



**HAL**  
open science

# Contribution à l'analyse dynamique et à la stabilisation d'attitude des satellites déformables

Daniel Poelaert

► **To cite this version:**

Daniel Poelaert. Contribution à l'analyse dynamique et à la stabilisation d'attitude des satellites déformables. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1973. Français. NNT: . tel-00176345

**HAL Id: tel-00176345**

**<https://theses.hal.science/tel-00176345>**

Submitted on 3 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention

du grade de DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

**Daniel POELAERT**

Ingénieur Civil-Physicien ès Techniques Spatiales  
de l'Université de Liège

---

## CONTRIBUTION A L'ANALYSE DYNAMIQUE ET A LA STABILISATION D'ATTITUDE DES SATELLITES DEFORMABLES

---

Soutenu le 9 octobre 1973 devant la Commission d'Examen :

MM. J. LAGASSE

Président

Y. SEVELY

B. FRAEIJIS DE VEUBEKE

E. SLACHMUYLDERS

A. LIEGEOIS

} Examineurs

## AVANT-PROPOS

\*\*\*\*\*

Que Monsieur le Professeur J. LAGASSE trouve ici tous nos remerciements pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider notre jury de thèse et pour l'accueil dont nous avons été émus durant ces deux années passées au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes.

Nous remercions aussi Monsieur Y. SFAELLY, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, pour l'intérêt qu'il a manifesté pour nos travaux et que nous avons eu le plaisir de voir être représenté par notre jury.

Toute notre gratitude s'adresse aussi à Monsieur P. FRAEUS DE VEUBEKE, Professeur à l'Université de Liège, qui a suivi l'évolution de nos recherches depuis plusieurs années.

A Monsieur E. L. LEIKH YANOVSKY, chef de département "Systèmes dynamiques" de l'ISS U.C., nous voudrions témoigner tous nos remerciements pour avoir accepté de faire partie de notre jury. A cette occasion, nous tenons à rappeler que c'est grâce à l'Organisation Européenne de Recherches Spatiales que nous avons pu effectuer ces deux années de recherche à Toulouse.

Qu'Alain LITGÉDRE se permette de témoigner de notre profonde reconnaissance et de notre regret de ne pas avoir dirigé nos travaux durant deux années et nous remercions de tout ce qu'il nous a permis d'avoir bénéficié dans la préparation de cette thèse.

A nos amis J. C. AMEUX, M. DURÉFINE et T. SUZUKI, nous aimerions dire combien nous apprécions leur collaboration et combien ont été fructueux nos échanges et nos discussions avec eux.

Nous remercions encore Monsieur J. B. FOURCIEL pour sa collaboration lors de certaines simulations à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.

Enfin que tous ceux qui ont bien voulu nous prêter leur concours ont contribué à la réalisation de cette thèse sachent notre toute implicite de les remercier.

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
NOMENCLATURE	vii
INTRODUCTION	1
<u>PREMIÈRE PARTIE — ANALYSE DYNAMIQUE DE SATELLITES DEFORMABLES</u>	1
CHAPITRE 1 — Modèles dynamiques théoriques d'un satellite déformable dans son environnement	1
1.1 — Notion d'équilibre d'un satellite — Soins et équations des rotors	15
1.2 — Déplacements généralisés d'un satellite déformable	20
1.3 — Fonctions caractéristiques	23
1.4 — Axes liés — degrés de liberté — coordonnées généralisées	24
1.5 — Fonctions potentielles	27
1.6 — Moment des couples extérieurs	31
1.7 — Equations linéaires du mouvement	34
1.8 — Cas particulier d'un satellite déformable à rotors rigide	32
1.9 — Forme déséquilibrée des équations linéaires du mouvement	35
1.10 — Amortissement dans les systèmes à rotors	40
1.11 — Stabilité du système autonome au voisinage de l'équilibre dynamique	42
CHAPITRE 10 — Analyse dynamique de satellites géométriques	43
10.1 — Stabilité des satellites sans couples perturbateurs ou par rotation	44
10.2 — Dynamique de satellite DDF	47
10.3 — Dynamique d'un satellite géométrique à rotors flexibles	49

<u>SECONDE PARTIE : COMMANDE D'ATTITUDE D'UN SATELLITE</u>	
DEFORMABLE	83
CHAPITRE III : Obtention et propriétés de la fonction de transfert	87
III.1 - Modes normaux de vibrations dans le cas général	87
III.2 - Modes normaux d'un satellite géostationnaire à panneaux flexibles	88
III.3 - Fonction de transfert du satellite géostationnaire	98
III.4 - Interprétation énergétique des troncatures modales	104
III.5 - Blocs-diagrammes et modèles mécaniques équivalents	105
CHAPITRE IV : Stabilisation "trois axes" d'un satellite muni de panneaux flexibles à l'aide d'une roue sur double cardan	113
IV.1 - Représentations d'état, commandabilité observabilité	113
IV.2 - Synthèse d'une loi de commande "optimale"	118
IV.3 - Commande par observateur d'état	132
IV.4 - Identification et adaptation	144
CONCLUSION	147
<u>ANNEXES</u>	149
ANNEXE A : Notations et opérations en calcul tensoriel	151
A.1 - Notations, définitions	151
A.2 - Opérations	152
ANNEXE B : Opérations fondamentales en Gyrodynamique	154
B.1 - Quasi-coordonnées, matrice duale d'un vecteur	154
B.2 - Approximations quadratiques, angles de Bryan	155
ANNEXE C : Discrétisation et linéarisation des équations du mouvement	159
C.1 - Calcul des fonctions cinétiques	159
C.2 - Calcul des fonctions potentielles	162
C.3 - Calcul des forces généralisées	164
C.4 - Equations du mouvement	164

ANNEXE D : Extensions du critère de stabilité	170
ANNEXE E : Calcul de la série des gains modaux	173
ANNEXE F : Résolution de l'équation de Riccati réduite	174
F.1 - Cas général	174
F.2 - Cas du quatrième ordre	175
ANNEXE G : Détermination d'un observateur pour le satellite "1 mode"	177
G.1 - Calcul des matrices de l'observateur	177
G.2 - Aspect "compensateur" de l'observateur	178
ANNEXE H : Identification à l'aide d'un modèle ajustable par la méthode de l'hyperstabilité	180
LISTE DES FIGURES	182
REFERENCES	184

## NOMENCLATURE

a	demi-grand axe de l'orbite
$\underline{a}$	matrice des composantes en axes $\underline{x}^1$ du moment cinétique résultant des rotors à l'échelle dynamique
$\underline{a}$	matrice des coefficients de l'équation caractéristique du système en boucle ouverte
b	largeur d'un panneau solaire
$\underline{E}^g$	inducteur géomagnétique locale
c	matrice constante des forces potentielles <sup>2</sup>
$\underline{c}$	matrice des coefficients de l'équation caractéristique du système en boucle fermée
$c_i$	coefficients intervenant dans le développement du potentiel de gravitation terrestre
$\underline{d}$	moment dipolaire magnétique du satellite
$\underline{d}^E$	moment dipolaire magnétique de la Terre
$d_p$	longueur d'un panneau solaire
$d_r$	demi-longueur du corps principal par rapport au satellite
e	excentricité de l'orbite
$\epsilon$	épaisseur d'un panneau solaire
$\epsilon$	écart d'observation
$\underline{e}^1$	axes d'équilibre dynamique
$\underline{e}$	force extérieure résultante agissant sur le satellite
g	force généralisée
$\underline{h}$	moment cinétique résultant au sol par rapport à G
i	inclinaison de l'orbite
$\underline{i}$	axes rectifiés
l	nombre imaginaire $\sqrt{-1}$
$k_i$	gains modaux
$\underline{l}$	moment résultant en G des couples extérieurs
m	masse totale du satellite

$m_f$	masse des parties flexibles
$m_p$	masse d'un panneau solaire
$m_r$	masse du corps rigide principal (roue comprise)
$n$	nombre de coordonnées généralisées de déformation
$\bar{n}$	vitesse angulaire orbitale moyenne
$\underline{o}^i$	axes orbitaux locaux
$\underline{p}$	quantité de mouvement absolue résultante
$q$	matrice des coordonnées discrètes
$\underline{r}^i$	axes liés au corps principal rigide (coïncident avec les axes $\underline{x}^i$ à l'équilibre dynamique)
$s$	variable de Laplace
$t$	temps
$\underline{u}$	déplacement généralisé de déformation en un point du satellite
$u$	vecteur de commande
$v$	anomalie vraie
$v_N$	anomalie vraie du point nodal
$\underline{w}$	déplacement de déformation relativement au corps rigide principal
$x$	vecteur d'état du système
$\underline{x}$	vecteur-position d'un point P du satellite par rapport à G
$\underline{\bar{x}}$	vecteur-position d'un point P par rapport à G dans la structure fictive de référence
$\underline{x}^i$	axes de référence "liés" à la structure déformable
$y$	matrice des coordonnées généralisées d'attitude du satellite
$y$	vecteur de mesure
$z$	vecteur d'état de l'observateur
-----	
A	matrice du processus
B	matrice de commande
C	matrice de mesure
C	matrice d'élasticité généralisée
D	matrice de perturbation généralisée
E	énergie totale





T	énergie cinétique résultante absolue
U	matrice servant à l'approximation quadratique des rotations
V	énergie potentielle totale
$\dot{W}$	quantité de mouvement relative de la partie flexible par rapport au corps principal rigide
Z	matrice de dissipation généralisée.

---

$\alpha$	matrice des angles de cardans
$\alpha_N$	ascension droite du point nodal
$\beta$	matrice des coordonnées généralisées de déformation
$\gamma$	matrice des angles de Bryan des axes $\underline{r}^1$ par rapport aux axes $\underline{x}^1$
$\underline{e}$	"décalage" du centre de masse
$\zeta$	coordonnée spatiale adimensionnelle (abscisse réduite)
$\zeta$	coefficient d'amortissement
$\eta$	déplacement réduit (adimensionnel)
$\theta$	matrice des angles de Bryan des axes $\underline{x}^i$ vis-à-vis des axes $\underline{e}^i$
$\bar{\theta}$	angles de Bryan des axes $\underline{x}^1$ vis-à-vis des axes $\underline{i}^1$
$\theta_r$	dépointage en roulis du corps principal rigide
$\theta_f$	dépointage en roulis de la partie flexible (modèle "un mode")
$\theta_o$	dépointage en roulis des axes "moyens" (roue sur cardans exclue)
$\mu$	coefficient de pondération de $\theta_f$ dans le critère quadratique
$\mu_g$	constante de gravitation terrestre
$\mu_n$	n-ième fréquence propre réduite (adimensionnelle)
$\nu$	coefficient de pondération de $\theta_r$ dans le critère quadratique
$\underline{p}$	vecteur-position absolu d'un point du satellite
$\bar{\underline{p}}$	vecteur-position absolu de G
$\underline{e}^o$	matrice des composantes de $\bar{\underline{p}}$ en axes $\underline{x}^1$
$\underline{e}^R$	vecteur position absolu de R
$\bar{\tau}$	angle de torsion d'un panneau solaire
$\Psi_{//}$	angle de rotation propre du rotor
$\omega$	argument du périégée

- $\omega_n$  n-ième pulsation propre  
 $\omega_N$  moment cinétique nominal de la roue divisé par  $I_t$   
 $\underline{\Omega}$  vitesse angulaire absolue des axes  $\underline{x}^1$   
 $\underline{\Omega}_s$  vitesse de spin  
 $\underline{\Omega}_o$   $(\underline{\Omega}_s + \bar{n})$  ou  $\bar{n}$  selon les cas

### Indices

- $//$  désigne la rotation propre des rotors  
 $\Pi$  correspond à l'approximation quadratique  
 $+$  correspond aux modes symétriques  
 $-$  correspond aux modes antisymétriques  
 $C$  a rapport avec la commande  
 $P$  a rapport avec les perturbations  
 $T$  désigne le transposé matriciel  
 diag. sym désigne des matrices utilisées dans les approximations quadratiques

### Autres notations

- $\sim$  désigne la matrice duale d'un vecteur  
 $\wedge$  désigne la valeur estimée d'une quantité  
 $\text{—}$  correspond soit à la structure fictive de référence, soit à une valeur canonique  
 $\cdot$  désigne la dérivée temporelle absolue  
 $\circ$  désigne la dérivée temporelle relative aux axes  $\underline{x}^1$   
 $\mathbb{I}^2$  matrice telle que  $\mathbb{I}^2 = \mathbb{1}$   
 $\mathbb{1}_n$  matrice (n x n) identité  
 $\mathbb{O}_{nm}$  matrice (n x m) nulle  
 $\geq \mathbb{O}$  semi-définie positive  
 $> \mathbb{O}$  définie positive



## INTRODUCTION

-:-:-:-

Nous qualifions de déformable un satellite dont on ne peut négliger a priori les mouvements relatifs internes, soit entre parties rigides reliées ou articulées, soit du fait des déformations structurales locales, soit encore lors du ballonnement de liquide dans des réservoirs.

Du point de vue de l'ingénieur chargé de la synthèse du système de stabilisation d'attitude d'un satellite non rigide, deux phénomènes fondamentaux, toujours présents et d'ailleurs liés, sont à prendre en considération :

- la dissipation d'énergie interne, dont les sources principales sont les paliers et les réservoirs de liquides ;
- les déformations de la structure, dues notamment à la flexibilité des panneaux et antennes déployables nécessités par les besoins en énergie et en transmission.

Le problème qui se pose est de savoir dans quelles conditions le modèle utilisé pour la synthèse d'une commande d'attitude doit tenir compte de ces phénomènes et, le cas échéant, quelles sont les méthodes les plus pratiques pour les modéliser correctement. De plus, pour une étude détaillée de leurs performances, certains satellites technologiques prévus depuis 1970 exigent, de par leur grande taille et leur flexibilité, une amélioration en conséquence de nos méthodes d'analyse et de synthèse.

Dans la conception d'une stabilisation pour satellite flexible, nous avons ainsi été confronté à deux problèmes essentiels :

- le premier est d'élaborer un modèle mathématique de la dynamique du satellite qui rende aisée l'étude analytique de la stabilité du système autonome et qui permette d'appliquer les théories modernes de la Commande Automatique ;
- le second est que la réalisation d'une loi de commande efficace nécessite théoriquement la mesure de toutes les variables d'état du processus ou leur estimation à l'aide d'un filtre, ainsi que la connaissance parfaite de tous les paramètres du système ; il convient donc de tenir compte de la

sensibilité du système commandé aux incertitudes et variations de ces paramètres.

Pour résoudre ces problèmes, nous proposons dans cette thèse une méthode pour la conception du système de stabilisation d'un satellite déformable.

Dans la première partie, nous établissons les équations générales qui régissent la dynamique des satellites non rigides. Le "modèle de connaissance" ainsi obtenu à partir des théories de la Mécanique Classique, de la théorie des Vibrations et de l'Elasticité est présenté sous une forme qui facilite l'étude de stabilité du système autonome, comme nous l'illustrons dans quelques cas concrets.

L'obtention d'un "modèle d'action" fait l'objet du début de la seconde partie. En effet, il faut disposer d'un modèle mathématique réaliste mais suffisamment simple pour permettre des simulations économiques et la synthèse d'une loi de commande à partir des théories de la Commande Automatique.

Sur la base des résultats obtenus, nous proposons, dans le cas d'un satellite flexible stabilisé "trois axes" par roue sur cardan, une méthode systématique de mise en œuvre d'une loi de commande à partir de la mesure des angles de roulis et de tangage et d'une information sur le lacet pendant les phases transitoires.

Le seul système d'unités employé dans les applications numériques est le système international MKSA de Giorgi.

PREMIERE PARTIE

ANALYSE DYNAMIQUE DES SATELLITES  
DEFORMABLES





Nous avons souligné dans l'introduction que le rôle central joué par la dynamique des éléments régulés en attitude rend indispensable l'examen approfondi des modes de description susceptibles de caractériser cette dynamique.

Depuis une dizaine d'années et malgré les efforts des Dynamiciens et des Automaticiens, la liste des satellites qui ont vu leur comportement se dégrader par suite de phénomènes liés aux déformations n'a cessé de s'allonger : la figure 1 montre quelques satellites qui ont présenté un comportement anormal du fait que le modèle mathématique utilisé pour la conception du système de stabilisation ne tenait pas compte de la déformabilité de la structure [34].

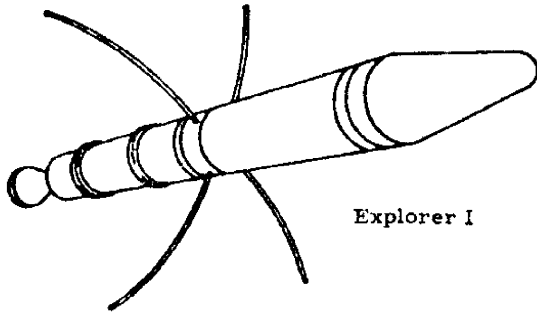
Le but de cette première partie est d'établir un formalisme d'analyse dynamique qui paraît préférable à utiliser en pratique en corrélation avec le problème de la commande et de la stabilisation.

Au chapitre I, nous présentons une approche qui tente d'unifier la mise en équations des petits mouvements des systèmes déformables. Les variables utilisées sont soit du type discret, soit du type continu, et nous les englobons dans une même représentation ; nous passons volontairement sous silence le formalisme de Hamilton (celui de Hamilton-Jacobi), celui des 'crochets' de Poisson, etc., pour nous en tenir au formalisme de Lagrange, qui résout complètement le problème en fournissant comme équations du mouvement des équations différentielles linéaires du second ordre, au prix toutefois d'une approximation du Lagrangien quadratique en toutes les variables.

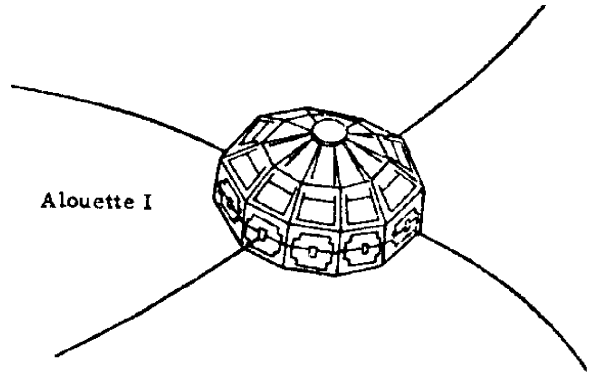
Les deux problèmes essentiels du courant l'analyse dynamique des systèmes mécaniques sont les suivants :

- l'obtention des équations du mouvement et la détermination des positions d'équilibre ;
- l'analyse de la stabilité des configurations d'équilibre et le calcul des bornes supérieures des oscillations du système en cas de perturbation.

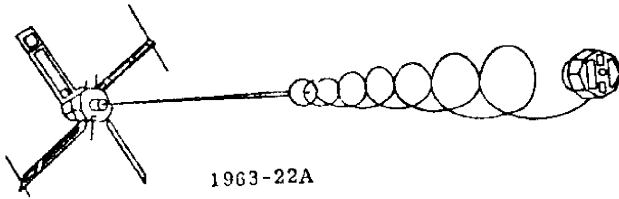
Nous incluons dans ce chapitre une modélisation adéquate des perturbations extérieures.



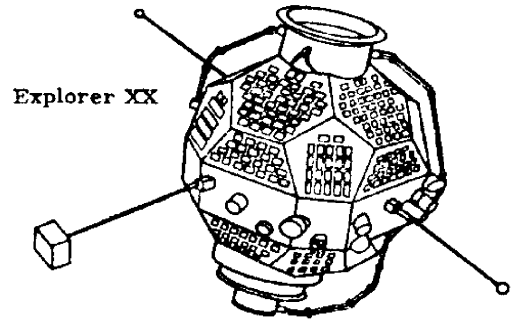
Explorer I



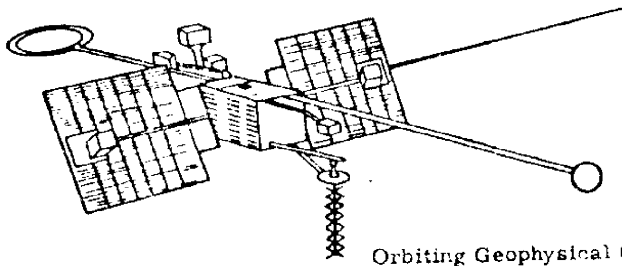
Alouette I



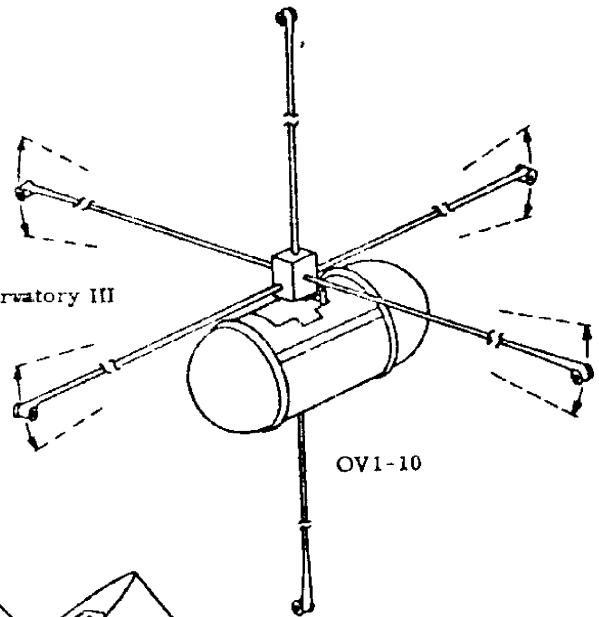
1963-22A



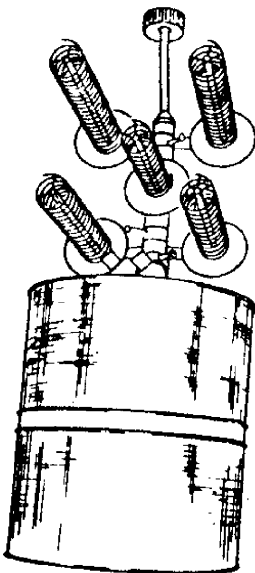
Explorer XX



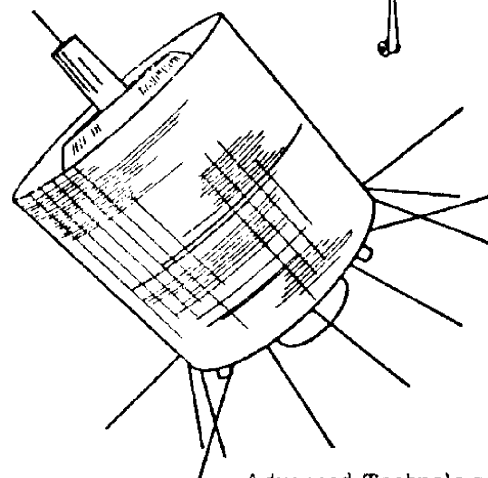
Orbiting Geophysical Observatory III



OV1-10



Tactical Communications Satellite 1



Advanced Technology Satellite 5

Figure 1 : quelques satellites à comportement anormal

Au chapitre 7, nous appliquons le formalisme précédent pour étendre le cadre à l'intégration des équations du mouvement et à la construction d'une théorie en régime autonome de saut des particules.

Nous avons reporté dans les annexes A et B les résultats de nos calculs et les comparaisons avec les résultats obtenus dans la littérature. Nous concluons ces résultats au long des pages qui suivent.



## CHAPITRE I

### MODELE DYNAMIQUE THEORIQUE D'UN SATELLITE DEFORMABLE DANS SON ENVIRONNEMENT

-:-

Avant d'aborder ce chapitre, consacré en fait à la modélisation du système qui fait l'objet de notre travail, nous voudrions rappeler que la Mécanique est une science expérimentale établissant, à partir d'observations, des axiomes sur la base desquels l'édification d'une théorie mathématique est possible.

Le mouvement des satellites artificiels est représenté avec une précision suffisante par la Mécanique classique non relativiste; celle-ci considère comme grandeurs fondamentales, absolues et indépendantes la masse, la longueur et le temps et en déduit les forces par des axiomes induits de l'expérience. La Dynamique s'édifie sur ces résultats et raisonne directement en termes de forces.

Dans l'espace géométrique considéré (espace euclidien à trois dimensions), les référentiels ou "repères" ou "axes" que nous utilisons sont tous des trièdres directs de vecteurs de base orthonormés.

Si, dans un repère donné, les accélérations des éléments d'un système isolé ne sont dues qu'à des interactions entre ces éléments, le repère est dit inertiel, inertial, galiléen ou encore absolu ; on conçoit combien cette définition est académique, seul l'Univers entier pouvant être effectivement considéré comme "isolé" ! Nous traiterons comme inertiel tout repère qui, pour les besoins de l'étude, vérifie suffisamment bien la propriété énoncée. Rappelons que tous les repères galiléens sont en translation rectiligne à vitesse constante les uns par rapport aux autres.

## 1.1. NOTION D'EQUILIBRE D'UN SATELLITE VISCOELASTIQUE CONTENANT DES ROTORS :

### 1.1.1. Equilibre statique :

L'expérience montre qu'un corps viscoélastique qui ne présente aucun mouvement d'ensemble vis-à-vis d'un repère inertiel et n'est soumis à aucune action extérieure (champ de forces, contacts, etc...) ou du type "éjection de masse" prend après un certain temps une forme bien définie, dite d'équilibre statique. Le concept d'équilibre statique peut aisément être étendu au cas des corps partiellement rigides - partiellement viscoélastiques, au cas de plusieurs corps connectés pourvu que les connexions contiennent un rappel dissipatif et enfin au cas important où le corps déformable contient des rotors rigides de révolution autour de leur axe de rotation, l'équilibre statique étant défini alors moteur coupé et rotor arrêté ; puisque ces rotors sont symétriques, leur position propre à l'arrêt est indiscernable et n'affecte en rien la configuration du système.

Par contre, dans le cas d'articulations sans rappel dissipatif (rotor sur cardans par exemple) ou dans le cas de masses liquides (réservoirs), le système conserve, en l'absence de toute action interne ou externe, la configuration qu'on lui impose à un instant donné ; c'est le cas des cardans et du liquide sur la figure 2.

On dit que dans ce cas l'équilibre statique est indéfini, indéterminé ou encore indifférent ; il ne s'agit plus en fait d'un système seulement viscoélastique, mais d'un système de plusieurs corps connectés.

Remarquons que si la configuration du système n'est pas sensiblement modifiée par l'action de la gravité terrestre ou par le mouvement de la Terre, l'équilibre statique peut être réalisé au sol.

En résumé, l'équilibre statique d'un système viscoélastique est par définition réalisé lorsque tous ses éléments constitutifs sont au repos dans un repère inertiel et que le système ne met en action aucune source d'énergie, intérieure ou extérieure. Dans le cas d'un corps totalement rigide, l'équilibre statique peut également exister en présence de forces extérieures pourvu que celles-ci constituent un torseur nul. En effet, le corps n'est

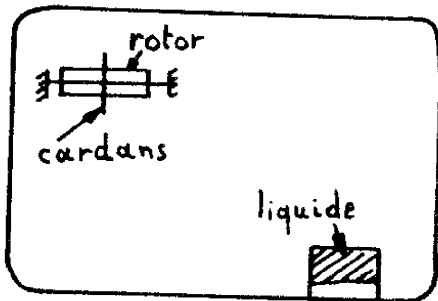


Figure 2 : corps viscoélastique  
contenant un rotor sur cardans  
et un réservoir de liquide

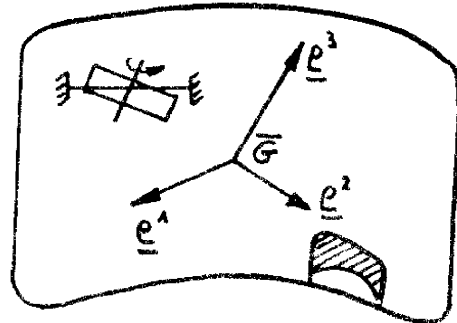


Figure 3 :  
système à l'équilibre dynamique

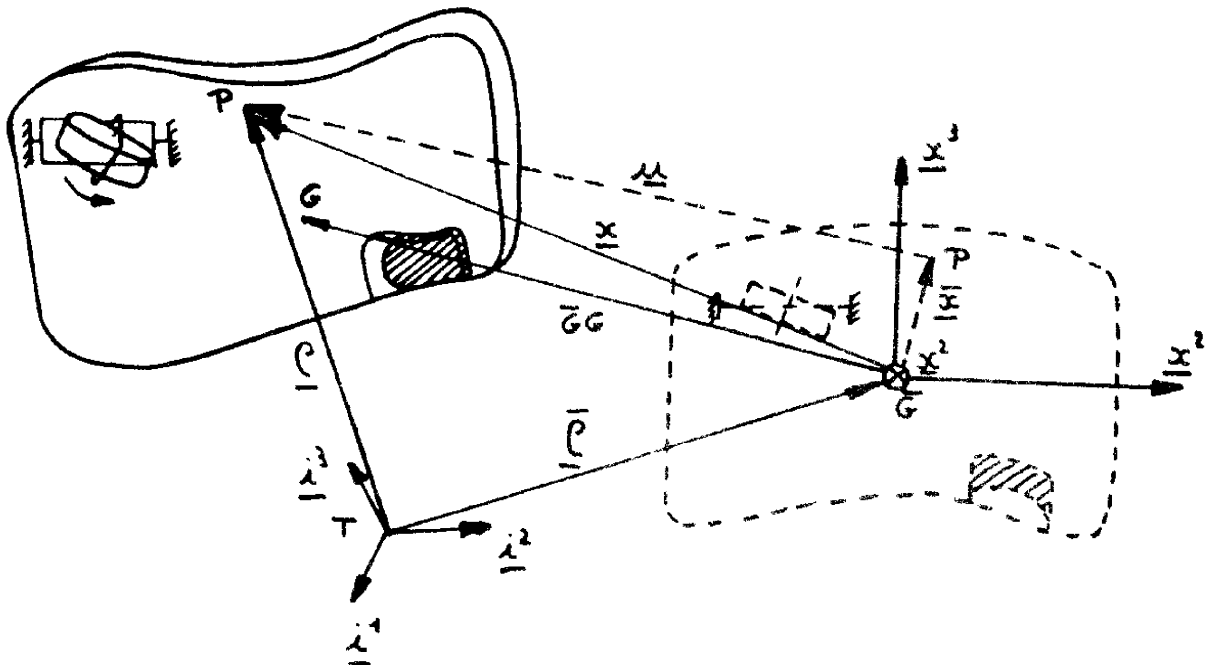


Figure 4 : définition des déplacements généralisés

alors pas mis en mouvement ; de plus, sa forme ne peut en aucun cas être affectée. C'est là le domaine de la Statique des solides.

### 1.1.2. Equilibre dynamique :

Lorsque le système viscoélastique de la figure 2 est en mouvement et soumis à des forces extérieures et intérieures (rotors, cardans et moteurs en marche notamment), sa configuration varie en général. Mais il se peut que, pendant un temps fini et sous l'action combinée de ces forces, le système garde une configuration constante tout en se déplaçant de manière voulue par rapport à un repère inertiel ; il est alors dit en état d'équilibre dynamique.

Nous verrons plus loin comment cet équilibre dynamique est défini mathématiquement et sous quelles conditions il existe. Pour l'instant, il suffit de savoir que tout système mécanique peut avoir zéro, une ou plusieurs configurations d'équilibre dynamique dans un environnement donné. S'il n'y en a pas, nous prendrons comme référence dans la suite la configuration d'équilibre statique. S'il y en a plusieurs, nous prendrons celle qu'on désire plus particulièrement étudier. Ainsi, la figure 3 montre une configuration d'équilibre dynamique possible pour le système de la figure 2, où cette fois les positions relatives de tous les points sont déterminées. Cette configuration est en général dictée par le type de mission, ainsi d'ailleurs que son orientation dans l'espace : par exemple, si  $G$  est le centre de masse de la configuration d'équilibre dynamique, on peut désirer que l'orientation de celle-ci par rapport à un repère d'équilibre d'axes  $e^1$  soit telle que l'indique la figure 3. Le mouvement des axes  $e^1$  est supposé connu ; il peut s'agir d'axes inertiels, d'axes orbitaux, d'axes en rotation rapide, d'axes qui suivent les lignes du champ géomagnétique ou de tout autre repère selon le type de mission envisagé.

### 1.2. DEPLACEMENTS GENERALISES D'UN SATELLITE DEFORMABLE :

Dans son mouvement général à configuration variable, le système précédent, soumis à des forces d'origine interne et externe, revêt à



l'instant  $t$  une forme quelconque du type représenté figure 4 et dont le centre de masse est  $G$ . Pour spécifier à tout instant la forme et la position de la structure par rapport à un repère inertiel, la définition des coordonnées de tous ses points, donc de leurs déplacements, s'impose.

### 1.2.1. Déplacements d'ensemble :

Le plus simple est d'imaginer (figure 4) au même instant  $t$  une structure fictive de centre de masse  $\bar{G}$  identique à celle de l'équilibre dynamique mais dont les rotors sont immobilisés dans leur cardan interne, et des axes  $\underline{x}^i$  d'origine  $\bar{G}$  liés à cette structure et qui ont un mouvement qu'on déterminera plus loin. Ce sont les six coordonnées de position de ces axes, par exemple les trois composantes  $\bar{\rho}_i$  dans les axes inertiels  $\underline{i}^i$  du vecteur position  $\bar{\rho}$  de  $\bar{G}$  par rapport à  $T$  et les trois angles de Bryan  $\bar{\theta}_i$  faisant passer des axes  $\underline{i}^i$  aux axes  $\underline{x}^i$  (annexe B), qui constituent les déplacements d'ensemble de la structure. L'orientation des axes  $\underline{x}^i$  par rapport à la structure fictive sera déterminée lors de l'obtention des équations du mouvement.

Le repère inertiel choisi est le repère équatorial vernal d'axes  $\underline{i}^i$  (figure 5).

### 1.2.2. Déplacements relatifs :

Soient  $\underline{x}$  et  $\bar{\underline{x}}$  les vecteurs position par rapport à  $\bar{G}$  d'un élément de matière situé au point  $P$  dans la structure réelle et dans la structure fictive, respectivement (figure 4). Si  $P$  ne se trouve pas dans un rotor, on définit le déplacement de déformation en  $P$  par le vecteur

$$\underline{u}(\bar{\underline{x}}, t) = \underline{x}(\bar{\underline{x}}, t) - \bar{\underline{x}}(t) \quad (\text{I. 1})$$

Cette définition est lagrangienne en ce sens qu'elle définit les déplacements en fonction des positions à l'état de référence, ou encore parce qu'elle considère l'évolution des particules individuelles du matériau.

Si  $P$  se trouve dans un rotor, on définit son déplacement de déformation  $\underline{u}$  comme celui que prendrait le point correspondant (même  $\underline{x}$ ) d'un rotor fictif "figé" dans son cardan interne, c'est-à-dire sans rotation propre (figure 6).

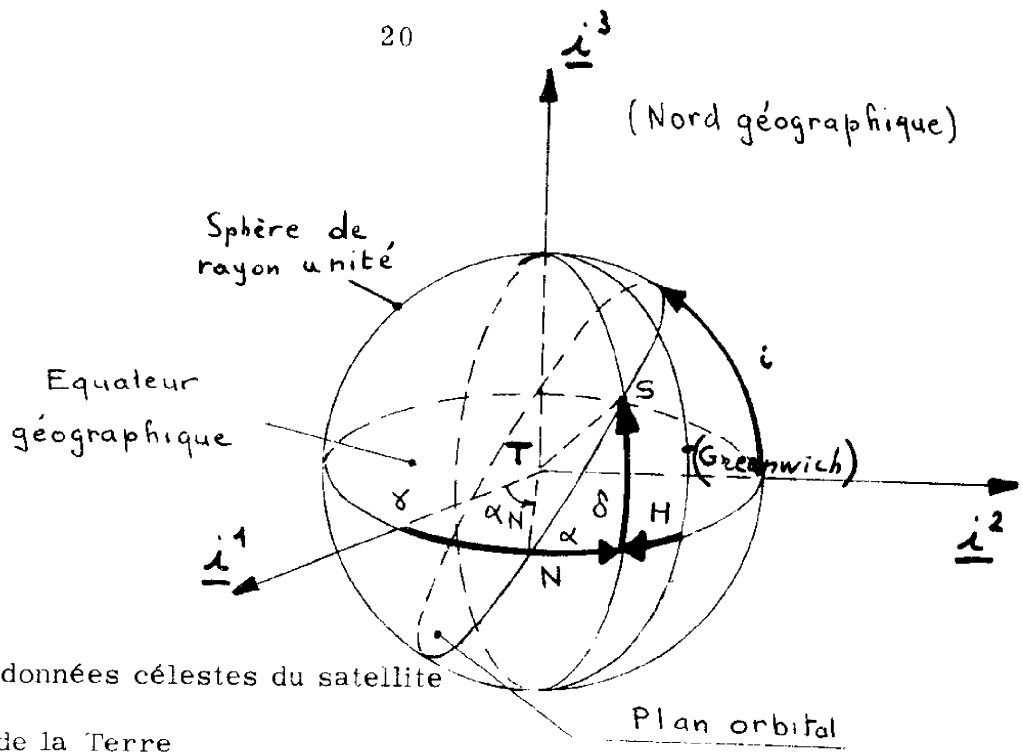


Figure 5 : coordonnées célestes du satellite

- T : centre de la Terre
- S : point repérant la position du satellite
- N : point nodal (intersection équateur-orbite), mobile
- $\gamma$  : point vernal (intersection écliptique-équateur), fixe
- $\alpha$  : ascension droite  $> 0$  vers l'est
- $\delta$  : déclinaison
- $\alpha_N$  : ascension droite du point nodal
- H : angle horaire  $> 0$  vers l'ouest
- i : inclinaison
- $\alpha + H = \Omega_g t$  : temps sidéral  $\times 2\pi / (8.64 \cdot 10^4)$
- $\Omega_g = 7.28 \cdot 10^{-5}$  rd/s : vitesse angulaire de rotation de la Terre.

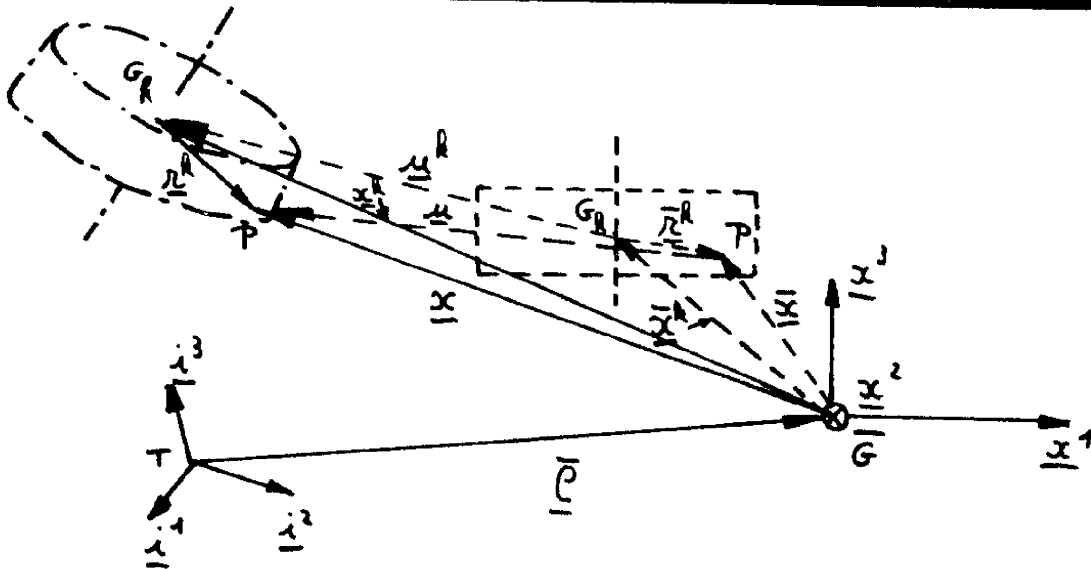


Figure 6 : déplacements, du fait des déformations, d'un rotor "figé"

Les déplacements de déformation constituent, avec les déplacements de rotation propre des rotors, les déplacements internes de la structure.

### I. 3. FONCTIONS CINÉTIQUES :

Les équations du mouvement font intervenir principalement trois fonctions cinétiques classiques.

#### I. 3. 1. Quantité de mouvement résultante absolue :

Elle est définie par :

$$\underline{p}(t) = \int_m \underline{\dot{c}} \, dm = \iiint_{\text{volume total}} \underline{\dot{c}}(\underline{\bar{c}}, \underline{x}, t) \sigma(\underline{x}) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

où  $\sigma(\underline{x})$  est la masse volumique à l'équilibre dynamique au point considéré.

Si P ne se trouve pas dans un rotor, on a :

$$\underline{\dot{c}} = \underline{\dot{\bar{c}}} + \underline{\dot{x}} = \underline{\dot{\bar{c}}} + \underline{\overset{o}{x}} + \underline{\Omega} \times \underline{x}$$

où

$\underline{\overset{o}{x}}$  est la dérivée temporelle de  $\underline{x}$  relativement au repère  $\underline{x}^i$  (ce vecteur a  $\dot{x}_i$  comme composantes dans les axes  $\underline{x}^i$ , de même que la dérivée temporelle absolue  $\underline{\dot{\bar{c}}}$  de  $\underline{\bar{c}}$  a comme composantes  $\dot{\bar{c}}_i$  dans le repère inertiel, cf. annexe B) ; on a de toute évidence  $\underline{\overset{o}{x}} = 0$ .

$\underline{\Omega}$  est la vitesse angulaire absolue des axes  $\underline{x}^i$ .

Si P se trouve dans le k-ième rotor de centre de masse  $G_k$  on a (figure 6) :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{c}} &= \underline{\dot{\bar{c}}} + \underline{\dot{x}} = \underline{\dot{\bar{c}}} + \underline{\overset{o}{x}} + \underline{\Omega} \times \underline{x} = \underline{\dot{\bar{c}}} + \underline{\overset{o}{x}^k} + \underline{\overset{o}{r}^k} + \underline{\Omega} \times \underline{x} \\ &= \underline{\dot{\bar{c}}} + \underline{\overset{o}{x}^k} + \underline{\Omega}^k \times \underline{r}^k + \underline{\Omega} \times \underline{x} = \underline{\dot{\bar{c}}} + \underline{\dot{u}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x} + \underline{\Omega}^{k//} \times \underline{r}^k \end{aligned}$$

où

- $\underline{\Omega}^k$  est la vitesse angulaire du k-ième rotor vis-à-vis des axes  $\underline{x}^i$  ;
- $\underline{\Omega}^{k//}$  est la vitesse angulaire par rapport à son cardan interne, du k-ième rotor. Ce vecteur est parallèle à l'axe du rotor ;
- $\underline{u} = \underline{u}^k + (\underline{\Omega}^k - \underline{\Omega}^{k//}) \times \underline{r}^k$  n'est pas en général la vitesse de déplacement vrai de P relativement aux axes  $\underline{x}^i$  (se rappeler la définition de  $\underline{u}$ , § 1.2.2) sauf si  $\underline{\Omega}^{k//} = \underline{0}$  (roue "figée" sur son axe ; on a donc rejeté de la vitesse de déplacement relatif la partie rotation propre du rotor).

Remarquons qu'on a ici encore,  $\underline{\dot{x}} = \underline{0}$  puisque les rotors de la structure fictive de référence sont à l'arrêt. De plus, on posera

$\underline{\Omega}^{kd} = \underline{\Omega}^k - \underline{\Omega}^{k//}$ , vitesse angulaire du k-ième rotor par rapport aux axes  $\underline{x}^i$  du fait des déformations de la structure.

Finalement, puisque  $\int_m dm = m$  (masse totale) et  $\int_m \underline{x} dm = \underline{0}$  (par définition de  $\bar{G}$ ), on obtient :

$$\underline{p} = \underline{p}^e + \underline{p}^d + \underline{p}^{ed} \quad (1.2)$$

avec

- $\underline{p}^e = m \underline{\dot{c}}$ , quantité d'entraînement dû au mouvement de  $\bar{G}$  ;
- $\underline{p}^d = \int_m \underline{\dot{u}} dm$ , quantité relative de déformation ;
- $\underline{p}^{ed} = \underline{\Omega} \times \int_m \underline{u} dm$ , quantité complémentaire de couplage entraînement-déformation.

### 1.3.2. Moment cinétique résultant absolu autour de $\bar{G}$ :

On le définit par  $\underline{h}(t) = \int_m \underline{x} \times \underline{\dot{c}} dm$

$$= \int_m \underline{x} \times (\underline{\dot{c}} + \underline{\dot{u}} + \underline{\Omega} \times \underline{x}) dm + \sum_k \int_{m_k} \underline{x} \times (\underline{\Omega}^{k//} \times \underline{r}^k) dm$$

où

- $\sum_k$  implique une sommation sur tous les rotors ;
- $\int_{m_k}$  implique une intégration sur la masse du k-ième rotor.

$$\text{On obtient : } \underline{h} = \underline{h}^e + \underline{h}^{\parallel} - \underline{h}^d + \underline{h}^{ed} \quad (1.3)$$

avec :

$$\underline{h}^e = \underline{J} \cdot \underline{\Omega} \quad \text{moment d'entraînement dû à la rotation des axes } \underline{x}^i;$$

il dépend notamment de la configuration, donc de  $\underline{u}$  ;

$$\underline{J} = \int [(\underline{x} \underline{x}) \underline{\mathbb{1}} - \underline{x} \underline{x}] dm \quad \text{tenseur d'inertie [39] par rapport à } \bar{G}$$

de la structure totale déformée ;

$\underline{\mathbb{1}}$  est le tenseur-unité (a pour matrice dans tout système d'axes la matrice-unité  $\mathbb{1}$ ) ;

$$\underline{h}^{\parallel} = \sum_k \underline{h}^{k \parallel}$$

$$\underline{h}^{k \parallel} = \underline{i}^{k \parallel} \underline{\Omega} \quad \text{moment relatif du } k\text{-ième rotor par rapport}$$

à son cardan interne, c'est un vecteur parallèle

à l'axe du rotor ou que celui-ci est de révolution ;

$$\underline{i}^{k \parallel} = \int_{m_R} [(\underline{r}^k \underline{r}^k) \underline{\mathbb{1}} - \underline{r}^k \underline{r}^k] dm \quad \text{tenseur central d'inertie du}$$

$k$ -ième rotor ;

$$\underline{h}^d = \int_m \underline{x} \times \underline{\dot{u}} dm \quad \text{moment relatif de déformation ;}$$

$$\underline{h}^{ed} = \int_m \underline{u} dm \times \underline{\dot{c}} \quad \text{moment complémentaire de couplage}$$

entraînement-déformation.

### 1.3.3. Énergie cinétique résultante absolue :

Elle vaut par définition  $T(t) = \frac{1}{2} \int_m \|\underline{\dot{c}}\|^2 dm$

$$= \frac{1}{2} \int_m \|\underline{\dot{c}} + \underline{\dot{u}} + \underline{\Omega} \times \underline{x}\|^2 dm + \sum_R \int_{m_R} \|\underline{\Omega}^{R \parallel} \times \underline{r}^k\|^2 dm +$$

$$\sum_R \int_{m_R} (\underline{\dot{c}} + \underline{\dot{u}} + \underline{\Omega} \times \underline{x}) \cdot (\underline{\Omega}^{R \parallel} \times \underline{r}^k) dm$$

Après développement, on obtient :

$$T = T_e + T_{\parallel} + T_d + T_{e \parallel} + T_{ed} + T_{\parallel d} \quad (1.4)$$

avec :

$$T_e = \frac{1}{2} m \|\underline{\dot{c}}\|^2 + \frac{1}{2} \underline{\Omega} \cdot \underline{J} \underline{\Omega} \quad \text{énergie d'entraînement par}$$

les axes  $\underline{x}^i$  ;

$$\left. \begin{aligned}
 T_{//} &= \frac{1}{2} \sum_k \underline{\underline{\Omega}}^{k//} \cdot \underline{\underline{h}}^{k//} \quad \text{énergie relative due à la rotation propre} \\
 &\quad \text{des rotors ;} \\
 T_d &= \frac{1}{2} \int_m \|\underline{\underline{v}}^c\|^2 dm, \quad \text{énergie relative de déformation ;} \\
 T_{e//} &= \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{h}}^{e//} \quad \text{énergie complémentaire de couplage entraînement-} \\
 &\quad \text{rotation propre des rotors ;} \\
 T_{ed} &= \underline{\underline{\dot{c}}} \cdot \underline{\underline{p}}^d + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{h}}^d + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\dot{c}}} \cdot \underline{\underline{p}}^{ed} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{h}}^{ed}), \quad \text{énergie complémen-} \\
 &\quad \text{taire de couplage entraînement-déformation ;} \\
 T_{//d} &= \sum_k \underline{\underline{\Omega}}^{kd} \cdot \underline{\underline{h}}^{k//} \quad \text{énergie complémentaire de couplage rotation} \\
 &\quad \text{propre des rotors-déformation.}
 \end{aligned} \right\}$$

#### 1.4. AXES "LIÉS" DEGRÉS DE LIBERTÉ ET COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES

##### 1.4.1. Choix des axes $\underline{\underline{x}}^i$ :

Il est bon de rappeler à présent que les axes  $\underline{\underline{x}}^i$  ne sont encore aucunement "liés" à la structure réelle (cf. figure 4). Il y a plusieurs possibilités pour définir des axes  $\underline{\underline{x}}^i$  "liés" à une structure déformable : aussi devons-nous nous imposer un choix de ce repère.

Certains auteurs choisissent pour axes  $\underline{\underline{x}}^i$  les axes principaux centraux d'inertie instantanés de la structure réelle, ou encore des axes d'origine au centre de masse global G et tels que le moment cinétique relatif ( $\underline{\underline{h}}^d + \underline{\underline{h}}^{//}$ ) soit nul à tout instant (axes de Tisserand utilisés dans l'étude des planètes déformables). Mais l'orientation de tels axes se définit par des équations qui mènent à un modèle inextricable dans le cas général.

D'autres, invoquant le fait que les satellites comportent presque toujours un ou plusieurs corps rigides, préfèrent lier les axes  $\underline{\underline{x}}^i$  à l'un de ceux-ci. Dans ce cas, tous les termes recensés dans les fonctions cinétiques du § 1.3. sont présents [27, 1, 9, 29, 30, 49, 50, 51].

De plus, ce choix ne conduit pas à une forme générale, applicable dans tous les cas, des équations de Lagrange : il implique donc l'élimination de forces et couples de réaction entre les parties constitutives du satellite. Cette méthode des axes réellement liés se révèle cependant la plus rapide dans les cas simples.

Nous adopterons quant à nous comme axes "liés" les axes introduits dans [3,6,57,58,37] et définis à tout instant par les contraintes (certains auteurs disent "liaisons")

$$\int_m \underline{u} \, dm = \underline{0} \quad (I.5)$$

$$\int_m \underline{\bar{x}} \times \underline{u} \, dm = \underline{0} \quad (I.6)$$

La première de ces relations entraîne  $\int_m \underline{x} \, dm = \underline{0}$  et donc que  $\bar{G}$  coïncide avec  $G$  ; on a ainsi positionné l'origine des axes  $\underline{x}^i$  au centre de masse global. La seconde a pour effet d'orienter les axes  $\underline{x}^i$  par rapport à la structure réelle déformée. En conséquence, le mouvement de ces axes est à présent fixé par le mouvement de la structure réelle ; on les a "liés" à cette structure par six contraintes analytiques. L'avantage de ce choix est de simplifier considérablement les fonctions cinétiques. En effet, par dérivation immédiate dans les axes  $\underline{x}^i$  des six contraintes de définition (I.5) et (I.6), on obtient :

$$\int_m \underline{\dot{u}} \, dm = \underline{0} \quad \text{et} \quad \int_m \underline{\bar{x}} \times \underline{\dot{u}} \, dm = \underline{0}$$

ce qui entraîne l'annulation de  $\underline{p}^d$ ,  $\underline{p}^{ed}$ ,  $\underline{h}^{ed}$  et la simplification notable de  $\underline{h}^d$  et  $T_{ed}$  qui s'écrivent à présent

$$\underline{h}^d = \int_m \underline{u} \times \underline{\dot{u}} \, dm ; \quad T_{ed} = \underline{\Omega} \cdot \underline{h}^d \quad (I.7)$$

Ainsi,  $\underline{p}$  ne comporte plus que la quantité d'entraînement dû au mouvement de  $G$ , et les termes en  $\underline{u}$  et  $\underline{\dot{u}}$  contenus dans  $\underline{h}$  et  $T$  sont du second degré.

En outre, les axes  $\underline{x}^i$  définis par (I.5) et (I.6) rendent minimum la quantité  $\int_m \|\underline{u}\|^2 \, dm$ , ce qui valide au mieux les hypothèses de linéarisation [12].

#### 1.4.2. Degrés de liberté et coordonnées généralisées :

Nous avons vu que le système de la figure 4 possède six degrés de liberté de déplacement d'ensemble par rapport aux axes inertiels ; les

coordonnées généralisées correspondantes sont  $\bar{\theta}_i$  et  $\bar{c}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Pour ce qui est des déplacements relatifs, supposons qu'il y ait  $n_\psi$  rotors : il y a donc  $n_\psi$  coordonnées angulaires  $\psi_{//}^k$  de rotation propre des rotors ( $k = 1, 2, \dots, n_\psi$ ) ; quant aux déplacements de déformation  $\underline{u}$ , ce sont soit des déplacements "discrets" (d'un corps rigide principal, de plusieurs corps rigides articulés, d'amortisseurs discrets de nutation, de corps commandés tels que cardans ou panneaux solaires en rotation, etc...), soit des déplacements "répartis" (c'est-à-dire des déformations continues de parties flexibles ou de liquides) ; aux premiers correspondent des coordonnées généralisées  $\gamma_i$  en nombre fini ( $i=1, 2, \dots, n_\gamma$ ) et aux seconds correspondent des fonctions réparties (par exemple le déplacement relatif  $\underline{w}(\underline{x}, t)$  de tous les points d'un panneau solaire par rapport au corps principal du satellite). Ainsi, un satellite déformable comporte en toute généralité  $n_q = 6 + n_\psi + n_\gamma$  coordonnées discrètes condensées dans la matrice

$$(n_q \times 1) q(t) = [\bar{c}^T, \bar{\theta}^T, \gamma^T, \psi_{//}^T]^T \quad (I.8)$$

où  $\bar{\theta}^T = [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3]$ ,  $\gamma^T = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_\gamma}]$  et  $\psi_{//}^T = [\psi_{//}^1, \psi_{//}^2, \dots, \psi_{//}^{n_\psi}]$ ,

ainsi que des coordonnées réparties  $\underline{w}(\underline{x}, t)$ , dont on tâchera de trouver des combinaisons linéaires scalaires et adimensionnelles de la forme  $\mathcal{N}(\xi, t)$  où  $\xi$  est une variable spatiale adimensionnelle (l'abscisse réduite d'un point du panneau solaire par exemple).

C'est en ce sens qu'on parle de coordonnées hybrides pour caractériser un satellite flexible.

Quoi qu'il en soit, les relations (I.5) et (I.6) de définition des axes  $\underline{x}^i$  constituent un système de contraintes qui permettent théoriquement d'éliminer six des coordonnées généralisées de déformation ; ceci sera explicité au § I.8 et on supposera cette élimination effectuée par la suite (on est alors en présence d'un système non contraint où les coordonnées généralisées forment un système complet de variables indépendantes).



## I. 5. FONCTIONS POTENTIELLES :

Les équations du mouvement font encore intervenir des fonctions potentielles, qui sont de deux types : d'origine extérieure et d'origine intérieure au système .

### I. 5. 1. Energie potentielle des forces de gravitation :

De toutes les forces extérieures s'exerçant sur un satellite, seules les forces gravitationnelles dépendent, du moins de manière sensible et exprimable analytiquement, des variations de configuration, c'est-à-dire des déplacements de déformation. C'est pourquoi nous nous en tenons au calcul du potentiel  $V_g$  des forces de gravitation. Un bon modèle de ce potentiel est obtenu en assimilant la Terre à un sphéroïde [10]. Si les harmoniques zonales sont prédominants,

$$V_g(t) = -\mu_g \int_m \frac{1}{\|\underline{e}\|} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left( \frac{r_g}{\|\underline{e}\|} \right)^n \mathcal{P}_n(\sin \phi_\ell) \right] dm \quad (\text{I. 9})$$

où  $\mu_g = 3.99 \cdot 10^{14} \text{ N.m}^2/\text{kg}$  est la constante de gravitation terrestre ;  
 $c_n$  sont des constantes ( $c_2 = 1.08 \cdot 10^{-3}$ , etc...)  
 $r_g = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$  est le rayon terrestre ;  
 $\mathcal{P}_n(\sin \phi_\ell)$  est un polynôme de Legendre ( $\phi_\ell$  : latitude)

En ne gardant que le premier terme de ce développement (Terre supposée sphérique et homogène) et en supposant  $\|\underline{x}\| \ll \|\underline{e}\|$  (dimensions du satellite petites comparativement à la distance qui le sépare du centre de la Terre), il vient, jusqu'au second ordre en  $\|\underline{x}\| / \|\underline{e}\|$  :

$$V_g = -\mu_g \int_m \frac{1}{\|\underline{e} + \underline{x}\|} dm \approx -\frac{\mu_g}{\|\underline{e}\|} \int_m \left[ 1 - \frac{\underline{x} \cdot \underline{e}}{\|\underline{e}\|^2} - \frac{\|\underline{x}\|^2}{2\|\underline{e}\|^2} + \frac{3(\underline{x} \cdot \underline{e})^2}{2\|\underline{e}\|^4} \right] dm$$

Pour donner à ce potentiel une forme analytique compacte, il faut définir un repère orbital local d'axes  $\underline{o}^i$  (figure 7) tels que :

$$\left[ \begin{array}{l} \underline{o}^1 = \|\underline{e}\|^{-1} \underline{e} \quad (\text{ce vecteur pointe donc le zénith}); \\ \underline{o}^3 = \|\underline{\Omega}\|^{-1} \underline{\Omega} \quad (\underline{\Omega} \text{ étant la vitesse angulaire absolue de G} \\ \text{ou vitesse orbitale}), \\ \underline{o}^2 = \underline{o}^3 \times \underline{o}^1 \quad (\text{la vitesse de G est parallèle à ce vecteur en orbite} \\ \text{circulaire}). \end{array} \right.$$

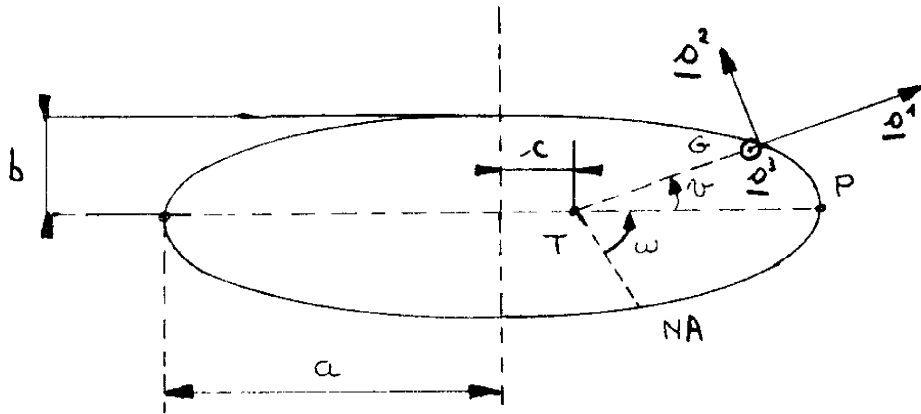


Figure 7 : repère orbital

$P$  : péricée  
 $\nu$  : anomalie vraie (rotations  $> 0$  dans le sens de  $\underline{p}^3$ )  
 $NA$  : noeud ascendant (direction du point nodal)  
 $\omega = 2\pi - \nu_N$  : "argument" du péricée  
 $e = c/a$  : excentricité

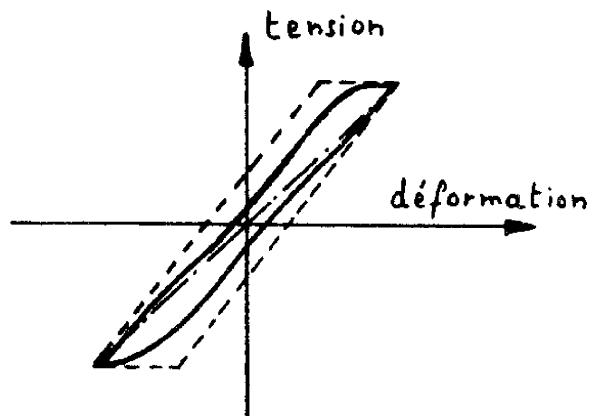


Figure 8 : courbe d'hystérésis viscoélastique

En notations matricielles, en choisissant d'exprimer  $\underline{\sigma}^i$  et  $\underline{\underline{J}}$  en axes  $\underline{x}^i$  ( $\underline{\sigma}^i = [\underline{x}]^T \underline{\sigma}^i$ ;  $\underline{\underline{J}} = [\underline{x}]^T \underline{\underline{J}} [\underline{x}]$ ) et par définition on définit on peut exprimer  $V_g$  sous la forme

$$V_g \approx - \frac{\mu_g m}{(\bar{\rho}^T \bar{\rho})^{1/2}} + \frac{\mu_g}{2(\bar{\rho}^T \bar{\rho})^{3/2}} \int_m (x^T x - 3 \sigma^{1T} x x^T \sigma^1) dm$$

ou encore sous la forme très simple

$$V_g \approx - \frac{\mu_g m}{(\bar{\rho}^T \bar{\rho})^{1/2}} + \frac{\mu_g}{2(\bar{\rho}^T \bar{\rho})^{3/2}} (3 \sigma^{1T} \underline{\underline{J}} \sigma^1 - \text{tr} \underline{\underline{J}}) \quad (1.10)$$

où  $\text{tr} \underline{\underline{J}}$  signifie trace de la matrice  $\underline{\underline{J}}$  (c'est-à-dire des trois invariants du tenseur  $\underline{\underline{J}}$ ).

### 1.5.2. Energie potentielle de déformation élastique, amortissement, structural :

Parmi toutes les forces qui s'exercent sur les éléments constitutifs de la structure, on peut recenser des forces d'origine extérieure, des forces d'inertie d'entraînement (forces centrifuges), des forces internes de commande (moteurs, etc...), ainsi que des forces de réaction dues à la rigidité gyroscopique des rotors.

À ces forces s'ajoutent, dès qu'il y a des déformations, des forces d'interaction structurale. Il est bon de noter que, dans ce cas, toutes les forces précédemment citées traitent. C'est pourquoi nous les appelons "forces potentielles".

Les structures de satellites sont généralement telles que, en mode opérationnel, les gradients des déplacements  $\underline{g}$  de déformation restent très petits ainsi que leurs dérivées. On utilisera donc la théorie des structures viscoélastiques linéaires, non seulement pour leur commodité de traitement, mais aussi parce qu'elles sont raisonnablement bien vérifiées par les résultats de tests vibratoires [13]. Si les propriétés élastiques linéaires des matériaux sont bien connues, on ne peut pas en dire autant des phénomènes de dissipation. Lorsqu'un échantillon de matériau viscoélastique subit des cycles ordonnés de traction-compression [34], son

diagramme tension-déformation est de la forme donnée à la figure 8 alors que, pour des mises en charge très lentes (isothermes), il correspondrait à la droite en trait d'axes et, pour des mises en charges instantanées (adiabatiques) entrecoupées par des temps d'arrêt, il prendrait la forme du parallélogramme pointillé (il y a fluage pendant les temps d'arrêt sur les segments de droite horizontaux).

Dans les matériaux polycristallins, les propriétés thermoélastiques de chaque cristal dépendent de son orientation par rapport à l'axe de mise en charge et la largeur de la boucle d'hystérésis dépend par conséquent de l'intensité des échanges calorifiques entre les différents grains du métal donc de la grosseur de ces grains. Comme il est bien connu que la surface d'un corpuscule augmente moins vite que son volume lorsqu'on accroît son diamètre, l'hystérésis doit être particulièrement importante dans les matériaux à grains fins, ce qui est confirmé par l'expérience ; il va de soi que la nature métallographique des joints de grains joue également un rôle important. L'allure de la courbe d'hystérésis dépend du type de matériau aussi bien que du mode de mise en charge et de son amplitude. Quoiqu'il en soit, cette courbe reste dans tous les cas excessivement plate du fait que l'amortissement structural est en réalité très faible ; ceci permet de séparer les effets d'élasticité et d'amortissement tout en supposant que ces phénomènes sont linéaires.

Dans les cas que nous aurons à traiter, l'énergie potentielle élastique sera toujours une somme de termes quadratiques, de la forme générale

$$V_d = \int_{\mathcal{D}_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial \xi} \right) \right] d\xi \quad (\text{I. 11})$$

où l'on a tenu compte de la partie constante (à l'équilibre dynamique) des "forces potentielles" ; la dépendance en  $\eta$  et  $\xi$  provient des éventuels amortisseurs discrets évoqués au § I. 4. 2 ;  $\eta$  est une coordonnée scalaire adimensionnelle de déplacement (correspondant aux déplacements relatifs  $\underline{x}$  comme au § I. 4. 2.) ;

$\left. \begin{array}{l} \} \text{ est une coordonnée spatiale scalaire adimensionnelle définie sur } ] 0, 1[ \\ \text{(une abscisse réduite, comme au § 1.4.2. ou une combinaison linéaire} \\ \text{de telles abscisses).} \end{array} \right\}$

La représentation de l'amortissement se fera sur le système discrétisé au § 1.10.

Mentionnons en outre que, si l'on a du jeu dans l'assemblage du satellite, l'hypothèse de linéarité de la structure complète est évidemment remise en question, même si les éléments constitutifs, pris séparément, ont un comportement viscoélastique linéaire : ce problème demanderait une étude plus poussée.

## 1.6. MOMENT DES COUPLES EXTERIEURS :

Les équations du mouvement font intervenir entre les forces et couples au sens de Newton et de source extérieure au satellite. La force résultante  $\underline{f}$  qui s'exerce sur un satellite provient d'une part de l'attraction terrestre (il s'agit, par (1.12), de son poids  $-m\mu_g \|\underline{\bar{e}}\|^{-3} \underline{\bar{e}}$ , à des termes du second degré en  $\|\underline{x}\| / \|\underline{\bar{e}}\|$  près) et, d'autre part, de la pression de radiation solaire (à chiffrer évidemment dans chaque cas particulier) et des effets de l'attraction luni-solaire, les autres forces étant négligeables dans la plupart des cas.

Approfondissons plutôt le cas des couples.

### 1.6.1. Couple du gradient de gravité :

Supposant la Terre sphérique et homogène, la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de masse  $dm$  vaut

$$\underline{df}^g(t) = -\underline{\text{grad}}(dV_g) = \mu_g dm \underline{\text{grad}}\left(\frac{1}{\|\underline{\bar{e}} + \underline{x}\|}\right) = -\mu_g \frac{\underline{\bar{e}} + \underline{x}}{\|\underline{\bar{e}} + \underline{x}\|^3} dm \quad (1.12)$$

Le moment du couple résultant autour de G est alors :

$$\underline{L}^g(t) = \int_m \underline{x} \times \underline{df}^g$$

Sous l'hypothèse que  $\| \mathbf{a} \| \ll \| \mathbf{b} \|$ , on obtient, jusqu'au second ordre en  $\| \mathbf{a} \| / \| \mathbf{b} \|$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \frac{d^g}{b^g} \left( \frac{a_x}{b_x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a_y}{b_y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_z}{b_z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{M} + \dots$$

ou, en notations matricielles en axes  $x^1$  (cf. figure 7)

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \frac{d^g}{b^g} \begin{pmatrix} \frac{a_x}{b_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_y}{b_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_z}{b_z} \end{pmatrix} \mathbf{M} + \dots \quad (I.13)$$

1.6.2. Couple magnétique :

Le satellite comporte toujours un moment dipolaire magnétique résultant  $\underline{d}$ , soit comme résidu parasite, soit pour des besoins de commande d'attitude. Son interaction avec l'induction géomagnétique locale  $b^g$  crée un couple

$$\underline{l}^m(t) = \underline{d} \times b^g \text{ indépendant par hypothèse de l'état de déformation}$$

En idéalisant le champ géomagnétique comme celui d'un "dipôle géomagnétique" centré au centre de la Terre, orienté Nord-Sud, et de moment dipolaire  $d^g$ , on a

$$\underline{l}^m = \frac{d^g}{r^3} \left( \underline{r} \times \underline{d} \right) \quad (I.14)$$

Ecrivons cette relation sous forme matricielle en axes  $x^1$  :

5 et 7 :

$$\underline{l}^m = \frac{d^g}{r^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}^1 \quad \text{ou en utilisant les angles des figures} \quad (I.15)$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \text{ , perméabilité magnétique du vide ;} \\ R^\theta \text{ , matrice de rotation faisant passer des axes } \underline{o}^c \text{ aux axes } \underline{x}^1 \\ \text{(voir § 1.7.5) ;} \\ \|\underline{d}^y\| = 8.06 \cdot 10^{22} \text{ A.m}^2. \end{array} \right.$

Dès lors, en axes  $\underline{x}^1$  :  $\underline{m} = \underline{d}^y \underline{t}^y$  (1.15)

### 1.6.3 Autres couples :

D'autres couples, plus ou moins importants selon les cas, sont le couple de pression de radiation solaire  $\underline{l}^y(t)$  et le couple aérodynamique  $\underline{l}^a(t)$ , ils dépendent entre autres des surfaces apparentes et doivent être évalués, numériquement ou graphiquement, dans chaque cas particulier, comme nous l'avons fait en [25] et [26]. Citons également les couples perturbateurs dus à l'attraction luni-solaire.

Enfin, les couples dus aux impacts des micrométéorites, aux interactions coulombiennes entre les charges électriques embarquées et la magnétosphère, aux forces magnétiques de Lorentz sur les courants opérationnels et de Foucault, etc... sont négligés.

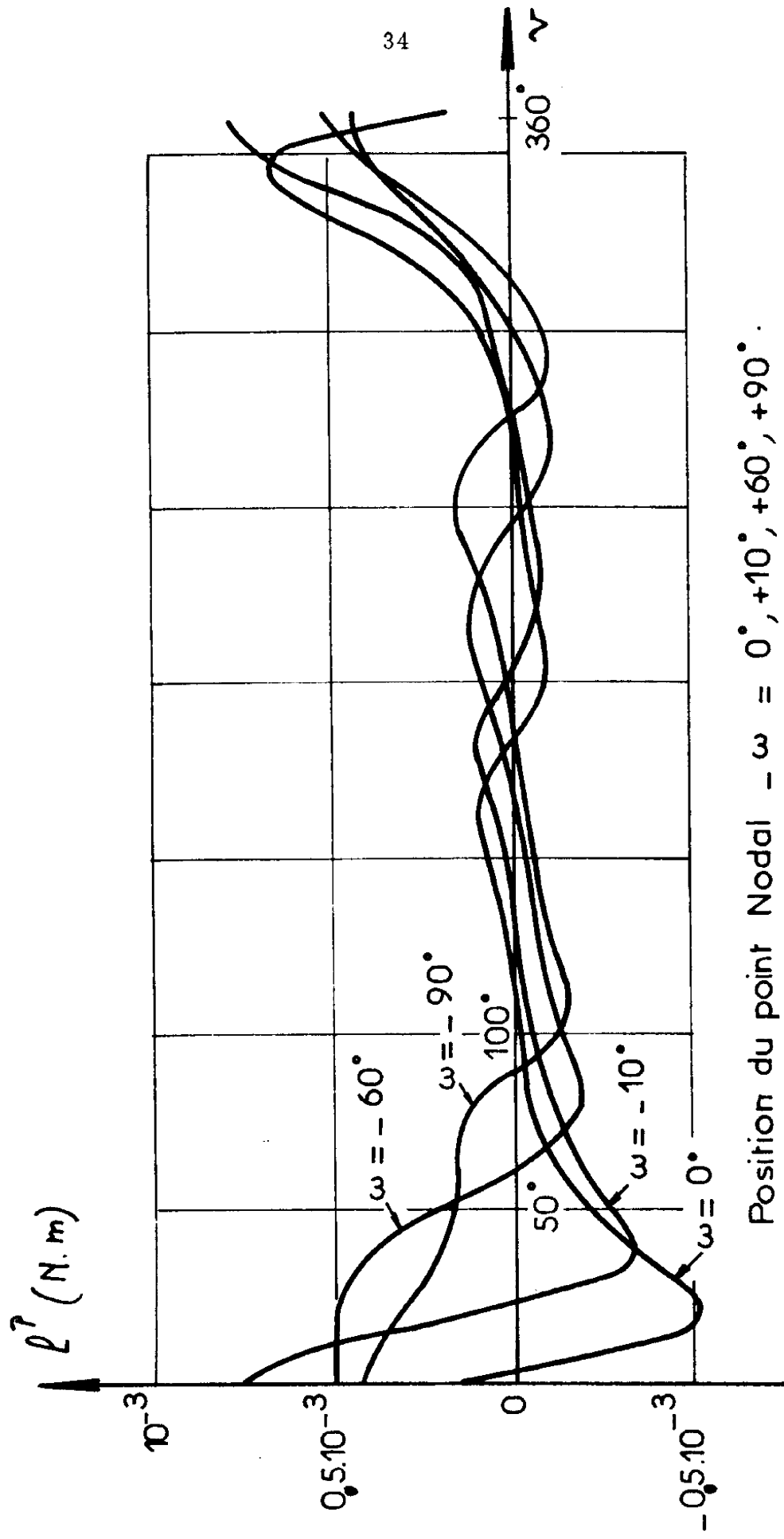
Il convient de mentionner cependant une autre source de couple  $\underline{l}^c$  (accompagné d'une force  $\underline{f}^c$  d'ailleurs) qui est engendrée par des jets de gaz pour les manoeuvres commandées (corrections d'orbite et désaturation des stabilisateurs gyroscopiques).

A titre indicatif, la figure 9 montre, pour différentes valeurs de l'argument du périhélie, la résultante des couples perturbateurs, couples d'inertie compris, qui s'exercent au long d'une orbite sur le satellite DIPO, satellite à stabilisation sur le champ géomagnétique (dont nous avons étudié en [25] la faisabilité; l'orbite est supposée polaire-magnétique).

## 1.7. EQUATIONS LINEAIRES DU MOUVEMENT

### 1.7.1. Equations de Lagrange :

L'examen des expressions des énergies cinétique (1.4) et potentielle (1.10, 1.11) montre que celles-ci sont de la forme



Position du point Nodal -  $\omega = 0^\circ, +10^\circ, +60^\circ, +90^\circ$ .

Figure 9 : couples perturbateurs s'exerçant sur DIAPO



$$T = \int_0^1 \mathcal{T} d\zeta \quad \text{et} \quad V = \int_0^1 \mathcal{V} d\zeta \quad (1.17)$$

Ceci permet de définir une Lagrangienne :

$$L = \int_0^1 \mathcal{L} d\zeta = T - V \quad (\text{fonctionnelle linéaire}) \quad (1.18)$$

où, en toute généralité et en fonction des coordonnées définies aux § 1.4.2 et 1.5.2 :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left[ q^r, \left( \frac{dq^r}{dt} \right)^r, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial \zeta}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \zeta, t, \right. \\ \left. \eta(0,t), \frac{d}{dt} \eta(0,t), \eta(1,t), \frac{d}{dt} \eta(1,t), \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}(0,t), \frac{d}{dt} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}(0,t), \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}(1,t), \frac{d}{dt} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}(1,t) \right] \quad (1.19)$$

L'application du principe variationnel de Hamilton à une telle fonctionnelle fournit la totalité des équations du mouvement en termes d'équations de Lagrange [21] :

sous la forme d'équations différentielles pour les coordonnées discrètes

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = g^{q_i}(t) \quad \forall t, i = 1, 2, \dots, n_q \quad (1.20)$$

et sous la forme d'équations aux dérivées partielles pour les coordonnées réparties

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right)} \right] - \frac{\partial^2}{\partial t \partial \zeta} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial \zeta} \right)} \right] = g(\zeta, t) \quad (1.21)$$

$\forall t$  et  $\forall \zeta \in ]0, 1[$  sous les quatre conditions aux limites :

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right)} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial \zeta} \right)} \right] \right\}_{\zeta=0} + \frac{\partial L}{\partial \eta(0,t)} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d}{dt} \eta(0,t) \right)} \right] + g_{\eta_0}(t) = 0 \quad (1.22)$$

ou bien  $\eta(0, t) = \text{constante}$  ; (I. 23)

un condition similaire où 0 est remplacé par 1 :

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} \right)} \right]_{\zeta=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}(0, t) \right)} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}(0, t) \right)} \right] + q_{\eta_c}(t) = 0 \quad (\text{I. 24})$$

ou bien  $\frac{\partial \eta}{\partial \zeta}(0, t) = \text{constante}$  ; (I. 25)

une condition similaire où 0 est remplacé par 1.

Dans ces équations, les fonctions

$$q_i^{(c)}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n_q), \quad q_{\eta}(\zeta, t), \quad q_{\eta_c}(t), \quad q_{\eta_1}(t), \quad q_{\eta_2}(t), \quad q_{\eta_3}(t)$$

sont appelées forces généralisées (au sens de Lagrange) respectives aux coordonnées

$$q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n_q), \quad \eta(\zeta, t), \quad \eta(0, t), \quad \eta(1, t), \quad \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}(0, t), \quad \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}(1, t).$$

On remarquera que, pour l'obtention de ces équations, on a considéré les "déplacements d'extrémités" comme des variables supplémentaires ; ceci facilite grandement l'obtention des équations dynamiques pour certains satellites. Ainsi, dans le cas d'un satellite à corps principal rigide sur lequel sont encastres des mâts flexibles lestés par des masselottes d'extrémités, les équations (I. 20) représenteront les mouvements du centre de masse global et des axes  $\underline{x}^1$  (ou le mouvement du corps principal comme on le montre au § C 4. 4.) ainsi que celui des amortisseurs discrets et des rotors sur cardans qui se trouvent éventuellement dans le corps principal ; quant aux équations (I. 21), elles caractériseront les mouvements des mâts flexibles ; les conditions au limites seront algébriques du type (I. 23, I. 25) aux extrémités "0" et différentielles du type (I. 22) aux extrémités "1" ; ces dernières fournissent ipso facto le mouvement latéral des masselottes d'extrémités (supposées ponctuelles) ; ceci évite de devoir calculer les efforts tranchants au ras des masselottes, calcul délicat qui est effectué dans [14] .

Les équations de Lagrange (I. 21) évitent également le calcul fastidieux des moments de flexion et efforts tranchants à la jonction mâts-corps principal.

Ayant souligné ce point, notons qu'il faut bien voir en les équations de Lagrange ce qu'elles sont réellement, c'est-à-dire un principe, ou une définition des forces généralisées, comme on l'a vu. Leur avantage est de fournir les équations différentielles ou aux dérivées partielles du mouvement en termes des variables physiques, les forces et couples de réaction structurales étant automatiquement éliminés et n'apparaissant jamais dans les équations.

### 1.7.2. Élimination de six coordonnées :

Les équations de Lagrange sont définies sur un système complet de coordonnées indépendantes. C'est bien ce que nous avons supposé à la fin du § 1.4.2. Toutefois, les contraintes (1.5) et (1.6) sont en général non linéaires ou trigonométriques en les coordonnées discrètes  $\gamma_i$  et l'élimination de six de celles-ci malaisée, voire impossible, les contraintes sont alors dites non holonomes. Les équations de Lagrange peuvent néanmoins s'utiliser dans ce cas en introduisant les contraintes dans les premiers membres à l'aide de six "multiplicateurs de Lagrange" [56] qui sont considérés comme des inconnues supplémentaires puis en résolvant le système (équations + contraintes) ainsi obtenu. Mais, notre but étant l'étude des petits mouvements, les équations de Lagrange que nous obtiendrons seront linéarisées en les coordonnées généralisées, si l'on veut que les multiplicateurs de Lagrange jouent le même rôle (donc soient du même ordre) que les autres variables, les contraintes doivent elles aussi être linéarisées pour que le résultat soit mathématiquement cohérent. Ce faisant, on les rend holonomes, car alors l'élimination de six coordonnées  $\gamma_i$  du système linéaire est immédiate, ce fait sera illustré au paragraphe 1.8.1.

### 1.7.3. Coordonnées cycliques :

Signalons encore qu'une coordonnée discrète  $q_c$  est dite cyclique ou ignorable si  $L$  n'en dépend pas explicitement et si  $g^{q_c} = 0$  (les autres forces généralisées étant supposées ne pas dépendre de  $q_c$ ).

Soient les coordonnées cycliques en nombre  $n_c$  ; leur propriété essentielle est que :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} = \text{constante} \quad (c = 1, 2, \dots, n_c) \quad (I.26)$$

Si l'on définit alors le Routhien

$$R = \int_0^1 \mathcal{R}_0 ds = L - \sum_{c=1}^{n_c} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} \dot{q}_c \right), \quad (I.27)$$

les équations de Lagrange où l'on remplace  $L$  par  $R$  forment, avec les équations (I.26), le système complet des équations du mouvement.

Dans notre problème, il n'y a pas de coordonnée ignorable a priori ; en effet :

- il peut y avoir des forces généralisées sur chacune des coordonnées  $q_i$  (par exemple les couples moteurs des rotors) ;
- $V$  peut dépendre de  $\bar{\theta}$  et de  $q_i$ .

#### I.7.4. Mouvement du centre de masse :

Celui-ci correspond aux équations de Lagrange relatives aux coordonnées  $\bar{C}_i$ . Pour un satellite, on néglige les variations de masse dues aux éjections de gaz ; de plus en plus d'ailleurs, les jets de gaz ne sont utilisés qu'en phase intermittente pour des corrections d'orbite ou pour des opérations de désaturation des stabilisateurs gyroscopiques. L'effet de cette éjection de masse est alors assimilé à une force purement extérieure et les fonctions cinétiques ne dépendent pas explicitement de  $t$ .

Il est cependant plus simple, pour obtenir le mouvement de  $G$ , d'utiliser le théorème de la quantité de mouvement du système global, qui se déduit directement du principe de Newton [39] et s'écrit :

$$\dot{\underline{p}} = \underline{f} \quad (I.28)$$

où  $\underline{f}$  est la résultante des forces extérieures (voir § I.6).

En ne tenant compte que des effets de la gravitation terrestre, ce mouvement suit les lois classiques de Képler et nous ne nous y étendrons

pas ; dans une étude linéaire, il ne dépend que de la masse totale et est donné par l'évolution de  $\underline{\bar{c}}$  : on a  $\|\underline{\bar{c}}\| = a(1 - e^2) / (1 + e \cos v)$ . Le mouvement du centre de masse n'est donc pas affecté au premier ordre par les mouvements internes au satellite, par sa configuration inertielle ou par son attitude.

Les paramètres orbitaux  $\alpha_N$  ( $\alpha = e, v_N$ ) sont en réalité variables du fait de la non-sphéricité de la Terre, qui se traduit par des variations

- séculaires,
- périodiques de longue période
- périodiques de courte période

de ces paramètres, dont on trouvera une description détaillée dans [10].

En ne tenant compte que des variations séculaires dues au second harmonique zonal du potentiel  $V_2$  (donné en (1.9)), le résultat est le suivant :

$$\left[ \begin{array}{l} \alpha = e, v_N \text{ constants,} \\ \alpha_N(t) = \alpha_N(0) - \frac{3}{2} C_2 \left[ \frac{R_g}{(1-e^2)a} \right]^2 \bar{n} t \cos i \\ v_N(t) = v_N(0) - \frac{3}{2} C_2 \left[ \frac{R_g}{(1-e^2)a} \right]^2 \bar{n} t \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \end{array} \right] \quad (1.29)$$

#### 1.7.5. Mouvement autour du centre de masse :

Celui-ci correspond aux équations de Lagrange relatives aux coordonnées  $\bar{\theta}_i$ . Toutefois, une certaine simplification est apportée par l'utilisation des quasi-masses  $\mathcal{N}_i$  définies en annexe B [56]. L'avantage est cependant assez maigre si le Lagrangien est fonction, outre des  $\mathcal{N}_i$ , des  $\bar{\theta}_i$  : ce qui est notre cas en présence du potentiel de gravitation  $V_g$ .

Il est bien plus simple, pour obtenir le mouvement autour de G, toujours dans l'hypothèse des variations de masse négligeables, d'utiliser le théorème du moment cinétique du système global, qui peut également se déduire du principe de Newton [39] et s'écrit

$$\dot{\underline{h}} = \underline{L} \quad (1.30)$$

où  $\underline{L}$  est la résultante des couples extérieurs (voir § 1.4).

Dans le but d'obtenir des équations du mouvement linéaires, nous linéariserons  $\underline{h}$ , notamment en les variables de déformation ; rappelons que, dans ce cas, par (I.3) et (I.7),  $\underline{h} = \underline{h}^e + \underline{h}''$  où  $\underline{h}^e$  est linéaire en  $\underline{u}$ . Cette relation et le fait que  $\underline{p} = \underline{p}^e$  valent aux axes  $\underline{x}^1$  le nom de repère moyen en ce sens que le système n'a par rapport à lui aucune quantité de mouvement et aucun moment cinétique relatif de déformation.

Définissons  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) comme les angles de Brivan des axes  $\underline{x}^1$  par rapport aux axes d'équilibre dynamique  $\underline{e}^i$  définis au § I.1.2. (figure 10). Pour que ces angles restent petits au voisinage de cet équilibre il faut que les axes  $\underline{x}^1$  coïncident avec les axes  $\underline{e}^i$  à l'équilibre dynamique. Le mouvement des axes  $\underline{e}^i$  étant donné a priori, la vitesse angulaire  $\underline{\Omega}^{e/o}$  des axes  $\underline{e}^i$  par rapport aux axes  $\underline{o}^i$  est connue dès que le mouvement orbital est connu.

La connaissance des relations (I.29) permet de donner une forme explicite à la vitesse angulaire des axes  $\underline{x}^1$  :

$$\underline{\Omega} = \dot{\alpha}_N \underline{i}^3 + (\dot{v} - \dot{v}_N) \underline{o}^3 + \underline{\Omega}^{e/o} + \dot{\theta}_1 \underline{e}^1 + \dot{\theta}_2 \underline{e}^2 + \dot{\theta}_3 \underline{x}^3 \quad (\text{I.31})$$

Ceci se visualise facilement sur les figures 5, 7 et 10.

Selon l'annexe B, on a  $[\underline{x}] = \mathbb{R}^\theta [\underline{e}]$  où, jusqu'au second ordre en  $\theta$ ,  $\mathbb{R}^\theta$  est de la forme donnée en (B11), (B18).

#### I.7.6. Forces classiques et forces généralisées :

En examinant les seconds membres des équations (I.28) et (I.30), on remarque que les forces et couples classiques (au sens de Newton) ne sont que des cas particuliers des forces généralisées (au sens de Lagrange) correspondant à des coordonnées discrètes.

En fait, on peut démontrer qu'elles sont liées par la relation :

$$g^{q_i} = \int_{\text{système}} \frac{\partial \underline{e}}{\partial q_i} \cdot \underline{df} \quad (i = 1, 2, \dots, n_q) \quad (\text{I.32})$$

où  $\underline{df}$  est la résultante des forces classiques s'exerçant sur l'élément de

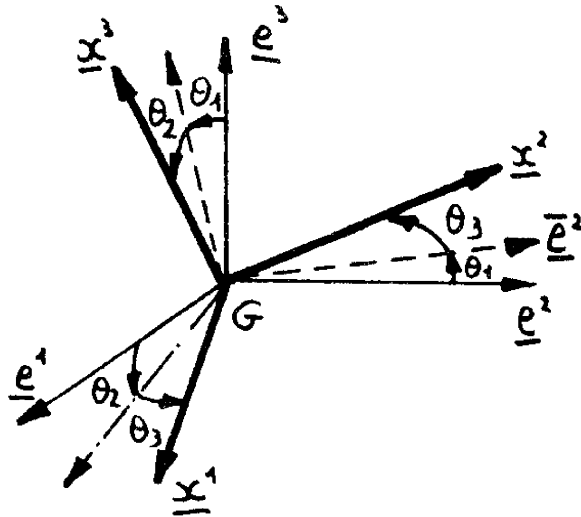


Figure 10 : angles de Bryan du repère moyen par rapport au repère d'équilibre dynamique

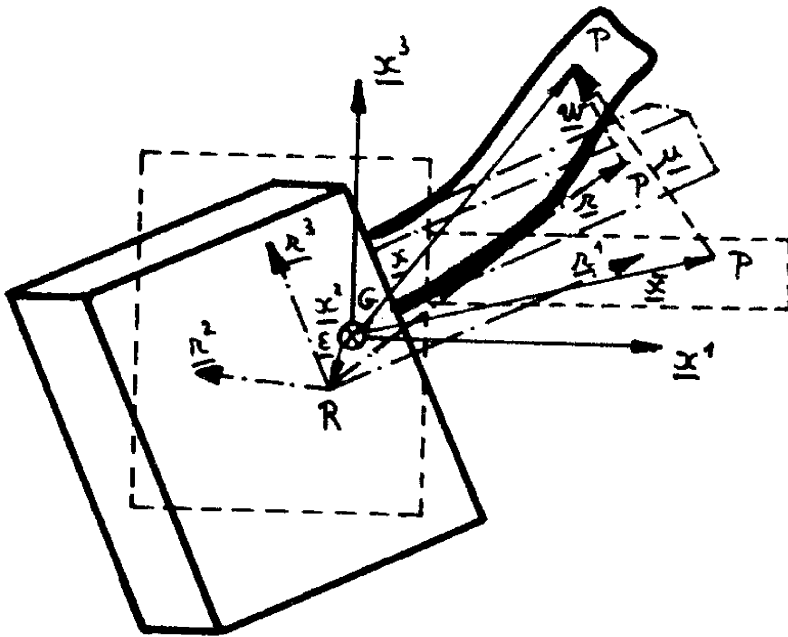


Figure 11 : satellite déformable à corps principal rigide

- R : point lié au corps rigide et qui coïncide avec G dans la configuration d'équilibre dynamique;
- $\underline{r}^i$  : axe lié au corps rigide et qui coïncide avec  $\underline{x}^i$  dans la configuration d'équilibre dynamique ( $i = 1, 2, 3$ );
- $\underline{\varepsilon}$  : "décalage" du centre de masse.

masse  $dm$  et

ne dérivant pas d'un potentiel lagrangien, c'est-à-dire n'étant pas telle que  $df_k = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial V}{\partial \dot{e}_k} \right] - \frac{\partial V}{\partial e_k} \quad (s^i \quad \dot{e} = [ \dot{e} ]^T C)$ ; n'étant pas une réaction de contrainte holonome sans frottement (par exemple, la force de sustentation d'un arbre sur un palier bien lubrifié n'intervient pas).

En pratique, étant donné qu'on supposera toujours les forces élastiques comme dérivant d'un potentiel lagrangien, qu'on évitera les contraintes de butée et que le satellite ne sera soumis à aucune réaction de contrainte provenant de l'extérieur, les forces généralisées se résumeront pour nous aux couples extérieurs ne dérivant pas d'un potentiel ( $\underline{1}^m$ ,  $\underline{1}^\alpha$ ,  $\underline{1}^r$  et  $\underline{1}^c$ ), à des forces motrices internes (tels que les couples moteurs des rotors et cardans) et enfin aux forces dues à l'amortissement.

#### 1.8. CAS PARTICULIER D'UN SATELLITE DEFORMABLE A CORPS PRINCIPAL RIGIDE :

Les satellites comportent toujours au moins un corps rigide (dit principal quand c'est lui qui contient les instruments d'observation ou de télécommunication et quand c'est à lui qu'on impose les spécifications de pointage), corps auquel se trouvent connectées les parties mobiles et flexibles, soit à l'intérieur (cardans, amortisseurs discrets, réservoirs de liquides, etc...) soit à l'extérieur (mâts de stabilisation, panneaux solaires, antennes, etc...). On regardera donc la figure 11 comme absolument générale bien qu'un seul appendice déformable y ait été représenté.

Remarquons que le point R peut très bien se trouver en dehors du corps principal tout en étant "lié" à celui-ci et en va de même des axes  $\underline{r}^i$  ! La structure en trait pointillé caractérise comme à la figure 3 la structure fictive de référence.



I. 8. 1. Elimination de six coordonnées :

Soient  $\gamma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) les angles de Bryan des axes  $\underline{r}^i$  par rapport aux axes  $\underline{x}^i$  et soit un vecteur  $\underline{\gamma}$  qui a  $\gamma_i$  pour composantes en axes  $\underline{x}^i$  :  $\underline{\gamma} = [\underline{x}]^T \underline{\gamma}$ . On posera de même  $\underline{u} = [\underline{x}]^T \underline{u}$  et  $\underline{\varepsilon} = [\underline{x}]^T \underline{\varepsilon}$  ainsi que  $\underline{w} = [\underline{r}]^T \underline{w}$  et on remarquera que  $\underline{r} = [\underline{r}]^T \underline{\bar{x}}$  (puisque  $\underline{r}$  a mêmes composantes en axes  $\underline{r}^i$  que  $\underline{\bar{x}}$  en axes  $\underline{x}^i$ ).

La figure 11 fournit immédiatement

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{\varepsilon} + \underline{r} + \underline{w} \text{, d'où} \\ \underline{u} &= \underline{x} - \underline{\bar{x}} = \underline{\varepsilon} + (\underline{r} - \underline{\bar{x}}) + \underline{w} \text{ et par projection en axes } \underline{x}^i \text{ ;} \\ \underline{u} &= \underline{\varepsilon} + (R \underline{\gamma}^T - \underline{1}) \underline{\bar{x}} + R \underline{\gamma}^T \underline{w} \end{aligned} \quad (\text{I. 33})$$

où la matrice de rotation  $R^\gamma$  est fournie par (B. 11), (B. 18) et (B. 19).

$$\text{On obtient alors : } \underline{u} \approx \underline{\varepsilon} + \underline{\gamma}^I \underline{\bar{x}} + \underline{w} + \underline{\gamma}^{II} \underline{\bar{x}} + \underline{\gamma}^W \underline{w}. \quad (\text{I. 34})$$

Ainsi donc, le déplacement  $\underline{u}$ , linéarisé en  $\underline{\gamma}$  et  $\underline{w}$ , peut se mettre

$$\text{sous la forme simple } \underline{u} \approx \underline{\varepsilon} + \underline{\gamma} \times \underline{\bar{x}} + \underline{w}. \quad (\text{I. 35})$$

Cette forme linéarisée nous suffit à exprimer les contraintes (I. 5) et (I. 6) puisqu'on a vu que celles-ci pouvaient être linéarisées en vue de l'obtention d'équations du mouvement linéaires.

$$\text{La relation (I. 5) entraîne } m \underline{\varepsilon} + \underline{\gamma} \int_m \underline{\bar{x}} dm + \int_{m_d} \underline{w} dm = \underline{0}.$$

Par définition de G, cette relation se réduit à

$$\underline{\varepsilon} = -m^{-1} \underline{W} \quad (\text{I. 36})$$

où  $\underline{W} = \int_{m_d} \underline{w} dm$ , l'intégration portant uniquement sur les parties déformables, où est défini  $\underline{w}$ .

$$\text{La relation (I. 6) entraîne } \int_m \underline{\bar{x}}^T \underline{\bar{x}} dm \underline{\gamma} + \int_{m_d} \underline{\bar{x}}^T \underline{w} dm = \underline{0}.$$

En vertu de (B. 5), la première intégrale n'est autre que la matrice d'inertie  $\underline{I}$  à l'équilibre dynamique : c'est une nouvelle forme, compacte et maniable, que nous proposons pour désigner les matrices d'inertie.

$$\text{On obtient donc : } \underline{\gamma} = \underline{I}^{-1} \underline{P} \quad (\text{I. 37})$$

$$\text{où } \underline{P} = \int_{m_d} \underline{\bar{x}}^T \underline{w} dm.$$

Les relations linéaires (I.36) et (I.37) sont d'une interprétation physique aisée lorsqu'on les dérive par rapport au temps : la quantité de mouvement d'ensemble  $m \dot{\mathcal{E}}$  (le moment cinétique d'ensemble  $I \dot{\gamma}$ ) sert à contrebalancer la quantité de mouvement de déformation  $\dot{W}$  (le moment cinétique de déformation  $\dot{P}$ ) : c'est aussi là le sens physique de la définition des axes moyens  $\underline{x}^i$ .

Dès lors, si l'on se donne la forme des déplacements  $w$ , six coordonnées ( $\mathcal{E}$  et  $\gamma$ ) peuvent être immédiatement éliminées du système à l'aide des relations (I.36) et (I.37).

Remarquons encore qu'on a, par (I.35)

$$T_d = T_w = \frac{1}{2} \dot{W}^T m^{-1} \dot{W} = \frac{1}{2} \dot{P}^T I^{-1} \dot{P} \quad \text{où} \quad T_w = \frac{1}{2} \int_{m_d} \dot{w}^T \dot{w} \, dm \quad (\text{I.38})$$

### 1.8.2. Matrice d'inertie à l'état déformé :

En utilisant la forme que nous avons proposée en (B.5), cette matrice est

$$J = \int_m \tilde{x}^T \tilde{x} \, dm = I + \int_m \left( \tilde{x}^T \tilde{u} + \tilde{u}^T \tilde{x} \right) dm + \int_m \tilde{u}^T \tilde{u} \, dm.$$

A l'aide de (I.33), de (I.36) et des relations (B.6), on peut mettre cette matrice  $J$  sous la forme :

$$J = R \gamma^T (I + \mathcal{P}) R \gamma + I^w + \dot{W}^T m^{-1} \dot{W}$$

où  $\mathcal{P} = \int_{m_d} \left( \tilde{x}^T \tilde{w} + \tilde{w}^T \tilde{\gamma} \right) dm$  et  $I^w = \int_{m_d} \dot{w}^T \dot{w} \, dm$

sont des matrices connues dès l'instant où on se donne l'expression de  $w$

Jusqu'au second ordre en  $(\gamma, w)$ , donc en  $w$  par (I.37), on a, grâce à (B.11) et (B.18) :

$$J \approx (I + \mathcal{P}) - \left[ \dot{\gamma}^T (I + \mathcal{P}) + (I + \mathcal{P}) \dot{\gamma} \right] + \left[ \dot{\gamma}^T I \dot{\gamma} + (\dot{\gamma}^T I + I \dot{\gamma}^T) \right] + \left[ I^w - \dot{W}^T m^{-1} \dot{W} \right] \quad (\text{I.39})$$

Etant donné que, par (I.37),  $\dot{\gamma}$  est du même ordre de grandeur que  $w$  (si l'inertie de la partie flexible n'est pas négligeable par rapport à l'inertie totale), la formule (I.39) montre la difficulté de vouloir exprimer  $J$  jusqu'au second ordre en ne faisant appel qu'à l'élasticité linéaire ; en fait,

des termes non linéaires de  $\ddot{y}$  dans le premier terme peuvent très bien rivaliser avec les termes quadratiques qui le suivent. La formule met aussi en évidence le couplage nutation-déformations.

## I. 9. FORME DISCRETISEE DES EQUATIONS LINEAIRES DU MOUVEMENT

### I. 9. 1. Methode des éléments finis

Des simulations numériques et surtout l'élaboration d'une loi de commande ne peuvent être réalisées que sur des systèmes à un nombre fini de variables. L'obtention de ce résultat est réalisée par la méthode des éléments finis qui consiste à idéaliser la structure par un assemblage d'éléments de forme géométrique élémentaire (barres, poutres, membranes, plaques, coques, etc. . .) et de fonction structurale simple bien connue de la Théorie des structures, tout en émettant a priori des hypothèses sur la déformée de chaque élément, en se basant sur l'expérience et sur le bon sens (méthode de Rayleigh-Ritz) et en respectant la continuité du champ des déplacements aux jonctions entre éléments [45].

Si le satellite ne se compose que de quelques éléments simples, on peut résoudre analytiquement le problème aux valeurs propres permettant de calculer les modes normaux de la structure globale. C'est la méthode modale, nous en ferons une application au Chapitre II. Par contre, si le satellite est très complexe, seules des méthodes d'itération perfectionnées permettent de résoudre numériquement le problème ; citons à ce propos les programmes DYNAM (Université de Liège) et NASTRAN (NASA) qui permettent de trouver les modes normaux d'une structure quelconque idéalisée par éléments finis.

Notons enfin que les réservoirs et amortisseurs à liquides construits actuellement pour être embarqués à bord de satellites sont généralement compartimentés, de manière à "contenir" plus ou moins les mouvements du liquide. on peut alors faire des hypothèses sur les déplacements de celui-ci [46] et utiliser intégralement la méthode qui va suivre. Le problème de représenter la dynamique de fluides dans des réservoirs en mouvement dans le cas général n'est pas encore résolu [47].

### 1. 9. 2. Hamiltonien, équilibre dynamique d'attitude

Nous supposons que les déplacements de déformation  $\underline{u}$  sont au plus quadratiques en de petites variables de déformation  $\beta_\nu$ , en nombre fini ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) \approx \sum_{\nu=1}^n \left[ \beta_\nu(t) \underline{\psi}^\nu(\underline{x}) + \beta_\nu(t) \beta_\mu(t) \underline{\psi}^{\nu\mu}(\underline{x}) \right] \quad (\text{I. 40})$$

Dans cette expression, les  $\beta_\nu$  sont supposés indépendants : l'élimination des six coordonnées discrètes redondantes est donc supposée effectuée (cf. § 1.7.2) : quant aux autres coordonnées discrètes de déformation (amortisseurs, etc...), elles sont à présent comptées parmi les variables  $\beta_\nu$ . Ceci nous amène à remanier légèrement la matrice  $q$  donnée en (I.8). Celle-ci devient à présent la matrice ( $n_q \times 1$ )

$$q(t) = \left[ \bar{c}^T, \bar{\theta}^T, \psi''^T, \beta^T \right]^T \quad (\text{I. 41})$$

où  $\beta^T = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$  : ainsi,  $n_q = 6 + n_\psi + n$ .

Notons que les  $\beta_\nu$  dépendent de la manière adoptée pour modéliser les déplacements du système, leur choix n'est donc unique en aucune manière ; ils peuvent caractériser des déplacements discrets aussi bien que des déformées continues ainsi qu'on le verra au chapitre III. Toutefois, si les liaisons sont holonomes, la Mécanique lagrangienne (définie sur l'espace des  $q$  ou espace de configuration) est reliée à la Mécanique newtonienne (définie sur l'espace des  $\underline{c}$  ou espace géométrique) par un changement de variables et il importe que la matrice jacobienne de cette transformation soit de rang trois [39] pour tout point P et à tout instant, ce qui s'écrit

$$\text{rang} \frac{\partial(\underline{c})}{\partial(q)} = 3 \quad \forall (c, t)$$

De plus, les quantités  $\underline{c}(t)$  et  $q(t)$  sont supposées deux fois dérivables en Mécanique.

Le Hamiltonien est défini par la relation :

$$H = \sum_{i=1}^{n_q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_{k=1}^{n_q - n_c} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - R, \quad (\text{I. 42})$$

les  $q_k$  étant supposés non cycliques pour  $k = 1, 2, \dots, n_q - n_c$ .

Si  $T = T_0 + T_1 + T_2$  où l'indice rappelle le degré des formes homogènes respectives en  $\dot{q}_i$ , en vertu d'un théorème d'Euler sur les fonctions homogènes ( $\sum_{i=1}^{n_q} \frac{\partial T_n}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = n T_n$ ), on obtient que  $H = T_2 + (V - T_0)$  pour autant que  $V = V(q, t)$ .

Ainsi, même dans ce cas, le Hamiltonien diffère de l'énergie totale, donnée par  $E = T + V$ , d'une quantité variable  $E - H = T_1 + 2 T_0$  ; même si  $\dot{H} = 0$ , il n'y a donc pas forcément conservation d'énergie au sens classique du terme. La quantité  $[V(q, t) - T_0(q, t)]$  est appelée potentiel dynamique, c'est elle qui doit, qu'il y ait des coordonnées cycliques ou pas, être minimale à l'équilibre dynamique. Mathématiquement, toutes les configurations d'équilibre figurent donc comme solutions du système de  $(n_q - n_c)$  équations algébriques

$$\frac{\partial (V - T_0)}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n_q - n_c) \quad (I.43)$$

### I. 9. 3. Formulation matricielle linéaire des équations du mouvement

D'après le § 1. 7. 5, moyennant la connaissance de  $\underline{\bar{c}}$  et de  $\underline{\Omega}^{e/o}$ , les inconnues se réduisent à  $\theta, \psi''$  et  $\beta$

Comme l'a montré Willems [57], il est possible alors de donner une forme absolument générale aux équations gouvernant les variables  $\theta$  et  $\beta$  dans les cas des satellites déformables contenant un rotor stabilisés par rotation ou par gradient de gravité. On peut même étudier les deux cas simultanément [43].

En posant  $y = [\theta^T, \beta^T]^T$ , nous montrons en Annexe C que le mouvement en ces variables est régi par l'équation différentielle

$$M \ddot{y} + G \dot{y} + C y = D + Z \dot{y} \quad (I.44)$$

où  $M$  est la matrice d'inertie généralisée symétrique  $> \mathfrak{D}$  ; elle n'est diagonale que si l'on utilise les modes normaux de l'ensemble et si  $a_1 = a_2 = 0$  ;  
 $G$  est la matrice gyroscopique généralisée, antisymétrique ;

C est la matrice d'élasticité généralisée, symétrique ; ces trois matrices sont des matrices  $[(n+3) \times (n+3)]$  qui ne sont constantes que si les rotors tournent à vitesse constante par rapport à leur cardan interne (les  $a_i$  sont alors constants) :

Z est la matrice  $[(n+3) \times (n+3)]$  d'amortissement généralisée, symétrique  $\geq \mathbb{0}$  la prendre constante revient à faire l'hypothèse de l'amortissement visqueux (cf. § 1.10).

D est la matrice  $[(n+3) \times 1]$  des petites perturbations variables, dues à l'excentricité, à la précession orbitale et à la régression du point nodal, aux forces de commande et aux couplages entre l'accélération angulaire des rotors et les déformations.

Toutes ces matrices sont données au § C.4.3. Ce résultat est obtenu moyennant deux conditions d'équilibre, l'une sur la partie constante de l'accélération angulaire des rotors, l'autre sur la partie constante  $c$  des "forces potentielles". Dans le cas d'un satellite à corps principal rigide, le § C.4.4. donne le changement de variable permettant d'exprimer les équations dans les axes  $\underline{r}^1$  liés à ce corps principal.

## 1. 10. AMORTISSEMENT DANS LES SYSTEMES DISCRETS

Revenons à présent à l'important problème de la dissipation énergétique, déjà évoqué au § 1.5.2; les forces d'amortissement sont cette fois représentées par le terme  $-Z \dot{y}$  dans (I. 44 ).

En toute généralité, Z est une matrice symétrique  $\geq \mathbb{0}$  qui dépend du temps et de la fréquence de la perturbation D (modèle dit "héréditaire") ; cette matrice Z est inconnue a priori et peut être analysée, sur chaque système physique, par la méthode des déphasages caractéristiques [44]. L'amortissement viscoélastique des matériaux est de ce type ; on peut le représenter par un ensemble de cellules élémentaires du type de la figure I2 a.

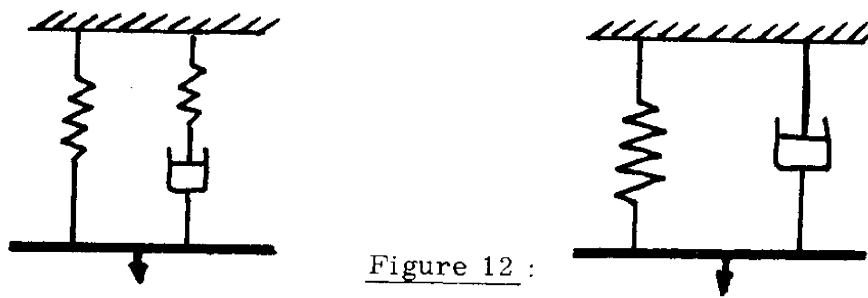


Figure 12 :

modèles mécaniques à amortissement

a) viscoélastique

b) visqueux

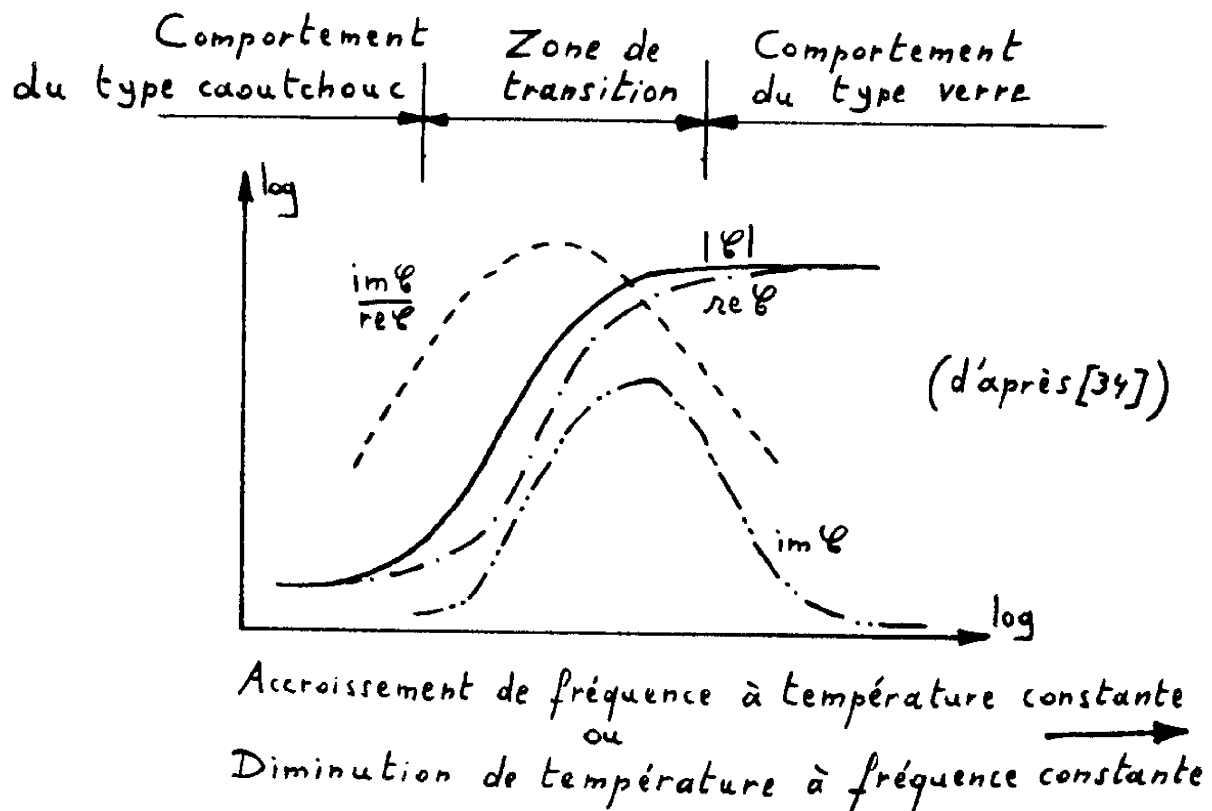


Figure 13 : variations de la raideur élastique complexe avec la température et la fréquence

La courbe d'hystérésis correspondant à ce modèle est indépendante de la fréquence d'excitation et d'allure elliptique : si le matériau envisagé a une courbe plus pointue (figure 8), il suffit de remplacer, dans le modèle de la figure 12 a, le dash-pot par une unité à frottement sec de Coulomb (qui produit une force constante opposée à la direction du mouvement).

Toutefois, les ingénieurs ont coutume d'appliquer l'une des trois méthodes approximatives suivantes.

#### 1.10.1. Amortissement visqueux

Cette approche consiste à se donner a priori une matrice  $Z$  constante. Il y correspond le modèle mécanique de la figure 12 b et la courbe d'hystérésis est alors une ellipse qui s'entle au sque augmente la fréquence du système. Les matériaux métalliques n'ont en fait pas du tout ce comportement. Ce modèle est cependant digne d'intérêt car il est montré dans [55] qu'un système modélisé par des cellules visqueuses (figure 12 b) a les mêmes fréquences et modes normaux que lorsqu'on le modélise par des cellules viscoélastiques (figure 12 a).

#### 1.10.2. Raideur élastique complexe

Puisque l'amortissement des matériaux semble se traduire par un simple déphasage de la déformation sur la tension (figure 8), on a essayé de représenter le phénomène en variables complexes en introduisant une raideur élastique complexe  $\mathcal{C} = (\operatorname{re} \mathcal{C}) + j (\operatorname{im} \mathcal{C})$  ou  $j = \sqrt{-1}$ .  $\operatorname{re} \mathcal{C}$  correspond la composante de dilataion en phase avec la tension et à  $\operatorname{im} \mathcal{C}$ , la composante déphasée de  $90^\circ$ . Toutefois, lorsqu'on choisit les matrices  $\operatorname{re} \mathcal{C}$  et  $\operatorname{im} \mathcal{C}$  constantes, on peut montrer qu'on viole le principe de causalité.



La caractéristique principale des matériaux en régime dynamique est leur grande sensibilité à la fréquence et à la température. Il s'agit donc, dans le choix des raideurs complexes, de tenir compte de la figure 13 (qualitative) : à haute fréquence (ou basse température)  $\operatorname{Im} \mathcal{E}$  est grand et  $\operatorname{Re} \mathcal{E}$  petit parce que le déroulement et l'enroulement successifs des chaînes moléculaires ne peuvent suivre le rythme de la tension, le matériau est quasi élastique ; à faible fréquence (ou haute température) au contraire, les déroulements et enroulements des chaînes moléculaires suivent la tension en phase et il n'y a guère d'énergie dissipée (c'est la région "caoutchoutière") ; à des fréquences intermédiaires, il y a une région de transition où le facteur de perte  $\operatorname{Im} \mathcal{E} / \operatorname{Re} \mathcal{E}$  passe par un maximum et où la dissipation énergétique est maximale.

### 1.10.3. Système conservatif associé

On peut enfin étudier théoriquement et trouver les modes normaux du système conservatif associé (c'est à dire tel que  $Z = \mathbb{D}$ ), puis introduire un facteur d'amortissement a posteriori dans l'équation de chaque mode normal obtenu, soit comme terme visqueux, soit comme terme viscoélastique ; il est bien évident que cette pratique constitue une entorse à la réalité physique et même mathématique, ainsi qu'il est montré dans [29]. Le modèle dynamique obtenu est cependant très représentatif du système réel pour des coefficients d'amortissement de très faible valeur : on ne peut employer cette méthode que vis-à-vis de l'amortissement structural et non bien sûr pour les amortisseurs discrets.

Mentionnons enfin que, dans le cas des liquides, la matrice  $Z$  dépend de la viscosité du liquide et du type d'écoulement choisi pour en modéliser le mouvement au contact des parois du réservoir.

## 1. 11. STABILITE DU SYSTEME AUTONOME AU VOISINAGE DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE

### 1. 11. 1. Stabilité du système hybride

Au lieu de définir comme en (I.42) le Hamiltonien sur le système discrétisé, on peut le faire directement sur le système hybride et définir (s'il y a  $r$  domaines élastiques distincts)

$$H = \sum_{i=1}^r \int_0^L \mathcal{H}_i d\zeta_i = \sum_{k=1}^{n_q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \sum_{i=1}^r \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i d\zeta_i - L \quad (\text{I.45})$$

où la matrice  $q$  ne comprend comme il se doit que les coordonnées discrètes.

Un système est dit stationnaire (ou invariant) si  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

On peut démontrer qu'on a alors :

$$\dot{H}(t) = \sum_{k=1}^{n_q} g_k^*(t) \dot{q}_k(t) + \sum_{i=1}^r \int_0^1 g_{\eta_i}(\zeta_i, t) \frac{\partial \eta_i}{\partial t}(\zeta_i, t) d\zeta_i \quad (\text{I.46})$$

$\dot{H}$  est la puissance dissipée par les sources d'énergie du système (moteurs, etc...) et par l'amortissement ; seul ce dernier sera considéré ici puisqu'on envisage le système autonome.

Les équations du mouvement (I - 20) et (I - 21) contiennent des dérivés du second ordre par rapport à  $t$  ; en doublant le nombre de variables, on peut imaginer les mettre sous la forme d'une équation d'état, qui ne contient plus que la dérivée première d'un certain vecteur d'état, que nous symboliserons par  $\mathcal{X}(t)$ . A chaque mouvement du système hybride correspond alors une trajectoire dans l'espace d'état  $S$  sur lequel est défini ce vecteur  $\mathcal{X}(t)$  et qui n'est autre d'ailleurs que le produit cartésien des espaces d'état relatifs à l'équation (I - 20) et à toutes les équations (I - 21). Il est apparu depuis plusieurs années que la stabilité paramétrique des systèmes mécaniques holonomes stationnaires pouvait être étudiée par la méthode directe de Liapounov en choisissant  $H$  comme "fonction" de

Liapounov, il s'agit en fait ici d'une fonctionnelle puisque  $H$  peut dépendre des dérivées des  $\eta$  par rapport aux  $\xi_k$ . Ce dernier point empêche bien souvent de pouvoir déterminer les signes de  $H$  et de  $\dot{H}$ . Si l'on peut trouver une autre fonctionnelle scalaire  $H_1 \leq H$  et qui ne dépend plus de ces dérivées, on peut toujours évidemment l'utiliser comme fonction de Liapounov.

On peut alors appliquer le THEOREME DE STABILITE suivant

S'il existe une fonctionnelle scalaire  $H$  telle que  $\dot{H}$  soit semi-définie négative le long de toute trajectoire du système et si, de plus, il n'existe aucune trajectoire dans  $S$  le long de laquelle  $\dot{H} = 0 \forall t$ , si ce n'est le point d'équilibre  $\mathcal{E}^*(t) = 0 \forall t$ , alors si on peut trouver une fonctionnelle définie positive  $H_1$  telle que  $H_1 \leq H \forall t$ , la solution  $\mathcal{E}^* = 0$  est asymptotiquement stable.

Ce théorème est connu dans la littérature [49] sous le nom de théorème de Kelvin-Tait-Chetaev et peut se déduire également des œuvres de Liapounov ou de Krasovskii.

La construction d'une fonctionnelle  $H_1$  peut se faire à l'aide des premières valeurs propres du système élastique, qui bornent toujours inférieurement le quotient de Rayleigh [35]. Mais cela ne suffit pas car  $H_1$  est alors souvent une somme d'intégrales définies sur les différents domaines élastiques. Il est parfois possible de mettre  $H_1$  sous la forme  $H_1 = \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathcal{K}_1 d\xi_1 \dots d\xi_n$  (cas de  $n$  domaines élastiques) et de tester la fonction  $\mathcal{K}_1$  par le critère de Sylvester appliqué à sa matrice hessienne au voisinage de l'équilibre et en tous les points. Si trouver  $\mathcal{K}_1$  n'est pas possible, on peut encore, à l'aide de l'inégalité de Schwartz appliquée aux fonctions, éliminer la dépendance en les variables  $\xi_i$  et tester une fonction  $H_2 \leq H_1$  au voisinage de l'équilibre par application du critère de Sylvester. Tout ceci exige évidemment la connaissance de l'approximation quadratique, en les coordonnées généralisées, de toutes ces fonctions ou fonctionnelles.

Le résultat obtenu est néanmoins peu concluant car il est évident que les conditions de stabilité obtenues peuvent être beaucoup trop strictes.

La solution la meilleure serait une étude de stabilité du système discrétisé par une troncature modale à un nombre fini de modes normaux de l'ensemble mais le problème qui se pose est alors de savoir combien de modes retenir dans le modèle mathématique. Nous donnons notre contribution personnelle sur ce sujet au § III.4 en montrant de combien la troncature modale enfreint les intégrales premières du mouvement lors d'une réponse à une impulsion de Dirac. Considérant que ceci fournit une base quantitative valable quant au nombre de modes à retenir, nous envisageons à présent la stabilité des systèmes discrétisés.

### 1. II. 2. Critère de stabilité du système discrétisé

Dans le cas du système discret holonome stationnaire, on a simplement  $\dot{H}(t) = \sum_{k=1}^{n_y} q_k^y(t) \dot{q}_k(t)$ .  
 Considérons une orbite circulaire (le terme  $\frac{1}{2} \dot{\psi}^T \dot{\psi}$  est alors constant et peut être oublié) et l'inexistence de perturbations ( $D = \mathbb{D}$ ) ainsi que l'absence de commande sur le rotor ( $\Psi_{//}$  est alors une variable cyclique et ne joue plus). Les seules variables restantes sont  $\theta$  et  $\beta$  et la seule force généralisée est l'amortissement. On a :

$$\dot{H}(t) = [Z\dot{y}]^T \dot{y} = -\dot{y}^T Z \dot{y} \quad (\text{I} - 47)$$

Or, en prémultipliant l'équation (I - 44) du système par  $\dot{y}^T$  et en effectuant sa primitive, on obtient (à conditions initiales nulles)

$$\frac{1}{2} \dot{y}^T M \dot{y} + \frac{1}{2} y^T C y = - \int_0^t \dot{y}^T Z \dot{y} d\tau.$$

$$\text{Donc, } \frac{1}{2} \dot{y}^T M \dot{y} + \frac{1}{2} y^T C y = H \quad (\text{I} - 48)$$

$$\text{ou encore } \frac{1}{2} \dot{y}^T M \dot{y} = T_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} y^T C y = V - T_0$$

puisque  $H = T_2 + (V - T_0)$

C'est au Hamiltonien et non à l'énergie totale qu'il faut attribuer un sens énergétique. Un système mécanique est dit amorti si  $\dot{H}$  est semi-définie négative ; il est complètement amorti si  $\dot{H}$  est "pervasive", c'est-à-dire vérifie les hypothèses du théorème de stabilité du § 1.11.1. Le néologisme "pervasive" était rendu nécessaire par le fait que cette notion est plus restrictive que "semi-définie négative" mais moins que "définie négative". On trouvera une discussion de l'amortissement complet dans les trois dissertations fondamentales de Pringle [49, 50, 51]. En résumé, nous pouvons écrire, si  $\mathcal{X} = [y^T, j^T]^T$

$$\begin{array}{l}
 t \in \mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 ; \quad \mathcal{X} \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 ; \quad \mathcal{S}_1 \ni \mathbf{0} ; \\
 \dot{H}[\mathcal{X}(t)] \text{ définie négative} \iff \begin{bmatrix} \dot{H}[\mathcal{X} = \mathbf{0} ; t \in \mathcal{T}] = 0 \\ \dot{H}[\mathcal{X} \in (\mathcal{S} - \{\mathbf{0}\}) ; t \in \mathcal{T}] < 0 \end{bmatrix} \\
 \dot{H}[\mathcal{X}(t)] \text{ semi-définie négative} \iff \begin{bmatrix} \dot{H}[\mathcal{X} \in \mathcal{S}_1 ; t \in \mathcal{T}] = 0 \\ \dot{H}[\mathcal{X} \in \mathcal{S}_2 ; t \in \mathcal{T}_1] = 0 \\ \dot{H}[\mathcal{X} \in \mathcal{S}_2 ; t \in \mathcal{T}_2] < 0 \end{bmatrix} \\
 \dot{H}[\mathcal{X}(t)] \text{ "pervasive"} \iff \dot{H}[\mathcal{X}(t)] \text{ semi-définie négative avec } \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{0}\} .
 \end{array}$$

On supposera qu'à l'équilibre  $\mathcal{X} = \mathbf{0}$ , on a  $H(\mathbf{0}) = 0$ .

Pour le système discret dont la représentation linéaire répond à l'équation (I - 44), le Hamiltonien peut être utilisé directement comme fonction de Liapounov et le théorème de Kelvin-Tait-Chetaev se résume aux propositions qui suivent. Nous donnons dans la référence [42] une synthèse de la démonstration. Ces thèses peuvent d'ailleurs se déduire directement des théorèmes de Liapounov donnés dans [23]

1°) Au voisinage de l'équilibre  $\mathcal{X} = \mathbf{0}$ , un système mécanique complètement amorti est

- asymptotiquement stable si  $H$  est défini positif ;
- instable si  $H$  peut prendre des valeurs négatives.

La définie positivité de H joue donc le rôle de condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique des systèmes mécaniques complètement amortis (ceci aussi bien pour les systèmes linéaires que non linéaires d'ailleurs) ; il s'agit donc réellement d'un critère de stabilité au même titre que le critère de Routh-Hurwitz de la théorie linéaire. De plus, si le système est linéaire, le nombre de racines de l'équation caractéristique de (I-44) situées dans le demi-plan de droite est égal au nombre de valeurs propres positives de C (supposée définie).

2°) Au voisinage de l'équilibre  $x = 0$ , un système mécanique amorti est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stable si H est défini positif,} \\ \text{instable si H est défini négatif.} \end{array} \right.$$

La définie positivité de H n'est donc qu'une condition suffisante à la stabilité des systèmes mécaniques amortis.

3°) La stabilité au voisinage de l'équilibre des systèmes mécaniques amortis, complètement ou non, ne dépend ni de l'amplitude, ni de la forme analytique de la puissance dissipée H.

4°) La stabilité du système linéaire et celle du système non linéaire correspondant sont liées par le théorème suivant, dû à Liapounov

le système décrit par l'équation  $\dot{x} = A x + f(x)$  où f est une fonction non linéaire telle que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f\|}{\|x\|} = 0$$

est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{asymptotiquement stable si le système linéarisé l'est;} \\ \text{instable si le système linéarisé l'est.} \end{array} \right.$

La stabilité au voisinage de l'équilibre d'un système mécanique non linéaire n'est donc déterminée par les termes non linéaires que dans le cas où la forme linéarisée d'un système amorti est non instable et dans les cas où H n'est que semi-défini.

5°) Puisque la matrice M est définie positive, l'expression (I - 48) montre que la condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique d'un système mécanique holonome stationnaire complètement amorti et autonome est que la matrice d'élasticité généralisée C intervenant dans sa représentation linéaire (I - 44) soit définie positive ou, ce qui revient au même, que son potentiel dynamique (V - T<sub>0</sub>) soit minimal à l'équilibre dynamique  $\gamma = 0$ .

On conçoit facilement l'avantage que, dans les cas compliqués, cette méthode présente par rapport aux autres méthodes d'étude de stabilité linéaire ; par exemple n'est-il pas bien plus facile de tester par le critère de Sylvester la définie-positivité de C donnée en (C-22) plutôt que d'appliquer le critère de Routh-Hurwitz au système complet de l'équation (I - 44)? Quant au problème de savoir, dans les cas compliqués, si un système à matrice d'amortissement généralisée Z semi-définie positive (cas évidemment le plus fréquent) est complètement amorti, il se résume au calcul du rang de certaines matrices données dans [38] et calculées à partir de (I - 44). D'une manière grossière, on peut dire que l'amortissement est complet lorsque le système d'équations "couple" toutes les variables de manière à ce que l'amortissement puisse affecter chacune d'entre elles après un temps plus ou moins long.

### I. 11. 3. Extensions du critère de stabilité [38, 46]

Nous donnons en annexe D quelques extensions du critère précédent, utiles dans les cas litigieux et utilisant les intégrales premières.

### I. 11. 4. Limitations de l'étude locale de stabilité

Même lorsqu'on conclut à la stabilité asymptotique d'un système linéarisé, donc du système non linéaire correspondant, on peut se demander dans quel voisinage de l'équilibre le résultat est valable. Il faut pour cela calculer la matrice hessienne du potentiel dynamique (V - T<sub>0</sub>) ; la nature qualitative de la stabilité changeant aux "points de bifurcation" (c'est-à-dire

lorsque le déterminant de cette matrice hessienne s'annule), on peut trouver, dans l'espace des coordonnées  $q_1$ , la zone bornée où le comportement sera asymptotiquement stable et également y tracer les courbes d'égal potentiel dynamique [ 27, 49 ]



CHAPITRE II

---

ANALYSE DYNAMIQUE DE SATELLITES PARTICULIERS

-:-

II. 1. STABILITE DES SATELLITES STABILISES PAR GRADIENT DE GRAVITE OU PAR ROTATION

II. 1. 1. Satellites à gradient de gravité

Deux applications en ont été faites dans [14]; l'une traite d'un satellite équipé d'un long ressort dissipateur d'énergie avec masse d'extrémité (type "TRAAC", voir figure 1) et l'autre, d'un satellite équipé d'un mât à articulation dissipatrice (type "DORADE", voir figure 14). On y a donné les zones de stabilité dans l'espace des paramètres.

Nous regardons brièvement ici le cas général ; dans le cas d'un amortissement complet, les  $(n + 3)$  conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sont obtenues en appliquant le critère de Sylvester à la matrice C donnée en (C, 22). On obtient, pour  $a_1 = a_2 = 0$  :

$$I_3 - I_2 + a_3 > 0, 4(I_3 - I_1) + a_3 > 0, I_2 > I_1, \dots, \det C > 0.$$

Les trois premières conditions de stabilité sont suffisantes pour un gyrost stat rigide ; pour les satellites complètement amortis, elles deviennent aussi nécessaires. Les autres conditions marquent la réduction du domaine de stabilité en présence de déformations et sont vérifiées si la "raideur interne" du satellite est suffisante. Quand  $a_3 > 0$ , la présence du rotor accroît la stabilité.

Lorsque le satellite dégénère en un simple rotor rigide symétrique ( $I_1 = I_2 = I_t$  ;  $a_3 = I_3 \Omega_s$ ), les deux premières conditions deviennent  $(1 - \chi) \Omega_s - \chi > 0$ ,  $(1 - \chi) \Omega_s - 4\chi > 0$  où  $\chi = \frac{I_t - I_3}{I_t}$ . L'amortissement n'est pas complet dans ce cas et la troisième condition n'est pas strictement vérifiée ; on ne peut conclure qu'à une stabilité partielle.

II. 1. 2. Satellites en  $\Omega$  (2.1)

Le Hamiltonien  $H$  est donc semi-défini puisque, par (C.22),  $C$  possède une valeur propre nulle (troisième ligne et troisième colonne nulles) ; ceci correspond à un pôle si on modifie légèrement le moment cinétique initial, le satellite passe en position d'équilibre pour une valeur légèrement différente de  $\beta = \beta_0$ . De plus, si, par (2.21),

$\lambda^{33} = 0$  et si  $a_1 = a_2 = 0$ , le couplage est complet (et découplé des autres équations et l'amortissement n'est pas complet) alors  $\theta_3$  peut alors carrément dériver. Dans les autres cas, pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité, il faut tenir compte des intégrales premières et exprimer  $\theta_3$  en fonction de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (le moment cinétique constant en axes  $\underline{O}^4$ ). On a, par (2.22), en passant à  $G$  :

$$\begin{aligned} h_1 &= I_{11} \dot{\theta}_1 - a_1 \dot{\theta}_3 - G^{14} \theta_2 + G^{13} \theta_3 \\ h_2 &= I_{22} \dot{\theta}_2 - a_2 \dot{\theta}_3 + G^{14} \theta_1 + G^{23} \theta_3 \\ h_3 &= (I_{33} + a_3) \Omega_s - a_1 \dot{\theta}_1 - a_2 \dot{\theta}_2 + I_{33} \dot{\theta}_3 + \Omega_s a_1 \theta_2 - \Omega_s a_2 \theta_1 + G^{34} \beta \end{aligned}$$

Les contraintes s'écrivent :

$$h_1 + \theta_2 h_3 = h_2 - \theta_1 h_3 - \Omega_s (I_{33} + a_3) \Omega_s = 0$$

ou  $I \dot{\theta} = -A^T \theta - \Omega_s \theta$

avec  $A_6^T = [G^{14T}, G^{24T}, G^{34T}]^T$

$$A_5^T \Omega_s = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_s (I_{11} + a_3) & 0 \\ -\Omega_s (I_{33} - I_{22} + a_3) & 0 & 0 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que si le système est asymptotiquement stable en  $z = [\theta^T, \beta^T, \Omega_s]^T$ , il est aussi en  $[\theta^T, \dot{\theta}^T, \beta^T]^T$  et, pourvu que l'amortissement soit complet, nous pouvons tester le Hamiltonien, fonction de  $z$  seulement après élimination de  $\dot{\theta}$  :

$$H = \frac{1}{2} z^T K z. \text{ Les trois premières conditions qui en découlent sont}$$

$$\text{(pour } a_1 = a_2 = 0) \begin{cases} (I_3 + a_3) (I_3 - I_2 + a_3) > 0 \\ (I_3 + a_3) (I_3 - I_1 + a_3) > 0 \end{cases},$$

relations classiques pour un dual-spin et, si  $a_3 = 0$ , on retrouve la condition que le corps doit tourner autour de son axe de plus grande inertie.

## II. 2. DYNAMIQUE DU SATELLITE DORADE

### II. 2. 1. Spécifications et caractéristiques du satellite

L'objectif de la mission du satellite DORADE, dont nous avons étudié en [26] la faisabilité d'un système de stabilisation, est d'obtenir une résolution et une précision meilleure dans les paramètres du géoïde (utilisation d'un faisceau laser pour déterminer l'orbite). Ce satellite est symétrique ; il est essentiel que son axe de révolution soit aligné sur la géocentrique à mieux que  $1^\circ$  et que l'orbite ne soit pas perturbée plus d'une fois par semaine. Le tableau suivant rassemble les principales caractéristiques relatives à ce satellite.

Orbite	$a = 7.18 \cdot 10^6 \text{ m}$ ; $e = 0.015$ ; $\bar{n} = 1.04 \cdot 10^{-3} \text{ rd/s}$ ; $i = 60^\circ$ ; $\dot{\omega}_N = -6.70 \cdot 10^{-7} \text{ rd/s}$ ; $\dot{\psi}_N = -1.70 \cdot 10^{-7} \text{ rd/s}$
Masse	100 kg, dont 12 kg pour la stabilisation et la détermination d'attitude
Corps principal rigide	longueur = 0.9 m surface latérale couverte de panneaux solaires
8 panneaux solaires rigides	longueur 0.9 m, inclinaison sur le corps principal = $45^\circ$
Moments d'inertie	$I_1 = 20 \text{ m}^2 \text{ kg}$ ; moment d'inertie transverse = $26 \text{ m}^2 \text{ kg}$
Moment magnétique résiduel	de l'ordre de $0.1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ et d'axe inconnu

Ces caractéristiques impliquent une faible action du gradient de gravité (qui aurait été bénéfique) et des couples importants de pression

aérodynamique et solaire, auxquels s'ajoutent des effets de dérive notables causés par le couple d'inertie de précession d'orbite (surtout en présence d'un moment cinétique interne) et par le couple magnétique.

## II. 2. 2. Choix d'un système de stabilisation, couples perturbateurs

Pour diminuer l'effet du couple aérodynamique constant, on peut envisager de rapprocher le centre de masse de la base des panneaux (où s'exerce à peu près la résultante de pression, voir figure 14 a).

D'autre part, les systèmes de stabilisation par jets de gaz et ceux à actionneurs magnétiques ont été rejetés, les premiers parce qu'ils risquent de perturber l'orbite (on ne peut caler deux tuyères de manière exactement symétrique), les seconds parce qu'ils exigent la détermination des trois angles d'attitude (d'où un problème de détection du facet). Notre étude s'est donc portée vers une stabilisation par roue d'inertie à vitesse modulable et d'axe fixe dans le satellite, selon  $\underline{e}_3^3$  (étant donné que les couples perturbateurs les plus importants s'exercent en tangage). La conception d'un tel système est donnée dans [24] et nous ne la reprendrons pas ici, notre but étant uniquement de montrer comment la méthode exposée au Chapitre I permet la mise en équation complète du mouvement de ce satellite pour une version de stabilisation semi-passive que nous décrirons plus loin.

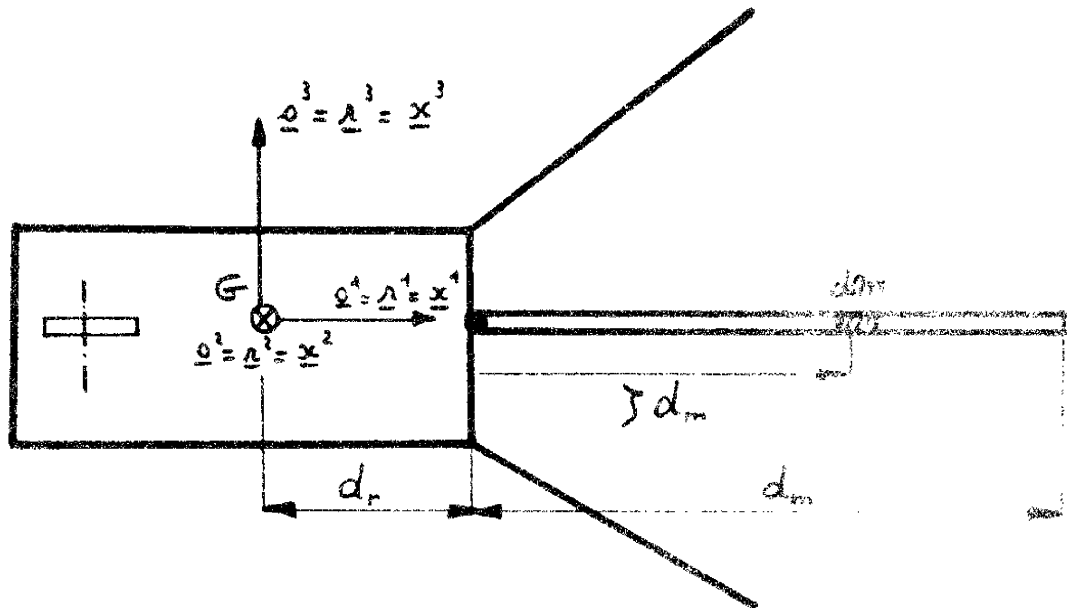
Les couples agissant sur le satellite sont, à ce stade, donnés par le tableau suivant en axes  $\underline{x}_i^1$ .

Axe	Couples d'inertie perturbateurs		Couple extérieur bénéfique
	précession orbitale	excentricité	gradient de gravité ( $\underline{P}^g$ )
$\underline{x}^1$ (lacet)	$+6.10^{-7} (I_1 + a_3) \cos(\nu - \nu_0)$	0	0
$\underline{x}^2$ (roulis)	$6.10^{-7} (2I_t - I_1 + a_3) \sin(\nu - \nu_0)$	0	$-3.2 \cdot 10^{-6} (I_t - I_1) \theta_2$
$\underline{x}^3$ (tangage)	0	$3.2 \cdot 10^{-8} I_t \sin \nu$	$-3.2 \cdot 10^{-6} (I_t - I_1) \theta_3$
Axe	Couples extérieurs perturbateurs		
	magnétique ( $\underline{P}^m$ )	aérodynamique ( $\underline{P}^a$ )	radiation solaire ( $\underline{P}^s$ )
$\underline{x}^1$ (lacet)	$1.1 \cdot 10^{-5} [d_2 - 1.7 d_3 \cos(\nu - \nu_0)]$	0	0
$\underline{x}^2$ (roulis)	$-1.1 \cdot 10^{-5} [d_1 + 3.5 d_3 \sin(\nu - \nu_0)]$	$-6.5 \cdot 10^{-6} \theta_1$	$6. \cdot 10^{-6}$ au pire
$\underline{x}^3$ (tangage)	$-1.9 \cdot 10^{-5} [d_1 \cos(\nu - \nu_0) + 2 d_2 \sin(\nu - \nu_0)]$	$-6.5 \cdot 10^{-6}$	$6. \cdot 10^{-6} \sin(\nu + C t_0)$ au pire

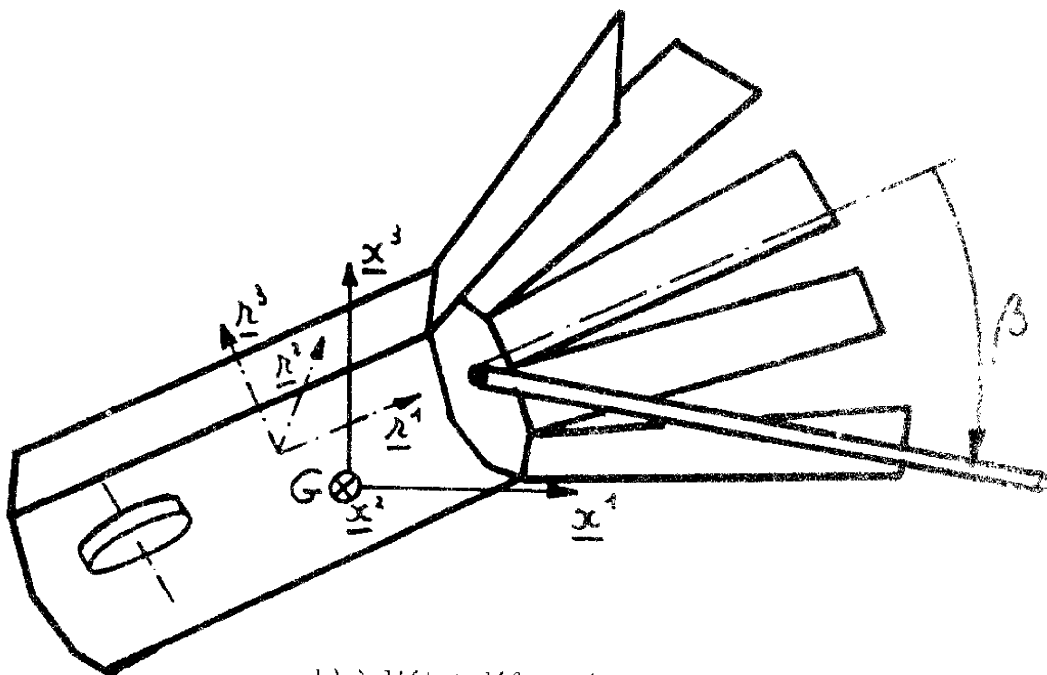
Les couples de précession orbitale, d'excentricité et de gradient de gravité s'obtiennent directement à partir des formules (C23) et (C22) puisque, pour un satellite rigide, les axes  $\underline{x}^i$  sont évidemment liés strictement au satellite ; le couple magnétique se déduit de (I15) où, étant donné l'imprécision sur le moment dipolaire magnétique résiduel  $\underline{d}$  du satellite, nous avons considéré que  $\|\underline{P}^m\| = a$  et que  $R^{\theta} = \dots$  ; les couples aérodynamique et de radiation solaire ont dû être évalués en fonction des surfaces apparentes du satellite.

De ce tableau, il ressort d'abord l'importance de l'influence de la précession orbitale, aussi avons-nous tracé figure 15 les amplitudes des oscillations en roulis-lacet non amorties résultant de cette précession en fonction du moment cinétique de la roue. Si l'on tient compte du couple magnétique avec  $d_3 = -0.1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$  et  $|d_1| = 0.1 \text{ Am}^2$ , la courbe d'amplitude en roulis doit encore être translatée vers le haut de 0.1 rd. Dans tous les cas, pour des valeurs intéressantes de  $\|\underline{h}^r\|$ , l'erreur de pointage permise de  $1^\circ$  est largement dépassée si l'on ne prévoit aucun moyen auxiliaire. Pour remédier à cela, deux solutions sont possibles :

Figure 14 : satellite DORADE



a) à l'équilibre dynamique



b) à l'état déformé

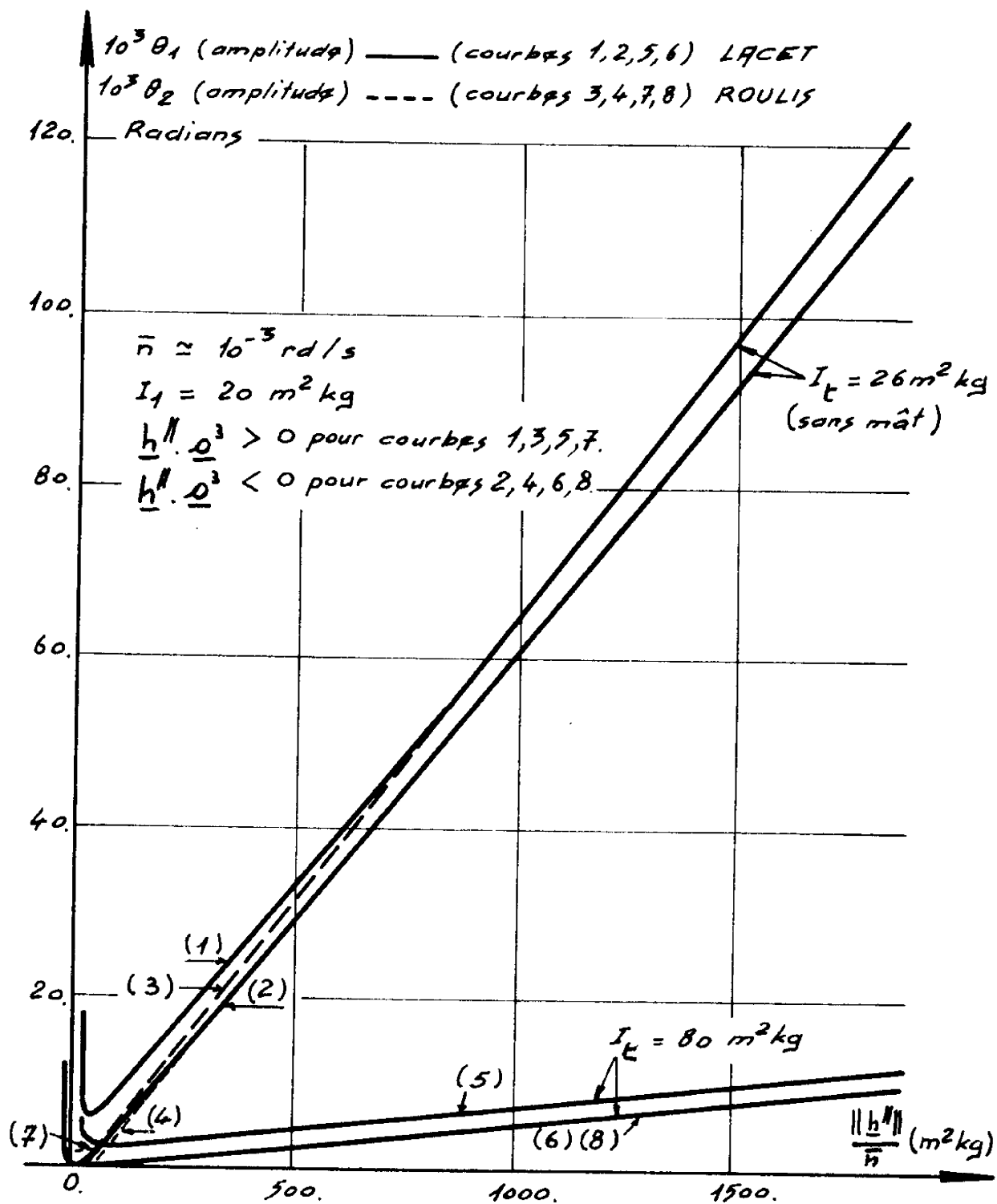


Figure 15 : influence du couple de précession orbitale sur DORADE





à ce moment,  $\underline{h}''$ , qui est toujours parallèle à  $\underline{r}^3$ , s'aligne sur  $\underline{x}^3 = \underline{o}^3$ , donc les axes  $\underline{x}^i$  sont principaux centraux d'inertie à l'équilibre (cf. § C.4.2). On s'impose encore  $I_2 = I_3 = I_1$ .

Les six coordonnées  $\xi_i$  et  $\gamma_i$  de position du corps principal par rapport aux axes  $\underline{x}^i$  sont alors éliminées en utilisant la définition de ces axes (cf. § 1.8.1) et en considérant l'état déformé (figure 14b) :

$$\xi = -m^{-1}W = -m^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_z \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } W_z = -m_m d_m \int_0^1 \beta \zeta d\zeta = S_d \beta \quad \text{avec } S_d = -\frac{m_m d_m}{2}$$

$$\gamma = -I^{-1}P = -I^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ P_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } P_2 = m_m d_m^2 \int_0^1 \left( \frac{dr}{d_m} + \zeta \right) \beta \zeta d\zeta = I_d \beta \quad \text{avec } \begin{matrix} I_d = \frac{m_m d_m^2}{3} \\ \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{dr}{d_m} \right) \end{matrix}$$

Ces relations sont d'interprétation physique aisée dans ce cas simple.

Afin de déterminer les matrices  $\Lambda$  et  $\Pi$  intervenant dans les équations du mouvement, il faut calculer jusqu'au second ordre la matrice d'inertie  $\mathcal{J}$  à l'état déformé. Nous utiliserons (I.39) : on a

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_2 \\ 0 & -P_2/\beta & 0 \\ P_2 & 0 & -P/\beta \end{bmatrix} \quad \text{et } I^m = \frac{1}{3m} W_z^2 \text{ diag}[1, 1, 0], \text{ donc}$$

on peut calculer la forme (C1) de  $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = I + \Lambda \beta + \Pi \beta^2$$

où les seuls éléments non nuls de  $\Lambda$  et de  $\Pi$  (ce sont ici des scalaires puisque  $n = 1$ ) sont

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda_{12} = \lambda_{31} = -\frac{I_d}{I_t} \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}_0} \\ \Pi_{14} = -\dot{\alpha} \left( \frac{I_d}{3m_{gr}} - \frac{1}{m} \right) \cdot \left( 1 + \frac{I_d}{I_t} \right) \frac{I_d^2}{I_t} \\ \Pi_{32} = \Pi_{23} = \frac{I_d^2}{I_t} \\ \Pi_{11} = \frac{I_d}{I_t} \left( \frac{I_d}{3m_{gr}} - \frac{1}{m} \right) - I_d \\ \Pi_{33} = -\frac{I_d^2}{I_t} = -\frac{I_d^2}{I_t} \left( 1 + \frac{I_d}{I_t} \right) \end{array} \right.$$

ce qui montre bien qu'il n'y a pas de déformation selon l'axe  $\underline{x}^2$  et que les moments d'inertie ne varient pas au premier ordre.

Quant à  $M_d^d$ , qui est ici un scalaire  $m_d$ , il se déduit de (I.38)

$$\overline{T}_d = \frac{1}{2} m_d \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \beta^2 \left[ \frac{I_d}{3m_{gr}} \left( \frac{I_d}{3m_{gr}} - \frac{1}{m} \right) - \frac{I_d^2}{I_t} \right]$$

Comme  $\Pi_{12}$ , la quantité  $\overline{T}_d$  est nulle puisqu'il n'y a pas de déformation selon  $\underline{x}^2$  (cf. définition de  $\overline{T}^{i2}$  au § C.1.1.). Il reste à calculer l'influence du rotor dans l'état déformé. Puisque celui-ci est lié au corps principal, on a (§ C.1.2.)  $\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$  et on peut écrire la relation (C2) sous la forme

$$\dot{W}'' = \overline{T}_{II} \dot{\Psi}_{II} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2 \\ 0 \\ 1 - \dot{\alpha}_2^2 / \beta^2 \end{bmatrix} = \overline{T}_{II} \dot{\Psi}_{II}^d \begin{bmatrix} -\frac{I_d \beta^2}{I_t} \\ 0 \\ 1 - \frac{I_d^2 \beta^2}{(2I_t^2)} \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire que seuls sont non nuls les éléments

$$\dot{W}_{\dot{\alpha}_2}'' = -\frac{I_d}{I_t} \dot{\alpha}_2 \quad \dot{W}_{\dot{\alpha}_2^2}'' = -\frac{I_d^2}{(2I_t^2)} \dot{\alpha}_2^2$$

Enfin (§ C.1.7), on doit écrire  $\mathcal{L}_i^d$  jusqu'au second ordre ; ici, puisque  $\mathcal{L}_i^d = \sum_{j=1}^3 \dot{W}_{\dot{\alpha}_j}''$ , la matrice  $\dot{W}_{\dot{\alpha}_j}''$  est nulle (pas de second ordre dans  $\mathcal{L}_i^d$ ). Les équations du mouvement sont alors entièrement données par l'Annexe C. En projetant ces équations dans les axes  $r^i$  du corps rigide (§ C.4.4.),

on obtient les équations suivantes, pourvu qu'on néglige le couple aérodynamique en roulis et vu que  $\mathbf{I}^d = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 \end{bmatrix}^T$

Lacet :

$$I_1 \ddot{\theta}_1^k - (I_1 - a_3) \bar{n} \ddot{\theta}_2^k + a_3 \bar{n}^2 \theta_1^k = \bar{n} \frac{I_d}{I_t} \beta \dot{a}_3 + 6 \cdot 10^{-7} \cos(v - v_N)(I_1 + a_3) - 1.9 \cdot 10^{-5} d_1 \cos(v - v_N) + 1.1 \cdot 10^{-5} d_2$$

Roulis :

$$I_t \ddot{\theta}_2^k + I_d \ddot{\beta} + (I_1 - a_3) \bar{n} \ddot{\theta}_1^k + [4(I_t - I_1) + a_3] \bar{n}^2 \theta_2^k + 4 I_d \bar{n}^2 \beta = -6 \cdot 10^{-7} \sin(v - v_N)(2 I_t - I_1 + a_3) - 3.9 \cdot 10^{-5} d_3 \sin(v - v_N) - 1.1 \cdot 10^{-5} d_2 + 4.8 \cdot 10^{-6}$$

Tangage :

$$I_t \ddot{\theta}_3^k + 3(I_t - I_1) \bar{n}^2 \theta_3^k = \bar{n}^2 \sin v I_3 + 1.9 \cdot 10^{-5} [d_1 \cos(v - v_N) + 2 d_2 \sin(v - v_N)] + 4.8 \cdot 10^{-5} \sin(v_4 C_k) - \bar{n} \Delta a_3$$

Mât :

$$m_3 \ddot{\beta} - (I_1 - a_3) \frac{I_d}{I_t} \bar{n} \ddot{\theta}_1^k + (4 I_1 - a_3) \frac{I_d}{I_t} \bar{n}^2 \theta_2^k + \left( 4 \frac{I_t - I_1}{I_t} + 2 \bar{n}_1 - \bar{n}_{22} - 2 \bar{n}_{33} + \frac{c_d}{\bar{n}^2} \right) \bar{n}^2 \beta = -3_d \ddot{\beta} - 6 \cdot 10^{-7} \sin(v - v_N)(I_1 - a_3) \frac{I_d}{I_t} + 3.9 \frac{I_d}{I_t} d_3 \sin(v - v_N)$$

en supposant qu'il n'y a aucune commande active à l'articulation du mât.

#### II. 2. 4. Conclusions

Pour ce qui est des conditions d'équilibre (C24), la seconde indique une force "potentielle"  $c = \bar{g}_\beta$  où  $\bar{g}_\beta = I_d(-1, 1 \cdot 10^{-5} d_1 + 4.8 \cdot 10^{-6}) / I_t$ , force généralisée due à la présence de couples extérieurs constants ; à la configuration d'équilibre statique, le mât est donc légèrement incliné sur le corps principal.

Quant à la première condition (C24), elle n'est vérifiée que pour sa composante en tangage :  $5.2 \cdot 10^{-6} \text{ N.m} = 1 \parallel \bar{V} \parallel$ , ce qui

permet de prévoir le temps que va mettre la roue à "saturer".

Les deux autres composantes de la première condition (C24) ne sont pas strictement vérifiées puisque, comme on peut le voir sur les équations de roulis et de lacet, il subsiste un couple constant sur chacun de ces axes ; une partie peut être éliminée en s'arrangeant pour que  $d_2 = 0$  mais le couple constant en roulis dû à la radiation solaire doit être compensé par un système annexe sinon il n'y a pas, strictement parlant, équilibre (le satellite va précessionner).

Il convient enfin de vérifier, à l'aide des équations de lacet, de roulis et du mât, si les couples perturbateurs harmoniques n'entraînent pas des oscillations en roulis qui dépassent la précision de pointage requise ; ce calcul n'est pas effectué ici.

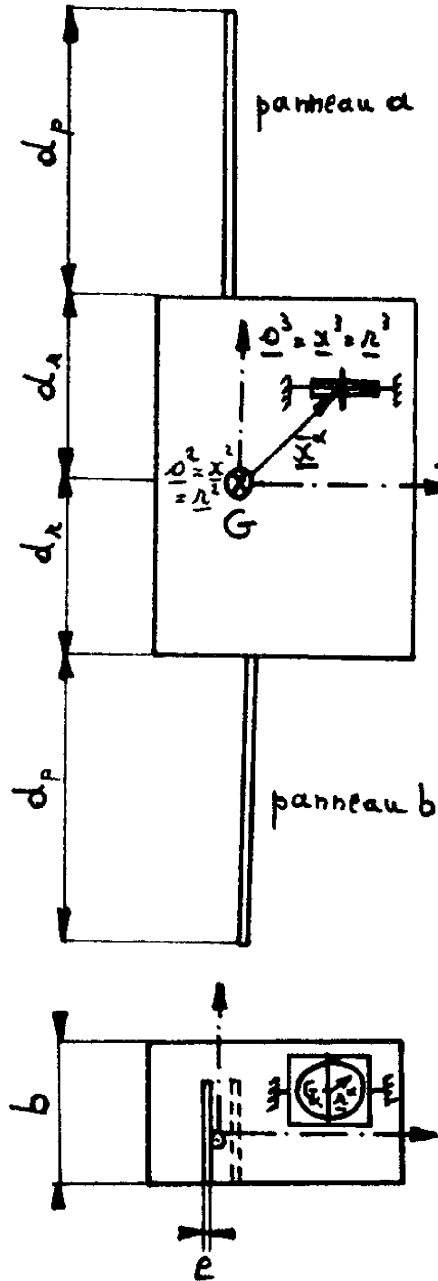
## II. 3. DYNAMIQUE D'UN SATELLITE GEOSTATIONNAIRE MUNI DE PANNEAUX FLEXIBLES

### II. 3. 1. Description du satellite

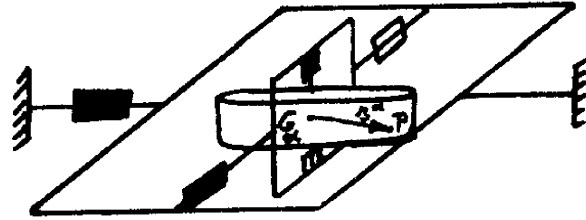
La plupart des satellites de télécommunications envisagés actuellement comportent deux grands panneaux solaires, flexibles qui l'alimentent en énergie électrique, ainsi qu'une roue de vitesse modulable autour d'une valeur constante élevée et d'orientation commandable par l'intermédiaire de deux cardans, afin d'obtenir une stabilisation "trois axes" du satellite. Leur configuration générale est du type représenté à la figure 16a, moyennant l'hypothèse que le centre de masse de chacun des deux cardans coïncide avec celui de la roue (point  $G_\alpha$ ) et que les axes de rotation des cardans et de la roue passent par  $G_\alpha$  ; ceci implique donc que les balourds causés par le moteur de la roue et par celui du cardan interne soient équilibrés par des contrepoids (figure 16 b), l'emplacement du point  $G_\alpha$  étant par ailleurs quelconque dans le corps principal rigide.

Les deux panneaux solaires sont identiques, encastrés parallèlement sur le corps principal et symétriques par rapport au plan de roulis. La distance  $d_r$  entre leur point d'attache et le plan de tangage est la même.

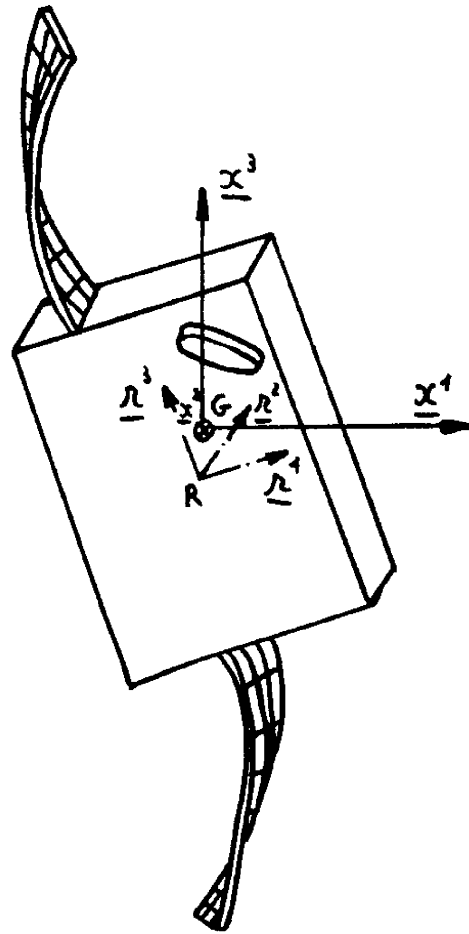
Figure 16 : satellite géostationnaire muni de panneaux et d'une roue sur double cardan.



a) à l'équilibre dynamique



b) schéma de la roue sur double cardan



c) à l'état déformé

A l'équilibre dynamique, la configuration désirée est celle de la figure 16 a, le repère orbital étant le repère d'équilibre. Les panneaux solaires sont des structures essentiellement discontinues : certains peuvent être modélisés par un mât homogène qui sous-tend une membrane couverte de cellules solaires, ou par tout autre assemblage d'éléments finis. Afin de ne pas nous limiter à un seul type technologique de panneau, nous les idéaliserons comme des plaques planes homogènes de rigidités flexionnelle et torsionnelle égales aux rigidités correspondantes du panneau réel, ces données étant supposées fournies par les spécialistes de la structure. Ce modèle très simple donne en réalité une représentation suffisamment fidèle du comportement du système pour les modes à fréquence basse.

Le satellite se compose d'un corps partiellement rigide, partiellement flexible (la carcasse et les instruments de bord plus les panneaux) connecté à trois corps mobiles (les cardans plus la roue) ; nous mettrons ce système en équations en distinguant deux modes opérationnels.

### II. 3. 2. Equations en mode "normal" ou régime permanent

Dans cette phase, les couples perturbateurs sont très faibles et varient à la pulsation orbitale  $\bar{n} \simeq 2 \pi / 86400. = 7.27 \cdot 10^{-5}$  rd/s pour ce type de satellites.

Comme la première pulsation propre est, nous le verrons, de 1.78 rd/s, les panneaux peuvent être considérés comme rigides en mode normal. On pourrait alors en étudier la dynamique aux grands angles à l'aide du formalisme s'appliquant aux systèmes de corps rigides articulés [31] ou simplement en appliquant à chacun des corps rigides le théorème du moment cinétique et en éliminant les couples de réaction, ce qui est simple dans ce cas-ci. Par contre, il peut paraître utile, le système devant être stabilisé au voisinage du repère orbital, d'obtenir les équations du mouvement sous la forme (i.44), en vue notamment d'étudier la stabilité du système autonome en régime permanent. Nous utiliserons pour cela l'approche exposée au chapitre I ; le résultat est alors immédiatement transposable au cas d'une roue sur cardan à un degré de liberté aussi

bien qu'au cas de la roue fixe.

Dans cette étude, nous supposerons encore que le satellite global est inertielle de révolution ( $I_1 = I_2 = I_t$ ) et qu'il en est de même du système roue plus cardans ( $I_1^\alpha = I_2^\alpha = I_t^\alpha$ ). Remarquons que toutes les hypothèses de symétrie faites jusqu'ici ont pour but de simplifier l'écriture des formules mathématiques mais n'invalident en rien les formalismes proposés.

Nous utiliserons la propriété de fort moment cinétique interne et supposerons  $a_3 \gg I_t$ . En définissant la "pulsation de nutation"  $\omega_N (> 0 \text{ ou } < 0)$  comme le rapport entre la composante sur  $\underline{O}^3$  du moment cinétique de la roue à l'équilibre et  $I_t$ , l'hypothèse ci-dessus s'écrit aussi  $\omega_N \gg \bar{n}$  puisque  $a_3 \bar{n} = I_t \omega_N$ . A titre indicatif, en supposant que l'inertie transverse du satellite ne dépasse pas  $10^3 \text{ m}^2 \text{ kg}$  et en admettant que  $0.01 \ll 1$ , il suffit que le moment cinétique nominal soit supérieur à  $1 \text{ N.m.s}$ . En examinant les matrices du § C.4.3., on remarque alors que les matrices  $\Lambda, \Pi, \Gamma$  (qui ont des éléments du même ordre que ceux de  $I$ ) n'interviennent pas. Ceci revient à supposer que le gradient de gravité ne joue pas et que les variations de la matrice d'inertie dues aux rotations des cardans sont négligeables ; les seules matrices à calculer à l'aide d'une approximation quadratique sont donc  $\xi^1, \xi^2, \sqrt{\xi^3}$  et  $\Sigma^{33}$ .

Commençons d'abord par éliminer les six déplacements du corps principal à l'aide de (I.36) et de (I.37). On a évidemment  $\mathcal{E} = m^{-1}W = \mathbf{0}$  (pas de déplacement du centre de masse lors d'une rotation de cardans) et (figure 16 b):

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= -I^{-1}P = -I^{-1} \int_{m_d} \tilde{x} w dm \\ &= -I^{-1} \int_{m_d} (\tilde{x}^d + \tilde{x}^\alpha) w dm = -I^{-1} \int \tilde{x}^\alpha w dm \\ &= -I^{-1} \int_{m_d} \tilde{x}^{\alpha T} \tilde{x}^\alpha dm \alpha = -I^{-1} I^\alpha \alpha \quad (\text{II.1}) \end{aligned}$$

ou l'intégration s'étend sur le système (roue plus cardans) ;

$$I^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_t^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & I_t^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & I_{//}^{\alpha} \end{bmatrix} ; \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$I_{//}^{\alpha}$  est le moment d'inertie de la roue autour de son axe de rotation ;  
 $I_t^{\alpha}$  contient le moment d'inertie transverse de la roue et du dispositif de suspension à la Cardan .

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les petits angles de rotation des cardans autour des axes, pris dans l'ordre de Bryan.

Rappelons que les axes moyens sont bien principaux centraux d'inertie à l'équilibre puisqu'il n'y a de moment cinétique nominal interne que selon  $\underline{O}^3$ .

D'après (B11) et (B18), nous pouvons écrire, en axes  $\underline{x}^i$ ,

$$h^{\alpha//} = R^{\delta T} R^{\alpha T} h^{\alpha} = \left[ \mathbb{1} + (\tilde{\alpha} + \tilde{\delta}) + (\alpha^{\text{II}} + \delta^{\text{II}}) + \tilde{\delta} \tilde{\alpha} \right] h^{\alpha//}$$

où  $h^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{//}^{\alpha} \dot{\psi}_{//} \end{bmatrix}$  est le moment cinétique de la roue exprimé dans ses propres axes.

Ceci donne, à l'aide de (ii.1) :

$$h^{\alpha//} = I_{//}^{\alpha} \dot{\psi}_{//} \begin{bmatrix} q \alpha_2 \\ -q \alpha_1 \\ 1 - \frac{q^2}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \end{bmatrix}$$

$$\text{où } q = 1 - \frac{I_t^{\alpha}}{I_t}$$



La matrice "déformation" étant ici  $\beta = [\alpha_1, \alpha_2]^T$ , cette expression permet d'exprimer  $h^d$  sous la forme (C.2) avec :

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \sum^{33} = \begin{bmatrix} q^2/2 & 0 \\ 0 & q^2/2 \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

D'autre part, on a  $\underline{\Omega}^d = \underline{\Omega}^{\alpha/\lambda} + \underline{\Omega}^{\lambda/x}$   
 où  $\underline{\Omega}^{\alpha/\lambda}$  est la vitesse angulaire (du fait des rotations de cardans) de la roue par rapport aux axes  $\underline{r}^1$  du corps principal ;  
 $\underline{\Omega}^{\lambda/x}$  est la vitesse angulaire des axes  $\underline{r}^1$  vis-à-vis des axes  $\underline{x}^i$ .

Dès lors,

$$\underline{\Omega}^d = [\underline{\lambda}]^T \underline{\Omega}^{\alpha/\lambda} + [\underline{x}]^T \underline{\Omega}^{\lambda/x} = [\underline{x}]^T (R^{\beta T} \underline{\Omega}^{\alpha/\lambda} + \underline{\Omega}^{\lambda/x}) = [\underline{x}]^T \underline{\Omega}^d$$

avec, par (B15) et (E 18),

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}^d &= R^{\beta T} \left\{ R^{\alpha T} \left[ \dot{\alpha} + \frac{1}{2} (\tilde{\alpha} + U^{\text{diag}} \alpha^{\text{sym}}) \dot{\alpha} \right] + \left[ \dot{\gamma} + \frac{1}{2} (\tilde{\gamma} + U^{\text{diag}} \gamma^{\text{sym}}) \dot{\gamma} \right] \right\} = \\ &= \dot{\alpha} + \dot{\gamma} + \frac{1}{2} (\tilde{\alpha} + U^{\text{diag}} \alpha^{\text{sym}}) \dot{\alpha} + \tilde{\gamma} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} (\tilde{\gamma} + U^{\text{diag}} \gamma^{\text{sym}}) \dot{\gamma} = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 + \dot{\alpha}_1 + \dot{\gamma}_2 \dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_3 \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\gamma}_2 + \dot{\alpha}_2 - \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_3 \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_2 \dot{\alpha}_1 - \dot{\gamma}_1 \dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il est remarquable que la partie quadratique de la troisième composante de cette matrice ne dépend pas de  $\dot{\gamma}_3$  ; cela nous permet d'exprimer  $\underline{\Omega}^d$  sous la forme (C8) avec

$$\sqrt{3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \frac{I_t^x}{I_t} q \\ \frac{I_t^x}{I_t} & 0 \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Il nous reste enfin à exprimer  $M^d$ . On a, par (138),

$$T_d = \frac{1}{2} I_t^x q (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) \quad \text{puisque}$$

$$T_w = \frac{1}{2} \int_{m_d} \dot{w}^T \dot{w} dm = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^T \int_{m_d} (\underline{r}^{\alpha})^T \dot{\alpha} dm \dot{\alpha} = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^T I^{\alpha} \dot{\alpha},$$

ce qui permet d'exprimer  $T_d$  sous la forme (C6) avec :

$$M^d = \begin{bmatrix} I_t^\alpha q & 0 \\ 0 & I_t^\alpha q \end{bmatrix} \quad (\text{II. 4})$$

Connaissant les matrices (II-1) à (II-4), le système se met sous la forme générale (C-18) avec

$$\left[ \begin{array}{l} M = \begin{bmatrix} I & \mathbb{O}_{32} \\ \mathbb{O}_{23} & I_t^\alpha q \mathbb{1}_2 \end{bmatrix} ; \quad G = \alpha_3 \bar{n} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O}_{21} & q \mathbb{I} \\ \mathbb{O}_{12} & 0 & \mathbb{O}_{12} \\ -q \mathbb{I} & \mathbb{O}_{21} & q^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \\ \\ \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad C = \alpha_3 \bar{n}^2 \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{O}_{21} & q \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{O}_{12} & 0 & \mathbb{O}_{12} \\ q \mathbb{1}_2 & \mathbb{O}_{21} & \begin{bmatrix} (\alpha_3 \bar{n}^2)^{-1} C^\alpha \\ + q^2 \mathbb{1}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (\text{II. 5})$$

$\mathbb{I}$  est une matrice telle que  $\mathbb{I}^2 = -\mathbb{1}$ , elle est unitaire et antisymétrique. La matrice  $C^\alpha$  représente un éventuel rappel élastique des cardans (si ceux-ci ne sont pas commandés). Dans ce cas, on peut voir que le Hamiltonien n'est que semi défini et que l'amortissement est incomplet puisque, le tangage étant complètement découplé, une dérive peut apparaître sur cet axe ; l'étude de stabilité peut être obtenue comme décrit au § I.11.3

Dans le cas où les cardans sont commandés, on préfère écrire explicitement les équations projetées dans les axes  $\underline{r}^i$  liés au corps principal, sous la forme (C25). Ceci peut se faire en postmultipliant les matrices (II-5) ci-dessus par une matrice  $F^{-1}$  donnée en (C26) avec, ici,  $I^d = I_t^\alpha \mathbb{1}_2$ .

(II. 6)

En définissant les matrices  $\Theta^{\lambda} = [\theta_1^{\lambda}, \theta_2^{\lambda}]^T$  et  $\mathcal{A} = [\alpha_1, \alpha_2]^T$ ,  
 les équations de roulis-lacet s'écrivent alors :  
corps rigide :

$$\ddot{\Theta}^{\lambda} + \omega_N \mathbb{I} \dot{\Theta}^{\lambda} + \omega_N \bar{n} \Theta^{\lambda} = \mathcal{L}^{\lambda} - (\mathbb{I}_t^{\lambda}/\mathbb{I}) \ddot{\mathcal{A}} - \omega_N (\mathbb{I} \mathcal{A} \dot{\Theta}^{\lambda})$$

cardans :

$$(\mathbb{I}_t^{\alpha}/\mathbb{I}_t) \ddot{\mathcal{A}} - \omega_N \mathbb{I} (\dot{\Theta}^{\lambda} + \mathcal{A}) + \omega_N \bar{n} (\Theta^{\lambda} + \mathcal{A}) = (q \mathbb{I}_t)^{-1} \mathcal{L}^{\alpha} - \mathbb{I}_t^{\alpha} (q \mathbb{I}_t)^{-1} \dot{\mathcal{L}}^{\alpha}$$

où  $\mathcal{L}^{\lambda} = [l_1^{\lambda}, l_2^{\lambda}]^T$ , couples perturbateurs en roulis-lacet (extérieurs) et d'inertie ;  
 $\mathcal{L}^{\alpha} = [l_1^{\alpha}, l_2^{\alpha}]^T$ , couples moteurs de commande que le corps principal exerce sur les cardans.

Par soustraction et par addition (à un facteur constant près) de ces équations, on obtient les formes plus simples

corps rigide :

$$\mathbb{I}_t^{\circ} \ddot{\Theta}^{\lambda} = \mathcal{L}^{\lambda} - \mathcal{L}^{\alpha} = \mathcal{L}^{\circ} \quad \text{avec} \quad \mathbb{I}_t^{\circ} = \mathbb{I}_t - \mathbb{I}_t^{\alpha} \quad (\text{II.7})$$

cardans :

$$\mathbb{I}_t^{\alpha} (\ddot{\Theta}^{\lambda} + \mathcal{A}) + (\omega_N \mathbb{I}_t) \mathbb{I} (\dot{\Theta}^{\lambda} + \mathcal{A}) + (\omega_N \mathbb{I}_t \bar{n}) (\Theta^{\lambda} + \mathcal{A}) = \mathcal{L}^{\alpha} \quad (\text{II.8})$$

On peut vérifier intuitivement ces résultats : la première équation considère la carcasse rigide (corps rigide plus panneaux) soumise à des couples perturbateurs et aux réactions des moteurs ; la seconde revient à considérer le système (roue plus cardans) comme un rotor rigide soumis aux couples moteurs (ceci se justifie par le fait que les petits angles de rotations se découpent en approximation linéaire).

L'équation de tangage s'écrit  $\mathbb{I}_3 \ddot{\theta}_3 = \mathcal{L}_3^{\tau} - \mathcal{L}_3^{\alpha} = \mathcal{L}_3^{\tau}$  (II.9)  
 et l'équation de la roue est fournie par l'équation de Lagrange

$$\mathbb{I}_R (\ddot{\Psi}_R + \dot{\theta}_3^2) - 2eR\dot{\theta}_3 \dot{\Psi}_R = \mathcal{L}_R^{\alpha} \quad (\text{II.10})$$

### II. 3. 3. Equations en mode "désaturation" ou régime "cap-roule"

Après avoir fonctionné un certain temps en mode "normal", la

variation du moment cinétique de la roue par rapport à sa valeur nominale de l'équilibre dynamique atteint, et ce, à cause des couples perturbateurs constants en axes inertiels, une limite qui, technologiquement, ne peut être dépassée. Par variation du moment cinétique, nous entendons l'accroissement de vitesse aussi bien que la dérive de l'axe de la roue. Les opérations de "désaturation" de cette vitesse ou de "recalage" de cet axe peuvent s'effectuer à l'aide de magnétocoupleurs ou à l'aide de jets de gaz ; la seconde solution s'impose ici vu la faiblesse du champ géomagnétique à l'altitude des satellites synchrones. Un couple en échelon de quelques dizaines de secondes est alors réalisé à l'aide de tuyères placées symétriquement sur le corps principal. Une excitation transitoire se produit également lors des corrections d'orbite : ce sont les opérations de "maintien à poste" ("station keeping"). Les désaturations, recalages et corrections d'orbite se traduisent en général par une excitation des parties déformables qui, du fait de l'amortissement structural, ont une constante de temps de l'ordre de la minute. Sur un temps aussi court, nous considérons le repère orbital comme inertiel.

Nous utilisons l'approche du § 1.10.3 et étudions d'abord le système conservatif associé. Nous avons vu plus haut qu'on peut scinder le satellite en deux sous-systèmes : (corps rigide plus panneaux) et (roue plus cardans), échangeant entre eux le couple  $L^\alpha$ . En appelant  $\Theta_i^0 (i=1,2,3)$  les angles "moyens" du sous-système déformable (corps rigide plus panneaux), les trois premières équations de (I44) s'écrivent ici, puisqu'on suppose  $\bar{n} = 0$ ,

$$I^0 \dot{\Theta}^0 = L^0$$

(l'indice rappelle de quel sous-système il s'agit), ou encore, puisque

$$\Theta^\alpha = \Theta^0 + \gamma^\alpha = \Theta^0 - (I^0)^{-1} P,$$

$$I^0 \dot{\Theta}^\alpha + \dot{P} = L^0 \quad (\text{II - 11})$$

où  $P = \int_{2m_p} \tilde{x} \tilde{w} dm$  est cette fois le moment cinétique relatif de déformation des panneaux par rapport au corps rigide.

Le mouvement des panneaux non encore "discrétisés" ne peut s'obtenir à l'aide de l'Annexe C mais bien par les équations de Lagrange (I - 21) des systèmes continus. L'énergie cinétique s'écrit, jusqu'au second ordre :  $T = T_e + T_d$  où  $T_d$  est donnée par (I - 38). Explicitement,

$$T = \frac{1}{2} \dot{c}^{RT} m \dot{c}^R - \dot{c}^{RT} m \dot{\epsilon} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^A \tau \mathbb{I}^0 \dot{\theta}^A - \dot{\theta}^A \tau \mathbb{I}^0 \dot{\gamma}^0 + T_w \quad (\text{II. 12})$$

Notre hypothèse sur les déplacements est qu'ils s'effectuent tous dans la direction de  $\underline{r}^1$  (figure 16 c). Pour tout point d'un quelconque des panneaux, nous définissons le changement de variable

$$\zeta d_p = |r_3| - d_r$$

et le changement de fonction

$$d_p \eta(\zeta, t) - r_2 \zeta(\zeta, t) = w_1(r_3, t)$$

$\zeta$  sera l'abscisse réduite :  $\eta$ , le déplacement de flexion réduit et  $\zeta$ , l'angle de torsion (compté positivement lorsque les sections droites effectuent une rotation positive autour de  $\underline{r}^3$ ) et nous affectons ces valeurs de l'indice a ou b pour indiquer de quel panneau il s'agit. Soient encore les changements de fonctions suivants :

$$\eta_+(\zeta, t) = \eta_a + \eta_b$$

$$\eta_-(\zeta, t) = \eta_a - \eta_b$$

$$\zeta_+(\zeta, t) = \zeta_a + \zeta_b$$

$$\zeta_-(\zeta, t) = \zeta_a - \zeta_b$$

Nous utilisons les abréviations  $\eta'_+ = \frac{\partial \eta_+}{\partial \zeta}$ ,  $\dot{\eta}_+ = \frac{\partial \eta_+}{\partial t}$ , etc ...

Avec ces définitions, on calcule facilement que :

$$T_w = \int_0^1 \tilde{c}_w d\zeta = \frac{1}{2} \left[ \frac{m_p d_p^2}{2} \int_0^1 (\dot{\eta}_+^2 + \dot{\eta}_-^2) d\zeta + \frac{m_p b^2}{24} \int_0^1 (\dot{\zeta}_+^2 + \dot{\zeta}_-^2) d\zeta \right] \quad (\text{II. 13})$$

où  $m_p$  est la masse d'un panneau

Pour ce qui est du potentiel élastique, il ne contient pas de "forces potentielles" puisque le satellite est quasi inertiel et qu'il n'y a de moment cinétique nominal interne que selon  $\underline{Q}^3$  ; on peut s'en convaincre en examinant (C-24). Ce potentiel est alors fourni directement par la Résistance des matériaux [54]. Dans le cas d'une poutre homogène en flexion-torsion, il peut s'écrire :

(II. 14)

$$V = V_d = \int_0^1 \mathcal{V} d\zeta = \frac{1}{2} \left[ \frac{(E_{fl} I_{fl})}{2 d_p} \int_0^1 (\eta_+''^2 + \eta_-''^2) d\zeta + \frac{(G_{tor} I_{tor})}{2 d_p} \int_0^1 (\zeta_+'^2 + \zeta_-'^2) d\zeta \right]$$

où  $E_{fl}$  et  $G_{tor}$  sont les modules de Young et de cisaillement d'un panneau ;

$$I_{fl} = b e^3 / 12 \quad ; \quad I_{tor} = b e^3 / 3 \quad ;$$

$(E_{fl} I_{fl})$  et  $(G_{tor} I_{tor})$  sont les rigidités flexionnelle et torsionnelle d'un panneau.

Les seuls éléments non nuls de P et W sont :

$$\left[ \begin{array}{l} P_2 = \int_{2m_p} \mathcal{R}_3 w_1 dm = m_p d_p^2 \int_0^1 (\zeta + d_n/d_p) \eta_- d\zeta \\ P_3 = - \int_{2m_p} \mathcal{R}_2 w_1 dm = \frac{m_p b^2}{12} \int_0^1 \zeta_+ d\zeta \\ W_1 = \int_{2m_p} w_1 dm = m_p d_p \int_0^1 \eta_+ d\zeta \end{array} \right] \quad (II. 15)$$

$$\text{On en déduit } \gamma^o = -(\mathbf{I}^o)^{-1} \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \varepsilon = -\mathbf{m}^{-1} \mathbf{W}. \quad (II. 16)$$

Ces relations fournissent l'interprétation physique des indices (+) et (-) : l'indice (+) se rapporte aux modes symétriques des panneaux (entraînant en flexion, un "décalage du centre de masse" et, en torsion, le tangage du corps rigide) et l'indice(-), aux modes antisymétriques (entraînant, en flexion, le roulis du corps rigide et, en torsion, par le moindre effet).

Les relations (I - 12) à (I - 16) nous permettent à présent de mettre le Lagrangien sous la forme  $\mathcal{L} = \int_0^1 \mathcal{L} d\zeta$  avec

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^{RT} m \dot{\theta}^R + \frac{1}{2} \dot{\theta}^{RT} \mathbf{I}^o \dot{\theta}^R + \dot{\zeta}_1^R m_p d_p \dot{\eta}_+ + \dot{\zeta}_2^R m_p d_p^2 (\zeta + \frac{d_n}{d_p}) \dot{\eta}_- + \dot{\zeta}_3^R \frac{m_p b^2}{12} \dot{\zeta}_+ + \dot{\zeta}_4^R \dot{\zeta}_- \quad (II. 17)$$

L'équation de Lagrange (I - 21), appliquée successivement aux fonctions

$\eta_+$ ,  $\eta_-$ ,  $\zeta_+$ ,  $\zeta_-$  fournit les équations aux vibrations du système global :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{(E_{pl} I_{pl})}{m_p d_p^3} \eta_+'''' + \ddot{\eta}_+ &= -2 \frac{\ddot{\theta}_1^R}{d_p} \\
 \frac{(E_{pl} I_{pl})}{m_p d_p^3} \eta_-'''' + \ddot{\eta}_- &= -2 \left( \gamma + \frac{dr}{d_p} \right) \ddot{\theta}_2^A \\
 \frac{(G_{tor} I_{tor})}{m_p b^2 d_p / 12} \zeta_+'' - \dot{\zeta}_+ &= 2 \ddot{\theta}_3^A \\
 \frac{(G_{tor} I_{tor})}{m_p b^2 d_p / 12} \zeta_-'' - \dot{\zeta}_- &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (II. 18)$$

Le second membre de ces équations représente les forces d'entraînement dues aux mouvements du corps principal. Remarquons bien que ce second membre dépend des déformations puisque, par exemple,

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta}_2^A &= \ddot{\theta}_2^o + \ddot{\gamma}_2 = \ddot{\theta}_2^o - \ddot{P}_2 / I_t^o \\
 &= \ddot{\theta}_2^o - \frac{m_p d_p^2}{I_t^o} \int_0^1 \left( \gamma + \frac{dr}{d_p} \right) \ddot{\eta}_- d\gamma
 \end{aligned}$$

où seul  $\ddot{\theta}_2^o$  ne dépend que de l'excitation, selon la loi  $I_t^o \ddot{\theta}_2^o = \ell_2^o$ .

Les conditions aux limites correspondant à (II - 18) sont

$$\left[ \begin{aligned}
 \eta_+(0) = \eta_+'(0) = \eta_-(0) = \eta_-'(0) = \zeta_+(0) = \zeta_-(0) &= 0 \\
 \text{(panneaux encastés sur le corps principal) et} \\
 \eta_+''(1) = \eta_+'''(1) = \eta_-''(1) = \eta_-'''(1) = \zeta_+'(1) = \zeta_-'(1) &= 0 \\
 \text{(pas de moment de flexions, ni d'effort tranchant, ni de moment de torsion aux} \\
 \text{extrémités libres des panneaux)} & \quad (II. 19)
 \end{aligned} \right.$$

Les équations (II - 11), (II-15) et (II - 18) montrent que les trois axes sont complètement découplés. Les équations des cardans et celle de la roue sont données par (II - 8) et (II - 10) où  $\bar{n} = 0$ .

### III. 3. 4. Cas de la roue d'inertie

Si l'axe de la roue est fixe dans le corps principal, on a  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  et, en mode normal, le satellite se comporte comme un gyrostat rigide. En mode transitoire, on remarquera que les équations (II -18) et (II - 19) des panneaux restent inchangées, tandis que l'équation

(II - 11) du corps principal est remplacée par

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta}_1^{\wedge} + \omega_N \dot{\theta}_2^{\wedge} &= \mathcal{L}_1^P / \mathcal{I}_t && \text{(lacet)} \\
 \ddot{\theta}_2^{\wedge} - \omega_N \dot{\theta}_1^{\wedge} + \ddot{\varphi}_2 &= \mathcal{L}_2^P / \mathcal{I}_t && \text{(roulis)} \\
 \ddot{\theta}_3^{\wedge} + \ddot{\varphi}_3 / \mathcal{I}_3 &= \mathcal{L}_3^P / \mathcal{I}_3 && \text{(tangage)}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \ddot{\theta}_1^{\wedge} + \omega_N \dot{\theta}_2^{\wedge} \\ \ddot{\theta}_2^{\wedge} - \omega_N \dot{\theta}_1^{\wedge} + \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\theta}_3^{\wedge} + \ddot{\varphi}_3 / \mathcal{I}_3 \end{aligned}} \right\} \text{(II - 20)}$$

L'équation de la roue est dans tous les cas donnée par (II - 10).



SECONDE PARTIE

COMMANDE D'ATTITUDE D'UN  
SATELLITE DEFORMABLE



Dans la Première Partie, nous avons résolu, à l'aide des théorèmes de la Mécanique, l'important problème de représenter par une équation aussi simple que possible la dynamique d'attitude des satellites non rigides. La conception et la réalisation d'une commande d'attitude faisable, ou simplement l'obtention d'une fonction de transfert utilisable, exigent pourtant des simplifications plus draconiennes encore. Nous voulons parler de l'hypothèse de découplage des axes ou encore des procédures de troncature modale, ces deux pratiques ne sont pensables que si elles sont justifiées par la nature de l'excitation qui sera appliquée.

Dans cette Seconde Partie, nous traitons principalement le cas d'un satellite stabilisé "trois axes" à l'aide d'une roue sur cardan et muni de deux grands panneaux solaires flexibles ; c'est le type le plus prometteur des satellites d'application actuellement envisagés. Le système de commande a pour but :

- d'assurer un régime transitoire acceptable après les phases de désaturation, de recalage d'axe ou de correction d'orbite,
- une précision de pointage excellente durant le mode opérationnel normal.

Dans la conception d'une loi de commande recouvrant ces spécifications, nous avons rencontré deux problèmes délicats :

- il faut être en possession d'un modèle d'état réaliste de la dynamique du système mais suffisamment simple pour pouvoir lui appliquer les méthodes classiques de synthèse des systèmes de commande ; cela exige une représentation modale fortement tronquée, que nous justifierons au Chapitre III sur la base de considérations énergétiques ;

- la commande optimale nécessite toutes les variables d'état du système ; une partie de celles-ci étant non mesurables physiquement, il faut les estimer à l'aide d'un filtre. L'observateur de Luenberger nous a

paru intéressant pourvu qu'il soit peu sensible aux bruits, que ceux-ci proviennent des non-linéarités dynamiques, des incertitudes sur les paramètres ou des détecteurs ; c'est là l'étude contenue dans le Chapitre IV.

Si la tendance actuelle est d'utiliser comme moyen de stabilisation les roues sur double cardan, c'est que cet actionneur minimise les risques d'exciter les modes élastiques du satellite en régime permanent, tout en permettant un pointage très fin à l'aide de peu d'information. De plus, ses caractéristiques (poids, consommation, etc...) sont avantageuses.

## CHAPITRE III

### OBTENTION ET PROPRIETES DE LA FONCTION DE TRANSFERT

- :-

#### III. 1. MODES NORMAUX DE VIBRATIONS DANS LE CAS GENERAL :

Un processus physique est d'autant plus simple à simuler et à commander que le système d'équations qui le représente est plus découplé. Ceci amène tout naturellement les ingénieurs à tâcher de représenter la dynamique d'un système sous forme d'équations "normales", c'est-à-dire entièrement découplées. Bien que pas toujours simple, cette transformation est cependant possible dans le cas qui nous occupe. Nous savons qu'au voisinage de l'équilibre dynamique, le mouvement d'un satellite à un nombre fini de degrés de liberté est régi par l'équation :

$$M \ddot{y} + (G + Z) \dot{y} + (C + A) y = D \quad (\text{III. 1})$$

Le mot "fini" n'implique en réalité aucune restriction car, comme nous allons le montrer au § III. 2 en nous basant sur des considérations purement énergétiques, même une structure continue ne fait intervenir effectivement qu'un nombre réduit de modes en présence d'une perturbation donnée. La seule hypothèse, c'est que nous acceptons de regarder le système pendant un temps suffisamment court pour que les matrices M, G, Z, C et A soient constantes.

Il n'existe aucune transformation ponctuelle permettant de mettre l'équation (III. 1) sous forme normale dans le cas général. Autrement dit, M, (G + Z) et (C + A) ne sont pas simultanément diagonalisables. Si l'équation (III. 1) est familière aux dynamiciens puisque chacun de ses termes a une signification dynamique bien précise, les automaticiens, quant à eux, ont bâti des théories sur les équations différentielles d'état du premier ordre. Puisqu'une transformation de contact (faisant intervenir à la fois les coordonnées et les vitesses généralisées) est nécessaire, définissons le vecteur

d'écrire  $z = \begin{bmatrix} v^T \\ y^T \end{bmatrix}^T$  ainsi que  $\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{13} & \mathcal{D}^T \end{bmatrix}$  ;  
l'équation (III-1) s'écrit alors :

$$N \dot{z} + S z = \mathcal{D} \quad \text{(III-2)}$$

$$\text{ou } N = \begin{bmatrix} (C+A) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M \end{bmatrix} \quad \text{et } S = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & -(C+A) \\ (C+A) & (G+Z) \end{bmatrix}$$

Soit  $\Phi$  la matrice des vecteurs propres associés à la partie homogène de l'équation (III-2).

Considérons également l'équation adjointe homogène

$$N^T \dot{z}^a + S^T z^a = \mathbb{O}$$

et appelons  $\Phi^a$  sa matrice de vecteurs propres.

Si l'on effectue la transformation  $z = \Phi \gamma^n$ , (III-3)  
on obtient  $(\Phi^{aT} N \Phi) \dot{\gamma}^n + (\Phi^{aT} S \Phi) \gamma^n = \Phi^{aT} \mathcal{D}$   
ou les matrices entre parenthèses sont diagonales [31].

Le système se réduit donc à

$$\dot{\gamma}^n + \lambda^{\text{diag}} \gamma^n = (\Phi^{aT} N \Phi)^{-1} \Phi^{aT} \mathcal{D} \quad \text{(III-4)}$$

ou  $\lambda^{\text{diag}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n+6})$ .

Remarquons que, couramment, on étudie un système où  $Z = A = \mathbb{O}$ , c'est à dire où  $N$  est symétrique et  $S$  antisymétrique. On a alors  $\Phi^a = \Phi^*$ , complexe conjuguée de  $\Phi$ .

Les vecteurs propres étant ici complexes et les composantes de  $\gamma^n$  n'étant pas du tout en phase, l'interprétation physique du cas général est très délicate.

## III. 2. MÔDES NORMAUX D'UN SATELLITE GEOSTATIONNAIRE A PANNEAUX FLEXIBLES

### III. 2. 1. Cas de la roue sur double cardan

Les modes normaux sont définis à partir des équations (II. 11), (II. 15) et (II. 18) du régime transitoire du système conservatif non perturbé. Alors  $\Theta^o = \bar{C} = \mathbb{O}$ , donc  $\Theta^x = \gamma^o$  et  $\rho^R = \varepsilon$ , (III. 5)

c'est-à-dire que les axes  $\underline{x}^i$  sont inertiels ou encore que le mouvement du corps principal est uniquement dû aux déformations des panneaux et participe aux oscillations propres du système global. Les équations du mouvement sont totalement découplées, ce qui nous permet d'essayer comme solution particulière

$$\begin{aligned} \eta_+(\zeta, t) &= \eta_+^n(\zeta) \cos \omega_{2+}^n t ; & \eta_-(\zeta, t) &= \eta_-^n(\zeta) \cos \omega_{2-}^n t ; \\ \zeta_+(\zeta, t) &= \zeta_+^n(\zeta) \cos \omega_{3+}^n t. \end{aligned} \quad (\text{III. 6})$$

Les relations (II - 15) fournissent alors immédiatement

$$W_1(t) = S_1^n \cos \omega_{2+}^n t ; \quad P_2(t) = I_2^n \cos \omega_{2-}^n t ; \quad P_3(t) = I_3^n \cos \omega_{3+}^n t$$

où

$$\begin{cases} S_1^n = m_p d_p \int_0^1 \eta_+^n(\zeta) d\zeta \\ I_2^n = m_p d_p^2 \int_0^1 (\zeta + d_r/d_p) \eta_-^n(\zeta) d\zeta \\ I_3^n = \frac{m_p b^2}{12} \int_0^1 \zeta_+^n(\zeta) d\zeta \end{cases} \quad (\text{III. 7})$$

L'équation (II. 11) où  $\ddot{L}^0 = \mathbb{O}$  et une équation similaire pour les translations ( $m\ddot{C}^R + \ddot{W} = \mathbb{O}$ ) admettent pour solution

$$\begin{aligned} C_1^R = \varepsilon_1 = \varepsilon_1^n \cos \omega_{2+}^n t, \quad C_2^R = \varepsilon_2 = C_3^R = \varepsilon_3 = 0, \\ \theta_1^A = \delta_1^0 = 0, \quad \theta_2^A = \delta_2^0 = \delta_2^n \cos \omega_{2-}^n t, \quad \theta_3^A = \delta_3^0 = \delta_3^n \cos \omega_{3+}^n t, \end{aligned} \quad (\text{III. 8})$$

pourvu que  $\varepsilon_1^n = -S_1^n/m$ ,  $\delta_2^n = -I_2^n/I_t^0$ ,  $\delta_3^n = -I_3^n/I_3^0$ .

On peut enfin réécrire les équations (II. 18) des panneaux :

$$\left. \begin{aligned} \eta_+^{n''''} - (\mu_+^n)^4 \eta_+^n &= 2(\mu_+^n)^4 \varepsilon_1^n / d_p \\ \eta_-^{n''''} - (\mu_-^n)^4 \eta_-^n &= 2(\mu_-^n)^4 (\zeta + d_r/d_p) \delta_2^n \\ \zeta_+^{n''} + (\nu_+^n)^2 \zeta_+^n &= -2(\nu_+^n)^2 \delta_3^n \\ \zeta_-^{n''} + (\nu_-^n)^2 \zeta_-^n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 9})$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} m_p d_p^3 (\omega_{2+}^n)^2 / (E_{p1} I_{p1}) = (\mu_+^n)^4, & m_p d_p^3 (\omega_{2-}^n)^2 / (E_{p1} I_{p1}) = (\mu_-^n)^4, \\ m_p b^2 d_p (\omega_{3+}^n)^2 / (12 G_{tor} I_{tor}) = (\nu_+^n)^2, & m_p b^2 (\omega_{3-}^n)^2 / (12 G_{tor} I_{tor}) = (\nu_-^n)^2. \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont semblables à (II. 19).

En résolvant les équations en  $\zeta$  (III. 9), on doit bien garder à l'esprit que le second membre dépend de la fonction mais non de la variable!

Ainsi, pour traiter le cas de la flexion en roulis, on remarquera que la solution est de la forme

$$\gamma_2^n(\zeta) = \gamma_2^n \left[ a \sin(\mu_2^n \zeta) + b \cos(\mu_2^n \zeta) + c \sinh(\mu_2^n \zeta) + d \cosh(\mu_2^n \zeta) - 2 \left( \zeta + \frac{d_1}{d_p} \right) \right] \quad (\text{III. 10})$$

qui vérifie identiquement l'équation. On s'aperçoit qu'il ne s'agit là que d'une manière d'écrire puisque  $\gamma_2^n$  est fonction de  $\gamma_2^n$ ! Toujours est-il que  $\gamma_2^n$  est constant et que  $\gamma_2^n$  n'est définie qu'à un facteur constant près, ce qui rend l'expression licite. Les quatre conditions aux limites sur  $\gamma_2^n$  fournissent les valeurs exactes de a, b, c et d en fonction de  $\mu_2^n$  et de  $d_r/d_p$ . Il reste à vérifier l'équation. Pour cela, multiplions (III. 10) par  $(\zeta + d_r/d_p)$  et intégrons de 0 à 1; il vient :

$$-\frac{I_t^0}{m_p d_p^2} = \int_0^1 \left( \zeta + \frac{d_1}{d_p} \right) \left[ a \sin(\mu_2^n \zeta) + b \cos(\mu_2^n \zeta) + c \sinh(\mu_2^n \zeta) + d \cosh(\mu_2^n \zeta) - 2 \left( \zeta + \frac{d_1}{d_p} \right) \right] d\zeta$$

où a, b, c et d sont supposés remplacés par leur valeur.

Intégrée, cette relation s'écrit [28]

$$Q(\mu_2^n) = -r \quad (\text{III. 11})$$

la fonction  $Q(\mu_2^n)$  et la constante r sont données dans le tableau ci-dessous, ainsi que pour les autres types de mouvement. Dans tous les cas,  $\lim_{\mu \text{ ou } \nu \rightarrow 0} Q = 1$  et, de plus, Q est une fonction monotonément croissante qui dépend de  $\mu$  ou  $\nu$  et, en roulis, de  $d_r/d_p$ , mais en aucun cas des moments d'inertie du satellite.

MOUVEMENT	$Q(\mu \text{ ou } \nu)$	r
flexion anti symétrique roulis	$\frac{(\mu \frac{d_1}{d_p})^4 (\tan \mu + \tanh \mu) + 2(\mu \frac{d_1}{d_p}) \tan \mu \tanh \mu + \tan \mu - \tanh \mu}{\mu^3 \left[ 1/3 + (1 + \frac{d_1}{d_p}) \frac{d_1}{d_p} \right] (1 + \sec \mu \operatorname{sech} \mu)}$	$\frac{I_2^1}{I_2^0}$
flexion symétrique translation verticale	$\frac{\tan \mu + \tanh \mu}{\mu (1 + \sec \mu \operatorname{sech} \mu)}$	$\frac{m_1}{m_f}$
torsion symétrique tangage	$\frac{\tan \nu}{\nu}$	$\frac{I_3^1}{I_3^0}$



Dans ce tableau,

$I_2^R$	est le moment d'inertie du corps rigide par rapport à $\underline{r}^2$ ,
$I_2^f = 2 I_2^p = 2 m_p d_p^2 \left[ 1/3 + (1 + d_r/d_p) d_r/d_p \right]$	est le moment d'inertie de la partie flexible par rapport à l'axe $\underline{x}^2$ à l'équilibre,
$m_r$	est la masse du corps principal (corps rigide + roue + cardans),
$m_f = 2 m_p$	est la masse de la partie flexible,
$I_3^R$	est le moment d'inertie du corps rigide par rapport à $\underline{r}^3$ ,
$I_3^f = 2 I_3^p = 2 m_p b^2/12$	est le moment d'inertie de la partie flexible par rapport à $\underline{x}^3$ à l'équilibre.

La courbe  $Q$  du roulis est tracée à la figure 17 pour  $d_r/d_p = 0.1$  et permet de déterminer graphiquement, par intersection avec une horizontale d'ordonnée  $- I_2^R / I_2^f$ , les fréquences propres en roulis de ce type de satellites.

Les équations  $Q = r$  jouent donc le rôle d'équations aux fréquences du système et ne sont vérifiées que pour une infinité dénombrable de fréquences propres réduites  $\mu_+^n, \mu_-^n$  et  $\nu_+^n$  auxquelles correspondent une même infinité de formes propres  $\eta_+^n, \eta_-^n$  et  $\zeta_-^n$ . En torsion antisymétrique par contre, il n'y a pas de second membre à l'équation (III. 9) et les quatre conditions aux limites, pour être compatibles, exigent que  $\cos \nu_-^n = 0$  ( $n = 1, 2, \text{etc.}$ ) si l'on veut une solution autre que la solution triviale  $\zeta_-^n = 0$ . Cette condition ne dépend évidemment pas du corps rigide ; il y a également une infinité dénombrable de formes propres  $\zeta_-^n$  correspondantes.

La validité de ces résultats peut être vérifiée en considérant les cas limites ; nous supposerons les panneaux donnés (c'est-à-dire  $m_p, d_p, b$  et  $e$  fixés).

- Pour  $I_2^R \rightarrow \infty$  ou pour  $m_r \rightarrow \infty$ , le dénominateur de  $Q(\mu)$  doit tendre vers zéro, donc à la limite  $(1 + \cos \mu - \cos^3 \mu) = 0$ , équation classique des vibrations en flexion d'une poutre encastree sur base d'inertie infinie ; pour  $I_3^R \rightarrow \infty$ , on a de même à la limite

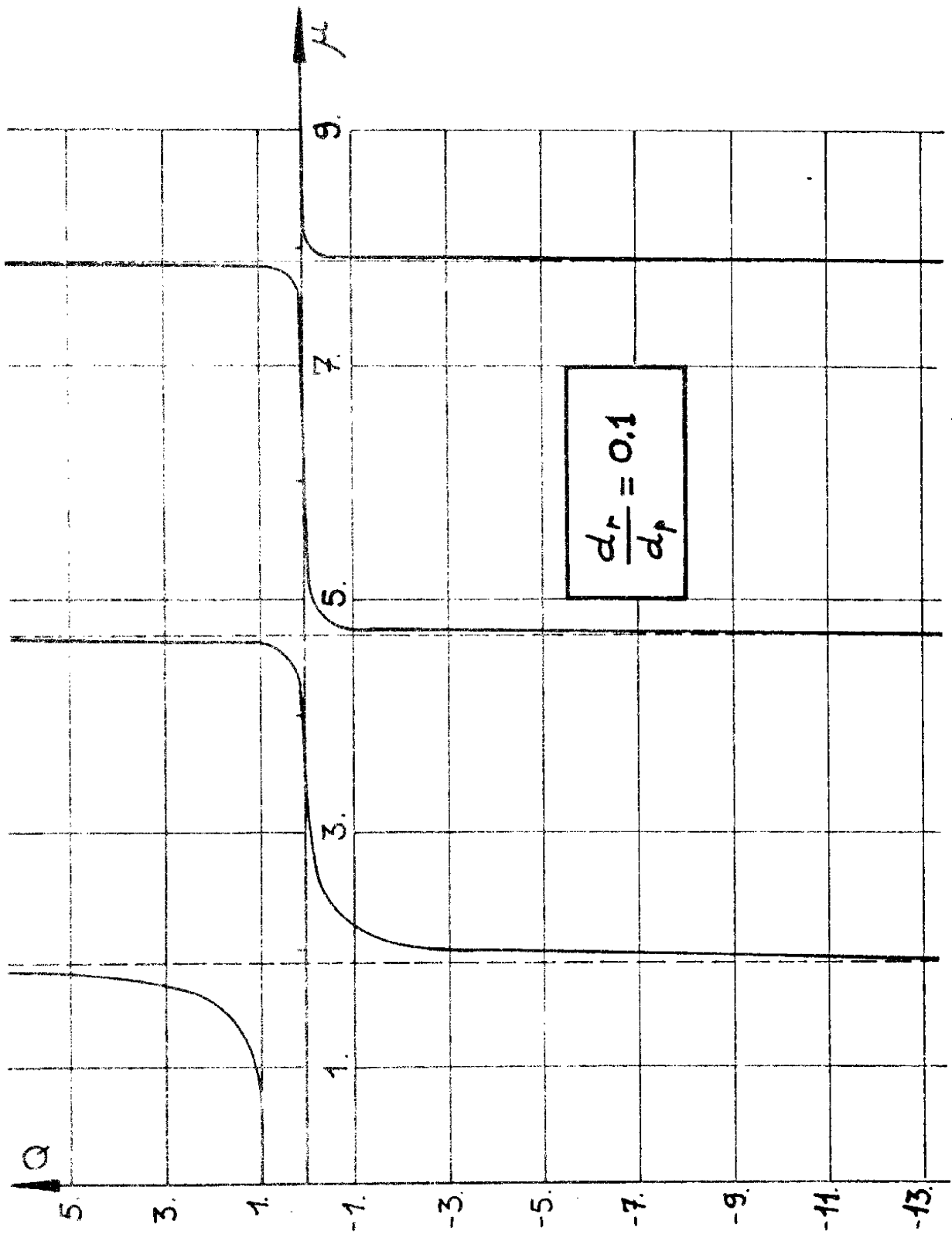


Figure 17 : obtention des fréquences propres globales

$\cos \mu' = 0$ , d'interprétation identique. Il est remarquable que ces fréquences, que nous appellerons pour la facilité fréquences "encastrées", par opposition aux fréquences "globales"  $\mu^n$  et  $\nu^n$ , sont données par les pôles de la fonction  $Q$ , et donc que les fréquences "encastrées" alternent avec les fréquences "globales".

Si le satellite est excité à la pulsation  $\omega_r$ , il aura (en théorie linéaire au moins) une réponse "infinie", ou encore, la résonance se produira pour le véhicule tout entier ; si, par contre, on l'excite à une pulsation "encastrée" (appelons la  $\Omega_n$ ), le corps principal ne bouge absolument pas tandis que les panneaux absorbent toutes les vibrations à pareille fréquence ; cela veut dire qu'il y a antirésonance du corps principal. Il faut noter que si les fréquences de résonance doivent être évitées pour préserver la précision de pointage requise, les fréquences d'antirésonance doivent être évitées pour des raisons technologiques évidentes. Les perturbations extérieures vérifiant en général ces exigences, à l'ingénieur de concevoir un système de commande qui les respecte également.

- Pour  $d_r \rightarrow 0$ ,  $m_r \rightarrow 0$  et  $I_2^r \rightarrow 0$ , on obtient (en regroupant les modes symétriques et antisymétriques)

$(\sin \mu \cosh \mu - \cos \mu \sinh \mu)(\sin \mu \cosh \mu + \cos \mu \sinh \mu) = 0$ ,  
c'est-à-dire  $1 - \cos(2\mu) \cosh(2\mu) = 0$ , qui n'est autre que l'équation aux fréquences d'une poutre uniforme libre-libre de longueur  $2 d_p$ , autrement dit exactement ce qu'est devenu le satellite : pour  $I_3^r \rightarrow 0$ , on obtient de même  $\sin \mu \cos \mu = 0$ , c'est-à-dire  $\sin 2\mu = 0$ , d'interprétation identique.

La résolution de l'équation  $Q = -r$  permet de tracer des courbes du type de la figure 18, qui montre l'influence (à panneaux donnés) de l'inertie du corps principal sur les six premières fréquences propres globales pour  $d_r/d_p = 0.1$  ; lorsque  $I_2^r \rightarrow \infty$ , on retombe sur les fréquences "encastrées". Les paramètres choisis sont ceux du satellite étudié au § IV. 1. 2.

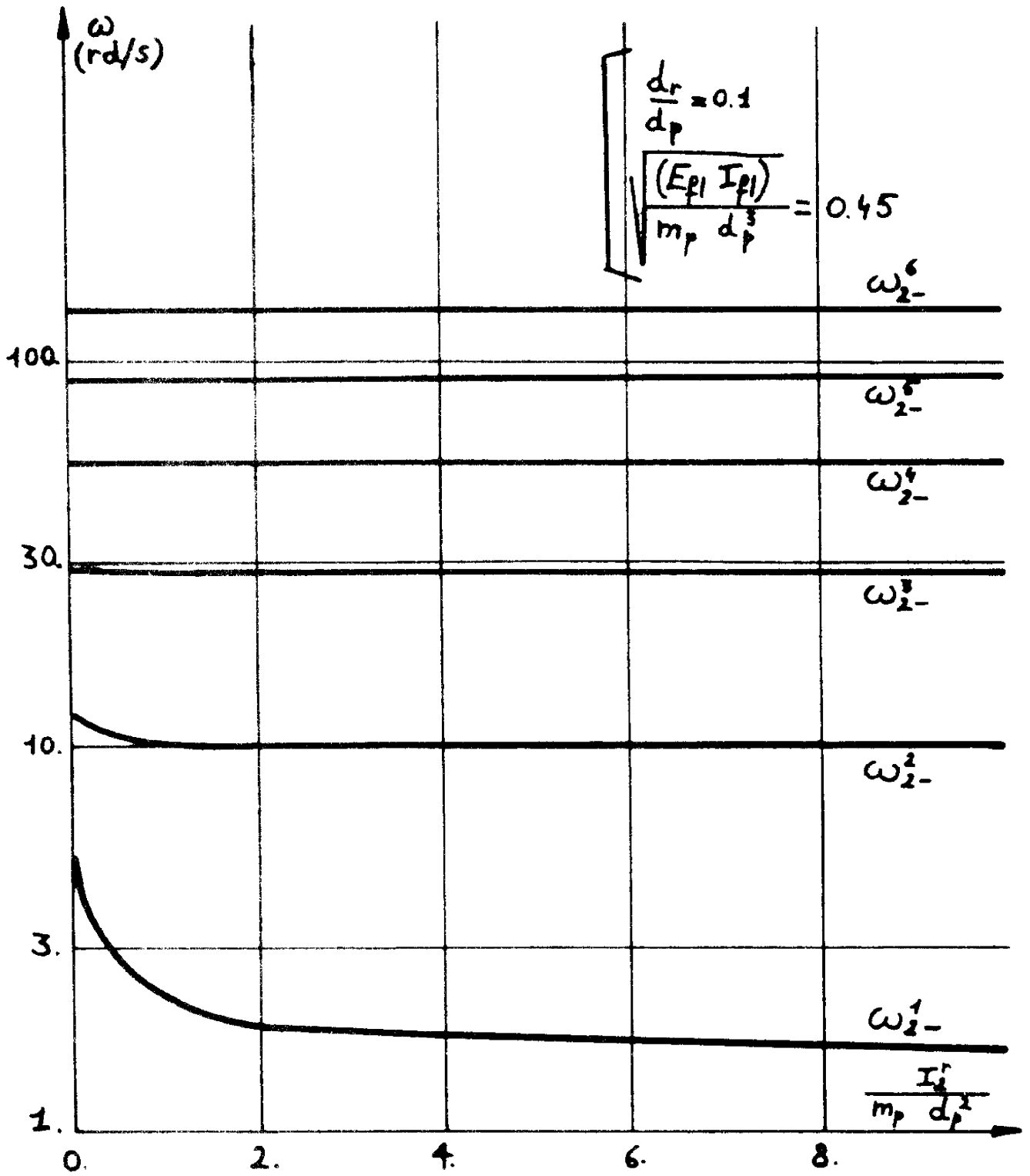


Figure 18 - influence de l'inertie du corps rigide sur les pulsations propres

Des abaques pratiques comme ceux de la figure 19 sont cependant plus intéressants ; nous donnons sur cette figure l'évolution de la première fréquence propre réduite en fonction des deux paramètres adimensionnels effectifs en roulis. L'axe des ordonnées correspond au cas limite de la fréquence "encadrée". Ces abaques peuvent être utilisés lors d'un dimensionnement a priori du satellite.

Il ne nous reste plus à présent qu'à chercher les propriétés d'orthogonalité puis à normer les formes propres que nous avons calculées. Traitons à titre d'exemple le cas du roulis. Multiplions l'équation (III.10) par  $\gamma_{-}^{m'}$  et intégrons-la deux fois par parties en tenant compte des conditions aux limites puis écrivons la même équation où l'on a interverti les indices n et m ; par soustraction et addition de ces deux équations, on obtient :

$$\text{pour } n \neq m \quad \left[ \int_0^1 \gamma_{-}^n \gamma_{-}^m d\zeta = 2 \int \gamma_{-}^n \gamma_{-}^m \quad \text{où } \int = \int_0^1 / (\omega_p^2 l^2) \right. \quad \text{(III.12)}$$

$$\text{(orthogonalité)} \quad \left[ \int_0^1 \gamma_{-}^{n''} \gamma_{-}^{m''} d\zeta = 0, \quad \text{(III.13)} \right.$$

$$\text{pour } n = m \quad \left[ \int_0^1 (\gamma_{-}^n)^2 d\zeta = (c_2)^2 = \text{constante arbitraire} \quad \text{(III.14)} \right.$$

$$\text{(normation)} \quad \left[ \int_0^1 (\gamma_{-}^{n''})^2 d\zeta = 2 (\mu_{-}^n)^2 \left[ \frac{c_2^2}{2} - \int (\gamma_{-}^n)^2 \right], \quad \text{(III.15)} \right.$$

Ayant choisi  $(c_2)^2$ , on peut, en se servant de (III.10) et de (III.15), calculer la valeur des  $\gamma_{-}^n$  à partir de la connaissance des  $\mu_{-}^n$  ; ce calcul ne fait intervenir que des intégrations de fonctions trigonométriques et hyperboliques. On remarquera que la normation fixe  $(\int_0^1 \gamma_{-}^n)^2$  proprement dite est proportionnellement à  $(c_2)^2$ .

Un raisonnement rigoureusement identique peut être tenu pour la flexion symétrique ( $\int = \frac{m}{m_p}$ ) ainsi que pour la torsion ( $\int = \frac{m}{m_p} \frac{h^2}{l^2}$ ).

### III. 2. 2. Cas de la roue d'inertie

Le raisonnement suit pas à pas celui du paragraphe précédent ; toutefois, la roue est ici liée au corps rigide non seulement par le

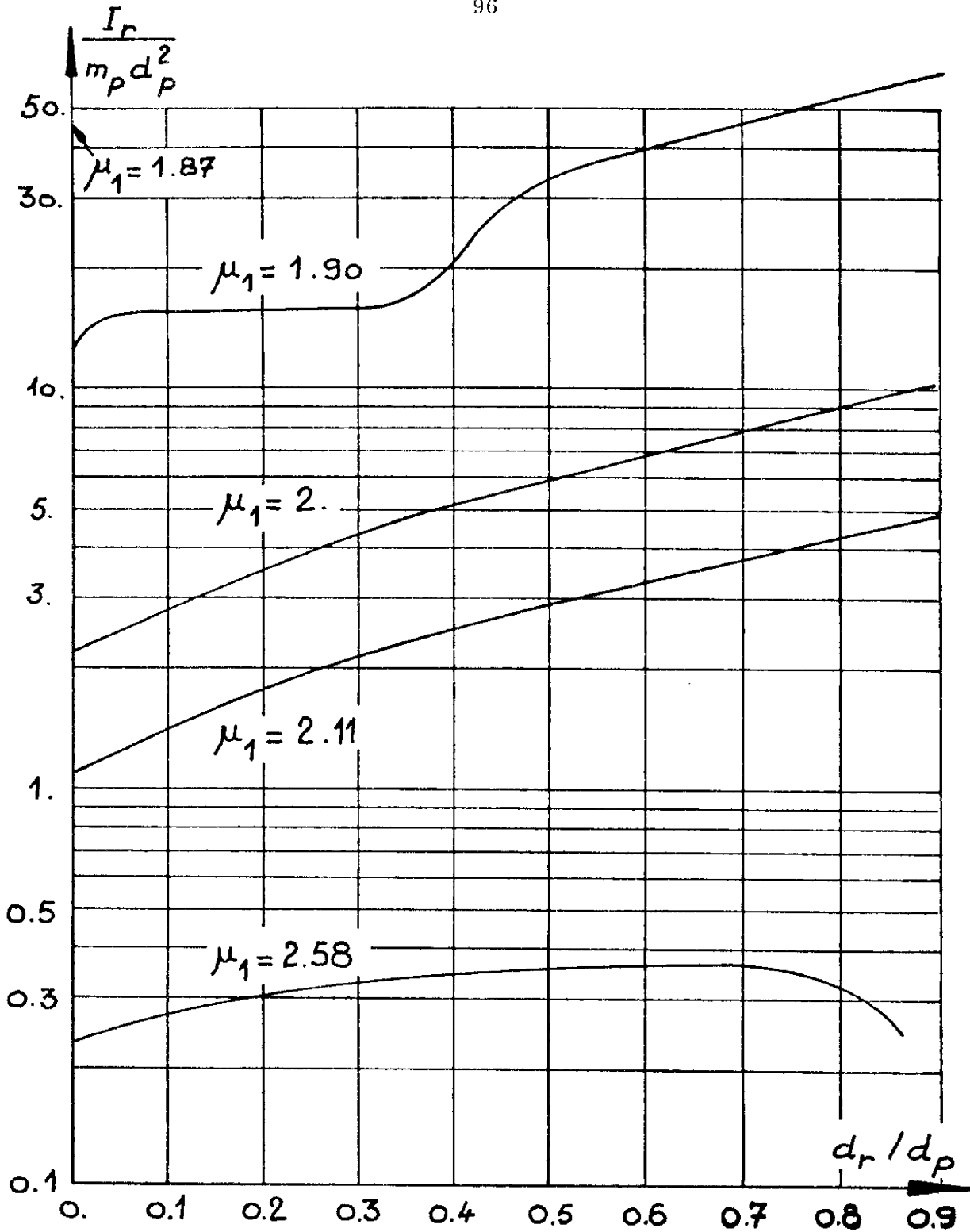


Figure 19 : influence de la longueur et de l'inertie du corps rigide sur la première fréquence propre

couple de commande  $l_3^\alpha$  mais encore par des réactions inconnues sur paliers. Autrement dit, le moment cinétique propre de la roue va influencer sur le mouvement du système libre, donc intervenir dans la définition des modes. Citons à ce propos les travaux de Hughes [18].

On peut toujours prendre comme solution particulière les formes (III. 6). Les relations (III. 7) sont alors inchangées ; par contre, les équations (II. 20) du corps principal admettent, pour les translations, une solution identique à (III. 8) et, pour les rotations, la solution :

$$\theta_1^{\wedge} = \gamma_1^{\circ} = \gamma_1^n \sin \omega_2^n t, \theta_2^{\wedge} = \gamma_2^{\circ} = \gamma_2^n \cos \omega_2^n t, \theta_3^{\wedge} = \gamma_3^{\circ} = \gamma_3^n \cos \omega_3^n t$$

(III. 16)

$$\left[ \begin{array}{l} \gamma_1^n = - \frac{\omega_N}{\omega_2^n} \gamma_2^n, \\ \gamma_2^n = - \frac{I_2^n}{I_t [1 - (\omega_N/\omega_2^n)^2]}, \quad \gamma_3^n = - \frac{I_3^n}{I_3} \end{array} \right.$$

relations qui étaient loin d'être évidentes a priori.

De même, les équations des panneaux conservent leur expression (III. 9) ainsi que leurs conditions aux limites. Les formes propres sont encore du type (III. 10) ;  $\gamma_2^n$  a simplement un sens différent, tandis que les coefficients a, b, c et d sont les mêmes.

Les équations aux fréquences (III. 11) sont également les mêmes, hormis la fonction  $Q(\mu_-)$ , à laquelle il faut ajouter le terme :

$$- \frac{\omega_N^2 I_t m_p d^3}{(\mu_-^n)^4 (E_{fl} I_{fl})}$$

Ainsi, dans ce cas-ci,  $Q(\mu_-) \xrightarrow{\mu_- \rightarrow 0} -\infty$  ; de plus, les fréquences "globales" tendent bien vers les fréquences "encastrées" pour  $|\omega_N| \rightarrow \infty$ . Les relations (III. 12) à (III. 15) d'orthogonalité et de normation restent ici valables en flexion symétrique-translation verticale et en torsion symétrique-tangage. Par contre, en flexion anti-symétrique - roulis - lacet, elles deviennent :

$$\left[ \int_0^1 \gamma_2^n \gamma_2^m d\zeta = 2 \delta \left[ 1 - \left( \frac{\omega_N}{\omega_2^n} \right)^2 - \left( \frac{\omega_N}{\omega_2^m} \right)^2 \right] \gamma_2^n \gamma_2^m (n \neq m), \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \int_0^1 \gamma_-^{(n)} \gamma_-^{(m)} d\zeta = -2 \delta \frac{m_p d_p^3 \omega_N^2}{(E_p I_p)} \gamma_2^n \gamma_2^m \quad (n \neq m), \\ \int_0^1 (\gamma_-^{(n)})^2 d\zeta = (\kappa_2)^2 \\ \int_0^1 (\gamma_-^{(n)})^2 d\zeta = 2 (\mu_-^{(n)})^4 \left\{ \frac{(\kappa_2)^2}{2} - \delta \left[ 1 - \left( \frac{\omega_N}{\omega_2^n} \right)^2 \right] (\gamma_2^n)^2 \right\} \end{array} \right] \quad (\text{III. 17})$$

La figure 20 montre l'évolution des fréquences propres "globales" en roulis-lacet en fonction du moment cinétique interne. Lorsque  $\omega_N = 0$ , la première fréquence propre est nulle et correspond en fait au mode rigide de rotation de l'ensemble. Lorsque  $|\omega_N|$  croît tout en restant petit par rapport à la première pulsation élastique effective  $\omega_2^2$ , le mode rigide est remplacé par une nutation quasi rigide à la pulsation  $\omega_2^1 \approx \omega_N$ , les pulsations élastiques restant non affectées. Si  $\omega_N$  s'accroît encore cependant, le mode de nutation devient moins "rigide" parce que sa fréquence ne peut s'accroître sans exciter les modes élastiques. De plus, les pulsations de ces modes élastiques ( $\omega_2^2, \omega_2^3, \dots$ ) tendent à s'accroître. Chaque pulsation propre subit en fait un glissement dès que  $\omega_N$  devient suffisant mais se stabilise à la pulsation "encastrée" puisque le corps principal ne peut plus participer au mouvement si la raideur gyroscopique de la roue est suffisamment élevée.

### III. 3. FONCTION DE TRANSFERT DU SATELLITE GEOSTATIONNAIRE

#### III. 3. 1. Cas de la roue sur double cardan

Nous reprenons à présent les équations du mouvement forcé en présence de flexibilité. Nous savons que, dans ce cas, nous pouvons écrire  $\theta^R = \theta^0 + \gamma^0$  et  $e^R = e^0 + \epsilon$  avec, par définition

$$I^0 \ddot{\theta}^0 = L^0 \quad \text{et} \quad m \ddot{e}^0 = f \quad (\text{III. 18})$$

Il suffit, pour obtenir une forme complètement découplée des équations finales, de développer non seulement  $\gamma_+, \gamma_-, \zeta_+, \zeta_-$  en série infinie des modes propres définis au § III. 2.1., mais de faire de même pour  $\epsilon_1, \gamma_2^0$  et  $\gamma_3^0$ , c'est-à-dire d'écrire



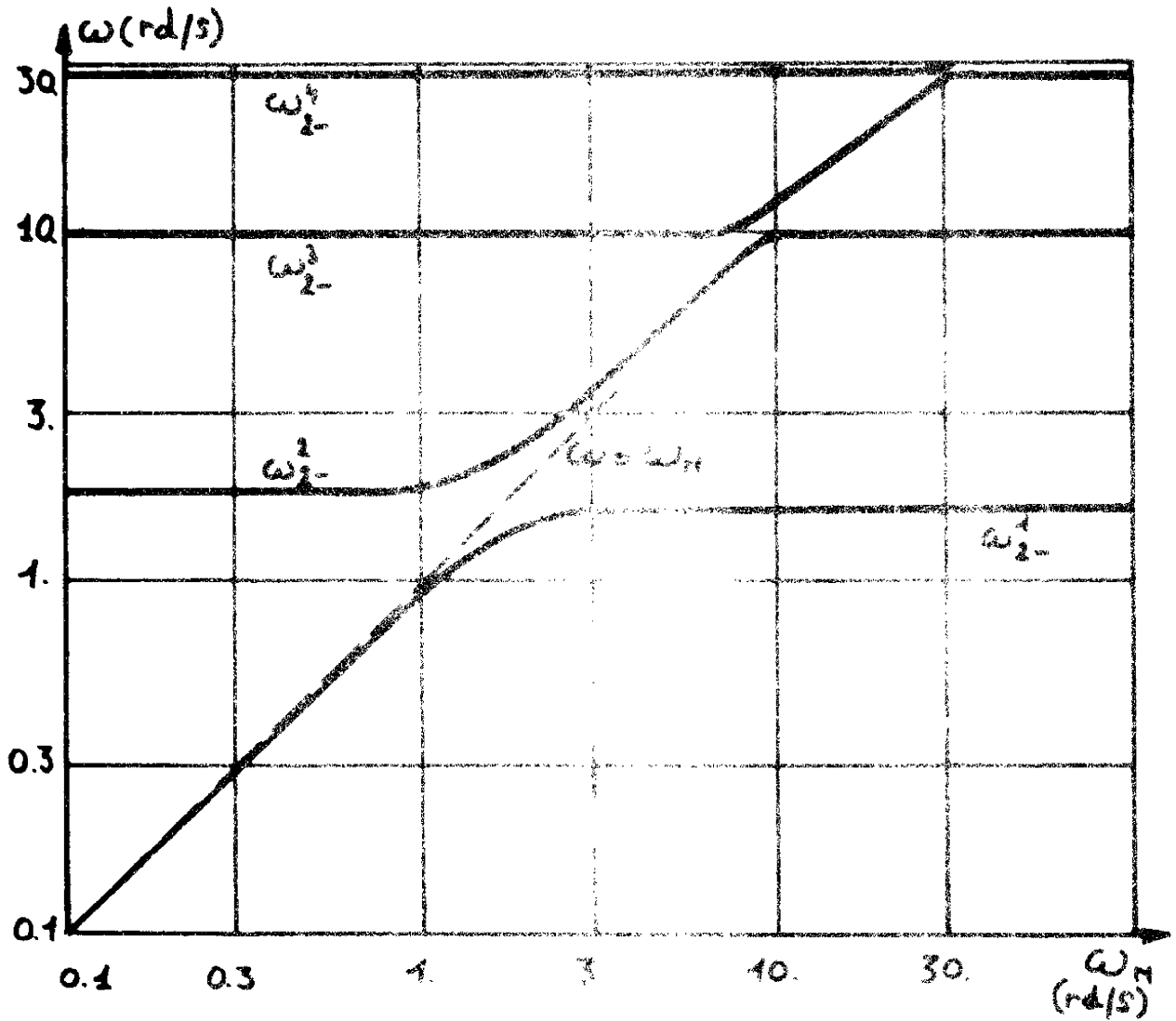


Figure 20 : influence de la vitesse de rotation de la roue sur les pulsations propres

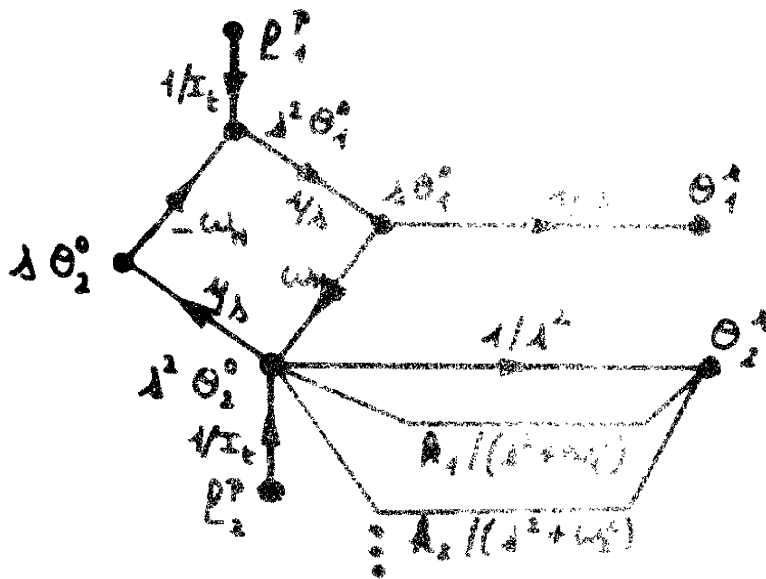


Figure 21 : graphe de Euler (diagramme de l'inertie en régime transitoire (roulis d'axe))

$$\left[ \begin{array}{l} \eta_+(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_+^n(\xi) \beta_{2+}^n(t), \quad \eta_-(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_-^n(\xi) \beta_{2-}^n(t), \\ \zeta_+(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_+^n(\xi) \beta_{3+}^n(t), \quad \zeta_-(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_-^n(\xi) \beta_{3-}^n(t), \\ \theta_1^R(t) = \theta_1^o(t) + \varepsilon_1(t) = \theta_1^o(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_1^n / \beta_{2+}^n(t) \\ \theta_2^A(t) = \theta_2^o(t) + \gamma_2^o(t) = \theta_2^o(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_2^n / \beta_{2-}^n(t) \\ \theta_3^A(t) = \theta_3^o(t) + \delta_3^o(t) = \theta_3^o(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_3^n / \beta_{3+}^n(t) \end{array} \right] \quad (III. 19)$$

Ensuite en prenant l'équation (II. 18) de flexion symétrique (par exemple), en la multipliant par  $\eta_+^m(\xi)$  puis en l'intégrant deux fois par parties en tenant compte des conditions aux limites, des définitions (III. 19) et des relations d'orthogonalité et de normation (III. 12) à (III. 15) on peut la mettre sous la forme (n = 1, 2, etc...)

$$\varepsilon_1^n \left[ \ddot{\beta}_{2+}^n + (\omega_{2+}^n)^2 \beta_{2+}^n \right] = k_{2+}^n \ddot{\theta}_1^o \quad \text{où} \quad k_{2+}^n = \frac{1}{\frac{m_p d_p^2 (\mathcal{L}_1 d_p)^2}{2 I_0^n} - 1} \quad (III. 20)$$

et obtenu de manière analogue

$$\gamma_2^n \left[ \ddot{\beta}_{2-}^n + (\omega_{2-}^n)^2 \beta_{2-}^n \right] = k_{2-}^n \ddot{\theta}_2^o \quad \text{ou} \quad k_{2-}^n = \frac{1}{\frac{m_p d_p^2 (\mathcal{L}_2)^2}{2 I_0^n} - 1} \quad (III. 21)$$

$$\delta_3^n \left[ \ddot{\beta}_{3+}^n + (\omega_{3+}^n)^2 \beta_{3+}^n \right] = k_{3+}^n \ddot{\theta}_3^o \quad \text{ou} \quad k_{3+}^n = \frac{1}{\frac{m_p b^2 / 12 (\mathcal{L}_3)^2}{2 I_0^n} - 1} \quad (III. 22)$$

$$\left[ \ddot{\beta}_{3-}^n + (\omega_{3-}^n)^2 \beta_{3-}^n \right] = 0 \quad (III. 23)$$

Les équations (III. 18) du repère moyen "forcé" par l'excitation extérieure, accompagnées des équations (III. 20) à (III. 22) des modes normaux du système global "forcés" par l'entraînement du repère moyen, constituent un système qui n'est couplé que par l'excitation extérieure. Aussi nous contenterons nous d'examiner un seul mouvement, à savoir la flexion antisymétrique en roues qui nous paraît le plus important à commander (ceci nous permet de laisser tomber les indices (-) et (2 ou 4)). Par transformation de Laplace des équations correspondant à ce mouvement, on obtient la fonction de transfert suivante

$$\frac{\theta_2(s)}{P_0(s)} = \frac{1}{I_0} \left[ \frac{1}{s^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{s^2 + \omega_n^2} \right] \quad (III. 24)$$

où  $\left\{ \begin{array}{l} s \text{ est la variable de Laplace,} \\ \text{les conditions initiales sont considérées comme une excitation en} \\ \text{impulsion de Dirac, donc rentrent dans } P_0(s), \\ k_{11} \text{ est le gain modal, associé au } n^{\text{ème}} \text{ mode, il est adimensionnel.} \end{array} \right.$

### III.3.2. Cas de la roue d'inertie

La procédure est la même qu'au paragraphe précédent. Les équations (II.18) sont remplacées par définition par [cf. (II.20)]

$$\dot{\Theta}_1 + \omega_n \dot{\Theta}_2 = P_1^P / I_1, \quad \dot{\Theta}_2 - \omega_n \dot{\Theta}_1 = P_2^P / I_1, \quad \dot{\Theta}_3 = P_3^P / I_2 \quad \text{(III.25)}$$

Aux développements (II.19), il faut rajouter le développement en lacet

$$\Theta_1^n(t) = \Theta_1(t) + \delta_1(t) = \Theta_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_1^n \beta_{2+}^n(t)$$

( $\Theta_1^n$  a évidemment pas le même sens qu'au § (II.3.1)).

Un lemme est cependant nécessaire à l'obtention des équations du mouvement : c'est de démontrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\dot{\beta}_{2+}^n}{(\omega_{2+}^n)^2} + \beta_{2+}^n \right) \delta_2^n \right] = 0 \quad \text{(III.26)}$$

En remplaçant, dans les équations (III.24) en roulis-lacet, les variables par leurs valeurs développées (III.19) et (III.26) et en tenant compte des définitions (III.25) et des relations (II.16), on obtient :

- en lacet  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -\frac{\dot{\beta}_2^n}{\omega_2^n} + \beta_2^n \right) \delta_2^n \right] = 0$  d'où, par une primitivation terme à terme de cette série,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -\frac{\beta_2^n}{\omega_2^n} + \beta_2^n \right) \delta_2^n \right] = 0$  (le terme constant étant nul, ce que les variables doivent rester au voisinage de zéro)

- en roulis  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\dot{\beta}_{2+}^n}{(\omega_{2+}^n)^2} + \frac{\dot{\beta}_{2+}^n}{\omega_{2+}^n} \right) \delta_2^n \right] = 0.$

La somme de ces deux séries nulles fournit donc la relation cherchée (III.26).

Il est alors facile de voir que les équations modales (II.20) à (II.23) sont inchangées, hormis pour ce qui est de  $k_{2-}^n$  qui vaut à

présent

$$k_2^n = \frac{1 - \left(\frac{\omega_N}{\omega_2^n}\right)^2}{\frac{m_P d_P^2}{2 I_P} \left(\frac{\lambda_2^n}{\delta_2^n}\right)^2 - 1 + 2 \left(\frac{\omega_N}{\omega_2^n}\right)^2} \quad (\text{III. 27})$$

Ne considérant que la flexion antisymétrique en roue-satellite, on peut tracer le graphe de fluence de la figure 21 et on a par exemple

$$\Theta_2^\lambda(\lambda) = \frac{\ell_2^P(\lambda) + \ell_1^P(\lambda) \omega_N/\lambda \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_2 \lambda^2}{\lambda^2 + \omega_n^2}\right)}{(\lambda^2 + \omega_N^2) I_P} \quad (\text{III. 28})$$

Les modes propres définis de la sorte paraissent bien naturels car la seule pulsation propre du système passe par la pulsation du mode rigide de rotation, il ne peut plus y avoir de déformations élastiques, par (III. 27) et (III. 21).

### III. 3. 3. Propriétés des gains modaux

1°) Les gains modaux sont indépendants de la notation choisie.

Ceci résulte de leur définition : dans le cas de la flexion antisymétrique par exemple, nous savons par le § III. 2. 1. que le rapport  $(c_2/\gamma_2^n)^2$  est indépendant de  $(c_2)^2$ .

2°) Les gains modaux sont positifs, sauf dans un cas précis.

En effet, soit par exemple  $u_1^a = \left(\frac{d_P}{2} \gamma_2^n + x_3 \delta_2^n\right) / \beta_{2-}^n$  le déplacement total selon  $\underline{x}^1$  d'un point du panneau a lors d'une oscillation du n-ième mode en flexion antisymétrique et soit

$$u_1^b = \left(-\frac{d_P}{2} \gamma_2^n + x_3 \delta_2^n\right) / \beta_{2-}^n$$

le déplacement opposé du point correspondant dans le panneau b. On obtient, en intégrant sur tout le satellite :

• dans le cas de la roue sur cardans

$$\int_m (u_1)^2 dm = \left[ I_P (\delta_2^n)^2 - 2 I_P (\delta_2^n)^2 + \frac{(c_2)^2 m_P d_P^2}{2} \right] (\beta_{2-}^n)^2 > 0,$$

c'est à dire  $k_2^n > 0 \quad \forall n$ ,

• dans le cas de la roue d'inertie,

$$\int_m (u_1)^2 dm = \left\{ I_P (\delta_2^n)^2 - 2 I_P (\delta_2^n)^2 \left[ 1 + \left(\frac{\omega_N}{\omega_2^n}\right)^2 \right] + \frac{(c_2)^2 m_P d_P^2}{2} \right\} (\beta_{2-}^n)^2 > 0,$$

c'est à dire  $k_{2-}^n > 0$  pour autant que le numérateur de (III. 27) soit positif ou encore que  $|\omega_n| < \omega_{2-}^n$ . Comme on peut le voir sur la figure 20, à  $\omega_n$  fixé, on ne peut avoir de gain modal négatif que pour les fréquences propres les plus basses. En général, on a uniquement  $k_{2-}^1 < 0$ .

### 3') La série des gains modaux est absolument convergente

Considérons le cas de la flexion antisymétrique .

Cette propriété a été démontrée rigoureusement dans [44]. Nous donnons cette démonstration (très courte) en Annexe E. On peut toutefois s'en convaincre "heuristiquement" en considérant la fonction de transfert (III. 24) ou encore (III. 28) et en imaginant une excitation telle que  $|s| \gg \omega_n \forall n$  (ce qui revient à appliquer un couple en impulsion de Dirac) : les panneaux deviennent alors beaucoup trop "mous" pour répondre de quelque façon que ce soit à l'excitation et ne participent pas au mouvement, qui est uniquement repris par le corps principal rigide. On peut donc écrire :

• dans le cas de la roue sur double cardan :

$$\frac{\Theta_R(s)}{l_0(s)} \sim \frac{1}{I_0 s^2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \right) \sim \frac{1}{I_R s^2}$$

d'où  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n = I_f / I_R$  ; (III. 29)

la suite des sommes partielles  $\sum_{n=1}^N k_n$  est dans ce cas monotonément croissante .

• dans le cas de la roue d'inertie

en prenant  $l_1^P = 0$ , on obtient le même résultat qu'en (III. 29) pour le roulis.

$$\text{Dans tous les cas, on conclut que } \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0 \quad \text{(III. 30)}$$

### III. 3. 4. Applications numériques

Nous avons mis au point un programme numérique général permettant de calculer les fréquences propres "globales" et "encastées"

ainsi que les formes propres  $\gamma_i^n$  et  $\xi_i^n$  et les gains modaux pour tous les satellites stabilisés "trois axes" et munis de deux panneaux flexibles comme sur la figure 16, qu'ils soient stabilisés par roue sur cardans ou par roue d'inertie. L'algorithme qui sert à cerner les fréquences est un simple algorithme de resserrement de l'intervalle (bichotomie) que nous appliquons à la fonction Q. Ce programme nous a servi à tracer notamment les courbes des figures 17, 18, 19 et 20, il nous a surtout permis de vérifier quantitativement les résultats énoncés au paragraphe suivant et à tracer, à partir des  $k_n$ , les courbes de la figure 22.

#### III. 4. INTERPRÉTATION ÉNERGÉTIQUE DES TRONCATURES MODALES

Pour fixer les idées, étudions le cas de la flexion antisymétrique en roulis du satellite stabilisé par roue sur double cardan. Appliquons un couple en impulsion de Dirac à l'instant  $t = 0$   $L_0 = L \delta(t - 0)$ . Laissons ensuite vibrer le système librement. L'expression (II.12) et (II.13) de l'énergie cinétique nous montre que celle-ci est quadratique en les vitesses généralisées, il y aura donc, pour  $t > 0$ , conservation de l'énergie au sens classique du terme et le Hamiltonien représente l'énergie totale E de ce système. En utilisant l'expression (II.14) du potentiel élastique ainsi que les relations de normation et d'orthogonalité (III.12) à (III.15), on montre que :

$$H = E = T + V = \frac{I_0}{2} \left[ (\dot{\theta}_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\dot{\beta}_n)^2 + (\omega_n)^2 (\beta_n)^2}{k_n} (\gamma_n)^2 \right] \quad (III.31)$$

Par transformation de Laplace des équations du mouvement (III.18) et (III.21) puis par transformation inverse, on trouve (pour  $t > 0$ )

$$\theta_0(t) = L t / I_0 \quad \beta_n(t) = k_n L \sin(\omega_n t) / (\omega_n k_n I_0)$$

Ainsi, on a :

$$H(t > 0) = H(0+) = L^2 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \right) / (2 I_0) = L^2 / (2 I_\lambda) \quad (III.32)$$

Pour  $t > 0$ , H est une intégrale première du mouvement et il est bien évident qu'on l'enfreint en pratiquant une troncature modale. Nous

pensons que ceci peut aider à justifier ce genre de troncature pour autant qu'on puisse chiffrer l'erreur commise pour une troncature à  $n = N$ . Nous poserons donc

$$E_{tr} = \sum_{r=1}^{\infty} k_r - \sum_{n=1}^N k_n ;$$

cette erreur est connue puisque nous avons calculé analytiquement la valeur de la série qui en constitue le premier terme et que notre programme numérique peut nous donner le second (pour autant que  $N$  soit suffisamment faible pour ne pas faire entrer en ligne de compte la précision du calculateur). Posons

$$\Delta H = H - I^2 \left( 1 + \sum_{n=1}^N k_n \right) / (2 I_0) \quad (\text{III. 33})$$

$\Delta H$  est l'erreur commise sur l'énergie totale par suite de la troncature.

On obtient que 
$$\Delta H/H = \epsilon_{N+1}/I_0 \quad (\text{III. 34})$$

Cette relation nous permet de tracer les courbes de la figure 22, donnant l'erreur énergétique relative commise lors d'une troncature au premier et au second mode. On démontrerait de même, à l'aide de (E2) que l'erreur relative sur le moment cinétique total  $h$  est égale à  $-\epsilon_N$ .

Nous estimons, après avoir tracé de telles courbes, qu'elles peuvent fournir à l'ingénieur un outil facile qui lui permette de savoir si oui ou non un mode supplémentaire doit être pris en ligne de compte dans le modèle dynamique et à quel prix il peut le négliger. Il faut tenir compte en plus de la bande passante des actionneurs, qui peuvent communiquer à un mode d'ordre élevé une énergie suffisante pour devenir significatif.

Enfin, le système tronqué peut se mettre sous la forme discrète (II.44) et la théorie de la stabilité en régime autonome du § 1.11.2 peut lui être appliquée.

### III. 5. BLOCS - DIAGRAMMES ET MODELES MECANIQUES EQUIVALENTS

Le bloc-diagramme correspondant à la fonction de transfert en roulis (III.24) est montré à la partie gauche de la figure 23. Il se compose de boucles en parallèle. Comme annoncé au § (II.3.3.1), nous y avons rajouté un amortissement visqueux empirique (cf. § 1.10.3). Le système

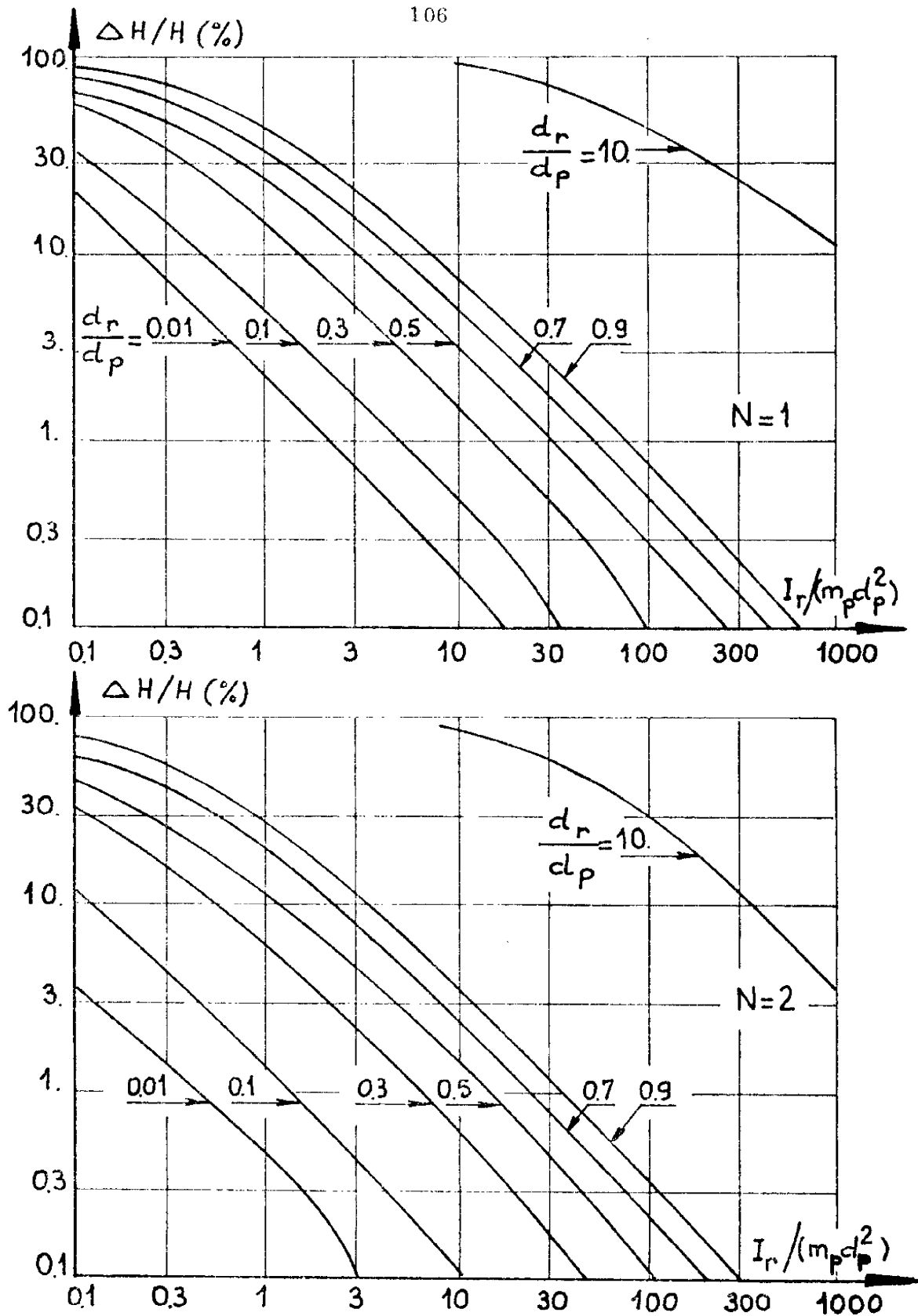


Figure 22 : erreurs sur l'énergie totale dues aux troncatures modales.



peut également être modélisé à l'aide des modes "encastrés", définis lorsque le corps rigide est d'inertie infinie.

Les fréquences propres correspondantes sont  $\Omega_n$  ( $n=1, 2$  etc...); nous en avons déjà parlé au § III.2.1. Ce sont les modes de la théorie des vibrations classique. Appelons leurs formes propres  $\eta_n(\xi)$  si on les norme à la manière des modes "globaux", on peut développer  $\eta(\xi, t)$  en série infinie de ces modes  $\eta_n(\xi)$  et écrire

$$\eta(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\xi) b_n(t) \quad (\text{III. 35})$$

$$\text{et par (II. 15), } P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n b_n(t) \quad (\text{III. 36})$$

Les équations du mouvement deviennent alors :

$$I_0 \ddot{\theta}_R + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \ddot{b}_n = l_0 \quad (\text{III. 37})$$

$$\ddot{b}_n + \Omega_n^2 b_n = - \frac{2}{c^2} \frac{J_n}{m_p d_p^2} \ddot{\theta}_R \quad (n=1, 2, \text{etc...}) \quad (\text{III. 38})$$

vu que :  $\int_0^l \eta_n \eta_m d\xi = 0 \quad \forall n \neq m$ .

Ces modes correspondent donc à la fonction de transfert

$$\frac{\theta_R(s)}{l_0(s)} = \frac{1}{I_0 s^2 (1 - s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{s^2 + \Omega_n^2})} \quad \text{où } K_n = \frac{2 J_n^2}{c^2 m_p d_p^2 I_0} \quad (\text{III. 39})$$

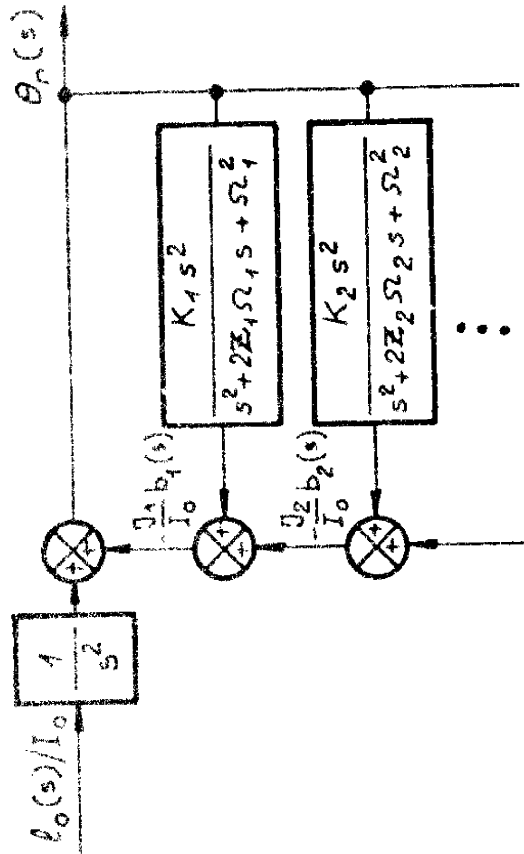
On démontre de la même manière que pour les modes globaux que  $K_n$  est indépendant du coefficient de normation  $c^2$  et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n = I_p / I_0 \quad (\text{III. 40})$$

La fonction de transfert (III. 39) conduit au diagramme de droite sur la figure 23. les boucles sont cette fois en réaction. Lorsque, sur les équations du mouvement (en termes de modes encastrés aussi bien que de modes globaux), nous effectuons les changements de variables indiqués au bas de la figure 23, on peut vérifier que ces équations correspondent au mouvement des systèmes mécaniques représentés à la figure 24. Le fait que les modes globaux soient les modes "naturels" ou "normaux" de la structure complète conduit évidemment à une infinité d'oscillateurs découplés. Les points importants sont les suivants :

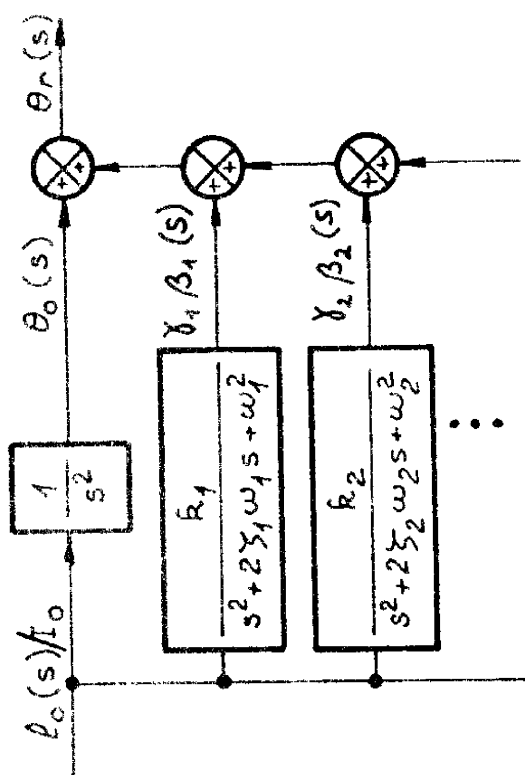
- les oscillateurs sont identiques (à la raideur et à la viscosité de l'articulation près),

Modes "Encastrés"



$$\left[ \begin{aligned} \frac{C_i}{J_i} &= \Omega_i^2 \\ \frac{Z_i}{J_i} &= 2Z_i \Omega_i \\ \theta_{r_i} - \theta_r &= \frac{m p d^2}{2J_i} b_i \\ I_{r_i} &= I_o K_i \end{aligned} \right.$$

Modes "Globaux"



$$\left[ \begin{aligned} \frac{C_i I_o}{I_r I_f} &= \omega_i^2 \\ \frac{\delta_i I_o}{I_r I_f} &= 2Z_i \omega_i \\ \theta_{r_i} - \theta_r &= -\gamma_i \beta_i \frac{I_o}{I_f} \\ l_{o_i} &= k_i l_o \frac{I_r}{I_f} \end{aligned} \right.$$

Figure 23 : blocs-diagrammes du système flexible

- l'excitation se répartit de manière connue (proportionnelle à  $k_n$ ) dans chacun des oscillateurs,
- la somme des réponses des corps  $I_r$  reconstitue la réponse du corps rigide réel.

Le mouvement reste bien sûr totalement couplé dans le cas des modes encastrés, la somme des inerties des corps  $I_{fi}$  reconstituant l'inertie  $I_f$  de la partie flexible réelle, et le mouvement du corps  $I_r$  représentant celui du corps rigide réel.

Nous pensons que l'élaboration d'une loi de commande aussi bien que la simulation sont notablement simplifiées par l'utilisation des modes globaux plutôt que celle des modes encastrés. Par contre, les constructeurs de panneaux, de mâts, etc..., ne fournissent évidemment que les modes encastrés. Aussi avons-nous tenté de relier analytiquement les deux cas en nous inspirant de ce que les fréquences globales et les fréquences encastrées vont toujours par "paires" de fréquences voisines. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert dans un cas particulier est d'ailleurs donné figure 27. Au vu d'une telle fonction, on conçoit que si la fréquence encastrée et la fréquence globale d'une même "paire" sont très rapprochées (par rapport à la distance qui sépare deux "paires"), ce qui se produit lorsque  $I_r \gg I_f$  (voir figure 17), le fait de tronquer à  $n = N$  les modes globaux ou les modes encastrés doit produire le même effet sur la fonction de transfert, donc sur la réponse physique du système ; on peut alors égaler les fonctions de transfert (III. 24) et (III. 39) tronquées, ce qui conduit à l'identité

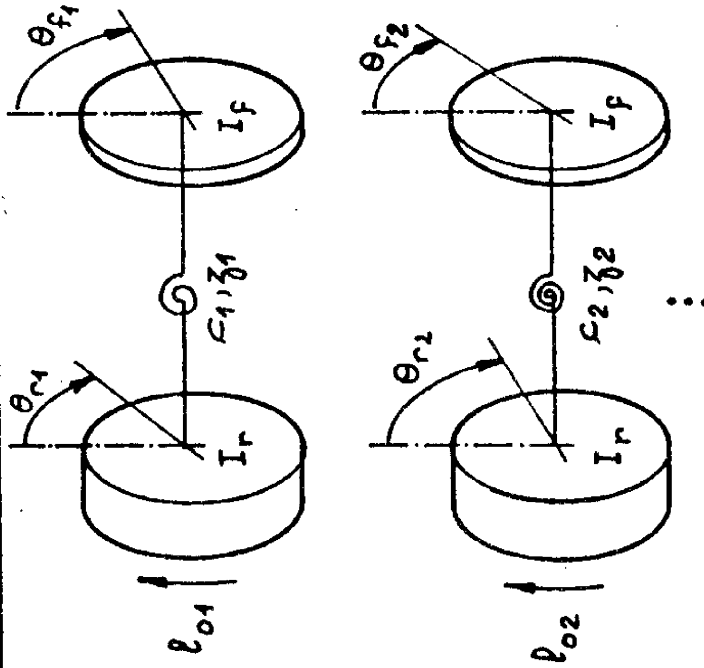
$$\left[ 1 + \delta^2 \sum_{n=1}^N \frac{k_n}{\delta^2 + \omega_n^2} \right] \left[ 1 - \delta^2 \sum_{i=1}^N \delta^2 \frac{K_i}{\delta^2 + \Omega_i^2} \right] = 1 \quad (\text{III. 41})$$

Nous avons dans ce cas démontré les récurrences suivantes :

$$k_n = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n K_i} - \left( 1 + \sum_{j=1}^{n-1} k_j \right) \quad (\text{III. 42})$$

$$\omega_n = \Omega_n \sqrt{\frac{k_n}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{1 - (\frac{\omega_i}{\Omega_n})^2}} + 1} \quad (\text{III. 43})$$

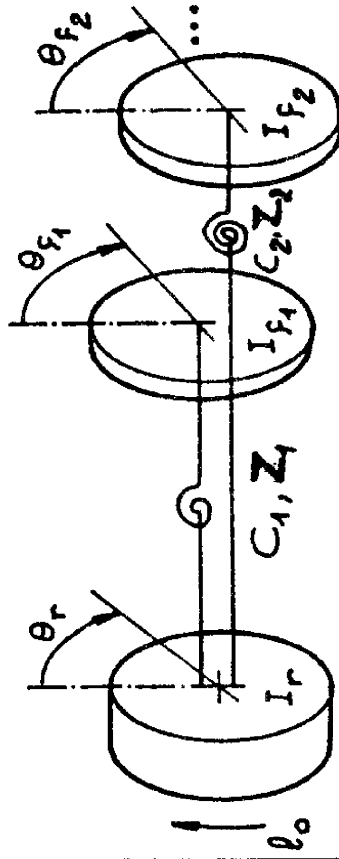
Modas "Globaux"



$$\rho_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i}$$

$$\theta_r = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{ri}$$

Modas "Encastrés"



$$I_f = \sum_{i=1}^{\infty} I_{fi}$$

Figure 24 : modèles mécaniques équivalents

où on a posé  $k_0 = \omega_0 = 0$ .

On vérifiera que ces récurrences sont compatibles avec les relations  $k_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  et  $\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Omega_n$ .

Les récurrences (iii, 42) et (iii, 43) s'obtiennent immédiatement à partir de (ii, 41) : la première pour  $|\Delta| \gg \omega_N$ ,

la seconde pour  $\Delta \sim j \Omega_N$ .

Grâce à elles, on peut passer sans difficulté d'un modèle "encastré" à un modèle "global" d'ordre aussi élevé que l'on veut. Nous avons vérifié numériquement les relations (iii, 42) et (iii, 43) sur des cas particuliers et les résultats concordent avec une précision très grande pour autant que  $i_r > i_f$ .

Pour les cas où  $i_r < i_f$  par contre, il faut connaître  $N + 1$  ou  $N + 2$  valeurs de  $K_n$  et  $\Omega_n$  pour pouvoir construire (par des récurrences analogues à ci-dessus) seulement  $N$  valeurs de  $k_n$  et  $\omega_n$  avec une précision valable [18]. Ceci prouve que les modes globaux et les modes encastrés ne sont pas équivalents.



## CHAPITRE IV

### STABILISATION "TROIS AXES" D'UN SATELLITE MUNI DE PANNEAUX FLEXIBLES, A L'AIDE D'UNE ROUE SUR DOUBLE CARDAN

-:-

#### IV. 1. REPRESENTATIONS D'ETAT, COMMANDABILITE, OBSERVABILITE

##### IV. 1. 1. Régime transitoire

Comme nous nous intéressons principalement ici à l'influence de la flexibilité d'un satellite sur la synthèse d'une commande d'attitude, nous n'abordons pas la commande en mode normal, où le satellite peut être considéré comme rigide ; la synthèse d'une commande en mode normal peut être réalisée à l'aide d'un observateur d'ordre minimal [5, 9].

Nous étudions le satellite géostationnaire de la figure 16 et plus particulièrement, puisque les axes sont découplés, la flexion antisymétrique en roulis, indispensable à réguler si l'on veut obtenir un pointage très fin ; la torsion symétrique en tangage, moins dramatique, se traiterait de manière analogue. L'excitation des parties flexibles se produit essentiellement pendant les opérations de recalage de l'axe de la roue (ou la désaturation de celle-ci pour le tangage) ; ces opérations sont nécessitées par la présence de couples perturbateurs constants en axes inertiels ou à la fréquence orbitale en axes  $\underline{x}^i$  (cf. les couples magnétique ou de précession orbitale dans le cas de DORADE, § II.2.2.).

Supposons qu'on se fixe un moment cinétique nominal pour  $\|\underline{h}''\|$  de 100 N.m.s, qu'on tolère une dérive de 0.1 rd pour les angles de cardans et qu'on présume un couple constant en axes inertiels ayant pour norme environ  $10^{-5}$  N.m ; les opérations de recalage seront donc séparées d'un intervalle de temps  $\Delta t \simeq \|\Delta \underline{h}''\| / 10^{-5} = 0.1 \times 100 / 10^{-5} = 10^6$  s,

sont environ une dizaine d'orbites.

Pour effectuer les opérations de désaturation à l'attitude des satellites considérés, seuls les systèmes à éjection de masse sont utilisables (jets de gaz).

Nous supposons ici que le couple de recalage est obtenu à l'aide de deux tuyères à jet d'hydrazine d'une poussée de 0,5 N placées symétriquement sur le corps principal à une distance de 1 m, il faudra donc pour recalier l'axe un temps  $\Delta t \approx \frac{0,1 \times 100}{0,5 \times 1} = 20$  s.

Le couple de recalage étant très élevé par rapport aux couples perturbateurs, il est possible d'envisager une commande prédictive, moyennant une connaissance de la fonction de transfert des tuyères.

Pour ce qui est du lacet, la présence d'un détecteur de vitesse permet, à l'aide d'une simple intégration (acceptable sur un temps court) de générer le couple  $P_1^x$  par un asservissement classique :

$$P_1^x = k \int_0^t \dot{\theta}_1^x dt + q \theta_1^x$$

afin de commander le lacet selon l'équation  $I_1 \ddot{\theta}_1^r = P_1^o = P_1^p - P_1^x$ .

On choisira  $k$  de façon que  $|P_1^p|_{\max} / k < |\theta_1^r|_{\max}$ , valeur maximale tolérée en lacet. En fait, lorsqu'on passe du régime permanent au régime transitoire, l'angle de lacet n'est pas nul et vaut au plus l'erreur  $|\theta_1^r|_p$  de régime permanent. Du point de vue de la commande, ceci revient à faire une erreur systématique sur la mesure de  $\theta_1^r$  et, en fin de régime transitoire l'erreur sur  $\theta_1^r$  sera au plus de  $|\theta_1^r|_p + |\theta_1^r|_{\max}$ , quantité qu'on peut borner en choisissant pour le mode permanent et pour le mode transitoire des gains adéquats. La commande nécessite donc deux senseurs terrestres (roulis, tangage) et un détecteur de vitesse angulaire (lacet).

#### IV 1. 2 Caractéristiques numériques

Nous choisissons un satellite du type de la figure 16, d'inertie totale  $I_1 = 800 \text{ m}^2 \text{ kg}$  et dont les caractéristiques utiles sont les suivantes :



Corps principal	$d_r = 0.5 \text{ m} ; I_r = 618 \text{ m}^2 \text{ kg}$
Panneaux	$(E_{pl} I_{pl}) = 200 \text{ N. m}^2 ; E_{pl} = 2.410^9 \text{ N/m}^2$ $m_p = 8 \text{ kg} , d_p = 5 \text{ m} ; b = 1 \text{ m} ; e = 10^{-2} \text{ m}$
Roue sur cardans	$I_l = 5 \text{ m}^2 \text{ kg}$

Appliqué à ce cas, notre programme d'obtention des modes propres a fourni les résultats suivants ; se reporter aux blocs-diagrammes de la figure 23 ou aux équations (III.18, III.21) et (III.37, III.38).

n	Modes "globaux"			Modes "encastres"		
	$\omega_n(\text{rd/s})$	$k_n$	$\gamma_n$	$\Omega_n(\text{rd/s})$	$K_n$	$J_n(\text{m}^2 \text{ kg})$
1	1.7806	0.266	0.22	1.5821	0.210	129.
2	9.9730	0.015	0.06	9.9154	0.009	27.
3	27.7942	0.003	0.03	27.7641	0.002	13.
4	54.4270	0.000	0.00	54.4060	0.000	0.

Les coefficients d'amortissement  $\gamma_n$  et  $\xi_n$  sont pris égaux à  $\xi = 10^{-2} \sqrt{n}$ . On peut vérifier que, pour ce satellite, les récurrences (III.42) et (III.43) sont vérifiées à mieux que 0.1 % ; ceci est dû au fait que  $I_r = 618 \text{ m}^2 \text{ kg} > I_l = 177 \text{ m}^2 \text{ kg}$ . Le satellite envisagé correspond au tracé de la figure 18. De plus  $\sum_{n=1}^3 k_n = 0.284$  alors que

$$\sum_{n=1}^3 k_n \frac{I_l}{I_r} = 0.287$$

Les abaques de la figure 22 ou encore la relation (III.34) indiquent que l'on commet une erreur relative sur l'énergie totale de 0.4 % en conservant deux modes et une erreur de 1.7 % en conservant un seul mode. Jugeant cette dernière approximation suffisante eu égard aux autres simplifications et hypothèses inhérentes au modèle adopté, nous choisissons le modèle à un seul mode, dont l'équivalent mécanique (figure 24 gauche)

se compose d'un seul oscillateur avec  $\ell_{01} = 0.928 \ell_0$ .

Le mouvement du satellite est donc représenté par une équation différentielle du quatrième ordre linéaire à coefficients constants. Il convient cependant de garder à l'esprit la présence de fait des autres modes qui répondront plus ou moins, quoi qu'on fasse, aux commandes et aux perturbations, rendant ainsi la réponse du corps principal légèrement différente de la loi qu'on est en droit d'attendre de la théorie.

#### IV. 1. 3. Equation d'état

La première représentation d'état qui vient à l'esprit (c'est par contre la plus lourde à l'usage) est celle qui utilise les angles absolus  $\theta_{r1}$  et  $\theta_{f1}$  de ce modèle ; il y correspond l'équation d'état

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad (IV.1)$$

$$\mathbf{x} = [\theta_{r1}, \theta_{f1}, \dot{\theta}_{r1}, \dot{\theta}_{f1}]^T ;$$

$$\bar{I}_r = I_r / I_o ; \bar{I}_f = I_f / I_o ;$$

$$I_o = I_r + I_f ; \mathbf{u} = \ell_{01} ;$$

$$\mathbf{B} = [0, 0, 1/I_r, 0]^T .$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{I}_r \omega_1^2 & -\bar{I}_f \omega_1^2 & 2\gamma \omega_1 \bar{I}_f & 2\gamma \omega_1 \bar{I}_r \\ \bar{I}_r \omega_1^2 & -\bar{I}_f \omega_1^2 & 2\gamma \omega_1 \bar{I}_r & -2\gamma \omega_1 \bar{I}_r \end{bmatrix}$$

Il est bon de noter dès à présent que la matrice  $\mathbf{A}$  est singulière et que ses valeurs propres sont  $\left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ double (mode rigide)} \\ \omega_1 [ - ] \pm j \sqrt{1 - \gamma} \end{array} \right\}$  (mode élastique).

Une autre représentation d'état s'obtient directement à partir des variables de Lagrange du système ( $\theta_0$  et  $\beta_1$ ) :

$$\mathbf{x} = [\theta_0, \beta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\beta}_1]^T ;$$

$$\mathbf{u} = \ell_0$$

$$\mathbf{B} = [0, 0, 1/I_o, k_I / (\gamma I_o)]^T .$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & 2\gamma \omega_1^2 \end{bmatrix}$$

Aucune de ces deux représentations n'étant canonique et le système étant commandable et observable (voir paragraphe suivant), nous avons recherché, par la méthode générale [32], une représentation canonique à partir de la première des matrices A ci-dessus ; on obtient le vecteur d'état

$$\bar{x} = I_0 \left\{ \frac{1}{(\omega_1)^2} \left[ \theta_{f1} - 2\gamma \frac{\dot{\theta}_{f1}}{\omega_1} - 4\gamma^2 \bar{I}_\lambda (\theta_{f1} - \theta_{r1}) \right], \frac{1}{\omega_1} \left[ \frac{\dot{\theta}_{f1}}{\omega_1} + 2\gamma \bar{I}_\lambda (\theta_{f1} - \theta_{r1}) \right], -\bar{I}_\lambda (\theta_{f1} - \theta_{r1}), -\bar{I}_\lambda (\dot{\theta}_{f1} - \dot{\theta}_{r1}) \right\}^T$$

La complexité de ce vecteur d'état provient en partie du caractère artificiel de l'amortissement que nous avons introduit a posteriori ; pour les faibles coefficients d'amortissement en jeu, il est plus simple, dans ce chapitre sur la commande optimale, de négliger la dissipation ( $\gamma = 0$ ). En effet, la constante de temps du système est de  $(\gamma \omega_1)^{-1} = 56$  s et on fera en sorte que le système commandé ait des constantes de temps beaucoup plus courtes que cette constante d'amortissement structural. Les variables canoniques prennent alors un sens très tangible puisqu'il s'agit de

$$\bar{x} = I_0 \left[ \theta_{f1}/(\omega_1)^2, \dot{\theta}_{f1}/(\omega_1)^2, -\bar{I}_\lambda (\theta_{f1} - \theta_{r1}), -\bar{I}_\lambda (\dot{\theta}_{f1} - \dot{\theta}_{r1}) \right]^T$$

Ce vecteur d'état canonique s'obtient à partir du premier vecteur d'état cité dans ce paragraphe par le changement de variables  $\bar{x} = S x$  (IV. 2)

où

S =	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td><math>I_0/\omega_1^2</math></td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td><math>I_0/\omega_1^2</math></td></tr> <tr><td><math>I_r</math></td><td><math>-I_r</math></td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td><math>I_r</math></td><td><math>-I_r</math></td></tr> </table>	0	$I_0/\omega_1^2$	0	0	0	0	0	$I_0/\omega_1^2$	$I_r$	$-I_r$	0	0	0	0	$I_r$	$-I_r$
0	$I_0/\omega_1^2$	0	0														
0	0	0	$I_0/\omega_1^2$														
$I_r$	$-I_r$	0	0														
0	0	$I_r$	$-I_r$														

d'où  $S^{-1} =$

$S^{-1} =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td><math>\omega_1^2/I_0</math></td><td>0</td><td><math>1/I_r</math></td><td>0</td></tr> <tr><td><math>\omega_1^2/I_0</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td><math>\omega_1^2/I_0</math></td><td>0</td><td><math>1/I_r</math></td></tr> <tr><td>0</td><td><math>\omega_1^2/I_0</math></td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	$\omega_1^2/I_0$	0	$1/I_r$	0	$\omega_1^2/I_0$	0	0	0	0	$\omega_1^2/I_0$	0	$1/I_r$	0	$\omega_1^2/I_0$	0	0
$\omega_1^2/I_0$	0	$1/I_r$	0														
$\omega_1^2/I_0$	0	0	0														
0	$\omega_1^2/I_0$	0	$1/I_r$														
0	$\omega_1^2/I_0$	0	0														

On obtient alors la représentation canonique

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u \quad \text{où}$$

$$u = l_{01} \quad ; \quad \bar{A} = SAS^{-1} =$$

$\bar{B} = SB =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td><math>-\omega_1^2</math></td><td>0</td></tr> </table>	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	$-\omega_1^2$	0
0	1	0	0														
0	0	1	0														
0	0	0	1														
0	0	$-\omega_1^2$	0														

(IV. 3)

On a de plus  $\theta_{r1} = \frac{\omega_1^2}{I_0} \bar{x}_1 + \frac{1}{I_r} \bar{x}_3$

#### IV. 1. 4. Commandabilité, observabilité

Nous avons testé ces propriétés sur la première des représentations citées au paragraphe précédent et avons obtenu (pour  $\gamma = 0$ )

$$\det \left[ B, AB, A^2 B, A^3 B \right] = \omega_1^4 / (l_0/l_r)^2 \neq 0, \quad (\text{IV.4})$$

donc le système est commandable.

Pour vérifier son observabilité, supposons l'information réduite au minimum, c'est à dire à la mesure de  $\theta_r \simeq \theta_{r1}$ . On a alors comme sortie

$$y = Cx \text{ avec } C = [1, 0, 0, 0]; \quad (\text{IV.5})$$

on calcule (toujours pour  $\gamma = 0$ ) que

$$\det \left[ C^T, A^T C^T, A^{2T} C^T, A^{3T} C^T \right] = -\omega_1^4 (l_r/l_0)^2 \neq 0, \quad (\text{IV.6})$$

donc le système est observable.

On aurait pu conclure directement à la commandabilité et à l'observabilité du système global réel à partir du bloc-diagramme de la figure 23 gauche. En effet, le système se compose de blocs séparément commandables et observables superposés en parallèle, c'est là une condition nécessaire et suffisante pour que le système total soit commandable et observable.

Notons que le système tend à devenir inobservable lorsque l'inertie de la partie flexible devient portion négligeable de l'inertie totale; par contre, le système reste toujours commandable.

### IV. 2. SYNTHÈSE D'UNE LOI DE COMMANDE "OPTIMALE"

#### IV. 2. 1. Méthodes possibles

Un système de commande idéal remplit les conditions suivantes

- |   |  |
|---|--|
| { | il vérifie les spécifications                  |
|   | [ de simplicité, de faisabilité, de fiabilité, |
|   | . de poids, d'encombrement,                    |
|   | . de consommation .                            |

- . il tient compte
  - . des exigences du type de commande (en ligne ou hors ligne),
  - . des contraintes imposées aux détecteurs et actionneurs (limitations technologiques des composants);
- . il présente, en présence de perturbations prévisibles ou imprévisibles, de bonnes performances :
  - . une stabilité asymptotique au voisinage de l'équilibre dynamique,
  - . une régime transitoire acceptable,
  - . une grande précision en régime permanent ;
- . il présente une bonne immunité, c'est-à-dire une faible sensibilité aux erreurs
  - . du modèle dynamique (non linéarités, variations de paramètres, bruits),
  - . des détecteurs (erreurs de mesure, bruits),
  - . des actionneurs (bruits).

Nous avons souligné les points qui, dans le cas qui nous occupe jouent un rôle primordial.

Il existe actuellement trois types de méthodes pour tenter de résoudre le problème :

- . la méthode fréquentielle classique,
- . la méthode du placement des pôles,
- . la méthode d'optimisation dynamique.

#### IV.2.2. Méthode fréquentielle

Les méthodes fréquentielles classiques calculent, par les méthodes graphiques (diagrammes de Bode, Black-Nichols, Nyquist, lieux d'Evans) un compensateur acceptable pour le système [8]. Les fonctions de transfert (figure 24 gauche) sont de la forme :

$$\frac{\theta_{01}(s)}{p_{01}(s)} = \frac{(I_0/I_2) (s/\omega_1)^2 + 2}{I_0 s^2 [(s/\omega_1)^2 + 2]} (s/\omega_1) + 1 \quad (\text{IV.7})$$

$$\frac{\theta_{01}(s)}{p_{01}(s)} = \frac{2}{I_0 s^2 [(s/\omega_1)^2 + 2]} (s/\omega_1) + 1 \quad (\text{IV.8})$$

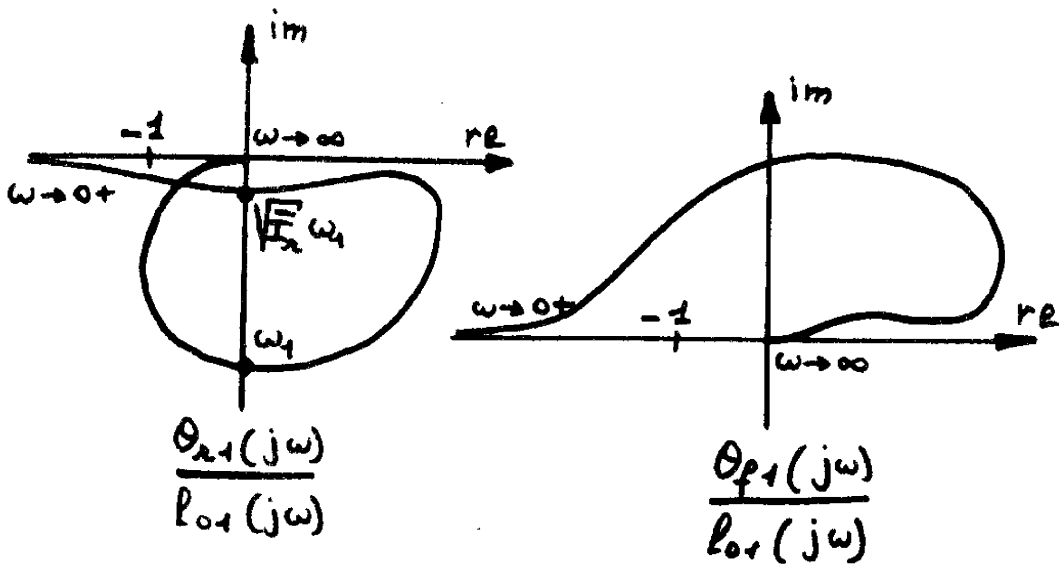


Figure 25 : diagrammes qualitatifs de Nyquist

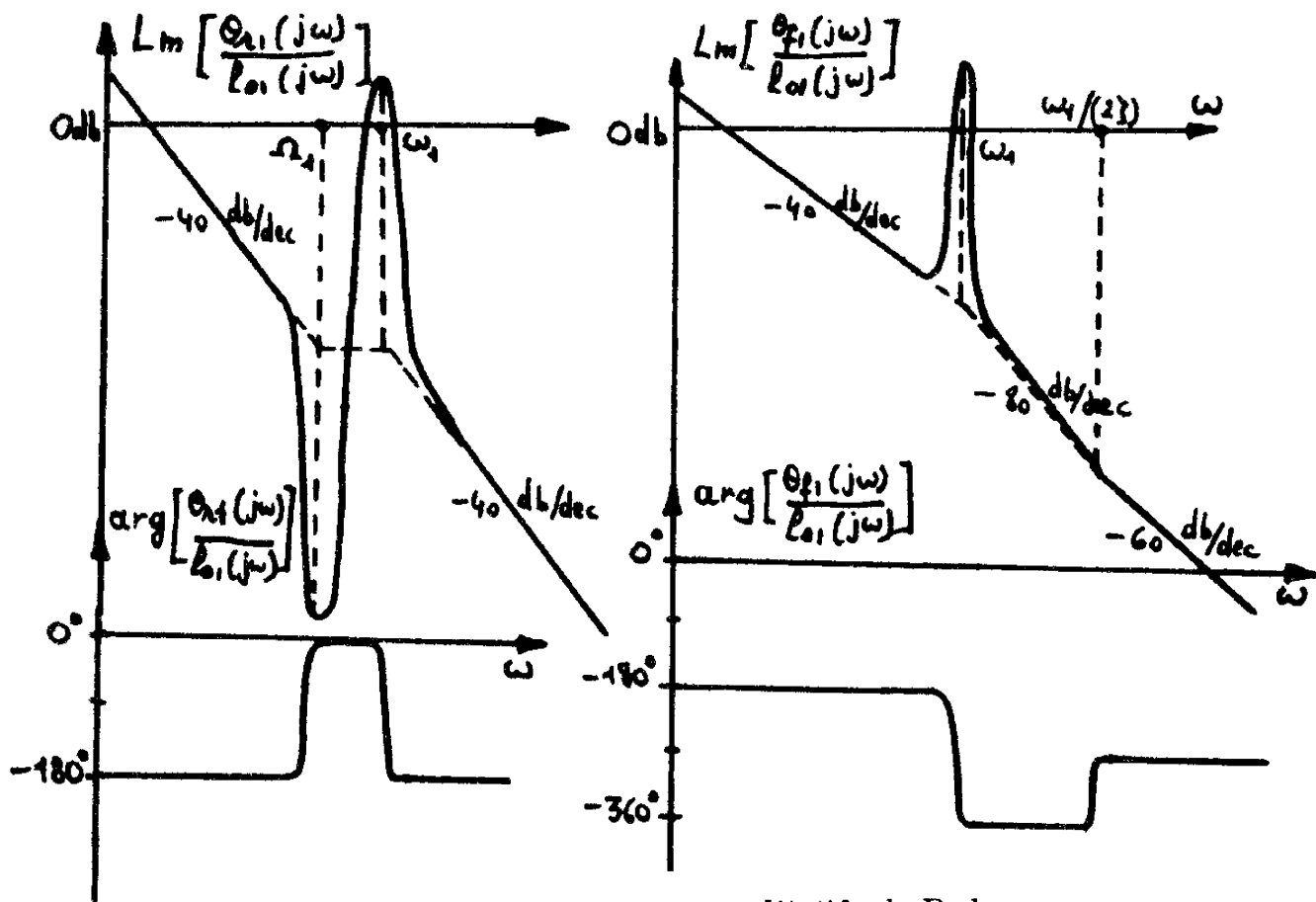


Figure 26 : diagrammes qualitatifs de Bode

Les diagrammes de Nyquist et les diagrammes de Bode qualitatifs de ces fonctions de transfert sont représentés sur les figures 25 et 26. On retiendra surtout de ces courbes la nécessité d'une compensation et la difficulté d'amortir le mode souple. De plus, les retards inhérents aux actionneurs et aux détecteurs peuvent rendre conditionnelle la stabilité du système.

Suite au raisonnement effectué en fin de § III. 5, il est clair que la fonction de transfert complète  $\Theta_\lambda(s)/l_0(s)$  ne pourra s'exprimer comme produit de fonctions du type (IV. 7) que sous la condition de "séparabilité" des paires de fréquences voisines, à savoir si  $k_n \ll 1 \forall n$  ou, encore, si l'inégalité  $I_f < I_r$  est raisonnablement vérifiée (ce qui est absolument notre cas). Dans cette hypothèse, le tracé du diagramme de Bode exact pour  $\Theta_\lambda(\lambda) / l_0(\lambda)$  ne présente aucune difficulté (figure 27).

Le critère de Naslin permet de tenir compte du numérateur de la transmittance du système bouclé, c'est-à-dire du fait que les dérivées de la commande influencent la dynamique du système. Cette approche classique n'est pas avantageuse pour les systèmes d'ordre élevé et nous ne l'effectuerons pas ici ; elle suppose implicitement la connaissance exacte de tous les paramètres du système ( $I_r, I_f, (\lambda)_1, \dots$ ).

#### IV. 2. 3. Méthode du placement des pôles :

Nous avons vu au § IV. 1. 3. que la matrice canonique d'état d'un système commandable et observable pouvait s'écrire

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha^r & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 9})$$

où  $a^T = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  n'est autre que la matrice des coefficients de l'équation caractéristique de l'équation différentielle en  $\Theta_{\lambda_1}$  pour le système en boucle ouverte :

$$\det \bar{A} = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

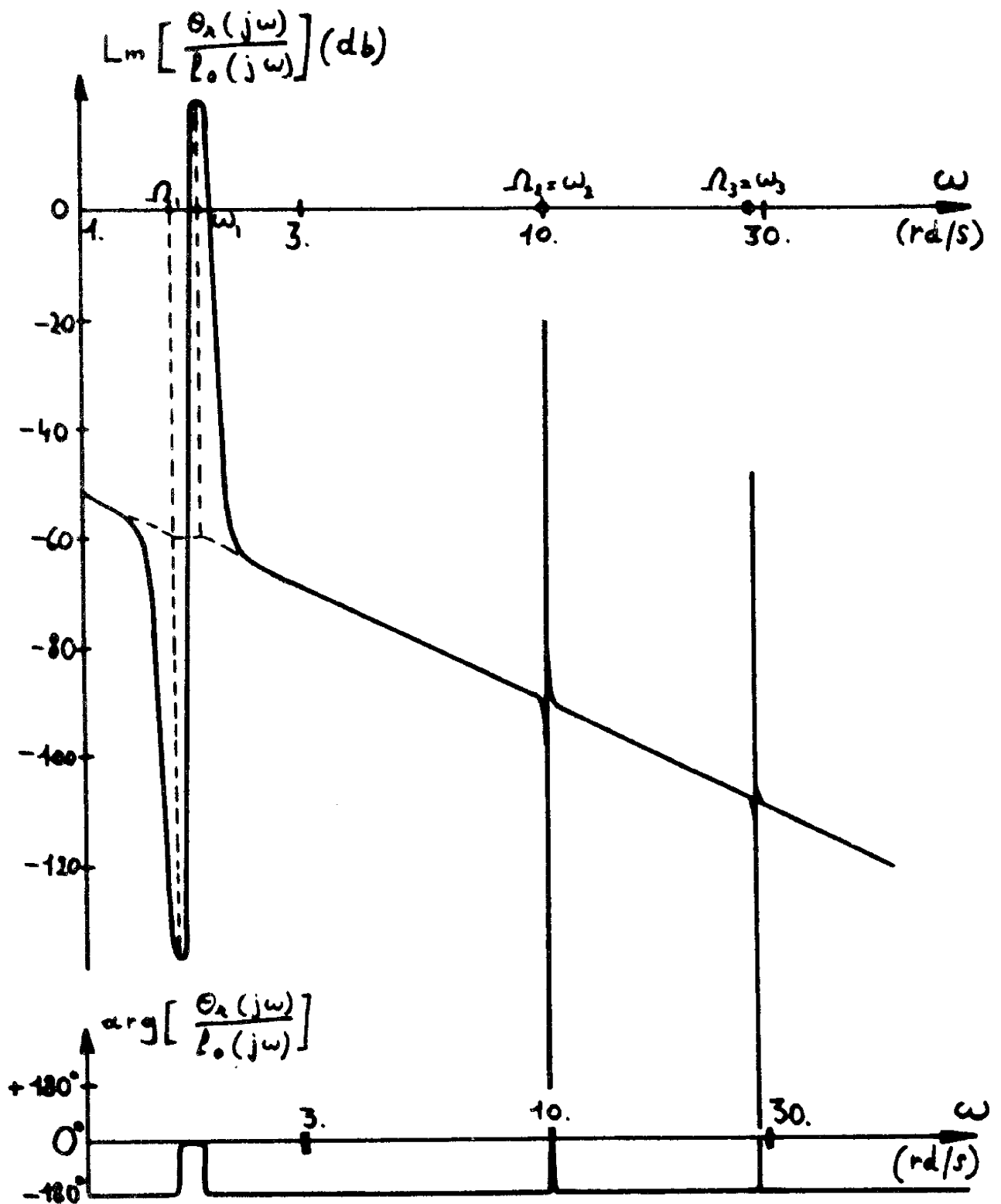


Figure 27 : diagramme de Bode du modèle complet



Si la commande est linéaire, c'est-à-dire si

$$u = K x = \bar{K} \bar{x} \quad (\text{avec } \bar{K} = K S^{-1}), \quad (\text{IV. 10})$$

il est possible de faire en sorte que le système bouclé ait ses pôles à des endroits arbitrairement choisis du plan de gauche, c'est-à-dire que la matrice d'état du système bouclé (après transformation canonique) s'écrive

$$(\bar{A} + \bar{B} \bar{K}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1,1} & \vdots & \mathbf{1}_{n-1} \\ \hline & \mathbf{L} & \\ -c^T & & \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 11})$$

où  $c$  est la matrice des coefficients de l'équation caractéristique de l'équation différentielle en  $\mathcal{O}_{k-1}$  désirée pour le système bouclé. En effet,

$$\bar{B} \bar{K} = (\bar{A} + \bar{B} \bar{K}) - \bar{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1, n} \\ \hline (a - c)^T \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 12})$$

$$\text{et donc } \bar{K} = (a - c)^T, \quad (\text{IV. 13})$$

matrice de gains théoriquement toujours réalisable pourvu que le système soit commandable.

Cette méthode nécessite non seulement la connaissance des paramètres du système, mais encore l'accès à toutes les variables d'état, pour injecter leur mesure dans la commande  $K x$ ; de plus, elle ne fait intervenir que l'équation caractéristique, donc uniquement les pôles du système et fait abstraction du numérateur de la transmittance de celui-ci. Il est raisonnable de penser que plus élevées seront les performances exigées du système, plus délicate sera la réalisation du bloc de commande effectivement capable de la réaliser.

La méthode du placement des pôles a été envisagée pour la stabilisation de laboratoires spatiaux à parties flexibles [36].

#### IV. 2. 4. Méthode d'optimisation dynamique :

La commande optimale à critère quadratique se propose, pour un système linéaire commandable et pour une commande  $u(t)$  non contrainte, de déterminer la commande "optimale"  $u(t)$  qui minimise le critère quadratique

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad \text{où} \quad (\text{IV. 14})$$

$Q$  est une matrice ( $n \times n$ ) symétrique  $\geq \mathbb{0}$ ,

$R$  est une matrice ( $r \times r$ ) symétrique  $> \mathbb{0}$ ,

la minimisation de la fonctionnelle  $J$  s'effectuant sous la contrainte que constitue l'équation d'état (IV, 1).

Il ne faudrait pas croire qu'à l'encontre des deux méthodes précédentes, qui laissaient à l'utilisateur le libre choix du compensateur ou des pôles du système bouclé, cette méthode fournit d'emblée la structure du bloc de commande. En fait, dans le choix des matrices  $Q$  et  $R$  intervient pour une bonne part les qualités empiriques d'un bon système de commande, qualités que nous avons énumérées au § IV.2.1. et qui sont la plupart du temps contradictoires. Si les performances réalisées sont bonnes, le choix d'un horizon infini ne doit plus être considéré comme une restriction. Si le système est en plus invariant, l'approche optimale présente alors les avantages suivants par rapport aux autres méthodes :

- . elle fournit un retour à gain constant, solution d'une équation matricielle de Riccati réduite (algébrique) optimale pour tout état initial  $x(0^-)$ ,
- . elle garantit l'existence et l'unicité d'une solution asymptotiquement stable si la paire  $(A, B)$  est commandable et la paire  $(A, Q^{1/2})$  observable [2],
- . elle est systématique après sélection du critère  $J$ ,
- . elle peut traiter des systèmes multi-entrées, multi-sorties,
- . elle respecte l'intégrité de l'équation d'état tout en validant son caractère linéaire :

en effet, le caractère approximatif de (IV. 1) peut être levé en remarquant que cette équation n'est que le premier terme d'un développement en série de Taylor du système non linéaire  $\dot{x} = f(x, u)$  et en écrivant

$$\dot{x} = A x + B u + \alpha_0(x, u)$$

$$\text{et pour (IV. 5), } y = Cx + \beta_0(x, u)$$

où  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  sont au moins quadratiques en  $(x, u)$  : un critère quadratique a donc pour effet de minimiser l'effet de termes tels que  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  [ 2 ] et on devrait choisir  $Q$  égale à la matrice hessienne du système non linéaire, matrice qui hélas est en général impossible à connaître.

Passons à la résolution proprement dite du problème ; en considérant un système mono-entrée à commande linéaire scalaire  $u \in K \times$  et en prenant  $R = 1$ , le critère devient :

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T K) x dt .$$

Supposons que  $x^T (Q + K^T K) x = - \frac{d}{dt} (x^T P x)$  où  $P$  est une matrice symétrique. Cette relation devant être vraie  $\forall x$ , on démontre, en faisant intervenir l'équation d'état, que le problème se ramène à la résolution de l'équation de Riccati réduite :

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) + (Q + K^T K) = \mathbf{0} \quad (\text{IV. 15})$$

Notons en passant qu'on démontre en théorie de la commande optimale qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice  $M$  ait toutes ses valeurs propres négatives est que

$$\forall Q_0 > \mathbf{0} \quad \exists P > \mathbf{0} : M^T P + P M = - Q_0 .$$

Une fois la solution  $P$  de l'équation (IV. 15) de Riccati obtenue, on démontre également que la commande optimale est donnée par

$$K = - B^T P ; \quad (\text{IV. 16})$$

la valeur minimale du critère vaut alors  $x(0)^T P x(0)$ .

La résolution du problème est rendue systématique en mettant le système bouclé sous forme canonique en posant :

$$\bar{P} = (S^{-1})^T P S^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{Q} = (S^{-1})^T Q S^{-1} \quad (\text{IV. 17})$$

Dans ce cas en effet, l'équation de Riccati (IV. 15) devient :

$$(\bar{A} + \bar{B}\bar{K})^T \bar{P} + \bar{P}(\bar{A} + \bar{B}\bar{K}) + \bar{Q} + \bar{K}^T \bar{K} = \mathbf{0} \quad (\text{IV. 18})$$

Par (IV. 16) et (IV. 13) on a alors  $\bar{K} = p^T (a + c)^T$  (IV. 19) où  $p^T$  est la dernière ligne de  $\bar{P}$ .

La matrice des gains  $K$  est la seule chose qui nous intéresse dans l'élaboration de la commande :  $K = (a + c)^T S$ . Nous montrerons dans l'annexe F que  $c$  peut s'obtenir sans la connaissance complète de  $\bar{P}$ , mais bien seulement de sa dernière ligne (ou colonne) ou, par (IV. 19), des

éléments de  $a$  ; le calcul de la valeur minimum du critère nécessiterait par contre la connaissance complète de  $\bar{P}$ .

L'annexe F montre également que dans le cas du quatrième ordre qui nous occupe, la résolution de l'équation de Riccati peut être ramenée à la résolution d'une équation algébrique du quatrième degré. Une fois les coefficients  $c_i$  calculés :

1°) on choisit la solution (unique) qui rend les valeurs propres de  $(A+BK)$  négatives, donc le système asymptotiquement stable, en recherchant par exemple les racines de l'équation caractéristique ;

2°) on vérifie que ces racines correspondent, dans le plan complexe, à des performances acceptables pour la matrice  $Q$  choisie ; c'est d'ailleurs par cette méthode que nous nous fixerons la matrice  $Q$  ;

3°) on étudie la sensibilité d'une telle commande aux incertitudes sur les paramètres.

La commande optimale réclame elle aussi la connaissance précise des paramètres du système, mais surtout l'accessibilité à tout l'état.

#### IV.2.5. Commande optimale linéaire du satellite flexible :

Appliquons à notre modèle "un mode" la théorie du paragraphe précédent. Nous choisissons le critère

$$J = \int_0^{\infty} (\lambda \theta_{r1}^2 + \mu \theta_{p1}^2 + U^2) dt \quad \text{où} \quad U = \frac{u}{I_0 \omega_1^2}, \quad (\text{IV.20})$$

c'est-à-dire une matrice  $Q$  de la forme :

$$Q = (I_0 \omega_1^2)^2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \geq 0.$$

Alors, par (IV.2) et (IV.17),

$$\bar{Q} = (I_0 \omega_1^2)^2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \omega_1^4 (\lambda + \mu) / I_0^2 & 0 & \lambda \omega_1^2 / (I_2 I_0) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \lambda \omega_1^2 / (I_2 I_0) & 0 & \lambda / I_2^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

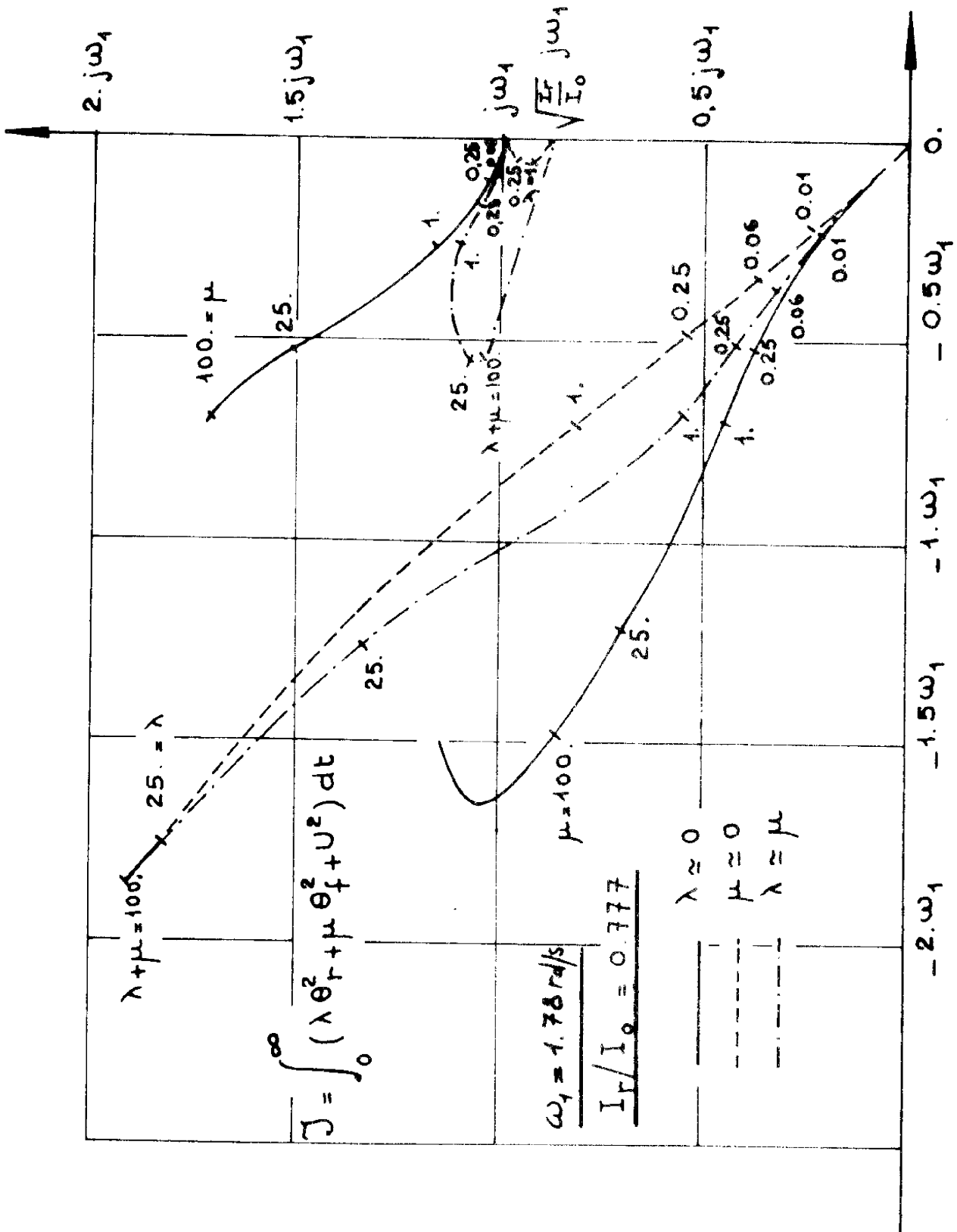


Figure 28 : lieu des optima en fonction du critère choisi

Nous avons alors résolu numériquement l'équation de Riccati en faisant varier (cf. § E. 2)

$$c_0^2 = \overline{Q_{11}} + \alpha_0^2 = (I_0 \omega_1^2)^2 \omega_1^4 (\lambda + \mu) / (I_0^2) = \omega_1^8 (\lambda + \mu)$$

et ce, pour trois types de critères :

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda \ll \mu \text{ (pénalisation prépondérante des déplacements des panneaux),} \\ \mu \ll \lambda \text{ (pénalisation prépondérante des déformages du corps} \\ \text{principal),} \\ \lambda \simeq \mu \text{ (pondération égale sur le corps principal et sur les} \\ \text{panneaux).} \end{array} \right.$$

Les résultats sont reportés à la figure 28 où l'on a tracé le lieu des optima (uniques) en fonction des différents critères comme annoncé ci-dessus : ces courbes permettent de déterminer les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  (donc le critère  $J$ ) en fonction de la réponse temporelle souhaitée. Cette méthode d'optimisation ne doit donc être considérée que comme un outil au même titre que les méthodes des asservissements classiques puisqu'il revient en fin de compte à l'ingénieur de choisir la matrice  $Q$  sur la base de considérations pratiques (figure 28).

Enfin, pour étudier la sensibilité de cette optimisation, nous avons tracé à la figure 29 le lieu des optima présentant le meilleur compromis de constante de temps ( $\lambda/\mu = 12,5$ ) et, à la figure 30, les lieux des gains optima  $K_Y$  correspondants, lorsqu'on fait varier  $I_Y/I_0$  de 0,5 à 1 ; dans ce cas, la variation du paramètre  $\omega_1$  n'est que de 5 % (calcul effectué à partir de la figure 19) et n'a pas été considérée. Dans les cas où  $I_Y$  serait inférieur à  $I_0$  par contre, il faudrait de tenir compte exactement des variations de  $\omega_1$  en fonction de  $I_Y/I_0$  pour obtenir des résultats cohérents car nous savons que  $\omega_1$  intervient dans le calcul de l'optimum. Sur les figures 29 et 30, les points "optima" dans le cas où l'on a exactement  $I_Y/I_0 = 0,737$  sont marqués d'une croix. Nous estimons que la sensibilité de la loi de commande optimale à ce paramètre est suffisamment faible pour pouvoir se contenter de performances réduites en cas de légère erreur d'estimation du rapport d'inertie.

De toutes façons, une contrainte plus importante gouverne le

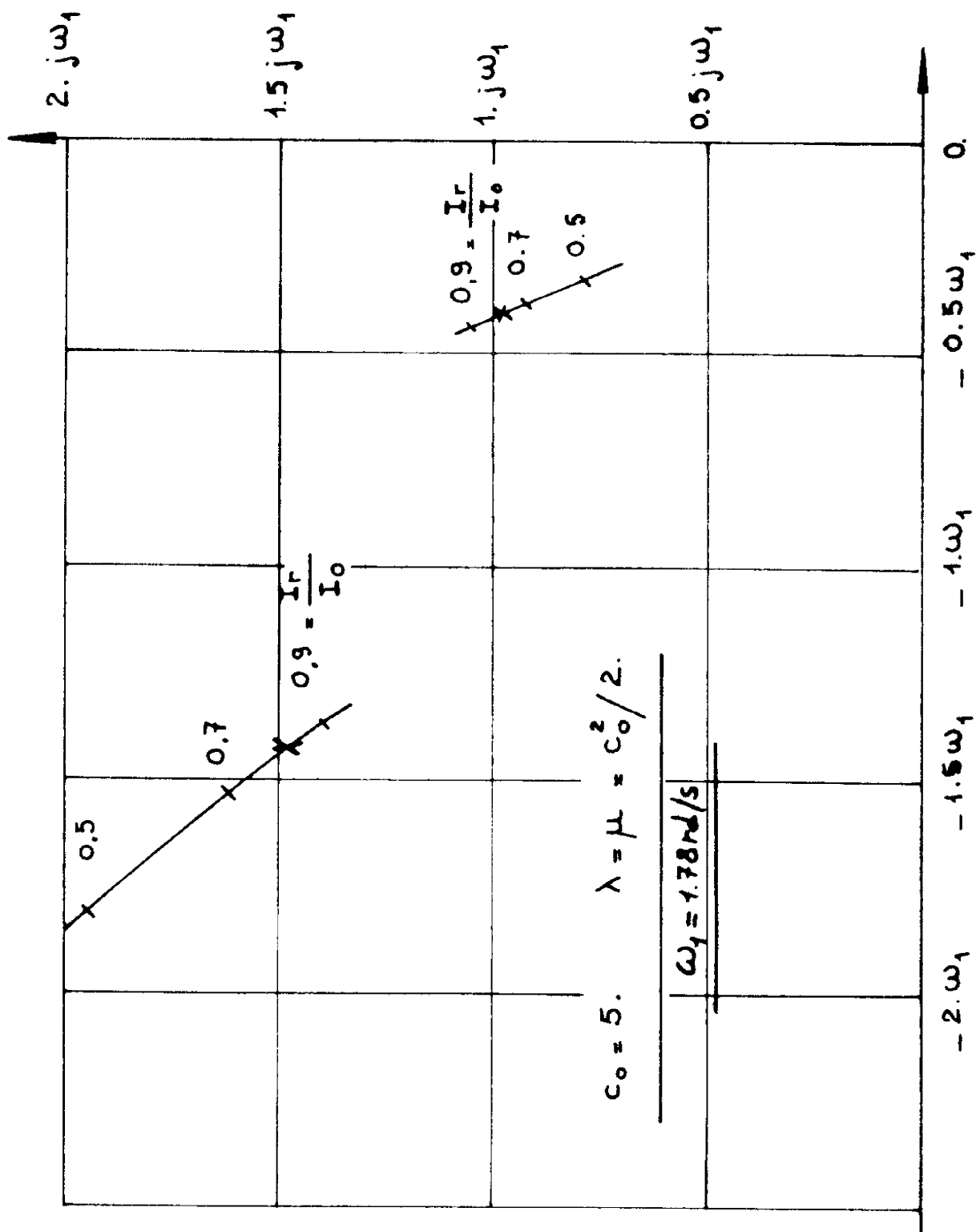


Figure 29 : sensibilité de l'optimum aux variations d'inertie

$$K = -I_0 \omega_1 [\omega_1 (1), \omega_1 (2), (3), (4)]$$

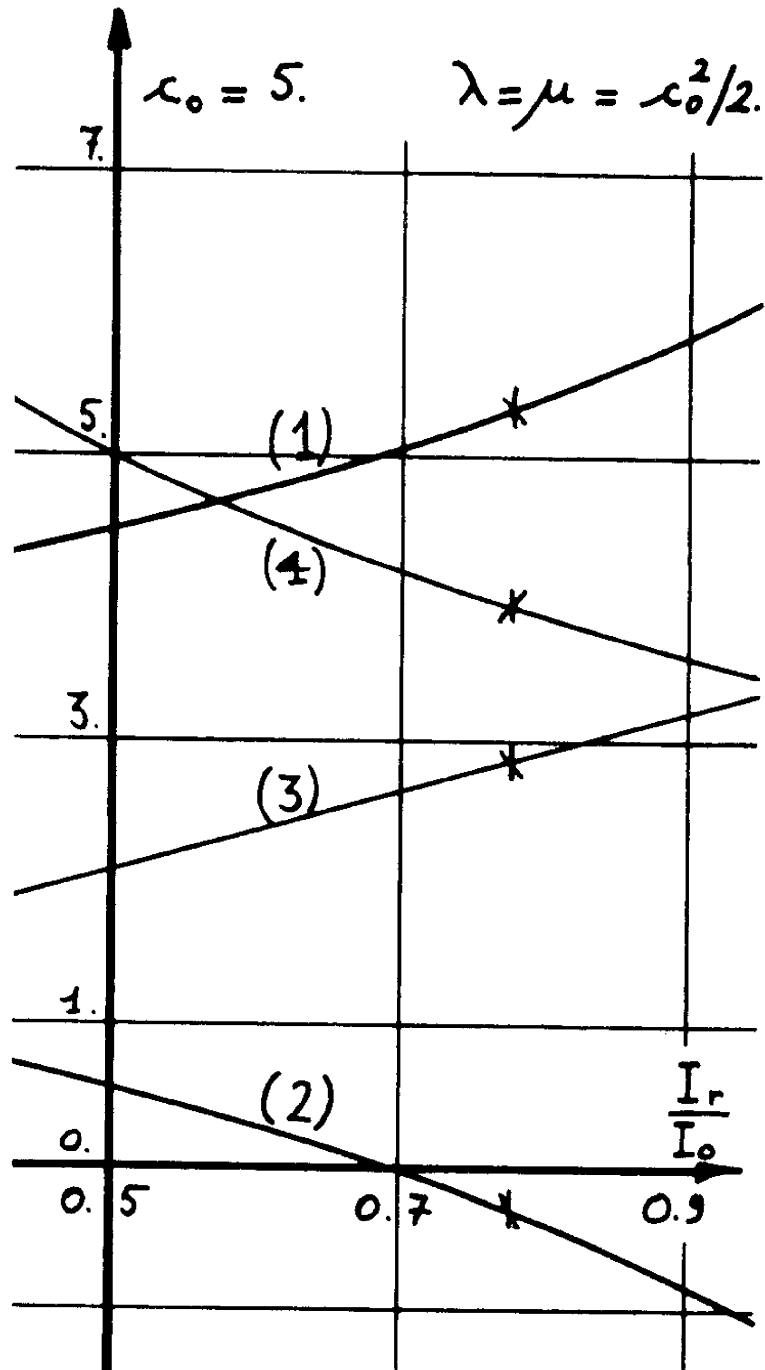


Figure 30 : sensibilité des gains aux variations d'inertie



choix des gains. En effet, on peut demander au système d'avoir une constante de temps de l'ordre de la seconde, mais il ne faut pas perdre de vue que le choix de  $(\lambda + \mu)$ , donc de  $c_0$ , est soumis à deux obligations :

- $c_0$  doit être suffisamment grand pour pouvoir contrer les plus forts couples perturbateurs prévisibles. Or on a, par transformation de Laplace de (IV.3) :

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= [s \mathbb{1} - (\bar{A} + \bar{B} \bar{K})]^{-1} \bar{B} u^p(s) \\ &= \frac{u^p(s)}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \Delta(s) = s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \theta_{\lambda\mu}(s) = \frac{u^p(s) (\omega_f^2 + s^2 / \bar{I}_\lambda)}{\Delta(s) \bar{I}_0}$$

Le transitoire amorti, on peut alors considérer que, pour un couple en échelon d'amplitude  $q_0^p$ ,

$$\theta_{\lambda\mu}(t \gg 0) = \frac{q_0^p \omega_f^2}{c_0 \bar{I}_0} = \frac{q_0^p}{\bar{I}_0 \omega_f^2 \sqrt{\lambda + \mu}}$$

De là  $(\sqrt{\lambda + \mu})_{\min} = \frac{q_0^p}{\bar{I}_0 \omega_f^2 (\theta_{\lambda\mu})_{\max}}$  où  $(\theta_{\lambda\mu})_{\max}$  est le dépointage maximum admissible ; en tolérant  $0,1^\circ$  pour cette valeur et en

considérant un couple de recalage énorme de  $0,5 \text{ N.m}$ , on obtient

$$(\lambda + \mu)_{\min} = 10^{-2}$$

- $c_0$  doit être suffisamment faible pour ne pas rendre excessive la consommation électrique ou simplement pour que le couple de commande soit matériellement réalisable. En supposant que les moteurs de cardans puissent fournir un couple de  $0,6 \text{ N.m}$  pour un dépointage du corps principal de  $0,1^\circ \simeq 0,002 \text{ rd}$ , on voit que l'ordre de grandeur des gains  $K_1$  doit être de 300, ce qui correspond, pour un satellite idéalisé comme rigide, à une valeur de  $\lambda + \mu \simeq 10^{-2}$ , valeur qui, d'après la figure 28, entraîne une constante de temps de 2 s pour le corps principal et de 10 s pour les panneaux, ce qui constitue une performance très acceptable.

On peut alors calculer la matrice des gains à l'aide de la formule

$$K = \bar{K} S = \left[ (\omega_1^2 - c_2) I_{\lambda}, -c_0 \frac{I_0}{\omega_1^2} - I_{\lambda} (\omega_1^2 - c_2), -c_3 I_{\lambda}, -c_1 \frac{I_0}{\omega_1^2} + c_3 I_{\lambda} \right] \quad (\text{IV. 21})$$

ce qui donne  $K = \left[ -293., +42., -595., -71. \right]$  pour  $\lambda = \mu = 10^{-2}/2$ .

#### IV. 3. COMMANDE PAR OBSERVATEUR D'ETAT :

L'inconvénient essentiel d'une commande linéaire optimale est qu'elle utilise toutes les variables d'état ; comme il est préférable de ne pas placer de senseurs sur les panneaux (augmentation de poids mais surtout complication de l'électronique), une observation (déterministe) ou une estimation (stochastique) de la partie non mesurable de l'état s'impose.

Un moyen de résoudre le problème est d'utiliser comme estimateur le filtre de Kalman-Bucy [20]. Ce filtre est optimal (au sens des moindres carrés) vis-à-vis des bruits supposés blancs-gaussiens et ses équations sont duales de celles de la commande optimale, autrement dit, les pôles du filtre sont choisis d'après les propriétés statistiques des bruits et ce sont les matrices de covariance de ces bruits qui jouent le rôle des matrices Q et R du critère quadratique. Si le processus est linéaire invariant et que la statistique des bruits est elle-même invariante, le filtre de Kalman-Bucy devient un système linéaire invariant gouverné par les sorties du processus (filtre de Wiener) et on peut le considérer comme un compensateur linéaire. Toutefois, pour notre système, les bruits ne sont ni blancs ni gaussiens et leur statistique n'est absolument pas connue ; de plus, dans le cas d'un système bien modélisé, le niveau de bruit est faible et la position optimale des pôles du filtre stochastique tend vers  $-\infty$  (dans le cas du système non bruité, l'estimateur optimal se réduit à des dérivateurs). Enfin, le filtre de Kalman-Bucy a la même dimension que le processus.

Ces faits nous ont conduit à envisager plutôt l'utilisation d'un observateur déterministe d'ordre minimal comme le filtre asymptotique de Luenberger [33].

IV.3.1. Cas général :

Soit un système linéaire invariant commandable et observable gouverné par l'équation d'état

$$\dot{x} = A x + B^c u^c + B^p u^p \quad (\text{IV.22})$$

où les perturbations entrent en ligne de compte.

On désire réaliser la commande optimale  $u_{opt}^c = K x$ . Cela est impossible pour deux raisons :

. les paramètres ( $\omega_1, \dots, I_p, I_f$ ) intervenant dans le calcul de K ne sont connus qu'approximativement ; on ne pourra donc espérer réaliser que  $u^c = \hat{K} x$  où  $\hat{K}$  est calculé à partir de valeurs des paramètres estimées :

. on n'a pas accès à tout l'état  $x$ , mais uniquement à un certain nombre de sorties linéairement indépendantes rassemblées dans la matrice ( $m \times 1$ )  $y = C x$  ; on est donc obligé de réaliser

$$u^c = K^y y + K^z z \quad (\text{IV.23})$$

avec  $z$ , matrice ( $\ell \times 1$ ) des sorties de l'observateur, de la forme :

$$z(t) = T x(t) + e(t) \quad (\text{IV.24})$$

où  $e(t)$  est "l'erreur d'observation".

Pour ce qui est de la dimension de l'observateur, Luenberger a démontré le THEOREME suivant :

Toute combinaison linéaire de l'état peut être observée à l'aide d'un observateur possédant  $\ell = (\nu - 1)$  valeurs propres arbitraires ;  $\nu$  est l'indice d'observabilité, défini comme le plus petit entier positif pour lequel :

$$\text{rang} \left[ C^T, A^T C^T, (A^2)^T C^T, \dots, (A^{\nu-1})^T C^T \right] = n$$

Pour tout système observable,  $(\nu - 1) \leq (n - m)$ . Si  $(\nu - 1) < (n - m)$ , l'observation d'une combinaison linéaire de l'état peut être obtenue beaucoup plus simplement qu'en reconstruisant tout l'état.

Supposons que les paramètres du système ne soient connus qu'approximativement en sorte qu'on ne connaisse  $A$ ,  $B^C$ ,  $B^P$ ,  $C$  et  $K$  que par leurs valeurs calculées  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}^C$ ,  $\hat{B}^P$ ,  $\hat{C}$  et  $\hat{K}$ . Posons :

$$\Delta A = A - \hat{A}, \text{ etc. } \dots \quad (\text{IV. 25})$$

L'observateur est gouverné par les entrées  $u^C$  et  $y$  (on suppose à ce stade les perturbations totalement inaccessibles) selon l'équation

$$\dot{z} = Fz + Gy + H u^C \quad (\text{IV. 26})$$

Par simple remplacement dans les équations (IV. 22) à (IV. 26), il vient que, si la structure de l'observateur vérifie les contraintes

$$\begin{cases} T \hat{A} - F T = G \hat{C}, & (\text{IV. 27}) \\ H = T \hat{B}^C, & (\text{IV. 28}) \\ K^Y \hat{C} + K^Z T = \hat{K}, & (\text{IV. 29}) \end{cases}$$

le système bouclé a pour équation d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{21} & M^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ -T \end{bmatrix} B^P u^P \quad (\text{IV. 30})$$

où :

$$\begin{cases} M^{11} = A + B^C (\hat{K} - K^Y \Delta C) \\ M^{12} = B^C K^Z \\ M^{21} = G \Delta C - T \Delta B^C (\hat{K} + K^Y \Delta C) - T \Delta A \\ M^{22} = F - T \Delta B^C K^Z. \end{cases}$$

Nous avons ainsi démontré deux points essentiels :

- le théorème de "séparation" de la dynamique du processus de celle de l'observateur invoqué par Luenberger n'est exact que lorsque les matrices  $\Delta C$ ,  $\Delta B^C$  et  $\Delta A$  sont nulles (la matrice  $M^{21}$  est alors nulle et les pôles du système global comprennent ceux de l'observateur et ceux du système idéal bouclé en l'absence d'observateur) ; ce résultat serait tout aussi vrai pour le filtre de Kalman. Une étude de sensibilité s'impose donc si on veut éviter de graves dégradations de performances en présence de bruit de mesure ( $\Delta C$ ), d'erreurs d'actionneurs ( $\Delta B^C$ ) ou d'erreurs de modèle ( $\Delta A$ ,  $\Delta B^P$ ) ;



. l'erreur d'observation  $e$  en régime permanent est directement influencée par les perturbations  $u^P$  qui agissent sur le processus.

La procédure de Luenberger ne lève point l'arbitraire sur les paramètres que contient toujours la synthèse d'un compensateur.

Comme l'entrée  $u^C$  est ici scalaire, les contraintes (IV. 27), (IV. 28) et (IV. 29) constituent un système de  $(\ell_n + \ell + n)$  équations et les matrices  $T$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $K^Y$  et  $K^Z$  comportent  $(\ell_n + \ell^2 + \ell_m + \ell + m + \ell)$  inconnues. En l'absence d'erreurs et de perturbations, on a, d'après (IV. 30)

$$e(t) = e(0) \exp (Ft) ;$$

afin d'être maître de la dynamique de l'observateur, nous nous imposerons donc les éléments de  $F$ , en nombre  $\ell^2$ . Supposons être dans le cas où  $\ell = (\nu - 1) = (n-m)$  ; il reste alors  $(\ell_m + m + \ell + n) = m(n-m)$  éléments à choisir, en nombre égal aux éléments de  $G$ . Luenberger a montré que, étant donné  $F$  et  $G$ , l'équation (IV. 27) admet une solution  $T$  unique pour autant que  $A$  et  $F$  aient des valeurs propres différentes.

D'après les problèmes que nous avons rencontré dans la synthèse d'un observateur, nous pouvons dès à présent dire que les critères suivants doivent guider le choix des paramètres de l'observateur :

. veiller à ce que les paires  $(F, G)$  et  $(F, H)$  soient commandables : il est bien évident, bien qu'il en soit peu question dans la littérature, qu'il faut éviter de construire un observateur qui ne serait pas commandable vis-à-vis de ses entrées (figure 31a) ;

. ne choisir une configuration que si tous les gains qui composent les matrices  $G, H, K^Y$  et  $K^Z$  ont une valeur absolue réalisable physiquement.

Nous insistons sur ces deux points car ils nous ont apparu primordiaux dans la réalisation d'un observateur pour le système que nous avons à compenser. L'observateur et le bloc de commande réunis prennent l'aspect d'un compensateur classique ainsi que le montre la figure 31 b.

#### IV. 3. 2. Application au satellite :

Nous supposons l'information réduite à la mesure de l'angle de

roulis  $\theta_r$ . D'après (IV. 8), on peut conclure que l'indice d'observabilité  $\nu$  est quatre : on construira donc un observateur de dimension trois pour la réalisation d'une commande à retour d'état.

Le calcul analytique d'un observateur pour  $F$  diagonale est effectué en Annexe G mais d'ores et déjà nous savons que l'observateur doit être commandable vis-à-vis de ses entrées, ce qui entraîne

$$\det [G, FG, F^2 G] = G_1 G_2 G_3 \neq 0 \text{ et}$$

$$\det [H, FH, F^2 H] = H_1 H_2 H_3 \neq 0$$

moyennant les notations :

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_1 F_2 (F_1 - F_2) + F_2 F_3 (F_2 - F_3) \\ = F_3 F_1 (F_3 - F_1).$$

Ceci ne veut dire non seulement que les matrices  $G$  et  $H$  ne peuvent contenir d'élément nul, ce qui était prévisible, mais encore que les valeurs propres de l'observateur doivent être toutes distinctes ; le calcul même des matrices de l'observateur (§ 6.1) devient impossible dans le cas contraire.

Dans le cas qui nous occupe,  $u^c$  et  $y$  sont scalaires et on peut voir le système comme un processus mono-entrée, mono-sortie "compensé" par l'observateur (figure 31c). Le compensateur lui-même ayant une structure du type de la figure 31b. Remarquons bien que les variables de ce compensateur restent couplées par le retour  $F = HK^Z$  et ce, bien que  $F$  soit prise diagonale. Les coefficients du compensateur équivalent ( $u^c/y$ ) sont calculés analytiquement au § 6.2.

Nous soulignons encore le fait que le gain choisi  $K^Y = K_1^Z + K_2^Z + K_3^Z$  dépend de  $F$  et que  $|K^Y|$  varie comme la sixième puissance des éléments de  $F$ , ce qui conduit à ne pas choisir des  $F_i$  exagérément négatifs.

La procédure choisie pour la construction de l'observateur conduit à une matrice  $T$  dont les éléments sont de l'ordre de 1 (autrement dit à des éléments  $z_i$  de l'observateur du même ordre que les éléments de  $x$ ).

Nous avons effectué une étude de sensibilité des pôles du système global en présence d'incertitudes ou de bruits ; les seules variations qui, d'expérience, sont critiques, sont les erreurs d'estimation de la pulsation propre  $\omega_1$  du système, c'est-à-dire que l'on aura (§ IV. 3. 1.)

$$\Delta B (= \Delta B^c = \Delta B^p) = \mathbf{0}, \quad \Delta C = \mathbf{0}, \quad \Delta A \neq \mathbf{0}.$$

Les pôles du système bouclé (IV. 30) en l'absence de perturbation sont donnés par les racines de l'équation

$$\det [s\mathbf{1} - A - B\hat{K} + BK^Z (s\mathbf{1} - F)^{-1} T \Delta A] = 0.$$

Le plus simple est de passer à la forme canonique. On calcule facilement que le seul élément non nul de  $[SBK^Z (s\mathbf{1} - F)^{-1} T \Delta AS^{-1}]$  est l'élément (4, 3) qui vaut

$$\frac{\Delta \omega_1^2}{I_R} \sum_{i=1}^3 \frac{T_{i4} \bar{I}_R - T_{i3} \bar{I}_f}{s - F_i}$$

où  $\Delta \omega_1^2$  est l'erreur commise sur  $\omega_1^2$  ; il suffit alors de rajouter cet élément (4, 3) à  $\hat{c}_2$  dans l'élément (4, 3) de  $(s\mathbf{1} - \bar{A} - \bar{B} \hat{K})$ , cf. (IV. 11), pour pouvoir calculer numériquement les racines de l'équation du septième degré qui en résulte. La figure 32 montre les déplacements des pôles pour des erreurs  $\Delta \omega_1 / \omega_1$  allant de - 20 % à + 20 % . On remarque que si le mode rigide est peu influencé, le mode élastique quant à lui présente une sensibilité critique aux erreurs négatives sur la fréquence. Ceci amène tout naturellement au problème de l'identification des fréquences propres et de l'adaptation de la commande, dont nous discuterons au paragraphe suivant. Il convient de souligner qu'il vaut mieux sous-estimer  $\omega_1$  que le surestimer. Ceci peut se comprendre intuitivement par le fait que dans le dernier cas, on suppose la structure plus rigide qu'elle n'est en réalité ; la première fréquence élastique tombe alors dans la bande de fréquence de l'actionneur et le premier mode entre en résonance.

Le choix de la matrice  $F = \text{diag} (-3., -5., -7.)$  semble un bon compromis entre le désir d'avoir d'une part un observateur à dynamique plus rapide que celle du système bouclé idéal dépourvu d'observateur et, d'autre part, un gain statique  $K^Y$  qui ne soit pas prohibitif.



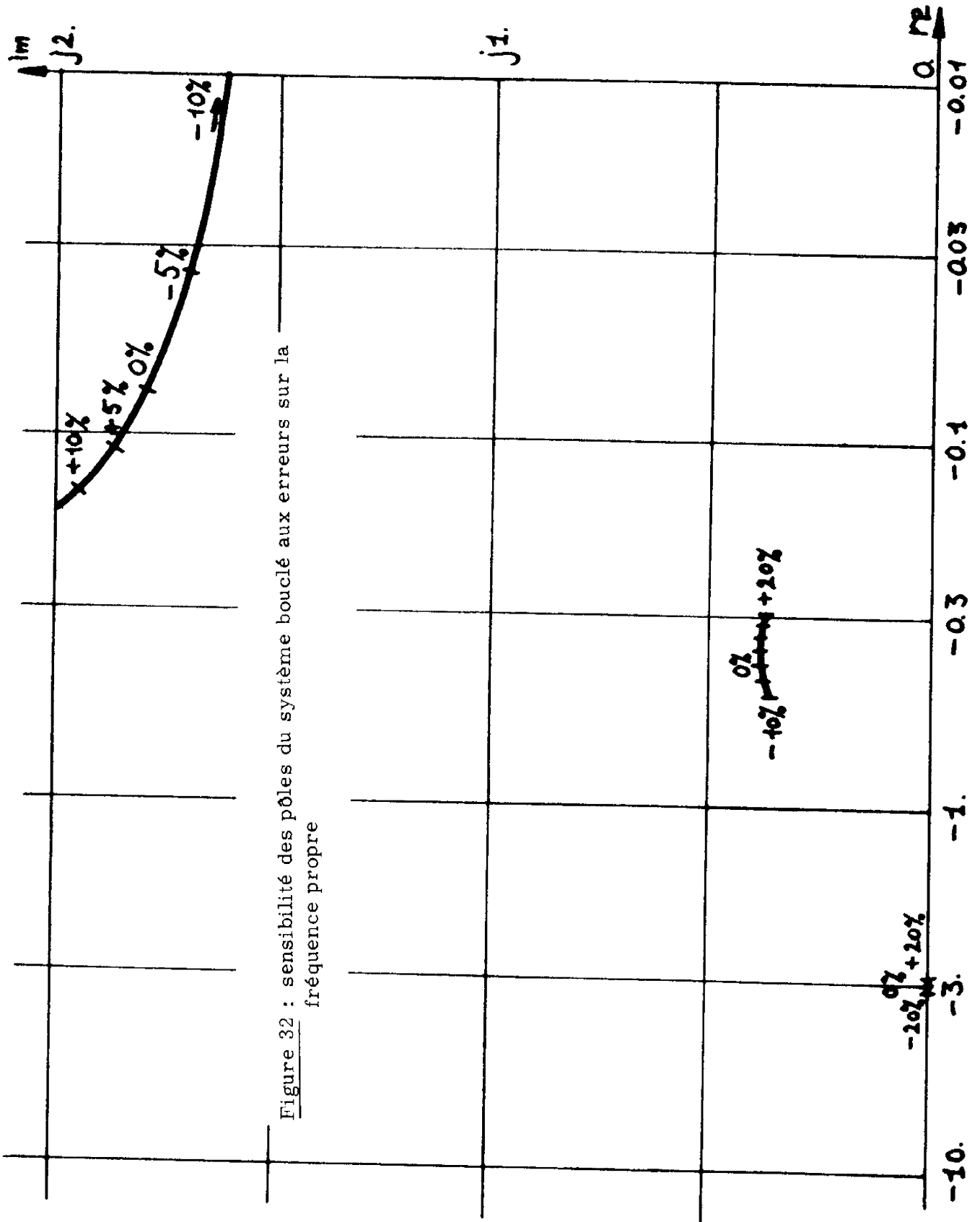


Figure 32 : sensibilité des pôles du système bouclé aux erreurs sur la fréquence propre

Les matrices de l'observateur, calculées sur ordinateur à partir des relations données en annexe G, sont

$$T = \begin{bmatrix} -1,13 & -0,0694 & +0,375 & +0,0231 \\ +5,32 & +0,137 & -1,06 & -0,0274 \\ -5,17 & -0,0711 & +0,739 & +0,0102 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -3,59 \\ +27,3 \\ -36,7 \end{bmatrix}; H = 10^3 \begin{bmatrix} +0,607 \\ -1,72 \\ +1,20 \end{bmatrix}$$

$$K^z = K^y \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } K^y = -12 \cdot 10^3 ;$$

ceci conduit au compensateur équivalent (figure 31c)

$$\frac{u^c}{y} = -12 \cdot 10^3 \frac{s^3 + 2,01 s^2 + 7,32 s + 2,22}{s^3 + 16,5 s^2 + 66,5 s + 141}$$

Pour connaître la manière dont l'observateur de Luenberger compense le système au sens classique du terme, nous avons fait tracer le lieu d'Evans de la fonction de transfert en boucle ouverte  $-\frac{u^c}{u}$  sur un écran de visualisation à mémoire couplé à un ordinateur ; dans ce dispositif, les coefficients de la fonction de transfert sont affichés sur pupitre spécialisé par l'intermédiaire de potentiomètres, le calculateur en faisant l'acquisition sous forme de tensions analogiques et les coefficients multiplicatifs correspondant à l'ordre de grandeur de chaque paramètre étant codés sur ligne numérique. Le gain utilisé comme variable étant  $-K^y/(10I_0)$ , nous avons obtenu les résultats de la figure 33. La figure 33a montre le tracé complet. Pour ce qui est du système autonome, on reconnaît le pôle double à l'origine dû au mode rigide ainsi que la paire de pôles ( $\pm j \omega_1$ ) et la paire de zéros ( $\pm j \sqrt{I_r} \omega_1$ ) complexes conjugués dus au mode élastique ; pour ce qui est de l'observateur, il possède un pôle et un zéro réels ainsi qu'une paire de zéros et une paire de pôles complexes conjugués. La figure 33b consiste en un agrandissement de la zone intéressante montrant la position du gain choisi pour  $K^y$  (limité, rappelons-le, par les actionneurs). La figure 33c montre le bénéfice et la perte qu'on aurait en choisissant un gain  $K^y$  respectivement deux fois plus fort et trois fois plus faible.

Enfin, nous avons mis au point un programme de simulation

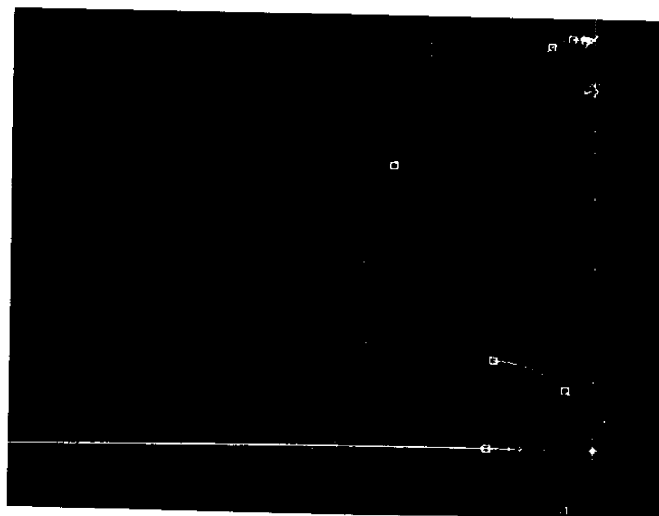
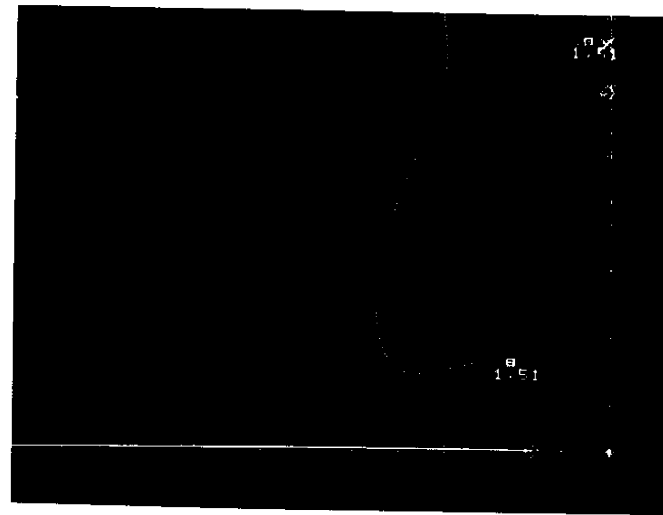
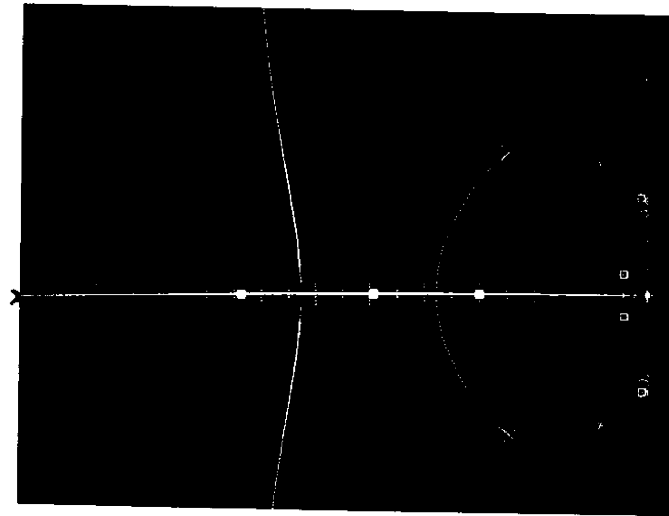


Figure 33 : lieux d'Evans du système commandé par observateur d'état

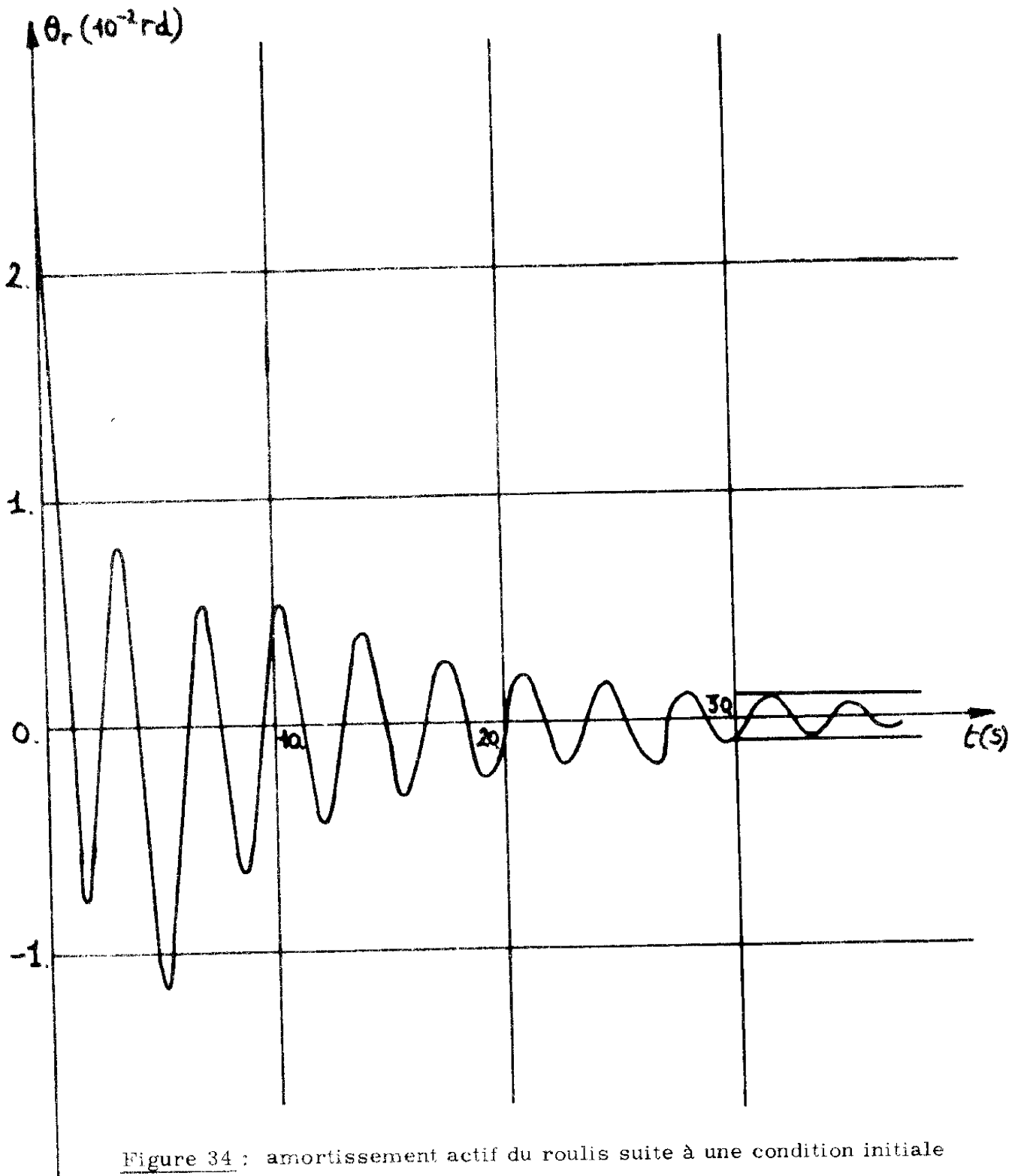


Figure 34 : amortissement actif du roulis suite à une condition initiale

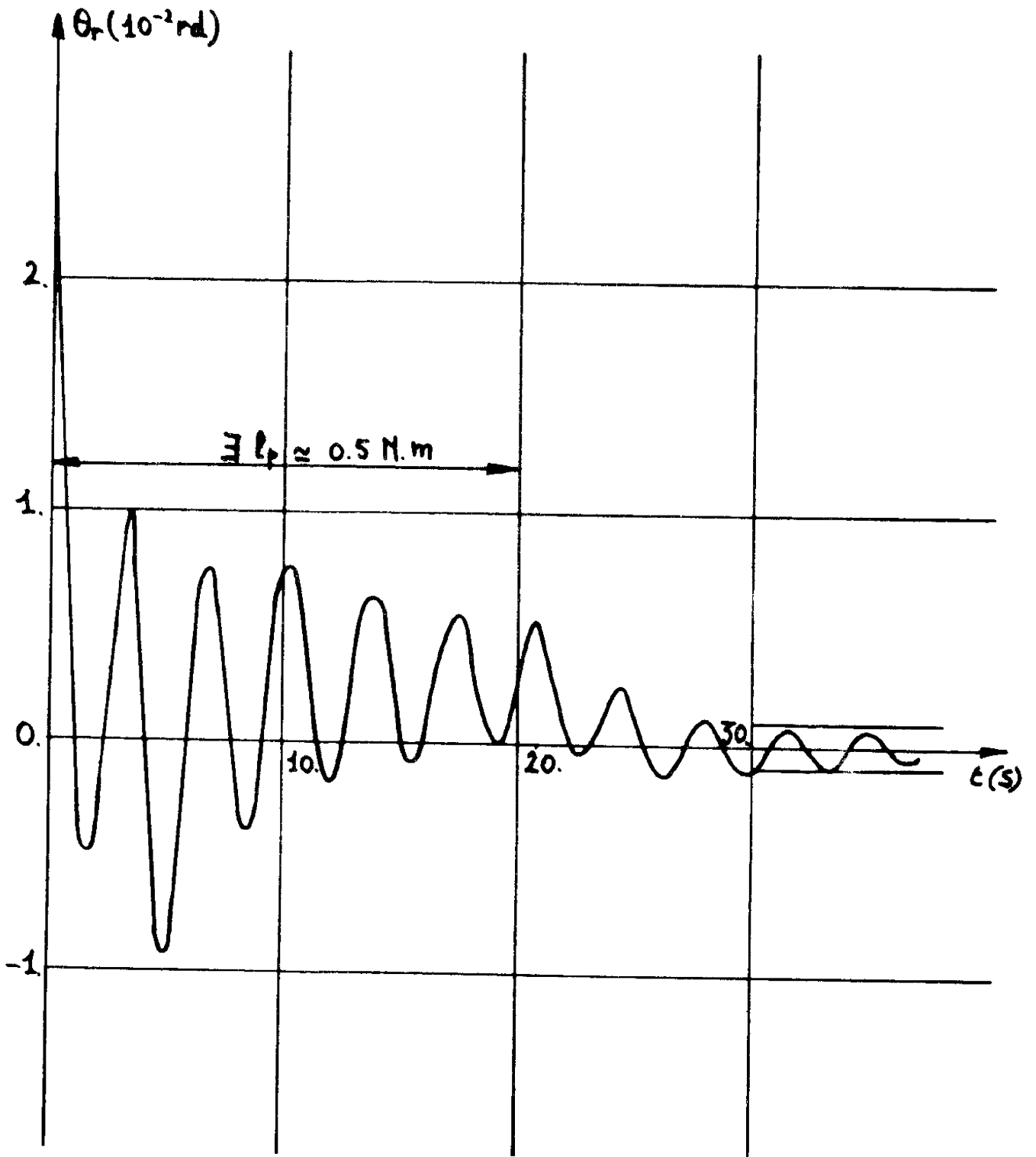


Figure 35 : amortissement actif du roulis en présence d'un couple de recalage

complet de la dynamique du satellite (modèle "3 modes", cf. § IV.1.2) commandé par l'observateur du premier mode décrit ci-dessus. Les équations de la dynamique mises sous la forme d'équation d'état (IV.1) ont été discrétisées [54] sous la forme :

$$x[(k+1)\Delta t] = [\exp(A\Delta t)]x[k\Delta t] + \left[ \int_0^{\Delta t} \exp(A\tau)B d\tau \right] u[k\Delta t]$$

avec un pas temporel suffisamment faible (0,005 s) pour rendre compte de la dynamique de l'observateur et des trois modes. La figure 33 constitue un résultat classique, elle montre l'amortissement actif du roulis suite à une condition initiale de  $0,025 \text{ rd} \simeq 1,4^\circ$ . Quant à la figure 34, elle montre le même cas mais où, durant les vingt premières secondes, on applique un couple  $\ell^P \simeq 0,5 \text{ N.m}$ , durée et valeurs approximatives d'un couple de recalage ; on y voit, entre  $t = 10$  et  $t = 20$ , la tendance de  $\theta_R$  à dériver due au mode rigide (terme  $t^2 \ell^P / (2I_0)$ ), divergence très bien "rattrapée" par la suite.

#### IV.4. IDENTIFICATION ET ADAPTATION :

Nous avons montré au paragraphe précédent que la sensibilité du système à des variations déterministes ou aléatoires de paramètres peut devenir critique lorsqu'on exige des performances d'amortissement des modes élastiques en plus du mode rigide; dans ce cas en effet, le risque d'une instabilité conditionnelle du système bouclé due aux erreurs de modèle est élevé (figure 32).

Ceci nous amène à discuter de l'intérêt d'une identification des paramètres et principalement, dans le cas des satellites flexibles, des premières fréquences propres.

Dans le cas où seul le portage du corps rigide principal est soumis à des spécifications sévères, on peut montrer soit par simulation, soit en calculant la transformée de Laplace inverse de (IV.7) que l'amplitude des oscillations du corps principal d'un satellite de télécommunications du type envisagé actuellement est de l'ordre de  $0,01^\circ$  lors d'une excitation en échelon égale à celle d'un couple de recalage. Cette amplitude étant nettement en dessous du maximum toléré, il paraît peu intéressant de vouloir

amortir activement ces oscillations élastiques.

Nous avons toutefois montré au paragraphe précédent qu'une telle stabilisation est possible, au prix cependant d'un risque d'instabilité conditionnelle du fait des incertitudes sur les fréquences élastiques ; celles-ci avoisinent en effet la bande de fréquences excitées par l'actionneur. L'amortissement actif des oscillations élastiques peut par contre devenir indispensable dans le cas de satellites fortement flexibles (très grands panneaux solaires) ou encore lorsqu'on désire un pointage fin de la partie flexible elle-même (antenne par exemple). On retrouve dans ce cas le même problème que celui de la stabilisation des lanceurs flexibles [24], avec le problème subséquent de l'emplacement des senseurs et actionneurs [16]. Pourtant, nous ne pensons pas que la stabilisation des satellites non rigides soit aussi délicate que celle des lanceurs et missiles flexibles ; en effet, ceux-ci évoluent dans un environnement hautement variable et leur propre configuration (angle d'attaque, moments d'inertie, décalage du centre de masse par consommation de combustible, etc...) change dans des proportions que ne connaissent pas les satellites artificiels.

Quant à l'identification des fréquences élastiques, elle peut se révéler utile, soit simplement pour valider le modèle dynamique employé pour les modes flexibles (cas des satellites de télécommunications envisagés actuellement), soit pour réaliser une adaptation de la commande (cas des satellites très flexibles). Nombre de méthodes d'identification sont possibles :

- la transformée de Fourier rapide [53],
- la corrélation [54],
- le filtre de Kalman généralisé ("extended Kalman filter") [48],
- les vitesses variables d'échantillonnage ("variable sampling rate") [40],
- les filtres suiveurs [17] . etc...

Nous croyons aussi que les systèmes à verrouillage de phase ("phase-locked-loop systems") peuvent conduire à une identification valable des fréquences élastiques dominantes.

Citons enfin les systèmes d'identification avec modèle ajustable et les travaux récents de Landau [22] sur la synthèse d'observateurs d'état adaptatifs en présence de variations de paramètres par la théorie de l'hyperstabilité - nous donnons un bref aperçu de cette méthode en annexe H.





## CONCLUSION

-:-

La stabilisation d'attitude des satellites déformables soulève deux problèmes essentiels : le premier est de modéliser correctement la dynamique de ces satellites, le second est d'évaluer l'interaction entre les phénomènes de déformation et les performances du système de commande.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons présenté une méthode systématique pour la mise en équations de la dynamique d'un satellite déformable quelconque ; la formulation proposée permet de représenter de manière réaliste les phénomènes de déformation et de dissipation d'énergie, ainsi que l'influence des principaux couples perturbateurs.

Les équations obtenues ont été données sous leur forme continue, applicable lorsqu'on peut modéliser analytiquement le satellite comme un "continuum", ainsi que sous leur forme linéaire discrétisée, applicable lorsqu'on présume que le système ne fait effectivement intervenir qu'un nombre fini de modes de déformation ou lorsqu'on le discrétise a priori. Notre étude s'est portée plus particulièrement sur les satellites comportant un corps principal rigide auquel sont connectées des parties mobiles et flexibles ou qui comporte des rotors internes ; nous avons utilisé les équations dynamiques correspondantes pour étudier la stabilité en régime autonome de satellites particuliers, en utilisant l'entité énergétique qu'est le Hamiltonien comme fonction de Liapounov.

Dans la seconde partie de notre travail, nous avons étudié le régime transitoire des satellites à grands panneaux solaires flexibles, stabilisés "trois axes" à l'aide d'une roue sur cardan. A partir des modes normaux de la structure globale, nous donnons une interprétation énergétique aux troncatures modales, pratiquées de manière trop souvent empirique par l'ingénieur. Ceci permet d'obtenir une transmittance directement utilisable pour la synthèse d'un compensateur.

Nous avons ensuite fourni une méthode systématique de synthèse d'un réseau correcteur stationnaire en nous basant sur la théorie de la commande optimale. Etant donné les incertitudes sur les paramètres et les bruits, une étude de sensibilité de ce système commandé s'imposait.

Nous avons montré d'une part que le fait de vouloir stabiliser activement les modes élastiques présente le risque de rendre le système instable en présence d'erreurs sur les fréquences propres et, d'autre part, qu'on ne peut dissocier le problème de la commande de celui de l'estimation, du fait des incertitudes sur les paramètres ou sur les bruits.

Nous pouvons conclure que dans le cas où les oscillations du corps principal induites par les vibrations des panneaux deviendraient gênantes, ce qui ne peut se produire que pour des satellites plus flexibles que ceux qui sont prévus dans un futur immédiat, la synthèse d'une stabilisation par retour d'état telle que nous l'avons proposée est possible moyennant soit des capteurs supplémentaires situés sur les parties souples, soit une identification intermittente des fréquences élastiques. Ceci constituerait un prolongement de nos travaux, notamment dans le cas d'une commande par ordinateur embarqué, dont le spectre de fréquence risque de recouvrir certaines fréquences de vibrations du satellite.

## ANNEXES

-----



ANNEXE A

NOTATIONS ET OPERATIONS EN CALCUL TENSORIEL

- : -

A.1. NOTATIONS - DEFINITIONS :

Sont utilisés dans le texte des tenseurs d'ordre zéro (scalaires), d'ordre un (vecteurs) et deux (simplement nommés tenseurs) de l'espace euclidien à trois dimensions. L'ordre d'un tenseur est indiqué par le nombre de barres sous la lettre qui le représente (notation tensorielle ou symbolique de Gibbs). Vu que les seuls repères utilisés sont orthonormés, les composantes de tout tenseur dans un référentiel déterminé sont d'un seul type (à la fois covariantes et contravariantes) et sont repérées par des indices inférieurs, en nombre égal à l'ordre du tenseur. Ainsi on parlera par exemple de la composante  $x_i$  du vecteur  $\underline{x}$  selon le vecteur de base  $\underline{x}^i$  (c'est la projection géométrique de  $\underline{x}$  sur  $\underline{x}^i$ ), mais aussi de la composante  $X_{ij}$  du tenseur  $\underline{\underline{X}}$  selon le tenseur de base  $\underline{\underline{X}}^{ij}$  (on verra ci-dessous quelle opération permet de construire les tenseurs de base à partir des vecteurs de base, d'interprétation géométrique évidente).

On a donc les relations de définition suivantes entre la notation indicielle (dans un repère déterminé) et la notation tensorielle (indépendante de la base choisie) :

$$\underline{x} = x_l \underline{x}^l \quad (\text{A.1})$$

$$\underline{\underline{X}} = X_{mn} \underline{\underline{X}}^{mn} \quad (\text{A.2})$$

la répétition d'un indice dans un même monôme impliquant toujours la  $\sum_1^3$  sur cet indice (convention d'Einstein).

Quant aux composantes d'un vecteur  $\underline{x}$  dans un repère donné, elles peuvent toujours être représentées par une matrice (3 x 1)  $x$ . Ainsi, à la relation (A.1) correspond la représentation matricielle

$$x = x_l \underline{x}^l \quad (\text{A.3})$$

## A. 2. OPERATIONS :

### A. 2. 1. Produit tensoriel (ou dyadique)

Le produit tensoriel de deux tenseurs génère un tenseur d'ordre égal à la somme des ordres des tenseurs du produit ; il se représente par simple juxtaposition des symboles des tenseurs du produit ; il est associatif distributif et non commutatif en général.

Par définition, les tenseurs de base sont les produits tensoriels des vecteurs de base correspondants :

$$\underline{\underline{X}}^{mn} = \underline{x}^m \underline{x}^n \quad (\text{A. 4})$$

où les composantes de  $\underline{\underline{X}}^{mn}$  en axes  $\underline{x}^i$  sont données par la matrice  $X^{mn} = \underline{x}^m \underline{x}^n \cdot$

Comme les vecteurs de base sont orthonormés, les éléments de cette matrice sont nuls excepté  $(X^{mn})_{mn} = 1$ . De la sorte, on pourra parler des neuf composantes  $X_{mn}$  d'un tenseur  $\underline{\underline{X}}$  dans les axes  $\underline{x}^i$  et les représenter par une matrice (3 x 3) X en sorte que à (A. 2) correspond la représentation matricielle

$$\underline{\underline{X}} = X_{mn} \underline{\underline{X}}^{mn} \quad (\text{A. 5})$$

### A. 2. 2. Produit scalaire :

Le produit scalaire de deux tenseurs génère un tenseur d'ordre égal à la somme des ordres des tenseurs du produit moins deux (opération de "contraction") ; il se représente par un point ; il est associatif, distributif et non commutatif en général (sauf évidemment dans le cas du produit scalaire de deux vecteurs, qui est un scalaire).

Par exemple, on écrira :  $\underline{h} \cdot \underline{i} = \underline{\Omega}$

La norme d'un vecteur vaut  $\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}$  ; c'est un scalaire. Puisqu'un tenseur n'est jamais qu'un produit tensoriel de vecteurs de base, la définition du produit scalaire de deux vecteurs de base suffit. Par définition, le produit scalaire de deux vecteurs de base vaut

$$\underline{x}^i \cdot \underline{x}^j = \underline{x}^i \cdot \underline{x}^j \cdot \underline{\underline{I}}^{ij}$$

Comme ces vecteurs de base sont orthonormés, on a  $\underline{x}^i \cdot \underline{x}^j = \delta_{ij}$ , symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

### A.2.3. Produit vectoriel :

Cette opération ne peut s'effectuer qu'entre deux vecteurs  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  et génère un vecteur  $\underline{v}$ . Soit le tenseur  $\underline{V} = \underline{a} \underline{b} - \underline{b} \underline{a}$  ; dans un repère donné, ce tenseur a pour matrice  $V = \underline{a} \underline{b}^T - \underline{b} \underline{a}^T$  qui est une matrice antisymétrique ; on dira que le tenseur  $\underline{V}$  est "antisymétrique". La matrice  $V$  ne contient que trois éléments indépendants qui permettent de former un vecteur  $\underline{v}$  dont les composantes dans les mêmes axes sont données par  $v = [V_{32}, V_{13}, V_{21}]^T$ . Notons que cette opération, contrairement aux deux précédentes, ne peut se définir dans des espaces à plus de trois dimensions ; elle doit être considérée comme un succédané du produit tensoriel. Le produit vectoriel se représente par une croix ; il est non commutatif (sauf s'il est nul).

### A.2.4. Produits mixtes :

Les produits scalaires et tensoriels sont distributifs et associatifs entre eux, et avec les combinaisons linéaires ; on peut donc toujours se ramener à des produits tensoriels ou scalaires de vecteurs de base. Par exemple :

$$\underline{J} \cdot \underline{\Omega} = (J_{ij} \underline{x}^i \underline{x}^j) \cdot (\Omega_R \underline{x}^k) = J_{ij} \Omega_R (\underline{x}^i \underline{x}^j) \cdot \underline{x}^k = \\ J_{ij} \Omega_R \underline{x}^i (\underline{x}^j \cdot \underline{x}^k) = J_{ij} \Omega_R \delta_{jk} \underline{x}^i = J_{ij} \Omega_j \underline{x}^i ;$$

de même :  $\underline{J} \cdot \underline{X} = (J_{ij} \underline{x}^i \underline{x}^j) \cdot (X_{\ell\ell} \underline{x}^k \underline{x}^\ell) = J_{ij} X_{j\ell} \underline{x}^i \underline{x}^\ell.$

Les règles du calcul matriciel se définissent alors de manière immédiate ; ainsi, si l'on prend  $i$  comme indice de ligne, on écrira :

$$(J \cdot \underline{\Omega})_i = J_{ij} \Omega_j ,$$

$$(J \cdot \underline{X})_{i\ell} = J_{ij} X_{j\ell} .$$

ANNEXE B

---

OPERATIONS FONDAMENTALES EN GYRODYNAMIQUE

- : -

B.1. QUASI-COORDONNEES - MATRICE DUALE D'UN VECTEUR :

Soient un trièdre mobile d'axes  $\underline{r}^1$  et un trièdre de référence d'axes  $\underline{x}^1$ , mobile également. Soit encore un vecteur  $\underline{v}$  dont la matrice (3 x 1) des composantes en axes  $\underline{x}^1$  est  $\underline{x}$  et dont la matrice (3 x 1) des composantes en axes  $\underline{r}^1$  est  $\underline{r}$ . Soit enfin  $A$  la matrice unitaire (3 x 3) de rotation faisant passer des axes  $\underline{x}^1$  aux axes  $\underline{r}^1$ . Alors, si l'on définit les matrices (3 x 1) de vecteurs :

$$\left[ \underline{x} \right] = \left[ \underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^3 \right]^T \quad \text{et} \quad \left[ \underline{r} \right] = \left[ \underline{r}^1, \underline{r}^2, \underline{r}^3 \right]^T,$$

on peut écrire :

$$\underline{v} = \left[ \underline{x} \right]^T \underline{x} = \left[ \underline{r} \right]^T \underline{r}$$

$$\left[ \underline{r} \right] = A \left[ \underline{x} \right] \quad \text{et donc} \quad \underline{r} = A \underline{x}.$$

Par dérivation, on obtient  $\dot{\underline{r}} = \dot{A} \underline{x} + A \dot{\underline{x}}$

ou, en définissant la matrice antisymétrique  $\tilde{\omega} = A \dot{A}^T$ , (B.1)

$$A \dot{\underline{x}} + \tilde{\omega} \underline{r} = \dot{\underline{r}} \quad \text{(B.2)}$$

Cette relation n'est autre que la dérivation vectorielle classique de la mécanique :

$$\frac{^x d}{dt} \underline{v} = \frac{^r d}{dt} \underline{v} + \underline{\omega} \times \underline{v}$$

avec

$$\frac{^x d}{dt} \underline{v} = \left[ \underline{x} \right]^T \dot{\underline{x}}, \quad \frac{^r d}{dt} \underline{v} = \left[ \underline{r} \right]^T \dot{\underline{r}}, \quad \underline{\omega} = \left[ \underline{r} \right]^T \tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = \left[ \tilde{\omega}_{32}, \tilde{\omega}_{13}, \tilde{\omega}_{21} \right]^T;$$

$\underline{\omega}$  est la vitesse angulaire (ou "vecteur-rotation-instantanée" ou "vecteur de Poisson") des axes  $\underline{r}^i$  relativement aux axes  $\underline{x}^i$ . Il est souvent bien plus facile de calculer immédiatement cette vitesse angulaire plutôt qu'à l'aide de (B.1) ; on notera qu'on obtient alors  $\tilde{\omega}$  par les relations :



$$\underline{\omega} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \omega_k \quad (\text{B.3})$$

où  $\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-k)(k-j)(j-i)$  est le symbole de Levi-Civita.

Les composantes de  $\underline{\omega}$  sont appelées quasi-vitesses parce qu'elles ne sont pas dans le cas général les dérivées de coordonnées angulaires physiquement mesurables du système.

De la même manière que ci-dessus, nous pouvons construire, à partir de la matrice (3 x 1) des composantes (dans un repère déterminé) de tout vecteur  $\underline{w}$  une matrice (3 x 3) antisymétrique  $\tilde{w}$  appelée matrice duale de  $\underline{w}$  dans le repère en question.

La propriété essentielle de cette matrice est qu'elle permet la représentation matricielle du produit vectoriel dans un repère déterminé :

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} \iff \underline{c} = \tilde{a} \underline{b} \quad (\text{B.4})$$

Nous en avons trouvé quelques autres propriétés :

$$\begin{aligned} \tilde{a} \underline{b} &= \underline{b} \tilde{a}^T = \underline{a} \tilde{b}^T \\ \underline{x}^T \tilde{y} &= (\underline{x}^T \underline{x}) \underline{y} - \underline{x} \underline{x}^T \underline{y} \\ \underline{x}^T \tilde{w} + \tilde{w}^T \underline{x} &= 2(\underline{x}^T \underline{w}) \underline{1} - \underline{x} \underline{w}^T - \underline{w} \underline{x}^T \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

et, si A est une matrice (3 x 3) unitaire réelle :

$$\begin{aligned} \tilde{A} \underline{x} &= \underline{A} \tilde{x} \tilde{A}^T \\ \tilde{A} \underline{x} \tilde{A}^T &= \underline{A} \tilde{x} \tilde{x} \tilde{A}^T \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Notons enfin que le raisonnement de ce paragraphe, appliqué non plus à un vecteur mais à un tenseur  $\underline{v} = \left[ \underline{x} \right]^T \underline{X} \left[ \underline{x} \right] = \left[ \underline{r} \right]^T \underline{R} \left[ \underline{z} \right]$  (B.7) conduit à  $\underline{R} = \underline{A} \underline{X} \tilde{A}^T$  et, par dérivation, à  $\dot{\underline{R}} = \underline{A} \dot{\underline{X}} \tilde{A}^T + \dot{\underline{R}} + \dot{\underline{R}} = \underline{R} \tilde{\underline{\omega}} + \tilde{\underline{\omega}} \underline{R}$  (B.8) qui constitue la généralisation de (B.2).

## B.2. APPROXIMATIONS QUADRATIQUES . ANGLES DE BRYAN :

Supposons que la rotation (axes  $\underline{x}^i \longrightarrow$  axes  $\underline{r}^i$ ) se compose d'une rotation fixe constante de matrice  $\underline{R}^f$  suivie d'une petite rotation variable de matrice  $\underline{R}^v$ , donc que  $\underline{A} = \underline{R}^v \underline{R}^f$ . (B.9)

Partiennons la matrice-unité en trois matrices-colonnes :

$\mathbb{1} = [\mathbb{1}^1, \mathbb{1}^2, \mathbb{1}^3]$  . Si la petite rotation s'effectue d'un angle  $\gamma$  autour de l'axe n° i seulement, il est facile de développer jusqu'au second ordre les sinus et cosinus contenus dans la matrice de rotation; on obtient :

$$R^\gamma \simeq \mathbb{1} - \gamma \tilde{\mathbb{1}}^i + \frac{\gamma^2}{2} \tilde{\mathbb{1}}^i \tilde{\mathbb{1}}^i \quad (\text{B. 10})$$

Pour rendre compte d'un changement d'axes, trois rotations successives de ce type doivent être effectuées : le problème se corse alors du fait que l'approximation quadratique obtenue dépend de l'ordre dans lequel on a effectué les rotations (il est bien connu en Théorie des Groupes que les opérateurs de rotations ne commutent pas ; seule leurs approximations linéaires commutent). A l'aide de (B. 10), on montre, par simple développement jusqu'aux termes du second ordre, que, quel que soit l'ordre des rotations, la forme générale de  $R^\gamma$  est :

$$R^\gamma \simeq \mathbb{1} - \tilde{\gamma} + \frac{1}{2} \left( \tilde{\gamma} \tilde{\gamma} + \gamma^{diag} \cup^{ijk} \gamma^{diag} \right) \quad (\text{B. 11})$$

où

$$\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T,$$

$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ matrice duale de } \gamma,$$

$$\gamma^{diag} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

$\cup^{ijk}$  est une matrice antisymétrique dont les éléments non nuls sont  $\pm 1$ , les signes étant choisis tels que, pour des rotations effectuées dans l'ordre (i, j, k), on ait :

$$U_{ij}^{ijk} = U_{jk}^{ijk} = U_{ik}^{ijk} = +1$$

La seule restriction est donc que les rotations soient du type Tait-Bryan plutôt que du type Euler (c'est-à-dire que la troisième rotation ne doit pas s'effectuer autour d'un axe de même numéro que la première).

Soit  $\underline{\Omega}^x = [\underline{x}]^T \Omega^x$  la vitesse angulaire absolue (c'est-à-dire

relativement à un repère inertiel) des axes  $\underline{x}^1$  et  $\underline{\Omega}^r = [\underline{r}]^T \underline{\Omega}^x$  la vitesse angulaire absolue des axes  $\underline{r}^1$ ; rappelons qu'on a  $\underline{\Omega}^r = \underline{\Omega}^x + \underline{\omega}$ , et donc

$$\underline{\Omega}^r = A \underline{\Omega}^x + \underline{\omega} \quad (\text{B. 12})$$

En posant  $\underline{p} = R^{\circ} \underline{\Omega}^x$  et  $U^{ijk} = U$ , il vient, par (B. 11) et (B. 9),

$$A \underline{\Omega}^x = R^{\delta} \underline{p} \simeq \underline{p} + \left( \tilde{\underline{p}} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma} \tilde{\underline{p}} + \frac{1}{2} \gamma^{\text{diag}} U \underline{p}^{\text{diag}} \right) \gamma. \quad (\text{B. 13})$$

On a aussi, par (B. 1) et (B. 11)

$$\tilde{\omega} = A \dot{A}^T = R^{\delta} \dot{R}^{\delta T} \simeq \dot{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2} \left( \dot{\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma} - \tilde{\gamma} \dot{\tilde{\gamma}} - \gamma^{\text{diag}} U \dot{\gamma}^{\text{diag}} - \dot{\gamma}^{\text{diag}} U \gamma^{\text{diag}} \right) \gamma. \quad (\text{B. 14})$$

On démontre alors, soit en repassant aux notations indicielles [52], soit par simple inspection de la matrice (3 x 1)  $\tilde{\omega} \alpha$ , où  $\alpha$  est une matrice (3 x 1) quelconque, que

$$\omega \simeq \left( \underline{1} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma} + \frac{1}{2} U^{\text{diag}} \gamma^{\text{sym}} \right) \dot{\tilde{\gamma}} \quad (\text{B. 15})$$

où

$$U^{\text{diag}} = \begin{bmatrix} U_{23} & 0 & 0 \\ 0 & U_{31} & 0 \\ 0 & 0 & U_{12} \end{bmatrix}, \quad \gamma^{\text{sym}} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalement, en combinant (B. 12), (B. 13) et (B. 15), on obtient

$$\underline{\Omega}^r \simeq \left[ \dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{\underline{p}} \dot{\tilde{\gamma}} + \underline{p} \dot{\tilde{\gamma}} \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( U^{\text{diag}} \gamma^{\text{sym}} - \tilde{\gamma} \right) \dot{\tilde{\gamma}} + \left( \gamma^{\text{diag}} U \underline{p}^{\text{diag}} - \tilde{\gamma} \tilde{\underline{p}} \right) \gamma \right] \quad (\text{B. 16})$$

L'approximation linéaire de cette relation est bien connue et s'écrit, pour  $R^{\circ} = \underline{1}$

$$\underline{\Omega}^r - \underline{\Omega}^x = \dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{\underline{\Omega}}^x \gamma. \quad (\text{B. 17})$$

Remarquons que si l'on veut connaître les composantes de  $\underline{\Omega}^r$  en axes  $\underline{x}^1$ , il suffit de développer  $A^T \underline{\Omega}^r$  jusqu'au second ordre à partir de (B. 9), (B. 11) et (B. 16); de même pour  $\underline{\omega}$ .

Dans cette thèse, nous n'effectuerons que des rotations de Bryan dans l'ordre (1, 2, 3) en sorte que

$$U^{123} = U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 18})$$

et nous poserons :

$$\gamma^{\text{II}} = \frac{1}{2} (\tilde{\gamma} \tilde{\gamma} - \gamma^{\text{diag}} \cup \gamma^{\text{diag}}) \quad (\text{B. 19})$$

## ANNEXE C

DISCRETISATION ET LINEARISATION DES EQUATIONS  
DU MOUVEMENT

-2-

Sauf mention explicite du contraire, toute matrice représentée ici des composantes en axes  $\underline{x}^1$  : on se reporte à l'expression (3.40) de  $\underline{u}$  et on utilise les approximations quadratiques (§ B 2).

C.1. CALCUL DES FONCTIONS CONJETIQUES :C.1.1. Expression de  $h^e$  :

On a strictement  $J = J^1 + J^2$  où

$$\left[ \begin{array}{l} J = \int_{\Omega_0} (\bar{x}^T \underline{\bar{x}} \underline{\bar{x}} - \bar{x} \bar{x}^T) dm, \text{ matrice d'inertie à l'équilibre dynamique ;} \\ J^1 = \int_{\Omega_0} (2\bar{x}^T \underline{u} \underline{\bar{x}} - \bar{x} \underline{u}^T - \underline{u} \bar{x}^T) dm, \text{ matrice linéaire en } u ; \\ J^2 = \int_{\Omega_0} (\underline{u}^T \underline{u} \underline{\bar{x}} - \underline{u} \underline{u}^T) dm, \text{ matrice quadratique en } u ; \end{array} \right.$$

Soient les matrices  $(n \times 1)$  :

$$\left[ \begin{array}{l} \Psi_{(R)} = [\Psi_R^1, \Psi_R^2, \dots, \Psi_R^n]^T \\ \Delta^{ij} = \Delta^{ji} = \int_{\Omega_0} [\underline{\bar{x}}_R \Psi_{(i)} \delta_{ij} - \bar{x}_i \Psi_{(j)} - \bar{x}_j \Psi_{(i)}] dm \end{array} \right.$$

(la répétition d'un indice dans un même monôme implique la  $\sum_1^n$  sur cet indice).

et les matrices  $(n \times n)$

$$\left[ \begin{array}{l} \Phi_{(R)} = \Phi_{(R)}^0 = \begin{bmatrix} \Psi_R^1 & \frac{1}{2}(\Psi_R^2 + \Psi_R^1) & \dots & \frac{1}{2}(\Psi_R^{1n} + \Psi_R^{n1}) \\ \frac{1}{2}(\Psi_R^1 + \Psi_R^2) & \Psi_R^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}(\Psi_R^{1n} + \Psi_R^{n1}) & \dots & & \Psi_R^n \end{bmatrix} \\ \Delta^{ij} = \Delta^{ji} = (\Delta^{ij})^T = (\Delta^{ji})^T = \int_{\Omega_0} [\underline{\bar{x}}_R \Psi_{(i)} \delta_{ij} - \bar{x}_i \Psi_{(j)} - \bar{x}_j \Psi_{(i)}] dm \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \Gamma^{ij} = (\Gamma^{ji})^T = \int_m [\varphi_{(R)} \varphi_{(R)}^T \delta_{ij} - \varphi_{(i)} \varphi_{(i)}^T] dm \\ \Pi^{ij} = (\Pi^{ji})^T = \Delta^{ij} + \Gamma^{ij} \end{array} \right.$$

définies  $\forall i, j, k = 1, 2, 3$ .

Ainsi au troisième ordre près :

$$\left[ \begin{array}{l} u_R \simeq \varphi_{(R)}^T \beta + \beta^T \varphi_{(R)} \beta \\ J_{Rk}^1 \simeq \beta^T \lambda^{kL} + \beta^T \Delta^{kL} \beta \\ J_{Rk}^2 \simeq \beta^T \Gamma^{kL} \beta \end{array} \right.$$

Remarquons que les matrices  $J^1, J^2$  et par conséquent  $J$  sont symétriques. Pour avoir une représentation matricielle (sans indices), il est bon de définir la matrice  $(3 \times 3)$  symétrique  $\Lambda$  dont les éléments sont les matrices  $\lambda^{ij}$ , les matrices  $(3 \times 3)$  symétriques  $\Delta, \Gamma, \Pi$  dont les éléments sont les matrices respectives  $\Delta^{ij}, \Gamma^{ij}, \Pi^{ij}$  [remarquons que les dimensions exactes de  $\Lambda$  et  $\Delta, \Gamma, \Pi$  sont respectivement  $(3n \times 3)$  et  $(3n \times 3n)$ ] et enfin la matrice  $(3n \times 3)$

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

De la sorte, on peut écrire  $h^e = I \Omega$

$$\text{avec : } J \simeq I + \mathfrak{B}^T \Lambda + \mathfrak{B}^T \Pi \mathfrak{B} \quad (C.1)$$

où  $\mathfrak{B}^T \Lambda = \Lambda^T \mathfrak{B}$ . Toute autre procédure qui donne  $J$  sous cette forme est évidemment la bienvenue (cf. par exemple le § 1.8.2).

### C.1.2. Expression de $h^e$ :

Soient  $\underline{k}^i$  des axes liés au  $k$ -ième rotor fixé fictif servant à la définition des déplacements de déformation ; ces axes sont donc liés au cardan interne du rotor réel ; on les supposera définis de manière à être superposés aux axes  $\underline{x}^i$  à l'équilibre.

Soient alors  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les angles de Bryan des axes  $\underline{k}^i$  par rapport aux axes  $\underline{x}^i$  : on a  $[\underline{k}] = R^\Psi [\underline{x}]$  où  $R^\Psi$  est similaire à (B.11). Soit enfin  $h^{k//}$  la matrice (3 x 1) des composantes de  $\underline{h}^{k//}$  en axes  $\underline{k}^i$ . On voit alors que si l'on écrit  $\Psi$  sous la forme :

$$\Psi = \Xi^{kT} \beta$$

on obtient : 
$$h^{k//} = \sum_{k=1}^{n_\Psi} \left[ \left( \mathbb{1} + \Xi^{kT} \beta + \beta^T \sum^k \beta \right) h^{k//} \right] \quad (C.2)$$

où les matrices (3 x n)  $\Xi^{kT}$  et les matrices (3n x 3n)  $\sum^k$  sont partitionnées comme suit :

$$\Xi^{kT} = \begin{bmatrix} (\psi^{k1})^T \\ (\psi^{k2})^T \\ (\psi^{k3})^T \end{bmatrix} ; \quad \sum^k = \begin{bmatrix} \sum^{k11} & \sum^{k12} & \sum^{k13} \\ \sum^{k21} & \sum^{k22} & \sum^{k23} \\ \sum^{k31} & \sum^{k32} & \sum^{k33} \end{bmatrix}$$

### C.1.3. Expression de $h^d$ :

Définissons la matrice  $Q = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i1j} & \Gamma_{ij} \\ \varepsilon_{i2j} & \Gamma_{ij} \\ \varepsilon_{i3j} & \Gamma_{ij} \end{bmatrix}$

On obtient :  $h^d = \beta^T Q \beta$  (C.3)

### C.1.4. Expression de $T_e$ :

On a directement  $T_e = \frac{1}{2} m \dot{\underline{c}}^T \dot{\underline{c}} + \frac{1}{2} \underline{\Omega}^T J \underline{\Omega}$  (C.4)

### C.1.5. Expression de $T_{//}$

Exprimons par exemple les vecteurs intervenant dans le produit scalaire  $\underline{\Omega}^{k//} \cdot \underline{h}^{k//}$  par leurs composantes dans les axes  $\underline{k}^i$  :

$$\underline{\Omega}^{k//} = [\underline{k}]^T \underline{\Omega}^{k//} \quad \text{et} \quad \underline{h}^{k//} = [\underline{k}]^T \underline{h}^{k//}$$

On obtient immédiatement  $T_{//} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_\Psi} \left[ (\underline{\Omega}^{k//})^T \underline{h}^{k//} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_\Psi} I_{//}^k (\dot{\psi}_{k//})^2$

où  $I_{//}^k$  est le moment d'inertie de la roue et  $\psi_{k//}$  son angle de rotation propre.

$$(C.5)$$

### C.1.6. Expression de $T_d$ :

En définissant une matrice ( $n \times n$ ) symétrique  $M^d$  dont un élément quelconque vaut  $M_{\nu\mu}^d = \int_m (\varphi^\nu)^\top \varphi^\mu dm$ , il vient :

$$T_d \approx \frac{1}{2} \dot{\beta}^\top M^d \dot{\beta} \quad (C.6)$$

$M^d$  est symétrique  $> \mathbb{O}$  par définition de  $T_d$ .

### C.1.7. Expressions de $T_{e\parallel}$ , $T_{ed}$ , $T_{\parallel d}$ :

On a tout de suite :

$$T_{e\parallel} = \Omega^\top h^{\parallel} \quad \text{et} \quad T_{ed} = \Omega^\top h^d \quad (C.7)$$

Quant à  $\Omega^{kd}$ , il s'obtient en prémultipliant par  $R^{-1} \Psi^\top$  une forme similaire à (B.15), ce qui donne

$$\Omega^{kd} \approx \left( \mathbb{1} + \frac{1}{2} \tilde{\Psi} + \frac{1}{2} \cup \Psi^{sym} \right) \dot{\Psi}.$$

Comme  $\Psi = \Xi^{k\top} \beta$ , ceci peut encore s'écrire :

$$\Omega^{kd} \approx \left( \Xi^{k\top} + \mathbb{B}^\top \sqrt{k} \right) \dot{\beta} \quad (C.8)$$

où la matrice ( $3n \times n$ )

$$\sqrt{k} \text{ est partitionnée comme suit : } \sqrt{k} = \begin{bmatrix} \sqrt{k_1} \\ \sqrt{k_2} \\ \sqrt{k_3} \end{bmatrix}$$

$$\text{D'où } T_{\parallel d} = \dot{\beta}^\top \sum_{k=1}^{n_y} \left\{ \left[ \Xi^k \left( \mathbb{1} + \widehat{\Xi^{k\top}} \right) + \sqrt{k} \mathbb{B}^\top \right] h^{R\parallel} \right\} \quad (C.9)$$

## C.2. CALCUL DES FONCTIONS POTENTIELLES :

### C.2.1. Potentiel de gravitation :

Supposons  $\|\bar{C}\|$  connu : l'expression (I.10) fournit alors  $V_g$  puisque  $\underline{\sigma}^1$  est connu jusqu'au second ordre en  $\theta$  par une forme similaire à (B.11) et que  $\underline{d}$  est connu jusqu'au second ordre en  $\beta$  par (C.1).

### C.2.2. Potentiel élastique :

Celui-ci, dans son approximation quadratique (hypothèse du



matériau hookien) s'écrit :

$$V_d = c^T \beta + \frac{1}{2} \beta^T C^d \beta \quad (\text{C.10})$$

$$\text{où } \begin{cases} c^T = [c_1, c_2, \dots, c_n], \\ C^d \text{ est une matrice } (n \times n). \end{cases}$$

$\chi$  est la matrice des forces "potentielles" qui travaillent lors d'une déformation structurale ; il en a été question en début du § I.5.2. et on leur donne ici une valeur constante, celle qu'elles prennent à l'équilibre dynamique (on déterminera d'ailleurs  $c$  à l'aide de la condition d'équilibre dynamique (C.24) qui en explicite les différents termes).  $C^d$  est la matrice (supposée constante) symétrique  $\succ \mathbf{0}$  des coefficients d'élasticité. Notons que, bien que constantes, les matrices  $C^d$  et  $c$ , ainsi d'ailleurs que toutes les matrices de ce chapitre, dépendent du choix des  $\beta_\nu$ , donc de la manière dont on modélise les déformations. Remarquons aussi que  $V_d$  n'est pas minimal à l'équilibre dynamique :

$\frac{\partial V_d}{\partial(\beta)}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$  (ceci est évident puisque le satellite est soumis à des tensions internes causées par les forces  $c$  à l'équilibre dynamique). Par contre, s'il n'y a pas de tensions internes résiduelles à l'équilibre statique (où  $\beta = \beta^d$ ), dans le cas où celui-ci existe, on sait que  $V_d$  doit y être minimal. On peut alors déterminer  $\beta^d$  moyennant la connaissance de  $c$  :

$$\frac{\partial V_d}{\partial(\beta)}(\beta^d) = \mathbf{0} \quad \text{d'où} \quad \beta^d = - (C^d)^{-1} c \quad (\text{C.11})$$

Ceci n'est possible que lorsque  $C^d$  est non singulière, c'est-à-dire lorsque les modes de déformation par rapport à la configuration d'équilibre dynamique sont tous des modes élastiques et non des modes rigides. La configuration d'équilibre dynamique est alors connue si l'on connaît la configuration d'équilibre statique, et vice versa (cf. § I.1 ).

Pour en terminer avec le potentiel élastique, disons encore qu'il peut contenir des termes représentant le potentiel des forces capillaires dans les cas où celles-ci doivent être prises en ligne de compte pour modéliser le mouvement de liquides dans des réservoirs cloisonnés.

### C. 3. CAUCUL DES FORCES GENERALISEES

#### C. 3.1. Forces généralisées d'amortissement

Pour la discussion sur la représentation de ces forces, nous renvoyons au § 1.10. Ici, nous supposons qu'elles découlent d'une fonction de dissipation  $\mathcal{W}$  du type étudié par Rayleigh :

$$\mathcal{G}^a = - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial (\dot{y})} \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}^a = \frac{1}{2} \dot{y}^T Z \dot{y} \quad (C.12)$$

où  $Z$  est une matrice  $[(n+3) \times (n+3)]$ , symétrique  $\geq \mathcal{D}$  (par une dissipation sur les coordonnées  $\mathcal{D}$ ), on peut tenir compte de l'amortissement par hystérésis magnétique d'interaction du moment dipolaire  $\underline{d}$  du satellite avec le champ géomagnétique). Les forces d'amortissement sont donc supposées ici du type visqueux.

#### C. 3.2. Couple du gradient de gravité

Il est donné directement par (1.13).

### C. 4. EQUATIONS DE MOUVEMENT

#### C. 4.1. Mouvement des axes moyens

En axes  $\underline{x}^j$ , l'équation (1.30) s'écrit  $\dot{h} = \tilde{\Omega} h - \ell$  ou encore, jusqu'au premier ordre en  $\beta$   $\tilde{\beta}$  :

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} + \tilde{\beta}^T \Lambda) \dot{\Omega} + \tilde{\beta}^T \Lambda \Omega = \tilde{\Omega} (\mathbb{I} + \tilde{\beta}^T \Lambda) \Omega + \\ \sum_{k=1}^{n+3} \left[ \overline{\tilde{\beta}^T h^k} h^{k//} + (1 + \overline{\tilde{\beta}^T \beta}) \tilde{\beta}^{k//} + \tilde{\Omega} (1 + \overline{\tilde{\beta}^T \beta}) h^{k//} \right] = \ell \end{aligned} \quad (C.13)$$

#### C. 4.2. Equilibre dynamique d'attitude

On peut bien sûr le trouver comme solution de (C.13). Mais on peut, à l'aide de (C.13), découvrir dans quels cas cet équilibre est réalisé sur le repère orbital (cas fréquent où la mission impose de pointer la Terre) : dans ce cas  $\underline{\Omega} = \underline{e}/e$  (et étant donné que  $\dot{\Omega} = \tilde{\Omega} (1 + e \cos v)^2 / (1 - e^2)^{3/2}$

où  $\bar{n} = (\mu_g/a^3)^{1/2}$  est la vitesse angulaire orbitale moyenne, les composantes de  $\underline{\Omega}$  en axes  $\underline{x}^1$  s'obtiennent facilement, à partir de (I.31), sous forme linéarisée en  $\theta_i, \dot{\theta}_i, \dot{\alpha}_N, \dot{r}_N, e$  :

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \bar{n} \theta_2 + \dot{\alpha}_N \sin(\nu - \nu_N) \sin i \\ \dot{\theta}_2 + \bar{n} \theta_1 + \dot{\alpha}_N \cos(\nu - \nu_N) \sin i \\ \dot{\theta}_3 + \bar{n}(1 + 2e \cos \nu) - \dot{r}_N + \dot{\alpha}_N \cos i \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

A l'équilibre dynamique, on a évidemment  $\underline{\beta} = \underline{\beta}'' = \underline{0}$  et  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \underline{0}$ . De plus, par définition, on y a aussi  $\underline{\beta} = \underline{0}$  et  $\theta = \underline{0}$ . Si l'on prend alors l'exemple d'une orbite quasi circulaire telle qu'on puisse négliger  $e, \dot{r}_N$  et  $\dot{\alpha}_N$  on remarque qu'à l'équilibre,  $\underline{\Omega} = \underline{0}$  et que (C.13) se réduit à :

$$\tilde{\Omega} \underline{I} \underline{\Omega} + \tilde{\Omega} \sum_{k=1}^{n_Y} h^{k||} + \sum_{k=1}^{n_Y} \dot{h}^{k||} = \underline{l}.$$

Si l'on suppose enfin que la vitesse des rotors est modulée de manière à compenser l'effet des couples perturbateurs autres que le gradient de gravité, c'est-à-dire si

$$\sum_{k=1}^{n_Y} \dot{h}^{k||} = \underline{l} - \underline{l}^g, \quad (\text{C.15})$$

$$\text{il reste par (I.13)} \quad \tilde{\Omega} \underline{I} \underline{\Omega} + \tilde{\Omega} \sum_{k=1}^{n_Y} h^{k||} = \chi \bar{n}^2 \tilde{\sigma}^T \underline{I} \sigma^T \quad (\text{C.16})$$

où  $\chi = 3$  si l'on tient compte du couple du gradient de gravité et  $\chi = 0$  sinon.

A l'équilibre, on a  $\sum_{k=1}^{n_Y} h^{k||} = h^{||}$  (cf. C.2) et nous poserons cette matrice égale à  $\tilde{n} \underline{a} = \bar{n} [a_1, a_2, a_3]^T$ .

A l'équilibre sur le repère orbital, on a également, par (C.14),

$$\underline{\Omega} = [0, 0, \bar{n}]^T; \text{ la relation (C.16) s'écrit alors}$$

$$\tilde{\sigma}^T \underline{I} \sigma^T + \tilde{\sigma}^T (\bar{n})^{-1} \underline{a} = \chi \tilde{\sigma}^T \underline{I} \sigma^T,$$

ce qui n'est possible que si

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & -\alpha_1/(1+\chi) \\ 0 & I_{22} & -\alpha_2 \\ -\alpha_1/(1+\chi) & -\alpha_2 & I_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

où  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  et  $I_{33}$  sont quelconques.

Ainsi si la résultante des moments cinétiques des rotors est à l'équilibre selon  $\underline{x}^3$ ,  $I$  est diagonale et les axes  $\underline{x}^i$  sont principaux centraux d'inertie de la structure fictive de référence (figure 4) ; on a alors

$I_{11} = I_1$ ,  $I_{22} = I_2$ ,  $I_{33} = I_3$  où  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  sont les moments d'inertie principaux centraux du satellite à l'équilibre dynamique.

Dans tous les cas cependant, les axes  $\underline{x}^i$  sont positionnés par rapport à la structure fictive de référence (§ 1.2.1) par la relation (C.17).

Le raisonnement de ce paragraphe est rigoureusement valable pour les satellites en rotation (spin rapide  $\underline{\Omega}_d$ ) nominalemment autour de  $\underline{\omega}^3$  (alors  $\underline{\Omega}^{e/o} = \underline{\Omega}^d \underline{\omega}^3$ ) ; il suffit de remplacer ci-dessus  $\bar{n}$  par  $(\underline{\Omega}^d + \bar{n})$ .

#### C.4.3. Equations matricielles :

Nous poserons :

$$\begin{cases} \chi = 3 \text{ et } \underline{\Omega}_o = \bar{n} & \text{pour les satellites à gradient de gravité,} \\ \chi = 0 \text{ et } \underline{\Omega}_o = (\underline{\Omega}_d + \bar{n}) & \text{pour les satellites en rotation,} \end{cases}$$

ainsi que h <sup>à l'équilibre</sup>  $\underline{\Omega}_o [a_1, a_2, a_3]^T$  (cette matrice peut être variable). En utilisant (C.13), (1.13), (1.20) et (1.18) tout en tenant compte des expressions (C.1) à (C.10) ainsi que de (C.12) et de (C.14), on peut montrer par un calcul assez long mais grandement facilité par les partitions de matrices que nous avons définies, que les équations du mouvement en les variables  $\theta$  et  $\beta$  sont données, au voisinage de l'équilibre dynamique  $y = \mathbb{O}$  et dans le cas d'un seul rotor, par l'équation différentielle matricielle,

$$M \ddot{y} + G \dot{y} + C y = D + Z \dot{y} \quad (\text{C.18})$$

où  $y = [\theta^T, \beta^T]^T$  (C.19)

$$M = \begin{bmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M^d \end{bmatrix} ; \quad (\text{C.20})$$

$$G = \Omega_0 \quad (C.21)$$

0	$-(I_{11} + I_{22} - I_{33} - a_3)$	$a_2$	$(\lambda^{13T} + a_1 \xi^1 - a_2 \xi^{1T})$
$(I_{11} + I_{22} - I_{33} - a_3)$	0	$\frac{\chi-1}{\chi+1} a_1$	$(\lambda^{23T} + a_1 \xi^2 - a_3 \xi^{2T})$
$-a_2$	$-\frac{\chi-1}{\chi+1} a_1$	0	$(\lambda^{33T} + a_1 \xi^3 - a_1 \xi^{3T})$
$-(\lambda^{13} + a_3 \xi^2 - a_2 \xi^3) - (\lambda^{23} + a_1 \xi^3 - a_3 \xi^1) - (\lambda^{33} + a_2 \xi^1 - a_1 \xi^2) \quad 2(\Gamma^{12} - \Gamma^{21}) + G''$			

où  $G'' = 2 \left[ a_1 (\xi^2 \xi^{3T} - \xi^3 \xi^{2T}) + a_2 (\xi^3 \xi^{1T} - \xi^1 \xi^{3T}) + a_3 (\xi^1 \xi^{2T} - \xi^2 \xi^{1T}) \right] - \left[ a_1 (\sqrt^1 - \sqrt^{1T}) + a_2 (\sqrt^2 - \sqrt^{2T}) + a_3 (\sqrt^3 - \sqrt^{3T}) \right]$

$$C = \Omega_0^2 \quad (C.22)$$

$I_{33} - I_{22} + a_3$	0	$-\frac{\chi}{\chi+1} a_1$	$-(\lambda^{13T} + a_1 \xi^3 - a_3 \xi^{1T})$
0	$(\chi+1)(I_{33} - I_{11}) + a_3$	$\chi a_2$	$[(\chi+1)\lambda^{13T} + a_3 \xi^3 - a_2 \xi^{1T}]$
$-\frac{\chi}{\chi+1} a_1$	$\chi a_2$	$\chi (I_{22} - I_{11})$	$-\chi \lambda^{12T}$
$-(\lambda^{23} + a_1 \xi^3 - a_3 \xi^1) \left[ (\chi+1)\lambda^{13} + a_3 \xi^2 - a_2 \xi^3 \right] - \chi \lambda^{12} \quad \Omega_0^2 \left[ \frac{d}{dt} \pi^{32} + C^2 + C^1 \right]$			

où  $C^q = \frac{\chi}{3} (2\pi^{11} - \tau^{22} - \pi^{33})$   
 $C'' = -a_1 (\Sigma^{31} + \Sigma^{31T}) - a_2 (\Sigma^{32} + \Sigma^{32T}) - a_3 (\Sigma^{33} + \Sigma^{33T})$

Séparons  $(1 - l^B)$  en une partie constante et une partie variable :  $(1 - l^B) + \Delta(1 - l^B)$  et faisons de même pour  $g^{\beta}$ , force généralisée agissant sur  $\beta$ , et pour  $\dot{a}$ .

Alors:  $D = \bar{n} D^{\beta\beta} + \dot{\alpha}_i \bar{n}_i D^{\alpha\alpha} + 2\alpha_i \bar{n}^2 D^i + \bar{n}_i \bar{n} D^{\alpha i} + D^c$  (C.23)

où  $D^{\beta\beta} = \begin{bmatrix} -\bar{n} \beta \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $D^c = \begin{bmatrix} \Delta(l - l^j) - \bar{n} \Delta \dot{\alpha} \\ \Delta g^{\beta} \end{bmatrix}$

$$D^{\alpha_N} = \begin{array}{|l} \hline -\cos(v-v_N) \sin i (I_{11} + I_{33} - I_{22} + a_3) - a_2 \cos i \\ \hline \sin(v-v_N) \sin i (I_{22} + I_{33} - I_{11} + a_3) + \frac{a_1}{1+\chi} \cos i \\ \hline -\sin(v-v_N) \sin i a_2 - a_1 \cos(v-v_N) \sin i \\ \hline \sin(v-v_N) \sin i (\lambda^{13} + a_3 \xi^2 - a_2 \xi^3) + \cos(v-v_N) \times \\ \sin i (\lambda^{23} + a_1 \xi^3 - a_3 \xi^1) + \cos i (\lambda^{33} + a_2 \xi^1 - a_1 \xi^2) \\ \hline \end{array} ,$$

$$D^e = \begin{array}{|l} \hline -\sin v \frac{a_1}{1+\chi} - a_2 \cos v \\ \hline \cos v \frac{a_1(3\chi+2)}{2(\chi+1)} - a_2 \sin v \\ \hline I_{33} \sin v \\ \hline \cos v (\lambda^{33} + a_2 \xi^1 - a_1 \xi^2) \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad D^{v_N} = \begin{array}{|l} \hline a_2 \\ \hline -\frac{a_1}{1+\chi} \\ \hline 0 \\ \hline -(\lambda^{33} + a_2 \xi^1 - a_1 \xi^2) \\ \hline \end{array}$$

Les termes constants qui, lors du calcul, apparaissent dans les équations de Lagrange, doivent se compenser, fournissant ainsi les conditions d'équilibre supplémentaires

$$\overline{(l-l^g)} = \bar{\alpha} \bar{n} \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{2} \lambda^{33} + \frac{\chi}{6} (\lambda^{22} + \lambda^{33} - 2\lambda^{11}) + (a_2 \xi^1 - a_1 \xi^2) + g^g \quad (C.24)$$

Dans l'expression de  $c$ , nous reconnaissons successivement un terme dû à la force centrifuge, un dû au gradient de gravité, un dû aux raideurs gyroscopiques et le dernier dû à d'éventuelles commandes.

Quant à l'équation du rotor, elle obtient directement à l'aide de l'équation de Lagrange (i.20) relative à la coordonnée  $\Psi_{//}$ .

#### C.4.4. Cas particulier du satellite à corps rigide principal :

Dans ce cas particulier important, on peut désirer, pour mieux visualiser les performances d'un système de stabilisation d'attitude, exprimer les équations non plus en axes moyens mais dans les axes  $\underline{e}^1$  liés au corps rigide (figure 11).

Ceci s'obtient très simplement en remarquant que, en vue de l'obtention de  $n$  coordonnées généralisées indépendantes  $\beta_i$ , nous avons éliminé les six déplacements scalaires du corps principal à l'aide de six relations linéaires; pour les rotations, ces relations étaient (I.37). Dès lors, si l'on veut remplacer les angles de Bryan  $Q_i$  des axes moyens par rapport aux axes  $\underline{e}^i$  par les angles de Bryan  $Q_i^r$  des axes  $\underline{r}^i$  par rapport aux mêmes axes  $\underline{e}^i$ , il suffit de remarquer que, en approximation linéaire,  $\theta^k = \theta + \gamma = \theta + I^{-1} F^k$ .

Or, en coordonnées discrètes, la matrice  $P$  s'écrit  $P = I^d \beta$  où la matrice  $(3 \times n)$   $I^d$  est connue. Nous supposons de plus que  $(\underline{\hat{z}} - \underline{z}^g)$ , donc  $D$ , ne dépend pas de  $\theta$  et que  $(\underline{\hat{z}} - \underline{z}^g)$  ne s'applique qu'au corps principal; la force généralisée  $g^{\hat{A}}$  vaut alors  $- I^{dT} I^{-1} (\underline{\hat{z}} \cdot \underline{g})$ .

L'équation (C.18) est rigoureusement identique à

$$M^{\underline{r},\underline{r}} \dot{\underline{y}}^{\underline{r}} + G^{\underline{r},\underline{r}} \dot{\underline{y}}^{\underline{r}} + C^{\underline{r},\underline{r}} \underline{y}^{\underline{r}} = D + Z^{\underline{r},\underline{r}} \underline{y}^{\underline{r}} \quad (\text{C.25})$$

où  $\underline{y}^{\underline{r}} = [\theta^{\hat{A}}, \beta^{\hat{A}}]^T = F \underline{\gamma}$  s'exprime en fonction des coordonnées voulues, pour autant que :

$$M^{\underline{r}} = M F^{-1}, \quad G^{\underline{r}} = G F^{-1}, \quad C^{\underline{r}} = C F^{-1} \quad \text{et} \quad Z^{\underline{r}} = Z F^{-1} \quad (\text{C.26})$$

avec :  $F^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbb{1}}_3 & I^{-1} \underline{\mathbb{1}}^d \\ \underline{\mathbb{O}}_{n3} & \underline{\mathbb{1}}_n \end{bmatrix}$  qui existe toujours puisque  $\det F=1$ .

Le même raisonnement peut se tenir pour les translations en tenant compte de (I.36) et du fait que  $(\underline{\hat{p}}^R = \underline{\hat{p}} - \underline{\hat{z}})$  ou, en axes  $\underline{x}^i$ ,

$$\underline{p}^R = \underline{p}^c + \underline{z}$$

## ANNEXE D

## EXTENSIONS DU CRITERE DE STABILITE

Le critère de stabilité énoncé au § 1.11.2 se trouve en défaut et exige l'étude du système non linéaire dans trois cas, qui ne s'excluent aucunement d'ailleurs.

1°) Le système n'est pas complètement amorti : ceci peut toutefois n'être qu'apparent si le système possède des intégrales premières ; on est alors en présence d'un problème avec contraintes. On a déjà rencontré ce cas au § 1.7.2 et on sait qu'on peut linéariser les contraintes, ici les  $m$  intégrales premières, sous la forme :

$$A_1 \dot{y} + A_2 y = 0 \quad (D.1)$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices ( $m \times n$ ) constantes ( $m < n$ ). On peut alors éliminer  $m$  vitesses généralisées. Le Hamiltonien du système peut alors s'exprimer sous forme quadratique en  $y$  et en les  $\dot{y}_i$  restants et être testé à l'aide du critère de stabilité. En effet, cette procédure revient à prendre comme fonction de Liapounov le Hamiltonien initial augmenté d'une fonction des  $m$  intégrales premières ( $H$  n'est d'ailleurs défini qu'à une constante près) de manière à éliminer  $m$  vitesses généralisées ; la dérivée de cette fonction de Liapounov reste alors égale à  $\dot{H}$ . La vérification de l'amortissement complet se fait ici encore en testant le rang d'une matrice, laquelle tient compte cette fois des intégrales premières [38] et le critère de stabilité asymptotique "partielle" revient à tester la définitivité positive de  $H$  exprimé en fonction d'un nombre moindre de vitesses généralisées. On peut alors en général conclure à la stabilité asymptotique "totale" du système linéaire (et du non linéaire) car les vitesses généralisées éliminées tendent en général vers zéro avec les autres variables comme le montre (D.1).



2°) H n'est que semi-défini : (ce cas se produit notamment lorsque, en ne gardant dans (I, 44) que les forces d'amortissement, ou rend cycliques des coordonnées qui ne l'étaient pas), comme  $T_2$  est toujours définie positive, cela revient à dire que le potentiel dynamique ( $V - T_0$ ) est semi-défini, donc que C est semi-défini ou encore que l'origine  $y = 0$  n'est pas un point d'équilibre unique mais se trouve dans une "zone" de points d'équilibre (on suppose le potentiel dynamique continu en  $y$ ) soit que l'équilibre soit indifférent en ce sens qu'une légère perturbation ou condition initiale conduit à un état différent d'équilibre dynamique soit qu'il subsiste une ou pluseurs coordonnées cycliques. On peut alors appliquer la procédure du 1° si le système possède des intégrales premières (ce qui est évident, par (I, 26) dans le cas d'une coordonnée cyclique) mais alors, on n'obtient qu'un critère de stabilité partielle (à savoir sur les variables non cycliques) : on notera que les intégrales premières dépendent justement de l'état initial.

3°) Le système mécanique linéarisé ne répond pas à l'équation (I, 44).

H n'est plus alors une fonction de Liapounov adéquate. Lorsque l'équation du système s'écrit

$$M \ddot{y} + G \dot{y} + C y = Z \dot{y} + A y \quad (D, 2)$$

où les matrices ont la même signification qu'en (I, 44) (excepté A) et sous l'hypothèse qu'il existe une matrice antisymétrique  $A_3$  telle que  $A = ZA_3$  que  $MA_3$  et  $CA_3$  soient antisymétriques et que  $GA_3$  soit symétrique, on peut prendre comme fonction de Liapounov [38] le Hamiltonien modifié (se réduit à H pour  $A_3 = 0$ )

$$\frac{1}{2} (\dot{y} + A_3 y)^T M (\dot{y} + A_3 y) + \frac{1}{2} y^T A_4 y$$

où  $A_4 = C - A_3^T M A_3 - GA_3$  symétrique.

Les extensions du 1° et du 2°) sont également valables dans ce cas, qui se rencontre notamment dans l'étude du "dual-spin" avec dissipation sur palier dans chacune des deux sections : l'obtention du critère de stabilité

complet pour ce cas est donnée dans [58].

Par contre dans l'étude du triple-spin déformable, trouver  $A_3$  devient impossible dans le cas général et il faut, pour étudier la stabilité utiliser le théorème de Sturm qui s'applique aux équations caractéristiques à coefficients complexes [19].

## ANNEXE E

## CALCUL DE LA SERIE DES GAINS MODAUX

Nous allons trouver la valeur de la série des  $k_n$  dans le cas de la roue à double cardan, donc prouver par voie de conséquence que cette série est absolument convergente.

Il suffit d'appliquer le théorème du moment cinétique au corps rigide considéré comme isolé :

$$I_R \ddot{\theta}_R = l_0 + \frac{(E_f I_f)}{d_f} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \eta_n''(0) - \frac{d_R}{d_f} \eta_n'''(0) \right] / \beta_n \quad (\text{E. 1})$$

où le second terme du membre de droite constitue la résultante des moments de flexion et du moment des efforts tranchants à l'encastrement des panneaux.

Des transformées de Laplace des équations (III. 18), (III. 21) et (E. 1), éliminons  $\Theta_0(\Delta)$  et  $\beta_n(\Delta)$  ; par transformation inverse de  $\Theta_R(\Delta)$ , il vient, pour un couple en impulsion de Dirac  $l_0 = l \delta(t - 0)$ ,

$$I_R \Theta_R(t) = l t + \frac{(E_f I_f)}{d_f I_0} l \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \eta_n''(0) - \frac{d_R}{d_f} \eta_n'''(0) \right] \frac{k_n}{\delta_n \omega_n^3} (\omega_n t - \sin \omega_n t) \quad (\text{E. 2})$$

De cette relation et des transformées de (III. 18) et (III. 21), on déduit, pour ce type d'excitation :

$$I_R \dot{\theta}_R(0+) = I_0 \dot{\theta}_0(0+) = I_0 \delta_n \dot{\beta}_n(0+) / k_n = l$$

Des développements en série (III. 19) résulte alors l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n = I_f / I_R \quad (\text{E. 3})$$

## ANNEXE F

## RESOLUTION DE L'EQUATION DE RICCATI REDUITE

## F.1. CAS GENERAL :

$$\text{Posons } \bar{P} = \begin{bmatrix} P_1^T \\ F \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_2^T = \begin{bmatrix} \beta \\ c^T \\ P_1^T \end{bmatrix}$$

Il est alors facile, par simple développement, de montrer que l'équation de Riccati (V. 18) peut s'écrire :

$$(P_2 + P_2^T) - \alpha c^T = (\bar{Q} + \alpha a a^T)$$

dont le second membre est connu. L'astuce de la méthode consiste à calculer les gains  $c_1$  en éliminant de  $(P_2 + P_2^T)$  les éléments de  $P_1^T$ . Pour ce faire, on va voir qu'il suffit d'écrire les éléments  $(P_2 + P_2^T)_{ij}$  tels que  $(i+j)$  soit pair. En effet, si on a

$$\bar{P} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1,n-1} & p_0 \\ \hline & P_{22} & \dots & P_{2,n-1} & p_1 \\ \hline & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline & & & P_{n-1,n} & p_{n-2} \\ \hline & & & & p_{n-1} \\ \hline \end{array}$$

alors

$$P_2 + P_2^T =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & \times & P_{12} & \times & \dots & P_{1,n-1} & \times & P_{1,n-2} & \times \\ \hline & 2P_{12} & \times & P_{23}^T + P_{23} & \dots & P_{1,n-2} & \times & P_{2,n-1} + p_0 & \times \\ \hline & & 2P_{22} & \times & \dots & P_{1,n-1} & \times & P_{3,n-2} + P_{2,n-1} & \times \\ \hline & & & 2P_{23} & \dots & P_{1,n-2}^T + P_{1,n-2} & \times & P_{4,n-1} + p_1 & \times \\ \hline & & & & \ddots & \vdots & \times & \vdots & \times \\ \hline & & & & & 2P_{n-1,n} & \times & P_{n-2,n-1} & \times \\ \hline & & & & & & 2p_{n-1} & \times & \times \\ \hline & & & & & & & 2p_{n-2} & \times \\ \hline \end{array}$$

Les cases barrées contiennent des éléments qui ne sont pas utilisés. Nous montrons le cas où  $n$  est pair ; le cas où  $n$  est impair s'obtient de manière analogue.

Par inspection de cette matrice, il est évident qu'en combinant linéairement les équations de Riccati scalaires correspondant aux éléments d'une même "zone oblique" (telle que la zone renforcée), il est aisé d'en éliminer les éléments  $P_{ij}$  ; les équations obtenues ne font plus intervenir que les inconnues  $c_k$ .

## F.2. CAS DU QUATRIEME ORDRE :

Dans ce cas,  $P_2 + P_2^T =$

0	<del></del>	$P_{12}$	<del></del>
	$2P_{12}$	<del></del>	$P_{23} + P_3$
		$2P_{23}$	<del></del>
			$2P_2$

et on obtient immédiatement les combinaisons linéaires des équations de Riccati scalaires correspondant aux quatre "zones obliques":

$$\begin{cases} c_0^2 = C_1 \\ c_1^2 - 2c_0c_2 = C_2 \\ c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_0 = C_3 \\ c_3^2 - 2c_2 = C_4 \end{cases}$$

en posant

$$\begin{cases} C_1 = \overline{Q}_{11} + a_0^2 \\ C_2 = \overline{Q}_{22} - 2\overline{Q}_{13} + a_1^2 - 2a_0a_2 \\ C_3 = \overline{Q}_{33} - 2\overline{Q}_{24} + a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0 \\ C_4 = \overline{Q}_{44} + a_3^2 - 2a_2 \end{cases}$$

Puisque  $\bar{Q}_{11} > 0$ , on a d'office  $c_0 = \sqrt{C_1}$  ( $c_0 > 0$  pour que  $P > 0$ ).  $c_2$  s'obtient par résolution de l'équation du quatrième degré

$$c_2^4 - 2c_2^2 + (c_0 + C_3) - 8c_2(c_0C_4 + C_2) - 4C_2C_4 + (C_3 - 2c_0)^2 = 0$$

Enfin  $c_3 = \sqrt{C_4 + 2c_2}$ ,  $c_1 = \sqrt{C_2 + 2c_0c_2}$ , le tri de la solution s'effectuant de manière à avoir des radicands non négatifs.

On peut vérifier que pour  $Q = \textcircled{D}$ , on retombe sur  $c = a$ .

ANNEXE G

---

DETERMINATION D'UN OBSERVATEUR POUR LE  
SATELLITE "1 MODE"

-:-

G.1. CALCUL DES MATRICES DE L'OBSERVATEUR :

Pour un observateur de dimension trois, nous donnons ci-dessous les dimensions des matrices du système :

$$\dim K^Y = (1 \times 1) ; \dim K^Z = (1 \times 3) ; \dim \hat{K} = (1 \times 4) ; \dim F = (3 \times 3) ;$$

$$\dim A = (4 \times 4) ; \dim B (=B^C = B^D) = (4 \times 1) ; \dim C = (1 \times 4) ; \dim T = (3 \times 4).$$

L'amortissement est supposé négligeable ( $\gamma \simeq 0$ ) ; on suppose donnée la matrice  $F = \text{diag} (F_1, F_2, F_3)$  de l'observateur.

Nous avons vu au § IV. 3.1. que les éléments de G pouvaient être choisis arbitrairement ; dans le cas où il n'y a qu'une sortie mesurable, il revient au même de choisir les éléments soit de  $K^Z$ , soit de H, en nombre égal à ceux de G, pourvu qu'on conserve la commandabilité et l'observabilité de l'observateur.

La résolution de l'équation (IV. 27) fournit la forme générale :

$$T = \begin{bmatrix} T_{14} & 0 & 0 \\ 0 & T_{24} & 0 \\ 0 & 0 & T_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 f_1 & F_1 & f_1 & 1 \\ F_2 f_2 & F_2 & f_2 & 1 \\ F_3 f_3 & F_3 & f_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (G.1)$$

où :

$$\begin{cases} f_i = \frac{F_i^2 + \omega_1^2 \overline{I_n}}{\omega_1^2 \overline{I_f}} \quad (i=1, 2, 3), \text{ constantes connues ;} \\ T_{i4} = - \frac{G_i}{F_i^2 (1+f_i)} \quad (i=1, 2, 3), \text{ valeurs encore inconnues.} \end{cases} \quad (G.2)$$

Les trois dernières équations de (IV. 29) peuvent s'écrire :

$$K^Z = \begin{bmatrix} \hat{K}_2 & \hat{K}_3 & \hat{K}_4 \end{bmatrix} \mathcal{F} \text{diag} \begin{bmatrix} T_{14} & T_{24} & T_{34} \end{bmatrix} \quad \text{où la matrice } \mathcal{F} \\ \text{ne dépend que des } F_i. \text{ Ainsi, fixer les } K_i^Z \text{ revient à se donner les } T_{i4} \text{ ou,}$$

comme on l'a vu en (G.2) les  $G_i$ , ou encore, par (IV.28), les  $H_i$ . La première équation (IV.29) montre alors que  $K^Y$  ne dépend pas de  $T$ .

Le plus simple pour la synthèse de l'observateur est d'imposer

$$K_1^Z = K_2^Z = K_3^Z = K^Y \quad (G.3)$$

Les variables de l'observateur sont alors du même ordre de grandeur que celles du processus (matrice  $T$  de l'ordre de 1) et  $K^Y$  joue le rôle de "gain statique" pour le système.

Les trois dernières équations de (IV.29) fournissent alors  $K^Y T_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et la relation (G.1) permet d'en déduire  $K^Y T$  : la première équation (IV.29) fixe ensuite définitivement  $K^Y$ , ce qui permet de connaître  $T$ .

Enfin, la relation (IV.28) permet de calculer

$$H_i = T_{i3} / t_{31} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (G.4)$$

et (G.2) fixe les éléments de  $G$ .

## G.2. ASPECT "COMPENSATEUR" DE L'OBSERVATEUR :

Nous reportant à la figure 31c, nous pouvons écrire

$$\frac{y^c}{d} = K^Z + K^Z (A \quad B \quad F - HK^Z)^{-1} (G + HK^3) \quad (G.5)$$

où  $K^Z = K^Y [1, 1, 1]$ .

Tout calcul effectué, on trouve

$$\frac{y^c}{d} = K^Z \frac{A^3 + N_2 A^2 + N_1 A + N_0}{A^3 + D_2 A^2 + D_1 A + D_0} \quad (G.6)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2 = h_3 + h_2 + h_1 \\ D_1 = h_2 h_3 + h_1 h_3 + h_1 h_2 - (K^Y)^2 (H_1 H_3 + H_2 H_3 + H_1 H_2) \\ D_0 = h_1 h_2 h_3 + (K^Y)^2 [H_1 H_3 h_2 + H_2 H_3 h_1 + H_1 H_2 h_3] - 2(K^Y)^3 H_1 H_2 H_3 \end{array} \right.$$

avec  $h_i = F_i + H_i K^Y$  ( $i = 1, 2, 3$ )



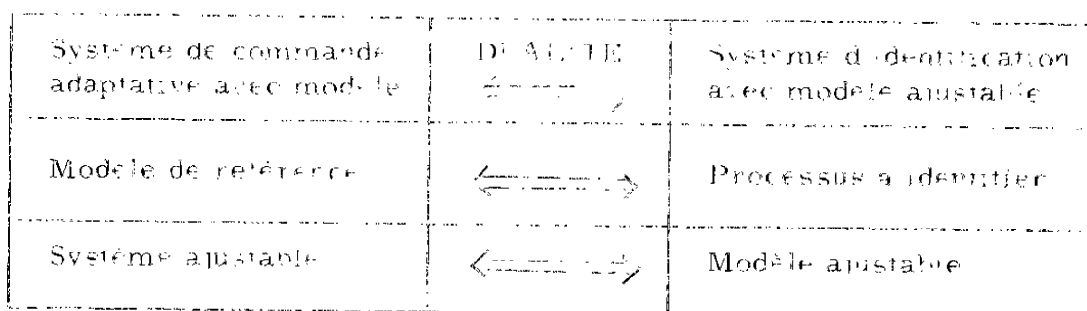
$$\begin{cases}
 N_2 = D_2 + g_1 + g_2 + g_3 \\
 N_1 = D_1 - (F_2 + F_3) g_1 - (F_1 + F_3) g_2 - (F_1 + F_2) g_3 \\
 N_0 = D_0 + F_2 F_3 g_1 + F_1 F_3 g_2 + F_1 F_2 g_3 \\
 \text{avec } g_i = G_i + H_i K^J \quad (i = 1, 2, 3).
 \end{cases}$$

## ANNEXE H

IDENTIFICATION A L'AIDE D'UN MODELE AJUSTABLE  
PAR LA METHODE DE L'HYPERSTABILITE

11

Le problème posé est de déterminer un mécanisme d'adaptation qui permette de ramener les paramètres du modèle ajustable dans le voisinage des paramètres du processus. Ce problème est d'ailleurs dual d'une commande adaptative à un modèle ainsi que l'indique le schéma ci-dessous.



Or nous savons que la commande optimale à critère quadratique en temps infini conduit pour un système linéaire, à une loi de commande indépendante des conditions initiales et assurant la stabilité asymptotique du système bouclé.

Il est donc logique (par analogie) de tenter de trouver une famille de lois d'adaptation indépendantes des conditions initiales et du signal de commande, et qui assurent une adaptation parfaite asymptotique puis, parmi ces lois, de choisir la "meilleure" en regard à un critère d'optimisation (structurelle et paramétrique). C'est ce que se propose la méthode citée, qui ramène d'abord tout problème de synthèse des systèmes adaptatifs avec modèle à la synthèse d'un système à contre-réaction non linéaire. Cette synthèse peut être obtenue par les méthodes d'hyperstabilité. Ces méthodes constituent une extension de la méthode de Tsypkin, bien imposant certaines conditions aux éléments du système, elles garantissent

la stabilité de ce système, fournissant d'office la fonction de Liapounov correspondante. La solution n'est cependant pas complètement déterminée en ce sens qu'il reste, comme toujours, des degrés de liberté arbitraires au libre choix de l'ingénieur.

Nous référons à [22] pour la synthèse d'un observateur d'état adaptatif en présence de variations de paramètres.

## LISTE DES FIGURES

	<u>Pages</u>
1 - Quelques satellites à comportement anormal	12
2 - Corps viscoélastique contenant un rotor sur cardans et un réservoir de liquide	17
3 - Système à l'équilibre dynamique	17
4 - Définition des déplacements généralisés	17
5 - Coordonnées célestes du satellite	20
6 - Déplacements, du fait des déformations, d'un rotor "rigide"	20
7 - Repère orbital	28
8 - Courbe d'hystérésis viscoélastique	28
9 - Couples perturbateurs s'exerçant sur DIAPO	34
10 - Angles de Bryan du repère moyen par rapport au repère d'équilibre dynamique	41
11 - Satellite déformable à corps principal rigide	41
12 - Modèles mécaniques à amortissement a) viscoélastique b) visqueux	49
13 - Variations de la raideur élastique complexe avec la température et la fréquence	49
14 - Satellite DORADE a) à l'équilibre dynamique b) à l'état déformé	64
15 - Influence du couple de précession orbitale sur DORADE	65
16 - Satellite géostationnaire muni de panneaux et d'une roue sur double cardan a) à l'équilibre dynamique b) schéma de la roue sur double cardan c) à l'état déformé	71
17 - Obtention des fréquences propres globales	92
18 - Influence de l'inertie du corps rigide sur les pulsations propres	94
19 - Influence de la longueur et de l'inertie du corps rigide sur la première fréquence propre	96
20 - Influence de la vitesse de rotation de la roue sur les pulsations propres	99

	Page
21 - Graphe de transfert d'un système linéaire en régime transitoire (trois parties)	93
22 - Erreurs en régime établi dues aux trajectoires nomiales	106
23 - Blocs diagrammes de systèmes de contrôle	108
24 - Modèles multivariables (2 parties)	116
25 - Diagrammes spectraux de systèmes	120
26 - Diagrammes spectraux de systèmes	120
27 - Diagramme de Bode d'un système complexe	122
28 - Lieu des pôles d'un système d'ordre élevé	127
29 - Sensibilité d'un système à des variations de paramètres	129
30 - Sensibilité d'un système à des variations de paramètres	130
Lieu de transfert en régime	
a) système simple	
b) système complexe	
c) système multivariable complexe	135
31 - Sensibilité des pôles d'un système linéaire aux variations sur la fréquence propre	139
32 - Lieu de pôles de systèmes complexes par observation d'état	141
33 - Amortissement relatif de circuits secondaires d'un transformateur	142
34 - Amortissement relatif de circuits secondaires d'un transformateur recalage	143

## REFERENCES

- 1 J. C. AMIEUX  
Contribution à l'étude de la stabilisation de satellites gyroscopiques - Conception et réalisation d'un amortisseur actif de nutation,  
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse, Octobre 1972.
- 2 M. ATHANS  
The role and use of the stochastic linear - quadratic - gaussian problem in control system design  
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, n° 6, December 1971, 529 - 552.
- 3 F. J. BARBERA - P. LIKINS  
Liapunov stability analysis of spinning flexible spacecraft,  
AIAA J. , Vol. 11, n° 4, April, 1973.
- 4 M. BISMUT et al.  
Etude de faisabilité de l'amortisseur de nutation du satellite Météosat, Rapport final, 71 CNES 05 72, ONERA, Châtillon, mai 1971.
- 5 E. BRÜDERLE - J. L. SANIANA - H. WEINGARTEN  
Design of attitude control systems using the observer principle, V th IFAC Symposium on "Automatic control in space",  
Genova, June, 1973.
- 6 F. BUCKENS  
On the influence of the elasticity of components in a spinning satellite on the stability of its motion. XVI th International Astronautical Congress. Athens, 1965, 327 - 342.
- 7 A. COSTES  
Contribution à l'analyse et à la conception des systèmes de stabilisation de satellites par propulseur ionique, Thèse de Docteur ès Sciences Physiques,  
Université Paul Sabatier, Toulouse, Janvier 1972.
- 8 A. DANTHINE  
Théorie des systèmes linéaires, Société Coopérative de l'A. E. E. S. , Université de Liège, 1970.

- 9 M. DUREIGNE  
Contribution à la stabilisation d'attitude des satellites au moyen de gyroscopes, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse, Juin 1973.
- 10 M. C. ECKSTEIN - F. HECHLER  
A reliable derivation of the perturbations due to any zonal and tesseral harmonics of the geopotential for nearly - circular satellite orbits.  
ESRO - SR - 13, June, 1970.
- 11 B. FRAEIJIS DE VEUBEKE  
Analyse de la réponse forcée des systèmes amortis par la méthode des déphasages caractéristiques.  
Symposium IUTAM, Paris, avril 1965.
- 12 B. FRAEIJIS DE VEUBEKE  
The Dynamics of flexible bodies, EUROMECH 38 "Gyrodynamics",  
Louvain-la-Neuve, Septembre 1973.
- 13 R. E. FREELAND  
Mariner Venus 67 structural developmental and qualification vibration test report,  
JPL - TR - 32 - 1161, November, 1967.
- 14 H. P. FRISCH  
The dynamic characteristics of satellites having long elastic members, NASA-TN-D- 4576, Aug., 1968.
- 15 M. GERADIN  
Calcul des modes et fréquences propres d'une structure de satellite par la méthode des éléments finis, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, Collection des Publications, n° 26, 1971.
- 16 W. B. GEVARTER  
Basic relations for control of flexible vehicles, AIAA paper 69-115, AIAA 7th Aerospace Sc. Meeting, New York, January, 1969
- 17 W. G. HART - G. F. Mc GOWAN - T. E. DU PONT  
Design and application of an adaptive tracking filter control system, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, July, 1968, 592 - 606.

- 18 PC . HUGHES - S.C.GARG  
Dynamics of large flexible solar arrays and application to spacecraft attitude control system design,  
UTIAS Rept. n° 179, University of Toronto, Feb.,1973.
- 19 D.A. JOHNSON  
Effect of bearing flexibility on the attitude stability of a triple-spin satellite, ESRO-SN-121, June,1972.
- 20 R.E. KALMAN - R.S. BUCY  
New results in linear filtering and prediction theory,  
Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engineering,  
March, 1961, 95 - 108.
- 21 C. LANCZOS  
The variational principles of Mechanics, University of Toronto Press, Toronto, 1949.
- 22 I.D.LANDAU  
Sur une méthode de synthèse des systèmes adaptatifs avec modèle utilisés pour la commande et l'identification d'une classe de procédés physiques, Thèse de Docteur ès Sciences Physiques, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, juin 1973.
- 23 J. LA SALLE - S. LEFSCHETZ  
Stability by Liapunov's direct method with applications ,  
Academic Press, 1961.
- 24 C.T. LEONDES - E.B. STEAR - A.R. STUBBERUD  
An investigation study on model reference adaptative techniques as applied to attitude control system for launch vehicles,  
NASA - DCN - 1 - 7 - 40 - 79018, April,1969.
- 25 A. LIEGEOIS - M. DUREIGNE - D. POELAERT  
Etude de faisabilité des systèmes de stabilisation et de restitution d'attitude du satellite DIAPO, rapports intermédiaire et final 72 CNES 0558, publications LAAS n° 898 et 907,  
Toulouse, juin 1972.
- 26 A. LIEGEOIS - M. DUREIGNE - D. POELAERT  
Etude de faisabilité des systèmes de stabilisation et de restitution d'attitude du satellite DORADE rapports intermédiaire et final 72 CNES 0558, publications LAAS n° 898 et 908,  
Toulouse, juillet 1972.



- 27 A. LIEGEOIS  
Contribution à l'analyse de la stabilité et à la synthèse de la commande des satellites contenant des corps en mouvement, thèse de Dr. ès Sciences Physiques, Université Paul Sabatier, Toulouse, octobre 1972.
- 28 A. LIEGEOIS - D. POELAERT  
Détermination des modes propres de vibrations d'un type de corps spatial déformable, Compte rendu des Scéances de l'Académie des Sciences, Gauthier -Villars, Paris, 1973.
- 29 P.W. LIKINS  
Dynamics and Control of flexible space vehicles, NASA -TR-32-1329, January, 1970.
- 30 P.W. LIKINS  
Results of flexible spacecraft attitude control studies utilizing hybrid coordinates, AIAA paper n° 70 - 20, 8 th Aerospace Sciences Meeting, New York, January, 1971.
- 31 P.W. LIKINS  
Passive and semi-active attitude stabilizations - Flexible spacecraft, AGARD - LS - 45 - 71, Brussels-Stuttgart, October 1971.
- 32 D.G. LUENBERGER  
Canonical forms for linear multi-variable systems, IEEE Trans. on Automatic Control, June, 1967, 290-293.
- 33 D.G. LUENBERGER  
An introduction to observers, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, n° 6, December, 1971, 596 - 602.
- 34 C. MASSONNET  
Résistance des Matériaux, Sciences et Lettres, Liège, 1972.
- 35 L. MEIROVITCH - R.A. CALICO  
A comparative study of stability methods for flexible satellites, AIAA Journal, vol. 11, n° 11, January, 1973.
- 36 J.M. MENDEL  
Invariant poles feedback control of flexible highly variable spacecraft, IEEE Transactions on Automatic Control, December, 1972, 814 - 821.

- 37 R. D. MILNE  
Some remarks on the dynamics of deformable bodies, AIAA Journal, vol. 6, n° 3, Mar., 1968.
- 38 D. L. MINGORI  
Stability of linear systems with constraint damping and integrals of motion, Astronautica Acta, vol. 16, n° 5, 1971, 251-258.
- 39 J. C. J. NIHOUL  
Cours moderne de Mécanique rationnelle, Albin Michel, Paris, 1970.
- 40 D. P. PASSERI - R. M. WILLET  
Variable sampling rate sampled data adaptive control of flexible aerospace vehicles, Engineering Research Institute, IOWA State University, IR-93500, AD723-846, December, 1970.
- 41 F. PFEIFFER  
Theoretical problems of spin-stabilized fuel-filled satellites, EUROMECH 38 "Gyrodynamics", Louvain-la-Neuve, September, 1973.
- 42 D. POELAERT  
Stabilisation par gradient de gravitation pour satellite flexible, Thèse d'Ingénieur Civil-Physicien, Université de Liège, juin 1971.
- 43 D. POELAERT  
Critère de stabilité d'attitude des satellites déformables, Note interne 72-102, LAAS/CNRS, Toulouse, janvier 1972.
- 44 D. POELAERT - A. LIEGEOIS  
Propriétés de la fonction de transfert d'un type de corps déformable destiné à être stabilisé en attitude, Compte Rendu des Séances de l'Académie des Sciences, Gauthier - Villars, Paris 1973.
- 45 D. POELAERT - A. LIEGEOIS - M. DUREGNE  
Analysis and design of an attitude control system for non rigid satellites, EUROMECH 38 "Gyrodynamics", Louvain-la-Neuve, September, 1973.
- 46 K. POPP - P. C. MÜLLER  
First integrals of controlled mechanical systems, EUROMECH 38 "Gyrodynamics", Louvain-la-Neuve, September, 1973.

- 47 G. PORCELLI  
Attitude control of flexible space vehicles,  
AIAA J, vol. 10, n° 6, June, 1972, 807-812.
- 48 C. F. PRICE et al.  
Adaptive control with explicit parameter identification for  
tactical missiles, Analytic Sc. Corp. Reading,  
Massachusetts, AD. 735-488, December, 1971.
- 49 R. PRINGLE Jr.  
On the capture stability, and passive damping of artificial  
satellites, NASA-CR-139, December, 1964.
- 50 R. PRINGLE Jr.  
On the stability of a body with connected moving parts,  
AIAA J., Vol. 4, n° 8, Aug., 1966.
- 51 R. PRINGLE Jr.  
Stability of force-free motions of a dual-spin spacecraft,  
AIAA J., Vol. 7, N° 6, June, 1969.
- 52 R. E. ROBERSON - P. W. LIKINS  
The quadratic approximation in rotational dynamical  
equations, Sonderabdruck aus "Ingenieur-Archiv",  
38. Band, 1. Heft, S. 53 - 57, Springer Verlag, 1969.
- 53 A. P. SAGE - J. L. MELSA  
System identification, Math. in Sciences and Engineering,  
vol. 80, Academic Press, New York-London, 1971.
- 54 Y. SEVELY  
Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés,  
Dunod Université, Paris, 1973.
- 55 W. T. THOMSON - P. CARAVANI  
Forced normal mode vibration of viscoelastic systems,  
J. of Applied Mechanics, June 1972, 825-827.
- 56 E. T. WHITTAKER  
A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid  
bodies, Cambridge University Press, 1937.
- 57 P. Y. WILLEMS  
Stability of deformable gyrostats on a circular orbit  
The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. XVIII, n° 2,  
Sept - Oct. 1970, 65-85.

58

P. Y. WILLEMS

Effect of bearing flexibility on dual-spin satellite attitude stability, *J. Spacecraft and Rockets*, Vol. 9, n° 8 August, 1972, 587-591.