HAL
open science

Mesure optique ultrasensible et refroidissement par pression de radiation d´un micro-résonateur mécanique

Olivier Arcizet

To cite this version:

Olivier Arcizet. Mesure optique ultrasensible et refroidissement par pression de radiation d´un micro-résonateur mécanique. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT : . tel-00175959

HAL Id: tel-00175959

https://theses.hal.science/tel-00175959

Submitted on 1 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE KASTLER BROSSEL

Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Olivier Arcizet

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

Mesure optique ultrasensible et refroidissement par pression de radiation d'un micro-résonateur mécanique.

Soutenue le 8 décembre 2006 devant le jury composé de :

M.	Joël CHEVRIER	Rapporteur
M.	Pierre-François COHADON	Membre invité
M.	Claude DELALANDE	
M.	Antoine HEIDMANN	Directeur de thèse
M.	Ariel LEVENSON	Rapporteur
M.	Francesco MARIN	
M.	Michel PINARD	Directeur de thèse

Remerciements

Une thèse c'est compliqué. Il y a des jours avec et d'autres sans, des jours où on semble comprendre, d'autres non. Pour endurer tout ça, il faut être bien armé. J'ai eu la chance d'avoir à mes cotés des amis géniaux, souvent en thèse également, une famille formidable et une femme unique. Je les remercie du fond du cœur pour avoir enduré ces modulations d'humeur et cet emploi du temps incertain. Ils m'ont aidé à me sentir si bien à l'extérieur du labo, ce qui m'a permis d'être bien également à l'intérieur. Un effet "antibifidus" en quelque sorte.

J'ai effectué ce travail au laboratoire Kastler Brossel, sous la direction d'Antoine Heidmann ainsi que Michel Pinard dans l'équipe "Mesure et bruits fondamentaux" durant la période 2002-2006. Tout au long de ces années, j'ai bénéficié de leurs immenses connaissances, de leur disponibilité et de leur soutien. Je les rmercie pour tout ce qu'ils m'ont transmis, de ce cadre de travail exceptionnel dont ils m'ont fait bénéficier et pour le plaisir que j'ai eu à travailler dans l'équipe.

Un grand merci également à tous les autres membres de l'équipe : à Tristan Briant pour ses nombreux coups de main, en informatique, électronique et pour avoir partagé le bureau, à Pierre-François Cohadon pour sa bonne humeur, sa disponibilité et ses conseils, à Thomas Caniard avec qui j'ai partagé la salle de manip, ainsi qu'à Julien Lebars et Jean-Michel Courty. Bonne continuation à Chiara Molinelli et Pierre Verlot, les nouveaux entrants dans l'équipe. Merci à Chiara pour son enthousiasme, sa bonne humeur et pour ne m'avoir pas tenu rigueur des opacités expérimentales.

Je tiens à remercier chaleureusement Monique Bonammy, Laetitia Morel et Viviane Tia pour tout leur travail au secrétariat, leur efficacité, leur patience et leur gentillesse, ainsi que pour les bonbons.

Je remercie également les membres des services techniques du labo, qui m'ont grandement aidé au cours de ces années et sans qui l'expérience n'aurait pas pu avancer. Merci à Corinne Poisson et Serge Begon du service d'informatique pour leur très grande disponibilité. Merci à Jean Pierre Opkisz, Brigite Delamour et Mohammed Boujrad du département d'électronique pour l'aide et les conseils sur les montages. Merci à Florence Thibout pour ses supports et les cours de verrerie. Merci à Pascal Travers, Frédéric Farci, Christophe Rafaillac et Saysavanh Souramasing de l'atelier de mécanique pour tout le travail réalisé. Merci à Pascal pour la qualité de son travail et ses conseils.

La liste serait trop longue à établir, alors j'adresse un remerciement général à tous les autres membres du labo qui m'ont aidé par leurs conseils, par les diverses discussions qu'on a pu avoir, par leurs enseignements, ou par les prêts de matériel à plus ou moins long terme. Merci à tous ceux qui font que l'ambiance à l'antenne "Jussieu" du laboratoire est si sympathique et stimulante.

Je tiens à remercier Claude Delalande et Francesco Marin d'avoir accepté de faire partie

de mon jury de thèse, ainsi qu'à Joël Chevrier et Ariel Levenson pour avoir également accepté la charge de rapporteur malgré un calendrier plus que serré.

Les micro-miroirs ont été réalisés dans le cadre d'une collaboration avec l'ESIEE, le LMA et l'ESPCI. Les résultats expérimentaux obtenus avec les micro-miroirs sont intimement liés à leur compétence et je tiens à les remercier tant pour la qualité de leur travail que pour leur contribution active et enthousiaste au projet. Un grand merci à l'équipe de l'ESIEE, en particulier à Lionel Rousseau pour la gravure des micro-miroirs ainsi que pour ses conseils. Merci à Olivier Français pour la mise en relation des équipes. Un grand merci également à l'équipe du LMA qui a réalisé le traitement optique des micro-miroirs : Christophe Michel, Jean-Marie Mackowski et Laurent Pinard. La qualité des résultats obtenus reflète, c'est le cas de le dire, la qualité des miroirs produits. Enfin je remercie Vincent Loriette de l'ESPCI pour nous avoir permis de caractériser l'état de surface des micro-miroirs. Je souhaite que cette collaboration se poursuive de manière aussi fructueuse que jusqu'à présent.

Je remercie Francesco Marin et Maurizio De Rosa pour m'avoir accueilli à Forence sur leur belle expérience, pour les discussions très enrichissantes, pour leurs conseils, ainsi que pour le fameux restaurant.

Au cours de ma thèse j'ai pu enseigner à la préparation à l'agrégation de l'ENS. Je remercie chaleureusement les enseignants et tout le personnel de Montrouge pour ces années passées ensemble. Merci à Claude Delalande et Jean-Marc Berroir, les directeurs successifs de la préparation à l'agrégation de m'avoir permis de mener de front ces deux activités.

Table des matières

Introduction **1**

1 Observer le régime quantique d'un oscillateur harmonique avec des micro-miroirs **5**
1.1 L'oscillateur harmonique mécanique 6
1.1.1 Quantification des niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique . . . 6
1.1.2 Couplage avec l'environnement 8
1.1.3 Les fluctuations de position de l'oscillateur 9
1.2 Des oscillateurs pour observer le régime quantique 14
1.3 La mesure interférométrique optique 20
1.3.1 Mesure de position avec une cavité Fabry-Perot 20
1.3.2 Mise en oeuvre expérimentale 26
1.4 Refroidissement actif du résonateur 31
1.4.1 Principe de la friction froide 31
1.4.2 Limite quantique de la friction froide 34
1.4.3 Possibilité de mise en œuvre avec les micro-miroirs 35

2 Le couplage optomécanique avec un micro-miroir **39**
2.1 Les champs électromagnétiques dans la cavité Fabry-Perot 39
2.2 Description mécanique du résonateur 45
2.2.1 Modes propres de vibration d'un micro-résonateur 45
2.2.2 Dynamique des modes propres 48
2.3 Le couplage optomécanique 49
2.3.1 Effet d'une déformation du résonateur sur le champ 49
2.3.2 Notion de susceptibilité effective 50
2.3.3 Intérêt optomécanique des micro-miroirs 52
2.4 Effets de la pression de radiation sur le système 55
2.4.1 Une source de non-linéarités 56
2.4.2 Le bruit de pression de radiation 59

3 Un Fabry-Perot avec des micro-miroirs **61**
3.1 La fabrication des résonateurs 61
3.1.1 Objectifs et principe de fabrication 61
3.1.2 Les wafers et les masques 62
3.1.3 Le transfert des masques 64
3.1.4 La gravure de l'échantillon 65

3.1.5 Le traitement optique 69
3.2 La cavité de mesure 70
3.3 Les propriétés optiques 75
3.3.1 Principe de la mesure des caractéristiques optiques des miroirs 75
3.3.2 Résultats des mesures 77
3.3.3 Etat de surface et pertes par diffusion 79
3.3.4 Absorption dans les couches diélectriques : bistabilité thermique . . . 84
3.4 Asservissement en température de la cavité 85
3.5 L'enceinte à vide 89

4 La source laser et le dispositif de détection 93
4.1 Description générale 93
4.1.1 Les différents asservissements 94
4.1.2 Description du montage optique 96
4.2 Le laser 98
4.2.1 Description du laser 99
4.2.2 Calibration de la modulation de fréquence de la voie rapide 101
4.3 Réduction du bruit d'intensité du laser 105
4.3.1 Réduire le bruit d'intensité d'un laser 105
4.3.2 Mise en œuvre expérimentale 108
4.3.3 Résultats expérimentaux 114
4.3.4 Bruit optimal 116
4.3.5 Influence des pertes dans l'asservissement 119
4.4 La cavité de filtrage 122
4.4.1 Description de la cavité 123
4.4.2 Asservissement par tilt-locking 124
4.4.3 Caractéristiques du faisceau transmis 128
4.5 Contrôle de la fréquence du laser 130
4.5.1 Le signal d'erreur Pound-Drever-Hall 131
4.5.2 Asservissement du laser sur la cavité de mesure 133
4.6 Sensibilité de la mesure 137
4.6.1 Sensibilité d'une mesure utilisant la technique Pound-Drever-Hall . . . 138
4.6.2 Mesure des déplacements 141
4.6.3 Bruit de photon et bruit de fréquence 142

5 Observation et contrôle du bruit thermique d'un micro-miroir 145
5.1 Spectre de bruit thermique et limites de sensibilité 145
5.1.1 Mesure du bruit thermique 145
5.1.2 Le bruit thermique du miroir d'entrée 147
5.1.3 Le bruit de photon 148
5.1.4 Le bruit de fréquence 149
5.1.5 Les fluctuations d'indice 151
5.2 Etude du spectre de bruit du micro-miroir 156
5.2.1 Le bruit thermique 156
5.2.2 Structure des modes propres 157
5.2.3 Dépendance des facteurs de qualité avec la pression 162
5.2.4 Autres résonateurs 167

5.3 Action électrostatique sur le micro-miroir 169
5.3.1 La force électrostatique 169
5.3.2 Réponse transitoire à la force électrostatique 174
5.3.3 Mesure de la susceptibilité mécanique 175
5.3.4 Refroidissement du micro-miroir par friction froide 179

6 Refroidissement par pression de radiation dans une cavité désaccordée 185
6.1 Couplage optomécanique dans une cavité désaccordée 185
6.1.1 Principe du refroidissement intracavité 185
6.1.2 Observations des effets dynamiques intracavité 187
6.1.3 Pression de radiation dans une cavité désaccordée 190
6.1.4 Dynamique du résonateur 191
6.1.5 Spectre de bruit thermique 195
6.2 Résultats expérimentaux. 196
6.2.1 Montage expérimental 196
6.2.2 Calibration de l'expérience 197
6.2.3 Observation de la dynamique du micro-résonateur : refroidissement et instabilité 200
6.2.4 Température effective 208
6.2.5 Remarques 211
6.3 Battre la limite quantique standard avec une cavité désaccordée 212

7 Etude de l'effet photothermique 223
7.1 Les effets photothermiques 224
7.2 L'expérience à Florence 227
7.3 Résultats et modélisation 232
7.3.1 Résultats expérimentaux 233
7.3.2 Le modèle semi-infini 237
7.3.3 Conséquence de la taille finie du miroir 239
7.3.4 Effet des couches diélectriques 241

Conclusion 245

Introduction

Utilisée aussi bien en microscopie à force atomique [1, 2, 3] que pour la détection des ondes gravitationnelles [4, 5], la mesure interférométrique est aujourd'hui la technique la plus sensible pour mesurer de petits déplacements. L'emploi de sources laser ultra-stables et de cavités optiques de grandes finesses et à faibles pertes permet en effet d'atteindre des sensibilités de l'ordre de $10^{-20}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, uniquement limitées par les fluctuations quantiques de la lumière. La sensibilité de cette technique est telle qu'il est envisageable de l'utiliser pour mettre en évidence un effet d'action en retour (*back action*) de la mesure optique : les fluctuations d'intensité du faisceau de mesure induisent des fluctuations de pression de radiation, qui entraînent des fluctuations de position du miroir mobile ; celles-ci peuvent devenir prépondérantes devant le signal à mesurer et ainsi limiter la sensibilité [6, 7].

Une cavité dont un miroir est libre de se déplacer sous l'effet de la pression de radiation présente ainsi de nombreuses analogies avec une cavité contenant un milieu Kerr, dont l'indice optique dépend de l'intensité, même si la non linéarité associée aux déplacements du miroir est beaucoup plus faible. Un tel système pourrait permettre d'observer de nombreux effets d'optique quantique, dont certains ont déjà été mis en évidence avec des milieux non linéaires : compression du bruit de la lumière au-dessous du niveau des fluctuations du vide [8], mesure quantique non destructive (QND) des fluctuations d'intensité d'un faisceau [9, 10], ou encore intrication de miroirs [11, 12].

Les effets quantiques de la pression de radiation sont cependant si faibles qu'ils n'ont encore jamais été observés expérimentalement. Il est nécessaire d'augmenter l'intensité lumineuse et la finesse des cavités utilisées, ou encore d'améliorer la réponse mécanique des miroirs pour que les fluctuations quantiques de la pression de radiation induisent des déplacements plus importants.

Nous avons privilégié cette dernière approche dans ce travail de thèse, en cherchant à réduire la masse des miroirs pour augmenter les effets de la pression de radiation, tout en conservant une finesse optique la plus élevée possible. Pour cela, on a remplacé un des miroirs de la cavité par une structure en silicium de taille sub-millimétrique et de quelques dizaines de microns d'épaisseur, en bénéficiant des avancées technologiques réalisées dans les domaines des systèmes micro-électromécaniques (MEMS). Ceci nous a permis d'obtenir des résonateurs avec des masses jusqu'à mille fois inférieures [13] à celles des miroirs en silice utilisés jusqu'à présent dans notre équipe [14, 15, 16].

La sensibilité que l'on peut atteindre est telle qu'il est même envisageable d'observer directement les fluctuations quantiques de position d'un tel micro-miroir. Pour atteindre le régime où les fluctuations de point zéro d'un tel système mécanique macroscopique deviennent prédominantes, la température doit être inférieure à la température quantique définie par $k_\mathrm{B}T = \hbar\Omega_\mathrm{m}$, où Ω_m est la pulsation de résonance du micro-miroir. Plusieurs équipes tentent actuellement d'observer l'état fondamental d'un résonateur macroscopique [17, 18, 19] ; la

plupart utilisent des méthodes de mesure capacitives, souvent à base de transistor à électron unique (SET). La tendance actuelle est à la miniaturisation du résonateur, pour augmenter sa fréquence de résonance, jusqu'au GHz : la température quantique associée deviendrait alors accessible en utilisant des cryostats à dilution. Par contre, augmenter la fréquence de résonance présente l'inconvénient de diminuer l'amplitude des fluctuations quantiques de position, et les dispositifs de détection à transistor SET n'ont pour le moment pas la sensibilité suffisante.

Les mesures optiques ont d'ores et déjà une sensibilité [14] de plusieurs ordres de grandeur meilleure que les systèmes capacitifs, mais elles requièrent une taille du résonateur plus importante de façon à réfléchir le faisceau lumineux. Ceci fixe donc une limite supérieure à la fréquence de l'oscillateur, de quelques MHz environ, ce qui nécessite d'atteindre une température plus faible pour observer les effets quantiques, de l'ordre de 50 μK pour un résonateur oscillant à 1 MHz. Une telle température est inaccessible par des techniques de cryogénie traditionnelle, mais pourrait être atteinte grâce à des techniques de refroidissement actif du résonateur [20]. On peut par exemple utiliser un mécanisme de friction froide [21, 22], qui consiste à appliquer une force sur le résonateur proportionnelle à sa vitesse grâce à une boucle de contre-réaction. En augmentant son amortissement sans ajouter de fluctuations supplémentaires, on réduit la température effective du micro-miroir en vertu du théorème fluctuations-dissipation. En combinant la friction froide avec les techniques de cryogénie conventionnelles, on pourrait ainsi placer le résonateur dans son état quantique fondamental et en observer les fluctuations de position par une mesure optique.

Les objectifs de ce travail de thèse sont donc d'une part de réaliser des mesures optiques avec des micro-miroirs dans le but d'augmenter les effets de la pression de radiation, d'autre part d'étudier la faisabilité d'une expérience visant à atteindre et à observer le régime quantique d'un tel oscillateur mécanique. Cela consiste à réaliser une mesure optique ultra-sensible des déplacements d'un micro-miroir, et à démontrer la possibilité de contrôler ses mouvements pour le refroidir par friction froide. Combinant ces deux objectifs de la thèse, nous avons mis en évidence pour la première fois des effets dynamiques de la pression de radiation dans une cavité optique, qui peuvent également servir à refroidir de manière très efficace le micro-miroir.

Dans le premier chapitre, on rappelle les propriétés de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique et on décrit comment ses fluctuations de position sont reliées à sa température. On présente ensuite quelques expériences développées pour observer le régime quantique d'un résonateur mécanique, en faisant apparaître deux paramètres importants expérimentalement, à savoir la température quantique et la sensibilité de la mesure de position nécessaire à l'observation des fluctuations quantiques. On verra ainsi que les expériences basées sur des mesures capacitives ont déjà pratiquement atteint la température quantique mais n'ont pas encore la sensibilité nécessaire à l'observation de l'état fondamental ; au contraire, les expériences optiques peuvent d'ores et déjà prétendre à une sensibilité suffisante, mais la température atteignable expérimentalement est encore trop élevée. On présente ensuite le principe de la mesure optique des déplacements d'un micro-résonateur et la possibilité de sa mise en oeuvre expérimentale. On étudie enfin le principe du refroidissement par friction froide, qui pourrait être utilisé pour atteindre la température quantique.

Le second chapitre est consacré au couplage optomécanique entre le champ et un micro-

miroir [23]. On présente d'abord la description semi-classique des champs, puis on relie les variations de la phase du faisceau réfléchi par la cavité aux déplacements du résonateur. En utilisant un modèle simplifié des résonances mécaniques du micro-miroir, on présente les principales caractéristiques optomécaniques attendues pour un tel système, et la façon dont elles sont couplées à la lumière. Nous examinons en particulier les avantages des micro-miroirs au niveau de sa réponse mécanique, son bruit thermique et les limitations imposées par la pression de radiation sur la mesure de ses déplacements.

Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à la description de l'ensemble des éléments du montage expérimental, qui a été entièrement développé au cours de cette thèse. Le troisième chapitre est plus particulièrement consacré à la réalisation des micro-miroirs et de la cavité Fabry-Perot utilisant de tels miroirs. On commence par décrire les étapes de la réalisation du micro-miroir : gravure d'un échantillon en silicium [24], découpe puis traitement optique de sa face supérieure. On présente ensuite le montage mécanique de la cavité Fabry-Perot, qui permet de contrôler précisément les positions relatives du miroir d'entrée de la cavité et du micro-miroir. On caractérise les propriétés optiques des micro-miroirs, notamment les pertes optiques par diffusion et absorption de lumière. Enfin, on présente l'asservissement en température de la cavité ainsi que l'enceinte à vide dans laquelle on l'a placée, deux éléments nécessaires pour assurer un fonctionnement stable du système.

Le quatrième chapitre est dédié à la source laser et au système de détection des déplacements du micro-miroir à partir du champ réfléchi par la cavité. Pour obtenir une sensibilité suffisante, on a besoin de contrôler précisément plusieurs paramètres du faisceau servant à la mesure : son profil spatial, son intensité et sa fréquence. On présente donc successivement le laser, l'asservissement d'intensité, la cavité de filtrage puis l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité par la technique de Pound-Drever-Hall [25, 26]. Le signal d'erreur fourni permet aussi de mesurer les fluctuations de position du résonateur, et on termine en décrivant la calibration de la sensibilité de l'expérience.

Dans le cinquième chapitre, on présente les résultats obtenus concernant le bruit thermique du micro-résonateur ainsi que son contrôle par une force électrostatique [13]. On décrit les diverses sources de bruit identifiées dans la mesure des déplacements et les limites de sensibilité qui en résultent. Ces bruits se superposent au spectre de bruit thermique du micro-résonateur : bruit thermique du miroir d'entrée, bruit quantique de phase du faisceau de mesure, bruit de fréquence du laser et bruit d'indice optique. Après avoir caractérisé ces sources de bruit supplémentaires, on étudie plus en détail le spectre de bruit thermique très spécifique du micro-miroir. Cette étude nous permet de déterminer les paramètres optomécaniques des modes propres de vibration tels que la masse effective, la fréquence de résonance et l'amortissement. On compare ces résultats expérimentaux aux prédictions d'une simulation par éléments finis.

Dans la seconde partie du chapitre, on étudie les propriétés de la réponse à une force électrostatique appliquée sur le micro-résonateur en silicium. Ceci permet de mesurer les paramètres mécaniques de l'oscillateur indépendamment des mesures de bruit précédentes, et de mettre en évidence un effet d'interférence destructive entre la réponse mécanique d'un mode propre résonnant et celles de l'ensemble des autres modes propres de vibration. Enfin, on a mis en oeuvre un processus de friction froide à l'aide de cette force électrostatique, qui nous a permis de refroidir la température effective d'un mode propre du micro-miroir jusqu'à

une température de 5 K.

On présente dans le sixième chapitre une nouvelle technique de refroidissement qui utilise les effets de la pression de radiation dans une cavité désaccordée [27, 28] ; à cause de la dépendance de l'intensité intracavité avec la position du miroir, la pression de radiation subie par le micro-résonateur est proportionnelle à ses fluctuations de position, ce qui modifie sa dynamique. La force de pression de radiation devient visqueuse si le temps de stockage des photons dans la cavité est comparable à la période d'oscillation du résonateur : on peut alors refroidir ou réchauffer le micro-miroir selon le signe du désaccord de la cavité. Après une description théorique de l'effet, on présente les résultats expérimentaux obtenus. On a observé des refroidissements allant jusqu'à environ 10 K, des réchauffements jusqu'à 2000 K et on a vérifié que l'effet observé est entièrement attribuable à la pression de radiation. Pour un désaccord positif et une intensité lumineuse suffisante, on peut aller jusqu'à observer une instabilité dynamique induite par la pression de radiation [29, 30].

Enfin, on présente dans le dernier chapitre une étude de l'effet photothermique [31, 32] menée dans le cadre du programme européen ILIAS [33], en collaboration avec l'équipe de Francesco Marin du LENS à Florence à la suite de deux séjours effectués dans ce laboratoire. L'effet photothermique est dû à la dilatation du substrat du miroir induite par l'absorption de lumière dans les couches diélectriques : les fluctuations d'intensité du faisceau de mesure induisent alors des fluctuations de longueur de la cavité. Ce bruit supplémentaire pourrait avoir des conséquences importantes pour les limites de sensibilité dans la prochaine génération d'interféromètres gravitationnels [5, 34]. Une technique de modulation de l'intensité du faisceau envoyé dans la cavité nous a permis d'étudier la dépendance de l'effet photothermique avec la fréquence et avec la taille du faisceau laser. Si on obtient bien le comportement attendu théoriquement aux fréquences intermédiaires [35], on a également observé des effets de taille finie du miroir à basse fréquence et le bruit thermoélastique des couches diélectriques à haute fréquence. Ce résultat est important dans le cadre des efforts menés pour réduire le bruit dans les futures antennes gravitationnelles [34, 36] car il fournit une signature claire des caractéristiques des couches. On a aussi étendu le modèle théorique en prenant en compte la contribution des couches diélectriques, qui est essentielle à la compréhension de l'effet photothermique observé.

Chapitre 1

Observer le régime quantique d'un oscillateur harmonique avec des micro-miroirs

Dans cette première partie, on présente les motivations qui ont conduit à la mise en place d'une nouvelle expérience au laboratoire, basée sur l'étude optique des vibrations de micro-miroirs. Elles sont multiples, mais on a choisi d'orienter cette partie vers l'observation de l'état quantique fondamental d'un oscillateur mécanique macroscopique, une problématique nouvelle mais qui est reliée par bien des aspects fondamentaux aux recherches de l'équipe *Mesure et bruits fondamentaux*.

On présente d'abord l'oscillateur harmonique tel qu'il est décrit en physique quantique, la quantification de ses niveaux d'énergie et les états cohérents qui permettent de faire le lien avec la description classique de l'oscillateur. On présente les fluctuations quantiques de position de l'oscillateur qui traduisent l'extension non nulle de la fonction d'onde de l'oscillateur même dans son état fondamental. Ces fluctuations sont accrues à cause du couplage de l'oscillateur avec son environnement et leur mesure permet d'avoir accès à sa température en vertu du théorème fluctuations-dissipation dont on présente une version généralisée au cas des fluctuations quantiques. On obtient ainsi une des conditions pour observer l'état fondamental d'un oscillateur harmonique : il faut d'atteindre une température inférieure à ce qu'on appelle la température quantique qui est définie par $T_{\mathrm{Q}} = \hbar\Omega_{\mathrm{m}}/k_B$ où Ω_{m} est la pulsation de résonance de l'oscillateur.

On décrit ensuite plusieurs expériences qui tentent d'observer l'état quantique fondamental d'un oscillateur mécanique. La variété des techniques de mesure utilisées conduit à une grande dispersion dans les tailles et les fréquences propres des résonateurs étudiés. La tendance actuelle va vers une augmentation de la fréquence de résonance de ces oscillateurs, donc une miniaturisation croissante, dans le but d'augmenter la température quantique T_{Q}. Cependant, la miniaturisation des oscillateurs rend difficile l'observation de leur vibration avec les méthodes de mesure actuellement disponibles pour des nano-résonateurs (SET, mesure capacitive) et toutes les expériences actuellement envisagées n'ont pas la sensibilité nécessaire pour observer ce régime quantique, bien que les températures atteintes soient très proches de la température quantique.

Nous montrons alors que la mesure optique des vibrations à l'aide d'un miroir déposé sur le résonateur est une autre voie possible. Le choix d'une mesure optique avec une cavité Fabry-Perot induit des contraintes importantes sur la taille des oscillateurs et donc sur la température quantique, mais présente l'avantage de posséder une sensibilité d'ores et déjà suffisante pour observer le régime quantique des oscillateurs envisagés. La température quantique n'est plus accessible directement par des moyens de cryogénie conventionnelle et cela nécessite de mettre en œuvre des méthodes de refroidissement actif : on présente ainsi le principe de la friction froide qui consiste à augmenter l'amortissement du système sans introduire de fluctuations supplémentaires et permet de réduire la température effective du résonateur.

1.1 L'oscillateur harmonique mécanique

Le problème du système évoluant dans un potentiel harmonique constitue une pierre d'angle de l'enseignement de la mécanique quantique. De nombreux autres phénomènes sont formellement équivalents tel les vibrations des molécules, leur rotation autour d'une liaison interatomique, le mouvement d'une particule dans un plan en présence d'un champ magnétique transverse et plus généralement toutes les situations où un système évolue au voisinage d'un minimum de potentiel.

Dans cette section on revient d'abord sur la description quantique d'un oscillateur harmonique libre qui présente des fluctuations intrinsèques de position. On étudie ensuite comment ces fluctuations sont modifiées lorsqu'on prend en compte son couplage avec l'environnement, ce qui fait apparaître une température quantique en-dessous de laquelle le régime est comparable à celui d'un oscillateur harmonique libre. Enfin on présente plus en détail le spectre de bruit de position, qui est la grandeur expérimentale à laquelle on aura accès, et sa dépendance avec la température.

1.1.1 Quantification des niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique

La dynamique du problème unidimensionnel d'un oscillateur de masse M se déplaçant dans un potentiel harmonique $\frac{1}{2}kx^2$ est décrite par le Hamiltonien harmonique [37] :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}k\hat{X}^2 \tag{1.1}$$

où $\hat{X}$ et $\hat{P}$ représentent respectivement la position et l'impulsion de l'oscillateur et vérifient la relation de commutation $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$. Classiquement le mouvement correspond à une oscillation de la particule au voisinage de la position d'équilibre $x = 0$ avec une pulsation

$$\Omega_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{k}{M}}, \tag{1.2}$$

et une amplitude qui dépend de l'état initial du système. Il est commode d'introduire les opérateurs d'annihilation et de création définis comme combinaisons linéaires de $\hat{X}$ et $\hat{P}$:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{M\Omega_{\mathrm{m}}}{2\hbar}}\left(\hat{X} + i\frac{\hat{P}}{M\Omega_{\mathrm{m}}}\right), \tag{1.3}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{M\Omega_{\mathrm{m}}}{2\hbar}}\left(\hat{X} - i\frac{\hat{P}}{M\Omega_{\mathrm{m}}}\right). \tag{1.4}$$

Ces opérateurs vérifient la relation de commutation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ et permettent d'écrire le Hamiltonien sous la forme canonique :

$$\hat{H} = \hbar\Omega_\mathrm{m}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.5}$$

L'opérateur $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ possède un spectre discret, formé d'entiers positifs. Ainsi le spectre des états propres de l'oscillateur harmonique est lui aussi discret, constitué de niveaux régulièrement espacés en énergie. Ces états sont aussi appelés états de Fock. On notera $|n\rangle$ avec n entier positif l'état quantique du n-ième mode. Ces états de Fock sont états propres du Hamiltonien $\hat{H}$ et vérifient :

$$\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle \tag{1.6}$$

avec

$$E_n = \hbar\Omega_\mathrm{m}\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{1.7}$$

Le potentiel et le spectre sont représentés sur la figure 1.1. Les énergies propres d'un oscillateur harmonique ne prennent donc que des valeurs discrètes, séparées par un écart constant, $\hbar\Omega_\mathrm{m}$. Tous les niveaux sont non dégénérés. Contrairement au résultat obtenu en mécanique newtonnienne où l'état de moindre énergie est un système au repos localisé en $x = 0$ avec une énergie nulle, la description quantique prédit que dans son état fondamental le système possède une énergie moyenne non nulle, $E_\mathrm{o} = \hbar\Omega_\mathrm{m}/2$.

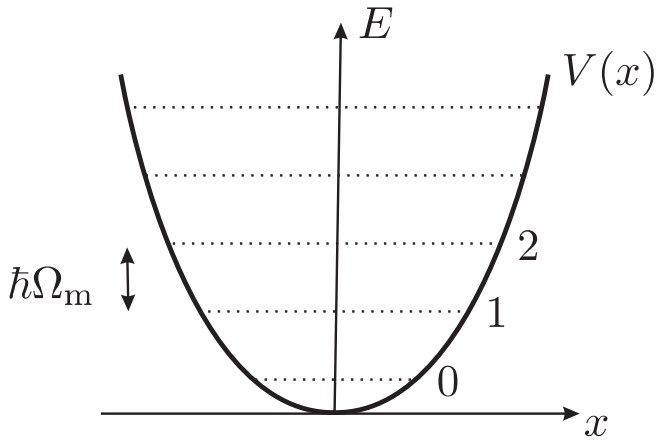


FIG. 1.1 – Les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω_m.

Cette énergie fondamentale non nulle peut également être interprétée comme une conséquence des inégalités de Heisenberg qui empêchent le système de demeurer dans l'état classique ($x = 0, p = 0$). La densité de probabilité de présence est une gaussienne dont la position moyenne est nulle, $\langle\hat{X}\rangle = 0$, et avec un écart quadratique moyen égal à :

$$\Delta\hat{X}^2 = \frac{\hbar}{2M\Omega_\mathrm{m}} \tag{1.8}$$

Ces fluctuations autour de la position d'équilibre sont aussi appelées fluctuations de point zéro. Elles sont une conséquence de l'inégalité de Heisenberg qui découle de la non commutation

des opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$:

$$\Delta\hat{X} \cdot \Delta\hat{P} \geq \hbar/2 \tag{1.9}$$

et qui indiquent que la position et l'impulsion de l'oscillateur ne peuvent être parfaitement définies simultanément. Pour un pendule mécanique de masse $1\,kg$, oscillant à la fréquence de $1\,\mathrm{Hz}$, l'étendue spatiale du paquet d'onde dans son état fondamental est seulement de $\Delta\hat{X} = 7 \times 10^{-18}\,\mathrm{m}$.

1.1.2 Couplage avec l'environnement

Un système physique réel n'est jamais totalement isolé : un oscillateur finit toujours par relaxer vers un état d'équilibre s'il n'est pas entretenu dans un état excité. Cela traduit un couplage entre l'oscillateur et son environnement. Formellement, le Hamiltonien du système global s'écrit sous la forme $\hat{H} + \hat{H}_{\mathrm{env}} + \hat{H}_{\mathrm{c}}$ où H est le hamiltonien de l'oscillateur, et où

$$\hat{H}_{\mathrm{env}} = \sum_i \hbar\omega_i(\hat{b}_i^\dagger\hat{b}_i + \frac{1}{2}) \text{ et } \hat{H}_{\mathrm{c}} = \sum_i \hbar\kappa_i\ \hat{b}_i^\dagger\hat{a} + \quad h.c. \tag{1.10}$$

Le terme $\hat{H}_{\mathrm{env}}$ décrit l'environnement, modélisé ici par un ensemble infini d'oscillateurs harmoniques qui décrivent les degrés de liberté du réservoir. Le second terme, $\hat{H}_{\mathrm{c}}$ traduit le couplage entre les deux sous-systèmes. La conséquence très importante de ce couplage est que les états propres de l'oscillateur seul ne sont plus les vrais états propres du système global. De manière plus générale, l'état du système n'est plus factorisable entre l'oscillateur et l'environnement. Dans la grande majorité des situations expérimentales, cet environnement n'est pas accessible : il en résulte un manque d'information pour la description du système et son évolution. Le système est alors dans un état d'équilibre thermodynamique qui est un mélange statistique de ses différents états propres, caractérisé par l'opérateur densité :

$$\rho = \frac{1}{Z}\ e^{-\hat{H}/k_B T} \tag{1.11}$$

où k_B est la constante de Boltzmann, T la température, et Z la fonction de partition qui assure la normalisation :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\ \hbar\Omega_{\mathrm{m}}/k_B T} = \frac{e^{-\hbar\Omega_{\mathrm{m}}/2k_B T}}{1 - e^{-\hbar\Omega_{\mathrm{m}}/k_B T}} \tag{1.12}$$

L'énergie moyenne de l'oscillateur vaut alors $\langle H \rangle = \mathrm{Tr}\,(H\rho)$ soit :

$$\langle H \rangle \ = \ \hbar\Omega_{\mathrm{m}}\ (n_{\mathrm{T}} + 1/2) \tag{1.13}$$

avec :

$$n_{\mathrm{T}} = \frac{1}{e^{\ \hbar\Omega_{\mathrm{m}}/k_B T} - 1} \tag{1.14}$$

Le nombre n_{T} est lié à l'énergie moyenne de l'oscillateur en équilibre thermodynamique : il s'agit du nombre moyen de phonons thermiques de l'oscillateur. Cette valeur moyenne est a priori une moyenne d'ensembles, mais l'hypothèse ergodique indique qu'un système en équilibre avec un thermostat à la température T passe un temps proportionnel à $e^{-E/k_B T}$ dans chaque état d'énergie E du système, si bien que le résultat reste vrai pour une valeur moyenne prise au cours du temps, sur un système unique.

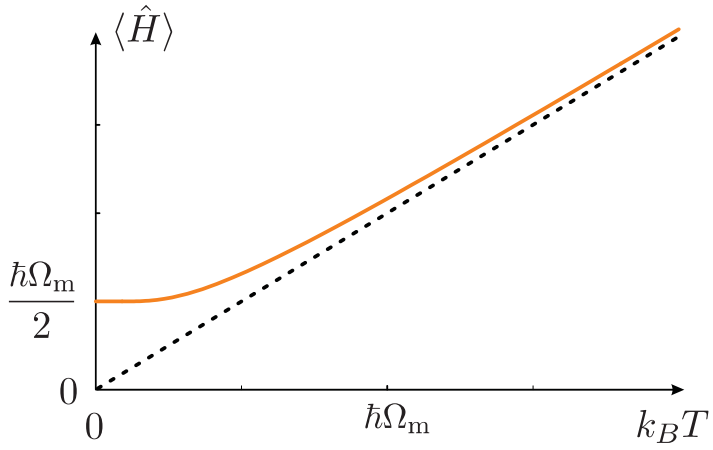


FIG. 1.2 – Energie moyenne de l'oscillateur harmonique en fonction de la température T de l'environnement. En pointillés la prédiction classique, en trait plein les résultats du calcul quantique.

Ce résultat important est à comparer à celui donné par la physique statistique classique. Le théorème de l'équipartition de l'énergie indique que chaque degré de liberté quadratique dans le Hamitonien contribue pour $\frac{1}{2}k_B T$ à l'énergie moyenne totale. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, les contributions des énergies cinétique et potentielle s'ajoutent pour donner :

$$\langle H \rangle_{\mathrm{class}} = k_{\mathrm{B}} T. \tag{1.15}$$

Les descriptions quantiques et classiques sont équivalentes tant que la température est grande devant la température quantique T_Q définie par :

$$k_{\mathrm{B}} T_Q = \hbar\Omega_{\mathrm{m}}. \tag{1.16}$$

Cependant, à basse température $T \leq T_Q$, le calcul quantique donne $\langle H \rangle \simeq \hbar\Omega_{\mathrm{m}}/2 = E_0$, ce qui exprime le fait que l'oscillateur est dans son état fondamental d'énergie non nulle alors que le théorème d'équipartition de l'énergie donnerait $\langle H \rangle_{\mathrm{class}} = 0$. Les courbes représentant l'énergie moyenne en fonction de la température pour les deux descriptions sont tracées sur la figure 1.2. Tant que la température reste petite devant T_Q, les propriétés du système sont dominées par les propriétés quantiques de l'état fondamental. C'est ce régime que l'on souhaite observer expérimentalement avec un résonateur mécanique macroscopique. Pour cela, on ne va pas mesurer son énergie, mais effectuer une mesure de sa position au cours du temps dans le but d'en observer en temps réel les fluctuations quantiques.

Un autre point important inhérent au couplage de l'oscillateur avec un bain thermique est son lien avec la relaxation. C'est en effet ce couplage qui est responsable de l'élargissement de la résonance mécanique et des facteurs de qualité mécaniques finis des oscillateurs. On revient sur ce point dans le paragraphe suivant où on étudie la dynamique du miroir.

1.1.3 Les fluctuations de position de l'oscillateur

Expérimentalement, on réalise en général une mesure de la position de l'oscillateur. Dans cette partie, on va voir qu'on peut exploiter cette mesure pour obtenir des informations sur

l'état de l'oscillateur harmonique : ses fluctuations de position vont en effet nous renseigner sur son couplage avec l'environnement et sur sa température.

La dynamique de l'oscillateur

Le couplage avec un environnement extérieur modifie la dynamique de l'oscillateur. Par exemple en électrodynamique quantique, le couplage d'un atome avec le vide environnant modifie les fréquences de résonance des transitions optiques entre les niveaux atomiques (Lamb-shift) et est responsable de l'existence de l'émission spontanée. C'est aussi ce couplage qui est à l'origine de la décohérence. La présence de l'environnement induit donc une modification de la dynamique du système, qui est d'autant plus importante que l'amortissement est élevé.

Les relations entre les fluctuations et la dissipation dans un système ont été établies pour la première fois par Einstein [38] à partir d'une étude des systèmes présentant un frottement visqueux. La généralisation de ces relations est à l'origine du théorème fluctuations-dissipation [39]. Une traduction bien connue de ce principe est le bruit de grenaille, dit bruit Johnson-Nyquist [40], présent dans les éléments électriques résistifs : aux bornes d'une résistance apparaît un bruit de tension dont l'amplitude rms croît avec la valeur de la résistance. On peut comprendre cet effet sur l'exemple d'un antenne électromagnétique reliée à un circuit électrique résonnant. Lorsqu'elle est parcourue par un courant, l'antenne émet des ondes électromagnétiques, ce qui se traduit par un perte d'énergie : elle se comporte donc formellement comme un élément résistif. Mais inversement, l'antenne est également capable de capter une onde électromagnétique, ce qui a pour effet de créer un courant dans le circuit électrique. Si l'environnement est un réservoir à la température T, les échanges entre l'antenne et les ondes électromagnétiques sont à l'origine d'un courant fluctuant qui amène le circuit électrique résonnant à l'équilibre thermique. Ces résultats classiques ont d'abord été étendus pour prendre en compte les propriétés statistiques quantiques des fluctuations [41] et généralisées dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire [42]. Cette dernière utilise le point de vue de Heisenberg pour la description de l'état quantique du système ; elle est bien adaptée à la description de notre système et de son couplage avec l'environnement, et plus généralement à l'optique quantique. C'est la théorie de la réponse linéaire qu'on va utiliser dans la suite de ce manuscrit.

Dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, la position de l'oscillateur dépend linéairement des forces appliquées sur le résonateur. Elles correspondent à une éventuelle force extérieure F_{ext} et à une force traduisant l'influence du bain thermique sur l'oscillateur. L'équation décrivant l'évolution de l'oscillateur à une fréquence Ω s'écrit[1] :

$$x[\Omega] = \chi[\Omega]\left(F_{\text{ext}}[\Omega] + F_{\text{T}}[\Omega]\right). \tag{1.17}$$

Pour un oscillateur harmonique, si on suppose un amortissement de type visqueux, le coefficient de proportionnalité, appelé susceptibilité mécanique, se met sous la forme :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_{\text{m}}^2 - \Omega^2 - i\Omega\Gamma)}, \tag{1.18}$$

[1] les conventions pour relier les opérateurs dans le domaine fréquentiel à ceux dans le domaine temporel sont : $x[\Omega] = \int d\tau\, x(\tau)\, e^{i\Omega\tau}$ et $x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int d\Omega\, x[\Omega]\, e^{-i\Omega\tau}$

où M est la masse de l'oscillateur, Ω_m sa pulsation de résonance et Γ le taux d'amortissement. L'opérateur F_T est l'analogue quantique de la force de Langevin associée aux fluctuations thermiques pour un oscillateur harmonique amorti. Il possède les relations de commutation suivantes :

$$[F_\mathrm{T}[\Omega], F_\mathrm{T}[\Omega']] = 2\pi\delta(\Omega+\Omega')\, 2\hbar M\Gamma\Omega. \tag{1.19}$$

Quand le système est à l'équilibre thermodynamique à la température T, le spectre $S_\mathrm{T}[\Omega]$ de l'opérateur de Langevin, défini par :

$$\langle F_\mathrm{T}[\Omega] F_\mathrm{T}[\Omega']\rangle = 2\pi\delta(\Omega+\Omega') S_\mathrm{T}[\Omega] \tag{1.20}$$

vaut [41, 43] :

$$S_\mathrm{T}[\Omega] = \hbar \left|\mathrm{Im}\frac{1}{\chi[\Omega]}\right| \coth\frac{\hbar|\Omega|}{2k_\mathrm{B}T} = \hbar M\Gamma|\Omega| \coth\frac{\hbar|\Omega|}{2k_\mathrm{B}T}. \tag{1.21}$$

Cette équation est un cas particulier du théorème fluctuations-dissipation qui relie la dissipation de n'importe quel système, décrite par la partie imaginaire de sa susceptibilité mécanique, au spectre de la force de Langevin qui rend compte des fluctuations du système. Elle est généralisée au cas des fluctuations quantiques et reste valable même pour des températures comparables à la température quantique.

Ce qui précède repose sur une modélisation de l'amortissement par un terme de frottement de type visqueux. En réalité, il existe de multiples canaux possibles de pertes pour un oscillateur mécanique et tous ne sont pas assimilables à des frottements visqueux. Néanmoins, tant que l'on reste proche de la résonance mécanique, le type de modélisation utilisé pour les pertes ne joue pas un rôle important et on peut se satisfaire de l'expression (1.18) pour la susceptibilité mécanique. Le facteur de qualité mécanique de l'oscillateur est alors défini comme $Q = \Omega_\mathrm{m}/\Gamma$. L'oscillateur répond à une force de manière résonnante, avec une largeur spectrale Γ. Pour des fréquences très inférieures à la résonance, il répond en phase avec la force appliquée, tandis qu'il présente une atténuation et un déphasage allant jusqu'à 180 ° pour des fréquences supérieures à Ω_m.

Le spectre de bruit de position

Le spectre de position de l'oscillateur, défini de manière analogue à l'équation (1.20), s'écrit alors :

$$S_x^\mathrm{T}[\Omega] = |\chi[\Omega]|^2\, S_\mathrm{T}[\Omega]. \tag{1.22}$$

Lorsque le facteur de qualité est suffisamment important, le spectre est de plus en plus piqué au voisinage de la fréquence de résonance : on peut approximer le spectre de bruit de la force de Langevin par sa valeur prise en $\Omega = \Omega_\mathrm{m}$. Le spectre du bruit de position de l'oscillateur harmonique s'écrit alors :

$$S_x^\mathrm{T}[\Omega] = \frac{2\Gamma}{M\left[(\Omega_\mathrm{m}^2-\Omega^2)^2+\Gamma^2\Omega^2\right]}\hbar\Omega_\mathrm{m}\left(n_\mathrm{T}+\frac{1}{2}\right), \tag{1.23}$$

où n_T est le nombre de phonons thermiques à la température T (équation 1.14) :

$$n_\mathrm{T} = \frac{1}{e^{k_\mathrm{B}T/\hbar\Omega_\mathrm{m}}-1}. \tag{1.24}$$

A haute température devant la température quantique, ce nombre se simplifie en $n_{\mathrm{T}} = k_{\mathrm{B}}T/\hbar\Omega_{\mathrm{m}}$ tandis qu'il tend vers zéro à basse température. Le terme $\frac{1}{2}$ restant alors dans l'équation (1.23) correspond aux fluctuations de point zéro de l'oscillateur.

Avant de revenir plus en détail sur les propriétés du spectre obtenu, on va relier le spectre aux grandeurs expérimentales. Lorsqu'on mesure expérimentalement la position de l'oscillateur, on a accès aux variations temporelles de position $x(t)$. La valeur moyenne de cette quantité est nulle si le système n'est pas soumis à une force externe, mais ses fluctuations sont une source d'information importante. Expérimentalement, on les mesure en envoyant ce signal sur un analyseur de spectres qui effectue la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation temporelle $C_x(\tau)$ du signal :

$$C_x(\tau) =< x(t)\, x(t+\tau) > \tag{1.25}$$

où la moyenne $< ... >$ est définie comme une moyenne temporelle sur la durée du signal acquis. En vertu du principe ergodique, si le temps de mesure est suffisamment long devant le temps de corrélation du réservoir, la moyenne temporelle est égale à la moyenne statistique sur le bain thermique. L'analyseur de spectres calcule le spectre de position $S_x[\Omega]$, défini comme la transformée de Fourier de $C_x(\tau)$ [43] :

$$S_x[\Omega] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, C_x(\tau)\, e^{i\Omega\tau}. \tag{1.26}$$

Le spectre de position défini en (1.23) est donc une grandeur mesurable expérimentalement. De même, la variance expérimentale, c'est-à-dire la valeur quadratique moyenne des variations de position définie par :

$$\Delta x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(\tau) d\tau, \tag{1.27}$$

est égale à l'écart quadratique moyen $\Delta\hat{X}^2$ défini précédemment. De plus, l'écart quadratique moyen est relié au spectre de position par :

$$\Delta x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega\; S_x[\Omega]\,, \tag{1.28}$$

ce qui correspond à l'aire du spectre de bruit thermique.

Pour des température grandes devant T_Q, le spectre de position (1.23) se simplifie en :

$$S_x^{\mathrm{T}}[\Omega] = \frac{2\Gamma}{M((\Omega_{\mathrm{m}}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2\Omega^2)} k_{\mathrm{B}}T. \tag{1.29}$$

Le spectre du bruit de position est très piqué autour de la fréquence de résonance mécanique Ω_{m}, avec une largeur à mi-hauteur égale à Γ. Il correspond à une réponse Lorentzienne à un bruit blanc. A basses fréquences devant Ω_{m}, le spectre est indépendant de la fréquence, par contre au-delà de la résonance, on observe une décroissance en $1/\Omega^4$ du spectre. Une courbe typique de bruit thermique a été représentée sur la figure (1.3).

Pour une température quelconque, on peut définir une température effective pour l'oscillateur sous la forme :

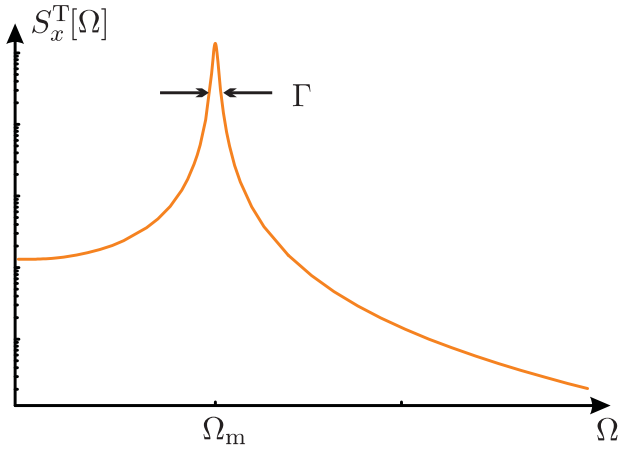


FIG. 1.3 – Spectre typique de bruit thermique pour un oscillateur harmonique oscillant à la fréquence Ω_{m} avec un amortissement Γ.

$$k_{\mathrm{B}}\Theta_{\mathrm{m}} = \hbar\Omega_{\mathrm{m}}\left(n_{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\right). \tag{1.30}$$

La relation (1.29) reste alors valable en remplaçant la température classique T par la température effective Θ_{m}. Le niveau de bruit à la fréquence de résonance mécanique vaut :

$$S_x^{\mathrm{T}}[\Omega_{\mathrm{m}}] = \frac{2}{M\Omega_{\mathrm{m}}^2\Gamma}k_{\mathrm{B}}\Theta_{\mathrm{m}}. \tag{1.31}$$

Plus la masse de l'oscillateur est faible, plus son bruit de position va être important. La hauteur du pic de bruit thermique varie linéairement avec la température tant que l'on reste au-dessus de la température quantique. Lorsqu'on se rapproche de T_Q, le spectre de bruit thermique à la résonance mécanique atteint une valeur limite correspondant aux fluctuations de point zéro et donnée par :

$$S_x^{\mathrm{Q}} = \frac{\hbar}{M\Omega_{\mathrm{m}}\Gamma}. \tag{1.32}$$

On peut calculer la valeur quadratique moyenne des fluctuations de position en injectant l'expression (1.23) dans l'équation (1.28) ; on obtient :

$$\frac{1}{2}M\Omega_{\mathrm{m}}^2\Delta x^2 = \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}\Theta_{\mathrm{m}}. \tag{1.33}$$

Lorsque la température T est grande devant T_Q, on constate que le théorème d'équipartition de l'énergie est vérifié tandis que lorsque la température du réservoir devient comparable à la température quantique, la variance totale sature à sa valeur quantique intrinsèque donnée par l'expression (1.8). Il faut aussi remarquer que la variance totale est indépendante de la manière dont le système est couplé avec son environnement : elle ne dépend pas de la largeur de la résonance mécanique. C'est une conséquence du théorème fluctuations-dissipation : le spectre de la force de Langevin étant lui même proportionnel à la dissipation, l'aire du spectre de bruit thermique est alors constante, quel que soit le couplage.

Ce sont les évolutions avec la température du spectre de bruit thermique et des fluctuations de position de l'oscillateur, et notamment leur saturation à une valeur minimale lorsque la température quantique est atteinte, qui seront la signature expérimentale du régime quantique de l'oscillateur.

1.2 Des oscillateurs pour observer le régime quantique

Nous décrivons maintenant les critères de choix des résonateurs mécaniques, en vue de l'observation de leurs fluctuations quantiques de point zéro. La taille du résonateur est un critère important, puisqu'elle va influer sur la fréquence de résonance et la masse. Nous présentons ensuite différentes expériences dans le monde visant à mettre en évidence le régime quantique de micro-résonateurs mécaniques.

Considérations sur la taille des oscillateurs

Pour un oscillateur mécanique possédant une fréquence de résonance proche du hertz, on trouve en utilisant l'équation (1.16) une température quantique $T_{\mathrm{Q}} = 5 \times 10^{-11}\,\mathrm{K}$ qu'il est impossible d'atteindre expérimentalement. Il faut donc utiliser des oscillateurs ayant des fréquences de résonance les plus élevées possible afin d'augmenter la température quantique $T_{\mathrm{Q}} = \hbar\Omega_{\mathrm{m}}/k_{\mathrm{B}}$.

Cependant, pour observer le régime quantique, il ne suffit pas d'atteindre la température quantique, il faut aussi disposer d'un dispositif de mesure présentant une sensibilité suffisante. On a vu que le niveau à résonance du spectre de bruit de position est donné par :

$$S_x^{\mathrm{Q}} = \frac{\hbar Q}{M\Omega_{\mathrm{m}}^2}, \tag{1.34}$$

où $Q = \Omega_{\mathrm{m}}/\Gamma$ est le facteur de qualité mécanique du résonateur. A sensibilité expérimentale donnée, pour pouvoir observer les fluctuations quantiques d'un oscillateur, il faut maximiser le rapport $Q/M\Omega_{\mathrm{m}}^2$, tout en maximisant la pulsation Ω_{m} pour augmenter la température quantique. De façon générale [44], les facteurs de qualité mécaniques décroissent avec la taille du système. Cependant d'un échantillon à l'autre, on peut observer une grande variabilité, c'est pourquoi on ne s'intéressera ici qu'à la masse et à la fréquence de l'oscillateur, en supposant que le facteur de qualité mécanique Q est indépendant de la taille de l'oscillateur.

Comme on peut le constater sur les diverses expériences menées jusqu'à présent, les résonateurs sont en général en forme de micro ou de nano-poutre : on raisonnera donc ici avec un résonateur ayant une telle géométrie, avec une longueur L, une épaisseur e et une largeur b (figure 1.4). Le matériau utilisé varie d'une expérience à l'autre, mais c'est souvent le silicium qui est choisi puisque ses techniques de gravure sont bien maîtrisées. On verra dans le chapitre 2 que dans un modèle unidimensionnel, le mode fondamental de résonance d'une poutre doublement encastrée a pour pulsation :

$$\Omega_{\mathrm{m}} \approx \sqrt{\frac{E_c}{12\rho}}\frac{e}{L^2}, \tag{1.35}$$

où E_c est le module d'Young du matériau et ρ sa masse volumique. Ce résultat est conforme à l'intuition : à épaisseur constante, plus un oscillateur est long, plus sa fréquence d'oscillation

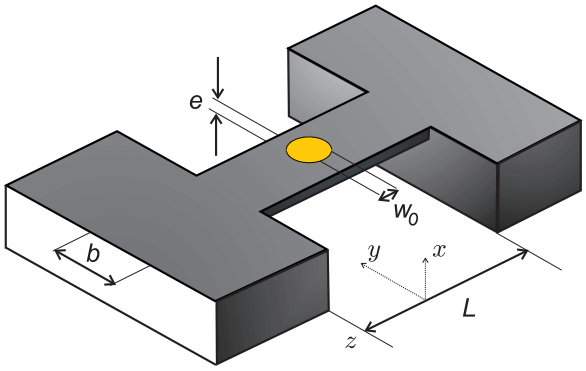


FIG. 1.4 – Le résonateur encastré à ses deux extrémités.

est faible, tandis que si on augmente son épaisseur, on augmente sa“rigidité” et donc sa fréquence de résonance. Le modèle unidimensionnel est justifié pour des résonateurs allongés dont les fréquences sont quasiment indépendantes de la largeur. La masse de l'oscillateur vaut $M = \rho e b L$. On verra plus loin que ce n'est pas directement la masse totale du résonateur qui entre en jeu, mais la masse effective du mode propre de vibration. On se contente ici de cette approximation.

Pour obtenir des fréquences d'oscillation les plus élevées possibles, la stratégie consiste à réduire la dimension de l'oscillateur. La fréquence de résonance des oscillateurs envisageables est ainsi intimement liée aux progrès technologiques en lithographie. En réduisant la taille des oscillateurs, on réduit aussi leur masse. Pour pouvoir observer le régime quantique, il faut donc faire un compromis entre la fréquence de l'oscillateur et sa taille. On constate en effet que le spectre de vibration à résonance dépend des dimensions de l'oscillateur comme $S_x^{\mathrm{Q}} \propto 1/b \times (L/e)^3$. Ce compromis est dicté par les conditions expérimentales accessibles : quelle température est atteignable expérimentalement et quelle est la sensibilité du dispositif de mesure utilisé.

Si on travaille avec des oscillateurs possédant un rapport d'aspect L/e constant, on constate qu'il faut travailler avec des oscillateurs les plus courts possible pour atteindre des fréquences élevées, mais étroits et de faible largeur b pour augmenter l'amplitude des vibrations. En pratique, les équipes cherchant à atteindre la limite quantique travaillent avec des oscillateurs en forme de poutre très fines.

Le choix de la mesure optique introduit des contraintes supplémentaires sur la taille du résonateur. En effet, pour pouvoir lire le mouvement de l'oscillateur avec un faisceau laser, il faut que ce dernier puisse se réfléchir sur sa surface, ce qui interdit l'emploi de résonateurs trop petits par rapport à la taille du faisceau. Les expériences à lecture optique emploieront donc des oscillateurs très différents, en général beaucoup plus gros que ceux utilisés pour d'autres types de lecture. Le désavantage évident est d'abaisser la température quantique, l'avantage étant de bénéficier de la très grande sensibilité des mesures optiques.

On a résumé sur le graphique 1.5 la variété des oscillateurs employés dans diverses expériences. Les échelles horizontale et verticale correspondent aux caractéristiques des oscillateurs : leur fréquence de résonance et leur masse. Les ronds correspondent aux différents oscillateurs qu'on va décrire par la suite. On a rajouté à cette représentation deux axes qui correspondent aux aspects expérimentaux : la température quantique T_{Q} et l'amplitude des

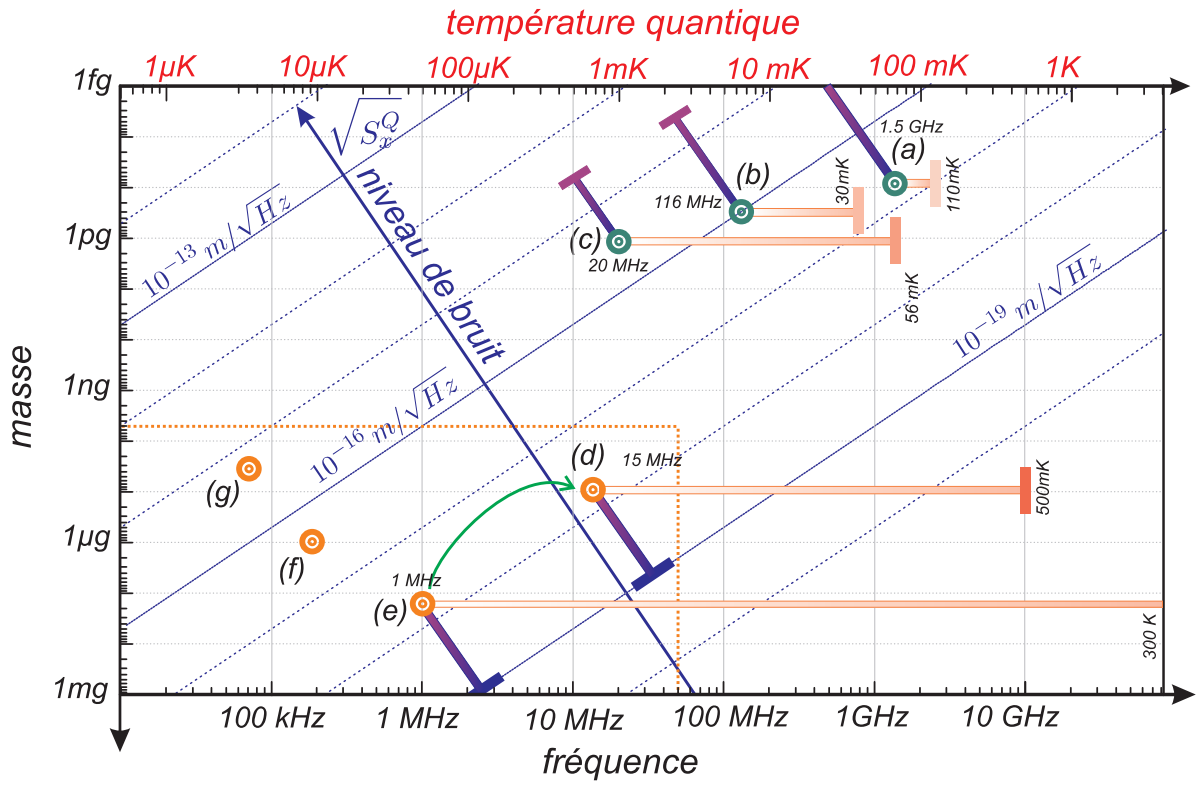


FIG. 1.5 – Diagramme illustrant les caractéristiques mécaniques (masse et fréquence) des oscillateurs utilisés dans diverses expériences. On a superposé les aspects expérimentaux (température quantique et amplitude des fluctuations quantiques de position). Chaque rond correspond à une expérience différente. Pour chacune d'elles sont représentées au moyen d'une barre la sensibilité actuelle du dispositif de mesure et la température atteinte. (a) : ref [45], (b) : ref [18], (c) : ref [17], (e) : l'état actuel de notre expérience, (d) : l'expérience une fois à froid et améliorée, (f) : ref [47], (g) : ref [48], (h) : ref [49]. Le trait en tirets délimite la région raisonnablement accessible aux mesures optiques.

fluctuations de position à résonance à la température quantique, $\sqrt{S_x^{\mathrm{Q}}}$. L'axe décrivant la température quantique est bien sûr parallèle à celui donnant la pulsation Ω_{m}, tandis que celui associé au niveau des fluctuations quantiques est tiré de la formule (1.34) en prenant une valeur constante pour le facteur de qualité mécanique $Q = 10^4$. Cette approximation est optimiste pour les oscillateurs de petite taille car les facteurs de qualité mesurés sont plus faibles que cela [44].

On a représenté en orange les expériences utilisant une mesure optique, en vert les autres. Les premières emploient pour l'instant des oscillateurs beaucoup plus gros que celles permises par les autres techniques de mesure, ce qui conduit à des températures quantiques bien plus basses. On a rajouté sur ce graphique l'état actuel tant en sensibilité qu'en température atteinte. Ils sont représentés séparément sur les deux axes expérimentaux par une barre. Les ronds correspondent donc à l'objectif à atteindre, relié par une barre colorée à la situation actuelle des expériences. On constate que les expériences nanoscopiques (points a, b et c) sont assez proches de l'objectif pour ce qui concerne la température, mais ne possèdent pas encore la sensibilité suffisante pour observer le régime quantique. A l'opposé, certaines expériences op-

tiques telles que la nôtre possèdent déjà la sensibilité suffisante mais sont encore très éloignées de la température quantique.

Expériences à travers le monde

Plusieurs groupes dans le monde tentent d'observer le régime quantique d'un résonateur mécanique. Leur objectif, intimement lié aux progrès époustouflants des techniques de gravure et de mesure nanoscopiques, repose essentiellement sur l'augmentation de la fréquence des oscillateurs pour augmenter la température quantique jusqu'à des niveaux accessibles expérimentalement (typiquement quelques dizaines de mK). Cette évolution est permise par l'amélioration des moyens de fabrication, qui permettent maintenant de réaliser des structures avec des détails allant jusqu'à la centaine de nanomètres [46]. Plusieurs équipes ont dépassé la valeur incroyable d'un gigahertz pour la fréquence de résonance mécanique.

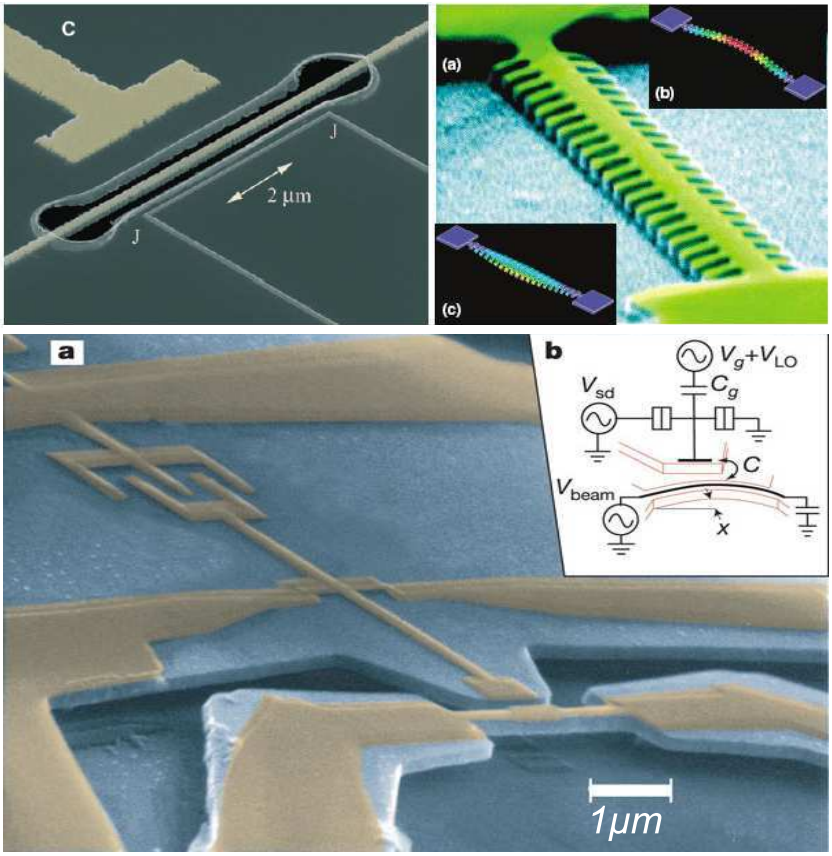


FIG. 1.6 – En haut à gauche, une image du résonateur utilisé dans la référence [17]. A droite, le peigne utilisé dans [45]. En bas, l'oscillateur et la mesure capacitive avec un SET décrits dans [18]

.

En haut à gauche sur la figure 1.6 est représenté l'oscillateur étudié dans le groupe de Keith Schwab à l'université du Maryland (point (c) sur la figure 1.5)[17]. De forme longiligne, il fait environ 8 μm de long pour une section de 300 nm de côté et pour une masse de 1 pg

environ. Il oscille à 20 MHz et atteindrait le régime quantique pour une température inférieure à 1 mK. Le résonateur est placé dans un cryostat qui permet de descendre à 56 mK, ce qui correspond à une soixantaine de phonons thermiques. Le facteur de qualité mécanique vaut environ 50 000. La mesure de position est effectuée en mesurant la valeur de la capacité formée par l'oscillateur et une armature fixe en regard, visible sur la figure 1.6. En vibrant, l'oscillateur change la longueur du condensateur, ce qui modifie sa capacité. La mesure de cette dernière est effectuée avec un SET (Single Electron Transistor en anglais), dont le principe de fonctionnement est brièvement décrit dans le paragraphe suivant. La sensibilité expérimentale atteinte est de $3.8 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, une valeur encore insuffisante par un facteur 10 pour observer l'oscillateur dans son régime quantique.

En bas de la figure 1.6, on peut voir le dispositif fabriqué en 2003 dans l'équipe d'Andrew Cleland de l'Université de Californie à Santa Barbara, correspondant au point (b) de la figure 1.5 [18]. L'oscillateur est en GaAs avec des dimensions de $3\,\mu$m de long, 250 nm de large et 200 nm d'épaisseur pour une masse de seulement $0,3$ pg ; son mode propre fondamental oscille à 116 MHz. Le facteur de qualité mécanique mesuré est de 1700. La température quantique associée est de 5.6 mK, et la température atteinte à ce jour est de 30 mK, soit environ 5 phonons thermiques. La mesure est ici-aussi réalisée à l'aide d'un SET. Ce dispositif (voir l'encart au bas de la figure 1.6) est constitué de deux hétéro-jonctions[2] définissant une zone centrale qui constitue par ailleurs l'une des armatures de deux capacités. La première, en haut sur le graphique, est reliée à une tension de commande, qui modifie la charge imposée à l'îlot central tandis que l'autre armature de la seconde capacité, en bas, est formée par le micro-résonateur lui-même. Ce dernier en vibrant modifie l'écartement du condensateur et donc la charge portée par les armatures du condensateur. Seul un nombre entier d'électrons peut être présent sur l'îlot central. Si on mesure le courant traversant les deux jonctions et qu'on modifie le potentiel appliqué sur l'armature externe du condensateur de contrôle, on va pouvoir observer des sauts de conductance à chaque fois qu'un électron est retiré ou ajouté à l'îlot central pour compenser la variation de charge imposée par la variation du potentiel de commande. C'est pour cela qu'on appelle ce dispositif un transistor à électron unique, la base correspondant à l'armature reliée à la tension de commande, tandis que les collecteurs et émetteurs correspondent aux deux hétéro-jonctions. Au voisinage des sauts électroniques, ce système est très sensible aux variations de charge imposées par les éléments environnant l'îlot central et est donc très sensible aux variations de la longueur du condensateur de mesure. Dans ce but, l'oscillateur est recouvert d'une fine couche d'Aluminium déposée par évaporation. La meilleure sensibilité pour ce type de dispositif publiée à ce jour est d'environ $10^{-15}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ tandis que la sensibilité nécessaire à l'observation du régime quantique est d'environ $3 \times 10^{-17}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$.

L'expérience menée à Boston dans le groupe de P. Mohanty exploite un mode d'ordre élevé d'un résonateur à la forme complexe (voir figure 1.6 en haut à droite) [45]. Une quarantaine d'oscillateurs, de 80 fg chacun, résonnant tous à la même fréquence d'environ 1.5 GHz, sont placés de chaque côté d'une poutre centrale. Lorsque tous les oscillateurs vibrent en phase, la partie centrale fait de même et sert ainsi d'amplificateur. La température quantique associée est de 72 mK alors que la température atteinte expérimentalement est de 110 mK, soit un

[2]Une hétérojonction correspond à deux armature métalliques séparées par une couche isolante d'épaisseur suffisamment faible pour que les électrons puissent la traverser par effet tunnel.

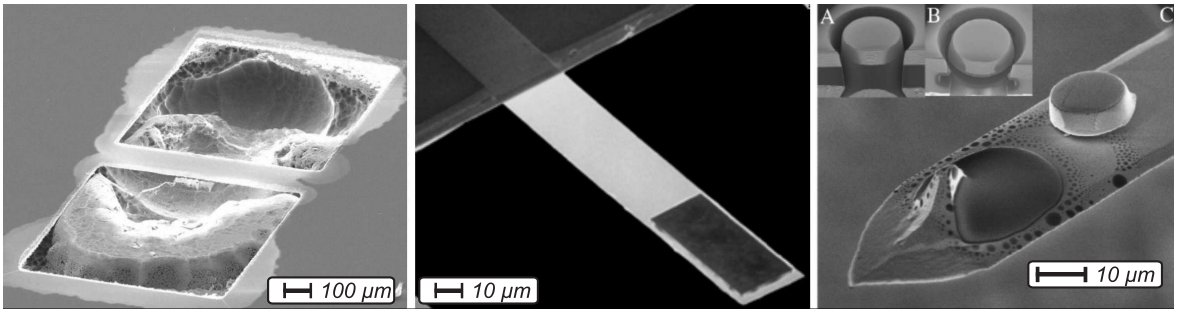


FIG. 1.7 – Trois oscillateurs associés à une mesure optique obtenus par différentes techniques de gravure. A gauche, un résonateur en forme de poutre doublement encastrée [47] ; une ablation laser a permis de ne conserver que le traitement diélectrique. Au centre, un cantilever traité optiquement tiré de la référence [49]. A droite, un miroir de 20 μm de diamètre déposé sur un micro-levier de microscope à force atomique [48].

unique phonon thermique (point (a) sur la figure 1.5). Une couche d'or a été déposée sur l'oscillateur et le système est plongé dans un champ magnétique intense (jusqu'à 8 T). Les déplacements de l'oscillateur dans le champ créent donc entre ses deux extrémités une force électromotrice dont la mesure renseigne sur la position de l'oscillateur. Cependant, la sensibilité n'est pas suffisante pour pouvoir observer proprement le régime quantique, attendu aux environs de $10^{-17}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$.

On a ajouté sur le graphique 1.5 l'état typique de notre expérience à la fin de cette thèse (point e) [27] et celui que l'on espère atteindre avec des structures plus petites et placées dans un cryostat (point d)[20]. Le choix d'une détection optique nous empêche d'utiliser des oscillateurs trop petits, la limite basse étant liée à la taille du col optique du faisceau de mesure qui doit être plus petite que celle du résonateur pour ne pas trop dégrader la finesse. Ainsi, les résonateurs utilisés au cours de la thèse, de taille millimétrique, oscillent aux environ du MHz, ce qui correspond à une température quantique de 48 μK, une valeur 20 à 1000 fois plus faible que celle des expériences précédentes. Cependant, alors que toutes ces expériences ont une sensibilité qui ne leur permet pas encore d'observer le régime quantique, la mesure optique possède l'avantage de présenter une sensibilité 10 000 fois plus grande et largement suffisante pour l'observation du régime quantique. Comme nous le verrons plus loin, la température à atteindre pour observer le régime quantique est trop basse pour être obtenue par cryogénie passive, mais un contrôle actif par friction froide du résonateur devrait permettre d'atteindre des températures suffisamment basses.

Les points (f), (g) et (h) présentent d'autres expériences utilisant une mesure optique, correspondant respectivement aux références [47], [48] et [49]. Les résonateurs sont représentés sur la figure 1.7. Ces résonateurs possèdent des dimensions transverses un peu plus faibles mais comparables aux nôtres (autour de la centaine de microns) mais sont plus fins, ce qui explique leurs faibles masses et les fréquence de résonance plus basses.

1.3 La mesure interférométrique optique

Nous présentons dans cette partie le principe de la mesure optique du mouvement du résonateur, la sensibilité attendue, et des considérations expérimentales sur la mise en œuvre de cette technique avec des micro-résonateurs. On se limite ici à des descriptions simples des phénomènes, une approche plus détaillée de la sensibilité étant présentée dans le chapitre 2.

1.3.1 Mesure de position avec une cavité Fabry-Perot

Un faisceau laser est envoyé dans une cavité Fabry-Perot (figure 1.8) formée d'un coupleur d'entrée partiellement réfléchissant et d'un miroir déposé sur le résonateur à étudier. Ce dernier peut être considéré comme totalement réfléchissant, de sorte que si on néglige les pertes du coupleur, l'intensité réfléchie par le coupleur d'entrée est égale en moyenne à l'intensité incidente, indépendamment du désaccord de fréquence entre la cavité et le laser : tous les photons finissent par ressortir de la cavité par le coupleur d'entrée.

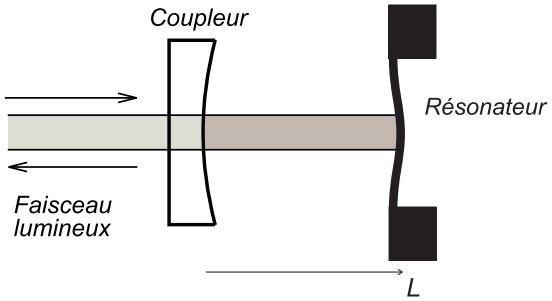


FIG. 1.8 – Cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie. Le résonateur à l'arrière est totalement réfléchissant. Tous les photons ressortent par le coupleur d'entrée.

Par contre, l'intensité intracavité varie en fonction de la longueur de la cavité. Lorsque cette dernière est un multiple de la demi-longueur d'onde $\lambda/2$, les différentes ondes créées par les multiples réflexions sur les miroirs interfèrent de manière constructive et l'intensité intracavité $\overline{I}$ présente un maximum. Lorsqu'on fait varier la longueur de la cavité autour d'une telle résonance, cette intensité décrit un pic d'Airy de forme Lorentzienne dont la hauteur est proportionnelle à l'intensité incidente $\overline{I}^{\text{in}}$ selon la formule :

$$\overline{I} = \frac{2}{\pi}\mathcal{F}\overline{I}^{\text{in}}, \tag{1.36}$$

où $\mathcal{F}$ est la finesse de la cavité, qui dépend uniquement des caractéristiques optiques des miroirs (transmission du miroir d'entrée si on néglige les pertes). L'effet d'amplification entre les intensités incidente et intracavité permet d'interpréter la finesse comme le nombre moyen d'aller-retour qu'effectue un photon dans la cavité avant de ressortir. Elle correspond également au rapport entre la distance $\lambda/2$ entre deux résonances et la largeur à mi-hauteur $\lambda/2\mathcal{F}$ de la fonction d'Airy (voir la figure 1.9).

La phase du faisceau réfléchi est elle-aussi sensible à un changement de longueur de la cavité. Lorsque le miroir se déplace d'une quantité de l'ordre de $\lambda/2\mathcal{F}$ de part et d'autre de la résonance de la cavité, la phase du faisceau réfléchi subit une variation égale à 2π. La pente

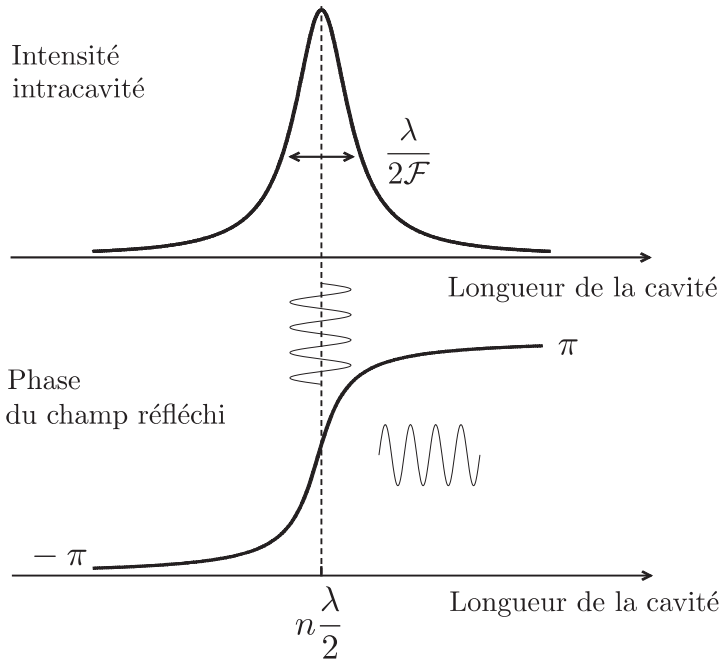


FIG. 1.9 – Courbe du haut : pic d'Airy décrit par l'intensité intracavité lorsque la longueur de la cavité est balayée au voisinage d'une résonance. Courbe du bas : déphasage du faisceau réfléchi par la cavité. On constate qu'à la résonance de la cavité, la phase est très sensible à des variations de longueur.

de la courbe représentant la phase du champ réfléchi est maximale à résonance et vaut $8\mathcal{F}/\lambda$ (voir la figure 1.9). Le déphasage $\delta\varphi^{\text{out}}$ produit à résonance par un petit déplacement δx du résonateur s'écrit alors :

$$\delta\varphi^{\text{out}} = 8\mathcal{F}\frac{\delta x}{\lambda}. \tag{1.37}$$

Ce déphasage est à comparer avec le déphasage équivalent qui aurait été mesuré avec un simple interféromètre de Michelson : $\delta\varphi = 4\pi\delta x/\lambda$. La multiplication des aller-retours de la lumière entre les deux miroirs amplifie ainsi l'effet du mouvement sur la lumière par un facteur $\mathcal{F}$. La sensibilité d'un Fabry-Perot est donc bien meilleure que celle d'un dispositif d'interférence à deux ondes, à condition de rester au voisinage des résonances optiques de la cavité. Pour fixer les ordres de grandeur, avec une finesse de 30 000 et une longueur d'onde de 1 μm, la largeur des pics d'Airy correspond à une variation de longueur de 18 picomètres.

Ce dispositif se révèle donc être un outil extrêmement puissant pour mesurer les petits déplacements avec une très grande sensibilité car la phase varie notablement pour des variations de longueur bien plus petites que la longueur d'onde. La sensibilité dépend en fait des sources de bruit auxquelles est sensible la mesure.

Si l'ensemble des sources de bruit classique (vibrations, bruit sismique, bruit de fréquence, fluctuation d'indice optique), sur lesquelles nous reviendrons plus loin, sont maîtrisées, la sensibilité du dispositif est en dernier lieu limitée par le bruit quantique de phase du faisceau de mesure. On va estimer rapidement la sensibilité correspondante.

Description quantique du champ

En optique quantique, le champ électromagnétique se décompose en une somme de modes équivalents à des oscillateurs harmoniques indépendants [50]. On supposera dans la suite que le champ peut être décrit par un seul mode de fréquence optique ω_0, avec une direction de propagation et un état de polarisation donnés. Comme pour un oscillateur harmonique mécanique, il est caractérisé par des opérateurs de création et d'annihilation a et $a^\dagger$ obéissant aux lois de commutation $[a, a^\dagger] = 1$.
On peut aussi définir deux opérateurs appelés quadratures du champ :

$$a_1 = a + a^\dagger \tag{1.38}$$

$$a_2 = i\left(a^\dagger - a\right) \tag{1.39}$$

qui sont les équivalents électromagnétiques de la position et de l'impulsion de l'oscillateur. De même que les opérateurs a et $a^\dagger$ qui les composent, les quadratures du champ ne commutent pas. Les dispersions Δa_1 et Δa_2 de ces deux opérateurs vérifient une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta a_1 \Delta a_2 \geq 1. \tag{1.40}$$

Cette inégalité implique l'existence de fluctuations quantiques pour ces variables. La méthode semi-classique [51] que nous allons présenter dans cette section se révèle très bien adaptée pour décrire ces fluctuations et permet de leur associer une interprétation géométrique dans l'espace des phases.

La méthode semi-classique [43, 51, 52] consiste à associer des variables aléatoires classiques α et α^*, complexes conjuguées l'une de l'autre, aux opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ du champ. La distribution de quasiprobabilité de Wigner [53] décrit alors la loi de probabilité des variables α et α^*. Elle est définie de sorte que toute valeur moyenne quantique de produit d'opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ rangés dans l'ordre symétrique est égale à la valeur moyenne de la même combinaison des variables α et α^* pondérée par la distribution de Wigner. La variable semi-classique α peut s'écrire comme la somme de sa valeur moyenne $\overline{\alpha}$ correspondant à la valeur classique du champ et de ses fluctuations $\delta\alpha$ régies par une loi de probabilité semi-classique et caractérisant les fluctuations quantiques du champ :

$$\alpha = \overline{\alpha} + \delta\alpha. \tag{1.41}$$

Les champs électromagnétiques monochromatiques qu'on utilise dans les expériences d'optique quantique, principalement des champs laser, sont bien modélisés par des états cohérents [50]. Ces états sont obtenus en faisant agir l'opérateur de déplacement $\hat{D}(\alpha) = \exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^\star a\right)$ sur le vide [37]. La fonction d'onde de ces états déplacés, $\hat{D}(\alpha)|0\rangle$, est celle du vide translatée dans l'espace des phases jusqu'au point α. On peut montrer que les états obtenus, paramétrés par le nombre complexe α, évoluent en valeur moyenne comme des champs classiques : ils tournent dans l'espace des phases à la pulsation ω_0 du mode du champ électromagnétique qu'on étudie. Leurs variances sont indépendantes du temps et sont égales à celles du vide électromagnétique, et ceci quelle que soit l'amplitude $|\overline{\alpha}|$ du champ étudié.

Pour les états cohérents du champ, la distribution de Wigner est positive. Elle peut être considérée comme une véritable distribution de probabilités, et les variables α et α^* représentent les valeurs possibles du système. La figure 1.10 montre la fonction de Wigner

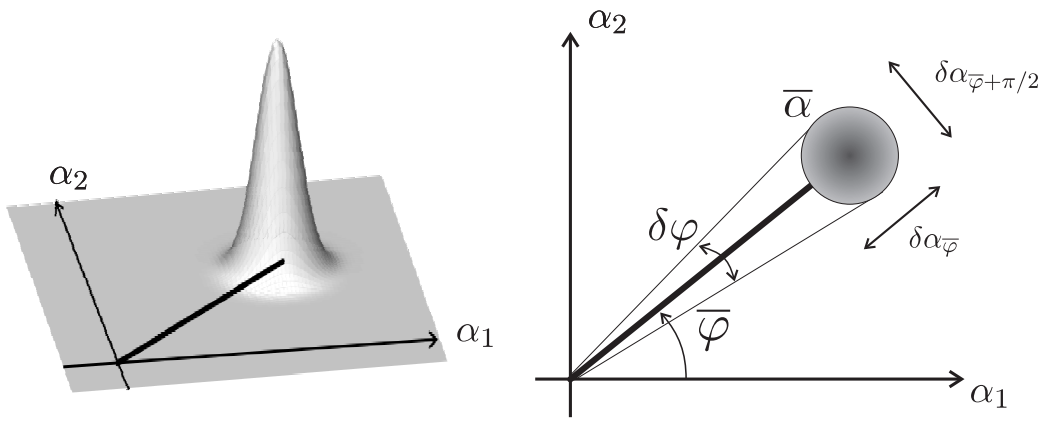


FIG. 1.10 – Courbe de gauche : distribution de quasiprobabilité d'un état cohérent. Courbe de droite : projection dans l'espace des phases de la fonction de Wigner d'un état cohérent décrit par le champ moyen $\overline{\alpha}$.

pour un tel état. Le plan horizontal représente l'espace des phases, dont les axes sont définis par les quadratures $\alpha_1 = \alpha + \alpha^\star$ et $\alpha_2 = i(\alpha^\star - \alpha)$, qui sont les analogues semi-classiques des opérateurs a_1 et a_2. Pour un état cohérent, la fonction d'onde étant une gaussienne, la distribution de Wigner l'est aussi : elle est centrée sur la valeur moyenne $\overline{\alpha}$ correspondant à l'amplitude classique du champ et la variance est égale à 1 dans toutes les directions. On a donc $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = 1$ et un état cohérent correspond à un état minimal pour l'inégalité de Heisenberg (équation 1.40). On a représenté sur la figure 1.10 à droite la projection de la fonction de Wigner d'un état cohérent sur l'espace des phases. Formellement, le disque représente la courbe d'équiprobabilité à $1/e$ de la distribution de Wigner. Chaque point du disque peut être interprété comme une réalisation possible du champ.

On peut définir de façon plus générale l'ensemble des quadratures du champ par l'expression :

$$\alpha_\theta = e^{-i\theta}\alpha + e^{i\theta}\alpha^\star. \tag{1.42}$$

Elles sont paramétrées par l'angle θ et permettent de décrire les fluctuations de combinaisons linéaires des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$. Cette définition revient à changer le système d'axe en effectuant une rotation d'un angle θ dans l'espace des phases. La dispersion de la quadrature θ est alors obtenue en projetant la distribution sur l'axe d'angle θ. Pour un état cohérent, les dispersions dans toutes les directions sont égales à 1 : $\Delta\alpha_\theta = 1$.

Pour une réalisation du champ représentée par un point dans l'espace des phases, la distance à l'origine représente l'amplitude du champ et l'angle avec l'axe horizontal sa phase :

$$\alpha = \sqrt{N}e^{i\varphi}, \tag{1.43}$$

où $N = |\alpha|^2$ est le nombre de photons dans le mode et φ la phase du champ. Les fluctuations quantiques d'intensité δN et de phase $\delta\varphi$ du champ peuvent alors être estimées en linéarisant cette expression autour de la valeur moyenne du champ $\overline{\alpha} = \sqrt{\overline{N}}e^{i\,\overline{\varphi}}$. On peut les relier aux fluctuations des quadratures du champ selon les équations :

$$\delta N \quad = \quad |\overline{\alpha}|\,\delta\alpha_{\overline{\varphi}}, \tag{1.44}$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{2|\overline{\alpha}|}\,\delta\alpha_{\overline{\varphi}+\pi/2}. \tag{1.45}$$

La quadrature dite d'amplitude $\delta\alpha_{\overline{\varphi}}$ parallèle au champ moyen est reliée au bruit d'intensité, et la quadrature de phase $\delta\alpha_{\overline{\varphi}+\pi/2}$, dans la direction orthogonale, caractérise le bruit de phase. La variance de l'intensité ΔN^2 est égale au nombre moyen $\overline{N}$ de photon, ce qui est caractéristique de la distribution Poissonnienne de photons dans un état cohérent. Les fluctuations relatives d'intensité $\Delta N/\overline{N}$ décroissent donc quand l'intensité augmente avec une dépendance en $1/\sqrt{\overline{N}}$. La variance des fluctuations de phase est quant-à-elle inversement proportionnelle au nombre de photons :

$$\Delta\varphi^2 = \frac{1}{4\overline{N}}. \tag{1.46}$$

On peut interpréter ce résultat en remarquant que la dispersion de phase $\Delta\varphi$ correspond à l'angle selon lequel la distribution du champ est vue depuis l'origine (voir la figure 1.10). La distribution ayant une dispersion unité dans toute les directions et indépendamment de l'amplitude du champ, $\Delta\varphi$ décroît donc quand l'intensité augmente et que la distribution s'éloigne de l'origine.

Les quantités N et φ sont deux variables quantiques qui ne commutent pas et leur dispersion vérifie une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta N\Delta\varphi \geq \frac{1}{2}. \tag{1.47}$$

Un état cohérent du champ est donc un état minimal pour cette inégalité. Les fluctuations d'intensité et de phase correspondent en fait au minimum accessible avec des états classiques de la lumière et définissent le bruit quantique standard.

Sensibilité de la mesure de petits déplacements

Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, la phase du faisceau réfléchi par la cavité Fabry-Perot de grande finesse est très sensible à résonance au déplacement du résonateur et peut être utilisée pour mesurer sa position. Dans ce paragraphe, on néglige les effets de la pression de radiation exercée par la lumière sur les miroirs. Pour déterminer la sensibilité d'une telle mesure, il faut prendre en compte les fluctuations quantiques de phase du faisceau lumineux. Si l'on injecte un faisceau laser cohérent dans une cavité sans pertes, le faisceau sortant à résonance retranscrit les fluctuations de la phase du faisceau incident. Ce bruit de phase $\delta\varphi^{\text{in}}$ d'origine quantique se superpose aux variations de phase dues aux déplacements du micro-miroir et l'équation (1.37) devient :

$$\delta\varphi^{\text{out}} = 8\mathcal{F}\frac{\delta x}{\lambda} + \delta\varphi^{\text{in}}. \tag{1.48}$$

La description précédente du champ électromagnétique correspond à un modèle où le champ est quantifié dans une boîte cubique de dimensions finies. Le passage à un faisceau lumineux se propageant est réalisé en faisant tendre la longueur de la boîte vers l'infini et en remplaçant le nombre N de photons par un flux de photon [52]. L'approche semi-classique présentée ci-dessus se généralise et décrit les fluctuations du champ à toutes les fréquences. En particulier les fluctuations de phase $\delta\varphi^{\text{in}}[\Omega]$ d'un faisceau cohérent à la fréquence Ω ont une amplitude

inversement proportionnelle à la racine carrée du flux moyen de photons $\overline{I}^{\text{in}}$. Le spectre de ces fluctuations s'écrit :

$$S_{\varphi}^{\text{in}}[\Omega] = \frac{1}{4\overline{I}^{\text{in}}}. \tag{1.49}$$

Le plus petit déplacement mesurable δx_{min} est défini à partir de l'équation (1.48) en égalisant le signal au bruit :

$$\delta x_{\text{min}} = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\overline{I}^{\text{in}}}}. \tag{1.50}$$

Cette équation montre que la sensibilité de la mesure est d'autant plus grande que la finesse de la cavité et l'intensité incidente sont grandes, du moins tant que l'on peut négliger les effets quantiques de la pression de radiation sur lesquels on reviendra dans la section suivante.

Dans notre expérience, nous utilisons une source laser Nd:Yag fonctionnant à $\lambda = 1064\,\text{nm}$, longueur d'onde utilisée dans tous les détecteurs interférométriques d'onde gravitationnelles [4, 5, 36]. La très grande qualité optique nécessaire pour ces détecteurs a permis de réaliser un bond technologique pour tous les traitements optiques proches de cette longueur d'onde. On trouve ainsi des traitements présentant des très grandes réflectivités, de faibles pertes (inférieures au ppm) et supportant des intensités importantes. Avec des résonateurs en silicium, cela nous a permis de concevoir des cavités optiques ayant des finesses de l'ordre de 30 000 et supportant plusieurs milliwatts incidents. Le flux de photons incidents $\overline{I}^{\text{in}}$ est relié à la puissance lumineuse P^{in} par :

$$P^{\text{in}} = \hbar\omega_0 \overline{I}^{\text{in}}, \tag{1.51}$$

où $\hbar\omega_0$ est l'énergie d'un photon. Une puissance incidente de 4 mW correspond à un flux moyen $\overline{I}^{\text{in}}$ égal à 2.1×10^{16} photon/s et on obtient d'après l'équation (1.50) une sensibilité de $1.5 \times 10^{-20}\,\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$. Cette valeur est au moins 10^4 fois plus basse que celle obtenue avec les systèmes de détection capacitifs ou magnétiques présentés précédemment (section 1.2).

Le bruit de pression de radiation

Une des conséquences des postulats de la mesure en mécanique quantique est que la mesure perturbe le système étudié. La mesure optique de la position du résonateur n'échappe pas à ce principe puisque la lumière qui sert à effectuer la mesure exerce sur le résonateur une force de pression de radiation : en se réfléchissant sur le miroir, chaque photon transfère au miroir une impulsion $2\hbar k$ où $k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde de la lumière. Le miroir est donc soumis par le faisceau laser à une force :

$$F_{\text{rad}}(t) = 2\hbar k I(t), \tag{1.52}$$

où $I(t)$ est le flux de photons incident sur le résonateur à l'instant t, qui est relié à la puissance intracavité P par $I = P/h\nu$ où $\nu = c/\lambda$ est la fréquence du laser, chaque photon transportant une quantité d'énergie $h\nu$. La force de pression de radiation induit un décalage statique de la cavité sur lequel on reviendra plus loin, mais on suppose ici qu'on maintient le laser à la résonance de la cavité, ce qui signifie que l'asservissement de fréquence du laser compense ce décalage.

Les fluctuations d'intensité du champ intracavité induisent des fluctuations de la force de pression de radiation subie par le micro-miroir, qu'on obtient en linéarisant l'équation (1.52) :

$$\delta F_{\text{rad}} = 2\hbar k\, \delta I. \tag{1.53}$$

Ces fluctuations sont donc responsables d'un bruit de position qui reproduit les fluctuations d'intensité du champ intracavité avec un facteur de proportionnalité égal à la susceptibilité mécanique du micro-miroir. On verra au chapitre 2 que les fluctuations du champ intracavité sont également amplifiées par rapport à celles du champ incident d'un facteur proportionnel à la finesse de la cavité. Le bruit de pression de radiation s'écrit alors :

$$\delta x_{\mathrm{rad}}[\Omega] = \chi[\Omega]\,\delta F_{\mathrm{rad}}[\Omega] = \chi[\Omega]\,\frac{8\hbar}{\lambda}\,\mathcal{F}\,\delta I^{\mathrm{in}}[\Omega]. \tag{1.54}$$

L'utilisation d'une cavité optique augmente donc aussi bien l'effet de la pression de radiation, en multipliant le nombre des aller-retours des photons, que la sensibilité de la mesure de position. Nous verrons plus en détail dans la section 2.4.2 que pour pouvoir observer l'état fondamental du résonateur, il faut tenir compte des perturbations induites par la pression de radiation et choisir l'intensité lumineuse de manière à réaliser un compromis entre le bruit de pression de radiation dont l'effet augmente avec l'intensité et le bruit de phase du faisceau qui décroît avec l'intensité.

L'observation du bruit de pression de radiation est par ailleurs un des objectifs de l'équipe, et l'emploi de micro-résonateurs est donc également utile dans cette optique car au vu de leur faible masse, ils répondent de manière importante à la pression de radiation. Pour fixer les ordres de grandeur, le bruit de position induit par les fluctuations de la pression de radiation d'un faisceau de 4 mW incident sur une cavité de finesse 30 000, avec un micro-miroir de masse $M = 100\,\mu$g, oscillant à 1 MHz avec un facteur de qualité de 10 000, s'élève au niveau de $\delta x_{\mathrm{rad}} \simeq 9 \times 10^{-18}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à la fréquence de résonance mécanique. Il est donc plus grand que la limite de sensibilité imposée dans les mêmes conditions par le bruit de phase (équation 1.50).

1.3.2 Mise en oeuvre expérimentale

La figure 1.11 présente le schéma de principe de l'expérience qui a été développée au cours de cette thèse. Le laser utilisé est un laser solide, Nd:YAG qui fournit environ 1 watt de lumière à 1064 nm. Au final, seulement quelques milliwatts sont envoyés dans la cavité de mesure, mais plusieurs étages de contrôle intermédiaires nécessitent une puissance lumineuse plus importante.

Le laser doit être asservi en intensité pour maintenir une puissance incidente constante sur la cavité optique. Ce contrôle est effectué en prélevant une partie du faisceau lumineux, en mesurant ses variations d'intensité au moyen d'une photodiode puis en régulant l'intensité en amont au moyen d'un modulateur électro-optique.

Le faisceau laser envoyé vers la cavité de mesure doit aussi avoir une structure spatiale monomode transverse correspondant au mode fondamental résonnant dans la cavité. Il faut donc "nettoyer" son profil spatial transverse et éliminer l'astigmatisme du faisceau. Cette étape est réalisée au moyen d'une cavité de filtrage spatial dont la longueur est asservie sur la longueur d'onde du laser de façon à ne laisser passer que le mode fondamental de la cavité.

On a accès aux déplacements du résonateur en mesurant la phase du faisceau réfléchi par la cavité de mesure. Mais pour cela, il faut maintenir le laser à résonance avec la cavité. Ceci est réalisé à la fois en changeant la longueur de la cavité et en changeant la fréquence du laser. La cavité étant rigide, la première méthode n'agit qu'à très basse fréquence en modifiant sa température, ce qui dilate la cavité et modifie sa longueur. La seconde méthode consiste à asservir la fréquence du laser sur la résonance optique de la cavité. On réalise cet

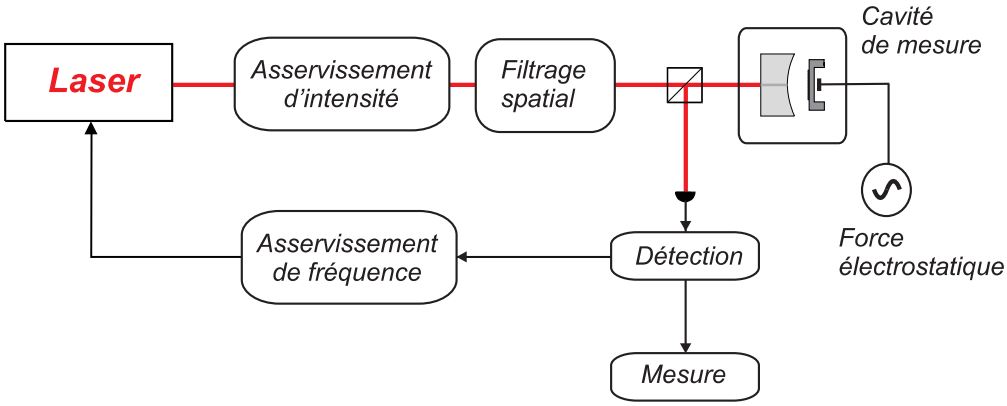


FIG. 1.11 – Le schéma de principe de l'expérience.

asservissement grâce à une technique de modulation et démodulation de la phase du faisceau laser dite de Pound-Drever-Hall. La composante basse fréquence du signal d'erreur sert à l'asservissement tandis que ses variations à plus haute fréquence fournissent des informations sur la phase du faisceau réfléchi et renseignent donc sur les variations de longueur de la cavité. Le signal est en général acquis sur un analyseur de spectres qui nous donne accès après calibration au spectre de bruit de position du résonateur.

L'enceinte de mesure est placée sous vide, la pression lors des mesures étant inférieure à 10^{-2} mbar, afin d'améliorer les facteurs de qualité mécanique et d'isoler acoustiquement la cavité et de s'affranchir des fluctuations d'indice optique attribuables au gaz résiduel. Enfin, on s'est donné la possibilité d'appliquer une force extérieure sur le micro-miroir. Pour cela, on a placé une pointe métallique à l'arrière du résonateur, ce qui permet d'appliquer une force électrostatique.

Nous reviendrons plus en détail sur les éléments constitutifs du montage dans les parties suivantes : micro-résonateur et cavité de mesure dans le chapitre 2, source laser et détection dans le chapitre 3. Dans cette partie, nous passons en revue plusieurs points auxquels on doit prêter attention dans le choix du résonateur en vue de réaliser une mesure optique de ses vibrations.

Limitation sur les dimensions transverses

Le choix de la mesure optique engendre une limitation importante sur les dimensions des résonateurs. L'emploi d'un faisceau laser pour la mesure est limité à une taille supérieure à la longueur d'onde, mais l'utilisation d'une cavité de grande finesse impose une condition plus drastique encore sur la taille du résonateur. Avec un résonateur trop petit par rapport à la taille transverse du faisceau, on perd la lumière qui n'est plus réfléchie, ce qui se traduit par des pertes optiques qui limitent la finesse. Les cols optiques les plus petits obtenus à l'heure actuelle sont de l'ordre du micromètre, le plus souvent réalisés au moyen d'objectifs de microscopes. En biophysique, les pinces optiques servant à la manipulation d'objets biologiques reliés à des billes micrométriques utilisent des cols optiques de quelques microns [54].

Dans une cavité optique, la géométrie des miroirs et leur écartement déterminent entièrement la valeur du col du mode fondamental de la cavité. Les contraintes de fabrication imposent que

le résonateur mécanique soit plan et de fait le col optique y est localisé. Dans l'approximation paraxiale, la valeur du col est donnée par la formule [55] :

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{L(R-L)}, \tag{1.55}$$

où R est le rayon de courbure du miroir d'entrée et L la longueur de la cavité. Par exemple, dans notre configuration expérimentale, avec un rayon de courbure de 5 cm et une longueur de 2.4 mm, on obtient un col de 60 μm. En réduisant le rayon de courbure du miroir d'entrée et en réduisant encore la longueur de la cavité, on peut espérer aller vers des tailles de col d'une trentaine de microns. Pour réduire encore la taille du faisceau de mesure, jusqu'à une dizaine de microns environ, il faudrait se rapprocher de la position d'instabilité géométrique de la cavité en augmentant la longueur de la cavité jusqu'à presque égaler le rayon de courbure du miroir d'entrée. Cependant, cette dernière solution risque d'augmenter l'influence du bruit de fréquence dans la mesure et nécessiter une réduction de ce dernier.

La nécessité d'utiliser des cavités de grande finesse contraint donc sérieusement la taille du résonateur. Pour quantifier ce point, on peut calculer la puissance lumineuse non réfléchie. La puissance surfacique du champ électromagnétique en un point $\vec{r}$ de la surface du miroir s'écrit, pour une taille de col w_0 :

$$p(r) = \frac{2P}{\pi w_0^2} e^{-2r^2/w_0^2}, \tag{1.56}$$

où P est la puissance incidente sur le miroir. Avec cette définition, la puissance surfacique intégrée sur la totalité du plan transverse est égale à la puissance P. Supposons maintenant

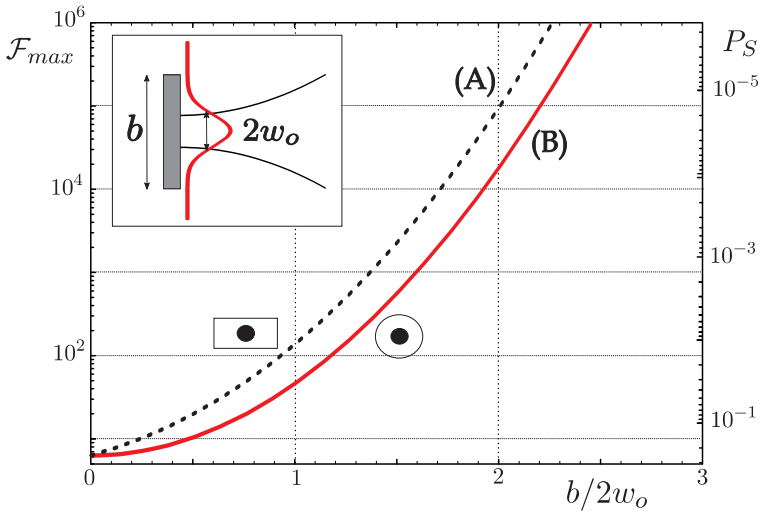


FIG. 1.12 – Influence de la dimension transverse du résonateur sur la finesse maximale accessible, pour un oscillateur circulaire (trait plein) et pour un profil rectangulaire (pointillés).

que le résonateur soit de forme circulaire de surface S avec un diamètre b, traité optiquement pour obtenir un coefficient de réflexion R_o. Le coefficient de réflexion réel est égal au rapport

entre l'intensité réfléchie par le miroir et l'intensité incidente et vaut :

$$R = R_o \int_S d^2r \frac{2}{\pi w_0^2} e^{-2r^2/w_0^2} = R_o \left(1 - e^{-b^2/2w_0^2}\right). \tag{1.57}$$

Ainsi la taille finie du résonateur induit des pertes supplémentaires dans la cavité qui s'élèvent à $P_S = R_o e^{-b^2/2w_0^2}$. Comme on le verra dans le chapitre 2, la finesse est reliée aux pertes totales P dans la cavité par $\mathcal{F} = 2\pi/P$. Si cette dernière était limitée uniquement par la taille finie du résonateur dans le cas idéal où les miroirs seraient parfaitement réfléchissants ($R_o = 1$), on aurait une finesse maximale atteignable de :

$$\mathcal{F}_{\max} = \frac{2\pi}{1-R} = 2\pi e^{b^2/2w_0^2}. \tag{1.58}$$

On trouve que la finesse plafonne à 10 000 pour un rapport voisin de 2 entre le diamètre du résonateur et le diamètre $2w_0$ du faisceau laser. Pour une finesse de 100 000, ce rapport vaut environ 2,5. Cette condition est donc très contraignante : pour un waist de 60 μm par exemple, cela restreint les structures à une extension transverse de 300 μm au minimum. Il faut néanmoins noter que nous avons supposé pour simplifier les calculs que le résonateur avait une forme circulaire, ce qui signifie que les pertes sont identiques dans toutes les directions. Si on travaille avec des structures rectangulaires ayant une longueur L beaucoup plus grande que sa largeur b, on obtient une condition un peu moins contraignante. Les expressions des pertes et de la finesse maximale sont alors [3] :

$$P'_S = 1 - R_o \int_{-b/2}^{b/2} dy \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} e^{-2y^2/w_0^2} = 1 - R_o \ \mathrm{Erf}[b/\sqrt{2}w_0] \tag{1.59}$$

$$\mathcal{F}'_{\max} = \frac{2\pi}{1 - \mathrm{Erf}[b/\sqrt{2}w_0]}. \tag{1.60}$$

On a représenté sur la figure 1.12 la dépendance de la finesse en fonction des dimensions transverses pour les deux configurations. Un des futurs objectifs de l'expérience est de travailler avec des structures plus petites. Pour un waist d'une dizaine de microns et une finesse 30 000, la taille transverse minimale pour qu'elle ne dégrade pas la finesse est de 40 μm, ce qui nous laisse une marge de progression importante par rapport à la situation actuelle, en ce qui concerne la réduction de la taille de nos résonateurs.

Contraintes sur l'épaisseur du résonateur

Il n'y a pas de réelle limitation sur l'épaisseur du résonateur. Il faut juste qu'il puisse supporter sans trop se déformer les multiples couches diélectriques qui sont déposées à sa surface pour former le miroir. Comme chaque couche a une épaisseur optique égale à un quart de longueur d'onde et qu'une vingtaine de doublets sont nécessaires à l'obtention de grandes réflectivités, l'épaisseur optique totale est d'environ 10λ, c'est-à-dire environ 5 μm en prenant un indice moyen égal à 2. Pour supporter une telle épaisseur, il semble raisonnable de ne pas descendre en-dessous d'une quinzaine de microns d'épaisseur pour le résonateur. Les pièces que nous avons réalisées ont une épaisseur de 60 μm et nous n'avons pas observé de déformation préjudiciable liée au dépôt des couches diélectriques. D'autres équipes [47, 48, 111] travaillant

[3] La fonction Erf est définie par $\mathrm{Erf}[a] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-u^2} du$.

sur des résonateurs beaucoup plus fins que les nôtres, de quelques microns d'épaisseur, ont observé des effets thermoélastiques très importants, qui peuvent aller jusqu'à masquer les effets de la pression de radiation. L'absorption de lumière dans le miroir provoque en effet un échauffement local qui déforme le résonateur avec des temps de réponse pouvant être comparables à la fréquence de résonance de l'oscillateur.

Contraintes sur la fréquence de l'oscillateur

La mesure optique possède une très grande sensibilité, à condition que la fréquence de résonance de l'oscillateur soit inférieure à la bande passante de la cavité qui correspond à la largeur du pic d'Airy transposée dans le domaine fréquentiel. Elle vaut $\Omega_c = 2\pi \times \nu_{\mathrm{ISL}}/2\mathcal{F}$ où l'intervalle spectral libre est défini par $\nu_{\mathrm{ISL}} = c/2L$ et correspond à l'écart en fréquence entre deux résonances d'une cavité de longueur L. Les finesses qu'on a pu atteindre expérimentalement avec des micro-miroirs sont de l'ordre de 30 000. On verra qu'il est difficile d'envisager des cavités très courtes, mais avec $L = 1\,\mathrm{mm}$ on arrive à un intervalle spectral de 150 GHz et une bande passante de 50 MHz. Ainsi cette valeur de 50 MHz, qui correspond aussi à la bande passante typique des photodétecteurs qu'on utilise en pratique, semble être une limite supérieure sur la fréquence envisageable pour les résonateurs.

Température accessible expérimentalement

Les résonateurs utilisés en détection optique sont plus gros que ceux utilisés dans les expériences à détection capacitive (section 1.2). Ils vont donc osciller à des fréquences plus basses, typiquement entre 1 et 20 MHz, selon le résonateur et l'ordre du mode de vibration observé. Pour un oscillateur à 1 MHz la température quantique correspondante est de $50\,\mu$K seulement, et elle vaut 1 mK pour une résonance à 20 MHz.

Les températures les plus basses jamais atteintes sont obtenues par désaimantation adiabatique de sels paramagnétiques. Cette méthode permet d'atteindre des températures inférieures à $100\,\mu$K, et même d'aller en-deçà en utilisant les moments magnétiques nucléaires. Cependant ces systèmes ne supportent pas de source d'énergie telle que la puissance optique absorbée par les miroirs.

Une alternative plus réaliste repose sur les cryostats à Hélium 4 liquide qui possède une température d'ébullition de 4.21 K à la pression atmosphérique. L'échantillon à refroidir est en contact thermique avec un mélange d'Hélium en phases liquide et gazeuse. En pompant l'Hélium, on peut abaisser la température de l'équilibre liquide-gaz : typiquement pour une pression de 10^{-1} mbar, l'équilibre s'établit à $1K$. Ce premier type de cryostat à Hélium permet d'atteindre des températures de l'ordre de 700 mK avec des échantillons de taille conséquente. Pour descendre encore plus bas en température, il est possible d'utiliser des cryostats à dilution qui exploitent les propriétés du mélange binaire Hélium 4 - Hélium 3 qui subit une transition de phase pour des températures inférieures à 0.87 K. Grâce aux propriétés du mélange, on peut retirer au système l'énergie nécessaire pour effectuer la transition de phase en pompant l'Hélium 3. Cette technique permet d'atteindre des températures de 5 mK environ pour des systèmes fermés. Si l'expérience induit des apports d'énergie au système (onde radio-fréquence, pertes optiques, etc), les valeurs de température accessibles sont plutôt de l'ordre de la dizaine de mK.

Pour notre expérience, nous avons besoin d'au moins un accès optique pour réaliser la mesure optique, ce qui complique la conception du cryostat. Le prix des cryostats à dilution

et leur complexité de mise en œuvre sont aussi des facteurs limitants. Un bon compromis parait être le cryostat à Hélium liquide, qui permettrait raisonnablement d'atteindre des températures inférieures au kelvin. Au département de physique a été développé un cryostat ne nécessitant pas d'azote liquide et fonctionnant uniquement avec de l'Hélium, et permettant d'atteindre 800 mK. L'absence d'azote possède un avantage indéniable car cela évite les vibrations induites par l'ébullition du liquide.

Quelle que soit la solution cryogénique, il semble toutefois impossible d'atteindre la température quantique de cette manière. Sur le graphe 1.5 page 16, le point (d) correspond à une expérience de mesure optique d'un résonateur oscillant à 20 MHz, pour une sensibilité de $10^{-19}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ et une température de 500 mK. Nous allons voir qu'on peut néanmoins réduire la température du résonateur en compensant de manière active les fluctuations thermiques induites par l'environnement, et atteindre ainsi le régime quantique.

1.4 Refroidissement actif du résonateur

Dans cette partie, on expose comment on peut réduire de manière active la température du micro-résonateur en lui appliquant une force visqueuse supplémentaire, c'est-à-dire proportionnelle à sa vitesse, à condition de ne pas ajouter de bruit. On va ainsi changer la susceptibilité mécanique du miroir sans modifier les fluctuations auxquelles il est soumis par la force de Langevin thermique. Cette modification de son couplage avec l'environnement se traduit par un refroidissement du résonateur. Cette technique, plus généralement appelée refroidissement par friction froide [56, 57] a déjà été mise en œuvre sur un microscope à force atomique [58], sur des accéléromètres à l'ONERA [59] et sur des miroirs par notre équipe [21]. On présente ici une approche simplifiée où le micro-résonateur est supposé ne posséder qu'un seul mode de vibration.

1.4.1 Principe de la friction froide

Nous considérerons que le miroir est équivalent à un unique oscillateur harmonique de fréquence de résonance Ω_m, de masse M et de taux d'amortissement Γ. On a vu que sa susceptibilité χ s'écrit dans le cadre de cette approximation (équation 1.18) :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M\left(\Omega_\mathrm{m}^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega\right)}. \tag{1.61}$$

On suppose également qu'il s'exerce maintenant sur le miroir, en plus de la force de Langevin F_T, une seconde force F_fb produite par un dispositif externe. Dans notre expérience, la force supplémentaire sera de type électrostatique (voir schéma 1.13) et appliquée au moyen d'une électrode placée à l'arrière du micro-résonateur. La réponse dynamique du miroir s'écrit alors :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega](F_\mathrm{T}[\Omega] + F_\mathrm{fb}[\Omega]). \tag{1.62}$$

On suppose que la mesure du bruit de position du miroir est idéale, c'est-à-dire que tous les bruits sont négligeables devant le bruit thermique du miroir. Dans ce cas, la phase $\delta\varphi$ du faisceau réfléchi par la cavité est directement proportionnelle au déplacement δx du miroir. On peut alors effectuer un contrôle du déplacement du miroir en agissant sur lui à l'aide de la force externe F_fb, dont l'amplitude est pilotée par la mesure du déplacement δx grâce à une

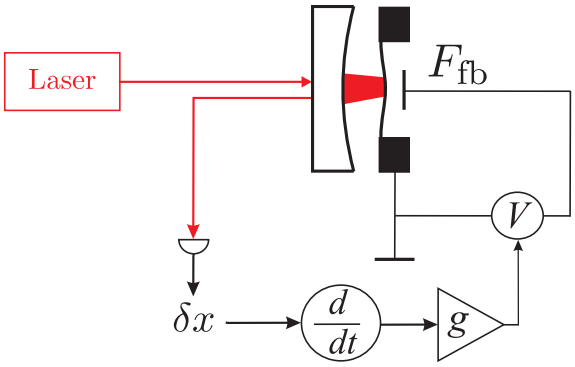


FIG. 1.13 – Principe de la friction froide. On applique sur le micro-miroir une force électrostatique proportionnelle à la vitesse du résonateur, déduite de la mesure de position.

boucle de contre-réaction.

Le refroidissement par friction froide consiste à appliquer une force proportionnelle à la vitesse du miroir [15, 21, 60]. En introduisant un facteur sans dimension g caractérisant le gain de la contre-réaction, la force s'écrit :

$$F_{\mathrm{fb}}[\Omega] = M\Gamma g\,(i\Omega\,\delta x[\Omega])\,, \tag{1.63}$$

et le déplacement δx du miroir en présence de friction froide devient :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{\mathrm{fb}}[\Omega] F_{\mathrm{T}}[\Omega], \tag{1.64}$$

où l'on a introduit une nouvelle susceptibilité χ_{fb} pour le miroir en présence de contre-réaction, dont l'expression est déduite des équations (1.62) et (1.63) :

$$\chi_{\mathrm{fb}}[\Omega] = \frac{1}{M\left(\Omega_{\mathrm{m}}^2 - \Omega^2 - i(1+g)\Gamma\Omega\right)}. \tag{1.65}$$

Cette nouvelle susceptibilité est celle d'un oscillateur harmonique de masse M, de fréquence de résonance Ω_{m}, mais avec un taux d'amortissement modifié d'un facteur $(1+g)$ par rapport au cas sans friction froide. L'asservissement modifie donc l'amortissement du résonateur et on peut en particulier l'augmenter pour des gains positifs. En présence de friction froide, l'amortissement du résonateur devient :

$$\Gamma_{\mathrm{fb}} = (1+g)\Gamma. \tag{1.66}$$

La force de Langevin F_{T} n'est pas modifiée par la boucle de contre-réaction et son spectre est toujours donné par l'équation (1.21). On peut calculer le spectre S_x^{fb} du bruit de position du miroir à partir des équations (1.64) à (1.66) :

$$S_x^{\mathrm{fb}}[\Omega] = \frac{S_{\mathrm{T}}[\Omega]}{M^2\left\{\left(\Omega_{\mathrm{m}}^2 - \Omega^2\right)^2 + \Gamma_{\mathrm{fb}}^2\Omega^2\right\}}. \tag{1.67}$$

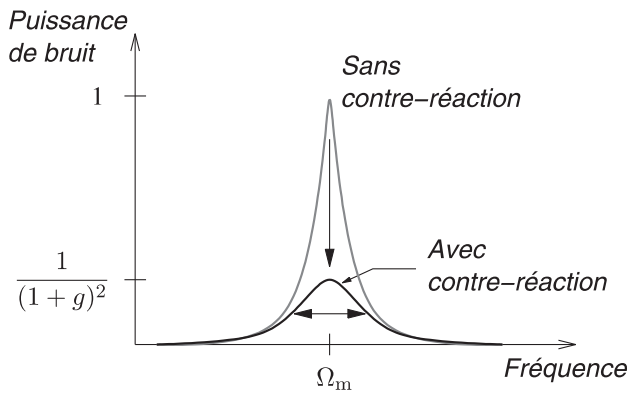


FIG. 1.14 – Effet de la friction froide sur le spectre de déplacement. Le spectre reste centré autour de Ω_M mais l'aire de la courbe est diminuée d'un facteur $(1+g)$.

Le spectre de bruit est modifié par la contre-réaction comme le montre la figure 1.14. Sa largeur devient $\Gamma_{\rm fb}$ et sa hauteur est réduite pour un gain positif. La réduction est maximale à résonance, où la densité spectrale est réduite d'un facteur

$$\frac{S_x^{\rm fb}[\Omega_{\rm m}]}{S_x^{\rm T}[\Omega_{\rm m}]} = \frac{1}{(1+g)^2}. \tag{1.68}$$

On déduit des équations (1.66) et (1.68) une diminution de l'aire du spectre de bruit d'un facteur $(1+g)$. Cette diminution est la signature d'une réduction de la variance Δx^2 du bruit de position du miroir, équivalente d'après le théorème d'équipartition de l'énergie (équation 1.33), à une diminution de la température du mode [56, 57, 59, 61].

Plus précisément, dans la limite des hautes températures ($T \gg T_Q$), on trouve d'après les expressions de la susceptibilité en présence de la friction froide (équation 1.65) et du spectre de la force de Langevin (équation 1.21), que le miroir obéit au théorème fluctuations-dissipation associé à la susceptibilité $\chi_{\rm fb}$:

$$S_{\rm T}^{\rm fb} = -\frac{2k_{\rm B}T_{\rm fb}}{\Omega}{\rm Im}\left(\frac{1}{\chi_{\rm fb}[\Omega]}\right), \tag{1.69}$$

où la nouvelle température $T_{\rm fb}$ est définie par :

$$T_{\rm fb} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{\rm fb}}T = \frac{T}{1+g}. \tag{1.70}$$

Pour des gains positifs, on obtient donc une réduction de la température effective du mode.

Il est important de noter que cet effet de friction froide n'est absolument pas équivalent à une augmentation mécanique de l'amortissement du mode. On peut prendre l'exemple d'un pendule dont l'amortissement vient des collisions avec le gaz qui l'entoure. On pourrait en effet penser réduire le mouvement thermique d'un oscillateur harmonique en augmentant la friction exercée par le gaz, par exemple en élevant la pression. Mais, si la dissipation est bien augmentée dans ce cas, on augmente également le nombre de collisions des molécules

du gaz sur le pendule et donc les fluctuations du système. Au final le théorème fluctuations-dissipation indique que la variance du mouvement est inchangée : elle ne dépend pas de l'amortissement. La friction froide, au contraire, couple le système à un bain thermique à température nulle : elle augmente l'amortissement sans ajouter de bruit. On peut montrer [62] que la température résultante est la valeur moyenne des températures des deux bains (thermique et friction froide), pondérés par les amortissement respectifs.

1.4.2 Limite quantique de la friction froide

La théorie présentée dans la partie précédente ne prend en compte ni les limitations induites sur la mesure par les bruits quantiques de phase et de pression de radiation, ni l'état quantique du résonateur. Elle reste valable dans le cas des hautes températures, où le mouvement brownien de l'oscillateur masque les bruits quantiques, mais présente par contre des incohérences lorsque la réduction de température est importante puisqu'on arrive à une variance Δx^2 strictement nulle à gain infini (équation 1.70). On présente ici comment prendre en compte ces bruits quantiques et les modifications qu'ils induisent sur la physique du système [62]. On se limite à un raisonnement simple en négligeant la dynamique des champs dans la cavité.

La quadrature de phase reproduit les fluctuations de position du résonateur auxquelles se superposent le bruit de phase du faisceau incident. Ainsi le signal qu'on mesure, donné par l'équation (1.48), procure une estimation $\delta\tilde{x}[\Omega]$ des fluctuations de la position du miroir qui s'écrit :

$$\delta\tilde{x}[\Omega] = \delta x[\Omega] + \delta x_{\text{shot}}[\Omega]. \tag{1.71}$$

Aux fluctuations de position qu'on cherche à contrôler s'ajoute donc de manière indiscernable le bruit de phase du faisceau incident donné par l'équation :

$$\delta x_{\text{shot}}[\Omega] = \frac{\lambda}{8\mathcal{F}}\delta\varphi^{\text{in}}[\Omega]. \tag{1.72}$$

La force électrostatique servant à la rétroaction, dont l'expression est donnée par l'équation (1.63) en remplaçant δx par l'estimateur $\delta\tilde{x}$, réinjecte ce bruit supplémentaire dans la dynamique de l'oscillateur. Ce dernier suit l'équation d'évolution :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega]\left(F_{\text{T}}[\Omega] + \delta F_{\text{rad}}[\Omega] + F_{\text{fb}}[\Omega]\right). \tag{1.73}$$

où on a également tenu compte des fluctuations de la force de pression de radiation $\delta F_{\text{rad}}[\Omega] = (8\hbar/\lambda)\ \mathcal{F}\delta I^{\text{in}}[\Omega]$ auxquelles est soumis le résonateur (équation 1.53 et 1.54). Ainsi on peut expliciter les fluctuations de position de l'oscillateur :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{\text{fb}}[\Omega]\left(F_{\text{T}}[\Omega] + \delta F_{\text{rad}}[\Omega] + iM\Gamma\Omega\, g\, \delta x_{\text{shot}}[\Omega]\right), \tag{1.74}$$

où on a fait apparaître la susceptibilité effective définie plus haut (équation 1.65). En supposant que le faisceau incident est dans un état cohérent, les fluctuations de la pression de radiation sont décorrélées des fluctuations de phase du faisceau incident. On peut alors calculer le spectre de bruit de position de l'oscillateur. En utilisant l'équation (1.49) et $S_I^{\text{in}} = \overline{I}^{\text{in}}$, on obtient après simplification :

$$S_x[\Omega] = \hbar M\Gamma\Omega_{\text{m}}\left(2n_{\text{T}} + 1 + \frac{\zeta}{2} + \frac{g^2}{2\zeta}\right)|\chi_{\text{fb}}[\Omega]|^2, \tag{1.75}$$

où on a introduit le paramètre sans dimension de couplage optomécanique ζ défini par :

$$\zeta = \frac{16\hbar k^2 \mathcal{F}}{\pi M \Gamma \Omega_{\mathrm{m}}} \overline{I}. \tag{1.76}$$

Ce coefficient est proportionnel à l'intensité intracavité $\overline{I}$, à la finesse de la cavité $\mathcal{F}$, et à la réponse mécanique de l'oscillateur à résonance $1/M\Gamma\Omega_{\mathrm{m}}$. On constate que le spectre de bruit de l'oscillateur harmonique est modifié par rapport à la situation précédente où on ne prenait pas en compte les effets quantiques. D'une part, la pression de radiation ajoute une source de bruit proportionnelle à l'intensité intracavité (troisième terme dans la parenthèse) ; d'autre part, la force de friction froide introduit un terme proportionnel au bruit de phase servant à la mesure (dernier terme de la parenthèse). Cette dernière source de bruit est inversement proportionnelle à l'intensité incidente, comme le bruit de phase, et proportionnelle au carré du gain g de contre-réaction. Enfin, le terme constant égal à 1 dans la parenthèse est dû au bruit quantique du résonateur (équation 1.30).

A partir de l'équation (1.75), on peut calculer la température effective du micro-résonateur en présence de la friction froide. Le spectre de bruit thermique est toujours lorentzien, ce qui signifie que le résonateur est à l'équilibre thermodynamique à une température Θ_{fb} donnée par le théorème fluctuations-dissipation (équation 1.69). On obtient :

$$k_{\mathrm{B}}\Theta_{\mathrm{fb}} = \frac{\hbar\Omega_{\mathrm{m}}}{1+g}\left(n_{\mathrm{T}} + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{4} + \frac{g^2}{4\zeta}\right). \tag{1.77}$$

Puisque les deux sources de bruit additionnelles se comportent de manière opposée vis-à-vis de l'intensité incidente, on peut optimiser cette dernière pour limiter le bruit rajouté par la mesure. L'optimum est atteint pour une intensité correspondant à $\zeta^{\mathrm{opt}} = g$, et la somme des deux derniers termes dans la parenthèse prend alors sa valeur minimale égale à g/2. On obtient ainsi la valeur optimale pour la température donnée par :

$$k_{\mathrm{B}}\Theta_{\mathrm{fb}}^{\mathrm{opt}} = \hbar\Omega_{\mathrm{m}}\left(\frac{n_{\mathrm{T}}}{1+g} + \frac{1}{2}\right). \tag{1.78}$$

La friction froide permet donc de réduire le nombre apparent de phonons thermiques peuplant le mode propre de vibration, jusqu'à atteindre $n_{\mathrm{T}} = 0$ pour un gain infini. Il ne reste alors plus que les fluctuations quantiques responsables du facteur 1/2 dans l'équation (1.78). Notons cependant que ce facteur trouve son origine à la fois dans les fluctuations de point zéro de l'oscillateur et dans les fluctuations quantiques induites par la mesure optique, qui sont indiscernablement intriquées par la friction froide.

1.4.3 Possibilité de mise en œuvre avec les micro-miroirs

La friction froide permet donc de porter en principe l'oscillateur dans son état quantique fondamental. Cette technique de réduction de la température a déjà été implémentée sur plusieurs types d'oscillateurs comme un pendule de torsion [56], des micro-cantilevers [57], un mode de vibration acoustique d'un miroir en silice [21], des ions piégés [22] ou encore le mouvement cyclotronique d'électrons [63]. On va estimer maintenant les caractéristiques nécessaires à la mise en œuvre expérimentale de cette méthode active de refroidissement sur nos micro-résonateurs.

Facteurs de qualité mécaniques

La friction froide permet de réduire la température, mais possède le défaut intrinsèque d'augmenter le taux d'amortissement de l'oscillateur qu'on cherche à refroidir, comme le traduit l'équation (1.66). On souhaite néanmoins conserver un comportement de type oscillateur harmonique même lorsque l'oscillateur est refroidi jusque dans son état fondamental. Il s'agit donc de conserver un facteur de qualité $Q_{\mathrm{fb}} = \Omega_{\mathrm{m}}/\Gamma_{\mathrm{fb}}$ de valeur raisonnable. Ce dernier varie en fonction du gain de contre-réaction g selon :

$$Q_{\mathrm{fb}} = \frac{Q}{1+g} = Q\frac{T_{\mathrm{fb}}}{T}. \tag{1.79}$$

Si on souhaite réduire la température d'un facteur 500 environ, de 500 mK à 1 mK, il faut partir d'un facteur de qualité initial d'au moins 5 000 afin de conserver un facteur de qualité au moins supérieur à dix.

Contraintes sur la sensibilité

Dans une expérience de friction froide, la puissance de bruit à résonance décroît en fonction du gain g de la boucle comme $1/(1+g)^2$. La décroissance est donc plus rapide qu'en refroidissement cryogénique conventionnel où la puissance de bruit décroît de manière proportionnelle à la température. Si on veut pouvoir mesurer le bruit de position lorsque l'oscillateur est dans son état fondamental, on a donc besoin d'un rapport signal-à-bruit plus important avec la technique de friction froide.

Dans notre exemple on cherche à réduire la température d'un facteur 500 pour observer le régime quantique d'un oscillateur oscillant à 20 MHz : on aura donc besoin d'une dynamique de 2.5×10^5 entre le niveau du pic de bruit thermique à la température de départ (500 mK) et la sensibilité de la mesure. Avec une sensibilité expérimentale de $10^{-20}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, cela requiert un niveau de bruit thermique à 500 mK de l'ordre de $5 \times 10^{-18}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, c'est-à-dire de $1.2 \times 10^{-16}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à température ambiante. D'après l'équation (1.31), le niveau atteint dépend du facteur de qualité, de la masse et de la fréquence de résonance de l'oscillateur. A la fin de cette thèse, nous travaillions avec un micro-miroir ayant un facteur de qualité de 10^4, avec un niveau à résonance de $5 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à 300 K pour une fréquence de résonance de l'ordre du MHz. Le niveau mesuré à résonance paraît donc être du bon ordre de grandeur, d'autant plus qu'il semble réaliste d'améliorer le facteur de qualité. Si on arrive à réduire les sources de dissipation et donc à augmenter les facteurs de qualité mécaniques, le niveau à résonance en sera accru, ce qui augmentera la dynamique par rapport au plancher de sensibilité. Des valeurs allant jusqu'à 10^6 à température ambiante ont déjà été atteintes avec des structures de taille comparable [64]. Il a ensuite été montré que les facteurs de qualité mécaniques augmentent à basse température. Des variations allant de 10^5 à 10^8 ont été observées [65] entre 300 K et 0.4 K pour des oscillateurs résonnant autour de la dizaine de kHz. Un gain d'un facteur 100 sur le facteur de qualité mécanique paraît raisonnablement envisageable à condition d'attacher un grand soin au choix de la géométrie du résonateur. Cette problématique est actuelle puisque plusieurs groupes dans le monde étudient les différents mécanismes limitant les facteurs de qualité des oscillateurs microscopiques et nanoscopiques [44, 65, 66, 67]. De plus, en travaillant avec des résonateurs un peu plus fins, possédant une épaisseur de l'ordre de 15 μm, on devrait pouvoir encore augmenter le niveau à résonance du

pic de bruit thermique.

Il semble donc réellement envisageable d'atteindre le régime quantique d'un résonateur mécanique macroscopique en utilisant une détection optique de ses vibrations et une combinaison de refroidissements passif cryogénique et actif par friction froide. Une attention particulière devra être portée à la géométrie du résonateur, à son facteur de qualité mécanique intrinsèque, et aux traitements diélectriques nécessaires à l'obtention d'une cavité optique de grande finesse.

Chapitre 2

Le couplage optomécanique avec un micro-miroir

Dans ce chapitre, on revient plus en détail sur le couplage entre la lumière et le résonateur mécanique. Dans un premier temps, on décrit la dynamique des champs. En utilisant une description semi-classique, on calcule les fluctuations des champs intracavité et réfléchi, en prenant en compte les éventuelles pertes dans la cavité de mesure. Ensuite, on s'intéresse à la description du mouvement du résonateur : on effectue la décomposition de son mouvement en modes propres et on étudie son couplage avec un faisceau laser dans une cavité Fabry-Perot, ce qui permet de définir sa susceptibilité mécanique effective. On étudie enfin les effets de la pression de radiation, d'une part sur les modes propres du résonateur mécanique, d'autre part sur des aspects plus fondamentaux du bruit dans la mesure de position.

2.1 Les champs électromagnétiques dans la cavité Fabry-Perot

Dans cette partie, on s'intéresse plus en détail aux champs électromagnétiques. On utilise la méthode semi-classique pour décrire les fluctuations des champs en interaction avec une cavité dont un des miroirs est mobile et présentant notamment des pertes optiques.

Evolution du champ dans la cavité

Contrairement au cas idéal présenté dans le chapitre précédent, il peut exister des pertes au sein de la cavité optique, qui se traduisent par une réduction du nombre de photons quittant la cavité par le coupleur d'entrée. Ces pertes peuvent avoir différentes origines, comme l'absorption ou la diffusion de lumière par les traitements optiques des miroirs, la diffusion sur les particules présentes dans le faisceau lors de la propagation mais aussi la transmission non nulle du miroir arrière. Si on ne s'intéresse qu'au champ réfléchi par la cavité, l'ensemble de ces pertes peut être modélisé par une transmission non nulle du miroir arrière, le coupleur d'entrée étant alors considéré comme idéal, c'est-à-dire sans perte. On note respectivement T et P les coefficients de réflexion et de transmission en intensité du coupleur d'entrée et du miroir arrière, supposés tous les deux petits devant 1 de façon à avoir une cavité de grande finesse.

Les amplitudes des champs de part et d'autre du miroir d'entrée sont reliées par des

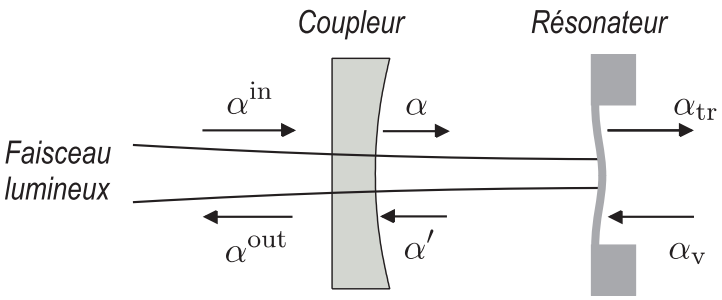


FIG. 2.1 – Définition des champs incident, sortant, et intracavité.

relations linéaires et unitaires qui traduisent la conservation de l'énergie :

$$\alpha(t) = t\,\alpha^{\rm in}(t) + r\,\alpha'(t), \tag{2.1}$$

$$\alpha^{\rm out}(t) = t\,\alpha'(t) - r\,\alpha^{\rm in}(t). \tag{2.2}$$

L'unitarité des relations impose que la transmission en amplitude $t = \sqrt{T}$ du coupleur soit égale à $\sqrt{1-r^2}$, ce qui donne, $r \simeq 1 - T/2$ puisque T est petit. Le champ intracavité α apparaît comme la somme du champ intracavité α' ayant déjà effectué un aller-retour entre les miroirs et de la partie du champ incident $\alpha^{\rm in}$ transmis par la cavité (voir la figure 2.1). Le champ réfléchi $\alpha^{\rm out}$ est égal au champ intracavité transmis par le coupleur, superposé au champ incident directement réfléchi par le coupleur. Le même raisonnement appliqué au miroir arrière donne des équations similaires, mais où on a également pris en compte la propagation des champs entre les deux miroirs :

$$\alpha'(t+\tau/2)e^{-i\Psi(t)/2} = \sqrt{P}\alpha_{\rm v}(t) + (1-P/2)\,\alpha(t-\tau/2)e^{i\Psi(t)/2}, \tag{2.3}$$

$$\alpha_{\rm tr}(t) = \sqrt{P}\,\alpha(t-\tau/2)e^{i\Psi(t)/2} - (1-P/2)\,\alpha_{\rm v}(t). \tag{2.4}$$

Dans ces équations, $\alpha_{\rm v}$ représente le champ vide entrant dans la cavité par le miroir arrière, $\tau = 2L/c$ est le temps mis par la lumière pour effectuer un aller-retour dans la cavité, et $\Psi(t)$ représente le déphasage que subit le champ intracavité lors d'un aller-retour, défini par :

$$\Psi(t) \equiv 2kL(t) \quad [2\pi], \tag{2.5}$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde du champ et $L(t)$ la longueur instantanée de la cavité tenant compte de la longueur au repos L_0 et du déplacement $x(t)$ du micro-miroir :

$$L(t) = L_0 + x(t). \tag{2.6}$$

On a supposé que l'effet du mouvement du résonateur sur la lumière pouvait être décrit par un déplacement monodimensionnel $x(t)$. Nous verrons dans la partie 2.3 que cela peut être démontré de manière générale. Le temps de propagation τ est une quantité qui dépend a priori du déplacement x du miroir mobile. Dans le cas de petits déplacements, les variations du temps τ peuvent cependant être négligées. Pour une cavité de grande finesse ($T, P \ll 1$) et proche de résonance ($\Psi(t) \ll 1$), l'enveloppe du champ varie peu sur un aller-retour. A partir des expressions (2.1) à (2.4) et en ne conservant que les termes au premier ordre en Ψ,$\tau\frac{d}{dt}$, $\sqrt{T}$ et $\sqrt{P}$, on obtient alors les équations d'entrée-sortie des champs. Elles apparaissent sous la

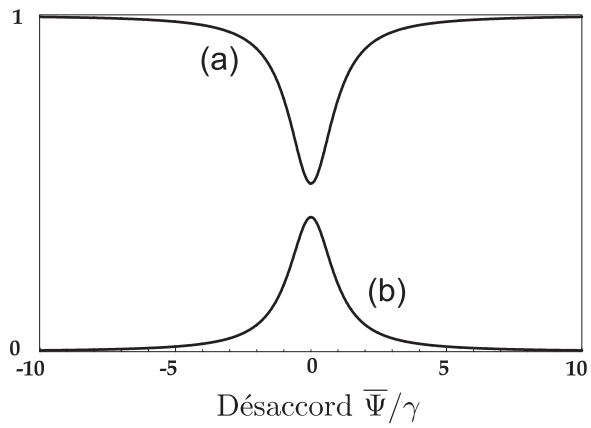


FIG. 2.2 – Fraction de l'intensité incidente réfléchie (a) et transmise (b) pour une cavité optique présentant des pertes, en fonction du désaccord $\overline{\Psi}/\gamma$.

forme des relations usuelles pour une cavité Fabry-Perot [72], avec un terme supplémentaire de déphasage $\Psi(t)$ dû au déplacement $x(t)$ du résonateur :

$$\tau\frac{d}{dt}\alpha(t) = [-\gamma + i\Psi(t)]\alpha(t) + \sqrt{T}\alpha^{\text{in}}(t) + \sqrt{P}\alpha_{\text{v}}(t), \tag{2.7}$$

$$\alpha^{\text{out}}(t) = \sqrt{T}\alpha(t) - \alpha^{\text{in}}(t), \tag{2.8}$$

$$\alpha_{\text{tr}}(t) = \sqrt{P}\alpha(t) - \alpha_{\text{v}}(t), \tag{2.9}$$

$$\Psi(t) = \Psi_0 + 2kx(t), \tag{2.10}$$

où $2\gamma = T + P$ représente les pertes totales de la cavité incluant les pertes "utiles" T du coupleur d'entrée, et $\Psi_0 \equiv 2kL_0\ [2\pi]$ est le déphasage induit par la cavité lorsque le miroir mobile est dans sa position de repos en l'absence de lumière.

Les valeurs des champs moyens intracavité, réfléchi et transmis s'obtiennent en annulant la dérivée temporelle dans la première équation :

$$\overline{\alpha} = \frac{\sqrt{T}}{\gamma - i\overline{\Psi}}\overline{\alpha}^{\text{in}} \quad , \quad \overline{\alpha}^{\text{out}} = \frac{\gamma - P + i\overline{\Psi}}{\gamma - i\overline{\Psi}}\overline{\alpha}^{\text{in}} \quad , \quad \overline{\alpha}_{\text{tr}} = \frac{\sqrt{TP}}{\gamma - i\overline{\Psi}}\overline{\alpha}^{\text{in}}. \tag{2.11}$$

où $\overline{\Psi} = \Psi_0 + 2k\overline{x}$ est le déphasage moyen du champ dans la cavité, $\overline{x}$ étant le recul du miroir sous l'effet de la pression de radiation moyenne (voir la section 2.4.1). On retrouve qu'au voisinage d'un résonance optique, l'intensité intracavité $|\overline{\alpha}|^2$ est une fonction lorentzienne du désaccord, de largeur 2γ. La finesse qu'on a introduit dans le premier chapitre apparaît ici comme le rapport entre la distance entre deux résonances consécutives et la largeur 2γ de la résonance et vaut :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{2\gamma} = \frac{2\pi}{T + P}. \tag{2.12}$$

L'intensité intracavité est multipliée par un facteur $4T/(T + P)^2$ par rapport à l'intensité moyenne incidente, soit un facteur $2\mathcal{F}/\pi$ pour une cavité sans perte. En présence de pertes, ce facteur diminue d'un coefficient $T/(T+P)$, et l'intensité réfléchie devient inférieure à l'intensité incidente. L'expression du champ réfléchi montre que lorsque l'on balaie le déphasage au voisinage d'une résonance, l'intensité réfléchie décrit un pic d'Airy en absorption (figure 2.2).

Ceci s'explique par le fait qu'une partie de la puissance lumineuse intracavité est perdue et ne ressort pas de la cavité par le coupleur d'entrée. La profondeur de ce pic est donnée par le coefficient de réflexion à résonance $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \frac{\overline{I}^{\text{out}}_{\overline{\Psi}=0}}{\overline{I}^{\text{out}}_{\overline{\Psi}=\pm\infty}} = \left[\frac{T-P}{T+P}\right]^2 . \tag{2.13}$$

Si $T = P$, le champ moyen réfléchi s'annule à résonance. Ainsi, une cavité symétrique sans perte, pour laquelle P représente la transmission du miroir arrière, transmet toute l'intensité à résonance.

Evolution des quadratures dans la cavité à résonance

On présente ici le traitement quantique de l'évolution du champ dans la cavité. En particulier, on va s'intéresser aux fluctuations quantiques du champ sortant de la cavité en fonction de celles du champ entrant et en fonction de la dynamique du système telles que les vibrations du micro-miroir. Pour un champ intense envoyé dans la cavité, comme celui d'un faisceau laser, le champ moyen $\overline{\alpha}$ est très grand devant les fluctuations semi-classiques $\delta\alpha$ correspondant au bruit quantique et on peut linéariser les équations d'évolution de la distribution de Wigner au premier ordre dans les fluctuations. Dans ces conditions, l'équation obtenue pour les fluctuations quantiques est la même que celle décrivant l'évolution classique du système [43, 51, 52].

Dans toute la suite de cette partie, on se place à la résonance de la cavité ($\overline{\Psi} = 0$), où la sensibilité de la phase du faisceau réfléchi aux déplacements du micro-miroir est maximale. Les équations (2.11) se simplifient en :

$$\overline{\alpha} = \frac{\sqrt{T}}{\gamma}\overline{\alpha}^{\text{in}}, \quad \overline{\alpha}^{\text{out}} = \frac{\gamma - P}{\gamma}\,\overline{\alpha}^{\text{in}} \text{ et } \quad \overline{\alpha}_{\text{tr}} = \frac{\sqrt{TP}}{\gamma}\,\overline{\alpha}^{\text{in}}. \tag{2.14}$$

Tous les champs moyens ont la même phase, que l'on peut choisir arbitrairement réelle. Les relations d'entrée-sortie pour les fluctuations sont obtenues en linéarisant les équations (2.7) à (2.10) autour du point de fonctionnement moyen. On obtient dans l'espace de Fourier :

$$(\gamma - i\Omega\tau)\,\delta\alpha[\Omega] = \sqrt{T}\delta\alpha^{\text{in}}[\Omega] + \sqrt{P}\delta\alpha_{\text{v}}[\Omega] + 2ik\overline{\alpha}\delta x[\Omega], \tag{2.15}$$

$$\delta\alpha^{\text{out}}[\Omega] = \sqrt{T}\delta\alpha[\Omega] - \delta\alpha^{\text{in}}[\Omega], \tag{2.16}$$

$$\delta\alpha_{\text{tr}}[\Omega] = \sqrt{P}\delta\alpha[\Omega] - \delta\alpha_{\text{v}}[\Omega]. \tag{2.17}$$

Parmi l'ensemble des quadratures du champ (équation 1.42), les quadratures d'intensité et de phase ont un statut particulier. On les a reliées aux fluctuations de l'intensité et de la phase du champ électromagnétique (équations 1.44 et 1.45). Avec la convention de prendre les champs moyens réels, les fluctuations d'intensité δp et de phase δq sont simplement données par :

$$\delta p[\Omega] = \delta\alpha[\Omega] + \delta\alpha^*[\Omega], \tag{2.18}$$

$$\delta q[\Omega] = i\left(\delta\alpha^*[\Omega] - \delta\alpha[\Omega]\right), \tag{2.19}$$

où la transformée de Fourier $\delta\alpha^*[\Omega]$ de $\delta\alpha^*(t)$ est égale à $(\delta\alpha[-\Omega])^*$. Les relations d'entrée-sortie pour ces fluctuations sont obtenues à partir des équations (2.15) à (2.16) :

$$\begin{aligned}
(\gamma - i\Omega\tau)\,\delta p[\Omega] &= \sqrt{T}\delta p^{\mathrm{in}}[\Omega] + \sqrt{P}\,\delta p_{\mathrm{v}}[\Omega], && (2.20)\\
(\gamma - i\Omega\tau)\,\delta q[\Omega] &= \sqrt{T}\,\delta q^{\mathrm{in}}[\Omega] + \sqrt{P}\,\delta q_{\mathrm{v}}[\Omega] + 4\overline{\alpha}k\delta x[\Omega], && (2.21)\\
(\gamma - i\Omega\tau)\,\delta p^{\mathrm{out}}[\Omega] &= (\gamma - P + i\Omega\tau)\delta p^{\mathrm{in}}[\Omega] + \sqrt{TP}\delta p_{\mathrm{v}}[\Omega], && (2.22)\\
(\gamma - i\Omega\tau)\,\delta q^{\mathrm{out}}[\Omega] &= (\gamma - P + i\Omega\tau)\delta q^{\mathrm{in}}[\Omega] + \sqrt{TP}\delta q_{\mathrm{v}}[\Omega] + 4\sqrt{2\gamma - P}\overline{\alpha}k\delta x[\Omega]. && (2.23)
\end{aligned}$$

A résonance, les fluctuations d'amplitude des champs sortant et intracavité sont totalement découplées des fluctuations de phase et de position du miroir mobile. On peut le comprendre en constatant que le point de fonctionnement de la cavité est au sommet du pic d'Airy où l'intensité ne dépend pas au premier ordre du déphasage, donc des fluctuations du chemin optique. La phase du faisceau réfléchi δq^{out} dépend linéairement de δx et dans le cas statique ($\Omega = 0$), on retrouve l'expression simplifiée de l'équation (1.48), en se rappelant que $2|\overline{\alpha}|\delta\varphi \equiv \delta q$ (voir l'équation 1.45).

D'après les équations (2.20) à (2.23), toutes les quantités relatives aux fluctuations intracavité sont divisées par un terme $\gamma - i\Omega\tau$ qui correspond à un filtrage par la cavité. On définit alors la bande passante Ω_{c} de la cavité par :

$$\Omega_{\mathrm{c}} = \gamma/\tau. \tag{2.24}$$

Les fluctuations de phase et d'intensité du faisceau incident à des fréquences grandes devant Ω_{c} sont essentiellement réfléchies par la cavité et ne se retrouvent pas dans le champ intracavité. Ainsi, une cavité optique peut effectuer un filtrage des fluctuations d'un faisceau laser quand on récupère le faisceau transmis. On a utilisé expérimentalement cette propriété pour réduire les fluctuations du laser en insérant sur son trajet une cavité de filtrage. Pour qu'elle soit efficace, on a choisi sa bande passante petite devant les fréquences auxquelles on souhaite effectuer la mesure. De même les fluctuations de position du miroir pour des fréquences très supérieures à Ω_{c} n'agissent pas sur la phase du faisceau réfléchi. En d'autres termes, la cavité effectue un moyennage de la position du miroir sur le temps moyen $2\pi/\Omega_{\mathrm{c}}$ que la lumière passe dans la cavité.

Sensibilité de la mesure

Les fluctuations de phase sont corrélées aux fluctuations de position du miroir. A ces fluctuations, qui vont constituer le signal mesuré, viennent se superposer les fluctuations de phase du faisceau incident et du vide, qui vont limiter la sensibilité de la mesure. Le déplacement δx du micro-miroir ne dépend que des forces appliquées sur le miroir et pour une cavité à résonance, il est indépendant du bruit de phase entrant dans la cavité. L'équation (2.23) permet alors de calculer le spectre de bruit de phase du champ réfléchi, sachant que tous les bruit incidents sont décorrélés[1] :

$$\left(1 + \frac{\Omega^2}{\Omega_{\mathrm{c}}^2}\right) S_q^{\mathrm{out}}[\Omega] = \left\{\frac{(\gamma - P)^2}{\gamma^2} + \frac{\Omega^2}{\Omega_{\mathrm{c}}^2}\right\} S_q^{\mathrm{in}}[\Omega] + \frac{TP}{\gamma^2} S_q^{\mathrm{v}}[\Omega] + \left(\frac{16\mathcal{F}}{\lambda}\frac{T}{T+P}\right)^2 \overline{I}^{\mathrm{in}} S_x[\Omega]. \tag{2.25}$$

[1] Le spectre d'une variable f quelconque est défini par $\langle \delta f[\Omega]\delta f[\Omega']\rangle = 2\pi\delta(\Omega + \Omega')S_f[\Omega]$. Voir par exemple l'équation (1.20).

Les deux premiers termes de cette équation sont des termes de bruit qui retranscrivent les spectres filtrés par la cavité du bruit de phase du faisceau incident et du vide entrant par les différentes voies de pertes. Enfin, le dernier terme représente le signal, proportionnel au spectre des vibrations du micro-miroir. On peut estimer le plus petit déplacement mesurable en considérant un rapport signal-à-bruit égal à 1. Pour un faisceau cohérent injecté dans la cavité, le bruit de phase incident est un bruit blanc, qui possède un spectre indépendant de la fréquence et égal à un ($S_q^{\mathrm{in}}[\Omega] = S_q^{\mathrm{v}}[\Omega] = 1$). On obtient ainsi un déplacement minimal observable $\delta x_{\mathrm{shot}}[\Omega]$ en fonction de la fréquence d'analyse Ω donné par :

$$\delta x_{\mathrm{shot}}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\overline{I}^{\mathrm{in}}}} \frac{T+P}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{\mathrm{c}}}\right)^2}. \tag{2.26}$$

Cette sensibilité généralise l'expression (1.50) qui n'était valable que dans le cas statique et pour une cavité sans perte. La dépendance en fréquence montre que la sensibilité se dégrade à haute fréquence ($\Omega > \Omega_{\mathrm{c}}$), à cause du filtrage par la cavité. L'existence de pertes réduit la sensibilité d'un facteur $T/(T+P)$ par rapport au cas idéal d'une cavité à une seule entrée-sortie sans perte.

Notons que les pertes agissent également sur la sensibilité à travers la finesse $\mathcal{F}$. A finesse égale, il est cependant important d'avoir des pertes petites devant la transmission du coupleur d'entrée, c'est-à-dire un rapport $T/(T+P)$ le plus grand possible. Actuellement, il est possible de réaliser des miroirs dont le traitement diélectrique engendre des pertes par diffusion et par absorption inférieures au ppm. Le choix de la transmission du coupleur d'entrée résulte alors d'un compromis entre l'obtention d'une grande finesse et la réduction de l'effet des pertes.

Adaptation spatiale du faisceau incident

Les cavités de mesure que nous utilisons sont constituées d'un micro-miroir plan et d'un coupleur d'entrée concave qui assure la stabilité optique du système. Dans l'approximation paraxiale, les résonances se répartissent en modes propres longitudinaux auxquels sont associés une série de modes transverses qui présentent des profils spatiaux d'intensité gaussiens. Une adaptation spatiale parfaite correspond à un faisceau incident dont le profil est exactement celui du mode fondamental TEM_{00} de la cavité. Dans le cas contraire, le faisceau a une projection non nulle sur les modes transverses supérieurs de la cavité : ceux-ci ayant des fréquences de résonance différentes, ils sont simplement réfléchis et une partie de la lumière incidente ne pénètre pas dans la cavité, ce qui diminue le signal. On définit le paramètre d'adaptation spatiale η_{cav} comme le rapport entre l'intensité incidente réellement couplée à la cavité et l'intensité totale incidente ; le champ total incident α^{in} peut alors s'écrire :

$$\alpha^{\mathrm{in}}(t) = \alpha_0^{\mathrm{in}}(t) + \alpha'(t), \tag{2.27}$$

où $\alpha_0^{\mathrm{in}}(t) \equiv \sqrt{\eta_{\mathrm{cav}}}\alpha^{\mathrm{in}}(t)$ représente la projection du champ incident $\alpha^{\mathrm{in}}(t)$ sur le mode fondamental de la cavité et $\alpha'(t)$ celle sur tous les autres modes. Le cas $\eta_{\mathrm{cav}} = 1$ correspond à une adaptation spatiale parfaite et la sensibilité est celle calculée précédemment. Dans le cas contraire, le champ α' est directement réfléchi et seule l'intensité $\eta_{\mathrm{cav}}\overline{I}^{\mathrm{in}}$ est couplée au mouvement du miroir mobile. Le plus petit déplacement observable devient :

$$\delta x_{\mathrm{shot}}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\eta_{\mathrm{cav}}\overline{I}^{\mathrm{in}}}} \frac{T+P}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{\mathrm{c}}}\right)^2}. \tag{2.28}$$

La sensibilité est ainsi réduite d'un facteur $\sqrt{\eta_{\text{cav}}}$.

Notons que l'adaptation spatiale affecte également l'intensité réfléchie par la cavité. Loin de résonance, celle-ci reste égale à l'intensité incidente car la lumière ne pénètre pas dans la cavité. Néanmoins, à résonance, seule la partie couplée à la cavité subit les pertes de celle-ci et l'intensité réfléchie devient :

$$\overline{I}^{\text{out}}_{\overline{\Psi}=0} = \eta_{\text{cav}} \overline{I}^{\text{in}} \left[\frac{T-P}{T+P}\right]^2 + |\overline{\alpha}'|^2. \tag{2.29}$$

Le coefficient de réflexion à résonance vaut alors :

$$\mathcal{R} = \eta_{\text{cav}} \left[\left(\frac{T-P}{T+P}\right)^2 - 1\right] + 1. \tag{2.30}$$

Pour estimer le paramètre d'adaptation spatiale du faisceau incident sur la cavité, il faut mesurer les intensité respectives couplées dans chacun des modes propres de la cavité en mesurant par exemple les hauteurs des pics transverses observés lorsqu'on balaye un intervalle spectral libre de la cavité.

2.2 Description mécanique du résonateur

Dans cette partie, on présente la décomposition modale du mouvement d'un résonateur, sur l'exemple d'une poutre encastrée à ses deux extrémités, représentée sur la figure 1.4 page 15.

2.2.1 Modes propres de vibration d'un micro-résonateur

Pour simplifier l'étude, on utilise une description unidimensionnelle du mouvement du résonateur en supposant que ses déformations sont invariantes dans la direction transverse (axe Oy sur la figure 1.4). On présentera dans le chapitre 5 une méthode de simulation par éléments finis qui permet d'obtenir des caractéristiques plus précises des modes propres des résonateurs utilisés dans l'expérience.

Dans cette partie, on se limite à l'étude des vibrations de résonateurs dont l'épaisseur e est petite par rapport à leurs dimensions transverses (longueur L, largeur b). Lors des mouvements de flexion de la poutre, sur toute sa hauteur, certaines couches subissent des compressions, d'autres des dilatations (voir la figure 2.3). La partie convexe, en bas sur la figure, subit une traction d'autant plus importante qu'on est proche de la surface, alors que la partie concave, en haut sur la figure, subit une compression elle-aussi d'autant plus importante qu'on s'approche de la surface de la poutre. Il existe donc une surface à l'intérieur de la plaque, appelée surface neutre, sur laquelle les contraintes sont nulles, et de part et d'autre de laquelle les déformations sont de signe contraire. Le déplacement de la surface neutre dans la direction perpendiculaire, c'est-à-dire selon l'axe (Ox) correspondant à l'épaisseur, est noté $u(y, z)$ (voir la figure 2.3). La théorie de l'élasticité [70, 71] permet de déterminer les modes de vibration des plaques. Pour un matériau homogène et isotrope tel que le silicium, si la longueur d'onde acoustique de la vibration est grande devant l'épaisseur de la poutre et si on se limite à l'étude des vibrations transverses, on peut montrer que la déformation de la surface neutre suit l'équation de Bernouilli :

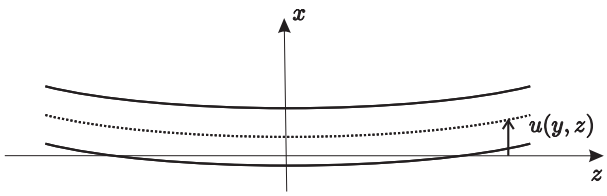


FIG. 2.3 – Définition de la surface neutre (en pointillés). Le signe des déformations change lorsqu'on passe d'un côté à l'autre de la surface neutre.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{D}{e} \Delta^2 u = 0, \tag{2.31}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace à deux dimensions $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ρ la masse volumique du matériau et D est défini par $D = Ee^3/12(1-\sigma^2)$, σ étant le coefficient de Poisson du matériau et E son module d'Young. Si la poutre est suffisamment fine devant la période spatiale des vibrations, on peut approximer le déplacement de la face supérieure du résonateur, sur laquelle est déposé le traitement diélectrique réfléchissant, par la déformation de la surface neutre.

En faisant l'hypothèse que la déformation est uniforme sur la largeur de la poutre, on cherche des modes propres de la forme $u(y, z, t) = \mathrm{Re}(u(z)\, e^{-i\Omega t})$. Les solutions possibles vérifient alors l'équation dispersive :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = k^4 u, \tag{2.32}$$

avec la relation de dispersion :

$$\Omega = k^2 \sqrt{D/e\rho}. \tag{2.33}$$

On impose de plus les conditions aux limites qui traduisent le fait que les extrémités de la poutre ne peuvent ni se déplacer, ni s'incliner :

$$u(0) = u(L) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z}(z = 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(z = L) = 0. \tag{2.34}$$

Les solutions générales de l'équation (2.32) sont de la forme : $u(z) = a_1 \cos kz + a_2 \sin kz + a_3 \operatorname{ch} kz + a_4 \operatorname{sh} kz$ où les quatre préfacteurs sont déterminés en fonction des conditions aux limites (2.34). Ces quatre relations sont compatibles si et seulement si le vecteur d'onde spatial k vérifie l'équation suivante (condition de nullité du déterminant du système) :

$$\cos(k_n L) \operatorname{ch}(k_n L) = 1. \tag{2.35}$$

On a indexé le vecteur d'onde par l'indice n, associé aux différentes solutions de l'équation (2.35), représentées sur la figure 2.4. On obtient l'expression du déplacement transverse pour les différents modes propres :

$$u_n(y, z) = \operatorname{ch}(k_n z) - \cos(k_n z) + \frac{\cos(k_n L) - \operatorname{ch}(k_n L)}{\sin(k_n L) - \operatorname{sh}(k_n L)} (\sin(k_n z) - \operatorname{sh}(k_n z)) \tag{2.36}$$

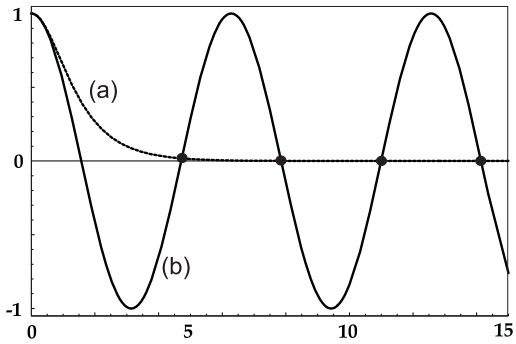


FIG. 2.4 – Tracés de $1/\mathrm{ch}(x)$ (courbe a) et $\cos(x)$ (courbe b). Les points noirs correspondent aux premières solutions $k_n L$ de l'équation (2.35).

Le déplacement est nul en dehors du résonateur. Les modes ainsi définis sont orthogonaux entre eux et forment une base des déformations du résonateur. Une déformation quelconque $u(y,z)$ de la surface du résonateur se décompose sur tous les modes propres de vibration selon :

$$u(y,z,t) = \sum_n a_n(t)\ u_n(y,z), \tag{2.37}$$

où les amplitudes $a_n(t)$ des différents modes acoustiques dépendent des forces appliquées au résonateur. Les fréquences propres f_n se déduisent de la relation de dispersion (2.33) :

$$f_n = \Omega_n/2\pi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{D/e\rho}\,k_n^2. \tag{2.38}$$

On constate que les fréquences propres se comportent bien en e/L^2, comme on l'a utilisé dans le premier chapitre, puisque les solutions k_n de l'équation (2.35) sont en fait inversement proportionnelles à L.

En intégrant l'équation du mouvement (2.31), on peut montrer que l'énergie mécanique totale du résonateur s'écrit dans le cas du mouvement libre non amorti comme la somme sur tous les modes propres de l'énergie mécanique individuelle de chaque mode :

$$\mathcal{E} = \sum_n \frac{1}{2} M_n \left(\left(\frac{da_n}{dt}(t) \right)^2 + \Omega_n^2 a_n(t)^2 \right), \tag{2.39}$$

où la masse M_n du mode n représente la masse du volume du résonateur mis en mouvement par le mode [73] et est définie par :

$$M_n = \rho e \int_S d^2r |u_n(\vec{r})|^2. \tag{2.40}$$

A chaque mode propre de vibration est associé un oscillateur harmonique. Pour observer le régime quantique d'un oscillateur, on peut choisir d'étudier n'importe quel mode propre, en particulier un mode propre d'ordre élevé, ce qui permet d'augmenter la fréquence de vibration tout en conservant des tailles suffisantes pour employer la mesure optique. On verra plus loin qu'il faut également que le recouvrement spatial du mode propre avec le faisceau laser soit important, ce qui restreint le choix du mode.

2.2.2 Dynamique des modes propres

Effet d'une force appliquée

On décrit ici l'effet d'une force appliquée au résonateur sur l'évolution temporelle des amplitudes des modes acoustiques. Pour un résonateur ayant une épaisseur très fine devant ses autres dimensions, on peut montrer qu'on peut toujours ramener la force appliquée à une force équivalente appliquée sur la surface neutre. Il s'agit donc de résoudre l'équation (2.31) à laquelle on a rajouté la force surfacique équivalente $F(y, z, t)$ comme terme source dans le membre de droite. En projetant l'expression obtenue sur le n-ième mode propre, et en utilisant la décomposition (2.37), on obtient l'équation :

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \Omega_n^2 a_n = \frac{1}{M_n} \langle F(y, z, t), u_n(y, z) \rangle, \tag{2.41}$$

où M_n est la masse du mode propre définie par (2.40) et où les crochets $\langle , \rangle$ représentent le recouvrement transverse intégré sur la surface S du résonateur :

$$\langle f, g \rangle = \int_S d^2 r \, f(y, z) g(y, z) \tag{2.42}$$

En transposant la relation (2.41) dans l'espace de Fourier, on obtient l'amplitude spectrale de chaque mode en fonction du recouvrement spatial de la force appliquée au résonateur :

$$a_n[\Omega] = \chi_n[\Omega] \, \langle F[\Omega], u_n \rangle, \tag{2.43}$$

où on a introduit la susceptibilité mécanique $\chi_n[\Omega] = 1/M_n(\Omega_n^2 - \Omega^2)$ d'un oscillateur harmonique non amorti de masse M_n et de fréquence propre Ω_n.

Effet de la dissipation dans le résonateur

Jusqu'à présent, nous avons considéré le cas idéal d'un résonateur sans dissipation. La décomposition en modes propres équivalents à des oscillateurs harmoniques permet de modéliser les pertes en ajoutant un terme d'amortissement dans les équations d'évolutions des amplitudes de chaque mode. Tout phénomène de dissipation s'accompagne également de fluctuations dans le système rajoutées par le couplage avec le bain thermique que constitue l'environnement extérieur. Si la dissipation est modélisée par un frottement visqueux avec un taux d'amortissement Γ_n, les amplitudes spectrales des modes propres de vibration vérifient :

$$a_n[\Omega] = \chi_n[\Omega] \left\{ \langle F[\Omega], u_n \rangle + F_{T_n}[\Omega] \right\}, \tag{2.44}$$

où on a rajouté la partie dissipative dans l'expression de la susceptibilité mécanique :

$$\chi_n[\Omega] = \frac{1}{M_n(\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Gamma_n \Omega)}. \tag{2.45}$$

Les fluctuations associées aux processus de dissipation sont décrites comme précédemment par une force de langevin F_{T_n} agissant sur chaque mode de vibration. On obtient un ensemble de forces indépendantes les unes des autres et dont le spectre est relié comme précédemment à la partie imaginaire de la susceptibilité par le théorème fluctuations-dissipation :

$$S_{T_n}[\Omega] = -\hbar \left| \mathrm{Im} \left(\frac{1}{\chi_n[\Omega]} \right) \right| \coth \frac{\hbar \Omega}{2 k_\mathrm{B} T} \tag{2.46}$$

Ces expressions supposent que le processus de dissipation agit indépendamment sur chaque mode. Elles ne sont en fait valables que pour des pertes homogènes dans le résonateur. La présence de pertes inhomogènes introduites par exemple par le traitement optique du miroir nécessite de prendre en compte des termes croisés faisant intervenir un couplage entre les modes propres de vibration [74]. On supposera que ces effets sont petits et que la description présentée ici reste valable.

2.3 Le couplage optomécanique

La description monodimensionnelle de la mesure, où le déplacement est décrit par une simple variable x, semble incompatible avec la description multimode du résonateur. Nous montrons maintenant comment réconcilier les deux points de vue, en résumant les travaux déjà réalisés dans l'équipe [15, 16, 73], puis nous décrivons plus en détail les conséquences pour les micro-miroirs.

2.3.1 Effet d'une déformation du résonateur sur le champ

Les déplacements mesurés du résonateur sont en fait dus aux déformations de sa surface. On commence par décrire l'effet d'une telle déformation sur le champ et on montre qu'on peut se ramener à une description monodimensionnelle du mouvement du micro-miroir. Le faisceau incident sur le micro-résonateur, supposé TEM_{00}, possède au niveau du résonateur un profil spatial v_0 gaussien donné par :

$$v_0(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}}\, e^{-r^2/w_0^2}, \tag{2.47}$$

où w_0 est le col du faisceau (waist) situé dans le plan du miroir. Le champ électrique dans ce plan est donc de la forme :

$$\mathcal{E}(r,t) = v_0(r)\alpha(t)e^{-i\omega_0 t}, \tag{2.48}$$

où ω_0 est la fréquence optique et $\alpha(t)$ l'amplitude du champ, qui dépend lentement du temps. Quand le champ est réfléchi par le micro-miroir, il subit un déphasage dépendant du point $\mathbf{r}$ de réflexion et devient :

$$\mathcal{E}'(r,t) = v_0(r)\alpha(t)e^{-i\omega_0 t}e^{2ik.u(r,t)}, \tag{2.49}$$

où $u(r,t)$ est le déplacement transverse du résonateur défini dans la section précédente. Le champ après réflexion n'est donc plus un pur mode TEM_{00} : il est déformé par le dernier terme exponentiel et possède des composantes non nulles sur les modes propres de la cavité d'ordre plus élevés. Néanmoins, on s'intéresse à des déformations acoustiques du résonateur où les fréquences d'évolution de $u(r,t)$ ne dépassent pas la dizaine de MHz. L'intervalle entre les fréquences de résonance des cavités non dégénérées que nous utilisons est quant-à-lui supérieur à 10 GHz[2]. Dans ces conditions, seul le mode TEM_{00} est résonnant avec la cavité et

[2]Pour une cavité plan -concave de rayon de courbure R_c et de longueur L, les fréquences de résonance de la cavité sont données par : $\nu_{nm} = nc/2L + (n+m+1)\arccos\sqrt{1-L/R_c}$ [55]. Pour une longueur de 2.4 mm et un rayon de courbure de 5 cm on obtient un écart entre modes transverses de 13.7 GHz.

la contribution des autres modes optiques est négligeable. Le champ réfléchi résonnant dans la cavité est alors égal à sa projection sur le mode TEM_{00} :

$$\mathcal{E}'(r,t) = \langle v_0(r) e^{2ik.u(r,t)}, v_0(r)\rangle \, \mathcal{E}(r,t), \tag{2.50}$$

Pour des déplacements très petits par rapport à la longueur d'onde du faisceau laser, on peut faire un développement au premier ordre de cette expression qui devient :

$$\mathcal{E}'(r,t) = \left(1 + 2ik.\langle u, v_0^2\rangle\right) \, \mathcal{E}(r,t). \tag{2.51}$$

On n'a pas tenu compte ici d'éventuelles pertes lors de la réflexion : notamment on a supposé que le col du faisceau est suffisamment petit par rapport aux dimensions transverses pour avoir $\langle v_0, v_0\rangle \simeq 1$. Lors d'une réflexion sur le micro-miroir, le champ subit donc uniquement un déphasage proportionnel à la moyenne du déplacement u du miroir pondérée par l'intensité locale v_0^2 du champ. Par analogie avec le modèle unidimensionnel présenté précédemment, il apparaît ainsi qu'une déformation de la surface du miroir est équivalente à un déplacement effectif monodimensionnel x qui fait intervenir le recouvrement entre la déformation du miroir et le faisceau de mesure et dont la valeur est :

$$x(t) = \langle u(t), v_0^2\rangle. \tag{2.52}$$

Tous les résultats présentés dans le cadre du modèle monodimensionnel sont donc valables, à condition de définir le déplacement vu par la lumière à partir de l'équation (2.52).

2.3.2 Notion de susceptibilité effective

Ce résultat permet de réinterpréter le mouvement du micro-miroir en faisant apparaître une susceptibilité effective pour chaque mode acoustique [73]. La décomposition modale donnée par les équations (2.37) et (2.44) peut être introduite dans l'expression du déplacement vu par le faisceau lumineux (équation 2.52) :

$$x[\Omega] = \sum_n \langle u_n, v_0^2\rangle \chi_n[\Omega] \left(\langle F[\Omega], u_n)\rangle + F_{T_n}[\Omega]\right). \tag{2.53}$$

Dans le cas particulier où la force F est la force de pression de radiation F_{rad} exercée par le faisceau intracavité, le profil de la force dans le plan du miroir est donné par :

$$F_{\mathrm{rad}}(r,t) = 2\hbar k |\mathcal{E}(r,t)|^2 = 2\hbar k v_0^2(r) I(t), \tag{2.54}$$

où I est le flux de photons défini par :

$$I(t) = \int_{\mathcal{S}} d^2r \, |\mathcal{E}(r,t)|^2 = |\alpha(t)|^2. \tag{2.55}$$

Le déplacement se met alors sous la forme :

$$x[\Omega] = \sum_n \langle u_n, v_0^2\rangle^2 \chi_n[\Omega] \left(2\hbar k I[\Omega] + \frac{1}{\langle u_n, v_0^2\rangle} F_{T_n}[\Omega]\right). \tag{2.56}$$

Dans ces conditions, il est possible de définir une susceptibilité effective qui inclut le recouvrement spatial entre la déformation due au n-ième mode avec le faisceau lumineux. L'équation précédente se transforme en :

$$x[\Omega] = \sum_n \chi_n^{\mathrm{eff}}[\Omega] \left(2\hbar k I[\Omega] + F_{T_n}^{\mathrm{eff}}[\Omega]\right), \tag{2.57}$$

où χ_n^{eff} est la susceptibilité d'un oscillateur harmonique,

$$\chi_n^{\text{eff}}[\Omega] = \frac{1}{M_n^{\text{eff}}\left(\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Gamma_n\Omega\right)}, \tag{2.58}$$

semblable à χ_n (équation 2.45) mais où l'on a introduit une masse effective M_n^{eff} définie par :

$$M_n^{\text{eff}} = \frac{M_n}{\langle u_n, v_0^2\rangle^2}, \tag{2.59}$$

et où la force $F_{T_n}^{\text{eff}}$ est définie à partir de la force de Langevin agissant sur le mode n en prenant en compte son recouvrement avec la lumière :

$$F_{T_n}^{\text{eff}} = \frac{F_{T_n}}{\langle u_n, v_0^2\rangle}. \tag{2.60}$$

Il ressort de la définition de l'équation (2.59) que la masse effective représente la masse du mode, tel qu'il est vu par la luuière. En particulier, elle peut devenir infinie lorsque le recouvrement entre la lumière et le mode est nul. Ceci traduit le fait que dans ce cas particulier la lumière n'est pas sensible aux déplacements du miroir provoqués par ce mode. C'est le cas par exemple lorsqu'on place le faisceau laser sur un nœud d'un mode propre. On peut également s'assurer grâce aux relations (2.46) et (2.58) à (2.60) que la force de Langevin effective $F_{T_n}^{\text{eff}}$ agissant sur le mode n vérifie le théorème fluctuations-dissipation associé à la susceptibilité χ_n^{eff} :

$$S_{T_n}^{\text{eff}}[\Omega] = -\frac{2k_{\text{B}}T}{\Omega}\text{Im}\left(\frac{1}{\chi_n^{\text{eff}}[\Omega]}\right). \tag{2.61}$$

On peut alors définir une susceptibilité effective totale χ_{eff} décrivant le comportement du miroir dû à l'ensemble des modes acoustiques sous l'effet de la pression de radiation du faisceau intracavité et du couplage avec le bain thermique :

$$x[\Omega] = \chi_{\text{eff}}[\Omega]\left(2\hbar k I[\Omega] + F_T^{\text{eff}}[\Omega]\right), \tag{2.62}$$

avec

$$\chi_{\text{eff}}[\Omega] = \sum_n \chi_n^{\text{eff}}[\Omega], \tag{2.63}$$

$$F_T^{\text{eff}}[\Omega] = \sum_n \frac{\chi_n^{\text{eff}}[\Omega]}{\chi_{\text{eff}}[\Omega]} F_{T_n}^{\text{eff}}. \tag{2.64}$$

La force de Langevin effective F_T^{eff} ainsi définie vérifie bien, d'après les équations (2.61), (2.63) et (2.64), le théorème fluctuations-dissipation associé à la susceptibilité totale χ_{eff}. On retrouve finalement dans l'expression (2.62) que le mouvement du miroir x vu par le faisceau lumineux peut être décrit de manière monodimensionnelle, de façon équivalente aux équations (2.6) et (2.23). En particulier, la force de pression de radiation ne fait intervenir que l'intensité totale $I[\Omega]$ dans le mode TEM_{00} résonnant de la cavité. La susceptibilité effective χ_{eff} décrivant le couplage optomécanique n'est bien sûr plus celle d'un simple oscillateur harmonique : elle contient la réponse de tous les modes acoustiques du miroir et leur recouvrement spatial avec

la lumière.

Les propriétés du produit scalaire permettent aussi de montrer que :

$$\langle u_n, v_0^2\rangle^2 \leq \langle u_n, u_n\rangle \cdot \langle v_0^2, v_0^2\rangle. \tag{2.65}$$

En utilisant les équations (2.40) et (2.59), et en supposant que la taille du résonateur est suffisamment grande devant le col optique, on obtient une limite inférieure pour toutes les masses effectives :

$$M_n^{\text{eff}} \geq M_{\text{opt}}^{\text{eff}} = \rho\ e\pi w_0^2. \tag{2.66}$$

$M_{\text{opt}}^{\text{eff}}$ correspond à la masse du volume du résonateur illuminé par le faisceau optique. Une condition nécessaire pour travailler avec les masses effectives les plus petites possibles est donc d'utiliser de petits waists.

2.3.3 Intérêt optomécanique des micro-miroirs

Dans cette section, on commence par calculer le spectre de bruit de position que l'on peut attendre à partir de la description des modes propres faite dans la section 2.2.1, puis on effectue un rapide tour d'horizon des différents intérêts optomécaniques des micro-miroirs.

On s'intéresse à un résonateur de dimensions $L = 1\,\text{mm}$, $b = 400\,\mu\text{m}$ et $e = 60\,\mu\text{m}$. La taille du faisceau utilisé pour la mesure est de $60\,\mu\text{m}$. La limitation sur la finesse due au recouvrement donnée par l'équation (1.60) vaut 2.5×10^6, une valeur bien supérieure à la finesse nécessaire pour observer le régime quantique, qui est d'environ 50 000 dans nos conditions expérimentales. Le modèle théorique permet de calculer les fréquences propres en cherchant les solutions de l'équation (2.35). Les valeurs obtenues pour les 7 premiers modes sont présentées dans le tableau 2.1. Elles ont été obtenues avec les valeurs numériques suivantes : module d'Young $E = 1.31 \times 10^9\,\text{Pa}$ et masse volumique $\rho = 2330\,\text{kg.m}^{-3}$. On a représenté sur la figure 2.5 le profil spatial des trois premiers modes propres donnés par l'équation (2.36). La courbe d représente le profil spatial gaussien du faisceau laser incident sur le miroir. On a aussi calculé les longueurs d'onde effectives de ces modes propres, définies par $\lambda_n = 2\pi/k_n$: elles donnent l'ordre de grandeur de l'espacement entre deux nœuds successifs. Le calcul des masses effectives a été effectué numériquement au moyen du logiciel Mathematica. On a reporté les masses effectives des modes propres quand elle n'est pas infinie, comme c'est le cas par exemple pour le second mode propre correspondant au profil spatial b du graphique 2.5.

Les masses obtenues sont de l'ordre de quelques dizaines de μg, valeur à comparer avec celles obtenues avec des miroirs standards [16], au mieux de l'ordre de plusieurs dizaines de mg. En réduisant ainsi les dimensions du miroir, on peut donc gagner un facteur 1000 sur ces masses. On observe aussi que les masses effectives augmentent avec l'ordre du mode propre. Cette dépendance est représentée sur la figure 2.6, pour deux valeurs de la taille du faisceau laser : 60 μm (ronds) et 120 μm (carrés). On remarque que pour les modes à basse fréquence, c'est-à-dire ceux qui possèdent un espacement entre deux nœuds successifs suffisamment important par rapport à la taille du faisceau, les masses effectives dans les deux situations sont très peu différentes. Au contraire, pour les modes plus élevés, la longueur d'onde effective λ_n devient comparable à l'extension transverse du faisceau de mesure, qui

mode	$\Omega_n/2\pi$ (kHz)	λ_n (μm)	M_n^{eff} (μg)	$S_x^T[\Omega_n]$ à $300K$ (m/$\sqrt{\text{Hz}}$)
1	460	1327	23	1.14×10^{-14}
2	1 270	800	∞	0
3	2 500	571	35	7.8×10^{-16}
4	4 130	444	∞	0
5	6 170	363	48	1.63×10^{-16}
6	8 620	307	∞	0
7	11 470	266	76	5.09×10^{-17}

TAB. 2.1 – Caractéristiques des modes propres calculées à partir du modèle unidimensionnel. On suppose que les facteurs de qualité sont indépendants de la fréquence et égaux à 10^4.

moyenne le déplacement sur des régions où il est de signe opposé : le recouvrement est donc réduit de façon importante et les masses effectives sont plus grandes. Le phénomène est d'autant plus marqué que la taille du faisceau est importante, comme on l'observe sur la figure 2.6.

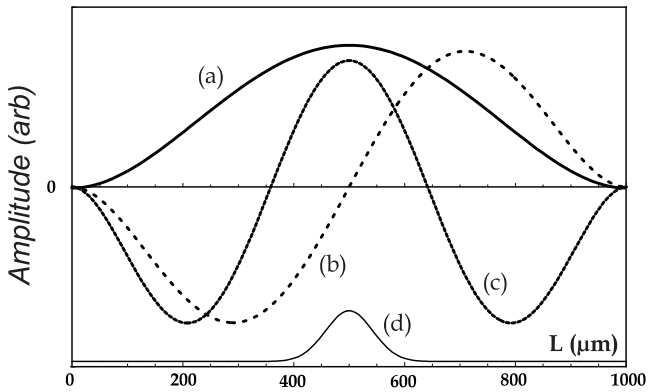


FIG. 2.5 – Profils spatiaux normalisés des modes propres. Les courbes (a), (b) et (c) correspondent aux trois premiers modes propres du tableau 2.1. La courbe (d) représente le profil transverse d'intensité du faisceau laser utilisé pour la mesure, avec un waist de 60 μm.

Pour évaluer le niveau de bruit thermique attendu, on suppose que tous les modes propres possèdent le même facteur de qualité mécanique $Q_n = \Omega_n/\Gamma_n = 10^4$. En utilisant les formules (2.57), (2.58) et (2.60), on peut calculer ce spectre de bruit pour des températures grandes devant les températures quantiques T_Q des différents modes au moyen de l'équation :

$$S_x^{\text{T}}[\Omega] = \sum_n \frac{2\Gamma_n}{M_n^{\text{eff}}((\Omega^2 - \Omega_n^2)^2 + \Gamma_n^2\Omega^2)} k_{\text{B}}T. \tag{2.67}$$

On a représenté sur la figure 2.7 le spectre de bruit thermique simulé du micro-résonateur à la température ambiante de 300 K, autour des deux premières fréquences de résonance. La courbe (a) représente le spectre de bruit total du micro-résonateur. Ce spectre peut être comparé à celui d'un miroir en silice de dimension standard [16] : la fréquence du mode fondamental du micro-résonateur est égale à 460 kHz tandis que celle d'un miroir en silice est de l'ordre du kHz. Sur la plage de fréquences de 0 à 4 MHz, on ne trouve que trois modes

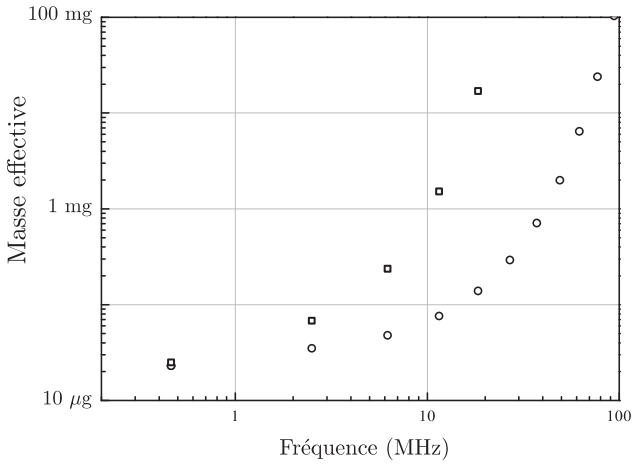


FIG. 2.6 – Dépendance de la masse effective M_n^{eff} en fonction de la fréquence du mode propre pour des waists de 60 μm (ronds) et 120 μm (carrés), pour un oscillateur mécanique en forme de poutre doublement encastrée de 1 mm de long, 400 μm de large et 60 μm d'épaisseur.

propres de vibration tandis que pour un miroir, il en existe plusieurs centaines. Un micro-résonateur représente donc un objet mécanique beaucoup plus simple qu'un miroir standard, présentant une densité de modes beaucoup plus faible, ce qui permet d'avoir des modes propres très isolés. L'autre aspect important concerne le niveau des pics de bruit thermique à résonance qui est environ 1000 fois plus élevé que ce qui a été observé avec des miroirs macroscopiques. Ceci est une conséquence directe de la faible masse du résonateur : à dissipation et fréquence de résonance identiques, un oscillateur répond de manière inversement proportionnelle à sa masse. Par contre, les facteurs de qualité sont plutôt moins bons que ceux obtenus avec un miroir standard, où des valeurs supérieures à 10^6 ont été obtenues. La situation pourrait toutefois être améliorée, notamment en utilisant des systèmes mieux isolés (voir la discussion à la fin du chapitre 1).

On a aussi tracé sur la figure 2.7 la contribution individuelle du premier mode propre (courbe b), ainsi que le fond mécanique pour ce premier mode, constitué de la somme des réponses de tous les autres modes propres (courbe c). Pour tracer ces courbes, on a en réalité pris en compte la contribution des 15 premiers modes propres. On constate que la contribution de ces modes constitue un fond mécanique plus faible d'un facteur 10 par rapport au bruit basse fréquence du mode fondamental. Cela signifie que dans une très large plage de fréquences, approximativement jusqu'à 1 MHz, la dynamique du résonateur est dominée principalement par celle du mode propre fondamental. On a donc un objet qui est assimilable à un pur oscillateur harmonique.

La situation est opposée avec un miroir conventionnel, où le fond du mode fondamental (ou de n'importe quel mode) est petit devant le fond de tous les autres modes. Cela constitue une limite importante pour le processus de friction froide : les expériences déjà menées dans l'équipe ont montré que l'existence du fond mécanique interdisait de définir une température d'équilibre lorsque le bruit thermique du mode propre refroidi devenait comparable à celui du fond [60]. Cette limitation n'existe pas a priori avec un micro-miroir, ce qui permet d'envisager des réductions en température plus importantes.

Un dernier point remarquable concerne la décroissance rapide avec l'indice du mode des

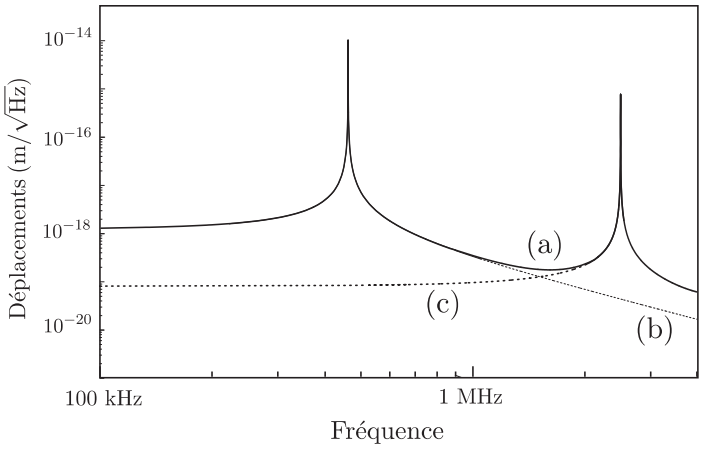


FIG. 2.7 – Simulation des niveaux de bruit. Courbe (a) : bruit thermique du micro-miroir à la température de 300 K ; (b) : contribution du premier mode propre ; (c) contribution de tous les autres modes propres.

intégrales de recouvrement entre le profil spatial du faisceau laser et celui du mode propre (figure 2.6). Cela signifie qu'en utilisant des faisceaux de mesure suffisamment gros, on va augmenter les masses effectives des modes propres d'ordre élevé, qui n'auront plus de contribution significative. La réponse du résonateur sera donc similaire à celle d'un nombre réduit de modes, avec un comportement global en $1/\Omega^2$ aux fréquences élevées comme on peut le voir sur la figure 2.8. On a représenté les spectres de bruit thermique mesurés avec deux faisceaux ayant des tailles de col différentes : $w_0 = 60\,\mu$m pour la courbe (a) et $120\,\mu$m pour la courbe (b). On constate que la hauteur des pics de bruit thermique des modes à haute fréquence décroît avec la taille du faisceau, ce qui est une conséquence de l'augmentation des masses effectives expliquée précédemment. La courbe (c) correspond à la contribution au spectre de bruit du seul mode fondamental. On constate que plus on travaille avec un gros faisceau, plus le spectre réellement observé se rapproche de celui du mode fondamental.

Cette dépendance en $1/\Omega^2$ est aussi celle des modes pendulaires des miroirs suspendus dans les interféromètres gravitationnels [75]. De nombreuses techniques de réduction des bruits quantiques dans l'interféromètre ont été proposées [76, 77, 79] sans avoir encore pu être testées expérimentalement sur les suspensions car leurs fréquences de résonance sont très basses (0.1 Hz). En utilisant des faisceaux de mesure suffisamment gros, on disposerait avec les micro-miroirs d'un objet mécanique présentant une réponse mécanique comparable, mais à une fréquence beaucoup plus élevée où il est plus simple d'observer des effets quantiques optomécaniques sans être gêné par les bruit classiques.

2.4 Effets de la pression de radiation sur le système

Dans cette partie, on revient sur certains effets importants liés à la pression de radiation. On s'intéresse d'abord au déplacement statique, qui introduit une dépendance de la position moyenne du miroir vis-à-vis de l'intensité lumineuse. Celle-ci change en retour le désaccord de la cavité et modifie l'intensité lumineuse intracavité. Cette imbrication introduit une non linéarité dans le système qui peut induire un comportement bistable de la cavité. Mais cette

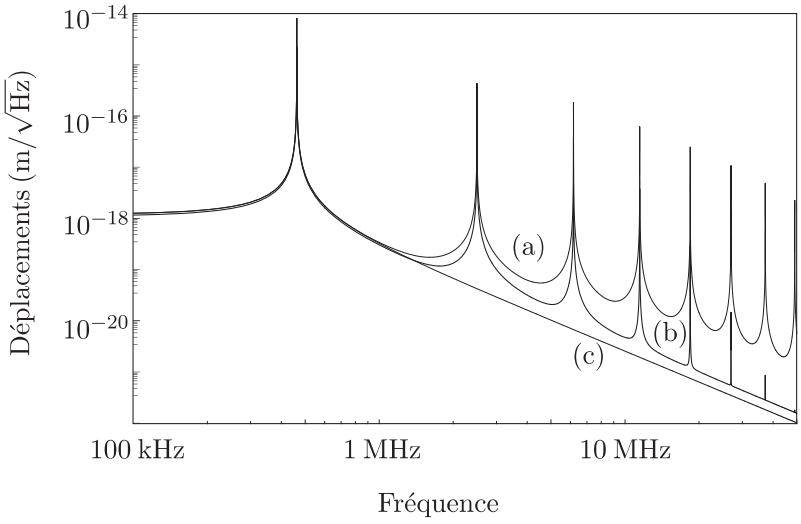


FIG. 2.8 – Simulation des niveaux de bruit obtenus pour un col de 60 μm (a) et 120 μm (b). Pour des gros faisceaux, le bruit thermique effectif à haute fréquence décroît comme $1/\Omega^2$, c'est-à-dire comme un oscillateur harmonique unique (c).

non linéarité permet également de produire des états comprimés du champ électromagnétique. On revient ensuite sur l'incidence du bruit de pression de radiation sur la sensibilité de la mesure et sur l'observation des fluctuations de position d'un résonateur dans son état fondamental.

2.4.1 Une source de non-linéarités

La force de pression de radiation induit une déformation statique de la surface du résonateur. Le déplacement moyen $\overline{x}$ du résonateur représente la somme des contributions statiques de tous les modes de vibration du miroir, que l'on déduit de l'équation (2.62) prise à fréquence nulle :

$$\overline{x} = 2\hbar k \chi_{\text{eff}}[0]\overline{I}, \tag{2.68}$$

où $\overline{I} = |\overline{\alpha}|^2$ est l'intensité moyenne du champ intracavité. Le déphasage moyen $\overline{\Psi}$ du champ dans la cavité est alors donné par l'équation (2.10) :

$$\overline{\Psi} = \Psi_0 + \Psi_{\text{NL}}, \tag{2.69}$$

où l'on a introduit le déphasage non linéaire Ψ_{NL} dû au déplacement du miroir sous l'effet de la pression de radiation moyenne du champ intracavité :

$$\Psi_{\text{NL}} = 4\hbar k^2 \chi_{\text{eff}}[0]\overline{I}. \tag{2.70}$$

Cette dépendance du déphasage en fonction de l'intensité lumineuse introduit une non linéarité dans le système semblable à de l'effet Kerr [80, 82, 83]. En effet, lorsqu'on détermine l'intensité intracavité $\overline{I}$ en fonction de l'intensité incidente $\overline{I}^{\text{in}}$ en utilisant les équations (2.11), (2.69) et (2.70), on trouve que cette intensité est solution d'une équation du troisième degré :

$$\overline{I}\left(\gamma^2 + \left(\Psi_0 + 4\hbar k^2 \chi_{\text{eff}}[0]\overline{I}\right)^2\right) = T\overline{I}^{\text{in}}. \tag{2.71}$$

En fonction de la susceptibilité mécanique statique $\chi_{\text{eff}}[0]$ du résonateur et des caractéristiques optiques de la cavité, on va pouvoir observer différents régimes car l'équation précédente peut présenter jusqu'à trois solutions stationnaires. Si l'intensité incidente est faible, on ne verra pas de différence avec une cavité rigide : en changeant la fréquence du laser, on balaye Ψ_0 et on va observer une courbe d'Airy standard pour l'intensité intracavité. Si l'intensité incidente est suffisante pour que le déphasage non linéaire Ψ_{NL} soit comparable à la largeur γ de la résonance optique, on peut voir apparaître de la bistabilité. En balayant la résonance optique, le pic d'Airy est déformé par les effets non-linéaires (figure 2.9).

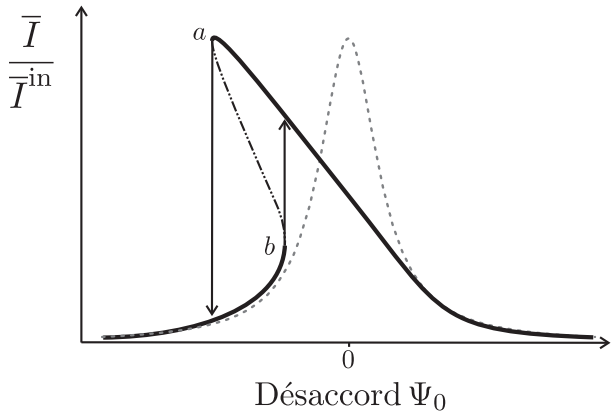


FIG. 2.9 – Influence de la pression de radiation sur l'allure des fonctions d'Airy obtenues en balayant la résonance. La courbe en pointillés est obtenue à très basse puissance lumineuse. La courbe en trait continu est obtenue avec une puissance incidente suffisante pour observer un effet d'hystérésis. La zone hachurée entre les points tournants a et b correspond à une branche instable.

Cette bistabilité mécanique a déjà été observée expérimentalement en 1983 [69] avec une cavité de finesse $\mathcal{F} = 15$, constituée d'un miroir fixe et d'un miroir déposé sur une plaque en quartz de 60 mg suspendue par deux fils en tungstène. La fréquence de résonance mécanique de ce pendule est de l'ordre de quelques Hz.

Pour observer cette bistabilité mécanique, il est nécessaire que le déphasage non linéaire soit comparable à la largeur de la cavité ($\Psi_{\text{NL}} \simeq \gamma$), ce qui s'écrit aussi en termes de déplacements $\overline{x} \simeq \lambda/2\mathcal{F} \simeq 10^{-11}$ m pour une cavité de finesse 50 000. Pour une puissance incidente de 1 mW et avec le micro-miroir présenté précédemment, en approximant sa susceptibilité statique par la seule contribution de son mode fondamental de masse effective 23 μg et de fréquence propre $\Omega_0/2\pi = 480$ kHz, on obtient un recul de $\overline{x} = 10^{-12}$ m. Il manque un ordre de grandeur mais la bistabilité semble atteignable car il est possible de produire des oscillateurs possédant des masses effectives plus faibles.

Ces effets de la pression de radiation présentent de grandes similitudes avec ceux obtenus avec un milieu à effet Kerr inséré dans une cavité optique. L'indice optique d'un tel milieu dépend de l'intensité lumineuse : ainsi, le déphasage accumulé lors d'un aller-retour dans la cavité varie aussi de façon affine avec l'intensité lumineuse (équations 2.69 et 2.70). Comme avec un milieu Kerr, on peut espérer produire des état comprimés du champ [8] au voisinage des points tournants de bistabilité en désaccordant la cavité. On peut comprendre cet effet

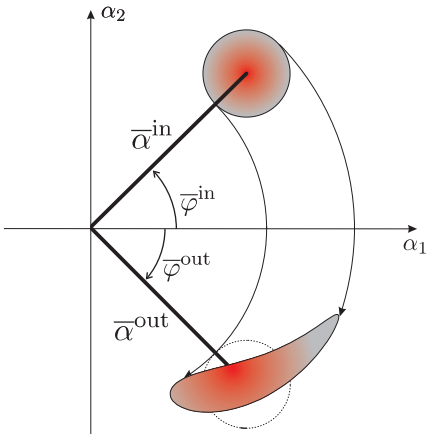


FIG. 2.10 – Effet des non linéarités sur les fluctuations du champ sortant. La rotation entre les champs entrant et réfléchi dépend de l'intensité du champ. Les fluctuations du champ sortant ne possèdent plus la symétrie de révolution et on obtient un champ comprimé.

[80] grâce à une interprétation géométrique simple dans l'espace des phases, illustrée sur la figure 2.10. D'après les relations (2.11) une cavité sans perte déphase le champ réfléchi par rapport au champ incident d'une quantité qui dépend du désaccord $\overline{\Psi}$ de la cavité :

$$\overline{\alpha}^{\text{out}} = \frac{\gamma + i\overline{\Psi}}{\gamma - i\overline{\Psi}}\overline{\alpha}^{\text{in}}. \tag{2.72}$$

Cette relation correspond à une simple rotation dans l'espace des phases autour de l'origine d'un angle $2\text{Arctan}\left(\overline{\Psi}/\gamma\right)$, l'amplitude du champ restant constante. La méthode semi-classique permet d'interpréter la transformation des fluctuations quantiques à partir des mêmes lois d'évolution classique. Chaque point de la distribution initiale, représentée sur la figure 2.10 sous la forme d'un disque pour un état cohérent, subit donc une rotation d'un angle $2\text{Arctan}\left(\Psi/\gamma\right)$, où Ψ dépend de l'amplitude du point considéré sous l'effet de la pression de radiation. Si ces effets sont suffisamment importants, la distribution du champ réfléchi est déformée et prend l'aspect d'une goutte allongée comme le montre la figure 2.10. Cette interprétation géométrique très simple donne une distribution de forme complexe. La méthode semi-classique traite en fait les fluctuations de manière linéaire et approxime cette distribution par une ellipse, caractéristique d'un état comprimé du champ [80] : les fluctuations de la quadrature parallèle au petit axe de l'ellipse sont réduites en-dessous du bruit de photon standard. On comprend donc grâce à cette approche simple que les non linéarités induites par la pression de radiation permettent de produire des états non classiques.

On peut également utiliser une cavité à micro-miroir pour coupler les fluctuations d'intensité et de phase de deux faisceaux entrant dans la même cavité. Si leurs intensités sont très différentes, on peut ainsi effectuer une mesure quantique non destructive (QND) de l'intensité lumineuse du faisceau intense [9, 10, 14] en mesurant la phase du faisceau sonde réfléchi par la cavité.

2.4.2 Le bruit de pression de radiation

On revient maintenant plus en détail sur le bruit de pression de radiation et son incidence sur la mesure. Le bruit de pression de radiation est relié aux fluctuations d'intensité du champ intracavité $\delta I[\Omega]$ par l'expression (1.53). On peut relier ces fluctuations à celles des champs incidents sur la cavité à partir de l'équation (2.20). Dans le cas d'une cavité sans perte et résonnante, on obtient l'expression suivante pour le bruit de pression de radiation :

$$\delta x_{\mathrm{rad}}[\Omega] = \chi[\Omega]\frac{8\hbar}{\lambda}\mathcal{F}\frac{\sqrt{\overline{I}^{\mathrm{in}}}}{1 - i\Omega/\Omega_{\mathrm{c}}}\delta p^{\mathrm{in}}[\Omega]. \tag{2.73}$$

La cavité amplifie les fluctuations d'intensité du champ incident comme on l'avait déjà vu au chapitre 1 (équation 1.54), mais elle effectue aussi un filtrage : les effets de la pression de radiation sont réduits pour des fréquences supérieures à Ω_{c}. Pour observer ces effets, il est donc préférable de considérer des modes du résonateur ayant une fréquence de résonance inférieures à Ω_{c}.

Conséquence sur la sensibilité de la mesure

Si on cherche à mesurer un déplacement δx du miroir induit par une force extérieure, que ce soit la force de Langevin F_T ou une force externe F appliquée au micro-miroir, la mesure est non seulement limitée par le bruit de phase du faisceau incident, mais aussi par les fluctuations de position δx_{rad} produites par la pression de radiation. D'après l'équation (2.23), le bruit de phase du faisceau réfléchi par une cavité à résonance et sans perte s'écrit :

$$\delta q^{\mathrm{out}}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau}\delta q^{\mathrm{in}}[\Omega] + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau}\overline{\alpha}k\left\{\delta x_{\mathrm{rad}}[\Omega] + \delta x[\Omega]\right\}. \tag{2.74}$$

Les fluctuations δx_{rad} sont reliées aux fluctuations de la pression de radiation qui ne dépendent, à résonance, que des fluctuations d'intensité du faisceau incident. Pour un faisceau incident dans un état cohérent, elles sont décorrélées des fluctuations de phase. Le plus petit déplacement δx observable pour un faisceau incident cohérent ($S_p^{\mathrm{in}} = S_q^{\mathrm{in}} = 1$) vaut alors :

$$S_x^{\mathrm{min}}[\Omega] = \frac{\lambda^2}{256\mathcal{F}^2}\frac{1}{\overline{I}^{\mathrm{in}}}\left(1 + (\Omega/\Omega_{\mathrm{c}})^2\right) + |\chi[\Omega]|^2\frac{64\hbar^2}{\lambda^2}\frac{\mathcal{F}^2\overline{I}^{\mathrm{in}}}{1 + (\Omega/\Omega_{\mathrm{c}})^2}. \tag{2.75}$$

Comparé à la susceptibilité δx_{shot} (équation 2.28), on voit apparaître un bruit supplémentaire lié aux déplacements δx_{rad} induits par la pression de radiation :

$$\delta x_{\mathrm{min}} = \sqrt{\delta x_{\mathrm{shot}}^2 + \delta x_{\mathrm{rad}}^2}. \tag{2.76}$$

En termes de sensibilité pour la mesure, le bruit de pression de radiation est proportionnel à $\sqrt{\overline{I}^{\mathrm{in}}}$ tandis que le bruit de phase décroît comme $1/\sqrt{\overline{I}^{\mathrm{in}}}$. On peut aussi noter que le bruit de pression de radiation dépend de la susceptibilité mécanique $\chi[\Omega]$ du micro-miroir et va donc être plus important au voisinage d'une résonance mécanique.

Il existe un optimum en fonction de l'intensité incidente, appelé *limite quantique standard* (LQS) [6], qui traduit le compromis sur la sensibilité entre le bruit de phase et le bruit de pression de radiation. En optimisant l'équation (2.75), on obtient l'intensité optimale, qui

dépend de la fréquence à cause des effets de filtrage de la cavité et de la réponse mécanique de l'oscillateur :

$$\overline{I}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{LQS}}[\Omega] = \frac{\lambda^2}{128\mathcal{F}^2}\frac{1+(\Omega/\Omega_{\mathrm{c}})^2}{|\chi[\Omega]|}. \tag{2.77}$$

La sensibilité maximale atteinte pour cette intensité possède la propriété remarquable de ne dépendre que des caractéristiques mécaniques du micro-miroir. A partir des équations (2.75) et (2.77), on obtient :

$$\delta x_{\mathrm{LQS}}[\Omega] = \sqrt{\hbar|\chi[\Omega]|}. \tag{2.78}$$

En utilisant l'expression (1.18) de la susceptibilité mécanique, on peut calculer le spectre de bruit de position équivalent à la limite quantique standard :

$$S_x^{\mathrm{LQS}}[\Omega] = \frac{\hbar}{M\sqrt{(\Omega_{\mathrm{m}}^2-\Omega^2)^2+\Gamma^2\Omega^2}}. \tag{2.79}$$

Cette limite est à comparer au spectre des fluctuations de point zéro correspondant à l'état quantique fondamental du résonateur, obtenu en faisant $n_{\mathrm{T}} = 0$ dans l'équation (1.23) :

$$S_x^{Q}[\Omega] = \frac{\hbar\Gamma\Omega_{\mathrm{m}}}{M\left[(\Omega_{\mathrm{m}}^2-\Omega^2)^2+\Gamma^2\Omega^2\right]} \tag{2.80}$$

On constate que la limite quantique standard est toujours supérieure au spectre des fluctuations quantiques de position, sauf à la fréquence de résonance où elles sont égales. La limite quantique standard est un compromis sur la sensibilité d'une mesure opto-mécanique où les deux mécanismes limitant la mesure, le bruit de photon et le bruit de pression de radiation sont non corrélés. Ce n'est pas toutefois la limite de sensibilité la plus basse qu'on puisse atteindre. Elle peut être battue de plusieurs manières, par exemple en utilisant des états non classiques pour le champ électromagnétique servant à la mesure [7, 77, 78, 85], en désaccordant la cavité de mesure [81, 79] ou encore en mesurant une quadrature plus adéquate du faisceau réfléchi [79]. La limite de sensibilité qui apparaît alors est appelée *limite quantique ultime*, dont la valeur dépend aussi uniquement des propriétés mécaniques de l'oscillateur [7] :

$$\delta x_{\mathrm{LQU}}[\Omega] = \sqrt{\hbar|\mathrm{Im}(\chi[\Omega])|}. \tag{2.81}$$

En utilisant l'expression (1.18) pour la susceptibilité mécanique, on peut calculer le spectre de bruit de position correspondant à la limite quantique ultime, qui est exactement égal au spectre (2.80) des fluctuations quantiques de l'oscillateur harmonique. On comprend ainsi qu'il existe un lien intime entre la théorie de la mesure de position et l'état quantique du résonateur. L'observation de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique mécanique fait appel aux mêmes concepts que la problématique liée à l'observation de la limite quantique standard, et plus généralement à la théorie quantique de la mesure. Un micro-résonateur est donc un objet privilégié car il forme un système mécaniquement très simple, avec peu de modes propres dans la plage de mesure, et il répond de manière très efficace à la force de pression de radiation, permettant d'obtenir des effets d'action en retour de la mesure en principe visibles expérimentalement.

Chapitre 3

Un Fabry-Perot avec des micro-miroirs

Ce chapitre décrit comment mesurer les déplacements d'un micro-résonateur mécanique, en déposant à sa surface un miroir et en l'insérant dans une cavité Fabry-Perot de grande finesse. On commence par présenter la méthode de fabrication des micro-miroirs basée sur une technique de gravure réactive suivie d'un dépôt de couches diélectriques à leur surface. On décrit ensuite le montage mécanique qu'on a construit pour réaliser une cavité optique très stable, tout en conservant une possibilité de translation du micro-résonateur afin d'ajuster son positionnement avec une grande précision. On présente les mesures que nous avons effectuées sur les propriétés optiques pour caractériser la qualité des traitements diélectriques du miroir. Enfin, on décrit deux autres éléments que nous avons développés dans le but d'obtenir une cavité de mesure suffisamment stable et accordable : son asservissement en température et l'enceinte à vide dans laquelle elle est placée.

3.1 La fabrication des résonateurs

3.1.1 Objectifs et principe de fabrication

Notre objectif était de produire des micro-miroirs ayant une taille allant de la centaine de microns jusqu'à 1 mm, en vertu des considérations optiques vues dans les chapitres précédents. Nous avons réalisé différentes géométries, d'abord pour obtenir une grande variété de modes propres, ensuite pour tester des géométries plus complexes que des poutres ou des ponts. Nous avons donc arrêté notre choix d'une part sur des géométries simples telles que des poutres, des plongeoirs, des carrés et des disques, et d'autre part sur des objets plus complexes comme

Fig. 3.1 – Aperçu de quelques géométries de résonateurs réalisés.

des pendules de torsion, pour notamment tester les dispositifs de suspension. Quelques-uns des résonateurs réalisés sont schématisés sur la figure 3.1. Nous avons essayé de varier les dimensions des résonateurs simples pour tester l'incidence de la géométrie sur les fréquences de résonance des modes propres. Pour une géométrie donnée, nous avons également voulu fabriquer des résonateurs de tailles différentes, sachant que les plus grandes structures seraient plus faciles à réaliser et à tester (dépôt optique, alignement dans la cavité,...), alors que les plus petites seraient à terme plus utiles dans nos expériences.

Nous présentons dans cette partie les étapes de fabrication des micro-miroirs. Un rapide aperçu des méthodes actuelles de micro-fabrication nous a conduits à choisir une technique de gravure sèche, la DRIE [24] (Deep Reactive Ion Etching en anglais) qui permet de fabriquer des micro-résonateurs aux flancs droits et très bien définis, ce qui est crucial dans l'obtention de bons facteurs de qualité mécanique. En effet, des bords trop rugueux introduisent une possibilité supplémentaire de dissipation des vibrations du résonateur et augmentent donc l'amortissement. Le point de départ de la gravure est une galette (wafer en anglais), de 4 pouces de diamètre. La première étape de la fabrication consiste à réaliser les masques (section 3.1.2) utilisés pour la gravure (sections 3.1.3 et 3.1.4). Du fait de la taille importante de la galette, nous avons choisi de la découper après gravure pour se ramener à des puces plus maniables de 10 mm de côté : un seul wafer permet d'en obtenir une quarantaine. Pour avoir un éventail suffisant de résonateurs, de un à quatre micro-résonateurs sont gravés sur chaque puce. Une fois les puces gravées et nettoyées, elles sont traitées optiquement par dépôt de couches diélectriques (section 3.1.5).

La fabrication de ces micro-miroirs résulte d'une collaboration entre plusieurs équipes. La gravure a été réalisée par Lionel Rousseau de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electronique et Electrotechnique (ESIEE) de Noisy-le-Grand. C'est l'équipe de Jean-Marie Mackowski du Laboratoire des Matériaux Avancés (LMA) de Villeurbanne qui s'est chargée du traitement optique des puces, et Vincent Loriette du Laboratoire d'Optique Physique de l'Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles (ESPCI) a caractérisé leur état de surface. Nous n'étions absolument pas assurés au début de ce travail de la possibilité de réaliser des miroirs de grande qualité sur des micro-structures : c'est grâce aux nombreux échanges que nous avons pu avoir et aux compétences de ces équipes que cette réalisation a finalement été possible.

3.1.2 Les wafers et les masques

Nous avons utilisé des wafers achetés chez la société TraciT Technologies basée à Grenoble. Ils sont constitués d'un sandwich appelé SOI (Silicon On Insulator en anglais) de trois couches différentes : 520 μm de silicium Si, 2 μm d'oxyde SiO_2 puis 60 μm de silicium (voir la figure 3.2). La partie utile qui formera le résonateur est la couche supérieure de 60 μm d'épaisseur. La partie inférieure est le substrat qui doit être enlevé au niveau des résonateurs. La couche d'oxyde sert de couche d'arrêt lors de la gravure de chaque face. Comme les traitements de surface nécessaires à la constitution du miroir doivent être déposés sur la face supérieure, celle-ci est polie avec une rugosité qui est garantie comme étant inférieure à 3 Angströms, ce qui permet d'envisager des finesses optiques de l'ordre de 10 000. Il faut bien sûr porter un soin particulier à cette face et chercher à la protéger autant que possible lors des différentes étapes

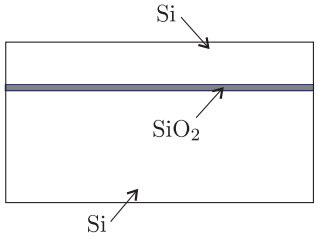


FIG. 3.2 – Vue en coupe du wafer.

de la fabrication. Par ailleurs, le silicium est dopé P (bore), de sorte que sa résistivité est de l'ordre de 10 à 20 mΩ.cm, c'est-à-dire environ 10^4 fois plus élevée que celle du cuivre pur. Le matériau est toutefois suffisamment conducteur pour envisager une excitation électrostatique du résonateur.

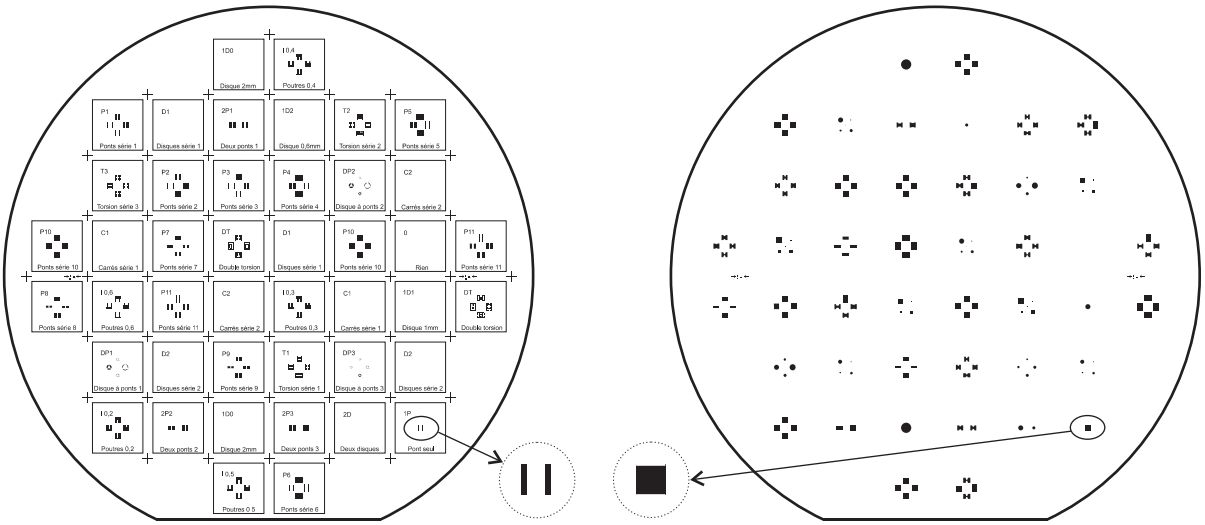


FIG. 3.3 – Négatifs des masques utilisés pour graver les micro-miroirs. A gauche, la face supérieure ; à droite, la face inférieure vue de dessus. Les parties assombries sont celles qui sont gravées. Les puces correspondent aux carrés de 10 mm de côté. Les croix permettent d'ajuster les traits de découpe.

La méthode de gravure utilisée nécessite l'emploi de masques similaire à ceux utilisés pour la gravure de circuits imprimés en électronique. Nous avons dessiné deux masques, un pour chaque face de la galette, représentés sur la figure 3.3. Les parties en noir correspondent aux zones à creuser. Comme le montre les zones agrandies correspondant à un résonateur en forme de pont, le masque de la face arrière (à droite) a pour rôle d'enlever la matière sur un carré assez large autour de la structure, alors que le masque de la face supérieure (à gauche) dessine le résonateur proprement dit. Pour pouvoir positionner correctement les deux masques sur la galette, des motifs de centrage ont été ajoutés sur une ligne horizontale au centre de la galette. Des carrés de 10 mm de côté correspondant aux dimensions finales des puces, ainsi qu'un réseau de croix matérialisant les traits de découpe ont également été ajoutés. Pour limiter le nombre de manipulations, le patronyme des puces (D1 pour disque numéro 1, P2,

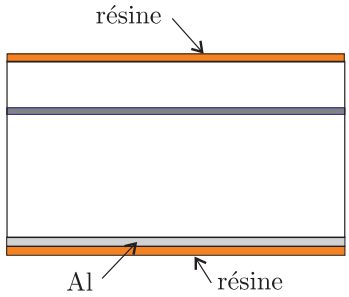
etc...) a également été gravé sur leur face supérieure, ce qui s'est avéré être finalement une erreur puisque cela a créé des zones supplémentaires difficiles à nettoyer. La galette possède enfin un méplat qui facilite son positionnement lors de la gravure.

Nous avons dessiné les masques avec le logiciel Adobe Illustrator, puis nous les avons imprimés sur transparent avec une imprimante laser. Cette technique simple permet toutefois de créer des motifs présentant des détails jusqu'à des tailles de l'ordre de quelques dizaines de microns seulement, limitées en fait par le tramage de l'imprimante. Les structures arrondies sont un peu crénelées et les angles droits sont légèrement arrondis, mais ce n'est pas gênant pour nos besoins, d'autant plus que la gravure a tendance à lisser ces détails. Néanmoins, pour les futures séries de résonateurs que nous aurons à réaliser, il faudra passer à une technique de production des masques plus sophistiquée, permettant d'obtenir des angles bien droits.

On va maintenant décrire les différentes étapes nécessaires à la réalisation des micro-miroirs en prenant l'exemple d'une structure débouchante telle la poutre que l'on peut voir en quatrième position à partir de la gauche sur la figure 3.1.

3.1.3 Le transfert des masques

Avant d'effectuer la gravure proprement dite, il faut transférer les masques sur le wafer. Comme en électronique, les motifs vont être transférés sur des couches déposées de manière temporaire à la surface de l'échantillon (cf Etape 1). On utilise une résine positive, déstructurée à la lumière, du Polyméthylméthacrylate (PMMA). Le dépôt est fait avec une "tournette" : on met en rotation le wafer, puis on dépose de la résine liquide au centre et c'est la force centrifuge qui homogénéise le dépôt. Une fois durci, le dépôt sur la face avant fait environ 1.8 microns d'épaisseur.

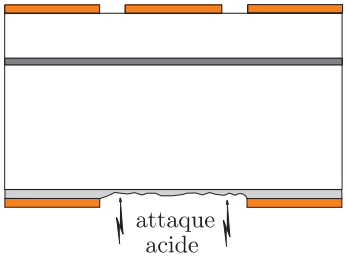


Etape 1 : le dépôt de résine photosensible

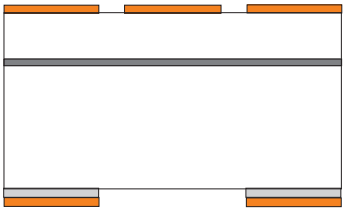
Comme la partie inférieure du wafer est plus épaisse (520 μm) que la partie supérieure (60 μm), les durées nécessaires à la gravure sont plus importantes pour la face arrière, respectivement deux heures et 20 minutes environ. Plutôt qu'une simple résine, le masque arrière est réalisé en métal, plus résistant aux plasmas utilisés pour la gravure. Une couche mince d'aluminium de 500 nm est ainsi déposée par évaporation puis recouverte par un dépôt de résine (de 1.1 microns d'épaisseur) afin de pouvoir lui transférer les masques.

ETAPE 2 : le transfert des masques par irradiation UV et nettoyage de la résine.

Les masques sont plaqués contre les faces du wafer. Il est très important de bien les superposer pour obtenir des structures propres, ce qui est assuré par les éléments de centrage présents sur les deux masques. Une irradiation ultraviolette intense modifie la structure de la résine photosensible exposée. Un nettoyage avec un révélateur adapté permet alors d'éliminer sélectivement les zones qui ont été éclairées (cf ETAPE 2). Cette étape permet ainsi de transférer les structures des masques à la résine.



ETAPE 3 : l'attaque de l'aluminium



ETAPE 4 : le wafer avant la gravure

Enfin, il faut graver l'aluminium en face arrière (cf ETAPE 3) en plongeant le wafer dans un bain d'acide acétique à 30°C qui attaque le métal mis à jour par l'insolation de la résine. On nettoie ensuite l'échantillon avec de l'acétone, ce qui le rend prêt pour la gravure (cf ETAPE 4).

3.1.4 La gravure de l'échantillon

On souhaite obtenir des structures bien définies, aux flancs propres et bien perpendiculaires aux faces externes. Les techniques standards de lithographie, semblables à celles utilisées en électronique qui font intervenir par exemple des agents corrosifs tels que l'hydroxyde de potassium, ne permettent pas d'obtenir des structures aussi propres sur des épaisseurs importantes. Les ingénieurs de l'ESIEE ont donc utilisé une technique de gravure anisotrope appelée gravure ionique réactive (RIE en anglais : Reactive Ion Etching) qui consiste à accélérer des ions vers la surface de l'échantillon, qui est simultanément dénaturée par l'intervention de radicaux libres très réactifs avec le silicium. Il s'agit d'une gravure sèche qui ne fait pas appel à des solutions chimiques. C'est l'avènement de cette technique dans les années 1985 puis ses améliorations successives qui ont permis de produire par lithographie des structures mécaniquement très raffinées, tels que des micro-moteurs et autres capteurs miniaturisés aux formes de plus en plus complexes.

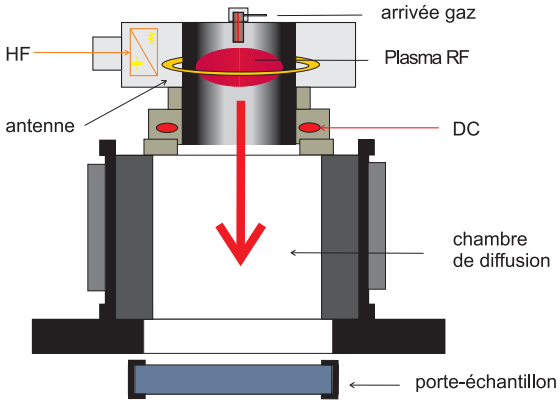
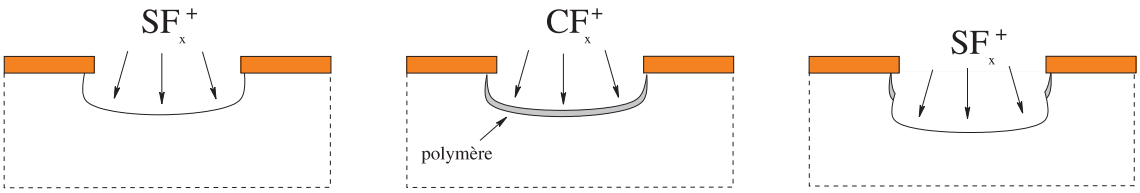


FIG. 3.4 – Le principe de la machine réalisant la DRIE.

Le principe de la machine réalisant la gravure est représenté sur la figure 3.4. Un plasma radio-fréquence (à 13.56 MHz) est obtenu à l'intérieur d'une enceinte préalablement pompée sous un vide inférieur à 10^{-5} mbar et remplie avec le mélange gazeux contenant les molécules qui fourniront les électrons libres, les ions et les radicaux libres très réactifs (fluor $\dot{F}$) par collision des électrons libres avec les noyaux. Une tension continue permet d'accumuler les électrons, plus rapides que les autres constituants du plasma au niveau de l'échantillon. Cela crée un potentiel d'auto-polarisation qui va accélérer à leur tour les ions positifs vers l'échantillon en provoquant par collision une érosion physique très directionnelle. Simultanément, les radicaux libres réagissent chimiquement avec la surface de l'échantillon et dégradent le réseau cristallin. La gravure ionique réactive combine donc un procédé chimique conduisant à l'abaissement de l'énergie de liaison des atomes de surface, et un procédé physique de bombardement ionique qui décape la surface.

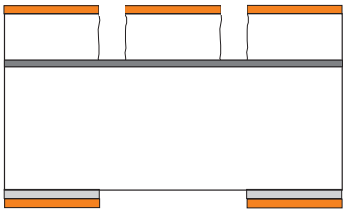
La qualité de la gravure dépend du choix du plasma, des radicaux, de la pression des gaz et de la puissance de l'onde radio-fréquence qui définit l'énergie des ions qui réalisent la gravure. Cependant, une gravure prolongée avec ce dispositif ne conduit pas à une gravure totalement anisotrope car les flancs verticaux finissent par être attaqués. Pour remédier à cela, on utilise l'alternance de deux plasmas différents, le premier servant à la gravure (plasma de SF_6) et le second (C_2F_6) effectuant une passivation de la surface du silicium, qui retarde l'attaque du silicium en créant une structure polymère plus dense (cf ETAPES 5-6-7). Comme la gravure est fortement directionnelle, les couches passivées du front de gravure sont détruites plus rapidement que les flancs du puits lors de la phase de gravure suivante. On protège ainsi les flancs de la zone gravée.



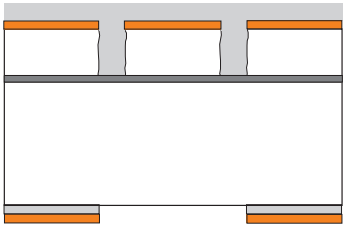
ETAPE 5 : gravure ETAPE 6 : passivation ETAPE 7 : gravure

Cette méthode permet d'effectuer des gravures profondes, aux bords quasiment parallèles, jusqu'à 1 mm de profondeur environ. On parle alors de Deep Reactive Ion Etching ou DRIE. La vitesse de gravure est de l'ordre de quelques microns par minute mais elle dépend évidemment de la taille des motifs à creuser : plus le trou est petit, plus cette vitesse est faible. Comme on ne peut pas prolonger indéfiniment la durée de gravure puisqu'il existe un risque de destruction des plus grosses structures, on a cherché à avoir un ensemble de trous de tailles similaires sur les masques (en ajustant la forme des ajourages autour des structures). La vitesse de gravure dans la couche d'oxyde SiO_2 (2 μm) est nettement plus faible ($\simeq 1\,\mu$m par heure) que dans le silicium. On peut ainsi envisager de creuser des structures de tailles variables car la présence de l'oxyde permet de ralentir la gravure des structures les plus larges et donc d'attendre que les zones de gravure lente soient terminées.

La première phase de gravure concerne la face avant (cf Etape 8), qui a une épaisseur plus faible. Cette face est ensuite protégée par une résine insensible aux plasmas (cf Etape 9) pour éviter que le plasma utilisé pour la face arrière ne vienne attaquer la partie avant en passant par un éventuel trou qui aurait traversé la couche d'oxyde.

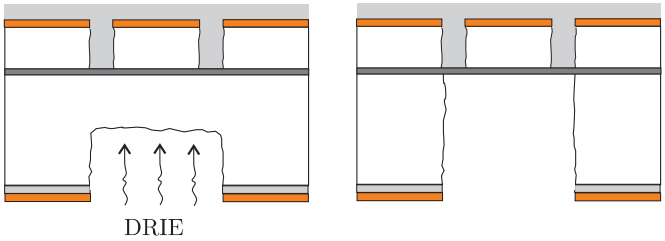


Etape 8 : fin de la gravure de la face avant

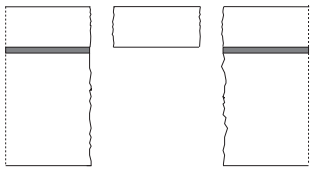


Etape 9 : protection de la face avant

L'échantillon est retourné et la face arrière est creusée par DRIE (cf Etape 10). Du fait de son épaisseur plus importante (520 μm) et comme l'ensemble des structures est beaucoup plus disparate (cela va d'un trou cylindrique de 100 μm à des carrés de 1 mm de côté), c'est la face la plus délicate à graver. L'utilisation d'un wafer de test constitué d'une unique couche de silicium a permis de mesurer la vitesse de gravure des différents motifs avant de réaliser l'échantillon en SOI ; la gravure de cette face nécessite deux à trois heures.



Etape 10 : gravure par DRIE de la face arrière



Etape 11 : le nettoyage final

Il ne reste plus qu'à nettoyer l'échantillon de la résine sur la face supérieure, à retirer les masques et à supprimer la couche d'oxyde mise à nu en plongeant l'échantillon dans un bain très corrosif d'acide fluorhydrique HF très concentré (cf etape 11). La photographie de la figure 3.5 représente l'échantillon après la gravure. On peut voir une quarantaine de puces de 10×10 mm contenant chacune de un à cinq résonateurs.

La figure 3.6 représente des clichés obtenus avec un microscope électronique à balayage de quelques structures typiques : à gauche un "plongeoir" de 400 μm de large et à droite une

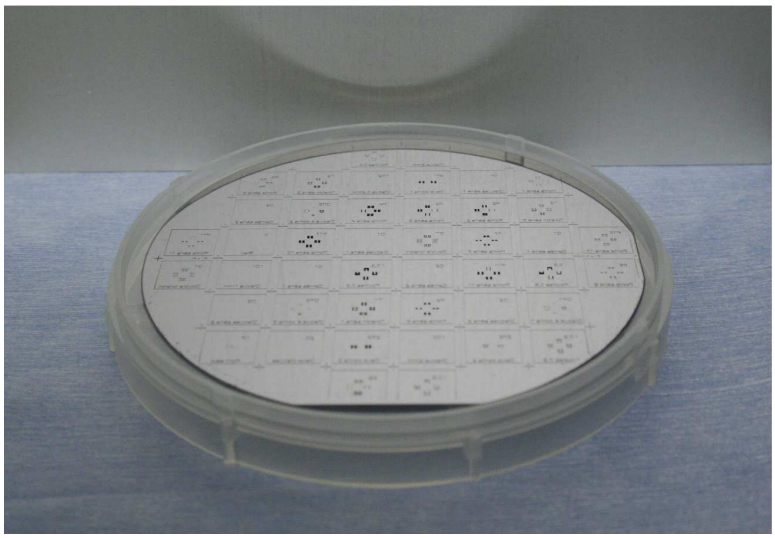


FIG. 3.5 – Le wafer une fois gravé.

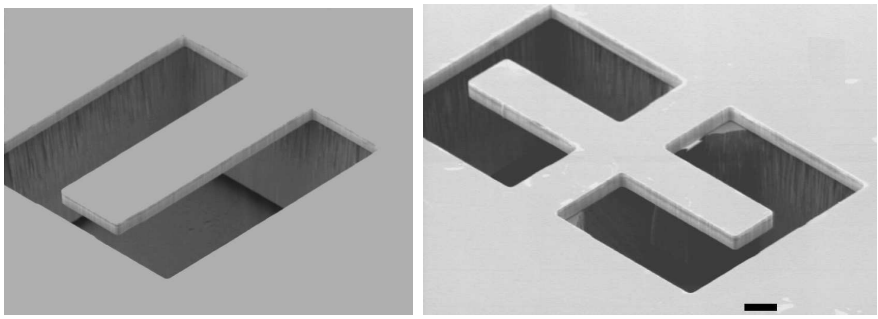


FIG. 3.6 – Photographies obtenues en microscopie à balayage électronique de différentes structures réalisées.

géométrie inspirée d'un oscillateur de torsion de 200 μm de large. On voit nettement sur ces photos les deux couches de silicium, la couche supérieure de 60 μm seulement constituant les résonateurs, et le substrat en-dessous beaucoup plus épais. On peut également observer les différences de qualité de surface entre les flancs verticaux des deux couches. Pour le substrat, on remarque des stries d'autant plus marquées que la profondeur de gravure augmente. Sur la figure de droite, on peut observer à la base de la partie supérieure une partie plus claire qui est un reste de la couche d'oxyde SiO_2.

Le wafer a ensuite été découpé par l'entreprise Fichou. L'échantillon est d'abord pris en sandwich entre deux plaques de silice maintenues par une résine, pour rigidifier l'ensemble et protéger les faces de l'échantillon de la poussière et des morceaux drainés lors de la découpe. La découpe est réalisée avec une scie mécanique à fil diamanté dont la marge de découpe est de 1 mm. On peut remarquer sur la photo de la figure 3.5 les traits de coupe gravés en même temps que les structures et espacés de 2 mm afin de tenir compte de cette marge. Après découpe, les puces sont ramenées à leur taille définitive (10×10 mm) par polissage, puis la

silice et la résine sont retirées à l'aide de solvants.

3.1.5 Le traitement optique

Le traitement optique de la face supérieure du résonateur est une étape délicate et cruciale en vue d'obtenir des miroirs ayant à la fois une grande réflectivité et présentant peu de pertes. De plus, le dépôt d'une couche supplémentaire sur le résonateur entraîne de nombreux problèmes mécaniques comme l'ajout de contraintes (effet bilame) ou la modification des facteurs de qualité mécanique des modes propres de vibration du résonateur [86]. Les développements nécessaires au traitement de structures de plus en plus petites seront très certainement critiques dans les années à venir.

Dans un premier temps, nous avons demandé à l'entreprise Fichou de traiter optiquement quelques structures pour pouvoir rapidement tester le reste du montage expérimental. Le traitement réalisé correspondait à une réflectivité de 99.7% et a permis d'obtenir des finesses de l'ordre de 2000. Pour réaliser de meilleurs miroirs nous avons ensuite fait appel au Laboratoire des Matériaux Avancés de Villeurbanne. L'équipe de Jean-Marie Mackowski a notamment réalisé le traitement des miroirs en silice de l'interféromètre gravitationel VIRGO [36, 87]. Le travail qu'ils ont effectué a permis d'obtenir des miroirs d'une qualité jamais atteinte sur des micro-résonateurs en silicium.

Les miroirs sont réalisés grâce à une alternance de couches de deux diélectriques d'indices optiques différents constituant ainsi un miroir de Bragg. Les épaisseurs respectives des deux matériaux sont choisies pour correspondre à un chemin optique de $\lambda/4$, de sorte que le déphasage accumulé lors d'un aller-retour dans une couche est égal à $\lambda/2$: les ondes transmises interfèrent ainsi destructivement.

Les couches sont déposées par une technique d'évaporation, leur épaisseur étant contrôlée par la durée d'exposition. Lors de l'évaporation, l'épaisseur du dépôt est estimée par la variation de la fréquence de résonance d'un oscillateur de test présent dans la cloche et dont la masse est modifiée à cause du dépôt. La réflectivité du miroir est liée au nombre de doublets déposés sur le substrat. Le choix du nombre de couches résulte d'un compromis entre l'obtention d'une bonne réflectivité et la réduction des contraintes induites par le dépôt. En effet, lors des premiers essais de traitement optique, les chercheurs du LMA ont observé des déformations importantes des résonateurs -des poutres de plusieurs centaines de microns de long présentaient une flèche d'environ 50 nm en leur centre- pouvant aller jusqu'à casser le résonateur.

Un autre problème rencontré a été l'état de propreté de la surface des micro-résonateurs : la présence de poussières de silicium sur leur surface empêchait l'adhérence des couches de manière homogène. Il a fallu tester différents protocoles de nettoyage avant de réussir à faire tenir le traitement optique sur le substrat. Cependant, l'opération de nettoyage reste encore délicate, car elle transporte des poussières des orifices creusés par la gravure vers le centre du résonateur où on veut déposer le miroir. Les zones proches des flancs des résonateurs restent difficiles à nettoyer, ce qui empêche pour le moment de travailler avec des structures très petites.

Un autre souci résidait dans la rugosité de la surface des résonateurs. Grâce à Vincent Loriette, nous avons pu caractériser cette rugosité de manière optique avec les installations développées à l'ESPCI pour l'interféromètre Virgo [88]. On revient un peu plus loin sur le bilan de ces mesures et le lien qui existe entre la rugosité de la surface et les pertes optiques induites par diffusion.

On peut voir sur la figure 3.7 la photographie d'un micro-miroir effectuée après le traitement optique de la puce dite "P2". Les micro-miroirs sont finalement manipulés sous un flux laminaire de classe 1 pour limiter les poussières qui pourraient venir se déposer sur leur surface, notamment au moment du montage de la cavité Fabry-Perot. On utilise également des gants et un matériel de salle blanche adapté.

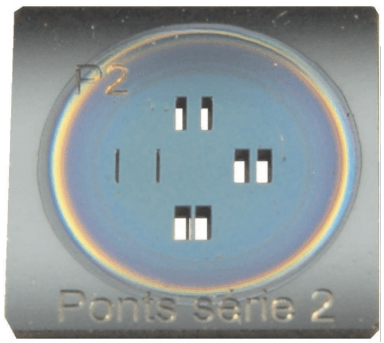


FIG. 3.7 – Photographie d'une puce de 10×10 mm de côté, dite "P2", après traitement optique. Les irisations correspondent à la limite du traitement optique. Les résonateurs font respectivement 800, 400, 200 et 100 μm de large pour 1 mm de long.

3.2 La cavité de mesure

On décrit dans cette section les contraintes à respecter pour utiliser les micro-miroirs dans une cavité optique et le montage expérimental qui a permis de le faire. Il s'agit de réaliser une cavité courte, suffisamment compacte pour pouvoir être contrôlée en température et mise ensuite dans une enceinte à vide. Elle doit aussi être suffisamment rigide pour limiter les vibrations d'un miroir par rapport à l'autre tout en permettant la translation du micro-miroir pour pouvoir utiliser chaque micro-résonateur présent sur la puce.

De l'importance du parallélisme entre les miroirs

L'axe optique d'une cavité Fabry-Perot linéaire est déterminé par la position et l'orientation de ses deux miroirs. Pour assurer la stabilité optique de la cavité de mesure dont le miroir de fond, le micro-miroir, est plan, il faut utiliser un coupleur d'entrée concave. Le parallélisme entre les deux miroirs est important pour que l'axe optique soit situé le plus près possible du centre du micro-miroir.

Lors de la construction de la cavité optique, on cherche à placer le micro-miroir en face et au milieu du miroir d'entrée. L'axe optique de la cavité est la normale aux deux surfaces

réfléchissantes. Si la courbure du coupleur d'entrée est bien centrée et si les deux miroirs sont parallèles, le plan défini par la surface du micro-miroir est parallèle aux bords du miroir d'entrée, comme on peut le voir sur la partie gauche de la figure 3.8, et l'axe optique passe alors par le milieu du micro-miroir. Par contre, un défaut de parallélisme induit un décalage de l'axe optique (voir la partie droite de la figure 3.8). Pour ce qui concerne l'alignement du faisceau laser sur la cavité, ce décalage n'est pas rédhibitoire car on peut le rattraper simplement en ajustant l'angle d'incidence du faisceau. Cependant, ce décalage nuit au bon positionnement du faisceau au centre du résonateur.

Pour une cavité de longueur L formée d'un miroir plan et d'un miroir concave de rayon de courbure R, un défaut de parallélisme d'un angle α induit un décalage δ de l'axe optique au niveau du micro-résonateur (figure 3.8). En utilisant le fait que l'axe optique passe nécessairement par le centre géométrique O du miroir concave, on obtient la relation entre le décalage et l'angle associé au défaut de parallélisme :

$$\delta = \sin\alpha\ (R - L). \tag{3.1}$$

Avec un rayon de courbure de 5 cm et une longueur de cavité de 2.4 mm, une précision sur le centrage meilleure que $\delta = 50\,\mu$m impose d'assurer le parallélisme entre les deux miroirs à mieux que 10^{-3} rad. Avec les puces que nous utilisons qui font 10 mm de côté, cela revient à assurer un parallélisme entre les deux faces des miroirs à mieux que $10\,\mu$m. Cette valeur est très faible, ce qui signifie qu'un défaut même très petit peut induire un déplacement important de l'axe optique.

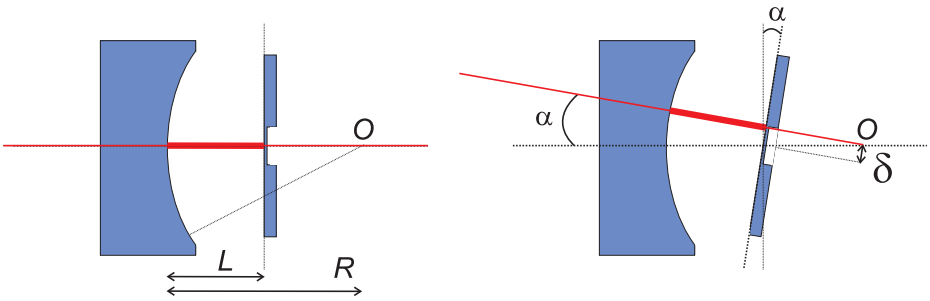


FIG. 3.8 – Effet d'un défaut de parallélisme entre les miroirs sur l'axe optique de la cavité de mesure.

Pour limiter ces défauts de parallélisme lors de la construction de la cavité, les parties centrales sur lesquelles reposent les deux miroirs ont été réalisées avec le plus grand soin par les mécaniciens du laboratoire. Les pièces ont été fabriquées au tour, en usinant toutes les faces en regard sans démonter ni retourner les pièces. Cela a donc imposé des contraintes au moment de la conception de l'ensemble sur la forme des parties centrales.

Malgré ces précautions, il est nécessaire de pouvoir compenser des défauts éventuels. Pour cette raison et aussi pour pouvoir placer plusieurs micro-résonateurs sur la même puce, on a choisi de rajouter une possibilité de translation latérale de la puce. Cette possibilité s'est révélée très utile également pour passer rapidement d'un résonateur à l'autre sur la même puce sans avoir à démonter l'ensemble de la cavité, ou pour optimiser la finesse de la cavité en déplaçant le point d'impact du faisceau laser sur le micro-miroir, ou encore pour tester la structure spatiale des modes de vibration (voir le chapitre 5).

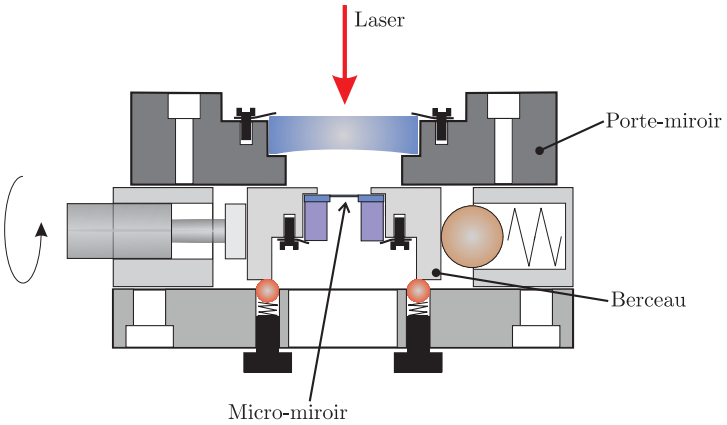


FIG. 3.9 – Vue en coupe du premier montage de la cavité de mesure. Le micro-miroir repose dans un berceau contre lequel il est plaqué au moyen d'une chrysocale vissée. Le berceau est plaqué par les vis arrières contre le porte-miroir d'entrée, qui joue le rôle d'espaceur.

Stabilité mécanique de la cavité

Pour mesurer les mouvements du micro-miroir avec une bonne sensibilité, il faut s'affranchir des autres vibrations dans la cavité, comme celles de la puce qui supporte les résonateurs ou du miroir d'entrée. De même, la rigidité de l'ensemble doit permettre de limiter les dérives et les désalignements possibles du système. C'est pour cela que nous avons choisi de plaquer le miroir d'entrée et la puce contre un espaceur métallique rigide. Il faut noter que la surface de la puce, obtenue par épitaxie, présente une planéité quasi-parfaite. La difficulté a donc été de rendre compatible la possibilité de translation avec la nécessité d'une bonne stabilité mécanique. On présente la solution retenue sur l'exemple de la première cavité que nous avons réalisée.

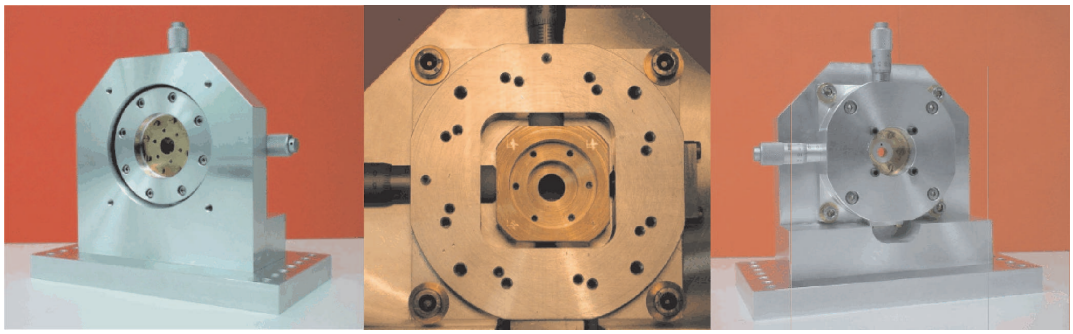


FIG. 3.10 – Photographies du premier montage : vue générale de la face avant (gauche), détail du berceau (centre) et vue générale de la face arrière montée.

Ce premier montage a servi à tester les principes adoptés pour la construction des cavités avec des micro-miroirs et à vérifier le bon fonctionnement de l'ensemble du montage expérimental. On peut voir une vue d'ensemble des pièces mécaniques sur le graphique 3.9 et des photographies sur la figure 3.10. La cavité a une longueur de 6 mm, avec un coupleur d'entrée commercial fourni par la société REO de 1 m de rayon de courbure et d'un pouce

de diamètre. Il est plaqué sur le porte-miroir en dural au moyen d'une bague en chrysocale. Le micro-miroir se situe en regard. Il est inséré dans un berceau en laiton, matériau choisi pour ses bonnes propriétés de glissement sur le dural, et il y est maintenu grâce à une autre bague en chrysocale et une entretoise. L'ensemble est plaqué contre le porte-miroir d'entrée au moyen d'un système de billes et de ressorts afin de pouvoir être déplacé transversalement à l'aide d'une translation micrométrique. Le placage du berceau sur le porte-miroir d'entrée est assuré par des billes et des ressorts pour limiter les frottements lors des translations.

Ce montage s'est avéré satisfaisant : il combine en effet la possibilité de translation et un bon parallélisme entre les deux miroirs. On a estimé le défaut de parallélisme en mesurant le nombre d'intervalles spectraux libres que l'on balaie lorsqu'on décale la puce supportant les micro-miroirs. On a obtenu des variations inférieures à $2\,\mu$m (soit moins de 4 intervalles spectraux balayés) sur 5 mm d'excursion. De plus, la stabilité mécanique d'ensemble est très satisfaisante : suite à ce déplacement important, le recouvrement spatial du faisceau de mesure avec le mode TEM_{00} de la cavité optique est passé de 98% à 96%. Cette petite diminution a facilement été rattrapée avec les miroirs servant à aligner le faisceau laser sur la cavité. Cependant, ce premier montage est trop massif pour être intégré dans une enceinte à vide et possède une masse thermique trop importante pour permettre un asservissement en température efficace. Nous avons donc réalisé un second montage, que nous présentons dans le prochain paragraphe. Ce montage est plus compact, possède une inertie thermique plus faible et est adapté à la mise sous vide.

La cavité de mesure

La figure 3.11 donne un aperçu de la seconde version du montage de la cavité de mesure. Comme la première version, elle a été entièrement réalisée par l'atelier de mécanique du laboratoire. Le coupleur d'entrée est maintenu dans le porte-miroir par une chrysocale qui assure l'élasticité de la compression. Le porte-miroir d'entrée est fabriqué en cuivre pour assurer une bonne conduction thermique. Comme précédemment, il joue le rôle d'espaceur, et ses deux faces ont été réalisées sans retourner la pièce pour assurer un bon parallélisme.

La puce qui supporte le micro-miroir est plaquée dans un berceau en laiton à l'aide d'une bague en cuivre et d'une pièce de fond en plexiglas. Le berceau est fabriqué en laiton pour assurer à la fois une bonne conductivité thermique et peu de frottements lors de la translation. Lui aussi a été réalisé sans retournement, avec le souci d'obtenir une surface aussi propre que possible. La petite rondelle en cuivre qui sert à plaquer la puce dans le berceau peut être remplacée par un morceau de silice fondue transparente. Avec la plaque de plexiglas qui vient se visser dans l'espaceur en laiton, l'ensemble forme un carré de 20 mm de côté, rigide, facilement manipulable et qui est translaté en bloc au moyen d'un système de deux vis micrométriques et d'une paire de ressorts leur faisant face. Pour assurer un bon glissement, on a inséré des pièces en téflon entre le berceau et la tête des vis micrométriques ; elles assurent aussi un guidage du berceau lorsqu'il est translaté dans la direction perpendiculaire par l'autre vis micrométrique. Tout le système de translation est fixé sur une pièce en PVC, elle-même fixée au porte-miroir. Enfin, le berceau est plaqué contre le porte miroir d'entrée en cuivre au moyen d'une pièce arrière en téflon et d'un système de vis et de ressorts.

Les différents matériaux ont été choisis pour limiter la masse thermique de l'ensemble.

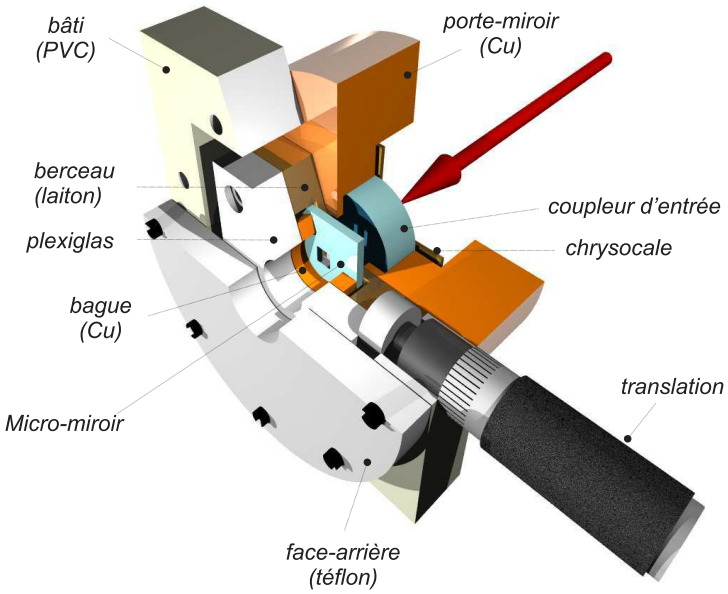


FIG. 3.11 – Vue en coupe de la deuxième version de la cavité de mesure.

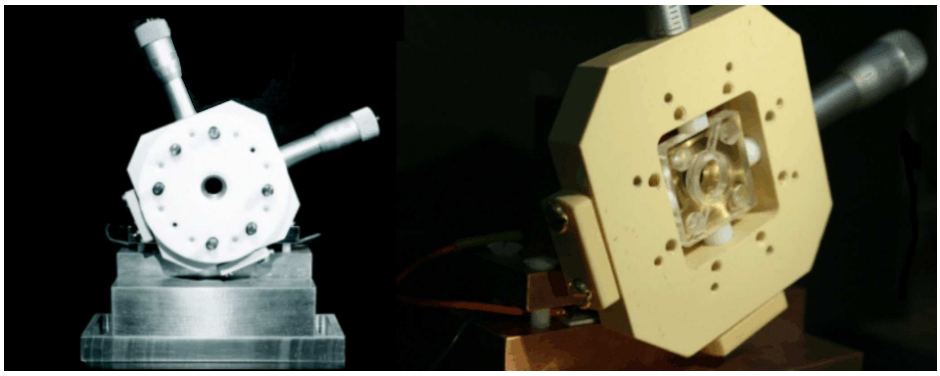


FIG. 3.12 – Photographies de la seconde cavité. A gauche, une vue de la face arrière ; à droite, un détail du système de translation.

Seules les pièces essentielles ont été usinées dans des matériaux conduisant bien la chaleur : le porte-miroir d'entrée est en cuivre et le berceau en laiton. Les autres pièces ont été réalisées dans un matériau isolant thermiquement pour assurer une stabilisation rapide en température. Pour pouvoir utiliser la cavité sous vide, on a percé de nombreux trous pour évacuer l'air des interstices.

On peut voir deux photographies de la cavité de mesure sur la figure 3.12 où on distingue les pièces de montage de l'ensemble. La cavité de mesure est fixée sur une pièce en cuivre dont on a cherché à limiter la taille, toujours dans un souci de réduction de la masse thermique.

Sous cette pièce on a placé deux éléments Peltier pour asservir la température. Ils reposent sur une masse de cuivre importante qui joue le rôle de masse thermique. On reviendra sur ce montage dans la section 3.4

3.3 Les propriétés optiques

Dans cette partie, on étudie les propriétés optiques de la cavité de mesure constituée d'un micro-miroir et d'un coupleur d'entrée. Il s'agit de mesurer les coefficients de réflexion, de transmission et les pertes de chacun des deux miroirs. La lumière intracavité qui arrive sur un miroir peut être réfléchie dans le même mode propre de la cavité, transmise à travers le miroir (coefficient de transmission en intensité T_i), absorbée (A_i) ou encore diffusée (D_i). Les trois dernières possibilités constituent un ensemble de canaux de sortie pour les photons stockés dans la cavité. Parmi toutes ces voies de sortie, la transmission du miroir d'entrée joue un rôle à part puisqu'elle représente les pertes "utiles" de la cavité, celles permettant de mesurer les déplacements du micro-miroir. L'ensemble des autres voies constitue les pertes de la cavité qu'on a modélisé dans le chapitre précédent par une transmission P non nulle du miroir arrière. Ainsi on a :

$$P = A_1 + D_1 + T_2 + A_2 + D_2. \tag{3.2}$$

Dans cette partie, on explique d'abord comment mesurer séparément les différentes caractéristiques optiques de la cavité. On revient ensuite sur l'absorption, qui peut être estimée par la mesure d'effets photothermiques tels que la bistabilité. Enfin, on présente une étude de la rugosité de la surface du miroir qui est responsable de la diffusion de lumière, que l'on a ainsi estimée pour nos micro-miroirs.

3.3.1 Principe de la mesure des caractéristiques optiques des miroirs

Mesure de la finesse

La finesse est un paramètre important pour caractériser la qualité optique de la cavité. Pour la mesurer, on balaye la fréquence du laser autour de la résonance de la cavité, ce qui permet de faire varier le désaccord ψ. La mesure de l'intensité transmise et de l'intensité réfléchie donne alors accès à la finesse de la cavité à partir de la largeur des pics d'Airy, mais aussi à d'autres paramètres utiles pour déterminer les pertes et les transmissions des miroirs tels que les coefficients de réflexion et de transmission globaux de la cavité.

Le balayage en fréquence du laser est effectué en modulant la température du cristal du laser. Pour remonter à la modulation de fréquence, il faut calibrer la variation induite par la modulation. Pour cela, on utilise une cavité de référence qui est longue de 20 cm et de finesse 10 000. On mesure l'écart entre la résonance de cette cavité et la fréquence du laser à l'aide de la méthode développée par Pound, Drever et Hall [25, 26], présentée dans le chapitre 4 (partie 4.5). Elle consiste à moduler la phase du faisceau incident sur la cavité à une fréquence de 20 MHz, et à détecter dans le faisceau réfléchi la modulation d'intensité résultante à la même fréquence. En augmentant volontairement la profondeur de modulation, on observe en balayant la fréquence du laser plusieurs motifs espacés de 20 MHz sur le signal d'erreur, comme on peut le voir sur la figure 3.13. En mesurant l'écart temporel entre ces pics, on peut remonter à la variation de la fréquence du laser au cours du temps produite par le balayage de la température. En pratique, on ajuste la variation de la fréquence avec le temps par un polynôme du deuxième ordre pour supprimer d'éventuelles non-linéarités dans le balayage,

et on utilise la loi obtenue pour obtenir la calibration temps-fréquence correspondant à l'axe horizontal des pics d'Airy observés sur la cavité de mesure (courbe du bas de la figure 3.13).

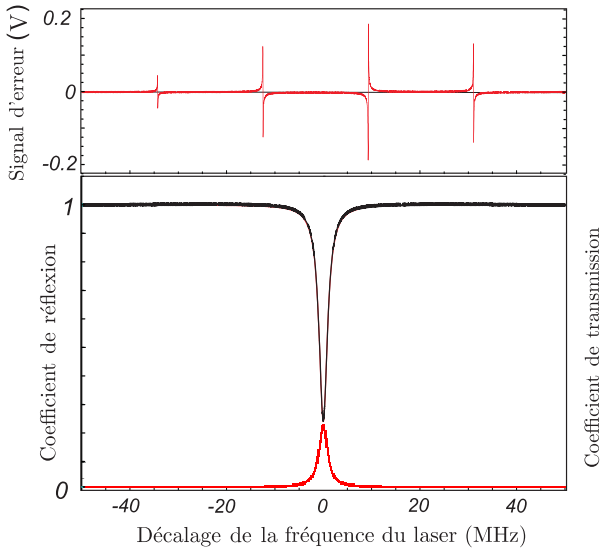


FIG. 3.13 – Signal d'erreur de la cavité de référence servant à calibrer le balayage en fréquence (courbe du haut) et coefficients en réflexion et transmission observés sur la cavité de mesure (courbes du bas).

En parallèle avec ce signal de calibration, on acquiert les intensités en transmission et en réflexion de la cavité de mesure. Pour effectuer cette mesure sans être limité par les effets photothermiques, on balaye rapidement la résonance, en une dizaine de millisecondes, avec une puissance lumineuse suffisamment faible (50 μW) pour que l'absorption de lumière dans les couches diélectriques n'induise pas de distorsion du pic d'Airy. Un ajustement lorentzien permet de calculer la demi-largeur à mi-hauteur du pic d'Airy, qui correspond aussi à la bande passante de la cavité. La valeur obtenue pour cette mesure est de 1.07 MHz, ce qui correspond, pour une cavité de 2.4 mm de long (intervalle spectral libre de 62 GHz), à une finesse $\mathcal{F} = 29\,200$.

Mesure des transmissions

La mesure de la finesse permet de connaître les pertes totales de la cavité qui sont dues à la transmission du miroir d'entrée, à celle du micro-miroir, ainsi qu'à l'absorption et à la diffusion de lumière par les deux miroirs. Dans l'exemple précédent, les pertes totales valent $2\pi/\mathcal{F} \approx 215$ ppm. Le coefficient de réflexion à résonance $\mathcal{R}$ donne accès via la formule (2.30), à la transmission T_1 du miroir d'entrée et aux pertes additionnelles P. Ensuite, la mesure de l'intensité transmise par la cavité à résonance donne accès à la transmission T_2 du micro-miroir, dont la valeur est donnée par la formule (équations 2.14 et 2.27) :

$$\overline{I}_{\mathrm{tr}} = \eta_{\mathrm{cav}} \frac{4T_1T_2}{(T_1+P)^2} \overline{I}^{\mathrm{in}}. \tag{3.3}$$

Il est plus difficile de mesurer les pertes par diffusion et par absorption, dont les effet individuels ne peuvent pas être identifiés par la simple observation des champs sortant de la cavité car ils interviennent collectivement sous la forme des pertes P (équation 3.2). Nous

avons toutefois mesuré indirectement la somme $A_1 + D_1$ des pertes du miroir d'entrée en utilisant une cavité constituée de deux coupleurs similaires dont on pouvait translater transversalement le miroir arrière. Cela nous a permis de mesurer quatre valeurs des pertes en différents points de la surface des miroirs. La valeur moyenne obtenue est de 91 ppm pour la transmission T_1 et de 15 ppm pour les pertes $A_1 + D_1$, en accord avec les spécifications du fabricant (REO) qui étaient respectivement de 100 et 10 ppm. Ces miroirs nous ont été fournis par Francesco Marin de l'Université de Florence.

3.3.2 Résultats des mesures

Finesse de la cavité

Grâce au système de translation, nous avons pu tester la qualité optique du traitement réfléchissant en différents points de la surface du micro-résonateur. Nous avons ainsi étudié les variations de la finesse en fonction du point d'impact. La figure 3.14 présente les valeurs obtenues pour un résonateur en forme de poutre encastrée à ses deux extrémités, de 1 mm de long, 800 μm de large et 60 μm d'épaisseur. Le faisceau de mesure utilisé possède un col w_0 de 100 μm. On constate tout d'abord une variabilité de la finesse au centre du résonateur de l'ordre de 10% : on verra plus loin qu'elle est probablement due à l'état de surface imparfait des premiers résonateurs utilisés.

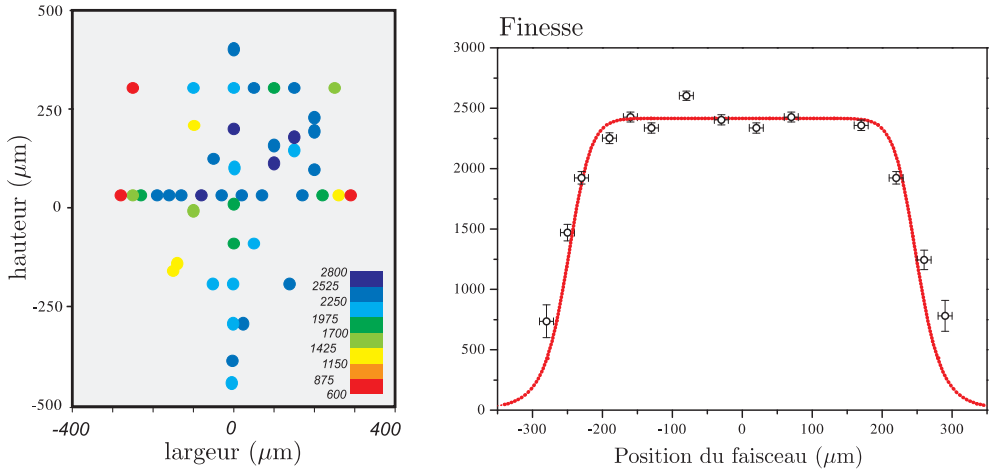


FIG. 3.14 – Variations de la finesse mesurée pour un micro-miroir de la première série (traitements optiques réalisés par l'entreprise J. Fichou). A gauche : cartographie des finesses obtenues en différents points de la surface ; à droite : variation transverse de la finesse mesurée au voisinage du centre du micro-miroir.

On a reporté sur la partie droite de la figure 3.14 les valeurs mesurées lors d'un déplacement transversal au centre du résonateur. On constate que la finesse chute lorsque le faisceau de mesure approche le bord du résonateur car dans cette situation, le faisceau n'est plus entièrement réfléchi. On a superposé à ces points expérimentaux une courbe en pointillés qui traduit la limitation théorique de la finesse par le recouvrement spatial entre le résonateur et la lumière. Pour un résonateur de largeur b, dont le coefficient de réflexion moyen en tout point vaut R_o, et pour un faisceau laser centré à la position transverse y_o, le coefficient de

réflexion effectif s'exprime en fonction de l'intégrale de recouvrement entre la poutre et le faisceau :

$$R(y_o) = R_o \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \int_{-b/2}^{b/2} dy\, e^{-2(y-y_o)^2/w_0^2}\,. \tag{3.4}$$

La valeur de la finesse limitée par la diffraction en fonction de la position du faisceau laser s'écrit alors :

$$\mathcal{F}(y_o) = \frac{2\pi}{1 - R(y_o)}. \tag{3.5}$$

La courbe théorique est obtenue avec $\mathcal{F}(y_o = 0) = 2430$, $b = 800\,\mu$m et $w_0 = 100\,\mu$m. La position du faisceau laser est estimée à partir de la graduation de la vis micrométrique qui permet de décaler le résonateur. L'incertitude est estimée à $10\,\mu$m. Les mesures de finesse sont effectuées par balayage de la fréquence du laser, comme décrit précédemment. Pour gagner du temps, les bandes latérales utilisées pour calibrer le balayage ne sont plus celles de la cavité de référence, mais celles de la cavité de mesure. Dans le cas de faibles finesses, les bandes latérales peuvent recourir partiellement le pic d'Airy de la porteuse centrale et modifier l'estimation de sa largeur. Les barres d'erreur verticales sur la figure traduisent ce problème. L'accord avec les points expérimentaux est bon et montre qu'il est nécessaire d'être relativement éloigné des bords du résonateur : la courbe théorique commence à s'éloigner de son niveau maximal lorsque le centre du faisceau laser est à 200 microns environ du bord, c'est-à-dire à 2 fois la taille du col. On voit donc là-encore l'importance d'un bon centrage de l'axe optique de la cavité sur le résonateur puisqu'ici la plage utile n'est finalement que de la moitié de la largeur du résonateur.

Transmission et pertes

Plusieurs étapes ont été nécessaires avant d'obtenir des traitements optiques de qualité. Le premier wafer gravé a cassé lors de la gravure, ce qui a endommagé son état de surface. Un premier traitement de surface a été déposé par l'entreprise J. Fichou et a permis d'atteindre des finesses de l'ordre de 2000 à 3000 sur des structures suffisamment larges. Cependant, la technologie utilisée ne garantissait que des réflectivités de l'ordre de 99.5%.

C'est le travail de l'équipe du Laboratoire des Matériaux Avancés à Lyon qui a permis d'atteindre des finesses bien plus élevées sur des structures plus complexes. Ils ont limité les déformations induites par la présence du traitement de surface en ayant recours à plusieurs étapes de recuit du résonateur. Ils ont aussi testé différentes méthodes de nettoyage de la surface du résonateur avant le traitement car les poussières de silicium issues de la gravure venaient se déposer au centre du résonateur et empêchaient l'adhérence des couches. Le choix des couches diélectriques utilisées a permis d'augmenter la robustesse des traitements de surface : une première couche de silice a ainsi été déposée sur le silicium avant de commencer l'empilement des couches, pour limiter les contraintes mécaniques induite par les couches. Le nombre de couches diélectriques est aussi un paramètre important sur lequel les chercheurs du LMA ont travaillé car il modifie directement l'épaisseur du traitement de surface et les contraintes mécaniques. On a finalement pu tester une série de micro-miroirs de grande qualité, qui nous ont permis d'obtenir des finesses élevées tout en ayant peu de pertes. La figure 3.13 représente les coefficients de réflexion et de transmission de la cavité réalisée avec le micro-miroir dit "P3" de $1\,\text{mm} \times 1\,\text{mm} \times 60\,\mu$m, sur lequel ont été déposés une vingtaine de doublets

de couches diélectriques. Les valeurs des différents paramètres optiques sont récapitulées dans le tableau 3.1.

transmission coupleur	T_1	94 ppm
pertes totales	P	121 ppm
pertes coupleur	P_1	15 ppm
transmission résonateur	T_2	25 ppm
absorption	$A_1 + A_2$	$\simeq$ 5 ppm
diffusion résonateur	D_2	$\simeq$ 80 ppm

TAB. 3.1 – Caractéristiques optiques de la cavité de mesure réalisée avec le micro-miroir P3.

Les quatre premiers paramètres, T_1, P, P_1 et T_2 sont déterminés comme décrit dans la section précédente, à partir de la finesse et des coefficients de transmission de la cavité (la valeur de P_1 est mesurée indépendamment comme expliqué à la fin de la section 3.3.1). Les autres pertes, dont on connaît seulement la somme à partir des mesures précédentes, sont difficiles à déterminer directement. Les chiffres donnés dans le tableau sont des ordres de grandeur déduits des observations décrites dans les section suivantes sur les états de surface (section 3.3.3) et sur la bistabilité thermique (section 3.3.4).

3.3.3 Etat de surface et pertes par diffusion

Influence de la rugosité sur les pertes optiques

La surface des miroirs n'est jamais parfaitement lisse, il existe toujours des petits défauts qui vont perturber la réflexion du faisceau laser en diffusant la lumière. On s'intéresse dans cette section aux limitations sur la finesse qu'entraîne cette rugosité. On va calculer l'effet de la rugosité sur la diffusion pour un miroir plan, sachant qu'on obtient des résultats identiques pour un miroir courbe dès lors que le front d'onde du mode propre de la cavité est adapté à la courbure du miroir. On définit la rugosité $\zeta(y, z)$ comme l'écart entre la surface réelle et le plan ($x = 0$) (voir la figure 3.15). On suppose le champ incident sur le miroir adapté à la cavité, c'est-à-dire que le col est situé dans le plan du miroir ; au voisinage du miroir, son amplitude s'écrit en fonction du profil gaussien transverse du faisceau v_0 (équation 2.47) :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = v_0(y, z)e^{ikx}\alpha, \tag{3.6}$$

où α est l'amplitude du mode optique dans la cavité. L'amplitude du champ réfléchi par le miroir s'écrit alors $\mathcal{E}^\star(x, y, z)\, e^{2ik\zeta(y,z)}$, en supposant par ailleurs le miroir parfait (coefficient

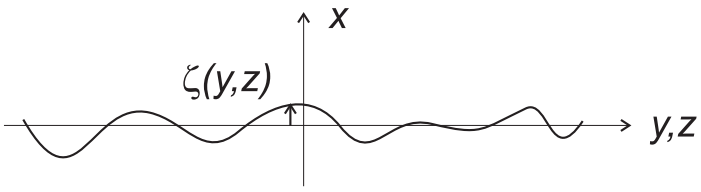


FIG. 3.15 – La rugosité d'un miroir est définie comme l'écart entre la surface réelle et la surface idéale, ici un plan.

de réflexion égal à 1). La réflexion sur une surface rugueuse va coupler le mode TEM_{00} aux autres modes propres de la cavité optique. Cependant, comme seul ce mode est résonnant, l'effet de la rugosité du miroir va se traduire en pratique par des pertes optiques pour le mode TEM_{00} [89, 90]. Le coefficient de réflexion est ainsi proportionnel au recouvrement transverse entre l'amplitude du champ réfléchi et l'amplitude $\mathcal{E}^\star(x, y, z)$ du champ qui serait réfléchi par un miroir idéal :

$$r \propto \int_S dydz\, \mathcal{E}(0, y, z)\, e^{-2ik\zeta(y,z)}\, \mathcal{E}(0, y, z), \tag{3.7}$$

c'est-à-dire :

$$r = \int_S dydz\, e^{-2ik\zeta(y,z)}\, v_0^2(y, z). \tag{3.8}$$

En supposant que la rugosité du miroir est partout petite devant la longueur d'onde, on peut développer le déphasage $e^{2ik\zeta}$. Comme la rugosité est définie par l'écart au plan moyen, le premier terme non nul correspond au deuxième ordre et on obtient pour les pertes par diffusion associées à la rugosité $D = 1 - r^2$ l'expression suivante :

$$D = 4k^2 \int_S dydz\, v_0^2(y, z)\, \zeta^2(y, z) \equiv 4k^2\bar{\zeta}^2, \tag{3.9}$$

où $\bar{\zeta}$ est appelée la rugosité quadratique pondérée. Pour obtenir une finesse de l'ordre de $\mathcal{F} = 100\,000$, il est nécessaire d'avoir une rugosité quadratique inférieure à :

$$\overline{\zeta} = \lambda/\sqrt{8\pi\mathcal{F}} \approx 6\,\text{Å}. \tag{3.10}$$

Ce résultat est très contraignant expérimentalement. Pour fabriquer des miroirs de grande qualité, il est nécessaire d'utiliser des substrats super-polis qui présentent une rugosité quadratique compatible avec cette contrainte, de l'ordre de 0.2 nm.

Caractérisation de l'état de surface des résonateurs

Il s'avère donc extrêmement utile de pouvoir caractériser la surface des résonateurs pour estimer l'ordre de grandeur des pertes par diffusion. De plus, l'état de surface d'un miroir dépend des techniques utilisées pour le polissage du substrat et il est utile d'avoir accès à cette information. La caractérisation de nos résonateurs a été effectuée en collaboration avec Vincent Loriette du Laboratoire d'Optique Physique de l'ESPCI, grâce à une méthode d'interférométrie en lumière blanche. Ce dispositif a permis notamment de caractériser les miroirs du projet européen VIRGO d'interféromètre gravitationnel. Son principe [88] repose sur une technique interférométrique de variation du déphasage d'un interféromètre de Michelson (voir la figure 3.16).

Une source de lumière blanche est envoyée dans l'interféromètre qui dispose d'objectifs de microscopes insérés dans chacun des bras. Ces derniers sont focalisés l'un sur l'objet dont on veut analyser la surface, l'autre sur un miroir de référence monté sur une cale piézo-électrique qui permet de moduler le déphasage relatif entre les deux bras. La lumière renvoyée par l'interféromètre est collectée sur une caméra CCD qui fait l'image des deux miroirs. Sur chaque pixel de la caméra, l'intensité lumineuse mesurée résulte de l'interférence entre les deux bras. Si on appelle A_O, ϕ_O et A_R, ϕ_R les amplitudes et les déphasages des champs

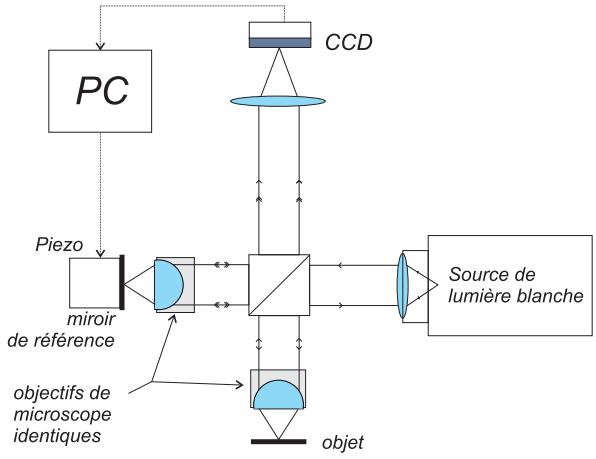


FIG. 3.16 – Le dispositif d'interférence en lumière blanche de l'ESPCI utilisé pour caractériser l'état de surface des micro-résonateurs.

réfléchis par l'objet et par le miroir de référence à partir des points conjugués du pixel étudié, l'intensité mesurée sur le pixel en question s'écrit :

$$I = A_{\mathrm{R}}^2 + A_{\mathrm{O}}^2 + 2A_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}\cos\left(\phi_{\mathrm{O}} - \phi_{\mathrm{R}} - \psi\cos\omega t\right), \tag{3.11}$$

où on a tenu compte de la modulation sinusoïdale de la phase de référence avec une amplitude ψ imposée au moyen de la cale piézo-électrique. Pour reconstruire le profil spatial de la surface du micro-miroir, il faut extraire la grandeur qui nous intéresse $\phi_{\mathrm{O}} - \phi_{\mathrm{R}}$, bien qu'on ne connaisse pas a priori les amplitudes réfléchies A_{O} et A_{R}. On résout ce problème grâce à la modulation de la phase, en enregistrant plusieurs images obtenues pour des positions différentes du miroir de référence : il suffit de quatre mesures pour remonter au profil spatial de la surface.

En pratique, la cale piézo-électrique est excitée à une fréquence de 50 Hz et sa position moyenne asservie par une boucle de contre-réaction. Le mouvement de la cale piézo-électrique et l'enregistrement par la caméra CCD sont synchronisés par l'ordinateur de façon à ce que le temps d'intégration soit égal au quart de la période d'oscillation de la cale. On obtient ainsi quatre images, que l'on peut moyenner sur plusieurs oscillations du miroir de référence afin de réduire le bruit sur la mesure. On peut voir sur la figure 3.17 les quatre images obtenues lors de la caractérisation de nos structures : une combinaison de ces quatre images permet de remonter au déphasage local. Après l'avoir corrigé du défaut de parallélisme résiduel existant entre les deux bras, en soustrayant le plan moyen obtenu par une méthode de moindre carré, on obtient le profil spatial de la surface du résonateur (image à droite). L'utilisation d'objectifs de microscope à grande ouverture numérique (0.95) permet d'obtenir un champ important : celui de la figure 3.17 est de plus de 600 μm de large. La figure obtenue correspond à un oscillateur de torsion traité optiquement, dont on voit nettement apparaître la structure. Un code de couleur est utilisé pour décrire la rugosité de la surface du miroir : l'amplitude correspondant à l'écart entre les couleurs les plus chaudes et les plus froides est d'environ 40 nm. On constate que l'ailette au centre de la figure est déformée par la présence des couches diélectriques.

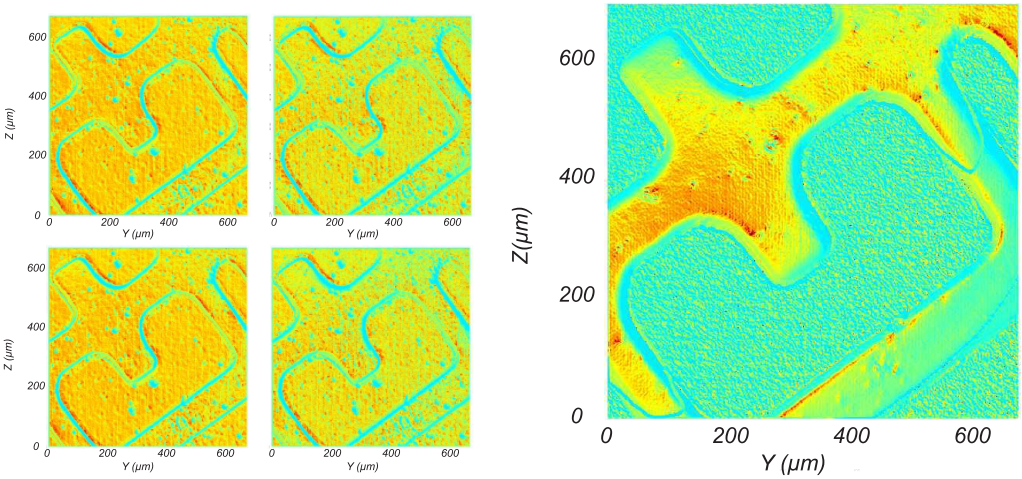


FIG. 3.17 – Images produites lors de la mesure interférométrique de la rugosité des micro-miroirs. A gauche, les quatre images correspondant à l'intégration pendant un quart de période du balayage de la cale piézo-électrique. A droite, le profil spatial reconstruit à partir des images de gauche.

Bilan des observations

L'étude de la surface des micro-résonateurs est instructive pour comprendre les difficultés à obtenir des miroirs de bonne qualité. Sur la figure 3.18, on a représenté les résultats obtenus pour les deux types de substrat utilisés pour la gravure : un échantillon en silicium sans couche d'arrêt en oxyde de silicium à gauche et celui en SOI à droite. Les observations ont été effectuées après les étapes de gravure et de découpe, mais avant le dépôt des couches diélectriques. La zone représentée a été réduite à un carré de 100 microns de côté à partir d'une image de $600 \times 600\,\mu$m, et l'échelle verticale est de $\pm 10\,$nm. On constate une grande différence entre les deux images, avec une rugosité beaucoup plus importante pour le silicium à gauche. De plus, la largeur caractéristique des sommets et des vallées sur cet échantillon est à peu près toujours identique, de l'ordre de $20\,\mu$m. Elle correspond en fait à la taille des objets utilisés lors du polissage, sans doute des billes d'une dizaine de microns de diamètre. On a appris par la suite que cet échantillon n'avait pas été poli optiquement. Par contre, l'échantillon en SOI présente un état de surface beaucoup plus homogène : on observe des variations caractéristiques sur une échelle beaucoup plus petite, de l'ordre du micron, et avec une amplitude correspondant à quelques nanomètres seulement. On attribue les rares pics observés à des poussières.

On a estimé les pertes par diffusion induites par la rugosité des micro-miroirs en appliquant la formule (3.9) aux données expérimentales. Ces données correspondent à une cartographie discrète de la surface du miroir $\zeta(y_i, z_j)$, avec des points espacés de $l = 0.58\,\mu$m, correspondant aux pixels de la caméra CCD. Si le centre du faisceau laser est positionné au point indexé par les indices (i_o, j_o), alors la formule (3.9) se réécrit :

$$D(i_o, j_o) \simeq \frac{8k^2 l^2}{\pi w_0^2} \sum_{(i,j)} \zeta(y_i, z_j)^2 e^{-2\left\{(y_i - y_{i_o})^2 + (z_j - z_{j_o})^2\right\}/w_0^2}. \tag{3.12}$$

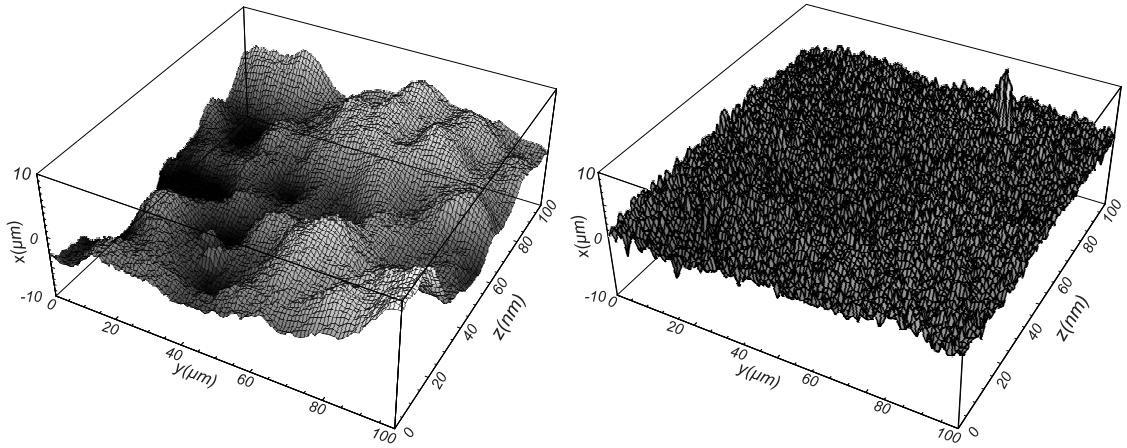


FIG. 3.18 – Aspect de la surface des deux échantillons utilisés pour la gravure : à gauche, une petite fraction de la surface de la puce P11 fabriquée à partir d'un échantillon en silicium pur non poli, et à droite le résonateur 1D0 gravé sur un wafer SOI poli.

On calcule cette expression pour différentes positions (i_o, j_o) du faisceau laser de façon à avoir une statistique raisonnable sur la rugosité. En pratique, on calcule les pertes D en 10 points placés sur la diagonale d'un carré de 200 μm de côté centré au milieu du champ observé expérimentalement. Pour un faisceau laser ayant un col de 60 μm, la limitation spatiale du champ d'observation à un carré de 600 μm de côté impose de choisir des points assez loin du bord. Pour les 10 points choisis, on a vérifié en utilisant la formule (1.57) que le recouvrement spatial du faisceau laser avec le carré observé induisait des pertes négligeables par rapport à celles liées à la rugosité du matériau.

On a ainsi obtenu des pertes moyennes par diffusion à un niveau de 350 ± 70 ppm pour la puce en SOI et 3400 ± 300 ppm pour le silicium seul. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion des valeurs calculées sur la diagonale du carré. On comprend bien qu'il n'est pas possible d'envisager des cavités de grande finesse avec ce type de substrat en silicium. Par contre, la valeur mesurée sur l'échantillon en SOI est plus prometteuse : elle permet en effet d'envisager des finesses de l'ordre de 15 000. L'échantillon en SOI utilisé pour cette caractérisation est issu de la première tentative de gravure, au cours de laquelle le bord du wafer a cassé. La surface de la puce a peut être été endommagée, ce qui pourrait expliquer la valeur des pertes ainsi mesurée, bien plus élevée que les 80 ppm reportés dans le tableau 3.1. Cette dernière valeur est déduite des pertes totales, et a été mesurée sur la puce P3, issue de la seconde tentative de gravure qui elle s'est bien déroulée.

On a aussi observé l'état de surface de résonateurs fabriqués en SOI après leur traitement optique. L'allure générale du profil de la surface est similaire à celui observé sans traitement, ce qui signifie que les pertes par diffusion sont inchangées. Il semble donc, et les discussions que nous avons eues avec le LMA et l'ESPCI le confirment, que les défauts de rugosité ne soient pas atténués par le traitement diélectrique.

On a aussi constaté que les couches diélectriques étaient absentes en bordure du résonateur,

sur une largeur d'une vingtaine de microns environ, ce qui limite la surface utile des résonateurs. D'après l'équipe du LMA, la mauvaise adhérence des couches au bord des structures est liée aux difficultés de nettoyage des micro-miroirs. En effet, les étapes de gravure et de découpe laissent de la poussière de silicium à la surface du résonateur, qui est très difficile à éliminer avec des moyens mécaniques car on risque de ramener des poussières supplémentaires de la périphérie du résonateur vers son centre. Plusieurs méthodes de nettoyage sont en cours d'étude au LMA pour améliorer l'état de surface avant le traitement optique.

3.3.4 Absorption dans les couches diélectriques : bistabilité thermique

Un autre défaut des miroirs est lié à l'absorption de lumière dans les traitements optiques. Ce problème est l'objet d'une grande attention dans la communauté des ondes gravitationnelles car la puissance lumineuse atteindra plusieurs kilowatts dans les bras des interféromètres de seconde génération et engendrera énormément de contraintes sur la structure des miroirs et d'effets thermiques [36].

L'un des premiers effets lié à l'absorption de lumière dans les couches diélectriques est une dilatation thermique locale du miroir, qui modifie la longueur de la cavité. Cette dilatation diminue la longueur de la cavité lorsque l'intensité intracavité augmente et déforme les pics d'Airy observés lorsqu'on balaye la fréquence du laser autour d'une résonance. En effet, si on s'approche de la résonance par une fréquence inférieure, la fréquence de résonance suit la variation de fréquence ce qui élargit le pic d'Airy. Inversement, si on s'en approche par une fréquence supérieure, la fréquence de résonance vient à la rencontre de la fréquence du laser, ce qui affine le pic. On peut voir sur la figure 3.19 deux courbes représentant l'intensité transmise par la cavité de mesure dans deux situations différentes. La courbe (b) représente l'intensité transmise pour une intensité incidente de $50\,\mu$W. L'intensité est alors suffisamment réduite et la vitesse de balayage suffisamment rapide pour ne pas observer de distorsion thermique du pic d'Airy. La courbe (a) par contre est obtenue avec une puissance lumineuse incidente de 2.5 mW et un balayage beaucoup plus lent. Les effets de dilatation sont plus importants et conduisent à une déformation notable de la résonance. La largeur à mi-hauteur du pic d'Airy est maintenant d'environ 3.5 MHz, à comparer à 2.2 MHz dans le cas de la courbe (b).

On peut utiliser cette observation pour obtenir un ordre de grandeur du coefficient d'absorption A des miroirs de la cavité, en reliant la déformation à la puissance absorbée. Le raisonnement simple présenté ici sera complété lors de l'étude de l'effet photothermique dans le chapitre 7. L'élargissement de 1.3 MHz correspond pour une cavité de 2.4 mm à une déformation de 10 pm. Pour obtenir la courbe (a), la puissance intracavité maximale est de $P = 12\,\mathrm{W}$ et le temps de balayage τ de la résonance de l'ordre de 200 ms. L'énergie $AP\tau$ absorbée lors du balayage se propage par diffusion sur une longueur $l = \sqrt{D\tau}$ où A est le coefficient d'absorption des couches et D est le coefficient de diffusion du substrat. Le volume l^3 voit alors sa température augmenter d'un facteur $\Delta T = AP\tau/\rho C l^3$, où ρ est la masse volumique du substrat et C sa capacité calorifique massique. Cet échauffement induit une dilatation δL reliée au coefficient d'expansion thermique linéaire α par

$$\delta L = \alpha l \Delta T = \frac{\alpha}{\kappa} AP, \tag{3.13}$$

où on a utilisé la relation $\kappa = \rho C D$ entre le coefficient de diffusion D et la conductivité thermique κ du matériau. L'effet sur la cavité est en fait la somme de l'élongation du mi-

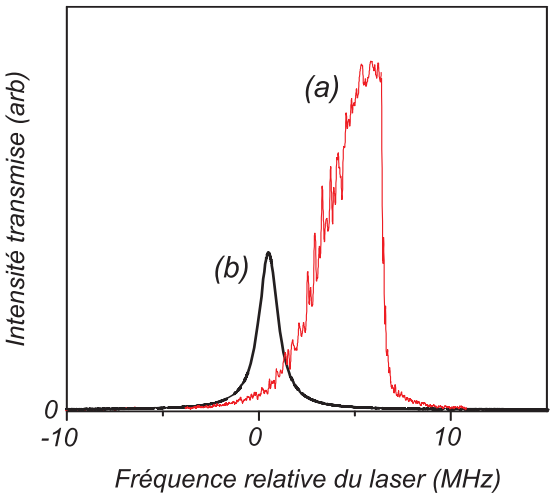


FIG. 3.19 – Effet de l'absorption de lumière dans les couches diélectriques : élargissement de la résonance et bistabilité (courbe a) ; la courbe (b) est mesurée à plus faible intensité et avec un balayage rapide de la fréquence du laser.

roir d'entrée en silice et de celle du micro-résonateur en silicium. Que l'on prenne les paramètres de la silice ($\kappa_{SiO_2} = 1.4\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ et $\alpha_{Si0_2} = 5.5 \times 10^{-7}\,\mathrm{K^{-1}}$) ou du silicium ($\kappa_{Si} = 100\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ et $\alpha_{Si} = 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$) on obtient des coefficients d'absorption très faibles, de l'ordre de quelques ppm. En supposant que ces coefficients sont essentiellement liés à la nature des couches et qu'ils sont égaux pour les deux miroirs ($A_1 \simeq A_2$), on obtient à partir de l'équation (3.13), une valeur $A_1 + A_2 \simeq 5\,\mathrm{ppm}$.

Cette estimation ne prétend donner qu'un ordre de grandeur, un peu supérieur à la valeur de 0.5 ppm mesurée par le LMA sur un échantillon témoin en silice inséré dans la cloche. Une mesure plus précise des coefficients d'absorption reposant sur une modulation de l'intensité intracavité sera présentée au chapitre 7. La conclusion de cette estimation est que les traitements optiques sont très satisfaisants et ne présentent que très peu d'absorption. Cependant, même avec une très faible absorption, les effets induits peuvent être importants et devenir gênants expérimentalement lorsqu'on cherche à travailler avec des puissances optiques élevées. Il faut noter que si les effets statiques peuvent poser problème, par exemple en rendant difficile l'accrochage de la cavité à résonance, les perturbations deviennent négligeables dès lors qu'on s'intéresse à des temps courts devant les temps de propagation thermique. En particulier, nous n'avons jamais observé d'effet gênant autour des fréquences de résonance mécanique du micro-miroir, alors que notre expérience était suffisamment sensible pour observer les très petits effets liés à la pression de radiation (voir le chapitre 6).

3.4 Asservissement en température de la cavité

Les deux sections qui suivent sont consacrées à deux ensembles qui sont placés autour de la cavité et qui sont nécessaires pour réaliser la mesure optique dans de bonnes conditions : l'asservissement en température et la mise sous vide de la cavité. Le reste du montage expérimental, constitué de la source laser et de la détection, sera décrit dans le prochain cha-

pitre.

Il est nécessaire d'asservir en température la cavité de mesure pour deux raisons. Il faut tout d'abord limiter les dérives thermiques qui modifient les propriétés mécaniques du système puisqu'une variation de température engendre une dilatation du résonateur et modifie ses fréquences propres. On a ainsi pu observer des variations relatives de l'ordre de 10^{-5} de la fréquence du mode fondamental d'une poutre encastrée, pour une variation de température d'une dizaine de degrés. L'asservissement permet également de réduire les dérives lentes de la longueur de la cavité, qui pourraient faire passer le point de fonctionnement du laser dans un régime multimode ou encore faire décrocher l'asservissement du laser sur la résonance de la cavité.

La seconde raison est liée à la plage d'accordabilité en fréquence du laser YAG, limitée à environ 50 GHz. Cette valeur est à comparer avec l'intervalle spectral libre de la cavité, qui est égal à 150 GHz pour une longueur de 1 mm. Comme il est nécessaire de pouvoir balayer au moins un intervalle spectral pour trouver le mode optique fondamental, il faut pouvoir faire varier la fréquence de résonance de la cavité en jouant sur la dilatation thermique de l'espaceur entre les deux miroirs. Pour fixer les ordres de grandeur, une dilatation $\Delta L = \lambda/2$, correspondant à un intervalle spectral, nécessite une variation ΔT de température de :

$$\alpha \Delta T = \frac{\Delta L}{L}, \tag{3.14}$$

où α est le coefficient de dilatation thermique linéaire de l'espaceur. Pour une cavité en cuivre dont le coefficient de dilatation thermique vaut $\alpha = 1.6 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$, et pour une longueur $L = 1\,\mathrm{mm}$, on obtient $\Delta T = 30\,K$. Cette valeur importante montre que nous devons réaliser un asservissement en température précis et stable pour éviter les dérives thermiques, mais capable de fonctionner sur une plage de température d'au moins 30°C autour de la température ambiante.

Mise en œuvre expérimentale

Le contrôle de la température de la cavité est réalisé au moyen de deux éléments Peltier situés à la base du porte-cavité (figure 3.20). Ceux-ci sont constitués de deux conducteurs différents qui transfèrent de la chaleur entre leurs faces supérieure et inférieure lorsqu'il sont parcourus par un courant. Le sens du transfert dépend du sens du courant électrique, ce qui les rend extrêmement pratiques pour effectuer un asservissement de température. Ces deux éléments (Thorlabs TED 3-6) sont montés en série afin de bénéficier d'une source de chaleur importante et pour pouvoir asservir une masse thermique conséquente à des températures éloignées de ±15 °C de la température ambiante. Ils peuvent supporter chacun des courants allant jusqu'à 5 A et permettent donc de transférer une puissance thermique allant jusqu'à une dizaine de watts.

La mesure de température est effectuée à l'aide d'un circuit intégré, le LM 35, alimenté par une tension continue de 9V. Il fournit une tension directement proportionnelle à la température exprimée en degrés Celsius, avec une pente de 10 mV/°C. On a préféré ce composant à une thermistance pour la simplicité de la mesure. Pour augmenter la rapidité de l'asservissement, le capteur de température est placé très près des éléments thermoélectriques,

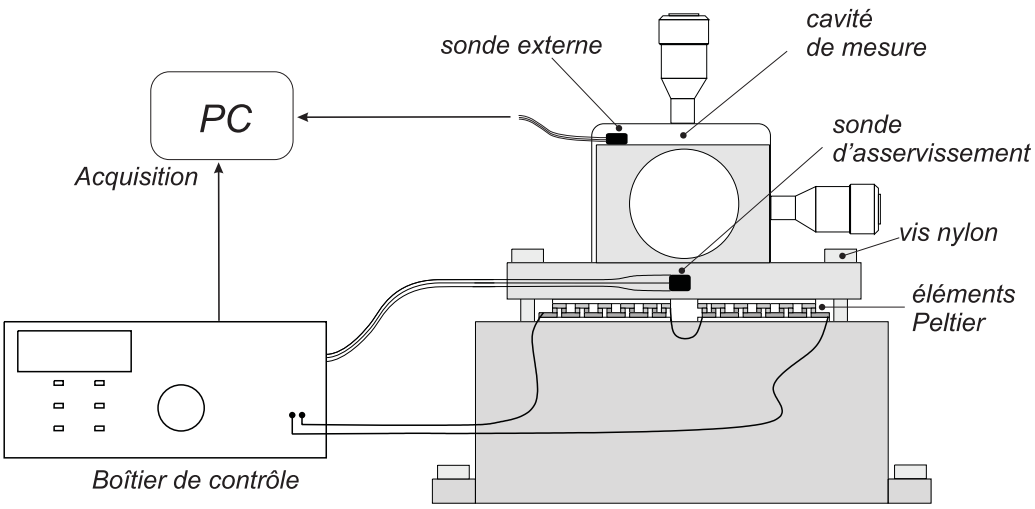


FIG. 3.20 – Schéma de l'asservissement de la température de la cavité de mesure.

à la base de la cavité. Le temps de propagation de l'onde thermique est ainsi très court, ce qui réduit les effets de retard néfastes à tout asservissement. Pour s'assurer que la température de la cavité elle-même ne dérive pas trop par rapport à la température fixée par l'asservissement, on a ajouté une seconde sonde de température, collée au sommet de la pièce en cuivre tenant la cavité.

Pour l'asservissement proprement dit, on utilise un régulateur commercial (Thorlabs TED 350) pouvant fournir jusqu'à 40 W de puissance pour un courant allant jusqu'à 5 A. Cette puissance importante permet d'asservir rapidement en température des masses thermiques importantes. On a cependant cherché à réduire l'inertie thermique de la cavité en limitant les parties métalliques aux seuls porte-cavité et espaceur, comme expliqué dans la section 3.2. La partie située sous les éléments Peltier est une pièce en cuivre massive qui sert de partenaire d'échange de chaleur. Le signal produit par la sonde, proportionnel à la température, est comparé à une valeur de consigne ajustable, ce qui fournit le signal d'erreur. Ce dernier est mis en forme au moyen d'un PID réglable et contrôle le courant envoyé à travers les éléments Peltier.

Le fonctionnement de l'asservissement s'est révélé très satisfaisant. Le temps caractéristique associé à l'asservissement de la base de la cavité est court, de l'ordre de la minute. Le sommet de la cavité met plus de temps à se thermaliser : il faut compter environ une vingtaine de minutes lorsque la cavité est sous vide pour obtenir un fonctionnement stable de la cavité. La température mesurée dans la boucle présente des fluctuations, avec une valeur quadratique moyenne mesurée sur une heure de 3 mK et un décalage moyen par rapport à la température de consigne de quelques millikelvins. La mesure hors de la boucle, effectuée au sommet de la cavité, présente des fluctuations comparables, de l'ordre de 3 mK.

L'asservissement est donc suffisamment rapide pour thermaliser la cavité avec des constantes de temps raisonnables. On a vérifié son bon fonctionnement pour des températures de consigne allant de 10°C à 40°C, ce qui permet d'envisager l'utilisation de cavités courtes, jusqu'à 1 mm.

On peut regretter toutefois la plage un peu réduite des réglages du régulateur commercial, notamment le gain de la partie intégrale, qui entraîne une mauvaise précision de la température atteinte. La température réelle ne se stabilise pas exactement à la température de consigne, mais l'approche au centième de degré. Ce défaut n'est néanmoins pas gênant pour l'expérience, car on souhaite uniquement limiter les fluctuations thermiques.

Calibration de la dilatation de la cavité

Nous avons calibré le comportement thermique de la cavité afin de connaître la variation de la température de consigne nécessaire pour changer la fréquence de résonance de la cavité d'une quantité donnée. Pour cela, on asservit la fréquence du laser sur la résonance de la cavité et on module la température de consigne avec un signal carré d'amplitude suffisamment faible pour que l'asservissement du laser ne décroche pas. En pratique, on fait varier la température de consigne de 30 mK, entre 23.98 et 24.01 °C, sur une période de 7 minutes environ. Au cours de la mesure, on s'assure que l'intensité intracavité reste constante pour maintenir à un niveau constant les dilatations induites par effet photothermique. La correction de l'asservissement du laser nous renseigne alors sur les variations relatives de fréquence entre le laser et la cavité, ce qui permet de remonter à la dilatation thermique de la cavité.

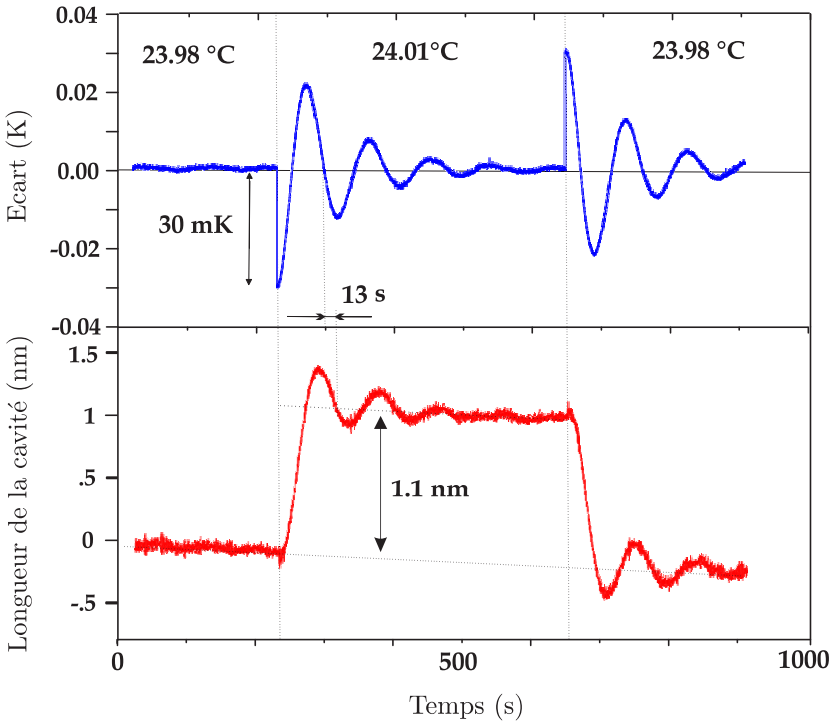


FIG. 3.21 – Evolution de la longueur de la cavité suite à une modification de la température de consigne de la cavité. En haut, le signal d'erreur de l'asservissement de température ; en bas, la longueur de la cavité calculée à partir de la correction de l'asservissement de fréquence du laser sur la résonance de la cavité.

La figure 3.21 reproduit le signal d'erreur donné par l'asservissement de température, ainsi

que la correction de l'asservissement du laser, calibrée en variation de longueur équivalente de la cavité de mesure. On observe une dérive lente de la longueur effective de la cavité de -0.6 nm/h, attribuable au fait que la cavité n'est pas parfaitement stabilisée. A cette dérive se superpose une dilatation de 1.1 nm lors des sauts de température de 30 mK. Cette valeur peut sembler faible mais elle est en fait énorme pour le système : elle correspond en effet à une variation de fréquence de 137 MHz, soit 70 fois environ la largeur du pic d'Airy pour une cavité de 2.4 mm de long et de finesse 30 000. Notons que ces valeurs sont en bon accord avec la formule (3.14) en prenant $\alpha = 1.6 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$.

On observe par ailleurs un retard d'une dizaine de secondes entre la dilatation de la cavité et la variation de température mesurée au niveau de la sonde : c'est le temps qu'il faut à l'onde thermique pour parcourir les deux centimètres qui séparent la base et le milieu de la cavité[1]. On peut aussi remarquer que l'amplitude relative des oscillations est plus faible au niveau de l'axe optique de la cavité qu'au niveau de la base du porte-cavité où se trouve le capteur. Cela traduit le fait que l'onde thermique s'atténue au cours de sa propagation. Pour conclure, la calibration thermique de la cavité est mesurée à 3.6×10^{-8} m/K, ou encore à 4.2 GHz/K. Pour balayer l'intervalle spectral libre de 62 GHz de notre cavité de 2.4 mm, il faut ainsi imposer une variation de température de 15°C.

3.5 L'enceinte à vide

Motivations

On a placé la cavité de mesure sous vide pour plusieurs raisons : nous voulions améliorer les facteurs de qualité mécanique, réduire les fluctuations de l'indice optique, améliorer la stabilité mécanique de la cavité en limitant le bruit acoustique, et enfin assurer un environnement sans poussière aux miroirs. La première motivation concerne l'amélioration des facteurs de qualité mécanique. En effet, au contact de l'air, les vibrations du résonateur mettent en mouvement les molécules situées dans leur voisinage et émettent ainsi des ondes acoustiques à des fréquences certes inaudibles, mais qui se traduisent par une perte d'énergie pour l'oscillateur. Diminuer la pression permet de réduire ces pertes et donc d'augmenter le facteur de qualité mécanique du résonateur, comme nous l'avons observé expérimentalement (voir partie 5.2.3). De plus, l'indice optique de l'air et donc la longueur optique de la cavité sont proportionnels au nombre de particules présentes dans le faisceau laser. Ce nombre fluctue au cours du temps à cause de l'agitation thermique des particules, ce qui se traduit par des fluctuations de l'indice optique, équivalentes à des déplacements du miroir. Le fait de placer la cavité sous vide doit donc réduire les fluctuations d'indice et leur effet sur la sensibilité de la mesure des déplacements du résonateur. L'étude expérimentale de ce bruit d'indice est présentée dans la section 5.1.5.

Aller sous vide permet aussi d'augmenter la stabilité mécanique de la cavité, puisqu'on supprime alors le bruit acoustique qui fait vibrer la cavité. Ces vibrations interviennent à des fréquences très basses devant celles des modes propres du micro-miroir, mais elles peuvent perturber l'asservissement de la fréquence du laser sur la cavité de mesure. La réduction du

[1] Avec une coefficient de diffusion pour le cuivre pur de $9 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$, on obtient une longueur de diffusion thermique de 3 cm en 10 s. La valeur réelle dépend sans doute de la géométrie et des contraintes mécaniques des différents matériaux composant la cavité (cuivre, silice, ...).

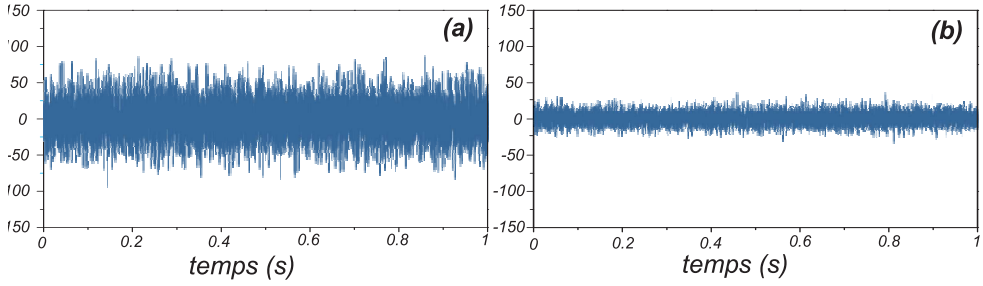


FIG. 3.22 – Les signaux d'erreur de l'asservissement du laser sur la cavité de mesure obtenus lorsque la cavité est à l'air libre (a) et lorsqu'elle est sous vide (b).

bruit acoustique peut d'ailleurs être directement observée sur le signal d'erreur de l'asservissement, comme on peut le voir sur la figure 3.22. Placer la cavité sous vide permet enfin de protéger les miroirs et les micro-miroirs de la poussière et de l'oxygène qui nuit aux traitements optiques.

Dans cette partie, on décrit l'enceinte à vide que nous avons construite et le système de pompage.

Description de l'enceinte

Nous avons opté pour la réalisation d'une enceinte à vide relativement grande, qui puisse contenir la cavité avec son support et différents éléments tels qu'une pointe électrostatique. L'enceinte dispose par ailleurs d'accès optiques, notamment à l'avant et à l'arrière de la cavité. La principale difficulté expérimentale à laquelle nous avons été confrontés tient au bruit acoustique et aux vibrations induites par les pompes qui nous obligent à travailler avec les pompes éteintes. Il a donc fallu réaliser une enceinte suffisamment étanche pour maintenir un vide en-dessous de 5×10^{-2} mbar sans pompage pendant la durée des mesures, de l'ordre de l'heure. De plus, comme on est amené assez souvent à ouvrir et fermer l'enceinte à vide, les techniques de l'ultravide, notamment les coûteux joints en cuivre ne semblaient pas appropriées. Atteindre un vide de 10^{-2} mbar est une chose aisée en soi, une simple pompe primaire permet d'y arriver rapidement, mais dès que l'on coupe le pompage, les fuites et le dégazage des matériaux font vite remonter la pression. Il faut donc limiter ces fuites et atteindre un vide secondaire, inférieur à 10^{-4} mbar, avant de stopper le pompage.

La figure 3.23 présente une vue en coupe de l'ensemble mécanique de l'enceinte à vide, dont les éléments ont été réalisés par les techniciens de l'atelier de mécanique du laboratoire. Pour faciliter l'usinage, on a choisi le dural et une forme cylindrique. L'enceinte est principalement constituée d'une plaque de base, d'un corps de forme cylindrique et d'un couvercle en forme de disque. Le couvercle est vissé au corps de l'enceinte, lui-même vissé sur la plaque de base. Deux joints toriques Vitton assurent l'étanchéité de la partie centrale. Ils supportent des températures de 150°C, ce qui autorise l'étuvage de l'enceinte. Deux hublots en silice fondue sont placés dans l'axe de part et d'autre de la cavité et un troisième sur le côté. Ce matériau a été préféré au BK7 pour sa rigidité, qui permet notamment d'exercer un serrage plus important sans induire de la biréfringence ou des déformations qui modifieraient le front d'onde

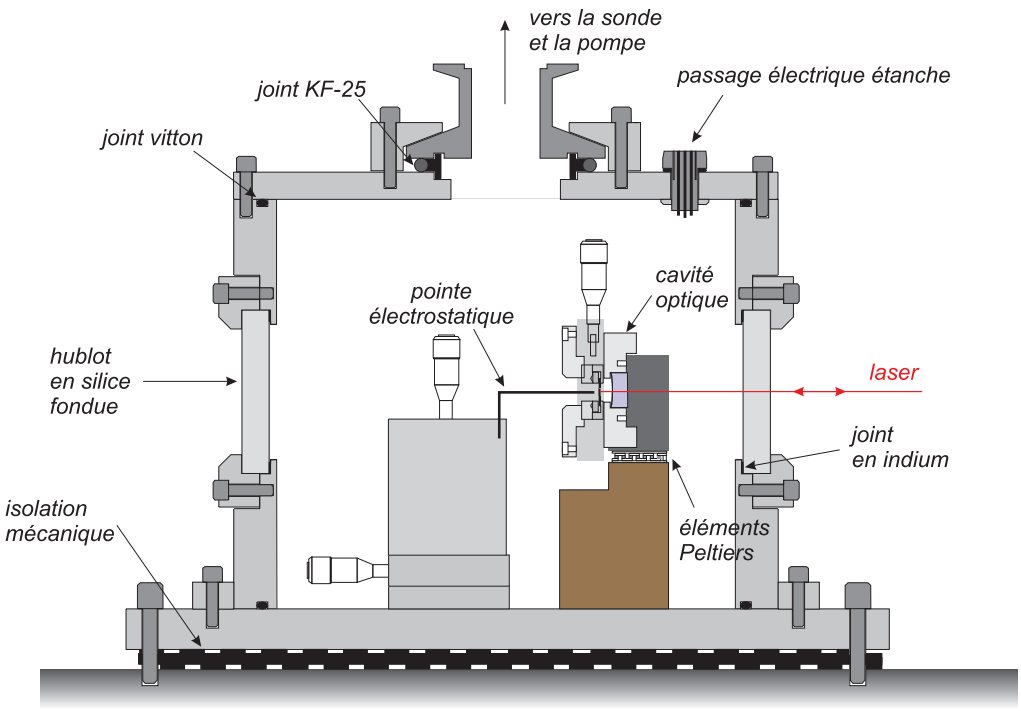
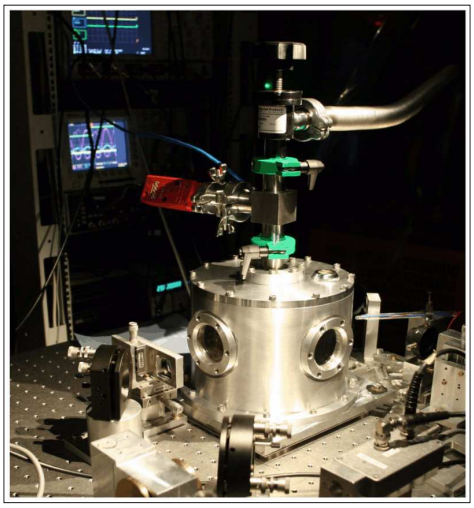


FIG. 3.23 – Schéma de l'enceinte à vide.

optique. Les trois fenêtres sont plaquées contre le corps de la cavité au moyen de pièces en dural vissées, et l'étanchéité est assurée par des joints en indium.

Le conduit supérieur relie l'enceinte aux sondes de pression et aux pompes via une vanne étanche ultravide de la marque NorthCal et un conduit tubulaire souple de 50 cm (voir la figure 3.24). Les connections supérieures sont réalisées avec des connecteurs KF-25 permettant d'assurer un bon débit de pompage. Deux connecteurs haute tension (2000 Volts) étanches de la marque SVM-Vacuum, placés sur le couvercle, permettent le passage des câbles électriques nécessaires à l'asservissement en température de la cavité de mesure et à la tension électrostatique qui permet de déplacer le résonateur. On a placé l'ensemble de l'enceinte sur un tapis en caoutchouc pour l'isoler mécaniquement. Toutes les pièces insérées à l'intérieur de la cavité ont été pensées pour ne pas créer de poche d'air et limiter les interstices qui mettraient du temps à se vider : les vis qui risquaient de créer des zones étanches ont notamment toutes été percées. Pour améliorer l'étanchéité, on a doublé dès qu'on le pouvait les joints toriques Vitton avec de l'indium et on a été amené à rajouter de la cyanolite en gel pour limiter au maximum les fuites au niveau du connecteur électrique. La figure 3.24 montre une photo de l'enceinte.

On a utilisé plusieurs types de sonde : un manomètre à aiguille permettant d'atteindre 1 mbar, une sonde Pirani PRM-10 fonctionnant dans la gamme $10^{-3} - 10^{2}$ mbar et une sonde de Penning pour la gamme $10^{-8} - 10^{-2}$ mbar. Cette dernière est utilisée pour tester l'étanchéité initiale de l'enceinte, elle est retirée par la suite pour limiter les connections et les risques de fuite. Lors des mesures, on n'utilise que la jauge Pirani qui sert à vérifier que



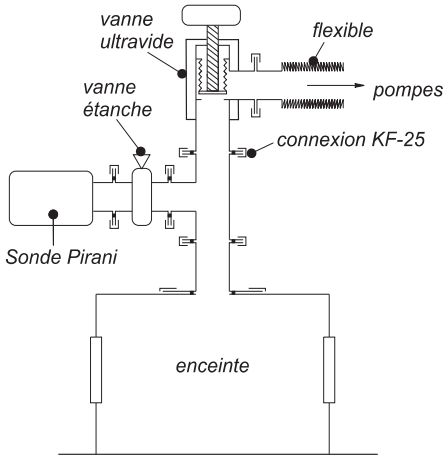


FIG. 3.24 – L'enceinte à vide et le système de pompage.

le vide reste en dessous de 5×10^{-2} mbar. On a employé diverses pompes selon les disponibilités : une pompe primaire BOC-Edwards, une pompe turbomoléculaire Alcatel ATP 80 et un banc de pompage Alcatel 810 combinant une pompe cryogénique et une pompe à diffusion.

Après plusieurs cycles de pompage avec les pompes secondaires, l'enceinte atteint une pression de 5×10^{-5} mbar. Après avoir stoppé le pompage, la pression remonte à 5×10^{-2} mbar en un peu plus d'une heure, de manière quasi-linéaire. Ce résultat est tout à fait satisfaisant étant donné les techniques de vide employées, et nous a permis de réaliser toutes nos mesures avec les pompes éteintes.

Chapitre 4

La source laser et le dispositif de détection

Nous avons rapidement présenté dans le chapitre 1 les éléments constitutifs du montage expérimental, que l'on peut regrouper en trois blocs fonctionnels : le laser et ses divers asservissements pour le rendre le plus stable et le moins bruyant possible, la cavité de mesure proprement dite avec les micro-miroirs, et enfin le dispositif de détection qui extrait le signal utile du faisceau réfléchi par la cavité. Après avoir décrit dans le chapitre précédent les micro-miroirs et la cavité de mesure, nous présentons maintenant l'ensemble des éléments que nous avons construits au cours de cette thèse et qui constituent la source laser et le système de détection.

4.1 Description générale

Notre montage présente de nombreuses analogies avec d'autre dispositifs de mesure de petits déplacements, comme par exemple l'autre expérience développée dans l'équipe pour étudier les effets quantiques du couplage optomécanique avec des miroirs de taille plus conventionnelle [14, 15, 16]. Dans les deux cas, l'effet des déplacements est amplifié par une cavité de grande finesse, et on utilise une source laser très stable et un système de détection fonctionnant au niveau du bruit quantique de la lumière. Mais les caractéristiques des micro-miroirs nous ont amenés à faire des choix et à développer des techniques spécifiques. Il en est ainsi pour le laser et pour le dispositif de détection. Nous reviendrons dans la partie 4.5 sur les raisons qui nous ont poussés à utiliser une détection de type Pound-Drever-Hall plutôt qu'une détection homodyne de la phase du faisceau réfléchi par la cavité. Pour la source laser, le choix important est celui de la longueur d'onde de la lumière émise, qui détermine directement le type de technologie et les capacités du laser utilisé. On pourrait penser utiliser la longueur d'onde la plus petite possible pour augmenter la sensibilité de la mesure de position ; cependant, on a choisi d'utiliser un laser YAG qui fonctionne à 1064 nm. La principale raison de ce choix réside dans le fait que c'est la longueur d'onde à laquelle travaillent les grands détecteurs d'ondes gravitationnelles [4, 5], pour lesquels des recherches très poussées ont été conduites, entre autre au niveau des traitements optiques de très grande qualité. On a donc pu bénéficier des avancées technologiques dans ce domaine et du savoir faire de l'équipe du LMA à ces longueurs d'onde. De plus, les lasers YAG commerciaux possèdent une plage d'accordabilité tout à fait suffisante pour notre application et représentent une source laser fiable

et beaucoup plus simple d'emploi que le laser Titane:Saphir utilisé sur l'autre expérience du groupe [14].

Nous présentons dans cette partie une vue d'ensemble du montage expérimental, à partir de la figure 4.1, en particulier pour montrer l'imbrication des différents asservissements. Nous présentons plus en détail dans les parties suivantes les différents éléments : le laser, l'asservissement d'intensité, la cavité de filtrage, l'asservissement de fréquence du laser et le dispositif de mesure.

4.1.1 Les différents asservissements

Pour effectuer une mesure interférométrique, on a besoin d'un faisceau laser aussi proche que possible de la situation idéale d'un faisceau parfaitement gaussien et sans astigmatisme, qui ne présente ni bruit classique d'intensité ni bruit de fréquence. La figure 4.1 présente les différents éléments constitutifs de la source permettant de s'approcher de ces conditions.

A la sortie du laser, le faisceau passe d'abord par un isolateur optique constitué d'un rotateur de Faraday et de deux cubes séparateurs de polarisation qui limitent l'intensité renvoyée dans le laser. Ensuite, le faisceau principal traverse un modulateur électro-optique (MEO) utilisé pour l'asservissement d'intensité, sur lequel on revient plus loin, puis une cavité de filtrage. Cette dernière filtre spatialement le faisceau laser en ne transmettant qu'un pur mode gaussien fondamental TEM_{00}. On utilise une cavité triangulaire afin de limiter les réflexions parasites en direction du laser. Le miroir de fond de la cavité est monté sur une cale piézoélectrique, pour conserver la cavité à résonance sur son mode propre optique fondamental TEM_{00} qui est donc le seul mode spatial transmis. L'asservissement est effectué grâce à la technique de Tilt-Locking, décrite dans la partie 4.4. Cette cavité assure aussi un filtrage des bruits classiques d'intensité et de phase aux fréquences supérieures à sa bande passante.

A la sortie de la cavité de filtrage, une partie du faisceau est prélevée pour l'asservissement d'intensité du faisceau envoyé vers la cavité de mesure. Cet asservissement est nécessaire car la sensibilité de la mesure est fonction de l'intensité incidente ; de plus, la pression de radiation étant proportionnelle à l'intensité intracavité, l'observation de la zone d'instabilité dynamique, et plus généralement des effets dynamiques de la pression de radiation (voir le chapitre 6), n'est possible et fiable qu'avec cet asservissement en fonctionnement. Le principe de l'asservissement consiste à prélever une partie du faisceau laser, à mesurer ses fluctuations temporelles d'intensité et à corriger en amont l'intensité incidente au moyen du modulateur électro-optique utilisé en atténuateur variable. Cet asservissement contrôle l'intensité moyenne envoyée vers la cavité de mesure, et compense aussi les fluctuations classiques d'intensité du laser.

On a choisi d'imbriquer les étages de filtrage spatial et d'asservissement d'intensité parce qu'on résout ainsi deux contraintes techniques. La première est liée au modulateur électro-optique, qui déforme notablement le profil spatial du faisceau laser : il est donc préférable de le placer en amont de la cavité de filtrage. Ensuite, l'asservissement sur la cavité triangulaire peut induire des fluctuations d'intensité si la cavité sort légèrement de résonance. On supprime ce problème en imbriquant les deux asservissements, car alors les éventuelles fluctuations d'intensité induites par la cavité sont compensées par l'asservissement qui régule l'intensité en aval.

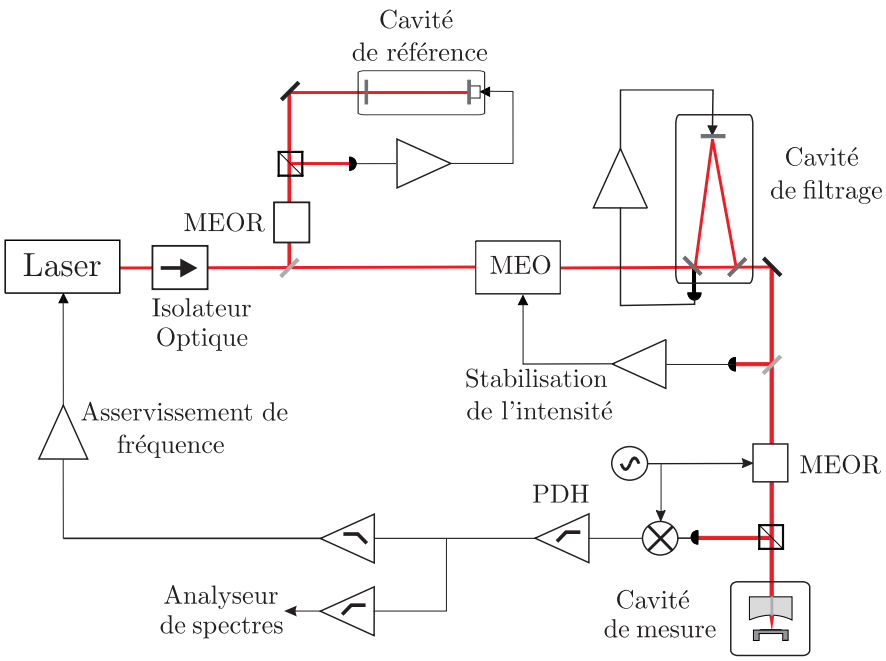


FIG. 4.1 – La source laser avec ses différents composants périphériques et asservissements délivre à l'entrée de la cavité de mesure un faisceau aussi stable que possible. La technique Pound-Drever-Hall de modulation-démodulation permet d'extraire les déplacements du micro-miroir du champ réfléchi par la cavité.

Avant d'arriver sur la cavité de mesure, le laser passe à travers un modulateur électro-optique résonnant (MEOR sur la figure 4.1) qui module sa phase. La cavité de mesure transforme cette modulation de phase en une modulation d'intensité qui est mesurée sur la photodiode placée en réflexion. Le photocourant est alors démodulé, afin de produire un signal d'erreur lié à l'écart entre la fréquence du laser et la résonance optique. Cette technique de modulation-démodulation, appelée technique de Pound-Drever-Hall [25], est couramment utilisée pour asservir un laser sur une cavité optique. C'est également ce que nous faisons ici, mais en utilisant seulement la composante basse fréquence du signal d'erreur. La partie haute fréquence donne accès aux fluctuations de longueur de la cavité : c'est le signal qu'on cherche à mesurer.

Notons qu'un signal d'erreur non nul peut être dû à deux causes différentes, puisqu'il peut s'agir d'une variation de longueur de la cavité, ou d'une fluctuation de la fréquence du laser. Ces deux origines sont en effet indiscernables : une variation $\delta\nu$ de la fréquence du laser est équivalente à un déplacement δx du micro-miroir avec $\delta x/L = \delta\nu/\nu$, où L est la longueur de la cavité et ν la fréquence optique du laser. Dans un premier temps, on n'a pas eu besoin d'asservir les fluctuations de fréquence du laser car la cavité de mesure est suffisamment courte pour que ces fluctuations ne limitent pas la sensibilité de la mesure. On a toutefois mis en place une cavité longue, appelée cavité de référence sur la figure 4.1, qui permet de mesurer le bruit de fréquence du laser et peut servir à le réduire. On a aussi utilisé cette cavité pour mesurer les caractéristiques du laser, notamment pour calibrer son balayage en fréquence.

4.1.2 Description du montage optique

L'ensemble du montage est placé sur une table optique montée sur des suspensions hydrauliques qui assurent une isolation vis-à-vis des vibrations du sol. Pour protéger les optiques de la poussière, on a placé l'expérience sous un flux laminaire de classe 100, qui assure un flux vertical d'air propre sur l'ensemble de la table. La figure 4.2 montre le positionnement de l'ensemble des éléments optiques sur la table. Le faisceau produit par le laser YAG est d'abord rehaussé à la hauteur de 9 cm au moyen d'une baïonnette constituée de deux miroirs montés sur des platines de positionnement. Sa polarisation, légèrement elliptique en sortie du laser, est rendue linéaire en utilisant une lame quart d'onde dont on a aligné les axes neutres avec les directions des axes de l'ellipse. Une lame demi-onde tourne cette polarisation pour permettre la traversée de l'isolateur optique. Ce dernier utilise l'effet Faraday pour assurer une isolation supérieure à 40 dB et élimine efficacement d'éventuels retours de lumière à l'intérieur du laser depuis le reste du montage optique. Un jeu de trois atténuateurs optiques, constitués chacun d'une lame demi-onde et d'un cube séparateur de polarisation (PBS_1, PBS_2, PBS_3) contrôle les intensités envoyées dans les diverses parties de l'expérience.

Un premier faisceau d'environ 10 mW est envoyée via PBS_1 et PBS_2 vers la cavité d'analyse. Il s'agit d'un Fabry-Perot linéaire confocal de 10 cm de long. Le miroir d'entrée est monté sur une cale piézoélectrique sur laquelle est appliquée en permanence une rampe de tension d'amplitude suffisante pour balayer un intervalle spectral entier, soit 1.5 GHz. Sa finesse de 1000 environ permet de contrôler si le laser reste monomode longitudinal et fournit une indication visuelle de son intensité. Une lame quart-d'onde a été ajoutée à l'entrée de la cavité pour prévenir les retours de lumière vers le laser. Cette lame constitue avec le cube séparateur de polarisation PBS_2 un circulateur optique qui renvoie la lumière latéralement.

Une seconde partie du faisceau, d'environ 20 mW, est envoyée vers la cavité de référence via PBS_3. Une première lentille permet de créer un faisceau ayant un col de 80 μm au niveau d'un modulateur électro-optique résonnant (MEOR) à 20 MHz utilisé pour l'asservissement Pound-Drever-Hall de cette cavité. Afin d'obtenir une modulation de phase aussi propre que possible, l'électro-optique est précédé d'un cube séparateur de polarisation PBS_4 qui filtre la polarisation incidente et ne laisse passer que celle correspondant à la direction de l'axe propre du modulateur. Une seconde lentille permet d'adapter le faisceau laser au mode TEM_{00} de la cavité Fabry-Perot de référence. On trouve autour de cette cavité un ensemble d'éléments similaires à ceux présents autour de la cavité de mesure, à savoir une photodiode en transmission qui permet de visualiser les résonances, et un circulateur constitué d'une lame quart d'onde et du cube PBS_5 qui renvoie le faisceau réfléchi vers une autre photodiode. Cette dernière fournit le signal d'erreur Pound-Drever-Hall utilisé pour maintenir la cavité à résonance (en agissant sur l'un des miroirs de la cavité, monté sur une cale piézoélectrique).

La troisième partie du faisceau est transmise par PBS_3 et sert à la mesure proprement dite. A cause de la présence de l'asservissement d'intensité et de la cavité de filtrage, environ 70 mW sont envoyés dans cette voie, alors qu'on n'utilise que quelques milliwatts pour effectuer la mesure. Cela représente toutefois une très petite fraction de la puissance totale (1.5 watts), dont l'essentiel est en fait réfléchi successivement par PBS_1 puis par PBS_2 pour être absorbée par un cache-lumière. Une lame demi-onde et une lentille de focale +150 mm adaptent la polarisation et le col du faisceau laser, qui traverse ensuite un modulateur électro-optique

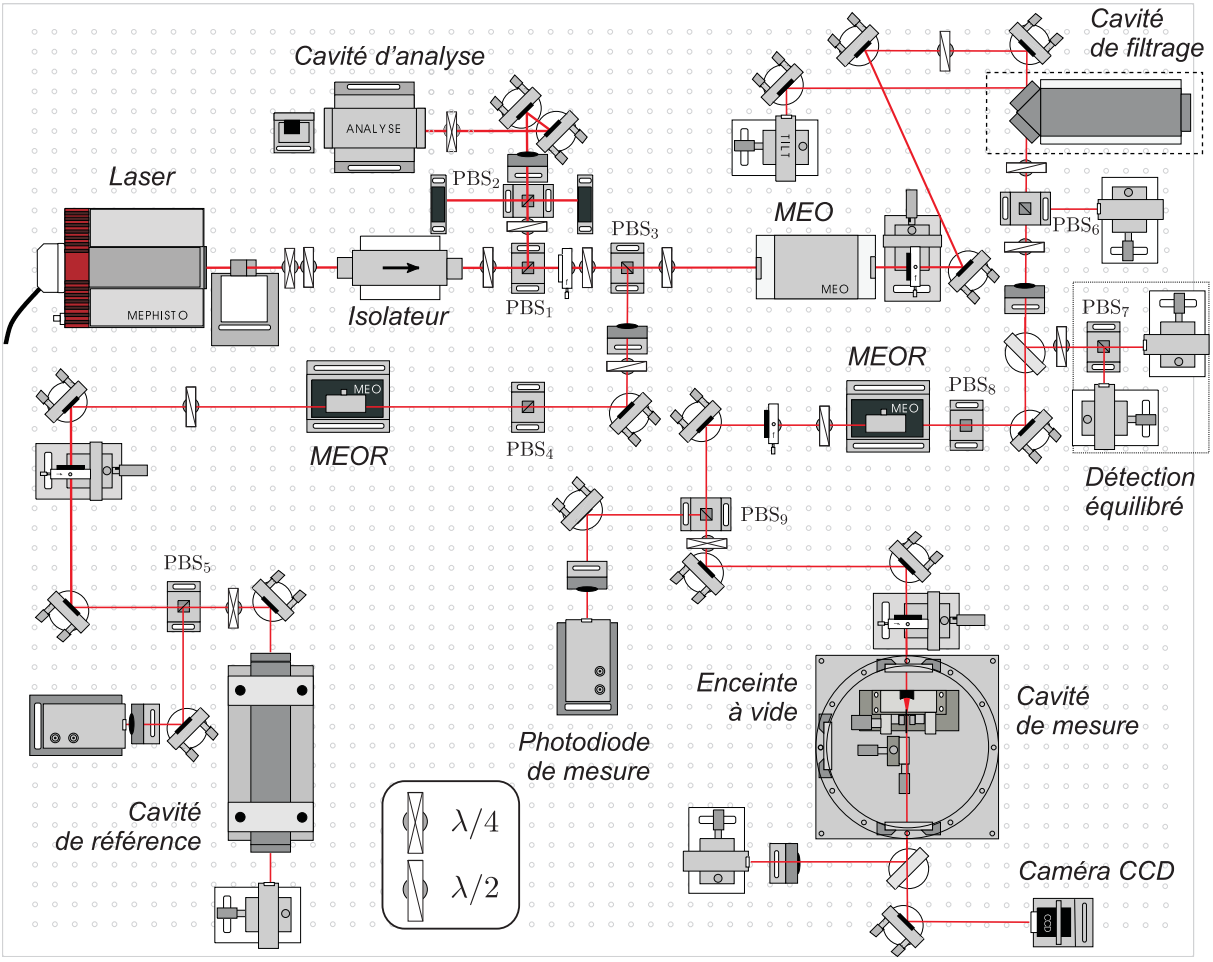


FIG. 4.2 – Schéma de l'implantation optique.

fonctionnant en modulateur d'intensité : la polarisation du faisceau laser est choisie à 45° des lignes neutres du modulateur et du cube séparateur de polarisation qui le suit. Une lentille de focale +100 mm réalise l'adaptation spatiale du faisceau laser sur la cavité de filtrage : son alignement est réalisé au moyen de deux miroirs montés sur des support de positionnement à butées différentielles. La cavité est asservie à résonance par une technique de tilt-locking, mise en œuvre avec une photodiode à quadrants qui détecte les variations de profil spatial du faisceau réfléchi par la cavité triangulaire. Une lame demi-onde placée en amont de la cavité permet de choisir la polarisation incidente pour utiliser au choix la bonne (4000) ou la mauvaise (200) finesse de la cavité. Après la cavité, un atténuateur optique ($\lambda/2$ et PBS_6) contrôle les intensités envoyées vers la cavité de mesure et vers la photodiode utilisée pour l'asservissement d'intensité du faisceau laser. Un miroir amovible permet d'envoyer le faisceau transmis vers une détection équilibrée pour mesurer le spectre d'intensité du faisceau transmis par la cavité de filtrage : le faisceau est séparé en deux partie égales par le cube PBS_7 précédé d'une lame demi-onde, chaque partie étant mesurée par une photodiode. La somme des photocourants fournit l'intensité totale, tandis que leur différence donne accès au bruit de photon standard équivalent. Cette détection permet donc de mesurer les propriétés du bruit

d'intensité du faisceau envoyé vers la cavité de mesure.

L'asservissement de la fréquence du laser sur la cavité de mesure est réalisé par la technique Pound-Drever-Hall [25, 26] en modulant la phase du faisceau laser incident sur la cavité. La modulation est effectuée au moyen d'un modulateur électro-optique résonnant qui fonctionne à 12 MHz. On a rajouté à l'entrée du modulateur un cube séparateur de polarisation PBS_8 pour filtrer la polarisation incidente. Une lame demi-onde tourne de 90° la polarisation du faisceau laser, qui arrive alors sur un circulateur optique, constitué du cube séparateur de polarisation PBS_9 suivi d'une lame quart d'onde. La polarisation rectiligne transmise par le cube est transformée en une polarisation circulaire qui se propage vers la cavité de mesure. Le faisceau renvoyé par la cavité possède une polarisation circulaire opposée, qui est transformée à nouveau par la lame quart d'onde en polarisation rectiligne mais tournée de 90° par rapport à la polarisation incidente. Le faisceau est alors réfléchi par le cube puis focalisé sur la photodiode de mesure. Dans un souci de stabilité, cette dernière est montée sur un support massif et rigide. A l'entrée de la cavité, deux miroirs montés dans des supports de précision permettent un alignement précis du laser sur la cavité. Une combinaison de deux lentilles, dont une est montée sur des translations micrométriques, permet d'optimiser la position et la taille du col du faisceau laser.

Le faisceau transmis par la cavité de mesure peut être envoyé grâce à un miroir basculable soit vers une photodiode qui sert à visualiser l'intensité des résonances, soit vers une caméra CCD qui permet de visualiser sur un écran de contrôle le profil spatial du faisceau. La caméra possède un objectif de focale 18-108 mm, qui permet d'imager l'arrière du micro-miroir. L'alignement et le centrage de l'axe optique de la caméra avec la direction de propagation du faisceau laser est primordial pour avoir une bonne image de la position du faisceau laser à la surface du résonateur. L'utilisation de cette caméra a permis de faciliter grandement les procédures d'alignement des cavités et la recherche de leur mode fondamental car on peut directement observer le profil spatial des modes propres résonnants. Un système d'éclairage par diode électro-luminescente placé à l'arrière de la cavité permet d'obtenir des images claires même à fort grossissement.

Les composants optiques usuels, comme les cubes, les lentilles et les lames sont tous traités antireflet de façon à réduire les réflexions sur leurs différentes faces, les lames demi-onde et quart d'onde sont des lames minces d'ordre zéro. Pour la simplicité géométrique du montage, on a préféré utiliser des cubes séparateurs de polarisation (qui permettent des taux d'extinctions au 1/1000) plutôt que des polariseurs permettant des taux d'extinction plus élevés (Glan-Taylor, etc...) mais qui impliquent des directions non perpendiculaires entre les différents rayons. De manière générale, on a essayé de conserver lors de la propagation des tailles de faisceau allant de 200 μm à 1 mm. Les supports mécaniques ont pour la plupart été réalisés par l'atelier de mécanique du laboratoire, ainsi que tous les montages de cavité optique et l'enceinte à vide.

4.2 Le laser

Nous utilisons un laser commercial Nd :YAG continu, le modèle Mephisto fabriqué par la société Innolight, identique aux lasers maîtres utilisés dans les interféromètres gravitationnels

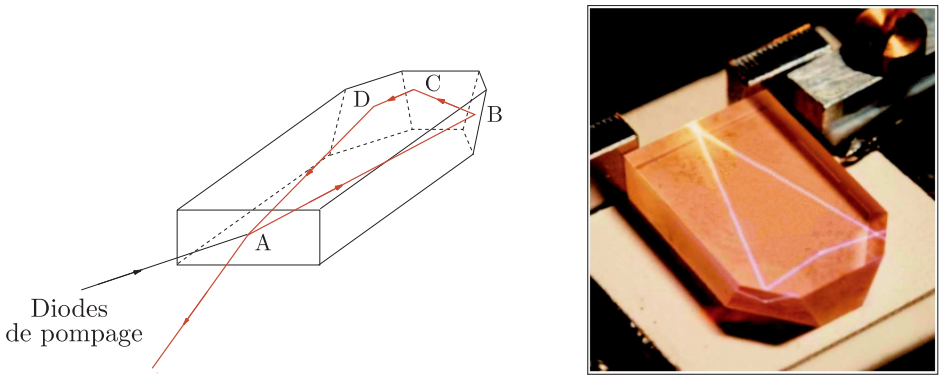


FIG. 4.3 – Le cristal YAG et la cavité non planaire.

[92]. Il fournit une puissance de 1.2 W monomode longitudinal à 1064 nm, le profil transverse du faisceau étant limité par la diffraction avec un coefficient M^2 de 1.02. Nous décrivons dans cette section les principales caractéristiques de cette source laser, et les différents tests que nous avons menés pour vérifier et calibrer ces propriétés.

4.2.1 Description du laser

Le milieu amplificateur est constitué d'un cristal YAG solide. L'ion Néodyme Nd^{3+} est inséré dans une matrice de YAG, l'acronyme pour grenat d'yttrium et d'aluminium. La transition exploitée est celle entre les niveaux $F_{3/2}$ et $I_{11/2}$. Le pompage est assuré par une diode à 808 nm qui fournit une puissance totale de 2 W. La figure 4.3 montre la structure de la cavité laser. La face d'entrée (A) est traitée antireflet pour la pompe et est hautement réfléchissante (97%) à 1064 nm. Elle joue le rôle de coupleur pour la cavité laser. Le faisceau subit trois réflexions internes totales dans le cristal qui forme une cavité en anneau non planaire (Non Planar Ring Oscillator, NPRO). Le faisceau produit par la diode de pompage est injecté dans le cristal. L'effet de lentille thermique créé par le faisceau pompe et la courbure de la face d'entrée assurent la stabilité géométrique de la cavité.

La sélection en polarisation et direction de propagation s'effectue grâce aux réflexions sur les différentes faces et grâce à un effet Faraday imposé par un champ externe. Le faisceau produit est polarisé horizontalement. L'élargissement spectral étant majoritairement dû aux phonons, il est homogène, ce qui conduit à un fonctionnement monomode axial. Le caractère monolithique de la cavité assure une bonne stabilité de la fréquence optique dont les dérives lentes sont spécifiées comme étant inférieures à 1 MHz/min. Le concept de cette cavité a été développé par Kane [93] au milieu des années 80.

L'intensité fournie est liée à la puissance de pompage et elle est contrôlée par le courant électrique fourni à la diode. La caractéristique courant de pompage - puissance optique délivrée, mesurée sur notre laser, est reproduite sur la figure 4.4. Le courant de seuil est de 850 mA et l'intensité maximale de 1.2 W. D'autre part, le faisceau présente un excès de bruit classique d'intensité dû à une oscillation de relaxation au voisinage du MHz. Ce bruit peut être réduit en rétroagissant directement sur le courant de pompe grâce à un module interne de réduction du bruit d'intensité, appelé *noise eater*. La figure 4.5 montre l'effet de cet asser-

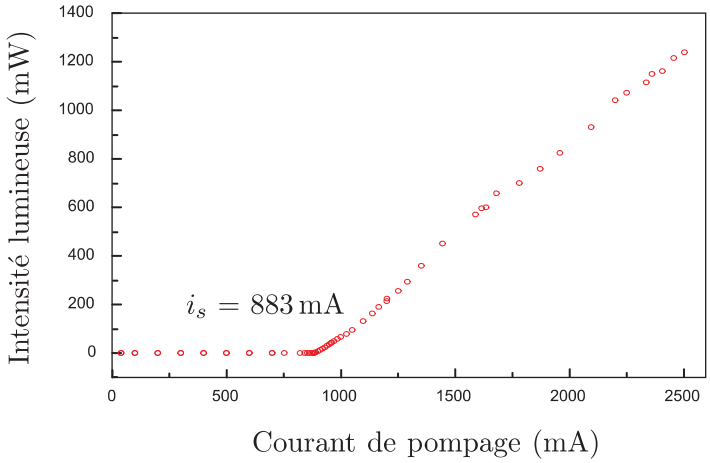


FIG. 4.4 – Puissance optique délivrée par le laser en fonction du courant traversant la diode de pompage.

vissement sur le bruit d'intensité du faisceau laser, mesuré à l'aide de la détection équilibrée, placée directement à la sortie du laser. Le pic de bruit à 1 MHz associé aux oscillations de relaxation est très fortement atténué par cet asservissement. Le laser est au niveau du bruit de grenaille au delà de 5 MHz environ. On constate donc que ce *noise eater* permet de supprimer le pic de relaxation, mais n'est pas suffisamment efficace pour totalement éliminer le bruit classique d'intensité.

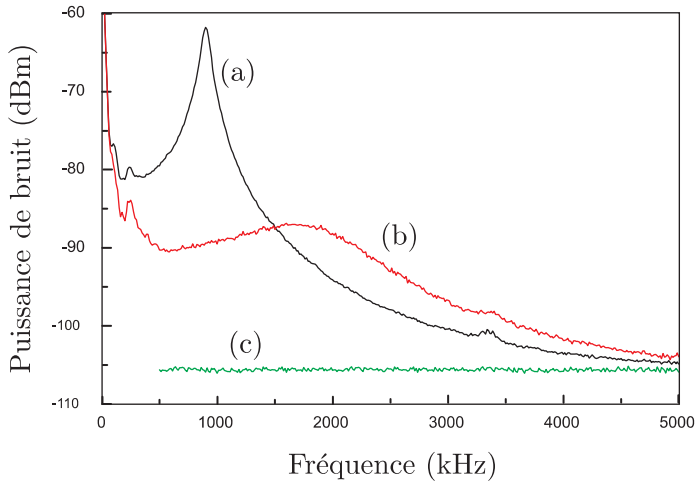


FIG. 4.5 – Mesures effectuées à l'aide d'une détection équilibrée de l'influence du *noise eater* sur le bruit d'intensité d'un faisceau de 6 mW. Courbe (a) : bruit d'intensité sans *noise eater*; (b) : avec *noise eater* et (c) : bruit de photon standard.

Deux éléments permettent de contrôler la fréquence du laser, ce qui est primordial dans nos expériences pour le placer à résonance avec la cavité de mesure. Le premier élément est une cale piézoélectrique placée sur la partie supérieure du cristal. Lorsqu'une tension est

appliquée, la cale induit une contrainte mécanique sur le cristal, qui modifie ses propriétés de biréfringence et ainsi le chemin optique dans la cavité laser. La cale répond avec une bande passante de 150 kHz environ, ce qui permet de l'utiliser pour des boucles d'asservissement rapides. La calibration tension-fréquence est d'environ 235 kHz/V, avec une tension maximale admissible de 150 V. Le second moyen de contrôle est lié à la variation de la température du cristal YAG grâce à un élément Peltier qui permet de l'asservir en température avec une précision de 10 mK. On peut modifier la température de consigne en appliquant une tension sur une entrée externe, avec une sensibilité de 3 GHz/V. La bande passante de cette entrée est d'environ 1 Hz, ce qui permet un contrôle des dérives lentes de fréquence. La figure 4.6 représente les variations relatives de la fréquence du laser en fonction de la température. Nous avons mesuré la variation de fréquence à l'aide du Fabry-Perot confocal (cavité d'analyse), avec le courant de pompage de la diode réglé à la valeur maximale de 2,5 A. Le laser présente des plages de température d'environ 2°C sur lesquelles il reste monomode. Sa fréquence peut ainsi être balayée continûment sur une plage d'environ 10 GHz. En variant la température du cristal de 16 à 45 °C, on obtient au total une plage d'accordabilité de 45 GHz.

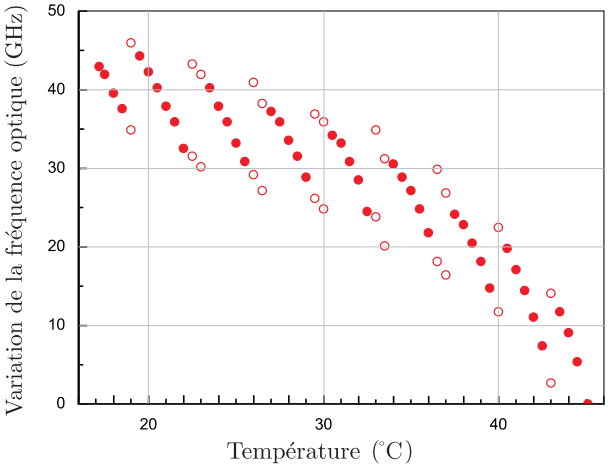


FIG. 4.6 – Dépendance de la fréquence du laser avec la température de consigne du cristal. La variation de fréquence est mesurée avec la cavité d'analyse, un Fabry-Perot confocal. Les cercles évidés traduisent un fonctionnement multimode longitudinal.

4.2.2 Calibration de la modulation de fréquence de la voie rapide

La calibration tension-fréquence de l'entrée piézoélectrique a été obtenue en modulant la fréquence du laser avec une tension oscillante d'amplitude connue et en mesurant l'intensité transmise par une cavité Fabry-Perot asservie à mi-pente. Pour s'affranchir d'une éventuelle modulation d'intensité induite par la modulation de la cale, on effectue la différence entre les transmission obtenues de chaque côté du pic d'Airy : à cause de l'inversion de pente, d'un côté la modulation de fréquence s'ajoute à la modulation d'intensité alors que de l'autre elle se retranche.

La cavité employée pour cette mesure est une cavité longue de 20,5 cm, d'intervalle spectral libre égal à 732 MHz et de finesse modérée. Comme pour la cavité à micro-miroir (chapitre

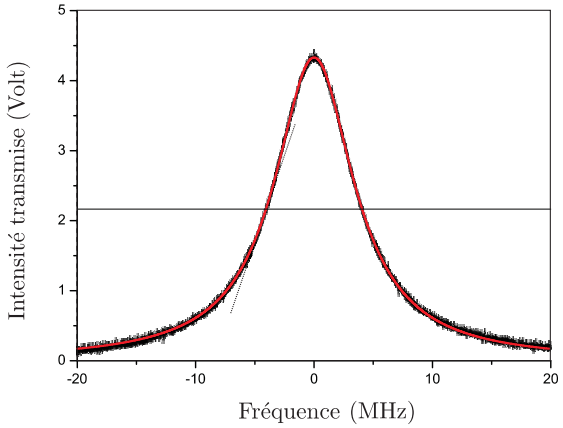


FIG. 4.7 – Transmission de la cavité d'étalonnage. L'axe horizontal a été calibré avec la cavité de référence. L'ajustement lorentzien du pic d'Airy est représenté en rouge.

3), on a mesuré sa bande passante en balayant la température du laser à basse fréquence (0.5 Hz) et en utilisant le signal d'erreur Pound-Drever-Hall de la cavité de référence pour calibrer la modulation. Ce signal présente en effet des pics de modulation aux harmoniques de la fréquence de modulation de la phase à 20 MHz, qui permettent d'obtenir une calibration propre de l'axe horizontal par un ajustement polynômial d'ordre 2 de la fréquence du laser en fonction du temps. L'intensité transmise par la cavité est représentée en fonction de la fréquence sur la figure 4.7. Un ajustement lorentzien, représenté en rouge, donne une valeur de $\Omega_c/2\pi = 4.05 \pm 0.05\,\mathrm{MHz}$ pour la bande passante, ce qui correspond à une finesse de 90. Au niveau du point d'inflexion, à mi-pente du pic d'Airy, la pente est de $\beta_0 = 1.07\,\mathrm{V/MHz}$.

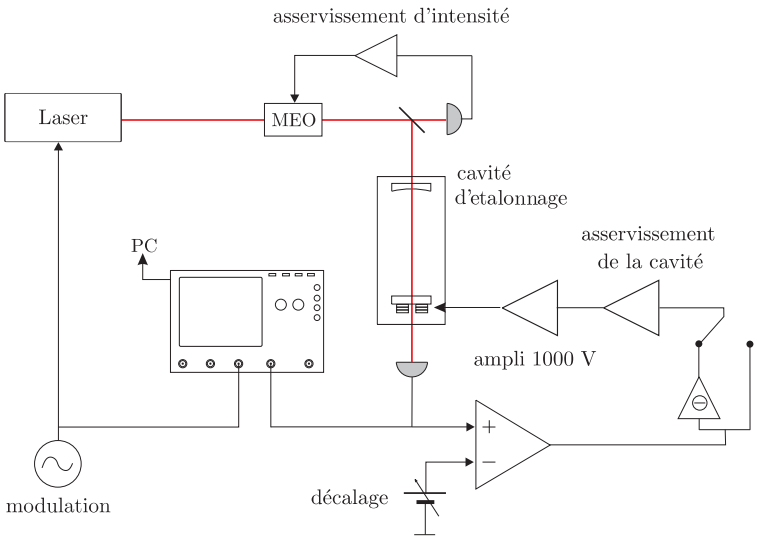


FIG. 4.8 – Schéma du dispositif utilisé pour calibrer la modulation de fréquence du laser.

On asservit ensuite cette cavité à mi-pente en comparant l'intensité transmise par la ca-

vité à un niveau de référence ajustable (voir la figure 4.8). Le signal d'erreur passe par un étage intégrateur puis est envoyé vers un amplificateur de tension pouvant fournir 1000 V, qui contrôle la cale piézoélectrique du miroir de la cavité. L'asservissement est efficace jusqu'à 100 Hz environ. Afin d'éviter toute dérive, il est indispensable de contrôler l'intensité incidente sur la cavité. C'est pourquoi celle-ci est placée après l'asservissement d'intensité décrit dans la section 4.3. Pour se placer exactement au point d'inflexion du pic d'Airy, on module la fréquence du laser avec une amplitude faible devant la bande passante de la cavité, on acquiert l'intensité transmise sur un analyseur de spectres et on minimise le pic correspondant à l'harmonique paire du signal en ajustant la tension de consigne. Pour basculer d'un côté à l'autre du pic d'Airy, il suffit de changer le signe du signal d'erreur en ajoutant un inverseur dans la boucle.

La modulation envoyée sur la cale piézoélectrique du laser et les intensités transmises sur chaque flanc du pic d'Airy sont acquises sur un oscilloscope numérique Lecroy interfacé avec un PC. On acquiert une centaine d'oscillations et un script calcule l'amplitude de modulation par transformée de Fourier rapide. En soustrayant les valeurs obtenues de chaque côté du pic d'Airy, on obtient l'amplitude de la modulation d'intensité transmise résultant de la modulation de fréquence du laser. Par contre, si on somme les deux composantes, on a accès à la composante associée à la modulation d'intensité parasite du laser. Pour remonter à la modulation de fréquence $\Delta\nu$ du laser exprimée en Hz, il faut utiliser la calibration fréquence - tension valable lorsque la cavité est asservie à son point d'inflexion, en prenant en compte le fait que la cavité se comporte comme un filtre passe-bas en fréquence, avec une fréquence de coupure égale à la bande passante de la cavité [16] :

$$\Delta V[\Omega] = \frac{\beta_0}{\sqrt{1 + (\Omega^2/2\Omega_c^2)^2}}\,\Delta\nu[\Omega]. \tag{4.1}$$

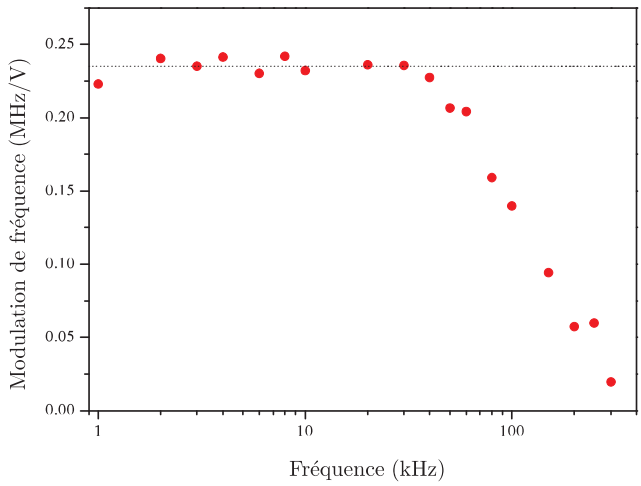


FIG. 4.9 – Amplitude de modulation de la fréquence du laser en fonction de la fréquence en réponse à une modulation appliquée sur sa cale piézoélectrique.

On a effectué des mesures à différentes fréquences, de 1kHz à 300 kHz, pour une amplitude de modulation appliquée à la cale piézoélectrique du laser de 50 mV seulement. Pour chaque

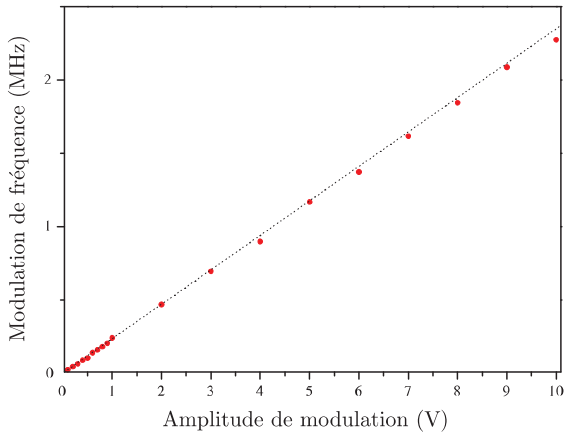


FIG. 4.10 – Amplitude de modulation de la fréquence du laser en fonction de l'amplitude de la modulation de tension envoyée sur la cale piézoélectrique. Les points ont été pris avec une fréquence de modulation de 30 kHz.

fréquence, on a mesuré les poids respectifs des modulations d'intensité et de fréquence. On a constaté que la modulation d'intensité reste négligeable ($< 1\%$) devant la modulation de fréquence sur toute la plage de mesure. La dépendance de l'amplitude de la modulation de fréquence avec la fréquence de modulation est représentée sur la figure 4.9. En-dessous de 60 kHz, la cale piézoélectrique du laser répond de manière pratiquement indépendante de la fréquence, avec un niveau de $0,235\,\mathrm{MHz/V}$ à $30\,\mathrm{kHz}$. Au-delà, on observe une diminution de l'efficacité de la modulation, qui correspond très certainement à une réduction de la réponse mécanique de la cale piézoélectrique. On n'a pas été en-dessous de 1 kHz car l'asservissement de la cavité diminue la modulation mesurée en transmission. Cependant, en maintenant "à la main" la cavité à mi-pente, on a vérifié que les niveaux obtenus étaient comparables.

On a aussi testé la linéarité de la modulation de fréquence en fonction de l'amplitude de modulation de la cale. La figure 4.10 représente les résultats obtenus pour une fréquence de modulation de 30 kHz et des amplitudes allant de 50 mV à 10 V. On constate que la linéarité est très bonne : la courbe en pointillés correspond à une pente de $0.23\,\mathrm{MHz/V}$. Si on module avec des amplitudes plus importantes, on constate l'apparition dans la transformée de Fourier d'harmoniques aux fréquences double et triple. Cette saturation est due au fait que la modulation devient trop importante par rapport à la bande passante de la cavité, et que l'on sort de la plage linéaire autour du point de fonctionnement à mi-pente du pic d'Airy. Pour de telles amplitudes de modulation, on a vérifié la linéarité de la modulation en fréquence en utilisant directement le signal d'erreur Pound-Drever-Hall de la cavité de référence. On n'a pas observé de saturation de la modulation jusqu'à des modulations de 100 V d'amplitude, ce qui est largement suffisant car dans la suite de l'expérience on travaille essentiellement avec des tensions inférieures à 15 V.

La linéarité de la modulation est donc satisfaisante pour nos besoins. Le point limitant de ce laser, comparé par exemple à un laser Titane:Saphir, réside essentiellement dans la faible bande passante, qui limite à une centaine de kHz la plage de fréquences sur laquelle on peut contrôler la fréquence du laser.

4.3 Réduction du bruit d'intensité du laser

On asservit l'intensité du faisceau envoyé vers la cavité de mesure pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la phase du faisceau réfléchi par la cavité est proportionnelle aux déplacements du micro-miroir, avec un coefficient de proportionnalité qui dépend de l'intensité incidente sur la cavité (voir équation 2.74). Réaliser une mesure fiable des déplacements nécessite donc de stabiliser cette puissance incidente. Ensuite, le spectre de bruit d'intensité du faisceau présente un excès de bruit classique pour des fréquences inférieures à 4 MHz, comme on a pu le voir dans la section 4.2 figure 4.5. Dans l'optique d'observer les effets quantiques de la pression de radiation sur le micro-miroir, cet excès de bruit risque de produire des déplacements supplémentaires et de masquer les effets attendus. Il s'agit donc de contrôler d'une part l'intensité moyenne envoyée vers la cavité et d'autre part de réduire les fluctuations d'intensité jusqu'au niveau de leur bruit quantique standard.

4.3.1 Réduire le bruit d'intensité d'un laser

Le principe de l'asservissement consiste à faire passer le faisceau à travers un modulateur électro-optique suivi d'un polariseur, l'ensemble se comportant alors comme une lame séparatrice à transmission variable, pilotable par la tension appliquée au modulateur. L'asservissement mesure l'intensité transmise et ajuste la tension appliquée en conséquence, de façon à éliminer les fluctuations d'intensité. On ne peut toutefois pas mesurer l'intégralité de l'intensité transmise puisque cela nous priverait d'un faisceau utilisable. On est donc amené à prélever une partie du faisceau à l'aide d'une seconde lame séparatrice, comme le montre la figure 4.11.

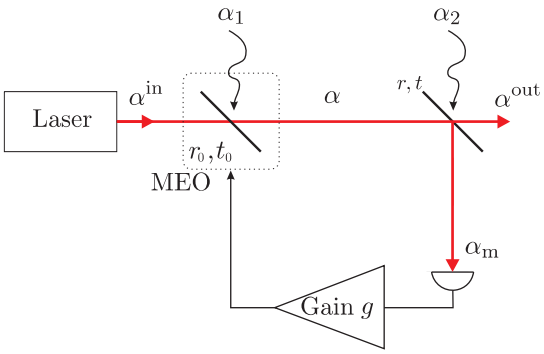


FIG. 4.11 – Le principe de l'asservissement d'intensité.

L'intensité I_{m} mesurée par la photodiode est comparée à une valeur de référence I_{ref} qui est ajustée pour avoir l'intensité desirée en sortie. Le signal d'erreur $\epsilon = I_{\text{m}} - I_{\text{ref}}$ est amplifié puis envoyé sur le modulateur électro-optique de façon à modifier sa transmission t_0. On va chercher à déterminer l'effet de l'asservissement sur le bruit d'intensité du faisceau, en tenant compte des bruits quantiques. On se place pour cela autour du point de fonctionnement, où la transmission a une valeur moyenne $\overline{t}_0$ telle que l'intensité mesurée $\overline{I}_{\text{m}}$ soit égale à I_{ref}. La transmission instantanée du modulateur s'écrit alors :

$$t_0(t)/\overline{t}_0 = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\overline{\alpha}_{\text{m}}\delta p_{\text{m}}(t-\tau)d\tau, \tag{4.2}$$

où δp_{m} est la quadrature d'amplitude mesurée par la photodiode, et g est une fonction de transfert supposée causale ($g(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$) qui inclut la réponse de l'électronique, de la photodiode et de l'électro-optique. $\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}$ est le champ moyen incident sur la photodiode de mesure.

Bruit d'intensité en sortie

On peut écrire les relations temporelles d'entrée-sortie sur les lames :

$$\begin{aligned} \alpha &= t_0\alpha^{\mathrm{in}} + r_0\alpha_1 \\ \alpha^{\mathrm{out}} &= t\alpha + r\alpha_2 \\ \alpha_{\mathrm{m}} &= -r\alpha + t\alpha_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Les champs α_i représentent les fluctuations du vide couplées aux champs par le modulateur et la lame. A partir de ces équations, on trouve simplement que les champs moyens sortant $\overline{\alpha}^{\mathrm{out}}$ et mesuré $\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}$ sont égaux au champ incident atténué par les deux lames :

$$\overline{\alpha}^{\mathrm{out}} = \overline{t}_0 t\,\overline{\alpha}^{\mathrm{in}},\ \overline{\alpha}_{\mathrm{m}} = -\overline{t}_0 r\,\overline{\alpha}^{\mathrm{in}}. \tag{4.4}$$

Les équations (4.2) et (4.3) permettent de relier entre elles les fluctuations d'amplitude $\delta p[\Omega]$ des différents champs :

$$\begin{aligned} \delta p &= \overline{t}_0\ \delta p^{\mathrm{in}} + \overline{r}_0\,\delta p_1 + \overline{t}_0\,\overline{\alpha}^{\mathrm{in}}\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}\,g\delta p_{\mathrm{m}} \\ \delta p^{\mathrm{out}} &= t\ \delta p + r\ \delta p_2 \\ \delta p_{\mathrm{m}} &= -r\,\delta p + t\ \delta p_2, \end{aligned} \tag{4.5}$$

où le dernier terme dans l'équation de $\delta p[\Omega]$ représente le seul effet correctif de l'asservissement, déduit de (4.2). En éliminant les termes en δp dans ces équations, on obtient finalement les spectres de bruit d'intensité S_p^{m} et S_p^{out} des faisceaux mesurés sur la photodiode et sortant :

$$|1 + G[\Omega]|^2\, S_p^{\mathrm{m}}[\Omega] = 1 + r^2\overline{t}_0^2\ Q^{\mathrm{in}}(\Omega) \tag{4.6}$$

$$|1 + G[\Omega]|^2\, Q^{\mathrm{out}}[\Omega] = t^2\overline{t}_0^2\ Q^{\mathrm{in}}(\Omega)\ + \frac{t^2}{r^2}\,|G[\Omega]|^2\,, \tag{4.7}$$

où $G[\Omega] = r\overline{t}_0\overline{\alpha}^{\mathrm{in}}\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}g[\Omega]$ est le gain global de l'asservissement, et Q^{in}, Q^{out} les facteurs de Mandel des faisceaux entrant et sortant, définis par :

$$S_p[\Omega] = 1 + Q[\Omega]. \tag{4.8}$$

Le facteur de Mandel correspond à l'écart entre le bruit du faisceau et le bruit de photon standard. Il représente de ce fait le bruit classique d'intensité du faisceau [43]. Sans asservissement, c'est-à-dire pour $G = 0$, on obtient

$$Q^{\mathrm{out}}[\Omega] = t^2\overline{t}_0{}^2 Q^{\mathrm{in}}[\Omega]. \tag{4.9}$$

On trouve la relation usuelle pour la traversée de deux lames de transmission $\overline{t}_0$ et t : le facteur de Mandel est réduit dans les mêmes proportions que l'intensité moyenne (équation 4.4).

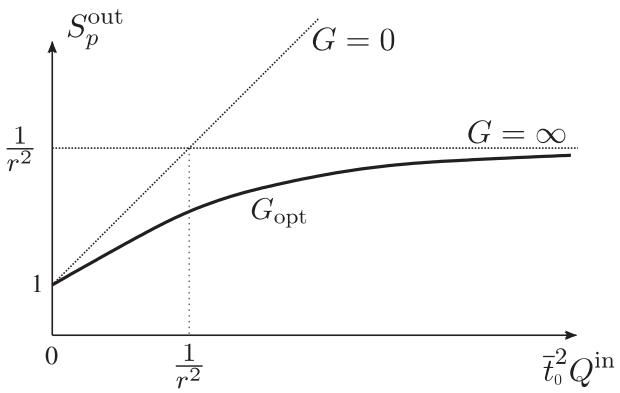


FIG. 4.12 – Bruit d'intensité S_p^{out} en sortie en fonction du bruit classique incident Q^{in}, pour des gains nul, infini et optimum.

Si on applique maintenant un gain infini, on peut réduire les fluctuations dans la voie de mesure jusqu'à zéro, comme l'indique l'équation (4.6). Formellement, le faisceau de mesure présente alors des fluctuations d'intensité inférieures au bruit de photon standard ; cependant, ce faisceau est inexploitable car il est entièrement détruit au niveau de la photodiode. L'absence de bruit dans la voie mesurée par la photodiode ne se traduit malheureusement pas par une absence de bruit dans la voie de sortie, puisqu'on y retrouve alors l'intégralité du bruit de répartition produit par la lame séparatrice. L'équation (4.7) avec G infini donne en effet un facteur de Mandel $Q^{\text{out}} = t^2/r^2$ non nul, ou encore un bruit d'intensité $S_p^{\text{out}} = 1/r^2$ toujours supérieur à 1.

Entre les deux situations précédentes, on peut trouver un compromis permettant une réduction optimale du bruit en sortie. Pour un bruit classique incident Q^{in} donné, la valeur optimale résulte d'un compromis entre l'atténuation par l'asservissement de ce bruit (premier terme dans l'équation 4.7), et la contamination par le bruit de répartition amplifié par l'asservissement (second terme dans l'équation 4.7). Le gain optimal G_{opt} et le bruit en sortie s'écrivent :

$$G_{\text{opt}}[\Omega] = r^2 \bar{t}_0^2 Q^{\text{in}}[\Omega] \tag{4.10}$$

$$Q_{\text{opt}}^{\text{out}}[\Omega] = \frac{t^2 \bar{t}_0^2 Q^{\text{in}}[\Omega]}{1 + G_{\text{opt}}[\Omega]}. \tag{4.11}$$

La première équation montre que le gain à appliquer est d'autant plus important que le faisceau incident présente du bruit classique. On peut également vérifier que le niveau optimal est bien inférieur au deux situations extrêmes décrites plus haut, c'est à dire en gain nul et en gain infini. Comparé au bruit obtenu sans asservissement (équation 4.9), l'asservissement réduit le bruit grâce à la présence du dénominateur dans l'équation (4.11). On atteint toutefois une limite t^2/r^2 correspondant à un gain infini lorsque le bruit incident Q^{in} devient infini. La figure 4.12 représente la dépendance de S_p^{out} en fonction du bruit incident $\bar{t}_0^2 Q^{\text{in}}$, pour différents cas : gain nul, gain infini et gain optimal. On a choisi un coefficient de réflexion r^2 de la lame assez faible, égal à 0.25, pour exagérer le changement de régime. On constate tout d'abord que pour des faisceaux avec un fort excès de bruit, le gain optimal est très

proche de la situation obtenue en poussant le gain au maximum. Par contre, pour des faisceaux suffisamment peu bruyants, le gain optimal dévie fortement de la situation gain infini et tend vers 0 à la limite où le faisceau incident est déjà au niveau du bruit de photon standard.

Si on peut espérer améliorer le bruit en sortie par rapport à la situation de gain infini lorsque le bruit incident n'est pas trop important, il peut être difficile de réaliser cette optimisation sur une large plage de fréquence, puisque le gain optimum dépend alors de la fréquence par l'intermédiaire du facteur de Mandel $Q^{\mathrm{in}}[\Omega]$ (équation 4.10). Dans tous les cas, on constate que le bruit résultant en sortie est toujours inférieur à $1/r^2$. Pour avoir un asservissement efficace, on a donc intérêt à prélever la plus grande partie possible du faisceau laser vers la voie de mesure (r grand). On est bien sûr limité à la fois par la puissance désirée en sortie et par la puissance acceptée par les photodiodes. En prenant des surfaces photosensibles les plus élevées possible ($1\,\mathrm{mm}^2$ pour une ETX 1000), on peut s'autoriser un peu plus de 50 mW sur la photodiode.

4.3.2 Mise en œuvre expérimentale

On décrit dans cette section l'ensemble des éléments utilisés pour la mise en œuvre expérimentale de l'asservissement d'intensité : le modulateur électro-optique, la photodiode et son électronique, la boucle électronique d'asservissement, et la détection équilibrée. Le bloc photodiode et son préamplificateur présenté ici ont été en fait réalisés en plusieurs exemplaires et utilisés à différents endroits du montage expérimental (détection équilibrée, détection Pound-Drever-Hall, ...)

Le modulateur électro-optique

On utilise un modèle LM 202 de la marque Linos, qui supporte jusqu'à 5 W non focalisés et une tension de contrôle de 800 V. Lorsque ses lignes neutres sont orientées à 45° par rapport à la polarisation linéaire du faisceau incident, on obtient à sa sortie une polarisation elliptique dont l'ellipticité et l'orientation dépendent de la tension appliquée. En plaçant un cube séparateur de polarisation orienté parallèlement à la polarisation incidente, on obtient l'équivalent d'une lame atténuatrice de transmission variable. On a utilisé un amplificateur 0-400V du laboratoire pour faire varier la tension sur une plage de ±400 V. Le résultat est représenté sur la figure 4.13 : la transmission varie de manière sinusoïdale avec la tension appliquée, comme le montre la courbe en pointillés, qui est un ajustement des points expérimentaux. On voit que la tension nécessaire pour faire travailler le modulateur à mi-pente est de l'ordre de -140 ou +180 Volts, des valeurs bien trop élevées pour des amplificateurs opérationnels. On a donc utilisé un amplificateur haute tension pour appliquer ce décalage. Cependant, ce type d'amplificateur possède une bande passante en général limitée et présente souvent un bruit de tension important. Pour pouvoir agir à des fréquences plus élevées, il est nécessaire d'utiliser une voie plus rapide qui n'utilise pas cet amplificateur. Pour cela, on a construit un boîtier placé directement aux bornes de l'électro-optique, qui permet de sommer les contributions de l'amplificateur haute tension et de la voie rapide. Son schéma est représenté sur la figure 4.14. Chaque voie d'entrée attaque l'une des bornes de l'électro-optique qui correspond électriquement à une capacité de 70 pF. Les résistances et capacités du circuit réalisent respectivement des filtres passe-bas et passe-haut sur les voies lente et

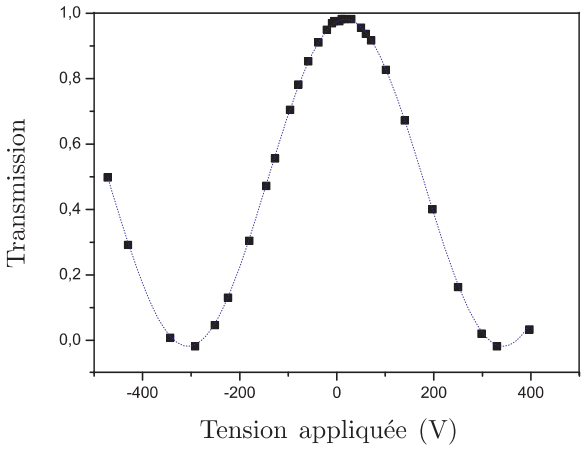


FIG. 4.13 – Variation de la transmission du modulateur électro-optique en fonction de la tension appliquée à ses bornes. La courbe en pointillés est un ajustement sinusoïdal des points expérimentaux.

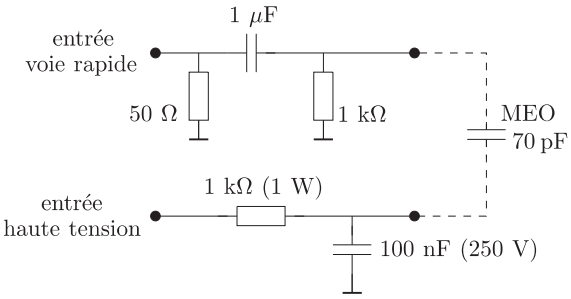


FIG. 4.14 – Circuit électronique à l'entrée de l'électro-optique permettant de mélanger une voie rapide et une haute tension.

rapide, et assurent une isolation électrique efficace entre ces deux entrées. La voie rapide est adaptée à 50 Ω et les composants utilisés ont été choisis pour supporter de fortes tensions et des puissances importantes.

La détection optique

Le montage expérimental nécessite en plusieurs endroits l'utilisation de dispositifs à faible bruit et large bande passante pour détecter l'intensité des faisceaux lumineux. Nous présentons dans cette section le dispositif développé dans l'équipe pour l'autre montage expérimental [14], mais adapté aux photodiodes que avons utilisées à 1064 nm. Il est capable de détecter le bruit de photon pour des faisceaux peu intenses (< 1 mW), sur une plage d'au moins 50 MHz. Dans la section suivante, nous présenterons les adaptations qui ont été nécessaires pour mesurer les fortes puissances mises en jeu dans l'asservissement d'intensité.

Les photodiodes utilisées dans le montage expérimental doivent présenter des rendements quantiques les plus élevés possible et avoir une réponse en fréquence suffisamment large pour pouvoir observer le bruit d'intensité des faisceaux sans l'atténuer à haute fréquence. Nous

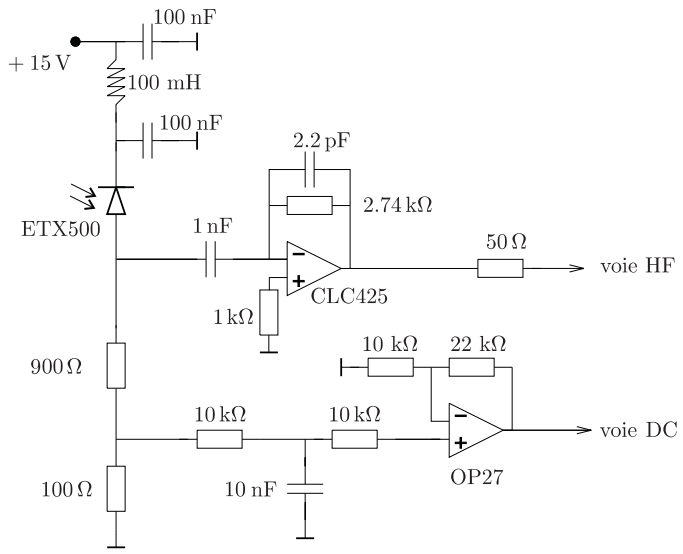


FIG. 4.15 – Schéma électronique des préamplificateurs de photodiode à faible bruit et large bande passante.

avons choisi les modèles ETX 500 et 1000 de JDS Uniphase, qui diffèrent par la taille de leur surface photosensible. Ces photodiodes sont polarisées avec une tension de +15 V et présentent une efficacité quantique supérieure à 93% à 1064 nm. Leur bande passante est limitée par l'effet capacitif lié à la structure spatiale de la jonction : plus la surface est réduite, plus cette capacité est faible et la bande passante élevée. Les ETX 500 permettent d'obtenir des bandes passantes supérieures à 50 MHz. Leur surface photosensible est cependant très réduite, avec un diamètre égal à 500 μm. Pour ne pas perdre de lumière lors de la détection, il est nécessaire de focaliser fortement le faisceau laser sur la surface photosensible de la photodiode : on place donc devant chaque photodiode une lentille de courte distance focale permettant de réaliser des cols inférieurs à 50 μm. Pour les photodiodes utilisées pour mesurer des intensité optiques plus élevées (jusqu'à 80 mW), on utilise les ETX 1000 sur lesquelles on évite de focaliser trop fortement le faisceau. La puissance surfacique étant plus faible, on limite ainsi les non-linéarités dues à la saturation. Cependant, ces photodiodes possèdent une bande passante plus réduite, de l'ordre de 25 MHz.

Les courants délivrés par les photodiodes sont amplifiés pour obtenir des valeurs mesurables. Le schéma électrique des pré-amplificateurs est représenté sur la figure 4.15. La photodiode est polarisée en inverse au moyen d'une tension continue stabilisée et filtrée de 15 V. Le préamplificateur fait appel à deux circuits indépendants adaptés au continu (voie DC en bas) et aux hautes fréquences (voie HF). La voie basse fréquence récupère le photocourant à l'aide d'une résistance de charge placée en série avec la photodiode, suivie d'un amplificateur opérationnel OP27 monté en non-inverseur avec un gain de 10. Cette voie filtre les signaux allant du continu à une centaine de kHz, avec une sensibilité de l'ordre du V/mA. A l'entrée de l'amplificateur opérationnel, on a rajouté un filtrage passif qui définit la fréquence de coupure de la voie lente et qui limite les retours de bruits et de parasites de la voie lente vers la photodiode. La voie rapide est basée sur un montage transimpédance construit autour d'un amplificateur rapide et à faible bruit CLC 425. Ce type de montage permet d'éliminer

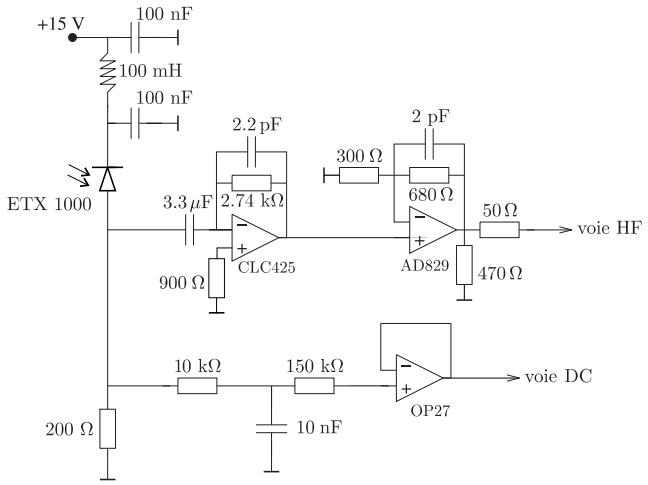


FIG. 4.16 – Schéma électronique du bloc photodiode utilisé sur la voie de mesure de l'asservissement d'intensité.

les effets négatifs de la capacité parasite de la photodiode à haute fréquence : la photodiode se retrouve en effet polarisée par une tension constante en étant reliée à une masse virtuelle à l'entrée de l'opérateur opérationnel. La réponse en fréquence peut alors dépasser 50 MHz. Le taux de conversion est de 1.3 V/mA, en tenant compte de l'adaptation d'impédance à 50 Ω en sortie. La capacité en parallèle avec la résistance de contre-réaction est ajustée pour rendre la réponse en fréquence de la voie rapide la plus plate possible. Toutes les résistances utilisées sont à faible bruit. On a aussi cherché à limiter la longueur des pistes électroniques, d'une part en utilisant un CLC 425 en montage CMS (composants montés en surface), d'autre part en plaçant les composants du côté des pistes en cuivre, avec un plan de masse de l'autre côté du circuit imprimé. Enfin, les alimentations sont régulées et filtrées également, et la photodiode blindée par un support en laiton.

La mesure d'intensité

Le circuit présenté dans la section précédente a été adapté afin de pouvoir mesurer des intensités allant jusqu'à 50 mW, avec une bande passante d'au moins 5 MHz, suffisante pour mesurer l'évolution en fréquence du facteur de Mandel du laser YAG. On utilise une photodiode ETX 1000 qui a une surface photosensible plus grande que le modèle 500 et une capacité effective plus élevée. La bande passante des photodétecteurs est donc plus faible (10 MHz). Le schéma du circuit électronique est représenté sur la figure 4.16. Par rapport au montage décrit précédemment, on a abaissé la fréquence de coupure entre les deux voies de 100kHz à 100 Hz en augmentant la capacité à l'entrée inverseuse de l'amplificateur CLC 425. On a également ajouté à la voie HF un second étage amplificateur construit autour d'un amplificateur AD 829. Cela a permis d'augmenter l'impédance de charge sur le premier étage qui ne se comportait pas de façon optimale lorsque la photodiode était éclairée par une puissance importante. Le circuit a été monté de manière très compacte pour limiter les parasites électromagnétiques. La voie lente a aussi été modifiée pour supporter des puissances importantes et donc des photocourants pouvant atteindre 50 mA. La résistance de charge a été abaissée à 200 Ω, et le gain de l'amplificateur non inverseur ramené à 1.

Electronique d'asservissement à trois voies

L'asservissement d'intensité nécessite à la fois une tension de décalage importante de l'électro-optique, une grande amplitude de correction à basse fréquence, et une bande passante suffisamment large pour agir directement sur le bruit d'intensité aux fréquences utiles. On a ainsi été amené à construire un ensemble électronique à trois voies en parallèle, afin de concilier sur chaque plage de fréquence les contraintes d'amplitude de correction et de bande passante (voir la figure 4.17).

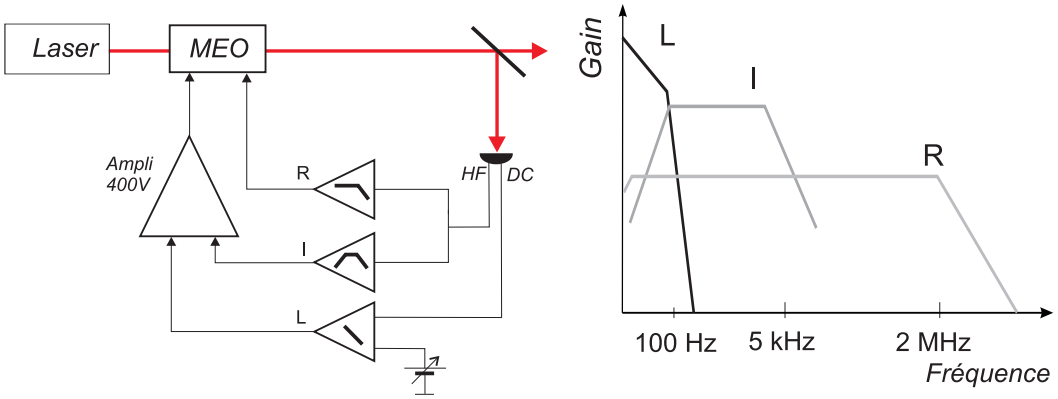


FIG. 4.17 – Principe de l'asservissement à trois voies pilotant l'électro-optique directement et par l'intermédiaire d'un amplificateur haute tension, à partir des informations fournies par les sorties du bloc photodiode. A droite, schéma des fonctions de transfert des trois voies.

La voie lente permet d'asservir l'intensité moyenne à une valeur de consigne réglable. Elle utilise pour cela la voie DC de l'amplificateur de la photodiode et la compare à un niveau de référence. Le signal passe par l'amplificateur haute-tension, qui assure le décalage statique du modulateur électro-optique. Cette voie permet de contrôler l'intensité jusqu'à des fréquences de l'ordre de la centaine de Hz, avec une fréquence d'oscillation autour de 130 Hz principalement due à la coupure dans le boîtier photodiode. La voie intermédiaire utilise le signal HF du boîtier photodiode, mais ce dernier est mis en forme puis envoyé lui aussi sur l'amplificateur haute tension. Cette voie agit à partir d'une fréquence de l'ordre de 100 Hz et reste efficace jusqu'à quelques kHz. En augmentant le gain de cette voie, on observe une oscillation à une fréquence d'environ 10 kHz, essentiellement due à la bande passante de l'amplificateur haute tension. La dernière voie est la voie rapide qui utilise aussi le signal HF fourni par la photodiode, mais l'envoie directement sur l'électro-optique sans passer par l'amplificateur haute tension. Elle est beaucoup plus large bande puisque sa fréquence de coupure haute est de l'ordre de 2 MHz. Elle est par contre limitée en amplitude à quelques volts, et saturerait rapidement si la voie intermédiaire ne devenait prédominante à des fréquences inférieures à quelques kHz.

Le schéma électronique des trois voies de l'asservissement est représenté sur la figure 4.18. Pour limiter les boucles de masse, les câbles reliant les deux sorties de la photodiode et le boîtier d'asservissement ont été inclus dans un unique câble blindé. La photodiode de mesure et le modulateur électro-optique sont isolés électriquement de la table optique. Tous les

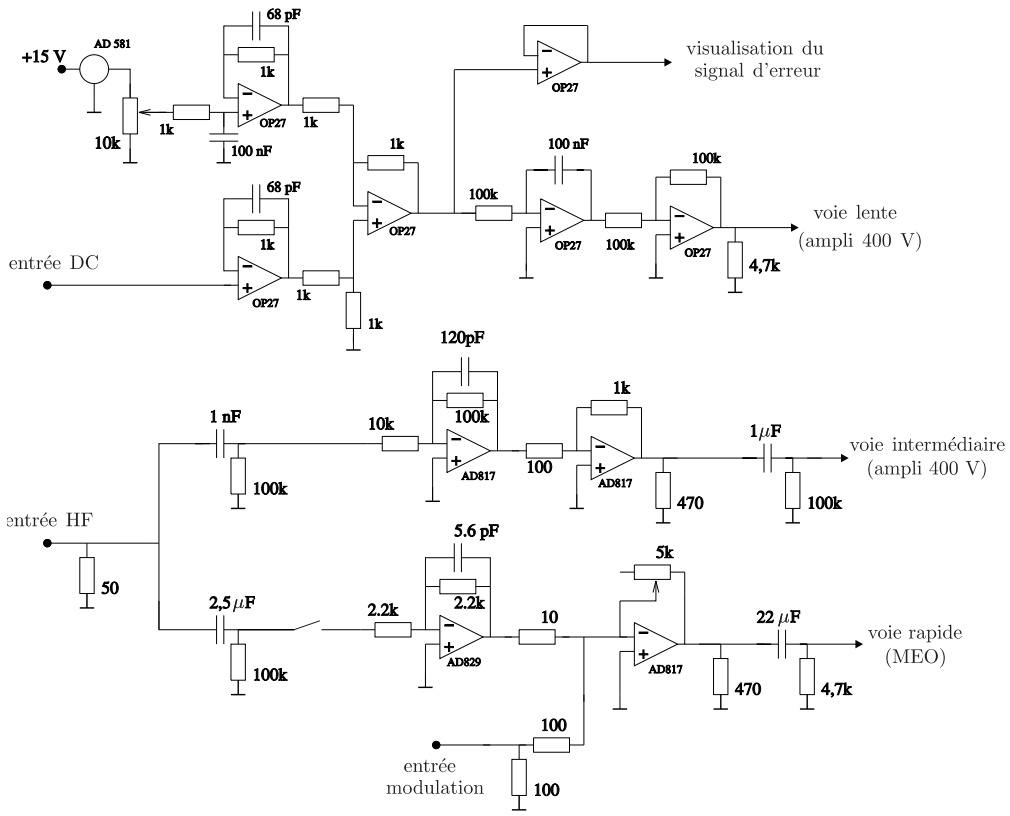


FIG. 4.18 – Schéma électronique des trois voies de l'asservissement.

câbles de connexion de la voie rapide sont blindés et les potentiomètres de gain sont placés directement sur la plaque pour limiter les parasites électromagnétiques. Enfin, on utilise des amplificateurs rapides et peu bruyants pour les voies intermédiaire et rapide, des AD 817 et AD 829. On a aussi choisi ces modèles car ils induisent des retards beaucoup plus faibles que d'autre modèles tels que l'OP 27.

Le signal DC produit par la photodiode est envoyé sur un étage différentiel construit avec trois amplificateurs OP 27, l'autre entrée étant alimentée par un régulateur de précision AD 581. Un amplificateur suiveur permet de visualiser le signal d'erreur sur un oscilloscope. Ensuite, le signal est envoyé vers un intégrateur pur qui assure un gain élevé à très basse fréquence et élimine les dérives lentes. Un inverseur permet d'attaquer l'amplificateur haute tension avec la bonne phase. La sortie haute fréquence de la photodiode est adaptée à 50 Ω puis séparée en deux branches pour produire les deux autres voies. La voie intermédiaire est construite autour d'un filtre passe-haut passif à 100 Hz suivi par un étage passe-bas actif qui assure la coupure à 10 kHz de la voie. La sortie est envoyée vers l'amplificateur haute tension. Les basses fréquences de la voie rapide sont aussi filtrées, puis un étage actif assure un filtrage passe-bas coupant à environ 2 MHz. Un dernier étage à gain variable permet d'ajuster le gain de cette voie qui dispose aussi d'un interrupteur pour la couper. Les commandes équivalentes pour les voies lente et intermédiaire sont en fait directement placées sur l'amplificateur haute tension. On a rajouté sur la voie rapide une entrée modulation, pour pouvoir moduler l'in-

tensité du faisceau laser, afin par exemple de mesurer le gain de l'asservissement (voir section 4.3.4).

Détection équilibrée du bruit d'intensité

Pour tester l'asservissement d'intensité, nous avons réalisé une détection équilibrée permettant de mesurer le bruit d'intensité du faisceau et le bruit de photon standard équivalent. Cette détection est placée à la sortie de l'asservissement (voir le schéma d'implantation de l'ensemble de l'expérience sur la figure 4.2). Un miroir basculant permet d'envoyer le faisceau vers la détection. Une lame demi-onde suivie du cube séparateur de polarisation PBS_7 sépare le faisceau en deux parties égales, puis deux photodiodes appariées mesurent les intensités des deux parties. En ajoutant les deux intensités, on obtient le bruit d'intensité total du faisceau, tandis que le bruit classique s'élimine dans la différence qui ne présente plus que le bruit de photon standard équivalent. Un boîtier électronique sommateur-différentiateur [14] récupérant les sorties HF des deux blocs photodiodes permet de passer rapidement d'une mesure à l'autre. Pour atteindre une bonne précision dans la mesure du bruit de photon standard, on a choisi une paire de photodiodes aussi identiques que possible parmi une dizaine d'entre elles, présentant notamment la même efficacité quantique. On a calibré les gains des voies DC des deux boîtiers photodiodes en utilisant un même faisceau laser dont l'intensité est asservie. Enfin, en envoyant la même puissance sur les photodétecteurs, on a réglé les gains des voies rapides pour obtenir la même sensibilité avec les deux boîtiers. On a obtenu de cette manière un taux de réjection du bruit classique d'intensité dans la différence meilleur que 40 dB, ce qui assure une mesure précise du bruit de photon standard.

4.3.3 Résultats expérimentaux

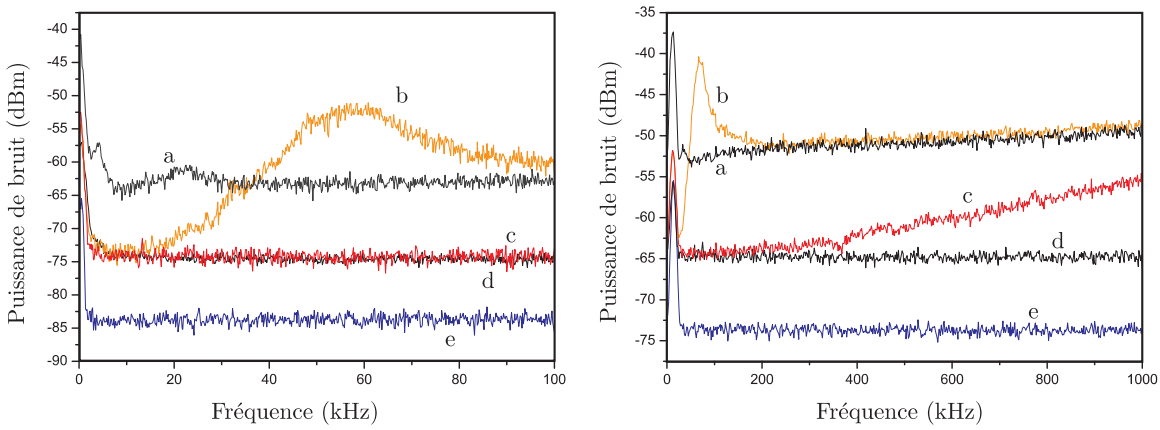


FIG. 4.19 – Réduction du bruit d'intensité mesurée sur la détection équilibrée placée en sortie de l'asservissement, sur deux plages de fréquences ; (a) : bruit d'intensité observé uniquement avec la voie lente à faible gain ; (b) : voies lentes et intermédiaires ; (c) : bruit asservi avec les 3 voies ; (d) : bruit de photon standard et (e) : bruit électronique.

Les courbes 4.19 montrent les spectres de bruit d'intensité mesurés avec la détection équilibrée lorsqu'on fait fonctionner les différentes voies de l'asservissement. Les courbes de gauche sont mesurées sur la plage 0 - 100 kHz, avec une résolution spectrale de 1 kHz et

une centaine de moyennes ; les courbes de droite sont obtenues sur la plage 0 - 1 MHz avec une résolution spectrale de 10 kHz. La puissance lumineuse incidente est de 30 mW avec un électro-optique fonctionnant au voisinage de la mi-pente. La lame séparant les faisceaux mesuré et transmis a un coefficient de réflexion r^2 élevé, de l'ordre de 0.9, de façon à assurer une limite supérieure au bruit d'intensité proche du bruit de photon standard ($S_p^{\text{out}} \leq 1/r^2$). La puissance lumineuse en sortie est asservie à 1.5 mW.

On a représenté sur la figure 4.19 le bruit de l'électronique, (courbe e obtenue en absence de lumière), le bruit de photon standard (d), le bruit d'intensité sans asservissement (a), puis les effets respectifs des deux premières voies (b) et de la voie rapide (c). On constate que le bruit de photon standard apparaît comme une limite inférieure qu'on ne peut pas dépasser. La voie intermédiaire est efficace jusqu'à une vingtaine de kHz, mais elle rajoute un excès de bruit autour de 60 kHz. La voie rapide permet de réduire le bruit très efficacement sur toute la plage représentée et élimine l'excès de bruit introduit par la voie intermédiaire. La présence des voies lentes et intermédiaires est toutefois indispensable, d'une part pour compenser les dérives lentes, d'autre part pour prévenir la saturation de la voie rapide. Le niveau du bruit asservi est plat et garde sa valeur optimale jusqu'à environ 400 kHz. Au-delà, le bruit mesuré remonte de manière régulière, sans présenter d'irrégularité significative. La raison de cette remontée est à attribuer à des effets de retard dans la propagation des signaux à travers l'ensemble de la boucle. Ils sont de l'ordre de 200 ns, et sont essentiellement dus aux amplificateurs opérationnels AD829 et AD817. Cette remontée à haute fréquence pourrait paraître limitante. En réalité, on va combiner l'asservissement d'intensité avec la cavité de filtrage spatial décrite dans la prochaine partie. Cette dernière se comporte pour le bruit d'intensité comme un filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à sa bande passante, soit une centaine de kHz. Combinée avec l'asservissement d'intensité, elle va donc permettre d'améliorer significativement le bruit à haute fréquence.

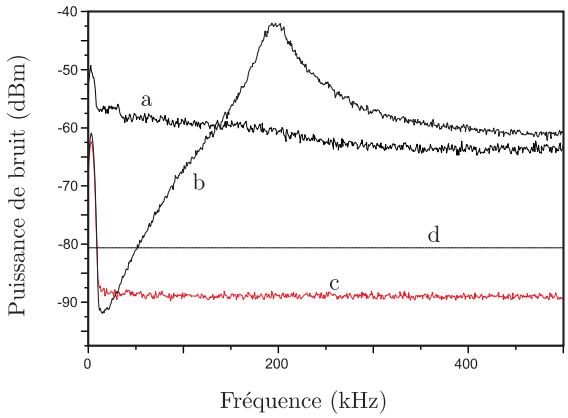


FIG. 4.20 – Bruit d'intensité observé directement sur la photodiode servant à l'asservissement. Les courbes (a) et (b) représentent le bruit observé en l'absence et en présence de l'asservissement, la courbe (c) représente le niveau du bruit de l'électronique et la courbe (d) correspond au bruit de photon standard.

Ces résultats montrent clairement que le bruit de photon standard est une limite minimale

pour le bruit d'intensité du faisceau sortant de l'asservissement. Du fait du bruit de répartition introduit par la lame séparatrice, il n'est pas possible de produire un état comprimé avec ce type d'asservissement. La situation est différente pour le faisceau réfléchi par la lame et utilisé pour piloter l'asservissement, faisceau qui n'est pas exploitable puisqu'il est détruit par la photodiode. On a représenté sur la figure (4.20) le niveau de bruit mesuré sur cette photodiode en absence (a) puis en présence (b) de l'asservissement d'intensité dont le gain a volontairement été poussé. On constate qu'en présence de l'asservissement, le bruit d'intensité à basse fréquence peut être réduit en-dessous du bruit de photon standard représenté par la droite (d), et même en-dessous du bruit de l'électronique, représenté par la courbe (c) et obtenu en l'absence de lumière. L'asservissement compense en fait toutes les fluctuations mesurées par la photodiode et permet en principe de faire tendre ce signal d'erreur vers 0.

4.3.4 Bruit optimal

Nous étudions dans cette section le bruit minimal d'intensité que l'on peut atteindre en optimisant les différents paramètres tels que le gain de l'asservissement et le coefficient de réflexion de la lame. Nous allons voir que pour rendre compte des résultats expérimentaux, il est nécessaire de tenir compte de différentes imperfections, dont notamment les pertes optiques du faisceau mesuré pour l'asservissement.

Mesure du gain de l'asservissement

Afin d'étudier l'effet du gain sur le niveau de bruit d'intensité en sortie de l'asservissement, il est nécessaire d'avoir accès expérimentalement au gain de l'asservissement. On utilise pour cela une modulation que l'on injecte dans la boucle d'asservissement par l'entrée prévue à cet effet sur le montage électronique (voir la figure 4.18), et on détecte la façon dont cette modulation est atténuée par la boucle.

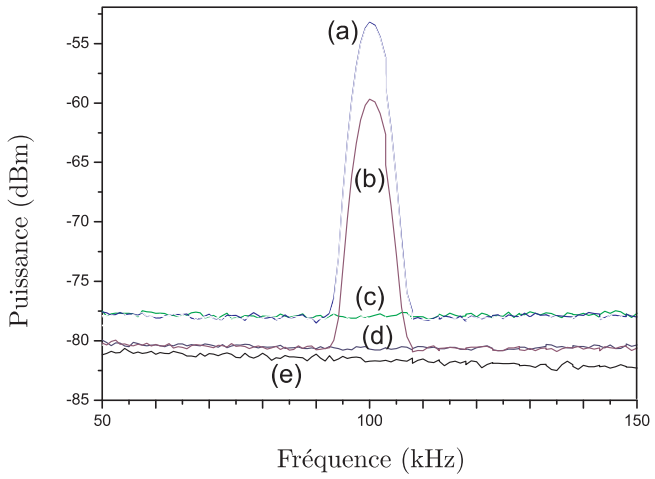


FIG. 4.21 – Spectre d'intensité en réponse à une modulation appliquée sur l'entrée rapide à la fréquence de 100 kHz, en l'absence (a) et en présence (b) de l'asservissement. (c) et (d) sont les spectres obtenus en l'absence de modulation sans et avec l'asservissement ; (e) correspond au bruit de photon standard. La résolution spectrale de l'analyseur est de 4 kHz, ce qui explique la largeur du pic de modulation.

En pratique, les mesures ont été prises en envoyant une puissance lumineuse de 60 mW dans le modulateur électro-optique qui fonctionne à mi-pente et transmet 30 mW. On fait fonctionner les voies lente et intermédiaire pour maintenir le niveau DC de l'asservissement, et on fait varier le gain de la voie rapide au moyen d'un potentiomètre. Ce réglage permet d'appliquer un gain allant de 0 à une valeur telle que l'asservissement part en oscillation. On a effectué toutes nos mesures à des fréquences assez élevées, supérieures à 50 kHz, pour que les deux voies lentes ne jouent pas de rôle notoire. On envoie une modulation sur l'entrée de la voie rapide, à la fréquence Ω_{m} à laquelle on souhaite tester l'asservissement, avec une amplitude suffisante pour que son effet soit en pratique toujours au moins 50 dB au-dessus du bruit de photon standard. On peut alors négliger le bruit par rapport à la modulation, comme le montre la figure 4.21 obtenue pour un coefficient de réflexion de $r^2 = 0.96$. On mesure la puissance de modulation $Q^{\mathrm{out}}[\Omega_{\mathrm{m}}]$ dans le faisceau en sortie en présence de l'asservissement, et la puissance $Q_0^{\mathrm{out}}[\Omega_{\mathrm{m}}]$ en coupant l'asservissement de la voie rapide. On peut alors calculer le gain de l'asservissement en utilisant l'équation (4.7) :

$$|1 + G[\Omega_{\mathrm{m}}]|^2\, Q^{\mathrm{out}}[\Omega_{\mathrm{m}}] = Q_0^{\mathrm{out}}[\Omega_{\mathrm{m}}]. \tag{4.12}$$

Bruit d'intensité optimal

On a mesuré le bruit d'intensité en sortie de l'asservissement pour différentes valeurs du gain global G, dans deux situations différentes : l'une à très faible puissance incidente (0.6 mW) et faible coefficient de réflexion ($r^2 = 0.5$) pour bien mettre en évidence le niveau optimal, l'autre à plus forte intensité incidente (26 mW) et avec un coefficient de réflexion plus important $r^2 = 0.89$. Les résultats sont reproduits sur la figure 4.22.

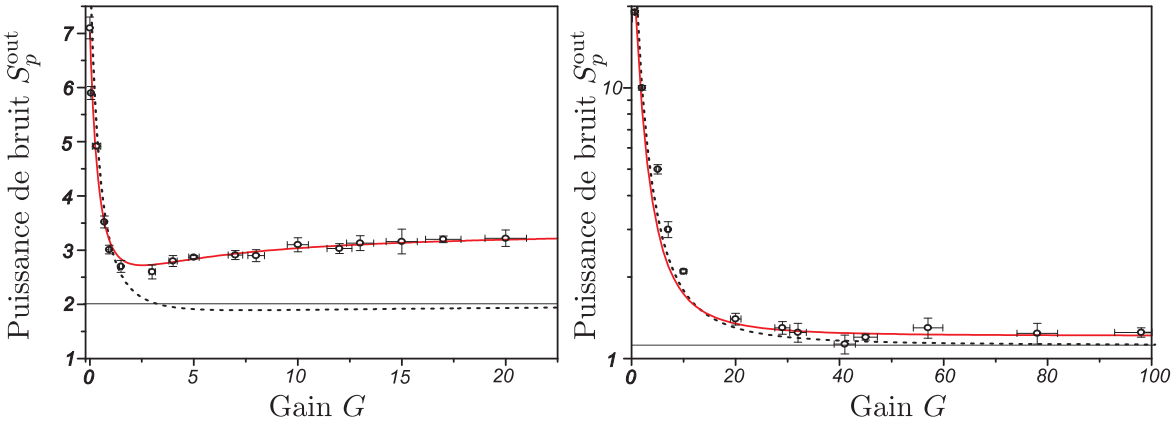


FIG. 4.22 – Dépendance du bruit d'intensité S_p^{out} normalisé au bruit de photon standard en fonction du gain global G de l'asservissement, à gauche pour une puissance incidente de 0.6 mW et un coefficient de réflexion de 0.5, à droite pour une puissance incidente de 26 mW et un coefficient de réflexion de 0.89. Les courbes en pointillés sont des ajustements théoriques obtenus à partir de l'équation (4.7) pour un bruit classique incident $\bar{t}_0^2 Q^{\mathrm{in}}$ égal à 15 (gauche) et 750 (droite). Les courbes en trait plein tiennent compte en plus des pertes avec $\eta = 0.81$, $t_p^2 = 0.91$ et $P_{\mathrm{el}} = 2.5$ mW (section 4.3.5).

Dans le premier cas, on constate la présence d'un optimum pour une valeur du gain $G_{\mathrm{opt}} = 3$: le bruit d'intensité S_p^{out} en sortie est alors réduit d'une valeur de 7 pour un gain nul jusqu'à la valeur de 2.6 pour un gain optimal. Le bruit reste toutefois bien au-dessus du

bruit de photon standard car on ne prélève pour la mesure que la moitié du faisceau. Dans le second cas, le niveau optimum correspond pratiquement au niveau observé en gain infini car le coefficient de réflexion de la lame est proche de l'unité et le bruit classique incident est plus important. On constate également que le bruit optimum est beaucoup plus proche du bruit de photon standard, puisqu'on atteint une valeur de 1.15 seulement. Ces mesures ont été prises à 100 kHz, avec une résolution spectrale de 4 kHz, et en moyennant environ une centaine de balayages de l'analyseur de spectres. On a estimé l'erreur verticale à partir de la dispersion des points du spectre sur une fenêtre de 4 kHz de large autour de 100 kHz. Les barres d'erreur horizontales sont liées à la précision de la mesure des facteurs de Mandel intervenant dans (4.12).

Les courbes en pointillé sur la figure 4.22 sont des ajustements théoriques obtenus à partir de l'équation (4.7) et sont en désaccord avec les points expérimentaux sauf à faible gain. Il est donc nécessaire de tenir compte des imperfections, comme nous le verrons dans la section suivante : on obtient alors les courbes en trait plein, qui sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

Evolution avec la réflexion de la lame

Pour déterminer plus en détail les propriétés du bruit optimum (équation 4.11), nous avons étudié son évolution avec le coefficient de réflexion r de la lame. On a travaillé avec une puissance incidente fixe de 60 mW, le modulateur fonctionnant toujours à mi-pente (${\bar{t}_0}^2 = 1/2$). On a effectué le même type de mesure que précédemment, en mesurant à chaque fois les niveaux de bruit obtenus en gain optimal et en gain infini, et ce pour plusieurs valeurs du coefficient de réflexion entre 0.6 et 0.97. Les niveaux mesurés sont reportés sur la figure 4.23.

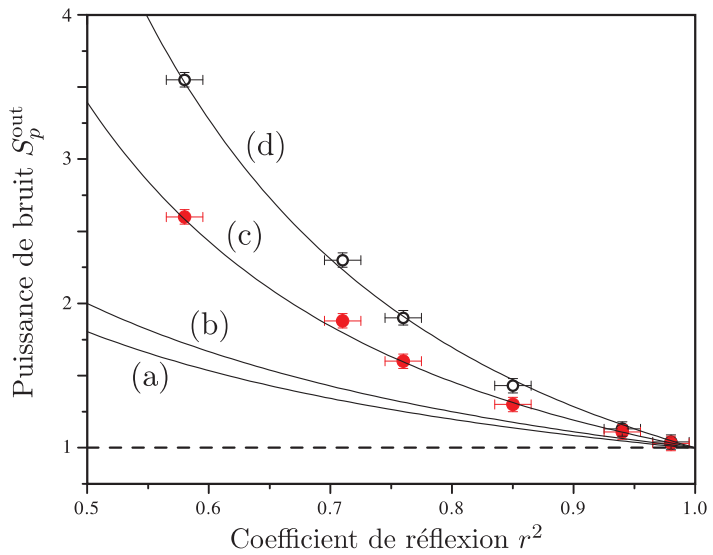


FIG. 4.23 – Evolution des niveaux de bruits mesurés en gain optimal (ronds pleins) et en gain infini (ronds évidés), en fonction de la fraction de lumière prélevée sur le faiceau pour l'asservissement. La courbe (a) est le niveau attendu pour le bruit optimal, et la courbe (b) la limite attendue en gain infini en l'absence de pertes. Les courbes (c) et (d) prennent en compte les différents types de pertes envisagés dans la section suivante.

On a ajouté sur cette figure les niveau attendus en gains infini (a) et optimal (b) en l'absence de pertes. On constate un écart important avec les résultats expérimentaux, que nous allons expliquer dans la section suivante en tenant compte des imperfections de l'asservissement (on obtient alors les courbes c et d). Notons enfin que le bruit d'intensité en l'absence d'asservissement est bien plus élevé que les valeurs reproduites sur ce graphique. Par exemple, dans la situation la moins favorable $r^2 = 0.5$, le bruit d'intensité en sortie sans asservissement vaut $S_p^{\text{out}} = 690$. La réduction observée est donc considérable.

4.3.5 Influence des pertes dans l'asservissement

Nous étudions dans cette section le rôle des pertes qui peuvent apparaître dans les différentes parties de l'asservissement.

Pertes avant la lame séparatrice

Ces pertes peuvent être dues aux imperfections de l'électro-optique ou du cube séparateur de polarisation. On peut les modéliser en ajoutant une lame séparatrice entre l'électro-optique et la lame de mesure, qui va coupler le faisceau principal à une source supplémentaire de vide (voir la figure 4.24 à gauche). En notant r_p, t_p les coefficients de réflexion et transmission de cette lame additionnelle, et δp_3 les quadratures d'amplitude des fluctuations du vide entrant par cette voie, la relation donnant le champ δp avant la lame de mesure s'écrit :

$$\delta p = \; t_p\bar{t}_0 \; \delta p^{\text{in}} + t_p\bar{r}_0 \; \delta p_1 + r_p\delta p_3 + t_p\bar{t}_0 \; g\overline{\alpha}^{\text{in}}\overline{\alpha}_{\text{m}}\delta p_{\text{m}}, \tag{4.13}$$

les autres relations d'entrée-sortie restant inchangées (équations 4.5). Il est facile de se rendre compte que l'ajout de ces pertes revient simplement à modifier le point de fonctionnement de l'électro-optique, sa transmission moyenne passant de $\bar{t}_0$ à $t_p\bar{t}_0$: ces pertes n'ont donc pas d'influence sur le comportement global de l'asservissement.

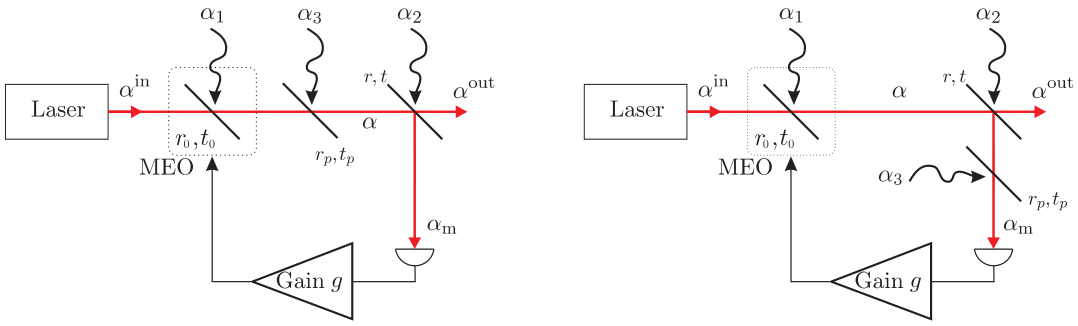


FIG. 4.24 – Modélisation des pertes dans l'asservissement d'intensité : à gauche celles apparaissant avant la lame séparatrice, à droite celles apparaissant dans la voie de mesure.

Pertes dans la voie de mesure

Ces pertes se traduisent par une mesure erronée du signal d'erreur et peuvent perturber de manière importante l'asservissement. Elles peuvent être dues à une mauvaise adaptation du faisceau sur la photodiode, ou à une efficacité quantique non idéale de la détection. On

les modélise par une lame séparatrice insérée dans la voie de mesure avant la photodiode de détection (voir la figure 4.24 à droite). L'expression du champ mesuré par la photodiode est modifiée par la présence de cette lame :

$$\delta p_{\mathrm{m}} \;=\; -t_p r\ \delta p + t_p t \delta p_2 + r_p \delta p_3, \tag{4.14}$$

les autres relations d'entrée-sortie restant inchangées (équations 4.5). Le premier effet de ces pertes est de réduire le gain de la boucle d'asservissement par un facteur t_p, le gain global s'écrivant maintenant $G' = t_p G$. On peut par ailleurs calculer comme précédemment le bruit classique d'intensité en sortie :

$$\left|1 + G'[\Omega]\right|^2 Q^{\mathrm{out}}[\Omega] = t^2 \bar{t}_0^2\ Q^{\mathrm{in}}(\Omega)\ + \frac{t^2}{r^2 t_p^2} \left|G'[\Omega]\right|^2. \tag{4.15}$$

Comparé au résultat sans perte (équation 4.7), le bruit ajouté par l'asservissement apparaît augmenté d'un facteur $1/t_p^2$: le bruit d'intensité résultant est donc également augmenté (dernier terme de 4.15). En particulier, le bruit en gain infini devient $Q_\infty^{\mathrm{out}} = t^2/(r^2 t_p^2)$ et les valeurs optimales sont données par :

$$G'_{\mathrm{opt}}[\Omega] = t_p^2 r^2 \bar{t}_0^2 Q^{\mathrm{in}}[\Omega] \tag{4.16}$$

$$Q_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{out}}[\Omega] = \frac{t^2 \bar{t}_0^2 Q^{\mathrm{in}}[\Omega]}{1 + G'_{\mathrm{opt}}[\Omega]}. \tag{4.17}$$

Par comparaison avec les expressions sans perte (4.10) et (4.11), les pertes diminuent la valeur optimale du gain de contre-réaction par un facteur t_p^2, ce qui a pour effet d'augmenter le bruit classique optimum $Q_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{out}}$.

Pour réduire ces pertes, on a retiré le cache en verre de protection de la photodiode et on a placé une lentille de focale f = +100 mm avant la séparatrice pour produire un faisceau de taille égale au quart de la largeur de la zone photosensible de la photodiode (pertes inférieures à 1%). Le coefficient de réflexion sur la surface étant de l'ordre de 4 %, on incline légèrement le détecteur et on ajoute un miroir pour renvoyer vers la photodiode la fraction de faisceau réfléchie. Compte tenu de l'efficacité quantique de la photodiode (> 93%), les pertes globales r_p^2 au niveau de la voie de mesure peuvent être estimées à 9 % environ.

Bruit électronique

D'autres sources d'imperfection peuvent être envisagées dans la voie de mesure, comme le courant d'obscurité de la photodiode ou le bruit de l'électronique, qui vont se traduire par des bruits supplémentaires injectés dans la boucle d'asservissement. Les circuits électroniques employés ont été conçus pour être les moins bruyants possible et leur bruit est négligeable en utilisation nominale, c'est-à-dire lorsque la puissance lumineuse dépasse quelques dizaines de milliwatts. Cependant, ce bruit joue un rôle à plus faible puissance, et notamment pour les mesures réalisées dans la section précédente. On modélise cet effet sous la forme d'une source de bruit supplémentaire ajoutée aux fluctuations d'intensité mesurées $\delta I_{\mathrm{m}} \to \delta I_{\mathrm{m}} + \delta I_{\mathrm{el}}$ où $\delta I_{\mathrm{m}} = \overline{\alpha}_{\mathrm{m}} \delta p_{\mathrm{m}}$ est le bruit d'intensité mesuré et δI_{el} le bruit électronique exprimé en bruit équivalent sur la photodiode. En reprenant les calculs précédents, on constate que ce bruit

ajoute un terme supplémentaire dans l'expression (4.15), proportionnel au spectre S_{el} des fluctuations δI_{el} :

$$\left|1+G'[\Omega]\right|^2 Q^{\mathrm{out}}[\Omega] = t^2\bar{t}_0^2\, Q^{\mathrm{in}}(\Omega) \; + \frac{t^2}{r^2 t_p^2}\left|G'[\Omega]\right|^2 + \frac{t^2}{r^4 t_p^4}\left|G'[\Omega]\right|^2 \frac{S_{\mathrm{el}}[\Omega]}{\bar{t}_0^2 \bar{I}^{\mathrm{in}}}. \tag{4.18}$$

Ce nouveau terme vient s'ajouter au bruit d'intensité en gain infini, et fait donc apparaître un comportement supplémentaire en $1/r^4$ et non plus uniquement $1/r^2$ comme précédemment :

$$Q_\infty^{\mathrm{out}} = \frac{t^2}{r^2 t_p^2}\left(1+\frac{1}{r^2 t_p^2}\,\frac{S_{\mathrm{el}}}{\bar{t}_0^2 \bar{I}^{\mathrm{in}}}\right). \tag{4.19}$$

Il augmente également le bruit optimum qui est toujours donné par l'équation (4.17) mais avec un gain optimum G'_{opt} plus faible :

$$G'_{\mathrm{opt}} = \frac{t_p^2 r^2 \bar{t}_0^2 Q^{\mathrm{in}}}{1+\frac{1}{r^2 t_p^2}\,\frac{S_{\mathrm{el}}}{\bar{t}_0^2 \bar{I}^{\mathrm{in}}}}. \tag{4.20}$$

Le bruit de l'électronique S_{el} est le bruit d'intensité équivalent ramené en entrée de la photodiode de mesure. On définit P_{el} comme étant la puissance lumineuse incidente sur la photodiode qui donnerait un bruit de photon standard égal au bruit de l'électronique : $S_{\mathrm{el}} = P_{\mathrm{el}}/h\nu$. Pour l'estimer, on compare d'abord les niveaux de bruit mesurés avec et sans lumière sur la photodiode d'asservissement, puis on utilise la détection équilibrée pour mesurer le bruit de photon standard d'un faisceau de même intensité. Pour un faisceau incident de 6.95 mW, on trouve qu'à 100 kHz, le bruit de l'électronique se situe 10.2 dB en dessous du bruit de photon standard, ce qui signifie que P_{el} correspond à une puissance de 0.6 mW. Dans les ajustements qui suivent, c'est cette puissance qu'on utilise comme paramètre ajustable décrivant le bruit électronique.

Pertes au niveau de la détection équilibrée

Les pertes au niveau du dispositif de détection du faisceau asservi n'interviennent pas directement dans le fonctionnement de l'asservissement, mais elles modifient les niveaux mesurés et doivent être prises en compte dans la comparaison entre les résultats expérimentaux et les expressions théoriques. Elles peuvent être dues à une mauvaise adaptation spatiale des faisceaux lumineux sur les photodiodes, à l'efficacité quantique limitée des photodiodes employées dans la détection équilibrée et aux pertes dans le cube séparateur de polarisation. Elles sont décrites par un coefficient η d'efficacité quantique de la détection que l'on peut estimer globalement de l'ordre de 0.9. Son seul effet est de réduire l'intensité moyenne réellement mesurée à $\eta\bar{I}^{\mathrm{out}}$, et le bruit classique à ηQ^{out}.

Comparaison avec les résultats expérimentaux

Ces différents bruits ont été pris en compte pour tracer les ajustements théoriques des figures 4.22 et 4.23. Plus précisément, on a tracé le bruit d'intensité mesuré $S_p^{\mathrm{out}} = 1+\eta Q^{\mathrm{out}}$ où le bruit classique Q^{out} est donné par l'équation (4.18). Les valeurs à gain infini et optimal sont données par les équations (4.19), (4.17) et (4.20). Les paramètres ajustables sont :

	Gain optimal	Gain infini	attendu
Q^{in}	3310	non défini	3400 pour 60 mW
t_p^2	0.91		0.9
P_{el} (mW)	2.5	3.2	> 0.6 mW (bruit détecteur)
η	0.81		0.85

TAB. 4.1 – Bilan des ajustements.

- le facteur de mandel Q^{in} du faisceau incident sur le modulateur,
- les pertes $1 - t_p^2$ sur la voie de mesure,
- la puissance P_{el} décrivant le niveau du bruit de l'électronique. La seule contribution du détecteur s'élève à 0.6 mW,
- l'efficacité quantique η de la détection équilibrée, qui comprend toutes les pertes suivant la lame séparatrice dans la voie de sortie.

Les ajustements des deux courbes (c) et (d) de la figure 4.23 ont été estimés indépendamment par la méthode des moindres carrés, en ajoutant la contrainte que les facteurs η et t_p^2 sont inchangés entre les deux ajustements. Par contre, on a laissé libre la détermination du bruit électronique, caractérisé par P_{el}, qui conditionne essentiellement le comportement à petit r et qui peut dépendre des réglages du gain de l'asservissement. Les valeurs donnant les meilleurs ajustements sont répertoriées dans le tableau 4.1.

La précision sur ces estimations est de l'ordre de 5%. On constate que les ajustements théoriques sont maintenant en très bon accord avec les points expérimentaux, ce qui n'était pas le cas pour les courbes (a) et (b), obtenues sans pertes : cela traduit la grande importance des pertes sur la qualité de la réduction du bruit d'intensité par l'asservissement lorsqu'on cherche à s'approcher au plus près du bruit de photon standard.

4.4 La cavité de filtrage

La cavité de filtrage permet avant tout de filtrer la structure spatiale du faisceau laser. Celui-ci présente en effet un astigmatisme notable après la traversée des différents éléments précédant la cavité (isolateur, modulateur électro-optique) : on a mesuré une différence de 10% entre les tailles horizontale et verticale du faisceau. En plus de cet astigmatisme, le profil transverse du faisceau n'est pas réellement gaussien, puisqu'on a mesuré un écart au profil gaussien de $M^2 = 2.1$ à la sortie du modulateur électro-optique. En faisant passer le laser à travers une cavité optique asservie à résonance sur son mode TEM_{00}, on filtre spatialement le faisceau car seul le mode résonnant est transmis par la cavité, les modes transverses d'ordre supérieur étant réfléchis.

On a vu par ailleurs que le laser présente un excès de bruit classique d'intensité en-dessous de 5 MHz. Faire passer le faisceau dans une cavité optique permet de filtrer cet excès de bruit aux fréquences supérieures à la bande passante de la cavité. Enfin, insérer une cavité optique sur le trajet du faisceau après la cavité permet de stabiliser le pointé du faisceau laser. Si la cavité est suffisamment stable, toutes les propriétés mécaniques du faisceau telles que sa position, son pointé, la position et la taille du col optique, sont alors fixées par les caractéristiques du mode TEM_{00} et ne dépendent plus d'éventuelles dérives du laser. Combiné avec l'asservissement d'intensité décrit dans la partie précédente, on obtient un faisceau dont

la structure spatiale et l'intensité sont parfaitement contrôlées.

4.4.1 Description de la cavité

On a choisi une cavité en anneau triangulaire, pour éviter de renvoyer de la lumière vers le laser et aussi pour mettre en œuvre une méthode d'asservissement dite de tilt-locking, qui sera décrite plus loin. Le montage mécanique de la cavité ainsi qu'une photographie sont représentés sur la figure 4.25. Le corps de la cavité a été usiné dans un barreau d'Invar, un alliage de fer et de nickel très rigide, qui présente un coefficient de dilatation thermique plus faible d'un facteur 10 que le dural, ce qui permet d'atteindre une grande stabilité mécanique et d'être peu sensible aux variations de température. Les deux miroirs d'entrée et de sortie nous ont été fournis par l'équipe de Hans Bachor (ANU à Canberra, en Australie) ; ils sont traités pour une incidence à 45° et une polarisation verticale (s), avec un antireflet déposé sur leur face externe. Ils sont plaqués contre le corps de la cavité par deux bagues en Invar. Le miroir de fond possède un rayon de courbure d'un mètre, il est monté sur une cale piézoélectrique qui permet de balayer de plusieurs microns la longueur de la cavité lorsqu'on lui applique une tension de valeur maximale égale à 1000 V.

La longueur optique de la cavité est de 420 mm, ce qui correspond à un intervalle spectral libre de 714 MHz. Le col de 168 μm du faisceau est localisé entre les deux miroirs d'entrée-sortie. Comme on peut le voir sur la photographie de la figure 4.25, l'ensemble de la cavité repose sur un support massif en dural. On a ajouté des bandes de caoutchouc entre la cavité et le support pour atténuer les vibrations mécaniques transmises par la table. De plus, le montage est placé dans une enceinte close en plexiglas pour l'isoler des bruits acoustiques environnants. Cette boîte permet aussi une meilleure thermalisation de la cavité.

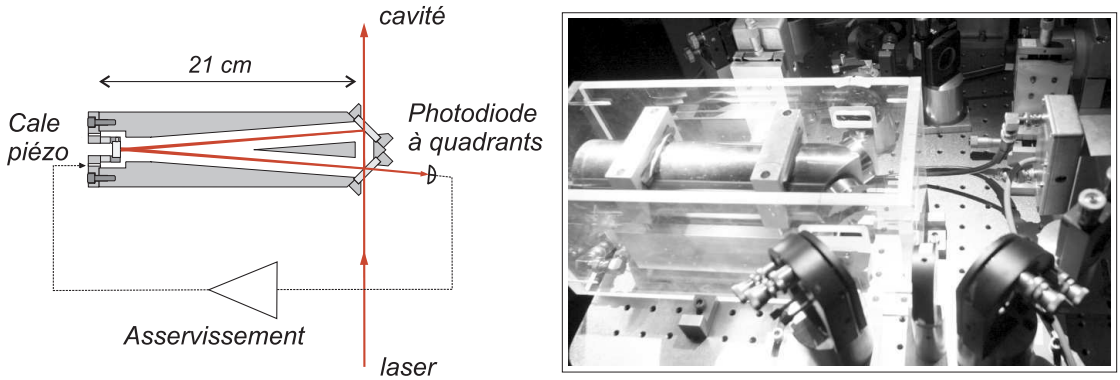


FIG. 4.25 – Schéma et vue d'ensemble de la cavité de filtrage.

Nous avons déterminé les caractéristiques optiques de la cavité, en mesurant sa finesse, son coefficient de réflexion $\mathcal{R}$ et l'intensité transmise à résonance. Le coefficient de réflexion des deux miroirs d'entrée-sortie dépend de la polarisation incidente, puisqu'il a été optimisé pour une polarisation (s), c'est-à-dire une polarisation verticale. La finesse de la cavité dépend donc du choix de la polarisation incidente, comme le montrent les résultats présentés dans le tableau 4.2. En modifiant la polarisation incidente, on peut donc travailler au choix sur l'une ou l'autre finesse de la cavité. L'effet de filtrage de l'excès de bruit classique est plus

polarisation :	verticale (s)	horizontale (p)
Finesse $\mathcal{F}$	3300	240
Réflexion $\mathcal{R}$	0.34	0.087
Adaptation spatiale η_{cav}	0.91	0.91
Bande passante (MHz)	0.11	1.48
T_{in} (ppm)	450	12400
T_{out} (ppm)	447	12000
T_{fond} (ppm)	15	20
Pertes (ppm)	990	1620

TAB. 4.2 – Caractéristiques optiques de la cavité de filtrage.

efficace avec la polarisation verticale puisque la bande passante de la cavité est alors de 110 kHz seulement. Toutes les procédures d'alignement du montage expérimental sont réalisées en pratique avec la mauvaise finesse car l'asservissement sur la résonance de la cavité est plus stable. Cela permet également de travailler avec des puissances lumineuses plus importantes, jusqu'à 100 mW environ.

A partir de la finesse, du coefficient de réflexion à résonance, des puissances transmises, et du coefficient d'adaptation spatiale (de l'ordre de 91% du fait de l'astigmatisme du laser), il est possible de déterminer les caractéristiques des miroirs par des formules similaires à celles présentées dans le chapitre 3 (section 3.3.1). Les résultats sont présentés dans le tableau 4.2 pour les transmissions T_{in} et T_{out} des deux miroirs d'entrée-sortie, les pertes totales incluant celles des trois miroirs et la transmission résiduelle T_{fond} du miroir de fond. On constate une bonne symétrie entre les deux miroirs d'entrée-sortie, avec une variation importante selon la polarisation incidente. Les pertes sont relativement importantes et sans doute attribuables au miroir de fond, de moins bonne qualité que les miroirs d'entrée-sortie. Notons toutefois que la finesse atteinte en polarisation s est largement suffisante pour que la bande passante de la cavité permette un filtrage efficace du bruit classique du faisceau.

4.4.2 Asservissement par tilt-locking

La longueur de la cavité de filtrage est maintenue à résonance sur la fréquence du laser par une technique d'asservissement dite de tilt-locking, inventée par D.A. Shaddock en 1999 [94]. Elle consiste à utiliser le mode transverse TEM_{10} non résonnant comme une référence de phase. En observant à l'aide d'une photodiode à quadrants ses battements avec le mode TEM_{00} qu'on cherche à asservir sur la cavité, on obtient un signal d'erreur sensible au désaccord. Cette technique possède l'avantage de ne pas nécessiter de modulation supplémentaire, comme c'est le cas pour la détection Pound-Drever-Hall. Le signal d'erreur produit est par ailleurs très robuste, et ne nécessite que de rares réalignements.

Principe

Le profil transverse du champ électromagnétique d'un faisceau laser peut être décomposé sur la base des modes de Hermite-Gauss, notés TEM_{mn}. Une cavité optique présente des résonance à des fréquences différentes selon le mode propre transverse considéré : on peut choisir la longueur et la courbure des miroirs de la cavité, de telle manière que lorsque le

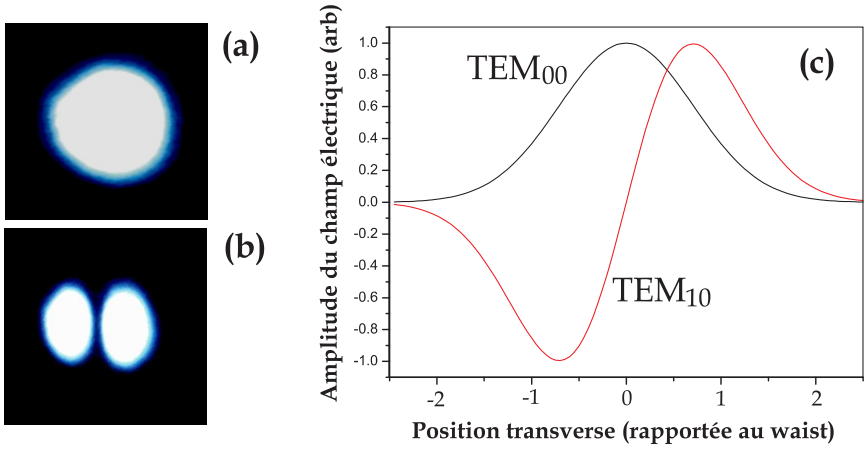


FIG. 4.26 – Profils d'intensité transverse des mode TEM_{00} (a) et TEM_{10} (b) observés en transmission de la cavité de filtrage sur une caméra CCD. Profils transverses du champ électrique pour ces deux modes (c).

mode TEM_{00} est proche de résonance, les autres modes transverses soient hors de résonance et donc simplement réfléchis par la cavité (cavité non confocale). Les profils d'intensité pour les deux premiers modes TEM_{00} et TEM_{10} sont représentés sur la partie gauche de la figure 4.26. On a représenté également à droite le profil transverse de l'amplitude du champ pour ces deux modes. Le point important pour la suite est le changement de signe de l'amplitude du champ pour le mode TEM_{10} lorsqu'on passe d'un lobe à l'autre. La technique de tilt-locking exploite ce déphasage de 180° entre les deux lobes pour produire un signal d'erreur exploitable, relié à l'écart à résonance du mode TEM_{00}.

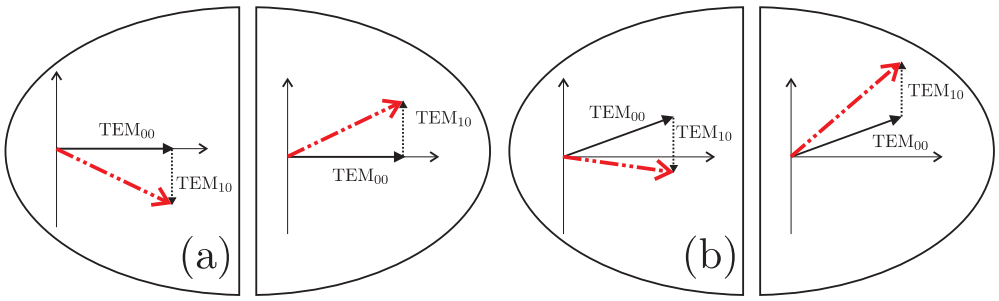


FIG. 4.27 – Champs électriques incidents sur les deux quadrants de la photodiode, pour une cavité à résonance (a) et hors de résonance (b). Le mode TEM_{00} est en trait plein, le mode TEM_{10} en pointillés fins et le champ total en traits alternés. Lorsque la cavité est désaccordée, les intensités mesurées sur les deux quadrants sont différentes.

On place une photodiode à quadrants sur le faisceau réfléchi par la cavité (voir la figure 4.25), de telle manière que les deux lobes du mode TEM_{10} arrivent sur deux quadrants différents. On désaligne alors légèrement le faisceau incident par rapport à la cavité, en inclinant un des miroirs en amont de la cavité, de manière à réduire d'environ 10% l'intensité

transmise pour le mode fondamental. Cela a pour effet de renvoyer une partie du mode TEM_{00} sur la photodiode où il interfère avec les autres modes transverses réfléchis : le champ électrique du mode TEM_{10} s'ajoute avec une amplitude opposée à celui du mode TEM_{00} sur chacun des deux quadrants de la photodiode. On a représenté cela sur la figure 4.27, où on a supposé pour simplifier que le détecteur est suffisamment éloigné de la cavité, au-delà de la distance de Rayleigh de sorte que le déphasage rajouté par la propagation (phase de Gouy [55]) entre les modes TEM_{00} et TEM_{10} soit de 90°. Le champ électrique du mode TEM_{01} est de signe opposé sur les deux quadrants tandis que celui du mode fondamental est le même. A gauche, on a représenté le cas où le mode TEM_{00} est à résonance : l'intensité totale (la norme au carré du vecteur en trait alterné) vue par chaque quadrant est la même. A droite, on a représenté le cas où la cavité sort de résonance : le mode TEM_{00} est légèrement déphasé, ce qui induit une dissymétrie entre les intensités mesurées par chaque quadrant. En effectuant la soustraction des photocourants fournis par les deux quadrants, on obtient un signal nul à résonance et qui change de signe de part et d'autre de la résonance. Ce signal est directement exploitable pour asservir la longueur de la cavité sur le laser.

Mise en œuvre expérimentale

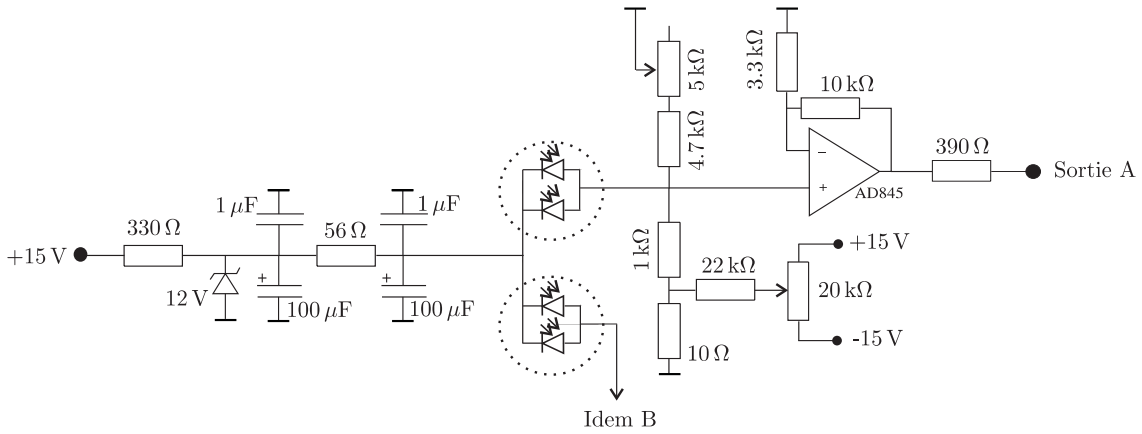


FIG. 4.28 – Schéma électronique de l'amplificateur de la photodiode à quadrants. Les quatre quadrants sont mis en parallèle deux à deux. La seconde voie qui n'a pas été représentée est identique à la première.

On utilise une photodiode EG&G à quatre quadrants regroupés deux à deux verticalement. La photodiode est placée à environ 20 cm de la cavité, sur un bloc rigide en dural pour assurer une bonne stabilité mécanique. Un miroir placé sur le trajet permet d'effectuer les ajustements de la position du faisceau sur les quadrants. Le schéma électronique du pré-amplificateur est représenté sur la figure 4.28. Il met en œuvre deux amplificateurs rapides AD 845. On équilibre électroniquement les deux voies au moyen de potentiomètres qui permettent de régler les deux résistances de charge et on corrige l'offset en sortie de l'amplificateur au moyen d'une tension de décalage ajustable ajoutée sur son entrée non inverseuse. Ces deux voies sont envoyées sur un boîtier électronique qui effectue la soustraction des deux signaux et met en forme le signal d'erreur. Le schéma électronique du boîtier d'asservissement est représenté sur la figure 4.29. Les signaux provenant des deux quadrants de la photodiode sont soustraits à l'aide de l'étage différentiel construit autour des trois OP27 en haut à gauche. Le signal passe ensuite par

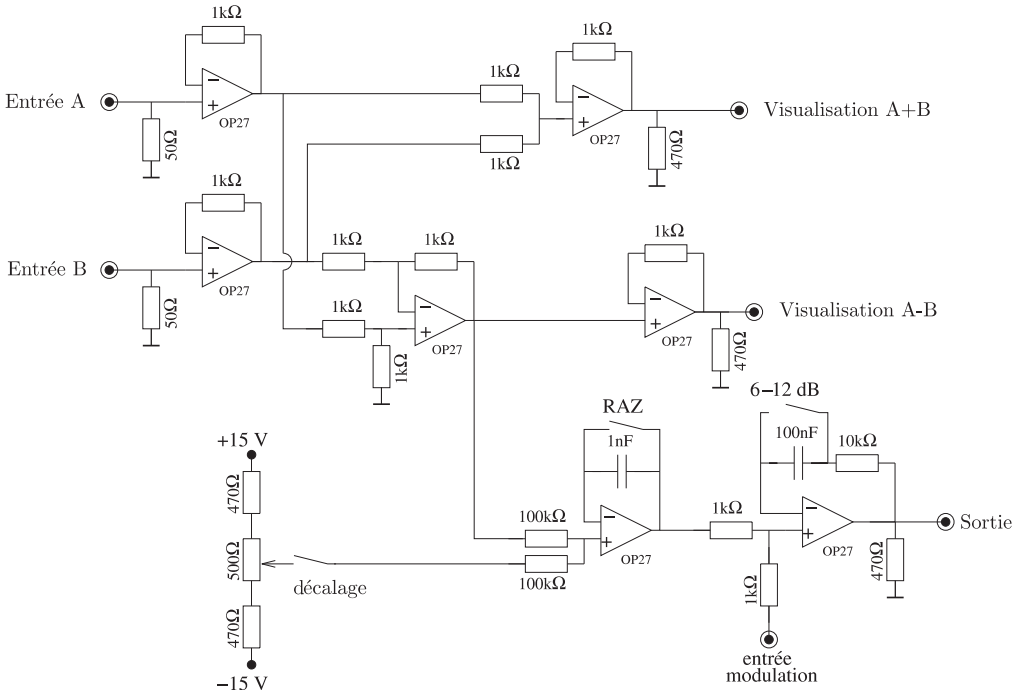


FIG. 4.29 – Schéma de l'électronique d'asservissement de la longueur de la cavité de filtrage.

un premier étage intégrateur pur assurant un grand gain à basse fréquence et enfin par un étage intégrateur en-dessous de 100 Hz qui permet de rajouter du gain uniquement à basse fréquence. On a ainsi un gain variant de -20 dB par décade en-dessous de 100 Hz, et de -10 dB par décade au-delà. On s'est donné la possibilité de s'asservir hors de résonance en ajoutant un décalage continu au signal d'erreur. Cela permet par exemple de s'asservir à mi-pente pour calibrer la modulation de fréquence du laser. On a aussi ajouté une sortie sommant les signaux des deux quadrants pour contrôler l'intensité totale reçue par la photodiode, ce qui est utile dans les procédures d'alignement. Le signal en sortie du boîtier est envoyé vers une amplificateur haute tension 0-1000 V, sur lequel un potentiomètre permet de régler le gain global de l'asservissement. Sa sortie pilote la cale piézoélectrique sur laquelle est monté le miroir de fond de la cavité.

La partie gauche de la figure 4.30 montre le signal d'erreur obtenu en balayant un intervalle spectral libre de la cavité par l'intermédiaire d'une modulation appliquée à la cale piézoélectrique du miroir de fond. On observe les différences de réponse entre les deux quadrants de la photodiode (courbes du milieu), qui se traduisent par un signal d'erreur dont la plage de capture s'étend bien au-delà du pic d'Airy (courbe du bas). On remarque également que les modes transverses induisent eux-mêmes un signal d'erreur non nul lorsqu'ils passent à résonance, ce qui présente un désavantage car il existe ainsi plusieurs points sur lesquels la cavité peut s'asservir. Pour y remédier, on augmente l'intensité incidente sur la cavité de façon à saturer le détecteur à quadrants jusqu'à faire disparaître les variations observées sur la réponse de chaque quadrant lorsque les modes transverses passent à résonance (courbe e de la figure 4.30). On élimine ainsi les variations du signal d'erreur au voisinage des résonances des modes transverses.

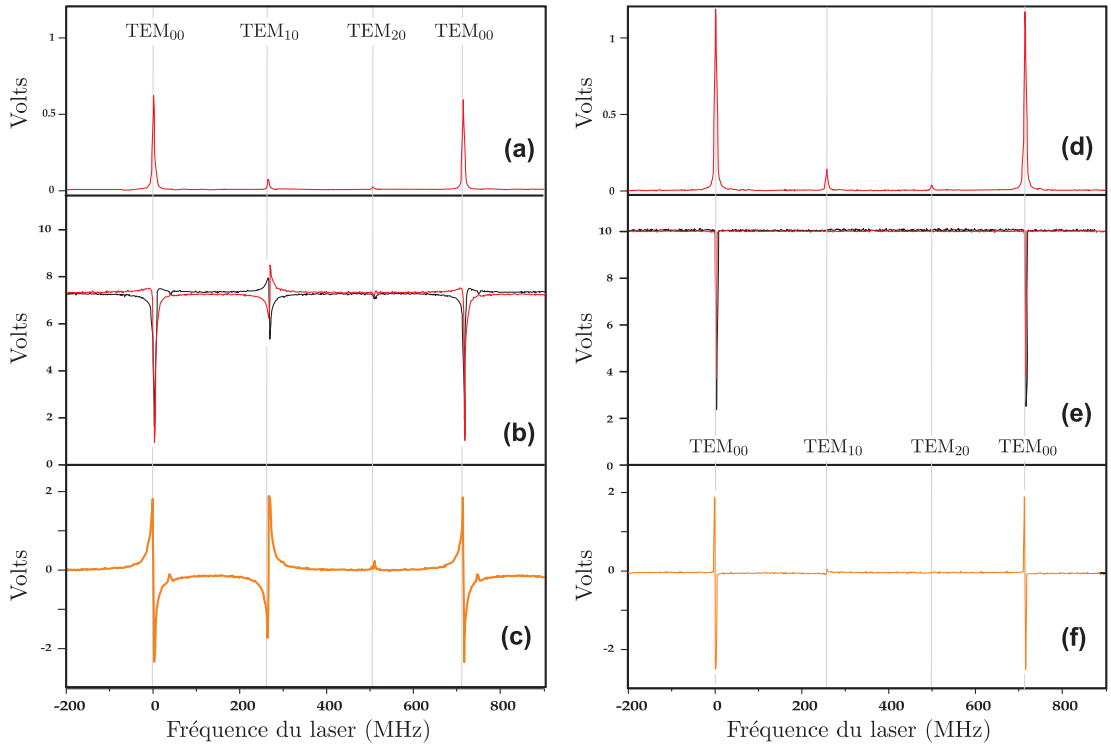


FIG. 4.30 – Transmission (a), intensité réfléchie vue par les deux quadrants (b) et signal d'erreur résultant (c). Les courbes (d), (e), et (f) sont obtenues en saturant la photodiode à quadrants jusqu'à faire disparaître la partie du signal d'erreur correspondant aux modes transverses.

Bien que la saturation réduise aussi la plage de capture de l'asservissement, elle permet que le signal d'erreur n'atteigne des valeurs appréciables qu'au voisinage du mode fondamental. En fermant la boucle d'asservissement, la cavité reste à résonance avec le laser pendant un temps pratiquement illimité. Notons que tout déplacement par rapport au point de fonctionnement correspondant au sommet du pic d'Airy se traduit par une variation de l'intensité transmise, variation qui est automatiquement corrigée par l'asservissement d'intensité. Aussi bien la structure spatiale que le bruit d'intensité du faisceau transmis sont assez peu sensibles à de petits désaccords par rapport à la résonance.

4.4.3 Caractéristiques du faisceau transmis

On a vérifié l'effet de filtrage du faisceau par la cavité en mesurant le profil transverse à l'aide d'un Mode Master de la marque Coherent. L'écart M^2 par rapport au profil gaussien n'est plus que de 1.05 après la cavité, alors qu'il est de 2.1 en amont. De plus, l'astigmatisme a été réduit à une valeur inférieure à 1 %, avec des valeurs mesurées du col selon l'horizontal et le verticale de 168 μm et 167 μm.

On a également mesuré le bruit d'intensité à l'aide d'une détection équilibrée placée en aval de la cavité et on a comparé ce bruit au niveau observé en amont, en conservant la même puissance incidente sur la détection équilibrée (0.5 mW). On a représenté les spectres obtenus sur la figure 4.31. La courbe (a) correspond au bruit d'intensité S_p^{in} mesuré en amont de la

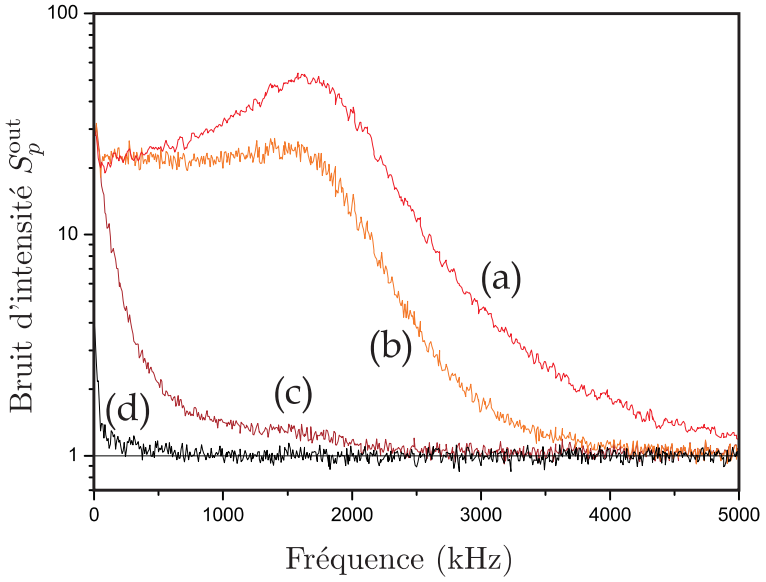


FIG. 4.31 – Bruits d'intensités normalisés mesurés avec une détection équilibrée pour un faisceau incident de 0.5 mW. (a) : bruit d'intensité en amont de la cavité, (b) et (c) : bruit d'intensité en aval de la cavité pour les polarisations p et s, (d) : bruit de photon standard.

cavité de filtrage, les courbes (b) et (c) au bruit S_p^{out} mesuré en sortie, respectivement pour les polarisations (p) et (s). La courbe (d) correspond au niveau du bruit de photon standard. On constate que l'excès de bruit classique, $Q = S_p - 1$, est filtré par la cavité selon l'expression :

$$Q^{\text{out}}[\Omega] = \frac{Q^{\text{in}}[\Omega]}{1 + \Omega^2/\Omega_{\text{c}}^2}, \tag{4.21}$$

où Ω_{c} est la bande passante de la cavité. Plus la finesse est importante, plus Ω_{c} est faible et l'effet de filtrage important. Notons que cette relation est aussi valable pour le bruit classique sur n'importe quelle quadrature du champ : la cavité de filtrage permet ainsi de réduire le bruit de fréquence du laser.

Le fonctionnement en polarisation incidente p qui correspond à la moins bonne finesse de la cavité, présente deux avantages : l'asservissement est moins sensible aux perturbations du fait de la bande passante supérieure de la cavité, et elle a une meilleure transmission globale du fait de la moindre influence des pertes par rapport aux transmissions des miroirs d'entrée-sortie (voir le tableau 4.2). Cela permet d'envoyer plus de lumière vers la cavité de mesure, jusqu'à environ 80 mW en plaçant un filtre atténuateur devant le détecteur à quadrants. Cette marge très importante nous a été utile au début de l'expérience, lorsque les finesses obtenues avec les micro-miroirs étaient faibles, mais aussi lors des premières étapes d'alignement où le signal en transmission de la cavité de mesure est très faible.

Hors de résonance, là où le signal d'erreur est normalement nul, la possibilité d'introduire un léger décalage continu sur le signal d'erreur (voir le schéma sur la figure 4.29) permet de faire dériver l'intégrateur et de d'induire ainsi une variation monotone de la longueur de la cavité. Elle finit alors par retomber sur une résonance sur laquelle elle s'accroche toute

seule. Cela augmente la plage de capture de l'asservissement puisqu'il n'est pas nécessaire de s'approcher d'une résonance pour asservir la cavité lorsqu'on ferme la boucle. Cela s'avère également très utile lorsqu'on recherche le mode fondamental de la cavité de mesure en balayant la fréquence du laser : à chaque décrochage de la cavité de filtrage, la dérive replace automatiquement la cavité sur une résonance. Le sens de la dérive a été choisi pour que cet accrochage automatique fonctionne lorsqu'on diminue la fréquence du laser. Ceci correspond au sens de variation le plus courant lorsqu'on recherche le mode fondamental en descendant dans le peigne de fréquences des modes transverses. Notons que ce décalage continu du signal d'erreur provoque un léger dysfonctionnement de l'asservissement puisque la cavité n'est plus exactement à résonance : cela ne perturbe en rien ses capacités de filtrage du mode spatial et du bruit mais modifie juste l'intensité moyenne transmise qui est de toute façon contrôlée par l'asservissement d'intensité.

4.5 Contrôle de la fréquence du laser

La cavité de mesure doit être maintenue à résonance avec le faisceau laser pour observer les déplacements du micro-miroir. Par ailleurs, ces déplacements induisent des fluctuations par rapport à ce point de fonctionnement, et il faut utiliser un dispositif capable d'extraire cette information des champs sortants de la cavité de mesure. Jusqu'à présent, les expériences développées dans l'équipe [14, 15, 16] ont utilisé un asservissement par détection synchrone de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité : on module la fréquence du laser à relativement basse fréquence, et on crée un signal d'erreur à partir de la modulation résiduelle observée sur l'intensité du faisceau transmis par la cavité. Par ailleurs, pour détecter les déplacements, on mesure les variations de phase du faisceau réfléchi par la cavité à l'aide d'une détection homodyne.

Cette approche présente plusieurs inconvénients dans le cadre de la mesure des déplacements des micro-miroirs. Il faut en particulier disposer d'un faisceau transmis par la cavité de mesure pour asservir le laser, ce qui peut poser un problème dans le cas des micro-miroirs déposés sur une structure en silicium. Par ailleurs, le signal d'erreur a une dynamique limitée en fréquence, ce qui réduit l'efficacité de l'asservissement et impose de disposer d'une cavité de mesure très stable. Pour ces raisons, nous avons décidé d'adopter une autre approche, basée sur la technique Pound-Drever-Hall, pour créer un signal d'erreur lié à l'écart entre la résonance de la cavité de mesure et la fréquence du laser. Cette technique consiste à moduler la phase du faisceau incident sur la cavité. Celle-ci transforme cette modulation de phase en modulation d'intensité, que l'on détecte sur le faisceau réfléchi. Le signal d'erreur est obtenu par démodulation. Cette approche présente plusieurs avantages :

- la fréquence de modulation est élevée, 12 MHz dans notre cas, ce qui donne un signal d'erreur qui n'est pas limité à des fréquences aussi basses qu'avec la détection synchrone ;
- la technique de modulation-démodulation à haute fréquence permet d'obtenir un signal d'erreur qui s'affranchit des bruits techniques à basse fréquence (voir la section 4.6) ;
- le signal d'erreur est récupéré à partir de la modulation d'intensité du faisceau réfléchi par la cavité : il n'utilise pas le faisceau transmis ;
- le signal d'erreur, du fait de sa grande plage de fréquences, est également sensible aux déplacements du micro-miroir.

Ceux-ci provoquent en effet des écarts peu importants par rapport à la résonance, formellement identiques à ceux produits par les variations de fréquence du laser. Il n'est pas utile

de développer une dispositif spécifique pour la détection des déplacements du micro-miroir : c'est la partie haute fréquence du signal Pound-Drever-Hall qui fournit cette information, la partie basse fréquence ($\leq 100\,\mathrm{kHz}$) étant utilisée pour asservir la fréquence du laser.

Dans la suite, on décrit la technique de modulation et le signal d'erreur produit, puis on s'intéresse à sa mise en œuvre expérimentale et à son utilisation pour asservir la fréquence du laser. La section suivante est consacrée à la mesure des déplacements et aux limites de sensibilité liées à la technique Pound-Drever-Hall.

4.5.1 Le signal d'erreur Pound-Drever-Hall

Cette technique a été étendue au domaine optique dans les années 80 par des chercheurs travaillant notamment sur les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles et la stabilisation en fréquence de lasers [25, 26]. En modulant la phase du faisceau incident, on obtient un signal réfléchi modulé en intensité à la même fréquence, qui s'annule à résonance et dont l'amplitude dépend du désaccord. Pour mesurer cette modulation d'intensité, on démodule le signal réfléchi à la fréquence de la modulation, puis on le filtre à l'aide d'un passe-bas ayant une fréquence de coupure inférieure à la fréquence de modulation (voir la figure 4.32).

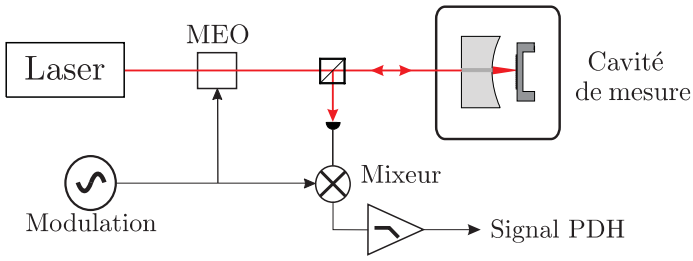


FIG. 4.32 – Principe de l'obtention du signal Pound-Drever-Hall. La phase du faisceau laser est modulée par un modulateur électro-optique, et l'intensité réfléchie par la cavité est démodulée.

Le champ électrique incident sur la cavité de mesure, une fois modulé, s'écrit :

$$\alpha^{\mathrm{in}}(t) = \alpha_{\mathrm{o}}(t)\, e^{i\beta\cos\Delta t}, \tag{4.22}$$

où β est la profondeur de modulation de la phase et Δ sa fréquence. En développant l'exponentielle oscillante sur les fonctions de Bessel $J_i(\beta)$[1], on obtient :

$$\alpha^{\mathrm{in}}(t) = \alpha_{\mathrm{o}}(t)\,\left(J_0 + iJ_1 e^{i\Delta t} - iJ_{-1}e^{-i\Delta t}\right). \tag{4.23}$$

On n'a conservé que les premières fonctions de Bessel, $J_0 \equiv J_0(\beta)$ et $J_1 \equiv J_1(\beta) \equiv -J_{-1}(\beta)$, ce qui suppose que la profondeur de modulation β n'est pas trop importante. La modulation de phase ajoute deux bandes latérales au champ incident, décalées en fréquence de $\pm\Delta/2\pi$ et en quadrature par rapport à la porteuse. En pratique, cette fréquence de modulation est égale à 12 MHz, ce qui place les bandes latérales en dehors de la bande passante de la cavité lorsque celle-ci est à résonance avec la porteuse. Elles sont donc directement réfléchies alors que la porteuse est déphasée d'un angle qui dépend de son désaccord Ψ avec la cavité. Pour

[1] On utilise le développement : $e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\theta} J_n(z)$.

une cavité caractérisée par le taux d'amortissement γ et les pertes P, le coefficient de réflexion $r_\Psi[\Omega]$ pour la porteuse ($\Omega = 0$) et pour les bandes latérales $\Omega = \pm\Delta$ se déduit des équations (2.7) à (2.10) :

$$r_\Psi[\Omega] = \frac{\gamma - P + i\Psi + i\Omega\tau}{\gamma - i\Psi - i\Omega\tau}. \tag{4.24}$$

Le champ réfléchi s'écrit alors :

$$\alpha^{\text{out}}(t) = \alpha_{\text{o}}(t)\,\left(J_0\, r_\Psi[0] + iJ_1\, r_\Psi[-\Delta]\, e^{i\Delta t} + iJ_1\, r_\Psi[\Delta]\, e^{-i\Delta t}\right). \tag{4.25}$$

La photodiode placée en réflexion mesure une intensité $I^{\text{out}}(t) = \left|\alpha^{\text{out}}(t)\right|^2$ qui comporte donc des termes statiques, des termes oscillant à la fréquence de modulation Δ et d'autres à la fréquence double. Ceux oscillant aux fréquences $\pm\Delta$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} I^{\text{out}}\big|_\Delta = -2J_0J_1\overline{I}^{\text{in}}\,\{ \quad & \text{Im}\,\{r^\star_\Psi[0]\,(r_\Psi[-\Delta] + r_\Psi[\Delta])\}\cos(\Delta t) \\ & +\text{Re}\,\{r^\star_\Psi[0]\,(r_\Psi[-\Delta] - r_\Psi[\Delta])\}\sin(\Delta t)\,\}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

En démodulant ce signal à la fréquence Δ, c'est-à-dire en multipliant le photocourant proportionnel à I^{out} par une tension sinusoïdale oscillant à Δ puis en filtrant le signal résultant, on récupère uniquement la composante oscillant à Δ. Selon la phase relative entre le signal réfléchi et la tension sinusoïdale de démodulation, on récupère le premier ou le second terme dans l'équation (4.26). Le second terme, oscillant comme $\sin(\Delta t)$, a une dérivée nulle par rapport au désaccord Ψ autour de $\Psi = 0$: il est donc inexploitable pour effectuer un asservissement. Il faut donc démoduler avec un signal en phase avec la modulation initiale $\cos(\Delta t)$, et le signal d'erreur s'écrit alors :

$$\begin{aligned} V_{\text{err}}(\Psi) &= \eta < I^{\text{out}}(t)\cos(\Delta t) > \\ &= -\eta J_0J_1\overline{I}^{\text{in}}\text{Im}\,\{r^\star_\Psi[0]\,(r_\Psi[-\Delta] + r_\Psi[\Delta])\}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

où la moyenne temporelle $< ... >$ porte sur un temps long devant la période de modulation $2\pi/\Delta$, et η rend compte de l'efficacité quantique de détection de l'intensité réfléchie. La dépendance du signal d'erreur avec le désaccord Ψ est représentée sur la figure 4.33, pour une cavité de bande passante $\Omega_{\text{c}} = \gamma/\tau = 2\pi \times 1\,\text{MHz}$ et une fréquence de modulation $\Delta/2\pi = 12\,\text{MHz}$.

On peut simplifier l'expression (4.27) lorsque le désaccord de la cavité Ψ et les pertes γ sont petites par rapport à $\Delta\tau$, c'est-à-dire lorsque la porteuse reste au voisinage de la résonance et les bandes latérales sont bien au-delà de la bande passante de la cavité (partie centrale de la figure 4.33, au voisinage de $\Psi = 0$). On obtient alors :

$$V_{\text{err}}(\Psi) \approx -\eta J_0J_1\overline{I}^{\text{in}}\,\frac{2T\Psi}{\gamma^2 + \Psi^2}. \tag{4.28}$$

On constate que le signal d'erreur varie très rapidement au voisinage du désaccord nul, où il change de signe. Il devrait donc permettre d'asservir efficacement la fréquence du laser sur la cavité de mesure. D'après l'équation (4.27), on voit que la pente est proportionnelle au facteur $J_0(\beta)J_1(\beta)$ dont la dépendance avec la profondeur de modulation est représentée en pointillé sur la partie droite de la figure 4.33, en superposition avec les points obtenus expérimentalement. Quand la profondeur de modulation β augmente, J_0 décroît alors que

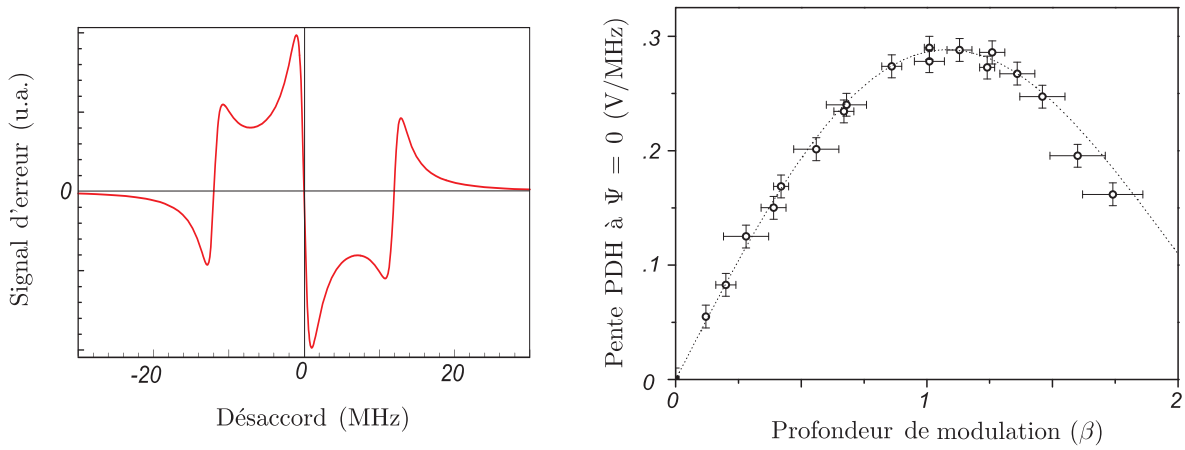


FIG. 4.33 – A gauche : signal d'erreur Pound-Drever-Hall (PDH) tracé pour une cavité ayant une bande passante de 1 MHz, pour des bandes latérales à la fréquence de 12 MHz. A droite : dépendance de la pente du signal PDH avec la profondeur de modulation β.

J_1 croît. Il existe donc un optimum qui maximise la pente du signal d'erreur. On l'obtient numériquement pour $\beta_{\text{opt}} = 1.08$. La pente du signal d'erreur varie aussi de manière linéaire avec la puissance lumineuse. Pour augmenter le signal par rapport au bruit de l'électronique, il est préférable de travailler avec une profondeur de modulation de l'ordre de 1, et d'augmenter la puissance incidente tout en la gardant inférieure à la puissance maximale que peut supporter la cavité. Nous verrons dans la section 4.6 qu'il existe également une limite de sensibilité liée au bruit de photon du faisceau laser.

Les points expérimentaux de la figure 4.33 ont été obtenus en balayant la fréquence du laser autour de la résonance de la cavité. On calibre l'axe horizontal en utilisant le fait que les annulations du signal d'erreur se produisent pour des fréquences multiples de $\Delta/2\pi = 12\,\text{MHz}$. On mesure alors la pente en effectuant un ajustement linéaire du signal au voisinage du désaccord nul. La mesure de la profondeur de modulation se fait en acquérant le signal transmis par la cavité. Les hauteurs des différents pics observés lors du balayage sont proportionnelles à $J_0(\beta)^2$ pour la porteuse et à $J_1(\beta)^2$ pour les bandes latérales. On a donc accès à la profondeur de modulation β en comparant ces hauteurs à celle de la porteuse transmise sans modulation, et en inversant numériquement les expressions de J_0 et J_1. En pratique, les mesures des intensités sur les trois pics ne donnent pas exactement la même valeur pour β et c'est la valeur moyenne qu'on a représentée, les barres d'erreur horizontales traduisant les différences observées. On a pris des mesures avec une puissance de modulation qui varie d'une valeur presque nulle jusqu'à la puissance maximale admissible sur le modulateur de phase, qui est de l'ordre du watt. Les incertitudes verticales sont dues au bruit présent sur le signal d'erreur. On peut noter le bon accord avec la courbe théorique en pointillés, dont le seul paramètre ajustable est la hauteur globale.

4.5.2 Asservissement du laser sur la cavité de mesure

Le signal d'erreur sert à la fois à la mesure des déplacements du micro-miroir et à l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité de mesure. Pour contrôler

la fréquence du laser, on dispose de deux voies, l'une très lente qui contrôle la température du cristal YAG, l'autre plus rapide qui pilote la cale piézoélectrique placée sur le cristal. On détaille ici les électroniques de génération du signal d'erreur Pound-Drever-Hall et de l'asservissement, dont le schéma de principe est représenté sur la figure 4.34.

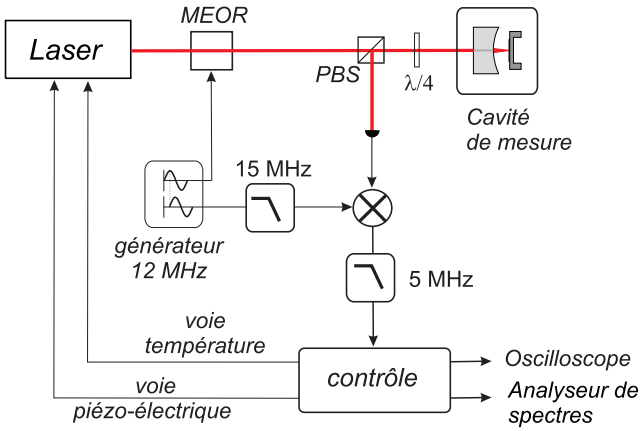


FIG. 4.34 – Schéma de principe de l'asservissement de fréquence du laser sur la cavité de mesure. La partie basse fréquence du signal Pound-Drever-Hall est utilisée pour asservir la fréquence du laser sur la cavité optique, tandis que la partie haute fréquence sert à mesurer les déplacements du résonateur.

La phase du faisceau incident sur la cavité est modulée au moyen d'un modulateur électro-optique résonnant (modèle 4003 de la marque New Focus). Il s'agit d'un cristal de niobate de lithium dopé avec de l'oxyde de magnésium ($MgO : LiNbO_3$), piloté par un circuit électrique résonnant. Lorsqu'on applique une tension électrique, l'indice optique de l'une des directions propres du cristal est modifié par effet Pockels de manière proportionnelle à la tension appliquée. L'emploi d'un circuit résonnant permet d'obtenir une profondeur de modulation importante avec des signaux électriques plus faibles, ce qui limite les problèmes de rayonnement électromagnétique. Ce modulateur fonctionne à la fréquence de 12 MHz, une fréquence supérieure à la plage d'analyse des mouvements du micro-résonateur, qui s'étend typiquement de 0 à 5 MHz. La modulation électrique à 12 MHz est fournie par un générateur construit par l'atelier d'électronique du laboratoire. Il fournit une puissance allant jusqu'à 1.5 W sur une impédance de 50 Ω, ce qui permet d'atteindre une profondeur de modulation β de la phase de l'ordre du radian. Ce générateur fournit aussi un second signal synchronisé avec le premier mais avec une déphasage ajustable au moyen d'un potentiomètre. C'est ce signal qu'on utilise pour démoduler le signal fourni par la sortie HF de la photodiode de mesure et produire ainsi le signal d'erreur Pound-Drever-Hall. Comme le montre la figure 4.34, cette modulation de référence est d'abord filtrée par un circuit passe-bas à 15 MHz (Mini-Circuits PLP-15) pour éliminer les harmoniques supérieures. Elle est multipliée par le signal provenant de la photodiode au moyen d'un composant Mini-Circuits SBL-1, et le produit est à nouveau filtré pour éliminer les fréquence élevées produites par la multiplication (filtre PLP-5). La fréquence de coupure choisie est de 5 MHz, ce qui est suffisant pour observer les déplacements du micro-résonateur puisque la bande passante de la cavité de mesure est typiquement de l'ordre du MHz.

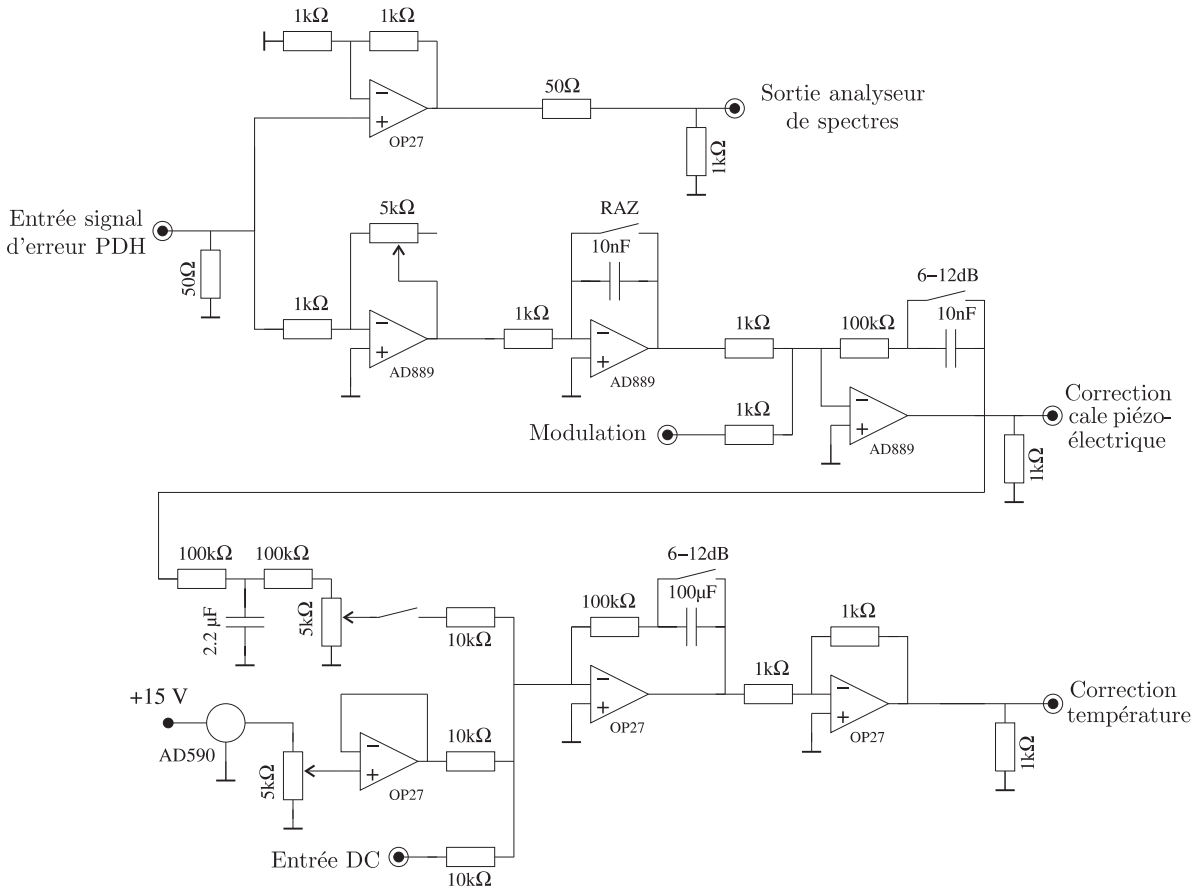


FIG. 4.35 – Schéma de l'électronique servant à l'asservissement de la fréquence du laser ainsi qu'à la mesure des petits déplacements du micro-miroir.

Le signal d'erreur ainsi produit est envoyé vers un boîtier de contrôle contenant toute l'électronique nécessaire à l'asservissement et à la mesure (figure 4.35). Le signal d'erreur entrant est adapté à 50 Ω, puis il est directement amplifié et adapté à 50 Ω pour la sortie vers l'analyseur de spectres. Le gain de 2 sur l'étage amplificateur permet de compenser la chute de tension liée à l'adaptation d'impédance à 50 Ω. Cette sortie reproduit donc le signal d'erreur et est envoyée à la fois vers un oscilloscope dont l'impédance est fixée à 1 MΩ et vers l'analyseur de spectres qui sert à la mesure proprement dite. L'analyseur utilisé est un modèle de la marque Agilent. Le signal d'erreur est également directement envoyé vers les circuits servant à l'asservissement. Pour compenser les fluctuations rapides de la longueur de la cavité induites par exemple par les vibrations, mais aussi pour s'affranchir des dérives lentes, on doit utiliser un asservissement à deux voies qui exploite les deux possibilités de contrôle de la fréquence du laser. Typiquement, le signal d'erreur Pound-Drever-Hall a une sensibilité de l'ordre de 100 mV/MHz, alors que la sensibilité de la voie piézoélectrique du laser est de 0.2 MHz/V et celle de la voie lente d'environ 3 GHz/V. Les étages amplificateurs sont donc adaptés à cette différence de sensibilité entre les deux voies. Le signal est d'abord amplifié avec un gain ajustable puis il passe par un étage intégrateur qu'on peut court-circuiter au moyen d'un interrupteur. Le gain est de l'ordre de l'unité à 16 kHz. Un deuxième étage se

comporte comme un intégrateur à basse fréquence, en-dessous de 160 Hz, et assure un gain de 100 au-delà. On a ajouté une entrée supplémentaire, qui sert à moduler la fréquence du laser. La sortie de la voie rapide est envoyée directement sur la cale piézoélectrique contrôlant la fréquence du laser. Ce signal est également mis en forme pour assurer la correction envoyée sur l'entrée commandant la température du cristal YAG. Un filtre passe-bas passif limite le signal aux fréquences inférieures à 1 Hz ; il est suivi par un pont diviseur ajustable au moyen d'un potentiomètre placé en face avant. Un interrupteur permet de mettre en marche ou non la voie lente. Au moyen d'un amplificateur sommateur, on ajoute à ce signal, d'une part une tension continue fournie par un régulateur AD 590 qui permet un ajustement fin de la température, d'autre part une entrée DC qui sert par exemple à produire un balayage lent de la fréquence du laser. Un étage intégrateur uniquement à très basse fréquence, en-dessous de 0.1 Hz, permet à la voie lente de prendre la main et ainsi d'éliminer les dérives à long terme. Enfin, un dernier étage inverseur adapte le signe de la rétroaction. La sortie du boîtier est envoyée dans un atténuateur 10 dB externe afin de réduire encore le gain de la boucle lente. Les amplificateurs utilisés sont des AD 889 sur la voie rapide, et des OP27 sur la voie lente. Les décalages des amplificateurs ont été compensés en ajustant leur tension d'offset entre leurs pattes 1 et 8.

La séquence d'accrochage

Les traces temporelles des différents signaux acquis lors de la mise en marche de l'asservissement sont représentées sur la figure 4.36. L'accrochage de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité de mesure se fait en plusieurs étapes. D'abord, on approche la fréquence du laser de la résonance en visualisant par exemple l'intensité transmise par la cavité au moyen d'une caméra CCD. Pour s'assurer qu'on travaille sur le mode fondamental, on vérifie que le profil transverse du faisceau transmis par la cavité de mesure est bien celui d'un mode TEM_{00} (voir par exemple la figure 4.26). On fait varier la fréquence du laser pour se rapprocher de la résonance en changeant lentement la tension continue envoyée sur l'entrée DC de la voie température du laser. Cela correspond aux marches d'escalier observées avant l'instant $t = 0$ sur la voie lente. Une fois qu'on est au voisinage de la résonance optique, on commute l'interrupteur contrôlant l'intégrateur pur de la voie rapide, à l'instant $t = 0$ sur le graphe. L'asservissement fonctionne alors et compense les fluctuations rapides de longueur de la cavité ; le signal d'erreur est maintenu à zéro et l'intensité en réflexion est stabilisée à sa valeur minimale. Cependant, la valeur moyenne de la correction envoyée vers la voie rapide varie, ce qui traduit l'existence de dérives lentes de la longueur de la cavité. On met alors en route l'asservissement de température en basculant l'interrupteur de la voie lente (à l'instant T), ce qui a pour effet de ramener la correction de la voie rapide autour de zéro. Une fois l'ensemble stabilisé, on met en route le dernier étage de l'asservissement de température qui ajoute encore du gain à très basse fréquence, ce qui permet de stabiliser le système sur de très longues durées.

Le fonctionnement de l'asservissement s'est avéré très satisfaisant. Lorsque la température de la cavité est bien régulée, on peut maintenir le laser à résonance pendant des heures. Le signal d'erreur a un bruit suffisamment faible pour permettre l'asservissement avec de très faibles intensités incidentes, jusqu'à $10\,\mu$W. A forte puissance, l'asservissement réduit de manière efficace les fluctuations du système, ce qui nous a permis d'approcher les zones d'instabilité dynamique induite par la pression de radiation sur le micro-résonateur, comme

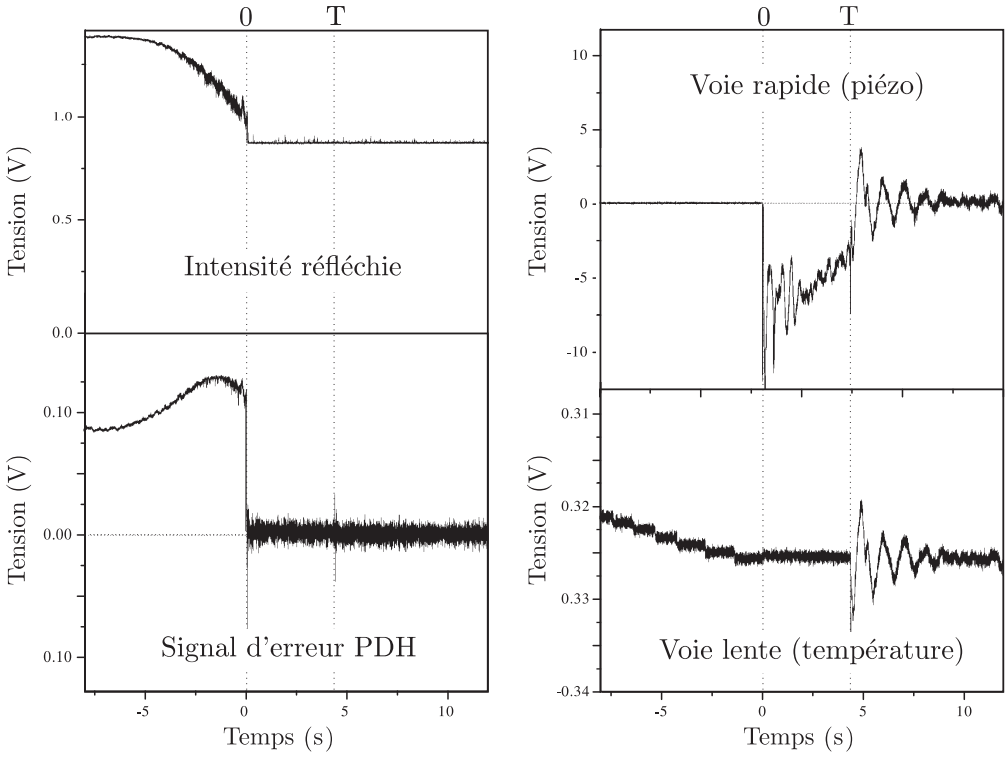


FIG. 4.36 – La séquence d'accrochage de l'asservissement de la fréquence du laser sur la cavité de mesure. A gauche, l'intensité réfléchie et le signal d'erreur PDH. A droite, la correction de la voie température et de la voie piézoélectrique. A l'instant $t = 0$, on met en route la voie rapide, à l'instant T la voie lente.

nous le verrons dans le chapitre 6. Enfin, en mesurant le bruit sur le signal d'erreur à basse fréquence, on constate que l'asservissement réduit les fluctuations relatives entre le laser et la cavité pour les fréquences inférieures à 20 kHz. Au-delà, il ne modifie pas les spectres de bruit observés. Ainsi, l'acquisition du signal d'erreur sur l'analyseur de spectres permet de mesurer les vibrations du micro-miroir à des fréquences supérieures à 20 kHz, alors que le mode fondamental de vibration se trouve pour les structures étudiées aux alentours de 300 kHz.

4.6 Sensibilité de la mesure

On étudie dans cette partie la sensibilité de la mesure lorsqu'elle est effectuée par la technique de Pound-Drever-Hall. On applique la méthode semi-classique qui permet de relier le spectre du signal d'erreur aux fluctuations du champ incident sur la cavité de mesure et aux fluctuations de position du micro-miroir. On va ainsi faire apparaître deux sources de bruit : le bruit de photon lié à la nature quantique de la lumière et le bruit de fréquence du laser.

4.6.1 Sensibilité d'une mesure utilisant la technique Pound-Drever-Hall

Nous avons présenté dans le chapitre 2 les limites de sensibilité de la mesure de déplacements, en supposant que la mesure a directement accès à la quadrature de phase du faisceau réfléchi par la cavité, comme c'est le cas par exemple avec une détection homodyne. Le concept du signal Pound-Drever-Hall est différent puisqu'on reporte l'information contenue dans le déphasage du faisceau réfléchi sur le battement avec les bandes latérales, que l'on récupère ensuite par démodulation. Aussi bien la dépendance de la mesure avec les déplacements du résonateur que les bruits ajoutés par la lumière sont différents. Nous allons dans un premier temps déterminer ces caractéristiques dans le cas idéal d'une cavité sans perte et à résonance. Nous étudierons ensuite l'effet des pertes et du désaccord.

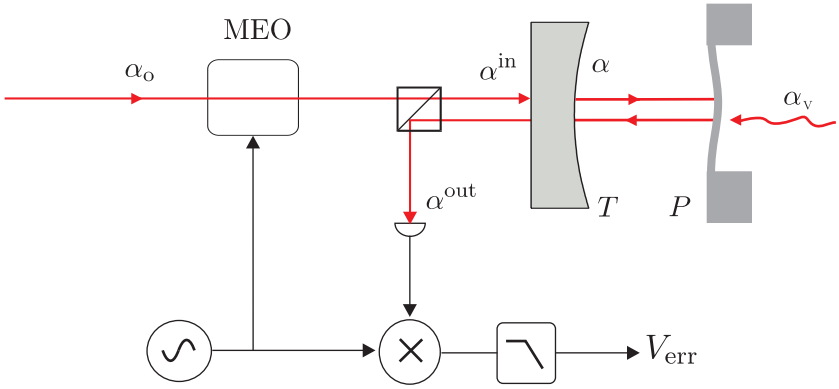


FIG. 4.37 – Définition des champs dans la détection Pound-Drever-Hall.

Le schéma de la détection Pound-Drever-Hall et des champs intervenant dans le calcul sont présentés sur la figure 4.37. Le champ α_o incident sur l'électro-optique est décrit comme la somme d'un champ moyen $\overline{\alpha}_o$ indépendant du temps et des fluctuations semi-classiques $\delta\alpha_o(t)$. Le champ α^{in} incident sur la cavité est obtenu par modulation de phase, soit comme précédemment par multiplication du champ $\alpha_o(t)$ par le terme exponentiel $e^{i\beta\cos\Delta t}$ (voir équation 4.22). Dans le calcul qui suit, il est nécessaire de développer jusqu'à l'ordre 2 en la profondeur de modulation β. Cela signifie [2] qu'on se limite dans le développement précédent aux termes en $J_2(\beta)$. On obtient :

$$\alpha^{in}(t) = (\overline{\alpha}_o + \delta\alpha_o(t))\left\{J_0 + iJ_1(e^{i\Delta t} + e^{-i\Delta t}) - J_2\left(e^{2i\Delta t} + e^{-2i\Delta t}\right)\right\}. \tag{4.29}$$

On sépare le champ incident en un champ moyen $\overline{\alpha}^{in}$ et en des fluctuations $\delta\alpha^{in}$. Il faut noter que le champ moyen dépend du temps, comme on l'a déjà vu lors de l'étude du signal d'erreur (équation 4.23) puisqu'il est modulé en phase. Les transformées de Fourier s'écrivent :

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}^{in}[\Omega] = \quad & \overline{\alpha}_o\left\{J_0\delta(\Omega) + iJ_1\left(\delta(\Omega-\Delta) + \delta(\Omega+\Delta)\right)\right.\\ & \left. -J_2\left(\delta(\Omega-2\Delta) + \delta(\Omega+2\Delta)\right)\right\}, \qquad (4.30)\\ \delta\alpha^{in}[\Omega] = \quad & J_0\delta\alpha_o[\Omega] + iJ_1\left(\delta\alpha_o[\Omega-\Delta] + \delta\alpha_o[\Omega+\Delta]\right)\\ & -J_2\left(\delta\alpha_o[\Omega-2\Delta] + \delta\alpha_o[\Omega+2\Delta]\right). \qquad (4.31)\end{aligned}$$

[2] Les développements des premières fonctions de Bessel limités à l'ordre 2 en β s'écrivent : $J_0(\beta) = 1 - \frac{\beta^2}{4}$, $J_1(\beta) = \frac{\beta}{2}$ et $J_2(\beta) = \frac{\beta^2}{8}$.

On peut retrouver à partir de ces expressions un certain nombre de propriétés de l'intensité $\overline{I}^{\text{in}}$ transmise par l'électro-optique, dont la transformée de Fourier est définie par :

$$I^{\text{in}}[\Omega] = \int d\omega \; \alpha^{\text{in}\star}[\omega]\alpha^{\text{in}}[\Omega - \omega]. \tag{4.32}$$

A l'ordre deux dans la profondeur de modulation, on trouve que l'intensité transmise par le modulateur électro-optique vérifie $\overline{I}^{\text{in}}[\Omega] = \overline{\alpha}_{\text{o}}{}^2\,\delta(\Omega)$ et $\delta I^{\text{in}}[\Omega] = \overline{\alpha}_{\text{o}}\delta p_{\text{o}}[\Omega]$ où $\delta p_{\text{o}}[\Omega]$ est la quadrature d'amplitude du champ α_{o}. Ces relations signifient simplement que la modulation de phase n'affecte pas l'intensité du champ transmis : celle-ci a les mêmes valeur moyenne et fluctuations que l'intensité incidente. Notons toutefois que si l'intensité totale a les mêmes caractéristiques, le champ est maintenant décomposé en une porteuse d'intensité $J_0^2\overline{\alpha}_{\text{o}}^2$ et des bande latérales aux différents harmoniques de Δ.

Pour une cavité à résonance avec la porteuse dont la bande passante γ/τ est petite devant la fréquence de modulation Δ, l'amplitude du champ dans la cavité est donc réduite d'un facteur J_0 par rapport au cas sans modulation (équation 2.14) :

$$\overline{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} J_0 \overline{\alpha}_{\text{o}}, \tag{4.33}$$

A partir des équations (2.7) à (2.10), on peut écrire les relations d'entrée-sortie de la cavité à résonance sous la forme :

$$\alpha^{\text{out}}[\Omega] = r_0[\Omega]\alpha^{\text{in}}[\Omega] + \frac{i}{2}\delta q_{\text{cav}}[\Omega] \;, \tag{4.34}$$

où $r_0[\Omega] = (\gamma + i\Omega\tau)\,/\,(\gamma - i\Omega\tau)$ est le coefficient de réflexion effectif de la cavité à résonance (équation 4.24), et δq_{cav} représente les variations de phase du champ réfléchi induites par les déplacements δx du miroir :

$$\delta q_{\text{cav}}[\Omega] = \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau}\overline{\alpha}k\delta x[\Omega]. \tag{4.35}$$

On notera que ces variations sont aussi réduites d'un facteur J_o par rapport au cas sans modulation, puisqu'elles sont proportionnelles au champ intracavité $\overline{\alpha}$.

L'intensité I^{out} réfléchie par la cavité est donnée par une équation similaire à (4.32). En utilisant les expressions (4.30) à (4.32), on peut calculer sa valeur moyenne $\overline{I}^{\text{out}}$ et ses fluctuations δI^{out}. L'intensité moyenne réfléchie est donnée par

$$\overline{I}^{\text{out}}[\Omega] = \overline{\alpha}_{\text{o}}{}^2\left\{\delta(\Omega) + 2J_1{}^2\delta(\Omega - 2\Delta) + 2J_1{}^2\delta(\Omega + 2\Delta)\right\}, \tag{4.36}$$

où on a utilisé le fait qu'à l'ordre 2 dans β, on a $4J_0J_2 \simeq 2J_1{}^2 \simeq 1 - J_0{}^2$. L'intensité réfléchie ne présente pas de modulation à la fréquence Δ, comme on s'y attend d'après les résultats de la section 4.5.1 lorsque la cavité est exactement à résonance. Par contre, il apparaît une modulation à la fréquence double, qui est due au fait que le point de fonctionnement est

modulé à la fréquence Δ au sommet du pic d'Airy. Les fluctuations de l'intensité réfléchie sont données par l'expression :

$$\begin{aligned}\delta I^{\text{out}}[\Omega] \;=\; \overline{\alpha}_{\text{o}}\Big\{ & \left({J_0}^2 r_0[\Omega] - {J_1}^2 r_0[\Omega+\Delta] - {J_1}^2 r_0[\Omega-\Delta]\right)\ \delta p_{\text{o}}[\Omega] \\ & -J_0 J_1 \sum_{\epsilon=\pm 1} \left(r_0[\Omega] + r_0[\Omega+\epsilon\Delta]\right)\ \delta q_{\text{o}}[\Omega+\epsilon\Delta] \\ & -\sum_{\epsilon=\pm 1} \left({J_1}^2 r_0[\Omega+\epsilon\Delta] + J_0 J_2 \left(r_0[\Omega] - r_0[\Omega+2\epsilon\Delta]\right)\right)\ \delta p_{\text{o}}[\Omega+2\epsilon\Delta] \\ & -J_1 \left(\delta q_{\text{cav}}[\Omega-\Delta] + \delta q_{\text{cav}}[\Omega+\Delta]\right) \Big\}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

On peut comprendre les différents éléments apparaissant dans cette expression en termes de battement entre le champ moyen composé de la porteuse et des bandes latérales, avec les fluctuations du champ réfléchi par la cavité. Ainsi la première ligne représente les bruits d'intensité de la porteuse (terme en ${J_0}^2$) et des deux bandes latérales à $\pm\Delta$ (termes en ${J_1}^2$). La deuxième ligne correspond au bruit de phase $\delta q_{\text{o}}[\Omega \pm \Delta]$ du faisceau ramené à la fréquence Ω par le battement avec les deux bandes latérales. Enfin, la dernière ligne correspond au signal proprement dit $\delta q_{\text{cav}}[\Omega \pm \Delta]$, ramené de la même façon à la fréquence Ω par le battement.

On peut noter qu'une mesure directe du bruit d'intensité à une fréquence Ω petite devant Δ ne fournit aucune information utile puisque le signal $\delta q_{\text{cav}}[\Omega \pm \Delta]$ est alors pris à une fréquence proche des bandes latérales, donc bien en-dehors de la bande passante de la cavité. Il est nécessaire de démoduler à la fréquence de modulation Δ pour récupérer un signal δq_{cav} non nul. Lors de la démodulation, le photocourant, proportionnel à $I^{\text{out}}(t)$ est multiplié par une tension sinusoïdale oscillant à la fréquence Δ, avec un déphasage choisi pour maximiser l'amplitude du signal, comme on l'a vu en section 4.5.1. Ce signal est ensuite envoyé dans un filtre passe-bas qui ne conserve que les fréquences inférieures à celle de la modulation, ce qui fournit le signal d'erreur V_{err}. Ses fluctuations s'écrivent :

$$\delta V_{\text{err}}[\Omega] = \frac{1}{2}\left(\delta I^{\text{out}}[\Omega+\Delta] + \delta I^{\text{out}}[\Omega-\Delta]\right)\ F[\Omega], \tag{4.38}$$

où la fonction $F[\Omega]$ est la fonction de transfert du filtre passe-bas, avec une fréquence de coupure comprise entre la bande passante de la cavité et la fréquence de modulation. Par rapport au calcul du signal d'erreur effectué dans la section 4.5.1 (équation 4.27), on a supposé l'efficacité quantique η égale à 1, ce qui correspond à une détection idéale. En supposant que la fréquence de modulation est très grande devant la bande passante de la cavité, les fluctuations $\delta V_{\text{err}}[\Omega]$ du signal d'erreur sont données par les relations (4.37) et (4.38), avec $r_0[\Omega \pm n\Delta] = -1$ pour les bandes latérales ($n \neq 0$). Ces fluctuations dépendent du bruit de phase incident $\delta q_{\text{o}}[\Omega]$ et du signal $\delta q_{\text{cav}}[\Omega]$ à la fréquence Ω, du bruit d'amplitude incident $\delta p_{\text{o}}[\Omega \pm \Delta]$ autour des porteuses et d'autres bruits à des fréquences plus élevées :

$$\begin{aligned}\delta V_{\text{err}}[\Omega] \;=\; \overline{\alpha}_{\text{o}}\Big\{ & -J_1 \delta q_{\text{cav}}[\Omega] + J_0 J_1 (1 - r_0[\Omega]) \delta q_{\text{o}}[\Omega] \\ & -\left(\frac{J_0^2 - J_1^2}{2} + r_0[\Omega] J_1^2\right)\left(\delta p_{\text{o}}[\Omega+\Delta] - \delta p_{\text{o}}[\Omega+\Delta]\right) \\ & +J_0 J_1 \left(\delta q_{\text{o}}[\Omega-2\Delta] + \delta q_{\text{o}}[\Omega+2\Delta]\right) \\ & +\frac{{J_1}^2}{2}\left(\delta p_{\text{o}}[\Omega-3\Delta] + \delta p_{\text{o}}[\Omega+3\Delta]\right) \Big\}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Les termes importants se trouvent sur la première ligne : il s'agit du signal δq_{cav} et d'un bruit lié aux fluctuations de phase δq_{o} que l'on va bientôt identifier comme le bruit de fréquence du faisceau laser. Toutes les autres fluctuations sont à des fréquences plus élevées, là où le faisceau laser ne présente plus d'excès de bruit classique si la fréquence de modulation est suffisamment grande. En d'autres termes, toutes ces fluctuations correspondent au bruit de photon standard ($S_{p_{\mathrm{o}}}[\Omega \pm n\Delta] = S_{q_{\mathrm{o}}}[\Omega \pm n\Delta] \equiv 1$) et vont induire une limite de sensibilité dans la mesure. Dans ces conditions, le spectre de bruit du signal d'erreur s'écrit :

$$S_{\mathrm{err}}[\Omega] = \overline{\alpha}_{\mathrm{o}}{}^2 \left\{ J_1^2 S_q^{\mathrm{cav}}[\Omega] + J_0^2 J_1^2 |1 - r_0[\Omega]|^2 \left(S_{q_{\mathrm{o}}}[\Omega] - 1\right) + \frac{J_0{}^2}{2}\left(1 + 4J_1{}^2\right) \right\}. \tag{4.40}$$

Il fait apparaître trois termes : le signal proportionnel à S_q^{cav}, le bruit de fréquence relié au bruit classique de phase $S_{q_{\mathrm{o}}} - 1$ (voir les sections suivantes) et un terme constant relié aux bruits de photon de la porteuse et des bandes latérales.

Avant de décrire plus en détail ces différents bruits, nous généralisons cette expression au cas d'une cavité présentant des pertes. Celles-ci sont décrites par un coefficient P et par des fluctuations entrantes $\delta\alpha_{\mathrm{v}}$ (voir figure 4.37). Elles réduisent l'amplitude $\overline{\alpha}$ du champ dans la cavité (équations 4.33 et 2.14) et modifient l'expression (4.35) du signal δq_{cav} en fonction du déplacement δx. D'après les relations (2.14) et (2.23), on obtient :

$$\overline{\alpha} = \frac{\sqrt{T}}{\gamma} J_0 \overline{\alpha}_{\mathrm{o}} \tag{4.41}$$

$$\delta q_{\mathrm{cav}}[\Omega] = \frac{4\sqrt{T}}{\gamma - i\Omega\tau} \overline{\alpha} k \delta x[\Omega]. \tag{4.42}$$

Elles modifient également le coefficient de réflexion effectif de la cavité, donné par l'équation (4.24). En effectuant le calcul comme dans le cas sans pertes, on obtient une expression pour le spectre de bruit du signal d'erreur qui généralise (4.40) :

$$S_{\mathrm{err}}[\Omega] = \overline{\alpha}_{\mathrm{o}}{}^2 \left\{ J_1^2 S_q^{\mathrm{cav}}[\Omega] + J_0^2 J_1^2 |r_0[0] - r_0[\Omega]|^2 \left(S_{q_{\mathrm{o}}}[\Omega] - 1\right) + \frac{J_0{}^2}{2}\left(r_0[0]^2 + (3 + r_0[0])\, J_1{}^2\right) \right\}. \tag{4.43}$$

On retrouve les mêmes termes, excepté pour les facteurs numériques multiplicatifs qui font maintenant apparaître le coefficient $r_0[0] = (\gamma - P)/\gamma$, égal à 1 dans le cas sans pertes.

4.6.2 Mesure des déplacements

Le signal d'erreur mesure les déplacements du micro-résonateur, puisque le premier terme dans l'équation (4.43) s'écrit :

$$S_{\mathrm{err}}^{(x)}[\Omega] = \left(J_0 J_1 \overline{\alpha}_{\mathrm{o}}\right)^2 \frac{4T^2/\gamma^2}{\gamma^2 + \Omega^2\tau^2} 4k^2 \overline{\alpha}_{\mathrm{o}}^2 S_x[\Omega]. \tag{4.44}$$

Le signal δV_{err} mesuré par la détection Pound-Drever-Hall fournit donc un estimateur $\delta\hat{x}$ des déplacements du résonateur défini par :

$$\delta V_{\mathrm{err}}[\Omega] = \left(J_0 J_1 \overline{\alpha}_{\mathrm{o}}^2 \frac{2T}{\gamma^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2/\Omega_c^2}}\, 2k\, \delta\hat{x}[\Omega]. \tag{4.45}$$

On reconnaît dans la parenthèse la pente à désaccord nul ($\Psi = 0$) du signal d'erreur donnée par l'expression (4.28) avec $\eta = 1$:

$$\frac{dV_{\mathrm{err}}}{d\Psi}(\Psi = 0) = -J_0 J_1 \overline{\alpha}_{\mathrm{o}}{}^2 \frac{2T}{\gamma^2}. \tag{4.46}$$

Sachant qu'un déplacement δx du miroir produit un déphasage $\delta\Psi = 2k\delta x$, le signal d'erreur a la forme attendue, égale au produit de la pente statique par le déphasage induit par le déplacement. A plus haute fréquence, la cavité se comporte comme un filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à sa bande passante Ω_c. La réponse du signal d'erreur au déplacement est réduite en conséquence (dénominateur dans l'équation 4.45). Ce résultat permet de calibrer la mesure des déplacements : il suffit de connaître la pente statique du signal d'erreur à résonance et la bande passante de la cavité. Ces deux quantités peuvent être mesurées comme on l'a présenté précédemment en balayant la résonance de la cavité et en acquérant le signal d'erreur Pound-Drever-Hall. La précision de la mesure est principalement limitée par la bistabilité photothermique liée à l'absorption de lumière dans les couches diélectriques des miroirs : elle induit une dilatation de la cavité et déforme à la fois les pics d'Airy en transmission et le signal d'erreur. Pour remédier à ce problème, il faut balayer la cavité suffisamment rapidement : l'intensité absorbée est alors limitée et les dilatations négligeables. On a vérifié la concordance de ces mesures avec celles réalisées à plus basse intensité, où la non-linéarité est réduite, et extrapolées à plus forte intensité via la formule (4.28), qui indique que la pente est proportionnelle à l'intensité incidente.

Une fois la pente statique du signal d'erreur et la bande passante de la cavité mesurées, les déplacement $\delta\hat{x}$ sont reliés au spectre $S_{\mathrm{err}}[\Omega]$ du signal d'erreur fourni par l'analyseur de spectres par l'expression :

$$\delta\hat{x}[\Omega] = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\sqrt{1+\Omega^2/\Omega_c{}^2}}{\frac{dV_{\mathrm{err}}}{d\Psi}(\Psi = 0)} \sqrt{S_{\mathrm{err}}[\Omega]} \tag{4.47}$$

C'est cette méthode que nous utiliserons dans les prochains chapitres pour calibrer les déplacements du micro-résonateur.

4.6.3 Bruit de photon et bruit de fréquence

La mesure de $\delta\hat{x}$ est entachée de bruits, correspondants aux deux derniers termes dans l'expression (4.43) du signal d'erreur. Le dernier terme est indépendant de la fréquence et correspond au bruit de photon de la porteuse et des bandes latérales. D'après l'expression de $r_0[0] = (T-P)/(T+P)$, il s'écrit :

$$S_{\mathrm{err}}^{(\mathrm{shot})}[\Omega] = (\overline{\alpha}_{\mathrm{o}} J_0 J_1)^2 \left\{ \frac{1}{2J_1{}^2} \left(\frac{T-P}{T+P} \right)^2 + \frac{2T+P}{T+P} \right\}. \tag{4.48}$$

Ce bruit limite la sensibilité de la mesure à un niveau δx_{shot} obtenu en égalisant les deux bruits $S_{\mathrm{err}}^{(x)}$ et $S_{\mathrm{err}}^{(\mathrm{shot})}$ (équations 4.44 et 4.48) :

$$\delta x_{\text{shot}}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{\overline{I}_{\text{o}}}}\frac{T+P}{T}\sqrt{1+(\Omega/\Omega_c)^2}\sqrt{\frac{1}{2{J_1}^2}\left(\frac{T-P}{T+P}\right)^2+\frac{2T+P}{T+P}}. \tag{4.49}$$

Cette expression diffère de celle obtenue dans le chapitre 2 (équation 2.28) où on considérait une mesure directe du bruit de la quadrature de phase du faisceau réfléchi. On constate que la sensibilité est dégradée d'un facteur égal à la dernière racine dans (4.49). Cependant, le facteur de réduction de la sensibilité reste de l'ordre de l'unité dans la situation expérimentale, lorsqu'on fonctionne avec une profondeur de modulation voisine de celle correspondant à la pente maximale du signal Pound-Drever-Hall ($\beta \simeq 1$). Dans le cas d'une cavité de finesse 30 000 associée à une transmission du coupleur d'entrée de 100 ppm et à des pertes totales de 110 ppm, et pour un faisceau modulé avec une profondeur $\beta_{\text{opt}} = 1.08$, la dégradation est seulement de 1.22. Notons enfin que la limite de sensibilité δx_{shot} présentée ici diffère de celle présentée dans la référence [96]. Cela est sans doute dû au fait que nous avons utilisé un développement incluant tous les termes à l'ordre 2 en β, sans nous limiter aux seules bandes latérales à $\pm\Delta$.

Le dernier bruit qu'il reste à caractériser dans le signal d'erreur est le deuxième terme de l'équation (4.43), qui s'écrit :

$$S_{\text{err}}^{(\omega)}[\Omega] = (\overline{\alpha}_{\text{o}}J_0J_1)^2\,\frac{T^2/\gamma^2}{\gamma^2+\Omega^2\tau^2}\Omega^2\tau^2\left(S_{q_{\text{o}}}[\Omega]-1\right). \tag{4.50}$$

Ce bruit est proportionnel au bruit classique de phase $S_{q_{\text{o}}} - 1$ du faisceau incident, dérivé temporellement (multiplication par Ω^2). Ceci n'est rien d'autre que le bruit de fréquence S_ω du faisceau incident. En effet, considérons un faisceau incident, supposé initialement au bruit de photon standard ($S_{q_{\text{o}}}^{(\text{shot})} = 1$), auquel on ajoute des fluctuations classiques de fréquence $\delta\omega$. Les fluctuations classiques de sa quadrature de phase s'obtiennent à partir de l'évolution temporelle $\alpha_{\text{o}}(t)e^{-i\omega t}$ du champ et s'écrivent :

$$\delta q_{\text{o}}[\Omega] = \delta q_{\text{o}}^{\text{shot}}[\Omega] + \frac{2\overline{\alpha}_{\text{o}}}{i\Omega}\delta\omega[\Omega], \tag{4.51}$$

et les spectres des bruits de phase et de fréquence sont alors reliés par l'expression

$$\Omega^2\left(S_{q_{\text{o}}}[\Omega]-1\right) = 4\overline{\alpha}_{\text{o}}^2 S_\omega[\Omega]. \tag{4.52}$$

On retrouve ici que la fréquence est la dérivée temporelle de la phase puisque le bruit de fréquence est égal à la dérivée temporelle du bruit classique de phase.

En comparant le signal $S_{\text{err}}^{(x)}$ et le bruit de fréquence $S_{\text{err}}^{(\omega)}$ (équations 4.44 et 4.50), on constate que ce dernier limite la sensibilité de la mesure à un niveau δx_{freq} obtenu en égalisant ce deux bruits :

$$\frac{\delta x_{\text{freq}}[\Omega]}{L} = \frac{\delta\omega[\Omega]}{\omega}, \tag{4.53}$$

où L est la longueur de la cavité et ω la pulsation du laser. Une variation de la fréquence du laser est donc indiscernable d'une variation de longueur de la cavité : elles modifient toutes

les deux le déphasage de la cavité $\Psi \equiv 2kL\ [2\pi]$ dans des proportions données par la relation (4.53).

Pour ne pas être limité par le bruit de fréquence du laser, il faut travailler avec une cavité courte ou réduire ce bruit en faisant passer le laser dans une cavité de filtrage ou encore en asservissant le laser sur une cavité de référence ultrastable et plus longue. Puisque l'effet du bruit de fréquence est d'autant plus grand que la cavité est longue, on peut l'observer plus facilement sur des cavités longues comme les cavités de référence et de filtrage, de longueur respective 20 et 40 cm. Dans le prochain chapitre, on présente une courbe typique de bruit de fréquence obtenue de cette manière. Le bruit est de l'ordre de $100\,\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à 100 Hz, ce qui, pour une cavité de mesure de 3 mm de long, limite la sensibilité à environ $10^{-17}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à cette fréquence.

Notons aussi que la relation (4.53) indique qu'on peut calibrer la mesure en appliquant une modulation de fréquence d'amplitude connue sur le laser, et en utilisant cette expression (4.53) pour convertir le niveau de modulation observé sur le signal d'erreur en déplacement équivalent. Nous avons utilisé cette méthode pour valider la calibration réalisée à l'aide de la pente statique du signal d'erreur (section 4.6.2). On a vérifié la compatibilité des deux calibrations jusqu'à une fréquence de 500 kHz.

Chapitre 5

Observation et contrôle du bruit thermique d'un micro-miroir

Dans cette partie sont présentés les résultats que nous avons obtenus sur l'observation du bruit thermique d'un micro-miroir. Dans un premier temps, on présente les spectres de bruit obtenus à l'aide de la mesure du signal d'erreur Pound-Drever-Hall. Ce signal reflète non seulement le spectre de vibration du micro-miroir mais aussi plusieurs bruits limitant la mesure, tels que les vibrations du miroir d'entrée, le bruit de photon, les fluctuations de l'indice optique liées au passage de molécules d'air au travers du faisceau, ainsi que le bruit de fréquence du laser. Après avoir présenté ces différents bruits, on revient sur l'étude du spectre de vibration du micro-miroir. On compare les fréquences et les masses observées expérimentalement avec celles prédites par une simulation par éléments finis. En déplaçant l'axe optique de la cavité à la surface du micro-miroir, on a aussi pu reconstruire la structure spatiale des modes propres. On étudie enfin l'influence de la pression sur les facteurs de qualité mécanique.

Nous avons également étudié la réponse mécanique du résonateur à une force électrostatique exercée par une pointe métallique placée en regard de la face arrière. Le wafer en silicium étant légèrement dopé, il assure une conductivité suffisante pour que le miroir réponde de manière très efficace. La force électrostatique a été utilisée pour tester la réponse mécanique du micro-résonateur, ce qui nous a permis d'observer un effet d'interférence destructive entre la réponse résonnante d'un mode de vibration et celle correspondant à l'ensemble des autres modes. Grâce à la dynamique importante de cette force électrostatique, nous avons mis en œuvre un processus de refroidissement actif du résonateur par friction froide, et nous avons réduit sa température effective jusqu'à quelques kelvins seulement.

5.1 Spectre de bruit thermique et limites de sensibilité

5.1.1 Mesure du bruit thermique

On a présenté dans la partie précédente la source laser, le dispositif de détection et le principe de la mesure des déplacements du micro-résonateur. Dans cette partie, on présente les résultats obtenus avec un micro-miroir appelé P3, constitué d'un pont en silicium de 1 mm de long, 1 mm de large et 60 μm d'épaisseur (figure 5.1). Ce n'est certainement pas le résonateur le plus petit que nous ayons réalisé, mais la compréhension de son spectre nous a permis de

clarifier plusieurs points utiles pour la suite de l'expérience. Sa taille a limité les problèmes que nous risquions de rencontrer au niveau du centrage mécanique de la cavité, et elle a facilité les études concernant le profil spatial des modes ou l'excitation électrostatique. Le spectre du signal d'erreur obtenu est représenté sur la figure 5.2. Il est calibré en terme de déplacements du micro-résonateur en $\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ comme on l'a expliqué dans la partie précédente, à partir de la pente statique du signal d'erreur et en tenant compte de la réduction de la sensibilité due à la bande passante de la cavité.

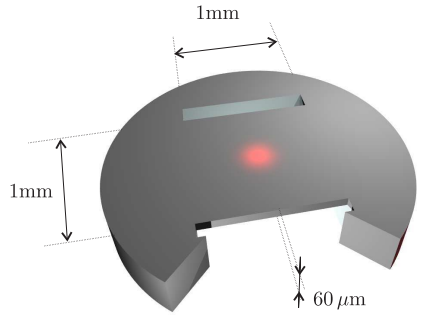


FIG. 5.1 – Schéma du résonateur de 1 mm de long, 1 mm de large et 60 μm d'épaisseur de la puce P3.

On observe un nombre réduit de pics étroits, d'amplitude relativement importante, jusqu'à environ $5\times10^{-15}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, ce qui correspond à une dynamique de presque 60 dB par rapport au plancher de bruit observé sur ce spectre. Ces pics sont dus au bruit thermique des différents modes propres du micro-résonateur. Comme nous le verrons dans la partie 5.2, on a ainsi identifié une vingtaine de résonances sur la plage 0 - 4 MHz, repérées sur la figure par leurs indices longitudinaux et transverses. A ces résonances se superposent plusieurs autres sources de bruit qui limitent la sensibilité de la mesure des déplacements du micro-résonateur à un niveau proche de $10^{-18}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, et que nous allons examiner dans la suite de cette section. La cavité de mesure utilisée pour ce spectre a une longueur de 2.4 mm, ce qui correspond à un intervalle spectral libre de 62.5 GHz. On a effectué la mesure au centre du micro-miroir, où la finesse atteint une valeur de $\mathcal{F} = 29\,000$, ce qui correspond à une bande passante de la cavité de 1.1 MHz. La puissance totale incidente sur la cavité est égale à 1.5 mW, la profondeur de modulation β de la phase est égale à 1.1 et le coefficient d'adaptation spatiale à la cavité η_{cav} est égal à 0.9. L'efficacité quantique de la détection Pound-Drever-Hall vaut $\eta = 0.91$. La transmission du miroir d'entrée est de 70 ppm et les pertes totales de la cavité sont de 140 ppm. Notons que ces valeurs sont légèrement différentes de celles présentées au chapitre 3 (tableau 3.1 page 79) : ces écarts s'expliquent par le fait que les caractéristiques optiques dépendent fortement du point d'impact du faisceau laser. Les spectres ont été obtenus en effectuant une succession de 25 acquisitions de 160 kHz de large avec l'analyseur de spectres, en utilisant une résolution spectrale (RBW) de 20 Hz et avec 8192 points par acquisition, c'est-à-dire un point tout les 20 Hz environ. Chaque trace est moyennée sur une centaine de balayages. Du fait du nombre de points sur la figure, supérieur à 200 000, la largeur apparente de la trace n'est pas due à un défaut de moyennage mais correspond à une structure réelle du spectre qui présente de nombreux pics très serrés. Comme on peut le voir sur la figure 5.3 qui montre un agrandissement de la plage allant de 3.6 à 3.7 MHz, le bruit résiduel sur la trace est bien inférieur à cette hauteur apparente.

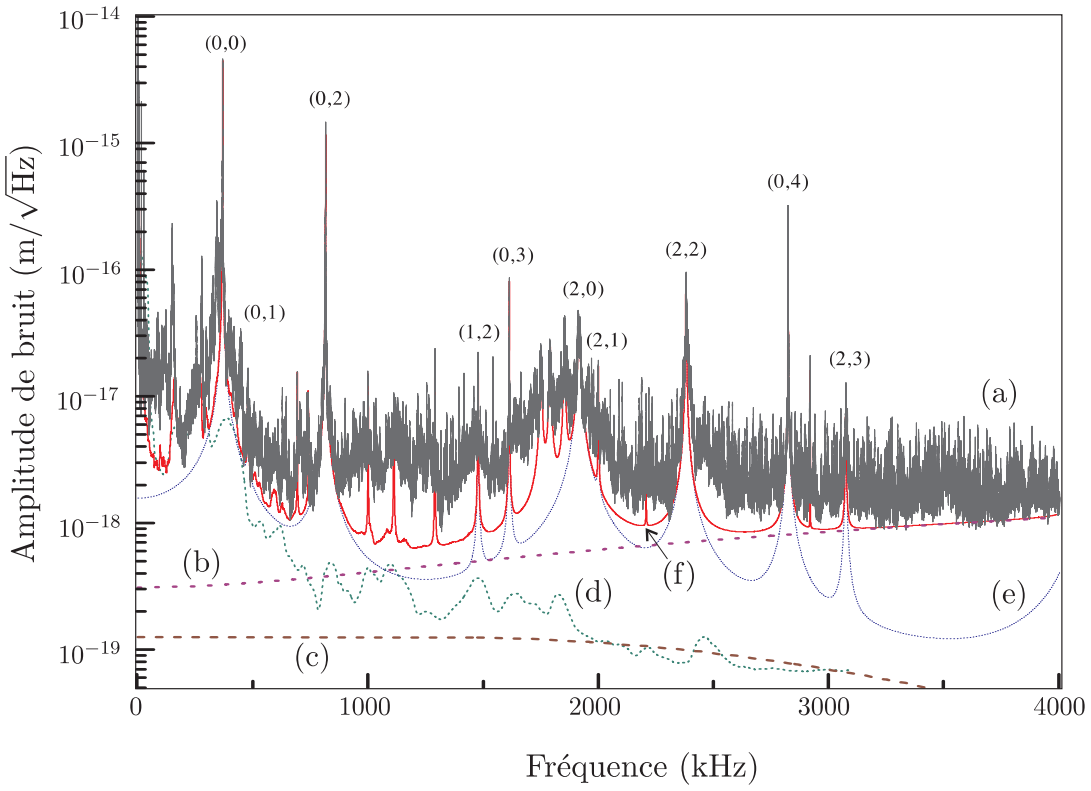


FIG. 5.2 – Spectre de bruit du résonateur P3 de 1 mm × 1 mm × 60 μm. (a) : bruit total observé à partir du signal d'erreur, (b) : bruit de photon, (c) : bruit d'indice à 0.1 mbar extrapolé à partir de sa valeur à pression ambiante, (d) : limite supérieure du bruit de fréquence, (e) et (f) : bruit thermique et bruit total attendus.

Nous décrivons maintenant les différents bruits qui limitent la sensibilité de la mesure des déplacements du micro-résonateur, et les méthodes que nous avons utilisées pour estimer leur amplitude.

5.1.2 Le bruit thermique du miroir d'entrée

On a tracé sur la figure 5.3 un agrandissement du spectre de bruit thermique précédent, pour une plage de fréquence allant de 3600 à 3700 kHz, sur laquelle on n'a pas recensé de pic de bruit thermique du micro-miroir. On observe cependant l'existence de nombreux pics dans le spectre. Leur amplitude à résonance est inférieure à 10^{-17} m/$\sqrt{\text{Hz}}$ et les facteurs de qualité sont très élevés. La densité de ces modes propres est aussi beaucoup plus élevée que celle correspondant au micro-miroir. On retrouve ici les caractéristiques du bruit thermique d'un miroir conventionnel, tels qu'il a déjà été observé par l'équipe avec des miroirs cylindriques [23]. Ce bruit correspond très certainement au miroir d'entrée de la cavité qui présente une multitude de pics thermiques à fréquence élevée, et constitue de ce fait la limite essentielle à l'observation du fond thermique du micro-résonateur entre deux résonances mécaniques. Nous avons confirmé cette interprétation en déplaçant le micro-miroir de façon à placer l'axe optique de la cavité sur le wafer en silicium en dehors du micro-résonateur : on n'observe plus alors les modes acoustiques du résonateur, mais on continue à observer la multitude de

modes visible sur la figure 5.3. Ceux-ci ne sont donc pas associés au micro-miroir. On verra dans la section 5.3 un autre argument allant dans ce sens : ces pics ne répondent pas à une force électrostatique appliquée sur le micro-résonateur.

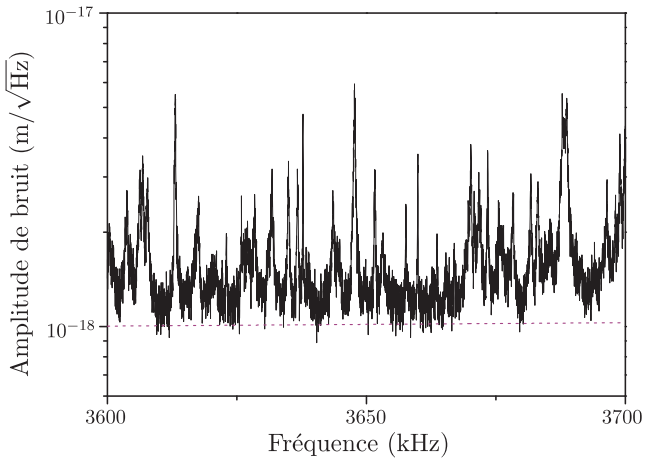


FIG. 5.3 – Spectre de bruit observé à haute fréquence. Les nombreux pics correspondent aux modes propres de vibration du miroir d'entrée dont la densité est importante à ces fréquences élevées. La courbe horizontale en pointillés correspond au bruit de photon.

5.1.3 Le bruit de photon

La courbe (b) sur la figure 5.2 montre la limitation de sensibilité induite par le bruit de photon standard du faisceau de mesure. A la différence d'une détection homodyne où il suffit de cacher le faisceau réfléchi par la cavité pour mesurer le bruit de photon associé à la mesure, on ne peut pas mesurer directement ce bruit dans le cas de la détection Pound-Drever-Hall car il dépend du point de fonctionnement de la cavité. Par conséquent, il ne peut être obtenu en masquant le faisceau réfléchi ou en plaçant la cavité hors de résonance comme c'est le cas avec une détection homodyne. Son expression dépend par ailleurs de nombreux paramètres optiques de la cavité tels que la finesse ou les pertes (voir l'équation 4.49 du bruit de photon δx_{shot} exprimé en déplacement équivalent). Par contre, il a une dépendance assez simple avec l'intensité incidente (en $1/\sqrt{\bar{I}^{\text{in}}}$) et avec la fréquence puisqu'il correspond à un filtre passe-haut de fréquence de coupure égale à la bande passante de la cavité :

$$\delta x_{\text{shot}}[\Omega] \propto \frac{1}{\sqrt{\bar{I}^{\text{in}}}} \sqrt{1 + (\Omega/\Omega_{\text{c}})^2}. \tag{5.1}$$

Nous avons cherché à évaluer ce bruit en effectuant plusieurs mesures pour différentes intensités lumineuses. Sur la figure 5.4, on a représenté le bruit présent dans le signal d'erreur, exprimé en déplacement équivalent, en travaillant à des fréquences élevées (4.35 à 4.55 MHz) afin que le bruit de photon devienne la limite principale de la mesure. Les deux courbes représentées sont obtenues pour deux valeurs de l'intensité incidente, de haut en bas respectivement 0.8 et 1.5 mW. Ces courbes présentent plusieurs pics, celui à 4366 kHz correspond à un mode de vibration du micro-miroir, les autres pics plus étroits correspondent à des modes de vibration du coupleur d'entrée. Les traits pleins représentent l'estimation du bruit de photon

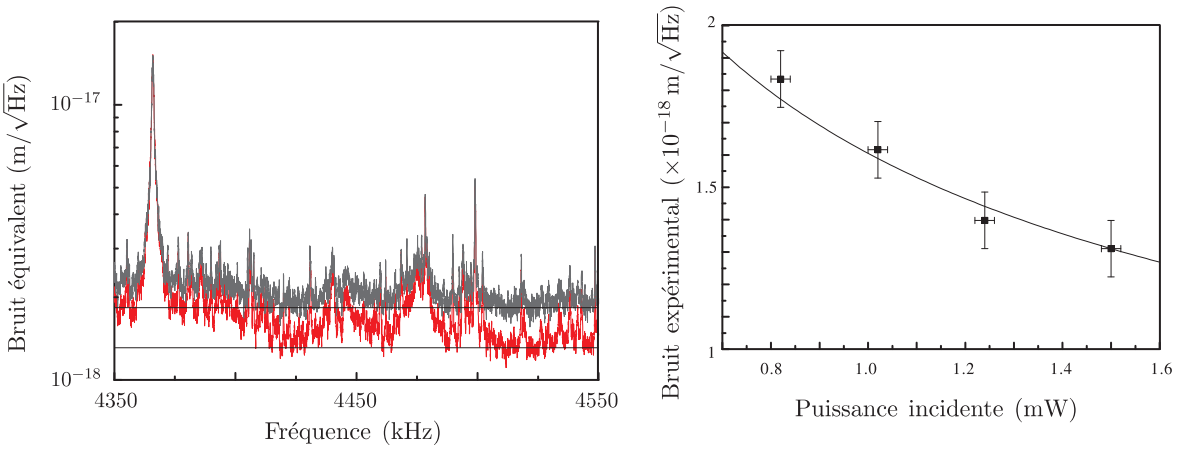


FIG. 5.4 – A gauche : niveaux de bruit exprimés en déplacement équivalent obtenus pour deux intensités incidentes, de haut en bas respectivement 0.8 et 1.5 mW. Les traits horizontaux correspondent au niveau estimé du bruit de photon. A droite : niveau du bruit de photon en fonction de la puissance lumineuse. La courbe en trait plein correspond à une décroissance en $1/\sqrt{\overline{I}^{in}}$.

pour les différentes intensités, déduite du niveau le plus bas observé entre les pics de bruit thermique, autour de 4540 kHz. On a représenté sur la courbe de droite la dépendance du niveau du bruit de photon ainsi estimé en fonction de la puissance lumineuse. La courbe en trait plein est donnée par l'équation (5.1) avec un préfacteur ajusté pour intercepter le point obtenu pour une puissance de 1.5 mW. On n'a pas pu diminuer beaucoup plus l'intensité lumineuse car alors le bruit de l'électronique ne pouvait plus être négligé. On constate que la loi de puissance est bien vérifiée expérimentalement. Ce constat signifie que le plancher de bruit ne peut être attribué ni au bruit thermique des miroirs qui est indépendant de l'intensité lumineuse, ni au bruit de l'électronique de détection, exprimé en déplacement équivalent, qui décroîtrait de manière inversement proportionnelle à la puissance lumineuse incidente.

L'étude donne un niveau de bruit de $1.3\times10^{-18}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à 4540 kHz et pour une puissance incidente de 1.5 mW. D'après l'équation (5.1), on obtient un niveau de $3\times10^{-19}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à basse fréquence, correspondant au spectre de la figure 5.2. Cette valeur est à comparer à celle donnée par l'expression théorique (équation 4.49) qui donne $\delta x_{\mathrm{shot}} = 2\times10^{-19}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ pour les paramètres expérimentaux présentés plus haut (transmission du coupleur $T = 70$ ppm, pertes totales P= 140 ppm, flux lumineux incident $\overline{I}_{\mathrm{o}} = 8\times10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$, profondeur de modulation $\beta = 1.08$). Ces valeurs sont en bon accord, d'autant plus que l'expression théorique ne prend pas en compte l'adaptation spatiale sur la cavité de mesure et l'efficacité quantique de la détection qui ont pour effet d'augmenter le niveau de bruit équivalent. Dans les conditions expérimentales de la figure 5.2, le bruit de photon est finalement représenté par la courbe (b) qui est donnée par :

$$\delta x_{\mathrm{shot}}[\Omega] = 3\times10^{-19}\sqrt{1+\Omega^2/\Omega_c^2}\ \ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}. \tag{5.2}$$

5.1.4 Le bruit de fréquence

Nous avons réalisé une estimation de la limite supérieure pour le bruit de fréquence en utilisant la cavité de référence et la cavité de filtrage spatial. Lors d'une mesure de la phase

du champ réfléchi par ces cavités, qui sont beaucoup plus longues que la cavité de mesure, on est en effet principalement limité par le bruit classique de fréquence du faisceau laser, les vibrations des miroirs étant alors négligeables : on peut ainsi mesurer ce bruit de fréquence en asservissant le laser sur une de ces cavités et en utilisant l'information fournie par le spectre du signal d'erreur.

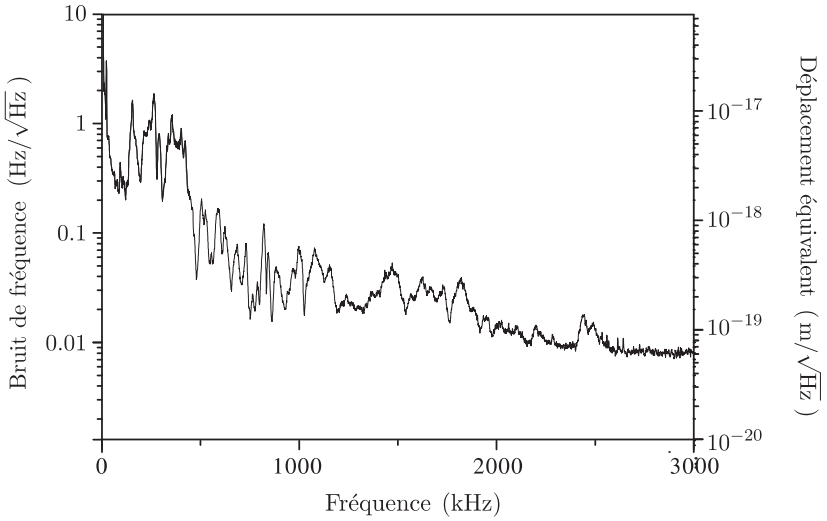


FIG. 5.5 – Spectre du bruit de fréquence du laser, estimé à partir de la cavité de filtrage spatial. L'échelle à droite correspond au bruit de position équivalent pour une cavité de mesure de 2.4 mm de long.

On a représenté sur la figure 5.5 le spectre de bruit ainsi obtenu à partir de la cavité de filtrage, avec une résolution spectrale de 1 kHz et une centaine de moyennes sur l'analyseur de spectres. On a utilisé deux méthodes différentes pour calibrer le bruit observé : une modulation de fréquence du laser d'amplitude connue, et la mesure de la pente du signal d'erreur grâce à un balayage de la résonance de la cavité. On a vérifié que ces deux méthodes donnaient des résultats comparables. Puisque le bruit de fréquence est indépendant de la puissance incidente, on a utilisé une puissance suffisamment importante pour ne pas être limité par le bruit de l'électronique. On ne peut toutefois l'éliminer complètement, ni le bruit d'intensité du faisceau laser. C'est pourquoi le bruit observé doit être considéré comme une limite supérieure pour le bruit de fréquence du laser. Notons également que le signal d'erreur obtenu avec la cavité de filtrage reproduit le bruit de fréquence incident sur la cavité, mais après filtrage par celle-ci. Ainsi, la figure 5.5 représente le bruit de fréquence du faisceau issu du laser, filtré par la bande passante de la cavité. Comme le faisceau transmis, celui utilisé pour la mesure, subit exactement le même filtrage, la courbe représente directement le bruit de fréquence du faisceau incident sur la cavité de mesure.

On constate que le bruit de fréquence impose une limite inférieure à $3 \times 10^{-19}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ pour des fréquences supérieures à 1 MHz. Comme on peut le voir sur la figure 5.2, il ne joue donc un rôle qu'à plus basse fréquence puisqu'au-delà, le bruit de photon est dominant.

Le comportement à plus basse fréquence peut éventuellement être amélioré de plusieurs façons. Tout d'abord, tous les spectres présentés ici ont été obtenus en faisant fonctionner la cavité de filtrage sur la polarisation correspondant à sa plus faible finesse (voir la section 4.4).

Travailler avec la plus grande finesse filtrerait plus efficacement le bruit de fréquence incident sur la cavité de mesure. L'effet du bruit de fréquence peut encore être réduit en utilisant des cavités de mesure plus courtes. Une dernière alternative consiste à effectuer un asservissement du bruit de fréquence en contrôlant de manière active le laser avec une cavité de référence. On a testé ce principe en effectuant des mesures différentielles entre deux cavités longues, l'une d'elles possédant une cale piézoélectrique pour l'amener à résonance simultanément avec l'autre. Cette méthode présente toutefois l'inconvénient de rajouter le bruit mécanique de la cale, et nous n'avons pas jugé utile de mettre en œuvre un tel asservissement avec la cavité de mesure actuelle qui est suffisamment courte.

5.1.5 Les fluctuations d'indice

Le spectre présenté sur la figure 5.2 a été obtenu sous vide. En faisant varier la pression dans l'enceinte, on a pu observer des modifications de ce spectre. On verra plus loin qu'abaisser la pression augmente les facteurs de qualité mécaniques, mais l'effet qu'on va présenter maintenant n'est pas lié au spectre de vibration du micro-miroir puisqu'on l'a également observé en plaçant le faisceau de mesure sur la puce de silicium en-dehors des micro-résonateurs.

Comme on peut le voir sur la figure 5.6, la diminution de la pression s'accompagne d'une réduction du bruit de fond sur une plage de fréquences allant de 0 à environ 3 MHz. Ces courbes ont été obtenues pour des fréquences allant de 0 à 5 MHz, avec une résolution spectrale de 1 kHz et une centaine de balayages. On a fait varier la pression en pompant à travers une microfuite, la mesure de pression étant effectué à l'aide d'un manomètre à aiguille. Les courbes ont été acquises à 1000, 500, 250 et 0.01 mbar, avec un micro-résonateur nommé "DP2" constitué d'un disque de 1 mm de diamètre tenu par trois ponts de 150 μm de long et 100 μm de large. La finesse optique est de 12 500, ce qui correspond à une bande passante de 2.5 MHz. Les courbes représentées sont calibrées en terme de déplacement équivalent et prennent en compte la bande passante de la cavité.

L'excès de bruit de fond lié à la pression a une enveloppe qui se comporte en fréquence comme un passe-bas coupant à une fréquence voisine du MHz, ce qui signifie que le phénomène physique responsable de ce bruit supplémentaire change de régime autour de cette fréquence. Nous l'avons par ailleurs observé avec tous les résonateurs que nous avons étudiés. Ces caractéristiques suggèrent que l'effet est lié aux particules présentes dans le faisceau laser à l'intérieur de la cavité. On va voir qu'on peut interpréter ce bruit comme une conséquence des fluctuations de l'indice optique vu par le laser.

Déphasages dus aux variations d'indice

Au cours de la propagation dans la cavité optique, la lumière interagit avec les centres diffuseurs qu'elle rencontre. Comme la longueur d'onde du laser est très éloignée de celles des résonances optiques, on n'observe que très peu d'absorption. L'effet du gaz résiduel consiste essentiellement à introduire un déphasage qui va s'accumuler au cours de la propagation, ce qui correspond à une modification de l'indice optique du milieu traversé. L'écart à l'unité de l'indice optique est proportionnel à la densité volumique ρ des centres diffuseurs :

$$n = 1 + \beta\rho. \tag{5.3}$$

Expérimentalement, la dépendance de l'indice avec la pression est une droite affine de pente $\alpha = 2.6 \times 10^{-9}\,\mathrm{Pa}^{-1}$ pour une longueur d'onde de 1064 nm [97]. Si on suppose que l'air est

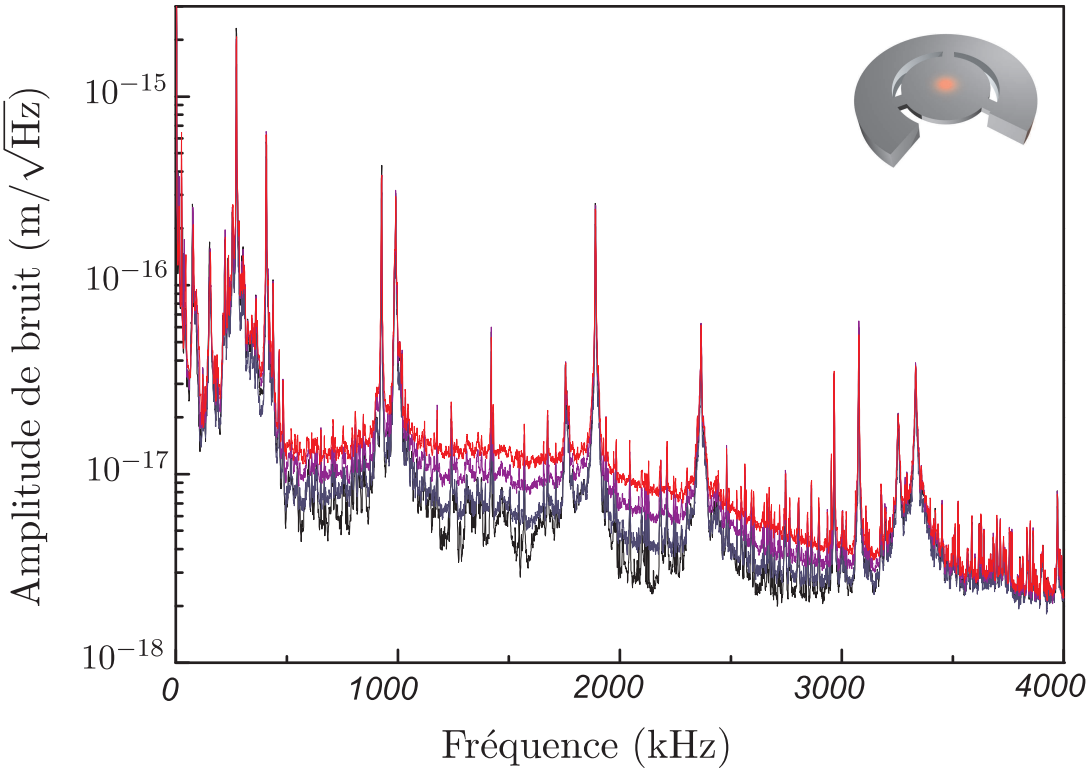


FIG. 5.6 – Spectre de bruit de position observé avec un disque à ponts pour différentes valeurs de la pression : 1000, 500, 250 et 0.01 mbar de haut en bas. Le dessin en haut à droite représente le résonateur utilisé.

un gaz parfait, ce qui est d'autant plus vrai qu'on se rapproche des basses pressions, alors en utilisant la relation d'état $P = \rho\, k_B T$, on obtient pour le préfacteur dans l'équation (5.3) une valeur $\beta = \alpha k_B T = 1.1 \times 10^{-29}\,\mathrm{m}^3$ à 300 K.

Dans le cas d'une propagation à l'intérieur d'une cavité, on montre qu'on peut faire apparaître un indice effectif n_{eff} qui prend en compte la structure gaussienne du faisceau [102]. Les particules situées loin de l'axe optique contribuant moins au déphasage, il correspond à la moyenne de la densité volumique locale pondérée par la structure spatiale du faisceau :

$$n_{\mathrm{eff}}(t) = 1 + \beta\bar{\rho}(t), \tag{5.4}$$

où $\bar{\rho}(t)$ est la densité volumique à l'instant t moyennée spatialement sur tout le volume V de la cavité et pondéré par la structure spatiale $v_0(\vec{r})$ du faisceau (équation 2.47) :

$$\bar{\rho}(t) = \frac{1}{L}\int_V d^3r\, v_0^2(\vec{r})\rho(\vec{r},t) \tag{5.5}$$

La normalisation par la longueur L de la cavité assure que dans le cas d'une distribution uniforme de particules, l'intégrale est égale à la valeur moyenne de la densité. $\bar{\rho}$ est donc proportionnel au nombre effectif de centres diffuseurs contribuant au déphasage.

Lorsqu'on fait varier la pression dans la cavité, on modifie la densité volumique de particules, ce qui modifie l'indice effectif optique et le déphasage accumulé lors d'un aller-retour

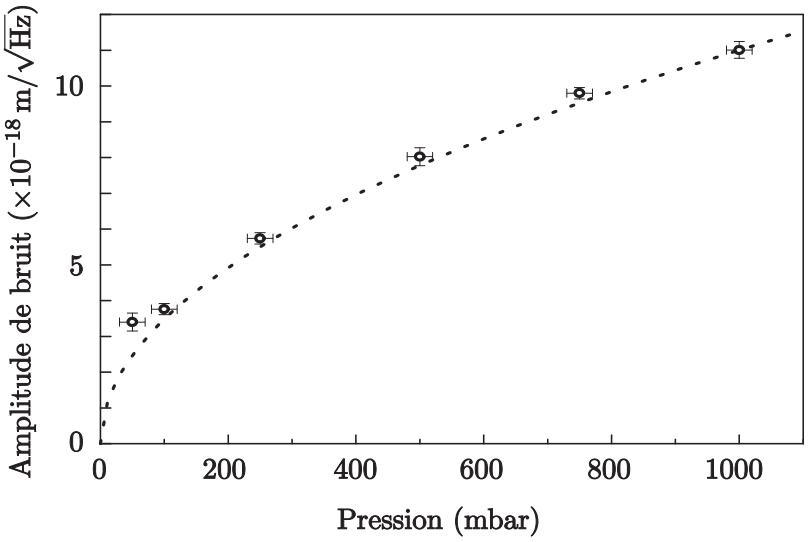


FIG. 5.7 – Dépendance du plancher de bruit thermique avec la pression dans la cavité. Chaque point expérimental est une moyenne sur 20 points consécutifs autour de 1.4 MHz. La courbe en pointillés correspond à une croissance en $\sqrt{P}$.

dans la cavité. On déplace ainsi les fréquences de résonance de la cavité comme on peut s'en rendre compte en abaissant la pression et en observant le défilement des résonances sur une caméra CCD placée en transmission. La dépendance des fréquences de résonance d'une cavité Fabry-Pérot avec la pression était d'ailleurs utilisée en spectroscopie pour balayer la fréquence d'un laser accordable asservi sur une résonance.

Les fluctuations δn_{eff} de l'indice effectif traduisent les fluctuations du nombre de particules présentes dans le volume optique. Elles induisent une source de bruit supplémentaire qui limite la sensibilité de la mesure de petits déplacements à un niveau $\delta x_{\min}$ donné par :

$$\delta x_{\min} = L\ \delta n_{\text{eff}}. \tag{5.6}$$

Comme le nombre de particules vues par le faisceau est très élevé, même à basse pression, on peut appliquer un traitement statistique. On s'attend à ce que la distribution de probabilité du nombre de particules présentes dans le volume optique suive une loi quasi poissonienne et que la variance du nombre de particules soit proportionnelle au nombre moyen de particules. On comprend donc qu'en abaissant la pression, on réduit aussi bien l'effet moyen d'indice que le bruit associé. C'est l'effet observé sur les courbes de la figure 5.6. On a représenté sur la figure 5.7 la dépendance du bruit lié à l'indice en fonction de la pression à une fréquence voisine de 1.4 MHz. Pour cela, on a calculé la valeur moyenne du niveau de bruit mesuré à 20 fréquences différentes choisies suffisamment éloignées des fréquences de résonance des modes propres des miroirs pour ne pas être sensibles à leur bruit thermique. La pression est mesurée sur la jauge manométrique. La courbe en pointillés correspond à une dépendance en $\sqrt{P}$, conforme à une statistique poissonienne pour le bruit d'indice. On constate que les mesures sont en bon accord avec cette loi, sauf à basse pression où on est limité par le bruit thermique. Ce comportement est observable sur toute la plage de fréquences de 0 à 3 MHz, tant qu'on reste suffisamment éloigné des pics de bruit thermique des miroirs.

Dépendance en fréquence du bruit d'indice

On constate que le bruit d'indice dépend de la fréquence, puisqu'il conserve un niveau à peu près constant jusqu'à environ 2 MHz et décroît comme un filtre passe-bas au delà. Pour comprendre cet effet, il est nécessaire de calculer la fonction de corrélation temporelle de l'indice effectif, c'est-à-dire d'examiner plus en détail la dynamique des particules. A pression atmosphérique et température ambiante, le libre parcours moyen dans l'air est d'environ 140 nm. Il est inversement proportionnel à la densité volumique de particules et à la section efficace. Cette valeur est bien plus petite que la taille caractéristique du faisceau qui est de l'ordre de 100 μm. Cela signifie qu'à pression ambiante, les particules entrent en collision plusieurs fois avant de sortir du volume défini par le mode propre gaussien de la cavité. Au contraire, quand on baisse la pression, on réduit le nombre de particules, donc la probabilité de choc, ce qui augmente le libre parcours moyen. Si la pression est réduite en dessous de 1 mbar, le libre parcours moyen devient supérieur à la taille du faisceau laser et on passe alors dans un régime balistique.

On va d'abord étudier ce régime basse pression pour décrire le niveau de bruit d'indice dans les conditions de la mesure, lorsque la pression est inférieure à 10^{-2} mbar. On assimile l'air à un gaz parfait de masse m à l'équilibre thermodynamique. On définit la densité $\pi(\vec{r},\vec{v},t)$ dans l'espace des phases de telle sorte que $\pi(\vec{r},\vec{v},t)d^3rd^3v$ corresponde au nombre moyen de particules possédant une vitesse $\vec{v}$ au point $\vec{r}$ à l'instant t dans le volume d^3rd^3v de l'espace des phases. On suppose le gaz homogène et obéissant à la loi de Boltzmann de distribution des vitesses :

$$\pi(\vec{r},\vec{v},t) = \frac{N}{V(\pi v_{\mathrm{T}}^2)^{\frac{3}{2}}}\ \exp\left(-\frac{v^2}{v_{\mathrm{T}}^2}\right) \tag{5.7}$$

où N est le nombre total de particules dans l'enceinte de volume V et v_{T} la vitesse quadratique moyenne, qui est de l'ordre de 500 m.s^{-1} pour l'azote à température ambiante.

On peut calculer la fonction de corrélation temporelle des fluctuations d'indice effectif. En régime stationnaire, la fonction de corrélation $C(\tau) = \langle\delta\bar{\rho}(0)\delta\bar{\rho}(\tau)\rangle$ de la densité volumique $\bar{\rho}$ est définie par :

$$C(\tau) = \int v_0^2(\vec{r})v_0^2(\vec{r'})\ \langle\pi(\vec{r},\vec{v},0)d^3rd^3v\ \pi(\vec{r'},\vec{v'},\tau)d^3r'd^3v'\rangle \tag{5.8}$$

Le terme entre crochets représente la valeur moyenne statistique du produit du nombre de particules présentes dans le volume d^3rd^3v autour du point $(\vec{r},\vec{v})$ à l'instant initial par celles dans le volume $d^3r'd^3v'$ situé au point $(\vec{r'},\vec{v'})$ à l'instant τ. Ces deux nombres ne sont corrélés que si les deux volumes correspondent à une évolution naturelle, c'est-à-dire si $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{v}\tau$ et $\vec{v'} = \vec{v}$ en régime balistique. Dans ce cas le terme entre crochets vaut, en supposant que les fluctuations du nombre de particules dans le volume d^3rd^3v qu'on suit, soit une variable Poisonnienne :

$$\langle\pi(\vec{r},\vec{v},0)\,\pi(\vec{r'},\vec{v'},\tau)\rangle = \pi(\vec{r},\vec{v},0)\ \delta(\vec{r'}-\vec{r}-\vec{v}\tau)\ \delta(\vec{v'}-\vec{v}), \tag{5.9}$$

et la fonction de corrélation devient :

$$C(\tau) = \int d^3rd^3v\, v_0^2(\vec{r}+\vec{v}\tau)v_0^2(\vec{r})\ \ \pi(\vec{r},\vec{v},0). \tag{5.10}$$

L'intégrale se calcule de manière analytique à partir des expressions de v_0 (équation 2.47) et π (équation 5.7). Après simplification, on obtient :

$$C(\tau) = \frac{N}{V}\frac{1}{\pi L v_{\mathrm{T}}^2}\frac{1}{\tau^2+\tau_c^2}, \tag{5.11}$$

où on a introduit le temps de traversée du faisceau $\tau_c = w_0/v_{\mathrm{T}}$. La fonction de corrélation se comporte donc comme une Lorentzienne avec un temps caractéristique τ_c. Lorsqu'on regarde les corrélations sur un temps long devant τ_c, les particules ont le temps de sortir du faisceau, ce qui réduit la fonction de corrélation temporelle du nombre de particules vues par le faisceau. A partir des équations (5.4) et (5.6), on peut calculer le spectre du bruit d'indice, exprimé en déplacement équivalent, qui est relié à la transformée de Fourier de $C(\tau)$:

$$S_x^{(n)}[\Omega] = L^2\beta^2 \int d\tau\, e^{i\Omega\tau} C(\tau), \tag{5.12}$$

ce qui donne :

$$S_x^{(n)}[\Omega] = \frac{P}{k_B T}\frac{\beta^2}{v_{\mathrm{T}}}\frac{L}{w_0}\, e^{-|\Omega|\tau_c}. \tag{5.13}$$

Le spectre de bruit d'indice varie de manière linéaire avec la pression dans le régime balistique. Dans notre expérience, avec une cavité de longueur $L = 2.4\,\mathrm{mm}$ possédant un col optique de $60\,\mu\mathrm{m}$, la fréquence caractéristique associée au temps de traversée du faisceau est de $1/\tau_c = 8\,\mathrm{MHz}$. Le niveau de bruit à basse fréquence s'élève à $4.8\times10^{-20}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ pour une pression de 0.01 mbar et n'est donc pas limitant puisqu'il est inférieur au bruit de photon. Notons que la croissance linéaire du bruit d'indice avec la longueur de la cavité rend plus contraignante la condition sur la pression dans le cas des interféromètres gravitationnels [75] : leurs bras de plusieurs kilomètres nécessitent de réduire la pression jusqu'à des valeurs de l'ordre de 10^{-7} mbar.

On constate aussi que le bruit d'indice varie de manière inversement proportionnelle à la vitesse quadratique moyenne v_{T}. On a vérifié au moins qualitativement cette dépendance en remplissant la cavité avec de l'hélium gazeux. Ce gaz étant beaucoup plus léger que l'air, il possède une vitesse d'agitation moyenne beaucoup plus importante, ce qui réduit le bruit d'indice. On a observé que le spectre obtenu à une pression de 1 bar d'hélium n'est pas limité par le plancher de bruit d'indice et on atteint en dehors des pics de bruit thermique le même niveau qu'à basse pression d'air. Ce résultat indique qu'il sera possible de placer la cavité dans un cryostat sous faible pression de gaz d'hélium de façon à améliorer l'échange thermique, et cela sans diminuer la sensibilité.

A pression ambiante, le modèle balistique n'est plus valable du fait des collisions entre particules et l'établissement de la fonction d'autocorrélation devient beaucoup plus complexe. La fréquence de coupure observée, de l'ordre de 2 MHz, est plus petite que celle prédite par le modèle balistique, ce qui signifie que le temps caractéristique est plus long, comme si les molécules étaient plus lentes. On a essayé de modéliser ce comportement par un modèle de diffusion de particules, mais les résultats obtenus donnent des fréquences de coupure trop faibles et des lois de puissance non satisfaisantes. Cela suggère que ce n'est pas la diffusion qui domine dans le mouvement des particules mais un autre processus, plus efficace pour brasser les particules. On peut penser à la convection et aux effets de la turbulence. Cela reste encore à étudier pour comprendre le comportement à haute pression du bruit d'indice. En tout état de cause, la courbe (c) de la figure 5.2 a été obtenue en extrapolant à basse

pression (0.1 mbar) la dépendance en fréquence observée à haute pression, selon une loi en $\sqrt{P}$ pour l'amplitude de bruit. On atteint de cette manière un niveau de bruit supérieur au modèle balistique (équation 5.13), et de toutes façons négligeable à toute fréquence en comparaison du bruit de photon (courbe b).

5.2 Etude du spectre de bruit du micro-miroir

Dans cette partie, on étudie plus en détail le spectre de bruit thermique observé. Il apparaît sous la forme d'un nombre relativement réduit de pics de bruit associés aux modes propres du micro-résonateur. Nous allons voir que l'étude du bruit thermique permet de remonter aux caractéristiques optomécaniques des différents modes, telles que les fréquences de résonance, les facteurs de qualité mécanique, les masses effectives ou les profils spatiaux.

5.2.1 Le bruit thermique

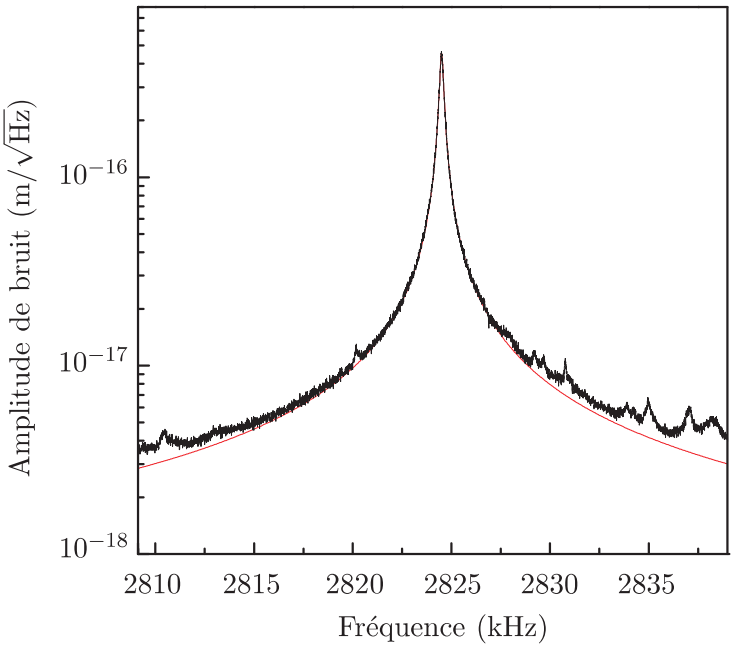


FIG. 5.8 – Spectre de bruit thermique du mode (0,4) oscillant à 2824 kHz obtenu avec 300 moyennes et une résolution spectrale de 10 Hz. La courbe en trait plein correspond à un ajustement lorentzien.

On a représenté sur la figure 5.8 une mesure du spectre de bruit thermique du mode propre (0,4)[1] oscillant à 2824 kHz du résonateur P3. La résolution spectrale est de 10 Hz et on a moyenné 300 balayages de l'analyseur. Le spectre est limité à une plage de 30 kHz, avec 8192 points soit un point tous les 4 Hz environ. On a superposé à cette courbe expérimentale un ajustement lorentzien du spectre de bruit, dont l'équation est donnée par :

[1]les deux indices correspondent au nombre de noeud du mode propre respectivement dans les directions longitudinale et transverse, voir p. 160.

$$S_x^{\mathrm{T}}[\Omega] = \frac{2\Gamma}{M\left((\Omega_{\mathrm{m}}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2\Omega^2\right)} k_{\mathrm{B}}T. \tag{5.14}$$

La courbe a été tracée pour $\Omega_{\mathrm{m}}/2\pi = 2\,824,5\,\mathrm{kHz}$, $\Gamma/2\pi = 185\,\mathrm{Hz}$ et $M = 210\,\mu\mathrm{g}$. On constate un bon accord sur une plage de fréquence de 10 kHz environ, c'est-à-dire plus de cinquante fois la largeur de la résonance. Au-delà, on constate un écart avec le spectre expérimental, sans doute lié à la contribution des autres modes propres. A partir de cet ajustement, on obtient le facteur de qualité mécanique de la résonance $Q = \Omega_{\mathrm{m}}/\Gamma = 15\,300$, qui est l'une des valeurs les plus élevées que nous ayons obtenues.

La courbe 5.2 a été acquise avec une résolution spectrale de 20 Hz et un espacement de 20 Hz entre chaque point. Cela signifie qu'on peut l'utiliser directement pour effectuer un ajustement lorentzien suffisamment précis du spectre de bruit des différents modes du micro-miroir. On a ainsi étudié une trentaine de modes propres attribuables au micro-miroir et on a déterminé leurs pulsations propres Ω_i, largeurs Γ_i et masses effectives M_i. La courbe (e) sur la figure 5.2 représente la contribution au bruit thermique du résonateur de ces modes propres. Son équation s'écrit formellement comme la somme des spectres individuels :

$$S_x^{\mathrm{T}}[\Omega] = \sum_i \frac{2\Gamma_i}{M_i\left(\left(\Omega_i^2 - \Omega^2\right)^2 + \Omega^2\Gamma_i^2\right)} k_{\mathrm{B}}T. \tag{5.15}$$

La courbe (f) de la figure 5.2 représente la somme de tous les bruit présents sur la figure (courbes b à e) : bruit thermique du résonateur, bruit de photon, bruit de fréquence du laser et bruit d'indice. On retrouve bien sûr l'ensemble des résonances principales du spectre expérimental ; l'écart entre le plancher de bruit attendu et le spectre observé entre les résonances semble être essentiellement dû au bruit thermique du miroir d'entrée.

5.2.2 Structure des modes propres

Simulation numérique par éléments finis

Afin de pouvoir comparer nos résultats expérimentaux avec des simulations numériques, on a utilisé le logiciel de calcul par éléments finis FEMLAB pour trouver les fréquences et les profils spatiaux des modes propres. Dans une première étape, on définit la structure du résonateur à étudier (voir la figure 5.9a). On rentre dans l'ordinateur les propriétés du matériau utilisé et les conditions aux limites imposées à l'oscillateur. Dans l'exemple présenté, la puce en silicium est plaquée contre le berceau en laiton sur la partie avant de la zone 2, tandis qu'elle est plaquée à l'arrière par la bague en cuivre sur les zones 1 et 2 à la fois. La zone 3 est libre de se déplacer. Le logiciel définit ensuite un maillage volumique pour la pièce (figure 5.9b). Le calcul par éléments finis consiste à discrétiser le problème, à calculer les relations de contrainte et de déformation existant entre les différents points, puis à résoudre le système fini d'équations obtenu. On peut voir sur la figure 5.9b que le maillage par défaut est automatiquement plus dense dans les zones singulières, notamment au voisinage des résonateurs. On peut contrôler manuellement la densité du maillage, en sachant toutefois qu'un maillage trop serré entraîne des temps de calculs plus longs, car on augmente le nombre d'équations. Enfin, on lance le calcul et l'ordinateur résout le système d'équations. Il affiche le profil spatial des modes propres obtenus (figure 5.9c). Le programme peut aussi fournir de nombreuses

informations sur les contraintes et les caractéristiques mécaniques des modes propres.

La simulation a été utile sur plusieurs points. Tout d'abord, on peut traiter des structures de formes bien plus complexes que celles présentées dans le modèle unidimensionnel du chapitre 2. Ceci deviendra indispensable à l'avenir en vue d'améliorer les facteurs de qualité en isolant mieux les résonateurs de leur environnement. La simulation permet aussi de calculer les structures spatiales des modes propres, pour les comparer avec les observations expérimentales. Enfin, on a pu simuler différentes façons de maintenir la puce en silicium et l'influence que cela avait sur les fréquences propres théoriques et sur le couplage entre les modes.

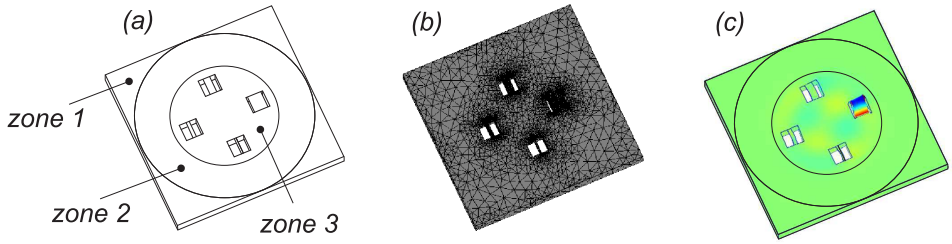


FIG. 5.9 – Etapes du programme de simulation par éléments finis. (a) : définition de la géométrie du résonateur et des contraintes ; (b) : calcul du maillage ; (c) : détermination du profil spatial du mode propre par résolution du système d'équations différentielles.

Etude de la structure spatiale du bruit thermique

L'observation du bruit thermique d'un mode propre particulier du résonateur dépend beaucoup du positionnement de l'axe optique de la cavité par rapport au résonateur : selon que le faisceau laser se réfléchit sur un nœud ou sur un ventre du mode, le niveau de bruit est profondément modifié. A la limite où le faisceau est parfaitement centré sur un nœud, on n'observe plus de pic de bruit thermique et la masse effective définie dans le chapitre 2 devient infinie (équation 2.59).

On a utilisé la dépendance de la masse effective avec la position du résonateur pour extraire les profils spatiaux des modes propres du résonateur placé sur la puce P3, qui est un pont de 1 mm de long et 1 mm de large (élément de droite sur la figure 5.9). Pour cela, on enregistre les niveaux de bruit à résonance obtenus en translatant le résonateur transversalement par rapport à l'axe du pont. Le faisceau laser ayant au niveau du micro-miroir un col de 60 μm, on réalise un vingtaine de mesures régulièrement espacées sur la largeur du résonateur. La translation est assurée par les vis micrométriques qui déplacent le support du micro-miroir, que l'on a placé de façon à ce que le pont soit parallèle aux axes des translations micrométriques. En chaque point, on calibre le spectre en terme de déplacement ; il faut pour cela mesurer à chaque fois la pente du signal d'erreur et la bande passante de la cavité optique car la finesse n'est pas parfaitement homogène sur l'étendue du résonateur.

On a représenté sur la figure 5.10 les niveaux mesurés à résonance pour différents modes

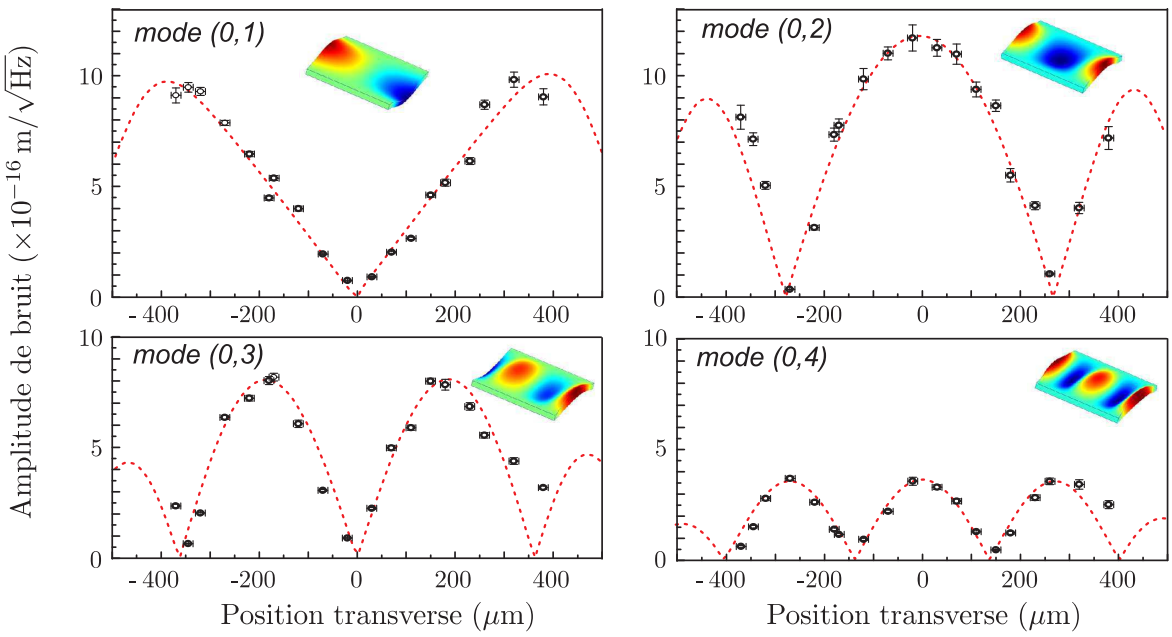


FIG. 5.10 – Structure spatiale pour différents modes propres, obtenue en déplaçant transversalement l'axe optique de la cavité sur la surface du micro-résonateur. Les courbes en pointillés sont obtenues par la simulation par éléments finis, ainsi que les profils des modes mis en insert.

propres du résonateur P3 en fonction de la position transverse de l'axe optique de la cavité de mesure, la position longitudinale correspondant au milieu du pont. Les incertitudes horizontales sur les points expérimentaux traduisent l'imprécision de la mesure de la position transverse sur les vis micrométriques (1 graduation tous les 10 μm). La mesure de la finesse a été effectuée uniquement à l'aide du signal d'erreur Pound-Drever, sans utiliser la cavité de référence, en comparant la largeur du pic d'Airy à la position des bandes latérales. Si la méthode est appropriée dans le cas des grandes finesses puisque les bandes latérales sont bien séparées de la porteuse, elle ne l'est plus quand la bande passante de la cavité devient comparable à la fréquence de modulation Pound-Drever. Cela se produit notamment lorsqu'on se rapproche des bords du résonateur, du fait des pertes en transmission. On a pris en compte cet effet dans les barres d'erreur verticales associées aux points expérimentaux.

Comme le montrent les quatre exemples de la figure 5.10, les modes ont également des profils spatiaux bien caractéristiques que l'on peut comparer aux résultats donnés par le programme de calcul par éléments finis. La connaissance simultanée de leur profil spatial et de leur fréquences de résonance nous a permis d'identifier sans ambiguïté chacun des modes. On a ainsi ajouté en insert le profil spatial des modes donnés par le programme. Les zones vertes correspondent à un nœud, les zones rouges et bleues à des ventres. On a également ajouté en pointillé les profils spatiaux estimés à partir de la simulation numérique. Le calcul par éléments finis fournit le profil spatial des modes propres du résonateur sous forme d'un tableau de valeur $u_n(y_i, z_j)$. Avec le maillage $\{\vec{r}_{ij} = (y_i, z_j)\}$ utilisé, cela correspond à 200 points sur la largeur du résonateur, c'est-à-dire un point tous les $l = 5\,\mu$m. Le niveau mesuré à résonance, inversement proportionnel à la masse effective optique, est proportionnel au carré

du recouvrement $\langle u_n, v_0^2 \rangle^2$ entre le profil spatial du mode et celui du faisceau laser centré au point $\vec{r_o}$ où se situe l'axe optique. En discrétisant l'intégrale, on obtient à partir des équations (2.40) et (2.59) :

$$\frac{1}{M_n^{\text{eff}}(\vec{r_o})} \approx \frac{l^2}{\rho e} \left(\sum_{i,j} u_n(\vec{r}_{ij})\, v_0^2(\vec{r_o} - \vec{r}_{ij}) \right)^2 \Bigg/ \left(\sum_{i,j} u_n^2(\vec{r}_{ij}) \right) \tag{5.16}$$

où e est l'épaisseur du résonateur. On a effectué ces calculs avec le logiciel MATHEMATICA. On calcule le recouvrement pour chaque position discrète de l'axe optique, ce qui donne une courbe dont le niveau global est ajusté pour correspondre aux valeurs expérimentales. On constate un très bon accord avec les résultats expérimentaux. On retrouve en particulier l'agencement des nœuds et des ventres, ainsi que les formes et les amplitudes de chaque lobe.

On peut noter que les courbe théoriques sont systématiquement atténuées sur les bords du résonateur, alors qu'on s'attend d'après les profils représentés en insert à ce que les déplacements soient au contraire maximums au bord. C'est en fait une conséquence des intégrales de recouvrement dans (5.16) qui sont réduites du fait qu'une partie du faisceau est en dehors du résonateur. Nous n'avons malheureusement pas pu tester expérimentalement ce comportement car il s'accompagne d'une réduction importante de la finesse de la cavité. Notons enfin que ces mesures ne permettent pas de déterminer les relations de phase entre les différents lobes (les zones rouges et bleues dans les inserts ont des signes opposés). Il est nécessaire pour cela d'appliquer une force modulée et d'examiner la phase de la réponse mécanique, comme cela a été fait par l'équipe avec des miroirs traditionnels [23].

Ces courbes montrent aussi le soin qu'on doit apporter au positionnement du micro-résonateur par rapport à l'axe optique de la cavité de mesure. Par exemple, alors que le résonateur a une largeur de 1 mm, le mode indexé (0,2) auquel on va s'intéresser plus particulièrement dans la suite présente un lobe central dont la largeur effective n'est que de 300 μm. Le centrage permet également d'éliminer des déplacements vus par la cavité les modes ayant un nœud au centre. Le mode propre indexé (0,1) peut être utilisé pour centrer le résonateur transversalement en minimisant la hauteur de son bruit thermique. De même, son pendant longitudinal, le mode (1,0) sert au positionnement dans le sens de la longueur du résonateur. On remarque que sur le spectre de bruit thermique présenté à la figure 5.2, on n'observe quasiment pas ces deux modes. Cette opération de centrage est cependant délicate car il est impossible de maintenir la cavité à résonance lorsqu'on translate la puce en silicium, et à chaque déplacement, il faut balayer la fréquence du laser pour retrouver le mode fondamental de la cavité.

Nomenclature des modes propres

Pour les structures rectangulaires de faible épaisseur, on peut indexer les modes propres par le nombre de nœuds qu'ils présentent dans les directions longitudinale et transverse. Par exemple, le mode propre oscillant à 2824 kHz et dont le profil spatial a été représenté sur la figure 5.10 en bas à droite possède quatre nœuds sur la largeur du résonateur et aucun sur sa longueur. Il est donc repéré par les indices (0,4). Par rapport aux miroirs traditionnels dont les modes sont indexés par 3 nombres [23], deux indices sont suffisants ici car on n'observe pas de modes dits “de respiration” pour lesquels les faces supérieures et inférieures oscillent en opposition de phase. Pour pouvoir les observer, il faudrait aller à des fréquences

bien supérieures, ou utiliser des structures plus épaisses.

On a étudié en détail les modes propres de type (0,n), car ce sont ceux qui présentent expérimentalement les meilleurs facteurs de qualité mécanique. Plusieurs d'entre eux atteignent 10 000 alors que pour la plupart des autres modes, les facteurs de qualité ne dépassent pas le millier. Cette observation est très reproductible d'un résonateur de géométrie rectangulaire à l'autre. L'explication provient du fait que ce sont les seuls modes qui n'induisent pas de contrainte sur les bords par lesquels ils sont tenus. Par contre, tous les modes longitudinaux (m,0) de la poutre sont souvent couplés avec des modes propres de la puce en silicium. On le voit bien sur la large enveloppe s'étalant entre 1600 et 2000 kHz dans le spectre de la figure 5.2, qui est en fait une somme de multiple modes propres de mauvais facteurs de qualité. Le comportement des modes propres au niveau des bords de fixation est donc crucial dans l'obtention de bons facteurs de qualité mécanique.

La façon dont le mode est couplé aux modes de la puce en silicium dépend également de nombreux autres facteurs, déterminants eux-aussi pour atteindre un grand facteur de qualité mécanique. Ainsi, l'écartement entre les lignes nodales des modes propres purement transverses de type $(0, n)$ est typiquement de quelques centaines de microns, beaucoup plus faible que la taille caractéristique des modes de la puce qu'on peut observer à ces fréquences là, qui est plutôt de l'ordre du millimètre. Le recouvrement entre les modes propres de la puce et ceux du résonateur est donc très faible. Par contre, les modes longitudinaux oscillant autour du MHz sont plus facilement couplés avec ceux de la puce car l'orientation des lignes nodales et la distance entre leurs nœuds sont compatibles. On a pu constater des variations des facteurs de qualité mécaniques pour les mêmes modes transverses selon le positionnement de la puce en silicium dans son berceau en laiton : en changeant son emplacement, on change la position du résonateur par rapport à la structure nodale des modes propres de la puce, qui varie selon les points de fixation de la puce dans son support.

On a aussi constaté une très grande dépendance des fréquences propres et des facteurs de qualité mécanique selon le serrage du sandwich laiton-cuivre-plexiglas tenant la puce. On avait initialement tenté de coller les puces sur une pièce de montage en dural, mais les facteurs de qualité mesurés étaient bien inférieurs à ceux obtenus par la suite, probablement à cause de l'amortissement induit par la colle. Ces résultats montrent l'importance du couplage entre les modes du résonateur et ceux de la puce. Il est clair que pour la prochaine génération de micro-miroirs pour lesquels on cherchera à réduire la taille et à augmenter les facteurs de qualité mécanique, une étude détaillée des dispositifs d'isolation du résonateur doit être menée au préalable. On peut penser notamment développer des dispositifs à cardan tels que ceux réalisés à l'ONERA [103].

Comparaison avec la simulation

On présente dans le tableau 5.1 la comparaison entre les différents paramètres mécaniques des modes obtenus expérimentalement et par la simulation. Les valeurs expérimentales proviennent de l'ajustement du spectre de bruit. Pour obtenir une modélisation satisfaisante, on a cherché à décrire au plus près la situation expérimentale. C'est pour cela qu'on a dessiné et analysé l'ensemble de la puce en silicium. Néanmoins, pour gagner en temps de calcul, on a supprimé les autres résonateurs en ne conservant que les trous de 1 mm de côté.

mode	$\Omega_i/2\pi$ (kHz) expérience	$\Omega_i/2\pi$ (kHz) simulation	$\Gamma_i/2\pi$ (Hz) expérience	M_i^{eff} (μg) expérience	M_i^{eff} (μg) simulation
(0,0)	367	436	126	101	148
(0,1)	477	525	1980	350 000	330 000
(0,2)	814	893	150	197	130
(0,3)	1612	1659	310	6 000	5 000
(0,4)	2824	2822	190	210	203
(0,5)	4366	4365	506	8 000	5000
(2,2)	2384	2798	1495	464	470

TAB. 5.1 – Comparaison entre les paramètres mécaniques des modes propres obtenus par l'expérience et ceux tirés de la simulation.

Pour les fréquences propres, l'accord entre la simulation et l'expérience est d'autant meilleur que la fréquence est élevée. C'est une conséquence du couplage des modes propres du résonateur avec ceux de la puce, qui est plus important à basse fréquence. Pour les mêmes raisons, l'accord est très bon pour les modes purement transverses, tels que les modes (0,4) et (0,5) car ils sont très peu couplés, mais il se dégrade pour les modes non purement transverse même à haute fréquence (voir le mode (2,2)).

Les masses effectives ont été calculées comme on l'a expliqué lors de l'étude des profils spatiaux. L'accord est tout à fait correct, d'autant plus qu'on ne connaît pas avec une très grande précision la position de l'axe optique à la surface du miroir. Si le faisceau était parfaitement centré, les modes d'indices longitudinal ou transverse impairs devraient avoir une masse infinie, se traduisant par le fait qu'on n'observe plus le pic de bruit thermique associé. En pratique, si les modes impairs ont effectivement une masse bien supérieure aux autres, dans la plage 10 mg ou plus au lieu de 100 μg, leur valeur finie traduit un décentrage du faisceau. Dans le calcul, on a essayé de reproduire les masses effectives mesurées sur les modes impairs en décalant l'axe optique de 5 μm selon la direction transverse.

La masse des modes présentant un ventre au centre du résonateur se situe aux alentours de 100 μg. Cette valeur est à comparer à la masse totale du résonateur égale à 140 μg, et à la masse optique égale à 1.7 μg pour un col de 60 μm (équation 2.66). Elle est typiquement 1000 fois plus petite que la masse effective des modes propres d'un miroir standard d'un pouce de diamètre [23].

5.2.3 Dépendance des facteurs de qualité avec la pression

Dans cette section, on s'intéresse aux facteurs de qualité mécanique et à leur dépendance vis-à-vis de la pression. La présence de gaz autour du miroir induit l'émission d'ondes acoustiques, ce qui se traduit par une dégradation de ses facteurs de qualité mécanique. On introduit d'abord un modèle simple décrivant l'émission d'ondes acoustiques par une surface mise en mouvement, puis on présente les résultats expérimentaux obtenus en mesurant l'évolution avec la pression des facteurs de qualité.

Rayonnement acoustique du micro-miroir

Pour un fluide à la température T et à la pression P, le libre parcours moyen $\bar{l}$ est relié à la section efficace σ et à la densité volumique n de l'air par :

$$\bar{l} = \frac{1}{n\sigma}. \tag{5.17}$$

Le temps moyen séparant deux collisions est $\tau = \bar{l}/v_{\mathrm{T}}$ où v_{T} est la vitesse quadratique moyenne des particules de masse m ($v_{\mathrm{T}} = \sqrt{3k_{\mathrm{B}}T/m}$). Pour l'air à température ambiante et pression atmosphérique, le libre parcours moyen est de l'ordre de 140 nm et il décroît de manière inversement proportionnelle à la pression. A pression ambiante, il est donc toujours très petit par rapport à la taille caractéristique du micro-résonateur, de l'ordre de 100 μm, et ce jusqu'à des pressions de l'ordre du mbar. Au-dessus de cette pression, un traitement acoustique des ondes émises est donc justifié, en deçà il faut utiliser un modèle balistique.

Supposons que l'onde acoustique rayonnée ait une longueur d'onde petite devant la longueur caractéristique des déformations de sa surface. On peut alors considérer que chaque élément de surface de l'objet rayonne dans l'air une onde plane [91]. Le flux d'énergie moyen de l'onde émise vaut $c\rho_{\mathrm{air}}\overline{v^2}$, où ρ_{air} représente la masse volumique de l'air, c la vitesse du son et $\overline{v^2}$ la vitesse quadratique moyenne de l'onde dans l'air. On s'intéresse au flux d'énergie au niveau de la surface où la vitesse dans l'air est égale à celle du résonateur. La vitesse instantanée $\vec{v}(\vec{r},t)$ de la surface du miroir au point $\vec{r}$ se déduit de la décomposition modale (équation 2.37) :

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \sum_n \dot{a}_n(t)\vec{u}_n(\vec{r}). \tag{5.18}$$

La puissance totale rayonnée $\mathcal{P}$ par la surface du miroir vaut :

$$\mathcal{P} = c\rho_{\mathrm{air}} \int_{\mathcal{S}} d^2r\, \overline{v^2} = c\rho_{\mathrm{air}} \sum_n \overline{|\dot{a}_n(t)|^2} \int_{\mathcal{S}} d^2r\, |\vec{u}_n(\vec{r})|^2, \tag{5.19}$$

où on a utilisé l'orthogonalité des modes propres[2], $\mathcal{S}$ représente toute la surface du résonateur, c'est-à-dire à la fois ses faces supérieures et inférieures. La puissance rayonnée se met alors sous la forme d'une somme de termes $\mathcal{P}_n$ correspondant à la puissance dissipée par chaque mode acoustique indépendamment les uns des autres :

$$\mathcal{P}_n = c\rho_{\mathrm{air}} \overline{|\dot{a}_n(t)|^2} \int_{\mathcal{S}} d^2r |\vec{u}_n(\vec{r})|^2. \tag{5.20}$$

L'amplitude a_n du mode n subit un amortissement lié à la dissipation d'énergie par l'onde acoustique rayonnée, avec un taux Γ_n^{air} pour le mode n défini par l'équation :

$$\mathcal{P}_n = M_n \Gamma_n^{\mathrm{air}} \overline{|\dot{a}_n(t)|^2}, \tag{5.21}$$

[2] Formellement l'orthogonalité entre deux modes est définie comme l'intégrale sur tout le volume du produit de leurs déformations, mais pour tous les modes basse fréquence qu'on étudie, le résonateur se déforme en bloc, ce qui signifie que la relation d'orthogonalité reste vraie lorsqu'on la restreint à une intégration surfacique. Ceci n'est plus vrai dès qu'on étudie des modes de respiration, mais ceux-ci sont attendus à beaucoup plus haute fréquence, au-delà de $c_{\mathrm{Si}}/2e = 18$ MHz pour une structure de 60 μm d'épaisseur et une vitesse du son dans le silicium de $c_{\mathrm{Si}} = 2200\,\mathrm{m/s}$.

où M_n est la masse du mode n (équation 2.40). On peut relier Γ_n^{air} à la déformation $\vec{u}_n(\vec{r})$ à l'aide de l'équation (5.20) :

$$\Gamma_n^{\text{air}} = c\,\frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{Si}}}\,\frac{\int_{\mathcal{S}} d^2r\,|\vec{u}_n(\vec{r})|^2}{\int_V d^3r\,|\vec{u}_n(\vec{r})|^2}, \tag{5.22}$$

où on a utilisé la définition de la masse du mode en fonction de l'intégrale en volume des déformations $\vec{u}_n(\vec{r})$ du mode et de la masse volumique ρ_{Si} du silicium. Pour calculer cette expression, il faut connaître la dépendance de la structure spatiale du mode selon l'épaisseur e du micro-miroir. Pour les modes propres étudiés et aux fréquences auxquelles on travaille, les modes correspondent en fait à des déplacements en bloc selon l'épaisseur du résonateur. L'intégrale selon l'épaisseur se simplifie et l'intégrale en volume se réduit au produit de l'épaisseur e par l'intégrale sur une surface du miroir (équation 2.40). L'expression de Γ_n^{air} devient :

$$\Gamma_n^{\text{air}} = \frac{2c}{e}\frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{Si}}}. \tag{5.23}$$

où le facteur 2 correspond à la prise en compte du rayonnement des deux faces de l'oscillateur. D'après ce modèle, on s'attend à un amortissement complètement indépendant de la structure du mode propre. Avec les masses volumiques $\rho_{\text{air}} = 1,3\,\text{kg/m}^3$ et $\rho_{\text{Si}} = 2330\,\text{kg/m}^3$ et une épaisseur $e = 60\,\mu\text{m}$, on trouve un taux d'amortissement dû au rayonnement acoustique de l'ordre de $\Gamma_n^{\text{air}}/2\pi = 977\,\text{Hz}$ à la pression atmosphérique. Cette valeur est du même ordre de grandeur que celles obtenues pour l'amortissement total mesuré à pression ambiante (pour le mode (0,2) oscillant à 814 kHz, on a mesuré un amortissement de 1170 Hz à pression ambiante), ce qui laisse espérer une augmentation significative des facteurs de qualité en allant sous vide.

La vitesse du son c étant indépendante de la pression [98], la dépendance de Γ_n^{air} en fonction de la pression P n'apparaît qu'à travers la masse volumique ρ_{air} de l'air selon la formule

$$\rho_{\text{air}} = \frac{M_{\text{air}}}{RT}P, \tag{5.24}$$

où M_{air} est la masse molaire de l'air et R la constante des gaz parfaits. Comme le taux d'amortissement total Γ_n du mode est la somme de Γ_n^{air} et d'autres sources d'amortissement a priori indépendants de la pression, on s'attend à une dépendance affine de la largeur des pics de résonance du miroir avec la pression.

Etude expérimentale de la dépendance avec la pression

On a fait varier expérimentalement la pression en ajoutant une micro-fuite réglable en sortie de l'enceinte à vide (voir la section 3.5). La pression est mesurée au moyen d'une sonde Pirani pour les basses pressions et avec un manomètre à aiguille au-dessus de 1 mbar. On a recoupé les informations des deux sondes dans la zone intermédiaire. Lorsqu'on modifie la pression, on change l'indice optique dans la cavité et donc on décale la fréquence de résonance optique : il faut à chaque fois retrouver la résonance en balayant la fréquence du laser. Pour chaque valeur de la pression, on effectue une acquisition du spectre de bruit thermique du résonateur, ce qui permet de déterminer l'amortissement total des modes en effectuant des ajustements lorentziens des pics de bruit thermique. On peut voir clairement sur la figure 5.11 l'affinement du spectre de bruit thermique du mode à 2824 kHz, entre la pression atmosphérique et une pression de 10^{-3} mbar. La hauteur à résonance du spectre

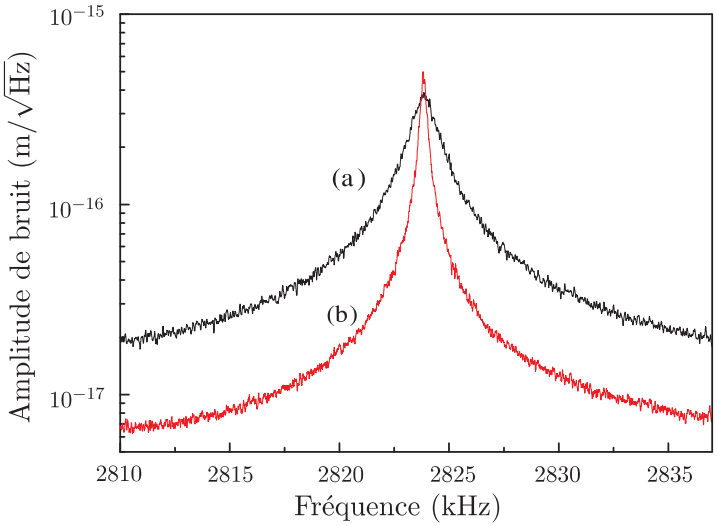


FIG. 5.11 – Bruit thermique du mode à 2824 kHz du résonateur P3, à pression ambiante (a) et sous vide à une pression de 10^{-3} mbar (b).

de bruit thermique varie comme l'inverse de l'amortissement total, comme on s'y attend à l'équilibre thermodynamique (équation 5.14).

On a représenté sur la figure 5.12 la variation avec la pression de l'amortissement de quatre modes propres de vibration du micro-miroir P3. Considérons tout d'abord le mode propre (0,2) à 814 kHz. L'équation de la courbe (a) en pointillés est :

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{d\Gamma^{\text{air}}_{(0,2)}}{dP} P, \tag{5.25}$$

avec $\Gamma_0/2\pi = 90\,\text{Hz}$ et $d\Gamma^{\text{air}}_{(0,2)}/dP = 2\pi \times 1080\,\text{Hz/bar}$. On constate que l'ajustement suit bien les points expérimentaux dans la plage 100 - 1000 mbar, avec une légère déviation aux pressions intermédiaires, entre 1 et 100 mbar. Néanmoins, le calcul précédent est très satisfaisant pour ce mode propre, aussi bien pour la dépendance linéaire avec la pression que pour la pente. On gagne plus d'un facteur 10 en passant sous vide, le facteur de qualité mécanique augmentant de 700 à 9000.

Si on s'intéresse maintenant aux autres modes propres, on constate que le modèle théorique n'est plus valable, tant au niveau de l'amortissement attendu à pression ambiante (notamment pour le mode à 1612 kHz) que pour la loi de puissance observée. La courbe noire en pointillés correspond à une évolution en $\sqrt{P}$ du facteur de qualité, en désaccord avec la prédiction linéaire en P. Une première explication à ce désaccord est liée à l'hypothèse que la longueur d'onde acoustique est petite devant la structure du mode. Dans l'exemple du mode oscillant à 2824 kHz, la longueur d'onde acoustique est de $c/f \simeq 120\,\mu$m, qui n'est plus petite devant l'espacement entre les nœuds ($\simeq 200\,\mu$m) : l'onde acoustique émise possède une structure en champ proche plus complexe qu'une onde plane.

Une autre source de dissipation permet d'expliquer la loi de puissance observée : la viscosité de l'air. Un exemple bien connu est la force de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ s'exerçant sur une structure simple comme une sphère de rayon R se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide de viscosité dynamique η [98]. Pour un système oscillant à la pulsation Ω, l'épaisseur de la couche

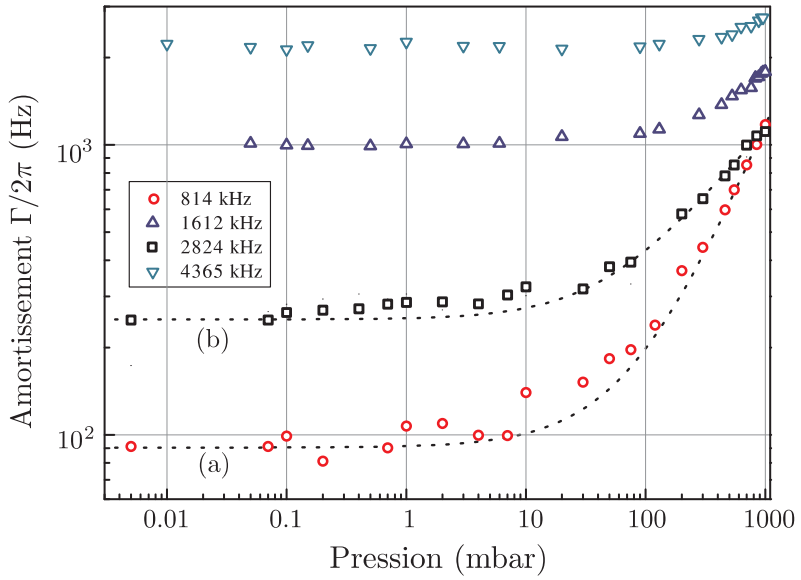


FIG. 5.12 – Evolution de l'amortissement total avec la pression pour quatre modes propres différents du résonateur P3. Les courbes en pointillé correspondent respectivement à une dépendance linéaire (a) et en $\sqrt{P}$ (b) de l'amortissement avec la pression.

limite est définie par $\delta = \sqrt{\nu_{\text{air}} 2\pi/\Omega}$, où ν_{air} est la viscosité cinématique. Cette couche est de l'ordre de $\delta = 2\,\mu$m dans l'air à pression atmosphérique pour une fréquence d'oscillation de 2824 kHz ($\nu_{\text{air}} = \eta_{\text{air}}/\rho_{\text{air}} = 15.6 \times 10^{-6}\,\text{m}^2.\text{s}^{-1}$). On peut calculer la force qui s'exerce alors sur la sphère lors de son mouvement oscillant [99] :

$$\vec{F} = -6\pi\eta_{\text{air}} R \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) \vec{v}. \tag{5.26}$$

A fréquence nulle, on retrouve la loi de Stokes. Plus la fréquence est élevée, plus l'épaisseur de peau est faible et la force de frottement importante. On comprend ainsi que les effets visqueux puissent devenir la cause principale de l'amortissement par l'air pour des petites structures à fréquence élevée. La viscosité dynamique de l'air η_{air} est indépendante de la pression ; par contre la viscosité cinématique ν_{air} varie de manière inversement proportionnelle à la pression à travers la masse volumique ρ_{air} de l'air. Ainsi, l'amortissement dû à la viscosité varie comme $\sqrt{P}$, et ce modèle simple donne une interprétation possible de l'évolution de l'amortissement avec la pression pour le mode résonnant à 2824 kHz. Bien sûr, il nécessiterait d'être raffiné pour prendre en compte le vrai profil spatial du résonateur. Pour les deux derniers modes présentés sur la figure 5.12, l'amortissement intrinsèque est beaucoup trop élevé pour espérer déterminer avec précision l'évolution avec la pression.

Les facteurs de qualité mécanique les plus élevés que nous ayons obtenus sous vide correspondent à des modes transverses de type (0,n) peu couplés aux modes de la puce en silicium. La valeur maximale atteinte est de 15 000, ce qui est finalement peu comparé aux valeurs obtenues dans d'autres expériences [103]. Ceci peut être dû à la présence de pertes de différentes natures ; citons par exemple les effets thermoélastiques [104, 105], les pertes par encastrement, la rugosité de surface, le couplage avec la puce. Les facteurs de qualité devraient être améliorés par une meilleure isolation du résonateur de son support et par le fait d'aller à basse

température, ce qui réduira les pertes par effet thermoélastique.

5.2.4 Autres résonateurs

Lors de la réalisation de nos micro-structures, nous avons gravé différentes géométries afin de tester la répartition des fréquences de résonance et les caractéristiques mécaniques des modes pour différents types de résonateurs. Parmi les puces qui ont été gravées et sur lesquelles ont été déposées des couches diélectriques de suffisamment bonne qualité, nous avons étudié le bruit thermique de ponts plus longs et plus étroits, et de disques avec ou sans ponts de fixation.

Changer la taille ou le rapport d'aspect des poutres ne modifie pas la structure spatiale des modes ni leur répartition spectrale de façon significative. On observe toutefois des variations des facteurs de qualité mécanique et des amplitudes des résonances thermiques, du fait d'un couplage différent avec les modes de la puce. Les modes des disques ont par contre une structure et une répartition spectrale totalement différentes. S'ils peuvent toujours être repérés par deux indices, l'un représente maintenant le nombre de nœuds dans la direction radiale, et l'autre la symétrie angulaire. Nous présentons dans cette section les résultats obtenus avec une telle structure.

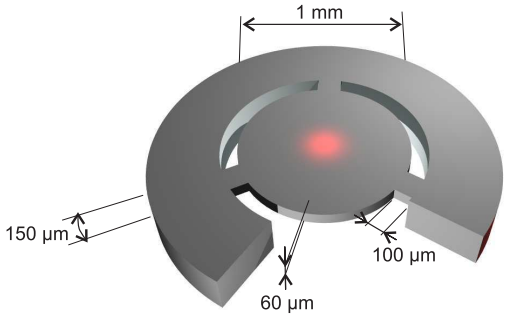


FIG. 5.13 – Schéma du micro-résonateur de la puce DP2.

Sur la figure 5.13, on a représenté le résonateur DP2 en forme de disque et suspendu au reste de la puce par trois ponts. La zone centrale fait 1 mm de diamètre et 60 μm d'épaisseur, alors que les ponts ont une longueur de 100 μm et une largeur de 150 μm environ. Cette structure a été conçue pour tester des dispositifs de suspension destinés à isoler physiquement le disque central, afin de limiter son couplage avec le reste de la puce. Ce type de suspension par ponts avait déjà été testé dans l'équipe sur des miroirs plan-convexes [16] et avait constitué un premier essai dans le but d'améliorer les facteurs de qualité mécanique.

On a mesuré des finesses optiques un peu plus faibles sur cette structure que sur la puce P3 : entre 12 000 et 23 000 selon la position de l'axe optique de la cavité. On a représenté sur la figure 5.14 le spectre de bruit thermique mesuré entre 0 et 4 MHz, avec une puissance incidente de 3 mW. On a effectué quatre acquisitions successives sur des plages de 1 MHz de large, avec une résolution spectrale de 100 Hz et un moyennage sur 50 balayages. Pour les modes présentant une faible largeur, comme celui à 927 kHz, on a effectué une acquisition séparée avec une résolution plus fine. On a également présenté sur la figure 5.14 les profils spatiaux calculés par le programme de simulation par éléments finis. Les valeurs expérimentales des paramètres mécaniques (fréquence, amortissement et masse effective) des modes propres les

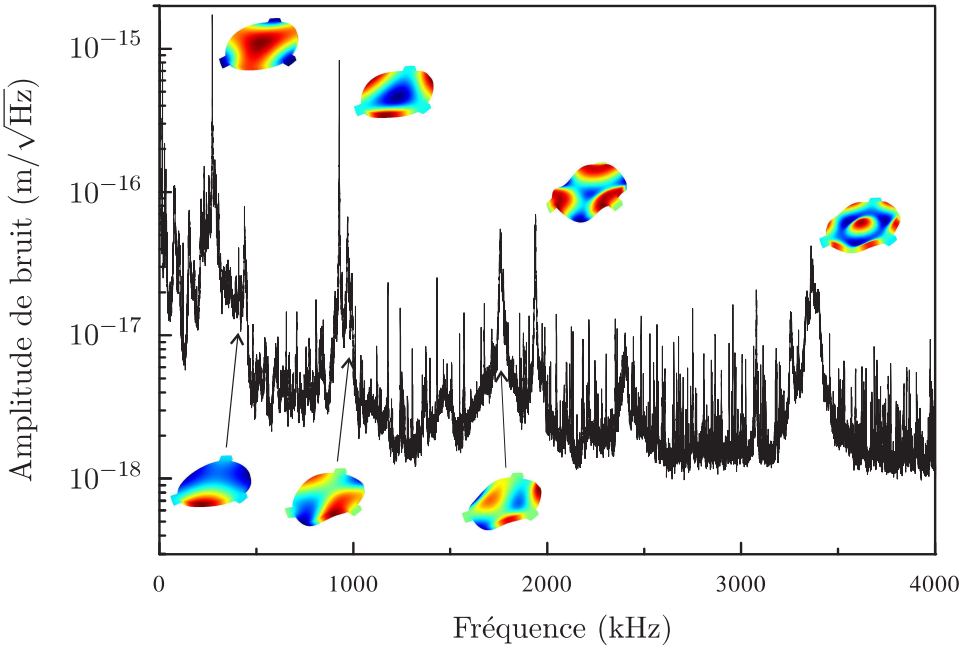


FIG. 5.14 – Spectre de bruit thermique mesuré au centre du résonateur en forme de disque à ponts. Les profils spatiaux des modes propres donnés par la simulation sont représentés pour quelques résonances identifiées.

plus significatifs ont été reportées dans le tableau 5.2, ainsi que les fréquences données par la simulation.

Le premier mode significatif, qui oscille à 272 kHz, correspond à un mouvement d'ensemble des ponts, le disque central se déplaçant presque sans déformation. Le suivant, qui oscille à 438 kHz, est un mode dans lequel deux ponts oscillent en phase, le troisième en opposition de phase, le disque central étant toujours peu déformé. Les modes à 927, 1938 et 3361 kHz correspondent à des modes propres du disque seul, pour lesquels les ponts ne vibrent quasiment pas. Ils possèdent tous une symétrie de révolution d'ordre 3, imposée par la présence des ponts. Les masses effectives mesurées pour ces modes sont reportées dans le tableau 5.2 ; elles sont comparables à celles du disque seul. On a constaté une amélioration par un facteur 4 des facteurs de qualité mécanique de ces modes par rapport à un disque sans pont. Néanmoins, la

$\Omega_i/2\pi$ (kHz) Expérience	$\Omega_i/2\pi$ (kHz) Simulation	$\Gamma_i/2\pi$ (Hz) Expérience	M_i (μg) Expérience
272	313	430	298
438	421	910	29 000
927	903	258	204
1758	1856	2000	2070
1938	1987	3600	650
2399	2474	-	-
3361	3356	3170	650

TAB. 5.2 – Paramètres mécaniques des modes propres du résonateur DP2.

structure en forme de disque possède une dégénérescence angulaire que les ponts ne suffisent pas à lever : les modes haute fréquence sont peu séparés les uns des autres et conduisent à l'observation de pics élargis dans le spectre de la figure 5.14.

5.3 Action électrostatique sur le micro-miroir

La vaste bibliographie qu'on trouve sur les MEMS et leurs applications suggère fortement de s'intéresser aux effets électrostatiques dans ces micro-structures. La force électrostatique permet en effet de déplacer ou déformer les micro-structures, ce qui s'avère extrêmement utile pour le contrôle de ces objets. Nous avons tout d'abord caractérisé l'action de cette force sur le micro-résonateur (section 5.3.1). Elle nous a ensuite permis de mesurer la réponse transitoire et la susceptibilité mécanique du résonateur (sections 5.3.2 et 5.3.3). En particulier, nous avons mis en évidence un effet d'interférence destructive entre la résonance d'un mode et le fond associé à tous les autres modes. Enfin, nous avons utilisé la force électrostatique pour refroidir le résonateur par un processus de friction froide (section 5.3.4).

5.3.1 La force électrostatique

Les micro-miroirs ont été fabriqués dans un échantillon de silicium légèrement dopé, qui présente une conductivité faible mais non négligeable (de l'ordre de $10\,\mathrm{m}\Omega.\mathrm{cm}$), ce qui permet d'envisager l'usage d'une force électrostatique pour déplacer le MEMS. On a donc ajouté une électrode conductrice à l'arrière du micro-miroir, pour former l'équivalent d'un condensateur avec le résonateur. On peut appliquer entre la pointe et le résonateur une tension qui va induire une force électrostatique entre les deux extrémités de ce condensateur. Pour une différence de potentiel V, la force répulsive qui s'exerce entre deux armatures supposées parfaitement conductrices, planes et parallèles, de surface S et séparées d'une distance d dans le vide, s'écrit :

$$F_{\mathrm{el}} = \frac{\epsilon_0 S}{2d^2}\, V^2, \tag{5.27}$$

où ϵ_0 est la perméabilité électrique du vide. Aux fréquences auxquelles on travaille et vu la taille caractéristique des systèmes qu'on étudie, l'approximation des régimes quasi-stationnaires s'applique encore et on peut utiliser cette expression statique.

Ordres de grandeur

Cette force dépend quadratiquement de la différence de potentiel et varie de manière inversement proportionnelle au carré de la distance. Pour fixer les ordres de grandeur, la force s'exerçant entre deux plaques conductrices de surface égale à $200\,\mu\mathrm{m} \times 200\,\mu\mathrm{m}$ et séparées de $100\,\mu\mathrm{m}$ est de l'ordre du nanonewton pour une différence de potentiel de 10 V. A résonance, la susceptibilité mécanique $\chi[\Omega_{\mathrm{m}}] = Q/M\Omega_{\mathrm{m}}^2$ vaut environ $2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/N}$ pour un mode de masse effective $100\,\mu\mathrm{g}$, oscillant à 1 MHz avec un facteur de qualité de 10^4. On s'attend donc à mesurer des déplacements de l'ordre de $2 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$ pour une modulation à résonance de 10 volts. Cette valeur est à comparer au bruit thermique à la résonance mécanique qui limite la sensibilité typiquement au niveau de $10^{-15}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. Il est donc très facile de mesurer le déplacement induit par la force électrostatique. Bien sûr, une détermination plus précise des ordres de grandeur nécessiterait de prendre en compte la géométrie réelle de la pointe et du résonateur. Mais ce calcul montre que notre dispositif est capable de mesurer des forces

avec une sensibilité de $400\,\mathrm{fN}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, et qu'avec une résolution spectrale de 1 Hz, la force électrostatique est 1000 fois plus élevée.

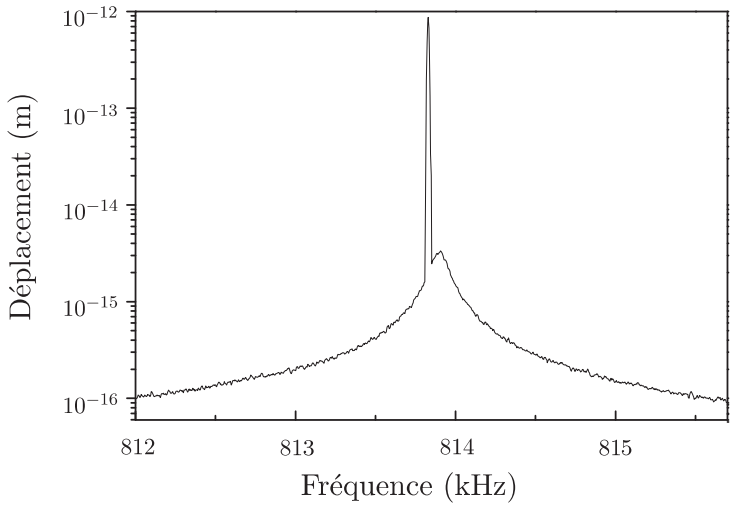


FIG. 5.15 – Spectre de position du micro-résonateur en réponse à une force électrostatique modulée au voisinage de la fréquence de résonance du mode propre à 814 kHz. La mesure a été effectuée avec une résolution spectrale de 10 Hz.

On a représenté sur la figure 5.15 le déplacement induit par une force électrostatique modulée à une fréquence voisine de la résonance du mode propre à 814 kHz du résonateur P3. La mesure a été effectuée en moyennant une centaine de balayages, avec une résolution spectrale de 10 Hz. On a volontairement choisi une fréquence de modulation légèrement différente de celle de la résonance pour mieux distinguer la réponse du mode à la force électrostatique par rapport au spectre de bruit thermique. On constate l'importante dynamique qui existe entre le déplacement induit par la force et le bruit thermique, et ce pour des tensions de quelques volts seulement.

Dépendance avec la tension

La force électrostatique varie comme le carré de la différence de potentiel V. Cette loi quadratique s'avère peu pratique à l'usage car elle introduit une non linéarité entre la tension appliquée et le déplacement induit. Lorsqu'on va moduler à une fréquence donnée avec une tension variable $V(t) = V_0 \cos(\Omega t)$, on va obtenir une force oscillant à la fréquence double. On a vérifié cette dépendance en appliquant une tension sinusoïdale oscillant à la fréquence moitié de la fréquence de résonance du premier mode d'une poutre différente de P3 (puce P2 dont la fréquence du mode fondamental est égale à 407 kHz). On a fait varier l'amplitude de la modulation et mesuré le déplacement induit pour chaque valeur de la tension. De façon à augmenter la tension appliquée à la pointe, le générateur pilote un amplificateur TEGAM capable de fournir une tension de $\pm 200\,\mathrm{V}$ avec un gain de 30. Les résultats sont reportés sur la figure 5.16. La courbe en pointillés représente un ajustement quadratique des données.

On retrouve un comportement en partie linéaire en appliquant simultanément une tension de décalage V_{DC} continue et une tension de modulation $V(t) = V_0 \cos(\Omega t)$, puisque la force

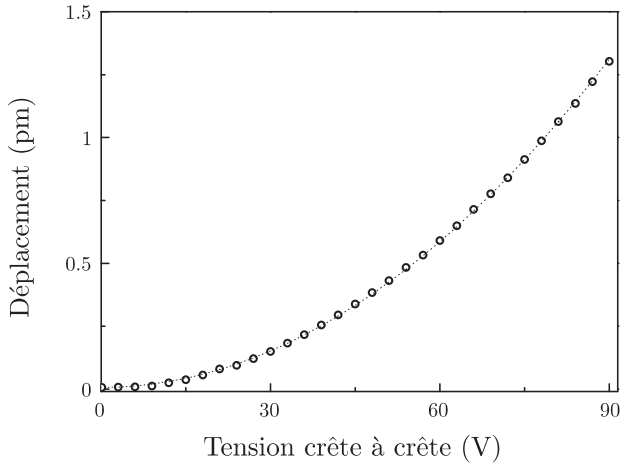


FIG. 5.16 – Dépendance avec la tension du déplacement induit, dans le cas d'une modulation à la fréquence moitié (203.5 kHz pour une réponse à 407 kHz du résonateur P2). La tension reportée en abscisse est la valeur crête-à-crête appliquée à la pointe.

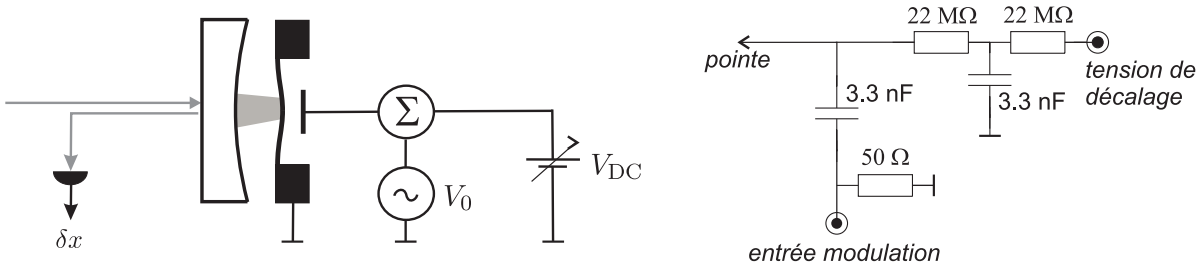


FIG. 5.17 – A gauche : schéma de principe de la mise en œuvre de la force électrostatique à l'aide d'une pointe métallique placée derrière le résonateur. A droite : schéma électrique du sommateur entre une tension de décalage et la modulation.

électrostatique s'écrit alors :

$$F_{\mathrm{el}} = \frac{\epsilon_0 S}{2d^2}\left(V_{\mathrm{DC}}^2 + \frac{V_0^2}{2} + 2V_{\mathrm{DC}}V_0\cos(\Omega t) + \frac{V_0^2}{2}\cos(2\Omega t)\right). \tag{5.28}$$

On applique de cette manière une force statique, un terme modulé à la fréquence double et un terme oscillant à la fréquence de modulation dont l'amplitude est proportionnelle à la tension de décalage V_{DC}. La composante statique va déformer en continu le résonateur et donc modifier la longueur de la cavité, mais ceci est compensé par l'asservissement de la fréquence du laser qui va maintenir la cavité à résonance. La modulation à la fréquence double devient négligeable lorsque l'amplitude V_0 de la modulation est petite devant le décalage continu V_{DC}. De plus, on mesure les déplacements résultants à l'aide de l'analyseur de spectre et il est facile de ne sélectionner que les fréquences autour de Ω. L'amplitude de la force est modulée à Ω est finalement modifiable directement à partir de l'amplitude de la modulation V_0 mais aussi en changeant la tension d'offset V_{DC}. Ceci sera utile dans les expériences de refroidissement par friction froide qu'on présentera plus loin (section 5.3.4) pour changer le gain global de la

rétroaction.

Pour exercer des forces importantes, il faut appliquer une tension de décalage V_{DC} importante sur la pointe. Le champ de claquage de l'air sec est de 3 MV/m. Pour un espacement de l'ordre de 200 μm entre la pointe et le résonateur, on doit se limiter à des tensions inférieures à 600 volts. Pour pouvoir sommer les deux tensions, on a construit un circuit permettant d'ajouter à la fois une tension continue importante, jusqu'à 1000 Volts, et une tension de commande adaptée à 50 Ω. Le schéma de principe est représenté sur la figure 5.17. Pour produire la tension de décalage, on utilise le réglage d'offset d'un amplificateur de tension 0 - 1000 volts. Un filtre passe-bas placé sur la voie DC et un filtre passe-haut dans la voie de modulation permettent d'ajouter les deux tensions au niveau de la pointe, tout en assurant un isolement efficace entre les deux entrées. Les deux résistances de valeur élevées (22 MΩ) permettent d'utiliser des condensateurs haute tension de capacité réduite, et limitent le courant en cas de court-circuit de la pointe.

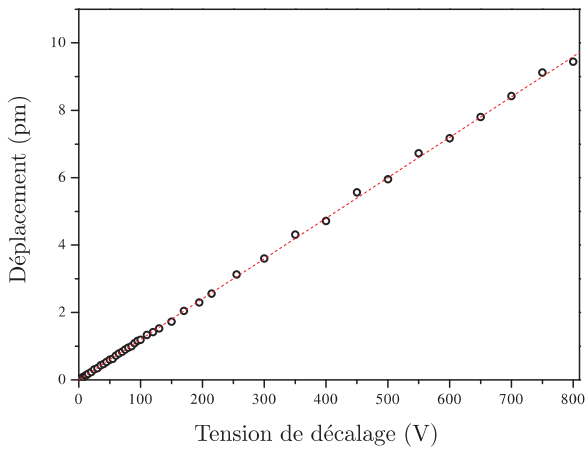


FIG. 5.18 – Amplitude des oscillations du mode fondamental du résonateur P2 obtenues en faisant varier la tension de décalage de la force électrostatique, pour une tension de modulation de 5 V d'amplitude à 407 kHz. La distance de la pointe au résonateur est d'environ 200 μm. La courbe en pointillés est un ajustement linéaire des données.

On a testé l'influence de la tension de décalage sur la force électrostatique en appliquant une modulation de 5 volts d'amplitude, à la fréquence de résonance du mode fondamental du résonateur P2 (407 kHz). Comme le montre la figure 5.18, les déplacements à résonance augmentent de manière linéaire avec la tension de décalage. On obtient des déplacements de l'ordre de quelques picomètres pour des tensions de décalage de quelques centaines de volts. La pente est en bon accord avec la valeur que l'on peut calculer à partir de l'équation (5.28) : on trouve en effet une pente de 30 pm/kV pour une susceptibilité mécanique égale à 6×10^{-4} m/N d'après les caractéristiques mesurées du mode, et pour une pointe ayant une surface effective de 200 μm de diamètre, placée à une distance de 200 μm du micro-résonateur.

Variation avec la distance entre la pointe et le résonateur

On a étudié la dépendance de la force électrostatique avec la distance séparant la pointe et le résonateur. La pointe électrostatique est montée sur un système de trois translations micrométriques graduées avec un vernier précis à 10 μm. En pratique, le jeu existant et l'élasticité de la pointe limitent la précision sur la distance à environ 20 μm. Le positionnement transverse de la pointe est effectué en l'observant au moyen d'une caméra CCD placée à l'arrière de la cavité Fabry-Perot.

On a représenté sur la figure 5.19 la variation des déplacements mesurés en fonction de la distance d entre la pointe et le résonateur. On observe une décroissance des déplacements comme l'inverse de la distance pour des écartements inférieures à 300 μm. Cette dépendance est différente de celle prédite par le modèle plan-plan (équation 5.27) et correspond plutôt à celle prédite pour une sphère et un plan à condition que la distance reste petite devant le rayon de la sphère [108]. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'on a utilisé comme pointe électrostatique une structure usinée en laiton qui ne ressemble en rien à une armature plane de condensateur.

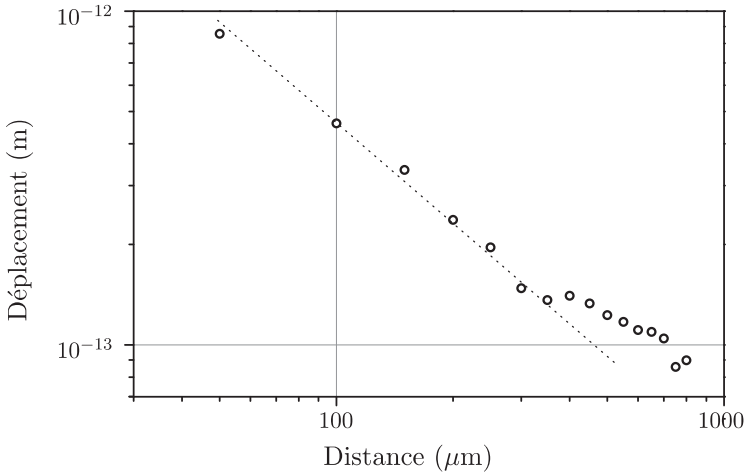


FIG. 5.19 – Dépendance des déplacements induits par la force électrostatique avec la distance entre la pointe et la face arrière du résonateur.

Il est difficile de mesurer la distance absolue d entre la pointe et le résonateur, d'une part car la surface de la pointe n'est pas plane, d'autre part parce qu'il vaut mieux éviter de faire entrer en contact la pointe électrostatique avec la surface du résonateur, même si ce n'est pas destructif pour des pointes suffisamment peu rigides. En lisant la graduation l de la vis micrométrique, on n'a donc accès qu'à une valeur relative. On peut toutefois faire un ajustement des points obtenus expérimentalement, en tenant compte d'un décalage d_0 de façon à reproduire le comportement observé en $1/(l + d_0)$. On a effectué cette procédure afin d'obtenir la figure 5.19 où l'abscisse représente la distance absolue : on trouve ainsi que la position de la pointe a varié entre 50 et 850 μm.

Le comportement à plus longue distance est plus difficilement interprétable. La géométrie est très complexe dès lors que la pointe sort de l'orifice de la face arrière du résonateur, c'est-à-dire au-delà de quelques centaines de microns, puisque le champ électrostatique vu par le résonateur est très certainement perturbé par la présence du substrat en silicium.

En pratique la pointe est placée à environ 200 μm du résonateur dans les expériences qui suivent, une distance évitant tout risque de contact direct tout en donnant force électrostatique d'amplitude suffisante.

5.3.2 Réponse transitoire à la force électrostatique

On présente dans cette section une analyse de la réponse du résonateur à une force électrostatique lorsque celle-ci est supprimée brusquement. L'observation du régime transitoire permet de remonter à des caractéristiques mécaniques importantes comme les facteurs de qualité mécanique. En négligeant le bruit thermique et en supposant qu'on applique une force électrostatique F_{el} résonante avec un mode du résonateur caractérisé par une fréquence de résonance Ω_{m}, un amortissement Γ et une masse M, le résonateur atteint un régime stationnaire correspondant à une oscillation forcée :

$$x(t) = \frac{F_{\mathrm{el}}}{M\Omega_{\mathrm{m}}\Gamma}\,\sin(\Omega_{\mathrm{m}}t + \varphi) \tag{5.29}$$

où φ est l'éventuel déphasage de la force appliquée. En supprimant la force à l'instant $t = 0$, le résonateur suit un régime transitoire amorti :

$$x(t) = \frac{F_{\mathrm{el}}}{M\Omega_{\mathrm{m}}\Gamma}\,\sin(\Omega_{\mathrm{m}}t + \varphi)\,e^{-\frac{\Gamma t}{2}}. \tag{5.30}$$

La position $x(t)$ relaxe vers zéro avec un taux égal à $\Gamma/2$, tout en oscillant à la fréquence Ω_{m}.

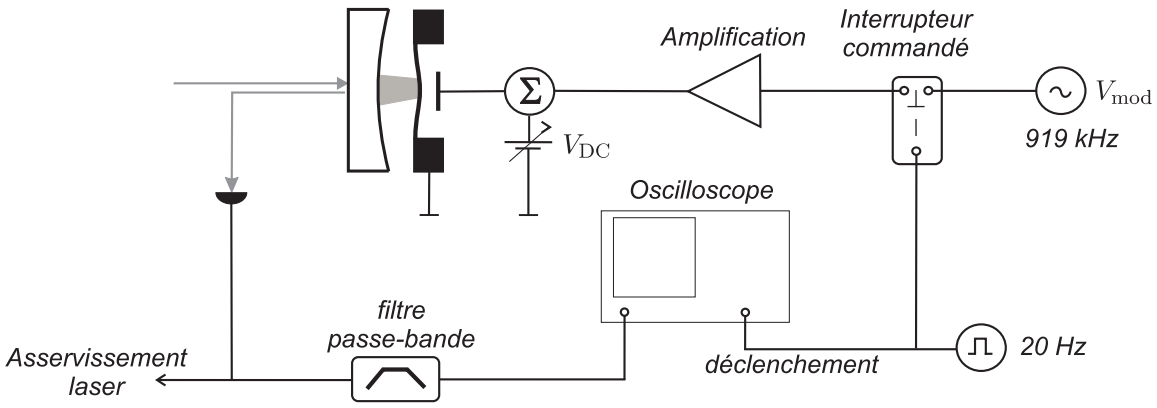


FIG. 5.20 – Schéma du dispositif expérimental permettant l'observation de la réponse en régime transitoire de l'oscillateur à une force électrostatique.

Nous avons observé expérimentalement la relaxation du mode oscillant à 919 kHz du résonateur P2. La force électrostatique est appliquée en utilisant le dispositif présenté dans la section précédente, avec une tension de décalage de 30 Volts. La modulation issue d'un générateur basse fréquence traverse un interrupteur commandé par un signal carré, fourni par un second générateur fonctionnant à 20 Hz. La modulation est enfin amplifiée par un ZHL 32A de façon à fournir une amplitude de quelques volts. L'interrupteur présente des temps de commutation très inférieurs à la micro-seconde, ce qui permet de couper suffisamment rapidement la force électrostatique. La cavité est maintenue à résonance par l'asservissement

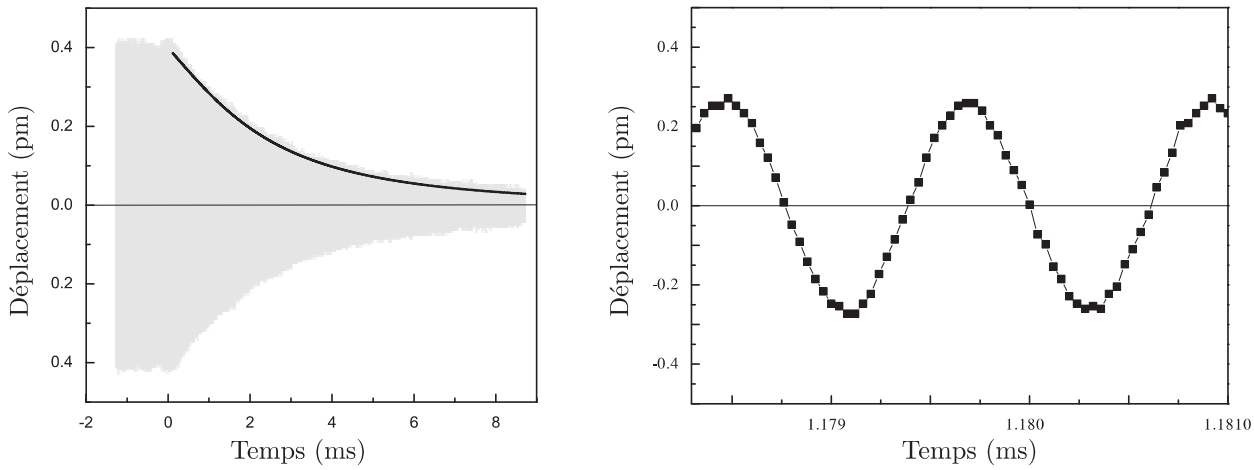


FIG. 5.21 – Amortissement des oscillations du résonateur après la coupure de la force de modulation à l'instant t=0. La courbe de droite est un agrandissement de la courbe de gauche et montre les oscillations individuelles. Le mode propre étudié est celui oscillant à 919 kHz du résonateur P2

de la fréquence du laser et le signal d'erreur est envoyé vers un filtre passe-bande centré sur la fréquence de modulation. Le signal est récupéré sur un oscilloscope numérique (modèle WAVESURFER de la marque LECROY), qui est déclenché sur le signal pilotant l'interrupteur commandé. On a représenté sur la figure 5.21 la courbe obtenue lorsqu'on stoppe à l'instant $t = 0$ la modulation de la force électrostatique, qui induit une amplitude de modulation forcée de l'ordre de 400 fm. La courbe en noir sur la figure de gauche est un ajustement exponentiel de l'enveloppe. L'oscilloscope acquiert un point toutes les 10 ns, ce qui permet de résoudre correctement l'oscillation à 919 kHz du résonateur comme on peut le voir sur la courbe de droite et l'amplitude des oscillations du résonateur tend exponentiellement vers zéro lorsqu'on coupe l'excitation. Le temps caractéristique de cette décroissance est égal à 2.36 ms, ce qui correspond à une largeur spectrale de la résonance de $\Gamma/2\pi = 134\,\mathrm{Hz}$, en bon accord avec la valeur de 136 Hz obtenue à partir du spectre de bruit thermique.

5.3.3 Mesure de la susceptibilité mécanique

L'étude de la réponse mécanique à une force modulée permet de déterminer complètement la susceptibilité mécanique du résonateur, et ainsi de valider les spectres de bruit thermique que nous avons observés. Si la mesure de ces spectres est limitée par des bruits qui ne sont pas liés au résonateur, ce n'est pas le cas pour la réponse à une force modulée car celle-ci peut être rendue grande devant les bruits parasites. Elle permet donc plus facilement d'étudier la réponse mécanique sur les ailes d'une résonance, ou le fond lié à la réponse de tous les autres modes. Nous allons voir qu'il existe une autre différence essentielle entre le spectre de bruit thermique et la réponse à une force : le bruit thermique est la somme des réponses de tous les modes à des forces de Langevin décorrélées tandis qu'avec une force modulée, les modes contribuent de manière cohérente et leurs réponses peuvent interférer entre elles. Nous avons ainsi mis en évidence un effet d'annulation de la réponse globale du résonateur, par interférence destructive entre une résonance mécanique et le fond associé aux autres modes.

On a représenté sur la figure 5.22 le bruit thermique mesuré à la pression atmosphérique,

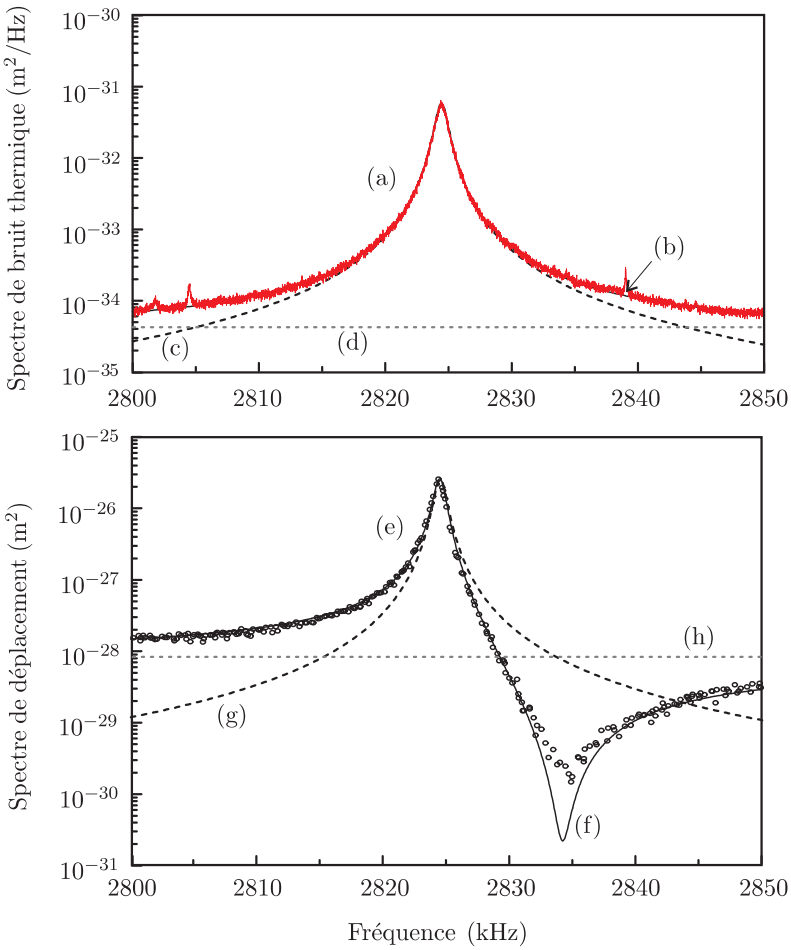


FIG. 5.22 – Spectres de bruit thermique (courbe a en haut) et réponse à la force électrostatique (courbe e en bas), pour des fréquences voisines de la résonance à 2824 kHz du résonateur P3. Pour chaque courbe, on a représenté les ajustements théoriques selon les équations (5.31) et (5.32), avec les contributions du mode résonnant (courbes c et g), du fond (d et h) et la contribution totale (b et f).

au voisinage du mode propre oscillant à $\Omega_\mathrm{m}/2\pi = 2824\,\mathrm{kHz}$ du résonateur P3. Les mesures ont été effectuées avec une bande passante de 10 Hz pour une puissance incidente de 1.5 mW. On a superposé à cette courbe un ajustement Lorentzien auquel on a ajouté la contribution d'un fond thermique. La courbe (c) représente uniquement la lorentzienne, de largeur $\Gamma/2\pi = 1050\,\mathrm{Hz}$ avec une masse effective de $M = 211\,\mu\mathrm{g}$. La courbe (d) correspond au fond plat lié à la contribution des autres modes propres, ajusté à un niveau de $2.0 \times 10^{-17}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. La courbe (b), à peine visible sous les points expérimentaux, représente l'ajustement prenant en compte ces deux termes, d'équation :

$$S_x^\mathrm{T}[\Omega] = \left|\frac{1}{M(\Omega_\mathrm{m}^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega)}\right|^2 S_\mathrm{T}[\Omega] + S_0^\mathrm{T}, \tag{5.31}$$

où $S_\mathrm{T}[\Omega] = 2M\Gamma\Omega_\mathrm{m}k_\mathrm{B}T$ est le spectre de la force de Langevin et S_0^T le niveau du fond thermique. On constate que pour ajuster correctement le spectre de bruit thermique observé, il

est nécessaire de prendre en compte la contribution de tous les autres modes propres. Notons que le fait de réaliser ces mesures à la pression atmosphérique augmente la largeur de la résonance (1050 Hz au lieu de 190 Hz sous vide, voir le tableau 5.1 page 162) et réduit sa hauteur, rendant l'effet du fond plus visible. Par ailleurs, le fond étant gouverné par des forces de Langevin décorrélées du mode résonnant, on somme ici les spectres de bruit thermique de manière indépendante.

Il n'en va pas de même lorsqu'on étudie la réponse à une force extérieure car alors tous les modes propres sont excités par la même source, et on teste la réponse totale du résonateur. On peut écrire le spectre observé en modulation sous la forme :

$$S_x^{\mathrm{mod}}[\Omega] = \left| \frac{1}{M(\Omega_{\mathrm{m}}^2 - \Omega^2 + i\Gamma\Omega)} + \chi_0 \right|^2 S_{\mathrm{F}}[\Omega], \tag{5.32}$$

où on a défini une susceptibilité χ_0 indépendante de la fréquence pour le fond mécanique dû à tous les autres modes. Tant que le fond reste petit devant la réponse du mode résonnant, on peut en balayant la fréquence de modulation déterminer une réponse mécanique qui reproduit le spectre de bruit thermique. On a ainsi accès à la fréquence de résonance et à la largeur de la résonance. On peut aussi mesurer en principe la masse effective du mode si on connaît avec précision l'amplitude de la force appliquée. Notons toutefois qu'un calcul prenant en compte les intégrales de recouvrement spatial au niveau du résonateur [23] montre que l'amplitude de la réponse dépend de l'adaptation spatiale de la force : en particulier les masses effectives apparaissant dans les équations (5.31) et (5.32) ne sont égales que si la force a la même structure spatiale que le faisceau dans la cavité de mesure[3].

La courbe obtenue en réponse à la force électrostatique est représentée dans la partie inférieure de la figure 5.22 (courbe e). Elle a été obtenue en utilisant une tension de décalage de 30 V et une amplitude de modulation de 5 V, la pointe étant à environ 200 μm du résonateur. On a utilisé l'analyseur de spectre en mode "max hold" pour enregistrer les niveaux maximums obtenus à chaque fréquence au cours des différents balayages. La résolution spectrale étant de 10 Hz, chaque balayage dure environs 20 s. La fréquence de l'excitation est lentement balayée avec une période non multiple du temps de balayage de l'analyseur pour pouvoir obtenir une densité de points de mesure suffisamment importante. Un programme écrit sur un PC récupère les spectres pour extraire les maxima locaux correspondant à la réponse à la modulation, ce qui donne les points de la courbe (e).

On constate au premier abord une dissymétrie importante dans la réponse du résonateur. Un creux apparaît aux fréquences supérieures à la fréquence de résonance. On peut interpréter cet effet à partir de la formule (5.32). La susceptibilité χ_0 correspond en général aux ailes à basse fréquences des modes ayant des fréquences de résonance supérieures (en $1/M_n\Omega_n^2$), les modes de fréquence de résonance inférieure ayant une contribution plus faible (en $-1/M_n\Omega^2$). On peut donc supposer χ_0 réelle et positive. Par contre le mode résonnant a une phase qui dépend de l'écart entre la fréquence de modulation et la fréquence de résonance : si on l'excite à une fréquence nettement inférieure à sa fréquence de résonance, il va répondre en phase avec l'excitation alors qu'il va répondre en opposition de phase si on module à des

[3] La masse effective électrostatique est beaucoup plus délicate à déterminer que la masse effective optique. Elle dépend de la forme de l'électrode utilisée et de sa distance au micro-résonateur, et son profil spatial n'est en général pas gaussien.

fréquences nettement supérieures. En fonction de la fréquence, le fond mécanique va donc s'ajouter ou se retrancher de la réponse du mode propre résonnant, et c'est ce que l'on observe expérimentalement : les courbes (g) et (h) de la figure 5.22 représentent respectivement les contributions du mode résonnant et du fond, qui s'ajoutent à basse fréquence et se retranchent à haute fréquence pour donner l'ajustement (f) des points expérimentaux. L'accord est excellent, d'autant plus que la fréquence de résonance est la largeur du mode sont en fait déduits du spectre de bruit thermique.

On peut caractériser de façon plus précise l'effet d'annulation à partir de l'équation (5.32). Le minimum de la susceptibilité est atteint lorsque la partie réelle de la susceptibilité du mode résonnant compense le fond χ_0. En supposant $\Gamma \ll \Omega_\mathrm{m}$ et le fond χ_0 petit devant la valeur $|\chi[\Omega_\mathrm{m}]| = 1/M\Gamma\Omega_\mathrm{m}$ atteinte à résonance, la fréquence Ω_min correspondant au minimum vérifie :

$$M\Omega_\mathrm{min}^2 = M\Omega_\mathrm{m}^2 + \chi_0^{-1}. \tag{5.33}$$

La position du minimum dépend donc du rapport entre la susceptibilité à basse fréquence $1/M\Omega_\mathrm{m}^2$ du mode résonnant, et le fond χ_0 de tous les autres modes. Plus la contribution χ_0 du fond est importante, plus la fréquence Ω_min du creux se rapproche de la fréquence de résonance Ω_m. La susceptibilité mécanique correspondant au minimum atteint à la fréquence Ω_min est purement imaginaire et vérifie :

$$\chi[\Omega_\mathrm{min}] \cdot \chi[\Omega_\mathrm{m}] = \chi_0^2. \tag{5.34}$$

Autrement dit, les niveaux du pic à résonance et du creux à la fréquence Ω_min sont, en échelle logarithmique, symétriques par rapport au niveau χ_0 du fond, comme on peut le voir sur la figure 5.22. L'ajustement représenté par la courbe (f) est en bon accord avec les résultats expérimentaux sauf au voisinage du minimum. Il faut noter toutefois la très grande dynamique du signal, puisque l'écart entre le pic à résonance et le creux est supérieur à 50 dB. Le fait que le creux observé ne soit pas aussi prononcé que dans l'ajustement théorique peut être dû à l'existence de parasites électromagnétiques rayonnés par la pointe et par le dispositif électrostatique. On aurait pu essayer de s'en affranchir en rapprochant la pointe du résonateur car on augmente alors le signal sans modifier les parasites, mais nous avons préféré ne pas prendre le risque d'abimer le micro-miroir.

On a choisi ce mode propre car il est bien isolé des autres modes propres et sa dynamique par rapport au fond est suffisante pour observer cet effet d'annulation de la réponse mécanique. Ainsi, cet effet n'est pas visible avec le mode propre oscillant à 814 kHz car sa dynamique par rapport au fond mécanique est importante, ce qui déplace la fréquence du creux vers des fréquences trop éloignées de la résonance. De semblable effets d'annulation ont été observés avec l'autre expérience développée dans l'équipe mais en réponse à une force de pression de radiation [106]. Cette annulation permet de s'affranchir du bruit de pression de radiation qui s'exerce sur les miroirs et d'éliminer les effets quantiques d'action en retour dans la mesure optique des petits déplacements [107]. Ceci pourrait en particulier s'avérer utile pour améliorer la sensibilité des détecteurs résonnants d'onde gravitationnelles au-delà de la limite quantique standard.

5.3.4 Refroidissement du micro-miroir par friction froide

La force électrostatique permet d'appliquer sur le résonateur des forces très importantes en comparaison de ce qui peut être atteint avec la pression de radiation d'un faisceau laser se réfléchissant sur le miroir. Elle est donc un bon candidat pour mettre en œuvre la technique de friction froide [21] qu'on a présenté dans la partie 1.4 du chapitre 1.

Réalisation de la boucle de contre-réaction

Il s'agit d'appliquer sur le résonateur une force proportionnelle à sa vitesse. Pour cela, on utilise le signal d'erreur qui retranscrit le mouvement du résonateur et on effectue une dérivation temporelle. Le signal ainsi produit commande l'amplitude de la force électrostatique modulée appliquée au micro-miroir. On comprend ici l'intérêt de la méthode utilisant la tension de décalage : elle permet d'appliquer une force électrostatique directement proportionnelle à la tension de commande et de modifier simplement le gain global de la boucle de contre-réaction, puisque la tension de décalage agit directement comme un facteur multiplicatif entre la tension de commande et la force appliquée.

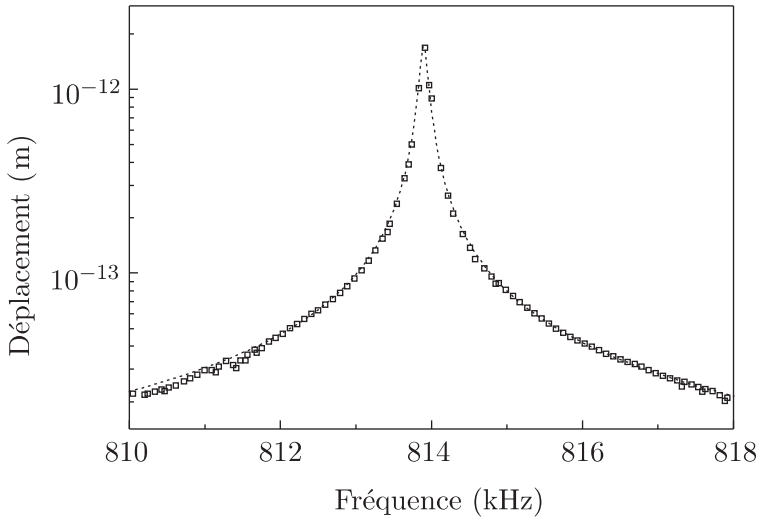


FIG. 5.23 – Déplacements du mode (0,2) du résonateur P3 en réponse à une force électrostatique modulée. La courbe en pointillés représente la courbe attendue, d'après les paramètres déduits du spectre de bruit thermique.

On a choisi de travailler sur le mode (0,2) oscillant à 814 kHz du résonateur P3 car on n'a pas observé pour ce mode de creux dans la réponse mécanique qui pourrait nuire à l'efficacité de l'asservissement, comme c'est le cas pour le mode oscillant à 2824 kHz. La réponse mécanique du mode propre à la force électrostatique est représentée sur la figure 5.23. La courbe en pointillés représente un ajustement lorentzien de la réponse, sans fond, déduit des paramètres mesurés sur le spectre de bruit thermique. L'accord est excellent, ce qui signifie que sur cette plage de fréquences, la réponse du système à la force électrostatique est bien assimilable à celle d'un simple oscillateur harmonique.

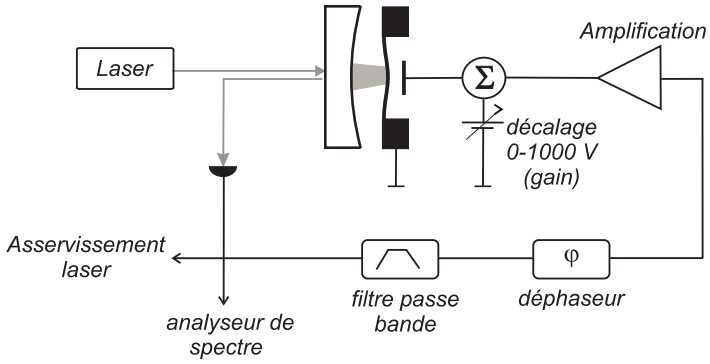


FIG. 5.24 – Schéma du dispositif expérimental utilisé pour la mise en œuvre de la friction froide.

Le schéma de principe de l'expérience est représenté sur la figure 5.24. Comme dans l'expérience de mesure du bruit thermique, le signal d'erreur produit par la technique Pound-Drever-Hall est utilisé à la fois pour asservir le laser à résonance sur la cavité et pour mesurer le spectre de position de l'oscillateur. Il est également utilisé pour produire le signal de contre-réaction. Le signal d'erreur passe d'abord par un filtre passe-bande centré sur la fréquence de résonance de l'oscillateur (814 kHz) pour ne pas faire saturer l'électronique en injectant du bruit sur une trop grande plage de fréquences. On choisit néanmoins la bande passante du filtre suffisamment élevée pour ne pas déphaser les signaux sur la plage d'observation : en pratique, on a choisi une bande passante de l'ordre de 50 kHz ce qui correspond à un facteur de qualité de l'ordre de 16. Ce filtre avait été développé au laboratoire dans le cadre des expériences de friction froide réalisées avec des miroirs conventionnels [15, 21]. Il possède un réglage du facteur de qualité du filtre. Pour effectuer ce réglage et mesurer la bande passante, on a envoyé sur le filtre un bruit blanc généré par un générateur basse fréquence et on a mesuré la largeur du spectre de bruit transmis par le filtre.

Le signal ainsi filtré est appliqué à l'entrée d'un déphaseur variable, lui aussi réalisé au laboratoire [15]. Il est conçu de manière à pouvoir obtenir un déphasage quelconque entre 0 et 2π, indépendant de la fréquence sur la plage qui nous intéresse. Ce réglage de la phase permet de compenser les déphasages induits par les différents éléments électroniques de la boucle (détection, filtre passe-bande, amplificateurs, système électrostatique) et de produire une force exactement en quadrature avec le déplacement du miroir, équivalent sur une plage de fréquence petite autour de la résonance à une dérivation temporelle. On obtient de cette manière un signal proportionnel à la vitesse du résonateur, sur une plage de fréquence limitée par le filtre passe-bande. Le signal est ensuite amplifié, d'abord par un amplificateur ZHL 32A assurant un gain de 20 dB, puis éventuellement par un second amplificateur large bande de marque TEGAM. Le signal est finalement envoyé sur l'entrée modulation du boîtier sommateur décrit précédemment (figure 5.17). La tension de décalage est fournie par un amplificateur 0 - 1000 V à faible bruit construit au laboratoire, qui possède un potentiomètre de réglage de la tension d'offset. Pour augmenter encore le gain de contre-réaction, on a utilisé une électrode possédant une surface plus importante qu'une simple pointe en cuivre. On l'a choisie plus large et on a ajusté sa position transverse à l'arrière du résonateur de manière

à optimiser la réponse électrostatique du résonateur. Pour ajuster la phase de la boucle de contre-réaction, on observe le bruit thermique sur l'analyseur de spectres pour une valeur élevée du gain de la boucle. Une phase mal ajustée étant équivalente à une force de contre-réaction partiellement proportionnelle au déplacement, qui a pour effet de modifier la raideur de l'oscillateur et de décaler la fréquence centrale du pic de bruit thermique. On ajuste la phase de manière à annuler ce décalage en fréquence.

Résultats expérimentaux

Les spectres de bruit thermique en présence de la contre-réaction sont mesurés sur une plage de 8 kHz centrée sur la fréquence de résonance. La résolution spectrale de la mesure est de 10 Hz. Les spectres sont moyennés sur environ 300 balayages de l'analyseur, ce qui nécessite une dizaine de minutes d'acquisition pour chaque spectre. On a représenté sur la figure 5.25 les spectres obtenus pour différentes valeurs de la tension de décalage. On constate que le spectre de bruit thermique est fortement réduit lorsqu'on augmente le gain, tout en s'élargissant du fait de l'augmentation de l'amortissement effectif, conformément aux prédictions théoriques (section 1.4).

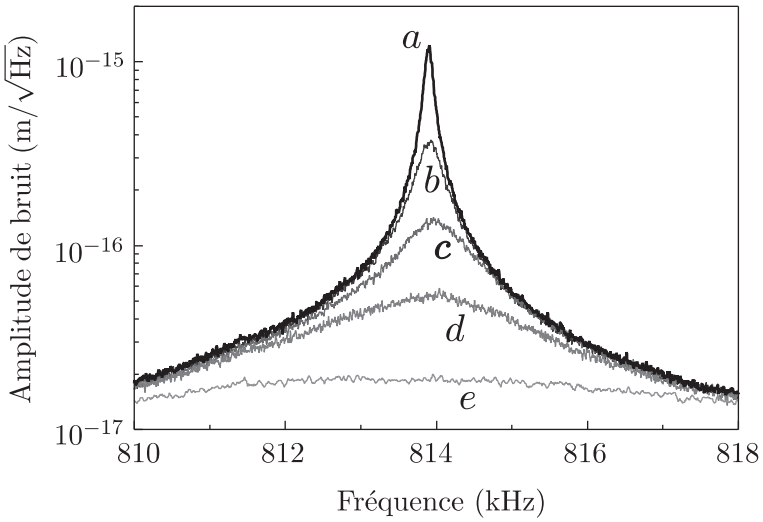


FIG. 5.25 – Evolution du spectre de bruit thermique pour des valeurs croissantes du gain de contre-réaction (courbes a à e ; la courbe a est obtenue sans contre-réaction).

Le spectre de bruit du résonateur pour un gain g de la boucle de contre-réaction est donné par les équation (1.66) et (1.67) :

$$S_x^{\mathrm{fb}}[\Omega] = \frac{S_T[\Omega]/M^2}{\left(\Omega_{\mathrm{m}}^2 - \Omega^2\right)^2 + (1+g)^2\Gamma^2\Omega^2}. \tag{5.35}$$

La largeur du pic de bruit thermique est modifiée par la contre-réaction et devient $\Gamma_{\mathrm{fb}} = (1+g)\Gamma$, tandis que la réduction de l'amplitude des déplacements à résonance est proportionnelle

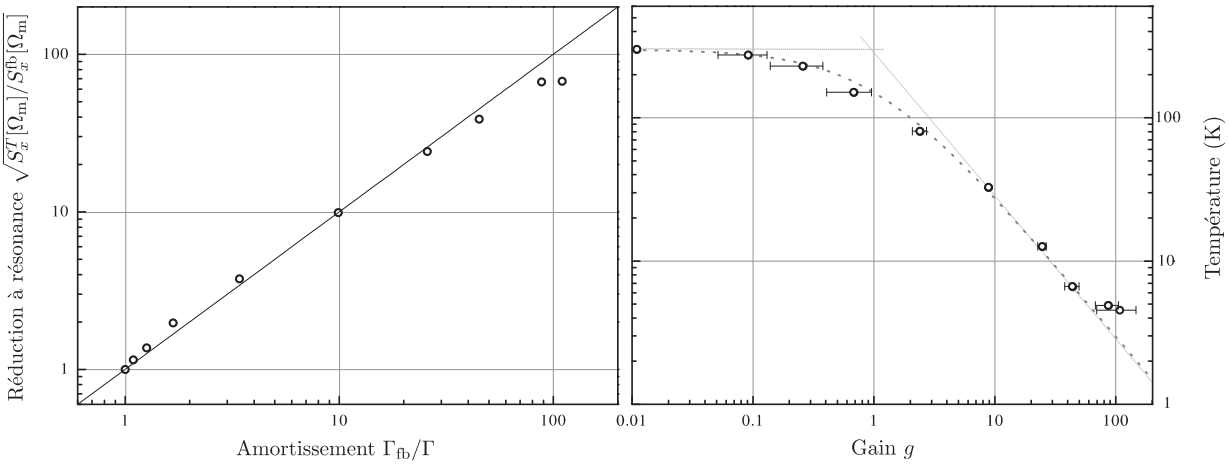


FIG. 5.26 – A gauche, courbe de calibration du gain à partir des mesures de l'amortissement effectif Γ_{fb}/Γ et de la réduction de l'amplitude des déplacements à résonance. A droite, évolution de la température effective T_{fb} en fonction du gain de contre-réaction.

à $1+g$ (équation 1.68) :

$$\sqrt{\frac{S_x^T[\Omega_m]}{S_x^{fb}[\Omega_m]}} = 1+g \tag{5.36}$$

Pour chaque valeur de la tension de décalage, donc du gain, on a mesuré la largeur et la hauteur du pic de bruit thermique en effectuant un ajustement lorentzien du spectre obtenu. On a aussi déduit de cet ajustement l'aire du spectre de bruit thermique qui est proportionnelle à la température atteinte.

Le gain g de la boucle de contre-réaction n'est pas directement mesurable. On le déduit en comparant le coefficient d'amortissement Γ_{fb} mesuré en présence de la friction froide à la valeur Γ mesurée sans rétroaction. Pour estimer l'incertitude sur la mesure du gain, on a aussi estimé le gain à partir de la réduction du bruit à résonance. On a reporté sur la figure 5.26 à gauche l'évolution de la réduction de l'amplitude du bruit à résonance en fonction de la variation relative Γ_{fb}/Γ du coefficient d'amortissement. Ces deux quantités devraient en principe être égales à $1+g$ et l'écart à la droite tracée en trait plein correspond à l'erreur sur la détermination du gain. A faible gain, l'effet de la friction froide est peu important et la mesure de la variation de la hauteur du spectre est peu précise. A fort gain, l'effet de friction froide est important et on ne mesure pas le spectre de bruit sur une plage suffisante pour estimer précisément la largeur du spectre de bruit. Dans ces deux situations, on observe donc un léger écart entre les deux mesures, par contre aux valeurs intermédiaires du gain, les deux mesures fournissent des valeurs compatibles entre elles. Dans la suite, le gain utilisé est la valeur moyenne déduite de ces deux déterminations et les barres d'erreur correspondent à leur écart.

On constate qu'on a pu appliquer un gain d'environ 100, obtenu pour une tension de décalage de 345 Volts. La largeur effective de la résonance mécanique de l'oscillateur est alors d'environ 10 kHz pour une valeur initiale de 97 Hz et le bruit thermique à résonance est réduit de presque 40 dB. Bien qu'on puisse facilement augmenter le gain, par exemple en augmentant

la tension de décalage ou en rapprochant la pointe du résonateur, on n'a pas cherché à aller au-delà car la mesure de la largeur du pic de bruit thermique devient trop imprécise.

L'aire du spectre de bruit thermique est directement proportionnelle à la température effective du mode. On a reporté à droite sur la figure 5.26 l'évolution de la température effective en fonction du gain de contre-réaction. La température est réduite au maximum par un facteur 60 : on atteint une température effective de 5 K pour un gain de 100. La courbe en pointillé correspond à l'expression théorique de la température, donnée par l'équation $T_{\mathrm{fb}} = T/(1+g)$ dans le cas simple d'un seul oscillateur harmonique sans fond (équation 1.70). On constate un bon accord entre les données expérimentales et la courbe théorique. A fort gain, les deux dernier points expérimentaux commencent à s'éloigner de la courbe théorique. Dans une telle situation, le fond mécanique des autres modes devient comparable au niveau du spectre de bruit thermique refroidi, ce qui rend le modèle simple inapproprié [60]. L'existence de ce fond nuit à l'efficacité de la réduction de température par friction froide. On doit donc chercher à travailler avec des modes propres possédant une dynamique très importante par rapport au fond mécanique. C'est le cas lorsqu'un mode est suffisamment éloigné de ses voisins et qu'il possède un grand facteur de qualité mécanique. En réduisant la température de manière cryogénique, on s'attend d'ailleurs à une amélioration des facteurs de qualité mécanique du fait de la réduction des pertes par effet thermo-élastiques.

Chapitre 6

Refroidissement par pression de radiation dans une cavité désaccordée

Dans ce chapitre, on présente un autre mécanisme permettant de refroidir un micro-miroir. Il se produit lorsqu'on désaccorde la cavité Fabry-Perot et il met en jeu la pression de radiation exercée sur le résonateur par le champ électromagnétique présent dans la cavité.

En désaccordant la cavité, cette force peut dans certaines conditions devenir visqueuse, ce qui va profondément modifier la dynamique du micro-miroir, en gelant son mouvement ou au contraire en le rendant instable. C'est l'utilisation de cavités optiques de grande finesse et d'oscillateurs mécaniques possédant une masse effective très faible, des fréquences de résonance et des facteurs de qualité élevés qui a permis l'observation de ces effets [27].

6.1 Couplage optomécanique dans une cavité désaccordée

Dans cette partie, on présente les conséquences du désaccord de la cavité sur la dynamique du système constitué du micro-résonateur mécanique couplé au champ dans la cavité. Dans un premier temps, on explique qualitativement comment le désaccord de la cavité peut conduire à un refroidissement du résonateur. On présente ensuite les différentes expériences menées dans le monde en vue d'observer ces effets, avant d'étudier quantitativement l'influence du désaccord de la cavité sur le couplage optomécanique.

6.1.1 Principe du refroidissement intracavité

Jusqu'à présent, on a toujours effectué nos mesures avec une cavité à résonance, c'est-à-dire au sommet du pic d'Airy. C'est en effet en ce point qu'on bénéficie de la pente maximale du signal d'erreur Pound-Drever-Hall, ou plus généralement de la plus grande dépendance de la phase du faisceau réfléchi vis-à-vis des déplacements du micro-miroir. C'est aussi en ce point que la dynamique du couplage optomécanique est simple puisque le déplacement du résonateur ne dépend que de l'intensité intracavité par l'intermédiaire de la pression de radiation, alors que seule la phase du champ dépend de ses déplacements. On n'a donc pas d'action en retour directe des déplacements sur l'intensité du champ (voir par exemple les équations 2.20 à 2.23). Ce n'est plus le cas si on désaccorde la cavité, et qu'on se place sur le

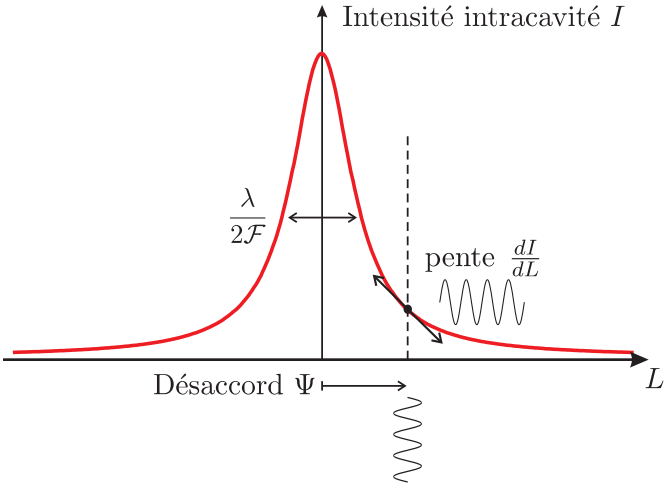


FIG. 6.1 – Principe du refroidissement intracavité. On a représenté l'intensité intracavité en fonction de la longueur de la cavité. Autour d'un point de fonctionnement correspondant à un désaccord Ψ, la pression de radiation subie par le micro-miroir est proportionnelle à la pente du pic d'Airy et aux fluctuations de position du résonateur.

flanc du pic d'Airy, puisqu'on introduit alors une dépendance des fluctuations de l'intensité intracavité vis-à-vis des fluctuations de longueur : un déplacement du micro-résonateur induit une variation de l'intensité intracavité proportionnelle à la pente du pic d'Airy. On comprend que ce mécanisme n'a pas lieu à résonance où la pente est nulle. Comme on peut le voir sur la figure 6.1, pour une cavité désaccordée, une fluctuation δx de la position du résonateur crée une fluctuation de l'intensité intracavité I et donc de la force de pression de radiation qui est proportionnelle à la dérivée de la fonction d'Airy :

$$\delta F_{\text{rad}} \propto \frac{dI}{dL}\delta x. \tag{6.1}$$

Cette force agit alors comme une force de rappel supplémentaire sur l'oscillateur, nommée dans la littérature force pondéromotrice [113] ou ressort optique (optical spring) [116]. Son amplitude et son signe sont fonction du point de fonctionnement de la cavité. Selon le signe du désaccord, elle va amplifier ou contrebalancer les déplacements du résonateur. Cependant comme dans le cas de la friction froide, une force simplement proportionnelle au déplacement ne suffit pas à refroidir le résonateur : elle modifie sa raideur et décale les fréquences de résonance mécanique sans pour autant modifier la température du résonateur. Pour cela, il est nécessaire d'appliquer une force visqueuse sans ajouter de bruit. Dans le cas de la cavité désaccordée, le raisonnement conduisant à l'équation (6.1) ne tient pas compte de la dynamique du champ dans la cavité et n'est valable qu'en régime statique, c'est-à-dire lorsque les fréquences d'évolution des déplacements sont petites devant la bande passante de la cavité. Ceci ne correspond pas à notre situation où l'utilisation d'un micro-résonateur avec une cavité de grande finesse rend les fréquences de résonance mécaniques du même ordre de grandeur que la bande passante de la cavité. Ainsi, le résonateur P3 possède un mode propre avec une faible masse effective, un facteur de qualité mécanique élevé, et une fréquence de résonance égale à 814 kHz, proche de la bande passante de la cavité qui est de l'ordre 1 MHz. Il faut alors tenir compte du temps de stockage de la lumière dans la cavité, qui va

introduire un retard dans la réponse de la force aux déplacements. Ceci va déphaser la force et la rendre en partie visqueuse, avec un signe qui dépend du désaccord de la cavité. On modifie de cette manière l'amortissement du résonateur sans ajouter de bruit, ce qui va modifier sa température effective, en vertu du théorème fluctuations-dissipation. Selon le désaccord, on va augmenter l'amortissement du résonateur et abaisser sa température (pour un désaccord Ψ négatif), alors qu'il va être chauffé et voir son amortissement réduit pour le désaccord opposé. Si la force est suffisante, on peut même atteindre une valeur nulle de l'amortissement qui correspond à à une divergence du mouvement du résonateur, et donc à une instabilité dynamique du système.

6.1.2 Observations des effets dynamiques intracavité

Plusieurs effets optomécaniques ont déjà été mis en évidences avec des cavité désaccordées. La bistabilité induite par la pression de radiation a été observée assez tôt, en 1983 à Garching [69] avec un laser de puissance envoyé dans une cavité dont les miroirs étaient suspendus. Plus récemment, plusieurs groupes ont observé des effets de ressort optique : en 2004 le groupe de D.E. McClelland à Canberra l'a mis en évidence avec un miroir monté sur une lame de flexion [109] et en 2006, il a été vu sur des cavités suspendues dans l'équipe de N. Mavalvala au MIT [29]. Dans ces deux expériences, l'effet de la pression de radiation est mesuré en réponse à une force modulée appliquée sur le résonateur, et non sur le bruit thermique.

En plus de l'observation d'une instabilité induite par la pression de radiation dans des micro-tores réalisée par K.J. Vahala [30, 110], trois expériences sont plus spécifiquement liées à des modifications de la dynamique du résonateur : la première a été menée à Munich dans le groupe de K. Karrai, et utilise non pas la pression de radiation mais des effets thermoélastiques de type bilame pour refroidir un cantilever de microscope à force atomique [111] ; dans le domaine des oscillateurs mesurés avec des dispositifs électrostatiques, l'équipe de K. Schwab a rendu compte d'un refroidissement similaire, l'analogue de la pression de radiation étant la force électrostatique exercée par le SET sur l'oscillateur [112] ; enfin, une expérience réalisée dans le groupe de A. Zeilinger a montré un effet de refroidissement d'un micro-miroir en partie dû à la pression de radiation [28]. Nous décrirons succinctement les principes de ces trois expériences dans la suite de cette section.

L'expérience menée en 2004 dans le groupe de Khaled Karrai à Munich [111] a mis en évidence le refroidissement d'un cantilever placé dans une cavité optique grâce à des effets photo-thermiques dans le résonateur. Un cantilever en silicium de microscope à force atomique (223 μm de long, 22 μm de large et 4.3 μm d'épaisseur) est recouvert d'une fine couche métallique et forme une cavité optique de finesse $\mathcal{F} = 3$ avec un autre miroir constitué de l'extrémité d'une fibre optique métallisée (voir la figure 6.2). Ce résonateur mécanique oscille à 7.3 kHz, avec un facteur de qualité de 2000 dans le vide et une amplitude au sommet du pic de bruit thermique de l'ordre de $1.8 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. Comme dans notre expérience, le cantilever en se déplaçant voit une intensité intracavité qui est fonction de sa position. La réaction de la lumière sur l'oscillateur n'est pas assurée par la pression de radiation mais par un effet thermique de type bolométrique : la lumière absorbée dans la couche métallique induit une déformation du cantilever par effet bilame car les températures des faces supérieures et inférieures sont différentes, tout comme les coefficients de dilatation thermique. Le retard qui assure le refroidissement n'est pas dû au temps de stockage dans la cavité (seulement

de l'ordre de la dizaine de femtosecondes, car la finesse est faible et la cavité très courte, 34 μm), mais il est dû au temps d'établissement des effets thermiques dans le cantilever, estimé à 0.5 ms, soit un temps comparable à la période d'oscillation du cantilever. Cela dit, les effets observés correspondent bien à un refroidissement intracavité comme dans le cas de la pression de radiation car la force dépend de la position du résonateur du fait des variations de l'intensité intracavité provoquée par les déplacements. Les auteurs ont observé à la fois le refroidissement et le chauffage du résonateur.

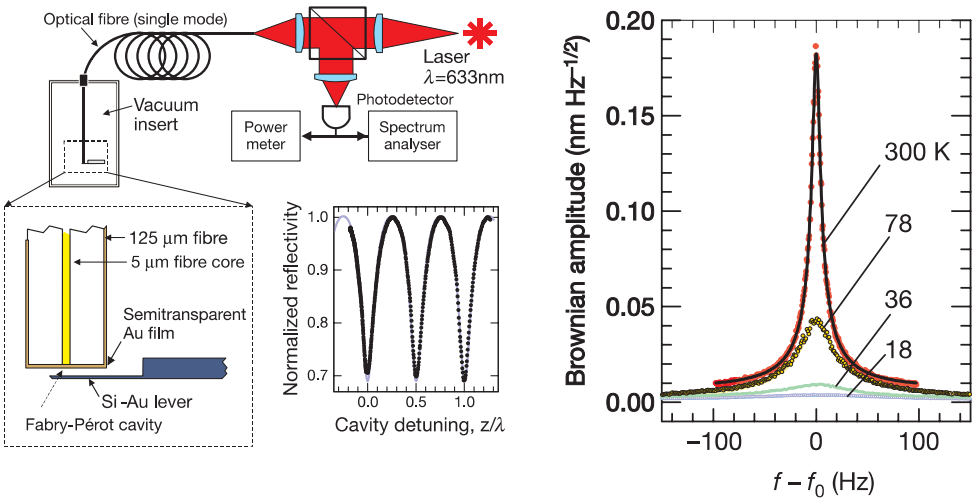


FIG. 6.2 – A gauche, principe de l'expérience menée en 2004 dans le groupe de K. Karrai. A droite, spectres de bruit thermique observés lors du refroidissement. La figure est issue de la référence [111].

L'équipe d'A. Zeilinger à l'*Institut für Experimental Physik* de l'Université de Vienne a observé très récemment le refroidissement d'un résonateur mécanique [28]. Nous avons déjà présenté leur résonateur dans le chapitre 1, à gauche sur la figure 1.7. Il est constitué uniquement de couches diélectriques, le support en silicium ayant été retiré par ablation laser : la poutre fait alors 520 μm de long, 120 μm de large et 2.4 μm d'épaisseur. La masse effective de l'oscillateur est de l'ordre de 10 à 20 ng pour un col du faisceau de mesure de 20 μm. Le mode propre fondamental oscille à 278 kHz avec un facteur de qualité de 10^4 environ. La finesse de la cavité optique est de 500, pour une longueur de 25 mm, ce qui correspond à une bande passante de 6 MHz. La réduction de température observée atteint 8 K pour une puissance lumineuse incidente de 2 mW. Cette expérience très similaire à la nôtre atteint des réductions de température comparables, en utilisant une finesse moins importante (500 au lieu de 30 000) mais un oscillateur de beaucoup plus faible masse effective (10 ng au lieu de 200 μg). Par contre, la pression de radiation n'explique pas à elle seule la totalité de l'effet observé : les auteurs suggèrent que la contribution manquante, environ 60 % de l'effet total, est due à des effets thermiques de type bilame comparables à ceux observés par l'équipe de K. Karrai.

L'équipe de l'Université du Maryland a reporté des résultats analogues [112] avec un dispositif tout a fait différent puisqu'il ne comporte pas de cavité optique. Il s'agit d'un nano-résonateur (voir la figure 6.3) dont les déplacements sont mesurés par un SSET (pour superconducting single electron transistor), un dispositif comparable au SET décrit dans le

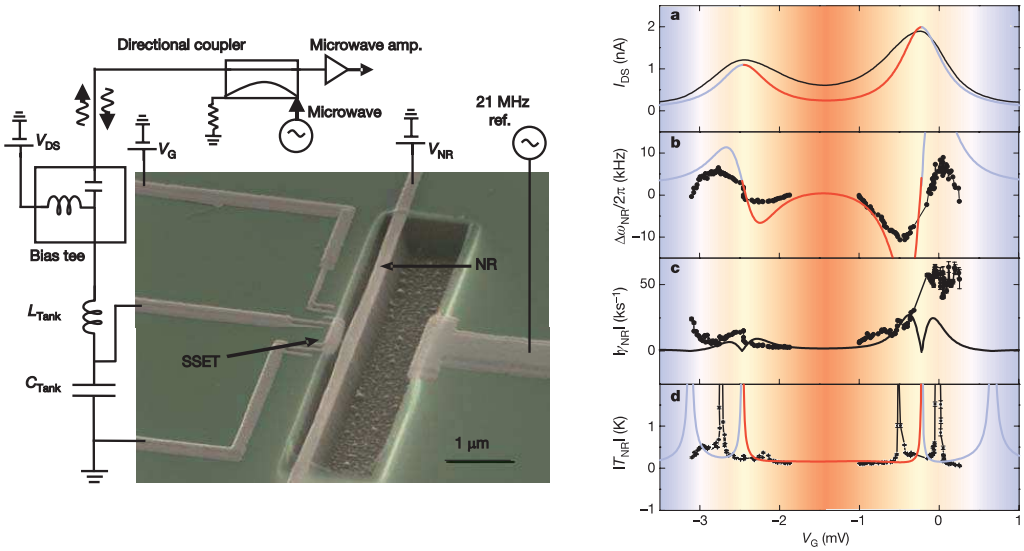


FIG. 6.3 – Montage et résultats expérimentaux obtenus par l'équipe de K. Schwab. Le bruit thermique d'un oscillateur nanoscopique oscillant à 21 MHz est mesuré grâce à un dispositif à SSET en détectant les fluctuations du courant traversant l'îlot central au voisinage d'un évènement tunnel qui est l'équivalent d'une résonance d'une cavité optique Fabry-Perot. La tension V_{NR} permet de contrôler le couplage électrostatique entre les fluctuations de position du résonateur et la charge du SSET. En changeant la tension de décalage V_G, le système passe par deux résonances successives (courbe a). En mesurant le spectre de bruit thermique de l'oscillateur, on peut estimer sa fréquence de résonance (courbe b), son taux d'amortissement (courbe c) et sa température effective (courbe d). La figure est issue de la référence [112].

chapitre 1 mais utilisant un îlot supraconducteur, ce qui permet d'améliorer la sensibilité. En changeant la charge de l'îlot au voisinage de la transition tunnel, on traverse des résonances associées à un événement tunnel, qui se traduit par un courant non-nul à travers l'îlot (on peut voir deux événements sur la courbe a). On obtient l'équivalent d'une résonance optique, le pendant de la force de pression de radiation étant ici la force électrostatique qui s'applique entre le SSET et le micro-résonateur, dont l'intensité est contrôlée en imposant une tension de décalage (V_{NR}) entre l'oscillateur et l'îlot central. En balayant les résonances à l'aide de la tension V_{G} appliquée à une des électrodes du SSET, on désaccorde le système et un effet équivalent à un refroidissement intracavité est observé. La courbe (b) représente la variation de la fréquence de résonance de l'oscillateur mesurée à partir d'un ajustement des spectres de bruit thermique. On retrouve le même type de comportement que celui que nous observons avec une cavité optique (comparer la courbe b et la figure 6.10 page 203). Les évolutions avec le désaccord du taux d'amortissement du résonateur et de sa température effective sont représentés sur les courbes (c) et (d). Si on peut constater une dépendance théorique présentant certaines similarités avec ce que nous avons observé et qui est présenté dans la section 6.2, les résultats expérimentaux concernant la température et l'amortissement ne sont pas encore totalement compris par les auteurs. Enfin, dans la zone située hors des deux résonances, en bleu sur la figure, la dynamique complexe du SSET ne permet pas de prolonger l'analogie.

6.1.3 Pression de radiation dans une cavité désaccordée

On reprend ici les calculs effectués au chapitre 2, mais dans le cas plus général d'une cavité désaccordée. Afin de simplifier la présentation, nous supposons toutefois la cavité sans perte. Nous avons vérifié que la prise en compte des pertes ne modifie pas les effets dynamiques présentés ici, qui ne dépendent en fin de compte que des propriétés du champ dans la cavité telle que l'intensité moyenne $\overline{\alpha}^2$, le désaccord Ψ, ou la bande passante Ω_c de la cavité.

Une cavité désaccordée modifie les relations entre les quadratures de phase et d'intensité des champs intracavité et incident. Nous avons introduit les notations essentielles et les équations de base dans le chapitre 2. Les valeurs moyennes des champs dépendent ainsi du désaccord Ψ de la cavité (équations 2.11 où le déphasage $\overline{\Psi}$ est dorénavant noté Ψ) :

$$\overline{\alpha} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Psi}\overline{\alpha}^{\text{in}} \quad , \quad \overline{\alpha}^{\text{out}} = \frac{\gamma + i\Psi}{\gamma - i\Psi}\overline{\alpha}^{\text{in}} \tag{6.2}$$

Par rapport au cas de la cavité accordée, les champs moyens ne sont plus tous en phase. On choisit par convention le champ moyen intracavité $\overline{\alpha}$ réel, les phases des champs incident et sortant s'écrivant alors :

$$e^{-i\theta^{\text{in}}} = \frac{\gamma - i\Psi}{\sqrt{\gamma^2 + \Psi^2}} \quad \text{et} \quad e^{-i\theta^{\text{out}}} = \frac{\gamma + i\Psi}{\sqrt{\gamma^2 + \Psi^2}}, \tag{6.3}$$

Cette rotation des champs moyens rend le calcul des quadratures du champ réfléchi par la cavité plus complexe. A partir des équations (2.7) à (2.10) d'évolution du champ dans la cavité, on peut calculer les fluctuations des champs intracavité et sortant :

$$(\gamma - i\Psi - i\Omega\tau)\,\delta\alpha[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\delta\alpha^{\text{in}}[\Omega] + 2ik\overline{\alpha}\,\delta x[\Omega] \tag{6.4}$$

$$\delta\alpha^{\text{out}}[\Omega] = -\delta\alpha^{\text{in}}[\Omega] + \sqrt{2\gamma}\,\delta\alpha[\Omega] \tag{6.5}$$

Les fluctuations de la force de pression de radiation subie par le résonateur sont toujours liées aux fluctuations de l'intensité intracavité :

$$\delta F_{\text{rad}}[\Omega] = 2\hbar k\delta I[\Omega] = 2\hbar k\overline{\alpha}\,\delta p[\Omega]; \tag{6.6}$$

où $\delta p = \delta\alpha + \delta\alpha^\star$ représente les fluctuations de la quadrature d'intensité du champ intracavité. En utilisant la définition (1.42) des quadratures, on peut relier les fluctuations de la pression de radiation intracavité aux fluctuations de phase et d'intensité du champ incident, mais aussi aux fluctuations de position du résonateur :

$$\delta F_{\text{rad}}[\Omega] = \delta F_{\text{rad}}^{(\text{in})} + \delta F_{\text{rad}}^{(x)}, \tag{6.7}$$

avec :

$$\delta F_{\text{rad}}^{(\text{in})}[\Omega] = 2\hbar k\overline{\alpha}\frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma^2 + \Psi^2}}\,\left\{\left(\gamma^2 + \Psi^2 - i\gamma\Omega\tau\right)\,\delta p^{\text{in}}[\Omega] - i\Psi\Omega\tau\,\delta q^{\text{in}}[\Omega]\right\} \tag{6.8}$$

$$\delta F_{\text{rad}}^{(x)}[\Omega] = -8\hbar k^2\overline{\alpha}^2\frac{\Psi}{\Delta}\,\delta x[\Omega], \tag{6.9}$$

où

$$\Delta = (\gamma - i\Omega\tau)^2 + \Psi^2. \tag{6.10}$$

La première force représente les fluctuations de la force de pression de radiation liées aux fluctuations du champ entrant dans la cavité. La seconde force dépend des fluctuations de position du résonateur : c'est elle qui est responsable des modifications de la dynamique du résonateur dont nous discutons dans ce chapitre. D'après les équations (**??**), sa dépendance en Ψ/Δ montre qu'à intensité intracavité $\overline{\alpha}^2$ constante, la force est nulle à résonance ($\Psi = 0$), mais aussi aux grands désaccords ($|\Psi| \gg \gamma$). L'amplitude maximale de la force est atteinte au voisinage de la mi-pente du pic d'Airy, pour $\Psi \simeq \gamma$. On peut d'ailleurs vérifier qu'à basse fréquence, on retrouve l'interprétation statique de cette force, qui peut être exprimée en fonction de la pente de la courbe d'Airy :

$$\delta F_{\mathrm{rad}}^{(x)}[\Omega \ll \Omega_{\mathrm{c}}] \simeq 2\hbar k \frac{d\overline{I}}{d\Psi}\, 2k\delta x[\Omega], \tag{6.11}$$

où $\overline{I} = \overline{\alpha}^2$ est l'intensité moyenne intracavité et où on a fait apparaître la dérivée de l'intensité intracavité par rapport au désaccord (équation 6.2) :

$$\frac{d\overline{I}}{d\Psi} = -\frac{4\gamma\Psi}{(\gamma^2+\Psi^2)^2}\overline{I}^{\mathrm{in}}. \tag{6.12}$$

La force statique de pression de radiation est donc bien proportionnelle à la pente de la courbe d'Airy, multipliée par le déphasage $2k\delta x$ induit par les fluctuations de longueur de la cavité, chaque photon transférant une impulsion $2\hbar k$ au miroir. A basse fréquence par rapport à la bande passante de la cavité ($\Omega \ll \Omega_{\mathrm{c}}$), la force de pression de radiation est donc proportionnelle aux déplacements du miroir : elle ne peut introduire qu'une modification de la raideur. A plus haute fréquence, la force est déphasée, et l'apparition d'une partie imaginaire va modifier l'amortissement du résonateur. De manière générale, la force s'écrit :

$$\delta F_{\mathrm{rad}}^{(x)}[\Omega] = 2\hbar k \frac{\gamma^2+\Psi^2}{\Delta}\frac{d\overline{I}}{d\Psi} 2k\delta x[\Omega]. \tag{6.13}$$

La partie imaginaire est optimale pour $\Psi \simeq \gamma$ et $\Omega \simeq \Omega_{\mathrm{c}}$. A des fréquences plus élevées ($\Omega \gg \Omega_{\mathrm{c}}$), la force est plus faible à cause du filtrage par la cavité (dénominateur de Δ). D'autre part, elle redevient en phase avec les vibrations du résonateur : ces modes propres seront donc difficilement refroidis par ce processus.

6.1.4 Dynamique du résonateur

Dans cette section, on néglige la contribution des fluctuations quantiques des champs (équation 6.8) devant la force de réaction (6.9). Cette approximation est valable tant que le bruit thermique de position est important devant le bruit quantique. On a vu que le désaccord de la cavité induit une force de réaction aux déplacements du micro-miroir et on étudie ici la modification de la dynamique du résonateur.

Susceptibilité effective

Le mouvement du résonateur est régi par sa susceptibilité mécanique χ et les forces qu'il subit, à savoir les fluctuations de la pression de radiation et la force de Langevin thermique, qui traduit son couplage avec le bain thermique :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega](F_{\mathrm{T}}[\Omega] + F_{\mathrm{rad}}[\Omega]). \tag{6.14}$$

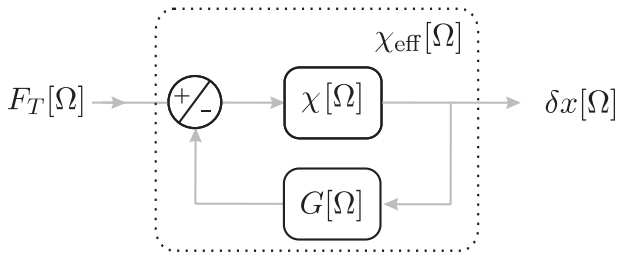


FIG. 6.4 – Interprétation de la susceptibilité mécanique effective de l'oscillateur en terme de système bouclé. $\chi[\Omega]$ représente la susceptibilité mécanique du résonateur et G le gain de la force de pression de radiation en réponse aux déplacements δx du résonateur.

En introduisant l'expression (6.9) de la force de pression de radiation, on fait apparaître une susceptibilité effective χ_{eff} de l'oscillateur :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{\text{eff}}[\Omega]\, F_{\text{T}}[\Omega]\,, \tag{6.15}$$

avec

$$\chi_{\text{eff}}^{-1}[\Omega] = \chi^{-1}[\Omega] + 8\hbar k^2 \overline{\alpha}^2 \frac{\Psi}{\Delta}, \tag{6.16}$$

Désaccorder la cavité modifie donc la dynamique du miroir, de façon similaire à ce qui se produit pour la friction froide (équation 1.65), puisque la susceptibilité est modifiée sans que du bruit soit ajouté dans le système. L'analogie peut d'ailleurs être poussée plus loin en interprétant les effets de l'intensité intracavité en terme de boucle de contre-réaction optique agissant sur le résonateur. On peut en effet écrire la force de pression de radiation subie par le résonateur sous la forme $\delta F_{\text{rad}}^{(x)} = -G\,\delta x$ où le "gain" G est donné par

$$G = 8\hbar k^2 \overline{\alpha}^2 \frac{\Psi}{\Delta}. \tag{6.17}$$

Ce gain ne dépend que des paramètres optiques de la cavité ; il est indépendant des caractéristiques mécaniques du résonateur. La susceptibilité effective (équation 6.16) s'écrit alors :

$$\chi_{\text{eff}} = \frac{\chi}{1 + G\chi}. \tag{6.18}$$

On reconnaît sous cette forme l'expression d'une fonction de transfert d'un système bouclé (figure 6.4), où la fonction de transfert directe correspond à la susceptibilité mécanique χ en l'absence de lumière et où la boucle de rétroaction possède un gain G. La susceptibilité effective χ_{eff} apparaît comme la fonction de transfert en boucle fermée tandis que $G\chi$ est la fonction de transfert en boucle ouverte. Cette interprétation en terme de système bouclé permettra dans la section suivante d'interpréter l'instabilité dynamique comme une conséquence du théorème de Nyquist.

Supposons maintenant qu'on s'intéresse uniquement à des fréquences voisines de la fréquence de résonance Ω_{m} d'un mode particulier du résonateur, de masse effective M et de taux de

relaxation Γ. Le comportement du résonateur est alors essentiellement gouverné par cette résonance et la susceptibilité mécanique correspond à celle d'un simple oscillateur (équation 1.18). En supposant de plus le facteur de qualité mécanique $Q = \Omega_{\mathrm{m}}/\Gamma$ grand devant 1, on trouve que la susceptibilité effective a toujours une forme lorentzienne correspondant à un oscillateur harmonique, mais avec une fréquence de résonance Ω_{eff} décalée par rapport à Ω_{m} et un amortissement Γ_{eff} modifié :

$$\Omega_{\mathrm{eff}} = \Omega_{\mathrm{m}} \left(1 + \mathrm{Re}\frac{\Psi\Psi_{\mathrm{NL}}}{\Delta}\right) , \tag{6.19}$$

$$\Gamma_{\mathrm{eff}} = \Gamma \left(1 - 2Q\ \mathrm{Im}\frac{\Psi\Psi_{\mathrm{NL}}}{\Delta}\right) , \tag{6.20}$$

où le paramètre Δ est maintenant évalué à la fréquence Ω_{m} (équation 6.10). Le paramètre Ψ_{NL} représente le déphasage statique induit par le recul moyen $\overline{x}$ du résonateur sous l'effet de la pression de radiation (voir équations 2.68 à 2.70) :

$$\Psi_{\mathrm{NL}} = 4\hbar k^2 \overline{\alpha}^2 \frac{1}{M\Omega_{\mathrm{m}}^2} \tag{6.21}$$

Comme expliqué dans la partie 2.4 du chapitre 2, Ψ_{NL} définit l'ordre de grandeur des non-linéarités liées à la pression de radiation ($\Psi_{\mathrm{NL}} \simeq \gamma$ est le seuil d'apparition de la bistabilité mécanique), et il apparaît ici comme un facteur multiplicatif dans les modifications de la dynamique du résonateur.

Les équations (6.19) et (6.20) montrent que ces modifications portent à la fois sur un décalage de la résonance et sur une modification de l'amortissement. Le premier effet est dû à une modification de la raideur de l'oscillateur, induite par le "ressort optique" créé par la lumière (optical spring en anglais). Cette première modification de la dynamique par la pression de radiation a d'abord été observée dans une expérience d'ondes centimétriques menée en 1970 par le groupe de V.B. Braginsky [113]. Pour cela, un des miroirs métalliques d'une cavité Fabry-Perot était monté sur un ressort. En se plaçant hors de résonance, ils ont observé des modifications de la fréquence de résonance dépendant du désaccord. Comme expliqué dans la section 6.1.2, une équipe de l'Australian National University à Canberra a aussi démontré une modification de la fréquence de résonance d'un oscillateur de flexion supportant un miroir macroscopique faisant partie d'une cavité de finesse 400 environ [109] (voir aussi [29]).

En ce qui concerne la modification de l'amortissement du résonateur, celle-ci n'est appréciable que lorsque la partie imaginaire de $1/\Delta$ est significative, c'est-à-dire si la fréquence de résonance Ω_{m} et la bande passante $\Omega_{\mathrm{c}} = \gamma/\tau$ de la cavité sont du même ordre de grandeur. Dans ces conditions, les parties réelles et imaginaires sont comparables, mais du fait du facteur de qualité mécanique Q qui apparaît dans l'équation (6.20), les effets du désaccord sont plus visible sur la largeur de la résonance que sur le décalage en fréquence. On a représenté sur le graphique 6.5 le taux d'amortissement effectif en fonction du désaccord, pour plusieurs valeurs réalistes du paramètre optomécanique Ψ_{NL}. Ces courbes sont tracées à intensité incidente fixe, ce qui veut dire que l'intensité intracavité $\overline{I} = \overline{\alpha}^2$ dépend du désaccord Ψ de manière lorentzienne (équation 6.2).

A très grands désaccords, positifs ou négatifs, l'intensité intracavité est très faible et on constate que l'amortissement est égal à sa valeur à résonance. Le sens de variation de l'amortissement effectif dépend du signe du désaccord. Pour des désaccord négatifs, on augmente

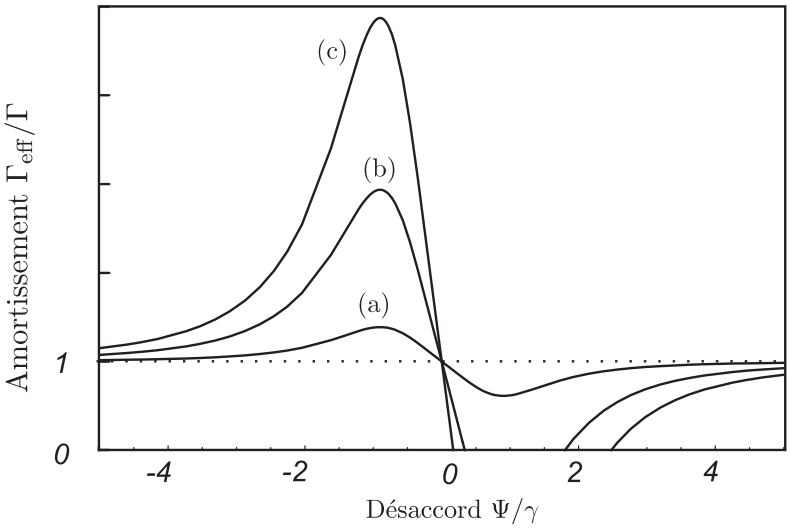


FIG. 6.5 – Dépendance du taux de relaxation effectif $\Gamma_{\rm eff}$ avec le désaccord pour un résonateur présentant un facteur de qualité de 10^4, avec $\Omega_{\rm m}/\Omega_{\rm c} = 0.8$. Les courbes (a), (b) et (c) sont obtenues pour différentes valeurs du paramètre optomécanique $\Psi_{\rm NL}/\gamma$, respectivement 10^{-4}, 5×10^{-4} et 10^{-3}.

le coefficient d'amortissement tandis qu'il est réduit pour des désaccords positifs. En augmentant l'intensité intracavité, on accroît le couplage optomécanique et les modifications de l'amortissement deviennent plus importantes. Pour certaines valeurs l'amortissement effectif peut même devenir négatif : le système est alors instable.

Instabilité dynamique

La modification de la dynamique peut conduire à des instabilités où le résonateur entre dans un régime d'auto-oscillation. La condition de stabilité est obtenue en effectuant une analyse de la stabilité dynamique des relations linéaires décrivant l'évolution du système couplé oscillateur-champ, en utilisant le critère de Routh-Hurwitz [114]. On peut montrer [8] que la condition obtenue de cette façon est équivalente à ce que le résonateur conserve un amortissement positif, de façon à ce que son mouvement ne diverge pas : $\Gamma_{\rm eff} > 0$.

Nous pouvons également interpréter cette instabilité à partir de la description en terme de système bouclé en utilisant le théorème de Nysquist. La stabilité d'un système bouclé linéaire peut être déduite de l'étude du système en boucle ouverte : le système est instable si le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte est supérieur à 1 à la fréquence Ω_π pour laquelle son déphasage est de π. On peut utiliser ce principe dans le cadre de l'équivalence présentée précédemment (équation 6.18), le gain en boucle ouverte étant égal à $G\chi$ où G est donné par l'équation (6.17). L'expression de la fréquence d'instabilité Ω_π à laquelle on peut voir apparaître une oscillation spontanée du système s'obtient en résolvant l'équation

$$\arg\left(G[\Omega_\pi]\,\chi[\Omega_\pi]\right) = \pi. \tag{6.22}$$

En prenant la tangente de cette équation on obtient la solution Ω_π non nulle :

$$\Omega_\pi^2 = \Omega_{\rm m}^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma + 2\Omega_{\rm c}}\left[\left(1 + \frac{\Psi^2}{\gamma^2}\right)\Omega_{\rm c}^2 - \Omega_{\rm m}^2\right]. \tag{6.23}$$

Pour un oscillateur possédant une résonance au voisinage de la bande passante de la cavité avec un facteur de qualité grand devant 1, la fréquence de l'instabilité est proche de la fréquence propre de l'oscillateur. Lorsqu'on augmente l'intensité incidente, on s'attend donc à ce que le système se mette à osciller à cette fréquence. La condition d'instabilité s'obtient en exprimant la condition sur le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$|G[\Omega_\pi]\,\chi[\Omega_\pi]| > 1. \tag{6.24}$$

En calculant cette expression, on retrouve la même expression que celle obtenue avec le critère de Routh-Hurwitz [114, 8], équivalente à $\Gamma_{\text{eff}} < 0$ pour la zone instable.

Comme le montre la figure 6.5, la zone instable correspond à des valeurs positives du désaccord Ψ, d'autant plus proches de la résonance $\Psi = 0$ que le paramètre optomécanique Ψ_{NL} est grand. Ces instabilités devraient donc être observables dans notre expérience, à condition de pouvoir atteindre des paramètres Ψ_{NL}/γ au moins de l'ordre de 5×10^{-4}.

6.1.5 Spectre de bruit thermique

La susceptibilité effective correspond toujours à celle d'un oscillateur harmonique, mais avec un amortissement additionnel dû à la pression de radiation intracavité (équation 6.20). Comme dans le cas du refroidissement par friction froide, les fluctuations de la force de Langevin liée au couplage avec l'environnement à la température T ne sont pas changées et correspondent toujours à un spectre $S_{\text{T}} = 2M\Gamma k_{\text{B}}T$ indépendant de la fréquence. Le spectre de bruit de position est donné par l'équation (6.15) :

$$S_x[\Omega] = |\chi_{\text{eff}}[\Omega]|^2\, S_{\text{T}} \tag{6.25}$$

et correspond toujours à un équilibre thermodynamique mais à une température T_{eff} différente, donnée par le théorème fluctuations-dissipation :

$$S_{\text{T}} = -\frac{2k_B T_{\text{eff}}}{\Omega}\text{Im}\left(\frac{1}{\chi_{\text{eff}}[\Omega]}\right), \tag{6.26}$$

où la température effective est égale à

$$T_{\text{eff}} = T\frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{eff}}}. \tag{6.27}$$

On retrouve donc une situation tout à fait similaire à celle de la friction froide : pour un désaccord négatif, l'amortissement effectif augmente (voir la figure 6.5), et le pic de bruit thermique est à la fois réduit en hauteur et élargi. L'aire du spectre, proportionnelle à la température, est réduite de façon inversement proportionnelle à l'élargissement du spectre. A un facteur multiplicatif près, le gain g de la friction froide joue le même rôle que la partie imaginaire du gain G défini par équivalence avec un système bouclé.

Ordres de grandeur

Les effets de refroidissement par pression de radiation ne peuvent être observés que si le résonateur répond suffisamment à la pression de radiation. On a vu que l'effet est maximal lorsque la fréquence de résonance est proche de la bande passante de la cavité optique. Pour le résonateur P3 avec lequel on a atteint une finesse optique de 30 000 environ c'est-à-dire

une bande passante voisine de 1 MHz, le mode propre oscillant à 814 kHz semble être un candidat idéal pour observer ces effets. D'après l'équation 6.20, la condition pour observer un refroidissement intracavité s'écrit :

$$Q\frac{\Psi_{\mathrm{NL}}}{\gamma} \simeq 16\mathcal{F}^2\frac{P^{\mathrm{in}}}{\pi\lambda c}\frac{Q}{M\Omega_{\mathrm{m}}^2} \geq 1. \tag{6.28}$$

Avec $\mathcal{F} = 30\ 000$, $Q = 10^4$, $M = 100\,\mu\mathrm{g}$, $\Omega_{\mathrm{m}}/2\pi = 1\,\mathrm{MHz}$ et $P^{\mathrm{in}} = 1\,\mathrm{mW}$, on obtient $Q\Psi_{\mathrm{NL}}/\gamma \simeq 40$, ce qui signifie qu'on peut espérer observer de tels effets dans notre expérience. On présente maintenant les modifications du montage expérimental et les résultats obtenus.

6.2 Résultats expérimentaux.

Les résultats expérimentaux [27] qui suivent ont été obtenus avec la deuxième série de micro-miroirs traitée par l'équipe du LMA en décembre 2005. On avait commencé à observer des effets similaires mais de moindre amplitude avec la série précédente qui présentait une bien moins bonne qualité optique. L'observation de ces effets a été rendue possible grâce aux faibles masses effectives que présentent les micro-miroirs, les bons facteurs de qualité mécanique et les grandes finesses optiques qui ont été obtenues. La fréquence de vibration des résonateurs est comparable à la bande passante de la cavité, ce qui est bien sûr un avantage, même si une fréquence de résonance élevée n'est a priori pas favorable à l'obtention d'effets importants au vu de l'expression (6.28) de $Q\Psi_{\mathrm{NL}}/\gamma$. En comparaison des autres expériences dans le monde, cette fréquence élevée s'est finalement avérée être un avantage car on élimine ainsi les effets photothermiques liés à l'absorption de lumière dans les couches, prédominants à basse fréquence. De plus, les modes basse fréquence que nous avons observés présentent des facteurs de qualité mécanique bien moins élevés.

6.2.1 Montage expérimental

Le montage expérimental est le même que celui présenté dans les chapitres 4 et 5. La seule modification est la mise en oeuvre d'un contrôle du désaccord. Pour s'asservir en dehors de résonance, on a simplement ajouté une tension continue au signal d'erreur Pound-Drever-Hall. Dans le schéma de l'expérience présenté au chapitre 4 (figure 4.1), on a ainsi inséré un étage supplémentaire entre la sortie du multiplicateur fournissant le signal d'erreur Pound Drever et l'entrée du boîtier d'asservissement de la fréquence du laser. Cet étage, représenté sur la figure 6.6, soustrait au signal d'erreur une tension continue V_Ψ stable et réglable. On a en fait utilisé un générateur de fonctions Agilent, qui possède un réglage d'offset de $\pm 5\,\mathrm{V}$, contrôlable à partir d'un potentiomètre sans fin précis à 0.01 mV. La tension peut être positive ou négative selon le signe du désaccord que l'on souhaite atteindre.

Cela nous a permis de nous asservir dans la plage centrale du signal d'erreur Pound-Drever-Hall (figure 4.33), pour un désaccord allant jusqu'à $\Psi/\gamma = \pm 0.5$. Au-delà, la stabilisation devient délicate car on se rapproche trop du maximum du signal d'erreur. Pour réaliser des désaccords plus importants, on a utilisé une autre stratégie en mesurant l'intensité réfléchie par la cavité de mesure, qui présente un minimum à résonance (voir figure 3.13). A l'aide du même soustracteur, représenté sur la figure 6.6, on soustrait à ce signal une tension de consigne et on envoie le signal résultant à l'entrée du boîtier d'asservissement de la fréquence du laser. On s'asservit de cette manière en n'importe quel point situé sur les flancs du creux

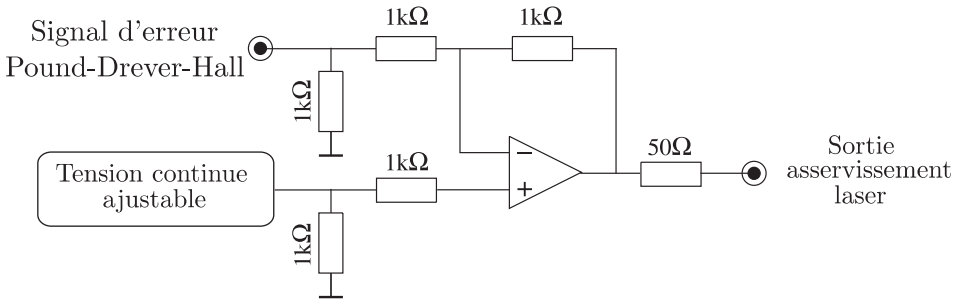


FIG. 6.6 – Schéma du soustracteur utilisé pour contrôler le désaccord de la cavité. En soustrayant une tension continue réglable au signal d'erreur Pound-Drever-Hall, il permet de décaler la fréquence sur laquelle s'asservit le laser.

correspondant au pic d'Airy en réflexion, le choix entre les flancs positifs et négatifs étant obtenus par inversion des deux entrées du soustracteur. En pratique, cet asservissement fonctionne bien pour des valeurs du désaccord Ψ/γ comprises entre 0.3 et 4 en valeur absolue. En dehors de cette plage, aussi bien pour les valeurs très élevées du désaccord qu'au voisinage de la résonance optique, la pente du pic d'Airy en réflexion n'est pas suffisante pour assurer un bon asservissement.

Ces deux méthodes possèdent un recouvrement non nul en désaccord et on a vérifié que les mesures obtenues par les deux méthodes étaient compatibles entre elles. Dans les deux cas, on utilise le signal Pound-Drever pour mesurer les déplacements du micro-résonateur. Comme nous allons le voir dans la section suivante, la relation entre les déplacements et le signal d'erreur n'est pas aussi simple qu'à résonance : d'une part les relations entre le déplacement et les quadratures du champ réfléchi sont modifiées, d'autre part la pente statique du signal Pound-Drever dépend du point de fonctionnement. En particulier, pour de grands désaccords, la pente peut s'annuler ou changer de signe (voir la figure 4.33). Du fait de l'impossibilité pratique de calibrer avec précision les spectres obtenus lorsqu'on s'asservit à grand désaccord par la méthode d'asservissement en réflexion, on n'a pas cherché à déterminer dans ce cas la hauteur des spectres et l'amplitude du bruit observé. On s'est contenté de mesurer les paramètres mécaniques tels que la fréquence de résonance et l'amortissement, obtenus à partir du signal d'erreur Pound-Drever, car ils sont bien sûr indépendants de la calibration.

Le comportement dynamique du miroir est fonction de l'intensité intracavité via le paramètre Ψ_{NL}. Par conséquent, toutes les expériences présentées dans les paragraphes suivants ont été réalisées avec l'asservissement d'intensité en fonctionnement pour garantir une puissance incidente constante. On a également conservé la pointe électrostatique pour pouvoir tester la dynamique modifiée du résonateur via la réponse à la force électrostatique.

6.2.2 Calibration de l'expérience

On présente ici les méthodes utilisées pour mesurer le désaccord du laser par rapport à la résonance de la cavité et pour calibrer le signal d'erreur lorsque la cavité est désaccordée. Cette calibration est nécessaire pour estimer l'amplitude des mouvements du résonateur et la température effective du mode résonnant.

Mesure du désaccord

La calibration du désaccord peut être effectuée de plusieurs manières. La première méthode utilise la tension continue V_Ψ servant à désaccorder la cavité. A partir de l'équation (4.28) du signal d'erreur Pound-Drever-Hall, on peut relier la tension de décalage au désaccord et à la valeur maximale $V_{\max}$ du signal d'erreur, atteinte en $\Psi = \gamma$, par l'expression :

$$V_\Psi = V_{\max} \frac{2\Psi\gamma}{\gamma^2 + \Psi^2}. \tag{6.29}$$

Cette relation peut être inversée lorsque le désaccord Ψ est inférieur à γ en valeur absolue ; on obtient :

$$\Psi = \gamma \frac{V_{\max} - \sqrt{V_{\max}^2 - V_\Psi^2}}{V_\Psi}. \tag{6.30}$$

En pratique, on balaye la fréquence du laser autour de la résonance de la cavité, suffisamment rapidement pour ne pas observer de déformation du pic d'Airy et du signal d'erreur par effet photo-thermique, puis on ajuste le signal d'erreur observé à petit désaccord avec l'expression (6.29) pour en déduire la valeur de $V_{\max}$. On a représenté sur la figure 6.7 la dépendance du désaccord vis-à-vis de la tension de décalage, obtenue à partir de l'équation (6.30) . On constate que lorsque la tension de décalage se rapproche de $\pm V_{\max}$, la pente de la courbe devient infinie, ce qui ne permet pas une détermination précise du désaccord par cette méthode.

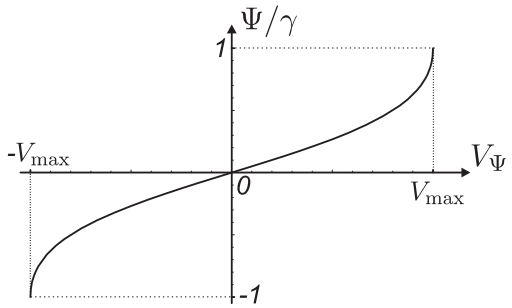


FIG. 6.7 – Dépendance du désaccord de la cavité avec la tension de décalage appliquée au signal d'erreur Pound-Drever-Hall.

On utilise alors une deuxième méthode, basée sur la mesure de l'intensité réfléchie. En présence de pertes dans la cavité, le creux du pic d'Airy en réflexion (équation 2.11) fournit une second estimation de Ψ. Néanmoins, comme l'intensité réfléchie varie peu lorsqu'on reste au voisinage d'un maximum de la fonction d'Airy, cette méthode n'est précise que pour les grands désaccords. En pratique, on a donc estimé la valeur du désaccord avec les deux méthodes, en pondérant ces mesures de façon à donner plus de poids à la méthode liée à la tension de décalage à faible désaccord, et à la seconde méthode à grand désaccord.

Enfin, pour les grands désaccords ($|\Psi| > \gamma$), on asservit la fréquence du laser à partir du pic d'Airy en réflexion et on n'a plus de tension de décalage du signal Pound-Drever. La première méthode n'a plus lieu d'être et on utilise uniquement la valeur donnée par la seconde. Comme plusieurs séries de mesure ont été effectuées sans la pointe électrostatique à l'arrière du résonateur, on a complété ces deux méthodes par une troisième mesure utilisant le pic

d'Airy du faisceau transmis par la cavité. Cette dernière estimation est indépendante du type d'asservissement utilisé pour fixer le désaccord et permet de vérifier la continuité entre les deux techniques d'asservissement. Elle sert aussi de test supplémentaire en asservissement en réflexion.

Calibration de la mesure dans une cavité désaccordée

Dans cette section, on calcule la calibration de la mesure Pound-Drever-Hall lorsqu'on désaccorde la cavité. Pour cela, on reprend le calcul de la sensibilité de la détection Pound Drever Hall (voir partie 4.6) mais on ne se restreint plus au cas $\Psi = 0$. Pour ne pas compliquer cette étude, on se limite aux termes dans le signal d'erreur qui dépendent des déplacements du micro-miroir.

A partir des équations générales d'entrée-sortie (2.7) à (2.10), valables pour une cavité désaccordée et en présence de pertes, on peut écrire le champ réfléchi sous une forme similaire à (4.34) :

$$\alpha^{\text{out}}[\Omega] = r_\Psi[\Omega]\alpha^{\text{in}}[\Omega] + \sqrt{P}t_\Psi[\Omega]\alpha_{\text{v}}[\Omega] + \frac{i}{2}\delta q_{\text{cav}}[\Omega], \tag{6.31}$$

où le coefficient de réflexion r_Ψ de la cavité est donnée par l'équation (4.24) et le coefficient de transmission est $t_\Psi[\Omega] = \sqrt{T}/\left(\gamma - i\Psi - i\Omega\tau\right)$. Le terme δq_{cav} est lié aux déplacement δx du résonateur et généralise l'équation (4.35) :

$$\delta q_{\text{cav}}[\Omega] = 4t_\Psi[\Omega]\overline{\alpha}k\delta x[\Omega]. \tag{6.32}$$

En suivant le même déroulement du calcul que dans la section 4.6, mais à partir des deux équations généralisées ci-dessus, on peut déterminer le signal d'erreur $\delta V_{\text{err}}[\Omega]$ après mesure de l'intensité I^{out} et démodulation à la fréquence Δ. La partie dépendant du déplacement du résonateur s'écrit :

$$\delta V_{\text{err}}^{(x)}[\Omega] = -J_0 J_1 \overline{\alpha}_{\text{o}}{}^2 \frac{2T}{\gamma^2 + \Psi^2} \frac{\gamma^2 - \Psi^2 - i\Omega\tau\gamma}{(\gamma - i\Omega\tau)^2 + \Psi^2} 2k\delta x[\Omega]. \tag{6.33}$$

Cette équation généralise l'équation (4.45), obtenue à désaccord nul. On peut également vérifier qu'en régime quasi-statique ($\Omega \to 0$), cette expression redonne simplement la pente statique du signal d'erreur Pound Drever calculée à partir de l'équation (4.28) :

$$\delta V_{\text{err}}^{(x)}[\Omega \to 0] \approx \frac{dV_{\text{err}}}{d\Psi}\, 2k\delta x[\Omega], \tag{6.34}$$

où :

$$\frac{dV_{\text{err}}}{d\Psi} = -J_0 J_1 \overline{\alpha}_o{}^2 \frac{2T}{\gamma^2 + \Psi^2} \frac{\gamma^2 - \psi^2}{\gamma^2 + \Psi^2}. \tag{6.35}$$

L'équation (6.33) permet de calibrer les signaux observés, puisqu'à un désaccord Ψ et une fréquence d'analyse Ω donnés, elle donne la relation entre le signal $\delta V_{\text{err}}^{(x)}$ mesuré et les déplacements δx à l'origine de ce signal. On a vérifié expérimentalement cette calibration en appliquant une force électrostatique sur le résonateur et en mesurant l'amplitude de la modulation détectée sur le signal d'erreur Pound-Drever-Hall, pour différents désaccords du laser par rapport à la cavité. Cette mesure a été effectuée à très faible puissance incidente ($50\,\mu$W), pour que les effets de pression de radiation soient négligeables. Pour supprimer complètement ces effets, on a même été amené à décaler le micro-miroir par rapport à l'axe

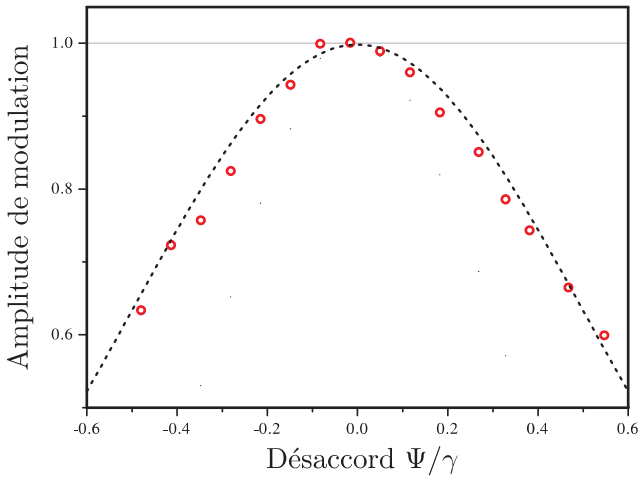


FIG. 6.8 – Amplitude de modulation observée sur le signal Pound-Drever-Hall en fonction du désaccord de la cavité, normalisée à 1 à désaccord nul. Le résonateur P3 a un mouvement d'oscillation à amplitude constante imposée par une force électrostatique modulée au voisinage de la résonance à 814 kHz. La courbe en pointillés est la calibration du signal d'erreur déduite de l'équation (6.33).

optique de la cavité pour augmenter artificiellement la masse effective du mode propre vue par la lumière. La force électrostatique est appliquée sur le résonateur P3 à une fréquence fixe, voisine de 814 kHz, mais légèrement décalée par rapport au maximum du pic de bruit thermique pour pouvoir mesurer également sa hauteur et vérifier l'absence d'effets de pression de radiation. L'amplitude de la modulation appliquée à la pointe électrostatique est de 1 V, avec un décalage statique de +10 V. On a représenté sur la figure 6.8 l'amplitude de la modulation observée sur le signal d'erreur pour différentes valeurs du désaccord, et renormalisée par rapport à la valeur obtenue à désaccord nul. On a superposé en pointillés la dépendance attendue d'après la relation (6.33) donnant le signal d'erreur en fonction du désaccord Ψ de la cavité. On constate un excellent accord avec les points expérimentaux, qui permet de valider la calibration déduite de l'équation (6.33). Notons qu'on ne vérifie la calibration qu'à une seule fréquence, celle de la modulation électrostatique appliquée, mais la dépendance en fréquence de l'expression (6.33) n'est pas appréciable sur la largeur du pic de bruit thermique. Dans la suite, on a calibré de cette manière les spectres du signal d'erreur fournis par l'analyseur en terme de bruit de position équivalent. Cette calibration n'a été effectuée que pour des faibles désaccords, typiquement inférieurs à 0.5γ en valeur absolue, c'est-à-dire dans la plage où on utilise le signal d'erreur Pound-Drever pour asservir la cavité. Au-delà de cette plage, la détection Pound-Drever ne permet pas de connaître l'amplitude des déplacements avec suffisamment de précision mais permet néanmoins de mesurer les variations de la fréquence de résonance et du taux d'amortissement. Pour effectuer ces mesures, il n'est pas nécessaire d'avoir calibré verticalement les spectres observés.

6.2.3 Observation de la dynamique du micro-résonateur : refroidissement et instabilité

Les résultats qui suivent ont été obtenus sur le micro-résonateur P3, constitué d'un pont encastré de $1\,\mathrm{mm} \times 1\,\mathrm{mm} \times 60\,\mu\mathrm{m}$, dont le spectre de bruit thermique a été étudié dans le

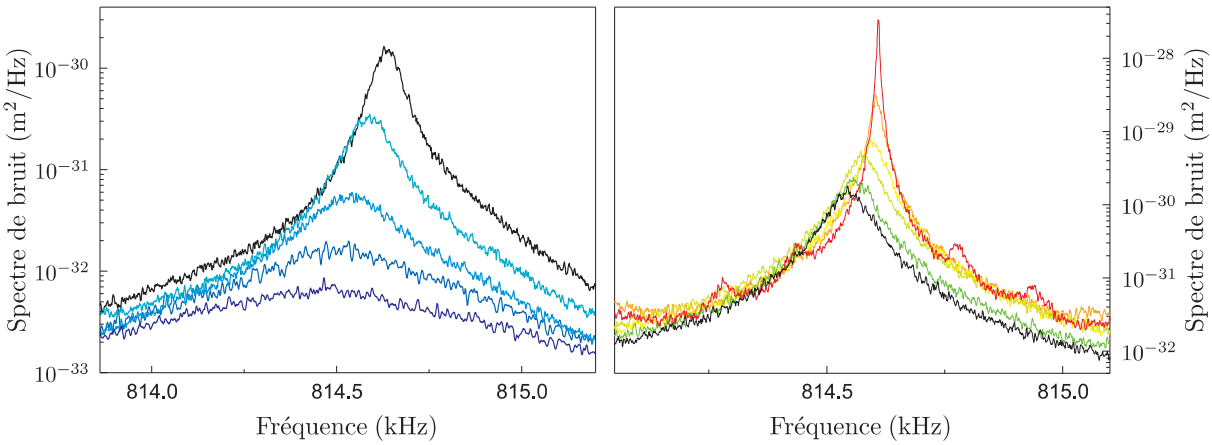


FIG. 6.9 – Spectres de bruit thermique observés lorsqu'on désaccorde la cavité, à gauche pour des désaccords Ψ/γ négatifs décroissants (de bas en haut respectivement 0, -0.1, -0.25, -0.4 et -0.6) ; à droite pour des désaccords positifs croissants (respectivement 0, 0.03, 0.06, 0.09, 0.11 et 0.13). Les courbes en noir sont toutes les deux mesurées à résonance. Lorsqu'on approche de la zone d'instabilité dynamique, on observe des pics latéraux (courbe en rouge).

chapitre précédent. Les paramètres mécaniques et optiques présentés dans ce chapitre diffèrent légèrement suite à une opération de démontage-remontage de la cavité Fabry-Perot, qui a pu modifier légèrement les contraintes mécaniques imposées par le support, et la position de l'axe optique de la cavité.

Spectres de bruit thermique

Nous avons mesuré des spectres de bruit pour différents désaccords, en maintenant constante l'intensité incidente grâce à l'asservissement d'intensité. On a mesuré l'intensité incidente, la finesse de la cavité, les pertes et la transmission du miroir d'entrée en utilisant comme précédemment (section 3.3.1) le signal réfléchi par la cavité. Nous avons également déterminé le couplage spatial du faisceau incident avec le mode optique de la cavité de mesure et la profondeur de modulation de la phase qui joue sur la puissance entrant réellement dans la cavité. Un spectre de bruit thermique pris à résonance permet de déterminer les paramètres optomécaniques en effectuant un ajustement lorentzien : fréquence propre, amortissement et masse effective du mode propre à 814 kHz. On désaccorde ensuite la cavité en changeant la tension de décalage V_Ψ sur le soustracteur pilotant l'asservissement de fréquence du laser, et on acquiert les spectres de bruit sur l'analyseur de spectre. On mesure le désaccord comme expliqué dans la section 6.2.2 et on calibre enfin les spectres de bruit thermique obtenus en utilisant la relation tension-déplacement donnée par l'équation (6.33).

On a représenté sur la figure 6.9 les spectres de bruit thermique obtenus pour différentes valeurs du désaccord et pour une puissance incidente de 5 mW. Les courbes variant du noir au bleu à gauche sont obtenues avec des désaccords négatifs, valant respectivement $\Psi/\gamma = 0, -0.1, -0.25, -0.4, -0.6$, les courbes allant du noir au rouge à droite correspondent à des désaccords positifs valant respectivement $\Psi/\gamma = 0$, 0.03, 0.06, 0.09 et 0.13. Les courbes en noir dans les deux graphiques sont identiques et obtenues à désaccord nul. On constate que

pour des désaccords négatifs (figure de gauche), le niveau de bruit thermique s'affaisse, la position de la résonance se décale vers les basses fréquences et l'amortissement augmente (les pics de bruit thermique s'élargissent) lorsqu'on augmente le désaccord. Pour des désaccords positifs l'effet varie en sens inverse, et plus le désaccord est important, plus les pics s'affinent et plus leurs amplitudes à résonance augmentent.

Sur la courbe rouge, obtenue à plus fort désaccord ($\Psi/\gamma = +0.13$) on voit apparaître une structure supplémentaire sous la forme de pics latéraux qui témoignent de la proximité de la zone d'instabilité. Si on augmente encore la tension de décalage pour atteindre un désaccord plus important, le signal d'erreur de l'asservissement du laser sur la cavité devient extrêmement bruité, son amplitude diverge et finit par faire saturer toute l'électronique d'asservissement. Le signal d'erreur Pound-Drever-Hall oscille alors à une fréquence proche de celle du mode propre de l'oscillateur comme le prédit l'équation (6.23). Nous avons cherché à estimer l'amplitude du mouvement du résonateur dans ces conditions. Pour une tension de décalage correspondant à un désaccord $\Psi/\gamma = 0.15$, l'amplitude est pratiquement de l'ordre de la largeur $\lambda/2\mathcal{F}$ de la cavité ; malgré l'imprécision de la mesure Pound-Drever pour une telle amplitude, elle peut être évaluée aux alentours de 10 pm. Nous n'avons pas cherché à pousser plus loin la compréhension des effets de saturation qui limitent les oscillations en régime instable, mais l'un des mécanismes envisageable est lié au fait que des amplitudes importantes du mouvement diminuent la puissance intracavité et réduisent les effets de la pression de radiation.

Nous avons répété ces mesures de spectre de bruit pour différentes puissances incidentes afin de déterminer comment les paramètres dynamiques tel que la fréquence de résonance et l'amortissement dépendent des effets de la pression de radiation. Les résultats sont présentés dans la section suivante. Les modifications sur la température effective, proportionnelle à l'aire des spectres de bruit sont décrits dans la section 6.2.4.

Evolution des paramètres optomécaniques avec le désaccord

En effectuant des ajustements lorentziens des spectres de bruit thermique (équation 6.25), on a mesuré l'évolution des paramètres mécaniques Ω_{eff}, Γ_{eff} du résonateur, et étudié leur dépendance en fonction du désaccord Ψ et de la puissance lumineuse incidente.

On a reporté sur la figure 6.10 l'évolution du taux d'amortissement relatif $\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma$ à gauche, et de l'écart en fréquence $(\Omega_{\text{eff}} - \Omega_{\text{m}})/2\pi$ à droite, en fonction du désaccord, et pour différentes valeurs de la puissance incidente. Les différents faisceaux de points sont obtenus pour des puissances incidentes respectivement égales à 0.5 mW (violet), 0.9 mW (bleu), 1.6 mW (vert), 2.2 mW (jaune) et 3.2 mW (rouge). Les points correspondant à des désaccords Ψ/γ compris entre -0.6 et +0.6 sont obtenus en asservissant la fréquence du laser sur la résonance de la cavité en utilisant le signal d'erreur Pound-Drever, tandis que les points correspondant à des désaccords plus importants sont obtenus en utilisant l'intensité réfléchie pour asservir le laser sur la cavité. Selon les puissances incidentes, on a acquis entre une vingtaine et une cinquantaine de spectres. Comme l'acquisition des spectres pour chaque puissance nécessite quelques heures de mesure à cause du temps de moyennage de l'analyseur, on a réalisé ces courbes sur deux jours, sans éteindre l'asservissement de température de la cavité de mesure pour éviter les dérives en fréquence des pics de bruit.

Comme on l'a déjà observé sur les courbes de bruit thermique, on constate que l'amor-

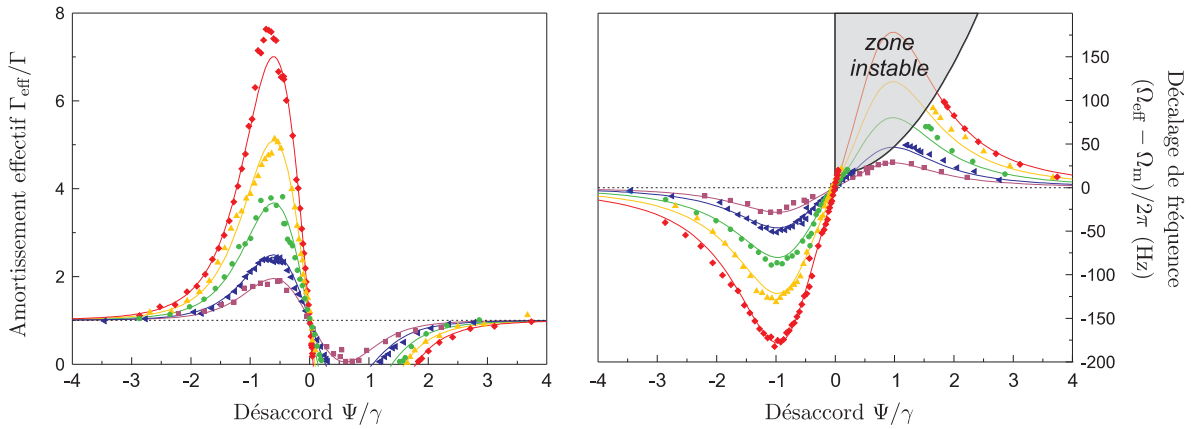


FIG. 6.10 – Evolution des paramètres mécaniques de l'oscillateur en fonction du désaccord normalisé Ψ/γ de la cavité : à gauche le taux d'amortissement $\Gamma_{\rm eff}$, à droite le décalage de la fréquence d'oscillation $\Omega_{\rm eff}$. Les courbes de couleur violette à rouge sont obtenues pour des puissances lumineuses incidentes croissantes (0.5, 0.9, 1.6, 2.2 et 3.2 mW).

tissement augmente pour des désaccords négatifs, tandis qu'il est réduit pour des désaccords positifs. Pour les grands désaccords, positifs comme négatifs, l'amortissement effectif rejoint la valeur mesurée à résonance, ce qui s'explique simplement par le fait que la puissance intracavité est alors trop faible pour modifier la dynamique du résonateur. Notons que la finesse de la cavité et l'amplitude du bruit thermique sont tels qu'on arrive quand même à mesurer un signal pour des désaccords importants. L'égalité des amortissements mesurés à résonance et très loin de la résonance (il en va de même pour la fréquence d'oscillation) indique que la dynamique à résonance n'est pas perturbée par d'éventuels effets thermiques qui pourraient modifier les caractéristiques mécaniques de l'oscillateur.

Lorsque l'intensité incidente est suffisante, comme c'est le cas pour toutes les courbes sauf pour la courbe violette, il existe une plage de désaccords sur laquelle le taux d'amortissement devient négatif et le système instable dynamiquement. Par contre, si la puissance incidente est suffisamment faible (courbe violette), on n'observe aucune instabilité optomécanique puisque l'amortissement est réduit mais reste positif. On reviendra plus loin sur la gamme des paramètres désaccord-puissance intracavité qui permettent d'observer cette instabilité dynamique.

On a ajouté sur ces courbes un ajustement théorique. En ce qui concerne l'amortissement, l'équation utilisée pour l'ajustement est déduite de l'équation (6.20) :

$$\Gamma_{\rm eff}/\Gamma = 1 - 2Q\frac{\Psi_{\rm NL}}{\gamma}{\rm Im}\frac{\Psi/\gamma}{(1 - i\Omega_{\rm m}/\Omega_{\rm c})^2 + \Psi^2/\gamma^2}, \tag{6.36}$$

où $Q = \Omega_{\rm m}/\Gamma = 10800$ avec $\Omega_{\rm m}/2\pi = 814\,{\rm kHz}$ et $\Gamma/2\pi = 75.4\,{\rm Hz}$, $\gamma = \pi/\mathcal{F}$ avec $\mathcal{F} = 27\,000$ et $\Omega_{\rm c}/2\pi = 1.15\,{\rm MHz}$. Le seul paramètre ajustable dans (6.36) est finalement le déphasage non linéaire $\Psi_{\rm NL}$, relié à la puissance intracavité P par la relation

$$\Psi_{\rm NL}/\gamma = \frac{8\mathcal{F}}{\lambda c M \Omega_{\rm m}^2}P, \tag{6.37}$$

où la masse effective du mode est $M = 190\,\mu{\rm g}$. Comme les courbes sont tracées à puissance

Puissance incidente P^{in}(mW)	Puissance intracavité $P_{\Psi=0}$ (W)	
	Ajustement Γ_{eff}	Ajustement Ω_{eff}
0.5	1.46	1.50
0.9	2.71	2.45
1.6	4.73	4.26
2.2	6.88	6.46
3.2	9.64	9.47

TAB. 6.1 – Puissances intracavité à désaccord nul estimées à partir des ajustements de l'amortissement effectif Γ_{eff} et de la fréquence de résonance Ω_{eff}, pour différentes puissances incidentes.

incidente constante, aussi bien la puissance intracavité P que le déphasage non linéaire Ψ_{NL} dépendent en fait du désaccord Ψ. D'après l'équation (6.2) on a :

$$\Psi_{\text{NL}}/\gamma = \frac{8\mathcal{F}}{\lambda c M \Omega_{\text{m}}^2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Psi^2} P_{\Psi=0}, \tag{6.38}$$

où $P_{\Psi=0}$ est la puissance intracavité obtenue à désaccord nul. L'ajustement de chaque série de point expérimentaux par la formule (6.36) donne donc une valeur de la puissance intracavité $P_{\Psi=0}$, récapitulée dans la deuxième colonne du tableau 6.1. On obtient ainsi une puissance intracavité à désaccord nul de 9.64 W pour la courbe rouge, correspondant à une puissance incidente de 3.2 mW.

La fréquence effective est également modifiée par l'effet de la pression de radiation. Lorsque le désaccord est négatif, elle est réduite par rapport à sa valeur à résonance, tandis qu'elle est augmentée à désaccord positif (figure 6.10). On retrouve aussi le fait qu'à grand désaccord, la fréquence du résonateur redevient égale à sa valeur naturelle, obtenue à résonance. On a représenté en grisé la zone d'instabilité dynamique correspondant formellement à l'inégalité $\Gamma_{\text{eff}} \leq 0$. Elle est déterminée en annulant l'équation (6.20) et en reportant la valeur de Ψ_{NL} ainsi trouvée dans l'expression (6.19) de Ω_{eff}. L'expression théorique de la fréquence d'instabilité Ω_π, correspondant à la courbe en noir délimitant la zone d'instabilité, est donc donnée par :

$$\Omega_\pi = \Omega_{\text{m}} \left(1 - \frac{1}{2Q} \frac{\text{Re}(\Delta)}{\text{Im}(\Delta)}\right). \tag{6.39}$$

On a également ajusté les points expérimentaux avec l'équation théorique tirée de l'expression (6.19), toujours en prenant en compte le fait qu'on travaille avec une intensité incidente constante. L'équation utilisée pour l'ajustement est donc la suivante :

$$\Omega_{\text{eff}} - \Omega_{\text{m}} = \Omega_{\text{m}} \frac{\Psi_{\text{NL}}}{\gamma} \text{Re} \frac{\Psi/\gamma}{(1 - i\Omega_{\text{m}}/\Omega_{\text{c}})^2 + \Psi^2/\gamma^2} \tag{6.40}$$

où Ψ_{NL} est relié par l'équation (6.38) au désaccord Ψ et au seul paramètre ajustable $P_{\Psi=0}$ correspondant à la puissance intracavité à désaccord nul. La troisième colonne du tableau donne les valeurs de ce paramètre ajustées aux points expérimentaux. Les courbes de la figure 6.10 à droite on été tracées avec le paramètre $P_{\Psi=0}$ ajusté. L'accord avec les points expérimentaux est très bon.

Dépendance avec la puissance incidente

On a représenté sur la figure 6.11 le paramètre d'ajustement $P_{\Psi=0}$ en fonction de la puissance incidente P^{in}. Pour chaque valeur de la puissance incidente on tire du tableau 6.1 deux valeurs du paramètre $P_{\Psi=0}$, correspondant aux ajustements de Γ_{eff} et Ω_{eff}. On a représenté uniquement leur valeur moyenne et les barres verticales représentent l'écart entre ces deux valeurs. La faible hauteur de ces barres d'incertitudes traduisent la très bonne compatibilité entre les estimations faites indépendamment à partir de l'amortissement et de la fréquence centrale. Les points s'alignent par ailleurs sur une droite et l'ajustement linéaire de $P_{\Psi=0}$ en fonction de P^{in} donne une pente :

$$\left(P_{\Psi=0}/P^{\text{in}}\right)_{\text{exp}} = 3010. \tag{6.41}$$

Cette pente est à comparer à la puissance intracavité réellement présente dans la cavité, dont la valeur est reliée à la puissance incidente par

$$P = \frac{T}{\gamma^2}\,\eta_{\text{cav}} {J_0}^2 P^{\text{in}}. \tag{6.42}$$

Cette relation est déduite de l'équation (2.11) en tenant compte des pertes dans la cavité ($T = 80\,\text{ppm}$ et $2\gamma = 232\,\text{ppm}$), ainsi que du rapport ${J_0}^2 = 0.55$ entre la puissance de la porteuse et la puissance totale incidente, car seule la porteuse entre dans la cavité, et du coefficient d'adaptation spatiale $\eta_{\text{cav}} = 0.91$ du faisceau incident au mode TEM_{00} de la cavité. Le coefficient de proportionnalité entre la puissance incidente et la puissance intracavité est alors de :

$$\left(P_{\Psi=0}/P^{\text{in}}\right)_{\text{theo}} = 2970. \tag{6.43}$$

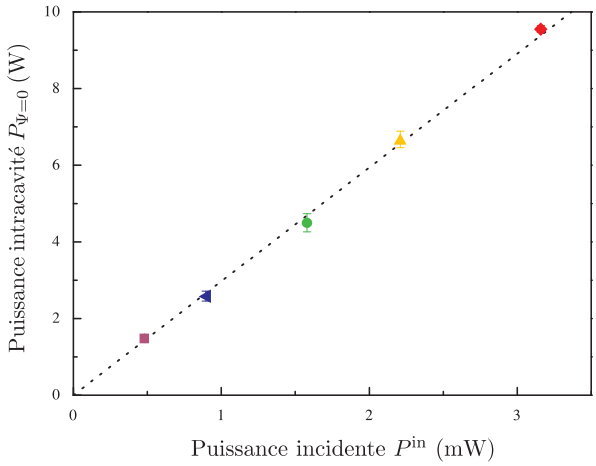


FIG. 6.11 – Les points expérimentaux représentent le paramètre $P_{\Psi=0}$ tiré de l'ajustement des courbes de la figure 6.10, pour les différentes valeurs de la puissance incidente. La courbe en pointillés représente l'intensité intracavité attendue d'après les paramètres optiques de la cavité. Leur excellent accord signifie que l'effet observé est entièrement attribuable à la pression de radiation intracavité.

On a rajouté cette valeur théorique en pointillés sur la courbe 6.11. L'accord avec les point expérimentaux est bon à 2% près. L'ajustement des points expérimentaux est fonction

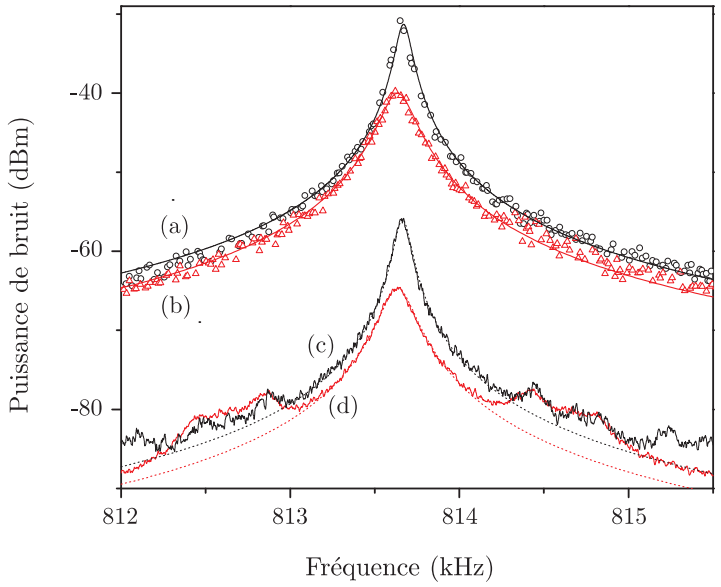


FIG. 6.12 – Réponse du micro-résonateur à une force électrostatique modulée lorsque la cavité est à résonance (courbe a), et désaccordée (courbe b) avec un désaccord $\Psi/\gamma = -0.2$. Les courbes (c) et (d) correspondent aux spectres de bruit mesurés en l'absence de force.

de nombreux paramètres, le plus critique d'entre eux étant la masse effective qui est liée à la calibration. On peut estimer à 5% la précision de la calibration verticale des spectres de bruit thermique, qui se reporte sur la précision de la mesure de la masse effective M. On peut donc conclure que l'effet observé est entièrement explicable par la pression de radiation, à la limite de la précision atteinte dans l'expérience.

Réponse effective à la force électrostatique

On a cherché à tester directement les modifications de la susceptibilité mécanique du micro-résonateur soumis à la pression de radiation intracavité, en mesurant sa réponse à la force électrostatique. Comme expliqué dans le chapitre précédent, celle-ci est appliquée avec une pointe placée à l'arrière du résonateur, sur laquelle on applique une tension continue de 10 V superposée à une tension oscillante de 1 V d'amplitude. On a représenté sur la figure 6.12 la puissance de modulation du signal Pound-Drever, en fonction de la fréquence de modulation lorsqu'on balaye la résonance du mode propre oscillant autour de 814 kHz. La courbe (a) a été obtenue avec une cavité à résonance, tandis que la courbe (b) a été acquise lorsque la cavité était désaccordée d'une valeur $\Psi/\gamma = -0.2$. Les points sont mesurés en utilisant l'analyseur de spectre en mode maxhold comme dans la section 5.3.3, avec un programme écrit sur PC pour extraire des spectres les maxima correspondant à la réponse à la modulation. Cette technique, plus rapide qu'une acquisition point par point ne permet pas de moyenner la réponse du système, c'est pourquoi les traces ne sont pas aussi lisses que lorsqu'on moyenne sur plusieurs balayages. On a aussi ajouté les spectres de bruits (courbes c et d) mesurés avec les mêmes valeurs du désaccord.

On a superposé sur la figure 6.12 les ajustements lorentziens des données, tracés avec

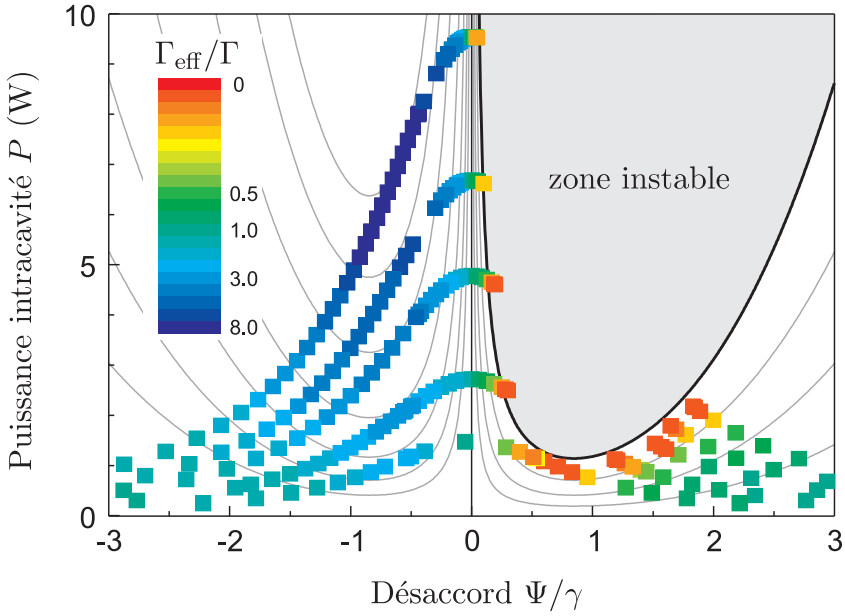


FIG. 6.13 – Représentation par un code couleur de la dépendance du taux d'amortissement effectif relatif $\Gamma_{\rm eff}/\Gamma$ avec le désaccord Ψ/γ et l'intensité intracavité P. La courbe en noir délimite la zone d'instabilité dynamique (grisée). Les courbes en gris sont des courbes d'égal amortissement.

les mêmes paramètres mécaniques (fréquence $\Omega_{\rm eff}$ et amortissement $\Gamma_{\rm eff}$) pour le bruit et la modulation à un désaccord donné. L'accord entre les ajustements est très bon puisqu'on note juste la présence de modes propres supplémentaires qui déforment les spectres de bruit sur les ailes des lorentziennes. Ces modes sont sans doute liés au miroir d'entrée car ils ne répondent pas à la force électrostatique. Ce résultat démontre que le bruit thermique et la réponse mécanique à une force sont régis par la même susceptibilité effective, donnée par l'équation (6.16). En particulier, le bruit thermique correspond à la réponse lorentzienne à la même force de Langevin qu'à désaccord nul, traduisant un équilibre thermodynamique à une température effective réduite ou augmentée selon la valeur de $\Gamma_{\rm eff}/\Gamma$.

Diagramme de fonctionnement

Une représentation intéressante des résultats expérimentaux peut être effectuée dans le plan {désaccord Ψ−puissance intracavité P} (voir la figure 6.13). On a placé sur ce graphique tous les points expérimentaux des courbes de la figure 6.10, qui correspondent à 5 valeurs différentes de la puissance incidente. Dans le plan $\{\Psi, P\}$, chaque série suit un pic d'Airy que l'on distingue clairement sur la figure 6.13. La hauteur de chaque pic d'Airy est donnée par la puissance intracavité $P_{\Psi=0}$ à désaccord nul, déduite du tableau 6.1. La largeur à mi-hauteur des pics correspond simplement au désaccord $\Psi = \gamma$. Pour chaque point expérimental, on a représenté selon un code de couleur la variation relative de l'amortissement $\Gamma_{\rm eff}/\Gamma$: du rouge pour des amortissements très faibles au bleu foncé pour des taux d'amortissement très élevés. Le vert correspond au niveau mesuré à résonance. On voit bien apparaître la région des forts refroidissements en bleu foncé : en accord avec les principes du refroidissement intracavité présentés au début de ce chapitre (section 6.1.1), elle correspond à la zone de plus

forte pente sur le pic d'Airy en $\Psi = -\gamma$ et à une puissance incidente maximale. C'est en ces points que la dépendance de la pression de radiation intracavité vis-à-vis des déplacements du résonateur est maximale (équation 6.1). De même, les points où la dynamique n'est pas modifiée ($\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma \simeq 1$) sont ceux de pente nulle, c'est-à-dire à résonance ou loin sur les ailes des pics d'Airy. Enfin, les faibles amortissements (points rouges) sont proches de la zone d'instabilité qui a été grisée sur le graphe. Grâce aux deux méthodes d'asservissement, on a pu balayer une large plage de valeurs du désaccord et approcher la zone d'instabilité à la fois par valeurs inférieures et supérieures.

La courbe en noir épais représente la prédiction théorique de la limite de la zone d'instabilité. Son expression peut être extraite de l'équation $\Gamma_{\text{eff}} = 0$ qui fournit un lien entre la puissance intracavité et le désaccord en utilisant l'équation (6.20) et l'expression (6.38) du déphasage non linéaire. Les courbes grisées représentent des courbes d'égale valeur de $\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma$ dans le plan $\{\Psi, P\}$. Elles ont été tracées selon le même principe que la limite de zone d'instabilité, en utilisant l'équation (6.20) pour différentes valeurs du rapport $\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma$. Pour des valeurs plus grandes que 1, les courbes sont dans le demi-plan des désaccords Ψ négatifs, alors que pour des valeurs inférieures à l'unité les courbes se situent dans le demi-plan des désaccords positifs. Lorsqu'on suit l'une de ces courbes, on s'attend à mesurer des amortissements égaux correspondant à une même couleur sur le graphique, ce qui est le cas.

6.2.4 Température effective

Le résonateur soumis à la pression de radiation intracavité est équivalent à un oscillateur harmonique de fréquence de résonance Ω_{eff} et d'amortissement Γ_{eff} modifiés, mais soumis à la même force de Langevin thermique qu'à désaccord nul. Il se trouve donc toujours en équilibre thermodynamique, mais à une température T_{eff} différente. Pour déterminer cette température, on mesure l'aire du spectre de bruit thermique du mode. On a reporté sur la figure 6.14 l'aire mesurée en fonction du désaccord pour une puissance incidente de 3.2 mW. Cette aire a été exprimée en kelvin en la normalisant de façon à obtenir 300 K à désaccord nul. On s'est limité à la plage de valeurs du désaccord sur laquelle on utilise le signal d'erreur Pound-Drever-Hall pour asservir la fréquence du laser sur la cavité puisque c'est dans ces conditions qu'on dispose d'une calibration des spectres de bruit. Les incertitudes horizontales des points sont liées à la détermination du désaccord par les deux méthodes décrites précédemment, qui utilisent respectivement le signal d'erreur Pound-Drever et l'intensité réfléchie. Cette incertitude sur le désaccord induit également une incertitude sur la calibration verticale.

La figure 6.14 montre très clairement une réduction de la température pour les désaccords négatifs et une augmentation pour les désaccords positifs, comme on s'y attend à partir de l'évolution de l'amortissement effectif Γ_{eff}. Les températures atteintes sont de 20 K environ pour un désaccord de $\Psi/\Gamma = -0.44$, jusqu'à 2000 K pour $\Psi/\gamma = +0.05$. La courbe en pointillés sur la figure correspond à la température effective atteinte en utilisant l'expression (6.27) :

$$T_{\text{eff}} = T\frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{eff}}}$$

On constate que l'accord est bon à faibles désaccords mais on observe une déviation importante pour des désaccords inférieurs à $\Psi/\Gamma = -0.1$ qu'on ne peut expliquer avec les incertitudes expérimentales. Le sens de la déviation est surprenant puisque la température effective

atteinte expérimentalement est inférieure à ce qui est prédit par le modèle qui donne pourtant de manière très satisfaisante les paramètres mécaniques du résonateur. Cette déviation ne peut donc pas être expliquée par un effet de chauffage supplémentaire, induit par exemple par l'absorption de lumière dans les couches du miroir car la déviation se ferait alors vers des températures supérieures à la courbe théorique.

Cette situation n'est pas sans rappeler les effets observés par l'équipe dans les expériences de friction froide appliquée aux modes propres de vibration d'un miroir, lorsque la réduction du pic de bruit thermique devient suffisamment importante pour l'amener au niveau du fond thermique des autres modes du miroir [60]. Nous allons maintenant développer une interprétation similaire en étudiant l'effet de la pression de radiation intracavité sur les autres modes du résonateur.

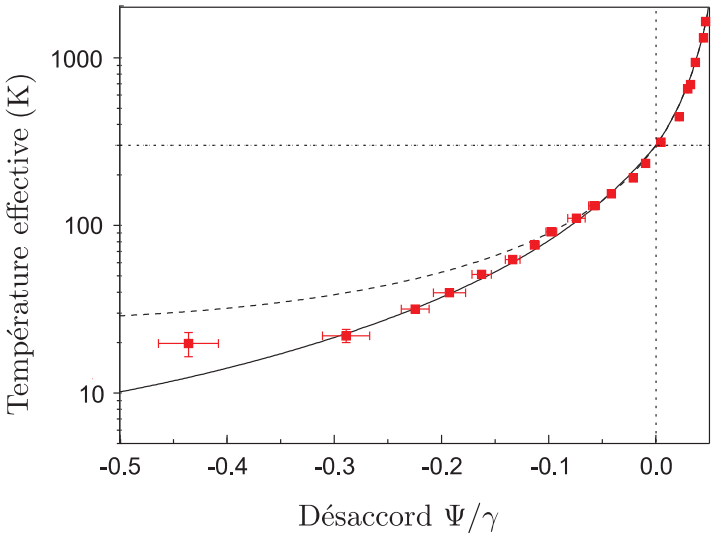


FIG. 6.14 – Température effective de l'oscillateur mesurée expérimentalement à partir de l'aire des spectres. La courbe en pointillés correspond au résultat du modèle à un seul mode résonnant. La courbe en trait plein prend en compte la contribution des autres modes propres du résonateur.

Température effective des autres modes propres

On a étudié l'évolution des spectres de bruit en fonction du désaccord pour d'autres modes propres du résonateur. Sur la figure 6.15, on a représenté les spectres de bruit du mode (0,4) oscillant à 2824 kHz, une fréquence supérieure à la bande passante de la cavité. Les spectres sont tracés pour différentes valeurs négatives du désaccord, respectivement $\Psi/\gamma = 0, -0.12, -0.36$, et -0.55 et une puissance incidente de 3.2 mW. On constate que l'aire du spectre est également réduite, mais dans des proportions bien plus faibles que pour le mode (0,2) oscillant à 814 kHz. On passe ainsi d'un taux d'amortissement de 195 Hz à 260 Hz, pour un désaccord de $\Psi/\gamma = -0.55$, la réduction de l'aire correspond à une température effective de 120 K alors qu'elle est de 20 K pour le mode à 814 kHz dans les mêmes conditions. Cette moindre efficacité s'explique par le fait que la cavité filtre les effets de la pression de radiation pour des fréquences supérieures à sa bande passante, comme on peut s'en rendre compte à partir des expressions théoriques (6.19) et (6.20). De plus, le déphasage non linéaire (équation

6.21) est réduit à cause de la masse effective du mode, légèrement plus élevée que celle du mode étudié précédemment, mais surtout à cause de sa fréquence beaucoup plus importante.

De même, on n'observe plus le décalage vers les basses fréquences de la résonance, mais un léger décalage vers les hautes fréquences : les ajustements lorentziens indiquent un décalage de +20 Hz de la fréquence centrale pour un désaccord $\Psi/\gamma = -0.55$. Cette observation corrobore la formule (6.19) qui indique que les décalages en fréquence pour $\Omega_m > \Omega_c$ et pour $\Omega_c > \Omega_m$ sont de signes opposés. Une conséquence de la moindre influence des effets de pression de radiation est qu'on n'a pas réussi à rendre ce mode instable dynamiquement avec les puissances lumineuses employées (jusqu'à 12 mW incidents).

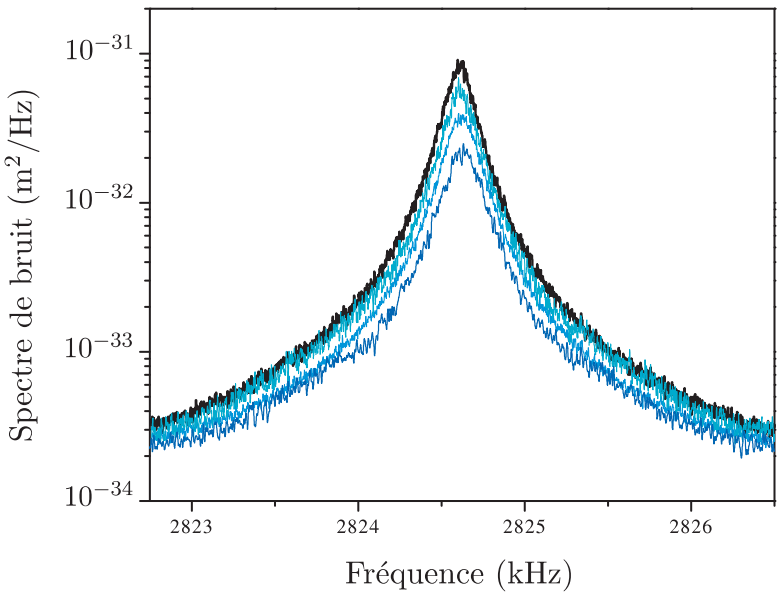


FIG. 6.15 – Spectres de bruit du mode propre (0,4) oscillant à 2824 kHz, obtenus pour une puissance incidente de 3.2 mW et avec des désaccords Ψ/γ de 0, -0.12, -0.36 et -0.55 pour les courbes de haut en bas. La température effective atteinte avec le plus grand désaccord est de 120 K.

On n'a pas cherché à étudier en détail le mode propre fondamental du résonateur car son facteur de qualité mécanique est mauvais. De plus, un autre mode propre très voisin rend les spectres peu lisibles. On a néanmoins vérifié qu'il ne donnait pas lieu non plus à une instabilité dynamique, du moins pas dans la plage de stabilité du mode propre (0,2) oscillant à 814 kHz. Ceci s'explique par son mauvais facteur de qualité mécanique et par sa fréquence plus éloignée de la bande passante de la cavité, ce qui réduit l'influence des effets de retard.

On a ainsi vérifié que l'effet de refroidissement intracavité a lieu simultanément sur tous les modes propres du résonateur, avec une efficacité qui dépend des paramètres du mode tels que sa masse, son facteur de qualité mécanique, et sa fréquence de résonance selon qu'elle est proche ou non de la bande passante de la cavité. Ceci signifie que chaque mode du résonateur atteint une température effective différente et que le résonateur n'est pas globalement dans un état d'équilibre thermodynamique.

Influence du fond des autres modes propres

On ne peut donc pas définir réellement de température effective pour le résonateur, et seule l'amplitude de réduction du bruit thermique à une fréquence donnée peut être définie de manière rigoureuse. Il en est de même lorsqu'on se limite à une plage de fréquence étroite autour d'une résonance comme on l'a fait jusqu'à présent : l'existence d'une fond thermique dû à tous les autres modes empêche de définir réellement une température effective pour le mode résonnant [60]. En pratique, l'influence du fond est assez peu visible sur les spectres de bruit des figures 6.9 et 6.15, et on a définit une température équivalente à partir des ajustements lorentziens de ces spectres. Cette température équivalente reproduite sur la figure 6.14, est en fin de compte proportionnelle à l'aire des lorentziennes, c'est-à-dire au produit de leur largeur par leur hauteur totale, tenant compte de l'existence d'un fond sous-jacent.

Nous avons cherché à modéliser le comportement de la température équivalent vis-à-vis du désaccord (figure 6.14) en décrivant le fond autour de la fréquence Ω_{m} du mode étudié comme le résidu à basse fréquence d'un seul autre mode résonnant à plus haute fréquence. Le déplacement total pour des fréquences voisines de Ω_{m} est donc la somme des contributions du mode résonnant et du fond. Les déplacements δx du mode résonnant sont toujours donnés par l'équation (6.14), alors que les déplacements δx_{f} du fond sont donnés par une équation similaire avec une susceptibilité $\chi_{\mathrm{f}}[\Omega]$ et une force de Langevin F_T^{f} liées à l'autre mode. La force de pression de radiation est sensible (via l'intensité intracavité) au déplacement total $\delta x + \delta x_{\mathrm{f}}$ du résonateur. On trouve alors une expression similaire à (6.15) pour le déplacement total, mais avec deux modes :

$$\delta x + \delta x_{\mathrm{f}} = \frac{1}{1 + G(\chi + \chi_{\mathrm{f}})} \left\{ \chi F_T + \chi_{\mathrm{f}} F_T^{\mathrm{f}} \right\} \tag{6.44}$$

où G est donné par l'équation (6.17). La susceptibilité effective (6.18) est donc modifiée du fait de la présence de la susceptibilité χ_{f} du fond. Le terme dans l'accolade représente les fluctuations thermiques totales lorsque la cavité n'est pas désaccordée ($G = 0$), en tenant compte du fond. Nous avons calculé le spectre résultant à l'aide du logiciel Mathematica, et déterminé la température équivalente à partir de la hauteur totale et de la largeur du spectre obtenu. Le résultat est représenté par la courbe en trait plein sur la figure 6.14, qui est en bien meilleur accord avec les points expérimentaux que la courbe en pointillés obtenue sans tenir compte du fond : l'effet du fond devient d'autant plus important que la cavité s'éloigne de résonance et que la température diminue. Tous les points expérimentaux sont alignés sur la courbe théorique, sauf le dernier. L'écart n'est pas encore bien compris, mais il ne semble pas être dû à des effets thermiques parasites car on a pu réduire la température jusqu'à 10 K en utilisant une puissance lumineuse plus importante.

6.2.5 Remarques

Notons pour terminer qu'on a observé des effets similaires de refroidissement intracavité avec d'autres résonateurs, notamment un pont de la puce P11 de 1.4 mm de long, 400 μm de large et 60 μm d'épaisseur, avec lequel on a refroidi le mode (0,2) oscillant à 1.55 MHz.

En ce qui concerne les instabilités dynamiques atteintes pour des désaccords positifs, elles présentent l'intérêt d'augmenter le facteur de qualité mécanique effectif du résonateur si on stabilise le système au voisinage de la zone instable. Par exemple, on a pu stabiliser la cavité

à un désaccord donnant un amortissement de 14 Hz seulement, ce qui correspond à un facteur de qualité mécanique effectif de 60 000. Cet effet pourrait donc être utilisé pour améliorer le pointé des fréquences de résonance, comme par exemple pour réaliser une mesure dynamique de la force de Casimir [3, 115].

Enfin, la pression de radiation semble être la force la plus appropriée pour refroidir efficacement le mouvement d'un résonateur car elle ne met pas en jeu de processus d'absorption de lumière qui entraîne irrémédiablement un échauffement. Dans notre expérience, on a poussé la puissance incidente jusqu'à 12 mW, et bien que la stabilisation de la cavité devienne alors très délicate, nous avons pu refroidir le résonateur jusqu'à 10 K. Cela signifie qu'on n'a pas observé d'effet thermique, bien que la puissance intracavité à résonance soit de l'ordre de 30 W dans ces conditions. Par ailleurs, à la différence des expériences décrites dans la section 6.1.2, nous avons montré que les effets observés sont dus à la pression de radiation intracavité et non à des effets thermique de type bilame (voir la section 6.2.3 et la figure 6.11). Cela est dû d'une part à la grande qualité optique des miroirs, qui ne présentent que peu d'absorption (de l'ordre de quelques ppm), et aussi à la structure des résonateurs que nous avons utilisés qui sont plus épais que dans ces expériences [47, 49, 111]. Cela signifie que les effets thermiques, qui ont essentiellement lieu dans les couches diélectriques, ne vont pas engendrer d'effets de type bilame car la masse propre du résonateur en silicium est bien plus importante que celle des couches diélectriques.

6.3 Battre la limite quantique standard avec une cavité désaccordée

Désaccorder la cavité permet également d'augmenter la sensibilité d'une mesure de position. Cela peut paraître étonnant, puisqu'on a vu au chapitre 1 que c'est à résonance que la phase du faisceau réfléchi par la cavité est la plus sensible aux déplacements.

Néanmoins, dans une cavité désaccordée, à la fois la réponse dynamique du miroir et les niveaux des bruits quantiques sont modifiés. Si la cavité est soumise à une variation de longueur δx_{sig} que l'on cherche à mesurer, indépendante des déplacements δx du résonateur, la force de pression de radiation est sensible à la variation totale de la longueur de la cavité $\delta x_{\text{tot}} = \delta x + \delta x_{\text{sig}}$. Si on peut négliger le bruit thermique, l'équation du mouvement δx de l'oscillateur s'écrit alors :

$$\delta x = \chi \left(F_{\text{rad}}^{(\text{in})} - G\, \delta x_{\text{tot}} \right) \tag{6.45}$$

où G est le gain optique défini par l'équation (6.17) et $F_{\text{rad}}^{(\text{in})}$ correspond aux fluctuations quantiques de la force de pression de radiation (équation 6.8). Les fluctuations de longueur totale de la cavité se mettent alors sous la forme :

$$\delta x_{\text{tot}} = \chi_{\text{eff}} F_{\text{rad}}^{(\text{in})} + \frac{\chi_{\text{eff}}}{\chi} \delta x_{\text{sig}}, \tag{6.46}$$

où la susceptibilité χ_{eff} est toujours définie par l'équation 6.18. Le signal est donc amplifié ou réduit, selon le signe du désaccord Ψ de la cavité, d'un facteur $|\chi_{\text{eff}}/\chi|$. Cependant, le bruit de pression de radiation est aussi modifié par le désaccord de la cavité : il dépend non seulement des fluctuations d'intensité du champ incident mais aussi de ses fluctuations de phase (équation 6.8), également amplifiées par la dynamique de la cavité désaccordée. La seconde source de bruit limitant la mesure de position est le bruit de phase du faisceau réfléchi par

la cavité qui n'est plus simplement égal au bruit de phase du faisceau incident, mais dépend aussi de ses fluctuations d'intensité, à cause de la rotation de la phase des champs moyens (équations 6.3).

La prise en compte de ces deux limitations permet de définir la sensibilité de l'expérience. On montre [81] qu'un tel dispositif permet d'améliorer la sensibilité au-delà de la limite quantique standard qui correspond à la limite de sensibilité avec une cavité résonnante. On a distingué plusieurs régimes, selon les valeurs des fréquences de résonance et de la bande passante de la cavité. Lorsque la bande passante de la cavité est grande devant les fréquences d'intérêt, on bat la limite quantique standard à des fréquences situées en-dessous ou au-dessus de la résonance de l'oscillateur selon le signe du désaccord. On a montré de manière plus générale que la limite de sensibilité atteinte est en réalité la limite quantique ultime présentée au chapitre 2 (équation 2.81) qui est uniquement fonction de la dissipation du système [7]. Nous avons également étudié le cas où la bande passante de la cavité est comparable aux autres fréquences, la prise en compte du temps de stockage des photons dans la cavité fait apparaître des structures en forme de double puits en fonction de la fréquence (figure 4 de [81]), dans lesquelles on peut battre la limite quantique standard par un facteur inversement proportionnel au désaccord Ψ/γ, de la même façon que dans les interféromètres gravitationnels à recyclage du signal [116, 117], lorsque la cavité de recyclage est désaccordée.

Une cavité à micro-miroir permettrait donc de tester les propositions visant à améliorer la sensibilité des interféromètres de seconde génération. Dans les deux cas l'amélioration est essentiellement due à une amplification du signal par le mouvement du micro-miroir, du fait de la dépendance de la force de pression de radiation vis-à-vis des variations de longueur dans une cavité désaccordée. Cet effet est complémentaire des modifications de la dynamique du résonateur que nous avons observé expérimentalement. L'amélioration de la sensibilité est d'ailleurs d'autant plus importante qu'on se rapproche de la zone d'instabilité où le miroir répond de plus en plus efficacement au signal appliqué. L'article "*Beating quantum limits in an optomechanical sensor by cavity detuning* ", reproduit ci-après, présente l'ensemble des résultats obtenus.

PHYSICAL REVIEW A **73**, 033819 (2006)

Beating quantum limits in an optomechanical sensor by cavity detuning

O. Arcizet, T. Briant, A. Heidmann, and M. Pinard*
Laboratoire Kastler Brossel, Case 74, 4 place Jussieu, F75252 Paris Cedex 05, France
(Received 3 February 2006; published 27 March 2006)

We study the quantum limits in an optomechanical sensor based on a detuned high-finesse cavity with a movable mirror. We show that the radiation pressure exerted on the mirror by the light in the detuned cavity induces a modification of the mirror dynamics and makes the mirror motion sensitive to the signal. This leads to an amplification of the signal by the mirror dynamics, and to an improvement of the sensor sensitivity beyond the standard quantum limit, up to an ultimate quantum limit only related to the mechanical dissipation of the mirror. This improvement is somewhat similar to the one predicted in detuned signal-recycled gravitational-wave interferometers, and makes a high-finesse cavity a model system to test these quantum effects.

DOI: 10.1103/PhysRevA.73.033819 PACS number(s): 42.50.Lc, 03.65.Ta, 04.80.Nn

I. INTRODUCTION

Quantum noise of light is known to induce fundamental limits in very sensitive optical measurements. As an example, the future generations of gravitational-wave interferometers [1–3] will most probably be confronted to quantum effects of radiation pressure. A gravitational wave induces a differential variation of the optical paths in the two arms of a Michelson interferometer. The detection of the phase difference between the two paths is ultimately limited by two quantum noise sources: the phase fluctuations of the incident laser beam and the radiation pressure effects that induce unwanted mirror displacements in the interferometer. A compromise between these noises leads to the so-called standard quantum limit for the sensitivity of the measurement [4–6].

A number of quantum noise reduction schemes have been proposed that rely on the injection of squeezed states of light in the interferometer [7–9], or on the quantum correlations induced by radiation pressure between phase and intensity fluctuations in the interferometer [10]. The possibility to implement these techniques in real interferometers gave rise to new methods such as the quantum locking of mirrors [11] or the detuning of the signal recycling cavity [12,13].

It seems important to find simple systems where similar quantum effects can be produced and characterized in order to test these effects in tabletop experiments. From this point of view, high-finesse optical cavities with movable mirrors have interesting potentialities since they exhibit similar quantum limits. Several schemes involving such cavities have been proposed either to create nonclassical states of both the radiation field [14,15] and of the mirror motion [16–18], or to perform quantum nondemolition measurements [19]. Recent progress in low-noise laser sources and low-loss mirrors have made the field experimentally accessible [20–22].

We study in this paper the quantum effects in a detuned cavity and the possibility to beat the standard quantum limit. As for signal-recycled interferometers [23], the detuning of the cavity induces a modification of the mechanical dynamics of the mirror, known as optical spring. This effect may improve the sensitivity beyond the standard quantum limit since it changes the mechanical rigidity of the mirror without any additional noise [24,25]. The optical spring has already been observed in a Fabry-Perot cavity [26], and studied both theoretically [27] and experimentally [28] for its role in parametric instabilities.

We perform a full quantum treatment of a detuned cavity with a movable mirror. We show that the sensitivity of the measurement of a cavity length variation can be made better than the standard quantum limit. From a careful analysis of the mirror dynamics, we find that it is not only attributed to the optical spring, but also to the fact that the mirror becomes sensitive to the signal through the radiation pressure exerted on the mirror. We show that the mirror motion can amplify the signal, thus increasing the sensitivity up to an ultimate quantum limit only related to the dissipation mechanisms of the mechanical motion [5]. We finally study the influence of a finite cavity bandwidth and obtain dual sensitivity peaks similar to the ones obtained for detuned signal-recycled interferometers [12].

II. OPTOMECHANICAL COUPLING IN A DETUNED CAVITY

We consider the single-port cavity shown in Fig. 1 with a partially transmitting front mirror and a totally reflecting end mirror. A probe laser beam is sent in the cavity and the phase of the reflected field is monitored by a homodyne detection. We consider in the following the motion of a single mirror, assuming the front mirror is fixed, and we note X_m the displacement of the movable end mirror. We study the response of the system to a signal described as a variation X_{sig} of the cavity length. It can either be a physical variation of the cavity length due, for example, to an external force applied on the movable mirror, or an apparent variation such as the one produced by a gravitational wave in a gravitational-wave interferometer. The time-dependent cavity length L is then given by

*Unité mixte de recherche du Centre National de la Recherche Scientifique, de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie; URL: www.spectro.jussieu.fr/Mesure

 ©2006 The American Physical Society

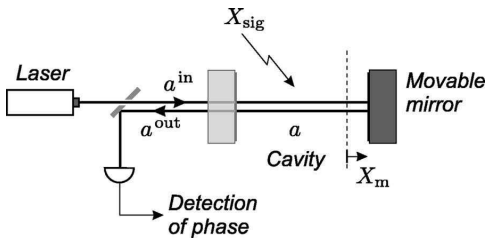


FIG. 1. A length variation X_{sig} is measured by a single-ended Fabry-Perot cavity through the phase shift induced on the reflected field a^{out}. Radiation pressure effects are taken into account via the displacement X_m of the movable end mirror.

$$L(t) = L_0 + X_m(t) + X_{sig}(t), \tag{1}$$

where L_0 is the cavity length without a signal and for a mirror at rest.

For a nearly resonant high-finesse cavity, the intracavity field mode described by the annihilation and creation operators $a(t)$ and $a^\dagger(t)$ is related to the input and output fields $a^{in}(t)$ and $a^{out}(t)$ by

$$\tau\frac{da(t)}{dt} = -[\gamma - i\psi(t)]a(t) + \sqrt{2\gamma}a^{in}(t), \tag{2}$$

$$a^{out}(t) = -a^{in}(t) + \sqrt{2\gamma}a(t), \tag{3}$$

where γ is the damping rate of the cavity assumed to be small compared to 1, τ is the cavity round trip time, and $\psi(t)$ is the time-dependent detuning of the cavity related to the cavity length by

$$\psi(t) \equiv 2kL(t)[2\pi], \tag{4}$$

where k is the field wave vector.

The intracavity field induces a radiation pressure force F_{rad} on the mirror that is proportional to the field intensity,

$$F_{rad}(t) = 2\hbar kI(t), \tag{5}$$

where the intracavity intensity $I=|a|^2$ is normalized as a photon flux. In the framework of linear response theory [29], the Fourier transform $X_m[\Omega]$ of the mirror displacement at frequency Ω linearly depends on the applied force $F[\Omega]$,

$$X_m[\Omega] = \chi[\Omega]F[\Omega], \tag{6}$$

where $\chi[\Omega]$ is the mechanical susceptibility of the mirror. Assuming that the mirror motion can be described as the one of a single harmonic oscillator with a resonance frequency Ω_M, a mass M, and a damping rate Γ, the susceptibility has the simple form

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega)}. \tag{7}$$

The steady state is obtained by cancelling the time derivative in (2). One gets the steady states $\bar{a}$ and $\bar{a}^{out}$ of the intracavity and output fields as a function of the incident mean field $\bar{a}^{in}$ and the mean detuning $\bar{\psi}$ of the cavity,

$$\bar{a} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\bar{\psi}}\bar{a}^{in} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma + i\bar{\psi}}\bar{a}^{out}. \tag{8}$$

As expected for a lossless cavity, the outgoing mean intensity $|\bar{a}^{out}|^2$ is equal to the incident one $|\bar{a}^{in}|^2$. For a nonzero detuning $\bar{\psi}$, the mean fields $\bar{a}^{in}$, $\bar{a}$, and $\bar{a}^{out}$ have different phases. We choose by convention the arbitrary global phase of the fields in such a way that the intracavity field $\bar{a}$ is real. The phases θ^{in} and θ^{out} of the input and output mean fields are then given by

$$e^{-i\theta^{in}} = \frac{\gamma - i\bar{\psi}}{\sqrt{\gamma^2 + \bar{\psi}^2}}, \quad e^{-i\theta^{out}} = \frac{\gamma + i\bar{\psi}}{\sqrt{\gamma^2 + \bar{\psi}^2}}. \tag{9}$$

According to Eqs. (1)–(6), the mean detuning $\bar{\psi}$ depends on the intracavity intensity through the mirror recoil induced by the intracavity radiation pressure,

$$\bar{\psi} = \psi_0 + \hbar\kappa^2\chi[0], \tag{10}$$

where $\psi_0 \equiv 2kL_0[2\pi]$ is the detuning without light and $\kappa = 2k|\bar{a}|$. The coupled equations (8) and (10) give a third order relation between $\bar{a}$ and $\bar{\psi}$, which leads to the well known bistable behavior of a cavity with a movable mirror [30]. The stability condition of the system can be written as

$$\gamma^2 + \bar{\psi}^2 + 2\hbar\kappa^2\chi[0]\bar{\psi} > 0. \tag{11}$$

III. MIRROR DYNAMICS

We derive in this section the basic input-output relations for the fluctuations and we study the modification of the mirror dynamics induced by the radiation pressure in the cavity. We will show that the mechanical response of the mirror to an external force is modified by the optomechanical coupling with the light. It can be described by an effective mechanical susceptibility similar to the one obtained with an active control of the mirror by a feedback loop [21,31,32].

The linearization of the Fourier transform of Eq. (2) around the mean state gives the intracavity field $a[\Omega]$, at a given frequency Ω, as a function of the incident field fluctuations a^{in} and the cavity length variations X_m and X_{sig},

$$(\gamma - i\bar{\psi} - i\Omega\tau)a[\Omega] = \sqrt{2\gamma}a^{in}[\Omega] + i\kappa X_m[\Omega] + i\kappa X_{sig}[\Omega]. \tag{12}$$

According to Eq. (5), the radiation pressure $F_{rad}[\Omega]$ depends on the intensity fluctuations of the intracavity field at frequency Ω. From Eq. (12) it can be written as the sum of three forces,

$$F_{rad}^{(in)}[\Omega] = \hbar\kappa\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma^2 + \bar{\psi}^2}}\left(\frac{\gamma^2 + \bar{\psi}^2 - i\gamma\Omega\tau}{\Delta}p^{in}[\Omega] - \frac{i\bar{\psi}\Omega\tau}{\Delta}q^{in}[\Omega]\right), \tag{13}$$

$$F_{\mathrm{rad}}^{(m)}[\Omega] = -2\hbar\,\kappa^2\frac{\bar{\psi}}{\Delta}X_{\mathrm{m}}[\Omega], \tag{14}$$

$$F_{\mathrm{rad}}^{(\mathrm{sig})}[\Omega] = -2\hbar\,\kappa^2\frac{\bar{\psi}}{\Delta}X_{\mathrm{sig}}[\Omega], \tag{15}$$

where $\Delta=(\gamma-i\Omega\tau)^2+\bar{\psi}^2$ and the operators $p^{\mathrm{in}}[\Omega]$ and $q^{\mathrm{in}}[\Omega]$ correspond to the amplitude and phase quadratures of the incident field, respectively,

$$p^{\mathrm{in}}[\Omega] = e^{i\theta^{\mathrm{in}}}a^{\mathrm{in}}[\Omega] + e^{-i\theta^{\mathrm{in}}}a^{\mathrm{in}\dagger}[\Omega], \tag{16}$$

$$q^{\mathrm{in}}[\Omega] = -ie^{i\theta^{\mathrm{in}}}a^{\mathrm{in}}[\Omega] + ie^{-i\theta^{\mathrm{in}}}a^{\mathrm{in}\dagger}[\Omega] \tag{17}$$

(the same definitions hold for the intracavity quadratures with an angle $\theta=0$ and for the reflected ones with the angle θ^{out}). The first force $F_{\mathrm{rad}}^{(\mathrm{in})}$ represents the radiation pressure induced by the quantum fluctuations of the incident field. It is the usual force obtained in the case of a resonant cavity, which is responsible for the generation of squeezing in a cavity with a movable mirror [14]. Since it induces a displacement of the mirror proportional to the field fluctuations, it is also responsible for the standard quantum limits in interferometric measurements [4–6]. For a resonant cavity ($\bar{\psi}=0$), this force only depends on the incident intensity fluctuations p^{in} filtered by the cavity bandwidth $\Omega_{\mathrm{cav}}=\gamma/\tau$.

The two other forces $F_{\mathrm{rad}}^{(m)}$ and $F_{\mathrm{rad}}^{(\mathrm{sig})}$ only exist when the cavity is detuned ($\bar{\psi}\neq 0$). In that case the working point of the cavity is on one side of the Airy peak. According to Eqs. (4) and (8), the intracavity intensity depends on the cavity length variations with a slope

$$\frac{d\bar{I}}{dX} = -2\kappa\frac{\bar{\psi}}{\gamma^2+\bar{\psi}^2}\bar{a}. \tag{18}$$

Any length variation changes the intracavity intensity and induces a variation of the radiation pressure exerted on the mirror. This variation corresponds to the forces $F_{\mathrm{rad}}^{(\mathrm{m})}$ and $F_{\mathrm{rad}}^{(\mathrm{sig})}$ that are actually proportional to the slope (18) of the Airy peak,

$$F_{\mathrm{rad}}^{(j)}[\Omega] = 2\hbar\,k\frac{\gamma^2+\bar{\psi}^2}{\Delta}\frac{d\bar{I}}{dX}X_j[\Omega], \tag{19}$$

where $j=(m,\mathrm{sig})$. The first fraction in (19) is a low-pass filter associated with the cavity storage time. The sign of the forces depends on the sign of the slope (18). Depending on the sign of $\bar{\psi}$, the force $F_{\mathrm{rad}}^{(m)}$ is either a repulsive or an attractive force, and the force $F_{\mathrm{rad}}^{(\mathrm{sig})}$ induces a mirror displacement which may either amplify or compensate the signal X_{sig}. We will see in the next section that this signal amplification by the mirror motion is at the basis of the sensitivity improvement obtained with a detuned cavity.

The force $F_{\mathrm{rad}}^{(m)}$ is proportional to the mirror displacement X_m. Its effect is to change the mechanical response of the mirror to an external force that is now given by Eq. (6) with an effective susceptibility χ_{eff} related to the free susceptibility χ by

$$\chi_{\mathrm{eff}}^{-1}[\Omega] = \chi^{-1}[\Omega] + 2\hbar\,\kappa^2\frac{\bar{\psi}}{\Delta}. \tag{20}$$

If the frequencies Ω and Ω_{M} are much smaller than the cavity bandwidth Ω_{cav}, the additional term in (20) is real. As a consequence, its effect is to change the spring constant of the mechanical motion [24], that is to shift the resonance frequency Ω_M of the oscillator [Eq. (7)], either to low or high frequencies depending on the sign of $\bar{\psi}$. If the frequencies Ω and Ω_M are of the order of Ω_{cav}, the additional term in (20) becomes complex and also changes the imaginary part of the susceptibility. If we consider a mirror with a high quality factor ($\Gamma \ll \Omega_M$), the mechanical response (20) can still be considered as Lorentzian with an effective damping Γ_{eff}, given by

$$\Gamma_{\mathrm{eff}} = \Gamma - \frac{4\hbar\,\kappa^2}{M\Omega_{\mathrm{cav}}}\frac{\gamma^2\bar{\psi}}{|\Delta|^2}, \tag{21}$$

where the denominator Δ is estimated at frequency Ω_M. The mechanical resonance is widened or narrowed depending on the sign of $\bar{\psi}$.

The coupling with the intracavity field thus changes the dynamics of the mirror, both via its spring constant and its damping. The effect is somewhat similar to the one obtained with an external feedback control. In both cases it is possible to carry out a cold damping mechanism that increases the damping without adding extra thermal fluctuations, thus leading to a reduction of the effective temperature of the mirror [21,33]. In this paper we will use these effects in another way, in order to amplify the response of the mirror to an external force. Together with the sensitivity of the mirror motion to the signal via the force $F_{\mathrm{rad}}^{(\mathrm{sig})}$, this will allow us to greatly amplify the sensitivity of the cavity to the signal.

Let us note that the modification of the dynamics can lead to an instability where the mirror enters a self-oscillating regime. The dynamic stability condition is usually given by the Ruth-Hurwitz criterion applied to the determinant of the linear relations between the field and the mirror position [14,34]. It is actually equivalent to the condition that the mirror motion has to be characterized by a positive damping in order to have a nondivergent motion,

$$\Gamma_{\mathrm{eff}} > 0. \tag{22}$$

IV. SENSITIVITY OF THE MEASUREMENT

We now determine the sensitivity of the measurement and how it is modified by the cavity detuning. We consider for simplicity that the low-pass filtering by the cavity can be neglected, that is, all frequencies of interest (Ω, Ω_M) are much smaller than Ω_{cav}. This assumption will be relaxed in Sec. VIII.

The measurement is done by monitoring the phase quadrature q^{out} of the field reflected by the cavity, as shown in Fig. 1. The linearized input-output relations for the field are deduced from Eqs. (3) and (12),

$$p^{\mathrm{out}}[\Omega] = p^{\mathrm{in}}[\Omega], \tag{23}$$

$$q^{\text{out}}[\Omega] = q^{\text{in}}[\Omega] + 2\xi(X_{\text{m}}[\Omega] + X_{\text{sig}}[\Omega]), \tag{24}$$

where the optomechanical coupling parameter ξ is given by

$$\xi = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma^2 + \bar{\psi}^2}}\kappa = 2k\frac{2\gamma}{\gamma^2 + \bar{\psi}^2}|\bar{a}^{\text{in}}|. \tag{25}$$

The working point of the cavity will be defined in the following by the two independent parameters $\bar{\psi}$ and ξ. Other parameters such as the incident and intracavity intensities can be deduced from Eqs. (8) and (25).

Equations (23) and (24) show that as long as we consider the quasistatic regime $\Omega \ll \Omega_{\text{cav}}$, the input-output relations are similar for a resonant and a detuned cavity. Due to the preservation of the photon flux in a lossless single-ended cavity, the reflected amplitude fluctuations are equal to the incident ones and only the reflected phase quadrature is sensitive to the variation $X_m + X_{\text{sig}}$ of the cavity length. This variation is superimposed to the incident phase noise q^{in}.

The mirror is submitted to the radiation pressure of the intracavity field. As shown in the previous section, the response to the forces $F_{\text{rad}}^{(\text{in})}$ and $F_{\text{rad}}^{(\text{sig})}$ [Eqs. (13) and (15)] is characterized by the effective mechanical susceptibility χ_{eff} [Eq. (20)]. In the limit $\Omega \ll \Omega_{\text{cav}}$, this susceptibility and the resulting motion are given by

$$\chi_{\text{eff}}^{-1}[\Omega] = \chi^{-1}[\Omega] + \hbar\,\xi^2\frac{\bar{\psi}}{\gamma}, \tag{26}$$

$$X_{\text{m}}[\Omega] = \chi_{\text{eff}}[\Omega]\left(\hbar\,\xi p^{\text{in}}[\Omega] - \hbar\,\xi^2\frac{\bar{\psi}}{\gamma}X_{\text{sig}}[\Omega]\right). \tag{27}$$

The mirror motion reproduces the signal X_{sig} with a dynamics characterized by the effective susceptibility χ_{eff}. Depending on the sign of $\bar{\psi}\chi_{\text{eff}}[\Omega]$, the mirror displacement is in phase or out of phase with the signal, thus leading to an amplification or a reduction of the signal in the output phase quadrature. This quadrature is obtained from Eqs. (24) and (27),

$$q^{\text{out}}[\Omega] = q^{\text{in}}[\Omega] + 2\,\hbar\,\xi^2\chi_{\text{eff}}[\Omega]p^{\text{in}}[\Omega] + 2\xi\frac{\chi_{\text{eff}}[\Omega]}{\chi[\Omega]}X_{\text{sig}}[\Omega]. \tag{28}$$

The signal X_{sig} is amplified by the coupling parameter ξ and by the dynamics of the mirror χ_{eff}/χ [last term in (28)]. The signal is superimposed to two noises proportional to the phase and amplitude incident fluctuations, respectively [first terms in (28)]. These noises are nothing but the usual phase noise and radiation pressure noise in interferometric measurements.

It is instructive to compare the cases of detuned and resonant cavities. For a resonant cavity, there is no modification of the mechanical susceptibility ($\chi_{\text{eff}} = \chi$) and the mirror motion does not depend on the signal. The output quadrature is simply obtained from Eq. (28) by replacing χ_{eff} by χ. There is no amplification of the signal and the minimum noise corresponds to the standard quantum limit which is reached when both the phase and radiation pressure noises are of the same order, that is $2\hbar\,\xi^2|\chi| \approx 1$.

For a detuned cavity, the signal is amplified by the ratio $|\chi_{\text{eff}}/\chi|$, and the radiation pressure noise is also increased by the same factor [second term in Eq. (28)]. As long as we are only concerned by the noises, the system is thus equivalent to a resonant cavity with a mirror having an effective susceptibility χ_{eff}. Due to the signal amplification, this is no longer true if we are looking at the signal to noise ratio. The sensitivity of the measurement can be increased beyond the standard quantum limit by choosing the optomechanical parameters ξ and $\bar{\psi}$ in such a way that the signal is amplified ($|\chi_{\text{eff}}| > |\chi|$), whereas the quantum noises are still at the standard quantum limit, that is $2\hbar\,\xi^2|\chi_{\text{eff}}| \approx 1$.

To derive a more precise evaluation of the sensitivity improvement, we define an estimator $\hat{X}_{\text{sig}}$ of the signal, equal to the measured quadrature q^{out} normalized as the length variation X_{sig},

$$\hat{X}_{\text{sig}}[\Omega] = \frac{1}{2\xi}\frac{\chi[\Omega]}{\chi_{\text{eff}}[\Omega]}q^{\text{out}}[\Omega]. \tag{29}$$

From Eq. (28), this estimator appears as the sum of the signal X_{sig} and two equivalent input noises proportional to the incident fluctuations q^{in} and p^{in}. The sensitivity of the measurement is limited by the spectrum $S_{\text{sig}}[\Omega]$ of these noises. For a coherent incident beam, the quantum fluctuations of the two incident quadratures p^{in} and q^{in} are two independent white noises with a unity spectrum ($S_p^{\text{in}}[\Omega] = S_q^{\text{in}}[\Omega] = 1$). The equivalent noise spectrum $S_{\text{sig}}[\Omega]$ is then given by

$$S_{\text{sig}}[\Omega] = \hbar\,|\chi[\Omega]|\left|\frac{\chi[\Omega]}{\chi_{\text{eff}}[\Omega]}\right|\frac{\zeta[\Omega] + 1/\zeta[\Omega]}{2}, \tag{30}$$

where the dimensionless parameter ζ is defined as

$$\zeta[\Omega] = 2\,\hbar\,\xi^2|\chi_{\text{eff}}[\Omega]|. \tag{31}$$

The last fraction in Eq. (30) is always greater than 1 and reaches its minimum for $\zeta[\Omega] = 1$. In that case, the phase and radiation pressure noises are equal and their sum is minimum. For a resonant cavity, this corresponds to the standard quantum limit which is reached at a given frequency Ω for the following value $\xi_{\text{SQL}}[\Omega]$ of the optomechanical parameter, and corresponds to a minimum noise level $S_{\text{sig}}^{\text{SQL}}[\Omega]$, given by

$$\xi_{\text{SQL}}[\Omega] = \frac{1}{\sqrt{2\,\hbar\,|\chi[\Omega]|}}, \tag{32}$$

$$S_{\text{sig}}^{\text{SQL}}[\Omega] = \hbar\,|\chi[\Omega]|. \tag{33}$$

It is clear from Eq. (30) that the standard quantum limit is not a fundamental limit. It is possible to go beyond this limit with a detuned cavity, by choosing the optomechanical parameters so that $\zeta[\Omega] \simeq 1$ and $|\chi_{\text{eff}}[\Omega]| > |\chi[\Omega]|$. The sensitivity is then increased by the amplification factor $|\chi_{\text{eff}}[\Omega]/\chi[\Omega]|$ given by [see Eq. (26)]

$$|\chi_{\rm eff}[\Omega]/\chi[\Omega]| = \left| 1 + \hbar\, \xi^2 \frac{\bar{\psi}}{\gamma} \chi[\Omega] \right|^{-1}. \tag{34}$$

Note that the term inside the absolute value, taken at frequency $\Omega=0$, exactly corresponds to the stability condition of the bistable behavior [Eq. (11)]. This term is strictly positive in the stable domain, thus preventing the amplification factor to diverge. We study in the next sections the sensitivity improvement in two particular cases of experimental interest, corresponding to a frequency Ω either below or beyond the mechanical resonance frequency Ω_M.

V. SENSITIVITY IMPROVEMENT AT LOW FREQUENCY

We first consider the sensitivity improvement at a frequency lower than the mechanical resonance frequency. This situation is of interest for the displacement measurements made with small and compact high-finesse cavities, where the radiation pressure effects are mainly due to the excitation of high-frequency internal acoustic modes of the mirrors [31,35]. The susceptibility $\chi[\Omega]$ at frequency well below the mechanical resonance can be approximated as a real and positive expression [Eq. (7)],

$$\chi[\Omega \ll \Omega_M] \simeq \chi[0] = \frac{1}{M\Omega_M^2}. \tag{35}$$

According to Eq. (34), $\bar{\psi}$ has then to be negative in order to obtain an amplification factor $|\chi_{\rm eff}/\chi|$ larger than 1. For any arbitrary negative value of the detuning $\bar{\psi}$, the condition $\zeta[0]=1$ is reached for the value of the optomechanical parameter given by

$$\xi^2 = \frac{\xi^2_{\rm SQL}[0]}{1 - \bar{\psi}/2\gamma}, \tag{36}$$

and the corresponding noise spectrum is equal to

$$\frac{S_{\rm sig}[0]}{S^{\rm SQL}_{\rm sig}[0]} = \frac{1}{|\chi_{\rm eff}[0]/\chi[0]|} = \frac{1}{1 - \bar{\psi}/2\gamma}. \tag{37}$$

It is then possible to arbitrarily reduce the equivalent input noise and to increase the sensitivity by choosing a large negative detuning. Note that although the optomechanical parameter ξ given by Eq. (36) decreases as the noise spectrum, it corresponds to a larger incident intensity [see Eq. (25)]. Increasing the sensitivity thus requires a larger input power.

Figure 2 shows the equivalent input noise $S_{\rm sig}[0]$ as a function of the optomechanical parameter ξ, for different values of the detuning $\bar{\psi}$. Curve *a* is obtained at resonance ($\bar{\psi}=0$). The noise reaches the standard quantum limit for $\xi=\xi_{\rm SQL}$ and is larger than this limit elsewhere. Since ξ^2 is proportional to the incident intensity [Eq. (25)], the additional noise for $\xi<\xi_{\rm SQL}$ corresponds to the phase noise that is dominant at low intensity, whereas the additional noise for $\xi>\xi_{\rm SQL}$ corresponds to the radiation pressure noise, dominant at high intensity. The behavior is similar for a detuned cavity (curves *b* to *d*), with a minimum noise reached at

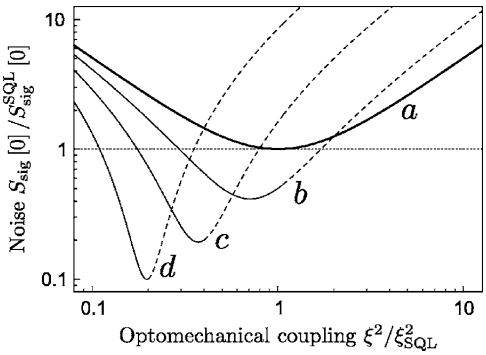


FIG. 2. Equivalent input noise $S_{\rm sig}$ at low frequency as a function of the optomechanical parameter ξ^2, normalized to the SQL values $\xi^2_{\rm SQL}$ and $S^{\rm SQL}_{\rm sig}$. Curves *a* to *d* are plotted for a normalized detuning $\bar{\psi}/\gamma$ equal to 0, −2, −5, and −10, respectively. Dashed lines correspond to the unstable domain.

decreasing values of ξ as the detuning increases. The minimum noise is actually better than the one given by Eq. (37). A more accurate optimization of the noise spectrum (30) leads to

$$\xi^2_{\rm min} = \frac{\xi^2_{\rm SQL}[0]}{\sqrt{1 + (\bar{\psi}/2\gamma)^2}}, \tag{38}$$

$$\frac{S^{\rm min}_{\rm sig}[0]}{S^{\rm SQL}_{\rm sig}[0]} = \sqrt{1 + (\bar{\psi}/2\gamma)^2} + \bar{\psi}/2\gamma, \tag{39}$$

which tends to $\gamma/|\bar{\psi}|$ for large detunings. As an example, the curve *d* corresponding to a detuning $\bar{\psi}=-10\gamma$ exhibits a noise reduction by a factor 10. Finally, note that as the amplification by the mirror increases with the detuning, the optimum working point becomes nearer and nearer to the unstable domain shown as dashed curves in Fig. 2. It, however, always stays in the stable domain of the bistable behavior given by Eq. (11).

VI. SENSITIVITY IMPROVEMENT AT HIGH FREQUENCY

We now study the sensitivity improvement at frequency larger than the mechanical resonance frequency. This situation corresponds, for example, to gravitational-wave interferometers, where the main motion of the mirror is due to the pendular suspension, which has very low resonance frequencies [1,2]. In this case, the susceptibility $\chi[\Omega]$ can be approximated as a real but negative expression [Eq. (7)],

$$\chi[\Omega \gg \Omega_M] \simeq -\frac{1}{M\Omega^2}, \tag{40}$$

so that the amplification factor $|\chi_{\rm eff}/\chi|$ is now larger than 1 for a positive detuning $\bar{\psi}$. Since the susceptibility is frequency dependent, the condition $\zeta[\Omega]=1$ can be satisfied at only one frequency. As a consequence, for a resonant cavity

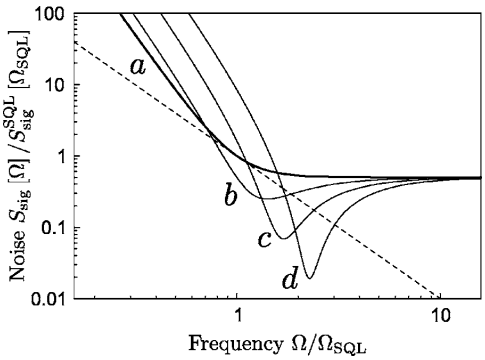


FIG. 3. Equivalent input noise $S_{\rm sig}[\Omega]$ at high frequency as a function of frequency Ω, normalized to the SQL values $\Omega_{\rm SQL}$ and $S_{\rm sig}^{\rm SQL}[\Omega_{\rm SQL}]$. Curves *a*–*d* are plotted for the same optomechanical parameter ξ and for increasing normalized detunings $\bar{\psi}/\gamma$, equal to 0, 2, 5, and 10, respectively. The dashed line corresponds to the standard quantum limit.

($\bar{\psi}=0$) and for a fixed optomechanical parameter ξ, the standard quantum limit is reached at a single frequency $\Omega_{\rm SQL}$ given by Eq. (31),

$$M\Omega_{\rm SQL}^2 = |\chi[\Omega_{\rm SQL}]|^{-1} = 2\hbar\,\xi^2. \tag{41}$$

Curve *a* of Fig. 3 shows the resulting noise spectrum at resonance, which reaches the standard quantum limit (dashed line) at frequency $\Omega_{\rm SQL}$. The radiation pressure noise is dominant at lower frequency with a $1/\Omega^4$ dependence, whereas the constant phase noise limits the sensitivity at higher frequency.

Curves *b*–*d* show the noise obtained for a detuned cavity with the same optomechanical parameter ξ. Although these curves exhibit a larger noise at low frequency than in the resonant case, one gets a significant noise reduction below the standard quantum limit in the intermediate frequency domain. The noise reduction becomes larger and larger as the detuning increases. An optimization of the noise spectrum (30) for a given detuning $\bar{\psi}$ and optomechanical parameter ξ leads to the optimal frequency $\Omega_{\rm min}$ and noise spectrum $S_{\rm sig}^{\rm min}$,

$$\Omega_{\rm min}^2 = \Omega_{\rm SQL}^2\sqrt{1+(\bar{\psi}/2\gamma)^2}, \tag{42}$$

$$\frac{S_{\rm sig}^{\rm min}[\Omega_{\rm min}]}{S_{\rm sig}^{\rm SQL}[\Omega_{\rm min}]} = \sqrt{1+(\bar{\psi}/2\gamma)^2} - \bar{\psi}/2\gamma. \tag{43}$$

The noise spectrum has an expression similar to Eq. (39) obtained at low frequency, except for the sign of the detuning $\bar{\psi}$. As previously, the noise ratio (43) tends to $\gamma/\bar{\psi}$ for large detunings and one gets a noise reduction by a factor 10 for a detuning $\bar{\psi}=10\gamma$.

VII. ULTIMATE QUANTUM LIMIT

The results of the previous sections seem to indicate that an arbitrarily large sensitivity improvement can be obtained both in the low and high frequency regimes since the equivalent input noise evolves in both cases as $\gamma/\bar{\psi}$ for large detunings. This actually is a consequence of the approximation made on the mechanical susceptibility, which was assumed to have no imaginary part. It is possible to derive the optimal sensitivity improvement at a given frequency Ω without any assumption on the mechanical susceptibility $\chi[\Omega]$. An optimization of the noise spectrum (30) with respect to the optomechanical parameter ξ leads to

$$\xi_{\rm min}^2 = \frac{\xi_{\rm SQL}^2[\Omega]}{\sqrt{1+(\bar{\psi}/2\gamma)^2}}, \tag{44}$$

$$\frac{S_{\rm sig}^{\rm min}[\Omega]}{S_{\rm sig}^{\rm SQL}[\Omega]} = \sqrt{1+(\bar{\psi}/2\gamma)^2} + \frac{\bar{\psi}}{2\gamma}\frac{{\rm Re}(\chi[\Omega])}{|\chi[\Omega]|}, \tag{45}$$

where $\xi_{\rm SQL}[\Omega]$ is the optomechanical parameter for which the standard quantum limit is reached at frequency Ω for a resonant cavity [Eq. (32)]. As compared to Eqs. (38) and (39) obtained at low frequency and for a real mechanical susceptibility, the only difference is the last term in Eq. (45), which has a smaller amplitude when the susceptibility has a nonzero imaginary part. As a consequence, the equivalent input noise no longer decreases as $\gamma/\bar{\psi}$ for very large detunings, and it reaches a nonzero minimum value at a finite detuning, given by

$$\bar{\psi}_{\rm min}/2\gamma = -\frac{{\rm Re}(\chi[\Omega])}{|{\rm Im}(\chi[\Omega])|}, \tag{46}$$

$$S_{\rm sig}^{\rm min}[\Omega] = \hbar\,|{\rm Im}(\chi[\Omega])|. \tag{47}$$

One then gets a limit to the sensitivity improvement which is only related to the dissipation mechanism of the mechanical motion, via the imaginary part of the susceptibility. This is nothing but the ultimate quantum limit already predicted in the case of interferometric measurements with squeezed-state injection [5]. The same ultimate limit is thus reached by cavity detuning.

VIII. CAVITY WITH A FINITE BANDWIDTH

We finally study the effect of a finite cavity bandwidth $\Omega_{\rm cav}=\gamma/\tau$. The optical equations in the case of a detuned cavity with a finite bandwidth are much more complex than the ones given in the previous sections. As an example, the input-output relation for the phase quadrature is derived from Eqs. (12), (16), and (17),

$$\begin{aligned} q^{\rm out}[\Omega] &= 2\xi\frac{\gamma^2+\bar{\psi}^2-i\gamma\Omega\tau}{\Delta}(X_{\rm m}[\Omega]+X_{\rm sig}[\Omega]) \\ &+ \frac{1}{\Delta}\left(\gamma^2+\bar{\psi}^2+\Omega^2\tau^2\frac{\gamma^2-\bar{\psi}^2}{\gamma^2+\bar{\psi}^2}\right)q^{\rm in}[\Omega] \\ &- \frac{2}{\Delta}\Omega^2\tau^2\frac{\gamma\bar{\psi}}{\gamma^2+\bar{\psi}^2}p^{\rm in}[\Omega], \end{aligned} \tag{48}$$

and can be compared to the simpler relation (24) obtained in the case of an infinite cavity bandwidth. We have computed the equivalent input noise $S_{\rm sig}$ from the previous input-output relation and from Eqs. (13)–(15), by using the formal language MATHEMATICA. Figure 4 shows the resulting noise obtained at high frequency, that is, for a mechanical susceptibility approximated by the real and negative expression (40). All curves are plotted for the same optomechanical parameter ξ and, except for curve *f*, with a cavity bandwidth $\Omega_{\rm cav}$ equal to $2\Omega_{\rm SQL}$, where $\Omega_{\rm SQL}$ is related to ξ by Eq. (41).

Curve *a* of Fig. 4 shows the equivalent input noise at resonance ($\bar{\psi}=0$). As compared to a cavity with an infinite bandwidth (curve *a* of Fig. 3), the noise is no longer constant at high frequency but increases with the frequency. This is a consequence of the low-pass filtering of the signal by the cavity for frequencies larger than the cavity bandwidth. Curves *b*–*d* show the equivalent noise spectrum obtained for positive and increasing detunings. One clearly observes two resonant dips with a structure very similar to the one already predicted for signal-recycled gravitational-wave interferometers [12]. These two resonances become deeper and more separated as the detuning increases.

The dip at the lowest frequency is very similar to the one obtained for an infinite cavity bandwidth, as well in frequency, width, and noise reduction (compare curves *b* to *d* of Figs. 3 and 4). In both cases, the dip can be associated with the resonance of the amplification factor $|\chi_{\rm eff}/\chi|$. From Eq. (20), one indeed finds that the effective susceptibility $\chi_{\rm eff}$ has a Lorentzian shape with a resonance frequency Ω_- very close to the dip position $\Omega_{\rm min}$ [Eq. (42)] and given for a large detuning by

$$\Omega_- \simeq \Omega_{\rm SQL}\sqrt{\frac{\bar{\psi}}{2\gamma}}. \tag{49}$$

Taking a finite cavity bandwidth thus changes the width of the effective mechanical resonance, as already discussed in Sec. III [see Eq. (21)], but it has no apparent effect on the sensitivity improvement around the resonance frequency Ω_-.

The second dip only exists for a finite cavity bandwidth and is a consequence of the optical dynamics in the cavity. Its frequency actually corresponds to the resonance frequency Ω_+ of the term $1/\Delta$ that appears both in the input-output relation (48) and in the radiation pressure forces (13)–(15),

$$\Omega_+ = \Omega_{\rm cav}\sqrt{1+\frac{\bar{\psi}^2}{\gamma^2}}. \tag{50}$$

In contrast to the first dip for which the signal amplification is only obtained with a positive detuning, the second dip exists both for positive and negative detunings. This is clearly visible in Fig. 4, where curves *d* and *e* are plotted for the same parameters, but for reverse detunings. Note, however, that the stability conditions are very different in the two situations. In particular, the dynamic stability condition (22) is always satisfied for a negative detuning whereas it is very restrictive for a positive detuning. Curves *b* to *d* of Fig. 4 are actually unstable for a reasonably not too large mechanical damping Γ.

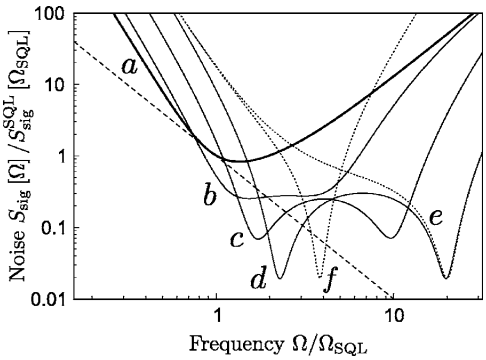


FIG. 4. Equivalent input noise $S_{\rm sig}[\Omega]$ at high frequency as a function of frequency Ω, normalized to the SQL values $\Omega_{\rm SQL}$ and $S_{\rm sig}^{\rm SQL}[\Omega_{\rm SQL}]$. All curves are plotted for the same optomechanical parameter ξ, and for the same finite cavity bandwidth $\Omega_{\rm cav}=2\Omega_{\rm SQL}$, except curve *f*, for which $\Omega_{\rm cav}=\Omega_{\rm SQL}/3$. Curves *a* to *d* correspond to positive normalized detunings $\bar{\psi}/\gamma$ equal to 0, 2, 5, and 10, respectively. Curves *e* and *f* are obtained for a negative normalized detuning of −10. The dashed line is the standard quantum limit.

The sensitivity improvement at the resonance frequencies $\Omega_\pm$ can be computed from the analytic expression given by MATHEMATICA. One gets for a large detuning $\bar{\psi}$,

$$\frac{S_{\rm sig}[\Omega_\pm]}{S_{\rm sig}^{\rm SQL}[\Omega_{\rm SQL}]} \simeq \frac{2\gamma^2}{\bar{\psi}^2}. \tag{51}$$

The two dips have thus the same depth, as it can be observed in Fig. 4. In this expression, the noise is normalized to the standard quantum limit at frequency $\Omega_{\rm SQL}$. It is also of interest to compute the noise reduction below the standard quantum limit, that is the ratio between the noise at frequency $\Omega_\pm$ and the standard quantum limit (33) at the same frequency,

$$\frac{S_{\rm sig}[\Omega_\pm]}{S_{\rm sig}^{\rm SQL}[\Omega_\pm]} \simeq \frac{2\gamma^2}{\bar{\psi}^2}\left(\frac{\Omega_\pm}{\Omega_{\rm SQL}}\right)^2. \tag{52}$$

From Eq. (49), the ratio tends to $\gamma/\bar{\psi}$ at the resonance frequency Ω_- of the first dip. This result is identical to the one obtained in Sec. VI for an infinite cavity bandwidth. At the resonance frequency Ω_+ of the second dip [Eq. (50)], the noise ratio (52) is equal to $2(\Omega_{\rm cav}/\Omega_{\rm SQL})^2$. The noise is then reduced below the standard quantum limit only if the cavity bandwidth is small enough, as shown by curves *e* and *f* in Fig. 4 obtained for $\Omega_{\rm cav}=2\Omega_{\rm SQL}$ and $\Omega_{\rm cav}=\Omega_{\rm SQL}/3$, respectively.

Finally, note that Eq. (51) seems to indicate that an arbitrarily small equivalent input noise can be reached by increasing the detuning. As for an infinite cavity bandwidth (Sec. VII), it can be shown that the noise is always larger

than the ultimate quantum limit (47), which can be reached at every frequency Ω by an appropriate choice of the parameters ξ, $\bar{\psi}$, and $\Omega_{\rm cav}$.

IX. CONCLUSION

We have studied the quantum limits of an optomechanical sensor based on a detuned high-finesse cavity with a movable mirror. We have shown that the sensitivity to a variation of the cavity length can be improved beyond the standard quantum limit, up to the ultimate quantum limit, which only depends on the dissipation mechanisms of the mirror motion. This improvement is due to an amplification of the signal by the mirror displacements. The coupling between the mirror motion and the intracavity light field actually changes the dynamics of the mirror, both via its spring constant and its damping. But the mirror motion also becomes sensitive to the signal and can amplify the effect of the signal on the intracavity field. For a finite cavity bandwidth, one gets a sensitivity improvement very similar to the one predicted in signal-recycled gravitational-wave interferometers, with two dips in the equivalent input noise that are related to the effective mechanical resonance of the mirror and to the optical dynamics in the cavity. A high-finesse cavity with a movable mirror thus appears as a model system to test quantum effects in large-scale interferometers.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Jean-Michel Courty and Julien Le Bars for fruitful discussions. This work was partially funded by EGO (collaboration convention EGO-DIR-150/2003 for a study of quantum noises in gravitational waves interferometers).

[1] C. Bradaschia *et al.*, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A **289**, 518 (1990).
[2] A. Abramovici *et al.*, Science **256**, 325 (1992).
[3] P. Fritschel, Proc. SPIE **4856**, 282 (2002).
[4] C. M. Caves, Phys. Rev. D **23**, 1693 (1981).
[5] M. T. Jaekel and S. Reynaud, Europhys. Lett. **13**, 301 (1990).
[6] V. B. Braginsky and F. Ya Khalili, *Quantum Measurement* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
[7] M. Xiao, L. A. Wu, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **59**, 278 (1987).
[8] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yurke, and A. LaPorta, Phys. Rev. Lett. **59**, 2153 (1987).
[9] K. McKenzie, D. A. Shaddock, D. E. McClelland, B. C. Buchler, and P. K. Lam, Phys. Rev. Lett. **88**, 231102 (2002).
[10] H. J. Kimble, Y. Levin, A. B. Matsko, K. S. Thorne, and S. P. Vyatchanin, Phys. Rev. D **65**, 022002 (2002).
[11] J. M. Courty, A. Heidmann, and M. Pinard, Phys. Rev. Lett. **90**, 083601 (2003).
[12] A. Buonanno and Y. Chen, Phys. Rev. D **64**, 042006 (2001).
[13] J. Harms, Y. Chen, S. Chelkowski, A. Franzen, H. Vahlbruch, K. Danzmann, and R. Schnabel, Phys. Rev. D **68**, 042001 (2003).
[14] C. Fabre, M. Pinard, S. Bourzeix, A. Heidmann, E. Giacobino, and S. Reynaud, Phys. Rev. A **49**, 1337 (1994).
[15] S. Mancini and P. Tombesi, Phys. Rev. A **49**, 4055 (1994).
[16] S. Bose, K. Jacobs, and P. L. Knight, Phys. Rev. A **59**, 3204 (1999).
[17] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali, and P. Tombesi, Phys. Rev. Lett. **88**, 120401 (2002).
[18] M. Pinard, A. Dantan, D. Vitali, O. Arcizet, T. Briant, and A. Heidmann, Europhys. Lett. **72**, 747 (2005).
[19] A. Heidmann, Y. Hadjar, and M. Pinard, Appl. Phys. B **64**, 173 (1997).
[20] Y. Hadjar, P. F. Cohadon, C. G. Aminoff, M. Pinard, and A. Heidmann, Europhys. Lett. **47**, 545 (1999).
[21] P. F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard, Phys. Rev. Lett. **83**, 3174 (1999).
[22] I. Tittonen, G. Breitenbach, T. Kalkbrenner, T. Müller, R. Conradt, S. Schiller, E. Steinsland, N. Blanc, and N. F. de Rooij, Phys. Rev. A **59**, 1038 (1999).
[23] A. Buonanno and Y. Chen, Phys. Rev. D **65**, 042001 (2002).
[24] V. B. Braginsky and F. Ya. Khalili, Phys. Lett. A **257**, 241 (1999).
[25] V. B. Braginsky, F. Ya. Khalili, and P. S. Volikov, Phys. Lett. A **287**, 31 (2001).
[26] B. S. Sheard, M. B. Gray, C. M. Mow-Lowry, D. E. McClelland, and S. E. Whitcomb, Phys. Rev. A **69**, 051801(R) (2004).
[27] V. B. Braginsky and S. P. Vyatchanin, Phys. Lett. A **293**, 228 (2002).
[28] S. W. Schediwy, C. Zhao, L. Ju, and D. G. Blair, Class. Quantum Grav. **21**, S1253 (2004).
[29] L. Landau and E. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics: Statistical Physics* (Pergamon, New York, 1958), Chap. 12.
[30] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre, E. Vignes, and H. Walther, Phys. Rev. Lett. **51**, 1550 (1983).
[31] M. Pinard, P. F. Cohadon, T. Briant, and A. Heidmann, Phys. Rev. A **63**, 013808 (2000).
[32] J. M. Courty, A. Heidmann, and M. Pinard, Eur. Phys. J. D **17**, 399 (2001).
[33] C. H. Metzger and K. Karrai, Nature **432**, 1002 (2004).
[34] H. Haken, in *Encyclopedia of Physics XXV/2c*, edited by S. Flugge (Springer-Verlag, Heidelberg, 1970).
[35] T. Briant, P. F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard, Phys. Rev. A **68**, 033823 (2003).

Chapitre 7

Etude de l'effet photothermique

J'ai profité d'une collaboration dans le cadre du réseau européen ILIAS (Integrated Large Infrastructures for Astroparticle Science [33]) pour effectuer deux séjours fin 2004 et début 2005 au LENS à Florence, au cours desquels j'ai travaillé sur l'effet photothermique dans l'équipe de Francesco Marin et Maurizio De Rosa. L'effet photothermique correspond à la dilatation du miroir induite par l'absorption de lumière dans les couches diélectriques qui forment le miroir. Ce mécanisme transforme les fluctuations de l'intensité du champ électromagnétique absorbé en fluctuations de longueur et est donc responsable d'un bruit à prendre en compte dans l'étude de la sensibilité des mesures interférométriques. En particulier, du fait de la réduction du bruit thermique attendue dans les futures générations d'antennes gravitationnelles, les bruits thermoélastiques deviendront dominants, qu'il s'agisse des effets liés aux fluctuations intrinsèques de température dans le miroir, ou du bruit photothermique induit par l'absorption de la lumière. La compréhension de ces effets revêt une grande importance, notamment pour le choix des matériaux qui constitueront les miroirs de ces détecteurs. Le bruit photothermique n'a encore jamais été observé directement, mais l'équipe de Florence a mis en évidence expérimentalement les dilatations résultant de l'absorption d'un faisceau modulé en intensité. Ils ont ainsi étudié sa dépendance avec la fréquence de modulation [31], en mesurant un effet différentiel entre deux cavités absorbant des puissances lumineuses différentes.

J'ai participé à une étude plus approfondie de cet effet menée à partir de cette expérience. Plusieurs améliorations ont permis d'une part d'étendre la plage de fréquence sur laquelle l'effet est étudié, et d'autre part d'améliorer la précision de la mesure : une première modification a consisté à ne moduler en intensité qu'une seule des deux cavités, en utilisant l'autre comme référence de longueur ; la seconde a consisté à utiliser un modulateur acousto-optique pour contrôler la fréquence du laser. Ceci a permis de mesurer l'effet sur une plage de fréquence allant de 300 μHz jusqu'à 8 kHz. Au cours de mon premier séjour, j'ai pu participer à la fin de l'installation des nouveaux éléments et à la première série de mesure. Lors de ma seconde visite nous avons travaillé sur le modèle théorique et tenté de mesurer l'effet sur une cavité plus courte de façon à étudier la dépendance de l'effet avec la taille du faisceau laser. Nous avons cependant été gêné par la grande inertie thermique de la cavité : il a fallu attendre plus d'un mois sa stabilisation thermique ! Nous avons pu mettre en évidence des effets intéressants aussi bien à très basse fréquence où des effets liés à la taille finie du miroir apparaissent, qu'à haute fréquence où nous avons identifié l'effet photothermique lié aux couches diélectriques elles-mêmes.

Après une présentation rapide des effets photothermiques, on décrit dans ce chapitre, la nouvelle expérience et les résultats obtenus. On présente ensuite un modèle simple qui permet de rendre compte de la déviation observée à cause de la taille finie du miroir. Enfin, on décrit la contribution des couches diélectriques à l'effet photothermique observé.

7.1 Les effets photothermiques

On a vu que la qualité du miroir revêt une très grande importance lorsqu'on utilise une cavité Fabry-Perot pour effectuer une mesure optique de petits déplacements. L'existence de pertes optiques par absorption se traduit d'abord par une dégradation de la sensibilité, mais aussi par l'existence de mécanismes photothermiques : la lumière absorbée dans les couches diélectriques crée un échauffement local du miroir et la dilatation résultante induit une déformation de la surface du miroir, et donc une modification de la longueur de la cavité optique.

Ce phénomène est responsable d'une déformation qui est proportionnelle à l'intensité lumineuse incidente, tout comme dans le cas de la pression de radiation. Cependant, il joue en sens inverse par rapport à cette dernière : l'absorption induit une dilatation du miroir qui réduit la longueur de la cavité, tandis que la pression de radiation pousse le miroir et augmente le chemin optique tant qu'on reste à basse fréquence par rapport à ses fréquences de résonance. Il est également responsable de l'apparition de bistabilité, mais là encore avec un comportement en sens inverse par rapport à la pression de radiation vis-à-vis du sens de balayage de la fréquence du laser. Les deux effets possédant des temps de réponse caractéristiques très différents, leur combinaison peut induire une dynamique complexe du système [121].

En plus de ces aspects d'instabilité dynamique, le mécanisme photothermique induit un bruit supplémentaire dans les mesures optiques. Comme tout effet thermique, il joue un rôle essentiellement à basse fréquence et on présente dans cette partie un modèle simple permettant de comprendre sont origine et sa dépendance en fréquence.

Dépendance en fréquence

On considère un faisceau laser incident sur un miroir (voir la figure 7.1), modulé en intensité à une pulsation Ω. Une fraction A de la puissance lumineuse incidente P est absorbée et va créer dans le milieu une onde thermique oscillant à la même fréquence que la modulation. La propagation de la chaleur en l'absence de convection et de rayonnement étant uniquement assurée par la diffusion [119], l'onde thermique s'atténue sur une distance typique correspondant à la longueur d'onde thermique l_{T}, qui est reliée au coefficient de diffusion D de la chaleur dans le milieu par l'expression

$$l_{\mathrm{T}} = \sqrt{D/\Omega}, \tag{7.1}$$

où le coefficient de diffusion $D = \kappa/\rho C$ dépend de la conductivité thermique κ du matériau, de sa masse volumique ρ, et de sa capacité thermique massique C. Plus le matériau est bon conducteur de chaleur, plus l'onde thermique peut se propager sur une grande distance ; de même plus le matériau possède une inertie thermique importante et moins l'onde thermique ne s'étale. La taille caractéristique l_{T} de l'onde thermique est à comparer à celle du faisceau laser. Lorsqu'elle est beaucoup plus grande que ce dernier, c'est-à-dire à basse fréquence, la zone chauffée correspond à une demi-sphère dont le rayon est indépendant de la taille du

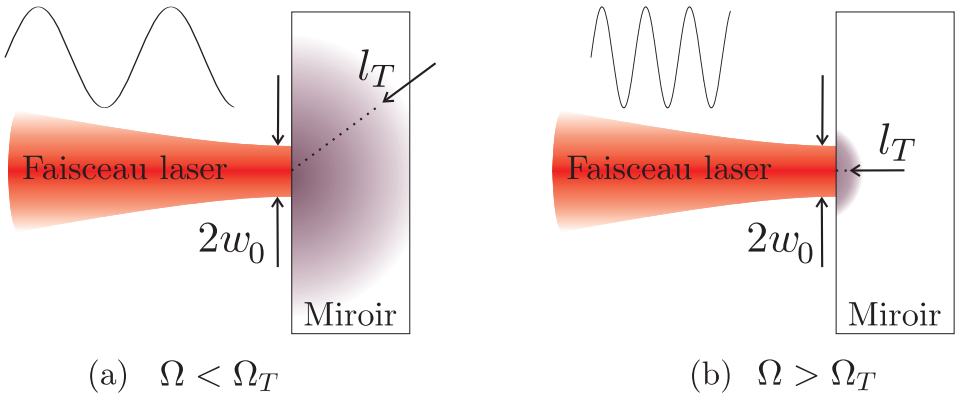


FIG. 7.1 – Les deux régimes de l'effet photothermique, selon que la longueur d'onde thermique l_T est plus grande (régime a à basse fréquence) ou plus petite (régime b à haute fréquence) que le col w_0 du faisceau.

col du faisceau (cas a sur la figure 7.1). Au contraire, lorsque la fréquence de modulation est élevée, la zone qui subit l'augmentation de température possède une forme cylindrique, avec un rayon de l'ordre de w_0 et une hauteur l_T (cas b). Il apparaît ainsi une fréquence de coupure, notée Ω_T, qui sépare les deux régimes et dont l'expression est donnée par [35] :

$$\Omega_\mathrm{T} = \frac{\kappa}{\rho C w_0^2/2} \tag{7.2}$$

Pour un miroir en silice ($C = 670\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$, $\rho = 2200\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ et $\kappa = 1.4\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$) et un faisceau de mesure possédant un col de $100\,\mu$m, on obtient une fréquence de coupure de 30 Hz.

Evaluons maintenant l'amplitude des déplacements attendus. L'énergie AP/Ω absorbée pendant une oscillation de l'intensité élève la température du volume V sur lequel se propage l'onde thermique (assombri sur la figure 7.1) d'une quantité ΔT donnée par

$$\rho C V \Delta T = \frac{AP}{\Omega}. \tag{7.3}$$

Cette élévation de température entraîne une dilatation δX mesurée dans la direction du faisceau laser, intégrée sur la longueur l_T de la zone chauffée, qu'on peut écrire :

$$\delta X = \alpha\, l_\mathrm{T} \Delta T, \tag{7.4}$$

où on a introduit le coefficient d'expansion thermique α du matériau dont est fait le substrat du miroir.

Considérons d'abord le régime basse fréquence, $\Omega \ll \Omega_\mathrm{T}$. Dans ce cas le volume de la zone qui a le temps de s'échauffer est donné par $V \sim l_\mathrm{T}^3$ et on obtient en utilisant les équations (7.1) à (7.4), l'expression suivante pour la déformation :

$$\delta X_\mathrm{BF} \simeq \alpha \frac{AP}{\kappa}. \tag{7.5}$$

L'expression étant indépendante de la fréquence, on s'attend donc à observer un palier à basses fréquences. Pour une puissance incidente de 100 W sur le miroir, un coefficient d'absorption

de 1 ppm et un coefficient de dilatation $\alpha = 5.5 \times 10^{-7}\,\mathrm{K}^{-1}$ correspondant à la silice fondue, on obtient une amplitude d'oscillation de la surface du miroir de $\delta X_{BF} \simeq 2 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$. Avec une telle amplitude, on peut facilement observer de la bistabilité photothermique dans une cavité de grande finesse. En effet ce déplacement est à comparer à la largeur $\lambda/2\mathcal{F}$ du pic d'Airy qui est de $10^{-11}\,\mathrm{m}$ pour une finesse de 50 000.

Dans le cas opposé des fréquences élevées par rapport à la fréquence de coupure thermique, $\Omega \gg \Omega_{\mathrm{T}}$, le volume échauffé n'est que de l'ordre de $V \sim w_0^2 l_{\mathrm{T}}$, et l'amplitude de la dilatation de la surface du miroir de la cavité s'écrit :

$$\delta X_{\mathrm{HF}} \simeq \delta X_{\mathrm{BF}} \frac{\Omega_{\mathrm{T}}}{\Omega}. \tag{7.6}$$

Ainsi ce modèle nous indique que l'amplitude de la réponse à la modulation d'intensité se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure Ω_{T}

Un modèle plus élaboré [35, 118] sur lequel nous reviendrons plus loin, relie le déplacement mesuré à la puissance absorbée quelque soit la fréquence :

$$\delta X[\Omega] = \alpha \frac{1+\sigma}{\pi} \frac{AP[\Omega]}{\kappa} K[\Omega/\Omega_{\mathrm{T}}] \tag{7.7}$$

où σ est le coefficient de Poisson du substrat et la fonction sans dimension $K[x]$ représente la réponse en fréquence de l'effet photothermique :

$$K[x] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \, \frac{u^2 e^{-u^2/2}}{(u^2+v^2)(u^2+v^2-ix)}. \tag{7.8}$$

Notons que la fonction $K[x]$ se comporte en $1/x$ pour des valeurs suffisamment grandes devant 1 : pour des fréquences de modulation grandes devant la fréquence de coupure, les deux modèles donnent le même résultat. Par contre à basse fréquence, le modèle plus complet donne une décroissance logarithmique du déplacement avec la fréquence alors que le modèle simple prédit un palier. La première expérience menée à Florence [31] a permis de valider ce modèle, cependant la précision expérimentale n'a pas permis d'observer de réelles déviations par rapport aux prédictions.

Le bruit photothermique

Une modulation de l'intensité lumineuse absorbée induit donc une oscillation de la longueur de la cavité. Par le même mécanisme, les fluctuations de l'intensité absorbée vont être responsables d'un bruit de position dont l'expression est donnée par

$$S_x^{\mathrm{abs}}[\Omega] = \left| \alpha \frac{1+\sigma}{\pi\kappa} K[\Omega/\Omega_{\mathrm{T}}] \right|^2 (h\nu)^2 \, S_I^{\mathrm{abs}}[\Omega] \tag{7.9}$$

où $S_I^{\mathrm{abs}}[\Omega]$ est le spectre de bruit de l'intensité absorbée exprimée en flux de photon. Pour un faisceau incident sur la cavité dans un état cohérent, la statistique des photons absorbés correspond à une statistique Poissonienne et le spectre des fluctuations de l'intensité absorbée est reliée à l'intensité moyenne absorbée $\bar{I}_{\mathrm{abs}} = A\bar{I}$ par :

$$S_I^{\mathrm{abs}}[\Omega] = \bar{I}_{\mathrm{abs}} \tag{7.10}$$

Pour un interféromètre gravitationnel semblable à VIRGO, avec une finesse de l'ordre de 100, une puissance incidente de 10 watts sur un col de 2 cm et un coefficient d'absorption d'environ 1 ppm, on obtient un bruit photothermique de $3 \times 10^{-19}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à basse fréquence [75]. Les améliorations des futures générations de détecteur sont déjà à l'étude. Il est en particulier envisagé de changer les substrats en silice des miroirs par du saphir qui présente l'avantage d'avoir des facteurs de qualité mécanique plus élevés, donc de réduire le bruit thermique des miroirs en dehors des résonances. Le saphir présente toutefois un bruit photothermique plus important à température ambiante et il faudra utiliser des plus gros faisceaux dans le but de réduire la fréquence de coupure.

7.2 L'expérience à Florence

La mesure des effets photothermiques nécéssite une expérience présentant une grande sensibilité à basse fréquence. De nombreux bruits sont limitants à basse fréquence, comme le bruit de fréquence, de l'ordre de $100\,\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à 100 Hz, et les bruits sismiques. L'expérience développée à Florence a été conçue pour présenter une grande sensibilité à basse fréquence dans le but de fournir une détection optique pour la barre de Weber AURIGA [120] qui fonctionne autour du kHz. Pour exacerber l'effet photothermique et le différencier des autres sources de bruit qui ne dépendent pas de l'intensité lumineuse, la puissance incidente sur la cavité de mesure est modulée et on détecte les variations de la longueur de la cavité en réponse à cette modulation. D'après les équations (7.7) et (7.9), on obtient de cette manière l'amplitude de la fonction $|K[\Omega/\Omega_{\mathrm{T}}]|$ qui caractérise aussi bien la réponse à la modulation que le bruit photothermique. Mais on a aussi accès au retard entre la modulation d'intensité et la dilatation résultante, c'est-à-dire à la phase de la fonction K, qui est une source d'information importante au voisinage de la fréquence de coupure.

Principe de l'expérience

Le schéma de principe de l'expérience est représenté sur la figure 7.2. Le laser est simultanément résonnant avec deux cavités : la cavité de référence qui sert à réduire son bruit de fréquence et la cavité de mesure sur laquelle on mesure l'effet photothermique. Le faisceau incident sur la seconde cavité est modulé en intensité grâce à un modulateur électro-optique (MEO-I sur la figure). L'asservissement simultané sur les deux cavité est rendu possible par un modulateur acousto-optique (MAO) utilisé en double passage, qui décale la fréquence du laser de l'écart entre les fréquences de résonance des deux cavités. La modulation d'intensité induit une variation de la longueur de la cavité de mesure, qui est retranscrite sur l'asservissement de la fréquence du laser par l'acousto-optique. Ceci permet de mesurer indirectement la dilatation induite.

Le laser utilisé est un laser YAG, de modèle 126-1064-100 de la société Lightwave, délivrant une puissance de 100 mW continue. Les asservissements des cavités se font par la méthode de Pound Drever Hall, la modulation de phase étant assurée par un modulateur électro-optique (MEO) résonnant à 13.3 MHz (Modèle 4003 de chez NewFocus). L'asservissement du laser sur la cavité de référence utilise deux voies : la première régule la température du cristal et n'agit qu' à des fréquences inférieures à 0.1 Hz, tandis que la seconde, plus rapide, contrôle la cale piézo-électrique du laser. Elles permettent une réduction importante du bruit de fréquence dans la plage d'intérêt [122].

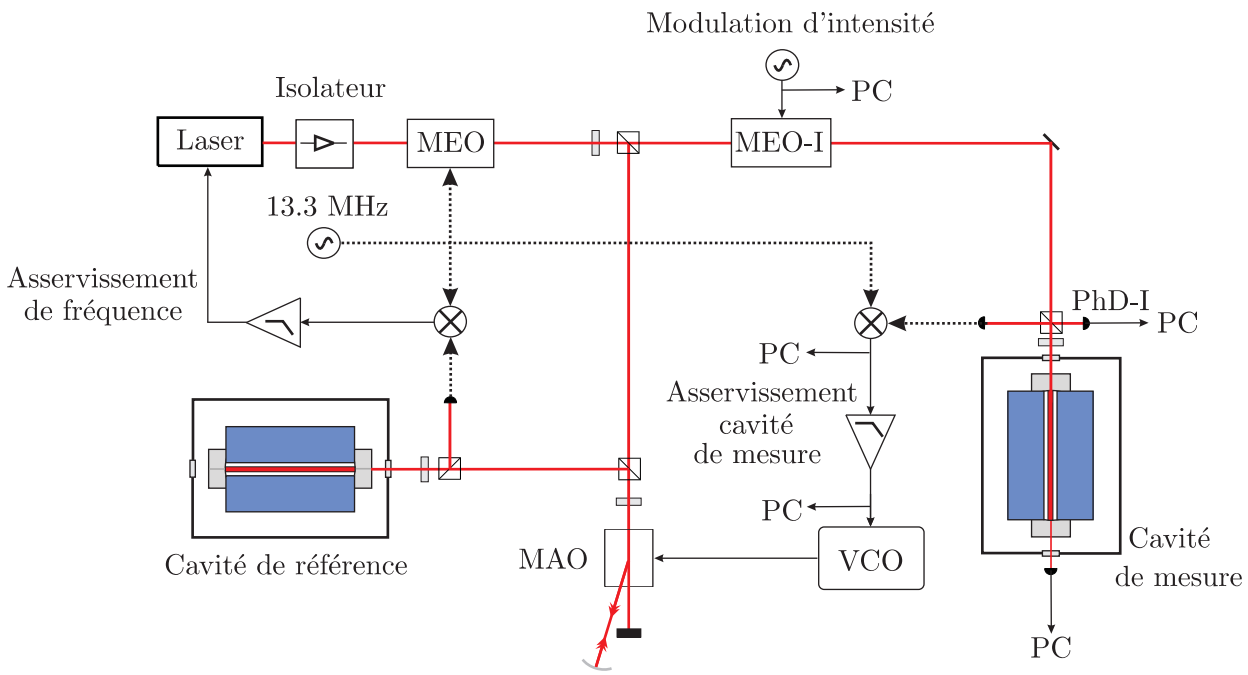


FIG. 7.2 – Schéma de l'expérience permettant de mesurer la réponse photothermique de la cavité de mesure à une modulation de l'intensité incidente.

Asservissements

Le faisceau envoyé vers la cavité de référence effectue préalablement un aller-retour dans le modulateur acousto-optique, qui décale sa fréquence de deux fois la fréquence de l'onde acoustique (environ 110 MHz) car on exploite le premier ordre de diffraction. Grâce à l'asservissement du laser sur la cavité de référence qui maintient à une valeur fixe la fréquence en aval du modulateur, on peut modifier la fréquence optique du faisceau envoyé vers la cavité de mesure en changeant la fréquence de l'onde acoustique. Cela permet d'asservir indirectement le laser sur la cavité de mesure.

Le double passage à travers le modulateur acousto-optique permet de maintenir une direction constante du faisceau, indépendamment de l'angle de déflexion qui varie avec la fréquence de l'onde acoustique. Cette dernière est définie par un oscillateur contrôlé en tension (VCO sur la figure 7.2) fonctionnant autour de 110 MHz avec une bande passante de 30 MHz. La caractéristique tension − fréquence est linéaire, avec une pente mesurée de 1.17 MHz/V. Le VCO possède plusieurs entrées : l'une sert à l'asservissement et reçoit le signal d'erreur intégré de la cavité de mesure ; une autre entrée est reliée à un générateur de tension variable qui permet de contrôler finement la fréquence du faisceau envoyé vers la cavité de mesure. L'emploi du modulateur acousto-optique possède une contrepartie, car il rajoute vraisemblablement du bruit de fréquence au faisceau de mesure. Ceci n'est pas gênant pour l'expérience car les signaux mesurés en modulation sont très au dessus du plancher de ce bruit.

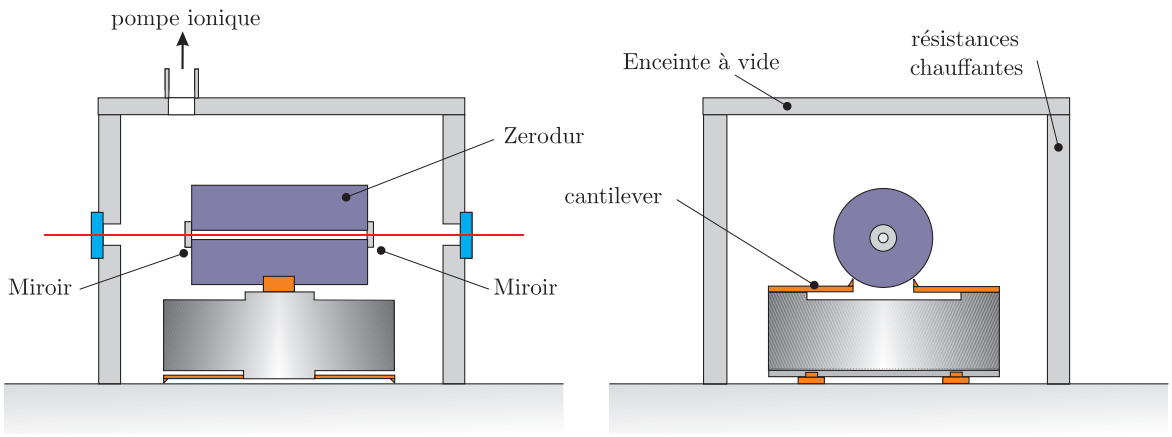


FIG. 7.3 – Schéma des cavités optiques. Le corps de la cavité, un espaceur massif en Zérodur est monté sur un système de double suspension à base de cantilevers. Elles sont également placées dans une enceinte à vide. Ce schéma correspond à la cavité de référence qui est identique à la cavité longue sur laquelle on mesure l'effet. La cavité courte est quant-à-elle vissée latéralement sur un espaceur semblable à celui représenté.

Les cavités optiques

La cavité de référence et la première cavité de mesure que nous avons utilisée sont de conception similaire. Leur principe répond à un cahier des charges très strict en vue de la stabilisation d'une source laser utilisée pour des mesures optiques de très grande sensibilité et à basse fréquence sur la barre AURIGA [120]. Les cavités sont donc ultra-stables, suffisamment longues (20 cm) pour ne pas être limité par le bruit thermique des miroirs, et possèdent une finesse élevée (40000 environ). En plus de l'amortissement assuré par la table optique, les cavités sont montées sur un dispositif de suspension à double cantilever (voir la figure 7.3) qui permet de réduire encore le bruit sismique. Elles sont placées sous vide pour s'affranchir des fluctuations de l'indice de réfraction et assurer un environnement propre aux miroirs. Elles sont construites avec des espaceurs très massifs en Zerodur, un matériau présentant un coefficient d'expansion thermique très faible, de l'ordre de $5 \times 10^{-8}\,\mathrm{K}^{-1}$, ce qui permet de limiter l'effet des dérives thermiques. La température des cavités est asservie au moyen de résistances chauffantes présentes dans le corps de l'enceinte à vide qui échangent de la chaleur avec la cavité par rayonnement thermique. Elles contrôlent la température de la cavité avec une précision de l'ordre du mK via un asservissement numérique. Celui-ci est également utilisé pour placer les deux cavités au voisinage de résonance. Il faut noter que pour balayer un intervalle spectral d'une cavité de 20 cm de long, il est nécessaire de varier la température de l'espaceur en Zérodur d'une cinquantaine de degrés. Le fonctionnement de l'asservissement permet de maintenir un écart entre les fréquences de résonance des deux cavités qui soit accessible avec l'acousto-optique.

On a utilisé deux cavités de mesure de longueur très différentes, l'une de 200 mm, l'autre de 7.1 mm avec des rayons de courbure choisis pour produire des cols de tailles différentes, autour de 370 μm pour la première et 76 μm pour la seconde. Les caractéristiques optomécaniques de ces deux cavités sont résumées dans le tableau 7.1. Le rapport 5 entre les cols permet d'envisager une augmentation d'un facteur 25 de la fréquence de coupure photothermique (équation 7.2). La cavité longue est identique à la cavité de référence, bâtie autour d'un

Cavités :	Cavité longue		Cavité courte	
Longueur (mm)	200		7.1	
ISL (GHz)	0.75		21	
Transmission du miroir d'entrée (ppm)	135		130	
Pertes totales (ppm)	30		35	
Finesse	38 000		38 000	
Couplage spatial (%)	70		78	
Puissance incidente (mW)	~ 30		~ 1	
Puissance intracavité (W)	~ 200		~ 8	
Miroirs :	entrée	sortie	entrée	sortie
Rayon de courbure (m)	∞	1	0.05	0.2
Taille du col (mm)	0.368	0.412	0.078	0.074

TAB. 7.1 – Paramètres optomécaniques des deux cavités de mesure

espaceur long en Zérodur. Les miroirs utilisés ont été réalisés par la société Research Electro-Optics. Par contre, la cavité courte est construite autour d'un espaceur en aluminium dont le coefficient de dilatation thermique est bien plus important. Pour l'asservir en température, on l'a placée sur le flanc d'une pièce en marbre possédant une masse thermique comparable à celle du Zérodur. Sa stabilité thermique est bien moins bonne que celle de la cavité longue, ce qui nous a empêché de réaliser des mesures à des fréquences inférieures à 100 mHz.

La modulation d'intensité

On module l'intensité du faisceau envoyé vers la cavité de mesure au moyen d'un modulateur électro-optique, le modèle LM0202 de la société LINOS (MEO-I sur la figure 7.2). Il est alimenté par une tension sinusoïdale fournie par un générateur BF et amplifiée par un amplificateur haute-tension commercial. On a commencé l'expérience en choisissant la polarisation incidente sur le modulateur pour qu'elle arrive à 45° de ses lignes neutres, le cube séparateur de polarisation précédant la cavité de mesure transformant la modulation de la polarisation en une modulation d'intensité. Dans cette configuration, on a observé à hautes fréquences une croissance du signal mesuré proportionnelle à la fréquence de modulation. On a compris que le phénomène était dû à la modulation de la phase du faisceau engendrée par l'électro-optique. La modulation de fréquence correspondante, qui croît comme la fréquence de modulation puisque la fréquence est simplement la dérivée de la phase, était directement observable sur le signal de correction, et empêchait les mesures à haute fréquence. Pour s'en affranchir, on a donc changé l'orientation du modulateur et sa tension de polarisation pour travailler non plus à la moitié mais au maximum de la transmission du modulateur. Ainsi, en modulant à la fréquence moitié $\Omega/2$, on crée une modulation d'intensité à la fréquence Ω, tandis que la modulation de phase reste à la fréquence de modulation $\Omega/2$. En démodulant numériquement le signal de mesure à la fréquence Ω on peut donc effectuer une mesure de l'effet photothermique sans être limité par le bruit de fréquence induit par le modulateur d'intensité. L'amplitude de la modulation d'intensité est mesurée sur la photodiode PhD-I en acquérant le signal sur un oscilloscope. Pour ajuster le décalage statique nécessaire pour se maintenir au maximum de transmission du modulateur, on effectue la FFT du signal fourni par la photodiode et on minimise l'harmonique à $\Omega/2$.

Acquisition et mesure

Toutes les mesures sont effectuées avec un oscilloscope numérique, le modèle "Wave surfer" de chez Lecroy, très utile ici pour effectuer des acquisitions sur de longues durées (on a été amené à moduler jusqu'à des fréquences de 0.1 mHz). Les traces acquises sont ensuite traitées numériquement via le programme Matlab. Pour chaque valeur de la fréquence de modulation on acquiert le signal fourni par la photodiode Phd-I placée en amont de la cavité de mesure pour calibrer la modulation d'intensité, ainsi que le signal de correction envoyé vers le VCO par la boucle d'asservissement sur la cavité de mesure. Ce dernier est efficace jusqu'à 10 kHz environ, ce qui signifie qu'en dessous de cette valeur, l'asservissement compense la dilatation modulée de la cavité et qu'on retrouve cette information dans le signal de correction envoyé sur l'acousto-optique. Pour des fréquences supérieures, il est nécessaire d'acquérir simultanément le signal d'erreur avant et après l'intégration car le gain de la boucle n'est plus suffisant pour le maintenir à zéro. Les courbes typiques acquises sont représentées sur la figure 7.4.

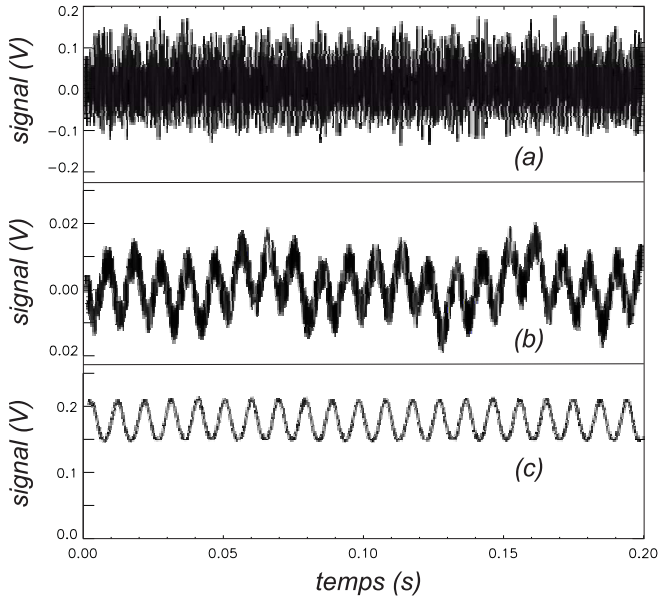


FIG. 7.4 – Allure typique des signaux acquis. (a) : signal d'erreur, (b) : correction envoyée vers le modulateur acousto-optique, (c) : intensité mesurée par Phd-I. L'asservissement permet de maintenir la cavité de mesure à résonance (absence de modulation sur la courbe a) en contrôlant la fréquence du laser via le modulateur acousto-optique.

Pour avoir une résolution suffisante, on acquiert lorsque c'est possible un millier d'oscillations environ, avec un échantillonnage permettant d'avoir une centaine de points par période. Pour les très basses fréquences, en dessous de 100 mHz, on a utilisé la fonction "Trend" de l'oscilloscope pour n'enregistrer qu'un point tous les 20 coups. Cela permet d'aller au delà du temps d'acquisition maximal de l'oscilloscope ($10\,\text{div} \times 1000\,\text{s/div} \approx 3\text{h}$) pour effectuer des mesures sur de très longues durées (acquisition sur un week-end par exemple). On a vérifié que cette procédure est compatible avec la mesure directe sur une plage allant de 10 mHz à 5 Hz.

On a constaté une dérive lente de la correction, due d'une part à la dérive du VCO estimée au niveau de 1 Hz/s, d'autre part aux dérives lentes des cavités elles-mêmes. Lorsqu'elles sont maintenues à température constante, les fréquences de résonance des cavités longues dérivent de quelques Hz par seconde. Pour s'affranchir de cet effet, on a retranché aux signaux mesurés un polynôme du second degré dont les coefficients sont ajustés par une méthode de moindre carré. La cavité courte présentait par contre des vitesses de dérive bien plus importantes, de l'ordre de 1kHz/s, ce qui a compliqué les mesures et a nécessité d'attendre plus d'un mois avant d'atteindre une stabilité suffisante pour effectuer les mesures. Ses dérives ont alors été compensées en imposant une variation de sa température de consigne de quelques 10^{-4} K/h.

Le déphasage entre la modulation d'intensité et la dilatation mesurée est également une information très importante car la phase est en général beaucoup plus sensible que l'amplitude lors d'un changement de régime de la réponse photothermique. Pour mesurer à la fois l'amplitude et la phase, on effectue une détection synchrone numérique des traces acquises après leur avoir retranché leur dérive lente. Pour cela, on multiplie numériquement le signal par un signal oscillant à la fréquence de consigne synthétisée par le programme, puis on moyenne le résultat pour ne conserver que la composante statique. On effectue cette opération une deuxième fois avec un signal de référence en quadrature par rapport au précédent. La moyenne quadratique des deux valeurs obtenues est proportionnelle à l'amplitude du signal, tandis que leur rapport est égal à la tangente du déphasage.

Le programme calcule le rapport entre l'amplitude de la correction et celle de la modulation d'intensité mesurée sur Phd-I. Il calcule également le déphasage entre ces deux signaux en comparant leurs déphasages respectifs vis-à-vis du signal synthétisé. L'amplitude de la variation de longueur δL de la cavité induite par l'effet photothermique sur les deux miroirs est liée à l'amplitude de la modulation de fréquence $\delta\nu$ nécessaire à maintenir le laser à résonance par l'expression : $\delta L/L = \delta\nu/\nu$ où L est la longueur de la cavité. Après une calibration sur laquelle on reviendra, on obtient donc la réponse photothermique du miroir en m/W où la puissance correspond à l'intensité intracavité incidente sur le miroir.

Pour chaque valeur de la fréquence de modulation, on a effectué au minimum deux acquisitions pour estimer la reproductibilité de la mesure. On a modulé l'intensité sur une très large plage de fréquences en suivant une progression logarithmique, entre 0.3 mHz et 8 kHz pour la cavité longue, et entre 100 mHz et 5 kHz pour la cavité courte car les dérives thermiques nous ont empêché de mesurer à plus basse fréquence. On a aussi évité les fréquences multiples de 50 Hz car on observait alors une mauvaise reproductibilité des mesures, due principalement aux perturbations induites par le secteur. C'est d'ailleurs pour limiter ces dernières que toutes les photodiodes et les préamplificateurs présents sur la table optique fonctionnent sur batteries.

7.3 Résultats et modélisation

Dans cette partie on présente d'abord les résultats expérimentaux obtenus avec les deux cavités. Ils permettent de vérifier la dépendance des effets photothermiques avec la fréquence, et de la fréquence de coupure avec la taille du faisceau. On a également estimé les coefficients d'absorption des miroirs. On explique ensuite l'origine des deux déviations observées à basse et haute fréquences, liées à la taille finie des miroirs et à l'effet photothermique dans les couches diélectriques.

7.3.1 Résultats expérimentaux

Les mesures

On présente sur la figure 7.5 les résultats obtenus avec la cavité longue. En haut, on a représenté l'amplitude de la réponse photothermique de la cavité de mesure exprimée en m/W, en bas le déphasage entre la dilatation mesurée et la modulation d'intensité imposée. On constate que l'effet décroît avec la fréquence et que le retard de la dilatation vis-à-vis de la modulation augmente avec la fréquence. L'ordre de grandeur de la réponse photothermique est de 10^{-12} m/W pour une fréquence de modulation de 0.1 Hz. A cette fréquence, la longueur d'onde thermique est de 1.2 mm. Cela signifie (équation 7.4) que l'ordre de grandeur de l'échauffement de la surface du miroir est de 1.5 mK dans les conditions de l'expérience.

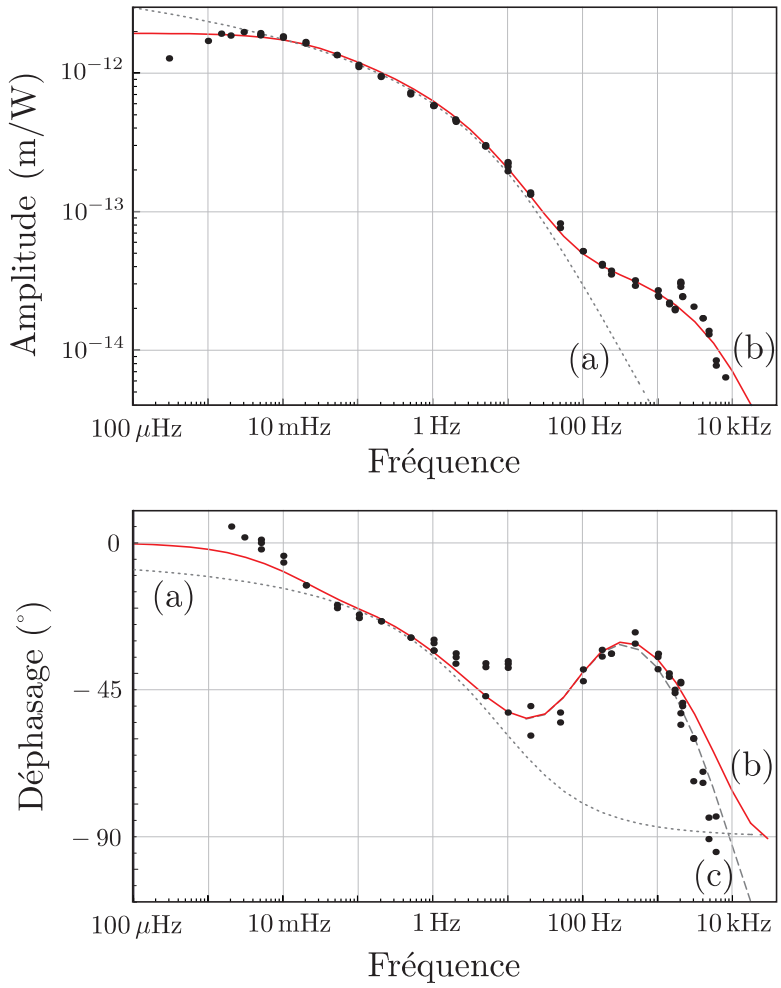


FIG. 7.5 – Variation de la longueur totale de la cavité longue en réponse à une modulation de l'intensité intracavité. En haut, l'amplitude de la réponse exprimée en m/W, en bas le déphasage entre la variation de longueur observée et la modulation de l'intensité. Aux données expérimentales (ronds noirs) sont superposés les ajustements par un modèle semi-infini (a) ne prenant en compte que l'effet du substrat, et par deux autre modèles modélisant en plus la contribution des couches diélectriques et la taille finie des miroirs (courbes b et c).

On a superposé aux résultats expérimentaux l'ajustement donné par le modèle présenté dans la section 7.1 (équation 7.7) [35, 118] en tenant compte des deux miroirs de la cavité (courbe a) :

$$\frac{\delta L[\Omega]}{\delta P[\Omega]} = -2\alpha \frac{1+\sigma}{\pi\kappa} K[\Omega/\Omega_{\mathrm{T}}]A, \tag{7.11}$$

qui relie l'amplitude de variation de la longueur de la cavité $\delta L[\Omega]$ à l'amplitude $\delta P[\Omega]$ de la modulation d'intensité à l'intérieur de la cavité[1]. On a supposé que les deux miroirs constituant la cavité jouent un rôle symétrique et leurs effets s'ajoutent simplement dans la variation de longueur totale. L'accord avec les résultats expérimentaux est très bon sur la plage de fréquence allant de 10 mHz à 10 Hz, ce qui valide le modèle théorique.

Lorsque la fréquence de modulation devient supérieure à une centaine de Hz, on observe un écart étonnant à la fois sur l'amplitude et la phase de la réponse. La longueur d'onde thermique correspondante est alors de $40\,\mu$m, ce qui signifie que l'onde thermique n'a pas le temps de se propager dans le substrat du miroir et qu'elle reste confinée à sa surface. La taille caractéristique de l'extension de l'onde thermique devient comparable à celle des couches diélectriques constituant le miroir de Bragg (respectivement 4.5 et 6.7 μm pour les miroirs d'entrée et de sortie). On va voir qu'on peut interpréter cette déviation comme étant la conséquence de l'effet photothermique des couches elles-mêmes.

Aux très basses fréquences, on observe également une déviation des points expérimentaux par rapport au modèle théorique, la dilatation mesurée étant moins importante que prévu. Cet écart est visible à partir de 3 mHz environ, une fréquence qui correspond à une longueur d'onde thermique de 7 mm dans la silice, c'est-à-dire une valeur comparable à l'extension transverse du miroir. Cette déviation est liée à la taille finie du miroir. Notons que la reproductibilité des mesures d'amplitude est très bonne, sauf peut-être à haute fréquence, où la dispersion devient plus importante. Pour ce qui concerne la phase, la reproductibilité est bonne sauf pour les quelques points entre 1 et 10 Hz qui semblent au dessus de la courbe théorique. Ils ont été obtenus par la première méthode de modulation de l'intensité utilisant l'électro-optique à mi-pente ce qui crée une modulation de fréquence qu'on commence à observer sur la phase. Enfin, on a vérifié la linéarité de l'effet observé avec l'intensité lumineuse en se plaçant à une fréquence fixe et en changeant la profondeur de modulation. Cette mesure a été effectuée à 10 Hz, en utilisant le modulateur électro-optique à mi-transmission.

Influence de la taille du col du faisceau de mesure

Les résultats obtenus avec la cavité courte sont représentés sur la figure 7.6. A cause de la moins bonne stabilité thermique, il a été impossible d'effectuer des mesures à très basse fréquence. La réponse de la cavité courte est plus importante que celle de la cavité longue par un facteur 4 environ à 10 Hz. La contribution des couches diélectriques est masquée par celle du substrat sur la réponse en amplitude, mais l'effet reste visible sur le déphasage. De plus, comme on n'a pas pu aller à des fréquences suffisamment basses, on n'a pas observé d'effets de taille finie.

On a ajusté les données expérimentales des figures 7.5 et 7.6 par la réponse en fréquence prédite par le modèle théorique [35, 118]. Pour cela, on s'est restreint à la plage de fréquence

[1] La variation de la longueur δL de la cavité est en fait l'opposé de la somme des dilatations des miroirs.

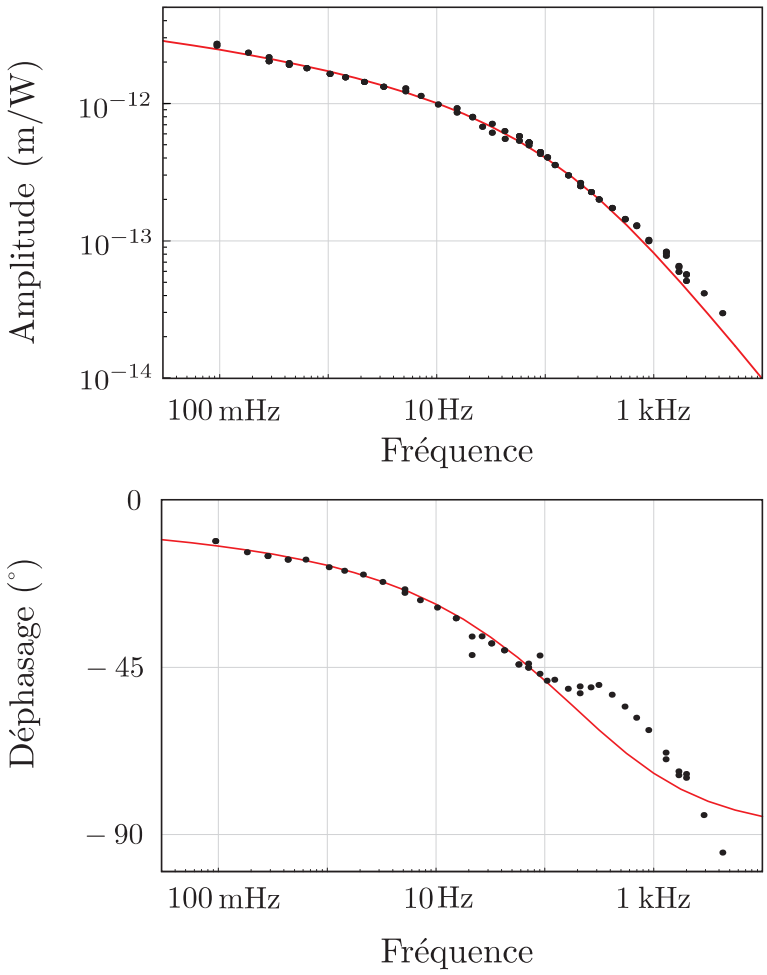


FIG. 7.6 – Effet photothermique mesuré avec la cavité courte. Le trait plein correspond à l'ajustement des données par le modèle semi-infini [35].

sur laquelle les hypothèses du modèles sont vérifiées c'est-à-dire de 10 mHz à 50 Hz pour la cavité longue, ce qui correspond tout de même à une variation de la fréquence sur plus de 3 ordres de grandeur. On a effectué un ajustement de l'amplitude du déplacement mesuré par l'expression :

$$|\delta L[\Omega]| = L_0 \left| \tilde{K}[\Omega/\Omega_{\mathrm{T}}] \right| \tag{7.12}$$

où L_0 et Ω_{T} sont les paramètres libres. On a pris en compte la légère différence entre les tailles du faisceau sur les deux miroirs constituant la cavité en utilisant la fonction $\tilde{K}$ définie par :

$$\tilde{K}[x] = \frac{1}{2}\left(K[x] + K\left[\left(\frac{w_0^{\max}}{w_0^{\min}} \right)^2 x \right] \right) \tag{7.13}$$

où $w_0^{\max}$ et $w_0^{\min}$ correspondent respectivement à la plus grande et à la plus petite taille du faisceau sur les miroirs et où $K[x]$ est donnée par l'équation (7.8). On suppose donc que les coefficients thermomécaniques des deux miroirs formant la cavité sont les mêmes. En pratique

la différence entre les fonctions $\tilde{K}$ et K est très faible car les waists sont quasiment identiques sur les deux miroirs. Pour effectuer l'ajustement avec cette fonction non analytique, on a utilisé le programme MATHEMATICA en utilisant la méthode des moindres carrés : on fixe une valeur de la fréquence de coupure $\Omega_{\mathrm{T}}/2\pi$, et on calcule quelle est la valeur minimale prise par la quantité sommée sur l'ensemble des fréquences $\Omega_i/2\pi$ expérimentales

$$\sum_i \left(|\delta L[\Omega_i]| - L_0 \left| \tilde{K}[\Omega_i/\Omega_{\mathrm{T}}] \right| \right)^2 \tag{7.14}$$

lorsqu'on varie L_0. On fait varier Ω_{T} jusqu'à encadrer le minimum de la quantité précédente en procédant par pas de 0.05 Hz. Pour la cavité longue, la valeur minimale de l'écart quadratique moyen est obtenue avec une fréquence de coupure de

$$\Omega_{\mathrm{T}}^{(a)}/2\pi = 3.25\,\mathrm{Hz}. \tag{7.15}$$

La courbe résultant de l'ajustement avec les paramètres précédents est tracée en traits pointillés sur le graphique 7.5 (courbe a). On constate que l'accord sur l'amplitude entre les points expérimentaux et la prédiction théorique est très bon sur une large plage de fréquence. Pour ce qui concerne la phase, on observe un écart plus important avec les points expérimentaux. Ceci est dû au fait qu'une transition entre deux régimes se voit mieux sur le déphasage que sur l'amplitude.

On a procédé de même avec la cavité courte, en se restreignant à la plage de fréquence de 100 mHz à 1 kHz et on a obtenu :

$$\Omega_{\mathrm{T}}^{(b)}/2\pi = 79.9\,\mathrm{Hz}. \tag{7.16}$$

L'accord avec les données expérimentales est là encore très bon. Les miroirs utilisés pour ces deux cavités proviennent du même fabricant et les traitements optiques utilisés sont les mêmes. On constate que le rapport des fréquences de coupure mesurées, $79.9/3.25 = 24.6$ est en excellent accord avec le rapport du carré des tailles de col prédites par les paramètres géométriques de la cavité : $(368/74)^2 = 24.7$. Cela confirme la dépendance de la fréquence de coupure avec la taille du faisceau (équation 7.2). On peut donc espérer réduire le bruit photothermique en utilisant des faisceaux de mesure de gros diamètre : dans la partie haute fréquence, la réponse est proportionnelle à Ω_T/Ω, ce qui signifie qu'on attend une décroissance de l'amplitude de l'effet comme l'inverse du carré de la taille du col.

Calibration de la réponse et estimation du coefficient d'absorption des miroirs.

Pour calibrer en m/W les amplitudes $|\delta L/\delta P|$ tracées sur les figures 7.5 et 7.6, il faut d'une part estimer la relation entre la modulation δP de l'intensité intracavité et celle du faisceau incident mesuré par la photodiode Phd-I, d'autre part établir le lien entre les variations δL et le signal de correction issu du signal d'erreur Pound-Drever-Hall. Pour remonter à la relation entre les modulations d'intensité, il faut prendre en compte le fait qu'une partie seulement de la lumière incidente entre réellement dans la cavité. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents (équations 2.27 et 4.41), seule une fraction $\eta_{\mathrm{cav}} {J_0}^2$ de l'intensité incidente est couplée à la cavité, où η_{cav} est le coefficient d'adaptation spatiale du faisceau et J_0 la fonction de Bessel reliée à la profondeur de modulation du signal Pound-Drever-Hall. Par ailleurs, les pertes optiques font que la puissance intracavité n'est amplifiée que

d'un facteur T/γ^2 par rapport à la puissance incidente où T est la transmission du coupleur d'entrée et $\gamma = \pi/\mathcal{F}$ le coefficient d'amortissement de la cavité (équation 4.41). Au final, en prenant ${J_0}^2 = 0.5$, $\eta_{\text{cav}} = 0.7$ et les valeurs du tableau 7.1, on obtient un rapport 6920 entre la puissance incidente mesurée et l'intensité intracavité. Ce rapport vaut 7500 pour la cavité courte. En prenant en compte la calibration de la photodiode Phd-I, qui est mesurée au niveau de 194 V/W, on obtient un coefficient de proportionnalité de 35.6 W/V entre la modulation de l'intensité intracavité et la modulation de tension détectée sur la photodiode pour la cavité longue. Il est de 38.1 W/V pour la cavité courte.

En ce qui concerne la calibration de l'amplitude δL des déplacements, elle est reliée à la variation $\delta\nu$ de fréquence à la sortie du VCO par l'expression $\delta L/L = \delta\nu/\nu$ où L est la longueur de la cavité et ν la fréquence optique. Le signal de correction récupéré à l'entrée du VCO est donc calibré en terme de déplacements à partir de cette expression et à l'aide de la pente de 1.17 MHz/V du VCO. On obtient une valeur de 1.66×10^{-11} m/V pour la cavité longue et de 5.89×10^{-12} m/V pour la cavité courte.

Cette calibration permet également d'estimer les coefficients d'absorption des miroirs à partir de la formule (7.11). Pour la cavité longue on obtient une absorption de 3.6 ppm pour chaque miroir tandis que pour la cavité courte elle est estimée à 4.7 ppm. L'incertitude expérimentale principale est liée à la mesure de la puissance intracavité, que l'on peut estimer au niveau de 5%. La différence observée entre ces valeurs peut être attribuée à une variation entre les coefficients thermomécaniques des différents miroirs ou à des écarts dus au processus de dépôt des couches diélectriques. Les valeurs obtenues sont légèrement supérieures à celles mesurées lors des premières expériences effectuées dans le groupe de Florence [31], mais cela peut être dû à un vieillissement des miroirs.

7.3.2 Le modèle semi-infini

Avant de décrire les effets nouveaux liés à la taille finie des miroirs (section 7.3.3) et à la réponse photothermique des couches (section 7.3.4), il est nécessaire de rappeler le modèle semi-infini, présenté en détail dans la référence [118] et qui permet d'obtenir les expressions (7.7) et (7.8). Il s'agit de rendre compte du couplage entre les variations de température et les déformations du matériau constituant le miroir lorsqu'un faisceau laser se réfléchit sur lui. On assimile le miroir à un milieu semi-infini, éclairé sur sa surface par un faisceau laser gaussien possédant un col de taille w_0. Les variations de température δT résultant de l'absorption induisent des déformations du miroir, que l'on considère suffisamment faibles pour qu'elles ne créent pas d'échauffement supplémentaire. En supposant la source de chaleur due à l'absorption ponctuellement limitée à la surface du miroir (plan $x = 0$), l'équation d'évolution de la température à l'intérieur du matériau s'écrit :

$$\partial_t \delta T(x,r) - D\Delta\delta T(x,r) = 2\delta(x)\frac{P_{\text{abs}}(t)}{\rho C} v_0^2(r), \tag{7.17}$$

où $P_{\text{abs}}(t)$ est la puissance totale absorbée à l'instant t et $v_0^2(r)$ le profil transverse de l'intensité du faisceau (équation 2.47). Le facteur 2 de normalisation assure que l'intégrale du terme source sur tout le demi-espace décrivant le miroir est égale à l'intensité totale P_{abs} absorbée par le miroir. Dans notre problème, la vitesse de propagation des ondes thermiques est toujours petite devant celle d'une onde sonore dans le miroir. On peut effectuer l'approximation quasi-statique et déduire l'influence de l'échauffement local sur les déformations à partir d'un bilan statique sur les contraintes [70] :

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\vec{\nabla}\mathrm{div}\vec{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1+\sigma)}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = \alpha\vec{\nabla}\delta T \tag{7.18}$$

où $\vec{u}$ est la déformation, α le coefficient de dilatation thermique linéaire[2] du milieu et σ son coefficient de Poisson. Les conditions aux limites imposées au miroir sont $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$ dans le plan $x = 0$, où le tenseur des contraintes σ_{ij} est relié à celui des déformations $u_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ et au module d'Young E par

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}\frac{E\alpha}{1-2\sigma}\delta T + \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ij} + \delta_{ij}\frac{\sigma}{1-2\sigma}\mathrm{div}\vec{u}\right) \tag{7.19}$$

Les conditions aux limites traduisent le fait que la surface du miroir est libre de contrainte. Le traitement perturbatif que l'on effectue consiste à calculer le profil de température induit par l'absorption de lumière à la surface du miroir puis à insérer cette solution dans l'équation (7.18) pour en déduire la déformation du miroir. Ensuite on calcule la dilatation δX vue par le faisceau laser qui moyenne la déformation de la surface :

$$\delta X = \int d^2r\, u_x(x=0,r)\, v_0^2(r). \tag{7.20}$$

On résout d'abord l'équation (7.17) en passant dans l'espace de Fourier en position et en impulsion après avoir étendu le problème à tout l'espace, ce qui est rendu possible car les solutions vérifient $\partial_x T(x=0) = 0$ par symétrie. Ainsi l'équation (7.17) permet de calculer le profil de température à un point $\vec{r}$ et une fréquence Ω :

$$\delta T(\vec{r},\Omega) = \frac{2P_{\mathrm{abs}}[\Omega]}{\rho C}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}\, \frac{1}{Dk^2 - i\Omega}\, e^{-k_\perp^2 w_0^2/8}. \tag{7.21}$$

où $k_\perp$ est le vecteur d'onde dans le plan transverse. La résolution de l'équation (7.18) est plus délicate et nous ne faisons ici que résumer les différentes étapes du calcul. On cherche les solutions sous la forme d'une solution particulière ajoutée à une solution de l'équation sans second membre, leur somme devant vérifier les conditions imposées aux limites. Les solutions de l'équation (7.18) s'écrivent ainsi $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi + \vec{v}$ où φ est une solution de l'équation harmonique suivante, sans condition aux limites particulières (on prendra $\varphi = 0$ à l'infini) :

$$\Delta\varphi = \alpha\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\delta T, \tag{7.22}$$

et où $\vec{v}$ est solution de l'équation homogène associée (équation 7.18 sans second membre). La solution de l'équation de Poisson (7.22) avec un potentiel φ s'annulant à l'infini est connue, on obtient comme en électromagnétisme :

$$\varphi(\vec{r},t) = -\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\int d^3r'\, \frac{\delta T(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \tag{7.23}$$

où les variations de température sont données par l'équation (7.21). On trouve par symétrie que $\partial_x\varphi|_{x=0} = 0$ ce qui signifie que la partie $\vec{\nabla}\varphi$ de la solution générale ne contribue pas à la déformation vue par le laser. Par contre, elle modifie les conditions aux limites que doit vérifier

[2] On suppose ici le milieu isotrope de sorte que son coefficient de dilatation volumique est égal à 3 fois son coefficient de dilatation linéaire.

la solution homogène $\vec{v}$. On trouve que seule la composante $\sigma_{xx}^{(v)}$ du tenseur des contraintes de $\vec{v}$ est non nulle et doit être égale à :

$$\sigma_{xx}^{(v)}(x=0,\vec{r}) = \alpha \frac{E}{1-\sigma} \frac{2P_{\text{abs}}[\Omega]}{\rho C} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\perp^2}{k^2} \frac{e^{-k_\perp^2 w_0^2/8}}{Dk^2 - i\Omega} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}}. \tag{7.24}$$

Il reste donc à résoudre l'équation homogène que vérifie $\vec{v}$, avec cette condition aux limites qui est celle d'un milieu semi-infini soumis uniquement à une contrainte normale à sa surface. Ce problème est connu (voir ref. [70] p. 43) ; la composante normale v_x de la déformation en un point $\vec{r}$ de la surface S du miroir peut être exprimée en fonction de la contrainte normale appliquée sur la surface :

$$v_x(x=0,\vec{r}) = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \int_{\text{S}} d^2r' \, \frac{\sigma_{xx}(x=0,\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{7.25}$$

En introduisant l'expression (7.24) dans l'équation précédente et en effectuant l'intégration sur $\vec{r}\,'$, on obtient l'expression de la déformation :

$$v_x(x=0,\vec{r}) = \alpha \frac{1+\sigma}{\pi} \frac{2P_{\text{abs}}[\Omega]}{\rho C} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \frac{k_\perp e^{-k_\perp^2 w_0^2/8}}{k^2\,(Dk^2 - i\Omega)} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}} \tag{7.26}$$

A cause de la nullité de $\partial_x \varphi$ sur la surface, l'expression précédente décrit la déformation totale de la surface du miroir. On peut donc calculer la déformation vue par le faisceau gaussien en insérant l'expression précédente dans l'équation (7.20) ; on obtient :

$$\delta X[\Omega] = \alpha \frac{1+\sigma}{\pi} \frac{2P_{\text{abs}}[\Omega]}{\rho C} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \frac{k_\perp e^{-k_\perp^2 w_0^2/4}}{k^2\,(Dk^2 - i\Omega)}. \tag{7.27}$$

En passant en coordonnées cylindriques avec le changement de variable $u = k_\perp w_0/\sqrt{2}$, $v = k_x w_0/\sqrt{2}$, on obtient l'expression :

$$\delta X[\Omega] = \alpha \frac{1+\sigma}{\pi} \frac{P_{\text{abs}}[\Omega]}{\kappa} K[\Omega/\Omega_{\text{T}}] \tag{7.28}$$

où Ω_{T} est défini par l'équation (7.2) et $K[x]$ est donné par l'équation (7.8). On a ainsi obtenu la dépendance de l'effet photothermique avec la fréquence dans le cadre d'une modélisation semi-infinie du miroir. On constate qu'il prédit une décroissance logarithmique à basse fréquence qui entraîne donc une divergence de l'effet attendu. Lorsque la longueur d'onde thermique devient comparable aux dimensions du miroir, l'approximation du miroir par un milieu semi-infini n'est plus valable, et on observe des effets liés à la taille finie des miroirs.

7.3.3 Conséquence de la taille finie du miroir

La dilatation mesurée à basse fréquence est inférieure à celle prédite par le modèle semi-infini (voir la figure 7.5). On propose ici une façon simple de prendre en compte cet écart. Lorsque l'onde thermique atteint l'espaceur, étant donné que le coefficient d'expansion thermique de ce dernier, fabriqué en Zerodur, est très faible devant celui de la silice, on peut supposer qu'il n'est pas déformé. Cependant le calcul précédent suppose que la surface du miroir peut se déformer librement. Pour éviter de tenir compte des contraintes réelles entre l'espaceur et le miroir, on peut considérer que lorsque l'onde de déformation thermique atteint

l'espaceur, elle va avoir pour effet de repousser en bloc le miroir (voir la figure 7.7). Ceci est équivalent à redéfinir la quantité mesurée expérimentalement ; au lieu de mesurer la dilatation δX donné par l'équation (7.20), on mesure la déformation relative entre les bords du miroir et son centre :

$$\delta\tilde{X} = \int d^2r\, u_x(x=0,\vec{r})\, v_0^2(r) - u_x(r=R) \tag{7.29}$$

où u_x est défini par l'équation (7.26) et R est le rayon de l'espaceur sur lequel est fixé le miroir (voir la figure 7.7).

On calcule donc cette quantité dans le cadre du modèle semi-infini précédent en utilisant les expressions (7.26) et (7.28). En effectuant le même changement de variable que dans le calcul précédent on obtient :

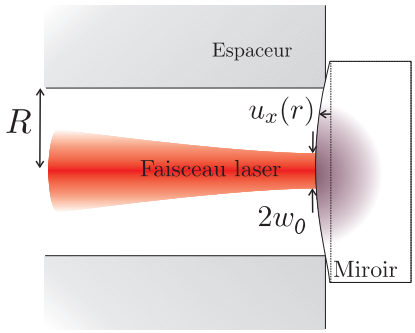


FIG. 7.7 – Modification du déplacement vu par la lumière du fait de la présence de l'espaceur.

$$\delta\tilde{X}[\Omega] = \alpha\frac{1+\sigma}{\pi}\frac{P_{\text{abs}}[\Omega]}{\kappa}K_{\text{BF}}[\Omega/\Omega_{\text{T}}] \tag{7.30}$$

où la nouvelle fonction de transfert K_{BF} est donnée par :

$$K_{\text{BF}}[x] = K[x] - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \frac{u^2 e^{-u^2/4}}{(u^2+v^2)(u^2+v^2-ix)} J_0\left(u\frac{R\sqrt{2}}{w_0}\right). \tag{7.31}$$

On a représenté sur la figure 7.8 les deux fonctions K et K_{BF} pour un facteur $R\sqrt{2}/w_0$ égal à 25, qui correspond à la situation expérimentale. On constate qu'à basses fréquences l'amplitude est effectivement plus faible que la valeur prédite par le modèle semi-infini, et qu'elle est inchangée pour des valeurs de x plus importantes. L'évolution de la phase est également modifiée à basse fréquence et rejoint la valeur 0° plus rapidement que dans le cadre de l'approximation semi-infinie. On a superposé sur la figure 7.5 la réponse attendue en prenant en compte la présence de l'espaceur. Les courbes (b) à basse fréquence sont tracées pour $R = 7\,\text{mm}$ et $w_0 = 400\,\mu\text{m}$. On constate que les résultats expérimentaux sont mieux expliqués par ce modèle, aussi bien pour l'amplitude qui est diminuée par rapport au modèle semi-infini (courbes a) que pour la phase qui rejoint plus rapidement 0°.

Ce modèle n'est bien sûr pas exhaustif, on constate d'ailleurs que la dilatation mesurée est encore plus faible que prévu à très basse fréquence. On comprend bien que lorsque la période de modulation de l'intensité est suffisamment longue pour que l'onde thermique parvienne en bordure du miroir, de nombreuses autres sources d'atténuation peuvent entrer en jeu.

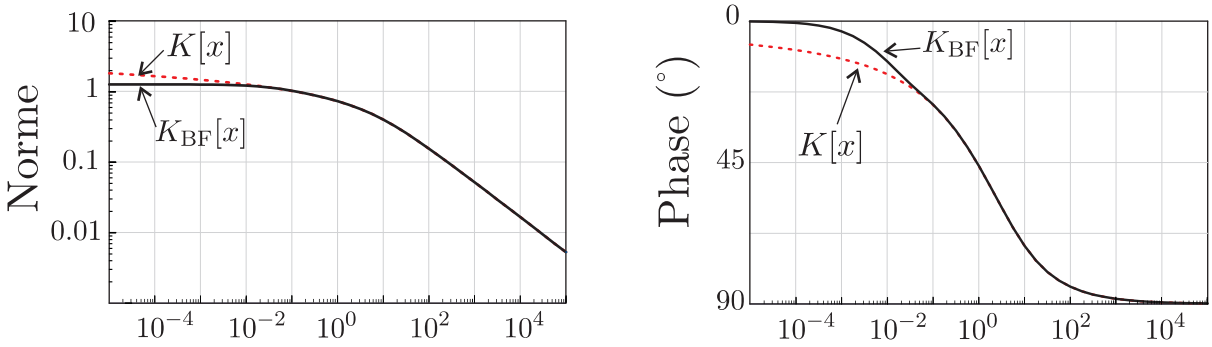


FIG. 7.8 – Représentation de l'amplitude et de la phase de la fonction $K_{\mathrm{BF}}[x]$ comparée à celles de la fonction $K[x]$ pour un facteur $R\sqrt{2}/w_0 = 25$.

L'espaceur peut se dilater de manière non négligeable si on attend suffisamment longtemps, et comme l'épaisseur du miroir est aussi finie, on va voir revenir vers la face avant une onde thermique réfléchie. Tous ces points sont bien trop complexes pour être décrits par un modèle analytique simple. Si on souhaite mieux comprendre le comportement à très basse fréquence, une simulation numérique paraît donc plus adaptée.

7.3.4 Effet des couches diélectriques

On s'intéresse maintenant à la description du phénomène observé à plus hautes fréquences. Lorsque l'intensité lumineuse est modulée à haute fréquence, l'épaisseur du dépôt diélectrique n'est plus négligeable devant la longueur d'onde thermique. En effet, l'étendue spatiale de la zone chauffée est de 12 μm seulement lorsque l'intensité lumineuse est modulée à 1 kHz. Cette valeur est à comparer aux tailles des traitements de surface, qui sont respectivement de 4.5 et 6.7 μm pour les miroirs d'entrée et de fond selon les données de REO. On va voir qu'on peut attribuer la déviation observée aux effets photothermiques dans les couches diélectriques.

On décrit toujours le substrat par un demi-espace infini uniforme, mais la face avant est recouverte d'une couche diélectrique, supposée uniforme pour simplifier et possédant des paramètres thermomécaniques a priori différents de ceux du substrat (voir la figure 7.9). Dans un premier temps, on suppose que le chauffage est toujours localisé à la surface du miroir, et on ne tient pas compte du fait que l'absorption est présente dans l'ensemble des couches diélectriques.

L'équation de propagation de la chaleur dans les couches s'écrit [124] :

$$\partial_t \delta T(x,r) - D_C\ \Delta\delta T(x,r) = \frac{2P_{\mathrm{abs}}(t)}{\rho_C C_C}\left(\delta(x) - e^{-\sqrt{-i\Omega/\Omega_C}}\delta(x-d)\right) v_0^2(r) \tag{7.32}$$

où les indices C sont associés aux coefficients thermomécaniques des couches diélectriques et d est l'épaisseur des couches. Comparé à l'équation (7.17), la première fonction de Dirac $\delta(x)$ correspond à la source de chaleur liée à l'absorption, alors que la seconde fonction de Dirac est ajoutée phénoménologiquement et représente l'interface entre les couches diélectriques et le substrat qui évacue l'énergie des couches. Le préfacteur exponentiel traduit l'atténuation de l'onde lors de la propagation sur l'épaisseur d des couches. On a défini la fréquence de

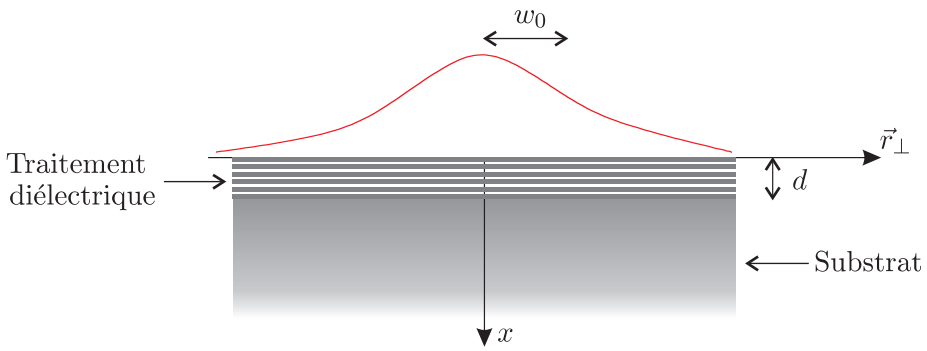


FIG. 7.9 – Schéma simplifié du traitement diélectrique et du substrat.

coupure thermique Ω_C des couches par l'expression (voir équation 7.2) :

$$\Omega_C = \frac{\kappa_C}{\rho_C C_C d^2} \tag{7.33}$$

qui est la fréquence au-delà de laquelle la longueur d'onde thermique est plus petite que l'épaisseur des couches diélectriques. On résout cette équation en passant dans l'espace de Fourier et en négligeant la propagation transverse de l'énergie à cause de la très faible épaisseur des couches. On en déduit le profil spatial $\delta T_C[x, r, \Omega]$ de la température dans les couches et la déformation $\delta X_C[\Omega]$ des couches vue par le faisceau :

$$\delta X_C[\Omega] = \alpha_C \int_0^d dx \int dr^2 \;\; \delta T_C[x, r, \Omega] \; v_0^2(r) \tag{7.34}$$

où α_C est le coefficient de dilatation thermique moyen des couches diélectriques. Après calculs, on obtient :

$$\delta X_C[\Omega] = \alpha_C \frac{2}{\pi w_0^2} \frac{P_{\text{abs}}[\Omega]}{\rho_C C_C} \frac{\left(1 - e^{-\sqrt{-i\Omega/\Omega_C}}\right)^2}{-i\Omega} \tag{7.35}$$

A basse fréquence devant Ω_C, l'effet photothermique dans les couches est indépendant de la fréquence de modulation, car alors l'extension spatiale de l'onde thermique est plus importante que l'épaisseur des couches diélectriques. A haute fréquence par contre, l'effet décroît avec une pente plus importante que $1/\Omega$ à cause de l'exponentielle. Les couches diélectriques induisent aussi un filtrage du flux de chaleur envoyé dans le substrat, d'un facteur $e^{-\sqrt{-i\Omega/\Omega_C}}$, et modifient donc sa contribution à l'effet photothermique total. Celui-ci est la somme des contributions du substrat et des couches diélectriques, que l'on peut l'écrire :

$$\delta X[\Omega] = \alpha \frac{P_{\text{abs}}[\Omega]}{\pi \kappa} \left\{ K\left[\Omega/\Omega_T\right] e^{-\sqrt{-i\Omega/\Omega_C}} - \frac{\alpha_C}{\alpha} \frac{\rho C}{\rho_C C_C} \frac{\Omega_T}{i\Omega} \left(1 - e^{-\sqrt{-i\Omega/\Omega_C}}\right)^2 \right\} \tag{7.36}$$

On a ajusté les données expérimentales avec cette expression. Pour cela, on utilise l'ajustement des données dans la plage 10 mHz − 50 Hz présenté précédemment, ce qui permet de déterminer les paramètres thermomécaniques du substrat. Ensuite, on ajuste la partie haute fréquence des données en faisant varier le préfacteur du deuxième terme dans l'équation (7.36)

et la fréquence de coupure Ω_C. Le meilleur ajustement est représenté en trait plein sur la figure 7.5 (courbe b). Les deux paramètres utilisés pour cet ajustement sont :

$$\frac{\alpha_C}{\alpha}\frac{\rho C}{\rho_C C_C} = 18, \tag{7.37}$$

$$\Omega_C/2\pi = 1.3 \text{ kHz}. \tag{7.38}$$

On constate sur la figure 7.5 que la courbe théorique décrit très bien les points expérimentaux, aussi bien pour l'amplitude que pour la phase. Ceci traduit le fait que l'on prend bien en compte le changement de régime correspondant à la situation où la longueur d'onde thermique devient comparable à l'épaisseur des couches. Par ailleurs, les valeurs des coefficients utilisés pour l'ajustement sont raisonnables. A partir de l'équation (7.33) et en utilisant en première approximation les coefficients thermomécaniques du substrat en silice pour décrire les paramètres des couches, la fréquence de coupure obtenue correspond à une épaisseur $d = 11\,\mu$m pour les couches diélectriques. Cette valeur est plus élevée que les épaisseurs réelles des miroirs (respectivement 4.5 et 6.7 μm), mais ce modèle donne quand même une estimation correcte de l'effet observé, d'autant plus que les propriétés thermomécaniques des matériaux constituant les couches diélectriques sont mal connus : ils diffèrent de ceux du matériau homogène et peuvent varier d'un fabriquant à l'autre et parfois même à l'intérieur d'une même cloche.

Aux fréquences élevées, le déphasage prédit par ce modèle tend vers un retard de 90°. Cependant, les points expérimentaux semblent tendre plus rapidement vers une valeur plus élevée. Une explication possible à ce désaccord est liée au fait que la zone où se produit l'absorption a une épaisseur non nulle, contrairement à la modélisation utilisée précédemment. La structure réelle de l'intensité lumineuse dans les couches diélectriques est complexe car elle présente des nœuds et des ventres avec une amplitude décroissant selon la profondeur. La lumière pénètre donc en s'atténuant sur une épaisseur inférieure à l'épaisseur totale des couches. Le fait que la zone chauffée ait une taille finie engendre un échauffement moins important lorsque la longueur d'onde thermique devient comparable à l'épaisseur de la zone chauffée. On peut modifier simplement le modèle précédent pour rendre compte de cet effet, en remplaçant la première fonction de Dirac $\delta(x)$ dans l'équation (7.32) par une exponentielle décroissante $1/\delta\, e^{-x/\delta}$. Cette modification permet de prendre en compte l'inertie thermique de la zone d'épaisseur δ où a lieu l'absorption de la lumière. En menant le calcul comme précédemment, on obtient un résultat similaire à l'équation (7.36) en remplaçant la parenthèse au carré dans le second terme par :

$$\left(1 - e^{-\sqrt{-i\Omega/\Omega_C}}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{-i\Omega/\Omega'_C}} - e^{-\sqrt{-i\Omega/\Omega_C}}\right) \tag{7.39}$$

où $\Omega'_C = \kappa_C/\rho_C C_C \delta^2$ est la fréquence de coupure associée à la longueur effective de pénétration de la lumière dans les couches. L'ajustement des données expérimentales par cette expression donne une fréquence de coupure de

$$\Omega'_C/2\pi = 3.2 \text{ kHz}. \tag{7.40}$$

les deux autre paramètres étant inchangés. Elle correspond à une profondeur de pénétration de 6 μm, en utilisant les coefficients thermomécaniques de la silice. La courbe associée à ces valeurs numériques est représentée en tirets sur la figure 7.5 (courbe c). On ne l'a représentée

que sur le déphasage car l'effet est minime sur l'amplitude de la réponse. A hautes fréquences, le déphasage décroît plus rapidement que ce qui est prévu par le modèle précédent, ce qui est en meilleur accord avec les données expérimentales. La courbe théorique ne converge plus vers un retard de -90° mais vers une valeur de -135°. Notons qu'ici aussi, la longueur obtenue est plus importante que la taille caractéristique d'atténuation calculée à partir des données du fabriquant qui est de 0.5 μm.

La prise en compte de la taille non nulle de la zone de chauffage permet donc de décrire plus précisément les résultats expérimentaux obtenus. Néanmoins, aux fréquences élevées, l'asservissement du laser sur la cavité de mesure n'est plus suffisamment robuste, et pour pouvoir valider les résultats précédents, il faudrait prolonger les mesures à plus hautes fréquences. Du point de vue du modèle théorique, ce prolongement des mesures nécessiterait une modélisation plus poussée des effets photothermiques dans les couches diélectriques qui sont en réalité un milieu stratifié beaucoup plus complexe que la description précédente ne le laisse paraître.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce manuscrit une étude expérimentale et théorique des propriétés d'une cavité à miroir mobile réalisée avec un micro-résonateur mécanique. Le miroir est constitué d' un traitement diélectrique à faibles pertes déposé à la surface d'une structure en silicium de taille sub-millimétrique. Ce dispositif permet de construire des cavités optiques de grande finesse et de mesurer avec une très grande sensibilité les fluctuations de position du micro-résonateur. Nous avons ainsi observé le spectre de bruit thermique du résonateur sur une plage de fréquence s'étendant jusqu'à quelques MHz. A cause des dimensions du résonateur, ce spectre est beaucoup plus simple et présente bien moins de modes propres de vibration que celui d'un miroir traditionnel. En appliquant une force électrostatique sur le résonateur, on a également testé sa réponse mécanique et mis en œuvre un dispositif de friction froide permettant de refroidir un mode propre de vibration. L'utilisation d'un tel micro-résonateur permet aussi d'exacerber les effets de la pression de radiation, en augmentant la susceptibilité mécanique du miroir. On a ainsi mis en évidence un premier effet classique de la pression de radiation en désaccordant la cavité : le couplage entre le champ et le mouvement du résonateur modifie sa dynamique et permet notamment de réduire sa température effective.

Le cœur du montage est une cavité Fabry-Perot de quelques millimètres de long, dont le miroir arrière est déposé sur un micro-résonateur obtenu par gravure sèche d'un échantillon multicouches en silicium. De forme simple (poutre, plongeoir, disque), il a des dimensions transverses de plusieurs centaines de microns et une épaisseur de 60 microns. Ses déplacements sont lus avec un faisceau laser ayant un col de 60 μm ; les finesses obtenues, jusqu'à 30 000 environ, ont permis d'obtenir une sensibilité limitée uniquement par le bruit de photon du faisceau autour du MHz, à un niveau de $4 \times 10^{-19}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$.

Le faisceau lumineux servant à la mesure est produit par un laser YAG commercial. Il est asservi en intensité et une cavité triangulaire assure un filtrage spatial du faisceau envoyé vers la cavité de mesure. L'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité est assuré par une technique de modulation-démodulation de la phase du faisceau laser. Ce procédé permet d'avoir accès à la quadrature de phase du faisceau réfléchi par la cavité, qui est directement proportionnelle aux fluctuations de sa longueur. L'asservissement en température de la cavité de mesure permet d'une part de stabiliser ses dérives thermiques, d'autre part de changer sa longueur par un effet de dilatation afin d'ajuster sa fréquence de résonance avec celle du faisceau laser. Pour gagner encore en stabilité, la cavité de mesure est placée dans une enceinte à vide. Le micro-miroir est monté sur un dispositif de translation pour contrôler précisément son positionnement par rapport à l'axe optique de la cavité, tout en assurant une grande stabilité mécanique à l'ensemble.

Nous avons mesuré sur une large plage de fréquences, de 0 à 4 MHz, le spectre de bruit thermique du micro-miroir, ce qui a permis d'étudier en détail ses modes propres de vibration.

Le micro-résonateur présente des modes bien espacés en fréquence, une vingtaine environ sur la plage étudiée, avec un intervalle de plusieurs centaines de kHz entre chaque mode. Ceux-ci ont des masses effectives très faibles, jusqu'à 100 μg environ, ce qui représente une réduction par un facteur 1000 par rapport aux valeurs mesurées sur un miroir de géométrie plus traditionnelle. La hauteur des pics de bruit thermique est supérieure à $10^{-15}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ pour les plus élevés.

On a observé dans l'enceinte à vide l'influence de la pression sur les facteurs de qualité mécanique des modes propres. Utiliser le résonateur sous vide permet de réduire les pertes par émission d'ondes acoustiques dans l'air. Nous avons ainsi obtenu des facteurs de qualité allant jusqu'à 15 000. On a mesuré des dépendances du taux d'amortissement avec la pression différentes selon les modes propres : linéaire pour les modes à basse fréquence et en racine carrée pour un mode à plus haute fréquence présentant une structure spatiale de taille comparable à la longueur d'onde acoustique.

On a également pu observer l'influence de la pression sur le bruit d'indice. Les fluctuations du chemin optique dans la cavité sont proportionnelles à celles du nombre de particules présentes dans le faisceau. Celles-ci croissent avec la pression ; en pratique, on a constaté que ce bruit n'est plus limitant pour des pressions inférieures à 50 mbar et on a constaté qu'il peut encore être réduit en remplaçant l'air par un gaz plus léger comme l'hélium.

En déplaçant l'axe optique de la cavité à la surface du micro-résonateur, on a reconstruit point par point la structure spatiale des principaux modes propres de vibration du résonateur, et comparé les profils obtenus à ceux prédits par une simulation par éléments finis. Cette étude, combinée avec les résultats de la simulation, a permis d'identifier sans ambiguïté les différents modes propres du micro-miroir.

On a montré qu'on peut exercer sur le résonateur une force électrostatique en approchant une pointe métallique par l'arrière du miroir et en appliquant simplement une différence de potentiel entre le résonateur et la pointe. Des tensions modulées de l'ordre de quelques volts permettent d'exercer une force induisant des déplacements d'amplitude considérable, de l'ordre du picomètre, bien supérieure au bruit thermique du micro-résonateur. On peut mesurer la susceptibilité du résonateur en modulant cette force électrostatique à une fréquence voisine d'une résonance mécanique. Les résultats sont en excellent accord avec les spectres de bruit thermique mais nous avons également mis en évidence un phénomène d'interférence destructive entre la réponse mécanique d'un mode particulier et celle du fond constitué par les réponses non résonnantes de l'ensemble des autre modes du résonateur. On a ainsi observé à une fréquence donnée une insensibilité à la force appliquée qui pourrait être utile pour s'affranchir du bruit d'action en retour dans les mesures optiques de déplacements. Enfin, on a mis en œuvre un processus de refroidissement par friction froide en appliquant une force électrostatique proportionnelle à la vitesse du mode propre, déduite de la mesure optique de position. On a observé des réductions de température par un facteur 60 environ.

La très faible masse des micro-miroirs les rend très sensibles aux effets de la pression de radiation. On a observé expérimentalement pour la première fois un effet dynamique de la pression de radiation, qui apparaît dans une cavité optique désaccordée. Contrairement à la situation à résonance, la force de pression de radiation que subit le micro-résonateur dans une cavité désaccordée est proportionnelle à ses fluctuations de position. Ceci modifie sa dynamique, et peut, selon le signe du désaccord, compenser ou amplifier son mouvement, en particulier ses fluctuations thermiques. Il s'agit d'un effet de couplage dynamique entre la lumière dans la cavité et le mouvement du résonateur, car il n'existe que lorsque le temps de stockage des photons dans la cavité est comparable à la période d'oscillation mécanique du

mode propre. On a étudié la dépendance de cet effet avec le désaccord de la cavité et avec l'intensité lumineuse et on a vérifié qu'il était compatible avec un modèle prenant en compte uniquement les effets de la pression de radiation. On a ainsi obtenu des températures effectives de l'ordre d'une dizaine de kelvins. On a étudié cet effet dynamique sur plusieurs modes du résonateur et on vérifié que l'efficacité de la réduction de température varie d'un mode à l'autre, selon l'écart entre la période d'oscillation du mode et le temps de stockage de la cavité. Cela signifie en particulier que le résonateur n'est plus globalement dans un équilibre thermodynamique. En augmentant la puissance incidente sur la cavité, on a également observé une instabilité dynamique du système pour des désaccords positifs. En faisant varier le désaccord et la puissance incidente, on a pu cerner la zone d'instabilité, et vérifier qu'elle était bien due à la pression de radiation.

Ces résultats montrent qu'il est possible de réaliser des micro-miroirs ayant une faible masse tout en conservant des facteurs de qualité mécanique et optique importants. L'utilisation de tels dispositifs exacerbe les effets de la pression de radiation, rendant ces objets très prometteurs pour la mise en évidence d'effets classiques ou quantiques de la pression de radiation dans des cavités optiques de grande finesse.

On a vu que la mesure optique des déplacements présentait une très grande sensibilité, suffisante en principe pour observer les fluctuations de point zéro du résonateur mécanique. Du fait des contraintes imposées par la masse optique, les fréquences de résonance mécanique sont voisines du MHz, ce qui signifie qu'il est nécessaire d'abaisser la température jusqu'à 50 μK pour atteindre ce régime. Pour cela, on a mis en œuvre deux types de refroidissement du micro-résonateur : la friction froide et le refroidissement intracavité, qui ont tous deux permis d'obtenir des température voisines de la dizaine de kelvins en partant de la température ambiante. On peut donc envisager d'atteindre le régime quantique en combinant ce type de refroidissement avec un refroidissement passif par cryogénie.

Le travail réalisé au cours de cette thèse a donc démontré la faisabilité d'une expérience visant à atteindre et à observer le régime quantique d'un oscillateur mécanique macroscopique. Si la sensibilité de la mesure optique est d'ores et déjà suffisante pour voir les fluctuations quantiques de point zéro de notre micro-miroir, un point clé pour atteindre cet objectif est d'augmenter la dynamique des résonances mécaniques du miroir de façon à pouvoir le refroidir encore plus efficacement par les méthodes que nous avons mises au point. L'amélioration des facteurs de qualité mécanique est donc une première direction dans laquelle il faut poursuivre nos efforts ; elle peut être assurée en changeant de matériau et en utilisant un dispositif plus élaboré de suspension du résonateur, qui permettrait de le découpler du reste de l'échantillon.

Enfin, la prochaine étape importante consiste à placer la cavité dans un cryostat pour partir d'une température cryogénique. On s'attend à ce que les facteurs de qualité mécaniques soient augmentés à basse température, ce qui facilitera l'observation des fluctuations de l'oscillateur dans son état fondamental. De plus, la réduction du bruit thermique devrait permettre dans un futur proche l'observation expérimentale d'effets quantiques de la pression de radiation.

Bibliographie

[1] D. Rugar, H.J. Mamin et P. Guethner, "*Improved fiber-optic interferometer for atomic force microscopy*", Appl. Phys. Lett. **55**, 2588 (1989). 1

[2] D. Rugar, R. Budakian, H.J. Mamin et B.W. Chui, "*Single spin detection by magnetic resonance force microscopy*", Nature **430**, 329 (2004). 1

[3] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio et G. Ruoso, "*Measurement of the Casimir Force between Parallel Metallic Surfaces*", Phys. Rev. Lett. **88**, 041804 (2002). 1, 212

[4] C. Bradaschia *et al*, "*The VIRGO project : A wide band antenna for gravitational wave detection*", Nucl. Instrum. Meth. A **289**, 518 (1990). 1, 25, 93

[5] A. Abramovici *et al*, "*The Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*", Science **256**, 325 (1992). 1, 4, 25, 93

[6] C.M. Caves, "*Quantum-Mechanical Radiation Pressure Fluctuations in an Interferometer*", Phys. Rev. Lett. **45**, 75 (1980). 1, 59

[7] M.T. Jaekel et S. Reynaud, "*Quantum limits in interferometric measurements*", Europhys. Lett. **13**, 301 (1990). 1, 60, 213

[8] C. Fabre, M. Pinard, S. Bourzeix, A. Heidmann, E. Giacobino et S. Reynaud, "*Quantum-noise reduction using a cavity with a movable mirror*", Phys. Rev. A **49**, 1337 (1994). 1, 57, 194, 195

[9] M. Pinard, C. Fabre et A. Heidmann, "*Quantum-nondemolition measurement of light by a piezoelectric crystal*", Phys. Rev. A **51**, 002443 (1995). 1, 58

[10] A. Heidmann, Y. Hadjar et M. Pinard, "*Quantum nondemolition measurement by optomechanical coupling* ", App. Phys. B **64**, 173 (1997). 1, 58

[11] J. Zhang, K. Peng et S.L. Braunstein, "*Quantum-state transfer from light to macroscopic oscillator* ", Phys. Rev. A **68**, (2003) 013808. 1

[12] M. Pinard, A. Dantan, D. Vitali, O. Arcizet, T. Briant et A. Heidmann ,"*Entangling movable mirrors in a double cavity system*", Europhys. Lett. **72**, 747 (2005). 1

[13] O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, A. Heidmann, J. -M. Mackowski, C. Michel, L. Pinard, O. Francais et L. Rousseau, "*High-sensitivity optical monitoring of a micro-mechanical resonator with a quantum-limited optomechanical sensor*", Phys. Rev. Lett. **97**, 133601 (2006). 1, 3

[14] Yassine Hadjar, "*Etude du couplage optomécanique dans une cavité optique de grande finesse ; observation du mouvement brownien d'un miroir*", Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (1998). 1, 2, 58, 93, 94, 109, 114, 130

[15] P.F. Cohadon, "*Bruit thermique et effets de la pression de radiation dans une cavité optique de grande finesse* ", Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (2000). 1, 32, 49, 93, 130, 180

[16] T. Briant, "*Caractérisation du couplage optomécanique entre la lumière et un miroir : bruit thermique et effets quantiques*", Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (2004). 1, 49, 52, 53, 93, 103, 130, 167

[17] M.D. LaHaye, O. Buu, B. Camarota et K.C. Schwab, "*Approaching the Quantum Limit of a Nanomechanical Resonator*", Science **304**, 74 (2004). 1, 16, 17

[18] R.G. Knobel et A.N. Cleland, "*Nanometre-scale displacement sensing using a single electron transistor*", Nature **424**, 291 (2003). 1, 16, 17, 18

[19] X.M.H. Huang, C.A. Zorman, M. MEhregany et M.L. Roukes, "*Nanodevice motion at microwave frequencies*", Nature **421**, 496 (2003) 1

[20] P.-F. Cohadon, O. Arcizet, T. Briant, A. Heidmann et M. Pinard, "*Optical monitoring and cooling of a micro-mechanical oscillator to the quantum limit*", Proc. SPIE **5846**, 124 (2005). 2, 19

[21] P.-F. Cohadon, A. Heidmann et M. Pinard, "*Cooling of a mirror by radiation pressure*", Phys. Rev. Lett. **83**, 3174 (1999).

[22] P. Bushev, D. Rotter, A. Wilson, F. Dubin, C. Becher, J. Eschner, R. Blatt, V. Steixner, P. Rabl et P. Zoller, "*Feedback Cooling of a Single Trapped Ion*", Phys. Rev. Lett. **96**, 043003 (2006). 2, 31, 32, 35, 179, 180

[23] T. Briant, P.F. Cohadon, A. Heidmann et M. Pinard, "*Optomechanical characterization of acoustic modes in a mirror*" Phys. Rev. A **68**, 033823 (2003). 2, 35

[24] F. Marty, L. Rousseau, B. Saadany, B. Mercier, O. Francais, Y. Mita et T. Bourouina, "*Advanced Etching of Silicon Based on Deep Reactive Ion Etching For Silicon High Aspect Ratio Micro Structures And Three-Dimensional Micro- And Nano-Structures*", Microelectronics Journal **36**, 673 (2005). 3, 147, 160, 162, 177
3, 62

[25] R.W.P. Drever *et al.* , "*A Gravity-Wave Detector Using Optical Cavity Sensing*", in *Proceedings of the Ninth International Conference on General Relativity and Gravitation, Jena, Italy*, ed. E.Schmutzer (Cambridge U.P., 1983) p. 265. 3, 75, 95, 98, 131

[26] R.W.P. Drever *et al.*, "*Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator*", Appl. Phys. B **31**, 97 (1983). 3, 75, 98, 131

[27] O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard et A. Heidmann, "*Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror*", Nature **444**, 71 (2006). 4, 19, 185, 196

[28] S. Gigan, H.R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J B. Hertzberg, K.C. Schwab, D. Bäuerle, M. Aspelmeyer et A. Zeilinger, "*Self-cooling of a micromirror by radiation pressure*", Nature **444**, 67 (2006). 4, 187, 188

[29] T. Corbitt, D. Ottaway, E. Innerhofer, J. Pelc et N. Mavalvala,"*Measurement of radiation-pressure-induced optomechanical dynamics in a suspended Fabry-Perot cavity*", Phys. Rev. A **74**, 021802(R) (2006). 4, 187, 193

[30] M. Hossein-Zadeh, H. Rokhsari, A. Hajimiri et K.J. Vahala, "*Characterization of a radiation-pressure-driven micromechanical oscillator*", Phys. Rev. A **74**, 023813 (2006). 4, 187

[31] M. De Rosa, L. Conti, M. Cerdonio, M. Pinard et F. Marin "*Experimental Measurement of the Dynamic Photothermal Effect in Fabry-Perot Cavities for Gravitational Wave Detectors*", Phys. Rev. Lett. **89**, 237402 (2002). 4, 223, 226, 237

[32] M. De Rosa, F. Marin, F. Marino, O. Arcizet, A. Heidmann et M. Pinard, "*Experimental investigation of dynamic photo-thermal effect*", Class. Quant. Grav. **23**, S259 (2006). 4

[33] http ://www.ego-gw.it/ILIAS-GW/ 4, 223

[34] R. Flaminio, A. Freise, A. Gennai, P. Hello, P. La Penna, G. Losurdo, H. Lueck, N. Man, A. Masserot, B. Mours, M. Punturo, A. Spallicci et A. Vicer, "*Advanced Virgo White Paper*", http ://wwwcascina.virgo.infn.it/advirgo/docs/whitepaper.pdf 4

[35] M. Cerdonio, L. Conti, A. Heidmann et M. Pinard, "*Thermoelastic effect at low temperature and quantum limits in dispacement measurements*", Phys. rev. D **63**, 082003 (2001). 4, 225, 226, 234, 235

[36] F. Acernese *et al*, "*The present status of the VIRGO central interferometer*", Class. Quantum Grav. **19**, 1421 (2002). 4, 25, 69, 84

[37] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique Quantique, tome 1* (Hermann, 1997) 6, 22

[38] A. Einstein, "*Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*", Annalen der Physik **17**, 549 (1905). 10

[39] H.B. Callen et T.A. Welton, "*Irreversibility and Generalized Noise*", Phys. Rev. **83**, 34 (1951). 10

[40] H. Nyquist, "*Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors*", Phys. Rev. **32**, 110 (1928). 10

[41] L. Landau et E.M. Lifshitz, *Physique statistique* (Mir, 1967). 10, 11

[42] R. Kubo, "*The fluctuation-dissipation theorem*", Rep. Prog. Phys. **29**, 255 (1966). 10

[43] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino et C. Fabre, "*Quantum fluctuations in Optical Systems*", Progress in Optics **XXX**, ed. E. Wolf (North-Holland, 1992). 11, 12, 22, 42, 106

[44] P. Mohanty, D.A. Harrington, K.L. Ekinci, Y.T. Yang, M.J. Murphy et M.L. Roukes, "*Intrinsic dissipation in high-frequency micromechanical resonators*", Phys. Rev. B **66**, 085416 (2002). 14, 16, 36

[45] A. Gaidarzhy, Z. Zolfagharkhani, R.L. Badzey et P. Mohanty, App. Phys. Lett. **86**, 254103 (2005). 16, 17, 18

[46] K.L. Ekinci et M.L. Roukes, "*Nanoelectromechanical systems*", Rev. Sci. Instr. **76**, 061101 (2005). 17

[47] H.R. Boehm, S. Gigan, G. Langer, J. Hertzberg, F. Blaser, D. Baeuerle, K.C. Schwab, A. Zeilinger et M. Aspelmeyer, "*A high-reflective high-Q micromechanical Bragg-mirror*", arxiv :cond-mat/0607771 (2006). 16, 19, 29, 212

[48] D. Kleckner, W. Marshall, M.J.A. de Dood, K.N. Dinyari, B.J. Pors, W.T.M. Irvine et D. Bouwmeester, "*High Finesse Opto-Mechanical Cavity with a Movable Thirty-Micron-Size Mirror*", Phys. Rev. Lett. **96**, 173901 (2006). 16, 19, 29

[49] J. G. E. Harris, B. M. Zwickl et A. M. Jayich, "*Stable, mode-matched, medium-finesse optical cavity incorporating a micromechanical cantilever*", arxiv :physics/0605141 (2006). 16, 19, 212

[50] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Introduction à l'électrodynamique quantique* (Edition du CNRS, 1987). 22

[51] S. Reynaud et A. Heidmann, "*A semiclassical linear input-output transformation for quantum fluctuations*", Opt. Comm. **71**, 209 (1989). 22, 42

[52] C. Fabre et S. Reynaud, "*Fundamental Systems in Quantum Optics*", 1990 Les Houches Lectures, eds. J. Dalibard, J.M. Raymond et J. Zinn-Justin, (North-Holland, 1992) p. 675. 22, 24, 42

[53] E.P. Wigner, "*On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*", Phys. Rev. **40**, 749 (1932). 22

[54] A. Achkin, J.M. Dziedzic, J.E. Bjorkholm et S. Chu, "*Observation of a single beam gradient force for dielectric particles*", Opt. Lett. **11**, 288 (1986). 27

[55] H.W. Kogelnik et T. Li, "*Laser Beams and Resonators*", Appl. Opt. **5**, 1550 (1966). 28, 49, 126

[56] J.M.W. Milatz et J.J. Van Zolingen, "*The Brownian motion of electrometers*", Physica (Amsterdam) **19**, 181 (1953). 31, 33, 35

[57] J.M.W. Milatz, J.J. Van Zolingen et B.B. Van Ipere, "*The reduction in the Brownian motion of electrometers*", Physica (Amsterdam) **19**, 195 (1953). 31, 33, 35

[58] J. Mertz, O. Marti et J. Mlynek, "*Regulation of a microcantilever response by force feedback*", Appl. Phys. Lett. **62**, 2344 (1993). 31

[59] F. Grassia, J.-M. Courty, S. Reynaud et P. Touboul, "*Quantum theory of fluctuations in a cold damped accelerometer*", Eur. Phys. J. D **8**, 101 (2000). 31, 33

[60] M. Pinard, P.F. Cohadon, T.Briant et A. Heidmann, "*Full mechanical caracterization of a cold damped mirror*", Phys. Rev. A **63**, 012808 (2000). 32, 54, 183, 209, 211

[61] F. Grassia, "*Fluctuations quantiques et thermiques dans les transducteurs électromécaniques*", Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (1998). 33

[62] J.-M. Courty, A. Heidmann et M. Pinard, "*Quantum limit of cold damping with opto-mechanical coupling*", Eur. Phys. J. D **17**, 399 (2001). 34

[63] B. D'Urso, B. Odom et G. Gabrielse, "*Feedback Cooling of a One-Electron Oscillator*", Phys. Rev. Lett. **90**, 043001 (2003). 35

[64] O. Hahtela, K. Nera et I. Titonnen, "*Position measurement of a cavity mirror using polarization spectroscopy*", J. Opt. A : Pure Appl Opt. **6**, S115 (2004). 36

[65] X. Liu, J.F. Vignola, D.M. Photiadis, A. Sarkissian, B.H. Houston, R.D. Merithew et R.O. Pohl, "*Low temperature study of loss mechanisms of mechanical oscillators*", Physica-B **316**, 393 (2002). 36

[66] R.E. Mihailovich et N.C. MacDonald, "*Dissipation measurements of vacuum-operated single-crystal silicon microresonators*", Sens. Actuators A **50**, 199 (1995). 36

[67] R. Lifshitz et M.L. Roukes, "*Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems*", Phys Rev. B **61**, 5600 (2000). 36

[68] W.K. Hensinger, D.W. Utami, H.-S. Goan, K. Schwab, C. Monroe et G.J. Milburn, "*Ion trap transducers for quantum electromechanical oscillators*", Phys. Rev. A **72**, 041405(R) (2005).

[69] A. Dorsel, J.D. McCullen, P. Meystre et E. Vignes, "*Optical bistability and mirror confinement induced by radiation pressure*", Phys. Rev. Let. **51**, 1550 (1983). 57, 187

[70] L.Landau et E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité* (Mir, 1990). 45, 237, 239

[71] R.D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape* (Krieger Publishing compagny, 2001). 45

[72] G.Grynberg, A.Aspect et C. Fabre, *Introduction aux lasers et à l'optique quantique* (Edition du CNRS, 1987). 41

[73] M. Pinard, Y. Hadjar et A. Heidmann, "*Effective mass in quantum effects of radiation pressure* ", Eur. Phys. J. D **7**, 107 (1999). 47, 49, 50

[74] K. Yamamoto, S. Otsuka, M. Ando, K. Kawabe et K. Tsubono, "*Experimental study of thermal noise caused by an inhomogeneously distributed loss*", Phys. Lett. A **280**, 289 (2001). 49

[75] P. Hello, "*Optical Aspect of interferometric gravitational-wave detectors*", Progress in Optics **XXXVIII**, ed. E. Wolf (North-Holland, 1998). 55, 155, 227

[76] J.-M. Courty, A. Heidmann et M. Pinard, "*Quantum locking of mirrors in interferometers*", Phys. Rev. Lett. **90**, 083601 (2003). 55

[77] M. Xiao, L. Wu et J. Kimble, "*Precision Measurement beyond the Shot-Noise Limit*", Phys. Rev. Lett. **59**, 278 (1987). 55, 60

[78] P. Grangier, R.E. Slusher, B. Yurke et A. LaPorta, "*Squeezed-Light-Enhanced Polarization Interfermeter*", Phys. Rev. Lett. **59**, 2153 (1987). 60

[79] H.J. Kimble, Y. Levin, A.B. Matsko, K.S. Thorne et S.P. Vyatchanin, "*Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics*", Phys. Rev. D **65**, 022002 (2002). 55, 60

[80] S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino et A. Heidmann, "*Photon noise reduction by passive optical bistable systems*", Phys. Rev. A **40**, 1440-1446 (1989). 56, 58

[81] O. Arcizet, T.Briant, A. Heidmann et M. Pinard, "*Beating quantum limits in an optomechanical sensor by cavity detuning*", Phys. Rev. A **73**, 033819 (2006). 60, 213

[82] M.J. Collett et D.F. Walls, "*Squeezing spectra for nonlinear optical systems*", Phys. Rev. A **32**, 2887 (1985). 56

[83] R.M. Shelby, M.D. Levenson, D.F. Walls et A. Aspect, "*Generation of squeezed states of light with a fiber-optic ring interferometer*", Phys. Rev. A **33**, 4008 (1986). 56

[84] P. Grangier, J.F. Roch et S. Reynaud, "*Quantum correlations and non-demolition measurements using two-photon non-linearities in optical cavities*", Opt. Commun. **72**, 387 (1989).

[85] K. McKenzie, D.A. Shaddock, D.E. McClelland, B.C. Buchler et P.K. Lam, "*Experimental Demonstration of a Squeezing-Enhanced Power-Recycled Michelson Interferometer for Gravitational Wave Detection*", Phys. Rev. Lett. **88**, 231102 (2002). 60

[86] Y. Levin, "*Internal thermal noise in the LIGO test masses : A direct approach*", Phys. Rev. D **57**, 659 (1998). 69

[87] F. Beauville, J.M. Mackowski, N. Morgado, L. Pinard et A. Remillieux, "*The Virgo large mirrors : a challenge for low loss coatings* ", Class. Quant. Grav. **21**, S935 (2004). 69

[88] A. Dubois, *"Phase-map measurements by interferometry with sinusoïdal phase modulation and four integrated buckets"*, J. Opt. Soc. Am. A **18**, 309 (2001). 70, 80

[89] Virgo Physics Book, http ://wwwcascina.virgo.infn.it/vpb/ 80

[90] V. Loriette, "*Miroirs et ondes gravitationnelles*", Pour la science, n°**275** (2000). 80

[91] Y. Rocard, *Dynamique générale des vibrations* (Masson, 1960). 163

[92] F. Cleva, M. Taubmann, C.N. Man et A. Brillet, "*VIRGO laser source*", Proc. 2nd Edoardo Amaldi Conf. (World Scientific, 1997). 99

[93] T.J. Kane et R.L. Byer, "*Monolithic, unidirectional single-mode Nd :YAG ring laser*", Opt. Lett. **10**, 65 (1985). 99

[94] D.A. Shaddock, M.B. Gray et D.E. McClelland, "*Frequency locking of a laser to an optical cavity by use of spatial mode interference*", Opt. Lett. **24**, 1499 (1999). 124

[95] E.D. Black, "*An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization*", Am. J. Phys. **69**, 79 (2001).

[96] K. Jacobs, I. Tittonen, H.M. Wiseman et S. Schiller "*Quantum noise in the position measurement of a cavity mirror undergoing Brownian motion*", Phys. Rev. A **60**, 538 (1999). 143

[97] D.R. Lide, *Handbook of Chemistry and Physics* , 78ème édition (CRC Press, 1997). 151

[98] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique physique* (CNRS Editions, 2001).

[99] L. Landau et E.M. Lifshitz, *Mecanique des fluides* (Mir, 1989). 164, 165

[100] A. Brillet, "*Interferometric gravitational wave antennae*", Ann. Phys. Fr. **10** 219 (1985). 166

[101] R. Takajaschi, Y. Saito, M. Fukuschima, M. Ando, K. Arai, D. Tatsumi, G. Heinzel, S. Kawamura, T. Yamazaki et S. Morowaki, "*Direct Measurement of residual gas effect on the sensitivity in TAMA300* ", J. Vac. Sci. Technol. A **20**, 1237 (2002).

[102] A. Lambrecht, E. Giacobino et S. Reynaud "*Atomic number fluctuations in a falling cold atom cloud* ", Quant. Sem. Optics **8**, 457 (1996). 152

[103] B. Le Foulgoc, T. Bourouina, O. Le Traon, A. Bosseboeuf, F. Marty, C. Breluzeau, J.-P. Grandchamp et S. Masson, "*Highly decoupled single-crystal silicon resonators : an approach for the intrinsic quality factor*", J. Micromech. Microeng **16**, S45 (2006). 161, 166

[104] C. Zener, "*Internal Friction in Solids. I. Theory of Internal Friction in Reeds*", Phys. Rev. **52**, 230 (1937). 166

[105] C. Zener, "*Internal Friction in Solids II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction*", Phys. Rev. **53**, 90 (1938). 166

[106] T. Caniard *et al.*, en préparation. 178

[107] T. Briant, M. Cerdonio, L. Conti, A. Heidmann, A. Lobo et M. Pinard, "*Thermal and back-action noises in dual-sphere gravitational-wave detectors*", Phys. Rev. D **67**, 102005 (2003). 178

[108] S. Hudlet, "*Etude des propriétés électrostatiques de surface par Microscopie à Force Atomique : l'exemple de la triboélectricité*", Thèse de l'Université Paris VII (1997). 173

[109] B.S. Sheard, M.B. Gray, C.M. Mow-Lowry, D.E. McClelland et S.E. Whitcomb,"*Observation and characterization of an optical spring*", Phys. Rev. **A 69**, 051801 (2004). 187, 193

[110] T. J. Kippenberg, H. Rokhsari, T. Carmon, A. Scherer et K. J. Vahala, "*Analysis of Radiation-Pressure Induced Mechanical Oscillation of an Optical Microcavity*", Phys. Rev. Lett. **95**, 033901 (2005). 187

[111] C. Hohberger Metzger et K. Karrai, "*Cavity cooling of a microlever*", Nature **432**, 1002 (2004). 29, 187, 188, 212

[112] A. Naik, O. Buu, M.D. LaHaye, A.D. Armour, A.A. Clerk, M.P. Blencowe et K.C. Schwab,"*Cooling a nanomechanical resonator with quantum back-action* ", Nature **443**, 193 (2006). 187, 188, 189

[113] V.B. Braginsky, A.B. Manukin et M. Tikhonov "*Investigation of dissipative ponderomotive effects of electromagnetic radiation*", Sov. Phys. JETP **31**, 829 (1970). 186, 193

[114] H.Haken, in *Encyclopedia of Physics XXV*, edité par S.Flügge (Spinger-Verlag, 1970). 194, 195

[115] H.B. Chan, V.A. Aksyuk, R.N. Kleinman, D.J. Bishop et F. Capasso, "*Nonlinear micromechanical Casimir oscillator*", Phys. Rev. Lett. **87**, 211801 (2001). 212

[116] A. Buonanno et Y. Chen, "*Signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors as optical springs*", Phys. Rev. D **65**, 042001 (2002). 186, 213

[117] A. Buonanno et Y. Chen, "*Quantum noise in second generation, signal-recycled laser interferometric gravitational-wave detectors*", Phys. Rev. D **64**, 042006 (2001). 213

[118] V.B. Braginsky, M.L. Gorodetsky et S.P. Vyatchanin, "*Thermodynamical fluctuations and photothermal shot noise in graviational wave antennae*", Phys. Lett. A **266**, 1 (1999) (attention à la convention sur la définition des spectres de bruit qui introduit un facteur 2 supplémentaire). 226, 234, 237

[119] P. Fleury et J.P. Mathieu, *Chaleur. Thermodynamique. Etats de la matière.* (Editions Eyrolles, 1954). 224

[120] M. Cerdonio *et al* "*The ultracryogenic gravitational-wave detector AURIGA*", Class. Quant. Grav. **19**, 1911 (2002). 227, 229

[121] F. Marino, M. De Rosa et F. Marin, "*Canard orbits in Fabry-Perot cavities induced by radiation pressure and photothermal effects*", Phys. Rev. E **73**, 026217 (2006). 224

[122] L. Conti, M. De Rosa et F. Marin, "*High-spectral-purity laser system for the AURIGA detector optical readout*", J. Opt. Soc. Am. B **20**, 462 (2003). 227

[123] S. Grafström, P. Schuller, J. Kowalski et R. Neumann, "*Thermal expansion of scanning tunneling microscopy tips under laser illumination*", J. Appl. Phys. **83**, 3453 (1998).

[124] E.D. Black, I.S. Grudinin, S.R. Rao et K.G. Libbrecht, "*Enhanced photothermal displacement spectroscopy for thin-film characterization using a Fabry-Perot resonator*", J. Appl. Phys. **95**, 7655 (2004). 241

Résumé

On présente une expérience de mesure optique ultrasensible des vibrations mécaniques d'un micro-miroir inséré dans une cavité Fabry-Perot de grande finesse. Le micro-miroir est constitué d'un traitement optique présentant peu de pertes déposé à la surface d'un résonateur de taille sub-millimétrique en silicium. On a mesuré le bruit thermique du résonateur sur une large plage de fréquences et déterminé les caractéristiques de ses modes propres de vibration : fréquence, facteur de qualité, masse effective, structure spatiale. Ces modes ont des fréquences de résonance élevées (1 MHz) et des faibles masses effectives (100 μg). On a appliqué une force électrostatique sur le micro-résonateur, ce qui a permis de tester sa réponse mécanique et de le refroidir par contrôle actif en mettant en oeuvre un processus de friction froide.

On a également mis en évidence un effet d'auto-refroidissement dû à la modification de la dynamique par la pression de radiation dans une cavité désaccordée. On a observé selon le désaccord un refroidissement et un chauffage du résonateur, qui conduit à forte puissance à une instabilité dynamique.

Ces techniques de refroidissement combinées à de la cryogénie passive devraient permettre de refroidir suffisamment le micro-résonateur pour observer son état quantique fondamental.

On présente enfin une étude expérimentale de l'effet photothermique et une mesure des dilatations induites par l'échauffement lié à l'absorption de lumière dans les traitements optiques.

Mots-clés : Micro-miroir, Oscillateur mécanique, MEMS, Etat quantique fondamental, Cavité de grande finesse, Bruit thermique, Force électrostatique, Friction froide, Pression de radiation, Refroidissement intracavité, Cavité désaccordée, Instabilité optomécanique, Effet photothermique.

Abstract

We present a very sensitive optical measurement of the mechanical vibrations of a micro-mirror inserted in a high finesse Fabry-Perot cavity. The micro-mirror is made of a low-loss dielectric coating deposited on a sub-millimetric sized silicon etched resonator. We have measured the thermal noise of the resonator over a wide frequency range and characterized its eigenmodes : frequency, effective mass, damping and spatial shape. They present high frequency resonances (1 MHz) and low effective masses (100 μg). Using an electrostatic force, we have tested its mechanical response and cooled the resonator using a cold damping technique.

We have also demonstrated a novel cooling mechanism, induced by the radiation pressure in a detuned cavity. Depending on the detuning, we have observed a cooling or a heating of the resonator, which can lead to an optomechanical instability at large intracavity intensity.

These cooling mechanisms, combined with passive cryogenic techniques, may lead to a sufficient cooling in order to observe the ground state of the mechanical oscillator.

We also present an experimental study of the photothermal effect and a measurement of the thermal expansion induced by the light absorbed in the dielectric layer.

Key words : Micro-mirror, Mechanical oscillator, MEMS, Quantum ground state, High finesse optical cavity, Thermal noise, Electrostatic force, Cold damping, Radiation-pressure cooling, Detuned cavity, Optomechanical instability, Photothermal effect.