



HAL
open science

STABILITE DE LA CONVECTION THERMIQUE ET/OU SOLUTALE EN COUCHES FLUIDE ET POREUSE SUPERPOSEES

Silvia da Costa Hirata

► **To cite this version:**

Silvia da Costa Hirata. STABILITE DE LA CONVECTION THERMIQUE ET/OU SOLUTALE EN COUCHES FLUIDE ET POREUSE SUPERPOSEES. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT : . tel-00175767

HAL Id: tel-00175767

<https://theses.hal.science/tel-00175767>

Submitted on 1 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS VI
Specialité : Mécanique

Présentée par

Sílvia da Costa Hirata

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de PARIS VI

Sujet de la thèse :

**Stabilité de la convection thermique et/ou solutale
en couches fluide et poreuse superposées**

Soutenue le 22 Février 2007, devant le jury composé de :

Jean-Paul Caltagirone Rapporteur

Denis Lemonnier Rapporteur

Pierre Sagaut Examineur

Renato Machado Cotta Examineur

Magda Carr Invitée

Dominique Gobin Directeur de Thèse

Benoît Goyeau Directeur de Thèse

aos meus pais

Remerciements

Ce travail de thèse à été réalisé sous la direction de Dominique Gobin et Benoît Goyeau. Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance pour la confiance et pour la liberté d'initiative qu'ils m'ont toujours accordées. Leurs qualités professionnels et humaines m'ont énormément appris. Travailler avec Dominique et Benoît fut une réelle chance et un un réel plaisir pour moi et je ne sais comment les exprimer ma gratitude.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Renato Cotta, pour m'avoir toujours encouragé, pour ces précieux conseils et son constante enthousiasme.

Mes remerciements sincères à Pierre Sagaut, président du jury, ainsi qu'à Jean-Paul Caltagirone et Denis Lemonnier pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Je tiens à remercier particulièrement Magda Carr pour sa collaboration à ce travail.

J'aimerais remercier tous les membres du FAST pour leur soutien pendant ces trois années de thèse. Je suis particulièrement reconnaissante à Ludovic et Amélie Pauchard pour leur précieuse amitié.

Je remercie enfin Antonio pour son amour.

Résumé

Ce travail concerne la convection naturelle au sein d'un système fluide-poreux en couche horizontale. On présente l'analyse de stabilité linéaire des modèles à un et deux domaines, avec diffusion visqueuse dans le milieu poreux. Nos résultats sont comparés avec ceux du modèle à deux domaines utilisant la formulation de Darcy. Un bon accord est observé entre les résultats des modèles à deux domaines, ce qui indique que le terme de Brinkman joue un rôle secondaire dans la stabilité. On montre que le modèle à un domaine peut conduire à des résultats sensiblement différents lorsque la transition entre fluide et le milieu poreux est décrite par une discontinuité des propriétés. Il faut alors modifier la formulation en effectuant la différentiation au sens des distributions. Ainsi, le modèle à un domaine conduit aux mêmes seuils de stabilité que les formulations à deux domaines. L'influence des paramètres caractéristiques sur la stabilité des systèmes thermique et thermosolutal est discutée.

Abstract

This work deals with the onset of natural convection in a horizontal fluid-porous system. A linear stability analysis is carried out using the one and two domain approaches, both including the viscous diffusion contribution in the porous layer. Our results are compared with those obtained with the Darcy formulation of the two-domain approach. Agreement is found between the two domain formulations, indicating that the inclusion of the Brinkman term plays a secondary role on the stability results. However, the one domain stability curves present rather different behavior when the transition between the fluid and the porous regions is described by discontinuous variations of the physical properties. It is shown that one and two domain approaches predict the same stability thresholds only if differentiation is executed in the sense of distributions. The influence of the different control parameters on the stability of the thermal and thermosolutal convection cases is analyzed.

Mots-clés

analyse de stabilité, convection naturelle, double-diffusion, interface fluide-poreux, modélisation multi-domaines, transformation intégrale.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Description du Problème	11
2.1	Configuration étudiée	11
2.2	Modèle à deux domaines	12
2.2.1	Équations de conservation	13
2.2.2	Analyse de stabilité linéaire	16
2.3	Modèle à un domaine	20
2.3.1	Équations de conservation	21
2.3.2	Analyse de stabilité linéaire	22
3	La Technique de la Transformation Intégrale Généralisée	25
3.1	La méthode GITT appliquée au modèle à deux domaines	28
3.1.1	Développement en fonctions propres	28
3.1.2	Transformation intégrale	31
3.1.3	Systèmes matriciels	36
3.2	La méthode GITT appliquée au modèle à un domaine	38
3.2.1	Développement en fonctions propres	38
3.2.2	Transformation intégrale	40
3.2.3	Systèmes matriciels	41
3.3	Remarques	42

4 Résultats Numériques	43
4.1 Convection naturelle thermique	43
4.1.1 Analyse de convergence	44
4.1.2 Validation de la méthode	44
4.1.3 Comparaison des modèles	46
4.1.4 Application de la théorie des distributions au modèle à un domaine	58
4.1.5 Influence des paramètres caractéristiques	64
4.1.6 Influence de la condition de saut des contraintes tangentielles	68
4.2 Convection naturelle thermosolutale	74
4.2.1 Analyse de convergence	74
4.2.2 Validation des résultats	75
4.2.3 Influence des paramètres caractéristiques	77
Conclusions et Perspectives	86
Bibliographie	89

Table des figures

2.1	Configuration geometrique du problème étudié.	12
4.1	Courbes de stabilité marginale obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$. Influence de l'ordre de troncature N , et $\hat{d} = 0.10$, $Da = 10^{-5}$, $\varepsilon_T = 0.7$	45
4.2	Nature bimodale des courbes de stabilité obtenues avec les modèles (a) 1Ω et (b) $2\Omega_{DB}$, pour $\hat{d} = 0.10$, $Da = 10^{-5}$, et $\varepsilon_T = 0.7$	47
4.3	Lignes de courant relatives au premier minimum ($\kappa = 3.5$) de la figure 4.2(a), obtenues avec le modèle 1Ω ($\Psi_{max} = \pm 0.36$; $\Delta\Psi = 0.04$). La ligne horizontale épaisse représente l'interface fluide-poreux.	48
4.4	Lignes de courant relatives au deuxième minimum ($\kappa = 15.5$) de la figure 4.2(a), obtenues avec le modèle 1Ω ($\Psi_{max} = \pm 0.24$; $\Delta\Psi = 0.03$).	48
4.5	Lignes de courant relatives au premier minimum ($\kappa = 2.5$) de la figure 4.2(b), obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$ ($\Psi_{max} = \pm 0.43$; $\Delta\Psi = 0.06$).	49
4.6	Lignes de courant relatives au deuxième minimum ($\kappa = 28.5$) de la figure 4.2(b), obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$ ($\Psi_{max} = \pm 0.13$; $\Delta\Psi = 0.01$).	49
4.7	Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω , $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$, pour $\hat{d} = 0.08$ et $\delta = 0.003$ (ou $Da = 7.72 \cdot 10^{-6}$).	50
4.8	Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω , $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$, pour $\hat{d} = 0.10$ et $\delta = 0.003$ (ou $Da = 7.44 \cdot 10^{-6}$).	51
4.9	Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω , $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$, pour $\hat{d} = 0.12$ et $\delta = 0.003$ (ou $Da = 7.17 \cdot 10^{-6}$).	52
4.10	Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω , $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$, pour $\hat{d} = 0.14$ et $\delta = 0.003$ (ou $Da = 6.93 \cdot 10^{-6}$).	53

4.11	Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω et $2\Omega_{DB}$, pour différentes valeurs du nombre de Darcy et $\hat{d} = 0.08$	55
4.12	Comparaison entre la courbe 1Ω et les courbes obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$, et les différentes conditions interfaciales (continuité des contraintes normales - eq. (2.91); continuité des pressions - eq. (4.1); et en admettant que $1/Da = 0$ à l'interface - eq. (4.2)), pour $\hat{d} = 0.08$ et $\delta = 0.003$	56
4.13	Profils de vitesse verticale des modes poreux ($\kappa = 2.5$) et fluide ($\kappa = 28.5$), correspondants aux figures (4.5) et (4.6), respectivement. Dans le mode poreux $(\partial w/\partial z)_{z=dm} = 1.16$, et dans le mode fluide $(\partial w/\partial z)_{z=dm} = 40.68$. La ligne horizontale épaisse représente l'interface fluide-poreux.	57
4.14	Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles $2\Omega_{DB}$ et la nouvelle formulation du modèle à un domaine $1\Omega_{NEW}$, pour $\delta = 0.003$ et $\hat{d} = 0.08$	62
4.15	Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles $2\Omega_{DB}$ et la nouvelle formulation du modèle à un domaine $1\Omega_{NEW}$, pour $\delta = 0.003$ et $\hat{d} = 0.10$	63
4.16	Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles $2\Omega_{DB}$ et la nouvelle formulation du modèle à un domaine $1\Omega_{NEW}$, pour $\delta = 0.003$ et $\hat{d} = 0.12$	63
4.17	Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles $2\Omega_{DB}$ et la nouvelle formulation du modèle à un domaine $1\Omega_{NEW}$, pour $\delta = 0.003$ et $\hat{d} = 0.14$	64
4.18	Influence du rapport d'épaisseurs \hat{d} , pour $\varepsilon_T = 0.7$ et $\delta = 0.003$	65
4.19	Influence du nombre de Darcy Da , pour $\hat{d} = 0.08$ et $\varepsilon_T = 0.7$	66
4.20	Lignes de courant obtenues pour $Da = 10^{-8}$, $\hat{d} = 0.08$ et $\varepsilon_T = 0.7$ ($\Psi_{max} = \pm 0.3$; $\Delta\Psi = 0.01875$). La ligne horizontale épaisse représente l'interface fluide-poreux.	67
4.21	Influence du rapport des diffusivités thermiques ε_T , pour $\hat{d} = 0.08$ et $\delta = 0.003$	67
4.22	Influence du coefficient de saut β , pour $\hat{d} = 0.10$ et $Da = 10^{-5}$	71
4.23	Influence du coefficient de saut β , pour $\hat{d} = 0.14$ et $Da = 10^{-5}$	71
4.24	Influence du coefficient de saut β pour des différentes valeurs du nombre de Darcy, et $\hat{d} = 0.14$	73
4.25	Courbes de stabilité marginale du modèle $2\Omega_{DB}$, obtenues pour des différents valeurs de l'ordre de troncature N , et $\hat{d} = 0.4$, $Da = 10^{-5}$, $\varepsilon_T = 1$, $Ra_T = 20$	75
4.26	Nombre de Rayleigh solutal critique en fonction du nombre de Rayleigh thermique d'une couche complètement fluide ($Da \rightarrow \infty$, $\phi = 1$).	76

4.27	Nombre de Rayleigh solutal critique en fonction du nombre de Rayleigh thermique d'une couche complètement poreuse ($\hat{d} \rightarrow 0$).	77
4.28	Nombre de Rayleigh solutal critique en fonction du nombre de Rayleigh thermique, pour trois valeurs différents du rapport des épaisseurs \hat{d} , $Da = 10^{-5}$ et $\varepsilon_T = 1$	78
4.29	Nombres d'ondes correspondants aux nombres de Rayleigh solutal de la figure (4.28) en fonction du nombre de Rayleigh thermique.	79
4.30	Lignes de courant ($\Psi_{max} = \pm 0.1$; $\Delta\Psi = 0.01$) et profil de vitesse verticale du déclenchement de la convection pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, $Ra_T = -20$ et $\kappa_{cr} = 10.2$. La ligne horizontale épaisse représente l'interface fluide-poreux. . . .	80
4.31	Lignes de courant ($\Psi_{max} = \pm 0.04$; $\Delta\Psi = 0.005$) et profil de vitesse verticale du déclenchement de la convection pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, $Ra_T = 0$ et $\kappa_{cr} = 6.0$. . .	80
4.32	Lignes de courant ($\Psi_{max} = \pm 0.01$; $\Delta\Psi = 0.001$) et profil de vitesse verticale du déclenchement de la convection pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, $Ra_T = +20$ et $\kappa_{cr} = 3.5$. . .	81
4.33	Lignes de courant ($\Psi_{max} = \pm 0.004$; $\Delta\Psi = 0.0005$) et profil de vitesse verticale du déclenchement de la convection pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, $Ra_T = +50$ et $\kappa_{cr} = 4.0$	81
4.34	Limites de la stabilité pour $\hat{d} = 0.4$, $Da = 10^{-5}$, et $\varepsilon_T = 1$	82
4.35	Limites de la stabilité pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, et $\varepsilon_T = 1$	83
4.36	Limites de la stabilité pour $\hat{d} = 1.2$, $Da = 10^{-5}$, et $\varepsilon_T = 1$	83
4.37	Influence du rapport des diffusivités thermiques ε_T , pour $\hat{d} = 0.8$ et plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh thermique Ra_T	84
4.38	Courbes de stabilité marginale obtenues pour deux valeurs du rapport des diffusivités thermiques ε_T , $\hat{d} = 0.8$ et $Ra_T = -20$	85
4.39	Courbes de stabilité marginale obtenues pour deux valeurs du rapport des diffusivités thermiques ε_T , $\hat{d} = 0.8$ et $Ra_T = +20$	85

Liste des tableaux

4.1	Validation des modèles : nombre de Rayleigh critique et nombre d'onde correspondant aux cas limites du problème de Rayleigh-Bénard.	45
4.2	Nombres de Rayleigh critiques et nombres d'onde correspondantes pour les courbes de stabilité présentés dans les figures (4.7), (4.8), et (4.9) et (4.10). . . .	52
4.3	Caractéristiques géométriques des spécimens poreux utilisés dans les expériences de Beavers & Joseph et coefficient de saut correspondant.	69
4.4	Valeurs critiques correspondants au deuxième minimum des courbes de stabilité des figures (4.22) et (4.23).	72

Notations

d_f^*	épaisseur de la couche fluide, m
d_m^*	épaisseur de la couche poreuse, m
d^*	épaisseur de la cavité ($d^* = d_f^* + d_m^*$), m
\hat{d}	rapport des épaisseurs ($\hat{d} = d_f^*/d_m^*$)
Da	nombre de Darcy ($Da = K/d^{*2}$)
g	accélération de la pesanteur, $m s^{-2}$
Gr_S	nombre de Grashof solutal ($Gr_S = g\beta_S\Delta S^*d^{*3}/\nu^2$)
Gr_T	nombre de Grashof thermique ($Gr_T = g\beta_T\Delta T^*d^{*3}/\nu^2$)
k	conductivité thermique, $Wm^{-1}K^{-1}$
K	permeabilité, m^2
Le	nombre de Lewis ($Le = \alpha_{Sf}/\alpha_{Tf}$)
N_S	ordre de troncation de la expansion de la concentration
N_θ	ordre de troncation de la expansion de la température
N_W	ordre de troncation de la expansion de la vitesse
P	pression totale ($P = P_d + P_h$)
P_d	pression dynamique
P_h	pression hydrostatique
Pr_f	nombre de Prandtl fluide ($Pr_f = \nu/\alpha_{Tf}$)
Pr_m	nombre de Prandtl poreux ($Pr_m = Pr_f \varepsilon_T$)
Ra_T	nombre de Rayleigh thermique ($Ra_T = Gr_T Pr_f Da$)
Ra_{Tf}	nombre de Rayleigh thermique fluide ($Ra_{Tf} = Ra_T/Da$)
Ra_{Tm}	nombre de Rayleigh thermique poreux ($Ra_{Tm} = Ra_T \varepsilon_T$)
Ra_S	nombre de Rayleigh solutal ($Ra_S = Gr_S Sc_f Da$)
Ra_{Sf}	nombre de Rayleigh solutal fluide ($Ra_{Sf} = Ra_S/Da$)
Ra_{Sm}	nombre de Rayleigh solutal poreux ($Ra_{Sm} = Ra_S \varepsilon_S$)
S	fraction massique du soluté
Sc_f	nombre de Schmidt fluide ($Sc_f = \nu/\alpha_{Sf}$)
Sc_m	nombre de Schmidt poreux ($Sc_m = Sc_f \varepsilon_S$)
T	température
u, w	composantes selon x et z de la vitesse

α	coefficient de glissement
α_T	diffusivité thermique ($\alpha_{Tf} = k_f/(\rho_0 C_p)_f$, $\alpha_{Tm} = k_m/(\rho_0 C_p)_f$), $m^2 s^{-1}$
α_S	diffusivité massique, $m^2 s^{-1}$
β	coefficient de saut des contraintes tangentielles
β_T	coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
β_S	coefficient d'expansion solutale
δ	paramètre adimensionné ($\delta^2 = (1 + \hat{d})^2 Da$)
ε_T	rapport des diffusivités thermiques ($\varepsilon_T = \alpha_{Tf}/\alpha_{Tm}$)
ε_S	rapport des diffusivités massiques ($\varepsilon_S = \alpha_{Sf}/\alpha_{Sm}$)
η	viscosité réduite ($\eta = \mu_{eff}/\mu$)
κ	nombre d'onde adimensionné
μ	viscosité dynamique du fluide, $Kg m^{-1} s^{-1}$
μ_{eff}	viscosité effective du milieu poreux, $Kg m^{-1} s^{-1}$
ν	viscosité cinématique du fluide, $m^2 s^{-1}$
ρ	densité du fluide, $Kg m^{-3}$
σ	taux de croissance
ϕ	porosité

Indices inférieurs

0	référence
u	relatif à la frontière supérieure
l	relatif à la frontière inférieure
f	relatif à la couche fluide
m	relatif à la couche poreuse
T	thermique
S	solutal
x	composant horizontale
z	composant verticale

Indice supérieur

*	relatif aux grandeurs dimensionnées
---	-------------------------------------

Chapitre 1

Introduction

Le transport de chaleur et de masse par convection naturelle au sein d'une configuration où coexistent une région fluide et une région poreuse se produit dans de nombreuses situations pratiques. On rencontre par exemple ce genre de configuration lors de la modélisation de la solidification d'alliages métalliques, où la région dendritique qui sépare les phases solide et liquide est généralement décrite comme un milieu poreux (Beckermann *et al.*, 1988; Worster, 1992; Amberg & Homsy, 1993; Chen *et al.*, 1994; Anderson & Worster, 1995; Chung & Chen, 2000; Le Bars & Worster, 2006b). D'autres applications industrielles concernent les systèmes d'isolation thermique (Arquis & Caltagirone, 1984; LeBreton *et al.*, 1991) ou encore la fabrication de composites utilisés dans les industries aéronautique et automobile (Blest *et al.*, 1999b; Blest *et al.*, 1999a). La convection à l'interface entre un fluide et un milieu poreux est également présente dans plusieurs situations environnementales. Des mouvements convectifs dus aux gradients de température se produisent dans les lacs, les eaux côtières peu profondes et d'autres réservoirs, et résultent d'une interaction entre l'eau superficielle et le substrat saturé. Cette configuration a fait l'objet de nombreuses études concernant les systèmes géothermiques (McKay & Straughan, 1993; Hutter & Straughan, 1999; Carr & Straughan, 2003; Carr, 2004), ou encore pour la pollution d'eaux souterraines (Ewing & Weekes, 1991; El-Habel *et al.*, 2002).

Dans ces conditions, l'analyse des phénomènes de transport dans une configuration fluide-poreux a fait l'objet d'une attention particulière au cours des dernières décennies (Nield & Bejan, 2006). Le présent travail traite plus spécifiquement du cas de la convection *naturelle* au sein d'un système constitué d'une couche poreuse *homogène* surmontée d'une couche fluide. Les cas de la convection naturelle d'origine thermique et thermosolutale sont abordés. Il est montré

que les transferts à l'interface peuvent altérer significativement la structure de l'écoulement convectif.

Du point de vue de la modélisation, deux approches différentes peuvent être employées pour représenter les phénomènes de transport dans un système fluide-poreux : l'approche à *deux domaines* et l'approche à *un domaine*. Dans l'approche à deux domaines, les couches fluide et poreuse sont modélisées séparément et les équations de conservation dans les deux régions sont couplées par des conditions limites appropriées à l'interface. Pour le transport de la quantité de mouvement, ces conditions limites dépendent principalement de l'ordre de l'équation écrite dans la région poreuse. Beavers & Joseph (1967) ont considéré un écoulement unidimensionnel parallèle à l'interface fluide-poreux. L'écoulement dans la couche poreuse a été décrit par la loi de Darcy (Darcy, 1856), et l'équation de Stokes a été appliquée dans le fluide. Pour coupler les écoulements décrits par ces deux équations différentielles d'ordres différentes, Beavers & Joseph ont proposé l'utilisation d'une condition limite de glissement à l'interface :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=int} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}}(u_{int} - U) \quad (1.1)$$

où u_{int} est la vitesse du fluide à l'interface, U est la vitesse de filtration dans le milieu poreux, K est la perméabilité du milieu poreux et α est un coefficient adimensionnel de glissement *empirique*. Beavers & Joseph ont trouvé un bon accord entre la solution analytique et leurs mesures expérimentales en ajustant α à des valeurs allant de 0.1 à 4, selon la nature de la couche poreuse. Ce paramètre s'est avéré fortement dépendant de la structure (Beavers *et al.*, 1970; Taylor, 1971; Richardson, 1971) et de la position de l'interface poreuse (Larson & Higdon, 1986; Larson & Higdon, 1987), mais pas de la nature du fluide (Beavers *et al.*, 1974). Jones (1973) a proposé une généralisation de la condition de Beavers & Joseph pour des écoulements multidirectionnels. Une comparaison entre les résultats de la stabilité linéaire obtenus en utilisant la condition de Beavers & Joseph et la condition généralisée de Jones est présentée par Taslim et Narusawa (1989). En étudiant différentes configurations de couches poreuses et fluides superposées, ces auteurs ont constaté que la choix entre les deux conditions interfaciales n'affecte pas les résultats de manière significative.

Une solution alternative à l'utilisation de la condition de glissement consiste à utiliser la correction de Brinkman à la loi de Darcy (Brinkman, 1947). Dans ce cas, les équations de conservation de la quantité de mouvement dans les deux régions sont du même ordre, et la

continuité des vitesses et des contraintes tangentielles peut être imposée à l'interface. Compte tenu de la présence du terme de diffusion visqueuse, l'équation de Brinkman permet de décrire la couche limite au sein du milieu poreux. Bien que l'épaisseur de cette région soit habituellement très petite, ses effets sur l'ensemble de l'écoulement peuvent être tout à fait significatifs (Neale & Nader, 1974). En dehors de la région de la couche limite dynamique, dont l'épaisseur est de l'ordre de $K^{1/2}$ (Saffman, 1971), le terme de diffusion visqueuse est négligeable, et l'écoulement est régi par la loi de Darcy. La correction de Brinkman est valide seulement pour des valeurs élevées de la porosité ($0.6 < \phi < 1$, selon Lundgren, 1972). La validité de l'équation de Brinkman a été le sujet de discussions controversées dans la littérature (Lundgren, 1972; Nield, 1983; Larson & Higdon, 1986; Larson & Higdon, 1987; Vafai & Kim, 1990; Nield, 1991; Vafai & Kim, 1995).

Bien que l'utilisation de l'équation de Brinkman représente une alternative pour l'écriture des conditions limites à l'interface fluide-poreux, elle fait intervenir la viscosité effective du milieu poreux μ_{eff} , dont la détermination reste controversée. La viscosité effective peut différer fortement de la viscosité du fluide μ . Plusieurs études proposent des expressions du rapport des viscosités μ_{eff}/μ en fonction de la porosité (Lundgren, 1972; Koplik *et al.*, 1983; Einstein, trans. in 1956), et la plupart des analyses prévoit que la viscosité effective est plus élevée que la viscosité du fluide. L'établissement de l'équation de Brinkman par la méthode de prise de moyenne volumique conduit à $\mu_{eff}/\mu = 1/\phi$ (Whitaker, 1999). Lorsque la porosité est élevée, la très grande majorité des lois proposées dans la littérature conduit à des variations tangentes à la relation obtenue par Einstein dans le cas des suspensions diluées (Einstein, trans. in 1956). La question de la détermination de la loi de viscosité la plus réaliste reste cependant ouverte, et dépend probablement d'autres propriétés du milieu poreux (Kaviany, 1991).

Neale & Nader (1974) ont montré que, pour un écoulement de Poiseuille dans une couche fluide superposée à une région poreuse, la solution analytique du modèle de Brinkman est équivalente à la solution de Beavers & Joseph (1967) pour $\alpha = \sqrt{\mu_{eff}/\mu}$. Un bon accord avec les résultats expérimentaux de Beavers & Joseph a été trouvé en prenant $\mu_{eff} = \mu$.

En ce qui concerne les conditions limites, l'utilisation de la correction de Brinkman permet d'imposer la continuité des vitesses et des contraintes tangentielles à l'interface fluide-poreux. Une alternative à la description du transport de la quantité de mouvement à l'interface a été

proposée par Ochoa-Tapia & Whitaker (1995a,1995b) . Les auteurs ont établi une condition limite de saut de contraintes tangentielles en utilisant la technique de la moyenne volumique :

$$\mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=int} - \mu_{eff} \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=int} = \frac{\beta}{\sqrt{K}} u_{int} \quad (1.2)$$

où le coefficient de saut β est ajustable. Cette description, basée sur l'équation de Darcy-Brinkman, suppose que le milieu poreux est *homogène*. Il a été montré que le coefficient β dépend explicitement des variations spatiales continues des propriétés effectives dans la région interfaciale (Goyeau *et al.*, 2003; Chandesris & Jamet, 2006). Les solutions numériques de cette description présentent un bon accord avec les résultats expérimentaux de Beavers & Joseph pour des valeurs de β de l'ordre de l'unité. Le choix de la condition interfaciale la plus réaliste reste aujourd'hui un sujet d'actualité dont les enjeux principaux ont récemment été analysés par Goyeau *et al.* (2003).

On peut également décrire le transport à l'interface fluide-poreux à l'aide d'un modèle à un domaine. Cette description consiste à combiner les équations de conservation des deux régions en un système unique d'équations valables pour tout le domaine (Arquis & Caltagirone, 1984; Beckermann *et al.*, 1988). La transition du fluide au milieu poreux est réalisée par la variation spatiale continue de certaines propriétés effectives. Cette représentation permet notamment de s'affranchir de l'écriture explicite des conditions limites à l'interface. Étant donné que l'équation de conservation de la quantité de mouvement du modèle à un domaine est en réalité une équation de Navier-Stokes modifiée, la contribution de la diffusion visqueuse dans le milieu poreux est naturellement prise en compte. Enfin, cette représentation permet de prendre en compte les variations spatiales des propriétés du milieu poreux plus facilement que le modèle à deux domaines.

Dans les études concernant la convection naturelle thermique et/ou solutale en cavité, deux configurations géométriques principales sont considérées : la configuration dite verticale, où les gradients de température et de concentration sont perpendiculaires à la gravité, et la configuration dite horizontale, pour laquelle les gradients sont colinéaires à la gravité. Le problème de la convection d'origine thermique dans la configuration verticale (milieu poreux parallèle aux parois verticales) a été étudié dans le contexte de l'isolation thermique (Arquis & Caltagirone, 1984; LeBreton *et al.*, 1991) et de la solidification (Beckermann *et al.*, 1988). Une solution analytique pour le problème direct d'une fente d'extension verticale infinie en régime

stationnaire a été proposée par Weisman *et al.* (1999) . Gobin *et al.* (1998) ont été les premiers à analyser le cas de la convection naturelle thermosolutale, mettant en évidence l'influence du nombre de Darcy sur le transfert de chaleur et de masse. Par la suite, l'influence du nombre de Lewis et du rapport entre les forces thermique et solutale a été analysée (Gobin *et al.*, 2005). Contrairement à la configuration verticale, toujours instable, le cas horizontal présente un seuil de stabilité dont il convient d'étudier les valeurs critiques.

La plupart des analyses de stabilité dans un système "bicouche" a été réalisée en utilisant le modèle à deux domaines. Les premiers résultats de l'analyse de stabilité linéaire de la convection thermique et thermosolutale dans une configuration horizontale ont été obtenus par Sun (1973). En utilisant le modèle à deux domaines et la formulation de Darcy, il a rapporté des résultats théoriques et expérimentaux concernant le nombre de Rayleigh critique pour le déclenchement de la convection. Nield (1977) a proposé une solution analytique pour le problème de la convection thermique en utilisant également le modèle de Darcy et la condition de Beavers & Joseph. Il a résolu les équations résultant de l'analyse de stabilité linéaire dans le cas limite où le nombre d'onde tend vers zéro, correspondant à la condition de flux de chaleur constant aux parois externes. Chen & Chen ont étudié théoriquement (Chen & Chen, 1988) et expérimentalement (Chen & Chen, 1989) les cas thermique et thermosolutal. En utilisant le même modèle, et en étudiant une gamme plus large des valeurs du nombre d'onde, ils ont pu observer un comportement intéressant négligé par Sun : les courbes de stabilité marginale, c'est à dire, les courbes du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre d'onde, peuvent être bimodales (i.e., les courbes présentent deux minima locales). Les deux minima correspondent à différents modes de convection naturelle : le "mode fluide" (où les cellules convectives sont plutôt confinées dans la couche fluide) et le "mode poreux" (où la circulation est présente dans toute la région poreuse). Carr & Straughan (2003) ont considéré le même problème, avec une condition limite de frontière supérieure libre. Afin de représenter la convection pénétrative due au maximum de densité de l'eau à 4°C, ces auteurs ont adopté une équation d'état qui exprime la densité comme une fonction quadratique de la température. Par la suite, Carr (2004) a considéré la convection induite par une source de chaleur interne. Les quantités physiques à l'origine du mouvement sont différentes dans les deux travaux, et ceci s'est reflété dans la forme des cellules convectives résultantes (les limites de la stabilité marginale trouvés dans les deux études sont les mêmes, mais les fonctions propres sont différentes). La stabilité de la convection thermique en utilisant le modèle à deux domaines avec le terme de Brinkman a été

étudiée par Somerton & Catton (1982), Nield (1983), et plus récemment par Desaive *et al.* (2001). Dans ce dernier travail, il a été montré que les courbes de stabilité marginale obtenues présentent le même comportement qualitatif que celles obtenues en utilisant la loi de Darcy, et que la variation de la viscosité effective n'affecte pas de manière significative les conditions critiques de la stabilité. L'influence du nombre de Darcy et des différentes conditions limites aux parois externes ont également été étudiés. Chen & Chen (1992) ont réalisé une analyse non linéaire, en incluant les termes de Brinkman et Forchheimer (Forchheimer, 1914). Les résultats présentent des désaccords de l'ordre de 15% avec les prévisions de leur précédente analyse linéaire (Chen & Chen, 1988). Les auteurs attribuent ces désaccords aux différentes conditions limites imposées à l'interface. La première analyse de stabilité linéaire d'un système bicouche basée sur le modèle à un domaine a été proposée par Zhao & Chen (2001), pour les cas de la convection thermique et thermosolutale. La comparaison entre leurs résultats et ceux obtenus avec le modèle à deux domaines (Chen & Chen, 1988) montre un accord qualitatif des courbes de stabilité marginale, tandis que les valeurs des nombres de Rayleigh critiques peuvent différer de manière significative.

Les premières comparaisons entre les approches à un et deux domaines, tous deux comprenant la diffusion visqueuse dans le milieu poreux, ont été réalisées dans le contexte des simulations numériques directes. Il a été montré que les deux approches produisent des résultats similaires pour la configuration étudiée par Beavers & Joseph (Goyeau *et al.*, 2003), ou plus récemment pour un écoulement dans un coin (Le Bars & Worster, 2006b). Pour l'écoulement dans un coin, les simulations d'éléments finis basées sur le modèle à un domaine sont également en accord avec la solution de similitude de Le Bars & Worster (2006a).

L'objectif de cette étude est celui d'investiguer les conditions du déclenchement de la convection naturelle thermique et thermosolutale dans un système fluide-poreux horizontal. Comme mentionné précédemment, l'unique comparaison des résultats de l'analyse de stabilité des modèles à un et deux domaines montre des désaccords importants dans la prévision des valeurs critiques (Zhao & Chen, 2001). L'origine de ces différences n'est pas claire, étant donnée que le terme macroscopique de diffusion visqueuse dans le milieu poreux est pris en compte dans le modèle à un domaine, mais pas dans celui à deux domaines de Chen & Chen (1988). Pour mieux comprendre la raison des différentes prévisions, on a réalisé une analyse de stabilité linéaire de la convection naturelle dans une configuration bicouche, en utilisant les modèles à

deux ($2\Omega_{DB}$) et un domaine (1Ω), tous deux comprenant la diffusion visqueuse dans le poreux. Nos résultats sont comparés également avec ceux du modèle à deux domaines obtenus à l'aide de la formulation de Darcy ($2\Omega_D$) (Carr & Straughan, 2003). Le mémoire est organisé de la façon suivante :

- Le chapitre 2 est consacré à la définition de la configuration géométrique du problème étudié, des hypothèses adoptées, et à la présentation des formulations mathématiques des modèles à deux ($2\Omega_{DB}$) et un domaine (1Ω). Les équations aux perturbations y sont développées.
- Le chapitre 3 est dédié à la présentation e à la mise en oeuvre de la Technique de la Transformation Intégrale Généralisée (GITT). Cette technique permet la transformation des problèmes aux valeurs propres résultant de l'analyse de stabilité linéaire (Systèmes d'Équations Différentielles Ordinaires - EDOs) en systèmes infinis et couplés d'équations algébriques. La méthode GITT a été appliquée à l'analyse de stabilité de la convection thermique dans des cavités complètement poreuses (Alves *et al.*, 2002) et s'est avérée bien adaptée et assez flexible pour être appliquée à des problèmes plus complexes. La solution GITT des problèmes aux valeurs propres des modèles à deux et un domaine est développée en détail, et les systèmes matriciels résultants des cas thermique et thermosolutal sont présentés.
- Les résultats de l'analyse de stabilité sont présentés dans le chapitre 4. La section 4.1 est dédiée à la comparaison entre modèles dans le cadre de la convection purement thermique : les résultats du modèle à un domaine (1Ω) sont comparés à ceux des modèles à deux domaines avec les formulations de Darcy ($2\Omega_D$) (Carr & Straughan, 2003) et de Brinkman ($2\Omega_{DB}$). Il est montré que, lorsque le milieu poreux est considéré homogène et l'interface fluide/poreux est décrite par une discontinuité des propriétés, les différentiations des fonctions discontinues du modèle à un domaine doivent être effectuées au sens des distributions. La formulation du modèle à un domaine en considérant les dérivées au sens des distributions ($1\Omega_{NEW}$) est ensuite présentée. Après la comparaison des modèles, on choisit le modèle $2\Omega_{DB}$ pour étudier l'influence de l'ensemble des paramètres sur la stabilité de la convection thermique. Finalement, la condition de continuité des contraintes tangentielles est remplacée par la condition de saut de Ochoa-Tapia & Whitaker (1995a,1995b). L'influence de la variation du coefficient de saut β est discutée. Les résultats du cas thermosolutale sont présentés dans la section 4.2. Nous proposons une extension des études précédentes (Worster, 1992; Chen & Chen, 1988; Zhao & Chen, 2001), en analysant les écoulements de convection naturelle induits par des forces de

volume thermique et/ou solutale (gradients de température et/ou concentration déstabilisants). L'influence des paramètres caractéristiques sur le déclenchement de la convection doublement diffusive est analysée en utilisant le modèle $2\Omega_{DB}$. Les résultats que nous présentons ici montrent que, contrairement à l'analyse de Zhao & Chen (2001), les deux modes de convection naturelle observés par Chen & Chen (1988) sont également présents dans le cas thermosolutal. Ceci confirme les résultats de Worster (1992) et Chen & Chen (1988) qui observent la présence des deux modes convectifs en utilisant le modèle $2\Omega_D$.

Chapitre 2

Description du Problème

Dans ce chapitre, on présente la configuration géométrique du problème et les formulations des modèles à un et deux domaines. Après une brève récapitulation de la formulation classique de Darcy ($2\Omega_D$), les équations aux perturbations du modèle à deux domaines Darcy-Brinkman ($2\Omega_{DB}$) sont présentées. Le modèle à un domaine (1Ω) présentant une formulation plus simple, nous avons choisi de développer les équations de perturbation de façon générale, en prenant en compte les variations spatiales des propriétés physiques (notamment la diffusivité thermique α_T , la porosité ϕ et la perméabilité Da).

2.1 Configuration étudiée

La configuration géométrique du problème étudié est représentée sur la figure (2.1). En supposant que la troisième dimension (direction normale à la figure) est grande devant les autres dimensions du milieu, on peut considérer le problème comme bidimensionnel. Le système est constitué d'une couche poreuse horizontale d'épaisseur d_m^* surmontée d'une couche fluide d'épaisseur d_f^* . On note d^* l'épaisseur totale de la cavité ($d^* = d_m^* + d_f^*$). Différentes températures (et concentrations, dans le cas thermosolutal) sont imposées aux parois externes : la frontière inférieure est maintenue à la température T_l^* (et à la concentration S_l^*), et la frontière supérieure est maintenue à T_u^* (et S_u^*).

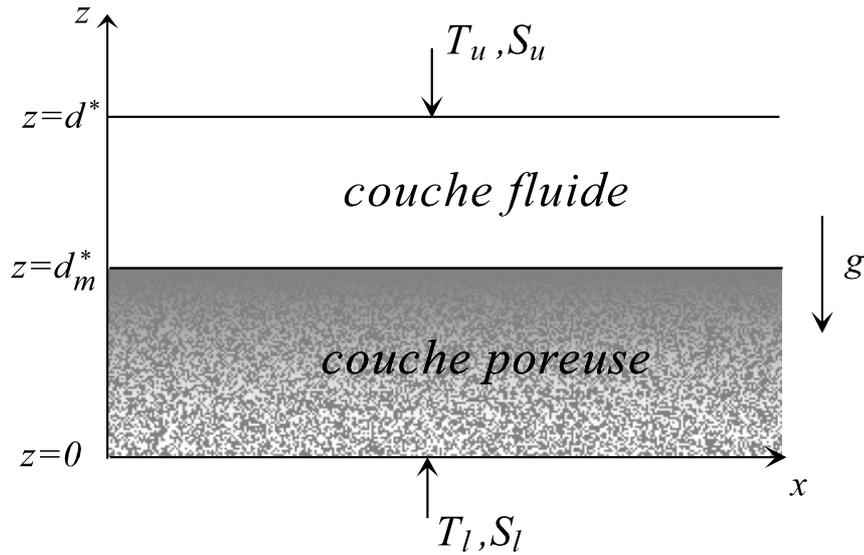


FIG. 2.1 – Configuration géométrique du problème étudié.

Le milieu poreux est saturé par le même fluide binaire qui occupe le reste de la cavité. L'écoulement est supposé laminaire et incompressible, et le fluide Newtonien satisfait l'hypothèse de Boussinesq :

$$\rho(T^*, S^*) = \rho_0(1 - \beta_T(T^* - T_0^*) - \beta_S(S^* - S_0^*)), \quad (2.1)$$

où $\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_S$ et $\beta_S = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_T$.

Enfin, on suppose que la matrice solide du milieu poreux est en équilibre thermique avec le fluide, et les effets de Soret et de Dufour sont négligés.

2.2 Modèle à deux domaines

Dans le modèle à deux domaines, l'équation de Navier-Stokes dans le fluide est couplée avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le poreux par un ensemble de conditions limites appropriées à l'interface, choisies selon l'ordre de l'équation du mouvement écrite pour le milieu poreux (Darcy, Darcy-Brinkman). On présente d'abord les équations de conservation du modèle à deux domaines en utilisant la formulation de Darcy ($2\Omega_D$). Précisons

que l'ensemble des résultats concernant le modèle $2\Omega_D$ (présentés dans le chapitre 4) ont été obtenues par Carr & Straughan (2003), qui ont utilisé une équation d'état quadratique dans la simulation de la convection pénétrative. Puis, la formulation de Darcy-Brinkman ($2\Omega_{DB}$) est présentée, et les équations aux perturbations pour cette formulation sont développées.

2.2.1 Équations de conservation

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'espèce, dans la couche fluide s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* \right) = -\nabla P^* + \mu \nabla^2 \mathbf{u}^* - \rho(T^*, S^*) g \mathbf{e}_z \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla T^* = \alpha_{Tf} \nabla^2 T^* \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla S^* = \alpha_{Sf} \nabla^2 S^* \quad (2.5)$$

où la notation (*) désigne des grandeurs dimensionnées.

MODÈLE DE DARCY

En utilisant le modèle de Darcy, les équations pour la couche poreuse, s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_m^* = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\rho_0}{\phi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m^*}{\partial t^*} \right) = -\nabla P_m^* - \frac{\mu}{K} \mathbf{u}_m^* - \rho(T^*, S^*) g \mathbf{e}_z \quad (2.7)$$

$$\frac{(\rho_0 C_p)_m}{(\rho_0 C_p)_f} \frac{\partial T_m^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}_m^* \cdot \nabla T_m^* = \nabla \cdot (\alpha_{Tm} \nabla T_m^*) \quad (2.8)$$

$$\phi \frac{\partial S_m^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}_m^* \cdot \nabla S_m^* = \alpha_{Sf} \nabla \cdot (\phi \nabla S_m^*) \quad (2.9)$$

Les conditions limites à la frontière supérieure ($z = d^*$) sont : $w^* = 0$, $T^* = T_u^*$, $S^* = S_u^*$ et à la frontière inférieure ($z = 0$) : $\mathbf{u}_m^* = 0$, $T_m^* = T_l^*$, $S_m^* = S_l^*$. A l'interface ($z = d_m^*$), la continuité des vitesses normales, des contraintes normales, des températures, des flux de chaleur, de la concentration et des flux de matière sont imposés :

$$w^* = w_m^* \quad (2.10)$$

$$-P^* + 2\mu \frac{\partial w^*}{\partial z} = -P_m^* \quad (2.11)$$

$$T^* = T_m^* \quad (2.12)$$

$$k_f \frac{\partial T^*}{\partial z} = k_m \frac{\partial T_m^*}{\partial z} \quad (2.13)$$

$$S^* = S_m^* \quad (2.14)$$

$$\alpha_{Sf} \frac{\partial S^*}{\partial z} = \alpha_{Sm} \frac{\partial S_m^*}{\partial z} \quad (2.15)$$

Enfin, la condition de Beavers & Joseph (1967), représentée dans l'équation (1.1), est imposée à l'interface.

MODÈLE DE DARCY-BRINKMAN

En utilisant le modèle de Brinkman, les équations de conservation pour la couche poreuse deviennent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_m^* = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\rho_0}{\phi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m^*}{\partial t^*} \right) = -\nabla P_m^* - \frac{\mu}{K} \mathbf{u}_m^* + \mu_{eff} \nabla^2 \mathbf{u}_m^* - \rho(T^*, S^*) g \mathbf{e}_z \quad (2.17)$$

$$\frac{(\rho_0 C_p)_m}{(\rho_0 C_p)_f} \frac{\partial T_m^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}_m^* \cdot \nabla T_m^* = \nabla \cdot (\alpha_{Tm} \nabla T_m^*) \quad (2.18)$$

$$\phi \frac{\partial S_m^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}_m^* \cdot \nabla S_m^* = \alpha_{Sf} \nabla \cdot (\phi \nabla S_m^*) \quad (2.19)$$

Dans ce cas, l'équation de conservation de la quantité de mouvement inclut le terme de diffusion visqueuse, ou terme de Brinkman ($\mu_{eff} \nabla^2 \mathbf{u}_m^*$). On exprime la viscosité réduite du terme de Brinkman par le rapport $\eta = \mu_{eff}/\mu = 1/\phi$, conformément à l'établissement de l'équation de Darcy-Brinkman par la technique de moyenne volumique (Whitaker, 1999).

Les conditions limites adoptées à la frontière supérieure ($z = d^*$) sont :

$$\mathbf{u}^* = 0 \quad (2.20)$$

$$T^* = T_u^* \quad (2.21)$$

$$S^* = S_u^* \quad (2.22)$$

Et à la frontière inférieure ($z = 0$) :

$$\mathbf{u}_m^* = 0 \quad (2.23)$$

$$T_m^* = T_l^* \quad (2.24)$$

$$S_m^* = S_l^* \quad (2.25)$$

A l'interface ($z = d_m^*$), les nouvelles conditions limites prennent la forme :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_m^* \quad (2.26)$$

$$-P^* + 2 \mu \frac{\partial w^*}{\partial z} = -P_m^* + 2 \mu_{eff} \frac{\partial w_m^*}{\partial z} \quad (2.27)$$

$$\mu \frac{\partial u^*}{\partial z} = \mu_{eff} \frac{\partial u_m^*}{\partial z} \quad (2.28)$$

$$T^* = T_m^* \quad (2.29)$$

$$k_f \frac{\partial T^*}{\partial z} = k_m \frac{\partial T_m^*}{\partial z} \quad (2.30)$$

$$S^* = S_m^* \quad (2.31)$$

$$\alpha_{Sf} \frac{\partial S^*}{\partial z} = \alpha_{Sm} \frac{\partial S_m^*}{\partial z} \quad (2.32)$$

Il est important de remarquer que, dans le modèle de Darcy, la continuité de contrainte normale (eq. (2.11)) n'inclut pas la contribution visqueuse dans la région poreuse, et la condition de Beavers & Joseph (eq. (1.1)) est substituée par la continuité de contrainte tangentielle (eq.(2.28)) dans le modèle de Brinkman.

Pour conserver la généralité des solutions, les variables adimensionnées suivantes sont introduites dans les équations de conservation du modèle de Brinkman (2.2)-(2.5), (2.16)-(2.19), et dans les conditions limites (2.20)-(2.32) :

$$x = \frac{x^*}{d^*}, \quad z = \frac{z^*}{d^*}, \quad u = u^* \frac{d^*}{\nu}, \quad w = w^* \frac{d^*}{\nu},$$

$$t = t^* \frac{\nu}{d^{*2}}, \quad P = P^* \frac{d^{*2}}{\rho_0 \nu^2}, \quad T = \frac{T^* - T_0^*}{\Delta T^*}, \quad S = \frac{S^* - S_0^*}{\Delta S^*},$$

où $\Delta T^* = T_u^* - T_l^*$ et $\Delta S^* = S_u^* - S_l^*$. La diffusivité du milieu poreux est exprimée par $\alpha_{Sm} = \phi \alpha_{Sf}$. Compte tenu du grand nombre de paramètres du problème, nous prendrons en première approximation la valeur du rapport $(\rho C_p)_m / (\rho C_p)_f$ égal à un, malgré le fait que dans nos calculs nous avons utilisés une relativement faible porosité. Pourtant, comme nous le verrons dans la section 2.2.2 (analyse de stabilité linéaire), le déclenchement de l'instabilité est supposé se produire en mode stationnaire ce qui rendre cette approximation sans conséquence.

On obtient pour la couche fluide :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} - (1 - Gr_T T - Gr_S S) \mathbf{e}_z \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr_f} \nabla^2 T \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = \frac{1}{Sc_f} \nabla^2 S \quad (2.36)$$

En supposant que le milieu poreux est isotrope et homogène, les équations adimensionnées pour la couche poreuse deviennent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_m = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \right) = -\nabla P_m + \frac{1}{Da} \mathbf{u}_m + \eta \nabla^2 \mathbf{u}_m - (1 - Gr_T T_m - Gr_S S_m) \mathbf{e}_z \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u}_m \cdot \nabla T_m = \frac{1}{Pr_m} \nabla^2 T_m \quad (2.39)$$

$$\phi \frac{\partial S_m}{\partial t} + \mathbf{u}_m \cdot \nabla S_m = \frac{1}{Sc_m} \nabla^2 S_m \quad (2.40)$$

où $Pr_m = Pr_f \varepsilon_T$ et $Sc_m = Sc_f \varepsilon_S$.

Les conditions limites adimensionnées aux frontières supérieure et inférieure s'écrivent :

$$\mathbf{u}(1) = 0, T(1) = \frac{T_u^* - T_0^*}{\Delta T^*}, S(1) = \frac{S_u^* - S_0^*}{\Delta S^*} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{u}_m(0) = 0, T_m(0) = \frac{T_l^* - T_0^*}{\Delta T^*}, S_m(0) = \frac{S_l^* - S_0^*}{\Delta S^*}. \quad (2.42)$$

Enfin, à l'interface $z = d_m^*/d^* = d_m = 1/(1 + \hat{d})$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m, \quad (2.43)$$

$$-P + 2 \frac{\partial w}{\partial z} = -P_m + 2 \eta \frac{\partial w_m}{\partial z}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \eta \frac{\partial u_m}{\partial z}, \quad (2.45)$$

$$T = T_m, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{\partial T_m}{\partial z}, \quad (2.47)$$

$$S = S_m, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_S} \frac{\partial S_m}{\partial z}. \quad (2.49)$$

2.2.2 Analyse de stabilité linéaire

En suivant la procédure de l'analyse de stabilité linéaire, on exprime le système d'équations en termes des variables perturbées et on retient seulement les termes linéaires. Les variables sont décomposées de la manière suivante :

$$u = \bar{u}(z) + u'(x, z, t) \quad (2.50)$$

$$w = \bar{w}(z) + w'(x, z, t) \quad (2.51)$$

$$P = \bar{P}(z) + P'(x, z, t) \quad (2.52)$$

$$T = \bar{T}(z) + T'(x, z, t) \quad (2.53)$$

$$S = \bar{S}(z) + S'(x, z, t) \quad (2.54)$$

où les quantités surlignées représentent l'état de base, et les primes indiquent les profils perturbés de la solution de base. L'état de base est supposé stationnaire (conduction pure) : $\bar{u}(z) = \bar{w}(z) = 0$ et $\partial/\partial t = 0$.

En utilisant les définitions ci-dessus et en appliquant les conditions limites pour le champ de température dans les équations (2.35) et (2.39), on obtient :

$$\bar{T} = \left(\frac{T_u^* - 2T_0^*}{\Delta T^*} \right) \left(\frac{1 + \hat{d}}{\hat{d}} \right) (z - 1) + \frac{T_u^* - T_0^*}{\Delta T^*}, \quad d_m \leq z \leq 1 \quad (2.55)$$

$$\bar{T}_m = \left(\frac{2T_0^* - T_l^*}{\Delta T^*} \right) (1 + \hat{d}) z + \left(\frac{T_l^* - T_0^*}{\Delta T^*} \right), \quad 0 \leq z \leq d_m \quad (2.56)$$

On applique la continuité de flux de chaleur dans les équations (2.55) et (2.56) pour obtenir la température à l'interface :

$$T_0^* = \frac{\varepsilon_T T_u^* + \hat{d} T_l^*}{2(\varepsilon_T + \hat{d})} \quad (2.57)$$

De la même manière, le champ de concentration s'écrit sous la forme :

$$\bar{S} = \left(\frac{S_u^* - 2S_0^*}{\Delta S^*} \right) \left(\frac{1 + \hat{d}}{\hat{d}} \right) (z - 1) + \frac{S_u^* - S_0^*}{\Delta S^*}, \quad d_m \leq z \leq 1 \quad (2.58)$$

$$\bar{S}_m = \left(\frac{2S_0^* - S_l^*}{\Delta S^*} \right) (1 + \hat{d}) z + \left(\frac{S_l^* - S_0^*}{\Delta S^*} \right), \quad 0 \leq z \leq d_m \quad (2.59)$$

et, à l'interface :

$$S_0^* = \frac{\varepsilon_S S_u^* + \hat{d} S_l^*}{2(\varepsilon_S + \hat{d})} \quad (2.60)$$

Les équations sont linéarisées de la façon usuelle. En utilisant des définitions (2.50)-(2.54) dans l'équation (2.34), et en éliminant les produits des quantités perturbées, on obtient pour la conservation de la quantité de mouvement dans la couche fluide :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla(\bar{P} + P') + \nabla^2 \mathbf{u}' - (1 - Gr_T)(\bar{T} + T') - Gr_S(\bar{S} + S') \mathbf{e}_z \quad (2.61)$$

On applique l'opérateur $\nabla \times \nabla \times$ (double rotationnel) dans l'équation (2.61), et sachant que $\nabla \times (\nabla \mathbf{v}) = 0$, où \mathbf{v} est un vecteur arbitraire, il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}') \\ & = \nabla \times \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}') - (-Gr_T (\nabla \times \nabla \times T') - Gr_S (\nabla \times \nabla \times S')) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.62)$$

L'introduction de l'équation de continuité au sein de la composante verticale de l'équation (2.62), conduit à l'équation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 w' = Gr_T \nabla_2^2 T' + Gr_S \nabla_2^2 S' \quad (2.63)$$

où $\nabla_2^2 = \partial^2/\partial x^2$ en deux dimensions et $\nabla_2^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ en trois dimensions.

De même, l'utilisation des définitions (2.50)-(2.54) dans les équations (2.35) et (2.36), et l'élimination des produits des quantités perturbées conduit à :

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} w' = \frac{1}{Pr_f} \nabla^2 T' \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} w' = \frac{1}{Sc_f} \nabla^2 S' \quad (2.65)$$

Les équations (2.63), (2.64) et (2.65) représentent l'ensemble des équations aux perturbations adimensionnées pour la couche fluide.

La même procédure permet d'obtenir les équations aux perturbations adimensionnées dans la région poreuse :

$$\left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right) \nabla^2 w'_m + \frac{1}{Da} \nabla^2 w'_m = Gr_T \nabla_2^2 T'_m + Gr_S \nabla_2^2 S'_m \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial T'_m}{\partial t} + \frac{\partial \bar{T}_m}{\partial z} w'_m = \frac{1}{Pr_m} \nabla^2 T'_m \quad (2.67)$$

$$\phi \frac{\partial S'_m}{\partial t} + \frac{\partial \bar{S}_m}{\partial z} w'_m = \frac{1}{Sc_m} \nabla^2 S'_m \quad (2.68)$$

Les conditions limites aux frontières externes deviennent :

$$w'(1) = 0, \quad \frac{\partial w'(1)}{\partial z} = 0, \quad T'(1) = 0, \quad S'(1) = 0, \quad (2.69)$$

$$w'_m(0) = 0, \quad \frac{\partial w'_m(0)}{\partial z} = 0, \quad T'_m(0) = 0, \quad S'_m(0) = 0. \quad (2.70)$$

En utilisant les équations de continuité pour les régions fluide et poreuse, les conditions limites à l'interface $z = d_m$ s'écrivent :

$$w' = w'_m, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial w'_m}{\partial z}, \quad (2.72)$$

$$(\bar{P} + P') - 2 \frac{\partial w'}{\partial z} = (\bar{P}_m + P'_m) - 2 \eta \frac{\partial w'_m}{\partial z}, \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = \eta \frac{\partial^2 w'_m}{\partial z^2}, \quad (2.74)$$

$$T' = T'_m, \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{\partial T'_m}{\partial z}, \quad (2.76)$$

$$S' = S'_m, \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_S} \frac{\partial S'_m}{\partial z}, \quad (2.78)$$

On applique le développement en mode normal aux variables dépendantes en supposant que toutes les quantités dépendent d'une seule coordonnée horizontale (cellules en forme de rouleaux) :

$$(w', T', S') = (W(z), \theta(z), \mathcal{S}(z))e^{i\kappa x + \sigma t} \quad (2.79)$$

De même pour les variables dans la région poreuse :

$$(w'_m, T'_m, S'_m) = (W_m(z), \theta_m(z), \mathcal{S}_m(z))e^{i\kappa x + \sigma t} \quad (2.80)$$

La constante de séparation κ est le nombre d'onde horizontal adimensionné. Le nombre d'onde κ doit être réel pour que la solution reste finie lorsque $x \rightarrow \infty$. σ peut être complexe : $\sigma = \sigma_r + i\omega$. Si $\sigma_r > 0$, la perturbation augmente dans le temps, i.e. le système est instable. Le cas où $\sigma_r = 0$ correspond à la stabilité marginale. En admettant que le principe d'échange de stabilité est valide, i.e. le déclenchement de l'instabilité se produit en mode stationnaire, on prend $\sigma_i = 0$. Carr & Straughan (2003) ont vérifié cette hypothèse dans toute la gamme des paramètres étudiée : la valeur propre critique σ_{cr} était toujours réelle. Toutefois les autres valeurs propres obtenues pouvaient se présenter comme des complexes conjugués.

Le développement en modes normaux dans les équations (2.63)-(2.68) conduit au système :

$$\frac{d^4 W}{dz^4} - 2\kappa^2 \frac{d^2 W}{dz^2} + \kappa^4 W = \kappa^2 Gr_T \theta + \kappa^2 Gr_S \mathcal{S} \quad (2.81)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \kappa^2 \theta = \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_T} Pr_f W \quad (2.82)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{S}}{dz^2} - \kappa^2 \mathcal{S} = \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_S} Sc_f W \quad (2.83)$$

$$\eta \frac{d^4 W_m}{dz^4} - \left(2\eta\kappa^2 + \frac{1}{Da}\right) \frac{d^2 W_m}{dz^2} + \left(\eta\kappa^4 + \kappa^2 \frac{1}{Da}\right) W_m = \kappa^2 Gr_T \theta_m + \kappa^2 Gr_S \mathcal{S}_m \quad (2.84)$$

$$\frac{d^2 \theta_m}{dz^2} - \kappa^2 \theta_m = \varepsilon_T \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_T} Pr_m W_m \quad (2.85)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{S}_m}{dz^2} - \kappa^2 \mathcal{S}_m = \varepsilon_S \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_S} Sc_m W_m \quad (2.86)$$

Les conditions aux limites externes s'écrivent :

$$W(1) = 0, \frac{dW(1)}{dz} = 0, \theta(1) = 0, \mathcal{S}(1) = 0 \quad (2.87)$$

$$W_m(0) = 0, \frac{dW_m(0)}{dz} = 0, \theta_m(0) = 0, \mathcal{S}_m(0) = 0 \quad (2.88)$$

et celles à l'interface prennent la forme :

$$W = W_m, \quad (2.89)$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW_m}{dz}, \quad (2.90)$$

$$-\frac{d^3W}{dz^3} + 3\kappa^2 \frac{dW}{dz} = \frac{1}{Da} \frac{dW_m}{dz} - \eta \left(\frac{d^3W_m}{dz^3} - 3\kappa^2 \frac{dW_m}{dz} \right), \quad (2.91)$$

$$\frac{d^2W}{dz^2} = \eta \frac{d^2W_m}{dz^2}, \quad (2.92)$$

$$\theta = \theta_m, \quad (2.93)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{d\theta_m}{dz}, \quad (2.94)$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_m, \quad (2.95)$$

$$\frac{d\mathcal{S}}{dz} = \frac{1}{\varepsilon_S} \frac{d\mathcal{S}_m}{dz}. \quad (2.96)$$

La forme finale de la condition de continuité de contrainte normale (2.91) est obtenue par l'utilisation de la composante en x de l'équation de la quantité de mouvement, en éliminant les termes de pression. Le système (2.81)-(2.96) constitue le problème aux valeurs propres en Gr_S résultant du modèle $2\Omega_{DB}$.

2.3 Modèle à un domaine

Dans le modèle à un domaine, le milieu poreux est considéré comme un pseudo-fluide. Ainsi, l'équation de conservation de la quantité de mouvement valide dans toute la cavité est une équation de Navier-Stokes modifiée, comprenant le terme de Darcy. La contribution de la diffusion visqueuse dans le milieu poreux est naturellement prise en compte. Dans cette formulation, la transition de la région fluide vers la région poreuse est accomplie par la variation spatiale de la porosité et de la perméabilité, ou d'autres propriétés effectives. Ainsi, comme le milieu poreux considéré est homogène jusqu'au bord, lorsqu'on passe d'une région à l'autre, la porosité et la perméabilité changent de façon discontinue.

Le modèle 1Ω présente l'avantage de simplifier la procédure numérique, puisque les conditions limites à l'interface ne sont pas écrites explicitement. De plus, ce modèle est capable de prendre en compte les variations spatiales des propriétés plus facilement que les modèles à deux domaines.

2.3.1 Équations de conservation

Les équations de conservation macroscopiques qui décrivent les phénomènes de transport dans l'ensemble de la cavité sont :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (2.97)$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\phi} \right) + \frac{\rho_0}{\phi} \left(\mathbf{u}^* \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}^*}{\phi} \right) = -\nabla P^* - \frac{\mu}{K} \mathbf{u}^* + \mu_{eff} \nabla^2 \mathbf{u}^* - \rho(T^*, S^*) g \mathbf{e}_z \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla T^* = \nabla \cdot (\alpha_T \nabla T^*) \quad (2.99)$$

$$\phi \frac{\partial S^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla S^* = \alpha_{Sf} \nabla \cdot (\phi \nabla S^*) \quad (2.100)$$

où $\alpha_T = \alpha_{Tf}$ dans la couche fluide et $\alpha_T = \alpha_{Tm}$ dans la couche poreuse. L'équation (2.98) représente la conservation de la quantité de mouvement, et se transforme continûment de l'équation de Darcy-Brinkman ($\phi \neq 1$) à l'équation de Navier-Stokes ($\phi = 1$). Plusieurs lois expriment la perméabilité K en fonction de la porosité ϕ . Dans la plupart de celles-ci, lorsque ϕ s'approche de 1, K tend vers l'infini. Cependant il existe des milieux poreux de même porosité, proches de un, qui ont des perméabilités très différentes. Pour cette raison, dans ce travail on a choisi de faire varier la perméabilité tout en gardant la porosité constante. Finalement, comme dans le modèle $2\Omega_{DB}$, la viscosité réduite est donnée par $\eta = \mu_{eff}/\mu = 1/\phi$, la diffusivité de la couche poreuse est exprimée par $\alpha_{sm} = \phi \alpha_{sf}$ et $(\rho C_p)_m / (\rho C_p)_f = 1$.

Les conditions limites imposées sont données par les équations suivantes.

À la frontière supérieure ($z = d^*$) :

$$\mathbf{u}^* = 0 \quad (2.101)$$

$$T^* = T_u^* \quad (2.102)$$

$$S^* = S_u^* \quad (2.103)$$

À la frontière inférieure ($z = 0$) :

$$\mathbf{u}^* = 0 \quad (2.104)$$

$$T^* = T_l^* \quad (2.105)$$

$$S^* = S_l^* \quad (2.106)$$

La mise sous forme adimensionnelle est réalisée en introduisant les variables utilisées dans le modèle $2\Omega_{DB}$. Les équations sans dimension pour l'ensemble de la cavité s'écrivent sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{u}}{\phi} \right) + \frac{1}{\phi} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}}{\phi} \right) = -\nabla P - \frac{1}{Da} \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + (Gr_T T + Gr_S S) \mathbf{e}_z \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr_f \alpha_{Tf}} \nabla \cdot (\alpha_T \nabla T) \quad (2.109)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = \frac{1}{Sc_f} \nabla \cdot (\phi \nabla S) \quad (2.110)$$

À la frontière supérieure :

$$\mathbf{u}(1) = 0, T(1) = \frac{T_u^* - T_0^*}{\Delta T^*}, S(1) = \frac{S_u^* - S_0^*}{\Delta S^*} \quad (2.111)$$

Et à la frontière inférieure :

$$\mathbf{u}(0) = 0, T(0) = \frac{T_l^* - T_0^*}{\Delta T^*}, S(0) = \frac{S_l^* - S_0^*}{\Delta S^*} \quad (2.112)$$

2.3.2 Analyse de stabilité linéaire

On définit :

$$u = \bar{u}(z) + u'(x, z, t) \quad (2.113)$$

$$w = \bar{w}(z) + w'(x, z, t) \quad (2.114)$$

$$P = \bar{P}(z) + P'(x, z, t) \quad (2.115)$$

$$T = \bar{T}(z) + T'(x, z, t) \quad (2.116)$$

$$S = \bar{S}(z) + S'(x, z, t) \quad (2.117)$$

où les quantités surlignées représentent l'état de base, et les primes sont les perturbations imposés à la solution de base, supposée stationnaire.

Le système d'équations (4.5)-(4.7) décrivant l'état de base prend la forme :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} = 0 \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.119)$$

En utilisant les conditions limites pour le champ de température dans l'équation (2.118), il vient :

$$\bar{T} = z + \frac{T_l^* - T_0^*}{\Delta T^*} \quad (2.120)$$

De même, l'utilisation des conditions limites pour le champ de concentration dans l'équation (2.119) conduit à :

$$\bar{S} = z + \frac{S_l^* - S_0^*}{\Delta S^*} \quad (2.121)$$

On remplace (2.113)-(2.117) dans les équations (4.4)-(4.7), et en admettant que les perturbations sont petites, on néglige les produits des quantités perturbées. Ensuite, on utilise les équations de l'état de base (2.118)-(2.121), pour obtenir les équations linearisées suivantes :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.122)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial P'}{\partial x} - \frac{1}{Da_x} u' + \eta \nabla^2 u' \quad (2.123)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{1}{Da_z} w' + \eta \nabla^2 w' + Gr_T T' + Gr_S S' \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + w' = \frac{1}{Pr_f \alpha_{Tf}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_T \frac{\partial T'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha_T \frac{\partial T'}{\partial z} \right) \right) \quad (2.125)$$

$$\phi \frac{\partial S'}{\partial t} + w' = \frac{1}{Sc_f} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial S'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial S'}{\partial z} \right) \right) \quad (2.126)$$

En admettant que $\alpha_{Tm} = \alpha_{Tm}(z)$ et $\phi = \phi(z)$, les équations (2.125) et (2.126) deviennent :

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\alpha_T}{Pr_f \alpha_{Tf}} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) - w' + \frac{1}{Pr_f \alpha_{Tf}} \frac{d\alpha_T}{dz} \left(\frac{\partial T'}{\partial z} \right) \quad (2.127)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = \frac{1}{Sc_f} \left(\frac{\partial^2 S'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S'}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\phi} w' + \frac{1}{\phi Sc_f} \frac{d\phi}{dz} \left(\frac{\partial S'}{\partial z} \right) \quad (2.128)$$

L'élimination du terme de pression des équations (2.123) et (2.124), et l'utilisation de (2.122) conduisent à l'équation :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) \\
&= -\frac{d\phi}{dz} \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Da_x} \right) u' + \frac{1}{Da_x} \frac{\partial w'}{\partial z} - \eta \nabla^2 \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\phi}{Da_x} \right) \frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi}{Da_x} \right) \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\phi}{Da_x} \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi}{Da_z} \right) \frac{\partial w'}{\partial x} \\
&+ \frac{\phi}{Da_z} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} - \eta \frac{d\phi}{dz} \nabla^2 \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \phi \eta \nabla^2 \left(-\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) - \phi \left(Gr_T \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + Gr_S \frac{\partial^2 S'}{\partial x^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.129}$$

En admettant que $Da_x = Da_z = Da(z)$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) = \frac{d\phi}{dz} \left(-\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right) + \phi \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{Da} \right) \frac{\partial w'}{\partial z} \\
&+ \frac{\phi}{Da} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) - \phi \eta \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) - \phi \left(Gr_T \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + Gr_S \frac{\partial^2 S'}{\partial x^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.130}$$

Comme dans le modèle $2\Omega_{DB}$, on applique le développement en mode normal aux variables dépendantes :

$$(w', T', S') = (W(z), \theta(z), \mathcal{S}(z)) e^{ikx + \sigma t} \tag{2.131}$$

On utilise (2.131) dans les équations (2.127), (2.128), (2.130), et on admet que l'instabilité développe une convection cellulaire stationnaire ($\sigma = 0$), pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& \eta \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right)^2 W + \frac{1}{Da} \kappa^2 W - \frac{1}{Da} \frac{d^2}{dz^2} W \\
& - \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{Da} \right) \frac{dW}{dz} - \kappa^2 (Gr_T \theta + Gr_S \mathcal{S}) = 0
\end{aligned} \tag{2.132}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{\alpha_T} \frac{d\alpha_T}{dz} \frac{d}{dz} - \kappa^2 \right) \theta = Pr_f \frac{\alpha_{Tf}}{\alpha_T} W \tag{2.133}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dz} \frac{d}{dz} - \kappa^2 \right) \mathcal{S} = Sc_f \frac{1}{\phi} W \tag{2.134}$$

Les conditions limites en $z = 0$ et $z = 1$ deviennent quant à elles :

$$W = \frac{dW}{dz} = \theta = \mathcal{S} = 0 \tag{2.135}$$

Le système des équations homogènes (2.132)-(2.135) constitue le problème aux valeurs propres résultant du modèle 1Ω .

Chapitre 3

La Technique de la Transformation Intégrale Généralisée

La Technique de la Transformation Intégrale Généralisée - GITT (Cotta, 1993; Cotta & Mikhailov, 1997; Cotta, 1998) - est une approche hybride numérique-analytique, basée sur les principes analytiques formels de la Technique de la Transformation Intégrale Classique - CITT (Mikhailov & Ozisik, 1984).

L'idée principale de la CITT consiste à trouver des problèmes auxiliaires aux valeurs propres (par exemple, en appliquant la séparation de variables à la version homogène du problème d'origine) qui fourniront une base pour le développement en fonctions propres. Les problèmes auxiliaires permettront de transformer le système d'équations aux dérivées partielles (EDP) original en un système découplé et infini d'équations différentielles ordinaires (EDO) - ou bien de transformer le système d'EDO original en un système d'équations algébriques. La CITT est donc limitée à une classe de problèmes dites "transformables" de diffusion linéaire, i.e., problèmes qui, après la transformation intégrale, conduisent à systèmes transformés découplés. Lorsqu'un problème aux valeurs propres approprié ne peut pas être obtenu, ou bien lorsqu'il est trop compliqué du point de vue de la résolution numérique, la méthode CITT ne permet pas d'obtenir une solution exacte du système différentiel original.

Ozisik & Murray (1974) ont introduit certaines extensions à la technique classique qui ont permis le traitement de problèmes a priori non-transformables. Dans la technique généralisée, il n'est pas nécessaire de trouver une transformation intégrale exacte, i.e., qui conduit à un

système transformé découplé. Ainsi, après le choix du problème auxiliaire, les formules de transformation et inversion associées à ce problème sont déterminées, et la transformation intégrale est appliquée au système original. Le système transformé résultant est infini et couplé (chaque solution du champ des variables transformées dépendra de toutes les autres solutions). Après la troncature à un ordre suffisamment grand, le système transformé est résolu numériquement. Finalement, l'application de la formule d'inversion permet l'obtention de la solution du problème d'origine. Il est important de remarquer que la formule d'inversion fournit une solution analytique exacte pour les variables originales, et que la précision de la solution finale est directement liée à l'ordre de troncature du système transformé. La méthode GITT fournit donc des solutions hybrides numériques-analytiques aux problèmes de convection-diffusion non traitables par la technique classique. La GITT est une approche efficace pour la solution des problèmes homogènes ou non-homogènes, en régime permanent ou transitoire. Un grand avantage de cette approche de développement en séries est la faible augmentation des efforts numériques en augmentant le nombre de variables indépendantes ou dépendantes du système.

Dans les dernières décennies, la méthode GITT a été progressivement développée pour le traitement de toute une série de problèmes qui étaient auparavant abordés uniquement par des méthodes discrètes. Dans le domaine de la mécanique de fluides et du transfert de chaleur, les problèmes abordés jusqu'à présent peuvent être classés de la manière suivante : problèmes à coefficients variables, comme l'étude du développement simultané de vitesse et température à l'intérieur de canaux (Mikhailov, 1975; Silva *et al.*, 1992; Cotta *et al.*, 1993); problèmes à coefficients variables dans les conditions limites, par exemple, le cas de la convection forcée à l'intérieur des canaux avec des ailes externes (Ozisik & Murray, 1974; Santos *et al.*, 1991; Vick & Wells, 1986); et problèmes où les conditions limites sont variables, notamment systèmes de frontière mobile comme dans les analyses incluant le changement de phases et domaines aux formes irrégulières (Ozisik & Guçeri, 1977; Bogado Leite *et al.*, 1980; Aparecido & Cotta, 1990a; Aparecido & Cotta, 1992). Une autre classe concerne les problèmes qui engendrent des problèmes auxiliaires dont la résolution est difficile (Kim & Ozisik, 1987; Cotta & Ozisik, 1986; Kim & Ozisik, 1989; Kakaç *et al.*, 1990; Aparecido & Cotta, 1990b; Bayazitoblu & Cotta, 1980; Scofano Neto & Cotta, 1992). Dans ce cas, on procède en considérant des problèmes auxiliaires plus simples qui gardent toutefois quelques informations du système originalement posé. Plusieurs applications sont incluses dans une telle situation, comme par exemple : la

convection interne forcée, transitoire et périodique, les transferts de chaleur dans des canaux incluant les effets de conduction axiale, les transferts convectifs à l'intérieur de canaux de section rectangulaires, etc. La méthode GITT a été également utilisée dans la résolution de problèmes non-linéaires de convection (Cotta, 1990; Serfaty & Cotta, 1992; Machado & Cotta, 1995; Leiroz & Cotta, 1993; Baohua & Cotta, 1993; Perez Guerrero & Cotta, 1992), gouvernés soit par l'équation de la couche limite, soit par l'équation de Navier-Stokes.

Compte tenu du fait que les valeurs propres dans des problèmes de convection en milieux fluide-poreux sont extrêmement sensibles aux changements de paramètres, l'utilisation d'une méthode très précise est nécessaire pour la solution du système. Dans notre travail, la méthode GITT est utilisée pour réduire le problème aux valeurs propres (originaires de l'analyse de stabilité) décrit par des équations différentielles ordinaires pour obtenir un problème décrit par des équations algébriques. Les étapes principales de la méthode GITT sont résumées ci-dessous :

1. Choix des problèmes aux valeurs propres auxiliaires qui fourniront la base pour le développement en fonctions propres (il est recommandé, pour une meilleure performance numérique, que le problème auxiliaire choisi soit le plus proche possible du problème d'origine).
2. Résolution du problème auxiliaire et calcul des fonctions propres, valeurs propres et normes associées.
3. Définition de la paire transformée-inverse (formules de transformation et inversion obtenues à l'aide de la propriété d'orthogonalité des fonctions propres).
4. Transformation intégrale du système de EDPs original en substituant la formule d'inversion, et obtention d'un système infini et couplé de EDOs (dans notre travail, le système de EDOs original devient un système couplé d'équations algébriques).
5. Troncature du système infini à un ordre suffisamment grand et solution numérique pour les champs transformés.
6. Application de la formule d'inversion et obtention de la solution du problème original.

Dans les sections 3.1 et 3.2 respectivement, la méthode GITT est appliquée aux problèmes de valeurs propres résultant des modèles à deux et un domaine. Les problèmes auxiliaires pour les champs de température, concentration et vitesse sont présentés et la transformation intégrale est appliquée aux équations de conservation. Finalement, les systèmes correspondants aux problèmes thermique et thermosolutal sont présentés sous forme matricielle.

3.1 La méthode GITT appliquée au modèle à deux domaines

Le système (2.81)-(2.86), (2.87)-(2.96) constitue le problème aux valeurs propres du modèle $2\Omega_{DB}$, auquel on appliquera la solution GITT.

3.1.1 Développement en fonctions propres

En suivant les étapes ci-dessus, en particulier appliquées aux problèmes multi-domaines (Mikhailov & Ozisik, 1984), on choisit des problèmes aux valeurs propres auxiliaires pour les champs de température, concentration et vitesse.

A) Problème auxiliaire associé au champ de température

Le problème auxiliaire associé au champ de température s'écrit :

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_{\theta 1,h}(z)}{dz^2} + \frac{\beta_h^2}{\varepsilon_T} \tilde{\psi}_{\theta 1,h}(z) = 0, \quad d_m \leq z \leq 1 \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_{\theta 2,h}(z)}{dz^2} + \beta_h^2 \tilde{\psi}_{\theta 2,h}(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq d_m \quad (3.2)$$

avec les conditions limites

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\theta 1,h}(1) = 0, \quad \tilde{\psi}_{\theta 1,h}(d_m) = \tilde{\psi}_{\theta 2,h}(d_m), \\ \varepsilon_T \frac{d\tilde{\psi}_{\theta 1,h}(d_m)}{dz} = \frac{d\tilde{\psi}_{\theta 2,h}(d_m)}{dz}, \quad \text{et } \tilde{\psi}_{\theta 2,h}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Les fonctions propres normalisées associés à ce problème s'écrivent :

$$\tilde{\psi}_{\theta 1,h}(z) = C_1 \frac{\sin\left(\frac{\beta_h}{\sqrt{\varepsilon_T}}(1-z)\right)}{\sin\left(\frac{\beta_h}{\sqrt{\varepsilon_T}}(1-d_m)\right)}, \quad (3.4)$$

$$\tilde{\psi}_{\theta 2,h}(z) = C_2 \frac{\sin(\beta_h z)}{\sin(\beta_h d_m)}. \quad (3.5)$$

Les conditions aux limites (3.3) fournissent un système de quatre équations linéaires et homogènes pour la détermination des constantes C_1 et C_2 . Compte tenu de la nature homogène du système, les constantes C_1 et C_2 sont dépendantes l'une de l'autre, et l'on suppose l'existence d'une solution non triviale où C_1 et C_2 sont non nulles. Cette condition mène à une équation transcendantale pour la détermination des valeurs propres du problème auxiliaire β_h .

Le problème auxiliaire pour le champ de température est choisi afin d'observer la propriété d'orthogonalité des fonctions propres, a savoir :

$$\int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{\theta 1,h}(z) \tilde{\psi}_{\theta 1,n}(z) dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta 2,h}(z) \tilde{\psi}_{\theta 2,n}(z) dz = \delta_{hn} N_h \quad (3.6)$$

où δ_{hn} est la fonction de Kronecker ($\delta_{hn} = 0$ si $h \neq n$, et $\delta_{hn} = 1$ si $h = n$). La norme associée a par expression :

$$N_h = \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{\theta 1,h}^2(z) dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta 2,h}^2(z) dz \quad (3.7)$$

Le problème aux valeurs propres (3.1)-(3.3) permet la définition de la paire transformée-inverse suivante :

$$\bar{\theta}_h = \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{\theta 1,h}(z) \theta_1(z) dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta 2,h}(z) \theta_2(z) dz \quad (\text{transformée}) \quad (3.8)$$

$$\theta_R(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{\theta R,h}(z) \bar{\theta}_h \quad (\text{inverse}) \quad (3.9)$$

où $R = 1$ dans la région fluide et $R = 2$ dans la région poreuse.

B) Problème auxiliaire associé au champ de concentration

Le problème auxiliaire pour le champ de concentration est choisi de façon similaire :

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_{S1,k}(z)}{dz^2} + \frac{\lambda_k^2}{\varepsilon_S} \tilde{\psi}_{S1,k}(z) = 0, \quad d_m \leq z \leq 1 \quad (3.10)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_{S2,k}(z)}{dz^2} + \lambda_k^2 \tilde{\psi}_{S2,k}(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq d_m \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{S1,k}(1) = 0, \quad \tilde{\psi}_{S1,k}(d_m) = \tilde{\psi}_{S2,k}(d_m), \\ \varepsilon_S \frac{d\tilde{\psi}_{S1,k}(d_m)}{dz} = \frac{d\tilde{\psi}_{S2,k}(d_m)}{dz}, \quad \text{et } \tilde{\psi}_{S2,k}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les fonctions propres normalisées associés à ce problème sont :

$$\tilde{\psi}_{S1,k}(z) = C_3 \frac{\sin\left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{\varepsilon_S}}(1-z)\right)}{\sin\left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{\varepsilon_S}}(1-d_m)\right)}, \quad (3.13)$$

$$\tilde{\psi}_{S2,k}(z) = C_4 \frac{\sin(\lambda_k z)}{\sin(\lambda_k d_m)}. \quad (3.14)$$

Les constantes C_3 et C_4 , et les valeurs propres du problème auxiliaire λ_k , sont déterminées comme dans le problème précédent. Le problème auxiliaire pour le champ de concentration observe aussi la propriété d'orthogonalité des fonctions propres :

$$\int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{S1,k}(z) \tilde{\psi}_{S1,l}(z) dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{S2,k}(z) \tilde{\psi}_{S2,l}(z) dz = \delta_{kl} N_k \quad (3.15)$$

et la norme associée est définie par :

$$N_k = \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{S1,k}^2(z) dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{S2,k}^2(z) dz \quad (3.16)$$

La paire transformée-inverse s'écrit :

$$\bar{\mathcal{S}}_k = \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{S1,k}(z) \mathcal{S}_1(z) dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{S2,k}(z) \mathcal{S}_2(z) dz \quad (\text{transformée}) \quad (3.17)$$

$$\mathcal{S}_R(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{SR,k}(z) \bar{\mathcal{S}}_k \quad (\text{inverse}) \quad (3.18)$$

où $R = 1, 2$ respectivement dans les régions fluide et poreuse.

C) Problème auxiliaire associé au champ de vitesse

Les expansions usuelles - en termes de fonctions trigonométriques ou de Bessel - ne peuvent pas être utilisées pour développer le champ de vitesse. Cela est dû au fait que les conditions limites sur les parois externes exigent que $W = dW/dz = 0$. Il faut donc utiliser des fonctions orthogonales qui, ainsi que leurs premières dérivées, soient nulles aux limites de l'intervalle choisi. Les suggestions de Mikhailov & Cotta (1994) nous ont orienté vers le choix du problème auxiliaire associé au champ de vitesse :

$$\frac{d^4 \tilde{\psi}_{W1,i}(z)}{dz^4} - \mu_i^4 \tilde{\psi}_{W1,i}(z) = 0, \quad d_m \leq z \leq 1 \quad (3.19)$$

$$\eta \frac{d^4 \tilde{\psi}_{W2,i}(z)}{dz^4} - \mu_i^4 \tilde{\psi}_{W2,i}(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq d_m \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{W1,i}(1) &= 0, & \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}(1)}{dz} &= 0, \\ \tilde{\psi}_{W1,i}(d_m) &= \tilde{\psi}_{W2,i}(d_m), & \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}(d_m)}{dz} &= \frac{d\tilde{\psi}_{W2,i}(d_m)}{dz}, \\ \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W1,i}(d_m)}{dz^2} &= \eta \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W2,i}(d_m)}{dz^2}, & \frac{d^3 \tilde{\psi}_{W1,i}(d_m)}{dz^3} &= \eta \frac{d^3 \tilde{\psi}_{W2,i}(d_m)}{dz^3}, \\ \tilde{\psi}_{W2,i}(0) &= 0, & \text{et } \frac{d\tilde{\psi}_{W2,i}(0)}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Les fonctions propres associées au problème ci-dessus s'écrivent :

$$\tilde{\psi}_{W1,i}(z) = C_5 e^{-\mu_i z} + C_6 e^{\mu_i z} + C_7 \sin(\mu_i z) + C_8 \cos(\mu_i z), \quad (3.22)$$

$$\tilde{\psi}_{W2,i}(z) = C_9 e^{-\frac{\mu_i}{\eta^{1/4}} z} + C_{10} e^{\frac{\mu_i}{\eta^{1/4}} z} + C_{11} \sin\left(\frac{\mu_i}{\eta^{1/4}} z\right) + C_{12} \cos\left(\frac{\mu_i}{\eta^{1/4}} z\right). \quad (3.23)$$

Les constantes $C_5 - C_{12}$ et les valeurs propres μ_i sont déterminées de la même manière que pour le problème de la température. Les fonctions propres du problème auxiliaire pour le champ de vitesse observent la propriété d'orthogonalité :

$$\int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i}(z) \tilde{\psi}_{W1,j}(z) dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W2,i}(z) \tilde{\psi}_{W2,j}(z) dz = \delta_{ij} N_i \quad (3.24)$$

où la norme associée s'écrit :

$$N_i = \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i}^2(z) dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W2,i}^2(z) dz \quad (3.25)$$

En suivant la même procédure, on définit la paire de transformation pour le problème de la vitesse :

$$\bar{W}_i = \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i}(z) W_1(z) dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W2,i}(z) W_2(z) dz \quad (\text{transformée}) \quad (3.26)$$

$$W_R(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{WR,i}(z) \bar{W}_i \quad (\text{inverse}) \quad (3.27)$$

3.1.2 Transformation intégrale

La transformation intégrale est maintenant appliquée aux équations de conservation d'origine pour l'obtention des équations transformées. On applique $\int_{d_m}^1 \varepsilon_T \tilde{\psi}_{\theta1,h} dz$ dans l'équation (2.82) et $\int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta2,h} dz$ dans l'équation (2.85), et on additionne les résultats, pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_{d_m}^1 \varepsilon_T \tilde{\psi}_{\theta1,h} \frac{d^2 \theta_1}{dz^2} dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta2,h} \frac{d^2 \theta_2}{dz^2} dz - \kappa^2 \left(\int_{d_m}^1 \varepsilon_T \tilde{\psi}_{\theta1,h} \theta_1 dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta2,h} \theta_2 dz \right) \\ &= \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_T} \left(Pr_f \int_{d_m}^1 \varepsilon_T \tilde{\psi}_{\theta1,h} W_1 dz + \varepsilon_T Pr_m \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta2,h} W_2 dz \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

En appliquant le théorème de Green aux deux premiers termes de l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \int_{d_m}^1 \varepsilon_T \tilde{\psi}_{\theta1,h} \frac{d^2 \theta_1}{dz^2} dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta2,h} \frac{d^2 \theta_2}{dz^2} dz = \int_{d_m}^1 \varepsilon_T \theta_1 \frac{d^2 \tilde{\psi}_{\theta1,h}}{dz^2} dz + \int_0^{d_m} \theta_2 \frac{d^2 \tilde{\psi}_{\theta2,h}}{dz^2} dz \\ & + \varepsilon_T \left(\tilde{\psi}_{\theta1,h} \frac{d\theta_1}{dz} - \theta_1 \frac{d\tilde{\psi}_{\theta1,h}}{dz} \right)_{z=1} - \varepsilon_T \left(\tilde{\psi}_{\theta1,h} \frac{d\theta_1}{dz} - \theta_1 \frac{d\tilde{\psi}_{\theta1,h}}{dz} \right)_{z=d_m} \\ & + \left(\tilde{\psi}_{\theta2,h} \frac{d\theta_2}{dz} - \theta_2 \frac{d\tilde{\psi}_{\theta2,h}}{dz} \right)_{z=d_m} - \left(\tilde{\psi}_{\theta2,h} \frac{d\theta_2}{dz} - \theta_2 \frac{d\tilde{\psi}_{\theta2,h}}{dz} \right)_{z=0} \end{aligned} \quad (3.29)$$

L'utilisation des conditions limites du problème original (2.87) - (2.96), et celles du problème auxiliaire (3.3), conduit à l'équation suivante :

$$\int_{d_m}^1 \varepsilon_T \tilde{\psi}_{\theta 1, h} \frac{d^2 \theta_1}{dz^2} dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta 2, h} \frac{d^2 \theta_2}{dz^2} dz = \int_{d_m}^1 \varepsilon_T \theta_1 \frac{d^2 \tilde{\psi}_{\theta 1, h}}{dz^2} dz + \int_0^{d_m} \theta_2 \frac{d^2 \tilde{\psi}_{\theta 2, h}}{dz^2} dz \quad (3.30)$$

En utilisant (3.30) et les formules d'inversion dans l'équation (3.28), il vient :

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1}^{N_\theta} \bar{\theta}_h \left(\int_{d_m}^1 \varepsilon_T \tilde{\psi}_{\theta 1, h} \frac{d^2 \tilde{\psi}_{\theta 1, n}}{dz^2} dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta 2, h} \frac{d^2 \tilde{\psi}_{\theta 2, n}}{dz^2} dz \right) \\ & - \kappa^2 \sum_{h=1}^{N_\theta} \bar{\theta}_h \left(\int_{d_m}^1 \varepsilon_T \tilde{\psi}_{\theta 1, n} \tilde{\psi}_{\theta 1, h} dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta 2, n} \tilde{\psi}_{\theta 2, h} dz \right) \\ & = \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_T} \sum_{i=1}^{N_W} \bar{W}_i \left(Pr_f \int_{d_m}^1 \varepsilon_T \tilde{\psi}_{\theta 1, n} \tilde{\psi}_{W 1, i} dz + \varepsilon_T Pr_m \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{\theta 2, n} \tilde{\psi}_{W 2, i} dz \right), \quad n = 1, \dots, N_\theta \end{aligned} \quad (3.31)$$

Le problème auxiliaire (3.1)-(3.2) et la propriété d'orthogonalité (3.6) sont enfin utilisés pour obtenir l'équation pour le champ de température transformé :

$$-\beta_n^2 \bar{\theta}_n = \kappa^2 \sum_{h=1}^{N_\theta} \bar{\theta}_h \left(\varepsilon_T \mathcal{M}_{nh}^{(1)} + \mathcal{M}_{nh}^{(2)} \right) + \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_T} \varepsilon_T \sum_{i=1}^{N_W} \bar{W}_i \left(Pr_f \mathcal{C}_{ni}^{(1)} + Pr_m \mathcal{C}_{ni}^{(2)} \right), \quad n = 1, \dots, N_\theta \quad (3.32)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ni}^{(R)} &= \int_R \tilde{\psi}_{\theta R, n} \tilde{\psi}_{WR, i} dz, \\ \mathcal{M}_{nh}^{(R)} &= \int_R \tilde{\psi}_{\theta R, n} \tilde{\psi}_{\theta R, h} dz, \end{aligned} \quad (3.33)$$

et $R = 1, 2$. La même procédure appliquée au champ de concentration nous permet d'arriver à l'équation suivante :

$$-\lambda_l^2 \bar{\mathcal{S}}_l = \kappa^2 \sum_{k=1}^{N_S} \bar{\mathcal{S}}_k \left(\varepsilon_S \mathcal{M}_{lk}^{(1)} + \mathcal{M}_{lk}^{(2)} \right) + \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_S} \varepsilon_S \sum_{i=1}^{N_W} \bar{W}_i \left(Sc_f \mathcal{C}_{li}^{(1)} + Sc_m \mathcal{C}_{li}^{(2)} \right), \quad n = 1, \dots, N_S \quad (3.34)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{li}^{(R)} &= \int_R \tilde{\psi}_{SR, l} \tilde{\psi}_{WR, i} dz, \\ \mathcal{N}_{lk}^{(R)} &= \int_R \tilde{\psi}_{SR, l} \tilde{\psi}_{SR, k} dz, \end{aligned} \quad (3.35)$$

et $R = 1, 2$.

Afin de résoudre numériquement le système, les séries infinies sont tronquées à N_W , N_θ et N_S termes.

De la même manière, on utilise respectivement $\int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i} dz$ et $\int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W2,i} dz$ dans les équations (2.81) et (2.84) :

$$\begin{aligned}
 & \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d^4 W_1}{dz^4} dz + \int_0^{d_m} \eta \tilde{\psi}_{W2,i} \frac{d^4 W_2}{dz^4} dz \\
 & - 2\kappa^2 \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d^2 W_1}{dz^2} dz - \left(2\eta\kappa^2 + \frac{1}{Da} \right) \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W2,i} \frac{d^2 W_2}{dz^2} dz \\
 & = -\kappa^4 \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i} W_1 dz - \left(\eta\kappa^4 + \kappa^2 \frac{1}{Da} \right) \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W2,i} W_2 dz \\
 & + \kappa^2 Gr_T \left(\int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i} \theta_1 dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W2,i} \theta_2 dz \right) \\
 & + \kappa^2 Gr_S \left(\int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i} \mathcal{S}_1 dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W2,i} \mathcal{S}_2 dz \right)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Le théorème de Green est appliqué au premier terme de l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 & \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d^4 W_1}{dz^4} dz \\
 & = \int_{d_m}^1 \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W1,i}}{dz^2} \frac{d^2 W_1}{dz^2} dz + \left(\tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d^3 W_1}{dz^3} - \frac{d^2 W_1}{dz^2} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right)_{z=1} - \left(\tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d^3 W_1}{dz^3} - \frac{d^2 W_1}{dz^2} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right)_{z=d_m} \\
 & = \int_{d_m}^1 \frac{d^4 \tilde{\psi}_{W1,i}}{dz^4} W_1 dz + \left(\frac{d^2 \tilde{\psi}_{W1,i}}{dz^2} \frac{dW_1}{dz} - W_1 \frac{d^3 \tilde{\psi}_{W1,i}}{dz^3} \right)_{z=1} - \left(\frac{d^2 \tilde{\psi}_{W1,i}}{dz^2} \frac{dW_1}{dz} - W_1 \frac{d^3 \tilde{\psi}_{W1,i}}{dz^3} \right)_{z=d_m} \\
 & + \left(\tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d^3 W_1}{dz^3} - \frac{d^2 W_1}{dz^2} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right)_{z=1} - \left(\tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d^3 W_1}{dz^3} - \frac{d^2 W_1}{dz^2} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right)_{z=d_m}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Les conditions aux limites du problème original (2.87)-(2.96) et du problème auxiliaire (3.21) permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 & \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d^4 W_1}{dz^4} dz \\
 & = \int_{d_m}^1 \frac{d^4 \tilde{\psi}_{W1,i}}{dz^4} W_1 dz - \left(\frac{d^2 \tilde{\psi}_{W1,i}}{dz^2} \frac{dW_1}{dz} - W_1 \frac{d^3 \tilde{\psi}_{W1,i}}{dz^3} \right)_{z=d_m} - \left(\tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d^3 W_1}{dz^3} - \frac{d^2 W_1}{dz^2} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right)_{z=d_m}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

De même, le théorème de Green et les conditions limites sont appliqués au deuxième terme de l'équation (3.36) :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{d_m} \eta \tilde{\psi}_{W_2,i} \frac{d^4 W_2}{dz^4} dz \\
&= \int_0^{d_m} \eta \frac{d^4 \tilde{\psi}_{W_2,i}}{dz^4} W_2 dz \\
&+ \left(\eta \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W_2,i}}{dz^2} \frac{dW_2}{dz} - \eta W_2 \frac{d^3 \tilde{\psi}_{W_2,i}}{dz^3} \right)_{z=d_m} + \left(\eta \tilde{\psi}_{W_2,i} \frac{d^3 W_2}{dz^3} - \eta \frac{d^2 W_2}{dz^2} \frac{d\tilde{\psi}_{W_2,i}}{dz} \right)_{z=d_m}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

La même procédure pour les termes du deuxième ordre conduit à l'expression :

$$2\kappa^2 \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W_1,i} \frac{d^2 W_1}{dz^2} dz = 2\kappa^2 \int_{d_m}^1 \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W_1,i}}{dz^2} W_1 dz - 2\kappa^2 \left(\tilde{\psi}_{W_1,i} \frac{dW_1}{dz} - W_1 \frac{d\tilde{\psi}_{W_1,i}}{dz} \right)_{z=d_m} \tag{3.40}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left(2\eta\kappa^2 + \frac{1}{Da} \right) \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W_2,i} \frac{d^2 W_2}{dz^2} dz \\
&= \left(2\eta\kappa^2 + \frac{1}{Da} \right) \int_0^{d_m} \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W_2,i}}{dz^2} W_2 dz + \left(2\eta\kappa^2 + \frac{1}{Da} \right) \left(\tilde{\psi}_{W_2,i} \frac{dW_2}{dz} - W_2 \frac{d\tilde{\psi}_{W_2,i}}{dz} \right)_{z=d_m}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Si l'on substitue (3.38), (3.39), (3.40) et (3.41), dans l'équation (3.36), cette dernière prend la forme :

$$\begin{aligned}
& \int_{d_m}^1 \frac{d^4 \tilde{\psi}_{W_1,i}}{dz^4} W_1 dz + \int_0^{d_m} \eta \frac{d^4 \tilde{\psi}_{W_2,i}}{dz^4} W_2 dz \\
&= 2\kappa^2 \int_{d_m}^1 \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W_1,i}}{dz^2} W_1 dz + \left(2\eta\kappa^2 + \frac{1}{Da} \right) \int_0^{d_m} \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W_2,i}}{dz^2} W_2 dz \\
&- \kappa^4 \int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W_1,i} W_1 dz - \left(\eta\kappa^4 + \kappa^2 \frac{1}{Da} \right) \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W_2,i} W_2 dz \\
&+ \kappa^2 Gr_T \left(\int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W_1,i} \theta_1 dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W_2,i} \theta_2 dz \right) \\
&+ \kappa^2 Gr_S \left(\int_{d_m}^1 \tilde{\psi}_{W_1,i} \mathcal{S}_1 dz + \int_0^{d_m} \tilde{\psi}_{W_2,i} \mathcal{S}_2 dz \right) \\
&+ \left\{ \tilde{\psi}_{W_1,i} \frac{d^3 W_1}{dz^3} - \eta \tilde{\psi}_{W_2,i} \frac{d^3 W_2}{dz^3} - 2\kappa^2 \left(\tilde{\psi}_{W_1,i} \frac{dW_1}{dz} - W_1 \frac{d\tilde{\psi}_{W_1,i}}{dz} \right) \right. \\
&\left. + \left(2\eta\kappa^2 + \frac{1}{Da} \right) \left(\tilde{\psi}_{W_2,i} \frac{dW_2}{dz} - W_2 \frac{d\tilde{\psi}_{W_2,i}}{dz} \right) \right\}_{z=d_m}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

En substituant la condition limite de troisième ordre du problème original, le terme à l'interface devient :

$$\left\{ (\kappa^2 - \eta \kappa^2) \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{dW_1}{dz} + \left(2\kappa^2 - 2\eta \kappa^2 - \frac{1}{Da} \right) W_1 \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right\}_{z=dm} \quad (3.43)$$

Enfin, l'utilisation des formules d'inversion, du problème auxiliaire et de la propriété d'orthogonalité mènent à l'équation du champ de vitesse transformé :

$$\begin{aligned} \mu_i^4 \bar{W}_i &= \sum_{j=1}^{N_W} \bar{W}_j \left(2\kappa^2 \mathcal{P}_{ij}^{(1)} + \left(2\eta \kappa^2 + \frac{1}{Da} \right) \mathcal{P}_{ij}^{(2)} - \kappa^4 \mathcal{Q}_{ij}^{(1)} - \left(\eta \kappa^4 + \kappa^2 \frac{1}{Da} \right) \mathcal{Q}_{ij}^{(2)} \right) \\ &+ \kappa^2 Gr_T \sum_{h=1}^{N_\theta} \bar{\theta}_h \left(\mathcal{G}_{hi}^{(1)} + \mathcal{G}_{hi}^{(2)} \right) + \kappa^2 Gr_S \sum_{k=1}^{N_S} \bar{S}_k \left(\mathcal{H}_{ki}^{(1)} + \mathcal{H}_{ki}^{(2)} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{N_W} \bar{W}_j \left\{ (\kappa^2 - \eta \kappa^2) \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,j}}{dz} + \left(2\kappa^2 - 2\eta \kappa^2 - \frac{1}{Da} \right) \tilde{\psi}_{W1,j} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right\}_{z=dm}, \quad i = 1, \dots, N_W \end{aligned} \quad (3.44)$$

où

$$\mathcal{P}_{ij}^{(R)} = \int_R \tilde{\psi}_{WR,j} \frac{d^2 \tilde{\psi}_{WR,i}}{dz^2} dz, \quad (3.45)$$

$$\mathcal{Q}_{ij}^{(R)} = \int_R \tilde{\psi}_{WR,i} \tilde{\psi}_{WR,j} dz, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{G}_{hi}^{(R)} = \int_R \tilde{\psi}_{\theta R,h} \tilde{\psi}_{WR,i} dz, \quad (3.47)$$

$$\mathcal{H}_{ki}^{(R)} = \int_R \tilde{\psi}_{SR,k} \tilde{\psi}_{WR,i} dz, \quad (3.48)$$

et $R=1,2$. Les coefficients $\mathcal{C}_{ni}^{(R)}$, $\mathcal{M}_{nh}^{(R)}$, $\mathcal{E}_{ij}^{(R)}$, $\mathcal{N}_{ij}^{(R)}$, $\mathcal{P}_{ij}^{(R)}$, $\mathcal{Q}_{ij}^{(R)}$, $\mathcal{G}_{ij}^{(R)}$, et $\mathcal{H}_{hi}^{(R)}$ sont intégrés analytiquement en utilisant le logiciel Mathematica.

3.1.3 Systèmes matriciels

SYSTÈME THERMIQUE

Sous forme matricielle, le système thermique des équations (3.32) et (3.44) s'écrit :

$$(A_{2\Omega} - Gr_T B_{2\Omega}) \vec{\xi} = 0 \quad (3.49)$$

où Gr_T est la valeur propre, et $\vec{\xi} = \{\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_{N_W}, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{N_\theta}\}$ représente le vecteur solution. Les matrices $A_{2\Omega}$ et $B_{2\Omega}$ sont définies par :

$$A_{2\Omega} = \begin{pmatrix} \mu_i^4 \delta_{ij} - 2\kappa^2 \mathcal{P}_{ij}^{(1)} - (2\eta\kappa^2 + 1/Da) \mathcal{P}_{ij}^{(2)} \\ + \kappa^4 \mathcal{Q}_{ij}^{(1)} + (\eta\kappa^4 + \kappa^2 1/Da) \mathcal{Q}_{ij}^{(2)} \\ \left\{ (\kappa^2 - \eta\kappa^2) \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,j}}{dz} \right. \\ \left. + \left(2\kappa^2 - 2\eta\kappa^2 - \frac{1}{Da} \right) \tilde{\psi}_{W1,j} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right\}_{z=dm} & 0 \\ \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_T} \varepsilon_T \left(Pr_f \mathcal{C}_{nj}^{(1)} + Pr_m \mathcal{C}_{nj}^{(2)} \right) & \beta_n^2 \delta_{nh} + \kappa^2 \left(\varepsilon_T \mathcal{M}_{nh}^{(1)} + \mathcal{M}_{nh}^{(2)} \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B_{2\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^2 \left(\mathcal{G}_{hi}^{(1)} + \mathcal{G}_{hi}^{(2)} \right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A_{2\Omega}$ et $B_{2\Omega}$ sont des matrices carrées de $(N_W + N_\theta)$ lignes et colonnes.

SYSTÈME THERMOSOLUTAL

Sous forme matricielle, le système thermosolutal des équations (3.32), (3.34) et (3.44) s'écrit :

$$(A_{2\Omega}^S - Gr_S B_{2\Omega}^S) \vec{\xi} = 0 \quad (3.50)$$

où Gr_S est maintenant la valeur propre, et $\vec{\xi} = \{\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_{N_W}, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{N_\theta}, \bar{S}_1, \dots, \bar{S}_{N_S}\}$ est le vecteur solution. Les matrices $A_{2\Omega}^S$ et $B_{2\Omega}^S$ sont définies par :

$$A_{2\Omega}^S = \begin{pmatrix} \mu_i^4 \delta_{ij} - 2\kappa^2 \mathcal{P}_{ij}^{(1)} - (2\eta\kappa^2 + 1/Da) \mathcal{P}_{ij}^{(2)} \\ + \kappa^4 \mathcal{Q}_{ij}^{(1)} + (\eta\kappa^4 + \kappa^2 1/Da) \mathcal{Q}_{ij}^{(2)} \\ \left\{ (\kappa^2 - \eta\kappa^2) \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,j}}{dz} \right. \\ \left. + \left(2\kappa^2 - 2\eta\kappa^2 - \frac{1}{Da} \right) \tilde{\psi}_{W1,j} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right\}_{z=dm} \\ \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_T} \varepsilon_T \left(Pr_f \mathcal{C}_{nj}^{(1)} + Pr_m \mathcal{C}_{nj}^{(2)} \right) \\ \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + \varepsilon_S} \varepsilon_S \left(Sc_f \mathcal{E}_{kj}^{(1)} + Sc_m \mathcal{E}_{kj}^{(2)} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\kappa^2 Gr_T \left(\mathcal{G}_{hi}^{(1)} + \mathcal{G}_{hi}^{(2)} \right) \\ \beta_n^2 \delta_{nh} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_k^2 \delta_{kl} \\ + \kappa^2 \left(\varepsilon_S \mathcal{N}_{kl}^{(1)} + \mathcal{N}_{kl}^{(2)} \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B_{2\Omega}^S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa^2 \left(\mathcal{H}_{li}^{(1)} + \mathcal{H}_{li}^{(2)} \right) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A_{2\Omega}^S$ et $B_{2\Omega}^S$ sont des matrices carrées de $(N_W + N_\theta + N_S)$ lignes et colonnes.

3.2 La méthode GITT appliquée au modèle à un domaine

Le système d'équations homogènes (2.132)-(2.134) constituent, avec les conditions limites (2.135), le problème aux valeurs propres du modèle 1Ω , dont la solution obtenue à l'aide de la méthode GITT est présentée dans cette section.

3.2.1 Développement en fonctions propres

En suivant les mêmes étapes que précédemment, on choisit les problèmes aux valeurs propres auxiliaires pour les champs de température, concentration et vitesse. Puis les paires transformation sont introduites.

A) Problème auxiliaire associé au champ de température

Le problème auxiliaire pour le champ de température s'écrit :

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_{\theta,h}(z)}{dz^2} + \beta_h^2 \tilde{\psi}_{\theta,h}(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (3.51)$$

avec

$$\tilde{\psi}_{\theta,h}(0) = \tilde{\psi}_{\theta,h}(1) = 0. \quad (3.52)$$

Les fonctions propres normalisées associés à ce problème sont (Ozisik, 1993) :

$$\tilde{\psi}_{\theta,h}(z) = \sqrt{2} \sin(\beta_h z), \quad \beta_h = h\pi, \quad h = 1, 2, \dots \quad (3.53)$$

Les fonctions propres $\tilde{\psi}_{\theta,h}(z)$ satisfont la propriété d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_{\theta,h}(z) \tilde{\psi}_{\theta,n}(z) dz = \delta_{hn}, \quad (3.54)$$

où δ_{hn} est la fonction de Kronecker.

Le problème aux valeurs propres (3.51)-(3.53) est du type de Sturm-Liouville et permet la définition de la paire transformée-inverse suivante :

$$\bar{\theta}_h = \int_0^1 \tilde{\psi}_{\theta,h}(z) \theta(z) dz \quad (\text{transformée}) \quad (3.55)$$

$$\theta(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{\theta,h}(z) \bar{\theta}_h \quad (\text{inverse}) \quad (3.56)$$

B) Problème auxiliaire associé au champ de concentration

Le problème auxiliaire choisi pour le champ de concentration est similaire à celui choisi pour le champ de température :

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_{S,k}(z)}{dz^2} + \lambda_k^2 \tilde{\psi}_{S,k}(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (3.57)$$

où

$$\tilde{\psi}_{S,k}(0) = \tilde{\psi}_{S,k}(1) = 0 \quad (3.58)$$

Ce problème a par solution (Ozisik, 1993) :

$$\tilde{\psi}_{S,k}(z) = \sqrt{2} \sin(\lambda_k z), \quad \lambda_k = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.59)$$

Les fonctions $\tilde{\psi}_{S,k}(z)$ sont, également, orthogonales :

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_{S,h}(z) \tilde{\psi}_{S,l}(z) dz = \delta_{kl}, \quad (3.60)$$

La paire transformée-inverse est définie par :

$$\bar{\mathcal{S}}_k = \int_0^1 \tilde{\psi}_{S,k}(z) \mathcal{S}(z) dz \quad (\text{transformée}) \quad (3.61)$$

$$\mathcal{S}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{S,k}(z) \bar{\mathcal{S}}_k \quad (\text{inverse}) \quad (3.62)$$

C) Problème auxiliaire associé au champ de vitesse

Selon Mikhailov & Cotta (1994), le problème auxiliaire choisi pour le champ de vitesse est :

$$\frac{d^4 \tilde{\psi}_{W,i}(z)}{dz^4} - \mu_i^4 \tilde{\psi}_{W,i}(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (3.63)$$

$$\tilde{\psi}_{W,i}(0) = \frac{d\tilde{\psi}_{W,i}}{dz} \Big|_{z=0} = \tilde{\psi}_{W,i}(1) = \frac{d\tilde{\psi}_{W,i}}{dz} \Big|_{z=1} = 0 \quad (3.64)$$

Ce problème a pour solution générale :

$$\tilde{\psi}_{W,i}(z) = C_1 \cosh(\mu_i z) + C_2 \sinh(\mu_i z) + C_3 \cos(\mu_i z) + C_4 \sin(\mu_i z). \quad (3.65)$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient l'équation transcendantale $\cosh(\mu_i) \cos(\mu_i) = 1$, qui permet d'obtenir les valeurs propres μ_i , nécessaires à la solution du problème auxiliaire. Ces valeurs propres ont été obtenues numériquement avec le logiciel Mathematica.

Comme dans les problèmes précédents, le problème auxiliaire du champ de vitesse a été choisi de façon à respecter la propriété d'orthogonalité des fonctions propres, c'est-à-dire :

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_{W,i}(z) \tilde{\psi}_{W,j}(z) dz = \delta_{ij} N_i. \quad (3.66)$$

avec norme associée :

$$N_i = \int_0^1 \tilde{\psi}_{W,i}^2(z) dz. \quad (3.67)$$

Ainsi, on définit la paire de transformation pour le problème de la vitesse :

$$\bar{W}_i = \int_0^1 \tilde{\psi}_{W,i}(z) W(z) dz \quad (\text{transformée}) \quad (3.68)$$

$$W(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{W,i}(z) \bar{W}_i \quad (\text{inverse}) \quad (3.69)$$

3.2.2 Transformation intégrale

On applique $\int_0^1 \tilde{\psi}_{\theta,h}(z) dz$ dans l'équation (2.133) et on utilise le théorème de Green, les conditions aux limites, les formules d'inversion et la propriété d'orthogonalité, pour obtenir :

$$-\beta_n^2 \bar{\theta}_n - \kappa^2 \bar{\theta}_n + \sum_{h=1}^{N_\theta} \mathcal{L}_{hn} \bar{\theta}_h - Pr_f \sum_{j=1}^{N_W} \mathcal{C}_{jn} \bar{W}_j = 0, \quad n = 1, \dots, N_\theta \quad (3.70)$$

où

$$\mathcal{L}_{hn} = \int_0^1 \frac{1}{\alpha_T} \frac{d\alpha_T}{dz} \frac{d\tilde{\psi}_{\theta,h}(z)}{dz} \tilde{\psi}_{\theta,n}(z) dz, \quad (3.71)$$

$$\mathcal{C}_{jn} = \int_0^1 \frac{\alpha_{Tf}}{\alpha_T} \tilde{\psi}_{W,j}(z) \tilde{\psi}_{\theta,n}(z) dz. \quad (3.72)$$

En suivant une procédure identique à celle du problème de la température, l'équation transformée du champ de concentration s'écrit :

$$-\lambda_k^2 \bar{\mathcal{S}}_k - \kappa^2 \bar{\mathcal{S}}_k + \sum_{l=1}^{N_S} \mathcal{D}_{lk} \bar{\mathcal{S}}_l - Sc \sum_{j=1}^{N_W} \mathcal{E}_{jk} \bar{W}_j = 0, \quad k = 1, \dots, N_S \quad (3.73)$$

où

$$\mathcal{D}_{lk} = \int_0^1 \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dz} \frac{d\tilde{\psi}_{S,l}(z)}{dz} \tilde{\psi}_{S,k}(z) dz, \quad (3.74)$$

$$\mathcal{E}_{jk} = \int_0^1 \frac{1}{\phi} \tilde{\psi}_{W,j}(z) \tilde{\psi}_{S,k}(z) dz. \quad (3.75)$$

Enfin, on applique $\int_0^1 \tilde{\psi}_{W,i}(z) dz$ dans l'équation (2.132), et l'utilisation des conditions aux limites, de la propriété d'orthogonalité et des formules d'inversion, conduit à l'équation transformé du champ de vitesse :

$$\begin{aligned}
 - \sum_{j=1}^{N_W} \mathcal{J}_{ji} \bar{W}_j + \eta (\mu_i^4 + \kappa^4) \bar{W}_i - \kappa^2 \sum_{j=1}^{N_W} \mathcal{F}_{ji} \bar{W}_j - \kappa^2 Gr_T \sum_{h=1}^{N_\theta} \mathcal{G}_{hi} \bar{\theta}_h \\
 - \kappa^2 Gr_S \sum_{l=1}^{N_S} \mathcal{H}_{li} \bar{S}_l = 0, \quad i = 1, \dots, N_W
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

où

$$\mathcal{J}_{ji} = \int_0^1 \left(\frac{1}{Da} \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W,j}(z)}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{Da} \right) \frac{d \tilde{\psi}_{W,j}(z)}{dz} \right) \tilde{\psi}_{W,i}(z) dz, \tag{3.77}$$

$$\mathcal{F}_{ji} = \int_0^1 \left(2\eta \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W,j}(z)}{dz^2} - \frac{1}{Da} \tilde{\psi}_{W,j}(z) \right) \tilde{\psi}_{W,i}(z) dz, \tag{3.78}$$

$$\mathcal{G}_{hi} = \int_0^1 \tilde{\psi}_{\theta,h}(z) \tilde{\psi}_{W,i}(z) dz, \tag{3.79}$$

$$\mathcal{H}_{li} = \int_0^1 \tilde{\psi}_{S,l}(z) \tilde{\psi}_{W,i}(z) dz. \tag{3.80}$$

Les coefficients \mathcal{L}_{hn} , \mathcal{C}_{jn} , \mathcal{D}_{hn} , \mathcal{E}_{jn} , \mathcal{J}_{ji} , \mathcal{F}_{ji} , \mathcal{G}_{hi} , et \mathcal{H}_{li} sont intégrés analytiquement avec Mathematica.

3.2.3 Systèmes matriciels

SYSTÈME THERMIQUE

Le système thermique des équations (4.35) et (4.30) s'écrit :

$$(A_{1\Omega} - Gr_T B_{1\Omega}) \vec{\xi} = 0 \tag{3.81}$$

où Gr_T est la valeur propre et $\vec{\xi} = \{\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_{N_W}, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{N_\theta}\}$ est le vecteur solution. Les matrices $A_{1\Omega}$ et $B_{1\Omega}$ sont définies par :

$$A_{1\Omega} = \begin{pmatrix} -\mathcal{J}_{ji} - \kappa^2 \mathcal{F}_{ji} + \eta(\mu_i^4 + \kappa^4) \delta_{ij} & 0 \\ -Pr_f \mathcal{C}_{jn} & \mathcal{L}_{hn} - \beta_n^2 \delta_{hn} - \kappa^2 \delta_{hn} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B_{1\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^2 \mathcal{G}_{hi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $A_{1\Omega}$ et $B_{1\Omega}$ sont carrées et ont $(N_W + N_\theta)$ lignes et colonnes.

SYSTÈME THERMOSOLUTAL

Sous forme matricielle, le système thermosolutal des équations (4.35), (4.38) et (4.30) devient :

$$(A_{1\Omega}^S - Gr_S B_{1\Omega}^S) \vec{\xi} = 0 \quad (3.82)$$

où Gr_S est la valeur propre et $\vec{\xi} = \{\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_{N_W}, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{N_\theta}, \bar{\mathcal{S}}_1, \dots, \bar{\mathcal{S}}_{N_S}\}$ est le vecteur solution. Les matrices matrices $A_{1\Omega}^S$ et $B_{1\Omega}^S$ sont définies par :

$$A_{1\Omega}^S = \begin{pmatrix} -\mathcal{J}_{ji} - \kappa^2 \mathcal{F}_{ji} + \eta(\mu_i^4 + \kappa^4) \delta_{ij} & -\kappa^2 Gr_T G_{hi} & 0 \\ -Pr_f \mathcal{C}_{jn} & \mathcal{L}_{hn} - \beta_n^2 \delta_{hn} - \kappa^2 \delta_{hn} & 0 \\ -Sc \mathcal{E}_{j,k} & 0 & \mathcal{D}_{l,k} - \lambda_k^2 \delta_{lk} - \kappa^2 \delta_{lk} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B_{1\Omega}^S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa^2 \mathcal{H}_{li} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, les matrices $A_{1\Omega}^S$ et $B_{1\Omega}^S$ ont $(N_W + N_\theta + N_S)$ lignes et colonnes.

3.3 Remarques

Il est important de remarquer que les coefficients du modèle 1Ω sont simplifiées en admettant l'hypothèse de propriétés constantes dans l'espace, i.e. :

$$\frac{d\alpha_T}{dz} = \frac{d\phi}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{Da} \right) = 0$$

Cette hypothèse a été prise en compte dans le développement du modèle $2\Omega_{DB}$. Néanmoins, en comparant les matrices $A_{2\Omega}$ et $B_{2\Omega}$ avec $A_{1\Omega}$ et $B_{1\Omega}$, on peut observer que le modèle 1Ω présente une transformation intégrale complète, sans la génération de termes non-transformables (termes en $z = d_m$ dans la matrice $A_{2\Omega}$). Par conséquent, le système final est beaucoup plus simple, et donc, plus facile à traiter du point de vue numérique. La présence des termes non-transformables peut, dans certains cas, diminuer la taux de convergence de la solution.

Chapitre 4

Résultats Numériques

Les résultats présentés dans ce chapitre sont organisés en deux parties principales. Premièrement, les différents modèles mathématiques sont comparés pour la convection naturelle d'origine purement thermique. On montre que la formulation classique du modèle à un domaine (présentée dans la section 2.3) ne permet pas de satisfaire les conditions interfaciales appropriées lorsque la transition entre le fluide et le milieu poreux est décrite par une discontinuité des propriétés. En effet, la formulation doit être modifiée en effectuant les différentiations des fonctions discontinues au sens des distributions. Ainsi, les modèles à un et deux domaines conduisent aux mêmes seuils de stabilité. Par la suite, l'influence des différents paramètres caractéristiques sur la stabilité du système thermique en utilisant le modèle à deux domaines avec la formulation de Brinkman ($2\Omega_{DB}$). La condition de continuité des contraintes tangentielles est ensuite remplacée par la condition de saut proposée par Ochoa-Tapia & Whitaker (1995a). Les courbes de stabilité marginale obtenues avec plusieurs valeurs du coefficient de saut β sont analysées. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la convection naturelle thermosolutale. La stabilité du système thermosolutal est étudiée en utilisant également le modèle $2\Omega_{DB}$, et l'influence des principaux paramètres caractéristiques est discutée.

4.1 Convection naturelle thermique

Dans cette section, on compare les résultats de l'analyse de stabilité obtenus avec les différents modèles, à savoir : le modèle à un domaine (1Ω) ; le modèle à deux domaines avec la formulation de Darcy ($2\Omega_D$), pour différentes valeurs du coefficient de glissement α (Carr & Straughan,

2003); et le modèle à deux domaines utilisant la formulation de Darcy-Brinkman ($2\Omega_{DB}$) présenté dans la section 2.2. Pour l'ensemble des résultats présentés, le milieu poreux a été supposé isotrope et homogène. Afin de comparer les résultats obtenus à ceux existant dans la littérature, nous avons fixé les paramètres $Pr_f = 10$ et $\phi = 0.39$, et les courbes de stabilité marginale sont présentées en terme de Ra_T . Par ailleurs, il a été observé que les variations du nombre de Prandtl ont peu d'influence sur la stabilité du système.

4.1.1 Analyse de convergence

On réalise d'abord une analyse de convergence afin de fixer l'ordre de troncature du développement en fonctions propres proposé pour les modèles présentés. Les courbes de stabilité marginale obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$, pour différentes valeurs de l'ordre de troncature $N = N_\theta = N_W$, sont présentées dans la figure (4.1). Les paramètres \hat{d} , Da , et ε_T sont respectivement fixés à 0.10, 10^{-5} et 0.7. On peut observer que l'ordre de troncature nécessaire pour l'obtention d'une solution convergée est sensiblement plus petit pour des faibles valeurs du nombre d'onde κ . Avec $N = 10$, on peut identifier le premier minimum des courbes de stabilité. Cependant, un ordre de troncature supérieur est nécessaire pour obtenir le deuxième minimum, et pour mettre en évidence la nature bimodale de la courbe. Dans tous les cas étudiés, le système a été considéré comme convergé sur ± 1 dans le troisième digit significatif du nombre de Rayleigh pour $N = 100$. Il a été également vérifié que la convergence est sensible aux valeurs adoptées pour les paramètres ε_T , \hat{d} et Da . Par exemple, un meilleur taux de convergence est obtenu quand ε_T est proche de l'unité, ou lorsque la courbe présente un seul minimum (cas de la couche complètement poreuse : $\hat{d} \rightarrow 0$) ou encore pour les grandes valeurs du nombre de Darcy ($Da \geq 10^{-4}$). La même procédure a été réalisée pour analyser la convergence des courbes de stabilité marginale du modèle 1Ω . Il a été vérifié que tous les résultats obtenus à l'aide des modèles 1Ω et $2\Omega_{DB}$ sont convergés à $N = 100$. Par conséquent, l'ensemble des calculs présentés dans cette première partie ont été réalisés pour cette valeur de N , correspondant à des systèmes matriciels de taille $2N \times 2N$.

4.1.2 Validation de la méthode

Afin de valider la méthode d'analyse et les codes numériques, nous avons comparé les résultats obtenus avec les solutions analytiques des cas limites du problème de Rayleigh-Bénard : le cas

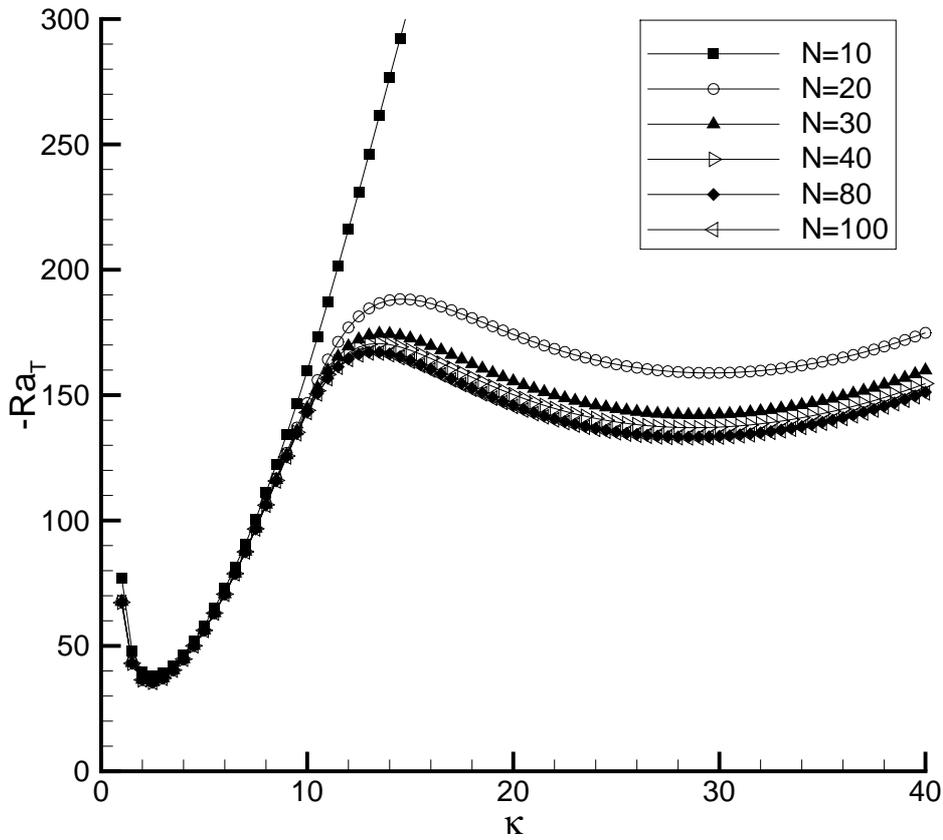


FIG. 4.1 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$. Influence de l'ordre de troncature N , et $\hat{d} = 0.10$, $Da = 10^{-5}$, $\varepsilon_T = 0.7$.

	solution exacte		modèle 1Ω		modèle $2\Omega_{DB}$	
	$-Ra_{Tcr}$	κ_{cr}	$-Ra_{Tcr}$	κ_{cr}	$-Ra_{Tcr}$	κ_{cr}
couche fluide	1707.762 (Chandrasekhar, 1961)	3.117	1707.77	3.12	1707.77	3.12
couche poreuse	$4\pi^2 \approx 39.48$ (Lapwood, 1948)	$\pi \approx 3.14$	39.50	3.14	39.48	3.14

TAB. 4.1 – Validation des modèles : nombre de Rayleigh critique et nombre d'onde correspondant aux cas limites du problème de Rayleigh-Bénard.

de la cavité complètement fluide ($Da \rightarrow \infty$, $\phi = 1$) et celui de la cavité totalement poreuse ($Da = 10^{-5}$, $\widehat{d} \rightarrow 0$). Les résultats numériques des modèles 1Ω et $2\Omega_{DB}$, ainsi que les valeurs exactes, sont présentés dans la table 4.1. On constate un très bon accord entre nos résultats numériques et les solutions exactes des cas limites.

4.1.3 Comparaison des modèles

Bien que les paramètres caractéristiques obtenus lors de la mise sous forme adimensionnelle choisie soient le nombre de Grashof thermique Gr_T et le nombre de Darcy Da , les résultats sont présentés en terme de nombre de Rayleigh thermique Ra_T . Pour permettre la comparaison avec les travaux de Zhao & Chen (2001), de Chen & Chen (1988) et de Carr & Straughan (2003), les paramètres δ et ε_T sont respectivement fixés à 0.003 et 0.7. Le paramètre δ est une combinaison de Da et du rapport d'épaisseurs \widehat{d} :

$$\delta^2 = (1 + \widehat{d})^2 Da.$$

Dans une certaine gamme de paramètres, les courbes de stabilité présentent un comportement bimodal, montré dans les figures (4.2a) et (4.2b). Chaque minimum correspond à un mode de convection naturelle. Le minimum aux faibles nombres d'onde (perturbations de grandes longueurs d'onde) caractérise le "mode poreux", pour lequel le mouvement convectif est présent dans toute la cavité. En revanche, le minimum aux grandes nombres d'onde (correspondant à des perturbations de petites longueurs d'onde), ou "mode fluide", est caractérisé par des cellules convectives confinées dans la région fluide. Dans ce mode, la pénétration de l'écoulement est restreinte aux parties supérieures de la couche poreuse. Afin d'illustrer les deux modes de convection, les lignes de courant obtenues avec le modèle 1Ω (relatifs aux deux minima dans la figure (4.2a)) sont présentées dans les figures (4.3) et (4.4). Les lignes de courant obtenues à l'aide du modèle $2\Omega_{DB}$ sont présentées quant à elles sur les figures (4.5) et (4.6). En comparant les différentes figures, on observe que les lignes de courant obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$ ont tendance à se déformer au voisinage de l'interface, contrairement au comportement des lignes de courant du modèle 1Ω . Cela indique que le traitement de l'interface est probablement différent dans les deux modèles.

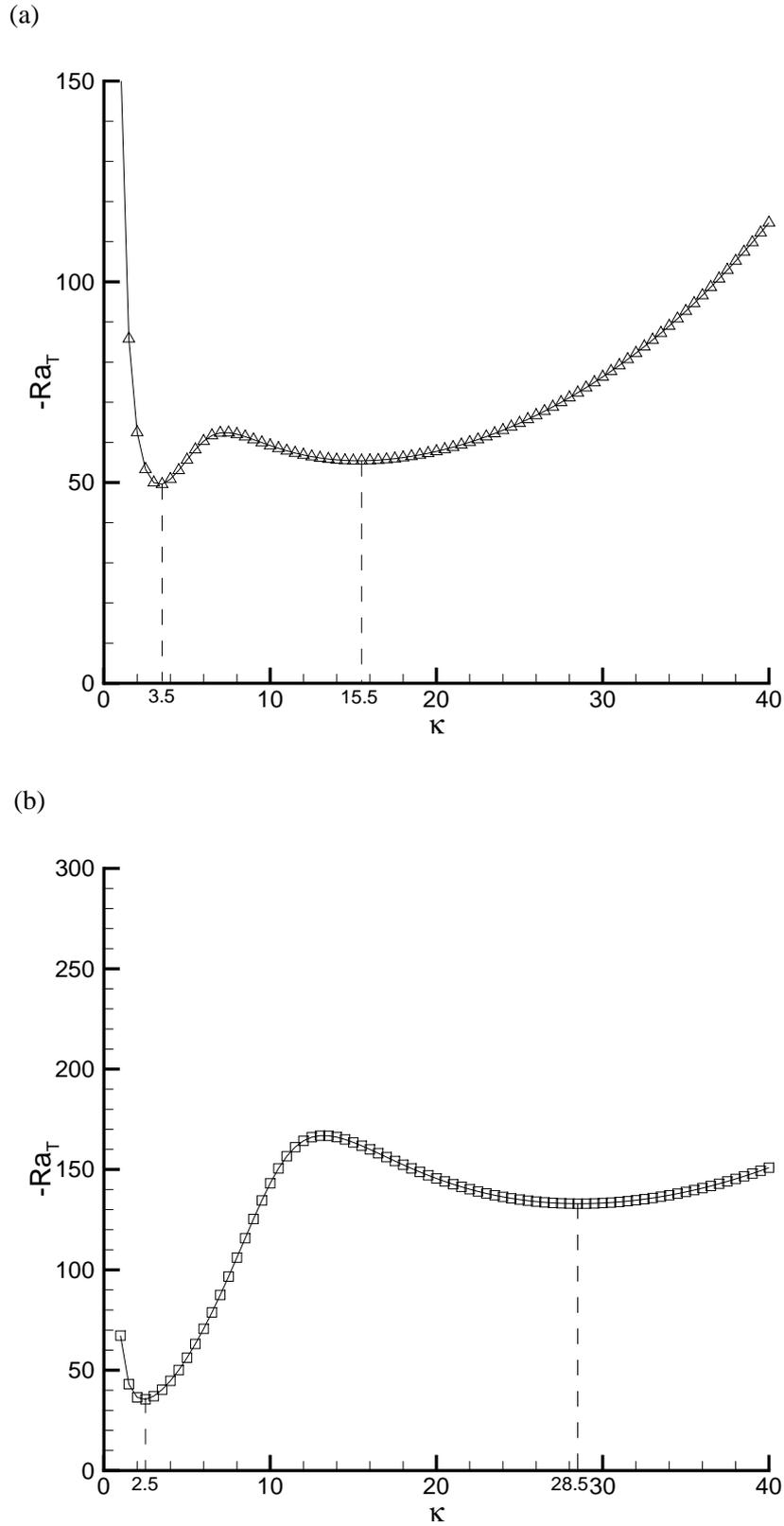


FIG. 4.2 – Nature bimodale des courbes de stabilité obtenues avec les modèles (a) 1Ω et (b) $2\Omega_{DB}$, pour $\hat{d} = 0.10$, $Da = 10^{-5}$, et $\varepsilon_T = 0.7$.

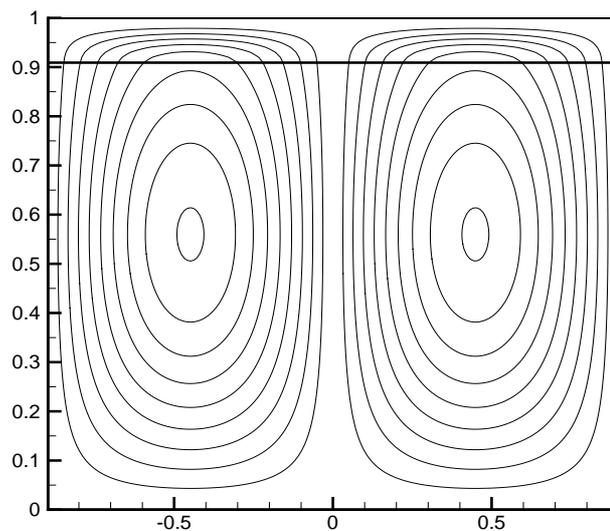


FIG. 4.3 – Lignes de courant relatives au premier minimum ($\kappa = 3.5$) de la figure 4.2(a), obtenues avec le modèle 1Ω ($\Psi_{max} = \pm 0.36$; $\Delta\Psi = 0.04$). La ligne horizontale épaisse représente l'interface fluide-poreux.

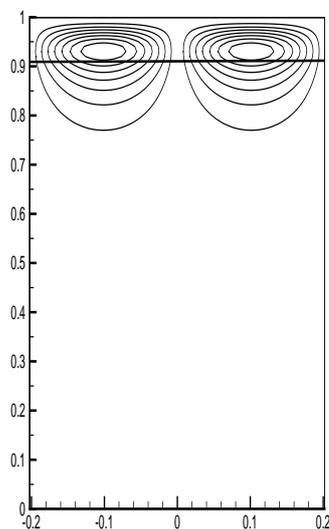


FIG. 4.4 – Lignes de courant relatives au deuxième minimum ($\kappa = 15.5$) de la figure 4.2(a), obtenues avec le modèle 1Ω ($\Psi_{max} = \pm 0.24$; $\Delta\Psi = 0.03$).

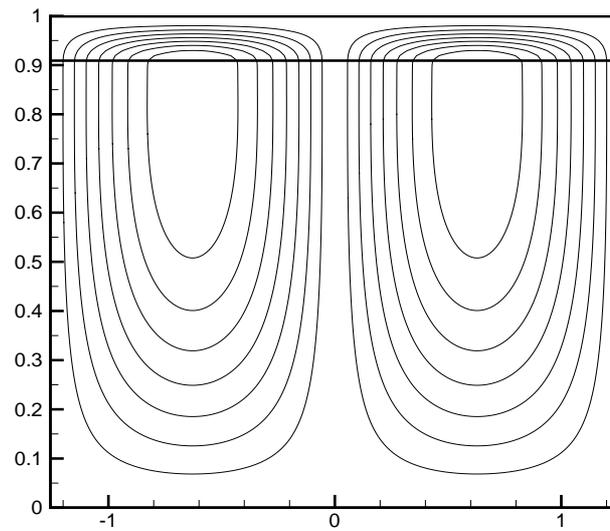


FIG. 4.5 – Lignes de courant relatives au premier minimum ($\kappa = 2.5$) de la figure 4.2(b), obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$ ($\Psi_{max} = \pm 0.43$; $\Delta\Psi = 0.06$).

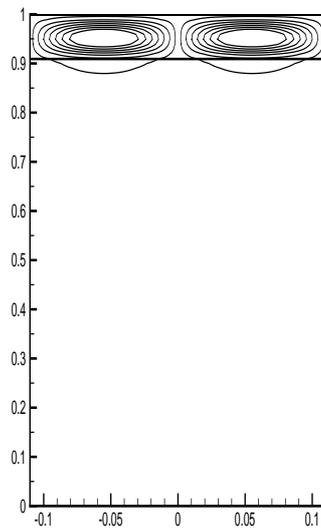


FIG. 4.6 – Lignes de courant relatives au deuxième minimum ($\kappa = 28.5$) de la figure 4.2(b), obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$ ($\Psi_{max} = \pm 0.13$; $\Delta\Psi = 0.01$).

Les figures (4.7)-(4.10) présentent une comparaison des courbes de stabilité marginale pour quatre valeurs du rapport d'épaisseurs ($\hat{d} = 0.08, 0.10; 0.12; 0.14$) et $\delta = 0.003$, obtenues avec les modèles 1Ω , $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$ (Carr & Straughan, 2003). Il a été vérifié que les résultats obtenus à l'aide du modèle 1Ω présentent un bon accord avec ceux de Zhao & Chen (2001) (voir Hirata *et al.*, 2006). Dans tous les cas étudiés, les courbes $2\Omega_{DB}$ se situent entre les courbes du modèle à deux domaines avec la formulation de Darcy ($2\Omega_D$), pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 4$. Par contre, les courbes 1Ω présentent un comportement assez éloigné, surtout dans la région des grands nombres d'onde. Ces résultats montrent que la prise en compte de la diffusion visqueuse dans le milieu poreux (terme de Brinkman, présent dans les modèles 1Ω et $2\Omega_{DB}$) ne joue pas un rôle fondamental dans la stabilité du système pour la gamme des nombres de Darcy considérée. Dans ces conditions, il semble que les désaccords proviennent principalement de la formulation mathématique utilisée pour les approches à un et deux domaines.

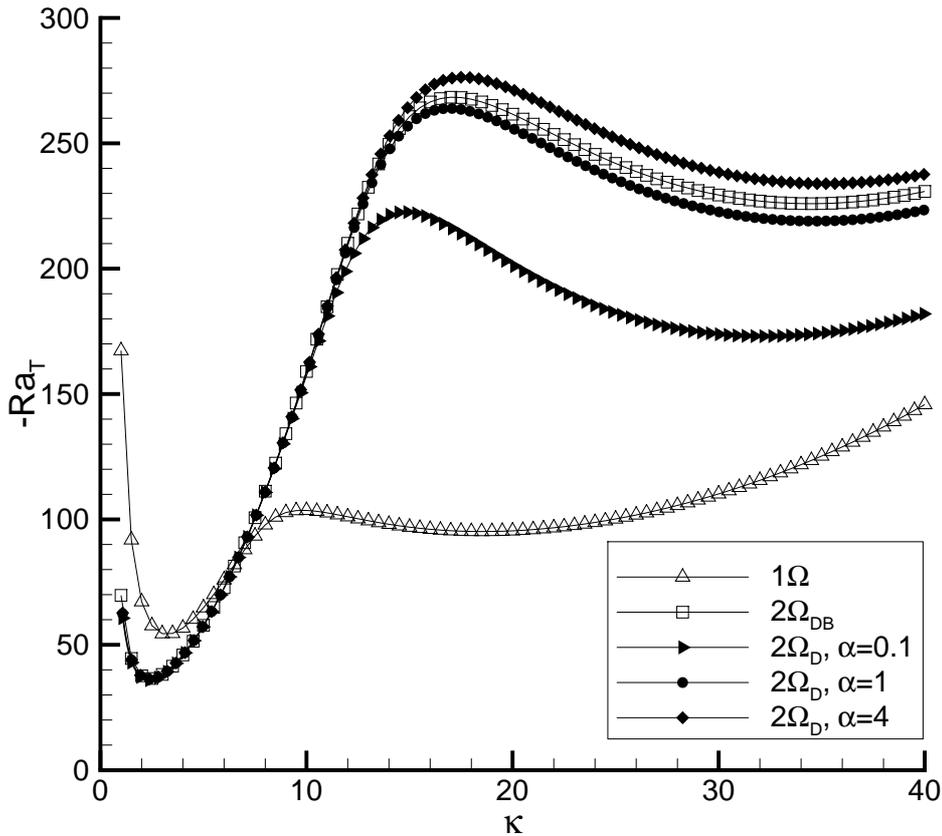


FIG. 4.7 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω , $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$, pour $\hat{d} = 0.08$ et $\delta = 0.003$ (ou $Da = 7.72 \cdot 10^{-6}$).

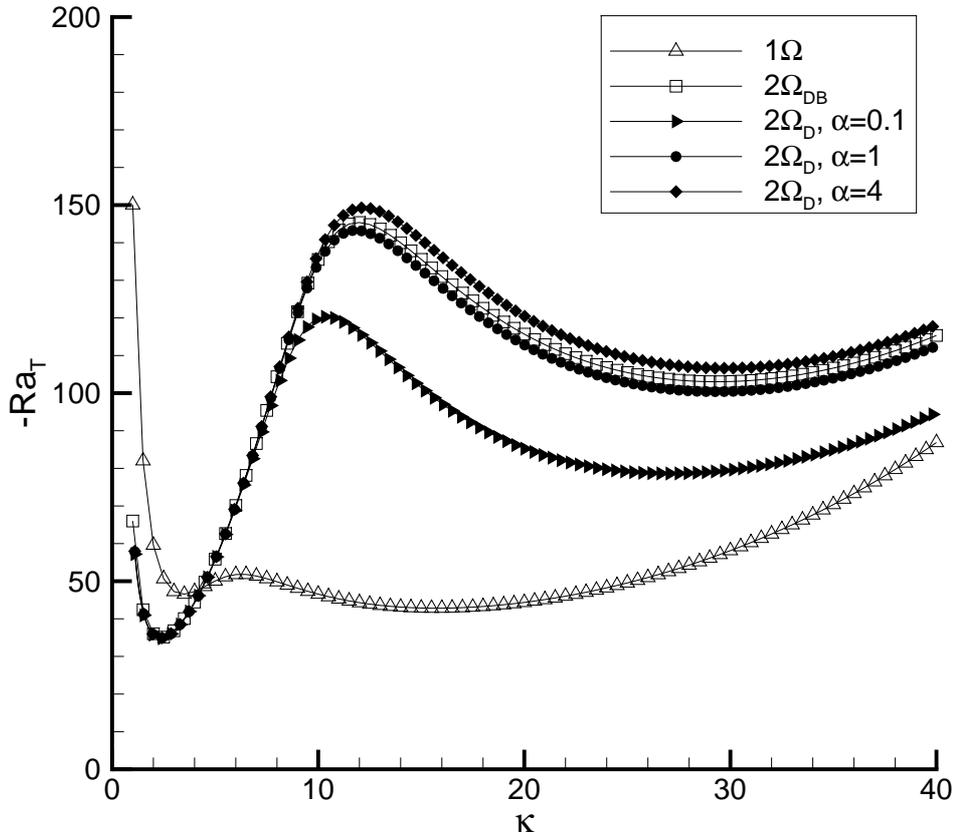


FIG. 4.8 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω , $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$, pour $\hat{d} = 0.10$ et $\delta = 0.003$ (ou $Da = 7.44 \cdot 10^{-6}$).

Les valeurs critiques correspondant aux deux minima des courbes présentées dans les figures (4.7) à (4.10) sont mises en évidence dans la table 4.2. Il est intéressant d'observer que, pour $\hat{d} = 0.08$ et $\hat{d} = 0.10$, le mode poreux est le plus instable dans tous les modèles. Pour $\hat{d} = 0.12$ (figure 4.9), le mode poreux est encore le plus critique dans les courbes $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$. Par contre, le modèle 1Ω conduit à un changement de mode critique, qui passe du mode poreux au mode fluide. Le saut dans les valeurs de κ_{cr} entre $\hat{d} = 0.10$ et $\hat{d} = 0.12$ observé pour le modèle 1Ω dans la table 4.2, correspond à ce changement de mode de convection. En effet, les courbes 1Ω pour $\hat{d} = 0.12$ et $\hat{d} = 0.14$ présentent un seul minimum, qui se trouve dans la région des grandes nombres d'onde. Pour les courbes $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$, le changement de mode se produit entre $\hat{d} = 0.12$ et $\hat{d} = 0.14$.

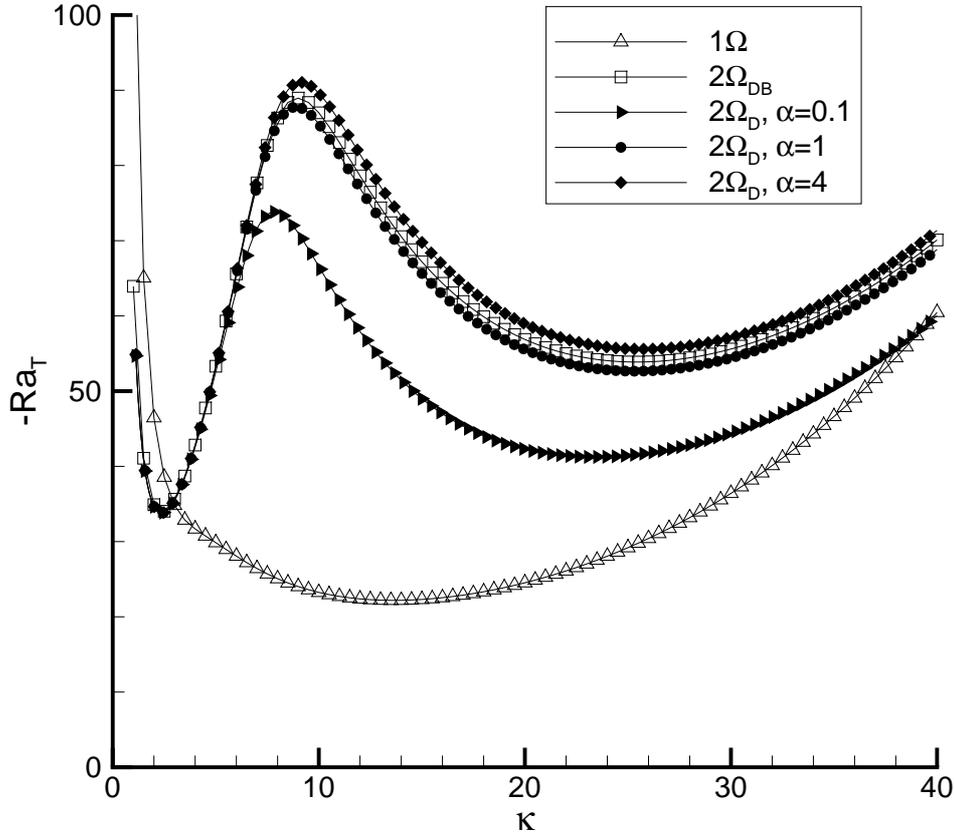


FIG. 4.9 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω , $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$, pour $\hat{d} = 0.12$ et $\delta = 0.003$ (ou $Da = 7.17 \cdot 10^{-6}$).

Modèle	$\hat{d} = 0.08$		$\hat{d} = 0.10$		$\hat{d} = 0.12$		$\hat{d} = 0.14$	
	κ_{cr}	$-Ra_{Tcr}$	κ_{cr}	$-Ra_{Tcr}$	κ_{cr}	$-Ra_{Tcr}$	κ_{cr}	$-Ra_{Tcr}$
1Ω	3.0	54.42	3.5	46.55	13.5	22.19	12.0	12.73
$2\Omega_{DB}$	2.5	36.55	2.5	35.15	2.5	34.03	22.0	31.09
$2\Omega_D, \alpha = 0.1$	2.4	35.91	2.3	34.81	2.4	33.82	20.5	23.96
$2\Omega_D, \alpha = 1$	2.4	36.30	2.4	34.91	2.4	33.81	22.5	30.45
$2\Omega_D, \alpha = 4$	2.4	36.37	2.4	34.93	2.4	33.91	22.5	31.96

TAB. 4.2 – Nombres de Rayleigh critiques et nombres d'onde correspondantes pour les courbes de stabilité présentés dans les figures (4.7), (4.8), et (4.9) et (4.10).

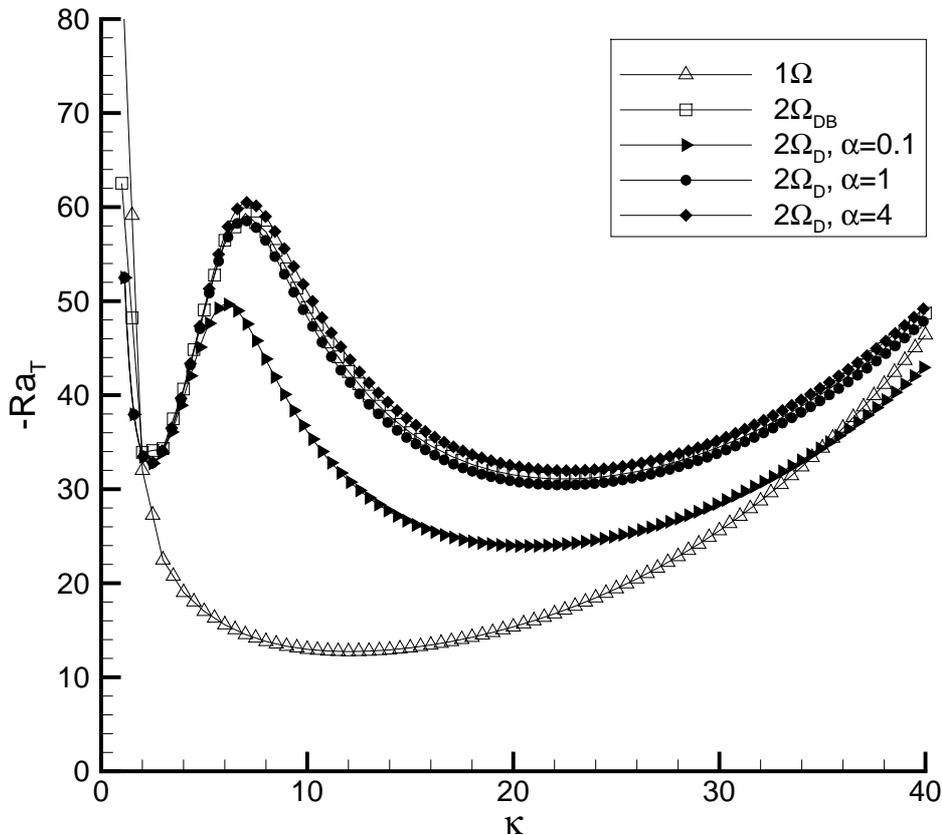


FIG. 4.10 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω , $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$, pour $\hat{d} = 0.14$ et $\delta = 0.003$ (ou $Da = 6.93 \cdot 10^{-6}$).

On constate que les résultats obtenus à l'aide du modèle $2\Omega_D$ dépendent de la valeur du coefficient de glissement α de la condition de Beavers & Joseph (1967), bien que, contrairement à Carr & Straughan (2003), Chen & Chen (1998) mentionnent que leur solution n'est pas sensible aux variations de α . En observant les figures (4.7)-(4.10) on remarque que cette affirmation n'est vrai qu'aux faibles valeurs du nombre d'onde κ , correspondant au premier minimum des courbes. Aux grandes valeurs de κ , les différences entre les courbes $2\Omega_D$ pour différents valeurs de α sont plus accentuées.

Le modèle $2\Omega_{DB}$ exige la spécification de la viscosité réduite, dont la détermination reste un sujet controversé. Néanmoins, aux faibles valeurs de la fraction solide ($1 - \phi$), la majorité des lois de viscosité réduite se comportent comme $\eta = 1/\phi$. Aux grandes valeurs de la fraction solide (ou faibles porosités), la correction de Brinkman joue un rôle négligeable. Avec cette hypothèse,

le modèle $2\Omega_{DB}$ conduit à une seule courbe de stabilité. Pour le premier minimum des courbes (4.7) à (4.10), tous les modèles à deux domaines prévoient les mêmes limites de stabilité. Ceci signifie que, quand le déclenchement du mouvement convectif se produit dans la couche poreuse, la condition interfaciale ne joue pas un rôle déterminant. Par contre, les modèles présentent des différences significatives dans la région du deuxième minimum correspondant au mode fluide. Par ailleurs, on observe que, pour tous les valeurs de \hat{d} étudiés, les courbes obtenues à l'aide du modèle $2\Omega_{DB}$ sont localisées entre les courbes obtenues pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 4$ avec le modèle $2\Omega_D$. Une explication possible pour ce fait vient de la valeur adoptée pour la viscosité réduite η . En effet, il a été montré que, pour des écoulements unidimensionnels, la solution analytique du modèle $2\Omega_{DB}$ est similaire à celle du modèle $2\Omega_D$ de Beavers & Joseph lorsque $\alpha = \sqrt{\eta}$ (Neale & Nader, 1974). Cela est consistant avec nos résultats puisque la porosité adoptée dans le milieu poreux ($\phi = 0.39$) est telle que $\sqrt{\eta} = \sqrt{1/\phi} \approx 1.6$, i.e., $1 < \sqrt{\eta} < 4$.

La figure (4.11) montre les courbes de stabilité obtenues avec les modèles 1Ω et $2\Omega_{DB}$ pour différentes valeurs du nombre de Darcy Da , et pour $\hat{d} = 0.08$. Un meilleur accord entre les courbes est observé pour les grandes valeurs de Da . Pour $Da \geq 10^{-4}$, les courbes de stabilité présentent seulement un minimum correspondant au mode de convection poreux. Pour $Da = 10^{-5}$, les courbes sont bimodales, et l'on constate une différence importante entre les courbes 1Ω et $2\Omega_{DB}$ dans la région correspondant au mode fluide (grandes nombres d'onde).

La différence essentielle du point de vue de la formulation mathématique des approches à un et deux domaines concerne le traitement de l'interface. Pour cette raison, il semble important d'analyser l'influence des conditions limites interfaciales utilisées dans le modèle $2\Omega_{DB}$. Tout d'abord, si on impose la condition de continuité des pressions au lieu de la continuité des contraintes normales, l'équation (2.91) devient :

$$-\frac{d^3W}{dz^3} + \kappa^2 \frac{dW}{dz} = \frac{1}{Da} \frac{dW_m}{dz} - \eta \left(\frac{d^3W_m}{dz^3} - \kappa^2 \frac{dW_m}{dz} \right) \quad (4.1)$$

L'équation (4.1) diffère de l'équation (2.91) d'un facteur 3 dans les termes qui multiplient κ^2 . Les courbes de stabilité obtenues avec les conditions de continuité de contraintes normales et continuité des pressions (équations (2.91) et (4.1)) sont représentées sur la figure (4.12). On constate que ces courbes sont superposées, ce qui indique que ces termes n'ont pas d'influence dans le comportement de la courbe de stabilité marginale et que les deux conditions interfaciales sont en réalité équivalentes.

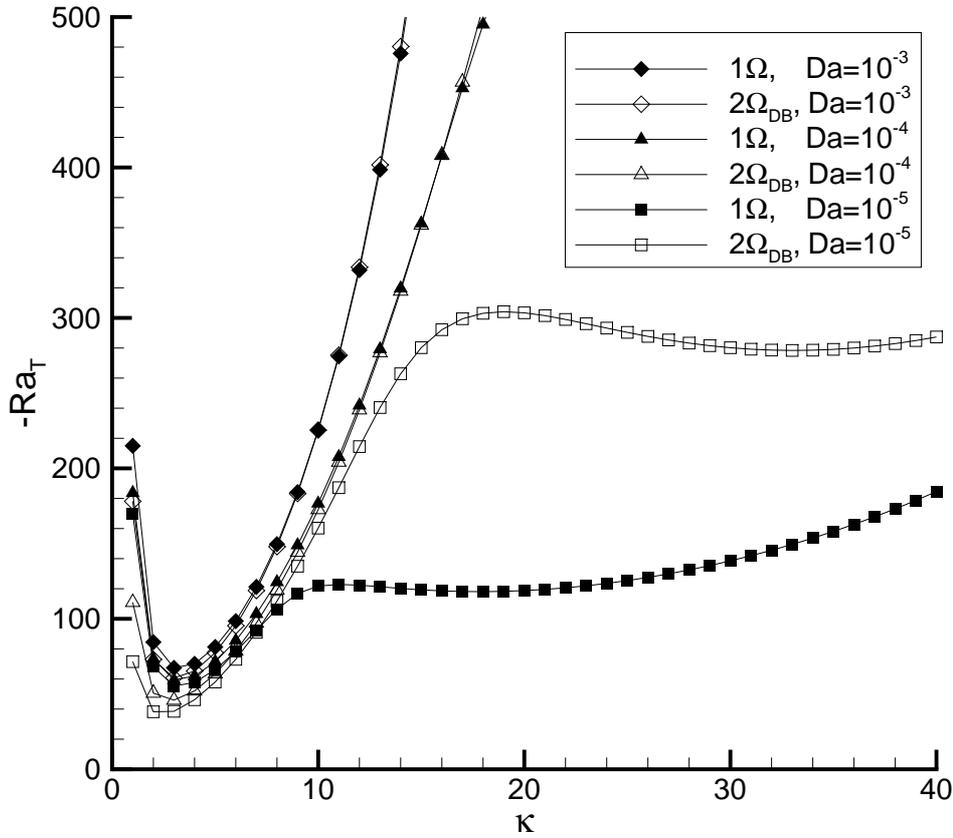


FIG. 4.11 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles 1Ω et $2\Omega_{DB}$, pour différentes valeurs du nombre de Darcy et $\hat{d} = 0.08$.

Compte tenu de l'importance du nombre de Darcy sur l'apparition de la convection naturelle, on se propose d'analyser à présent l'influence du terme $\frac{1}{Da} \frac{dW_m}{dz}$ de l'équation (2.91). Supposons par exemple que $1/Da = 0$ à l'interface, l'équation (2.91) s'écrit alors :

$$-\frac{d^3W}{dz^3} + 3\kappa^2 \frac{dW}{dz} = -\eta \left(\frac{d^3W_m}{dz^3} - 3\kappa^2 \frac{dW_m}{dz} \right) \quad (4.2)$$

La résolution est alors effectuée avec la condition (4.2) et la courbe de stabilité correspondante est également représentée sur la figure (4.12). On constate que l'absence du terme $\frac{1}{Da} \frac{dW_m}{dz}$ dans la condition limite change radicalement le comportement de la courbe, en la rapprochant très nettement de la courbe obtenue à l'aide du modèle 1Ω . Cette comparaison explique pourquoi les désaccords entre les modèles à un et deux domaines ne dépendent pas seulement de la valeur de Da , mais également du mode de convection. La comparaison des profils de vitesse des modes fluide et poreux du modèle $2\Omega_{DB}$, présentée sur la figure (4.13), permet de constater que le gradient de la vitesse verticale à l'interface est beaucoup plus important dans le mode fluide

que pour l'écoulement correspondant au mode poreux. Étant donné que le gradient de la vitesse multiplie le terme de $1/Da$ dans la condition de continuité des contraintes normales, les plus grandes différences entre les courbes de stabilité sont observées dans la région correspondant au mode de convection fluide. On peut conclure de cette analyse que le modèle 1Ω ne permet pas de satisfaire la condition de continuité des contraintes normales à l'interface.

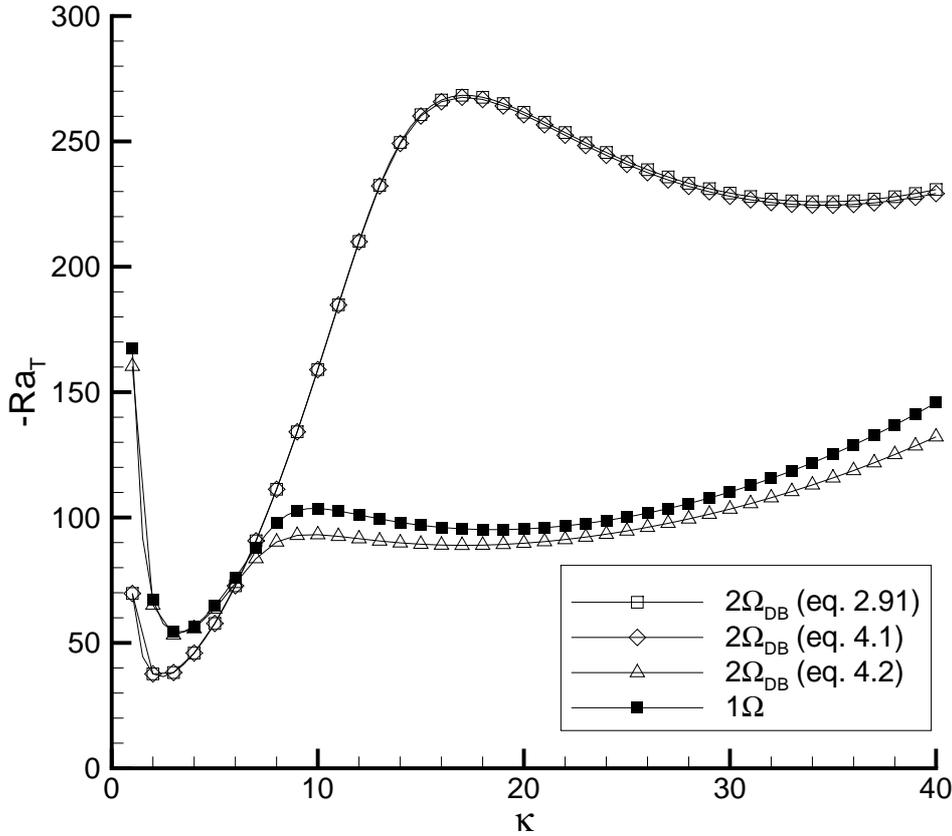


FIG. 4.12 – Comparaison entre la courbe 1Ω et les courbes obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$, et les différentes conditions interfaciales (continuité des contraintes normales - eq. (2.91); continuité des pressions - eq. (4.1); et en admettant que $1/Da = 0$ à l'interface - eq. (4.2)), pour $\hat{d} = 0.08$ et $\delta = 0.003$.

La discussion précédente permet également d'expliquer les raisons pour lesquelles certains auteurs (Goyeau *et al.*, 2003; Le Bars & Worster, 2006a) ont trouvé une équivalence entre les modèles à un et deux domaines en simulation directe. Goyeau *et al.* (2003) ont étudié le transport de la quantité de mouvement d'un système fluide-poreux, pour un écoulement

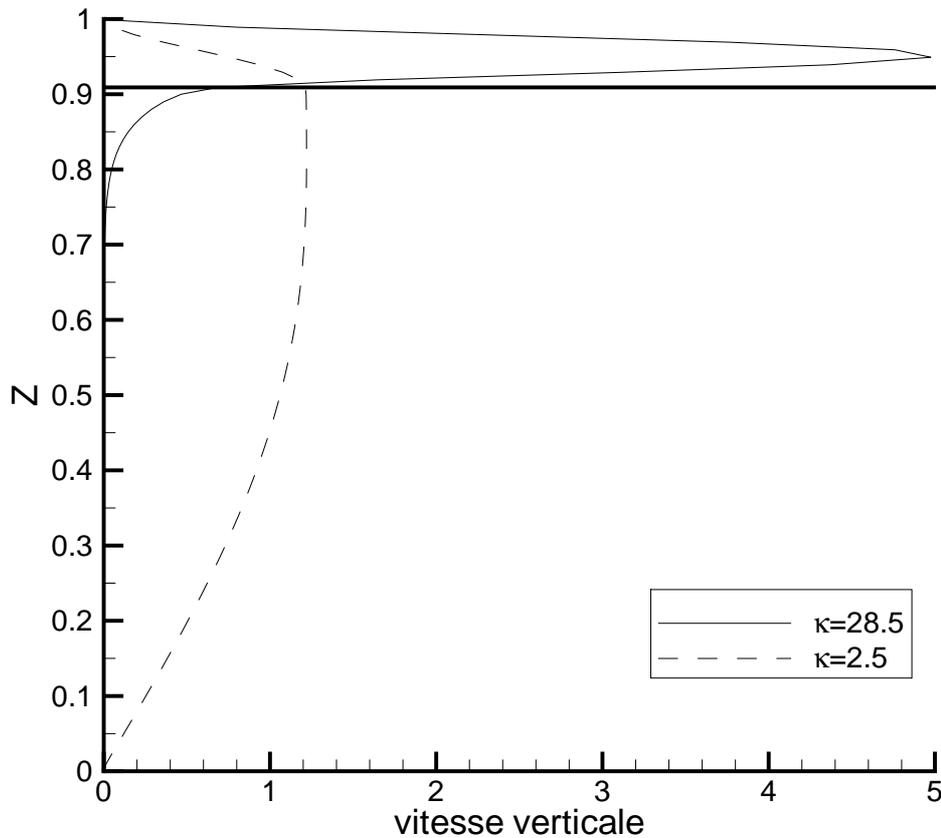


FIG. 4.13 – Profils de vitesse verticale des modes poreux ($\kappa = 2.5$) et fluide ($\kappa = 28.5$), correspondants aux figures (4.5) et (4.6), respectivement. Dans le mode poreux $(\partial w / \partial z)_{z=dm} = 1.16$, et dans le mode fluide $(\partial w / \partial z)_{z=dm} = 40.68$. La ligne horizontale épaisse représente l'interface fluide-poreux.

unidimensionnel où la condition de contrainte normale n'est pas utilisée. Le Bars & Woster (2006a) se sont intéressés au cas particulier d'un écoulement dans un coin. Continuité de vitesses, contraintes tangentielles et pressions ont été imposées à l'interface. Pourtant, il semble que dans cette configuration le gradient de la vitesse verticale à l'interface soit assez faible, ce qui expliquerait la concordance trouvée entre les résultats des modèles à un et deux domaines.

En ce qui concerne l'analyse de stabilité linéaire, il a été constaté que la formulation du modèle à un domaine présenté dans la section 2.3 ne permet pas de satisfaire la condition de continuité des contraintes normales à l'interface entre un fluide et un milieu poreux homogène.

4.1.4 Application de la théorie des distributions au modèle à un domaine

Comme montré dans la section précédente, les modèles à un et deux domaines peuvent conduire à des résultats sensiblement différents lorsque la transition entre le fluide et le milieu poreux est décrite par une discontinuité des propriétés physiques. Cela est dû au fait que les fonctions discontinues ne peuvent pas être différenciées dans le sens ordinaire. Les résultats présentés dans cette section montrent qu'en effectuant la dérivation au sens des distributions (Kataoka, 1986), le modèle à un domaine conduit aux mêmes seuils de stabilité que les modèles à deux domaines. Après l'introduction de quelques notions de la théorie des distributions, la formulation modifiée du modèle à un domaine est présentée.

Théorie des distributions

Soit f une fonction indéfiniment dérivable (au sens usuel de la théorie des fonctions) pour $x < 0$ et pour $x > 0$, telle que chacune de ces dérivées ait une limite à gauche et une limite à droite pour $x = 0$; on appellera Γ_m le saut de la dérivée m -ième en $x = 0$, c'est-à-dire la différence "limite à droite moins limite à gauche". Nous appellerons f' , f'' , ..., les dérivées de f prises au sens des distributions; et $\{f'\}$, $\{f''\}$, ..., les distributions représentées par les fonctions égales aux dérivées usuelles pour $x < 0$ et $x > 0$ et non définies pour $x = 0$. Par exemple, si $f = H$ (où H est la fonction échelon), $f' = \delta$ (où δ est la fonction de Dirac), et $\{f'\} = 0$. Comme montré par Schwartz (1965), on a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} f' &= \{f'\} + \Gamma_0 \delta \\ f'' &= \{f''\} + \Gamma_0 \delta' + \Gamma_1 \delta \\ &\dots\dots\dots \\ f^m &= \{f^m\} + \Gamma_0 \delta^{m-1} + \Gamma_1 \delta^{m-2} + \dots + \Gamma_{m-1} \delta. \end{aligned}$$

Selon la théorie des distributions, la dérivée de la fonction de Dirac appliquée à une fonction générique $\varphi(z)$ conduit à :

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0) \tag{4.3}$$

Nouvelle formulation du modèle à un domaine ($1\Omega_{\text{NEW}}$)

Si on considère un milieu poreux homogène, la viscosité réduite η , la diffusivité thermique α_T et la porosité ϕ sont des fonctions du type échelon. Dans ce cas, les équations de conservation de la nouvelle formulation 1Ω doivent être écrites en gardant les fonctions discontinues η , α_T et ϕ à l'intérieur de l'opérateur divergence :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{u}}{\phi} \right) + \frac{1}{\phi} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}}{\phi} \right) = -\nabla P - \frac{1}{Da} \mathbf{u} + \nabla \cdot (\eta \nabla \mathbf{u}) + (Gr_T T + Gr_S S) \mathbf{e}_z \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr_f \alpha_{Tf}} \nabla \cdot (\alpha_T \nabla T) \quad (4.6)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = \frac{1}{Sc_f} \nabla \cdot (\phi \nabla S) \quad (4.7)$$

Les conditions limites aux parois externes sont données par :

$$\mathbf{u}(1) = 0, T(1) = \frac{T_u^* - T_0^*}{\Delta T^*}, S(1) = \frac{S_u^* - S_0^*}{\Delta S^*} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{u}(0) = 0, T(0) = \frac{T_l^* - T_0^*}{\Delta T^*}, S(0) = \frac{S_l^* - S_0^*}{\Delta S^*} \quad (4.9)$$

On élimine le terme de pression entre les deux composantes de (4.5) et on linéarise les équations de la façon usuelle. En supposant que les propriétés physiques varient uniquement avec la coordonnée spatiale z , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\phi} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) &= \frac{\partial(1/Da)}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{Da} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Da} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ + \eta \nabla^2 \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \eta}{\partial z} \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} \\ + \left(Gr_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Gr_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$Pr_f \alpha_{Tf} \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + w' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = \alpha_T \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) + \alpha_T \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} + \frac{\partial \alpha_T}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{\partial T'}{\partial z} \right) \quad (4.11)$$

$$Sc_f \left(\frac{\partial S'}{\partial t} + w' \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \right) = \phi \left(\frac{\partial^2 S'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S'}{\partial z^2} \right) + \phi \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial z} + \frac{\partial S'}{\partial z} \right) \quad (4.12)$$

Le développement en modes normaux des équations (4.10)-(4.12) conduit au système :

$$\begin{aligned} \eta \left(\frac{d^4 W}{dz^4} + \kappa^4 \right) - \kappa^2 \left(2\eta \frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{1}{Da} W + 2 \frac{d\eta}{dz} \frac{dW}{dz} \right) \\ - \left(-2 \frac{d\eta}{dz} \frac{d^3 W}{dz^3} + \frac{d(1/Da)}{dz} \frac{dW}{dz} + \frac{1}{Da} \frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{d^2 \eta}{dz^2} \frac{d^2 W}{dz^2} \right) + \kappa^2 (Gr_T \theta + Gr_S S) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$Pr_f \frac{\alpha_{Tf}}{\alpha_T} \left(\frac{d\bar{T}}{dz} W \right) = \left(-\kappa^2 \theta + \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right) + \frac{1}{e^{i\kappa x}} \left(\frac{1}{\alpha_T} \frac{d\alpha_T}{dz} \frac{d\bar{T}}{dz} \right) + \frac{1}{\alpha_T} \frac{d\alpha_T}{dz} \frac{d\theta}{dz} \quad (4.14)$$

$$Sc_f \frac{1}{\phi} \left(\frac{d\bar{S}}{dz} W \right) = \left(-\kappa^2 \mathcal{S} + \frac{d^2 \mathcal{S}}{dz^2} \right) + \frac{1}{e^{i\kappa x}} \left(\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dz} \frac{d\bar{S}}{dz} \right) + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dz} \frac{d\mathcal{S}}{dz} \quad (4.15)$$

Les équations de l'état de base s'écrivent :

$$\nabla \cdot (\alpha_T \nabla \bar{T}) = 0 \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \bar{S}) = 0 \quad (4.17)$$

L'équation (4.16) a pour solution :

$$\bar{T}_f(z) = \frac{C_1}{\alpha_{Tf}} z + C_2 \quad (4.18)$$

$$\bar{T}_m(z) = \frac{C_3}{\alpha_{Tm}} z + C_4 \quad (4.19)$$

Les constantes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont obtenues en utilisant les conditions limites suivantes :

$$\bar{T}_f(1) = \frac{T_u^* - T_0^*}{\Delta T^*}, \quad (4.20)$$

$$\bar{T}_f(d_m) = \bar{T}_m(d_m), \quad (4.21)$$

$$\alpha_{Tf} \frac{d\bar{T}_f}{dz} \Big|_{z=d_m} = \alpha_{Tm} \frac{d\bar{T}_m}{dz} \Big|_{z=d_m}, \quad (4.22)$$

$$\bar{T}(0) = \frac{T_l^* - T_0^*}{\Delta T^*}, \quad (4.23)$$

où $d_m = \left(\frac{1}{1 + \hat{d}} \right)$.

L'équation (4.17) est résolue de façon similaire :

$$\bar{S}_f(z) = C_5 z + C_6 \quad (4.24)$$

$$\bar{S}_m(z) = \frac{C_7}{\phi} z + C_8 \quad (4.25)$$

Avec les conditions limites :

$$\bar{S}_f(1) = \frac{S_u^* - S_0^*}{\Delta S^*}, \quad (4.26)$$

$$\bar{S}_f(d_m) = \bar{S}_m(d_m), \quad (4.27)$$

$$\frac{d\bar{S}_f}{dz} \Big|_{z=d_m} = \phi \frac{d\bar{S}_m}{dz} \Big|_{z=d_m}, \quad (4.28)$$

$$\bar{S}(0) = \frac{S_l^* - S_0^*}{\Delta S^*} \quad (4.29)$$

On substitue la solution de l'état de base dans les équations aux perturbations (4.13) - (4.15) et on dérive les fonctions discontinues *au sens des distributions*.

Après application de la méthode GITT, on obtient pour l'équation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{N_W} \mathcal{J}_{ji} \bar{W}_j + \eta (\mu_i^4 + \kappa^4) \bar{W}_i - \kappa^2 \sum_{j=1}^{N_W} \mathcal{F}_{ji} \bar{W}_j - \kappa^2 Gr_T \sum_{h=1}^{N_\theta} \mathcal{G}_{hi} \bar{\theta}_h \\
 & - \kappa^2 Gr_S \sum_{l=1}^{N_S} \mathcal{H}_{li} \bar{\mathcal{S}}_l = 0, \quad i = 1, \dots, N_W
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{ji} = & \int_0^1 \left(\frac{1}{Da} \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W,j}(z)}{dz^2} \right) \tilde{\psi}_{W,i}(z) dz + (1 - \eta) \left(\frac{d^2 \tilde{\psi}_{W,j}(z)}{dz^2} \frac{d \tilde{\psi}_{W,i}(z)}{dz} \right) \Big|_{z=d_m} \\
 & - \left((1 - \eta) \frac{d^3 \tilde{\psi}_{W,j}(z)}{dz^3} + \frac{1}{Da} \frac{d \tilde{\psi}_{W,j}(z)}{dz} \right) \Big|_{z=d_m} \tilde{\psi}_{W,i}(d_m),
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\mathcal{F}_{ji} = \int_0^1 \left(2\eta \frac{d^2 \tilde{\psi}_{W,j}(z)}{dz^2} - \frac{1}{Da} \tilde{\psi}_{W,j}(z) \right) \tilde{\psi}_{W,i}(z) dz + 2(1 - \eta) \frac{d \tilde{\psi}_{W,j}(z)}{dz} \Big|_{z=d_m} \tilde{\psi}_{W,i}(d_m), \tag{4.32}$$

$$\mathcal{G}_{hi} = \int_0^1 \tilde{\psi}_{\theta,h}(z) \tilde{\psi}_{W,i}(z) dz, \tag{4.33}$$

$$\mathcal{H}_{li} = \int_0^1 \tilde{\psi}_{S,l}(z) \tilde{\psi}_{W,i}(z) dz. \tag{4.34}$$

L'équation de l'énergie transformée s'écrit :

$$-\beta_n^2 \bar{\theta}_n - \kappa^2 \bar{\theta}_n + \sum_{h=1}^{N_\theta} \mathcal{L}_{hn} \bar{\theta}_h - Pr_f \sum_{j=1}^{N_W} \mathcal{C}_{jn} \bar{W}_j = 0, \quad n = 1, \dots, N_\theta \tag{4.35}$$

avec

$$\mathcal{L}_{hn} = \frac{\alpha_{Tf} - \alpha_{Tm}}{\alpha_{Tm}} \frac{d \tilde{\psi}_{\theta,h}(z)}{dz} \Big|_{z=d_m} \tilde{\psi}_{\theta,n}(d_m), \tag{4.36}$$

$$\mathcal{C}_{jn} = \int_0^1 \frac{\alpha_{Tf}}{\alpha_T^2} \frac{1 + \hat{d}}{(\hat{d}/\alpha_{Tf}) + (1/\alpha_{Tm})} \tilde{\psi}_{W,j}(z) \tilde{\psi}_{\theta,n}(z) dz. \tag{4.37}$$

où $\alpha_T = \alpha_{Tf}$ dans le fluide et $\alpha_T = \alpha_{Tm}$ dans le poreux.

En suivant une procédure identique, l'équation de conservation des espèces transformée s'écrit :

$$-\lambda_k^2 \bar{\mathcal{S}}_k - \kappa^2 \bar{\mathcal{S}}_k + \sum_{l=1}^{N_S} \mathcal{D}_{lk} \bar{\mathcal{S}}_l - Sc \sum_{j=1}^{N_W} \mathcal{E}_{jk} \bar{W}_j = 0, \quad k = 1, \dots, N_S \tag{4.38}$$

avec

$$\mathcal{D}_{lk} = \frac{1 - \phi}{\phi} \frac{d\tilde{\psi}_{S,l}(z)}{dz} \Big|_{z=d_m} \tilde{\psi}_{S,k}(d_m), \quad (4.39)$$

$$\mathcal{E}_{jk} = \int_0^1 \frac{1}{\phi(z)^2} \frac{1 + \hat{d}}{\hat{d} + 1/\phi} \tilde{\psi}_{W,j}(z) \tilde{\psi}_{S,k}(z) dz. \quad (4.40)$$

où $\phi(z) = 1$ dans le fluide et $\phi(z) = \phi$ dans le milieu poreux.

Comparaison des modèles : nouveaux résultats

Les résultats préliminaires obtenus à l'aide de la nouvelle formulation du modèle à un domaine ($1\Omega_{\text{NEW}}$) sont maintenant comparés à ceux du modèle à deux domaines ($2\Omega_{\text{DB}}$). Les courbes de stabilité marginale obtenues pour les quatre valeurs du rapport d'épaisseurs étudiés précédemment sont montrés dans les figures (4.14)-(4.17). Dans tous les figures, on observe un très bon accord entre les résultats obtenus à l'aide des modèles $1\Omega_{\text{NEW}}$ et $2\Omega_{\text{DB}}$, pour toute la gamme des valeurs du nombre d'onde κ étudié.

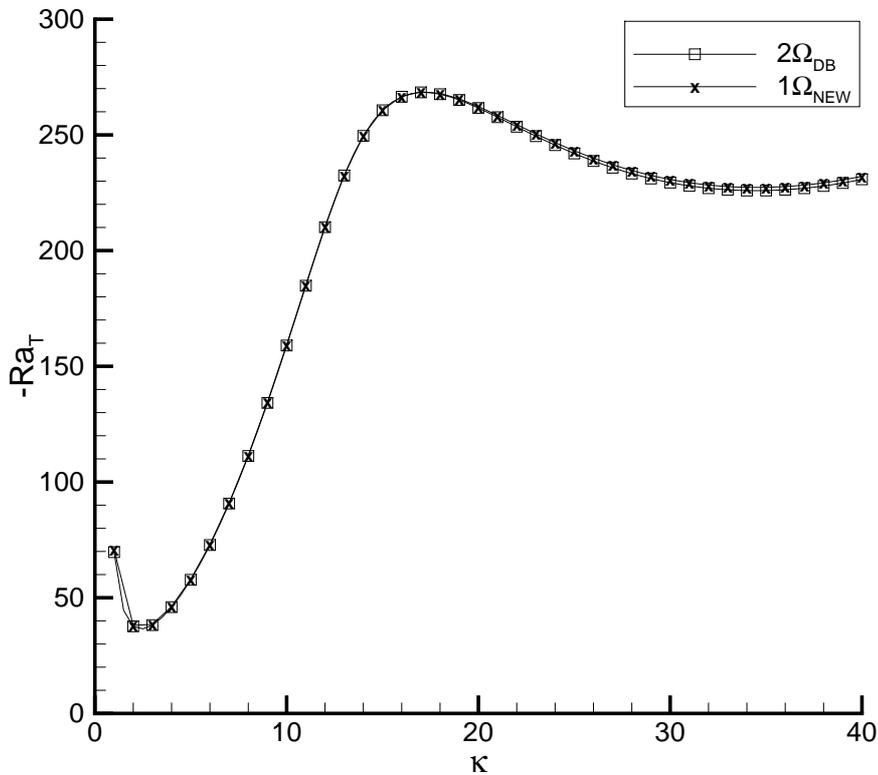


FIG. 4.14 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles $2\Omega_{\text{DB}}$ et la nouvelle formulation du modèle à un domaine $1\Omega_{\text{NEW}}$, pour $\delta = 0.003$ et $\hat{d} = 0.08$.

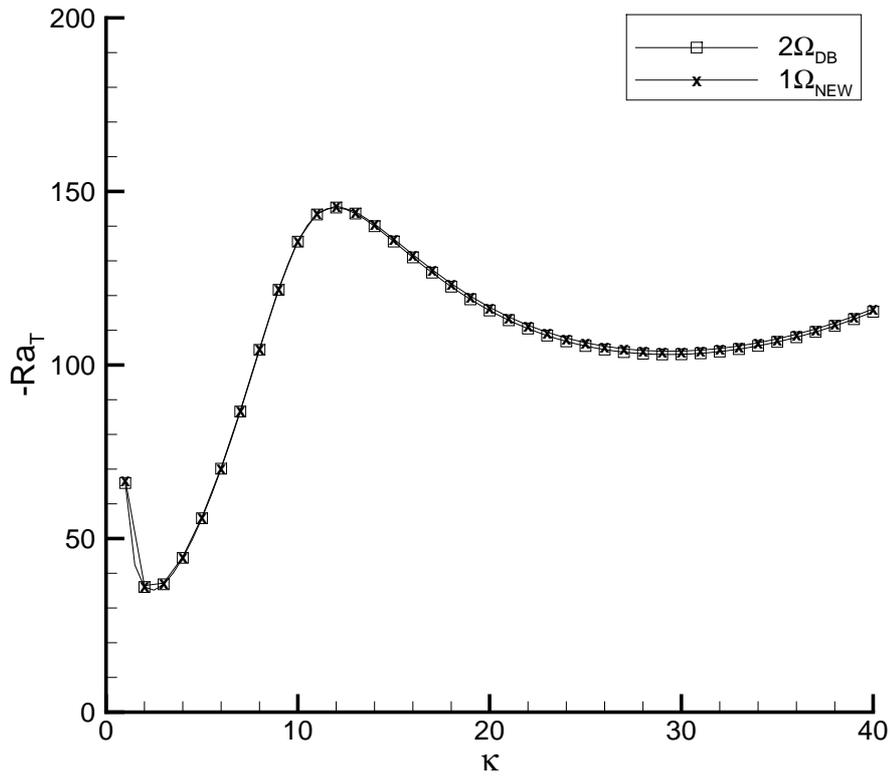


FIG. 4.15 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles $2\Omega_{DB}$ et la nouvelle formulation du modèle à un domaine $1\Omega_{NEW}$, pour $\delta = 0.003$ et $\hat{d} = 0.10$.

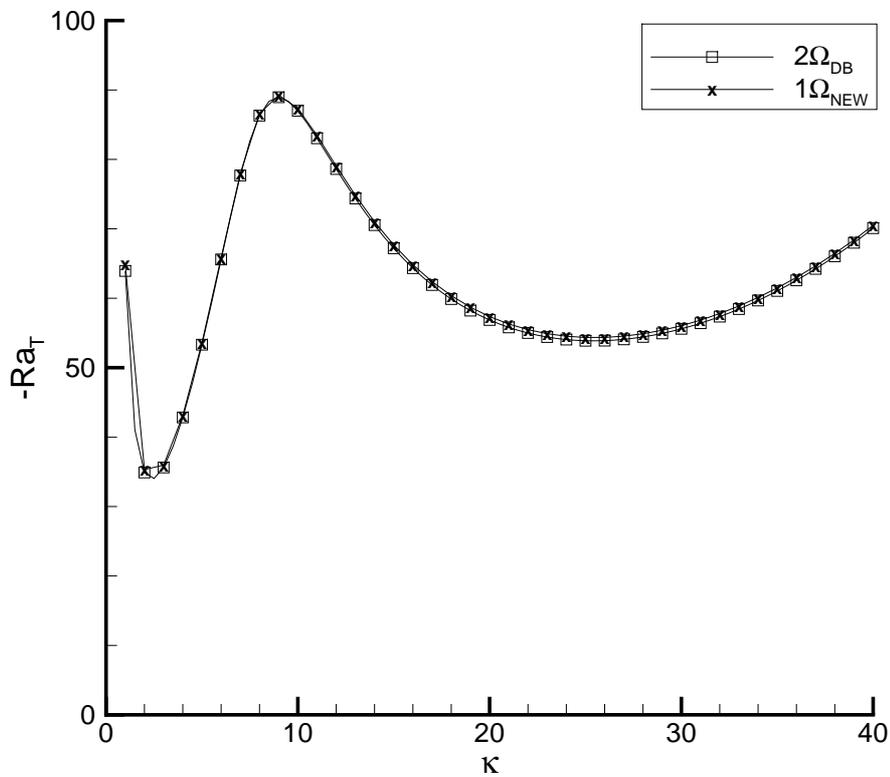


FIG. 4.16 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles $2\Omega_{DB}$ et la nouvelle formulation du modèle à un domaine $1\Omega_{NEW}$, pour $\delta = 0.003$ et $\hat{d} = 0.12$.

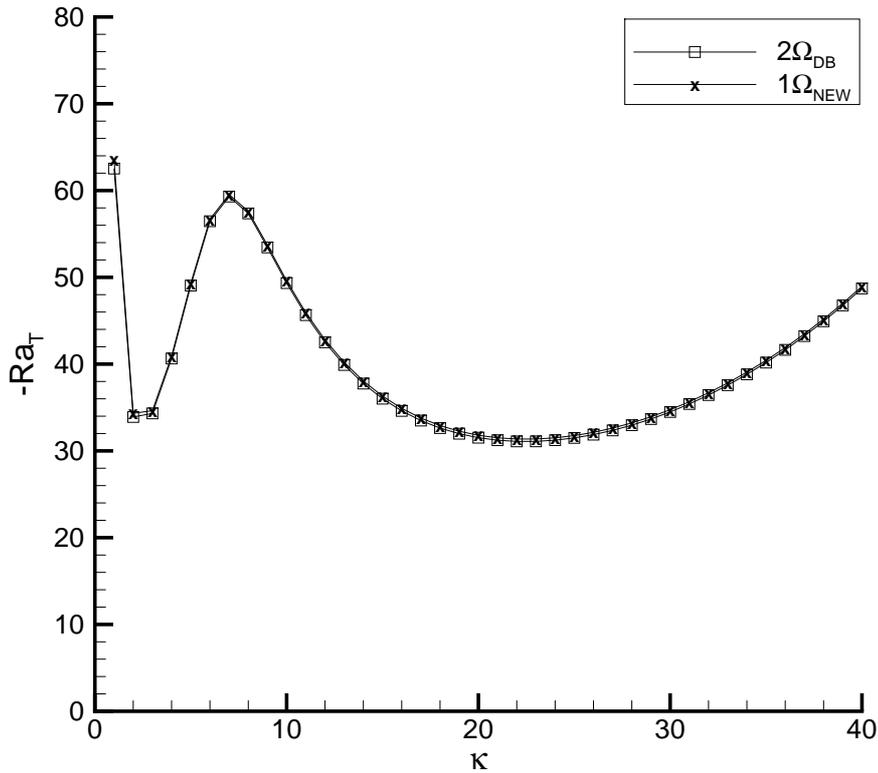


FIG. 4.17 – Courbes de stabilité marginale obtenues avec les modèles $2\Omega_{DB}$ et la nouvelle formulation du modèle à un domaine $1\Omega_{NEW}$, pour $\delta = 0.003$ et $\hat{d} = 0.14$.

Dans la section précédente il a été montré que les modèles à un et deux domaines peuvent conduire à des résultats sensiblement différents lorsque la transition entre le fluide et le milieu poreux est décrite par une discontinuité des propriétés. Les nouveaux résultats montrent qu'il faut modifier la formulation en effectuant les différentiations au sens des distributions. Ainsi, le modèle à un domaine conduit aux mêmes seuils de stabilité que les formulations à deux domaines. On remarque que, lorsque les propriétés varient continument dans l'espace, les termes dérivés de la théorie des distributions sont nuls, et on retrouve la formulation 1Ω décrite dans la section 2.3.

4.1.5 Influence des paramètres caractéristiques

L'influence de certains paramètres caractéristiques sur la stabilité du système purement thermique est discutée dans cette section. Les résultats présentés ont été obtenus avec le modèle $2\Omega_{DB}$. On rappelle que pour l'ensemble des résultats présentés, le milieu poreux est supposé

isotrope et homogène, et les paramètres Pr et ϕ sont respectivement fixés à 10 et 0.39.

La figure (4.18) montre l'influence du rapport d'épaisseurs \hat{d} sur la stabilité du système, pour $\varepsilon_T = 0.7$ et $\delta = 0.003$. La courbe correspondant à $\hat{d} \rightarrow 0$, représente le cas d'une couche complètement poreuse. On vérifie que, dans ce cas, la courbe de stabilité présente un seul mode, avec un minimum de $Ra_{Tm} = Ra_T \times \varepsilon_T \approx 4\pi^2$, comme prévu par la solution analytique. Lorsque \hat{d} augmente, les courbes deviennent bimodales. Pour $\hat{d} = 0.14$, le deuxième minimum devient le plus critique, i.e., le mode de convection le plus instable passe du mode poreux au mode fluide. En d'autres termes, le mouvement convectif correspondant à des larges cellules présentes dans toute la cavité prend la forme de cellules convectives de petites longueurs d'onde, principalement confinées dans la région fluide.

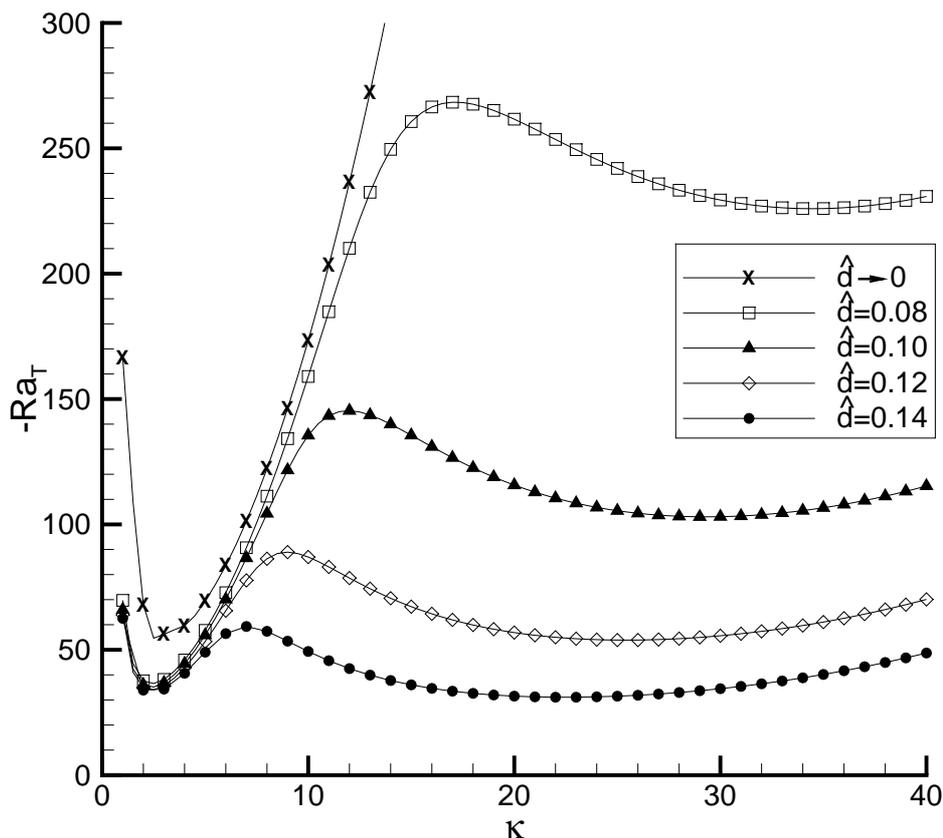


FIG. 4.18 – Influence du rapport d'épaisseurs \hat{d} , pour $\varepsilon_T = 0.7$ et $\delta = 0.003$.

Les courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs du nombre de Darcy, $\hat{d} = 0.08$ et $\varepsilon_T = 0.7$, sont représentées dans la figure (4.19). La nature bimodale des courbes observée par Chen & Chen (1988), Zhao & Chen (2001) et Carr & Straughan (2003) pour $Da \approx 10^{-5}$ est confirmée. Aux grandes valeurs du nombre de Darcy ($Da \geq 10^{-4}$), correspondant à des milieux très perméables, les courbes présentent un seul mode aux petits nombre d'onde. Lorsque la perméabilité décroît, la pénétration de l'écoulement dans le milieu poreux devient plus difficile. Finalement, à $Da = 10^{-6}$, le mode fluide devient le plus instable. Pour $Da = 10^{-8}$, le milieu poreux se comporte comme un solide. Dans ce cas, comme on le voit sur les lignes de courant de la figure (4.20), les cellules convectives se développent au sein de la région fluide et aucune pénétration n'est observée dans la zone poreuse.

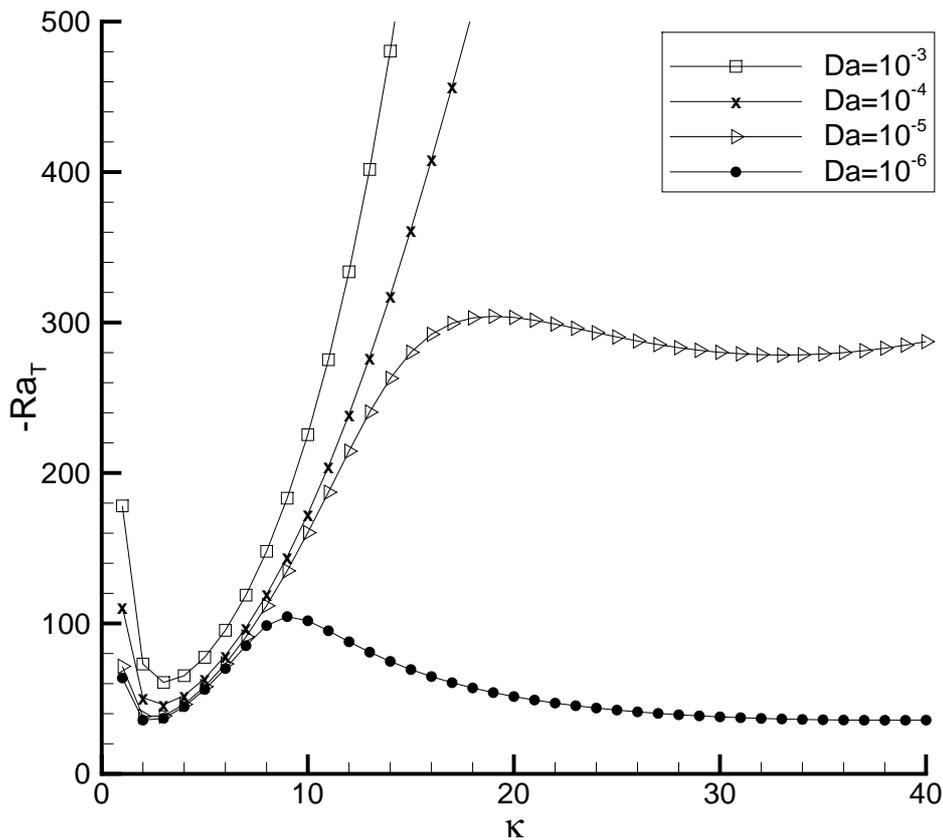


FIG. 4.19 – Influence du nombre de Darcy Da , pour $\hat{d} = 0.08$ et $\varepsilon_T = 0.7$.

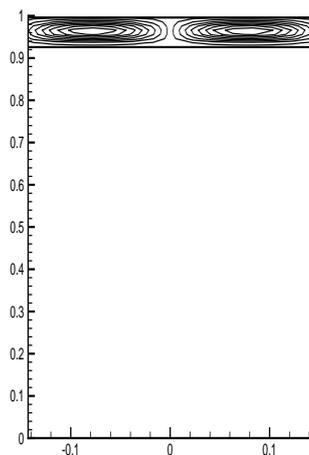


FIG. 4.20 – Lignes de courant obtenues pour $Da = 10^{-8}$, $\hat{d} = 0.08$ et $\varepsilon_T = 0.7$ ($\Psi_{max} = \pm 0.3$; $\Delta\Psi = 0.01875$). La ligne horizontale épaisse représente l'interface fluide-poreux.

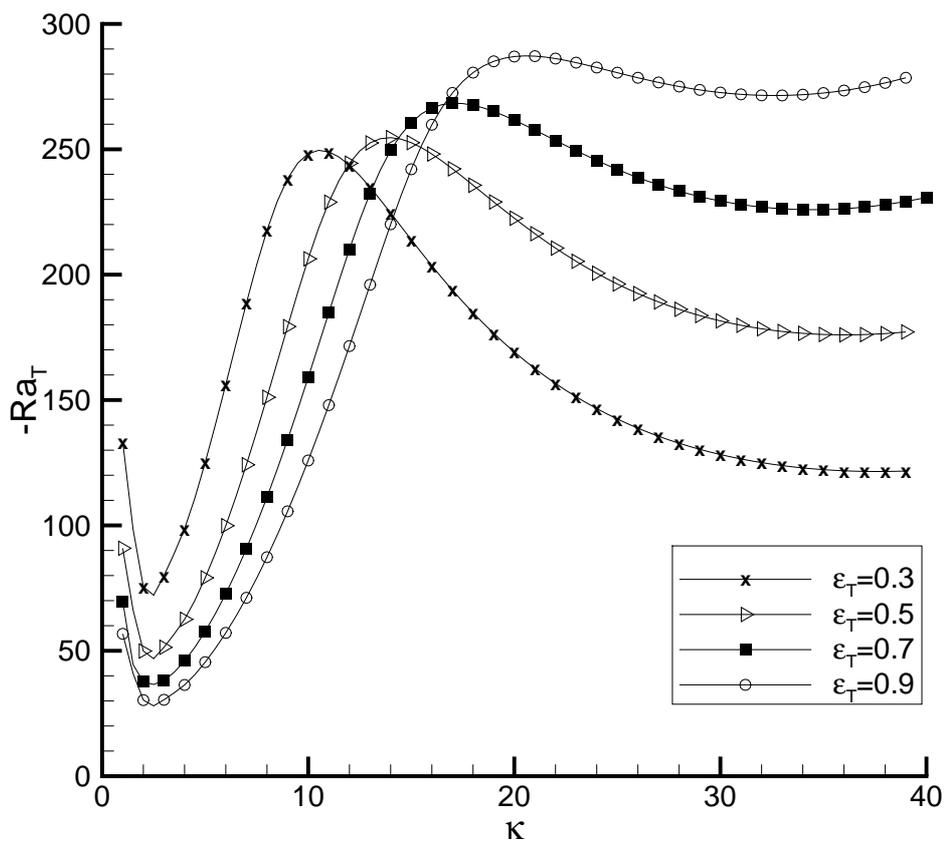


FIG. 4.21 – Influence du rapport des diffusivités thermiques ε_T , pour $\hat{d} = 0.08$ et $\delta = 0.003$.

L'influence du rapport des diffusivités thermiques ε_T , pour $\hat{d} = 0.08$ et $\delta = 0.003$, est mise en évidence dans la figure (4.21). Lorsque ε_T diminue (la diffusivité du milieu poreux augmente) la chaleur diffuse mieux dans le milieu poreux. La cavité étant chauffée par le bas, la température à l'interface augmente. Ainsi, le gradient de température dans la région fluide devient plus importante, déstabilisant la convection dans cette région. Le mécanisme inverse a lieu dans la région poreuse, et donc, le mode de convection poreux devient plus stable avec la diminution de ε_T .

Comme prévu, les résultats montrent que le rapport des épaisseurs, la perméabilité du milieu poreux et le rapport des diffusivités thermiques jouent un rôle crucial dans la détermination du mode critique de convection.

4.1.6 Influence de la condition de saut des contraintes tangentielles

Comme nous l'avons montré dans les sections précédentes, la modélisation du transport de la quantité de mouvement à travers l'interface est décisive pour une description précise du déclenchement de la convection naturelle au sein d'un système fluide-poreux.

Ochoa-Tapia & Whitaker (1995a,1995b) ont proposé l'utilisation d'une condition macroscopique de saut pour les contraintes tangentielles (tout en gardant la continuité des vitesses) dans la modélisation du transport de quantité de mouvement à l'interface entre deux régions homogènes. Leur travail, basé sur la technique de moyenne volumique, utilise l'équation de Darcy-Brinkman dans le milieu poreux. La condition de saut des contraintes tangentielles, écrite en termes des variables du problème étudié dans le présent travail, prend la forme :

$$\mu \left. \frac{\partial u^*}{\partial z} \right|_{z=d_m^*} - \mu_{eff} \left. \frac{\partial u_m^*}{\partial z} \right|_{z=d_m^*} = -\frac{\beta^*}{\sqrt{K}} u^*(d_m^*) \quad (4.41)$$

où β^* est un coefficient de saut ajustable. La condition de saut écrite sous forme adimensionnelle devient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d_m} - \eta \frac{\partial u_m}{\partial z} \Big|_{z=d_m} = -\frac{\beta}{\sqrt{Da}} u(d_m) \quad (4.42)$$

où $\beta = \beta^*/\mu$. Les solutions analytiques utilisant cette description présentent un bon accord avec les résultats expérimentaux de Beavers & Joseph pour des valeurs de β de l'ordre de l'unité (table 4.3). La condition de continuité des contraintes tangentielles correspond au cas où $\beta = 0$.

Dans l'étude des problèmes à l'interface entre un milieu poreux et un milieu libre, descriptions correspondant aux différentes échelles du problème peuvent être adoptés. Au niveau

Spécimen poreux	Perméabilité K [m^2]	Porosité ϕ	β (Ochoa-Tapia & Whitaker)
Foametal	$7.1 \cdot 10^{-9}$	0.78	0.6
Foametal A	$9.7 \cdot 10^{-9}$	0.78	0.7
Foametal B	$3.94 \cdot 10^{-8}$	0.78	0
Foametal C	$8.2 \cdot 10^{-8}$	0.79	-1
Aloxite 1	$6.45 \cdot 10^{-10}$	0.58	1.47
Aloxite 2	$1.6 \cdot 10^{-9}$	0.52	1.47

TAB. 4.3 – Caractéristiques géométriques des spécimens poreux utilisés dans les expériences de Beavers & Joseph et coefficient de saut correspondant.

microscopique, les écoulements dans la couche fluide et entre les pores sont gouvernés par l'équation de Stokes. Au niveau mésoscopique, les phases fluide et solide dans la région poreuse sont remplacées par un milieu équivalent. A cette échelle de description, la zone entre le fluide et le milieu poreux homogène est une zone de transition où les propriétés effectives varient de manière continue. Finalement, un troisième niveau macroscopique considère deux régions homogènes, séparées par une interface discontinue.

En introduisant une zone de transition hétérogène entre les deux régions homogènes (description mésoscopique), Goyeau *et al.* (2003) ont obtenu une expression explicite pour le coefficient de saut β , en fonction des variations de la vitesse et des propriétés effectives de la zone de transition. Chandesris & Jamet (2006) ont utilisé la méthode des développements asymptotiques raccordés pour étudier le passage entre les descriptions mésoscopique et macroscopique de l'interface. Le problème dans la zone de transition hétérogène a été résolu explicitement en utilisant un développement en fonction du paramètre ϵ (rapport entre les épaisseurs de la zone de transition et de la couche fluide). La solution au premier ordre en ϵ conduit à une condition de saut des contraintes tangentielles. Ces auteurs ont pu ainsi exprimer β en fonction de la perméabilité et de la porosité de la zone de transition. Leur expression est indépendante des variations de la vitesse, qui reste une inconnue du problème.

On se propose ici d'étudier l'influence de cette condition de saut, et plus précisément du coefficient β , sur la stabilité du système thermique. La condition de saut écrite en fonction

des variables perturbées devient :

$$\left. \frac{d^2 W}{dz^2} \right|_{z=d_m} - \eta \left. \frac{d^2 W_m}{dz^2} \right|_{z=d_m} = -\frac{\beta}{\sqrt{Da}} \left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=d_m} \quad (4.43)$$

En remplaçant la condition de continuité des contraintes tangentielles (eq. 2.92) par la condition (4.43), le terme non-transformable du système GITT (eq. 3.43) devient :

$$\left\{ (\kappa^2 - \eta \kappa^2) \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{dW_1}{dz} + \left(2\kappa^2 - 2\eta \kappa^2 - \frac{1}{Da} \right) W_1 \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} + \left(\frac{\beta}{\sqrt{Da}} \frac{dW_1}{dz} \right) \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right\}_{z=d_m} \quad (4.44)$$

Ainsi, l'équation finale de conservation de la quantité de mouvement (eq. 3.44) est substituée par :

$$\begin{aligned} \mu_i^4 \bar{W}_i &= \sum_{j=1}^{N_W} \bar{W}_j \left(2\kappa^2 \mathcal{P}_{ij}^{(1)} + \left(2\eta\kappa^2 + \frac{1}{Da} \right) \mathcal{P}_{ij}^{(2)} - \kappa^4 \mathcal{Q}_{ij}^{(1)} - \left(\eta\kappa^4 + \kappa^2 \frac{1}{Da} \right) \mathcal{Q}_{ij}^{(2)} \right) \\ &+ \kappa^2 Gr_T \sum_{h=1}^{N_\theta} \bar{\theta}_h \left(\mathcal{G}_{hi}^{(1)} + \mathcal{G}_{hi}^{(2)} \right) + \kappa^2 Gr_S \sum_{k=1}^{N_S} \bar{\mathcal{S}}_k \left(\mathcal{H}_{ki}^{(1)} + \mathcal{H}_{ki}^{(2)} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{N_W} \bar{W}_j \left\{ (\kappa^2 - \eta \kappa^2) \tilde{\psi}_{W1,i} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,j}}{dz} + \left(2\kappa^2 - 2\eta \kappa^2 - \frac{1}{Da} \right) \tilde{\psi}_{W1,j} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\beta}{\sqrt{Da}} \frac{d\tilde{\psi}_{W1,j}}{dz} \right) \frac{d\tilde{\psi}_{W1,i}}{dz} \right\}_{z=d_m}, \quad i = 1, \dots, N_W \end{aligned} \quad (4.45)$$

où $\mathcal{P}_{ij}^{(R)}$, $\mathcal{Q}_{ij}^{(R)}$, $\mathcal{G}_{hi}^{(R)}$ et $\mathcal{H}_{ki}^{(R)}$ sont définis par les équations (3.45)-(3.48).

Pour l'ensemble des résultats présentés dans cette section, $Pr = 10$, $\phi = 0.39$ et $\varepsilon_T = 0.7$. Les figures (4.22) et (4.23) représentent les courbes de stabilité marginale obtenues avec différentes valeurs du coefficient β , pour $\hat{d} = 0.10$ et $\hat{d} = 0.14$. On observe que l'augmentation de β déstabilise le mode de convection fluide, mais n'a pas d'influence sur le mode poreux. Dans la figure (4.23), l'augmentation de β de 1.5 à 2.0 est responsable du changement du mode critique de convection, qui passe du mode poreux au mode fluide. Les valeurs critiques correspondant au deuxième minimum des courbes de stabilité des figures (4.22) et (4.23) sont présentées dans la table 4.4. Pour les deux valeurs du rapport d'épaisseurs présentés, la réduction du nombre de Rayleigh relatif au deuxième minimum s'accompagne de la diminution du nombre d'onde correspondant.

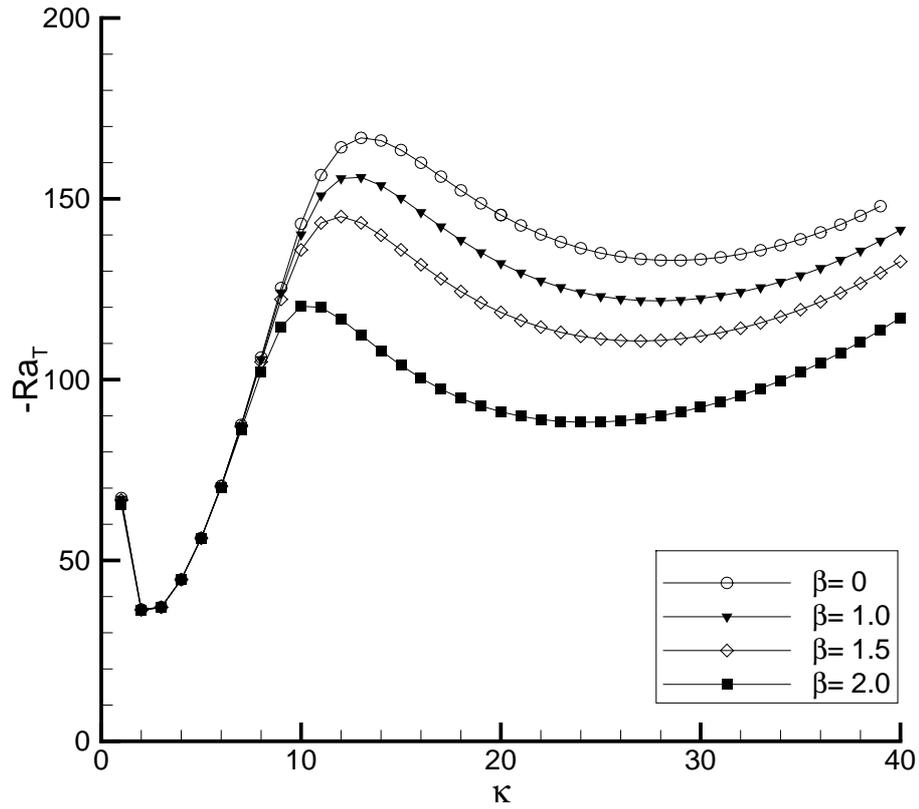


FIG. 4.22 – Influence du coefficient de saut β , pour $\hat{d} = 0.10$ et $Da = 10^{-5}$.

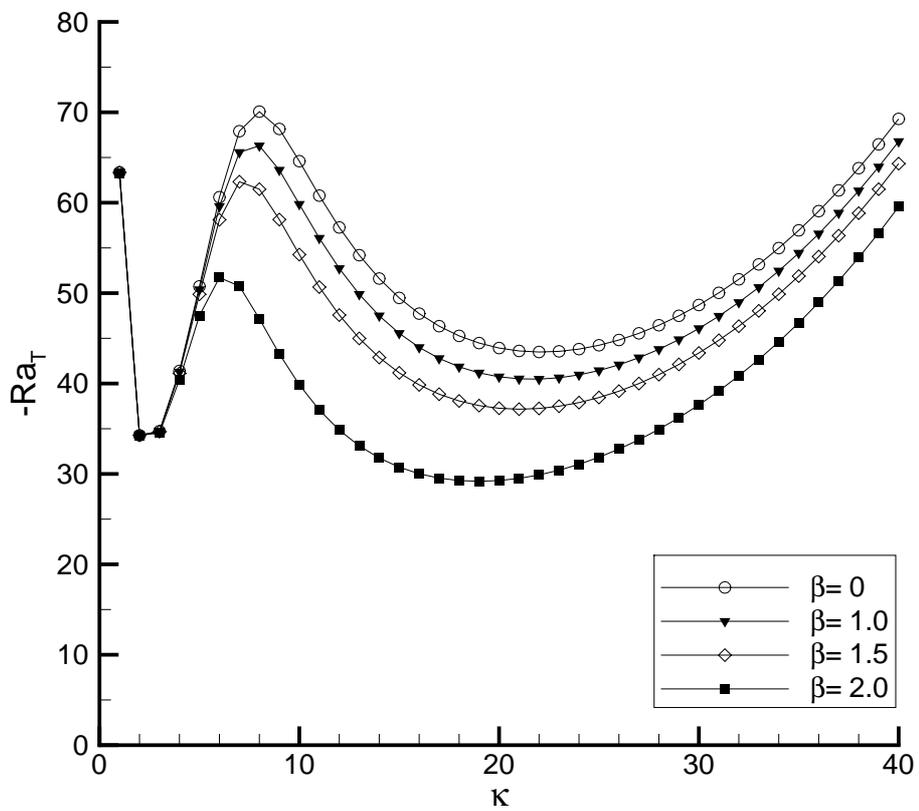


FIG. 4.23 – Influence du coefficient de saut β , pour $\hat{d} = 0.14$ et $Da = 10^{-5}$.

	$\widehat{d} = 0.10$		$\widehat{d} = 0.14$	
	$-Ra_{Tcr}$	κ_{cr}	$-Ra_{Tcr}$	κ_{cr}
$\beta = 0$	132.98	29.0	43.48	22.0
$\beta = 1$	121.77	28.0	40.48	22.0
$\beta = 1.5$	110.68	27.0	37.16	21.0
$\beta = 2$	88.20	24.0	29.18	19.0

TAB. 4.4 – Valeurs critiques correspondants au deuxième minimum des courbes de stabilité des figures (4.22) et (4.23).

Comme montré dans la figure (4.6), correspondant au cas où $\beta = 0$, le mode de convection fluide est caractérisé par des cellules convectives de petites longueurs d'onde localisées près de l'interface. Ce type d'écoulement est par conséquent plus sensible à la structure de la région interfaciale. La diminution de β provoque un ralentissement de la vitesse à l'interface, stabilisant le mode fluide. Un comportement semblable a été observé pour la variation du coefficient de glissement α de la condition de Beavers et Joseph (voir figures (4.7)-(4.9)). Cela est dû au fait que ces deux coefficients sont liés à l'hétérogénéité de la structure poreuse dans la zone de transition. L'augmentation de α ralentit l'écoulement à l'interface et donc stabilise le mode de convection fluide.

Enfin, la figure (4.24) représente l'influence de β pour des différentes valeurs du nombre de Darcy. Dans le cas d'une couche fluide ($Da \rightarrow \infty$), les courbes obtenues avec les différentes valeurs de β sont superposées. Ces courbes présentent un seul minimum, correspondant à la valeur du nombre de Rayleigh critique fluide $Ra_{Tf} = -1707$, obtenu analytiquement. L'influence du coefficient β sur la stabilité du système est plus importante pour des valeurs intermédiaires du nombre de Darcy ($Da = 10^{-4}$ et $Da = 5 \cdot 10^{-5}$). Aux faibles valeurs de la perméabilité ($Da \leq 10^{-5}$), l'influence de β devient de moins en moins importante, vu que le milieu poreux s'approche d'un solide et il n'y a plus de pénétration.

Très récemment, l'utilisation d'une condition de saut sur la pression a été proposée (Breugem *et al.*, 2005; Chandesris, 2006). Comme mentionné précédemment, Chandesris (2006) a utilisé la méthode des développements asymptotiques raccordés pour obtenir les conditions limites entre les deux zones homogènes en considérant une zone de transition hétérogène. Le développement en fonction du paramètre ϵ conduit à la condition de continuité des vitesses, des contraintes

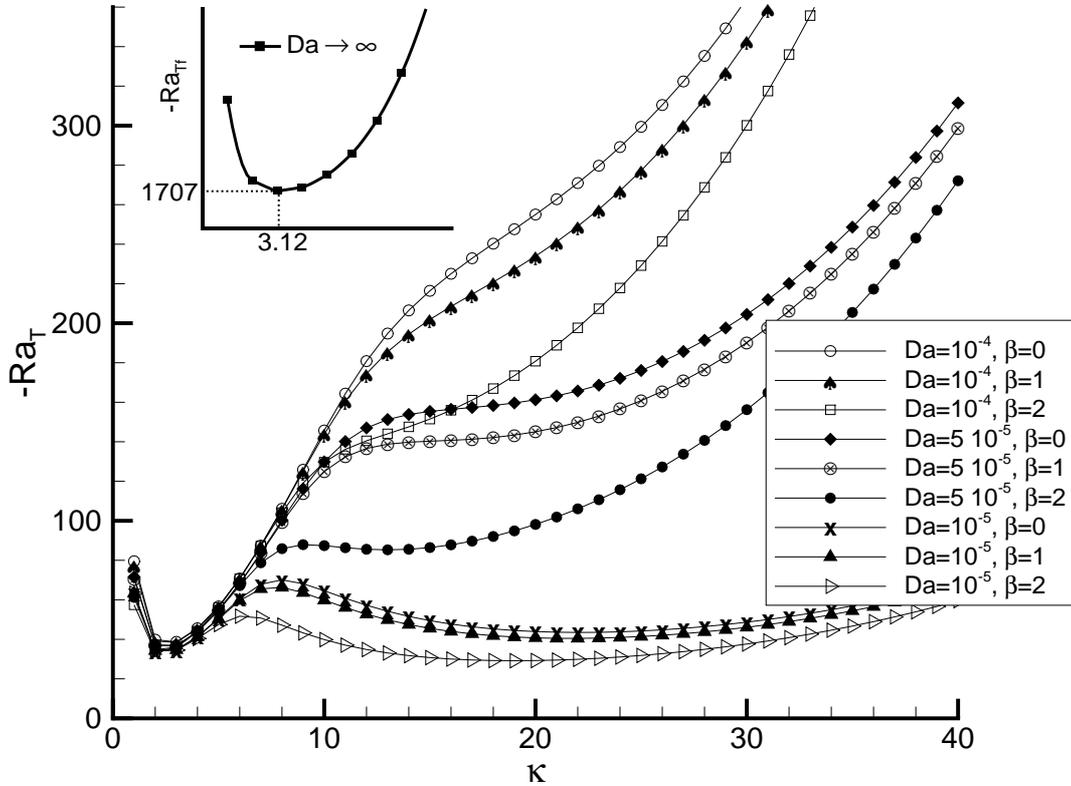


FIG. 4.24 – Influence du coefficient de saut β pour des différentes valeurs du nombre de Darcy, et $\hat{d} = 0.14$.

tangentielles et des pressions à l'ordre zéro. Au premier ordre en ϵ , la vitesse reste continue, tandis que les contraintes tangentielles et les pressions sont discontinues. L'expression obtenue pour la condition de saut des pressions à l'interface inclut le champ de vitesses à l'ordre zéro :

$$P - P_m = -\frac{\mu}{K} \langle \mathbf{u} \rangle^0 \cdot \mathbf{n} + \frac{\mu}{\phi} \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle^0 \cdot \mathbf{n} \quad (4.46)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal à l'interface fluide-poreux et $\langle \mathbf{u} \rangle^0$ représente la solution du champ de vitesses à l'ordre zéro. L'influence relative de chaque terme de la condition ci-dessus n'a pas été discutée. L'étude plus approfondie de l'influence de la condition de saut des pressions est une extension envisagée du présent travail.

Si on se situe à l'échelle mésoscopique, les coefficients de saut peuvent être liés à la variation spatiale des propriétés effectives dans la région de transition. Néanmoins, une description plus précise consisterait à résoudre les problèmes de fermeture locaux associés à la dérivation de la

condition de saut, et à fournir ainsi des expressions pour les coefficients de saut basées sur la microstructure interfaciale du problème abordé.

4.2 Convection naturelle thermosolutale

Nous considérons à présent le processus de transfert simultané de chaleur et de masse. Les cas où les écoulements de convection naturelle thermosolutale sont induits par des forces de volume thermique et/ou solutales sont analysés en utilisant le modèle $2\Omega_{DB}$. Étant donné que le système thermosolutal présente $N_W + N_\theta + N_S$ équations, une nouvelle analyse de convergence s'impose. Comme dans le cas thermique, après avoir fixé l'ordre de troncature du système, nos résultats numériques sont validés avec ceux des cas limites : le cas de la cavité fluide et celui de la cavité totalement poreuse. Dans la section 4.2.3, l'influence de la variation de certains paramètres caractéristiques dans la stabilité du système thermosolutal est présentée. Pour l'ensemble des résultats présentés, les paramètres suivantes sont fixés : $Pr_f = 10$, $\varepsilon_S = 1/\phi = 1/0.39$ et $Da = 10^{-5}$.

4.2.1 Analyse de convergence

Afin de fixer l'ordre de troncature du développement en fonctions propres proposé pour le système thermosolutal, on réalise une nouvelle analyse de convergence. Les courbes de stabilité marginale obtenues avec le modèle $2\Omega_{DB}$, pour différents valeurs de l'ordre de troncature $N = N_S = N_\theta = N_W$, sont présentés dans la figure (4.25). Les paramètres \hat{d} et ε_T sont respectivement fixés à 0.4 et 1.0. Comme dans le cas de la convection thermique, on observe que l'ordre de troncature nécessaire pour l'obtention d'une solution convergée est plus petit pour des faibles valeurs du nombre d'onde κ . Il est important de remarquer que, comme la taux de convergence est extrêmement sensible aux valeurs des paramètres caractéristiques, une analyse de convergence a été réalisée pour chaque cas étudié. Une meilleur taux de convergence est observé lorsque les valeurs de \hat{d} et ε_T s'approchent de l'unité. Dans tous les cas, on constate que le système est convergé à ± 1 sur le troisième digit significatif du nombre de Rayleigh solutal à $N = 100$. Par conséquent, cette valeur de l'ordre de troncature, correspondant à des systèmes matriciels de taille $3N \times 3N$, a été utilisée dans tous les calculs présentés dans cette section.

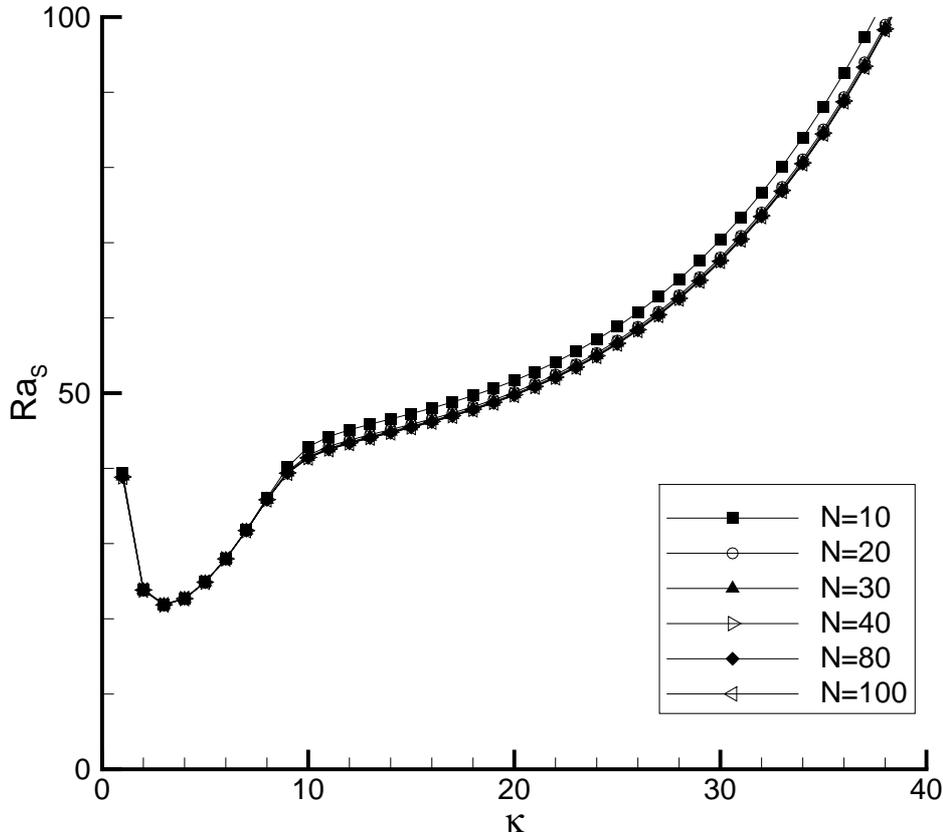


FIG. 4.25 – Courbes de stabilité marginale du modèle $2\Omega_{DB}$, obtenues pour des différents valeurs de l'ordre de troncature N , et $\hat{d} = 0.4$, $Da = 10^{-5}$, $\varepsilon_T = 1$, $Ra_T = 20$.

4.2.2 Validation des résultats

Pour les cas limites des cavités totalement fluide et totalement poreuse, Nield (1967, 1968) a montré que la courbe de stabilité dans le plan (Ra_T, Ra_S) est une droite si les champs de température et concentration satisfont les mêmes conditions aux limites. Pour les conditions de température et concentration prescrites aux parois externes, le cas de la cavité fluide conduit à (Nield, 1967) :

$$-Ra_{Tf} + Ra_{Sf} = 1707.77 \quad (4.47)$$

avec un nombre d'onde correspondant de $\kappa = 3.12$. Les mêmes conditions limites appliquées au cas de la cavité poreuse conduisent à (Nield, 1968) :

$$-Ra_{Tm} + Ra_{Sm} = 4\pi^2 \approx 39.48 \quad (4.48)$$

avec $\kappa = \pi \approx 3.14$.

Les figures (4.26) et (4.27) montrent la variation du nombre de Rayleigh solutal en fonction du nombre de Rayleigh thermique obtenue avec le modèle $2\Omega_{DB}$, pour une cavité fluide ($Da \rightarrow \infty$, $\phi = 1$) et une cavité complètement poreuse ($\hat{d} \rightarrow 0$). Compte tenu des définitions $\Delta T = T_u - T_l$ et $\Delta S = S_u - S_l$, on peut déterminer les régions où les gradients verticaux de température et de concentration sont stabilisants ou déstabilisants (voir figures). La région où les deux forces de volume sont stabilisantes ($Ra_T > 0$ et $Ra_S < 0$) est évidemment toujours stable. Comme prévu par Nield, les courbes $Ra_S \times Ra_T$ sont des lignes droites qui croisent les axes en $(0, 1707.77); (-1707.77, 0)$ et $(0, 4\pi^2); (-4\pi^2, 0)$. Les points $Ra_T = 0$ et $Ra_S = 0$ correspondent respectivement aux cas purement solutal et purement thermique.

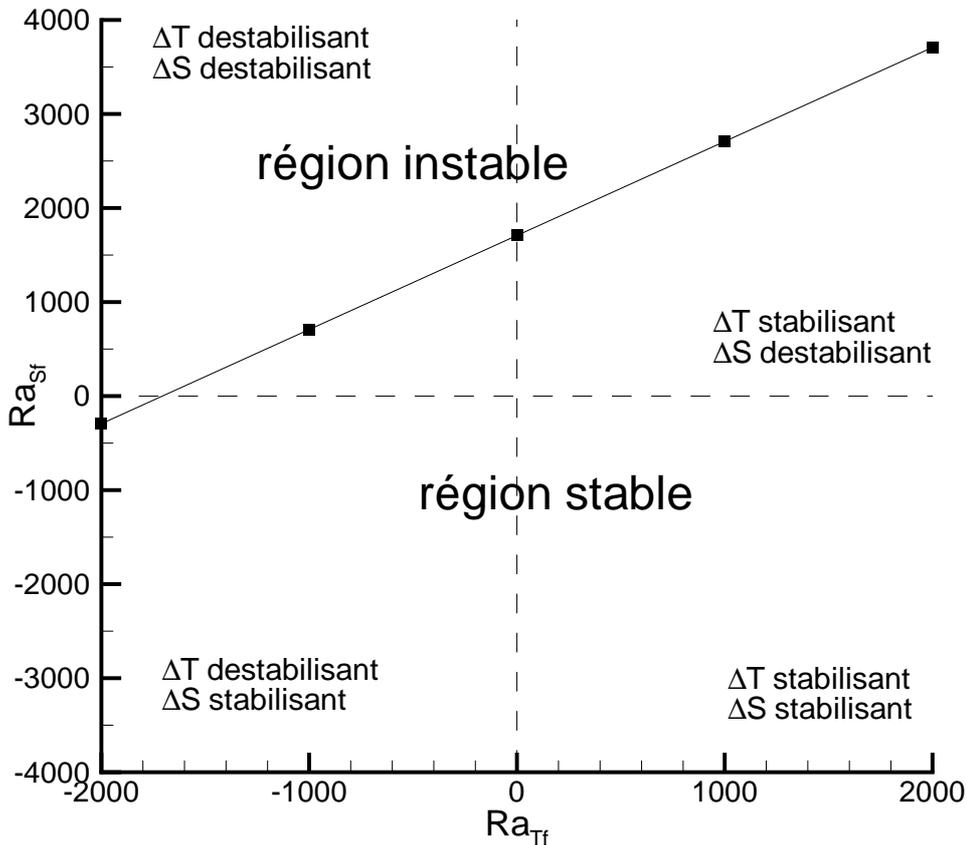


FIG. 4.26 – Nombre de Rayleigh solutal critique en fonction du nombre de Rayleigh thermique d'une couche complètement fluide ($Da \rightarrow \infty$, $\phi = 1$).

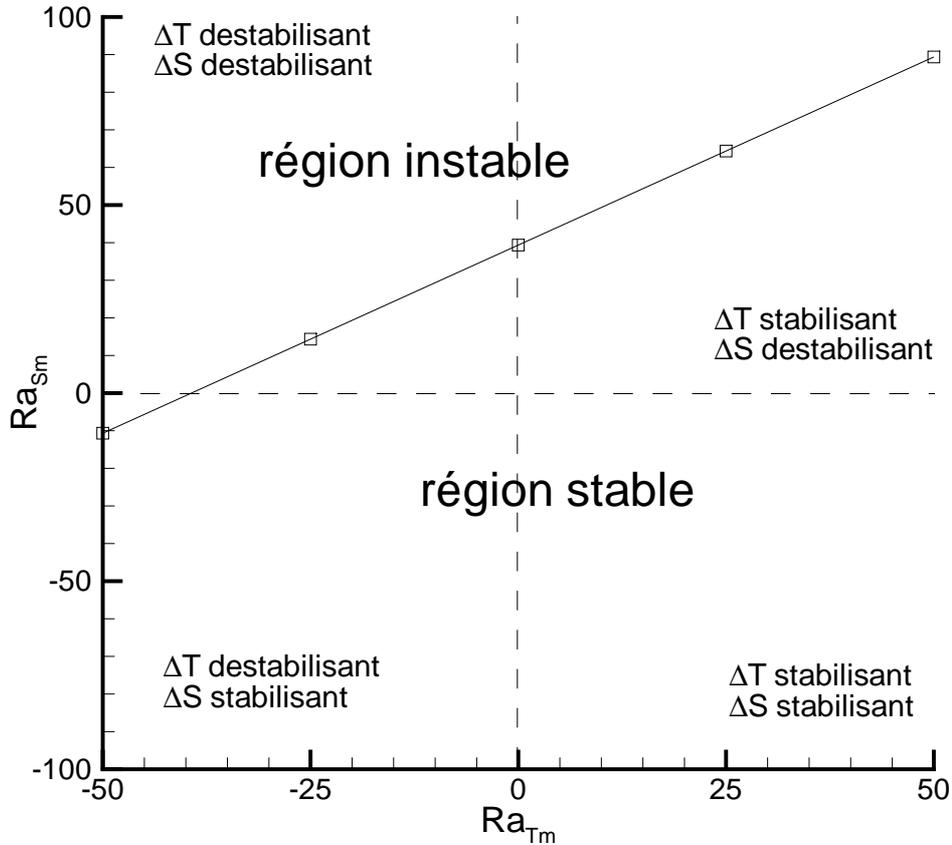


FIG. 4.27 – Nombre de Rayleigh solutal critique en fonction du nombre de Rayleigh thermique d’une couche complètement poreuse ($\hat{d} \rightarrow 0$).

4.2.3 Influence des paramètres caractéristiques

Les courbes $Ra_S \times Ra_T$, pour trois valeurs différentes du rapport des épaisseurs \hat{d} et $\varepsilon_T = 1$, sont présentées dans la figure (4.28). Comme pour les cas limites, lorsque Ra_T augmente (i.e., les forces thermiques deviennent de plus en plus stabilisantes), les gradients de concentration nécessaires pour déstabiliser le système deviennent plus importants. Cependant, on observe que les courbes pour $\hat{d} \neq 0$ ne sont pas des droites. Pour mieux comprendre ce phénomène, l’évolution du nombre d’onde critique κ en fonction de Ra_T est représentée sur la figure (4.29). Deux régions peuvent être clairement distinguées : pour des valeurs négatives de Ra_T , le mode de convection critique est celui aux grandes valeurs de κ , alors que le mode aux petites valeurs de κ est le plus critique pour des valeurs positives de Ra_T . Comme pour le cas de la convection naturelle thermique, les résultats montrent l’existence de deux modes de convection naturelle :

le mode aux grands nombres d'onde et le mode aux petits nombres d'onde.

Les lignes de courant et les profils de la vitesse verticale pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, $\varepsilon_T = 1$ et différentes valeurs de Ra_T sont présentés dans les figures (4.30) à (4.33), où les deux modes de convection sont mis en évidence. Contrairement au cas purement thermique, où une seule cellule convective est observée, on constate l'existence d'un régime multi-cellulaire lors du déclenchement de la convection thermosolutale. Pour $Ra_T = -20$ (figure 4.30), on observe trois cellules convectives contrarotatives dans la région fluide, et la vitesse verticale dans la région poreuse est essentiellement nulle. Lorsque Ra_T augmente, la longueur d'onde des cellules augmente (le nombre d'onde diminue), et à $Ra_T = 0$ (figure 4.31) on n'observe qu'une cellule confinée dans le fluide. Pour $Ra_T = +20$ (figure 4.32) l'écoulement commence à pénétrer dans la région poreuse. Finalement, pour $Ra_T = +50$ (figure 4.33) un ralentissement global du système est observé.

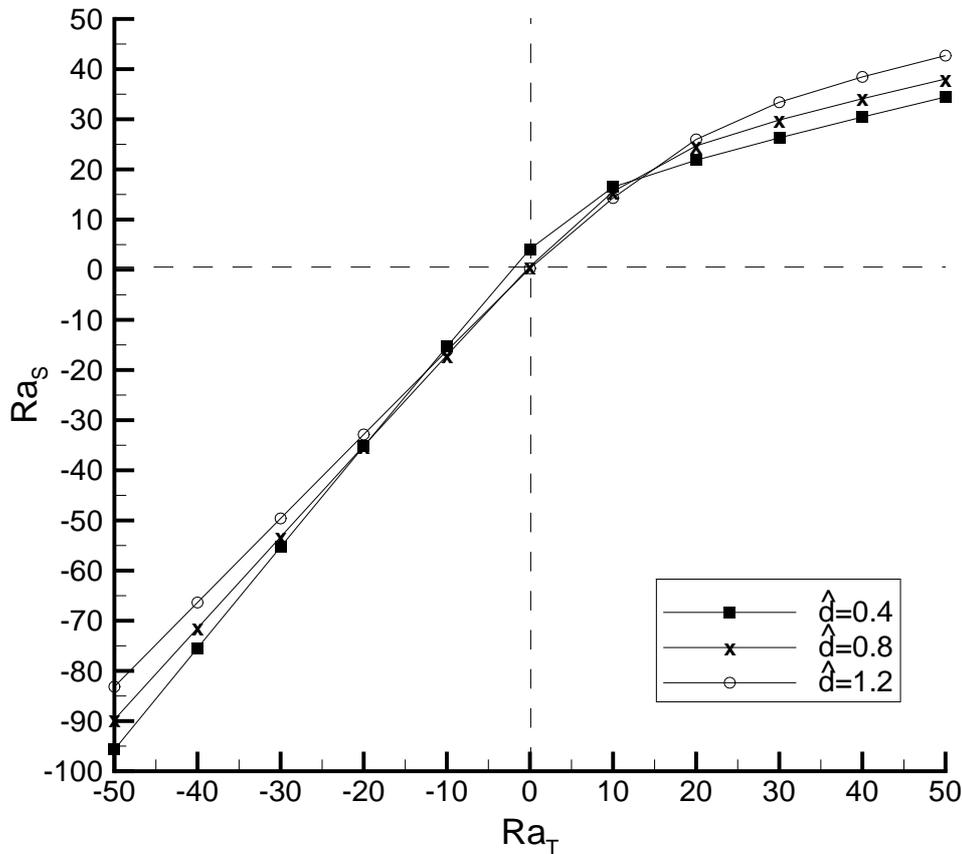


FIG. 4.28 – Nombre de Rayleigh solutal critique en fonction du nombre de Rayleigh thermique, pour trois valeurs différents du rapport des épaisseurs \hat{d} , $Da = 10^{-5}$ et $\varepsilon_T = 1$.

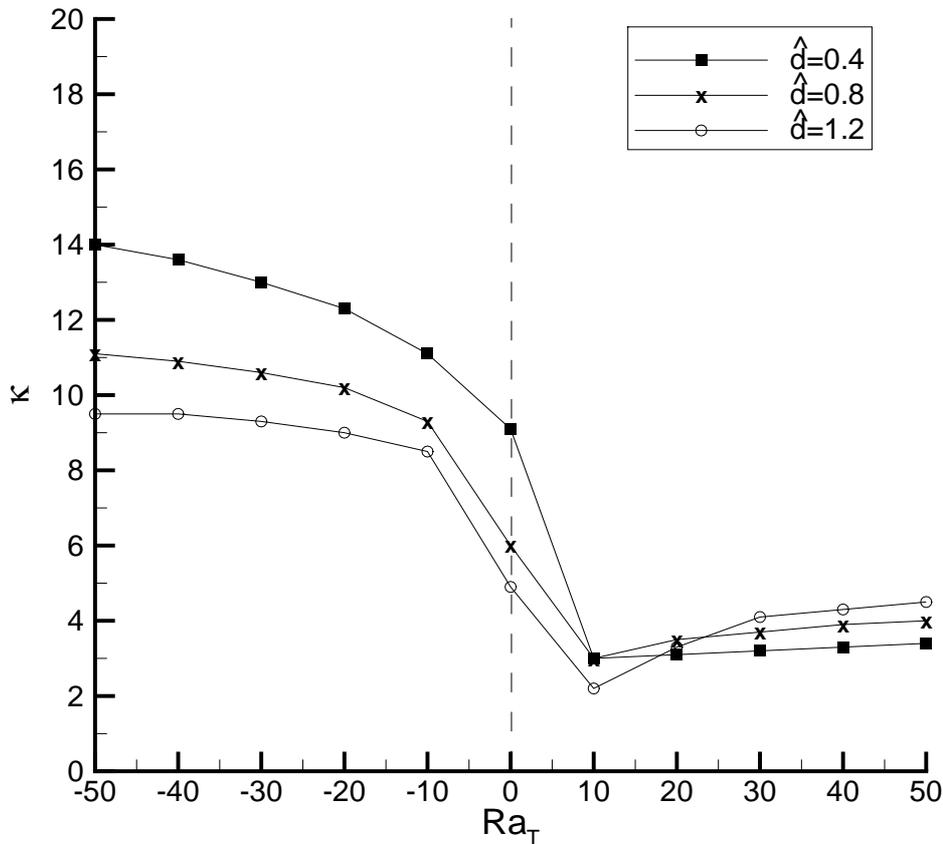


FIG. 4.29 – Nombres d’ondes correspondant aux nombres de Rayleigh solutal de la figure (4.28) en fonction du nombre de Rayleigh thermique.

Chen & Chen (1988) ont été les premiers à observer l’empilement vertical des cellules convectives dans le cas thermosolutal, à l’aide du modèle $2\Omega_D$. Ces derniers considèrent que le régime multi-cellulaire rend l’ensemble du système plus stable. L’utilisation du modèle 1Ω a permis à Zhao & Chen (2001) d’observer le même type de structuration des cellules convectives, sans mettre en évidence le comportement bimodal des courbes de stabilité. Dans ces études, le cas thermosolutal a été étudié uniquement pour un nombre de Rayleigh thermique fixé. À notre connaissance, notre travail est le seul à étudier l’influence de la variation du nombre de Rayleigh thermique, ce qui empêche une comparaison systématique avec les études précédentes.

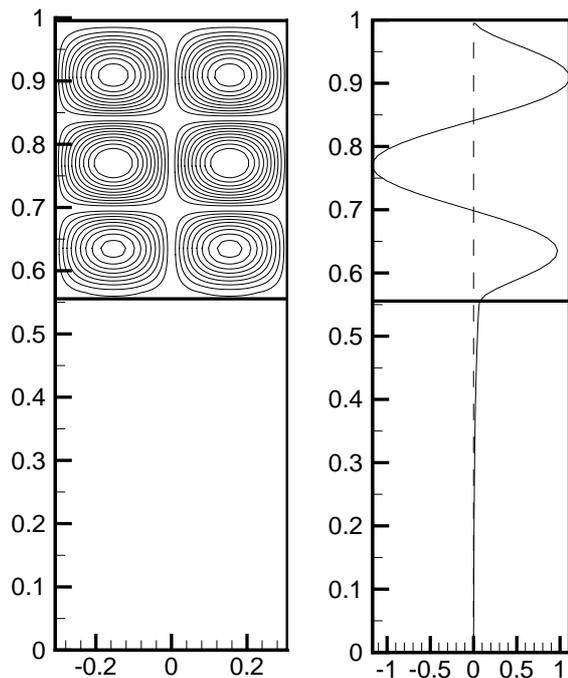


FIG. 4.30 – Lignes de courant ($\Psi_{max} = \pm 0.1$; $\Delta\Psi = 0.01$) et profil de vitesse verticale du déclenchement de la convection pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, $Ra_T = -20$ et $\kappa_{cr} = 10.2$. La ligne horizontale épaisse représente l'interface fluide-poreux.

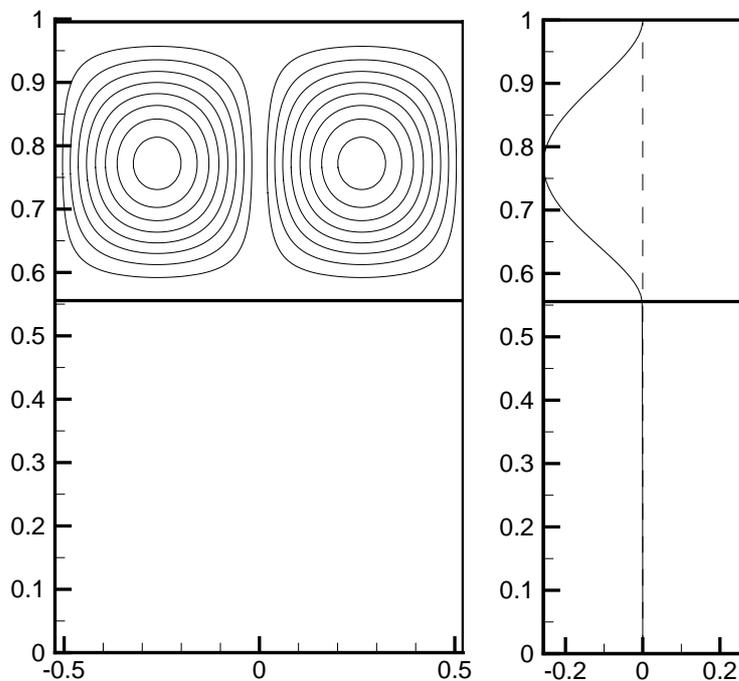


FIG. 4.31 – Lignes de courant ($\Psi_{max} = \pm 0.04$; $\Delta\Psi = 0.005$) et profil de vitesse verticale du déclenchement de la convection pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, $Ra_T = 0$ et $\kappa_{cr} = 6.0$.

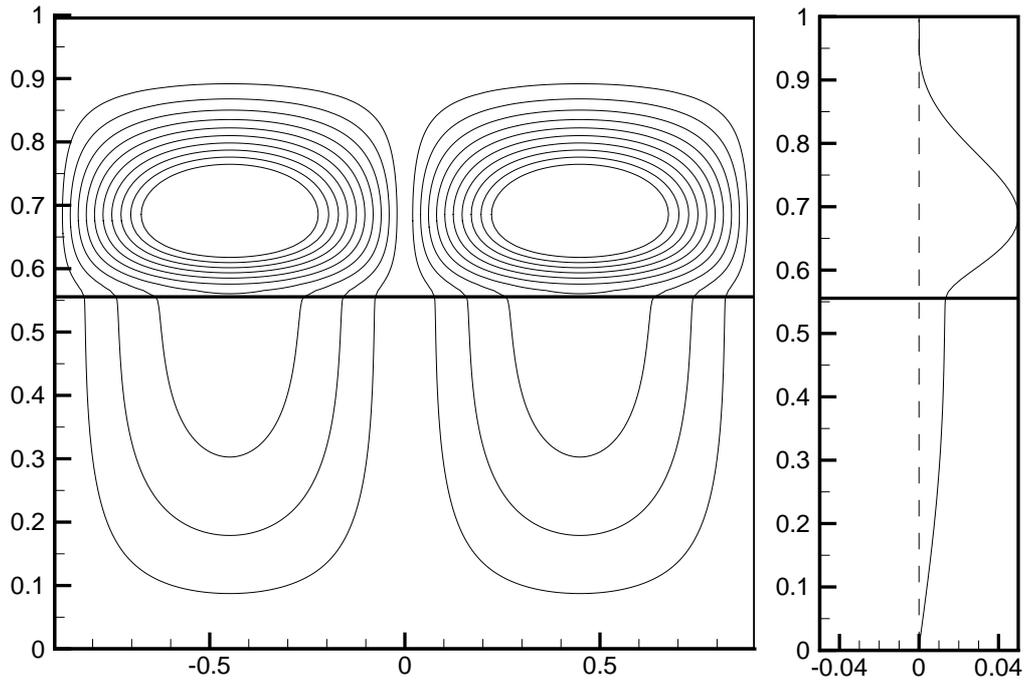


FIG. 4.32 – Lignes de courant ($\Psi_{max} = \pm 0.01$; $\Delta\Psi = 0.001$) et profil de vitesse verticale du déclenchement de la convection pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, $Ra_T = +20$ et $\kappa_{cr} = 3.5$.

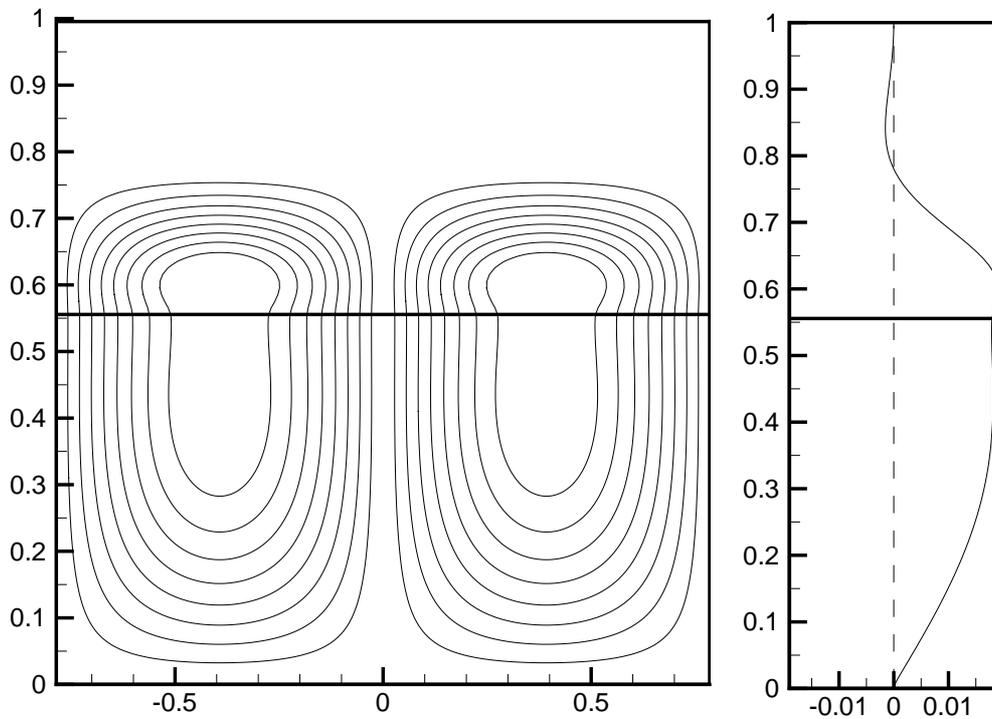


FIG. 4.33 – Lignes de courant ($\Psi_{max} = \pm 0.004$; $\Delta\Psi = 0.0005$) et profil de vitesse verticale du déclenchement de la convection pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, $Ra_T = +50$ et $\kappa_{cr} = 4.0$.

Une représentation des courbes de stabilité marginale en fonction de Ra_T et de κ est proposée pour plusieurs valeurs de \hat{d} sur les figures (4.34), (4.35) et (4.36). Ce type de représentation met clairement en évidence l'influence du nombre de Rayleigh thermique et l'évolution des différents modes. A $Ra_T = -20$, les courbes pour les trois valeurs de \hat{d} étudiés présentent un seul minimum aux grands nombres d'onde. De $Ra_T = -20$ a $Ra_T = 20$, le comportement bimodal devient plus en plus évident.

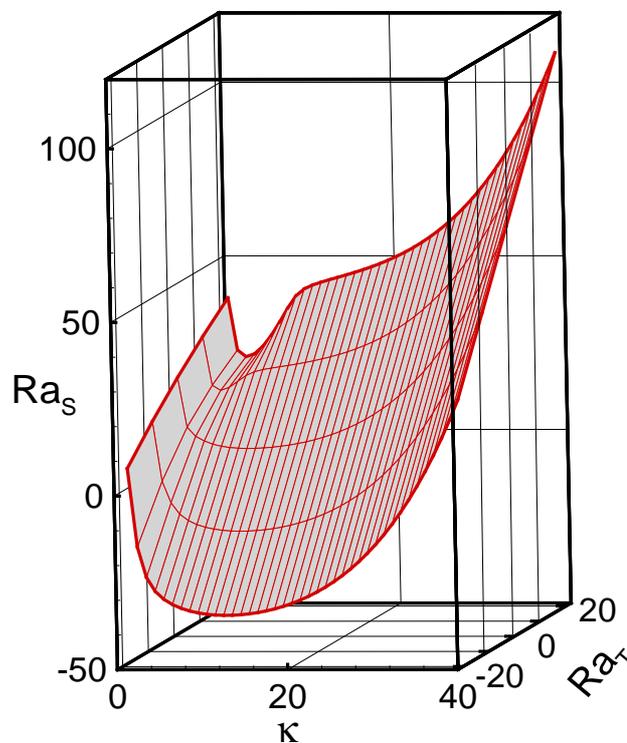


FIG. 4.34 – Limites de la stabilité pour $\hat{d} = 0.4$, $Da = 10^{-5}$, et $\varepsilon_T = 1$.

Enfin, l'influence du rapport des diffusivités thermiques ε_T pour $\hat{d} = 0.8$ est représentée sur la figure (4.37). On constate, bien entendu, que pour $Ra_T = 0$ (pas de forces de volume d'origine thermique) le paramètre ε_T n'a aucune influence sur le système. Par contre, l'augmentation de $|Ra_T|$ conduit à l'accroissement des écarts entre les courbes obtenues pour $\varepsilon_T = 0.7$ et 1.

Les courbes de stabilité marginale pour deux valeurs de Ra_T sont présentées sur les figures (4.38) et (4.39). Pour $Ra_T = -20$, figure (4.38), les gradients de température sont déstabilisants, i.e., la cavité est chauffée par le bas. On rappelle que, pour $\varepsilon_T = 1$, le déclenchement de la

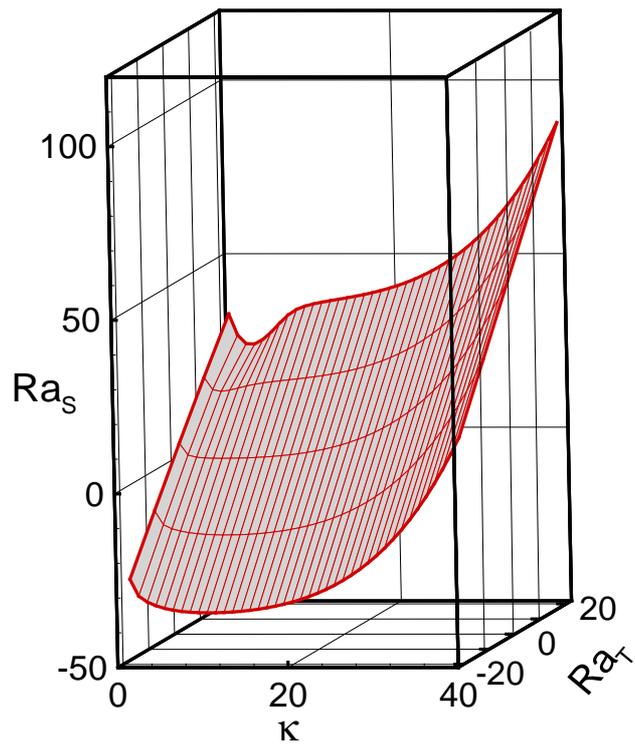


FIG. 4.35 – Limites de la stabilité pour $\hat{d} = 0.8$, $Da = 10^{-5}$, et $\varepsilon_T = 1$.

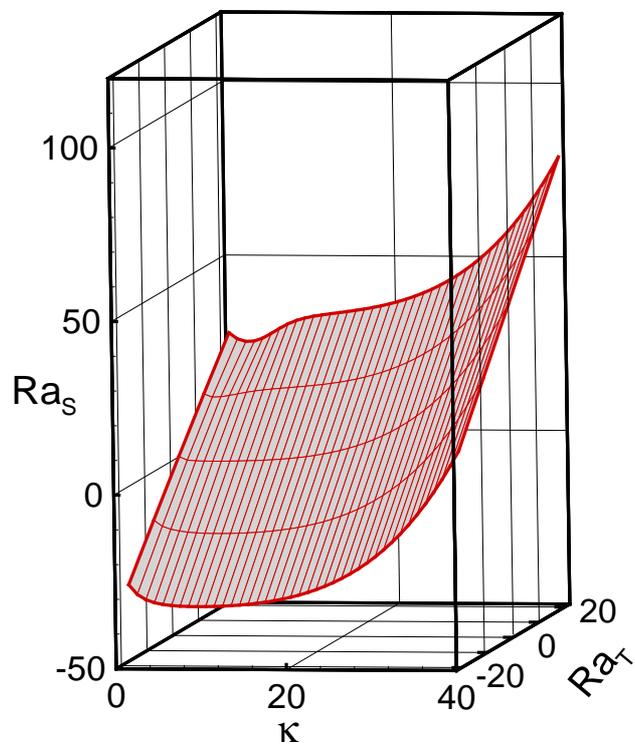


FIG. 4.36 – Limites de la stabilité pour $\hat{d} = 1.2$, $Da = 10^{-5}$, et $\varepsilon_T = 1$.

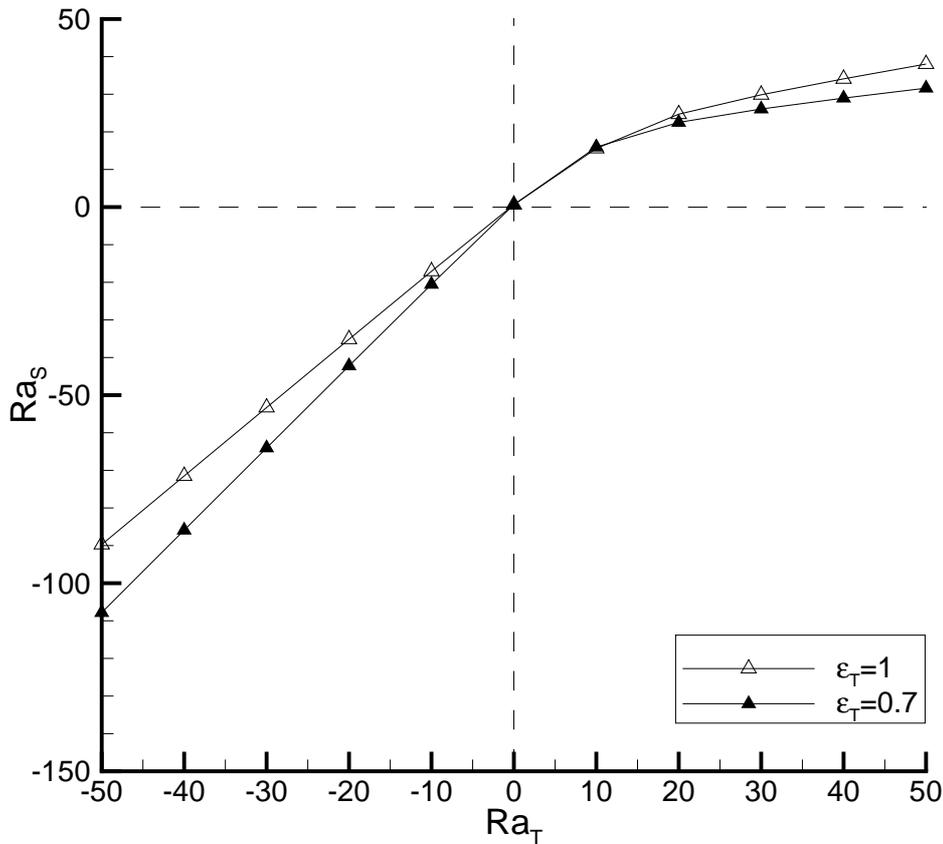


FIG. 4.37 – Influence du rapport des diffusivités thermiques ε_T , pour $\hat{d} = 0.8$ et plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh thermique Ra_T .

convection a lieu dans la région fluide (voir les lignes de courant présentées dans la figure 4.30). Dans ce cas, lorsque ε_T diminue, la chaleur diffuse mieux dans le milieu poreux. Par conséquent, la température à l'interface augmente, et les gradients de température dans le fluide deviennent plus importantes, provoquant la déstabilisation de la convection dans cette région. Pour $Ra_T = 20$, figure (4.39), les gradients de température sont stabilisants. Comme nous l'avons déjà illustré sur la figure (4.32) pour cette valeur de Ra_T , le mouvement convectif est présent dans toute la région poreuse et le mode correspondant aux faibles nombres d'onde est le plus critique. Dans ce cas, on constate que la diminution de ε_T déstabilise le mode correspondant aux faibles κ et stabilise le mode aux grandes valeurs de κ .

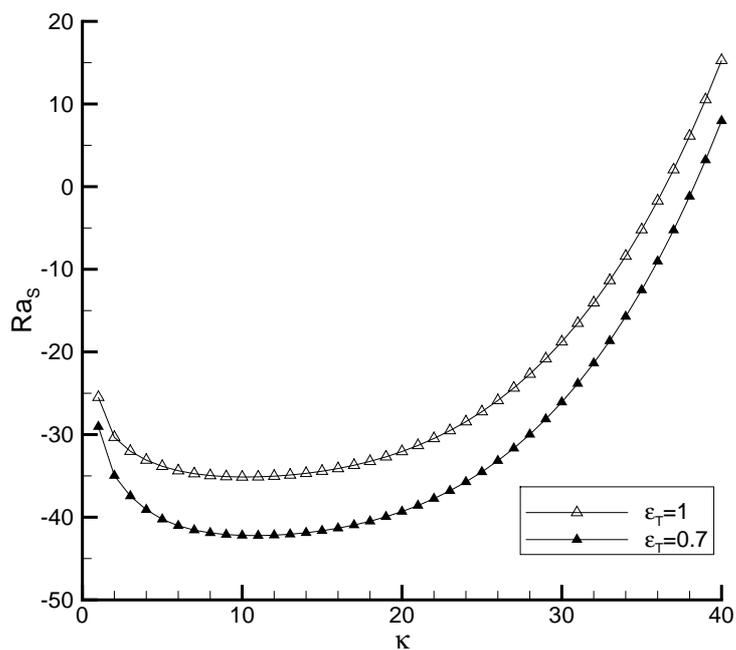


FIG. 4.38 – Courbes de stabilité marginale obtenues pour deux valeurs du rapport des diffusivités thermiques ε_T , $\hat{d} = 0.8$ et $Ra_T = -20$.

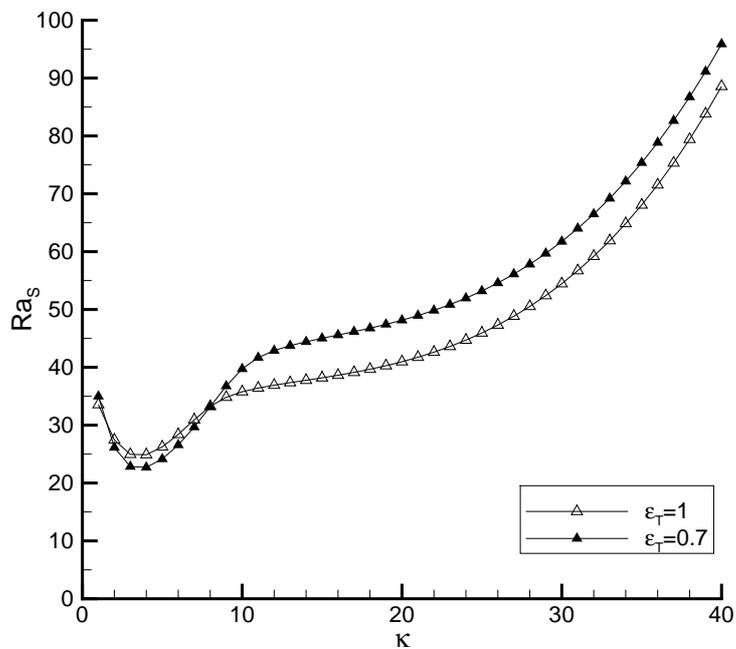


FIG. 4.39 – Courbes de stabilité marginale obtenues pour deux valeurs du rapport des diffusivités thermiques ε_T , $\hat{d} = 0.8$ et $Ra_T = +20$.

Conclusions et Perspectives

Ce mémoire est consacré à l'étude du déclenchement de la convection naturelle d'origine thermique et thermosolutale en milieu fluide-poreux. Nous avons considéré un système constitué d'une couche fluide superposée à un milieu poreux isotrope et homogène, auxquels sont imposés des différences de température et de concentration entre les parois horizontales externes.

Dans un premier temps, nous avons mené une comparaison quantitative des modèles mathématiques existants pour la représentation du transport de quantité de mouvement, de chaleur et de masse dans des systèmes multi-domaines. Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire des modèles à un (1Ω) et deux domaines ($2\Omega_{DB}$), tous deux incluant le terme de Brinkman, ont été comparés avec ceux du modèle à deux domaines utilisant la formulation de Darcy ($2\Omega_D$). On rappelle que les résultats de ce dernier ont été obtenus par Carr & Straughan (2003). Tout d'abord, cette comparaison nous a permis de constater que les modèles $2\Omega_{DB}$ et $2\Omega_D$ conduisent à des résultats similaires, indiquant que l'inclusion du terme de Brinkman joue un rôle secondaire dans la stabilité du système, pour les valeurs du nombre de Darcy étudiés. Quant au modèle 1Ω , on a constaté que la formulation classique présentée par Zhao & Chen (2001) ne permet pas de satisfaire les conditions interfaciales appropriées lorsque l'interface fluide/poreux est caractérisée par une discontinuité des propriétés physiques. Il faut alors modifier la formulation en effectuant les différentiations au sens des distributions. Ainsi, le modèle à un domaine conduit aux mêmes seuils de stabilité que les formulations à deux domaines. Nous avons ensuite analysé l'influence de la variation du coefficient de saut des contraintes tangentielles à l'aide du modèle $2\Omega_{DB}$. Les résultats présentés dans cette partie du travail montrent que le traitement de l'interface peut altérer significativement les critères de stabilité du système. Enfin, l'influence des principaux paramètres caractéristiques de la convection thermique et thermosolutale a été mise en évidence. Il a été montré que les valeurs du rapport des épaisseurs, du rapport des diffusivités thermiques et de la perméabilité du milieu

poreux sont fondamentales dans la détermination du mode de convection plus critique. Dans le cas thermosolutal, le nombre de Rayleigh thermique joue également un rôle important. Nous avons constaté que, contrairement au cas purement thermique, un régime multi-cellulaire peut être observé lors du déclenchement de la convection thermosolutale. Le comportement bimodal des courbes de stabilité a été observé soit dans le cas thermique, que dans le cas thermosolutal, mais pour une gamme différente des paramètres. Les conclusions principales de cette étude sont :

1. *Dans le modèle à un domaine, la différentiation des fonctions discontinues doit être effectuée au sens des distributions*

On a montré que les modèles à un et deux domaines peuvent conduire à des résultats sensiblement différents lorsque la transition entre le fluide et le milieu poreux est décrite par une discontinuité des propriétés physiques. Cela est dû au fait que les fonctions discontinues ne peuvent pas être différentiées dans le sens ordinaire d'une fonction. Nos résultats montrent qu'en effectuant la différentiation au sens des distributions, le modèle à un domaine conduit aux mêmes seuils de stabilité que les modèles à deux domaines. On remarque que, lorsque les propriétés varient continument dans l'espace, les termes dérivés de la théorie des distributions sont nuls, et on retrouve la formulation 1Ω présentée dans la section 2.3.

2. *Chaque mode de convection peut correspondre au mode le plus instable, selon les paramètres du système.*

Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire montrent en effet que le comportement bimodal des courbes de stabilité, ainsi que le mode de convection plus critique, dépendent fortement du rapport d'épaisseurs, de la perméabilité du milieu poreux et du rapport des diffusivités thermiques. Il serait intéressante de mener une étude non-linéaire pour observer la possible existence de solutions sous-critiques.

3. *L'augmentation du coefficient de saut β déstabilise le mode de convection fluide, mais n'a pas d'influence dans le mode poreux.*

Cela est dû au fait que dans le mode fluide, les cellules convectives sont localisées près de l'interface, et donc, ce type d'écoulement est évidemment plus influencé par la structure de la région interfaciale. La diminution de β provoque un ralentissement de la vitesse à

l'interface, et par conséquent, stabilise le mode fluide. Un comportement semblable a été observé pour l'augmentation du coefficient de glissement α de la condition de Beavers & Joseph. Ces deux coefficients modélisent l'hétérogénéité de la structure poreuse dans la zone de transition interfaciale.

4. *Le comportement bimodal des courbes de stabilité marginale est également observé dans le cas de la convection thermosolutale.*

Nous avons montré que les deux modes de convection naturelle observés pour la convection d'origine purement thermique sont également présents dans le cadre de la convection thermosolutale. Dans ce cas, le nombre de Rayleigh thermique joue un rôle déterminant. L'étude d'une gamme plus large des valeurs des paramètres caractéristiques (rapport d'épaisseurs, rapport des diffusivités thermiques) du cas thermosolutal est envisagé.

Nous avons choisi d'utiliser une méthode hybride numérique-analytique dans la résolution des problèmes aux valeurs propres résultants de l'analyse de stabilité linéaire. On considère que la Technique de la Transformation Intégrale Generalisée est bien adaptée à la résolution des systèmes différentiels résultants des modèles à un et deux domaines. Les critères de stabilité obtenus à l'aide des modèles 1Ω et $2\Omega_{DB}$ en utilisant la méthode GITT ont présenté un bon accord avec les analyses précédentes (Zhao & Chen, 2001; Chen & Chen, 1988). D'une part la formulation 1Ω est beaucoup plus simple et mène à un seul problème auxiliaire pour chaque champ (W, T, \mathcal{S}), d'autre part la résolution du système $2\Omega_{DB}$ permet une implémentation très simple des différentes conditions de saut à l'interface fluide-poreux.

Concernant la convection thermosolutale, plusieurs aspects restent encore incompris. Ce problème présente un grand nombre de paramètres et le couplage entre leurs effets sur la stabilité du système n'est pas évident. Dans un premier temps, l'analyse d'une gamme plus large des valeurs des paramètres caractéristiques est envisagée. L'étude du cas thermosolutal s'inscrit dans la continuité des efforts de l'équipe pour une meilleure compréhension des phénomènes de transport au sein de la zone de croissance dendritique lors de la solidification des mélanges multi-composants. C'est la raison pour laquelle une autre extension envisagée consiste à étudier, dans un deuxième temps, l'influence de la variation spatiale continue des propriétés macroscopiques (*hétérogénéités évolutives*) du milieu poreux.

Bibliographie

- ALVES, L. S. B., COTTA, R. M., & PONTES, J. 2002. Stability analysis of natural convection in porous cavities through integral transforms. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **45**, 1185–1195.
- AMBERG, G., & HOMS, G. M. 1993. Nonlinear analysis of buoyant convection in binary solidification with application to channel formation. *J. Fluid Mech.*, **252**, 79–98.
- ANDERSON, D. M., & WORSTER, M. G. 1995. Weakly nonlinear analysis of convection in mushy layers during the solidification of binary alloys. *J. Fluid Mech.*, **302**, 307–331.
- APARECIDO, J.B., & COTTA, R.M. 1990a. Laminar flow inside hexagonal ducts. *Comp. Mechanics*, **6**, 93–100.
- APARECIDO, J.B., & COTTA, R.M. 1990b. Thermally developing laminar flow inside rectangular ducts. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **33**, 341–347.
- APARECIDO, J.B., & COTTA, R.M. 1992. Laminar thermally developing flow inside right triangular ducts. *Appl. Scientific Research*, **49**, 355–368.
- ARQUIS, E., & CALTAGIRONE, J.P. 1984. Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide - milieu poreux : application à la convection naturelle. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **299**.
- BAOHUA, C., & COTTA, R.M. 1993. Integral transform analysis of natural convection in porous enclosures. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, **17**, 787–801.
- BAYAZITOBLU, Y., & COTTA, R.M. 1980. On the solution of Graetz type problems with axial conduction. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **23**, 1399–1402.
- BEAVERS, G. S., & JOSEPH, D. D. 1967. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, **30**, 197–207.
- BEAVERS, G. S., SPARROW, E. M., & MAGNUSON, R. A. 1970. Experiments on coupled parallel flow in a channel and a bounding porous medium. *J. Basic Eng.*, **92**, 843–848.

- BEAVERS, G.S., SPARROW, E.M., & MASHA, B.A. 1974. Boundary condition at a porous surface which bounds a fluid flow. *AIChE J.*, **20**, 596–597.
- BECKERMANN, C., VISKANTA, R., & RAMADHYANI, S. 1988. Natural convection in vertical enclosures containing simultaneously fluid and porous layers. *J. Fluid Mech.*, **186**, 257–284.
- BLEST, D.C., MCKEE, S., ZULKIFLE, A.K., & MARSHALL, P. 1999a. Curing simulation by autoclave resin infusion. *Composites Science and Technology*, **59**, 2297–2313.
- BLEST, D.C., DUFFY, B.R., MCKEE, S., & ZULKIFLE, A.K. 1999b. Curing simulation of thermoset composites. *Composites : Part A*, **30**, 1289–1309.
- BOGADO LEITE, S.Q., OZISIK, M.N., & VERGHESE, K. 1980. On the solution of linear diffusion problems in media with moving boundaries. *Nuclear Science and Eng.*, **76**, 345–350.
- BREUGEM, W. P., BOERSMA, B. J., & UITTENBOGAARD, R. E. 2005. The laminar boundary layer over a permeable wall. *Transp. Porous Med.*, **59**, 267–300.
- BRINKMAN, H.C. 1947. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *App. Sci. Res.*, **A1**, 27–34.
- CARR, M. 2004. Penetrative convection in a superposed porous-medium-fluid layer via internal heating. *J. Fluid Mech.*, **509**, 305–329.
- CARR, M., & STRAUGHAN, B. 2003. Penetrative convection in a fluid overlying a porous layer. *Advances in Water Res.*, **26**, 263–276.
- CHANDESRI, M. 2006. *Modélisation des écoulements turbulents dans les milieux poreux et à l'interface avec un milieu libre*. Ph.D. Dissertation, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, France.
- CHANDESRI, M., & JAMET, D. 2006. Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a Poiseuille flow. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **49 (13-14)**, 2137–2150.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press.
- CHEN, F., & CHEN, C. F. 1988. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer. *J. Heat Transfer*, **110**, 403–409.
- CHEN, F., & CHEN, C. F. 1989. Experimental investigation of convective stability in a superposed fluid and porous Layer when heated from below. *J. Fluid Mech.*, **207**, 311–321.
- CHEN, F., & CHEN, C. F. 1992. Convection in superposed fluid and porous layers. *J. Fluid Mech.*, **234**, 97–119.

-
- CHEN, F., LU, J. W., & YANG, T. L. 1994. Convective instability in ammonium chloride solution directionally solidified from below. *J. Fluid Mech.*, **276**, 163–187.
- CHUNG, C. A., & CHEN, F. 2000. Onset of plume convection in mushy layers. *J. Fluid Mech.*, **408**, 53–82.
- COTTA, R. M. 1993. *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. CRC Press, Boca Raton, FL.
- COTTA, R. M. (ed). 1998. *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering*. Begell House, New York.
- COTTA, R. M., & MIKHAILOV, M. D. 1997. *Heat Conduction Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*. Wiley, UK.
- COTTA, R.M. 1990. Hybrid numerical-analytical approach to nonlinear diffusion problems. *Numerical Heat Transfer, Part B*, **17**, 217–226.
- COTTA, R.M., & OZISIK, M.N. 1986. Laminar forced convection in ducts with periodic variation of inlet temperature. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **29**, 1495–1501.
- COTTA, R.M., SANTOS, C.F.M., & APARECIDO, J.B. 1993. Transient fin analysis with time-dependent surface dissipation. *Latin Amer. Appl. Researchs*, **23**, 11–18.
- DARCY, H.P.G. 1856. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Victor Dalmont, Paris.
- DESAIVE, TH., LEBON, G., & HENNENBERG, M. 2001. Coupled capillary and gravity-driven instability in a liquid film overlying a porous layer. *Phys. Rev. E*, **64**(6), 066304.
- EINSTEIN, A. trans. in 1956. *Theory of the Brownian Movement*. Dover.
- EL-HABEL, F., MENDOZA, C., & BAGTZOGLU, A.C. 2002. Solute transport in open channel flows and porous streambeds. *Advances in Water Res.*, **25**, 455–469.
- EWING, R.E., & WEEKES, S. 1991. Numerical methods for contaminant transport in porous media. *Computational Mathematics (Marcel Dekker, Inc., New York)*, **202**, 75–95.
- FORCHHEIMER, P. 1914. *Hydraulik*. Leipzig and Berlin.
- GOBIN, D., GOYEAU, B., & SONGBE, J. 1988. Double diffusive natural convection in a composite fluid-porous layer. *J. Heat Transfer*, **120**, 234–242.
- GOBIN, D., GOYEAU, B., & NECULAE, A. 2005. Convective heat and solute transfer in partially porous cavities. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **48**, 1898–1908.
- GOYEAU, B., LHUILLIER, D., GOBIN, D., & VELARDE, M.G. 2003. Momentum transport at a fluid-porous interface. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **46**, 4071–4081.

- HIRATA, S.C., GOYEAU, B., GOBIN, D., & COTTA, R.M. 2006. Stability of natural convection in superposed fluid and porous layers using integral transforms. *Numerical Heat Transfer Part B : Fundamentals*, **50** (5), 409–424.
- HIRATA, S.C., GOYEAU, B., GOBIN, D., CARR, M., & COTTA, R.M. 2007. Linear stability of natural convection in superposed fluid and porous layers : influence of the interfacial modelling. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **50**, 1356–1367.
- HUTTER, K., & STRAUGHAN, B. 1999. Models for convection in thawing porous media in support of the subsea permafrost equations. *J. Geophys. Res. B*, **104**, 29249–29260.
- JONES, I.P. 1973. Low Reynolds number flow past a porous spherical shell. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **73**, 231–238.
- KAKAÇ, S., LI, W., & COTTA, R.M. 1990. Unsteady laminar forced convection in ducts with variation of inlet temperature. *Int. J. Heat Transfer*, **112**, 913–920.
- KATAOKA, I. 1986. Local instant formulation of two-phase flow. *Int. J. Multiphase Flow*, **12**(5), 745–758.
- KAVIANY, M. 1991. *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. Springer-Verlag, New York.
- KIM, W.S., & OZISIK, M.N. 1987. Transient laminar forced convection in ducts with suddenly applied uniform wall heat flux. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **30**, 1753–1756.
- KIM, W.S., & OZISIK, M.N. 1989. Turbulent forced convection inside a parallel-plate channel with periodic variation of inlet temperature. *Int. J. Heat Transfer*, **111**, 882–888.
- KOPLIK, J., LEVINE, H., & ZEE, A. 1983. Viscosity renormalization in the Brinkman equation. *Phys. Fluids*, **26**, 2864–2870.
- LAPWOOD, E.R. 1948. Convection of a fluid in a porous medium. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **44**, 508–521.
- LARSON, R.E., & HIGDON, J.J.L. 1986. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part 1 : Axial flow. *J. Fluid Mech.*, **166**, 449–472.
- LARSON, R.E., & HIGDON, J.J.L. 1987. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part 2 : Transverse flow. *J. Fluid Mech.*, **178**, 119–136.
- LE BARS, M., & WORSTER, M. G. 2006a. Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium : implication for binary alloy solidification. *J. Fluid Mech.*, **550**, 149–173.

-
- LE BARS, M., & WORSTER, M. G. 2006b. Solidification of a binary alloy : finite-element, single-domain simulation and new benchmark solutions. *J. Comp. Physics*, **216**(1), 247–263.
- LEBRETON, P., CALTAGIRONE, J.P., & ARQUIS, E. 1991. Natural convection in a square cavity with thin porous layers in its vertical walls. *J. Heat Transfer*, **113**, 892–898.
- LEIROZ, A.J.K., & COTTA, R.M. 1993. On the solution of nonlinear elliptic convection-diffusion problems through the integral transform method. *Numerical Heat Transfer, Part B*, **23**, 401–411.
- LUNDGREN, T.S. 1972. Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. *J. Fluid Mech.*, **51**, 273–299.
- MACHADO, H.A., & COTTA, R.M. 1995. Integral transform method for boundary layer equations in simultaneous heat and fluid flow problems. *Int. J. Num. Meth. Heat and Fluid Flow*, **5**, 225–237.
- MCKAY, G., & STRAUGHAN, B. 1993. Patterned ground formation under water. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **5**, 145–162.
- MIKHAILOV, M. D. 1975. On the solution of the heat equation with time-dependent coefficient. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **18**, 344–345.
- MIKHAILOV, M. D., & COTTA, R.M. 1994. Integral transform solution of eigenvalue problems. *Comm. Num. Methods in Engineering*, **10**, 827–835.
- MIKHAILOV, M.D., & OZISIK, M.N. 1984. *Unified Analysis & Solutions of Heat and Mass Diffusion*. John Wiley & Sons, New York.
- NEALE, G., & NADER, W. 1974. Practical significance of Brinkman extension of Darcy's law : coupled parallel flows within a channel and a boundary porous medium. *Can. J. Chem. Eng.*, **52**, 472–478.
- NIELD, D. A. 1967. The thermohaline Rayleigh-Jeffreys problem. *J. Fluid Mech.*, **29**(3), 545–558.
- NIELD, D. A. 1968. Onset of thermohaline convection in a porous medium. *Water Resources Research*, **4**, 553–560.
- NIELD, D. A. 1977. Onset of convection in a fluid layer overlying a layer of a porous medium. *J. Fluid Mech.*, **81**, 513–522.

- NIELD, D. A. 1991. The limitations of the Brinkman-Forchheimer equation in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **12**(3), 269–272.
- NIELD, D.A. 1983. The boundary correction for the Rayleigh-Darcy problem : limitations of the Brinkman equation. *J. Fluid Mech.*, **128**, 37–46.
- NIELD, D.A., & BEJAN, A. 2006. *Convection in Porous Media*. Springer-Verlag, New York.
- OCHOA-TAPIA, J.A., & WHITAKER, S. 1995a. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid - I. Theoretical development. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **38**, 2635–2646.
- OCHOA-TAPIA, J.A., & WHITAKER, S. 1995b. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid - II. Comparison with experiment. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **38**, 2647–2655.
- OZISIK, M. N. 1993. *Heat Conduction*. John Wiley and Sons.
- OZISIK, M.N., & GUÇERI, S.I. 1977. A variable eigenvalue approach to the solution of phase-change problems. *Can. J. Chem. Eng.*, **55**, 145–148.
- OZISIK, M.N., & MURRAY, R.L. 1974. On the solution of linear diffusion problems with variable boundary condition parameters. *J. Heat Transfer*, **96**, 48–51.
- PEREZ GUERRERO, J. S., & COTTA, R. M. 1992. Integral transform solution for the lid-driven cavity flow problem in streamfunction-only formulation. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **15**, 399–409.
- RICHARDSON, S. 1971. A model for the boundary condition of a porous material, Part 2. *J. Fluid Mech.*, **49**, 327–336.
- SAFFMAN, P. G. 1971. On the boundary condition at the surface of a porous medium. *Stud. Appl. Math.*, **2**, 93–101.
- SANTOS, C.A.C., COTTA, R.M., & OZISIK, M.N. 1991. Heat transfer enhancement in laminar flow within externally finned tubes. *Int. J. Heat and Technology*, **9**, 46–68.
- SCHWARTZ, L. 1965. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris.
- SCOFANO NETO, F., & COTTA, R.M. 1992. Conterflow double-pipe heat exchangers analysis through a mixed lumped-differential formulation. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **35**, 1723–1731.

-
- SERFATY, R., & COTTA, R.M. 1992. Hybrid analysis of transient nonlinear convection-diffusion problems. *Int. J. Num. Meth. Heat and Fluid Flow*, **2**, 55–62.
- SILVA, J.B.C., COTTA, R.M., & APARECIDO, J.B. 1992. Analytical solutions to simultaneously developing laminar flow inside parallel-plates channel. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **35**, 887–895.
- SOMERTON, C. W., & CATTON, I. 1982. On the thermal instability of superposed porous and fluid layers. *J. of Heat Transfer*, **104**, 160–165.
- SUN, W.J. 1973. *Convective Instability in Superposed Porous and Free Layers*. Ph.D. Dissertation, University of Minnesota, Minneapolis, MN.
- TASLIM, M.E., & NARUSAWA, U. 1989. Thermal stability of horizontally superposed porous and fluid layers. *J. Heat Transfer*, **111**, 357–362.
- TAYLOR, G. I. 1971. A model for the boundary condition of a porous material, Part 1. *J. Fluid Mech.*, **49**, 319–326.
- VAFAI, K., & KIM, S. J. 1990. Fluid mechanics of the interface region between a porous medium and a fluid layer - an exact solution. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **11(3)**, 254–256.
- VAFAI, K., & KIM, S. J. 1995. On the limitations of the Brinkman-Forchheimer-extended Darcy equation. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **16**, 11–15.
- VICK, B., & WELLS, R.G. 1986. Laminar flow with an axially varying heat transfer coefficient. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **29**, 1881–1889.
- WEISMAN, C., LE QUÉRE, P., & FIRDAOUS, M. 1999. Sur la solution exacte de la convection naturelle en cavité partiellement remplie d'un milieu poreux. *C. R. Acad. Sci.*, **327**, 235–240.
- WHITAKER, S. 1999. *The Method of Volume Averaging (Theory and Applications of Transport in Porous Media)*. Springer.
- WORSTER, M. G. 1992. Instabilities of the liquid and mushy regions during solidification of alloys. *J. Fluid Mech.*, **237**, 649–669.
- ZHAO, P., & CHEN, C. F. 2001. Stability analysis of double-diffusive convection in superposed fluid and porous layers using a one-equation model. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **44**, 4625–4633.