



HAL
open science

Cohomologie de $GL_2(\mathbb{Z}[i, 1/2])$ à coefficients dans \mathbb{F}_2

Nicolas Weiss

► **To cite this version:**

Nicolas Weiss. Cohomologie de $GL_2(\mathbb{Z}[i, 1/2])$ à coefficients dans \mathbb{F}_2 . Mathématiques [math].
Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 2007. Français. NNT: 2007STR13084 . tel-00174888

HAL Id: tel-00174888

<https://theses.hal.science/tel-00174888>

Submitted on 6 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Université Louis Pasteur et CNRS (UMR 7501)
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex

Cohomologie de $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ à coefficients dans F_2

par

Nicolas Weiss

Classification AMS : 11F75, 20J06, 55T10, 55N25

Mots clés : Conjecture de Lichtenbaum et Quillen, Réseaux gaussiens, Sous-groupe d'Iwahori, Cohomologie équivariante, Cohomologie des groupes linéaires, Cohomologie des groupes arithmétiques

Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à Hans-Werner Henn, sous la direction duquel j'ai pu réaliser le présent travail. Hans-Werner n'a pas été uniquement mon directeur de thèse : c'est aussi lui qui m'a fait découvrir la topologie algébrique en Magistère et la cohomologie des groupes en DEA. Il a su me donner goût à ces disciplines et m'épauler dans leur apprentissage et la quête de $H^*(\mathrm{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$.

Je suis reconnaissant envers Jean Lannes, Jean-Louis Loday, Guido Mislin et Philippe Nuss pour le temps précieux qu'ils ont consacré à la lecture de mon travail.

Plus généralement, je souhaite remercier tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin, consciemment ou à leur insu : ils sont doctorants ou anciens doctorants de l'ULP (un merci particulier à mes collègues de bureau successifs), mathématiciens, musiciens, famille ou amis.

En définitive, je dédie ces quelques pages de ma vie à celle avec laquelle j'écrirai toutes les autres.

Table des matières

Introduction	i
1 Motivation du calcul de $H^*(\mathrm{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$	i
2 Enoncé du résultat principal	i
3 Méthode de résolution	ii
3.1 Réduction du problème	ii
3.2 Le bon espace pour calculer $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$	iii
3.3 Cohomologie de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i])$	iii
3.4 Cohomologie du sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$	iii
3.5 Cohomologies de $\mathrm{B}(P)\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ et $\mathrm{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$	iv
1 Le bon espace \mathcal{Z} pour calculer $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$ - Réseaux	1
1.1 Réseaux et formes hermitiennes	1
1.1.1 Les espaces \mathcal{H}_n et \mathcal{L}_n	1
1.1.2 Vecteurs minimaux d'un réseau L	4
1.1.3 L'espace \mathcal{Z}_n	4
1.2 Rétraction	5
1.2.1 Rétraction de \mathcal{L}_n sur \mathcal{L}_n^1	5
1.2.2 Rétraction de \mathcal{L}_n^1 sur \mathcal{W}_n^1	6
1.2.3 Rétraction de \mathcal{L}_n sur \mathcal{W}_n^1	6
1.2.4 Rétraction de \mathcal{H}_n sur \mathcal{Z}_n	7
1.3 Détermination de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$	7
1.3.1 Caractérisation des réseaux bien arrondis et inventaire de leurs vecteurs minimaux	7
1.3.2 Réseaux bien arrondis à rotation près	10
1.4 Calculs explicites de rétractions	12
1.4.1 Calcul explicite du rétracte d'un réseau	13
1.4.2 Rétracte du sous-réseau L_I	16
1.4.3 Rétracte du sous-réseau L_{II}	18
1.4.4 Rétracte du sous-réseau L_{III}	19

2	Cohomologie de $(\mathbf{P})\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[i])$ et $(\mathbf{P})\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$	23
2.1	Principe du calcul	23
2.2	Analyse de \mathcal{Z}	24
2.2.1	Domaine fondamental	24
2.2.2	Reconstruction de l'espace \mathcal{Z}	27
2.2.3	Structure cellulaire sur \mathcal{Z}	28
2.2.4	Sous-groupes d'isotropie pour l'action de Γ	29
2.2.5	Représentation graphique locale de \mathcal{Z}	40
2.3	Analyse de la suite spectrale E	46
3	Cohomologie du sous-groupe d'Iwahori Γ_0 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])$	49
3.1	Le sous-groupe Γ_0	49
3.2	Cohomologie de $B\Gamma_0$ - stratégie	51
3.3	Réseaux et calcul de $H_{\Gamma_0}^*(\mathcal{Z}; \mathbb{F}_2)$	51
3.4	Réduction au calcul de $H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$	53
3.4.1	Quotient $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ et sous-groupes d'isotropie	53
3.4.2	La suite spectrale E'	55
3.5	Calcul de $H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ et $H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$	60
3.5.1	Actions cellulaires et sans inversion de groupes sur les <i>CW</i> -complexes simplement connexes	60
3.5.2	Présentation de Γ_0	65
3.5.3	Calcul de $H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$	70
3.5.4	Cohomologie de $B\Gamma_0$	71
4	Cohomologies à coefficients dans \mathbf{F}_2 de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbf{Z}[i, \frac{1}{2}])$, $\mathrm{BSL}_2(\mathbf{Z}[i, \frac{1}{2}])$ et $\mathrm{BGL}_2(\mathbf{Z}[i, \frac{1}{2}])$	73
4.1	Cohomologie de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$	73
4.1.1	Situation	73
4.1.2	Etude de $(i, j)^*$	74
4.1.3	Cohomologie de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$	84
4.2	Cohomologie de $\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$	85
4.3	Cohomologie de $\mathrm{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$	87
4.3.1	Restriction de $H^*(\mathrm{BGL}_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2)$ vers $H^*(\mathrm{BD}_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2)$.	88
4.3.2	Analyse de l'homomorphisme π_D^*	89
4.3.3	Description de $\mathrm{Res} \circ \pi^*$	91
4.3.4	Description explicite de $E_2^{*,*}$	93
4.4	Cohomologie de $\mathrm{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ - Résultats	94
	Appendice	97
	Bibliographie	101

Notations

Groupes

Γ	$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]), \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i]), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$ ou $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$	
Γ_0	Sous-groupe d'Iwahori de Γ	p.49
C_n	Groupe cyclique d'ordre n	
\mathfrak{S}_n	Groupe symétrique d'ordre n	
\mathfrak{A}_n	Groupe alterné d'ordre n	
Q_{4n}	Groupe des quaternions d'ordre n	
D_{2n}	Groupe diédral d'ordre n	

Réseaux

$m(L)$	Minimum du réseau L	p.4
$M(L)$	Ensemble des vecteurs minimaux du réseau L	p.4
$\langle M(L) \rangle$	Espace vectoriel complexe engendré par $M(L)$	p.4
$D(L)$	Ensemble des directions de vecteurs minimaux de L	p.4
c_v	Constante associée à un vecteur v d'un réseau L	p.13
$\mathrm{Std}_n, \mathrm{Std}$	Réseau standard de dimension n $\mathbb{Z}[i]^n$	p.2
$\mathcal{L}_n, \mathcal{L}$	Espace des réseaux de dimension n (resp. 2)	p.2, p.7
$\mathcal{L}_n^1, \mathcal{L}^1$	Espace des réseaux de dimension n (resp. 2) et de minimum 1	p.4, p.7
$\mathcal{W}_n, \mathcal{W}$	Réseaux bien arrondis de dimension n (resp. 2)	p.5, p.7
$\mathcal{W}_n^1, \mathcal{W}^1$	Réseaux bien arrondis de dimension n (resp. 2) et de minimum 1	p.5, p.7
\mathcal{L}'	Espace des paires de réseaux (L_1, L_2) de dimension 2 telles que $L_2 \subsetneq L_1 \subsetneq \frac{1}{1+i}L_2$	p.51
\mathcal{W}'	Ensemble des paires $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}'$ telles que $L_1 \in \mathcal{W}^1$	p.51
L_I, L_{II}, L_{III}	Sous-réseaux d'un réseau L tels que $(L, L_I), (L, L_{II}), (L, L_{III}) \in \mathcal{L}'$	p.12

Espaces particuliers

\mathcal{H}_n	Formes hermitiennes positives définies sur \mathbb{C}^n	p.1
\mathcal{Y}_n	$\{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid M^{-1}(\mathrm{Std}_n) \in \mathcal{W}_n^1\}$	p.5
\mathcal{Z}_n	Quotient $\mathcal{Y}_n/\mathrm{U}(n)$	p.5
$\mathcal{D}, \mathcal{D}_{SL}$	Domaines fondamentaux dans \mathcal{Z} pour l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$ (resp. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$)	p.10, p.26

Applications

$\rho : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{W}_n^1$ Rétraction par déformation de \mathcal{L}_n sur \mathcal{W}_n^1 p.6

$\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}^1/\mathrm{U}(2)$, $a \mapsto$ classe du réseau ϕ_a engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \sqrt{1-|a|^2} \end{pmatrix}$ p.11

$\lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \bar{a} \\ 0 & \sqrt{1-|a|^2} \end{pmatrix}^{-1}$ p.25

$\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Z}$, $a \mapsto$ classe de $\lambda(a)$ p.25

Sous-groupes d'isotropie pour l'action de Γ sur \mathcal{Z}

Γ_h , $h \in \mathcal{Z}$ Sous-groupe d'isotropie de h p.29

Γ_x , $x \in \mathcal{D}$ Sous-groupe d'isotropie de $\Psi(x) \in \mathcal{Z}$ p.29

Γ_σ , σ cellule de \mathcal{D} Sous-groupe d'isotropie de la cellule $\Psi(\sigma)$ de \mathcal{Z} p.29

Sous-groupes d'isotropie pour l'action de $\mathrm{U}(2)$ sur \mathcal{W}^1

U_L , $L \in \mathcal{W}^1$ Sous-groupe d'isotropie de L p.29

U_x , $x \in \mathcal{D}$ Sous-groupe d'isotropie de $\phi_x \in \mathcal{W}^1$ p.29

Sous-groupes d'isotropie pour l'action de Γ_0 sur \mathcal{Z}

$(\Gamma_0)_X$, $X \subset \mathcal{Z}$ Sous-groupe d'isotropie de X p.55

Suites spectrales

E Suite spectrale qui converge vers $H^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2)$ p.23

E' Suite spectrale qui converge vers $H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ p.55

Introduction

1 Motivation du calcul de $H^*(\mathbf{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$

Le point de départ de cette thèse est une version instable de la conjecture de Lichtenbaum et Quillen qui dit que la cohomologie modulo 2 du classifiant de certains groupes linéaires serait détectée par la cohomologie du classifiant du sous-groupe des matrices diagonales de ces groupes linéaires ([DF86]). Nous nous intéresserons au cas des groupes linéaires définis sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Dans ce cas, la conjecture, évidente pour $n = 1$, a été démontrée par Mitchell pour $n = 2$ et par Henn pour $n = 3$ ([Mit92], [Hen99]).

Dwyer a montré que la conjecture n'est pas vraie pour $n = 32$ ([Dwy98]). Henn et Lannes ont amélioré ce résultat en montrant qu'elle est déjà fautive pour $n = 14$ ([HL]). De plus, le défaut de détection par la cohomologie des matrices diagonales augmente avec n ([Hen96]).

Des travaux de Voevodsky sur la conjecture de Milnor impliquent que la conjecture est vraie dans le cas stable.

Il reste donc à étudier la validité de la conjecture pour les valeurs de n comprises entre 4 et 13. En fait, si on arrivait à trouver un contre-exemple à la conjecture dans le cas $n = 4$, on aurait terminé.

On peut montrer que si la conjecture est vraie pour $n = 4$, alors nécessairement, il existe un certain carré cartésien en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]))_2^\wedge & \xrightarrow{i} & (\mathbf{BGL}_2(\mathbb{C}))_2^\wedge \\ \pi \downarrow & & \downarrow (\text{Id}, c) \\ (\mathbf{B}(\mathbf{GL}_2(\mathbb{F}_5) \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{F}_5)))_2^\wedge & \xrightarrow[\psi]{} & (\mathbf{B}(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})))_2^\wedge \end{array} \quad (1)$$

où $(\mathbf{B}-)_2^\wedge$ désigne le complété en 2 du classifiant du groupe $-$, et la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $\mathbf{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ doit être détectée par la cohomologie du classifiant du sous-groupe des matrices diagonales de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$.

L'application i est induite par l'injection canonique de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$; l'application (Id, c) est, elle, induite par la conjugaison complexe c ; l'application π est induite par l'homomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$, $i \mapsto (2, 3)$, $\frac{1}{2} \mapsto (3, 3)$; enfin, la construction de l'application ψ est délicate et utilise des méthodes de la théorie de l'homotopie étale.

2 Enoncé du résultat principal

Théorème 1. *On a un isomorphisme d'algèbre*

$$H^*(BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_1, c_2] \otimes \Lambda(e_1, e'_1, e_3, e'_3)$$

où c_1 et c_2 sont les classes de Chern de la représentation canonique de $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $GL_2(\mathbb{C})$, $|e_1| = |e'_1| = 1$ et $|e_3| = |e'_3| = 3$.

En particulier, le carré (1) est cartésien en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 , et la cohomologie de $BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ est détectée par la cohomologie du classifiant du sous-groupe des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$.

L'espoir initial, motivé par des idées de Henn et Lannes, était que la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ rendrait le carré (1) non cartésien en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 , invalidant de ce fait la conjecture de Lichtenbaum et Quillen dès $n = 4$ dans le cas des groupes linéaires définis sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

La conjecture a ainsi passé un test avec succès et a encore des chances d'être vraie pour $n = 4$. En tout cas la recherche d'un contre-exemple est plus délicate qu'on aurait pu l'espérer.

3 Méthode de résolution

3.1 Réduction du problème

Le groupe $SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ est somme amalgamée de deux copies de $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ suivant le sous-groupe d'Iwahori de $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ des matrices M qui sont triangulaires supérieures modulo l'idéal $(1+i)$. L'une des deux injections du sous-groupe d'Iwahori est l'injection standard, tandis que l'autre est conjuguée à la première dans $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$.

La connaissance des cohomologies de $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ et de son sous-groupe d'Iwahori, ainsi que celle des applications induites en cohomologie par les deux injections, permet l'étude de $H^*(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ à l'aide de la suite exacte longue de type Mayer-Vietoris associée à la somme amalgamée. On peut ensuite obtenir $H^*(BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ en utilisant la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre associée à la suite exacte courte

$$1 \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times \rightarrow 1$$

On a d'abord réalisé cette étude dans le cas de $PSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ qui est analogue, puis calculé la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ en utilisant la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre associée à la suite exacte courte

$$1 \rightarrow C_2 \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow 1$$

3.2 Le bon espace pour calculer $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$

Le chapitre 1 est consacré à la construction d'un espace contractile \mathcal{Z} muni d'une action propre de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$, dans le but de calculer sa cohomologie équivariante, isomorphe à la cohomologie de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

On considère d'abord l'espace \mathcal{H} des formes hermitiennes positives définies sur \mathbb{C}^2 . Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ agit proprement sur \mathcal{H} par multiplication à gauche via l'homéomorphisme $\mathcal{H} \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{U}(2)$ (proposition 5).

Le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ agit trivialement sur \mathcal{H} , aussi \mathcal{H} pourrait-il être un bon candidat pour étudier la cohomologie de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Cependant, \mathcal{H} s'avère trop grand pour permettre un calcul aisé de sa cohomologie équivariante (le quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{H}$ n'est pas compact).

Du fait de la bijection entre $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et l'espace \mathcal{L} des réseaux de dimension 2 (proposition 8), l'espace \mathcal{H} présente l'avantage d'autoriser à travailler soit en terme de réseaux, soit en terme de formes hermitiennes. À l'aide d'une rétraction de l'espace \mathcal{L} vers l'espace \mathcal{W} des réseaux bien arrondis de dimension 2 (réseaux de dimension 2 dont l'espace vectoriel complexe engendré par les vecteurs non nuls de norme minimale est \mathbb{C}^2), on construit un $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ -rétracte par déformation de \mathcal{H} , qui s'avère être le bon espace \mathcal{Z} .

3.3 Cohomologie de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i])$

L'étude de l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ sur \mathcal{Z} , permet de munir \mathcal{Z} d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ -CW-complexe (avec action cellulaire de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$). On obtient la cohomologie de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ en examinant la suite spectrale de Leray-Serre E associée à la projection

$$\mathrm{E}\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) \times_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])} \mathcal{Z} \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$$

avec filtration par les squelettes de la structure cellulaire précédente de \mathcal{Z} .

La cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ est déjà connue ([SV83], [Ber00], [Wei01]). Son recalcul ici se justifie parce qu'il permet d'obtenir également les cohomologies à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{BPGL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{BGL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et qu'il est à la base du calcul de la cohomologie du classifiant du sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$, nécessaire à notre calcul de $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$.

3.4 Cohomologie du sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$

On notera dans la suite Γ_0 le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. L'étude de l'action de Γ_0 sur \mathcal{Z} permet d'obtenir une structure cellulaire de \mathcal{Z} comme Γ_0 -CW-complexe à partir de sa structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ -CW-complexe.

On étudie alors la suite spectrale de Leray-Serre E' associée à la projection $\mathrm{E}\Gamma_0 \times_{\Gamma_0} \mathcal{Z} \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ avec filtration par les squelettes de \mathcal{Z} comme

Γ_0 -CW-complexe. Cette suite spectrale, moins favorable que dans le cas de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$, nous contraint à calculer directement $H^1(\mathrm{B}\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ pour pouvoir conclure. Ce calcul est effectué à partir de la détermination d'une présentation de Γ_0 par générateurs et relations qui est déduite de la structure Γ_0 -cellulaire de \mathcal{Z} à l'aide d'un résultat de Brown ([Bro84]).

3.5 Cohomologies de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$, $\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ et $\mathrm{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$

Pour étudier la suite exacte longue de type Mayer-Vietoris qui est associée à la décomposition en somme amalgamée de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$, la stratégie consiste à étudier d'abord les applications induites par les injections standard et non standard au niveau de décompositions en produit libre liées aux cohomologies $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$ et $H^*(\mathrm{B}\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$, et qui ont été mises en évidence au chapitres 2 et 3.

Si le cas de l'injection standard est aisé à traiter, celui de l'injection non-standard est plus délicat. Cette difficulté est résolue par une étude plus profonde de la rétraction de l'espace \mathcal{L} des réseaux sur l'espace \mathcal{W} des réseaux bien arrondis (voir section 1.4).

Théorème 2. *On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_2[w_2, w_3]$ -module*

$$H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3]\{1, a_3, b_3, a_3b_3\}$$

où w_2 et w_3 sont les classes de Stiefel-Whitney de la représentation canonique de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (dont le classifiant a même type d'homotopie que celui de $\mathrm{PSU}(2) = \mathrm{SO}(3)$) et $|a_3| = |b_3| = 3$. La structure multiplicative est donnée par $a_3^2 = w_2^3 + w_3^2 + w_3a_3$ et $b_3^2 = w_3b_3$.

On passe ensuite au cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ via l'étude de la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre associée à la suite exacte courte

$$1 \rightarrow C_2 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow 1.$$

Théorème 3. *On a un isomorphisme d'algèbre*

$$H^*(\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_2] \otimes \Lambda(a_3, b_3)$$

où c_2 est la deuxième classe de Chern de la représentation canonique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, et $|a_3| = |b_3| = 3$.

La suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre associée à la suite exacte courte $1 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times \rightarrow 1$ permet alors d'obtenir le théorème 1.

Chapitre 1

Le bon espace \mathcal{Z} pour calculer $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$ - Réseaux

1.1 Réseaux et formes hermitiennes

La stratégie adoptée pour calculer $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$ est classique : construire un espace contractile \mathcal{Z} sur lequel le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ agit d'une manière la plus simple possible, puis déterminer sa cohomologie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ -équivariante.

Par action la plus simple possible, on entend une action propre avec un quotient pour cette action qui soit compact. Dans ces conditions, le calcul de la cohomologie équivariante est réalisable, en particulier si on peut doter l'espace \mathcal{Z} d'une structure cellulaire sur laquelle $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ agit cellulièrement (définition 47), auquel cas on dispose d'une suite spectrale raisonnable (proposition 48).

1.1.1 Les espaces \mathcal{H}_n et \mathcal{L}_n

Formes hermitiennes positives définies sur \mathbb{C}^n

Définition 4. On note \mathcal{H}_n l'espace des formes hermitiennes positives définies sur \mathbb{C}^n .

L'espace \mathcal{H}_n est contractile (c'est un cône convexe). Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit transitivement à gauche sur \mathcal{H}_n . Plus précisément, on a :

Proposition 5. L'espace \mathcal{H}_n des formes hermitiennes positives définies sur \mathbb{C}^n est en bijection avec le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/U(n)$.

Démonstration. On considère l'action à gauche de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur \mathcal{H}_n définie par

$$M.h = (x \mapsto h(M^{-1}x))$$

où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $h \in \mathcal{H}_n$.

Cette action est transitive, car pour toute forme hermitienne positive définie il existe une base dans laquelle la matrice associée à cette forme hermitienne est diagonale.

Tout choix d'une forme hermitienne positive définie particulière permet d'obtenir une bijection entre l'espace \mathcal{H}_n et le quotient à droite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par le sous-groupe d'isotropie de cette forme hermitienne.

Le sous-groupe d'isotropie de la forme hermitienne positive définie norme carrée ($x \mapsto \|x\|^2$) est le groupe unitaire $\mathrm{U}(n)$, d'où la proposition. \square

Dans toute la thèse, l'espace \mathcal{H}_n est muni de la topologie induite par celle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ via la bijection de la proposition 5.

L'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[i])$ sur \mathcal{H}_n comme sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est propre car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[i])$ est discret et $\mathrm{U}(n)$ compact. L'espace \mathcal{H}_n pourrait donc être un bon candidat pour étudier $H^*(\mathrm{BGL}_n(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$.

Malheureusement, même pour $n = 2$, le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{H}_n$ n'est pas compact. On définira en section 1.1.3 le bon sous-espace de \mathcal{H}_n .

Par ailleurs, le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[i])$ agit trivialement sur \mathcal{H}_n . Si \mathcal{H}_n n'était pas trop grand, il serait donc aussi un bon candidat pour étudier $H^*(\mathrm{BPGL}_n(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$, $H^*(\mathrm{BSL}_n(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$ et $H^*(\mathrm{BPSL}_n(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$.

Réseaux de dimension n

Plutôt que d'étudier l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[i])$ sur \mathcal{H}_n , on peut étudier l'action de $\mathrm{U}(n)$ sur l'espace des réseaux de dimension n que nous définissons ci-après.

Définition 6. *Un réseau L de dimension n est un sous- $\mathbb{Z}[i]$ -module de \mathbb{C}^n , libre de rang n , et contenant une base de \mathbb{C}^n .*

L'exemple le plus simple de réseau de dimension n est $\mathbb{Z}[i]^n$. On l'appelle réseau standard de dimension n . Il sera noté Std_n dans toute la suite (ou Std s'il n'y a pas ambiguïté sur la dimension).

Définition 7. *On note \mathcal{L}_n l'espace des réseaux de dimension n .*

Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit transitivement à droite sur \mathcal{L}_n . Plus précisément, on a :

Proposition 8. *L'espace \mathcal{L}_n des réseaux de dimension n est en bijection avec le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. On considère l'action à droite de $GL_n(\mathbb{C})$ sur \mathcal{L}_n définie par

$$L.M := M^{-1}(L)$$

où $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $L \in \mathcal{L}_n$.

Cette action est transitive, et le sous-groupe d'isotropie du réseau standard Std_n est $GL_n(\mathbb{Z}[i])$, d'où la proposition. \square

Dans toute la thèse, l'espace \mathcal{L}_n est muni de la topologie induite par celle de $GL_n(\mathbb{C})$ via la bijection de la proposition 8.

Rapport entre \mathcal{H}_n et \mathcal{L}_n

Le lien entre les espaces \mathcal{H}_n et \mathcal{L}_n est donné par la proposition qui suit.

Proposition 9. *On a un homéomorphisme*

$$GL_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{H}_n \cong \mathcal{L}_n / U(n)$$

Démonstration. On peut réaliser les doubles classes de $GL_n(\mathbb{C})$ suivant $GL_n(\mathbb{Z}[i])$ et $U(n)$ dans l'ordre souhaité :

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash (GL_n(\mathbb{C}) / U(n)) &\cong GL_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{H}_n && \text{(proposition 5)} \\ \Downarrow &&& \\ (GL_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash GL_n(\mathbb{C})) / U(n) &\cong \mathcal{L}_n / U(n) && \text{(proposition 8)}. \end{aligned}$$

\square

Le même résultat est valable pour $PGL_n(\mathbb{Z}[i])$ puisque le centre de $GL_n(\mathbb{Z}[i])$ agit trivialement sur \mathcal{H}_n .

Au niveau des sous-groupes d'isotropie :

Lemme 10. *Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$, et considérons la forme hermitienne positive définie $h : x \mapsto \|M^{-1}x\|^2$ et le réseau $L = M^{-1}(\text{Std}_n)$. Alors les sous-groupes d'isotropie de h pour l'action de $GL_n(\mathbb{Z}[i])$ et de L pour l'action de $U(n)$ sont conjugués dans $GL_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. C'est un fait général inhérent au principe des doubles classes $H \backslash G / K$ d'un groupe G suivant deux de ses sous-groupes H et K . Si gK est une classe à gauche suivant K (resp. Hg une classe à droite suivant H), et si H_{gK} désigne le sous-groupe d'isotropie de gK pour l'action de H (resp. K_{Hg} le sous-groupe d'isotropie de Hg pour l'action de K), alors on a la relation

$$gK_{Hg}g^{-1} = H_{gK}$$

Dans notre cas, on considère les doubles classes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) / \mathrm{U}(n)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ suivant les sous-groupes $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[i])$. Les homéomorphismes des propositions 5 et 8 ont été construits de telle façon que la forme hermitienne h et le réseau L soient au-dessus de la même double classe. D'où le lemme. \square

1.1.2 Vecteurs minimaux d'un réseau L

Nous ferons un usage fréquent des notions qui suivent.

Définition 11. *On appelle minimum du réseau L et on note $m(L)$ la quantité*

$$m(L) := \min_{\substack{v \in L \\ v \neq 0}} \|v\|$$

c'est à dire la norme du plus court vecteur non nul de L . Si la norme utilisée n'est pas précisée, il s'agira de la norme carrée habituelle.

Ce minimum existe car L est discret.

Définition 12. *On appelle vecteur minimal du réseau L tout vecteur de norme $m(L)$.*

Définition 13. *On note $M(L)$ l'ensemble des vecteurs minimaux du réseau L . L'espace vectoriel complexe engendré par $M(L)$ sera noté $\langle M(L) \rangle$.*

L'ensemble $M(L)$ est fini car L est discret.

Définition 14. *Les directions de vecteurs minimaux du réseau L sont les éléments de l'ensemble fini*

$$D(L) := M(L) / \mathbb{Z}[i]^\times$$

Définition 15. *On note \mathcal{L}_n^1 l'espace des réseaux de dimension n et de minimum 1.*

1.1.3 L'espace \mathcal{Z}_n

Réseaux bien arrondis

On va construire en section 1.2 une rétraction par déformation de l'espace \mathcal{H}_n sur un sous-espace adéquat \mathcal{Z}_n , à partir de la construction d'une autre rétraction par déformation de l'espace \mathcal{L}_n sur l'espace \mathcal{W}_n^1 des réseaux bien arrondis de minimum 1 que nous définissons ci-après.

Définition 16. *Un réseau L est bien arrondi si $\langle M(L) \rangle = \mathbb{C}^n$.*

L'exemple le plus simple de réseau bien arrondi de dimension n est le réseau standard Std_n .

Définition 17. *On note \mathcal{W}_n (resp. \mathcal{W}_n^1) le sous-espace de \mathcal{L}_n (resp. \mathcal{L}_n^1) des réseaux bien arrondis (resp. bien arrondis de minimum 1).*

L'action de $U(n)$ sur \mathcal{L}_n (resp. \mathcal{L}_n^1) se restreint en une action de $U(n)$ sur \mathcal{W}_n (resp. \mathcal{W}_n^1), car elle préserve la minimalité des vecteurs.

Définition de \mathcal{Z}_n

Définition 18. *Soit le réseau standard Std_n . On note \mathcal{Y}_n l'espace*

$$\mathcal{Y}_n := \{M \in GL_n(\mathbb{C}) \mid M^{-1}(\text{Std}_n) \in \mathcal{W}_n^1\}$$

L'espace \mathcal{Y}_n est l'image réciproque de l'espace \mathcal{W}_n^1 par la bijection de la proposition 8. L'espace \mathcal{Y}_n est invariant par les actions à gauche de $GL_n(\mathbb{Z}[i])$ et à droite de $U(n)$.

Définition 19. *On note \mathcal{Z}_n l'espace quotient $\mathcal{Y}_n/U(n)$.*

Les deux définitions précédentes et la proposition 9 impliquent :

Proposition 20. *On a les homéomorphismes suivants :*

- (i) $GL_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Y}_n \cong \mathcal{W}_n^1$,
- (ii) $GL_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}_n \cong \mathcal{W}_n^1/U(n)$.

1.2 Rétraction

On va construire ici une rétraction par déformation ρ de l'espace des réseaux \mathcal{L}_n sur l'espace \mathcal{W}_n^1 des réseaux bien arrondis de minimum 1, à partir de laquelle on montrera que l'espace \mathcal{Z}_n est un rétracte par déformation de l'espace \mathcal{H}_n .

1.2.1 Rétraction de \mathcal{L}_n sur \mathcal{L}_n^1

Proposition 21. *L'espace \mathcal{L}_n^1 des réseaux de minimum 1 est un rétracte par déformation de l'espace \mathcal{L}_n des réseaux.*

Démonstration. C'est évident : il suffit d'appliquer à chaque réseau L l'homothétie de rapport $m(L)^{-1}$. \square

1.2.2 Rétraction de \mathcal{L}_n^1 sur \mathcal{W}_n^1

Soit $L \in \mathcal{L}_n^1$ un réseau de dimension n et de minimum 1. Si $\langle M(L) \rangle = \mathbb{C}^n$, alors L est déjà bien arrondi et on pose $\rho(L) = L$.

Dans le cas contraire, on considère la rétraction radiale de \mathbb{C}^n sur $\langle M(L) \rangle$ parallèlement à l'orthogonal $\langle M(L) \rangle^\perp$ de $\langle M(L) \rangle$. Cette rétraction radiale envoie à l'instant $t \in [0, 1]$ le couple $(v, w) \in \langle M(L) \rangle \oplus \langle M(L) \rangle^\perp$ sur le couple $(v, (1-t)w)$.

La rétraction radiale diminue strictement la norme des vecteurs de L qui n'appartiennent pas à $\langle M(L) \rangle$ (on a $\|v + (1-t)w\|^2 = \|v\|^2 + (1-t)^2\|w\|^2 \leq \|v + (1-t')w\|^2$ si $t > t'$). Il existe donc un instant t_0 minimal pour lequel le rétracte de L acquiert de nouveaux vecteurs minimaux.

On note L_{t_0} le rétracte de L à cet instant t_0 . Le processus s'arrête si L_{t_0} est bien arrondi. Sinon, on considère la rétraction radiale de \mathbb{C}^n sur $\langle M(L_{t_0}) \rangle$ parallèlement à l'orthogonal $\langle M(L_{t_0}) \rangle^\perp$ de $\langle M(L_{t_0}) \rangle$. On trouve un instant t_1 minimal où L_{t_0} acquiert de nouveaux vecteurs minimaux et on note L_{t_0, t_1} le rétracte de L_{t_0} à cet instant t_1 . En un nombre fini d'étapes, on obtient un réseau L_{t_0, \dots, t_m} qui est bien arrondi. On pose $\rho(L) = L_{t_0, \dots, t_m} \in \mathcal{W}_n^1$.

Proposition 22. *L'application ρ construite ci-dessus est une rétraction par déformation de l'espace \mathcal{L}_n^1 sur l'espace \mathcal{W}_n^1 . Cette rétraction est de plus équivariante pour l'action à droite de $U(n)$.*

Démonstration. On a évidemment $\rho(L) = L \Leftrightarrow L \in \mathcal{W}_n^1$, puisque $\rho(L)$ est bien arrondi et de minimum 1, et $\rho(L) = L$ quand L est bien arrondi.

La continuité de ce type de rétraction est bien connue (voir par exemple [Hen99], [Ash84], [Sou78]).

Il est implicite dans la construction de ρ qu'il existe une homotopie $H : \mathcal{L}_n^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_n^1$ de ρ à l'identité de \mathcal{L}_n^1 . Il suffit de considérer tous les instants de toutes les retractions radiales utilisées pour définir ρ .

La construction de ρ est $U(n)$ -équivariante. De fait, si L est un réseau bien arrondi de minimum 1, alors le réseau $L.U$ l'est aussi ($U(n)$ agit sur \mathcal{W}_n^1). Si maintenant L n'est pas bien arrondi, alors le sous-espace vectoriel complexe de \mathbb{C}^n engendré par $M(L.U)$ est $U^{-1}(\langle M(L) \rangle)$. Il en va de même de son orthogonal. Les retractions radiales se correspondent donc à multiplication près à gauche par U^{-1} . Ainsi, les réseaux L et $L.U$ acquièrent de nouveaux vecteurs minimaux au même instant t_0 , et on obtient par récurrence $\rho(L.U) = \rho(L).U$. \square

1.2.3 Rétraction de \mathcal{L}_n sur \mathcal{W}_n^1

Corollaire 23. *L'espace \mathcal{W}_n^1 des réseaux bien arrondis de minimum 1 est un rétracte par déformation de l'espace des réseaux \mathcal{L}_n . On notera abusive-*

ment ρ la rétraction de \mathcal{L}_n sur \mathcal{W}_n^1 qui est composition des retractions des propositions 21 et 22.

1.2.4 Rétraction de \mathcal{H}_n sur \mathcal{Z}_n

Proposition 24. *L'espace \mathcal{Z}_n est un rétracte par déformation de l'espace \mathcal{H}_n . La rétraction est $GL_n(\mathbb{Z}[i])$ -équivariante à gauche.*

Démonstration. A l'aide de la théorie des revêtements, la rétraction par déformation $U(n)$ -équivariante à droite $\rho : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{W}_n^1$ se relève en une rétraction par déformation $GL_n(\mathbb{Z}[i])$ -équivariante à gauche et $U(n)$ -équivariante à droite de $GL_n(\mathbb{C})$ sur \mathcal{Y}_n . Comme l'homotopie de ρ à l'identité de \mathcal{L}_n est $U(n)$ -équivariante à droite (même preuve que pour l' $U(n)$ -équivariance à droite de ρ), cette rétraction de $GL_n(\mathbb{C})$ sur \mathcal{Y}_n est compatible avec le passage au quotient par l'action à droite de $U(n)$. On obtient ainsi une rétraction par déformation $GL_n(\mathbb{Z}[i])$ -équivariante à gauche de $GL_n(\mathbb{C})/U(n) \cong \mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{Y}_n/U(n) = \mathcal{Z}_n$. \square

Corollaire 25. *Le quotient $GL_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}_n$ est un rétracte par déformation de $GL_n(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{H}_n$.*

Démonstration. On utilise la $GL_n(\mathbb{Z}[i])$ -équivariance de la rétraction de la proposition 24. \square

1.3 Détermination de $GL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$

Désormais, et pour toute la suite de la thèse, on ne travaillera plus qu'avec des réseaux de dimension 2 et des formes hermitiennes positives définies sur \mathbb{C}^2 , aussi ignorera-t-on l'indice n dans les notations. Par exemple, la notation \mathcal{W}^1 désignera les réseaux bien arrondis de dimension 2 et de minimum 1.

1.3.1 Caractérisation des réseaux bien arrondis et inventaire de leurs vecteurs minimaux

Si on considère n vecteurs minimaux d'un réseau L linéairement indépendants, alors ils engendrent un sous-réseau de L qui est bien arrondi. La réciproque est vraie si $n \leq 2$.

Proposition 26. *Soit L un réseau bien arrondi de dimension inférieure ou égale à 2. Alors il possède une base en tant que groupe abélien composée uniquement de vecteurs minimaux.*

Démonstration. Le résultat est évident si L est de dimension 1. Soit donc $L \in \mathcal{W}^1$ un réseau bien arrondi de dimension 2 et de minimum 1, et v_1 et v_2 deux vecteurs minimaux de L linéairement indépendants. On note L' le sous-réseau bien arrondi de L qu'ils engendrent. Quitte à appliquer une rotation au réseau L , on peut supposer

$$v_1 = (1, 0) \text{ et } v_2 = (\overline{v_1 \cdot v_2}, x)$$

où $x = \sqrt{1 - |v_1 \cdot v_2|^2}$.

Supposons qu'il existe $v \in L - L'$. Alors il existe $v' = (a, b)$ dans le sous- $\mathbb{Z}[i]$ -module de L engendré par v_1 , v_2 et v tel que

$$\max(|\Re(a)|, |\Im(a)|) \leq \frac{1}{2} \text{ et } \max(|\Re(b)|, |\Im(b)|) \leq \frac{x}{2}$$

Si v_1 et v_2 ne sont pas orthogonaux, alors $x < 1$ et on obtient $\|v'\| < 1$, en contradiction avec l'appartenance de v' à L . Donc v_1 et v_2 constituent une base de L .

Si v_1 et v_2 sont orthogonaux, alors $x = 1$ et v' est un vecteur minimal de L . Si $v_1 \cdot v' \neq 0$, alors v_1 et v' constituent une base de L d'après ce qu'on vient de voir. Si maintenant $v_1 \cdot v' = 0$, alors $v' = \epsilon v_2$, avec $|\epsilon| = 1$. On a forcément $\epsilon \in \mathbb{Z}[i]^\times$ car dans toute base de L , les coordonnées de v_2 et v' appartiennent à $\mathbb{Z}[i]$ par définition, et $\mathbb{Z}[i] \cap S^1 = \mathbb{Z}[i]^\times$. Donc $v' \in L'$, ce qui est impossible. Les vecteurs v_1 et v_2 constituent alors une base de L . \square

Lemme 27. *Soit L un réseau de dimension 2 de base (v_1, v_2) , tel que $\|v_1\| \leq \|v_2\|$. Si on a $\max(|\Re(v_1 \cdot v_2)|, |\Im(v_1 \cdot v_2)|) > \frac{\|v_2\|^2}{2}$, alors le vecteur v_1 n'est pas minimal.*

Démonstration. On a

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2\Re(v_1 \cdot v_2)$$

Si $\Re(v_1 \cdot v_2) < -\frac{\|v_2\|^2}{2}$, alors $\|v_1 + v_2\| < \|v_1\|$, et donc $m(L) < \|v_1\|$. Le même raisonnement avec $v_1 + \epsilon v_2$, où $\epsilon \in \mathbb{Z}[i]^\times$ achève la preuve. \square

Dans le cas des réseaux bien arrondis de minimum 1, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 28. *Si $L \in \mathcal{W}^1$ admet pour base (v_1, v_2) , avec $v_1, v_2 \in M(L)$, alors le produit scalaire $v_1 \cdot v_2$ vérifie*

$$\max(|\Re(v_1 \cdot v_2)|, |\Im(v_1 \cdot v_2)|) \leq \frac{1}{2}$$

Pour vérifier la réciproque du corollaire précédent, et inventorier les vecteurs minimaux des réseaux bien arrondis de dimension 2, nous aurons besoin du lemme suivant qui resservira aussi page 19.

Lemme 29. *Soient v_1 et v_2 deux vecteurs linéairement indépendants dans un espace unitaire, et soit $v = kv_1 + lv_2$ un vecteur de norme inférieure ou égale à une constante $C > 0$. Alors*

$$|k| \leq \frac{C\|v_2\|}{\sqrt{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2}} \quad \text{et} \quad |l| \leq \frac{C\|v_1\|}{\sqrt{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2}}$$

Démonstration. Si on pose $v'_1 := v_1 - \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2$, alors $v'_1 \cdot v_2 = 0$, et on a $v = kv'_1 + (k \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_2\|^2} + l)v_2$. On obtient ainsi

$$\|v\|^2 \geq |k|^2 \|v'_1\|^2 = |k|^2 \left(\|v_1\|^2 - \frac{|v_1 \cdot v_2|^2}{\|v_2\|^2} \right)$$

c'est à dire $\|v\|^2 \|v_2\|^2 \geq |k|^2 (\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2)$, et finalement

$$|k|^2 \leq \frac{\|v\|^2 \|v_2\|^2}{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2}$$

Comme $\|v\| \leq C$, on obtient

$$|k| \leq \frac{C\|v_2\|}{\sqrt{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2}}$$

Les rôles de v_1 et v_2 sont symétriques, d'où également

$$|l| \leq \frac{C\|v_1\|}{\sqrt{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2}}$$

□

Soit L un réseau de dimension 2 de base (v_1, v_2) avec $\|v_1\| = \|v_2\|$ et tel que le produit scalaire $v_1 \cdot v_2$ vérifie $\max(|\Re(v_1 \cdot v_2)|, |\Im(v_1 \cdot v_2)|) \leq \frac{\|v_2\|^2}{2}$. On s'intéresse à déterminer si L est bien arrondi ou non. Pour ce faire, on recherche les vecteurs v de L de norme inférieure ou égale à $\|v_2\|$ à l'aide du lemme 29 précédent.

Si $v = kv_1 + lv_2$, $k, l \in \mathbb{Z}[i]$, on obtient

$$|k|, |l| \leq \frac{\|v_2\|^2}{\sqrt{\|v_2\|^4 - |v_1 \cdot v_2|^2}} \leq \sqrt{2}$$

car $|v_1 \cdot v_2|^2 \leq \frac{\|v_2\|^4}{2}$ puisque $\max(|\Re(v_1 \cdot v_2)|, |\Im(v_1 \cdot v_2)|) \leq \frac{\|v_2\|^2}{2}$.

L'examen des valeurs possibles pour k et l démontre les deux propositions qui suivent.

Proposition 30. *Si L est un réseau de dimension 2 de base (v_1, v_2) avec $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ et tel que le produit scalaire $v_1.v_2$ vérifie*

$$\max(|\Re(v_1.v_2)|, |\Im(v_1.v_2)|) \leq \frac{1}{2}$$

alors le réseau L est bien arrondi de minimum $m(L) = 1$ (et en particulier la base (v_1, v_2) est composée de vecteurs minimaux).

Proposition 31. *Un système de représentants des directions de vecteurs minimaux d'un réseau bien arrondi L de dimension 2 et de minimum 1 muni d'une base (v_1, v_2) composée de vecteurs minimaux et telle que $0 \leq \Im(v_1.v_2) \leq \Re(v_1.v_2) \leq \frac{1}{2}$ est donné dans le tableau ci-après, ainsi que la numérotation de ces représentants utilisée dans toute la thèse.*

vecteur minimal	condition supplémentaire sur $v_1.v_2$	notation
v_1	aucune	v_1
v_2	aucune	v_2
$v_1 - v_2$	$\Re(v_1.v_2) = \frac{1}{2}$	v_3
$v_1 - iv_2$	$v_1.v_2 = \frac{(1+i)}{2}$	v_4
$v_1 - (1+i)v_2$		v_5
$v_2 - (1-i)v_1$		v_6

TAB. 1.1 – Représentants des directions de vecteurs minimaux de $L \in \mathcal{W}^1$.

Remarque 32. *Si on n'a pas $0 \leq \Im(v_1.v_2) \leq \Re(v_1.v_2) \leq \frac{1}{2}$, il suffit de remplacer v_2 par $-v_2$ ou $\pm iv_2$ et d'éventuellement échanger v_1 et v_2 .*

1.3.2 Réseaux bien arrondis à rotation près

On va construire dans cette section un homéomorphisme entre le quotient $\mathcal{W}^1/U(2)$ et une partie du plan complexe.

Définition 33. *On note \mathcal{D} le sous-espace compact du plan complexe*

$$\mathcal{D} := \{z \mid 0 \leq \Im(z) \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2}\}$$

Le lemme qui suit décrit les valeurs possibles du produit scalaire de deux vecteurs minimaux d'un réseau bien arrondi.

Lemme 34. *Soit L un réseau bien arrondi de dimension 2 et de minimum 1 muni d'une base (v_1, v_2) composée de vecteurs minimaux. Alors si (v'_1, v'_2) est une autre base de L composée de vecteurs minimaux, le produit scalaire $v'_1.v'_2$ est égal à $v_1.v_2$ ou à son conjugué complexe (à multiplication près par $\mathbb{Z}[i]^\times$).*

On appelle produit scalaire caractéristique d'un réseau L celle de ces valeurs qui appartient à \mathcal{D} .

Démonstration. Tout d'abord il est clair que le produit scalaire $v'_1.v'_2$ peut appartenir à l'ensemble $\{v_1.v_2, \overline{v_1.v_2}\}$ à multiplication près par $\mathbb{Z}[i]^\times$, puisque pour $(v'_1, v'_2) = (v_2, v_1)$ on a $v'_1.v'_2 = \overline{v_1.v_2}$ et pour $(v'_1, v'_2) = (\epsilon v_1, v_2)$ on a $v'_1.v'_2 = \epsilon(v_1.v_2)$, $\epsilon \in \mathbb{Z}[i]^\times$.

Si $\max(|\Re(v_1.v_2)|, |\Im(v_1.v_2)|) < \frac{1}{2}$, on a terminé car il n'existe que deux directions de vecteurs minimaux qui sont représentées par v_1 et v_2 (proposition 31).

Si maintenant $\max(|\Re(v_1.v_2)|, |\Im(v_1.v_2)|) = \frac{1}{2}$, un examen direct à l'aide du tableau 1.1 des valeurs des produits scalaires des paires de vecteurs minimaux du réseau L qui en forment une base montre qu'il n'existe pas d'autre valeur possible pour $v'_1.v'_2$. \square

Remarque 35. *Si $v_1.v_2 = \frac{(1+i)}{2}$, on trouve trois paires de vecteurs minimaux (à multiplication près par $\mathbb{Z}[i]^\times$) dont le produit scalaire est nul (v_3 et v_4 ; v_1 et v_5 ; v_2 et v_6). Ce ne sont pas des bases du réseau L . Ces trois paires engendrent trois sous-réseaux bien arrondis propres du réseau bien arrondi L . Il s'agit du seul cas où un réseau bien arrondi de dimension 2 admet un sous-réseau bien arrondi propre (voir preuve de la proposition 26). Cette particularité servira aux chapitres 2 et 3.*

Proposition 36. *Soit l'application ϕ définie par*

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{W}^1/U(2) \\ a &\mapsto \overline{\phi_a} \end{aligned}$$

où ϕ_a est le réseau bien arrondi de minimum 1 engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \sqrt{1-|a|^2} \end{pmatrix}$.

L'application ϕ est un homéomorphisme.

Démonstration. Tout d'abord l'application ϕ est bien définie, car le réseau ϕ_a est bien arrondi du fait de la proposition 30. S'il existe a et $a' \in \mathcal{D}$ tels que $\phi(a) = \phi(a')$, alors il existe $U \in U(2)$ tel qu'au niveau des réseaux, $\phi_a = \phi_{a'}.U$. Comme $U \in U(2)$, U envoie la paire de vecteurs minimaux du réseau $\phi_{a'}$ $((1, 0), (\bar{a}', \sqrt{1-|a'|^2}))$ sur une paire de vecteurs minimaux du réseau ϕ_a

de produit scalaire a' . Le lemme 34, implique alors $a' \in \{\pm a, \pm ia, \pm \bar{a}, \pm i\bar{a}\}$. Mais cela implique $a = a'$ car a est le seul élément de $\{\pm a, \pm ia, \pm \bar{a}, \pm i\bar{a}\}$ qui appartient à \mathcal{D} . Donc l'application ϕ est injective.

Soit maintenant $\bar{L} \in \mathcal{W}^1/U(2)$, et soit (v_1, v_2) une base de L composée de vecteurs minimaux. Si $v_1 = (x, y)$, et $U = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$, alors le réseau $L.U$ admet pour base $((1, 0), (\overline{v_1.v_2}, \mu\sqrt{1 - |v_1.v_2|^2}))$, $\mu \in S^1$. On en déduit que $\bar{L} = L.U \begin{pmatrix} 1 & \\ & \mu \end{pmatrix} = \phi(v_1.v_2)$. L'application ϕ est donc surjective.

L'application ϕ est bijective et clairement continue; elle est également ouverte, car \mathcal{D} est compact et $\mathcal{W}^1/U(2)$ séparé. Les espaces \mathcal{D} et $\mathcal{W}^1/U(2)$ sont donc homéomorphes. \square

On a donc

$$\mathcal{D} \cong \mathcal{W}^1/U(2) \cong GL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z} = PGL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$$

Remarque 37. *On peut maintenant comprendre pourquoi l'espace \mathcal{Z} est un bon espace pour calculer la cohomologie de $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$. L'espace \mathcal{Z} est en effet un espace contractile sur lequel $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$ agit proprement et avec un quotient compact ($PSL_2(\mathbb{Z}[i])$ est d'indice 2 dans $PGL_2(\mathbb{Z}[i])$), et donc le quotient $PSL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$ est un revêtement ramifié à deux feuilles de $PGL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$.*

1.4 Calculs explicites de rétractions

Les informations de cette section serviront au chapitre 4, et plus particulièrement les images des sommets et arêtes des figures 1.3 et 1.5, qui sont récapitulées dans les tableaux 1.2 et 1.4.

Définition 38. *Soit L un réseau bien arrondi de minimum 1, de base (v_1, v_2) avec $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ et $v_1.v_2 = a \in \mathcal{D}$. On note L_I , L_{II} et L_{III} les sous-réseaux de L*

- $L_I := \langle v_1, (1+i)v_2 \rangle$,
- $L_{II} := \langle v_2, (1+i)v_1 \rangle$,
- $L_{III} := \langle v_1 - v_2, v_1 - iv_2 \rangle$.

Remarque 39. *Les paires (L, L_I) , (L, L_{II}) et (L, L_{III}) appartiennent à l'espace \mathcal{L}' qui sera défini p.51.*

1.4.1 Calcul explicite du rétracte d'un réseau

Situation

Dans toute cette sous-section on travaille avec un réseau $L \in \mathcal{L}^1 - \mathcal{W}^1$ de dimension 2 et de minimum 1 non bien arrondi qui admet pour base (v_1, v_2) où $\|v_1\| = 1$ (en particulier, $\|v_1\| < \|v_2\|$). Comme la rétraction ρ du corollaire 23 est $U(2)$ -équivariante, on peut supposer que $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (\overline{v_1 \cdot v_2}, \sqrt{\|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2})$ (on a $\|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2 > 0$).

On va noter $R(v, t)$ l'image à l'instant $t \in [0, 1]$ du vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ par la rétraction radiale R de \mathbb{C}^n sur $\langle M(L) \rangle = \langle \{v_1\} \rangle$ parallèlement à $\langle M(L) \rangle^\perp$.

Si $v \in L - \langle M(L) \rangle$, alors il s'écrit $v = kv_1 + lv_2$, où $k \in \mathbb{Z}[i]$ et $l \in \mathbb{Z}[i]^\times$, et on a

$$R(v, t) = (k + l\overline{v_1 \cdot v_2}, (1-t)l\sqrt{\|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2})$$

Définition 40. Soit $v = kv_1 + lv_2$, avec $k \in \mathbb{Z}[i]$ et $l \in \mathbb{Z}[i]^\times$ un vecteur du réseau L . On note c_v la constante

$$c_v := \frac{1 - |k + l\overline{v_1 \cdot v_2}|^2}{|l|^2(\|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2)}$$

Si le vecteur v de L devient de norme 1 à l'instant t_v , alors v vérifie la relation

$$\begin{aligned} \|R(v, t_v)\|^2 = 1 &\Leftrightarrow |k + l\overline{v_1 \cdot v_2}|^2 + (1-t_v)^2 |l|^2 (\|v_2\|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2) = 1 \\ &\Leftrightarrow (1-t_v)^2 = c_v. \end{aligned}$$

Cette relation implique que le vecteur v ne peut être candidat à devenir vecteur minimal après rétraction que si $|k + l\overline{v_1 \cdot v_2}| \leq 1$. On a alors $0 \leq c_v \leq 1$.

Comme pour toute valeur de l , il existe au moins une valeur de k telle que $|k + l\overline{v_1 \cdot v_2}| \leq 1$, on se placera désormais dans le cas où $|k + l\overline{v_1 \cdot v_2}| \leq 1$.

Le polynôme $(1-t)^2 - c_v$ admet pour racines $1 \pm \sqrt{c_v}$. Le vecteur v deviendra ainsi de norme 1 à l'instant $t_v = 1 - \sqrt{c_v}$, puisque $0 \leq c_v \leq 1$.

Recherche de l'instant où L devient bien arrondi

On recherche l'instant où le rétracte du réseau L par la rétraction radiale R devient un réseau bien arrondi, et on ne connaît pas l'identité des vecteurs de L qui deviennent minimaux à cet instant.

On est contraint à déterminer le minimum t_0 sur $L - \langle M(L) \rangle$ de la fonction $L \rightarrow [0, 1]$, $v \mapsto t_v$. Le rétracte de L à l'instant t_0 est le réseau bien arrondi $\rho(L)$, et les nouveaux vecteurs minimaux sont ceux de la forme $R(v, t_v)$ où v vérifie $t_v = t_0$.

Si le vecteur v devient après rétraction vecteur minimal de $\rho(L)$ (c'est à dire $R(v, t_v) \in M(\rho(L))$), alors on a

$$0 \leq |\Re(v_1 \cdot R(v, t_v))|, |\Im(v_1 \cdot R(v, t_v))| \leq \frac{1}{2}$$

car le réseau $\rho(L)$ est bien arrondi (corollaire 28). Comme $v_1 \cdot R(v, t_v) = k + \overline{v_1 \cdot v_2}$, on obtient la relation

$$\frac{1}{2|l|^2} \leq c_v(|v_1|^2|v_2|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2) \leq \frac{1}{|l|^2}$$

Minimiser t_v , c'est maximiser la constante c_v , d'où $|l| = 1$. Si il existe $v = kv_1 + v_2$, avec $k \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $0 \leq |\Re(k + \overline{v_1 \cdot v_2})|, |\Im(k + \overline{v_1 \cdot v_2})| \leq \frac{1}{2}$, alors la valeur maximale c_0 de c_v pour $v \in L - \langle M(L) \rangle$ vérifiera

$$\frac{1}{2} \leq c_0(|v_1|^2|v_2|^2 - |v_1 \cdot v_2|^2) \leq 1$$

et t_0 sera le minimum de t_v pour les vecteurs de la forme $v = kv_1 + v_2$, avec $k \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $0 \leq |\Re(k + \overline{v_1 \cdot v_2})|, |\Im(k + \overline{v_1 \cdot v_2})| \leq \frac{1}{2}$. Le lemme qui suit montre qu'on se trouve toujours dans ce cas.

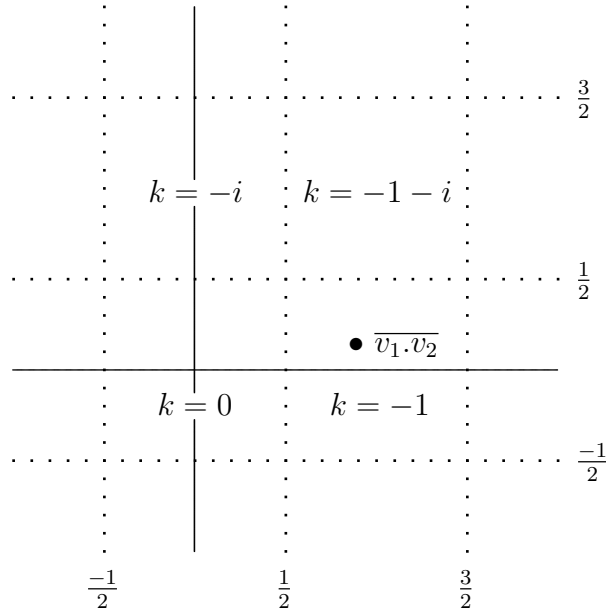
Lemme 41. *Selon la valeur de $v_1 \cdot v_2$, il existe toujours un, deux ou quatre vecteurs $v = kv_1 + v_2$, $k \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $0 \leq |\Re(k + \overline{v_1 \cdot v_2})|, |\Im(k + \overline{v_1 \cdot v_2})| \leq \frac{1}{2}$.*

Démonstration. On étudie les zones du plan complexe délimitées par les droites d'équations $\Re(x + iy) = \frac{2m+1}{2}$ et $\Im(x + iy) = \frac{2m'+1}{2}$, où $m, m' \in \mathbb{Z}$.

Le produit scalaire $v_1 \cdot v_2$ se trouve à l'intérieur d'une de ces zones (resp. sur l'une des droites, resp. à l'intersection de deux des droites). Il y a alors une seule (resp. deux, resp. quatre) valeur de k qui convient (et par suite un seul (resp. deux, resp. quatre) vecteur v qui convient).

Par exemple, si $v_1 \cdot v_2$ appartient à l'intérieur de la zone délimitée par les droites d'équations $\Re(x + iy) = \frac{1}{2}$, $\Re(x + iy) = \frac{3}{2} = \frac{2 \times 1 + 1}{2}$, $\Im(x + iy) = \frac{-1}{2}$ et $\Im(x + iy) = \frac{1}{2} = \frac{2 \times 0 + 1}{2}$, alors seul l'entier de Gauss $k = -1$ conviendra pour avoir $|\Re(k + \overline{v_1 \cdot v_2})| \leq \frac{1}{2}$ et $|\Im(k + \overline{v_1 \cdot v_2})| \leq \frac{1}{2}$ (voir figure 1.1 ci-dessous). □

On sait donc déterminer t_0 dans tous les cas. Cela pourrait ne pas suffire à déterminer le produit scalaire caractéristique du réseau bien arrondi $\rho(L)$ dans le cas où $|k + \overline{v_1 \cdot v_2}| = 0$, car il est alors nécessaire de connaître le nombre de directions de vecteurs minimaux de $\rho(L)$ pour déterminer si son produit scalaire caractéristique est 0 ou $1 + i$ (d'après le tableau 1.1, s'il y en a deux,

FIG. 1.1 – Détermination des valeurs convenables de k

alors le produit scalaire caractéristique est 0; s'il y en a six, alors le produit scalaire caractéristique est $(1 + i)/2$.

Si $|k + \overline{v_1.v_2}| = 0$, alors $c_0 = \frac{1}{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - |v_1.v_2|}$. Les seuls vecteurs $v = kv_1 + lv_2$, $k \in \mathbb{Z}[i]$ et $l \in \mathbb{Z}[i]^\times$ qui peuvent vérifier $c_v = c_0$ vérifient $|l| = 1$. Le lemme 41 permet ainsi d'affirmer qu'il y a au plus cinq directions de vecteurs minimaux dans $\rho(L)$ (en comptant la direction de v_1). Le produit scalaire caractéristique de $\rho(L)$ est donc nul.

Bilan et méthode de calcul

Il suffit de déterminer la ou les valeurs convenables de k pour $l = 1$. La classe dans $\mathcal{W}^1/U(2)$ du réseau $\rho(L)$ est alors complètement déterminée par la valeur de $k + \overline{v_1.v_2}$.

Proposition 42. *Soit L un réseau de dimension 2 et de minimum 1 non bien arrondi qui admet pour base (v_1, v_2) où $\|v_1\| = 1$. Soit $k \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\max(|\Re(k + \overline{v_1.v_2})|, |\Im(k + \overline{v_1.v_2})|) \leq \frac{1}{2}$. Posons $b = k + \overline{v_1.v_2}$. Alors le rétracte bien arrondi $\rho(L)$ de minimum 1 a pour produit scalaire caractéristique la seule valeur parmi $\{\pm b, \pm ib, \pm \bar{b} \pm i\bar{b}\}$ qui appartient à \mathcal{D} .*

1.4.2 Rétracte du sous-réseau L_I

Soit L un réseau bien arrondi de dimension 2 et de minimum 1, de base (v_1, v_2) avec $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ et $v_1 \cdot v_2 = a \in \mathcal{D}$, et soit son sous-réseau L_I engendré par les vecteurs $V_1 = v_1$ et $V_2 = (1+i)v_2$. On a $m(L_I) = 1$.

Soit v un vecteur de L_I de la forme $v = kV_1 + lV_2$, avec $k, l \in \mathbb{Z}[i]$. Le produit scalaire $V_1 \cdot V_2$ est égal à $(1-i)a$. On applique la proposition 42.

Proposition 43. *Considérons la figure 1.2 page suivante. Le produit scalaire caractéristique du réseau bien arrondi $\rho(L_I)$ de minimum 1 est donné par les formules*

$$\begin{aligned} \text{zone } \mathbf{1} & : (1+i)\bar{a}, \\ \text{zone } \mathbf{2} & : 1 - (1-i)a. \end{aligned}$$

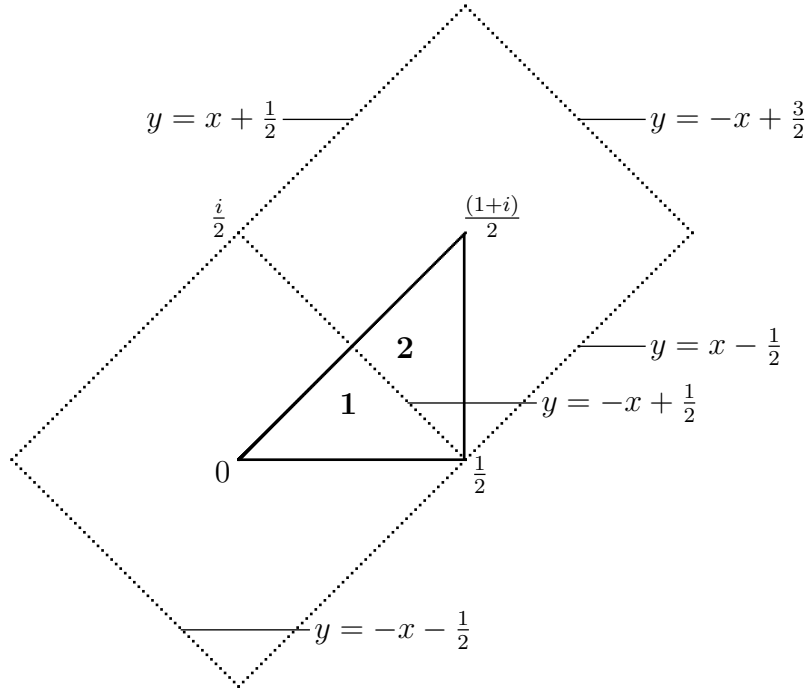


FIG. 1.2 – Valeur de k en fonction de a pour $l = 1$

Démonstration. Remarquons d'abord que les deux formules coïncident sur la frontière des deux zones $\mathbf{1}$ et $\mathbf{2}$ (ρ est continue). Les droites représentées sur la figure 1.2 permettent de déterminer les valeurs de k considérées à la proposition 42. Pour la zone $\mathbf{1}$, $k = 0$, et pour la zone $\mathbf{2}$, $k = -1$. Dans le premier cas, $k + \overline{V_1 \cdot V_2} = (1+i)\bar{a} \in \mathcal{D}$, et dans le second cas, $k + \overline{V_1 \cdot V_2} =$

$(1+i)\bar{a} - 1 \notin \mathcal{D}$, mais l'opposé de son conjugué appartient bien à \mathcal{D} , d'où la seconde formule. \square

Contrairement à la figure 1.1, les droites pointillées de la figure 1.2 sont obliques. Cela vient du fait que $V_1.V_2 = (1+i)a$ et que les axes de la figure 1.2 représentent $\Re(a)$ et $\Im(a)$ au lieu de $\Re(V_1.V_2)$ et $\Im(V_1.V_2)$.

On peut illustrer ce que devient le produit scalaire caractéristique de $\rho(L_I)$ en fonction du produit scalaire caractéristique de L :

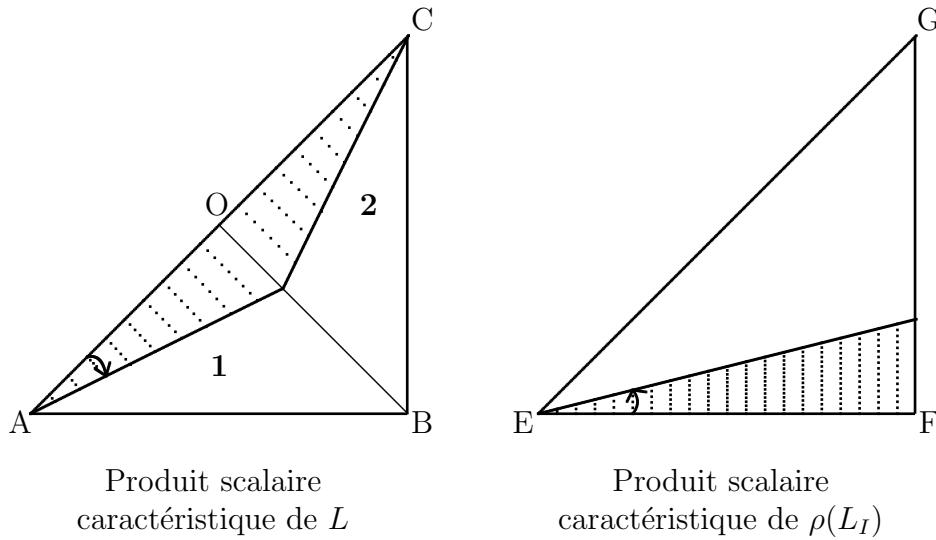


FIG. 1.3 – Illustration de l'effet de ρ

Chacun des triangles orientés AOB et COB est envoyé sur EFG . Pour AOB , cela revient à effectuer la symétrie d'axe réel, suivie d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$.

Sommet	Image par ρ
A	E
B	G
C	E
O	F

Arête	Image par ρ
AB	EG
BC	EG
AO	EF
OC	FE

TAB. 1.2 – Images des sommets et arêtes

1.4.3 Rétracte du sous-réseau L_{II}

Soit L un réseau bien arrondi de dimension 2 et de minimum 1, de base (v_1, v_2) avec $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ et $v_1 \cdot v_2 = a \in \mathcal{D}$ et soit son sous-réseau L_{II} engendré par les vecteurs $V_1 = v_2$ et $V_2 = (1+i)v_1$. On a $m(L_{II}) = 1$.

Soit v un vecteur de L_{II} de la forme $v = kV_1 + lV_2$, avec $k, l \in \mathbb{Z}[i]$. Le produit scalaire $V_1 \cdot V_2$ est égal à $(1-i)\bar{a}$. On applique la proposition 42.

Proposition 44. *Considérons la figure 1.4 ci-dessous. Le produit scalaire caractéristique du réseau bien arrondi de minimum 1 $\rho(L_{II})$ est donné par les formules*

$$\begin{aligned} \text{zone } \mathbf{1} & : (1+i)\bar{a}, \\ \text{zone } \mathbf{2} & : 1 - (1-i)a. \end{aligned}$$

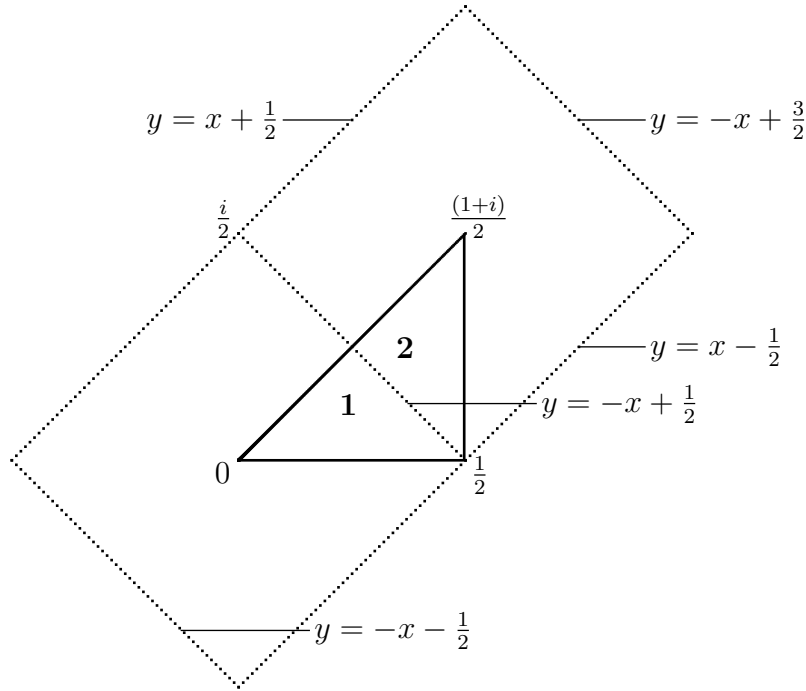


FIG. 1.4 – Valeur de k en fonction de a pour $l = 1$

Démonstration. Remarquons d'abord que les deux formules coïncident sur la frontière des deux zones **1** et **2** (ρ est continue). Les droites représentées sur la figure 1.2 permettent de déterminer les valeurs de k considérées à la proposition 42. Pour la zone **1**, $k = 0$, et pour la zone **2**, $k = -i$. Dans le premier cas, $k + \overline{V_1 \cdot V_2} = (1+i)a \notin \mathcal{D}$, mais son conjugué multiplié par i

appartient à \mathcal{D} ; dans le second cas, $k + \overline{V_1 V_2} = (1+i)a - i \notin \mathcal{D}$, mais son produit par i appartient bien à \mathcal{D} , d'où la seconde formule. \square

Le résultat de la proposition 44 est identique à celui de la proposition 43. On pourra donc se reporter à la figure 1.3 et au tableau 1.2.

1.4.4 Rétracte du sous-réseau L_{III}

Soit L un réseau bien arrondi de dimension 2 et de minimum 1, de base (v_1, v_2) avec $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ et $v_1 \cdot v_2 = a \in \mathcal{D}$ et soit son sous-réseau L_{III} engendré par les vecteurs $V_1 = v_1 - v_2$ et $V_2 = v_1 - iv_2$.

Soit v un vecteur de L_{III} de la forme $v = kV_1 + lV_2$, avec $k, l \in \mathbb{Z}[i]$. Le produit scalaire $V_1 \cdot V_2$ est égal à $(1-i)(1 - \Re(a) - \Im(a))$.

Contrairement aux cas de L_I et L_{II} , le sous-réseau L_{III} n'est pas forcément de minimum 1. Il faut ainsi calculer $m(L_{III})$ préalablement à l'application de la proposition 42. On en profitera également pour déterminer l'ensemble $D(L_{III})$.

Minimum $m(L_{III})$ et directions de vecteurs minimaux $D(L_{III})$

Comme L_{III} est un sous-réseau de L , on a $m(L_{III}) \geq 1$, et parce que $(1+i)v_1$ et $(1+i)v_2$ appartiennent tous deux à L_{III} , le minimum $m(L_{III})$ est majoré par $\sqrt{2}$. On va appliquer le lemme 29 afin de déterminer les vecteurs $w = kv_1 + lv_2$ de L_{III} candidats pour être de norme $\|w\| < \sqrt{2}$.

On obtient

$$|k|, |l| < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-|a|^2}}$$

Comme $0 \leq \Im(v_1 \cdot v_2) \leq \Re(v_1 \cdot v_2) \leq \frac{1}{2}$, la majoration précédente se ramène à $|k|, |l| < 2$, soit compte tenu du fait que $k, l \in \mathbb{Z}[i]^\times$:

$$|k|, |l| < \sqrt{2}$$

A multiplication près par $\mathbb{Z}[i]^\times$, on aurait donc à considérer les cas de

- $v_1, v_2, v_1 + \epsilon(1+i)v_2, \epsilon(1+i)v_1 + v_2$, (candidats A)
- $(1+i)v_1, (1+i)v_2$, (candidats B)
- $(1+i)(v_1 + \epsilon v_2)$, (candidats C)
- $v_1 + \epsilon v_2$, (candidats D)

où $\epsilon \in \mathbb{Z}[i]^\times$.

Les candidats A sont exclus car ces vecteurs n'appartiennent pas à L_{III} ; les candidats B sont de norme $\sqrt{2}$ et n'interviennent donc que si $m(L_{III}) = \sqrt{2}$; enfin, les candidats C sont exclus car $|(1+i)(v_1 + \epsilon v_2)| = \sqrt{2}|v_1 + \epsilon v_2|$.

vecteur w	norme $\ w\ $	valeurs de a pour lesquelles $\ w\ < \sqrt{2} \mid \ w\ = \sqrt{2}$ $(0 \leq \Im m(a) \leq \Re e(a) \leq \frac{1}{2})$	
$v_1 + v_2$	$\sqrt{2(1 + \Re e(a))}$	aucune	$\Re e(a) = 0$
$v_1 - v_2$	$\sqrt{2(1 - \Re e(a))}$	$\Re e(a) \neq 0$	$\Re e(a) = 0$
$v_1 + iv_2$	$\sqrt{2(1 + \Im m(a))}$	aucune	$\Im m(a) = 0$
$v_1 - iv_2$	$\sqrt{2(1 - \Im m(a))}$	$\Im m(a) \neq 0$	$\Im m(a) = 0$

 TAB. 1.3 – Norme des vecteurs de L_{III} de la forme $v_1 + \epsilon v_2$, $\epsilon \in \mathbb{Z}[i]^\times$

Il reste donc à examiner le cas des candidats D, ce qui se trouve reproduit au tableau 1.3 ci-après.

On peut désormais obtenir l'information désirée sur $m(L_{III})$ et $D(L_{III})$.

Proposition 45. *Sous les hypothèses du début de la section 1.4.1 :*

- (i) *On a $m(L_{III}) = \sqrt{2(1 - \Re e(a))}$. En particulier, $m(L_{III}) = 1$ si et seulement si $\Re e(a) = \frac{1}{2}$.*
- (ii) *Si $\Im m(a) = \Re e(a)$, alors le réseau L_{III} est déjà bien arrondi, et on a $D(L_{III}) = \{v_1 - v_2, v_1 - iv_2\}$ si $a \neq 0$, et $D(L_{III}) = \{v_1 + \epsilon v_2, \epsilon \in \mathbb{Z}[i]^\times, (1+i)v_1, (1+i)v_2\}$ si $a = 0$.*
- (iii) *Si $\Im m(a) < \Re e(a)$, alors on a $D(L_{III}) = \{v_1 - v_2\}$.*

Calcul de $\rho(L_{III})$

Proposition 46. *Le produit scalaire caractéristique du réseau bien arrondi $\rho(L_{III})$ de minimum 1 est donné par la formule*

$$(1+i) \frac{1 - \Re e(a) - \Im m(a)}{2(1 - \Re e(a))}$$

Démonstration. D'après la proposition 45, il nous faut distinguer deux cas :

- $\Im m(a) = \Re e(a)$. Le réseau L_{III} est alors déjà bien arrondi.
- $\Im m(a) < \Re e(a)$.

Dans les deux cas, on a $m(L_{III}) = \sqrt{2(1 - \Re e(a))}$.

Plaçons-nous dans le cas $\Im m(a) = \Re e(a)$. Le réseau L_{III} est déjà bien arrondi, de vecteurs minimaux notamment V_1 et V_2 . On a donc

$$\rho(L_{III}) = \frac{L_{III}}{m(L_{III})}$$

et il suffit de calculer $V_1.V_2$ puis de le diviser par $m(L_{III})^2$ pour obtenir le produit scalaire caractéristique de $\rho(L_{III})$.

En posant $r := \Re e(a) = \Im m(a)$ (on a alors $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, et $m(L_{III}) = \sqrt{2(1-r)}$), on obtient $V_1.V_2 = (1-i)(1-2r)$. Le produit scalaire caractéristique de $\rho(L_{III})$ est donc déterminé par la formule

$$(1+i) \frac{1-2r}{2(1-r)}$$

(il a fallu multiplier le résultat par i pour se retrouver dans \mathcal{D}). Ce produit scalaire ne s'annule que pour $r = \frac{1}{2}$, mais dans cette situation V_1 et V_2 sont les seuls vecteurs minimaux de L_{III} . On a donc bien déterminé le produit scalaire caractéristique de $\rho(L_{III})$ pour tout r .

Plaçons-nous ensuite dans le cas $\Im m(a) < \Re e(a)$. La proposition 45 nous dit que le réseau L_{III} a pour unique direction de vecteur minimaux celle de V_1 . On a $V_1.V_2 = (1-i)(1-\Re e(a) - \Im m(a))$.

Si $l = 1$, on trouve $k = 0$, et le produit scalaire caractéristique du réseau $\rho(L_{III})$ est

$$(1+i) \frac{1 - \Re e(a) - \Im m(a)}{2(1 - \Re e(a))}$$

Si on prend $\Im m(a) = \Re e(a)$ dans la formule précédente, on retrouve naturellement par continuité de ρ la formule du sous-cas $\Im m(a) = \Re e(a)$. \square

On peut illustrer l'effet de ρ ainsi : tout le triangle ABC est envoyé sur la diagonale EG .

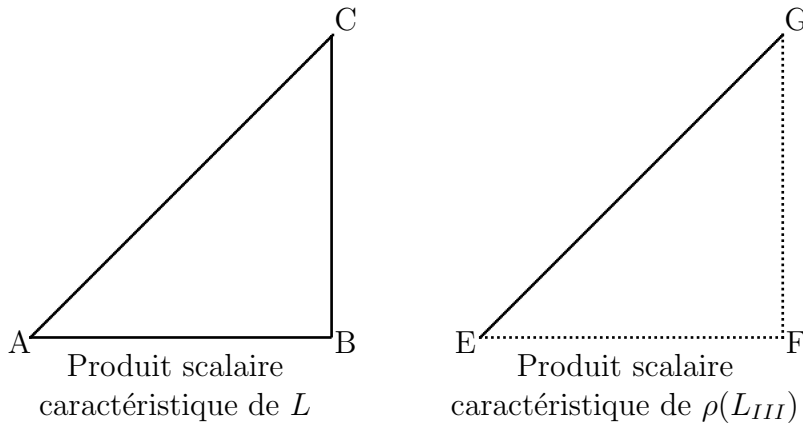


FIG. 1.5 – Illustration de l'effet de ρ

Sommet	Image par ρ	Arête	Image par ρ
A	G	AB	G
B	G	BC	GE
C	E	AC	GE

TAB. 1.4 – Images des sommets et arêtes

Chapitre 2

Cohomologie de $(\mathbf{P})\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[i])$ et $(\mathbf{P})\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$

2.1 Principe du calcul

Le chapitre précédent a été consacré à la construction de l'espace \mathcal{Z} et à l'élaboration de tout le matériel nécessaire au calcul de sa cohomologie Γ -équivariante (où Γ désigne $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])$, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[i])$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}[i])$ ou $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$). Comme l'espace \mathcal{Z} est contractile, sa cohomologie Γ -équivariante $H_\Gamma^*(\mathcal{Z}; \mathbb{F}_2)$ est isomorphe à la cohomologie $H^*(\mathrm{B}\Gamma; \mathbb{F}_2)$ du classifiant $\mathrm{B}\Gamma$ de Γ .

Pour déterminer la cohomologie Γ -équivariante de l'espace \mathcal{Z} , on va se servir de la suite spectrale de Leray-Serre E associée à la projection

$$E\Gamma \times_\Gamma \mathcal{Z} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{Z}$$

où $E\Gamma \times_\Gamma \mathcal{Z}$ est la construction de Borel. Cette suite spectrale converge vers $H_\Gamma^*(\mathcal{Z}; \mathbb{F}_2)$. Elle est décrite à la suite de la définition ci-après.

Définition 47. *L'action d'un groupe G sur un CW-complexe \mathcal{X} est cellulaire si cette action envoie les p -cellules homéomorphiquement sur d'autres p -cellules, de telle manière que les sous-groupes d'isotropie des cellules les fixent point par point.*

Proposition 48. *Soit \mathcal{X} un CW-complexe contractile sur lequel agit un groupe G . On suppose que l'action de G est cellulaire pour une structure cellulaire fixée de \mathcal{X} . Alors la suite spectrale de Leray-Serre associée à la projection $EG \times_G \mathcal{X} \rightarrow G \backslash \mathcal{X}$ converge vers la cohomologie équivariante $H_G^*(\mathcal{X}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(\mathrm{B}G; \mathbb{F}_2)$. Elle a pour première page*

$$E_1^{p,q} \cong \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H^*(\mathrm{B}G_\sigma; \mathbb{F}_2)$$

où Σ_p est un système de représentants des orbites de p -cellules pour l'action de G , et G_σ le sous-groupe d'isotropie de la cellule σ . Les composantes de la différentielle d_1 sont données par les compositions

$$H^*(BG_\sigma; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial^*} H^*(BG_{g\tau}; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{c_g^*} H^*(BG_\tau; \mathbb{F}_2)$$

où $\sigma \in \Sigma_p$, $\tau \in \Sigma_{p-1}$, $g\tau$ est une cellule du bord de σ , ∂^* est induit à l'aide du lemme de Shapiro par le bord du complexe de cochaines cellulaires

$$\partial : \mathbb{F}_2[G/G_\sigma] \rightarrow \mathbb{F}_2[G/G_{g\tau}]$$

et c_g est la conjugaison

$$\begin{aligned} c_g : G_\tau &\rightarrow G_{g\tau} \\ \gamma &\mapsto g\gamma g^{-1} \end{aligned}$$

Remarque 49. Si on peut choisir Σ de façon à ce que le bord de toute cellule $\sigma \in \Sigma_p$ soit constitué uniquement de cellules $\tau \in \Sigma_{p-1}$, alors la différentielle d_1 est complètement déterminée par les restrictions $\mathrm{Res} : H^*(BG_\sigma; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(BG_\tau; \mathbb{F}_2)$. C'est le cas notamment quand il existe un domaine fondamental dans \mathcal{X} pour l'action de G .

On pourra se référer à [Bro82] p172-178, [McC01] ou [SV83] p574-576.

2.2 Analyse de \mathcal{Z}

On va décrire dans cette section tous les éléments nécessaires à l'écriture de la première page de la suite spectrale E de la proposition 48. Soit $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$ ou $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$. On va ainsi :

- décrire un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de Γ ,
- reconstruire \mathcal{Z} à partir de ce domaine fondamental,
- munir \mathcal{Z} d'une structure cellulaire de telle façon que l'action de Γ soit cellulaire (définition 47),
- déterminer les sous-groupes d'isotropie pour l'action de Γ sur \mathcal{Z} ,
- donner une description graphique de l'apparence locale de \mathcal{Z} .

2.2.1 Domaine fondamental

On a vu au lemme 34, que tout réseau bien arrondi $L \in \mathcal{W}^1$ possède un produit scalaire caractéristique $a \in \mathcal{D}$. On a également défini l'homéomorphisme

$$\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}^1/U(2)$$

$$a \mapsto \overline{\phi_a}$$

où ϕ_a est le réseau bien arrondi de minimum 1 engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \sqrt{1-|a|^2} \end{pmatrix}$ (proposition 36).

On va montrer que \mathcal{D} est également homéomorphe à un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Proposition 50. *Soit l'application*

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{D} &\rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & \bar{a} \\ 0 & \sqrt{1-|a|^2} \end{pmatrix}^{-1}, \end{aligned}$$

et soit $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ la composition de λ avec la projection canonique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur \mathcal{H} . Alors l'application Ψ est un homéomorphisme de \mathcal{D} sur un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Démonstration. Les applications λ et Ψ sont clairement continues. Le réseau $\lambda(a)^{-1}(\mathbb{Z}[i]^2)$ est bien arrondi et engendré par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \sqrt{1-|a|^2} \end{pmatrix}$. Ce réseau est de minimum 1 et n'est autre que ϕ_a (voir page 11). On a donc $\lambda(a)^{-1}(\mathbb{Z}[i]^2) \in \mathcal{W}^1$, $\lambda(a) \in \mathcal{Y}$, et $\Psi(a) \in \mathcal{Z}$.

Posons $\Gamma := \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$, et considérons le diagramme commutatif (*) ci-dessous, avec les informations suivantes :

- les applications $\pi_1 : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $\pi_2 : \mathcal{Z} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{Z}$ sont les projections évidentes ;
- on a par définition $\Psi = \pi_1 \circ \lambda$;
- on sait que $\mathcal{D} \stackrel{\phi}{\cong} \Gamma \backslash \mathcal{Z} \cong \mathcal{W}^1 / \mathrm{U}(2)$ (proposition 36).

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Y} & \\ \nearrow \lambda & & \downarrow \pi_1 \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{Z} & (*) \\ \searrow \phi \cong & & \downarrow \pi_2 \\ & & \Gamma \backslash \mathcal{Z} \cong \mathcal{W}^1 / \mathrm{U}(2) \end{array}$$

Comme $\lambda(a)^{-1}(\mathbb{Z}[i]^2) = \phi_a$, on a $\phi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \lambda = \pi_2 \circ \Psi$. Mais ϕ est un homéomorphisme, d'où l'injectivité de Ψ . L'application Ψ est ouverte car \mathcal{D} est compact et \mathcal{Z} séparé. L'application Ψ est donc un homéomorphisme sur son image dans \mathcal{Z} . Enfin, puisque $\mathcal{D} \cong \Gamma \backslash \mathcal{Z}$, l'image de Ψ est un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de Γ . \square

On va maintenant considérer le cas de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Définition 51. On note \mathcal{D}_{SL} le sous-espace compact du plan complexe

$$\mathcal{D}_{SL} := \{z \mid 0 \leq \Re e(z), \Im m(z) \leq \frac{1}{2}\}$$

Proposition 52. L'espace \mathcal{D}_{SL} est homéomorphe à un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Démonstration. Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ est d'indice 2 dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$, ce qui implique que le quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$ est un revêtement ramifié à deux feuilles du quotient $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$. Un système de représentants des classes à gauche $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$ est donné par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \\ i & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Comme $\Psi(\mathcal{D})$ est un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$, un bon candidat pour un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ est $\Psi(\mathcal{D}) \cup \begin{pmatrix} & \\ i & 1 \end{pmatrix} \Psi(\mathcal{D})$. C'est effectivement le cas.

Considérons l'extension de l'application Ψ à \mathcal{D}_{SL} définie par

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{D}_{SL} &\rightarrow \mathcal{Z} \\ a &\mapsto \overline{\begin{pmatrix} 1 & \bar{a} \\ 0 & \sqrt{1-|a|^2} \end{pmatrix}^{-1}} \end{aligned}$$

On va montrer que si $a \in \mathcal{D}$, alors $\Psi(i\bar{a}) = \begin{pmatrix} & \\ i & 1 \end{pmatrix} \Psi(a)$, ce qui équivaut à $\begin{pmatrix} 1 & -ia \\ \sqrt{1-|a|^2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ i & 1 \end{pmatrix} \lambda(a) \in \mathrm{U}(2)$. Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & -ia \\ \sqrt{1-|a|^2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ i & 1 \end{pmatrix} \lambda(a) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-|a|^2} \\ i\sqrt{1-|a|^2} & -i\bar{a} \end{pmatrix}$$

Cette matrice appartient à $\mathrm{U}(2)$ pour toute valeur de $a \in \mathcal{D}$.

En d'autres termes, si on subdivise \mathcal{D}_{SL} suivant la diagonale définie par $\Re e(a) = \Im m(a)$ pour $a \in \mathcal{D}_{SL}$, alors Ψ envoie le triangle inférieur de \mathcal{D}_{SL} homéomorphiquement sur $\Psi(\mathcal{D})$, et le triangle supérieur de \mathcal{D}_{SL} homéomorphiquement sur $\begin{pmatrix} & \\ i & 1 \end{pmatrix} \Psi(\mathcal{D})$.

Déterminons maintenant l'intersection $\Psi(\mathcal{D}) \cap \begin{pmatrix} & \\ i & 1 \end{pmatrix} \Psi(\mathcal{D})$. On sait déjà qu'elle est soit vide, soit homéomorphe à une partie du bord de \mathcal{D} puisque

\mathcal{D} est un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Il suffit d'étudier l'équation $\begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix} \Psi(a) = \Psi(a)$ pour $a \in \mathcal{D}$, qui équivaut à $\lambda(a)^{-1} \begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix} \lambda(a) \in \mathrm{U}(2)$. Mais

$$\lambda(a)^{-1} \begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix} \lambda(a) = \begin{pmatrix} i\bar{a} & \frac{1-i(\bar{a})^2}{\sqrt{1-|a|^2}} \\ i\sqrt{1-|a|^2} & -i\bar{a} \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'appartient à $\mathrm{U}(2)$ que si $|1 - i(\bar{a})^2|^2 = |1 - |a|^2|^2$, soit en posant $a = x + yi$,

$$(1 - 2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = (1 - x^2 - y^2)^2$$

ce qui implique $x = y$. Donc l'intersection $\Psi(\mathcal{D}) \cap \begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix} \Psi(\mathcal{D})$ est homéomorphe via l'application Ψ à la diagonale de \mathcal{D} .

On en déduit que $\Psi(\mathcal{D}) \cup \begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix} \Psi(\mathcal{D})$ est un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$, et que l'extension de Ψ à \mathcal{D}_{SL} est un homéomorphisme. \square

Les domaines fondamentaux que nous venons de déterminer l'ont déjà été par d'autres méthodes ([Flö83], [SV83], [Swa71], [Men80]).

2.2.2 Reconstruction de l'espace \mathcal{Z}

Proposition 53. *Soit $\Gamma = (P)\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$. L'espace \mathcal{Z} est homéomorphe au quotient du produit $\Gamma \times \mathcal{D}$ par la relation d'équivalence $(g, a) \sim (g', a')$ si et seulement si $a = a'$ et $g^{-1}g' \in \Gamma_{\Psi(a)}$, où $\Gamma_{\Psi(a)}$ est le sous-groupe d'isotropie de la forme hermitienne $\Psi(a)$ pour l'action du groupe Γ .*

On obtient un homéomorphisme analogue en considérant $(P)\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$, \mathcal{D}_{SL} et l'extension de Ψ à \mathcal{D}_{SL} .

Démonstration. On va traiter le cas de $\Gamma = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Il suffit de considérer l'extension Γ -équivariante de Ψ

$$\Psi : \Gamma \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Z}$$

$$(g, a) \mapsto g \cdot \Psi(a)$$

Cette extension est automatiquement surjective, continue et ouverte puisque l'image de Ψ est un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de Γ

(proposition 50). Pour la même raison, si $\Psi(g, a) = \Psi(1, a')$, alors $a = a'$. On a donc $g \in \Gamma_{\Psi(a)}$, où $\Gamma_{\Psi(a)}$ désigne le sous-groupe d'isotropie de la forme hermitienne $\Psi(a)$ pour l'action de Γ .

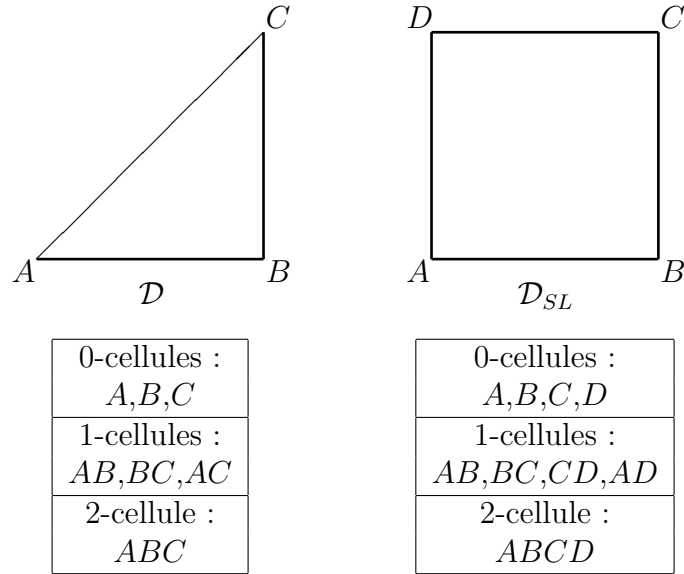
On déduit de ce qui précède que si on quotiente le produit $\Gamma \times \mathcal{D}$ par la relation d'équivalence $(g, a) \sim (g', a')$ si et seulement si $\Psi(g, a) = \Psi(g', a')$, alors on obtient un Γ -espace homéomorphe à \mathcal{Z} ; et que cette relation équivaut à $a = a'$ et $g^{-1}g' \in \Gamma_{\Psi(a)}$. \square

2.2.3 Structure cellulaire sur \mathcal{Z}

La proposition 53 précédente a comme conséquence le fait que pour munir \mathcal{Z} d'une structure cellulaire qui en fait un Γ -CW-complexe, il suffit de munir \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}_{SL}) d'une structure cellulaire ordinaire.

Les p -cellules de \mathcal{Z} seront tous les sous-espaces de \mathcal{Z} de la forme $\Psi(g, \sigma)$, où g parcourt Γ et σ les p -cellules de \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}_{SL}).

Les applications d'attachement seront déduites de celles de \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}_{SL}), ainsi que du passage au quotient par la relation \sim de la proposition 53.



TAB. 2.1 – Structures cellulaires ordinaires sur \mathcal{D} et \mathcal{D}_{SL}

Remarque 54. Pour passer de la structure cellulaire de $(P)SL_2(\mathbb{Z}[i])$ -CW-complexe de \mathcal{Z} à celle de $(P)GL_2(\mathbb{Z}[i])$ -CW-complexe, on subdivise chaque 2-cellule suivant celle de ses diagonales qui est dans l'orbite de la diagonale AC de \mathcal{D}_{SL} .

2.2.4 Sous-groupes d'isotropie pour l'action de Γ

Le quotient $SL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$ est un revêtement ramifié à deux feuilles du quotient $GL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$ (preuve de la proposition 52). Si $M \in GL_2(\mathbb{C})$, la fibre au-dessus de $\overline{M} \in GL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$ est $\{\overline{M}, \overline{\begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix}} M\} \subset SL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$. En conséquence, les sous-groupes d'isotropie de deux points de \mathcal{D}_{SL} qui se projettent sur un même point de \mathcal{D} sont conjugués dans $GL_2(\mathbb{Z}[i])$ par la matrice $\begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix}$. On se contentera donc d'étudier les sous-groupes d'isotropie des points de \mathcal{Z} de la forme $\Psi(x)$ où $x \in \mathcal{D}$ pour l'action de $(P)GL_2(\mathbb{Z}[i])$ et $(P)SL_2(\mathbb{Z}[i])$.

Analyse générale

On rappelle que Γ désigne l'un des groupes parmi $GL_2(\mathbb{Z}[i])$, $PGL_2(\mathbb{Z}[i])$, $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ ou $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$.

Définition 55. Soit $h \in \mathcal{Z}$ une forme hermitienne positive définie. On note Γ_h le sous-groupe d'isotropie de cette forme hermitienne pour l'action de Γ . Si h est de la forme $\Psi(x)$ où x est un point de \mathcal{D} , on écrira souvent abusivement Γ_x au lieu de $\Gamma_{\Psi(x)}$. De même si σ est une cellule de \mathcal{D} , on notera Γ_σ le sous-groupe d'isotropie de la cellule $\Psi(\sigma)$ pour l'action de Γ .

Définition 56. Soit $L \in \mathcal{W}_1$ un réseau bien arrondi de minimum 1. On note U_L le sous-groupe d'isotropie de ce réseau pour l'action de $U(2)$. Si L est de la forme ϕ_x où x est un point de \mathcal{D} , on écrira souvent abusivement U_x au lieu de U_{ϕ_x} .

Lemme 57. Soit x un point de \mathcal{D} . Alors les sous-groupes d'isotropie U_x et $GL_2(\mathbb{Z}[i])_x$ sont conjugués dans $GL_2(\mathbb{C})$. Pour obtenir explicitement les éléments de $GL_2(\mathbb{Z}[i])_x$, il suffit d'écrire les éléments de U_x dans une base du réseau ϕ_x composée de vecteurs minimaux. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z}[i])_x$ est le sous-groupe constitué des éléments de $GL_2(\mathbb{Z}[i])_x$ de déterminant 1, tandis que le groupe $PGL_2(\mathbb{Z}[i])_x$ (resp. $PSL_2(\mathbb{Z}[i])_x$) est le quotient du groupe $GL_2(\mathbb{Z}[i])_x$ (resp. $SL_2(\mathbb{Z}[i])_x$) par son centre engendré par $\begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix}$ (resp. par son centre engendré par $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$).

Démonstration. En posant $g := \lambda(x)$, $H = GL_2(\mathbb{Z}[i])$ et $K = U(2)$, on obtient $gK = \Psi(x)$ (proposition 5), $Hg = \phi_x$ (proposition 8), et la relation

du lemme 10 devient

$$\lambda(x)U_x\lambda(x)^{-1} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_x$$

ce qui correspond à l'écriture des éléments de U_x dans l'une des bases composée de vecteurs minimaux du réseau bien arrondi ϕ_x .

Le reste du lemme est évident, car le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ agit trivialement sur \mathcal{Z} . \square

On peut donc analyser les sous-groupes d'isotropie pour l'action de Γ via l'analyse des sous-groupes d'isotropie des réseaux bien arrondis ϕ_x , $x \in \mathcal{D}$ pour l'action de $U(2)$.

Cette analyse va être facilitée par la connaissance explicite des vecteurs minimaux des réseaux ϕ_x , $x \in \mathcal{D}$ (tableau 1.1). En effet, si $u \in U(2)$ fixe globalement un réseau bien arrondi L , alors il agit sur l'ensemble $M(L)$ de ses vecteurs minimaux en les permutant.

Plus précisément, on peut distinguer les éléments de U_L qui fixent l'ensemble $D(L)$ des directions de vecteurs minimaux et ceux qui permutent ces directions. On obtient ainsi un homomorphisme

$$U_L \rightarrow \mathfrak{S}_{D(L)}$$

de noyau $N(L)$ les éléments qui fixent les $D(L)$, et d'image $G(L)$.

L'analyse pour $x \in \mathcal{D}$ des groupes $N(x)$, $G(x)$, et des extensions

$$1 \rightarrow N(x) \rightarrow U_x \rightarrow G(x) \rightarrow 1$$

permet de déterminer la structure des sous-groupes U_x et par suite Γ_x .

Afin d'alléger les notations, on notera abusivement $N(x)$ les groupes $\{g \in N(x) \mid \det g = 1\}$, $N(x)/\langle \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix} \rangle$ et $\{g \in N(x) \mid \det g = 1\}/\langle \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \rangle$. On parlera alors du groupe $N(x)$ « dans le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$ ou $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ ». On fera de même avec $G(x)$.

Si on prend soin d'écrire les éléments de $N(x)$ et $G(x)$ dans une base de ϕ_x constituée de vecteurs minimaux, on obtient des extensions de groupes

$$1 \rightarrow N(x) \rightarrow \Gamma_x \rightarrow G(x) \rightarrow 1$$

dans les cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Analyse de $N(x)$

Soient $x \in \mathcal{D}$, et ϕ_x le réseau bien arrondi qui lui est associé. Soit (v_1, v_2) une base de ϕ_x composée de vecteurs minimaux. Tout élément de $N(x)$ agit trivialement sur $D(\phi_x)$ et envoie en particulier v_1 sur ϵv_1 et v_2 sur $\epsilon' v_2$, $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{Z}[i]^\times$. Le groupe $N(x)$ est donc isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Z}[i]^\times \times \mathbb{Z}[i]^\times$.

L'action de $N(x)$ sur $\{\pm v_1, \pm i v_1, \pm v_2, \pm i v_2\}$ doit préserver le produit scalaire caractéristique $v_1 \cdot v_2 = a$ du réseau ϕ_x . Ainsi, si $a \neq 0$, seuls les éléments qui correspondent à la diagonale $\Delta = (\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{Z}[i]^\times \times \mathbb{Z}[i]^\times$ conviennent. Ils correspondent dans Γ_x au centre de Γ .

Si $a = 0$ ($x = A$), alors $N(A) \cong \mathbb{Z}[i]^\times \times \mathbb{Z}[i]^\times$ car $\epsilon v_1 \cdot \epsilon' v_2 = 0$ pour tout $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{Z}[i]^\times$, et $N(A)$ correspond dans Γ_A au sous-groupe engendré par $\begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix}$.

Les groupes $N(x)$, $x \in \mathcal{D}$ dans les cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ sont présentés dans le tableau qui suit.

	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$	$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$	$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$
$x = A$	$C_4 \times C_4$ $\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix} \rangle$	C_4 $\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix} \rangle$	C_4 $\langle \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \rangle$	C_2 $\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \rangle$
$x \neq A$	C_4 $\langle \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix} \rangle$	trivial	C_2 $\langle \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \rangle$	trivial

TAB. 2.2 – Structure des groupes $N(x)$ **Analyse de $G(x)$**

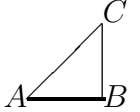
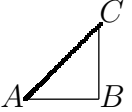
Soient $x \in \mathcal{D}$, et ϕ_x le réseau bien arrondi qui lui est associé. Soit (v_1, v_2) une base de ϕ_x composée de vecteurs minimaux. On numérote les représentants de $D(\phi_x)$ comme au tableau 1.1.

Comme le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ agit trivialement sur $D(\phi_x)$, les groupes $G(x)$ sont identiques dans les cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$ (resp. dans les cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$).

Il faut distinguer plusieurs cas suivant le nombre de directions de vecteurs minimaux et les symétries éventuelles du produit scalaire caractéristique de ϕ_x .

Si $x \in (\mathcal{D} - BC)$, il n'y a que deux directions de vecteurs minimaux. La seule opération non triviale sur $D(\phi_x)$ envisageable est l'échange entre les

directions de v_1 et v_2 . Elle n'est possible que si $a = \epsilon \bar{a}$, $\epsilon \in \mathbb{Z}[i]^\times$, car l'action de U_x préserve le produit scalaire caractéristique.

Symétrie	$a = \bar{a}$	$a = i\bar{a}$
zone de \mathcal{D}		

TAB. 2.3 – Symétries du produit scalaire caractéristique

Si $x \in (BC - C)$, il y a trois directions de vecteurs minimaux. On peut les permuter circulairement, par exemple en appliquant v_1 sur iv_2 et v_2 sur $-iv_3$, ce qui correspond dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_x$ à l'élément d'ordre 12 $\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$. Si $x = B$, on peut également échanger deux directions (symétrie $a = \bar{a}$).

Le cas de $x = C$ est plus complexe, car il y a six directions de vecteurs minimaux. Le réseau ϕ_C a la particularité de contenir trois sous-réseaux bien arrondis propres de produit scalaire caractéristique nul, de bases (v_1, v_5) , (v_3, v_4) et (v_2, v_6) (remarque 35). Le groupe U_C agit sur $D(C)$ en permutant les bases de ces trois sous-réseaux, et éventuellement en échangeant les directions de vecteurs minimaux au sein de chacun d'eux. Le groupe $G(C)$ est donc un sous-groupe du produit en couronne $C_2 \wr \mathfrak{S}_3$. Nous nous contenterons pour le moment de déterminer l'ordre de $G(C)$, à l'aide du lemme 58 qui suit.

Lemme 58. *Les 2-Sylows du sous-groupe d'isotropie U_C sont conjugués au sous-groupe d'isotropie U_A .*

Démonstration. Le sous-groupe d'isotropie de chacun des trois sous-réseaux bien arrondis propres de ϕ_C pour l'action de $U(2)$ est conjugué à U_A .

Leur intersection avec U_C est conjuguée à un sous-groupe de U_A et est donc un 2-groupe (U_A est d'ordre 32 puisque $N(A)$ est d'ordre 16 et $G(A)$ d'ordre 2). Comme les éléments de U_C qui ne fixent aucun des trois sous-réseaux bien arrondis propres de ϕ_C ne peuvent être d'ordre 2 (ils les permutent forcément circulairement), on déduit que les 2-Sylows de U_C sont ces intersections.

Si on écrit explicitement l'action des conjugués des éléments de U_A sur les directions de vecteurs minimaux du réseau ϕ_C , on s'aperçoit qu'ils laissent le réseau invariant dans son ensemble, ce qui n'était pas évident a priori. Par exemple, l'élément de U qui échange les vecteurs minimaux de produit scalaire nul v_3 et v_4 correspond à la permutation (15)(34) de $\mathfrak{S}_{D(C)}$ (numérotation des vecteurs minimaux suivant le tableau 1.1).

D'où le lemme. □

Les 2-Sylows de Γ_C sont donc conjugués à Γ_A d'après les lemmes 57 et 58.

Lemme 59. *Le groupe $G(C)$ est un sous-groupe d'indice 2 de $C_2 \wr \mathfrak{S}_3$ pour $\Gamma = (P)GL_2(\mathbb{Z}[i])$ (resp. d'indice 4 pour $\Gamma = (P)SL_2(\mathbb{Z}[i])$).*

Démonstration. On peut permuter circulairement les trois sous-réseaux bien arrondis propres de ϕ_C (notamment en appliquant v_1 sur iv_2 et v_2 sur $-iv_3$) et éventuellement aussi échanger les deux vecteurs de base de chacun de ces trois sous-réseaux bien arrondis propres. Le groupe $G(C)$ est donc un sous-groupe de $C_2 \wr \mathfrak{S}_3$.

Le groupe $GL_2(\mathbb{Z}[i])_A$ est d'ordre 32 ($N(A)$ est d'ordre 16 et $G(A)$ d'ordre 2) et contient le centre de $GL_2(\mathbb{Z}[i])$. Les 2-Sylows de $G(C)$ sont donc d'ordre 8, car le centre de $GL_2(\mathbb{Z}[i])$ agit trivialement sur $D(\phi_C)$. Comme on peut permuter circulairement les trois sous-réseaux bien arrondis propres de ϕ_C , le groupe $G(C)$ est d'ordre 24, et est ainsi d'indice 2 dans $C_2 \wr \mathfrak{S}_3$.

Dans le cas de $SL_2(\mathbb{Z}[i])$, on a la suite exacte courte

$$1 \rightarrow N(A) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}[i])_A \rightarrow G(A) \rightarrow 1$$

Le groupe $SL_2(\mathbb{Z}[i])_A$ est d'ordre 8 car $N(A)$ est cette fois d'ordre 4 et $G(A)$ d'ordre 2. Il contient le centre de $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ qui agit trivialement sur $D(\phi_C)$, aussi les 2-Sylows de $G(C)$ sont d'ordre 4. L'action de $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ permute circulairement les trois sous-réseaux bien arrondis propres de ϕ_C . Le groupe $G(C)$ est donc d'ordre 12, et $G(C)$ est ainsi d'indice 4 dans $C_2 \wr \mathfrak{S}_3$. \square

	$G(x)$	
	$\Gamma = (P)GL_2(\mathbb{Z}[i])$	$\Gamma = (P)SL_2(\mathbb{Z}[i])$
$x \in \mathcal{D} - (AB \cup BC \cup AC)$	trivial	trivial
$x \in AB - \{B\}$	C_2	C_2
$x \in AC - \{A, C\}$	C_2	trivial
$x \in BC - \{B, C\}$	C_3	C_3
$x = B$	\mathfrak{S}_3	\mathfrak{S}_3
$x = C$	$[C_2 \wr \mathfrak{S}_3 : G(C) = 2]$	$[C_2 \wr \mathfrak{S}_3 : G(C) = 4]$

TAB. 2.4 – Structure des groupes $G(x)$

Sous-groupes d'isotropie pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$

Proposition 60. *Les sous-groupes d'isotropie des cellules de $\Psi(\mathcal{D}_{SL})$ pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$ sont reportés dans le tableau qui suit.*

Cellule σ de \mathcal{D}_{SL}	$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])_\sigma$
A	$C_2 \times C_2$
B, D	\mathfrak{S}_3
C	\mathfrak{A}_4
AB, AD	C_2
BC, CD	C_3
$ABCD$	trivial

TAB. 2.5 – Sous-groupes d’isotropie pour l’action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])$

Démonstration. Pour $x \neq A$, le groupe $N(x)$ est trivial (tableau 2.2) et donc $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])_x \cong G(x)$. Le groupe $G(x)$ est déjà connu pour $x \neq C$: tableau 2.4.

Pour $x = A$, on a l’extension

$$1 \rightarrow C_2 = N(A) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])_A \rightarrow G(A) = C_2 \rightarrow 1$$

Elle est scindée, car l’échange entre les directions de v_1 et v_2 dans $D(\phi_A)$ se relève en $\begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$ d’ordre 2 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])$. Donc $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])_A \cong C_2 \times C_2$.

Pour $x = C$, on sait par les lemmes 58 et 59 que $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])_C$ est d’ordre 12 et contient $C_2 \times C_2 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])_A$ qui est son unique 2-Sylow pour une question de cardinalité. On peut vérifier que cet unique 2-Sylow est engendré par $\begin{pmatrix} i & & \\ 1-i & -i & \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -i & -1-i & \\ & i & \end{pmatrix}$ (on a $(iv_1 + (1-i)v_2) \cdot (-iv_2) = v_1 \cdot v_2$ et $-iv_1 \cdot ((-1-i)v_1 + iv_2) = v_1 \cdot v_2$). L’extension

$$1 \rightarrow C_2 \times C_2 \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])_C \rightarrow C_3 \rightarrow 1$$

est scindée car la permutation circulaire des directions de v_1 , v_2 et v_3 peut se relever en la matrice $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ d’ordre 3 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])$. L’action de $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} i & & \\ 1-i & -i & \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -i & -1-i & \\ & i & \end{pmatrix}$ est non triviale, aussi $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[i])_C \cong (C_2 \times C_2) \rtimes C_3 \cong \mathfrak{A}_4$. \square

Sous-groupes d’isotropie pour l’action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}[i])$

Proposition 61. *Les sous-groupes d’isotropie des cellules de $\Psi(\mathcal{D})$ pour l’action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}[i])$ sont reportés dans le tableau qui suit.*

Démonstration. Pour $x \neq A$, le groupe $N(x)$ est trivial (tableau 2.2) et donc $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}[i])_x \cong G(x)$. Le groupe $G(x)$ est déjà connu pour $x \neq C$: tableau 2.4.

Cellule σ de \mathcal{D}	$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])_\sigma$
A	D_8
B	\mathfrak{S}_3
C	\mathfrak{S}_4
AB	C_2
BC	C_3
AC	C_2
ABC	trivial

TAB. 2.6 – Sous-groupes d'isotropie pour l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$

Pour $x = A$, on a l'extension

$$1 \rightarrow C_4 = N(A) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])_A \rightarrow G(A) = C_2 \rightarrow 1$$

Elle est scindée, car le générateur de $G(A)$ peut se relever en $\begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix}$ d'ordre 2 dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$. L'action de $s := \begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix}$ sur le générateur $r := \begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix}$ de C_4 est non triviale : $s^{-1}rs = r^{-1}$. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])_A$ est donc le groupe diédral $D_8 \cong C_4 \rtimes C_2$.

Pour $x = C$, on sait par le lemme 58 que les 2-Sylows de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])_C$ sont isomorphes à $D_8 \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])_A$. Il est par ailleurs d'ordre 24 (lemme 59) et contient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])_C \cong \mathfrak{A}_4$ comme sous-groupe d'indice 2.

Ces conditions suffisent à caractériser le groupe symétrique \mathfrak{S}_4 . \square

Sous-groupes d'isotropie pour les actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$

Pour obtenir les sous-groupes d'isotropie pour les actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$, on considère essentiellement les extensions centrales des sous-groupes d'isotropie pour les actions de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Suivant la valeur de $x \in \mathcal{D}$, on détermine d'abord $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_x$ dont on déduit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_x$, ou l'inverse.

Proposition 62. *Les sous-groupes d'isotropie des cellules de $\Psi(\mathcal{D})$ pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ sont reportés dans le tableau qui suit.*

Proposition 63. *Les sous-groupes d'isotropie des cellules de $\Psi(\mathcal{D}_{SL})$ pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ sont reportés dans le tableau ci-après.*

Démonstration des propositions 62 et 63. Pour x à l'intérieur de \mathcal{D} , le sous-groupe d'isotropie pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ (resp. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$) est exactement le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ (resp. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$), isomorphe à C_4 (resp. C_2).

Cellule σ de \mathcal{D}	$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}[i])_\sigma$
A	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$
B	$C_4 \times \mathfrak{S}_3$
C	$(Q_8 \times C_3) \rtimes C_4$
AB	$C_4 \times C_2$
BC	C_{12}
AC	C_8
ABC	C_4

TAB. 2.7 – Sous-groupes d’isotropie pour l’action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$

Cellule σ de \mathcal{D}_{SL}	$\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[i])_\sigma$
A	Q_8
B, D	Q_{12}
C	$Q_8 \rtimes C_3$
AB, AD	C_4
BC, CD	C_6
$ABCD$	C_2

TAB. 2.8 – Sous-groupes d’isotropie pour l’action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[i])$

Pour $x \in AC$, le sous-groupe d'isotropie est réduit au centre C_2 pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ car le groupe $G(AC)$ est trivial, et pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$, il est engendré par la matrice $\begin{pmatrix} & 1 \\ i & \end{pmatrix}$, d'ordre 8.

Pour $x \in AB$, l'extension centrale

$$1 \rightarrow C_4 \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_{AB} \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])_{AB} = C_2 = \langle u \rangle \rightarrow 1$$

est scindée par $u \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. On a ainsi $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_{AB} \cong C_4 \times C_2$.

Dans le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$, l'extension centrale

$$1 \rightarrow C_2 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_{AB} \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])_{AB} = C_2 = \langle u \rangle \rightarrow 1$$

n'est pas scindée, mais u se relève en $\begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$ d'ordre 4, d'où $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_{AB} \cong C_4$.

Pour $x \in BC$, le générateur de $G(BC)$ peut se relever en $\begin{pmatrix} & -i \\ i & i \end{pmatrix}$, d'ordre 12 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et dont le carré appartient à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$. On en déduit $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_{BC} \cong C_{12}$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_{BC} \cong C_6$.

Pour $x = B$, l'extension centrale

$$1 \rightarrow C_4 \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_B \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])_B = \mathfrak{S}_3 = \langle u, v \rangle \rightarrow 1$$

est scindée par $u \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ et $v \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_B \cong C_4 \times \mathfrak{S}_3$.

Le sous-groupe d'ordre 3 engendré par $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est distingué dans $(C_4 \times \mathfrak{S}_3) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$, et l'extension

$$1 \rightarrow C_3 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_B \rightarrow C_4 = \langle w \rangle \rightarrow 1$$

qu'on en déduit est scindée par $w \mapsto \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$. Cet élément agit non trivialement sur $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, aussi $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_B \cong C_3 \rtimes C_4 \cong Q_{12}$.

Pour $x = A$, l'extension centrale

$$1 \rightarrow C_2 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_A \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])_A = C_2 \times C_2 \rightarrow 1$$

n'est pas scindée. Les deux générateurs de $C_2 \times C_2$ se relèvent en deux éléments différents d'ordre 4 de même carré ($\begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$). Il s'agit du groupe des quaternions généralisés : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_A \cong Q_8$.

L'extension

$$1 \rightarrow C_4 \times C_4 = N(A) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_A \rightarrow G(A) = C_2 = \langle u \rangle \rightarrow 1$$

est scindée par $u \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. L'action du relèvement de u est non triviale et échange les deux générateurs $\begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i & \\ & 1 \end{pmatrix}$ de $N(A)$. On a donc $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_A \cong (C_4 \times C_4) \rtimes C_2$ avec l'action précitée.

Pour $x = C$, du fait de l'extension centrale

$$1 \rightarrow C_2 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_C \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])_C = \mathfrak{A}_4 \rightarrow 1$$

on sait que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_C$ a un unique 2-Sylow isomorphe à $Q_8 \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_A$. Cet unique 2-Sylow est distingué dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_C$ et on a l'extension de groupes suivante

$$1 \rightarrow Q_8 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_C \rightarrow C_3 \cong \langle T \rangle \rightarrow 1$$

car $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_C$ est d'ordre 24 d'après le lemme 59.

Cette extension est scindée par $T \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut prendre pour générateurs du 2-Sylow les éléments $s := wx^{-1} = \begin{pmatrix} i & \\ 1-i & -i \end{pmatrix}$ et $t := xw = \begin{pmatrix} -i & -1-i \\ & i \end{pmatrix}$ d'ordre 4 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_C$. On a $T^{-1}sT = t$, $T^{-1}tT = ts$ et $T^{-1}tsT = s$. En d'autres termes, on a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_C \cong Q_8 \rtimes C_3$.

Le sous-groupe d'isotropie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_{\Psi(C)}$ est d'ordre 96 (lemme 59). L'extension

$$1 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_{\Psi(C)} = Q_8 \rtimes \mathbb{Z}/3 \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_{\Psi(C)} \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}[i]^\times \rightarrow 1$$

admet pour section $\mathbb{Z}[i]^\times \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_{\Psi(C)}$, $i \mapsto \begin{pmatrix} & -1 \\ i & 1+i \end{pmatrix}$ d'ordre 4 et est scindée. Si on reprend les mêmes générateurs s , t et T de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])_{\Psi(C)} \cong Q_8 \rtimes C_3$, alors l'action de $\begin{pmatrix} & -1 \\ i & 1+i \end{pmatrix}$ envoie s sur t^{-1} , t sur s et T sur sT^{-1} . On a donc $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_{\Psi(C)} \cong (Q_8 \rtimes C_3) \rtimes C_4$ avec l'action précédente, sans pouvoir simplifier plus vu l'action sur T . \square

On trouvera dans les tableaux 2.9 et 2.10 un choix de système de générateurs des sous-groupes d'isotropie des cellules du domaine fondamental $\Psi(\mathcal{D}_{SL}) \subset \mathcal{Z}$ pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Ces tableaux serviront au chapitre 3 à la détermination du quotient $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ d'une part, à celle des sous-groupes d'isotropie pour l'action de Γ_0 sur \mathcal{Z} d'autre part, et enfin à la détermination d'une présentation de Γ_0 à l'aide d'une étude plus fine de l'action de Γ_0 .

Cellule σ	Générateur de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])_\sigma$
AB	$\begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$
BC	$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
CD	$\begin{pmatrix} & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$
AD	$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$

TAB. 2.9 – Générateurs des groupes d'isotropies des 1-cellules de $\Psi(\mathcal{D}_{SL})$

Cellule σ	Générateurs de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])_\sigma$
A	$\begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$
B	$\begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
C	$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$
D	$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$

TAB. 2.10 – Générateurs des groupes d'isotropies des 0-cellules de $\Psi(\mathcal{D}_{SL})$

2.2.5 Représentation graphique locale de \mathcal{Z}

On va maintenant déterminer et représenter la structure Γ -cellulaire locale de l'espace \mathcal{Z} . On va traiter le cas de $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ qui est plus simple car les sous-groupes d'isotropie sont plus petits (pour passer au cas de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$, voir remarque 54).

On partira du constat très simple suivant : soient σ une cellule de \mathcal{Z} , τ une cellule du bord de σ , et g un élément du sous-groupe d'isotropie Γ_τ de τ pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$; alors la cellule τ appartient aussi au bord de la cellule $g.\sigma$.

Comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ agit librement et transitivement sur les 2-cellules de \mathcal{Z} (tableau 2.5), on peut déterminer par ce procédé la configuration des 2-cellules de \mathcal{Z} voisines d'une 2-cellule σ_0 fixée (figure 2.7). Pour simplifier, on prendra $\sigma_0 := \Psi(ABCD)$, où $ABCD$ est la 2-cellule de l'espace \mathcal{D}_{SL} , et σ_0 donc la 2-cellule du domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ (proposition 52).

Si on avait fait un autre choix, il serait de la forme $\sigma_0 = g.\sigma_0$, $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$, et il faudrait considérer les sous-groupes d'isotropie $\Gamma_{g.\sigma} = g.\Gamma_\sigma.g^{-1}$ où σ est une cellule du bord de σ_0 , et $g.\sigma$ la cellule qui correspond dans le bord de $g.\sigma_0$.

La détermination des sous-groupes d'isotropie pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ (tableau 2.5) montre que :

- σ_0 partage l'arête $\Psi(AB)$ avec une autre 2-cellule,
- σ_0 partage l'arête $\Psi(AD)$ avec une autre 2-cellule,
- σ_0 partage l'arête $\Psi(BC)$ avec deux autres 2-cellules,
- σ_0 partage l'arête $\Psi(CD)$ avec deux autres 2-cellules,
- σ_0 partage le sommet $\Psi(A)$ avec trois autres 2-cellules,
- σ_0 partage le sommet $\Psi(B)$ avec cinq autres 2-cellules,
- σ_0 partage le sommet $\Psi(C)$ avec onze autres 2-cellules,
- σ_0 partage le sommet $\Psi(D)$ avec cinq autres 2-cellules.

Situation autour du sommet $\Psi(A)$

Soit $u = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$ l'unique élément du sous-groupe d'isotropie $\Gamma_{\Psi(AB)}$

qui est non trivial, et $v = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ l'unique élément non trivial du sous-groupe d'isotropie $\Gamma_{\Psi(AD)}$. L'arête $u.\Psi(AD)$ est commune aux 2-cellules $u.\sigma_0$ et $(uv).\sigma_0$. En effet, on a $\Gamma_{u.\Psi(AD)} = u.\Gamma_{\Psi(AD)}.u^{-1}$. Le seul élément non trivial de $\Gamma_{u.\Psi(AD)}$ est donc uvu^{-1} , et on a $(uvu^{-1}).(u.\sigma_0) = (uv).\sigma_0$.

On montre par le même raisonnement que l'arête $v.\Psi(AB)$ est commune aux 2-cellules $v.\sigma_0$ et $(vu).\sigma_0$. Comme on a $uv = vu$, les 2-cellules $(uv).\sigma_0$ et $(vu).\sigma_0$ sont les mêmes. De plus, $1, u, v$ et uv sont exactement les éléments du sous-groupe d'isotropie $\Gamma_{\Psi(A)}$ (tableau 2.10); les trois 2-cellules qui partagent le sommet $\Psi(A)$ avec la 2-cellule σ_0 sont donc $u.\sigma_0, v.\sigma_0$ et $(uv).\sigma_0$. On en déduit la configuration des 2-cellules de \mathcal{Z} autour de $\Psi(A)$. Sur la figure 2.1 et les suivantes, on a noté abusivement σ au lieu de $\Psi(\sigma)$ pour les 0-cellules σ de \mathcal{D}_{SL} .

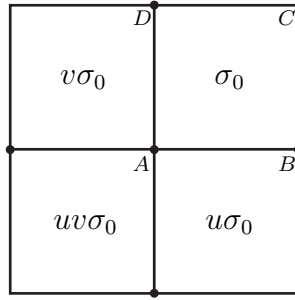


FIG. 2.1 – Configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(A)$

Le recollement issu de l'identité $(uv).\sigma_0 = (vu).\sigma_0$ provient de la relation $uv = vu$ au sein du sous-groupe d'isotropie $\Gamma_{\Psi(A)}$ du sommet $\Psi(A)$. En fait, toute relation au sein des sous-groupes d'isotropie des sommets de σ_0 donne lieu à exactement une identification entre deux 2-cellules voisines de σ_0 par ce sommet, et inversement, toute identification entre deux 2-cellules voisines de σ_0 par un de ses sommets provient d'une relation dans le sous-groupe d'isotropie de ce sommet.

Situation autour du sommet $\Psi(B)$

Si on note $w = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ l'un des éléments non triviaux du sous-groupe d'isotropie $\Gamma_{\Psi(BC)}$, alors toutes les relations du sous-groupe d'isotropie $\Gamma_{\Psi(B)}$ sont : $w^3 = 1, u^2 = 1, uw = w^2u$ et $wu = uw^2$ (avec toujours $u = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$).

On en déduit la configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(B)$.

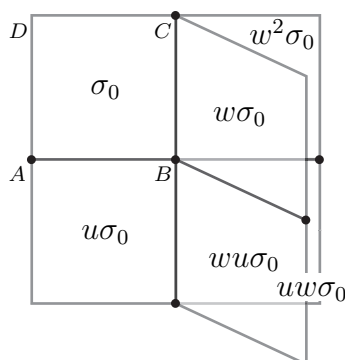


FIG. 2.2 – Configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(B)$

Situation autour du sommet $\Psi(D)$

Soit $x = \begin{pmatrix} & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ un élément non trivial du sous-groupe d'isotropie $\Gamma_{\Psi(CD)}$. Le sous-groupe d'isotropie $\Gamma_{\Psi(D)}$ est isomorphe à $\Gamma_{\Psi(B)}$, d'où la configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(D)$. On remarquera dans la figure qui suit qu'on a placé la 2-cellule $x\sigma_0$ à l'arrière : ce choix s'expliquera lors de l'étude de la configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(C)$.

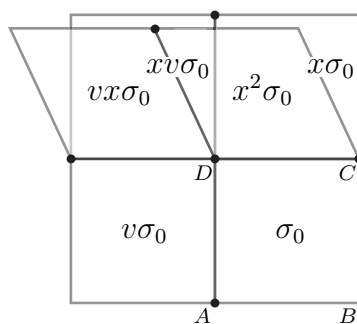


FIG. 2.3 – Configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(D)$

Situation autour du sommet $\Psi(C)$

Si on choisit les notations $(123) := w$ et $(124) := x$, on obtient un isomorphisme entre le sous-groupe d'isotropie $\Gamma_{\Psi(C)}$ et le groupe alterné \mathfrak{A}_4 . On a alors déjà les relations $wx = (13)(24) = x^2w^2$ et $xw = (14)(23) = w^2x^2$. La configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(C)$ contient donc la réunion non disjointe de deux carrés de quatre 2-cellules (voir figure 2.4).

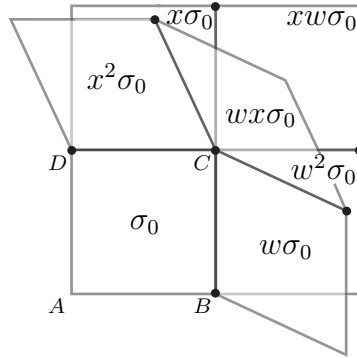


FIG. 2.4 – Configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(C)$ - Etape 1

On remarquera que si on fait le choix de placer la 2-cellule $w\sigma_0$ à l'avant de la figure, alors la relation $wx = x^2w^2$ impose de placer la 2-cellule $x\sigma_0$ à l'arrière. En fait, si on pose un choix de $w\sigma_0$ dans $\Gamma_{\Psi(BC)}$, alors il n'y a plus de choix quant à la valeur de $x\sigma_0$ dans $\Gamma_{\Psi(CD)}$ du fait de la même relation.

Si la 2-cellule $w\sigma_0$ est placée à l'avant de la figure, alors la 2-cellule $wx\sigma_0$ se retrouve aussi à l'avant, tandis que la 2-cellule $xw\sigma_0$ se retrouve à l'arrière.

Comme les sous-groupes d'isotropie des arêtes des orbites de $\Psi(BC)$ et $\Psi(CD)$ sont d'ordre 3, on peut placer quatre 2-cellules supplémentaires :

- $wx^2\sigma_0$, voisine de $w\sigma_0$ suivant l'arête $w.\Psi(CD)$,
- $w^2x\sigma_0$, voisine de $w^2\sigma_0$ suivant l'arête $w^2.\Psi(CD)$,
- $xw^2\sigma_0$, voisine de $x\sigma_0$ suivant l'arête $x.\Psi(BC)$,
- $x^2w\sigma_0$, voisine de $x^2\sigma_0$ suivant l'arête $x^2.\Psi(BC)$.

Ces 2-cellules sont en grisé sur la figure 2.5.

À l'issue de cette deuxième étape de construction, il manque une seule 2-cellule. On peut la placer grâce aux relations $x^2wx^2 = wx^2w = xw^2x = w^2xw^2 = (12)(34)$. Si on compte les 2-cellules voisines suivant une arête, on s'aperçoit que la construction est cette fois complète. Le résultat est présenté à la figure 2.6 (on a grisé la 2-cellule $wx^2w\sigma_0$).

Représentation locale de \mathcal{Z}

La représentation locale complète de \mathcal{Z} est donnée à la figure 2.7.

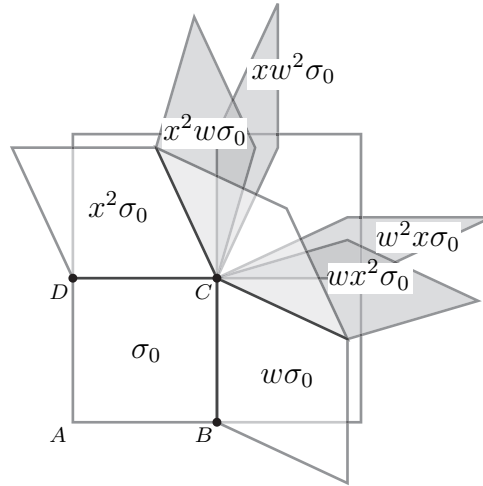


FIG. 2.5 – Configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(C)$ - Etape 2

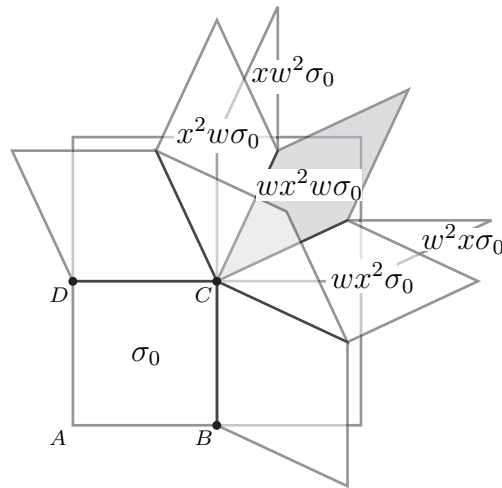
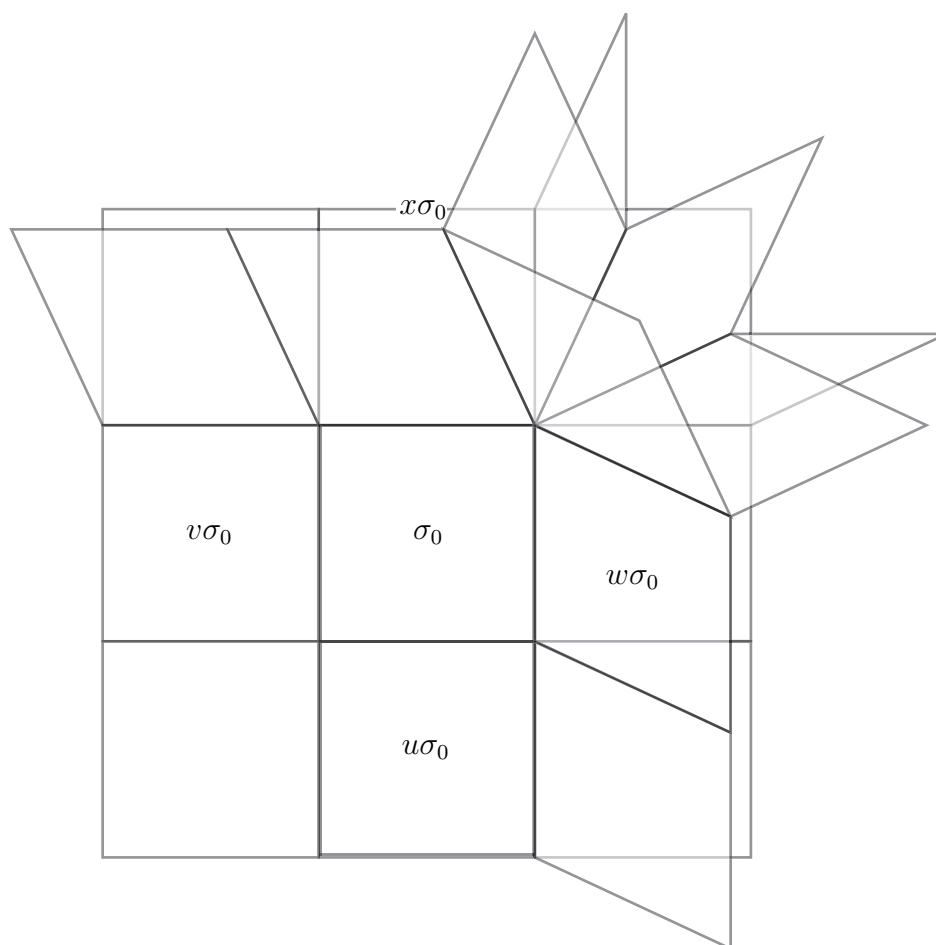


FIG. 2.6 – Configuration des 2-cellules autour du sommet $\Psi(C)$

FIG. 2.7 – Représentation locale de \mathcal{Z} autour d'une 2-cellule σ_0

2.3 Analyse de la suite spectrale E

On sait maintenant écrire la première page de la suite spectrale de Leray-Serre E de la proposition 48 à l'aide des tableaux 2.5 à 2.8 pour $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

On va simplifier l'étude de cette suite spectrale à l'aide du résultat de Soulé qui suit.

Proposition 64. [Sou78] Soit X un espace topologique muni d'un faisceau F et Y un sous-espace fermé de X tel que

- (i) le sous-espace $X - Y$ est contractile,
- (ii) l'intersection de l'adhérence de $X - Y$ avec Y est contractile,
- (iii) le faisceau F est constant sur $X - Y$.

Alors l'injection de Y dans X induit un isomorphisme d'anneaux

$$H^*(X; F) \cong H^*(Y; F)$$

Proposition 65. Soit $\Gamma \in \{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i]), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[i]), \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i]), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])\}$. On a

$$H^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2) \cong H^*(B(\Gamma_A *_{\Gamma_{AC}} \Gamma_C); \mathbb{F}_2)$$

Démonstration. Fixons pour l'instant $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Les cohomologies à coefficients dans \mathbb{F}_2 des classifiants des sous-groupes d'isotropie Γ_σ des cellules σ de \mathcal{D} forment un faisceau F d'anneaux sur \mathcal{D} . La cohomologie de \mathcal{D} à coefficients dans ce faisceau F est exactement la deuxième page de la suite spectrale de Leray-Serre qui converge vers $H^*(B\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i]); \mathbb{F}_2)$.

On va appliquer à \mathcal{D} la proposition de Soulé en deux étapes :

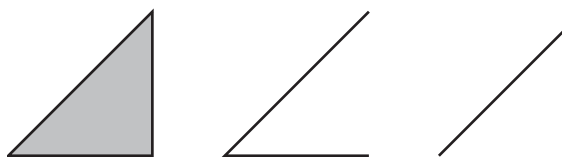


FIG. 2.8 – Etapes de décomposition de \mathcal{D}

Si on se réfère au tableau 2.7, on constate que pour appliquer la proposition 64, il est nécessaire d'avoir les isomorphismes $H^*(B(C_4 \times \mathfrak{S}_3); \mathbb{F}_2) \cong H^*(B(C_4 \times C_2); \mathbb{F}_2)$ et $H^*(BC_{12}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(BC_4; \mathbb{F}_2)$. Mais ceux-ci sont immédiats comme on peut le voir à l'aide de la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre associée à une extension de groupes de noyau C_3 .

Si on écrit la nouvelle deuxième page, on constate que la suite spectrale dégénère immédiatement (suite spectrale concentrée en colonnes 0 et 1).

La restriction à la diagonale AC du faisceau F est le faisceau d'anneaux qu'on obtient à l'aide de la théorie de Serre appliquée à la somme amalgamée $\Gamma_A *_{\Gamma_{AC}} \Gamma_C$ (action sur un arbre avec pour domaine fondamental un segment). D'où le résultat pour $GL_2(\mathbb{Z}[i])$.

La même démarche s'applique de façon identique aux cas de $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$, $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ et $PGL_2(\mathbb{Z}[i])$ (il faut juste appliquer la décomposition de \mathcal{D} successivement aux deux copies recollées de \mathcal{D} qui forment \mathcal{D}_{SL}). \square

Par simple lecture des tableaux 2.5 à 2.8, on déduit les quatre théorèmes suivants de la proposition 65.

Théorème 66. *Tout homomorphisme de groupes du produit libre $(C_2 \times C_2) * \mathfrak{A}_4$ vers $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$ qui envoie $C_2 \times C_2$ (resp. \mathfrak{A}_4) isomorphiquement sur le sous-groupe d'isotropie $PSL_2(\mathbb{Z}[i])_A$ (resp. $PSL_2(\mathbb{Z}[i])_C$) induit un isomorphisme d'anneaux en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 .*

Théorème 67. *Tout homomorphisme de groupes de la somme amalgamée $Q_8 *_{C_2} (Q_8 \rtimes C_3)$ vers $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ qui envoie Q_8 (resp. $Q_8 \rtimes C_3$, resp. C_2) isomorphiquement sur le sous-groupe d'isotropie $SL_2(\mathbb{Z}[i])_A$ (resp. $SL_2(\mathbb{Z}[i])_C$, resp. $SL_2(\mathbb{Z}[i])_{AC}$) induit un isomorphisme d'anneaux en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 .*

Théorème 68. *Tout homomorphisme de groupes de la somme amalgamée $D_8 *_{C_2} \mathfrak{S}_4$ vers $PGL_2(\mathbb{Z}[i])$ qui envoie D_8 (resp. \mathfrak{S}_4 , resp. C_2) isomorphiquement sur le sous-groupe d'isotropie $PGL_2(\mathbb{Z}[i])_A$ (resp. $PGL_2(\mathbb{Z}[i])_C$, resp. $PGL_2(\mathbb{Z}[i])_{AC}$) induit un isomorphisme d'anneaux en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 .*

Théorème 69. *Tout homomorphisme de groupes de la somme amalgamée $((C_4 \times C_4) \rtimes C_2) *_{C_8} ((Q_8 \rtimes C_3) \rtimes C_4)$ vers $GL_2(\mathbb{Z}[i])$ qui envoie $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$ (resp. $(Q_8 \rtimes C_3) \rtimes C_4$, resp. C_8) isomorphiquement sur le sous-groupe d'isotropie $GL_2(\mathbb{Z}[i])_A$ (resp. $GL_2(\mathbb{Z}[i])_C$, resp. $GL_2(\mathbb{Z}[i])_{AC}$) induit un isomorphisme d'anneaux en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 .*

Chapitre 3

Cohomologie du sous-groupe d'Iwahori Γ_0 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$

3.1 Le sous-groupe Γ_0

Définition 70. On note Γ_0^{GL} le sous-groupe d'Iwahori de $GL_2(\mathbb{Z}[i])$. Il est constitué des matrices de $GL_2(\mathbb{Z}[i])$ triangulaires supérieures modulo l'idéal $(1+i)$ de $\mathbb{Z}[i]$. On note Γ_0^{SL} le sous-groupe d'Iwahori de $SL_2(\mathbb{Z}[i])$. On a $\Gamma_0^{SL} = \Gamma_0^{GL} \cap SL_2(\mathbb{Z}[i])$. Pour alléger les énoncés, on note Γ_0 le sous-groupe d'Iwahori de $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$. On a $\Gamma_0 = \Gamma_0^{SL} / \langle \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \rangle$.

Le groupe Γ_0 intervient dans notre calcul de la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ du fait de la décomposition en somme amalgamée

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) *_{\Gamma_0} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$$

qui provient de la théorie de Serre sur les arbres et amalgames de groupes.

Proposition 71. ([Serre p.79]) Soit K un corps muni d'une valuation discrète v , et soit \mathcal{O} l'anneau de valuation du corps K . On choisit une uniformisante π , c'est à dire un élément π de K^* tel que $v(\pi) = 1$.

Alors, on a la décomposition

$$SL_2(K) \cong SL_2(\mathcal{O}) *_H SL_2(\mathcal{O})$$

où H est le sous-groupe de $SL_2(\mathcal{O})$ des matrices triangulaires supérieures modulo l'idéal (π) de \mathcal{O} .

Si $M \in H$, les deux injections de H dans $SL_2(\mathcal{O})$ sont données par $M \mapsto M$ (qu'on appellera l'injection standard) et par $M \mapsto c_\pi(M)$ (qu'on

appellera l'injection non standard), où c_π est la conjugaison par la matrice $\begin{pmatrix} & 1 \\ \pi & \end{pmatrix}$.

Plus généralement, si A est un sous-anneau dense dans K , alors le groupe $SL_2(A)$ est aussi dense dans $SL_2(K)$, et on peut appliquer la proposition précédente à $SL_2(A)$ en remplaçant $SL_2(\mathcal{O})$ par $SL_2(\mathcal{O}) \cap SL_2(A)$ ([Serre p.80]).

Proposition 72. *On a la décomposition en somme amalgamée*

$$SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \cong SL_2(\mathbb{Z}[i]) *_{\Gamma_0^{SL}} SL_2(\mathbb{Z}[i])$$

L'injection non standard de Γ_0^{SL} dans $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & \frac{c}{1+i} \\ (1+i)b & a \end{pmatrix}$$

On a également

$$PSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \cong PSL_2(\mathbb{Z}[i]) *_{\Gamma_0} PSL_2(\mathbb{Z}[i])$$

avec les mêmes injections

Démonstration. On applique la proposition 71 en posant $K = \mathbb{Q}_2[i]$, muni de la valuation discrète $v : \mathbb{Q}_2[i]^* \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{Q}_2[i]^*$, $x = (1+i)^{v(x)}\varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathcal{O} = \mathbb{Z}_2[i]$. On peut choisir $\pi = 1+i$ comme uniformisante. On obtient alors la décomposition

$$SL_2(\mathbb{Q}_2[i]) \cong SL_2(\mathbb{Z}_2[i]) *_{H} SL_2(\mathbb{Z}_2[i])$$

où H désigne le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z}_2[i])$ des matrices triangulaires supérieures modulo l'idéal $(1+i)$ de $\mathbb{Z}_2[i]$.

L'anneau $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ est dense dans $\mathbb{Q}_2[i]$ et

$$SL_2(\mathbb{Z}_2[i]) \cap SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) = SL_2(\mathbb{Z}[i])$$

d'où la décomposition

$$SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \cong SL_2(\mathbb{Z}[i]) *_{\Gamma_0^{SL}} SL_2(\mathbb{Z}[i])$$

Le centre Z de $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ est engendré par $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, d'où

$$PSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \cong PSL_2(\mathbb{Z}[i]) *_{\Gamma_0} PSL_2(\mathbb{Z}[i])$$

□

3.2 Cohomologie de $B\Gamma_0$ - stratégie

Proposition 73. *Les groupes Γ_0^{GL} , Γ_0^{SL} et Γ_0 sont d'indice 3 respectivement dans $GL_2(\mathbb{Z}[i])$, $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ et $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$.*

Démonstration. Le groupe $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$ est d'ordre 6 et Γ_0^{GL} (resp. Γ_0^{SL} , resp. Γ_0) est l'image réciproque du sous-groupe cyclique d'ordre 2 de générateur $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par la projection $GL_2(\mathbb{Z}[i]) \rightarrow GL_2(\mathbb{F}_2)$ (resp. $SL_2(\mathbb{Z}[i]) \rightarrow SL_2(\mathbb{F}_2)$, resp. $PSL_2(\mathbb{Z}[i]) \rightarrow PSL_2(\mathbb{F}_2)$) qui à M associe $M \bmod (1+i)$. \square

La proposition 73 donne envie d'appliquer le lemme de Shapiro car

$$H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2) \cong H^*(BPSL_2(\mathbb{Z}[i]); \text{Coind}_{\Gamma_0}^{PSL_2(\mathbb{Z}[i])}(\mathbb{F}_2))$$

où

$$\text{Coind}_{\Gamma_0}^{PSL_2(\mathbb{Z}[i])}(\mathbb{F}_2) \stackrel{\text{additivement}}{\cong} \mathbb{F}_2^{[PSL_2(\mathbb{Z}[i]):\Gamma_0]} = \mathbb{F}_2^3$$

L'action de $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$ sur $\text{Coind}_{\Gamma_0}^{PSL_2(\mathbb{Z}[i])}(\mathbb{F}_2)$ n'est pas triviale. Pour venir à bout du calcul de $H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$, il faudrait déterminer

$$H^*(BPSL_2(\mathbb{Z}[i])_\sigma; \text{Coind}_{\Gamma_0}^{PSL_2(\mathbb{Z}[i])}(\mathbb{F}_2))$$

pour chaque cellule σ de \mathcal{D}_{SL} , puis analyser la suite spectrale de Leray-Serre associée à la projection $EPSL_2(\mathbb{Z}[i]) \times_{PSL_2(\mathbb{Z}[i])} \mathcal{Z} \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathcal{Z}$.

Il est plus naturel dans notre situation d'utiliser plutôt la suite spectrale de Leray-Serre associée à la projection $E\Gamma_0 \times_{\Gamma_0} \mathcal{Z} \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$, car nous pouvons analyser facilement l'action de Γ_0 sur \mathcal{Z} à partir de notre étude précédente des réseaux bien arrondis. Cette démarche est complètement équivalente à l'utilisation du lemme de Shapiro en terme de difficulté.

3.3 Réseaux et calcul de $H_{\Gamma_0}^*(\mathcal{Z}; \mathbb{F}_2)$

Définition 74. *Soit l'espace de paires de réseaux*

$$\mathcal{L}' = \{(L_1, L_2) \mid L_2 \subsetneq L_1 \subsetneq \frac{1}{1+i}L_2\}$$

On note \mathcal{W}' le sous-espace de \mathcal{L}' des paires (L_1, L_2) telles que $L_1 \in \mathcal{W}^1$.

Proposition 75. *Le groupe linéaire $GL_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur \mathcal{L}' , et l'espace \mathcal{L}' est en bijection avec le quotient $\Gamma_0^{GL} \backslash GL_2(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ agit sur \mathcal{L}' de la même façon que sur \mathcal{L} . Cette action est transitive : toute paire $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}'$ est dans l'orbite d'une paire de la forme (Std, L) telle que $L \not\subseteq \mathrm{Std} \not\subseteq \frac{1}{1+i}L$. Cette relation implique qu'il existe une base de L qui se déduit d'une base de Std en multipliant son deuxième vecteur par $1+i$. Comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ agit transitivement sur les bases de Std , la paire (Std, L) est dans l'orbite de (Std, L_I) , où $L_I = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \rangle$, et on obtient la transitivité de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur \mathcal{L}' .

Le sous-groupe d'isotropie de la paire (Std, L_I) est

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i]) \cap \begin{pmatrix} & 1 \\ 1+i & \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i]) \begin{pmatrix} & \frac{1}{1+i} \\ & \end{pmatrix} = \Gamma_0$$

car $L_I = \mathrm{Std} \cdot \begin{pmatrix} & \frac{1}{1+i} \\ & \end{pmatrix}$, d'où la bijection. \square

On munit l'espace \mathcal{L}' de la topologie induite par celle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ via la bijection de la proposition 75.

Proposition 76. *L'espace \mathcal{L}' est un revêtement ramifié à 3 feuilles de l'espace \mathcal{L} .*

Démonstration.

$$\mathcal{L}' \cong \underset{\text{prop. 75}}{\Gamma_0^{\mathrm{GL}} \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})} \xrightarrow[\text{prop. 73}]{[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i]) : \Gamma_0^{\mathrm{GL}}] = 3} \underset{\text{prop. 8}}{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i]) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})} \cong \mathcal{L}.$$

\square

Proposition 77. *Soit L un réseau de base (v_1, v_2) . Les paires de \mathcal{L}' de la forme (L, L') correspondent aux sous-réseaux L' de bases $(v_1, (1+i)v_2)$, $((1+i)v_1, v_2)$ et $(v_1 - v_2, v_1 - iv_2)$. Il s'agit des réseaux L_I , L_{II} et L_{III} étudiés en section 1.4.*

Démonstration. Si $(L, L') \in \mathcal{L}'$, alors l'image de L' dans $L/(1+i)L \cong (\mathbb{F}_2)^2 \cong \langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle$ est réduite à une des trois classes \bar{v}_1 , \bar{v}_2 ou $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$.

Le sous-réseau $L_I = \langle v_1, (1+i)v_2 \rangle$ (resp. $L_{II} = \langle (1+i)v_1, v_2 \rangle$, resp. $L_{III} = \langle v_1 - v_2, v_1 - iv_2 \rangle$) se projette sur \bar{v}_1 (resp. \bar{v}_2 , resp. $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$). \square

La rétraction $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{W}^1$ s'étend en une rétraction par déformation de \mathcal{L}' sur \mathcal{W}' , et on retrouve toutes les constructions du chapitre 1.

Proposition 78. *On a un homéomorphisme*

$$\Gamma_0^{\mathrm{GL}} \backslash \mathcal{Z} \cong \mathcal{W}' / U(2)$$

On peut ainsi étudier les sous-groupes d'isotropie des cellules de \mathcal{Z} pour l'action de Γ_0 de la même façon que pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

3.4 Réduction au calcul de $H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$

Désormais, et jusqu'à la fin de ce chapitre, Γ désigne $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

3.4.1 Quotient $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ et sous-groupes d'isotropie

Soit $g_1 := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. L'ensemble $\{1, g_1, g_1^2\}$ est un système de représentants des classes à gauche $\Gamma_0 \backslash \Gamma$. Comme $\Psi(\mathcal{D}_{SL})$ est un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'action de Γ (proposition 52), le quotient $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ est homéomorphe au quotient de la réunion $\Psi(\mathcal{D}_{SL}) \cup g_1 \Psi(\mathcal{D}_{SL}) \cup g_1^2 \Psi(\mathcal{D}_{SL})$ par une certaine relation d'équivalence qu'on va préciser dans la preuve de la proposition 79 qui suit.

Proposition 79. *L'espace quotient $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ est homéomorphe à l'espace représenté à la figure 3.1. Une structure cellulaire de $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ et un système de représentants dans \mathcal{Z} de cette structure cellulaire sont donnés au colonnes 1 et 2 du tableau 3.1.*

Démonstration. Soient σ une cellule de \mathcal{D}_{SL} , et x un point de la cellule σ . Si σ est une 1-cellule ou une 2-cellule, on prend x à l'intérieur de la cellule σ . Soit ϕ_x le réseau associé à x (voir p.11), et soient les sous-réseaux L_I, L_{II} et L_{III} de ϕ_x (définition 38). On numérote les représentants des directions de vecteurs minimaux de ϕ_x comme au tableau 1.1.

On sait que les groupes d'isotropie U_x et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_x$ sont conjugués (lemme 10), et que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_x = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])_\sigma$ (tableau 2.5). Soient $u \in U_x$ et γ l'élément de Γ_x qui lui correspond. En tant que rotation, u agit sur v_1 (resp. v_2) comme γ sur le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) (voir lemme 57). Comme u fixe le réseau ϕ_x , il agit sur $\{L_I, L_{II}, L_{III}\}$, ce qui peut être interprété comme une action de u sur $L/(1+i)L \cong (\mathbb{F}_2)^2 \cong \langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle$, car le sous-réseau L_I (resp. L_{II} , resp. L_{III}) se projette sur \bar{v}_1 (resp. \bar{v}_2 , resp. $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$).

Les sous-groupes d'isotropie pour l'action de $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ sur \mathcal{Z} ne contiennent que des éléments d'ordre 2 ou 3 (voir tableau 2.5), aussi seules trois situations peuvent se présenter :

- u est d'ordre 3 et permute circulairement les trois droites de $(\mathbb{F}_2)^2$. Dans ce cas, les cellules $\Psi(\sigma)$, $g_1 \Psi(\sigma)$ et $g_1^2 \Psi(\sigma)$ se projettent sur une même cellule dans $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$.
- u est d'ordre 2, permute deux droites de $(\mathbb{F}_2)^2$ et fixe la troisième. Dans ce cas, au moins deux cellules parmi les cellules $\Psi(\sigma)$, $g_1 \Psi(\sigma)$ et $g_1^2 \Psi(\sigma)$ se projettent sur une même cellule dans $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$.

- u fixe $(\mathbb{F}_2)^2$. Dans ce cas, on n'apprend rien sur la façon dont les cellules $\Psi(\sigma)$, $g_1\Psi(\sigma)$ et $g_1^2\Psi(\sigma)$ se projettent sur une même cellule ou sur des cellules différentes dans $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$.

Il ne reste plus qu'à passer en revue le système de représentants des sous-groupes d'isotropie pour l'action de Γ sur \mathcal{Z} constitué par les sous-groupes d'isotropie des cellules de $\Psi(\mathcal{D}_{SL})$ (tableaux 2.9 et 2.10).

On a $\Gamma_{\Psi(BC)} \cong C_3$, engendré par g_1 , qui permute les trois droites de $(\mathbb{F}_2)^2$. Les trois cellules $\Psi(BC)$, $g_1\Psi(BC)$ et $g_1^2\Psi(BC)$ se projettent donc sur une même cellule dans $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$ qu'on désignera par \widetilde{BC} .

Même situation avec $\Gamma_{\Psi(CD)}$ engendré par $\begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$. Les trois cellules $\Psi(CD)$, $g_1\Psi(CD)$ et $g_1^2\Psi(CD)$ se projettent sur une même cellule dans $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$ qu'on désignera par \widetilde{CD} .

Comme $g_1 \in \Gamma_{\Psi(B)}$ (resp. $g_1 \in \Gamma_{\Psi(C)}$, resp. $\begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_{\Psi(D)}$), les cellules $\Psi(B)$, $g_1\Psi(B)$ et $g_1^2\Psi(B)$ (resp. $\Psi(C)$, $g_1\Psi(C)$ et $g_1^2\Psi(C)$, resp. $\Psi(D)$, $g_1\Psi(D)$ et $g_1^2\Psi(D)$) se projettent sur une même cellule dans $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$ qu'on désignera par \widetilde{B} (resp. \widetilde{C} , resp. \widetilde{D}). On aurait aussi pu utiliser un argument de continuité.

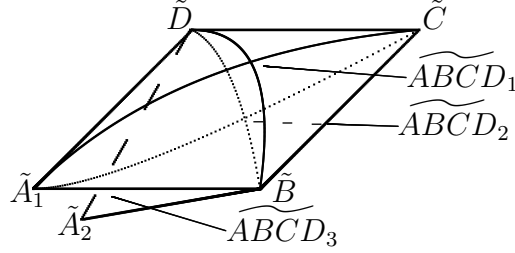
On a $\Gamma_{\Psi(AB)} \cong C_2$, engendré par $\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}$, qui permute deux des trois droites de $(\mathbb{F}_2)^2$ et fixe la troisième. Deux des trois cellules $\Psi(AB)$, $g_1\Psi(AB)$ et $g_1^2\Psi(AB)$ se projettent donc sur une même cellule dans $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$ qu'on désignera par $\widetilde{A_1B}$, tandis que la troisième se projette sur une cellule distincte de $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$ qu'on désignera par $\widetilde{A_2B}$.

Même situation avec $\Gamma_{\Psi(AD)}$ engendré par $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$. Deux des trois cellules $\Psi(AD)$, $g_1\Psi(AD)$ et $g_1^2\Psi(AD)$ se projettent sur une même cellule dans $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$ qu'on désignera par $\widetilde{A_1D}$, tandis que la troisième se projette sur une cellule distincte de $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$ qu'on désignera par $\widetilde{A_2D}$.

Comme $\Gamma_{\Psi(A)}$ est engendré par $\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$, et que ces deux éléments permutent les deux mêmes droites de $(\mathbb{F}_2)^2$, deux des trois cellules $\Psi(A)$, $g_1\Psi(A)$ et $g_1^2\Psi(A)$ se projettent sur une même cellule dans $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$, commune aux bords des cellules $\widetilde{A_1B}$ et $\widetilde{A_1D}$. On la désignera par $\widetilde{A_1}$. La cellule restante parmi $\Psi(A)$, $g_1\Psi(A)$ et $g_1^2\Psi(A)$ se projette sur une cellule distincte de $\widetilde{A_1}$ et commune aux bords des cellules $\widetilde{A_2B}$ et $\widetilde{A_2D}$. On la désignera par $\widetilde{A_2}$.

On connaît désormais le 1-squelette de $\Gamma_0\backslash\mathcal{Z}$ (voir figure 3.1). Comme $\Gamma_{\Psi(ABCD)}$ est trivial ($\Psi(\mathcal{D}_{SL})$ est un domaine fondamental dans \mathcal{Z} pour l'ac-

tion de Γ), les trois 2-cellules $\Psi(ABCD)$, $g_1\Psi(ABCD)$ et $g_1^2\Psi(ABCD)$ se projettent dans $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ sur trois 2-cellules distinctes qu'on désignera respectivement par \widetilde{ABCD}_1 , \widetilde{ABCD}_2 et \widetilde{ABCD}_3 . Par un argument de continuité, les 2-cellules \widetilde{ABCD}_1 et \widetilde{ABCD}_2 forment une sphère. \square

FIG. 3.1 – Quotient $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$

Définition 80. Soit X un sous-espace de \mathcal{Z} . On notera $(\Gamma_0)_X$ le sous-groupe d'isotropie de X pour l'action de Γ_0 .

Proposition 81. La structure des sous-groupes d'isotropie des orbites de $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ pour l'action de Γ_0 est donnée au tableau 3.1.

Démonstration. Si σ est une cellule de \mathcal{D}_{SL} , alors on a

- $(\Gamma_0)_{\Psi(\sigma)} = \Gamma_{\Psi(\sigma)} \cap \Gamma_0$,
- $(\Gamma_0)_{g_1\Psi(\sigma)} = g_1\Gamma_{\Psi(\sigma)}g_1^{-1} \cap \Gamma_0$,
- $(\Gamma_0)_{g_1^2\Psi(\sigma)} = g_1^2\Gamma_{\Psi(\sigma)}g_1^{-2} \cap \Gamma_0 = g_1^{-1}\Gamma_{\Psi(\sigma)}g_1 \cap \Gamma_0$.

On obtient ainsi la structure des sous-groupes d'isotropie de toutes les orbites de $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ en se référant à la projection dans $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ des cellules de $\Psi(\mathcal{D}_{SL}) \cup g_1\Psi(\mathcal{D}_{SL}) \cup g_1^2\Psi(\mathcal{D}_{SL})$ et au système de générateurs des sous-groupes d'isotropie des cellules de $\Psi(\mathcal{D}_{SL})$ pour l'action de Γ donné aux tableaux 2.9 et 2.10. \square

3.4.2 La suite spectrale E'

On peut maintenant décrire la page E'_1 de la suite spectrale de Leray-Serre associée à la projection $E\Gamma_0 \times_{\Gamma_0} \mathcal{Z} \twoheadrightarrow \Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ (proposition 48).

Soit Σ le système de représentants dans \mathcal{Z} des cellules de $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ choisi au tableau 3.1. Il est représenté à la figure 3.5. Si σ est une cellule de $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$, on note temporairement σ son représentant dans Σ pour simplifier l'énoncé de la proposition qui suit. On a ainsi $\Sigma_0 = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}\}$, $\Sigma_1 = \{\widetilde{A_1B}, \widetilde{A_1D}, \widetilde{A_2B}, \widetilde{A_2D}, \widetilde{BC}, \widetilde{CD}\}$ et $\Sigma_2 = \{\widetilde{ABCD}_1, \widetilde{ABCD}_2, \widetilde{ABCD}_3\}$ où Σ_p désigne les représentants de p -cellules (voir figure 3.1).

	Cellule σ de $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$	Représentant choisi dans \mathcal{Z}	Structure de $(\Gamma_0)_\sigma$	Système de générateurs
0-cellules	\widetilde{A}_1	$\Psi(A)$	C_2	$\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} =: \alpha_1$
	\widetilde{A}_2	$g_1^2 \Psi(A)$	$C_2 \times C_2$	$\begin{pmatrix} -i & -i \\ & i \end{pmatrix} =: \alpha_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =: \alpha_3$
	\widetilde{B}	$\Psi(B)$	C_2	α_2
	\widetilde{C}	$\Psi(C)$	$C_2 \times C_2$	$\begin{pmatrix} -i & -1 & -i \\ & & i \end{pmatrix} =: \alpha_4$ $\begin{pmatrix} & i & \\ 1 & -i & -i \end{pmatrix} =: \alpha_5$
	\widetilde{D}	$\Psi(D)$	C_2	$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ & i \end{pmatrix} =: \alpha_6$
1-cellules	$\widetilde{A_1 B}$	$g_1 \Psi(AB)$	trivial	
	$\widetilde{A_1 D}$	$\Psi(AD)$	trivial	
	$\widetilde{A_2 B}$	$g_1^2 \Psi(AB)$	C_2	α_2
	$\widetilde{A_2 D}$	$g_1^2 \Psi(AD)$	C_2	α_3
	\widetilde{BC}	$\Psi(BC)$	trivial	
	\widetilde{CD}	$\Psi(CD)$	trivial	
2-cellules	\widetilde{ABCD}_1	$\Psi(ABCD)$	trivial	
	\widetilde{ABCD}_2	$g_1 \Psi(ABCD)$	trivial	
	\widetilde{ABCD}_3	$g_1^2 \Psi(ABCD)$	trivial	

(les notations α_i serviront en section 3.5.2)TAB. 3.1 – Groupes d'isotropie des orbites de cellules de \mathcal{Z} pour l'action de Γ_0

Proposition 82. *La page E'_1 de la suite spectrale de Leray-Serre associée à la projection $E\Gamma_0 \times_{\Gamma_0} \mathcal{Z} \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ est concentrée en colonnes 0, 1 et 2 :*

$$\begin{aligned}
E_1^{0,*} &= \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_0} H^*(B(\Gamma_0)_\sigma; \mathbb{F}_2) \\
&= H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{B}}; \mathbb{F}_2) \\
&\quad \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{D}}; \mathbb{F}_2) \\
&\cong \left(\bigoplus_3 H^*(BC_2; \mathbb{F}_2) \right) \oplus \left(\bigoplus_2 H^*(BC_2 \times C_2; \mathbb{F}_2) \right) \\
E_1^{1,*} &= \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^*(B(\Gamma_0)_\sigma; \mathbb{F}_2) \\
&= H^*(B(\Gamma_0)_{\widetilde{A_1 B}}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\widetilde{A_1 D}}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2 B}}; \mathbb{F}_2) \\
&\quad \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2 D}}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\widetilde{BC}}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\widetilde{CD}}; \mathbb{F}_2) \\
&\cong \left(\bigoplus_2 H^*(BC_2; \mathbb{F}_2) \right) \oplus \left(\bigoplus_4 \mathbb{F}_2 \right) \\
E_1^{2,*} &= \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_2} H^*(B(\Gamma_0)_\sigma; \mathbb{F}_2) \\
&= H^*(B(\Gamma_0)_{\widetilde{ABCD_1}}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\widetilde{ABCD_2}}; \mathbb{F}_2) \\
&\quad \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\widetilde{ABCD_3}}; \mathbb{F}_2) \\
&\cong \bigoplus_3 \mathbb{F}_2
\end{aligned}$$

Les différentielles $d_1^{p,q}$ sont horizontales et correspondent à des conjugaisons près aux restrictions entre les sous-groupes d'isotropie (proposition 48 et remarque 49). (Pour la structure des sous-groupes d'isotropie, se référer au tableau 3.1.)

Proposition 83. *La page E'_2 de la suite spectrale de Leray-Serre associée à la projection $E\Gamma_0 \times_{\Gamma_0} \mathcal{Z} \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ est concentrée en 0-ième colonne, à l'exception de $E_2'^{2,0} \cong \mathbb{F}_2$, et la 0-ième colonne est isomorphe à la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 du classifiant du produit libre*

$$(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1} * (\Gamma_0)_{\tilde{A}_2} * (\Gamma_0)_{\tilde{C}} \cong C_2 * (C_2 \times C_2) * (C_2 \times C_2)$$

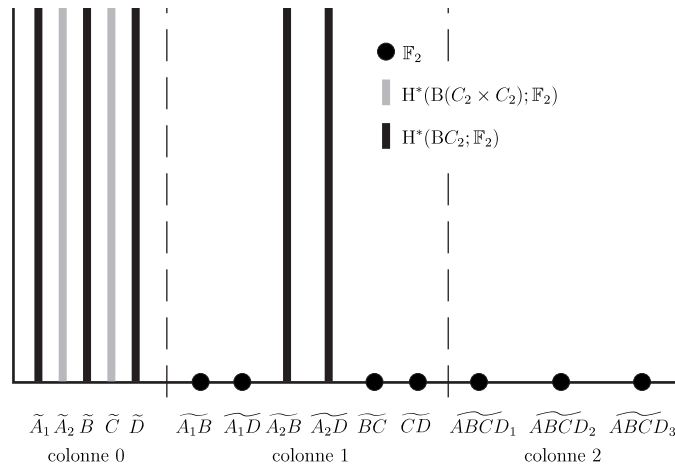


FIG. 3.2 – Page E'_1 de la suite spectrale pour Γ_0

Cet isomorphisme en colonne 0 est induit par l'homomorphisme de $C_2 * (C_2 \times C_2) * (C_2 \times C_2)$ vers Γ_0 déterminé par les inclusions de $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}$, $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}$ et $(\Gamma_0)_{\tilde{C}}$ dans Γ_0 .

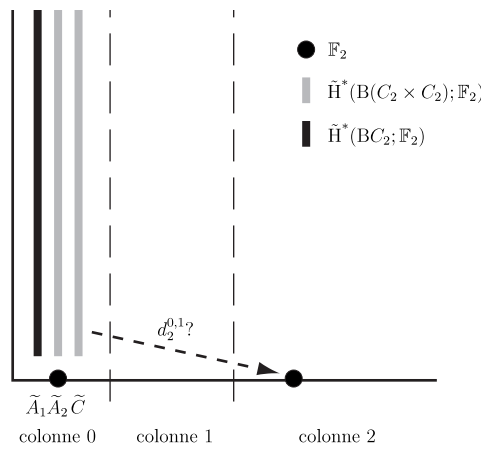


FIG. 3.3 – Page E'_2 de la suite spectrale pour Γ_0

Soit σ une cellule de $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$, $\tilde{\sigma}$ son représentant dans \mathcal{Z} choisi au tableau 3.1. Afin de simplifier la rédaction, on utilisera temporairement l'abus de notation $H^*(\sigma) := H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{\sigma}}; \mathbb{F}_2)$. Ainsi par exemple, on a $H^*(\tilde{A}_1) = H^*(B(\Gamma_0)_{\Psi(A)}; \mathbb{F}_2)$.

Démonstration. La détermination de la page E_2' est assez simple. Pour $q = 0$, le calcul de $E_2'^{p,q}$ correspond à celui de la cohomologie de l'espace quotient $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$, lequel a le type d'homotopie d'une sphère de dimension 2. Les \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels $E_2'^{0,0}$ et $E_2'^{2,0}$ sont donc de dimension 1, et si $p \neq 0$ ou 2, on a $E_2'^{p,0} = 0$.

Soit $q > 0$. Les différentielles $d_1^{p,q}$ sont presque toutes triviales. Toutes les restrictions émanant des groupes de cohomologie $H^q(\tilde{A}_1)$ et $H^q(\tilde{C})$ sont triviales, puisque les sous-groupes d'isotropie de toutes les 1-cellules au bord desquelles les 0-cellules \tilde{A}_1 et \tilde{C} appartiennent sont triviaux. Les groupes de cohomologie $H^q(\tilde{A}_1)$ et $H^q(\tilde{C})$ survivent donc dans la page E_2' pour $q > 0$.

Les restrictions $H^q(\tilde{B}) \rightarrow H^q(\widetilde{A_2B})$ et $H^q(\tilde{D}) \rightarrow H^q(\widetilde{A_2D})$, sont des isomorphismes, car on a les relations $(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2B}} \cong (\Gamma_0)_{\tilde{B}}$ et $(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2D}} \cong (\Gamma_0)_{\tilde{D}}$.

Les restrictions $H^q(\tilde{A}_2) \rightarrow H^q(\widetilde{A_2B})$ et $H^q(\tilde{A}_2) \rightarrow H^q(\widetilde{A_2D})$ sont surjectives comme toute restriction de $H^q(B(C_2 \times C_2); \mathbb{F}_2) \cong H^q(\tilde{A}_2)$ à la cohomologie de l'un de ses sous-groupes (on a $(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2B}} \subset (\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}$ et $(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2D}} \subset (\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}$).

On en déduit tout d'abord que les groupes de cohomologie $H^q(\widetilde{A_2B})$ et $H^q(\widetilde{A_2D})$ disparaissent lors du passage à la page E_2' pour $q > 0$. Ensuite, le noyau de la restriction de d_1 à $H^q(\tilde{B}) \oplus H^q(\tilde{A}_2) \oplus H^q(\tilde{D})$ est isomorphe à $H^q(\tilde{A}_2)$ pour $q > 0$ puisque l'image de chaque élément de $H^q(\tilde{A}_2)$ peut être annulée à l'aide des isomorphismes $H^q(\tilde{B}) \cong H^q(\widetilde{A_2B})$ et $H^q(\tilde{D}) \cong H^q(\widetilde{A_2D})$.

Donc, en dimension $q > 0$, seule une somme directe isomorphe à $H^q(\tilde{A}_1) \oplus H^q(\tilde{A}_2) \oplus H^q(\tilde{C})$ survit, concentrée en colonne 0. \square

On a utilisé implicitement dans la preuve qui précède le fait que pour $q > 0$, le noyau de la différentielle d_1 est l'ensemble des quintuplets

$$(x, y, z, t, u) \in H^q(\tilde{A}_1) \oplus H^q(\tilde{A}_2) \oplus H^q(\tilde{B}) \oplus H^q(\tilde{C}) \oplus H^q(\tilde{D})$$

tels qu'au niveau des restrictions,

$$\text{Res}_{(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2B}}}^{(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}}(y) = \text{Res}_{(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2B}}}^{(\Gamma_0)_{\tilde{B}}}(z) \text{ et } \text{Res}_{(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2D}}}^{(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}}(y) = \text{Res}_{(\Gamma_0)_{\widetilde{A_2D}}}^{(\Gamma_0)_{\tilde{D}}}(u)$$

Remarque 84. La proposition 83 dit qu'il reste une unique différentielle $d_2^{0,1} : E_2'^{0,1} \rightarrow E_2'^{2,0}$ à comprendre pour déterminer $H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ (voir figure 3.3). On va, pour ce faire, calculer la dimension de $H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ à l'aide de la présentation par générateurs et relations de Γ_0 qui va être déterminée en section 3.5.2.

3.5 Calcul de $H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ et $H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$

On va appliquer à Γ_0 et \mathcal{Z} un théorème de Brown ([Bro84], théorème 96) qui permet de décrire des présentations de groupes agissant sur des CW -complexes simplement connexes. On obtiendra ainsi une présentation de Γ_0 par générateurs et relations (proposition 97), dont on se servira pour calculer la dimension sur \mathbb{F}_2 de $H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$. On en déduira la différentielle supérieure manquante $E_2^{0,1}$ puis la structure de $H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ (théorème 96).

3.5.1 Actions cellulaires et sans inversion de groupes sur les CW -complexes simplement connexes

Philosophie du théorème de Brown

Avant de réénoncer le théorème de Brown dans notre contexte, on va en résumer la philosophie. Soit \mathcal{X} un CW -complexe simplement connexe muni d'une structure cellulaire sur laquelle agit cellulièrement un groupe G . Le quotient $G \backslash \mathcal{X}$ est muni de la structure cellulaire déduite de celle de \mathcal{X} .

Comme \mathcal{X} est simplement connexe, la construction de Borel $EG \times_G \mathcal{X}$ est un revêtement universel de BG et par suite

$$\pi_1(EG \times_G \mathcal{X}) \cong G$$

Notons \mathcal{X}^i , $i \in \mathbb{N}$ le i -ème squelette de la structure cellulaire sur \mathcal{X} . A chaque 2-cellule τ de \mathcal{X}^2 on peut associer un élément r_τ , bien déterminé à conjugaison près, du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{X}^1)$ en considérant les 1-cellules qui constituent le bord de τ .

Comme EG est simplement connexe, on a un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(\mathcal{X}^1) \cong \pi_1(EG \times \mathcal{X}^1)$$

ce qui permet de considérer que r_τ appartient à $\pi_1(EG \times \mathcal{X}^1)$.

La projection canonique $p : EG \times \mathcal{X}^1 \rightarrow EG \times_G \mathcal{X}^1$ induit un homomorphisme de groupes $p_* : \pi_1(EG \times \mathcal{X}^1) \rightarrow \pi_1(EG \times_G \mathcal{X}^1)$. Si on considère le sous-groupe distingué de $\pi_1(EG \times_G \mathcal{X}^1)$ engendré par les images par p_* de tous les éléments r_τ , $\tau \in \mathcal{X}^2$, alors on peut montrer à l'aide du théorème de Seifert et Van Kampen que

$$\pi_1(EG \times_G \mathcal{X}) \cong \pi_1(EG \times_G \mathcal{X}^1) / \langle p_*(r_\tau) \mid \tau \in \mathcal{X}^2 \rangle$$

Le théorème de Brown décrit essentiellement une présentation du groupe $\pi_1(EG \times_G \mathcal{X}^1)$ par générateurs et relations, ainsi que les éléments $p_*(r_\tau)$, $\tau \in \mathcal{X}^2$, ce qui permet d'obtenir une présentation par générateurs et relations du groupe G à l'aide de l'isomorphisme qui précède.

Détermination de $\pi_1(\mathbf{E}G \times_G \mathcal{X}^1)$

On suppose désormais que le groupe G agit en préservant une certaine orientation P de \mathcal{X}^1 . Cette hypothèse n'est pas nécessaire en général, mais elle permet de simplifier les énoncés, et on verra plus loin qu'elle est vérifiée dans notre cas.

Soit T un arbre de représentants pour \mathcal{X} modulo l'action de G , c'est à dire un arbre dont l'ensemble des sommets forme un système de représentants de \mathcal{X}^0 pour l'action de G . Un tel arbre existe toujours (Si on choisit un relèvement connexe par arcs de $G \backslash \mathcal{X}^1$, il se peut qu'il contienne des circuits. Si on supprime une des arêtes de chacun de ces circuits, on obtient un arbre qui convient, quitte à supprimer encore les arêtes dont l'un des sommets n'appartient pas au système de représentants de $G \backslash \mathcal{X}^0$ souhaité.) On note $S(T)$ l'ensemble des sommets de l'arbre T et $A(T)$ l'ensemble de ses arêtes.

Définition 85. *Soit T un arbre fixé de représentants pour \mathcal{X} modulo l'action de G . On note $S(T)$ l'ensemble des sommets de l'arbre T et $A(T)$ l'ensemble de ses arêtes.*

Définition 86. *On note G_1 la somme amalgamée itérée des sous-groupes d'isotropie pour l'action de G des sommets de T suivant les sous-groupes d'isotropie pour l'action de G des arêtes de T .*

A l'aide du théorème de Seifert et Van Kampen, on obtient un isomorphisme canonique entre G_1 et le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{E}G \times_G (G.T))$.

Proposition 87. *Le groupe G_1 est canoniquement isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{E}G \times_G (G.T))$.*

Par exemple, si G opère sur un graphe \mathcal{T} avec pour domaine fondamental T la chaîne $\underset{A}{\bullet} - \underset{B}{\bullet} - \underset{C}{\bullet}$, alors on a

$$\pi_1(\mathbf{E}G \times_G (G.T)) \cong G_A *_{G_{AB}} G_B *_{G_{BC}} G_C$$

où G_σ désigne le sous-groupe d'isotropie pour l'action de G de la cellule σ de \mathcal{T} .

Si E désigne un système de représentants de \mathcal{X}^1 pour l'action de G , alors

$$\pi_1(\mathbf{E}G \times_G \mathcal{X}^1) = \pi_1(\mathbf{E}G \times_G (G.E))$$

On va compléter l'arbre T en un système E de représentants de \mathcal{X}^1 pour l'action de G .

Définition 88. Soit e une arête orientée de 1-squelette d'un CW-complexe \mathcal{X} . On note $o(e)$ l'origine et $t(e)$ l'aboutissement de l'arête e . On désignera par G_e (resp. $G_{o(e)}$, resp. $G_{t(e)}$) le sous-groupe d'isotropie de l'arête e (resp. de l'origine de l'arête e , resp. de l'aboutissement de l'arête e) pour l'action de G .

Notons $\text{pr} : \mathcal{X}^1 \rightarrow G \backslash \mathcal{X}^1$ la projection canonique. Soit \tilde{e} une arête de $G \backslash \mathcal{X}^1$ telle que $\tilde{e} \notin \text{pr}(T)$. Comme $S(T)$ est un système de représentants de \mathcal{X}^0 pour l'action de G , il existe au moins une arête $e \in \text{pr}^{-1}(\tilde{e})$ telle que $o(e) \in S(T)$. Fixons une telle arête e pour chaque arête de $(G \backslash \mathcal{X}^1 - \text{pr}(T))$. On note E la réunion de T et de ces arêtes, $A(E)$ l'ensemble des arêtes du graphe E , et $A(E-T)$ l'ensemble des arêtes du graphe E qui n'appartiennent pas à l'arbre T . Pour chaque arête $e \in A(E-T)$, on note $t'(e) \in S(T)$ l'unique sommet de l'arbre T tel que $t(e) = g.t'(e)$ pour $g \in G$ et on choisit $\gamma_e \in G$ tel que $t(e) = \gamma_e t'(e)$. L'élément γ_e est uniquement déterminé à multiplication à gauche près par un élément du sous-groupe d'isotropie $G_{t'(e)}$. Par construction l'ensemble $A(E)$ est un système de représentants de \mathcal{X}^1 pour l'action de G .

Définition 89. On note E un graphe fixé d'ensemble de sommets $S(E)$ et d'ensemble d'arêtes $A(E)$ tel que $T \subset E$ et $o(e) \in S(T)$ pour tout $e \in A(E-T)$ ($A(E-T)$ désigne l'ensemble des arêtes du graphe E qui n'appartiennent pas à $A(T)$). On fixe un élément $\gamma_e \in G$ pour chaque arête $e \in A(E-T)$, tel que $t(e) = \gamma_e t'(e)$, avec $t'(e) \in S(T)$.

Définition 90. On note G_2 l'extension HNN itérée du groupe G_1 associée aux paires d'homomorphismes injectifs

$$(G_e \hookrightarrow G_{o(e)}, g \mapsto g; G_e \hookrightarrow G_{t'(e)}, g \mapsto \gamma_e^{-1} g \gamma_e)$$

avec $e \in A(E-T)$. On désigne par u_e la classe dans G_2 du générateur d'ordre infini qui correspond à l'extension HNN associée à la paire $(G_e \hookrightarrow G_{o(e)}, g \mapsto g; G_e \hookrightarrow G_{t'(e)}, g \mapsto \gamma_e^{-1} g \gamma_e)$.

A l'aide du théorème de Seifert et Van Kampen, on obtient un isomorphisme entre G_2 et le groupe fondamental $\pi_1(EG \times_G (G.E))$, déterminé par le choix des éléments γ_e .

Proposition 91. Le groupe G_2 est isomorphe au groupe fondamental

$$\pi_1(EG \times_G (G.E))$$

Proposition 92 (présentation de G_2). Soit $\langle \text{gén } G_1 \rangle / \langle \text{rel } G_1 \rangle$ une présentation par générateurs et relations du groupe G_1 . Par l'extension HNN itérée de G_1 on déduit une présentation par générateurs et relations du groupe G_2

$$\langle \text{gén } G_1; u_e, e \in A(E-T) \rangle / \langle \text{rel } G_1; u_e g u_e^{-1} = \gamma_e^{-1} g \gamma_e, g \in G_e, e \in A(E-T) \rangle$$

Etude de $p_* : \pi_1(\mathbf{EG} \times \mathcal{X}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbf{EG} \times_G \mathcal{X}^1)$

Commençons par décrire une application qui à toute arête $e \in \mathcal{X}^1$ d'origine $o(e) \in S(T)$ associe un élément du groupe $\pi_1(\mathbf{EG} \times_G \mathcal{X}^1)$. Si e est une arête de l'orientation P , on désignera par \bar{e} l'arête opposée.

Lemme 93. *Soit une arête $e \in \mathcal{X}^1$ d'origine $o(e) \in S(T)$. Il existe $h \in G_{o(e)}$ tel que $e = h\tilde{e}$ ou $e = h\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e}$ avec $\tilde{e} \in A(E)$. L'élément h est unique à multiplication près à droite par un élément de $G_{\tilde{e}}$ ou $G_{\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e}}$.*

Démonstration. Soit une arête $e \in \mathcal{X}^1$ d'origine $o(e) \in S(T)$. Comme l'ensemble $A(E)$ des arêtes du graphe E est un système de représentants de \mathcal{X}^1 pour l'action de G , il existe $h \in G$ tel que $e = h\tilde{e}$ ou $e = h\tilde{e}$ avec $\tilde{e} \in A(E)$. Par construction de E , on a $o(\tilde{e}) \in S(T)$. Mais $S(T)$ est un système de représentants de \mathcal{X}^0 pour l'action de G , d'où $o(\tilde{e}) = o(e)$ et $h \in G_{o(e)}$ dans le cas $e = h\tilde{e}$. L'élément h est uniquement déterminé à multiplication près à droite par les éléments du sous-groupe d'isotropie $G_{\tilde{e}}$.

Dans le cas $e = h\tilde{e}$, on pose $h' := h\gamma_{\tilde{e}}$, soit $e = h'\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e}$. On a $o(\tilde{e}) = t(\tilde{e})$, et $\gamma_{\tilde{e}}^{-1}t(\tilde{e}) \in S(T)$, soit $o(\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e}) \in S(T)$. Mais $S(T)$ est un système de représentants de \mathcal{X}^0 pour l'action de G , d'où $o(\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e}) = o(e)$ et $h' \in G_{o(e)}$. L'élément h' est uniquement déterminé à multiplication près à droite par les éléments du sous-groupe d'isotropie $G_{\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e}}$. \square

Lemme 94. *Soit une arête $e \in \mathcal{X}^1$ d'origine $o(e) \in S(T)$, et $h \in G_{o(e)}$ tel que $e = h\tilde{e}$ ou $e = h\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e}$ avec $\tilde{e} \in A(E)$. On note \bar{h} la classe de h dans le groupe G_2 . On associe à l'arête e un élément $\lambda_e \in G_2$ défini par*

$$\lambda_e = \begin{cases} \bar{h} & \text{si } \tilde{e} \in A(T) \\ \bar{h}u_{\tilde{e}} & \text{si } \tilde{e} \in A(E - T) \text{ et } e = h\tilde{e} \\ \bar{h}u_{\tilde{e}}^{-1} & \text{si } \tilde{e} \in A(E - T) \text{ et } e = h\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e} \end{cases}$$

ainsi qu'un élément $\mu_e \in G$

$$\mu_e = \begin{cases} h^{-1} & \text{si } \tilde{e} \in A(T) \\ \gamma_{\tilde{e}}^{-1}h^{-1} & \text{si } \tilde{e} \in A(E - T) \text{ et } e = h\tilde{e} \\ \gamma_{\tilde{e}}h^{-1} & \text{si } \tilde{e} \in A(E - T) \text{ et } e = h\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e} \end{cases}$$

On a $t(\mu_e.e) \in S(T)$. L'élément λ_e est uniquement déterminé quel que soit le choix de l'élément h .

Démonstration. L'élément $h \in G_{o(e)}$ existe d'après le lemme 93, et on a soit $\tilde{e} \in A(T)$, soit $\tilde{e} \in A(E - T)$. Si $\tilde{e} \in A(T)$, alors h est uniquement déterminé à multiplication près à droite par un élément de $G_{\tilde{e}}$. Mais dans la somme

amalgamée itérée G_1 , on amalgame les sous-groupes d'isotropie pour l'action de G des sommets de T (dont $G_{o(\tilde{e})}$) suivant les sous-groupes d'isotropie pour l'action de G des arêtes de T (dont $G_{\tilde{e}}$), aussi la classe \bar{h} de h dans G_1 est unique. On note abusivement également \bar{h} la classe de \bar{h} dans l'extension HNN itérée G_2 . Comme $\tilde{e} \in A(T)$, on a bien $t(\mu_e.e) = t(\tilde{e}) \in S(T)$.

Si $\tilde{e} \in A(E - T)$, on note de même \bar{h} la classe de l'élément h dans G_2 . Là aussi, l'élément \bar{h} est uniquement déterminé dans l'extension HNN associée à la paire d'homomorphismes injectifs $(G_{\tilde{e}} \hookrightarrow G_{o(\tilde{e})}, g \mapsto g; G_{\tilde{e}} \hookrightarrow G_{t'(\tilde{e})}, g \mapsto \gamma_{\tilde{e}}^{-1}g\gamma_{\tilde{e}})$. Si $e = h\tilde{e}$, alors $t(\mu_e.e) = t(\gamma_{\tilde{e}}^{-1}h^{-1}.e) = \gamma_{\tilde{e}}^{-1}t(\tilde{e}) = t'(\tilde{e}) \in S(T)$ par construction de l'élément $\gamma_{\tilde{e}}$. Si $e = h\gamma_{\tilde{e}}^{-1}\tilde{e}$, alors cette fois $t(\mu_e.e) = t(\gamma_{\tilde{e}}h^{-1}.e) = t(\tilde{e}) = o(\tilde{e}) \in S(T)$. \square

On peut maintenant décrire la projection

$$p_* : \pi_1(\mathbf{E}G \times \mathcal{X}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbf{E}G \times_G \mathcal{X}^1)$$

à l'aide de l'isomorphisme entre G_2 et le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{E}G \times_G \mathcal{X}^1)$ déterminé par les éléments γ_e .

Proposition 95. *Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \pi_1(\mathcal{X}^1)$ tel que*

- (i) $e_i \in \mathcal{X}^1$, $1 \leq i \leq n$
- (ii) $t(e_i) = o(e_{i+1})$, $1 \leq i \leq n - 1$
- (iii) $t(e_n) = o(e_1)$

On suppose que le point de base de \mathcal{X} est choisi dans $S(T)$.

Alors $p_(\underline{e})$ est l'élément de $\pi_1(\mathbf{E}G \times_G \mathcal{X}^1)$ déterminé via l'isomorphisme entre G_2 et le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{E}G \times_G \mathcal{X}^1)$ par*

$$\lambda_n \dots \lambda_1 \cdot \mu_n^{-1}$$

où

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_{e_1} & \text{si } i = 1 \\ \lambda_{\mu_{i-1}e_i} & \text{si } 1 < i \leq n \end{cases}$$

et

$$\mu_i = \begin{cases} \mu_{e_1} & \text{si } i = 1 \\ \mu_{\mu_{i-1}e_i}\mu_{i-1} & \text{si } 1 < i \leq n \end{cases}$$

Démonstration (esquisse). On a $o(e_1) \in S(T)$ puisque le point de base de \mathcal{X} a été choisi dans $S(T)$. On associe ainsi à e_1 les éléments $\lambda_1 := \lambda_{e_1} \in G_2$ et $\mu_1 := \mu_{e_1} \in G$ à l'aide du lemme 94.

On a $o(\mu_1 e_2) = t(\mu_{e_1} e_1) \in S(T)$. On peut donc associer à l'arête $\mu_1 e_2$ les éléments $\lambda_2 := \lambda_{\mu_1 e_2}$ et $\mu_2 := \mu_{\mu_1 e_2} \mu_1$ toujours à l'aide du lemme 94.

On a $o(\mu_2 e_3) = t(\mu_2 e_2) = t(\mu_{\mu_1 e_2} \mu_1 e_2) \in S(T)$ ce qui permet de conclure par récurrence que les éléments λ_i et μ_i sont bien λ_{e_1} et μ_{e_1} si $i = 1$ et $\lambda_{\mu_{i-1}e_i}$ et $\mu_{\mu_{i-1}e_i}\mu_{i-1}$ si $1 < i \leq n$. \square

Enoncé du théorème de Brown

Théorème 96. ([Bro84]) Soit \mathcal{X} un CW-complexe simplement connexe non vide muni d'une structure cellulaire sur laquelle agit cellulièrement un groupe G , en préservant une certaine orientation P fixée du 1-squelette \mathcal{X}^1 de \mathcal{X} .

On associe au couple (\mathcal{X}, G) un arbre T et un graphe E comme en section 3.5.1. L'ensemble $S(T)$ des sommets de l'arbre T est un système de représentants du 0-squelette \mathcal{X}^0 pour l'action de G , et l'ensemble $A(E)$ des arêtes du graphe E est un système de représentants de \mathcal{X}^1 pour l'action de G .

Soit G_1 la somme itérée des sous-groupes d'isotropie pour l'action de G des sommets de T amalgamée suivant les sous-groupes d'isotropie pour l'action de G des arêtes de T .

Soit G_2 l'extension HNN itérée de G_1 associée aux paires d'homomorphismes injectifs $(G_e \hookrightarrow G_{o(e)}, g \mapsto g; G_e \hookrightarrow G_{t(e)}, g \mapsto \gamma_e^{-1}g\gamma_e)$ pour $e \in A(E - T)$ l'ensemble des arêtes de E qui n'appartiennent pas à T .

Soit R un système de représentants du 2-squelette \mathcal{X}^2 pour l'action de G . A $\tau \in R$, on associe $r_\tau \in \pi_1(\mathcal{X}^1)$ en considérant les 1-cellules qui constituent le bord de τ , puis $p_*(r_\tau) \in G_2$ (proposition 95). L'ensemble $\{p_*(r_\tau) | \tau \in \mathcal{X}^2\}$ engendre un sous-groupe distingué \mathcal{R} de G_2 .

On a alors un isomorphisme de groupes

$$G \cong G_2/\mathcal{R}$$

3.5.2 Présentation de Γ_0

Il nous faut d'abord faire le choix de l'orientation P de \mathcal{Z}^1 , de l'arbre T et du graphe E . On déterminera ensuite les groupes G_1 et G_2 conformément au théorème 96; puis on calculera $p_*(r_\tau)$ pour τ appartenant à un système de représentants de \mathcal{Z}^2 pour l'action de Γ_0 . En conclusion on pourra donner une présentation de Γ_0 par générateurs et relations (proposition 97).

On rappelle que

$$\{\Psi(ABCD); g_1\Psi(ABCD); g_1^2\Psi(ABCD)\}$$

est un système de représentants de \mathcal{Z}^2 , avec $g_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ (voir tableau 3.1).

Choix de l'orientation P de \mathcal{Z}^1

Comme Γ_0 opère fidèlement sur \mathcal{Z}^2 , on obtient une orientation de \mathcal{Z}^1 telle que Γ_0 opère sans inversion sur \mathcal{Z}^1 dès lors qu'on a fixé des orientations

compatibles entre elles des 1-cellules du bord de $\Psi(ABCD)$, $g_1\Psi(ABCD)$ et $g_1^2\Psi(ABCD)$.

On choisit l'orientation P de \mathcal{Z}^1 présentée à la figure 3.4.

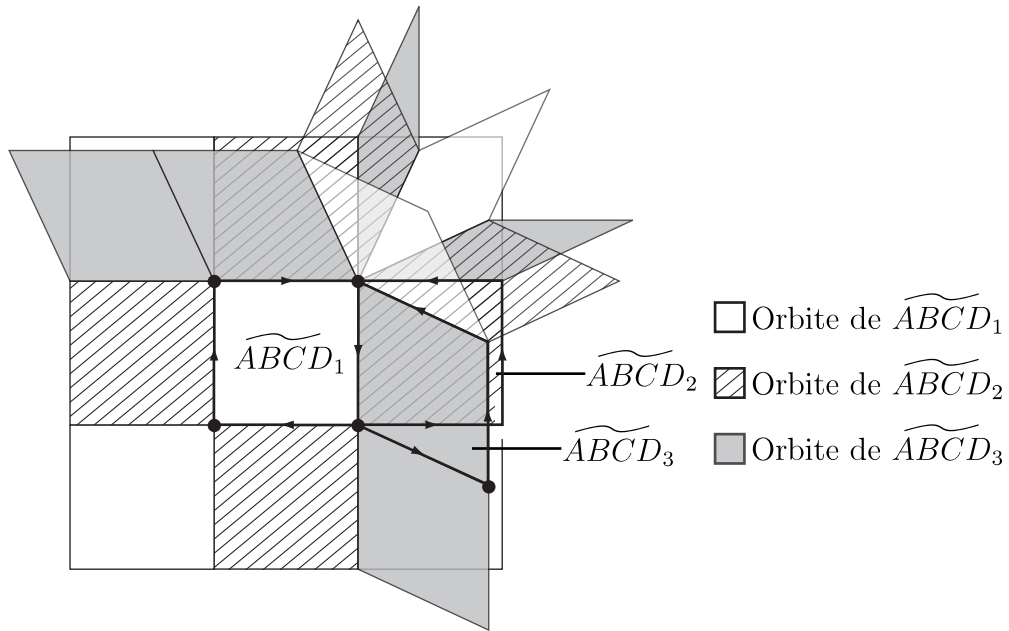


FIG. 3.4 – Orientation P des cellules \widetilde{ABCD}_1 , \widetilde{ABCD}_2 et \widetilde{ABCD}_3

Choix de l'arbre T

D'après le tableau 3.1, l'ensemble

$$\{\Psi(A); g_1^2\Psi(A); \Psi(B); \Psi(C); \Psi(D)\}$$

est un système de représentants de \mathcal{Z}^0 . On choisit l'arbre T présenté à la figure 3.5.

Pour l'identification des 2-cellules de la figure précédente, on pourra se reporter à la section 2.2.5. Les 2-cellules représentées vérifient les relations suivantes :

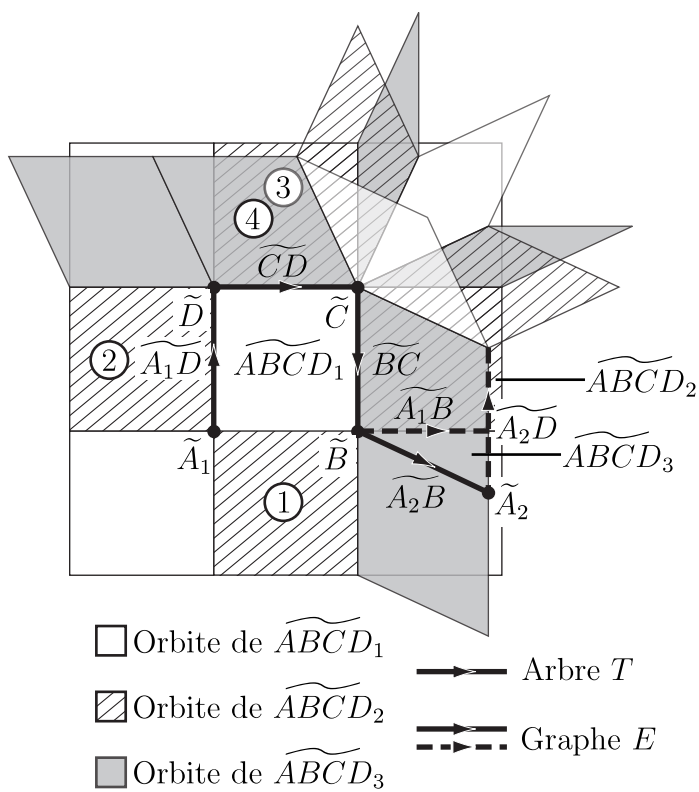


FIG. 3.5 – Représentants dans \mathcal{Z} des cellules de $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2} &= \alpha_1 \mathbf{1} \\
\mathbf{3} &= \alpha_6 \mathbf{2} \\
\mathbf{1} &= \alpha_2 \widetilde{ABCD}_2 \\
\widetilde{ABCD}_2 &= \alpha_4 \mathbf{3} \\
\widetilde{ABCD}_3 &= \alpha_5 \mathbf{4}
\end{aligned}$$

Choix du graphe E

D'après le tableau 3.1, l'ensemble

$$\{g_1\Psi(BA); \Psi(AD); \Psi(DC); \Psi(CB); g_1^2\Psi(BA); g_1^2\Psi(AD)\}$$

est un système de représentants de \mathcal{Z}^1 (on remarquera qu'on a tenu compte de l'orientation P (section 3.5.2)). On choisit le graphe E présenté à la figure 3.5.

Détermination du groupe G_1

Le groupe G_1 est la somme itérée des sous-groupes d'isotropie des sommets de T pour l'action de Γ_0 , amalgamée suivant les sous-groupes d'isotropie des arêtes de T pour l'action de Γ_0 .

Ainsi

$$G_1 = (\Gamma_0)_{\Psi(A)} *_{(\Gamma_0)_{\Psi(AD)}} (\Gamma_0)_{\Psi(D)} *_{(\Gamma_0)_{\Psi(DC)}} (\Gamma_0)_{\Psi(C)} *_{(\Gamma_0)_{\Psi(CB)}} (\Gamma_0)_{\Psi(B)} *_{(\Gamma_0)_{g_1^2\Psi(BA)}} (\Gamma_0)_{g_1^2\Psi(A)}$$

Mais les groupes $(\Gamma_0)_{\Psi(AD)}$, $(\Gamma_0)_{\Psi(DC)}$ et $(\Gamma_0)_{\Psi(CB)}$ sont triviaux et $(\Gamma_0)_{g_1^2\Psi(BA)} = (\Gamma_0)_{\Psi(B)}$ (voir tableau 3.1), aussi cette somme amalgamée itérée devient le produit libre

$$G_1 \cong (\Gamma_0)_{\Psi(A)} * (\Gamma_0)_{\Psi(D)} * (\Gamma_0)_{\Psi(C)} * (\Gamma_0)_{g_1^2\Psi(A)}$$

Détermination du groupe G_2

Il nous faut préciser les éléments γ_e et u_e conformément au lemme 90 pour $e \in A(E - T) = \{g_1\Psi(BA); g_1^2\Psi(AD)\}$.

On a $t(g_1\Psi(BA)) = \alpha_2\Psi(B)$ et $\Psi(B) \in S(T)$, aussi on peut choisir $\gamma_1 := \gamma_{g_1\Psi(BA)} = \alpha_2$. On note u_1 le générateur d'ordre infini $u_{g_1\Psi(BA)}$ du groupe G_2 . Comme le sous-groupe d'isotropie $(\Gamma_0)_{g_1\Psi(BA)}$ est trivial, l'extension HNN de G_1 associée à la paire d'homomorphismes injectifs

$$((\Gamma_0)_{g_1\Psi(BA)} \hookrightarrow (\Gamma_0)_{\Psi(B)}; (\Gamma_0)_{g_1\Psi(BA)} \hookrightarrow (\Gamma_0)_{\Psi(A)})$$

est isomorphe au produit libre $G_1 * C$ où $C = \langle u_1 \rangle$.

On a $t(g_1^2\Psi(AD)) = \alpha_5\Psi(D)$, et $\Psi(D) \in S(T)$. On peut ainsi poser $\gamma_2 = \gamma_{g_1^2\Psi(AD)} = \alpha_5$. On note u_2 le générateur d'ordre infini $u_{g_1^2\Psi(AD)}$ du groupe G_2 . Comme le sous-groupe d'isotropie $(\Gamma_0)_{g_1^2\Psi(AD)}$ a pour unique élément non trivial α_3 et $(\Gamma_0)_{\Psi(D)}$ pour unique élément non trivial α_6 , l'extension HNN de $G_1 * C$ associée à la paire d'homomorphismes injectifs

$$((\Gamma_0)_{g_1^2\Psi(AD)} \hookrightarrow (\Gamma_0)_{g_1^2\Psi(A)}, \alpha_3 \mapsto \alpha_3; (\Gamma_0)_{g_1^2\Psi(AD)} \hookrightarrow (\Gamma_0)_{\Psi(D)}, \alpha_3 \mapsto \alpha_6)$$

est isomorphe à

$$G_2 \cong (G_1 * C * C') / \langle u_2 \alpha_3 u_2^{-1} = \alpha_6 \rangle$$

où $C = \langle u_1 \rangle$ et $C' = \langle u_2 \rangle$. (On a utilisé l'égalité $\alpha_5^{-1} \alpha_3 \alpha_5 = \alpha_6$.)

Evaluation de $p_*(r_\tau)$

On choisit $\Psi(B)$ comme point de base de l'espace \mathcal{Z} . On va appliquer la proposition 95 au système de représentants de \mathcal{Z}^2

$$\{\Psi(ABCD); g_1\Psi(ABCD); g_1^2\Psi(ABCD)\}$$

Détermination de $p_*(r_{\Psi(ABCD)})$

On a $r_{\Psi(ABCD)} = (\Psi(BA), \Psi(AD), \Psi(DC), \Psi(CB))$. Etant donné que $o(\Psi(BA)) = \Psi(B) \in S(T)$ et $\alpha_2\Psi(BA) \in A(E - T)$, on a $\lambda_1 = \alpha_2 u_1$ et $\mu_1 = \gamma_1^{-1} \alpha_2^{-1} = 1$. On trouve ensuite $\lambda_2 = 1$ et $\mu_2 = 1 \cdot \mu_1 = 1$ car $\mu_1\Psi(AD) = \Psi(AD) \in A(T)$. Puis $\lambda_3 = 1$ et $\mu_3 = 1 \cdot \mu_2 = 1$ car $\mu_2\Psi(DC) = \Psi(DC) \in A(T)$. Enfin $\lambda_4 = 1$ et $\mu_4 = 1$ car $\mu_3\Psi(CB) = \Psi(CB) \in A(T)$. Donc d'après la proposition 95 $p_*(r_{\Psi(ABCD)})$ est déterminé par $\alpha_2 u_1$.

Détermination de $p_*(r_{g_1\Psi(ABCD)})$

On a $r_{g_1\Psi(ABCD)} = (g_1\Psi(BA), g_1\Psi(AD), g_1\Psi(DC), \Psi(CB))$. Comme $o(g_1\Psi(BA)) = \Psi(B) \in S(T)$ et $g_1\Psi(BA) \in A(E - T)$, on a $\lambda_1 = u_1$ et $\mu_1 = \gamma_1^{-1} = \alpha_2^{-1}$. On a $\mu_1 g_1\Psi(AD) = \alpha_1\Psi(AD)$ et $\Psi(AD) \in A(T)$, d'où $\lambda_2 = \alpha_1$ et $\mu_2 = \alpha_1 \mu_1 = \alpha_1 \alpha_2^{-1}$. Par ailleurs $\mu_2 g_1\Psi(DC) = \alpha_6\Psi(DC)$ et $\Psi(DC) \in A(T)$, aussi $\lambda_3 = \alpha_6$ et $\mu_3 = \alpha_6 \mu_2 = \alpha_6 \alpha_1 \alpha_2^{-1}$. Enfin on a $\mu_3\Psi(CB) = \alpha_4\Psi(CB)$ et $\Psi(CB) \in A(T)$, soit $\lambda_4 = \alpha_4$ et $\mu_4 = \alpha_4 \mu_3 = \alpha_4 \alpha_6 \alpha_1 \alpha_2^{-1}$. Mais $\mu_4 \in G$, et dans G , on a $\alpha_4 \alpha_6 \alpha_1 = \alpha_2$ (voir tableau 3.1), aussi $\mu_4 = 1$. Ainsi d'après la proposition 95, $p_*(r_{g_1\Psi(ABCD)})$ est déterminé par $\alpha_4 \alpha_6 \alpha_1 u_1$.

Détermination de $p_*(r_{g_1^2\Psi(ABCD)})$

On a $r_{g_1^2\Psi(ABCD)} = (g_1^2\Psi(BA), g_1^2\Psi(AD), g_1^2\Psi(DC), \Psi(CB))$. Comme $o(g_1^2\Psi(BA)) = \Psi(B) \in S(T)$ et $g_1^2\Psi(BA) \in A(T)$, on a $\lambda_1 = 1$ et $\mu_1 = 1$. On a $\mu_1 g_1^2\Psi(AD) = g_1^2\Psi(AD) \in A(E - T)$, aussi $\lambda_2 = u_2$ et $\mu_2 = \gamma_2^{-1} \mu_1 = \alpha_5^{-1}$. Puis $\mu_2 g_1^2\Psi(DC) = \Psi(DC) \in A(T)$, soit $\lambda_3 = 1$ et $\mu_3 = 1 \cdot \mu_2 = \alpha_5^{-1}$. Enfin $\mu_3\Psi(CB) = \alpha_5\Psi(CB)$ et $\Psi(CB) \in A(T)$, d'où $\lambda_4 = \alpha_5$ et $\mu_4 = \alpha_5 \mu_3 = 1$. Ainsi d'après la proposition 95, $p_*(r_{g_1^2\Psi(ABCD)})$ est déterminé par $\alpha_5 u_2$.

Présentation du groupe Γ_0

D'après le théorème 96, le groupe Γ_0 est isomorphe au quotient du groupe G_2 par le sous-groupe distingué engendré par les éléments $p_*(r_{\Psi(ABCD)}) = \alpha_2 u_1$, $p_*(r_{g_1 \Psi(ABCD)}) = \alpha_4 \alpha_6 \alpha_1 u_1$ et $p_*(r_{g_1^2 \Psi(ABCD)}) = \alpha_5 u_2$. Le premier et le dernier de ces trois éléments permettent d'identifier u_1 avec α_2 et u_2 avec α_5 au sein du groupe Γ_0 .

Comme $G_2 \cong (G_1 * C * C') / \langle u_2 \alpha_3 u_2^{-1} = \alpha_6 \rangle$ et $u_2 = \alpha_5$ dans Γ_0 , l'élément α_6 n'est pas un générateur de Γ_0 et on obtient finalement

Proposition 97. *Le groupe Γ_0 est isomorphe au quotient*

$$(C_2 * (C_2 \times C_2) * (C_2 \times C_2)) / \langle R \rangle$$

où R est une certaine relation entre les éléments d'un système de générateurs du produit libre $C_2 * (C_2 \times C_2) * (C_2 \times C_2)$.

Plus précisément, si $\alpha_1 = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -i & -i \\ & i \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -i & -1-i \\ & i \end{pmatrix}$ et $\alpha_5 = \begin{pmatrix} i & \\ 1-i & -i \end{pmatrix}$, alors on a

$$\Gamma_0 = (\langle \alpha_1 \rangle * \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle * \langle \alpha_4, \alpha_5 \rangle) / \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 = \alpha_5 \alpha_3 \alpha_5 \rangle$$

3.5.3 Calcul de $H^1(\mathbf{B}\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$

Calculer le premier groupe de cohomologie d'un groupe G quand on connaît une présentation de G par générateurs et relations est facile, car on a

$$H^1(\mathbf{B}G; \mathbb{F}_2) = \text{Hom}_{grp}(G, \mathbb{F}_2)$$

On a de manière évidente

$$\text{Hom}_{grp}(C_2 * (C_2 \times C_2) * (C_2 \times C_2), \mathbb{F}_2) \cong (\mathbb{F}_2)^5$$

La relation $(R) : \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 = \alpha_5 \alpha_3 \alpha_5$ crée une contrainte sur l'image de l'un de ces cinq générateurs par un homomorphisme de groupes de Γ_0 dans \mathbb{F}_2 . D'où

$$H^1(\mathbf{B}\Gamma_0; \mathbb{F}_2) \cong \text{Hom}_{grp}(\Gamma_0, \mathbb{F}_2) \cong (\mathbb{F}_2)^4$$

3.5.4 Cohomologie de $B\Gamma_0$

On va revenir sur la deuxième page de la suite spectrale E'_2 (voir proposition 83). Comme $H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ est de dimension 4 sur \mathbb{F}_2 , la seule différentielle de la page E'_2 est non triviale. On en déduit que la suite spectrale E' dégénère en page 3 et est concentrée en colonne 0. Plus précisément :

Proposition 98. *Soit Γ_0 le sous-groupe d'Iwahori de $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$ des matrices triangulaires supérieures modulo l'idéal $(1+i)$. Tout homomorphisme du produit libre $C_2 * (C_2 \times C_2) * (C_2 \times C_2)$ vers Γ_0 qui envoie C_2 (resp. une des copies de $C_2 \times C_2$, resp. la copie restante de $C_2 \times C_2$) isomorphiquement sur le sous-groupe d'isotropie $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}$ (resp. $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}$, resp. $(\Gamma_0)_{\tilde{C}}$) induit une injection en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 dont le conoyau est concentré en degré 1 et de dimension 1 sur \mathbb{F}_2 .*

Chapitre 4

Cohomologies de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$, $\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ et $\mathrm{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$

Dans tout le chapitre, Γ désignera $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ et Γ_0 le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. On rappelle que pour $h \in \mathcal{Z}$, on désigne par Γ_h (resp. $(\Gamma_0)_h$) le sous-groupe d'isotropie de h pour l'action de Γ (resp. Γ_0) sur \mathcal{Z} . Pour une question de mise en page des formules, on abrègera parfois $H^*(-; \mathbb{F}_2)$ par $H^*(-)$.

Soit une application Γ_0 -linéaire $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$. Pour $x \in \Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$, l'application f induit une application de $\tilde{H}^*(\mathrm{B}\Gamma_{f(x)}; \mathbb{F}_2)$ vers $\tilde{H}^*(\mathrm{B}(\Gamma_0)_x; \mathbb{F}_2)$. On notera cette application $\mathrm{Res}(f(x); x)$ dans tout le chapitre.

4.1 Cohomologie de $\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$

4.1.1 Situation

Les deux chapitres précédents ont été consacrés au calcul des cohomologies de Γ et de son sous-groupe d'Iwahori Γ_0 .

On a montré (proposition 66) que la cohomologie réduite $\tilde{H}^*(\mathrm{B}\Gamma; \mathbb{F}_2)$ est isomorphe à la somme directe $\tilde{H}^*(\mathrm{B}\Gamma_A; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(\mathrm{B}\Gamma_C; \mathbb{F}_2)$ où $\Gamma_A \cong C_2 \times C_2$ et $\Gamma_C \cong \mathfrak{A}_4$. On a également montré (proposition 98) que la cohomologie réduite $\tilde{H}^*(\mathrm{B}\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ s'injecte dans la somme directe $\tilde{H}^*(\mathrm{B}(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(\mathrm{B}(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(\mathrm{B}(\Gamma_0)_{\tilde{C}}; \mathbb{F}_2)$ où $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1} \cong C_2$ et $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2} \cong (\Gamma_0)_{\tilde{C}} \cong C_2 \times C_2$.

On a vu en section 3.1 que les groupes Γ et Γ_0 sont reliés à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ par la décomposition en somme amalgamée

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \cong \Gamma *_{\Gamma_0} \Gamma$$

74 *Chapitre 4. Cohomologie à coefficients dans \mathbf{F}_2 de $\mathbf{BGL}_2(\mathbf{Z}[i, \frac{1}{2}])$*

où les deux injections de Γ_0 dans Γ sont l'injection standard $i : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ et l'injection non standard $j = c_\pi \circ i$, avec c_π la conjugaison par $\pi = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1+i & \end{pmatrix}$.

Les injections i et j induisent des applications $i^*, j^* : H^*(\mathbf{B}\Gamma; \mathbf{F}_2) \rightarrow H^*(\mathbf{B}\Gamma_0; \mathbf{F}_2)$. On notera $(i, j)^*$ l'application

$$(i, j)^* : \bigoplus_2 H^*(\mathbf{B}\Gamma; \mathbf{F}_2) \rightarrow H^*(\mathbf{B}\Gamma_0; \mathbf{F}_2)$$

$$(t_1, t_2) \mapsto (i, j)^*(t_1, t_2) = i^*(t_1) + j^*(t_2)$$

De la décomposition de $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{Z}[i, \frac{1}{2}])$ en somme amalgamée se déduit la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H^p(\mathbf{BPSL}_2(\mathbf{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbf{F}_2) \rightarrow \bigoplus_2 H^p(\mathbf{B}\Gamma; \mathbf{F}_2) \xrightarrow{(i, j)^*} H^p(\mathbf{B}\Gamma_0; \mathbf{F}_2) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

avec $p \in \mathbb{N}$ et ∂ l'homomorphisme bord de degré $+1$.

On va montrer que

$$H^*(\mathbf{BPSL}_2(\mathbf{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbf{F}_2) \cong \ker(i, j)^*$$

4.1.2 Etude de $(i, j)^*$

Description de i^*

Le produit $i \times \text{Id}_{\mathcal{Z}}$ définit une application de $\mathbf{E}\Gamma_0 \times_{\Gamma_0} \mathcal{Z}$ vers $\mathbf{E}\Gamma \times_{\Gamma} \mathcal{Z}$ car pour $\gamma_0 \in \Gamma_0$ et $x \in \mathcal{Z}$, on a $(i \times \text{Id}_{\mathcal{Z}})(\gamma_0, x) = (\gamma_0, x)$ et $(i \times \text{Id}_{\mathcal{Z}})(1, \gamma_0 x) = (1, \gamma_0 x)$. Comme \mathcal{Z} est contractile, l'application $(i \times \text{Id}_{\mathcal{Z}})^* : H^*_{\Gamma}(\mathcal{Z}; \mathbf{F}_2) \rightarrow H^*_{\Gamma_0}(\mathcal{Z}; \mathbf{F}_2)$ est l'application $i^* : H^*(\mathbf{B}\Gamma; \mathbf{F}_2) \rightarrow H^*(\mathbf{B}\Gamma_0; \mathbf{F}_2)$.

L'application $(i \times \text{Id}_{\mathcal{Z}})$ induit la projection canonique $p : \Gamma_0 \backslash \mathcal{Z} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{Z}$ et on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}\Gamma_0 \times_{\Gamma_0} \mathcal{Z} & \xrightarrow{i \times \text{Id}_{\mathcal{Z}}} & \mathbf{E}\Gamma \times_{\Gamma} \mathcal{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_0 \backslash \mathcal{Z} & \xrightarrow{p} & \Gamma \backslash \mathcal{Z}. \end{array}$$

Suivant les notations des pages 28 et 55, on a $p^{-1}(A) = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$, et $p^{-1}(C) = \{\tilde{C}\}$, d'où on déduit la proposition qui suit.

Proposition 99. *L'application $i \times \text{Id}_{\mathcal{Z}}$ induit en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 une application*

$$i^\# : \tilde{H}^*(B\Gamma_A) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma_C) \rightarrow \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}})$$

dont les composantes sont $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)$, $\text{Res}(A; \tilde{A}_2)$ et $\text{Res}(C; \tilde{C})$, et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^*(B\Gamma) & \xrightarrow[\text{(prop. 66)}]{\cong} & \tilde{H}^*(B\Gamma_A) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma_C) \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^\# \\ \tilde{H}^*(B\Gamma_0) & \xrightarrow[\text{(prop. 98)}]{\hookrightarrow} & \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}). \end{array}$$

Description de j^*

On va ramener la compréhension de l'application j^* à celle de l'effet de la rétraction ρ du corollaire 23 sur certains sous-réseaux des réseaux bien arrondis. On pourra alors utiliser les résultats des calculs de la section 1.4.

Lemme 100. *Soit l'application $f_1 : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$, $g \mapsto \pi^{-1}g$. Elle induit une application Γ_0 -équivariante $f_2 : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ telle que $(j \times f_2) : E\Gamma_0 \times \mathcal{Z} \rightarrow E\Gamma \times \mathcal{Z}$ induise une application entre les constructions de Borel $E\Gamma_0 \times_{\Gamma_0} \mathcal{Z}$ et $E\Gamma \times_{\Gamma} \mathcal{Z}$.*

Démonstration. L'application f_1 est $U(2)$ -équivariante à droite de manière évidente. Si l'action de Γ_0 sur la copie de droite de $GL_2(\mathbb{C})$ est conjuguée par c_π à l'action de Γ_0 comme sous-groupe de Γ sur la copie de gauche de $GL_2(\mathbb{C})$, alors l'application f_1 est également Γ_0 -équivariante à gauche.

En passant au quotient par l'action de $U(2)$ sur $GL_2(\mathbb{C})$, puis en composant par la rétraction ρ de la proposition 24, on obtient une application Γ_0 -équivariante $f_2 : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$. L'application $j \times f_2 : E\Gamma_0 \times \mathcal{Z} \rightarrow E\Gamma \times \mathcal{Z}$ définit une application au niveau des constructions de Borel. En effet, pour $\gamma_0 \in \Gamma_0$ et $x \in \mathcal{Z}$, on a $(j \times f_2)(\gamma_0, x) = (c_\pi(\gamma_0), f_2(x))$ et $(j \times f_2)(1, \gamma_0 x) = (1, c_\pi(\gamma_0)f_2(x))$ par la Γ_0 -équivariance de f_2 . \square

Lemme 101. *Soit l'application $f_1 : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$, $g \mapsto \pi^{-1}g$. Elle induit une application*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{W}' &\rightarrow \mathcal{W}^1 \\ (L_1, L_2) &\mapsto \rho(L_2) \end{aligned}$$

où ρ est la rétraction du corollaire 23

Démonstration. L'application f_1 induit une application de \mathcal{W}' vers \mathcal{W}' donnée par $(L_1, L_2) \mapsto \rho((L_1, L_2) \cdot \pi^{-1})$. On note f la composition de cette application avec la projection $\mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{W}^1$, $(L_1, L_2) \mapsto L_1$. On va expliciter l'application f .

Considérons la paire $(\text{Std}_2, L_I) \in \mathcal{W}'$, où $L_I = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \rangle$. On a $(\text{Std}_2, L_I) \cdot \pi^{-1} = (L_I, (1+i)\text{Std}_2)$, et par suite $f(\text{Std}_2, L_I) = \rho(L_I)$. Par transitivité de l'action de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ sur \mathcal{W}' , on obtient $f(L_1, L_2) = \rho(L_2)$ (proposition 75). \square

Proposition 102. *Pour déterminer explicitement l'application*

$$j^* : H^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$$

il suffit de connaître l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{W}' &\rightarrow \mathcal{W}^1 \\ (L_1, L_2) &\mapsto \rho(L_2) \end{aligned}$$

où ρ est la rétraction du corollaire 23.

Démonstration. Soit l'application $f_1 : \text{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$, $g \mapsto \pi^{-1}g$. Pour des actions de Γ_0 sur \mathcal{Z} adéquates (preuve du lemme 100), cette application induit une application Γ_0 -équivariante $f_2 : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ telle que $(j \times f_2) : E\Gamma_0 \times \mathcal{Z} \rightarrow E\Gamma \times \mathcal{Z}$ définisse une application entre les constructions de Borel (lemme 100). Comme \mathcal{Z} est contractile, l'application $(j \times f_2)^* : H_{\Gamma}^*(\mathcal{Z}; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{\Gamma_0}^*(\mathcal{Z}; \mathbb{F}_2)$ est l'application $j^* : H^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$. Par ailleurs, l'application $(j \times f_2)$ induit au niveau des quotients $\Gamma \backslash \mathcal{Z}$ et $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z}$ la même application que f_2 .

L'application $f_1 : \text{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ induit également une application $f : \mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{W}^1$, qui à la paire de réseaux (L_1, L_2) de \mathcal{W}' associe le réseau $\rho(L_2)$ de \mathcal{W}^1 , où ρ est la rétraction du corollaire 23 (lemme 101).

Les applications f_2 et f proviennent de la même application biéquivariante et induisent donc la même application de $\Gamma_0 \backslash \mathcal{Z} \cong \mathcal{W}'/U(2)$ vers $\Gamma \backslash \mathcal{Z} \cong \mathcal{W}^1/U(2)$ (propositions 20 et 78), qui est aussi celle induite par $j \times f_2$, d'où la proposition. \square

L'application f a été déterminée en section 1.4, à l'aide d'une étude explicite de la rétraction ρ (voir les tableaux 1.2 et 1.4). On a $f^{-1}(A) = \{\tilde{A}_1, \tilde{C}\}$ et $f^{-1}(C) = \{\tilde{A}_2\}$. Considérer ainsi les restrictions $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)$, $\text{Res}(A; \tilde{C})$ et $\text{Res}(C; \tilde{A}_2)$ suffit à décrire l'application j^* .

Proposition 103. *L'application $j \times f_2$ induit en cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 une application*

$$j^\# : \tilde{H}^*(B\Gamma_A) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma_C) \rightarrow \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}})$$

dont les composantes sont $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)$, $\text{Res}(A; \tilde{C})$ et $\text{Res}(C; \tilde{A}_2)$, et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^*(B\Gamma) & \xrightarrow[\text{(prop. 66)}]{\cong} & \tilde{H}^*(B\Gamma_A) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma_C) \\ \downarrow j^* & & \downarrow j^\# \\ \tilde{H}^*(B\Gamma_0) & \xrightarrow[\text{(prop. 98)}]{\hookrightarrow} & \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}). \end{array}$$

Description de $(i, j)^*$

Des propositions 99 et 103, on déduit une application

$$(i, j)^\# : \bigoplus_2 \tilde{H}^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2) \rightarrow \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}; \mathbb{F}_2)$$

$$(t_1, t_2) \mapsto i^\#(t_1) + j^\#(t_2)$$

pour $(t_1, t_2) \in \bigoplus_2 \tilde{H}^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2)$.

Proposition 104. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_2 \tilde{H}^*(B\Gamma) & \xrightarrow[\text{(prop. 66)}]{\cong} & \bigoplus_2 (\tilde{H}^*(B\Gamma_A) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma_C)) \\ \downarrow (i, j)^* & & \downarrow (i, j)^\# \\ \tilde{H}^*(B\Gamma_0) & \xrightarrow[\text{(prop. 98)}]{\hookrightarrow} & \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}). \end{array}$$

Afin de rendre lisibles les énoncés qui suivent, on notera $\tilde{H}^*(B\Gamma'; \mathbb{F}_2)$ la cohomologie de la seconde copie de $\tilde{H}^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2)$ (resp. $\tilde{H}^*(B\Gamma'_A; \mathbb{F}_2)$ et $\tilde{H}^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2)$ ses composantes; resp. $\text{Res}(A'; -)$ et $\text{Res}(C'; -)$ les restrictions qui en sont issues).

On rappelle que $H^*(B\Gamma'_A; \mathbb{F}_2) \cong H^*(B\Gamma_A; \mathbb{F}_2) \cong H^*(BC_2 \times C_2; \mathbb{F}_2)$. On note $\{x, y\}$ (resp. $\{x', y'\}$), $|x^{(l)}| = |y^{(l)}| = 1$, un certain système de générateurs de $H^*(B\Gamma_A^{(l)}; \mathbb{F}_2)$.

De la même façon, on note $\{\sigma_2, \sigma_3, z_3\}$ (resp. $\{\sigma'_2, \sigma'_3, z'_3\}$), $|\sigma_2^{(l)}| = 2$, $|\sigma_3^{(l)}| = |z_3^{(l)}| = 3$, un certain système de générateurs de $H^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2)$ (resp. $H^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2)$) car $H^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2) \cong H^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2) \cong H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$.

On a $H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(BC_2; \mathbb{F}_2)$. On note $\{a\}$, $|a| = 1$ le générateur de $H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}; \mathbb{F}_2)$.

Enfin, $H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(BC_2 \times C_2; \mathbb{F}_2)$. On note $\{b, c\}$, $|b| = |c| = 1$, un certain système de générateurs de $H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2)$ et $\{d, e\}$, $|d| = |e| = 1$, un certain système de générateurs de $H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}; \mathbb{F}_2)$.

Tous les systèmes de générateurs précédents seront précisés au cours de la preuve de la proposition qui suit.

Proposition 105. *L'application*

$$(i, j)^\# : \tilde{H}^*(B\Gamma) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma') \rightarrow \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}) \oplus \tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}})$$

est décrite par la matrice qui suit.

Démonstration. Soit a l'unique générateur de $H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(BC_2; \mathbb{F}_2)$ (lemme 130). Comme $H^*(B\Gamma_A^{(l)}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(BC_2 \times C_2; \mathbb{F}_2)$, la restriction $\text{Res}(A^{(l)}; \tilde{A}_1)$ est surjective, et on peut choisir un système de générateurs $\{x^{(l)}, y^{(l)}\} \in H^1(B\Gamma_A^{(l)}; \mathbb{F}_2)$ de telle façon que $\text{Res}(A^{(l)}; \tilde{A}_1)(y^{(l)}) = 0$ et donc $\text{Res}(A^{(l)}; \tilde{A}_1)(x^{(l)}) = a$ (lemme 134).

Comme $H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(B\Gamma_A^{(l)}; \mathbb{F}_2)$, les restrictions $\text{Res}(A; \tilde{A}_2)$ et $\text{Res}(A'; \tilde{C})$ sont des isomorphismes. On pose $b = \text{Res}(A; \tilde{A}_2)(x)$, $c = \text{Res}(A; \tilde{A}_2)(y)$, $d = \text{Res}(A'; \tilde{C})(x')$ et $e = \text{Res}(A'; \tilde{C})(y')$. L'ensemble $\{b, c\}$ est un système de générateurs de $H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2)$ et l'ensemble $\{d, e\}$ est un système de générateurs de $H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}; \mathbb{F}_2)$.

Les restrictions $\text{Res}(C; \tilde{C})$ et $\text{Res}(C'; \tilde{A}_2)$ sont des injections puisque $H^*(B\Gamma_C^{(l)}; \mathbb{F}_2) \cong H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$. Si $\{\sigma_2, \sigma_3, z_3\}$ est un système de générateurs de $H^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2)$, on a forcément $\text{Res}(C; \tilde{C})(\sigma_2) = d^2 + de + e^2$ et $\text{Res}(C; \tilde{C})(\sigma_3) = de(d + e)$ (lemme 135). Quitte à remplacer z_3 par $z_3 + \sigma_3$, on peut imposer $\text{Res}(C; \tilde{C})(z_3) = d^3 + d^2e + e^3$. De même, si $\{\sigma'_2, \sigma'_3, z'_3\}$ est un système de générateurs de $H^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2)$, on a forcément $\text{Res}(C; \tilde{A}_2)(\sigma'_2) = b^2 + bc + c^2$ et $\text{Res}(C; \tilde{A}_2)(\sigma'_3) = bc(b + c)$. Quitte à remplacer z'_3 par $z'_3 + \sigma'_3$, on peut aussi imposer $\text{Res}(C; \tilde{A}_2)(z'_3) = b^3 + b^2c + c^3$. \square

Structure de $H^*(\mathbf{BSO}(3); \mathbf{F}_2)$ -module de $\ker(i, j)^*$

On a $\ker(i, j)^* \cong \ker(i, j)^\#$ d'après le diagramme de la proposition 104. C'est ce dernier qu'on va déterminer.

	$H^*(B\Gamma_A; \mathbb{F}_2)$		$H^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2)$			$H^*(B\Gamma'_A; \mathbb{F}_2)$		$H^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2)$		
	x	y	σ_2	σ_3	z_3	x'	y'	σ'_2	σ'_3	z'_3
$H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}; \mathbb{F}_2)$	a	0	0	0	0	a	0	0	0	0
$H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2)$	b	c	0	0	0	0	0	$b^2 + bc + c^2$	$bc(b + c)$	$b^3 + b^2c + c^3$
$H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}; \mathbb{F}_2)$	0	0	$d^2 + de + e^2$	$de(d + e)$	$d^3 + d^2e + e^3$	d	e	0	0	0

TAB. 4.1 – Matrice de l'application $(i, j)^\#$

Soient $(P_1, P_2) \in \tilde{H}^*(\mathbf{B}\Gamma_A; \mathbf{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(\mathbf{B}\Gamma_C; \mathbf{F}_2)$ et $(P_3, P_4) \in \tilde{H}^*(\mathbf{B}\Gamma'_A; \mathbf{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(\mathbf{B}\Gamma'_C; \mathbf{F}_2)$. En lisant la table 4.1, on observe que

$$((P_1, P_2), (P_3, P_4)) \in \ker(i, j)^\# \Leftrightarrow \begin{cases} (a) & \text{Res}(A; \tilde{A}_2)(P_1) = \text{Res}(C; \tilde{A}_2)(P_4) \\ (b) & \text{Res}(C; \tilde{C})(P_2) = \text{Res}(A; \tilde{C})(P_3) \\ (c) & \text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1) = \text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_3) \end{cases}$$

On se référera à ces trois conditions comme les conditions (a), (b) et (c).

Les groupes $\Gamma_A \cong C_2 \times C_2$, $\Gamma_C \cong \mathfrak{A}_4$, $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1} \cong C_2$, $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2} \cong C_2 \times C_2$ et $(\Gamma_0)_{\tilde{C}} \cong C_2 \times C_2$ sont tous des sous-groupes de Γ . Les cohomologies de leurs classifiants héritent de ce fait d'une structure de $H^*(\mathbf{BSO}(3); \mathbf{F}_2)$ -module, obtenue par restriction (voir lemmes 130, 134 et 135 en appendice).

Toutes les composantes de l'application $(i, j)^*$ sont des homomorphismes de $H^*(\mathbf{BSO}(3); \mathbf{F}_2)$ -modules pour ces structures de $H^*(\mathbf{BSO}(3); \mathbf{F}_2)$ -module. L'application $(i, j)^*$ est ainsi aussi un homomorphisme de $H^*(\mathbf{BSO}(3); \mathbf{F}_2)$ -modules, et par suite $\ker(i, j)^* = \ker(i, j)^\#$ est un $H^*(\mathbf{BSO}(3); \mathbf{F}_2)$ -module.

Pour exhiber la structure de $H^*(\mathbf{BSO}(3); \mathbf{F}_2)$ -module de $\ker(i, j)^*$, il est nécessaire d'étudier un peu plus profondément les conditions (a), (b) et (c). C'est l'objet des trois lemmes 106 à 108 qui suivent.

Lemme 106. *Soit $\{\sigma_2, \sigma_3, z_3\}$ un système de générateurs de $\tilde{H}^*(\mathbf{B}\mathfrak{A}_4; \mathbf{F}_2)$ choisi comme au lemme 135. Soit $P \in \tilde{H}^q(\mathbf{B}\mathfrak{A}_4; \mathbf{F}_2)$ non nul. Alors, P est congru à 0 ou $\sigma_2^{\frac{q}{2}}$ modulo l'idéal (σ_3) si q est pair (resp. 0 ou $z_3\sigma_2^{\frac{q-3}{2}}$ si q est impair). En d'autres termes, on a $H^*(\mathbf{B}\mathfrak{A}_4; \mathbf{F}_2)/(\sigma_3) \cong \mathbf{F}_2[\sigma_2]\{1, z_3\}$.*

Démonstration. On a $z_3^2 = \sigma_2^3 + \sigma_3(\sigma_3 + z_3)$ d'après le lemme 135. Donc z_3^2 est congru à σ_2^3 modulo l'idéal (σ_3) . \square

Lemme 107. *Soient $P_1 \in \tilde{H}^q(\mathbf{B}\Gamma_A; \mathbf{F}_2)$ et $P_4 \in \tilde{H}^q(\mathbf{B}\Gamma'_C; \mathbf{F}_2)$ tels que $\text{Res}(C'; \tilde{A}_2)(P_4) = \text{Res}(A; \tilde{A}_2)(P_1)$ (condition (a)). Alors on a l'équivalence*

$$P_4 \in (\sigma'_3) \Leftrightarrow \text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1) = 0$$

et si $P_4 \notin (\sigma'_3)$, on a $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1) = a^q$.

Démonstration. Soient $P_1 \in \tilde{H}^q(\mathbf{B}\Gamma_A; \mathbf{F}_2)$, et $P_4 \in \tilde{H}^q(\mathbf{B}\Gamma'_C; \mathbf{F}_2)$ tels que $\text{Res}(C'; \tilde{A}_2)(P_4) = \text{Res}(A; \tilde{A}_2)(P_1)$ (condition (a)). Si P_4 est nul, alors P_1 également car $\text{Res}(A; \tilde{A}_2)$ est un isomorphisme, et donc $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1) = 0$.

On considère désormais que P_4 est non nul, et par suite $q > 1$ puisque $\tilde{H}^1(\mathbf{B}\mathfrak{A}_4; \mathbf{F}_2) = 0$. D'après le lemme 106, on sait que modulo l'idéal (σ'_3) , P_4 est congru à 0 ou $\sigma'_2^{\frac{q}{2}}$ si q est pair (resp. à 0 ou $z'_3\sigma'_2^{\frac{q-3}{2}}$ si q est impair).

Soit l'idéal (c) de $\tilde{H}^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2)$. En lisant la table 4.1, on constate que $\text{Res}(C'; \tilde{A}_2)(\sigma'_3) \in (c)$, $\text{Res}(C'; \tilde{A}_2)(\sigma'_2) \notin (c)$, et $\text{Res}(C'; \tilde{A}_2)(z'_3) \notin (c)$, soit l'équivalence $P_4 \in (\sigma'_3) \Leftrightarrow \text{Res}(C'; \tilde{A}_2)(P_4) \in (c)$.

L'image réciproque de l'idéal (c) par l'isomorphisme $\text{Res}(A; \tilde{A}_2)$ est l'idéal de $\tilde{H}^*(B\Gamma_A; \mathbb{F}_2)$ engendré par y (table 4.1), d'où l'équivalence $P_4 \in (\sigma'_3) \Leftrightarrow P_1 \in (y)$ sous l'hypothèse $\text{Res}(C'; \tilde{A}_2)(P_4) = \text{Res}(A; \tilde{A}_2)(P_1)$.

Mais le noyau de la restriction $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)$ est l'idéal (y) (table 4.1), d'où l'équivalence du lemme.

Si on suppose maintenant que P_4 n'appartient pas à l'idéal (σ'_3) , alors $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1)$ est non nul. Mais $\tilde{H}^q(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2\{a^q\}$ (lemme 130), soit la fin du lemme. \square

Lemme 108. *Soient $P_2 \in \tilde{H}^q(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2)$ et $P_3 \in \tilde{H}^q(B\Gamma'_A; \mathbb{F}_2)$ tels que $\text{Res}(C; \tilde{C})(P_2) = \text{Res}(A'; \tilde{C})(P_3)$ (condition (b)). Alors on a l'équivalence*

$$P_2 \in (\sigma_3) \Leftrightarrow \text{Res}(A'; \tilde{A}_1)(P_3) = 0$$

et si $P_2 \notin (\sigma_3)$, on a $\text{Res}(A'; \tilde{A}_1)(P_3) = a^q$.

Démonstration. Voir lemme 107. \square

Soit $\{\tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{z}_3\}$ un système de générateurs de $\tilde{H}^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ choisi comme au lemme 135, et considérons les injections $\nu : \tilde{H}^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2) \rightarrow \tilde{H}^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ et $\nu' : \tilde{H}^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2) \rightarrow \tilde{H}^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ définies par $\nu^{(l)}(\sigma_2^{(l)}) = \tilde{\sigma}_2$, $\nu^{(l)}(\sigma_3^{(l)}) = \tilde{\sigma}_3$ et $\nu^{(l)}(z_3^{(l)}) = \tilde{z}_3$. On note (ν, ν') l'homomorphisme

$$\begin{aligned} (\nu, \nu') : \tilde{H}^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2) &\rightarrow \tilde{H}^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2) \\ (x, y) &\mapsto \nu(x) + \nu'(y) \end{aligned}$$

et Δ l'homomorphisme diagonal

$$\begin{aligned} \Delta : \tilde{H}^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2) &\rightarrow \tilde{H}^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2) \\ \tilde{\sigma}_2 &\mapsto (\sigma_2, \sigma'_2), \quad \tilde{\sigma}_3 \mapsto (\sigma_3, \sigma'_3), \quad \tilde{z}_3 \mapsto (z_3, z'_3) \end{aligned}$$

On désignera par $\Delta(P)_C$ (resp. $\Delta(P)_{C'}$) la composante de $\Delta(P)$ suivant $\tilde{H}^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2)$ (resp. suivant $\tilde{H}^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2)$). De manière évidente $\ker(\nu, \nu') = \text{im}(\Delta)$.

Lemme 109. *On considère les homomorphismes (ν, ν') et Δ .*

(i) On a une injection

$$\ker(i, j)^\# \xrightarrow{\eta} \tilde{H}^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2)$$

$$((P_1, P_2), (P_3, P_4)) \mapsto (P_2, P_4)$$

(ii) On a une inclusion $\ker(\nu, \nu') \subset \eta(\ker(i, j)^\#)$.

(iii) On a une égalité $(\nu, \nu') \circ \eta(\ker(i, j)^\#) = (\tilde{\sigma}_3)$ où $(\tilde{\sigma}_3)$ est l'idéal de $\tilde{H}^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ engendré par $\tilde{\sigma}_3$.

Démonstration. Preuve de (i). On peut reformuler les conditions (a) et (b) à l'aide des lemmes 134 et 135 : P_1 est complètement déterminé par P_4 et P_3 est complètement déterminé par P_2 . On obtient ainsi une injection de $\ker(i, j)^\#$ dans $\tilde{H}^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2)$, en envoyant $((P_1, P_2), (P_3, P_4))$ sur (P_2, P_4) .

Preuve de (ii). D'après les lemmes 107 et 108, on peut trouver $P_1 \in \tilde{H}^*(B\Gamma_A; \mathbb{F}_2)$ et $P_3 \in \tilde{H}^*(B\Gamma'_A; \mathbb{F}_2)$ tels que $\eta((P_1, \Delta(P)_C), (P_3, \Delta(P)_{C'})) = \Delta(P)$ pour tout $P \in \tilde{H}^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$. Par construction

$$\text{Res}(C; \tilde{A}_1)(P_1) = \text{Res}(C'; \tilde{A}_1)(P_3)$$

soit $\text{im}(\Delta) \subset \eta(\ker(i, j)^\#)$ (condition (c)).

Preuve de (iii). Soient $(P_1, P_2) \in \tilde{H}^*(B\Gamma_A; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2)$ et $(P_3, P_4) \in \tilde{H}^*(B\Gamma'_A; \mathbb{F}_2) \oplus \tilde{H}^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2)$ vérifiant les conditions (a) et (b). Les lemmes 107 et 108 se réécrivent respectivement $(\nu'(P_4) \in (\tilde{\sigma}_3) \Leftrightarrow \text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1) = 0)$ et $(\nu(P_2) \in (\tilde{\sigma}_3) \Leftrightarrow \text{Res}(A'; \tilde{A}_1)(P_3) = 0)$.

Si $(\nu, \nu')(P_2, P_4) \in (\tilde{\sigma}_3)$, alors soit $(\nu(P_2) \in (\tilde{\sigma}_3) \text{ et } \nu'(P_4) \in (\tilde{\sigma}_3))$, soit $(\nu(P_2) \notin (\tilde{\sigma}_3) \text{ et } \nu'(P_4) \notin (\tilde{\sigma}_3))$. Dans le premier cas, on a $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1) = 0$ par le lemme 107 et $\text{Res}(A'; \tilde{A}_1)(P_3) = 0$ par le lemme 108, soit la condition (c). De même, dans le second cas, on a $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1) = \text{Res}(A'; \tilde{A}_1)(P_3) = a^q$ par les lemmes 107 et 108, soit également la condition (c). On a donc l'inclusion $(\nu, \nu') \circ \eta(\ker(i, j)^\#) \supset (\tilde{\sigma}_3)$.

Pour l'inclusion inverse, supposons que le couple $((P_1, P_2), (P_3, P_4))$ vérifie les conditions (a), (b) et (c). Si $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1) = \text{Res}(A'; \tilde{A}_1)(P_3) = 0$, alors $\nu(P_2), \nu'(P_4) \in (\tilde{\sigma}_3)$ par les lemmes 107 et 108, soit $(\nu, \nu')(P_2, P_4) \in (\tilde{\sigma}_3)$. Si par contre $\text{Res}(A; \tilde{A}_1)(P_1) = \text{Res}(A'; \tilde{A}_1)(P_3) = a^q$, alors $\nu(P_2), \nu'(P_4) \notin (\tilde{\sigma}_3)$, soit $\nu(P_2) \equiv \nu'(P_4) \equiv \tilde{\sigma}_2^{\frac{q}{2}} \pmod{(\tilde{\sigma}_3)}$ si q est pair (resp. $\nu(P_2) \equiv \nu'(P_4) \equiv \tilde{z}_3 \tilde{\sigma}_2^{\frac{q-3}{2}} \pmod{(\tilde{\sigma}_3)}$ si q est impair (lemme 106)). Donc $(\nu, \nu')(P_2, P_4)$ appartient aussi à $(\tilde{\sigma}_3)$. On a donc l'inclusion $(\nu, \nu') \circ \eta(\ker(i, j)^\#) \subset (\tilde{\sigma}_3)$. \square

Proposition 110. On a une suite exacte courte de $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -modules

$$1 \rightarrow \text{im}(\Delta) \rightarrow \eta(\ker(i, j)^\#) \xrightarrow{(\nu, \nu')} (\tilde{\sigma}_3) \rightarrow 1$$

Démonstration. Se déduit du lemme précédent. \square

Proposition 111. *En tant que $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module, on a un isomorphisme*

$$\ker(i, j)^\# \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3]\{1, a_3, b_3, a_3b_3\}$$

où $|a_3| = |b_3| = 3$, avec la structure multiplicative $a_3^2 = w_2^3 + w_3^2 + w_3a_3$, $b_3^2 = w_3b_3$. La série de Poincaré associée à $\ker(i, j)^\#$ est

$$\frac{1 + 2t^3 + t^6}{(1 - t^2)(1 - t^3)}$$

Démonstration. On va analyser la suite exacte courte de la proposition 110. L'image de l'homomorphisme Δ est isomorphe en tant que $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module au $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module libre de rang 2 $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ (lemme 135 en appendice). L'ensemble $\{1, \tilde{z}_3\}$ en constitue une base. L'idéal $(\tilde{\sigma}_3)$ est également un $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module libre de rang 2 (lemme 136 en appendice). L'ensemble $\{\tilde{\sigma}_3, \tilde{z}_3\tilde{\sigma}_3\}$ en constitue une base. La suite exacte courte de la proposition 110 est donc scindée, et le $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module $\ker(i, j)^\# \cong \eta(\ker(i, j)^\#)$ est libre de rang 4.

Si on note $1 := \Delta(1)$, $a_3 := \Delta(\tilde{z}_3)$ et $b_3 = (\sigma_3, 0) \in \eta(\ker(i, j)^\#) \subset H^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2)$, alors on a $(\nu, \nu')(b_3) = \tilde{\sigma}_3$ et

$$(\nu, \nu')(a_3b_3) = (\nu, \nu')((z_3, z'_3)(\sigma_3, 0)) = (\nu, \nu')(z_3\sigma_3, 0) = \tilde{z}_3\tilde{\sigma}_3$$

L'ensemble $\{1, a_3, b_3, a_3b_3\}$ constitue donc une base de $\ker(i, j)^\#$ en tant que $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module. La structure multiplicative se déduit du lemme 135 en appendice et du fait que $b_3^2 = (\sigma_3, 0)(\sigma_3, 0) = (\sigma_3, \sigma'_3)(\sigma_3, 0) = w_3b_3$ (par functorialité des classes de Stiefel-Whitney, on a $w_3 = \Delta(\tilde{\sigma}_3)$). \square

Surjectivité de $(i, j)^*$

Proposition 112. *Le conoyau de $(i, j)^\#$ est concentré en degré 1 et est de dimension 1 sur \mathbb{F}_2 .*

Démonstration. On va se servir des séries de Poincaré (lemmes 130, 134 et 135). On pose

$$K := (H^*(B\Gamma_A; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B\Gamma_C; \mathbb{F}_2)) \oplus (H^*(B\Gamma'_A; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B\Gamma'_C; \mathbb{F}_2))$$

et

$$L := H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2}; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B(\Gamma_0)_{\tilde{C}}; \mathbb{F}_2)$$

La série de Poincaré associée à K est $2 \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1+t^3}{(1-t^2)(1-t^3)} \right)$ car $\Gamma_A \cong C_2 \times C_2$ et $\Gamma_C \cong \mathfrak{A}_4$. Celle associée à L est $\frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2}$ car $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_1} \cong C_2$ et $(\Gamma_0)_{\tilde{A}_2} \cong$

84 *Chapitre 4. Cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $\mathbf{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$*

$(\Gamma_0)_{\tilde{C}} \cong C_2 \times C_2$. Enfin, celle associée au noyau de $(i, j)^\#$ est $\frac{1+2t^3+t^6}{(1-t^2)(1-t^3)}$ d'après la proposition 111.

Comme on a

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \text{coker}(i, j)^\# = \dim_{\mathbb{F}_2} \text{ker}(i, j)^\# + \dim_{\mathbb{F}_2} L - \dim_{\mathbb{F}_2} K$$

on obtient la série de Poincaré associée à $\text{coker}(i, j)^\#$:

$$\frac{1 + 2t^3 + t^6}{(1-t^2)(1-t^3)} + \left(\frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1+t^3}{(1-t^2)(1-t^3)} \right) = t$$

Le conoyau de $(i, j)^\#$ est donc concentré en degré 1 et de dimension 1 sur \mathbb{F}_2 . \square

Proposition 113. *L'application*

$$(i, j)^* : H^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2) \oplus H^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$$

est surjective.

Démonstration. Du diagramme 104, on déduit que les images de $(i, j)^*$ et $(i, j)^\#$ sont isomorphes. Si $q > 1$, on sait que $(\text{Im}(i, j)^\#)^q = L^q$ par la proposition 112 et $\dim_{\mathbb{F}_2} L^q = \dim_{\mathbb{F}_2} H^q(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2)$ par la proposition 98. Donc $(i, j)^*$ est surjective en degré $q > 1$. Si $q = 1$, on sait que $\dim_{\mathbb{F}_2} (\text{Im}(i, j)^\#)^1 = \dim_{\mathbb{F}_2} L^1 - 1$ par la proposition 112 et $\dim_{\mathbb{F}_2} L^1 = \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2) + 1$ par la proposition 98, soit $\dim_{\mathbb{F}_2} H^1(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2) = \dim_{\mathbb{F}_2} (\text{Im}(i, j)^\#)^1$. Donc $(i, j)^*$ est aussi surjective en degré 1. \square

4.1.3 Cohomologie de $\mathbf{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$

On peut maintenant analyser la suite exacte longue de type Mayer-Vietoris associée à la décomposition en somme amalgamée de $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$, à savoir

$$\dots \rightarrow H^p(\mathbf{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \rightarrow \bigoplus_2 H^p(B\Gamma; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{(i, j)^*} H^p(B\Gamma_0; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial} \dots,$$

avec $p \in \mathbb{N}$ et ∂ l'homomorphisme bord de degré +1.

Comme l'application $(i, j)^*$ est surjective (proposition 113), on obtient que la cohomologie de $\mathbf{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ à coefficients dans \mathbb{F}_2 s'injecte dans $\bigoplus_2 H^*(B\Gamma; \mathbb{F}_2)$ et est isomorphe à $\text{ker}(i, j)^*$. En d'autres termes, d'après la proposition 111 on a le résultat qui suit.

Théorème 2. *On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_2[w_2, w_3]$ -module*

$$H^*(BPSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3]\{1, a_3, b_3, a_3b_3\}$$

où w_2 et w_3 sont les classes de Stiefel-Whitney de la représentation canonique de $PSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ (dont le classifiant a même type d'homotopie que celui de $PSU(2) = SO(3)$) et $|a_3| = |b_3| = 3$. La structure multiplicative est donnée par $a_3^2 = w_2^3 + w_3^2 + w_3a_3$, $b_3^2 = w_3b_3$.

4.2 Cohomologie de $BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$

On rappelle que $PSU(2) \cong SO(3)$. On obtient ainsi la suite exacte courte $1 \rightarrow \langle \pm 1 \rangle \rightarrow SU(2) \rightarrow SO(3) \rightarrow 1$, à laquelle est associée une suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre dont la deuxième page est donnée par

$$E_2^{p,q} \cong H^p(BSO(3); H^q(BC_2; \mathbb{F}_2))$$

L'action de $SO(3)$ sur $H^*(BC_2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t]$, $|t| = 1$, est triviale, d'où l'isomorphisme

$$E_2^{p,q} \cong H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2) \otimes H^*(BC_2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3, t]$$

où $|w_2| = (2, 0)$, $|w_3| = (3, 0)$ et $|t| = (0, 1)$ (w_2 et w_3 sont les classes de Stiefel-Whitney).

On rappelle le comportement de cette suite spectrale. Comme groupe topologique, $SU(2)$ est homéomorphe à la sphère S^3 de dimension 3, qui est 3-connexe. Les trois premiers groupes de cohomologie de $BSU(2)$ sont donc nuls, ce qui signifie que $d_2t \neq 0$, soit $d_2t = w_2$ et de même $d_3t^2 \neq 0$, soit $d_3t^2 = w_3$ (on aurait aussi pu utiliser un argument de transgression). On en déduit que la page E_4 est isomorphe comme \mathbb{F}_2 -algèbre à $\mathbb{F}_2[t^4]$. Comme la page E_4 est concentrée en colonne 0, la suite spectrale dégénère. On a alors $E_\infty \cong \mathbb{F}_2[t^4]$, et on trouve ainsi $c_2 = t^4$.

Théorème 3. *On a un isomorphisme d'algèbre*

$$H^*(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_2] \otimes \Lambda(a_3, b_3)$$

où c_2 est la deuxième classe de Chern de la représentation canonique de $SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $SL_2(\mathbb{C})$, et $|a_3| = |b_3| = 3$.

Démonstration. On a le diagramme commutatif de suites exactes courtes qui suit, où toutes les injections sont les inclusions canoniques.

$$1 \rightarrow \langle \pm 1 \rangle \rightarrow \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3) \rightarrow 1 \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & \langle \pm 1 \rangle & \rightarrow & \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow 1 \quad (2) \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

$$1 \rightarrow \langle \pm 1 \rangle \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow 1 \quad (3)$$

Soit $(1)\mathbf{E}$ (resp. $(2)\mathbf{E}$, resp. $(3)\mathbf{E}$) la suite spectrale de Lyndon-Hoschild-Serre associée à la suite exacte courte (1) (resp. (2), resp. (3)).

Par naturalité des suites spectrales de Lyndon-Hoschild-Serre, le diagramme précédent implique l'existence d'homomorphismes de suites spectrales $\varphi : (2)\mathbf{E} \rightarrow (1)\mathbf{E}$ et $\varphi' : (2)\mathbf{E} \rightarrow (3)\mathbf{E}$. L'homomorphisme φ est un isomorphisme car $H^*(\mathrm{BSL}_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) \cong H^*(\mathrm{BSU}(2); \mathbb{F}_2)$, et $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) \cong H^*(\mathrm{BSO}(3); \mathbb{F}_2)$. On a donc un homomorphisme $\varphi' \circ \varphi^{-1} : (1)\mathbf{E} \rightarrow (3)\mathbf{E}$.

La structure de la suite spectrale $(1)\mathbf{E}$ a été décrite plus haut. La deuxième page de la suite spectrale $(3)\mathbf{E}$ est donnée par

$$\begin{aligned} (3)\mathbf{E}_2^{p,q} &= H^p(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); H^q(\mathrm{BC}_2; \mathbb{F}_2)) \\ &\cong H^p(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \otimes H^q(\mathrm{BC}_2; \mathbb{F}_2) \end{aligned}$$

car l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ sur $H^*(\mathrm{BC}_2; \mathbb{F}_2)$ est forcément triviale (une seule classe non nulle en chaque degré de $H^*(\mathrm{BC}_2; \mathbb{F}_2)$).

Au niveau des deuxièmes pages, l'homomorphisme $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est donné par la structure de $H^*(\mathrm{BSO}(3); \mathbb{F}_2)$ -module de $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ décrite au théorème 2 et l'identité entre les noyaux des trois suites exactes (1), (2) et (3). Ainsi, $\varphi' \circ \varphi^{-1}(w_2) = w_2$, $\varphi' \circ \varphi^{-1}(w_3) = w_3$, et $\varphi' \circ \varphi^{-1}(t) = t$.

Pour ce qui est des différentielles de $(3)\mathbf{E}$, on a donc comme pour $(1)\mathbf{E}$ les égalités $d_2 t = w_2$ et $d_3 t^2 = w_3$. De la deuxième page de $(3)\mathbf{E}$, isomorphe à $\mathbb{F}_2[t, w_2, w_3]\{1, a_3, b_3, a_3 b_3\}$, on déduit ainsi la troisième page de $(3)\mathbf{E}$, isomorphe à $\mathbb{F}_2[t^2, w_3]\{1, a_3, b_3, a_3 b_3\}$, puis la quatrième page de $(3)\mathbf{E}$, isomorphe à $\mathbb{F}_2[t^4]\{1, a_3, b_3, a_3 b_3\}$. Il n'y a plus de différentielles supérieures non triviales, d'où

$$H^*(\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t^4]\{1, a_3, b_3, a_3 b_3\}$$

Dans $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$, on avait la relation $a_3^2 = w_3^3 + w_3^2 + w_3 a_3$. Comme $d_2 t = w_2$, cette relation devient en troisième page : $a_3^2 = w_3^3 + w_3 a_3$. Enfin, comme $d_3 t^2 = w_3$, on obtient dans $H^*(\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ la relation $a_3^2 = 0$. Dans $H^*(\mathrm{BPSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$, on avait également la relation $b_3^2 = w_3 b_3$. Comme $d_3 t^2 = w_3$, cette relation devient dans $H^*(\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ la relation $b_3^2 = 0$. La \mathbb{F}_2 -sous-algèbre de $H^*(\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ engendrée par les éléments a_3 et b_3 est donc extérieure et

$$H^*(\mathrm{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t^4] \otimes \Lambda(a_3, b_3)$$

Par functorialité des classes de Chern, la deuxième classe de Chern de $H^*(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ est t^4 puisque c'est le cas pour la suite spectrale $(1)E$, d'où le théorème. \square

4.3 Cohomologie de $BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$

Dans tout ce qui suit, la partie de degré n d'une algèbre graduée K sera notée K_n .

On va effectuer le calcul de la cohomologie de $BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ à coefficients dans \mathbb{F}_2 à l'aide de la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre associée à la suite exacte courte

$$1 \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times \rightarrow 1$$

Deux choses sont à déterminer pour étudier cette suite spectrale : l'action de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times$ sur $H^*(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$, qui permettra d'expliciter la deuxième page de la suite spectrale, et les éventuelles différentielles supérieures. On démontrera qu'il ne peut y avoir de différentielles supérieures en montrant que $H^*(BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ est de dimension sur \mathbb{F}_2 supérieure en chaque degré à celle d'une certaine \mathbb{F}_2 -algèbre dont la série de Poincaré est la même que celle associée à la deuxième page de la suite spectrale. Les résultats essentiels de cette section sont la proposition 125 et le théorème 1.

Considérons l'homomorphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \pi : GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) &\longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5) \\ x &\longmapsto (\pi_1(x), \pi_2(x)), \end{aligned}$$

où π_1 (resp. π_2) est induit par l'homomorphisme d'anneaux π_1 (resp. π_2) de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ vers \mathbb{F}_5 qui applique $\frac{1}{2}$ sur 3 et i sur 2 (resp. i sur 3).

On va essentiellement étudier le diagramme (*) décrit ci-après.

Définition 114. Soit A un anneau. On note $D_2(A)$ le sous-groupe des matrices diagonales de $GL_2(A)$.

Par le théorème de Künneth, on a

$$H^*(B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_2 H^*(BGL_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2)$$

et

$$H^*(B(D_2(\mathbb{F}_5) \times D_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_2 H^*(BD_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2)$$

Si Res_G^H désigne la restriction en cohomologie de $H^*(BH; \mathbb{F}_2)$ vers $H^*(BG; \mathbb{F}_2)$ pour $G \subset H$, alors la restriction $\text{Res}_{D_2(\mathbb{F}_5) \times D_2(\mathbb{F}_5)}^{GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)}$ s'identifie à $\bigotimes_2 \text{Res}_{D_2(\mathbb{F}_5)}^{GL_2(\mathbb{F}_5)}$ également à l'aide du théorème de Künneth.

Considérons la restriction π_D de l'homomorphisme π au groupe $D_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$. Son image est le produit $D_2(\mathbb{F}_5) \times D_2(\mathbb{F}_5)$, et on a le diagramme commutatif (*) où Res désigne la restriction en cohomologie de $H^*(BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ vers $H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$.

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) & \xleftarrow{\text{Res}} & H^*(BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \\
 \pi_D^* \uparrow & & \uparrow \pi^* \\
 \bigotimes_2 H^*(BD_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2) & \xleftarrow{\bigotimes_2 \text{Res}_{D_2(\mathbb{F}_5)}^{GL_2(\mathbb{F}_5)}} & \bigotimes_2 H^*(BGL_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2),
 \end{array} \quad (*)$$

4.3.1 Description de $\bigotimes_2 \text{Res}_{D_2(\mathbb{F}_5)}^{GL_2(\mathbb{F}_5)}$

Lemme 115. *La cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 du classifiant du groupe $D_2(\mathbb{F}_5)$ des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre à*

$$\mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2)$$

où $|x_1| = |x_2| = 1$, et $|y_1| = |y_2| = 2$.

Démonstration. Le groupe $D_2(\mathbb{F}_5)$ des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $GL_1(\mathbb{F}_5) \times GL_1(\mathbb{F}_5) \cong C_4 \times C_4$. Par le théorème de Künneth, et en utilisant le lemme 131 en appendice, on obtient l'isomorphisme d'algèbres

$$H^*(BD_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2) \cong H^*(BC_4; \mathbb{F}_2) \otimes H^*(BC_4; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2)$$

où $|x_1| = |x_2| = 1$, et $|y_1| = |y_2| = 2$. □

Théorème 116. *([Qui72]) La cohomologie de $BGL_2(\mathbb{F}_5)$ à coefficients dans \mathbb{F}_2 est détectée par celle de $BD_2(\mathbb{F}_5)$. Il existe un isomorphisme d'algèbres*

$$H^*(BGL_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_1, c_2] \otimes \Lambda(e_1, e_3)$$

où c_1, c_2, e_1 et e_3 sont les classes de Chern modulaires de la représentation canonique de $GL_2(\mathbb{F}_5)$ sur \mathbb{F}_5 . On a $|e_1| = 1$, $|c_1| = 2$, $|e_3| = 3$ et $|c_2| = 4$.

Si $\text{Res}_{D_2(\mathbb{F}_5)}^{GL_2(\mathbb{F}_5)}$ désigne la restriction de la cohomologie de $BGL_2(\mathbb{F}_5)$ vers celle de $BD_2(\mathbb{F}_5)$, alors on a

$$\text{Res}_{D_2(\mathbb{F}_5)}^{GL_2(\mathbb{F}_5)} : H^*(BGL_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(BD_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2)$$

$$e_1 \mapsto x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} c_1 &\mapsto y_1 + y_2 \\ e_3 &\mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ c_2 &\mapsto y_1 y_2 \end{aligned}$$

Proposition 117 (Description de $\otimes_2 \text{Res}_{D_2(\mathbb{F}_5)}^{\text{GL}_2(\mathbb{F}_5)}$). On a les isomorphismes $H^*(B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_1, c_2, c'_1, c'_2] \otimes \Lambda(e_1, e_3, e'_1, e'_3)$, où $|e_1^{(i)}| = 1$, $|c_1^{(i)}| = 2$, $|e_3^{(i)}| = 3$, $|c_2^{(i)}| = 4$, et $H^*(B(D_2(\mathbb{F}_5) \times D_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2, y'_1, y'_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$, où $|x_1^{(i)}| = |x_2^{(i)}| = 1$ et $|y_1^{(i)}| = |y_2^{(i)}| = 2$.

$$\begin{aligned} H^*(B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) &\xrightarrow{\text{Res}_{D_2(\mathbb{F}_5) \times D_2(\mathbb{F}_5)}^{\text{GL}_2(\mathbb{F}_5) \times \text{GL}_2(\mathbb{F}_5)}} H^*(B(D_2(\mathbb{F}_5) \times D_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \\ \begin{aligned} e_1 &\mapsto x_1 + x_2 & e'_1 &\mapsto x'_1 + x'_2 \\ c_1 &\mapsto y_1 + y_2 & c'_1 &\mapsto y'_1 + y'_2 \\ e_3 &\mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1 & e'_3 &\mapsto x'_1 y'_2 + x'_2 y'_1 \\ c_2 &\mapsto y_1 y_2 & c'_2 &\mapsto y'_1 y'_2 \end{aligned} \end{aligned}$$

4.3.2 Analyse de l'homomorphisme π_D^*

Lemme 118. La cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 du classifiant du groupe $D_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ est isomorphe en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre à

$$\mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2, z_1, z_2)$$

où $|x_1| = |x_2| = |z_1| = |z_2| = 1$, et $|y_1| = |y_2| = 2$.

Démonstration. Le groupe $D_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ est isomorphe à $GL_1(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \times GL_1(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \cong (C \times C_4) \times (C \times C_4)$, car on a $GL_1(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \cong \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times \cong C \times C_4$ (on choisira ici $1 + i$ comme générateur de C et i comme générateur de C_4). Par le théorème de Künneth, et en utilisant les lemmes 131 et 132 en appendice, on obtient l'isomorphisme d'algèbres

$$H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2, z_1, z_2)$$

où $|x_1| = |x_2| = |z_1| = |z_2| = 1$, et $|y_1| = |y_2| = 2$. \square

Etude de π_1^*

L'homomorphisme d'anneaux $\pi_1 : \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{F}_5$ applique $\frac{1}{2}$ sur 3 et i sur 2. Sa restriction aux unités de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ est un homomorphisme de groupes $\pi_1 : \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times \rightarrow \mathbb{F}_5^\times$ qui applique $1 + i$ sur 3 et i sur 2. Le groupe des unités de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ est isomorphe au produit $C \times C_4$ avec pour générateurs $1 + i$ et i , et le groupe des unités de \mathbb{F}_5 est isomorphe à C_4 avec pour générateur $t = 2$ par exemple. On obtient ainsi

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 : C \times C_4 & \longrightarrow & C_4 \\ i & \mapsto & t \\ 1 + i & \mapsto & t^{-1}, \end{array}$$

D'après la remarque 133 en appendice, l'homomorphisme $\pi_1^* : H^*(\mathrm{BC}_4; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(\mathrm{BC}; \mathbb{F}_2) \otimes H^*(\mathrm{BC}_4; \mathbb{F}_2)$ est donné par $\pi_1^*(x) = x + z$ et $\pi_1^*(y) = y$, avec les notations des lemmes 131 et 132. Ainsi, au niveau des groupes de matrices diagonales, on a la proposition qui suit.

Proposition 119 (Description de π_1^*). *On considère les cohomologies à coefficients dans \mathbb{F}_2*

$$H^*(\mathrm{BD}_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2)$$

et

$$H^*(\mathrm{BD}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2, z_1, z_2)$$

avec les notations de la section 4.3. L'homomorphisme π_1^* est décrit par

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^* : H^*(\mathrm{BD}_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^*(\mathrm{BD}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \\ x_1 & \mapsto & x_1 + z_1 \\ x_2 & \mapsto & x_2 + z_2 \\ y_1 & \mapsto & y_1 \\ y_2 & \mapsto & y_2 \end{array}$$

Etude de π_2^*

L'homomorphisme d'anneaux $\pi_2 : \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{F}_5$ applique $\frac{1}{2}$ sur 3 et i sur 3. Sa restriction aux unités de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ est un homomorphisme de groupes $\pi_2 : \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times \rightarrow \mathbb{F}_5^\times$ qui applique $1 + i$ sur 4 et i sur 3. Le groupe des unités de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ est isomorphe au produit $C \times C_4$ avec pour générateurs $1 + i$ et i , et le groupe des unités de \mathbb{F}_5 est isomorphe à C_4 avec pour générateur $t = 3$ par exemple. On obtient ainsi

$$\begin{array}{ccc} \pi_2 : C \times C_4 & \longrightarrow & C_4 \\ i & \mapsto & t \\ 1 + i & \mapsto & t^2, \end{array}$$

D'après la remarque 133 en appendice, l'homomorphisme $\pi_2^* : H^*(\mathrm{BC}_4; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(\mathrm{BC}; \mathbb{F}_2) \otimes H^*(\mathrm{BC}_4; \mathbb{F}_2)$ est donné par $\pi_2^*(x) = x$ et $\pi_2^*(y) = y$, avec les notations des lemmes 131 et 132. Ainsi, au niveau des groupes de matrices diagonales, on a la proposition qui suit.

Proposition 120 (Description de π_2^*). *On considère les cohomologies à coefficients dans \mathbb{F}_2*

$$H^*(BD_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2)$$

et

$$H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2, z_1, z_2)$$

avec les notations de la section 4.3. L'homomorphisme π_2^* est décrit par

$$\begin{array}{ccc} \pi_2^* : H^*(BD_2(\mathbb{F}_5); \mathbb{F}_2) & \rightarrow & H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \\ x_1 & \mapsto & x_1 \\ x_2 & \mapsto & x_2 \\ y_1 & \mapsto & y_1 \\ y_2 & \mapsto & y_2 \end{array}$$

Etude de π_D^*

On a $\pi_D^* = \pi_1^* \otimes \pi_2^*$.

Proposition 121 (Description de π_D^*). *On considère les cohomologies*

$$H^*(B(D_2(\mathbb{F}_5) \times D_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2, y'_1, y'_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$$

et

$$H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2, z_1, z_2)$$

avec les notations de la section 4.3.

$$\begin{array}{ccc} \pi_D^* : H^*(B(D_2(\mathbb{F}_5) \times D_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) & \rightarrow & H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \\ x_1 \mapsto x_1 + z_1 & & x'_1 \mapsto x_1 \\ x_2 \mapsto x_2 + z_2 & & x'_2 \mapsto x_2 \\ y_1 \mapsto y_1 & & y'_1 \mapsto y_1 \\ y_2 \mapsto y_2 & & y'_2 \mapsto y_2 \end{array}$$

4.3.3 Description de $\text{Res} \circ \pi^*$

D'après le diagramme (*), on a $\text{Res} \circ \pi^* = \pi_D^* \circ \bigotimes_2 \text{Res}_{D_2(\mathbb{F}_5)}^{\text{GL}_2(\mathbb{F}_5)}$. On utilise ensuite les propositions 117 et 121.

Proposition 122. *On considère les cohomologies*

$$H^*(B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_1, c_2, c'_1, c'_2] \otimes \Lambda(e_1, e'_1, e_3, e'_3)$$

et

$$H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, y_2] \otimes \Lambda(x_1, x_2, z_1, z_2)$$

avec les notations de la section 4.3.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Res} \circ \pi^* : H^*(B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) & \rightarrow & H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \\
 e_1 \mapsto x_1 + z_1 + x_2 + z_2 & & e'_1 \mapsto x_1 + x_2 \\
 e_3 \mapsto (x_1 + z_1)y_2 + (x_2 + z_2)y_1 & & e'_3 \mapsto x_1y_2 + x_2y_1 \\
 c_1 \mapsto y_1 + y_2 & & c'_1 \mapsto y_1 + y_2 \\
 c_2 \mapsto y_1y_2 & & c'_2 \mapsto y_1y_2
 \end{array}$$

On aura besoin des deux lemmes qui suivent pour finir de comprendre la structure de l'image de $\text{Res} \circ \pi^*$.

Lemme 123. *Soit A une \mathbb{F}_2 -algèbre commutative engendrée par n éléments de carré nul x_1, \dots, x_n . Alors, si le produit $x_1 \dots x_n$ de ces n éléments est non nul, l'algèbre A est isomorphe à l'algèbre extérieure $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe k monômes non nuls M_1, \dots, M_k en les x_i , $1 \leq i \leq n$ de somme $M_1 + \dots + M_k$ nulle et deux à deux distincts. Comme les éléments x_1, \dots, x_n sont tous de carré nul, il existe un unique monôme N en les x_i , $1 \leq i \leq n$ tel que $M_1N = x_1 \dots x_n$.

Si $j \neq 1$, alors le produit M_jN est nul, car les monômes M_j et N ont forcément un facteur commun de la forme x_i , $1 \leq i \leq n$ puisque $M_j \neq M_1$ et $M_1N = x_1 \dots x_n$. Ainsi

$$0 = (M_1 + \dots + M_k)N = M_1N = x_1 \dots x_n$$

et le produit $x_1 \dots x_n$ est donc nul. □

Lemme 124. *L'image de $e_1e'_1e_3e'_3$ par $\text{Res} \circ \pi^*$ est non nulle.*

Démonstration. On a $\text{Res} \circ \pi^*(e_1e'_1e_3e'_3)$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1 + z_1 + x_2 + z_2)(x_1 + x_2)[(x_1 + z_1)y_2 + (x_2 + z_2)y_1](x_1y_2 + x_2y_1) \\
 &= (z_1 + z_2)(x_1 + x_2)[(x_1 + z_1)y_2 + (x_2 + z_2)y_1](x_1y_2 + x_2y_1) \\
 &\quad \text{car } (x_1 + x_2)^2 = 0 \\
 &= (z_1 + z_2)(x_1 + x_2)[(x_1y_2 + x_2y_1) + (z_1y_2 + z_2y_1)](x_1y_2 + x_2y_1) \\
 &= (z_1 + z_2)(x_1 + x_2)(z_1y_2 + z_2y_1)(x_1y_2 + x_2y_1) \\
 &\quad \text{car } (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = 0 \\
 &= (z_1 + z_2)(z_1y_2 + z_2y_1)(x_1 + x_2)(x_1y_2 + x_2y_1) \\
 &= (z_1z_2(y_1 + y_2))(x_1x_2(y_1 + y_2)) \\
 &= x_1x_2z_1z_2(y_1^2 + y_2^2)
 \end{aligned}$$

□

Proposition 125. *L'image de l'homomorphisme*

$$\text{Res} \circ \pi^* : H^*(B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(BD_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$$

est isomorphe en tant qu'algèbre à la \mathbb{F}_2 -algèbre $\mathbb{F}_2[c_1, c_2] \otimes \Lambda(e_1, e'_1, e_3, e'_3)$, où c_1 et c_2 sont les classes de Chern de la représentation canonique de $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $GL_2(\mathbb{C})$, et où $|e_1| = |e'_1| = 1$ et $|e_3| = |e'_3| = 3$.

La série de Poincaré associée à l'image de π^* est

$$\frac{(1+t)^2(1+t^3)^2}{(1-t^2)(1-t^4)}$$

Démonstration. La combinaison de la proposition 122 et des lemmes 123 et 124 montre que L'image de $\text{Res} \circ \pi^*$ est isomorphe à la \mathbb{F}_2 -algèbre

$$\mathbb{F}_2[y_1 + y_2, y_1 y_2] \otimes \Lambda(x_1 + z_1 + x_2 + z_2, x_1 + x_2, (x_1 + z_1)y_2 + (x_2 + z_2)y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Mais $y_1 + y_2 = \text{Res} \circ \pi^*(c_1)$, $y_1 y_2 = \text{Res} \circ \pi^*(c_2)$, $x_1 + z_1 + x_2 + z_2 = \text{Res} \circ \pi^*(e_1)$, $x_1 + x_2 = \text{Res} \circ \pi^*(e'_1)$, $(x_1 + z_1)y_2 + (x_2 + z_2)y_1 = \text{Res} \circ \pi^*(e_3)$ et $x_1 y_2 + x_2 y_1 = \text{Res} \circ \pi^*(e'_3)$. \square

4.3.4 Description explicite de $E_2^{*,*}$

La deuxième page de la suite spectrale a pour terme général

$$E_2^{p,q} = H^q(B\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times; H^p(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2))$$

La cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ a été déterminée au théorème 3 : $H^*(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_2] \otimes \Lambda(a_3, b_3)$ où c_2 est la deuxième classe de Chern de la représentation canonique de $SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $SL_2(\mathbb{C})$, et $|a_3| = |b_3| = 3$.

Lemme 126. *L'action de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times$ sur $H^*(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ qui est induite par la suite exacte courte*

$$1 \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times \rightarrow 1$$

est triviale.

Démonstration. L'action de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times$ est triviale en degré $p \neq 3 \pmod{4}$, car dans ce cas on a $\dim_{\mathbb{F}_2} H^p(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \in \{0, 1\}$. Il suffit d'étudier le cas $p = 3$, car pour $p \geq 0$ on a

$$H^{p+4}(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) = c_2 H^p(BSL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$$

Examinons la diagonale Δ_3 de $E_2^{*,*}$ de degré total 3. On a $\Delta_3 = E_2^{0,3} \oplus E_2^{1,2} \oplus E_2^{2,1} \oplus E_2^{3,0}$, et, puisque $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times \cong C \times C_4$:

94 *Chapitre 4. Cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $\mathbf{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$*

- $E_2^{3,0} = H^3(\mathbf{B}\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times; H^0(\mathbf{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)) \cong H^3(\mathbf{B}(C \times C_4); \mathbb{F}_2)$ est de dimension 2 sur \mathbb{F}_2 car $H^*(\mathbf{B}(C \times C_4); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y] \otimes \Lambda(x, z)$ avec $|x| = |z| = 1$ et $|y| = 2$ d'après les lemmes 131 et 132 en appendice et le théorème de Künneth.
- $E_2^{2,1} = H^2(\mathbf{B}\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times; H^1(\mathbf{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)) = 0$ car la cohomologie de $\mathbf{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ est nulle en degré 1.
- $E_2^{1,2} = H^1(\mathbf{B}\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times; H^2(\mathbf{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)) = 0$ car la cohomologie de $\mathbf{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ est nulle en degré 2.
- $E_2^{0,3} = H^0(\mathbf{B}\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times; H^3(\mathbf{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)) = H^0(\mathbf{B}(C \times C_4); \mathbb{F}_2\{a_3, b_3\})$ est de dimension 2 sur \mathbb{F}_2 si et seulement si l'action de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times$ est triviale.

Donc Δ_3 est de dimension 4 ou strictement inférieure à 4, suivant que l'action de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times$ est triviale ou non. Mais

$$\dim_{\mathbb{F}_2}(\Delta_3) \geq \dim_{\mathbb{F}_2}(H^3(\mathbf{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)) \geq \dim_{\mathbb{F}_2}(\text{im}(\text{Res} \circ \pi^*))_3$$

et $\dim_{\mathbb{F}_2}(\text{im}(\text{Res} \circ \pi^*))_3 = 4$ d'après la proposition 125. Donc $\dim_{\mathbb{F}_2}(\Delta_3) = 4$, et l'action de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times$ sur $H^3(\mathbf{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ est triviale. \square

Comme l'action de $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times$ sur $H^*(\mathbf{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)$ est triviale, la page $E_2^{*,*}$ est isomorphe en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre au produit tensoriel

$$H^*(\mathbf{B}\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]^\times; \mathbb{F}_2) \otimes H^*(\mathbf{BSL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y] \otimes \Lambda(x, z) \otimes \mathbb{F}_2[c_2] \otimes \Lambda(a_3, b_3)$$

Proposition 127 (Page $E_2^{*,*}$). *On a un isomorphisme d'algèbres*

$$E_2^{*,*} \cong \mathbb{F}_2[y, c_2] \otimes \Lambda(x, z, a_3, b_3)$$

où $|x| = |z| = 1$, $|y| = 2$, $|a_3| = |b_3| = 3$ et $|c_2| = 4$ avec les notations du théorème 3 et des lemmes 131 et 132.

La série de Poincaré associée à $E_2^{*,*}$ est

$$\frac{(1+t)^2(1+t^3)^2}{(1-t^2)(1-t^4)}$$

4.4 Cohomologie de $\mathbf{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ - Résultats

Théorème 1. *On a un isomorphisme d'algèbre*

$$H^*(\mathbf{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_1, c_2] \otimes \Lambda(e_1, e'_1, e_3, e'_3)$$

où c_1 et c_2 sont les classes de Chern de la représentation canonique de $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $GL_2(\mathbb{C})$, $|e_1| = |e'_1| = 1$ et $|e_3| = |e'_3| = 3$.

Démonstration. Soit Δ_n la diagonale de $E_2^{*,*}$ de degré total n . On a

$$\dim_{\mathbb{F}_2}(\Delta_n) \geq \dim_{\mathbb{F}_2}(H^n(BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2)) \geq \dim_{\mathbb{F}_2}(\text{im}(\text{Res} \circ \pi^*))_n$$

Mais d'après les propositions 125 et 127, les séries de Poincaré associées à Δ_n et $\text{im}(\text{Res} \circ \pi^*)$ sont identiques. D'où le théorème, car $\text{im}(\text{Res} \circ \pi^*) \cong \mathbb{F}_2[c_1, c_2] \otimes \Lambda(e_1, e'_1, e_3, e'_3)$ d'après la proposition 125. \square

Corollaire 128. *La cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de $BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ est détectée par celle du classifiant du sous-groupe de ses matrices diagonales.*

Démonstration. On vient de montrer que

$$H^*(BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2) \cong \text{im}(\text{Res} \circ \pi^*)$$

\square

Proposition 129. *Le carré magique (voir page i en introduction) est cartésien après passage à la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 .*

Démonstration. Rappelons le carré magique : on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]))_2^\wedge & \xrightarrow{i} & (BGL_2(\mathbb{C}))_2^\wedge \\ \pi \downarrow & & \downarrow (\text{Id}, c) \\ (B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)))_2^\wedge & \xrightarrow[\psi]{} & (B(GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C})))_2^\wedge \end{array} \quad (1)$$

où $(B-)_2^\wedge$ désigne le complété en 2 du classifiant de l'espace $-$, i est l'injection canonique de $GL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$ dans $GL_2(\mathbb{C})$, π l'homomorphisme de la preuve de la section 4.3, c la conjugaison complexe, et ψ un homomorphisme dont la construction délicate utilise des méthodes de la théorie de l'homotopie étale.

L'énoncé de la proposition dit en substance que la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 du pullback de

$$B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)) \xrightarrow{\psi} B(GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C})) \xleftarrow{(\text{Id}, c)} BGL_2(\mathbb{C})$$

est celle de $BGL_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}])$. La cohomologie de ce pullback est calculable à l'aide de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (voir par exemple [McC01]).

Plus précisément, la deuxième page de cette suite spectrale est $E_2^{p,*} \cong$

$$\text{Tor}_{H^*(B(GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C})); \mathbb{F}_2)}^p(H^*(B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2), H^*(BGL_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2))$$

Comme la cohomologie de $B(GL_2(\mathbb{F}_5) \times GL_2(\mathbb{F}_5))$ est libre sur celle de $B(GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C}))$ (théorème 116), seul

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})); \mathbb{F}_2)}^0(\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2), \mathrm{H}^*(\mathrm{BGL}_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2))$$

$$\cong$$

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})); \mathbb{F}_2)} \mathrm{H}^*(\mathrm{BGL}_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$$

est non nul, et la cohomologie du pullback du carré magique y est donc isomorphe. Il reste à évaluer le produit tensoriel précédent. On a d'après le théorème 116

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_1, c'_1, c_2, c'_2] \otimes \Lambda(e_1, e'_1, e_3, e'_3)$$

et par ailleurs

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_1, c'_1, c_2, c'_2]$$

On en déduit par functorialité des classes de Chern la description de l'application ψ^* (il n'est pas nécessaire ici de connaître ψ explicitement) : l'application ψ^* est l'injection canonique d'algèbres de $\mathbb{F}_2[c_1, c'_1, c_2, c'_2]$ dans l'algèbre $\mathbb{F}_2[c_1, c'_1, c_2, c'_2] \otimes \Lambda(e_1, e'_1, e_3, e'_3)$. Ainsi

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)); \mathbb{F}_2) \otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})); \mathbb{F}_2)} \mathrm{H}^*(\mathrm{BGL}_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$$

$$\cong$$

$$\mathbb{F}_2[c_1, c_2] \otimes \Lambda(e_1, e'_1, e_3, e'_3) \cong \mathrm{H}^*(\mathrm{BGL}_2(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]); \mathbb{F}_2).$$

□

Appendice

Lemme 130. Soit C_2 le groupe cyclique d'ordre 2.

(i) En tant qu'anneau, $H^*(BC_2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x]$, avec $|x| = 1$. Le générateur x correspond à l'unique homomorphisme de groupes non nul de C_2 vers \mathbb{F}_2 .

(ii) La série de Poincaré associée à $H^*(BC_2; \mathbb{F}_2)$ est

$$\frac{1}{1-t}$$

(iii) En tant que $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module, $H^*(BC_2; \mathbb{F}_2)$ est isomorphe au module quotient

$$H^*(BC_2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3]\{1, x\}/\langle w_3 \rangle$$

où w_2 et w_3 sont les deuxième et troisième classes de Stiefel-Whitney de l'unique représentation (à conjugaison près) de C_2 dans $SO(3)$. La classe w_2 agit par multiplication par x^2 et la classe w_3 agit trivialement.

Lemme 131. Soit C_4 le groupe cyclique d'ordre 4.

(i) En tant qu'anneau, $H^*(BC_4; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y] \otimes \Lambda(x)$, avec $|x| = 1$ et $|y| = 2$. Le générateur x correspond à l'unique homomorphisme de groupes non nul de C_4 vers \mathbb{F}_2 .

(ii) En tant que $H^*(BSU(2); \mathbb{F}_2)$ -module, on a un isomorphisme

$$H^*(BC_4; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[c_2]\{1, x, y, xy\}$$

où $c_2 = y^2$ est la deuxième classe de Chern associée à la représentation $\langle \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \rangle$.

(iii) La série de Poincaré associée à $H^*(BC_4; \mathbb{F}_2)$ est

$$\frac{1+t}{1-t^2}$$

Lemme 132. *Soit C le groupe cyclique d'ordre infini. En tant qu'anneau, $H^*(BC; \mathbb{F}_2) \cong \Lambda(z)$, avec $|z| = 1$. Le générateur z correspond à l'unique homomorphisme de groupes non nul de C vers \mathbb{F}_2 .*

Remarque 133. *Soient t un générateur de C et t' un générateur de C_4 . Il n'existe qu'un homomorphisme d'anneaux non nul de $H^*(BC_4; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y] \otimes \Lambda(x)$ vers $H^*(BC; \mathbb{F}_2) \cong \Lambda(z)$. Il applique x sur z et y sur 0 , et correspond aux homomorphismes de groupes de C vers C_4 qui appliquent t sur t' ou t'^{-1} .*

Lemme 134. *Considérons le produit $C_2 \times C_2$.*

- (i) *En tant qu'anneau, $H^*(B(C_2 \times C_2); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x, y]$, avec $|x| = |y| = 1$.*
- (ii) *La série de Poincaré associée à $H^*(B(C_2 \times C_2); \mathbb{F}_2)$ est*

$$\frac{1}{(1-t)^2}$$

- (iii) *Toute restriction de $H^*(B(C_2 \times C_2); \mathbb{F}_2)$ à la cohomologie du classifiant de l'un de ses sous-groupes est surjective.*
- (iv) *En tant que $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module, $H^*(BC_2 \times C_2; \mathbb{F}_2)$ est libre de rang 6, et on a un isomorphisme*

$$H^*(BC_2 \times C_2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3]\{1, x, y, x^2, y^2, x^3\}$$

où $w_2 = x^2 + xy + y^2$ et $w_3 = x^3 + x^2y + y^3$ sont les deuxième et troisième classes de Stiefel-Whitney de la représentation de $C_2 \times C_2$ dans $SO(3)$ comme groupe des rotations du tétraèdre régulier d'axe passant par le milieu de deux arêtes opposées.

Lemme 135. *Soit \mathfrak{A}_4 le groupe alterné d'ordre 4.*

- (i) *On a $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2) = H^*(B(C_2 \times C_2); \mathbb{F}_2)^{C_3}$ où $H^*(B(C_2 \times C_2); \mathbb{F}_2)^{C_3}$ désigne les invariants de la cohomologie de l'unique 2-Sylow de \mathfrak{A}_4 pour l'action de C_3 qui permute circulairement les classes non nulles de $H^1(B(C_2 \times C_2); \mathbb{F}_2)$.*
- (ii) *En tant qu'anneau, $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\sigma_2, \sigma_3]\{1, z_3\}$, avec $|\sigma_2| = 2$, $|\sigma_3| = |z_3| = 3$ et $z_3^2 = \sigma_2^3 + \sigma_2^2 + \sigma_3 \cdot z_3$.*
- (iii) *L'inclusion $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2) \subset H^*(B(C_2 \times C_2); \mathbb{F}_2)$ est donnée par $\sigma_2 = x^2 + xy + y^2$, $\sigma_3 = xy(x + y)$ et $z_3 = x^3 + x^2y + y^3$.*
- (iv) *En tant que $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module, $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ est libre de rang 2, et on a un isomorphisme*

$$H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3]\{1, z_3\}$$

où $w_2 = \sigma_2$ et $w_3 = \sigma_3$ sont les deuxième et troisième classes de Stiefel-Whitney de la représentation de \mathfrak{A}_4 dans $SO(3)$ comme groupe des rotations du tétraèdre régulier. La relation $z_3^2 = \sigma_2^3 + \sigma_3^2 + \sigma_3.z_3$ se réécrit $z_3^2 = w_2^3 + w_3^2 + w_3.z_3$.

(v) La série de Poincaré associée à $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ est

$$\frac{1 + t^3}{(1 - t^2)(1 - t^3)}$$

On pourra se référer à [AMJ94] p.93-96 pour le lemme qui précède. Les éléments σ_2 et σ_3 sont des polynômes symétriques élémentaires. L'élément z_3 n'est pas complètement déterminé : on pourrait le remplacer par $x^3 + xy^2 + y^3$ sans changer la relation $z_3^2 = \sigma_2^3 + \sigma_3^2 + \sigma_3 z_3$, ce qui reviendrait à interchanger z_3 et $z_3 + \sigma_3$ ou x et $x + y$. Dans toute la thèse, on a fixé $z_3 = x^3 + x^2y + y^3$.

La série de Poincaré donnée par Adem est $\frac{1+t^2+t^4}{(1-t^3)^2}$ (il y a une faute de frappe dans le livre d'Adem : $1 + t^2 + t^4$ a été typographié $1 + t^2 + t^3$). On a bien $\frac{1+t^2+t^4}{(1-t^3)^2} = \frac{1+t^3}{(1-t^2)(1-t^3)}$. Nous avons fait le choix de privilégier une forme de la série de Poincaré en cohérence avec la structure d'anneau de $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ dont nous nous servons dans la thèse.

Lemme 136.

(i) L'idéal $(\sigma_3) \subset H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ engendré par l'élément σ_3 de degré 3 est un sous- $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module de $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ libre de rang 2, et on a un isomorphisme de $H^*(BSO(3); \mathbb{F}_2)$ -module

$$(\sigma_3) \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3]\{\sigma_3, \sigma_3 z_3\}$$

(ii) La série de Poincaré associée à l'idéal (σ_3) est

$$t^3 \frac{1 + t^3}{(1 - t^2)(1 - t^3)}$$

(iii) La série de Poincaré associée au quotient $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)/(\sigma_3)$ est

$$\frac{1 + t^3}{1 - t^2}$$

(ce quotient est ainsi de dimension 1 sur \mathbb{F}_2 en tout degré q différent de 1, et nul pour $q = 1$).

Démonstration. L'idéal (σ_3) est libre, car c'est un idéal principal de l'anneau $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$, qui est lui-même sous-algèbre de l'algèbre polynomiale

$H^*(B(C_2 \times C_2); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x, x']$ où $|x| = |x'| = 1$ (lemme 130). L'idéal (σ_3) est ainsi libre sur $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$, et sa série de Poincaré se déduit de celle de $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$ par multiplication par $t^{|\sigma_3|} = t^3$. Dès lors, l'isomorphisme $(\sigma_3) \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3]\{\sigma_3, \sigma_3 z_3\}$ est immédiat.

La série de Poincaré associée au quotient $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)/(\sigma_3)$ s'obtient par soustraction de celle associée à (σ_3) à celle associée à $H^*(B\mathfrak{A}_4; \mathbb{F}_2)$, soit

$$\frac{1+t^3}{(1-t^2)(1-t^3)} - t^3 \frac{1+t^3}{(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1-t^6}{(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1+t^3}{1-t^2}$$

□

Bibliographie

- [AMJ94] A. Adem, A. Milgram, and R. James. *Cohomology of Finite Groups*. Springer-Verlag, 1994.
- [Ash84] A. Ash. Small-dimensional classifying spaces for arithmetic subgroups of general linear groups. *Duke Math. J.*, 51 :459–468, 1984.
- [Ber00] E. Berkove. The mod-2 cohomology of the Bianchi groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352 :4585–4602, 2000.
- [Bia92] L. Bianchi. Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari. *Math. Annalen*, 40 :332–412, 1892.
- [Bro82] K. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1982.
- [Bro84] K. Brown. Presentations for groups acting on simply-connected complexes. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 32 :1–10, 1984.
- [DF86] W.G. Dwyer and E.M. Friedlander. Conjectural calculations of general linear group cohomology. *Contemp. Math.*, 55 :135–147, 1986.
- [Dwy98] W.G. Dwyer. Exotic cohomology for $GL_n(\mathbb{Z}[1/2])$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 272 :2159–2167, 1998.
- [Flö83] D. Flöge. Zur Struktur der PSL_2 über einigen imaginär-quadratischen Zahlringen. *Math. Z.*, 183 :255–279, 1983.
- [Hen96] H.-W. Henn. Commutative algebra of unstable K -modules, Lannes’ T -functor and equivariant cohomology. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 478 :180–215, 1996.
- [Hen99] H.-W. Henn. The cohomology of $SL_3(\mathbb{Z}[1/2])$. *K-theory*, 18 :299–359, 1999.
- [HL] H.-W. Henn and J. Lannes. Codes, lattices and cohomology of $O_n(\mathbb{Z}[1/2])$. *en préparation*.

- [McC01] J. McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*, volume 58 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, second edition edition, 2001.
- [Men80] E. Mendoza. *Cohomology of PGL_2 over imaginary quadratic integers*, volume 128. Bonner. Math. Schriften., Bonn, 1980.
- [Mit92] S. Mitchell. On the plus construction for $BGL(\mathbb{Z}[1/2])$ at the prime 2. *Math. Zeit.*, 209 :205–222, 1992.
- [Qui72] D.G. Quillen. On the cohomology and K -theory of the general linear groups over a finite field. *Annals of Math*, 96 :552–586, 1972.
- [Sou78] C. Soulé. The cohomology of $SL_3(\mathbb{Z})$. *Topology*, 17 :1–22, 1978.
- [Spr77] T.A. Springer. *Invariant Theory*, volume 585 of *Lect. Notes in Maths*. Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [SV83] J. Schwermer and K. Vogtmann. The integral homology of SL_2 and PSL_2 of euclidean imaginary quadratic integers. *Comment. Math. Helvetici*, 58 :573–598, 1983.
- [Swa71] R. Swan. Generators and relations for certain special linear groups. *Advances in Math.*, 6 :1–77, 1971.
- [Wei01] N. Weiss. Cohomologie de $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$. *mémoire de DEA*, 2001.