_2^1 \alpha_1 + q_2^2 \alpha_2 + \dots + q_2^s \alpha_s > 0 \\ \dots \\ q_c^1 \alpha_1 + q_c^2 \alpha_2 + \dots + q_c^s \alpha_s > 0 \end{array} \right\} \text{Câbles}$$

$$\left. \begin{array}{l} q_{c+1}^1 \alpha_1 + q_{c+1}^2 \alpha_2 + \dots + q_{c+1}^s \alpha_s > 0 \\ \dots \\ q_b^1 \alpha_1 + q_b^2 \alpha_2 + \dots + q_b^s \alpha_s > 0 \end{array} \right\} \text{Barres}$$

Or, cette écriture est proche de l'écriture d'un problème fondamental de programmation linéaire [DAN63] :

Problème 3 **Première partie du problème fondamental de la programmation linéaire**

Soit un système de $h > r$ inégalités linéaires (appelées contraintes)

$$b_j^1 \alpha_1 + b_j^2 \alpha_2 + \dots + b_j^r \alpha_r \leq b_j$$

avec $j=1\dots h$, et b_j^i et b_j des constantes

trouver un vecteur $\{\mathbf{a}\}$ tel que les \mathbf{a}_i respectent les contraintes

En effet, le problème 3 s'écrit aussi sous forme canonique :

Problème 4 **Première partie du problème fondamental de la programmation linéaire sous forme canonique**

Trouver un vecteur $\{\mathbf{a}\}$ tel que les \mathbf{a}_i respectent les contraintes suivantes

$$y_j = -b_j^1 \alpha_1 - b_j^2 \alpha_2 - \dots - b_j^r \alpha_r + b_j \geq 0$$

avec $j=1\dots h$, b_j^i et b_j des constantes

Nous pouvons alors noter que rechercher un état d'autocontrainte total conforme correspond exactement à la première partie du problème de programmation linéaire où $\mathbf{r} = \mathbf{s}$, $\mathbf{h} = \mathbf{b}$, $[\mathbf{b}_j^i] = -[\mathbf{S}^i]$ et $\mathbf{b}_j = -\mathbf{e}$ avec $\mathbf{e} > \mathbf{0}$.

Pour une solution au problème, chaque coefficient d'autocontrainte de l'état conforme q_j sera donné par la relation $q_j = -y_j$.

Ayant fait ce travail d'adaptation du problème, il est facile de trouver dans la littérature des méthodes de résolution. La plus connue est la méthode du simplexe mise au point par DANTZIG [DAN63]. En écrivant le problème sous forme de tableau, des règles de permutations précises permettent de déterminer une solution au problème si elle existe (cf. Annexe C).

Le problème majeur de cette méthode réside dans le fait que la forme de l'état d'autocontrainte final n'est pas maîtrisée. L'état d'autocontrainte obtenu n'a aucune raison de respecter la symétrie de la structure. Il donne alors peu d'indication au concepteur concernant les états d'autocontraintes susceptibles d'être utilisés pour la mise en autocontrainte du système.

Néanmoins, cet état d'autocontrainte suffit dans un premier temps pour affirmer si certains câbles sont surabondants et faire un premier test de stabilité du système.

Si le concepteur souhaite aller plus loin dans la conception, il faut certes passer par cette étape de vérification qui confirme définitivement les résultats du recensement, mais il est important de pousser le traitement de la matrice $[\mathbf{S}]$ pour identifier le plus clairement possible les états d'autocontrainte présents dans la structure. Le concepteur aura toute latitude pour les combiner et les ajuster : uniformiser les tensions, rigidifier localement, etc...

2.1.4 Mise en évidence des états d'autocontrainte conformes

L'étape suivante de la conception va consister à trier les états d'autocontrainte pour mieux les visualiser et donc les comprendre.

Lors de ce tri, l'idéal serait de trouver une base du noyau dont les vecteurs mettent en jeu un minimum d'élément et soient tous conformes. Dans ce cas, toute combinaison par des coefficients positifs ou nuls génère un état d'autocontrainte conforme.

Plusieurs méthodes vont être exposées, elles permettront de déterminer cette base conforme suivant la complexité du cas à traiter.

La plus simple fera appel à l'intuition et l'expérience du concepteur mais sera limitée par la taille du problème.

La méthode conditionnelle permettra, elle, de s'intéresser uniquement à certains états d'autocontrainte qui seront extraits un à un.

Enfin, une dernière méthode donnera, par des considérations mathématiques, une solution très générale au problème en fournissant l'ensemble de tous les états d'autocontrainte conformes.

2.1.4.1 Une méthode intuitive

La première idée pour rechercher une base d'autocontrainte conforme est de simplifier au maximum les états d'autocontrainte pour pouvoir ensuite les combiner plus facilement. Cette méthode est assez simple à mettre en œuvre d'un point de vue numérique mais elle fait aussi beaucoup appel à l'intuition du concepteur. Nous l'appellerons « méthode intuitive ».

Comme nous l'avons vu précédemment, le calcul numérique nous fournit s vecteurs d'autocontrainte indépendants ne tenant pas compte de la nature des éléments (barre ou câble). La forme de la matrice d'autocontrainte $[S]$ dépend forcément de la numérotation des éléments et elle est difficilement exploitable pour les structures complexes :

Équation 22

$$[S] = \begin{bmatrix} q_1^1 & \dots & q_1^s \\ \dots & \dots & \dots \\ q_b^1 & \dots & q_b^s \end{bmatrix}$$

où les termes notés q_j^i peuvent prendre des valeurs quelconques.

Il n'est pas inutile de montrer à ce niveau de l'étude quelle peut être la forme d'un vecteur d'autocontrainte directement issu du calcul numérique. La Figure 22 présente un état d'autocontrainte (parmi dix-neuf) pour le système formé de neuf demi-cuboctaèdres tels que celui de la Figure 12.

(Code des couleurs en Annexe D : rouge pour la compression, bleu pour la traction)

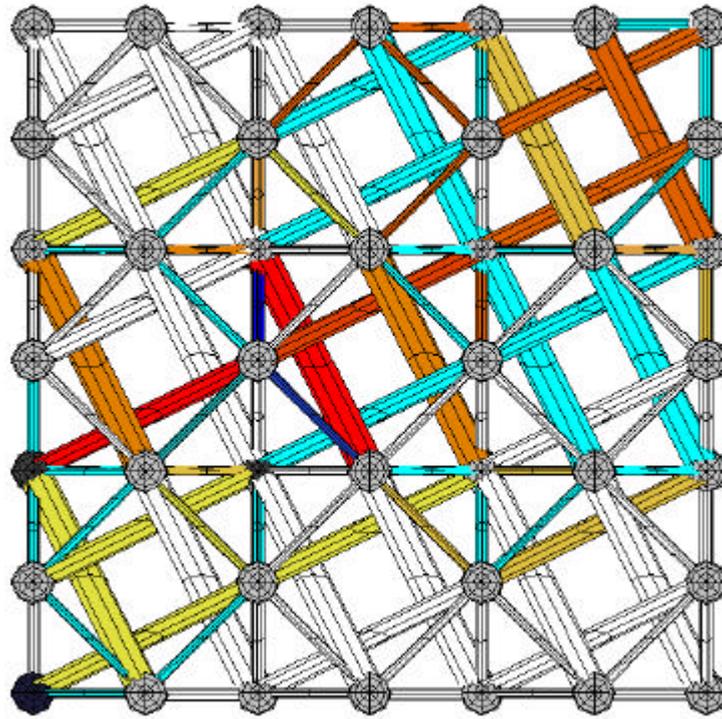


Figure 22 : Un état d'autocontrainte directement issu de la détermination numérique du noyau de la matrice $[A]$.

Il est flagrant que la symétrie du système n'est pas respectée et que cet état d'autocontrainte n'est pas conforme. Nous allons donc tenter d'améliorer ces résultats.

La première étape du traitement 'intuitif' de la matrice consiste à faire apparaître un maximum de zéros dans la matrice. Peu d'éléments sont ainsi sollicités, ce qui facilite la visualisation des vecteurs d'autocontrainte. Le concepteur peut alors se faire une première idée de la forme des états d'autocontrainte présents dans la structure.

Pour faire apparaître ces zéros, nous proposons d'échelonner la matrice. C'est mathématiquement rapide et toujours faisable. Il faut noter que cette opération ne modifie pas le rang de la matrice : les s nouveaux vecteurs formant la matrice des états d'autocontrainte sont toujours linéairement indépendants. Il est possible d'échelonner avec des (1) ou des (-1) suivant la nature des éléments.

Rappel :

- Par convention, nous avons pris les termes de compression négatifs et ceux de traction positifs.
- \mathbf{b} est le nombre d'éléments du système et \mathbf{c} le nombre de câbles.

En *ré-ordonnant les lignes de la matrice* (en fait, la numérotation des éléments) nous obtenons une *matrice diagonale* sur les s premières lignes.

Le résultat est alors le suivant :

$$\text{Équation 23} \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ q_{s+1}^1 & \dots & q_{s+1}^i & \dots & q_{s+1}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_j^1 & \dots & q_j^i & \dots & q_j^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_c^1 & \dots & q_c^i & \dots & q_c^s \\ q_{c+1}^1 & \dots & q_{c+1}^i & \dots & q_{c+1}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_b^1 & \dots & q_b^i & \dots & q_b^s \end{bmatrix}$$

Après cette étape, les résultats peuvent être très différents et nécessiter ou non, d'aller plus loin dans le traitement de la matrice. Mais, même dans un cas très général, cette étape permet de trouver les premiers indices permettant de détecter des états d'autocontrainte « simples » et conformes présents dans la structure.

La lecture des états d'autocontraintes est facilitée par la présence de nombreux zéros qui ne se situent pas uniquement sur les s premières lignes.

2.1.4.1.1 Cas le plus favorable

La matrice obtenue nous fournit des vecteurs **conformes et orthogonaux** au sens du produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^b (Équation 24) :

$$\text{Équation 24} \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ A \\ B \\ L \\ E \\ B \\ A \\ R \\ R \\ E \end{bmatrix}$$

(avec $q < 0$ si les barres doivent être comprimées)

C'est là un cas particulier où la structure possède des « **modules** » (ensemble d'éléments voisins autocontraints) parfaitement **indépendants**, c'est à dire n'ayant **pas d'éléments en commun**.

En effet, pour avoir un produit scalaire nul entre deux vecteurs d'autocontrainte conformes (les termes d'une même ligne sont donc de même signe) il faut nécessairement, qu'au moins un des deux termes sur une même ligne soit nul. Il y a donc dissociation complète entre chacun des modules autocontraints puisqu'un élément ne peut entrer en jeu que dans un seul état d'autocontrainte.

Tout se passe alors comme si la structure était constituée d'un assemblage de « briques » indépendantes. En ré-ordonnant à nouveau les éléments, la matrice des états d'autocontrainte peut se présenter sous la forme suivante :

$$\text{Équation 25 } [S] = \begin{bmatrix} [-q_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [+q_2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-q_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [+q_2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [-q_1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [+q_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [-q_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [+q_2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [-q_1] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [+q_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ A \\ A \\ R \\ B \\ R \\ L \\ E \\ E \end{bmatrix} \text{ avec } q_1 > 0 \text{ et } q_2 > 0$$

Dans ce cas, le travail est terminé : nous avons trouvé une base d'autocontrainte compatible avec la nature des éléments et le concepteur peut combiner ces états d'autocontrainte comme il le souhaite.

Un exemple peut illustrer cette configuration, c'est le cas de quatre quadruplex assemblés de manière à ce qu'il n'y ait aucun câble en commun (Figure 14). L'étude des états d'autocontrainte nous fournit alors quatre états d'autocontrainte parfaitement indépendants (Figure 23).

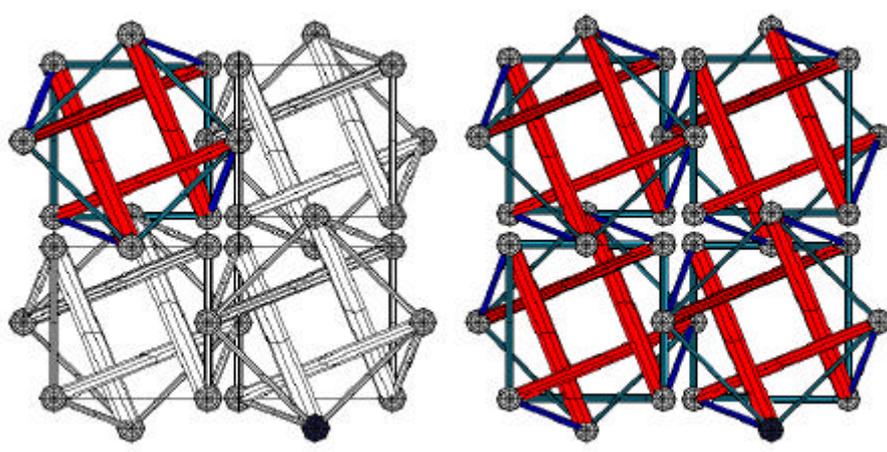


Figure 23 : Assemblage à 4 états d'autocontrainte indépendants

2.1.4.1.2 Cas général

Le cas le plus général est celui où, parmi les s états d'autocontraintes échelonnés, quelques-uns seulement ont été rendus conformes.

Si la structure est « relativement » simple (nombre d'états d'autocontrainte inférieur à cinq) il est envisageable de tenter un traitement « manuel » comme dans l'exemple qui suit.

Exemple de résolution intuitive :

(l'exemple est purement numérique pour réduire la taille des vecteurs et faciliter la lecture)

Prenons une structure possédant cinq éléments (dont deux barres). Nous numérotons les éléments de façon à avoir les barres numérotées en premier. La matrice des états d'autocontrainte est supposée déterminée numériquement et nous donne par ses colonnes, 3 états d'autocontrainte indépendants présents dans la structure. Chaque ligne correspond à un élément de la structure. Les coefficients de cette ligne doivent être positifs pour les câbles et négatifs pour les barres.

$$\text{Équation 26} \quad [S] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Eléments} \\ \text{Barre} \\ \text{Eléments} \\ \\ \text{Câble} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Vect} \\ \text{Vect} \\ \text{Vect} \\ \left. \begin{matrix} n^\circ \\ \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} \end{bmatrix}$$

Le résultat donné par le calcul numérique n'est en conformité que sur le premier vecteur.

Il est alors possible d'effectuer des combinaisons linéaires pour tenter de créer une base conforme. Il faut néanmoins veiller à ce que ces combinaisons n'affectent pas le rang de la matrice pour garder une base du noyau de la matrice d'équilibre.

Exemple de combinaison :

$$\begin{aligned} (\text{Vecteur 1})' &= (\text{Vecteur 1}) \\ (\text{Vecteur 2})' &= (\text{Vecteur 2}) + (\text{Vecteur 1}) \\ (\text{Vecteur 3})' &= (\text{Vecteur 1}) - (\text{Vecteur 3}) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la matrice suivante, de rang trois :

$$\text{Équation 27} \quad [S] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs étant tous conformes, nous avons réussi à générer une base d'autocontrainte en conformité avec la rigidité des éléments. Une combinaison *quelconque* avec des coefficients positifs engendre un état d'autocontrainte compatible avec les rigidités des éléments. L'utilisation de coefficients négatifs est certes possible (pour cet exemple là), mais plus délicate car ils ne peuvent pas être pris n'importe comment.

Bien sûr cette résolution quasi immédiate est un cas idéal. Le problème se complique notablement lorsque le nombre d'états d'autocontrainte augmente : les combinaisons intuitives réalisées sur l'exemple précédent trouvent vite leur limite.

Il est néanmoins envisageable de les systématiser en programmant numériquement des combinaisons linéaires supprimant les termes non conformes à partir des vecteurs conformes. Mais là aussi, cela ne peut se faire que sur un nombre limité d'états d'autocontrainte (dix au maximum) sous peine d'avoir une "explosion" des termes de la matrice au bout d'une dizaine d'itérations.

2.1.4.1.3 Un point de vue mécanique

Si le problème est observé d'un point de vue mécanique et non plus mathématique, il est évident que les états d'autocontrainte dépendent directement de la structure relationnelle des éléments et de la topologie du système (bien évidemment), mais aussi de sa répétitivité géométrique et de toute régularité issue de symétries.

Par exemple, dans un assemblage de 4 modules de tensegrité tels le demi-cuboctaèdre, il existe quatre états d'autocontrainte parfaitement localisés (Figure 24) et linéairement indépendants. Ils forment donc une base du noyau de la matrice d'équilibre et donc de l'ensemble des états d'autocontrainte conformes. Bien sûr, d'autres bases existent, mais il serait peu judicieux d'en prendre une autre puisque celle-ci correspond au mode d'assemblage choisi pour la structure.

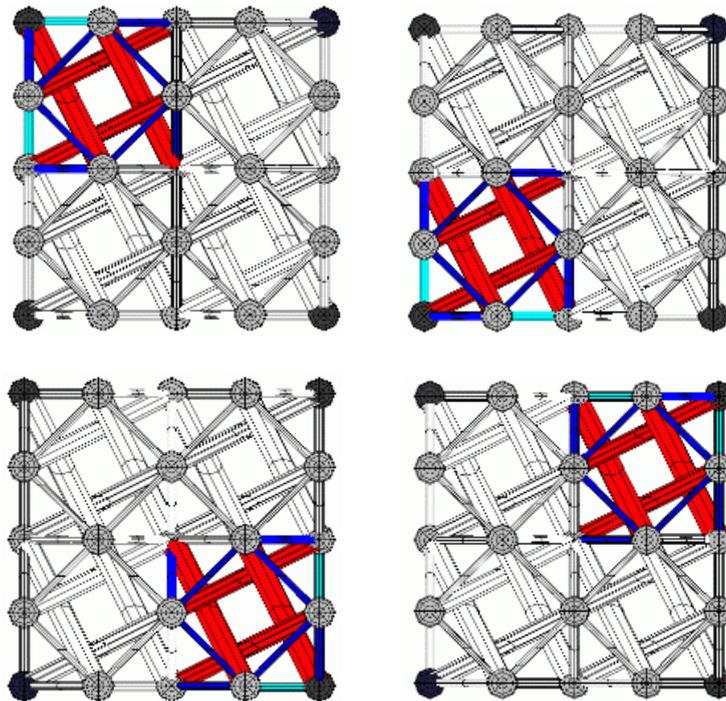


Figure 24 : Quatre états d'autocontrainte partiels pour un assemblage de demi-cuboctaèdres et formant une base du noyau de $[A]$.

Lorsque le concepteur obtient un nombre d'états d'autocontrainte important, c'est à coup sûr parce qu'il a affaire à des états parfaitement identiques mais qui concernent localement la structure en se répétant. Malheureusement, le résultat brut sorti du calcul numérique n'en tient pas du tout compte (Figure 22).

De plus, certains états d'autocontrainte ne sont pas forcément très intéressants.

Par exemple, dans le cas d'un assemblage linéaire de trois demi-cuboctaèdres, il existe **quatre** états d'autocontrainte. Bien sûr, les trois états d'autocontrainte propres à chaque module (Figure 25) sont encore présents. Ils fournissent 3 vecteurs d'autocontrainte linéairement indépendants, mais pour avoir une base du noyau, la détermination d'un quatrième est nécessaire.

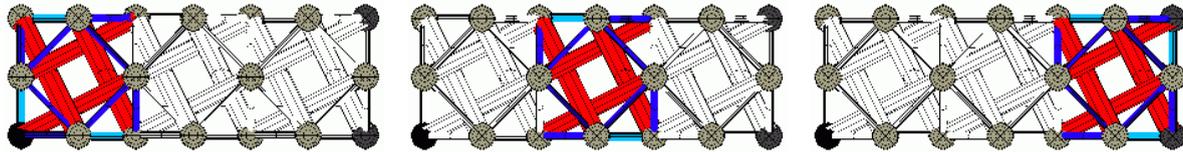


Figure 25 : Un assemblage de trois demi-cuboctaèdres conserve les états propres à chaque module.

Or, la recherche d'un quatrième état d'autocontrainte linéairement indépendant des précédents, ne permet pas de définir un état d'autocontrainte « sympathique ». Par exemple, si le souhait du concepteur est d'avoir un minimum d'éléments sollicités par cet état, il trouve un état non conforme (Figure 26).

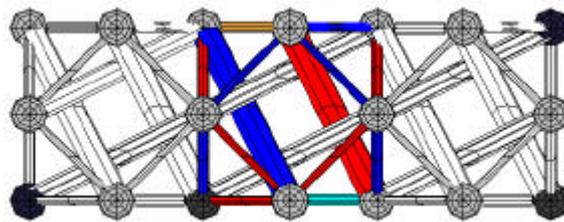


Figure 26 : Un état d'autocontrainte non conforme linéairement indépendant des trois états propres aux modules

Bien sûr, il est possible de combiner cet état avec les trois autres pour le rendre conforme (combinaison intuitive), mais les différentes combinaisons donnent des états d'autocontrainte non symétriques (Figure 27). Ils ne sont donc pas très intéressants d'un point de vue constructif.

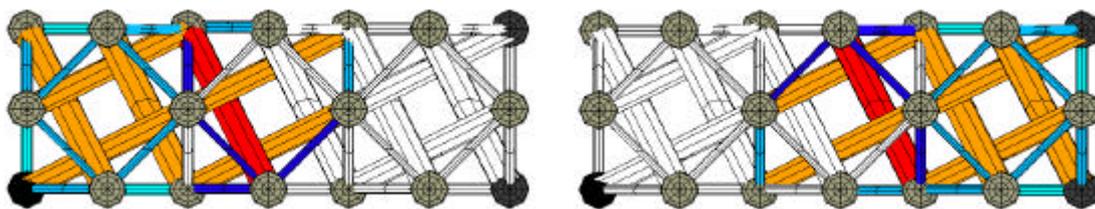


Figure 27 : Deux états d'autocontrainte dissymétriques et linéairement indépendants des trois états propres à chaque module.

Il est donc envisageable de se contenter des trois premiers états d'autocontrainte pour la mise en autocontrainte du système. Le quatrième pouvant être « oublié ». Seule une partie du noyau de la matrice d'équilibre sera alors générée.

Mais, même avec cette simplification, il reste le problème de la détermination des trois états locaux (Figure 25) à partir d'une matrice [S] quelconque.

Nous pouvons proposer deux premières méthodes :

- La première est de tenter des combinaisons linéaires intuitives. Mais nous avons vu qu'elles étaient impossibles lorsque le nombre d'états d'autocontrainte était supérieur à la dizaine.
- Une autre méthode consiste à recréer manuellement les états d'autocontrainte manquant à partir de ceux qui sont conformes et bien identifiés, en prenant en compte la géométrie de la structure. Ils sont alors reconstruits par symétrie. Mais là aussi, le travail est fastidieux car il faut repérer chaque élément participant au vecteur d'autocontrainte. Sur une structure approchant les cinq cents éléments, cela semble difficile. Il faut de plus vérifier, pour ne pas perdre d'informations, que ces états locaux ne sont pas redondants et suffisent à engendrer le noyau de la matrice d'équilibre.

Une dernière solution peut être de poser les **conditions** permettant d'extraire un à un ces états d'autocontrainte de la matrice [S], c'est une méthode que nous appellerons « conditionnelle ».

2.1.4.2 La méthode conditionnelle

Cette méthode repose sur la définition de conditions qui sont affectées à certains des éléments de la structure.

En effet, il est envisageable de poser s conditions indépendantes sur s lignes de la matrice [S]. Dans ce cas, une sous-matrice de [S] de dimension $[s \times s]$ est obtenue et appelée [Co] ou matrice condition.

Le système s'écrit :

$$\text{Équation 28} \quad \{c\} = [Co]\{\alpha\}$$

où le vecteur $\{c\}$ est le vecteur des conditions et $\{\alpha\}$ le vecteur donnant la combinaison des états d'autocontrainte respectant ces conditions.

Si les conditions sont linéairement indépendantes, alors [Co] est inversible et le vecteur combinaison des colonnes de [S] respectant les s conditions est déterminé.

Exemple de résolution :

Imaginons qu'une solution d'un problème (deux états d'autocontrainte et neuf éléments) soit de la forme de l'Équation 29. Cet exemple est directement inspiré de l'assemblage de deux demi-cuboctaèdres pour lesquels existent deux états d'autocontrainte, seuls quelques éléments ont été retirés pour diminuer la taille des vecteurs (trente et un termes sinon).

Le résultat en sortie d'algorithme de calcul est alors de la forme de l'Équation 30.

Équation 29

$$[S] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{RESULTAT CORRECT}$$

Équation 30

$$[S] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{RESULTAT NUMERIQUE}$$

La première colonne donnée par le calcul est conforme et elle nous permet de déduire la deuxième du fait de la symétrie de la structure. Par contre, comment combiner les deux vecteurs pour trouver le deuxième vecteur conforme de l'Équation 29 ?

Comme nous l'avons vu, il suffit de poser des conditions sur certains éléments.

Par exemple, la symétrie de la structure nous permet d'affirmer qu'il est vraisemblable que pour le deuxième état d'autocontrainte, le premier élément ne sera pas autocontraint et le troisième, par contre, le sera. La construction du sous-système s'opère alors en conservant uniquement les lignes une et trois de la matrice [S] et en posant les conditions 0 sur le premier élément et -1 sur le troisième :

Équation 31

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

En inversant la matrice [Co], le vecteur $\{\alpha\}$ est immédiatement déduit.

Équation 32

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors d'effectuer le produit $[S]\{\alpha\}$ pour trouver la deuxième colonne conforme recherchée.

La difficulté de cette méthode réside bien évidemment dans le choix des conditions. Pour cela, il est possible de déterminer au préalable s lignes indépendantes de la matrice $[S]$ qui serviront pour les conditions. Si le concepteur a bien cerné la forme que doivent avoir les états d'autocontrainte, il est alors possible de fixer les valeurs et d'obtenir rapidement le résultat.

Cette méthode peut donc être notamment utilisée pour retrouver les états d'autocontrainte «locaux» un à un lorsqu'ils existent.

En outre, si le but est d'obtenir **un seul état d'autocontrainte** (symétrique par exemple) il n'est pas nécessaire de déterminer tous les états d'autocontrainte conformes. En posant les s conditions voulues, un état d'autocontrainte parfaitement symétrique est extrait et il peut être fait abstraction des autres.

Bien sûr, en n'extrayant qu'un seul état d'autocontrainte, le concepteur réduit les possibilités d'adaptation de l'autocontrainte.

Nous allons proposer dans le paragraphe qui suit une méthode qui permet de déterminer de façon systématique tous les états d'autocontrainte compatibles avec la rigidité des éléments. Elle fournira ainsi un maximum de possibilités pour optimiser l'autocontrainte.

2.1.5 Une méthode mathématique systématique

Le problème de la recherche de tous les états d'autocontrainte conformes peut être posé de façon formelle.

Le calcul numérique nous a fourni une matrice des états d'autocontrainte $[S]$ non conforme, composée de b lignes (nombre d'éléments) et s colonnes (nombre d'états d'autocontrainte).

$$\text{Équation 33} \quad [S] = \begin{bmatrix} q_1^1 & q_1^2 & \dots & q_1^s \\ q_2^1 & q_2^2 & \dots & q_2^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_c^1 & q_c^2 & \dots & q_c^s \\ q_{c+1}^1 & q_{c+1}^2 & \dots & q_{c+1}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_b^1 & q_b^2 & \dots & q_b^s \end{bmatrix}$$

La structure possédant c éléments câbles, ils ont été positionnés en premier dans l'ordonnancement des lignes de la matrice $[S]$.

La condition de conformité d'un état d'autocontrainte peut alors s'exprimer par c conditions de positivité sur les c lignes correspondant à des éléments câbles. Nous supposons pour l'instant que seul les câbles possèdent une rigidité unilatérale :

$$\text{Équation 34} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1^1 \alpha_1 + q_1^2 \alpha_2 + \dots + q_1^s \alpha_s \geq 0 \\ q_2^1 \alpha_1 + q_2^2 \alpha_2 + \dots + q_2^s \alpha_s \geq 0 \\ \dots \\ q_c^1 \alpha_1 + q_c^2 \alpha_2 + \dots + q_c^s \alpha_s \geq 0 \end{array} \right.$$

où le vecteur $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}^t$ est un vecteur combinaison des s états d'autocontrainte de la matrice $[S]$.

Nous allons donc par la suite raisonner sur ces conditions et voir ce qu'elles impliquent d'un point de vue mathématique.

2.1.5.1 Les cas triviaux

Avant d'aller plus loin dans l'interprétation mathématique du problème, éliminons les cas triviaux pour lesquels $s=0$ ou $s=1$.

Si $s=0$, le système ne possède aucun état d'autocontrainte. Il ne présente donc pas d'intérêt.

Si $s=1$, cela signifie qu'il n'existe que deux possibilités d'avoir un état conforme : soit, c'est $[S]$, soit c'est $-[S]$.

Dans les deux cas si certains éléments ne sont pas autocontraints, cela veut dire qu'ils n'interviennent pas dans la mise en autocontrainte de la structure. Pour être sûr de ne pas sous évaluer les mécanismes présents, il faut procéder à un second calcul après avoir éliminé les câbles non autocontraints de la structure. Ce cas est donc vite élucidé.

Pour les cas où $s>1$, nous allons dans un premier temps présenter des interprétations géométriques avant de donner les solutions numériques envisageables.

2.1.5.2 Une interprétation géométrique

Les c conditions de l'Équation 34 peuvent être perçues comme étant c partitions de l'espace vectoriel des solutions (le noyau de $[A]$) par des hyperplans donnant une zone conforme et une zone non conforme de l'espace.

Le sous-espace des états d'autocontrainte conformes se situe alors à l'intersection des c demi-espaces conformes.

2.1.5.2.1 Cas $s=2$

Dans ce cas, l'espace des états d'autocontrainte est un plan et chaque condition posée à l'Équation 34 définit une droite coupant le plan des états d'autocontrainte en deux zones : un demi-plan de conformité, un demi-plan de non-conformité.

La superposition des conditions peut alors donner un résultat tel que celui présenté sur la Figure 28 : les parties du plan non conformes étant grisées, seul un secteur du plan est conforme, c'est celui qui est blanc et délimité par deux droites (D_i et D_j).

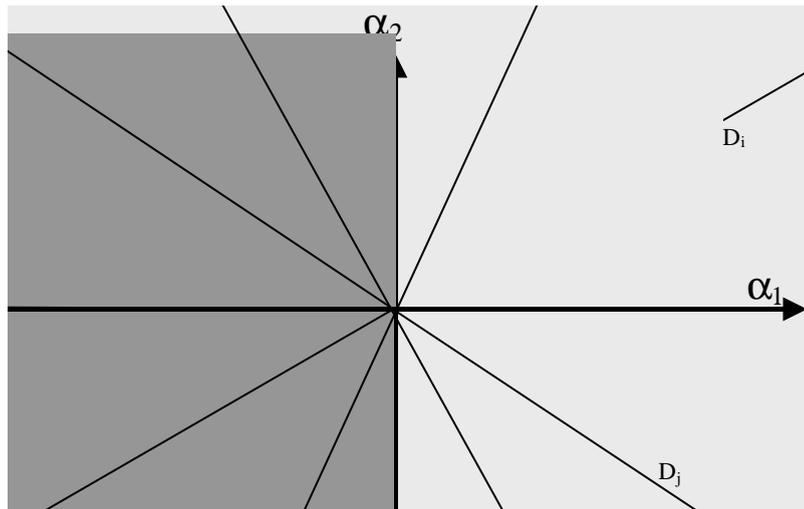


Figure 28 : Interprétation géométrique du problème lorsque $s=2$. La zone blanche est la zone des états d'autocontrainte conformes.

Les deux vecteurs correspondant aux droites D_i et D_j , sont des états d'autocontrainte qui possèdent chacun (au moins) un zéro respectivement sur les lignes i et j . Il se peut que certaines droites se superposent, plusieurs coefficients d'autocontraintes sont alors nuls pour l'état d'autocontrainte considéré.

Il existe également des cas de dégénérescence où tout l'espace est grisé et il n'y a pas de solution : c'est le cas illustré sur la Figure 29.

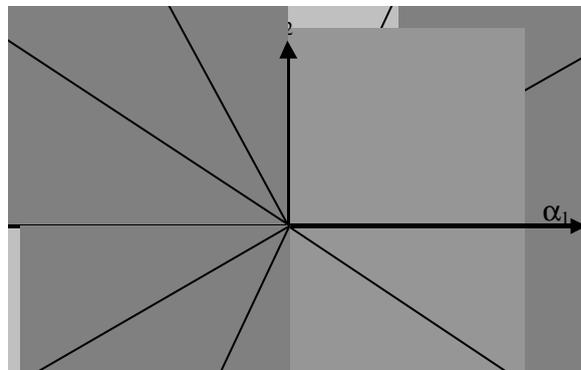


Figure 29 : Cas où il n'existe pas de solution au problème (l'ensemble du plan est grisé).

Un autre cas particulier est celui où l'intersection des demi-plans conformes n'est pas un secteur mais une droite (Figure 30). Dans ce cas, un seul état d'autocontrainte a été rendu conforme sur les deux. Cela revient au cas trivial où $s=1$ et certains câbles n'interviennent pas pour la mise en autocontrainte du système.

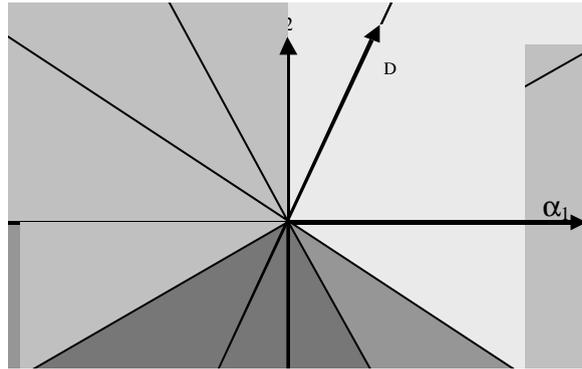


Figure 30 : Cas où seule une droite est acceptable, la droite D.

2.1.5.2.2 Cas s=3

Dans le cas $s=3$, les conditions posées sur les câbles ne définissent plus des droites partageant le plan, mais des plans décomposant l'espace des états d'autocontrainte en deux sous-espaces conforme et non conforme.

L'intersection des zones conformes ne définit plus alors un secteur de plan dans lequel les états d'autocontrainte seraient conformes, mais un cône (Figure 31).

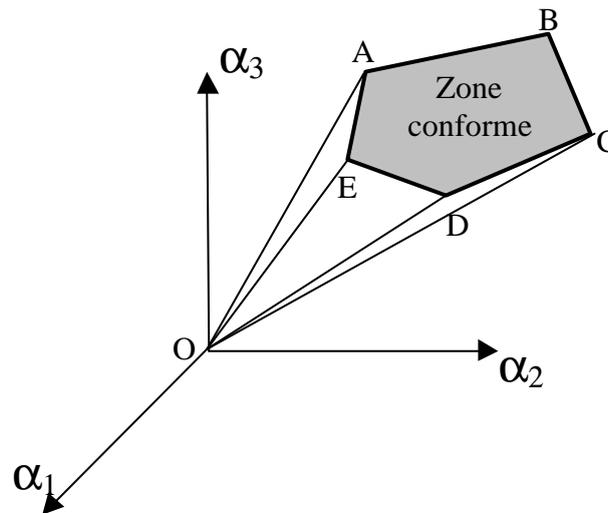


Figure 31 : Dans le cas $s=3$, on obtient un "cône de conformité" à l'intérieur duquel les états d'autocontrainte sont conformes.

Ce cône est convexe puisque l'ensemble des solutions d'un problème linéaire, s'il n'est pas nul, est convexe [ACH78]. En d'autres termes, toute combinaison linéaire de vecteurs conformes par des coefficients positifs ou nuls se situe dans le domaine.

Le nombre de faces du cône est évidemment au plus égal au nombre de conditions posées, c'est à dire au nombre de câbles.

Certains plans pouvant se superposer, **les faces du cône** correspondent à un **coefficient d'autocontrainte nul pour au moins un câble**. De ce fait, les états d'autocontrainte conformes qui possèdent au moins un câble ayant un coefficient d'autocontrainte nul se situent sur le contour du domaine.

Les **arêtes** correspondent, elles, à une tension nulle dans **au moins deux câbles**.

Comme dans le cas où $s=2$, il existe des cas de dégénérescence où le cône se réduit à une simple droite (un seul vecteur conforme) voire un secteur de plan (deux vecteurs conformes).

La question que nous pouvons maintenant nous poser est de savoir, **mécaniquement**, à quels états d'autocontrainte correspondent les arêtes du cône.

Pour répondre à cette question, nous allons raisonner sur un polygone intersection du cône avec un plan. A chaque face du cône correspond un côté du polygone et à chaque arête correspond un sommet. Chaque point du polygone (et la partie grisée sur la Figure 31) définit un état d'autocontrainte combinaison des s vecteurs indépendants ayant servi à l'écriture du problème.

Supposons que deux états d'autocontrainte conformes possèdent des **éléments non autocontraints différents**. Cela signifie que numériquement, ils comportent **des coefficients d'autocontrainte nuls sur des lignes différentes de la matrice [S]**. Ils se situent donc graphiquement sur le contour du polygone, mais sur **des côtés différents**.

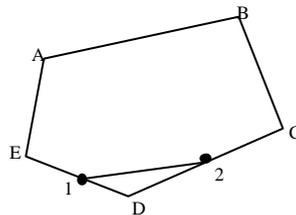


Figure 32 : Deux vecteurs d'autocontrainte possédant des coefficients d'autocontrainte nuls pour des éléments différents (définis par les côtés DE et DC).

Si de plus, ils possèdent un élément **non autocontraint en commun**, cela signifie qu'ils se situent également sur **un même côté**. La seule possibilité est donc qu'ils soient positionnés sur deux sommets successifs du polygone.

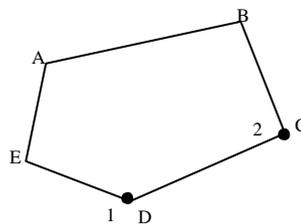


Figure 33 : Deux vecteurs d'autocontrainte à coefficients d'autocontrainte nuls pour des éléments à la fois communs et distincts.

Il faut donc conclure que les sommets successifs du polygone définissent des états d'autocontrainte qui possèdent des coefficients d'autocontrainte nuls sur des lignes de la matrice [S] communes et distinctes.

Numériquement, les états d'autocontrainte C et D se présentent sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cc} \text{C} & \text{D} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & q_D \\ \dots & \dots \\ q_C & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{Câble DC} \\ \dots \\ \text{Câble CB} \\ \dots \\ \text{Câble DE} \end{array} \end{array}$$

Or, c'est ce qui caractérise les états d'autocontrainte partiels "locaux" d'assemblages de modules de tensegrité. En effet, ils possèdent beaucoup d'éléments non autocontraints, parfois communs, parfois différents (Figure 24).

Par exemple, pour trois octaèdres expansés assemblés de façon linéique, il existe trois états d'autocontrainte, chacun correspondant à un des modules. Ils sont tous les trois conformes (Figure 34).

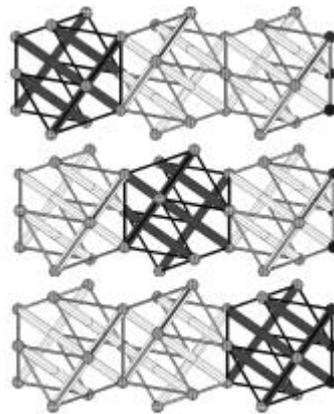


Figure 34 : Les trois états d'autocontrainte d'un assemblage d'octaèdres expansés.

Il est alors facile (pour ce cas simple) d'imaginer le polygone résultant. Les états d'autocontrainte possédant des câbles à la tension nulle à la fois communs et différents entre eux, ils se situent sur les sommets du polygone de conformité (Figure 35).

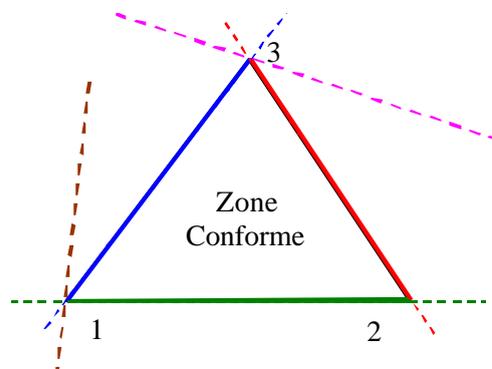


Figure 35 : Représentation du "polygone de conformité" pour trois octaèdres expansés.

Si les états d'autocontraintes 1, 2, et 3 sont situés sur les sommets du polygone, il est possible de repérer sur la structure les câbles donnant les côtés du polygone.

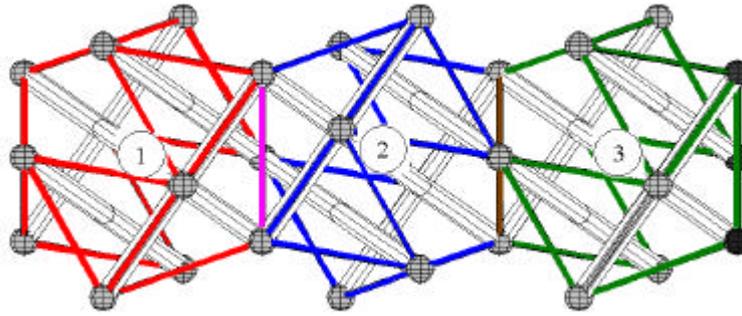


Figure 36 : Les câbles des modules 1, 2 et 3 (de gauche à droite) donnent les faces du cône de conformité.

Les câbles du module 1 constituent l'arête joignant les états d'autocontrainte 2 et 3 **puisque'ils ne sont pas autocontraints pour ces deux états**. De même, les câbles du module 2 joignent les états d'autocontrainte 1 et 3 et les câbles du module 3 joignent 1 et 2.

Il est évident que ces sommets ne peuvent être que trois, car à partir de ces trois états d'autocontrainte, il est impossible de faire apparaître d'autres « familles de câbles » à valeur nulle sans sortir du cône de conformité.

Il faut également noter que les câbles « communs » à deux modules (roses ou marrons) ne constituent pas une frontière du polygone. Si la valeur nulle leur est affectée, les deux états d'autocontrainte y étant attachés sont annulés. La droite caractérisant leur condition ne peut donc pas rejoindre d'autre sommet du triangle que **celui correspondant au troisième état d'autocontrainte et pour lequel ils n'entrent pas en jeu. Ils définissent alors un domaine encore plus vaste** représenté par les droites passant par les points 1 et 3 et de couleur rose et marron.

Enfin, remarquons que la structure n'est autocontrainte dans son ensemble qu'à l'intérieur du polygone. Pour y accéder, il faut procéder à une combinaison linéaire à coefficients positifs des trois états d'autocontrainte qui constituent les sommets du polygone et forment une base de l'espace d'autocontrainte conforme. Cette interprétation est pertinente à la fois d'un point de vue mathématique et mécanique. Cela justifie de poursuivre plus loin notre raisonnement.

2.1.5.2.3 Cas $s=4$

A partir de la dimension quatre, l'interprétation géométrique du problème devient difficile. En effet, il n'est pas possible de représenter graphiquement un espace à quatre dimensions.

Néanmoins, comme dans le cas de la dimension trois, il est possible d'intersecter le sous-espace conforme par un hyperplan. Nous supposons alors que l'intersection n'est plus un polygone, mais un polyèdre.

Il est ainsi possible de poursuivre l'interprétation graphique des résultats.

Justement, nous avons vu que dans le cas de quatre demi-cuboctaèdres assemblés en carré (2x2), nous obtenons quatre états d'autocontrainte (Figure 24).

L'interprétation géométrique est immédiate : les quatre états d'autocontrainte linéairement indépendants correspondant à chaque module se situent aux sommets d'un tétraèdre.

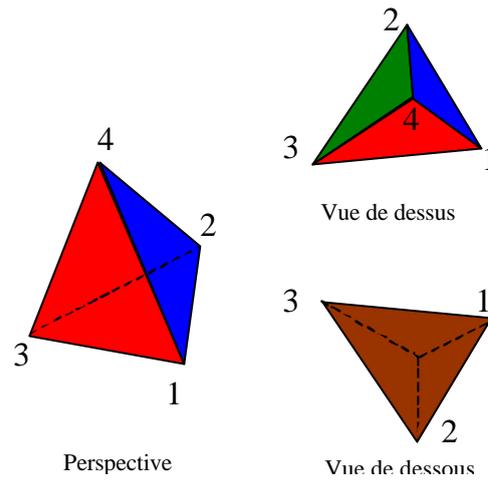


Figure 37 : « Polyèdre de conformité » pour les quatre états d'autocontrainte partiels d'un assemblage de quatre demi-cuboctaèdres.

Là encore, pour mettre en état d'autocontrainte l'ensemble de la structure, il faudra utiliser les quatre états d'autocontrainte pour se situer à l'intérieur du domaine et non sur sa frontière.

Ces premiers exemples simples pourraient nous laisser penser que le nombre de sommets du domaine conforme est exactement égal à la dimension de l'espace. Mais c'est là une fausse impression puisque nous avons vu que dans le cas 3D, le nombre de faces du cône pouvait être égal au nombre de câbles.

Un autre système permet d'ailleurs de fournir un contre exemple : c'est celui de trois demi-cuboctaèdre assemblés linéairement. Dans ce cas, nous obtenons encore quatre états d'autocontrainte indépendants. En plus des trois propres à chaque module (Figure 25), nous avons vu qu'il était possible de rendre le quatrième conforme de deux manières différentes (Figure 27).

Il est alors évident que ces cinq états d'autocontrainte satisfont les conditions pour se situer sur les sommets du polyèdre de conformité. En numérotant de 1 à 3 les états de chaque module, 4 et 5 les états dissymétriques, des considérations de symétrie nous permettent alors d'imaginer la forme du polyèdre (Figure 38).

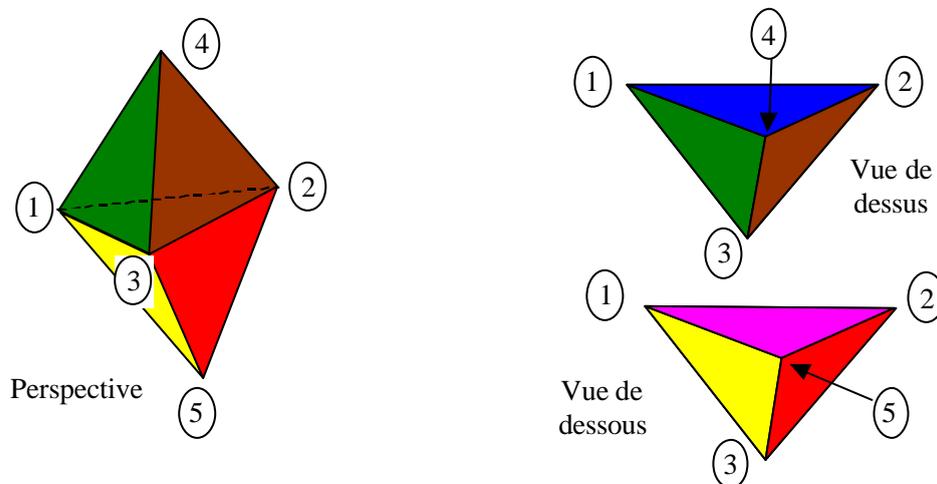


Figure 38 : « Polyèdre de conformité » à cinq sommets pour le cas d'un assemblage de trois quadruplex en ligne.

Comme précédemment, pour mettre en autocontrainte l'ensemble de la structure, il faut se situer à l'intérieur du polyèdre. Pour cela, il est possible de combiner les états d'autocontrainte 1, 2 et 3, ou directement les 4 et 5.

Bien que quatre états d'autocontrainte formant une base suffisent pour décrire l'espace des états d'autocontrainte admissibles, cet exemple démontre qu'il peut être intéressant de déterminer tous les sommets pour avoir une bonne description de l'hyper-cône de conformité.

Il serait donc judicieux de déterminer tous les sommets de « l'hyper-polyèdre », surtout dans le cas où existe un grand nombre d'états d'autocontrainte et où ils sont difficilement identifiables. Nous obtiendrons ainsi les états locaux pressentis (1 à 3), mais aussi les états additionnels et leurs symétriques (4 et 5). Il reste maintenant à fournir une méthode permettant de déterminer ces points singuliers.

Nous allons présenter dans le prochain paragraphe une méthode numérique inspirée de la méthode du simplexe et permettant de déterminer tous les sommets du domaine admissible.

2.1.5.3 Détermination des arêtes du cône de conformité

La méthode utilisée pour déterminer les arêtes du cône de conformité est inspirée des méthodes de programmation linéaire.

En effet, moyennant quelques modifications mineures de la matrice d'autocontrainte, nous allons montrer que la recherche d'états d'autocontrainte conformes situés sur un sommet du domaine, se ramène comme au paragraphe 2.1.3.2 à la première partie d'un problème de programmation linéaire.

Dans un premier temps, nous diagonalisons la matrice des états d'autocontrainte, les câbles se situant sur les c premières lignes de la matrice.

$$\text{Équation 35} \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ q_{s+1}^1 & \dots & q_{s+1}^i & \dots & q_{s+1}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_j^1 & \dots & q_j^i & \dots & q_j^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_c^1 & \dots & q_c^i & \dots & q_c^s \\ q_{c+1}^1 & \dots & q_{c+1}^i & \dots & q_{c+1}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_b^1 & \dots & q_b^i & \dots & q_b^s \end{bmatrix} \quad \text{numérotation de des lignes :} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ i \\ \dots \\ s \\ s+1 \\ \dots \\ j \\ \dots \\ c \\ c+1 \\ \dots \\ b \end{bmatrix}$$

Nous avons alors les c conditions qui caractérisent le non-relâchement d'un câble qui s'écrivent :

Équation 36
$$q_j = \sum_{i=1}^s \alpha_i q_j^i \geq 0 \quad \text{pour } j = s+1, \dots, c \quad \text{avec} \quad \alpha_i \geq 0$$

Remarque importante :

Il est possible que le concepteur veuille également des vecteurs d'autocontrainte qui respectent la condition de compression dans les barres. Dans ce cas, il faut ajouter les mêmes conditions sur les **(b-c)** barres.

Néanmoins, pour respecter un même sens au niveau des inégalités, il faut multiplier la partie de [S] concernant les barres par (-1). Dans ce cas, l'Équation 36 doit être vérifiée pour les **b** éléments et non plus pour les **c** câbles. Le problème se présente alors sous la forme de **(b-s)** inéquations.

Ce système correspond exactement à la première partie d'un problème de programmation linéaire énoncé au paragraphe 2.1.3.2 (Problème 4) avec de plus la condition $\alpha_i \geq 0$. Cette condition découle du fait que les vecteurs une fois diagonalisés ne peuvent être combinés qu'avec des α_i positifs pour que les câbles correspondant aux coefficients q_1 à q_s soient tendus.

Il faut noter que le point $O(0,0,..,0)$ est solution du problème. Pour éviter de tomber sur cette solution triviale, nous allons fixer une condition sur le vecteur $\{\alpha\}$ de façon à ce que les points trouvés par la suite se situent sur un hyper-plan privilégié.

Cette condition s'écrit :

Équation 37
$$Y = -\sum_{i=1}^s \alpha_i + 1 = 0$$

En reprenant l'interprétation géométrique qui avait été faite dans le cas où $s=3$, la condition Y peut se représenter comme étant la recherche du polygone intersection du cône de conformité avec le plan défini par les points $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$ (Figure 39). Le choix de ce plan se justifie par le fait que **si une solution existe, d'après les conditions de l'Équation 36, elle se situe nécessairement à l'intérieur du dièdre ($a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$)**.

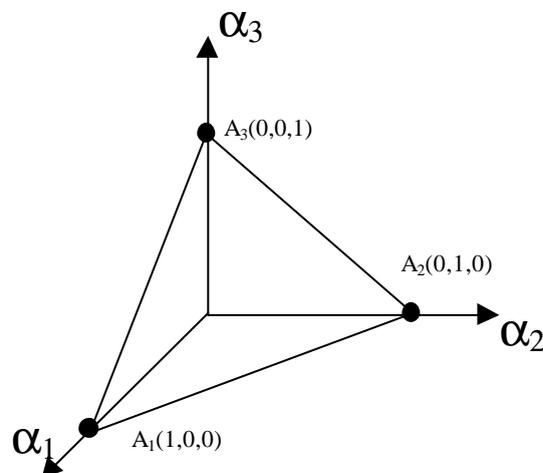


Figure 39 : Recherche de la solution du problème dans le plan (A_1, A_2, A_3)

Le tableau du simplexe correspondant est alors le suivant (voir Annexe C pour la construction) :

	$-\alpha_1$...	$-\alpha_i$...	$-\alpha_s$	1
q_{s+1}	$-q_{s+1}^1$...	$-q_{s+1}^1$...	$-q_{s+1}^s$	0
...
q_j	$-q_j^1$...	$-q_j^1$...	$-q_j^s$	0
...
q_c	$-q_c^1$...	$-q_c^1$...	$-q_c^s$	0
Y	1	...	1	...	1	1

Tableau 4: Tableau du simplexe construit à partir des équations de base

Dans la méthode du simplexe, les variables correspondant à une colonne sont fixées à la valeur nulle ce qui permet d'affecter à chaque variable en ligne la valeur du coefficient de la dernière colonne et sur la même ligne.

Or, pour rester sur le plan $(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_s)$ lors de la recherche des solutions, la variable Y doit rester fixée à zéro. Elle est donc permutée avec l'un des α_i , et elle n'est plus utilisée dans les permutations par la suite (Tableau 5).

	$-Y$...	$-\alpha_i$...	$-\alpha_s$	1
q_{s+1}	b_{s+1}^1	...	b_{s+1}^1	...	b_{s+1}^s	b_{s+1}
...
q_j	b_j^1	...	b_j^1	...	b_j^s	b_j
...
q_c	b_c^1	...	b_c^1	...	b_c^s	b_c
α_1	b_{c+1}^1	...	b_{c+1}^1	...	b_{c+1}^s	b_{c+1}

Tableau 5: Tableau du simplexe après permutation de la variable Y (les q^i ont été modifiés ou cours de la permutation, ils sont maintenant notés b_j^i).

Comme on peut le lire en Annexe C, la méthode du simplexe consiste à permuter les variables en lignes et en colonnes jusqu'à obtenir une dernière colonne du tableau positive. Dans ce cas, une solution est trouvée en prenant toutes les variables correspondant à une colonne nulles et les variables correspondant à une ligne j seront égale au b_j en regard.

Chaque tableau du simplexe correspondant à un point intersection des hyper-plans conditions (Cf. Annexe C), tous les sommets de « l'hyper-polyèdre de conformité » correspondront à un tableau différent.

Il existe en théorie C_{s-1}^c combinaisons possibles donnant des tableaux différents, donc des vecteurs $\{\alpha\}$ différents. Néanmoins, tous les tableaux ne donneront pas de solutions conformes. Il n'est donc pas nécessaire de tous les construire.

Pour éviter de se perdre dans ce nombre exponentiel de combinaisons possibles, nous avons développé une méthode qui est inspirée de la méthode de recherche de solution optimale [BRO72] lorsque la première partie de l'algorithme a permis de trouver une solution.

L'interprétation géométrique qui a été faite dans l'Annexe C nous a permis de visualiser simplement la méthode du « pivot de Jordan ». Elle permet de passer d'une intersection d'hyperplans condition (ce que nous cherchons) à la première nouvelle intersection trouvée, en suivant une direction privilégiée.

L'idée de la méthode de parcours exhaustif du domaine est **de tester, à partir d'un sommet du domaine, toutes les directions de parcours possible et permettant de rester sur le domaine**. Nous obtenons ainsi tous les autres sommets voisins du sommet considéré.

Au bout d'un nombre fini (et réduit) de séquences, nous aurons parcouru tous les sommets du domaine.

Nous avons défini cette stratégie de parcours d'un point de vue numérique dans l'Annexe E.

Au final, le concepteur obtient l'ensemble des états d'autocontrainte admissibles. *Nous répondons ainsi pleinement au problème de la détermination de l'ensemble des états d'autocontrainte conformes.*

Il est alors toujours possible de trier ces états pour ne garder que ceux qui sont linéairement indépendants voire uniquement ceux qui répondent aux aspirations du concepteur.

2.1.6 Conclusion

Nous avons montré que des assemblages de modules de tensegrité simples permettaient de générer des formes très différentes et aptes à répondre aux aspirations des architectes.

Mais, si l'étude des systèmes réticulés spatiaux autocontraints statiquement et cinématiquement indéterminés a donné lieu à de nombreux résultats, les auteurs ne s'intéressaient qu'à des systèmes pour lesquels les éléments possédaient des rigidités bilatérales.

Aussi, lorsque le concepteur se place dans le cadre de l'étude de systèmes de tensegrité ou de poutres-câbles et qu'il souhaite recenser le nombre d'états d'autocontrainte ou de mécanismes du système, il peut alors se trouver devant des *résultats incorrects* dans la mesure où les hypothèses de départ ne sont pas vérifiées : les câbles ne peuvent équilibrer d'efforts de compression.

Une première méthode a été proposée pour **vérifier les résultats** de ce recensement.

Pour aller plus loin et appréhender au mieux la répartition de l'autocontrainte dans le système, nous avons exposé des méthodes permettant une ***mise en conformité des états d'autocontrainte*** tenant compte de la nature physique et mécanique des éléments. Il est alors possible de rechercher une base d'autocontrainte entièrement conforme (le rang de la matrice des états d'autocontrainte est alors conservé) ou seulement quelques vecteurs permettant une mise en autocontrainte de l'ensemble du système. En outre, **l'ensemble des états d'autocontrainte conformes peut être déterminé**.

Le concepteur a alors la possibilité de jouer sur ces différents états conformes pour adapter l'autocontrainte à la destination future de la structure. Cela peut permettre, par exemple, d'aller vers le contrôle et l'adaptabilité des systèmes lors de sollicitations dynamiques.

Dans le cas d'une grille formée par assemblage de trente-six demi-cuboctaèdres, des répartitions différentes de l'autocontrainte sont en effet possibles : le concepteur peut choisir d'avoir une répartition homogène ou non de l'autocontrainte (Figure 40).

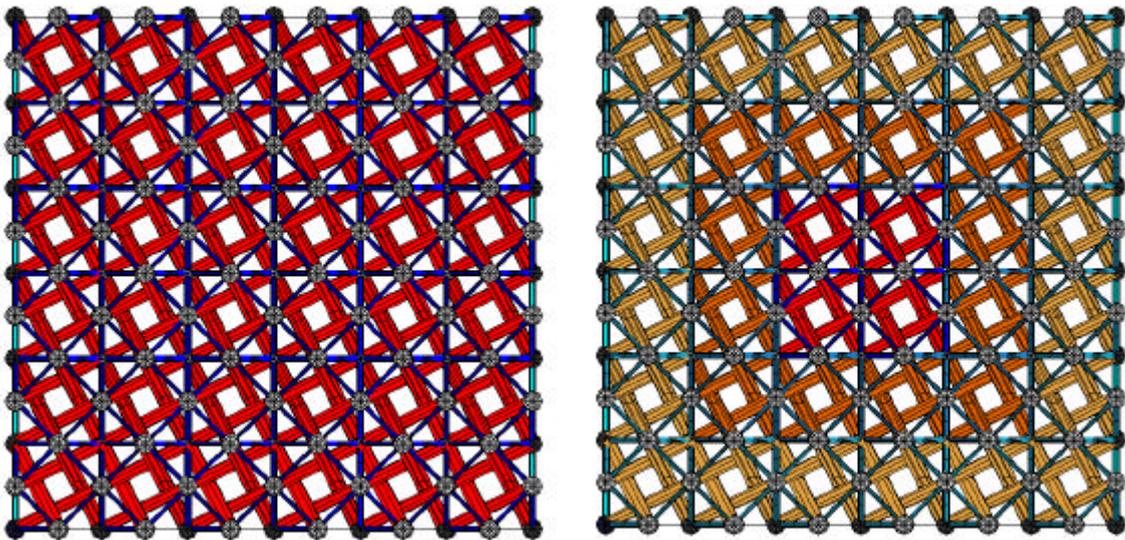


Figure 40 : Deux répartitions d'autocontrainte différentes dans une grille formée de trente-six demi-cuboctaèdres.

Nous allons voir dans le prochain chapitre comment nous pouvons définir qualitativement et quantitativement l'autocontrainte et comment ce choix peut influencer sur le comportement de la structure. Cela permettra de donner les éléments essentiels pour dimensionner les systèmes de tenségrité.

2.2 Dimensionnement des systèmes de tenségrité

Nous allons aborder dans ce chapitre le problème du dimensionnement des systèmes de tenségrité.

Dans le cas de systèmes autocontraints, la phase de dimensionnement amène le concepteur à fixer non seulement les caractéristiques géométriques des sections droites des éléments (section et inertie), mais aussi, ce qui fait leur spécificité, la répartition et le niveau d'autocontrainte. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, la loi de HOOKE permet alors de calculer les longueurs de fabrication de chaque élément.

D'autre part, la rigidité globale d'une structure est conditionnée par différents facteurs :

- ✓ La rigidité propre à chaque élément
- ✓ Le rapport de rigidité entre les éléments barres et câbles
- ✓ Le niveau et la répartition de l'autocontrainte.

Afin de fournir au concepteur un cheminement logique pour le dimensionnement, nous devons dans un premier temps évaluer qualitativement et quantitativement l'effet de chacun des paramètres.

Après un bref exposé sur les méthodes de calcul au second ordre qui sont utilisées pour l'étude du comportement, nous présenterons quelques résultats sur l'influence des paramètres tels que le niveau d'autocontrainte ou la rigidité relative des éléments.

Ensuite, nous nous placerons dans un cadre réglementaire pour réaliser l'étude d'une structure de grande taille pouvant servir pour de la couverture de bâtiment.

2.2.1 Le calcul des systèmes de tenségrité

Dans le cas des systèmes réticulés, et pour des actions extérieures appliquées aux nœuds du système, l'hypothèse de coïncidence des fibres moyennes permet d'affirmer que les éléments ne sont soumis qu'à des actions de traction ou de compression.

L'équation de base qui, en statique, traduit l'équilibre d'un problème s'écrit alors :

$$\textit{Équation 38} \quad [K] \{u\} = \{f\}$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité globale de la structure, $\{u\}$ le vecteur des déplacements nodaux et $\{f\}$ le vecteur des actions extérieures appliquées aux nœuds.

La matrice de rigidité $[K]$ est le résultat de l'assemblage dans un repère global, de matrices de rigidité élémentaires correspondant à chaque élément du système. Ces matrices sont définies dans un repère local lié à l'élément et dépendent du modèle de comportement choisi.

Nous allons dans un premier temps définir le modèle utilisé, puis, nous montrerons comment actualiser la géométrie du système et les différentes matrices afin de converger vers la solution du problème posé. Enfin, nous indiquerons comment traiter le cas d'un relâchement de câble.

2.2.1.1 Matrices de rigidité

Le modèle choisi pour le comportement est assez logiquement celui d'un élément linéique (Figure 41) : les systèmes de tensegrité étant réticulés, les actions sont supposées appliquées uniquement au niveau des nœuds et les éléments ne sont sollicités qu'en traction ou compression.

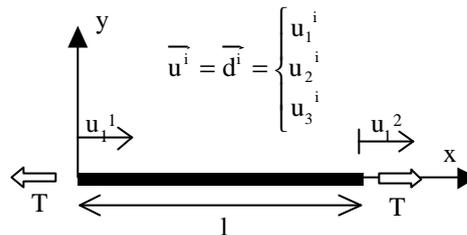


Figure 41 : Un élément de forme linéique simple.

Pour ces éléments linéiques simples, la matrice de rigidité d'un élément j est écrite localement sous la forme [KEB 98] :

Équation **39**

$$[K_j] = [K_j^e] + [K_j^g] = \begin{bmatrix} K_j^1 & 0 & 0 & -K_j^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_j^1 & 0 & 0 & K_j^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_j^2 & 0 & 0 & -K_j^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_j^2 & 0 & 0 & -K_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_j^2 & 0 & 0 & -K_j^2 \\ -K_j^2 & 0 & 0 & K_j^2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_j^2 & 0 & 0 & K_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_j^2 & 0 & 0 & K_j^2 \end{bmatrix}$$

où :

Équation 40
$$K_j^1 = \frac{E_j S_j}{l_j}$$

K_j^1 est le terme de rigidité élastique classique où E_j est le module d'élasticité du matériau, S_j l'aire de la section droite de l'élément et l_j^{lib} sa longueur de fabrication.

Équation 41
$$K_j^2 = \frac{T_j}{l_j}$$

K_j^2 est le terme de rigidité géométrique dû à l'autocontrainte de l'élément et caractérisée par la tension T_j .

Cette tension dans l'élément est directement issue de la loi de HOOKE qui, pour un matériau élastique linéaire, nous donne :

$$\text{Équation 42} \quad T_j = \frac{E_j S_j (l_j - l_j^{\text{lib}})}{l_j^{\text{lib}}}$$

où l_j est la longueur de l'élément dans la géométrie considérée.

Localement, nous avons alors la relation :

$$\text{Équation 43} \quad [K_j] \{u_j\} = \{f_j\}$$

où $\{u_j\}$ est le vecteur des déplacements des nœuds extrémités de l'élément, et $\{f_j\}$ est le vecteur des actions extérieures appliquées sur ces nœuds.

Les matrices élémentaires sont écrites pour chacun des éléments et sont assemblées dans un repère global.

De plus, les systèmes de tensegrité pouvant être des systèmes souples, le calcul se situe dans le cadre des grands déplacements. L'expression de la matrice de rigidité globale $[K]$ est alors composée de trois termes :

$$\text{Équation 44} \quad [K] = [K_E] + [K_G] + [K_{NL}]$$

où $[K_E]$ est la matrice de rigidité élastique, $[K_G]$ la matrice de rigidité géométrique (qu'il serait plus logique d'appeler matrice des contraintes initiales), et $[K_{NL}]$ la matrice de rigidité non linéaire due aux grands déplacements.

Il faut souligner que nous tiendrons compte dans la résolution du problème des non-linéarités géométriques mais pas des non-linéarités matérielles. Tous les matériaux constituant la structure seront supposés parfaitement élastiques.

Un processus itératif doit permettre alors de trouver la position d'équilibre du système lorsqu'elle existe. Nous allons maintenant présenter deux méthodes itératives permettant de rechercher cette position d'équilibre, ce sont les méthodes de NEWTON-RAPHSON et NEWTON-RAPHSON modifiée.

2.2.1.2 La méthode de NEWTON-RAPHSON

Cette méthode repose sur l'utilisation de la matrice tangente. Elle ne tient compte dans la matrice de rigidité $[K]$ que des termes linéaires $[K_E]$ et géométriques $[K_G]$,

La matrice $[K]$ est alors ré-assemblée à chaque itération, en tenant compte de la nouvelle géométrie et en actualisant la matrice $[K_G]$.

Le but du calcul est, à partir d'une position d'équilibre P_1 pour laquelle un vecteur de charge $\{\delta f^1\}$ est appliqué, de trouver la nouvelle position d'équilibre P_2 sous charge.

$$\text{Équation 45} \quad \{f_{P_2}\} = \{f_{P_1}\} + \{\delta f^1\}$$

Où $\{f_{P_i}\}$ sont les actions extérieures équilibrées pour une position P_i .

A la première itération, la matrice tangente $[K_T^1]$ correspondant à la position P_1 est évaluée. L'inversion de cette matrice permet d'accéder à une première valeur $\{\delta u^1\}$ associée à un incrément de charge $\{\delta f^1\}$ et telle que :

$$\text{Équation 46} \quad [K_T^1] \{\delta u^1\} = \{\delta f^1\}$$

où $[K_T^1]$ est la matrice tangente dans la position P_1 .

$\{\delta u^1\}$ définit une nouvelle géométrie de la structure qui permet de calculer $[K_T^2]$. En actualisant les actions extérieures équilibrées $\{f_2\}$ au niveau de chaque nœud, elles peuvent être comparées aux forces appliquées $\{f_{P1}\} + \{\delta f^1\}$. Si la différence (appelée résidu) est inférieure à l'erreur tolérée, le calcul est terminé. Sinon, il se poursuit en écrivant :

$$\text{Équation 47} \quad [K_T^2] \{\delta u^2\} = \{\delta f^2\}$$

où $\{\delta f^2\} = (\{f_{P1}\} + \{\delta f^1\}) - \{f_2\}$ et $\{f_2\}$ est le vecteur des actions extérieures équilibrées dans la position intermédiaire de la deuxième itération.

L'opération est alors répétée jusqu'à ce que les forces équilibrées soient quasiment égales à celles appliquées.

Pour l'itération i , l'écriture est la suivante :

$$\text{Équation 48} \quad [K_T^i] \{\delta u^i\} = \{\delta f^i\} \quad \text{avec} \quad \{\delta f^i\} = (\{f_{P1}\} + \{\delta f^1\}) - \{f_i\} = \{f_{P2}\} - \{f_i\}$$

où $[K_T^i]$ est la matrice de rigidité tangente, $\{\delta u^i\}$ l'incrément de déplacements nodaux, $\{\delta f^i\}$ l'incrément d'actions extérieures aux nœuds du système, et $\{f_i\}$ le vecteur des actions extérieures équilibrées pour la position d'équilibre intermédiaire i .

Le processus de convergence peut être visualisé ainsi :

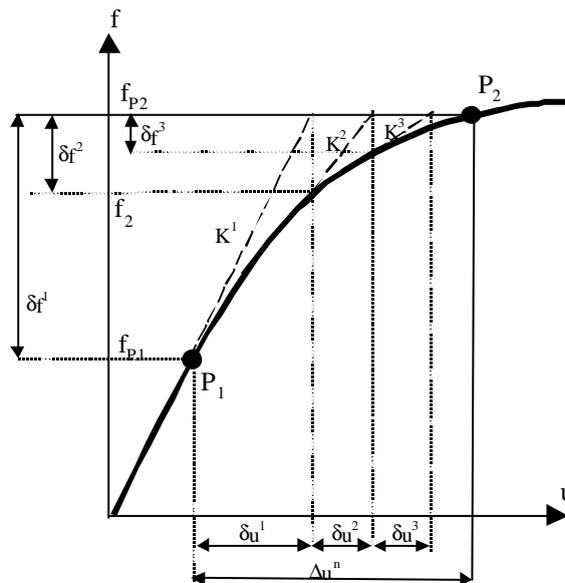


Figure 42 : Principe de la méthode de NEWTON-RAPHSON.

Le principal inconvénient de cette méthode vient de la nécessité d'actualiser non seulement la matrice géométrique $[K_G]$, mais aussi les matrices permettant l'assemblage de la matrice globale. Les calculs peuvent être importants pour un très grand nombre de degrés de liberté.

C'est pour diminuer le « volume total » de calcul qu'une modification a été apportée à la méthode.

2.2.1.3 La méthode de NEWTON-RAPHSON modifiée

Cette méthode repose sur l'utilisation de la matrice de rigidité dans son expression la plus générale (Équation 44).

Le calcul se déroule en restant sur le même point d'équilibre (les matrices de passage du repère local au repère global sont alors inchangées) mais à chaque étape, la matrice de rigidité non linéaire $[K_{NL}]$ est actualisée. Les termes linéaires $[K_E]$ ou géométriques $[K_G]$ restent, eux, constants.

Le processus de convergence est schématisé sur la Figure 43.

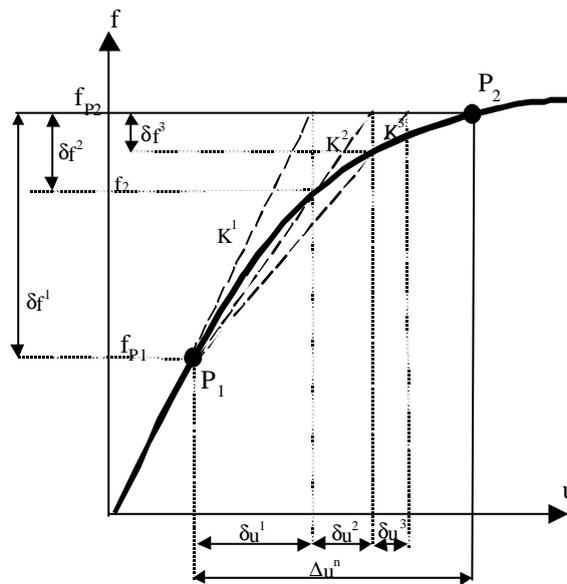


Figure 43 : Principe de la méthode de NEWTON-RAPHSON modifiée.

Pour l'itération i l'écriture de l'équilibre est la suivante :

$$\text{Équation 49} \quad [K_T^i] \{\delta u^i\} = \{\delta f^i\} \quad \text{avec} \quad \{\delta f^i\} = \{f_{P2}\} - \{f_i\}$$

Où $\{f_{P2}\}$ est le vecteur des forces à équilibrer et $\{f_i\}$ le vecteur des forces équilibrées à l'étape intermédiaire considérée.

La difficulté de cette méthode réside dans l'expression non triviale de la matrice de rigidité non linéaire [KEB99].

2.2.1.4 Cas des câbles relâchés

Pour notre cas d'étude, un problème se pose, c'est celui des câbles qui se relâchent lors de l'application de charges extérieures. En effet dans les systèmes de tensegrité, il se peut qu'un câble se détende sans pour autant que la stabilité globale de la structure soit remise en cause.

Pour vérifier qu'un câble est tendu, il faut procéder à chaque itération à l'évaluation de la distance géométrique des deux nœuds d'extrémité du câble. Si cette distance est inférieure à la longueur de fabrication du câble, il est relâché, sinon, il est tendu.

Si un câble est relâché, il n'a plus de rigidité : il doit donc être supprimé de la matrice de rigidité. D'un point de vue numérique nous prenons en compte ce relâchement en affectant un module de YOUNG nul à la matrice de rigidité élémentaire correspondante.

Le câble n'est pas non plus pris en compte dans le calcul des efforts équilibrés puisque sa tension est nulle.

Bien entendu, en cours de chargement, il est possible qu'un câble se relâche puis se tende à nouveau. Il suffit de calculer à chaque étape du calcul la distance de ses nœuds d'extrémité pour le réintégrer éventuellement dans la matrice de rigidité et pour le calcul des forces équilibrées.

2.2.1.5 Conclusion

Après ce bref exposé sur les méthodes de calcul pouvant être utilisées, nous devons préciser que, par la suite, c'est la méthode de NEWTON-RAPHSON qui sera utilisée. Ne travaillant pas sur des structures à grand nombre de degrés de liberté (mille au maximum), elle est suffisante pour nos cas d'études.

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne permet pas de déceler un chemin avec des extrema, mais, compte tenu du comportement des structures étudiées, elle sera suffisante.

Nous prendrons en compte, comme indiqué précédemment, le relâchement des câbles.

L'ensemble du calcul a été programmé sous MATLAB, dans un programme spécialement dédié à l'étude des systèmes de tensegrité, **TENSEGRITE 2000**.

Devant la spécificité des systèmes de tensegrité, tant par la nécessaire recherche de forme, la présence d'états d'autocontrainte ou de mécanismes, il s'est avéré nécessaire de créer un logiciel complet permettant de passer d'une étape à l'autre de la conception sans difficulté.

Ce travail de programmation a été initié en collaboration avec un informaticien en début de thèse puis poursuivi au fur et à mesure de l'avancement des travaux.

Il offre aujourd'hui toutes les fonctionnalités d'un logiciel à interface graphique conviviale (style WINDOWS) appliqué aux systèmes de tensegrité : visualisation des états d'autocontrainte (Figure 40), animation des mécanismes... Il intègre notamment les dernières avancées théoriques sur la recherche des états d'autocontrainte conformes.

Sur le plan numérique du calcul du comportement, les résultats ont fait l'objet de vérifications sur le logiciel de calcul éléments-finis ABAQUS. Les différences entre les deux résultats étaient très faibles puisqu'elles étaient inférieures au pour-cent (Cf. Annexe F).

Ayant exposé les méthodes permettant d'étudier le comportement des systèmes de tensegrité, nous pouvons maintenant présenter les résultats et, dans un premier temps, l'étude des différents paramètres influant sur la rigidité de la structure.

2.2.2 Paramètres de l'étude

Les paramètres qui vont régir le comportement des systèmes de tensegrité sont nombreux.

Bien entendu, comme en construction métallique, les sections droites des éléments et les modules de YOUNG des matériaux vont être des éléments prépondérants dans la rigidité de toute structure de tensegrité. Mais il faut également noter que la rigidité relative des éléments barres et câbles est un facteur déterminant : le comportement de la structure est changé grandement par sa modification.

Si l'influence des rigidités relatives est vérifiable pour de nombreux systèmes, celle de l'autocontrainte est spécifique aux systèmes à contraintes initiales tels que les systèmes de tensegrité. L'autocontrainte est d'ailleurs étudiée tant en terme de niveau d'intensité, qu'en terme de présence localisée ou non dans le système, la combinaison de ces deux variations étant également digne d'intérêt.

Quelques résultats numériques, obtenus pour un module simple, vont permettre d'illustrer l'influence de ces différents paramètres.

2.2.2.1 Les données de l'étude

Pour montrer quels sont les paramètres importants pour la caractérisation du comportement des systèmes de tensegrité, nous allons développer notre argumentation en étudiant un module de tensegrité à six barres et vingt-quatre câbles, l'octaèdre expansé (Figure 44).

L'une des particularités de ce module de tensegrité est que dans la géométrie autocontrainte, toutes les tensions sont égales dans les câbles, et par voie de conséquence, dans les barres.

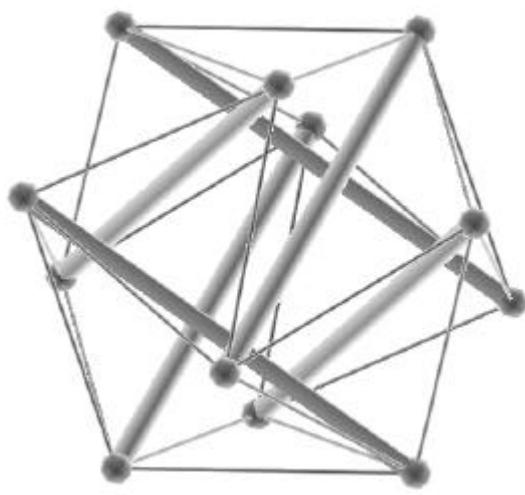


Figure 44 : Le module étudié, l'octaèdre expansé

Pour présenter une étude réaliste nous avons choisi d'étudier un module de 120 cm de hauteur. Dans la géométrie autocontrainte, les barres ont une longueur de 140 cm et les câbles de 85 cm. Le matériau constitutif étant l'acier, les sections des éléments ont été définies ainsi : 3,25 cm² pour les barres (forme tubulaire, 4 cm de diamètre et 2,5 mm d'épaisseur) et 0,28

cm² pour les câbles (diamètre nominal de 6 mm). Le module de YOUNG est pris égal à 200000 MPa pour les barres et 90000 MPa pour les câbles (valeur couramment donnée par les fabricants et que nous avons pu corroborer par des essais expérimentaux).

Il faut souligner que le choix de l'acier est arbitraire et que d'autres matériaux peuvent être utilisés, notamment les composites, pour alléger au maximum la structure. Les études à réaliser seraient identiques et les remarques à venir tout aussi valables.

Pour fixer des bornes à l'étude, les états limites suivants ont été choisis :

(nous reviendrons dans le paragraphe 2.2.3 sur les aspects réglementaires)

- dépassement de la limite élastique garantie pour un câble (donnée à 500 MPa par les fabricants)
- dépassement de la charge ELU limite admise par l'Eurocode 3 pour les barres, et correspondant à 135 MPa pour la géométrie d'élément considérée.
- relâchement d'un câble de la structure, même si la structure conserve une stabilité globale.

Nous allons dans un premier temps nous intéresser au rôle du niveau d'autocontrainte, puis nous verrons quelle est l'influence des rigidités relatives des éléments.

2.2.2.2 Influence du niveau d'autocontrainte

Dans le cas d'un chargement de traction - compression sur le module (Figure 45), nous allons expliciter les résultats obtenus pour trois niveaux d'autocontrainte différents (Figure 46), tant du point de vue du comportement que de celui des charges limites admissibles. Les nœuds supérieurs sont chargés et les nœuds inférieurs sont fixés de manière à éliminer toute rotation ou translation d'ensemble.

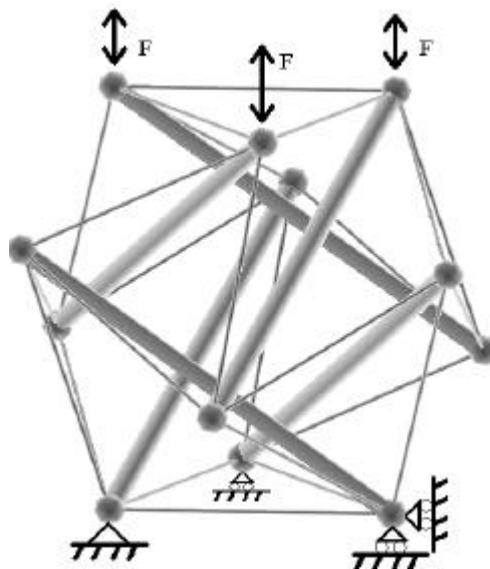


Figure 45 : L'octaèdre expansé sous des actions extérieures le sollicitant en traction compression

Les trois niveaux d'autocontrainte sont choisis de manière à avoir un niveau d'autocontrainte qui varie linéairement.

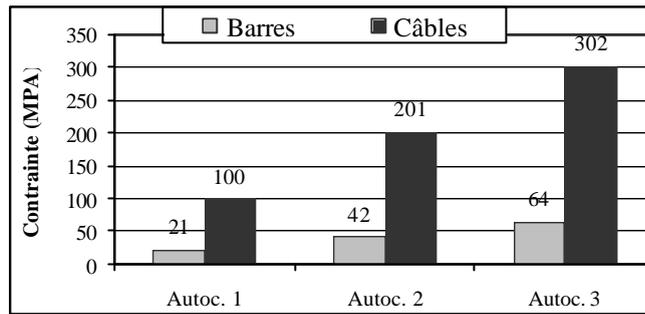


Figure 46 : Les trois niveaux d'autocontrainte choisis.

Ces trois niveaux d'autocontrainte permettent de comparer les flèches obtenues pour une même action extérieure sur le module (Figure 47).

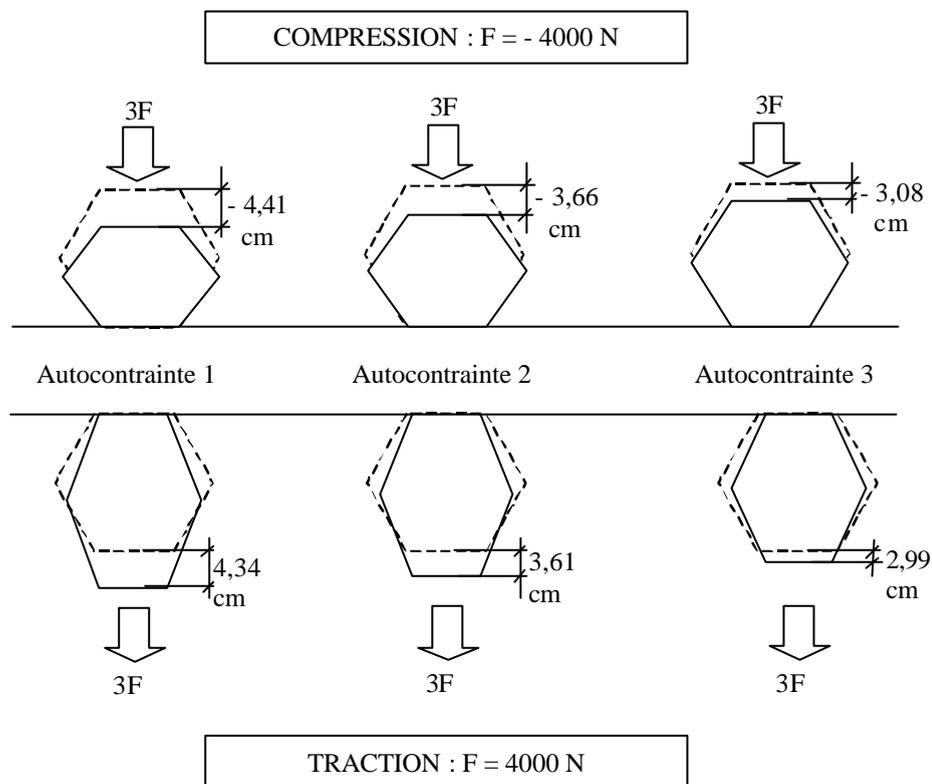


Figure 47 : Flèche sur les trois nœuds supérieurs du module sous une même charge pour les trois niveaux d'autocontrainte et les deux systèmes d'actions extérieures.

Les résultats montrent l'influence du niveau d'autocontrainte sur la rigidité de la structure. Pour un même niveau de chargement extérieur sur le module (en compression $F = -4000 \text{ N}$ et en traction $F = 4000 \text{ N}$), la rigidité du système augmente sensiblement et non linéairement lorsque le niveau d'autocontrainte croît.

De plus, il n'y a pas de symétrie en traction et compression.

Par contre, lorsque le niveau d'autocontrainte augmente, nous observons une diminution sensible des limites d'actions extérieures avant l'atteinte d'une sollicitation limite dans un élément (Figure 48).

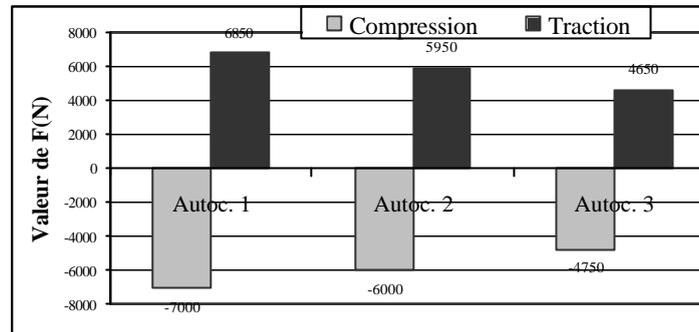


Figure 48 : Valeur des charges extérieures limites (F) avant atteinte d'une sollicitation limite dans un élément.

Cela peut s'expliquer par le fait que les niveaux d'autocontrainte élevés nous placent près des limites de sollicitation : la réserve de sollicitation est amoindrie et limite les plages de charge admissible.

Ces résultats pourraient nous laisser penser que le gain en terme de rigidité se fait au détriment des charges limites admissibles.

En fait cela dépend beaucoup d'un autre paramètre qui est la rigidité relative des éléments barres et câbles. En effet, lorsque le rapport $E_{\text{barres}}S_{\text{barres}}/E_{\text{câbles}}S_{\text{câbles}}$ varie, le comportement de la structure peut s'avérer très différent.

2.2.2.3 Influence de la rigidité relative des éléments

Pour évaluer l'influence du rapport de rigidité entre les différents éléments nous avons fait varier le rapport E_bS_b/E_cS_c dans le cas de l'état d'autocontrainte n°1, pour une même charge de traction de 4000 N sur le module .

Dans le cas précédemment étudié, ce rapport était de 26. Nous avons modifié ce rapport en jouant sur les sections de câbles. L'aire de la section droite des câbles varie alors de 0,14 à 0,7 cm² ce qui donne un rapport de rigidité variant respectivement de 52 à 10.

Pour les différentes valeurs du rapport, nous avons tracé les flèches obtenues en fonction de la charge. Les résultats sont donnés sur la Figure 49. Comme nous pouvions nous y attendre, l'augmentation de ce coefficient entraîne une augmentation sensible de la rigidité de la structure. Mais ce n'est pas le seul résultat de cette étude.

Il faut également noter que l'augmentation de rigidité est importante en cours de chargement.

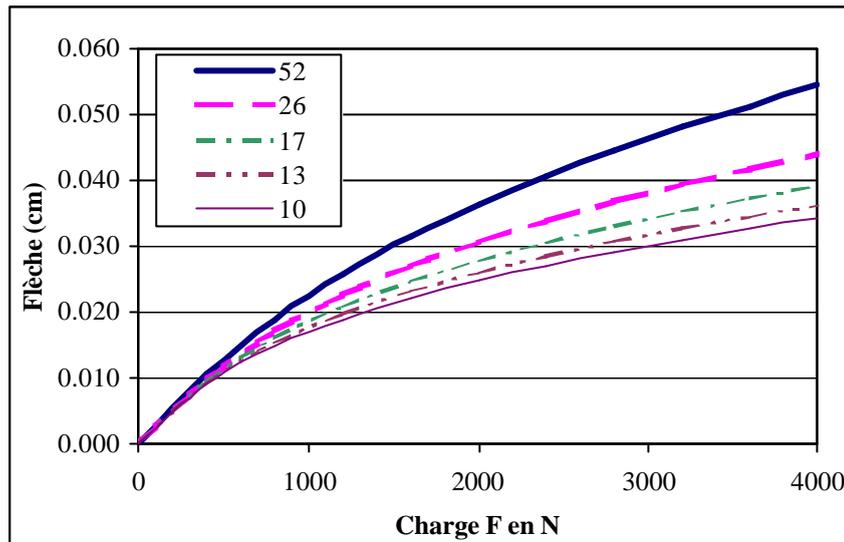


Figure 49 : Différentes courbes de comportement en fonction du rapport des rigidités barres/câbles.

Mais, ce qui ne transparait pas dans ce graphique et qu'il est encore plus important de souligner, c'est le type de ruine obtenu selon le rapport de rigidité.

En effet, lorsque la rigidité des câbles est faible par rapport à celle des barres, ce sont eux qui vont atteindre la limite de sollicitation les premiers. Dans le cas du rapport de rigidité égal à 52, la limite élastique d'un câble est atteinte pour une charge F de 7000 N. Par contre pour un rapport de rigidité de 10, nous avons pu constater que c'était les barres qui avaient atteint leur limite de sollicitation pour une charge F de 18000 N.

Dans certains cas, si le rapport de rigidité est encore plus faible, il peut même y avoir relâchement d'un câble avant atteinte d'une autre sollicitation limite [QUI00].

Nous pouvons considérer qu'un « bon » coefficient de rigidité est un coefficient pour lequel (sous charge croissante) les sollicitations limites sont atteintes quasiment au même moment dans les barres et dans les câbles. De cette façon, le matériau est optimisé.

Quoiqu'il en soit, les paramètres de dimensionnement étant nombreux, il est conseillé pour chaque structure différente de faire une étude de chacun d'eux.

Connaissant le comportement d'un module simple, la question qui se pose maintenant est de savoir si nous pouvons dimensionner une structure de grande taille.

Mais avant de procéder à ce dimensionnement, nous devons tout d'abord exposer le cadre réglementaire à appliquer dans la construction.

2.2.3 Cadre réglementaire

Jusqu'au XIX^{ème} siècle, la construction d'édifices se faisait de manière empirique. Seule l'expérience permettait de concevoir des structures stables et résistantes.

Mais l'apparition de la construction métallique et de la résistance des matériaux a permis d'édicter les premières règles permettant un calcul rationnel. Pour le béton, ce fût une circulaire en 1906.

2.2.3.1 Les codes déterministes

Dans un premier temps, les règles de construction furent **déterministes** : à partir d'une sollicitation limite admise par les matériaux, les ingénieurs vérifiaient que les actions ne dépassaient pas un certain seuil de cette contrainte admissible. Un coefficient de sécurité permettait de fixer cette limite, il tenait compte forfaitairement de l'ensemble des paramètres aléatoires liés à la réalisation d'un ouvrage.

L'ingénieur devait simplement vérifier l'inéquation suivante :

$$\text{Équation 50} \quad \sigma \leq \sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_r}{K}$$

Où σ est la contrainte induite par les actions extérieures dans la section droite considérée, σ_{adm} la contrainte admissible à ne pas dépasser, σ_r la résistance attendue du matériau, et K le coefficient de sécurité.

Mais les progrès dans l'étude à la fois des matériaux, des structures ou des actions ont démontré au cours du XX^{ème} siècle l'insuffisance de ce coefficient de sécurité.

Aussi, à partir des années 50, après quelques essais antérieurs, la sécurité des constructions a été développée sous un angle probabiliste.

2.2.3.2 L'approche probabiliste

L'approche probabiliste consiste à évaluer pour une construction donnée sa probabilité de ruine. C'est une étude de la **fiabilité** [GOY98] qui permet de s'assurer que l'ouvrage remplira ses fonctions, et ce, durablement.

Pour réaliser cette étude, il faut bien sûr tenir compte de toute la variabilité des paramètres liés à un processus de conception et de construction :

- Incertitude dans la modélisation même de la structure (approximations admises pour le calcul)
- Incertitudes sur la résistance attendue des matériaux
- Incertitudes sur la réalisation (dimensions, assemblages, erreurs humaines...)
- Incertitudes sur les actions (actions variables : neige, vent...)
- Etc...

Il est possible d'associer à certaines de ces variables une loi de distribution statistique, mais d'autres (l'erreur humaine notamment) ne sont pas probabilisables.

Une étude probabiliste pure n'est donc pas réalisable pour des cas courants d'étude dans l'état actuel de nos connaissances.

A partir des années 60, une autre approche, semi-probabiliste, a vu le jour. Elle reprend pour une part les aspects probabilistes mais en conservant des **coefficients partiels** (de sécurité) permettant de tenir compte de l'expérience antérieure et des hypothèses liées aux modèles adoptés.

2.2.3.3 Le modèle semi-probabiliste

Le modèle semi-probabiliste évite le calcul pur de probabilité de ruine en proposant la vérification d'un critère faisant intervenir l'effet d'actions extérieures (noté E) et la résistance attendue (notée R).

L'inéquation à vérifier est alors de la forme suivante :

$$\text{Équation 51} \quad \gamma_F E_k \leq \frac{R_k}{\gamma_M}$$

Si les variables E_k et R_k sont des valeurs représentatives de variables aléatoires actions et résistance bien connues, les coefficients partiels de sécurité γ_F et γ_M tiennent compte forfaitairement des autres phénomènes aléatoires, non probabilisables simplement.

Ce schéma de vérification peut être illustré par la Figure 50 où sont représentées les densités de probabilité pour les variables aléatoires E et R.

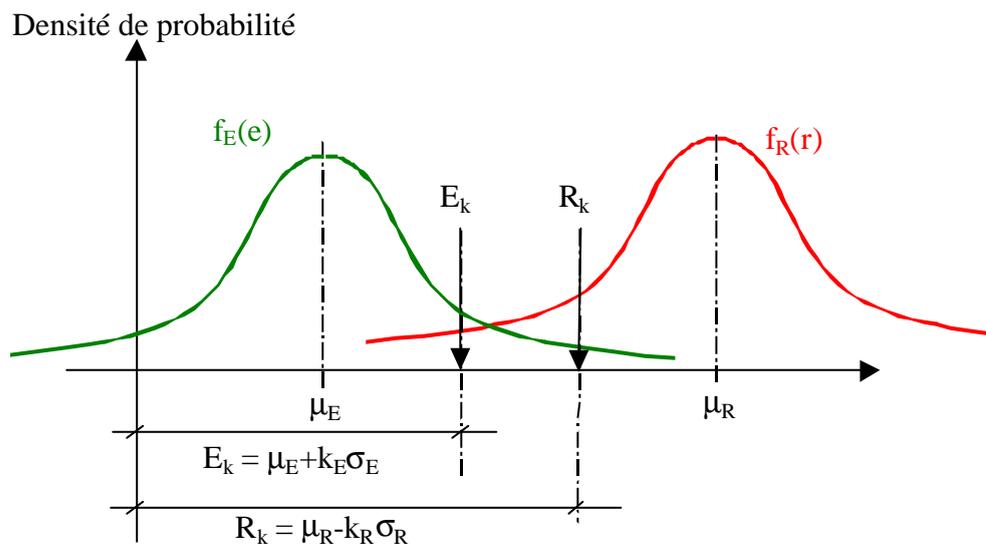


Figure 50 : Illustration schématique du semi-probabilisme [CAL 96]

Des **états limites** sont alors définis. Ils traduisent les exigences structurelles ou fonctionnelles que doit satisfaire la structure. Dès que ces états idéalisés sont dépassés, la structure ne peut plus assurer ses fonctions.

Citons les deux états limites les plus couramment utilisés :

- Les **états limites de service** sont des états causant des dommages limités mais ne remettant pas en cause la stabilité globale de la structure ni la sécurité des utilisateurs.
- Les **états limites ultimes** sont des états entraînant une ruine partielle ou totale de la structure.

Pour chacun de ces états, les coefficients partiels de sécurité prendront des valeurs différentes pour tenir compte de la probabilité d'occurrence souhaitée de telles situations.

Les derniers codes de calcul en vigueur dans la construction sont basés sur ce principe semi-probabiliste.

Selon le champ d'application, il a été créé des règles différentes : CM (Construction Métallique), BAEL (Béton Armé aux Etats Limites), BPEL (Béton Précontraint aux Etats Limites)...

Mais aujourd'hui, avec l'intégration Européenne et pour plus de transparence dans les appels d'offres, il a été nécessaire d'établir des règles communes de façon à ce que les réponses techniques apportées à un niveau international ne puissent être contestées localement.

Des **Eurocodes** ont donc été élaborés pour chaque domaine de la construction et sont appelés à devenir la référence communautaire en matière de règles de calcul aux états limites.

Il existe 9 Eurocodes, dont certains sont encore sous forme d'Euronormes provisoires (ENV) :

- L'EC1 : Bases de calcul et actions sur les structures
- L'EC2 : Calcul des structures en béton
- L'EC3 : Calcul des structures en acier
- L'EC4 : Conception et dimensionnement des structures mixtes acier-béton
- L'EC5 : Calcul des ouvrages en bois
- L'EC6 : Calcul des structures en maçonnerie
- L'EC7 : Calcul géotechnique
- L'EC8 : Calcul des structures résistant aux séismes
- L'EC9 : Calcul des structures en alliage d'aluminium

Le schéma de vérification est alors le même pour tous les Eurocodes (Figure 51)

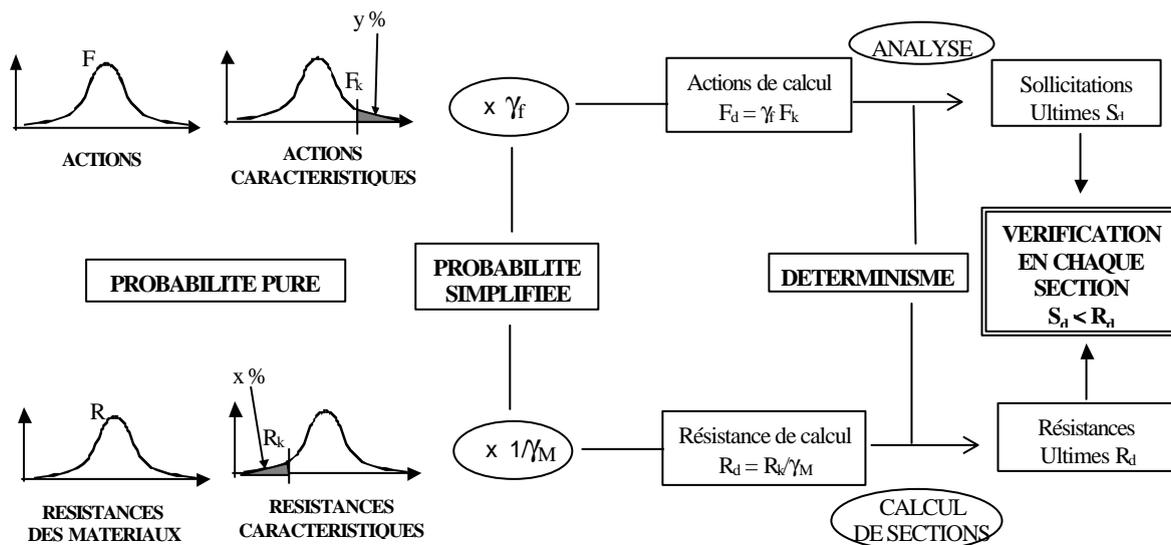


Figure 51 : Processus de vérification vis à vis des Eurocodes [PER91]

Pour notre cas d'étude, nous allons supposer que les éléments constitutifs des systèmes de tenségrité sont réalisés en acier. Nous utiliserons donc les règles de calcul définies dans l'Eurocode 3.

2.2.3.4 Application de l'Eurocode 3 aux systèmes de tenségrité

Pour effectuer le dimensionnement des systèmes de tenségrité, il faut tout d'abord définir les états limites qui seront étudiés. Dans la construction métallique, il existe principalement deux états limites : **les états limites de service (ELS) et les états limites ultimes (ELU)**.

Ces états limites vont fixer les coefficients partiels de sécurité à la fois pour la détermination des sollicitations et pour la résistance des matériaux.

Pour vérifier les critères édictés par l'EC3, nous devons tout d'abord déterminer les combinaisons d'actions à prendre en compte dans le calcul des sollicitations pour chaque état limite.

Ensuite, nous pourrions vérifier que ces sollicitations ne dépassent pas les critères fixés pour ce qui concerne la résistance des sections droites des éléments (Figure 51).

2.2.3.4.1 Les combinaisons d'actions

Si nous réalisons le décompte des actions appliquées sur la structure, nous nous rendons compte d'emblée que la spécificité des systèmes de tenségrité va poser un problème lors du calcul des sollicitations agissantes.

En effet, pour les systèmes de tenségrité, nous pouvons identifier trois types d'actions : le poids propre (G), les charges d'exploitation (Q) et l'autocontrainte (A).

Or, l'EC3 [EC3-92] ne prend pas en compte d'action d'autocontrainte (ou de précontrainte) dans ses combinaisons de charge.

Néanmoins, pour ce qui est des états limites de service, le cas peut être traité très rapidement : dans ce cas d'étude, tous les coefficients partiels sont égaux à l'unité. Nous pouvons donc envisager une combinaison d'actions aux ELS très simple : **G + Q + A**

Par contre, aux états limites ultimes, les coefficients partiels sont différents suivant l'action considérée, et là, rien n'est prévu pour les systèmes à contraintes initiales. Cependant, le Chapitre 8 de l'EC3, « Conception et dimensionnement assistés par l'expérience », autorise la prise en compte de cas d'étude non prévus par l'EC3, sous couvert de vérifications expérimentales très précises avec prise en compte de tous les paramètres aléatoires.

Nous allons donc proposer une combinaison d'actions prenant en compte l'autocontrainte tout en sachant qu'une étude expérimentale sera nécessaire pour valider nos hypothèses.

Avant de proposer une combinaison d'actions, nous nous sommes intéressés à l'Eurocode 2 traitant le cas du béton précontraint. En effet, dans l'EC2 [EC2-92], la précontrainte est prise en compte et des coefficients partiels de sécurité précis sont proposés.

Il faut préciser malgré tout que les techniques employées n'étant, a priori, pas du tout les mêmes, une application directe de ces coefficients n'aurait pas de sens. Nous nous sommes donc plus inspiré de l'esprit que des valeurs brutes. De plus, certains bureaux d'études internationaux se sont déjà penchés sur la question et ont proposé des combinaisons d'actions. En fait, nous allons reprendre ces combinaisons en les justifiant.

Tout d'abord, et comme nous l'avons vu précédemment, il nous faut rappeler que l'autocontrainte possède à la fois un caractère d'action (elle sollicite les éléments à un certain niveau) et de résistance (elle peut modifier la rigidité).

Ainsi, dans l'EC2, les combinaisons ELU prévoient plusieurs cas de charges suivant que l'autocontrainte est favorable ou défavorable.

Dans cet esprit, nous devons procéder à deux vérifications tenant compte du rôle combiné de l'autocontrainte. Une autocontrainte réduite par rapport à celle espérée doit permettre de vérifier que la structure garde une certaine rigidité. Une autocontrainte légèrement supérieure à celle espérée ne doit pas amener à dépasser les limites de sollicitation des éléments.

Nous proposons par conséquent les deux combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathbf{1,35 G + 1,5 Q + 0,8 A} \\ & \mathbf{1,35 G + 1,5 Q + 1,2 A} \end{aligned}$$

Ces coefficients sont inspirés d'une part de l'EC2, et d'autre part, de ceux utilisés dans un bureau d'études Suisse, PASSERA & PEDRETTI, pour des constructions prévues pour l'exposition universelle de 2001.

Ayant à présent défini les combinaisons des actions, nous devons fournir les critères concernant la résistance des matériaux suivant les états limites considérés.

2.2.3.4.2 Critères aux ELS

Du point de vue des résistances et en dehors de la stabilité locale des éléments (cf. ELU), l'Eurocode 3 n'a qu'une exigence aux ELS, c'est le respect du **critère de flèche de la structure** : elle ne doit pas dépasser **1/200^{ème} de la portée**.

Mais comme les systèmes de tensegrité sont des structures très particulières, nous allons fixer un critère supplémentaire lié à la présence de câbles.

En effet, nous imposerons qu'aux ELS, **aucun des câbles présents dans la structure ne soit relâché**. Cette restriction se justifie par le fait que nous ne souhaitons pas que sous charges « normales », il y ait des câbles détendus : déjà d'un point de vue esthétique ce serait regrettable, ensuite, mécaniquement, ils pourraient entrer en vibration sous l'action du vent et créer des désordres.

Nous avons donc tous les critères permettant de vérifier les systèmes de tensegrité aux ELS :

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">➤ Actions à prendre en compte $G + Q + A$➤ Stabilité locale des éléments (Cf. ELU)➤ Non-relâchement d'un câble➤ Critère de flèche maxi : 1/200^{ème} de la portée de la structure |
|--|

2.2.3.4.3 Critères aux ELU

Pour l'ELU, l'EC3 prévoit des limites de charges pour les éléments comprimés. Une résistance au flambement est calculée en fonction des caractéristiques du matériau et de la géométrie de l'élément : nuance d'acier, longueur de l'élément, aire de la section droite, inertie.

Par contre, il n'est rien prévu pour les câbles. Nous allons donc, là aussi, fixer une règle spécifique pour les systèmes de tenségrité : **nous nous limiterons en terme de sollicitation à la limite élastique garantie par le fabricant**. Ce choix se justifie par la nécessité de ne pas avoir de déformation résiduelle dans les éléments : cela perturberait fortement l'autocontrainte et par conséquent, le comportement de la structure.

Contrairement aux ELS, nous pouvons dans le cas de l'ELU autoriser le relâchement d'un câble : si cet état est temporaire (surcharge accidentelle par exemple) la structure pourra retourner dans des plages de chargement « normales » sans que son comportement à long terme ait été modifié.

Finalement, la vérification aux ELU s'opère en prenant en compte les critères suivants :

- **Actions à prendre en compte**
 - **1,35 G + 1,5 Q + 0,8 A**
 - **1,35 G + 1,5 Q + 1,2 A**
- **Critères de ruine locale**
 - **Flambement d'une barre**
 - **Limite élastique d'un câble atteinte**

Le cadre réglementaire étant maintenant fixé, nous pouvons envisager le dimensionnement d'une structure de grande taille destinée, par exemple, à une couverture de bâtiment.

2.2.4 Dimensionnement d'une grille de tenségrité

Si le concepteur souhaite construire des systèmes de tenségrité pour le Génie Civil, il faut s'intéresser non plus à des modules simples, mais à des structures de grande taille, possédant un grand nombre d'éléments.

Nous avons choisi de simuler le dimensionnement d'une grille de tenségrité qui serait destinée à couvrir une surface de 81 m².

Pour générer la grille, nous avons utilisé un module prismatique à faces supérieures et inférieures carrées, le demi-cuboctaèdre (Figure 52). C'est l'un des modules de tenségrité les plus simples puisqu'il ne possède que quatre barres.

Pour fixer un cadre d'étude réaliste, nous avons considéré une grille carrée de 9 mètres de côté constituée de trente-six modules juxtaposés nœuds sur nœuds (Figure 53). La hauteur a été déterminée de manière à avoir des barres inclinées à 45°. La hauteur de la grille est alors de 1,15 mètre, ce qui donne un élanement d'environ 1/8^{ème}.

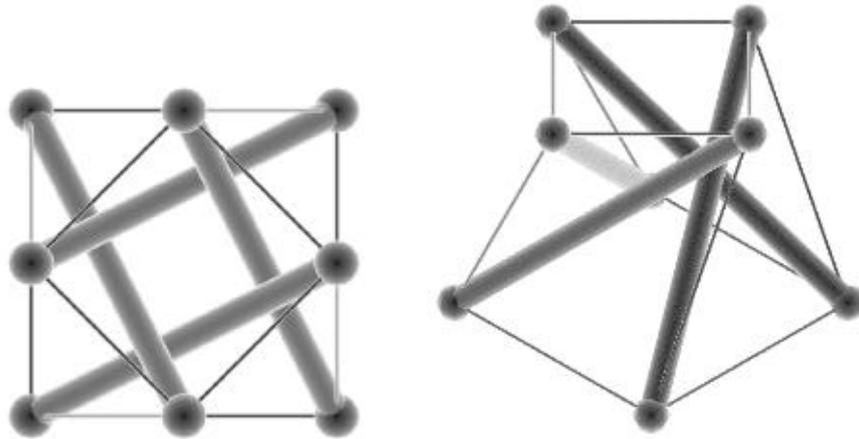


Figure 52 : Demi-cuboctaèdre, vue en plan et vue en perspective.

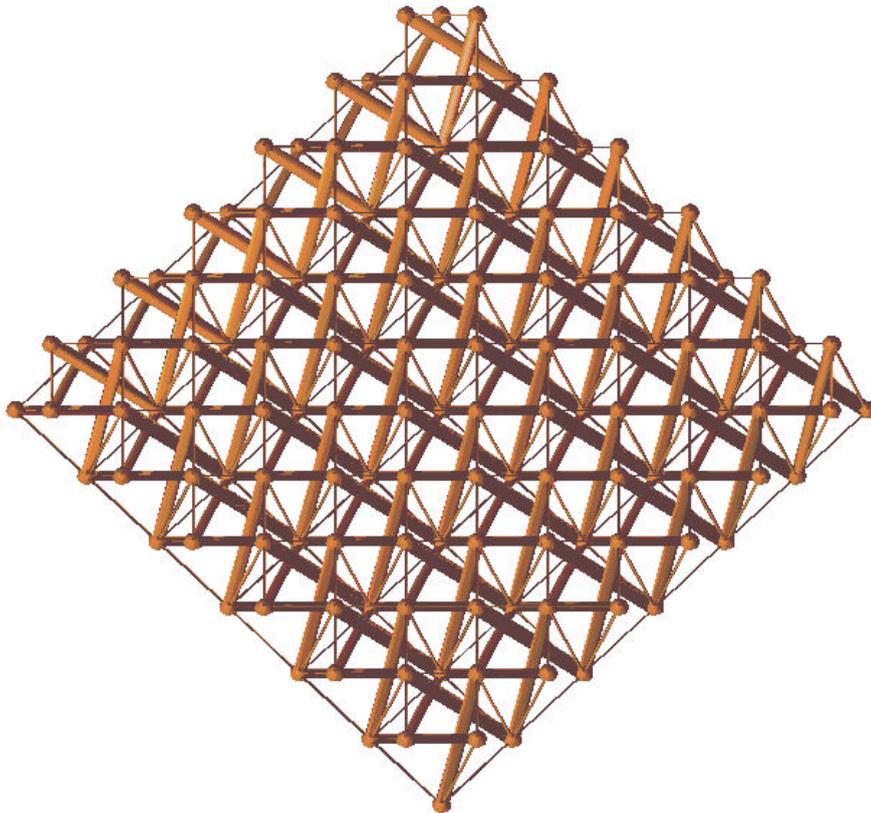


Figure 53 : Grille de tensegrité formée de trente-six demi-cuboctaèdres

La grille ainsi assemblée possède 133 nœuds et 516 éléments (144 barres et 372 câbles)

L'étude mécanique de cette structure, nous donne 144 états d'autocontrainte, c'est à dire 144 sollicitations internes possibles et différentes de la grille dès le montage. Soulignons que ce nombre est égal au nombre de barres, mais c'est là une pure coïncidence.

Pour mettre la grille en état d'autocontrainte, nous avons extrait parmi les 144 états d'autocontrainte tous les états partiels définis localement et correspondant à chaque module pris séparément (cf. paragraphe 2.1.4.1.3.).

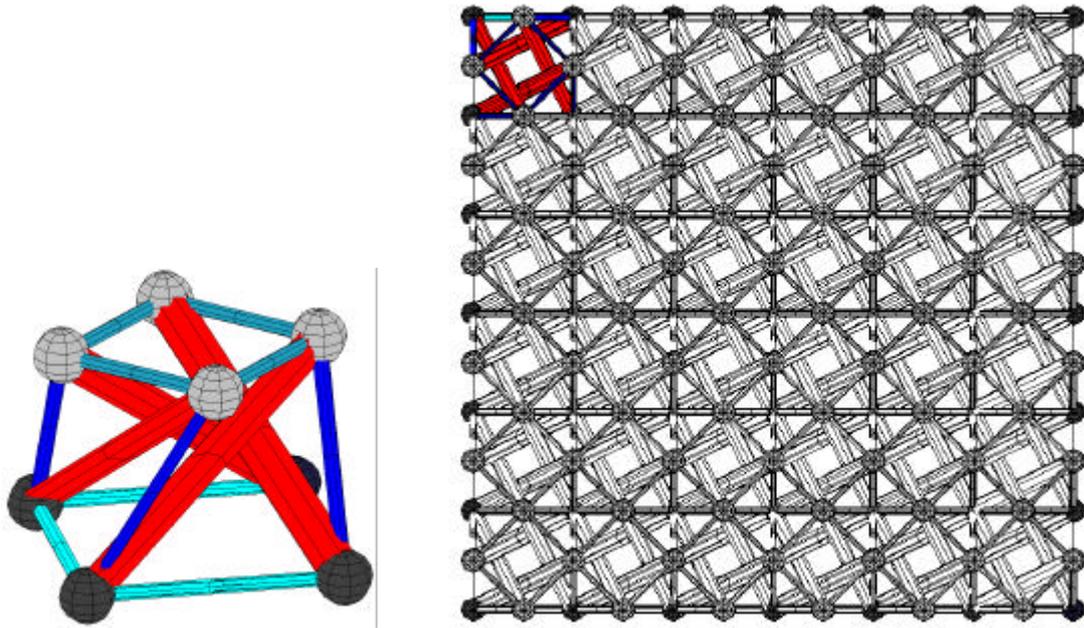


Figure 54 : Etat d'autocontrainte localisé sur un module de l'assemblage

Comme les états d'autocontrainte sont définis à un coefficient multiplicateur près, le choix peut se faire entre une répartition homogène ou hétérogène pour raidir localement la structure. La Figure 40 (page 71) montre des répartitions possibles de l'autocontrainte qui sont schématisées sur la Figure 55.



Figure 55 : Etat d'autocontrainte homogène (a) ou progressif (b).

Nous verrons par la suite quels peuvent être les avantages et inconvénients de chacune des répartitions, notamment en fonction de la répartition des tensions dans la structure après chargement.

Il faut noter qu'en utilisant les états d'autocontrainte partiels locaux correspondant à chaque module, nous n'avons combiné que 36 des 144 états disponibles pour la mise en autocontrainte de la grille. Cela laisse une réserve au concepteur qui souhaiterait aller plus loin dans les combinaisons d'états d'autocontrainte.

D'autre part, pour nous mettre dans des conditions de réalisation pratique, nous avons émis l'hypothèse que les nœuds périphériques de nappe inférieure étaient fixés. Les quatre nœuds situés aux angles de la grille sont fixés selon les directions X, Y et Z, alors que les autres nœuds périphériques sont bloqués seulement suivant Z (Figure 56).

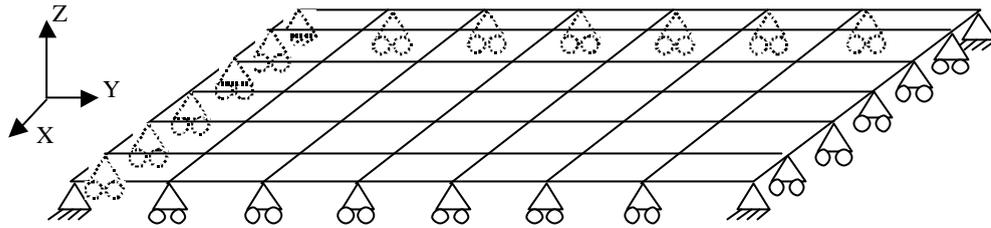


Figure 56 : Liaisons des nœuds de nappe inférieure.

2.2.4.1 Quelques idées pour le dimensionnement

Pour une telle grille, comme dans le cas de modules simples, il faut identifier les paramètres qui peuvent jouer sur le dimensionnement.

Nous avons vu que l'autocontrainte et les rigidités relatives des éléments jouent un grand rôle dans le comportement des systèmes de tensegrité. Dans le cas d'une grille de tensegrité, un nouveau paramètre va jouer, c'est celui de la répartition de l'autocontrainte.

Comme dans toute structure, le dimensionnement est forcément itératif, plus encore dans le cas des systèmes de tensegrité puisque l'autocontrainte par son niveau et sa répartition est un nouveau paramètre de dimensionnement.

Le dimensionnement est opéré aux ELS. Il est suivi d'une vérification aux ELU.

Ce choix est dû au fait qu'intuitivement, on sent bien que le critère de flèche va être le critère le plus dimensionnant dans le cas des systèmes de tensegrité.

Compte tenu des nombreux paramètres à prendre en compte, le concepteur pourrait se demander par lequel commencer pour effectuer le dimensionnement.

En fait, les déplacements maximaux étant limités en fonction de la portée ($1/200^{\text{ème}}$), nous pouvons considérer que le niveau d'autocontrainte va peu jouer dans la rigidité globale de la structure. En effet, pour que l'autocontrainte joue un rôle important, il faut créer des déplacements conséquents, un peu comme pour deux câbles tendus en entre deux points fixes (Figure 57).

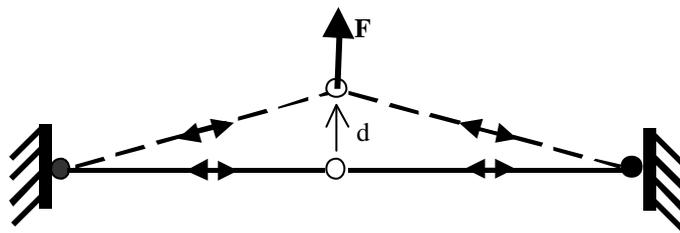


Figure 57 : L'autocontrainte est d'autant plus mobilisée que le déplacement d est important.

Dans notre cas, les critères de l'ELS vont réduire fortement l'effet de l'autocontrainte. C'est donc principalement sur les sections d'éléments qu'il faudra agir pour respecter le critère de flèche. Néanmoins, le calcul au second ordre est nécessaire pour s'assurer des résultats.

D'autre part, il faut souligner qu'à autocontrainte égale, les tensions dans les éléments varient peu (mais pas les flèches) lorsque le rapport de rigidité entre les barres et les câbles est

changé. Nous sommes quasiment dans le cadre de l'étude d'une structure extérieurement isostatique. Cela va simplifier le choix du niveau d'autocontrainte de la grille qui est toujours défini à un facteur multiplicatif près.

Nous prendrons des sections droites identiques pour toutes les barres, la section des câbles se déduisant par le rapport de rigidité choisi entre les éléments.

2.2.4.2 Dimensionnement aux ELS

Les premières valeurs à calculer sont les valeurs des actions extérieures appliquées.

Nous avons vu que nous pouvons les décomposer en charges de poids propre et en charges d'exploitation.

Pour notre cas d'étude nous prendrons une charge de poids propre de 25 daN/m² qui comprend le poids propre des éléments et d'une peau éventuelle.

La charge d'exploitation est prise comme étant une charge de neige qui, en région 3 et jusqu'à 500 mètres d'altitude, ne dépasse pas 110 daN/m² [NV84]. Ce cas de charge étant très défavorable, nous ne tiendrons pas compte d'autres charges d'exploitation.

Au total, la charge extérieure à prendre en compte aux ELS est donc de **135 daN/m²**.

Les charges seront supposées descendantes et appliquées uniquement aux nœuds de nappe supérieure de la grille.

Avant de procéder à un premier calcul sous charge, il faut fixer la répartition et le niveau d'autocontrainte ainsi qu'un rapport de rigidité entre barres et câbles. Le dimensionnement se fait alors en agissant sur les sections droites des éléments jusqu'à respecter les critères de flèche.

Nous avons choisi d'étudier tout d'abord la grille avec une autocontrainte homogène (Figure 55) afin de limiter la complexité de montage. Comme nous le verrons, une autocontrainte progressive dans la grille sera à envisager dans un but d'optimisation.

Bien sûr, le niveau d'autocontrainte ne doit pas être fixé arbitrairement. Il doit tenir compte de la rigidité des éléments et de leur résistance. C'est pourquoi, nous nous placerons à 50 % de la limite de sollicitation selon l'Eurocode 3 dans les barres. Cela laisse ainsi une grande plage de variation possible pour des sollicitations croissantes ou décroissantes.

Ces deux choix prédéfinissent complètement l'autocontrainte de la structure.

Il reste à déterminer les aires des sections droites des éléments.

Pour avoir une rigidité suffisante, et pour éviter de trop solliciter les éléments barres par rapport aux câbles, nous avons vu pour l'octaèdre qu'un rapport de rigidité ($E_b S_b / E_c S_c$) de l'ordre de 10 était bien adapté. En se plaçant en dessus, les câbles sont sous-utilisés, le comportement est trop souple et conduit à sur-dimensionner les éléments. En dessous, le risque est de sous-utiliser les barres.

Avec ces critères, un module de YOUNG de 200 000 MPa pour les barres et 125 000 MPa pour les câbles (valeurs proposées par les fabricants pour des éléments en acier, le module des câbles variant selon type d'acier, le nombre de fils, de torons, etc....), nous arrivons à un dimensionnement de 4,14 cm² de section pour les barres. Cela nous donne une section de 0,654 cm² pour les câbles. Des sections de barres inférieures nous donneraient des déplacements incompatibles avec le critère de flèche.

Ces caractéristiques correspondent à des produits du marché : barres de diamètre extérieur de 48,3 mm pour une épaisseur de 2,9 mm, et câbles multi-torons de diamètre nominal 10 mm composés de 7*19 fils.

La Figure 58 présente la valeur des déplacements verticaux pour les nœuds inférieurs correspondant à la file de câble centrale, file la plus déformée.

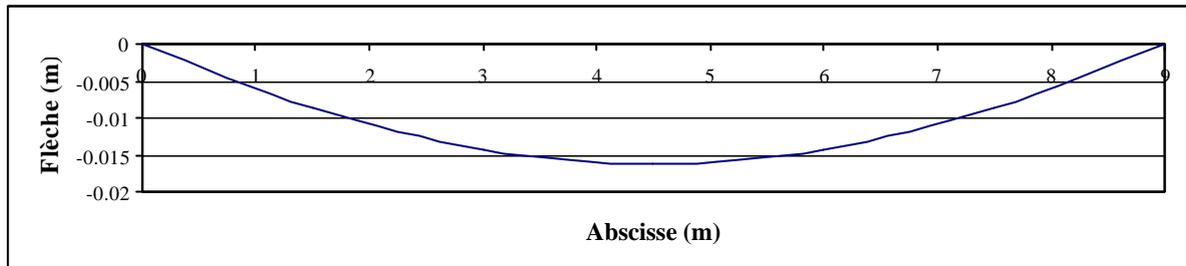


Figure 58 : Valeur des déplacements verticaux pour les nœuds de file centrale

Nous pouvons également représenter la déformée d'ensemble de la structure en nappe inférieure (Figure 59) ainsi que l'évolution de la flèche du nœud central en fonction de la charge (Figure 60).

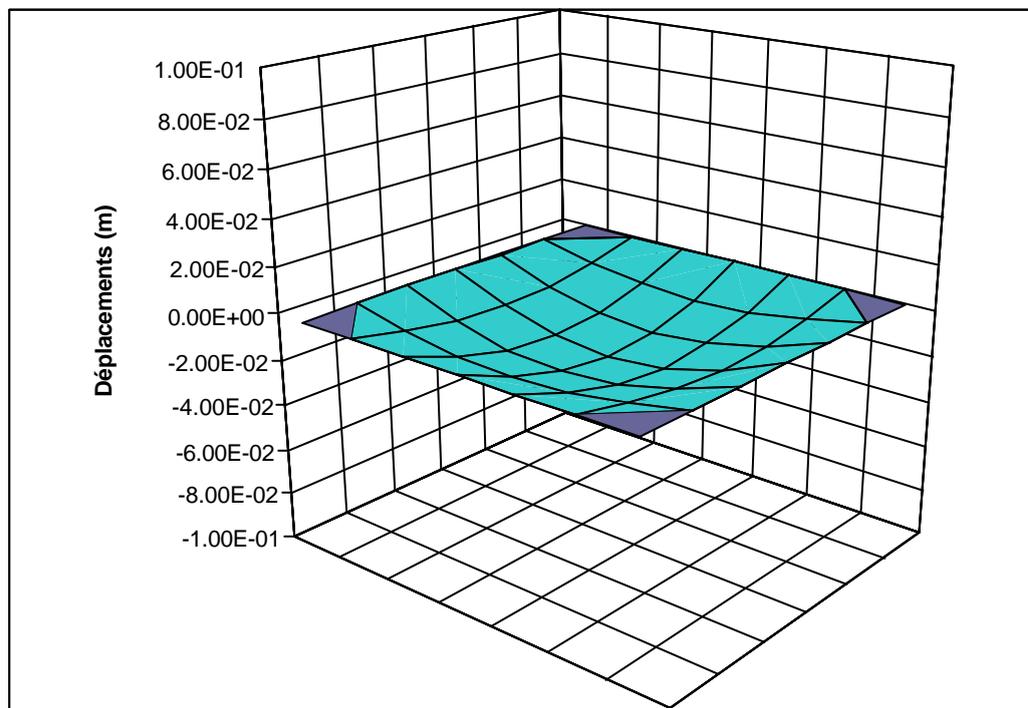


Figure 59 : Allure de la déformée en nappe inférieure.

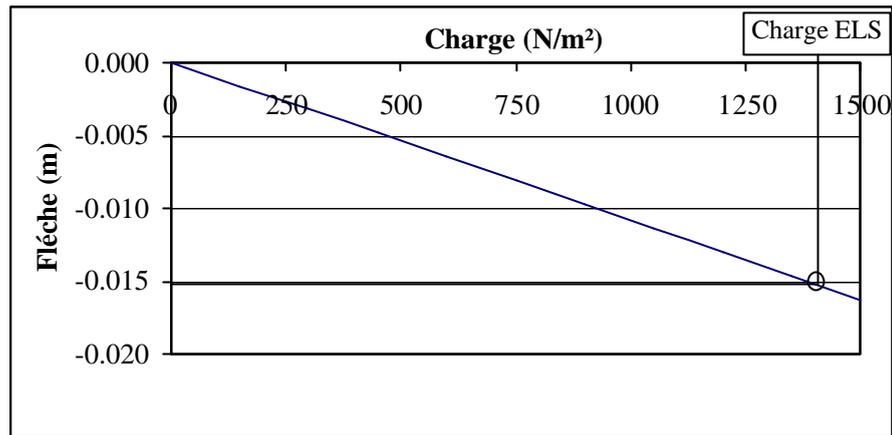


Figure 60 : Déplacement vertical du nœud central en fonction de la charge.

Contrairement à l'octaèdre expansé, nous constatons que l'évolution de la flèche est linéaire ce qui s'explique par le critère de flèche très restrictif qui minimise les déplacements, et donc les effets de second ordre.

Le critère de flèche étant respecté, nous pouvons considérer que le dimensionnement ELS est terminé, si toutefois aucun câble ne s'est relâché.

Pour effectuer cette vérification nous représentons la valeur des tensions dans la structure en fin de chargement (Figure 61). Nous avons défini la numérotation des éléments pour faciliter la lecture des résultats. Les barres sont numérotées de 1 à 144 et les câbles de 145 à 516.

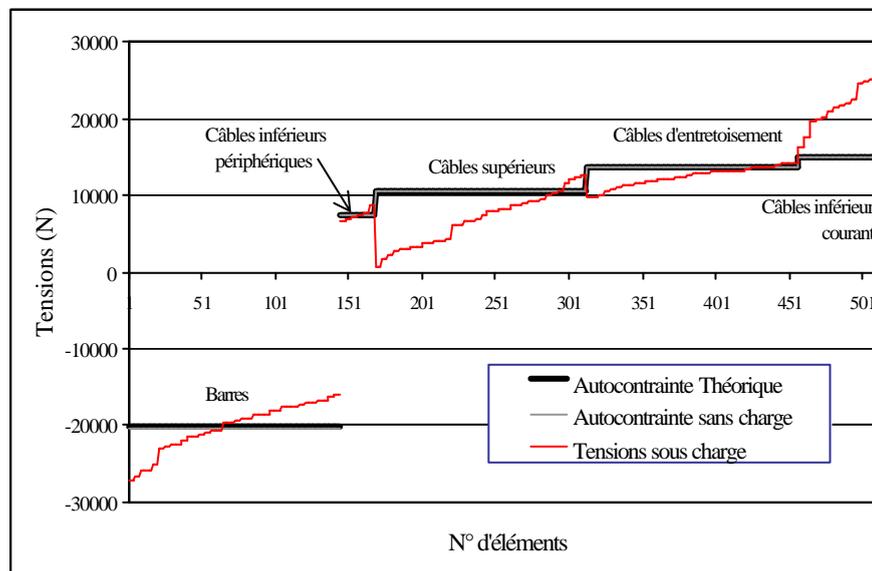


Figure 61 : Valeur des tensions dans les éléments avant et après chargement.

Il faut noter que l'autocontrainte sans charge de la structure se superpose parfaitement avec celle que nous avons choisie d'introduire préalablement.

En effet, à partir d'un état d'autocontrainte donné, le concepteur redéfinit les tensions dans chaque élément, puis calcule les longueurs de fabrication théoriques des éléments. Si dans ce processus, il commet une erreur, il existe peu de chance pour que le système soit équilibré

d'emblée. La première étape du calcul consiste donc à vérifier que le système n'étant pas soumis à des actions extérieures, l'état de sollicitation équilibré est très proche de l'état d'autocontrainte théorique. Si c'est le cas, cela prouve la bonne modélisation du système : il n'y a pas eu d'erreur dans la détermination des états d'autocontrainte et dans le choix des longueurs de fabrication à partir des caractéristiques mécaniques et géométriques des éléments.

L'autre constatation concerne le critère ELS de non-relâchement de câble : ce critère est respecté, même si certains câbles ont des tensions très proches de la valeur nulle. Il pourrait être envisagé d'augmenter le niveau d'autocontrainte, mais, une augmentation du niveau de sollicitation dans les éléments pourrait entraîner un dépassement des critères destructifs. Il est donc préférable d'approcher une ruine par relâchement d'un câble plutôt qu'un dépassement de la limite élastique. Nous y reviendrons lors de la vérification aux ELU.

Finalement, nous pouvons considérer que notre dimensionnement ELS est correct dans la mesure où le critère de flèche est respecté et les sollicitations des éléments se situent dans les limites admises.

Il ne nous reste donc plus qu'à vérifier les critères aux ELU.

2.2.4.3 Vérification aux ELU

La première étape de la vérification consiste, comme pour l'ELS, à calculer les combinaisons de charge à prendre en compte.

$$\text{Charge extérieure} : 1,35 G + 1,5 Q = 1,35 \cdot 25 + 1,5 \cdot 110 = 198,5 \sim \mathbf{200 \text{ daN/m}^2}$$

A ces charges extérieures viendront s'ajouter les sollicitations dues à l'autocontrainte qui seront prises successivement égales à 1,2 fois l'autocontrainte choisie aux ELS, puis 0,8.

Dans un cas, nous vérifierons que les limites de sollicitation ne sont pas dépassées, dans l'autre, nous vérifierons que la chute de tension n'engendre pas d'instabilités dans la structure.

Limite de sollicitation pour les éléments

Nous devons donner à ce niveau de l'étude les limites de sollicitation qui seront admises dans chaque élément :

- Câbles : la valeur de l'effort doit être comprise entre **0 et 32 700 N**, la valeur maximale correspondant à la limite élastique garantie par le fabricant soit 500 MPa. Nous avons pu vérifier expérimentalement que cette valeur était largement respectée.
- Barres : la valeur maximale admise par l'EC3 est fonction de la nuance d'acier de l'élément considéré, de son inertie, de sa longueur et de sa section. Dans notre cas, la section est de 4,14 cm² et de forme tubulaire, la longueur des barres est de 2m03, l'inertie de 10,7 cm⁴. La valeur maximale de l'effort admissible pour une nuance d'acier de 235 est de **39 400 N** (cf. Annexe G pour le calcul).

Ces valeurs sont reportées sur les graphiques donnant les tensions en fin de chargement pour les deux combinaisons de charge à considérer (Figure 62 et Figure 63).

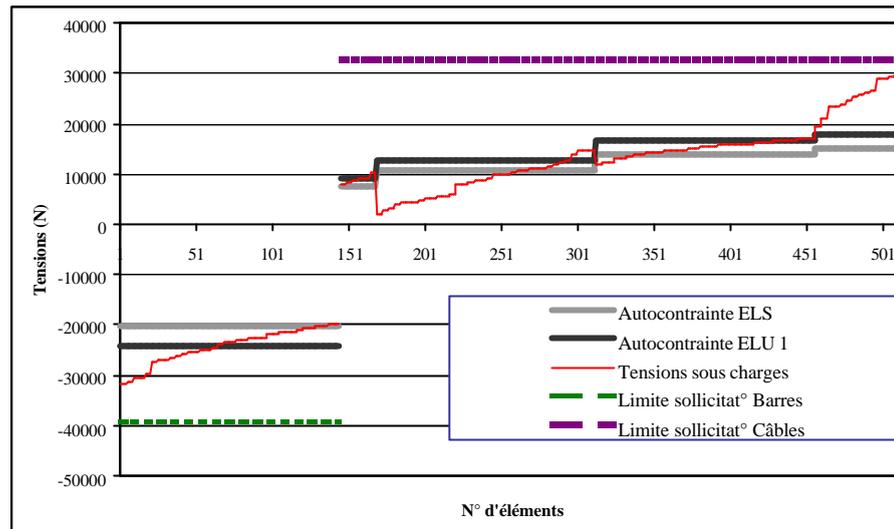


Figure 62 : Vérification ELU pour une autocontrainte égale à 1,2 fois l'autocontrainte ELS.

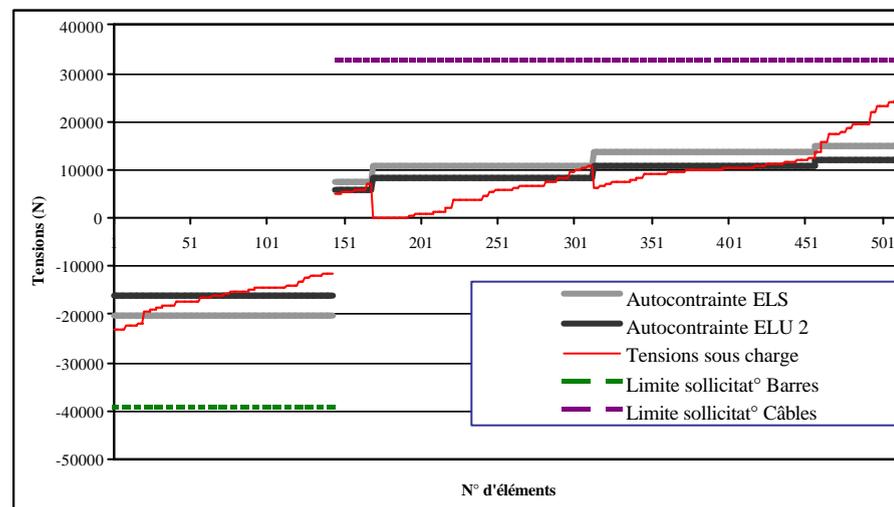


Figure 63 : Vérification ELU pour une autocontrainte égale à 0,8 fois l'autocontrainte ELS.

Suivant le type de combinaisons, les résultats sont très différents.

Dans le cas de la première combinaison, l'autocontrainte est plus importante que prévue, les tensions maximales dans les éléments s'approchent des limites admises mais ne sont pas dépassées.

Pour la deuxième combinaison, l'autocontrainte est plus faible que prévue, et certains câbles se sont détendus. Nous les avons comptabilisés : ils sont vingt-quatre à s'être relâchés. Néanmoins la structure garde une stabilité globale.

Nous pouvons donc considérer que les critères de l'ELU sont respectés pour les deux combinaisons.

Cela met en lumière l'un des intérêts des systèmes de tenségrité : une conception certes délicate en raison de concepts mathématiques abstraits, mais une réserve de charge avant ruine totale assez importante. De plus le relâchement de câbles peut être un signal d'alerte pour une mise en sécurité des personnes et des biens.

2.2.4.4 Optimisation

L'optimisation dans notre cas d'étude peut consister à jouer sur la répartition de l'autocontrainte pour utiliser au mieux le matériau.

C'est ce que nous pouvons visualiser sur la Figure 64, où l'état d'autocontrainte initial étant au départ uniforme, l'extérieur de la grille est plus sollicité après chargement (rouge) que l'intérieur (jaune orangé).

En fait, le concepteur a soit la possibilité de choisir un état uniforme au montage qui donne une répartition d'efforts très hétérogène sous charge, soit un état hétérogène lors du montage qui présente l'avantage d'uniformiser les efforts sous charges.

(Voir Annexe D pour les codes de couleur)

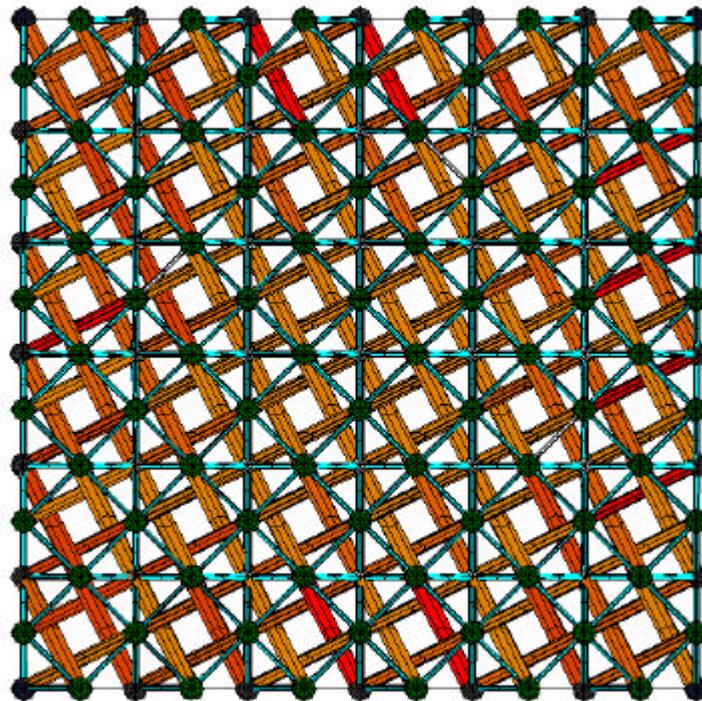


Figure 64 : Répartition des sollicitations en fin de chargement ELS pour une autocontrainte uniforme.

Bien sûr, une telle comparaison n'a de sens qu'à un même niveau d'autocontrainte global, c'est à dire si l'énergie emmagasinée est la même. Nous avons donc pris une autocontrainte progressive égale à l'autocontrainte uniforme en terme d'énergie. Ce calcul d'énergie peut se faire tout simplement en sommant les carrés des efforts dans les éléments puisque tous ont les mêmes caractéristiques mécaniques.

Ainsi, en prenant une autocontrainte progressive avec une variation de 25 % (valeur obtenue de manière empirique) en allant de l'extérieur vers l'intérieur (Figure 55), les tensions sont mieux réparties en fin de chargement. Les résultats sont visibles sur la Figure 65 où l'autocontrainte est prise égale à 0,8 fois l'autocontrainte théorique.

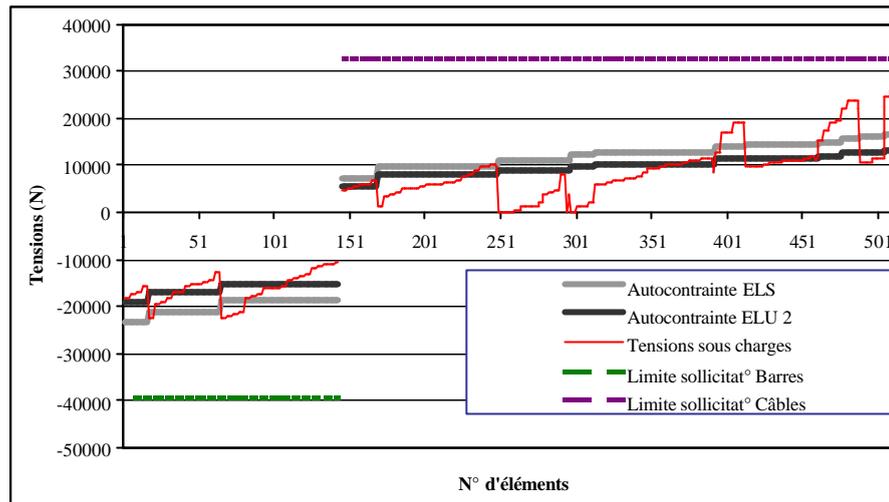


Figure 65 : Vérification ELU pour une autocontrainte égale à 0,8 fois l'autocontrainte ELS, cas d'une autocontrainte progressive.

Le nombre de câbles détendus est moindre que dans le cas précédent (douze au lieu de vingt-quatre), par contre, pour la combinaison augmentant l'autocontrainte, certains câbles entrent en plasticité.

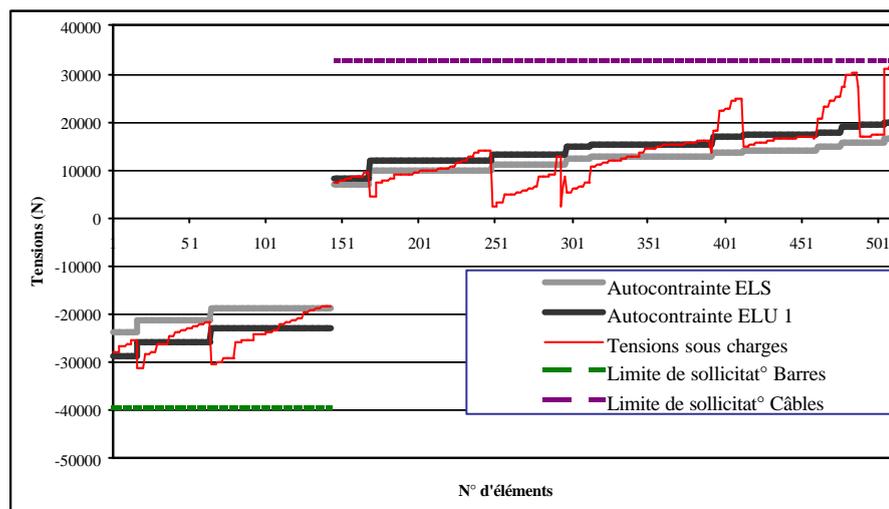


Figure 66 : Vérification ELU pour une autocontrainte égale à 1,2 fois l'autocontrainte ELS, cas d'une autocontrainte progressive.

Devant le nombre restreint de câbles plastifiés et la réserve des câbles avant rupture (limite de rupture garantie à trois fois la limite élastique), nous pouvons néanmoins considérer que le dimensionnement est correct.

Il n'y a donc pas un, mais plusieurs dimensionnements possibles suivant la répartition de l'autocontrainte.

Ainsi, suivant la destination de la grille, il est possible de choisir différentes répartitions d'autocontrainte pour adapter le système aux charges appliquées. Néanmoins, le choix d'une répartition non uniforme de l'autocontrainte, bien qu'apparemment plus avantageuse sous charge, peut amener à compliquer notablement le processus de montage.

2.2.5 Conclusion

Après avoir présenté les **différents paramètres régissant le comportement** des systèmes de tensegrité sur un exemple, nous avons indiqué que le cadre réglementaire de l'Eurocode «Construction Métallique » ne prenait pas en compte, pour l'instant, le cas de systèmes de tensegrité.

Néanmoins, par l'étude de l'Eurocode 2 qui traite le cas du béton précontraint, et la prise en compte de combinaisons utilisées dans les bureaux d'études, nous avons pu **prédéfinir** des **combinaisons d'actions** et des **états limites de sollicitation**.

Nous avons alors réalisé, pour une grille de tensegrité couvrant **81 m²**, un dimensionnement sous charge qui respecte les critères de flèches et de sollicitations limites vis à vis de l'EC3. Cette structure est **légère** (15 kg/m² pour les éléments) et capable de supporter les charges prévues par les règlements.

Nous proposons en **Annexe H** un schéma qui retrace les différentes phases de la conception de la grille. Il doit guider le concepteur dans la conception de toute structure de tensegrité.

Néanmoins, les **hypothèses** émises, au préalable, dans l'établissement des combinaisons d'action et des limites de sollicitation des câbles doivent recevoir la sanction de l'expérience. Si les **limites d'élasticité des câbles** sont en cours de **validation** par des essais de traction, les coefficients de variation de l'autocontrainte ne pourront être confirmés à très court terme.

En effet, l'établissement des **coefficients partiels** concernant le **niveau d'autocontrainte** doit être effectué à partir de la prise en compte des nombreux aléas de fabrication.

C'est pourquoi nous allons nous attacher dans la dernière partie de ce manuscrit à évaluer la **sensibilité** des systèmes de tensegrité aux tolérances de fabrication des éléments. Cela devrait permettre de vérifier si ces imprécisions de découpe ne créeront pas de perturbations supérieures à celles prises en compte dans l'évaluation des combinaisons d'actions.

La validation finale ne pourra cependant être assurée qu'après une étude complète de la **fiabilité**.

Partie 3

ETUDE DE LA SENSIBILITE ET DE LA MISE EN AUTOCONTRAINTE

3 Etude de la Sensibilité et de la Mise en Autocontrainte

Les études théoriques précédentes ont été réalisées à partir de l'hypothèse que la fabrication des structures était parfaite et l'état d'autocontrainte déjà en place. Mais il est bien connu que pour toute structure précontrainte, la mise en œuvre est une opération délicate.

De plus, aux imprécisions de fabrication, de l'ordre du millimètre pour ce qui est du sertissage des câbles, vont s'ajouter les imprécisions dues à l'assemblage de la structure et au cours duquel les jeux se combinent (nœuds, éléments, liaisons...)

Or, devant la sensibilité du comportement des systèmes de tenségrité à la variation du niveau d'autocontrainte, il est capital de vérifier que les erreurs de fabrication ou de montage ne vont pas nuire à la stabilité globale de la structure.

En effet, nous savons qu'en élasticité linéaire, la tension d'un élément est fonction de ses caractéristiques mécaniques (aire de la section droite, module de YOUNG), de sa longueur dans l'état considéré, mais aussi et surtout, de sa longueur de fabrication (Équation 42, page 75). Compte tenu des rigidités des éléments, nous allons voir qu'une faible variation de la longueur de fabrication des éléments, de l'ordre du millimètre, va pouvoir modifier sensiblement l'état d'autocontrainte d'un système, avec toutes les conséquences que cela peut engendrer pour le comportement sous actions extérieures.

La première partie de ce chapitre sera donc consacrée à l'étude du comportement attendu des systèmes de tenségrité lorsqu'une certaine tolérance de fabrication des éléments est acceptée. C'est ce que nous appellerons leur sensibilité. Nous verrons quels sont les ordres de grandeur et surtout quels sont les paramètres influant grandement sur cette sensibilité. Cette étude sera menée à la fois pour les états d'autocontrainte et pour le comportement sous charges.

La deuxième partie sera l'occasion de donner les premières idées permettant la mise en tension des systèmes de tenségrité.

Nous verrons qu'en allant encore plus loin dans la modification des longueurs de quelques éléments nous pourrons passer d'une géométrie autocontrainte à une géométrie à autocontrainte nulle. Le chemin étant réversible en élasticité linéaire, cela définira une procédure de mise en tension. Nous montrerons comment simuler cette mise en tension et surtout comment choisir les éléments qualitativement et quantitativement pour qu'ils soient suffisants pour la mise en tension du système.

3.1 Etude de la sensibilité

Comme dans toute structure destinée à des applications tournées vers le Génie Civil, il faut que le concepteur se pose la question de la fiabilité de la structure [GOY98].

En d'autres termes, quelle est la marge de sécurité attendue pour le système lorsqu'il est soumis à des charges extérieures, lorsqu'on prend en compte toute la variabilité des paramètres de conception et de réalisation ?

Dans un dimensionnement classique de structure non précontrainte, le concepteur vérifie que la structure est capable d'équilibrer les charges susceptibles d'être appliquées au système. Nous avons vu que dans les codes semi-probabilistes utilisés dans la construction, des coefficients partiels de sécurité sont appliqués à la fois sur les caractéristiques de matériaux, mais aussi sur les valeurs des actions extérieures. Ces coefficients tiennent compte de la variabilité des caractéristiques des matériaux ou des actions, mais aussi des imprécisions de fabrication et de montage du système.

Mais ces coefficients ne prennent pas en compte à l'heure actuelle le caractère spécifique des systèmes de tensegrité.

A ce jour, il n'y a pas eu d'étude de la sensibilité des états d'autocontrainte aux imprécisions de fabrication des éléments. Aucun coefficient partiel de sécurité ne leur est donc affecté. Or, comme nous allons le voir, de faibles variations de longueur de fabrication des éléments peuvent avoir de grandes conséquences sur la répartition des efforts dans la structure.

Si nous nous plaçons à long terme, cette étude est un préalable à étude fiabiliste qui permettra de définir de nouveaux coefficients partiels de sécurité tenant compte de l'autocontrainte dans les structures.

Dans un premier temps, nous allons nous attacher à démontrer la nécessité de cette étude sur un cas trivial. Ensuite, nous exposerons une méthode statistique permettant de définir des intervalles caractéristiques dans lesquels les tensions auront une certaine probabilité de se trouver. Cette caractérisation des variables aléatoires doit permettre, plus tard, de faire une étude plus précise de la fiabilité des systèmes de tensegrité.

Des cas concrets seront ensuite exposés, ils permettront de démontrer le rôle éminent des états d'autocontrainte dans la sensibilité des systèmes de tensegrité aux tolérances de fabrication.

3.1.1 Position du problème – Etude Statistique

Le problème de la sensibilité peut être posé au moyen d'un exemple très simple, celui d'un câble isolé. Nous allons voir que les conséquences d'une très faible variation de longueur de l'élément vont être très importantes en terme d'effort résultant.

3.1.1.1 Cas d'un câble isolé

Imaginons qu'un câble doive être monté entre deux points fixes avec une tension (ou précontrainte) donnée.

Comme nous l'avons vu (Équation 42), il est possible avec la loi de HOOKE, de recalculer la longueur de fabrication pour atteindre la tension espérée en place.

Prenons un exemple concret :

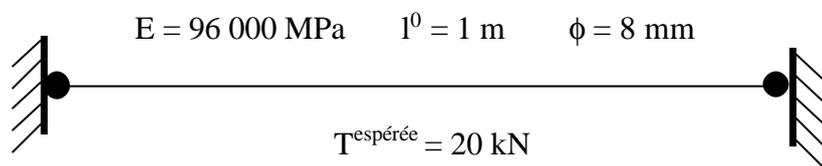


Figure 67 : Câble prétendu entre deux points fixes, tension espérée de 20kN

La loi de HOOKE nous donne une longueur de fabrication purement théorique de :

$$\text{Équation 52} \quad l^{\text{lib}} = \frac{E S l^0}{(T + ES)} = \frac{(96 \cdot 10^9) \cdot (0,5 \cdot 10^{-4}) \cdot 1}{20 \cdot 10^3 + (96 \cdot 10^9) \cdot (0,5 \cdot 10^{-4})} = 0,99585 \text{ m}$$

Ce qui correspond à un allongement d'environ 4 mm.

Si la précision de fabrication de longueur du câble est de l'ordre de plus ou moins 1 mm, les conséquences sur la tension en place vont être considérables.

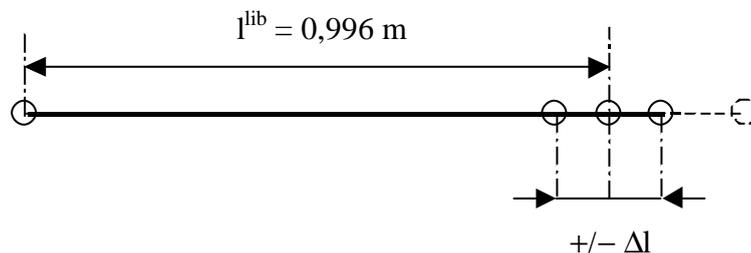


Figure 68 : Fabrication réelle du câble

Dans le cas de la Figure 67, une tolérance de fabrication du câble de +/- 1mm induit une variation de la tension de 15 kN à 25 kN soit une variation de +/- 25%.

C'est considérable et inacceptable du point de vue constructif compte tenu des coefficients que nous souhaitons prendre en compte pour les deux combinaisons de charges aux ELU (1,2 et 0,8 fois la valeur théorique de l'autocontrainte - § 2.2.3.4.1).

Heureusement, comme nous pouvons le pressentir, dans le cas d'un système de tenségrité, ces variations de tension se redistribuent dans toute la structure ce qui a pour effet de les minimiser. Il reste à estimer ces variations pour fournir des valeurs représentatives.

3.1.1.2 Cas des systèmes de tenségrité

Pour les systèmes possédant plusieurs éléments, il faut se poser la question du traitement des données : comment en effet quantifier les variations de tension dans les éléments ?

Déjà, soulignons que pour un élément donné, la relation liant la tension espérée à sa longueur de fabrication est une relation non linéaire.

$$\text{Équation 53} \quad T_j = \frac{E_j S_j (l_j - l_j^{\text{lib}})}{l_j^{\text{lib}}}$$

Sauf dans les cas très rares où les variables à déterminer sont des variables linéaires, il faut recourir à des techniques spécifiques.

Il serait possible de tenter un développement de TAYLOR pour évaluer la loi de distribution de la tension en fonction de la variable aléatoire qui est la longueur de fabrication l_j^{lib} . Mais cela n'est aisément réalisable que pour un seul élément. Pour tenir compte de la redistribution des efforts dans la structure, nous sommes obligés mettre en œuvre une technique de simulation de MONTE-CARLO.

Cette méthode nous amène à réaliser des simulations créant un échantillonnage conséquent de données et sur lequel nous pourrions réaliser un traitement statistique.

Ces simulations consistent à introduire une perturbation de longueur dans chacun des éléments et à recalculer l'équilibre. Ces perturbations vont modifier non seulement les tensions dans les éléments, mais aussi les raideurs des éléments et la géométrie globale de la structure. Il faut donc, là encore, faire un calcul au second ordre pour trouver le nouvel équilibre.

3.1.1.3 Echantillonnage des données et algorithme

Afin de pouvoir réaliser une étude statistique, il faut tout d'abord créer un échantillon de résultats comprenant tout un ensemble de simulations.

Pour cela, nous introduisons une perturbation de longueur pour chaque élément. Chaque perturbation est une **réalisation** (ou tirage) d'une loi normale centrée [SAP 90], caractérisant la distribution attendue pour un événement aléatoire comme la découpe d'un élément.

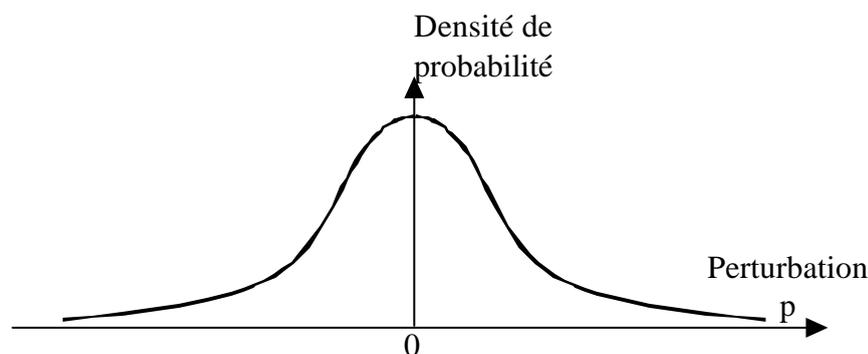


Figure 69 : Allure de la densité de probabilité de la perturbation

Cette perturbation est créée via le générateur de nombre aléatoire de MATLAB. Nous avons pu vérifier que les réalisations obtenues avaient bien les propriétés attendues.

Nous devons préciser qu'il est possible de perturber toutes les longueurs de fabrication des éléments ou seulement quelques-unes suivant les différentes techniques de découpe des éléments.

Ces perturbations sont ensuite introduites pour une position d'équilibre théorique exacte qui peut être la géométrie autocontrainte de référence ou une géométrie sous action extérieures.

A partir de ces nouvelles données, nous pouvons réécrire l'équilibre du système à chaque nœud et constater qu'il n'est plus assuré. De la même façon qu'au paragraphe 2.2.1, un calcul numérique itératif permet de trouver la nouvelle géométrie et les efforts résultant dans les éléments. C'est ce que nous appellerons **une simulation**.

La prise en compte des perturbations est faite non seulement dans l'écriture des tensions dans les éléments, mais aussi dans l'écriture des matrices de rigidité élémentaires des éléments (cf. paragraphe 2.2.1.1). La nouvelle matrice de rigidité est donnée par l'Équation 54.

Équation 54

$$[K'_j] = [K_j^E] + [K_j^G] = \begin{bmatrix} K_j^1 & 0 & 0 & -K_j^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_j^1 & 0 & 0 & K_j^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_j^{r2} & 0 & 0 & -K_j^{r2} & 0 & 0 \\ 0 & K_j^{r2} & 0 & 0 & -K_j^{r2} & 0 \\ 0 & 0 & K_j^{r2} & 0 & 0 & -K_j^{r2} \\ -K_j^{r2} & 0 & 0 & K_j^{r2} & 0 & 0 \\ 0 & -K_j^{r2} & 0 & 0 & K_j^{r2} & 0 \\ 0 & 0 & -K_j^{r2} & 0 & 0 & K_j^{r2} \end{bmatrix}$$

avec :

Équation 55
$$K_j^1 = \frac{E_j S_j}{l_j}$$

Équation 56
$$K_j^{r2} = \frac{T'_j}{l_j}$$

Équation 57
$$T'_j = \frac{E_j S_j (l_j - (l_j^{\text{lib}} + p_j))}{l_j^{\text{lib}} + p_j}$$

où p_j est la perturbation appliquée sur l'élément j . Cette perturbation est une réalisation d'une loi normale centrée dont l'écart type est fonction de la tolérance de fabrication attendue de l'élément.

Par exemple, pour avoir un échantillon dont 95% de la population se situe dans un intervalle de [-1mm , +1mm], il faut imposer un écart type de 0,51 mm sur la variable aléatoire de base.

Une fois les simulations réalisées, la question du traitement des résultats se pose. En effet, les simulations étant la conséquence d'un processus aléatoire les résultats ne peuvent être étudiés que d'un point de vue statistique.

3.1.1.4 Détermination d'un intervalle caractéristique

Si nous avons une infinité de résultats, le problème serait simple : en faisant l'hypothèse que les tensions résultantes ou les coordonnées géométriques de la structure suivent une loi normale, il suffirait de calculer la moyenne et l'écart-type qui permettraient de caractériser complètement les résultats.

Mais il est impossible de réaliser une infinité de simulations. Nous ne pouvons en effectuer qu'un nombre fini et limité à quelques dizaines. Or, l'ensemble des simulations constituant un échantillon discret, le nombre réduit de réalisations de chaque variable sténhique ou géométrique doit être pris en compte dans l'estimation.

Pour une quantité expérimentale (tension dans un élément, coordonnée d'un nœud suivant un axe de l'espace) nous avons donc n réalisations de n variables aléatoires indépendantes issues du calcul de n simulations (Figure 70).

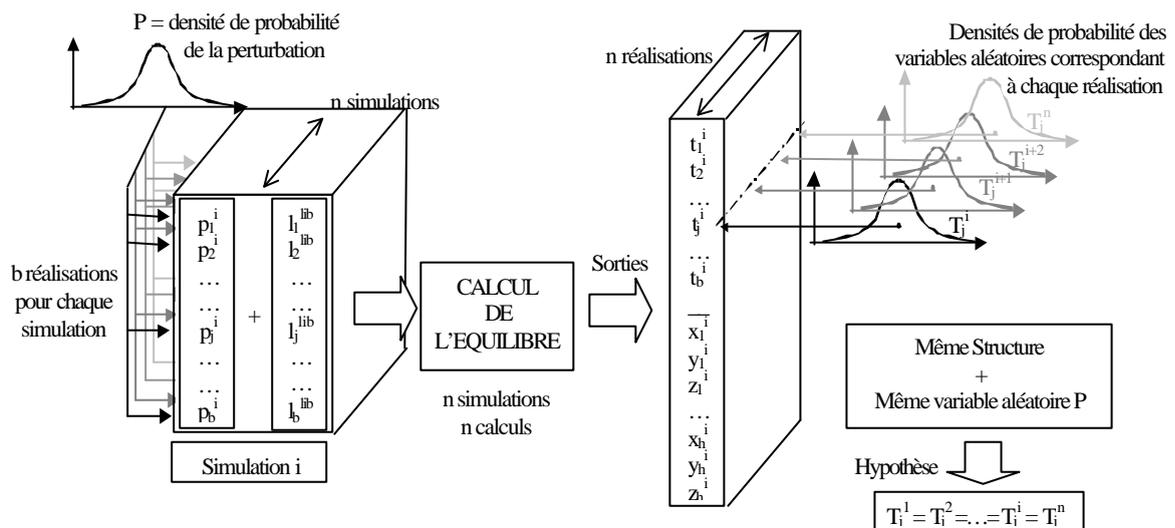


Figure 70 : Principe schématique de l'étude de la sensibilité

Ayant affaire à une même structure et les perturbations étant issues de la même variable aléatoire pour toutes les simulations, nous pouvons faire l'hypothèse que les n réalisations d'une quantité expérimentale donnée suivent une même loi de distribution. Les paramètres de cette loi (que nous supposons Gaussienne), la moyenne μ et l'écart-type σ , sont alors inconnus (Équation 58).

Équation 58
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = E(X) \\ \sigma = \sqrt{E\{X - E(X)\}^2} \end{array} \right. \text{ où } E(x) \text{ est l'espérance de la variable } X \text{ [SAP 90]}$$

La suite de ce paragraphe va donner une méthode d'estimation d'une variable aléatoire de paramètres inconnus à partir de n réalisations indépendantes de cette variable. Cette méthode est inspirée des travaux de GOYET [GOY 88].

Pour que l'échantillon soit suffisamment représentatif de cette variable, il est préférable d'avoir un nombre important de simulations, quelques dizaines au moins.

Nous pouvons alors caractériser cet échantillon par sa moyenne \bar{X} et son écart-type S :

$$\text{Équation 59} \quad \begin{cases} \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i \\ S^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

La question qui se pose alors est la détermination à partir de cet échantillon de ce qui est appelé une valeur caractéristique. Cette valeur (notée X_k) est telle que la probabilité de dépassement (ou de non-dépassement) de cette valeur par une réalisation de la variable aléatoire est justement égale à k.

Or, si l'espérance mathématique de la moyenne de l'échantillon est égale à la moyenne de la variable (Équation 60), il n'en est pas de même pour l'espérance mathématique de la variance (Équation 61) [SAP 90].

$$\text{Équation 60} \quad E(\bar{X}) = \mu$$

$$\text{Équation 61} \quad E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

En statistique, S^2 est appelé un *estimateur biaisé* de σ . Pour avoir un estimateur non biaisé de σ , il suffit de multiplier S^2 par $n/(n-1)$:

$$\text{Équation 62} \quad S^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$$

Nous pouvons alors dire que \bar{X} et S^{*2} sont des estimateurs non biaisés de μ et σ^2 :

$$\text{Équation 63} \quad \begin{cases} E(\bar{X}) = \mu \\ E(S^{*2}) = \sigma^2 \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu, la variable caractéristique X_k est définie comme il suit :

$$\text{Équation 64} \quad P(X < X_k) = k$$

où P est la loi de probabilité de la variable X.

X_k s'exprime facilement en fonction de μ et σ puisque :

$$\text{Équation 65} \quad P(X < X_k) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{X_k - \mu}{\sigma}\right) = P\left(U < \frac{X_k - \mu}{\sigma}\right)$$

où U est la loi normale centrée réduite.

De plus, en posant que $\Phi(u)$ est la fonction de répartition correspondant à U , alors :

$$\text{Équation 66} \quad P(X < X_k) = \Phi\left(\frac{X_k - \mu}{\sigma}\right) = k$$

La fonction de répartition inverse donne alors la condition suivante :

$$\text{Équation 67} \quad \frac{X_k - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(k) = u_k$$

C'est à dire :

$$\text{Équation 68} \quad X_k = \mu + u_k \sigma$$

Mais μ et σ étant inconnus, il est impossible de déterminer X_k directement à partir de cette formule et de l'échantillon.

L'idée est alors de contourner cette difficulté en définissant une variable V , à partir de la moyenne et de l'écart type de l'échantillon. Sa probabilité d'être inférieure à X_k est égale à un seuil p arbitrairement fixé et appelé confiance (Équation 69).

$$\text{Équation 69} \quad P(V < X_k) = p$$

Par analogie au résultat précédent, nous exprimons V en fonction de \bar{X} et S^*

$$\text{Équation 70} \quad V = \bar{X} - k_s S^*$$

Le problème consiste alors à déterminer k_s .

Cette procédure peut être illustrée par la Figure 71.

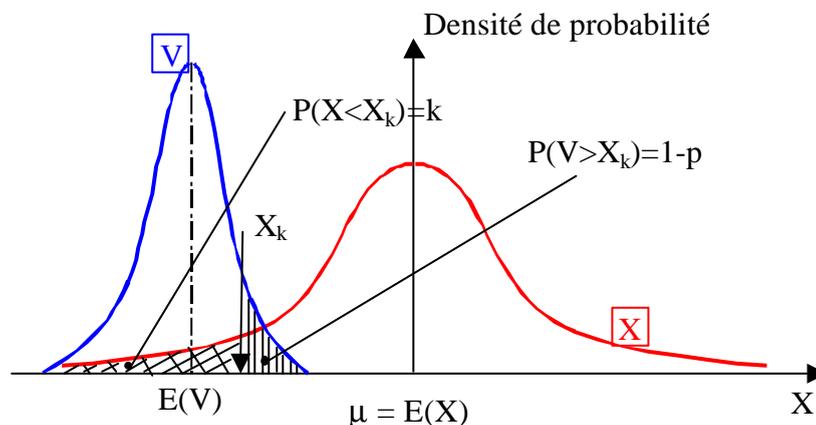


Figure 71 : Détermination d'une valeur caractéristique (X_k) avec une certaine confiance (p) à partir d'un échantillon [GOY88].

L'Équation 69 peut se développer à partir de l'expression de V :

$$\text{Équation 71} \quad P(\bar{X} - k_s S^* < \mu + u_k \sigma) = p \Leftrightarrow P(\bar{X} - \mu - u_k \sigma < k_s S^*) = p$$

Or, le *théorème central limite* ([SAP 90] p268) permet d'écrire :

$$\text{Équation 72} \quad \bar{X} - \mu = U \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

D'où on déduit :

$$\text{Équation 73} \quad P\left(U \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - u_k \sigma < k_s S^*\right) = p \Leftrightarrow P\left(U - u_k \sqrt{n} < k_s \sqrt{n} \frac{S^*}{\sigma}\right) = p$$

Or, selon un autre théorème ([SAP 90] p274) le rapport entre les variances de l'échantillon et de la variable aléatoire suit une loi de type χ_{n-1}^2 à n-1 paramètres.

$$\text{Équation 74} \quad n \frac{S^2}{\sigma^2} = (n-1) \frac{S^{*2}}{\sigma^2} = \chi_{n-1}^2$$

Ce qui permet d'écrire :

Équation 75

$$P\left(U - u_k \sqrt{n} < k_s \sqrt{n} \sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}\right) = p \Leftrightarrow P\left(\frac{U - u_k \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}} < k_s \sqrt{n}\right) = p$$

De plus GOYET donne la relation suivante : [GOY 88]

$$\text{Équation 76} \quad \frac{U - u_k \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}} = T'_{n-1, -u_k \sqrt{n}}$$

Où T' est une distribution de Student décentrée à (n-1) degrés de liberté et dont le paramètre de décentrement est :

$$\text{Équation 77} \quad d = -u_k \sqrt{n}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\text{Équation 78} \quad P(V < X_k) = P(T'_{n-1, -u_k \sqrt{n}} > k_s \sqrt{n}) = p$$

Or, pour calculer $P(T'_{v,d} \leq t')$ l'approximation suivante est possible [GOY 88] :

$$\text{Équation 79} \quad P(T'_{v,d} \leq t') \approx \Phi(x)$$

où Φ est la fonction de répartition de U et $x = \frac{t'(1 - \frac{1}{4v}) - d}{\sqrt{1 + \frac{t'^2}{2v}}}$

Cela nous conduit à résoudre l'équation :

$$\text{Équation 80 } F\left(\frac{k_s \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{4(n-1)} + u_k \sqrt{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{k_s^2 n}{2(n-1)}}}\right) = p \Leftrightarrow \frac{k_s \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{4(n-1)} + u_k \sqrt{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{k_s^2 n}{2(n-1)}}} = u_p$$

La solution de cette équation du second degré est donnée par GOYET :

Équation 81

$$k_s = \frac{-n u_k \left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right) + \sqrt{n^2 u_k^2 \left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right)^2 - n(n u_k^2 - u_p^2) \left[\left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right)^2 - \frac{u_p^2}{2(n-1)} \right]}}{n \left[\left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right)^2 - \frac{u_p^2}{2(n-1)} \right]}$$

Cas des systèmes de tenségrité :

La démonstration précédente permet de calculer une valeur caractéristique pour laquelle nous pouvons estimer que seule une proportion k des réalisations de la variable auront des valeurs inférieures à cette valeur caractéristique. Elle sera donnée avec une **confiance** égale à p .

Mais dans le cas des systèmes de tenségrité, le concepteur cherche à la fois à majorer et minorer les efforts développés dans les éléments. En effet, s'il est intéressant d'avoir une valeur minimale (pour vérifier par exemple si un câble est susceptible de se détendre), il est surtout capital de savoir si les valeurs maximales ne dépassent pas les valeurs admises par les règlements.

Nous définirons donc non seulement des valeurs caractéristiques minimales, mais aussi des valeurs caractéristiques maximales.

Or, la démonstration a été développée pour la détermination d'un k_s tel que :

$$\text{Équation 82} \quad \begin{cases} P(V < X_k) = p \\ V = \bar{X} - k'_s S^* \end{cases}$$

Il faut également déterminer k'_s tel que :

$$\text{Équation 83} \quad \begin{cases} P(V > X_k) = p \\ V = \bar{X} + k'_s S^* \end{cases}$$

En reprenant la démonstration précédente, il est vérifiable que $k_s = k'_s$ (Cf. Annexe I).

Nous ne définirons donc pas une valeur caractéristique, mais un **intervalle caractéristique** dans lequel les tensions se trouveront avec une certaine probabilité pour une confiance donnée (Figure 72).

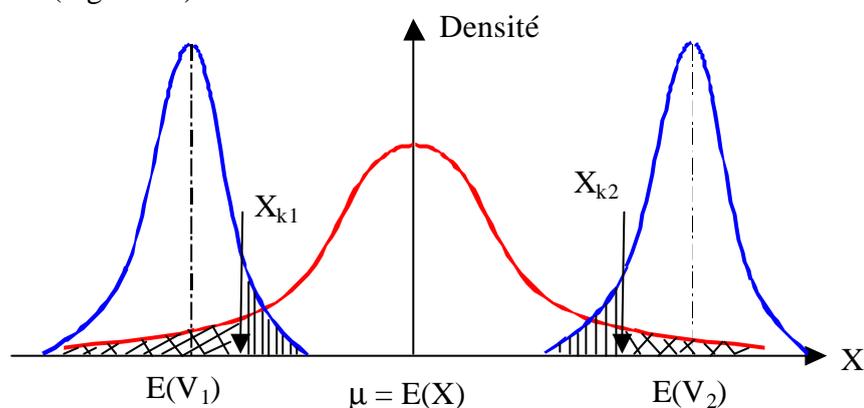


Figure 72 : Intervalle caractéristique $[X_{k1}, X_{k2}]$ déterminé à partir d'un échantillon.

Lorsque nous parlerons d'intervalle de confiance à 10 %, cela signifiera que 90 % des réalisations se situeront dans l'intervalle, 5 % au-dessous de X_{k1} et 5 % au-dessus de X_{k2} (Figure 73).

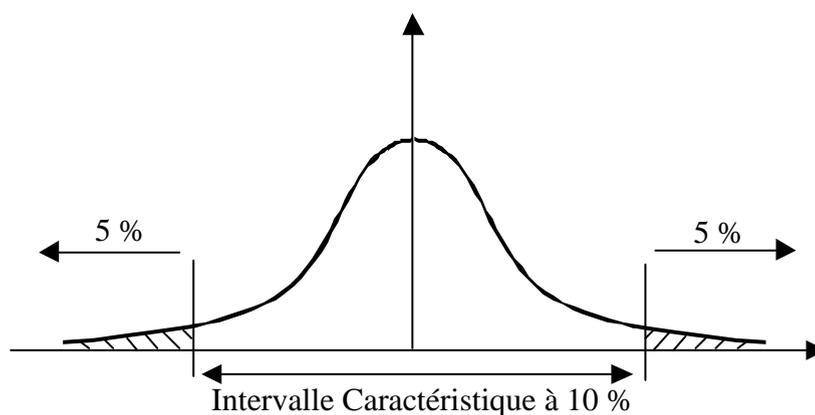


Figure 73 : Définition de l'intervalle caractéristique à 10 %

Sous réserve de vérifier que les échantillons considérés suivent une loi normale (l'hypothèse de départ), nous pouvons désormais caractériser les variables aléatoires qui conditionnent la fiabilité des structures.

D'ailleurs, si par la suite, les moyennes ou les écart-types sont données sur l'échantillon, soulignons que ces deux valeurs ne sont pas affectées d'une confiance. L'introduction d'une confiance nous amènerait à déterminer des intervalles dans lesquels se trouveraient presque sûrement ces paramètres.

Les seules quantités estimées dans ce travail et permettant de donner des résultats fiables sont donc les intervalles caractéristiques.

Ces précisions étant données, nous pouvons passer à l'étude qui nous intéresse, celle de la sensibilité des systèmes de tenségrité aux imprécisions de fabrication.

Comme dans le paragraphe 1.1, nous nous intéresserons dans un premier temps aux octaèdres expansés, puis nous étudierons dans le paragraphe suivant les demi-cuboctaèdres.

3.1.2 La sensibilité de l'octaèdre expansé

Nous allons maintenant présenter quelques résultats sur les modules de tenségrité et sur leurs assemblages.

Nous avons choisi de ne perturber que la longueur de fabrication des câbles car ils ont une précision de découpe bien moindre que celle des barres. Nous nous sommes également placés dans l'hypothèse que tous les câbles subissent des perturbations non corrélées et suivant la même loi.

Nous allons commencer par l'étude d'un octaèdre expansé qui présente la particularité d'avoir tous ses éléments à un même niveau de tension.

Pour ce module, nous avons étudié la sensibilité aux variations des longueurs de fabrication en nous intéressant à l'état d'autocontrainte (efforts internes et géométrie) ceci pour un module non chargé puis sous charges extérieures. Cela permettra d'avoir une étude complète.

3.1.2.1 Perturbation de l'état d'autocontrainte

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2.2.2, le niveau d'autocontrainte joue un rôle déterminant dans le comportement de la structure sous charge. Il est donc intéressant de voir, pour un état d'autocontrainte espéré, quel est l'état de sollicitation résultant après perturbation des longueurs de fabrication.

Nous traitons tout d'abord le cas d'un module isolé, puis celui des assemblages.

3.1.2.1.1 L'octaèdre expansé isolé

Le module est le même que celui du paragraphe 3.2.1, l'autocontrainte visée est l'autocontrainte n°3 de la Figure 46 (64 MPa dans les barres, 303 MPa dans les câbles). Comme nous l'avons vu, tous les câbles sont de même longueur et au même niveau d'autocontrainte. Il en est bien sûr de même pour les barres.

Pour avoir un échantillon conséquent, nous réalisons cent simulations numériques.

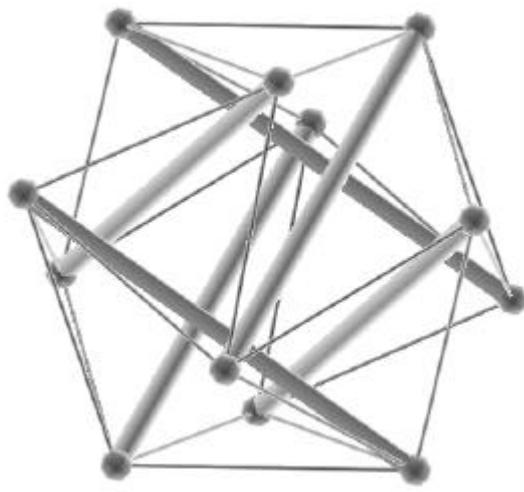


Figure 74 : Le module étudié, l'octaèdre expansé

Nous présentons maintenant les résultats obtenus pour des perturbations de longueur de câbles qui suivent un écart type de 0,51 mm. Cela correspond à un échantillon dont 95% de la population se situe dans un intervalle de [-1mm , +1mm].

➤ **Perturbation des efforts internes**

La première constatation à faire est que pour une simulation donnée, les valeurs sont quasiment identiques pour toutes les barres et tous les câbles. Comme nous le pressentions, il y a une très bonne redistribution des efforts dans la structure.

La théorie nous donnant une tension identique d'un élément à l'autre de la structure, il est remarquable qu'une fois simulée la perturbation de longueur, les variations de l'un à l'autre des éléments soient inférieures au pour-cent (Figure 75). C'est donc que le système s'adapte bien aux imprécisions de fabrication.

Dans la suite, les résultats seront donnés en contraintes (T_j/S_j) car nous verrons dans le cas des assemblages que cette représentation est plus judicieuse.

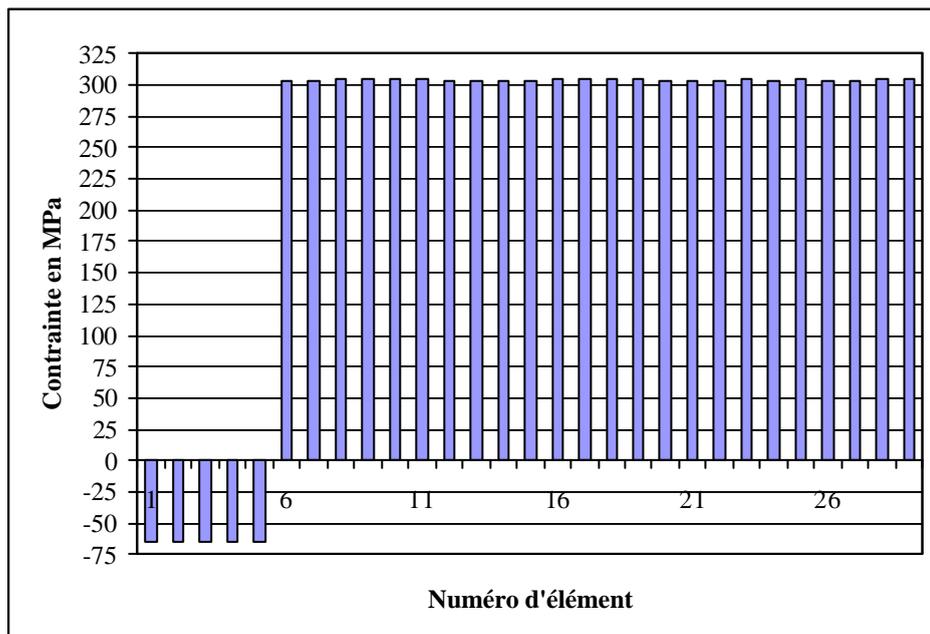


Figure 75 : Valeur de la contrainte dans les éléments pour une simulation.

Les variations d'une simulation à l'autre, par contre, sont plus importantes. Néanmoins, en moyenne, nous retrouvons les valeurs escomptées (nous donnons également pour indication le coefficient de variation S/\bar{X}) :

Eléments	Moyenne (MPa)	Ecart-type (MPa)	Coefficient de variation
Barres	64,0	2,1	0,033
Câbles	303,3	10,0	0,033

Tableau 6 : Valeur des moyennes et écarts-types pour 100 simulations.

Il est alors intéressant, pour un même élément, de voir quelle est la répartition des simulations.

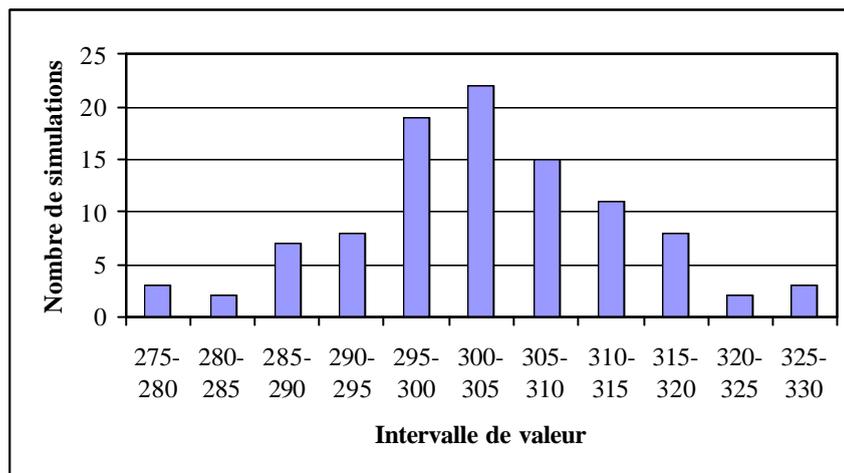


Figure 76 : Répartition des contraintes dans un câble pour un échantillon de 100 simulations.

Au regard de l'allure de l'histogramme obtenu, l'hypothèse d'une répartition gaussienne semble vraisemblable.

Il est également possible de réaliser un test de normalité numériquement plus probant. Par exemple, à partir du diagramme précédent, le test statistique du χ^2 [SAP 90].

On considère pour cela la variable statistique suivante :

$$\text{Équation 84} \quad D^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

où la variable aléatoire X considérée a été divisée en k classes de probabilités p_1, p_2, \dots, p_k pour lesquelles sont recensés les effectifs aléatoires N_1, N_2, \dots, N_k correspondant à chaque classe.

De plus ayant la relation :

$$\text{Équation 85} \quad \sum_{i=1}^k N_i = n$$

D^2 dépend de $(k-1)$ paramètres, ce qui fait que si n tend vers l'infini, D^2 tend vers une variable χ_{k-2-h}^2 où h est le nombre de paramètres estimés.

D'où le test du χ^2 : l'hypothèse de normalité de X sera rejetée si $d^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ est trop grand, c'est à dire supérieur à une valeur qui n'a qu'une probabilité α d'être dépassée par une variable χ^2 .

Dans notre cas, les classes sont au nombre de onze ce qui donne le Tableau 7 :

(Avec $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s^*}$ où μ est estimé par \bar{x} et σ est estimé par s^*)

Valeurs des Intervalles	u_i	p_i	n^*p_i	n_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
275	-2,61	//	//	//	//
280	-2,15	0,016	1,6	3,0	1,22
285	-1,68	0,031	3,1	2,0	0,39
290	-1,21	0,067	6,7	7,0	0,01
295	-0,74	0,117	11,7	8,0	1,17
300	-0,27	0,164	16,4	19,0	0,41
305	0,20	0,186	18,6	22,0	0,62
310	0,67	0,169	16,9	15,0	0,21
315	1,14	0,124	12,4	11,0	0,15
320	1,61	0,0725	7,25	8,0	0,07
325	2,09	0,035	3,5	2,0	0,64
330	2,56	0,0185	1,85	3,0	0,71
Totaux :		1	100	100	5,64

Tableau 7 : Test du c^2 pour l'exemple précédent

La valeur obtenue pour d^2 est très satisfaisante puisque la probabilité de dépassement de la valeur 7,34 par une variable χ^2_8 est déjà de 50%, Cette probabilité s'écrit : $P(\chi^2_8 > 7,34) = 0,5$, L'hypothèse de normalité de la variable X n'est donc pas rejetée.

Cette hypothèse étant acceptable (hypothèse à la base du traitement statistique préconisé au paragraphe 3.1.1.4) nous pouvons définir les intervalles de confiance dans lesquels se trouveront presque sûrement les valeurs des contraintes.

Dans le premier tableau, l'intervalle caractéristique est donné à 10 % et la confiance peut varier. Dans le deuxième, la confiance est fixée à 90 % et c'est l'intervalle caractéristique de la valeur de la contrainte dans les éléments qui varie de 1 à 30 % (rappel : cela signifie que 1 à 30 % de l'échantillon se situe hors de l'intervalle).

Intervalles caractéristiques à 10 % (valeurs en MPa)											
Confiance :		95 %		90 %		85 %		80 %		50 %	
Maxi Barres	$\Delta\sigma$	-60,0	8,1	-60,1	7,8	-60,2	7,6	-60,3	7,5	-60,6	6,9
Mini Barres		-68,0		-67,9		-67,8		-67,7		-67,5	
Maxi Câbles	$\Delta\sigma$	322,5	38,4	321,8	37,0	321,4	36,2	321,1	35,5	319,7	32,8
Mini Câbles		284,1		284,8		285,2		285,6		286,9	
Écarts / Moyenne		+/- 6,3 %		+/- 6,1 %		+/- 5,9 %		+/- 5,8 %		+/- 5,4 %	

Tableau 8 : Intervalles caractéristiques à 10 % de la contrainte dans les éléments pour différentes confiances (cas de l'octaèdre).

Intervalles caractéristiques pour une confiance de 90 %											
Intervalle à :		1 %		5 %		10 %		20 %		30 %	
Maxi Barres	$\Delta\sigma$	-58,0	12,0	-59,4	9,2	-60,1	7,8	-60,9	6,2	-61,5	5,1
Mini Barres		-70,0		-68,6		-67,9		-67,1		-66,5	
Maxi Câbles	$\Delta\sigma$	331,9	57,2	325,2	43,8	321,8	37,0	317,9	29,3	315,3	24,0
Mini Câbles		274,7		281,4		284,8		288,7		291,3	
Ecarts / Moyenne		+/- 9,4 %		+/- 7,2 %		+/- 6,1 %		+/- 4,8 %		+/- 4,0 %	

Tableau 9 : Différents intervalles caractéristiques de la contrainte dans les éléments pour une même confiance (cas de l'octaèdre).

Nous pouvons remarquer que la confiance ne fait que peu varier les intervalles. Cela est dû au fait que nous avons un nombre important de réalisations et qu'il n'est pas demandé une confiance démesurée. Par exemple, pour une confiance de 99,99 %, l'intervalle caractéristique à 10 % s'étale de +/- 8 % autour de la moyenne.

De la même façon, un intervalle caractéristique à 0,02 %, donne un résultat de +/- 15 %.

Il est possible de représenter graphiquement ces résultats en portant en abscisse chaque élément et en ordonnée les valeurs moyennes et les bornes des intervalles caractéristiques.

Cette représentation permet surtout de voir les différences d'un élément à l'autre.

Nous avons choisi un intervalle caractéristique à 10 %, valeur couramment utilisée dans les Eurocodes pour le calcul des valeurs caractéristiques.

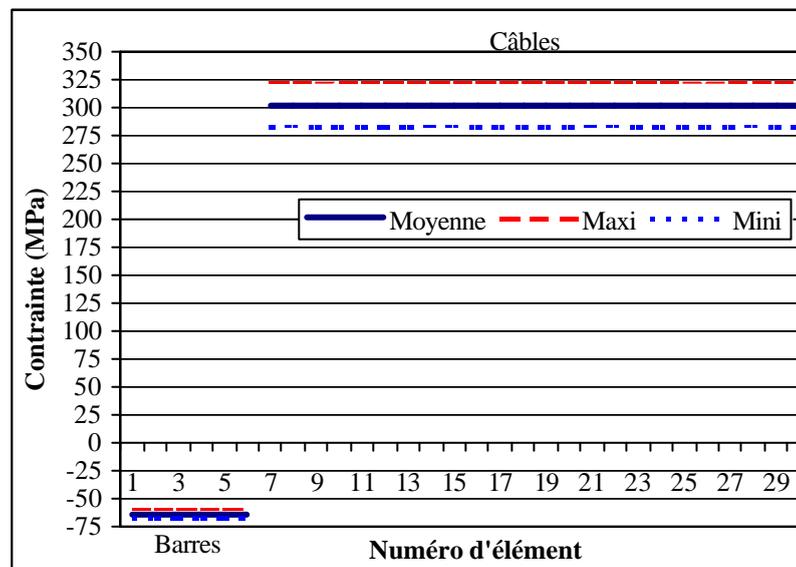


Figure 77 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément, ici à 10 % pour une confiance de 90 %.

➤ Perturbation de la géométrie

En matière de géométrie, nous allons voir que les perturbations sont faibles. En effet, les déplacements nodaux engendrés par la variabilité des longueurs de fabrication sont très inférieurs au centimètre.

Comme pour les contraintes, il est possible de définir là aussi des intervalles caractéristiques, par exemple pour les trois nœuds supérieurs du module qui sont libres (10, 11, 12), les trois nœuds inférieurs (1, 2, 3) étant fixés de manière à supprimer les déplacements solides (Figure 78).

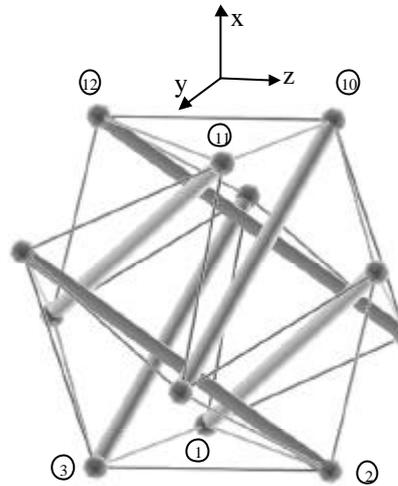


Figure 78 : Numérotation des nœuds pour l'octaèdre expansé considéré.

Numéro de Nœud	10	11	12
Intervalle sur x (mm)	[-1,6 1,4]	[-1,3 1,2]	[-1,2 1,6]
Intervalle sur y (mm)	[-2,2 2,3]	[-2,2 2,1]	[-2,4 2,8]
Intervalle sur z (mm)	[-2,6 2,4]	[-2,7 2,4]	[-2,6 2,5]

Tableau 10 : Intervalles caractéristiques des déplacements nodaux par rapport à la position espérée (intervalles à 10 % pour une confiance de 90%).

Ces perturbations sont faibles par rapport aux dimensions du module qui sont de l'ordre du mètre. Néanmoins, dans l'optique d'un assemblage de modules, un effort adapté de l'ordre de 25 daN sera nécessaire pour compenser ces écarts.

Enfin, les différences notables entre les trois directions de l'espace sont dues au fait que les déplacements se font essentiellement suivant des axes privilégiés qui sont ceux des éléments. Si nous effectuons un dépouillement des résultats suivant l'axe des barres et dans un plan normal à celles-ci, nous retrouvons des valeurs plus régulières et respectant la symétrie du module.

Numéro de Nœud	10	11	12
Intervalle sur l'axe de la barre (mm)	[-2,5 2,5]	[-2,2 2,3]	[-2,5 2,5]
Intervalle sur une normale à la barre (mm)	[-1,6 1,7]	[-1,6 1,8]	[-1,7 1,9]

Tableau 11 : Intervalles caractéristiques des déplacements nodaux suivant des axes orientés par rapport aux barres.

Cette faible variation de la géométrie explique la régularité des tensions dans le module : comme la géométrie est très proche de la géométrie autocontrainte théorique, les ratios de tension entre les éléments sont conservés pour assurer l'équilibre au niveau des nœuds.

En termes statistiques, il existe une forte corrélation d'une variable aléatoire à l'autre : supérieure à 0,99.

➤ **Influence de deux paramètres : précision de fabrication et autocontrainte visée**

Il est intéressant à ce niveau de l'étude de quantifier l'effet d'un changement de précision dans la fabrication des éléments.

Pour cela, nous pouvons donner les résultats de simulations pour lesquelles la tolérance de fabrication des câbles serait différente : de [-0,5mm, +0,5mm] à [-2mm, +2mm] pour 95 % de l'échantillon correspondant à des écart types de 0,26 à 1,03 mm (Tableau 12).

Il est important de souligner que ces calculs ont été effectués pour **un même échantillon de perturbations** (constitué de **b*n** réalisations d'une variable centrée réduite - Figure 70) mais dont nous avons corrigé l'écart-type par un facteur multiplicatif pour obtenir les valeurs adéquates.

Contrainte		Moyenne	Ecart-type	Coefficient
Tolérance de fabrication		(MPa)	(MPa)	de variation
Autocontrainte espérée		64 303	/	S/\bar{X}
[+0,5 -0,5] mm	Barres	-64,12	1,18	0,018
	Câbles	303,8	5,59	
[+1 -1] mm	Barres	-64,24	2,36	0,036
	Câbles	304,4	11,18	
[+1,5 -1,5] mm	Barres	-64,36	3,53	0,054
	Câbles	305,0	16,77	
[+2 -2] mm	Barres	-64,48	4,71	0,073
	Câbles	305,6	22,35	

Tableau 12 : Valeur des moyennes et écarts-types pour différentes valeurs de précision de fabrication.

Alors que l'écart-type croit quasi linéairement avec la tolérance de fabrication, la moyenne n'est pas constante et a tendance à augmenter. Cette augmentation est directement liée au caractère non linéaire qui lie la tension à la longueur de fabrication d'un élément (Équation 42).

L'autre paramètre qui peut influencer notablement sur la sensibilité est le niveau d'autocontrainte visée.

Ainsi, pour les 3 niveaux d'autocontrainte de la Figure 46, les résultats sont très différents (Tableau 13).

Tolérance de fabrication : [+1mm/-1mm]				
		Moyenne	Ecart-type	Coef. Variat°
Autocontrainte n°3	Barres	-64,0	2,10	3,3 %
	Câbles	303,3	10,01	
Autocontrainte n°2	Barres	-42,6	2,00	4,8 %
	Câbles	202,1	9,47	
Autocontrainte n°1	Barres	-21,2	1,93	9,1 %
	Câbles	100,4	9,13	

Tableau 13 : Valeur des écarts-types pour différentes valeurs d'autocontrainte

Si les écart-types varient peu (en valeur brute) pour une même tolérance de fabrication, il faut noter que la plage de variation d'autocontrainte augmente fortement en valeur relative.

Par exemple, les intervalles caractéristiques à 10%, pour une confiance de 90%, donnent les valeurs suivantes :

Tolérance de fabrication : [+1/-1]		Autoc. N°1		Autoc. N°2		Autoc. N°3	
Maxi Barres	$\Delta\sigma$	-17,59	7,18	-39,06	7,44	-60,1	7,80
Mini Barres		-24,77		-46,5		-67,9	
Maxi Câbles	$\Delta\sigma$	117,4	34,01	220,4	35,31	321,8	37,05
Mini Câbles		83,38		185,1		284,8	
Écarts / Moyenne		+/- 17 %		+/- 8,7 %		+/- 6,1 %	

Tableau 14 : Valeur des intervalles caractéristiques à 10 % (confiance de 90 %) pour différents niveaux d'autocontrainte

Il est évident que si le concepteur souhaite diminuer la sensibilité des systèmes de tenségrité il a intérêt à réduire les tolérances de fabrication. Mais en augmentant l'autocontrainte à atteindre, il minimise aussi l'effet de ces variations.

Un fort niveau d'autocontrainte a donc pour effet de « gommer » les imprécisions : plus l'allongement d'un câble de sa longueur libre à sa longueur assemblée est importante (Figure 68, page 106) plus l'influence des tolérances de fabrication sera faible.

D'un autre côté, une autocontrainte forte risque d'augmenter le phénomène de relaxation des câbles qui entraîne une diminution de la tension d'un câble au cours du temps. Sans pouvoir être négligé, ce phénomène sort du cadre de cette étude. Des études expérimentales devront d'ailleurs être menées pour évaluer ces pertes et assurer la maintenance de la structure.

Connaissant maintenant le résultat pour un octaèdre isolé, nous pouvons étudier les assemblages linéaires de ce module pour vérifier si les résultats sont transposables.

3.1.2.1.2 Assemblage d'octaèdres expansés

Nous avons réalisé des simulations pour des assemblages de trois et cinq octaèdres expansés qui sont identiques au module précédemment étudié (Figure 79).

L'assemblage se fait par simple juxtaposition de nœuds. Certains câbles se superposent alors, ce que nous prenons en compte en les remplaçant par un seul élément d'aire de section droite double.

L'état d'autocontrainte choisi pour les simulations est un état d'autocontrainte qui sollicite à un même niveau tous les modules, puisque chaque module a un état d'autocontrainte propre (Figure 34). Si chacun des modules est autocontraint à un même niveau, il ne peut y avoir un même niveau de tension dans les câbles : ceux qui sont communs à deux modules subissent l'influence de deux états d'autocontrainte et leur tension est doublée. Par contre, compte tenu du doublement des aires des sections droites, les contraintes, elles, sont identiques à celles des autres éléments.

Les tolérances de fabrication restent les mêmes qu'au paragraphe précédent ([+1mm, -1mm]) afin de pouvoir comparer les résultats.

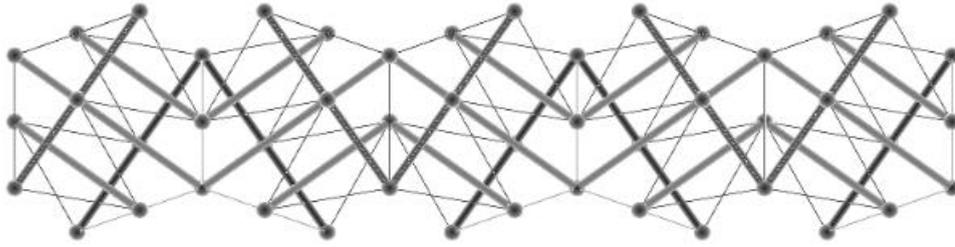


Figure 79 : Cinq octaèdres expansés assemblés de façon linéaire

Les premiers résultats présentés concernent quelques simulations obtenues pour un assemblage de cinq modules. Comme dans le cas d'un module isolé, les tensions sont quasiment constantes dans un même module. Par contre, les différences peuvent être importantes d'un module à l'autre.

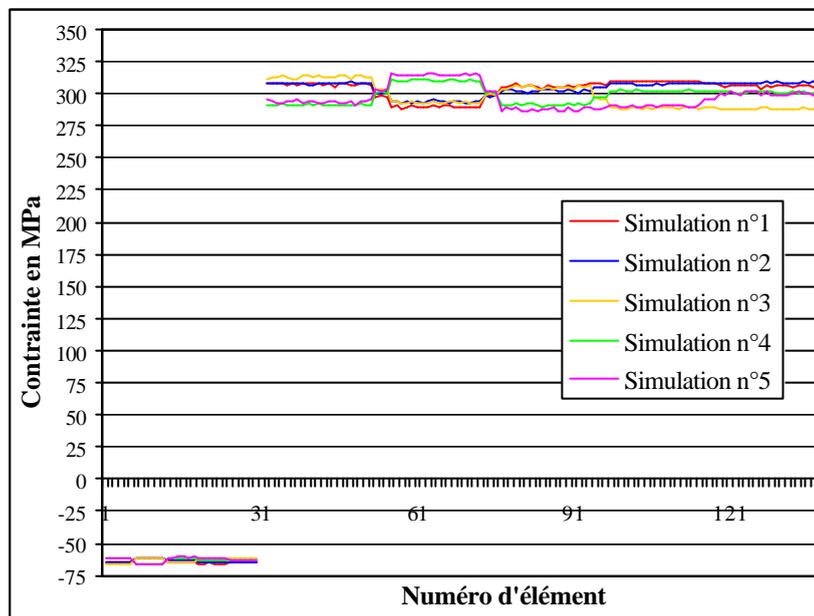


Figure 80 : Quelques résultats de simulations (cinq parmi cent) dans le cas d'un assemblage de cinq octaèdres expansés

Néanmoins, en terme d'intervalles caractéristiques, les résultats sont très réguliers et comparables à ceux obtenus dans le cas de l'octaèdre isolé (Figure 81).

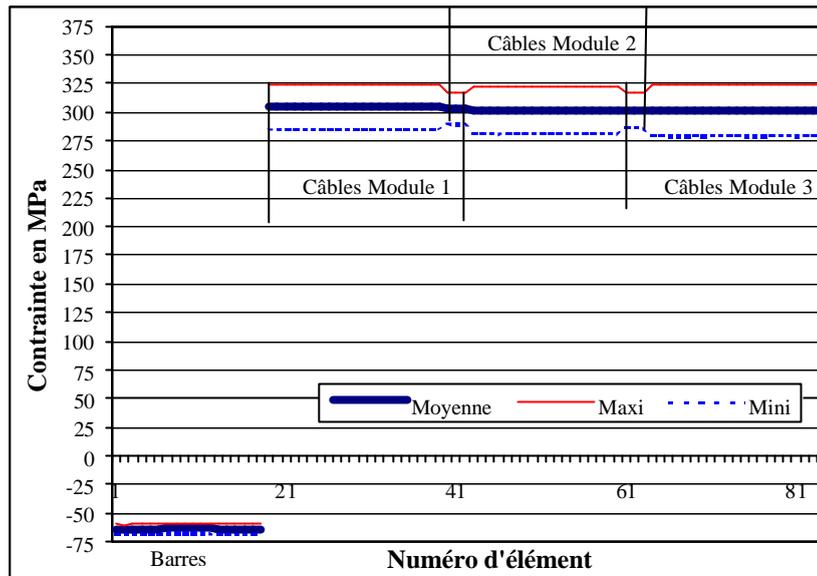


Figure 81 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %), assemblage de trois octaèdres.

Seuls les câbles communs à deux modules ont une plage de variation moindre. Dans ce cas, l'amplitude de l'intervalle varie dans un rapport de 0,72 par rapport aux câbles courants.

Ce constat est le même dans le cas d'un assemblage de cinq modules (Figure 82).

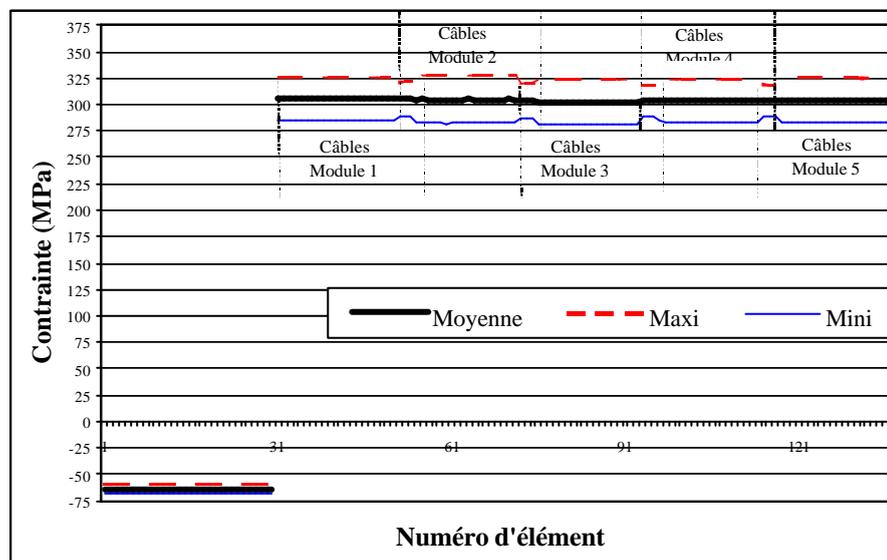


Figure 82 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %), assemblage de cinq octaèdres

Globalement, nous pouvons dire que la sensibilité de l'assemblage n'a pas fondamentalement évolué par rapport au module isolé. Les variations d'amplitude dans les intervalles caractéristiques entre les câbles courants et les câbles communs à deux modules (de 0,70 à 0,74) peuvent même s'expliquer d'un point de vue purement statistique.

En effet, ceci est visible dans le graphique concernant les simulations (Figure 80), les câbles communs subissent l'influence de deux modules. La diminution de l'intervalle caractéristique peut s'expliquer par le fait que les contraintes dans les éléments correspondent à une variable aléatoire moyenne de deux variables aléatoires caractérisant chacune le niveau d'autocontrainte d'un module.

Plus concrètement, en tension, nous pouvons émettre l'hypothèse que les efforts dans les éléments communs sont la somme de deux variables aléatoires qui ont les mêmes paramètres caractéristiques (moyenne μ_0 et écart-type σ_0) et caractérisent le niveau de tension dans chacun des modules. Auquel cas, la somme des deux variables possède les paramètres caractéristiques suivants [SAP 90] :

$$\text{Équation 86} \quad \begin{cases} \mu' = 2\mu_0 \\ \sigma' = \sqrt{2} \cdot \sigma_0 \end{cases}$$

Compte tenu du doublement des aires des sections droites des éléments, les facteurs deviennent respectivement 1 et $\sqrt{2}/2$. Or, 0,707 c'est, à peu de chose près, le facteur observé dans les rapports d'amplitude d'intervalle sur les Figure 81 et Figure 82.

Cela nous conduit à valider l'hypothèse selon laquelle les niveaux d'autocontrainte de chacun des modules peuvent être caractérisés par une variable aléatoire donnant la tension dans un élément courant du module.

3.1.2.1.3 Conclusion sur la sensibilité de l'autocontrainte

Ces premiers résultats nous ont permis de montrer que la sensibilité de l'état d'autocontrainte d'un module isolé aux tolérances de fabrication dépendait surtout de deux paramètres, la tolérance de fabrication bien sûr, mais aussi le niveau d'autocontrainte visé.

Apparemment, plus on souhaite réduire la sensibilité, plus il faut restreindre les tolérances de fabrication et élever le niveau d'autocontrainte, ce qui était assez prévisible. Mais il est capital de l'avoir quantifié.

D'autre part, le phénomène intéressant que nous avons mis en évidence est la redistribution des tensions à l'intérieur d'un même module, ou plutôt, à l'intérieur d'un même état d'autocontrainte. La géométrie de la structure variant très peu, il n'y a pas de différence notable au niveau des tensions entre deux éléments courants d'un même module pour respecter l'équilibre des nœuds. Par contre, il peut y avoir de fortes différences de niveau entre deux modules assemblés.

Cette étude sur l'état d'autocontrainte étant faite, il est intéressant de mesurer l'influence de cette variabilité des longueurs de fabrication sur le comportement du module sous actions extérieures, comportement que nous savons très dépendant du niveau d'autocontrainte.

3.1.2.2 Influence sur le comportement.

Nous venons de quantifier la perturbation créée par la précision de fabrication sur l'état d'autocontrainte d'un module.

Nous allons maintenant faire de même, mais en appliquant des actions extérieures sur le module. Nous verrons, alors, si cela peut engendrer des risques de ruine importants pour la structure.

La procédure de calcul est la suivante : dans un premier temps nous faisons un calcul purement théorique puis nous perturbons les longueurs de câbles. Suivant les plages de

variation obtenues sur les intervalles caractéristiques, nous ajusterons les charges limites à ne pas dépasser.

Dans le cas de l'autocontrainte précédemment étudiée, nous avons simulé les mêmes perturbations, mais avec des charges extérieures appliquées sur les nœuds supérieurs du module.

Nous avons pris comme charge, la charge limite de compression de la Figure 48, - 4750 N sur chaque nœud supérieur pour l'autocontrainte n°3. Nous pouvons alors, comme pour l'état d'autocontrainte, tracer les intervalles caractéristiques à 10 % (*dans la toute la suite et par défaut la confiance sera de 90 %*). Pour plus de facilité dans la lecture, les éléments ont été ré-ordonnés de manière à avoir des valeurs croissantes.

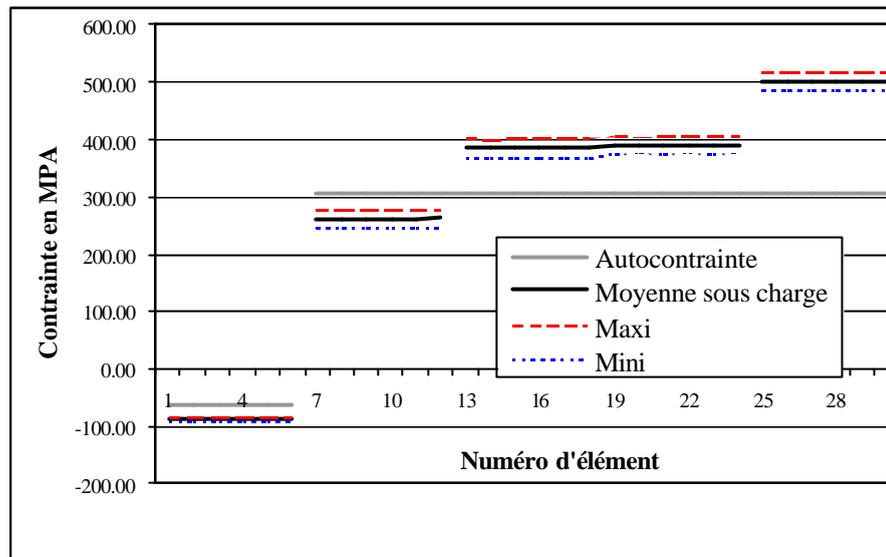


Figure 83 : Intervalles caractéristiques à 10 % des contraintes sous charge.

Les paliers observés sont dus à la symétrie du module et du chargement qui sollicitent certains câbles à un même niveau de chargement. Les perturbations observées sur les câbles sollicités à 400 MPa peuvent s'expliquer par les conditions aux limites imposées.

Nous constatons que pour les derniers câbles, la limite de sollicitation est franchie (500 MPa). Cela veut dire qu'il faudra encore réduire la plage de charge admissible si le concepteur souhaite tenir compte de cette sensibilité.

Par exemple, en gardant les mêmes coefficients statistiques, pour que le maximum ne dépasse pas les 500 MPa, il faut se restreindre à un chargement de 4600 N.

Une valeur tout à fait remarquable est à souligner : c'est l'écart-type des valeurs obtenues. Il est assez significativement inférieur à celui obtenu pour l'état d'autocontrainte seul. En effet, toutes quantités égales par ailleurs, il est passé de 2,1 MPa et 10 MPa (respectivement pour les barres et les câbles) à 1,5 MPa et 7 MPa. Cela signifie que les intervalles caractéristiques se resserrent d'autant, conclusion qui est en harmonie avec l'évolution de la sensibilité en fonction du niveau d'autocontrainte.

En effet, ce phénomène s'explique aisément en observant le niveau final de tension dans la structure. Compte tenu des constatations faites dans le paragraphe 3.1.2.1.1 sur l'influence du niveau d'autocontrainte sur la sensibilité, il est évident que le niveau d'autocontrainte ayant (globalement) fortement augmenté (Figure 83) la sensibilité a été amoindrie.

L'influence des tolérances de fabrication sur les flèches du module peut également être quantifiée. Pour cela, nous prenons une charge de 4000 N sur chaque nœud supérieur. Les résultats purement théoriques avaient donné une composante verticale de déplacement de -3,04 cm (Figure 47).

	Nœud 10	Nœud 11	Nœud 12
Flèche Maxi (m)	-0,0288	-0,0285	-0,0287
Flèche Mini (m)	-0,0322	-0,0325	-0,0326
D_x	0,0034	0,0040	0,0039

Tableau 15 : Intervalles caractéristiques pour les flèches sous charges.

Dans le cas de la flèche, contrairement aux efforts, les intervalles caractéristiques sont plus étendus que dans le cas d'une autocontrainte sans chargement. Encore une fois, il faut noter que l'exploitation des résultats est très délicate au niveau de la géométrie du système car il existe des directions de déplacement privilégiées. Dans le cas du module non chargé, c'était les axes des éléments, ici s'ajoute la direction de chargement.

Numéro de Nœud	10	11	12
Intervalle sur l'axe de la barre (mm)	[-2,3 2,2]	[-2,2 2,3]	[-2,7 2,4]
Intervalle sur une normale à la barre (mm)	[-1,7 1,7]	[-1,5 1,6]	[-1,4 1,3]

Tableau 16 : Intervalles caractéristiques des déplacements nodaux suivant des axes orientés par rapport aux barres et sous charges.

3.1.2.3 Conclusion sur l'étude de l'octaèdre

Une étude assez complète de l'influence de la variabilité des longueurs de fabrication sur le comportement des octaèdres expansés nous a permis de tirer plusieurs enseignements :

- Tout d'abord, une redistribution des efforts s'opère dans la structure. Elle a pour effet de minimiser les fluctuations. Cette sensibilité est bien sûr fortement dépendante de la précision de fabrication des éléments, mais aussi du niveau d'autocontrainte espéré.
- La redistribution des tensions affecte le niveau d'autocontrainte global du module. Sans chargement extérieur, les rapports de tension entre deux éléments restent quasiment les mêmes que ceux calculés dans le cas d'une géométrie exacte. Par contre, le niveau global peut varier de quelques pour-cent.
- Enfin, une étude sous charges extérieures a montré que le niveau de sollicitation des éléments étant croissant, la sensibilité observée diminuait.

Suite à ces constatations, il nous a semblé judicieux de pousser plus loin l'étude en nous intéressant à des modules pouvant s'assembler non seulement de manière linéaire, mais aussi en structures planes pour former des grilles à double nappe. Ce sont les demi-cuboctaèdres.

Ainsi, nous verrons si les résultats obtenus sont reproductibles pour d'autres types de modules.

3.1.3 La sensibilité du demi-cuboctaèdre

Nous allons étudier le demi-cuboctaèdre qui a été utilisé au paragraphe 2.2.4.

Les dimensions étaient les suivantes 1m50x1m50x1m15, longueur de barre de 2m03, aire de 4,1 cm², câbles de diamètre nominal 10 mm pour une section de 0,65 cm².

Contrairement à l'octaèdre expansé, l'état d'autocontrainte théorique ne donne pas des tensions identiques dans tous les câbles. En se plaçant à 50 % de la limite autorisée par l'EC3 à l'ELU (paragraphe 2.2.4.3) les contraintes dans les différents éléments sont les suivantes :

Barres :	49,2 MPa
Câbles de nappe inférieure :	114,7 MPa
Câbles de nappe supérieure :	162,2 MPa
Câbles d'entretoisement :	210,0 MPa

3.1.3.1 Perturbation de l'état d'autocontrainte

Dans la lignée du paragraphe précédent, nous allons commencer par étudier la perturbation engendrée sur l'état d'autocontrainte. Le premier cas d'étude concernera le module isolé.

3.1.3.1.1 Le demi-cuboctaèdre isolé

Comme pour l'octaèdre, pour avoir un échantillon conséquent, nous avons réalisé cent simulations.

Pour une perturbation appliquée aux câbles comprise à 95 % dans l'intervalle [-1mm, +1mm], les résultats sont les suivants (Tableau 17) :

Eléments	Moyenne (MPa)	Ecart-type (MPa)	Coeff. de variat ^o
Barres	49,1	3,70	0,0753
Câbles supérieurs	114,7	8,62	0,0753
Câbles inférieurs	162,1	12,20	0,0753
Câbles d'entretoisement	209,9	15,80	0,0753

Tableau 17 : Valeur des moyennes et écarts-types obtenus pour le demi-cuboctaèdre.

Comme dans le cas des octaèdres nous déterminons pour chacun des éléments les intervalles de confiance. Pour un intervalle caractéristique à 10 % et une confiance de 90 %, les résultats sont assez réguliers (Figure 84).

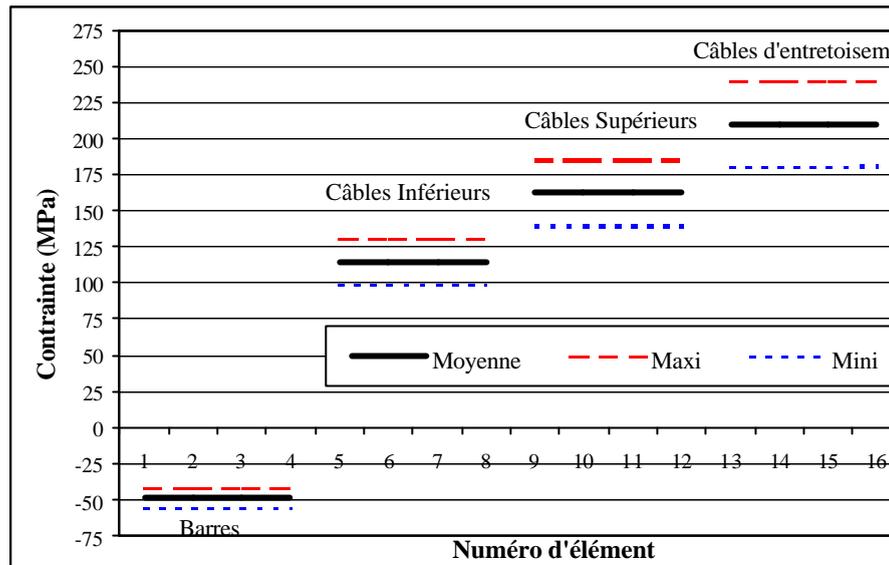


Figure 84 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %).

Comme dans le cas de l'octaèdre, les éléments d'une même « famille » ont les mêmes valeurs statistiques. En fait, ce sont là encore les ratios de contraintes entre deux éléments qui sont conservés pour respecter l'équilibre nodal.

Arrivant aux mêmes conclusions que dans le cas du module précédent, nous allons nous intéresser à l'étude de l'assemblage de modules.

3.1.3.1.2 Assemblages linéiques

➤ Assemblage de deux demi-cuboctaèdres.

Nous allons présenter les résultats pour l'assemblage de deux demi-cuboctaèdres :

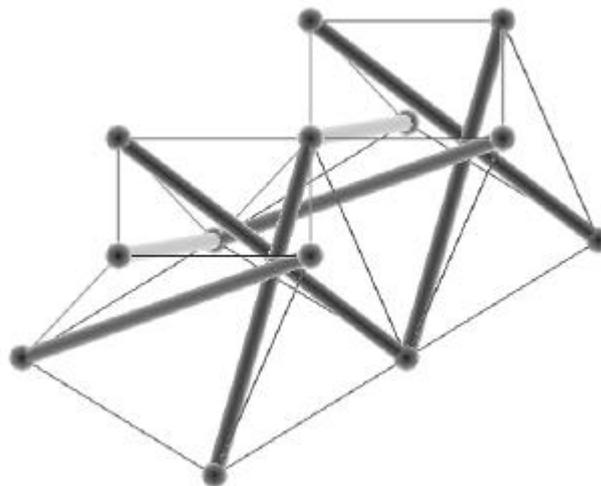


Figure 85 : Un assemblage de deux demi-cuboctaèdres.

Comme pour l'octaèdre expansé, nous doublons la section de l'élément de nappe inférieure qui est commun aux deux modules.

L'état d'autocontrainte choisi pour le système est celui qui donne le même état d'autocontrainte qu'au paragraphe précédent pour les deux modules.

Pour les mêmes tolérances fabrication, nous trouvons les intervalles caractéristiques suivants (Figure 86) :

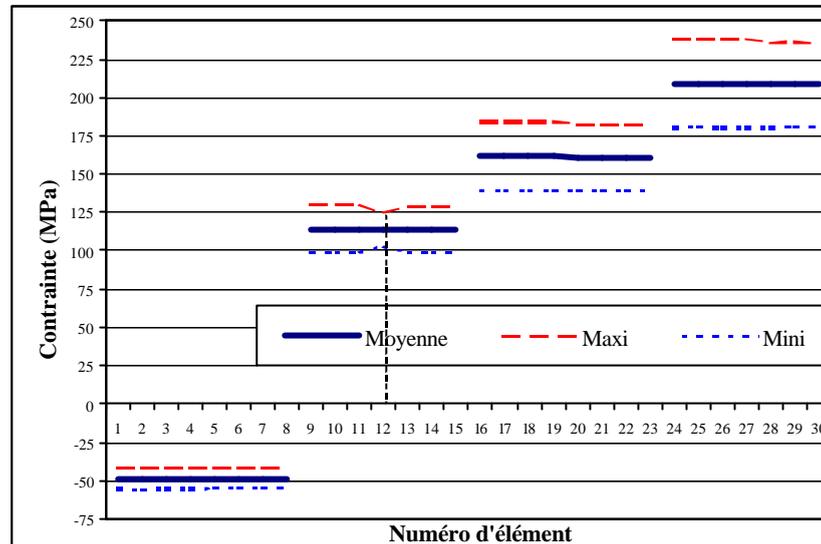


Figure 86 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %) dans le cas de deux demi-cuboctaèdres.

Là encore, nous notons un fléchissement de l'écart type pour le câble commun aux deux modules (n°12), le rapport étant très proche de la valeur théorique : 0,71.

Ces résultats étant identiques à ceux observés dans le cas de l'octaèdre cela nous amène à aller plus loin dans l'étude en assemblant trois modules linéairement.

➤ **Assemblage de trois demi-cuboctaèdres.**

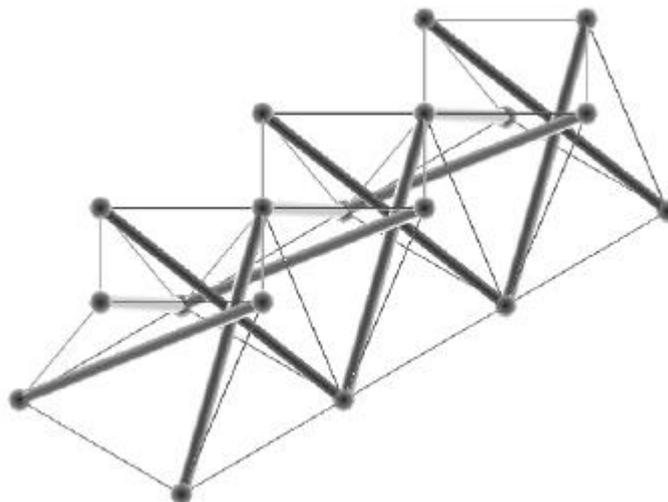


Figure 87 : Un assemblage de trois demi-cuboctaèdres.

L'état d'autocontrainte choisi est bien sûr un état d'autocontrainte uniforme qui sollicite à un même niveau les trois modules (Figure 88).

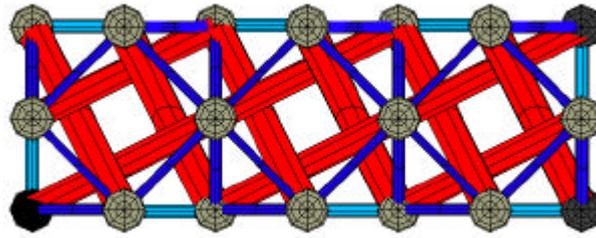


Figure 88 : L'état d'autocontrainte uniforme

Dans ce cas, toutes quantités égales par ailleurs, les résultats obtenus sont nettement moins réguliers (Figure 89) :

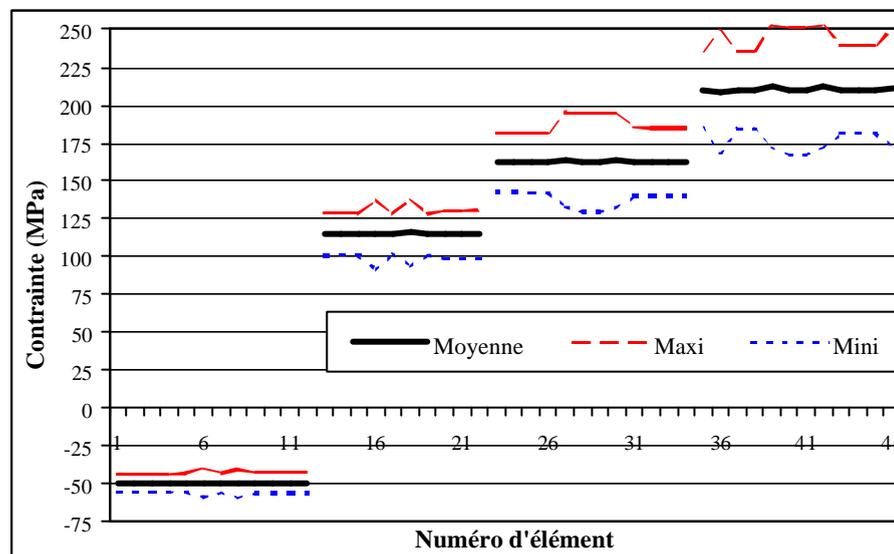


Figure 89 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %) dans le cas de trois demi-cuboctaèdres

Si les moyennes ont peu évolué, la sensibilité, elle, a fortement augmenté pour certains éléments. Or, en s'intéressant de plus près aux éléments dont l'écart-type a crû, il est possible d'expliquer d'où vient cette augmentation. Ces éléments sont ceux appartenant au module central, plus deux câbles d'entrecroisement des modules extérieurs.

En se rappelant comment était le quatrième état d'autocontrainte présent dans ce système, la similitude est flagrante (Figure 90).

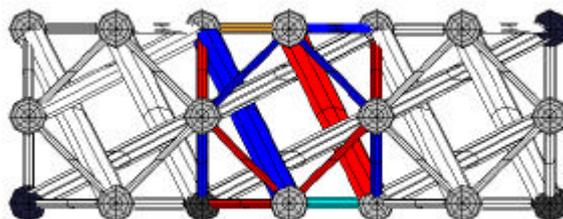


Figure 90 : Le quatrième état d'autocontrainte non conforme (en couleur, Figure 26).

Les éléments mis en jeux dans cet état d'autocontrainte sont précisément ceux dont l'écart-type varie fortement (Figure 89) : deux barres (n° 6 et 8), les câbles de nappe inférieure (n° 16 et 18), supérieure (n° 27 à 30), les câbles d'entretoisement du module central (n° 39 à 42), plus deux câbles d'entretoisement appartenant aux modules extérieurs (n° 36 et 46).

Pour notre étude, nous avons installé une autocontrainte homogène dans la structure. Nous avons donc utilisé trois états d'autocontrainte sur les quatre possibles, mais en perturbant les longueurs de fabrication, nous avons activé le quatrième état d'autocontrainte.

Bien que cet état d'autocontrainte ne soit pas conforme, il peut être sollicité lorsque la structure est autocontrainte suivant la Figure 88. C'est ce qui se passe lorsque nous perturbons les longueurs de fabrication. Il est donc normal que les barres et les câbles du module central aient une plus grande variation de leur autocontrainte. L'écart type y est 1,5 fois supérieur, ce qui est loin d'être négligeable.

Ce cas d'étude tendrait à montrer que pour pouvoir étendre une étude de sensibilité d'un simple module à un assemblage, il faut connaître tous les états d'autocontrainte.

Nous allons voir dans le cas d'assemblage de demi-cuboctaèdres en grille comment cela se vérifie.

3.1.3.1.3 Assemblage en grille à double nappe.

La plus petite grille qui puisse être construite à partir de demi-cuboctaèdres est formée de quatre modules (Figure 91).

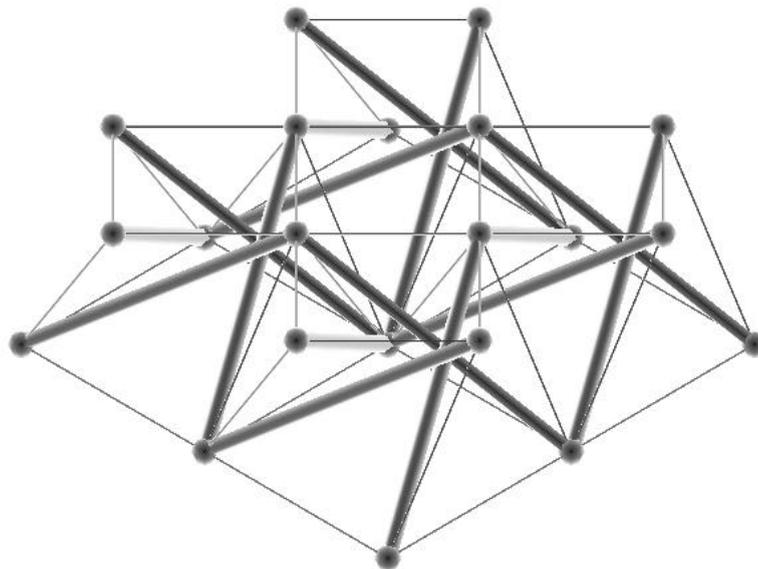


Figure 91 : Un assemblage plan de quatre demi-cuboctaèdres.

Dans cet assemblage, il n'existe que les quatre états d'autocontrainte propres à chaque module (Figure 24). Nous obtenons donc des résultats assez réguliers (Figure 92).

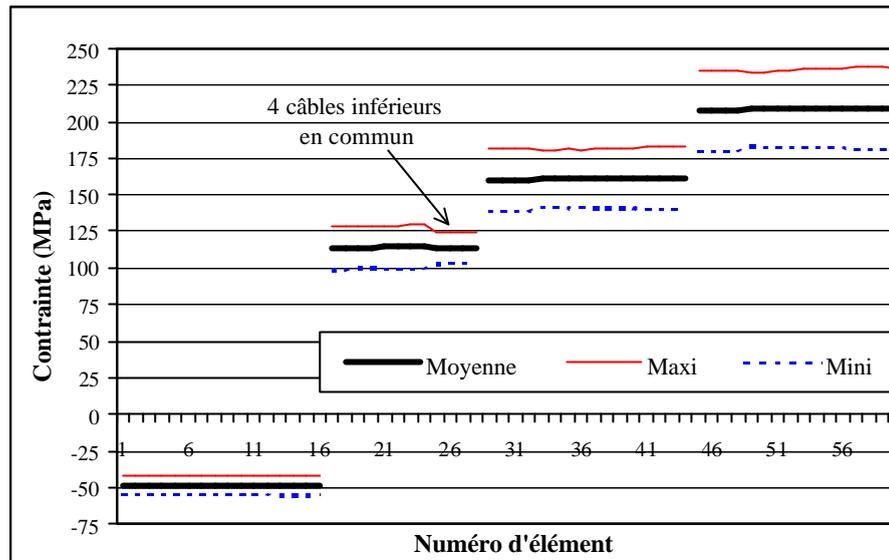


Figure 92 : Visualisation des intervalles caractéristiques dans le cas d'un assemblage plan de quatre demi-cuboctaèdres

Les résultats semblent corrects et prévisibles puisqu'il n'existe que les quatre états d'autocontrainte propres à chaque module.

Lorsque nous poursuivons l'étude sur une grille de grande échelle comportant trente-six modules, il est possible comme dans les cas précédents choisir de répartir l'autocontrainte uniformément au moyen des trente-six états d'autocontrainte propres à chaque modules (Figure 54).

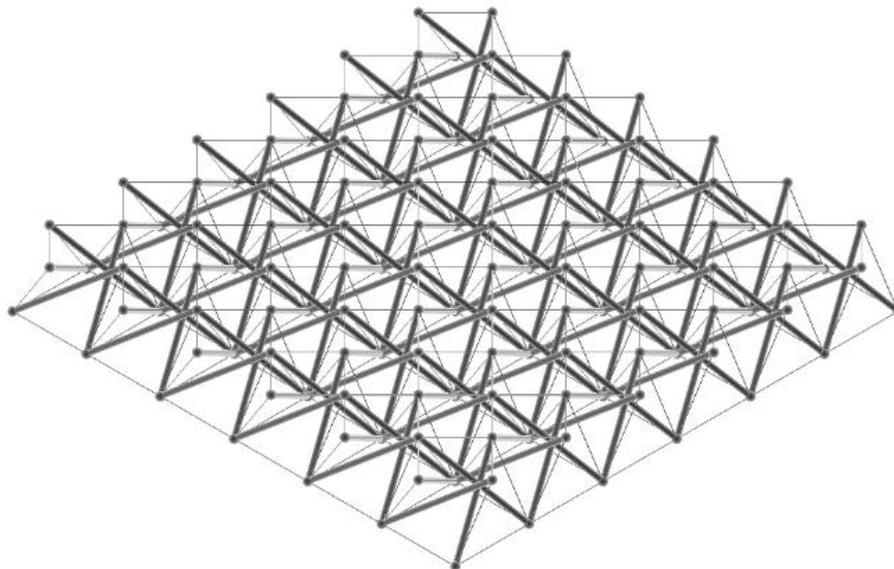


Figure 93 : Exemple de grille à grande échelle

Mais, dans cette structure, il existe en réalité 144 états d'autocontrainte. Les résultats sont alors fortement perturbés (Figure 94).

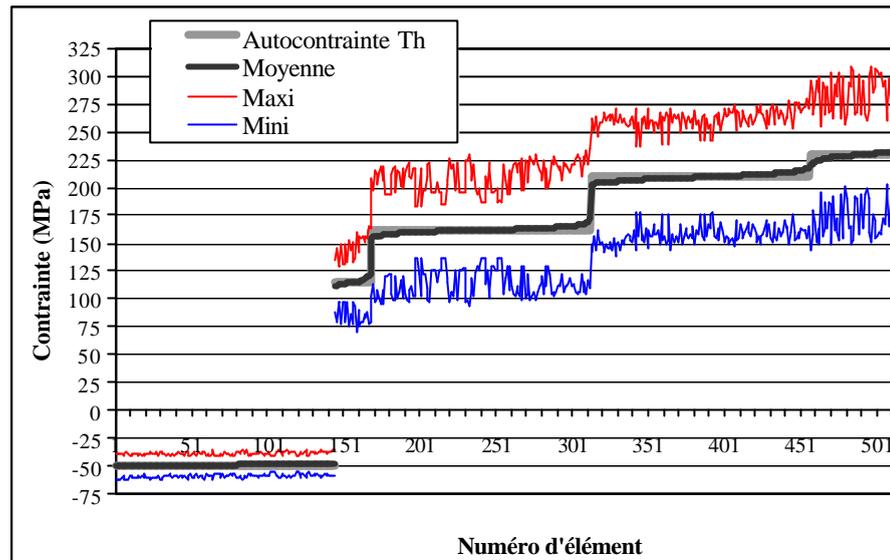


Figure 94 : Visualisation des intervalles caractéristiques pour une grille plane formée de trente-six modules.

La variabilité des tensions devient nettement plus importante. Cela s'explique par l'existence de 144 états d'autocontrainte possibles (à comparer aux trente-six modules).

De plus, les conditions d'appui vont perturber encore plus les tensions : tous ces calculs sont faits en ne supprimant que les six degrés de liberté de l'espace. Plus le nombre de blocages va augmenter, plus les variations vont augmenter (cf. câble isolé § 3.1.1.1).

3.1.3.2 Influence sur le comportement.

Nous avons étendu l'étude au cas précis de la structure dimensionnée au paragraphe 2.2.4. Il faut souligner que pour cette structure, nous n'avons pas doublé la section des câbles communs, cela explique les quatre paliers dans l'état d'autocontrainte des câbles (Figure 94).

Les résultats sont présentés sur la Figure 95. La charge appliquée étant la charge extérieure ELU (200 daN/m²), ils sont à mettre en parallèle avec les deux cas de calcul ELU présentés au paragraphe 2.2.4.3.

Il faut souligner que pour réaliser cinquante simulations d'une telle grille, une quinzaine d'heures de calcul sont nécessaires sur des ordinateurs cadencés à 500 Mhz.

Comme prévu, la fourchette haute nous rapproche de la limite élastique, alors que certaines valeurs caractéristiques basses deviennent négatives. Bien sûr, c'est le calcul des intervalles qui donnent les valeurs négatives, **pas le calcul des simulations**. D'ailleurs, pour ces éléments là, la distribution des valeurs n'est plus Gaussienne. Les intervalles caractéristiques n'ayant donc plus de sens, nous avons réajusté les valeurs sur zéro.

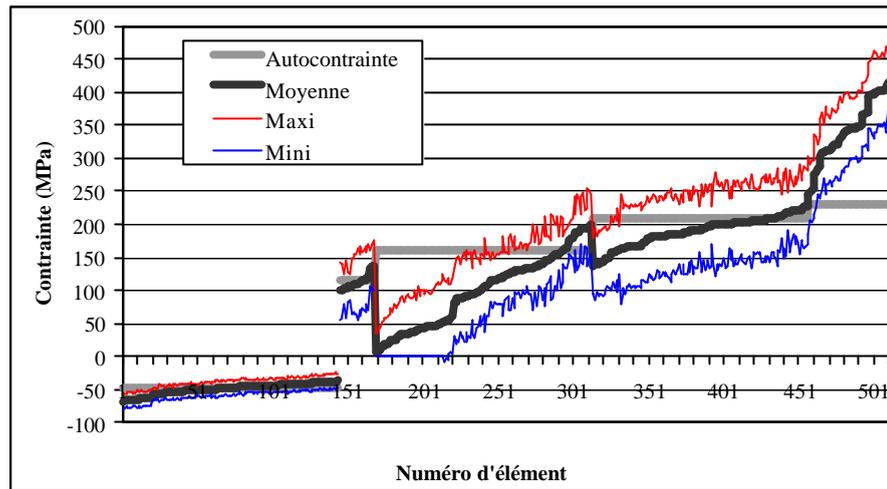


Figure 95 : Visualisation des intervalles caractéristiques pour une grille plane de 36 modules chargée à l'ELU.

Nous pourrions dire que ces résultats corroborent ceux obtenus par les deux combinaisons ELU (Figure 62 et Figure 63). Mais il faut souligner que nous n'avons pris en compte que les imprécisions de fabrication des éléments câbles.

Pour réaliser un calcul précis de la sensibilité, il faudra prendre en compte toutes les autres variables aléatoires liées au processus de conception et de fabrication.

Il est possible alors qu'il faille encore réduire les tolérances de fabrication pour minimiser les variations de tension dans les éléments.

Les résultats sont tout de même encourageants et soulignons que l'étude n'a été menée que sur un type de grille. Il est probable que d'autres types de grille donneront d'autres résultats minimisant la sensibilité. Néanmoins, les techniques et constatations proposées sont générales et sont une base pour l'étude de tout autre structure.

3.1.4 Conclusion

Après cette étude de la sensibilité des systèmes de tenségrité aux tolérances de fabrication des éléments, nous pouvons tirer plusieurs enseignements.

Tous d'abord, cette sensibilité est bien sûr très **dépendante de la précision de fabrication des éléments**. Il est évident que plus cette précision est importante, plus les variations des tensions dans les éléments seront faibles.

De la même façon, il est possible de réduire la sensibilité en choisissant une **autocontrainte forte**. En effet, plus le niveau de tension attendu sera élevé, plus l'allongement des éléments sera important par rapport à la longueur libre. Ainsi les variations de longueur de fabrication seront d'autant plus faibles par rapport à cet allongement.

Pour rendre cet allongement largement supérieur aux tolérances de fabrication, il est possible d'agir soit sur le niveau d'autocontrainte, soit par la conception de structures constituées d'éléments de très grande longueur. La fiabilité des systèmes de tenségrité sera d'autant plus grande qu'ils seront de grande dimension.

L'autre constatation qui a pu être faite concerne la variation de la sensibilité suivant le nombre d'états d'autocontrainte dans la structure : nous avons pu vérifier que lorsque **les états d'autocontrainte** sont « bien » **découplés**, la sensibilité se « reproduit » sur chacun des états d'autocontrainte. La sensibilité d'un assemblage est alors **prévisible**.

Par contre, lorsque ces **états d'autocontrainte sont imbriqués** les uns dans les autres, la **sensibilité est croissante** en raison de l'influence de plusieurs paramètres aléatoires.

Néanmoins, nous avons pu montrer que les systèmes de tensegrité étaient des structures dont nous pourrions assurer la viabilité, quitte à réduire légèrement les tolérances de fabrication. Nous pouvons donc envisager qu'ils soient utilisables pour des applications courantes de Génie Civil.

Mais pour que ce nouveau principe structural puisse être considéré comme satisfaisant, un autre problème doit être traité : c'est celui de la mise en œuvre.

En effet, comme dans toute structure précontrainte, la phase de mise en œuvre de l'autocontrainte est une phase à étudier plus particulièrement. Il faut amener la structure d'un potentiel d'énergie interne nul à un haut niveau de tension dans les éléments. Il faut donc définir la procédure d'installation de cette autocontrainte et, pour des problèmes de sécurité, vérifier la stabilité du système en phase transitoire.

3.2 Simulation de la mise en autocontrainte

Le dimensionnement de la structure étant effectué, il se pose maintenant le problème de la mise en œuvre de la structure. Comment assembler les éléments et surtout, comment les mettre en tension ?

Nous allons proposer une simulation de la mise en tension qui est un prolongement des études qui ont été menées dans les paragraphes précédents. Nous n'exposerons que les idées essentielles liées à la présence des états d'autocontrainte dans la structure. Les procédures exactes de mise en tension devront faire l'objet d'études plus poussées.

3.2.1 Comment agir pour instaurer l'autocontrainte ?

Conceptuellement, la solution la plus simple pour introduire l'autocontrainte est d'agir sur la longueur de chacun des éléments en allongeant les barres et en raccourcissant les câbles.

C'est là une idée qui est directement inspirée de la loi de HOOKE qui régit le comportement local de tous les éléments :

$$\text{Équation 87} \quad T_j = \frac{E_j S_j (l_j - l_j^{\text{lib}})}{l_j^{\text{lib}}}$$

Pour une géométrie autocontrainte donnée, en agissant sur toutes les longueurs libres et en respectant les rapports de tension de l'état d'autocontrainte, le niveau d'autocontrainte général croît.

Bien évidemment, cette solution ne tient plus lorsque le nombre d'éléments devient important.

Un bon compromis permettant de mettre la structure en état d'autocontrainte consiste à n'agir que sur quelques éléments : en les choisissant judicieusement, il est possible de n'en garder qu'un nombre réduit pour la mise en tension de toute la structure.

En effet, connaissant les tensions espérées, les sections et modules de YOUNG des éléments, il est possible, pour une géométrie autocontrainte non chargée, de recalculer la longueur de fabrication de tous les éléments. Elle est donnée par :

$$\text{Équation 88} \quad l_j^{\text{lib}} = \frac{E_j S_j l_j^0}{(T_j + E_j S_j)}$$

Nous allons montrer comment en fabriquant un grand nombre d'éléments avec cette longueur théorique de fabrication et en agissant sur seulement quelques éléments actifs nous pourrions mettre en tension le système.

3.2.1.1 Algorithme de calcul

Pour simuler cette action sur certains éléments du système, nous allons proposer un nouvel algorithme de calcul. Il est directement inspiré de ceux qui ont été présentés aux paragraphes 2.2.1 et 3.1.1.3.

L'idée est de partir d'une géométrie autocontrainte et en agissant sur quelques éléments, de rejoindre une géométrie non autocontrainte permettant un assemblage aisé de la structure. Toute la simulation se faisant avec l'hypothèse de matériaux élastiques, le chemin inverse sera toujours valable.

Dans un premier temps, pour une géométrie autocontrainte, nous pouvons écrire l'équilibre statique du système :

$$\text{Équation 89} \quad [K] \{u\} = \{f\}$$

Dans notre cas, nous n'avons pas encore de charge extérieure appliquée et les appuis sont supposés supprimer seulement les six mouvements solides de l'espace. L'équation se réduit alors à :

$$\text{Équation 90} \quad [K] \{u\} = 0$$

A partir de cette équation d'équilibre, nous pouvons imaginer une modification ponctuelle de la longueur de fabrication d'un câble, comme nous l'avons fait dans le cas de l'introduction des perturbations de longueurs (3.1.1.3). La matrice $[K]$ est donc modifiée en conséquence et les tensions dans les éléments ne sont plus équilibrées au niveau des nœuds.

Il est alors possible à partir de ce déséquilibre de rechercher une nouvelle position géométrique stable. Après quelques itérations, le processus peut converger et donner le nouvel équilibre.

Il faut néanmoins veiller à ne pas trop perturber la matrice $[K]$ car dans le cas de l'acier, les rigidités sont telles, qu'une faible variation de longueur des éléments engendre de forts déséquilibres qui peuvent faire diverger très vite le processus. Il faut donc modifier les longueurs d'éléments par de très petits incréments, de l'ordre du millimètre pour nos structures.

3.2.1.2 Exemple d'application

Prenons l'exemple du quadruplex (Figure 96). Ce module ne possède qu'un état d'autocontrainte, donc chaque élément est essentiel pour la mise en place de l'autocontrainte. Il en résulte que la suppression d'un élément annule l'état d'autocontrainte admissible dans la structure.

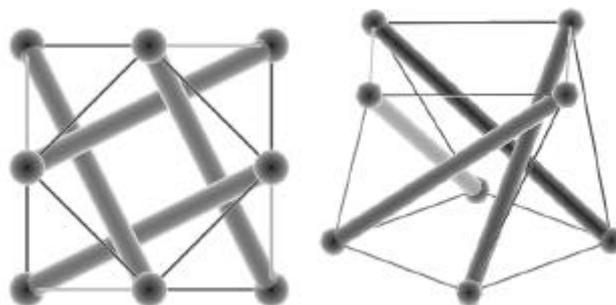


Figure 96 : Le Quadruplex à face supérieure inscrite (demi-cuboctaèdre)

Nous avons donc choisi de modifier la longueur d'un seul élément et de vérifier si cet allongement nous permettait d'atteindre une géométrie non autocontrainte.

Le câble qui servira pour la mise en tension du système est un câble d'entretoisement. Il est relié aux deux nappes de câbles supérieures et inférieures, son efficacité sera donc meilleure.

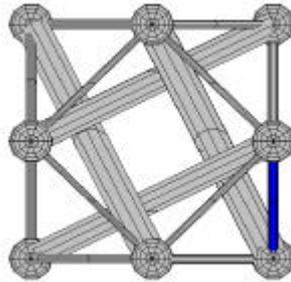


Figure 97: L'élément choisi pour la mise en tension du module

En prenant les caractéristiques mécaniques suivantes pour la structure :

Dimension du module : 1m50 x 1m50 x 1m50

Longueur des barres : 2,25m

Barres : section de 3,25 cm², module de YOUNG de 200 000 MPa

Câbles : section de 0,28 cm², module de YOUNG de 95 000 MPa

Autocontrainte visée : 10 kN dans les barres,

il est possible de calculer les longueurs de fabrication des câbles d'entretoisement, joignant les nappes supérieures et inférieures :

Longueur cible dans la géométrie autocontrainte (l^0) : 1,677m

Longueur de fabrication (l^{ib}) : 1,673m

La variation de longueur ($l^0 - l^{ib}$) est très faible, de l'ordre de 4 mm.

La simulation peut alors commencer par des incréments d'allongement affectés à l'élément actif choisi. Les autres éléments restent à la longueur de découpe théorique de la géométrie autocontrainte. La Figure 98 présente l'évolution de la compression dans une barre en fonction de l'allongement du câble d'entretoisement.

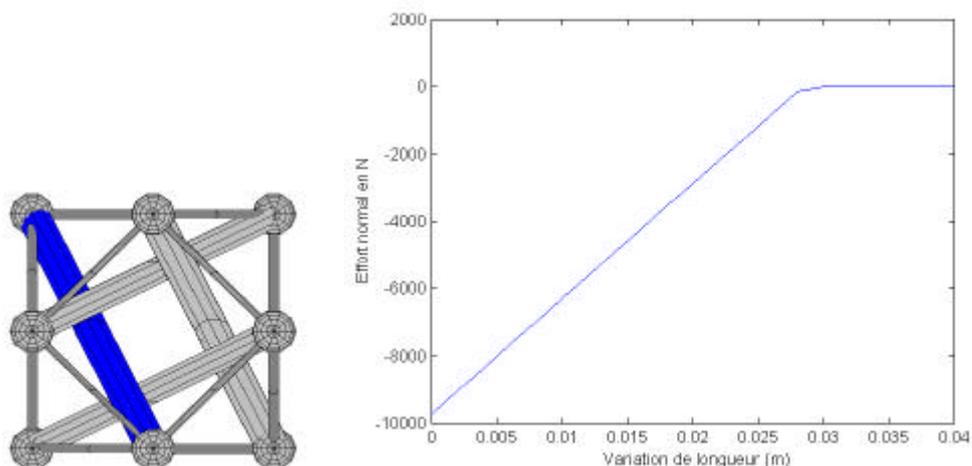


Figure 98 : Variation de la compression dans une barre en fonction de l'allongement du câble d'entretoisement.

Comme dans le cas de la sensibilité, il est intéressant de constater que c'est l'état d'autocontrainte dans son ensemble qui chute. Par contre, il faut un allongement important, 30 mm dans notre cas, pour trouver une tension nulle dans l'ensemble des éléments. Il est très supérieur à la variation de longueur entre la géométrie de fabrication et la géométrie des autres éléments.

En fait, le module passe par des géométries intermédiaires qui ne sont plus celles définies par l'étude théorique. D'ailleurs, la géométrie finale non autocontrainte diffère bien évidemment de la géométrie autocontrainte. Les nœuds se déplacent en effet de l'ordre quelques millimètres. Plus le nœud est proche du câble actif, plus sa position est perturbée.

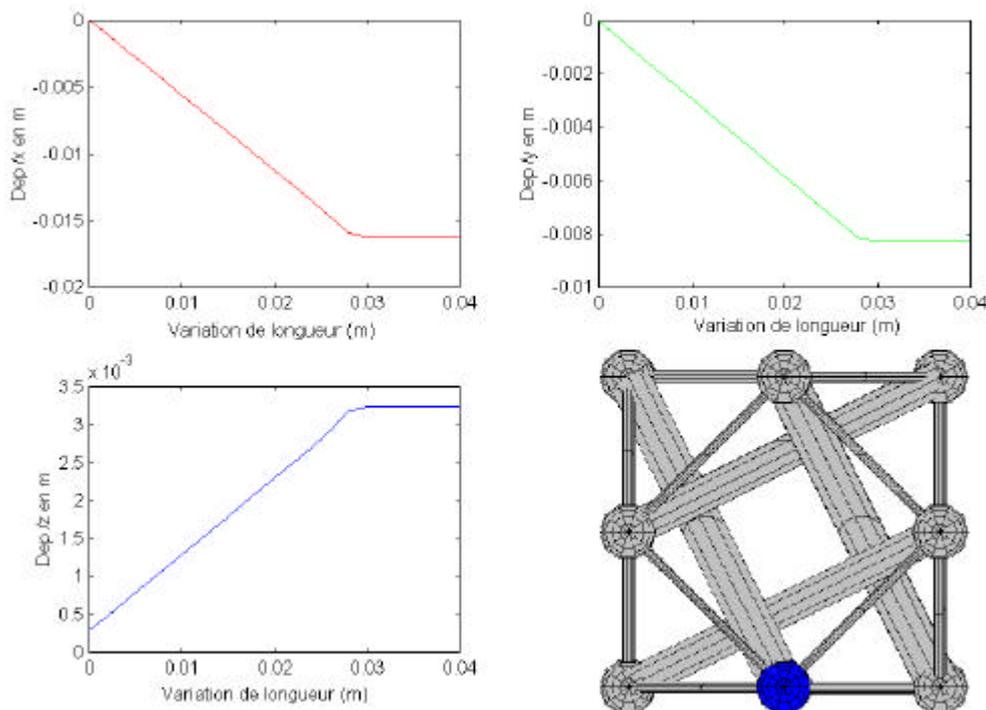


Figure 99 : Déplacement d'un nœud durant l'allongement du câble d'entretoisement.

Il faut également souligner qu'en choisissant d'allonger deux câbles, l'allongement nécessaire pour parvenir à une autocontrainte nulle est moindre. Par exemple avec un deuxième câble d'entretoisement actif, symétrique du premier, l'action des deux câbles se combinent et 20 mm d'allongement sont suffisants.

Pour finir, notons tout chemin étant réversible en élasticité linéaire il est toujours possible de suivre le chemin inverse.

Nous avons donc défini un mode de mise en tension pour un module simple qui, à partir d'une position non autocontrainte de montage, permet d'atteindre la géométrie autocontrainte en agissant sur un seul élément.

Nous pouvons maintenant nous intéresser aux assemblages de modules.

3.2.2 Mise en évidence d'impossibilités

Le problème se complique notablement lorsque les structures sont plus complexes et possèdent un nombre d'états d'autocontrainte supérieur.

Par exemple dans le cas de trois quadruplex, il existe 4 états d'autocontrainte.

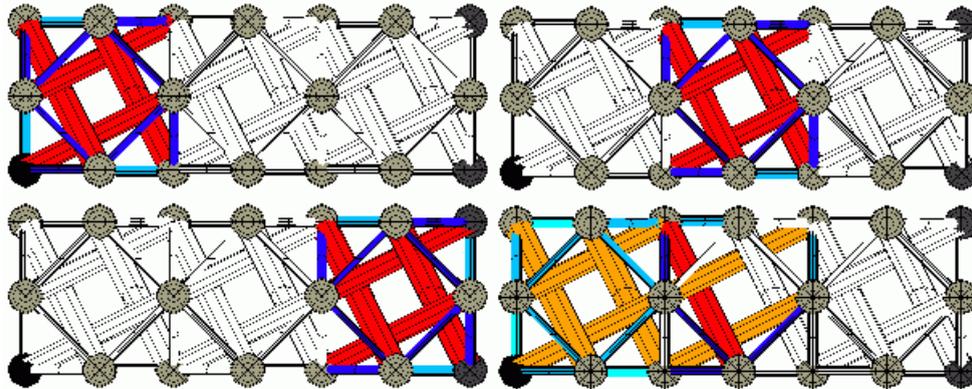


Figure 100 : Une base possible des états d'autocontrainte dans le cas d'un assemblage de trois demi-cuboctaèdres.

Si le concepteur choisit d'instaurer dans la structure un état d'autocontrainte qui ne serait la somme que des trois premiers, il obtient un état d'autocontrainte uniforme dans la structure :

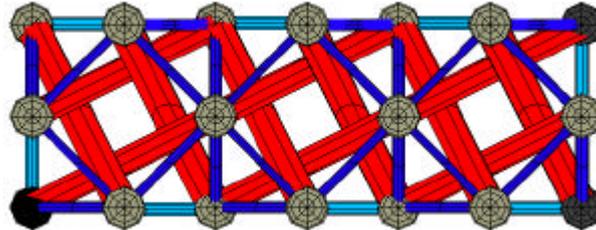


Figure 101 : Un état d'autocontrainte uniforme

Compte tenu de la combinaison d'état d'autocontrainte choisie, nous pourrions penser que trois câbles tenseurs pris selon la Figure 102 suffiront pour la mise en tension.

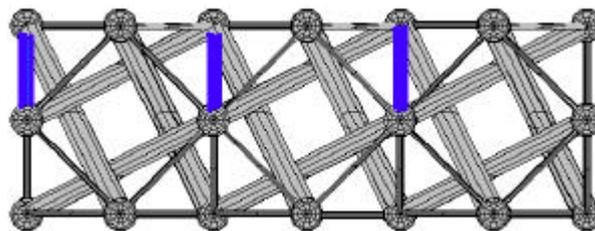


Figure 102 : Premier choix de câbles actifs.

En fait la simulation de relâchement de ces câbles, ne donne pas au final d'autocontrainte nulle. Quel que soit l'allongement de ces câbles, la solution donne invariablement une géométrie intermédiaire **autocontrainte** dans laquelle ces câbles actifs ne servent pas.

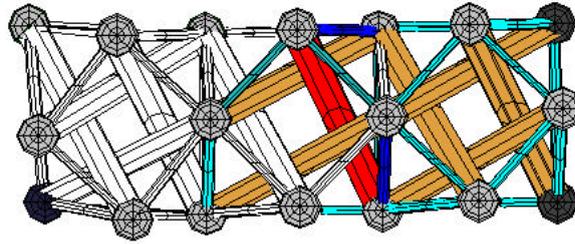


Figure 103 : Après relâchement des câbles, il reste un état d'autocontrainte résiduel

Cet état d'autocontrainte est en effet une combinaison des quatre états théoriques recensés plus haut. Il peut être visualisé de manière plus claire sur la Figure 104. Les différences de tons dans les couleurs s'expliquent par le fait que l'un est représenté en tensions et l'autre en coefficients d'autocontrainte.

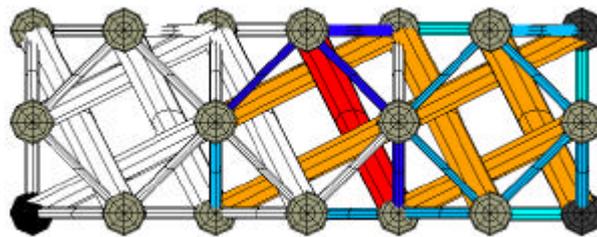


Figure 104 : L'état d'autocontrainte résiduel retrouvé à partir du relâchement des câbles de la Figure 102.

Bien qu'une partie de la structure ne soit plus autocontrainte (avec apparition probable de mécanismes finis), cet état subsiste lors du relâchement des câbles.

Pour détendre correctement la structure, il faut agir sur trois autres câbles :

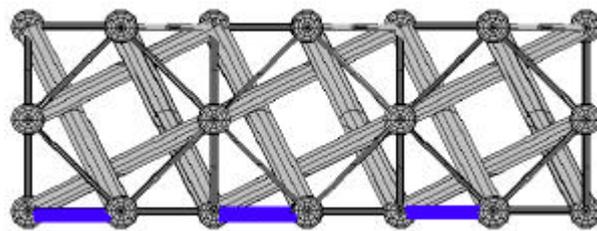


Figure 105 : Deuxième choix de câbles actifs permettant une mise en tension.

Dans ce cas, la simulation donne bien une géométrie à autocontrainte nulle, mais il faut aller très loin dans le relâchement des câbles : de l'ordre de 6,5 cm pour supprimer l'état d'autocontrainte précédemment illustré. Cet allongement est supérieur à celui qui avait été trouvé pour le module isolé. Il serait donc judicieux d'augmenter le nombre de câbles tenseurs.

Ce petit exemple pose bien évidemment le problème du choix des câbles. Il faut éviter le style de déconvenue qui est survenue avec les trois premiers câbles choisis, sous peine de ne pas pouvoir monter la structure.

Nous allons donc proposer dans le paragraphe qui suit une méthode permettant de choisir judicieusement les câbles. C'est là un problème fondamental pour assurer la faisabilité de tels systèmes.

3.2.3 Le choix des câbles

Nous allons voir dans un premier temps qu'un nombre de câbles actifs égal au nombre d'états d'autocontrainte est forcément suffisant, puis nous montrerons comment vérifier qu'un nombre de câble inférieur à s peut être valable.

3.2.3.1 Un nombre suffisant de câbles : s

L'idée qui permet de choisir les câbles est dérivée du tri des états d'autocontrainte.

Lorsque la matrice des états d'autocontrainte a été diagonalisée lors de l'étude des états d'autocontrainte, nous avons obtenu une matrice de la forme suivante :

$$\text{Équation 91} \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ q_{s+1}^1 & \dots & q_{s+1}^i & \dots & q_{s+1}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_j^1 & \dots & q_j^i & \dots & q_j^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_c^1 & \dots & q_c^i & \dots & q_c^s \\ q_{c+1}^1 & \dots & q_{c+1}^i & \dots & q_{c+1}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_b^1 & \dots & q_b^i & \dots & q_b^s \end{bmatrix}$$

Chaque vecteur étant linéairement indépendant, nous pouvons dire que si nous annulons les s états d'autocontrainte diagonalisés, alors le système ne sera plus autocontraint.

Or, en raison de la diagonalisation, chacun des vecteurs dépend d'un élément (sur la diagonale) qui ne joue aucun rôle dans les autres vecteurs.

En choisissant d'allonger ces s éléments, nous parviendrons donc à annuler l'autocontrainte de chacun des vecteurs correspondant.

Nous avons défini ainsi **qualitativement et quantitativement un nombre suffisant d'éléments** permettant d'annuler l'autocontrainte dans la structure.

Bien sûr cette étude n'est que théorique et doit être confirmée par des simulations. Il faut vérifier en outre que les géométries intermédiaires sont stables et **ne font pas apparaître d'autres états d'autocontrainte liés à la modification de la géométrie.**

3.2.3.2 Cas du nombre de câbles actifs inférieur à s

Dans le cas des trois demi-cuboctaèdres, nous avons vu que seulement trois câbles suffisaient pour la mise en tension du système alors qu'il existe quatre états d'autocontraintes linéairement indépendants. Comment est-il possible d'expliquer cela d'un point de vue théorique ?

Pour démontrer que ces trois câbles sont suffisants nous invitons le lecteur à se reporter à l'Annexe J. Dans cette Annexe, nous avons procédé à la diagonalisation selon le schéma de l'Équation 91 mais en utilisant les deux triplets de câbles donnant des résultats différents.

Dans le premier cas (qui correspond à une impossibilité), la diagonalisation à partir des câbles 23, 34 et 45 donne un quatrième vecteur d'autocontrainte conforme. Si les trois premiers sont annulés par l'allongement des câbles actifs, le quatrième, lui, n'est pas influencé par ces câbles. Il peut donc rester présent dans la structure.

Par contre, pour le deuxième cas de diagonalisation, le quatrième état d'autocontrainte n'est pas conforme (câble 45 comprimé). Il ne constitue donc pas un état d'autocontrainte résiduel acceptable.

Cette petite démonstration sur un cas très simple nous conduit à définir un autre critère pour la mise en tension des éléments. Nous avons montré qu'un nombre s de câbles actifs était suffisant pour la mise en état d'autocontrainte.

Nous pouvons maintenant donner un **critère permettant de vérifier qu'un nombre de câbles inférieur à s est tout aussi acceptable.**

Il suffit pour cela de diagonaliser la matrice à partir des câbles actifs choisis. Le problème peut s'écrire de la manière suivante (Équation 92).

$$\text{Équation 92} \quad [S] = \begin{bmatrix} q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 & q_1^4 \\ q_2^1 & q_2^2 & q_2^3 & q_2^4 \\ q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 & q_3^4 \\ q_4^1 & q_1^4 & q_1^4 & q_1^4 \\ q_5^1 & q_1^4 & q_1^4 & q_1^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_b^1 & q_b^2 & q_b^3 & q_b^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{CABLES} \\ \text{ACTIFS} \\ \text{CHOISIS} \end{bmatrix}$$

A partir de cette matrice des états d'autocontrainte, nous effectuons un échelonnement. Deux sous-matrices sont alors obtenues à vecteurs linéairement indépendants (Équation 93).

La première sous matrice (PARTIE 1) est totalement dépendante des câbles actifs choisis pour la mise en tension. Si ces câbles sont supprimés, les trois états d'autocontrainte n'existent plus. Il est donc logique de supposer que l'allongement des câbles va mettre à zéro ces états d'autocontrainte.

Par contre, dans la deuxième sous matrice (PARTIE 2), les câbles actifs n'ont aucun rôle. Il se peut donc qu'il existe dans ces vecteurs d'autocontrainte une combinaison linéaire donnant un vecteur d'autocontrainte conforme. Dans ce cas là, les câbles actifs risquent de ne plus être suffisants.

$$\text{Équation 93} \quad [S] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_5^1 & q_5^2 & q_5^3 \\ q_6^1 & q_6^2 & q_6^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ q_b^1 & q_b^2 & q_b^3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ q_5^4 \\ q_5^4 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ q_b^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\ \text{PARTIE} & & \text{PARTIE} \\ 1 & & 2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons donc définir une condition suffisante : ***Les câbles actifs seront suffisants pour la mise en tension du système si la partie 2 ne contient pas d'état d'autocontrainte conforme.***

Cette méthode permet certes de vérifier a posteriori un choix de câbles. Mais comment faire ce choix a priori ?

Cela ne peut se faire qu'avec une bonne connaissance de la structure et des états d'autocontrainte. En effet, d'un point de vue pratique (et même de coût), il faut rendre actifs un minimum de câbles, mais du point de vue mécanique, il faut qu'ils concernent un maximum d'états d'autocontrainte. Une bonne identification des états d'autocontrainte est donc essentielle.

C'est pourquoi dans le cas de structures possédant un grand nombre d'états d'autocontrainte, il est parfois nécessaire de travailler sur des modèles de taille inférieure, pour lesquels s serait moindre. Cela peut donner les grandes lignes d'une méthode pour la mise en tension de structures plus complexes.

En outre, le problème de la détermination du nombre minimal de câbles pouvant suffire à la mise en tension du système reste à résoudre.

De plus, les longueurs de fabrication sont calculées à partir d'une géométrie autocontrainte exacte. Mais il faut se poser la question de l'influence des tolérances de fabrication dans le processus de montage, c'est à dire réaliser une **étude de la sensibilité de la géométrie non autocontrainte résultant du relâchement des câbles.**

3.2.4 Mise en tension et sensibilité aux imprécisions de fabrication

Pour simuler l'effet de la sensibilité dans la mise en tension du système, nous allons prendre les deux cas précédemment étudiés et, à partir de la position d'équilibre à autocontrainte nulle déterminée, nous allons perturber les longueurs de fabrication. Nous verrons ainsi comment la structure réagit et si cela peut créer des instabilités.

3.2.4.1 Cas d'un demi-cuboctaèdre

Nous avons vu que l'allongement d'un câble d'entretoisement pour que la structure revienne à une valeur d'autocontrainte nulle était de 30 mm.

A partir la géométrie non autocontrainte ainsi déterminée, nous avons donc perturbé les longueurs de fabrication des éléments, avec des réalisations comprises à 95 % dans un intervalle de [-1mm, +1mm].

Comme dans le cas de l'étude de la sensibilité, les simulations forment un échantillon, mais nous ne pouvons dans ce cas définir d'intervalle caractéristique : comme les tensions ne peuvent être négatives dans les câbles, la répartition de l'échantillon n'est pas Gaussienne. Nous présenterons donc directement les résultats des simulations.

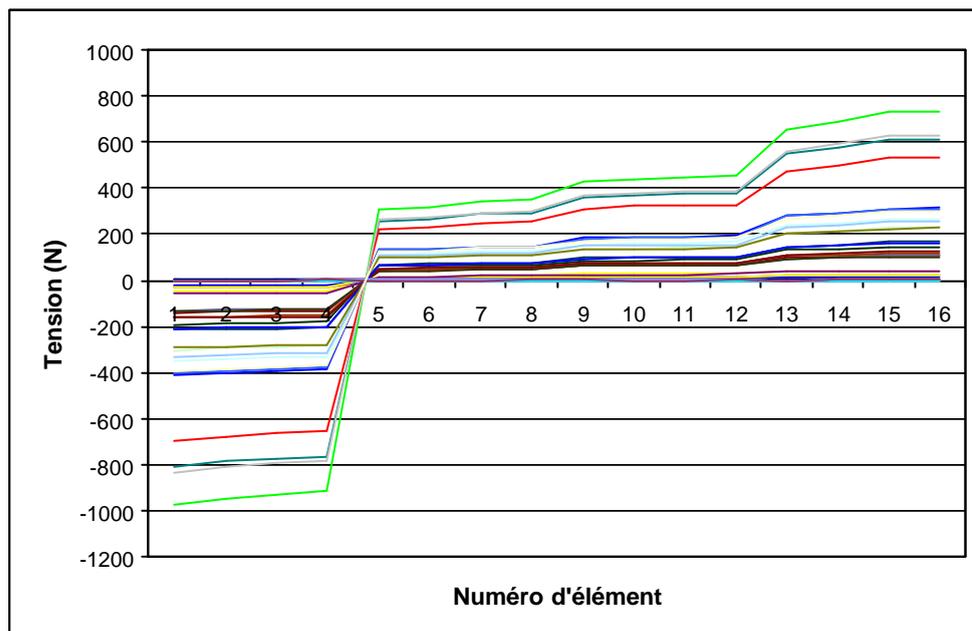


Figure 106 : Différentes simulations de perturbation de longueur des éléments pour une géométrie non autocontrainte – Cas du demi-cuboctaèdre

Nous constatons que les résultats peuvent être différents mais qu'ils sont très proches de la valeur nulle, comparativement à l'autocontrainte entrée dans la structure (10000 N dans les barres).

La perturbation des longueurs a pu, sur quelques simulations, maintenir un faible niveau d'autocontrainte. En fait, en allongeant légèrement le câble actif, l'autocontrainte résiduelle retombe à zéro. Dans notre cas, un surplus d'allongement de l'ordre de 3 millimètres est suffisant pour avoir 100 % des simulations à des valeurs nulles.

D'un autre côté, un allongement de seulement 2,6 cm peut pour certaines simulations (5 sur une centaine) suffire à détendre le système.

Ces variations sont normales et dans l'ordre de grandeur de celles que nous avons obtenues dans le chapitre sur la sensibilité.

Le cas le plus intéressant à traiter est, bien sûr, celui de l'assemblage des trois demi-cuboctaèdres où nous avons vu que le quatrième état d'autocontrainte pouvait accroître la sensibilité et créer des problèmes pour la mise en tension.

3.2.4.2 Cas d'un assemblage de trois demi-cuboctaèdres

L'allongement nécessaire des câbles définis à la Figure 105 était de 6,50 cm. Dans ce cas aussi, nous perturbons les longueurs de fabrication des câbles de [-1mm, +1mm] dans la géométrie non autocontrainte prédéterminée.

Nous présentons le résultat de quelques simulations sur la Figure 107.

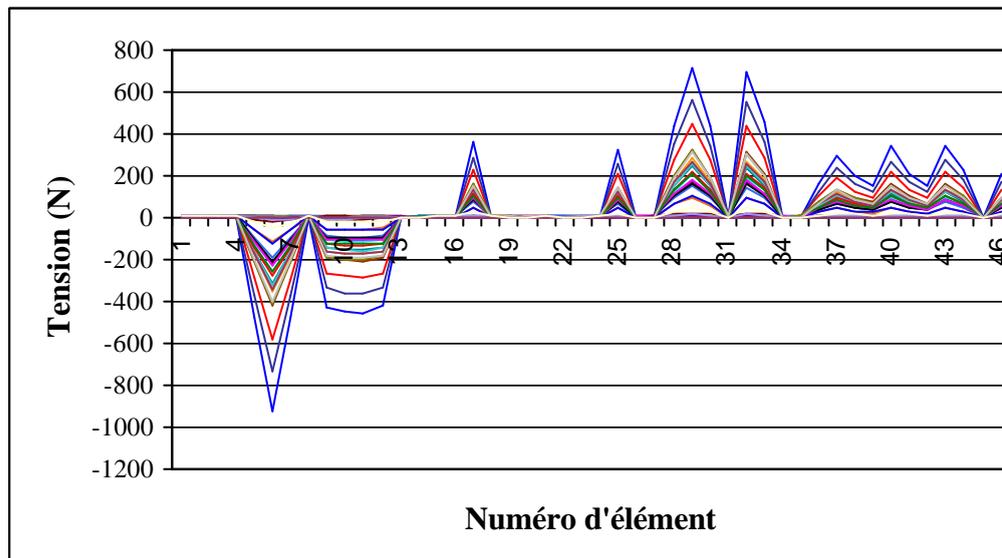


Figure 107 : Quelques simulations de perturbation de longueur des éléments pour une géométrie non autocontrainte de trois demi-cuboctaèdres

Les simulations obtenues sont assez semblables à celles observées sur le demi-cuboctaèdre isolé. Quelques unes donnent des niveaux d'autocontrainte non nuls.

Là aussi, en choisissant de pousser un peu plus loin l'allongement des câbles (7 cm au lieu de 6,5) nous constatons que 95 % des simulations sont à zéro. A l'opposé, un allongement de 5,8 cm peut suffire pour certaines simulations, à détendre le système.

Il n'y a donc pas de désordre important dû à la présence d'un quatrième état d'autocontrainte dans la structure. Les constatations sont les mêmes que celles faites pour le demi-cuboctaèdre isolé.

3.2.4.3 Conclusion sur sensibilité et mise en tension

L'étude de la sensibilité dans le processus de mise en tension n'a pas mis en évidence de problème majeur. Simplement, par rapport à l'étude théorique, les valeurs d'allongement calculées ne sont pas suffisantes pour certaines simulations.

Il suffit alors d'augmenter de l'ordre de 10 % cet allongement pour rejoindre une géométrie à autocontrainte nulle.

3.2.5 Conclusion sur la mise en autocontrainte

Pour la mise en tension des systèmes de tenségrité, nous avons pu montrer qu'il était possible de rejoindre à partir d'une géométrie autocontrainte une géométrie non autocontrainte permettant un assemblage aisé du système.

Travaillant en élasticité linéaire, cela peut définir une procédure de mise en tension.

Néanmoins, ne pouvant agir sur tous les éléments d'une structure, nous avons fourni une **méthode permettant de choisir un nombre de câbles égal au nombre d'états d'autocontrainte et qui suffiront à la mise en tension de tout système.**

Le choix d'un nombre de câbles actifs inférieur est possible mais cela suppose de choisir judicieusement ces éléments pour ne pas rejoindre des états d'autocontraintes qui ne seraient pas souhaités. Seule la connaissance de tous les états d'autocontrainte conformes de la structure (cf. paragraphe 2.1.5) peut permettre de faire un tel choix. Nous l'avons vu dans le cas d'un assemblage de trois demi-cuboctaèdres.

Nous avons exposé une méthode numérique permettant de **vérifier que les câbles choisis sont suffisants**. Mais seule l'expérience peut permettre au concepteur de choisir, a priori, et de façon judicieuse ces câbles actifs.

Finalement, par cette partie «Etude de la sensibilité et de la mise en tension», nous avons donné les premiers éléments assurant la fiabilité (moyennant une réduction des tolérances de fabrication) et la faisabilité des systèmes de tenségrité. Nous pouvons donc envisager très prochainement des réalisations concrètes appliquées au Génie Civil.

CONCLUSION

CONCLUSION

De nombreuses études ont été menées à ce jour sur les systèmes de tenségrité.

La recherche de forme étant une technique bien maîtrisée et la stabilité mécanique des systèmes de tenségrité pouvant être assurée, il s'avérait néanmoins nécessaire d'aller plus loin dans la **qualification des états d'autocontrainte**.

Nous avons proposé diverses méthodes permettant aux futurs concepteurs de choisir entre la détermination de **quelques vecteurs** compatibles avec la rigidité unilatérale des câbles ou la détermination de **l'ensemble des états d'autocontrainte conformes**. La deuxième possibilité est à préférer dans un but d'optimisation de l'autocontrainte dans la structure.

Par la suite, l'influence de l'autocontrainte dans la structure a été quantifiée pour permettre le **dimensionnement d'une structure de grande taille** apte à équilibrer des actions climatiques réglementaires. Cela nous a permis de mettre en évidence les insuffisances de l'Eurocode 3 pour ce qui concerne les systèmes de tenségrité.

N'ayant pas à notre disposition de coefficients partiels de sécurité adéquats pour l'autocontrainte, nous nous sommes attachés à évaluer la **sensibilité** des systèmes de tenségrité aux tolérances de fabrication des éléments. C'est là un préalable à l'étude de la fiabilité de ces structures. En outre, nous avons pu mettre en évidence le **rôle** joué par les **états d'autocontrainte** dans la **redistribution des efforts** dans la structure.

Enfin, dans un but de réalisation pratique, nous nous sommes intéressés à la mise en œuvre de l'autocontrainte. Pour des cas simples, nous avons montré qu'il était possible de rejoindre une géométrie d'équilibre à autocontrainte nulle à partir d'une géométrie autocontrainte, en agissant sur quelques câbles seulement. Une **méthode numérique** a été présentée pour le choix des **câbles actifs**.

Toutes ces avancées vont nous permettre la réalisation, à très court terme, d'une structure de tenségrité de taille conséquente. Elle devrait permettre de valider la modélisation et les résultats obtenus.

Néanmoins, les études sur les systèmes de tenségrité ne sauraient s'arrêter à ce stade. En raison de leurs spécificités, de nombreuses pistes restent à explorer.

D'un point de vue **mécanique**, nous avons fourni des méthodes pour la détermination de l'ensemble des états conformes, mais il reste à *optimiser la répartition de l'autocontrainte* dans les structures. En fonction des charges appliquées, il doit être possible d'adapter l'autocontrainte et ainsi, améliorer le gain de poids par rapport à d'autres structures.

La validation des coefficients partiels de sécurité doit aussi faire l'objet d'études. Pour cela, la réalisation de prototypes doit permettre de valider les hypothèses. Cela devrait permettre de pousser plus loin l'étude de la fiabilité des systèmes de tenségrité. En outre, *l'influence de la relaxation des câbles doit être quantifiée*.

Pour finir, il faut souligner que si nous avons montré, pour des cas simples, la possibilité de montage dans une géométrie voisine non autocontrainte, cela reste à vérifier dans des cas concrets et plus complexes. De plus, il faudra définir des *protocoles de montage* pour ces structures : une action simultanée sur tous les câbles tenseurs étant peu vraisemblable, il faudra indiquer dans quel ordre agir pour établir l'autocontrainte.

Mais il existe **d'autres axes de recherche** car les potentialités des systèmes de tenségrité n'ont sûrement pas toutes été mises en évidence...

D'abord, au niveau de la génération de forme, nous nous sommes restreints à des assemblages de modules simples permettant d'engendrer des surfaces planes ou à simple courbure, mais l'étude de nouveaux types de systèmes de tenségrité doit permettre d'aller plus loin pour leur **adaptation à des surfaces quelconques**.

Leur **aptitude au pliage** et au **contrôle dynamique** sont également des atouts non négligeables. Les avancées réalisées dans la qualification des états d'autocontrainte doivent permettre d'aller encore plus loin dans ces axes d'étude.

Enfin, l'association de différents matériaux est envisageables : composites, membranes... Des **systèmes hybrides** sont à inventer dans ce domaine avec, à traiter, tous les problèmes sous-jacents liés aux interfaces.

La source de sujets de recherche que constituent les systèmes de tenségrité est donc loin d'être tarie...

ANNEXES

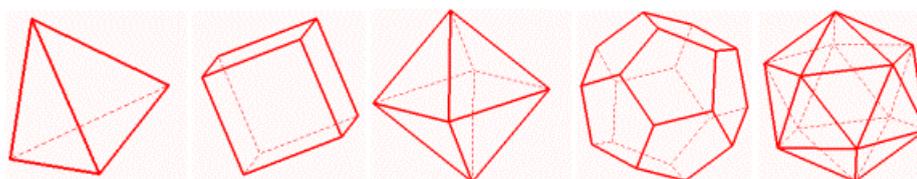
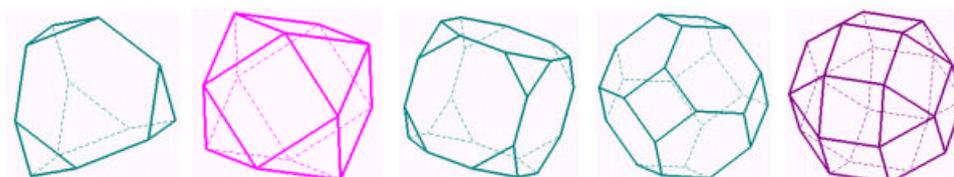
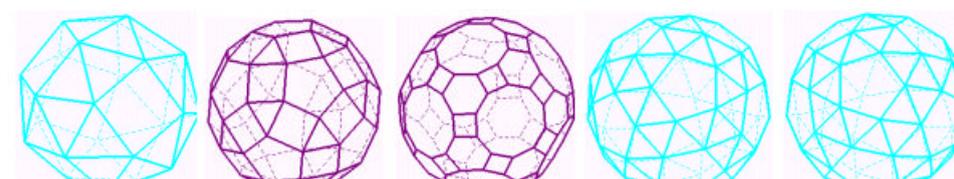
Annexe A

Génération de quelques polyèdres à partir de modules de tensegrité

1) Les polyèdres

Les polyèdres sont très nombreux et nous ne pouvons en faire une étude exhaustive.

Nous nous limiterons à la présentation des polyèdres réguliers et archimédiens (ou semi-réguliers). Leurs noms sont donnés ci-dessous mais devant leur complexité, nous utiliserons de préférence les numéros qui y sont attachés.

*P1**P2**P3**P4**P5**P6**P7**P8**P9**P10**P11**P12**P13**P14**P15**P16**P17**P18**P19**P20*

P1 : Tétraèdre
P5 : Icosaèdre

P2 : Cube
P6 : Tétraèdre tronqué

P3 : Octaèdre
P7 : Cuboctaèdre

P4 : Dodécaèdre
P8 : Cube tronqué

P9 : Octaèdre tronqué
P11 : Grand Rhombicuboctaèdre
P13 : Dodécaèdre tronqué
P15 : Cube adouci gauche
P17 : Petit Rhombicosidodécaèdre
P19 : Dodécaèdre adouci gauche

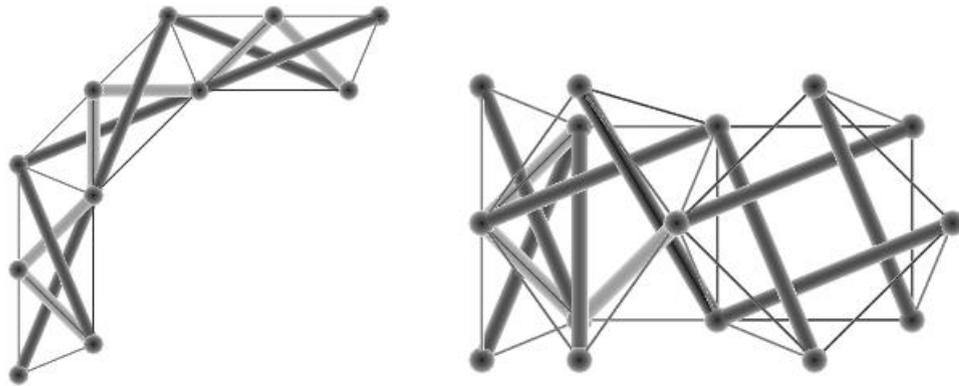
P10 : Petit Rhombicuboctaèdre
P12 : Icosidodécaèdre
P14 : Icosaèdre tronqué
P16 : Cube adouci droit
P18 : Grand Rhombicosidodécaèdre
P20 : Dodécaèdre adouci droit

2) La génération

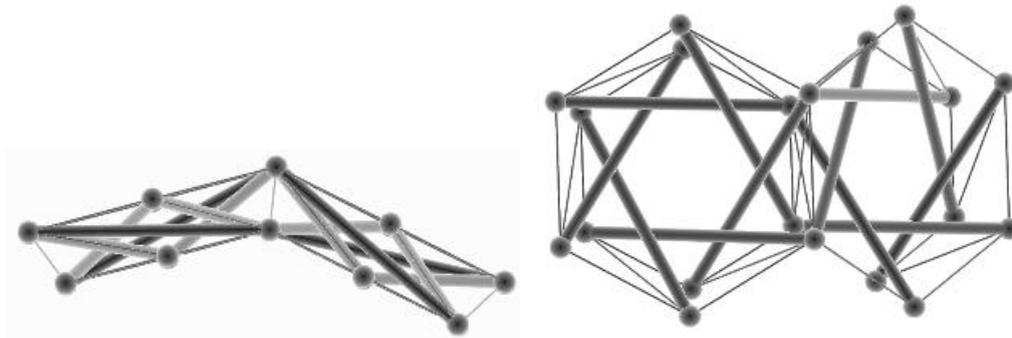
Nous allons montrer comment générer des systèmes de tensegrité associés à ces polyèdres, dans les cas très simples où nous pouvons utiliser des modules prismatiques tels que le quadruplex ou le module hexagonal.

Ces modules vont pouvoir être utilisés pour générer les polyèdres possédant des faces carrées ou hexagonales contiguës. C'est le cas des polyèdres P2, P6, P7, P9, P10 et P14.

En fait les modules vont être assemblés de manière à former deux polyèdres : un intérieur correspondant aux nappes de câbles inférieures des modules, un extérieur correspondant aux nappes supérieures. L'assemblage se fait en créant deux nappes de câbles qui définissent deux polyèdres concentriques. La hauteur du module peut être adaptée à souhait suivant la distance désirée entre ces deux nappes.



Assemblage de 3 quadruplex



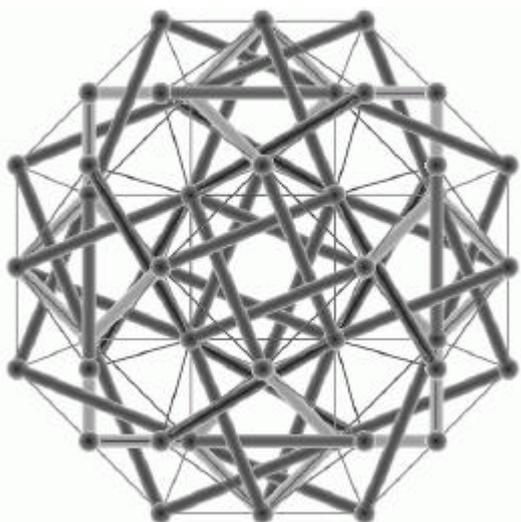
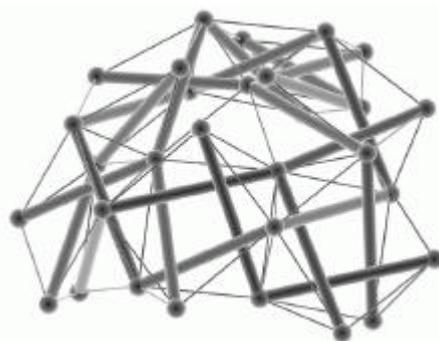
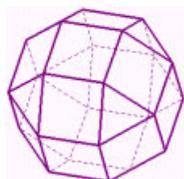
Assemblage de 2 modules hexagonaux

3) Quelques exemples

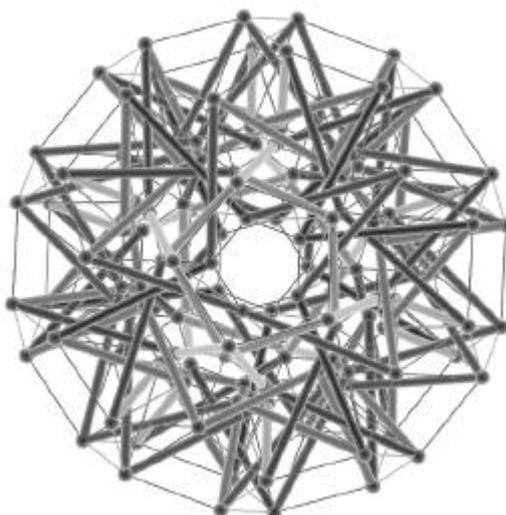
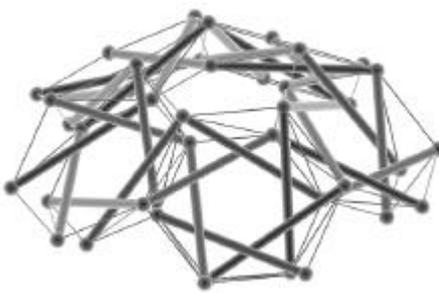
Nous présentons en détail la génération des polyèdres P10 et P14.

Il faut noter que seuls les carrés et les hexagones servent à l'assemblage des modules de tensegrité, les autres polygones (triangles pour le P10 et hexagone pour le P14) ne sont pas comblés.

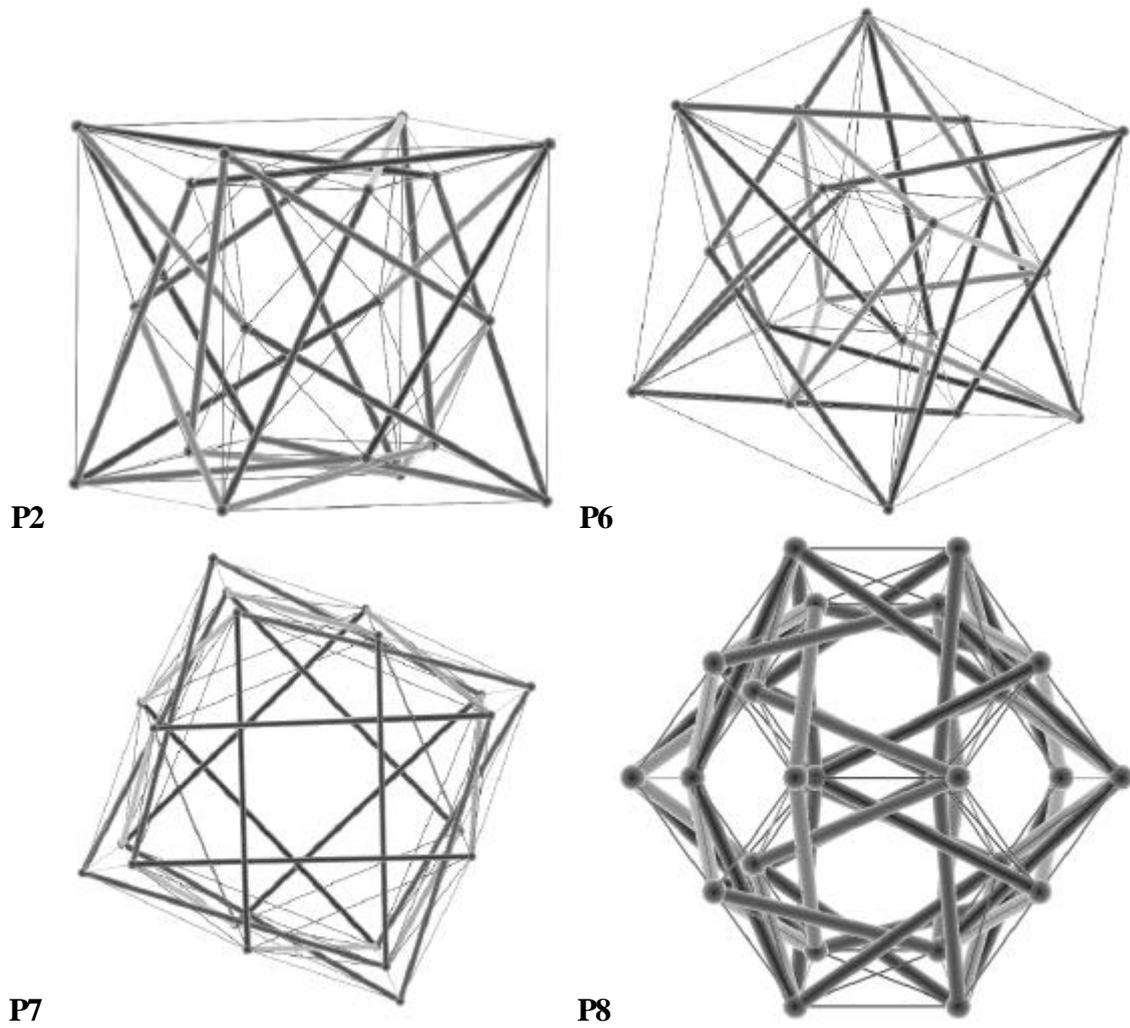
P10



P14



et d'autres polyèdres ...



Les possibilités sont donc nombreuses pour créer des systèmes de tensegrité de forme polyédrique. Néanmoins, la difficulté de montage de telles structures (nombre accru d'éléments, entrecroisements...) risque d'être un frein à leur développement.

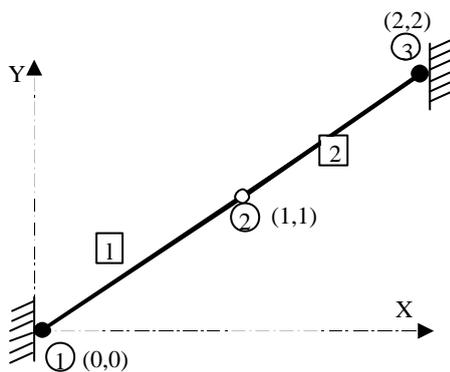
Annexe B

Problème de la détermination du noyau de la matrice d'équilibre [A]

Un logiciel peut donner des résultats très différents suivant la précision d'entrée des coordonnées des nœuds.

- **Un cas concret :**

CAS PUREMENT THEORIQUE



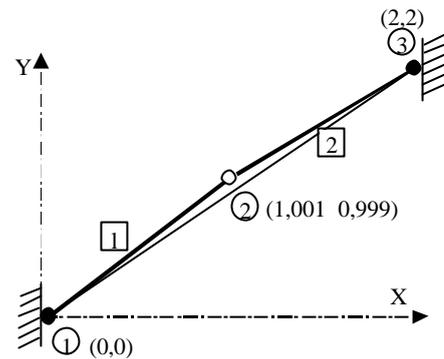
$$[A] = \frac{2x}{2y} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

➤ **Calcul théorique pur du noyau de la matrice :**

$$\det([A]) = 1^2 - 1^2 = 0$$

Le déterminant étant nul, *le logiciel peut déterminer le noyau de la matrice.*

CAS REEL



$$[A] = \frac{2x}{2y} \begin{bmatrix} 1,001 & -0,999 \\ 0,999 & -1,001 \end{bmatrix}$$

➤ **Calcul théorique pur du noyau de la matrice :**

$$\det([A]) = -1,001^2 + 0,999^2 = -0,004$$

Le déterminant étant non nul, *le logiciel ne trouve pas de noyau à [A]*

Le problème rencontré est lié au fait que compte tenu de la précision d'entrée des mesures, le déterminant n'est calculé qu'avec une certaine précision.

Cette précision peut se calculer, étant donné l'expression du déterminant, elle est de l'ordre de :

$n \cdot n! \frac{\Delta a}{a}$ où Δa est la précision d'entrée des coordonnées et n le nombre correspondant au minimum du nombre de lignes et de colonne.

Dans notre cas, nous trouvons une valeur numérique de $4 \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1}$ c'est à dire $8 \cdot 10^{-3}$. Un calcul en dessous de cette valeur n'est donc pas significatif.

Remarque : MATLAB 4 permettait de faire le calcul en réglant la précision de ce calcul. Il était alors possible d'éviter ce problème de conditionnement en affectant la valeur epsilon à partir de laquelle le logiciel considérait une valeur nulle.

Mais il est tout aussi envisageable de tomber dans le cas inverse. Par exemple, si la géométrie est réellement irrégulière comme dans le cas deux, un calcul de déterminant qui se ferait avec une précision de 10^{-2} donnerait un état d'autocontrainte alors qu'il n'existe pas.

Une solution pour gérer au mieux ce problème de précision est d'utiliser la méthode de la matrice augmentée.

➤ **Calcul par la méthode de la matrice augmentée [CAL86]**

Le calcul du noyau d'une matrice peut se faire à partir de la matrice augmentée $[A^t | I]$ (VAS 97, Annexe E)

$$\left[A^t | I \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1,001 & 0,999 & 1 & 0 \\ -0,999 & -1,001 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

On échelonne alors les lignes de la matrice $[A]^t$.

$$\left[\tilde{A}^t | \tilde{I} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1,001 & 0,999 & 1 & 0 \\ 0 & -4e-3 & 0,998 & 1 \end{array} \right]$$

A partir de ce résultat, on peut considérer que tout ce qui est en dessous de 10^{-3} est nul (la précision d'entrée de la géométrie), auquel cas, il n'y a pas d'état d'autocontrainte. Autre solution, on considère que tout ce qui est inférieur à 10^{-2} est nul (un ordre supérieur à la précision des coordonnées) et dans ce cas, on extrait un état d'autocontrainte.

$$\left[\tilde{A}^t | \tilde{I} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1,001 & 0,999 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{0,998}} & \underline{\underline{1}} \end{array} \right]$$

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0,998 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La précision de l'état d'autocontrainte laisse à désirer (nous devrions avoir $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) mais compte tenu de la précision des coordonnées, nous ne pourrions pas avoir de meilleur résultat dans l'échelonnement.

Une solution pour améliorer le résultat est de travailler sur $[S]$ et arrondir au niveau de la précision du calcul (ici 10^{-2}) auquel cas on obtient bien $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- **Conclusion**

Le concepteur a tout intérêt à utiliser la méthode de la matrice augmentée pour maîtriser au mieux le calcul du noyau de la matrice. Bien sûr, il ne faut pas trop augmenter l'épsilon pour lequel une valeur sera prise nulle, sinon on peut créer de nouveaux états d'autocontrainte.

De toute façon, il vaut mieux créer des états d'autocontrainte faux, qu'en oublier. Lors du calcul du comportement, des états d'autocontraintes erronés donneront des instabilités sous charge nulle et seront donc aisément repérables.

Annexe C

Construction du tableau du simplexe et résolution du problème

La condition de recherche d'un état d'autocontrainte conforme mettant l'ensemble du système en état d'autocontrainte peut s'écrire à partir de la matrice [S'] (cf. Problème 4).

$$y_j = \sum_{i=1}^s q_j^i \alpha_i - \varepsilon \geq 0$$

avec $j=1\dots b$ et $\varepsilon > 0$

Il est alors possible de construire un tableau traduisant ces conditions [BRO72] :

	$-\alpha_1$...	$-\alpha_i$...	$-\alpha_s$	1
y_1	$-q_j^1$...	$-q_j^i$...	$-q_j^s$	$-\varepsilon$
...
y_j	$-q_j^1$...	$-q_j^i$...	$-q_j^s$	$-\varepsilon$
...
y_b	$-q_j^1$...	$-q_j^i$...	$-q_j^s$	$-\varepsilon$

La solution du problème est recherchée à partir de ce tableau en permutant les lignes et les colonnes jusqu'à ce que pour toutes les lignes correspondant à un y_j , le terme de la dernière colonne soit positif.

Dans ce cas, en prenant les termes correspondant à chaque colonne à zéro, et en affectant aux termes de chaque ligne la valeur en regard sur la dernière colonne du tableau la solution est trouvée. Tous les termes y_j étant positifs ou nuls, la solution trouvée est correcte puisque si $\{q^j\}$ est le vecteur solution recherché $q_j^j = y_j + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

Les règles de permutation de JORDAN ou de 'JORDAN modifié' permettent de d'effectuer les permutations entre des variables affectées sur les lignes et celles affectées sur une colonne.

Règle de permutation :

(b_j^i est le terme du tableau sur la ligne j et la colonne i)

- L'élément pivot b_r^k est remplacé par 1
- Les autres termes de la ligne r sont inchangés
- Les autres termes de la colonne k changent de signe
- les autres termes valent $b_j'^i = b_j^i \cdot b_r^k - b_r^i \cdot b_j^k$
- l'ensemble du tableau est divisé par b_r^k non nul

Le choix du pivot lui-même se fait par les règles suivantes :

Choix du pivot :

- ✓ On choisit une ligne j dont le terme de dernière colonne est négatif
- ✓ Si tous les coefficients de cette ligne sont positifs ou nuls, pas de solution.
- ✓ Sinon, on choisit l'un des coefficient b_j^k négatif. Cela définit le colonne pivot k .
- ✓ La ligne pivot est la ligne r pour laquelle on obtient la plus petite valeur positive des rapports b_j/b_j^k ($j=1 \dots b$, b étant le nombre de lignes du tableau)

Interprétation de la permutation

La permutation consiste à intervertir le rôle d'un terme par rapport à un autre. Par exemple, pour une ligne y_j qui s'écrit :

$$y_j = -b_j^1 \alpha_1 - b_j^2 \alpha_2 - \dots - b_j^s \alpha_s - b_j$$

En permutant la variable y_j avec α_1 , nous obtenons une nouvelle expression de la ligne qui est la suivante :

$$\alpha_1 = (1/b_j^1) \cdot (-y_j - b_j^2 \alpha_2 - \dots - b_j^s \alpha_s - b_j)$$

Cela explique la règle de permutation pour la ligne permutée.

Il est possible de démontrer tout aussi simplement les autres règles de la permutation [LAP 96].

Interprétation géométrique du choix du pivot (inspirée de [BRO72])

Soit le tableau du simplexe suivant :

	$-y_1$...	$-y_k$...	$-y_s$	1
a_l	b_l^1	...	b_l^k	...	b_l^s	b_l
...
a_s	b_s^1	...	b_s^k	...	b_s^s	b_s
y_{s+1}	b_{s+1}^1	...	b_{s+1}^k	...	b_{s+1}^s	b_{s+1}
...
y_r	b_r^1	...	b_r^k	...	b_r^s	b_r
...
y_b	b_b^1	...	b_b^k	...	b_b^s	b_b

La première partie du tableau dans laquelle les lignes sont occupées par les α_i a été permutée au départ puis est ignorée puisque ces variables ne sont pas signées. Ce sont les termes b_{s+1} à b_c qui doivent être tous positifs ou nuls pour que le tableau corresponde à une solution.

Faisons l'hypothèse que l'un des b_j est négatif, il est noté b_u dans la suite, avec $u > s$.
Le point M ($y_1=y_2=\dots=y_s=0$) se trouve à l'intersection des s plans $y_i=0$, $i=1..s$.

Si $b_u < 0$, alors le plan $y_u=0$ est situé entre le point M et le domaine admissible Ω .

On cherchera alors à passer du sommet M à un sommet voisin N , en suivant l'une quelconque des arêtes aboutissant au sommet M de façon à se rapprocher de Ω , donc de $y_u=0$.

La Figure C-1 illustre cette configuration dans le plan ($s=2$).

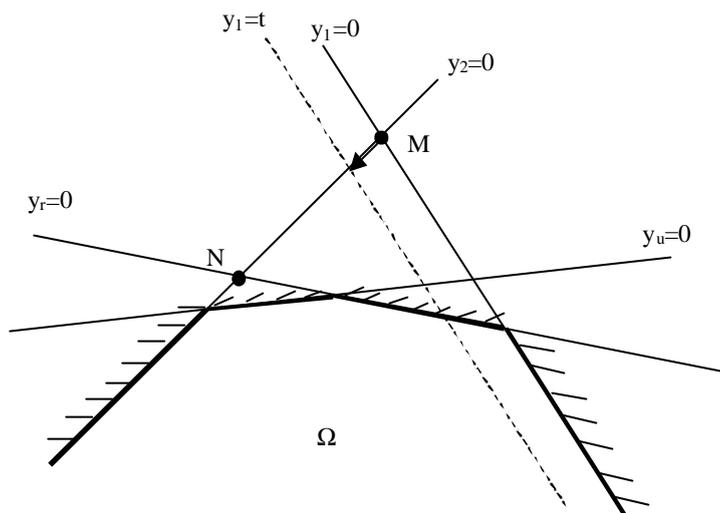


Figure C-1 : Illustration du choix du pivot dans la méthode du simplexe

L'équation d'une arête s'écrit :

$$\text{Equation C-1} \quad y_1=y_2=\dots=y_{k-1}=y_{k+1}=\dots=y_s=0 \quad \text{et} \quad y_k=t$$

Remarque : dans le cas de la Figure C-1, $k=1$ et $s=2$.

Pour rester dans le demi-espace positif, il faut que t soit supérieur ou égal à zéro.
Or, d'après le tableau du simplexe, nous avons la relation :

$$\text{Equation C-2} \quad y_u = -b_u^k t + b_u$$

Pour se rapprocher du plan $y_u=0$ qui nous sépare du domaine admissible, il faut que la distance du point N à ce plan diminue, c'est à dire :

$$\text{Equation C-3} \quad \left| -b_u^k t + b_u \right| < \left| b_u \right|$$

b_u étant négatif et t positif, l'inégalité précédente sera vérifiée si b_u^k est négatif. Cela définit la colonne pivot k .

En augmentant t , la distance au plan $y_k=0$ augmente, jusqu'à rencontrer un nouveau plan $y_j=0$ (avec $j > s$), c'est à dire :

Équation C-4 $0 = -b_j^k t + b_j \Rightarrow t = \frac{b_j}{b_j^k} \text{ avec } t > 0$

On rencontre le premier plan j lorsque t prend sa plus petite valeur non nulle. Il correspond à une ligne r qui sera prise comme ligne de permutation.

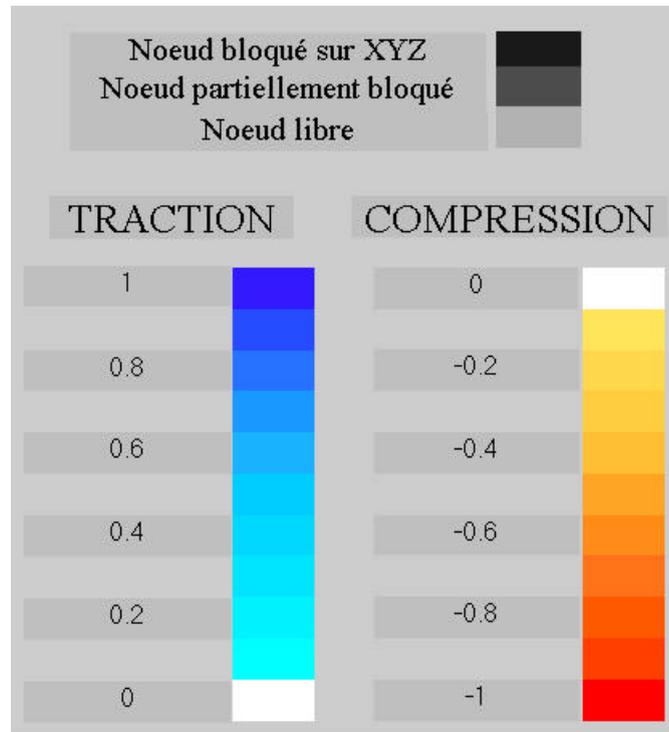
Cette analogie géométrique permet de justifier le choix du pivot.

Après un nombre fini d'étapes, on doit converger vers la frontière du domaine admissible [GAS58].

Des problèmes peuvent voir le jour lors de cette recherche, notamment des problèmes de cyclage qui font que les itérations se poursuivent à l'infini, mais des méthodes ont été proposées [LAP96] pour éviter ce phénomène.

Annexe D

Code des couleurs pour les figures **(en tensions ou coefficients d'autocontrainte)**



Les couleurs sont calculées par rapport au maximum de la sollicitation de traction ou compression.

Ces maxima étant différents en valeur absolue, il faut se référencer au maximum pour les deux types de sollicitation.

Annexe E

Stratégie de parcours du domaine admissible

Simplification du problème

Il est possible d'apporter des simplifications immédiates au problème, après diagonalisation de la matrice :

- toutes les lignes à coefficients strictement positifs peuvent être supprimées. La condition de positivité sera toujours vérifiée pour ces éléments là, compte tenu de la condition de positivité sur les α_i .
- toutes les lignes identiques à un facteur multiplicatif près non nul peuvent être réduites à une seule condition : si l'une des conditions est vérifiée, les autres le seront aussi.

Adaptation de la méthode du simplexe au problème posé

Nous avons vu qu'il existait C_{s-1}^c tableaux du simplexe possibles à partir du tableau de base du simplexe obtenu après échelonnement de la matrice $[S']$.

Il est alors de la forme suivante :

	$-Y$...	$-\alpha_i$...	$-\alpha_s$	1
q_{s+1}	b_{s+1}^1	...	b_{s+1}^1	...	b_{s+1}^s	b_{s+1}
...
q_j	b_j^1	...	b_j^1	...	b_j^s	b_j
...
q_c	b_c^1	...	b_c^1	...	b_c^s	b_c
α_1	b_{c+1}^1	...	b_{c+1}^1	...	b_{c+1}^s	b_{c+1}

Tableau E-1 : Tableau du simplexe à la première étape

La méthode du simplexe nous fournit une stratégie pour rejoindre le contour du domaine admissible (Annexe C). Or, dans le cas d'une recherche systématique de l'ensemble des états d'autocontrainte admissibles, c'est tout le domaine qu'il faut parcourir.

Il n'est pas envisageable de réaliser toutes les combinaisons possibles, surtout pour les structures à grand nombre d'éléments et d'états d'autocontrainte.

Pour notre problème, nous allons donc adopter une stratégie nouvelle qui, une fois sur le domaine admissible, va permettre de parcourir toutes les arêtes.

Le parcours du domaine se fera de manière arborescente en ne stockant que le vecteur $\{\alpha\}$:

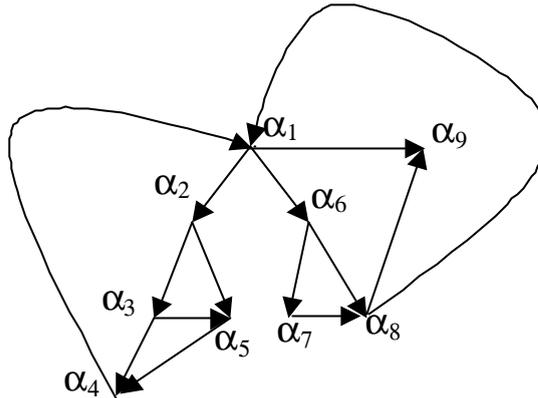


Figure E-1 : Illustration du parcours arborescent du domaine

Nous nous arrêtons dans l'arborescence lorsqu'un vecteur solution $\{\alpha\}$ est déjà connu.

Le processus va donc se décomposer en deux parties, dans un premier temps il faut rejoindre le contour du domaine puis il est parcouru par un nombre fini de permutations.

Pour rejoindre le contour...

La méthode pour rejoindre le contour est exactement celle utilisée dans la méthode du simplexe. Le point de départ est celui donné par la première permutation qui a permuté la variable Y avec α_1 et nous a amené au point A_1 pour lequel $\{\alpha\} = \{1, 0, \dots, 0\}^t$.

On se rapproche de Ω en calculant pour chaque colonne i les rapports b_j/b_j^i . On ne garde qu'une seule colonne i où le $\min_j \frac{b_j}{b_j^i} > 0$ concerne un b_j négatif.

Si une ligne est telle que $b_j < 0$ et $b_j^i \geq 0$ quelque soit i , il n'y a pas de solution.
Si $b_j = 0$ et $b_j^i > 0$, quelque soit i , un seul état d'autocontrainte est compatible.

Au bout d'un nombre fini de permutations, le contour est atteint.

Pour parcourir le contour...

On adopte la stratégie arborescente qui consiste à calculer, pour chaque colonne i du tableau, les pivots possibles tels que :

- $\min_j \frac{b_j}{b_j^i} > 0$
- On ne sort pas du contour
- On ne retombe pas sur un point déjà obtenu

Application et algorithme

Pour effectuer l'exploration du contour de Ω , il faut tout d'abord stocker les vecteurs $\{\alpha\}$ pour chaque point trouvé. Ils donneront les différents états d'autocontrainte compatibles avec le comportement unilatéral des câbles.

Nous les stockons sous forme de matrice (Equation E-1)

Équation E-1 Solutions =
$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots \\ \mathbf{a}_2 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \mathbf{a}_s & \dots \end{bmatrix}$$

Partant d'un tableau donné quelconque, les valeurs des α_i sont données par la règle suivante : si α_i se situe sur une colonne $\alpha_i=0$ sinon $\alpha_i=b_i$.

	Y	...	α	...	q	l
q	b_{s+1}^1	...	b_{s+1}^i	...	b_{s+1}^s	b_{s+1}
...
α	b_j^1	...	b_j^i	...	b_j^s	b_j
...
α	b_c^1	...	b_c^i	...	b_c^s	b_c
q	b_{c+1}^1	...	b_{c+1}^i	...	b_{c+1}^s	b_{c+1}

Tableau E-2 : Tableau du simplexe à une étape quelconque

L'avantage de cette méthode est qu'elle évite de faire plusieurs fois la même permutation car si des éléments jouent un même rôle, ils définissent les mêmes hyper-plans limites et donnent la même valeur lorsqu'on calcule $\min_j \frac{b_j}{b_j^i} > 0$.

Une seule permutation peut donc suffire pour un grand nombre de permutations possibles. Le gain de temps va être considérable au niveau du calcul.

D'autre part, il faut également tenir compte des points tels que $b_j/b_j^i=0$ car ils peuvent donner un point de vue différent de la structure pour le parcours des arêtes.

Par exemple, si sur un sommet quatre arêtes aboutissent (sommet 1, 2 ou 3 de la figure suivante) et si le nombre d'états d'autocontrainte dans la structure est égal à quatre, seulement trois éléments ($s-1$) sont mis à zéro par les colonnes du tableau. Le quatrième zéro est donné par une ligne sur laquelle $b_j=0$.

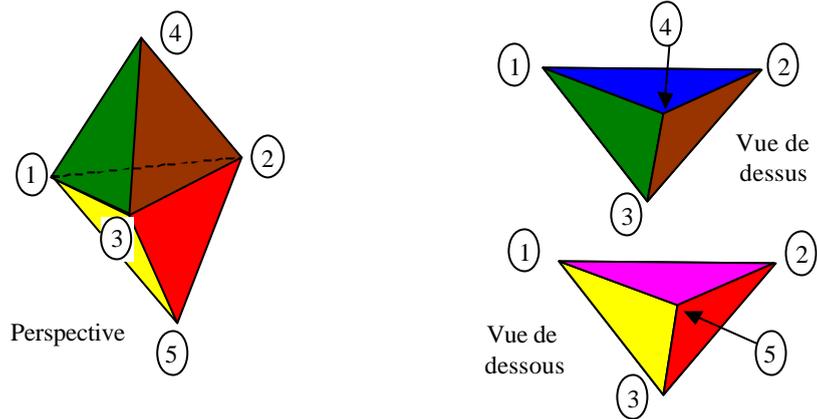


Figure E-2 : « Polyèdre de conformité » pour lequel certains sommets sont rejoints par quatre arêtes.

Or, la méthode de choix du pivot, nous donne seulement **les trois arêtes de parcours qui correspondent aux trois colonnes du tableau** parmi **les quatre possibles**.

Cela veut dire que pour utiliser la quatrième arête, il faudra permuter la ligne comportant le quatrième zéro avec l'une des colonnes du tableau.

Toutes ces règles font que, finalement, au bout d'un nombre fini d'itérations, tous les sommets du domaine admissible seront parcourus.

Nous avons pu vérifier sur des exemples concrets la cohérence des résultats.

Le concepteur aura alors tous les états d'autocontrainte conformes pour établir un choix en vue de la mise en tension du système.

Annexe F

Comparaison des résultats TENSEGRITE 2000 – ABAQUS

Cas étudié : nous comparons les résultats obtenus pour un octaèdre expansé, soumis à une charge de -4000 N sur chaque nœud supérieur (Figure 45) et pour une autocontrainte correspondant à l'autocontrainte n°3 de la Figure 46.

Nous comparons **les contraintes dans les éléments** (en MPa) et **le déplacement maximal obtenu sur un nœud chargé** (en m).

Numéro d'élément	TENSEGRITE 2000	ABAQUS	Ecart (%)
1	-82,6	-82,5	0,07
2	-82,6	-82,5	0,07
3	-82,6	-82,5	0,07
4	-82,6	-82,5	0,14
5	-82,6	-82,5	0,15
6	-82,6	-82,5	0,14
7	367,6	366,8	0,21
8	366,5	366,8	-0,09
9	367,0	366,8	0,06
10	372,1	371,3	0,22
11	372,2	371,3	0,23
12	262,9	262,3	0,23
13	262,9	262,3	0,23
14	372,1	371,3	0,22
15	465,0	465,1	-0,03
16	262,9	262,4	0,20
17	465,0	465,1	-0,01
18	263,6	262,4	0,45
19	464,9	465,1	-0,03
20	465,1	465,1	-0,01
21	263,6	262,4	0,45
22	465,1	465,1	-0,01
23	464,9	465,1	-0,04
24	263,6	262,4	0,45
25	371,7	371,3	0,10
26	371,6	371,3	0,09
27	371,6	371,3	0,08
28	367,5	366,9	0,17
29	367,5	366,8	0,19
30	367,5	366,8	0,19

	TENSEGRITE 2000	ABAQUS	Ecart (%)
Déplacement vertical du nœud 12	-0,03078	-0,03076	0,19

Les résultats de la comparaison sont très satisfaisants.

Annexe G

Calcul de la charge limite de flambement pour une barre (selon EC3)

Le dimensionnement aux ELS nous a donné des sections de barres de 4,14 cm². Cette section a été choisie dans un catalogue de produits sidérurgiques qui donne également l'inertie quadratique de la section droite (10,7 cm²) et la nuance d'acier (fe 235).

A partir de ces caractéristiques et de la longueur de la barre (2m03), l'Eurocode 3 permet de calculer la résistance au flambement réglementaire d'une barre aux ELU.

Cette résistance est donnée par la formule : $N_{b,Rd} = c b_A f_y / g_{M1}$

$$\text{avec } c = \frac{1}{\Phi + [\Phi^2 - \bar{I}^2]^{0.5}}$$

où

$$\Phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

a est le facteur d'imperfection lié au processus de fabrication (nous prendrons $a = 0,21$)

$$\bar{I} = \left(\frac{I}{I_1} \right) \times [b_A]^{0.5}$$

$I = \frac{l}{i}$ avec l = longueur de flambement (ici la longueur de la barre)

i est le rayon de giration (=1,608 cm pour les barres choisies)

$$\lambda_1 = 93,9 \times \sqrt{\frac{235}{f_y}} \quad (f_y = 235 \text{ MPa} \Rightarrow \lambda_1 = 93,9)$$

$$b_A = 1$$

$$\gamma_{M1} = 1,1$$

Application Numérique

$$\lambda = 2,03/0,01608 = 126$$

$$\bar{\lambda} = 1,34$$

$$\Phi = 1,52$$

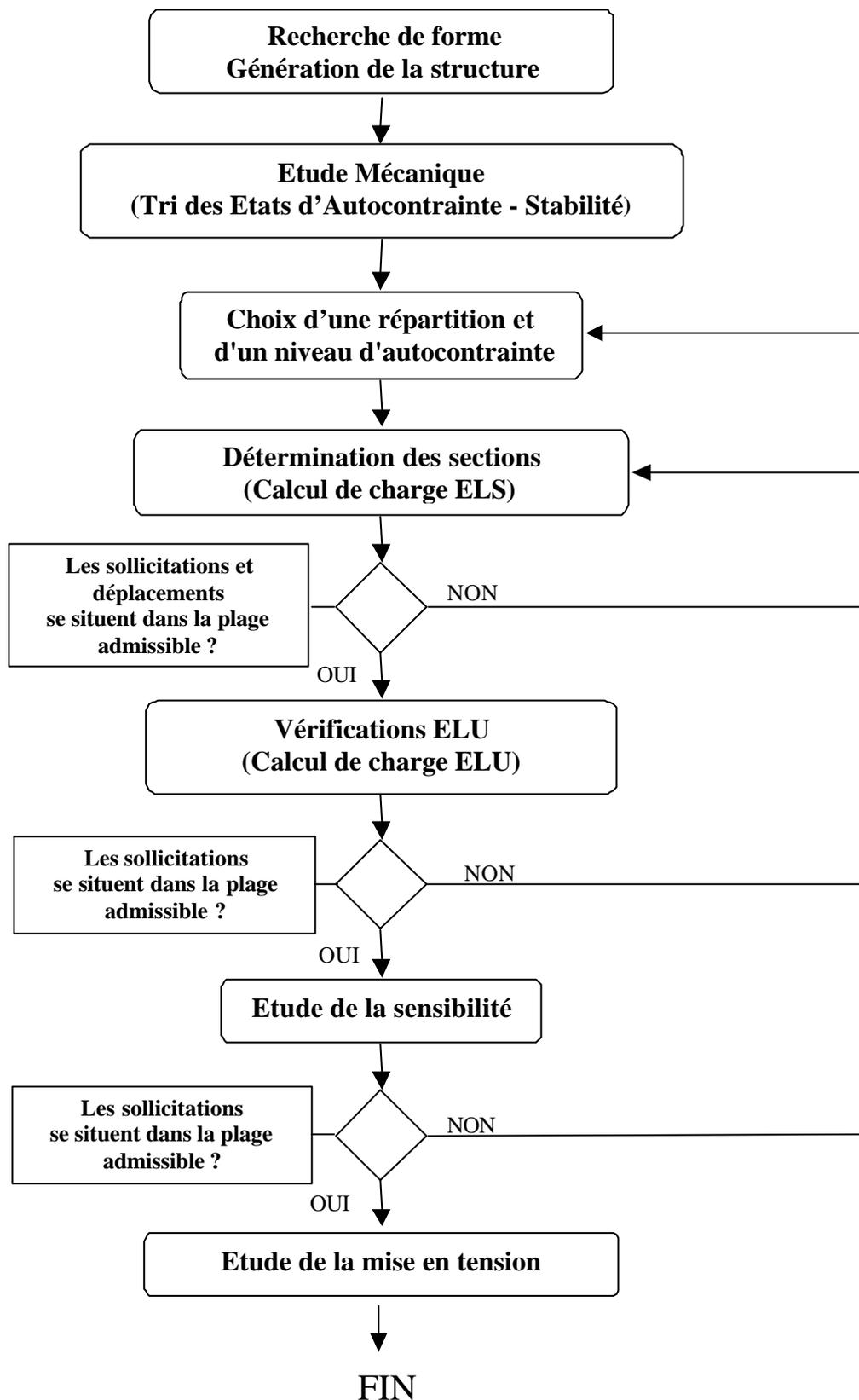
$$\chi = 0,45$$

d'où :

$$$N_{b,Rd} = 39400 \text{ N}$$$

A titre indicatif, cet effort normal correspond à une contrainte de 95 MPa.

Annexe H

Organigramme pour le dimensionnement de systèmes de tenségrité

Annexe I

Détermination d'une valeur caractéristique dans le cas de la recherche d'un minimum

On recherche X_k tel que :

$$P(X > X_k) = P(U > \frac{X_k - \mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{X_k - \mu}{\sigma}) = 1 - k$$

Ce qui nous conduit à :

$$X_k = \mu + u_{1-k} \sigma$$

De façon identique à ce qui est énoncé dans le chapitre 5.1.4, on cherche V tel que :

$$P(V > X_k) = p$$

Par analogie au résultat précédent, on peut exprimer V en fonction de \bar{X} et S^* :

$$V = \bar{X} + k'_s S^*$$

d'où :

$$P(\bar{X} + k'_s S^* > \mu + u_{1-k} \sigma) = p \Leftrightarrow P(\bar{X} - \mu - u_{1-k} \sigma > -k'_s S^*) = p$$

On en déduit immédiatement :

$$P(U \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - u_{1-k} \sigma > -k'_s S^*) = p \Leftrightarrow P(U - u_{1-k} \sqrt{n} > -k'_s \sqrt{n} \frac{S^*}{\sigma}) = p$$

et de la même façon qu'au 5.1.4 :

$$P(U - u_{1-k} \sqrt{n} > -k'_s \sqrt{n} \sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}) = p \Leftrightarrow P(\frac{U - u_{1-k} \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}} > -k'_s \sqrt{n}) = p$$

$\frac{U - u_{1-k} \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}}$ suit donc une distribution de Student décentrée à $(n-1)$ degrés de liberté et

dont le paramètre de décentrement est $d = -u_{1-k} \sqrt{n}$

Nous pouvons alors écrire la probabilité en changeant le sens de l'inégalité ainsi que le second membre :

$$P(\frac{U - u_{1-k} \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}} < -k'_s \sqrt{n}) = 1 - p$$

En utilisant l'approximation :

$$P(T'_{v,d} \leq t') \approx \Phi(x)$$

où Φ est la fonction de répartition de U et $x = \frac{t'(1 - \frac{1}{4v}) - d}{\sqrt{1 + \frac{t'^2}{2v}}}$

Nous obtenons l'équation :

$$\Phi\left(\frac{-k'_s \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right) + u_{1-k} \sqrt{n}}{\sqrt{1 + \frac{k_s'^2 n}{2(n-1)}}}\right) = 1 - p \Leftrightarrow \frac{-k'_s \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right) - u_k \sqrt{n}}{\sqrt{1 + \frac{k_s'^2 n}{2(n-1)}}} = u_{1-p}$$

ou encore...

$$\frac{-k'_s \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right) - u_k \sqrt{n}}{\sqrt{1 + \frac{k_s'^2 n}{2(n-1)}}} = -u_p \Leftrightarrow \frac{k'_s \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right) + u_k \sqrt{n}}{\sqrt{1 + \frac{k_s'^2 n}{2(n-1)}}} = u_p$$

Cette équation du second degré en k'_s est identique à celle du 5.4.1 ce qui nous donne l'égalité :

$$\boxed{k'_s = k_s}$$

Annexe J

Mise en tension de trois demi-cuboctaèdre

Bleu : câbles actifs de la Figure 102

Rouge : câbles de la Figure 105

Vert : état résiduel compatible dans le premier cas de relâchement de câble

Rose : état non compatible pour le deuxième cas de relâchement de câble

Eléments	Etats Initiaux	1 ^{er} Echelonnement	2 ^{ème} Echelonnement
	-1,0 0,0 0,0 -1,0	1,0 0,0 0,0 0,0	1,0 0,0 0,0 0,0
	-1,0 0,0 0,0 -1,0	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 1,0 0,0 0,0
	-1,0 0,0 0,0 -1,0	0,0 0,0 1,0 0,0	0,0 0,0 1,0 0,0
	-1,0 0,0 0,0 -1,0	-1,0 0,0 0,0 0,0	-1,0 0,0 0,0 0,0
	0,0 0,0 -1,0 -1,0	-1,0 0,0 0,0 0,0	-1,0 0,0 0,0 0,0
	0,0 0,0 -1,0 0,0	-1,0 0,0 0,0 0,0	-1,0 0,0 0,0 0,0
	0,0 0,0 -1,0 -1,0	-1,0 0,0 0,0 0,0	-1,0 0,0 0,0 0,0
	0,0 0,0 -1,0 -2,0	0,0 -1,0 0,0 -1,0	0,0 -1,0 0,0 -1,0
	0,0 -1,0 0,0 0,0	0,0 -1,0 0,0 -2,0	0,0 -1,0 0,0 -2,0
	0,0 -1,0 0,0 0,0	0,0 -1,0 0,0 -1,0	0,0 -1,0 0,0 -1,0
	0,0 -1,0 0,0 0,0	0,0 -1,0 0,0 0,0	0,0 -1,0 0,0 0,0
	0,0 -1,0 0,0 0,0	0,0 0,0 -1,0 -1,0	0,0 0,0 -1,0 0,0
	0,5 0,0 0,0 0,5	0,0 0,0 -1,0 -1,0	0,0 0,0 -1,0 0,0
14	1,0 0,0 0,0 1,0	0,0 0,0 -1,0 -1,0	0,0 0,0 -1,0 0,0
	1,0 0,0 0,0 1,0	0,0 0,0 -1,0 -1,0	0,0 0,0 -1,0 0,0
	0,5 0,0 0,5 1,5	0,5 0,0 0,0 0,0	0,5 0,0 0,0 0,0
	1,0 0,0 0,0 0,0	1,0 0,0 0,0 0,0	1,0 0,0 0,0 0,0
	1,0 0,0 0,0 1,0	1,0 0,0 0,0 0,0	0,5 0,5 0,0 0,0
	0,5 0,0 0,0 0,5	0,5 0,5 0,0 0,0	1,0 0,0 0,0 1,0
	1,0 0,0 0,0 1,0	1,0 0,0 0,0 1,0	1,0 0,0 0,0 0,0
	1,0 0,0 0,0 1,0	1,0 0,0 0,0 0,0	0,5 0,0 0,0 0,0
	0,5 0,0 0,0 0,5	0,5 0,0 0,0 0,0	1,0 0,0 0,0 0,0
23	1,0 0,0 0,0 1,0	1,0 0,0 0,0 0,0	1,0 0,0 0,0 0,0
	1,0 0,0 0,0 1,0	1,0 0,0 0,0 0,0	0,5 0,0 0,0 0,0
	0,0 0,0 0,5 0,0	0,5 0,0 0,0 0,0	1,0 0,0 0,0 0,0
26	0,0 0,0 1,0 2,0	1,0 0,0 0,0 0,0	1,0 0,0 0,0 0,0
	0,0 0,5 0,5 0,0	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 1,0 0,0 0,0
	0,0 0,0 1,0 0,0	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 0,5 0,5 1,0
	0,0 0,0 1,0 0,0	0,0 0,5 0,5 1,5	0,0 1,0 0,0 2,0
	0,0 0,0 0,5 1,0	0,0 1,0 0,0 2,0	0,0 1,0 0,0 2,0
	0,0 0,0 1,0 0,0	0,0 1,0 0,0 2,0	0,0 0,5 0,0 0,0
	0,0 0,0 1,0 0,0	0,0 0,5 0,0 0,0	0,0 1,0 0,0 2,0
34	0,0 0,0 1,0 2,0	0,0 1,0 0,0 2,0	0,0 1,0 0,0 2,0
	0,0 0,0 1,0 2,0	0,0 1,0 0,0 2,0	0,0 1,0 0,0 0,0
	0,0 0,5 0,0 0,0	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 1,0 0,0 0,0
37	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 0,0 0,5 0,5	0,0 0,0 0,5 0,0
	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 0,0 1,0 1,0	0,0 0,0 1,0 0,0
	0,0 0,5 0,0 0,0	0,0 0,0 1,0 1,0	0,0 0,0 0,5 0,0
	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 0,0 0,5 0,5	0,0 0,0 1,0 0,0
	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 0,0 1,0 1,0	0,0 0,0 1,0 0,0
	0,0 0,5 0,0 0,0	0,0 0,0 1,0 1,0	0,0 0,0 0,5 0,0
	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 0,0 0,5 0,5	0,0 0,0 1,0 0,0
	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 0,0 1,0 1,0	0,0 0,0 1,0 0,0
45	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 0,0 1,0 1,0	0,0 0,0 1,0 -1,0
	0,0 1,0 0,0 0,0	0,0 0,0 1,0 1,0	0,0 0,0 1,0 0,0

Dans le premier cas, on atteint un état d'autocontrainte compatible (celui de la Figure 104), dans l'autre, il n'est pas compatible.

C'est bien le deuxième cas qui permet de détendre complètement la structure.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

[GAS58] GASS S.I., *Linear programming : methods and applications*, Mc. Graw.Hill, New-York, 1958.

[FUL62] FULLER R.B., *Tensile Integrity Structure*, US PATENT 3.063.572, 1962.

[DAN63] DANTZIG G.B., *Linear programming and extensions*, Princeton University Press, 1963.

[SAR67] SARGER R., *Structures Nouvelles*, Centre d'Etudes Architecturales, A.S.B.L., Académie Royale des Beaux Arts de Bruxelles, 1967.

[LIN71] LINKWITZ K. und SCHEK H.J., *Einige Bemerkungen von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen*, Ingenieur-Archiv 40, Springer-Verlag, pp145-158, 1971.

[BRO72] BROZETTI J., LESCOUARC'H Y., *Algorithme de la méthode du «simplexe»*, Méthode de calcul aux états limites des structures à barres, Séminaire du 14 au 17 novembre 1972, CTICM, 1972.

[SNE73] SNELSON K., *Tensegrity Mast*, Shelter Publications, Bolinas Californie, 1973.

[FUL73] FULLER R.B., *The dymaxion world of Buckminster Fuller*, Anchoor Books Edition, 1973.

[SHE74] SHECK H.J., *The force density method for formfinding and computation of networks*, Computer Method in applied Mechanics and Engineering 3, pp 115-134, 1974.

[BAR75] BARNES M.R., *Applications of dynamic relaxation to the design and analysis of cable, membrane and pneumatic structures*, 2nd Internat Conf. on Space Structures, Guildford, 1975.

[ACH78] ACHER J., GARDELLE J., *Programmation linéaire*, Dunod Décision, 1978.

[MOT83] MOTRO R., *Formes et forces dans les systèmes constructifs, cas des systèmes réticulés spatiaux autocontraints*, thèse, Université Montpellier II, 1983.

[NV 84] Règles N84 (modifiées 95), *Action de la neige sur les constructions*, CSTB, septembre 1996.

[PEL 86] PELLEGRINO S. and CALLADINE C. R., *Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks*, International Journal Solids and Structures, Vol 22, 1986.

[GOY88] GOYET J., *Valeur caractéristique d'une variable aléatoire normale de moyenne et variance inconnues, à partir de la donnée de N réalisations indépendantes de cette variable*, Les cahiers de l'aléa, CTICM, novembre 1988.

- [EMM88] EMMERICH D.G., *Structures tendues et autotendantes*, Ecole d'Architecture de Paris La Vilette, 1988.
- [MOT89] MOTRO R., *Systèmes de tensegrité à double nappe et double courbure*, rapport de recherche, Ecole d'Architecture du Languedoc Roussillon, 1989.
- [MOT90] MOTRO R., *Tensegrity Systems and Geodesic Domes*, International Journal of Space Structures, Vol. 5, n°3 & 4, 1990.
- [SAP90] SAPORTA G., *Probabilités, analyse des données et statistique*, Editions Technip, 1990.
- [PER91] PERCHAT M., *Initiation aux états limites – Principes généraux*, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Public, Octobre 1991.
- [EC3-92] *Eurocode 3 – Construction Métallique*, Normalisation Française, AFNOR, 1992.
- [EC2-92] *Eurocode 2 – Construction en Béton armé et Béton Précontraint*, Normalisation Française, AFNOR, 1992.
- [HAN94] HANAOR A., *Geometrically rigid, double-layer tensegrity grids*, International Journal of Space Structures, Vol 9 N°4, 1994.
- [CAL96] CALGARO J.-A., *Introduction aux Eurocodes – Sécurité des constructions et bases de la théorie de la fiabilité*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, ISBN 2-85978-264-8, 1996.
- [LAP96] LAPORTE R., *Cours de DEA*, Laboratoire de mécanique et Génie Civil, Université Montpellier II, 1996.
- [QUI96] QUIRANT J., *Recherche de forme et comportement*, rapport de D.E.A., Université Montpellier II, 1996.
- [CRO97] CROSNIER B., KAZI-AOUAL M.N., *Bambous : caractéristiques, comportement et systèmes constructifs*, Annales GC Bois, Volume 2, pp.45-54, 1997.
- [MOT97] MOTRO R., *Systèmes de Tensegrité*, Actes du séminaire du 4 décembre 1997, Ecole d'Architecture du Languedoc Roussillon, Editions de l'Espérou, ISBN 2-912261-06-6.
- [VAS97] VASSART N., *Recherche de forme et stabilité des systèmes réticulés spatiaux autocontraints – application aux systèmes de tensegrité*, thèse, Université Montpellier II, 1997.
- [BOU98] BOUDERBALA M., *Systèmes spatiaux Pliables / Dépliables : le cas des systèmes de tensegrité*, thèse, Université Montpellier II, 1998.
- [DJO98] DJOUADI S., *Le Contrôle des systèmes : application aux systèmes de tensegrité*, thèse, Université Montpellier II, 1998.

- [GOY98] GOYET J., JACOB B., LEMAIRE M., MATHIEU H., *Fiabilité des constructions*, Revue Française de Génie Civil, Volume 2 – n°5, Septembre 1998.
- [ING98] INGBER D., *L'architecture de la vie*, Pour La Science, n°245, mars 1998.
- [KEB98] KEBICHE K., *Etude en non-linéarités géométriques et homogénéisation des systèmes réticulés spatiaux autocontraints*, thèse, Université Montpellier II, 1998.
- [KEB99] KEBICHE K., M.N. KAZI-AOUAL, R. MOTRO, *Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems*, Engineering Structures, 21 pp 864-876, 1999.
- [KON99] KONO Y., CHOONG K.K., SHIMADA T., KUNIEDA H., *An experimental investigation of a type of double-layer tensegrity grids*, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol 40 N.130, 1999.
- [QUI99] QUIRANT J., KEBICHE K., M.N. KAZI-AOUAL, *Systèmes de tenségrité : systèmes à barres et câbles*, Congrès A.U.G.C., Poitiers, 1999.
- [RAD99] RADUCANU V., MOTRO R., *Rapport intermédiaire de contrat n°3, "Système constructif et architecture : Cas des systèmes de tenségrité"*, Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Université Montpellier II, et Groupe de Recherche et Réalisation de Structures Légères pour l'Architecture, École d'Architecture Languedoc Roussillon, 1999.
- [MOT00] MOTRO R., *Systèmes de tenségrité*, En cours de publication, 2000.
- [QUI00] QUIRANT J., KEBICHE K., M.N. KAZI-AOUAL, *Etude des systèmes de tenségrité*, Revue Française de Génie Civil, Vol 4, 2000.
- [VAS00] VASSART N., LAPORTE R., MOTRO R., *Determination of mechanisms's order for kinematically and statically indeterminate systems*, In press, International Journal Solids and Structures 37128 (2000).

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 : Evolution du poids propre des constructions au fil des siècles [SAR67].....	9
Figure 2 : Un système de tenségrité réalisé par Kenneth SNELSON "Needle Tower"	10
Figure 3 : Un système de tenségrité à six barres, l'octaèdre expansé.	15
Figure 4 : Analogie entre la mise en pression d'un ballon et la mise en autocontrainte d'un système de tenségrité.....	18
Figure 5 : Exemple d'un mécanisme pour une structure à deux éléments (mécanisme d'ordre 1, allongement des éléments d'ordre \mathbb{P})......	18
Figure 6 : Notation de la longueur d'un élément suivant son état	22
Figure 7 : Définition du nœud libre i connecté au nœud h par l'élément j , $\{u_{hi}\}$ est le vecteur directeur unitaire de l'élément. (Projection suivant la direction Z)	23
Figure 8 : Un système de tenségrité à 3 barres et 9 câbles, le Simplex	35
Figure 9 : Un système de tenségrité à 4 barres et 12 câbles, le Quadruplex.....	36
Figure 10: Simplex et Quadruplex à face supérieure inscrite	36
Figure 11 : Différents pavages plans au moyen de polygones.....	37
Figure 12: Grilles à double nappe plane formées de simplex et quadruplex à face supérieure inscrite	37
Figure 13 : Grille à double nappe plane formée de systèmes de tenségrité à six barres.	38
Figure 14: Système à base de quadruplex avec une seule une barre par nœud.	38
Figure 15 : Assemblage produisant une courbure	39
Figure 16 : Une voûte formée de quadruplex irréguliers.	39
Figure 17 : Quelques polyèdres.....	40
Figure 18 : Système à cinq éléments barre, les nœuds 1,2 & 3 sont alignés.....	44
Figure 19 : Même configuration pour un système à 1 barre et 4 câbles	44
Figure 20 : Etat d'autocontrainte admissible.....	44
Figure 21 : Mécanisme rigide associé.....	45
Figure 22 : Un état d'autocontrainte directement issu de la détermination numérique du noyau de la matrice $[A]$	51
Figure 23 : Assemblage à 4 états d'autocontrainte indépendants.....	53
Figure 24 : Quatre états d'autocontrainte partiels pour un assemblage de demi-cuboctaèdres et formant une base du noyau de $[A]$	55
Figure 25 : Un assemblage de trois demi-cuboctaèdres conserve les états propres à chaque module.....	56
Figure 26 : Un état d'autocontrainte non conforme linéairement indépendant des trois états propres aux modules	56
Figure 27 : Deux états d'autocontrainte dissymétriques et linéairement indépendants des trois états propres à chaque module.....	56
Figure 28 : Interprétation géométrique du problème lorsque $s=2$. La zone blanche est la zone des états d'autocontrainte conformes.....	61
Figure 29 : Cas où il n'existe pas de solution au problème (l'ensemble du plan est grisé).....	61
Figure 30 : Cas où seule une droite est acceptable, la droite D	62
Figure 31 : Dans le cas $s=3$, on obtient un "cône de conformité" à l'intérieur duquel les états d'autocontrainte sont conformes.	62
Figure 32 : Deux vecteurs d'autocontrainte possédant des coefficients d'autocontrainte nuls pour des éléments différents (définis par les côtés DE et DC).	63
Figure 33 : Deux vecteurs d'autocontrainte à coefficients d'autocontrainte nuls pour des éléments à la fois communs et distincts.	63
Figure 34 : Les trois états d'autocontrainte d'un assemblage d'octaèdres expansés.....	64
Figure 35 : Représentation du "polygone de conformité" pour trois octaèdres expansés.....	64
Figure 36 : Les câbles des modules 1, 2 et 3 (de gauche à droite) donnent les faces du cône de conformité. ..	65
Figure 37 : « Polyèdre de conformité » pour les quatre états d'autocontrainte partiels d'un assemblage de quatre demi-cuboctaèdres.	66
Figure 38 : « Polyèdre de conformité » à cinq sommets pour le cas d'un assemblage de trois quadruplex en ligne.	66
Figure 39 : Recherche de la solution du problème dans le plan (A_1, A_2, A_3)	68
Figure 40 : Deux répartitions d'autocontrainte différentes dans une grille formée de trente-six demi-cuboctaèdres.....	71
Figure 41 : Un élément de forme linéique simple.	74
Figure 42 : Principe de la méthode de NEWTON-RAPHSON.	76

Figure 43 : Principe de la méthode de NEWTON-RAPHSON modifiée.....	77
Figure 44 : Le module étudié, l'octaèdre expansé.....	79
Figure 45 : L'octaèdre expansé sous des actions extérieures le sollicitant en traction compression.....	80
Figure 46 : Les trois niveaux d'autocontrainte choisis.....	81
Figure 47 : Flèche sur les trois nœuds supérieurs du module sous une même charge pour les trois niveaux d'autocontrainte et les deux systèmes d'actions extérieures.....	81
Figure 48 : Valeur des charges extérieures limites (F) avant atteinte d'une sollicitation limite dans un élément.....	82
Figure 49 : Différentes courbes de comportement en fonction du rapport des rigidités barres/câbles.....	83
Figure 50 : Illustration schématique du semi-probabilisme [CAL 96].....	85
Figure 51 : Processus de vérification vis à vis des Eurocodes [PER91].....	86
Figure 52 : Demi-cuboctaèdre, vue en plan et vue en perspective.....	90
Figure 53 : Grille de tenségrité formée de trente-six demi-cuboctaèdres.....	90
Figure 54 : Etat d'autocontrainte localisé sur un module de l'assemblage.....	91
Figure 55 : Etat d'autocontrainte homogène (a) ou progressif (b).....	91
Figure 56 : Liaisons des nœuds de nappe inférieure.....	92
Figure 57 : L'autocontrainte est d'autant plus mobilisée que le déplacement d est important.....	92
Figure 58 : Valeur des déplacements verticaux pour les nœuds de file centrale.....	94
Figure 59 : Allure de la déformée en nappe inférieure.....	94
Figure 60 : Déplacement vertical du nœud central en fonction de la charge.....	95
Figure 61 : Valeur des tensions dans les éléments avant et après chargement.....	95
Figure 62 : Vérification ELU pour une autocontrainte égale à 1,2 fois l'autocontrainte ELS.....	97
Figure 63 : Vérification ELU pour une autocontrainte égale à 0,8 fois l'autocontrainte ELS.....	97
Figure 64 : Répartition des sollicitations en fin de chargement ELS pour une autocontrainte uniforme.....	98
Figure 65 : Vérification ELU pour une autocontrainte égale à 0,8 fois l'autocontrainte ELS, cas d'une autocontrainte progressive.....	99
Figure 66 : Vérification ELU pour une autocontrainte égale à 1,2 fois l'autocontrainte ELS, cas d'une autocontrainte progressive.....	99
Figure 67 : Câble prétendu entre deux points fixes, tension espérée de 20kN.....	106
Figure 68 : Fabrication réelle du câble.....	106
Figure 69 : Allure de la densité de probabilité de la perturbation.....	107
Figure 70 : Principe schématique de l'étude de la sensibilité.....	109
Figure 71 : Détermination d'une valeur caractéristique (X_k) avec une certaine confiance (p) à partir d'un échantillon [GOY88].....	111
Figure 72 : Intervalle caractéristique [X_{k1} , X_{k2}] déterminé à partir d'un échantillon.....	114
Figure 73 : Définition de l'intervalle caractéristique à 10 %.....	114
Figure 74 : Le module étudié, l'octaèdre expansé.....	116
Figure 75 : Valeur de la contrainte dans les éléments pour une simulation.....	116
Figure 76 : Répartition des contraintes dans un câble pour un échantillon de 100 simulations.....	117
Figure 77 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément, ici à 10 % pour une confiance de 90 %.....	119
Figure 78 : Numérotation des nœuds pour l'octaèdre expansé considéré.....	120
Figure 79 : Cinq octaèdres expansés assemblés de façon linéaire.....	123
Figure 80 : Quelques résultats de simulations (5 parmi 100) dans le cas d'un assemblage de 5 octaèdres expansés.....	123
Figure 81 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %), assemblage de 3 octaèdres.....	124
Figure 82 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %), assemblage de 5 octaèdres.....	124
Figure 83 : Intervalles caractéristiques à 10 % des contraintes sous charge.....	126
Figure 84 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %)......	129
Figure 85 : Un assemblage de deux demi-cuboctaèdres.....	129
Figure 86 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %) dans le cas de 2 demi-cuboctaèdres.....	130
Figure 87 : Un assemblage de trois demi-cuboctaèdres.....	130
Figure 88 : L'état d'autocontrainte uniforme.....	131
Figure 89 : Intervalles caractéristiques pour chaque élément (ici à 10 % pour une confiance de 90 %) dans le cas de 3 demi-cuboctaèdres.....	131
Figure 90 : Le quatrième état d'autocontrainte non conforme.....	131
Figure 91 : Un assemblage plan de quatre demi-cuboctaèdres.....	132

<i>Figure 92 : Visualisation des intervalles caractéristiques dans le cas d'un assemblage plan de 4 demi-cuboctaèdres.....</i>	<i>133</i>
<i>Figure 93 : Exemple de grille à grande échelle : 36 modules.....</i>	<i>133</i>
<i>Figure 94 : Visualisation des intervalles caractéristiques pour une grille plane de 36 modules.....</i>	<i>134</i>
<i>Figure 95 : Visualisation des intervalles caractéristiques pour une grille plane de 36 modules chargée à l'ELU.....</i>	<i>135</i>
<i>Figure 96 : Le Quadruplex à face supérieure inscrite (demi-cuboctaèdre).....</i>	<i>138</i>
<i>Figure 97: L'élément choisi pour la mise en tension du module</i>	<i>139</i>
<i>Figure 98 : Variation de la compression dans une barre en fonction de l'allongement du câble d'entretoisement.....</i>	<i>139</i>
<i>Figure 99 : Déplacement d'un nœud durant l'allongement du câble d'entretoisement.....</i>	<i>140</i>
<i>Figure 100 : Une base possible des états d'autocontrainte dans le cas d'un assemblage de 3 demi-cuboctaèdres.....</i>	<i>141</i>
<i>Figure 101 : Un état d'autocontrainte uniforme</i>	<i>141</i>
<i>Figure 102 : Premier choix de câbles actifs.....</i>	<i>141</i>
<i>Figure 103 : Après relâchement des câbles, il reste un état d'autocontrainte résiduel.....</i>	<i>142</i>
<i>Figure 104 : L'état d'autocontrainte résiduel retrouvé à partir du relâchement des câbles de la Figure 102.....</i>	<i>142</i>
<i>Figure 105 : Deuxième choix de câbles actifs permettant une mise en tension.....</i>	<i>142</i>
<i>Figure 106 : Différentes simulations de perturbation de longueur des éléments pour une géométrie non autocontrainte – Cas du demi-cuboctaèdre.....</i>	<i>146</i>
<i>Figure 107 : Quelques simulations de perturbation de longueur des éléments pour une géométrie non autocontrainte de trois demi-cuboctaèdres.....</i>	<i>147</i>

Nom : QUIRANT

Prénom : Jérôme

**SYSTEMES DE TENSEGRITE ET AUTOCONTRAINTES :
QUALIFICATION, SENSIBILITE ET
INCIDENCE SUR LE COMPORTEMENT**

Thèse présentée à l'Université de Montpellier II – *Sciences et Techniques Languedoc* –
pour obtenir le grade de Docteur, mention Sciences

Spécialité : Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil

N° d'ordre :

N° CNU : 60

Résumé : Les **Systèmes de Tenségrité** sont des systèmes innovants dans le domaine du Génie Civil. Leur esthétique est une source d'inspiration nouvelle pour les architectes. Ce sont des systèmes **réticulés, spatiaux** et en **état d'autocontrainte**.

La **première partie** de ce manuscrit est l'occasion de présenter les diverses phases de leur conception. La **recherche de forme**, notamment, amène à rechercher les géométries particulières permettant l'instauration d'un état de sollicitation interne qui va rigidifier le système.

La **deuxième partie** propose, pour une géométrie autocontrainte donnée, de déterminer tous les états d'autocontrainte qui respectent la **rigidité unilatérale des câbles**. Ces états **conformes** permettent de mettre en état d'autocontrainte l'ensemble de la structure. Leur **influence sur le comportement** est évaluée pour réaliser un **dimensionnement**.

La **troisième partie** est consacrée à **une étude de la sensibilité** de ces systèmes aux **imprécisions de fabrication** des éléments. Elle doit permettre, après une étude plus précise de **fiabilité**, de compléter les Eurocodes pour des systèmes innovants qui n'ont pas été pris en compte dans les règlements. Enfin, une étude de **la mise en autocontrainte** des systèmes est proposée. Elle montre que l'assemblage des systèmes de tenségrité peut se faire dans une **géométrie non-autocontrainte**, avec seulement quelques **câbles actifs** permettant la mise en tension de la structure.

Mots clés : Autocontrainte – Câbles – Comportement – Eurocodes – Fiabilité – Mise en Tension – Non-linéarités géométriques – Sensibilité – Méthode du Simplexe – Recherche de Forme – Mécanismes – Systèmes de Tenségrité – Systèmes Reticulés

Date et lieu de soutenance : le **15 Juin 2000** à l'Université de Montpellier II

Jury :

O. MAISONNEUVE	Président
M. LEMAIRE	Rapporteur
H. NGUYEN-DANG	Rapporteur
N. M. KAZI-AOUAL	Examineur
R. LAPORTE	Examineur
R. MOTRO	Directeur de Thèse

Thèse préparée au **Laboratoire de Mécanique et Génie Civil**, Université de Montpellier II
cc034, Place Eugène Bataillon, 34095 MONTPELLIER Cedex 05