HAL
open science

Identification d'une colonne d'absorption en vue de la commande du débit d'absorbant

Luis Gimeno

To cite this version:

Luis Gimeno. Identification d'une colonne d'absorption en vue de la commande du débit d'absorbant. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1972. Français. NNT : . tel-00176342

HAL Id: tel-00176342

https://theses.hal.science/tel-00176342

Submitted on 3 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 1972

THÈSE

présentée

à l'Université Paul-Sabatier de Toulouse

en vue de l'obtention

du titre de DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Luis GIMENO

Ingénieur E. T. S. I. I. Barcelone
Ingénieur de la Section Spéciale d'Automatique
de l'Université de Toulouse

Identification d'une colonne d'absorption en vue de la commande du débit d'absorbant

---

Soutenue le 22 Février 1972 devant la Commission d'Examen

MM. Y. SEVELY — Président

H. ROQUES
J. L. ABATUT
M. CARMASSI
} Examinateurs

AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales dirigé par Monsieur le Professeur J. LAGASSE, que nous remercions bien sincèrement pour son accueil.

Je désire remercier tous ceux qui d'une façon ou d'une autre ont contribué à la réalisation de ce travail, et tout spécialement Monsieur le Professeur Y. SEVELY, Chef de l'équipe "Conduite de pilotes chimiques par calculateur numérique" du L.A.A.S. ainsi que Monsieur le Professeur H. ROQUES du Département de Chimie Industrielle de l'Institut National des Sciences Appliquées, qui ont dirigé ma thèse.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs LOUVEL, CARMASSI et VANDESANDE de la Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine pour l'aide qu'ils nous ont apportée dans la construction de l'unité pilote et pour les conseils pertinents dont ils nous ont fait bénéficier.

Je tiens à remercier tout spécialement Monsieur R. FADEL qui a pris en charge la construction de l'unité pilote ; qu'il trouve ici, ainsi que Monsieur J. FONTAGNE, toute ma reconnaissance. Mes remerciements aussi à tous les membres de l'équipe de Monsieur Y. SEVELY, pour l'ambiance agréable dans laquelle s'est déroulé mon séjour au Laboratoire.

Enfin j'exprime ma gratitude à Messieurs Y. SEVELY, H. ROQUES, J.L. ABATUT et M. CARMASSI d'avoir bien voulu constituer le jury de cette thèse.

Cette thèse a été préparée dans le cadre du contrat n° 70 02 150 du Comité Automatisation de la D.G.R.S.T., organisme auquel nous tenons à présenter l'expression de notre reconnaissance.

P L A N

Introduction 1

Chapitre I - Etude théorique chimique 9

I-1 Description du processus 11

I-1-1 - Aspects chimiques qui intéressent la conduite automatique de la colonne 11

I-1-2 - Description chimique du processus 11

I-1-3 - Variable de sortie. Perturbations. Variable de commande 13

I-1-4 - Instrumentation 13

I-2 - Etude chimique 14

I-2-1 - Hypothèses 14

I-2-2 - Bilans matière 16

I-2-3 - Terme de transfert. Régime rapide. Régime instantané 21

I-2-4 - Paramètres qui interviennent dans les expressions du terme de transfert 27

I-2-5 - Régimes possibles dans la colonne d'absorption de CO_2 30

I-2-6 - Domaine de fonctionnement de la colonne d'absorption 36

I-2-7 - Equations aux dérivées partielles pour les régimes possibles dans la colonne 41

Chapitre II - Résolution des équations du modèle mathématique 43

II-1 - But recherché 45

II-2 - Type de modèle 45

II-3 - Problèmes posés par l'obtention d'une représentation externe, Etude de certaines méthodes existantes 46

Chapitre III - Etude expérimentale 51
III-1 - Résultats en régime permanent 53
III-1-1 - Mesure des variables d'entrée et de sortie 53
III-1-2 - Résultats expérimentaux en régime permanent 53
III-1-3 - Modèle statique expérimental 55
III-2 - Résultats en régime transitoire 66
III-2-1 - Système d'analyse du gaz à l'entrée de la colonne 66
III-2-2 - Mélangeur. Acheminement du gaz jusqu'à la colonne 68
III-2-3 - Système d'analyse du gaz à la sortie de la colonne 70
III-2-4 - Colonne d'absorption 73
III-2-4-1 - Changements de composition en fond de colonne 73
III-2-4-2 - Changements de débit d'air 74
III-2-4-3 - Changementsde débit d'absorbant 77
III-3 - Conséquences pour l'établissement d'une loi de commande sur le débit de DEA 81
Chapitre IV - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux Etude critique de l'intérêt du modèle théorique 87
IV-1 - Comparaison en régime permanent 90
IV-2 - Comparaison en régime transitoire 93
IV-2-1 - Changement de la composition du gaz à l'entrée 93
IV-2-2 - Changement du débit d'air 97
IV-2-3 - Changement du débit d'absorbant 100
IV-3 - Comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats de la simulation hybride du régime rapide 102

Conclusion 105

Annexes

Méthode de la transformée de Laplace A.1

Série de Neumann. Diffusion de Taylor

Diffusion introduite par la discrétisation A.4

Approximation Ra = K(L). Y pour gaz dilués A.5

Courbe d'étalonnage Anir 11 A.11

Courbe d'étalonnage débitmètre DEA A.12

Courbe d'étalonnage débitmètre AIR A.13

Réponse du système d'analyse à l'entrée, à un échelon de composition (AFI) A.14

Réponse du mélangeur (débit et composition) à un échelon de débit de CO_2 (AF3) A.15

Composition du gaz à l'entrée de la colonne après un échelon de débit de CO_2 (AF4) A.16

Réponse du système d'analyse à la sortie de la colonne pour un échelon de débit de CO_2 (AT1) A.17

Approximation $e^{-Tp/1+\tau p}$ pour le système d'analyse en tête A.18

Composition en tête de colonne après un échelon de composition en fond A.19

Composition en tête de colonne après un échelon de débit d'air A.20

Composition en tête de colonne après un échelon de débit de DEA A.21

Influence du couplage entre les deux équations (gaz et liquide) sur les régimes transitoires A.22

Bibliographie

INTRODUCTION

L'absorption de gaz acides par des liquides ("lavage" des gaz) est un processus industriel important. Les applications principales sont de deux types :

a) L'industrie de l'ammoniac où l'on produit un mélange d'hydrogène et de CO_2 à partir du charbon ou des fractions pétrolières. La quantité de CO_2 à enlever est de 1, 2 à 2, 2 tonnes de CO_2 par tonne d'ammoniac.

b) L'industrie du gaz :

1 - Traitement du gaz naturel contenant des concentrations hautes en CO_2

2 - Amélioration du gaz de ville produit par gazéification du charbon ou reformage de fractions pétrolières.

Comme autres applications importantes nous citerons la fabrication de : methanol, CO_2 solide, carbonate et bicarbonate de potassium, acétylène et olefines par craquage de fractions pétrolières.

L'épuration du gaz est plus ou moins poussée selon le cas ; ainsi pour la fabrication de l'ammoniac, le mélange d'azote et d'hydrogène doit contenir au maximum 10 à 15 ppm de CO_2. Par contre, dans l'industrie du gaz, le contenu en CO_2 dans le gaz de ville arrive jusqu'à 2%.

L'absorption par liquide semble être le système le plus économique, l'absorbant pouvant être régénéré facilement par élimination du CO_2. Ces liquides peuvent dissoudre physiquement le CO_2 ou contenir un soluté capable de réagir chimiquement avec lui ; la vitesse d'absorption est beaucoup plus grande dans le second cas que dans le premier. L'utilisation de réactifs chimiques devient indispensable lorsque l'on veut réduire la pression partielle de CO_2 à des valeurs très basses (ex. $P_{CO_2} = 4.10^{-4}$ atm. dans la fabrication de l'ammoniac à partir de fractions pétrolières).

L'absorption de CO_2 par l'eau a été largement utilisée, mais aujourd'hui on emploie d'autres absorbants plus spécifiques [13]

- solutions de carbonate de potassium
- solutions d'amines (MEA, DEA, TEA).

Ce lavage des gaz se réalise, dans l'industrie, dans des colonnes à plateaux : le gaz à épurer, injecté en bas de colonne, doit traverser à contre-courant le liquide, qui introduit en tête de colonne, remplit tous les plateaux. Pour de faibles débits de gaz, on utilise aussi les colonnes à garnissage remplies d'éléments suffisamment petits pour assurer une bonne surface de contact entre le gaz et le liquide. Danckwerts [1] étudie les avantages de chacun des deux systèmes lorsque les débits utilisés permettent le choix entre les deux solutions.

Dans ce genre de procédés le problème qui se pose du point de vue de la commande est la détermination du débit minimal d'absorbant à introduire pour satisfaire les spécifications concernant le gaz épuré à la sortie de la colonne. Lorsque l'on est en présence de perturbations dans la composition et le débit du gaz à traiter, la solution de ce problème passe par la commande prédictive si on veut éviter de grands dépassements dans la composition de sortie ; en régime perturbé en effet la dynamique de l'absorption du CO_2 par le liquide est beaucoup plus lente que celle de l'écoulement du gaz à traiter dans la colonne.

Le travail présenté dans ce mémoire concerne la modélisation d'une colonne d'absorption de CO_2 située au Département de Chimie Industrielle de l'Institut National des Sciences Appliquées à Toulouse, en vue d'établir un modèle pour la commande en boucle ouverte du débit d'absorbant (diéthanol amine : DEA) face à des perturbations dans la composition et le débit du gaz à traiter.

Il s'agit d'une colonne à garnissage, en verre, qui traite un débit de gaz de 5 m^3/h, le gaz est un mélange d'air et de CO_2 à 30% en volume. L'amplitude des perturbations en débit ou en composition du mélange à traiter est de 30% autour du point de fonctionnement normal.

Les principales différences avec une unité industrielle proviennent, outre la taille de l'appareil, de la réaction chimique qui a lieu dans la colonne entre le CO_2 et la DEA : celle-ci est très influencée en effet par la pression, qui est bien plus haute dans les installations industrielles (70 bars dans les unités de lavage de gaz naturel de la SNPA à Lacq). Dans l'industrie, ces colonnes sont généralement à plateaux, compte tenu du débit de gaz à traiter.

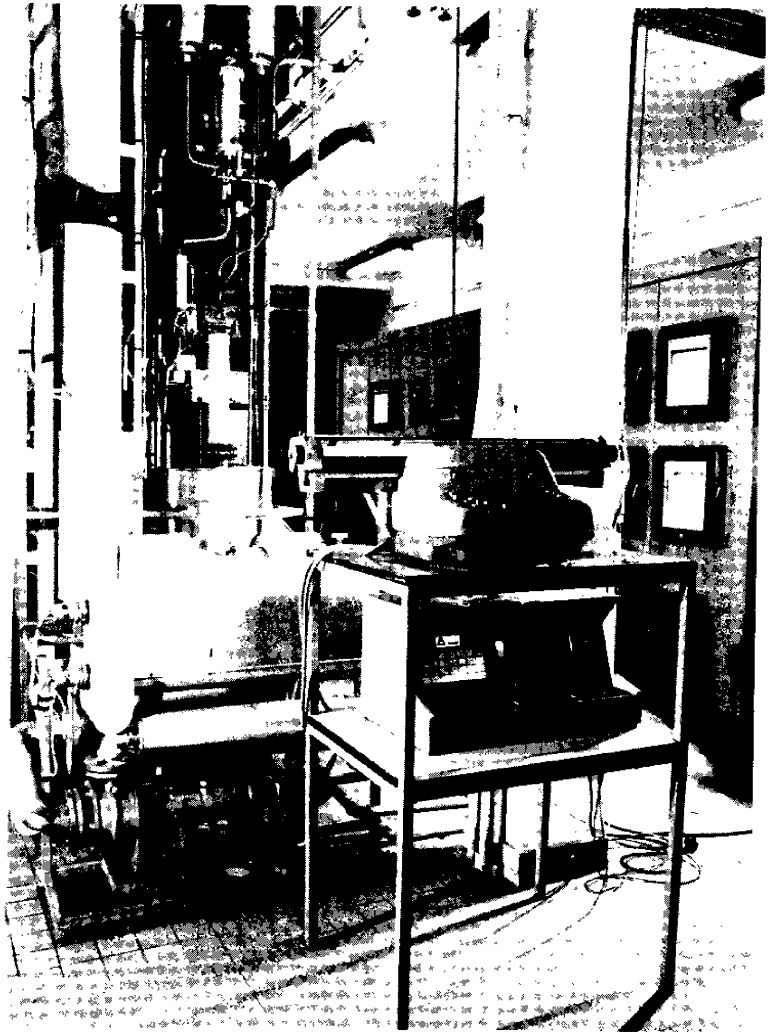
On a divisé l'exposé en quatre chapitres qui portent sur :

Chapitre I - Etude du modèle théorique décrivant le transfert de CO_2 du gaz au liquide dans la colonne. Le modèle est obtenu à partir des bilans matière dans la phase gaz et la phase liquide. Le CO_2 réagissant chimiquement avec la DEA pour former le carbamate (la réaction étant de second ordre), on arrive à un modèle aux dérivées partielles non linéaires.

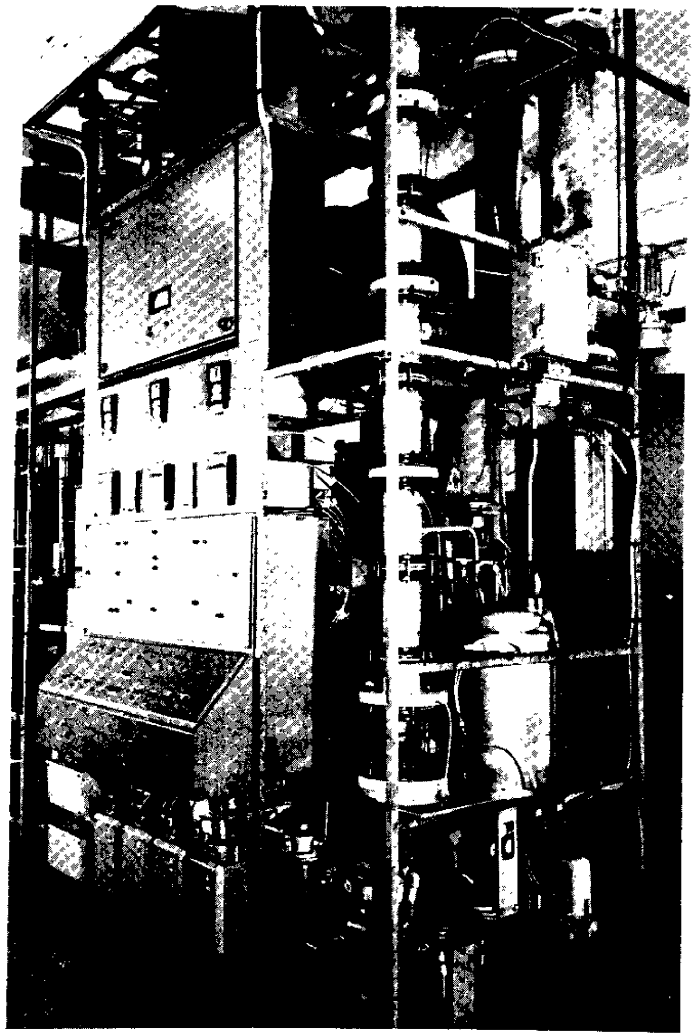
Chapitre II - Traitement mathématique des équations obtenues dans le chapitre I en vue d'obtenir une représentation externe donnant la composition du gaz épuré à la sortie de la colonne en fonction de la composition du gaz à l'entrée, du débit de gaz à traiter et du débit d'absorbant utilisé.

En régime statique on peut parvenir à des résultats valables quantitativement seulement par simulation ; pour les régimes transitoires il est nécessaire de connaître l'importance de la diffusion axiale, avant de procéder à la simulation.

Chapitre III - Modèle expérimental à partir des résultats obtenus sur l'unité pilote, et conséquences pour l'établissement d'une loi de commande du débit de DEA.



Régénération et terminal du calculateur



Colonne d'absorption et pupitre de commande

On retient, compte tenu de la précision fixée pour la composition à la sortie de la colonne, un modèle linéaire de premier ordre avec retard pur par rapport aux changements de composition du gaz et du débit de DEA, et non linéaire en ce qui concerne les changements de débit de gaz. Il s'agit d'un modèle adaptatif en ce sens que les paramètres statiques sont calculés chaque fois qu'on atteint un régime permanent.

Chapitre IV - Confrontation du modèle expérimental avec les résultats obtenus à partir d'un modèle théorique sous forme d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

CHAPITRE I

ETUDE THEORIQUE CHIMIQUE

I-1 - DESCRIPTION DU PROCESSUS

I-1-1 - Aspects chimiques qui intéressent la conduite automatique de la colonne

Ces aspects peuvent être résumés ainsi :

a) Processus continu

b) Ecoulement de deux fluides à contrecourant

c) Présence de deux fluides : l'un, gazeux, auquel sont liées les perturbations, l'autre liquide auquel est liée la commande.

d) Transfert de matière de la phase gaz à la phase liquide avec réaction chimique.

e) Concentrations du gaz et du liquide dans la colonne, fonctions de la coordonnée axiale.

I-1-2 - Description chimique du processus

Il s'agit d'une unité d'absorption de gaz acides par la diethanolamine (DEA). L'appareil dans lequel se produit cette absorption est une colonne à garnissage qui opère à contrecourant.

Dans le schéma du pilote (figure 1) on note :

a) Préparation du gaz à traiter

On dispose d'air et de CO_2, à partir desquels on produit, dans le mélangeur, le gaz de composition désirée qui doit être épuré dans la colonne d'absorption.

b) Colonne d'absorption

C'est une colonne en verre de deux mètres de hauteur et 100 mm de diamètre intérieur, elle est construite en éléments de 250 mm. Tous les deux

éléments on a disposé un plateau en PVC dans le double but de recentrer le liquide et de pouvoir prendre des échantillons de liquide et de gaz ; on a disposé de plus, dans chacun de ces plateaux, un thermocouple. La colonne est remplie d'anneaux Raschig de 10 mm de diamètre afin d'augmenter la surface de contact entre phases.

La DEA est injectée dans la partie supérieure de la colonne et le gaz entre par le fond. La DEA absorbe physiquement et réagit chimiquement avec le CO_2. La réaction est exothermique.

On aura donc, en tête, le gaz épuré, et en fond la DEA chargée de CO_2 essentiellement sous forme de carbamate.

c) Régénération de la DEA

La DEA, pour être utilisée, doit perdre le CO_2. Cette régénération se fait en chauffant l'amine à ébullition dans la colonne de régénération, composée d'un bouilleur à fluide caloporteur (pour éviter à la DEA des températures locales excessives) et d'une colonne de garnissage de 50 cm. de hauteur. Après régénération la DEA passe dans un premier échangeur de chaleur qui permet de chauffer la DEA sortant de la colonne d'absorption, puis dans un deuxième échangeur à l'eau qui parachève son refroidissement avant son entrée dans la colonne d'absorption.

Pression ABSORPTION	1.250 kg/cm^2 (absolue)
Pression REGENERATION	1.100 kg/cm^2 (absolue)
Température REGENERATION	100°C
Température ABSORPTION	25°C (tête) 30°C (fond)
Absorbant	Solution de DEA 2M.

I-1-3 - Variable de sortie. Perturbations. Variable de commande

Le but de l'installation est de maintenir la concentration de CO_2 en tête de colonne au-dessous d'une certaine valeur.

Le gaz à traiter aura un débit et une composition variables et ce sera en introduisant plus ou moins de DEA que l'on maintiendra la concentration en tête au-dessous de la contrainte. Donc :

Variable de sortie	Concentration de CO_2 en tête de la colonne
Variable de commande	Débit de DEA
Perturbations	Débit de gaz à traiter
	Composition du gaz à traiter.

Une autre variable qui peut être considérée comme une perturbation est la composition de la DEA (teneur en CO_2) à l'entrée de la colonne d'aborption. Pour un débit de DEA constant et une température de regénération constante, cette composition ne devrait pas changer. Un capteur qui donnera la teneur en eau et CO_2 de la DEA est en cours d'étude.

I-1-4 - Instrumentation

A1 A2	Analyseurs de CO_2 à infrarouges. Schlumberger.
FRC1	Débit AIR
	Diaphragme. DP Cell Foxboro-Convertisseur. Régulateur électrique CFTH-Convertisseur
FRC 2	Débit CO_2
	Diaphragme. DP cell Foxboro-Convertisseur. Régulateur électrique CFTH-Convertisseur

FRC 3	Débit DEA
	Diaphragme. DP cell ACB. Régulateur électrique
	CFTH-Convertisseur
LRC1	Niveau ABSORPTION
	DP cell ACB. Régulateur électrique - convertisseur
LRC2	Niveau REGENERATION
	DP cell ACB. Régulateur électrique - convertisseur
PRC1	Pression ABSORPTION
	DP cell Foxboro. Régulateur pneumatique Foxboro
PRC2	Pression REGENERATION
	DP cell Foxboro. Régulateur pneumatique Foxboro
TRC	Thermocouple. Régulateur CGA.

I-2 - ETUDE CHIMIQUE

I-2-1 - Hypothèses

On va déterminer un modèle pour le transfert de matière dans la colonne d'absorption dans lequel :

a) On ne prendra comme variables indépendantes que le temps et la coordonnée spatiale dans le sens axial, mais non la coordonnée spatiale radiale, simplification habituelle lorsque l'écoulement est turbulent [2]

b) On négligera le terme de diffusion axiale (écoulement piston). Il faudra vérifier à posteriori la validité de la deuxième hypothèse. Grâce à ces deux simplifications nous obtenons des équations

a) aux dérivées partielles à deux variables indépendantes au lieu de trois

b) du premier ordre (la diffusion axiale donnerait lieu à un terme de dérivée seconde par rapport à la coordonnée axiale).

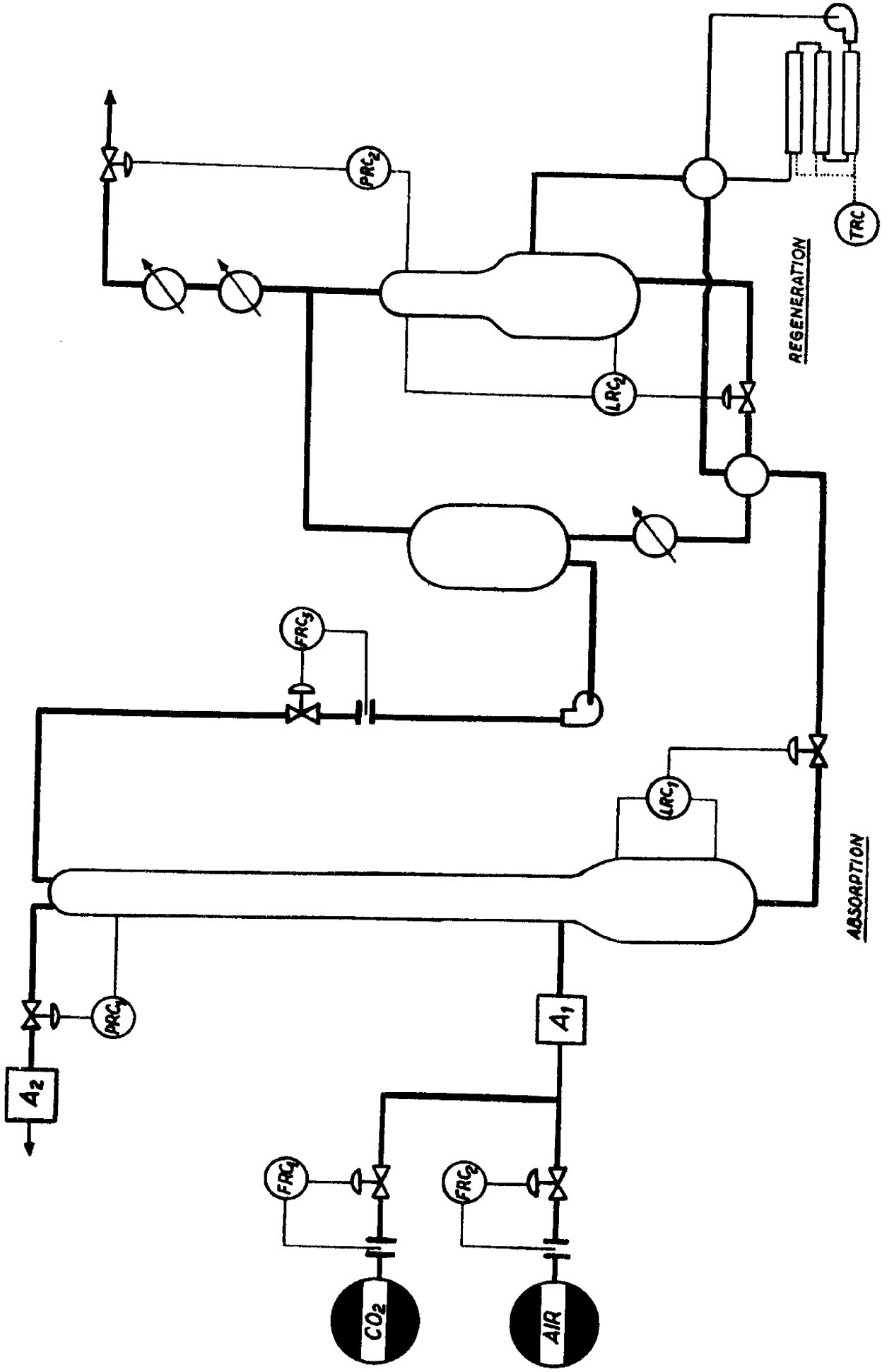


FIG. 1 UNITE PILOTE D' ABSORPTION

I-2-2 - Bilans matière

On va appeler :

W	"Hold-up" liquide	moles DEA/m^3 colonne
U	"Hold-up" gaz	moles GAZ/m^3 colonne
X	Taux de carbonatation	moles CO_2/mole DEA
Y	Concentration du gaz	moles CO_2/mole GAZ
L	Débit spécifique de liquide	moles DEA/h. m^2
G_Γ	Débit spécifique de gaz	moles GAZ/h. m^2
R	Vitesse de transfert	moles CO_2 transférés /h. m^2
a	Surface spécifique de contact entre phases	m^2/m^3 colonne
z	Coordonnée axiale	m
S	Section de la colonne	m^2

Etablissons un bilan matière dans une section dz de la colonne :

Bilan CO_2 dans le liquide

Ecrivons que pendant le temps dt la somme des quantités de CO_2 à la sortie, $\overline{L.X}\big|_z$ S. dt, et accumulée dans la tranche dz, $\left[\overline{W.X}\big|_t - \overline{W.X}\big|_{t+dt}\right]$S. dz, est égale à la somme des quantités de CO_2 à l'entrée, $\overline{L.X}\big|_{z+dz}$ S. dt, et transférée du gaz dans le liquide, R. a. S. dz. dt.

$$\overline{LX}\big|_z S dt + \left[\overline{WX}\big|_t - \overline{WX}\big|_{t+dt}\right] S dz = \overline{LX}\big|_{z+dz} S dt + Ra S dz\, dt$$

d'où en division par S. dz. dt et en passant à la limite

(2.1.) $$\frac{\partial(WX)}{\partial t} = \frac{\partial(LX)}{\partial z} + R.a$$

Bilan CO_2 dans le gaz

Par un raisonnement analogue on aboutit à

(2.2) $$\frac{\partial(UY)}{\partial t} = -\frac{\partial(G_T Y)}{\partial z} - Ra$$

Bilan liquide

Puisque le processus qui a lieu dans la colonne est une dissolution physique et chimique du CO_2 dans la DEA, on peut considérer que ce transfert de matière ne modifie pas le débit liquide. On aura donc :

$$L\big|_{z+dz} S dt = L\big|_z S dt + \left[W\big|_t - W\big|_{t-dt}\right] S dz$$

d'où

(2.3) $$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial t}$$

Si l'on tient compte de la diffusion axiale ces équations deviennent :

(2.1a) $$\frac{\partial(WX)}{\partial t} = \frac{\partial(LX)}{\partial z} + Ra + D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

(2.1b) $$\frac{\partial(UY)}{\partial t} = -\frac{\partial(G_T Y)}{\partial z} - Ra + D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}$$

où D_1 et D_2 sont fonctions des coefficients de diffusivité.

De (2.1) et (2.3) on obtient :

$$X \cancel{\frac{\partial W}{\partial t}} + W \frac{\partial X}{\partial t} = X \cancel{\frac{\partial L}{\partial z}} + L \frac{\partial X}{\partial z} + Ra$$

d'où

(2.4) $$W \frac{\partial X}{\partial t} = L \frac{\partial X}{\partial z} + Ra$$

(2.2) $$\frac{\partial (UY)}{\partial t} = - \frac{\partial (G_T Y)}{\partial z} - Ra$$

Ra, le terme de transfert, est, par l'intermédiaire de la vitesse de réaction, fonction de X et Y.

Dans ce modèle on a :

$$W = W(z,t) \qquad L = L(z,t) \qquad X = X(z,t)$$
$$U = U(z,t) \qquad G_T = G_T(z,t) \qquad Y = Y(z,t)$$

Le "hold-up" liquide dans une colonne de garnissage peut être exprimé sous la forme [3, 4]

$$W = K_1 + K_2 \cdot L$$

et le "hold-up" gaz par [3]

$$U = K_3 \cdot P$$

P étant la pression dans la colonne. On pourra prendre U = cte si la pression à l'entrée reste constante et si la chute de pression dans la colonne est petite ; comme nous le verrons lors des résultats expérimentaux, elle est de l'ordre de 20 mbar ; les changements de pression en tête, pour l'amplitude maximale des perturbations, est de 10 mbar. Or, à 20 mbar correspond un changement dans le "hold-up" gaz de l'ordre de 10%, ce qui justifie la simplification.

Dans ces conditions le système d'équations devient :

(2.4.) $$W \frac{\partial X}{\partial t} = L \frac{\partial X}{\partial z} + Ra$$

(2.5) $$U \frac{\partial Y}{\partial t} = - \frac{\partial (G_T Y)}{\partial z} - Ra$$

Dans l'unité pilote on mesure le débit d'air et la composition du gaz après le mélange entre l'air et le CO_2 ; ceci pour éviter d'avoir à mesurer le débit total, puisque cette mesure effectuée par un organe deprimogène devrait être corrigée selon la densité du mélange, fonction de la composition (1).

On a donc intérêt à introduire ce débit d'air dans les équations. Le débit total s'écrit :

$$G_T = G_{AIR} + G_{CO_2} = G_A + G_T \cdot Y$$

et

$$G_T = \frac{G_A}{1-Y}$$

Le système d'équations devient en négligeant le débit d'air que peut absorber la DEA

(2.4) $$W \frac{\partial X}{\partial t} = L \frac{\partial X}{\partial z} + Ra$$

(2.6) $$U \frac{\partial Y}{\partial t} = - G_A \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Y}{1-Y} \right) - Ra$$

---

(1) Signalons à ce sujet les études effectuées au L.A.A.S. sur un débitmètre thermique à lecture indépendante de la composition du gaz qui ont conduit à un prototype en cours de réalisation au service Mesures, Capteurs et Instrumentation [14]).

On va faire un changement de variables qui ne simplifie pas le système mais qui a l'avantage d'éviter des corrections sur les bilans massiques. On va utiliser le rapport molaire (y : moles CO_2/Mole AIR) au lieu de la concentration molaire (Y : moles CO_2/mole GAZ). En effet, si on travaille avec des concentrations molaires, pour comparer la concentration d'entrée du gaz avec celle de sortie, il faudra tenir compte dans cette dernière de la diminution de débit total.

Compte tenu de la relation

$$y = \frac{Y}{1-Y}$$

d'où

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{(1+y)^2} \frac{\partial y}{\partial t}$$

l'équation relative au gaz s'écrit :

$$U \frac{\partial y}{\partial t} = - G_A (1+y)^2 \frac{\partial y}{\partial z} - Ra(x,y) \cdot (1+y)^2$$

On peut parvenir également à cette équation en considérant le "hold-up" air U^* moles AIR/m^3. Un bilan massique du CO_2 dans le gaz donne

$$\frac{\partial (U^* y)}{\partial t} = - G_A \frac{\partial y}{\partial z} - Ra(x,y)$$

Si on suppose que le "hold-up" total est

$$U = U^* + U_{CO_2}$$

on a

$$U^* = U(1-Y) = \frac{1}{1+y} U$$

$$\frac{\partial (U^* y)}{\partial t} = U \frac{\partial y}{\partial t} \left[\frac{1}{1+y} - \frac{y}{(1+y)^2} \right] = \frac{1}{(1+y)^2} U \frac{\partial y}{\partial t}$$

Le système d'équations devient :

(2.4) $$W \frac{\partial X}{\partial t} = L \frac{\partial X}{\partial z} + Ra$$

(2.7) $$\frac{U}{(1+y)^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = - G_A \frac{\partial y}{\partial z} - Ra$$

I-2-3 - Terme de transfert. Régime rapide. Régime instantané

Le transfert du CO_2 du gaz dans le liquide se fait par absorption physique et réaction chimique, les deux processus étant simultanés. Le second est, de loin, beaucoup plus important que le premier.

L'absorption physique peut être décrite par le modèle à deux couches limites très minces, l'une associée à la vapeur et l'autre au liquide. A l'interface on suppose que sont satisfaites les conditions d'équilibre. A chaque film on associe un coefficient de facilité (équivalent à une conductivité thermique) qui fixe la vitesse de transfert à travers le film, vitesse supposée proportionnelle à la différence entre la composition au sein du fluide et la composition à l'interface.

Si K_G est le coefficient associé à la couche limite gaz (mole/h. m^2. fraction molaire), "a" la surface spécifique de contact entre phases (m^2/m^3), Y la composition au sein de la vapeur, et Y_i la composition à l'interface, la vitesse de transfert sera :

$$Ra = K_G \cdot a \cdot (Y - Y_i) \qquad \text{moles/h.m}^3$$

De même du côté liquide

$$Ra = k_L \, a \, (X_i - X) \qquad \text{moles/h.m}^3$$

Y_i et X_i seront liés par la courbe d'équilibre puisqu'on a supposé que l'on a l'équilibre à l'interface

$$Y_i = f(X_i)$$

Evidemment

$$Ra = K_G\, a\,(Y - Y_i) = K_L\, a\,(X_i - X)$$

Dans le cas de l'absorption de CO_2 par dissolution d'amines, il s'agit d'un phénomène de transfert de matière avec réaction chimique [1, 5, 6]

On peut décrire ce type de transfert de matière par les phénomènes suivants :

a) Diffusion des réactants de la phase A (CO_2) depuis le sein de sa phase jusqu'à l'interface.

b) Diffusion des réactants (CO_2) de l'interface vers l'intérieur de la phase B.

c) Réaction chimique dans la phase B.

d) Diffusion des réactants initialement dans B et des produits de la réaction, à l'intérieur de la phase B, due aux gradients de concentration produits par la réaction chimique.

Les actions b, c et d ont lieu simultanément et interfèrent multuellement. Le processus résultant de b, c et d a lieu en série avec l'étape a.

Si l'étape a est contrôlante, c'est-à-dire si la vitesse avec laquelle elle se produit est plus petite que la vitesse à laquelle se déroule le processus b, c, d, la vitesse de transfert totale n'est pas influencée par la réaction chimique et on peut considérer qu'il s'agit d'une absorption physique, le terme de transfert aura la forme de l'équation (2. 8).

Si au contraire le processus b, c, d est contrôlant, une expression du type (2. 8) ne sera plus valable.

Astarita [5] propose trois régimes différents pour le transfert de matière avec réaction chimique contrôlante :

Régime lent
Régime rapide
Régime instantané

Danckwerts [1, 6] propose deux régimes :

Régime rapide de pseudo premier ordre
Régime instantané.

Dans la colonne d'absorption de CO_2, travaillant à basse pression et sans catalyseur, la réaction la plus importante est la formation de carbamate. La réaction globale est :

$$CO_2 + 2\,R_2NH \longrightarrow R_2NCOOR_2NH_2$$

qui se produit en trois étapes :

$$a - CO_2 + R_2NH \longrightarrow R_2NHCOO^- + H^+$$

$$b - R_2NH + H^+ \longrightarrow R_2NH_2^+$$

$$c - R_2NHCOO^- + R_2NH_2^+ \longrightarrow R_2NCOOR_2NH_2$$

Le taux de carbonatation (moles de CO_2 absorbés par mole de DEA) maximum est de 0. 5

Les réactions b et c de par leur caractère ionique, peuvent être considérées comme instantanées. La réaction la plus lente, qui déterminera la vitesse de réaction, est a. Il s'agira donc d'une réaction de second ordre, dont la vitesse a pour expression :

$$r = K_2 \left[R_2NH \right] \left[CO_2 \right]$$

Avant de rentrer dans les expressions du terme de transfert proposées par Astarita et Danckwerts nous définissons les symboles employés et leur dimension.

c	Concentration du gaz absorbé libre dans le liquide mole . L^{-3}
c'_o	Valeur de c à l'interface (solubilité physique)
c'	Valeur de c à l'équilibre
c_o	Valeur de c au sein du liquide
r	Vitesse de réaction (1 ordre : mole L^{-3} T^{-1})
K	constante cinétique de réaction (1 ordre : T^{-1})
D_1	Diffusivité du composant absorbé L^2 T^{-1}
D_2	Diffusivité du réactant liquide L^2 T^{-1}
K_L	Coefficient d'absorption physique L T^{-1}
ϕ	Volume de liquide par unité d'interface L
b	Concentration du réactant liquide mole L^{-3}
b_o	Valeur de b au sein du liquide
q	Coefficient stoechiométrique (sans dimensions)
K_G	Coefficient de transfert dans le film gaz
P	Pression M L^{-1} T^{-2}
H	Constante de Henry mole^{-1} M T^{-2} L^2

Modèle d'Astarita

Si la réaction est de premier ordre, Astarita, définit le temps de réaction :

$$t_R = \frac{c - c'}{r} = \frac{1}{K}$$

Pour la réaction de second ordre qui nous concerne Astarita prend

$$t_R = \frac{1}{K_2 [R_2NH]} = \frac{1}{K_2 b_0}$$

et pour le temps de diffusion

$$t_D = \frac{D_1}{(K_L^0)^2}$$

Régime lent

Condition $t_D \ll t_R$

a) Régime diffusionel

Condition $\frac{\phi}{K_L^0} \gg t_R \gg t_D$ $\qquad Ra = K_L^0 a (c_0' - c')$

b) Régime cinétique

Condition $\frac{\phi}{K_L^0} \ll t_R \gg t_D$ $\qquad Ra = \phi . r . a (c_0' - c')$

Régime rapide

(2.9) Condition $1 \ll \sqrt{\frac{t_D}{t_R}} \ll \frac{b_0}{q c_0'}$ $\qquad Ra = \sqrt{D_1 K}\, a (c_0' - c')$

Régime instantané

(2.10) Condition $1 \ll \sqrt{\frac{t_D}{t_R}} \gg \frac{b_0}{q c_0'}$ $\qquad Ra = K_L^0 a c_0' \frac{1 + \frac{D_2}{D_1} \frac{b_0}{q c_0'}}{\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}$

Si les deux diffusivités sont égales, le terme de transfert devient

$$Ra = K_L^0 a \left[\frac{b_0}{q} + c_0' \right]$$

Si $b_o/q \gg c_o'$ le régime instantané fait dépendre le transfert seulement de la composition du liquide, ce qui conduit à quelques résultats non explicables physiquement ; en réalité comme le démontre Astarita même si le régime est instantané il y aura une région dans la colonne où le transfert sera fonction de la composition du gaz. Astarita appelle ces deux régimes :

"inner reaction regime" $\mathcal{R}a = K_L^o a \dfrac{b_o}{q}$

"surface reaction regime" $\mathcal{R}a = K_G a P Y$

Modèle de Danckwerts

Danckwerts, propose

Régime rapide de pseudo premier ordre

Condition $\sqrt{D_1 K_2 b_o} \ll K_L^o \left(1 + \dfrac{b_o}{q c_o'}\right)$

(2.11) $$\mathcal{R}a = c_o' a \sqrt{(K_L^o)^2 + D_1 K_2 b_o} \simeq \sqrt{D_1 K_2 b_o}\, a c_o'$$

si $\sqrt{D_1 K_2 b_o} \gg K_L^o$

Régime instantané

Condition $\sqrt{D_1 K_2 b_o} \gg K_L^o \left(1 + \dfrac{b_o}{q c_o'}\right)$

$$\mathcal{R}a = K_L^o a c_o' \frac{1 + \dfrac{D_2}{D_1} \dfrac{b_o}{q c_o'}}{\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}}$$

L'expression pour le régime instantané est la même dans les deux cas. De même pour le terme de transfert concernant le régime rapide si on prend dans la formule d'Astarita :

$$K = K_2 \; b_o$$

et si c' est négligeable devant c'_o

La condition que pose Danckwerts $\sqrt{D_1 K_2 b_o} \gg K_L^o$ pour simplifier le terme de transfert n'est autre que la condition d'Astarita :

$$\sqrt{\frac{t_D}{t_R}} \gg 1 \qquad \text{en effet} \qquad \sqrt{\frac{t_D}{t_R}} = \frac{\sqrt{D_1 K_2 b_o}}{K_L^o}$$

Finalement les conditions pour qu'il y ait régime rapide ou régime instantané sont équivalentes dans les deux cas si

$$\frac{b_o}{q c'_o} \gg 1$$

I-2-4 - Paramètres qui interviennent dans les expressions du terme de transfert

Constante de vitesse de réaction K_2

Danckwerts [1] donne

T°C	K_2 litre/mole.sec
25	1500
35	2500

Coefficient d'absorption physique K_L. Surface spécifique de contact "a"

Dans la même référence est donné K_L (L) et a (L) pour différents types de garnissage, ceci pour des températures comprises entre 20 et 25 °C. Nous ne tiendrons pas compte du changement de viscosité dû à la température.

Diffusivités D_1 et D_2

La référence [1] donne également les variations de D_2 : diffusivité de la DEA. Pour M = 2 moles/litre on lit $D_2 = 4.10^{-6}$ cm^2/sec.

La diffusivité du CO_2 dans l'eau est donnée pour différentes températures. Pour T = 25°C on a $D_1 = 2.10^{-5}$ cm^2/sec.

La correction à apporter pour déterminer la diffusivité du CO_2 dans des solutions aqueuses, d'après Danckwerts, consiste à la considérer comme inversement proportionnelle à la viscosité.

Constante d'équilibre pour déterminer c'

C'est la constante

$$K_C = \frac{[CO_2]\cdot[R_2NH]^2}{[R_2NHCOO^-]\cdot[R_2NH_2^+]} \qquad c' = [CO_2] = \frac{x^2}{(1-2x)^2}$$

On a d'après [1] T = 20°C $K_C = 2.3 . 10^{-4}$ mole/litre

et d'après [6] T = 18°C $K_C = 0.8 . 10^{-4}$ mole/litre

Aucune des deux références ne donne d'information sur la variation de K_C en fonction de T.

Constante d'Henry pour déterminer c'_o

On a dans [4] la solubilité physique du CO_2 dans l'eau H_W

T °C	H_W atm. litre / mole
15	22.0
20	25.5
25	29.5
30	33.5

Danckwerts [1] propose une méthode d'estimation de H à partir de H_W, pour laquelle l'erreur est inférieure à 30%. La formule est :

$$\log_{10} H/H_W - - K_s \cdot I \qquad K_s = i_+ + i_- + i_G \text{ litres/g.ion}$$

H Solubilité dans le solvant

H_W Solubilité dans l'eau

I Force ionique g.ion/litre $= \frac{1}{2} \sum$ Concentration ion. $(\text{charge})^2$

i_+; i_-, i_G Contributions du cation, anion et du gaz.

Pour estimer la solubilité du CO_2 dans des solutions d'amines carbonatées Danckwerts propose de considérer la réduction de la solubilité comme étant équivalente à celle produite par une concentration molaire égale de bicarbonate d'ammonium. Les valeurs trouvées par cette méthode sont :

T = 25°C		T = 30°C	
X	H	X	H
moles CO_2/moles DEA	atm. l/mole		
0.1	29.0	0.1	32.7
0.2	28.5	0.2	32.2
0.3	28.0	0.3	31.7
0.4	27.5	0.4	31.2
0.5	27.0	0.5	30.7

La valeur de c'_o sera

$$c'_o = \frac{P_{CO_2}}{H} = \frac{P}{H} Y$$

I-2-5 - Régimes possibles dans la colonne d'absorption de CO_2

Comme on le verra dans la partie expérimentale, la température de la DEA dans la colonne est voisine de 25°C en tête et de 35°C en fond, ces températures étant fonction du débit de DEA utilisé, puisque la quantité de chaleur fournie en régénération est constante. Tous les paramètres déterminés en I-2-4 sont fonction de la température.

Temps de réaction

$$t_R = \frac{1}{K_2 M (1-2X)}$$

T = 25°C K_2 = 1500 ℓ/mole.sec		T = 35°C K_2 = 2500 ℓ/mole.sec	
X	t_R (sec)	X	t_R (sec)
0.1	$0.41\ 10^{-3}$	0.1	$0.25\ 10^{-3}$
0.2	$0.56\ 10^{-3}$	0.2	$0.33\ 10^{-3}$
0.3	$0.83\ 10^{-3}$	0.3	$0.50\ 10^{-3}$
0.4	$1.67\ 10^{-3}$	0.4	$1.00\ 10^{-3}$

Temps de diffusion

T = 25°C $D_1 = 10^{-5} cm^2/sec$
T = 35°C $D_1 = 1.2\ 10^{-5}\ cm^2/sec$
L = 210 mole/h $K°_L = 6\ 10^{-3}$ cm/sec
L = 380 mole/h $K°_L = 7.5\ 10^{-3}$ cm/sec

Tête de colonne $t_{D\ min} = t_{D\ (L=380)} = 0.18$ sec

Tête de colonne $t_{D\ min} = t_{D\ (L=380)} = 0.21$ sec

On a toujours $t_D \gg t_R$: on peut donc exclure le régime lent.

On aura dans la colonne le régime rapide, l'instantané ou les deux avec, dans ce cas, un régime de transition.

Avant d'étudier ces deux régimes dans la colonne d'absorption de CO_2 on va vérifier la coincidence, pour le régime rapide, des deux modèles exposés en I-2-3, ce qui revient à vérifier que c'est négligeable devant c'_o.

On calculec' avec la valeur de la constante d'équilibre K_C à 20°C, la seule dont on dispose dans la littérature.

X	c' moles/cm^3
0.1	$0.036\ 10^{-7}$
0.2	$0.255\ 10^{-7}$
0.3	$1.29\ 10^{-7}$
0.4	$9.20\ 10^{-7}$

On détermine c'_o avec la valeur de H à 20°C pour comparer avec les valeurs de c'. La valeur minimale de c'_o sera en tête de colonne, où on aura la valeur de H la plus haute (taux de carbonatation bas) et la valeur de Y la plus basse

X = 0.1	H = 25.0 atm/ 1. mole
Y	c'_o moles/cm^3
0.1	$0.50\ 10^{-5}$
0.2	$1.00\ 10^{-5}$

On a donc c' de l'ordre de 10^{-7} et c'_o de l'ordre de 10^{-5}.

Nous allons voir maintenant qu'il est possible de conclure quant à la nature des régimes existant dans la colonne (rapide, instantanée, ou les deux) d'après les théories de Danckwerts et d'Astarita ; pour cela il faut que nous ayons, d'après les résultats du paragraphe I-2-3

$$\frac{b_0}{q c'_0} \gg 1$$

Pour $C'_{omax} = c'_{oFond}$ on a :

X	b_o moles/cm^3
0.1	$1.6\ 10^{-3}$
0.2	$1.2\ 10^{-3}$
0.3	$0.8\ 10^{-3}$
0.4	$0.4\ 10^{-3}$

Y	$q.c'_{o\ max}$
0.3	$2.16\ 10^{-5}$
0.4	$2.88\ 10^{-5}$

On a vu en I-2-3 les conditions pour avoir le régime rapide et le régime instantané. Danckwerts [1] précise ces inégalités de façon à avoir une précision de 10% dans les termes de transfert obtenus dans les deux cas.

Régime instantané $\sqrt{D_1 K_2 b_0} \geqslant 10\, K_L^0 \frac{b_0}{q c'_0}$

Régime rapide $\sqrt{D_1 K_2 b_0} \leqslant \frac{1}{2} K_L^0 \frac{b_0}{q c'_0}$

$$\sqrt{D_1 K_2 b_0} = \sqrt{D_1 K_2 M}\ \sqrt{1-2X}$$

$$K_L^0 \frac{b_0}{q c'_0} = \frac{K_L^0 M}{q \cdot \frac{P}{H}} \cdot \frac{1-2X}{Y}$$

d'où

Régime instantané $$\frac{\sqrt{1-2X}}{Y} \leqslant \frac{\sqrt{D_1 K_2 M}\; q P}{10\, M\, K_L^{\circ}\, H} = B$$

Régime rapide $$\frac{\sqrt{1-2X}}{Y} \geqslant \frac{\sqrt{D_1 K_2 M}\; q P}{0.5\, M\, K_L^{\circ}\, H} = A$$

A et B seront fonction de la température et du taux de carbonatation qui changeront tout le long de la colonne. Ils seront, à travers K°_L, fonction aussi du débit de DEA. En négligeant l'effet du taux de carbonatation (sur H) qui est le moins important on a, avec les valeurs données en I-2-4.

T °C	L moles/h	A	B
25	210	2.50	0.125
25	380	2.00	0.100
35	210	3.50	0.180
35	380	2.90	0.145

Pour estimer la valeur du terme $\sqrt{1-2X}/Y$ qui est, évidemment fonction de z (hauteur dans la colonne) on donne différentes valeurs à Y, composition du gaz, entre 0.05 moles CO_2/mole gaz, ordre de la valeur de Y_{TETE} et 0.35, valeur maximale que nous avons utilisée comme composition à l'entrée.

La composition de la DEA, en l'absence de capteur approprié, ne peut pas être encore mesurée, mais théoriquement la valeur maximale (formation de carbamate) est de X = 0.5 moles CO_2/mole DEA ; la valeur minimale que l'on

peut atteindre par regénération en chauffant est d'après Whuitier [7] , X=0.11

Dans la table 1 ont été calculées les valeurs de $\sqrt{1-2X}/Y$ pour différentes valeurs de X et de Y

	0.1	0.2	0.3	0.4	X
	0.90	0.77	0.63	0.45	$\sqrt{1-2X}$
0.05	18.0	15.4	12.6	9.0	
0.10	9.0	7.7	6.3	4.5	
0.20	4.5	3.7	3.1	2.2	
0.30	3.0	2.6	2.1	1.5	
0.35	2.7	2.2	1.8	1.3	
Y					

Table 1 - Valeurs de 1-2X/Y

Les valeurs dans la partie inférieure droite de cette table correspondent à des conditions que l'on rencontrera en fond de colonne, les valeurs dans la partie supérieure gauche à celles en tête de colonne.

Pour atteindre le régime instantané il faudrait donc que la composition du gaz soit plus haute et/ou qu'on dépasse la formation de carbamate (X=0.5), ceci pour la colonne et les débits utilisés. Pour s'assurer qu'on a seulement le régime rapide, en supposant que la DEA est bien regénérée, il faudra utiliser des compositions très basses dans le gaz à l'entrée (par exemple de l'ordre de 0.10 si la DEA arrive jusqu'à un taux de carbonatation de 0.4 en fond de colonne), Pour des compositions du gaz plus hautes on peut s'attendre à l'apparition d'un régime de transition en fond de colonne.

Pour ce régime de transition Danckwerts [1] recueille les résultats obtenus par certains auteurs et rassemblés dans la figure 2. En abscisse il porte $\sqrt{D_1 . K_2 . b_o}/K°_L$ et en ordonnée $R/K°_L . c'_o$. Le paramètre pour les différentes courbes est $(b_o/q.c'_o) . \sqrt{D_2/D_1}$

Régime rapide

$$\frac{\sqrt{D_1 K_2 b_o}}{K_L^o} \ll \frac{b_o}{q c'_o}$$

$$\gamma = \frac{R}{K_L^o c'_o} = \frac{\sqrt{D_1 K_2 b_o}}{K_L^o}$$

Régime instantané
(diffusivités égales)

$$\frac{\sqrt{D_1 K_2 b_o}}{K_L^o} \gg \frac{b_o}{q c'_o}$$

$$\gamma = \frac{R}{K_L^o c'_o} = \frac{b_o}{q c'_o}$$

On a représenté sur la figure 2 les trois régimes possibles.

Pour le régime de transition on aura

$$\gamma = \frac{R}{K_L^o c'_o} = f\left[\frac{\sqrt{D_1 K_2 b_o}}{K_L^o}, \frac{b_o}{q c'_o}\right] = f\left[\frac{\sqrt{D_1 K_2 M}}{K_L^o}\sqrt{1-2X}, \frac{MH}{qP}\,\frac{1-2X}{Y}\right]$$

Il faudrait déterminer cette fonction f pour avoir une expression algébrique du terme de transfert dans ce régime.

On ne doit pas perdre de vue que le but est d'intégrer le système d'équations aux dérivées partielles, dans lesquelles intervient le terme de transfert.

I-2-6 - Domaine de fonctionnement de la colonne d'absorption

La chute de pression par unité de hauteur de la colonne dépend du débit gaz, et du débit liquide, elle a la forme indiquée sur la figure 3.

La pente de la partie jusqu'à A est voisine de 2, correspondant à un régime turbulent.

Si on continue d'augmenter le débit gaz on passe à une seconde région AB dans laquelle la pente est supérieure à 2. L'écoulement dans la colonne a le même aspect , c'est-à-dire qu'on continue à avoir un écoulement de gaz et de liquide dispersé dans le gaz.

S'agissant d'un régime turbulent en pente supérieure à 2 n'aurait pas de sens physique, en fait, on l'explique en supposant que la section de passage du gaz dans la colonne a diminué, c'est-à-dire que sa vitesse a augmenté, donnant lieu à une chute de pression plus grande.

Si on augmente encore le débit gaz on passe à une troisième région caractérisée par une chute de pression encore plus grande ; la quantité de liquide par unité de volume de la colonne augmente rapidement : il y a engorgement : le liquide va commencer à remplir toute la colonne, on aura du gaz dispersé dans le liquide, ce gaz entraîne des gouttes de liquide à la sortie.

Pour le bon fonctionnement de la colonne, il faut que l'on soit loin de l'engorgement, mais en général il sera intéressant de rester dans la zone AB où la vitesse du gaz est plus grande qu'en 1, ceci diminuera la résistance au transfert dans la couche limite côté gaz.

Pour le cas particulier qui nous intéresse, la résistance principale au transfert étant dans la couche limite côté liquide, on peut garder comme seule contrainte que la colonne ne soit pas engorgée.

Pour s'assurer qu'on est loin de l'engorgement, on prend normalement une section qui, avec le débit gaz à traiter, nous donne une vitesse de l'ordre de 70% de la vitesse d'engorgement. Cette dernière est calculée par exemple avec la courbe de Lobo. Dans la figure 4 sont représentées la ligne d'engorgement et celle correspondant à une vitesse du gaz réduite à 70%. On a pris le gaz comme étant de l'air et on a fait une approximation linéaire de la courbe de Lobo dans le domaine intéressant.

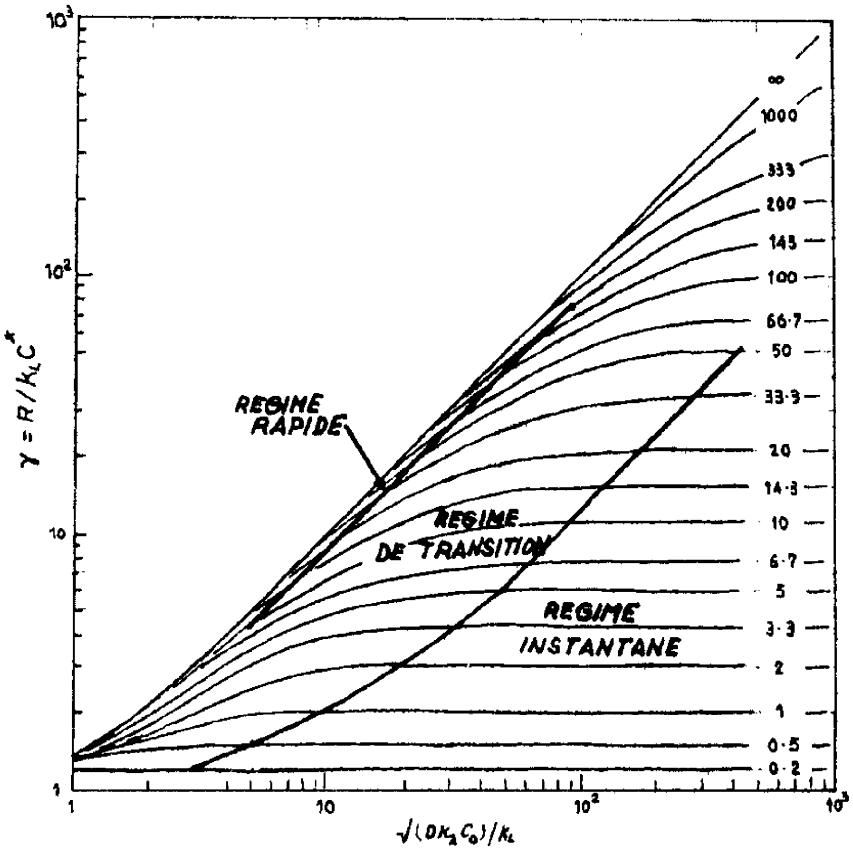


Fig 2 [1]

Transition entre le régime rapide et le régime instantané

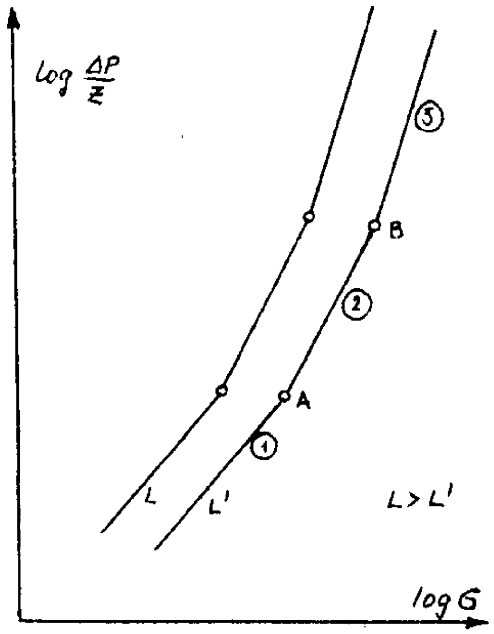


Fig 3

Chute de pression dans une colonne à garnissage

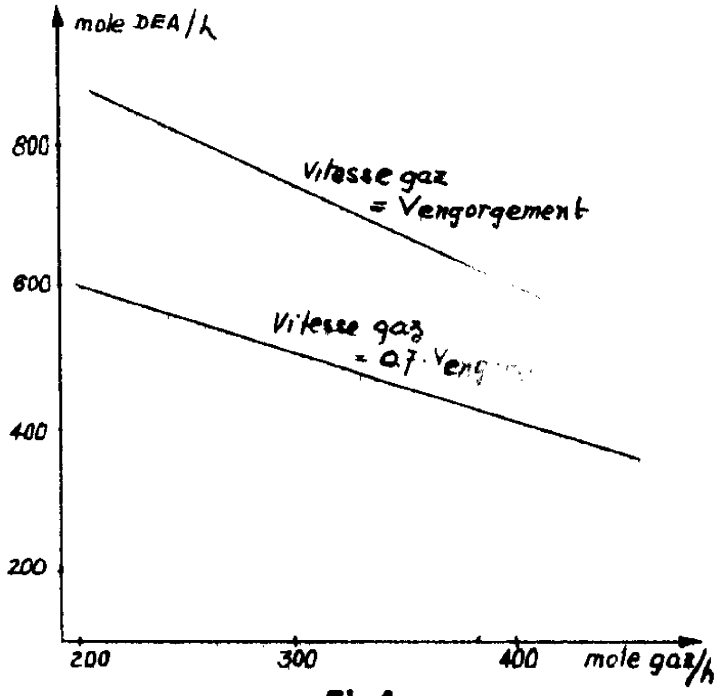


Fig 4

Débits maximums dans la colonne d'absorption (déduits de la courbe de Lobo)

I-2-7 - Equations aux dérivées partielles pour les régimes possibles dans la colonne

$$\boxed{\begin{aligned} &(2.12) \qquad W\frac{\partial X}{\partial t} = L\frac{\partial X}{\partial z} + Ra \\ &(2.13) \qquad \frac{U}{(1+y)^2}\frac{\partial y}{\partial t} = -G_A\frac{\partial y}{\partial z} - Ra \end{aligned}}$$

$X = X(z,t)$ $\qquad L = L(z,t)$ $\qquad W = W(L)$

$Y = Y(z,t)$ $\qquad G_A = G_A(t)$ $\qquad U = cte$

Régime rapide

$$(2.14) \qquad Ra = \sqrt{D_1 K_2 M (1-2X)}\; a \cdot \frac{P}{H}\, Y = K_1 \sqrt{1-2X}\; \frac{y}{1+y}$$

où K_1 est fonction de la température, donc de z

Régime de transition

$$(2.15) \qquad Ra = f\left[K_2\sqrt{1-2X}\;,\; K_3\,\frac{1-2X}{T}\right] a$$

$$K_2 = K_2(T, L) \qquad K_3 = K_3(T)$$

Régime instantané

Ce régime n'apparaîtra pas théoriquement dans la colonne

$$Ra = K_L^c c_0' a \frac{1 + \frac{D_2}{D_1}\frac{b_0}{q c_0'}}{\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}$$

Dans l'expression de R.a, 1 n'est pas négligeagle devant $\frac{D_2}{D_1}\frac{b_0}{q c_0'}$ puisque le rapport des diffusivités est de l'ordre de 10^{-1}.

CHAPITRE II

RESOLUTION DES EQUATIONS DU MODELE MATHEMATIQUE

II-1 - BUT RECHERCHE

On cherche à établir la loi de commande prédictive sur $L_T = L(Z,t)$ qui permette pendant le régime transitoire d'avoir

$$y_T = y(Z,t) \leqslant y_{MAX}$$

$$\min \int_0^t L_T(t)\,dt$$

tous les coûts de fonctionnement étant associés au débit de DEA utilisé (coût de régénération, coût de pompage, ...).

La sortie du processus est localisée, la commande et les perturbations sont aussi localisées, d'où l'intérêt, pour faciliter la détermination de la loi de commande, de passer à une représentation mathématique externe du système, représentation qui nous donne la variable de sortie $y(Z,t)$ en fonction des variables d'entrée $X(Z,t)$, $L(Z,t)$, $G_A(0,t)$ et $y(0,t)$.

II-2 - TYPE DE MODELE

Les compositions du gaz et du liquide dans la colonne sont données par des équations aux dérivées partielles de premier ordre (en négligeant la diffusion axiale), non linéaires à travers le terme de transfert, et à coefficients variables (débits).

$$W \frac{\partial x}{\partial t} = L \frac{\partial x}{\partial z} + f(x,y)$$

$$\frac{U}{(1+y)^2} \frac{\partial y}{\partial t} = -G_A \frac{\partial y}{\partial z} - f(x,y)$$

Avec comme conditions aux limites :

$$y(0,t) = y_F(t)$$
$$x(z,t) = x_T(t)$$

Le débit liquide dans la colonne est donné par

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z}$$

Avec comme condition limite $L(z,t) = L_T(t)$

Sauf pour des faibles valeurs de y_F (cf. I-2-5) il y aura, théoriquement, coexistence de deux régimes (régime rapide et régime de transition) dans la colonne. Il faudrait, pour en tenir compte, déterminer une expression du terme de transfert dans le régime de transition et établir un critère de transition entre les deux régimes.

II-3 - PROBLEMES POSES PAR L'OBTENTION D'UNE REPRESENTATION EXTERNE. ETUDE DE CERTAINES METHODES EXISTANTES

Les difficultés rencontrées dans l'obtention d'une représentation externe théorique peuvent être séparées en trois classes :

a) Il s'agit, en fait, d'un réacteur chimique. La réaction chimique est de second ordre ce qui, mathématiquement, se traduit par un terme de réaction non linéaire.

b) Ce réacteur est distribué dans l'espace ce qui introduit les dérivées partielles.

c) La variable de commande est un débit ainsi qu'une des perturbations, d'où l'existence des coefficients variables.

a) Les non linéarités dues aux réactions chimiques, lorsque l'ordre est supérieur à un, sont dans la plupart des cas trop dures pour qu'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement soit valable quantitativement, c'est seulement par simulation qu'on peut espérer obtenir ces résultats. Dans le cas particulier de la colonne d'absorption de CO_2 par DEA on a deux problèmes supplémentaires : une connaissance relativement pauvre des régimes cinétiques présents, et des changements importants du point de fonctionnement (cas de traitement du gaz naturel).

b) La résolution du système d'équations aux dérivées partielles avec un terme de transfert linéaire et des coefficients constants, peut se faire par la méthode de la transformée de Laplace aboutissant à une représentation par transmittances ; cette méthode implique de passer aux équations incrémentales valables autour d'un point de fonctionnement. Les gains de ces transmittances ne seront que les approximations du premier ordre du modèle statique des variables de sortie que l'on aurait pu obtenir à partir des équations différentielles en régime permanent.

Il faut distinguer deux cas :

- avec diffusion axiale : L'intégration par rapport à la coordonnée spatiale fait apparaître la variable de Laplace p sous le radical, la seule solution est de faire $p = j\omega$ et d'étudier la réponse en fréquence en donnant des valeurs numériques aux paramètres et aux variables d'entrée [9 , 10]

- sans diffusion axiale : On peut intégrer et aboutir aux transmittances. Le résultat de l'intégration fera apparaître des retards purs sans signification physique ; ceci est dû au fait que l'on a négligé la diffusion qui, physiquement, existe toujours.

Les transmittances auxquelles on aboutit peuvent être très complexes ; en vue d'une utilisation pratique de ces transmittances certains auteurs [2, 8] proposent des approximations (séries de Neumann, diffusion de Taylor) (voir Annexe, page A1).

Dans le cas d'un terme de transfert linéaire, on peut obtenir la solution par séparation de variables. La solution est obtenue comme une série de solutions particulières fonction du temps et de la coordonnée spatiale. La linéarisation autour d'un point de fonctionnement n'est pas nécessaire.

La résolution des équations pourra se faire, évidemment, par discrétisation, sur calculateur, mais en donnant des valeurs numériques aux paramètres et aux variables d'entrée.

c) L'introduction de coefficients variables ne pose pas de problèmes très graves. Par la méthode de la transformée de Laplace, par exemple, on résout le problème grâce aux équations incrémentales qui seront à coefficients constants ; celles-ci introduiront cependant des termes qui nécessiteront la solution préalable du régime statique.

Dans le cas du pilote d'absorption de CO_2 par DEA on aura une source d'erreurs inévitable quelle que soit la méthode si le régime de transition s'établit réellement dans la colonne.

Si on se place dans des conditions où théoriquement le seul régime existant est le régime rapide (basses valeurs de y_F) la seule méthode utilisable sera la simulation. Auparavant, il faudra déterminer les coefficients des termes de diffusion axiale pour que la discrétisation de la coordonnée spatiale n'introduise qu'un terme de diffusion égal au terme réel [2, 8] (voir annexe page A. 4). Ces coefficients de diffusion axiale (diffusion superposée à un débit) doivent être déterminés expérimentalement, dans le cas d'un écoulement complexe comme celui du gaz et du liquide à travers un garnissage.

Quant à la méthode d'intégration analytique, elle nécessite la linéarisation du terme de transfert : on peut donc s'attendre à trouver des résultats quantitatifs faux. Pour le régime permanent cependant, ils pourront être "valables" pour une valeur particulière de z (ce serait pour z = Z dans le cas où on s'intéresse à la régulation de y (Z)) si on détermine les coefficients de l'approximation linéaire de façon à réaliser

$$|Y^*(z) - Y(z)| < \varepsilon$$

dans tout le domaine de fonctionnement de la colonne, $Y^{\star}(Z)$ étant la solution obtenue par intégration du système simplifié et Y(Z) celle obtenue par simulation des équations non linéaires.

On doit s'interroger aussi sur la validité qualitative des résultats obtenus par simplification du terme de transfert. Supposons que le gaz à traiter dans la colonne est un gaz dilué

$$U_{AIR} \simeq U_{TOTAL} = cte$$

$$W \frac{\partial X}{\partial t} = L \frac{\partial X}{\partial z} + Ra(X, y)$$

$$U \frac{\partial y}{\partial t} = - G_A \frac{\partial y}{\partial z} - Ra(X, y)$$

avec Ra(X, y) correspondant au régime rapide.

$$Ra = K \sqrt{1-2X} \cdot Y = K \sqrt{1-2X} \frac{y}{1+y} \simeq K \sqrt{1-2X}\, y$$

X, taux de carbonatation de la DEA intervient dans le terme de transfert à travers la constante de vitesse de réaction comme nous l'avons vu en I.2.3 (la réaction pouvant être considérée du premier ordre).

On fait l'approximation linéaire de Ra du type

$$Ra = K(L)\ y$$

faisant ainsi dépendre y directement du débit d'absorbant au lieu de la concentration de DEA libre dans l'absorbant (1-2X). Cette approximation sera valable physiquement si X varie peu tout le long de la colonne. Si on intègre l'équation du bilan gaz par la méthode de la transformée de Laplace (voir Annexe, page A.5) on va trouver comme régimes transitoires :

- pour $y(Z, p)/y(O, p)$: un retard pur

- pour $y(Z, p)/L(Z, p)$: une transmittance assimilable à un premier ordre, L intervenant sur un coefficient de transfert

- pour $y(Z, p)/G_A(0, p)$: une transmittance du type premier ordre retardée si on suppose que $G_A(z, p)/G_A(0, p)$ contient un retard pur.

Un terme de transfert linéaire du type

$$Ra = A.X + B.y$$

du fait du couplage qu'il établit entre les deux équations nous donnera, dans les trois cas, des réponses du type retard pour plus constante de temps comme c'est le cas sur le pilote.

On peut trouver la solution du système d'équations avec cette approximation pour A = - B (échangeur thermique) dans la référence 2. Les transmittances qui sont obtenues font apparaître des fonctions hyperboliques, dont on peut prendre un développement limite en vue de leur utilisation pratique. La résolution avec A et B quelconques est plus lourde mais tout porte à penser que l'on obtiendra les mêmes résultats qualitatifs.

Compte tenu de l'incertitude même théorique attachée à la vitesse de réaction, aux paramètres cinétiques que la caractérisent, il est impossible d'échapper à une expérimentation sur pilote. Cette expérimentation aura pour but d'identifier les paramètres intervenant dans les coefficients des équations différentielles définissant la loi de commande sur L_T.

Il faut souligner ici qu'aucune représentation déduite des lois de la physique ne pourra expliquer théoriquement la présence dans les transmittances de retards purs qui peuvent s'avérer très pratiques pour établir une loi de commande.

CHAPITRE III

ETUDE EXPERIMENTALE

III-1 - RESULTATS EN REGIME PERMANENT

III-1-1 - Mesure des variables d'entrée et de sortie

a) Composition en tête de colonne. Composition en fond de colonne

Ces compositions sont mesurées à l'aide de deux analyseurs à infrarouges dont la précision, donnée par le constructeur, est de 1% de la déviation totale, les étendues de mesure étant 0-100% et 0-50% CO_2. Ces analyseurs doivent travailler avec un débit et une pression constants (le débit conseillé par le constructeur est de 60 litres/heure). Dans le cas du pilote on a laissé la sortie des analyseurs à l'atmosphère, le débit de gaz perdu de cette façon étant négligeable devant le débit total.

L'étalonnage de ces analyseurs a été réalisé avec des gaz étalonnés auparavant à l'aide d'un spectographe de masses. Les courbes d'étalonnage sont données en Annexe (page A. 11).

b) Débit d'air. Débit de DEA

Ces débits sont mesurés avec des diaphragmes et des cellules de pression différentielle. La précision est de l'ordre de 5%. Les courbes d'étalonnage sont données en Annexe (pages A.12 et A. 13)

III-1-2 - Résultats expérimentaux en régime permanent

On a mesuré la composition du gaz en tête de colonne pour différents points de fonctionnement (y_F, L_T; G_A). Ces valeurs sont données dans les figures 5 à 9.

Fig. 5 y_T en fonction de y_F, avec G_A et L_T comme paramètres.

Domaine étudié

L_T 210 moles/h ⟶ 380 moles/h
G_A 150 moles/h ⟶ 260 moles/h
y_F 0.30 ⟶ 0.50 moles CO_2/mole air

Fig. 6 y_T en fonction de y_F, pour G_A = 190 moles/h, L_T 210 et 300 moles/h

y_F 0.10 ⟶ 0.50 moles CO_2/mole air

Figure 7 y_T en fonction de L_T avec y_F et G_A comme paramètres.
Ce sont les mêmes points que dans la figure 5.

Figure 8 y_T en fonction de L_T pour G_A = 190 moles/h, y_F 0.28 - 0.48
Ce sont les points de la figure 7 complétés les points $y_T = y_F$ pour $L_T = 0$

Figure 9 y_T en fonction de G_A avec y_F et L_T comme paramètres

Ces valeurs ont été obtenues avec :

Colonne absorption	Pression fond 250 mbar
	Température DEA entrée 20-30°C
	Température DEA sortie 25-35°C
Régénération	Pression 100 mbar
	Température DEA ébullition
	Température tête colonne 95°C

La température de la DEA à l'entrée de la colonne est fonction de L_T, celle de sortie de L_T et de y_F. On observe des variations de 5% dans la température en tête de la régénération avec L_T.

La quantité de chaleur fournie en régénération étant constante on peut s'attendre à des changements de composition de la DEA régénérée, lorsque varie L_T. Cette composition n'est actuellement pas mesurable ; cependant les variations de la température en tête de colonne sont une indication sur ces modifications.

Une autre perturbation pour la colonne d'absorption est la température de la DEA, qui agira sur la vitesse de réaction. On pourrait réguler la température d'entrée en agissant sur le débit d'eau dans l'échangeur thermique juste avant la colonne, mais les variations avec la composition du gaz ne peuvent pas être annulées. On a essayé de déterminer l'effet de ces changements de température en faisant la mesure de y_T pour un même point de fonctionnement avec des températures différentes (20°C et 30°C) de la DEA à l'entrée, le changement en y_T est inférieur à 0.01 moles CO_2/mole air (cette mesure n'est valable que si la composition de la DEA à l'entrée est la même dans les deux cas).

III-1-3 - Modèle statique expérimental

En vue de déterminer une relation mathématique entre y_T et les variables d'entrée (y_T, L_T et G_A) en régime permanent il faudra définir auparavant le domaine de variation de celles-ci.

Un domaine couvrant de grandes variations des trois variables d'entrée n'aura de sens que pour le projet de différentes colonnes d'absorption ; on peut s'attendre dans ce cas à trouver des relations non linéaires entre y_T et les trois variables d'entrée.

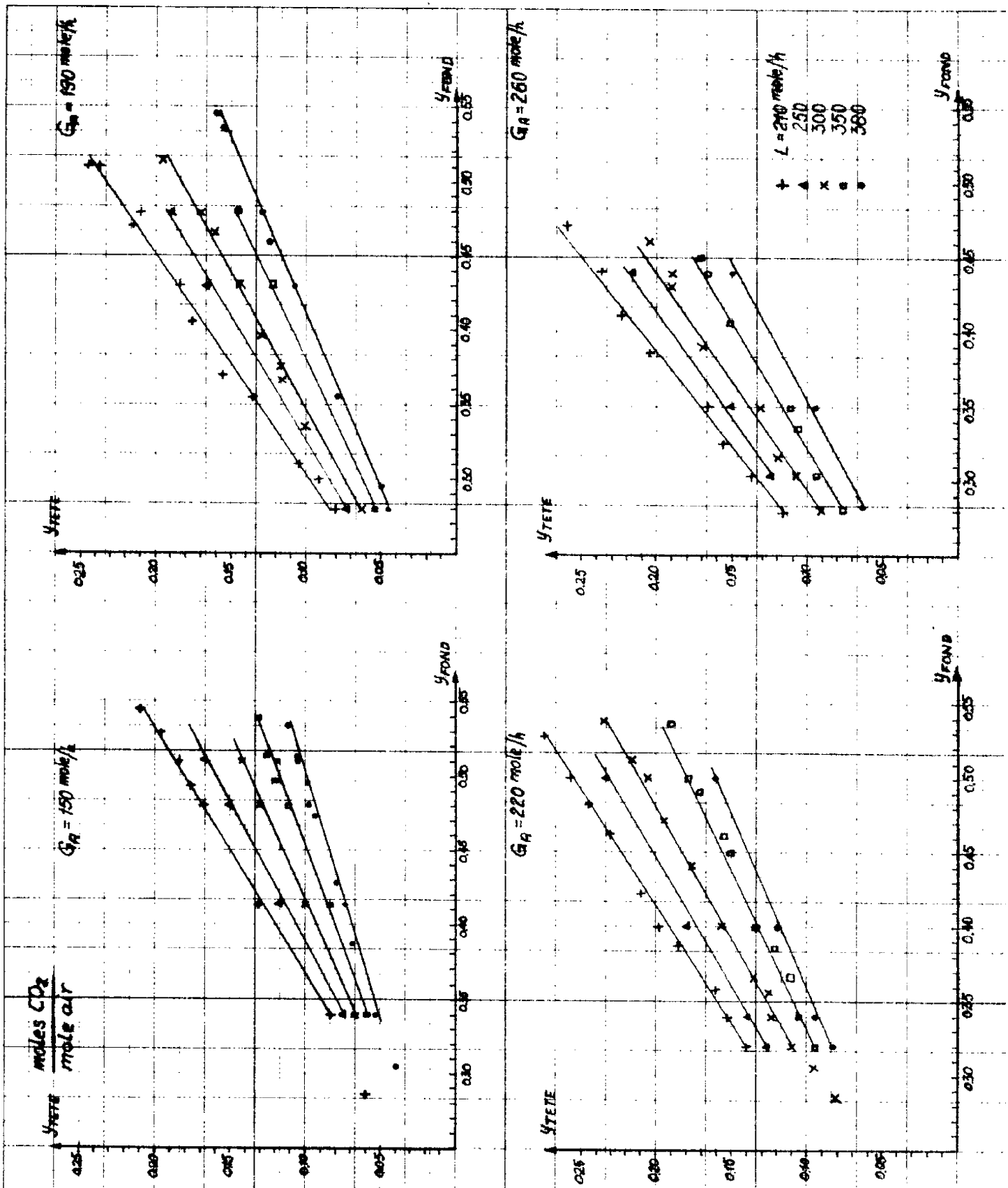


FIG.5 Résultats expérimentaux en régime statique . Plan y_T ; y_F

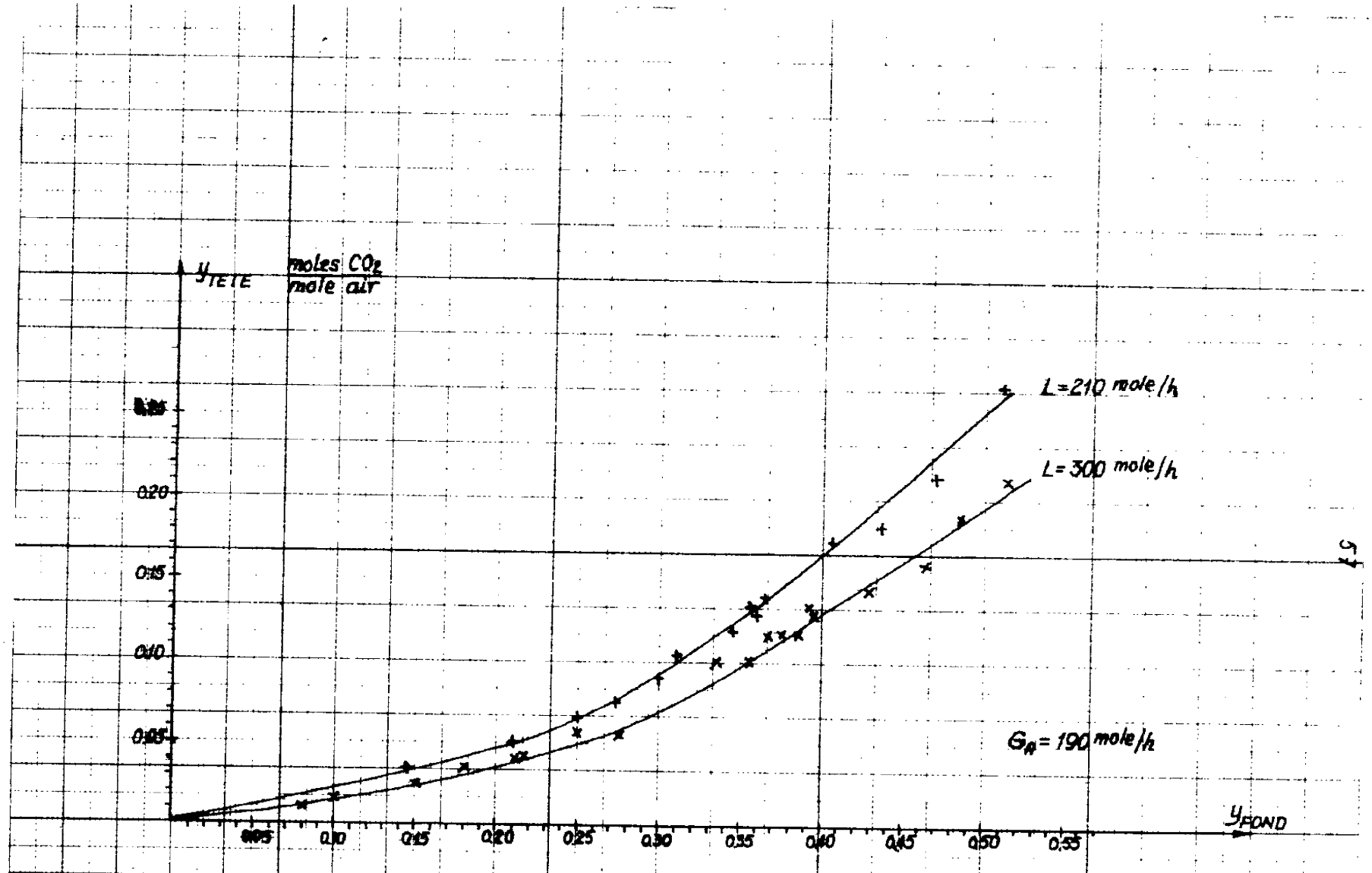


FIG. 6 Résultats expérimentaux en régime statique. Plan y_T ; y_F

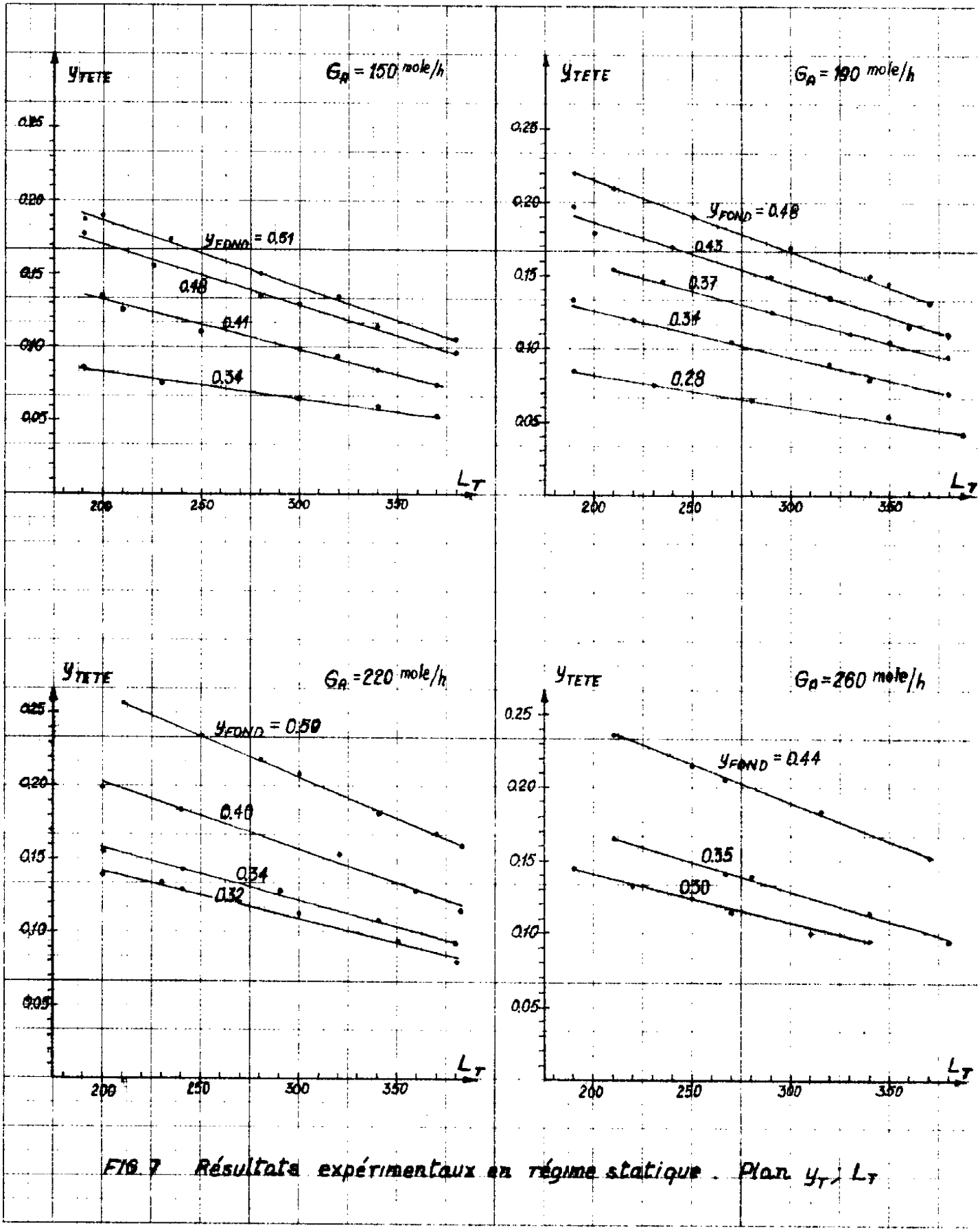


FIG 7 Résultats expérimentaux en régime statique. Plan y_T ; L_T

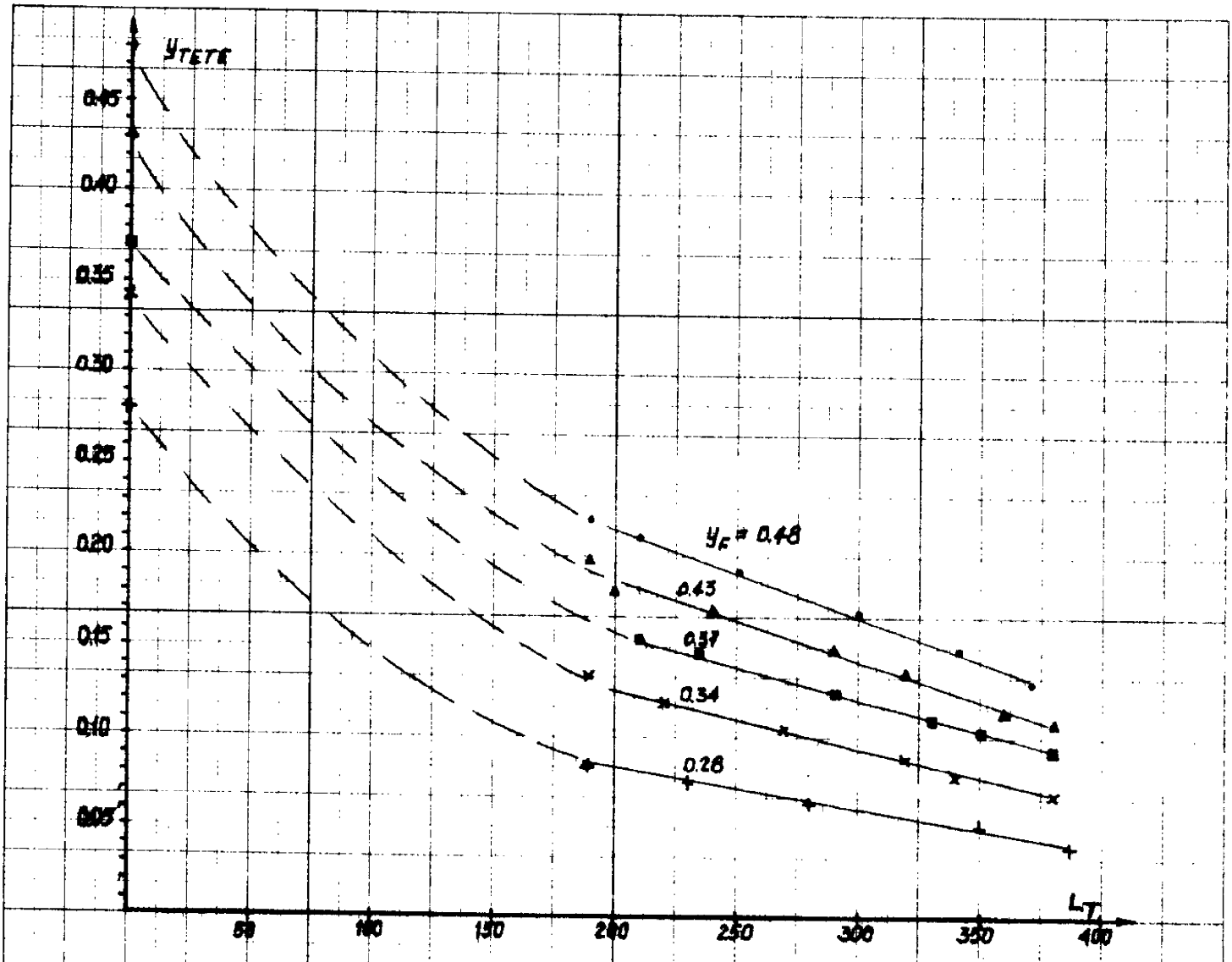


FIG 8 Résultats expérimentaux en régime statique. Plan y_T ; L_T

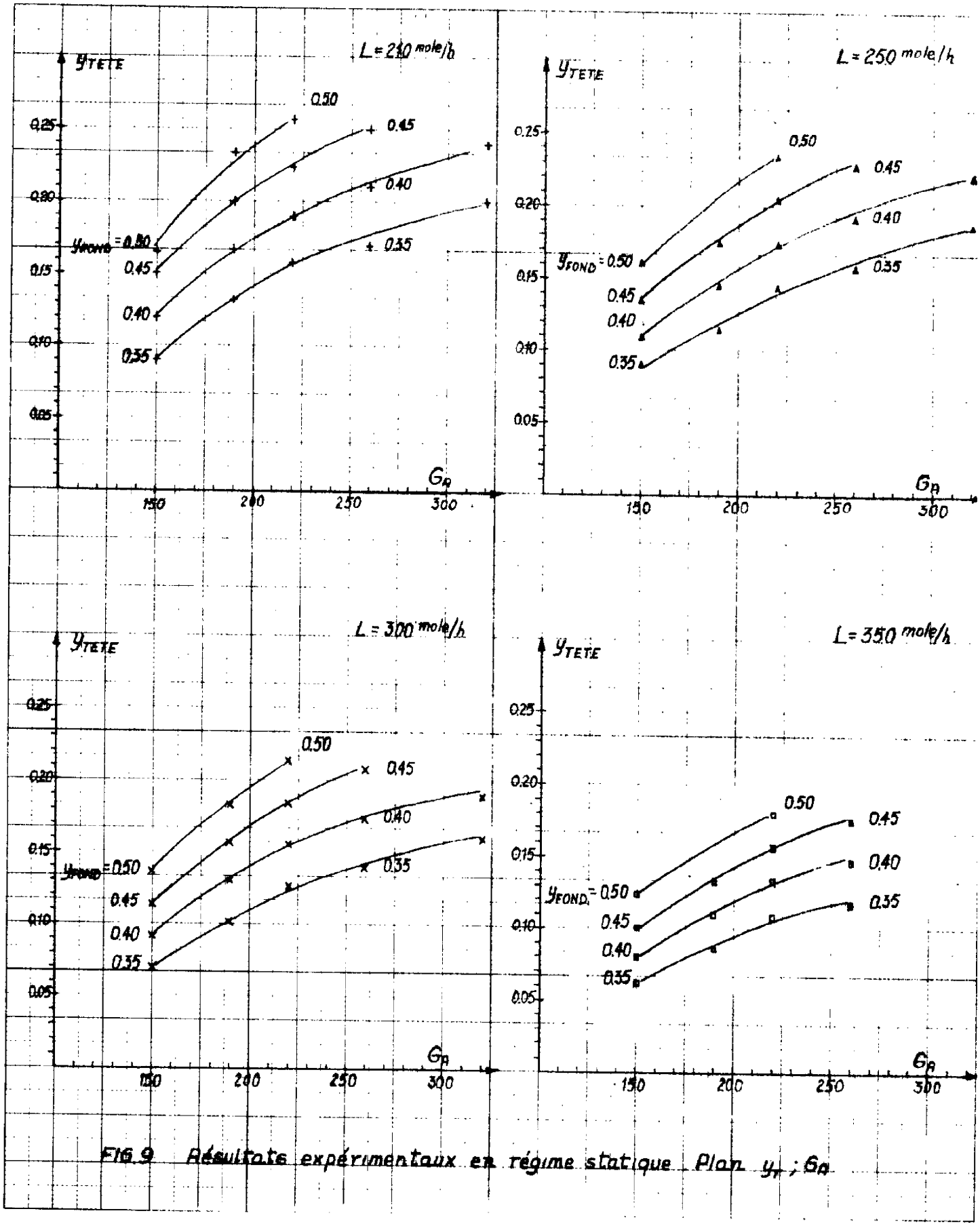


FIG. 9 Résultats expérimentaux en régime statique Plan y_T ; G_A

Une installation particulière sera forcément limitée dans les amplitudes acceptables de changement des variables d'entrée. Le problème, d'ailleurs assez simple en général, qui se pose dans ce cas est de retenir l'expression la plus simple compatible avec la précision recherchée à l'intérieur du domaine de fonctionnement.

Lorsqu'on s'intéresse au problème de la commande du débit L_T permettant de maintenir y_T constant en présence des perturbations, on se fixe la contrainte sur y_T, et on détermine les intervalles de variation de L_T, G_A et y_F de façon que la commande puisse, dans tous les cas, ramener y_T à une valeur

$$y_T \leqslant y_{Tmax}$$

On a pris : $y_{Tmax} = 0.12$ moles CO_2/mole air $\pm$ 0.01
G_A : 150 - 260 moles/h
L_T : 210 - 380 moles/h

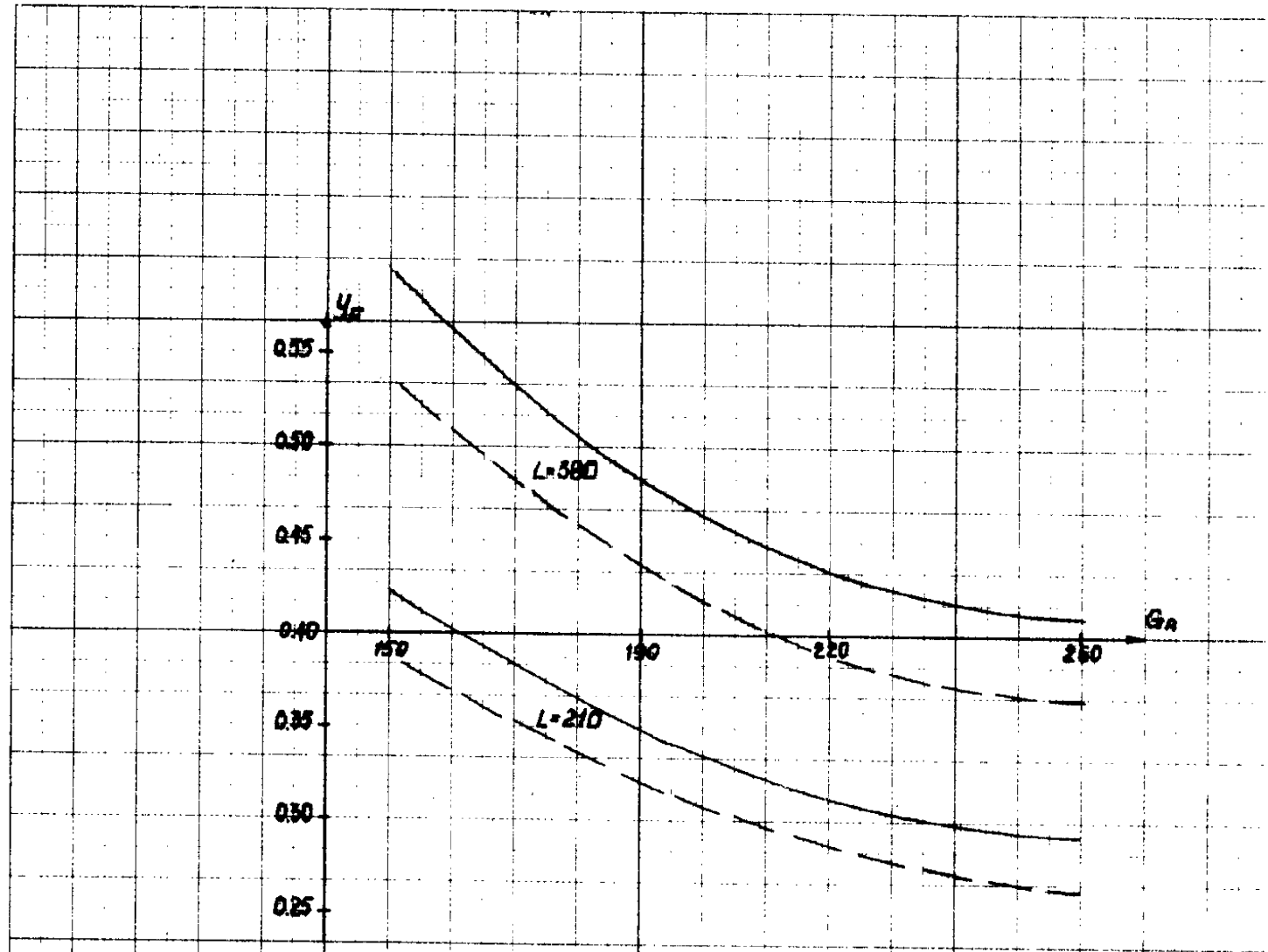
Dans la figure 10 sont représentés les intervalles maximums de variation de y_F pour chaque valeur de G_A tels qu'en agissant sur L_T on puisse réaliser

$$y_T \leqslant y_{Tmax}$$

Dans ce domaine on a essayé dans un premier temps d'obtenir un modèle à paramètres constants reliant y_T à des changements de y_F et de G_A, avec L_T constant. Une approximation du type

$$\Delta y_T = a \cdot \Delta y_F + b_1 \cdot \Delta g_A + b_2 \cdot (\Delta g_A)^2 \qquad (3.1)$$

apparaît comme suffisante pour une précision sur y_T



Intervalles de variation de y_{ROND} pour
L 210 - 380 mole DEA/h
G_A 150 - 260 mole AIR/h

—— y_T = 0.13 mole CO_2/mole AIR

- - - y_T = 0.11

FIG. 10

$$\left| y_{T\ REEL} - y_{T\ CALCULE} \right| \leqslant 0.01 \text{ moles } CO_2/\text{mole air}$$

dans tout le domaine

G_A = 150 moles/h	y_F 0.38 - 0.54 moles CO_2/mole air
G_A = 190	y_F 0.32 - 0.48
G_A = 220	y_F 0.30 - 0.44
G_A = 260	y_F 0.28 - 0.42

Dans l'expression (3.1), Δg_A est exprimé en mole/h.cm^2 pour une simple raison technique concernant l'inversion de matrices, les valeurs numériques devant être du même ordre de grandeur que celles de Δy_F.

Les coefficients a, b_1 et b_2 sont déterminés par regression linéaire en minimisant l'erreur quadratique moyenne. Les résultats obtenus pour ces coefficients au milieu du domaine de fonctionnement sont :

Point fonctionnement			Coefficients		
L_T mole/h	G_A mole/h	y_F	a	b_1 (mole/h.cm^2)$^{-1}$	b_2 (mole/h.cm^2)$^{-2}$
210	220	0.42	0.67	0.050	- 0.042
250	220	0.42	0.62	0.048	- 0.039
300	220	0.42	0.55	0.043	- 0.040
350	220	0.42	0.46	0.034	- 0.035
380	220	0.42	0.44	0.030	- 0.039

Pour les changements de L_T on voit (figure 7) qu'une approximation linéaire est suffisante. Pour $G_A = 220$ et $y_F = 0.42$ on lit

L_T	$\ell_T = L_T/S$	y_T
210	2.63	0.205
250	3.13	0.185
300	3.75	0.165
350	4.40	0.140
380	4.75	0.125

d'où l'on tire

$$\Delta y_T = -0,038 \, \Delta l_T$$

En définitive

$$\Delta y_T = -0.038 . \Delta l_T + a . \Delta y_F + b_1 . \Delta g_A + b_2 . (\Delta g_A)^2$$

d'où la loi de commande en boucle ouverte ($\Delta y_T = 0$)

$$\Delta l_T = \frac{1}{0,038} \left[a . \Delta y_F + b_1 . \Delta g_A + b_2 . (\Delta g_A)^2 \right]$$

On peut voir maintenant s'il faut considérer les coefficients a, b_1 et b_2 fonction de L_T compte tenu de la précision désirée sur y_T ou s'il est suffisant de prendre les valeurs moyennes.

Pour cela on a comparé avec les résultats réels, ceux obtenus à partir de :

1) un modèle à paramètres constants (valeurs moyennes)

$$\Delta y_T = -0.038\,\Delta l_T + 0.55\,\Delta y_F + 0.030\,\Delta g_A - 0.038\,(\Delta g_A)^2$$

2) un modèle à paramètres fonctions de l_T. On a cherché à représenter les coefficients a, b_1 et b_2 par :

$$a = c_1 + d_1 \cdot l_T$$
$$b_1 = c_2 + d_2 \cdot l_T$$
$$b_2 = c_3 + d_3 \cdot l_T$$

$c_1 \ldots d_3$ étant déterminés par régression linéaire, en minimisant l'erreur quadratique moyenne. Les résultats sont :

$$a = 0.96 - 0.11 \cdot l_T$$
$$b_1 = 0.077 - 0.009 \cdot l_T$$
$$b_2 = -0.045 + 0.002 \cdot l_T$$

Ces deux modèles ont été comparés pour des variations autour du point de fonctionnement :

$L_{TO} = 380$ moles/h $\quad G_{AO} = 220$ moles/h

$y_{FO} = 0.42$ moles CO_2/m. air

auquel correspond une valeur

$y_{TO} = 0.125$

Le modèle à paramètres constants nous donne des erreurs absolues sur y_T calculée allant jusqu'à 0.024 moles CO_2/mole air ; on retiendra donc le modèle adaptatif qui, lui, nous permet d'atteindre la précision désirée sur y_T. Ce genre de modèle conduirait à une complexité plus grande d'un bloc de commande spécifique, qui devrait calculer les coefficients a, b_1 et b_2 chaque fois qu'on arrive à un régime permanent, cette complexité est absolument mineure lorsque l'on se propose de conduire le processus par un calculateur numérique comme c'est le cas de notre pilote par le C 90-10.

Le système de commande en boucle ouverte pour le régime statique est représenté sur la figure 11.

III-2 - RESULTATS EN REGIME TRANSITOIRE

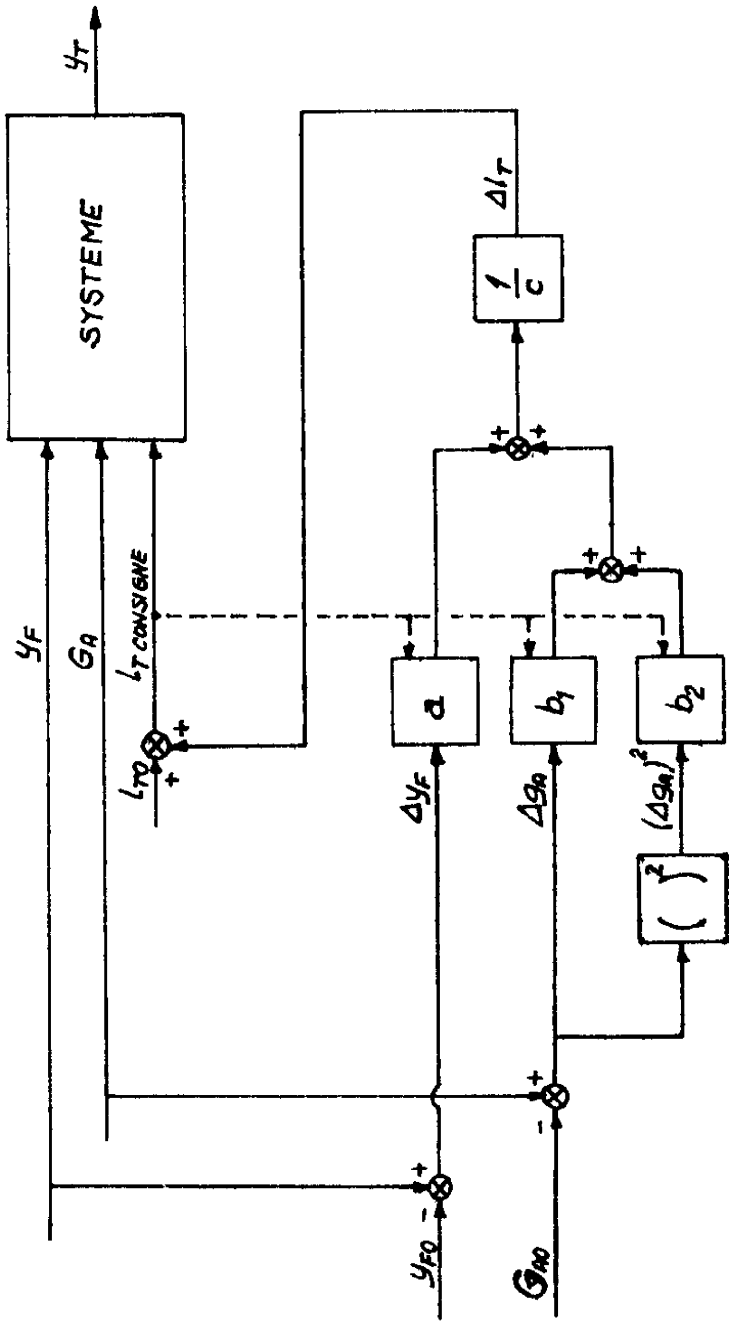
III-2-1 - Système d'analyse du gaz à l'entrée de la colonne

Les résultats expérimentaux nous permettent de considérer l'ensemble Tube-Filtre-Analyseur (figure 12) comme un système de premier ordre avec un retard pur.

On a relevé la réponse de l'analyseur à des échelons de composition produits en changeant manuellement le gaz en (1) (figure 12). On donne en Annexe des exemples des réponses obtenues (courbes AF1, page A.14)

AF1

T (sec) : retard	τ (sec)	T (sec)	τ (sec) : cte. de temps
3.6	1.7	2.8	1.7
3.5	1.8	3.5	1.6
3.7	1.6	3.6	1.6
3.8	1.9	3.4	1.6
3.6	1.7	3.5	1.7



Système de commande en boucle ouverte pour le régime statique

Fig 11

Pour la mesure de la constante de temps et du retard correspondant il faut travailler avec un débit de gaz constant à travers l'analyseur.

III-2-2 - Mélangeur. Acheminement des gaz jusqu'à la colonne

On a produit des échelons de débit de CO_2 et d'air à l'entrée du mélangeur par des électrovannes. Le système est représenté sur la figure 14.

Pour réaliser un échelon de débit de CO_2, par exemple, on laisse le régulateur du débit d'air en position automatique, celui de CO_2 en manuel on ajuste le robinet A pour obtenir l'amplitude nécessaire pour l'échelon ; il suffit alors de déclencher l'électrovanne.

Les courbes AF3 en Annexe (page A. 15), montrent la réponse du débit de gaz à la sortie du mélangeur pour des échelons de débit d'air ou de CO_2.

L'utilisation de sources indépendantes, air ou CO_2, a permis pendant l'expérimentation, des changements de composition du gaz à l'entrée de la colonne, sans modification du débit d'air.

La réponse du débit à la sortie du mélangeur est suffisamment rapides (temps pour 63. 5% de la valeur finale bien inférieur à 0.5 sec) pour considérer que la transmittance correspondante est un simple gain. Le capteur utilisé pour le débit à la sortie du mélangeur était une cellule de pression différentielle ACB à sortie électrique.

On peut maintenant déterminer la dynamique associée au mélangeur proprement dit, et celle correspondante aux tuyaux qui conduisent le gaz depuis le mélangeur jusqu'au fond de la colonne. Pour cela, après un échelon de débit de CO_2, on mesure la composition du gaz après le mélangeur et juste à l'entrée de la colonne (à la connexion du manomètre en fond de colonne). On donne en Annexe des exemples de réponses obtenues (AF3 et AF4, pages A. 15 et A. 16).

En approchant ces réponses par celles d'un système de premier ordre plus un retard pur on a :

AF3	G_A = 150 moles/h		G_A = 170		G_A = 190	
	T (sec)	τ	T	τ	T	τ
	5.1	1.7	4.8	1.6	4.0	1.2
	4.6	1.5	4.2	1.5	4.6	1.5
	5.2	1.8	4.7	1.8	4.5	1.6
	4.6	1.7	4.2	1.4	4.2	1.7
	5.2	1.9	5.0	1.6	4.5	1.7
AF4	G_A = 150		G_A = 170		G_A = 190	
	T (sec)	τ	T	τ	T	τ
	5.1	1.5	4.9	1.5	4.6	1.4
	5.2	1.6	4.9	1.6	4.6	1.4
	5.1	1.5	4.9	1.4	4.7	1.6
	5.3	1.6	5.0	1.6	5.0	1.4
					4.8	1.5

On ne tiendra pas compte des légères variations de T et τ avec le débit d'air. On considère que la constante de temps trouvée est celle du système d'analyse déterminée en III-1-2-1. En prenant une valeur moyenne du retard à l'entrée de la colonne de 5 sec on aura comme transmittances, sans considérer les gains

Système d'analyse des gaz à l'entrée $\dfrac{e^{-3.5p}}{1+1.5p}$

Mélangeur + Tubes jusqu'à la colonne $e^{-1.5p}$

Et pour les changements de débit

Mélangeur + Tubes 1

Pour le retard pur de 1.5 sec correspondant au mélangeur et aux tubes, on peut le scinder à partir des valeurs moyennes des mesures en un retard de 1 sec correspondant au mélangeur et un retard de 0.5 sec pour les tubes.

III-2-3 - Système d'analyse à la sortie de la colonne

On peut, expérimentalement, constater que l'ensemble Tube-Déverseur-Pot de séparation Filtre-Analyseur (figure 13) est assimilable à un système de premier ordre avec un retard pur.

On a relevé la réponse de ce système d'analyse à des "échelons" de composition produits par le mélangeur, la prise de gaz qui est en tête de la colonne étant connectée à la sortie du mélangeur (point 1 dans la figure 12). Ce sont les courbes AT1 en Annexe (page A 17).

$G_A = 150$		$G_A = 190$	
T (sec)	τ (sec)	T	τ
6.9	5.9	6.7	5.4
7.5	6.9	7.8	6.3
7.0	6.3	6.7	5.3
7.9	6.4	7.5	6.3

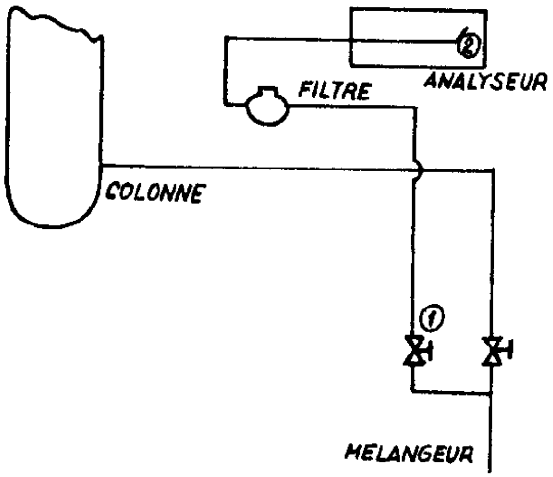


Fig 12
Système d'analyse du gaz à l'entrée de la colonne

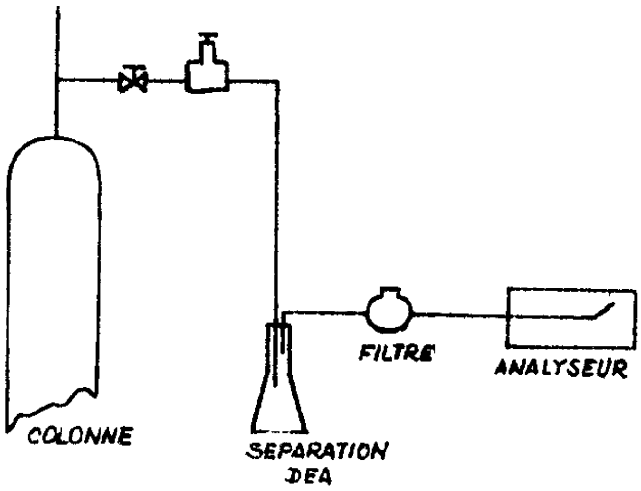


Fig 13
Système d'analyse du gaz à la sortie de la colonne

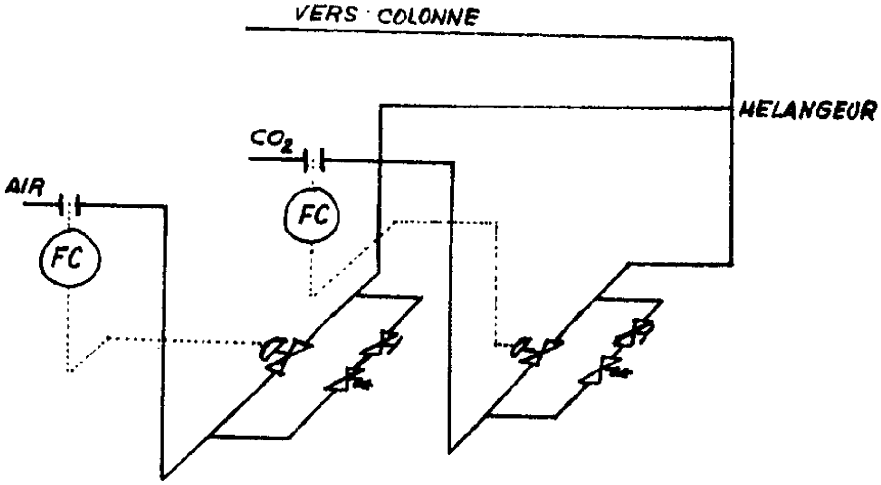


Fig 14
Système utilisé pour la production d'échelons de débit et de composition

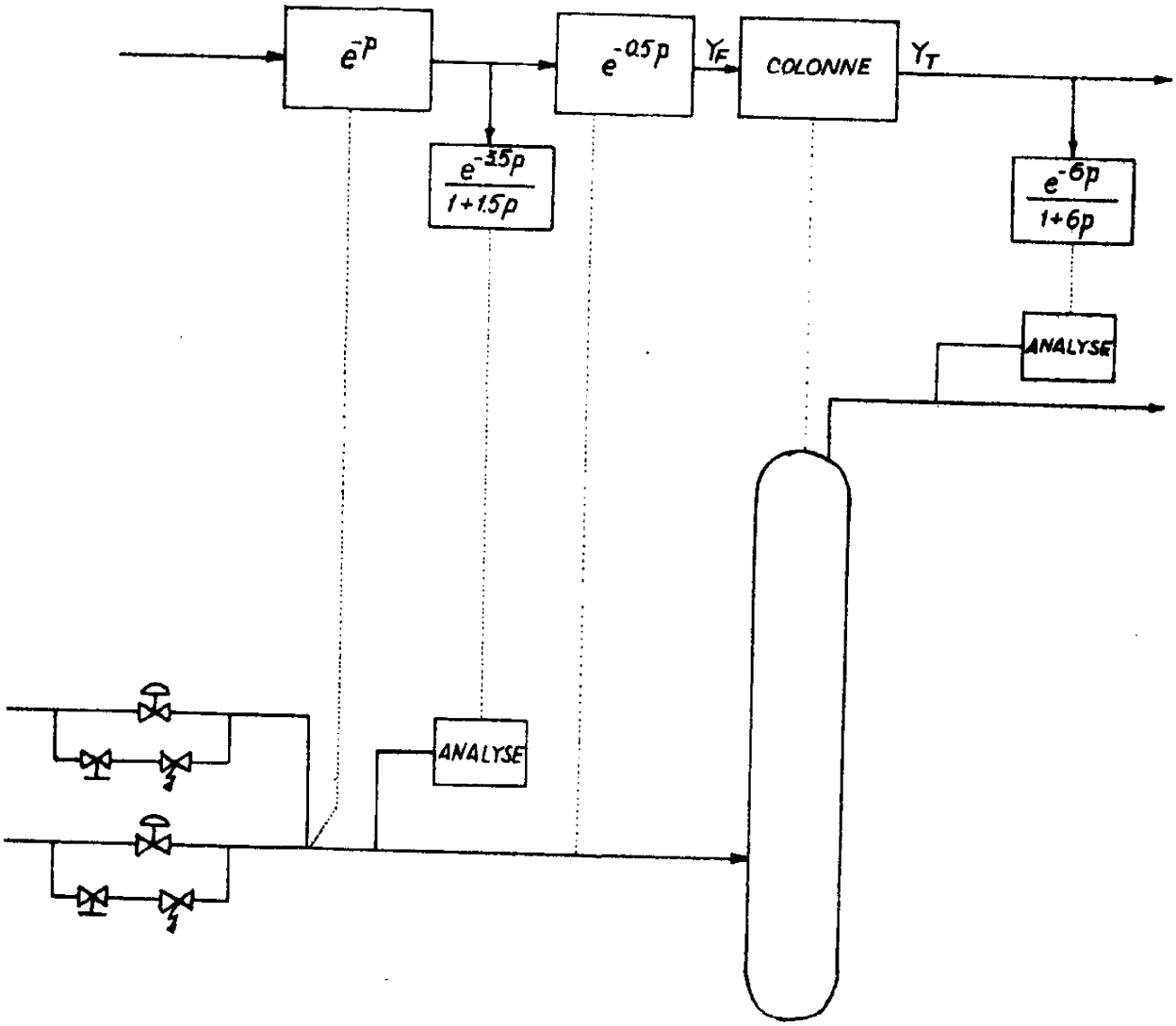


FIG. 15 Transmittances du mélangeur et des systèmes d'analyse du gaz à l'entrée et à la sortie de la colonne, pour des changements de composition, à débit d'air constant

On prend pour le système d'analyse à la sortie de la colonne une constante de temps τ de 6 secondes et un retard T de 6 secondes (compte tenu du retard propre au mélangeur).

Sur la figure 15 sont représentés les différents éléments identifiés jusqu'ici.

III-2-4 - Colonne d'absorption

III-2-4-1 - Changements de composition en fond de colonne

On produit des "échelons" de composition du gaz à l'entrée de la colonne (fond) en agissant sur l'électrovanne CO_2 à l'entrée du mélangeur. On enregistre la composition à la sortie de la colonne.

Il faudra tenir compte de la dynamique du système d'analyse en tête "pour la soustraire" de la réponse obtenue, ainsi que celle du mélangeur et des tubes jusqu'à la colonne.

Compte tenu de l'allure des réponses observées on va essayer d'approcher le régime transitoire par un retard pur plus un second ordre apériodique. Pour déterminer la constante de temps propre à la colonne on a utilisé la propriété des systèmes de second ordre séparables en deux constantes de temps d'avoir des réponses à un échelon de l'entrée qui atteignent à peu près 73% de la valeur finale après un temps $t = 1.3\ (\tau_1 + \tau_2)$ [11] .

D'après la figure 16 on voit qu'on peut obtenir une approximation valable du régime transitoire, avec une erreur absolue inférieure à 0.05, ce qui, pour une amplitude de changement de la variable de sortie de 0.20 moles CO_2/mole air (valeur déjà grande dans le pilote), nous donne une erreur absolue inférieure à 0.01, ordre de grandeur de la précision de la mesure. La validité de l'approximation dépend fortement du choix de la valeur du retard pur.

Le retard et la constante de temps obtenus à partir des résultats expérimentaux ne dépendent ni du débit de DEA ni de l'amplitude de l'échelon sur y_F Par contre, on trouve une diminution de la valeur du retard lorsque le débit d'air augmente. On ne peut rien conclure pour la constante de temps du fait de la trop grande dispersion des valeurs mesurées. Dans la table 2 on donne les valeurs du retard et de la constante de temps pour différents débits d'air. En Annexe (page A. 19) on donne un exemple du type de réponse obtenue sur le pilote.

III-2-4-2 - Changements de débit d'air

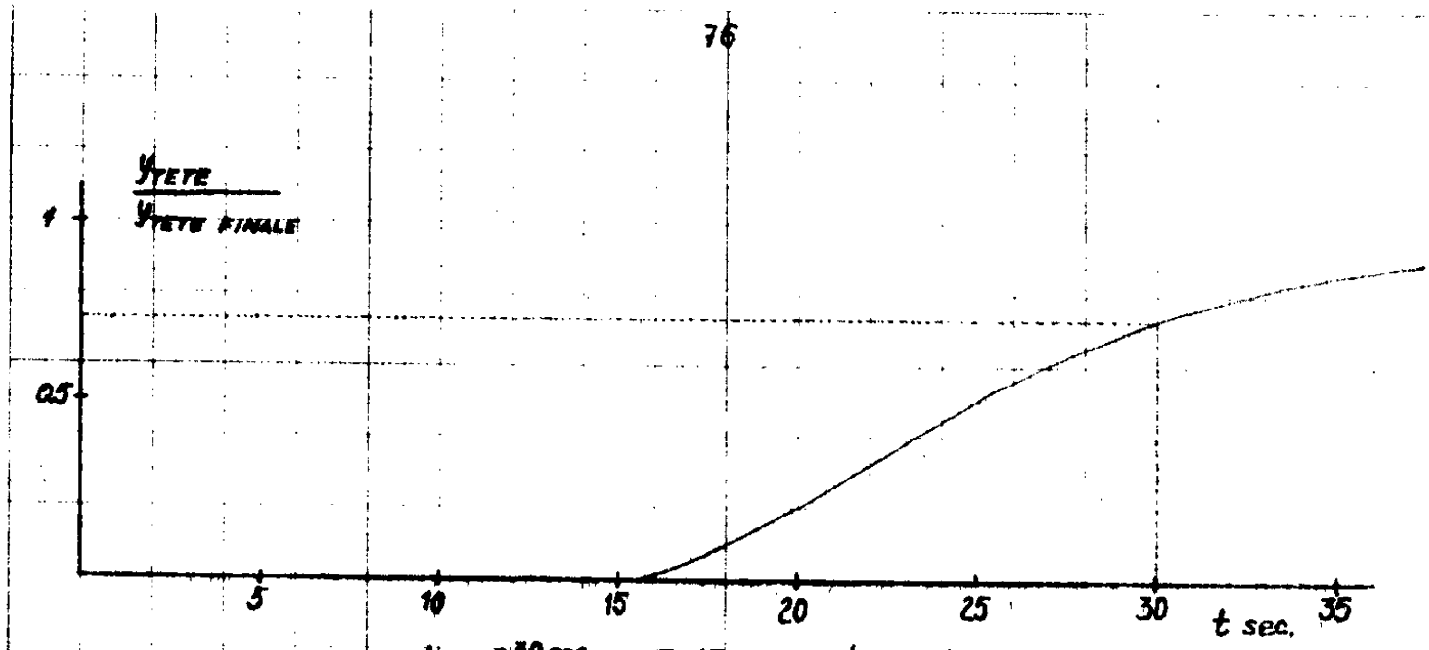
On produit des échelons de débit d'air à l'entrée de la colonne en agissant sur les électrovannes CO_2 et AIR après avoir ajusté les robinets correspondants pour que la composition du mélange ne change pas. On enregistre la composition à la sortie de la colonne.

Compte tenu de l'allure des réponses observées on a approché le régime transitoire par un retard pur plus un second ordre apériodique. La validité d'une telle approximation a été vérifiée de la même façon que pour les changements de composition.

Le retard et la constante de temps apparaissent comme indépendants de l'amplitude de l'échelon, de la valeur de la composition y_F et du débit de DEA L_T. Dans la table 3 on donne quelques uns des résultats obtenus. Nous donnons en Annexe (page A. 20) un enregistrement du type de régime transitoire obtenu sur le pilote.

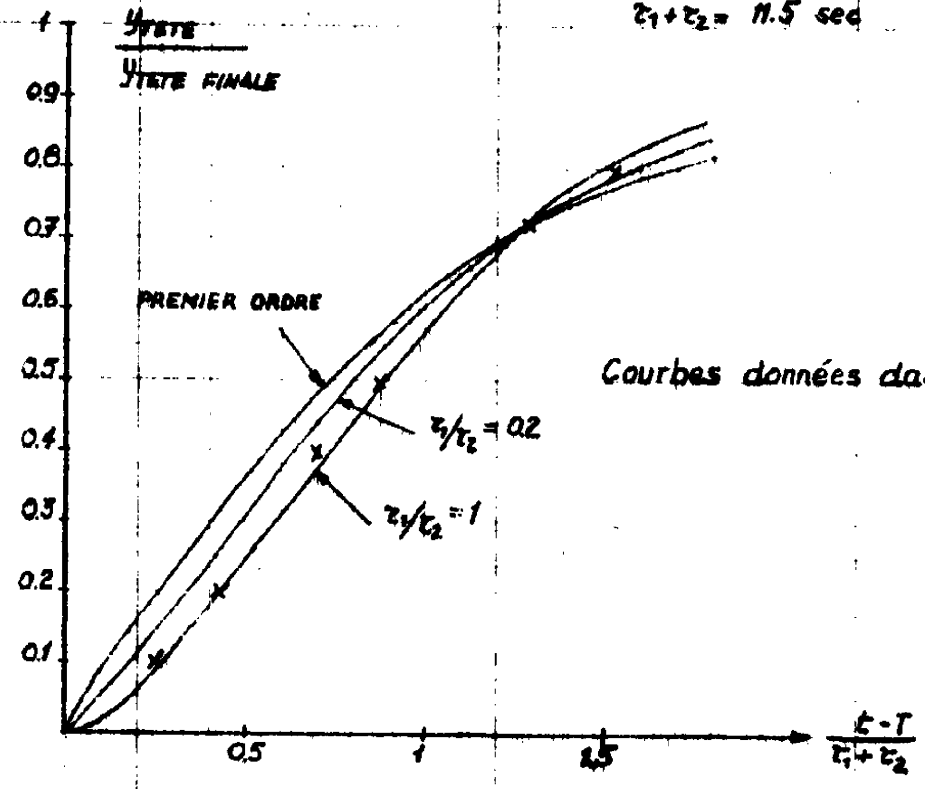
$_A$ = 160 moles/h					L_T = 250 moles/h						y_F = 0.32-0.39 moles CO_2/mole air			
T (sec) : retard	6.7	6.7	7.0	7.5	6.7	7.2	7.0	7.5	7.0	7.0			Valeurs	T = 7 sec
τ (sec) : constante de temps	5.7	8.4	5.7	8.6	7.6	6.8	8.2	8.6	7.4	6.3			moyennes	τ = 7.5 sec
G_A = 190					L_T = 250						y_F = 0.32 - 0.38			
T (sec)	5.2	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0				Valeurs	T = 6 sec
τ (sec)	7.3	7.1	7.2	8.2	8.0	5.5	5.5	6.7	6.3				moyennes	τ = 7 sec
G_A = 240					L_T = 250						y_F = 0.30 - 0.38			
T (sec)	4.5	5.0	5.0	4.5	4.5	5.0	5.0	5.0	4.5	5.0	4.0	4.0	Valeurs	T = 4.7 sec
τ (sec)	4.8	4.4	5.2	4.0	4.8	4.8	3.6	3.2	4.0	6.3	6.0	6.3	moyennes	τ = 5 sec
G_A = 270					L_T = 250						y_F = 0.30 - 0.43			
T (sec)	4.0	4.2	4.0	4.2	4.7	4.0	4.2	4.0	4.5	4.0			Valeurs	T = 4.2 sec
τ (sec)	6.3	5.3	6.8	4.2	5.3	7.1	4.8	6.4	4.8	6.5			moyennes	τ = 6 sec

Table 2 - Retard et constante de temps pour y_T/y_F



$t_{75\%} = 30$ sec. $T = 15$ sec $(\tau_1 + \tau_2)\,1.3 = 15$

$\tau_1 + \tau_2 = 11.5$ sec



Courbes données dans la ref. 11

FIG. 16 Approximation de la réponse de y_{TETE} à un échelon de y_{FOND} par

$$\frac{e^{-Tp}}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

T (sec) : retard	τ (sec)	T(sec)	τ(sec) : cte. de temps
3.5	4.0	3.5	2.8
4.5	4.8	3.0	4.4.
2.7	3.8	4.0	2.2
4.5	3.2	3.0	2.2
3.2	5.2	4.0	2.8
3.2	3.2	3.0	4.0
4.7	5.2	3.5	4.4
4.5	5.6	4.5	4.4
3.0	5.0	2.7	3.6
3.0	4.8	3.2	4.0
3.0	4.0	3.5	3.6
		4.5	4.4
Valeurs moyennes	T = 3.5 sec	τ = 4.0 sec	

Table 3

Retard et constante de temps pour y_T/G_A

III-2-4-3 - Changements de débit d'absorbant

Ayant disposé en parallèle sur la vanne pneumatique du débit de DEA une électrovanne et un robinet, on produit les échelons de débit d'absorbant de la même façon que pour le débit de CO_2 et d'air.

La réponse de la composition en tête de colonne, a été approchée par celle d'un système de second ordre apériodique plus un retard pur. La validité d'une telle approximation, a été vérifiée comme pour les changements de composition du gaz à l'entrée de la colonne.

La dispersion des valeurs trouvées pour le retard et la constante de temps est dans ce cas plus grande que lors des changements des autres variables d'entrée ; ceci est dû :

a) aux variations dans l'écoulement du liquide à travers le garnissage

b) à l'erreur dans la détermination de la constante de temps due à la mesure de la valeur finale de la composition en tête : celle-ci est sensible en effet aux variations dans les conditions de régénération et dans la température d'entrée de la DEA lors d'un changement de débit de DEA.

Nous avons vu que ces variations sont de l'ordre de 0.01 moles CO_2/mole air, ce qui conduit, pour un changement de y_T de 0.10 à une erreur de 10% dans la mesure du temps de réponse à 73%. Ce temps de réponse est de l'ordre de 40 secondes.

Dans la table 4 sont reportées les valeurs trouvées pour le retard (T) et la constante de temps (τ) pour différents débits d'air ; la dispersion est trop grande pour qu'il soit possible de proposer une relation entre T et τ avec le débit d'air ; aussi nous sommes nous contentés de retenir une valeur moyenne.

En Annexe (page A.21) on donne des exemples du régime transitoire obtenu sur le pilote.

Sur la figure 17 est représenté le schéma bloc résumant les relations dynamiques, autour d'un point de fonctionnement entre le débit liquide, le débit et la composition du mélange gazeux à l'entrée d'une part et la concentration en tête de colonne d'autre part.

G_A = 170 moles/h			
T (sec)	τ (sec)	T (sec)	τ (sec)
2	20	4	19
6	17	2	20
6	16	2	21
5	15	5	19
3	19	4	18
6	16	5	17
2	19		

G_A = 210 moles/h			
T (sec)	τ (sec)	T (sec)	τ (sec)
2	21	5	17
2	19	2	19
5	19		

G_A = 240 moles/h			
T (sec)	τ (sec)	T (sec)	τ (sec)
2	18	4	16
1	21	1	19
1	20	3	19

G_A = 260 moles/h			
T (sec)	τ (sec)	T (sec)	τ (sec)
3	16	2	15
2	15	2	17
4	16	1	19

Valeurs moyennes T = 3 sec τ = 18 sec

Table 4 - Retard et constante de temps pour y_T/L_T

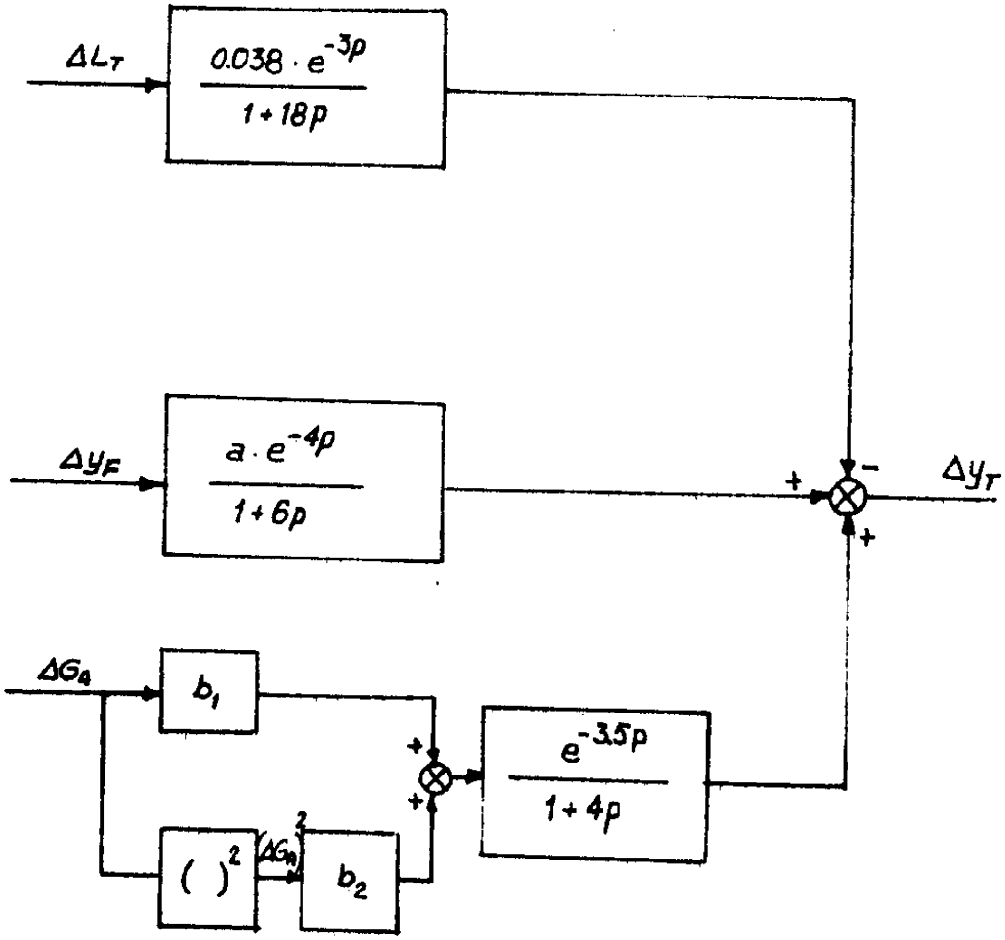


FIG. 17 Modèle dynamique de la composition en tête de colonne

III-3 - CONSEQUENCES POUR L'ETABLISSEMENT D'UNE LOI DE COMMANDE SUR LE DEBIT DE DEA

Le régime transitoire le plus lent étant celui qui correspond à des changements sur la variable de commande (rapport de 1 à 2 vis à vis des perturbations), il faudra, pour éviter des grands dépassements sur y_T, penser à une commande de L_T en boucle ouverte ; une commande en boucle fermée pourra ajuster le débit de DEA après le régime transitoire.

Pour éliminer ce dépassement par une commande en boucle ouverte il est évident qu'il ne suffira pas d'une commande "statique" affichant sur le régulateur de débit de DEA la valeur calculée nécessaire pour revenir en régime permanent à une valeur de $y_T \leqslant y_{T\,max}$.

L'apparition simultanée de la perturbation (en débit ou en composition de gaz) et de la "commande statique" du débit de DEA (les deux en forme d'échelons) donne, comme le montre la figure 18, des dépassements de 40% du changement sur y_T en absence de commande.

On a deux possibilités pour réduire ce dépassement :

a) Si on connaît à l'avance les perturbations qui vont affecter la colonne (information du changement de puits dans le traitement du gaz naturel, ou mesure possible, bien en amont de l'unité de lavage du débit et de la composition du gaz), on peut déterminer à quel moment avant l'arrivée des perturbations il faut agir sur L_T pour réduire le dépassement à la valeur acceptable.

On peut, par exemple, si la perturbation est un échelon de débit ou de composition, retenir pour la loi de commande un simple échelon sur L_T, dont l'amplitude est celle nécessaire au régime permanent, et déterminer l'instant d'application de cet échelon. C'est une commande non optimale mais particulièrement simple de mise en oeuvre.

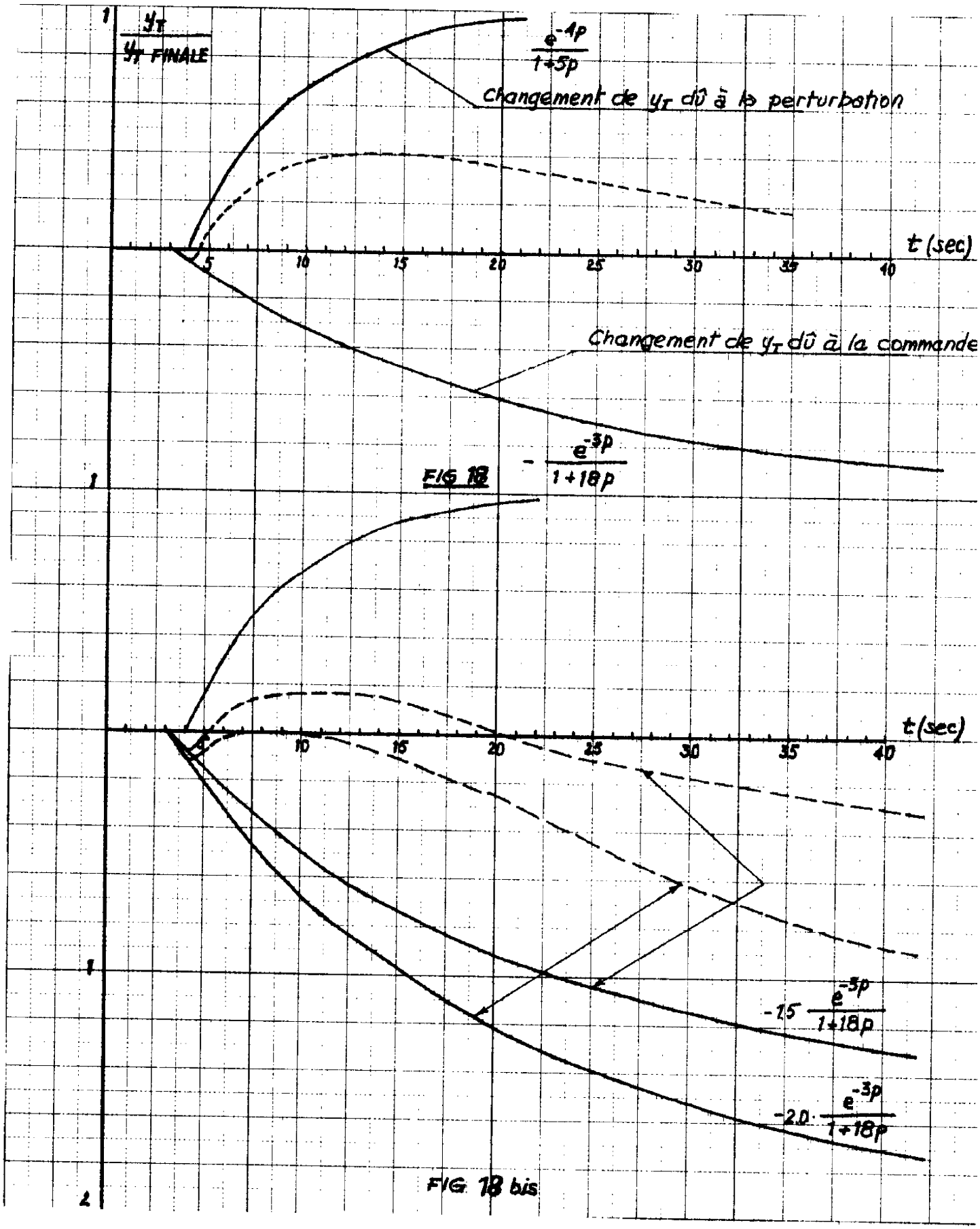

1
$\frac{y_T}{y_T \text{ FINALE}}$
$\frac{e^{-4p}}{1+5p}$
Changement de y_T dû à la perturbation
t (sec)
5
10
15
20
25
30
35
40
Changement de y_T dû à la commande
$-\frac{e^{-3p}}{1+18p}$
1
FIG 18
1
t (sec)
5
10
15
20
25
30
35
40
1
$-1.5\,\frac{e^{-3p}}{1+18p}$
$-2.0\,\frac{e^{-3p}}{1+18p}$
2

FIG 18 bis

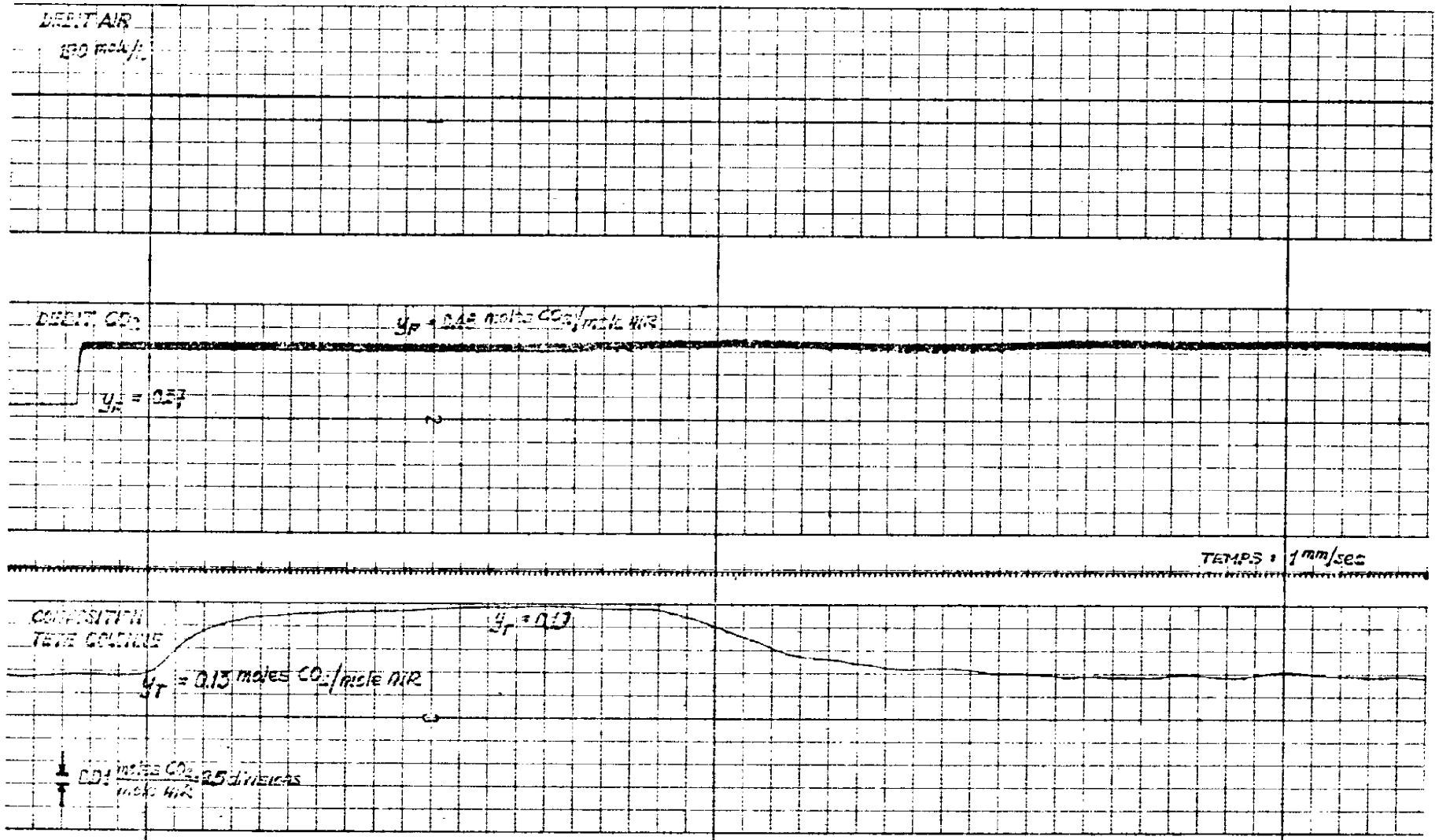
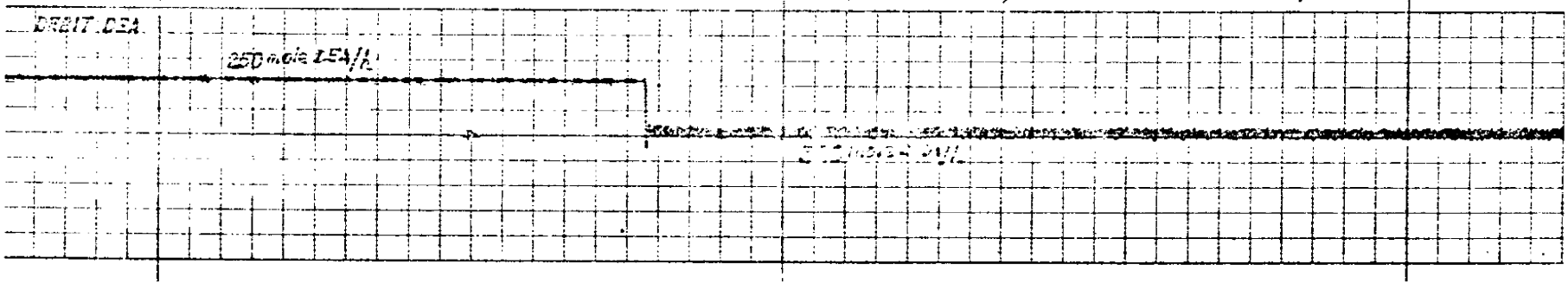
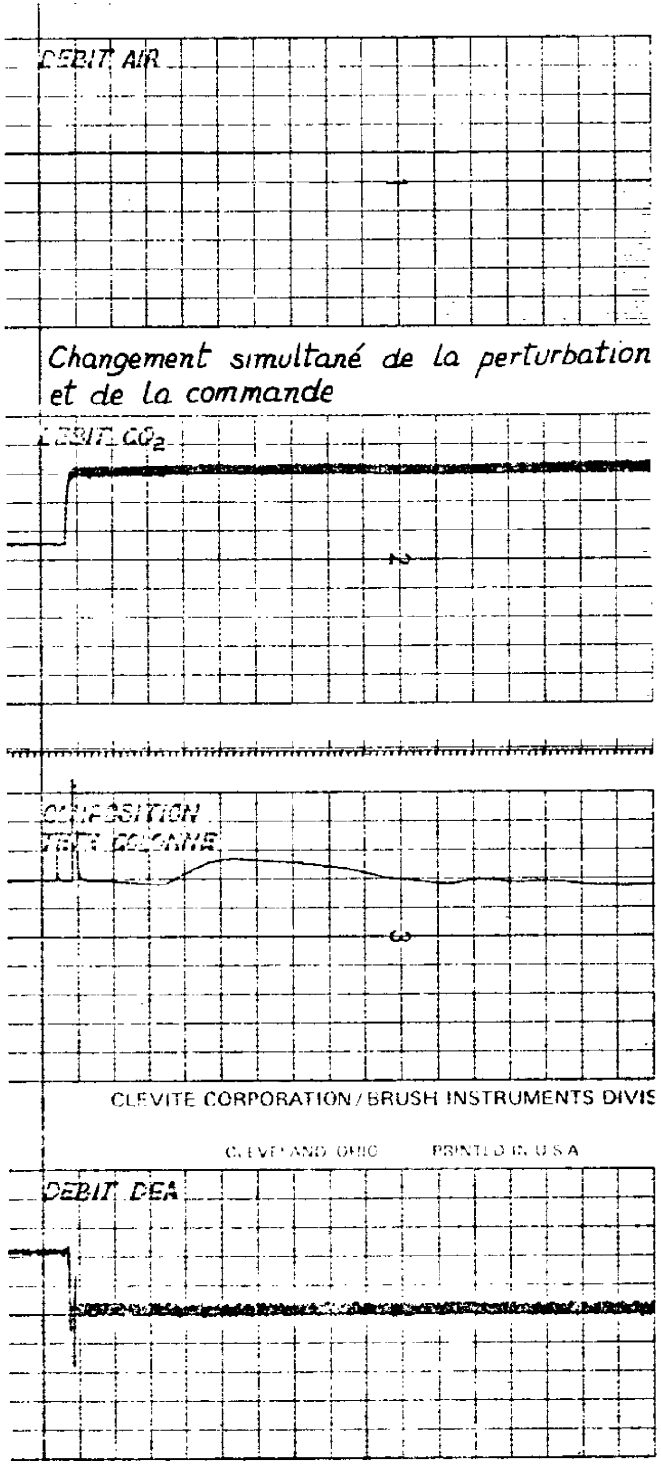


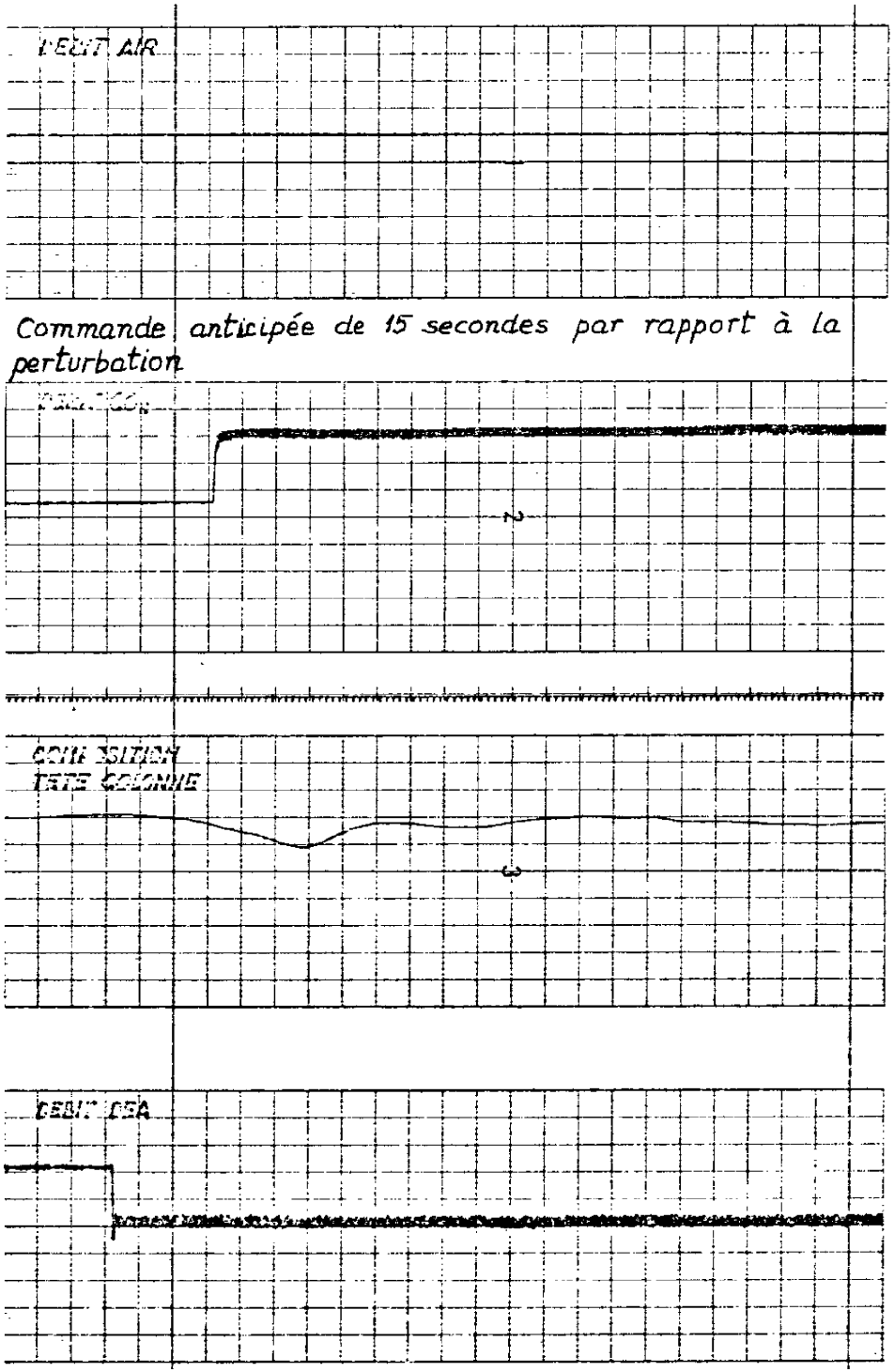
FIG. 19 Réponse de y_T à des échelons de y_F (perturbation) et de L_T (commande)



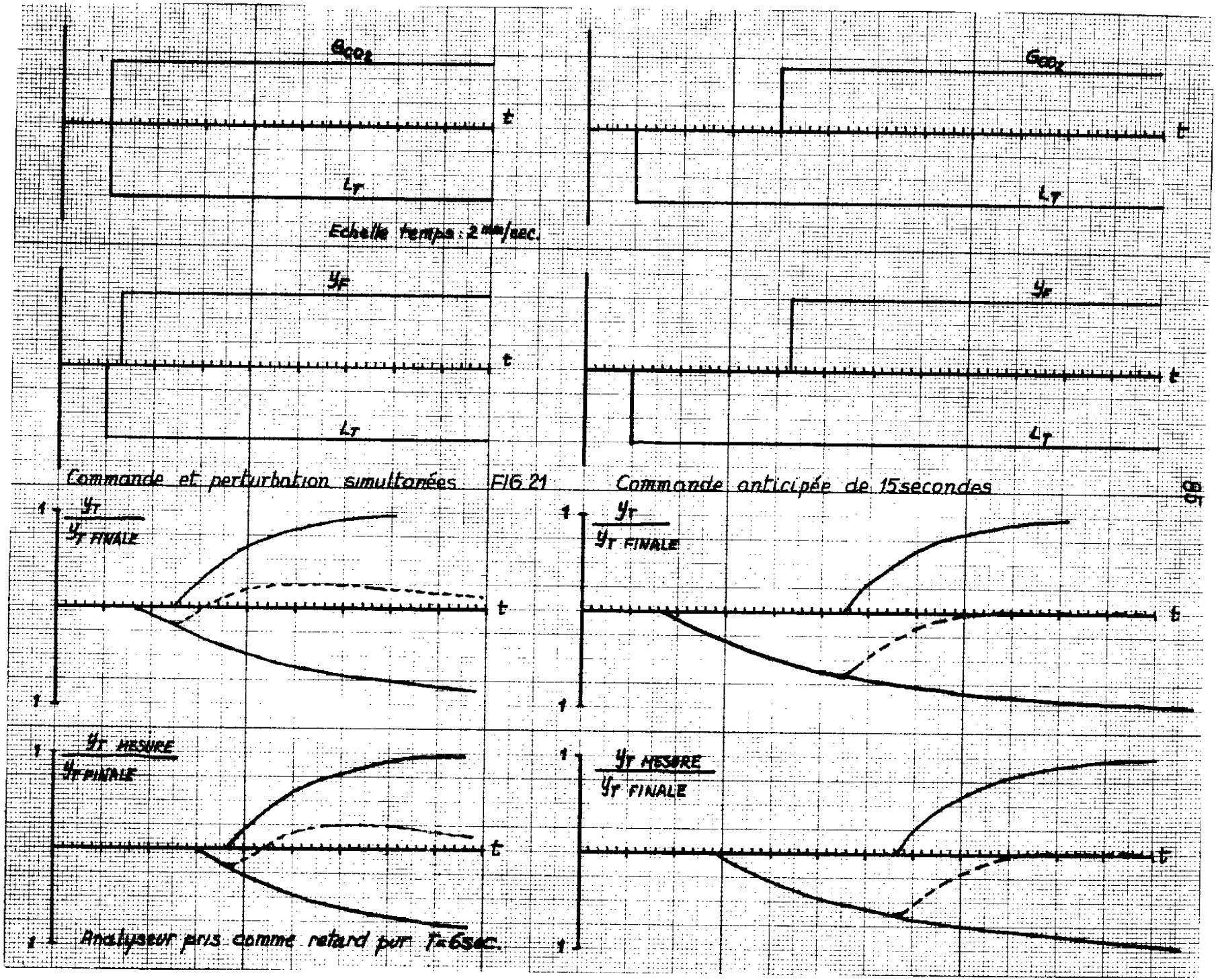


Changement simultané de la perturbation et de la commande

FIG. 20



Commande anticipée de 15 secondes par rapport à la perturbation



Commande et perturbation simultanées FIG 21 Commande anticipée de 15 secondes

Analyseur pris comme retard pur $T_a = 6$ sec.

La figure 19 représente les enregistrements de y_T, sur le pilote, lors d'une perturbation en forme d'échelon sur y_F et du changement de la commande pour revenir à la valeur initiale de y_T. Sur la figure 20 on peut distinguer les variations de y_T lorsque les deux changements sont simultanés, et lorsque, disposant de la mesure anticipée de la perturbation, on produit l'échelon sur L_T 15 secondes en avance. Cette valeur a été choisie compte tenu des valeurs du retard et de la constante de temps associées à y_T pour un changement de y_F pour G_A = 190 moles/heure.

Sur la figure 21 on montre les résultats qu'on peut attendre, d'après le modèle dynamique déterminé en III-2, dans les deux cas. (le système d'analyse à la sortie est considéré comme un retard pur).

b) Avec ou sans connaissance anticipée des perturbations on peut, pendant le régime transitoire, essayer d'établir une loi de commande qui minimise la consommation de DEA tout en assurant une composition $y_T \leqslant y_{Tmax}$. C'est un problème d'optimisation dynamique qui sort du cadre de ce travail. Pour être réaliste la solution de ce problème devra tenir compte évidemment des contraintes sur L(t) et dL(t)/dt.

Pour reprendre le cas particulier d'une perturbation et d'une loi de commande en échelons, on a tracé les variations de Y_T pour plusieurs amplitudes de l'échelon du débit liquide. L'examen de ces courbes sur la figure 18 bis montre que pour ne pas avoir de dépassement sur y_T par rapport à la valeur désirée il faut un débit double de celui qui serait nécessaire en régime permanent.

CHAPITRE IV

COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

ETUDE CRITIQUE DE L'INTERET DU MODELE THEORIQUE

Dans ce chapitre on se propose d'étudier l'intérêt que peut avoir l'intégration du modèle théorique, pour l'obtention de résultats permettant d'établir une loi de commande du débit de DEA.

Cet intérêt doit être mis en doute du fait que :

a) on a une faible connaissance des régimes cinétiques présents dans la colonne.

b) la nature du modèle théorique impose des simplifications pour son intégration (approximation linéaire ou discrétisation).

La comparaison des résultats obtenus sur le pilote avec ceux qui peuvent être obtenus à partir du modèle théorique, nous renseignera sur la validité d'un tel modèle pour représenter une colonne d'absorption de CO_2 par DEA, à garnissage, travaillant à basse pression.

On verra qu'en régime permanent, seulement pour des grands changements dans les variables d'entrée, il peut être intéressant de prendre un modèle sous forme d'équations différentielles ; et que, dans ce cas, compte tenu de la faible connaissance des paramètres cinétiques, il est nécessaire de procéder à une identification paramétrique.

En ce qui concerne les régimes transitoires, les simplifications à apporter au terme de transfert, pour l'intégration des équations aux dérivées partielles, et le fait de négliger la diffusion axiale, font que les résultats théoriques donnent tout au plus une idée sur les temps de réponse. La simulation de ces équations, sans connaissance de la diffusion axiale, n'améliore pas la situation.

IV-1 - COMPARAISON EN REGIME PERMANENT

Nous avons vu qu'un modèle statique valable pour la commande de L_T, dans un domaine comme celui défini en III-1-3, n'exige pas de recourir à un modèle théorique sous forme d'équations différentielles non linéaires du type

$$L \frac{dX}{dz} + f(X, y) = 0 \qquad (4\text{-}1)$$
$$G_A \frac{dy}{dz} + f(X, y) = 0$$

Un tel modèle va nous donner :

1) des relations non linéaires entre y_T d'une part, L_T et G_A d'autre part

y_T décroissant lorsque L_T augmente
y_T croissant lorsque G_A augmente

On voit sur les figures 8 et 9, pages 59 et 60, qu'un modèle tel que 4.1 serait nécessaire seulement pour de grands changements dans les débits (> 50 %) ; or une colonne à garnissage ne permet pas de si grandes perturbations, à moins d'accepter qu'elle travaille très en dessous de ses possibilités (pour les bas débits).

2) une relation non linéaire entre y (Z) et y (0)

A l'intérieur du domaine choisi, les résultats expérimentaux dans le plan (y_T, y_F) peuvent être approchés par une forme linéaire (figure 5).

C'est seulement pour des grands changements de y_F (allant de 0.10 à 0.50 moles CO_2/mole air) qu'il sera nécessaire de considérer une forme non linéaire (figure 6). Il serait intéressant, dans ce cas, d'essayer une identification paramétrique d'un modèle du type 4 1. Pour cela il faudrait auparavant pouvoir mesurer le taux de carbonatation X (z) ; en effet, cette mesure est nécessaire pour :

a) Déterminer X (z), condition limite dans le système 4.1

b) Etablir la nature du terme non linéaire : il s'agit de savoir en définitive si, dans la colonne d'absorption, on a seulement le régime rapide ou s'il apparaît aussi le régime de transition. A partir des résultats expérimentaux dont nous disposons il est impossible de conclure.

En effet, si on calcule à partir de ces résultats la vitesse de transfert moyenne dans la colonne, pour différentes valeurs de y_F on a :

pour G_A = 190 moles/h L = 210 moles/h

y_F moles CO_2 /mole air	$\overline{Ra}$ moles CO_2 transférées/sec. cm^3
0.145	$0.36 \cdot 10^{-6}$
0.250	$0.61 \cdot 10^{-6}$
0.400	$0.78 \cdot 10^{-6}$
0.500	$0.89 \cdot 10^{-6}$

Si on calcule à partir de l'expression de Ra pour le régime rapide

$$Ra = K \cdot \sqrt{1 - 2X} \; \frac{y}{1 + y}$$

les valeurs de Ra en tête et en fond de colonne, et si l'on prend la valeur moyenne on trouve :

pour G_A = 190 moles/h, L = 210 moles/h,
X_T = 0.10 moles CO_2/mole DEA

y_F	$\overline{Ra}$	X_F
0.145	$1.0 \cdot 10^{-6}$	0.200
0.250	$1.5 \cdot 10^{-6}$	0.260
0.400	$2.5 \cdot 10^{-6}$	0.310
0.500	$2.8 \cdot 10^{-6}$	0,340

Pour $X_T = 0.20$ on aurait obtenu

y_F	$\overline{Ra}$	X_F
0.145	$0.9 \cdot 10^{-6}$	0.300
0.250	$1.2 \cdot 10^{-6}$	0.360
0.400	$1.8 \cdot 10^{-6}$	0.410
0.500	$2.0 \cdot 10^{-6}$	0.440

L'erreur absolue sur Ra qui produira une erreur sur y (Z) inférieure à 0.01 est de l'ordre de 10^{-7} puisque

$$\frac{G_A}{S}\frac{dy}{dz} = -Ra \qquad y(Z) = y(0) - \frac{Z}{G_A/S}\,\overline{Ra}$$

$\frac{Z}{G_A/S}$ étant de l'ordre de 10^5 sec. cm^3/mole

Sur la figure 22 sont représentées les variations de $\overline{Ra}$ en fonction de y_F ; on ne peut pas exclure la possiblité d'approcher les résultats expérimentaux par un modèle théorique(faisant intervenir seulement le régime rapide), en ajustant les paramètres et la valeur de X_T.

On a mesuré la composition du gaz en trois points intermédiaires de la colonne (z = 50 cm, z = 100 cm, z = 150 cm) ; les valeurs trouvées pour y (z) sont représentées sur les figures 23 et 24. La pente de ces courbes est

proportionnelle à la vitesse de transfert du fait que

$$\frac{G_A}{S}\frac{dy}{dz} = -Ra$$

On constate que, pour les faibles valeurs de y_F, cette pente augmente avec y (z), résultat en accord avec celui prévu par le régime rapide ; pour des valeurs importantes de y_F cette pente devient indépendante de y (z), surtout en fond de colonne ; ceci serait explicable par une transition vers le régime instantané.

IV-2 - COMPARAISON EN REGIME TRANSITOIRE

Les réponses expérimentales de y_T ont été approchées par celles de trois systèmes de premier ordre avec retard pur

	T (sec) : retard	(sec) : cte de temps
y_T/y_F	7 - 4	5
y_T/G_A	3.5	4
y_T/L_T	3	18

La présence de retards purs et constantes de temps s'explique théoriquement par la diffusion axiale et par le couplage entre les deux équations établi par le terme de transfert. En Annexe (page A.22) on montre l'importance de ce couplage pour le cas d'un terme de transfert linéaire.

IV-2-1 - Changements de la composition du gaz à l'entrée

On a un retard pur qui diminue lorsque le débit de gaz augmente ; cette variation est d'accord avec le modèle théorique : en effet, l'équation du bilan gaz est, en supposant G_T constant le long de la colonne

$$U\frac{\partial Y}{\partial t} = -G_T\frac{\partial Y}{\partial z} - f(X,Y)$$

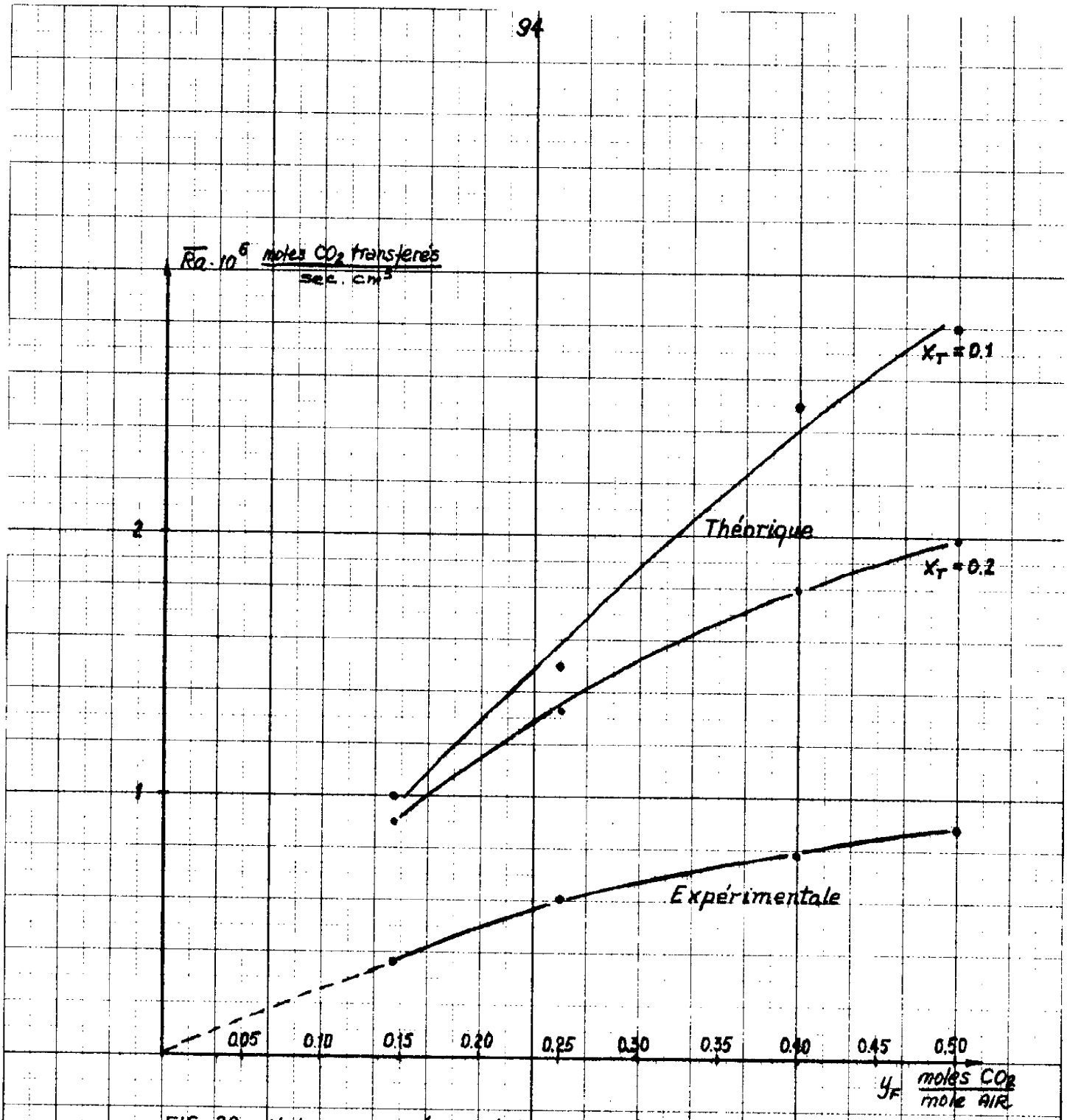


FIG. 22 Valeurs expérimentales et théoriques de la vitesse moyenne de transfert dans la colonne

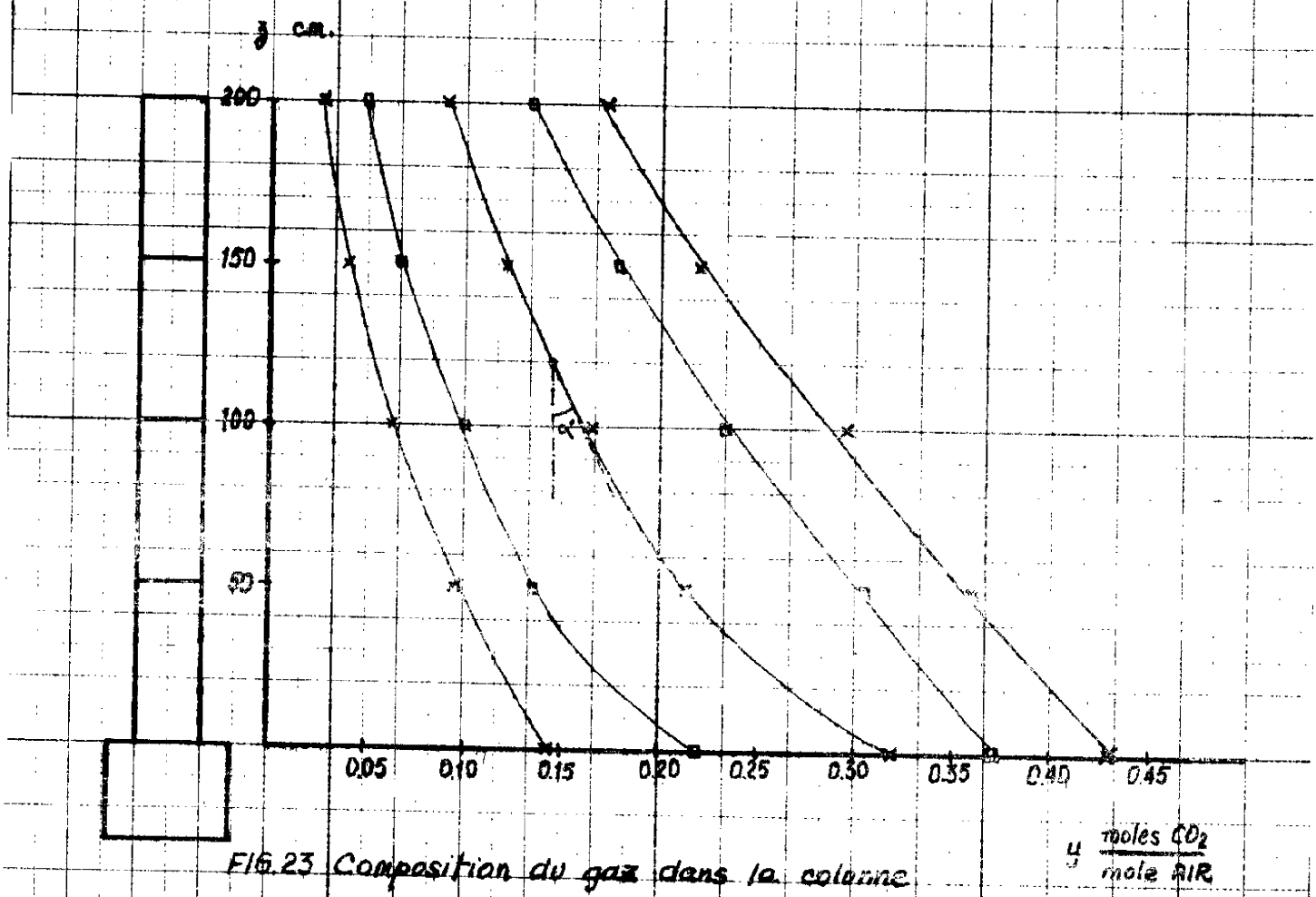


FIG. 23 Composition du gaz dans la colonne

G_A = 100 mole/h L = 250 mole/h

$$tg\,\alpha = \frac{Ra\,(z)}{G_A/S}$$

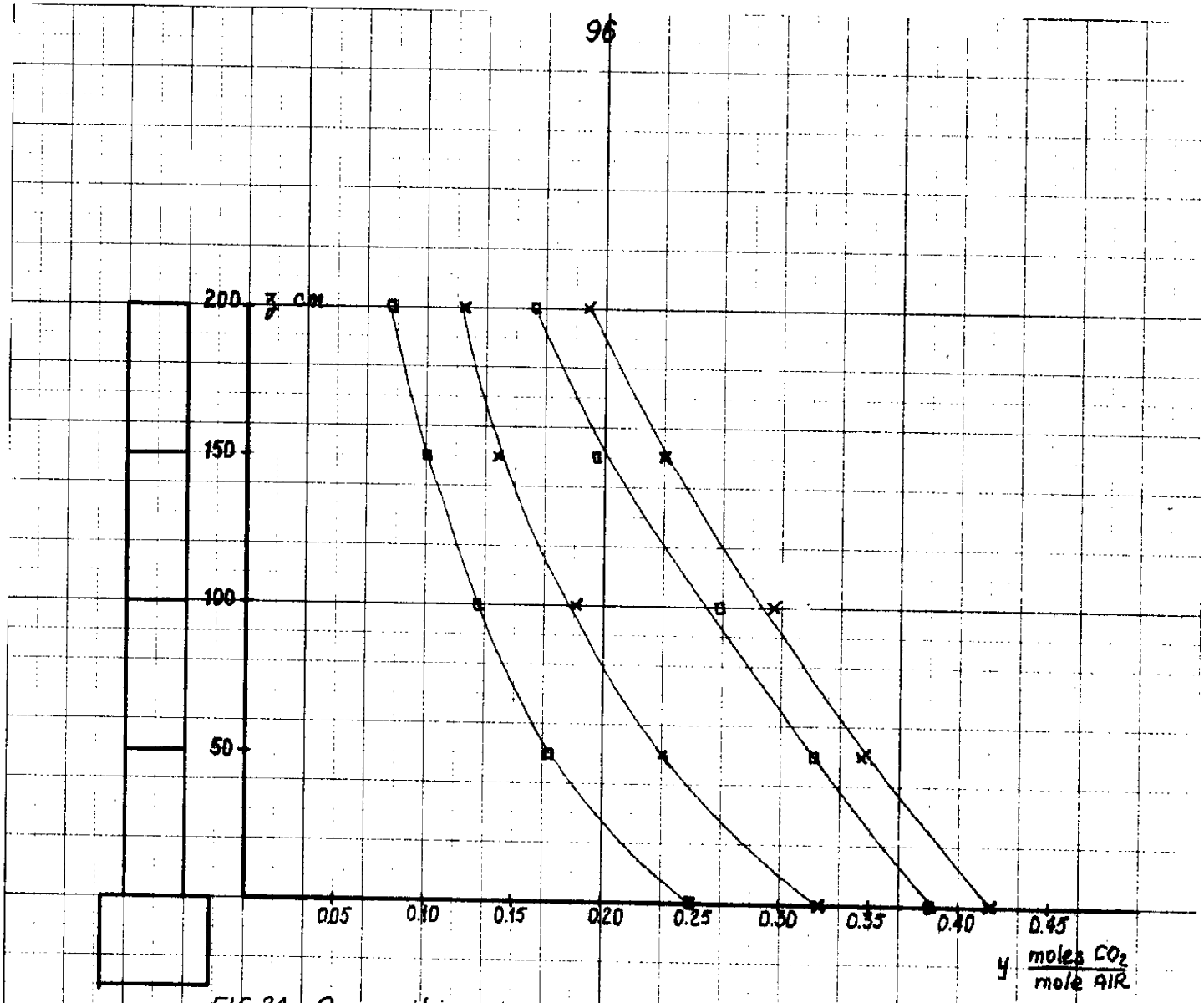


FIG.24 Composition du gaz dans la colonne

$G_A = 220$ mole/h $L = 250$ mole/h

Si, pour des petites variations de y_F autour d'un point de fonctionnement, on fait une approximation linéaire du terme de transfert qui soit indépendante de X, et on intègre par la méthode de Laplace on arrive à un retard pur de valeur

$$T = \frac{U}{G_T} Z$$

Avec U = 32 moles/m^3 pour la colonne d'absorption on a :

y_F = 0.30 moles CO_2/mole air		
G_A	G_T	T (sec)
150	195	8.5
200	260	6.5
250	325	5.1

Valeurs expérimentales	
T (sec)	τ (sec)
7.0	7.5
6.0	7.0
4.7	5.0

Expérimentalement nous avons obtenu un transitoire plus long caractérisé par un retard T plus une constante de temps τ : ceci est dû, comme nous le signalons plus haut, au couplage entre les deux équations (gaz et liquide) établi par le terme de transfert, et à la diffusion axiale.

IV-2-2 - Changements de débit d'air

Le retard obtenu expérimentalement est trop grand pour correspondre au régime transitoire du débit de gaz dans la colonne ; en effet, en négligeant la diminution de ce débit due à la réaction chimique, on a :

"hold-up" gaz $\quad U = K_1 P$

chute de pression $\quad -\frac{\partial P}{\partial z} = K_2 G_T^2$

bilan gaz $\quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial G_T}{\partial z}$

Si on passe aux équations incrémentales on obtient par la transformée de Laplace

$$\tilde{u} = K_1 \tilde{p}$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dz} = 2\bar{G}_T K_2 \tilde{q}_T$$

$$\tilde{u}(z) = -\frac{d\tilde{q}_T}{dz}$$

d'où

$$\frac{d^2\tilde{q}_T}{dz^2} - s K_1 2\bar{G}_T K_2 \tilde{q}_T = 0$$

La solution de cette équation avec comme conditions aux limites

pour z = 0 $\quad \tilde{q}_T = \tilde{q}_T(0, s)$

pour z = Z $\quad \dfrac{d\tilde{q}_T}{dz} = 0$

est :

$$\tilde{q}_T(z) = \tilde{q}_T(0) \operatorname{sech} \sqrt{2\bar{G}_T K_1 K_2 s}\, Z$$

qu'on peut approcher par :

$$\tilde{q}_T(z) = \frac{\tilde{q}_T(0)}{1 + \dfrac{2\bar{G}_T K_1 K_2 Z^2}{2} s}$$

On donne ci-dessous la valeur de cette constante de temps pour différents débits d'air

$\bar{G}_T$ mole/h	τ sec
200	0.20
260	0.26
320	0.32

Les valeurs expérimentales T = 3.5 sec et τ = 4 sec ne peuvent pas correspondre à ce régime transitoire.

D'autre part la réponse obtenue par l'approximation linéaire indépendante de X pour le terme de transfert (voir Annexe, page A. 9) nous donne un régime transitoire plus court et sans retard pur. En effet, pour un gaz non dilué on obtiendrait, en supposant G_T constant tout le long de la colonne

$$U \frac{\partial Y}{\partial t} = - G_T \frac{\partial Y}{\partial z} - KY$$

Y : moles CO_2/mole gaz

et en intégrant on arriverait à une réponse

$$\frac{\tilde{y}_T}{\tilde{y}_T(0)} = \frac{K(\bar{L})}{\bar{G}_T} \cdot \frac{1}{Up} \bar{Y}_F \, e^{-\frac{K(\bar{L})}{\bar{G}_T} z} \left[1 - e^{-\frac{Up}{\bar{G}_T} z} \right]$$

Si on approche cette réponse par une constante de temps de valeur

$$\tau = 0.63 \frac{U}{\bar{G}_T} z$$

on aura en fonction de $\bar{G}_T$

$\bar{G}_T$ moles/h	τ sec
200	5.3
260	4.0
320	3.2

Le régime transitoire plus long trouvé expérimentalement doit provenir de la réaction chimique, qui établit le couplage entre les deux équations, et de la diffusion axiale.

IV-2-3 - Changements du débit de DEA

La réponse de la composition en tête de colonne est pratiquement du premier ordre (retard T = 3 sec, constante de temps τ = 18 sec) ; la valeur de la constante de temps est déterminée par le régime transitoire de l'écoulement de la DEA dans la colonne. Sur le plan expérimental on ne peut mesurer que le retard pur lié à la transmittance L_F/L_T (T = 22 sec à rapprocher des 18 sec de la constante de temps relative à y_T/y_F) . La mesure de la constante de temps existant dans L_F/L_T nécessiterait une hauteur de liquide en fond de colonne supérieure à celle qui est disponible sur notre unité pour pouvoir atteindre le régime permanent : l'expérience conduit au remplissage pur et simple de la colonne en l'absence de régulation du niveau (position manuelle du régulateur).

L'équation du bilan liquide, en négligeant la diffusion axiale, nous donne pour la fonction de transfert L (0, p)/L(Z, p) un retard pur de valeur

$$T = c . Z$$

c est donné par l'expression du "hold-up" liquide ; pour la colonne d'absorption c'est

$$W = b + c . L = 50 + 3 . 10^{-3} . L$$

W : moles/m^3

L : moles/h. m^2

d'où : T = c. Z = 20 secondes

approximation assez bonne du retard déterminé expérimentalement

La réponse de la composition en tête de colonne à un échelon de débit de DEA obtenue par l'approximation linéaire Ra = K (L). Y pour le terme de transfert est (Annexe, page A. 10)

$$\frac{\tilde{y}_T}{\tilde{l}_T} = - \frac{\frac{\bar{Y}_T}{\bar{G}_T}\left(\frac{dK}{dL}\right)_{L=\bar{L}}}{\left(c + \frac{U}{\bar{G}_T}\right)p} \, e^{-\frac{K(\bar{L})}{\bar{G}_T}Z} \left[1 - e^{-\left(\frac{U}{\bar{G}_T} + c\right)Zp} \right]$$

si on approche cette réponse par une constante de temps de valeur

$$\tau = \left(\frac{U}{\bar{G}_T} + c\right) Z \, . \, 0.63$$

on obtient :

G_T moles/h	τ sec
200	17. 9
260	16. 6
320	15. 8

contre 21 secondes, valeur moyenne du temps de réponse à 63 % dans le pilote.

Donc, l'intégration du système approché par un terme de transfert du type K (L) y permet, tout au plus, d'avoir une idée du rapport existant entre les temps de réponse de y_T à des changements dans les perturbations, et à des changements dans la commande.

Nous allons voir qu'une simulation des équations aux dérivées partielles, sans connaissance préalable de l'importance de la diffusion, ne permettra pas d'aller au delà de ce résultat.

IV-3 - SIMULATION HYBRIDE DU REGIME RAPIDE

Le régime rapide a été simulé par EAI sur le calculateur hybride EAI-690, la colonne étant divisée en 70 tranches [12].

En régime permanent les résultats sont d'accord avec ceux obtenus à partir du modèle statique intégré sur calculateur numérique (180 pas sur z).

En régime transitoire on a obtenu par simulation hybride :

a) Changements de y_F

Réponse à un échelon approchée par une constante de temps plus un retard pur, les deux paramètres diminuent lorsque le débit d'air augmente

G_A = 200 moles/h T (retard) = 4.5 sec τ (cte de temps) = 5 sec

G_A = 300 moles/h T = 3.0 sec τ = 4 sec

b) Changements de G_A

Réponse approchée par une constante de temps. Dans la simulation on faisait :

$$g(z, t) = g(0, t)$$

La constante de temps est indépendante de y_F et de L_T

τ = 5 sec

c) Changements de L_T

Du fait de la discrétisation de z, le retard de 20 secondes entre L (0, t) et L (Z, t) se divisait en un retard de 13 sec et une constante de temps de 7 sec.

La réponse de y_T pour un échelon de L_T est approchée par une constante de temps plus un retard pur

T = 10 sec τ = 13 sec

On constate que pour obtenir des résultats quantitatifs en régime transitoire, la simulation, qui introduit un terme de diffusion, n'est valable que si l'on connaît auparavant la diffusion réelle dans le processus qu'on veut simuler. Dans le cas contraire, les résultats obtenus donnent tout au plus une idée du rapport entre les temps de réponse.

CONCLUSIONS

Dans le domaine de variation des variables d'entrée (changements maximums de 30%), limité par les dimensions de la colonne et par l'existence d'une commande susceptible de ramener la variable de sortie au dessous de la contrainte, on constate qu'un modèle linéaire (sauf pour le débit d'air) du premier ordre, avec retard pur est suffisant, ceci pour la précision désirée de 0.01 moles CO_2/mole air comme erreur absolue sur la variable de sortie. Une précision plus grande impose la mesure de la composition de la DEA régénérée et la régulation de la température de la DEA à l'entrée de la colonne.

Pour obtenir un modèle mathématique traduisant ces résultats, il est préférable, compte tenu de la méconnaissance relative des régimes cinétiques présents dans la colonne, de réaliser une identification expérimentale. Le modèle théorique sous forme d'équations aux dérivées partielles ne fournit que des résultats valables qualitativement.

En ce qui concerne le modèle statique, la nature de système non linéaire sera intéressante à considérer seulement pour des changements supérieurs dans les débits, qui permettront aussi des variations plus fortes dans la composition du gaz à l'entrée. Quant aux régimes transitoires, pour obtenir, par simulation, des résultats valables pour établir une loi de commande, il apparaît nécessaire de déterminer expérimentalement la diffusion axiale pour le liquide et pour le gaz.

Les résultats obtenus sur le pilote montrent le besoin d'établir une commande en boucle ouverte pour éviter des dépassements importants dans la composition en tête de colonne, le temps de réponse de celle-ci à des changements dans les perturbations et dans la commande étant dans le rapport de un à deux. Le régime transitoire de y_T lors des changements de y_F est influencé par l'écoulement du gaz et par la réaction chimique, la détermination de l'importance de chacun de ces deux facteurs n'a pu être établie car ceci demande soit l'intégration du système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, soit la mesure sur le pilote de la diffusion axiale. Pour le régime transitoire de

y_T dû à des changements de G_A, la réaction chimique semble être le facteur le plus important. Enfin en ce qui concerne les changements de L_T la dynamique de l'écoulement du liquide à travers la colonne détermine le régime transitoire trouvé sur y_T.

A la vue des résultats obtenus sur le pilote il apparaît intéressant de réguler la température de la DEA à l'entrée de la colonne, et de disposer d'un capteur qui nous donne sa composition ; ceci permettrait de déterminer les types de régimes cinétiques présents dans la colonne et procéder à une identification paramétrique du modèle théorique. D'autre part on pourra travailler alors avec une erreur absolue sur la composition de sortie bien plus petite. Ceci permettra aussi de se fixer une composition de sortie plus basse, la valeur de 0.12 moles CO_2/mole air retenue jusqu'ici étant trop importante par rapport à toutes les applications industrielles de lavage de gaz. Même alors l'extrapolation de cette étude (surtout du modèle statique) sur pilote à une unité industrielle, sur le plan quantitatif, sera malaisée du fait des pressions très différentes existant dans chaque cas.

Ce mémoire est le premier concernant l'unité pilote d'absorption. Même s'il n'accorde que très peu de place à toute la phase de construction et d'équipement, son principal mérite, croyons nous, est d'avoir tout d'abord abouti à la réalisation d'une unité opérationnelle - ce qui est certes davantage un problème d'ingénieur que de chercheur - mais aussi d'avoir abordé sous ses divers aspects théoriques et expérimentaux le problème de l'identification en vue de la commande du débit d'amine. Un approfondissement de ces travaux est possible qui passe, dans bien des aspects, par la mesure de la concentration de l'amine. C'est un problème qui doit être maintenant étudié. Sur le plan de l'automatique il devrait permettre d'aborder le problème de la minimisation de la consommation d'amine sous diverses hypothèses de fonctionnement :

- modifications des compositions et des débits à l'entrée connues à l'avance, le débit pouvant, peut être, être commandé en régime transitoire pour pallier les contraintes sur la commande et sur la dérivée.

- modifications non connues à l'avance, mais mesurables.

- alimentation en amine plus ou moins régénérée à divers niveaux - à déterminer - de la colonne, ce qui redonnerait de l'intérêt à l'étude théorique sur les équations aux dérivées partielles.

A N N E X E S

Méthode de la transformée de Laplace. Séries de Neumann

Diffusion de Taylor A.1

Diffusion introduite par la discrétisation A.4

Approximation Ra = K(L). Y pour gaz dilués A.5

Courbe d'étalonnage Anir 11 A.11

Courbe d'étalonnage débitmètre DEA A.12

Courbe d'étalonnage débitmètre AIR A.13

Réponse du système d'analyse à l'entrée, à un échelon de composition (AFI) A.14

Réponse du mélangeur (débit et composition) à un échelon de débit de CO_2 (AF3) A.15

Composition du gaz à l'entrée de la colonne après un échelon de débit de CO_2 (AF4) A.16

Réonse du système d'analyse à la sortie de la colonne pour un échelon de débit de CO_2 (AT1) A.17

Approximation $e^{-Tp}/1+\tau p$ pour le système d'analyse en tête A.18

Composition en tête de colonne après un échelon de composition en fond A.19

Composition en tête de colonne après un échelon de débit d'air A.20

Composition en tête de colonne après un échelon de débit de DEA A.21

Influence du couplage entre les deux équations (gaz et liquide) sur les régimes transitoires A.22

METHODE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE. SERIES DE NEUMANN. DIFFUSION DE TAYLOR [2, 8]

On part du système d'équations

$$H_1 \frac{\partial X}{\partial t} + H_1 V_1 \frac{\partial X}{\partial \ell} + K_{12} (X-Y) = 0$$

$$H_2 \frac{\partial Y}{\partial t} + H_2 V_2 \frac{\partial Y}{\partial \ell} + K_{12} (Y-X) = 0$$

H_1, H_2 : "Hold-up" [mole. L^{-3}] constants
V_1, V_2 : Vitesses [L. T^{-1}]
K_{12} : Coefficient de transfert constant.

Normalisation par le changement de variables $z = \frac{\ell}{L}$; $\theta = \frac{t V_1}{L}$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{\partial X}{\partial z} + N_1 (X-Y) = 0$$

$$\beta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial Y}{\partial z} + N_2 (Y-X) = 0$$

avec

$$\beta = \frac{V_1}{V_2} \qquad N_1 = \frac{K_{12} L}{H_1 V_1} \qquad N_2 = \frac{K_{12} L}{H_2 V_2}$$

TRANSFORMEE DE LAPLACE

a) On passe aux équations incrémentales (linéarisation autour d'un point de fonctionnement)

1 - Si les débits sont constants il n'y a aucun problème

2 - Si les débits sont variables, on néglige les produits d'incréments ; il est nécessaire de résoudre le système d'équations en régime permanent au préablable.

b) On prend la transformée de Laplace par rapport à une des variables indépendantes (t dans le cas où l'on cherche les transmittances).

c) On intègre par rapport à l'autre variable indépendante.

Les transmittances ainsi obtenues peuvent être assez complexes, c'est la raison pour laquelle on fait des approximations comme : séries de Neumann, diffusion de Taylor, ...

SERIES DE NEUMANN

a) On passe aux équations incrémentales.

b) On prend la transformée de Laplace, par rapport à t, ce qui conduit, en négligeant les produits d'incréments, à :

$$H_1 \frac{\partial x}{\partial t} + H_1 \overline{V}_1 \frac{\partial x}{\partial \ell} + K_{12}(x-y) = -H_1 v_1 \frac{d\overline{X}}{d\ell}$$

$$H_2 \frac{\partial y}{\partial t} + H_2 \overline{V}_2 \frac{\partial y}{\partial \ell} + K_{12}(y-x) = -H_2 v_2 \frac{d\overline{Y}}{d\ell}$$

$\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{V}_1$ et $\overline{V}_2$ étant les valeurs de ces variables en régime permanent. Après le changement de variables indiqué plus haut et transformation de Laplace on obtient

$$(s+N_1)\tilde{x} + \frac{d\tilde{x}}{d\zeta} - N_1 \tilde{y} = p_1(\zeta)\cdot q_1(s)$$

$$(\beta s + N_2)\tilde{y} + \frac{d\tilde{y}}{d\zeta} - N_2 \tilde{x} = p_2(\zeta)\cdot q_2(s)$$

$$p_1(\zeta) = -\frac{d\overline{X}}{d\zeta} \qquad p_2(\zeta) = -\frac{d\overline{Y}}{d\zeta}$$

$$q_1(s) = \frac{\tilde{v}_1}{\overline{V}_1} \qquad q_2(s) = \frac{\tilde{v}_2}{\overline{V}_2}$$

La solution de ces deux équations est :

$$\tilde{x}(z,s) = e^{-a_1 z} q_1(s) \int_0^z e^{a_1 \xi} p_1(\xi)\, d\xi + N_1 e^{-a_1 z} \int_0^z e^{a_1 \xi} \tilde{y}(\xi,s)\, d\xi$$

$$\tilde{y}(z,s) = e^{-a_2 z} q_2(s) \int_z^1 e^{a_2 \xi} p_2(\xi)\, d\xi + N_2 e^{-a_2 z} \int_z^1 e^{a_2 \xi} \tilde{x}(\xi,s)\, d\xi$$

avec $a_1 = s + N_1$; $a_2 = \beta s + N_2$

et conditions aux limites

$$\tilde{x}(0, s) = 0 \qquad \tilde{y}(1, s) = 0$$

puisqu'on a pris des incréments.

En substituant l'expression de $\tilde{y}$ (z, s) dans $\tilde{x}$ (z, s) on obtient une forme récurrente, on prend une première valeur pour $\tilde{x}$ (z, s) et en réalisant l'intégration on arrive à la deuxième approximation et ainsi de suite.

On obtient de cette façon $\tilde{x}$ (z, s) et $\tilde{y}$ (z, s) comme série de termes, chacun associé à un retard pur et une constante de temps.

Cette méthode donne des bons résultats pour les hautes fréquences ; la convergence d'après Gould [2] est bonne.

DIFFUSION DE TAYLOR

On travaille aussi avec les équations incrémentales, après définition d'une vitesse moyenne et d'une composition moyenne on arrive à une équation de la forme :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_M \frac{\partial \xi}{\partial z} = \alpha_T \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

v_M : vitesse moyenne

ξ : composition moyenne

Cette équation est résolue par la méthode de séparation des variables

$$\xi(t,z) = \varphi(t)\,\psi(z)$$

On doit déterminer trois constantes d'intégration et la constante de séparation, on dispose de deux conditions aux limites et d'une condition initiale. La solution est obtenue comme une série de solutions particulières.

Après être passé de ξ, composition moyenne, à x et y les transmittances apparaissent comme une série de termes de premier ordre dont les pôles ont une importance décroissante.

On obtient une solution valable pour les basses fréquences.

DIFFUSION INTRODUITE PAR LA DISCRETISATION [2, 8]

On part de l'équation

a.1 $$H_1 \frac{\partial X}{\partial t} + H_1 V_1 \frac{\partial X}{\partial z} + K_{12}(X - Y) = 0$$

obtenue en négligeant le terme de la diffusion axiale

$$D \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

Si on discrétise z on a :

a.2 $$\Delta z \cdot H_1 \frac{dX_r}{dt} + H_1 V_1 (X_r - X_{r-1}) + K_{12}(X_r - Y_r)\,\Delta z = 0$$

Développant X_{r-1} en série de Taylor

$$X_{r-1} = X_r - \Delta z \cdot \frac{\partial X_r}{\partial z} + \frac{(\Delta z)^2}{2!} \frac{\partial^2 X_r}{\partial z^2}$$

On néglige les termes à partir du troisième degré, en portant cette valeur de X_{r-1} dans a.2, après avoir divisé par Δz on a :

$$H_1 \frac{\partial X_r}{\partial t} + H_1 V_1 \frac{\partial X_r}{\partial z} + K_{12}(X_r - Y_r) = \frac{H_1 V_1 \Delta z}{2!} \frac{\partial^2 X_r}{\partial z^2}$$

D'où le coefficient du terme de diffusion introduit par la discrétisation

$$D = \frac{H_1 V_1 \Delta z}{2}$$

Dans l'hypothèse où le modèle mathématique retenu néglige, pour des raisons de simplicité, la diffusion ; l'expression ci-dessus donne un renseignement pour le choix du pas Δz (après détermination de D) qui introduira lors de la discrétisation un terme de diffusion égal au terme réel.

APPROXIMATION Ra = K (L). y POUR GAZ DILUES

Les équations du régime rapide étant

a.3 $$W \frac{\partial X}{\partial t} = L \frac{\partial X}{\partial z} + K \sqrt{1-2X} \cdot Y$$

a.4 $$U \frac{\partial Y}{\partial t} = -G_A \frac{\partial Y}{\partial z} - K \sqrt{1-2X} \cdot Y$$

où $K = D_1 . K_2 . M. a. P/H = f(T)$; Y =rapport molaire (moles CO_2/mole air), on a pris l'approximation suivante :

a.5 $$W \frac{\partial X}{\partial t} = L \frac{\partial X}{\partial z} + K(L) \cdot Y$$

a.6 $$U \frac{\partial Y}{\partial t} = -G_A \frac{\partial Y}{\partial z} - K(L) . Y$$

Dans l'équation a.4 en effet, la composition du gaz dans la colonne y = y (z, t) est fonction de la composition de la DEA X = X (z, t) elle même fonction du débit de DEA L = L (z, t).

Le fait que X n'apparaisse pas en a. 6 fait que dorénavant on aura une seule équation à résoudre, celle correspondante au gaz L'équation a. 5 donne X = X (z, t), ce qui ne présente pour nous, actuellement, pas d'intérêt, aucun capteur n'étant disponible pour la mesure correspondante.

L'intégration du <u>régime statique</u> est immédiate.

$$G_A \frac{d\bar{Y}}{dz} + \bar{K}\bar{Y} = 0$$

Condition limite $\bar{Y}(0) = \bar{Y}_F$

$$\bar{Y}(z) = \bar{Y}_F \, e^{-\frac{\bar{K}}{\bar{G}_A} z}$$

et pour z = Z

$$\bar{Y}_T = \bar{Y}_F \, e^{-\frac{\bar{K}}{\bar{G}_A} Z}$$

Pour intégrer le <u>régime dynamique</u> ; on passe aux équations incrémentales

a. 6 $$U \frac{\partial Y}{\partial t} = - G_A \frac{\partial Y}{\partial z} - KY$$

Posons :

$\bar{Y} = Y(z, 0)$ $\quad \bar{G}_A = G_A(0)$

$U = \bar{U} = cte$

$\bar{X} = X(z, 0)$ $\quad \bar{K} = K(z, 0)$

valeurs des variables dans le régime permanent précédent le nouvel instant initial.

$X = \bar{X} + x$ $\quad G_A = \bar{G}_A + g_A$

$Y = \bar{Y} + y$ $\quad K = \bar{K} + k$

L'équation qui décrit le régime permanent étant

a. 7 $$\bar{G}_A \frac{d\bar{Y}}{dz} + \bar{K}\bar{Y} = 0$$

L'équation a. 6 devient

a. 8 $$U\frac{\partial y}{\partial t} = -(\bar{G}_A + g_A)\frac{\partial(\bar{Y}+y)}{\partial z} - (\bar{k}+k)(\bar{Y}+y)$$

qui compte tenu de a. 7 s'écrit

a. 9 $$U\frac{\partial y}{\partial t} = -\bar{G}_A\frac{\partial y}{\partial z} - g_A\frac{d\bar{Y}}{dz} - \bar{k}y - k\bar{Y}$$

en négligeant les produits d'incréments.

A partir des équations en régime permanent on aura

$$\bar{Y} = \bar{Y}_F\, e^{-\frac{\bar{k}}{\bar{G}_A}z} \quad ; \quad \frac{d\bar{Y}}{dz} = -\frac{\bar{k}}{\bar{G}_A}\bar{Y}_F\, e^{-\frac{\bar{k}}{\bar{G}_A}z}$$

En remplaçant ces termes en a. 9

$$U\frac{\partial y}{\partial t} = -\bar{G}_A\frac{\partial y}{\partial t} - \bar{k}y + \frac{\bar{k}}{\bar{G}_A}\bar{Y}_F\, e^{-\frac{\bar{k}}{\bar{G}_A}z}\cdot g_A - \bar{Y}_F\, e^{-\frac{\bar{k}}{\bar{G}_A}z}\cdot k$$

Ayant choisi pour K une fonction K = K (L), on a, au premier ordre

$$k = \left(\frac{dk}{dL}\right)_{L=\bar{L}}\cdot l \qquad L = \bar{L} + l$$

a. 10 $$U\frac{\partial y}{\partial t} = -\bar{G}_A\frac{\partial y}{\partial z} - k(\bar{L})y + \frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A}\bar{Y}_F\, e^{-\frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A}z}\cdot\left(\frac{dk}{dL}\right)_{L=\bar{L}}\cdot l$$

En utilisant la transformation de Laplace par rapport au temps on obtient

a. 11 $$Up\check{y} = -\bar{G}_A\frac{d\check{y}}{dz} - k(\bar{L})\check{y} + \frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A}\bar{Y}_F\, e^{-\frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A}z}\check{g}_A - \bar{Y}_F\, e^{-\frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A}z}\left(\frac{dk}{dL}\right)_{L=\bar{L}}\cdot\check{l}$$

où
$$\tilde{y}(z,p) = \mathcal{L}\left[y(z,t)\right]$$
$$\tilde{g}_A(z,p) = \mathcal{L}\left[g_A(z,t)\right]$$
$$\tilde{\ell}(z,p) = \mathcal{L}\left[\ell(z,t)\right]$$

On va exprimer en a.11 $\tilde{g}_A$ (z, t) en fonction de $\tilde{g}_A$ (0, t) et $\tilde{l}$ (z, t) en fonction de $\tilde{l}$ (Z, t). Rappelons que, en ce qui concerne le débit gaz, on a fait lors de l'établissement des équations la simplification de le considérer indépendant de z, on aura

$$\tilde{g}_A\ (z,\ p) = \tilde{g}_A\ (0, p) = \tilde{g}_{FOND}$$

Pour le débit liquide on va utiliser l'équation $\dfrac{\delta W}{\delta t} = \dfrac{\partial L}{\partial z}$

avec $W = \overline{W} + w$ et $L = \overline{L} + l$, l'équation incrémentale sera

a.12 $$\frac{\delta w}{\delta t} = \frac{\partial \ell}{\partial z}$$

Le "hold-up" liquide W est fonction du débit liquide ; il est classique [3, 4] de retenir une expression linéaire

a.13 $$W = b + c\ .\ L$$

d'où

$$w = c.l$$

et l'équation a.12 devient

$$c\,\frac{\delta \ell}{\delta t} = \frac{\partial \ell}{\partial z}$$

Après transformation de Laplace

$$cp\tilde{\ell} = \frac{d\tilde{\ell}}{dz}$$

condition limite $l(Z, p) = l_{TETE}$

d'où

$$\tilde{\ell}(z,p) = \tilde{\ell}_T \, e^{-cp(Z-z)}$$

En remplaçant en a. 11

a. 14 $$Up\tilde{y} = -\bar{G}_A \frac{d\tilde{y}}{dz} - K(\bar{L})\tilde{y} + A\tilde{g}_F + B\tilde{\ell}_T$$

avec

$$A = \frac{K(\bar{L})}{\bar{G}_A} \bar{Y}_F \, e^{-\frac{K(\bar{L})}{\bar{G}_A} z}$$

$$B = -\bar{Y}_F \left(\frac{dK}{dL}\right)_{L=\bar{L}} e^{-\frac{K(\bar{L})}{\bar{G}_A} z} \, e^{-cp(Z-z)}$$

L'intégration de cette équation avec comme condition limite

$$\tilde{y}\,(0,\ p) = \tilde{y}_{FOND}$$

conduit aux transmittances suivantes

$$\frac{\tilde{y}_T}{\tilde{g}_F} = e^{-\frac{Up + K(\bar{L})}{\bar{G}_A} Z}$$

$$\frac{\tilde{y}_T}{\tilde{g}_F} = \frac{K(\bar{L})}{\bar{G}_A} \cdot \frac{1}{Up} \bar{Y}_F \, e^{-\frac{K(\bar{L})}{\bar{G}_A} Z} \left[1 - e^{-\frac{Up}{\bar{G}_A} Z}\right]$$

$$\frac{\tilde{y}_T}{\tilde{\ell}_T} = -\frac{\frac{\bar{Y}_F}{\bar{G}_A}\left(\frac{dK}{dL}\right)_{L=\bar{L}}}{\left(c + \frac{U}{\bar{G}_A}\right)p} \, e^{-\frac{K(\bar{L})}{\bar{G}_A} Z} \left[1 - e^{-\left(\frac{U}{\bar{G}_A} + c\right) Z p}\right]$$

Les gains en régime permanent seront

$$G_{Y_T Y_F} = e^{-\frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A} z} = \frac{\partial \bar{Y}_T}{\partial \bar{Y}_F}$$

$$G_{Y_T G} = \frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A^2} z \, \bar{Y}_F = \frac{\partial \bar{Y}_T}{\partial \bar{G}_A}$$

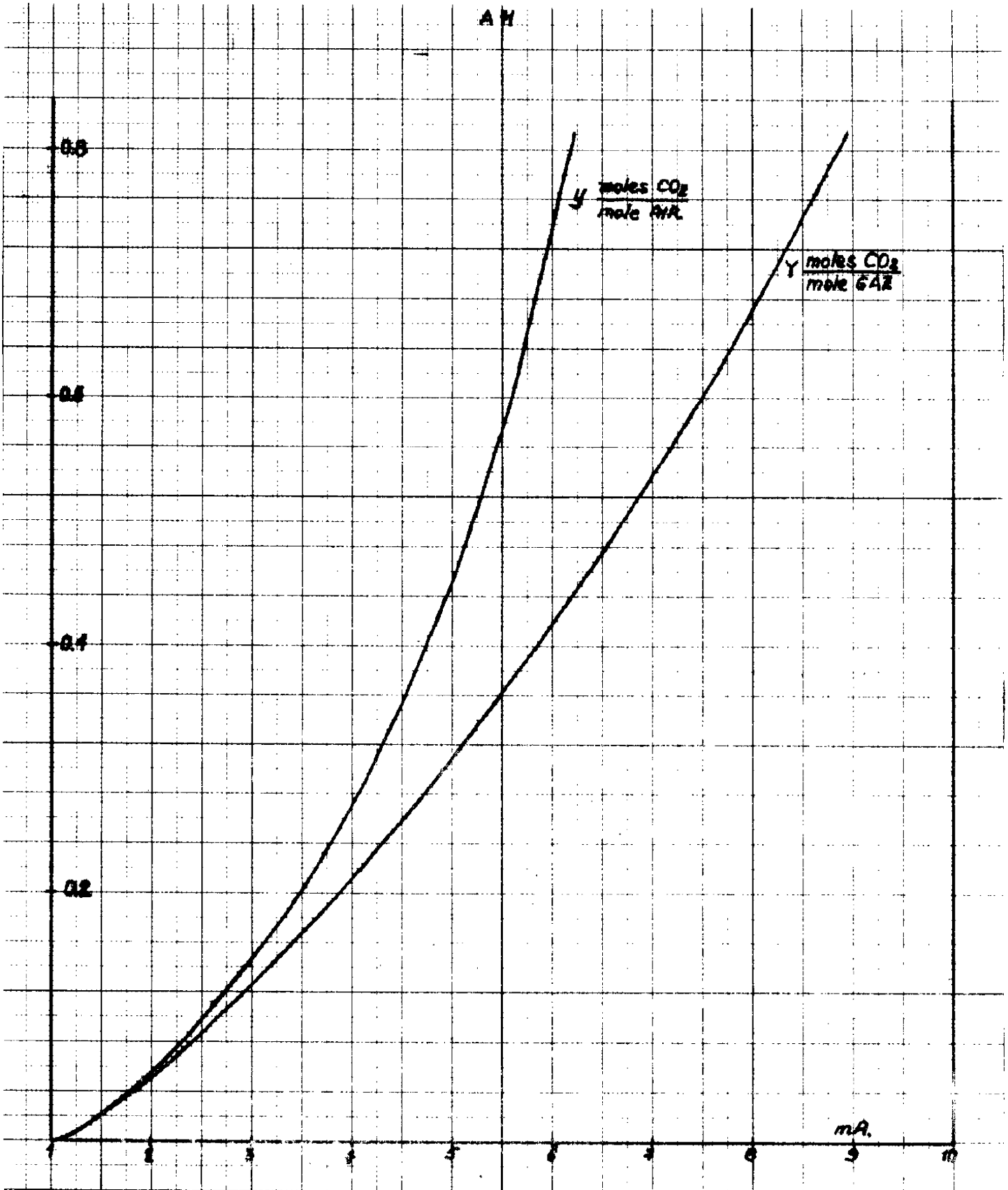
$$G_{Y_T L} = -\frac{1}{\bar{G}_A} z \cdot \bar{Y}_F \, e^{-\frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A} z} \left(\frac{dk}{dL}\right)_{L=\bar{L}} = \frac{\partial \bar{Y}_T}{\partial \bar{L}}$$

Si on prend

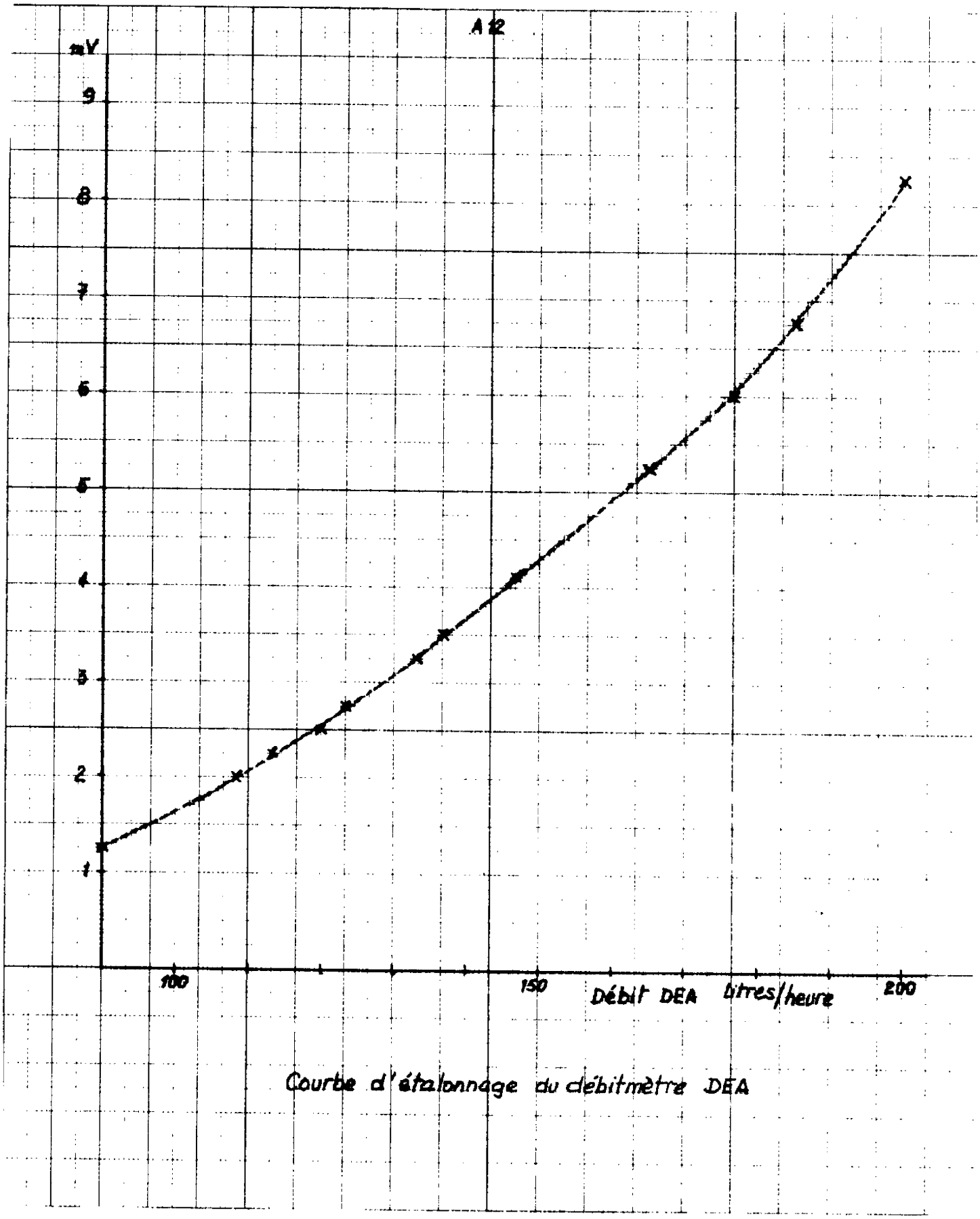
$$\tilde{g}_A(z, p) = e^{-T_G z p} \, \tilde{g}_A(0, p)$$

on obtient pour la fonction de transfert $\tilde{y}_{TETE}/\tilde{g}_{FOND}$

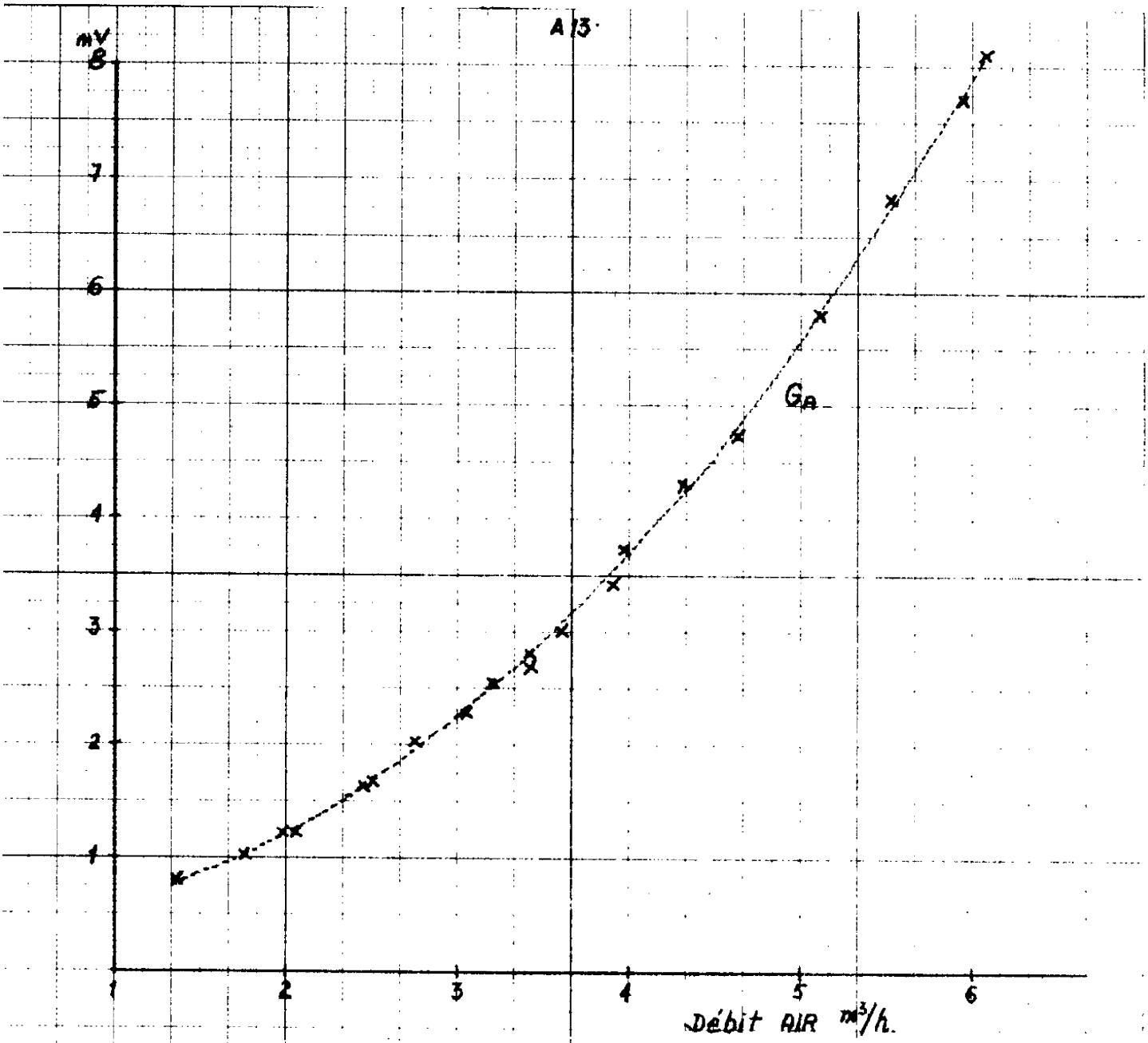
$$\frac{\tilde{y}_T}{\tilde{g}_F} = \frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A^2} \bar{Y}_F \, e^{-\frac{k(\bar{L})}{\bar{G}_A} z} \frac{e^{-T_G p z}}{\frac{Up}{\bar{G}_A} - T_G p} \left[1 - e^{-\left(\frac{Up}{\bar{G}_A} - T_G p\right) z}\right]$$



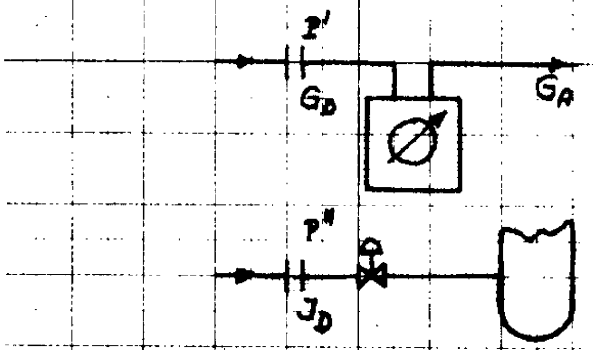
Courbe d'étalonnage de l'analyseur ANIR 11



Courbe d'étalonnage du débitmètre DEA

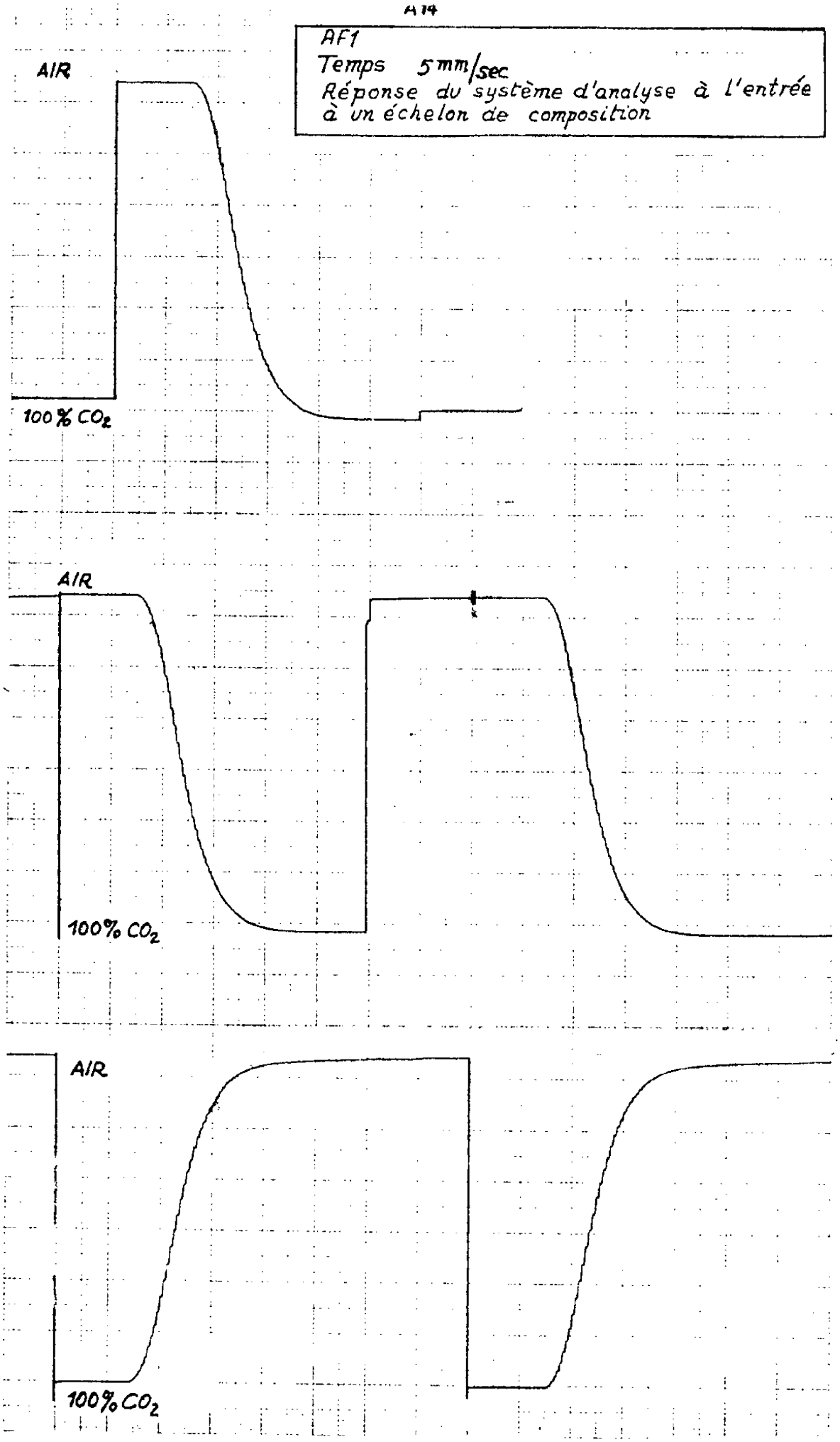


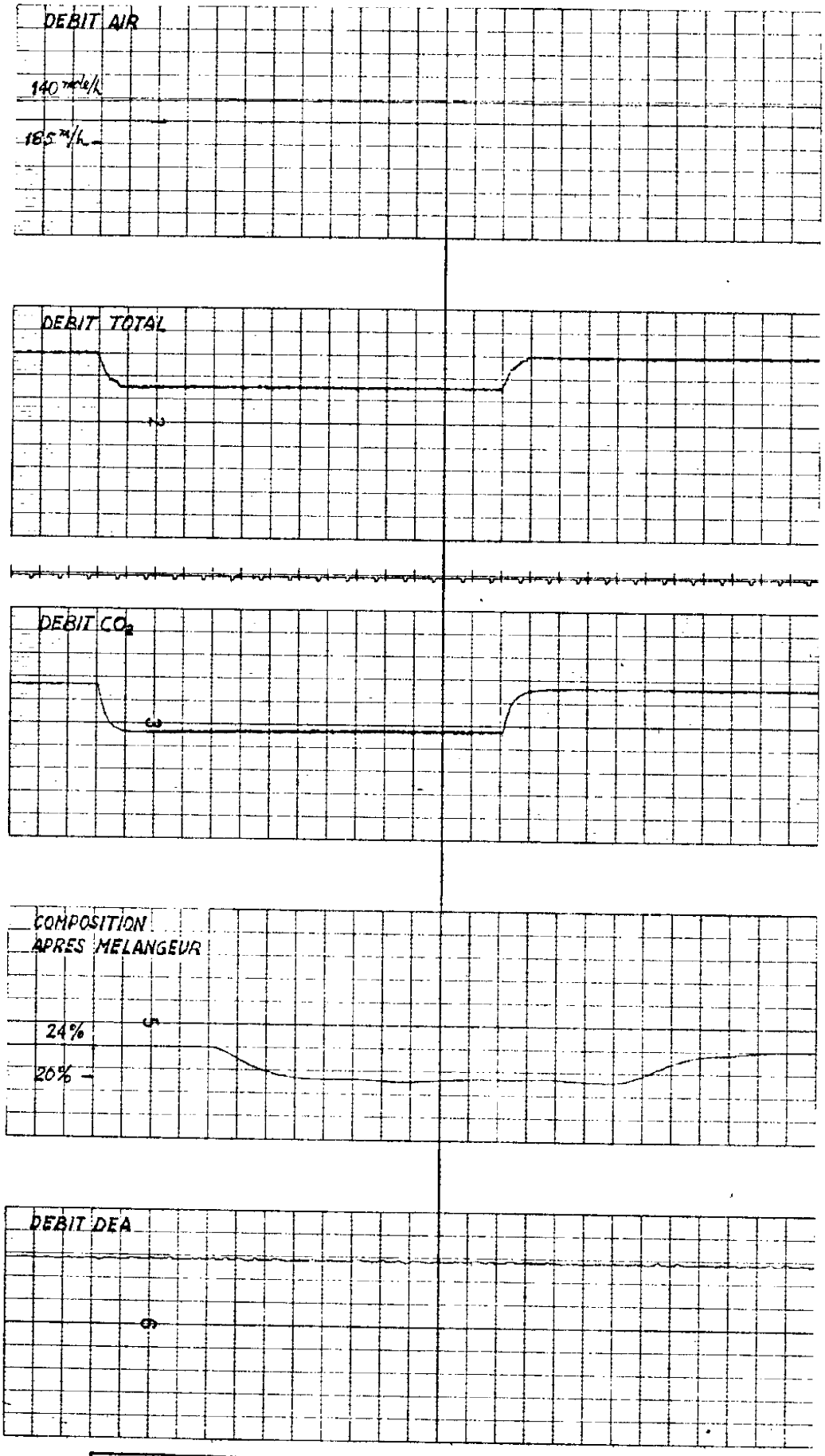
Courbe d'étalonnage du débitmètre AIR



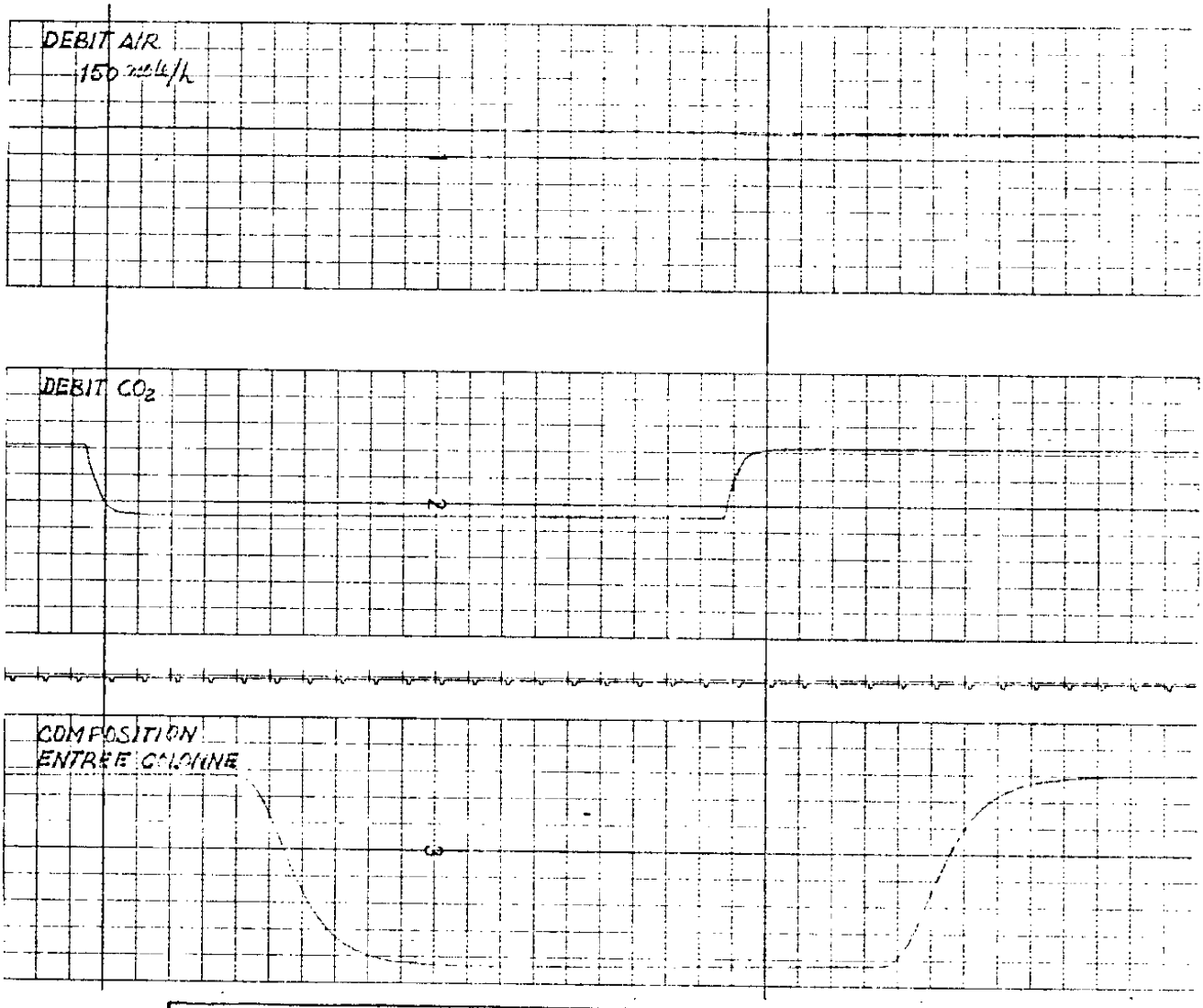
$$J_D \left.\frac{m^3}{h}\right|_{C.N.} = G_A \cdot \frac{273}{293} \cdot \sqrt{\frac{P''}{P'}} \simeq G_A \cdot \frac{273}{293} \cdot \sqrt{P''}$$

AF1
Temps 5 mm/sec
Réponse du système d'analyse à l'entrée à un échelon de composition

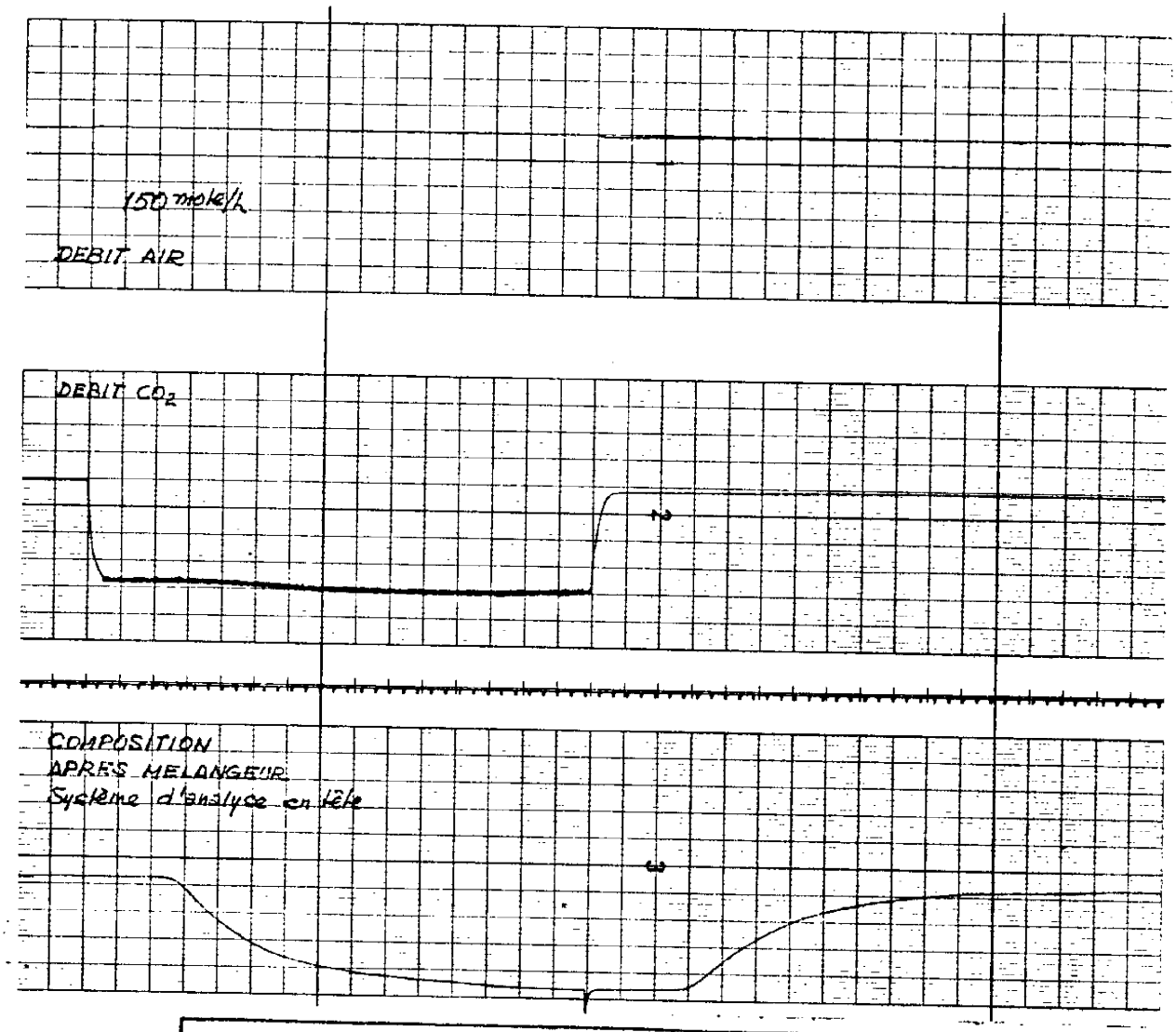




AF3
Réponse du mélangeur à un échelon de débit de CO_2
Temps 5 mm/sec



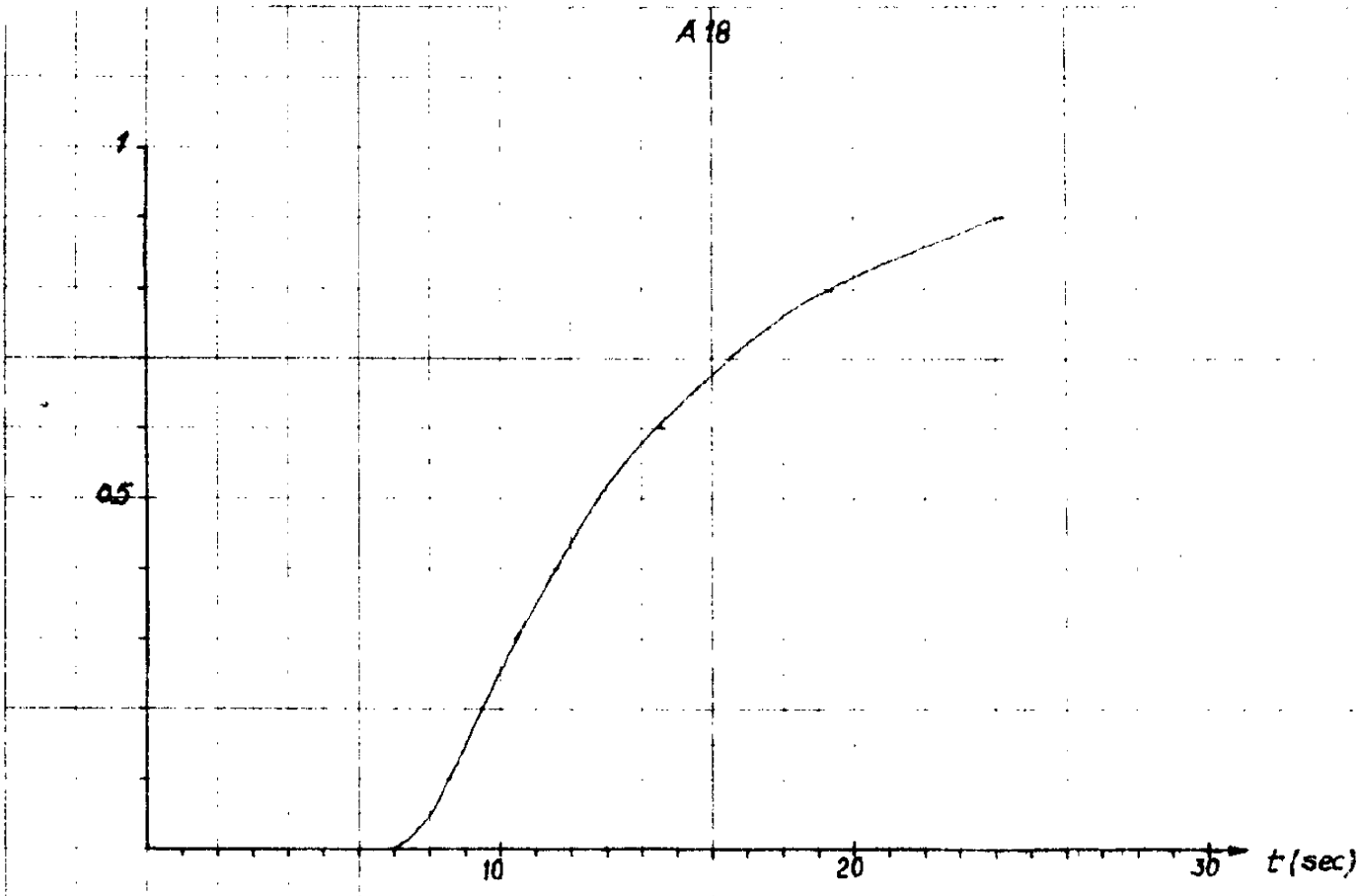
AF4
Composition du gaz à l'entrée de la colonne après un échelon de débit de CO_2
Temps 5 mm/sec



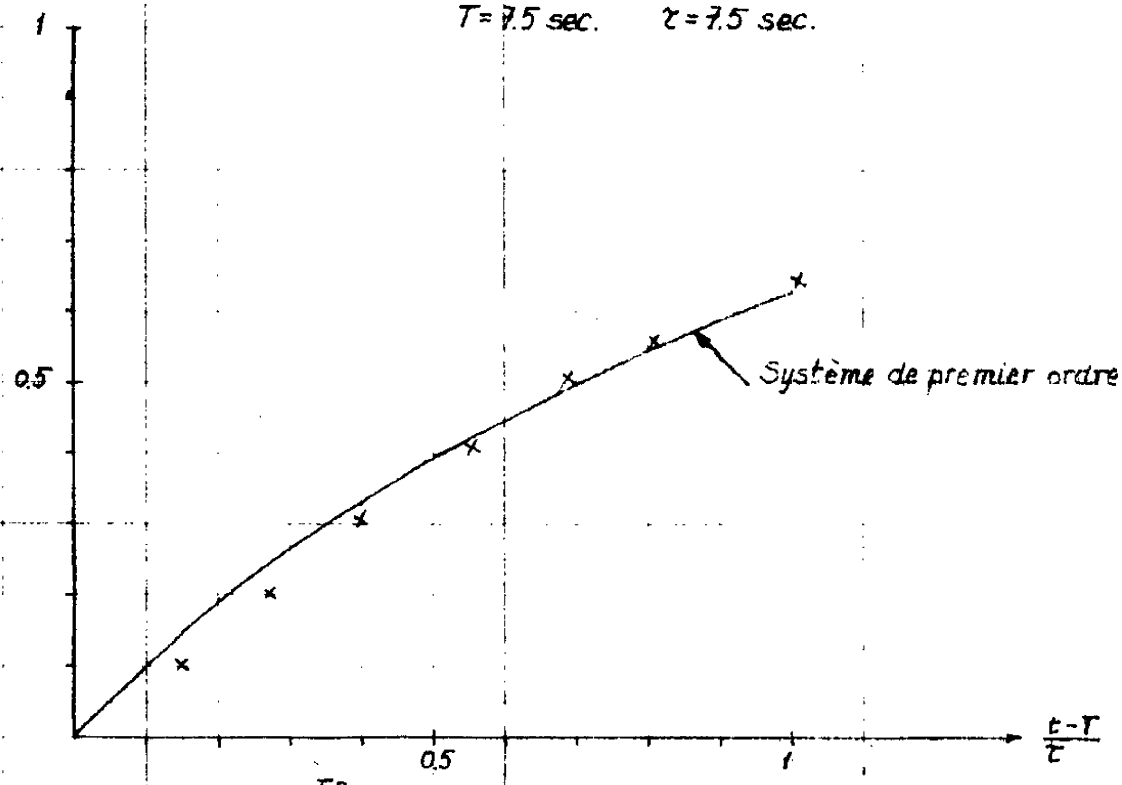
AT1

Réponse du système d'analyse à la sortie de la colonne pour un échelon de débit de CO_2

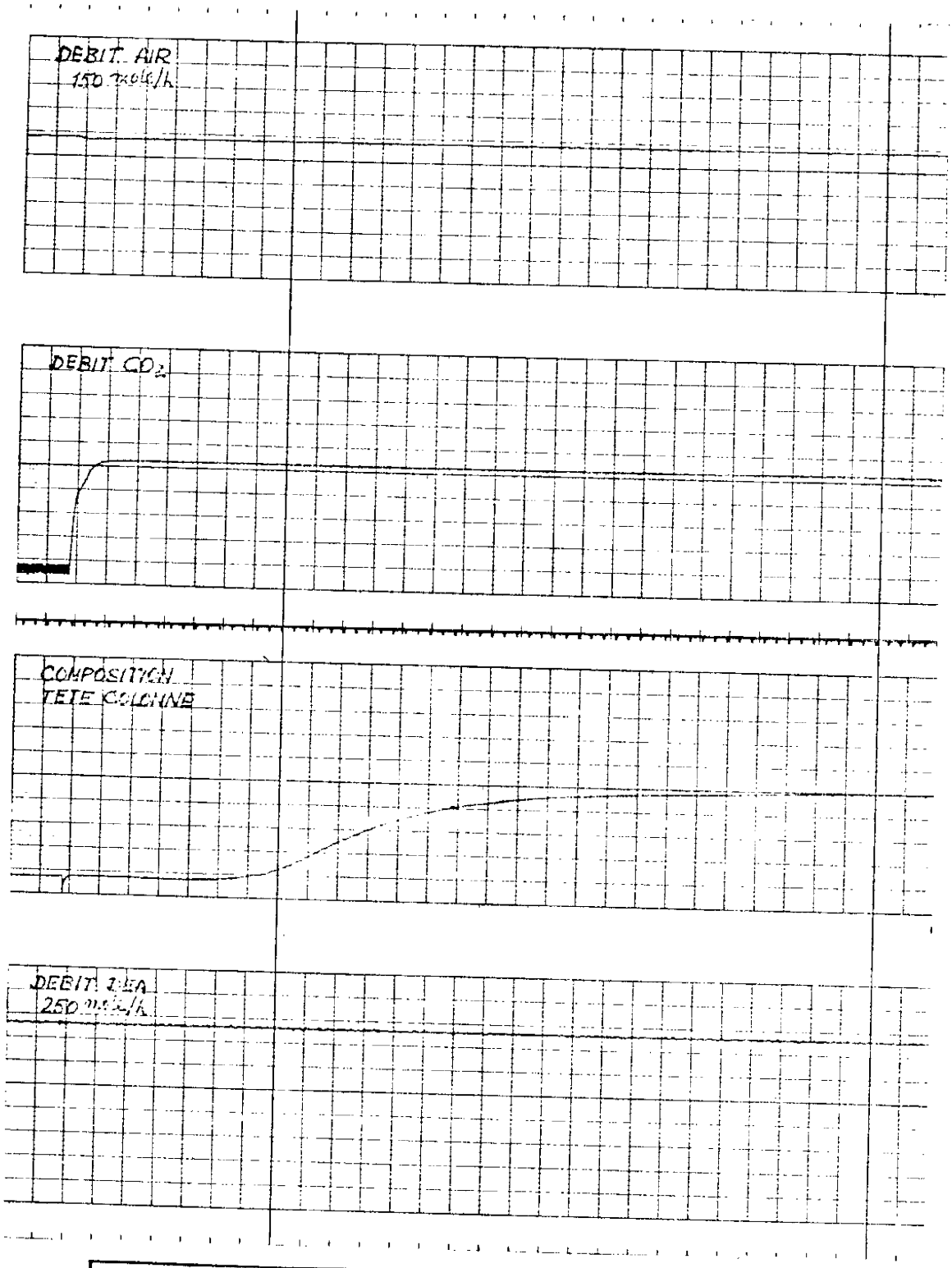
Temps : 2 mm/sec



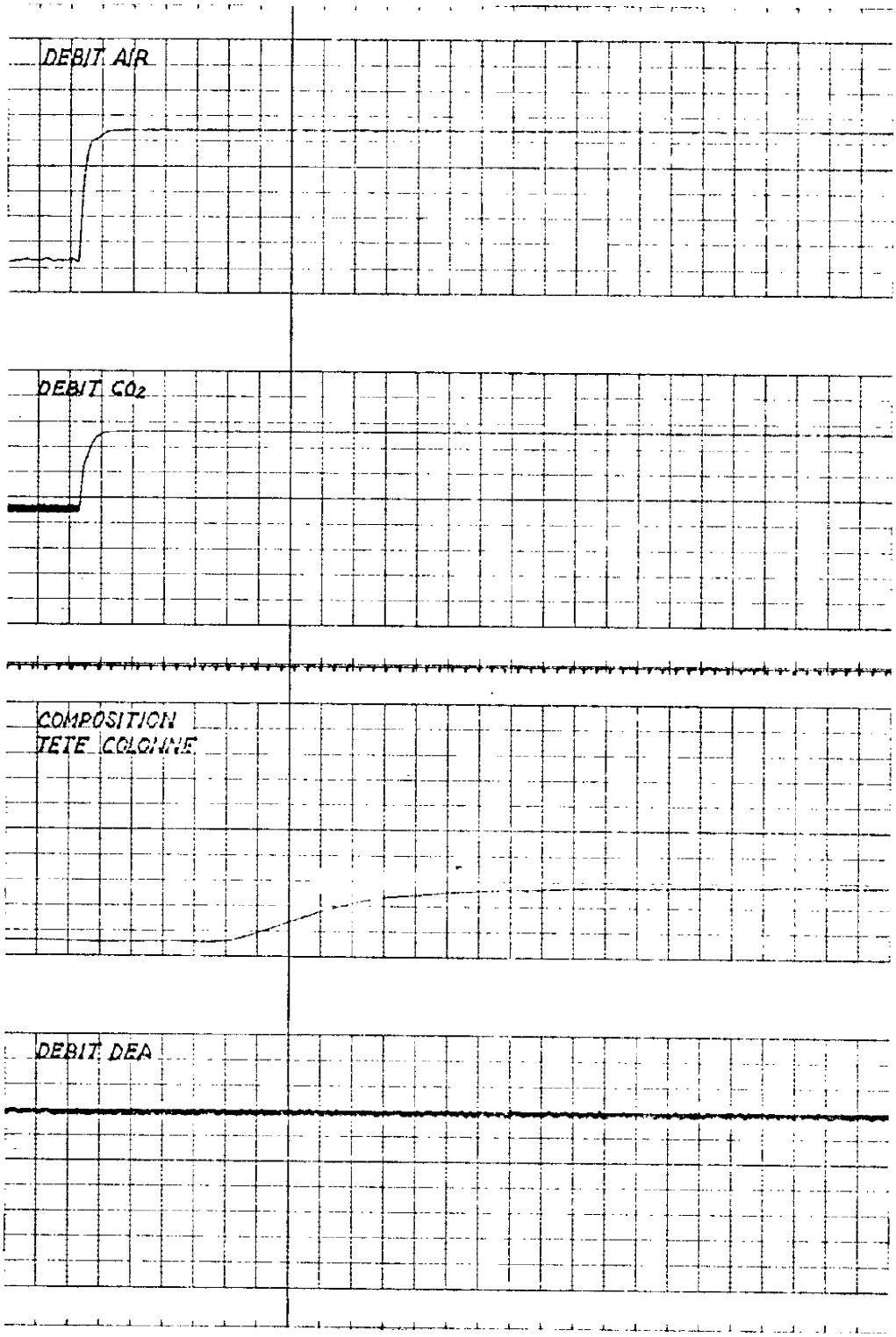
$T = 7.5$ sec. $\tau = 7.5$ sec.



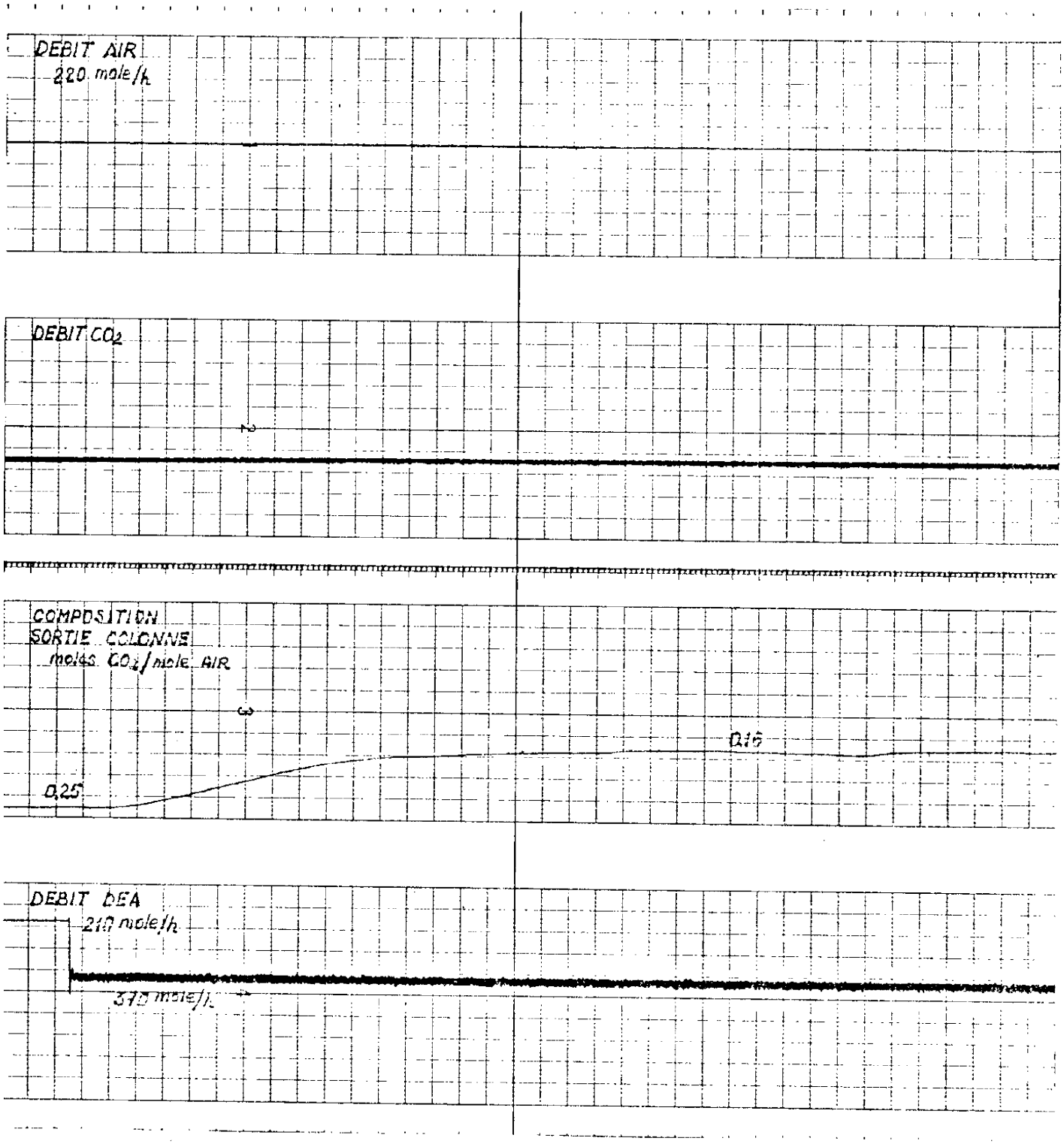
Approximation $\frac{e^{-Tp}}{1+\tau p}$ pour le système d'analyse en tête



Composition en tête de colonne après un échelon de composition en fond
Temps 2 mm/sec



Composition en tête de colonne après un échelon de débit d'air
Temps 2 mm/sec



Composition en tête de colonne après un échelon de débit de DEA
Temps 1 mm/sec

INFLUENCE DU TERME DE TRANSFERT SUR LES REGIMES TRANSITOIRES, A TRAVERS LE COUPLAGE QU'IL ETABLIT ENTRE LES DEUX EQUATIONS (GAZ ET LIQUIDE). TERME DE TRANSFERT LINEAIRE

On part des équations déjà utilisées dans la page A.2

$$H_1 \frac{\partial X}{\partial t} + H_1 V_1 \frac{\partial X}{\partial \ell} + K_{12} (X - Y) = 0$$

$$H_2 \frac{\partial Y}{\partial t} + H_2 V_2 \frac{\partial Y}{\partial \ell} + K_{12} (Y - X) = 0$$

Normalisation par changement de variables

$$z = \frac{\ell}{L} \qquad \theta = \frac{t}{t_{R_1}} \qquad t_{R_1} = \frac{L}{V_1}$$

d'où :

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{\partial X}{\partial z} + N_1 (X - Y) = 0$$

$$\beta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial Y}{\partial z} + N_2 (Y - X) = 0$$

avec :

$$\beta = \frac{V_1}{V_2} \qquad N_1 = \frac{K_{12} L}{H_1 V_1} \qquad N_2 = \frac{K_{12} L}{H_2 V_2}$$

On passe aux équations incrémentales, et après transformation de Laplace on obtient :

$$(s + N_1) \tilde{x} + \frac{d\tilde{x}}{dz} - N_1 \tilde{y} = p_1(z) \; q_1(s)$$

$$(\beta s + N_2) \tilde{y} + \frac{d\tilde{y}}{dz} - N_2 \tilde{x} = p_2(z) . q_2(s)$$

où :

$$p_1(z) = - \frac{d\bar{x}}{dz} \qquad p_2(z) = - \frac{d\bar{Y}}{dz}$$

$$q_1(s) = \frac{\tilde{v}_1}{\bar{V}_1} \qquad q_2(s) = \frac{\tilde{v}_2}{\bar{V}_2}$$

L'influence du couplage entre les deux équations peut être mise en évidence en cherchant une solution approchée pour X (z) et Y (z) par les séries de Neumann. On donne ci-après les résultats que Gould obtient dans la référence 2.

a) Transmittance $G_1 = X(1, s)/X(0, s)$

Pour le cas particulier $N_1 = -N_2 = N$ et $\beta = -1$, qui correspond dans les équations de la colonne d'absorption à prendre L = G et U = W, on a pour les deux premières approximations

$$G_1^1 = e^{-N} e^{-s}$$

$$G_1^2 = \left\{ 1 + \frac{N^2}{2(s+N)} \left[1 - \frac{1}{2(s+N)} \right] \right\} e^{-N} e^{-s} + \frac{N^2 e^{-3N}}{4(s+N)^2} e^{-3s}$$

b) Transmittance $G_2 = X(1, s)/q_1(s)$

Aussi pour $N_1 = -N_2 = N$ et $\beta = -1$, on a :

$$G_2^1 = \frac{\bar{X}(0) - \bar{Y}(1)}{s+N} \left(1 - e^{-s} e^{-N} \right)$$

$$G_2^2 = \frac{\bar{X}(0) - \bar{Y}(1)}{s+N} \left\{ 1 - \frac{N^2}{s+N} \left(1 - \frac{1}{s+N} \right) - e^{-s} e^{-N} \left[1 - N^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(s+N)^2} \right) \right] \right\}$$

Les solutions sont obtenues comme des séries de termes d'importance décroissante pour le régime transitoire.

Comme on pouvait s'y attendre, les premières approximations sont les solutions qu'on obtiendrait avec un terme de transfert indépendant de Y, puisqu'on n'a pas tenu compte du couplage entre les deux équations. Ces solutions sont du type de celle trouvée dans la résolution des équations de la colonne d'absorption avec Ra = K. Y (page A. 5), c'est-à-dire d'un retard pur pour le changement de la condition limite, et assimilable à une constante de temps pour le changement du débit correspondant.

Si on regarde les secondes approximations, on voit que dans les deux cas apparaissent ensemble des retards purs et des systèmes d'ordre égal ou supérieur à un. On aura des réponses qui pourront être approchées par celles d'un premier ordre (ou supérieur) avec retard pur, comme c'est le cas dans la colonne d'absorption ; l'importance du retard vis à vis de la constante de temps (pour un premier ordre) sera fonction de la valeur des paramètres physiques (N_1, N_2 et β). Enfin, les régimes transitoires obtenus avec ces secondes approximations seront plus longs que ceux obtenus en ne tenant pas compte du couplage.

On donne ci-dessous les deux premières approximations pour la transmittance $Y_T(p)/Y_F(p)$ dans le système :

$$W \frac{\partial X}{\partial t} = L \frac{\partial X}{\partial z} + K(Y-X)$$

$$U \frac{\partial Y}{\partial t} = -G \frac{\partial Y}{\partial z} - K(Y-X)$$

$$F_1^1 = e^{-\frac{K}{G}z} \, e^{-\frac{Up}{G}z}$$

$$F_1^2 = e^{-\frac{K}{G}z} \, e^{-\frac{Up}{G}z} \left[1 + \frac{\frac{K}{L}\,\frac{K}{G}}{\frac{Up}{G} + \frac{Wp}{L} + \frac{K}{L} + \frac{K}{G}} \left(z - \frac{1}{\frac{Up}{G} + \frac{Wp}{L} + \frac{K}{L} + \frac{K}{G}} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\frac{K}{L}\,\frac{K}{G}}{\left(\frac{Up}{G} + \frac{Wp}{L} + \frac{K}{L} + \frac{K}{G}\right)^2} \, e^{-\left(\frac{K}{L} + \frac{K}{G}\right)z} \, e^{-\left(\frac{Up}{G} + \frac{Wp}{L}\right)z}$$

qui sont d'accord avec les résultats donnés par Gould, pour U = W et L = G. sans le changement de variables.

Un calcul similaire, non reporté ici, a été fait pour la transmittance $Y_T(p)/G(p)$.

BIBLIOGRAPHIE

1 P.V. DANCKWERTS - M.M. SHARMA

The absorption of carbon dioxide into solutions of alkalis and amines.
The Chemical Engineer. Octobre 1966.

2 L.A. GOULD

Chemical process control. Theory and applications.
Addison-Wesley, 1969.

3 F.P. LEES

The frequency response of a packed gas absorption column.
Chemical Engineering Science, 1968.

4 J.H. PERRY

Chemical engineers'handbook, 1963.

5 ASTARITA

Mass transfer with chemical reaction. 1967.

6 P.V. DANCKWERTS - K.M. McNEIL

The absorption of carbon dioxide into aqueous amine solutions and the effects of catalysis.
Trans. Instn. Chem. Engrs. 1967.

7 WHUITIER

Raffinage et Génie Chimique.

8 H.H. ROSENBROCK - C. STOREY

Computational Techniques for Chemical Engineers. 1966.

9 R.H. STODGHILL - L.D. DURBIN

Two phase axial dispersion frequency response. Absorption. Extraction and fluidized bed responses.
AACC Preprints of Technical Papers. Juin 1970.

10 R.I. GRAY - J.W. PRADOS -

The dynamics of a packed gas absorber by frequency response analysis.
A.I. Ch. E. Journal. 1963.

11 P. HARRIOT

Process Control. 1964.

12 ECC Report n° 125, EAI Bruxelles, Juillet 1971.

13 C. Donald SWAIM

Gas sweetening processes of the 1960
Hydrocarbon Processing. Mars 1970.

14 J. POLIAK

Conception et réalisation de micro-débitmètres thermiques.
Thèse de Doctorat d'Université, Université Paul Sabatier, Mars 1971.

N° d'ordre : 1254

Année 1972

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL-SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention

du titre de Docteur de 3e Cycle
Spécialité : AUTOMATIQUE

par

Claude HERNANDEZ

Maitre ès Sciences

ESTIMATION LINÉAIRE DES PARAMÈTRES DE SYSTÈMES DYNAMIQUES MULTIDIMENSIONNELS ET VALIDATION STATISTIQUE DU MODÈLE. APPLICATIONS A L'IDENTIFICATION DE PROCESSUS

Soutenue le 20 Juin 1972 devant la Commission d'Examen :

MM.	J. LAGASSE	Président
	Y. SEVELY	Examinateurs
	G. GRATELOUP	
	P. C. YOUNG	
	C. BOZZO	
	J. AGUILAR MARTIN	

AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales dirigé par Monsieur le Professeur J. LAGASSE.

Je tiens à remercier tous ceux qui, par leurs enseignements ou leurs conseils, ont contribué a son accomplissement.

Monsieur le Professeur LAGASSE me fait aujourd'hui l'honneur de présider mon Jury de Thèse. Je lui fais part de ma très profonde reconnaissance.

J'exprime ma gratitude à Monsieur le Professeur Y. SEVELY et à Monsieur le Professeur G. GRATELOUP pour la confiance qu'ils m'ont toujours accordée. Je leur suis très reconnaissant d'avoir bien voulu faire partie du Jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur P.C. YOUNG et Monsieur C. BOZZO de leur participation à ce Jury, et souhaite qu'elle ouvre la voie à une étroite collaboration entre leurs équipes de recherches et le L.A.A.S.

Je remercie tout particulièrement, Messieurs J. AGUILAR MARTIN, G. ALENGRIN et G. CONTINENTE de leurs précieux conseils et les félicite d'entretenir un esprit d'équipe aussi fructueux.

Enfin, que toutes les personnes du Service de Documentation qui ont permis la réalisation matérielle de ce mémoire soient ici remerciées.

NOTATIONS

On distingue les matrices des vecteurs en ce sens que ces derniers sont représentés par un caractère souligné

A^t	matrice A transposée
$\underline{\theta}^{\ell}$	ℓ ième vecteur ligne de la matrice θ
$[\Sigma]_{ii}$	élément ii de la matrice Σ
$\mathbb{1}, I$	matrice unité
$\mathbb{0}$	matrice nulle
$\underline{0}$	vecteur nul
ϵ^{AT}	fonction exponentielle de la matrice A multipliée par le scalaire T
$\wedge$	symbole qui désigne un estimateur
Ey	Espérance mathématique de y
$E_{\mid \varepsilon} y$	Espérance mathématique de y conditionnée par la connaissance de ε

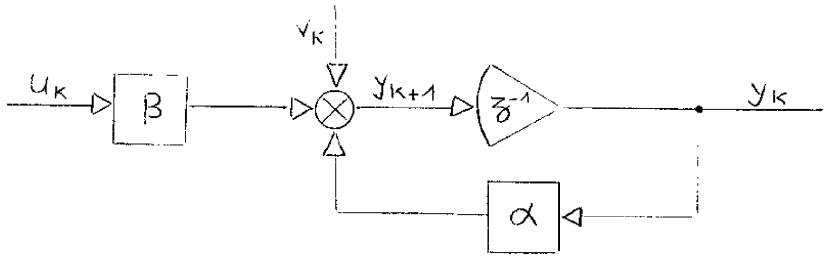
INTRODUCTION

IDENTIFICATION - MODELISATION

L'identification dynamique d'un processus est un procédé qui consiste à élaborer un modèle mathématique qui représente, aussi fidèlement que possible, l'évolution du processus au cours du temps.

Par exemple un processus linéaire, monovariable, du premier ordre, peut se modéliser dans l'espace discrétisé du temps par la relation :

(1) $$y_{K+1} = \alpha \cdot y_K + \beta \cdot u_K + v_K$$



Si on se réfère aux ouvrages spécialisés dans la modélisation statique (c'est-à-dire que le modèle obtenu n'a pas un forme récurrente telle que (1)), on constate que l'on peut classer les modèles suivant le type des variables figurant dans la relation mathématique qui leur correspond.

Ainsi, on distingue les variables aléatoires mesurables, c'est-à-dire que l'on peut connaître à un instant donné une réalisation de ces variables, des variables aléatoires non mesurables.

Dans la relation (1) :

si u est une variable déterministe,
v est une variable aléatoire non mesurable,
α et β sont deux paramètres à déterminer,
alors y est une variable aléatoire mesurable

On peut donc de la même façon procéder à une classification des modèles dynamiques linéaires statistiques, ce qui sous entend des équations qui lient dans le temps, à l'aide de paramètres, des variables déterministes et des variables aléatoires ;

ces équations sont linéaires par rapport aux paramètres et par rapport aux variables aléatoires.

CLASSIFICATION DES MODELES

Classe 1 :

Hypothèse : On peut mesurer exactement u_K et y_K figurant dans la relation (1), ($\forall K \in [0, \infty[$)

La variable aléatoire v_K, non mesurable, représente ici une erreur d'équation ou de dynamique.

Le modèle défini par l'équation (1) est un modèle de prédiction.

Connaissant exactement u_K et y_K d'une part, et les paramètres α et β d'autre part, on est capable de calculer la prédiction en valeur moyenne :

(2) $$E_{y_K, u_K} y_{K+1} = \alpha . y_K + \beta . u_K \qquad \text{si } E v_K = 0$$

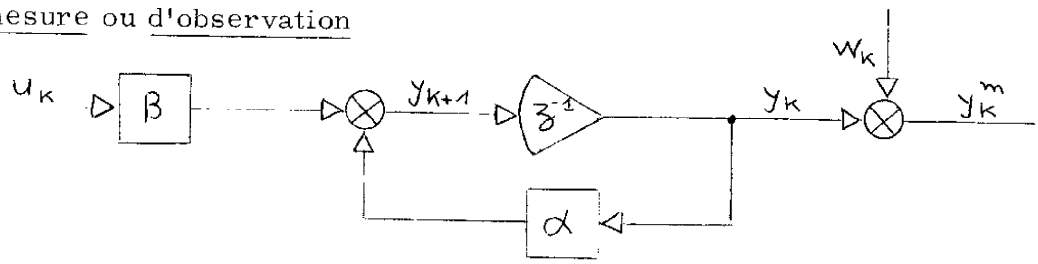
Classe 2 :

Hypothèse : On ne peut mesurer exactement y_K ($\forall K \in [0, \infty[$) mais on observe

(3) $$y_K^m = y_K + w_K$$

avec $E\, w_K = 0$

La variable aléatoire non mesurable w_K représente ici une erreur de mesure ou d'observation



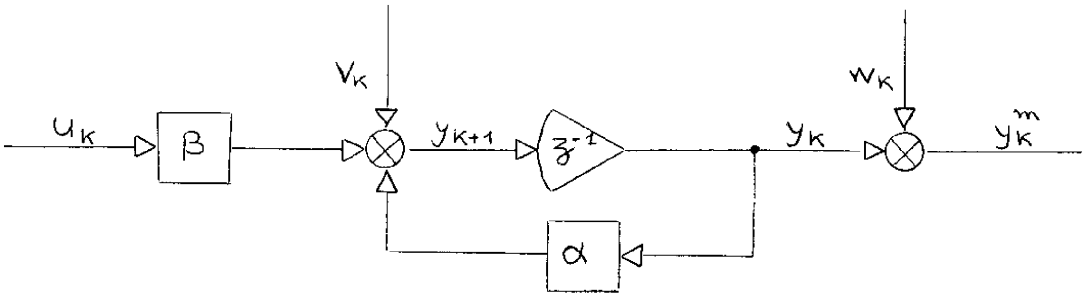
y_K^m est une variable aléatoire mesurable.

Dans ce cas on ne peut calculer que :

$$E_{|y_K^m, u_K} \; y_{K+1} = \alpha \cdot y_K^m + \beta . u_K$$

Classe 3 :

Hypothèse : Il y a à la fois un bruit dans la dynamique et un bruit de mesure.



y_K est ici une variable aléatoire non mesurable.

Les modèles qui seront élaborés dans ce travail appartiendront à l'une quelconque des trois classes ainsi définies.

PROBLEME DE REGRESSION - ESTIMATION DE PARAMETRES

Lorsque l'on a choisi une écriture mathématique telle que (1) pour modéliser un processus, on a choisi en fait une relation structurelle ou structure et il reste à déterminer la valeur à attribuer aux paramètres inconnus α et β

Ce problème est un problème de regression multiple ; il s'agit de trouver la meilleure (par exemple au sens des moindres carrés) parmi les relations du type (1), soit par exemple :

$$(4) \qquad \widehat{y}_{K+1} = \widehat{\alpha} \cdot y_K + \widehat{\beta} \cdot u_K$$

qui permet de calculer la prédiction en valeur moyenne de y_{K+1}.

On peut insérer ce problème dans le cadre plus général de la théorie de

l'estimation linéaire : le but étant de déterminer des estimateurs $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ des paramètres inconnus α et β

$\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ sont considérés ici comme des variables aléatoires.

ESTIMATION DE L'ERREUR RESIDUELLE

On appelle généralement erreur résiduelle (ou bruit résiduel) la différence :

$$\varepsilon_K = y_{K+1} - \widehat{y}_{K+1} \qquad \text{pour} \qquad \widehat{\alpha} \triangleq \alpha \qquad \text{et} \qquad \widehat{\beta} \triangleq \beta$$

alors que l'erreur totale (ou généralisée) est :

$$\widehat{\varepsilon}_K = y_{K+1} - \widehat{y}_{K+1} = \varepsilon_K + \Delta\widehat{\alpha}.\, y_K + \Delta\widehat{\beta}.\, u_K$$

si $\Delta\widehat{\alpha} = \alpha - \widehat{\alpha}$
$\Delta\widehat{\beta} = \beta - \widehat{\beta}$

Si les paramètres estimés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ sont sans biais :

$$E\,\Delta\widehat{\alpha} = 0 \quad ; \quad E\widehat{\alpha} = \alpha$$
$$E\,\Delta\widehat{\beta} = 0 \quad ; \quad E\widehat{\beta} = \beta$$

donc ce cas $\quad E\,\widehat{\varepsilon}_K \Big|_{y_{K+1}} = E\,\varepsilon_K \Big|_{y_{K+1}}$

On considèrera $\widehat{\varepsilon}_K$, dans le cas d'une estimation sans biais, comme un estimateur de ε_K et on conservera l'appellation bruit résiduel.

On peut se demander ce que représente l'erreur résiduelle dans le cadre des trois classes de modèles précédemment définies.

Classe 1

On reprend la relation (1) :

$$y_{K+1} = \alpha.\, y_K + \beta.\, u_K + v_K$$

et d'après (4), $\widehat{y}_{K+1}$ étant la sortie du modèle avec recalage sur la sortie réelle observée à l'instant précédent K

$$E\,\widehat{y}_{K+1}\Big|_{y_K,u_K} = E\,\widehat{\alpha}.y_K\Big|_{y_K,u_K} + E\,\widehat{\beta}.u_K\Big|_{y_K,u_K} = \alpha.y_K + \beta.u_K = E\,y_{K+1}\Big|_{y_K,u_K}$$

$$E\,\widehat{\varepsilon}_K\Big|_{y_{K+1},y_K,u_K} = y_{K+1} - E\,\widehat{y}_{K+1}\Big|_{y_{K+1},y_K,u_K} = v_K$$

$\widehat{\varepsilon}_K$ est un estimateur de v_K

Classe 2

$$\widehat{y}_{K+1} = \widehat{\alpha}.\,y_K^{\,m} + \widehat{\beta}.\,u_K$$

donne :

$$E\,\widehat{y}_{K+1}\Big|_{y_K^m,u_K} = E\,\widehat{\alpha}.y_K^m\Big|_{y_K^m,u_K} + E\,\widehat{\beta}.u_K\Big|_{y_K^m,u_K} = \alpha.y_K^m + \beta.u_K$$

pour $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ suffisamment proches de α et β, on peut utiliser le modèle comme filtre du signal $y_K^{\,m}$ et calculer :

$$\widehat{y}_{K+1} = \widehat{\alpha}.\widehat{y}_K + \widehat{\beta}.u_K$$

($\widehat{y}_{K+1}$ est ici la sortie du modèle sans recalage), ceci à condition que l'initialisation de cette récurrence soit à effet rapidement négligeable (cas des systèmes asymptotiquement stables), par exemple :

$$\widehat{y}_1 = \widehat{\alpha}.\,y_0^m + \widehat{\beta}.u_0 = \widehat{\alpha}.y_0 + \widehat{\beta}.u_0 + \widehat{\alpha}.w_0$$
$$\widehat{y}_2 = \widehat{\alpha}.\,\widehat{y}_1 + \widehat{\beta}.u_1 = \widehat{\alpha}^2.y_0 + \widehat{\alpha}.\widehat{\beta}.u_0 + \widehat{\beta}.u_1 + \widehat{\alpha}^2.w_0$$

si le modèle est stable, l'effet du dernier terme s'annule rapidement.

alors

$$E_{|y^m_{K+1}, y^m_K, u_K} \widehat{\varepsilon}_K = y^m_{K+1} - E_{|y^m_{K+1}, y^m_K, u_K} \widehat{y}_{K+1} = w_K$$

On choisit $\widehat{\varepsilon}_K$ comme estimateur de w_K

Classe 3

On peut raisonner de la même façon que précédemment : $\widehat{\varepsilon}_K$ représente ici l'effet combiné de v_K et de w_K d'une part, et de l'erreur sur les paramètres d'autre part.

PLAN DE L'ETUDE

Dans une première partie on s'intéresse tout d'abord au problème de la représentation d'un processus multidimensionnel à l'aide d'une relation entrée-sortie multivariable.

L'adjectif multivariable est employé ici dans le sens de plusieurs entrées-plusieurs sorties ; le qualificatif multidimensionnel est utilisé pour indiquer qu'il s'agit d'un système dynamique de grande dimension aussi bien par le nombre des composantes du vecteur d'état que par celui du vecteur d'entrée et/ou de sortie. Cette représentation est étudiée dans plusieurs cas pour lesquels le concept d'observabilité est étendu ou du moins précisé.

On propose ensuite d'estimer les paramètres de la relation précédente à l'aide de méthodes linéaires telles que la méthode des moindres carrés ou celle de la matrice instrumentale ; on parvient ainsi à des expressions explicites des estimateurs des paramètres et de la précision sur chacun d'eux.

Dans une seconde partie est abordé le problème de la validation du modèle à l'aide de tests statistiques. Après avoir étudié l'influence d'une nouvelle entrée (ou variable exogène) dans la relation qui modélise le système à identifier, on s'intéresse à la détermination d'intervalles de confiance sur les paramètres et

par là même sur la prédiction du modèle. On peut alors tester la validité du modèle ou plutôt, on dispose alors d'un critère de rejet, à un niveau de confiance donné.

Dans une troisième et dernière partie sont présentés les résultats d'une expérimentation des algorithmes précédemment étudiés et qui permettent dans certains cas, la réalisation de sous-programmes d'utilisation générale.

L'expérimentation est effectuée par simulation numérique et par application à l'identification de processus réels.

PREMIERE PARTIE

-:-:-:-:-:-:-:-

LE MODELE MULTIVARIABLE ENTREE-SORTIE
ESTIMATION DE SES PARAMETRES

I - DESCRIPTION DE LA RELATION ENTREE-SORTIE A L'AIDE D'UNE EQUATION MATRICIELLE AUX DIFFERENCES

I-1 - PASSAGE DE LA REPRESENTATION EN CONTINU DANS L'ESPACE D'ETAT A LA REPRESENTATION DISCRETE

Soit le système linéaire, multivariable, stationnaire décrit par le système d'équation (I-1) (figure 1)

$$(I\text{-}1) \quad \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\,\underline{x} + B\,\underline{u} \\ \underline{y} = H\,\underline{x} \end{cases}$$

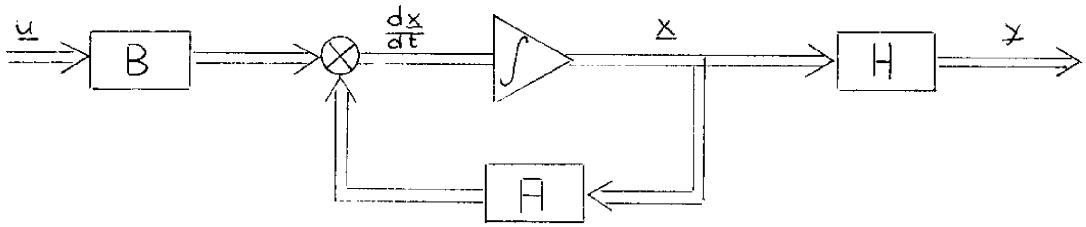


Figure 1

où $\underline{x}$ est un vecteur (n, 1)

A est une matrice (n, n) telle que $\mathcal{R}\acute{e}\,[\lambda_k] < 0 \quad (k = 1, \dots, n)$

B est une matrice (n, L) λ_k valeur propre de A

$\underline{u}$ est un vecteur (L, 1)

$\underline{y}$ est un vecteur (M, 1)

H est une matrice (M, n)

On supposera dans tout ce qui suit qu'il n'y a pas de liaison directe entrée-sortie.

Si les séquences d'entrée-sortie sont enregistrées avec une période d'échantillonnage T constante, le modèle discret (figure 2) associé aux équations (I-1) s'écrit :

$$(I\text{-}2)\quad \begin{cases} \underline{x}_{K+1} = F\,\underline{x}_K + G\,\underline{u}_K \\ \underline{y}_K = H\,\underline{x}_K \end{cases}$$

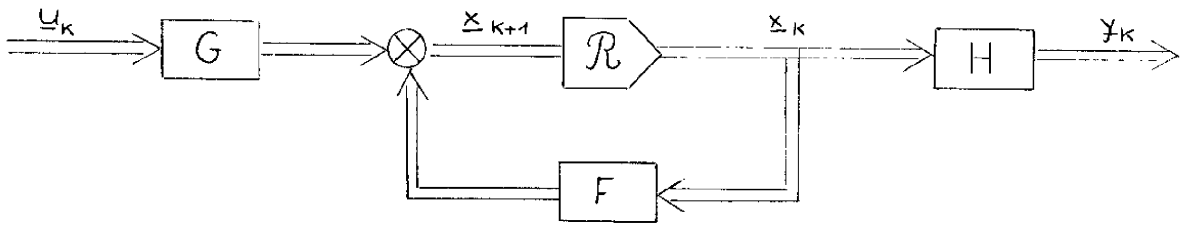


Figure 2

On sait que la solution de l'équation différentielle vectorielle du système (I-1) est donnée par

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0).\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau).B.\underline{u}(\tau).d\tau$$

Si l'on fait de plus l'hypothèse que $\underline{u}$ (t) est constant dans l'intervalle $]t_0, t]$ et que A est non singulière on peut écrire :

$$\underline{x}(t) = \epsilon^{A.(t-t_0)}.\underline{x}(t_0) - A^{-1}.\left[\mathbb{1} - \epsilon^{A.(t-t_0)}\right].B.\underline{u}(t_0)$$

Le modèle discret associé s'obtient alors en faisant :

$t_0 = t_K$ noté K

$t = t_{K+1}$ noté K+1

tel que $t_{K+1} - t_K = T$

$$(I\text{-}3)\quad \begin{cases} \underline{x}(K+1) = \epsilon^{A.T}.\underline{x}(K) + A^{-1}.\left[\epsilon^{A.T} - \mathbb{1}\right].B.\underline{u}(K) \\ \underline{y}(K) = H\,\underline{x}(K) \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Si la période d'échantillonnage est suffisamment petite et si on peut faire l'approximation :

$$\epsilon^{A.T} \# \mathbb{1} + A.T$$

Alors on peut facilement calculer la valeur des paramètres du modèle continu à partir des paramètres du modèle discret.

Sinon il faut calculer $A = \frac{1}{T} \text{Log} \left\{ F \right\}$ par développement en série de Neumann pourvu que les n valeurs propres de la matrice F vérifient la condition $(\lambda_k - 1) < 1$, $k = 1, \ldots, n$

I-2 - LE MODELE STOCHASTIQUE DISCRET ASSOCIE

En général la modélisation d'un processus ne peut se faire de façon précise, sous une forme linéaire, dans un contexte déterministe pour plusieurs raisons :

- Des hypothèses simplificatrices et des approximations (par exemple des développements limités) sont souvent nécessaires pour représenter la dynamique d'un processus par une équation matricielle du type (I-1) ou (I-2). Des perturbations, variables d'entrée non mesurables, $(u^{(l+1)}, \ldots, u^{(r)})$, peuvent agir sur l'évolution du processus au cours du temps.

On n'adoptera pas comme relation dynamique pour modéliser le processus la relation complète :

$$\underline{x}_{K+1} = f^{*}(\underline{x}_K, u^{(1)}_K, u^{(2)}_K, \ldots, u^{(l)}_K, u^{(l+1)}_K, \ldots, u^{(r)}_K)$$

mais la relation :

$$\underline{x}_{K+1} = f(\underline{x}_K, u^{(1)}_K, u^{(2)}_K, \ldots, u^{(l)}_K) + \underline{v}_K$$

où $\underline{v}_K$ est un vecteur aléatoire qui tient compte des perturbations (bruit de dynamique ou erreur de modélisation). Ses composantes sont des variables aléatoires dont les caractéristiques statistiques sont en général mal connues ; elles peuvent être notamment intercorrélées ou autocorrélées.

La matrice de covariance du vecteur $\underline{v}_K$ est notée :

$$\Sigma_v = E\left[\underline{v}_K \, \underline{v}_K^t\right] \qquad \text{si} \quad E\left[\underline{v}_K\right] = \underline{0}$$

- Le relevé des sorties se fait en général au moyen de capteurs, convertisseurs, qui donnent des mesures entachées d'erreur.

L'équation d'observation est donc :

$$\underline{y}_K = H\,\underline{x}_K + \underline{w}_K$$

où $\underline{w}_K$ est un autre vecteur aléatoire (bruit de mesure ou erreur d'observation).

Sa matrice de covariance est notée

$$\Sigma_w = E\left[\underline{w}_K \, \underline{w}_K^t\right] \qquad \text{si} \quad E\left[\underline{w}_K\right] = \underline{0}$$

En résumé le modèle stochastique associé à (I-2) est :

$$\text{(I-4)} \qquad \begin{cases} \underline{x}_{K+1} = F\,\underline{x}_K + G\,\underline{u}_K + \underline{v}_K \\ \underline{y}_K = H\,\underline{x}_K + \underline{w}_K \end{cases}$$

Le processus stochastique ainsi défini est supposé stationnaire et ergodique compte tenu des hypothèses que l'on fera sur les caractéristiques probabilistes des bruits.

I-3 - LA RELATIONS MATRICIELLE ENTREE-SORTIE

On supposera maintenant que le processus modélisé par (I-1) ou (I-2) est stable et complètement observable et commandable.

Pour obtenir une relation entrée-sortie il suffit d'éliminer l'état dans le système d'équations (I-2).

I-3-1 - 1er Cas

La relation H qui lie $\underline{x}_K$ à $\underline{y}_K$ est biunivoque, H est régulière et il n'y a pas d'erreur de mesure.

On peut alors écrire $\underline{x}_K = H^{-1} \underline{y}_K$ et obtenir facilement la relation désirée :

$$\underline{y}_{K+1} = H F H^{-1} \underline{y}_K + H G \underline{u}_K$$

On dira que ces processus sont parfaitement et directement observés (cf [I-1]).

I-3-2 - 2ème Cas

Mêmes conditions que précédemment mais on admet qu'une erreur de mesure (bruit additif) a été commise.

L'équation d'observation est donc :

$$\underline{y}_K^m = H \underline{x}_K + \underline{w}_K = \underline{y}_K + \underline{w}_K$$

avec $\underline{y}_K^m \triangleq$ mesure de $\underline{y}_K$

Ce qui conduit à :

$$\underline{y}_{K+1}^m = H F H^{-1} \underline{y}_K^m + H G \underline{u}_K + \underline{w}_{K+1} - H F H^{-1} \underline{w}_K$$

on pose $\underline{\varepsilon}_K = \underline{w}_{K+1} - H F H^{-1} \underline{w}_K$

même si $\underline{w}_K$ est un vecteur de bruit blanc, $\underline{\varepsilon}_K$ est un vecteur de bruit corrélé :

$$E(\underline{\varepsilon}_K \underline{\varepsilon}_{K-1}^t) = E\left[\left(\underline{w}_{K+1} - H.F.H^{-1}\underline{w}_K\right)\left(\underline{w}_K - HFH^{-1}\underline{w}_{K-1}\right)^t\right]$$

$$= - HFH^{-1} \Sigma_w \neq 0 \quad \text{car} \begin{cases} F \neq 0 \\ H \neq 0 \\ H \text{ régulière} \\ \Sigma_w \text{ définie positive} \end{cases}$$

Cette matrice de covariance ne sera pas en général diagonale.

C'est le cas des processus imparfaitement mais directement observés.

I-3-3 - 3ème Cas

La relation $\underline{x} \xrightarrow{H} \underline{y}$ n'est pas biunivoque et il n'y a pas de bruit dynamique ni d'erreur de mesure.

On peut écrire successivement :

$$(I\text{-}5) \quad \begin{cases} M \text{ équations } \underline{y}_K = H\,\underline{x}_K \\ M \text{ équations } \underline{y}_{K+1} = H\,\underline{x}_{K+1} = HF\,\underline{x}_K + HG\,\underline{u}_K \\ \vdots \\ M \text{ équations } \underline{y}_{K+p-1} = H\underline{x}_{K+p-1} = HF^{p-1}\underline{x}_K + HF^{p-2}G\underline{u}_K \\ \qquad + HF^{p-3}G\underline{u}_{K+1} + \ldots + HG\underline{u}_{K+p-2} \end{cases}$$

On dispose de p x M équations, p étant le nombre minimal d'échantillons qui permet d'éliminer l'état $\underline{x}_K$ dans la relation (I-6) (On dit que l'état $\underline{x}_K$ est observable en p échantillons).

$$(I\text{-}6) \quad \underline{y}_{K+p} = H\underline{x}_{K+p} = HF^p\underline{x}_K + HF^{p-1}G\underline{u}_K + HF^{p-2}G\underline{u}_{K+1} + \ldots + HG\underline{u}_{K+p-1}$$

Le problème du choix de la structure de la relation entrée-sortie réside dans le fait qu'il faut extraire n équations indépendantes parmi les p x M ($p \times M \geqslant n$) équations dont on dispose.

On pose, pour écrire le système d'équations (I-5) sous forme condensée :

$$\underset{(p\times M,1)}{\mathcal{Y}_{k+p-1}^{k}} = \begin{bmatrix} y_k^{(1)} \\ y_k^{(2)} \\ \vdots \\ y_k^{(M)} \\ \hline y_{k+1}^{(1)} \\ y_{k+1}^{(2)} \\ \vdots \\ y_{k+1}^{(M)} \\ \hline \vdots \\ \hline y_{k+p-1}^{(1)} \\ y_{k+p-1}^{(2)} \\ \vdots \\ y_{k+p-1}^{(M)} \end{bmatrix} \qquad \underset{((p-1)\times L,1)}{\underline{\mathcal{U}}_{k+p-2}^{k}} = \begin{bmatrix} u_k^{(1)} \\ u_k^{(2)} \\ \vdots \\ u_k^{(L)} \\ \hline u_{k+1}^{(1)} \\ u_{k+1}^{(2)} \\ \vdots \\ u_{k+1}^{(L)} \\ \hline \vdots \\ \hline u_{k+p-2}^{(1)} \\ u_{k+p-2}^{(2)} \\ \vdots \\ u_{k+p-2}^{(L)} \end{bmatrix}$$

l'indice supérieur (i) indiquant le numéro de l'entrée ou de la sortie

$$\underset{(p\times M,n)}{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} h^{(1)} \\ h^{(2)} \\ \vdots \\ h^{(M)} \\ \hline h^{(1)}F \\ h^{(2)}F \\ \vdots \\ h^{(M)}F \\ \hline \vdots \\ \hline h^{(1)}F^{p-1} \\ h^{(2)}F^{p-1} \\ \vdots \\ h^{(M)}F^{p-1} \end{bmatrix} \qquad \underset{(p\times M,(p-1)\times L)}{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ HG & 0 & & 0 \\ & & & \\ HF^{p-2}G & HF^{p-3}G & & HG \end{bmatrix}$$

$h^{(i)}$ indique la ième ligne de la matrice H.
La matrice $\mathcal{H}$ est de rang n.

On peut alors écrire :

$$\underset{(p\times M,1)}{\mathcal{Y}^{k}_{k+p-1}} = \underset{(p\times M,n)}{\mathcal{H}} \cdot \underset{(n,1)}{\underline{x}_k} + \underset{(p\times M,(p-1)\times L)}{\mathcal{G}} \cdot \underset{((p-1)\times L,1)}{\underline{\mathcal{U}}^{k}_{k+p-2}}$$

qui est la forme condensée de (I-5)

Choisir n équations indépendantes parmi les équations (I-5) revient à travailler sur un vecteur $\mathcal{Y}^{*k}_{k+p-1}$ et sur des matrices $\mathcal{H}^*$ et $\mathcal{G}^*$ formés par les n lignes choisies de $\mathcal{Y}^{k}_{k+p-1}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$

Ce qui revient à considérer la relation :

$$\underset{(n,1)}{\mathcal{Y}^{*k}_{k+p-1}} = \underset{(n,n)}{\mathcal{H}^*} \cdot \underset{(n,1)}{\underline{x}_k} + \underset{(n,(p-1)\times L)}{\mathcal{G}^*} \cdot \underset{((p-1)\times L,1)}{\underline{\mathcal{U}}^{k}_{k+p-2}}$$

où la matrice $\mathcal{H}^*$ est carrée et non singulière; on a alors :

$$\text{(I-7)} \qquad \underline{x}_k = \mathcal{H}^{*-1}\mathcal{Y}^{*k}_{k+p-1} - \mathcal{H}^{*-1}\mathcal{G}^*\underline{\mathcal{U}}^{k}_{k+p-2}$$

Il suffit de reporter (I-7) dans (I-6) pour obtenir la relation entrée-sortie désirée :

$$\text{(I-8)} \qquad \underset{(M,1)}{\mathcal{Y}_{k+p}} = \underbrace{HF^p\mathcal{H}^{*-1}}_{(M,n)}\underset{(n,1)}{\mathcal{Y}^{*k}_{k+p-1}} - \underbrace{HF^p\mathcal{H}^{*-1}\mathcal{G}^*}_{(M,(p-1)\times L)}\underset{((p-1)\times L,1)}{\underline{\mathcal{U}}^{k}_{k+p-2}}$$

$$+ \underbrace{HF^{p-1}G}_{(M,L)}\underset{(L,1)}{\underline{u}_k} + \underbrace{HF^{p-2}G}_{(M,L)}\underset{(L,1)}{\underline{u}_{k+1}} + \cdots + \underbrace{HG}_{(M,L)}\underset{(L,1)}{\underline{u}_{k+p-1}}$$

ou sous une forme plus condensée :

$$\text{(I-9)} \qquad \underset{(M,1)}{\mathcal{Y}_{k+p}} = \underset{(M,n)}{\alpha} \cdot \underset{(n,1)}{\mathcal{Y}^{*k}_{k+p-1}} + \underset{(M,p\times L)}{\beta} \cdot \underset{(p\times L,1)}{\underline{\mathcal{U}}^{k}_{k+p-1}}$$

avec

$$\alpha = HF^{p}\mathcal{H}^{*-1}$$

$$\beta = \left[HF^{p-1}G \;\vdots\; HF^{p-2}G \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \underset{(M,L)}{HG} \right] - \left[HF^{p}\mathcal{H}^{*-1}\mathcal{G}^{*} \;\vdots\; \underset{(M,L)}{0} \right]$$

$$\underline{\mathcal{U}}^{K}_{K+p-1} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{U}}^{K}_{K+p-2} \\ \hline u^{(1)}_{K+p-1} \\ u^{(2)}_{K+p-1} \\ \vdots \\ u^{(L)}_{K+p-1} \end{bmatrix}$$

On aurait pu aussi exprimer $\underline{y}_{K+p}$ en fonction de tout le vecteur $\mathcal{Y}^{K}_{K+p-1}$ et compléter α par des colonnes de zéros ce qui permettrait d'obtenir p blocs carrés (M, M) chacun figurant une relation

$$y_{K+p} \xrightarrow{[\alpha]_i} y_{K+p-i} \qquad i = 1, \ldots, p$$

Ces processus sont dits <u>parfaitement et indirectement observés</u>.

<u>Remarque 1</u>

Pour chaque ligne i (i = 1, ..., M) de la relation (I-9) le nombre de paramètres α_{ij} (j = 1, ,n) liant la sortie i à elle-même et différents de 0, détermine l'ordre partiel relatif à la sortie i.

On retrouve la dimension de l'espace d'état dans (I-9) : c'est le nombre de colonnes de α . Il correspond à l'ordre total du système.

<u>Remarque 2</u>

Lorsque l'on doit estimer les paramètres figurant dans une relation entrée-sortie dont la structure n'est pas connue a priori on doit s'efforcer de déterminer celle qui "convient le mieux" selon un critère donné, c'est-à-dire de déterminer les ordres partiels et l'ordre total du système.

I-3-4 - 4ème Cas

C'est le cas le plus général des processus imparfaitement et indirectement observés.

Le raisonnement suivi au cours du paragraphe précédent, pour le système totalement déterministe, peut être repris pour le système stochastique (I-4) du point de vue théorique.

En posant :

$$\underset{(p\times M,1)}{\underline{\mathcal{W}}^{K}_{K+p-1}} = \begin{bmatrix} w^{(1)}_{K} \\ w^{(2)}_{K} \\ \vdots \\ w^{(M)}_{K} \\ \hline w^{(1)}_{K+1} \\ w^{(2)}_{K+1} \\ \vdots \\ w^{(M)}_{K+1} \\ \hline \vdots \\ \hline w^{(1)}_{K+p-1} \\ w^{(2)}_{K+p-1} \\ \vdots \\ w^{(M)}_{K+p-1} \end{bmatrix} \qquad \underset{(p\times n,1)}{\underline{\mathcal{V}}^{K}_{K+p-1}} = \begin{bmatrix} v^{(1)}_{K} \\ v^{(2)}_{K} \\ \vdots \\ v^{(n)}_{K} \\ \hline v^{(1)}_{K+1} \\ v^{(2)}_{K+1} \\ \vdots \\ v^{(n)}_{K+1} \\ \hline \vdots \\ \hline v^{(1)}_{K+p-1} \\ v^{(2)}_{K+p-1} \\ \vdots \\ v^{(n)}_{K+p-1} \end{bmatrix}$$

et en partant de la relation (I-4) écrite sous la forme

$$\begin{cases} \underset{(n,1)}{\underline{x}_{K+1}} = \underset{(n,n)}{F}\,\underset{(n,1)}{\underline{x}_{K}} + \underset{(n,L+n)}{[G \;\vdots\; I]}\,\underset{(L+n,1)}{\begin{bmatrix} \underline{u}_K \\ \underline{v}_K \end{bmatrix}} \\ \underset{(M,1)}{\underline{y}_K} = \underset{(M,n)}{H}\,\underset{(n,1)}{\underline{x}_K} + \underset{(M,1)}{\underline{w}_K} \end{cases}$$

où I est une matrice unité (n, n)

On parvient à une expression de la forme :

$$\text{(I-10)} \qquad \underset{(M,1)}{\underline{y}_{K+p}} = \underset{(M,n)}{\alpha}\,\underset{(n,1)}{\underline{y}^{*K}_{K+p-1}} + \underset{(M,p\times L)}{\beta}\,\underset{(p\times L,1)}{\underline{u}^{K}_{K+p-1}} + \underset{(M,n)}{\alpha}\,.\,\underset{(n,1)}{\underline{\mathcal{W}}^{*K}_{K+p-1}}$$
$$+ \underset{(M,p\times n)}{\beta'}\,\underset{(p\times n,1)}{\underline{\mathcal{V}}^{K}_{K+p-1}} + \underset{(M,1)}{\underline{w}_{K+p}}$$

Remarque 1

Le vecteur de bruit équivalent

$$\underset{(M,1)}{\underline{\mathcal{E}}^*} = \underset{(M,n)(M,M)}{[\alpha \,\vdots\, I]} \; \underset{(n+M,1)}{\underline{\mathcal{W}}^{*K}_{K+p}} + \underset{(M,p\times n)(p\times n,1)}{\beta' \underline{\mathcal{V}}^{K}_{K+p-1}}$$

est un vecteur de bruit corrélé.

Suivant le choix des lignes du vecteur $\mathcal{Y}^K_{K+p-1}$:

- on aura une réalisation $\underline{\mathcal{E}}^*$ et la séquence $\left\{ \underline{\mathcal{E}}^*_K \right\}_0^{N-1}$ a des propriétés statistiques différentes.

- de même la séquence $\left\{ \underline{\mathcal{W}}^*_K \right\}_0^{N-1}$ présente dans $\left\{ \underline{\mathcal{W}}^K_{K+p-1} \right\}_0^{N-1}$ peut apparaître, pour un horizon de N couples entrée-sortie (N fini), comme une réalisation de processus stochastiques ayant des propriétés statistiques différentes.

Remarque 2

Dans ce dernier cas la notion de matrice singulière n'est plus aussi nette ; cependant on voit que le fait de créer une colonne non nulle supplémentaire dans α revient à avoir choisi n + 1 lignes dépendantes dans $\mathcal{H}$ pour former $\mathcal{H}^*$ singulière.

Cette particularité sera reconsidérée par la suite.

Remarque 3

A ce sujet dans [I-2] est proposé un algorithme qui permet de trouver une structure telle que si une colonne j est nulle dans un bloc $[\alpha]_i$, la colonne j de tout bloc $[\alpha]_{i+1}, \ldots, [\alpha]_p$ est nulle aussi.

I-4 - LA RELATION ENTREE-SORTIE EQUIVALENTE OBTENUE AVEC UN FILTRE LINEAIRE AUXILIAIRE

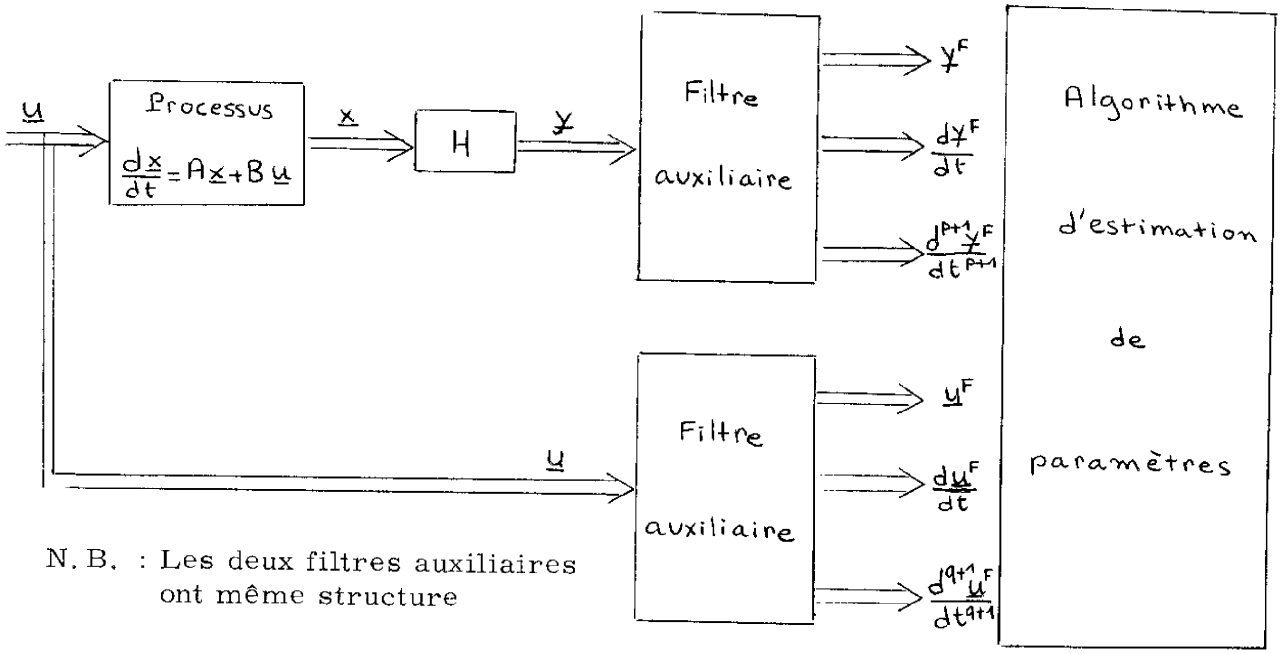
I-4-1 - But du procédé

La relation entrée-sortie dont il a été question jusqu'à présent a été définie dans l'espace discrétisé du temps. Si on veut connaître la relation continue qui lui correspond il faut effectuer notamment des transformations sur

les paramètres de la relation discrète (cf. paragraphe I-1) ; dans le cas où ces paramètres sont déterminés par des méthodes statistiques il s'en suit alors une perte de précision difficilement évaluable.

Le procédé de filtrage linéaire des observations permet d'obtenir une relation entrée-sortie continue équivalente où les variables qui y figurent sont directement et parfaitement observées à des instants discrets.

Le procédé peut se schématiser ainsi :



N. B. : Les deux filtres auxiliaires ont même structure

Figure 3

L'équation différentielle matricielle qui décrit le comportement du processus tel qu'il est observé à travers le système de mesure H peut se mettre sous la forme générale (I-11) expression continue de (I-9).

$$\text{(I-11)} \qquad \frac{d^{p+1}\underline{y}}{dt^{p+1}} = [A]_1 \frac{d^p \underline{y}}{dt^p} + \cdots + [A]_{p-1} \frac{d\underline{y}}{dt} + [A]_p \underline{y}$$

$$+ [B]_1 \frac{d^q \underline{u}}{dt^q} + \cdots + [B]_{q-1} \frac{d\underline{u}}{dt} + [B]_q \underline{u} \qquad q \leq p$$

Chaque composante y^i et u^i est l'entrée d'un filtre défini par l'équation différentielle

$$\text{(I-12)} \quad \frac{d^{p+2}S}{dt^{p+2}} = \mu_1 \frac{d^{p+1}S}{dt^{p+1}} + \cdots + \mu_p \frac{dS}{dt} + \mu_{p+1} S$$
$$+ \nu_1 \frac{d^{q+1}R}{dt^{q+1}} + \cdots + \nu_q \frac{dR}{dt} + \nu_{q+1} R$$

où les paramètres μ_i et ν_i sont connus.

I-4-2 - <u>Exemple du premier ordre monovariable</u>

Soit à identifier les paramètres a et b de la relation différentielle entrée-sortie

$$\frac{dy}{dt} = ay + bu \quad \text{ou} \quad (p-a)\,Y = b\,U \qquad (p \triangleq \text{variable de Laplace})$$

On programme le filtre numérique suivant :

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \mu_1 \frac{dS}{dt} + \mu_2 S + R \quad \text{ou} \quad (p^2 - \mu_1 p - \mu_2) S = R$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} R \\ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

en faisant $R = y_K$ la sortie du filtre est y^F

$R = u_K$ la sortie du filtre est u^F

L'égalité
$$(p-a)\frac{Y}{(p^2-\mu_1 p-\mu_2)} = b\,\frac{U}{(p^2-\mu_1 p-\mu_2)}$$

peut aussi s'écrire

$$(p-a)Y^F = bU^F$$

Comme l'on a accès à y^F et $\frac{dy^F}{dt}$ d'une part et à u^F d'autre part, les paramètres a et b de la relation entrée-sortie initiale peuvent être directement estimés.

I-4-3 - Conséquences

a) La relation (I-11) conduit à une forme analogue à (I-9)

$$\underline{y}^F_{K+p} = [A]_1 \underline{y}^F_{K+p-1} + \cdots + [A]_{p-1} \underline{y}^F_{K+1} + [A]_p \underline{y}^F_K$$
$$+ [B]_1 \underline{u}^F_{K+q-1} + \cdots + [B]_{q-1} \underline{u}^F_{K+1} + [B]_q \underline{u}^F_K$$

où $\underline{u}_K^F$ et $\underline{y}_K^F$ sont les sorties $\underline{u}^F$ (t) et $\underline{y}^F$(t) du filtre à l'instant t_K

$\underline{u}^F_{K+1}$ et $\underline{y}^F_{K+1}$ sont les dérivées des sorties précédentes au même instant t_K etc...

Les paramètres figurant dans cette nouvelle relation entrée-sortie sont directement identifiables aux paramètres de la relation continue décrivant le comportement du processus à identifier.

b) Deux conditions ayant fait l'objet de remarques dans [I-3] doivent être remplies afin que le procédé demeure valable.

- Le filtre doit être peu sensible aux conditions initiales, c'est-à-dire que l'effet de conditions initiales arbitraires devient rapidement négligeable.

- Le filtre ne doit pas sensiblement atténuer les signaux comportant une information utile à l'identification.

Le plus souvent on réalise un compromis entre ces deux conditions.

c) Du point de vue stochastique on peut dire que la relation (I-11) est perturbée par un bruit $\underline{\varepsilon}$ (t) continu dont une réalisation sera une entrée du filtre linéaire (I-12) superposée au vecteur $\underline{y}$.

II - ESTIMATION DES PARAMETRES D'UN SYSTEME MULTIDIMENSIONNEL

II-1 - DE LA MODELISATION A L'ESTIMATION

Lorsque l'on a choisi une structure pour modéliser un processus multidimensionnel on est capable d'écrire une relation entrée-sortie de la forme générale :

$$\text{(II-1)} \quad \underset{(M,1)}{y_{k+p}} = \underset{(M,M)}{[\alpha]_1} \underset{(M,1)}{y_{k+p-1}} + \cdots + [\alpha]_p y_k + \underset{(M,L)}{[\beta]_1} \underset{(L,1)}{u_{k+q-1}} + \cdots + [\beta]_q u_k + \underset{(M,1)}{\varepsilon_{k+p-1}}$$

Cette forme peut être écrite de façon plus condensée comme (I-9)

$$\text{(II-2)} \quad \underset{(M,1)}{y_{k+p}} = \underset{(M,p\times M+q\times L)}{[\alpha \,\vdots\, \beta]} \underset{(p\times M+q\times L,1)}{X_{k+p-1}} + \underset{(M,1)}{\varepsilon_{k+p-1}}$$

avec $X_{k+p-1} = \begin{bmatrix} y^{k}_{k+p-1} \\ u^{k}_{k+q-1} \end{bmatrix}$

On pose $\theta = [\alpha \,\vdots\, \beta]$

On décale les observations de (p-1) périodes d'échantillonnage et on forme de nouveau les vecteurs y et u de façon à obtenir y^{k}_{k-p+1} et u^{k+q-p}_{k-p+1}, les plus anciennes observations figurant dans les dernières composantes des vecteurs.

Il vient :

$$\text{(II-3)} \quad y_{k+1} = \theta X_k + \varepsilon_k$$

Du fait de la présence du vecteur aléatoire ε_k on ne peut trouver les p x M^2 + q x M x L inconnues à l'aide du même nombre d'équations (sachant que l'on dispose de M équations à chaque instant d'échantillonnage).

Dans ce cas on fait appel à des techniques statistiques afin de calculer un estimateur de la matrice θ noté $\hat{\theta}$

Remarque :

Dans tout ce qui suit on supposera que le bruit $\underline{\varepsilon}_K$ est indépendant de la commande $\underline{u}_K$, et sauf si c'est précisé, que le bruit est à moyenne nulle soit

$$E\,\underline{\varepsilon}_K\,\underline{u}_K^t = 0$$
$$E\,\underline{\varepsilon}_K = \underline{0}$$

Notation :

On exprimera les dimensions des différentes matrices en fonction des quantités MY = M
MX = p . M + q . L

II-1-1 - Forme globale sur l'horizon d'étude

On appelle "échantillon K" une paire ($\underline{y}_K, \underline{X}_{K-1}$). L'horizon d'étude est de N échantillons si on dispose des séquences $\left\{\underline{X}_K\right\}_{K=0}^{K=N-1}$ et $\left\{\underline{y}_K\right\}_{K=0}^{K=N}$, le vecteur $\underline{x}_0$ étant choisi pour conditions initiales.

Sachant que l'équation (II-3) se répète N fois on peut écrire :

$$\left[\underline{y}_1 \mid \underline{y}_2 \mid \quad \mid \underline{y}_N\right] = \theta.\left[\underline{X}_0 \mid \underline{X}_1 \mid \cdots \mid \underline{X}_{N-1}\right] + \left[\underline{\varepsilon}_0 \mid \underline{\varepsilon}_1 \mid \quad \mid \underline{\varepsilon}_{N-1}\right]$$

Soit

(II-4) $$\underset{(MY,N)}{Y} = \underset{(MY,MX)}{\theta} . \underset{(MX,N)}{X} + \underset{(MY,N)}{\varepsilon}$$

II-2 - METHODE D'ESTIMATION PAR MATRICE INSTRUMENTALE

Pour N . M Y équations (M . MY $>$ au nombre de paramètres inconnus) on peut essayer de résoudre l'équation (II-4) par rapport à θ

Pour cela on multiplie à droite par la transposée d'une matrice Z de même dimension que X, il vient :

$$YZ^t = \theta XZ^t + \varepsilon Z^t$$

et à condition que la matrice XZ^t soit non singulière :

(II-5) $$\underset{(MY,MX)}{\theta} = \underset{(MY,N)(N,MY)}{YZ^t} \cdot \underset{(MX,MX)}{(XZ^t)^{-1}} - \underset{(MY,N)(N,MX)}{\varepsilon Z^t} \cdot (XZ^t)^{-1}$$

Cette méthode est citée dans [I-3] et [II-1]

II-2-1 - Conditions à remplir pour que la matrice Z soit une matrice instrumentale

Pour une séquence d'entrées donnée $\{\underline{u}_K\}_0^{N-1}$, Z est une matrice instrumentale si :

(II-6) $$\mathcal{P}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \varepsilon Z^t = \mathbb{O}$$

(II-7) $$\mathcal{P}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} XZ^t \qquad \text{non singulière}$$

Rappel : On dit qu'un vecteur aléatoire $\underline{x}(N) \in \{\underline{x}(K)\}_{K=0}^{N}$ tend en probabilité vers un vecteur $\underline{x}$ si :

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{P}r\{|\underline{x}(N) - \underline{x}| \geq \nu\} = \underline{0} \qquad \forall \nu > 0$$

ou encore

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{P}r\{|\underline{x}(N) - \underline{x}| = \underline{0}\} = 1$$

et on écrit

$$\mathcal{P}\lim_{N\to\infty} \underline{x}(N) = \underline{x}$$

II-2-2 - Expression de l'estimateur $\hat{\theta}$:

On choisit comme estimateur

(II-8) $$\hat{\theta}_N = YZ^t \cdot (XZ^t)^{-1}$$

l'indice N signifiant que l'horizon d'étude est de N échantillons.

Remarque : La méthode conduit à une expression explicite de $\widehat{\Theta}$; son exploitation en temps réel peut être envisagée.

II-2-3 - Propriétés des estimateurs obtenus par la technique de la matrice instrumentale

a) l'estimateur est convergent

Rappel : un estimateur $\hat{\underline{x}}(N)$ de $\underline{x}$ converge vers $\underline{x}$ si $P \lim_{N \to \infty} \hat{\underline{x}}(N) = \underline{x}$

Soit $\underline{\theta}^{\ell}, \ell \in [1, M]$, un vecteur ligne de la matrice Θ

$$\underline{\theta}^{\ell} = \left(YZ^t.(XZ^t)^{-1}\right)^{\ell} - \left(\mathcal{E}Z^t(XZ^t)^{-1}\right)^{\ell}$$

ou

$$\underline{\theta}^{\ell} = (YZ^t)^{\ell}.(XZ^t)^{-1} - (\mathcal{E}Z^t)^{\ell}.(XZ^t)^{-1}$$

Parallèlement :

$$\hat{\theta}^{\ell} = \theta^{\ell} + (\mathcal{E}Z^t)^{\ell}.(XZ^t)^{-1}$$

$$P\lim_{N \to \infty} \hat{\theta}^{\ell} = \theta^{\ell} + P\lim_{N \to \infty} (\mathcal{E}Z^t)^{\ell}.(XZ^t)^{-1} = \theta^{\ell}$$

d'après (II-6) et (II-7).

On peut reprendre le même raisonnement pour les autres lignes qui forment Θ donc

(II-9) $$P\lim_{N \to \infty} \widehat{\Theta} = \Theta$$

b) l'estimateur est asymptotiquement non biaisé

Rappel : un estimateur $\hat{\underline{x}}(N)$ de $\underline{x}$ est asymptotiquement non biaisé si :

$$E_{N \to \infty} \hat{\underline{x}}(N) = \underline{x}$$

Cette propriété résulte de la précédente, donc

(II-10) $$\underset{N \to \infty}{E\,\widehat{\theta}_N} = \theta$$

II-3 - ESTIMATION AU SENS DES MOINDRES CARRES

II-3-1 - Le critère

On cherche un estimateur $\widehat{\theta}$ de θ tel que le critère

$$Q = \sum_{0}^{N-1} (y_{k+1} - \widehat{\theta}\,\underline{x}_k)(y_{k+1} - \widehat{\theta}\,\underline{x}_k)^t$$

soit minimum.

On voit que ceci revient à minimiser la variance de l'erreur de prédiction à un échantillon $\widehat{\underline{\varepsilon}}_K = y_{K+1} - \widehat{\theta}\,\underline{x}_K$ sur tout l'horizon d'étude.

En effet, connaissant $\underline{x}_K$ et $\widehat{\theta}$ on peut prévoir quelle sera la valeur moyenne de y_{K+1} notée $\widehat{y}_{K+1}$

$$\widehat{\underline{y}}_{K+1} = \widehat{\theta}\,\underline{x}_K$$

$$E\,\widehat{\underline{y}}_{K+1} = \theta\,\underline{x}_K \qquad \text{si} \qquad E\,\widehat{\theta} = \theta$$

Remarque : La limite inférieure de la variance du vecteur $\widehat{\underline{\varepsilon}}_K$ est égale à la variance Σ_ε du vecteur ε_K

II-3-2 - L'estimateur $\widehat{\theta}$ au sens des moindres carrés

On se trouve alors devant le problème de la minimisation de la matrice Q, ce qui sous entend procéder aux M minimisations des quantités :

$$Q^\ell = \sum_{0}^{N-1} (y^\ell_{K+1} - \widehat{\underline{\theta}}^\ell \underline{x}_k)(y^\ell_{K+1} - \widehat{\underline{\theta}}^\ell \underline{x}_k)^t$$

où y^ℓ_{K+1} est la ℓ ième sortie $\ell \in [1, M]$

On montre (cf. [2-2]) que l'estimateur $\widehat{\theta}^\ell$ qui minimise Q^ℓ est donné par :

$$\widehat{\underline{\theta}}^\ell = Y^\ell X^t \,.\, (X X^t)^{-1}$$

Par extension (cf. [2-3]) l'estimateur de θ est :

(II-11) $$\hat{\theta} = Y X^t . (X X^t)^{-1}$$

Cette expression est à rapprocher de (II-8). (II-11) est en effet l'expression de l'estimateur $\hat{\theta}$ obtenu par matrice instrumentale $Z \triangleq X$

II-4 - LA MATRICE INSTRUMENTALE A OBSERVATIONS RETARDEES

Ce paragraphe constitue une extension de la méthode proposée dans [2-4] au cas des systèmes multidimensionnels :

Dans le cas des systèmes à une sortie (MY = 1) et lorsque l'on choisit X pour matrice instrumentale, l'expression (II-5) s'écrit :

$$\underset{(1,MX)}{\underline{\theta}} = \underset{(1,N)}{\underline{Y}}\,\underset{(N,MX)}{X^t} . \underset{(MX,MX)}{(X X^t)^{-1}} - \underset{(1,N)}{\underline{\varepsilon}}\,\underset{(N,MX)}{X^t} . \underset{(MX,MX)}{(X X^t)^{-1}}$$

En présence de bruit corrélé, par exemple lorsque la sortie y_K est bruitée par une erreur de mesure, le terme $\underline{\varepsilon}\, X^t\, (XX^t)^{-1}$ ne converge pas vers $\underline{O}^t$ en probabilité. La limite de $\frac{1}{N}\, \underline{\varepsilon}\, X^t$ est en effet :

$$\Big[\underbrace{E\varepsilon_K y_K \,\vdots\, E\varepsilon_K y_{K-1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, E\varepsilon_K y_{K-p+1}}_{(1,p)} \,\vdots\, \underbrace{\underline{O}^t}_{(1,MX-p)}\Big]$$

Certaines parmi les p premières composantes de ce vecteur ligne sont différentes de O.

Il s'agit donc de trouver une matrice instrumentale Z telle que les p premières composantes du vecteur limite $\frac{1}{N}\, \underline{\varepsilon}\, Z^t$ soient nulles.

Définition :

Si $\{\varepsilon_K\}$ est une séquence de variables aléatoires scalaires elle est dite corrélée d'ordre r si on peut écrire

$$\varepsilon_K = \sum_{h=0}^{r} \gamma_h\, e_{(K-h)}$$

où $e_{(K)}$ est une variable aléatoire centrée telle que $E\, e_{(i)}\, e_{(j)} = \sigma_e^2\, \delta_{ij}$

et où les γ_h sont tels que au moins $\gamma_r \neq 0$

Si $\{\underline{\varepsilon}_K\}$ est une séquence de vecteurs aléatoires on dira qu'elle est corrélée d'ordre r si r est l'ordre de corrélation de la composante qui a l'ordre le plus élevé.

Dans ce cas on choisit la matrice instrumentale à observations retardées Z telle que :

(II-12) $$\underset{(MX,N)}{Z} = \left[\underline{Z}_{-r} \,\vdots\, \underline{Z}_{-r+1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{Z}_{N-1-r}\right]$$

où

$$\underline{Z}_K = \begin{bmatrix} \underline{y}^{K-r}_{K-p+1-r} \\ \hline \underline{u}^{K+q-p}_{K-p+1} \end{bmatrix}$$

(c'est-à-dire que $\underline{Z}_K$ est formé par les mêmes composantes relatives à $\underline{u}$ que $\underline{X}_K$, les composantes relatives à $\underline{y}$ étant celles de $\underline{X}_K$ retardées de r périodes) alors chaque ligne de la matrice $\frac{1}{N} \mathcal{E} Z^t$ tend vers $\underline{0}^t$ en probabilité.

<u>Remarque</u> : Il est facile de voir que dans le cas d'un bruit de mesure, le vecteur $\underline{\varepsilon}_K$ est correlé d'ordre p qui est l'ordre partiel le plus élevé de la relation matricielle entrée-sortie.

Il faut montrer ensuite que cette matrice instrumentale vérifie la condition (II-7).

On peut à cet effet montrer (cf. paragraphe II-5) que la limite de $\frac{1}{N}$ X Z^t est une matrice d'éléments $\left[\frac{N-\tau}{N} R_{st}(\tau)\right]_{ij}$ avec la notation

$$R_{st}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{K=0}^{N-\tau} s_{(K+\tau)}\, t_{(K)}$$

(où $R_{st}(\tau)$ est un estimateur de la fonction de corrélation de s et de t) et à condition de négliger les termes au début et à la fin de certaines sommes à cause du nombre N fini d'échantillons.

Cette limite étant une corrélation est finie ; on supposera que pour une séquence d'entrées donnée et une séquence de réalisation du bruit, on peut trouver une matrice instrumentale à observations retardées telle que cette limite soit non singulière.

Remarque 1 :

Cette matrice limite est symétrique par bloc.

Cependant l'estimation des corrélations avec un nombre N fini n'aboutit pas à des blocs symétriques car les réalisations prises en compte sont différentes.

La sous-matrice formée par les corrélations des entrées est symétrique de dimension (q x L , q x L).

Remarque 2 :

Le fait d'estimer les paramètres à partir de corrélations pour un retard $\tau = \tau$ au moins égal à p, explique la baisse de précision qui peut être enregistrée sur ces paramètres, par rapport à une autre méthode.

II-5 - FORMULES RECURRENTES SUR LES OBSERVATIONS

La formule (II-8) donne de façon explicite l'expression de l'estimateur ; $\hat{\theta}_{N+1}$ peut être calculé à chaque instant où l'on dispose d'un nouveau couple $(y_{K+1}, \underline{X}_K)$ sans qu'il soit pour cela nécessaire de conserver en mémoire les N+1 couples $\left\{(y_{K+1}, \underline{X}_K)\right\}_{K=0}^{K=N}$

$\underset{(MX,N)(N,MX)}{XZ^t}$ est une matrice de dimension (MX, MX) qui peut être calculée par une formule récurrente :

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\begin{matrix} R_{y^1y^1}(\tau) & \cdots & R_{y^1y^M}(\tau) \\ R_{y^2y^1}(\tau) & \cdots & R_{y^2y^M}(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{y^My^1}(\tau) & \cdots & R_{y^My^M}(\tau) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{y^1y^1}(\tau+1) & \cdots & R_{y^1y^M}(\tau+1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{y^My^1}(\tau+1) & \cdots & R_{y^My^M}(\tau+1) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{y^1y^1}(\tau+p-1) & \cdots & R_{y^1y^M}(\tau+p-1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{y^My^1}(\tau+p-1) & \cdots & R_{y^My^M}(\tau+p-1) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{y^1u^1}(p-q) & \cdots & R_{y^1u^L}(p-q) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{y^Mu^1}(p-q) & \cdots & R_{y^Mu^L}(p-q) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{y^1u^1}(p-q+1) & \cdots & R_{y^1u^L}(p-q+1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{y^Mu^1}(p-q+1) & \cdots & R_{y^Mu^L}(p-q+1) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{y^1u^1}(p-1) & \cdots & R_{y^1u^L}(p-1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{y^Mu^1}(p-1) & \cdots & R_{y^Mu^L}(p-1) \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} R_{y^1y^1}(\tau-1) & \cdots & R_{y^1y^M}(\tau-1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{y^My^1}(\tau-1) & \cdots & R_{y^My^M}(\tau-1) \end{matrix} & & & & & \\
\hline
\begin{matrix} R_{y^1y^1}(\tau-p+1) & \cdots & R_{y^1y^M}(\tau-p+1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{y^My^1}(\tau-p+1) & \cdots & R_{y^My^M}(\tau-p+1) \end{matrix} & & \begin{matrix} R_{y^1y^1}(\tau) & \cdots & R_{y^1y^M}(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{y^My^1}(\tau) & \cdots & R_{y^My^M}(\tau) \end{matrix} & & & \\
\hline
\begin{matrix} R_{u^1y^1}(\tau+q-p) & \cdots & R_{u^1y^M}(\tau+q-p) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{u^Ly^1}(\tau+q-p) & \cdots & R_{u^Ly^M}(\tau+q-p) \end{matrix} & & & \begin{matrix} R_{u^1u^1}(0) & \cdots & R_{u^1u^L}(0) \\ & \ddots & \vdots \\ & & R_{u^Lu^L}(0) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{u^1u^1}(1) & \cdots & R_{u^1u^L}(1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{u^Lu^1}(1) & \cdots & R_{u^Lu^L}(1) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{u^1u^1}(q-1) & \cdots & R_{u^1u^L}(q-1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{u^Lu^1}(q-1) & \cdots & R_{u^Lu^L}(q-1) \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} R_{u^1y^1}(\tau+q-p-1) & \cdots & R_{u^1y^M}(\tau+q-p-1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{u^Ly^1}(\tau+q-p-1) & \cdots & R_{u^Ly^M}(\tau+q-p-1) \end{matrix} & & & & \begin{matrix} R_{u^1u^1}(0) & \cdots & R_{u^1u^L}(0) \\ & \ddots & \vdots \\ & & R_{u^Lu^L}(0) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{u^1u^1}(q-2) & \cdots & R_{u^1u^L}(q-2) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{u^Lu^1}(q-2) & \cdots & R_{u^Lu^L}(q-2) \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} R_{u^1y^1}(\tau-p+1) & \cdots & R_{u^1y^M}(\tau-p+1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{u^Ly^1}(\tau-p+1) & \cdots & R_{u^Ly^M}(\tau-p+1) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{u^1y^1}(\tau-p+2) & \cdots & R_{u^1y^M}(\tau-p+2) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{u^Ly^1}(\tau-p+2) & \cdots & R_{u^Ly^M}(\tau-p+2) \end{matrix} & \begin{matrix} R_{u^1y^1}(\tau) & \cdots & R_{u^1y^M}(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{u^Ly^1}(\tau) & \cdots & R_{u^Ly^M}(\tau) \end{matrix} & & & \begin{matrix} R_{u^1u^1}(0) & \cdots & R_{u^1u^L}(0) \\ & \ddots & \vdots \\ & & R_{u^Lu^L}(0) \end{matrix}
\end{array}\right]
$$

Cette sous-matrice est de dimension $(q \times L, q \times L)$

Matrice d'éléments $\left[R_{st}(\tau)\right]_{ij}$

$$\underset{(MX,MX)}{(XZ^t)_{N+1}} = (XZ^t)_N + \underline{X}_N \cdot \underline{Z}_N^t$$

avec $(XZ^t)_1 = \underline{X}_0 \cdot \underline{Z}_0^t$

de même

$$\underset{(MY,MX)}{(YZ^t)_{N+1}} = (YZ^t)_N + y_{N+1}\, \underline{Z}_N^t$$

avec $(YZ^t)_1 = y_1 \cdot \underline{Z}_0^t$

Pour des raisons de calcul numérique et afin d'assurer la convergence des récurrences on programmera des récurrences du type :

(II-13) $$(XZ^t)_{N+1} = \frac{N}{N+1}(XZ^t)_N + \frac{1}{N+1}(\underline{X}_N \cdot \underline{Z}_N^t)$$

(II-14) $$(YZ^t)_{N+1} = \frac{N}{N+1}(YZ^t)_N + \frac{1}{N+1}(y_{N+1}\, \underline{Z}_N^t)$$

l'estimateur $\widehat{\theta}_{N+1}$ est donné par

(II-15) $$\widehat{\theta}_{N+1} = (YZ^t)_{N+1} \cdot (XZ^t)^{-1}_{N+1}$$

II-6 - CALCUL DE L'ESTIMATEUR DE LA VARIANCE DU BRUIT $\underline{\varepsilon}_K$ PRECISION SUR LES PARAMETRES

II-6-1 - Estimation de $\Sigma_{\underline{\varepsilon}}$

Un estimateur non biaisé de la matrice de covariance de $\underline{\varepsilon}_K$ est donné par :

$$\widehat{\Sigma}_{\hat{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{N-MX} \sum_{K=0}^{N-1} (y_{K+1} - \widehat{\theta}_N \underline{X}_K)(y_{K+1} - \widehat{\theta}_N \underline{X}_K)^t$$

puisque $\underset{N\to\infty}{\mathrm{Plim}}\ \hat{\theta}_N = \theta$ on peut montrer que chaque élément de la matrice $\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\varepsilon}}}$ tend en probabilité vers chaque élément correspondant de la matrice $\Sigma_{\underline{\varepsilon}}$

On peut écrire sous une forme plus facilement programmable :

$$\text{(II-16)} \quad \hat{\Sigma}_{N\hat{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{N-MX}\left\{ \sum_{K=0}^{N-1}\left(y_{K+1}\, y_{K+1}^t\right) - \sum_{K=0}^{N-1}\left(y_{K+1}\, \underline{X}_K^t\right).\hat{\theta}_N^t - \hat{\theta}_N \sum_{K=0}^{N-1}\left(\underline{X}_K\, y_{K+1}^t\right) + \hat{\theta}_N \sum_{K=0}^{N-1}\left(\underline{X}_K\, \underline{X}_K^t\right).\hat{\theta}_N^t \right\}$$

Il suffit alors de calculer de façon récurrente les matrices suivantes :

$$\text{(II-17)} \quad \left(YY^t\right)_{N+1} = \frac{N}{N+1}\left(YY^t\right)_N + \frac{1}{N+1}\left(y_{N+1}.\, y_{N+1}^t\right)$$

$$\text{(II-18)} \quad \left(YX^t\right)_{N+1} = \frac{N}{N+1}\left(YX^t\right)_N + \frac{1}{N+1}\left(y_{N+1}.\, \underline{X}_N^t\right)$$

$$\text{(II-19)} \quad \left(XX^t\right)_{N+1} = \frac{N}{N+1}\left(XX^t\right)_N + \frac{1}{N+1}\left(\underline{X}_N.\, \underline{X}_N^t\right)$$

$$\text{(II-20)} \quad \hat{\Sigma}_{N\hat{\underline{\varepsilon}}} = \frac{N}{N-MX}\left\{\left(YY^t\right)_N - \left(YX^t\right)_N \hat{\theta}_N^t - \hat{\theta}_N\left(YX^t\right)_N^t + \hat{\theta}_N\left(XX^t\right)_N \hat{\theta}_N^t\right\}$$

<u>Remarque</u> :

Dans le cadre d'une estimation au sens des moindres carrés les matrices apparaissant à gauche des formules (II-18) et (II-19) permettent de calculer $\hat{\theta}$ (cf. (II-11)), dans ce cas la formule (II-16) peut se simplifier et donner

$$\hat{\Sigma}_{N\hat{\underline{\varepsilon}}} = \frac{N}{N-MX}\left\{\left(YY^t\right)_N - \hat{\theta}_N\left(YX^t\right)_N^t\right\}$$

à condition que l'on puisse inverser $(XX^t)_N$ avec une bonne précision.

II-6-2 - Estimation de la matrice de covariance d'une ligne de la matrice des paramètres

Il s'agit de calculer :

$$\Sigma_{\hat{\underline{\theta}}^{\ell}} = E\left\{\left[\hat{\underline{\theta}}^{\ell} - \underline{\theta}^{\ell}\right]^{t}\left[\hat{\underline{\theta}}^{\ell} - \underline{\theta}^{\ell}\right]\right\}$$

d'après (II-5) et (II-8) :

$$\Sigma_{\hat{\underline{\theta}}^{\ell}} = E\left\{\left[\varepsilon^{\ell} Z^{t}.(XZ^{t})^{-1}\right]^{t}\left[\varepsilon^{\ell} Z^{t}.(XZ^{t})^{-1}\right]\right\}$$

$$= E\left\{((XZ^{t})^{-1})^{t}.\, Z\, \varepsilon^{\ell}\, .\, \varepsilon^{\ell} Z^{t}.\,(XZ^{t})^{-1}\right\}$$

Pour N suffisamment grand on peut écrire :

$$\Sigma_{\hat{\underline{\theta}}^{\ell}} = ((XZ^{t})^{-1})^{t}.\, Z\; E\{\varepsilon^{\ell}\; \varepsilon^{\ell}\} Z^{t}\,(XZ^{t})^{-1}$$

or $E\{\varepsilon^{\ell}\,\varepsilon^{\ell}\} = [\Sigma_{\underline{\varepsilon}}]_{\ell\ell}$ que l'on remplace par son estimateur :

Finalement :

(II-20) $$\widehat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^{\ell}_{N}} = \left[\widehat{\Sigma}_{N\underline{\varepsilon}}\right]_{\ell\ell}\left\{((XZ^{t})^{-1})^{t}.\, ZZ^{t}.\,(XZ^{t})^{-1}\right\}$$

Cette formule reste valable pour $\ell = 1, \ldots, M$.

On programmera : (cf. II-13)

(II-21) $$\widehat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^{\ell}_{N}} = \left[\widehat{\Sigma}_{N\underline{\varepsilon}}\right]_{\ell\ell}.\, \frac{1}{N}\left\{((XZ^{t})^{-1}_{N})^{t}.\,(ZZ^{t})_{N}.\,(XZ^{t})^{-1}_{N}\right\}$$

avec

(II-22) $$(ZZ^{t})_{N+1} = \frac{N}{N+1}\,(ZZ^{t})_{N} + \frac{1}{N+1}\left(\underline{Z}_{N+1}.\,\underline{Z}^{t}_{N+1}\right)$$

où $\underline{Z}_{N+1}$ est défini en (II-12).

Remarque :

Les écarts types de chaque élément de $\hat{\theta}$ sont donnés par la racine carrée de l'élément correspondant de la diagonale principale de $\widehat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}_N^{\ell}}$

II-7 - CAS D'UN BRUIT A MOYENNE NON NULLE

Le vecteur aléatoire $\underline{\varepsilon}_K$ est dit à moyenne non nulle si au moins une de ses composantes est elle même à moyenne non nulle.

Dans ce cas il suffit d'augmenter la dimension de $\underline{x}_K$ d'une unité et faire $u_K^{L+1} = 1. \quad \forall K \in [0, N-1]$

Les paramètres à identifier sont alors ceux de (II-23)

$$\text{(II-23)} \quad y_{K+1} = [\alpha]_1 y_K + \cdots + [\alpha]_p y_{K-p+1} + [\beta]_1 \underline{u}_{K+q-p} + \cdots + [\beta]_q \underline{u}_{K-p+1} + [\gamma] \cdot 1$$

La moyenne estimée est $\underset{(MY,1)}{[\gamma]}$, $\underline{\varepsilon}_K$ étant ramené à un bruit à moyenne nulle.

II-8 - ESTIMATION DE LA MOYENNE DU BRUIT

On peut vérifier a posteriori que le bruit $\underline{\varepsilon}_K$ est à moyenne nulle en calculant l'estimateur :

$$\widehat{\underline{m}}_{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \left(y_{K+1} - \hat{\theta}_N \underline{x}_K \right)$$

$$\text{(II-24)} \quad \widehat{\underline{m}}_{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} y_{K+1} - \hat{\theta}_N \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \underline{x}_K$$

Dans le cas où $u_K^{L+1} = 1$, c'est-à-dire que :

$$\left[\underline{X}_K\right]_{MX+1,1} = \left[\underline{Z}_K\right]_{MX+1,1} = 1.$$

on peut vérifier que d'après (II-13) et (II-14)

$\frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} \underline{X}_K$ est donné par la dernière colonne de $(XZ^t)_N$

$\frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} \underline{y}_{K+1}$ est donné par la dernière colonne de $(YZ^t)_N$

CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

La méthode d'identification présentée ici consiste à estimer les paramètres d'une relation entrée-sortie multivariable.

On a vu que, dans le cas le plus général où des perturbations agissent sur la dynamique du processus et où un bruit de mesure perturbe l'observation des sorties du système, on était amené à introduire dans le modèle stochastique une variable aléatoire vectorielle corrélée : cet inconvénient est dû au fait que dans la relation à paramétrer doivent intervenir des variables mesurables (directement observables). La méthode de la matrice instrumentale à observations retardées, étendue au cas des systèmes multidimensionnels, permet de contourner cette difficulté.

Si cela est nécessaire, il est possible, à l'aide d'un filtre auxiliaire convenablement calculé, d'estimer les paramètres de la relation continue équivalente, toujours sur la base d'observations discrètes.

Une étude de la précision des estimateurs, compte tenu du bruit résiduel, permet d'aborder le problème de la validité du modèle obtenu.

REFERENCES DE LA PREMIERE PARTIE

(Le premier numéro renvoie au chapitre correspondant)

[I-1] J. AGUILAR MARTIN
"Attempt of classification for stochastic control systems"
Conférence Européenne sur la Cybernétique et la Recherche des Systèmes. Vienne, Mai 1972.

[I-2] J. VALIS
"On-line identification of multivariable linear systems of unknown structure from input output data".
Paper n° 1-5, IFAC Symposium Prague 1970 "On Identification and Process Parameter Estimation"

[I-3] P.C. YOUNG
"An instrumental variable method for real time identification of noisy process".
Automatica, vol. 6, pp. 271-287, 1970.

[II-1] K.Y. WONG - E. POLAK
"Identification of linear discrete time systems using the instrumental variable method".
IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-12, n° 6, Décembre 1967.

[II-2] K.J. ASTROM
"Lectures on the identification problem. The least squares method .
Report 6806 Lund Institute of Technology, September 1968.

[II-3] J. AGUILAR MARTIN
"Estimation stochastique des paramètres".
Note Interne L. A. A. S., 1968.

[II-4] G. BANON
"Etude d'algorithmes d'estimation des paramètres pour l'identification adaptative en temps réel des processus linéaires perturbés par un bruit corrélé".
Thèse de Docteur Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse, Janvier 1971.

DEUXIEME PARTIE

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

LES TESTS STATISTIQUES EFFECTUES SUR LE MODELE
LA VALIDATION DU MODELE

III - ETUDE DE L'INFLUENCE D'UN NOUVEL ENSEMBLE DE VARIABLES D'ENTREE DANS L'EQUATION DE REGRESSION

On raisonnera par souci de clarté dans l'exposé sur la modélisation d'un processus à L entrées et une sortie, du premier ordre

L'équation (II-3) donne

(III-1) $$y_{K+1} = \underset{(1,MX)}{\underline{\theta}^t} \cdot \underset{(MX,1)}{\underline{X}_K} + \underline{\varepsilon}_K$$

Dans les problèmes de régression statique les variables qui constituent le vecteur $\underline{X}_K$ sont aussi appelées variables explicatives ou indépendantes ou exogènes Dans les modèles dynamiques des variables endogènes retardées font partie des variables explicatives.

III-1 - ETUDE DU BIAIS INTRODUIT DANS L'ESTIMATION DES PARAMETRES LORSQUE L'ON NE TIENT PAS COMPTE DE TOUTES LES VARIABLES D'ENTREE MESURABLES

On partitionne le vecteur $\underline{X}_K$: $$\underset{(MX,1)}{\underline{X}_K} = \begin{bmatrix} \underline{X}_{1,K} \\ \hline \underline{X}_{2,K} \end{bmatrix} \begin{matrix} (MX-S,1) \\ (S,1) \end{matrix}$$

et le vecteur θ^t $$\underset{(1,MX)}{\underline{\theta}^t} = \left[\underset{(1,MX-S)}{\underline{\theta}_1^t} \;\middle|\; \underset{(1,S)}{\underline{\theta}_2^t} \right]$$

le modèle simplifié à (MX-s) variables explicatives s'écrit donc

$$y_{K+1} = \underline{\theta}_1^t \, \underline{X}_{1,K} + \varepsilon_{1,K}$$

En reprenant le raisonnement déjà suivi au paragraphe II-2 (1ère partie), on obtient comme estimateur de $\underline{\theta}_1^t$ au sens des moindres carrés (le raisonnement est identique pour un estimateur par matrice instrumentale)

$$\underset{(1,MX-S)}{\underline{\hat{\theta}}_{1N}^t} = \underset{(1,MX-S)}{\underline{\theta}_1^t} + \underset{(1,S)}{\underline{\theta}_2^t} \cdot \underset{(S,N)}{(X_2 X_1^t)} \cdot \underset{(N,MX-S)}{(X_1 X_1^t)^{-1}} + \varepsilon X_1^t \cdot \underset{(MX-S,MX-S)}{(X_1 X_1^t)^{-1}}$$

Pour que le biais $\underline{\theta}_2^t.(X_2\, X_1^t)\,.\,(X_1\, X_1^t)^{-1}$ converge en probabilité vers $\underline{0}^t$ il faut qu'au moins une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1°) $\underline{\theta}_2^t = \underline{0}^t$ c'est-à-dire si le modèle simplifié convient

2°) $\underset{N \to \infty}{\mathrm{Plim}}\,(X_2 X_1^t) = 0$ c'est-à-dire si les variables composant $\underline{X}_{1,K}$ sont orthogonales à celles de $\underline{X}_{2,K}$ ou non corrélées avec elles s'il s'agit de variables centrées.

Remarques :

- On peut parler ici de convergence en probabilité si $\underline{\theta}_2^t\, \underline{X}_{2,K}$ est considéré comme une perturbation non mesurable.

- La deuxième condition dépend des propriétés des échantillons sur l'horizon, pour N fini. Rien ne permet d'affirmer que ces propriétés, sur un horizon débutant à l'échantillon N + 1 sont identiques. Ce problème est analogue à celui de la prévision par interpolation dans le cas de modèles statiques (cf. [3-1]), c'est-à-dire lorsqu'on se limite au domaine couvert par l'ensemble des variables explicatives sur l'horizon des N échantillons (par opposition à la prévision par extrapolation).
Cependant, cette incertitude est levée pour un système dynamique si l'hypothèse de stationnarité est vérifiée et si les N échantillons proviennent d'un fonctionnement normal du processus.

- Il ne faut pas perdre de vue l'utilisation possible du modèle à des fins de commande : pour un problème de régulation un modèle simplifié peut suffire.

Exemple :

Soit un processus à deux entrées et une sortie, du premier ordre

$$y_{K+1} = \underset{(1,3)}{\underline{\theta}^t}\,\underset{(3,1)}{\underline{X}_K} + \varepsilon_K \qquad \text{avec} \quad \underline{X}_K = \begin{bmatrix} y_K \\ u^1_K \\ u^2_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}_{1,K} \\ \hline \underline{X}_{2,K} \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad \underline{\theta}^t = [\alpha \;\; \beta_1 \mid \beta_2]$$

Il est possible que u^2_K ne soit pas corrélé avec u^1_K, mais, à moins que u^2_K ne soit assimilable à un bruit blanc, il est improbable que u^2_K ne soit pas corrélé avec y_K. Dans ce cas il y a risque de biais sur $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta_1}$

III-2 - TEST DE SIGNIFICATION DE LA DIMINUTION DE LA VARIANCE DU BRUIT RESIDUEL

III-2-1 - Hypothèse d'un bruit résiduel blanc de distribution gaussienne

Jusqu'à présent, en effet, aucune hypothèse n'a été faite sur la distribution du bruit ε_K, et on a montré que s'il était corrélé on était capable d'estimer sans biais les paramètres.

Au cours de cette seconde partie, on sera amené souvent à faire l'hypothèse que le bruit résiduel suit une loi normale et qu'il est non corrélé. Cette dernière hypothèse n'est en général pas rigoureusement vérifiée.

Le bruit résiduel ou plus exactement l'erreur totale (cf. Introduction) est défini comme étant l'écart

(III-2) $$\widehat{\varepsilon}_K = y_{K+1} - \widehat{y}_{K+1}$$

où y_{K+1} est la sortie observée à l'instant K + 1

et $\widehat{y}_{K+1}$ est la sortie du modèle recalé sur les observations précédentes. :

$$\widehat{y}_{K+1} = \widehat{\underline{\theta}}^t \underline{X}_K$$

Un estimateur $\widehat{\Sigma}_{\widehat{\varepsilon}}$ de la matrice de variance de $\widehat{\varepsilon}_K$ est donné au paragraphe II-6-1. Dans le cas d'un système à une sortie cette matrice se réduit à un scalaire noté $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$

Remarque importante :

On a vu que si un bruit blanc de mesure affecte la sortie observée ceci introduit une corrélation fictive vis à vis de l'équation de regression. Si

les paramètres du modèle sont estimés par la technique de la matrice instrumentale, et s'il n'y a pas de bruit de dynamique alors le bruit résiduel $\underline{\varepsilon}_k$ déterminé à partir du modèle non recalé sur les observations, est un bruit blanc.

III-2-2 - Application des tests statistiques lorsque l'hypothèse précédente n'est pas rigoureusement vérifiée

On ne traitera pas ici des conséquences d'un écart par rapport à l'hypothèse de base.

Dans les ouvrages spécialisés dans la déduction statistique([III-2] ou [III-3]) il est dit qu'un test de moyenne, tel que celui de Student, est peu sensible (le niveau de confiance reste sensiblement exact) à un écart de la distribution du bruit résiduel par rapport à une loi normale ; mais la dépendance des erreurs risque, si elle est très forte, de fausser notablement le résultat de la déduction. Par contre des tests de variances sont plus sensibles à un tel écart.

III-2-3 - La diminution de la variance testée par le rapport des variances

On teste l'hypothèse $H_0 : \underline{\theta}_2^t = \underline{0}^t$

contre l'hypothèse $H_1 : \underline{\theta}_2^t \neq \underline{0}^t$

On forme la variable F :

$$F = \frac{N-MX}{s} \left(\frac{\widehat{\sigma}^2_{MX-s} - \widehat{\sigma}^2_{MX}}{\widehat{\sigma}^2_{MX}} \right) \qquad \text{(III-3)}$$

où $\widehat{\sigma}^2_{MX}$ est la variance estimée du bruit résiduel sous l'hypothèse H_1

et $\widehat{\sigma}^2_{MX-s}$ est la variance estimée du bruit résiduel sous l'hypothèse H_0

On montre (cf. [III-3]) que F est distribué suivant une loi F (s, N-MX) tabulée. L'expression entre parenthèses est en effet le rapport de deux variables χ^2 indépendantes avec respectivement s et N-MX degrés de liberté quand H_0 est vraie.

Procédure :

On se fixe un niveau α_γ qui représente le risque d'erreur de 1ère espèce c'est-à-dire la probabilité de rejeter H_0 qui est en réalité vraie - l'erreur de 2ème espèce étant la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse et son niveau est souvent noté β_γ

Ceci définit un domaine critique tel que la probabilité pour que la variable du test appartienne à ce domaine, sachant que H_0 est vraie, est α

Dans le cas traité, si la valeur F calculée est supérieure à F^0 valeur de la variable F (pour les degrés de liberté fixés, au niveau α_γ) limite inférieure du domaine critique (l'ensemble des valeurs de $F > F^0$), alors on rejette l'hypothèse H_0.

IV - DETERMINATION DE L'ORDRE TOTAL D'UN SYSTEME MULTIDIMENSIONNEL

IV-1 - LIMITES DANS LA DETERMINATION DE LA STRUCTURE DU SYSTEME

Les différentes structures équivalentes d'un système déterministe à plusieurs sorties, ont été précisées au paragraphe I-3-3.

On peut déterminer, de façon relativement précise, l'ordre minimal de l'espace d'état qui permet de représenter un processus stochastique ; c'est-à-dire déterminer le nombre n de colonnes non nulles de la matrice $\mathcal{A}$ (cf paragraphe II-1). Par contre il n'est pas possible de déterminer quelle structure adopter (ce qui revient à fixer les n lignes indépendantes extraites de la matrice $\mathcal{H}$ de dimension (p x M, n)).

Les résultats de l'estimation pour plusieurs représentations possibles équivalentes, confrontés entre eux à l'aide de certains critères tels que précision obtenue (cf. chapitre V) ou nombre de paramètres, peuvent guider dans ce choix.

Cependant, il ne faut pas oublier que les résultats obtenus dépendent beaucoup des réalisations des bruits qui sont prises en compte (cf. remarque 1, paragraphe I-3-4).

IV-2 - LE TEST DU RAPPORT DES VARIANCES

Au paragraphe III-2-3 - on a donné une application possible de ce test pour la détermination de l'influence d'une variable explicative supplémentaire (ou d'un ensemble de variables). On peut procéder de la même façon pour tester simultanément les ordres partiels d'un système multidimensionnel.

Procédure : (cf. [I-2])

On part d'une structure initiale telle que figurent dans $\underline{X}_K$ les variables y^{ℓ}_K ($\ell = 1, \ldots, M$), on introduit y^1_{K-1}. Si la réduction des variances n'est pas significative au niveau $\alpha_{\%}$ on ne tient pas compte de y^1_{K-1} ni de $y^1_{K-\tau}$ pour $\tau > 1$.

Sinon on retient y^1_{K-1} et on passe au test de la réduction des variances quand on introduit y^2_{K-1}.

On poursuit la procédure jusqu'à ce que l'introduction d'une nouvelle variable endogène retardée n'entraîne plus de réduction significative.

IV-3 - ETUDE DU RANG DE LA MATRICE D'INFORMATION XZ^t ET DE LA PRECISION SUR LES PARAMETRES ESTIMES

La matrice XZ^t (cas général d'une estimation par la technique de la matrice instrumentale) tend vers la matrice limite définie au paragraphe II-4, quand N tend vers l'infini.

Cette matrice limite contient pratiquement toute l'information utile extraite des observations entrée-sortie.

Lorsque l'on procède à une estimation au sens des moindres carrés, la matrice d'information est XX^t. LEE [IV-1] , a montré, dans le cas monovariable, que cette matrice est de rang MX si le modèle a une structure correcte, pourvu que u_K soit indépendant linéairement de u_{K-1}, u_{K-2}, etc... (condition qui n'est pas très stricte cependant).

De même si une au moins des variables endogènes retardées figurant dans les vecteurs $\underline{X}_K$ et $\underline{Z}_K$ n'est pas correlée avec au moins une des sorties y^{ℓ}_{K+1} (pour $\ell = 1, \ldots M$) alors la matrice XZ^t est singulière et son rang est inférieur à MX. Le problème qui se pose est celui du test du rang de la matrice XZ^t lorsque les observations sont bruitées. Le bruit a en général pour effet de rendre la matrice XZ^t régulière, mais elle peut être mal conditionnée cependant.

Si on compare alors, comme il est exposé dans [IV-2], le rapport des déterminants :

(IV-1) $$\frac{\Delta XZ^t_{MX-s}}{\Delta XZ^t_{MX-s+1}}$$

On se rend compte, que, pour de faibles niveaux de bruits, ce rapport présente une croissance assez nette lorsque MX-s+1 est supérieur d'une unité au rang de la matrice XZ^t.

Parallèlement, la précision sur les paramètres communs à la structure MX-s et à la structure MX-s+1 diminue (cf. (II-20), (II-21) et chapitre V), bien que la variance estimée du bruit soit en général plus faible.

Cependant lorsque le rang de la matrice d'information est en réalité égal à MX-s on remarque que cette diminution de précision est beaucoup plus importante. Cette observation rejoint celle notée dans [IV-3].

IV-5 - REMARQUE SUR LES CHAPITRES III ET IV

Cette recherche effectuée sur la détermination des variables explicatives figurant dans l'équation de regression peut être effectuée en ligne, bien que les calculs matriciels nécessaires ne soient pas simples à programmer.

En effet, on peut appliquer les formules de récurrence sur les observations pour un nombre de variables explicatives suffisamment grand ou tout au moins voisin de celui suggéré par une connaissance a priori du processus à identifier ; ce nombre de variables fixe la structure a priori initiale.

Les formules explicites (II-15), (II-20), (II-21), (II-24) peuvent être calculées aisément pour la structure initiale et chaque structure correspondant à la suppression d'une variable explicative ; ce qui revient à supprimer une ligne et une colonne des matrices de dimension (MX, MX) et une colonne des matrices de dimension (MY, MX).

V - INTERVALLES DE CONFIANCE DES PARAMETRES

L'hypothèse III-2-1 est reconduite. On raisonnera sur un système multidimensionnel à une sortie.

V-1 - PRECISION SUR LES PARAMETRES

On montre dans [III-3] ou [V-1] que chaque composante i du vecteur $\underset{(1,MX)}{\hat{\underline{\theta}}^t_N}$ est telle que la variable définie par :

$$t = \left(\hat{\theta}^i_N - \theta^i\right) \cdot \left\{\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t_N}\right]_{ii}\right\}^{-1/2} \qquad i = 1, \ldots, MX$$

suit une loi de Student à N-MX degrés de liberté

On construit alors l'intervalle de confiance associé à $\hat{\theta}^i_N$ tel que :

$$\text{(V-1)} \qquad P\left\{\hat{\theta}^i_N - t_{\alpha/2} \cdot \left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t_N}\right]^{1/2}_{ii} \leq \theta^i \leq \hat{\theta}^i_N + t_{\alpha/2} \cdot \left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t_N}\right]^{1/2}_{ii}\right\} = (1-\alpha)$$

$(1-\alpha)$ étant le niveau de confiance auquel on travaille.

Remarque importante

L'intervalle de confiance calculé pour l'estimateur $\hat{\theta}^i_N$ n'est pas en général indépendant de celui calculé pour l'estimateur $\hat{\theta}^j_N$, puisque ces deux estimations ont été faites à partir des mêmes observations. Cependant,

du fait de l'hypothèse gaussienne, et si $\hat{\theta}_N^i$ est peu corrélé avec $\hat{\theta}_N^j$ (une estimation de la corrélation est donnée par $\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}_N^t}\right]_{ij}$) la probabilité pour que $\hat{\theta}_N^i$ et $\hat{\theta}_N^j$ soient compris tous deux dans les intervalles correspondants est $(1 - \alpha)^2$

V-2 - INTERVALLES DE CONFIANCE POUR N GRAND

Lorsque le nombre d'échantillons N augmente, le nombre de degrés de liberté n = N-MX augmente aussi et la variable t suit approximativement une loi normale.

Une approximation du calcul de t_α pour n supérieur à 30 est donnée par Cornish et Fisher dans [V-1] .

Si z suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

$$t_\alpha = z_\alpha + \frac{z_\alpha^3 + z_\alpha}{4n} + \frac{5z_\alpha^5 + 16z_\alpha^3 + 3z_\alpha}{96n^2} \qquad \text{(V-2)}$$

Pour un seuil α % donné on est capable à tout moment de calculer l'intervalle de confiance correspondant à un paramètre $\hat{\theta}_N^i$

VI - INTERVALLE DE CONFIANCE POUR LA PREDICTION

La prédiction du modèle obtenu à l'instant K, après un horizon de N échantillons, et recalé sur les observations précédentes, est donnée par

$$\hat{y}_{K+1} = \hat{\underline{\theta}}^t \cdot \underline{x}_K$$

s'il s'agit d'un processus à une sortie, sachant que la sortie observée sera :

$$y_{K+1} = \underline{\theta}^t \cdot \underline{x}_K + \varepsilon_K$$

L'écart entre $\hat{y}_{K+1}$ et $E_{|\underline{x}_K} y_{K+1}$ est dû d'une part à l'erreur commise dans l'estimation des paramètres du modèle, d'autre part au bruit ε_K non mesuré.

La variance de $\widehat{y}_{K+1}$ compte tenu uniquement de l'imprécision sur $\widehat{\underline{\theta}}^t_N$ est :

$$E_{/X_K,\varepsilon_K}\left[(\widehat{y}_{K+1} - \underline{\theta}^t.\underline{X}_K)^2\right] = E_{/X_K,\varepsilon_K}\left[\{(\widehat{\underline{\theta}}^t_N - \underline{\theta}^t).\underline{X}_K\}^2\right] = E_{/X_K,\varepsilon_K}\left[\underline{X}^t_K.(\widehat{\underline{\theta}}^t_N - \underline{\theta}^t)^t(\widehat{\underline{\theta}}^t_N - \underline{\theta}^t)\underline{X}_K\right]$$

$$= \underline{X}^t_K \; E_{/X_K,\varepsilon_K}\left[(\widehat{\underline{\theta}}^t_N - \underline{\theta}^t)^t(\widehat{\underline{\theta}}^t_N - \underline{\theta}^t)\right]\underline{X}_K$$

$$= \underline{X}^t_K \cdot \Sigma_{\widehat{\underline{\theta}}^t_N} \cdot \underline{X}_K$$

Si on tient compte aussi de la variance σ^2_ε de y_{K+1} autour de sa valeur moyenne, on a alors :

$$E_{/X_K}\left[(\widehat{y}_{K+1} - \underline{\theta}^t.\underline{X}_K)^2\right] = \sigma^2_\varepsilon + \underline{X}^t_K \cdot \Sigma_{\widehat{\underline{\theta}}^t_N} \cdot \underline{X}_K$$

La variable :

$$t = (\widehat{y}_{K+1} - E_{/X_K} y_{K+1}) \cdot \left[\sigma^2_\varepsilon + \underline{X}^t_K \cdot \Sigma_{\widehat{\underline{\theta}}^t_N} \cdot \underline{X}_K\right]^{-1/2}$$

est une variable de Student à N-MX degrés de liberté.

Si on remplace σ^2_ε par son estimateur $\widehat{\sigma}^2_\varepsilon$ et $\Sigma_{\widehat{\underline{\theta}}^t_N}$ par son estimateur $\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^t_N}$ on peut associer à $\widehat{y}_{K+1}$ un intervalle de confiance :

(VI-1) $$P\left\{\widehat{y}_{K+1} - t_{\alpha/2} \cdot \left[\widehat{\sigma}^2_\varepsilon + \underline{X}^t_K \cdot \widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^t_N} \cdot \underline{X}_K\right]^{1/2} \leq E_{/X_K} y_{K+1} \leq \widehat{y}_{K+1} + t_{\alpha/2} \cdot \left[\widehat{\sigma}^2_\varepsilon + \underline{X}^t_K \cdot \widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^t_N} \cdot \underline{X}_K\right]^{1/2}\right\} = (1-\alpha)$$

si $(1-\alpha)$ est le niveau de confiance auquel on travaille.

A l'instant K+1 lorsque l'on mesure y_{K+1}, on vérifie si sa valeur est comprise dans cet intervalle centré autour de $\widehat{y}_{K+1}$, c'est-à-dire si le modèle permet de faire une prédiction acceptable au niveau α%

<u>Remarque :</u>

La prédiction $\widehat{y}_{K+1}$ reste valable sous l'hypothèse qu'il n'y a pas eu de variations de paramètres (si la structure du processus et les caractéristiques statistiques du bruit sont supposées invariantes).

Si la prédiction s'avère inexacte au niveau $\alpha_{\%}$ choisi, le modèle n'est pas validé avec un risque α d'avoir été rejeté à tort.

La procédure reste valable dans le cas d'un processus à plusieurs sorties : sous les mêmes hypothèses, le modèle est rejeté si l'écart entre la prédiction $\hat{y}^l_{K+1}$ et la sortie observée y^l_{K+1} est supérieur en valeur absolue, à un demi-intervalle défini en (VI-1) quel que soit $l \in [1, M]$. Ici non plus les intervalles de confiance ne sont en général pas indépendants.

VII - ANALYSE DU BRUIT RESIDUEL

Lorsque l'horizon d'étude comprend un nombre N suffisamment grand, d'échantillons, on peut, sur la base du modèle défini par $\hat{\Theta}_N$ analyser le bruit résiduel.

La relation (III-2) généralisée au cas d'un système à M sorties s'écrit :

(VII-1) $$\underset{(M,1)}{\hat{\underline{\varepsilon}}_K} = \underset{(M,1)}{\underline{y}_{K+1}} - \underset{(M,1)}{\hat{\underline{y}}_{K+1}}$$ $\hat{\underline{\varepsilon}}_K$ est une estimation de $\underline{\varepsilon}_K$

Puisque $E\,\underline{\varepsilon}_K = \underline{0}$, la fonction d'autocorrélation de $\underline{\varepsilon}_K$ est donnée par :

$$R_{\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}}(\tau) = E\left[\underline{\varepsilon}_K\ \underline{\varepsilon}^t_{K+\tau}\right] \qquad \text{pour} \quad \tau = 0, 1 \ldots$$

on choisit comme estimateur non biaisé de $R_{\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}}(\tau)$

(VII-2) $$\hat{R}_{\hat{\underline{\varepsilon}}\hat{\underline{\varepsilon}}}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{K=0}^{N-\tau} \hat{\underline{\varepsilon}}_K\ \hat{\underline{\varepsilon}}^t_{K+\tau}$$

$\hat{R}_{\hat{\underline{\varepsilon}}\hat{\underline{\varepsilon}}}(\tau)$ converge en probabilité vers $R_{\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}}(\tau)$ lorsque N tend vers l'infini.

Bartlett [VII-2] referencié dans [VII-1] a montré que pour N grand

$$\text{(VII-3)} \quad \mathrm{Cov}\left\{[\widehat{R}_\tau]_{ij}, [\widehat{R}_t]_{pq}\right\} \simeq \frac{1}{N} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \left\{ [R_K]_{ip} \cdot [R_{K+t-\tau}]_{jq} + [R_{K+t}]_{iq} \cdot [R_{K-\tau}]_{jp} \right\}$$

où $[\widehat{R}_\tau]_{ij}$ est l'élément ij de la matrice $\widehat{R}_{\hat{\underline{\varepsilon}}\hat{\underline{\varepsilon}}}(\tau)$ et où l'opérateur cov $\{\ldots\}$ représente le moment centré d'ordre 2.

Cette expression est valable à condition que les moments de $\underline{\varepsilon}_K$ existent jusqu'à l'ordre 4 au moins.

L'expression de la covariance d'un élément ii de la matrice $[\widehat{R}_\tau]$ s'obtient à partir de (VII-3) :

$$\text{(VII-4)} \quad \mathrm{cov}\left\{[\widehat{R}_\tau]_{ii}, [\widehat{R}_\tau]_{ii}\right\} \simeq \frac{1}{N} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \left\{ [R_K]_{ii} \cdot [R_K]_{ii} + [R_{K+\tau}]_{ii} \cdot [R_{K-\tau}]_{ii} \right\}$$

or $\qquad [R_K]_{ii} = [R_{-K}]_{ii}$

On sait d'autre part (cf. paragraphe I-3-4) que le bruit résiduel est un bruit corrélé d'ordre p au plus ; donc :

$$[R_\tau]_{ii} = 0 \quad \text{pour} \quad \tau > p$$

(VII-4) s'écrit alors :

$$\mathrm{cov}\left\{[\widehat{R}_\tau]_{ii}, [\widehat{R}_\tau]_{ii}\right\} \simeq \frac{1}{N} \left\{ [R_0]^2_{ii} + 2 \sum_{K=1}^{p} [R_K]^2_{ii} + \sum_{K=-p}^{+p} \sum_{L=0}^{p-|K|} [R_{K+L}]_{ii} \cdot [R_{K-L}]_{ii} \right\}$$

$$\text{(VII-5)} \quad \mathrm{Cov}\left\{[\widehat{R}_\tau]_{ii}, [\widehat{R}_\tau]_{ii}\right\} \simeq \frac{1}{N} \left\{ 2[R_0]^2_{ii} + 3 \sum_{K=1}^{p} [R_K]^2_{ii} + 2 \sum_{K=1}^{p} \sum_{L=0}^{p-K} [R_{K+L}]_{ii} \cdot [R_{K-L}]_{ii} \right\}$$

Si on admet que $[\widehat{R}_\tau]$ est asymptotiquement normal alors l'intervalle de confiance, au niveau 5%, de $[\widehat{R}_\tau]_{ii}$ est donné par :

$$\text{(VII-6)} \quad [\widehat{R}_\tau]_{ii} \pm 1.96 \left\{ \frac{1}{N} \left\{ 2[\widehat{R}_0]_{ii}^2 + 3\sum_{K=1}^{p} [\widehat{R}_K]_{ii}^2 + 2\sum_{K=1}^{p} \sum_{L=0}^{p-K} [\widehat{R}_{K+L}]_{ii} \cdot [\widehat{R}_{K-L}]_{ii} \right\} \right\}^{1/2}$$

La probabilité pour que la variable de Student t soit supérieure à 1.96, pour un nombre de degré de liberté infini, est $\alpha = 0.05$.

Application :

On calcule $[\widehat{R}_\tau]_{ii}$ pour quelques valeurs de τ ; le modèle n'est pas accepté s'il y a plus de 5% des points qui sont situés en dehors de l'intervalle (VII-6) pour $\tau > p$.

Remarque 1 :

Il ne faut pas donner à τ des valeurs trop grandes car la précision en valeur relative est alors très faible puisque $[R_\tau]_{ii} \longrightarrow 0$ quand τ augmente.

Remarque 2 :

L'expression (VII-2) peut être calculée de façon récurrente :

$$\widehat{R}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{K=0}^{N-\tau} \left(y_{K+1} - \widehat{\theta}_N \cdot \underline{X}_K \right) \left(y_{K+1+\tau} - \widehat{\theta}_N \cdot \underline{X}_{K+\tau} \right)^t$$

$$= \frac{1}{N-\tau} \left\{ \left(\sum_{K=0}^{N-\tau} y_{K+1} \cdot y_{K+1+\tau}^t \right) - \left(\sum_{K=0}^{N-\tau} y_{K+1} \cdot \underline{X}_{K+\tau}^t \right) \cdot \widehat{\theta}_N^t \right.$$

$$\left. - \widehat{\theta}_N \cdot \left(\sum_{K=0}^{N-\tau} \underline{X}_K \cdot y_{K+1+\tau}^t \right) + \widehat{\theta}_N \cdot \left(\sum \underline{X}_K \underline{X}_{K+\tau}^t \right) \cdot \widehat{\theta}_N^t \right.$$

or

$$
\text{(VII-7)} \quad \begin{cases}
\dfrac{1}{N-\tau} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-\tau} y_{k+1}\, y^t_{k+1+\tau} = \widehat{R}_{yy}(\tau) \\[2ex]
\dfrac{1}{N-\tau} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-\tau} y_{k+1}\, \underline{X}^t_{k+\tau} = \widehat{R}_{yx}(\tau-1) \\[2ex]
\dfrac{1}{N-\tau} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-\tau} \underline{X}_k\, \underline{X}^t_{k+\tau} = \widehat{R}_{xx}(\tau)
\end{cases}
$$

Si N est grand et si on admet un biais faible sur ces estimateurs, certains termes des expressions (VII-7) sont contenus dans les expressions (II-13), (II-14), (II-17), (II-18), (II-19).

CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE

Un des buts de ce travail était de déterminer des moyens de validation du modèle obtenu, une fois ses paramètres estimés.

Des tests statistiques peuvent être utilisés dans ce but lors d'une première approche du problème ; mais on constate que des hypothèses plus restrictives doivent être faites si l'on veut que l'ensemble estimation des paramètres-validation du modèle soit d'une mis en oeuvre relativement facile.

Il resterait encore à définir d'une manière plus rigoureuse le domaine d'application de tels procédés. On s'est limité ici à l'expérimentation de l'ensemble sur des exemples simples simulés ou réels.

REFERENCES DE LA SECONDE PARTIE

[III-1] J. ULMO
"Problèmes et programmes de régression".
Revue de Statistique Appliquée, vol. XIX, n° 1, 1971.

[III-2] E.S. KEEPING
"Introduction to statistical inference"
Van Nostrand

[III-3] M.G. KENDALL - A. STUART
"The advanced theory of statistics" vol. 2 "Inference and relationship". Griffin

[IV-1] R.C.K. LEE
"Optimal estimation, identification and control".
M.I.T. Press, 1964.

[IV-2] C.M. WOODSIDE
"Estimation of the order of linear systems"
Automatica, vol. 7, pp. 727-733, 1971.

[IV-3] I. GUSTAVSSON
"Comparison of different methods for identification of industrial processes".
Automatica vol. 8, pp. 127-142, 1972.

[V-1] GRAYBILL
"An introduction to linear statistical models" vol. 1
Mc Graw Hill series in probability and statistics, 1961

[VII-1] RAMAN K. MEHRA
"On the identification of variances and adaptive Kalman filtering"
IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-15, n° 2,
Avril 1970.

[VII-2] M.S. BARTLETT
"An introduction to stochastic processes"
London Cambridge University Press, 1962.

T R O I S I E M E P A R T I E

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

EXPERIMENTATION
APPLICATION A L'IDENTIFICATION DE PROCESSUS

VIII - PROGRAMMATION DES ALGORITHMES D'ESTIMATION DE PARAMETRES

VIII-1 - REALISATION - MOYENS DE CALCUL

Toute la programmation a été réalisée en langage FORTRAN et de telle sorte que les instructions sources soient acceptées par un compilateur peu évolué.

L'ensemble des sous-programmes qui ont été mis au point, [VIII-1], permet d'appliquer les algorithmes étudiés au cours de la première partie, à l'estimation des paramètres d'un processus linéaire multidimensionnel quelconque, sur la base d'observations entrée-sortie.

L'appel à cet ensemble se fait au moyen d'une seule instruction FORTRAN du type CALL (nom de l'ensemble) suivie d'une liste d'arguments.

L'encombrement en mémoire et le temps de calcul ont été optimisés compte tenu des contraintes imposées par le nombre illimité de variables pouvant apparaître dans le modèle. Les réservations de tableaux sont effectuées par programme principal ; la seule limitation est la capacité en mémoire centrale de l'ordinateur utilisé.

Les applications qui sont présentées dans ce mémoire ont été effectuées sur l'ordinateur I. B. M. 1130 (version 2) du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales, avec une configuration de 8 K mots.

L'option choisie est :

. 1 mot pour un nombre entier

. 3 mots pour un nombre réel
(soit 31 bits pour la mantisse)

chaque mot est composé de 15 bits.

L'ensemble ESTMC version 1 (ESTimation des paramètres d'un système multidimensionnel par la méthode des Moindres Carrés) occupe au total 2240 mots.

L'ensemble ESTMI version 1 (ESTimation des paramètres d'un système multidimensionnel par Matrice Instrumentale) occupe au total 2438 mots.

VIII-2 - ORGANIGRAMME GENERAL

L'organigramme général, simplifié, du sous-programme ESTMI est décrit ci-dessous :

A chaque nouvelle observation entrée-sortie, on forme les vecteurs $\underline{y}_{K+1}$, $\underline{X}_K$ et $\underline{Z}_K$ et on fait appel au sous-programme en précisant le numéro de l'échantillon dont l'identificateur est : IT.

Un indicateur dont l'identificateur est ISORT, permet d'orienter les aiguillages de l'organigramme :

ISORT = 1	Seules les récurrences sur les observations sont effectuées
ISORT = 2	Tous les calculs sont effectués
ISORT = 3	Les résultats sont imprimés.

Ceci permet de procéder au traitement hors ligne d'un enregistrement dans des conditions analogues à celles du traitement en ligne ; on peut ainsi tester le comportement de l'ensemble en vue d'une application en temps réel.

Indications complémentaires :

- Le sous-programme RECOB traite les récurrences du type :

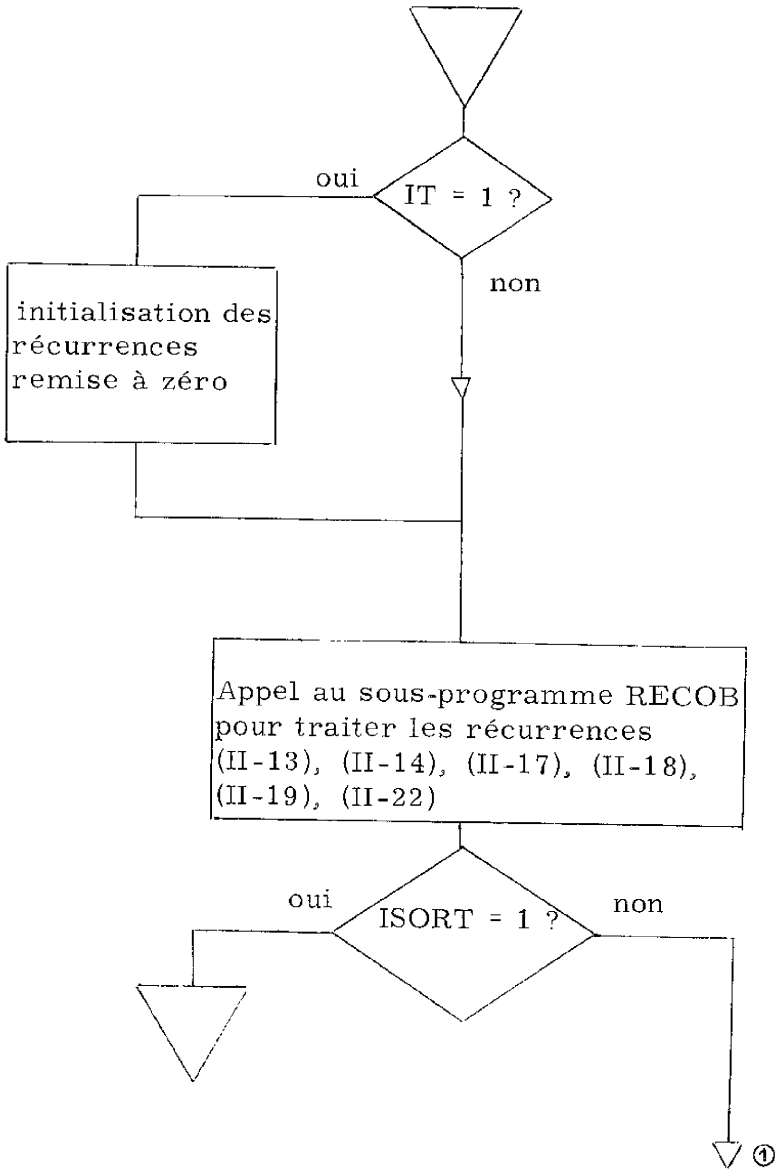
$$(UV^t)_{N+1} = \frac{N}{N+1} \cdot (UV^t)_N + \frac{1}{N+1} \cdot (\underline{U}_{N+1} \cdot \underline{V}^t_{N+1})$$

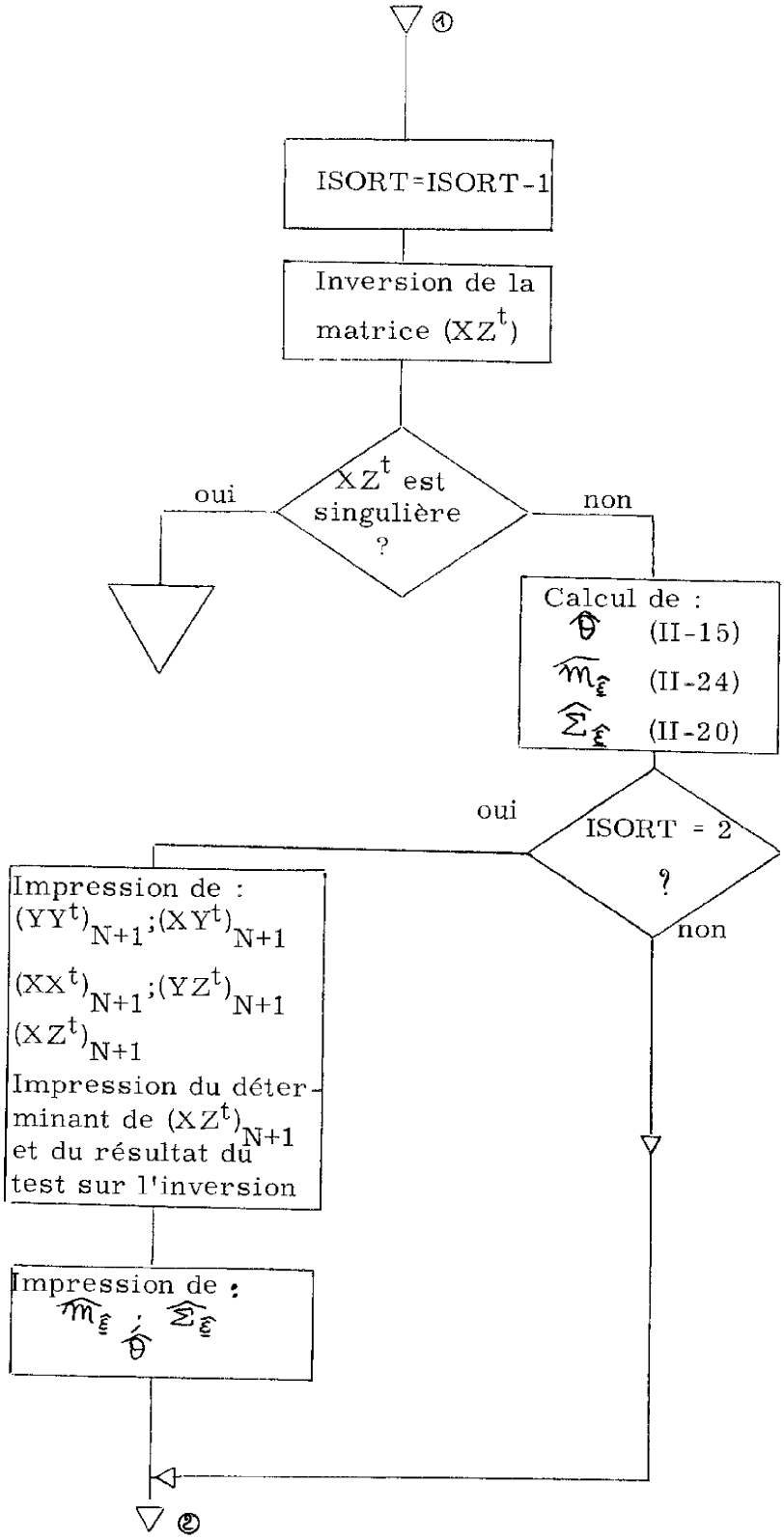
où U_{N+1} et V_{N+1} sont des vecteurs de dimensions respectives (M, 1) et (L, 1) et sont formés d'observations correspondant à l'échantillon N + 1.

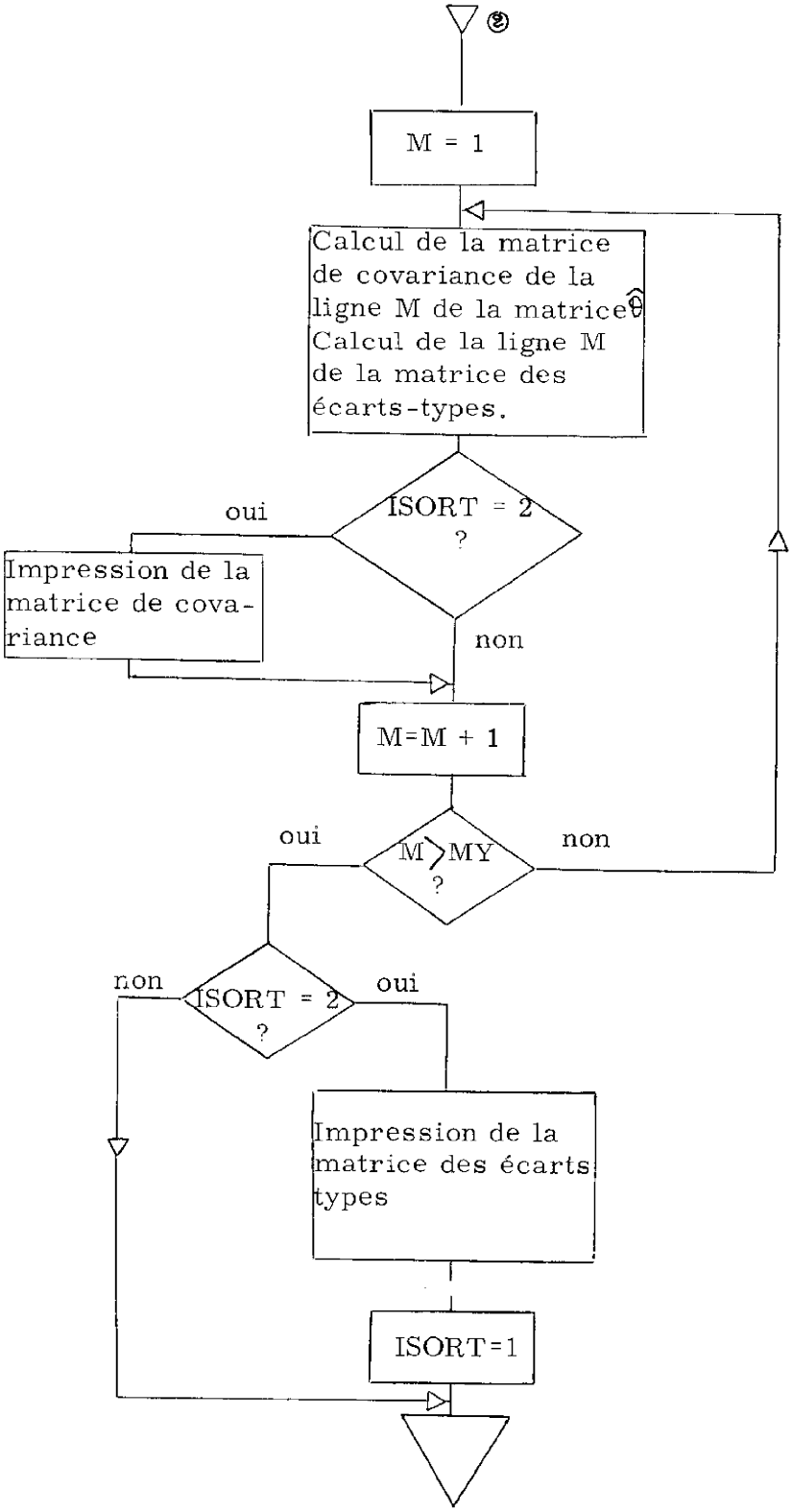
- L'inversion de la matrice XZ^t se fait suivant la méthode de diagonalisation, en utilisant l'algorithme de Gauss [II-2]

Afin d'avoir un renseignement sur le conditionnement de cette matrice on effectue, par sous programme, le produit $(XZ^t)^{-1} . (XZ^t)$ et le produit $(XZ^t) . (XZ^t)^{-1}$ et on cherche dans les deux cas quel est l'élément de la diagonale principale qui s'écarte le plus de la valeur 1. et celui, en dehors de cette diagonale, qui s'écarte le plus de 0.. Les écarts maxima sont imprimés.

Organigramme




①
ISORT=ISORT-1
Inversion de la matrice (XZ^t)
XZ^t est singulière ?
oui
non
Calcul de :
$\hat{\theta}$ (II-15)
$\hat{m}_{\xi}$ (II-24)
$\hat{\Sigma}_{\xi}$ (II-20)
ISORT = 2 ?
oui
non
Impression de :
$(YY^t)_{N+1}$;$(XY^t)_{N+1}$
$(XX^t)_{N+1}$;$(YZ^t)_{N+1}$
$(XZ^t)_{N+1}$
Impression du déterminant de $(XZ^t)_{N+1}$ et du résultat du test sur l'inversion
Impression de :
$\hat{m}_{\xi}$; $\hat{\Sigma}_{\xi}$
$\hat{\theta}$
②


②
M = 1
Calcul de la matrice de covariance de la ligne M de la matrice θ̂
Calcul de la ligne M de la matrice des écarts-types.
ISORT = 2 ?
oui
Impression de la matrice de covariance
non
M=M + 1
M > MY ?
oui
non
ISORT = 2 ?
non
oui
Impression de la matrice des écarts types
ISORT=1

IX - ESTIMATION DES PARAMETRES D'UN SYSTEME LINEAIRE MULTIDIMENSIONNEL - SIMULATION NUMERIQUE

IX-1 - REPRESENTATION MATHEMATIQUE DU SYSTEME DANS L'ESPACE D'ETAT

Il s'agit d'un système à 2 entrées et 2 sorties du 3ème ordre, peu différent de celui présenté dans [I-1]

Les équations de dynamique et d'observation sont respectivement :

$$(IX\text{-}1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{u} \\[2ex] \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

Le schéma bloc du système est représenté figure 4.

La matrice de transfert du système est :

$$\underline{Y}(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(p+1)} & \dfrac{1}{(p+1)^2} + \dfrac{2}{(p+3)} \\ 0 & \dfrac{1}{(p+1)} + \dfrac{2}{(p+3)} \end{bmatrix} \underline{U}(p) \qquad p \triangleq \text{variable de Laplace}$$

Puisque la sortie y^1 dépend, par l'intermédiaire de l'état x^1, de l'état x^2, lui-même indirectement observé par y^2, les blocs $[\alpha]_i$ (cf. I-3-3) ne seront pas diagonaux.

L'échantillonnage est fait avec une période T = 0.2 (unité de temps) On calcule $F = \epsilon^{AT}$ par série de Neumann (cf. (IV-3)); le modèle discret stochastique du système imparfaitement et indirectement observé est alors :

$$
(\mathrm{IX}-3)\quad \begin{cases} \underline{x}_{K+1} = \begin{bmatrix} \alpha & \mu & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \underline{x}_K + \begin{bmatrix} \beta & \nu \\ 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \underline{u}_K + \underline{v}_K \\[2ex] \underline{y}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_K + \underline{W}_K \end{cases}
$$

avec $\alpha = 0.819$ $\quad \beta = 0.181$ $\quad \gamma = 0.549$

$\delta = 0.301$ $\quad \mu = 0.164$ $\quad \nu = 0.018$

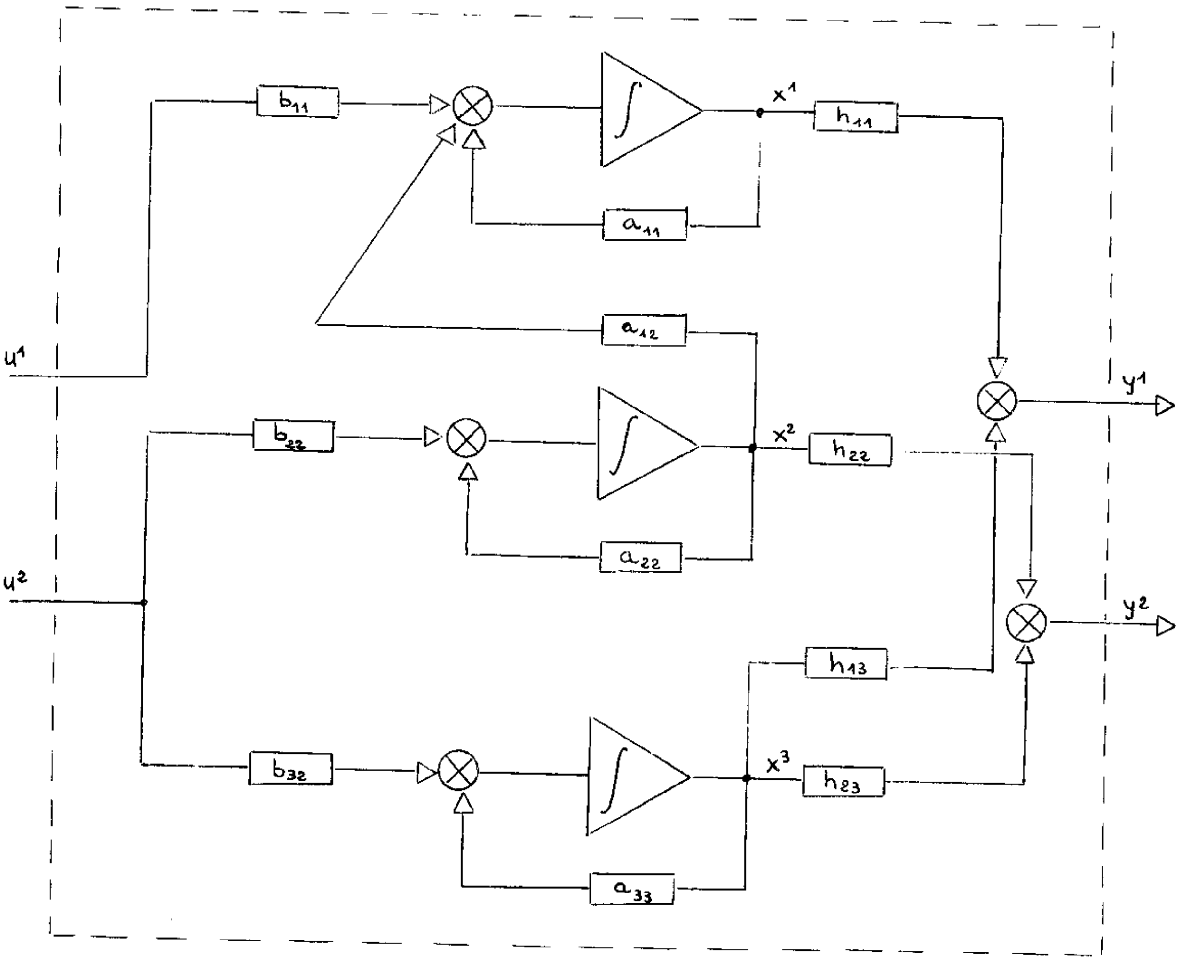


Figure 4

Le raisonnement suivi au cours du paragraphe I-3-3, conduit à écrire dans le cas déterministe :

$$\begin{bmatrix} y^1_K \\ y^2_K \\ \hline y^1_{K+1} \\ y^2_{K+1} \\ \hline y^1_{K+2} \\ y^2_{K+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline \alpha & \mu & \gamma \\ 0 & \alpha & \gamma \\ \hline \alpha^2 & 2\alpha\mu & \gamma^2 \\ 0 & \alpha^2 & \gamma^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1_K \\ x^2_K \\ x^3_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \beta & (\delta+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & (\beta+\delta) & 0 & 0 \\ \hline (\alpha\beta) & (\alpha\nu+\beta\mu+\gamma\delta) & \beta & (\delta+\nu) \\ 0 & (\beta\alpha+\gamma\delta) & 0 & (\beta+\delta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1_K \\ u^2_K \\ u^1_{K+1} \\ u^2_{K+1} \end{bmatrix}$$

On voit que l'état $\underline{x}_K$ est observable en 2 échantillons puisque la matrice $\begin{bmatrix} H \\ \hline HF \end{bmatrix}$ est de rang n = 3.

Quatre structures sont possibles : elles sont obtenues en prenant respectivement les lignes 1-2-3, 1-2-4, 1-3-4 et 2-3-4 de cette matrice pour éliminer l'état dans la relation :

$$\underline{y}_{K+2} = f\,(\underline{x}_K,\ \underline{u}_K,\ \underline{u}_{K+1})$$

IX-2 - RESULTATS DE L'ESTIMATION DES PARAMETRES DU SYSTEME LORSQUE LES SORTIES SONT IMPARFAITEMENT OBSERVEES (BRUIT DE MESURE)

Le vecteur $\underline{v}_K$ est nul $\forall K$

Le vecteur $\underline{W}_K$ est formé de deux variables aléatoires gaussiennes, sensiblement indépendantes et de variances égales à 0.01

La simulation numérique du système est effectuée pour procurer 1000 échantillons $\left\{\underline{u}_K, \underline{y}_{K+1}\right\}$ pour $K \in [0, 999]$.

On a choisi comme entrées 2 séquences binaires pseudo-aléatoires d'amplitude ± 1.

La figure 5 donne l'évolution des entrées, des états et des sorties du système déterministe pour $K \in [0, 99]$ $(W_K = 0 \ \forall K)$

La figure 6 montre l'effet du bruit de mesure sur les sorties. Un tiret vertical a été tracé toutes les unités de temps (tous les 5 points).

La relation entrée-sortie s'écrit :

$$\underline{y}_{K+1} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \end{array}\right] \underline{X}_K + \underline{\varepsilon}_K$$

(cf. (II-2)).

L'estimation des paramètres α_{ij}, β_{ij} est faite par matrice instrumentale à observations retardées.

<u>Structure A</u>

Le vecteur $\underline{X}_K$ est formé de : $\left[\begin{array}{c} y^1_K \\ y^1_{K-1} \\ y^2_{K-1} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{array}\right]$, $\underline{Z}_K$ de $\left[\begin{array}{c} y^1_{K-3} \\ y^1_{K-4} \\ y^2_{K-4} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{array}\right]$

Le tableau 1 donne les résultats obtenus :

paramètres	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}
vrais	1.469	-0.533	0.028	0.181	0.318	-0.118	-0.259
estimés $\hat{\theta}_{1j}$	1.474	-0.540	0.031	0.168	0.325	-0.102	-0.269
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^1}\right]^{1/2}_{ii}$	0.153	0.128	0.016	0.010	0.008	0.030	0.044
paramètres	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}
vrais	0.851	-0.697	0.531	0.	0.482	-0.154	0.043
estimés $\hat{\theta}_{2j}$	0.791	-0.644	0.525	0.001	0.489	-0.141	0.055
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^2}\right]^{1/2}_{ii}$	0.125	0.104	0.013	0.008	0.007	0.024	0.036
$\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\varepsilon}}}$	0.036	0.016					
	0.016	0.024					
déterminant de XZ^t	$-0.513.\ 10^{-3}$						

Tableau 1

Structure B

Le vecteur $\underline{X}_K$ est formé de : $\begin{bmatrix} y^2_K \\ y^1_{K-1} \\ y^2_{K-1} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{bmatrix}$; $\underline{Z}_K$ de $\begin{bmatrix} y^2_{K-3} \\ y^1_{K-4} \\ y^2_{K-4} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{bmatrix}$

Le tableau 2 donne les résultats :

paramètres	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}
vrais	2.361	0.670	-1.665	0.181	0.318	0.148	-0.929
estimés $\widehat{\theta}_{1j}$	2.887	0.662	-2.033	0.197	0.309	0.134	-1.171
$\left[\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^1}\right]^{1/2}_{ii}$	0.560	0.028	0.385	0.020	0.017	0.022	0.258
paramètres	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}
vrais	1.368	0.	-0.449	0.	0.482	0.	-0.346
estimés $\widehat{\theta}_{2j}$	1.489	$<10^{-3}$	-0.538	0.016	0.482	0.014	-0.402
$\left[\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^2}\right]^{1/2}_{ii}$	0.277	0.014	0.191	0.001	0.008	0.011	0.128
$\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\varepsilon}}}$	0.141	0.053					
	0.053	0.034					
Δ_{XZ^t}	$-0.414\ 10^{-3}$						

Tableau 2

Structure C

Le vecteur $\underline{X}_K$ est formé de $\begin{bmatrix} y^1_K \\ y^2_K \\ y^1_{K-1} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{bmatrix}$, $\underline{Z}_K$ de $\begin{bmatrix} y^1_{K-3} \\ y^2_{K-3} \\ y^1_{K-4} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{bmatrix}$

Le tableau 3 donne les résultats :

paramètres	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}
vrais	1.446	0.038	-0.513	0.181	0.318	-0.114	-0.270
estimés $\hat{\theta}_{1j}$	1.471	0.051	-0.540	0.169	0.326	-0.101	-0.293
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^1}\right]^{1/2}_{ii}$	0.169	0.021	0.143	0.010	0.008	0.031	0.055
paramètres	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}
vrais	0.390	0.741	-0.319	0.	0.482	-0.071	-0.168
estimés $\hat{\theta}_{2j}$	0.361	0.737	-0.293	0.008	0.487	-0.072	-0.161
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^2}\right]^{1/2}_{ii}$	0.120	0.015	0.101	0.007	0.006	0.022	0.039
$\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\varepsilon}}}$	0.036 0.009	0.009 0.018					
ΔXZ^t	$-0.378\ 10^{-3}$						

Tableau 3

Structure D

Le vecteur $\underline{X}_K$ est formé de $\begin{bmatrix} y^1_K \\ y^2_K \\ y^2_{K-1} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{bmatrix}$, $\underline{Z}_K$ de $\begin{bmatrix} y^1_{K-3} \\ y^2_{K-3} \\ y^2_{K-4} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{bmatrix}$

Le tableau 4 donne les résultats :

paramètres	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}
vrais	0.819	1.046	-0.722	0.181	0.318	0.	-0.556
estimés $\hat{\theta}_{1j}$	0.817	1.218	-0.842	0.181	0.320	0.002	-0.641
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^1}\right]^{1/2}_{ii}$	0.016	0.303	0.209	0.011	0.009	0.013	0.138
paramètres	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}
vrais	0.	1.368	-0.449	0.	0.482	0.	-0.346
estimés $\hat{\theta}_{2j}$	0.006	1.455	-0.517	0.0159	0.482	-0.017	-0.388
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^2}\right]^{1/2}_{ii}$	0.015	0.273	0.188	0.010	0.008	0.012	0.124
$\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\varepsilon}}}$	0.041	0.023					
	0.023	0.033					
$\Delta x Z^t$	$-0.373.10^{-3}$						

Tableau 4

paramètres	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}
vrais	0.819	1.046	-0.722	0.181	0.318	0.	-0.556
estimés $\widehat{\theta}_{1j}$	0.801	0.021	-0.001	0.166	0.331	0.023	-0.084
$\left[\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^1}\right]^{1/2}_{ii}$	0.009	0.034	0.024	0.007	0.006	0.008	0.017
paramètres	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}
vrais	0.	1.368	-0.449	0.	0.482	0.	-0.346
estimés $\widehat{\theta}_{2j}$	0.036	0.303	0.261	0.008	0.491	-0.019	0.140
$\left[\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^2}\right]^{1/2}_{ii}$	0.008	0.029	0.020	0.006	0.005	0.007	0.014
$\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\varepsilon}}}$	0.018	0.002					
	0.002	0.013					
Δ_{XX^t}	$0.557\ 10^{-3}$						

Tableau 5

Remarques

- On voit que l'estimation des paramètres par matrice instrumentale à observations retardées donne des résultats corrects pour les quatre structures équivalentes identifiées. Par contre dans chaque cas l'estimation de la matrice de covariance du bruit $\underline{\varepsilon}_K$ est différente (cf. remarque 1 paragraphe I-3-4). Ceci a pour effet notamment de modifier la précision estimée sur les paramètres, en particulier dans la structure B.

Au seuil $\alpha = 30\%$ (qui correspond à $t_{\alpha/2} = 1.04$) chaque intervalle associé à un paramètre $\widehat{\theta_{ij}}$ encadre la valeur vraie θ_{ij}

A la structure D correspond un nombre de paramètres minimum ; les intervalles de confiance associés à $\widehat{\beta}_{13}$ et $\widehat{\beta}_{23}$ encadrent la valeur 0, et on peut, à la vue des résultats de l'estimation, supprimer la composante u_{K-1} dans les vecteurs $\underline{X}_K$ et $\underline{Z}_K$.

A titre de comparaison on donne, tableau 5, les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés (cf. paragraphe II-3-2), pour la structure D.

Au niveau de confiance 95% on voit que la méthode des moindres carrés ne donne pas des résultats acceptables ; les bruits de mesure créent une erreur corrélée dans l'équation de régression, les estimateurs au sens des moindres carrés sont biaisés.

IX-3 - RECHERCHE DE L'ORDRE DU SYSTEME

Dans les mêmes conditions que précédemment on a cherché à identifier le système avec la structure incorrecte suivante (ordre du système = 4)

Structure E

Le vecteur $\underline{X}_K$ est formé de $\begin{bmatrix} \underline{y}_K \\ \underline{y}_{K-1} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{bmatrix}$, $\underline{Z}_K$ de $\begin{bmatrix} \underline{y}_{K-3} \\ \underline{y}_{K-4} \\ \hline \underline{u}_K \\ \underline{u}_{K-1} \end{bmatrix}$

Le tableau 6 donne les résultats

paramètres	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}
estimés $\widehat{\theta}_{1j}$	1.160	0.544	-0.284	-0.356	0.174	0.324	-0.052	-0.430
$\left[\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^1}\right]^{1/2}_{ii}$	0.430	0.810	0.357	0.583	0.013	0.009	0.068	0.256
paramètres	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}
estimés $\widehat{\theta}_{2j}$	0.415	0.651	-0.338	0.062	0.007	0.487	-0.081	-0.138
$\left[\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^2}\right]^{1/2}_{ii}$	0.327	0.617	0.271	0.444	0.010	0.007	0.052	0.195
$\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\varepsilon}}}$	0.304	0.010						
	0.010	0.018						
$\Delta X Z^t$	$-0.129\ 10^{-5}$							

Tableau 6

Il faut noter ici la précision faible que l'on obtient sur les paramètres $\hat{\alpha}$ et la perte de précision sur certains paramètres $\hat{\beta}$ par rapport aux structures précédemment identifiées.

D'autre part le calcul du rapport des déterminants :

$$\frac{\Delta_{XZ^t}\ (\text{ordre } 3)}{\Delta_{XZ^t}\ (\text{ordre } 4)} \simeq 300$$

indique que la matrice XZ^t tend à être mal conditionnée pour un ordre supérieur à 3.

IX-4 - CAS D'UN BRUIT DE DYNAMIQUE ET D'UN BRUIT D'OBSERVATION

Les vecteurs $\underline{v}_K$ et $\underline{W}_K$ sont constitués de variables aléatoires gaussiennes, indépendantes, de variances égales à 0.01.

La figure 7 montre l'effet des bruits dans la dynamique et dans l'observation.

La structure D a été choisie conformément au paragraphe IX-2.

Le tableau 7 donne les résultats obtenus par matrice instrumentale à observations retardées.

Le tableau 8 donne les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés.

paramètres	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}
vrais	0.819	1.046	-0.722	0.181	0.318	0.	-0.556
estimés $\widehat{\theta}_{1j}$	0.822	1.115	-0.780	0.179	0.307	-0.002	-0.589
$\left[\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^1}\right]^{1/2}_{ii}$	0.023	0.459	0.321	0.016	0.015	0.019	0.208
paramètres	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}
vrais	0.	1.368	-0.449	0.	0.482	0.	-0.346
estimés $\widehat{\theta}_{2j}$	0.010	1.402	-0.483	0.019	0.482	-0.024	-0.368
$\left[\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\theta}}^2}\right]^{1/2}_{ii}$	0.019	0.385	0.270	0.013	0.013	0.016	0.174
$\widehat{\Sigma}_{\widehat{\underline{\varepsilon}}}$	0.090 0.053	0.053 0.063					
$\Delta \times Z^t$	$-401\ 10^{-3}$						

Tableau 7

(Matrice instrumentale)

paramètres	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}
vrais	0.819	1.046	-0.722	0.181	0.318	0.	-0.556
estimés $\widehat{\theta}_{1j}$	0.783	-0.020	0.034	0.166	0.327	0.028	-0.061
$\left[\widehat{\Sigma}_{\underline{\hat{\theta}}^1}\right]^{1/2}_{ii}$	0.013	0.034	0.024	0.010	0.009	0.012	0.018
paramètres	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}
vrais	0.	1.368	-0.449	0.	0.482	0.	-0.346
estimés $\widehat{\theta}_{2j}$	0.026	0.515	0.125	0.014	0.495	-0.024	0.034
$\left[\widehat{\Sigma}_{\underline{\hat{\theta}}^2}\right]^{1/2}_{ii}$	0.012	0.032	0.022	0.010	0.008	0.011	0.017
$\widehat{\Sigma}_{\underline{\hat{\varepsilon}}}$	0.040	0.016					
	0.016	0.035					
ΔXX^t	$0.\ 146\ 10^{-2}$						

Tableau 8

(Moindres carrés)

Dans le premier cas (matrice instrumentale) on voit, en comparant ces résultats avec ceux du tableau 4, que le bruit de dynamique affecte surtout la précision des paramètres estimés.

Dans le second cas (moindres carrés) on se rend compte encore une fois que la plupart des paramètres sont biaisés.

Il convient de noter ici que la méthode des moindres carrés appliquée dans de telles conditions accorde une grande confiance à des résultats faux.

IX-5 - TEST SUR LA PREDICTION

On se place dans des conditions analogues à celles du paragraphe précédent.

On procède à une estimation de paramètres sur la base de la structure D mais on a supprimé la variable u^1_{K-1} dans les vecteurs $\underline{X}_K$ et $\underline{Z}_K$.

A l'itération 200 de la simulation du système on effectue une variation de paramètres relatifs à l'état x^1 et le modèle du système continu devient :

$$(IX-4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

Le modèle discret s'écrit alors :

$$(IX-5)\quad \begin{cases} \underline{x}_{K+1} = \begin{bmatrix} 0.670 & 0 & 0 \\ 0 & 0.819 & 0 \\ 0 & 0 & 0.549 \end{bmatrix} \underline{x}_K + \begin{bmatrix} 0.495 & 0 \\ 0 & 0.181 \\ 0 & 0.301 \end{bmatrix} \underline{u}_K \\ \underline{y}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_K \end{cases}$$

La figure 8 montre l'évolution des entrées, de l'état et des sorties du système depuis l'itération 150 jusqu'à l'itération 250 de la simulation.

L'itération 200 est repérée par une flèche sur les courbes x^1_K et y^1_K.

A partir de l'échantillon 100 et jusqu'à l'échantillon 300 inclus on calcule la prédiction et son intervalle de confiance comme il a été exposé au chapitre VI (2ème partie).

Dans le tableau 9 on donne, pour différentes valeurs du niveau de confiance, les numéros des échantillons pour lesquels la prédiction n'a pas été validée pour au moins une sortie du système.

Tableau 9

Seuil	z_α	N° de l'échantillon	sortie pour laquelle la prédiction était incorrecte	
			y_1	y_2
5%	1.960	—		
10%	1.645	234		x
20%	1.282	152		x
		155		x
		188		x
		191	x	x
		196		x
		198		x
		211	x	
		228	x	
		230	x	
		231	x	x
		234	x	x
		273	x	
		293	x	x
		294		x
		296		x

Les figures 9 et 10 montrent respectivement pour les sorties 1 et 2, l'évolution de la prédiction (0), centre de l'intervalle de confiance au seuil 20% (repéré par un trait continu), et l'évolution de la sortie observée (x).

Les échantillons pour lesquels la sortie observée est en dehors de l'intervalle de confiance (trait discontinu), sont repérés au bas des courbes.

La flèche indique l'itération 200.

Résultats :

Au seuil 5%, le modèle n'est jamais rejeté

Au seuil 10%, le modèle est rejeté une fois à raison, 34 échantillons après la variation de paramètres

Au seuil 20%, le modèle est rejeté 6 fois à tort et 9 fois à raison, dont la première fois 11 échantillons après la variation de paramètres.

Remarque 1

Ces résultats sont en partie faussés du fait que les sous-programmes générant des variables aléatoires gaussiennes donnent, souvent en séquence, des réalisations de ces variables qui ont une probabilité théorique d'apparition faible.

Remarque 2

Comme résultat positif on peut retenir que c'est la prédiction de la sortie y^1, après l'itération 200, qui est le plus souvent incorrecte au seuil 20%. En effet, d'après la structure D du modèle, choisie a priori, c'est la prédiction y^1_{K+1} qui dépend fonctionnellement de la sortie y^1_K par laquelle l'état x^1_K est observé.

Remarque 3

On s'est volontairement placé pour cette expérimentation dans des conditions peu favorables : l'horizon d'étude est au plus de 200 échantillons pour estimer les paramètres du premier modèle et de ce fait l'intervalle de confiance associé aux estimateurs est assez large.

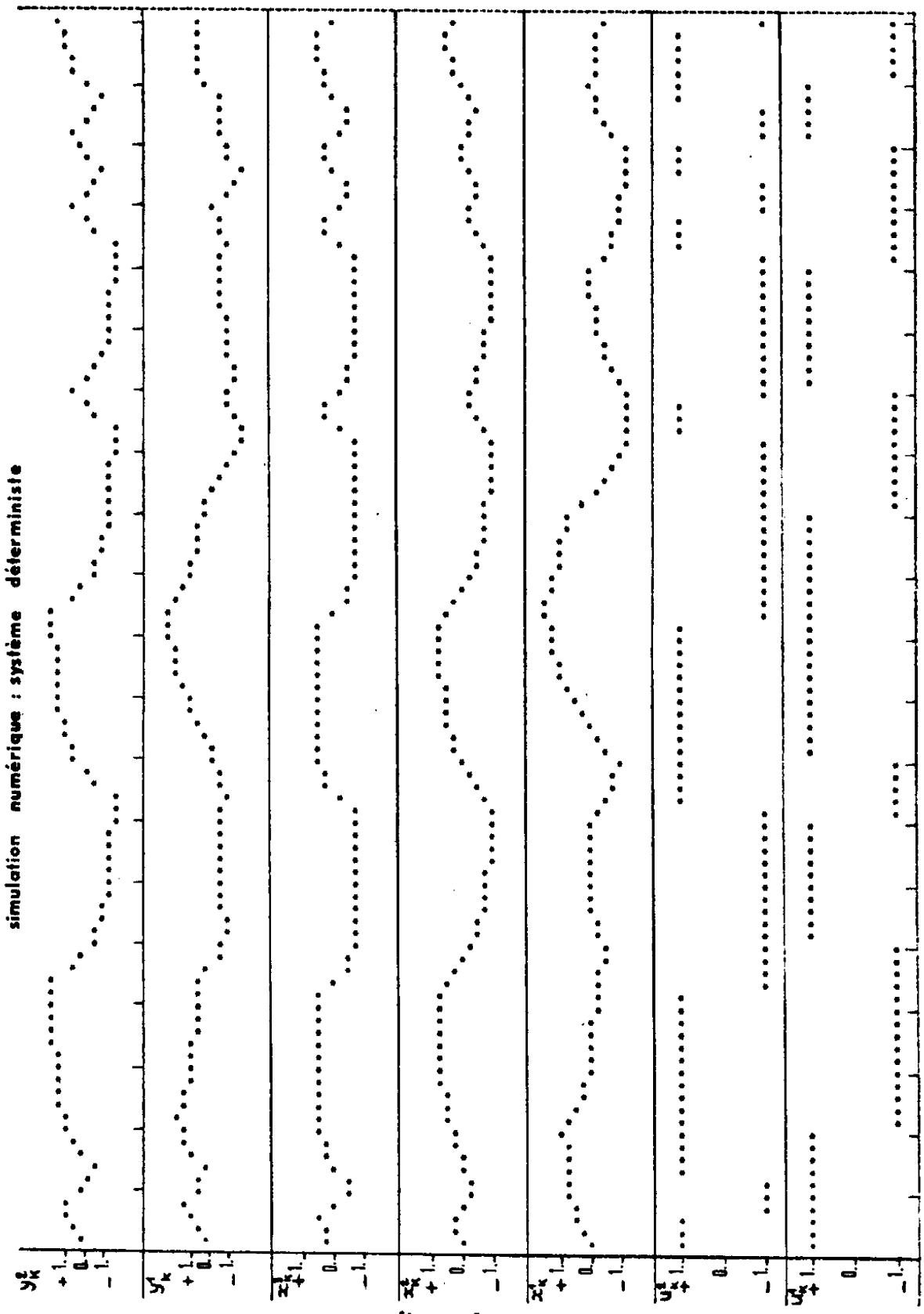


figure 5

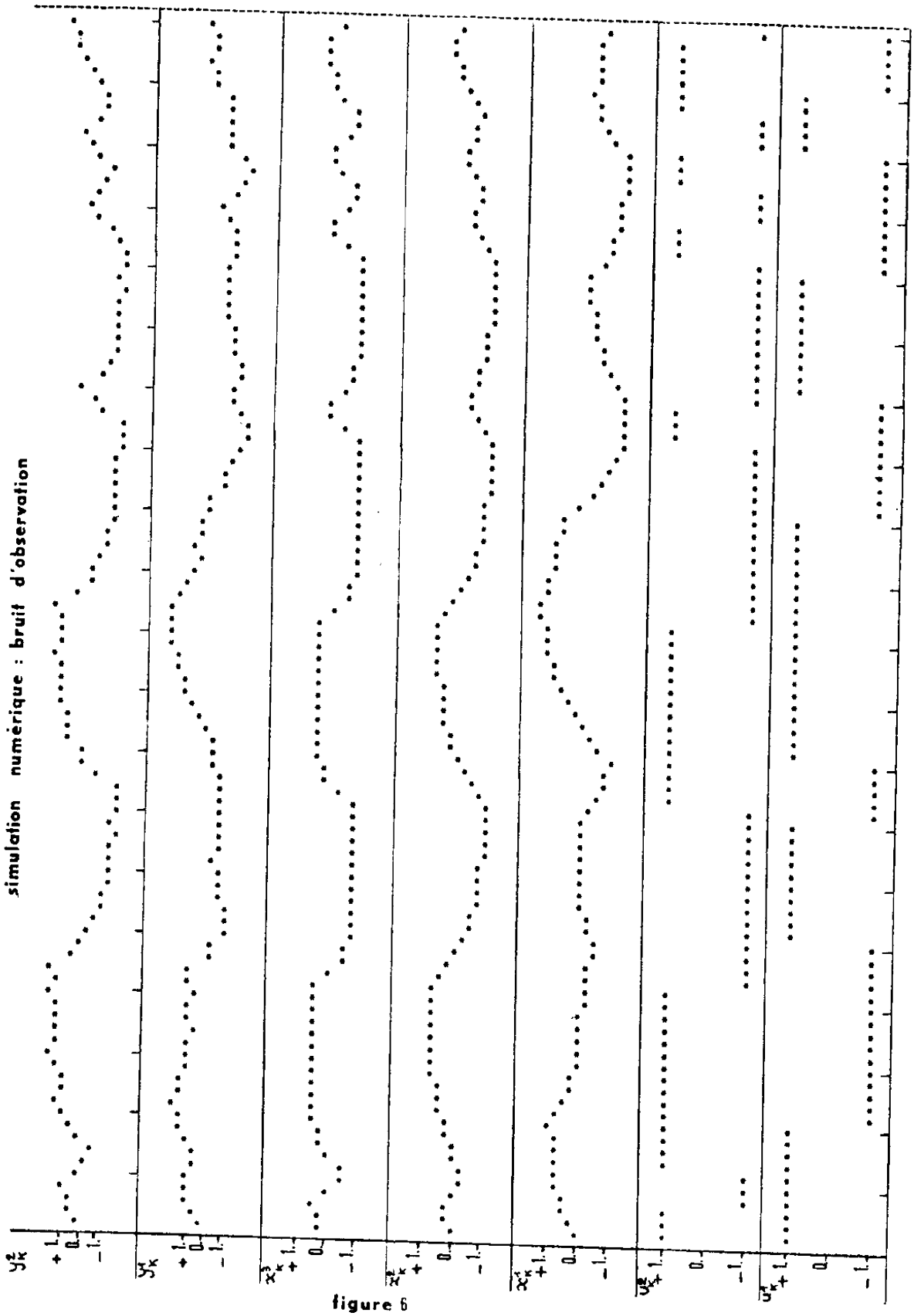


figure 6

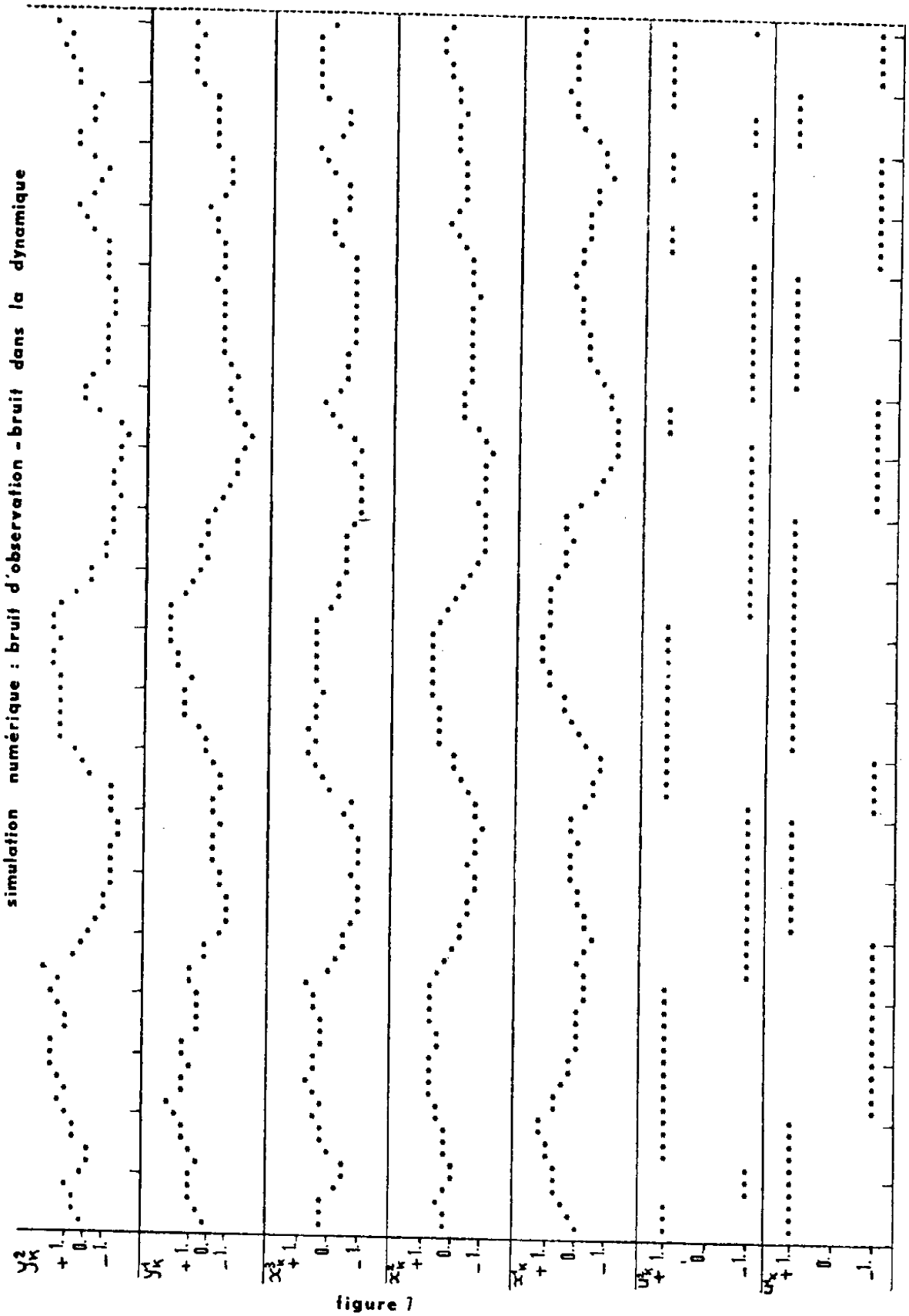

simulation numérique : bruit d'observation - bruit dans la dynamique
y_k^2
y_k^1
x_k^3
x_k^2
x_k^1
u_k^2
u_k^1
+1.
0.
-1.

figure 7

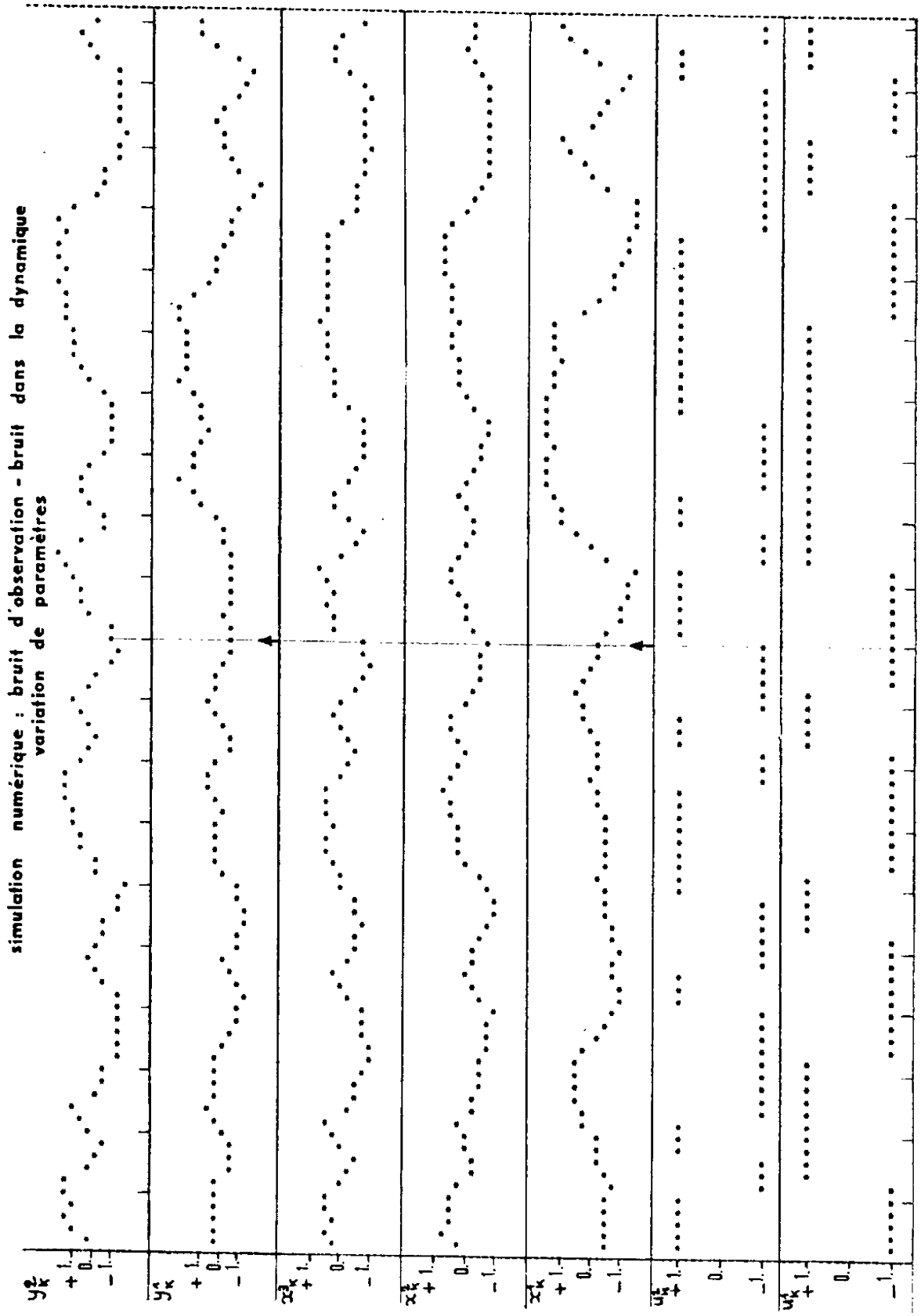

simulation numérique : bruit d'observation - bruit dans la dynamique
variation de paramètres

figure 8

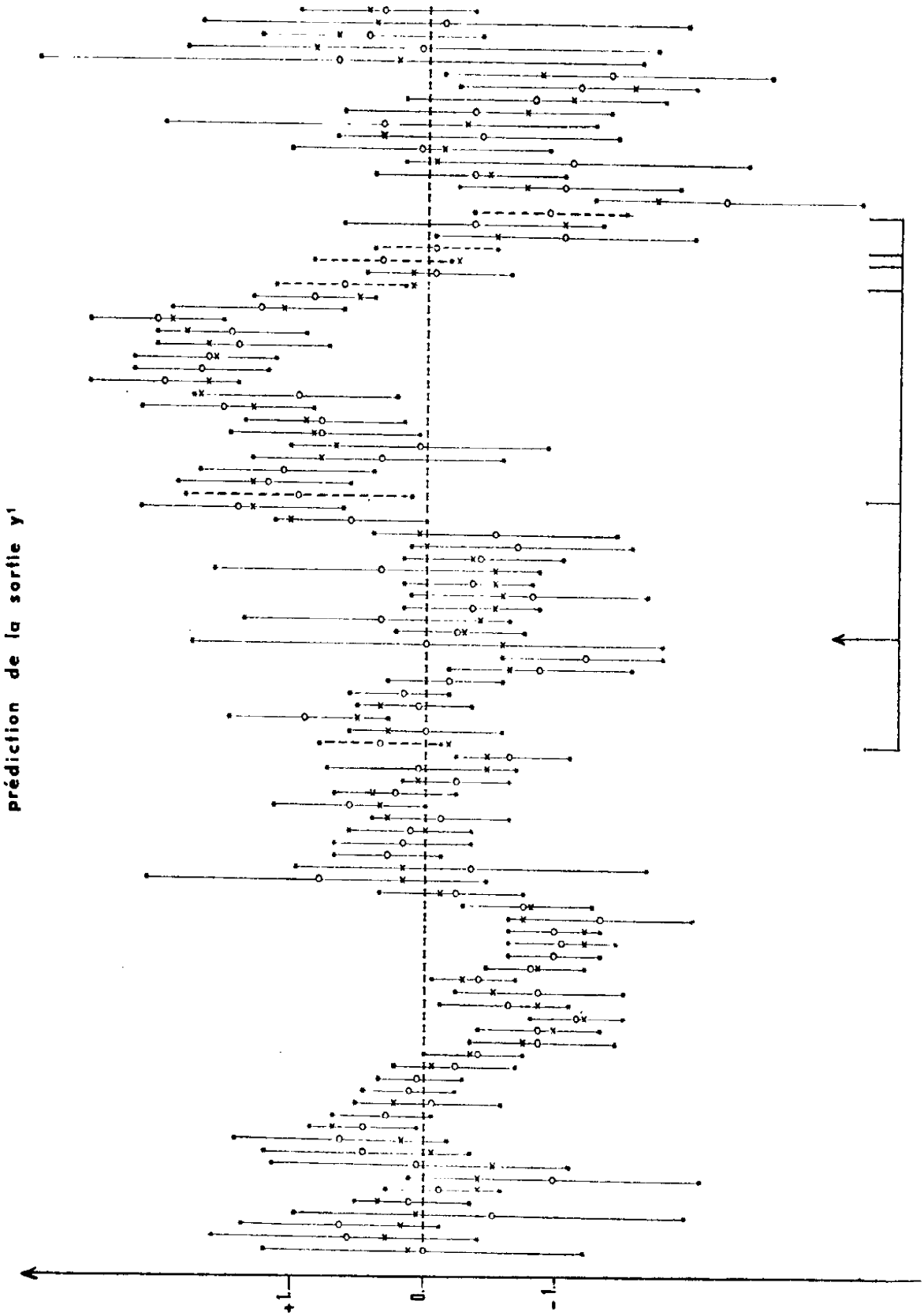


figure 9

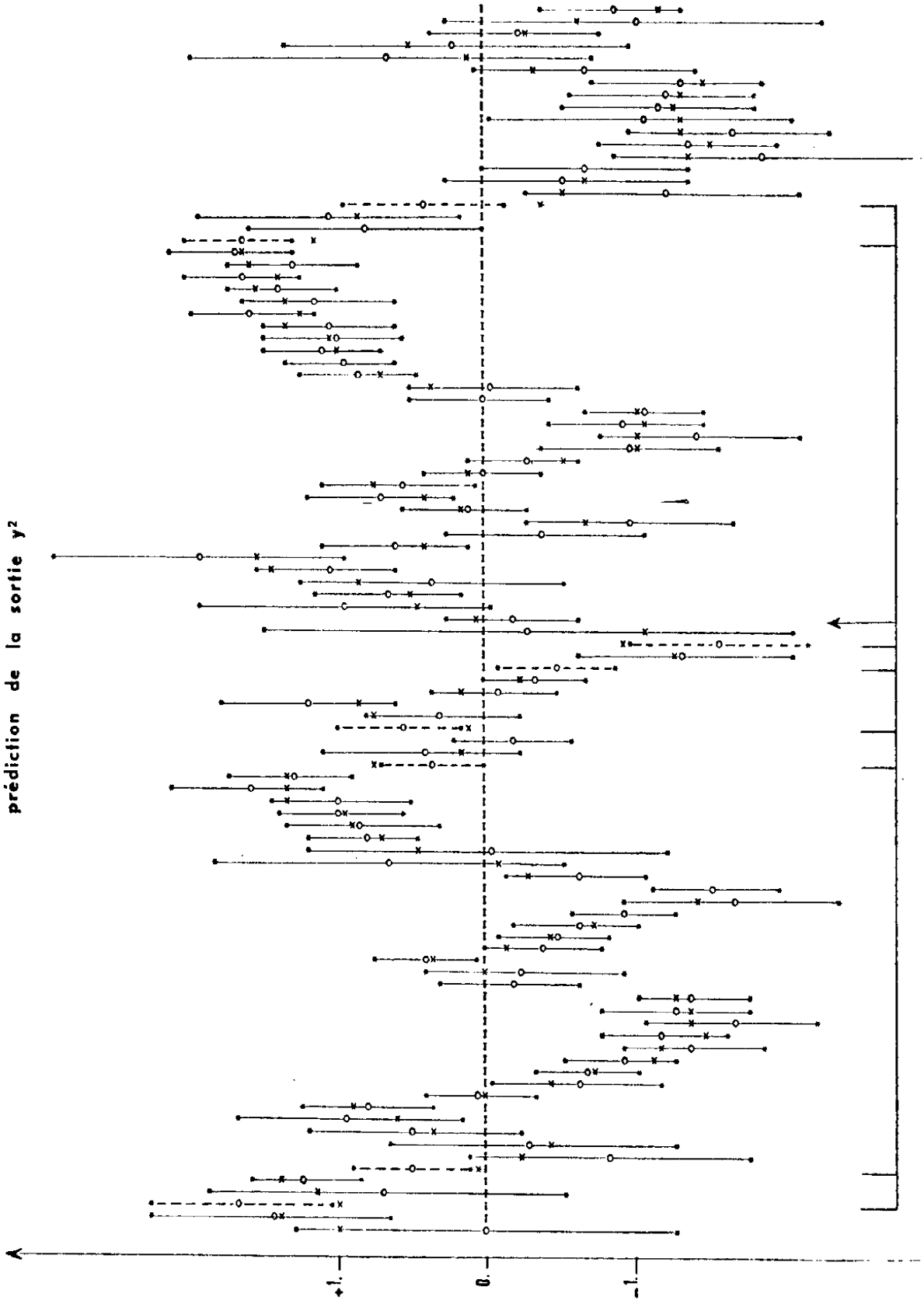


figure 10

Conclusion

Cette expérimentation a été réalisée dans le but de mettre en évidence les problèmes posés par la validation du modèle, abordée par l'étude de la prédiction.

Dans l'exemple présenté ici le bruit résiduel est corrélé et les niveaux théoriques de confiance ne sont pas atteints. De ce fait le risque de première espèce (rejeter le modèle à tort) n'est pas exactement celui fixé à l'avance.

Un compromis doit être établi entre la rapidité de détection d'un modèle incorrect et le risque de première espèce.

Cependant cette approche semble intéressante, parce que d'une mise en oeuvre simple le procédé serait plus rigoureux si on pouvait connaître une relation entre les niveaux de confiance et l'ordre de corrélation du bruit résiduel.

X - APPLICATION A L'IDENTIFICATION D'UN PROCESSUS INDUSTRIEL [X-1]

Lorsque l'on traite des données (observations entrée-sortie) issues d'un processus réel, on se heurte à plusieurs difficultés qui feront le principal objet de ce chapitre et du suivant.

Chaque application est en fait un problème bien particulier et nécessite au préalable, une étude expérimentale hors ligne afin de définir le minimum de connaissance a priori nécessaire à la mise en oeuvre d'une méthode telle que la méthode de la matrice instrumentale à observations retardées.

On n'abordera pas le problème du choix de la période d'échantillonnage avec laquelle les observations doivent être relevées, puisque le travail présenté ici consiste à traiter hors ligne, par des méthodes applicables en temps réel, un enregistrement donné.

Le processus industriel étudié est un processus de conditionnement thermique de verre en écoulement.

Ce processus peut se schématiser comme indiqué figure 11.

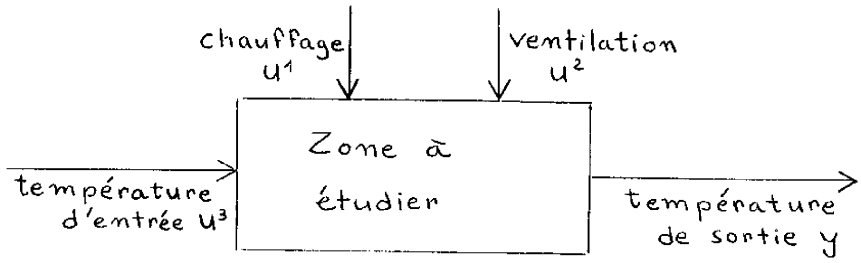


Figure 11

X-1 - TRAITEMENT DU 1er ENREGISTREMENT

Cette première acquisition de données a été effectuée à une cadence d'échantillonnage T = 300s.

Cet enregistrement représente une durée de fonctionnement de 10 H 45 mn, ce qui correspond à un horizon d'étude très court puisque de 129 échantillons seulement.

La figure 12 donne l'évolution au cours de ce temps des variables définies figure 11 suivant la numérotation des courbes repérée dans le tableau 10.

n° courbe	variable
1	u^1
2	u^2
3	u^3
4	y

Tableau 10

Le processus, en cours de fonctionnement normal, (le point de fonctionnement correspond ici à une température y voisine de 1160°C), a été légèrement perturbé par deux échelons appliqués sur l'entrée-chauffage, les autres entrées étant maintenues sensiblement constantes.

Afin de montrer l'amplitude des variations, on donne, dans le tableau 11, les minima et les maxima des différentes variables .

	Minima	Maxima
u^1	5.536 m^3/h	12.527 m^3/h
u^2	369 m^3/h	427 m^3/h
u^3	1193°C	1197°C
y	1152°C	1169°C

Tableau 11

X-1-1 - Cas d'observations à moyenne statistique non nulle

Le premier problème rencontré est lié à l'existence d'une composante continue importante dans toutes les observations. Ceci entraîne des difficultés de calcul numérique et masque le régime transitoire qui en fait contient toute l'information utile.

Pour contourner cette difficulté plusieurs solutions sont possibles :

- On peut filtrer les observations numériquement à l'aide d'un filtre passe haut, mais ceci peut avoir un effet néfaste dû au bruit, et demande une certaine connaissance a priori sur le processus et les perturbations auxquelles il est soumis.

- On peut, comme indiqué dans [X-2] , estimer de façon récurrente la composante continue qui est contenue dans chaque mesure d'une sortie et rectifier les nouvelles observations en conséquence ; malheureusement cette procédure pose des problèmes de convergence dans le cadre des méthodes qui sont proposées ici : les premiers échantillons qui servent à obtenir une estimation de ces composantes continues, doivent être écartés ensuite de l'horizon d'étude si l'on veut obtenir une meilleure précision sur les paramètres pour un horizon fini.

- On utilisera plutôt la propriété de linéarité du modèle :

Soit un processus à une sortie et deux entrées, du 1er ordre dont le modèle discret est :

$$y^m_{K+1} = \alpha\, y^m_K + \beta_1 u^{1,m}_K + \beta_2 u^{2,m}_K + \gamma$$

l'indice supérieur m indique qu'il s'agit de valeurs mesurées.

On peut écrire, d'après le principe de superposition :

$$\sum_{K=0}^{N} y^m_{K+1} = \alpha \sum_{K=0}^{N} y^m_K + \beta_1 \sum_{K=0}^{N} u^{1,m}_K + \beta_2 \sum_{K=0}^{N} u^{2,m}_K + \gamma \sum_{K=0}^{N} 1$$

ou encore

$$\frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} y^m_{K+1} = \alpha \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} y^m_K + \beta_1 \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} u^{1,m}_K + \beta_2 \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} u^{2,m}_K + \gamma \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} 1.$$

on pose

$$\bar{y} = \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} y^m_K \quad ; \quad \bar{u}^1 = \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} u^{1,m}_K \quad ; \quad \bar{u}^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} u^{2,m}_K$$

On fait l'approximation suivante valable pour N grand :

$$\frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} y^m_K \simeq \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^{N} y^m_{K+1}$$

Et, puisque

$$\bar{y} = \alpha \bar{y} + \beta_1 \bar{u}^1 + \beta_2 \bar{u}^2 + \gamma$$

Il suffit alors de soustraire ces quantités aux observations pour annuler la composante continue. En procédant ainsi on se ramène au cas d'un bruit à moyenne nulle.

Dans une application en temps réel on ne connaît pas à l'avance les moyennes statistiques des observations. Cependant et afin de mieux conditionner les matrices XZ^t ou XX^t qui doivent être inversées, on peut, connaissant les amplitudes maximales autorisées sur les entrées et les sorties, prendre pour valeurs de $\bar{y}$, $\bar{u}^1$ et $\bar{u}^2$ les valeurs médianes.

On se place ainsi dans le cas d'un bruit à moyenne non nulle et le modèle proposé au paragraphe II-7 (1ère partie) doit être impérativement utilisé.

Remarque : Si on veut diminuer les intercorrélations des différents paramètres avec le paramètre $\hat{\gamma}$ il faut alors que les variables $\bar{y}$, $\bar{u}^1$ et $\bar{u}^2$ s'identifient

aux moyennes statistiques des observations.

Afin de mettre en évidence ce problème dû aux observations à moyenne non nulle, on a procédé à une estimation multivariable de paramètres (méthode des moindres carrés) avec comme valeurs initialement choisies :

$$\bar{y} = 0. \quad ; \quad \bar{u}^1 = 9.031. \quad ; \quad \bar{u}^2 = 398. \quad ; \quad \bar{u}^3 = 1195.$$

et on a cherché à estimer les paramètres du modèle suivant :

$$y_{K+1} = \alpha y_K + \beta_1 u^1_K + \beta_2 u^2_K + \beta_3 u^3_K + \gamma + \varepsilon_K$$

Les résultats obtenus à l'itération 129 sont donnés dans le tableau 12.

paramètres estimés	$\hat{\alpha}$ 0.892	$\hat{\beta}_1$ 0.381	$\hat{\beta}_2$ 0.012	$\hat{\beta}_3$ 0.045	$\hat{\gamma}$ 124.875
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\beta}}^t}\right]^{1/2}_{ii}$	0.017	0.044	0.005	0.080	198.735
$\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}}$	0.371				

Tableau 12

Le test sur l'inverse $(XX^t)^{-1}$ a donné comme écart le plus grand 0.125.

A partir de ces résultats on calcule :

$$\bar{y} = \hat{\gamma}/(1. - \hat{\alpha}) = 1154.600$$

valeur que l'on soustrait aux observations y_K pour procéder à une nouvelle estimation dont les résultats sont donnés dans le tableau 13.

Paramètres estimés	$\hat{\alpha}$ 0.892	$\hat{\beta}_1$ 0.381	$\hat{\beta}_2$ 0.012	$\hat{\beta}_3$ 0.045	$\hat{\gamma}$ 0.185
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\Theta}^t}\right]_{ii}$	0.016	0.042	0.004	0.076	0.109
$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}$	0.333				

Tableau 13

Le test sur l'inverse a donné comme écart le plus grand une valeur de l'ordre de $3.\ 10^{-8}$.

Enfin une nouvelle itération pour laquelle $\bar{y} = \hat{\gamma}/(1-\hat{\alpha}) = 1156.308$ a donné des résultats équivalents, seul $\hat{\gamma}$ ($\sim 10^{-7}$) diffère.

Les résultats obtenus par matrice à observations retardées sont donnés dans le tableau 14.

Paramètres estimés	$\hat{\alpha}$ 0.889	$\hat{\beta}_1$ 0.387	$\hat{\beta}_2$ 0.012	$\hat{\beta}_3$ 0.052	$\hat{\gamma}$ 10^{-6}
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\Theta}^t}\right]$	0.017	0.042	0.004	0.077	0.091
$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}$	0.333				

Tableau 14

X-1-2 - Etude de l'influence de la température d'entrée et de la ventilation dans la modélisation : comparaison avec un modèle simplifié

On procède à une estimation, au sens des moindres carrés, des paramètres du modèle simplifié :

$$y_{k+1} = \alpha\, y_k + \beta_1\, u^1_k + \varepsilon_k$$

Le tableau 15 donne les résultats obtenus

paramètres estimés	$\hat{\alpha}$ 0.889	$\hat{\beta}_1$ 0.394
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t}\right]^{1/2}_{ii}$	0.015	0.043
$\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}}$	0.349	

Tableau 15

Les tableaux 16 et 16' donnent respectivement les résultats obtenus par matrice instrumentale et ceux obtenus par filtrage non linéaire, avec modèle continu et observations discrètes, appliqué à l'estimation des paramètres [X-3]

paramètres estimés	$\hat{\alpha}$ 0.886	$\hat{\beta}_1$ 0.393
$\left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t}\right]^{1/2}_{ii}$	0.015	0.043
$\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}}$	0.349	

Tableau 16

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_1$
0.832	0.472
0.019	0.030

Tableau 16'

Compte tenu de la précision obtenue sur les paramètres estimés, les résultats des méthodes linéaires sont équivalents.

On applique le test du rapport des variances introduit au paragraphe III-2-3, aux résultats donnés par les deux modélisations.

Pour cela on calcule la variable :

$$F = \frac{129-4}{2}\left[\frac{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon|H_0} - \hat{\sigma}^2_{\varepsilon|H_1}}{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon|H_1}}\right] \simeq 3.$$

où $\widehat{\sigma^2_{\varepsilon}}_{|H_0}$ est l'estimateur de la variance du bruit résiduel sous l'hypothèse H_0 : $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \end{bmatrix}$

et où $\widehat{\sigma^2_{\varepsilon}}_{|H_1}$ est l'estimateur de la variance du bruit résiduel sous l'hypothèse

H_1 : $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$

Les tables donnent :

$F^\circ(2,\ 125) = 3,07$
$\alpha\% = 5$

$F^\circ(2, 125) = 4,78$
$\alpha\% = 1$

Conclusion :

Au seuil $\alpha = 1\%$ on ne rejette pas l'hypothèse $\beta_2 = \beta_3 = 0.$; par contre au seuil $\alpha = 5\%$ on est à la limite du domaine critique de rejet de H_0 et l'on ne peut en fait se prononcer.

Remarque :

Sous l'hypothèse H_0 on peut s'attendre à ce que les paramètres $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta_1}$ ne soient pas biaisés de façon importante car, (cf. 2ème partie, paragraphe III-1), d'une part les paramètres $\widehat{\beta_2}$ et $\widehat{\beta_3}$ ont des valeurs faibles, d'autre part les variations de débit de ventilation, considérés comme des perturbations, peuvent être assimilables à un bruit blanc.

L'estimation de la matrice de covariance des paramètres est, sous l'hypothèse H_1 :

$$\widehat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t} = \begin{bmatrix} 0.264\ 10^{-3} & -0.493\ 10^{-3} & 0.122\ 10^{-4} & -0.538\ 10^{-3} \\ & 0.176\ 10^{-2} & -0.568\ 10^{-5} & 0.546\ 10^{-4} \\ & & 0.199\ 10^{-4} & -0.168\ 10^{-4} \\ & & & 0.582\ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

On vérifie en effet que le paramètres $\widehat{\beta_2}$ est peu corrélé avec les autres paramètres.

X-1-3 - Etude du bruit résiduel

Afin d'approfondir l'étude des deux modèles obtenus par la méthode des moindres carrés, on estime les fonctions d'autocorrélation des bruits résiduels $\widehat{\varepsilon}_{K|H_0}$ et $\widehat{\varepsilon}_{K|H_1}$ qui sont les écarts entre la sortie observée et la prédiction, lorsque le modèle est recalé sur les observations précédentes de la sortie.

Les fonctions d'autocorrélation sont tracées figure 13.

L'allure des deux courbes est semblable. Cependant on peut remarquer que pour les premières valeurs de τ (τ = 0, 1, 2) l'autocorrélation est moins importante lorsque l'hypothèse H_1 est prise en considération.

X-1-4 - Etude du modèle sans recalage

On a simulé le processus sur la base des deux modèles obtenus en prenant comme entrées les observations u^1_K, u^2_K, u^3_K figurant dans l'enregistrement. On compare les sorties des deux modèles avec la sortie observée figure 14.

On remarque que le modèle multivariable (X) répond mieux à l'échelon positif et à l'échelon négatif que le modèle monovariable (+).

L'écart par rapport à la sortie observée pour l'abscisse 5 heures s'explique par le fait que l'entrée u^3 a sensiblement varié à ce moment ; il semble que l'effet de ces variations soit masqué par la forte quantification jouant le rôle de bruit de mesure sur la sortie observée.

X-1-5 - Conclusion sur cette étude

Bien que l'acquisition de données ait été faite dans des conditions peu favorables à l'estimation des paramètres d'un modèle à plusieurs entrées, il apparaît néanmoins que ce type de modèle peut être d'une grande utilité ;

en effet on peut faire une bonne prédiction de la sortie en tenant compte des différentes variables d'entrée et sans recaler le modèle sur les observations précédentes de la sortie ; ainsi la sortie du modèle est assimilable à la sortie réelle du processus, sortie qui n'est pas parfaitement observable. Ce type de modèle multivariable peut être utilisé lorsqu'il y a des problèmes de sécurité qui se posent ou lorsqu'il s'agit de résoudre un problème de commande prédictive pour une régulation par calculateur.

X-2 - TRAITEMENT DU SECOND ENREGISTREMENT

Il s'agit du même processus mais les conditions de fonctionnement ne sont pas tout à fait identiques. Cet enregistrement ne permet d'estimer correctement que les paramètres d'un modèle monovariable du premier ordre. Cependant les résultats de cette identification sont présentés ici car ils font nettement apparaître les avantages de la méthode de la matrice instrumentale à observations retardées.

X-2-1 - Caractéristiques de l'enregistrement

On peut le diviser en trois séries de 310 échantillons chacun ; en effet les variations de débit de chauffage ont été effectuées sous forme de séquence binaire pseudo aléatoire de période égale à 310 fois la période d'échantillonnage qui est de 1 minute.

La température de sortie n'est pas relevée exactement au même point que dans le premier enregistrement.

Afin de donner l'amplitude des variations on dresse le tableau 17. Les observations entrée-sortie sont repérées figure 15 pour 100 échantillons environ.

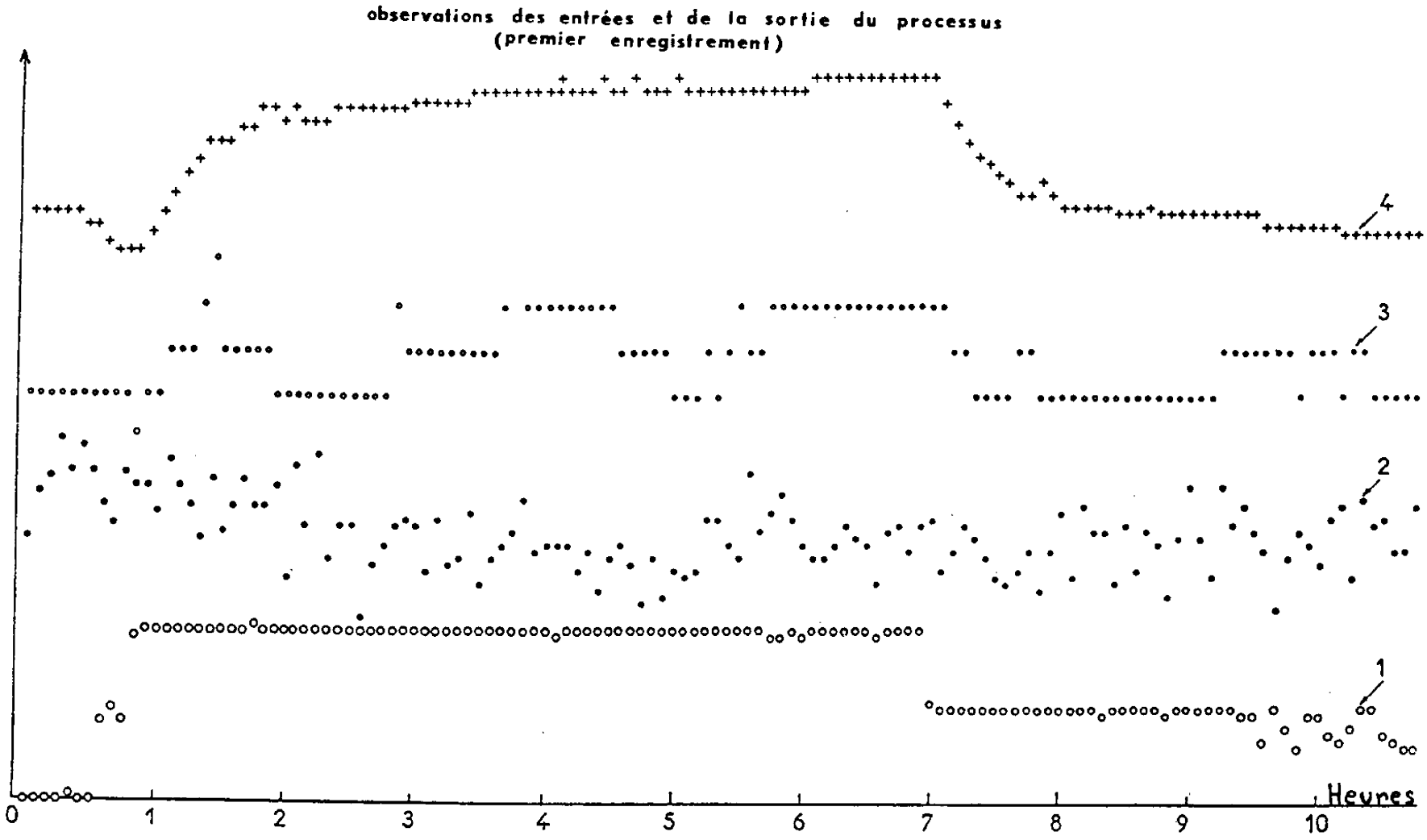

observations des entrées et de la sortie du processus
(premier enregistrement)
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Heures

Figure 12

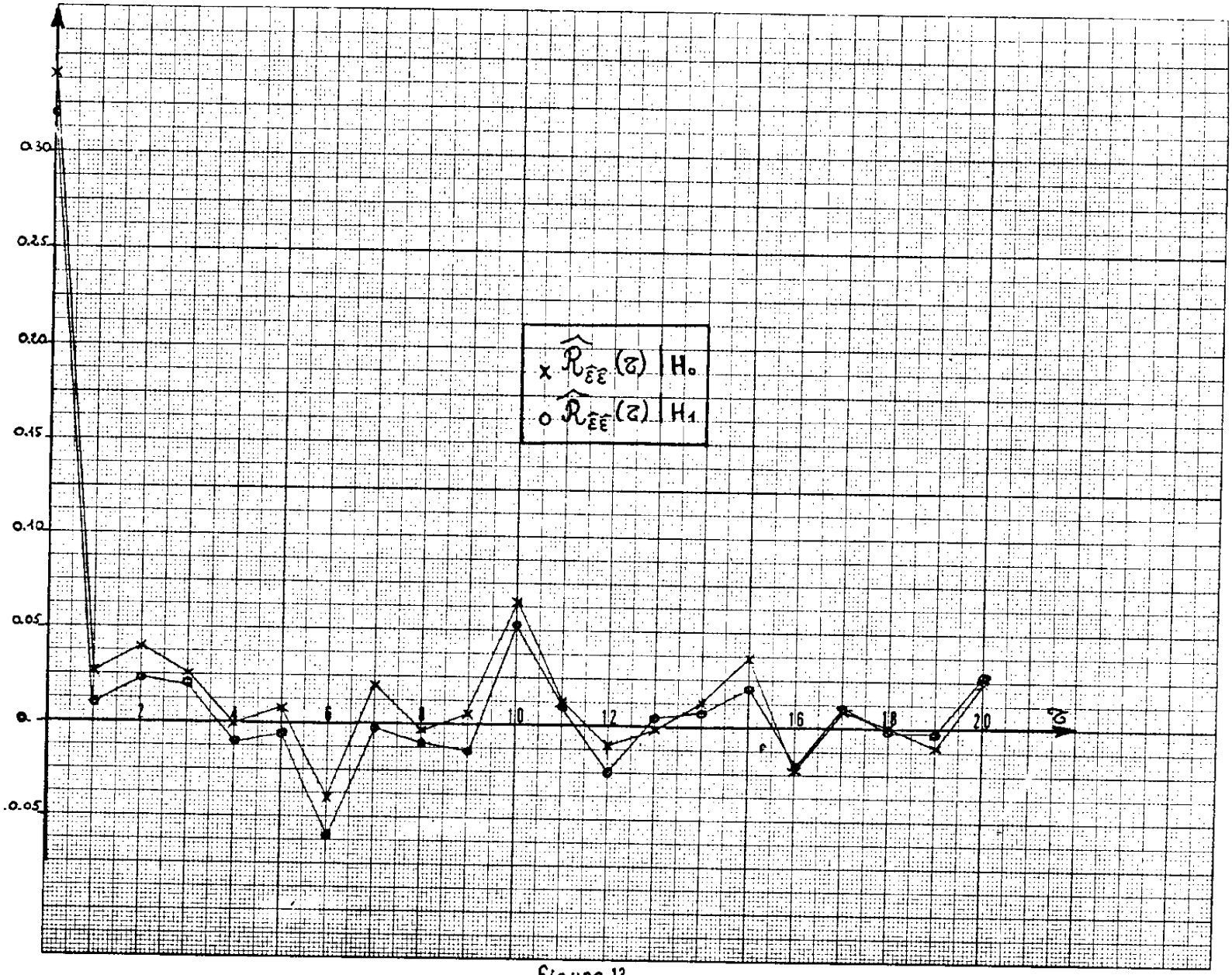

0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0
-0.05
2
4
6
8
10
12
16
18
20
τ
x $\hat{R}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}(\tau)$ | H_0
o $\hat{R}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}(\tau)$ | H_1

Figure 13

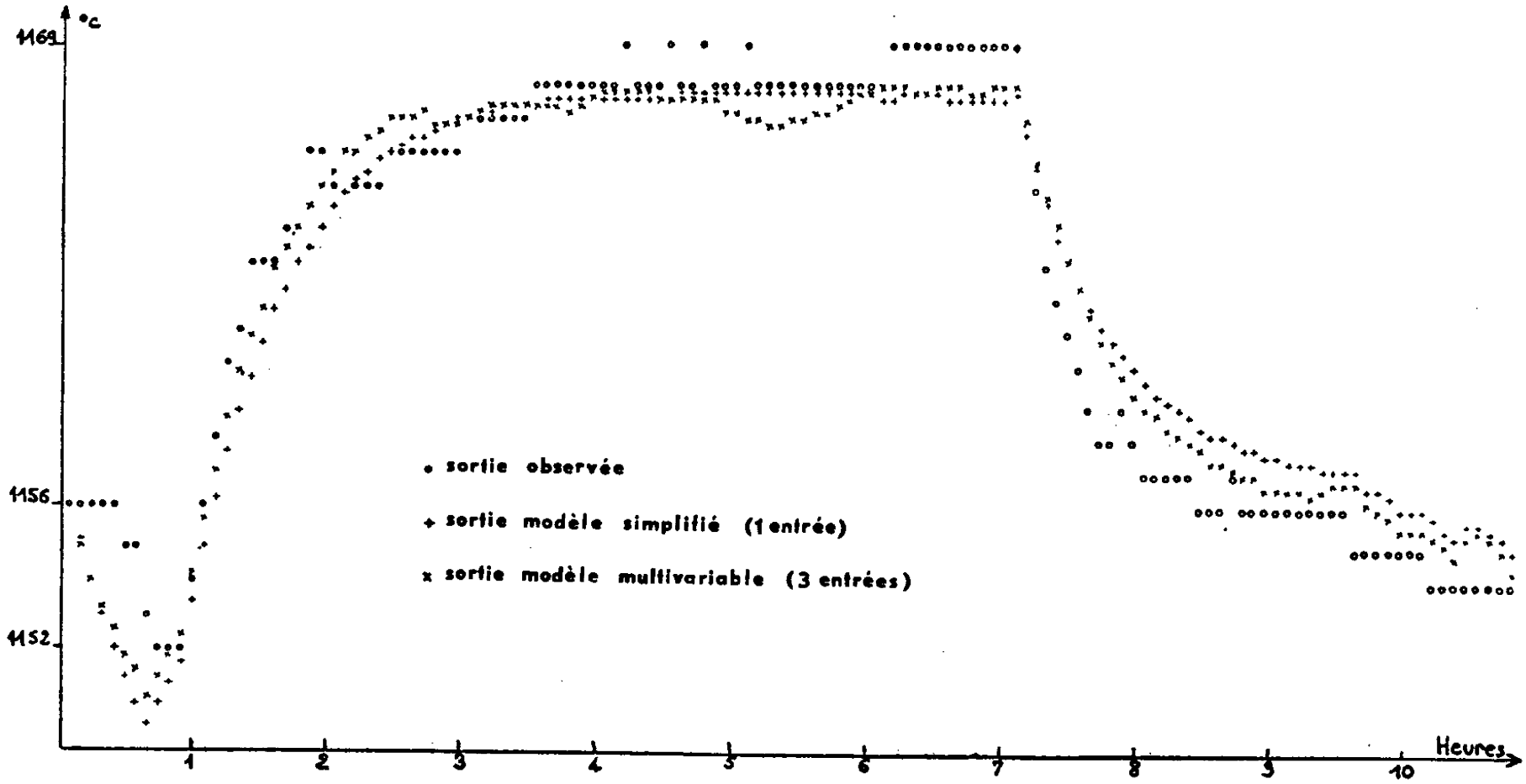

°C
1169
1156
1152
• sortie observée
+ sortie modèle simplifié (1 entrée)
x sortie modèle multivariable (3 entrées)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Heures

figure 14

Observation de	Minima	Maxima
$y^{°C}$	1117.143	1126.386
$u^{m3/h}$	16.166	17.543

Tableau 17

On voit que les variations sont d'amplitude plus faible que lors de la première acquisition de données.

Le bruit de mesure est dû d'une part à la précision limitée du capteur de température d'autre part à une quantification des valeurs enregistrées de la sortie qui apparaît clairement sur la figure 15.

On cherche à estimer les paramètres d'un modèle du 1er ordre :

$$y_{k+1} = \alpha . y_k + \beta . u_k + \varepsilon_k$$

X-2-2 - Estimation des paramètres par la méthode des moindres carrés

Le fait d'identifier le processus en trois périodes séparées permet de vérifier a posteriori l'hypothèse de stationnarité.

Le tableau 18 donne les résultats.

N° des échantillons pris en compte	$\hat{\alpha}$ $\pm \left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t}\right]^{1/2}_{11}$	$\hat{\beta}$ $\pm \left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t}\right]^{1/2}_{22}$	Δxx^t	$\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}}$
]21, 331]	0.963 ± 0.011	0.185 ± 0.039	0.443	0.088
]331, 641]	0.964 ± 0.011	0.220 ± 0.041	0.594	0.100
]641, 951]	0.923 ± 0.020	0.159 ± 0.044	0.148	0.106
]21, 951]	0.961 ± 0.007	0.192 ± 0.024	0.440	0.098

Tableau 18

On remarque que les estimateurs déterminés à l'aide des échantillons de la 3ème série sont assez différents des autres valeurs trouvées.

X-2 3 - Estimation des paramètres par matrice instrumentale

Les résultats sont repérés dans le tableau 19.

N° des échantillons pris en compte	$\hat{\alpha} \pm \left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t}\right]_{11}^{1/2}$	$\hat{\beta} \pm \left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t}\right]_{22}^{1/2}$	$\Delta \times Z^t$	$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$
]21, 331]	0.975 ±0.011	0.188 ±0.039	0.442	0.089
]331, 641]	0.978 ±0.011	0.200 ±0.042	0.588	0.101
]641, 951]	0.974 ±0.022	0.161 ±0.045	0.140	0.109
]21, 951]	0.977 ±0.007	0.186 ±0.024	0.437	0.099

Tableau 19

A titre de comparaison on donne, tableau 20, les résultats obtenus par une méthode de filtrage non linéaire déjà citée au paragraphe X-1-2.

N° des échantillons pris en compte	$\hat{\alpha} \pm \left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t}\right]_{11}^{1/2}$	$\hat{\beta} \pm \left[\hat{\Sigma}_{\hat{\underline{\theta}}^t}\right]_{22}^{1/2}$
]21, 331]	0.976 ± 0.010	0.163 ± 0.022
]331, 641]	0.978 ± 0.010	0.152 ± 0.023
]641, 951]	0.968 ± 0.013	0.148 ± 0.023
]21, 951]	0.980 ± 0.010	0.169 ± 0.016

Tableau 20

X-2-4 - Comparaison des résultats

Il semble que la méthode des moindres carrées donne des estimateurs biaisés au moins pour la 3ème série. En effet, l'intervalle de confiance à 95% ($t_{\alpha/2} \sim 1.960$) sur $\hat{\alpha}$ donne $\hat{\alpha} = 0.923 \pm 0.039$

L'intervalle de même niveau de confiance calculé pour les estimateurs des 2 autres méthodes donne respectivement :

$\hat{\alpha} = 0.974 \pm 0.043$
$\hat{\alpha} = 0.968 \pm 0.025$

Les trois intervalles se recoupent, mais le troisième ne comprend pas la valeur de l'estimateur au sens des moindres carrés.

On peut penser, à ce niveau de confiance, que cet estimateur est biaisé ; ce biais est dû au bruit de mesure : en effet la quantification constante des valeurs observées de y_K a une importance relative plus importante dans la troisième série du fait d'une diminution en valeur moyenne de la température.

Les minima et maxima des observations y_K et u_K sont repérés tableau 21

N° des échantillons	u_K m3/h		y_K °C	
	Min.	Max	Min	Max
]21, 331]	16.256	17.501	1118.823	1126.386
]331, 641]	16.166	17.543	1117.143	1123.025
]641, 951]	16.290	17.449	1117.983	1122.185

Tableau 21

X-2-5 - Etude du bruit résiduel

On a tracé figure 16 la fonction d'autocorrélation du bruit résiduel pour la 3ème série et pour les deux modèles obtenus par les méthodes linéaires.

Les deux courbes sont semblables.

On a tracé sur le graphique le seuil d'acceptation au niveau 5% (cf. chapitre VII) : on voit que dans les deux cas le bruit résiduel est corrélé d'ordre 1, ce qui confirme l'hypothèse d'un bruit de mesure non négligeable affectant la sortie y_K.

La figure 17 représente les fonctions d'autocorrélation du bruit résiduel (pour la même série d'échantillons), lorsque les deux modèles ne sont pas recalés sur les observations précédentes.

La fonction d'autocorrélation du bruit résiduel du modèle obtenu par matrice instrumentale a une amplitude plus faible.

Le bruit résiduel, qui est une estimation du bruit de mesure si le modèle est correct, ne peut pas être considéré ici comme un bruit blanc.

Enfin la figure 18 représente la sortie des deux modèles non recalés, et la sortie observée (+).

Le modèle obtenu par matrice instrumentale (0) se comporte mieux que le modèle obtenu par les moindres carrés (X).

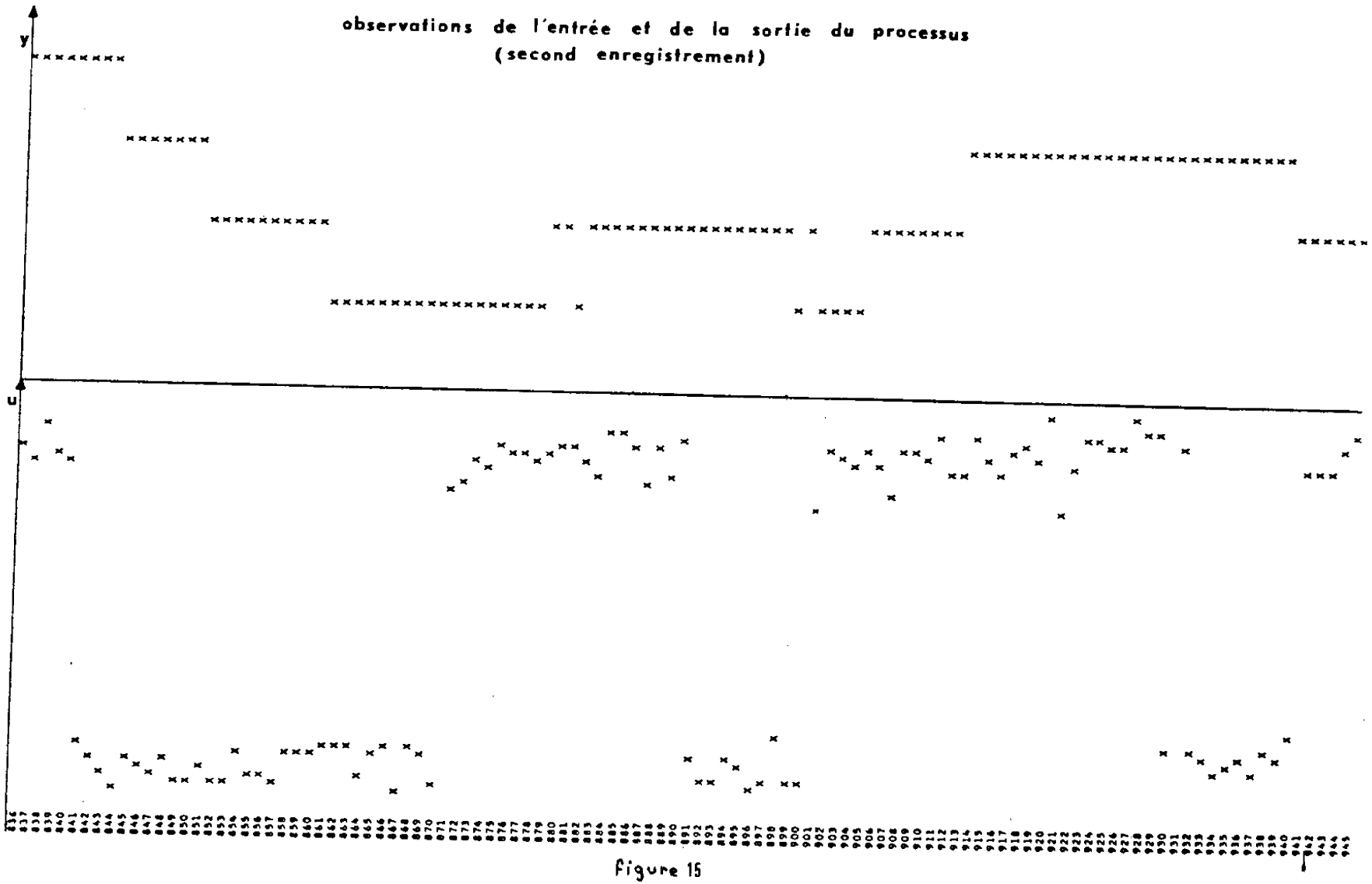

observations de l'entrée et de la sortie du processus
(second enregistrement)
y
u
t

Figure 15

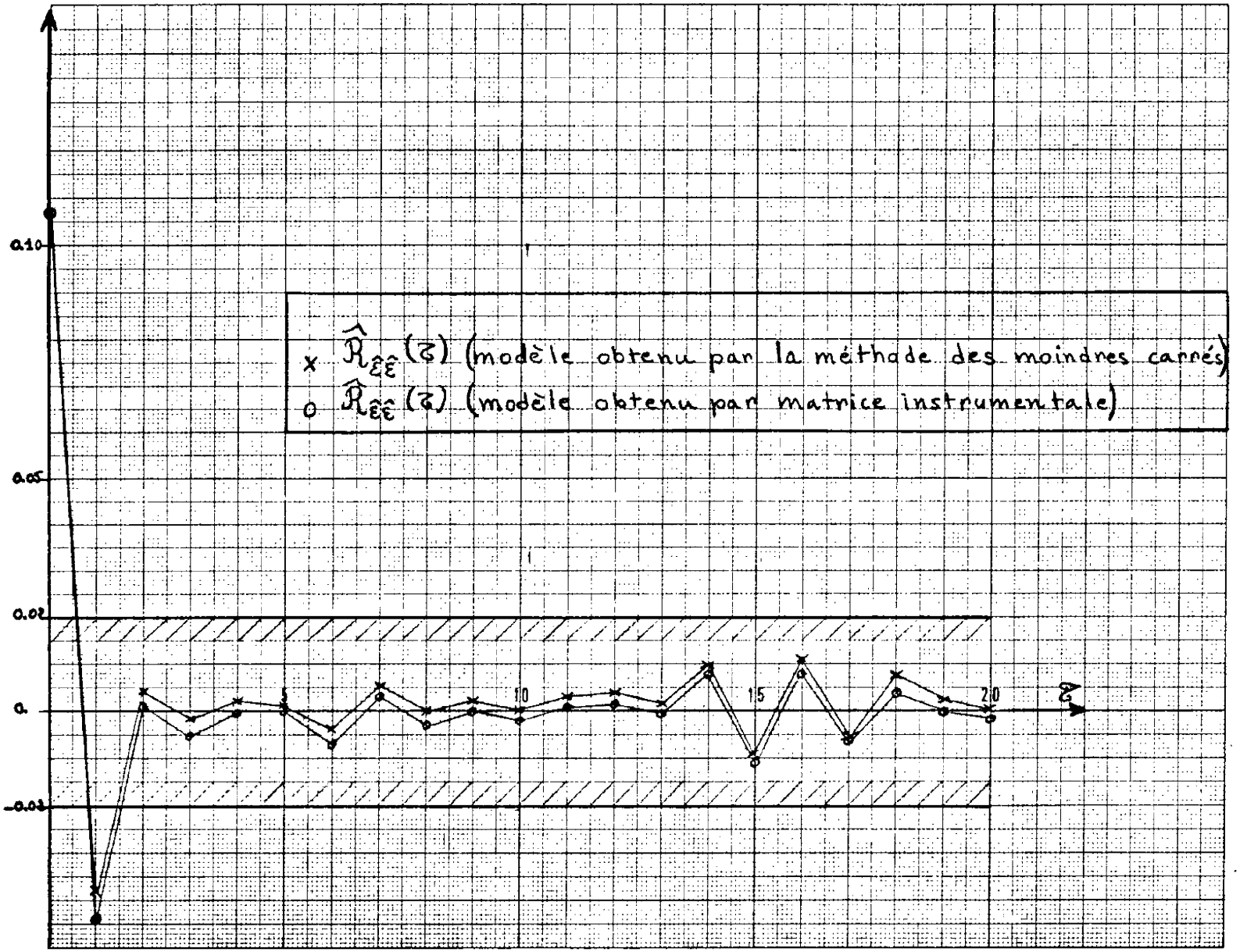

0.10
0.05
0.02
0.
-0.02
5
10
15
20
τ
× $\hat{R}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}(\tau)$ (modèle obtenu par la méthode des moindres carrés)
o $\hat{R}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}(\tau)$ (modèle obtenu par matrice instrumentale)

Figure 16

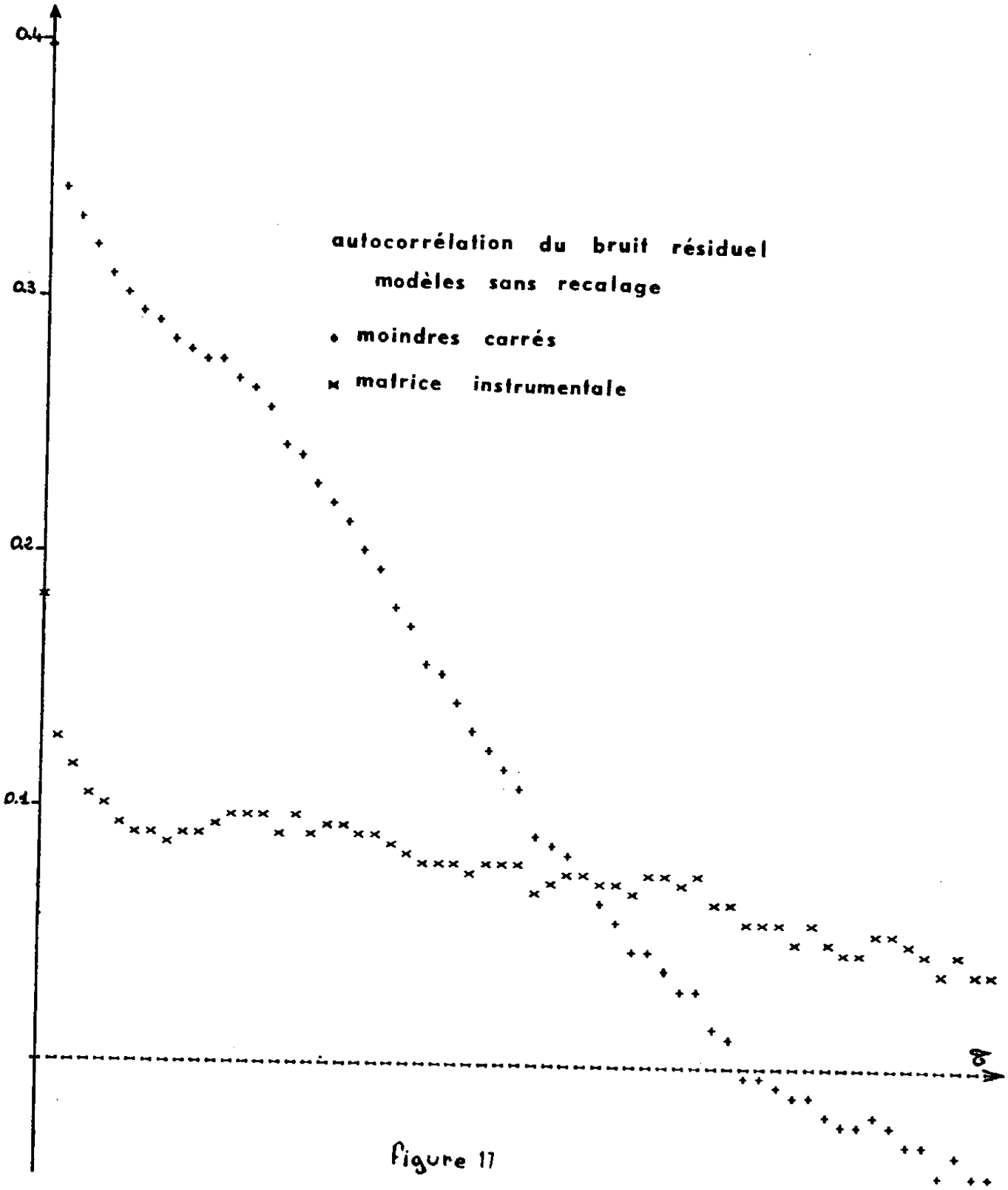

0.4
0.3
0.2
0.1
autocorrélation du bruit résiduel
modèles sans recalage
• moindres carrés
× matrice instrumentale
θ

Figure 11

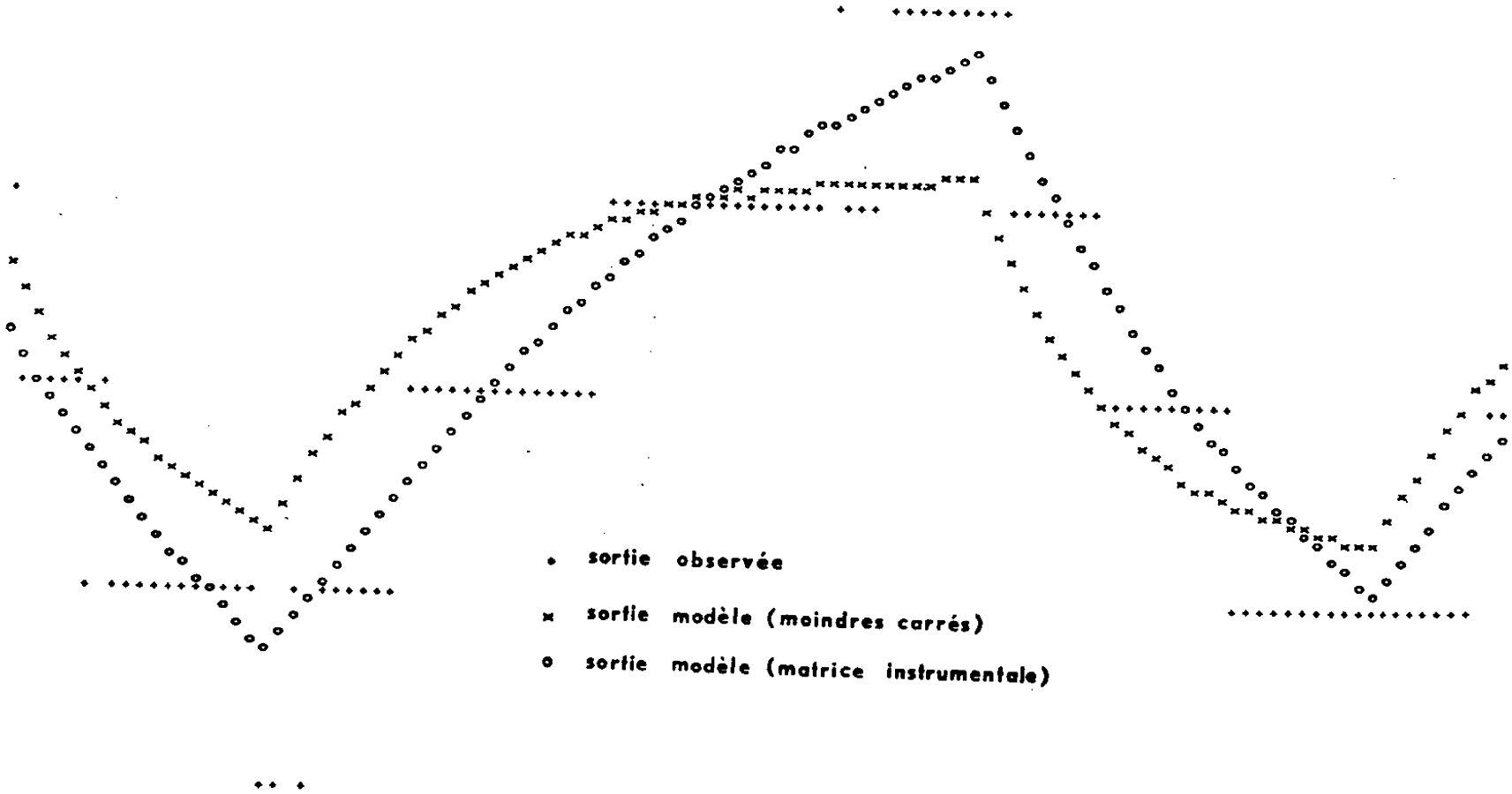

sortie observée
sortie modèle (moindres carrés)
sortie modèle (matrice instrumentale)

Figure 18

XI - IDENTIFICATION DES COMPOSANTES DU TENSEUR D'INERTIE D'UN SATELLITE

XI-1 - BUT DE L'IDENTIFICATION

Il s'agit d'identifier les composantes du tenseur d'inertie d'une maquette de satellite non équilibrée, défini suivant des axes géométriques précis, afin de diagonaliser ce tenseur. Cet équilibrage doit se faire au moyen de masses dont la valeur et l'emplacement sont calculés à partir des résultats des estimations des différentes composantes [XI-1]

XI-2 - LE MODELE MATHEMATIQUE DU MOUVEMENT

Un senseur solaire délivre deux signaux analogiques, notés $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ qui sont deux cosinus directeurs de la direction de référence par rapport au trièdre lié aux axes géométriques de la maquette.

Le satellite tourne à une vitesse constante autour de son axe de plus grande inertie ; une impulsion lui donne un mouvement oscillatoire très peu amorti (mouvement de Poinsot) autour de la direction de référence, les couples extérieurs étant négligeables.

L'équation du mouvement peut alors s'écrire, en négligeant les termes du second ordre (pour de faibles amplitudes du mouvement) :

$$(XI-1)\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{\alpha}}{dt^2} = a_{11}\cdot\dfrac{d\tilde{\alpha}}{dt} + a_{12}\cdot\dfrac{d\tilde{\beta}}{dt} + a_{13}\cdot\tilde{\alpha} + a_{14}\cdot\tilde{\beta} + a_{15} \\[2ex] \dfrac{d^2\tilde{\beta}}{dt^2} = a_{21}\cdot\dfrac{d\tilde{\alpha}}{dt} + a_{22}\cdot\dfrac{d\tilde{\beta}}{dt} + a_{23}\cdot\tilde{\alpha} + a_{24}\cdot\tilde{\beta} + a_{25} \end{cases}$$

Ce modèle est linéaire et les méthodes présentées dans ce travail peuvent être mises en oeuvre.

XI-3 - OBTENTION D'UNE RELATION CONTINUE EQUIVALENTE

On dispose de deux enregistrements des signaux $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$, échantillonnés avec une période T = 200 ms.

Le 1er correspond au cas du satellite déjà équilibré par une méthode plus classique, le tenseur d'inertie est alors supposé être diagonal.

Le second correspond au cas du satellite volontairement déséquilibré par des masses connues, placées à des endroits précis sur la maquette.

Dans les deux cas on dispose de relevés $\left\{ \tilde{\alpha}_K , \tilde{\beta}_K \right\}_{K=1}^{K=100}$; 100 points de ces deux enregistrements sont représentés respectivement figure 19 et figure 20 (1 volt = cos directeur d'un angle de - 12°).

Puisque les dérivées premières et secondes ne sont pas directement observables, on transforme la relation (XI-1) en une relation équivalente en filtrant les observations $\tilde{\alpha}_K$ et $\tilde{\beta}_K$ à l'aide d'un filtre linéaire de fonction de transfert : $\frac{S}{R} = \frac{1}{(p+1)^3}$ (cf. paragraphe I-4).

On programme le filtre sous forme d'équations d'état :

$$\text{(XI-2)} \quad \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R \\ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

d'où :

$$\text{(XI-3)} \quad \begin{cases} \underline{x}_{K+1} = \epsilon^{A.T} \underline{x}_K + A^{-1} . \left[\epsilon^{AT} - \mathbb{1} \right] . B . R_K \\ S_K = H . \underline{x}_K \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et T = 0.2 s

L'entré du filtre sera successivement

$R_K \triangleq \tilde{\alpha}_K$ et on obtient $S_K = \tilde{\alpha}_K^F$

et $R_K \triangleq \tilde{\beta}_K$ et on obtient $S_K = \tilde{\beta}_K^F$

A chaque itération on dispose d'une information sur les quantités :

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\alpha}^F)_K \\ \left(\frac{d\tilde{\alpha}^F}{dt}\right)_K \\ \left(\frac{d^2\tilde{\alpha}^F}{dt^2}\right)_K \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} (\tilde{\beta}^F)_K \\ \left(\frac{d\tilde{\beta}^F}{dt}\right)_K \\ \left(\frac{d^2\tilde{\beta}^F}{dt^2}\right)_K \end{bmatrix}$$

qui sont l'état du filtre à l'instant K.

De ce fait les paramètres a_{ij} sont directement identifiables puisque les variables figurant dans la nouvelle relation (XI-4) sont directement et parfaitement observables :

$$\text{(XI-4)} \begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{\alpha}^F}{dt^2} = a_{11} \cdot \dfrac{d\tilde{\alpha}^F}{dt} + a_{12} \cdot \dfrac{d\tilde{\beta}^F}{dt} + a_{13} \cdot \tilde{\alpha}^F + a_{14} \cdot \tilde{\beta}^F + a_{15} \\ \dfrac{d^2\tilde{\beta}^F}{dt^2} = a_{21} \cdot \dfrac{d\tilde{\alpha}^F}{dt} + a_{22} \cdot \dfrac{d\tilde{\beta}^F}{dt} + a_{23} \cdot \tilde{\alpha}^F + a_{24} \cdot \tilde{\beta}^F + a_{25} \end{cases}$$

Les expressions des vecteurs $\underline{X}_K$; $\underline{Z}_K$ et $\underline{y}_{K+1}$ sont alors :

$$\underline{X}_K = \begin{bmatrix} \left(\frac{d\tilde{\alpha}^F}{dt}\right)_K \\ \left(\frac{d\tilde{\beta}^F}{dt}\right)_K \\ \left(\tilde{\alpha}^F\right)_K \\ \left(\tilde{\beta}^F\right)_K \\ 1. \end{bmatrix} \qquad \underline{Z}_K = \begin{bmatrix} \left(\frac{d\tilde{\alpha}^F}{dt}\right)_{K-3} \\ \left(\frac{d\tilde{\beta}^F}{dt}\right)_{K-3} \\ \left(\tilde{\alpha}^F\right)_{K-3} \\ \left(\tilde{\beta}^F\right)_{K-3} \\ 1. \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_{K+1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{d^2\tilde{\alpha}^F}{dt^2}\right)_K \\ \left(\frac{d^2\tilde{\beta}^F}{dt^2}\right)_K \end{bmatrix}$$

XI-4 - OBTENTION D'UN MODELE CONTINU APPROCHE A PARTIR D'UN MODELE DISCRET

Une autre approche consiste à estimer les paramètres du modèle discret :

$$\text{(XI-5)} \quad \begin{cases} \tilde{\alpha}_{K+2} = f_{11}\cdot\tilde{\alpha}_{K+1} + f_{12}\cdot\tilde{\beta}_{K+1} + f_{13}\cdot\tilde{\alpha}_K + f_{14}\cdot\tilde{\beta}_K + f_{15} \\ \tilde{\beta}_{K+2} = f_{21}\cdot\tilde{\alpha}_{K+1} + f_{22}\cdot\tilde{\beta}_{K+1} + f_{23}\cdot\tilde{\alpha}_K + f_{24}\cdot\tilde{\beta}_K + f_{25} \end{cases}$$

Le passage au modèle continu se fait en écrivant successivement :

$$x^1_K = \tilde{\alpha}_{K+1}$$

$$x^2_K = \tilde{\beta}_{K+1}$$

$$x^3_K = \tilde{\alpha}_K$$

$$x^4_K = \tilde{\beta}_K$$

Soit :

$$\begin{cases} \underline{x}_{K+1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_K + \begin{bmatrix} f_{15} \\ f_{25} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1. \\ \underline{y}_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_K \end{cases}$$

qui est une forme standard du type ;

$$\begin{cases} \underline{x}_{K+1} = F\,\underline{x}_K + G\,u_K \\ \underline{y}_K = H\,\underline{x}_K \end{cases} \qquad (u_K = 1 \ \forall K)$$

Pour obtenir une représentation discrète correspondant au modèle continu donné par les équations physiques, on effectue la transformation linéaire suivante :

$$\underline{x}^*_K = \mathcal{T}\,\underline{x}_K$$

avec

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & 0 & -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T} & 0 & -\frac{1}{T} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette transformation conduit à la forme :

$$\begin{cases} \underline{x}^*_{K+1} = F^* \underline{x}^*_K + G^* . \ 1 \\ \underline{y}_K = H^* \underline{x}^*_K \end{cases}$$

où

$$F^* = \mathcal{T} F \mathcal{T}^{-1}$$
$$G^* = \mathcal{T} G$$
$$H^* = H \mathcal{T}^{-1} = H$$

On identifie alors ce modèle à l'expression discrète du modèle continu :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A \underline{x} + B \underline{u} \qquad (u = 1) \\ \underline{y} = H \underline{x} \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour calculer les paramètres a_{ij} à partir des paramètres f_{ij} on peut faire l'approximation $F^* = e^{AT} \# 1 + AT$

Soit $A \# \frac{F^* - 1}{T}$

$B \# \frac{G^*}{T}$

Remarque :

Les approximations qui sont faites au cours de cette procédure ne permettent pas de déduire la précision obtenue sur les paramètres a_{ij} à partir de celle obtenue sur les paramètres f_{ij}.

XI-5 - RESULTATS

A titre de comparaison on donnera les résultats obtenus par la méthode de filtrage linéaire de Kalman-Bucy, lorsque les observations sont aussi préalablement filtrées comme indiqué précédemment, ceci toujours dans le but de rendre l'état du système directement observable.

Cette méthode a été mise en oeuvre au LAAS, ainsi que celle de filtrage non linéaire, par G. ALENGRIN [X-3] .

Il faut noter que ces deux méthodes permettent d'utiliser la propriété du système suivante :

$$a_{11} = - a_{22}$$

$$a_{14} = a_{23} = - ro.\ a_{11}$$

où ro est la vitesse de spin supposée constante et mesurée en cours d'enregistrement (ro # 1.11rd/s).

De ce fait les équations du mouvement s'écrivent sous la forme suivante en posant :

$x_1 = \frac{d\tilde{\alpha}}{dt}$ ..... $x_1 = (\frac{d\tilde{\alpha}^F}{dt})_K$ dans le cas d'un filtrage préalable

$x_2 = \frac{d\tilde{\beta}}{dt}$ ..... $x_2 = (\frac{d\tilde{\beta}^F}{dt})_K$ dans le cas d'un filtrage préalable

$x_3 = \tilde{\alpha}$ ..... $x_3 = (\tilde{\alpha}^F)_K$ dans le cas d'un filtrage préalable

$x_4 = \tilde{\beta}$ ..... $x_4 = (\tilde{\beta}^F)_K$ dans le cas d'un filtrage préalable

$x_5 = a_{11}$ ..... $x_5 = a_{11}$

$x_6 = a_{12}$ ..... $x_6 = a_{12}$

$x_7 = a_{13}$ ..... $x_7 = a_{13}$

$x_8 = a_{15}$ ..... $x_8 = a_{15}$

$x_9 = a_{21}$ ..... $x_9 = a_{21}$

$x_{10} = a_{24}$ ..... $x_{10} = a_{24}$

$x_{11} = a_{25}$ ..... $x_{11} = a_{25}$

filtrage non linéaire	filtrage linéaire

$$\frac{dx_1}{dt} = x_5 \cdot x_1 + x_6 \cdot x_2 + x_7 \cdot x_3 - r_0 x_5 \cdot x_4 + x_8$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_9 \cdot x_1 - x_5 \cdot x_2 - r_0 \cdot x_5 \cdot x_3 + x_{10} \cdot x_4 + x_{11}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{dx_{11}}{dt} = 0$$

Il y a 7 paramètres à estimer : les x^i pour i = 5, ..., 11.

Alors qu'à partir des relations (XI-4) ou (XI-5) et compte tenu de l'algorithme proposé ici, il y a 10 paramètres à estimer simultanément.

Satellite équilibré :

On donne tableau 22 les valeurs des paramètres estimés et leurs écarts-types pour les différentes méthodes mises en oeuvre.

	Filtrage linéaire (Kalman-Bucy) + filtre $\frac{1}{(p+1)^3}$	Matrice instrumentale + filtre $\frac{1}{(p+1)^3}$	Matrice instrumentale + filtre $\frac{125}{(p+5)^3}$	Matrice instrumentale. Modèle discret
a_{11}	0.003 ± 0.01	-0.007 ±0.001	-0.351 ±0.006	-0.065
a_{12}	0.614 ± 0.025	0.633 ±0.001	0.502 ±0.006	0.632
a_{13}	- 0.549 ± 0.017	-0.559 $<10^{-3}$	-0.443 ±0.005	-0.564
a_{14}	$-r_0 \cdot a_{11}$	-0.002 $<10^{-3}$	-0.011 ±0.005	-0.006
a_{15}	1.113 ±0.300	0.964 ±0.012	0.690 ±0.172	0.906
a_{21}	- 0.646 ±0.026	-0.644 $<10^{-3}$	-0.510 ±0.006	-0.638
a_{22}	$-a_{11}$	0.016 $<10^{-3}$	-0.336 ±0.006	-0.038
a_{23}	a_{14}	-0.011 $<10^{-3}$	-0.019 ±0.005	0.002
a_{24}	-0.554 ±0.014	-0.553 $<10^{-3}$	-0.437 ±0.005	-0.556
a_{25}	0.327 ±0.300	0.389 ±0.008	0.332 ±0.173	0.406

Tableau 22

Satellite non équilibré :

Les résultats sont repérés tableau 23.

	Filtrage linéaire + filtre $\frac{1}{(p+1)^3}$	Filtrage non linéaire	Matrice instrumentale + filtre $\frac{1}{(p+1)^3}$	Matrice instrumentale. Modèle discret
a_{11}	0.010 ±0.010	0.009 $<10^{-3}$	0.003 ±0.002	-0.056
a_{12}	0.631 ±0.032	0.676 $\sim 10^{-3}$	0.640 ±0.002	0.624
a_{13}	-0.522 ±0.020	-0.538 $\sim 10^{-3}$	-0.519 ±0.001	-0.536
a_{14}	$-r_0\, a_{11}$	$-r_0\, a_{11}$	-0.015 ±0.001	-0.030
a_{15}	7.302 ±0.480	7.732 ±0.01	7.522 ±0.043	8.157
a_{21}	-0.650 ±0.032	-0.636 $\sim 10^{-3}$	-0.653 ±0.001	-0.679
a_{22}	$-a_{11}$	$-a_{11}$	0.008 ±0.001	-0.036
a_{23}	a_{14}	a_{14}	-0.020 ±0.001	-0.022
a_{24}	-0.524 ±0.020	-0.521 $\sim 10^{-3}$	-0.526 ±0.001	-0.508
a_{25}	12.350 ±0.580	12.325 ±0.01	12.571 ±0.022	12.230

Tableau 23

XI-6 - ANALYSE DES RESULTATS. CONCLUSION

La faible précision donnée par le filtrage linéaire s'explique par le fait que la matrice de covariance du bruit de mesure, qui est une connaissance a priori nécessaire à la mise en oeuvre de la méthode, comportait des termes diagonaux assez grands.

La matrice instrumentale à observations retardées donne des résultats comparables au moins pour les paramètres qui ont une valeur importante. La précision limitée des données, le nombre de paramètres important ne permettent pas de mieux estimer ceux qui ont une faible valeur.

Le problème du choix du filtre auxiliaire est mis en évidence par les résultats du tableau 22.

La relation (XI-1) est une modélisation approchée du processus ; elle est notamment obtenue en linéarisant les équations du mouvement. De ce fait on doit tenir compte d'un bruit de dynamique assez important.

Ceci est confirmé par l'estimation de sa matrice de covariance lors de la mise en oeuvre de la méthode de la matrice instrumentale, pour estimer les paramètres du modèle discret.

Le filtrage non linéaire serait la méthode d'estimation la mieux adaptée à ce problème particulier, en tenant compte d'un modèle plus complet ; cependant une initialisation de l'algorithme à l'aide des résultats obtenus par des méthodes linéaires devrait assurer une meilleure convergence du filtre.

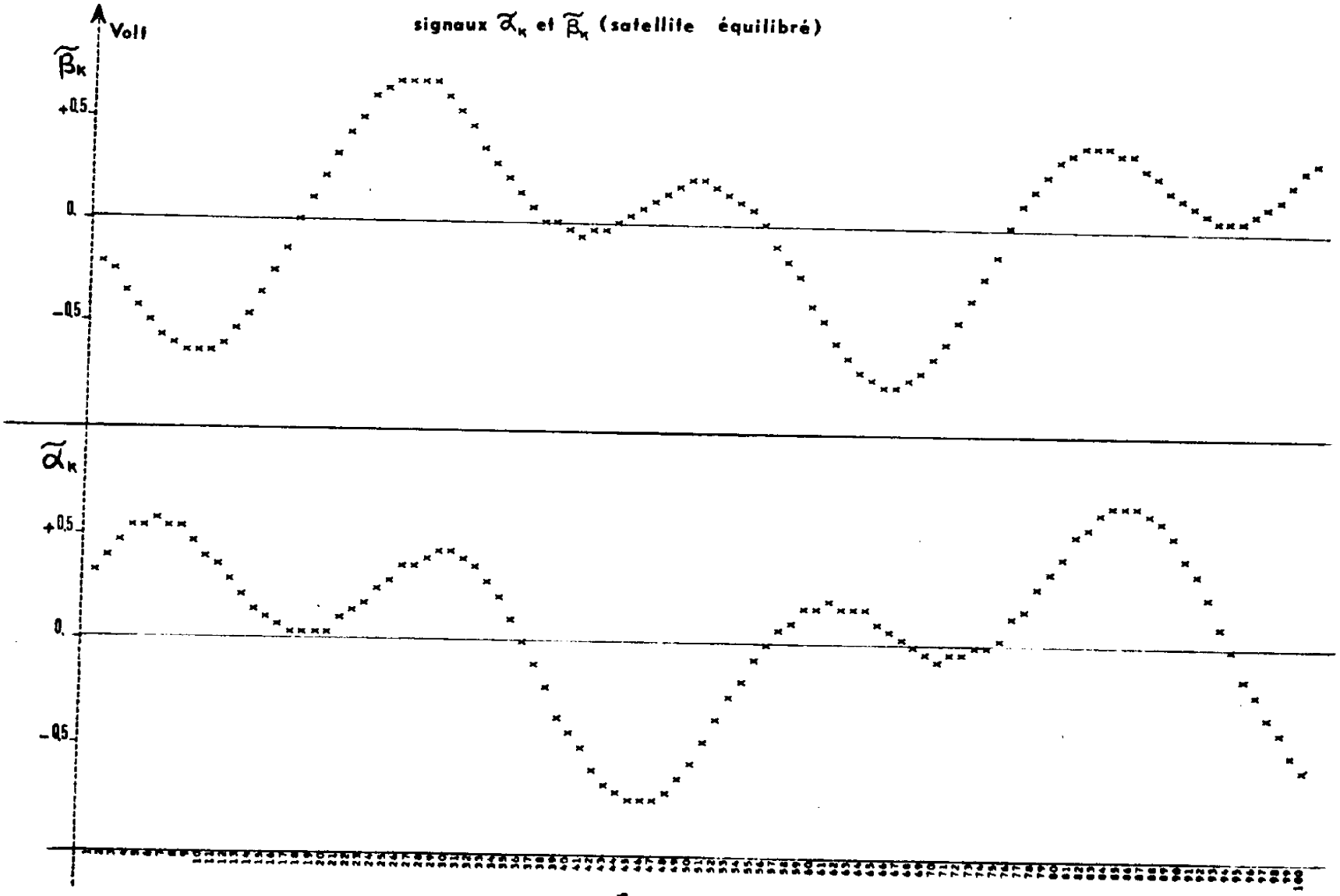

signaux $\tilde{\alpha}_k$ et $\tilde{\beta}_k$ (satellite équilibré)
Volt
$\tilde{\beta}_k$
+0.5
0.
-0.5
$\tilde{\alpha}_k$
+0.5
0.
-0.5

Figure 19

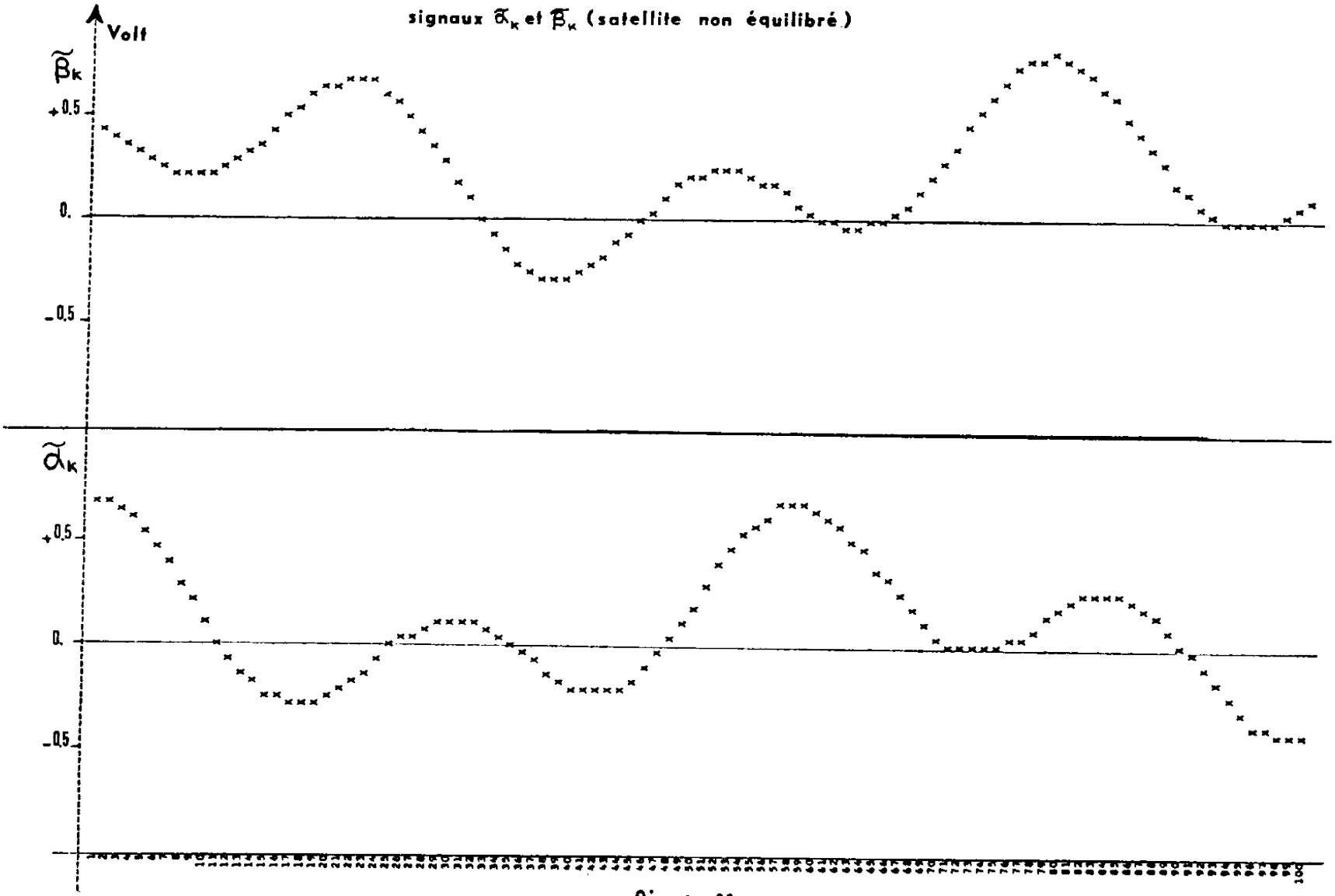

signaux $\tilde{\alpha}_k$ et $\tilde{\beta}_k$ (satellite non équilibré)
Volt
$\tilde{\beta}_k$
+0,5
0.
-0,5
$\tilde{\alpha}_k$
+0,5
0.
-0,5

Figure 20

REFERENCES DE LA TROISIEME PARTIE

[VIII-1] C. HERNANDEZ
Dossier d'utilisation -sous-programme ESTMC/1
Note Interne LAAS-AS 72 I 04. Février 1972

[VIII-2] E. DURAND
Solutions numériques des équations algébriques
Tome 2, Masson et Cie, 1961.

[X-1] C. HERNANDEZ - G. BANON - J. AGUILAR MARTIN
The use of an input-output linear model in multivariable process industries adaptive identification
2d Symposium IFAC on Multivariable Technical Control Systems
Dusseldorf, Octobre 1971.

[X-2] J. WIESLANDER
Real time identification. Part I.
Report 6908, Lund Institute of Technology, Novembre 1969.

[X-3] G. ALENGRIN
Filtrage non linéaire continu-discret : théorie, application à l'estimation des paramètres d'un système linéaire, extension à d'autres problèmes.
Note Interne LAAS 832, Juillet 1971.

[XI-1] G. BAUZIL - G. VIALARET
Compte rendu des travaux effectués sur la table à air au 22 Décembre 1971.
Note Interne LAAS-MCI n° 71 07.

CONCLUSION

Un algorithme simple est proposé pour estimer sans biais les paramètres d'un système linéaire multidimensionnel, quelles que soient les caractéristiques statistiques des perturbations qui agissent aussi bien sur la dynamique du système, que sur l'observation des sorties. Cet algorithme permet de calculer les estimateurs des paramètres et de leur précision à chaque nouvelle observation entrée-sortie ; sa mise en oeuvre en ligne est possible.

Le problème du choix de la structure du modèle linéaire n'est pas résolu, mais une étude de la précision obtenue sur les estimateurs permet de déterminer au moins l'ordre du système : c'est le minimum de connaissance a priori qu'il faut avoir du processus à identifier pour obtenir une estimation sans biais.

Lorsque l'on veut aborder ensuite le problème de la validation du modèle, on s'aperçoit très vite de la nécessité de faire des hypothèses assez restrictives sur la nature de la distribution et les propriétés probabilistes des perturbations, si l'on veut appliquer à cet effet des principes de déduction statistique déjà connus.

Ces hypothèses ne sont pas rigoureusement vérifiées en pratique ; une étude théorique plus approfondie et des applications à des cas réels devraient définir de façon plus précise les niveaux de confiance que l'on peut prétendre atteindre.

Des applications hors ligne ont donné des résultats comparables à ceux obtenus par d'autres méthodes pour lesquelles la connaissance du processus nécessaire a priori est plus importante. Cependant l'avantage d'une méthode telle que le filtrage non linéaire, par rapport à une méthode linéaire semblable à celle qui est proposée ici, est la possibilité d'estimer les paramètres d'une relation entre variables qui ne sont pas toutes directement ni parfaitement observables ; l'information a priori qui est nécessaire dans ce cas peut être constituée sur la base des résultats obtenus par une méthode linéaire.

Quelle que soit la méthode qu'il a employée pour identifier un processus, l'automaticien a besoin de valider le modèle obtenu. Une approche de ce problème est présentée dans ce travail ; des recherches plus rigoureuses d'un point de vue théorique devraient venir compléter ce travail, si l'on veut que les méthodes avancées d'identification stochastique soient utilisées de façon plus rationnelle.

BIBLIOGRAPHIE

1 J. AGUILAR MARTIN
Cours sur les aspects stochastiques de l'automatique
I.N.S.A. Toulouse - D.G.E., 1970.

2 K.J. ASTROM - T. BOHLIN - S. WENSMARK
Automatic construction of linear stochastic dynamic models for stationary industrial processes with random disturbances using operating records.
Rep. T.P. 18-150, IBM Nordic Laboratory Sweden, Juin 1965

3 K.J. ÅSTRÖM - P. EYKHOFF
System identification. Paper 0-1.
IFAC Symposium : Identification and process parameter estimation
Prague, 1970.

4 R. BOUDAREL - J. DELMAS - P. GUICHET
Commande optimale des processus.
Tome 1, Dunod, 1967

5 H. CRAMER
Mathematical methods of statistics
Princetown University Press, 1946

6 P. EYKHOFF
Process parameter and state estimation.
Automatica, vol. 14, p. 205-233, 1968.

7 C. FOURGEAUD - A. FUCHS
Statistiques
Dunod, 1967

8 J.W. GORMAN - R.J. TOMAN
Selection of variables for fitting equations to data
Technometrics vol. 8, n° 1, Février 1966

9 YOICHI KAYA - MASUMI ISHIKAWA
Test of goodness of fit of impulse response model.
IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC 16, n°3, Juin 1971

10 P. LEFEVRE
Estimation récursive optimale,filtre de Kalman
Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 1970

11 E. MALINVAUD
Méthodes statistiques de l'économétrie.
Dunod, 1969

12 K.G. OZA - E.I. JURY
Adaptive algorithm for identification problem
Automatica, vol. 6, pp. 795-799, 1970

13 B. PASTERNACK - A. LIUZZI
Patterns in residuals : a test for regression model adequacy in radio nuclide assay
Technometrics, vol. 7, n° 8, Novembre 1965.

14 Y. SEVELY
Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés.
Dunod Université, 1969

15 J. VALIS
Experimental comparison of different methods for numerical identification.
Report 6914 June, Lund Institute of Technology

TABLE DES MATIERES

Introduction 1

Première partie : Le modèle multivariable entrée-sortie
Estimation de ses paramètres 11

I - Description de la relation entrée-sortie à l'aide d'une équation matricielle aux différences 13

I-1 - Passage de la représentation en continu dans l'espace d'état à la représentation discrète 13

I-2 - Le modèle stochastique discret associé 15

I-3 - La relation matricielle entrée-sortie 16

I-4 - La relation entrée-sortie équivalente obtenue avec un filtre linéaire auxiliaire 23

II - Estimation des paramètres d'un système multidimensionnel 27

II-1 - De la modélisation à l'estimation 27

II-2 - Méthode d'estimation par matrice instrumentale 28

II-3 - Estimation au sens des moindres carrés 31

II-4 - La matrice instrumentale à observations retardées 32

II-5 - Formules récurrentes sur les observations 34

II-6 - Calcul de l'estimateur de la variance du bruit $\underline{\varepsilon}_K$
Précision sur les paramètres 36

II-7 - Cas d'un bruit à moyenne non nulle 39

II-8 - Estimation de la moyenne du bruit 39

Conclusion de la première partie 40

Références 41

Deuxième partie : Les tests statistiques effectués sur le modèle. La validation du modèle 43

III - Etudes de l'influence d'un nouvel ensemble de variables d'entrée dans l'équation de regression 45

III-1 - Etude du biais introduit dans l'estimation des paramètres lorsqu'on ne tient pas compte de toutes les variables d'entrée mesurables 45

III-2 - Test de signification de la diminution de la variation du bruit résiduel 47

IV - Détermination de l'ordre total d'un système multidimensionnel 49

IV-1 - Limites dans la détermination de la structure du système 49

IV-2 - Le test du rapport des variances 50

IV-3 - Etude du rang de la matrice d'information XZ^t et de la précision sur les paramètres estimés 50

IV-4 - Remarque sur les chapitres III et IV 51

V - Intervalles de confiance des paramètres 52

V-1 - Précision sur les paramètres 52

V-2 - Intervalles de confiance pour N grand 53

VI - Intervalles de confiance pour la prédiction 53

VII - Analyse du bruit résiduel 55

Conclusion de la deuxième partie 58

Références 59

Troisième partie : Expérimentation. Application à l'identification de processus 61

VIII - Programmation des algorithmes d'estimation de paramètres 63

VIII-1 - Réalisation. Moyens de calcul 63

VIII-2 - Organigramme général 64

IX - Estimation des paramètres d'un système linéaire multidimensionnel Simulation numérique 68

IX-1 - Représentation mathématique du système dans l'espace d'état 68

IX-2 - Résultats de l'estimation des paramètres du système lorsque les sorties sont imparfaitement observées (bruit de mesure) 70

IX-3 - Recherche de l'ordre du système 77

IX-4 - Cas d'un bruit de dynamique et d'un bruit d'observation 79

IX-5 - Test sur la prédiction 82

X - Application à l'identification d'un processus industriel 97

X-1 - Traitement du premier enregistrement 98

X-2 - Traitement du second enregistrement 106

XI - Identification des composantes du tenseur d'inertie d'un satellite 127

XI-1 - But de l'identification 127

XI-2 - Le modèle mathématique du mouvement 127

XI-3 - Obtention d'une relation continue équivalente 128

XI-4 - Obtention d'un modèle continu approché à partir d'un modèle discret 130

XI-5 - Résultats 133

XI-6 - Analyse des résultats. Conclusion 137

Références 143

Conclusion 145

Bibliographie 149