



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude du classement et de l'identification topologique de systèmes non-linéaires à l'aide d'une méthode de décomposition structurelle

Andréa Levy

► **To cite this version:**

Andréa Levy. Contribution à l'étude du classement et de l'identification topologique de systèmes non-linéaires à l'aide d'une méthode de décomposition structurelle. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1971. Français. NNT: . tel-00176337

**HAL Id: tel-00176337**

**<https://theses.hal.science/tel-00176337>**

Submitted on 3 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention

du titre de Docteur de 3<sup>e</sup> Cycle

Spécialité : AUTOMATIQUE

par

**Andréa LEVY**

Ingénieur E. P. U. C. (Rio de Janeiro - BRÉSIL)

---

## CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU CLASSEMENT ET DE L'IDENTIFICATION TOPOLOGIQUE DE SYSTÈMES NON-LINÉAIRES A L'AIDE D'UNE MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION STRUCTURELLE

Soutenu le 8 Mars 1971 devant la Commission d'Examen

MM.	J. LAGASSE	Président
	C. MIRA	} Examineurs
	G. GIRALT	
	A. L. PEREIRA	
	A. FOSSARD	

## A V A N T - P R O P O S

---

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales du Centre National de la Recherche Scientifique, dirigé par Monsieur le Professeur J. LAGASSE, qu'il nous soit permis de lui exprimer ici toute notre gratitude pour l'accueil bienveillant qu'il nous a réservé et pour les moyens matériels mis à notre disposition.

Nous tenons à remercier très vivement Monsieur GIRALT, Directeur de Recherche au C. N. R. S. pour la confiance qu'il nous a témoignée et pour l'intérêt qu'il a manifesté tout au long de notre étude.

Que Monsieur MIRA, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse trouve ici l'expression de notre reconnaissance pour la bienveillante attention qu'il a portée à nos travaux.

Nous remercions Monsieur FOSSARD, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace du grand honneur qu'il nous a fait en acceptant malgré ses lourdes tâches de participer au Jury de notre Thèse.

Il est difficile d'exprimer tout ce que nous devons à Monsieur Amaranto LOPES PEREIRA, Professeur à la COPPE de l'Université Fédérale de Rio de Janeiro qui en assurant la direction de notre travail, a largement contribué à l'élaboration de ce mémoire. Nous tenons à lui exprimer notre profonde gratitude pour l'aide constante et judicieuse qu'il nous a dispensée tout au long de cette étude.

Nous ne saurions oublier Messieurs ERSCHLER et AMOUROUX pour les innombrables discussions parfois animées mais toujours fructueuses que nous avons eues.

Que tout le Service de Documentation trouve ici l'expression de notre reconnaissance pour le soin qu'il a apporté à la réalisation matérielle de ce mémoire.

## INTRODUCTION

Parmi les problèmes qui doivent mériter aussi bien de la part du théoricien que de l'ingénieur des systèmes une attention particulière se trouvent ceux de la représentation du signal et du classement.

Le premier concernant la représentation mathématique d'un signal, comme une combinaison de signaux élémentaires, ne peut passer inaperçu de tous ceux qui s'intéressent à l'étude des attributs observables d'un système physique. Situé plus explicitement dans le domaine de la THEORIE DU SIGNAL, une des branches de la THEORIE MODERNE DES SYSTEMES [ 1 ] qui utilise le concept "d'espace de signal" [ 2 ] pour représenter et caractériser les propriétés significatives d'un signal, le problème de la représentation du signal ainsi que celui du classement et de la représentation sont à la base d'un autre problème plus connu et de plus grande envergure : celui de l'IDENTIFICATION d'un Système Physique.

Le problème du classement de son côté, intimement lié à celui de la représentation du signal, ayant pour base l'observation de l'entrée et de la sortie d'un système vu comme une "boîte noire" consiste essentiellement à déterminer parmi les classes formant une famille de systèmes donnés, celle, si elle existe, à laquelle appartient la "boîte noire".

Dans le contexte de notre travail, il n'a pas été question d'attaquer la résolution, même dans un sens restreint ou particulier, d'aucun de ces problèmes.

Néanmoins, nous avons essayé de fournir les bases indispensables à l'étude d'un problème de classement et d'identification topologique [ 3 - } v. 2 ] susceptibles d'intéresser une certaine famille de classes de systèmes dynamiques continus non-linéaires et stationnaires. En effet la détermination de la classe d'un système à structure interne inaccessible (boîte noire) présuppose la connaissance au niveau de l'analyse des propriétés structurelles externes de chacune des classes parmi lesquelles doit se trouver le système en question. D'autre part si l'on veut aller au-delà de la détermination de la classe de la "boîte noire" et songer à son identification topologique c'est-à-dire à la détermination de sa

composition interne "EQUIVALENTE", il faut connaître les propriétés structurales internes et externes d'un ensemble de structures constituées par une association donnée d'un nombre fini de composants (sous-systèmes).

Le comportement externe de ces structures est supposé le même que celui des membres de la famille de classes de systèmes à laquelle on admet qu'appartient la "boîte noire".

La partie fondamentale de notre travail de recherche a été constitué par l'étude et la détermination des propriétés structurelles externes et internes ou topologiques d'une famille de dix (10) classes de chaînes non-linéaires continues et stationnaires, composées par l'association en cascade et sans couplage interne, de blocs non-linéaires avec et sans-mémoire et de blocs linéaires continus, invariants avec le temps de dimension finie, et d'ordre non supérieur à deux. Ce travail qui en particulier, fournit l'infrastructure pour l'étude du classement et de l'Identification topologique (première étape du problème de l'identification d'un système physique) de systèmes dynamiques non-linéaires dont le comportement QUALITATIF externe puisse être considéré EQUIVALENT à celui des chaînes que nous avons pu caractériser, a été exposé dans ce mémoire à travers quatre chapitres.

Le premier, contient dans sa première partie, des rappels de quelques notions, concepts, définitions et axiomes de base de la Théorie Générale des Systèmes, que nous avons jugé utiles à la compréhension du texte. La deuxième partie focalise le problème de la "boîte noire" qui est au centre des spéculations théoriques et pratiques de notre étude. La troisième et dernière partie du premier chapitre, consacrée aux systèmes et structures qui ont fait l'objet de notre attention met en évidence toutes les caractéristiques non-linéaires utilisées et passe ainsi en revue les signaux de test qui ont été définis et choisis pour la détermination des propriétés structurelles et qualitatives des chaînes étudiées.

Le deuxième chapitre qui contient la partie la plus importante du travail, présente en détail, l'étude des propriétés structurelles externes et topologiques d'une famille de chaînes non-linéaires. La famille en question a été, compte tenu de la méthode utilisée, divisée en trois groupes que nous avons intitulé : Groupe des Relais, Groupe des saturations et Groupe des Paraboles.

Avant l'étude analytique de ces groupes, nous avons exposé le principe de la "Méthode de Décomposition Structurale" qui a été développée et appliquée par la suite, ainsi que les résultats de l'application du "test de nature" susceptible de permettre la détermination du groupe et de la classe d'une chaîne appartenant à la famille étudiée.

- Les tableaux synoptiques permettant une vision pratique et d'ensemble de toutes les chaînes des trois groupes avec un résumé de leurs propriétés structurelles, en fonction des tests utilisés et les diagrammes des réponses temporelles qui ont résultés de l'étude expérimentale, ont été rassemblés au troisième chapitre.

Enfin le quatrième chapitre montre une application de la méthode de Décomposition structurelle à la conception d'un système de régulation.





## CHAPITRE I

### GENERALITES ET PRESENTATION DU SUJET

- I. 1. Rappels de quelques concepts de base de la théorie générale des systèmes.
- I. 2. Problème de la "boîte noire".
- I. 3. Systèmes et structures.



# CHAPITRE I

## GENERALITES ET PRESENTATION DU SUJET

### I. 1. RAPPELS DE QUELQUES CONCEPTS DE BASE DE LA THEORIE GENERALE DES SYSTEMES.

#### I. 1. 1. Introduction .

La théorie des systèmes dans l'espace d'état est en train de montrer son grand intérêt dans le cas de systèmes linéaires dynamiques à dimension finie. Grâce à cette théorie, en effet, des solutions en même temps, plus élégantes, justes et précises sont apportées aux problèmes multidimensionnels et à ceux de la commande hiérarchisée entre autres. Il semble donc, tout à fait logique qu'on essaye à l'heure actuelle son extension vers les systèmes à dimension infinie et les systèmes non-linéaires. C'est pourquoi, au cours de ce travail d'analyse de structures internes de quelques classes de systèmes non-linéaires filtrés nous ferons appel à un certain nombre de notions et concepts de base extraits directement de la Théorie Moderne des Systèmes. C'est le cas en particulier des notions de systèmes, état, classement, identification, etc. qui sont assez générales et rigoureuses pour nous paraître les meilleures à apporter une unité à ce domaine.

Les systèmes non-linéaires, par opposition aux systèmes linéaires, ont une dynamique qui n'est pas régie par des équations différentielles linéaires. Tandis qu'en général, les méthodes proposées pour étudier les systèmes non-linéaires sont basées sur une linéarisation, nous pensons qu'il est utile et même nécessaire d'étudier ces systèmes en tant que tels.

En effet, le principe de superposition ne s'applique pas aux systèmes non-linéaires, il nous paraît difficile de les encadrer dans le même type d'étude que les linéaires.

D'une façon générale, deux méthodes de nature différentes peuvent être considérées, une mathématique, l'autre physique.

- La première a pour but l'étude des systèmes non-linéaires à partir d'une caractérisation mathématique de diverses classes de ces systèmes, établies en tenant compte d'un critère donné, tel que cela a été fait pour les systèmes linéaires. La connaissance des propriétés des solutions des équations correspondant à chacune de ces classes, servira de base alors à l'établissement d'un modèle du système, capable de rendre compte de son comportement global.

- En ce qui concerne la méthode physique, il s'agit : à partir de non-linéarités simples comme par exemple le relais, la saturation, le seuil, l'hystérésis, etc. de former des classes de systèmes non-linéaires caractérisés par la présence d'une non-linéarité d'un type donné. On essaye alors de trouver par l'expérience, les "attributs pertinents" aux classes en question, après quoi par un processus d'analyse on doit aboutir aux équations globales des systèmes qu'elles représentent.

Après avoir rappelé la conception de système de R.E. KALMAN, nous essayerons de montrer que l'une ou l'autre des méthodes évoquées peut-être englobée dans la Théorie Moderne des Systèmes en essayant de suivre le raisonnement de MESAROVIC' [4].

### I. 1.2. Système dynamique dans la conception de R.E. KALMAN [5] -

#### Définition (1)

Suivant R.E. KALMAN, un système dynamique  $\Sigma$  est une structure mathématique définie par le septuple :

$$\Sigma = (T, U, Y, X, \Omega, \Gamma, \Psi) \text{ avec } t \in T$$

$$x \in X$$

$$y \in Y$$

et une relation de sortie :

$$\eta(t, x) = y$$

T : Ensemble temporel ordonné

U : Ensemble des valeurs d'entrée

Y : Ensemble des valeurs de sortie

X : Ensemble des états du systèmes ( $\neq \emptyset$ )

$\Omega$  : Ensemble des fonctions d'entrée admissibles.

$\Omega = \left\{ w : T \rightarrow U \right\}$  devant répondre aux conditions de nontrivialité et de concatenation des entrées.

$\Gamma$  : Ensemble des fonctions de sortie :

$$\Gamma = \left\{ \gamma : T \rightarrow Y \right\}$$

$\varphi$  : Fonction de transition d'état :

$\left\{ \varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X \right\}$  devant répondre aux conditions de directionnalité du temps, consistance, composition et causalité.

En fait, les notions établies ci-dessus servent à dépeindre le courant de la causalité du passé dans le futur. Le concept d'état est introduit à partir d'une opération binaire définie sur un sous-ensemble  $E \times E$ , tandis que celui d'espace d'état est introduit en ayant pour base cette opération et une relation d'équivalence dans l'ensemble  $E$ . Pour les fonctions auxiliaires, telles que  $\eta$  et  $\varphi$ , il faudra aussi définir une relation du type linéaire. En fait, deux approches peuvent être envisagées comme nous pouvons le voir. La première à partir de l'extension de la définition de système en ce qui concerne la relation d'équivalence, de façon à permettre l'introduction de nouveaux ensembles. Cette conception se rapproche à notre avis de la définition donnée par KALMAN, son intérêt découlant surtout de sa généralité, autrement dit, de son applicabilité presque universelle. Par contre, il n'est pas possible à partir de cette méthode, de définir une relation d'importance entre les différentes classes de systèmes, ce qui rend donc difficile le classement.

La seconde méthode plus physique, est basée sur un processus d'induction défini en termes d'éléments du système lui-même sans l'introduction d'objets nouveaux. L'existence et le type d'induction représentent une caractéristique importante du système. Le rôle principal dans cette approche est joué par le concept de transition de la sortie. Si nous relisons la définition donnée par ZADEH [1] nous pourrions voir qu'elle en est bien plus proche.

I. 1. 3. Les notions de système et d'état vues par L. A. ZADEH [1].Définition (2)

Un système abstrait d'après cet auteur peut-être défini comme une famille de paires entrée/sortie :

$$\Theta = \left\{ \underline{u} [t_0, t_1] , \underline{y} [t_0, t_1] \right\} , t_0, t_1 \in (-\infty, +\infty).$$

Satisfaisant la condition de fermeture par segmentation (F. P. S.), c'est-à-dire, si :  $\left\{ \underline{u} [t_0, t_1] , \underline{y} [t_0, t_1] \right\}$  appartient à  $\Theta$  chaque segment de  $\left\{ \underline{u} [t_0, t_1] , \underline{y} [t_0, t_1] \right\}$  appartient à  $\Theta$ .  $\forall t \quad t_0 < t < t_1$

Remarque : Les familles de fonctions du temps

$$D(\Theta) \hat{=} \left\{ \underline{u} / (\underline{u}, \underline{y}) \in \Theta \right\}$$

$$R(\Theta) \hat{=} \left\{ \underline{y} / (\underline{u}, \underline{y}) \in \Theta \right\}$$

constituent respectivement le domaine et le contre domaine de  $\Theta$ . Ces familles représentent les ensembles de toutes les entrées et sorties qui peuvent être associées à  $\Theta$ .

Appelons  $\Theta(t_0) = \left\{ \underline{u} [t_0, t_1] , \underline{y} [t_0, t_1] \right\}$ ,  $t \geq t_0$ ; un sous-ensemble de  $\Theta = \left\{ \underline{u}, \underline{y} \right\}$  comprenant toutes les paires entrées/sorties considérées à partir de l'instant initial  $t = t_0$ . Groupons les paires de fonctions du temps formant  $\Theta(t_0)$  et possédant une caractéristique particulière ou alors une même propriété spécifique en un sous-ensemble  $\Theta_{\alpha_0}(t_0)$ ,  $\alpha_0$  représentant une sorte d'étiquette des composants de ce sous-ensemble. Si  $\alpha_0$  varie dans un espace  $\sum_{t_0}$  nous aurons une famille de sous-ensembles de paires de fonctions qui, pour chaque  $t_0$  nous représenterons par :  $\left\{ \Theta_{\alpha_0}(t_0) \right\}$ .

Si les quatre conditions dites de consistance sont remplies, les  $\alpha_0$  deviendront les états du système. Ces conditions sont les suivantes :

i) Condition de recouvrement

D'après cette condition,  $\Theta(t_0)$  doit être l'union de tous les membres de la famille  $\left\{ \Theta_{\alpha_0}(t_0) \right\}$ ,  $\alpha_0 \in \sum_{t_0}$ , c'est-à-dire :

$$\bigcup_{\alpha_0} \Theta_{\alpha_0}(t_0) = \Theta(t_0)$$

ii). Condition de fermeture par tronquement

Soit  $(\underline{u}^0 \underline{u}^1, \underline{y}^0 \underline{y}^1)$  une paire arbitraire entrée/sortie appartenant à  $\Theta(t_0)$  avec  $(\underline{u}^0, \underline{y}^0)$  représentant la partie tronquée de gauche  $(\underline{u}^0 \underline{u}^1, \underline{y}^0 \underline{y}^1)$  ; la condition de fermeture par tronquement établit que  $(\underline{u}^0 \underline{u}^1, \underline{y}^0 \underline{y}^1)$

$$\begin{aligned} \in \Theta_{\alpha_0}(t_0) &\Rightarrow (\underline{u}^0, \underline{y}^0) \in \Theta_{\alpha_0}(t_0) \\ \forall (\underline{u}^0 \underline{u}^1, \underline{y}^0 \underline{y}^1) \in \Theta_{\alpha_0}(t_0), \forall t_0 \quad \forall \alpha_0 &\quad \Sigma t_0 \end{aligned}$$

iii). Condition d'univocité

Pour chaque entrée  $\underline{u}$  du domaine D de  $\Theta_{\alpha_0}(t_0)$  doit correspondre une sortie conique  $\underline{y}$  du contre-domaine R de  $\Theta_{\alpha_0}(t_0)$ . D'une façon symbolique cette condition s'exprime en disant que :

$$\left\{ (\underline{u}, \underline{y}) \in \Theta_{\alpha_0}(t_0) \text{ et } (\underline{u}, \underline{y}') \in \Theta_{\alpha_0}(t_0) \right\} \Rightarrow \underline{y} = \underline{y}'.$$

iiii). Condition de continuation

Soit  $(\underline{u}', \underline{y}')$  un tronquement de droite de  $(\underline{u}^0, \underline{y}^0) \in \Theta_{\alpha_0}(t_0)$  définit dans l'intervall  $[t_1, t]$ .

Suivant la condition de continuation, l'ensemble de toutes les continuations de  $(\underline{u}^0, \underline{y}^0)$  dans  $\Theta_{\alpha_0}(t_0)$ , représenté par  $\Theta_{\alpha_1}(t_1)$  doit un ensemble de paires entrée/sortie de la famille  $\left\{ \Theta_{\alpha_0}(t_0) \right\}_{\alpha_0, t_0}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \left\{ (\underline{u}^1, \underline{y}^1) / \left\{ \underline{u}^0 \underline{u}^1, \underline{y}^0 \underline{y}^1 \right\} \in \Theta_{\alpha_0}(t_0) \right\} &= \Theta_{\alpha_1}(t_1) \\ \forall t_0 \in \mathbb{R}^1 \quad \forall \alpha_0 \in \Sigma t_0 \quad \forall (\underline{u}^0, \underline{y}^0) \in \Theta_{\alpha_0}(t_0) & \end{aligned}$$

et  $t_1 \geq t_0$ ,  $t \geq t_1$ .

I. 1. 4. Remarques.

Si nous considérons la définition de système dynamique de R. E. KALMAN l'état en termes de son évolution passée est donné à partir de la notion de fonction de transition d'état par une relation entre l'état à l'instant  $t$ , l'état à l'instant antérieur  $\tau$ , et un segment de fonction admissible d'entrée défini entre les deux instants, sans aucune référence à la sortie.

Par contre, dans la définition de L. A. ZADEH, l'état du système à un instant  $t_0$  est directement attaché à un ensemble de paires entrée/sortie satisfaisant les quatre conditions de consistance et appelé "agregat". Dans cette défini-

tion, aucune référence n'est faite à un état antérieur du système.

La conception mathématique de KALMAN introduit directement la notion d'état à un instant  $t$  à travers la définition de la fonction  $\varphi$  de transition. L'arbitraire de cette notion est dû au fait que l'état à un instant  $t$  est défini à partir d'un état précédent. Celui-ci, peut-être introduit, en ayant pour base un ensemble donné des valeurs de l'état du système (espace d'état) à cet instant.

A son tour, dans l'approche de ZADEH, la notion d'état résulte directement de considérations faites sur la manière dont sont rassemblées les paires entrée/sortie du système qui peuvent d'ailleurs être une conséquence d'expériences réalisées sur le système lui-même.

#### I. 1. 5. Quelques brèves considérations sur le problème de l'identification en tenant compte des définitions de ZADEH et KALMAN.

Dans l'optique de l'identification d'un système physique, il nous semble que les définitions données par ZADEH sont en principe plus adaptables. En effet, dans cette optique, nous n'avons accès qu'aux entrées et sorties du système tel qu'il arrive normalement lors de l'identification d'un système physique. Remarquons toutefois, qu'il nous paraît essentiel (et cela facilitera notre travail) au cours des expériences auxquelles nous avons été amenés, de déterminer avec précision les ensembles  $T$ ,  $U$ ,  $Y$ ,  $\Omega$ ,  $\Gamma$  tels qu'ils existent dans la définition de KALMAN. Nous en soulignons toute l'importance, spécialement en ce qui concerne les non-linéarités à mémoire.

Rappelons d'autre part, que cet auteur est aussi intéressé par l'interaction des systèmes et de l'environnement que par le comportement interne lui-même des systèmes. Dans cet objectif, KALMAN définira un système dans le sens entrée/sortie :

##### Définition (3)

Un système dynamique ( $\Sigma$ ) dans le sens entrée/sortie est un quintuple  $(T, U, \Omega, Y, \Gamma)$  satisfaisant toutes les propriétés requises par la définition interne, auquel on associe un ensemble  $A$  indexant une famille de fonctions;

$$F = \left\{ f_{\alpha} : T \times \Omega \rightarrow Y, \quad \alpha \in A \right\}$$



Chaque membre de  $F$  est donné explicitement par  $f_{\alpha}(t, w) = y(t)$  qui représente la sortie résultant à l'instant  $t$  de l'entrée  $w$  pour l'expérience  $\alpha$ .

Ainsi, en accord avec cette définition, un système dynamique peut être considéré sur le plan abstrait comme une sorte de résumé de résultats expérimentaux. Nous sommes donc bien proches de la définition donnée par ZADEH. L'ensemble  $A$  de KALMAN et l'ensemble des  $\alpha_0$  de ZADEH représentent bien, même s'ils sont définis à partir d'éléments de nature différente, le label global des expériences essentielles à l'établissement des paires entrée/sortie nécessaires à la caractérisation du système.

Nous nous sommes efforcés dans le cadre de notre travail de trouver le nombre minimum d'expériences nous permettant de caractériser avec précision tous les  $\alpha$  nécessaires à la définition de la famille  $F$ .

Lorsqu'il s'agit d'un domaine ouvert comme celui des systèmes non-linéaires, cet aspect nous semble fondamental et doit servir de base à une étude réaliste du Problème de l'Identification [3].

## I. 2. PROBLEME DE LA "BOITE NOIRE".

### I. 2. 1. Introduction.

Le problème de la boîte noire a toujours été au centre des sciences naturelles et de la physique. Il concerne spécifiquement l'étude de systèmes que l'homme peut observer et manipuler extérieurement, mais dont l'intérieur, pour une raison ou pour une autre lui est inaccessible. Grossièrement, ce problème peut être formulé de la manière suivante : on a un objet qu'on désire étudier. A partir de l'extérieur, on réalise sur cet objet un ensemble d'expériences. Il s'agit compte tenu des données obtenues, de tirer des conclusions du sujet du contenu de l'objet.

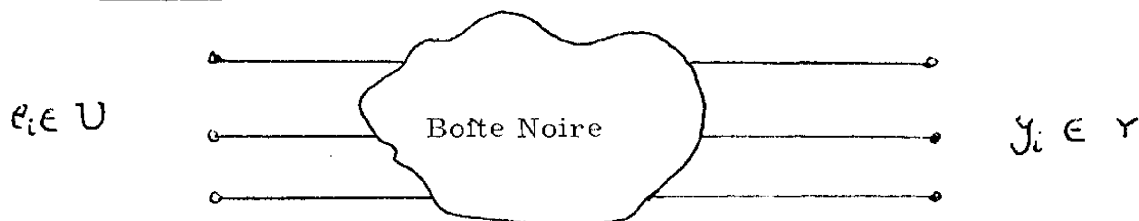


Figure I. 1.

Une approche plus ou moins générale, très utilisée surtout dans le domaine des sciences naturelles, consiste à envisager une division progressive du système de manière à avoir d'autres systèmes plus simples. On espère ainsi, pouvoir étudier plus facilement les nouveaux systèmes et, à partir de la connaissance de ces derniers, résoudre le problème initial. MESAROVIC' [ 6 ] préconise dans ce but, la division de la boîte noire, en petites boîtes noires, aussi petites que le permet l'instrument en notre possession. Puis, ceux qui viendront après, pouvant disposer d'un instrument plus perfectionné et plus précis que le nôtre, recouperont les différents morceaux en nouvelles boîtes noires encore plus petites que les précédentes et ainsi de suite. Bien qu'il ne nous semble pas nécessaire de présenter de justification à ce type d'étude dont l'histoire a montré tout l'intérêt, nous pensons qu'il existe une autre méthode possible d'attaquer au problème, dans le cadre de l'automatique.

A partir d'un certain nombre de composants, ou encore de sous-systèmes connus, il s'agirait de construire un nombre chaque fois plus grand de systèmes dont nous connaissons l'intérieur, les composants. Si le choix des sous-systèmes est fait à partir d'un critère physique acceptable, il est certain que l'étude ne pourra que retrouver au passage un certain nombre de "boîtes noires" que nous pourrions alors caractériser d'abord, puis identifier.

### 1.2.2. Conceptions d'équivalence. Systèmes équivalents.

Comme nous l'avons vu, d'après la conception de ZADEH, nous n'avons accès qu'aux entrées et sorties d'un système. Ne pouvant connaître avec certitude l'intérieur de la "boîte noire", il nous paraît essentiel d'introduire la notion d'équivalence. Un premier concept d'équivalence pourrait être énoncé comme ci-dessous :

Définition (4) : Equivalence .

Deux systèmes  $\theta$  et  $\theta'$  sont équivalents et nous écrirons  $\theta = \theta'$  quand  $\theta$  et  $\theta'$  sont égaux en termes d'ensemble, c'est-à-dire si  $\theta \in \theta'$  et  $\theta' \in \theta$ . En d'autres termes :  $\theta$  est équivalent à  $\theta'$  si toute paire entrée/sortie appartenant à  $\theta$  appartient à  $\theta'$  et vice-versa.

Remarquons cependant que deux systèmes peuvent paraître équivalents après une expérience (équivalence simple) et ne pas l'être après des expériences multiples, (celles où l'on peut disposer de plus d'un exemplaire de la "boîte noire" représentant l'un des systèmes dont on veut étudier l'équivalence). Nous sommes donc conduits à la notion d'équivalence rigide.

Définition (5) : Equivalence rigide .

$\theta$  et  $\theta'$  sont dits rigidement équivalents ( $\theta \equiv \theta'$ ) si et seulement si pour chaque  $t_0$  et pour chaque état  $\underline{\alpha}$  dans l'espace d'état de  $\theta$  il existe un état équivalent  $\underline{\beta}$  dans l'espace d'état de  $\theta'$  et vice-versa.

Symboliquement nous pouvons écrire de forme condensée

$$\theta \equiv \theta' \Leftrightarrow \forall \underline{\alpha} \exists \underline{\beta} \forall \underline{u} \forall t_0 [ \bar{A}(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \bar{B}(\underline{\beta}, \underline{u}) ]$$

$$\text{et } \forall \underline{\beta} \exists \underline{\alpha} \forall \underline{u} \forall t_0 [ \bar{A}(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \bar{B}(\underline{\beta}, \underline{u}) ]$$

Définition (6) : Equivalence simple.

D'une façon analogue et compte tenu de ce que nous avons vu dans la définition (4), deux systèmes  $\theta$  et  $\theta'$  admettant une équivalence simple, satisfont les relations ci-dessous :

$$\theta = \theta' \quad \forall \underline{\alpha} \forall \underline{u} \forall t_0 \exists \underline{\beta} [ \bar{A}(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \bar{B}(\underline{\beta}, \underline{u}) ]$$

$$\text{et } \forall \underline{\beta} \forall \underline{u} \forall t_0 \exists \underline{\alpha} [ \bar{A}(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \bar{B}(\underline{\beta}, \underline{u}) ]$$

L'équivalence rigide, correspond à l'indistingabilité entre  $\theta$  et  $\theta'$  même s'ils sont soumis à une expérience multiple. L'équivalence rigide, implique d'autre part l'équivalence simple, c'est-à-dire :  $\theta \equiv \theta' \Rightarrow \theta = \theta'$ . La réciproque cependant en général n'est pas vraie.

Les notions d'équivalence telles qu'elles viennent d'être vues, sont d'une très grande importance dans l'étude du problème de l'identification de systèmes physiques. Cependant, la notion d'indistingabilité liée à celle d'équivalence rigide, nous a servie dans un autre ordre d'idées dans le cadre de notre travail : à rechercher le minimum d'expériences nécessaires (tests), à prouver la différence de caractéristiques entre les différentes classes de systèmes étudiées.

### I. 2. 3. Observabilité des systèmes non-linéaires.

Tout d'abord, nous aimerions introduire la notion de signal-système. Cette notion est essentielle pour comprendre la définition d'observabilité d'un système non-linéaire. Il est d'une grande importance d'y être sensible, car, contrairement à ce qui se passe pour les systèmes linéaires, dans le cas des non-linéaires, deux signaux différents agissant sur un même système peuvent donner l'impression qu'il s'agit de deux non-linéarités différentes.

#### I. 2. 3. 1. Exemple.

Considérons un système constitué d'une partie non-linéaire, définie par  $f(v)$ , suivie d'un filtre passe-bas (Figure I. 2.), et supposons que nous excitions ce système par deux types de fonctions d'entrées : un échelon d'amplitude variable et une sinusoïde aussi d'amplitude variable. Si nous traçons les courbes donnant la valeur de l'amplitude de la sortie en fonction de la valeur de l'amplitude de l'entrée, nous obtiendrons deux caractéristiques non-linéaires différentes (Figure I. 3. et I. 4.).

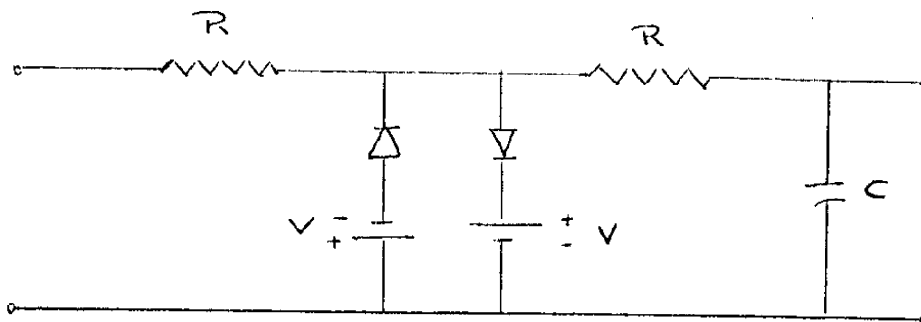


Figure I. 2.

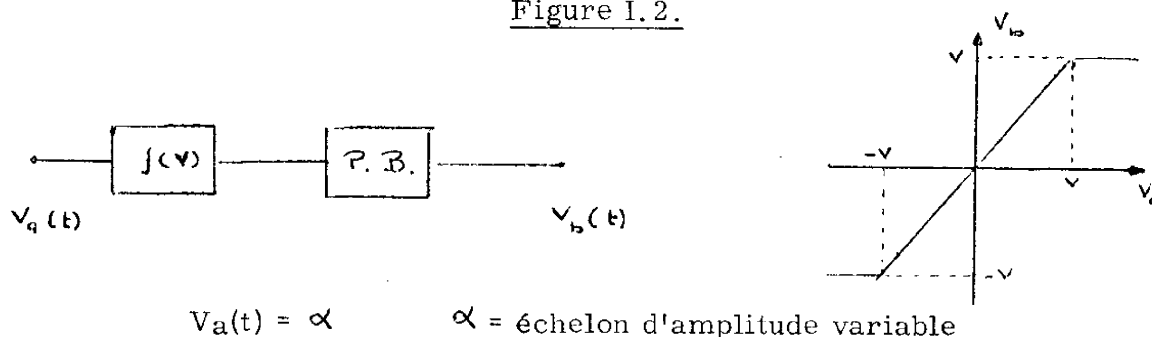
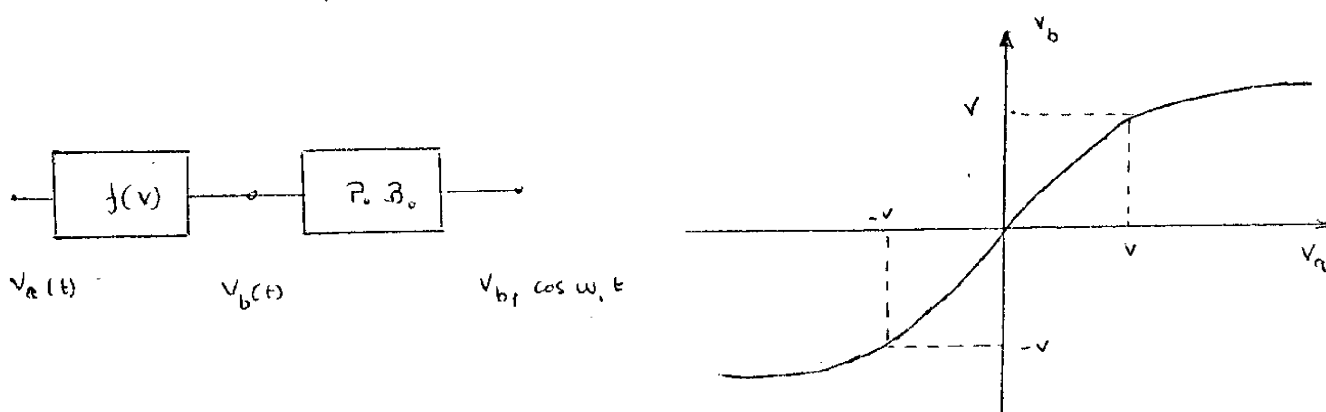


Figure I. 3.

Figure I. 4.



$$V_a(t) = V_a \cos \omega_1 t$$

$$V_b(t) = V_{bk} \cos \omega_1 k t$$

L'exemple ci-dessus attire notre attention sur l'ensemble signal-système en non-linéarité, et nous montre que l'étude de tels systèmes est intimement lié au choix du signal susceptible de sensibiliser au mieux et de la manière la plus précise les propriétés de ces systèmes.

#### 1.2.3.2. Définition de l'observabilité d'un système non-linéaire.

Dès l'instant, que l'on a affaire au problème de l'estimation de l'état d'un système, nous sommes intéressés par les notions d'observabilité de l'état et d'observabilité de la sortie du système en question :

Uwe Schoenwandt au M.I.T. [7] a donné une définition qui nous paraît assez générale quant à l'observabilité des systèmes non-linéaires et en a fait une étude très intéressante. En effet, tandis que les critères sur l'observabilité des sys-

tèmes linéaires ont été largement étudiés ([8], [9], [10], [11]) peu d'auteurs se sont intéressés au problème de l'observabilité dans le domaine des systèmes non-linéaires.

### Définition (7)

Considérons l'application  $y = T x$ , telle que  $T$  soit un opérateur définissant  $y$  comme une observation. Si  $x$  appartient à un ensemble non-vide  $S$ , alors  $T$  est complètement observable (C.O), si l'inverse  $T^{-1}$  existe pour tout  $y$  généré par un  $x$  possible.

Exemple :  $x = -1$  ou  $1$  ou  $2$

$$\text{Si } y = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \neq 0 \\ x & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Le système est observable (C.O).

Par contre, si  $y = x^2 \quad \forall x$ , le système est non complètement observable vu que  $y = 1 \Rightarrow x = 1$  ou  $x = -1$ .

### I.2.3.3. Application aux équations différentielles ordinaires.

Soit le système donné par :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in t_0, t_1$$

$$y(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x_0 \in S$$

Où  $x(t) \in C_n' [t_0, t_1]$

Le système étant un "système bien comporté" ("smooth system") au sens de KALMAN,  $x_0$  est un élément d'un ensemble  $S$  donné, tel qu'il est un sous-ensemble de  $R_n$  ou l'ensemble  $R_n$  lui-même,  $n$  étant la dimension du vecteur  $x(t)$ . Enfin,  $u(t)$  peut être considéré comme une partie de l'opérateur appliquée en  $x_0$ .

$$\dot{x}(t) = f_u^+(t, x(t)), \quad t \in t_0, t_1$$

$$y(t) = g_u^+(t, x(t)), \quad x_0 \in S$$

Où  $f_u^+$  et  $g_u^+$  sont des fonctions connues.

Nous obtenons sous la forme de la définition (7),

$$y(t) = T_u(t) x_0, \quad t \in t_0, t_1 \quad \text{et } x_0 \in S$$

Dans ce cas, l'application de  $S$  dans l'ensemble  $M_u$  de fonction du temps par l'opérateur  $T_u$ , nous permet de dire en appliquant la définition (7) que le système est complètement observable (C.O) concernant  $x_0$  si l'opérateur  $T_u(t)$  a un inverse sur  $M_u$ .

Théorème 1.

Soit  $x(t) = f[t, x(t), u(t)]$  admettant une solution unique  $x(t) = G_u(t) x_0 \quad \forall x_0 \in S$  et pour une fonction donnée d'entrée  $u(t)$ ,  $t \in t_0, t_1$ . Soit  $G_u$  une application de  $S$  dans l'ensemble  $P_u$  de fonctions du temps sur  $[t_0, t_1]$ . Considérons l'application  $y(t) = H_u(t) \cdot X(t)$ , où  $H_u$  est un opérateur appliquant  $P_u$  dans  $M_u$  fonctions du temps sur  $[t_0, t_1]$ . Soit  $Q_{ui}$  un ensemble de fonctions correspondant à un élément  $y_i(t)$  de  $M_u$  par l'intermédiaire de l'opérateur  $H_u$ . Alors, le système est dit complètement observable (C.O) si et seulement si l'intersection de  $Q_{ui}$  et  $P_u$  se fait en un seul point, ou encore, si  $H_u$  est inversable en relation à  $P_u$  et  $M_u$ .

Démonstration :

Si le système est observable pour une entrée donnée  $u(t)$ , l'opérateur  $H_u(t) \cdot G_u(t)$  est inversable. Chaque  $x_0$  correspond à seulement un point  $P$  puisque  $G^{-1}$  existe. En conséquence, chaque point  $M$  correspond à un point et un seul en  $P$ , ou encore chaque  $Q_i$  a seulement un point en  $P$ .

Si l'intersection de chaque  $Q_i$  avec  $P$  est en un point, chaque point de  $P$  correspond à un point différent en  $S$ . Donc, chaque point en  $S$  correspond à un point différent en  $M$ ; et  $M$  est l'ensemble de tous les points obtenus à travers cette application. Ce qui prouve que l'inverse de  $H_u \cdot G_u$  existe et que le système est observable.

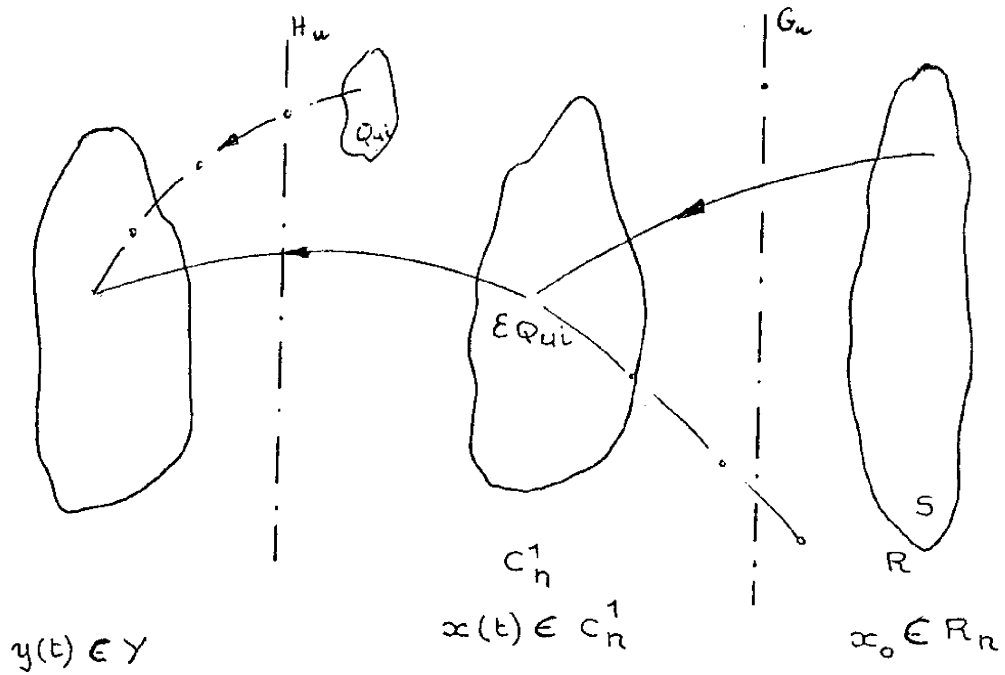


Figure I-5.

I. 2. 3. 4. Remarques au sujet de la notion d'observabilité au sens de  
SCHOENWANDT.

Nous retrouvons la présence essentielle de la condition initiale ( $x_0$ ). L'observabilité reste le fait de reconstituer  $x_0$  à partir de la sortie.

Remarquons l'importance de l'entrée  $u(t)$  ; en effet, le théorème s'énonçant : "soit  $\dot{x}(t) = f [ t, x(t), u(t) ]$  admettant une solution unique  $G_u(t) x_0$  pour une entrée donnée  $u(t)$ ...". L'importance de  $u(t)$  n'existe pas dans le cas de système linéaire. Dans le critère de KALMAN pour l'observabilité de l'état aucune mention n'est faite à l'entrée, et même dans le cas de l'observabilité de la sortie, il n'existe aucune référence à la forme de la fonction d'entrée  $u(t)$ .

Nous montrerons dans le cas des systèmes à hystérésis par de multiples exemples que la forme de  $u(t)$  permet de certifier l'univocité de la solution. Le choix de  $u(t)$  est donc essentiel si nous voulons une solution qui ait un sens.



### I. 3. SYSTEMES ET STRUCTURES.

#### I. 3. 1. Diagrammes de blocs.

Après avoir fait un rappel des concepts, définitions et axiomes qui nous paraissent essentiels à la compréhension du texte, nous nous proposons maintenant de passer en revue les systèmes qui ont fait l'objet de notre étude.

Nous utilisons les notations employées par ZADEH[1] pour la représentation topologique des structures à travers des modèles symboliques. Prenons un système  $\theta$  formé par les objets (sous-systèmes)  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ . Chaque objet  $R_i$  est défini par ses entrées  $u^i_j$  et ses sorties  $y^i_j$ , où  $i$  est l'indice de l'objet  $R_i$  et  $j$  l'indice de l'entrée ou de la sortie. Soit, par exemple, le système représenté par le diagramme fonctionnel ci-dessous Figure I. 6. Vu comme un système mono variable, caractérisé par une entrée  $u$  et par une sortie  $y$  et compte tenu des interconnexions des sous-systèmes  $R_1, R_2, R_3$ , nous pouvons écrire :

$$u = u'_2 \quad , \quad y = y_1^3$$

et

$$u'_1 = y_1^2 ; \quad y_1^1 = u_1^2 ; \quad y_1^2 = u_1^3 ; \quad u_2^2 = y_1^3 ; \quad y_2^2 = u_2^3$$

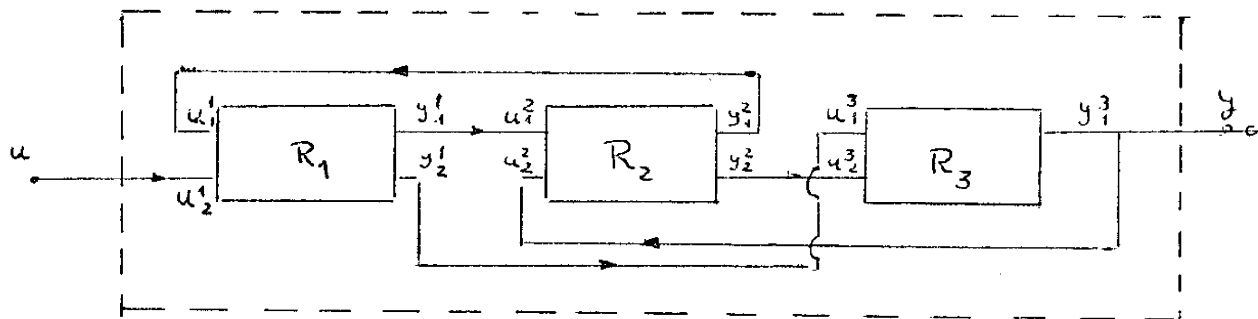


Figure I. 6.

Nous étudierons au cours de ce mémoire des structures mono-variables, constitués par l'association en cascade, sans bouclage interne, de sous-systèmes dont nous définirons la nature ultérieurement.

Nous aurons donc à considérer des chaînes du type :

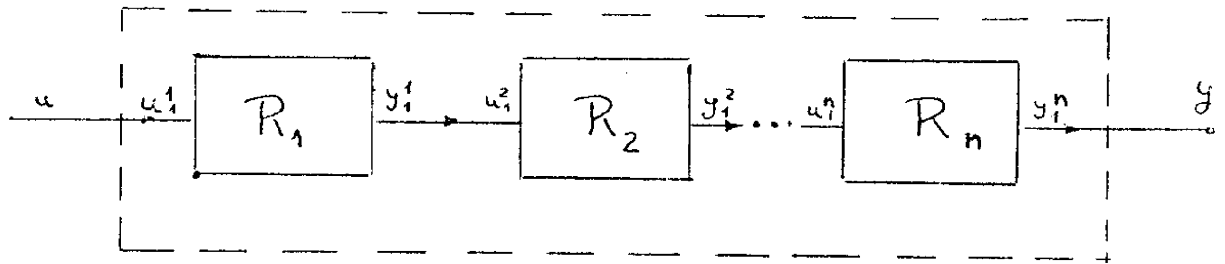


Figure I. 7.

Où  $u = u^1$        $y_1^n = y$   
 Et  $y_1^1 = u_1^2$      $y_1^2 = u_1^3$  .....  $y_1^{n-1} = u_1^n$

Etant donné que nous n'avons qu'une seule entrée et une seule sortie pour chaque sous-système, nous simplifierons la notation en n'utilisant qu'un seul indice, caractérisant l'objet  $R_1$ .

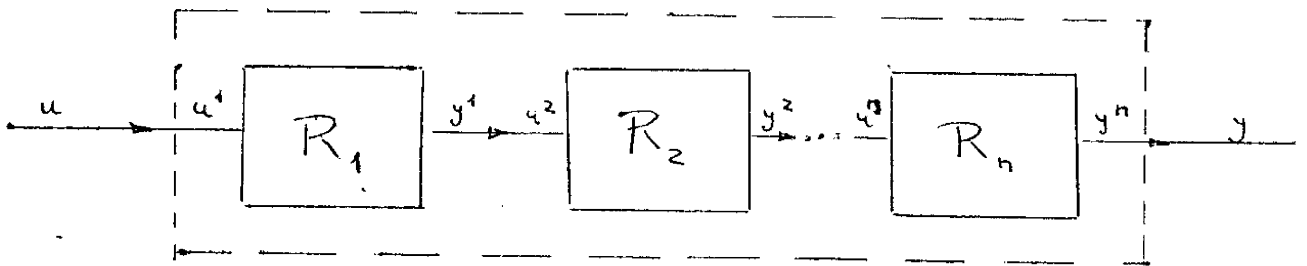


Figure I. 8.

Et il sera toujours connu que :

$$u = u^1 ; y^1 = u^2 , y^2 = u^3 , \dots y^{n-1} = u^n \text{ et } y^n = y.$$

NOTA : La chaîne définitive a été prise avec un nombre de blocs au maximum égale à quatre.

### I. 3. 2. Chaînes en cascade - Intérêt de leur étude.

Au cours de nos recherches, nous avons étudié des systèmes en cascade, c'est-à-dire, constitués par des sous-systèmes connectés en série ne comprenant aucun bouclage. Nous avons pensé que dans une étude ordonnée et progressive, il semblait plus naturel de commencer par les systèmes en cascade avant de considérer les systèmes bouclés.

Nous allons essayer de montrer d'autres raisons qui nous ont motivé à choisir cette voie.

En général, les systèmes en automatique se présentent en chaînes bouclées, Toutefois, dans l'étude de certains problèmes comme celui de la stabilité par exemple, la connaissance de la chaîne directe est comme nous le savons indispensable.

Il est certain d'autre part, que la synthèse d'un régulateur devrait gérer un système en boucle ouverte, où souvent des difficultés technologiques nous amènent à utiliser une rétro-action pour améliorer les performances.

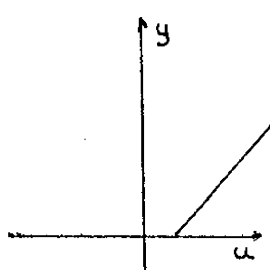
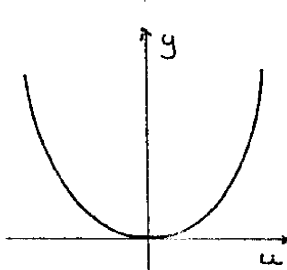
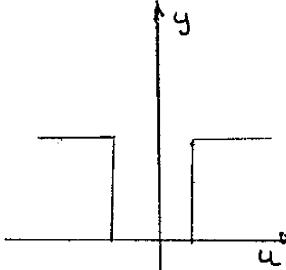
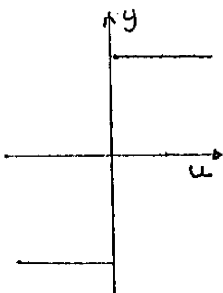
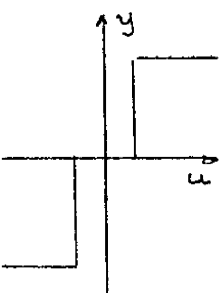
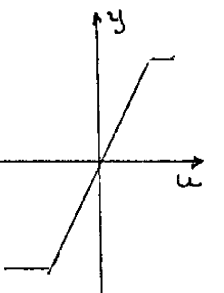
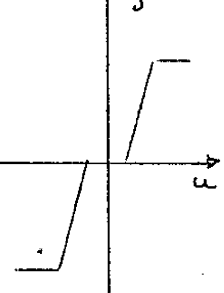
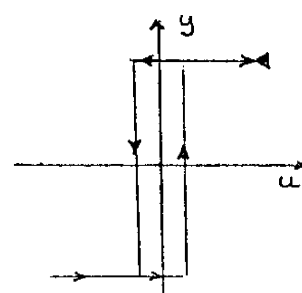
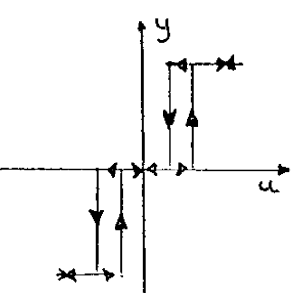
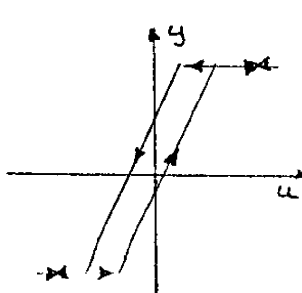
### I. 3. 3. Nature des blocs utilisés.

Les systèmes que nous avons étudiés sont des chaînes contenant des blocs non-linéaires disposés en série avec des blocs linéaires. Ces chaînes ont été supposés, comme nous l'avons déjà dit, sans bouclage, chaque bloc ayant une entrée et une sortie.

D'autre part, comme nous le savons, deux blocs linéaires en cascade correspondent à un bloc linéaire. De même, nous pourrions montrer facilement, que dans le cas des blocs non-linéaires étudiés, deux blocs non-linéaires en cascade correspondent à un bloc non-linéaire. Par la suite, nous appellerons "tandem", un ensemble de deux blocs qui peuvent être de deux types : LN ou NL (Linéaire - non-linéaire ou non-linéaire - linéaire).

### I. 3. 4. Caractéristiques des blocs utilisés.

Nous avons utilisés pour bloc non-linéaire, des blocs ayant des caractéristiques à symétrie paire, comme la parabole et le relais non-polarisé ; des caractéristiques à symétrie impaire comme le relais polarisé idéal, le relais polarisé à seuil, la saturation, la saturation à seuil ; des caractéristiques sans symétrie comme la diode, et des caractéristiques avec hystérésis, comme le relais avec hystérésis, le relais polarisé avec seuil et hystérésis, la saturation avec hystérésis. La figure [I. 9.] permet la visualisation des caractéristiques non-linéaires qui viennent d'être mentionnées.

<p>Caractéristique S/symétrie</p>  <p>Diode</p>	<p>Caractéristiques à symétrie paire</p>  <p>Parabole</p>  <p>Relais non polarisé</p>		
<p>Caractéristiques à symétrie impaire</p>			
 <p>Relais idéal polarisé</p>	 <p>Relais polarisé à seuil</p>	 <p>Saturation</p>	 <p>Saturation à seuil</p>
<p>Caractéristiques avec hystérésis</p>			
 <p>Relais avec hystérésis</p>	 <p>Relais polarisé avec seuil et hystérésis</p>	 <p>Saturation avec hystérésis</p>	

Avant de dire quelques mots au sujet des composants linéaires des chaînes dont l'étude des caractéristiques structurelles ont fait l'objet de notre travail, rappelons brièvement les définitions de système dynamique linéaire et système dynamique invariant avec le temps [5].

Définition 8 : Système linéaire.

Un système dynamique  $\mathcal{O}$  est linéaire si et seulement si :

- a)  $X, U, \Omega, Y, \Gamma$  sont des espaces vectoriels (sur un champ arbitraire  $K$ )
- b)  $\varphi(t, \zeta, \dots) : X \times \Omega \rightarrow X$  est  $K$  linéaire pour  $\forall t$  et  $\forall \zeta$
- c)  $\eta(t, \dots) : X \rightarrow Y$  est  $K$ -linéaire  $\forall t$ .

Définition 9 : Système invariant avec le temps.

- a)  $T$  est un groupe additif
- b)  $\Omega$  est fermé sur l'opérateur de translation  $Z^\zeta : w \mapsto w'$  ; définit par  $w'(t) = w(t + \zeta) \quad \forall \zeta, t \in T$
- c)  $\varphi(t; \zeta, x, w) = \varphi(t + s, \zeta + s, x, Z^s w) \quad \forall s \in T$
- d)  $\eta(t, \dots) : X \rightarrow Y$  est indépendant de  $t$ .

Remarques : Nous nous sommes intéressés à deux classes de blocs linéaires. L'une caractérisant les systèmes linéaires continus de dimension finie invariants avec temps et du premier ordre. L'autre, les systèmes linéaires invariants avec le temps continus de dimension finie et du deuxième ordre. Les deux classes en question ont été représentées par des équations telles que :

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} + a_1 y = b_1 u$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_1 u$$

Nous avons utilisé comme nous pouvons le voir, la représentation sous forme d'opérateur différentiel qui nous a paru la plus adéquate au but de notre travail. La plupart des tests utilisant des conditions initiales différentes de zéro, la transformée de LAPLACE a eu peu d'intérêt spécialement en raison du mélange de blocs linéaires et non-linéaires. Il nous a paru d'autre part que vu les types de non-linéarités étudiées, la représentation sous forme de vecteur d'état ne faisait qu'alourdir les calculs. Par contre, la représentation par opérateur différentiel linéaires ou non-linéaires s'est avérée la plus maniable et la plus riche en conséquences.

I. 3. 5. Quelques commentaires au sujet des signaux de test utilisés dans l'étude des propriétés structurelles et qualitatives de certaines classes de systèmes non-linéaires [12].

I. 3. 5. 1. Analyse harmonique. Analyse par impulsion de DIRAC.

L'analyse des propriétés des systèmes à partir d'un signal d'excitation de nature sinusoïdale est particulièrement intéressante dans le cas de systèmes linéaires. Toutefois, comme nous le savons bien, la propriété de superposition n'existe pas dans le cas de systèmes non-linéaires. De ce fait, l'intérêt de cet approche est de loin inférieure au cas où le système est linéaire. Nous aurions pu faire appel à ce signal pour essayer de mettre en valeur une caractéristique particulière, mais cela n'a jamais été l'instrument essentiel à la recherche de toutes les propriétés des systèmes étudiés comme cela pourrait être le cas pour les systèmes linéaires.

L'analyse par impulsion de DIRAC est elle aussi particulièrement utile dans le cas de systèmes linéaires. Elle nous permet d'arriver à la fonction de transfert qui représente complètement le système dans le cas d'un système linéaire complètement observable et commandable [8].

Dans le cas de la plupart des systèmes étudiés vu la présence d'une saturation ou d'un relais à l'entrée de la chaîne cette méthode perd une grande partie de son intérêt la non linéarité écrétant l'excitation.

I. 3. 5. 2. Analyse par échelon d'amplitude.

Nous savons que ce signal est suffisant pour caractériser un système linéaire. Nous allons essayer de montrer qu'il est le plus utile dans le cas de certaines classes de systèmes non-linéaires du type de celles que nous avons utilisées dans la partie expérimentale de nos recherches.

Les chaînes étudiées avec un nombre maximum de quatre sous-systèmes peuvent être représentées par une relation symbolique telle que

$$\Phi = R_4 \otimes R_3 \otimes R_2 \otimes R_1$$

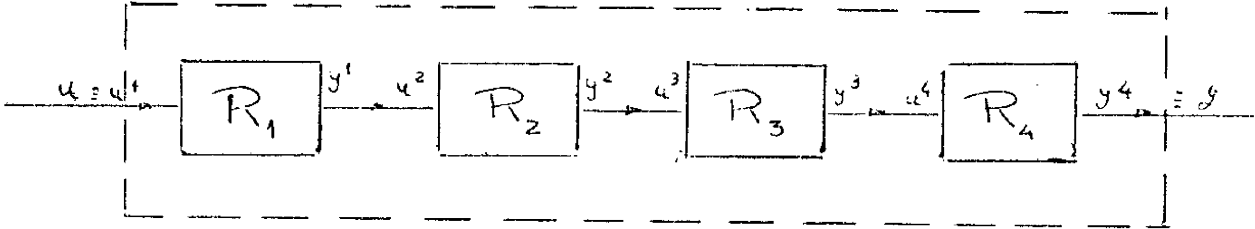


Figure I. 10.

Prenons par exemple :  $R_1$  et  $R_3$  comme des blocs linéaires définis dynamiquement par les deux relations ci-dessous :

$$L_1(p) y^1 = K_1 u^1 \quad \text{définissant } R_1$$

$$L_2(p) y^3 = K_2 u^3 \quad \text{définissant } R_3$$

Où  $p \hat{=} \frac{d}{dt}$  ;  $L_1, L_2$ , étant des opérateurs différentiels linéaires ;

et  $K_1, K_2$  les gains statiques des blocs linéaires.

Enfin  $R_2$  et  $R_4$  comme des caractéristiques non-linéaires dont les paramètres pertinents sont reliés par  $\psi_1$  et  $\psi_2$  appartenant à un même type  $\psi$  de caractéristique.

En effet, nous avons considéré qu'il existe un seul et même type de caractéristique non-linéaire à l'intérieur de la chaîne.

Donc  $\Phi$  est la fonction décrivant le système et  $\otimes$  une opération à définir dans chaque cas, nous pouvons écrire :

$$\Phi' = \psi_2 \otimes R_2 \otimes \psi_1 \otimes R_1$$

Si nous effectuons un test statique, c'est-à-dire un test où nous comparons les valeurs d'entrée et de sortie à "l'état d'équilibre", la chaîne de la

figure I. 10 se transforme en donnant lieu à celle de la figure I. 11 .

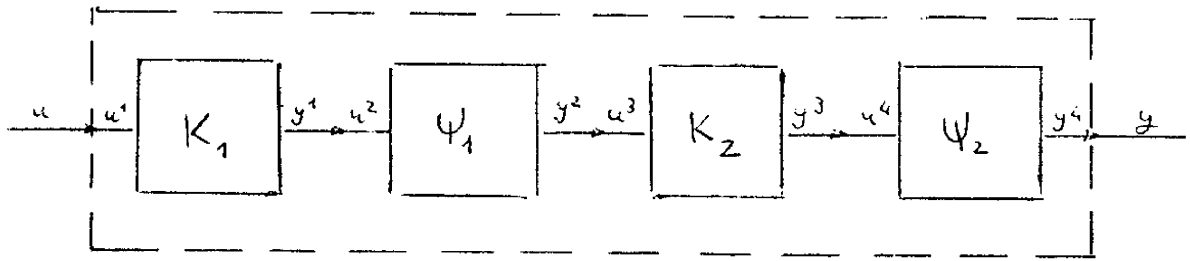


Figure I. 11.

Où  $K_1$  et  $K_2$  sont les gains statiques des blocs linéaires  $R_1$  et  $R_3$ .

Nous aurons donc :  $\Phi' = \Psi_2 \otimes K_2 \otimes \Psi_1 \otimes K_1$

Avec :  $\Psi_2 \otimes K_2 \cong \Psi_2$  (du point de vue qualitatif)

$\Psi_1 \otimes K_1 \cong \Psi_1$  (du point de vue qualitatif)

Où  $\otimes$  représente une multiplication.

Donc nous avons à étudier :

$$\Phi' = \Psi_1 \otimes \Psi_2$$

Dans certains cas, ce produit correspond à une caractéristique du type  $\Psi$ . Par exemple :

- $\Phi \cong \Psi_1 \rightarrow \Psi$  : seuil du relais, le premier seuil caractérisant la chaîne
- $\Phi \cong \Psi_2 \rightarrow \Psi$  : valeur du pas du relais, ou valeur maximale de la saturation, la dernière saturation caractérisant la chaîne.
- $\Phi \cong \Psi_1 + \Psi_2 \rightarrow \Psi$  Cas du seuil de la diode. La caractéristique aura toujours la forme de la diode.

Nous avons dans ce cas, une caractéristique  $\bar{\Phi}$  qui sera qualitative-ment du même type que la non-linéarité de la chaîne. Pour effectuer ce test, nous utiliserons un ensemble de valeurs d'entrée  $U$ , donnant l'ensemble des amplitudes de l'échelon et nous traçons la caractéristique entrée/sortie du système en régime statique, ce qui nous donnera la forme de la non-linéarité de la chaîne.



Par contre, dans d'autre cas, tels que :

$$\bar{\Phi} = \psi_1 \times \psi_2 = \psi^2 \quad \text{Cas de la courbe du type } x^n$$

Ou 
$$\bar{\Phi} = \psi_1 / \psi_2$$

Le test en question est insuffisant. On ne pourra donc pas définir avec exactitude la forme de la non-linéarité. Il faudra alors, faire appel à un autre signal ou à d'autres tests pour définir plus complètement la forme de cette non-linéarité. Toutefois, ce test nous apportera toujours une information importante.

Remarque : L'utilité de ce test réside dans le fait que toutes les non-linéarités étudiées ont des caractéristiques non-linéaires en amplitude et statique. De cette façon, si nous avons un bloc répondant zéro pour toute fréquence en-dessous d'une valeur ( $w_0$ ) et ( $W$ ) pour toute fréquence au-dessus de ( $w_0$ ), un cristal par exemple, le test définit plus haut n'aurait aucun sens. En effet, l'ensemble des valeurs d'entrée  $U$ , devrait être des valeurs en fréquence et non en amplitude .

#### I. 3. 5. 3. Caractéristiques du test en échelon (Test N° 1).

Le problème essentiel est maintenant de savoir quelles sont les conditions initiales du système au moment du test. Vu que la plupart des non-linéarités étudiées n'ont pas de position d'équilibre en zéro (exemple : le relais idéal), l'état zéro ne peut être pris comme référence. Il nous a donc paru plus intéressant d'ordonner l'ensemble des valeurs d'entrée  $U$ , ce qui nous a permis de définir une borne supérieure ( $U_{sup}$ ) et une borne inférieure ( $U_{inf}$ ). La condition initiale sera donnée par la position d'équilibre en une des deux bornes choisies au préalable.

En tenant compte de ces remarques, le signal de test qui nous a paru le mieux adapté aux types de non-linéarités et à la nature même du problème que nous avons à résoudre, à l'allure du graphique ci-dessous (Figure I. 12).

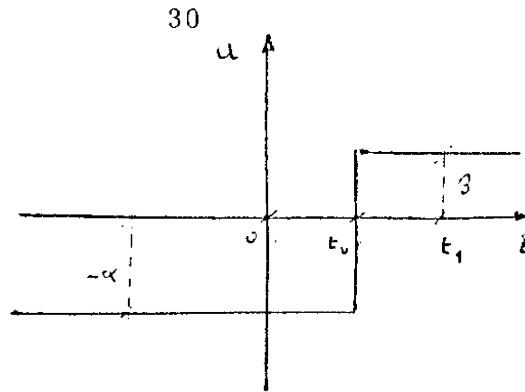


Figure 1. 12.

Dans ce graphique :

- $0 < t < t_0^-$  - Le système se met en conditions initiales compatibles avec l'application du test.
- $t, t_0 \in T = \mathbb{R}^1$  - L'intervalle  $[0, t_0^-]$  est supposé supérieur à l'intervalle de temps maximum nécessaire au système à atteindre son équilibre.
- 
- $t_0^+ < t < t_1$  - Le système réagit à l'entrée  $\beta$
- $t_0, t \in T = \mathbb{R}^1$  - L'intervalle  $[t_0^+, t_1]$  est supposé supérieur à l'intervalle de temps maximum nécessaire au système à atteindre son équilibre.
- $\beta, \beta_0, \beta_1 \in U$
- Nous choisirons  $\beta$  par une variation discrète tout au long de l'ensemble U.

Remarques : a) l'application efficace du test dont nous venons de décrire les principales caractéristiques impose deux conditions.

- Nous devons connaître, même avec peu de précision, la valeur de la durée maximale pour que le système atteigne son équilibre ;

- Nous devons connaître, d'autre part, la plage de fonctionnement du système pour définir  $U_{\text{inf}}$  et  $U_{\text{sup}}$ .

b) les conditions demandées ci-dessus sont de nature physique (temps, plage) mais sont traduites en langage mathématique (bornes, équilibre) en vue d'une représentation mathématique du système.

c) la caractéristique est donc, si  $y_{eq}$  est la sortie à l'état d'équilibre du système

$$y_{eq} = f(\beta)$$

Au cours de la première partie du deuxième chapitre, nous étudierons en détail cette caractéristique.

#### I. 3. 5. 4. Problème de l'hystérésis.

La présence d'hystérésis dans un système amène celui-ci à avoir deux comportements différents, suivant que la dérivée de l'entrée est positive ou négative. En ce sens, l'hystérésis est la caractéristique à mémoire la plus simple.

Pour savoir, s'il existe ou non une hystérésis dans la chaîne, il nous suffira d'effectuer le test (N°1) en deux étapes telles que nous permettent de voir les graphiques données par les figures (I. 13 a) et (I. 13 b).

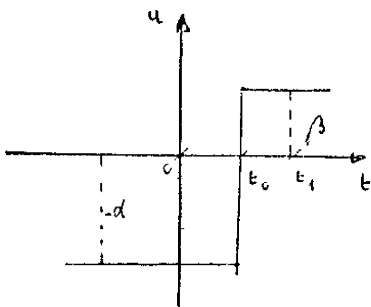


Figure I. 13 a

$$\alpha = U_{inf}$$

$$\beta = \beta_0 \quad U_{inf} \leq \beta_0 \leq U_{sup}$$

$\beta_0$  devant prendre plusieurs valeurs.

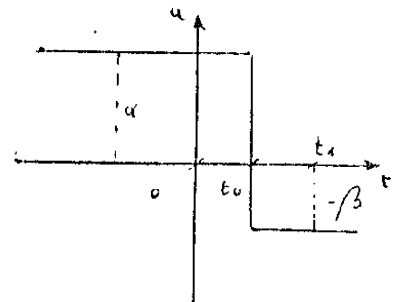


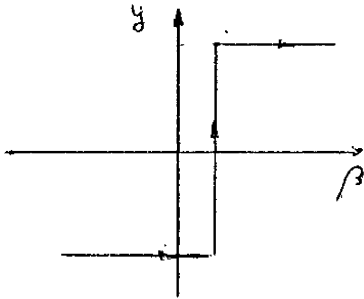
Figure I. 13 b

$$\alpha = U_{sup}$$

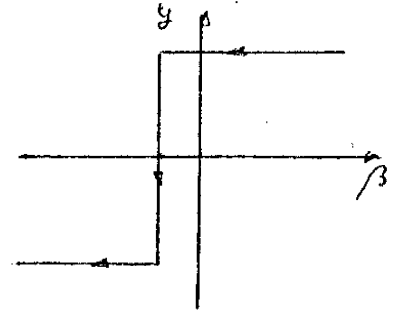
$$\beta = \beta_0 \quad U_{inf} \leq \beta_0 \leq U_{sup}$$

Si les caractéristiques obtenues  $y_{eq} = f(\beta)$  sont superposables, le système n'a pas d'hystérésis. Si, nous obtenons deux caractéristiques translatées, nous avons hystérésis.

Exemple : Relais avec hystérésis



Test N°1-a.



Test N°1-b.



## CHAPITRE II

ETUDE DES PROPRIETES STRUCTURELLES

EXTERNES ET TOPOLOGIQUES

D'UNE FAMILLE DE CHAINES NON-LINEAIRES

METHODE DE DECOMPOSITION STRUCTURELLE

- II. 1. Présentation de la méthode et application du test de nature.
- II. 2. Groupe des relais.
- II. 3. Groupe de saturations
- II. 4. Groupe de paraboles
- II. 5. Conclusions



## CHAPITRE II

### ETUDE DES PROPRIETES STRUCTURELLES EXTERNES ET TOPOLOGIQUES D'UNE FAMILLE DE CHAINES NON-LINEAIRES METHODE DE DECOMPOSITION STRUCTURELLE

#### II. 1. PRESENTATION DE LA METHODE ET APPLICATION DU TEST DE NATURE.

##### II. 1. 1. Introduction.

Le présent chapitre a été consacré spécialement à l'étude des propriétés structurelles externes et internes ou topologiques d'un certain nombre de chaînes non-linéaires. Celles-ci représentent comme nous l'avons déjà dit au premier chapitre ( paragraphe III. 2. ) des structures composées de l'association en cascade et sans couplage interne de blocs (sous-systèmes) non-linéaires continus, invariants dans le temps, de dimension finie et d'ordre non supérieur à deux. Les structures sont mono-dimensionnelles, chaque bloc n'ayant qu'une entrée et une sortie.

Cette étude, en particulier dans le cas des systèmes non-linéaires, doit précéder celle du classement et de l'identification topologique, première étape du problème de l'identification [3]. Elle peut être aussi utile comme nous le verrons après à l'étude de la stabilité de certaines catégories de systèmes non-linéaires et à la synthèse d'organes de systèmes de commande automatique.

##### II. 1. 2. Principe de la méthode de décomposition structurelle.

L'étude des propriétés structurelles de certaines chaînes non-linéaires telle qu'elle a été définie dans le cadre de notre thèse a supposé qu'il était possible de remplacer des systèmes non-linéaires définissant une certaine famille F par des structures constituées par des composants non-linéaires et linéaires des types déjà cités et groupés convenablement de façon à avoir le même comportement externe des systèmes en question (Equivalence simple



Chapitre I - paragraphe I.2.2.). Pour cette raison, nous avons convenu d'appeler la méthode d'étude utilisée : Méthode de Décomposition Structurelle.

Cette méthode a été développée à partir des notions de famille, groupe et classe telles qu'elles ont été prises en [3] à savoir :

Famille : Ensemble fini, caractérisé par la présence de non-linéarités statiques du type avec ou sans mémoire associées en cascade avec des éléments linéaires stationnaires, continus, à dimension finie et d'ordre non supérieur à deux. Les structures ainsi définies, sont supposées mono-variables, sans bouclage interne, ayant au maximum quatre composants.

Groupe : Ensemble de membres de la famille défini à partir d'un critère basé sur le choix d'une même caractéristique non-linéaire (Ex. Groupe des relais, des saturations, de la parabole, etc.).

Classe : Membre d'un groupe dont a défini préalablement la non-linéarité de façon spécifique (Ex. Classe des relais à seuil, des saturations avec hystérésis, des diodes).

Pour la mise en oeuvre de la Méthode de Décomposition Structurelle, nous avons été amenés à considérer la famille F comme étant constitué par dix classes de systèmes dont le comportement qualitatif externe pouvait être considéré comme étant équivalent à celui d'un même nombre de classes de structures mono-dimensionnelles dont les caractéristiques globales ont été définies précédemment. Chaque classe structurelle se caractérisait par la présence d'une des dix non-linéarités qui font l'objet du chapitre I - paragraphe I.3.4. Les classes ont été rassemblées en trois groupes différents :

Groupe des relais constitué par : le relais idéal, le relais à seuil, le relais non polarisé, le relais avec hystérésis et le relais avec seuil et hystérésis.

Groupe des saturations constitué par : la saturation pure, la saturation avec seuil, la saturation avec hystérésis et la diode.

Groupe des paraboles : ne contenant qu'une classe, celle de la parabole du type  $y = u^2$ .

L'étude des propriétés structurelles dans le sens où elles ont été prises dans l'optique de ce travail, a été faite à l'aide de signaux de tests hiérarchisés susceptibles de stimuler les propriétés intrinsèques de chaque structure. Un choix convenable de ces signaux a permis entre autre choses de tenir compte des conditions initiales des structures interrogées au moment de l'application des tests.

En ce qui concerne la topologie des chaînes étudiées, elles présentent les structures suivantes (Figure II. 1.).

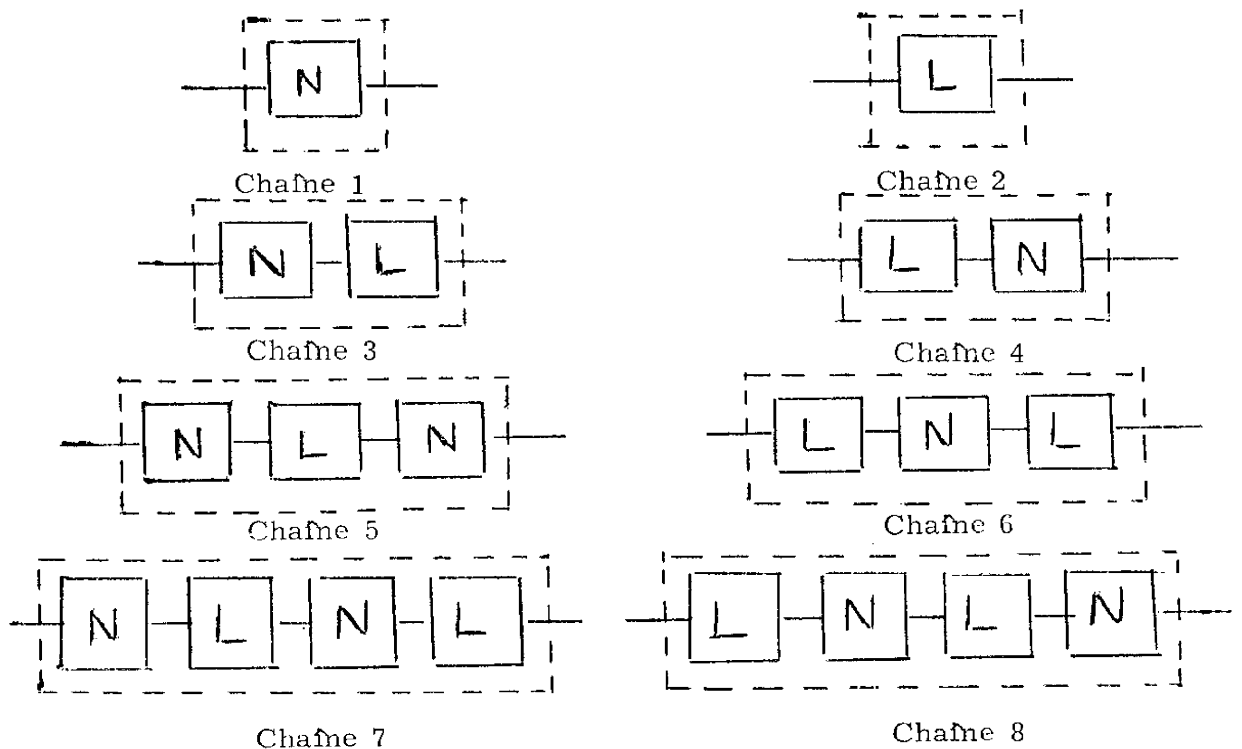


Figure II. 1.

Les chaînes 1, 3, 5, 7, commencent toutes par un bloc non-linéaire. Nous verrons par la suite que l'étude faite pour les chaînes impaires peut se résumer à celle de la chaîne 7, que nous appellerons chaîne A. Par contre, les chaînes 2, 4, 6, 8 commencent par un bloc linéaire. De même, nous appellerons la chaîne 8, chaîne B. L'étude faite sur cette chaîne, englobe les études susceptibles d'être réalisées sur les chaînes paires.

### II. 1. 3. Application du test de nature (test N° 1).

Pour connaître le groupe et la classe de la chaîne, nous appliquerons un test dont nous avons déjà présenté les caractéristiques au cours du premier chapitre (paragraphe I. 3. 5. 3. ). Nous appellerons ce test : "test de nature". En effet, il nous définira la nature de la non-linéarité dans la structure ou chaîne en étude.

Nous essayerons de justifier tous les résultats dans le cas du relais, puis nous présenterons sans démonstration ceux relatifs aux autres non-linéarités, car ils ont été obtenus à partir d'un même raisonnement.

### II. 1. 4. Chaînes contenant des non-linéarités du type relais idéal.

#### a) Chaîne A.

La figure II. 2. représente une chaîne du type A.

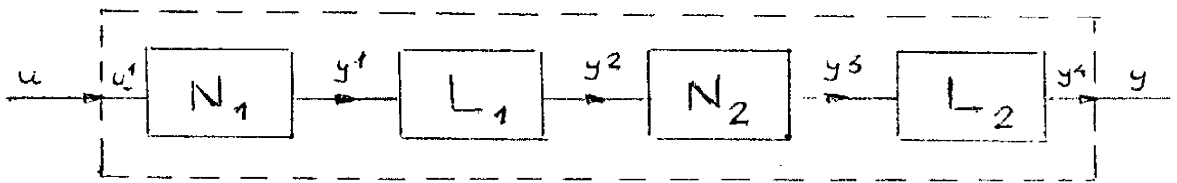


Figure II. 2.

Dans cette chaîne,  $N_1$  et  $N_2$  sont deux relais idéaux ;  $N_1$  a pour paramètres  $M_1$ , amplitude de sortie du relais ;  $N_2$  a pour paramètre  $M_2$ .

$L_1$  a sa représentation en opérateur différentiel donné par :

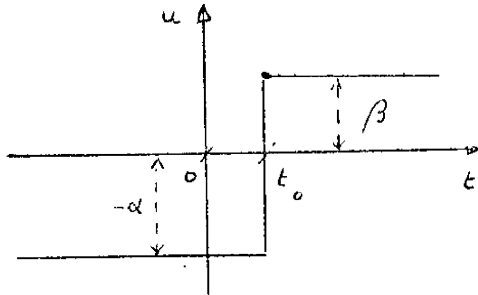
$$T_1 \frac{d^2 y^2}{dt^2} + y^2 = K_1 y^1$$

De même pour  $L_2$  :

$$T_2 \frac{d^2 y^4}{dt^2} + y^4 = K_2 y^3$$

Durant le régime permanent, les blocs linéaires  $L_1$  et  $L_2$  peuvent être représentés par  $K_1$  et  $K_2$  (paragraphe I. 3. 5. 2. ).

Le test sera, comme nous l'avons déjà vu (paragraphe 1.3.5.3.), de la forme donnée par la figure II. 3.



$$\alpha = U_{\text{inf}}$$

$$\beta = \beta_0 \quad \beta_0 \in U$$

Figure II. 3.

En faisant varier les valeurs de  $\beta_0$  tout au long de U, nous avons :

Pour  $\beta < c$

$$y^1 = -M_1$$

$$y^2 = -K_1 M_1$$

$$y^3 = -M_2$$

$$y^4 = -K_2 M_2$$

Pour  $\beta > c$

$$y^1 = M_1$$

$$y^2 = K_1 M_1$$

$$y^3 = M_2$$

$$y^4 = K_2 M_2$$

Nous obtenons donc une caractéristique de la sortie en régime permanent en fonction de  $\beta$ , toujours de la même forme (figure II. 4.)

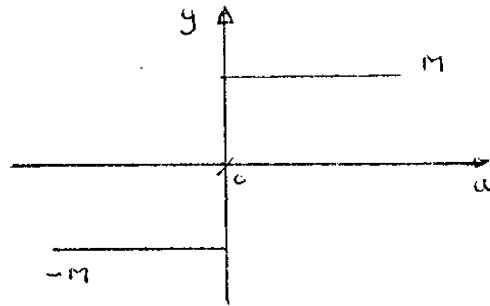


Figure II. 4.

D'après les relations ci-dessus et en tenant compte de la caractéristique donnée par la figure II. 4., nous verrons que :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Si : } y = y^1 & \longrightarrow M = M_1 \\
 y = y^2 & \longrightarrow M = K_1 M_1 \\
 y = y^3 & \longrightarrow M = M_2 \\
 y = y^4 & \longrightarrow M = K_2 M_2
 \end{array}$$

Si nous recommençons le test avec,  $\alpha = U_{\text{sup}}$  et  $\beta = \beta_c, \beta_o \in U$  la caractéristique obtenue est exactement la même. Il n'existe donc pas de phénomène de mémoire dans la chaîne (paragraphe I. 3. 5: 4.).

b) Chaîne du type B.

Soit maintenant une chaîne du type B (figure II. 5.)

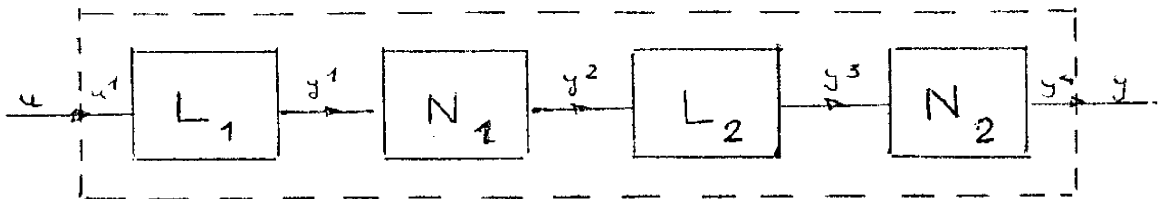


Figure II. 5.

Où  $N_1$  et  $N_2$  représentent deux relais idéaux, dont les amplitudes de sorties sont respectivement  $M_1$  et  $M_2$ .

Les blocs  $L_1$  et  $L_2$  sont comme dans le cas précédent, deux blocs linéaires.

Durant le régime permanent, les blocs  $L_1$  et  $L_2$  peuvent être représentés respectivement par les gains statiques  $K_1$  et  $K_2$ , analogiquement au cas antérieur.

Si nous appliquons le test N° 1, (figure II. 3. ), nous aurons les résultats suivants :

Pour  $\beta < 0$

$$\begin{aligned} y^1 &= -K_1 \beta \\ y^2 &= -M_1 \\ y^3 &= -K_2 M_1 \\ y^4 &= -M_2 \end{aligned}$$

Pour  $\beta > 0$

$$\begin{aligned} y^1 &= K_1 \beta \\ y^2 &= M_1 \\ y^3 &= K_2 M_1 \\ y^4 &= M_2 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc une caractéristique de la sortie en fonction de  $\beta$  de deux formes possibles (Figure II. 6 et II. 7).

Si  $y = y^1$ , la caractéristique aura l'allure de la figure II. 6.

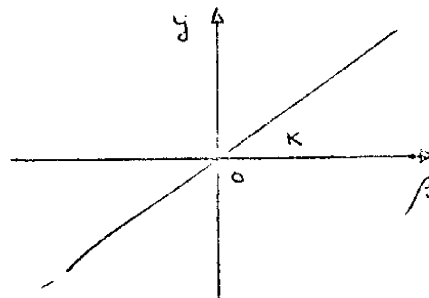


Figure II. 6.

Où  $y = K_1 u$ , le système est donc linéaire.

Si  $y = y^2$ ,  $y = y^3$  et  $y = y^4$

Nous obtenons une caractéristique de la forme de la figure II. 7.

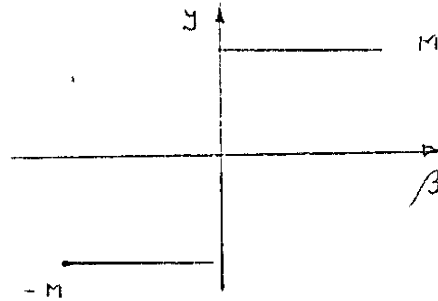


Figure II. 7.

Si	$y = y^2$	$M = M_1$
	$y = y^3$	$M = M_1 K_2$
	$y = y^4$	$M = M_2$

En recommençant le test avec  $\alpha = U_{sup}$ ,  $\beta = \beta_0$ ,  $\beta_0 \in U$  la caractéristique est exactement la même ce qui démontre encore une fois qu'il n'existe pas de mémoire dans la chaîne.

c) Remarques importantes :

Dans le cas où il existe un relais dans la chaîne, la forme de la caractéristique de la sortie en fonction de l'entrée en régime statique aura toujours la forme de celle d'un relais (figure II. 7.) et (figure II. 5.).

Par contre, dans le cas de la chaîne 2, (paragraphe II. 1.2.), il n'existe pas de bloc relais ; la forme de la caractéristique de cette chaîne démontre bien l'existence d'un bloc linéaire (figure II. 6.).

Le fait d'avoir des blocs linéaires du premier ordre ou d'un ordre supérieur n'a aucune influence vu que nous étudions les blocs en régime statique.

### II. 1. 5. Chaînes contenant des non-linéarités du type relais à seuil.

Les blocs non-linéaires ont une caractéristique du type de celle représentée par la figure II. 8.

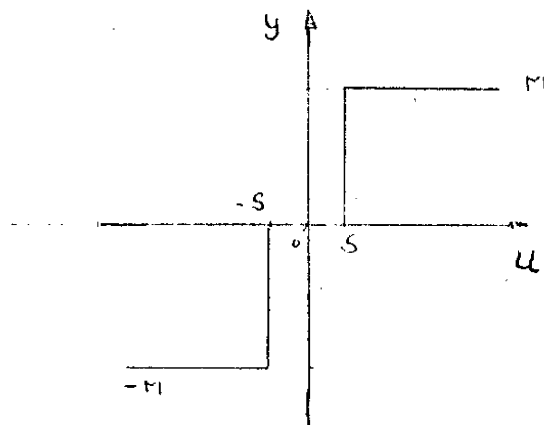


Figure II. 8.

La caractéristique en question est telle que :

$$\begin{array}{ll} u < -s & y = -M \\ -s \leq u \leq s & y = \text{zéro} \\ u \gg s & y = +M \end{array}$$

Nous utiliserons exactement le même raisonnement que dans le cas du relais idéal. Nous prendrons les mêmes indices pour les blocs et leurs caractéristiques.

Considérons initialement une chaîne du type A (figure II. 2), nous aurons alors une caractéristique  $y = f(\beta)$  de la forme représentée par la figure II. 9.

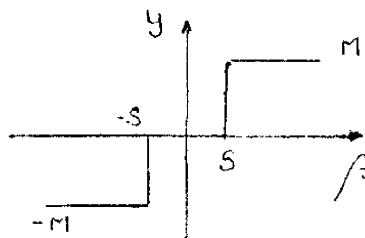


Figure II. 9.



Où si

$y = y^1$	$\longrightarrow$	$M = M_1$	et	$S = S_1$	
$y = y^2$	$\longrightarrow$	$M = K_1 M_1$	et	$S = S_1$	
$y = y^3$	$\longrightarrow$	$M = M_2$	et	$S = S_1$	Si $K_1 M_1 > S_2$
$y = y^4$	$\longrightarrow$	$M = K_2 M_2$	et	$S = S_1$	Si $K_1 M_1 > S_2$

Après avoir fait la deuxième partie du test, nous nous rendrons compte de l'inexistence d'un phénomène de mémoire dans la chaîne (paragraphe I. 3. 5. 4.)

Considérons maintenant une chaîne du type B.

Les résultats dans ce cas seront les suivants :

Si  $y = y^1 \longrightarrow y = K_1 u$  ; le système est donc linéaire (figure II. 10).

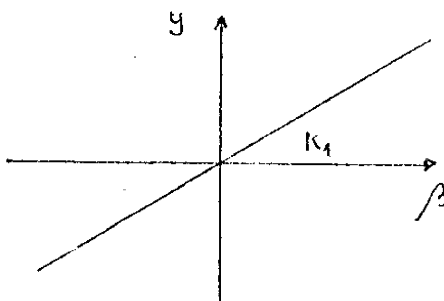


Figure II. 10.

Si  $y = y^2$ ,  $y = y^3$ , et  $y = y^4$ , les caractéristiques statiques du système (chaîne du type B) auront l'allure de la figure II. 11.

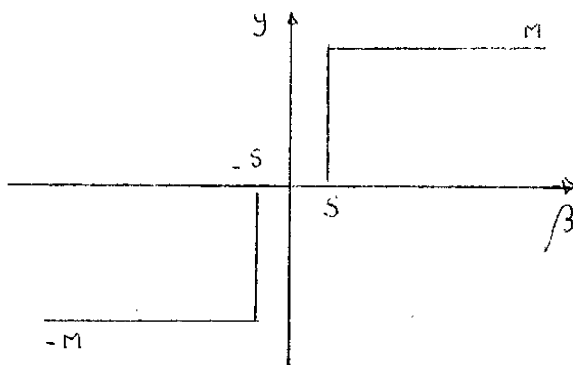


Figure II. 11.

$$\begin{array}{lll}
 \text{Où Si } y = y^2 & \longrightarrow & M = M_1 \quad \text{et} \quad S = S_1/K_1 \\
 y = y^3 & \longrightarrow & M = K_2 M_1 \quad \text{et} \quad S = S_1/K_1 \\
 y = y^4 & \longrightarrow & M = M_2 \quad \text{et} \quad S = S_1/K_1 \quad \text{Si } K_2 M_1 > S_2
 \end{array}$$

Après avoir fait la deuxième partie du test, nous constatons l'existence d'un phénomène de mémoire dans la chaîne.

Remarques :

- Les mêmes que celles faites dans le cas du relais idéal.
- Une caractéristique importante est l'existence d'un seuil ( $S_1$ ) dans la chaîne A et ( $S_1/K_1$ ) dans la chaîne B. Nous retrouverons ces deux constantes souvent au cours de notre travail, quand il s'agira de relais à seuil.
- Il existe une condition nécessaire du type  $K_1 M_1 > S_2$  dans la chaîne A et  $K_2 M_1 > S_2$  dans la chaîne B ; condition qui, si elle n'est pas remplie, rend le système inobservable.

#### II. 1. 6. Chaînes contenant des non-linéarités du type relais non polarisé

Les blocs non-linéaires ont une caractéristique semblable à celle donnée par la figure (figure II. 12), pour laquelle :

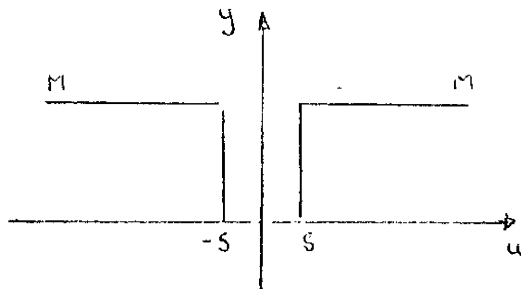


Figure II. 12

$$\begin{array}{lll}
 u < -s & \text{et} & u > +s \longrightarrow y = M \\
 -s \leq u \leq S & & \longrightarrow y = \text{zéro}
 \end{array}$$

En réutilisant exactement le même raisonnement que précédemment, les résultats dans ce cas peuvent se résumer comme ci-dessous.

Pour la chaîne (A), reproduction de la caractéristique statique du relais (figure II. 12.).

$$\begin{array}{llll}
 \text{Où si } y = y^1 & \longrightarrow & M = M_1 & \text{et } S = S_1 \\
 y = y^2 & \longrightarrow & M = K_1 M_1 & \text{et } S = S_1 \\
 y = y^3 & \longrightarrow & M = M_2 & \text{et } S = S_1 \quad \text{Si } K_1 M_1 > S_2 \\
 y = y^4 & \longrightarrow & M = K_2 M_2 & \text{et } S = S_1 \quad \text{Si } K_1 M_1 > S_2
 \end{array}$$

Pour la chaîne B :

Les résultats dans ce cas sont :

Si  $y = y^1 \longrightarrow y = K_1 u$  ; le système est donc linéaire (Figure II. 10).

Si  $y = y^1, y = y^2, y = y^3$ , la caractéristique est la reproduction de celle du relais (figure II. 12), en remplaçant  $u$  par  $\beta$ .

$$\begin{array}{llll}
 \text{Si } y = y^1 & \longrightarrow & M = M_1 & \text{et } S = S_1/K_1 \\
 y = y^2 & \longrightarrow & M = K_2 M_1 & \text{et } S = S_1/K_1 \\
 y = y^3 & \longrightarrow & M = M_2 & \text{et } S = S_1/K_1 \quad \text{Si } K_2 M_1 > S_1
 \end{array}$$

Remarques : Les mêmes que dans le cas du relais à seuil (paragraphe II. 1. 5.).

### II. 1. 7. Chaînes contenant des non-linéarités du type relais avec hystérésis.

Les blocs non-linéaires ont une caractéristique semblable à celle représentée par la figure II. 13., et telle que :

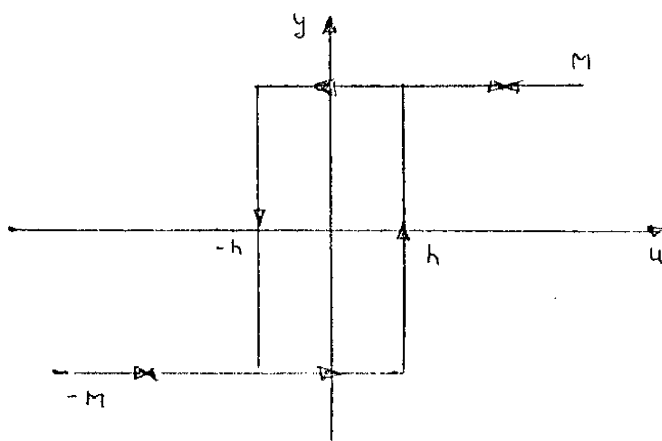


Figure II. 13.

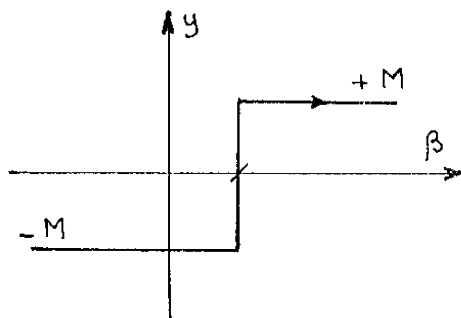
$$\begin{array}{llll}
 y = M & \text{Sgn} [u - h] & \text{si } \frac{du}{dt} > 0 \\
 y = -M & \text{Sgn} [u + h] & \text{si } \frac{du}{dt} < 0
 \end{array}$$

Chapne A

Nous effectuerons tout d'abord la première partie du test de nature avec

$$\begin{cases} \alpha = U_{\text{inf}} \\ \beta = \beta_0 \end{cases} \quad \beta_0 \in U$$

Les résultats peuvent être résumés ainsi :



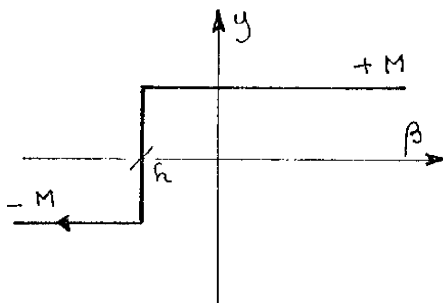
$$\begin{aligned} \text{Si } y = y^1 &\rightarrow M = M_1 && \text{avec } h = h_1 \\ y = y^2 &\rightarrow M = M_2 k_1 && \text{avec } h = h_1 \\ y = y^3 &\rightarrow M = M_2 && \text{avec } h = h_1 \\ y = y^4 &\rightarrow M = k_2 M_2 && \text{avec } h = h_1 \end{aligned}$$

figure II-14

En effectuant la seconde partie du test, avec :

$$\begin{cases} \alpha = U_{\text{inf}} \\ \beta = \beta_0 \end{cases}, \quad \beta_0 \in U$$

Les résultats prennent la forme de la figure (II-15)



$$\begin{aligned} \text{Si } y = y^1 &\rightarrow M = M_1 && \text{avec } h = h_1 \\ y = y^2 &\rightarrow M = k_1 M_2 && \text{avec } h = h_1 \\ y = y^3 &\rightarrow M = M_2 && \text{avec } h = h_1 \\ y = y^4 &\rightarrow M = k_2 M_2 && \text{avec } h = h_1 \end{aligned}$$

Figure II-15

La caractéristique complète aura donc l'allure de la forme (II-13)

Où :

$$\begin{aligned} \text{Si } y = y^1 &\text{ nous avons } M = M_1 && \text{et } h = h_1 \\ y = y^2 &\rightarrow M = k_1 M_1 && \text{et } h = h_1 \\ y = y^3 &\rightarrow M = M_2 && \text{et } h = h_1 \quad \text{si } k_1 M_1 > h_2 \\ y = y^4 &\rightarrow M = k_2 M_2 && \text{et } h = h_1 \quad \text{si } k_1 M_1 > h_2 \end{aligned}$$

Remarque : Il existe un phénomène de mémoire dû au dédoublement de la caractéristique.

Chaîne B

Si nous supposons que la caractéristique correspondant à la sortie  $y^1$  ne change pas, tout au long de ce travail, vu qu'elle représente un bloc linéaire. Nous obtenons dans ce cas une caractéristique  $y = f(\beta)$  pour les sorties  $y = y^2$ ,  $y = y^3$  et  $y^4$ , ayant la même allure que la figure II. 13., où :

$$\begin{array}{llll} \text{Pour } y = y^2 & \longrightarrow & M = M_1 & \text{et } h = h_1/K_1 \\ y = y^3 & \longrightarrow & M = K_2 M_1 & \text{et } h = h_1/K_1 \\ y = y^4 & \longrightarrow & M = M_2 & \text{et } h = h_1/K_1 \text{ Si } K_2 M_1 > h_2 \end{array}$$

Remarques : Comme pour la chaîne A, il existe un phénomène de mémoire dû au dédoublement de la caractéristique.

Nous soulignons l'existence des constantes  $h_1$  et  $h_1/K_1$  respectivement pour les chaînes A et B car elles seront utiles à d'autres tests.

II. 1. 8. Chaînes contenant des non-linéarités du type relais avec seuil et hystérésis.

Les blocs non-linéaires ont une caractéristique représentée par la figure II. 16.

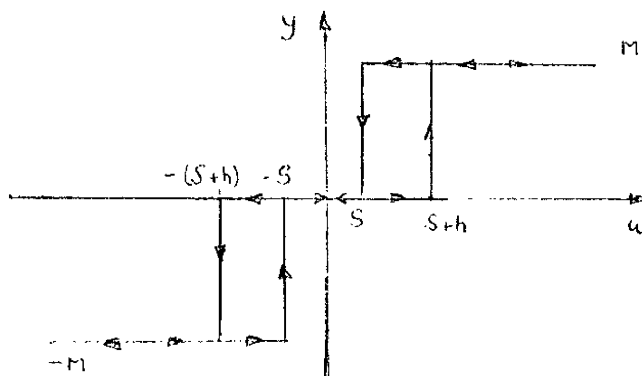


Figure II. 16.

Pour une telle caractéristique, on a :

$$y = \frac{M}{2} \left\{ \text{sgn} [u - (s+h)] + \text{sgn} [u + s] \right\} \quad \frac{du}{dt} > 0$$

$$y = \frac{M}{2} \left\{ \text{sgn} [u + s+h] + \text{sgn} [u - s] \right\} \quad \frac{du}{dt} < 0$$

En ne tenant pas compte de la sortie  $y^1$  de la chaîne B qui sera linéaire comme nous l'avons déjà montrée, nous aurons une caractéristique  $y = f(\beta)$  du type de la figure II. 16.

Où :

Chaîne A :

$$\begin{array}{llll} \text{Si } y = y^1 \longrightarrow & M = M_1 & S = S_1 & \text{et } h = h_1 \\ y = y^2 \longrightarrow & M = M_1 K_1 & S = S_1 & \text{et } h = h_1 \\ y = y^3 \longrightarrow & M = M_2 & S = S_1 & \text{et } h = h_1 \quad \text{Si } K_1 M_1 > S_2 + h_2 \\ y = y^4 \longrightarrow & M = K_2 M_2 & S = S_1 & \text{et } h = h_1 \quad \text{Si } K_1 M_1 > S_2 + h_2 \end{array}$$

Chaîne B :

$$\begin{array}{llll} y = y^2 \longrightarrow & M = M_1 & S = S_1/K_1 & \text{et } h = h_1/K_1 \\ y = y^3 \longrightarrow & M = K_2 M_1 & S = S_1/K_1 & \text{et } h = h_1/K_1 \\ y = y^4 \longrightarrow & M = M_2 & S = S_1/K_1 & \text{et } h = h_1/K_1 \quad \text{Si } K_2 M_1 > S_2 + h_2 \end{array}$$

### II. 1. 9. Chaînes contenant des non-linéarités du type Saturation pure.

La figure II. 17 donne la caractéristique de la non-linéarité :

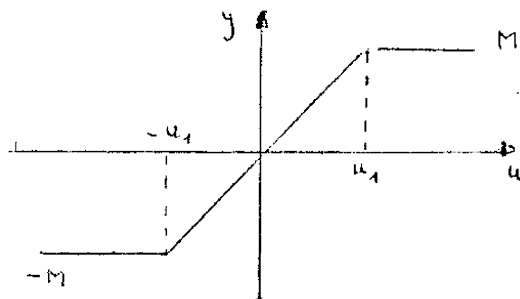


Figure II. 17.

$$\begin{array}{ll} -u_1 < u < u_1 & y = u \\ |u| > u_1 & y = M \operatorname{sgn}(u) \end{array}$$

Les paramètres essentiels à la suite du travail que le test de nature nous permet de trouver sont :

Chaîne A :

Pour	$y = y^1$	$\longrightarrow$	$M = M_1$	et	$k = 1$
	$y = y^2$	$\longrightarrow$	$M = K_1 M_1$	et	$k = K_1$
	$y = y^3$	$\longrightarrow$	$M = M_2$	et	$k = K_1$ Si $M_2 < M_1 K_1$
	$y = y^4$	$\longrightarrow$	$M = M_2 K_2$	et	$k = K_1 K_2$ Si $M_2 < M_1 K_1$

Chaîne B :

Pour	$y = y^1$	$\longrightarrow$	$M = \infty$	et	$k = K_1$
	$y = y^2$	$\longrightarrow$	$M = M_1$	et	$k = K_1$
	$y = y^3$	$\longrightarrow$	$M = M_1 K_2$	et	$k = K_1 K_2$
	$y = y^4$	$\longrightarrow$	$M = M_2$	et	$k = K_1 K_2$ Si $M_2 < K_2 M_1$

Il n'y a aucun phénomène de mémoire.

Remarque : Naturellement, une condition d'existence de deux saturations dans le cas d'une chaîne du type A est donnée par :  $M_2 < K_1 M_1$  et dans le cas d'une chaîne du type B par :  $M_2 < K_2 M_1$

### II. 1. 10. Chaînes contenant des non-linéarités du type saturation avec seuil.

La caractéristique non-linéaire est celle de la figure II. 18.

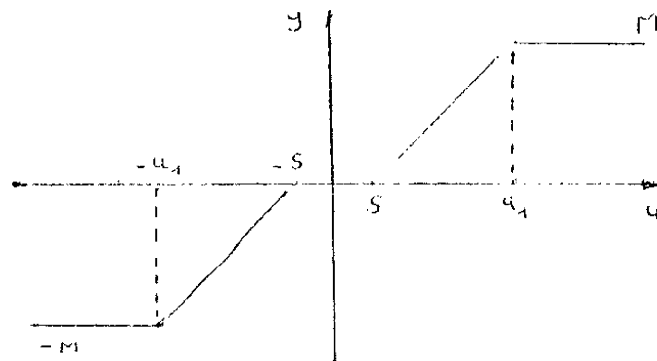


Figure II. 18.

Où

$-s < u < s$	$\longrightarrow$	$y = 0$
$s <  u  < u_1$	$\longrightarrow$	$y = (u - S) \text{ Sgn}(u)$
$ u  > u_1$	$\longrightarrow$	$y = M \text{ Sgn}(u)$

La caractéristique  $y = f(\beta)$  obtenue par le test de nature est de la même forme que la figure II. 18.

Chaîne A :

$$\begin{array}{l}
 \text{Pour } y = y^1 \rightarrow M = M_1, \quad S = S_1 \quad \text{et } k = 1 \\
 y = y^2 \rightarrow M = K_1 M_1, \quad S = S_1 \quad \text{et } k = K_1 \\
 y = y^3 \rightarrow M = M_2, \quad S = S_1 + \frac{S_2}{K_1} \quad \text{et } k = K_1 \quad \text{Si } S_2 < M_2 < K_1 M_1 \\
 y = y^4 \rightarrow M = K_2 M_2, \quad S = S_1 + \frac{S_2}{K_1} \quad \text{et } k = K_1 K_2 \quad \text{Si } S_2 < M_2 < K_1 M_1
 \end{array}$$

Chaîne B :

$$\begin{array}{l}
 \text{Pour } y = y^1 \quad M = \quad \quad \quad S = 0 \quad \text{et } k = K_1 \\
 y = y^2 \quad M = M_1 \quad \quad \quad S = S_1/K_1 \quad \text{et } k = K_1 \\
 y = y^3 \quad M = M_1 K_2 \quad \quad S = \frac{S_1}{K_1}, \quad \text{et } k = K_1 K_2 \\
 y = y^4 \quad M = M_2 \quad \quad \quad S = \frac{S_1}{K_1} + \frac{S_2}{K_1 K_2} \quad \text{et } k = K_1 K_2 \quad \text{Si } S_2 < M_2 < K_2
 \end{array}$$

Remarque : Nous retrouvons là aussi, les conditions que les seuils et les saturations imposent à la chaîne pour que la sortie soit observable.

### II. 1. 11. Chaînes contenant des non-linéarités du type saturation avec hystérésis.

La caractéristique des blocs non-linéaires se trouve représentée par la figure II. 19.



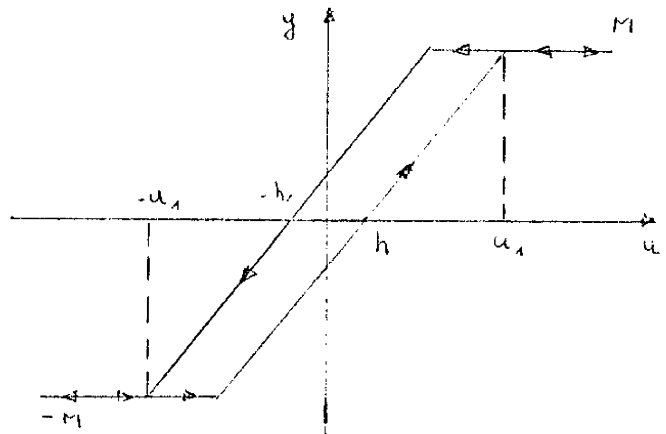


Figure II. 19.

$$\begin{aligned}
 (-u_1 + 2h) < y < u_1 & \quad y = u - h \quad \text{Si} \quad \frac{du}{dt} > 0 \\
 y < -u_1 + 2h, u > u_1 & \quad y = M \operatorname{Sgn} u \quad \text{Si} \quad \frac{du}{dt} > 0 \\
 -u_1 < u < u_1 - 2h & \quad y = u - h \quad \text{Si} \quad \frac{du}{dt} < 0 \\
 u < -u_1, u > u_1 - 2h & \quad y = M \operatorname{Sgn} u \quad \text{Si} \quad \frac{du}{dt} < 0
 \end{aligned}$$

La caractéristique  $y = f(\beta)$  a pour forme celle de la figure II. 19 et pour paramètres.

Chafne A :

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } y = y^1 & \quad M = M_1, \quad h = h_1 \quad \text{et} \quad k = 1 \\
 y = y^2 & \quad M = K_1 M_1, \quad h = h_1 \quad \text{et} \quad k = K_1 \\
 y = y^3 & \quad M = M_2, \quad h = h_1 + \frac{h_2}{K_1} \quad \text{et} \quad k = K_1 \quad \text{Si} \quad h_2 < M_2 < K_1 M_1 \\
 y = y^4 & \quad M = K_2 M_2, \quad h = h_1 + \frac{h_2}{K_1} \quad \text{et} \quad k = K_1 K_2 \quad \text{Si} \quad h_2 < M_2 < K_1 M_1
 \end{aligned}$$

Chafne B

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } y = y^2 & \quad M = M_1, \quad h = h_1/K_1 \quad \text{et} \quad k = K_1 \\
 y = y^3 & \quad M = K_1 M_1, \quad h = h_1/K_1 \quad \text{et} \quad k = K_1 K_2 \\
 y = y^4 & \quad M = M_2, \quad h = \frac{1}{K_1} \left( \frac{h_2}{K_2} + h_1 \right) \quad \text{et} \quad k = K_1 K_2 \quad \text{Si} \quad h_2 < M_2 < K_2 M
 \end{aligned}$$

### II. 1. 12. Châfnes contenant des non-linéarités du type diode.

Les blocs non-linéaires ont pour caractéristique celle représentée par la figure II. 20.

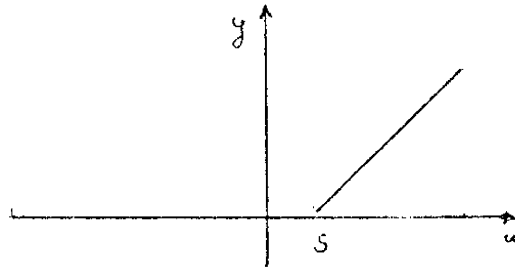


Figure II. 20.

$$\begin{aligned} u < s & \quad y = 0 \\ u > s & \quad y = u - s \end{aligned}$$

La caractéristique  $y = f(\beta)$  pour le test de nature aura la même forme que la figure II. 20, où :

Châfne A :

$$\begin{aligned} \text{Pour } y = y^1 & \rightarrow S = S_1 \quad \text{et} \quad k = 1 \\ y = y^2 & \rightarrow S = S_1 \quad \text{et} \quad k = K_1 \\ y = y^3 & \rightarrow S = S_1 + \frac{S_2}{K_1} \quad \text{et} \quad k = K_1 \\ y = y & \rightarrow S = S_1 + \frac{S_2}{K_1} \quad \text{et} \quad k = K_1 K_2 \end{aligned}$$

Châfne B :

$$\begin{aligned} y = y^2 & \rightarrow S = S_1/K_1 \quad \text{et} \quad k = K_1 \\ y = y^3 & \rightarrow S = S_1/K_1 \quad \text{et} \quad k = K_1 K_2 \\ y = y^4 & \rightarrow S = S_1/K_1 + S_2/K_1 K_2 \quad \text{et} \quad k = K_1 K_2 \end{aligned}$$

Remarques : Il existe une très grande similitude entre les résultats de ce test pour la saturation avec seuil et pour la diode. Cette similitude se retrouvera tout au long du travail.

### II. 1. 13. Chaînes contenant des non-linéarités du type parabole.

Les blocs non-linéaires ont pour caractéristique une parabole du type donné par la figure II. 21, dont l'équation a la forme :  $y = u^2$

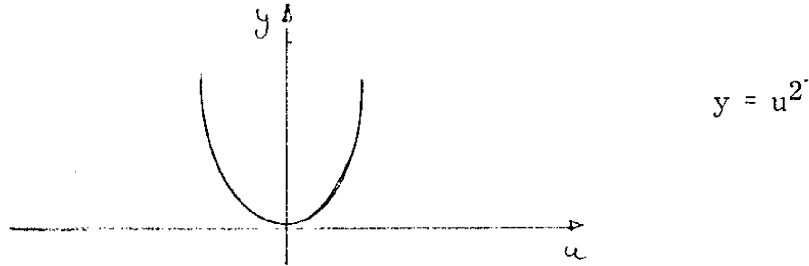


Figure II. 21.

La forme de la caractéristique  $y = f(\beta)$  sera  $y = k \beta^{2n}$ , où  $n$  est le nombre de blocs non-linéaires dans la chaîne.

#### Chaîne A :

Pour	$y = y^1 \rightarrow n = 1$	et	$k = 1$
	$y = y^2 \rightarrow n = 1$	et	$k = K_1$
	$y = y^3 \rightarrow n = 2$	et	$k = (K_1)^2$
	$y = y^4 \rightarrow n = 2$	et	$k = (K_1)^2 K_2$

#### Chaîne B :

Pour	$y = y^1 \rightarrow n = 0$	et	$k = K_1$
	$y = y^2 \rightarrow n = 1$	et	$k = (K_1)^2$
	$y = y^3 \rightarrow n = 1$	et	$k = (K_1)^2 K_2$
	$y = y^4 \rightarrow n = 2$	et	$k = (K_1)^4 (K_2)^2$

Quelques remarques importantes : Dans le cas des paraboles, pour la première fois, nous n'avons pas caractérisé exactement la non-linéarité, mais seulement sa forme :  $y = k \beta^{2n}$ , où  $n$  représente le nombre de blocs non-linéaires dans la chaîne. Ce test est donc insuffisant sur un plan plus général pour définir la classe de la chaîne avec exactitude. Toutefois, au cours de ce travail, le groupe des paraboles ne contenant que la classe des paraboles du type  $y = u^2$ , nous n'aurons pas besoin de rechercher un autre test. Mais si dans un travail postérieur, se présente un intérêt d'analyser les propriétés des chaînes contenant des

non linéarités du type quadratique, il est certain que cette recherche devra permettre en premier lieu d'établir la différence entre ces deux caractéristiques de forme semblable. Nous pensons que dans le cas de non-linéarités du type algébrique, continu, ce problème se pose souvent.

#### II. 1. 14. Conclusions sur le test de nature (test N° 1).

Comme nous avons pu le remarquer le test N° 1, est extrêmement intéressant pour reconnaître le type de non-linéarité existante dans le système. Toutefois, ce test ne nous donne aucune information sur le nombre de non-linéarités du même type existant dans la chaîne. Nous pouvons en synthèse dire que le test N° 1 sert à reconnaître l'existence dans la chaîne d'un bloc non-linéaire et un seul.

Pour reconnaître l'existence de deux ou plus de deux blocs non-linéaires, il est nécessaire d'utiliser des tests dynamiques, c'est-à-dire, ceux qui tiennent compte du fonctionnement du système en régime dynamique. Nous montrerons qu'un signal d'entrée ayant la même forme que celui du test N° 1 est suffisamment riche, en général, en information, pour déterminer le nombre de blocs linéaires et non-linéaires dans la chaîne, dans le cas des systèmes étudiés.

### II. 2. GROUPE DES RELAIS.

#### II. 2. 1. Introduction.

Comme nous l'avons dit, nous devons maintenant effectuer un test en régime dynamique. Nous utiliserons toujours la même fonction d'entrée qui nous paraît la plus significative pour étudier les propriétés des relais. Pour ne pas rendre l'étude trop lourde et vu que celle-ci se répète pour les différents types de relais, nous traiterons en détail le cas du relais à seuil et nous essaierons de montrer ensuite les différences par rapport aux autres classes du groupe.

## II. 2. 2. Classe des relais à seuil.

### II. 2. 2. 1. Chaîne A.

Considérons la chaîne du type A représentée par la figure II. 22.

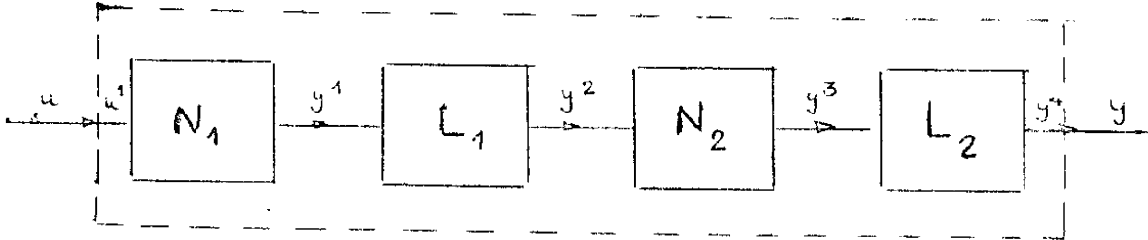


Figure II. 22.

Où  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $N_1$  et  $N_2$  sont respectivement de la forme.

$$L_1 : T_1 \frac{dy^2}{dt} + y^2 = K_1 y^1$$

$$L_2 : T_2 \frac{dy^4}{dt} + y^4 = K_2 y^3$$

$$N_1 : \begin{cases} -S_1 \leq u \leq S_1 \longrightarrow y^1 = 0 \\ |u| > S_1 \longrightarrow y^1 = M_1 \operatorname{Sgn}(u) \end{cases}$$

$$N_2 : \begin{cases} -S_2 \leq y^2 \leq S_2 \longrightarrow y^3 = 0 \\ |y^2| > S_2 \longrightarrow y^3 = M_2 \operatorname{Sgn}(y^2) \end{cases}$$

Les tests effectués auront la forme de la fonction d'entrée ci-dessous (figure II. 23.)

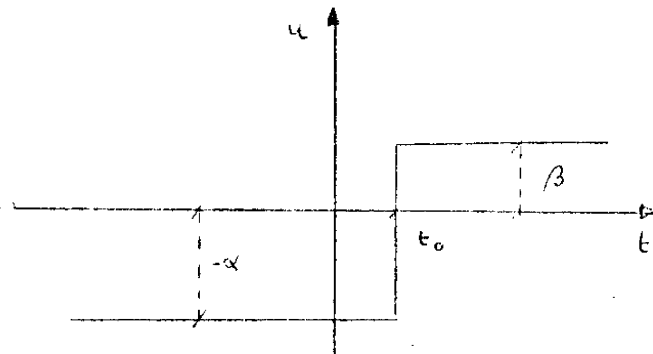


Figure II. 23.

Nous utiliserons d'autre part une variable âge, que nous définirons ainsi :

$$\tau_i = t - t_i \quad (\text{Eq. - II. 1})$$

Par exemple :  $\tau_0 = t - t_0$ ,  $\tau_1 = t - t_1$ , etc.

Cette variable aura pour valeur  $\tau_i^j$  avec  $\tau_i^j = t_j - t_i$ ,  $j \geq i$

Par exemple :  $\tau_0^1 = t_1 - t_0$

L'entrée à l'instant ( $t_0$ ) a pour valeur ( $-\alpha$ ) et à l'instant ( $t_{0+}$ ), ( $+\beta$ ) c'est-à-dire :

$$(\text{Eq. II. 2}) \left\{ \begin{array}{l} u(t_{0-}) = -\alpha \\ u(t_{0+}) = +\beta \end{array} \right. \quad (\text{Figure II. 23.})$$

Considérons  $|\alpha| > S_1$  et  $|\beta| > S_1$

Nous aurons alors :

$$y^1 = M_1 \text{ Sgn}(u) \quad (\text{Eq. II. 3})$$

Comme  $y^2(\tau_0^1) = -K_1 M_1$

Nous avons  $y^2(\tau_0) = K_1 M_1 (1 - 2 e^{-\tau_0/T_1})$  avec  $\tau_0 = t - t_0$  (Eq. II. 4)

A l'instant  $t_1$  :  $y^2 = -S_2$  ;  $t_1$  correspond à l'instant de commutation du second relais de  $-M_2$  à zéro.

D'où :  $-S_2 = K_1 M_1 (1 - 2 e^{-\tau_0^1/T_1})$  Avec  $\tau_0^1 = t_1 - t_0$

Ce qui donne :  $\tau_0^1 = T_1 \text{ Log} \frac{2 K_1 M_1}{S_2 + K_1 M_1} = C_{ste} = C_1$  (Eq. II. 5)

A l'instant  $t_2$ ,  $y^2 = S_2$  ; ( $t_2$  correspond à l'instant de commutation du second relais de 0 à  $+M_2$ ).

Nous avons donc :  $S_2 = K_1 M_1 (1 - 2 e^{-\tau_0^2/T_1})$

$$\tau_0^2 = T_1 \text{ Log} \frac{2 K_1 M_1}{K_1 M_1 - S_2} = C_{ste} = C_2 \quad (\text{Eq. II. 6})$$

$\zeta_0^2$  existe pour  $K_1 M_1 > S_2$ , ce qui est évident (paragraphe II. 1. 5.), la valeur de  $y^2$  devant au moins dépasser le seuil du second relais.

A la suite du bloc  $N_2$ , nous aurons donc :

$$\begin{aligned} y^3 &= -M_2 && \text{pour } t < t_1 \\ y^3 &= \text{zéro} && \text{pour } t_1 \leq t \leq t_2 \\ y^3 &= M_2 && \text{pour } t > t_2 \end{aligned} \quad (\text{Eq. II. 7})$$

A la sortie du bloc  $L_2$ , nous aurons, compte tenu des valeurs des excitations  $y^3$  à l'entrée de ce bloc :

$$\begin{aligned} \text{Pour } t < t_1 & \quad y^4(\zeta_0) = -K_2 M_2 \\ \text{Pour } t_1 \leq t \leq t_2 & \quad y^4(\zeta_1) = C e^{-\zeta_1/T_2} \text{ et } y^4(\zeta_1^1) = y^4(\zeta_1^1) = -K_2 M_2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } y^4(\zeta_1) = -K_2 M_2 e^{-\zeta_1/T_2} \quad (\text{Eq. II. 8.})$$

$$\text{Pour } t > t_2 \quad y^4(\zeta_2) = C e^{-\zeta_2/T_2} + K_2 M_2 \quad (\text{Eq. II. 9.})$$

Pour déterminer  $y^4(\zeta_2)$  calculons la constante  $C$  de l'expression (II. 9.). Commençons alors par déterminer la valeur de la variable âge  $\zeta_1^2$ . Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \zeta_1^2 &= t_2 - t_1 \\ &= t_2 - t_0 - t_1 + t_0 \\ &= \zeta_0^2 - \zeta_0^1 \end{aligned}$$

En remplaçant  $\zeta_0^1$  et  $\zeta_0^2$  par leurs expressions données par (Eq. II. 5. et II. 6.)

$$\zeta_1^2 = T_1 \text{Log} \frac{\frac{2 K_1 M_1}{K_1 M_1 - S_2}}{\frac{2 K_1 M_1}{K_1 M_1 + S_2}} = T_1 \text{Log} \frac{K_1 M_1 + S_2}{K_1 M_1 - S_2} \quad (\text{Eq. II. 10})$$

NOTA :  $\zeta_1^2$  existera aussi pour  $K_1 M_1 > S_2$

Déterminons maintenant la valeur de  $y^4(\zeta_1^2)$  en remplaçant

par sa valeur dans (Eq. II. 8.),

Nous obtenons alors :

$$e^{-\tau_1^2/\tau_2} = e^{-\frac{\tau_1}{\tau_2} \ln 3} \frac{K_1 M_1 + S_2}{K_1 M_1 - S_2}$$

$$e^{-\tau_1^2/\tau_2} = \left( \frac{K_1 M_1 - S_2}{K_1 M_1 + S_2} \right)^{\tau_1/\tau_2}$$

D'où

$$y^4(\tau_1^2) = -K_2 M_2 \left( \frac{K_1 M_1 - S_2}{K_1 M_1 + S_2} \right)^{\tau_1/\tau_2} = \text{Cste} = -D_1$$

Pour calculer C, il suffit donc de tenir compte dans l'équation (II. 9.) que ( $t_2$ ) est l'instant initial. Nous aurons ainsi :

$$y^4(\tau_2^2) = -D_1 = C + K_2 M_2$$

$$\text{D'où } C = -(D_1 + K_2 M_2) \quad (\text{Eq. II. 11})$$

En remplaçant la valeur (II. 11.) de C dans l'équation (II. 9), nous aurons l'expression finale de  $y^4(\tau_2)$ , à savoir :

$$y^4(\tau_2) = -(D_1 + K_2 M_2) e^{-\tau_2/\tau_2} + K_2 M_2 \quad (\text{Eq. II. 12.})$$

Etudions maintenant la chaîne B et essayons de montrer ensuite les différences susceptibles d'exister entre les différentes chaînes.

#### II. 2. 2. 2. Chaîne B.

Une chaîne du type B a comme nous le savons l'allure de la figure II. 24 .

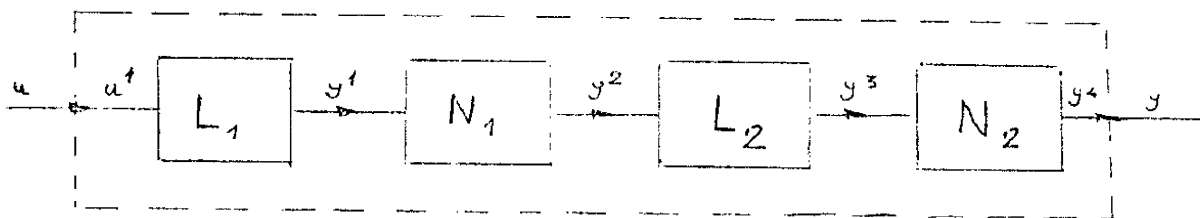


Figure II. 24.



Les équations définissant  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $N_1$  et  $N_2$  sont du même type que celles que nous avons vues dans le cas de la chaîne A (paragraphe II. 2. 2. 1.). Le test à effectuer est toujours le même (figure II. 23), mais compte tenu de la présence du bloc de tête (bloc linéaire), nous utiliserons  $K_1 \alpha > S_1$  et  $K_1 \beta > S_1$  comme nous l'avons montré au paragraphe II. 1. 5.

Calculons l'expression des sorties  $y^1$ ,  $y^2$ ,  $y^3$  et  $y^4$ . Nous obtenons :

$$y^1(\tau_o) = C e^{-\tau_o/\tau_1} + K_1 \beta \quad \text{avec} \quad \tau_o = t - t_o$$

Pour  $t = t_o$   $y^1(\tau_o^o) = -K_1 \alpha = C + K_1 \beta$

D'où  $y^1(\tau_o) = K_1 \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_o/\tau_1} \right]$  (Eq. II. 13.)

A l'instant  $t_1$ ,  $y^1 = -S_1$  ( $t_1$  correspond à l'instant de commutation du premier relais de  $-M_1$  à zéro).

Nous pouvons écrire :  $-S_1 = K_1 \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_1/\tau_1} \right]$

$$- \frac{S_1 + K_1 \beta}{K_1} = -(\alpha + \beta) e^{-\tau_1/\tau_1}$$

Donc  $\tau_c^1 = T_1 \log \frac{(\alpha + \beta) K_1}{S_1 + K_1 \beta}$  (Eq. II. 14.)

Il convient de remarquer à propos de  $\tau_c^1$  que :

1. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont supérieurs à  $\frac{S_1}{K_1}$  il existera toujours  $\tau_c^1$  (paragraphe II. 1. 5.).

2. Nous aurons  $\tau_c^1 = 0$  si  $\frac{(\alpha + \beta) K_1}{S_1 + K_1 \beta} = 1$  ; c'est-à-dire pour  $\alpha = \frac{S_1}{K_1}$ . Signalons d'autre part que le point  $\alpha = S_1/K_1$  avait déjà été considéré important par le premier test (paragraphe II. 1. 5.), nous sommes donc en mesure de l'utiliser, puisque nous l'avons déjà caractérisé.

Nous pouvons donc dire que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow S_1/K_1} \tau_c^1 = \text{zéro} \quad (\text{Eq. II. 15.})$$

3.  $\tau_c^1 = f_1(\alpha, \beta)$   $f_1 : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{T}$ .

À l'instant  $t_2$ , nous aurons  $y'(\tau_0) = S_1$ ; ( $t_2$  correspond à l'instant de commutation du premier relais de zéro à  $M_1$ ).

Il viendra donc que :

$$S_1 = K \left[ \beta \cdot (\alpha + \beta) e^{-\tau_0^2 / T_1} \right]$$

D'où 
$$\tau_0^2 = T_1 \log \frac{K_1 (\alpha + \beta)}{\beta K_1 - S_1} \quad (\text{eq. II-16})$$

$$\tau_0^2 = f_2(\alpha, \beta) \quad f_2 : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{T}$$

Or, nous avons déjà posé  $\beta K_1 > S_1$ , donc  $\tau_0^2$  existe :

Nous aurons  $\tau_0^2 = \text{zéro}$  pour  $K_1 (\alpha + \beta) = \beta K_1 - S_1$

c'est-à-dire, pour  $\alpha = -\frac{S_1}{K_1}$

D'après les conditions de définition du test, étant positif, aucune expérience ne correspondra au point  $\alpha = -\frac{S_1}{K_1}$ , même si celui-ci puisse être conçu analytiquement (Figure II. 25. ).

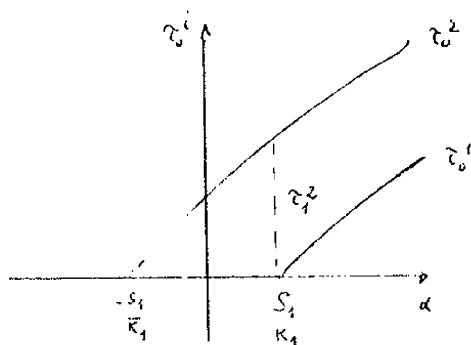


Figure II. 25. a.

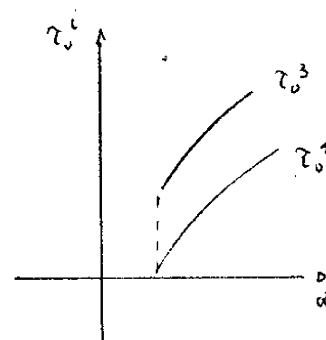


Figure II. 25. b.

Calculons maintenant  $\tau_1^2 = \tau_0^2 - \tau_0^1$ , à partir de (Eq. II. 14, Eq. II. 16. ).

$$\begin{aligned} \tau_1^2 &= T_1 \log \frac{K_1 (\alpha + \beta)}{\beta K_1 - S_1} - \log \frac{K_1 (\alpha + \beta)}{\beta K_1 + S_1} \\ &= T_1 \log \frac{\beta K_1 + S_1}{\beta K_1 - S_1} \quad (\text{Eq. II. 17}) \end{aligned}$$

Pour  $\beta = \text{cte}$   $\tau_1^2 = \text{cte} = C_3$

Donc à la sortie du bloc  $N_1$ , nous aurons :

$$\begin{aligned} y^2 &= - M_1 & \text{pour } t < t_1 \\ y^2 &= 0 & \text{pour } t_1 \leq t \leq t_2 \\ y^2 &= + M_1 & \text{pour } t > t_2 \end{aligned} \quad (\text{Eq. II. 18})$$

A la sortie du bloc  $L_2$ , en adoptant un raisonnement analogue à celui de la chaîne  $A$ , nous rencontrerons :

$$\text{Pour } t < t_1 \quad y^3(\tilde{\tau}_0) = -K_2 M_1$$

$$\text{Pour } t_1 \leq t \leq t_2 \quad y^3(\tilde{\tau}_1) = C e^{-\tilde{\tau}_1/\tau_2}$$

$$\text{avec } y^3(\tilde{\tau}_1^1) = -K_2 M_1$$

$$y^3(\tilde{\tau}_1) = -K_2 M_1 e^{-\tilde{\tau}_1/\tau_2} \quad (\text{Eq. II. 19}).$$

$$\text{Et } y^3(\tilde{\tau}_1^2) = -K_2 M_1 e^{-\frac{\tau_1}{\tau_2} \tilde{\tau}_1^2} \frac{\beta K_1 + S_1}{\beta K_1 - S_1}$$

$$\text{Posant } \frac{\tau_1}{\tau_2} = \eta \quad y^3(\tilde{\tau}_1^2) = -K_2 M_1 \left( \frac{\beta K_1 - S_1}{\beta K_1 + S_1} \right)^\eta = \text{Cste} = -D_2 \quad (\text{Eq. II. 20}).$$

Pour  $t > t_2$

$$y^3(\tilde{\tau}_2) = C e^{-\tilde{\tau}_2/\tau_2} + K_2 M_1$$

Ou alors en tenant compte de (Eq. II. 19)

$$y^3(\tilde{\tau}_2) = -(D_2 + K_2 M_1) e^{-\tilde{\tau}_2/\tau_2} + K_2 M_1 \quad (\text{Eq. II. 21.})$$

A l'instant  $t_3$ ,  $y^3 = -S_2$  ( $t_3$  correspond à l'instant de commutation du second relais de  $-M_2$  à zéro).

Deux cas peuvent se présenter :

$$1. \quad t_1 < t_3 < t_2$$

$$2. \quad t_3 > t_2$$

(Figure II. 26.)

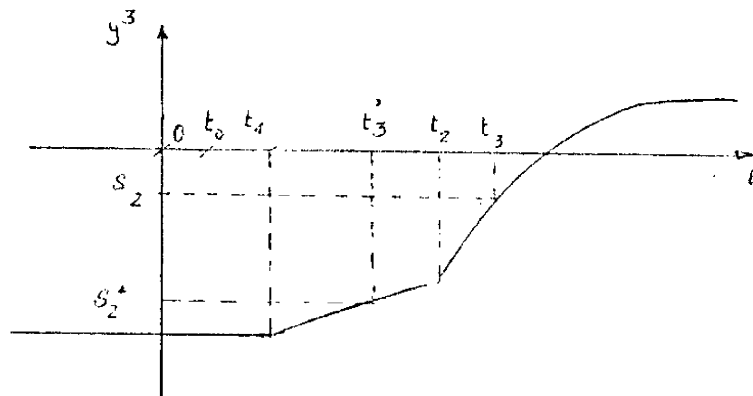


Figure II. 26.

1. Cas :  $t_1 < t_3 < t_2$

En repétant le même raisonnement des cas précédents, nous pouvons écrire :

$$y^3(\tau_1^3) = -S_2 = -K_2 M_1 e^{-\tau_1^3/T_2}$$

$$\text{D'où : } \tau_1^3 = T_2 \text{ Log } \frac{S_2}{K_2 M_1} = \text{Cste} \quad \text{Et} \quad \tau_0^3 = \tau_0^1 + \tau_1^3 \\ = f_3(\alpha) + C$$

Fig. II-25-b.

$$\tau_0^3 = f_3(\alpha) + C \quad (\text{Eq. II. 22})$$

2. Cas :  $t_3 > t_2$

$$y^3(\tau_2^3) = -S_2 = -(D_2 + K_2 M_1) e^{-\tau_2^3/T_2 + K_2 M_1}$$

$$e^{-\tau_2^3/T_2} = \frac{S_2 + K_2 M_1}{D_2 + K_2 M_1} \\ = T_2 \text{ Log } \left( \frac{D_2 + K_2 M_1}{S_2 + K_2 M_1} \right) \quad (\text{Eq. II. 23.})$$

$$\text{Or, pour } \beta = \text{Cste} \implies D_2 = \text{Cste} \quad \text{donc} \quad \tau_2^3 = \text{Cste}$$

$$\text{Et} \quad \tau_0^3 = \tau_0^1 + \tau_1^2 + \tau_2^3$$

$$\text{Donc} \quad \tau_0^3 = f(\alpha) + C_1 + C_2 \\ = f(\alpha) + \text{Cste}$$

A l'instant  $t_4$ ,  $y^3 = S_2$  ( $t_4$  correspond à l'instant de commutation du second relais de zéro à  $M_2$ ).

$$y^3(\tau_2^4) = S_2 = -(D_2 + K_2 M_2) e^{-\tau_2^4/T_2} + K_2 M_1$$

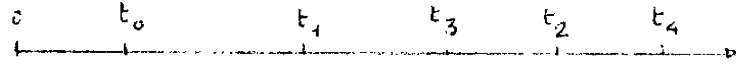
D'où

$$\tau_2^4 = T_2 \text{ log } \frac{D_2 + K_2 M_1}{S_2 + K_2 M_1} = \text{Cste} = C_3 \quad \text{pour } \beta = \text{Cste} \\ (\text{Eq. II. 24.})$$

$$\tau_0^4 = \tau_2^4 + \tau_1^2 + \tau_0^1 = C_3 + C_1 + f(\alpha) = f(\alpha) + \text{Cste}$$

En résumé : Avec  $\beta = C_{ste}$ , nous pouvons avoir les 2 cas suivants, schématiquement représentés sur la figure II. 27.

1er Cas :



2ème Cas :

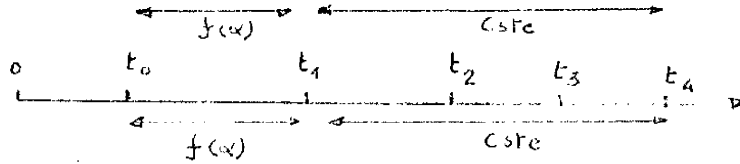


Figure II. 27.

Nous remarquons par cette figure que :

$$\tau_0^1 = f(\alpha) \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{S_1}{K_1}} \tau_0^1 = \text{zéro} \quad (\text{Eq. II. 15})$$

Par contre :

$$\tau_0^2 = f(\alpha) + C_1 \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{S_1}{K_1}} \tau_0^2 = C_1 \quad (\text{Eq. II. 25})$$

De même, les limites de  $\tau_0^3$  et  $\tau_0^4$  pour  $\alpha \rightarrow \frac{S_1}{K_1}$  sont des valeurs constantes.

Rappelons, enfin, que les instants impairs ( $t_1$  et  $t_3$ ) correspondent aux commutations (- M, zéro) et les instants pairs ( $t_2$  et  $t_4$ ) aux commutations (zéro, + M).

Nous sommes maintenant à même de présenter les tests à effectuer en vue d'une identification topologique.

Nous tiendrons compte du fait que le test N° 1 de reconnaissance du groupe et de la classe a déjà été effectué et que nous connaissons donc toutes les valeurs des paramètres mis en cause à l'occasion de l'application de ce test.

II. 2. 2. 3. Identification topologique des chaînes contenant des relais.

Test N° 2 : Reconnaissance du type A ou B de la chaîne. Dans le cas d'un premier bloc du type relais avec seuil, les sorties du système sont

invariantes en relation à  $\alpha$  et  $\beta$ . (Eq. II. 3. - II. 4. - II. 7. - II. 12.)

Par contre dans le cas d'un premier bloc du type linéaire, ces sorties sont des fonctions de  $\alpha$  et  $\beta$  (Eq. II. 13 - II. 18. - II. 21.).

Test N° 3 : Reconnaissance du dernier bloc. La reconnaissance de la nature du dernier bloc s'effectue toujours par la sortie. Si celle-ci est du type sortie de relais, le dernier bloc est non-linéaire. Si celle-ci est du type linéaire ou pseudo-linéaire (voir figure II. 28.) le dernier bloc est linéaire.

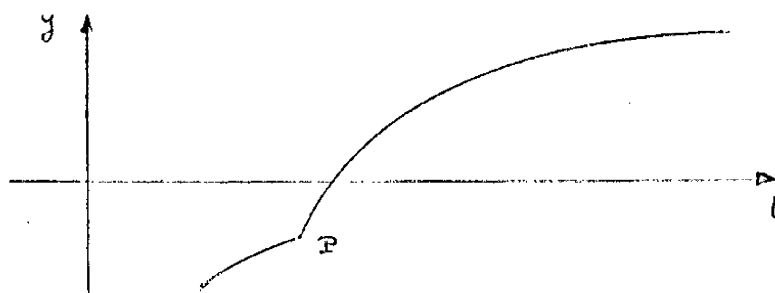


Figure II. 28.

Test N° 4 : Existence d'un tandem (LN) - (paragraphe I. 3. 3.).

Dans le cas d'une sortie du type relais, la présence d'un tel tandem, se vérifie à travers l'existence d'une position "zéro" dans la sortie, pendant l'intervalle  $\tau_4^2$  ou  $\tau_3^4$  (voir diagrammes Chapitre III) (Eq. II. 10. - II. 17. - II. 23. - II. 24.).

Par contre, si la sortie est linéaire, la présence d'un tel tandem se vérifiera par l'existence d'un point anguleux P (figure II. 28) rendant cette sortie pseudo-linéaire.

Une autre caractéristique du tandem (LN) est la présence d'un retard dans la commutation des relais, que nous pouvons caractériser par  $\tau_c^i$  dans les figures ci-jointes ( Chapitre III). Toutefois, vu que l'avance dans la commutation introduite par le seuil des relais, cette caractéristique peut être une partie cachée. Si elle existe, c'est une confirmation, mais la première caractéristique devra elle toujours exister.

Test N° 5 : Détermination du nombre de tandems (LN).

Vu que les chaînes ne peuvent contenir que quatre blocs au maximum nous ne nous intéressons qu'au cas de la chaîne B, la seule susceptible de contenir un ou deux tandems.

Dans le cas d'un tandem (LN) comme nous pouvons le visualiser (figure II. 25),

$$\limite_{\alpha \rightarrow S_1/K_1} \lambda_o^i \rightarrow \text{zéro} \quad (\text{Eq. II. 15.})$$

Par contre, dans le cas de deux tandems (LN)

$$\limite \lambda_o^i \rightarrow C \quad (\text{Eq. II. 25.})$$

Au cours de cette première partie du deuxième chapitre, nous avons étudié des systèmes non-linéaires filtrés dits "séparables" [13], les blocs linéaires étant du premier ordre, et les blocs non-linéaires du type relais à seuil. Avant d'étudier d'autres types de non-linéarité, appartenant au groupe des relais, il nous semble intéressant de montrer que les résultats obtenus en considérant des blocs linéaires du second ordre sont très proches de ceux correspondant aux blocs linéaires du premier ordre.

Nous suivrons exactement la même démarche en essayant de retrouver les résultats du premier cas, ou les différences éventuelles.

II.2.2.4. Chaîne A :

Considérons une fois de plus la chaîne (A), de la figure II. 22.

Où  $L_1$  et  $L_2$  ont respectivement pour équations définissant leur comportement externe

$$L_1 : \frac{d^2 y^2}{dt^2} + a_1 \frac{dy^2}{dt} + a_1^2 y^2 = K_1 y^1$$

Les racines de l'équation caractéristique de cette équation différentielle étant  $\frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1)^2 - 4a_1^2}}{2}$ , en fait pour simplifier le calcul, nous ne

considérons dans une première approche que les blocs linéaires qui auront deux constantes de temps  $T_1^1$  et  $T_1^2$  ce qui correspond au cas où les racines des équations sont réelles. De même pour  $L_2$  :  $\frac{d^2 y^4}{dt^2} + \alpha_2^1 \frac{dy^4}{dt} + \alpha_2^2 y^4 = K_2 y^3$   
Avec pour constantes de temps  $T_2^1$  et  $T_2^2$

Utilisons toujours la même fonction d'entrée (figure II. 23.) avec toujours  $\alpha$  et  $\beta$  supérieurs à  $S_1$  et

$$u = -\alpha \quad \text{pour } t < t_0$$

$$u = +\beta \quad \text{pour } t > t_0$$

Nous aurons donc :

$$y^1 = + M_1 \text{ Sgn } (u) \quad (\text{Eq. II. 26.})$$

En utilisant  $\tau_c = t - t_0$ , il vient que :

$$y^2(\tau_c) = C_1 e^{-\tau_c/T_1^1} + C_2 e^{-\tau_c/T_1^2} + K_1 M_1 \quad (\text{Eq. II. 27.})$$

Avec  $y^2(\tau_c^0) = -K_1 M_1$  et  $\frac{dy^2}{d\tau_c}(\tau_c^0) = 0$   $C_2 = -\frac{C_1 T_1^2}{T_1^1}$

Donc :  $C_1 = \frac{2 K_1 M_1 T_1^1}{T_1^2 - T_1^1}$  et  $C_2 = \frac{2 K_1 M_1 T_1^1}{T_1^1 - T_1^2}$

En remplaçant les valeurs de  $C_1$  et  $C_2$  dans l'équation II. 27.

$$y^2(\tau_c) = \frac{2 K_1 M_1}{T_1^2 - T_1^1} (T_1^1 e^{-\tau_c/T_1^1} - T_1^2 e^{-\tau_c/T_1^2}) + K_1 M_1 \quad (\text{Eq. II. 28})$$

A l'instant  $t_1$ , nous avons  $y^2 = -S_2$

Nous pouvons écrire :  $-S_2 = \frac{2 K_1 M_1}{T_1^2 - T_1^1} (T_1^1 e^{-\tau_c^1/T_1^1} - T_1^2 e^{-\tau_c^1/T_1^2}) + K_1 M_1$

Vu que les coefficients de l'équation sont constants la valeur de  $\tau_c^1$  est constante quelque soit  $\alpha$ . Nous avons donc :

$$\tau_c^1 = \text{Cste} \quad (\text{Eq. II. 29.})$$

De même, à l'instant  $t_2$ ,  $y^2 = S_2$

Nous aurons alors :

$$S_2 = \frac{2 K_1 M_1}{T_1^2 - T_1^1} (T_1^1 e^{-\tau_c^2/T_1^1} - T_1^2 e^{-\tau_c^2/T_1^2}) + K_1 M_1$$



Nous avons aussi, pour les mêmes raisons  $\tau_o^2 = \text{Cste}$  (Eq. II. 30).  
Nous en déduisons les équations de la sortie du bloc (3), à savoir :

$$\begin{aligned} y^3 &= -M_2 \quad \text{pour } t < t_1 \\ y^3 &= \text{zéro} \quad \text{pour } t_1 \leq t < t_2 \\ y^3 &= +M_2 \quad \text{pour } t \geq t_2 \end{aligned} \quad (\text{Eq. II. 31})$$

Pour la sortie du bloc (4), nous avons d'une façon analogue un cas antérieur :

$$\begin{aligned} \text{Pour } t < t_1 \quad y^4(\tau_o) &= -K_2 M_2 & (\text{Eq. II. 31.}) \\ \text{Pour } t_1 \leq t < t_2 \quad y^4(\tau_1) &= C_1 e^{-\tau_1/\tau_2^1} + C_2 e^{-\tau_1/\tau_2^2} \\ \text{avec } \tau_1 &= t - t_1 & (\text{Eq. II. 32.}) \end{aligned}$$

Avec  $C_1$  et  $C_2$  constants en relation à  $\alpha$

D'autre part, vu que  $\tau_o^1$  et  $\tau_o^2$  sont constants en relation à  $\alpha$ , nous avons donc :

$$\tau_1^2 = \tau_o^2 - \tau_o^1 = \text{Cste}$$

Vu que  $y^4(\tau_1^1) = -K_2 M_2 = y^4(\tau_o^1)$

Nous avons :  $y^4(\tau_1^2) = -D_3 = \text{Cste}$  (Eq. II. 33.)

La sortie du bloc 4, pour  $t \geq t_2$  sera alors :

$$\text{Pour } t \geq t_2 \quad y^4(\tau_2) = C_3 e^{-\tau_2/\tau_2^1} + C_4 e^{-\tau_2/\tau_2^2} + K_2 M_2, \quad \text{avec } \tau_2 = t - t_2 \quad (\text{Eq. II. 34.})$$

$$\text{Où } -D_3 = C_3 - \frac{C_3 \tau_2^2}{\tau_2^1} + K_2 M_2$$

Donc en remplaçant dans (Eq. II. 34), par leurs valeurs, nous pourrions écrire que :

$$y^4(\tau_2) = \frac{D_3 + K_2 M_2}{\tau_2^2 - \tau_2^1} \tau_2^1 e^{-\tau_2/\tau_2^1} - \tau_2^2 e^{-\tau_2/\tau_2^2} + K_2 M_2 \quad (\text{Eq. II. 35.})$$

Une réponse constante et invariante quelque soit  $\alpha$ , puisque tous les coefficients sont constants.

En conclusion, si le premier bloc est non-linéaire, nous avons montré que les sorties du bloc 1, 2, 3 ou 4 sont indépendants de  $\alpha$ , aussi bien en amplitudes que du point de vue temporel. Propriété que nous avons déjà trouvée au paragraphe II. 2. 2. 1.

#### II. 2. 2. 5. Chaîne B :

En voulant utiliser la même fonction d'entrée, nous nous sommes heurtés à une très grande complexité dans la recherche mathématique des caractéristiques des chaînes. Ainsi, avons-nous considéré  $\beta = 0$  ce qui a simplifié les calculs et les résultats sans porter préjudice à la généralité du problème. Soit, donc la chaîne (B), représentée dans la figure II. 24. et considérons pour le moment l'utilisation d'un test du type de la figure II. 23., où  $\alpha$  et  $\beta$  doivent être supérieurs à  $S_1/K_1$

La sortie de  $L_1$  aura pour expression :

$$y^1(\tau_o) = C_1 e^{-\tau_o/\tau_1^1} + C_2 e^{-\tau_o/\tau_1^2} + K_1 \beta \quad (\text{Eq. II. 36})$$

avec  $C_2 = -\frac{C_1 \tau_1^2}{\tau_1^1}$  et  $y^1(\tau_o^v) = -K_1 \alpha$

D'où  $y^1(\tau_o) = \frac{K_1}{\tau_1^2 - \tau_1^1} \left[ \tau_1^1 (\alpha + \beta) e^{-\tau_o/\tau_1^1} + \tau_1^2 (\alpha + \beta) e^{-\tau_o/\tau_1^2} \right] + K_1 \beta$

(Eq. II. 37)

A l'instant  $t_1$ , nous avons :  $y^1 = -S_1$

En conséquence :

$$y^1(\tau_o^1) = -S_1 = C_1 e^{-\tau_o^1/\tau_1^1} + C_2 e^{-\tau_o^1/\tau_1^2} + K_1 \beta \quad (\text{Eq. II. 38})$$

Vu que  $C_1$  et  $C_2$  sont des fonctions de  $\alpha$  et  $\beta$ , nous aurons donc :

$$\tau_o^1 = f_3(\alpha, \beta)$$

Essayons de trouver un point remarquable pour  $\tau_o^1 = 0$

Dans ce cas, en utilisant la valeur  $\tau_o^1 = 0$  dans (Eq. II. 37), il vient

$$-S_1 = K_1 \beta = \frac{K_1 \tau_1^1 (\alpha + \beta)}{\tau_1^2 - \tau_1^1} - \frac{K_2 \tau_1^2 (\alpha + \beta)}{\tau_1^2 - \tau_1^1}$$

$$\text{Donc : } S_1 - K_1 \beta = K_1 (\alpha + \beta) \left( \frac{\tau_1^1 - \tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau_1^1} \right)$$

$$S_1 - K_1 \beta = K_1 \beta + K_1 \alpha$$

$$\text{D'où } \alpha = S_1 / K_1$$

Ce résultat naturel a été obtenu comme la plupart des propriétés de ces chaînes au cours de l'inspection expérimentale ayant précédé ces études analytiques.

Nous retrouvons le même point que dans le cas d'un bloc linéaire du premier ordre (remarque 2, paragraphe II. 2. 2. 2.) et  $\tau_o^1$  en fonction de  $\alpha$  avec  $\beta = \text{Cste}$  se présente de la même forme (figure II. 29).

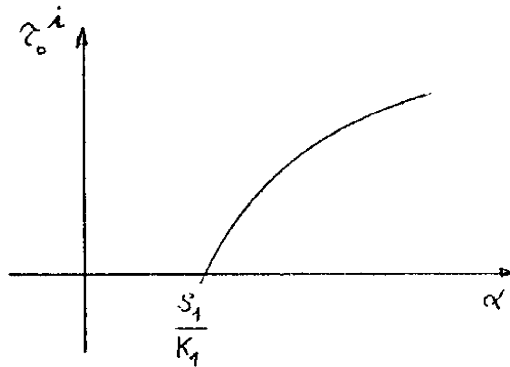


Figure II. 29.

A l'instant  $t_2$ , nous avons  $y^1 = S_1$

$$\text{Donc : } y^1(\tau_o^2) = S_1 = C_1 e^{-\tau_o^2/\tau_1^1} + C_2 e^{-\tau_o^2/\tau_1^2} + K_1 \beta$$

$$\text{Donc } S_1 - K_1 \beta = \frac{K_1 \tau_1^1 (\alpha + \beta)}{\tau_1^2 - \tau_1^1} e^{-\tau_o^2/\tau_1^1} - \frac{K_1 \tau_1^2 (\alpha + \beta)}{\tau_1^2 - \tau_1^1} e^{-\tau_o^2/\tau_1^2}$$

$$\text{Ou } \frac{(\tau_1^2 - \tau_1^1) (S_1 - K_1 \beta)}{K_1 (\alpha + \beta)} = \tau_1^1 e^{-\tau_o^2/\tau_1^1} - \tau_1^2 e^{-\tau_o^2/\tau_1^2}$$

Nous obtenons de nouveau un résultat connu :

$$\tau_o^2 = f_4(\alpha, \beta) \quad (\text{Eq. II. 38.}) \quad \text{voir (Eq. II. 16)}$$

### II. 2. 3. Classe des relais idéaux.

Comme nous l'avons dit, les propriétés du groupe des relais se retrouvent dans toutes ces différentes classes. Nous essaierons donc maintenant, de montrer assez rapidement les principales différences introduites lorsqu'on étudie les autres classes du groupe.

Ainsi, que nous l'avons vu dans la première partie de ce deuxième chapitre, ce type de non-linéarité a comme paramètre pertinent l'amplitude de la sortie du relais (M).

Toutes les propriétés de la classe des relais à seuil se retrouvent dans cette classe. Nous n'avons pour les voir qu'à utiliser un relais à seuil nul ( $S = 0$ ). Toutefois, le seuil nul entraîne une première différence dans le cas de la caractéristique  $\tau_c^i$  en fonction de  $\alpha$ . L'instant  $t_1$  correspond à l'instant de commutation du premier relais est  $t_3$  correspond à l'instant de commutation du second relais. Les instants  $t_2$  et  $t_4$  se confondent naturellement avec  $t_1$  et  $t_3$  respectivement.

Comme le montre la figure II. 31. dans le cas d'un premier bloc linéaire  $\tau_c^1$  commence à l'origine (0, 0) et non au point  $(-\frac{S_1}{K_1}, 0)$  (figure II. 25. a et b).

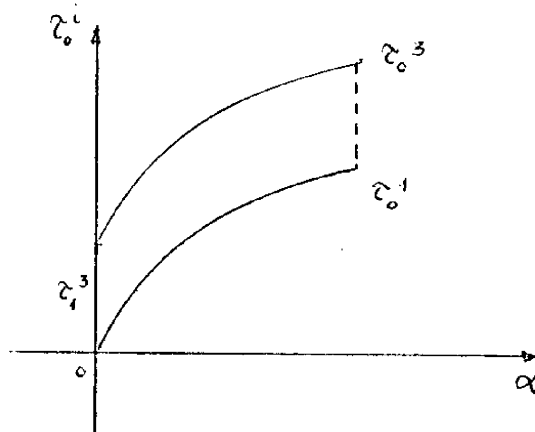


Figure II. 31.

D'autre part, si nous reprenons les équations II.20 et II.23 et en considérant

$$\tau_1^3 = \tau_1^2 + \tau_2^3$$

Avec  $\tau_1^2 = 0$ , Nous obtenons :  $\tau_2^3 = T_2 \log 2$  (Eq. II.41)

ce qui pourrait aussi nous permettre de déterminer facilement le paramètre ( $T_2$ ).

Les tests resteront exactement les mêmes, bien que dans le test N°4, vu qu'il n'existe pas le seuil du relais, nous remarquerons que la caractéristique du tandem (LN) est la présence du retard  $\tau_c^t$  dans la commutation.

Dans ce cas, étant donné qu'il n'existe aucune avance dans la commutation dû au seuil du relais, cette caractéristique sera toujours fiable, contrairement au cas du relais à seuil.

#### II.2.4. Classe des relais non-polarisé.

Les caractéristiques seront exactement les mêmes que dans le cas du relais à seuil. Toutefois, nous utiliserons une fonction d'entrée avec  $\beta = 0$ , pour les tests n° 2, 3, 4 et 5.

En effet, nous n'étudierons qu'une partie du relais, puisque, nous sommes en présence d'une caractéristique paire.

Remarque : Dans le cas de caractéristiques ayant un minimum sur l'axe des y (relais à seuil, parabole), en général nous pouvons facilement connaître la nature du premier bloc de la chaîne. En effet, en utilisant la même fonction d'entrée, si la sortie passe par un minimum, le premier bloc est linéaire. Si la sortie croît ou décroît d'une façon monotone ou encore si elle est constante, le premier bloc est non-linéaire.

C'est ainsi que dans le cas des relais non-polarisés, en prenant  $\alpha$  et  $\beta$  supérieurs au premier seuil de la chaîne (paragraphe II.1.5.), si la sortie est de la forme des figures (II.32. a - b) le premier bloc est linéaire ; si par contre, la sortie est de la forme des figures (II.32. e et d) le premier bloc est non-linéaire.

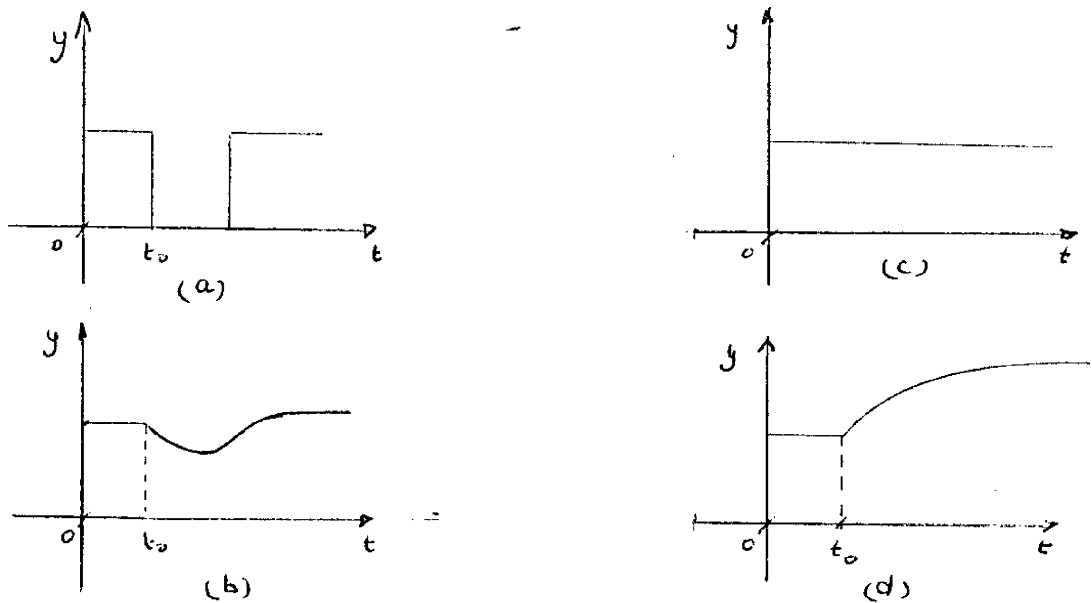


Figure II. 32.

### II. 2. 5. Relais avec hystérésis.

Nous n'étudierons qu'une seule branche de l'hystérésis. En effet, si nous voulons étudier la seconde branche de l'hystérésis, il nous suffira d'inverser la polarité du signal d'entrée. En prenant  $\alpha$  supérieur à l'hystérésis d'entrée et une fonction d'entrée croissante, nous serons sûrs d'être toujours sur la même branche de la caractéristique. Nous retrouverons comme nous l'avons vu au cours des paragraphes II. 1. 7. et I. 3. 5. 4., un relais du type idéal. Les équations sont un peu plus lourdes à manier, mais le développement des calculs se retrouvent avec facilité.

Encore une fois, la principale différence est introduite dans le calcul de  $\tau_0^1$  lorsqu'il s'agit d'une chaîne commençant par un bloc linéaire.

Nous trouverons :

$$\tau_0^1 = T_1 \log \left[ \frac{(\alpha + \beta) K_1}{K_1 \beta - h_1} \right] \quad (\text{Eq. II. 42})$$

Donc :  $\tau_0^1 = 0$  pour  $(\alpha + \beta) K_1 = K_1 \beta - h_1$

c'est-à-dire pour  $\alpha = -\frac{h_1}{K_1}$

Vu que nous avons défini  $\alpha > \frac{h_1}{k_1}$  au moment de l'application de ce test, ce point n'a pas d'existence réelle, mais du point de vue analytique, il est extrêmement facile à vérifier. En effet, nous connaissons par le test N° 1 (paragraphe II. 1. 7.) la valeur  $\alpha = \frac{h_1}{k_1}$

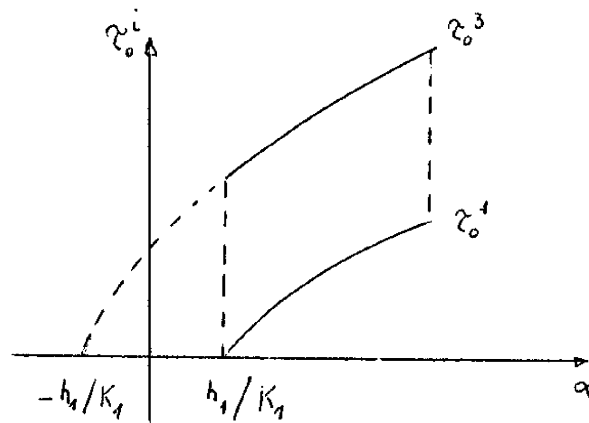


Figure II. 33, a.

Dans ce cas, si nous voulons être sûr que nous sommes sur la branche de l'hystérésis correspondant à une dérivée positive de l'entrée ( $\alpha > \frac{h_1}{k_1}$ ), nous ne pourrons jamais avoir une valeur de  $\zeta_0^i$  nulle. La valeur minimale de  $\zeta_0^i$  correspondant à  $\alpha = \frac{h_1}{k_1} > 0$

Remarque : Nous utiliserons cette propriété dans l'application traitée au cours du 4<sup>ème</sup> chapitre.

Si nous voulons d'autre part avoir la partie de la caractéristique de  $\zeta_0^i(\alpha)$  correspondant à  $-\frac{h_1}{k_1} < \alpha < \frac{h_1}{k_1}$ , tout en étant sûr d'être toujours sur la branche de l'hystérésis correspondant à la dérivée de la fonction d'entrée positive, il nous suffira d'introduire une petite modification à la fonction d'entrée. La nouvelle fonction aura alors l'allure de la figure II. 34.

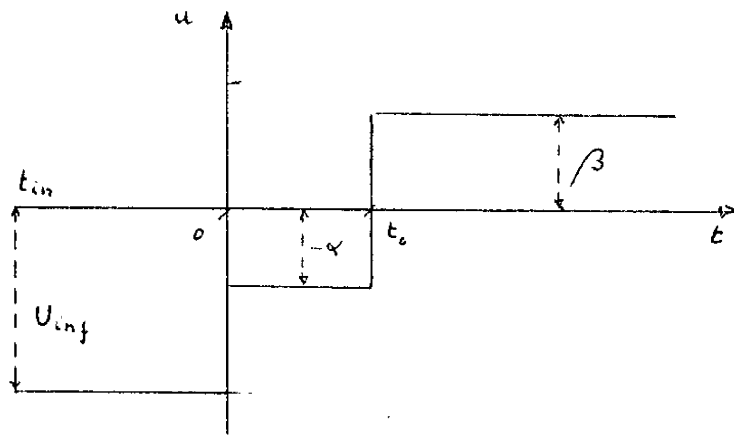


Figure II.34.

Nous appellerons  $t_{in}$  l'instant initial où commence le test. Ainsi, nous pouvons garder la même notation que pour les cas sans mémoire. En fait, la partie du test correspondant à  $t_{in} < t < 0$  n'offre que l'intérêt d'assurer la branche de l'hystérésis où nous prétendons effectuer le test. La valeur de  $\alpha$  sera telle que  $U_{inf} \leq \alpha \leq -\frac{h_1}{K_1}$ , nous devons dans ce cas considérer qu'une valeur de  $\alpha$  négative correspond à une valeur d'entrée positive, vu la définition donnée préalablement à  $d$ .

Nous choisirons d'autre part une valeur de  $\beta$  telle que  $\frac{h_1}{K_1} < \beta < U_{sup}$  pour n'avoir aucune confusion possible au cours des expériences.

Dans ce cas, la caractéristique  $\tau_0^i$  en fonction de  $\alpha$  se transforme dans la figure II.33. b.

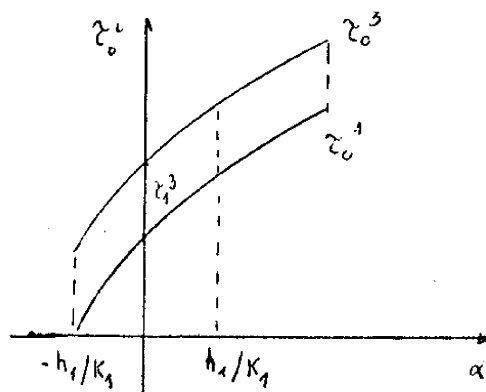


Figure II.33. b.



Remarques : 1. Si le relais avec hystérésis est asymétrique ou si nous voulons étudier l'autre branche de hystérésis, il suffira d'inverser la fonction d'entrée.

2. Nous utiliserons obligatoirement ce nouveau type de fonction d'entrée dans le cas de la saturation avec hystérésis.

### II. 2. 6. Relais avec seuil et hystérésis.

Les propriétés du relais à hystérésis se retrouvent ainsi que celles du relais à seuil.

## II. 3. GROUPE DES SATURATIONS.

### II. 3. 1. Introduction.

Le groupe étudié comprend des chaînes contenant des non-linéarités des types suivants : saturation pure, saturation avec seuil, saturation avec hystérésis et diode. En ce qui concerne cette dernière, il convient de faire remarquer que ses propriétés sont très proches de celles des saturations, c'est la raison pour laquelle nous l'avons incluse dans ce groupe.

De même que pour les relais, une étude détaillée ne sera faite que pour la saturation pure, que nous considérons typique du groupe en question. Nous montrerons ensuite, les différences possibles avec les autres classes du groupe des saturations.

### II. 3. 2. Saturation pure.

#### II. 3. 2. 1. Chaîne A :

Considérons la chaîne A, représentée par la figure II. 22. Les blocs  $N_1$  et  $N_2$  représentant des saturations pures ont pour équations :

$$N_1 : \quad \begin{aligned} y^1 &= u && \text{pour } -M_1 < u < M_1 \\ y^1 &= M_1 \operatorname{Sgn}(u) && \text{pour } |u| \geq M_1 \end{aligned}$$

$$N_2 : \quad \begin{aligned} y^3 &= y^2 && \text{pour } -M_2 < y^2 < M_2 \\ y^3 &= M_2 \operatorname{Sgn}(y^2) && \text{pour } |y^2| \geq M_2 \end{aligned}$$

De leur côté, les blocs linéaires peuvent être représentés par les équations :

$$L_1 : T_1 \frac{dy^2}{dt} + y^2 = K_1 y^1 \quad (\text{Eq. II. 43.})$$

$$L_2 : T_2 \frac{dy^4}{dt} + y^4 = K_2 y^3$$

Nous utiliserons toujours la même fonction d'entrée (figure II. 23.) Cette fonction comme nous le savons est telle que :

$$u = -\alpha \quad \text{pour } t < t_0$$

$$u = \beta \quad \text{pour } t > t_0$$

L'examen des sorties des différents blocs fournit :

Pour le 1er bloc :

$$y^1 = u \quad \text{pour } |u| < M_1$$

$$y^1 = M_1 \text{ Sgn } u \quad \text{pour } |u| \geq M_1 \quad (\text{Eq. II. 44.})$$

Pour le deuxième bloc :

$$y^2(\tau_0) = C e^{-\tau_0/T_1} + K_1 \beta$$

Mais  $y^2(\tau_0^0) = -K_1 \alpha$

$$\text{Donc } y^2(\tau_0) = K_1 \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_0/T_1} \right] \quad (\text{Eq. II. 45.})$$

Remarque importante : pour le test N° 2.

$$\frac{dy^2}{dt}(\tau_0) = \frac{(\alpha + \beta) K_1}{T_1} e^{-\tau_0/T_1}$$

Pour  $\alpha = 0$   $\frac{dy^2}{dt}(\tau_0) = \frac{K_1 \beta}{T_1} e^{-\tau_0/T_1}$

Et si  $\beta \geq M_1$   $\frac{dy^2}{dt}(\tau_0) = \frac{K_1 M_1}{T_1} e^{-\tau_0/T_1}$

Donc  $\frac{dy^2}{dt}(\tau_0^0) = \frac{K_1 M_1}{T_1}$  pour  $\beta \geq M_1$  (Eq. II. 46.)

Ou encore

Reprenons, après cette remarque, l'équation II. 45.

$$y^2(\tau_0) = K_1 \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_0/\tau_1} \right]$$

A l'instant  $t_1$ , nous avons  $y^2 = -M_2$

$$\text{D'où } y^2(\tau_0^1) = -M_2 = K_1 \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_0^1/\tau_1} \right]$$

$$e^{-\tau_0^1/\tau_1} = \frac{M_2 + K_1 \beta}{(\alpha + \beta) K_1}$$

Donc

$$\tau_0^1 = T_1 \log \frac{(\alpha + \beta) K_1}{M_2 + \beta K_1} \quad (\text{Eq. II. 47.})$$

Nous avons alors :

$$\tau_0^1 = 0 \quad \text{si} \quad \frac{(\alpha + \beta) K_1}{M_2 + \beta K_1} = 1 \quad \text{Ou encore } \alpha = \frac{M_2}{K_1} \quad (\text{Eq. II. 48.})$$

D'autre part cette équation est valable pour  $\alpha$  et  $\beta$  inférieur à  $M_1$

En considérant  $\beta = \text{Cste}$  et  $\alpha > M_1$ , nous obtiendrons

$$\tau_0^1 = \frac{(M_1 + \beta) K_1}{M_2 + \beta K_1} = \text{Cste} \quad (\text{Eq. II. 49.})$$

La figure II. 35. a. illustre graphiquement le comportement de la fonction  $\tau_0^1(\alpha)$

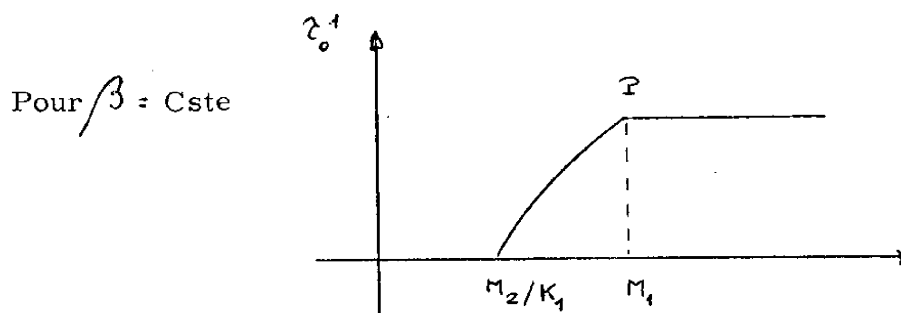


Figure II. 35. a.

Remarquons que par le premier test, nous avons connaissance de  $M_2$  et de  $K_1$ , donc la valeur  $M_2/K_1$  est connue. Par contre, la détermination de  $M_1$  peut être faite en tenant compte de l'expression (II. 46) et du point anguleux P (figure II. 35.).

A l'instant  $t_2$ , nous avons  $y^2 = M_2$

Donc

$$y^2(\tau_0^2) = M_2 = K_1 \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_0^2/T_1} \right]$$

$$\tau_0^2 = T_1 \log \frac{(\alpha + \beta) K_1}{\beta K_1 - M_2} \quad (\text{Eq. II. 50.})$$

Naturellement ce point n'existe que si  $\beta K_1 > M_2$

En effet, si  $\beta K_1 < M_2$ , la seconde saturation n'a pas d'effet sur la chaîne qui aura un comportement linéaire (paragraphe II. 19).

Ces résultats sont représentés par la figure II. 35. b.

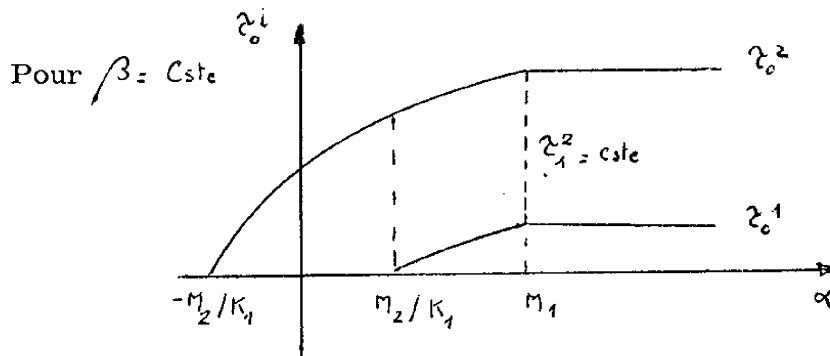


Figure II. 35. b.

Calcul de  $\tau_1^2$

En tenant compte des expressions (II. 49 et II. 50) nous pouvons

écrire :

$$\tau_1^2 = \tau_0^2 - \tau_0^1 = T_1 \log \frac{(\alpha + \beta) K_1}{\beta K_1 - M_2} - T_1 \log \frac{K_1 (\alpha + \beta)}{M_2 + K_1 \beta}$$

Donc

$$\tau_1^2 = T_1 \log \frac{M_2 + \beta K_1}{\beta K_1 - M_2} = \text{Cste pour } \beta = \text{Cste} \quad (\text{Eq. II. 51.})$$

Nous allons maintenant considérer l'instant  $t_1$  comme la nouvelle origine des temps. De cette façon, nous retrouverons le même type de raisonnement que dans le cas des relais.

L'instant  $t_1$  correspond à  $y^2 = -M_2$

En relation à la nouvelle origine des temps  $t_1$ , l'équation II. 45 devient

Posons :  $\tau_1 = t - t_1$

Comme  $-M_2 = K_1 \beta + C e^{-\tau_1/\tau_1}$ , nous avons  $C = -M_2 - K_1$

Et  $y^2(\tau_1) = K_1 \beta - (M_2 + K_1 \beta) e^{-\tau_1/\tau_1}$  (Eq. II. 52.)

La sortie du troisième bloc peut-être caractérisée par les relations :

$$\begin{aligned} y^3 &= -M_1 & \text{pour } t \leq t_1 \\ y^3 &= y^2 & \text{pour } t_1 < t < t_2 \\ y^3 &= +M_1 & \text{pour } t \geq t_2 \end{aligned} \quad (\text{Eq. II. 53.})$$

Remarque importante pour le test N° 4

En regardant les relations (II. 52), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} y^2(\tau_1) &= K_1 \beta - (M_2 + K_1 \beta) e^{-\tau_1/\tau_1} & t_1 < t < t_2 \\ \frac{dy^2}{d\tau}(\tau_1) &= \frac{M_2 + K_1 \beta}{\tau_1} e^{-\tau_1/\tau_1} \\ \text{Donc } \frac{dy^2}{d\tau}(\tau_1) &= \frac{M_2 + K_1 \beta}{\tau_1} \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. II. 54.})$$

Nous avons donc les équations qui définissent  $y^3$ . Celles-ci nous amènent à étudier les sorties  $y^4$ .

Nous avons, puisque le bloc en question est linéaire :

$$y^4 + T_2 \frac{dy^4}{dt} = K_1 y^3$$

Pour  $y^3$ , défini dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$ , nous pouvons écrire :

$$y^4 + T_2 \frac{dy^4}{d\tau} = K_1 K_2 \beta - K_2 (M_1 + K_1 \beta) e^{-\tau_1/\tau_1} \quad (\text{Eq. II. 55})$$

Donc  $y^4(\tau_1) = C e^{-\tau_1/\tau_2} + \xi e^{-\tau_1/\tau_1} + K_1 K_2 \beta$  (Eq. II. 56.)

Calcul de  $\xi$

Prenons la solution particulière :

$$y^4(\tau_1) = \xi e^{-\tau_1/\tau_1} + K_1 K_2 \beta$$

D'où  $\frac{dy^4}{d\tau} = -\frac{\xi}{\tau_1} e^{-\tau_1/\tau_1}$

En remplaçant  $y^4$  et  $\frac{dy^4}{d\tau}$  par leurs valeurs dans (IV. 55) nous pouvons déterminer  $\xi$ . Il vient donc que :

$$\xi e^{-\tau_1/\tau_1} - T_2 \frac{\xi}{\tau_1} e^{-\tau_1/\tau_1} + K_1 K_2 \beta = -K_2 (M_2 + K_1 \beta) e^{-\tau_1/\tau_1} + K_1 K_2 \beta$$

Ce qui donne  $\xi = \frac{K_2 T_1 (M_2 + K_1 \beta)}{T_2 - T_1}$  (Eq. II. 57.)

Donc nous en déduisons par substitution dans l'équation II. 56 et en utilisant la valeur de la condition initiale :

$$y^4(\tau_1^0) = -K_2 M_2$$

La valeur de C

$$C = -K_2 \left( M_2 + K_1 \beta + \frac{T_1 (M_2 + K_1 \beta)}{T_2 - T_1} \right)$$

Donc

$$C = \frac{K_2 T_2}{T_1 - T_2} (M_2 + K_1 \beta)$$
 (Eq. II. 58.)

Remarque importante pour le test N° 4

Déterminons  $\frac{dy^4}{d\tau}(\tau_1^0)$

Nous avons :  $y^4(\tau_1) = K_1 K_2 \beta + \xi e^{-\tau_1/\tau_1} + C e^{-\tau_1/\tau_2}$

$$\frac{dy^4}{d\tau}(\tau_1) = -\frac{\xi}{\tau_1} e^{-\tau_1/\tau_1} - \frac{C}{\tau_2} e^{-\tau_1/\tau_2}$$

A l'instant  $t_1$  :

$$\frac{d y^4}{d \tau} (\tau_1') = - \frac{\xi}{\tau_1} - \frac{\xi}{\tau_2}$$

En remplaçant C et par leurs expressions (II-57) et II-58) nous obtenons :

$$\frac{d y^4}{d \tau} (\tau_1') = \frac{K_2 (M_2 + K_1/\beta)}{\tau_2 - \tau_1} + \frac{K_2 (M_2 + K_1/\beta)}{\tau_1 - \tau_2}$$

$$\frac{d y^4}{d \tau} (\tau_1') = 0 \quad (\text{Eq. II-59})$$

Donc dans le cas où un bloc linéaire suit un tandem (LN), la dérivée à l'instant  $t_1$  est nulle. Par contre s'il s'agit d'un tandem (LN) tout seul, la dérivée à l'instant  $t_1$  est non nulle (Eq. II-54), même si ce tandem se trouve après un bloc linéaire.

### II. 3. 2. 2 - Chaîne B

Nous recommencerons le même raisonnement, mais cette fois ci pour la chaîne B, représentée par la figure (fig. II-24).

Le signal d'entrée est toujours de la forme de la figure (II-23) et tel que :

$$u = - \alpha \quad \text{pour} \quad t < t_0$$

$$u = + \beta \quad \text{pour} \quad t \geq t_0$$

La sortie du premier bloc sera donc

$$y^1(\tau_0) = K_1 [ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_0/\tau_1} ] \quad (\text{éq. II - 60})$$

Remarque importante pour le test n° 2

Prenant la dérivée par rapport au temps de (II-60) ; nous avons :

$$\frac{d y^1}{d \tau} (\tau_0) = \frac{K_1 (\alpha + \beta)}{\tau_1} e^{-\tau_0/\tau_1}$$

Pour  $t = t_0$

$$\frac{dy^1}{dz}(\tau_0^0) = \frac{K_1(\alpha + \beta)}{\tau_1}$$

Et

$$\alpha = 0$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{dy^1}{dz}(\tau_0^0) = \infty \quad (\text{Eq II-61})$$

Reprenons l'équation (II-60)

$$y^1(\tau_0) = K_1 [\beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_0/\tau_1}]$$

A l'instant  $t_1$  nous avons  $y^1 = -M_1$

$$\text{D'où} \quad y^1(\tau_0^1) = -M_1 = K_1 [\beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_0^1/\tau_1}]$$

Donc

$$\tau_0^1 = \tau_1 \log \frac{(\alpha + \beta) K_1}{\beta K_1 + M_1} \quad (\text{Eq. II-62})$$

$$\tau_0^1 = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = \frac{M_1}{K_1}$$

De même à l'instant  $t_2$

$$y^1(\tau_0^2) = M_1$$

Il vient alors :

$$y^1(\tau_0^2) = M_1 = K_1 [\beta - (\alpha + \beta) e^{-\tau_0^2/\tau_1}]$$

D'où

$$\tau_0^2 = \tau_1 \log \frac{(\alpha + \beta) K_1}{\beta K_1 - M_1} \quad (\text{Eq. II-63})$$

Donc la condition d'existence de  $\tau_0^2$  est  $\beta K_1 > M_1$ , ce qui est normal pour que la partie saturée du bloc non linéaire, puisse être intéressée (paragraphe II. 1. 9.)

$$\text{On aura } \tau_0^2 = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = -\frac{M_1}{K_1}$$

Ce résultat est purement analytique. En effet ne peut être négatif à moins d'inverser la définition de la fonction d'entrée.

$$\text{Enfin, } \tau_1^2 = \tau_0^2 - \tau_0^1 = \tau_1 \log \frac{\beta K_1 + M_1}{\beta K_1 - M_1} \quad (\text{Eq. II-64})$$



La figure donne une idée de la forme des courbes

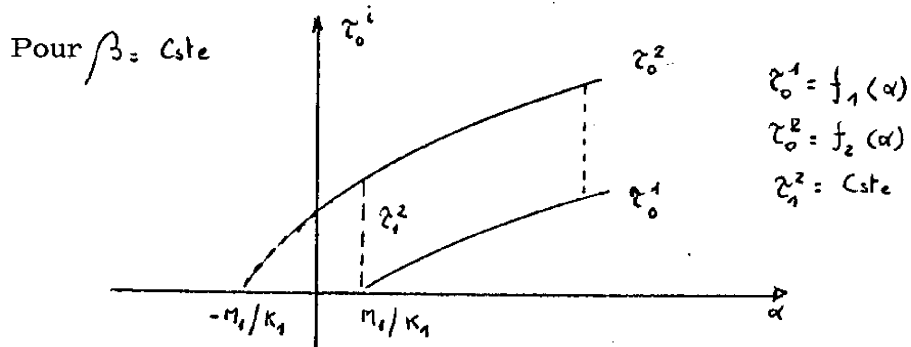


Figure II-36

Etudions maintenant la sortie du second bloc :

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 y^2 &= M_1 & \text{pour} & \quad t < t_1 \\
 y^2 &= y^1 & \text{pour} & \quad t_1 \leq t \leq t_2 \\
 y^2 &= -M_1 & \text{pour} & \quad t > t_2
 \end{aligned}
 \quad (\text{Eq. II-65})$$

Entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  nous avons :

$$y^2(\tau_1) = y^1(\tau_1) \text{ avec } \tau_1 > 0 \text{ et } \tau_1 < \tau_1^2$$

Or 
$$y^1(\tau_1) = C e^{-\tau_1/\tau_1} + K_1 \beta$$

Et  $y^1(\tau_1) = -M_1$  vu qu'à l'instant  $t_1$  nous avons  $y_1 = -M_1$  par définition de l'instant  $t_1$ .

Donc : 
$$C = -(K_1 \beta + M_1)$$

Et 
$$y^1(\tau_1) = K_1 \beta - (K_1 \beta + M_1) e^{-\tau_1/\tau_1} \quad (\text{Eq. II-66})$$

D'où

$$\begin{aligned}
 y^2(\tau_1) &= K_1 \beta - (K_1 \beta + M_1) e^{-\tau_1/\tau_1} & (\text{Eq. II-67}) \\
 \text{pour} & \quad \tau_1^1 < \tau_1 < \tau_1^2
 \end{aligned}$$

Remarque importante pour le test n° 4

Considérons la dérivée de  $y^2(\tau_1)$  à l'instant  $t_1$ , il vient

$$\frac{d y^2}{d \tau}(\tau_1) = \frac{K_1 \beta + M_1}{\tau_1} e^{-\tau_1 / \tau_1} \Big|_{\tau_1} = \frac{K_1 \beta + M_1}{\tau_1} \neq 0$$

Nous voyons donc que

$$\frac{d y^2}{d \tau}(\tau_1) \neq 0 \quad (\text{Eq. II-68})$$

Compte tenu des expressions (II-65) et (II-66) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} y^2 &= -M_1 \text{ pour } t < t_1 \\ y^2 &= K_1 \beta - (K_1 \beta + M_1) \text{ pour } t_1 \leq t \leq t_2 \\ y^2 &= +M_1 \text{ pour } t > t_2 \end{aligned} \quad (\text{Eqs. II-69})$$

A partir de là nous ne nous intéressons qu'aux valeurs des sorties correspondantes à l'intervalle de temps  $[t_0, t_2]$ . En effet, pour l'intervalle de temps  $[t_2, +\infty]$ , il est plus simple de recommencer le calcul en inversant la fonction d'entrée. Les résultats obtenus seront comparables et le calcul beaucoup plus rapide. Cela correspond au comportement de la seconde moitié de la saturation.

La sortie du bloc 3 est donnée par la solution de l'équation différentielle

$$T_2 \frac{d y^3}{d \tau} + y^3(\tau) = K_2 y^2(\tau)$$

Donc

$$y^3(\tau_1) = y_H^3 + y_P^3$$

où  $y_P^3$  = solution particulière

et  $y_H^3$  = solution homogène

Nous savons d'autre part que  $y^3(\tau_1) = -K_2 M_1$

On trouve donc facilement :

$$y^3(\tau_1) = C e^{-\tau_1/T_2} + \xi e^{-\tau_1/T_1} + K_1 K_2 / \beta \quad (\text{Eq. II-70})$$

Avec 
$$\xi = \frac{T_1}{T_2 - T_1} K_2 (K_1 / \beta + M_1) \quad (\text{Eq. II-71})$$

Et

$$C = \frac{T_2}{T_1 - T_2} K_2 (K_1 / \beta + M_1) \quad (\text{Eq. II-72})$$

Remarque importante pour le test n° 4

Calculons  $\frac{dy^3}{d\tau}(\tau_1)$  à l'instant  $t_1$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dy^3}{d\tau}(\tau_1) &= -\frac{C}{T_2} - \frac{\xi}{T_1} \\ &= -\frac{CT_1 + \xi T_2}{T_1 T_2} \end{aligned}$$

En remplaçant C et  $\xi$  par leurs expressions (II-71 et II-72) dans l'équation ci-dessus

$$\frac{dy^3}{d\tau}(\tau_1) = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[ K_2 (K_1 / \beta + M_1) - K_2 (K_1 / \beta + M_1) \right] = 0$$

Donc

$$\frac{dy^3}{d\tau}(\tau_1) = 0 \quad (\text{Eq. II-73})$$

A l'instant  $t_3$ ,  $y^3(\tau_1) = -M_2$

L'équation (II-70) peut donc s'écrire :

$$y^3(\tau_1) = -M_2 = C e^{-\tau_1^3/T_2} + \xi e^{-\tau_1^3/T_1} + K_1 K_2 / \beta$$

Posons  $\eta = \frac{T_1}{T_2}$  et  $x = e^{-z_1^3/T_1}$  (Eqs. II-74)

Nous obtenons :

$$-M_2 = C X^\eta + \xi X + K_1 K_2 / \beta$$

Donc

$$C X^\eta + \xi X + (K_1 K_2 / \beta + M_2) = 0 \quad (\text{Eq. II-75})$$

Donc en remplaçant C et  $\xi$  par leurs valeurs nous avons

$$\frac{K_2 M_1 T_2 + K_1 K_2 \beta T_2}{T_1 - T_2} x^\eta + \frac{T_1 K_2 (K_1 \beta + M_1)}{T_2 - T_1} x + K_1 K_2 / \beta + M_2 = 0$$

Ou  $x^\eta - \eta x + (\eta - 1) \frac{K_1 K_2 \beta + M_2}{K_1 K_2 \beta + K_2 M_1}$  (Eq. II-76)

Pour  $\beta = 0$

$$x^\eta - \eta x + (\eta - 1) \frac{M_2}{K_2 M_1} = 0 \quad (\text{Eq. II-77})$$

Le rapport  $\frac{M_2}{K_2 M_1}$  est très important, en effet pour  $M_2 = K_2 M_1$  (cas où la seconde saturation n'a aucune influence), nous obtenons que ce soit dans (II-76) ou (II-77) une solution triviale  $x = 1$  ou encore  $z_1^3 = 0$

Pour des valeurs de  $\frac{M_2}{K_2 M_1} < 1$ , seul cas possible si les saturations ont vraiment une influence non linéaire sur le système, la solution est positive et  $x = \text{cste}$

$z_1^3$  existe donc et a une valeur constante. (fig. II-37-a)

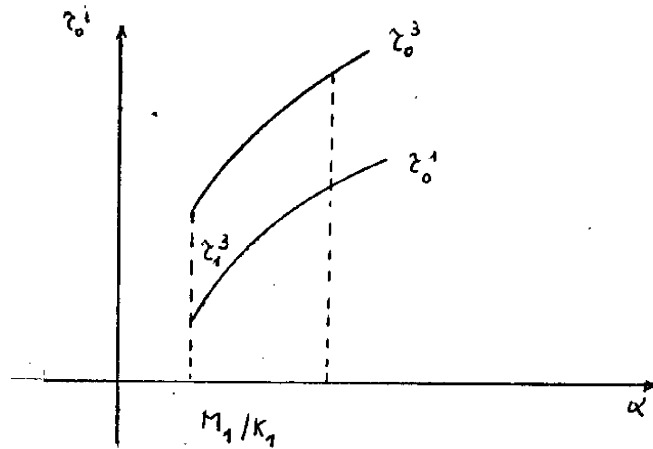


Figure II-37-a

Or nous n'avons aucune connaissance par le premier test, test de nature, de la valeur de  $\frac{M_1}{K_1}$ , dans le cas de cette chaîne. Nous devons donc continuer les tests jusqu'au moment où  $z_0^3 = 0$

Nous savons que si  $\alpha < \frac{M_2}{K_1 K_2}$ , il n'y aura pas de calcul de la variable  $z_0^3$  puisque toute la chaîne sera linéaire, vu les conditions d'existence définies par le test n° 1.

Il faut alors étudier les équations  $z_0^3$  pour :

$$\frac{M_1}{K_1} > \alpha > \frac{M_2}{K_1 K_2}$$

Dans l'équation (II-76)

$$X^\eta - \eta X + (\eta - 1) \left( \frac{K_1 K_2 \beta + M_2}{K_1 K_2 \beta + K_1 M_1} \right) = 0.$$

Remplaçons  $K_2 M_1$  par  $K_1 K_2 \alpha$  puisque  $K_1 \alpha < M_1$

Donc :

$$X^\eta - \eta X + (\eta - 1) \left( \frac{M_2 + K_1 K_2 \beta}{K_1 K_2 \beta + K_1 K_2 \alpha} \right) = 0 \quad (\text{Eq II-78})$$

Si  $\beta = 0$

$$X^\eta - \eta X + (\eta - 1) \frac{M_2}{K_1 K_2 \alpha} = 0$$

Donc  $X = f(\alpha)$ , nous avons  $x = 1$  pour  $K_1 K_2 \alpha = M_2$

Ou  $\alpha = \frac{M_2}{K_1 K_2}$  (Eq. II-79)

valeur connue par le test n° 1.

Dans la figure (fig. II-37-b) nous pouvons voir qu'à partir de  $\alpha = K_1 M_1$  la valeur  $\tau_1^3$  devient constante comme nous l'avons vu (eq. II-77) et seul  $\tau_0^1$  a de l'influence sur  $\tau_0^3$

En effet à partir de cet instant

$$\tau_0^3 = \tau_0^1 + \tau_1^3 = f(\alpha) + C \quad (\text{Eq. II-80})$$

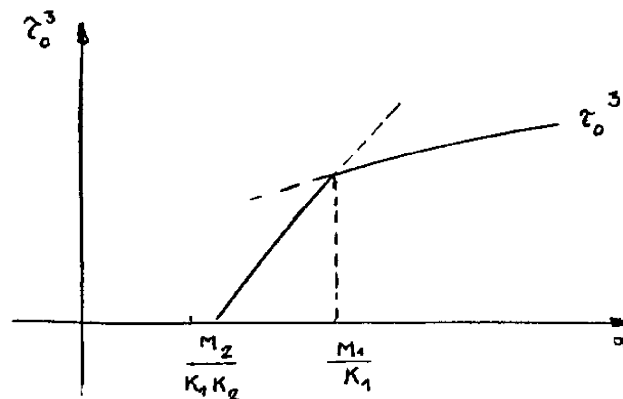


Figure II-37-b

Une autre interprétation plus physique celle-ci, est que pour  $\alpha < K_1 M_1$ , les deux blocs linéaires retardent l'évolution du système. Par contre à partir de  $\alpha = K_1 M_1$ , le deuxième bloc ne peut plus avoir d'influence, son excitation étant bornée à  $M_1$  au maximum. Donc le retard qu'il introduit dans la chaîne reste constant, à partir de cette valeur de  $\alpha$ , tandis que le premier bloc dont la constante de temps est directement liée à  $\alpha$  continue d'influencer le retard du système. Nous devons pour cela, avoir un point de cassure en  $\frac{M_1}{K_1}$ , la seconde courbe devant avoir une tangente de moindre pente que la première.

La figure (II-37-b) donne une idée de ce phénomène.

Nous sommes maintenant à même de présenter les tests à effectuer en vue d'une identification topologique des chaînes étudiées.

### II.3.2.3. Identification topologique des chaînes contenant des saturations pures

Test N° 2 Reconnaissance du type A ou B de la chaîne.

Nous utiliserons dans ce cas un signal d'entrée avec  $\alpha = 0$ . Comme nous l'avons vu dans le cas de  $\beta$  tendant vers l'infini, si le premier bloc est linéaire,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{dy^1}{d\tau}(\tau_0^c) = \infty \quad (\text{Eq. II-61})$$

Cette tangente infinie à l'origine on la retrouvera tout au long de la chaîne.

Par contre si le premier bloc est non-linéaire,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{dy^1}{d\tau}(\tau_0^c) = \frac{K_1 M_1}{T_1} \quad (\text{Eq. II-46})$$

Test N° 3 Existence d'un tandem (LN)

Pour  $\alpha > M_1$ , dans le cas d'un premier bloc non linéaire, et pour  $\alpha > \frac{M_1}{K_1}$  dans le cas d'un premier bloc linéaire, l'existence d'un retard  $\tau_0^i$  ( $i = 1, 3$ ) caractérisera le tandem (LN). (Eqs. II-47, II-49, II-62, II-77, II-78).

Test N° 4 Détection du dernier bloc de la chaîne

Remarquons bien que dans le cas de la saturation, les tests doivent suivre une hiérarchie, En effet, le test n° 4 ne pourra s'effectuer qu'après le test n° 3. Si nous avons prouvé l'existence d'un tandem (LN), le test se base sur l'étude de la dérivée aux instants  $t_1$  et  $t_3$  de la courbe de réponse

temporelle.

Si la dérivée à l'instant où les saturations passent à agir linéairement est nulle, le dernier bloc est linéaire (Eq. II-59, II-73) au contraire si la dérivée en question est non nulle à cet instant le bloc est non linéaire (II-68, II-54).

Test N° 5 Détermination du nombre de tandems (LN) dans la chaîne

Ce test sera essentiellement l'étude de la courbe  $\zeta_0^i$  en fonction de  $\alpha$ . Chacun des tronçons de la courbe  $\zeta_0^i(\alpha)$  définira un tandem (LN). C'est ce que nous voulons montrer dans la figure (fig. II-38)

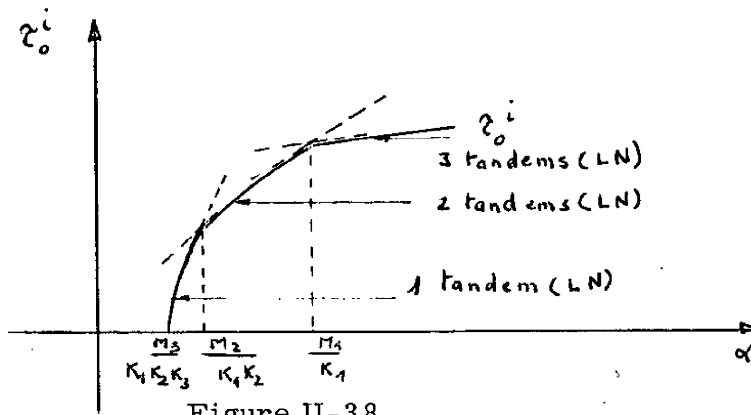


Figure II-38

Si la dernière partie de la courbe correspond à un intervalle de temps constant, le premier bloc de la chaîne est non-linéaire, et cela confirmera le test n° 2 (fig. II-39).

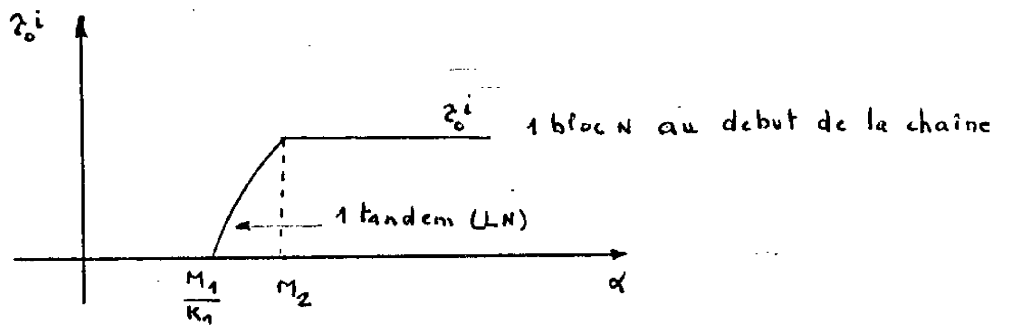


Figure II-39



Nous pouvons donc savoir le nombre exact de tandems (LN) dans la chaîne, et cela rend la méthode d'autant plus rigoureuse, vu que nous pouvons assurer la validité de la définition des classes pour lesquelles on a fixé un nombre maximum de 4 blocs (paragraphe I.2.2.). Donc dans ce cas les conditions étudiées deviennent nécessaires et suffisantes.

### Remarques

1. Nous venons donc de montrer que dans le cas de la saturation, la chaîne étudiée pourra être généralisée avec facilité, ce qui n'était pas possible dans le cas des relais. Nous devons toutefois remarquer que les points importants sont ceux qui correspondent à  $\frac{M_n}{K_1 K_2 \dots K_n}$ , puis  $\frac{M_{n-1}}{K_1 K_2 \dots K_{n-1}}$  etc.

Dans le cas de deux tandems (LN) les points en question correspondent à  $\frac{M_2}{K_1 K_2}$  et  $\frac{M_1}{K_1}$ . L'existence de deux tandems dans la chaîne sera d'autant plus nette que

$$\frac{M_1}{K_1} > \frac{M_2}{K_1 K_2}$$

Nous retrouvons là, la condition  $K_2 M_1 > M_2$  que nous avons rencontrée au départ de l'étude sur les saturations. En effet, dans le cas contraire, nous n'avons qu'une seule portion de courbe, la seconde saturation ne pouvant mettre en évidence que sa partie linéaire qui s'ajoutera par ailleurs à la caractéristique linéaire des blocs précédents de la chaîne.

De même la généralisation à un nombre  $n$  de blocs qui sur le plan mathématique peut paraître raisonnable, sur le plan physique (expérimental) nous semble plus difficile, puisque nous devons trouver  $(n-1)$  points de cassure sur la courbe  $\gamma_0^i(\alpha)$

2. La généralisation de l'ordre du bloc linéaire, ne devra offrir aucune difficulté sauf en ce qui concerne la complexité des calculs, les propriétés étant exactement les mêmes étudiées pour les chaînes avec des blocs linéaires du premier ordre.

3. Si un bloc linéaire est dominant en relation à un autre, au point de cassure (en  $\gamma_0^i(\alpha)$ ) la différence des déclivités des tangentes sera si

sera si faible qu'elle ne sera pas visible sur la courbe expérimentale. Nous retrouvons là, l'étude des pôles dominants dans les blocs linéaires.

### II. 3. 3. Saturation à seuil

Nous venons de voir l'étude effectuée sur les chaînes contenant des caractéristiques du type saturation. Si nous étudions les formes des courbes relatives aux autres non linéarités du groupe des saturations nous nous rendrons compte qu'elles sont très semblables à celles qui caractérisent les chaînes où il existe des saturations pures.

Ainsi dans le cas de la saturation avec seuil celle-ci est formée de deux saturations, une pouvant intéresser la partie positive du signal d'entrée, l'autre, la partie négative. Dans l'optique de ce travail, nous pouvons utiliser la même fonction d'entrée que dans le cas de la saturation pure, et vu que dans ce dernier cas, nous ne nous étions intéressés qu'à une "commutation" de la saturation (passage de la partie non linéaire, à la partie linéaire) ; toutes les propriétés se retrouvent et nous permettent d'effectuer de la même manière une identification topologique des blocs linéaires et non linéaire. Remarquons d'autre part, que bien qu'ici ces propriétés ne soient pas essentielles nous retrouverons les caractéristiques principales du seuil. Cela signifie que le tandem (LN) se caractérise par une position zéro si le dernier bloc est non linéaire et par une forme pseudo linéaire autour du zéro si le dernier bloc est linéaire.

### II. 3. 4. Saturation avec hystérésis

Dans le cas des chaînes possédant des sous systèmes contenant des saturations à hystérésis, il existe deux branches de saturation suivant que la dérivée du signal d'entrée est positive ou négative.

Il nous suffira une fois encore de prendre la même fonction d'entrée avec  $\alpha: U_{inj}$  pour que les tests n° 2, 3 et 4 donnent des résultats semblables

à ceux obtenus dans le cas des chaînes avec des saturations pures.

Dans le cas du test n° 5, ou nous tenons compte de la caractéristique  $\tau_0^i(\alpha)$  nous sommes obligés de faire varier  $(\alpha)$ . Nous utiliserons alors, de même que dans le cas du relais avec hystérésis, une fonction d'entrée un peu modifiée (fig. II-40), dont il est facile à partir de paragraphe I.2.3.8. et paragraphe II.3.2.2. de connaître les conditions de définitions :

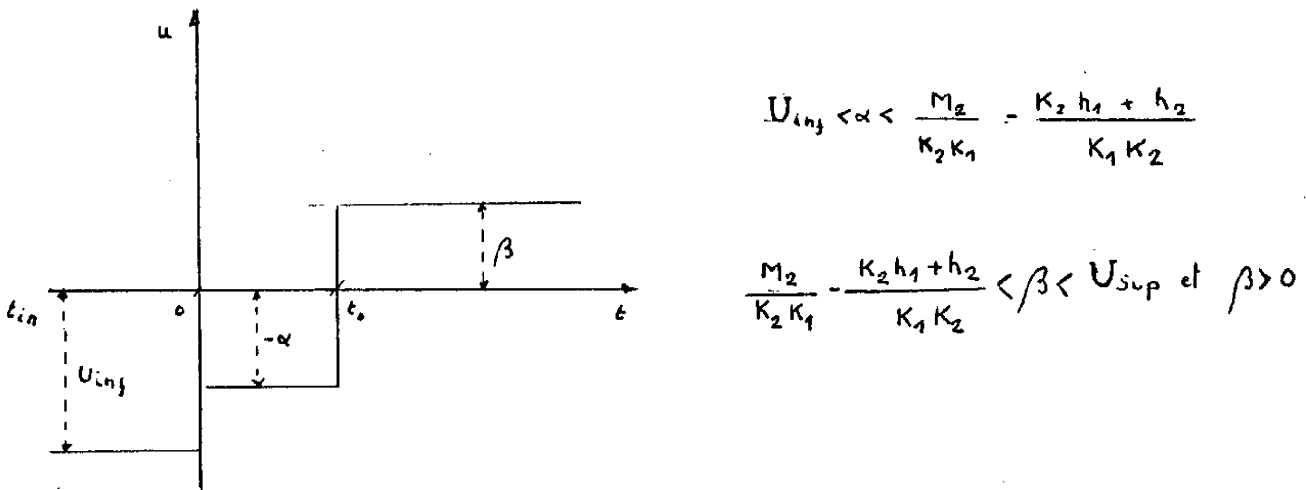


Figure II-40

Dans ce cas, la caractéristique  $\tau_0^i$  en fonction de  $\alpha$  se présentera ainsi (figure II-41)

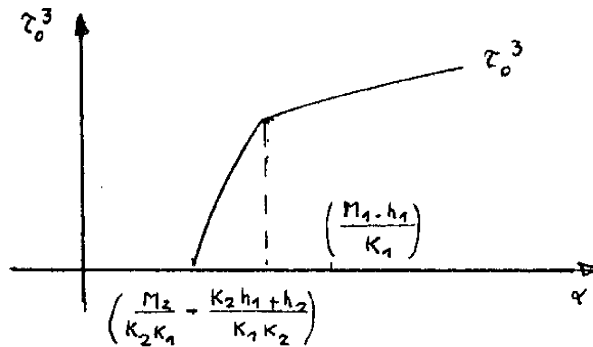


Figure II-41

Où  $\tau_0^3$  est l'intervalle de temps pour que la partie linéaire de la seconde saturation entre en fonctionnement ; par contre  $\tau_0^1$  est l'intervalle pour la première saturation entre elle aussi en fonctionnement.

Dans ces conditions toutes les propriétés étudiées pour la saturation pure se retrouvent dans le cas de la saturation avec hystérésis.

### II. 3. 5. Diode

Le cas de la diode lui aussi, est très proche de celui de la saturation pure. En effet, nous savons que la diode a une caractéristique correspondant à une demi saturation. Pour les tests n° 3, 4 et 5 l'étude faite sur la diode est exactement la même que celle sur la saturation. Dans le cas du test n° 2 une petite modification doit être cependant envisagée.

En utilisant la même fonction d'entrée (figure II-23), avec  $\alpha$  variable, si le système a un temps de commutation constant, le premier bloc est non linéaire, si par contre il est fonction de  $\alpha$  le premier bloc est linéaire.

## II. 4. Groupe des paraboles

### II. 4. 1. Introduction

Nous verrons au cours de ce chapitre que nous avons été amené à attaquer l'étude du groupe des paraboles d'une manière différente de celle du groupe des relais ou des saturations. Nous aimerions tout d'abord retrouver les équations des différentes chaînes dont nous avons à faire l'analyse en vue d'une identification topologique.

Rappelons auparavant, que ayant déjà appliqué le test n° 1 ou test en régime statique, nous savons si nous sommes en présence d'une caractéristique statique du type  $u = u^2$  ou  $y = u^4$ . Dans le premier cas, nous avons la certitude qu'il n'existe qu'un bloc non linéaire du type parabolique ; dans le second nous devons reconnaître s'il existe un bloc du type quadratique ou deux blocs du type parabolique.

Pour reconnaître tout d'abord le premier bloc, il nous faut utiliser une fonction d'entrée semblable à celle qui a fait l'objet des études précédentes (figure II-23). Comme dans le cas des relais non-polarisés (paragraphe II.2.4) (autre caractéristique à symétrie paire) si la sortie a un minimum, le premier bloc est linéaire. Si la sortie est toujours croissante ou toujours décroissante le premier bloc est non linéaire.

#### II.4.2. Equations des chaînes du type B

Considérons les équations correspondants aux différents blocs de la chaîne de la figure II-24.

Il vient

$$y^1 + T_1 \frac{dy^1}{dt} = K_1 u \quad (\text{Eq II-81})$$

$$y^2 = (y^1)^2 \quad (\text{Eq II-82})$$

$$y^3 + T_2 \frac{dy^3}{dt} = K_2 y^2 \quad (\text{Eq II-83})$$

$$y^4 = (y^3)^2 \quad (\text{Eq II-84})$$

Considérons séparément les quatre chaînes possibles :

Chaîne 2 - Correspondant à la sortie  $y^1$

Nous avons

$$y^1 + T_1 \frac{dy^1}{dt} = K_1 u \quad (\text{Eq II-81})$$

Chaîne 4 - Correspondant à la sortie  $y^2$

adéquate

Donc si nous choisissons une fonction d'entrée

$$y^1 = \sqrt{y^2} \quad \text{et} \quad \frac{dy^1}{dt} = \frac{dy^2/dt}{2\sqrt{y^2}}$$

Et par (eq II-81)

$$y^2 + \frac{\tau_1}{2} \frac{dy^2}{dt} = K_1 u \sqrt{y^2} \quad (\text{Eq II-85})$$

Chaîne 6 : Correspondant à la sortie  $y^3$

A partir de (Eq II-83) nous pouvons écrire :

$$y^2 = \frac{1}{K_2} \left( y^3 + \tau_2 \frac{dy^3}{dt} \right) \quad \text{Donc} \quad \frac{dy^2}{dt} = \frac{1}{K_2} \left( \frac{dy^3}{dt} + \tau_2 \frac{d^2y^3}{dt^2} \right)$$

Et en remplaçant  $y^2$  et  $\frac{dy^2}{dt}$  dans Eq (II-85) nous avons

$$y^3 + \left( \tau_2 + \frac{\tau_1}{2} \right) \frac{dy^3}{dt} + \frac{\tau_1 \tau_2}{2} \frac{d^2y^3}{dt^2} = K_1 K_2 u \sqrt{\frac{1}{K_2} \left( y^3 + \tau_2 \frac{dy^3}{dt} \right)} \quad (\text{Eq II-86})$$

Chaîne 8 : Correspondant à la sortie  $y^4$

A partir de (Eq II-84)

$$y^3 = \sqrt{y^4} \rightarrow \frac{dy^3}{dt} = \frac{dy^4/dt}{2\sqrt{y^4}} \rightarrow \frac{d^2y^3}{dt^2} = \frac{(dy^4/dt)^2 - 2y^4(d^2y^4/dt^2)}{4y^4\sqrt{y^4}}$$

Donc en remplaçant  $y^3$ ,  $\frac{dy^3}{dt}$  et  $\frac{d^2y^3}{dt^2}$  dans (Eq II-86)

$$(y^4)^2 + \frac{1}{2} \left( \tau_2 + \frac{\tau_1}{2} \right) \frac{dy^4}{dt} y^4 + \frac{\tau_1 \tau_2}{8} \left[ \left( \frac{dy^4}{dt} \right)^2 - 2y^4 \frac{d^2y^4}{dt^2} \right] = K_1 K_2 y^4 \sqrt{\frac{y^4 + \tau_2 (dy^4/dt) \sqrt{y^4}}{2}}$$

Remarquons tout d'abord que dans le cas des chaînes du type B, la seule chaîne dont le comportement en régime libre soit non linéaire est la chaîne (8). Ce qui la rend parfaitement reconnaissable.

La chaîne 2 étant facilement reconnaissable au cours du test n° 1, ou test en régime statique, du fait d'être linéaire ; il ne nous reste plus qu'à caractériser les chaînes 3 et 4.

Si nous effectuons un bouclage avec une fonction du type  $1/\sqrt{y}$  où  $y$  représente la sortie du système, avec  $y = y^2$  ou  $y = y^3$  respectivement nous remarquerons que le comportement de la chaîne bouclée (6) est non linéaire. Si nous utilisons un bouclage du type  $1/\sqrt{y}$ , cela est dû au fait

que la fonction statique de ces deux systèmes se présentait sous la forme

$y = u^2$  après avoir effectué le test n° 1. Nous avons donc utilisé l'inverse de cette fonction pour essayer de linéariser le système.

#### II. 4. 3. Equation des chaînes de type A

Considérons maintenant une chaîne de type A (figure II. 2. 2.). Les équations définissant la dynamique des différents blocs peuvent être représentés comme ci-dessous :

$$y^1 = (u)^2 \quad (\text{Eq II-88})$$

$$y^2 + T_1 \frac{dy^2}{dt} = K_1 y^1 \quad (\text{Eq II-89})$$

$$y^3 = (y^2)^2 \quad (\text{Eq II-90})$$

$$y^4 + T_2 \frac{dy^2}{dt} = K_2 y^3 \quad (\text{Eq II-91})$$

En prenant séparément les quatre chaînes, comme dans le cas de la chaîne de type A ;

Chaîne 1 : correspondant à la sortie  $y^1$

$$y^1 = (u)^2 \quad (\text{Eq II-88})$$

Chaîne 3 : correspondant à la sortie  $y^2$

$$y^2 + T_1 \frac{dy^2}{dt} = K_1 (u)^2 \quad (\text{Eq II-92})$$

Chaîne 5 : Correspondant à la sortie  $y^3$

$$y^3 = (y^2)^2 \quad \text{Donc} \quad y^2 = \sqrt{y^3} \quad \frac{dy^2}{dt} = \frac{dy^3/dt}{2\sqrt{y^3}}$$

En remplaçant  $y^3$  et  $\frac{dy^3}{dt}$  dans (Eq II-92), nous pouvons écrire :

$$y^3 + \frac{\tau_1}{2} \frac{dy^3}{dt} = K_1 (u)^2 \sqrt{y^3} \quad (\text{Eq II-93})$$

Chaîne 7 : correspondant à la sortie  $y^4$

L'équation (Eq II-91), donne :

$$y^3 = \frac{1}{K_2} \left( y^4 + \tau_2 \frac{dy^4}{dt} \right)$$

$$\frac{dy^3}{dt} = \frac{1}{K_2} \left( \frac{dy^4}{dt} + \tau_2 \frac{d^2 y^4}{dt^2} \right)$$

En remplaçant  $y^3$  et  $\frac{dy^3}{dt}$  dans (Eq II-93) nous obtenons

$$y^4 + \left( \tau_2 + \frac{\tau_1}{2} \right) \frac{dy^4}{dt} + \frac{\tau_1 \tau_2}{2} \frac{d^2 y^4}{dt^2} = K_1 K_2 (u)^2 \sqrt{\frac{1}{K_2} \left( y^4 + \tau_2 \frac{dy^4}{dt} \right)} \quad (\text{Eq II-94})$$

La première et la seconde chaîne 1 et 3 sont facilement reconnaissables car nous savons par le test n° 1 qu'elles n'ont qu'un seul bloc non linéaire du type  $y = u^2$  et par le test n° 2 que celui-ci se trouve en tête de la chaîne. Il nous suffit donc de vérifier s'il existe ou non un régime dynamique pour le système à l'aide par exemple d'un test en régime libre. Si le système en régime libre, une fois fixées les conditions initiales, réagit linéairement nous avons une chaîne 3. Si la chute de la sortie du système des conditions initiales à zéro est immédiate (instantanée) nous pourrions dire qu'il s'agit d'une chaîne 1.

Les chaînes 5 et 7 sont aussi facilement reconnaissables si nous effectuons un bouclage du type inverse de la fonction en régime statique qui dans le cas est du type quadratique c'est-à-dire  $y = (u)^4$ . Nous utilisons alors un bouclage du type  $1/\sqrt[4]{y}$ . Nous remarquons que la chaîne 5 sera linéaire tandis que la chaîne 7 sera elle non linéaire.

Remarque : Si nous voulons différencier le cas où il existe deux blocs non linéaires du type  $y = u^2$ , de celui où il n'existe qu'un seul du type quadra



tique ; pour une étude plus générale, ou un bloc non linéaire du type quadratique pourrait être un membre du groupe des paraboles, nous remarquerons que le bouclage  $1/\sqrt[4]{3}$  rend linéaire la chaîne 5 tandis qu'il ne rend pas linéaire la chaîne 3. La chaîne 3 se reconnaîtra facilement de la chaîne 7, car en régime forcé avec des entrées du type échelon le système sera linéaire, si nous utilisons comme valeurs d'entrées, des valeurs croissantes du type  $u = \sqrt[4]{\beta_0}$ . Nous avons en réalité un système qui peut s'apparenter très fortement à un bloc linéaire du premier ordre.

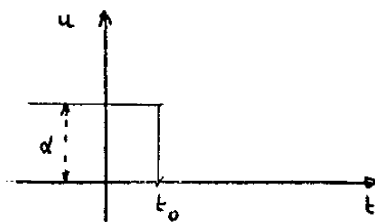
#### II. 4. 4. - Identification topologique des chaînes contenant des paraboles

De cette discussion nous en déduisons que nous avons besoins de trois tests de base pour reconnaître les chaînes A ou B. Une fois connue la non linéarité grâce au test n° 1

Test n° 2 : reconnaissance du type A ou B de la chaîne (paragraphe 4. 1.)

Test n° 3 : test de la chaîne en régime libre

Ce test utilisera une fonction du type présenté par la figure II-42 et tel que



$$\alpha \in [0, U_{sup}]$$

Figure II-42

Où  $\alpha$  mettra le système en conditions initiales.

Test n° 4 : Test de linéarisation du système bouclé.

Nous mettons d'abord le système en condition initiale, puis à l'instant  $t_0$  nous introduisons le bouclage. Nous utilisons le même type de fonction d'entrée que pour le test n° 3.

Remarque : Test n° 5. Si nous devons reconnaître les chaînes 3 ou 7 avec un test, en échelon d'amplitude, nous appliquons l'hypothèse de la superposition en utilisant des amplitudes répondant à une entrée  $u' = \sqrt[4]{\beta_0}$ .

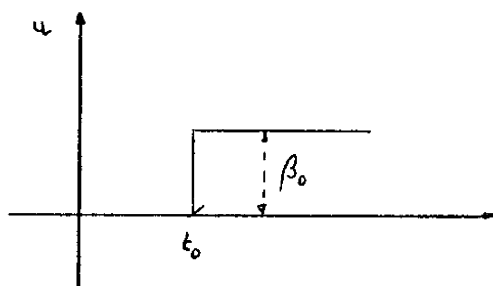


Figure II-43

## II. 5. Conclusions

1. Au cours de ce chapitre nous avons essentiellement essayé de faire l'analyse d'un certain nombre de structures non-linéaires en vue d'une "identification topologique". Pour cela nous avons en premier lieu eu connaissance pour le "test de nature" du "groupe" et de la "classe" dont la structure appartenait.

Dans le cas des relais et des saturations, une fois déterminé le groupe et la classe de la structure, la méthode se développe de la façon suivante.

- Reconnaissance du type A ou B de la chaîne.
- Vérification de l'existence d'un tandem LN.
- Reconnaissance du dernier bloc de la chaîne.
- Détermination du nombre de tandems LN dans la chaîne.

Une première conclusion qui s'impose après l'étude effectuée sur les saturations, est l'importance d'une hiérarchie à suivre dans les tests.

L'ordre ne peut en aucun cas être changé.

La seconde conclusion est la similitude des approches dans le cas des relais et celui des saturations. Cette similitude s'explique sans doute par la ressemblance des formes des non-linéarités étudiées. En effet, un relais peut-être vue comme une saturation ayant un gain infini.

- Dans le cas de la parabole, par contre, nous avons vérifié qu'il suffit de trois tests

- Le premier relatif à la reconnaissance du type A ou B de la chaîne.

- Le second que nous avons convenu d'appeler, test en régime libre.

- Le troisième, où nous essayons pour le système, une linéarisation en régime bouclé.

Ce dernier test est extrêmement important. En effet, en changeant la forme du bouclage et en utilisant une autre fonction de "bouclage" nous pouvons avoir une information importante même dans des cas beaucoup plus compliqués. Nous pourrions avoir ainsi une série de "petites boîtes" contenant des fonctions de bouclage que nous essayerons par tentatives successives, et qui nous permettraient finalement d'identifier topologiquement avec précision, la chaîne en question. Ce processus se rapproche assez à notre avis, du cas linéaire où nous aurions une série de dérivateurs qui nous permettraient d'identifier le système linéaire.

- Une autre conclusion assez facile à tirer est la différence d'approches entre les cas étudiés. Tandis que l'étude a été effectuée dans les deux autres groupes sur les points de discontinuité de la fonction ou de sa dérivée il n'est pas de même dans le cas où la fonction est continue. L'étude a donc dû avoir une optique totalement différente, qu'il nous paraît extrêmement important de compléter en utilisant pour cela des non-linéarités du type algébrique plus complexe ( $x^3, x^4, \dots, x^3 + x, \dots$ )

2. D'autre part, nous avons vérifié au cours de ce travail l'importance des notions de groupe, et de classe. En effet, tandis qu'en général on considère les notions de symétrie paire ou impaire dans les fonctions, nous nous sommes

par contre attaché à montrer que dans les cas non-linéaires de systèmes monodimensionnels et en boucle ouverte, la forme de la caractéristique non-linéaire essentielle (relais, saturation) définissant le groupe est beaucoup plus importante que les propriétés de symétrie. En jetant un rapide coup d'oeil sur les tableaux récapitulatifs nous remarquerons avec facilité, les ressemblances entre les classes du même groupe.

Naturellement, nous pouvons avoir une classe qui appartient à deux groupes. Par exemple, la saturation à seuil, pourrait appartenir au groupe des saturations et à celui du seuil. Pour cette raison, il nous paraît intéressant de continuer cette étude qui se recoupera de plus en plus souvent, et nous permettra ainsi d'avoir chaque fois plus de certitude sur l'identification effectuée.

Une autre généralisation à envisager, concerne les familles étudiées. Il nous paraît souhaitable de considérer des nouvelles familles contenant des bouclages unitaires, linéaires et non-linéaires.

3. Schématiquement nous nous sommes attaqués à trois groupes de non-linéarités :

- Groupe des Relais, des saturations et Paraboles.

- Groupe des Relais :

Les relais se caractérisent comme permettant la transformation d'un espace infini d'entrée en un espace dénombrable de sortie (2 ou 3 éléments) (Figure II-44)

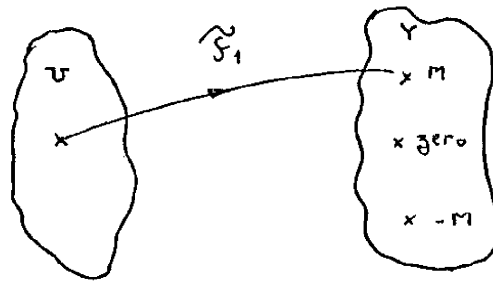


Figure II-44

- Groupe des saturations

Les saturations se caractérisent comme permettant la transformation d'un espace infini d'entrée en un espace borné de sortie (Figure II-45)

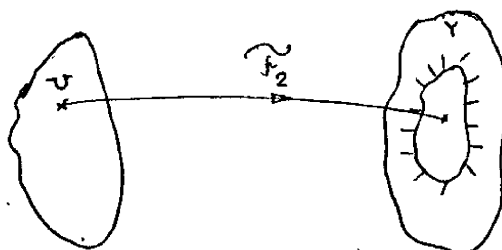


Figure II-45

- Groupe des Paraboles

Les paraboles se caractérisent comme permettant la transformation d'un espace infini d'entrée en un espace infini de sortie à travers une loi algébrique ( $\mathcal{F}_3^1$ ) (Figure II-46)

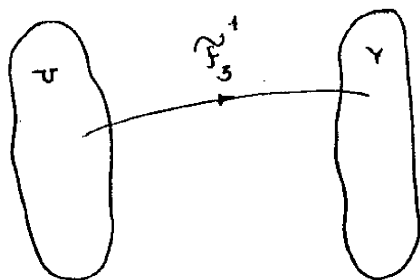


Figure II-46

Nous avons dans notre travail essayé d'attaquer à l'intérieur de la famille qui nous a été définie, des groupes à caractéristiques bien différentes. Nous répétons encore une fois qu'il faudrait à notre sens, développer maintenant les études relatives au troisième groupe en utilisant d'autres lois algébriques

et en essayant peut-être ultérieurement de voir d'autres transformations réductibles aux trois formes  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  déjà citées.

Toutefois il faut noter que nous nous sommes limité à l'étude de système déterministe, il est naturel de considérer dans le cadre d'une application à une identification d'un système physique des bruits qui introduiront une perte d'information.



## CHAPITRE III

---

### DIAGRAMMES DES REPOSES TEMPORELLES ET TABLEAUX SYNOPTIQUES DES DIFFERENTES CHAINES

- III. 1 Introduction
- III. 2 Diagrammes relatifs au groupe des relais
- III. 3 Diagrammes relatifs au groupe des saturations
- III. 4 Quelques expériences particulièrement importantes
- III. 5 Tableaux synoptiques



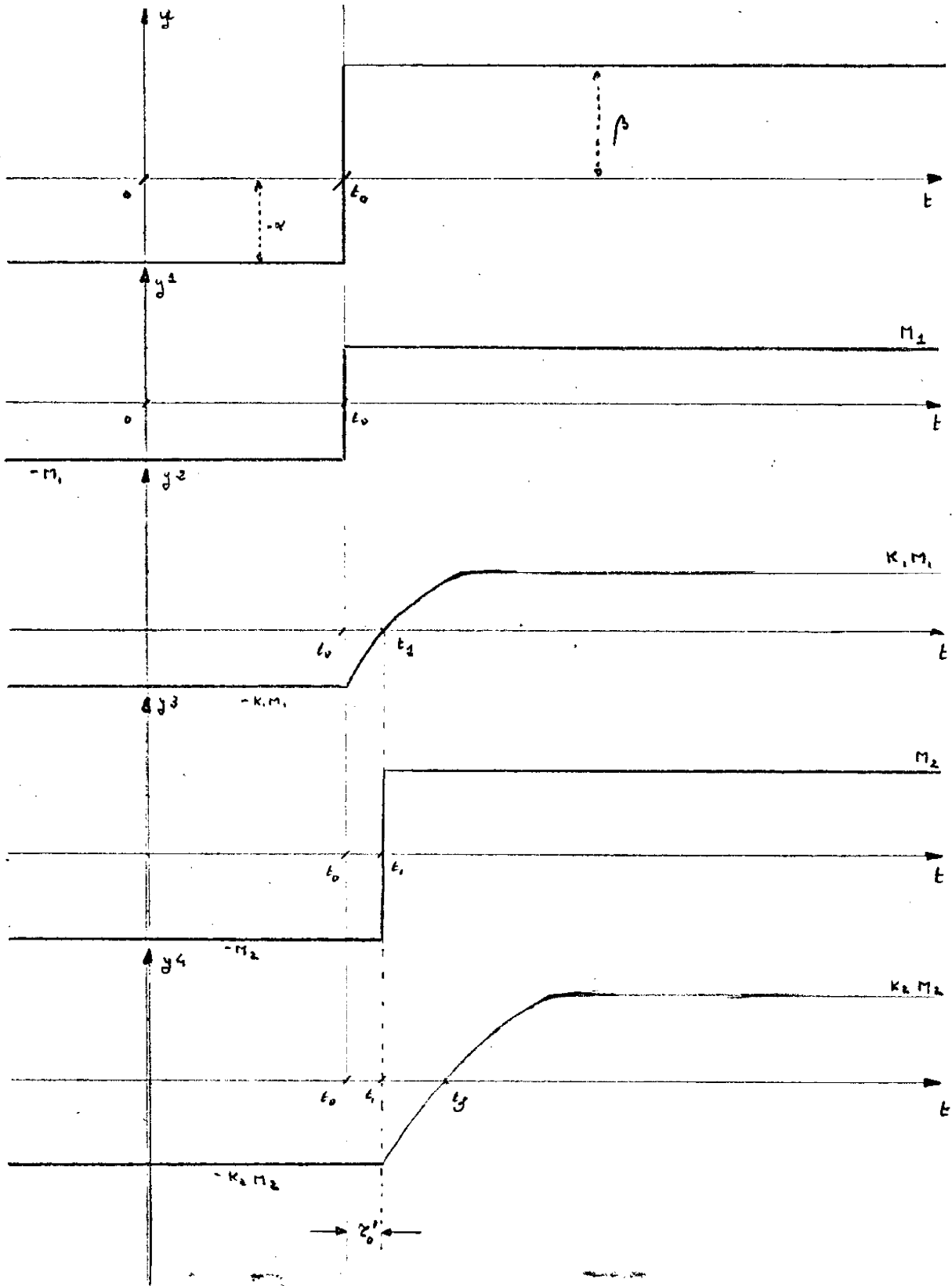
### III. 1. INTRODUCTION

Au cours de ce chapitre nous présenterons certains des résultats expérimentaux qui ont servi de base à l'étude effectuée. Pour ne pas lasser le lecteur par une liste systématique de tous les diagrammes et expériences nous avons préféré montrer ceux qui nous paraissaient les plus aptes à éclaircir la compréhension du texte antérieure ( chapitre II)

Nous avons dans ce sens présenté des diagrammes temporels des différentes chaînes étudiées ainsi que les schémas analogiques qui nous ont paru les plus intéressantes.

Au cours de ce travail les expériences ont été réalisées sur la calculatrice analogique E. A. I. TR 4 8 du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales.

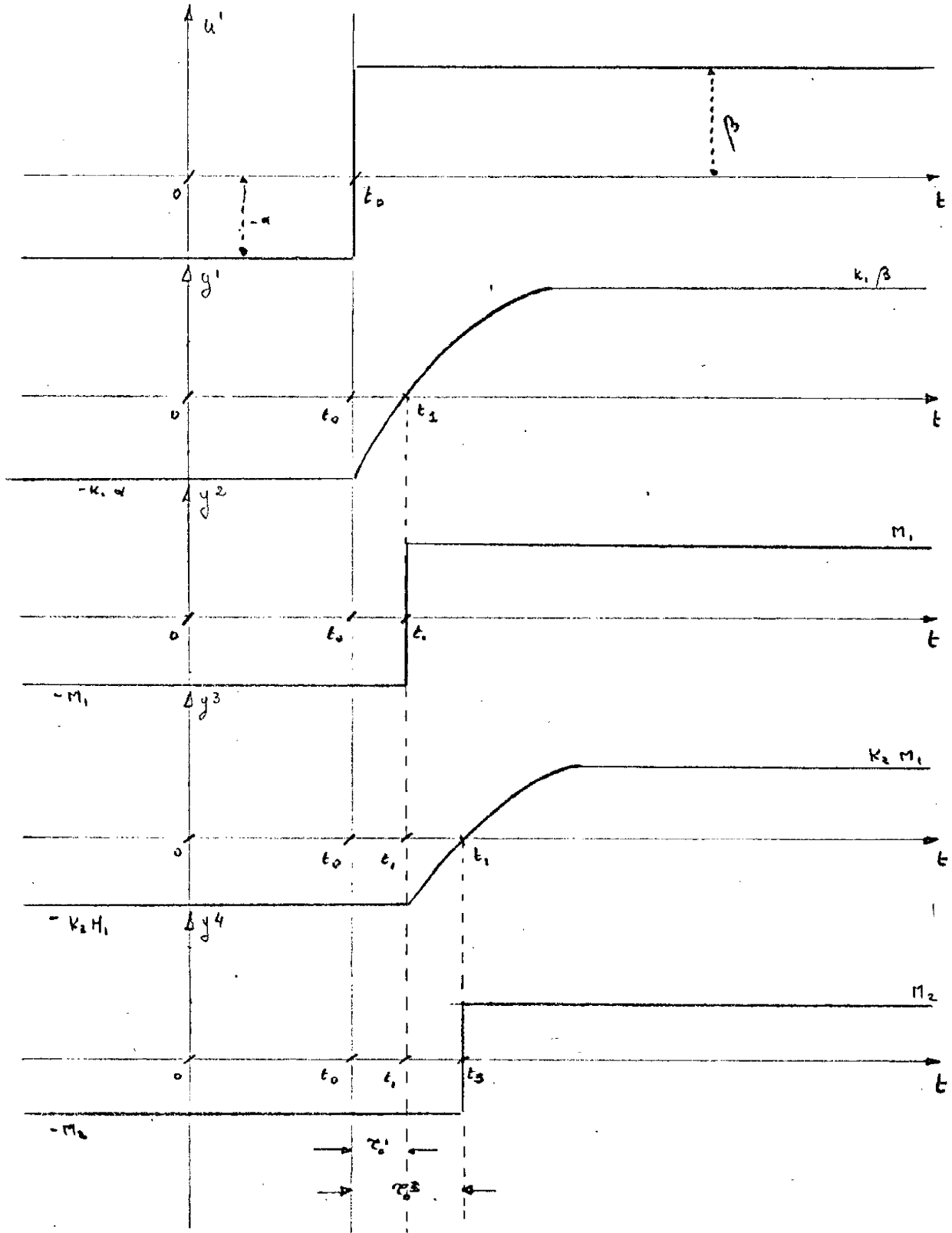
Groupe : Relais  
 Classe : Relais Idéal  
 Chaîne : A



Groupe : Relais

Classe : Relais Idéal

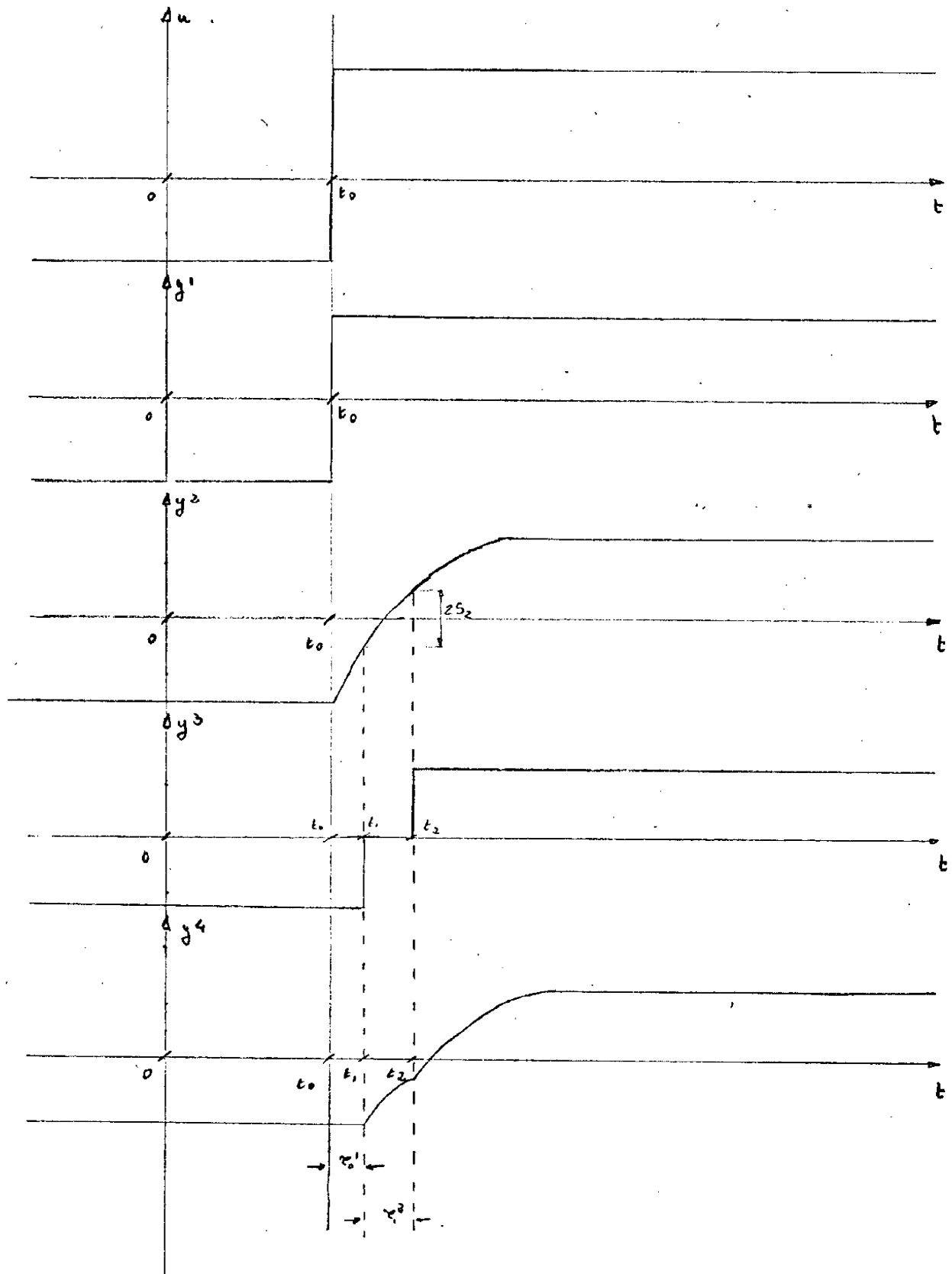
Chaîne : B.



Groupe : Relais

Classe : Relais à seuil

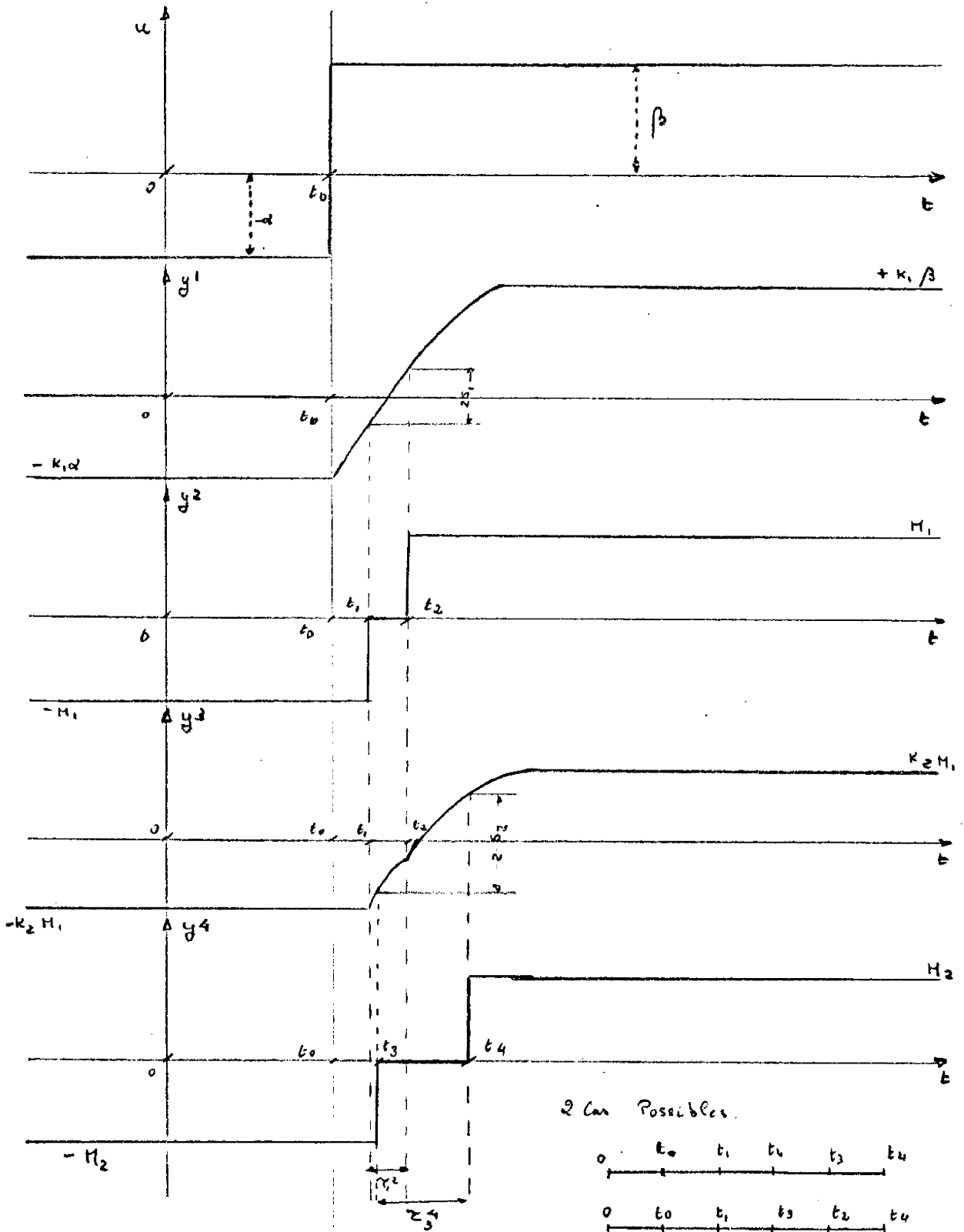
Chaîne : A.



Groupe : Relais

Classe : Relais à seuil

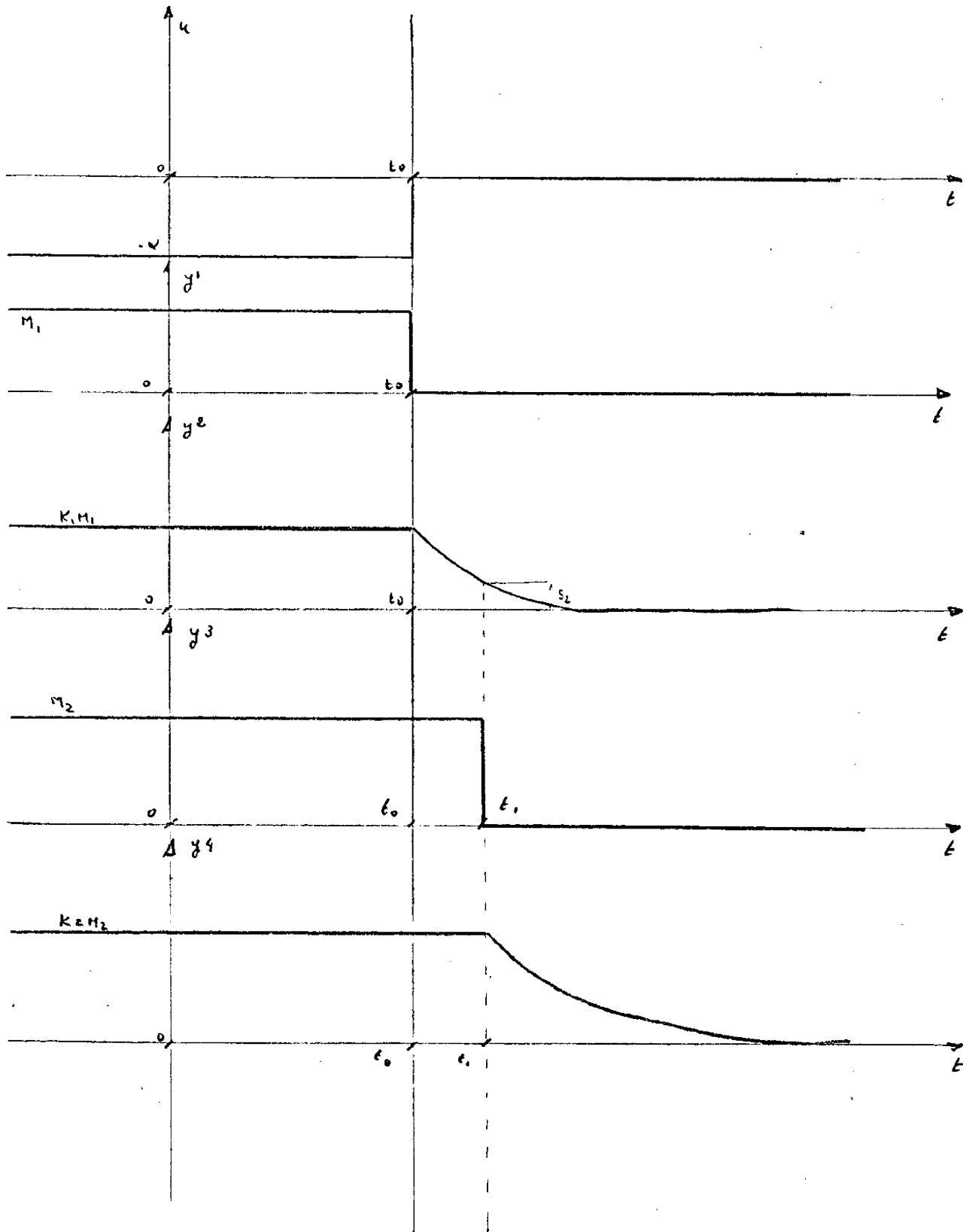
Chaîne : B



Groupe : Relais

Classe : Relais non polarisé

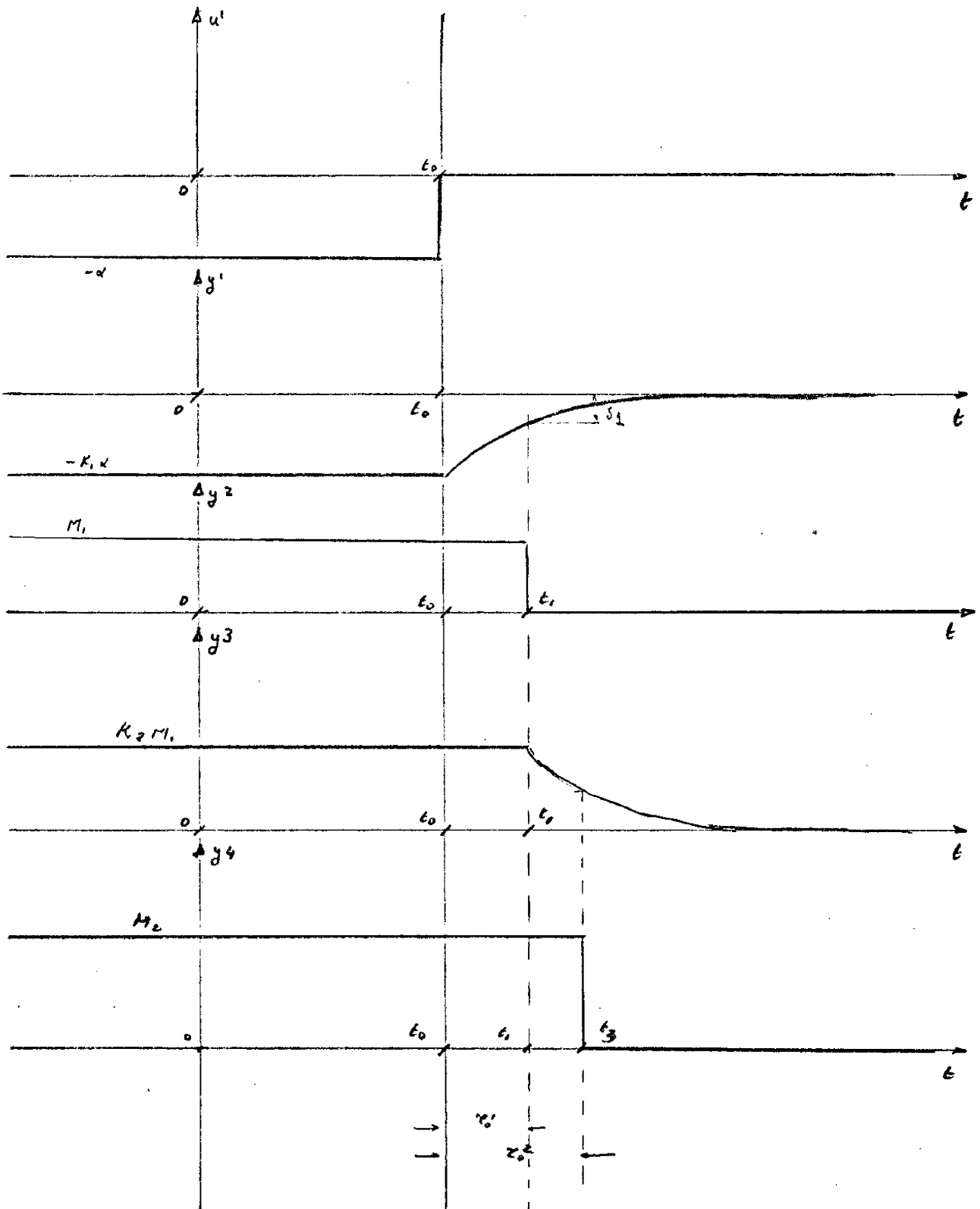
Chaîne : A



Groupe : Relais

Classe : Relais non Polarisé

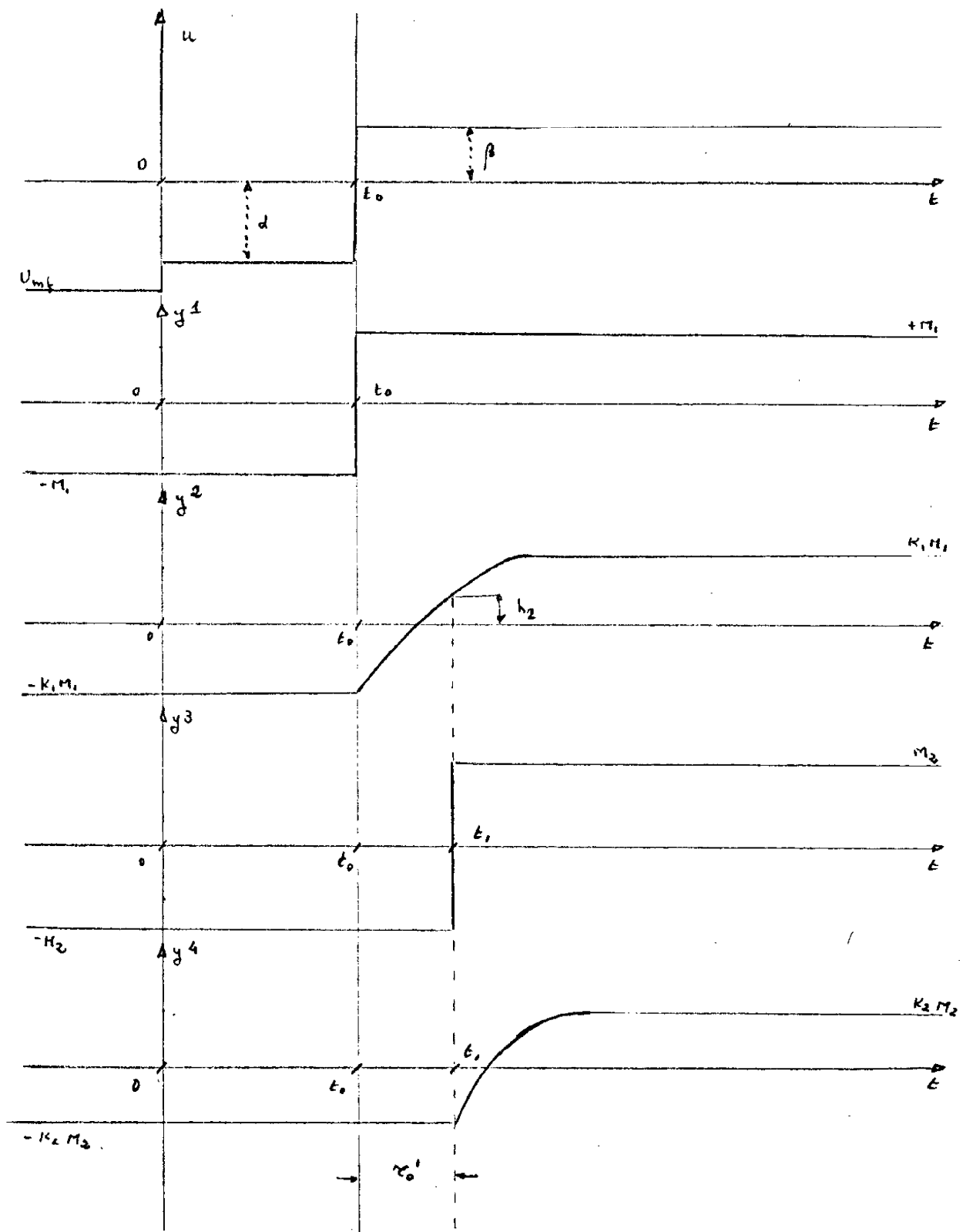
Chaîne : B.



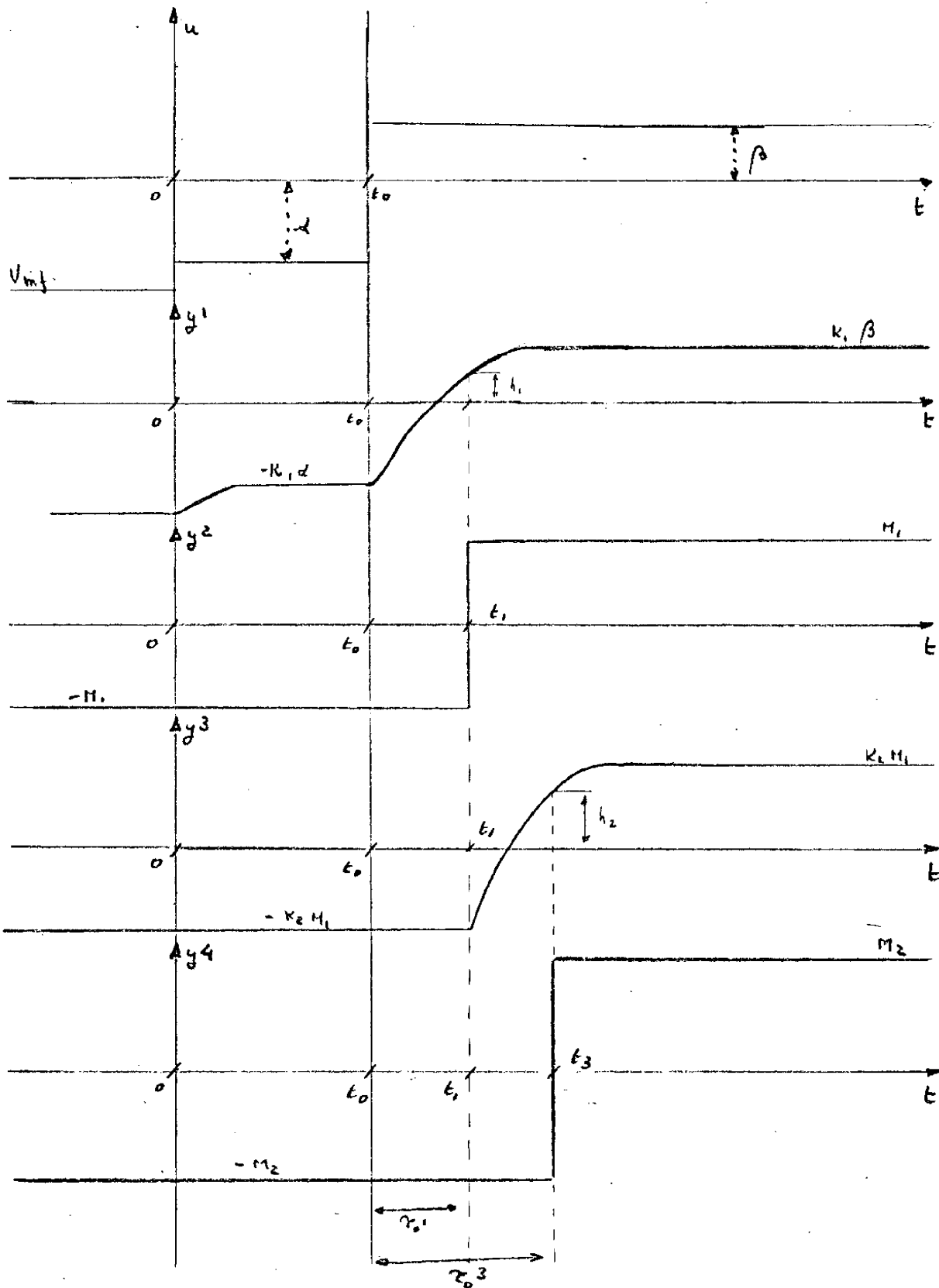
Groupe : Relais

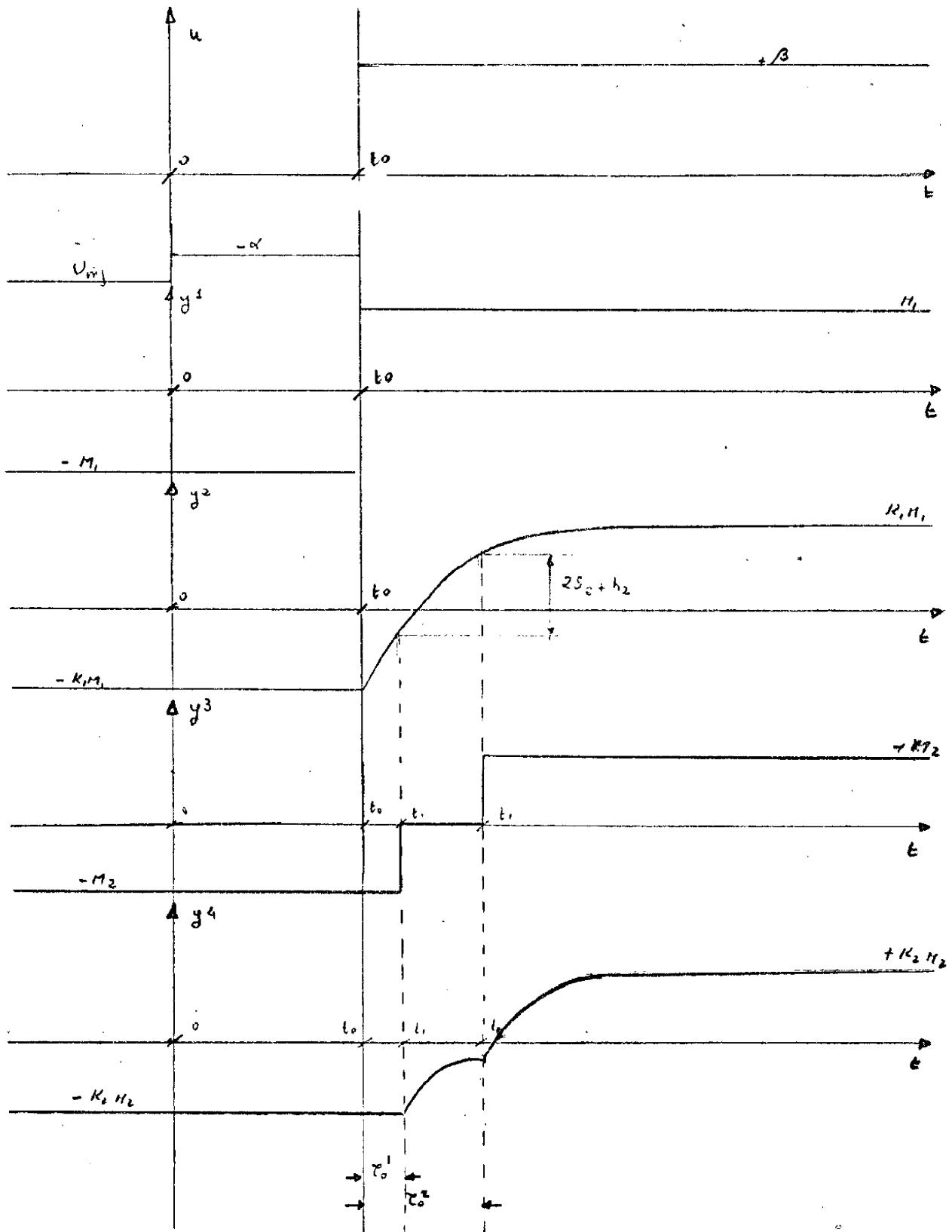
Classe : Relais avec Hystérésis

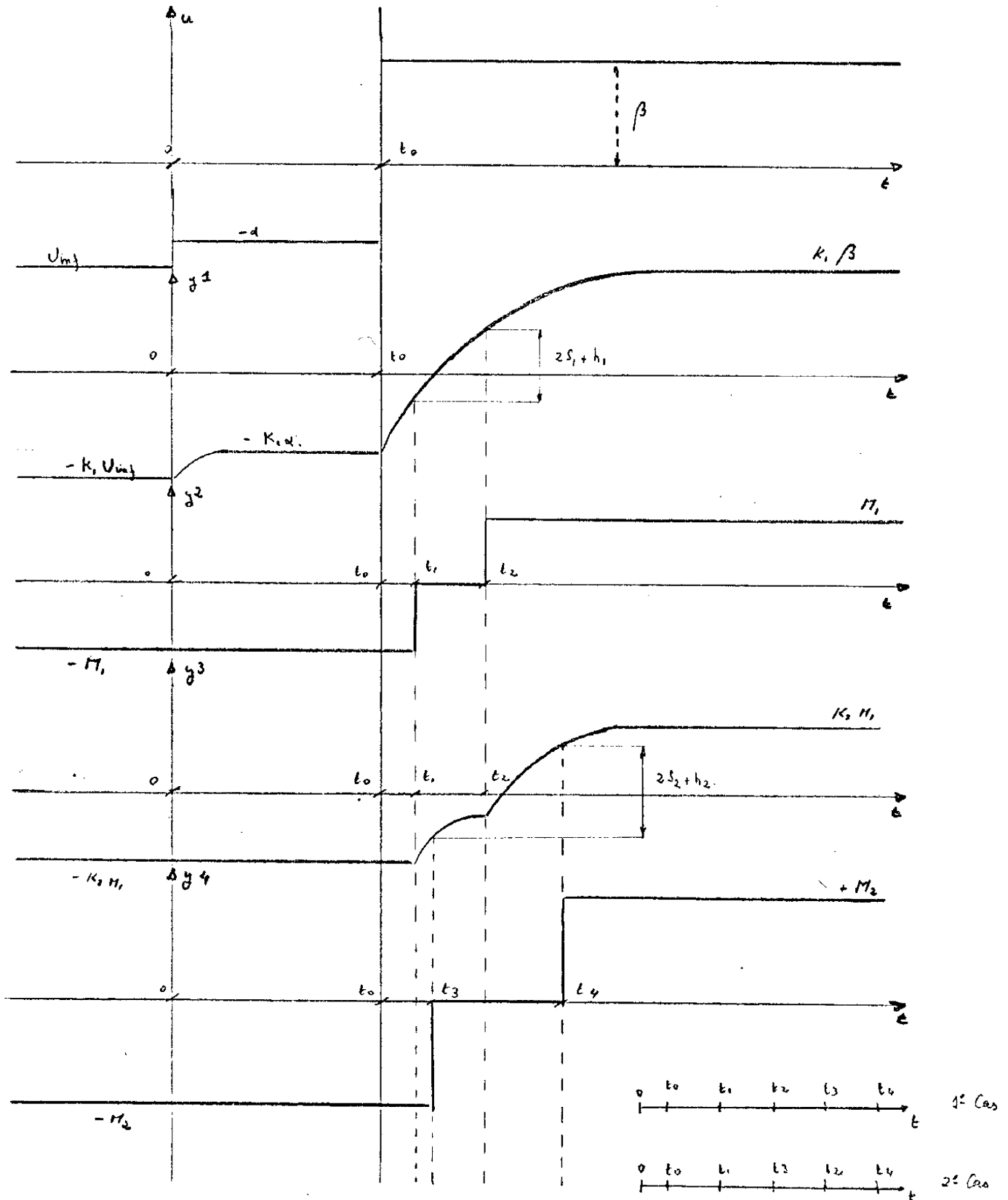
Chaîne : A







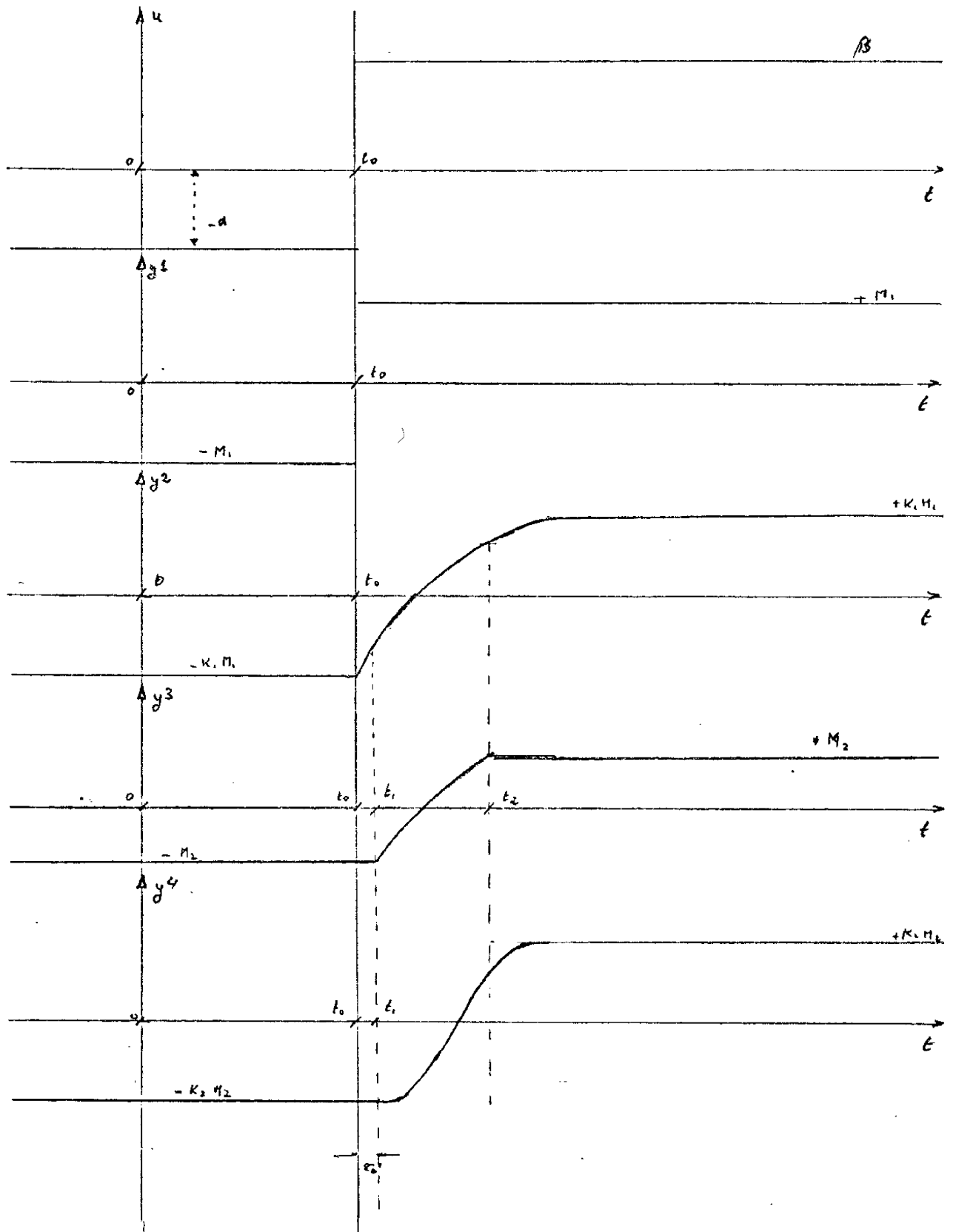




Groupe : Saturation

Classe : Saturation Pure

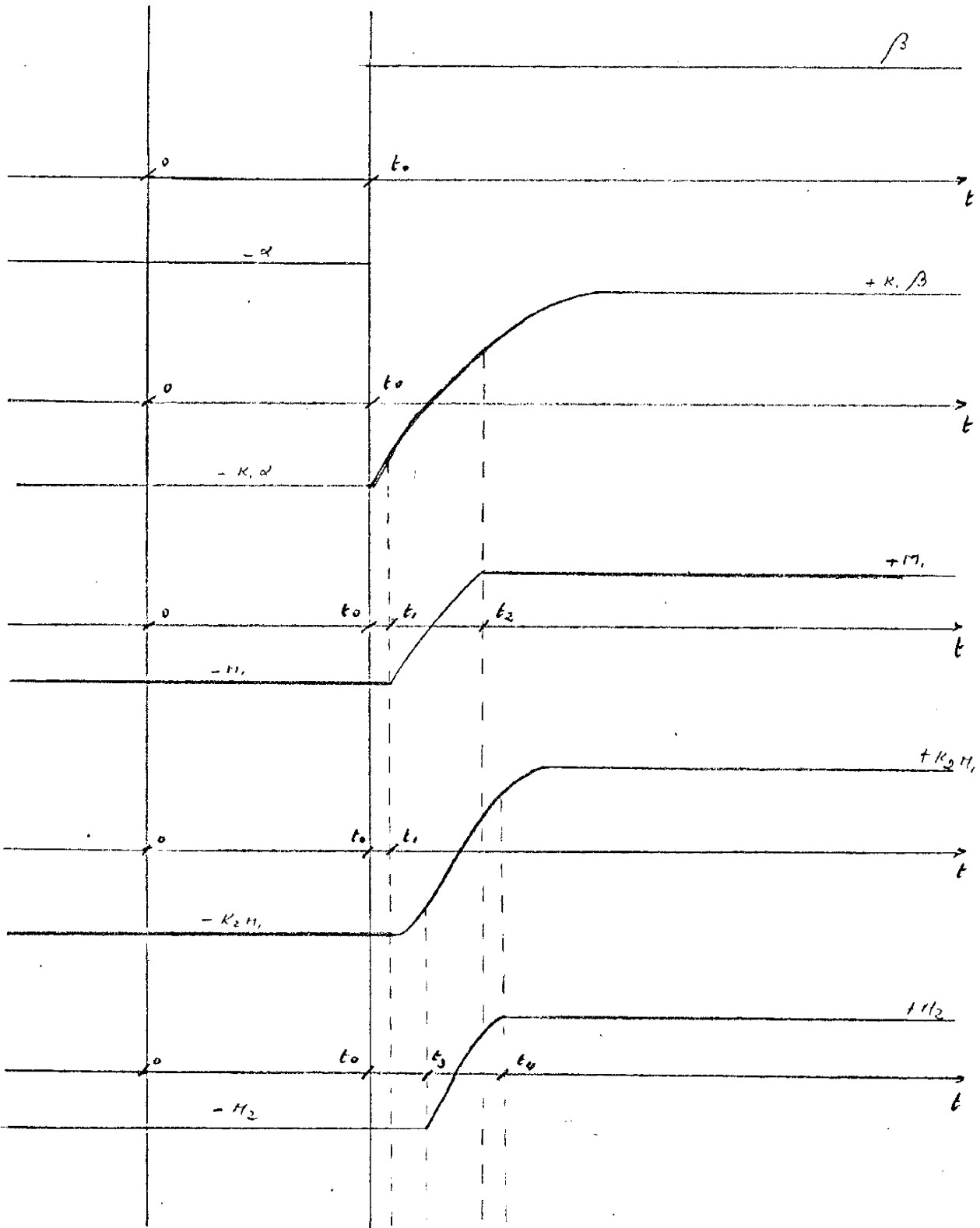
Chaîne : A.



Groupe : Saturation

Classe : Saturation Pure

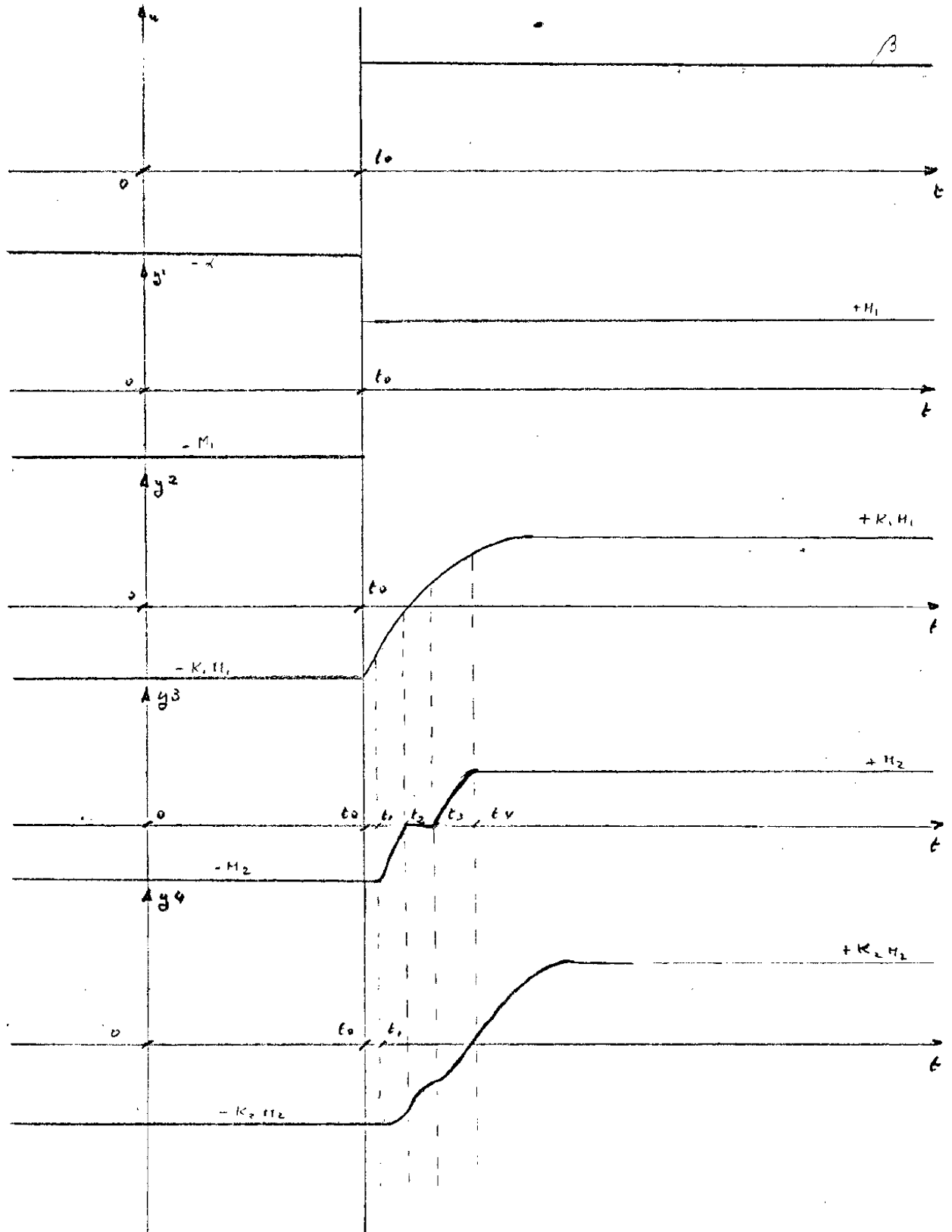
Chaine : B

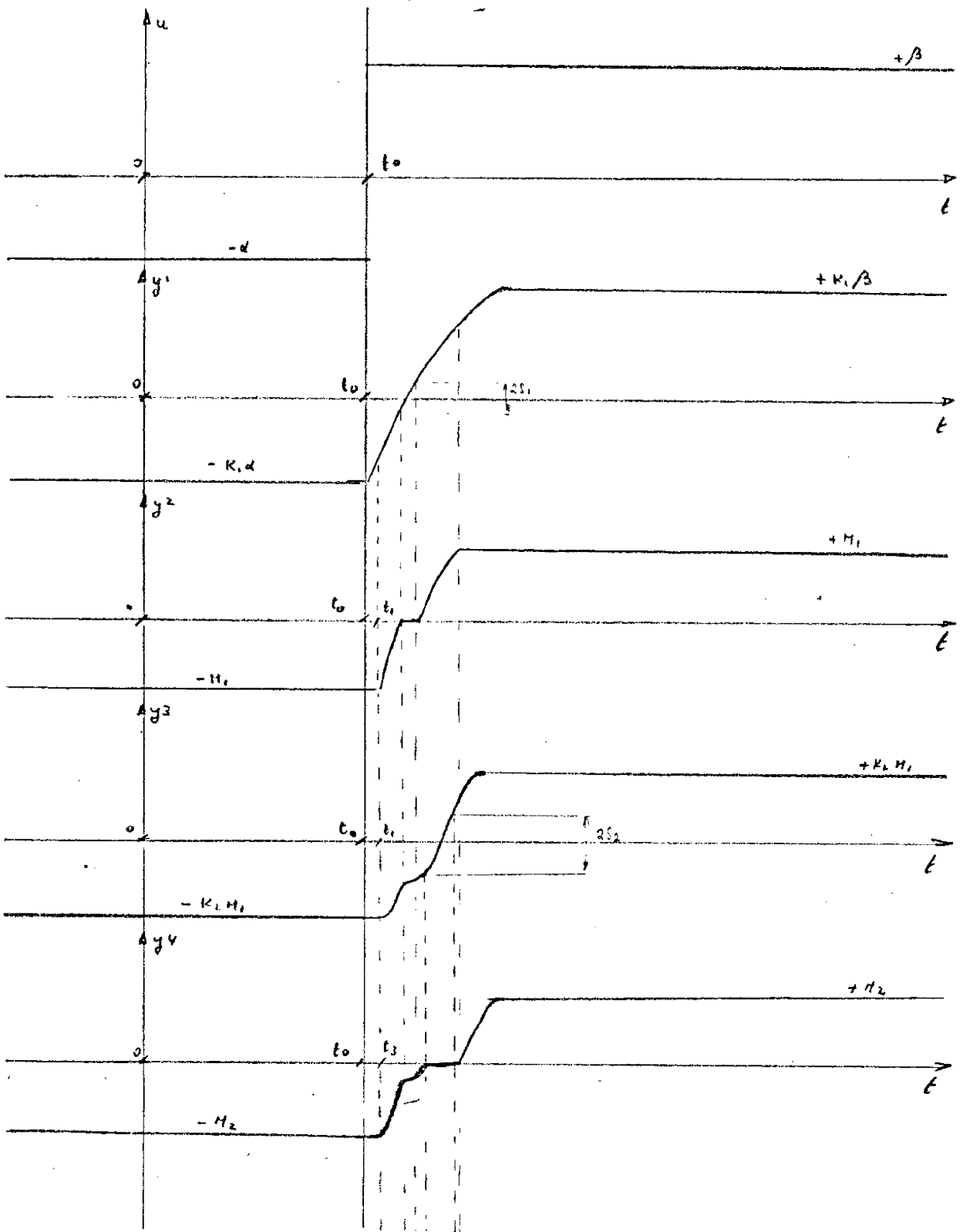


Groupe : Saturations

Classe : Saturation à Seuil

Chaîne : A.

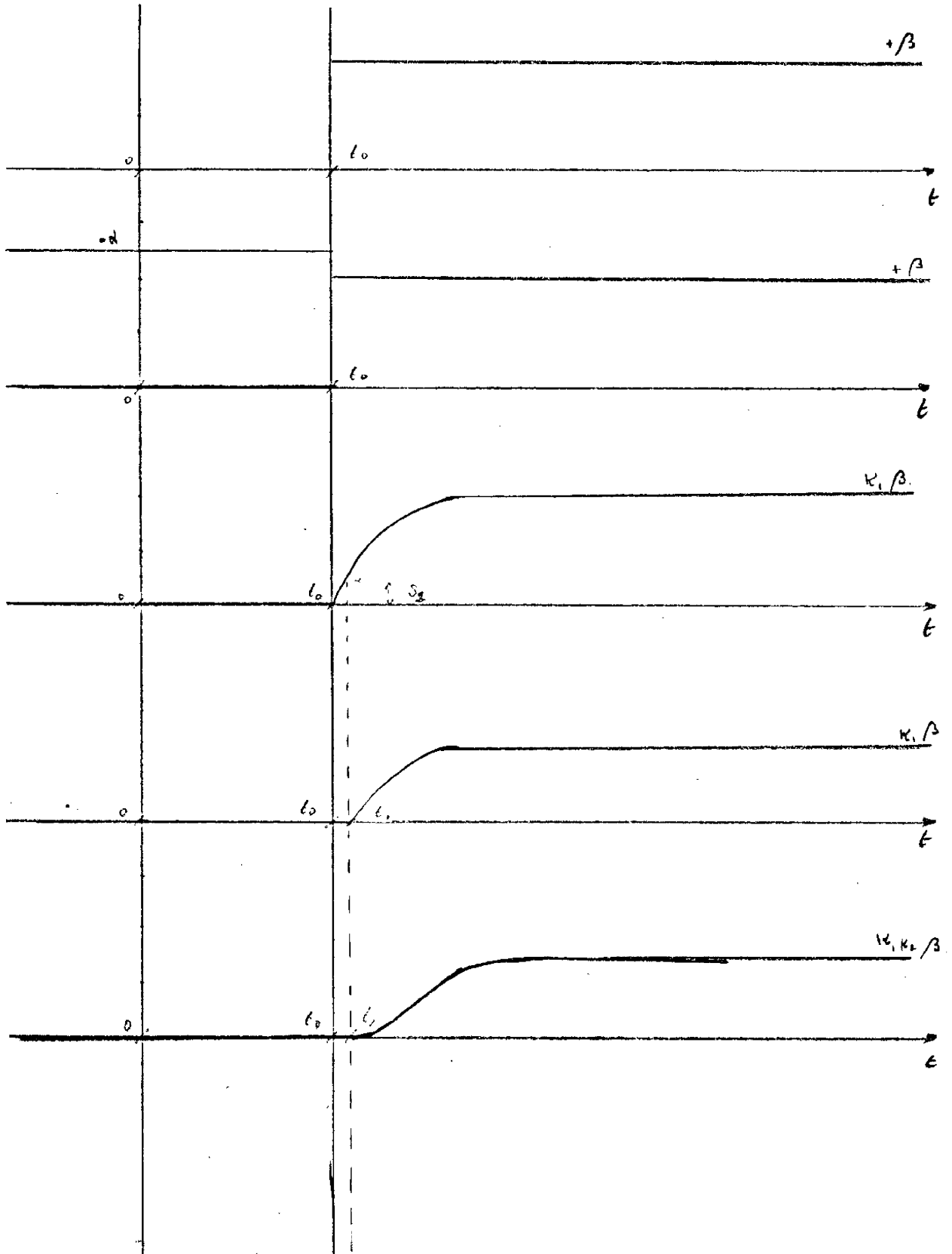




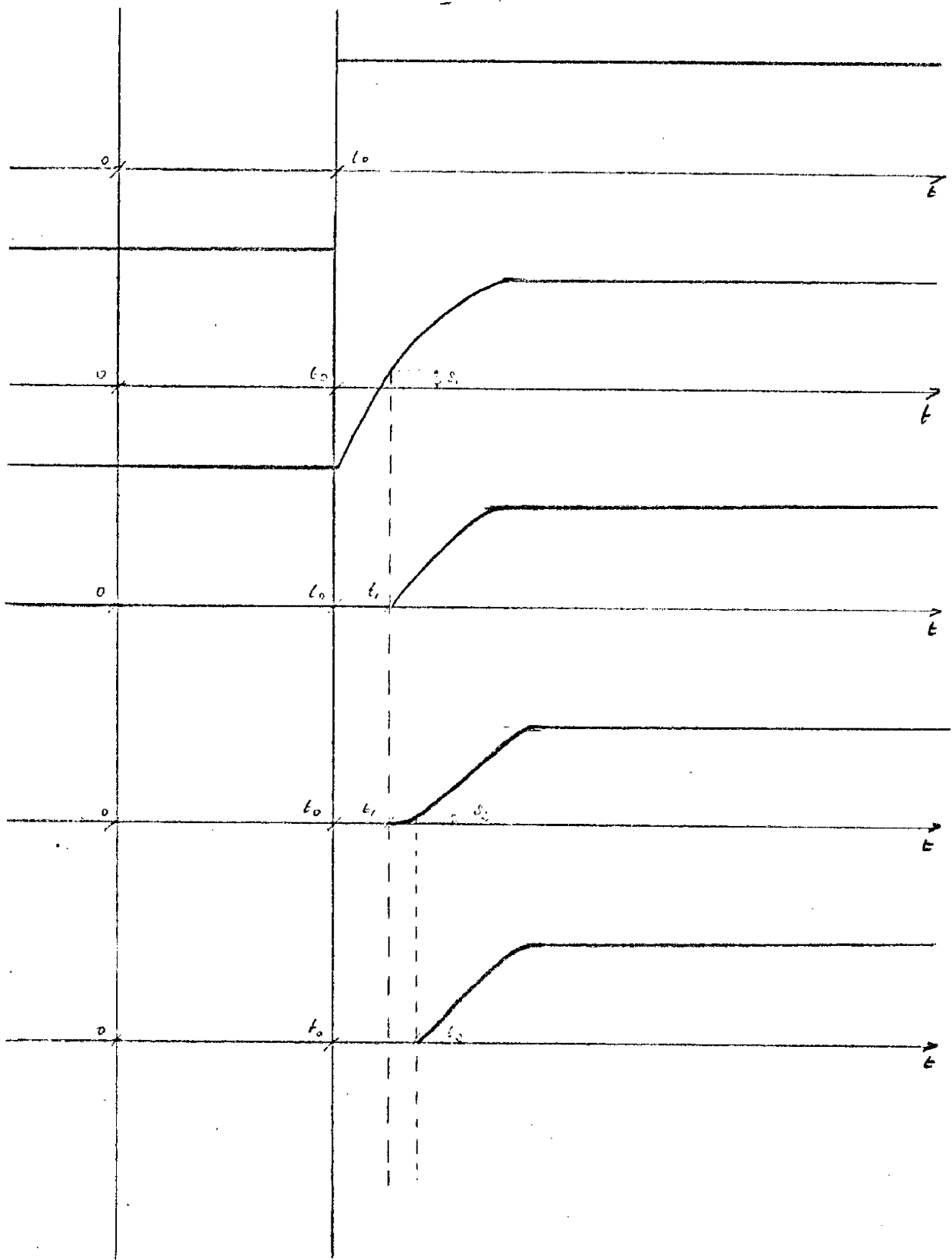
Groupe : saturation

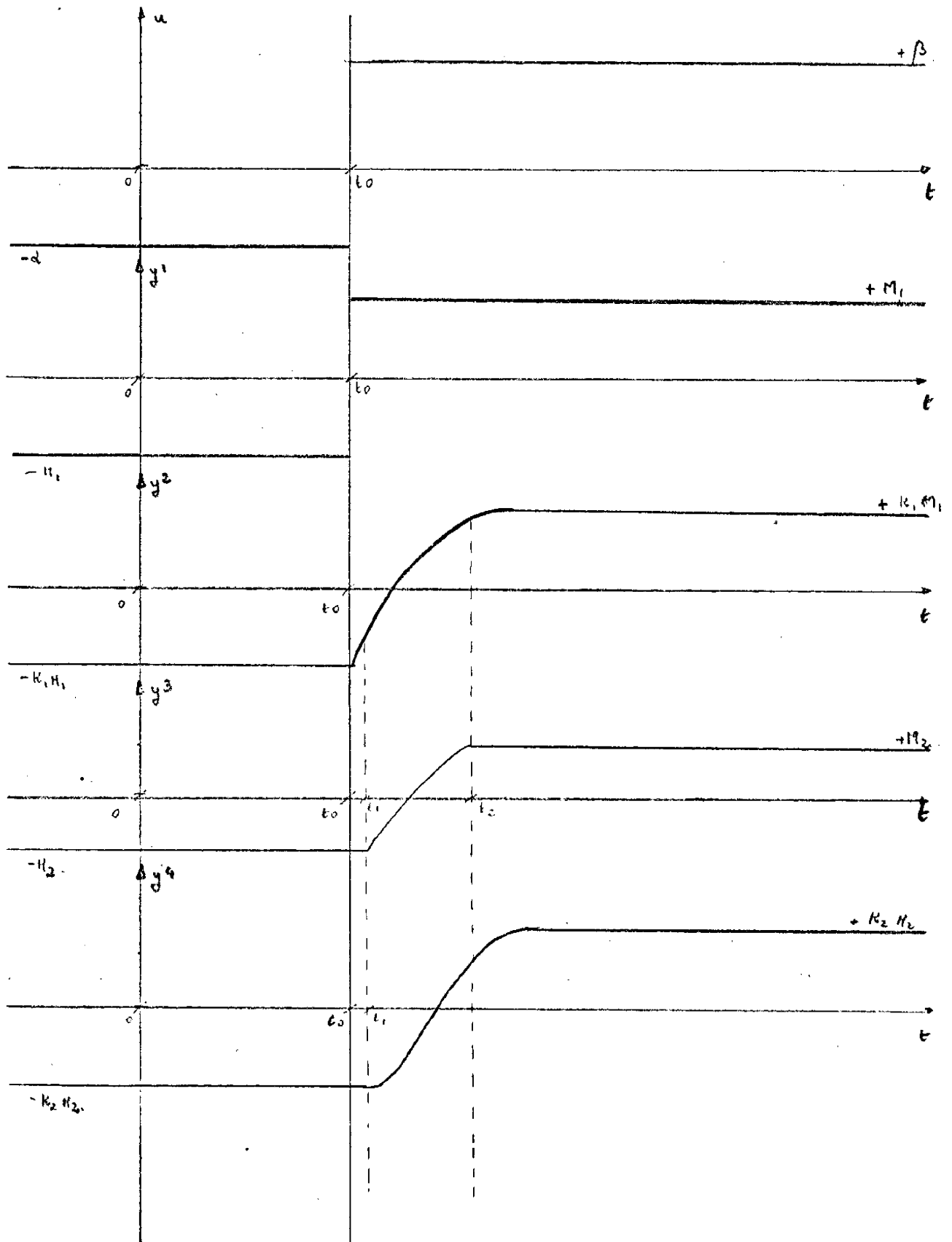
Classe : Diode

Chaîne : A.





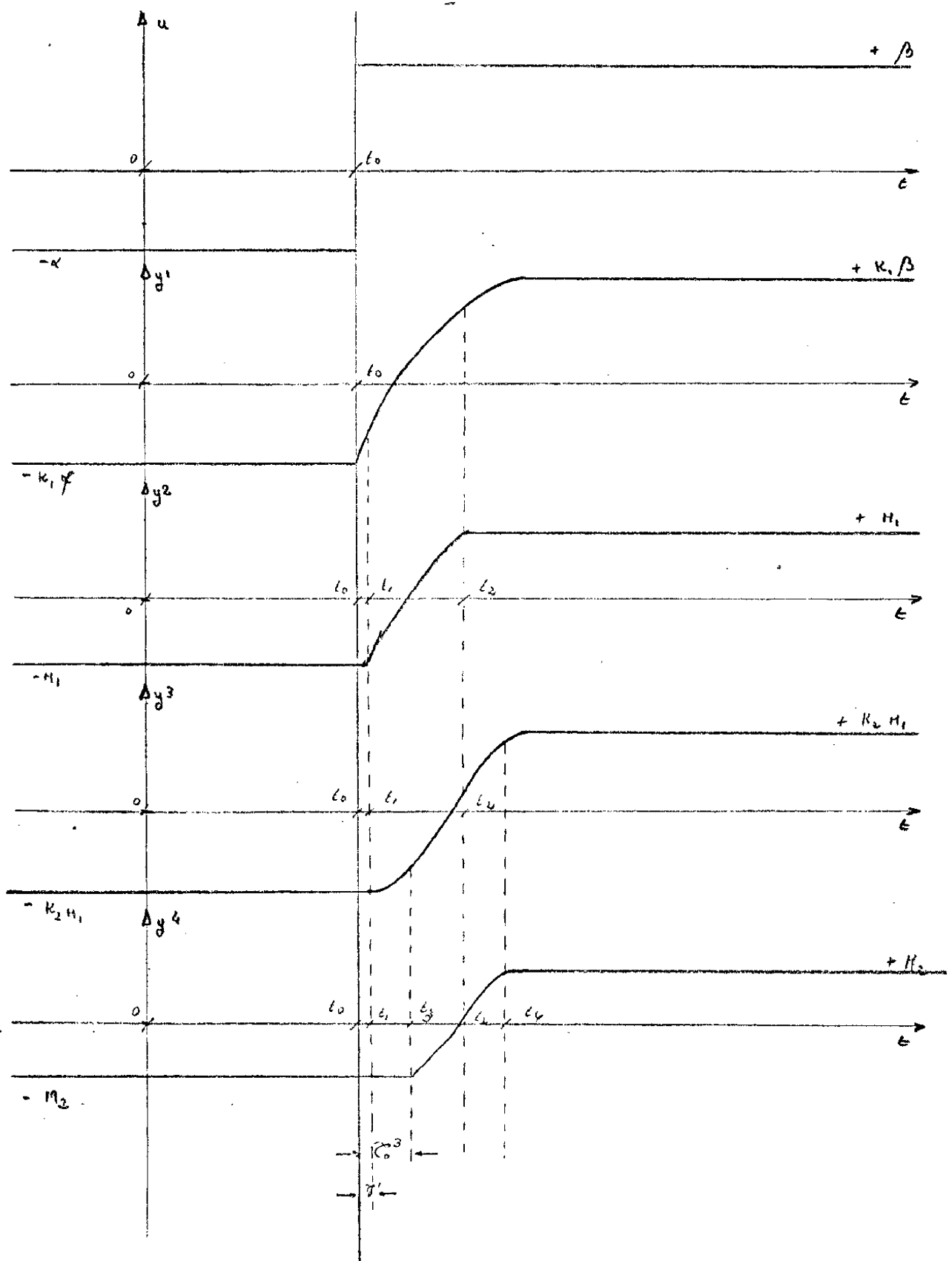




Groupe : Saturation

Classe : Saturation à hystérésis

Chaîne : B.



Simulation d'une Saturation avec hystérésis

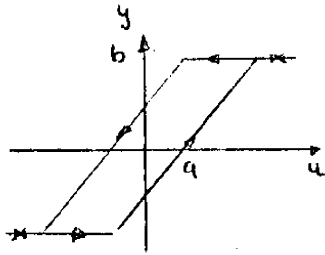
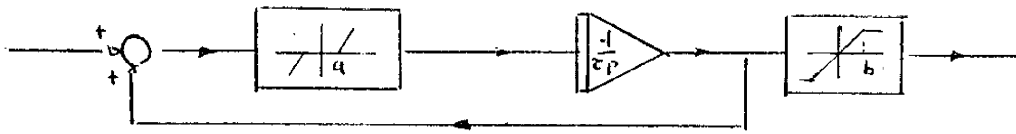
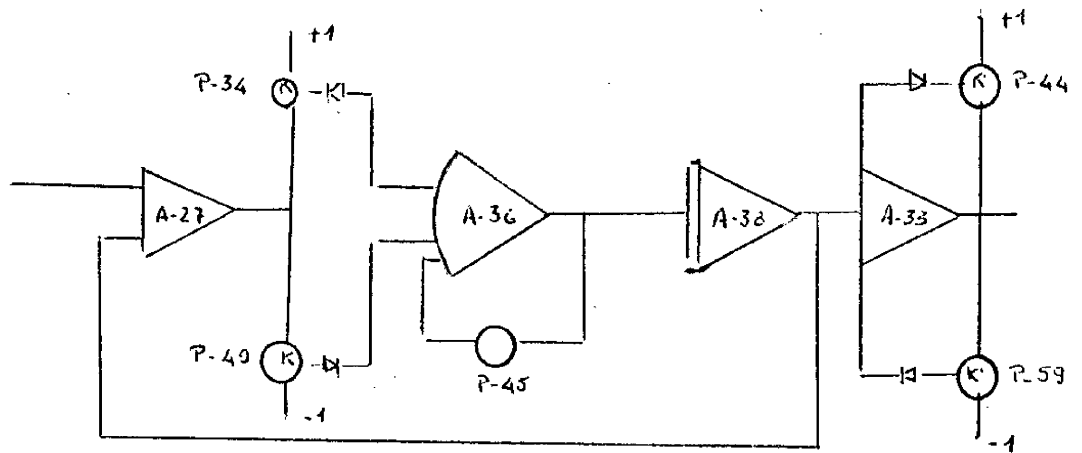


Diagramme Fonctionnel :



$\tau$  petit.

Circuit analogique :



$$K = \frac{|a|}{1+|a|}$$

$$K' = \frac{|b|}{1+|b|}$$

Pour le bloc A-38,  $\frac{1}{\tau_p}$ ,  
 Pour  $K = 0,1$   $\beta$

Pour  $K = 0,1$

$a \approx 0,1$

Pour  $K' = 0,2$

$b \approx 0,25$

$\tau$  doit être petit, aussi nous avons utilisé un et un gain de 10.

Saturation Pure

Nous allons présenter les résultats de la chaîne du type B contenant des saturations pures.

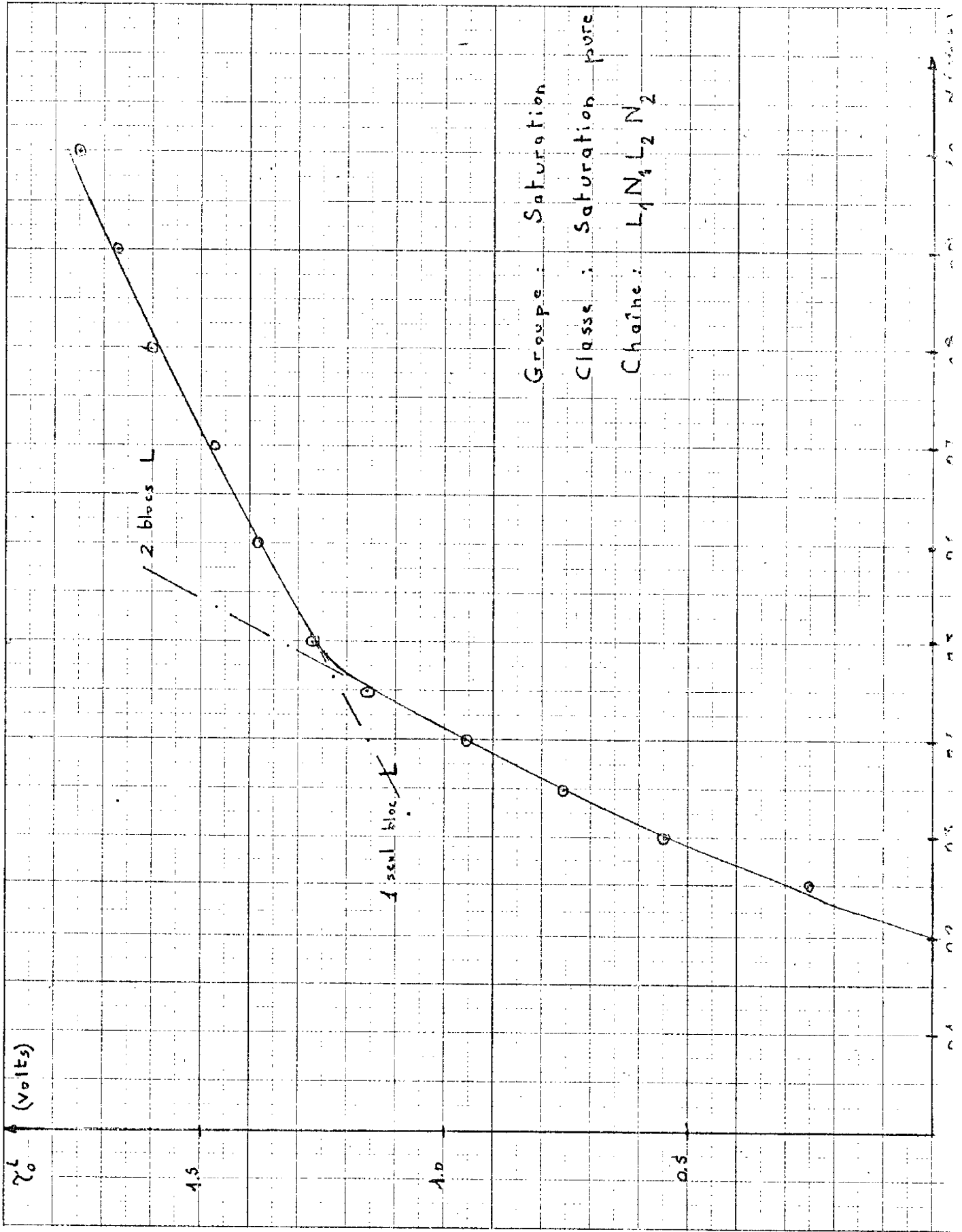
pour une

Nous avons utilisé

$$\beta = 0; \quad K_1 = 1; \quad K_2 = 2,5; \quad M_1 = 0,4; \quad M_2 = 0,5 \text{ et } \frac{T_2}{T_1} = 2$$

$\alpha$ (volts)	$z_o^3$ (volts)
10	1.75
9	1.67
8	1.60
7	1.47
6	1.38
5	1.27
4.5	1.16
4.0	0.96
3.5	0.76
3.0	0.55
2.5	0.25
2.0	0.0

Les résultats sont présentés dans la figure ci-jointe.



Réalisation de la jonction  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Nous utilisons la méthode du gradient variable.

Prenons

$$S(x, y) = (y\sqrt{x} - 1)^2$$

et

$$\frac{dy}{dt} = -k \frac{\partial S}{\partial y}$$

Donc

$$\frac{dy}{dt} = -2k (y\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = -k (y\sqrt{x} - 1) \text{ Donc il faut prendre } k \text{ grand.}$$

Si nous voulons représenter cette équation différentielle analogiquement il apparaît un problème de stabilité.

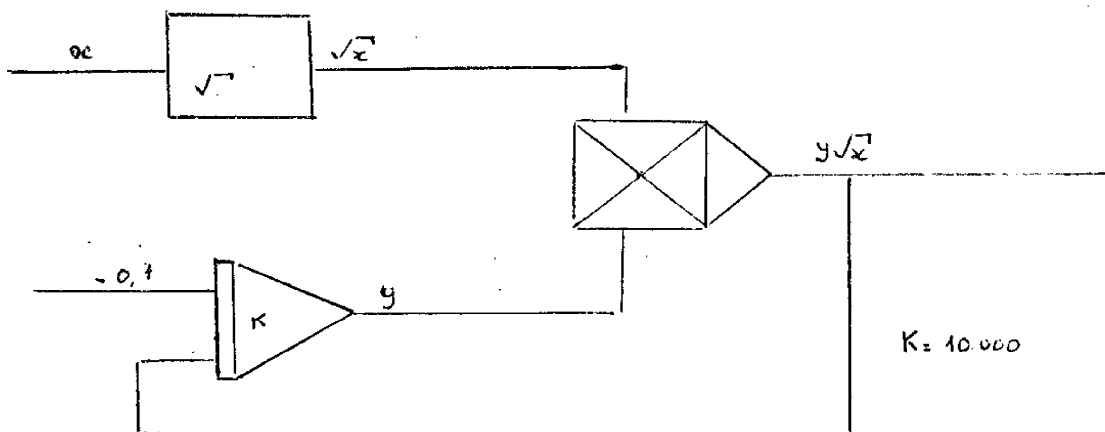
- Stabilité du système  $y = \frac{a}{\sqrt{x}}$

pour  $a = 1$  le domaine de stabilité est  $1 < x < 1$

pour  $a = 0,1$   $1 < x < 0,01$

Pour  $a = 0,001$   $1 < x < 10^{-4}$

Un choix acceptable est donné par  $y = \frac{0,1}{\sqrt{x}}$  dont le circuit analogique est







Groupe des relais

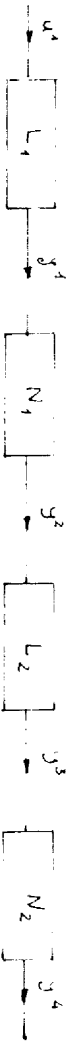
	Relais idéal	Relais à seuil	Relais non polarisé	Relais avec hystérésis	Relais à seuil
	$M = M_1$ $M = K_1 M_1$ $M = M_2$	$M = M_1$ $S = S_1$ $M = K_1 M_1$ $S = S_1$ $M = M_2$ $S = S_1$ $S_2 < K_1 M_1$	$M = M_1$ $S = S_1$ $M = K_1 M_1$ $S = S_1$ $M = M_2$ $S = S_1$ $S_2 < K_1 M_1$	$M = M_1$ $h = h_1$ $M = K_1 M_1$ $h = h_1$ $M = M_2$ $h = h_1$ $h_2 < K_1 M_1$	$M = M_1$ $S = S_1$ $M = K_1 M_1$ $S = S_1$ $M = M_2$ $S = S_1$ $S_2 < K_1 M_1$
	$M = M_1$ $M = K_2 M_2$	$M = M_1$ $S = \frac{S_2}{K_1}$ $M = K_2 M_1$ $S = \frac{S_2}{K_1}$ $M = M_2$ $S = \frac{S_2}{K_1}$ $S_2 < K_2 M_1$	$M = M_1$ $S = \frac{S_2}{K_1}$ $M = K_2 M_1$ $S = \frac{S_2}{K_1}$ $M = M_2$ $S = \frac{S_2}{K_1}$ $S_2 < K_2 M_1$	$M = M_1$ $h = h_1$ $M = K_2 M_1$ $h = h_1$ $M = M_2$ $h = h_1$ $h_2 < K_2 M_1$	$M = M_1$ $S = \frac{S_2}{K_1}$ $M = K_2 M_1$ $S = \frac{S_2}{K_1}$ $M = M_2$ $S = \frac{S_2}{K_1}$ $S_2 < K_2 M_1$

# Reconnaissance du groupe et de la classe

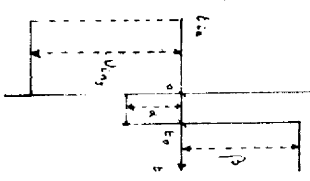
- Groupe des saturations -

avec hysteresis	Saturation pure	Saturation à seuil	Saturation avec hysteresis	Diode	Parabole
$M = M_1$ $S = S_1, h = h_1$	$M = M_1$ $A = 1$	$M = M_1$ $A = 1, S = S_1$	$M = M_1$ $A = 1, h = h_1$	$k = 1$ $S = S_1$	$k = 1$ $m = 1$
$M = K_1 M_1$ $S = S_1, h = h_1$	$M = K_1 M_1$ $A = K_1$	$M = K_1 M_1$ $k = K_1, S = S_1$	$M = K_1 M_1$ $k = K_1, h = h_1$	$k = K_1$ $S = S_1$	$k = K_1$ $m = 1$
$M = M_2$ $S = S_1, h = h_1$ $h_2 + S_2 < K_1 M_1$	$M = M_2$ $k = K_1$ $M_2 < K_1 M_1$	$M = M_2$ $k = K_1, S = S_1 + \frac{S_2}{K_1}$ $S_2 < M_2 < K_1 M_1$	$M = M_2$ $k = K_1, h = h_1 + \frac{h_2}{K_1}$ $h_2 < M_2 < K_1 M_1$	$k = K_1$ $S = S_1 + \frac{S_2}{K_1}$	$k = K_1^2$ $m = 2$
$M = K_2 M_2$ $S = S_1, h = h_1$ $h_2 + S_2 < K_1 M_1$	$M = K_2 M_2$ $k = K_1 K_2$ $M_2 < K_1 M_1$	$M = K_2 M_2$ $k = K_1 K_2, S = S_1 + \frac{S_2}{K_1}$ $S_2 < M_2 < K_1 M_1$	$M = K_2 M_2$ $k = K_1 K_2, h = h_1 + \frac{h_2}{K_1}$ $h_2 < M_2 < K_1 M_1$	$k = K_1 K_2$ $S = S_1 + \frac{S_2}{K_1}$	$k = K_1^2 K_2$ $m = 2$
$M = M_1$ $S = S_1, h = h_1$ $K_1$	$M = M_1$ $A = K_1$	$M = M_1$ $k = K_1, S = S_1$	$M = M_1$ $k = K_1, h = h_1$	$k = K_1$ $S = S_1$	$k = K_1^2$ $m = 1$
$M = K_2 M_1$ $S = S_1, h = h_1$ $K_1$	$M = K_2 M_1$ $k = K_1 K_2$	$M = K_2 M_1$ $k = K_1 K_2, S = S_1$	$M = K_2 M_1$ $k = K_1 K_2, h = h_1$	$k = K_1 K_2$ $S = S_1$	$k = K_1^2 K_2$ $m = 1$
$M = M_2$ $S = S_1, h = h_1$ $K_1$ $h_2 + S_2 < K_1 M_1$	$M = M_2$ $k = K_1 K_2$ $M_2 < K_1 M_1$	$M = M_2$ $k = K_1 K_2, S = S_1 + \frac{S_2}{K_1}$ $S_2 < M_2 < K_1 M_1$	$M = M_2$ $k = K_1 K_2, h = h_1 + \frac{h_2}{K_1}$ $h_2 < M_2 < K_1 M_1$	$k = K_1 K_2$ $S = S_1 + \frac{S_2}{K_1}$	$k = K_1^2 K_2$ $m = 2$

Non-linéarité	Fonction dentée	$y^1$	$y^2$	$y^3$	$y^4$
<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta = \beta_0</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, 0]</math>, <math>\beta &gt; \beta_0</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, 0]</math>, <math>\beta &gt; \beta_0</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, 0]</math>, <math>\beta &gt; \beta_0</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, 0]</math>, <math>\beta = \beta_0</math>  <math>\exists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = c</math>                  Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, 0]</math>  <math>\exists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = c</math>                  Sortie linéaire</p>
<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta &gt; \beta_0 &gt; S_1</math>  <math>\tau_0^1 = \tau_0^2 = 0</math>                  Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta &gt; \beta_0 &gt; S_1</math>  <math>\tau_0^1 = \tau_0^2 = 0</math>                  Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta &gt; \beta_0 &gt; S_1</math>  <math>\tau_0^1 = \tau_0^2 = 0</math>                  Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta &gt; \beta_0 &gt; S_1</math>  <math>\tau_0^1 = c_1</math>, <math>\tau_0^2 = c_2</math>, <math>\tau_0^3 = c_3</math>                  Sortie non-linéaire                  Position zero (<math>\tau_0^3</math>)</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta &gt; \beta_0 &gt; S_1</math>  <math>\tau_0^1 = c_1</math>, <math>\tau_0^2 = c_2</math>                  Sortie Pseudo.</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>  <math>\tau_0^1 = c_1</math>, <math>\tau_0^2 = c_2</math>                  Sortie Pseudo.</p>
<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, h_1]</math>, <math>\beta = \beta_0 &gt; h_1</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, h_1]</math>, <math>\beta = \beta_0 &gt; h_1</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, h_1]</math>, <math>\beta = \beta_0 &gt; h_1</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, h_1]</math>, <math>\beta = \beta_0 &gt; h_1</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = c_1</math>                  Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, h_1]</math>, <math>\beta = \beta_0 &gt; h_1</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = c_1</math>                  Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, h_1]</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = c_1</math>, <math>\tau_0^2 = c_2</math>                  Sortie Pseudo.</p>
<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta = \beta_0 &gt; S_1 + h_1</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta = \beta_0 &gt; S_1 + h_1</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta = \beta_0 &gt; S_1 + h_1</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>, <math>\beta = \beta_0 &gt; S_1 + h_1</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = 0</math>                  Position zero (<math>\tau_0^2, c_3</math>)                  Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = c_1</math>, <math>\tau_0^2 = c_2</math>                  Sortie Pseudo.</p>	<p>1. <math>\alpha \in [U; \text{inf}, S_1]</math>  <math>\nexists \tau_0^1</math> <math>\tau_0^1 = c_1</math>, <math>\tau_0^2 = c_2</math>                  Sortie Pseudo.</p>



Fonction d'entrée	$y^2$	$y^3$	$y^4$
$\beta = \beta_0$ $\beta_0 > S_1$ $C_3$ négative.	$1. \alpha \in [U_{inj}, 0], \beta = \beta_0$ $2. \tau_1^2 = f_1(\omega)$ Sortie non-linéaire $\alpha_{limite} \tau_1^2 = 0$ $\alpha \rightarrow 0$	$1. \alpha \in [U_{inj}, 0], \beta = \beta_0$ $2. \tau_1^3 = f_1(\omega)$ Sortie linéaire $\alpha_{limite} \tau_1^3 = 0$ $\alpha \rightarrow 0$	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{S_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{S_1}{K_1}$ $2. \tau_1^4 = f_2(\omega), \tau_2^4 = C_2$ $\alpha_{limite} \tau_1^4 = C_3$ $\alpha \rightarrow S_1/K_1$ Sortie non-linéaire. Présence du zéro ( $\tau_2^5$ )
$\beta_0 > S_1$ entrée $\beta = 0$	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{S_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{S_1}{K_1}$ $2. \tau_1^2 = f_1(\omega), \tau_2^2 = C_1$ $\alpha_{limite} \tau_1^2 = 0$ $\alpha \rightarrow S_1/K_1$ Sortie non-linéaire. Présence du zéro ( $\tau_2^5$ )	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{S_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{S_1}{K_1}$ $2. \tau_1^3 = f_1(\omega), \tau_2^3 = C_1$ $\alpha_{limite} \tau_1^3 = 0$ $\alpha \rightarrow S_1/K_1$ Sortie pseudo-linéaire.	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{S_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{S_1}{K_1}$ $2. \tau_1^4 = f_2(\omega), \tau_2^4 = C_2$ $\alpha_{limite} \tau_1^4 = C_3$ $\alpha \rightarrow S_1/K_1$ Sortie non-linéaire. Présence du zéro ( $\tau_2^5$ )
$\beta_0 > h_1$ $C_1$ entrée $\beta = 0$	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{h_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{h_1}{K_1}$ $2. \tau_1^2 = f_1(\omega)$ $\alpha_{limite} \tau_1^2 = 0$ $\alpha \rightarrow h_1/K_1$ Sortie non-linéaire.	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{h_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{h_1}{K_1}$ $2. \tau_1^3 = f_1(\omega)$ $\alpha_{limite} \tau_1^3 = 0$ $\alpha \rightarrow h_1/K_1$ Sortie linéaire.	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{h_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{h_1}{K_1}$ $2. \tau_1^4 = f_2(\omega), \tau_2^4 = C_2$ $\alpha_{limite} \tau_1^4 = C_3$ $\alpha \rightarrow h_1/K_1$ Sortie non-linéaire.
$\beta_0 > S_1 + h_1$ $C_2$ $\tau_2^5 = C_2$ négative.	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{S_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{S_1 + h_1}{K_1}$ $2. \tau_1^2 = f_1(\omega), \tau_2^2 = C_1$ $\alpha_{limite} \tau_1^2 = 0$ $\alpha \rightarrow S_1/K_1$ Présence du zéro ( $\tau_2^5$ ) Sortie non-linéaire.	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{S_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{S_1 + h_1}{K_1}$ $2. \tau_1^3 = f_1(\omega), \tau_2^3 = C_1$ $\alpha_{limite} \tau_1^3 = 0$ $\alpha \rightarrow S_1/K_1$ Sortie pseudo-linéaire.	$1. \alpha \in [U_{inj}, \frac{S_1}{K_1}], \beta = \beta_0 > \frac{S_1 + h_1}{K_1}$ $2. \tau_1^4 = f_2(\omega), \tau_2^4 = C_2$ $\alpha_{limite} \tau_1^4 = C_3$ $\alpha \rightarrow S_1/K_1$ Présence du zéro ( $\tau_2^5$ ) Sortie non-linéaire.





Non-linéarité	Fonction élémentaire	$y^1$	$y^2$	$y^3$	
		<p>1. <math>\alpha &lt; 0, \beta \in [0, U_{sup}]</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^1}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, 0], \beta = \beta_0</math></p> <p><math>\nexists \tau_1^1, \tau_2^1 = 0</math></p> <p>Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha &lt; 0, \beta \in [0, U_{sup}]</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^2}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, 0], \beta = \beta_0</math></p> <p><math>\nexists \tau_1^2, \tau_2^2 = 0</math></p> <p>Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha &lt; 0, \beta \in [0, U_{sup}]</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^3}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, 0], \beta = \beta_0</math></p> <p><math>\exists \tau_1^3, \tau_2^3  _{\alpha \neq M_1} = c</math></p> <p>Un point de cassure, <math>\frac{dy^3}{dt}(\tau_1^3) \neq 0</math></p>	<p>1. <math>\alpha &lt; 0,</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^4}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, 0]</math></p> <p><math>\exists \tau_1^4, \tau_2^4</math></p>
		<p>1. <math>\alpha &lt; 0, \beta \in [0, U_{sup}]</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^1}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, -h_1], \beta = \beta_0 &gt; h_1</math></p> <p><math>\nexists \tau_1^1, \tau_2^1 = 0</math></p> <p>Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha &lt; 0, \beta \in [h_1, U_{sup}]</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^2}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, -h_1], \beta = \beta_0 &gt; h_1</math></p> <p><math>\nexists \tau_1^2, \tau_2^2 = 0</math></p> <p>Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha &lt; 0, \beta \in [h_1, U_{sup}]</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^3}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, -(h_1 + \beta_0)], \beta = \beta_0 &gt; h_1 + h_2</math></p> <p><math>\exists \tau_1^3 - \tau_2^3  _{\alpha \neq M_1} = c</math></p> <p>Un point de cassure - <math>\frac{dy^3}{dt}(\tau_1^3) \neq 0</math></p>	<p>1. <math>\alpha &lt; 0,</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^4}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, -h_1]</math></p> <p><math>\exists \tau_1^4 - \tau_2^4</math></p> <p>Un point de c</p>
		<p>1. <math>\alpha &lt; 0, \beta \in [0, U_{sup}]</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^1}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, 0], \beta = \beta_0 &gt; h_1</math></p> <p><math>\nexists \tau_1^1, \tau_2^1 = 0</math></p> <p>Sortie non-linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha &lt; 0, \beta \in [0, U_{sup}]</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^2}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, 0], \beta = \beta_0 &gt; h_1</math></p> <p><math>\nexists \tau_1^2, \tau_2^2 = 0</math></p> <p>Sortie linéaire</p>	<p>1. <math>\alpha &lt; 0, \beta \in [0, U_{sup}]</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^3}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, 0], \beta = \beta_0 &gt; h_1</math></p> <p><math>\exists \tau_1^3 - \tau_2^3  _{\alpha \neq M_1} = c</math> - Reaction zéro</p> <p>Un point de cassure, <math>\frac{dy^3}{dt}(\tau_1^3) \neq 0</math></p>	<p>1. <math>\alpha &lt; 0,</math></p> <p>Limite <math>\frac{dy^4}{dt} = c</math> <math>\beta \rightarrow \infty</math></p> <p>2. <math>\alpha \in [U_{inf}, 0]</math></p> <p><math>\exists \tau_1^4 - \tau_2^4</math></p> <p>Un point de c</p>



## CHAPITRE IV

---

### APPLICATION DE LA METHODE DE DECOMPOSITION STRUCTURELLE A LA CONCEPTION D'UN ORGANE DE COMMANDE

- IV.1 Introduction
- IV.2 Régulateur de vitesse à relais
- IV.3 Etude de la stabilité du système
- IV.4 Conclusions

## CHAPITRE IV

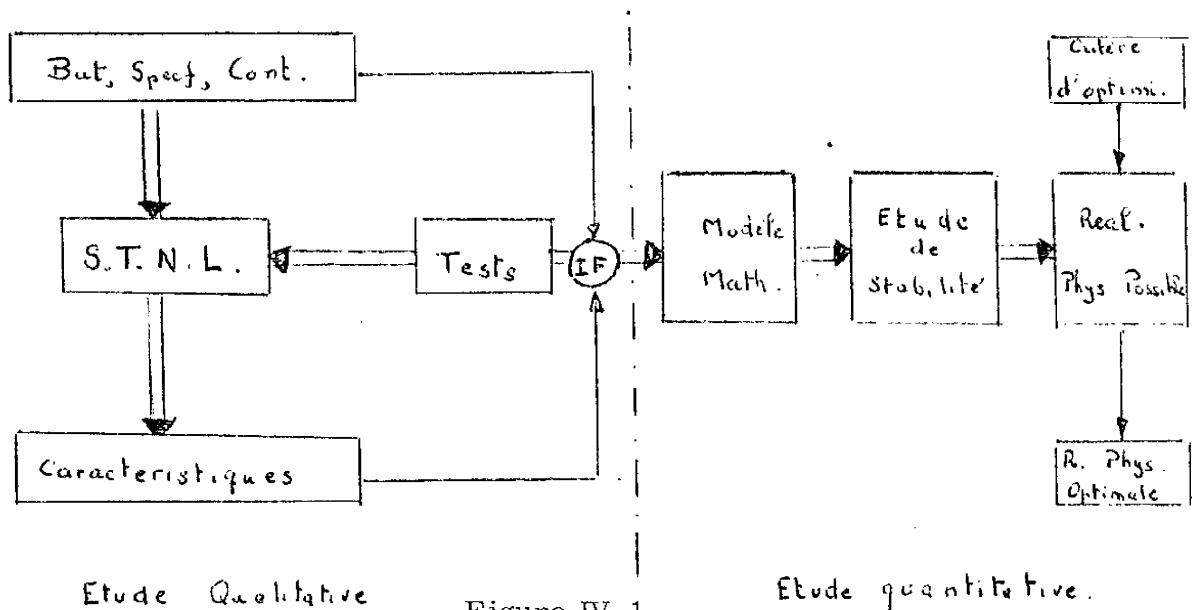
### APPLICATION DE LA METHODE DE DECOMPOSITION STRUCTURELLE A LA CONCEPTION D'UN ORGANE DE COMMANDE

#### IV-1 Introduction

L'étude des propriétés structurelles de certaines classes de systèmes non-linéaires effectuée au cours des précédents chapitres peut avoir de nombreuses applications. Elle nous met à même d'identifier la structure d'un certain nombre de chaînes non-linéaires essentiellement quant à la position des blocs non-linéaires dans la chaîne.

Cette étape de l'identification [3] est de première importance en Automatique. Par exemple quand on traite de problèmes de stabilité de systèmes non-linéaires les méthodes de Popov, Sandberg [14-15], s'appliquent pour des cas de chaînes principales du type (L-N) ou (L-N-L) ne contenant qu'un bloc non linéaire. Ainsi, un diagnostic non-linéaire mettant en évidence l'existence de plusieurs bloc non-linéaires dans la chaîne principale, nous amènera à choisir d'autres méthodes mieux adaptées à l'étude de la stabilité de tels systèmes.

D'autre part, nous nous proposons de montrer l'utilité de la méthode de décomposition structurelle à la conception d'un régulateur.





Comme le montre l'organigramme ci-dessus, nous essayerons de définir les spécifications, buts et contraintes du régulateur dont nous voulons faire la synthèse en supposant qu'il appartienne à une des classes de systèmes non-linéaires qui ont fait l'objet de notre étude. Ces caractéristiques physiques nous amèneront à choisir parmi les classes de structures connues une structure topologique non-linéaire (S. T. N. L.) possible qui associée aux signaux de test étudiés, devra contenir les attributs inhérents au système à réaliser. Si ces attributs sont compatibles avec les buts spécifications et contraintes du régulateur nous essayerons de trouver la représentation (modèle mathématique) la plus adéquate à la structure définie. Après avoir assuré la stabilité du système nous pourrons effectuer une réalisation physique possible, réalisation qui en fonction d'un critère d'optimisation pourra être optimale.

#### IV-2 Régulateur de vitesse à Relais [ 17 ]

Nous nous proposons d'étudier la synthèse d'un régulateur de vitesse à relais agissant aussi bien en moteur qu'en frein électromagnétique. Nous nous attacherons plus exactement à la conception du système en question. Remarquons que dans le cas de machines de gouverne, comme dans ce cas précisément, les créneaux délivrés agiront par deux entrées différentes : une pour la commande en tant que frein ; l'autre pour la commande du moteur.

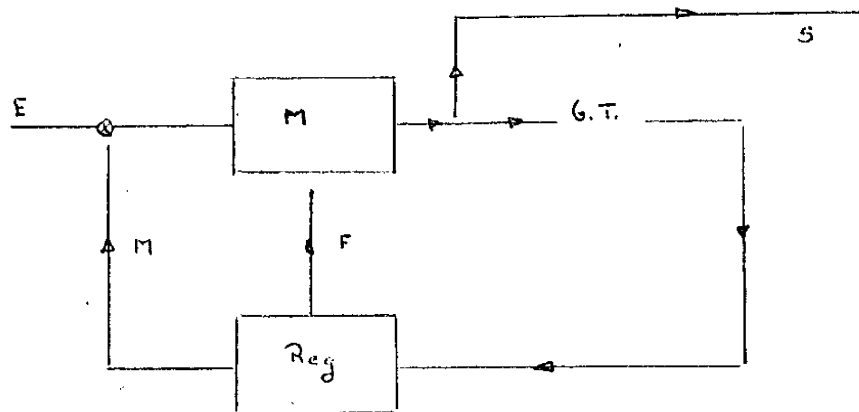


Figure IV-2

Où M est l'entrée pour la commande du moteur

F est l'entrée pour la commande du frein.

Les impulsions doivent permettre alternativement un accrochage soit d'un côté soit de l'autre (pour régler la vitesse du moteur)

Nous allons maintenant étudier les caractéristiques demandées au régulateur par le reste du système. Nous les appellerons "CARACTERISTIQUES EXTERNES" du régulateur.

Ces caractéristiques seront introduites en vue des buts à obtenir et des contraintes imposées au système, d'autres tiendront compte des défauts de technologie, de la stabilité ou d'un critère d'optimisation.

Les premières nous donnerons la structure du système et certains paramètres essentiels sur lesquels l'erreur doit être minimum dans la réalisation physique. Les secondes auront une portée plus quantitative et seront relationnées au comportement interne du régulateur, nous permettant entre autre de vérifier la validité des approximations mathématiques que nous serons amenés à effectuer.

#### Caractéristiques Externes

1. Le régulateur doit délivrer des créneaux en tension
2. Il doit exister une zone d'insensibilité dans le régulateur, définissant l'erreur acceptable ( $E$ )
3. Le créneau doit avoir une durée minimale ( $\tau_I$ )
4. Il doit exister un retard constant entre l'apparition de l'erreur et du créneau correspondant ( $\tau_R$ )
5. Deux sorties doivent être prévues, une pour le frein, l'autre pour le moteur.

La première condition nous amène à avoir une chaîne dont le dernier bloc soit un relais.

La seconde condition nous amène à avoir un seuil dans la chaîne qui définira l'erreur acceptable.

La troisième condition nous oblige à avoir un relais à hystérésis comme dernier bloc.

La quatrième condition nous indique une chaîne de type N-L-N, ayant trois blocs, le premier du type relais, le second linéaire et le troisième du type relais.

La dernière condition nous oblige à avoir deux chaînes distinctes.

Les quatre premières conditions sont remplies par une chaîne du type ci-dessous (figure IV.3)

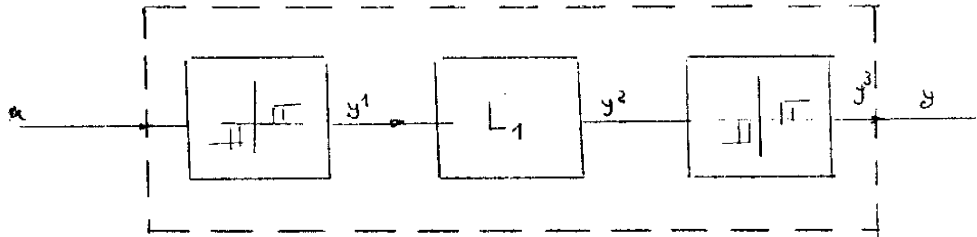


Figure IV-3

Où  $L_1$  est du type  $y^2 + T_1 \dot{y} = K_1 y^1$

La condition (5) nous oblige à avoir deux chaînes, une tenant compte de la commande du moteur et l'autre de la commande du frein (Figure IV-4)

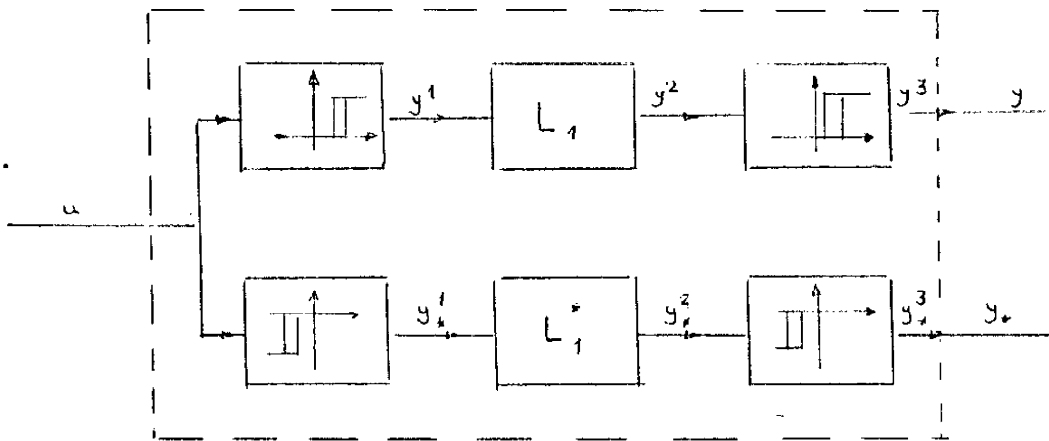


Figure IV-4

Pour que l'erreur tende vers zéro plus rapidement il est intéressant d'utiliser une boucle de rétroaction (Figure IV-5)

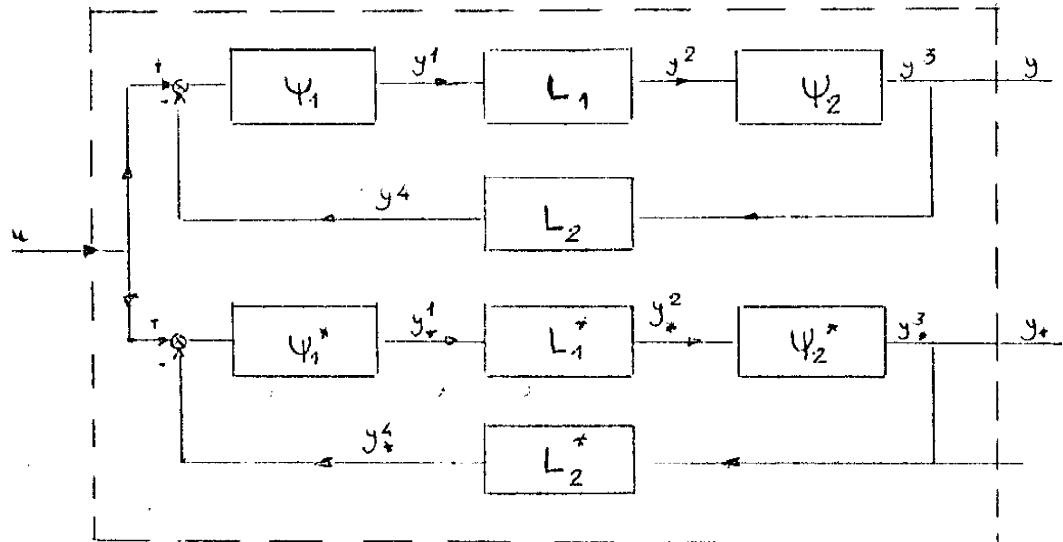


Figure IV-5

Où  $L_2$  est de la forme  $y^4 + T_2 \dot{y}^4 = K_2 y^3$

Le diagramme fonctionnel de la figure IV-5 montre bien la structure topologique du régulateur. Remarquons que l'hystérésis du premier bloc ne peut être que nuisible et compliquer l'étude mathématique sans qu'aucune condition externe ne l'oblige à exister. Nous devons donc essayer de l'éliminer. En tout cas son existence ne sera dû qu'à un défaut technologique.

Donc la structure définitive sera donnée par le diagramme de bloc ci-dessous (figure IV-6)

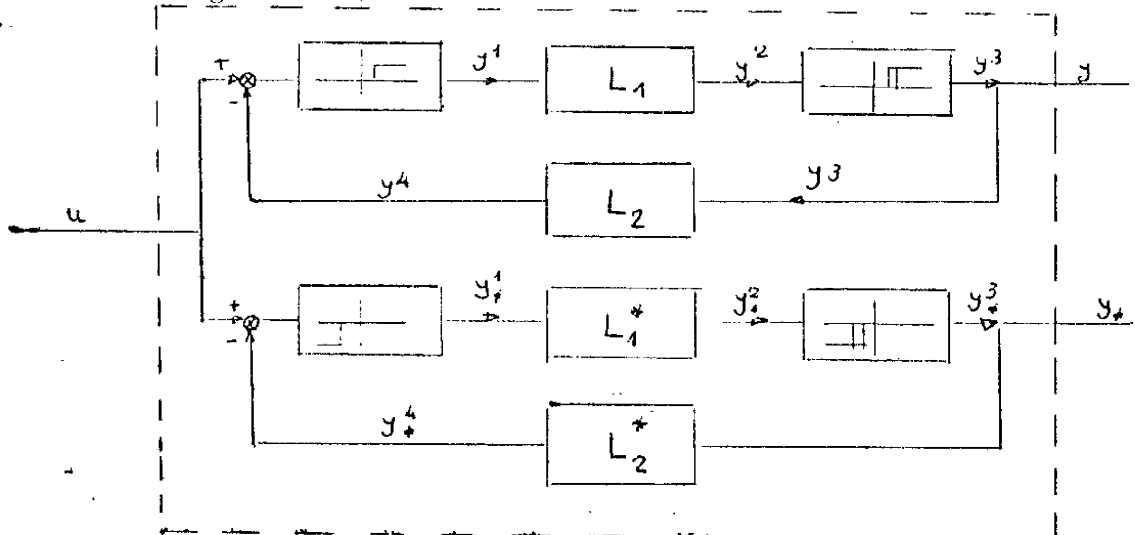


Figure IV-6

Où le premier bloc a pour paramètres  $M_1$  et  $S_1$ , et le second bloc non-linéaire a pour paramètres  $M_2$ ,  $S_2$  et  $h_2$ .

Dans cette structure  $S_1$ ,  $T_1$ ,  $S_2$ ,  $h_2$  et  $M_2$  sont les caractéristiques essentielles demandées par les conditions externes du régulateur.

Par contre  $K_1, K_2, T_2, M_1$  seront choisies en tenant compte de la stabilité et des critères d'optimisation éventuels.

Pour simplifier le calcul, le normaliser, et aussi car cela ne modifie en rien l'exemple traité e, nous pouvons prendre  $M_1, M_2, K_1, K_2$  égaux à

La représentation sous forme d'opérateurs différentiels est celle qui nous paraît la plus adéquate compte tenu de la nature des non-linéarités bien qu'aucune étude spéciale n'ait été faite en ce sens.

Dans cette optique les équations susceptibles au sens entrée/sortie de représenter la dynamique du régulateur qui fait l'objet de notre étude, sont les suivantes :

$$y^1(t) = 1 \left[ u(t) - y^4(t) - S_1 \right]$$

$$y_{\star}^1(t) = -1 \left[ -U(t) + y_{\star}^4(t) - S_1 \right]$$

$$T_1 \frac{d y^2(t)}{dt} + y^2(t) = y^1(t)$$

$$T_1 \frac{d y_{\star}^2(t)}{dt} + y_{\star}^2(t) = y_{\star}^1(t)$$

Eqs : (IV.1)

$$y^3(t) = 1 \left[ y^2(t) + h_2 y^3(t) - S_3 \right]$$

$$y_{\star}^3(t) = -1 \left[ -y_{\star}^2(t) - h_2 y_{\star}^3(t) + S_3 \right]$$

$$T_2 \frac{d y^4(t)}{dt} + y^4(t) = y^3(t)$$

$$T_2 \frac{d y_{\star}^4(t)}{dt} + y_{\star}^4(t) = y_{\star}^3(t)$$

Où  $U(t)$  : entrée variable correspondant à l'erreur du système  
à réguler

$y^3, y^3_{\star}$  : sorties variables sous forme d'une suite de créneaux  
modulés en largeur.

$y^1, y^1_{\star}, y^2, y^2_{\star}, y^4, y^4_{\star}$  : variables intermédiaires.

$S_1, S_2, M_2, h_2, T_1, T_2$  : coefficients constants.

#### Calculs des Paramètres essentiels.

Ces paramètres découlent des caractéristiques externes du régulateur.

Nous avons déjà vu la raison du choix.

$$M_2 = 1 \quad (\text{Eq IV-2})$$

D'après les propriétés prévues pour la chaîne l'erreur admissible est tel que :

$$S_1 = E \quad (\text{Eq IV-3})$$

En ce qui concerne la durée minimale de l'impulsion  $\tau_I$ , celle-ci correspond à l'intervalle de temps de passage de  $y^2$  de la valeur  $S_2$  à la valeur  $S_2 - h_2$

$$\text{Or, } y^2(\tau_0) = C e^{-\tau_0/T_1} \quad \text{avec } \tau_0 = t + t_0$$

$$\text{Et } y^2(\tau_0^c) = S_2 \quad \text{Donc } C = S_2$$

$$y^2(\tau_I) = S_2 - h_2 = S_2 e^{-\tau_I/T_1}$$

$$\tau_I = T_1 \text{Log} \left( \frac{S_2}{S_2 - h_2} \right) \quad (\text{Eq IV-4})$$

Retard constant entre l'apparition de l'erreur et du créneau correspondant ( $\tau_R$ )

Dans ce cas  $y^2$  doit passer de la valeur 0 à la valeur  $S_2$

$$y^2(\tau_0) = C e^{-\tau_0/T_1} + 1$$

$$y^2(\tau_0) = 0 \quad \text{Donc} \quad C = -1$$

D'où  $y^2(\tau_0) = 1 - e^{-\tau_0/T_1}$

Et  $y^2(\tau_R) = S_2 = 1 - e^{-\tau_R/T_1}$

Donc  $\tau_R = -T_1 \text{Log}(1 - S_2)$  (Eq IV-5)

Obs  $0 < 1 - S_2 < 1$  Donc  $\tau_R > 0$

Nous avons donc une structure topologique non linéaire (S. T. L. N.) qui répond aux conditions imposées au début de l'exemple. Il nous reste maintenant à étudier la stabilité du système.

Remarquons d'autre part que nous avons 4 équations et 6 paramètres. Le système ayant deux degrés de liberté nous sommes donc maîtres de deux paramètres pour effectuer une optimisation (si cela est nécessaire), stabiliser le système ou vérifier la précision de notre modèle.

Remarquons enfin que le calcul des paramètres essentiels du système correspondent aux caractéristiques externes du régulateur n'ont fait appel qu'à des paramètres des blocs de la chaîne principale comme nous l'avions prévu.

#### IV-3 - Etude de la stabilité du système

Nous appliquerons la méthode des transformations ponctuelles de Poincaré-Andronov.

Pour autant, il nous suffit d'étudier une seule des deux chaînes les deux chaînes étant semblables.

L'ensemble des équations correspondant à la première chaîne sera donc ;

$$y^1 = 1 [ u - y^4 - S_1 ]$$

$$T_1 \frac{dy^2}{dt} + y^2 = y^1 \quad (\text{Eqs IV-6})$$

$$y^3 = 1 [ y^2 + h_2 y^3 - S_2 ]$$

$$T_2 \frac{dy^4}{dt} + y^4 = y^3$$

Remarque :  $0 \leq y^2 \leq 1$  et  $0 \leq y^4 \leq 1$

Aux instants de commutation des relais nous aurons :

$$y^4 = u - S_1$$

$$y^2 = S_2 - h_2 \quad (\text{Eqs IV-7})$$

$$y^2 = S_2$$

Considérons les points  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et  $\bar{P}$  (figure IV-7)

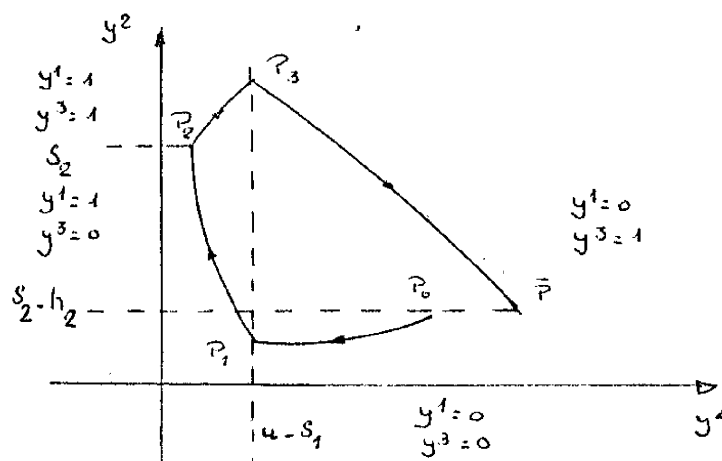


Figure IV-7



Nous avons

$$\begin{array}{ll}
 \bar{P}_0 \longrightarrow P_1 & \text{correspondant à } (y^1=0, y^3=1) \longrightarrow (y^1=0, y^3=0) \\
 P_1 \longrightarrow P_2 & (y^1=0, y^3=0) \longrightarrow (y^1=1, y^3=0) \\
 P_2 \longrightarrow P_3 & (y^1=1, y^3=1) \longrightarrow (y^1=1, y^3=1) \\
 P_3 \longrightarrow \bar{P} & (y^1=1, y^3=1) \longrightarrow (y^1=0, y^3=1)
 \end{array}$$

(Eqs IV-8)

En appelant  $\tau_i^j$  l'intervalle de temps pour aller de  $P_i$  à  $P_j$   
il vient

$$\begin{array}{ll}
 P_0 & \xrightarrow{\tau_0^1} P_1 \\
 P_1 & \xrightarrow{\tau_1^2} P_2 \\
 P_2 & \xrightarrow{\tau_2^3} P_3 \\
 P_3 & \xrightarrow{\tau_3^4} \bar{P} \equiv P_4
 \end{array}$$

Nous appellerons d'autre part :

$\tau_{RP}$  le temps de repos en relation à  $y^3$

$\tau_{imp}$  le temps d'impulsion en relation à  $y^3$

Par la figure, nous pouvons écrire

$$\tau_{RP} = \tau_0^1 + \tau_1^2 = \tau_0^2 \quad (\text{Eq IV-9})$$

$$\tau_{imp} = \tau_2^3 + \tau_3^4 = \tau_2^4 \quad (\text{Eq IV-10})$$

Donc, dans le plan ( $y^2$  x  $y^4$ ), nous avons les points :

$$\left[ y_{P_0}^4, (S_2 - h_2) \right] ; \left[ (u - S_1), y_{P_1}^2 \right] ; \left[ y_{P_2}^4, S_3 \right] ; \left[ (u - S_1), y_{P_3}^2 \right]$$

et

$$\left[ y_{P_0}^4, (S_2 - h_2) \right]$$

Détermination de  $y_{P_0}^4$

$$y^4(\tau_0) = y_{P_0}^4 e^{-\tau_0/T_2}$$

Or  $y^4(\tau_1) = u - S_1$

Donc  $(u - S_1) e^{\tau_1/T_2} = y_{P_0}^4$  (Eq IV-11)

Détermination de  $y_{P_1}^2$

A partir du point  $P_0$  :

Nous avons vu que  $y^1 = 0$ , dans cet intervalle

$$y^2(\tau_0) = C e^{-\tau_0/T_1}$$

Or  $y^2(\tau_0) = S_2 - h_2$  . Ordonnée du point  $P_0$ .

Et  $y^2(\tau_1) = y_{P_1}^2$

Donc  $y^2(\tau_1) = (S_2 - h_2) e^{-\tau_1/T_1}$  (Eq IV-12)

En vue d'arriver au point  $P_2$

Nous avons  $y^1 = 1$  dans cet intervalle, donc

$$y^2(\tau_1) = C e^{-\tau_1/T_1} + 1$$

Or, l'ordonnée de  $P_2$  étant  $S_2$

$$y^2(\tau_1) = S_2$$

D'autre part

$$y^2(\tau_1') = y_{P_1}^2$$

Donc

$$S_2 = \left[ y_{P_1}^2 - 1 \right] e^{-\tau_1^2 / T_1} + 1$$

Et

$$y_{P_1}^2 = 1 + (S_2 - 1) e^{-\tau_1^2 / T_1} \quad (\text{Eq IV-13})$$

Détermination de  $y_{P_2}^4$

A partir du point  $P_1$  :

$$y^4(\tau_1) = C e^{-\tau_1 / T_2}, \quad y^4(\tau_1') = u - S_1, \quad y^4(\tau_1'') = y_{P_2}^4$$

$$y_{P_2}^4 = (u - S_1) e^{-\tau_1' / T_2} \quad (\text{Eq IV-14})$$

Pour arriver au point  $P_3$

$$y^4(\tau_2) = C e^{-\tau_2 / T_2} + 1$$

$$y^4(\tau_2'') = y_{P_2}^4; \quad y^4(\tau_2''') = u - S_1$$

Donc

$$y_{P_2}^4 = 1 - (1 - u + S_1) e^{-\tau_2' / T_2} \quad (\text{Eq IV-15})$$

Détermination de  $y_{P_3}^2$

A partir du point  $P_2$

$$S_2 = y^2(\tau_2'')$$

$$y^2(\tau_2) = C e^{-\tau_2 / T_1} + 1, \quad y^2(\tau_2''') = y_{P_3}^2$$

Donc 
$$y_{P_3}^2 = (s_2 - 1) e^{-\tau_2^3 / T_1} + 1 \quad (\text{Eq IV-16})$$

En vue d'arriver au point  $\bar{P}$  :

$$s_2 = y^2(\tau_2^2)$$

$$y^2(\tau_2) = C e^{-\tau_2 / T_1} + 1 \quad \text{et} \quad y^2(\tau_2^3) = y_{P_3}^2$$

Donc 
$$y_{P_3}^2 = (s_2 - 1) e^{-\tau_2^3 / T_1} + 1 \quad (\text{Eq IV-17})$$

Détermination de

A partir du point  $P_3$

$$y^4(\tau_3) = C e^{-\tau_3 / T_2} + 1$$

Et 
$$y^4(\tau_3^3) = u - s_1 \quad ; \quad y^4(\tau_3^4) = y_{\bar{P}}^4$$

Donc 
$$y_{\bar{P}}^4 = (u - s_1 - 1) e^{-\tau_3^4 / T_2} + 1 \quad (\text{Eq IV-18})$$

Nous avons par ces équations directement les temps  $\tau_{rp}$  et  $\tau_{imp}$ .

Nous avons déjà vu en (III-9)

$$\tau_{rp} = \tau_0^1 + \tau_1^2$$

Or par (III-11) et (III-14)

$$\frac{y_{P_2}^4}{y_{P_3}^4} = \frac{e^{-\tau_0^1 / T_2}}{e^{-\tau_1^2 / T_2}} = e^{(\tau_0^1 + \tau_1^2) / T_2}$$

Donc en tenant compte que  $\tau_0^1 + \tau_1^2 = \tau_{rp}$  nous arrivons à l'expression

$$\tau_{rp} = T_2 \text{Log} \left( \frac{y_{p_0}^4}{y_{p_2}^4} \right) \quad (\text{Eq IV-19})$$

De même compte tenu des équations (IV-15) et (IV-18)

$$y_{p_2}^4 - 1 = (-1 + u - S_1) e^{\tau_2^3/T_2}$$

$$y_{p_1}^4 - 1 = (u - S_1 - 1) e^{-\tau_3^4/T_2}$$

Nous avons :

$$\frac{y_{p_2}^4 - 1}{y_{p_1}^4 - 1} = e^{(\tau_2^3 + \tau_3^4)/T_2}$$

Etant donné que

$$\tau_{imp} = \tau_2^3 + \tau_3^4$$

$$\tau_{imp} = T_2 \text{Log} \frac{y_{p_2}^4 - 1}{y_{p_1}^4 - 1} \quad (\text{Eq IV-20})$$

Pour étudier la stabilité nous allons tracer  $y_{p_0}^4 = f(y_{p_2}^4)$  et  $y_{p_1}^4 = \psi(y_{p_2}^4)$  et nous verrons si les intersections des courbes respectives sont stables. Pour cela nous étudierons le diagramme de Lameira.

Les équations IV-11 et IV-12 donnent respectivement

$$y_{p_0}^4 = (u - S_1) e^{\tau_0^1/T_2}$$

Et

$$\frac{y_{p_1}^2}{S_2 - h_2} = e^{-\tau_0^1/T_1}$$

D'où

$$\tau_0^1 = \text{Log} \left( \frac{S_2 - h_2}{y_{p_1}^2} \right)^{T_1}$$

Ou encore

$$e^{\tau_0'/T_2} = \left( \frac{S_2 - h_2}{y_{P_1}^2} \right)^{T_1/T_2} \quad \text{Posons} \quad T_1/T_2 = T_0$$

Et en tenant compte de la valeur  $e^{\tau_0'/T_2}$  dans l'expression III-11 nous avons

$$y_{P_0}^4 = (u - S_1) \left( \frac{S_2 - h_2}{y_{P_1}^2} \right)^{1/T_0} \quad (\text{Eq IV-21})$$

De même les équations (IV-13) et (IV-14) nous donnent respectivement

$$y_{P_1}^2 = 1 - (1 - S_2) e^{\tau_1^2/T_1}$$

Et

$$y_{P_2}^4 = (u - S_1) e^{-\tau_1^2/T_1}$$

D'où

$$\frac{y_{P_2}^4}{u - S_1} = e^{-\tau_1^2/T_1}$$

Et

$$\tau_1^2 = T_1 \log \frac{u - S_1}{y_{P_2}^4}$$

Compte tenu de l'expression de  $y_{P_1}^2$

$$y_{P_1}^2 = 1 - (1 - S_2) \left( \frac{u - S_1}{y_{P_2}^4} \right)^{T_2/T_1}$$

En remplaçant  $y_{P_1}^2$  dans l'expression (IV-21) nous aurons finalement

$$y_{P_0}^4 = (u - S_1) (S_2 - h_2)^{1/T_0} \frac{y_{P_2}^4}{\left[ \left( \frac{y_{P_2}^4}{y_{P_1}^2} \right)^{T_0} - (1 - S_2) (u - S_1)^{T_0} \right]^{1/T_0}} \quad (\text{Eq IV-22})$$

En utilisant un raisonnement analogue nous arrivons à l'expression

de 
$$y_{\bar{p}}^4 = \psi(y_{P_2}^4)$$

$$y_{\bar{p}}^4 = \frac{1 - (1 - u + S_1)(S_2 - h_2)^{1/\tau_0} (1 - y_{P_2}^4)}{\left[ (1 - y_{P_2}^4)^{\tau_0} - (1 - S_2)(1 - u + S_1)^{\tau_0} \right]^{1/\tau_0}} \quad (\text{Eq IV-23})$$

Tracées du diagramme de LAMEIRA

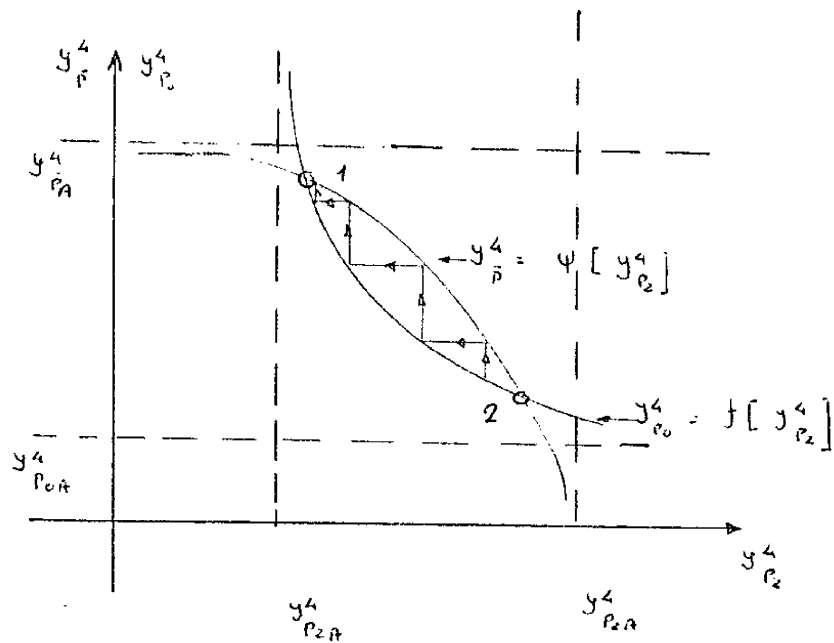


Figure IV-8

A partir des équations (IV-22) et (IV-23) nous pouvons tracer les courbes  $y_{P_0}^4 = f(y_{P_2}^4)$  et  $y_{\bar{p}}^4 = \psi(y_{P_2}^4)$  dont l'allure est représentée par la figure IV-8.

L'étude de ces deux équations nous montre encore, qu'elles admettent des asymptotes orthogonales définies par les relations ci-dessous :

$$\text{Pour } y_{\bar{p}_0}^4 = f \left( y_{\bar{p}_2}^4 \right)$$

$$y_{\bar{p}_2}^4 > (1 - s_2)^{1/\tau_0} (u - s_1)$$

$$y_{\bar{p}_2}^4 > (1 - h_2)^{1/\tau_0} (u - s_1) \quad (\text{Eq IV-24})$$

$$\text{Par contre pour } y_{\bar{p}}^4 = \psi \left( y_{\bar{p}_2}^4 \right)$$

$$y_{\bar{p}_2}^4 < (1 - h_2)^{1/\tau_0} (u - s_1)$$

$$y_{\bar{p}}^4 < 1 - (s_2 - h_2)^{1/\tau_0} (1 - u + s_1) \quad (\text{Eq IV-25})$$

Dans le cas où les perturbations ne sont pas supérieures à un niveau maximum pouvant entraîner l'instabilité on trouve donc un cycle limite qui se réduit à un point vu que  $(u - s_1)$  se réduit à zéro, lorsque zéro est au-dessous du seuil.

Nous pouvons calculer les temps  $\tau_{rp}$  et  $\tau_{imp}$  et cela nous donnerait par comparaison avec les éléments correspondants du système réel le degré de précision sur les éléments de celui-ci. Ainsi nous pourrions avoir une plus grande précision sur  $E, \tau_R, \tau_I$  éléments essentiels au régulateur.

#### IV-4 - Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons montré une des utilisations possibles de la méthode de décomposition structurelle. Nous avons d'autre part à notre sens montré la dualité des problèmes de l'identification et de la conception. En effet, la conception a été vue comme le choix d'une "boîte noire" telle que celle-ci réponde à une série de réquisitions "externes"



demandées au régulateur. Nous avons enfin mis en évidence la différence essentielle entre paramètres externes et paramètres internes quand il s'agit de conception.

## C O N C L U S I O N

Dans l'optique de l'équipe "Théorie des Systèmes" à laquelle nous appartenons, le sujet qui a fait l'objet des recherches développées au sein de cette équipe et qui nous ont conduit aux résultats présentés dans ce mémoire, s'intègre dans un cadre plus général qui est celui du modèle mathématique des systèmes physiques. Le problème qui nous a été proposé, celui de l'étude des propriétés structurelles de certaines chaînes non-linéaires, sous le double aspect, de leur comportement temporel externe et de leur composition interne nous a permis de mettre en action les directions préconisées par la théorie moderne des systèmes.

C'est ainsi qu'au lieu de faire appel aux méthodes classiques qui essayent d'associer à un système physique un modèle pré-fabriqué plus ou moins complexe dont on impose l'ordre et la structure du "modèle global", nous avons préféré exploiter la voie qui conduit au "modèle généré" à partir de la notion de sous-système telle qu'elle a été exposée au premier chapitre. Il faut remarquer cependant, que le but de notre travail a été limité à l'analyse qualitative de quelques aspects du modèle global au sens entrée-sortie, suffisantes à nous permettre la caractérisation des membres d'une famille donnée de structures non-linéaires, en particulier en ce qui concerne leurs propriétés topologiques. Cette analyse ayant une base expérimentale et inspirée en des réalités physiques, a été réalisée à l'aide d'une technique faisant appel à un ensemble de tests hiérarchisés. L'emploi de ces derniers, fait d'une façon systématique, nous a amené aux résultats rassemblés aux deuxième et troisième chapitres. Ceux-ci sont à la base de la résolution d'un problème de classement et d'identification topologique intéressant des systèmes physiques non-linéaires susceptibles d'appartenir à une des dix classes de la famille, que nous avons pu étudier. La méthode que nous avons appelée "Méthode de

Décomposition Structurelle" par des raisons déjà évoquées (paragraphe II.2.) et qui rend possible l'identification topologique de 70 structures différentes relatives à deux types de chaînes et à dix caractéristiques non-linéaires représente, peut être, un premier pas dans le sens d'une résolution réaliste du problème plus général de l'identification des systèmes physiques [ 3 ]. Elle peut servir aussi à la mise en équation en termes objectifs et qualitativement corrects du problème de la conception de dispositifs physiques intéressants en particulier l'automatique et l'électronique, ainsi que le montre l'application que nous avons présentée au quatrième chapitre.

La méthode proposée a comme caractéristique essentielle, celle de permettre la systématisation progressive de l'étude des propriétés externes et topologiques de chaînes non linéaires. Elle est susceptible d'être améliorée et développée par la suite avec l'augmentation du nombre de classes des groupes considérés, comme c'est le cas par exemple du groupe des paraboles. Elle est susceptible enfin de motiver d'autres recherches sur d'autres familles de systèmes non-linéaires comportant soit des nouvelles non-linéarités, soit des chaînes avec un nombre plus grand de composants, soit enfin des chaînes pouvant contenir des bouclages.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- 1 L. A. ZADEH - E. POLAK  
System Theory, Mc Graw Hill, 1969.
- 2 L. E. FRANKS  
Signal Theory, Prentice Hall, Inc. Englewood, 1969
- 3 A. L. PEREIRA  
Reflexoes sobre a nacao de coecencia concertual e sua importancia no estudo des alguns problemas basicos de una teoria unificada de sistemas. COPPE Janv. 1971.
- 4 M. MESAROVIC  
Auxiliary function and constructive specification of general systems. Mathematical systems theory. Journal Springer, Uulay, 1968.
- 5 R. E. KALMAN - FALB - ARBIB  
Topics in mathematical system theory. Mc Graw Hill, 1969.
- 6 M. MESAROVIC  
The control of multivariable system. John Wiley and Sons Londres, 1960.
- 7 O. SCHOENWANDT  
On observability of nonlinear systems.
- 8 R. E. KALMAN  
Mathematical description of linear dynamical systems. Journal of Control Siam, 1963, vol. 1, p. 152-192.
- 9 GILBERT  
Controllability and observability in multivariable control systems. Siam, vol. 1, p. 128-151, 1963.
- 10 N. N. KRASOVSKI  
On the theory of controllability and observability of linear dynamical systems. Matem i Mekl, vol. 28, p. 3-14, Oct. 1964.
- 11 CHEN C. T. - A. DESOER  
Controllability and observability of composite systems. IEEE Trans. Aut. Cont. vol. AC 12, pp. 402-475, Août 1967.

- 12 G. GRATELOUP  
Sur l'identification de la dynamique des processus en automatique, Toulouse, Décembre 1965.
- 13 NASLIN  
Les régimes variables dans les systèmes linéaires et non-linéaires, Dunod 1962.
- 14 SANDBERG  
On the  $\sqrt{2}$  boundness of solutions of nonlinear functional equation, Bell Systems Tech. J., vol. 43, pp. 1581.
- 15 SANDBERG  
A frequency domain. Condition for the stability of feedback systems containing a single time. Varying non linear element. Bell Syst. Tech. J., vol. 43, pp. 1601-1638, 1964.
- 16 CYPKIN  
Theorie des asservissements par plus ou moins. Dunod 1962.
- 17 PETROV  
Systèmes à structure variable, pp. 269-274. Hayba, Moscou 1968.
- 18 FEIKEMA  
A simple method for analyzing and synthesizing systems with asymmetric nonlinearities.
- 19 KOHR R. H.  
On the identification of linear and nonlinear systems. Simulation, march 1967, pp. 165-174.
- 20 A. RUBIN - S. DRIBAN - W. MIESSNER  
Regression analysis and parameter identification, Simulation, pp 39-47, July 1967.
- 21 G. E. GIBSON - E. S. DI TADA  
On the inverse describing function problem.

## T A B L E   D E S   M A T I E R E S

---

Introduction	1
<u>Chapitre I</u> : Généralités et présentation du sujet	5
I. 1. Rappels de quelques concepts de base de la théorie générale des systèmes	7
I. 2. Problème de la "boîte noire"	13
I. 3. Systèmes et structures	21
<u>Chapitre II</u> : Etude des propriétés structurelles externes et topologiques d'une famille de chaînes non linéaires. Méthode de la décomposition structurelle.	33
II. 1. Présentation de la méthode et application du test de nature.	35
II. 2. Groupe des relais	55
II. 3. Groupe des saturations	78
II. 4. Groupe des paraboles	97
II. 5. Conclusion	103
<u>Chapitre III</u> : Diagrammes des réponses temporelles et tableaux synoptiques des différentes chaînes	109
III. 1. Introduction	111
III. 2. Diagrammes relatifs au groupe des relais	112
III. 3. Diagrammes relatifs au groupe des saturations	122
III. 4. Quelques expériences particulièrement importantes	130
III. 5. Tableaux synoptiques	

<u>Chapitre IV</u> : Application de la méthode de décomposition structurelle à la conception d'un organe de commande	133
IV. 1. Introduction	135
IV. 2. Régulateur de vitesse à relais	136
IV. 3. Etude de la stabilité du système	142
IV. 4. Conclusions	151
<u>Conclusion</u>	153
<u>Bibliographie</u>	155