



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude et à la stabilisation des satellites munis de panneaux déformables

Edmond Jonckheere

► **To cite this version:**

Edmond Jonckheere. Contribution à l'étude et à la stabilisation des satellites munis de panneaux déformables. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1975. Français. NNT: . tel-00176580

**HAL Id: tel-00176580**

**<https://theses.hal.science/tel-00176580>**

Submitted on 4 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention

DU GRADE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

**Edmond JONCKHEERE**

Ingénieur Civil Electricien  
Université Catholique de Louvain (Belgique)

---

## CONTRIBUTION A L'ÉTUDE ET A LA STABILISATION DES SATELLITES MUNIS DE PANNEAUX DÉFORMABLES

---

Soutenue le 23 juin 1975 devant la Commission d'examen :

MM. J. LAGASSE	Président
J.L. ABATUT	} Examineurs
A. LIEGEOIS	
P.Y. WILLEMS	
G. ALENGRIN	

## REMERCIEMENTS

---

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du Centre National de la Recherche Scientifique.

Je remercie l'Agence Spatiale Européenne qui m'a accordé une bourse me permettant de faire deux années de recherches à Toulouse.

Je remercie également :

- Monsieur J. LAGASSE, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, Directeur du Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes,
- Monsieur J.L. ABATUT, Maître de Conférences à l'Université Paul Sabatier de Toulouse,
- Monsieur A. LIEGEOIS, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
- Monsieur P.V. WILLEMS, Professeur à l'Université de Louvain (Belgique),
- Monsieur G. ALENGRIN, Maître-Assistant à l'Université Paul Sabatier de Toulouse.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui, à des titres divers, ont participé à la réalisation de ce mémoire, et en particulier : Monsieur J. BERNUSSOU, les membres de l'Equipe "Systèmes Mécaniques Articulés", Madame J. PENAUVAYRE à qui l'on doit la dactylographie et Messieurs R. ZITTEL, D. DAURAT et R. LORTAL de l'Atelier d'Imprimerie.

---

## INTRODUCTION

-:-

Depuis le début de l'exploration spatiale, il est admis que les effets de non-rigidité sont critiques dans la stabilisation d'attitude des véhicules spatiaux. C'est ainsi que, déjà en 1958, le premier satellite américain EXPLORER 1 montra un comportement anormal et il est apparu que des phénomènes de flexibilité dans les antennes étaient à mettre en cause. Depuis, la liste des satellites présentant le même genre d'anomalies n'a cessé de s'allonger [LIK].

Parallèlement à ces expériences laborieuses dans le secteur spatial, les problèmes de flexibilité devenaient de plus en plus importants en aéronautique et en ballistique, les dimensions des engins croissant plus rapidement que leur masse.

Suite à ces difficultés et ce depuis près de vingt ans, les effets de déformation dans les engins spatiaux ont reçu une attention toute particulière, notamment aux Etats-Unis [MOD]. Le sujet étant vaste, il en suivit un grand nombre de publications traitant aussi bien les aspects "dynamique" que les aspects "automatique".

Malgré ces nombreux travaux, de nombreux aspects des problèmes de non rigidité dans les satellites n'ont pas encore été complètement éclaircis. Certaines publications très récentes [OHK, LAR, GET], ainsi qu'un très récent projet de contrat ESRO/ESTEC [ESR] le prouvent.

Il existe plusieurs configurations de satellites pour lesquelles les déformations ont des conséquences non négligeables ; principalement, il convient de citer :

1. Les satellites à rotation multiple [WIL] qui se composent de  $n$  rotors tournant autour du même axe et pour lesquels les effets de flexibilité peuvent être localisés sur l'axe entre chaque paire de rotors consécutifs (fig. 1).

2. Les satellites qui se composent d'un corps principal massif sur lequel sont connectés de longs appendices (mats, antennes, panneaux solaires, etc.) [MOD]. Le cas particulier le plus important est celui décrit par la figure 2. Il s'agit d'un type de satellite dont le corps principal peut être supposé rigide et pour lequel les effets de déformation sont localisés dans deux longs panneaux solaires disposés symétri-

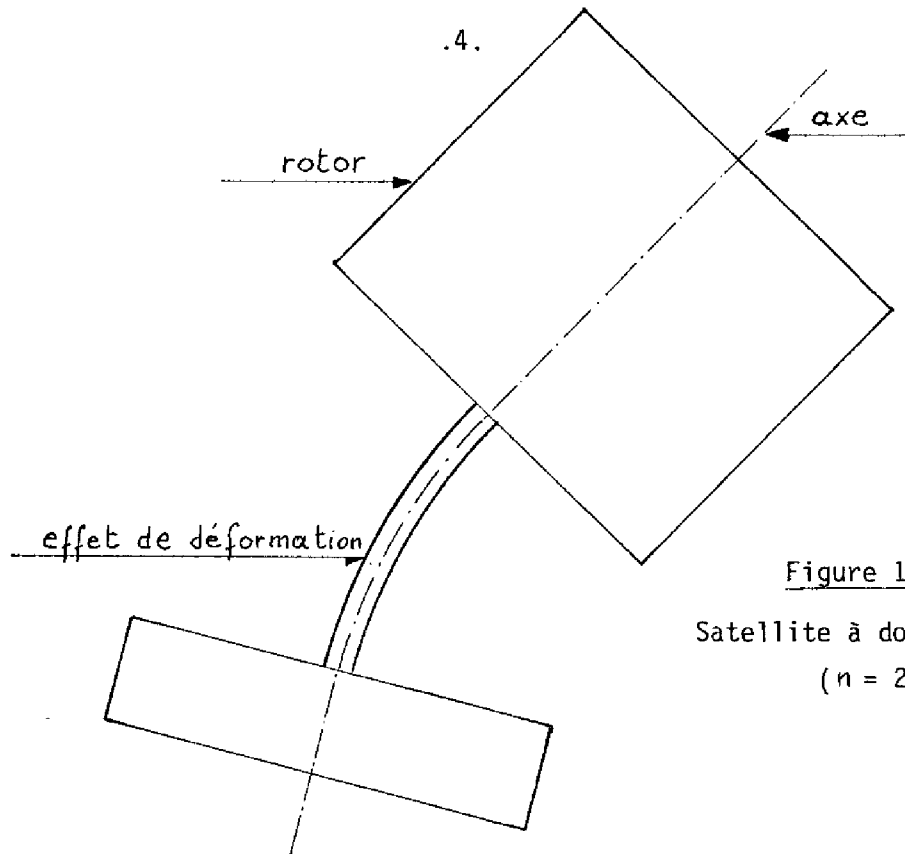


Figure 1.  
Satellite à double rotation  
( $n = 2$ )

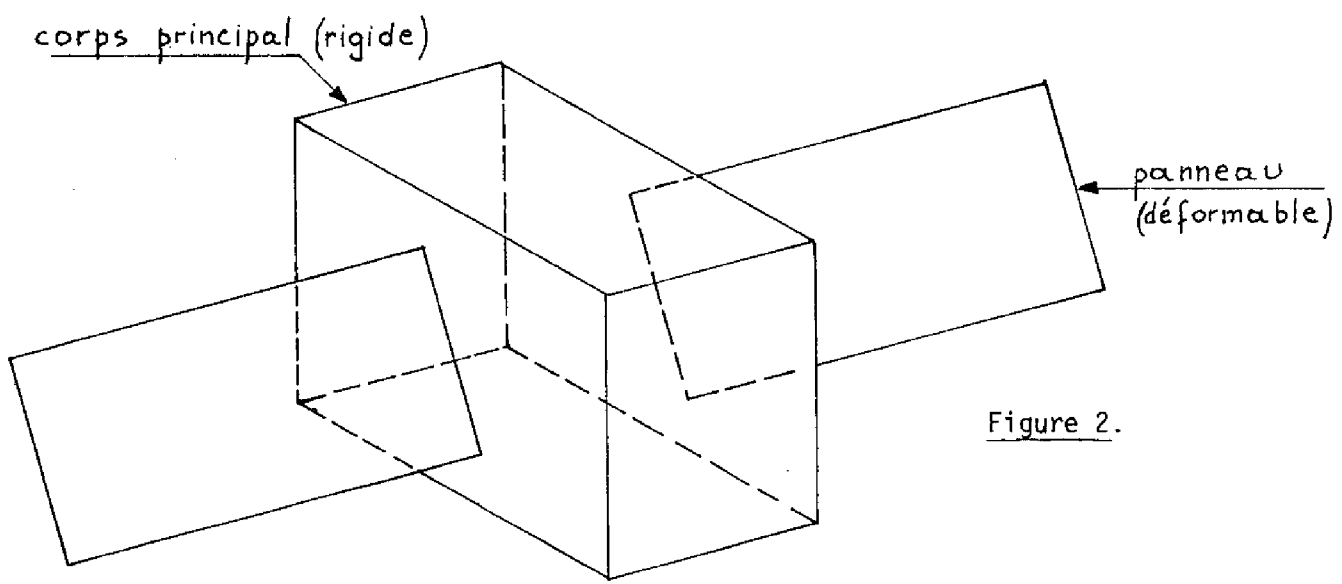


Figure 2.

quement autour du corps principal [OHK, ESR, GET]. Chaque panneau est, en fait, un ensemble de sous-panneaux connectés par des charnières, et les phénomènes de déformation peuvent être soit des effets d'élasticité dans les sous-panneaux, soit des rotations relatives localisées aux charnières.

3. Enfin, il faut encore citer les satellites possédant simultanément les deux aspects précédents ; ainsi, un satellite à double rotation avec l'un des rotors muni d'appendices flexibles est parfaitement concevable.

L'étude de ces différentes configurations serait beaucoup trop vaste, ce mémoire de thèse sera restreint à l'étude de la seconde configuration et, plus précisément les satellites décrits par la figure 2 et cela essentiellement pour deux raisons :

- d'une part parce que, pour ce type de satellites, il est admis que les phénomènes de déformation dans les panneaux sont non négligeables [GET],
- d'autre part, parce que cette configuration a été retenue pour plusieurs satellites européens futurs (par exemple, le satellite expérimental de télécommunication ESRO/OTS).

Le type de satellites à étudier étant fixé, le sujet reste néanmoins très étendu. Aussi, au lieu de survoler l'ensemble du problème, le présent travail se propose plutôt d'étudier de manière approfondie quelques points précis de ce vaste sujet. L'attention a été portée sur des aspects des problèmes de non rigidité encore non complètement éclaircis dans les travaux antérieurs et qui peuvent entrer dans le cadre du récent projet de contrat ESRO/ESTEC. C'est ainsi que les trois principales contributions sont :

1. L'étude approximative des oscillations non linéaires libres des panneaux avec la mise en évidence, dans certains cas qui seront précisés, de phénomènes typiquement non linéaires.
2. L'étude, dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires, des problèmes de filtrage rencontrés lors de la synthèse d'un système actif de maintien en attitude.

3. Enfin, un critère de "faible observabilité" dans certains systèmes linéaires sera proposé, avec application aux modes flexibles du satellite.

Toutes ces questions seront abordées sous leur aspect théorique, ce qui permettra un traitement assez général pouvant s'appliquer à toute la classe de satellites considérés. Les simulations recouvriront une plage de valeurs numériques réalistes.

L'approche moderne (vecteur d'état) dominera tout au long de l'exposé. La théorie moderne de la commande et du filtrage sera largement exploitée ; ces techniques sont d'ailleurs de plus en plus utilisées dans le domaine spatial [OHK, LAR, ESR, SCHI, SCHM].

Certains résultats, présentés dans ce mémoire, pourront être utilisés dans l'avant-projet du système de commande d'attitude d'un satellite avec panneaux solaires. Mais il est bien évident qu'ils ne pourront être séparés de la prise en considération de tous les aspects du problème (type de mission, spécifications, problèmes technologiques, etc.).

Le contenu du mémoire se présente comme suit :

Dans le premier chapitre, un formalisme de mise en équations de la classe de satellites retenue est proposé. Les panneaux souples sont discrétisés en un nombre fini de corps rigides interconnectés [MOD, LIK, GET]. En utilisant à la fois les principes eulérien et lagrangien, des modèles linéaires et non linéaires sont obtenus. Les propriétés fondamentales en sont déduites. Il ressort de ce chapitre que la dynamique des satellites considérés se compose d'une dynamique rigide et d'une dynamique flexible, couplées entre elles.

Le second chapitre étudie à partir d'une approximation au 3ème ordre la solution des équations différentielles non linéaires du mouvement des satellites munis d'un certain type de panneaux déformables. Les outils mathématiques utilisés sont d'une part la méthode de KRYLOV-



BOGOLIUBOV-MITROPOLSKI et d'autre part la méthode de la récurrence associée de G.D. BIRKHOFF [BER]. Certains phénomènes typiquement non linéaires seront mis en évidence ; néanmoins, ceux-ci n'apparaîtront que pour des configurations particulières de panneaux très précises. Aussi, en dehors de ces cas "dangereux", les modèles linéaires s'avèrent être valables ; telle est la conclusion de ce chapitre.

La suite s'appuie sur les équations linéarisées du mouvement en considérant des configurations de panneaux ne recouvrant pas les cas dangereux.

Les trois chapitres suivants sont axés sur la synthèse d'un système actif de maintien en attitude. Plus précisément, nous considérons un système de pointage fin pour lequel les bruits des senseurs et les couples perturbateurs doivent être pris en considération [LAR, SCHI]. La théorie moderne de la commande optimale stochastique, qui consiste à mettre dans la boucle de régulation un filtre et un régulateur déterministe optimal en cascade, est bien adaptée à ce problème. Cette approche a d'ailleurs déjà été proposée [LAR, SCHM].

Le problème de synthèse proprement dit est abordé dans le chapitre 5 ; le formalisme échantillonné est retenu en ayant en vue la mise en oeuvre de la loi de commande sur calculateur digital. En invoquant le théorème de séparation, la synthèse du régulateur optimal a été séparée de celle du filtre. L'attention a été avant tout portée sur ce dernier aspect car, si aucun problème particulier n'apparaît du côté du régulateur, il n'en va pas de même pour le filtre. En effet, tout en étant observables, les modes flexibles du satellite montrent manifestement un aspect de "faible observabilité", ce qui mène à plusieurs complications.

Aussi, avant d'aborder le chapitre 5, certaines études préalables sont indispensables. Il est tout d'abord nécessaire de résoudre certains problèmes théoriques de filtrage, ce qui est fait au chapitre 3. Ensuite ces développements théoriques permettent aussi d'aborder le chapitre 4 qui précise le concept de "faible observabilité".

De manière plus précise, le chapitre 3 traite le problème inverse du filtrage linéaire discret [KAL]. En gros, ce problème peut se définir comme suit : étant donné un filtre linéaire stationnaire discret, déterminer, s'il existe, le problème de filtrage statistique qui y correspond. La solution en est donnée ; le lien entre ce problème et la réalisation stochastique [FAU] est établi.

Le chapitre 4 traite de la "faible observabilité". Il faut entendre par là des conditions sous lesquelles un problème de filtrage, quoique bien posé théoriquement, doit être considéré comme mal posé du point de vue pratique. Des conditions d'existence, dans un système linéaire complètement observable, de modes "faiblement observables" y sont données. Les conséquences tant théoriques (localisation des pôles du filtre stationnaire optimal, etc.) que pratiques (mauvaise convergence des algorithmes de filtrage, etc.) y sont exposées.

## CHAPITRE 1

---

### DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DÉFORMABLES

-



Ce premier chapitre considère les satellites déformables comme constituant une classe de systèmes dynamiques. Après la partie modélisation, les propriétés les plus fondamentales de ces systèmes sont déduites.

Le premier paragraphe fait un exposé très succinct sur les satellites déformables et, en même temps, précise ce qu'il faut entendre par "déformable".

Dans le second paragraphe, en utilisant une méthode finie, un formalisme de mise en équations de ces satellites est développé. Cette méthode mène aisément à la formulation lagrangienne globale du problème.

La troisième partie applique cette méthodologie au cas du satellite se composant d'un corps principal massif et de deux panneaux déformables. Les propriétés essentielles sont déduites. Les problèmes de commandabilité et d'observabilité sont abordés, non pas en utilisant la méthode de KALMAN, mais bien en partant de la formulation lagrangienne.

Le quatrième paragraphe fournit les modèles linéaires de ce type de satellites, ainsi que leurs propriétés.

### 1.1. LES SYSTEMES DEFORMABLES

Dans un satellite, les déformations peuvent prendre des aspects très variés ; aussi est-il nécessaire de considérer le terme "déformation" dans un sens large. Plus précisément, par "déformation", il faut entendre un effet appartenant à l'une des deux classes suivantes :

C1. La première comprend les phénomènes d'élasticité proprement dits, au sens de la théorie des milieux continus. Ainsi, par exemple, une longue antenne fixée sur le corps principal d'un satellite va manifestement présenter des propriétés de corps élastique.

C2. Cette seconde classe recouvre toutes les déformations localisées dues au mouvement relatif de certaines parties du satellite par rapport aux autres. Ainsi, pour les satellites composés de  $n$  corps rigides articulés [LAR, ROB] , les rotations relatives localisées aux charnières peuvent être considérées comme des déformations.

A première vue, ces deux classes de phénomènes sont difficilement comparables. Néanmoins, il sera justifié plus loin que C1 et C2 définissent deux problèmes qui ne sont pas fondamentalement différents. Aussi, il est légitime de regrouper C1 et C2 dans une classe plus générale C de phénomènes de déformation. Dès lors, par "satellite déformable" ou plus généralement par "système déformable", il faut entendre un système mécanique pour lequel des effets du type C ne peuvent pas être négligés à priori.

Arrivé en ce point, il est nécessaire de mettre en évidence les similitudes existant entre C1 et C2.

Les phénomènes d'élasticité proprement dits, repris dans C1, sont régis par la mécanique des milieux continus. Dans le cadre de la théorie de l'élasticité du premier ordre, la dynamique d'un système élastique est décrite par des équations aux dérivées partielles linéaires soumises à certaines conditions aux limites. En général, la solution peut s'exprimer sous forme d'un développement en série de modes propres orthogonaux [POE]. A ce stade, le système possède un nombre infini de degrés de liberté. Néanmoins, des considérations énergétiques montrent que seul un nombre restreint de modes propres ont une contribution notable, les autres pouvant être négligés. Une telle analyse est faite sur un cas particulier dans [POE]. Dès lors, l'ingénieur pratique toujours la troncature modale qui consiste à ne retenir dans le développement en série de la solution qu'un nombre fini de termes. Tronquer la solution revient à se donner un modèle ne possédant plus qu'un nombre fini de degrés de liberté. Or, justement, un tel modèle mathématique admet comme équivalent mécanique un système déformable du type C2.

Comme illustration, considérons la figure 1.1.a. qui représente un satellite de la classe C1. En admettant que les panneaux sont des lames flexibles encastrées sur le corps principal et ne subissant qu'un mouvement de flexion antisymétrique, la théorie des milieux continus mène à une suite infinie de modes propres de déformations [POE]. La troncature modale, qui consiste à ne retenir que les deux modes les plus lents, mène au modèle décrit par la figure 1.1.b. Il s'agit d'un

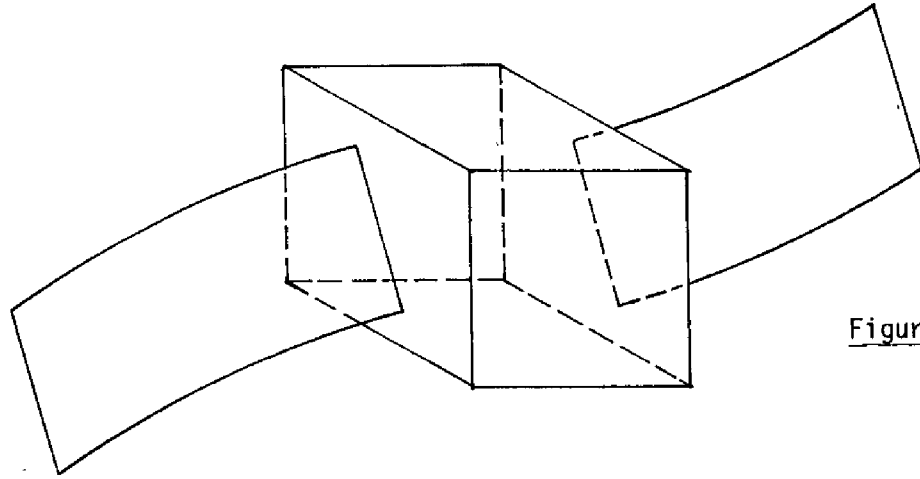


Figure 1.1.a.

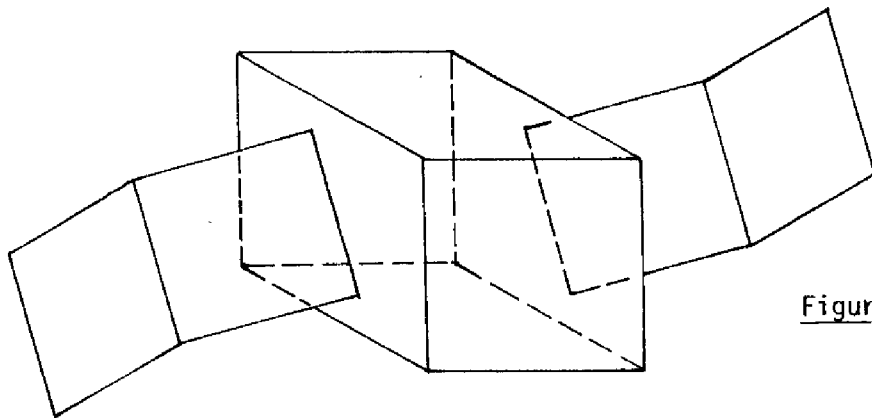


Figure 1.1.b.

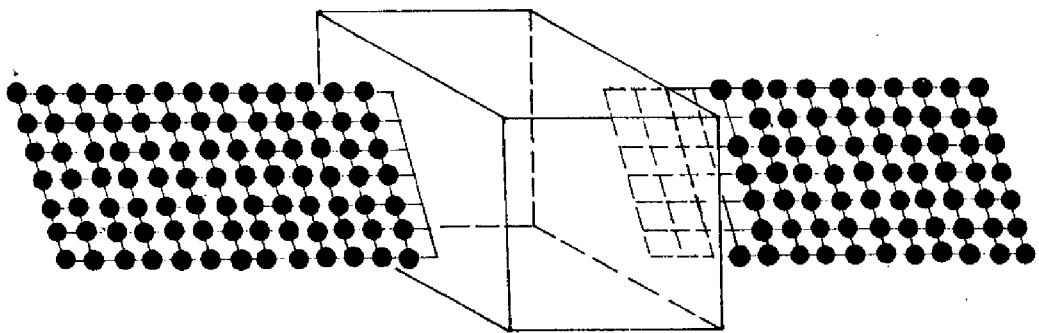


Figure 1.1.c.

satellite polyarticulé (avec couples de rappel aux articulations) qui entre évidemment dans la classe C2.

Ainsi, est-il légitime de considérer un système polyarticulé du type C2 comme une approximation d'un corps élastique de type C1.

Cette approche est d'ailleurs souvent indispensable. En effet, la théorie de l'élasticité ne permet pas, en général, de décrire de manière pratique le comportement des satellites flexibles. Il y a bien entendu quelques exceptions, notamment le cas du satellite à corps principal massif muni de deux panneaux flexibles encastrés (fig. 1.1.a.) [POE].

Aussi, pour modéliser un satellite de la classe C1, il est souvent nécessaire d'approcher les corps flexibles par une série de corps rigides interconnectés. Ainsi, pour le satellite de la figure 1.1.a., chaque panneau flexible peut être approché par un réseau de masses localisées, chaque masse subissant des rotations et des translations relatives avec, respectivement, couples et forces de rappel (fig. 1.1.c.). Il est bon de signaler que ce n'est pas la seule méthode de modélisation.

Le satellite à double rotation (fig. 1) est un autre exemple intéressant. La partie flexible de l'arbre, située entre les deux rotors, est modélisée par un joint de cardan avec couples de rappel et dissipations [WIL]. Ce modèle C2 d'un satellite exhibant des effets d'élasticité de classe C1 s'est avéré très satisfaisant.

De ces constatations, il ressort qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre les classes C1 et C2. De plus, le formalisme C2 doit être considéré comme plus général ; en effet, il est admis que les effets d'élasticité propres à la classe C1 peuvent être modélisés par des effets de déformation caractéristiques de C2.

Aussi, pour d'évidentes raisons d'uniformité de langage, le formalisme C2 sera le seul retenu. Il conviendra toutefois de ne pas oublier qu'à travers ce formalisme une large classe de phénomènes de déformation est évoquée.



Ainsi, en s'appuyant sur des modèles C2, ce mémoire étudie, sous certains aspects, les satellites composés d'un corps principal rigide et de deux panneaux déformables.

## 1.2. UN FORMALISME DE MISE EN EQUATION

Soit un satellite du type C2, composé d'un corps principal  $c$  et d'un appendice déformable  $a$  (fig. 1.2.).

Le corps principal est massif et ne subit aucune déformation. Le repère  $(0, \overline{C}_x, \overline{C}_y, \overline{C}_z)$  est rigidement lié à ce corps principal;  $O$  étant un point de référence quelconque et  $(\overline{C}_x, \overline{C}_y, \overline{C}_z)$  un trièdre orthonormé. Sa rotation instantanée est  $\overline{W}$  et la dérivation temporelle dans ce repère sera notée  $\dot{\phantom{x}}$ .

La partie déformable  $a$  est composée de  $N$  corps rigides  $a_1, a_2, \dots, a_N$  interconnectés en une structure de chaîne. Les corps  $a_i$  et  $a_{i+1}$  sont consécutifs. On écrira  $a = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_N$ . Les masses peuvent être distribuées ou localisées. Par commodité, la figure 1.2. ne montre qu'un seul appendice déformable ; il pourrait néanmoins y en avoir plusieurs sans que le problème fondamental ne soit modifié. La généralisation à une structure topologique d'arbre est généralement immédiate.

Le mouvement relatif de deux corps consécutifs  $a_i$  et  $a_j$ , ou déformation, est soit une rotation, soit une translation. A chaque déformation sont associés d'une part une variable  $q_j$  qui en précise l'amplitude et d'autre part un vecteur unitaire  $\overline{d}_j$  qui la caractérise géométriquement.

Si  $j$  est une rotation,  $q_j$  est l'angle entre les corps  $a_i$  et  $a_j$ ,  $\overline{d}_j$  est un vecteur unitaire colinéaire à charnière et  $P_i$  est un point quelconque sur cette charnière. Les conventions sont telles que  $\dot{q}_j \overline{d}_j$  est le vecteur de rotation de  $a_j$  par rapport à  $a_i$ .

Si  $j$  est une translation,  $q_j$  est la distance entre  $a_i$  et  $a_j$  mesurée le long du vecteur  $\overline{d}_j$  qui précise la direction de cette translation. La vitesse relative de  $a_j$  par rapport à  $a_i$  est  $\overline{d}_j \dot{q}_j$ .

A chaque variable  $q_j$ , des forces généralisées peuvent être associées (couple de rappel ou couple moteur, dissipation...).

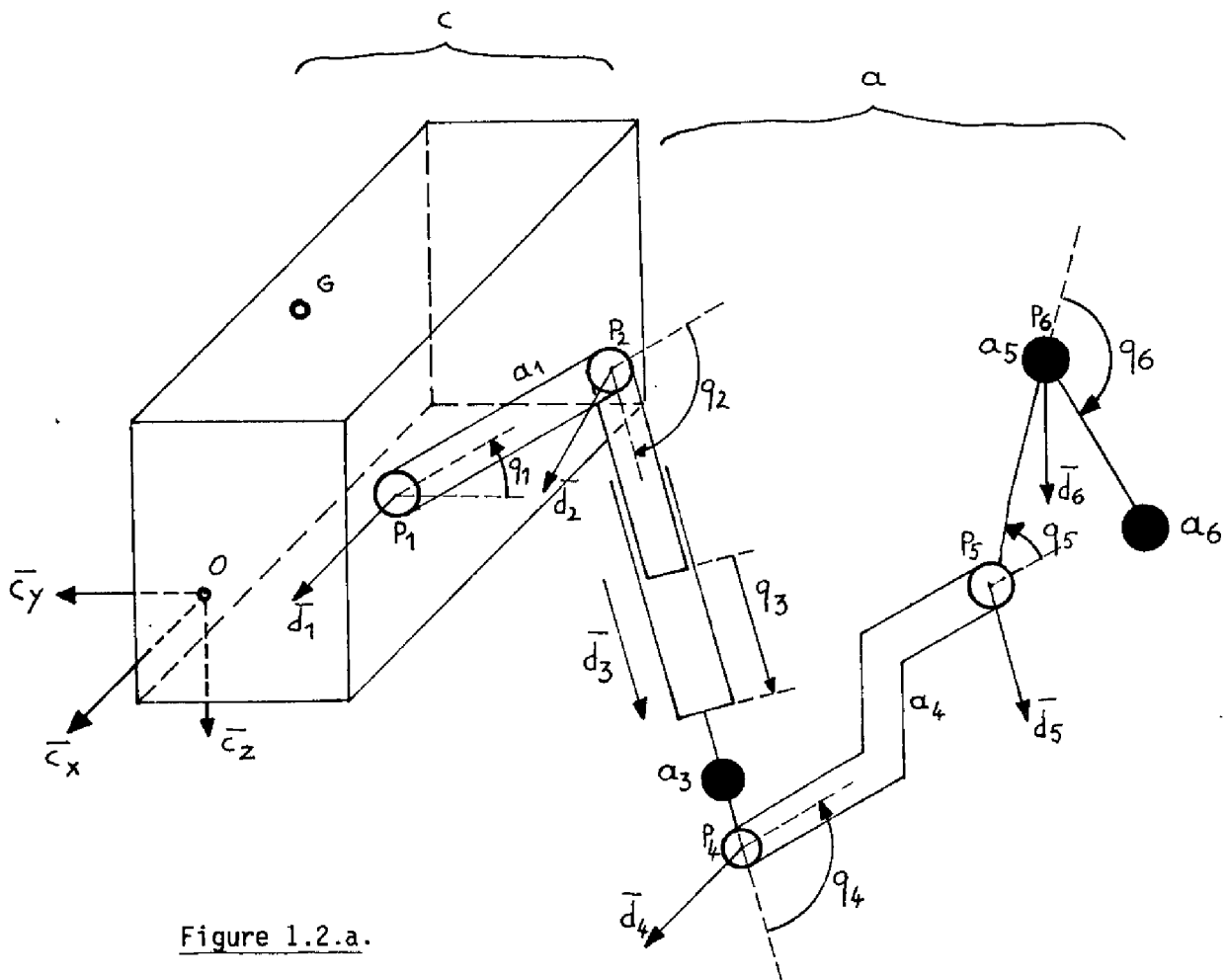


Figure 1.2.a.

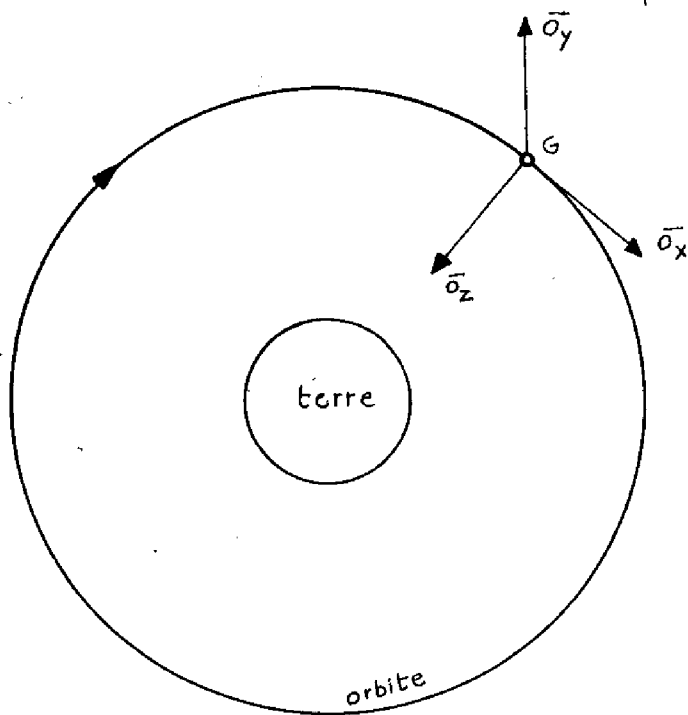


Figure 1.2.b.

Il est clair que la déformation  $j$  influence tous les corps situés en aval ; ceci mène au concept important de "corps généralisé". Par "corps généralisé"  $A_j$ , il faut entendre l'ensemble des corps situés entre  $j$  et la fin de la structure. On a donc  $A_j = a_j \cup a_{j+1} \cup \dots \cup a_N$ .

Ce type de structure déformable est suffisamment générale pour représenter la plupart des phénomènes de déformation.

La position du centre de masse global  $G$  du satellite n'est pas fixe et varie avec les variables de déformation et le temps. On a donc :

$$\overline{OG} = \overline{OG}(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \quad (1.1.)$$

cette fonction est supposée connue à priori.

Considéré dans son environnement, le satellite de la figure 1.2.a. est généralement sur orbite géostationnaire (fig. 1.2.b.). La commande d'attitude vise à faire coïncider le trièdre  $(\overline{c}_x, \overline{c}_y, \overline{c}_z)$  lié au satellite avec le trièdre orbital local  $(\overline{o}_x, \overline{o}_y, \overline{o}_z)$ .

Le passage de  $(\overline{o}_x, \overline{o}_y, \overline{o}_z)$  à  $(\overline{c}_x, \overline{c}_y, \overline{c}_z)$  se fait par :

1. Une rotation d'angle  $\Psi$  autour de  $\overline{o}_z$
2. Une rotation d'angle  $\theta$  autour du nouvel axe X
3. Une rotation d'angle  $\phi$  autour du nouvel axe Y.

On a :

$$(\overline{o}_x, \overline{o}_y, \overline{o}_z) = (\overline{c}_x, \overline{c}_y, \overline{c}_z) R$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} c\Psi c\phi - s\theta s\Psi s\phi & s\Psi c\phi + s\phi c\Psi s\theta & -s\phi c\theta \\ -s\Psi c\theta & c\theta c\Psi & s\theta \\ s\phi c\Psi + c\phi s\theta s\Psi & s\phi s\Psi - c\phi c\Psi s\theta & c\theta c\phi \end{pmatrix}$$

Pour des raisons de commodité, on introduit un repère inertiel  $(I, \overline{i}_x, \overline{i}_y, \overline{i}_z)$  ; la dérivation temporelle dans ce repère sera notée  $\dot{\phantom{x}}$ .

Le mouvement du centre de masse  $G$  obéit aux lois de la mécanique céleste et doit être considéré comme donnée du problème ; donc :

$$\ddot{\overline{IG}} = \ddot{\overline{IG}}(t) \quad \text{donné} \quad (1.2.)$$

Intuitivement, il ressort déjà qu'un satellite déformable est modélisé par un système complexe qui se compose de deux sous-systèmes couplés.

Le premier sous-système représente la "dynamique rigide" ; c'est-à-dire la dynamique du satellite global, toute déformation étant gelée.

Le second sous-système représente la "dynamique déformable" ; c'est-à-dire la dynamique des déformations, le corps principal étant fixe.

La mise en équation est basée sur cette décomposition. Pour chaque sous-système, un groupe d'équations sera obtenu.

Les équations de la dynamique rigide se déduisent du théorème du moment cinétique appliquée à l'ensemble du satellite.

Pour la dynamique déformable, la démarche utilisée est moins classique. Elle consiste à écrire dans le repère non inertiel  $(O, \bar{C}_x, \bar{C}_y, \bar{C}_z)$  les équations de LAGRANGE de l'appendice déformable. Le formalisme lagrangien a été retenu car il s'adapte très bien aux systèmes déformables [WIL].

Deux groupes d'équations sont ainsi obtenus formant une représentation mi-eulérienne, mi-lagrangienne du système. La formulation lagrangienne globale du problème s'en déduit aisément.

Avant d'aborder la mise en équations proprement dite, au préalable, nous présenterons deux lemmes. Le premier donne les équations de LAGRANGE écrites dans un repère non inertiel. Le second étudie une structure déformable fondamentale. A l'aide de ces lemmes, la mise en équation est presque immédiate.

### 1.2.1. Lemmes

#### Lemme 1.2.1.1.

Soit une masse  $m$  située au point  $M$ , soumise à des forces de résultante  $\bar{F}$ . Soient  $\dot{\bar{O}M}$  la dérivée temporelle absolue de  $\bar{O}M$  dans le repère inertiel  $(I, \bar{i}_x, \bar{i}_y, \bar{i}_z)$  et  $\overset{\circ}{\bar{O}M}$  la dérivée temporelle relative de  $\bar{O}M$  dans le repère non inertiel  $(O, \bar{C}_x, \bar{C}_y, \bar{C}_z)$ . Soit  $\bar{\omega}$  le vecteur de rotation

instantané du trièdre  $(\bar{C}_x, \bar{C}_y, \bar{C}_z)$ . La loi fondamentale de la mécanique :

$$m \ddot{\bar{M}} = \bar{F}$$

peut encore s'écrire dans le repère non inertiel :

$$m \ddot{\bar{O}M} = \bar{F} + \bar{F}^{in}$$

avec

$$\bar{F}^{in} = -m \left[ 2 \bar{\omega} \times \dot{\bar{O}M} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{O}M + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{O}M) + \ddot{\bar{O}} \right] \quad (1.3.)$$

$\bar{F}^{in}$  sera appelé "force d'inertie".

On définit l'énergie cinétique relative de la particule par

$$T^{re} = \frac{1}{2} m \left\| \dot{\bar{O}M} \right\|^2 \quad (1.4.)$$

Soient  $q_j$  les coordonnées généralisées repérant la position de la masse dans le repère  $(0, \bar{C}_x, \bar{C}_y, \bar{C}_z)$ . Dès lors, on déduit facilement que le mouvement est décrit par

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{re}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T^{re}}{\partial q_j} = f_j + f_j^{in} \quad (1.5.a.)$$

avec

$$f_j = \bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{O}M}{\partial q_j} \quad (1.5.b.)$$

$$f_j^{in} = \bar{F}^{in} \cdot \frac{\partial \bar{O}M}{\partial q_j} \quad (1.5.c.)$$

$f_j$  est une force généralisée classique ;  $f_j^{in}$  sera appelé force généralisée d'inertie.

Ainsi, les équations de LAGRANGE peuvent être utilisées avec l'énergie cinétique relative, vue dans un repère non inertiel, à condition d'ajouter au second membre un terme correctif appelé "force généralisée d'inertie".

Lemme 1.2.1.2.

Ce lemme donne l'expression du moment cinétique et de l'énergie cinétique d'une structure fondamentale composée de trois corps interconnectés.

Soient  $\gamma$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  trois corps interconnectés (figure 1.3.). Les corps généralisés sont définis par  $A_1 = \alpha_1 \cup \alpha_2$  et  $A_2 = \alpha_2$ .  $(\Omega, \bar{y}_x, \bar{y}_y, \bar{y}_z)$  est un repère orthonormé rigidement lié à  $\gamma$  ; la dérivation temporelle dans ce repère est notée  $\theta$ .

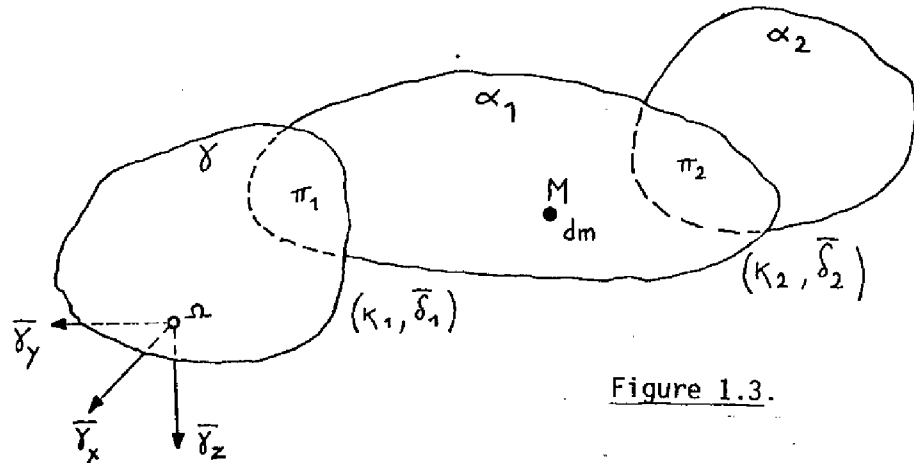


Figure 1.3.

1 et 2 sont des translations ou des rotations. Elles sont caractérisées par les variables  $K_1, K_2$  et par les vecteurs  $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2$  de la même manière que précédemment. Si  $i$  est une rotation,  $\pi_i$  est un point quelconque sur la charnière  $\bar{\delta}_i$ .

Soit  $dm$  une masse élémentaire localisée au point  $M$ .

Dans le repère  $(\Omega, \bar{y}_x, \bar{y}_y, \bar{y}_z)$ , le moment cinétique total par rapport à  $\Omega$  est

$$\bar{H}^\Omega = \int_{\gamma \cup \alpha_1 \cup \alpha_2} (\bar{\Omega} M \times \bar{\Omega} M) dm$$

et l'énergie cinétique totale est

$$T^\Omega = \frac{1}{2} \int_{\gamma \cup \alpha_1 \cup \alpha_2} \|\bar{\Omega} M\|^2 dm$$

Quelle que soit la nature des déformations 1 et 2, le moment cinétique et l'énergie cinétique de la structure peuvent se mettre sous la forme générale :

$$\bar{H}^\Omega = (\bar{y}_x \bar{y}_y \bar{y}_z) \begin{pmatrix} M_{x1} & M_{x2} \\ M_{y1} & M_{y2} \\ M_{z1} & M_{z2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{K}_1 \\ \dot{K}_2 \end{pmatrix}$$

$$T^{\Omega} = \frac{1}{2} (\dot{K}_1 \dot{K}_2) \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{K}_1 \\ \dot{K}_2 \end{pmatrix}$$

Les M et les  $M_0$  sont des moments généralisés qui s'expriment aisément sous forme condensée. En effet, soient

$\bar{\eta}$  = vecteur quelconque

$$i=1,2 \begin{cases} \bar{V}_i(\bar{\eta}) \triangleq \bar{\delta}_i \times \bar{\eta} & \text{si } i = \text{rotation} \\ \bar{V}_i(\bar{\eta}) \triangleq \bar{\delta}_i & \text{si } i = \text{translation} \end{cases}$$

$$w = x, y, z \quad \bar{V}_w(\bar{\eta}) \triangleq \bar{c}_w \times \bar{\eta}$$

dès lors

$$M_{Wj} = \int_{A_j} \bar{V}_w(\bar{\Omega M}) \cdot \bar{V}_j(\bar{\Pi_j M}) \, dm \quad (1.6.a.)$$

$$(i \neq j) \quad M_{ij} = \int_{A_j} V_j(\bar{\Pi_j M}) \cdot V_i(\bar{\Pi_i M}) \, dm \quad (M_{ij} = M_{ji}) \quad (1.6.b.)$$

Etant basés sur du calcul vectoriel élémentaire, ces résultats sont admis sans démonstration. L'essentiel est de noter les analogies entre les moments M et  $M_0$ .

### 1.2.2. Théorème du moment cinétique

Soient

$$\begin{aligned} \bar{H}^O &= \int_E (\overline{OM} \times \dot{\overline{OM}}) \, dm \\ \bar{H}^G &= \int_E (\overline{GM} \times \dot{\overline{GM}}) \, dm \end{aligned}$$

les moments cinétiques totaux du satellite par rapport à O et G respectivement ; on a :

$$\bar{H}^G = \bar{H}^O - m (\overline{GO} \times \dot{\overline{GO}}) \quad (1.7.)$$

où m désigne la masse totale du satellite.

Le moment cinétique total du satellite par rapport à 0 est manifestement une fonction linéaire en  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, q_1, \dots, q_N$  ; donc

$$\bar{H}^0 = (\bar{c}_x \bar{c}_y \bar{c}_z) \left( A_{rr} \mid A_{rd} \right) \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix} \quad (1.8.)$$

où

$A_{rr}$  : matrice d'inertie totale du satellite dans le repère  $(0, \bar{c}_x, \bar{c}_y, \bar{c}_z)$ .

$A_{rd}$  : matrice de moments généralisés des corps de l'appendice par rapport aux axes C et d. Ainsi, en vertu du lemme 1.2.1.2.

$$(A_{rd})_{wj} = \int_{A_j} \bar{V}_w(\overline{OM}) \cdot \bar{V}_j(\overline{P_jM}) \, dm$$

Les matrices  $A_{rr}$  et  $A_{rd}$  sont toutes deux fonction des variables de déformation  $q_1, q_2, \dots, q_N$ .

Le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\dot{\bar{H}}^G = \bar{L} \quad (1.9.)$$

où  $\bar{L}$  est le moment par rapport à G de la résultante des forces extérieures.

De (1.9.) et (1.7.), on tire

$$\dot{\bar{H}}^0 + \bar{\omega} \times \bar{H}^0 = m(\overline{OG} \times \overline{OG}^{\circ\circ}) - m\overline{OG} \times [\dot{\bar{\omega}} \times \overline{OG} + 2\bar{\omega} \times \overline{OG}^{\circ} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OG})] = \bar{L} \quad (1.10.)$$

C'est le premier groupe d'équations décrivant la dynamique rigide. En effet, ces équations peuvent être considérées comme celles d'un système de variables de configuration  $\underline{\omega}$ , excité par les déformations  $\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \ddot{\underline{q}}$ .

### 1.2.3. Equations de LAGRANGE DES DEFORMATIONS

Ces équations vont former un deuxième groupe décrivant la dynamique déformable. Elles sont obtenues en écrivant, dans le repère  $(0, \bar{c}_x, \bar{c}_y, \bar{c}_z)$ , les équations de LAGRANGE des déformations de l'appendice (lemme 1.2.1.1.).



L'énergie cinétique relative, vue dans le repère  $(0, \overline{C}_x, \overline{C}_y, \overline{C}_z)$ , de l'appendice déformable est

$$T_a^{re} = \frac{1}{2} \int_a \left\| \overrightarrow{OM} \right\|^2 dm \quad (1.11.)$$

Cette énergie cinétique relative est manifestement une forme quadratique des variables  $q_1, q_2, \dots, q_N$ .

Elle prend donc la forme

$$T_a^{re} = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dots \dot{q}_N) A_{dd} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix} \quad (1.12.)$$

$A_{dd}$  sera appelé matrice d'énergie cinétique relative de l'appendice. Chaque élément est fonction des variables de déformation et peut se calculer en utilisant (1.6.b.) du lemme 2. Ainsi :

$$\begin{aligned} (A_{dd})_{ij} &= \int_{A_j} \overline{V}_i(\overline{P}_i M) \cdot \overline{V}_j(\overline{P}_j M) dm \quad (i \leq j) \\ (A_{dd})_{ij} &= (A_{dd})_{ji} \end{aligned}$$

Généralement, l'appendice déformable admet une fonction potentielle :

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_N)$$

Ainsi, par exemple, pour modéliser un effet d'élasticité, un potentiel défini positif doit être introduit.

Dès lors, le lagrangien relatif à l'appendice est défini par :

$$L_a^{re}(q_1, q_2, \dots, q_N) = T_a^{re} - V$$

Soit  $W$  une fonction de dissipation :

$$W = W(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$$

cette fonction peut, par exemple, représenter un amortissement structural.

A chaque variable  $q_j$  sont associées les forces généralisées:

$f_j^{co}$  = force généralisée de commande (couple moteur aux articulations par exemple),

$f_j^{ex}$  = force généralisée extérieure (effets de gravitation par exemple),  
 $f_j^{in}$  = force généralisée d'inertie (lemme 1.2.1.1.). De (1.3.), on déduit:  

$$f_j^{in} = - \int_a \left[ 2\bar{\omega} \times \bar{OM} + \ddot{\bar{G}} + \ddot{\bar{O}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{OM} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{OM}) \right] \cdot \frac{\partial \bar{OM}}{\partial q_j} dm \quad (1.13.)$$

Dès lors, les équations de LAGRANGE des déformations s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L_a^{re} - \frac{\partial}{\partial q_j} L_a^{re} + \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} = f_j^{co} + f_j^{ex} + f_j^{in} \quad (1.14.)$$

Ce second groupe d'équations est celui de la dynamique flexible. En effet, ces équations sont celles d'un système de variables de configuration  $q$ , excité par la dynamique rigide ( $\bar{\omega}$  et  $\dot{\bar{\omega}}$ ) et par l'accélération  $\ddot{\bar{G}}$  du centre de masse.

La décomposition du système en une dynamique rigide et une dynamique déformable est illustrée par le graphe de la figure (1.4.).

Ainsi, les équations (1.1.), (1.2.), (1.10.) et (1.14.) forment une description complète du satellite déformable.

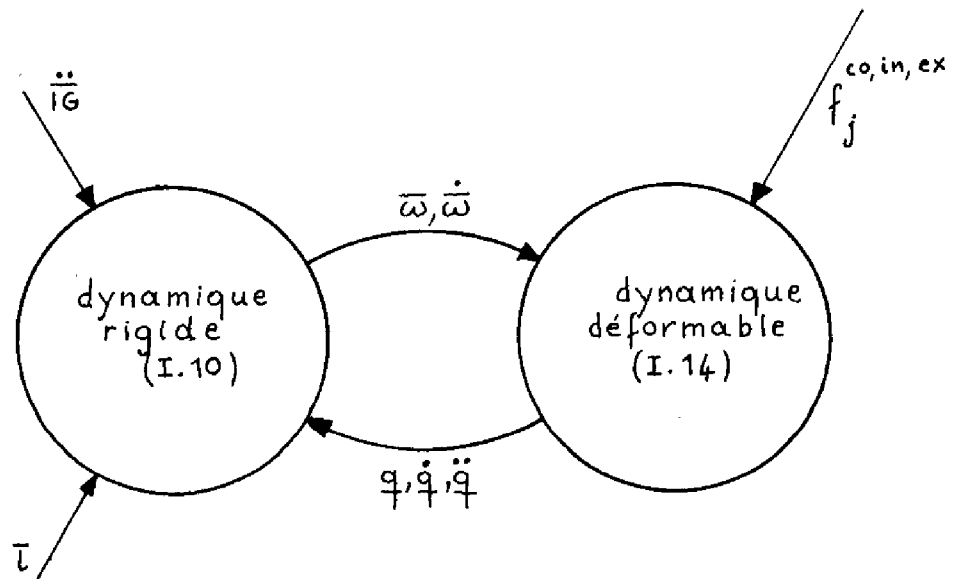


Figure 1.4.

1.2.4. Passage au formalisme lagrangien global

La description ci-dessus est à la fois eulérienne par (1.10.) et lagrangienne par (1.14.). Son principal avantage est de bien mettre en évidence une possibilité de décomposition (fig. 1.4.).

Or, pour un système physique, il est souvent intéressant de disposer de la formulation lagrangienne globale, car il est possible d'en déduire certaines propriétés fondamentales du système. En fait, la formulation proposée mène aisément à une formulation quasi-lagrangienne globale.

En effet, l'énergie cinétique totale du satellite déformable est :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_t \left\| \dot{\overline{IM}} \right\|^2 dm \\ &= \frac{1}{2} m \left\| \dot{IG} \right\|^2 - \frac{1}{2} m \left\| \dot{GO} \right\|^2 + T^o \end{aligned} \quad (1.15.)$$

avec

$$T^o = \frac{1}{2} \int_t \left\| \dot{OM} \right\|^2 dm$$

$T^o$  est l'énergie cinétique totale par rapport au point 0. Cependant,  $T^o$  s'exprime aisément en fonction des matrices introduites dans la formulation euléro-lagrangienne. Ainsi, une conséquence du lemme 2 est :

$$T^o = \frac{1}{2} \left( \underline{\omega}^T \quad \underline{\dot{q}}^T \right) A^o \begin{pmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{\dot{q}} \end{pmatrix} \quad (1.16.)$$

avec

$$A^o = \left( \begin{array}{c|c} A_{rr} & A_{rd} \\ \hline A_{rd}^T & A_{dd} \end{array} \right)$$

Le lagrangien total du système est donc :

$$L = \frac{1}{2} m \left\| \dot{IG} \right\|^2 - \frac{1}{2} m \left\| \dot{GO} \right\|^2 + T^o - V \quad (1.17.)$$

et les équations de LAGRANGE associées sont :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega_w} L = \left( \bar{\ell} \right)_{c_w} \quad (1.18.a.)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L + \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} = f_j^{co} + f_j^{ex} \quad (1.18.b.)$$

Manifestement, les équations (1.18.a.) et (1.18.b.) doivent respectivement être équivalentes à (1.10.) et (1.14.). On en déduit que la partie de  $f^{in}$  proportionnelle à  $\underline{\dot{\omega}}$  est  $-A_{rd}^T$  ; donc :

$$f^{in} = -A_{rd}^T \underline{\dot{\omega}} + \dots$$

Il faut remarquer que la formulation obtenue n'est pas, strictement parlant, lagrangienne ; elle n'est que quasi-lagrangienne [WHI]. En effet, l'expression (1.16.) de l'énergie cinétique renferme  $\underline{\omega}$  et non les dérivées  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$  des coordonnées lagrangiennes vraies. Une expression typiquement lagrangienne de l'énergie cinétique sera obtenue après avoir exprimé dans (1.16.)  $\underline{\omega}$  en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$ . D'autre part, (1.18.a.) ne sont pas des équations de LAGRANGE vraies ; ce sont en fait des équations de LAGRANGE en quasi-coordonnées [WHI].

### 1.3. SATELLITE AVEC DEUX PANNEAUX DEFORMABLES ; PROPRIETES FONDAMENTALES

Le cas particulier sur lequel notre attention sera exclusivement portée est celui du satellite composé d'un corps principal massif et de deux panneaux déformables disposés symétriquement autour du corps principal (fig. 2).

Le satellite étant sur orbite géostationnaire, la courbure de la trajectoire de son centre de masse G est très faible. Aussi, il est légitime de négliger l'accélération  $\ddot{\underline{IG}}$  de ce centre de masse ainsi que la rotation instantanée du trièdre orbital local.

De manière plus précise, on considèrera un intervalle de temps suffisamment court pour que les deux approximations ci-dessus soient valables.

Les effets de gradient de gravitation seront également négligés.

Une étude de ce satellite en présence d'excitations montre que le premier mode de flexion antisymétrique des panneaux est le plus important [POE]. Aussi, tous les développements ultérieurs seront restreints à ce type de déformations.

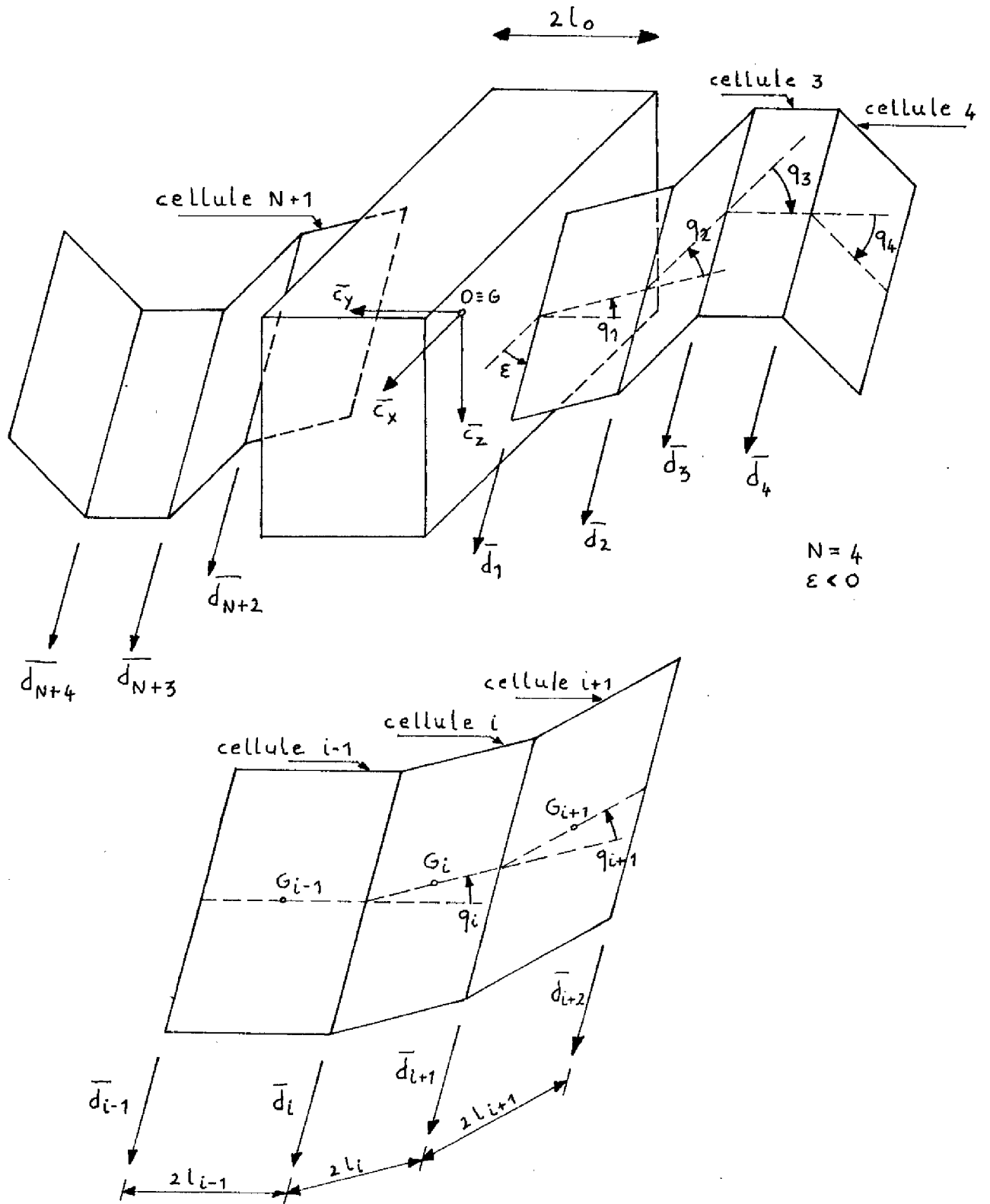


Figure 1.5.

Cette restriction, jointe aux évidentes propriétés de symétrie du satellite, en simplifie l'étude. En effet, dans ce cas, le centre de masse global  $G$  reste fixe par rapport au corps principal et il est commode de poser  $O \equiv G$ . Une autre simplification réside dans le fait que le nombre de degrés de liberté de déformation est divisé par deux.

Dans le modèle utilisé, un ensemble polyarticulé de cellules rigides élémentaires sera choisi comme approximation de chaque panneau (fig. 1.5.). Chaque cellule  $i$  est homogène ;  $G_i$ ,  $2l_i$  ( $> 0$ ) et  $m_i$  ( $> 0$ ) représentent respectivement son centre de masse, sa longueur et sa masse.  $I_i$  est son moment d'inertie par rapport à l'axe passant par  $G_i$  et parallèle aux charnières. Les cellules subissent seulement des rotations relatives et toutes les charnières sont parallèles. Entre les corps  $i-1$  et  $i$  s'exerce un couple de rappel  $-k_i q_i$  où  $k_i$  ( $> 0$ ) désigne la constante de raideur.

La matrice d'inertie du corps principal dans  $(G, \bar{C}_x, \bar{C}_y, \bar{C}_z)$  est :

$$I_c = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.19.)$$

Ce modèle, bien que simplifié, est cependant suffisamment général. En effet, il peut représenter soit une flexion due à des effets d'élasticité dans les panneaux, soit des phénomènes de non rigidité dans les interconnections de deux sous-panneaux consécutifs.

Ce modèle de la figure 1.5., avec les approximations décrites ci-dessus, sera donc définitivement adopté par la suite. Bien entendu, ce système peut être mis en équation en utilisant le formalisme proposé dans 1.2.

Ce paragraphe a donc défini, dans un premier temps, le modèle qui sera utilisé. Il se propose, ensuite, de donner les fondements physiques de ce modèle et d'en déduire immédiatement les propriétés fondamentales. Ainsi, les problèmes de commandabilité et d'observabilité

seront abordés, non pas après avoir explicité toutes les équations, mais en montrant que ces propriétés sont des conséquences immédiates du caractère lagrangien du modèle.

Le système de la figure 1.5. possède N+3 degrés de liberté:  $\theta, \phi, \psi, q_1, \dots, q_N$ . Avec un léger abus de langage,  $\theta, \phi, \psi$  seront appelés "variables rigides" (indice r) et  $q_1, q_2, \dots, q_N$  "variables de déformation" (indice d). On notera :

$$\begin{pmatrix} x_r \\ x_d \end{pmatrix} = x = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \\ q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$$

Le système est complètement décrit par l'expression de son lagrangien global :

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^T A(q) \dot{x} - \frac{1}{2} x^T B x \quad (1.20.)$$

$A(q)$  est la matrice (symétrique) d'énergie cinétique totale du système. Vu que  $0 \equiv G$ , l'indice 0 apparaissant dans (1.16.) peut être supprimé sans risque de confusion ; donc :

$$A(q) = \begin{bmatrix} A_{rr}(q) & A_{rd}(q) \\ A_{rd}^T(q) & A_{dd}(q) \end{bmatrix}$$

$B$  est la matrice symétrique semi-définie positive de potentiel :

$$\begin{pmatrix} B_{rr} & B_{rd} \\ B_{dr} & B_{dd} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|c} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \hline \circ & & & \begin{matrix} k_1 \circ \\ \vdots \\ \circ \dots k_N \end{matrix} \end{array} \right) = B \geq 0$$

$l_\theta, l_\phi$  et  $l_\psi$  sont les forces généralisées associées à  $\theta, \phi$  et  $\psi$  ; c'est-à-dire les couples exercés respectivement autour de  $\bar{c}_x, \bar{c}_y, \bar{c}_z$ . Ce seront les seuls couples considérés.

Le hamiltonien du système s'écrit :

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^T A(q) \dot{x} + \frac{1}{2} x^T B x \quad (1.21.)$$

En s'appuyant sur cette formulation lagrangienne, les considérations suivantes peuvent être faites.

Théorème 1.3.1.  $A(q) > 0 \quad \forall q$

En effet, dans le cas contraire, aux alentours de la configuration  $x$ , il existerait un mouvement  $\dot{x}$  auquel correspondrait une énergie cinétique nulle. Ce qui est physiquement inadmissible pour le modèle posé.

Corollaire 1.3.2.  $A(0) > 0$

Remarque 1.3.3.

Le modèle linéarisé autour de  $x = 0$  du satellite déformable est aussi un système lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \dot{x}) &= \frac{1}{2} \dot{x}^T A(0) \dot{x} - \frac{1}{2} x^T B x \\ \mathcal{H}(x, \dot{x}) &= \frac{1}{2} \dot{x}^T A(0) \dot{x} + \frac{1}{2} x^T B x \end{aligned}$$

Le mouvement libre du système lagrangien est donné par :

$$A(0) \ddot{x} + B x = 0 \quad (1.22.)$$

Théorème 1.3.4.

Le modèle linéarisé (1.22.) du satellite déformable possède un pôle d'ordre 6 à l'origine et  $N$  paires de pôles ( $\pm j \omega_k$  ;  $k = 1, \dots, N$ ;  $\omega_k$  réel  $> 0$ ) sur l'axe imaginaire. De plus, la matrice  $A^{-1}(0)B$  est diagonalisable.

En effet, en posant  $z = A(0)x$  l'équation (1.22.) donne  $\ddot{z}_1=0, \ddot{z}_2=0, \ddot{z}_3=0$  ; c'est-à-dire trois intégrateurs, ce qui donne 6 pôles à l'origine.

D'autre part, de (1.22.) on déduit :

$$\ddot{x} + \left( \begin{array}{c|c} 0 & -A_{rr}^{-1} A_{rd} (A_{dd} - A_{rd}^T A_{rr}^{-1} A_{rd})^{-1} B_{dd} \\ \hline 0 & (A_{dd} - A_{rd}^T A_{rr}^{-1} A_{rd})^{-1} B_{dd} \end{array} \right) x = 0$$



la régularité des matrices à inverser découle de la propriété "définie positive" de  $A(0)$ . Cette nouvelle forme de (1.22.) permet d'en isoler la partie déformable :

$$(A_{dd} - A_{rd}^T A_{rr}^{-1} A_{rd}) \ddot{q} + B_{dd} \dot{q} = 0 \quad (1.23.)$$

Ce système (1.23.) possède une constante du mouvement :

$$\mathcal{H}_d(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T (A_{dd} - A_{rd}^T A_{rr}^{-1} A_{rd}) \dot{q} + \frac{1}{2} q^T B_{dd} q = \text{cste}$$

Le polynôme caractéristique de (1.23.) montre que si  $s$  est un pôle,  $-s$  est aussi un pôle. Dès lors, si (1.23.) n'a pas tous ses pôles sur l'axe imaginaire, il existerait au moins un pôle instable, ce qui violerait  $\mathcal{H}_d(q, \dot{q}) = \text{constante}$ , vu que  $B_{dd} > 0$ .

Le polynôme caractéristique de (1.23.) donne les  $N$  paires de pôles ( $\pm j \omega_k$  ;  $k=1, \dots, N$  ;  $\omega_k$  réel  $> 0$ ) restantes de (1.22.).

La matrice  $A^{-1}(0)B$  est diagonalisable. En effet, dans le cas contraire, la forme canonique de cette matrice posséderait un bloc de JORDAN sur la diagonale et la solution de (1.23.) contiendrait un séculaire (terme du genre  $q_k t^{\ell} e^{j\omega_k t}$ ). Vu que  $B_{dd} > 0$ , ceci serait de nouveau incompatible avec  $\mathcal{H}_d(q, \dot{q}) = \text{constante}$ .

#### Corollaire 1.3.5.

La matrice  $A^{-1}(0)B$  possède une valeur propre triple à l'origine et  $N$  valeurs propres réelles positives ( $\omega_k^2$  ;  $k=1, \dots, N$  ;  $\omega_k$  réel  $> 0$ ).

#### Théorème 1.3.6.

Le modèle linéarisé (1.22.) du satellite déformable est complètement commandable par  $(l_\theta, l_\phi, l_\psi)$ .

Le système (1.22.) ayant tous ses pôles sur l'axe imaginaire, il suffit de montrer qu'il est stabilisable par  $(l_\theta, l_\phi, l_\psi)$ .

En effet, les équations du système (1.22.) forcé sont :

$$A(0) \ddot{x} + Bx = \begin{pmatrix} L_\theta \\ L_\phi \\ L_\psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.24.)$$

La contre-réaction linéaire :

$$\begin{aligned} L_\theta &= -\mu_\theta \theta - \lambda_\theta \dot{\theta} \\ L_\phi &= -\mu_\phi \phi - \lambda_\phi \dot{\phi} \\ L_\psi &= -\mu_\psi \psi - \lambda_\psi \dot{\psi} \end{aligned} \quad \mu, \lambda > 0 \quad (1.25.)$$

revient d'une part à compléter le potentiel (c'est-à-dire à le rendre défini positif) et à introduire des amortissements. En effet, le système bouclé est :

$$A(0) \ddot{x} + B_c x = \begin{pmatrix} -\lambda_\theta \dot{\theta} \\ -\lambda_\phi \dot{\phi} \\ -\lambda_\psi \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.26.)$$

avec

$$B_c = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \mu_\theta & 0 & 0 & & & \\ 0 & \mu_\phi & 0 & & & \\ 0 & 0 & \mu_\psi & & & \\ \hline & & & \bigcirc & & \\ & & & & k_1 & 0 \\ & & & & 0 & k_N \end{array} \right) > 0$$

Etant donné que le potentiel  $B_c$  est défini positif, le système bouclé (1.26.) n'a qu'une seule position d'équilibre stable 0. Montrons qu'elle est asymptotiquement stable.

Le hamiltonien du système bouclé (1.26.) est

$$\mathcal{H}_c(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^T A(0) \dot{x} + \frac{1}{2} x^T B_c x$$

Manifestement,  $\mathcal{H}_c$  est défini positif. D'autre part, la dérivée du hamiltonien le long de la solution de (1.26.) est :

$$\dot{\mathcal{H}}_c = -\frac{1}{2} (\lambda_\psi \dot{\psi}^2 + \lambda_\theta \dot{\theta}^2 + \lambda_\phi \dot{\phi}^2)$$

$\dot{\mathcal{H}}_c$  n'est que semi-défini négatif. Néanmoins, il n'existe aucune trajectoire de (1.26.) le long de laquelle  $\dot{\mathcal{H}}_c$  est identiquement nul ; autrement dit, l'amortissement dans (1.26.) est complet [WIL]. Ceci est démontré dans l'annexe A.

Dès lors, le système bouclé (1.26.) est asymptotiquement stable en vertu du théorème de KELVIN-TAIT-CHETAEV [KRA]. (1.24.) est donc stabilisable par  $(L_\theta L_\phi L_\psi)$ . Le modèle linéarisé (1.22.) du satellite déformable est donc complètement commandable par  $(L_\theta L_\phi L_\psi)$ .

Lemme 1.3.7.

L'observabilité d'un système linéaire n'est pas affectée si, à partir des variables de sortie disponibles, une rétroaction linéaire sans mémoire est faite.

C'est une conséquence immédiate de la propriété :

$$(\emptyset, H) \text{ observable} \implies (\emptyset + KH, H) \text{ observable} \quad \forall K$$

Théorème 1.3.8.

Le modèle linéarisé (1.22.) est complètement observable par  $(\theta \phi \Psi)$ .

Pour cela, on montre que :

$$A(0) \ddot{x} + B_c x = 0 \tag{1.27.}$$

est observable par  $(\theta \phi \Psi)$  ; ce nouveau système (1.27.) étant obtenu à partir du premier, (1.22.), en effectuant une contre-réaction avec les variables rigides qui sont disponibles.

La propriété "définie positive" de  $A(0)$  et de  $B_c$  impose au système (1.27.) d'avoir tous ses pôles sur l'axe imaginaire pour les mêmes raisons que celles invoquées dans le théorème 1.3.4. Il suffit dès lors de prouver que (1.27.) est détectable par  $(\theta \phi \Psi)$ .

La démonstration procède par dualité. Par définition, le système lagrangien dual de (1.27.) est, après avoir ajouté les forces généralisées

$$B_c^{-1} \ddot{x} + A^{-1}(0) x = \begin{pmatrix} L_\theta \\ L_\phi \\ L_\psi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.28.}$$

Il est aisé de voir que ce système possède toutes les propriétés du primal (1.27.). En particulier, son potentiel est défini positif et, de plus, il ressort de l'annexe A que

$$\begin{aligned} L_\theta &= -\lambda_\theta \dot{\theta} \\ L_\phi &= -\lambda_\phi \dot{\phi} \\ L_\psi &= -\lambda_\psi \dot{\psi} \end{aligned} \quad (1.29.)$$

est aussi un amortissement complet pour (1.28.). Le dual (1.28.) est donc stabilisable par  $(L_\theta \ L_\phi \ L_\psi)$ . La paire

$$\left( \begin{array}{c|c} O_{3+N} & I_{3+N} \\ \hline -B_c A^{-1}(0) & O_{3+N} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} 0 \\ \hline I_3 \\ 0 \end{array} \right)$$

est donc stabilisable ; il s'ensuit que

$$\left( \begin{array}{c|c} O_{3+N} & I_{3+N} \\ \hline -A^{-1}(0)B_c & O_{3+N} \end{array} \right) \quad \left( I_3 \mid 0 \mid 0 \right)$$

est une paire détectable. Ce qui veut dire que le primal (1.27.) est détectable par  $(\theta \ \phi \ \psi)$ . Le modèle linéarisé (1.22.) du satellite déformable est donc complètement observable par  $(\theta \ \phi \ \psi)$ .

Les problèmes d'observabilité et de commandabilité ont été traités récemment par OHKANI et LIKINS [OHK] en utilisant explicitement la méthode de KALMAN ; ce qui, hélas, obscurcit l'aspect physique du problème.

#### 1.4. STRUCTURE GENERALE DES MODELES LINEARISES

Ce paragraphe étudie, sous certains aspects, la structure des modèles linéarisés. Plus particulièrement, une expression générale et pratique de la fonction de transfert et de la représentation d'état est déduite.

Pour alléger les rotations, il ne sera plus écrit explicitement que les matrices sont calculées pour  $q=0$  : ainsi A représentera en fait  $A(0)$ .

Les équations de LAGRANGE (1.14.) des déformations s'écrivent, après linéarisation :

$$A_{dd} \ddot{q} + B_{dd} q = -A_{rd}^T \dot{\omega} \quad (1.30.)$$

Les panneaux déformables constituent donc un système oscillant excité par  $\dot{\omega}$ .

Le théorème du moment cinétique (1.10.) donne, après linéarisation :

$$A_{rr} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + A_{rd} \ddot{q} = \begin{pmatrix} l_{\theta} \\ l_{\phi} \\ l_{\psi} \end{pmatrix} \quad (1.31.)$$

Le sous-système "rigide" est donc un ensemble de 3 intégrateurs excités par les déformations  $\ddot{q}$ .

Le regroupement de (1.30.) et (1.31.) permet de retrouver :

$$A \ddot{x} + B x = \begin{pmatrix} l_{\theta} \\ l_{\phi} \\ l_{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.32.)$$

Ce système est à mettre sous forme canonique. Pour cela, il faut se rappeler que  $A^{-1}B$  est diagonalisable.

Dès lors, vu le corollaire 1.3.5.,  $A^{-1}B$  possède 3 valeurs propres nulles. En remarquant que les 3 premières colonnes de  $A^{-1}B$  sont nulles, on peut choisir comme vecteurs propres correspondants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire trois vecteurs propres indépendants.

Les  $N$  autres valeurs propres de  $A^{-1}B$  sont  $\neq 0$ . Soit  $S$  la matrice des  $N+3$  vecteurs propres indépendants :

$$S = \left( \begin{array}{c|c} I_3 & S_{rd} \\ \hline 0 & S_{dd} \end{array} \right)$$

Il est légitime d'écrire :

$$A^{-1}B = S \left( \begin{array}{c|c} 0_3 & 0 \\ \hline 0 & \Omega^2 \end{array} \right) S^{-1} \quad (1.33.)$$

avec

$$\Omega^2 \triangleq \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \omega_N^2 \end{pmatrix}$$

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  sont appelés "fréquences propres globales du satellite déformable".

Après la transformation  $x = S y$ , (1.32.) devient

$$\ddot{y} + \left( \begin{array}{c|c} 0_3 & 0 \\ \hline 0 & \Omega^2 \end{array} \right) y = S^{-1} A^{-1} \begin{pmatrix} l_\theta \\ l_\phi \\ l_\psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.34.)$$

Or

$$S^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} I_3 & -S_{rd} S_{dd}^{-1} \\ \hline 0 & S_{dd}^{-1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} I_3 & A_{rr}^{-1} A_{rd} \\ \hline 0 & S_{dd}^{-1} \end{array} \right)$$

et

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} (A_{rr} - A_{rd} A_{dd}^{-1} A_{rd}^T)^{-1} & S_{rd} \Omega^2 S_{dd}^{-1} B_{dd}^{-1} \\ \hline B_{dd}^{-1} S_{dd}^{-T} \Omega^2 S_{rd}^T & (A_{dd} - A_{rd}^T A_{rr}^{-1} A_{rd})^{-1} \end{array} \right)$$

la régularité des matrices intervenant dans les blocs diagonaux est conséquence du fait que A est définie positive.

Dès lors :

$$\ddot{y} + \left( \begin{array}{c|c} 0_3 & 0 \\ \hline 0 & \Omega^2 \end{array} \right) y = \left( \begin{array}{c|c} A_{rr}^{-1} & \\ \hline S_{dd}^{-1} B_{dd}^{-1} S_{dd}^{-T} \Omega^2 S_{rd}^T & \end{array} \right) \begin{pmatrix} l_\theta \\ l_\phi \\ l_\psi \end{pmatrix} \quad (1.35.)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} I_3 & S_{rd} \end{array} \right) y$$

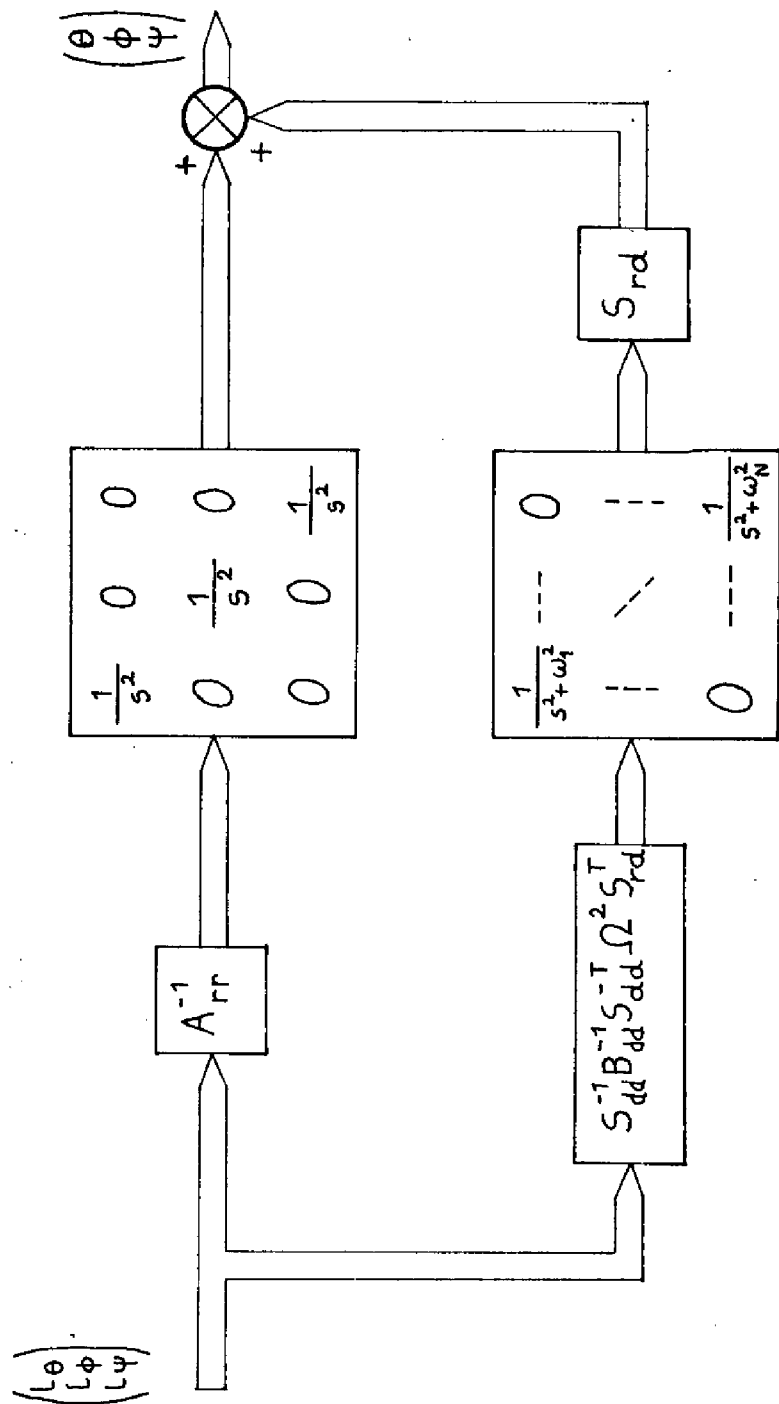


Figure 1.6

Ce qui est très près de la représentation d'état du système.

La fonction de transfert se tire aisément : de (1.35.), une représentation en est donnée figure 1.6.

Il convient de remarquer tout particulièrement les trois intégrateurs et les N oscillateurs en parallèle.

### ANNEXE A

On démontre que l'amortissement dans les équations (1.26.) est complet [WIL].

Pour cela, on démontre que la seule solution de (1.26.) le long de laquelle  $\dot{\theta} \equiv 0$ ,  $\dot{\phi} \equiv 0$  et  $\dot{\psi} \equiv 0$  est la solution identiquement nulle.

Cette propriété est due, d'une part, à l'antisymétrie du mouvement des panneaux et, d'autre part, à l'existence d'un rappel élastique sur toutes les charnières.

Pour s'en apercevoir, considérons la figure 1.5. Soit un mouvement propre pour lequel le corps principal reste immobile :  $\dot{\theta} \equiv 0$ ,  $\dot{\phi} \equiv 0$  et  $\dot{\psi} \equiv 0$ . Montrons que cela implique  $\dot{q}_1 \equiv 0$ ,  $\dot{q}_2 \equiv 0, \dots, \dot{q}_N \equiv 0$ .

En effet, une raideur étant associée aux charnières  $\overline{d}_1$  et  $\overline{d}_{N+1}$ , il s'ensuit que tout mouvement propre antisymétrique des panneaux va avoir une réaction sur le corps principal et l'entraîner dans un mouvement de rotation. Donc pour que le corps principal reste immobile, il faut que les panneaux 1 et N+1 soient immobiles ; c'est-à-dire  $\dot{q}_1 \equiv 0$ .

Soient donc le corps principal et les panneaux 1 et N+1 immobiles. Considérons les charnières  $\overline{d}_2$  et  $\overline{d}_{N+2}$ . Une raideur  $\mathcal{Y}$  étant associée, il faut, pour que l'ensemble formé par le corps principal et les panneaux 1 et N+1 reste immobile, que les panneaux 2 et N+2 le restent aussi. Ce qui implique  $\dot{q}_2 \equiv 0$ .



En poursuivant le même raisonnement, on arrive à  $\dot{q}_3 \equiv 0$ ,  $\dot{q}_4 \equiv 0, \dots$  et enfin  $\dot{q}_N \equiv 0$ .

Donc,  $\dot{\theta} \equiv 0$ ,  $\dot{\phi} \equiv 0$  et  $\dot{\psi} \equiv 0$  impliquent d'abord  $\dot{q} \equiv 0$  et ensuite  $\dot{x} \equiv 0$ . Ce qu'il fallait démontrer.

L'amortissement dans (1.26.) est donc complet. Ceci implique que la matrice  $A^{-1}(0) B_C$  ne peut avoir aucun vecteur propre ayant les trois premières composantes nulles.

Cette propriété de la matrice  $A^{-1}(0) B_C$  implique que l'amortissement (1.29.) est aussi complet pour le système dual (1.28.).



## CHAPITRE 2

---

### ÉTUDE DU SATELLITE DÉFORMABLE DANS LE CAS NON LINÉAIRE

-



Il est généralement admis, à priori, qu'un satellite avec panneaux déformables est décrit de manière satisfaisante par les équations linéarisées du mouvement [POE, GET, LIK, SCHM]. L'expérience pratique semble d'ailleurs démontrer ce fait.

Aussi, l'étude de ce satellite dans le cadre de la théorie des systèmes non linéaires n'a peut-être pas encore été abordée.

Le but de ce chapitre est précisément d'apporter une contribution à cette étude. Néanmoins, comme le problème dans toute sa généralité est très complexe, il a été nécessaire de le restreindre considérablement.

D'abord, le satellite sera considéré avec  $\varepsilon = 0$  (fig. 1.5.) et  $\vartheta = \psi = \dot{\vartheta} = \dot{\psi} = 0$ , ce qui permet de considérer uniquement la dynamique autour de l'axe de roulis  $\overline{C}_x$ .

Ensuite, seules les petites oscillations libres, autour d'une certaine configuration, seront considérées. Les développements n'iront que jusqu'au 3ème ordre.

Enfin, l'étude sera faite d'une part sur le cas : 1 mode (N=1) au paragraphe 2.1. et d'autre part sur le cas : 2 modes (N=2) au paragraphe 2.2.

La principale contribution est l'étude de deux oscillateurs couplés par des non linéarités d'ordre 3 (2.2.). La méthode de la récurrence associée de BIRKHOFF est utilisée.

Bien que cette analyse non linéaire ne porte que sur quelques cas très restreints, des conclusions générales et pratiques se profilent. Elles sont exposées dans le troisième paragraphe qui dresse le bilan de ces investigations.

### II.1. SATELLITE 1 MODE

Ce cas est assez trivial ; néanmoins, son étude constitue une excellente introduction au cas 2 modes qui est nettement plus complexe.

Soit donc  $\varepsilon = 0$ ,  $\phi = \psi = \dot{\phi} = \dot{\psi} = 0$  et  $N = 1$  (figure 1.5.). On déduit  $\dot{\theta} = \dot{\omega}_x$ .

En vertu de (1.12.) l'expression de l'énergie cinétique relative de la partie déformable s'écrit :

$$T_{\alpha}^{re} = \frac{1}{2} A_{dd}(q_1) \dot{q}_1^2 \quad (2.1.)$$

avec

$$A_{dd}(q_1) = 2(I_1 + m_1 l_1^2)$$

L'énergie potentielle due aux déformations est

$$V = k_1 q_1^2 = \frac{1}{2} B_{dd} q_1^2 \quad (2.2.)$$

La force généralisée d'inertie associée à  $q_1$  se déduit de (1.13.) et s'écrit :

$$f_1^{in} = -\dot{\omega}_x \left( \frac{8}{3} m_1 l_1^2 + 2 l_0 l_1 m_1 \cos q_1 \right) - \omega_x^2 \left( 2 m_1 l_1 l_0 \sin q_1 \right) \quad (2.3.)$$

(2.1.), (2.2.) et (2.3.) mènent à l'équation de LAGRANGE de la déformation : (voir 1.14.)

$$(I_1 + m_1 l_1^2) \ddot{q}_1 + k_1 q_1 = -\dot{\omega}_x \left( \frac{4}{3} m_1 l_1^2 + l_0 l_1 m_1 \cos q_1 \right) - \omega_x^2 \left( m_1 l_0 l_1 \sin q_1 \right) \quad (2.4.)$$

Le moment cinétique total par rapport à G est :

$$\bar{H} = \left[ \omega_x \left( 2 l_0^2 m_1 + 4 l_0 l_1 m_1 \cos q_1 + J_{xx} + \frac{8}{3} m_1 l_1^2 \right) + \dot{q}_1 \left( 2 l_0 l_1 m_1 \cos q_1 + \frac{8}{3} m_1 l_1^2 \right) \right] \bar{c}_x = H_x \bar{c}_x \quad (2.5.)$$

Dans le cas du mouvement libre, le théorème du moment cinétique mène à :

$$\begin{aligned} & \dot{\omega}_x \left( J_{xx} + 2 l_0^2 m_1 + 4 l_0 l_1 m_1 \cos q_1 + \frac{8}{3} l_1^2 m_1 \right) \\ & + \ddot{q}_1 \left( 2 l_0 l_1 m_1 \cos q_1 + \frac{8}{3} l_1^2 m_1 \right) - 4 l_0 l_1 m_1 \omega_x \dot{q}_1 \sin q_1 \\ & - 2 l_0 l_1 m_1 \sin q_1 \dot{q}_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.6.)$$

L'énergie totale est :

$$E = \frac{1}{2} (\omega_x \dot{q}_1) A \begin{pmatrix} \omega_x \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} + V(q_1) \quad (2.7.)$$

avec, à partir de (1.16.) ;

$$A = \left( \begin{array}{c|c} J_{xx} + 2I_1 + 2m_1 l_0^2 & 2I_1 + 2m_1 l_1^2 \\ + 2m_1 l_1^2 + 4m_1 l_0 l_1 \cos q_1 & + 2m_1 l_0 l_1 \cos q_1 \\ \hline 2I_1 + 2m_1 l_1^2 & 2I_1 + 2m_1 l_1^2 \\ + 2m_1 l_0 l_1 \cos q_1 & \end{array} \right) \quad (2.8.)$$

$$= \left( \begin{array}{c|c} A_{rr}(q_1) & A_{rd}(q_1) \\ \hline A_{dr}(q_1) & A_{dd}(q_1) \end{array} \right)$$

Les équations de LAGRANGE (2.4.) et le théorème du moment cinétique (2.6.) constituent une description suffisante du système.

De plus, (2.5.) et (2.7.) fournissent deux constantes du mouvement, non indépendantes des équations (2.4.) et (2.6.).

Il est commode d'introduire les notations suivantes :

$$\Omega_1^2 \triangleq \frac{k_1}{4I_1} \quad \Omega_1 = \text{pulsation propre encastree}$$

$$\alpha \triangleq \frac{l_0}{2l_1}$$

$$\rho \triangleq \frac{J_{xx}}{8I_1} \quad 1 + \rho = \delta$$

$$a_{rr}(q_1) \triangleq \frac{A_{rr}(q_1)}{8I_1} = \delta + 3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1 > 0 \quad \forall q_1$$

$$a_{rd}(q_1) \triangleq \frac{A_{rd}(q_1)}{8I_1} = 1 + \frac{3}{2} \alpha \cos q_1 > 0 \quad \forall q_1$$

$$e \triangleq \frac{E}{4I_1}$$

$$h \triangleq \frac{H_x}{4I_1}$$

Dès lors, les équations (2.4.) et (2.6.) du satellite déformable deviennent respectivement :

$$\ddot{q}_1 + \Omega_1^2 q_1 = -\ddot{\theta} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \cos q_1\right) - \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \alpha \sin q_1 \quad (2.9.)$$

$$\ddot{\theta} (\gamma + 3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1) + \ddot{q}_1 \left(\frac{3}{2} \alpha \cos q_1 + 1\right) - 3\alpha \sin q_1 \dot{\theta} \dot{q}_1 - \frac{3}{2} \alpha \sin q_1 \dot{q}_1^2 = 0 \quad (2.10.)$$

tandis que les constantes (2.5.) et (2.7.) du mouvement s'écrivent :

$$\Omega_1^2 q_1^2 + \dot{q}_1^2 + (\gamma + 3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1) \dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta} \dot{q}_1 \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \cos q_1\right) = e \quad (2.11.)$$

$$\dot{\theta} (3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1 + \gamma) + \dot{q}_1 \left(\frac{3}{2} \alpha \cos q_1 + 1\right) = h \quad (2.12.)$$

Il a été dit qu'un satellite déformable est constitué de deux sous-systèmes couplés : le sous-système rigide et le sous-système déformable (figure 1.4.). Or il est possible d'isoler le sous-système déformable et l'étude peut alors se porter sur ce dernier système, de dimension réduite.

Pour cela, il faut remarquer que l'intégrale première (2.12.) permet d'expliciter  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  en fonction de  $q_1, \dot{q}_1$  et  $\ddot{q}_1$ . Dès lors, l'élimination de  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  entre (2.12.) et (2.9.) mène à :



$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_1 \left[ (3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1 + \gamma)^2 - \left( \frac{3}{2} \alpha \cos q_1 + 1 \right)^2 (3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1 + \gamma) \right] \\
 & + \dot{q}_1^2 \left[ (3\alpha \cos q_1 + 3\alpha^2 + \gamma) \frac{3}{2} \alpha \sin q_1 (1 + \frac{3}{2} \alpha \cos q_1) - \left( \frac{3}{2} \alpha \cos q_1 + 1 \right)^2 3\alpha \sin q_1 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} \alpha \cos q_1 + 1 \right)^2 \alpha \sin q_1 \right] \\
 & + \Omega_1^2 (3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1 + \gamma)^2 q_1 + \frac{3}{2} h^2 \alpha \sin q_1 \\
 & + \dot{q}_1 \left[ h (3\alpha \sin q_1) (1 + \frac{3}{2} \alpha \cos q_1) - 3h \left( \frac{3}{2} \alpha \cos q_1 + 1 \right) \alpha \sin q_1 \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.13.}$$

De même, en éliminant  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  entre (2.12.) et (2.11.), on obtient :

$$\Omega_1^2 q_1^2 + \dot{q}_1^2 \frac{(3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1 + \gamma) - \left( \frac{3}{2} \alpha \cos q_1 + 1 \right)^2}{(3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1 + \gamma)} + \frac{h^2}{(3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1 + \gamma)} = e \tag{2.14.}$$

expression dans laquelle il est nécessaire de remarquer que :

$$(3\alpha^2 + 3\alpha \cos q_1 + \gamma) - \left( \frac{3}{2} \alpha \cos q_1 + 1 \right)^2 > 0 \quad \forall q_1$$

Ainsi, (2.13.) est l'équation du sous-système déformable découplé qui apparaît comme un système du 2ème ordre dont (2.14.) est une intégrale première. Ce sous-système excite le sous-système rigide (2.10.), cette excitation n'allant pas en sens contraire. Ces faits sont illustrés par le graphe de la figure 2.1.

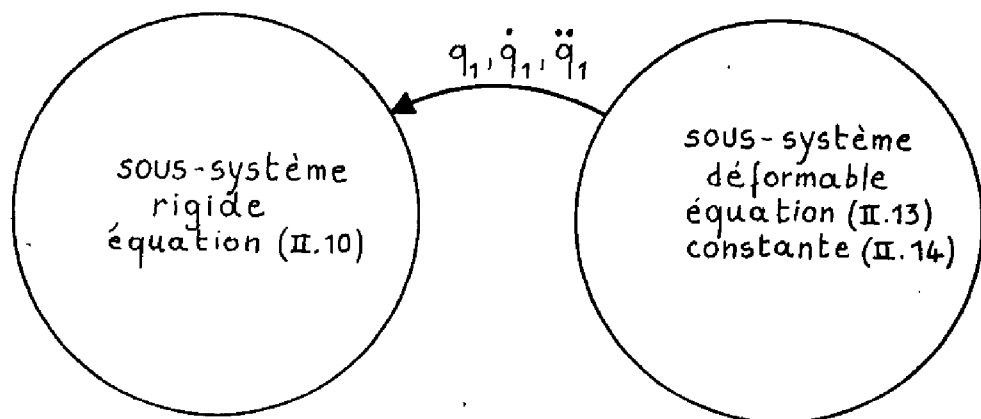


Figure 2.1.

L'étude du satellite 1 mode dans le cas non linéaire commencera donc par l'étude du sous-système déformable (2.13.).

En développant en série les non linéarités de l'équation (2.13.) et en explicitant par rapport à  $q_1$ , on obtient :

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \dot{q}_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n2} q_1^n + \sum_{m=3}^{\infty} \alpha_{m0} q_1^m \quad (2.15.)$$

n impair                      m impair

avec

$$\omega_1^2 = \frac{2 \Omega_1^2 a_{rr}^2(0) + 3 h^2 \alpha}{2 a_{rr}(0) [a_{rr}(0) - a_{rd}^2(0)]} > 0$$

( $\omega_1$  = pulsation propre globale).

Les coefficients des termes du 3ème ordre sont :

$$\alpha_{12} = - \frac{3\alpha a_{rd}(0) [a_{rr}(0) - a_{rd}(0)]}{2 a_{rr}(0) [a_{rr}(0) - a_{rd}^2(0)]} < 0 \quad (2.16.)$$

$$\alpha_{30} = - 24\alpha \Omega_1^2 a_{rr}^2(0) a_{rd}(0) [a_{rd}(0) - a_{rr}(0)] + h^2 \left\{ 4\alpha a_{rr}(0) [a_{rr}(0) - a_{rd}(0)] + 36\alpha^2 [-2a_{rr}(0) + a_{rd}(0)a_{rr}(0) + a_{rd}^2(0)] \right\}$$

L'annexe B étudie l'équation différentielle non linéaire (2.15.) jusqu'au 3ème ordre, en utilisant la méthode de la récurrence associée de BIRKHOFF. Il en ressort que, jusqu'au 3ème ordre, (2.15.) est une équation stable, ne présentant pas d'amortissement. Ainsi, le système déformable (2.13.) garde une origine du type centre jusqu'au 3ème ordre ; ce résultat était d'ailleurs prévisible vu que ce système est conservatif par (2.14.). En vertu de cette propriété, le système déformable (2.13.) va garder une origine du type centre jusqu'à n'importe quel ordre.

La conclusion pratique à en tirer est que l'équation (2.15.) linéarisée décrit suffisamment bien le système.

Il est bon de remarquer que la pulsation globale  $\omega_1$  dépend de  $h$ .

Enfin, en utilisant la méthode KBM (KRYLOV-BOGOLIUBOV-MITROPOLSKY), une conclusion peut être déduite de l'oscillation jusqu'au 3ème ordre de (2.15.) ; soit

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \alpha_{30} q_1^3 + \alpha_{12} \dot{q}_1^2 q_1 \quad (2.17.)$$

Cette méthode [POP] suggère d'essayer comme solution approchée de (2.17.)

$$q_1(t) = a(t) \sin[\omega_1 t + \varphi(t)]$$

$$\dot{q}_1(t) = a(t) \omega_1 \cos[\omega_1 t + \varphi(t)]$$

En l'utilisant explicitement, elle mène à  $da/dt=0$ . La solution approchée est donc une oscillation d'amplitude constante ; résultat absolument compatible avec le fait que l'origine est un centre pour (2.17.). Mais la conclusion intéressante de cette méthode est :

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{a^2}{8\omega_1} (3\alpha_{30} + \omega_1^2 \alpha_{12})$$

Autrement dit, elle prévoit une variation  $\Delta\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  de pulsation propre en fonction de l'amplitude. On calcule

$$\Delta\omega = \frac{a^2}{8\omega_1} \left\{ 4a_{rr}^2(o) [a_{rr}(o) - a_{rd}^2(o)]^2 \right\}^{-1} \times \left\{ \left\{ 36\alpha_{30} \Omega_1^2 a_{rr}^2(o) a_{rd}(o) [a_{rd}(o) - a_{rr}(o)] \right. \right.$$

$$\left. \left. + h^2 \left\{ -12\alpha_{12} a_{rr}(o) [a_{rr}(o) - a_{rd}^2(o)] - 36\alpha_{12}^2 [-6a_{rr}(o) + 2a_{rd}(o) + 4a_{rd}^2(o)] \right\} \right\} \right\} \quad (2.18.)$$

Lorsque le moment cinétique total est nul (ce qui implique que la dérive moyenne dans le temps du corps principal est nulle), on voit facilement que  $\Delta\omega < 0$ . Pour  $|h| \neq 0$ , mais suffisamment petit, cette conclusion reste valable. Quand  $|h|$  devient plus grand, il est hasardeux de donner une conclusion car (2.17) n'a qu'une validité locale.

Une solution approchée  $q_1(t)$  de l'équation (2.13.) du sous-système déformable donne facilement  $\Theta(t)$  par (2.12.).

## 2.2. SATELLITE 2 MODES

La méthodologie adoptée pour traiter ce cas 2 modes est semblable à celle du cas 1 mode.

Après la mise en équations, le sous-système déformable est isolé par élimination des variables rigides. Ce sous-système est conservatif et apparaît sous la forme de deux oscillateurs couplés. La différence avec le cas précédent réside dans le fait que l'intégrale première doit se répartir, non plus sur un oscillateur, mais bien sur deux oscillateurs. Alors que dans le cas précédent, l'"énergie totale" ne pouvait se distribuer que sur un oscillateur en lui conférant ainsi des propriétés précises, il devient maintenant impossible de prédire a priori comment cette "énergie" va se distribuer sur les deux modes. Les développements ci-dessous, restreints au 3ème ordre, éclairciront ce point. Il sera montré que, dans certains cas, chaque mode conserve l'énergie que lui ont conférée les conditions initiales, résultat prédit par le modèle linéarisé du système. Dans d'autres cas, dits cas de résonance, des échanges d'énergie entre les deux modes ont lieu, ce qui échappe totalement à une analyse linéaire.

Le chemin suivi est donc le même que pour le cas 1 mode.

### 2.2.1. Mise en équation

On pose  $\varepsilon = 0$ ,  $\phi = \psi = \dot{\phi} = \dot{\psi} = 0$  et  $N = 2$  (figure 1.5.)

$$\dot{\Theta} = \omega_x.$$

Energie cinétique relative de la partie déformable :

$$T_a^{re} = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \dot{q}_2) A_{dd}(q_1, q_2) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (2.19.)$$

.51.

$$A_{dd}(q_1, q_2) = \left( \begin{array}{c|c} 8I_1 + 8I_2 + 24I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 & 8I_2 + 12I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right) \cos q_2 \\ + 12I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right) \cos q_2 & \\ \hline 8I_2 + 12I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right) \cos q_2 & 8I_2 \end{array} \right)$$

Energie potentielle des déformations

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} (q_1 \ q_2) B_{dd} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (2.20.)$$

$$B_{dd} = \begin{pmatrix} 2k_1 & 0 \\ 0 & 2k_2 \end{pmatrix}$$

Forces généralisées d'inertie :

$$\begin{aligned} f_1^{in} = & -\ddot{\theta} \left[ 8I_1 + 8I_2 + 6I_1 \left(\frac{l_0}{l_1}\right) \cos q_1 + 12I_2 \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \cos q_1 \right. \\ & \left. + 24I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right) \cos q_2 + 6I_2 \left(\frac{l_0}{l_2}\right) \cos(q_1 + q_2) + 24I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \right] \\ & - \dot{\theta}^2 \left[ 6I_1 \left(\frac{l_0}{l_1}\right) \sin q_1 + 12I_2 \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \sin q_1 + 6I_2 \left(\frac{l_0}{l_2}\right) \sin(q_1 + q_2) \right] \\ & + \dot{q}_2 \left[ 24I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right) \sin q_2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2^{in} = & -\ddot{\theta} \left[ 8I_2 + 12I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right) \cos q_2 + 6I_2 \left(\frac{l_0}{l_2}\right) \cos(q_1 + q_2) \right] \\ & - \dot{\theta}^2 \left[ 6I_2 \left(\frac{l_0}{l_2}\right) \sin(q_1 + q_2) + 12I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right) \sin q_2 \right] \\ & - \dot{q}_1 \left[ 24I_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right) \sin q_2 \right] \end{aligned}$$

Equations de LAGRANGE des déformations :

$$\begin{aligned}
& 4\ddot{q}_1 \left[ I_1 + I_2 + 3I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 + 3I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 \right] - 12\dot{q}_1 \dot{q}_2 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \sin q_2 \\
& + 2\ddot{q}_2 \left[ 2I_2 + 3I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 \right] - 6\dot{q}_2^2 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \sin q_2 + k_1 q_1 = \\
& - \ddot{\theta} \left[ 4I_1 + 4I_2 + 3I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \cos q_1 + 6I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \cos q_1 + 12I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 \right. \\
& \quad \left. + 3I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) + 12I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 \right] \\
& - \dot{\theta}^2 \left[ 3I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \sin q_1 + 6I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \sin q_1 + 3I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \sin(q_1 + q_2) \right] \\
& + \dot{\theta} \dot{q}_2 12I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \sin q_2
\end{aligned}$$

(2.22.a.)

$$\begin{aligned}
& 4I_2 \ddot{q}_2 + 2\ddot{q}_1 \left[ 2I_2 + 3I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 \right] + 6\dot{q}_1^2 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \sin q_1 + k_2 q_2 = \\
& - \ddot{\theta} \left[ 4I_2 + 6I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 + 3I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) \right] \\
& - \dot{\theta}^2 \left[ 3I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \sin(q_1 + q_2) + 6I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \sin q_2 \right] \\
& - \dot{\theta} \dot{q}_1 \left[ 12I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \sin q_2 \right]
\end{aligned}$$

(2.22.b.)

Moment cinétique total :

$$\begin{aligned}
 H_x = & \dot{\theta} \left[ J_{xx} + 6 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right)^2 + 8 I_1 + 12 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \cos q_1 + 8 I_2 + 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 \right. \\
 & + 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 + 12 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) + 24 I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \cos q_1 \\
 & \left. + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right)^2 \right] \\
 & + \dot{q}_1 \left[ 8 I_1 + 6 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \cos q_1 + 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 + 8 I_2 + 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 \right. \\
 & \left. + 12 I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \cos q_1 + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) \right] \\
 & + \dot{q}_2 \left[ 8 I_2 + 12 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) \right]
 \end{aligned}$$

(2.23.)

Théorème du moment cinétique :

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\theta} \left[ J_{xx} + 6 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right)^2 + 8 I_1 + 12 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \cos q_1 + 8 I_2 + 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left. 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 + 12 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right)^2 + 24 I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \cos q_1 \right] \\
 & + 2 \ddot{q}_1 \left[ 4 I_1 + 3 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \cos q_1 + 12 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 + 4 I_2 + 12 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 + 6 I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \cos q_1 \right. \\
 & \quad \left. + 3 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) \right] \\
 & + 2 \ddot{q}_2 \left[ 4 I_2 + 6 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 + 3 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) \right] \\
 & - \dot{\theta} \dot{q}_1 \left[ 12 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \sin q_1 + 12 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \sin(q_1 + q_2) + 24 I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \sin q_1 \right] \\
 & - \dot{\theta} \dot{q}_2 \left[ 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \sin q_2 + 12 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \sin(q_1 + q_2) \right] \\
 & - \dot{q}_1^2 \left[ 6 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \sin q_1 + 12 I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \sin q_1 + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \sin(q_1 + q_2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{q}_2^2 \left[ 12 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \sin q_2 + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \sin(q_1 + q_2) \right] \\
& - \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left[ 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \sin q_2 + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \sin(q_1 + q_2) + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \sin(q_1 + q_2) \right] = 0
\end{aligned}$$

(2.24.)

Energie totale :

$$E = \frac{1}{2} (\omega_x \dot{q}_1 \dot{q}_2) A(q_1, q_2) \begin{pmatrix} \omega_x \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

(2.25.)

$$A(q_1, q_2) = \left( \begin{array}{c|c} A_{rr} & A_{rd} \\ \hline A_{rd}^T & A_{dd} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
A_{rr}(q_1) = & J_{xx} + 6 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right)^2 + 8 I_1 + 12 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \cos q_1 + 8 I_2 \\
& + 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 + 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 + 12 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) \\
& + 24 I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \cos q_1 + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right)^2
\end{aligned}$$

$$A_{rd} = \left( \begin{array}{c|c} 8 I_1 + 6 I_1 \left( \frac{l_0}{l_1} \right) \cos q_1 + 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 & 8 I_2 + \\ + 8 I_2 + 24 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 + 12 I_2 \left( \frac{l_0 l_1}{l_2^2} \right) \cos q_1 & 12 I_2 \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \cos q_2 + \\ + 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) & 6 I_2 \left( \frac{l_0}{l_2} \right) \cos(q_1 + q_2) \end{array} \right)$$



$$A_{dd} = \left( \begin{array}{c|c} 8I_1 + 8I_2 + 24I_2 \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 & 8I_2 + 12I_2 \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right) \cos q_2 \\ + 24I_2 \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right) \cos q_2 & \\ \hline 8I_2 + 12I_2 \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right) \cos q_2 & 8I_2 \end{array} \right)$$

Le système est décrit de manière suffisante par les équations (2.22.) et (2.24.) . (2.23.) et (2.25.) sont les constantes du mouvement qui ne sont pas indépendantes des équations (2.22.) et (2.24.).

Notations :

$$\begin{aligned} \frac{J_{xx}}{I_1} &= \rho \\ \frac{k_1}{4I_1} &= \Omega_1^2 \\ \frac{k_2}{4I_1} &= \Omega_2^2 \\ \frac{\ell_2}{\ell_1} &= \alpha_{21} \quad \frac{\ell_0}{\ell_1} = \alpha_{01} \quad \frac{\ell_0}{\ell_2} = \alpha_{02} \\ \frac{H_x}{I_1} &= h \\ \frac{E}{I_1} &= e \end{aligned} \quad (2.26.)$$

ce qui donne

Première équation de LAGRANGE des déformations :

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_1 \left( 1 + \alpha_{21}^3 + 3\alpha_{21} + 3\alpha_{21}^2 \cos q_2 \right) - 3\dot{q}_1 \dot{q}_2 \alpha_{21}^2 \sin q_2 \\ &+ \ddot{q}_2 \left( \alpha_{21}^3 + \frac{3}{2} \alpha_{21}^2 \cos q_2 \right) - \frac{3}{2} \dot{q}_2^2 \alpha_{21}^2 \sin q_2 + \Omega_1^2 q_1 = \\ &- \ddot{\theta} \left[ 1 + \alpha_{21}^3 + \frac{3}{4} \alpha_{01} \cos q_1 + \frac{3}{2} \alpha_{21}^2 \alpha_{02} \cos q_1 + 3\alpha_{21}^2 \cos q_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \alpha_{21}^3 \alpha_{02} \cos(q_1 + q_2) + 3\alpha_{21} \right] \\ &- \ddot{\theta}^2 \left[ \frac{3}{4} \alpha_{01} \sin q_1 + \frac{3}{2} \alpha_{21}^2 \alpha_{02} \sin q_1 + \frac{3}{4} \alpha_{21}^3 \alpha_{02} \sin(q_1 + q_2) \right] \\ &\quad + \dot{\theta} \dot{q}_2 3\alpha_{21}^2 \sin q_2 \end{aligned} \quad (2.27.a.)$$

Seconde équation de LAGRANGE des déformations :

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{21}^3 \ddot{q}_1 + \ddot{q}_1 \left( \alpha_{21}^3 + \frac{3}{2} \alpha_{21}^2 \cos q_2 \right) + \frac{3}{2} \dot{q}_1^2 \alpha_{21}^2 \sin q_2 + \Omega_2^2 q_2 = \\
 & - \ddot{\theta} \left[ \alpha_{21}^3 + \frac{3}{2} \alpha_{21}^2 \cos q_2 + \frac{3}{4} \alpha_{21}^3 \alpha_{02} \cos(q_1 + q_2) \right] \\
 & - \dot{\theta}^2 \left[ \frac{3}{4} \alpha_{21}^3 \alpha_{02} \sin(q_1 + q_2) + \frac{3}{2} \alpha_{21}^2 \sin q_2 \right] \\
 & - \dot{\theta} \dot{q}_1^3 \alpha_{21}^2 \sin q_2
 \end{aligned} \tag{2.27.b.}$$

Constance du moment cinétique total :

$$\begin{aligned}
 & \dot{\theta} \left[ p + 6 \alpha_{01}^2 + 8 + 12 \alpha_{01} \cos q_1 + 8 \alpha_{01}^3 + 24 \alpha_{21} + 24 \alpha_{21}^2 \cos q_2 \right. \\
 & \quad \left. + 12 \alpha_{21}^3 \alpha_{02} \cos(q_1 + q_2) + 24 \alpha_{21}^2 \alpha_{02} \cos q_1 + 6 \alpha_{21}^3 \alpha_{02}^2 \right] \\
 & + 2 \dot{q}_1 \left[ 4 + 3 \alpha_{01} \cos q_1 + 12 \alpha_{21} + 4 \alpha_{21}^3 + 12 \alpha_{21}^2 \cos q_2 + 6 \alpha_{21}^2 \alpha_{02} \cos q_1 \right. \\
 & \quad \left. + 3 \alpha_{21}^3 \alpha_{02} \cos(q_1 + q_2) \right] \\
 & + 2 \dot{q}_2 \left[ 4 \alpha_{21}^3 + 6 \alpha_{21}^2 \cos q_2 + 3 \alpha_{21}^3 \alpha_{02} \cos(q_1 + q_2) \right] = h
 \end{aligned} \tag{2.28.}$$

Dans les développements ultérieurs (2.27.) et (2.28.) seront utilisés comme description suffisante du système.

### 2.2.2. Isolément du sous-système déformable et approximations

Comme pour le cas 1 mode, le sous-système déformable est isolé par élimination des variables rigides  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  entre d'une part les équations de LAGRANGE des déformations (2.27.) et d'autre part l'expression (2.28.) de la constance du moment cinétique total. Dès lors, le graphe du système global se présente de nouveau comme sur la figure 2.1. et l'attention peut-être portée sur la dynamique du sous-système déformable.

Afin d'éviter des calculs littéraux devenant très vite fastidieux, de nouvelles simplifications sont introduites. Ces nouvelles restrictions n'empêchent pas de faire des considérations intéressantes et de tirer des conclusions.

D'abord, dans (2.27.) et (2.28.), on pose  $k_1 = k_2$ , ce qui mène à  $\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \Omega^2$

Ensuite, on pose  $h = 0$  ; donc  $H_x = 0$ . Les moments cinétiques du corps principal et des panneaux s'annulent. C'est encore le cas où la dérive angulaire moyenne dans le temps du corps principal est nulle.

Dès lors, en éliminant  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  entre (2.27.) et (2.28.), on obtient deux équations implicites en  $\ddot{q}_1$  et  $\ddot{q}_2$  ; ces deux équations sont celles du sous-système déformable isolé.

On se propose d'étudier qualitativement la solution de ces équations considérées jusqu'au 3ème ordre. Or, ces équations font intervenir le paramètre  $J_{xx}$ . En faisant  $J_{xx} \rightarrow \infty$ , la structure de ces équations, osculées jusqu'au 3ème ordre, n'est pas modifiée. De plus, il s'est avéré qu'aucun paramètre, décrivant le comportement qualitatif de la solution, osculée jusqu'au 3ème ordre, des équations du sous-système déformable isolé, ne passe par une valeur critique quand  $J_{xx} \rightarrow \infty$ .

Dès lors, pour l'étude qualitative des oscillations non linéaires du sous-système déformable considéré jusqu'au 3ème ordre, il est légitime de faire  $J_{xx} \rightarrow \infty$  dans les équations de ce sous-système. Le volume de calculs s'en trouve considérablement diminué.

Tous calculs faits, cette procédure donne :

$$\begin{pmatrix} 4(1 + 3\alpha_{21} + \alpha_{21}^3 + 3\alpha_{21}^2) - 6\alpha_{21}^2 q_2^2 & 2(2\alpha_{21}^3 + 3\alpha_{21}^2) - 3\alpha_{21}^2 q_2^2 \\ 2(2\alpha_{21}^3 + 3\alpha_{21}^2) - 3\alpha_{21}^2 q_2^2 & 4\alpha_{21}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + 4\Omega^2 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\alpha_{21}^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 q_2 + 6\alpha_{21}^2 \dot{q}_2^2 q_2 \\ -6\dot{q}_2^2 q_2 \alpha_{21}^2 \end{pmatrix} + O^3 \quad (2.29.)$$

Ce sont les équations du sous-système déformable, découplé du sous-système rigide, les non linéarités étant considérés jusqu'à l'ordre 3. A ce sous-système déformable, osculé jusqu'au 3ème ordre, il correspond le lagrangien et le hamiltonien

$$\begin{aligned}
 L(q_1, q_2) &= \frac{1}{2} (\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} 4(1+3\alpha_{21} + \alpha_{21}^3 + 3\alpha_{21}^2) - 6\alpha_{21}^2 q_2^2 \\ 2(2\alpha_{21}^3 + 3\alpha_{21}^2) - 3\alpha_{21}^2 q_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\
 H(q_1, q_2) &= \frac{1}{2} (q_1, q_2) \begin{pmatrix} 4\Omega^2 & 0 \\ 0 & 4\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.30.}$$

Les équations (2.29.) osculées jusqu'au 3ème ordre, sont les équations de LAGRANGE correspondant à (2.30.).

(2.31.) est une constante du mouvement, jusqu'au 3ème ordre, de (2.29.).

Il faut remarquer que la matrice d'énergie cinétique intervenant dans (2.30.) n'est définie positive que pour q situé dans un voisinage de l'origine. Les équations (2.29.), osculées jusqu'au 3ème ordre, n'ont donc qu'une validité locale.

Les développements ci-dessous se proposent d'étudier les oscillations non linéaires (2.29.), jusqu'au 3ème ordre.

Pour cela, en explicitant (2.29.) par rapport à  $\ddot{q}_1$  et  $\ddot{q}_2$  et en ne s'intéressant qu'aux termes d'ordre inférieur ou égal à 3, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + 4\Omega^2 M \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 12\alpha_{21}^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 q_2 + 6\alpha_{21}^2 \dot{q}_2^2 q_2 \\ -6\dot{q}_1^2 q_2 \alpha_{21}^2 \end{pmatrix} + 4\Omega^2 N \begin{pmatrix} q_1 q_2^2 \\ q_2^3 \end{pmatrix} + O^3 \tag{2.32.}$$

avec

$$M = \left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{4+3\alpha_{21}} & -\frac{2\alpha_{21}+3}{2\alpha_{21}(4+3\alpha_{21})} \\ \hline \frac{2\alpha_{21}+3}{2\alpha_{21}(4+3\alpha_{21})} & \frac{1+3\alpha_{21}+\alpha_{21}^3+3\alpha_{21}^2}{\alpha_{21}^3(4+3\alpha_{21})} \end{array} \right)$$

$$N = \begin{pmatrix} \frac{9 \alpha_{21}}{(4 + 3 \alpha_{21})^2} & - \frac{12 + 63 \alpha_{21} + 36 \alpha_{21}^2}{4 \alpha_{21} (4 + 3 \alpha_{21})^2} \\ - \frac{12 + 63 \alpha_{21} + 36 \alpha_{21}^2}{4 \alpha_{21} (4 + 3 \alpha_{21})^2} & \frac{18 + 66 \alpha_{21} + 63 \alpha_{21}^2 + 18 \alpha_{21}^3}{2 \alpha_{21}^2 (4 + 3 \alpha_{21})^2} \end{pmatrix}$$

Il est aisé de voir que le paramètre  $\alpha_{21}$  joue un rôle de toute première importance. Les autres paramètres ( $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \rho$ ) ne sont pas essentiels et ont été éliminés avec  $J_{xx} \rightarrow \infty$ ; c'est là un autre avantage de ce passage à la limite.

Pour analyser les équations (2.32.), il est nécessaire d'en découpler la partie linéaire.

D'abord, la matrice  $M$  étant symétrique, elle peut se mettre sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2.33.)$$

avec  $a^2 + b^2 = 1$

$$\lambda_1 < \lambda_2 \text{ (par convention)}$$

Les fréquences propres globales  $\omega_1, \omega_2$  du système sont données par :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 4 \Omega^2 \lambda_1^2 \\ \omega_2^2 &= 4 \Omega^2 \lambda_2^2 \end{aligned} \quad (2.34.)$$

Dès lors, après la transformation

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad (2.35.)$$

les équations (2.32.) prennent la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = & \alpha_{3000}^{(i)} Q_1^3 + \alpha_{2010}^{(i)} Q_1^2 Q_2 + \alpha_{1020}^{(i)} Q_1 Q_2^2 \\ & + \alpha_{0030}^{(i)} Q_2^3 + \alpha_{0210}^{(i)} \dot{Q}_1^2 Q_2 + \alpha_{1002}^{(i)} \dot{Q}_1^2 Q_2 \\ & + \alpha_{1200}^{(i)} Q_1^2 Q_2 + \alpha_{0012}^{(i)} \dot{Q}_2^2 Q_2 + \alpha_{1101}^{(i)} \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_2 \\ & + \alpha_{0111}^{(i)} \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_2 + O^3 \end{aligned}$$

(2.36.)

i = 1,2

A ces équations, il correspond un lagrangien et un hamiltonien du type

$$\begin{aligned} L(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2) &= \frac{1}{2} (\dot{Q}_1, \dot{Q}_2) \begin{pmatrix} 1 + a_{11} Q_1^2 + a_{12} Q_1 Q_2 & c_{11} Q_1^2 + c_{12} Q_1 Q_2 \\ + a_{22} Q_2^2 & + c_{22} Q_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix} \\ H(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2) &= \frac{1}{2} (\dot{Q}_1, \dot{Q}_2) \begin{pmatrix} c_{11} Q_1^2 + c_{12} Q_1 Q_2 & 1 + b_{11} Q_1^2 + b_{12} Q_1 Q_2 \\ + c_{22} Q_2^2 & + b_{22} Q_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} (Q_1, Q_2) \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2.37.)

Ainsi, le sous-système déformable, osculé jusqu'au 3ème ordre, prend l'aspect de deux oscillateurs harmoniques couplés par des non linéarités d'ordre 3. On se propose maintenant de déterminer le comportement qualitatif, jusqu'au 3ème ordre, de la solution de (2.36.). Une question majeure est de savoir si la solution des équations non linéaires (2.36.) va différer notablement de celle de sa partie linéarisée.

L'étude, jusqu'au 3ème ordre, d'un système d'équations du genre (2.36.) est abordé dans l'annexe B de manière rigoureuse par la méthode de la récurrence associée de BIRKHOFF. Il en ressort que le rapport  $\omega_2/\omega_1$  prend une importance particulière et qu'il faut distinguer deux cas :  $\omega_2/\omega_1 \neq 3$  et  $\omega_2/\omega_1 = 3$ .

1er cas  $\omega_2/\omega_1 \neq 3$

C'est le cas normal, de non résonance. L'origine reste, jusqu'au 3ème ordre, un centre pour (2.36.), c'est-à-dire que cette solution est qualitativement la même que celle de la partie linéarisée des équations. L'énergie totale (2.37.) se répartira sur les deux modes en fonction des conditions initiales et chaque mode conservera son énergie totale, résultat qui était d'ailleurs déjà prédit par la partie linéarisée de (2.36.).

Donc, le sous-système déformable conserve une origine du type centre jusqu'au 3ème ordre ; en d'autres termes, on garde un cas critique de stabilité jusqu'à cet ordre et les développements doivent être poussés plus loin pour connaître exactement le comportement du système. Ces calculs étant trop fastidieux, on se limitera à cet ordre. En conclusion, le sous-système déformable est assez bien représenté par son modèle linéarisé.

Dans le cas particulier important où les deux sous-panneaux ont la même longueur ( $\alpha_{21} = 1$ ), on a

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{2\Omega^2}{7} (9 - \sqrt{74}) \\ \omega_2^2 &= \frac{2\Omega^2}{7} (9 + \sqrt{74})\end{aligned}\tag{2.38.}$$

ce qui donne  $\omega_2/\omega_1 \simeq 6$ . On est donc en dehors du cas de résonance. On a :

$$a \simeq 0.955$$

$$b \simeq -0.305$$

(2.39.)

Avec  $\alpha_{21} = 1$ ,  $\Omega^2$  est le seul paramètre restant libre ; en effet (2.36.), osculé jusqu'au 3ème ordre, devient dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 &= \frac{3\omega_1^2}{2\Omega^2} \left[ \dot{Q}_1^2 Q_1 ab^2(a-b) + \dot{Q}_1^2 Q_2 a^2 b(b-a) \right. \\
&\quad - \dot{Q}_2^2 Q_1 b(b^3 + 2a^2 b + a^3) + \dot{Q}_2^2 Q_2 a(a^3 + b^3 + 2a^2 b) \\
&\quad \left. + \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_1 2a^2 b(b-a) + \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_2 2a^3(a-b) \right] \\
&\quad - \frac{3\Omega^2}{49} \left[ Q_1^3 b^2 (110b^2 - 74ab - 12a^2) + Q_2^3 a^2 (37a^2 - 122ab \right. \\
&\quad \left. - 37b^2) + Q_1 Q_2^2 a (-12a^3 - 148a^2 b + 354ab^2 + 74b^3) \right. \\
&\quad \left. + Q_1^2 Q_2 b (-342ab^2 - 37b^3 + 24a^3 + 185a^2 b) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 &= \frac{3\omega_2^2}{2\Omega^2} \left[ \dot{Q}_1^2 Q_1 b(a^3 + 2ab^2 - b^3) - \dot{Q}_2^2 Q_1 ab^2(a+b) \right. \\
&\quad \left. + \dot{Q}_1^2 Q_2 a(-a^3 - 2ab^2 + b^3) + \dot{Q}_2^2 Q_2 a^2 b(b+a) \right. \\
&\quad \left. + \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_1 2b^3(b+a) + \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_2 (-2ab^2)(b+a) \right] \\
&\quad - \frac{3\Omega^2}{49} \left[ Q_1^3 b^2 (37a^2 - 37b^2 - 122ab) + Q_1^2 Q_2 b (-12b^3 \right. \\
&\quad \left. + 148ab^2 + 354a^2 b - 74a^3) + Q_1 Q_2^2 a (-342a^2 b \right. \\
&\quad \left. + 37a^3 + 24b^3 - 18ab^2) + Q_2^3 a^2 (-12b^3 + 74ab \right. \\
&\quad \left. + 110a^2) \right]
\end{aligned}$$

(2.40.)

Numériquement :

$$\begin{aligned}
\ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 &= 0.019 \dot{Q}_1^2 Q_1 + 0.059 \dot{Q}_1^2 Q_2 + 0.0146 \dot{Q}_2^2 Q_1 \\
&\quad + 0.045 \dot{Q}_2^2 Q_2 + 0.118 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_1 + 0.370 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_2 \\
&\quad - \frac{3\Omega^2}{49} (14.661 Q_1^3 + 448.538 Q_2^3 + 430.246 Q_1 Q_2^2 + \\
&\quad 137.565 Q_1^2 Q_2)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = & -2.462 \dot{Q}_1^2 Q_1 - 0.432 \dot{Q}_2^2 Q_1 - 7.682 \dot{Q}_1^2 Q_2 \\
& -1.351 \dot{Q}_2^2 Q_2 - 0.277 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_1 - 0.865 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 Q_2 \\
& - \frac{3\Omega^2}{49} (6.106 Q_1^3 + 45.291 Q_1^2 Q_2 + 104.289 Q_1 Q_2^2 \\
& + 69.948 Q_2^3)
\end{aligned}
\tag{2.41.}$$

La figure (2.2.) montre une simulation des équations (2.41.) avec  $\Omega = 5.27 \text{ sec}^{-1}$ . De plus, la solution numérique de (2.41.), c'est-à-dire de l'osculation jusqu'au 3ème ordre avec  $J_{xx} \rightarrow \infty$ , est comparée avec la solution numérique des équations (2.22.) et (2.24.), c'est-à-dire les équations complètes avec  $J_{xx}$  fini.

2ème cas  $w_2/w_1 = 3$

C'est le cas de résonance qui s'obtient pour  $\alpha_{21} \simeq 0.476$ . Dans ce cas, l'origine reste encore un centre pour (2.36.) mais l'annexe B montre encore qu'il y a des possibilités d'échange d'énergie entre les modes. Ce phénomène étant typiquement non linéaire, le comportement du système peut différer de celui de sa partie linéarisée.

### 2.3. CONCLUSIONS

Le but de ce chapitre a été de dégrossir le comportement des satellites déformables dans le cas non linéaire.

Lorsqu'il n'y a qu'un seul mode de déformation, le comportement du système non linéaire est très voisin de celui du système linéarisé correspondant.

Des effets non linéaires notoires n'apparaîtront donc que pour des satellites à plusieurs modes de déformation ; dans ce cas, en effet, des phénomènes de résonance entre les modes peuvent éventuellement se produire.

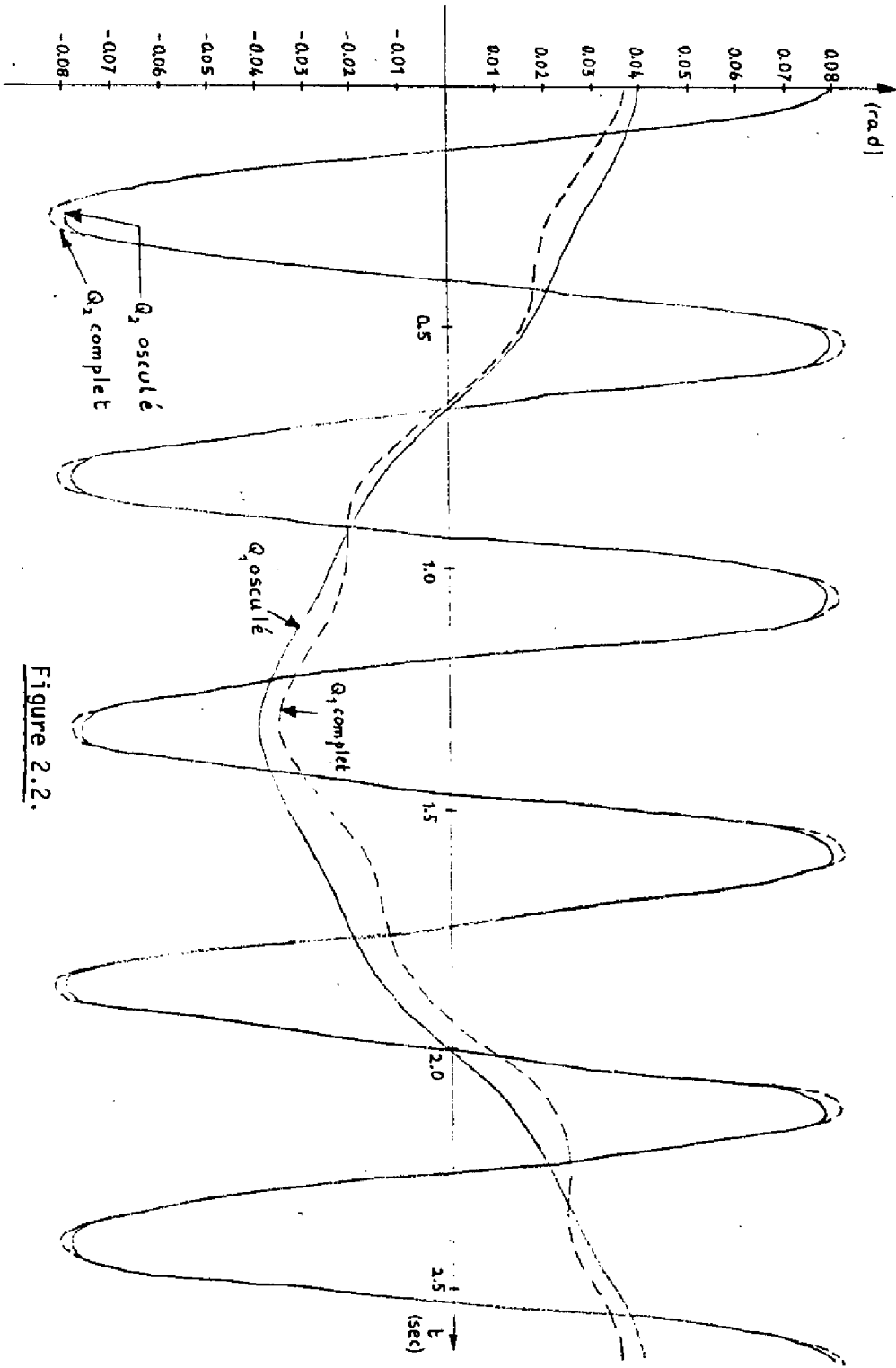


Figure 2.2.

Lorsque le moment cinétique total est nul, dans le cas de deux modes, un phénomène de résonance du 3ème ordre a été mis en évidence pour  $\omega_2 = 3 \omega_1$ . On conçoit aisément que ce résultat peut se généraliser de la manière suivante : dans le cas N modes ( $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \dots \ll \omega_i \ll \omega_j \ll \dots \ll \omega_N$ ) ( $N \geq 2$ ) un phénomène de résonance du nième ordre sera mis en évidence pour  $\omega_j = n \omega_i$ .

Donc, pour  $H_x = 0$ , des phénomènes non linéaires notoires n'apparaîtront que lorsque certaines relations précises entre les fréquences propres seront vérifiées. Il s'ensuit que ces phénomènes ont, pratiquement, peu de chance de se produire ; et, en dehors de ces cas de résonance, le système est bien représenté par son modèle linéarisé.

Dans la suite, il sera implicitement admis que  $H_x = 0$  et que le système est en dehors des cas de résonance ; ceci assure la validité des modèles linéarisés.

Enfin, lorsque  $H_x \neq 0$ , d'autres phénomènes non linéaires peuvent apparaître. Ce cas n'est pas abordé dans le cadre de cette étude.

## ANNEXE B

Les équations différentielles rencontrées dans le chapitre 2 sont étudiées, jusqu'au 3ème ordre, par la méthode de la récurrence associée de BIRKHOFF.

### B.1. ETUDE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \alpha_{30} q_1^3 + \alpha_{12} q_1 \dot{q}_1^2 + o^3 \quad (B.1.)$$

soit

$$f(q_1, \dot{q}_1) = \alpha_{30} q_1^3 + \alpha_{12} q_1 \dot{q}_1^2$$

Il est commode d'introduire les variables complexes

$$\begin{cases} x = q_1 + j \frac{\dot{q}_1}{\omega_1} \\ y = x^* = q_1 - j \frac{\dot{q}_1}{\omega_1} \end{cases} \quad (\text{B.2.})$$

Dès lors, (B.1.) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = -j\omega_1 x + \frac{j}{\omega_1} f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2j} \omega_1\right) + o^3 \\ \dot{y} = j\omega_1 y - \frac{j}{\omega_1} f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2j} \omega_1\right) + o^3 \end{cases} \quad (\text{B.3.})$$

La récurrence associée à (B.3.) exprime les conséquents  $X \triangleq x(t+T)$  et  $Y \triangleq y(t+T)$  en fonction de  $x = x(t)$  et  $y = y(t)$ . En ne considérant que les termes jusqu'au 3ème ordre, cette récurrence s'écrit :

$$\begin{cases} X = e^{-j\omega_1 T} x + \varphi_{30} x^3 + \varphi_{03} y^3 + \varphi_{21} x^2 y + \varphi_{12} x y^2 + o^3 \\ Y = e^{j\omega_1 T} y + \varphi_{30}^* y^3 + \varphi_{03}^* x^3 + \varphi_{21}^* x y^2 + \varphi_{12}^* x^2 y + o^3 \end{cases} \quad (\text{B.4.})$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_{30} &= \frac{e^{-j\omega_1 T} - e^{-3j\omega_1 T}}{2} \cdot \frac{\alpha_{30} - \alpha_{12} \omega_1^2}{8 \omega_1^2} \\ \varphi_{03} &= \frac{e^{3j\omega_1 T} - e^{j\omega_1 T}}{4} \cdot \frac{\alpha_{30} - \alpha_{12} \omega_1^2}{8 \omega_1^2} \\ \varphi_{21} &= jT e^{-j\omega_1 T} \cdot \frac{3\alpha_{30} + \alpha_{12} \omega_1^2}{8 \omega_1^2} \\ \varphi_{12} &= \frac{e^{j\omega_1 T} - e^{-j\omega_1 T}}{2} \cdot \frac{3\alpha_{30} + \alpha_{12} \omega_1^2}{8 \omega_1^2} \end{aligned} \quad (\text{B.5.})$$

La récurrence (B.4.) contient des termes du 3ème ordre non essentiels, pouvant être éliminés par une transformation non linéaire des variables. En effet, considérons la transformation non linéaire (substitution de CIGALA):

$$\begin{aligned}
 x &\longleftrightarrow \xi \\
 y &\longleftrightarrow \eta \\
 \begin{cases} x = \xi + \beta_{30} \xi^3 + \beta_{03} \eta^3 + \beta_{21} \xi^2 \eta + \beta_{12} \xi \eta^2 \\ \eta = \xi^* \end{cases} & \quad (\text{B.6.})
 \end{aligned}$$

En choisissant :

$$\begin{aligned}
 \beta_{30} &= \frac{\varphi_{30}}{e^{-3j\omega_1 T} - e^{-j\omega_1 T}} \\
 \beta_{03} &= \frac{\varphi_{03}}{e^{3j\omega_1 T} - e^{-j\omega_1 T}} \\
 \beta_{12} &= \frac{\varphi_{12}}{e^{j\omega_1 T} - e^{-j\omega_1 T}} \\
 \beta_{21} &= 0
 \end{aligned} \quad (\text{B.7.})$$

(les dénominateurs étant  $\neq 0$  si  $T$  est convenablement choisi), la récurrence (B.4.) devient, après la transformation (B.6.) :

$$\begin{aligned}
 \Xi &= e^{-j\omega_1 T} \xi + \varphi_{21} \xi^2 \eta + o^3 \\
 \Upsilon &= e^{j\omega_1 T} \eta + \varphi_{21}^* \xi \eta^2 + o^3
 \end{aligned} \quad (\text{B.8.})$$

où  $\Xi$  est le conséquent de  $\xi$  c'est-à-dire  $\xi(t+T)$ .

La stabilité de (B.8.) s'étudie en considérant la récurrence sur les modules. Soient

$$\begin{aligned}
 \xi \eta &= |\xi|^2 = r^2 \\
 \Xi \Upsilon &= |\Xi|^2 = R^2
 \end{aligned}$$

Dès lors, la récurrence sur les modules prend la forme

$$R^2 = r^2 + 2 \operatorname{Re}(\varphi_{21} e^{j\omega_1 T}) r^4 + o^4 \quad (\text{B.9.})$$

La stabilité asymptotique de l'origine pour (B.8.) pourra être affirmée au 3ème ordre si et seulement si

$$\operatorname{Re}(\varphi_{21} e^{j\omega_1 T}) < 0$$

la condition d'instabilité étant (B.10.)

$$\operatorname{Re}(\varphi_{21} e^{j\omega_1 T}) > 0$$

Mais dans le cas qui nous intéresse :

$$\varphi_{21} e^{j\omega_1 T} = jT \frac{3\alpha_{30} + \alpha_{12}\omega_1^2}{8\omega_1^2}$$

donc

$$\operatorname{Re}(\varphi_{21} e^{j\omega_1 T}) = 0 \quad (\text{B.11.})$$

ce qui signifie que l'origine est, jusqu'au 3ème ordre, un centre pour (B.8.) et, donc, pour (B.1.). Ainsi, (B.1.) ne présente ni amortissement, ni instabilité jusqu'au 3ème ordre.

### B.2. ETUDE DU SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = & \alpha_{3000}^{(i)} Q_1^3 + \alpha_{2010}^{(i)} Q_1^2 Q_2 + \alpha_{1020}^{(i)} Q_1 Q_2^2 \\ & + \alpha_{0030}^{(i)} Q_2^3 + \alpha_{1200}^{(i)} Q_1 \dot{Q}_1^2 + \alpha_{1101}^{(i)} Q_1 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \\ & + \alpha_{1002}^{(i)} Q_1 \dot{Q}_2^2 + \alpha_{0210}^{(i)} \dot{Q}_1^2 Q_2 + \alpha_{0111}^{(i)} \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \dot{Q}_2 \\ & + \alpha_{0012}^{(i)} Q_2 \dot{Q}_2^2 + 0^3 \end{aligned} \quad (\text{B.12.})$$

$i = 1, 2$

La méthode utilisée pour étudier ce système d'équations différentielles ressemble à celle utilisée du cas précédent. D'abord, on introduit les variables complexes :

$$\begin{aligned} x_1 &= Q_1 + j \frac{\dot{Q}_1}{\omega_1} & y_1 &= x_1^* \\ x_2 &= Q_2 + j \frac{\dot{Q}_2}{\omega_2} & y_2 &= x_2^* \end{aligned} \quad (\text{B.13.})$$

Dès lors, la récurrence associée à (B.12.), exprimée avec les variables  $x_1$  et  $x_2$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= e^{-j\omega_1 T} x_1 + \sum_{k+l+m+n=3} \varphi_{klmn}^{(1)} x_1^k y_1^l x_2^m y_2^n + 0^3 \\ \dot{x}_2 &= e^{-j\omega_2 T} x_2 + \sum_{k+l+m+n=3} \varphi_{klmn}^{(2)} x_1^k y_1^l x_2^m y_2^n + 0^3 \end{aligned} \quad (\text{B.14.})$$

Comme dans le cas précédent, une transformation non linéaire de variables va permettre d'éliminer dans (B.14.) certains termes du 3ème degré non essentiels. A ce stade, il faut déjà distinguer deux cas :  $\omega_2/\omega_1 \neq 3$  et  $\omega_2/\omega_1 = 3$ .

### B.2.1. $\omega_2/\omega_1 \neq 3$

Dans ce cas, il existe un changement non linéaire de variables (substitution de CIGALA) :

$$\eta_1 \longleftrightarrow y_1$$

$$\eta_2 \longleftrightarrow y_2$$

$$\xi_1 \longleftrightarrow x_1 \quad \eta_1 = \xi_1^*$$

$$\xi_2 \longleftrightarrow x_2 \quad \eta_2 = \xi_2^*$$

pour laquelle (B.14.) se ramène à :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= e^{-j\omega_1 T} \xi_1 + \varphi_{2100}^{(1)} \xi_1^2 \eta_1 + \varphi_{1011}^{(1)} \xi_1 \xi_2 \eta_2 + O^3 \\ \dot{\xi}_2 &= e^{-j\omega_2 T} \xi_2 + \varphi_{0021}^{(2)} \xi_2^2 \eta_2 + \varphi_{1110}^{(2)} \xi_1 \eta_1 \xi_2 + O^3 \end{aligned} \quad (B.15.)$$

Il faut remarquer que les coefficients des termes du 3ème ordre restants dans (B.15.) n'ont pas été affectés par le changement de variables. La récurrence (B.15.), avec les nouvelles variables, constitue un cas critique d'une récurrence du 4ème ordre [BER]. La stabilité asymptotique de l'origine pour (B.15.) pourra être affirmée au 3ème ordre si et seulement si les conditions suivantes sont remplies [BER]:

$$A_1 < 0$$

$$A_2 < 0$$

$$\frac{A_1 A_2 - B_1 B_2}{A_2 - B_1} < 0 \quad \text{si} \quad \frac{A_1 - B_2}{A_2 - B_1} > 0$$

avec

$$A_1 = \operatorname{Re} \left[ \varphi_{2100}^{(1)} e^{j\omega_1 T} \right]$$

$$A_2 = \operatorname{Re} \left[ \varphi_{0021}^{(2)} e^{j\omega_2 T} \right]$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \operatorname{Re}[\varphi_{1011}^{(1)} e^{j\omega_1 T}] \\
 B_2 &= \operatorname{Re}[\varphi_{1110}^{(2)} e^{j\omega_2 T}]
 \end{aligned}
 \tag{B.16.}$$

Les conditions de stabilité asymptotique peuvent être comparées avec (B.10.a.). En exprimant les coefficients de la récurrence (B.15.) en fonction des coefficients du système différentiel (B.12.), on obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{2100}^{(1)} e^{j\omega_1 T} &= \frac{j}{8\omega_1} [3\alpha_{3000}^{(1)} + \omega_1^2 \alpha_{1200}^{(1)}] \\
 \varphi_{0021}^{(2)} e^{j\omega_2 T} &= \frac{j}{8\omega_2} [3\alpha_{0003}^{(2)} + \omega_2^2 \alpha_{0012}^{(2)}] \\
 \varphi_{1011}^{(1)} e^{j\omega_1 T} &= \frac{j}{4\omega_1} [\alpha_{1020}^{(1)} + \omega_2^2 \alpha_{1002}^{(1)}] \\
 \varphi_{1110}^{(2)} e^{j\omega_2 T} &= \frac{j}{4\omega_2} [\alpha_{2010}^{(2)} + \omega_1^2 \alpha_{0210}^{(2)}]
 \end{aligned}
 \tag{B.17.}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0 \\
 A_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Ceci signifie que l'origine reste, jusqu'au 3ème ordre, un centre pour la récurrence (B.15.) et, donc, pour le système d'équations différentielles (B.12.). Ainsi, (B.12.) ne présente ni instabilité, ni amortissement jusqu'au 3ème ordre.

De plus, il est intéressant de faire des considérations énergétiques ; en effet, ces considérations vont mettre en évidence une divergence entre les deux cas envisagés. Soit la fonction d'énergie  $E$  associée à (B.15.) :

$$E \triangleq \sum_1 \eta_1 + \alpha \sum_2 \eta_2
 \tag{B.18.}$$

soit

$$\Delta E \triangleq \left[ \sum_1 \eta_1 + \alpha \sum_2 \eta_2 \right] - \left[ \sum_1 \eta_1 + \alpha \sum_2 \eta_2 \right]$$



En calculant  $\Delta E$  le long de la solution de (B.15.), on obtient :

$$\Delta E = O + O^4 \quad \psi \propto$$

d'où

$$\Delta(\xi_1 \eta_1) = O + O^4$$

$$\Delta(\xi_2 \eta_2) = O + O^4$$

Ceci signifie qu'avec les variables  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , chaque mode conserve son énergie totale jusqu'au 4ème ordre.

### B.2.2. $\omega_2/\omega_1 = 3$ (cas de résonance)

Lorsque le rapport des fréquences propres  $\omega_2/\omega_1$  vaut 3, l'étude du système (B.12.) ne peut plus être ramenée à celle d'une récurrence du type (B.15.). En fait, une transformation non linéaire de variables (substitution de CIGALA)

$$\begin{aligned} \xi_1 &\leftrightarrow x_1 \\ \xi_2 &\leftrightarrow x_2 \\ \eta_1 &\leftrightarrow y_1 & \eta_2 &= \xi_1^* \\ \eta_2 &\leftrightarrow y_2 & \eta_1 &= \xi_2^* \end{aligned}$$

permet seulement de ramener (B.14.) à la récurrence

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= e^{-j\omega_1 T} \xi_1 + \varphi_{2100}^{(1)} \xi_1^2 \eta_2 + \varphi_{1011}^{(1)} \xi_1 \xi_2 \eta_2 + \varphi_{0210}^{(1)} \eta_1^2 \xi_2 + O^3 \\ \dot{\xi}_2 &= e^{-j\omega_2 T} \xi_2 + \varphi_{0021}^{(2)} \xi_2^2 \eta_2 + \varphi_{1110}^{(2)} \xi_1 \eta_1 \xi_2 + \varphi_{3000}^{(2)} \eta_1^3 + O^3 \end{aligned} \quad (B.19.)$$

qui est plus complexe que (B.15.).

Les conditions de stabilité asymptotique (B.16.) restent valables pour cette nouvelle récurrence.

Les coefficients intervenant dans la récurrence (B.19.) s'expriment en fonction des coefficients intervenant dans le système différentiel (B.12.) :

$$\begin{aligned}
\varphi_{2100}^{(1)} e^{j\omega_1 T} &= \frac{j}{8\omega_1} \left[ 3\alpha_{3000}^{(1)} + \omega_2^2 \alpha_{1200}^{(1)} \right] \\
\varphi_{0021}^{(2)} e^{j\omega_2 T} &= \frac{j}{8\omega_2} \left[ 3\alpha_{0030}^{(2)} + \omega_1^2 \alpha_{0012}^{(2)} \right] \\
\varphi_{1011}^{(1)} e^{j\omega_1 T} &= \frac{j}{4\omega_1} \left[ \alpha_{2010}^{(1)} + \omega_2^2 \alpha_{1002}^{(1)} \right] \\
\varphi_{1110}^{(2)} e^{j\omega_2 T} &= \frac{j}{4\omega_2} \left[ \alpha_{2010}^{(2)} + \omega_1^2 \alpha_{0210}^{(2)} \right] \\
\varphi_{0210}^{(1)} e^{j\omega_1 T} &= \frac{j}{8\omega_1} \left[ \alpha_{2010}^{(1)} + \alpha_{1101}^{(1)} \omega_1 \omega_2 - \alpha_{0210}^{(1)} \omega_1^2 \right] \\
\varphi_{3000}^{(2)} e^{j\omega_2 T} &= \frac{j}{8\omega_2} \left[ \alpha_{3000}^{(2)} - \alpha_{1200}^{(2)} \omega_1^2 \right]
\end{aligned} \tag{B.20.}$$

Encore une fois, nous avons :

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0 \\
A_2 &= 0
\end{aligned}$$

ce qui signifie, de nouveau, que l'origine est, jusqu'au 3ème ordre, un point du type centre pour (B.19.) et, par conséquent, pour (B.12.).

Une divergence entre ce cas de résonance et le cas précédent apparaît au niveau des considérations énergétiques. Considérons de nouveau la fonction d'énergie  $E$ . La variation, soit  $\Delta E$ , calculée le long de la solution de (B.19.) devient cette fois :

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \eta_1^3 \eta_2 \left[ e^{j\omega_1 T} \varphi_{0210}^{(1)} + \alpha e^{-j\omega_2 T} \varphi_{3000}^{*(2)} \right] \\
&\quad \eta_1^3 \eta_2 \left[ e^{-j\omega_1 T} \varphi_{0210}^{*(1)} + \alpha e^{j\omega_2 T} \varphi_{3000}^{(2)} \right]
\end{aligned} \tag{B.21.}$$

Cette fois,  $\Delta E$  n'est plus nul jusqu'au 4ème ordre pour tout  $\alpha$ .  $E$  sera une constante du mouvement jusqu'au 4ème ordre pour (B.19.) si et seulement si :

$$\alpha = - \frac{e^{j\omega_1 T} \varphi_{0210}^{(1)}}{e^{-j\omega_2 T} \varphi_{3000}^{*(2)}} \tag{B.22.}$$

car alors  $\Delta E = 0 + 0^4$

Cette fois, il n'existe plus de variables  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , pour lesquelles chaque mode conserve son énergie totale. Il y aura donc des possibilités d'échange d'énergie entre les modes.

$\alpha$  peut s'exprimer en fonction des coefficients des équations différentielles (B.12.). Ainsi,

$$\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\alpha_{2010}^{(1)} + \alpha_{1101}^{(1)} \omega_1 \omega_2 - \alpha_{0110}^{(1)} \omega_1^2}{\alpha_{3000}^{(2)} - \alpha_{1200}^{(2)} \omega_1^2} \quad (\text{B.23.})$$

On démontre que  $\alpha = 3$ , ce qui est, notamment, une conséquence du fait que (B.12.) possède une intégrale première du genre (2.37.); ce qui impose certaines relations entre les coefficients intervenant dans (B.12.).



## CHAPITRE 3

---

### LE PROBLÈME INVERSE DU FILTRAGE OPTIMAL

-



La synthèse d'un système "fin de maintien en attitude pour satellite déformable" peut se faire par l'approche moderne [ESR, LAR, OHK, SCHI, SCHM]. Dans ce cas, la chaîne de réaction se compose d'un filtre et d'une loi de commande déterministe optimale.

Une étude sérieuse des problèmes de filtrage rencontrés dans la stabilisation d'attitude des satellites présentant des modes déformables nécessite, au préalable, le traitement du problème inverse du filtrage optimal.

Strictement parlant, le problème inverse du filtrage optimal se définit comme suit : étant donné un observateur [LUE] linéaire stationnaire et un processus linéaire stationnaire à observer, il faut déterminer, s'ils existent, des bruits blancs agissant sur le processus tels que le filtre stationnaire optimal correspondant soit l'observateur donné. Toutefois, dans ce chapitre, ce problème prendra une signification plus large. Plus généralement, seront regroupés dans ce problème inverse du filtrage optimal toutes les relations existant entre un problème de filtrage statistique linéaire et les pôles du filtre linéaire stationnaire optimal correspondant.

Dans ce chapitre, tout comme dans les développements ultérieurs, le formalisme échantillonné sera le seul retenu.

Ce chapitre est essentiellement théorique. Néanmoins, ses nombreuses conséquences pratiques seront mises en évidence dans les chapitres suivants.

### 3.1. OBSERVATEUR DE LUENBERGER [LUE]

Soit le système linéaire, discret, stationnaire, non perturbé :

$$x_{k+1} = \phi x_k + G u_k \quad (3.1.)$$

$$z_k = H x_k$$

avec :  $x$  : vecteur d'état  $(n,1)$   
 $u$  : vecteur de commande déterministe  $(r,1)$   
 $\phi$  : matrice de transition d'état  $(n,n)$ .  $\phi$  est non singulière ;  
ses valeurs propres seront appelées "pôles du système"  
 $z$  : vecteur de mesure  $(m,1)$  ( $m < n$ )  
 $H$  : matrice  $(m,n)$  de rang  $m$   
 $G$  : matrice  $(n,r)$  d'entrée  
 $(\phi, H)$  : est une paire observable.

On construit un autre système linéaire stationnaire de mêmes dimensions que (3.1.). Ce nouveau système étant excité par  $u_k$  et  $z_k$ , on veut que l'état  $\hat{x}_k$  de ce nouveau système tende asymptotiquement vers l'état  $x_k$  du premier ; c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{x}_k - x_k) = 0$$

Ce nouveau système est appelé "observateur de LUENBERGER d'ordre maximum" du système (3.1.). Ainsi, l'observateur peut être du type :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \phi \hat{x}_k + G u_k + K (z_{k+1} - H \phi \hat{x}_k - H G u_k) \\ \text{ou} \quad \hat{x}_{k+1} &= (I_n - KH) \phi \hat{x}_k + (I_n - KH) G u_k + K z_{k+1} \end{aligned} \quad (3.2.)$$

Si on définit l'erreur :

$$e_k \triangleq \hat{x}_k - x_k$$

(3.1.) et (3.2.) mènent à :

$$e_{k+1} = (I_n - KH) \phi e_k \quad (3.3.)$$

Considérons

$$(I_n - KH) \phi = \phi - K(H\phi)$$

$(\phi, H)$  est observable et  $\phi$  non singulière  $\Rightarrow (\phi, H\phi)$  est observable. Dès lors,  $\phi$  et  $H$  étant fixés, on démontre que les valeurs propres de  $\phi - K(H\phi)$  peuvent être placées n'importe où dans le plan complexe en choisissant convenablement le gain  $K$  [WON]. En particulier, on peut trouver un gain  $K$



qui stabilise asymptotiquement  $(I_n - KH)\phi$ , c'est-à-dire :

$$\forall i (1 \leq i \leq n) \quad |\lambda_i(I_n - KH)\phi| < 1 \quad (3.4.)$$

( $\lambda_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre d'une matrice).

Dès lors, l'équation (3.3.) montre que l'erreur est amortie asymptotiquement et, dans ce cas, on dit que (3.2.) est un observateur de (3.1.).

Les valeurs propres de  $(I_n - KH)\phi$  seront appelées, par la suite, les "pôles de l'observateur".

Jusqu'ici, l'aspect stochastique n'a pas été considéré. En pratique [SCHI], on choisit le gain K de telle manière que les pôles de l'observateur soient compatibles avec les spécifications, les bruits agissant sur le système et les imperfections inhérentes au modèle. Mais, il semble que le choix de ces pôles en fonction des données concrètes du problème soit une étape pour laquelle il n'existe pas de méthode systématique. De plus, comme nous le verrons par la suite, nous risquons de faire un placement de pôles incompatible avec la structure, les propriétés et les bruits du système.

Néanmoins, soient les pôles de l'observateur choisis. Le gain K qui permet de calculer convenablement les valeurs propres de  $(I_n - KH)\phi$  se détermine en passant par la forme canonique de LUENBERGER [WON] du système (3.1.). Malheureusement, pour le cas multivariable, cette procédure est très lourde et certaines propriétés du système n'apparaissent pas clairement.

Une autre manière de faire la synthèse d'un observateur, c'est-à-dire de trouver un gain K qui stabilise asymptotiquement  $(I_n - KH)\phi$ , consiste à construire une équation de RICCATI discrète associée et d'en trouver la solution stationnaire.

### 3.2. TOUT FILTRE DE KALMAN EST UN OBSERVATEUR DE LUENBERGER

Reprenons le système (3.1.). On supprime l'entrée déterministe  $u_k$ , le problème fondamental n'en étant pas modifié. En invoquant le fait que tout système physique est perturbé, on ajoute des bruits blancs gaussiens sur le système (3.1.) ; ces bruits peuvent aussi représenter les imperfections du modèle. Ainsi, on obtient (3.5.) :

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \phi x_k + w_k & E w_k w_j^T &= Q \delta_{kj} = LL^T \delta_{kj} \\
 & & Q &\text{symétrique } \geq 0 \\
 & & (\phi, L) &\text{commandable} \\
 & & E w_k v_j^T &= 0
 \end{aligned} \tag{3.5.}$$

$$\begin{aligned}
 z_k &= H x_k + v_k & E v_k v_j^T &= R \delta_{kj} \\
 & & R &\text{symétrique } > 0
 \end{aligned}$$

$(\phi, H)$  observable

$\phi$  non singulière

On ne considère que le cas standard non singulier [RAP] pour lequel  $(\phi, L)$  est commandable et  $R > 0$ . Dans ce cas, sans perte de généralité, il est commode de poser  $R = I_m$ .

La condition  $R > 0$  sera toujours vérifiée dans les aspects concrets.

Les équations du filtre de KALMAN associées à (3.5.) peuvent se mettre sous la première forme qui fait intervenir l'estimation :

$$\hat{x}_k = E(x_k | z_k, z_{k-1}, z_{k-2}, \dots)$$

Dans ce cas, l'équation du filtre est

$$\hat{x}_{k+1} = \phi \hat{x}_k + K_{k+1} (z_{k+1} - H \phi \hat{x}_k) \tag{3.6.}$$

avec

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_0 \geq 0$$

$$P_k = E(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T$$

$$P_k = (I_n - K_k H)(\phi P_{k-1} \phi^T + Q)(I_n - K_k H)^T + K_k K_k^T \quad (3.7.a.)$$

$$K_k = (\phi P_{k-1} \phi^T + Q) H^T [H(\phi P_{k-1} \phi^T + Q) H^T + I_m]^{-1} \quad (3.7.b.)$$

La seconde forme fait intervenir l'estimation (prédicteur  
1 pas) :

$$\bar{x}_k \triangleq E(x_k | z_{k-1}, z_{k-2}, \dots) = \phi \hat{x}_{k-1}$$

L'équation du filtre est :

$$\bar{x}_{k+1} = \phi \bar{x}_k + \phi K_k (z_k - H \bar{x}_k) \quad (3.8.)$$

avec

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\bar{P}_0 \geq 0$$

$$\bar{P}_k = E(\bar{x}_k - x_k)(\bar{x}_k - x_k)^T = \phi P_{k-1} \phi^T + Q$$

$$K_k = \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + I_m)^{-1} \quad (3.9.)$$

$$\bar{P}_{k+1} = \phi \bar{P}_k \phi^T - \phi \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + I_m)^{-1} H \bar{P}_k \phi^T + Q$$

Des résultats sont présentés ci-dessous sous forme d'une suite de théorèmes. Seuls les résultats originaux sont démontrés.

#### Théorème 3.2.1.

La récurrence (3.9.) associée au problème de filtrage (3.5.) est telle que  $\bar{P}_k > 0$  pour  $k \geq n$ .

Ce résultat est démontré dans [RAP].

#### Corollaire 3.2.2.

La récurrence (3.7.) associée au problème de filtrage (3.5.) est telle que  $P_k > 0$  pour  $k \geq n$ .

En effet, de (3.9.), on déduit :

$$P_k = \bar{P}_k - \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + I_m)^{-1} H \bar{P}_k \quad (3.10.)$$

Dès lors, la propriété "définie positive" de  $\bar{P}_k$  pour  $k \geq n$  implique celle de  $P_k$  pour  $k \geq n$  en vertu du lemme d'inversion matricielle [FOR].

Corollaire 3.2.3.

Pour  $k \geq n$ , le gain du filtre donné par (3.7.b.) peut se mettre sous la forme simplifiée :

$$K_k = P_k H^T \quad (3.11.)$$

En effet, pour  $k \geq n$ ,  $P_k$  et  $\bar{P}_k$  sont toutes deux définies positives, ce qui rend la forme (3.11.) du gain valide [SOR].

Corollaire 3.2.4.

Pour  $k \geq n$ , les matrices

$$(I_n - K_k H) \Phi \quad \text{et} \quad \Phi (I_n - K_k H)$$

sont non singulières.

En effet, on a [SOR]:

$$P_k = (I_n - K_k H) \bar{P}_k \quad (3.12.)$$

Le fait que  $P_k$  et  $\bar{P}_k$  soient définies positives pour  $k \geq n$  implique la non singularité de  $(I_n - K_k H)$  pour  $k \geq n$ .  $\Phi$  étant aussi non singulière, le résultat annoncé est dès lors évident.

Théorème 3.2.5.

La récurrence (3.9.) converge asymptotiquement vers une limite  $\bar{P}_\infty$  bornée et  $> 0$ . De plus,  $\bar{P}_\infty$  est l'unique solution symétrique et définie positive de l'équation algébrique correspondante

$$\bar{P}_\infty = \Phi \bar{P}_\infty \Phi^T - \Phi \bar{P}_\infty H^T (H \bar{P}_\infty H^T + I_m)^{-1} H \bar{P}_\infty \Phi^T + Q \quad (3.13.)$$

Ces résultats sont établis dans [RAP] et [PAY].

Corollaire 3.2.6.

La récurrence (4.7.) converge asymptotiquement vers une limite  $P_\infty$  bornée et définie positive. De plus  $P_\infty$ ,  $K_\infty$  et  $Q$  satisfont l'ensemble de contraintes :

$$P_\infty = (I_n - K_\infty H) (\Phi P_\infty \Phi^T + Q) (I_n - K_\infty H)^T + K_\infty K_\infty^T \quad (3.14.a.)$$

$$P_\infty H^T = K_\infty \quad (3.14.b.)$$

Théorème 3.2.7.

Les matrices  $(I_n - K_\infty H)\Phi$  et  $\Phi(I_n - K_\infty H)$  sont asymptotiquement stables et non singulières.

La stabilité asymptotique de ces matrices est démontrée dans [RAP]. Leur non singularité est une conséquence du corollaire (3.2.4.).

Comme conséquence du théorème 3.2.7., on peut faire la synthèse d'un observateur du système (3.1.) en bruitant artificiellement ce système : on obtient (3.5.). Alors, le gain stationnaire de KALMAN  $K_\infty$  de ce problème de filtrage stabilise  $(I_n - KH)\Phi$ . Ce gain de KALMAN peut donc servir de gain pour l'observateur (3.2.).

Cette méthode qui donne systématiquement un gain qui stabilise  $(I_n - KH)\Phi$  est peut-être plus simple que celle qui consiste à passer par les formes canoniques [WON]. De plus, il ressortira que cette méthode va placer les pôles de l'observateur conformément à la structure du système, à ses propriétés et aux bruits qui agissent. Ce point sera illustré dans le chapitre 5.

Théorème 3.2.8.

On a :  $\text{rang } K_\infty = m.$

Ce résultat est, de par (3.11.), une conséquence immédiate du fait que  $P_\infty$  est définie positive et  $\text{rang } H = m.$

Théorème 3.2.9.

Si  $\forall i (1 \leq i \leq n) \quad |\lambda_i \phi| \geq 1,$  alors  $(\phi, K_\infty)$  est commandable.

On démontre ce résultat par l'absurde. Supposons que  $(\phi, K_\infty)$  est non commandable. Alors, il existe un vecteur  $V (n,1)$  tel que :  $\tilde{V} \phi = \lambda \tilde{V}$  et  $\tilde{V} K_\infty = 0$  (où  $\lambda$  est une valeur propre de  $\phi$  et  $\tilde{V}$  le transposé conjugué de  $V$ ).

De (3.14.a.), on déduit successivement :

$$0 = \tilde{V} P_\infty v - \tilde{V} (\phi P \phi^T + Q) v \quad (3.15.a.)$$

$$0 = (1 - |\lambda|^2) \tilde{V} P_\infty v - \tilde{V} Q v \quad (3.15.b.)$$

Si  $\lambda = 1,$  (3.15.b.) mène à  $\tilde{V} Q v = 0,$  ce qui est en contradiction avec le fait que  $(\phi, Q)$  est commandable. D'autre part, si  $|\lambda| > 1$  et  $P_\infty$  définie positive, on déduit de la formule (3.15.b.) que  $\tilde{V} Q v < 0,$  ce qui est absurde.

Remarque 3.2.19.

On a :  $(\phi, K)$  commandable  $\iff [(I_n - KH)\phi, K]$  commandable.

Remarque 3.2.11.

Dans ce cas monovariante ( $m=1$ ), dire que  $(\phi, K)$  est commandable équivaut à imposer que les matrices  $\phi$  et  $(I_n - KH)\phi$  n'ont aucune valeur propre commune.

En effet, soient  $A(z)$  et  $B(z)$  respectivement les polynomes caractéristiques de  $(I_n - KH)\phi$  et  $\phi$

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

$$B(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$$

$(I_n - KH)\phi$  et  $\phi$  n'auront aucune valeur propre commune si et seulement si  $A(z)$  et  $B(z)$  n'ont aucune racine commune ou, en d'autres termes, si la fraction rationnelle

$$G(z) \triangleq \frac{A(z) - B(z)}{B(z)}$$

n'a aucun facteur commun simplifiable. Après avoir remarqué que  $G(z)$  est une transmittance réalisable, il est aisé de la réaliser sous forme canonique observable.  $G(z)$  n'aura pas de facteur simplifiable si et seulement si la réalisation est commandable. Tous calculs faits, on trouve que cette dernière condition est équivalente à  $(\phi, K)$  commandable.

Remarque 3.2.12.

La remarque 3.2.11. n'est pas toujours valable dans le cas multivariable ( $m > 1$ ).

Théorème 3.2.13.

La matrice hamiltonienne

$$\mathcal{H} = \left( \begin{array}{c|c} \phi^{-T} & \phi^{-T} H^T H \\ \hline Q \phi^{-T} & \phi + Q \phi^{-T} H^T H \end{array} \right) \quad (3.16.)$$

liée au problème de filtrage (3.5.) est non singulière. Si  $\lambda$  est une valeur propre de cette matrice,  $\lambda^{-1}$  en est également une. Enfin, les valeurs propres asymptotiquement stables de  $\mathcal{H}$  sont les racines caractéristiques des transitoires de l'équation de RICCATI (3.9.) associée à (3.5.).

Ces résultats sont démontrés dans [VAU] .

Théorème 3.2.14.

Les valeurs propres stables de  $\mathcal{H}$  sont les valeurs propres des matrices  $(I_n - K_\infty H) \notin$  et  $\notin(I_n - K_\infty H)$ .

En effet, de (3.8.) et (3.9.a.), on déduit la seconde forme de l'équation du filtre non excité :

$$\bar{x}_{k+1} = [\phi - \phi \bar{P}_\infty H^T (H \bar{P}_\infty H^T + I_m)^{-1} H] \bar{x}_k$$

ou encore

$$\bar{x}_{k+1} = (\phi^{-1} + P_\infty H^T H \phi^{-1})^{-1} \bar{x}_k$$

avec, bien entendu :

$$(\phi^{-1} + P_\infty H^T H \phi^{-1})^{-1} = \phi(I_n - K_\infty H)$$

Soit  $\lambda$  une valeur propre quelconque de  $(\phi^{-1} + P_\infty H^T H \phi^{-1})^{-1}$  et  $v$  le vecteur  $(n,1)$  correspondant :

$$(\phi^{-1} + P_\infty H^T H \phi^{-1})^{-1} v = \lambda v$$

$\lambda^{-1}$  est manifestement une valeur propre quelconque de  $\notin(I_n - K_\infty H)$ . On démontre que c'est aussi une valeur propre de  $\mathcal{H}$ . En vertu du théorème 3.2.13., il suffit de démontrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathcal{H}$  et, pour cela, vérifier que :

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} v \\ P_\infty v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ P_\infty v \end{pmatrix}$$

en faisant, notamment, usage de l'équation algébrique de RICCATI (3.13.).

Le point essentiel traité dans ce paragraphe est le suivant : tout filtre de KALMAN associé au système (3.1.) a un gain stationnaire qui stabilise asymptotiquement  $(I_n - KH) \notin$  et qui peut donc servir de gain pour l'observateur (3.2.). En ce sens, tout filtre de KALMAN est un observateur de LUENBERGER.

Maintenant, considérons le problème inverse. Soit  $K$  un gain pour l'observateur (3.2.), obtenu en utilisant les méthodes de placement de pôles [WON]. On se pose la question : est-ce un gain de KALMAN ? Autrement dit : existe-t-il des bruits blancs gaussiens tels que le



gain stationnaire  $K_\infty$  de KALMAN du système (3.1.), excité par ces bruits, soit le gain  $K$  d'observateur ? Le but du paragraphe suivant est précisément de répondre à cette question.

Convenons d'appeler ce problème : "réalisation de KALMAN d'un observateur".

### 3.3. REALISATION DE KALMAN D'UN OBSERVATEUR

Soit le système (3.1.), soit l'ensemble des pôles de l'observateur (3.2.) spécifié à l'avance, soit  $K$  le gain correspondant de l'observateur.

On pose la question ; existe t-il une version limitée du type (3.5.) pour le système (3.1.), telle que le gain stationnaire de KALMAN de cette version limitée soit  $K$  ?.

Plus précisément, existe t-il des matrices symétriques  $Q \gg 0$  et  $R > 0$ , satisfaisant les conditions posées dans (3.5.), telles que le gain stationnaire  $K_\infty$  de KALMAN, associée à (3.5.), soit égal à  $K$  ?

On verra ci-dessous que ce n'est pas toujours le cas ; donc, que la réalisation de KALMAN d'un observateur n'est pas toujours possible.

Dans ce paragraphe, on posera :  $R = I_m$ . Dans le cas mono-variable, ceci n'engendre aucune restriction sur la réalisation. Dans le cas multivariable, la réalisation se trouve restreinte à une classe particulière. Néanmoins, cette restriction n'est pas gênante pour les applications concrètes où les bruits de mesure sont bien connus, alors que de nombreuses incertitudes règnent au niveau des bruits de dynamique.

De plus, une autre restriction consiste à imposer au gain  $K$  de l'observateur de vérifier les deux conditions suivantes :

$$(1) \quad \forall i, j \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad \lambda_i (I_n - KH)\phi \neq \lambda_j \phi \quad (3.17.a.)$$

$$(2) \quad \forall i \quad (1 \leq i \leq n) \quad \lambda_i (I_n - KH)\phi \neq 0 \quad (3.17.b.)$$

La condition (3.17.b.) est nécessaire pour que le gain  $K$  admette une réalisation de KALMAN, en vertu du théorème 3.2.7. La condition (3.17.a.) n'est pas nécessaire ; elle pourrait être évitée au prix de nombreuses complications supplémentaires.

Tous les développements reposent sur un algorithme de base. Des critères de réalisabilité peuvent en être déduits ainsi que des méthodes systématiques pour trouver une matrice  $Q$  correspondant à un gain  $K$  donné réalisable.

L'algorithme de base est d'abord présenté rapidement. Son approfondissement ainsi que ses implications sont présentés sous forme d'une suite de théorèmes...

Soit  $R=I_m$ , après avoir posé  $K=K_\infty$  les relations (3.14.) deviennent :

$$\begin{cases} P_\infty = (I_n - KH)\Phi P_\infty \Phi^T (I_n - KH)^T + (I_n - KH)Q(I_n - KH)^T + KK^T & (3.18.a.) \\ K = P_\infty H^T & (3.18.b.) \end{cases}$$

Avec  $R=I_m$ , la réalisation consiste à trouver  $P_\infty$  et  $Q$ , symétriques et respectivement  $> 0$  et  $\geq 0$ , satisfaisant (3.18.) où  $\Phi, H$  et  $K$  sont fixés. Posons :

$$\Psi \triangleq (I_n - KH)\Phi \quad (\text{matrice stable}) \quad (3.19.a.)$$

$$S \triangleq (I_n - KH)Q(I_n - KH)^T + KK^T \quad (\text{matrice symétrique}) \quad (3.19.b.)$$

alors (3.17.) devient :

$$\begin{cases} P_\infty = \Psi P_\infty \Psi^T + S & (3.20.a.) \\ P_\infty H^T = K & (3.20.b.) \end{cases}$$

C'est l'équation de la réalisation stochastique [FAU].

Dès lors, la réalisation peut se faire en deux étapes :

1) Trouver, si il en existe, une solution  $(P_\infty, S)$  de (3.20) (avec  $P_\infty$  et  $S$  symétriques et respectivement  $> 0$  et  $\geq 0$ ).

2) Dans le cas où la première étape peut être accomplie, avec la matrice  $S$  (symétrique et  $\geq 0$ ) qu'elle a fournie, déduire  $Q$  de (3.19.b.), si cela est possible.

Pour voir quand et comment les deux étapes peuvent être menées à bien, on doit faire intervenir les théorèmes qui suivent.

Théorème 3.3.1.

Sous la condition (3.17.a.), la paire  $(\Psi, K)$  est commandable.

En effet, si  $(\Psi, K)$  n'était pas commandable, il existerait un vecteur  $V$   $(n,1)$  tel que  $\tilde{V}\Psi = \lambda\tilde{V}$  et  $\tilde{V}K = 0$ . Ce qui implique  $\tilde{V}\phi = \lambda\tilde{V}$ ; dans ce cas,  $\Psi$  et  $\phi$  aurait la valeur propre  $\lambda$  en commun; ce qui contredit la condition (3.17.a.).

Théorème 3.3.2.

La condition (3.17.b.), jointe aux conditions imposées dans (3.5.), assure l'observabilité de  $(\Psi, H)$ .

En effet, de par (3.5.),  $(\phi, H)$  est observable. Ceci mène à  $(\phi, H\phi)$  observable. D'où : pour tout  $K$   $(n,m)$ , la paire  $(\phi - KH\phi, H\phi) = (\Psi, H\phi)$  est observable. Montrons, par l'absurde, que cela implique que  $(\Psi, H)$  est observable.

La paire  $(\Psi, H\phi)$  est observable ; c'est-à-dire :  
 $\forall u$   $(n,1)$ ,  $u \neq 0$ ;  $(I_n - KH)\phi u = \lambda u \Rightarrow H\phi u \neq 0$

par hypothèse absurde,  $(\Psi, H)$  n'est pas observable :

$$\exists v$$
  $(n,1)$ ,  $v \neq 0$ ;  $(I_n - KH)\phi v = \lambda v \Rightarrow H v = 0$

On en déduit :

$$H(I_n - KH)\phi v = \lambda H v = 0$$

$$(I_m - HK)H\phi_v = 0$$

Le fait que  $H\phi_v \neq 0$  implique que  $(I_m - HK)$  est une matrice singulière.

D'autre part, il existe une forme canonique de (3.1.) pour laquelle  $H = (I_m | 0)$ . Dès lors, si

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & m \\ K_2 & n-m \end{bmatrix}$$

la singularité de  $(I_m - HK)$  implique celle de  $(I_m - K_1)$ . Mais,

$$I_n - KH = \left[ \begin{array}{c|c} I_m - K_1 & 0 \\ \hline -K_2 & I_{n-m} \end{array} \right]$$

d'où  $(I_n - KH)$  et, donc,  $(I_n - KH)^{\theta}$  seraient singulières. Ce qui est contraire à la condition (3.17.b.).

Sous les conditions

$$\begin{aligned} (\Psi, H) & \text{ observable} \\ (\Psi, K) & \text{ commandable} \\ \Psi & \text{ asymptotiquement stable} \end{aligned} \tag{3.21.}$$

des propriétés du système d'équations (3.20.) sont présentées dans [FAU]. Ci-dessous, l'étude du système (3.20.) est abordée d'une autre manière. Ceci fournira des développements originaux ainsi que des résultats nouveaux.

### Théorème 3.3.3.

Sous les conditions (3.21.), le système d'équations (3.20.) admet (au moins) une solution  $(P_{\infty}, S)$  avec  $P_{\infty}$  et  $S$  symétriques et semi-définies positives.

Ce résultat se démontre de la manière la plus simple par une méthode spectrale.

En effet, soit  $\mathcal{Y}(z)$  un spectre  $(m, m)$  rationnel.  $\mathcal{Y}(z)$  doit donc vérifier les conditions:

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{Y}^T(z^{-1}) \tag{3.22.a.}$$

$$\mathcal{Y}(e^{j\theta}) \geq 0 \quad \forall \theta \text{ réel} \tag{3.22.b.}$$

La propriété (3.22.a.) et le fait que le spectre est rationnel lui imposent de pouvoir se mettre sous la forme :

$$\mathcal{Y}(z) = A_0 + H\Psi(zI_n - \Psi)^{-1}K + K^T(z^{-1}I_n - \Psi^T)^{-1}\Psi^T H^T$$

avec

- $A_0$  matrice (m,m) symétrique
- $H$  matrice (n,m)
- $K$  matrice (n,m)
- $\Psi$  matrice (n,n) asymptotiquement stable
- $(\Psi, H)$  observable
- $(\Psi, K)$  commandable.

D'autre part, la propriété (3.22.b.) jointe au fait que le spectre est rationnel lui impose en plus de pouvoir aussi se mettre sous la forme :

$$\mathcal{Y}(z) = H(zI_n - \Psi)^{-1}S(z^{-1}I_n - \Psi^T)^{-1}H^T$$

avec  $S$  matrice (n,n) symétrique semi-définie positive.

L'équivalence entre ces deux formes implique dès lors l'existence de deux matrices  $(P_\infty, S)$  symétriques et semi-définies positives satisfaisant les contraintes (3.20.).

Pratiquement, pour trouver une solution  $(P_\infty, S)$  ( $P_\infty, S$  symétriques  $\geq 0$ ) de (3.20.), on construit avec les matrices  $\Psi, K$  et  $H$  données le spectre  $\mathcal{Y}(z) = HK + H\Psi(zI_n - \Psi)^{-1}K + K^T(z^{-1}I_n - \Psi^T)^{-1}\Psi^T H^T$  dont la factorisation spectrale donne  $S$ . Pour trouver  $P_\infty$ , il suffit dès lors de résoudre l'équation de LJAPOUNOV (3.20.a.).

#### Théorème 3.3.4.

Une matrice  $S$  (n,n) symétrique et semi-définie positive est solution de (3.20.) si et seulement si elle vérifie dans le domaine fréquentiel l'égalité :

$$\begin{aligned} HK + H\Psi(zI_n - \Psi)^{-1}K + K^T(z^{-1}I_n - \Psi^T)^{-1}\Psi^T H^T = \\ H(zI_n - \Psi)^{-1}S(z^{-1}I_n - \Psi^T)^{-1}H^T \end{aligned} \quad (3.23.)$$

On démontre d'abord que la condition (3.23.) est nécessaire. En effet, soit  $(P_\infty, S)$  une solution de (3.20.). Dès lors, l'égalité (3.23.) se démontre aisément en développant les deux membres en série de puissance de  $z$  et en vérifiant, après y avoir injecté les relations (3.30.), que les coefficients des termes de même puissance sont égaux.

Montrons ensuite que la condition (3.23.) est suffisante. Soit  $S(n,n)$  symétrique et  $\geq 0$  vérifiant (3.23.). On définit  $P_\infty$  comme solution de l'équation de LJAPOUNOV :

$$P_\infty - \Psi P_\infty \Psi^T = S$$

par :

ou encore

$$P_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k S \Psi^{kT}$$

Il reste donc à démontrer que le  $P_\infty$  construit de cette manière vérifie (3.20.b.). Pour cela, on développe de nouveau en série de puissance de  $z$  les deux membres de (3.23.). Dès lors, l'égalité des coefficients des termes en  $z^0$  donne  $HP_\infty H^T = HK$  ; celle des coefficients des termes en  $z^{-1}$  donne  $H\Psi P_\infty H^T = H\Psi K$  et ainsi de suite. On arrive donc à :

$$H(P_\infty H^T) = H(K)$$

$$H\Psi(P_\infty H^T) = H\Psi(K)$$

$$H\Psi^2(P_\infty H^T) = H\Psi^2(K)$$

....

Dès lors, l'observabilité de la paire  $(\Psi, H)$  conduit à

$$P_\infty H^T = K.$$

Ainsi, (3.23.) est la version fréquentielle du système d'équations (3.20.). Formellement, le passage de (3.20.) à (3.23.) se fait par élimination de  $P_\infty$ .

Maintenant, considérons le problème de la redondance ; il faut entendre par redondance l'existence éventuelle de plusieurs solutions de (3.20.). Soient  $(P_1, S_1)$  et  $(P_2, S_2)$  ( $P_1, P_2, S_1, S_2$  symétriques et  $\geq 0$ ) deux solutions de (3.20.). Soient  $\Delta P \triangleq P_2 - P_1$  et  $\Delta S \triangleq S_2 - S_1$ . Dès lors, le couple  $(\Delta P, \Delta S)$  satisfait les équations de la redondance :

$$\begin{cases} \Delta P = \Psi \Delta P \Psi^T + \Delta S & (3.24.a.) \\ \Delta P H^T = 0 & (3.24.b.) \end{cases}$$

Théorème 3.3.5.

Les équations (3.24.) de la redondance admettent un ensemble de solutions  $(\Delta P, \Delta S)$  ( $\Delta P$  et  $\Delta S$  symétriques) non vide et ne se ramenant pas à la solution triviale.

Ces résultats sont assez évidents.

Théorème 3.3.6.

La condition nécessaire et suffisante pour que la matrice symétrique  $\Delta S$  soit solution des équations (3.24.) de la redondance est qu'elle vérifie, dans le domaine fréquentiel;

$$H(zI_n - \Psi)^{-1} \Delta S (z^{-1}I_n - \Psi^T)^{-1} H^T = 0 \quad (3.25.)$$

Le fait que la condition (3.25.) est nécessaire est une conséquence immédiate du théorème (3.3.4.).

Montrons maintenant que (3.25.) est suffisante. Soit  $\Delta S$  symétrique vérifiant (3.25.). On définit  $\Delta P$  comme solution de

$$\Delta P - \Psi \Delta P \Psi^T = \Delta S$$

ou de manière équivalente par

$$\Delta P = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k \Delta S \Psi^{kT}$$

Il faut démontrer que le couple  $(\Delta P, \Delta S)$  vérifie (3.24.). Pour cela, il suffit de démontrer qu'il vérifie (3.24.b.). En effet, en développant en série de puissance de  $z$  le premier membre de (3.25.) et en annulant les coefficients de  $z^0, z^{-1}, z^{-2}, \dots$ , on obtient successivement :

$$\begin{aligned} H(\Delta P H^T) &= 0 \\ H\Psi(\Delta P H^T) &= 0 \\ H\Psi^2(\Delta P H^T) &= 0 \\ \dots \end{aligned}$$

Dès lors, l'observabilité de  $(\Psi, H)$  implique  $\Delta P H^T = 0$ .

Théorème 3.3.7.

Les équations de la redondance (3.24.) et (3.25.) n'admettent pas de solution  $\Delta S$  différente de 0 et semi-définie positive.

En effet, soit une matrice  $\Delta S \geq 0$ . On démontre qu'elle doit être nulle.  $\Delta S$  étant  $\geq 0$ , il existe une factorisation  $\Delta S = MM^T$ . Dès lors, l'équation de la redondance (3.25.) donne :

$$H(zI_n - \Psi)^{-1} M M^T (z^* I_n - \Psi^T)^{-1} H^T = 0$$

$$\forall z = e^{j\theta} \text{ avec } \theta \text{ réel}$$

ou encore

$$H(zI_n - \Psi)^{-1} M \overbrace{H(zI_n - \Psi)^{-1} M} = 0$$

$$\forall z = e^{j\theta} \text{ avec } \theta \text{ réel}$$

ce qui mène à

$$H(zI_n - \Psi)^{-1} M = 0$$

cette égalité jointe à l'observabilité de  $(\Psi, H)$  donne  $M = 0$ , donc  $\Delta S = 0$ .

Corollaire 3.3.8.

Les équations de la redondance (3.24.) et (3.25.) n'admettent pas de solution  $\Delta S$  différente de 0 et semi-définie négative.

Ceci est une conséquence triviale du fait que si  $(\Delta P, \Delta S)$  est solution des équations de la redondance,  $(-\Delta P, -\Delta S)$  l'est aussi.

Remarque 3.3.9.

Les restrictions sur les  $\Delta S$  solutions des équations de la redondance n'existent pas sur les  $\Delta P$ .

Théorème 3.3.10.

Sous les conditions (3.21.), le système d'équations (3.20.) n'admet que des solutions  $P_\infty$  définies positives.



En effet, soit  $P_\infty$  symétrique et semi-définie positive solution de (3.20.). Dès lors, il existe un vecteur  $V(n,1)$  tel que  $V^T P_\infty V = 0$ . De (3.20.a.), on déduit  $V^T \Psi P_\infty \Psi^T V = 0$  et ensuite  $\Psi P_\infty \Psi^T - \Psi^2 P_\infty \Psi^{2T} = \Psi S \Psi^T$ , ce qui mène à  $V^T \Psi^2 P_\infty \Psi^{2T} V = 0$ . Et ainsi de suite. On arrive donc à :

$$\begin{aligned} V^T P_\infty &= 0 \\ V^T \Psi P_\infty &= 0 \\ V^T \Psi^2 P_\infty &= 0 \\ \dots \end{aligned}$$

En faisant usage de (3.20.b.), on obtient :

$$\begin{aligned} V^T K &= 0 \\ V^T \Psi K &= 0 \\ V^T \Psi^2 K &= 0 \\ \dots \end{aligned}$$

ce qui contredit la condition  $(\Psi, K)$  commandable.

#### Théorème 3.3.11.

Sous les conditions (3.21.), le système d'équations (3.20.) admet un ensemble de solutions  $(P_\infty, S)$  (avec  $P_\infty$  et  $S$  symétriques et respectivement  $> 0$  et  $\geq 0$ ) borné, fermé, convexe.

En effet, l'existence d'une solution  $(P_\infty, S)$  est garantie par le théorème (3.3.3.). Montrons qu'il existe des solutions non triviales  $(\Delta P, \Delta S)$  de l'équation de la redondance telles que  $P_\infty + \Delta P > 0$  et  $S + \Delta S \geq 0$ ; auquel cas  $(P_\infty + \Delta P, S + \Delta S)$  est une nouvelle solution de (3.20.).

Considérons d'abord le cas pour lequel la solution  $(P_\infty, S)$  de (3.20.) fournie par le théorème 3.3.3. est telle que  $S > 0$ . On se rappelle que  $P_\infty$  est toujours  $> 0$ . En remarquant qu'il existe toujours des solutions  $(\Delta P, \Delta S)$  de l'équation de la redondance aussi petites que l'on veut, l'existence d'une telle solution respectant  $P_\infty + \Delta P > 0$  et  $S + \Delta S \geq 0$  est dès lors évidente.

Maintenant, soit la solution  $(P_\infty, S)$  telle que  $S \geq 0$  et non  $> 0$ . Donc,  $S$  appartient à la frontière du cône des matrices définies

positives (fig. 3.1.). Dans ce cas, en vertu du théorème 3.3.7. et du corollaire 3.3.8., il existe une solution  $(\Delta P, \Delta S)$  de l'équation de la redondance suffisamment petite telle que  $S + \Delta S$  soit à l'intérieur du cône (c'est-à-dire  $\succ 0$ ) tout en respectant  $P_\infty + \Delta P \succ 0$ . Ces faits sont illustrés par la figure 3.1.

Le fait que (3.20.) admet un ensemble de solutions est donc démontré.

Pour démontrer que cet ensemble est borné, on se rappelle d'abord que toute solution de (3.20.) peut se mettre sous la forme  $(P_\infty + \Delta P, S + \Delta S)$  avec  $(P_\infty, S)$  une solution fixée de (3.20.) et  $(\Delta P, \Delta S)$  une solution quelconque de l'équation de la redondance. Le fait que l'ensemble des solutions de (3.20.) est borné est dès lors une conséquence du théorème 3.3.7. et du corollaire 3.3.8.

Le fait que l'ensemble des solutions de (3.20.) est fermé et convexe est évident.

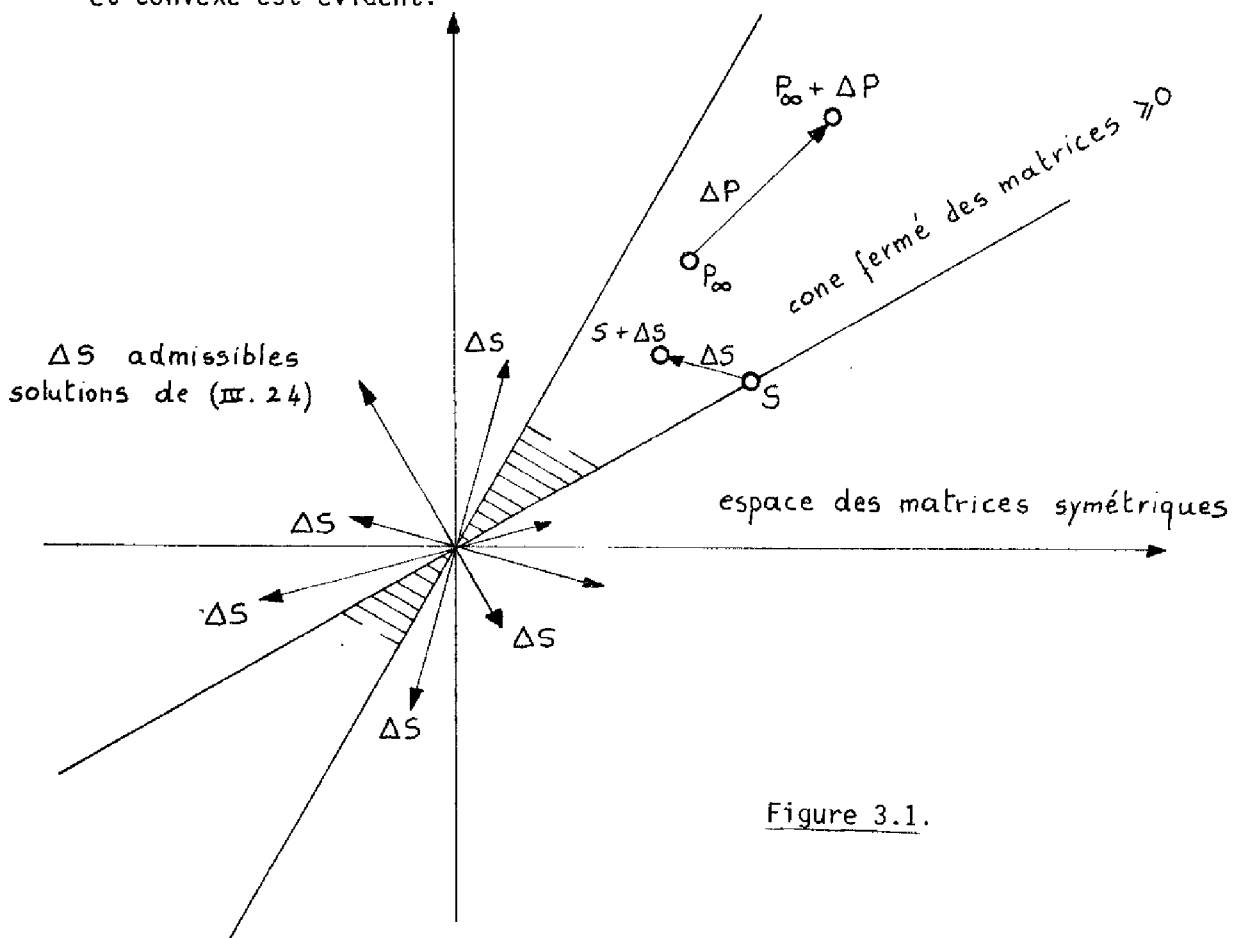


Figure 3.1.

Corollaire 3.3.12.

Le système d'équations (3.20.) admet toujours des solutions  $(P_\infty, S)$  avec  $S > 0$ .

Cela ressort clairement de la démonstration du théorème 3.3.11.

Cette suite de théorèmes éclaircit la première étape de l'algorithme qui permet de trouver la matrice de covariance  $Q$  correspondant à un gain  $K$  donné, vérifiant les conditions (3.17.). Cette première étape consiste à trouver une solution  $(P_\infty, S)$  de (3.20.). L'existence d'une telle solution a été démontrée. Pratiquement, pour trouver une telle solution, on peut, par exemple, utiliser l'algorithme de FAURRE [FAU] ou encore l'algorithme de MEHRA [MEH]. Toutefois, on verra plus loin que l'algorithme de FAURRE n'est pas approprié à ce problème. Une autre méthode pour trouver une solution de (3.20.) est d'opérer la factorisation spectrale introduite dans le théorème 3.3.3.

La seconde étape de l'algorithme consiste à trouver  $Q$  à partir d'une solution  $(P_\infty, S)$  de (3.20.). Pour cela, on utilise (3.19.b.) et (3.17.a.), ce qui mène à :

$$Q = (I_n - KH)^{-1} (S - KK^T) (I_n - KH)^{-T} \quad (3.26.)$$

La matrice  $Q$  construite de cette manière est symétrique mais elle n'est pas nécessairement semi-définie positive. Le fait crucial est qu'il n'existe pas toujours une solution  $(P_\infty, S)$  de (3.20.) rendant le second membre de (3.26.) semi-défini positif. (Il est facile de bâtir de petits contre-exemples). De plus, même si il existe une solution de (3.20.) pour laquelle le second membre de (3.26.) est  $\geq 0$ , la commadabilité de la paire  $(\phi, Q)$ , condition reprise dans (3.5.), n'est pas assurée a priori. Il ressort de tout cela que la réalisation de KALMAN d'un gain  $K$  n'est pas toujours possible. Il est bien évident, qu'en cas de réalisabilité, la matrice  $Q$  n'est pas toujours unique.

Les considérations suivantes éclaircissent la seconde étape de l'algorithme.

Théorème 3.3.13.

Un gain  $K$  d'un observateur, respectant les conditions (3.17.) admet une réalisation de KALMAN si et seulement si il existe deux matrices symétriques  $(n,n)$   $P_\infty$  et  $S$  respectivement définie positive et semi-définie positive telles que :

$$P_\infty - \Psi P_\infty \Psi^T = S \quad (3.27.a.)$$

$$P_\infty H^T = K \quad (3.27.b.)$$

$$S - KK^T \geq 0 \quad (3.27.c.)$$

Le fait que (3.27.) est nécessaire est évident.

Pour démontrer que (3.27.) est suffisant, il faut d'abord remarquer que l'algorithme donnant  $Q$  peut être conduit sans problème; en particulier, (3.26.) donne un  $Q \geq 0$ , de par (3.27.c.). Il reste à s'assurer que le  $Q$  obtenu satisfait la condition  $(\emptyset, Q)$  commandable. Il s'avère que cette condition sera satisfaite si la réalisation du gain est faite à partir d'une solution  $(P_\infty^*, S^*)$  de (3.20.) pour laquelle  $S^* > 0$ , ce qui est toujours possible (corollaire 3.3.12.). Soit  $Q^*$  cette réalisation. Elle est donnée par :

$$Q^* = (I_n - KH)^{-1} (S^* - KK^T) (I_n - KH)^{-T} \quad (3.28.)$$

Dès lors, on se rappelle que la propriété  $(\emptyset, Q)$  commandable est équivalente à  $\bar{P}_\infty = \emptyset P_\infty \emptyset^T + Q > 0$  et on démontre cette dernière inégalité. Pour cela, on remarque que  $\bar{P}_\infty > 0$  est équivalent à :

$$\Psi \bar{P}_\infty \Psi^T + S^* - KK^T > 0$$

ou encore à :

$$P_\infty^* - KK^T > 0$$

et il suffit de démontrer cette dernière inégalité. En effet, on a :

$$S^* - KK^T \geq 0$$

$$P_\infty^* - \Psi P_\infty^* \Psi^T - KK^T \geq 0$$

$$P_\infty^* - KK^T \geq \Psi P_\infty^* \Psi^T \quad (3.29.)$$

Mais  $S^* > 0$ , donc, de par (3.20.a.),  $P_\infty^* > 0$  et dès lors (3.29.) donne  $P_\infty^* - KK^T > 0$ .

Pour la réalisation, il est donc recommandé d'utiliser une solution  $(P_\infty, S)$  de (3.20.) telle que  $S > 0$ , dans le cas contraire en effet la commandabilité de la paire  $(\phi, Q)$  n'est plus assurée. Or, l'algorithme de FAURRE [FAU] mène à une solution de (3.20.) pour laquelle  $S$  est singulière ; aussi cet algorithme est-il à déconseiller pour la première étape de la réalisation.

Corollaire 3.3.14.

Un gain  $K$  d'observateur respectant les conditions (3.17.) admet une réalisation de KALMAN si et seulement si il existe une matrice  $(n,n)$  symétrique et définie positive vérifiant l'inégalité linéaire matricielle :

$$F_1(P_\infty) = \left[ \begin{array}{c|c} P_\infty - \Psi P_\infty \Psi^T - KK^T & P_\infty H^T - K \\ \hline H P_\infty - K^T & 0 \end{array} \right] \geq 0 \quad (3.30.)$$

Théorème 3.3.15.

Un gain  $K$  d'observateur respectant les conditions (3.17.) admet une réalisation de KALMAN si et seulement si la fonction :

$$T(z) \triangleq HK + H\Psi(zI_n - \Psi)^{-1}K + K^T(z^{-1}I_n - \Psi^T)^{-1}\Psi^T H^T - H(zI_n - \Psi)^{-1}KK^T(z^{-1}I_n - \Psi^T)^{-1}H^T \quad (3.31.)$$

est un spectre discret ; c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés :

$$T(z) = T^T(z^{-1}) \quad (3.32.a.)$$

$$T(e^{j\theta}) \geq 0 \quad \forall \theta \text{ réel} \quad (3.32.b.)$$

En effet, en utilisant d'abord le théorème 3.3.4., on remarque que :

$$T(z) = H(zI_n - \Psi)^{-1}(S - KK^T)(z^{-1}I_n - \Psi^T)^{-1}H^T \quad (3.33.)$$

Dès lors, (3.32.) apparaît équivalent à (3.27.) et le théorème est démontré.

Ainsi, les théorèmes 3.3.13, 3.3.14 et 3.3.15. fournissent des critères permettant de dire si les deux étapes de l'algorithme de réalisation peuvent être utilisées. Si l'un des critères s'avère vérifié, le gain K de l'observateur admet dès lors une réalisation de KALMAN.

La conclusion de ce paragraphe est la suivante : étant donné un observateur du type (3.2.) pour le système (3.1.), l'observateur étant défini par son ensemble de pôles ou encore par son gain K, cet observateur n'est pas toujours le filtre de KALMAN stationnaire associé à un système du type 3.5.

Une autre manière de se rendre compte de ces faits est de considérer l'ensemble des pôles du filtre de KALMAN stationnaire associé à (3.5.), la matrice de covariance Q parcourant le cône des matrices symétriques semi-définies positives.

#### 3.4. L'ENSEMBLE DES POLES D'UN FILTRE DE KALMAN QUAND LES COVARIANCES VARIENT

Tout comme dans le paragraphe précédent, le problème présentera certaines restrictions. En effet, on considèrera l'ensemble des pôles du filtre stationnaire optimal associé à (3.5.) quand la matrice de covariance Q des bruits de dynamique varie, la matrice de covariance R des bruits de mesure restant fixée à  $I_m$ .

L'étude de cet ensemble de pôles est basée sur le théorème 3.2.14. qui dit que les pôles du filtre de KALMAN stationnaire associé à (3.5.) sont les valeurs propres stables de la matrice hamiltonienne définie par (3.16.).

Les pôles du filtre stationnaire optimal associé à (3.5.) sont donc les racines stables de

$$\det(\mathcal{H}^{-1} - I_{2n} z) = 0 \quad (3.34.)$$

En remarquant que

$$\mathcal{H}^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} \phi^T + H^T H \phi^{-1} Q & -H^T H \phi^{-1} \\ \hline -\phi^{-1} Q & \phi^{-1} \end{array} \right) \quad (3.35.)$$

l'équation caractéristique (3.34.) s'écrit :

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{H}^{-1} - I_{2n} z) &= \\ \det(\phi^{-1} - I_n z) \det[(\phi^T I_n z) - H^T H (z^{-1} I_n - \phi)^{-1} Q] &= 0 \end{aligned} \quad (3.36.)$$

Maintenant, soit  $Q = \sigma^2 LL^T$  avec  $L$  fixé et fini. Étudions le lieu des racines de (3.36.) quand  $\sigma$  varie de zéro à plus l'infini. Pour cela, il faut considérer deux cas différents :

### 3.4.1. Cas monovariabiles

C'est le cas pour lequel  $H^T$  et  $L$  sont tous deux des vecteurs colonnes. Dès lors, après avoir défini la transmittance :

$$G(z) = H (z I_n - \phi)^{-1} L = \frac{n(z)}{d(z)} \quad (3.37.)$$

(3.36.) devient :

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{H}^{-1} - I_{2n} z) &= \\ \det(\phi^{-1} - I_n z) \det[(\phi^T I_n z) - (H^T L) G(z^{-1}) \sigma^2] & \end{aligned} \quad (3.38.)$$

Sans perte de généralité, soit la paire  $(\phi, H)$  sous la forme canonique observable :

$$\phi = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (3.39.)$$

avec

$$\det(I_n z - \phi) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = d(z)$$

Dès lors, (3.38.) devient

$$\det(\mathcal{H}^{-1} - I_{2n} z) = \det(\phi^{-1} - I_n z) \det \left[ (\phi^T I_n z) - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} G(z^{-1}) \sigma^2 \right] \quad (3.40.)$$

Maintenant, si on se rappelle que le déterminant d'une somme de deux matrices est égal à la somme des déterminants des matrices formées avec des lignes de la première et les lignes complémentaires de la seconde, de (3.40.) on déduit :

$$\det(\mathcal{H}^{-1} - I_{2n} z) = \det(\phi^{-1} - I_n z) \left[ \det(\phi^T - I_n z) - G(z^{-1}) \sigma^2 \det\left(\frac{l_1 - l_n}{\phi^T - I_n z}\right) \right] \quad (3.41.)$$

où

$\overline{\phi^T - I_n z}$  est la matrice  $\phi^T - I_n z$  à laquelle la première ligne a été supprimée.

On a :

$$\det\left(\frac{l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n}{\overline{\phi^T - I_n z}}\right) = -n(z) \quad (3.42.)$$

Et, dès lors, (3.41.) devient :

$$\det(\mathcal{H}^{-1} - I_{2n} z) = \det \phi^{-1} z^n \left[ (-1)^n d(z) d(z^{-1}) + \sigma^2 n(z) n(z^{-1}) \right] \quad (3.43.)$$

Donc, le lieu des pôles du filtre stationnaire optimal quand  $\sigma$  varie se ramène à un lieu d'EVANS. Donc, quand  $\sigma \rightarrow 0$ , les pôles du filtre stationnaire optimal tendent vers les pôles ou l'inverse des pôles du système selon la stabilité ou l'instabilité de ces pôles.

Quand  $\sigma \rightarrow \infty$ , au moins  $n-1$  pôles du filtre stationnaire optimal tendent vers les zéros ou l'inverse des zéros de la transmittance selon la stabilité ou l'instabilité de ces zéros ; au moins un pôle du filtre tend vers l'origine du plan complexe.

### 3.4.2. Cas multivariable

Dans ce cas  $H^T$  et/ou  $L$  ne sont plus des vecteurs colonne.

Toutefois, la procédure est la même que précédemment, mais elle est beaucoup plus lourde. Le traitement de ce cas multivariable dans toute sa généralité est difficile ; aussi, sera-t-il simplement illustré par un exemple, technologiquement important, au chapitre 5.



### 3.5. CONCLUSIONS

Ce chapitre a donc étudié les relations existant entre les covariances des bruits agissant sur un système linéaire discret et les pôles du filtre stationnaire optimal correspondant.

L'intérêt théorique de ce problème est évident.

De plus, ses conséquences pratiques sont importantes. Ainsi, les résultats théoriques de ce chapitre permettront de préciser le concept de "faible observabilité" au chapitre 4.

On verra au chapitre 5 que les modes déformables des satellites munis de panneaux possèdent la propriété de "faible observabilité".

Les développements théoriques de ce chapitre vont mener à une technique permettant de déterminer, pour un système à observer, un ensemble de capteurs qui assurera l'absence de modes "faiblement observables" dans le processus de filtrage ; cette technique sera suggérée au chapitre 5.



## CHAPITRE 4

---

### SUR LA "FAIBLE OBSERVABILITÉ" DANS CERTAINS SYSTÈMES LINÉAIRES

-



En s'appuyant sur le problème inverse du filtrage optimal, ce chapitre se propose de donner une définition de la "faible observabilité" de certains modes dans un système linéaire. Tout comme dans le chapitre précédent, les idées sont présentées dans le formalisme échantillonné, ceci afin d'uniformiser le langage.

Le problème est traité dans le cadre de la théorie moderne du filtrage, dans le cas où il n'y a qu'une seule mesure disponible. La notion de "faible observabilité" qui est précisée ne dépend que de la structure du système ; elle est indépendante des bruits qui agissent, aussi pourra t-elle être appelée "faible observabilité par structure".

Les conséquences de la présence dans un système d'un mode faiblement observable seront présentées ; on verra qu'un tel mode rend le problème de filtrage mal posé et mène à plusieurs complications (mauvaise convergence des algorithmes notamment).

#### 4.1. FAIBLE OBSERVABILITE PAR STRUCTURE

Considérons le problème du filtrage linéaire discret :

$$x_{k+1} = \phi x_k + B w_k \quad (4.1.a.)$$

$$y_k = H x_k + v_k \quad (4.1.b.)$$

avec

$x_k$	vecteur (n,1)	
$y_k$	scalaire	
$w_k$	bruit blanc	
	vecteur (n',1)	
$\phi$	matrice non singulière (n,n)	(4.1.c.)
$(\phi, H)$	observable	
$E w_k w_\ell^T$	$= Q \delta_{k\ell}$	$Q$ symétrique $\geq 0$
$E v_k w_\ell^T$	$= 0$	
$E v_k v_\ell^T$	$= R \delta_{k\ell}$	
$R$	$= 1 > 0$	
$(\phi, BQB^T)$	commandable.	

Dans ce problème de filtrage, il n'existe qu'une seule mesure disponible  $y_k$  ; dans ce cas, sans perte de généralité, on peut poser  $R = 1$ .

Soit  $\Lambda(Q) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  l'ensemble des pôles du filtre stationnaire optimal associé à (4.1.) et correspondant à la matrice de covariance  $Q$ . En s'inspirant du paragraphe 3.4., considérons l'ensemble des  $\Lambda(Q)$  quand  $Q$  parcourt le cône des matrices symétriques semi-définies positives, tout en respectant la condition " $(\emptyset, BQB^T)$  commandable". Pour certains systèmes dynamiques linéaires, il existe une partition  $\Lambda(Q) = \Lambda_a(Q) \cup \Lambda_b(Q)$  où  $\Lambda_a(Q)$  ne contient que des pôles situés très près du cercle unitaire, et ceci pour tout  $Q$ . Dans ce cas, on dira que le système (4.1.) possède un mode (a) faiblement observable par structure.

Dans le chapitre 5, on verra que les modes déformables du type de satellites défini dans le paragraphe 1.3. possède la propriété de faible observabilité par structure.

Pour détecter dans un système la présence d'un mode faiblement observable, les résultats du paragraphe (3.4.), qui étudie l'ensemble des  $\Lambda(Q)$  quand  $Q$  varie, sont d'une utilité certaine. De même, les résultats du paragraphe 3.3. permettent parfois de voir qu'un ensemble de pôles  $\Lambda$  pour un observateur n'admet de réalisation de KALMAN que si une partie  $\Lambda_a$  de ces pôles est située tout près du cercle unitaire dans une zone bien précise, auquel cas le mode correspondant aux pôles  $\Lambda_a$  est faiblement observable.

Le concept de "faible observabilité" ayant été précisé et quelques suggestions pour détecter la présence d'un tel mode ayant été données, voyons maintenant les conséquences de la présence dans un système linéaire d'un tel mode.

#### 4.2. CONSÉQUENCE DE LA PRÉSENCE D'UN MODE FAIBLEMENT OBSERVABLE

Nous distinguons deux conséquences importantes : la première est relative à la matrice de covariance  $P_\infty$  de l'erreur stationnaire, la seconde est relative à la partie transitoire de la solution de

l'équation de RICCATI associée à (4.1.).

Examinons d'abord la première conséquence. Pour cela, soit  $K_\infty$  le gain stationnaire de KALMAN associé à (4.1.). Soit  $\Psi \triangleq (I_n - K_\infty H)\phi$  sous forme découpée :

$$\Psi = \left( \begin{array}{c|c} \Psi_{aa} & 0 \\ \hline 0 & \Psi_{bb} \end{array} \right)$$

soient encore :

$$P_\infty = \left( \begin{array}{c|c} P_{aa} & P_{ab} \\ \hline P_{ba} & P_{bb} \end{array} \right), \quad K_\infty = \begin{pmatrix} K_a \\ K_b \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} \triangleq \phi^{-1} B Q B^T \phi^{-T} = \left( \begin{array}{c|c} \bar{Q}_{aa} & \bar{Q}_{ab} \\ \hline \bar{Q}_{ba} & \bar{Q}_{bb} \end{array} \right) \quad (4.2.)$$

où  $a$  désigne le mode faiblement observable. Dès lors, de (3.18.a.), il vient :

$$P_{aa} = \Psi_{aa} P_{aa} \Psi_{aa}^T + \Psi_{aa} \bar{Q}_{aa} \Psi_{aa}^T + K_a K_a^T \quad (4.3.)$$

d'où

$$P_{aa} = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{aa}^k (\Psi_{aa} \bar{Q}_{aa} \Psi_{aa}^T + K_a K_a^T) \Psi_{aa}^{T k} \quad (4.4.)$$

Par définition de la faible observabilité,  $\Psi_{aa}$  aura toujours ses valeurs propres très près du cercle unitaire. Dès lors, de (4.4.) on déduit que  $P_{aa}$  aura toujours une norme élevée. Donc, suivant les directions faiblement observables (a), la covariance de l'erreur sera toujours importante.

La présence dans un processus de filtrage d'un mode faiblement observable aura en plus une seconde conséquence, au niveau de la solution de l'équation de RICCATI associée. En effet, le théorème 3.2.13. nous montre que les pôles du filtre stationnaire optimal sont aussi les racines caractéristiques de la partie transitoire de la solution de l'équation de RICCATI associée. D'où, on déduit que, suivant les directions faiblement observables (a) la solution de l'équation de RICCATI va converger très lentement vers sa valeur stationnaire. Ce fait conduit à de graves complications numériques.

#### 4.3. CONCLUSIONS

Ce chapitre a donné une définition de la faible observabilité de certains modes dans un système linéaire. Il s'agit là d'une propriété de structure du système.

Quelques suggestions pour détecter un tel mode dans un système linéaire ont été données. Les conséquences de la présence dans un système d'un mode faiblement observable ont été présentées.



## CHAPITRE 5

---

### LA STABILISATION D'ATTITUDE DES SATELLITES DÉFORMABLES : L'ASPECT FILTRAGE

-



Ce chapitre aborde, sous certains aspects, le problème de la synthèse d'un système actif de maintien en attitude pour satellite déformable.

Le satellite à stabiliser, représenté par la figure 1.5., est celui décrit au paragraphe 1.2. Ce satellite possède un corps principal massif et est muni de deux panneaux solaires. On admet que la seule déformation que peut subir ce satellite est le premier mode de flexion antisymétrique des panneaux solaires. Cette simplification est légitime car le mode de déformation qui a été retenu est le plus important [POE].

Un système de pointage fin, dont les calculs en temps réel sont exécutés par un ordinateur digital, est à concevoir. Le but d'un tel système est de maintenir les angles  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\psi$  de dépointage en roulis, tangage et lacet (voir chapitre 1), aussi près que possible de zéro. La synthèse d'un tel système devra prendre en considération les bruits des senseurs ainsi que toutes les perturbations agissant sur le satellite [SCHI, LAR]. Le satellite restant près de sa position nominale ( $\theta, \phi, \psi, q_1, \dots, q_N = 0$ ), la synthèse du système de commande sera faite à partir du modèle linéarisé correspondant. L'approche moderne est très bien adaptée à cette tâche. En se basant sur le théorème de séparation, cette approche propose de faire la synthèse du système de commande en deux étapes (figure 5.1.) :

- 1) Synthèse d'un filtre qui, à partir des mesures disponibles  $Z_k$ , construit une estimée  $\hat{X}_k$  de l'état  $X_k$ .
- 2) Synthèse d'une loi de commande déterministe qui, à partir de l'estimée  $\hat{X}_k$  de l'état  $X_k$ , élabore une commande  $u_k$ .

Dans ce chapitre, l'attention sera avant tout portée sur la première étape. En effet, l'aspect filtrage est apparu le plus intéressant tant au point de vue théorique, qu'au point de vue technologique. Néanmoins, la fin de ce chapitre donne quand même quelques indications concernant l'aspect commande.

Ainsi, dans le premier paragraphe, les problèmes de filtrage rencontrés dans la stabilisation d'attitude des satellites défor-

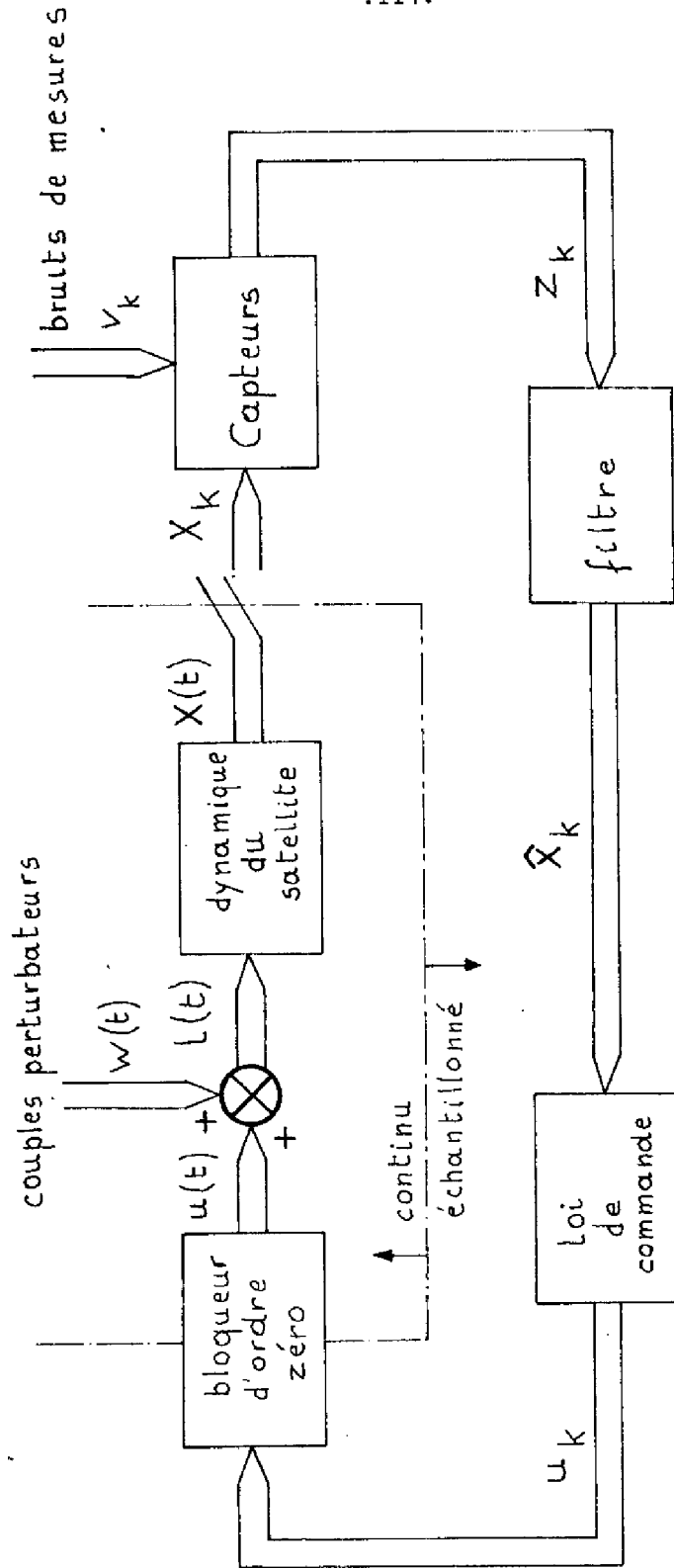


Figure 5.1.

mables sont abordés dans l'optique des chapitres 3 et 4. On verra que le mode déformable du satellite est "faiblement observable" à partir de mesures données par des senseurs localisés dans le corps principal, ce qui ne va pas sans conséquences pratiques. De plus, les lieux de pôles introduits au paragraphe 3.4. seront utilisés pour mesurer l'observabilité des modes et pour déterminer un ensemble de capteurs assurant l'absence du mode "faiblement observable".

Le second paragraphe survole rapidement le problème de la commande. Bien qu'un aspect de "faible commandabilité" puisse être décelé, ce dernier s'avère être sans conséquence pratique et doit être considéré comme non essentiel.

Pour simplifier l'étude, on considérera le satellite de la figure 1.5. avec  $\varepsilon = 0$ . Dans ce cas, la chaîne de roulis peut se découpler complètement du lacet et du tangage et on est ramené au cas "un axe". La fonction de transfert de la dynamique de roulis du satellite se déduit du paragraphe 1.4. et s'écrit :

$$\frac{\theta(s)}{\ell_{\theta}(s)} = \frac{1}{A_{\theta\theta}} \left[ \frac{1}{s^2} + \frac{c_1}{(s^2 + \omega_1^2)} \right] \quad (5.1.)$$

avec :

- s : symbole de LAPLACE
- $\theta$  : angle de dépointage en roulis
- $\ell_{\theta}$  : couple exercé autour de l'axe de roulis
- $A_{\theta\theta}$  : moment d'inertie total autour de l'axe de roulis
- $\omega_1$  : fréquence propre globale du premier mode de flexion antisymétrique des panneaux
- $c_1$  : constante modale du premier ordre de flexion antisymétrique des panneaux.

Un ensemble de valeurs numériques réalistes est [POE] :

$$A_{\theta\theta} : 795 \text{ kgm} \times \text{m}^2$$

$$\omega_1 : 1.78 \text{ sec}^{-1}$$

$$c_1 : 0.266$$

Une représentation d'état minimale de la fonction de transfert 5.1. est :

$$\dot{X} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) X + \left( \begin{array}{c} 0 \\ -\omega_1^{-3} \\ 0 \\ \omega_1^{-2} \end{array} \right) \frac{\ell_\theta}{A_{\theta\theta}} \quad (5.2.a.)$$

$$\theta = \left( -c_1 \omega_1^2 \quad 0 \mid \omega_1^2 \quad 0 \right) X \quad (5.2.b.)$$

Les matrices sont partitionnées afin de bien mettre en évidence le fait que la dynamique du satellite se compose d'une dynamique rigide (pôle double en 0) et d'une dynamique déformable (paire de pôles  $\pm j\omega_1$ ) couplées. La représentation d'état (5.2.) est commandable et observable parce que minimale.

Comme le formalisme échantillonné va être utilisé, il est nécessaire d'obtenir la version discrète de (5.2.). Soit T la période d'échantillonnage et supposons que  $\ell_\theta$  soit une fonction en escalier, constante sur tout intervalle  $[kT, (k+1)T]$  ( $k =$  entier quelconque). Si  $X_k \triangleq X(kT)$ ,  $\theta_k \triangleq \theta(kT)$  et  $(\ell_\theta)_k \triangleq \ell_\theta(kT)$ , de 5.2. on déduit :

$$X_{k+1} = \underbrace{\left( \begin{array}{cc|cc} \cos \omega_1 T & \sin \omega_1 T & 0 & 0 \\ -\sin \omega_1 T & \cos \omega_1 T & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{\phi} X_k + \underbrace{\left( \begin{array}{c} (\cos \omega_1 T - 1) \omega_1^{-4} \\ -\sin \omega_1 T \omega_1^{-4} \\ T^2 / 2 \omega_1^2 \\ T / \omega_1^2 \end{array} \right)}_{L} \left( \frac{\ell_\theta}{A_{\theta\theta}} \right)_k \quad (5.3.a.)$$

$$\theta_k = \left( -c_1 \omega_1^2 \quad 0 \mid \omega_1^2 \quad 0 \right) X_k \quad X = (X_d^T \mid X_r^T)^T \quad (5.3.b.)$$

Ceci est la version discrète de (5.3.) qui sera utilisée dans la suite.

La principale limitation sur la période T d'échantillonnage est le senseur d'horizon qui ne peut émettre de mesure de l'angle de dépointage en roulis qu'au maximum toutes les 0.2 secondes. Dans la suite, on posera  $T = 0.2$  sec.

On remarque que le système discrétisé (5.3.) est toujours observable mais qu'il est commandable que pour  $T \neq \frac{k\pi}{\omega_1}$  (k entier quelconque).

La transmittance du système (5.3.) est :

$$G(z) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\theta(z)}{l_\theta(z)} = \frac{1}{A_{\theta\theta}} \frac{1}{(z-1)^2 (z^2 - 2z \cos \omega_1 T + 1)} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{-2c_1(\cos \omega_1 T - 1) + T^2 \omega_1^2}{2\omega_1^2} z^3 + \frac{-2c_1 + T^2 \omega_1^2 + 2(c_1 - T^2 \omega_1^2) \cos \omega_1 T}{2\omega_1^2} z^2 \\ & + \frac{2(c_1 - T^2 \omega_1^2) \cos \omega_1 T + (T^2 \omega_1^2 - 2c_1)}{2\omega_1^2} z + \frac{2c_1(1 - \cos \omega_1 T) + T^2 \omega_1^2}{2\omega_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.)$$

Il faut remarquer qu'elle possède :

- un pôle double en +1 (pôle "rigide"),
- une paire de pôles  $e^{\pm j\omega_1 T}$   
(pôles "déformables")
- un zéro en -1
- une paire de zéros  $e^{\pm j\varphi}$  (5.4.a.)

avec

$$\varphi = \arccos \left[ \frac{2c_1(1 - \cos \omega_1 T) + T^2 \omega_1^2 \cos \omega_1 T}{2c_1(1 - \cos \omega_1 T) + T^2 \omega_1^2} \right] \quad (5.4.b.)$$

Examinons maintenant les problèmes de filtrage et de commande concernant l'équation (5.3.)

### 5.1. FILTRAGE

On pose le problème de la reconstruction de l'état  $X_k$  à partir de mesures données par des senseurs. On considère ci-dessous trois cas différents, chaque cas correspondant à un ensemble donné de capteurs. L'observabilité du système à partir des mesures données par les capteurs est alors appréciée en utilisant les lieux de pôles introduits au paragraphe 3.4. ; on sera tout particulièrement attentif à la présence d'un mode "faiblement observable".

### 5.1.1. Un senseur d'horizon

Dans ce premier cas, la seule information disponible est la mesure de l'angle  $\theta$  de dépointage en roulis donnée par un senseur d'horizon dont le signal de sortie est

$$z_k = \theta_k + v_k \quad (5.6.)$$

$v_k$  est le bruit du senseur qui peut être approché par un bruit blanc :

$$E v_k v_l = r^2 \delta_{kl} \quad (5.7.)$$

une valeur numérique réaliste de l'écart-type de ce bruit est :

$$r = 1 \text{ minute d'arc}$$

La covariance  $r^2$  du bruit du senseur est assez bien connue. Mais le système (5.3.a.) est aussi perturbé. Ces perturbations ainsi que toutes les incertitudes du modèle seront représentées par un bruit blanc agissant en tant que couple autour de l'axe de roulis. Donc :

$$\frac{(\ell_\theta)_k}{A_{\theta\theta}} = w_k \quad E w_k w_l = \sigma^2 \delta_{kl} \quad (5.8.)$$

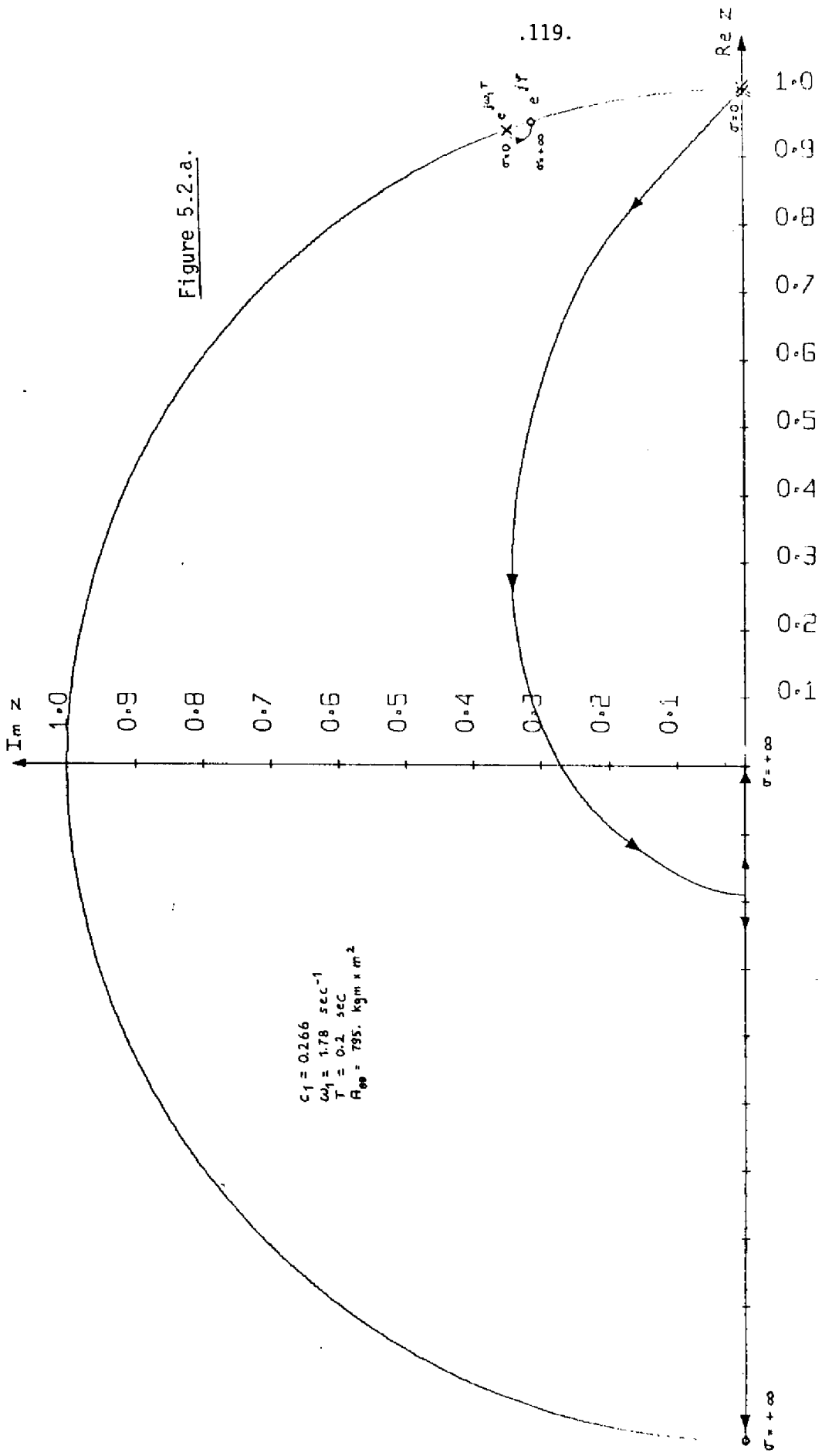
L'incertitude quant aux perturbations agissant sur le système est grande. Aussi,  $\sigma$  sera considéré comme un paramètre susceptible de varier de zéro à l'infini. Ceci suggère de tracer le lieu des pôles du filtre stationnaire optimal correspondant à (5.3.,5.6.,5.7., 5.8.,5.9.) quand  $\sigma$  varie de zéro à plus l'infini. Un tel lieu de pôles a été introduit au paragraphe (3.4.). Les figures 5.2. montrent ces lieux de pôles pour différentes valeurs des paramètres  $\omega_1$  et  $C_1$ . On constate partout que le lieu se compose de deux paires de branches.

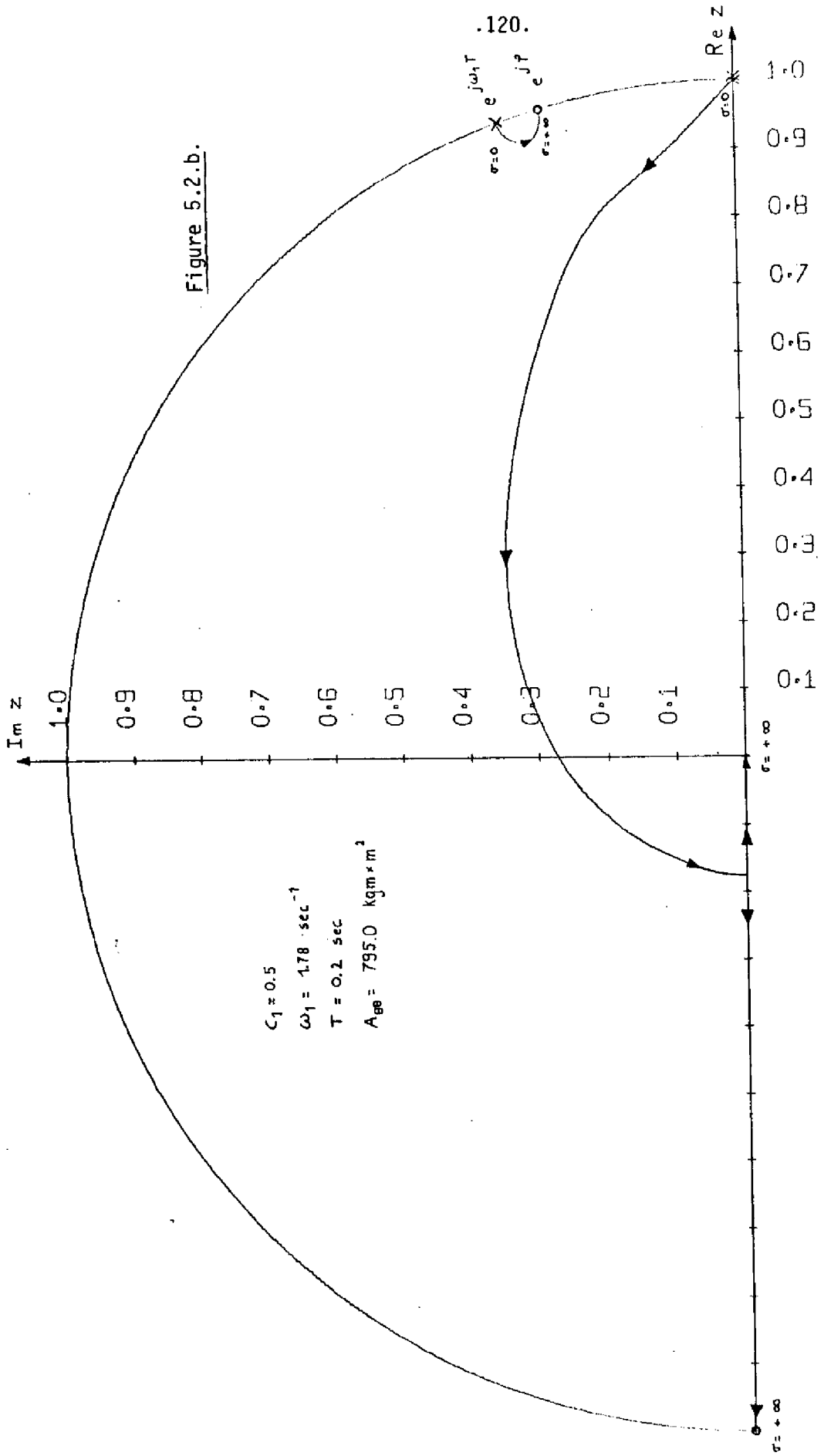
1) Une paire de branches rigides qui partent du pôle double +1 de la transmittance  $G(z)$  et qui se dirigent vers 0 et -1.

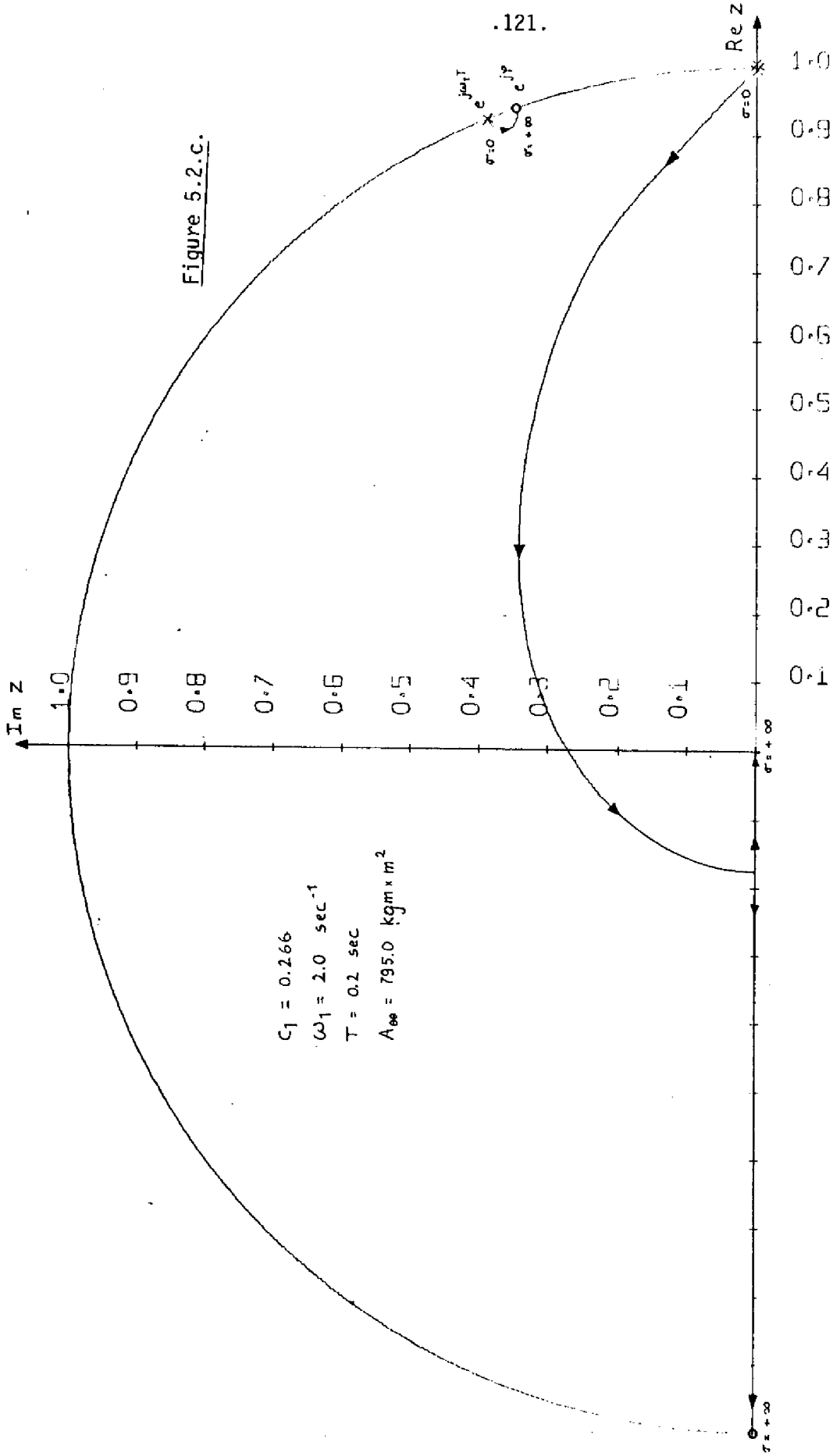
2) Une paire de branches déformables qui partent chacune de l'un des pôles  $e^{\pm j\omega_1 T}$  et qui se dirigent vers le zéro  $e^{\pm j\varphi}$  correspondant.

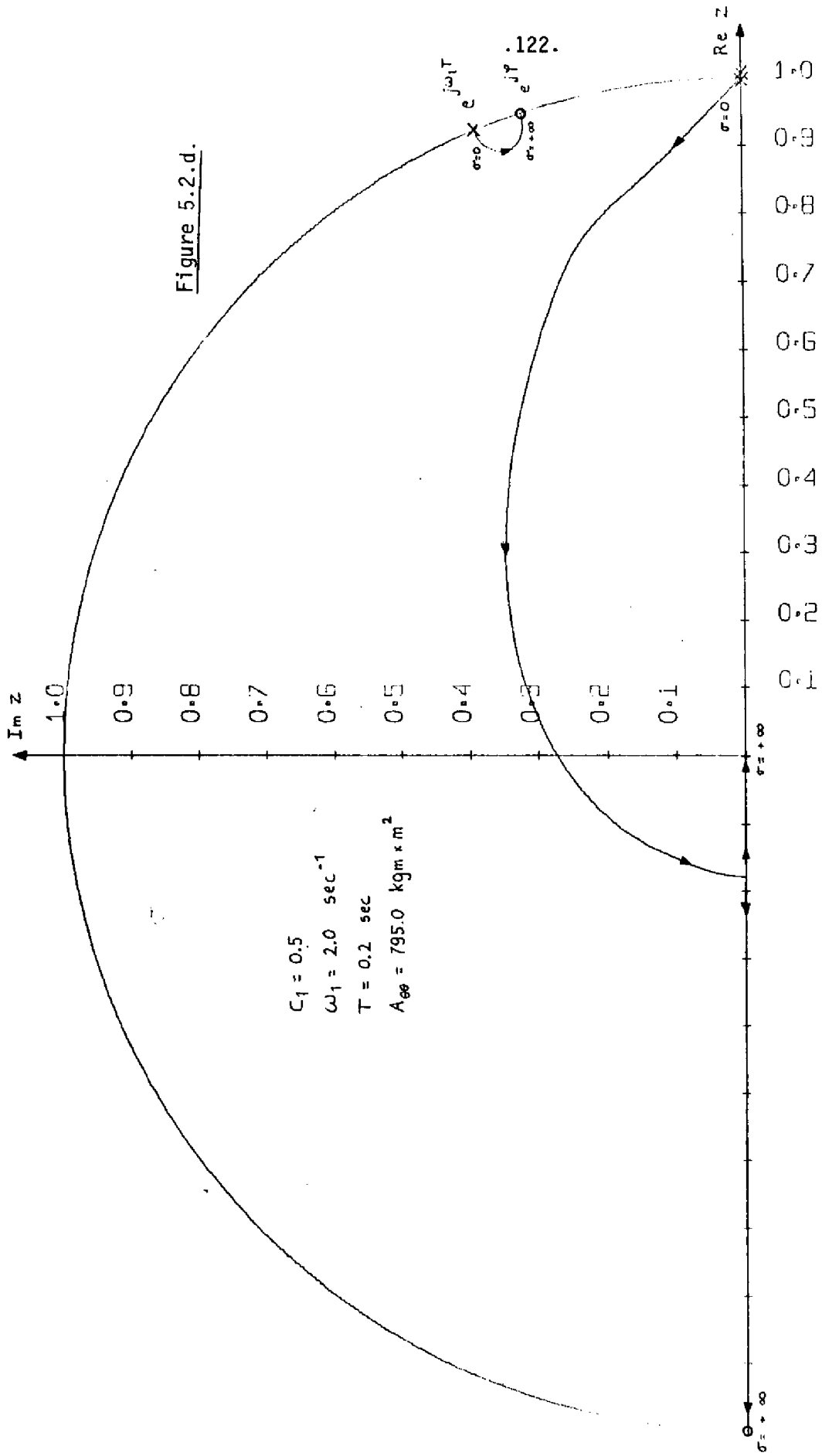
Ces résultats étaient d'ailleurs prévus au paragraphe (3.4.).



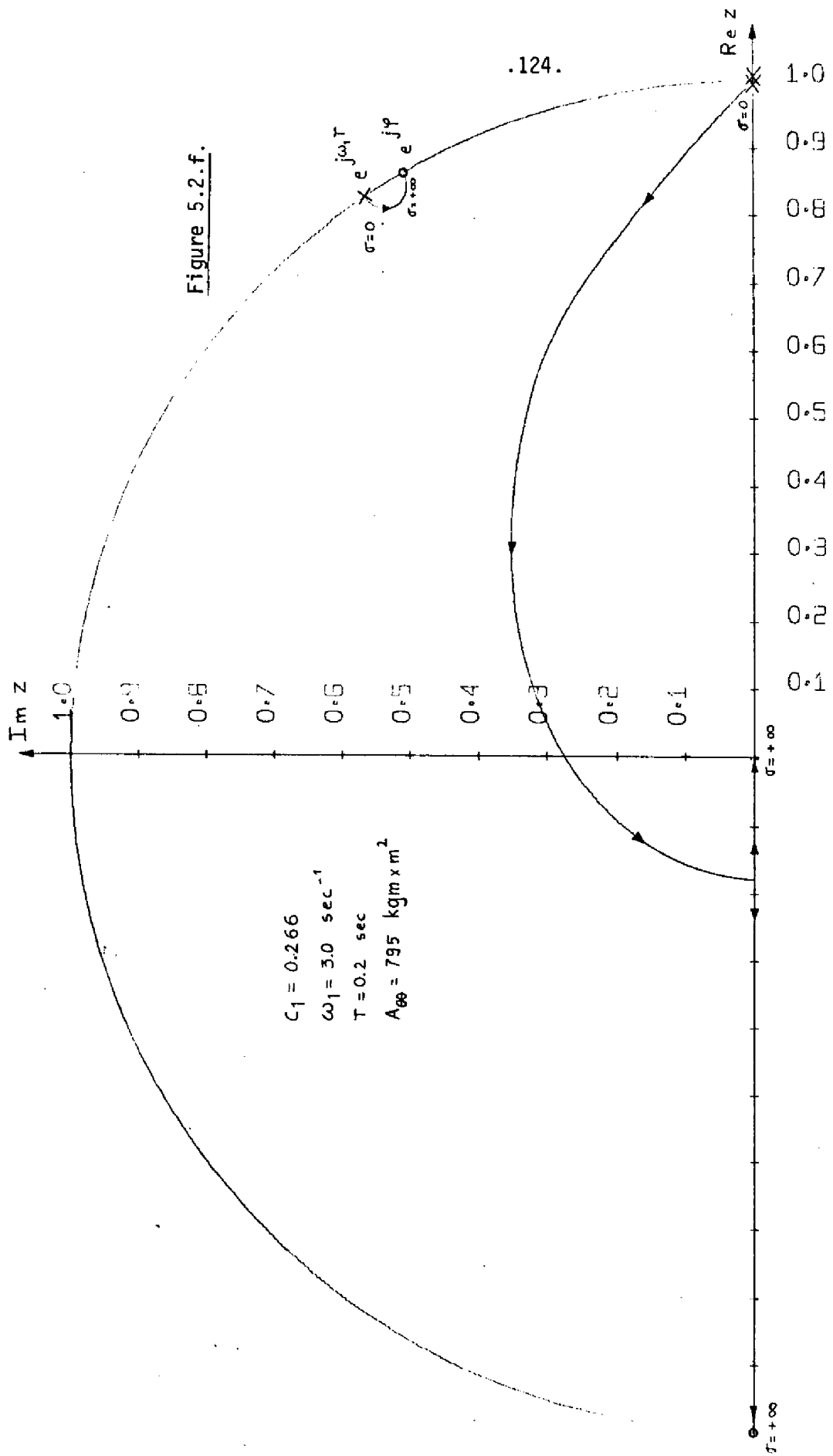












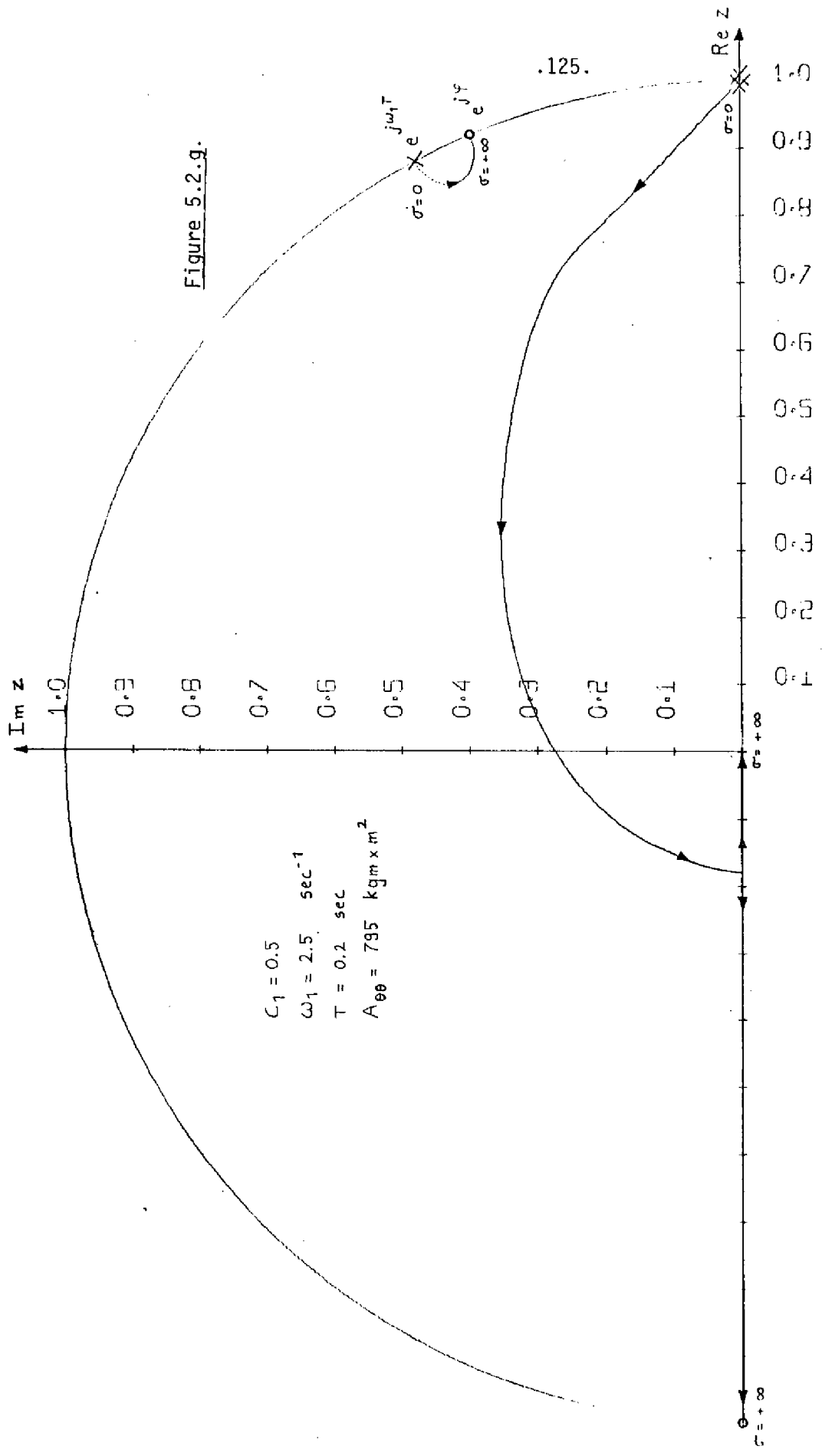


Figure 5.2.g.

$C_1 = 0.5$   
 $\omega_1 = 2.5 \text{ sec}^{-1}$   
 $T = 0.2 \text{ sec}$   
 $A_{00} = 795 \text{ kgm} \times \text{m}^2$

Les figures 5.2. montrent que le lieu des pôles correspondant au mode déformable restent toujours dans une zone bien précise, très près du cercle unitaire. Cela est dû au fait que les pôles  $e^{\pm j\omega_1 T}$  sont très près des zéros  $e^{\pm j\varphi}$  correspondants. Il ressort de ces constatations que le mode déformable de la dynamique de roulis du satellite est "faiblement observable" (au sens de la définition donnée dans le chapitre 4) à partir d'une mesure de l'angle de dépointage en roulis.

La comparaison des figures (5.2.a.) et (5.2.b.) permet d'observer l'évolution des lieux de pôles quand  $C_1$  varie à  $\omega_1$  constant. Il en ressort que quand  $C_1$  augmente, la branche déformable du lieu pénètre plus à l'intérieur du cercle unitaire ; cela est dû au fait que quand  $C_1$  augmente, les zéros  $e^{\pm j\varphi}$  s'écartent des pôles  $e^{\pm j\omega_1 T}$  correspondants ; la formule (5.5.b.) le prouve. La conclusion à en tirer est que l'observabilité du mode déformable s'améliore quand  $C_1$  augmente. Cela n'a rien de surprenant. En effet, considérons (5.3.b.) ; il est aisé de voir que l'angle de dépointage en roulis  $\theta_k$ , dont le senseur d'horizon donne une mesure, est une pondération de la partie "rigide"  $(X_r)_k$  et de la partie "déformable"  $(X_d)_k$  du vecteur d'état  $X_k$ . Quand  $C_1$  augmente, la pondération favorise le mode déformable qui doit donc devenir mieux observable.

La comparaison des figures 5.2.c., 5.2.d. et 5.2.e. permet aussi d'observer l'évolution des lieux quand  $C_1$  varie à  $\omega_1$  constant.

Examinons maintenant comment les lieux de pôles évoluent quand  $\omega_1$  varie à  $C_1$  constant. Pour cela, on compare les figures 5.2.a. 5.2.c. et 5.2.f. pour lesquelles  $C_1 = 0.266$ . On peut aussi comparer les figures 5.2.b., 5.2.d. et 5.2.g. pour lesquelles  $C_1 = 0.5$ . On remarque que lorsque  $\omega_1$  augmente à  $C_1$  constant, la branche du lieu correspondante au mode déformable pénètre plus à l'intérieur du cercle unitaire. Donc, l'observabilité du système s'améliore quand  $\omega_1$  augmente à  $C_1$  constant. Ce fait, confirmé par les simulations, peut se justifier de la manière suivante : l'angle de dépointage en roulis  $\theta_k$ , dont une mesure est la seule information donnée au filtre, est une superposition d'un signal "rapide" (correspondant aux pôles  $e^{\pm j\omega_1 T}$ ) et d'un signal "lent" (correspondant au pôle double +1) ; quand  $\omega_1$  augmente, la fréquence du signal rapide augmente, le filtre parvient à discriminer plus facilement les deux signaux et donc à mieux observer le processus.



En conclusion, la dynamique de roulis (5.3.) du satellite déformable présente un mode "faiblement observable" quand une mesure de l'angle  $\theta_k$  de dépointage en roulis est la seule information disponible. Pour éliminer ce mode "faiblement observable", une mesure supplémentaire s'avère être indispensable ; en particulier, on peut penser ajouter un gyromètre qui donne une mesure de la rotation  $\dot{\theta}_k$  ( $\dot{\theta}_k \triangleq \dot{\theta}(kT)$ ) autour de l'axe de roulis.

5.1.2. Un senseur d'horizon et un gyromètre

Il est aisé de voir que la rotation  $\dot{\theta}_k$  autour de l'axe de roulis s'exprime en fonction des variables d'état par :

$$\dot{\theta}_k = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 \omega_1^3 & | & 0 & \omega_1^2 \end{pmatrix} X_k \quad (5.9.)$$

On considère donc le problème de la reconstruction de l'état du système (5.3.a.) à partir des mesures  $Z_k$  données par un senseur d'horizon et un gyromètre. On a :

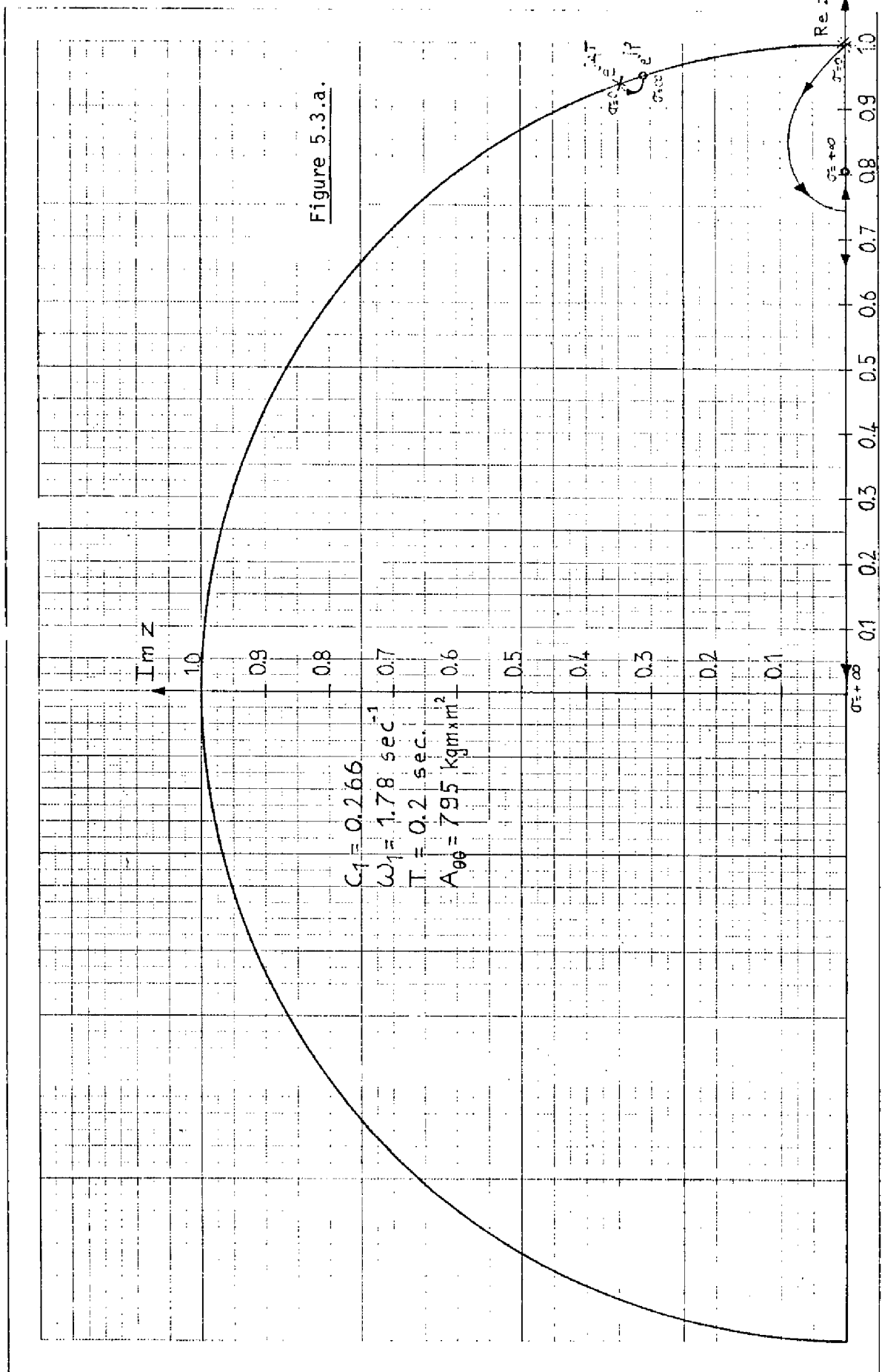
$$Z_k = \begin{pmatrix} -c_1 \omega_1^2 & 0 & | & \omega_1^2 & 0 \\ 0 & -c_1 \omega_1^3 & | & 0 & \omega_1^3 \end{pmatrix} X_k + v_k \quad (5.10.)$$

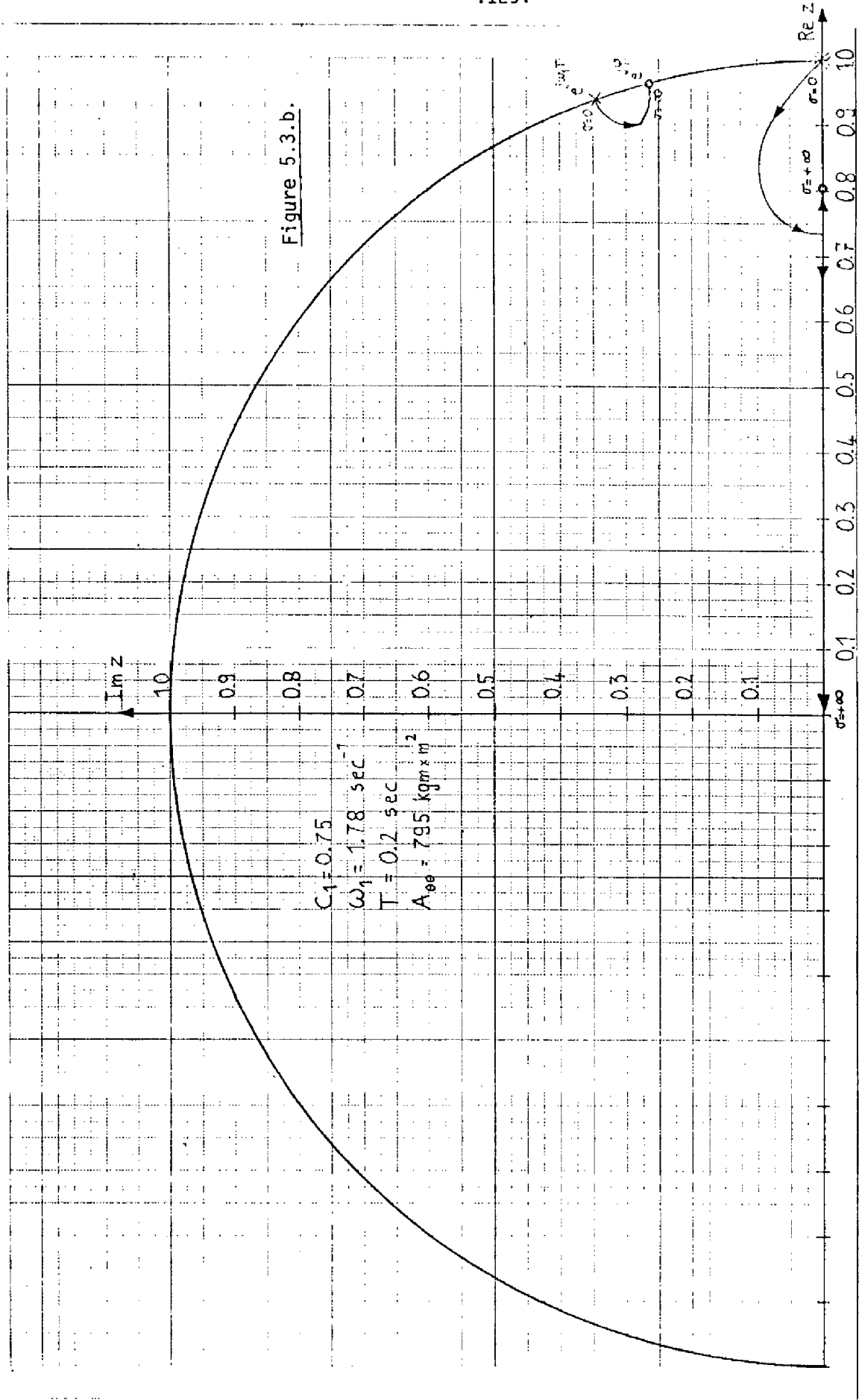
$v_k$  est le vecteur des bruits de mesure :

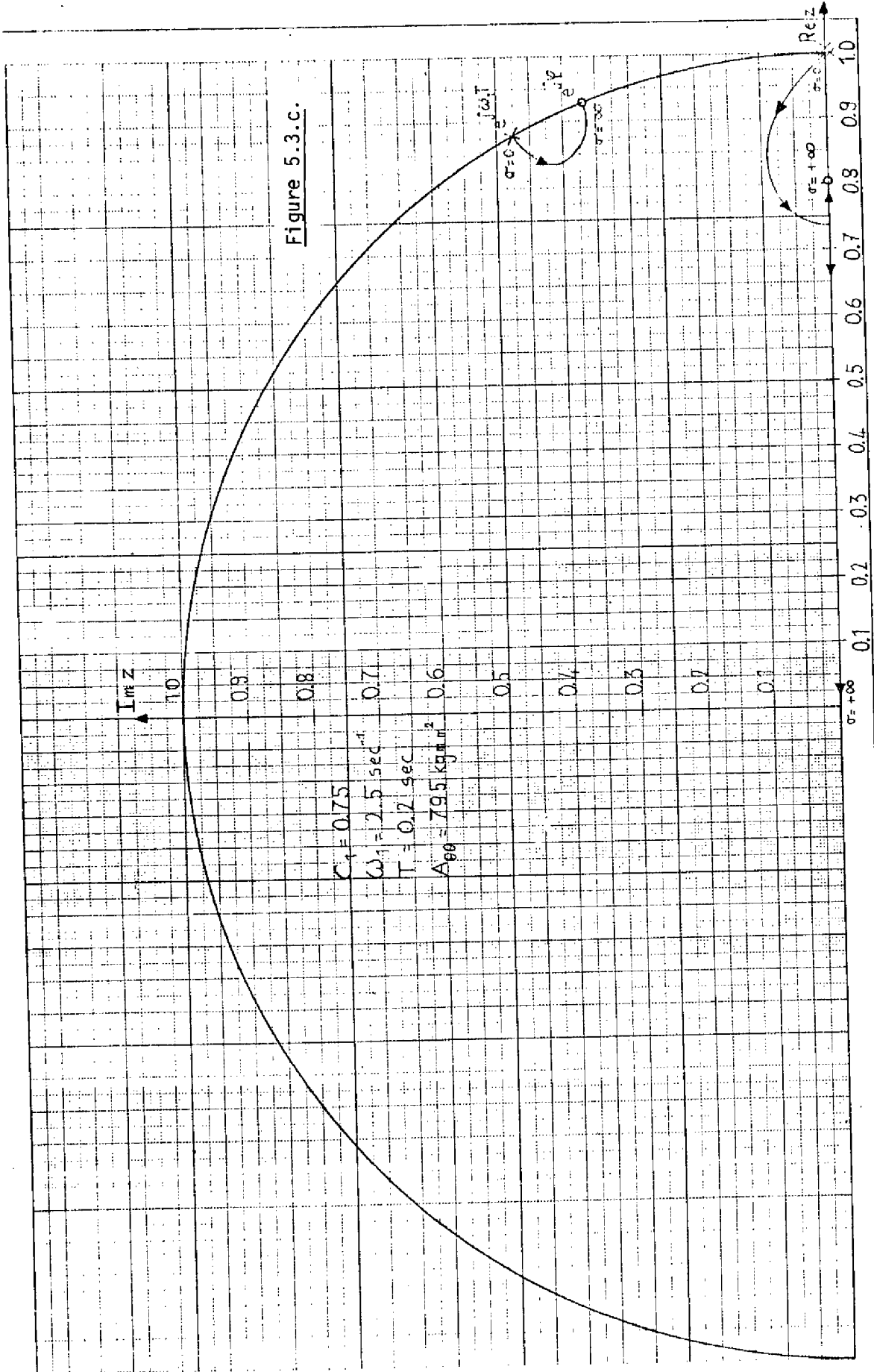
$$E v_k v_l^T = R \delta_{kl} \quad (R > 0) \quad (5.11.)$$

Dans les simulations,  $R$  sera une matrice diagonale dont les éléments sont égaux.

Le lieu des pôles du filtre stationnaire optimal correspondant quand  $\sigma$  varie est donné par les figures 5.3. Chaque lieu se compose encore de deux paires de branches : une correspondant au mode déformable, l'autre correspondant au mode rigide. La branche correspondant au mode déformable part du pôle  $e^{\pm j\omega_1 T}$  de la transmittance  $G(z)$  et se dirige vers le zéro  $e^{\pm j\varphi}$  correspondant. Les branches correspondant au mode rigide partent du pôle double  $+1$  de la transmittance  $G(z)$  pour se diriger vers l'origine et vers un point  $Z_\infty$  situé sur l'axe réel entre 0 et  $+1$ .







Pour démontrer ces faits, il faut généraliser le paragraphe 3.4. au cas multivariable. Cette généralisation n'est pas très compliquée ; aussi, elle ne sera pas appliquée à ce cas particulier. Ci-dessous, au paragraphe 5.1.2., cette généralisation est présentée sur un autre exemple d'importance technologique supérieure ce qui suffit pour suggérer la procédure générale à suivre.

La conclusion à tirer des figures 5.3. est que l'adjonction du gyromètre au senseur d'horizon ne parvient pas à éliminer le mode faiblement observable.

Les conclusions du cas précédent restent d'ailleurs valables. Ainsi, en comparant les figures 5.3.a. et 5.3.b., on conclut que, comme dans le cas précédent, l'observabilité du mode déformable s'améliore quand  $C_1$  augmente à  $\omega_1$  constant. La comparaison des figures 5.3.b. et 5.3.c. permet de se rendre compte que le mode déformable devient mieux observable quand  $\omega_1$  augmente à  $C_1$  constant.

L'utilisation du gyromètre ne change donc rien au mode déformable ; elle ne fait que modifier la paire de branches correspondant au mode rigide en supprimant l'influence du zéro situé en -1 de la transmittance  $G(z)$ . Pour supprimer la propriété de "faible observabilité" du mode déformable, il faut utiliser un autre capteur qui supprime l'influence néfaste du zéro  $e^{+j\varphi}$  de la transmittance  $G(z)$ .

#### 5.1.3. Un senseur d'horizon et un système optique donnant une mesure de la déformation des panneaux

Pour supprimer le mode "faiblement observable", il faut ajouter au senseur d'horizon un capteur capable de donner une mesure directe de l'angle  $q_1$  de déformation des panneaux (figure 1.5.). Ce capteur peut être, par exemple, un système optique qui observe la déformation des panneaux à partir du corps principal. De tels systèmes sont en cours de développement dans l'industrie.

En utilisant le paragraphe (1.4.), il est assez aisé d'exprimer l'angle  $q_1$  de déformation des panneaux en fonction du vecteur d'état  $X$  de la représentation (5.3.) du système.

On trouve :

$$\begin{pmatrix} q_1 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \mu & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} X_k \quad (5.12.a.)$$

avec

$$\mu = (1+c_1)\omega_1^2 \left(1 + 3\frac{\ell_0}{\lambda_1}\right) \quad (5.12.b.)$$

Les équations des mesures peuvent s'écrire :

$$z_k = \begin{pmatrix} \mu & 0 & | & 0 & 0 \\ -c_1\omega_1^2 & 0 & | & \omega_1^2 & 0 \end{pmatrix} X_k + v_k \quad (5.13.)$$

où  $v_k$  est le bruit blanc de mesure

$$E v_k v_\ell^T = R \delta_{kl} \quad (R > 0) \quad (5.14.)$$

Dans les simulations,  $R$  sera une matrice diagonale dont les éléments sont égaux.

Les lieux des pôles du filtre stationnaire optimal correspondant quand  $\sigma$  varie de zéro à l'infini sont montrés par les figures 5.4. On voit que les lieux partent des pôles du système pour  $\sigma = 0$  et se dirigent, d'une part, vers 0 et -1 et, d'autre part, vers  $Z_\infty$  et  $Z_\infty^*$ , points situés à l'intérieur du cercle unité. Cette fois, le système ne contient plus de mode "faiblement observable" ; l'influence néfaste du zéro  $e^{+j\varphi}$  a été supprimée par l'utilisation d'un capteur supplémentaire donnant une mesure de la déformation des panneaux.

Il est intéressant de suggérer la justification analytique des lieux des pôles des figures 5.4. Ce sera l'occasion de compléter les résultats du paragraphe 3.4 en traitant un cas multivariable.

La méthodologie utilisée pour le cas multivariable est très semblable à celle du paragraphe 3.4. ; elle est basée sur l'utilisation de formes canoniques pour systèmes multivariables.

Ecrivons la matrice  $H$  sous la forme partitionnée :

dès lors :

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$G(z) = h_2 (zI_4 - \Phi)^{-1} L = \frac{\theta(z)}{A_{\theta\theta}(z)} \quad (5.15.)$$

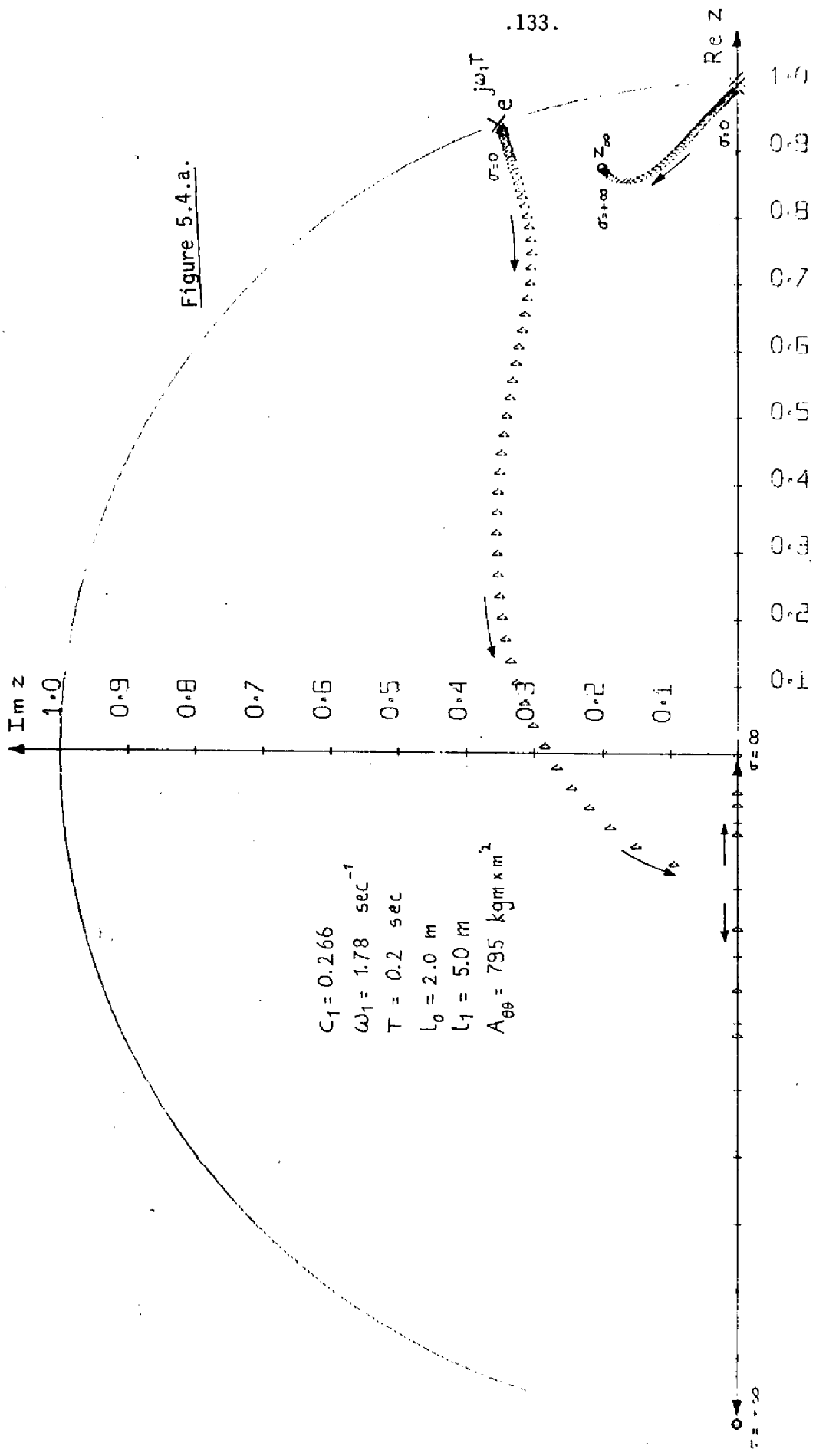


Figure 5.4.a.

Figure 5.4.b.

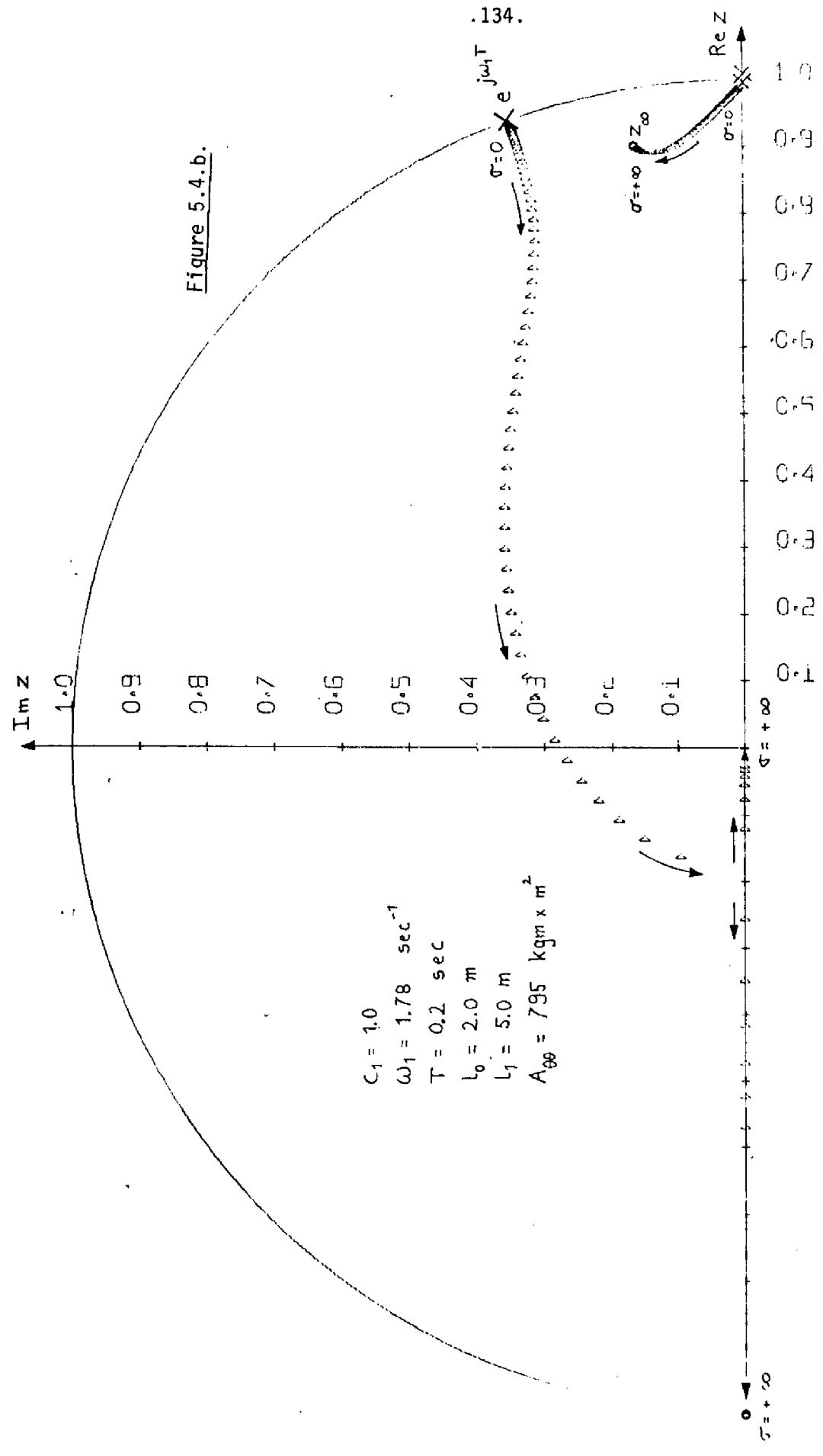




Figure 5.4.c.

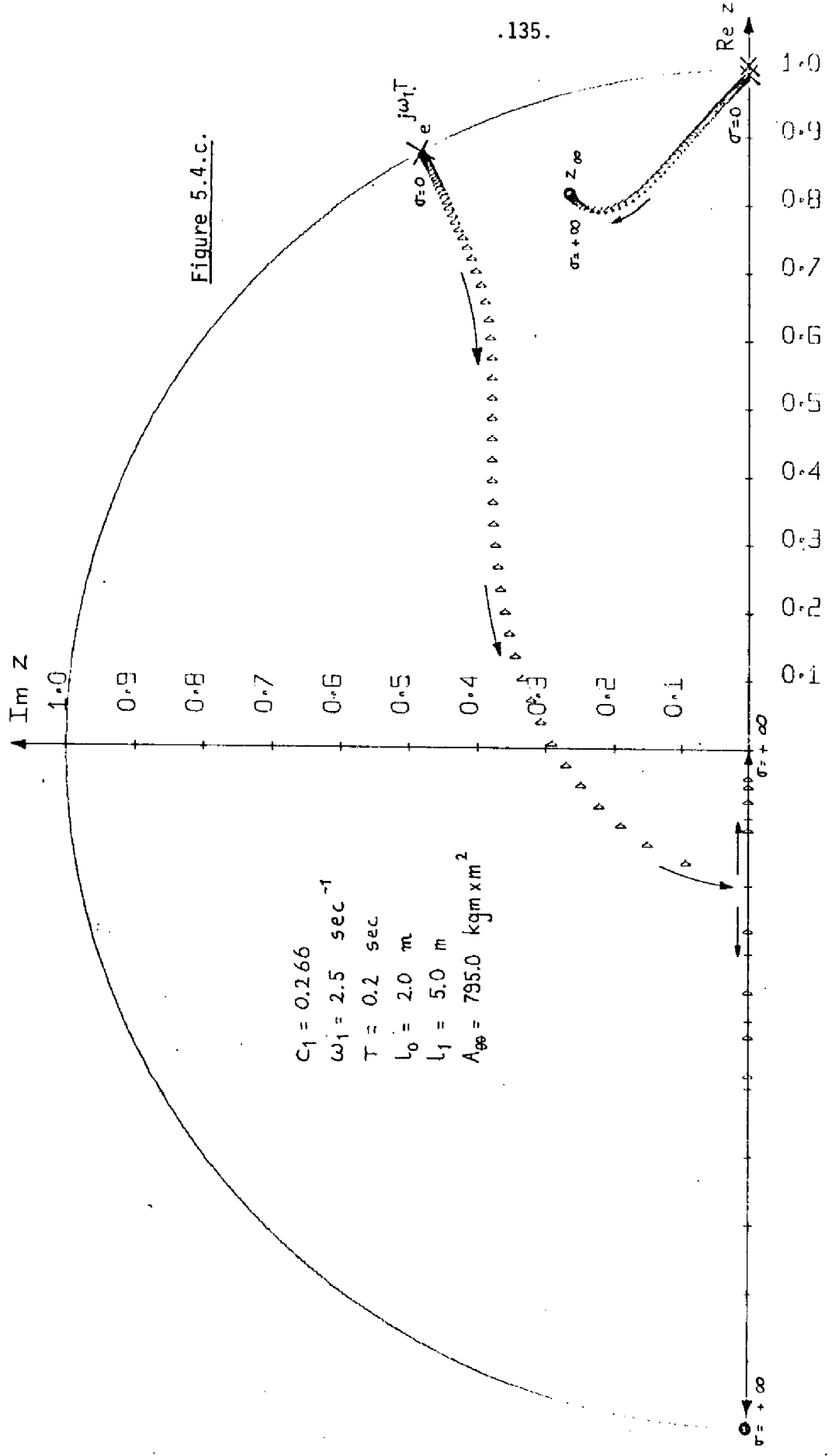
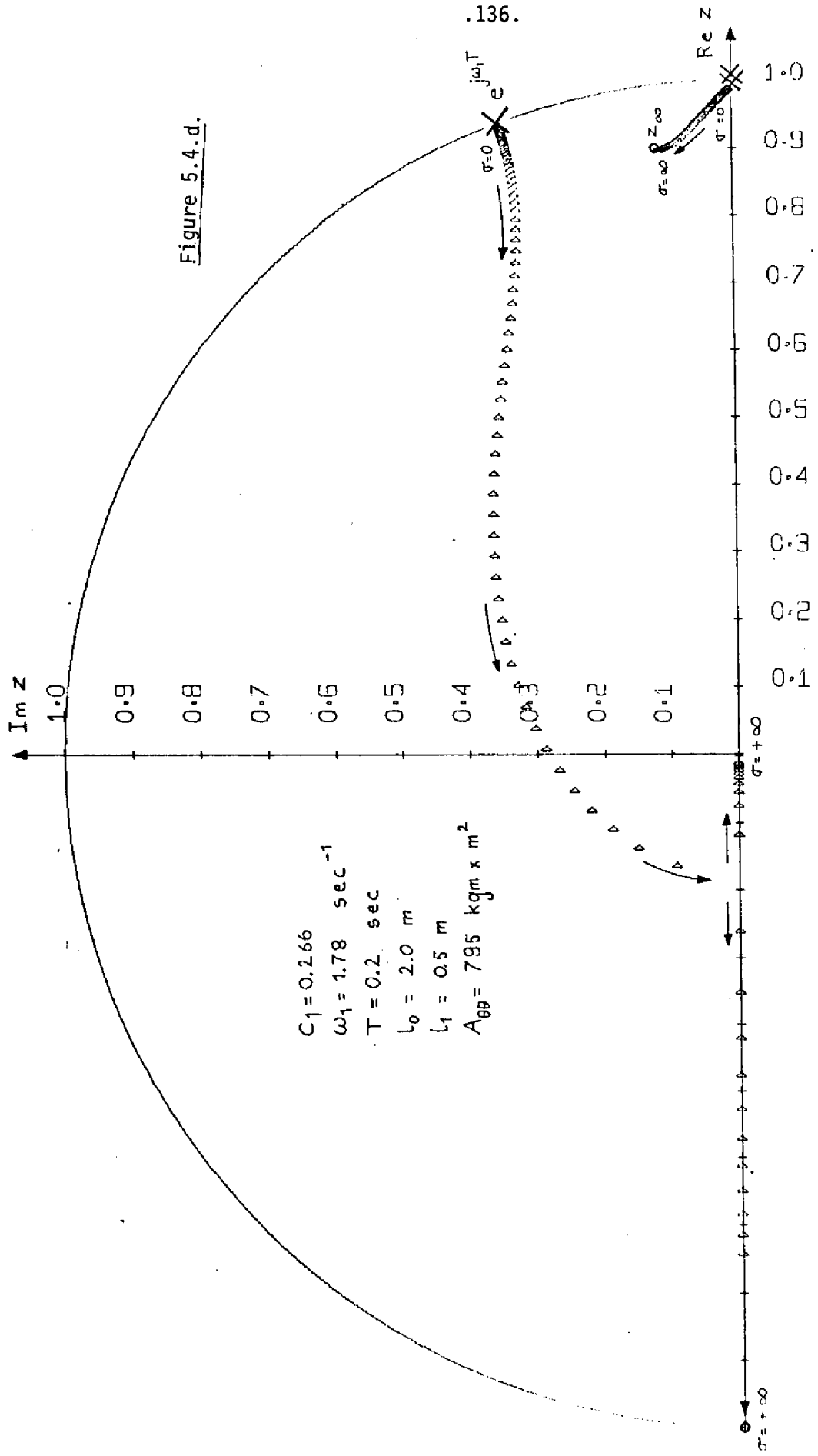


Figure 5.4.d.



$C_1 = 0.266$   
 $\omega_1 = 1.78 \text{ sec}^{-1}$   
 $T = 0.2 \text{ sec}$   
 $l_0 = 2.0 \text{ m}$   
 $l_1 = 0.5 \text{ m}$   
 $A_{\theta\theta} = 795 \text{ kgm} \times \text{m}^2$

Introduisons la transmittance :

$$G_1(z) = \frac{q_1(z)}{\frac{l_{\theta}}{A_{\theta\theta}}(z)} = h_1(zI_4 - \phi)^{-1}L = \frac{\mu(\cos \omega_1 T - 1)(z+1)}{\omega_1^4(z^2 - 2z \cos \omega_1 T + 1)} \quad (5.16.)$$

On remarque que le dénominateur de cette transmittance n'est que de degré 2 ; ceci est une conséquence du fait que la paire  $(\phi, h_2)$  n'est pas observable.

La suite de vecteurs lignes  $h_1, h_1 \phi, h_2, h_2 \phi$  est linéairement indépendante. Donc, il existe une forme canonique  $(\bar{\phi}, \bar{H}, \bar{L})$  du triplet  $(\phi, H, L)$  pour laquelle :

$$\bar{\phi} = \left( \begin{array}{cc|cc} 2 \cos \omega_1 T & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \bar{\varphi}_{31} & \bar{\varphi}_{32} & 2 & 1 \\ \bar{\varphi}_{41} & \bar{\varphi}_{42} & -1 & 0 \end{array} \right) \quad (5.17.a.)$$

$$\bar{H} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (5.17.b.)$$

$$\bar{L}^T = (\bar{l}_1 \quad \bar{l}_2 \quad \bar{l}_3 \quad \bar{l}_4)^T \quad (5.17.c.)$$

$\bar{\varphi}_{31}, \bar{\varphi}_{32}, \bar{\varphi}_{41}$  et  $\bar{\varphi}_{42}$  sont des éléments non nuls qui se calculent aisément.

En utilisant la représentation canonique (5.17.), il est possible d'exprimer sous forme assez simple le polynôme caractéristique de l'inverse  $\mathcal{H}^{-1}$  de la matrice hamiltonienne. De (3.36.), on déduit :

$$\det(I_{\theta} z - \mathcal{H}^{-1}) = \det(\bar{\phi}^{-1} I_4 z) \det \left[ (\bar{\phi}^T - I_4 z) - \bar{H}^T \bar{H} (z^{-1} I_4 - \bar{\phi})^{-1} \bar{L} \bar{L}^T \sigma^2 \right] \quad (5.18.)$$

En remarquant que

$$\bar{H} (z^{-1} I_4 - \bar{\phi})^{-1} \bar{L} = \begin{bmatrix} G_1(z^{-1}) \\ G(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

(5.19.) devient :

$$\det (I_8 z - \mathcal{H}^{-1}) = (-z)^4 \det \phi^{-1} d(z^{-1}) \times \quad (5.19.)$$

$$\det \left\{ (I_4 z - \bar{\phi}^T) + \sigma^2 \begin{pmatrix} G_1(z^{-1})\bar{l}_1 & G_1(z^{-1})\bar{l}_2 & G_1(z^{-1})\bar{l}_3 & G_1(z^{-1})\bar{l}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ G(z^{-1})\bar{l}_1 & G(z^{-1})\bar{l}_2 & G(z^{-1})\bar{l}_3 & G(z^{-1})\bar{l}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

En se rappelant que le déterminant d'une somme de deux matrices est égal à la somme des déterminants de toutes les matrices construites avec les lignes de la première et les lignes complémentaires de la seconde, on obtient :

$$\det (I_8 z - \mathcal{H}^{-1}) = (-z)^n \left[ d(z)d(z^{-1}) + \sigma^2 M(z) \right] \det \phi^{-1} \quad (5.20.a.)$$

avec

$$M(z) = \frac{\mu (\cos \omega_1 T - 1)}{\omega_1^4} (z^{-1} + 1)(z^{-1} - 1)^2 \left\{ \quad (5.20.b.) \right.$$

$$\det \begin{pmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \bar{l}_3 & \bar{l}_4 \\ -1 & z & -\bar{p}_{32} & -\bar{p}_{42} \\ 0 & 0 & z-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & z \end{pmatrix}$$

$$+ \det \begin{pmatrix} z - 2 \cos \omega_1 T & 1 & -\bar{p}_{31} & -\bar{p}_{41} \\ -1 & z & -\bar{p}_{32} & -\bar{p}_{42} \\ n(z^{-1})\bar{l}_1 & n(z^{-1})\bar{l}_2 & n(z^{-1})\bar{l}_3 & n(z^{-1})\bar{l}_4 \\ 0 & 0 & -1 & z \end{pmatrix} \left. \right\}$$

En considérant (5.20.a.), il est clair que le lieu des pôles du filtre stationnaire optimal quand  $\sigma$  varie de zéro à l'infini se ramène à nouveau à un lieu d'EVANS.

Pour  $\sigma \rightarrow 0$ , les pôles du filtre vont manifestement tendre vers les pôles du système.

Pour  $\sigma \rightarrow \infty$ , les pôles du filtre tendent vers les racines du polynôme  $M(z)$ .

Si on remarque que  $\bar{\ell}_1 = \bar{\ell}_2 = \mu(\cos\omega_1\tau)\omega_1^{-4}$ , on déduit  $M(-1) = 0$ ; ce qui signifie que le zéro -1 de la transmittance  $G(z)$  garde son influence sur le lieu des pôles. Donc, pour  $\sigma \rightarrow \infty$ , une branche du lieu va tendre vers -1.

De (5.20.), il est aisé de déduire  $M(e^{\pm j\varphi}) \neq 0$ ; ce qui signifie que l'influence néfaste des zéros  $e^{\pm j\varphi}$  sur le lieu des pôles a été supprimée; maintenant, il n'y a aucune branche du lieu qui converge vers  $e^{\pm j\varphi}$ .

La solution de l'équation  $M(z) = 0$  permet de trouver le point  $Z_\infty$  vers lequel l'une des branches converge pour  $\sigma \rightarrow \infty$ . Ce point  $Z_\infty$  est situé à l'intérieur du cercle unité, pas trop près du pôle  $e^{j\omega_1\tau}$  ce qui attire le lieu à l'intérieur du cercle unitaire en améliorant l'observabilité du système.

En conclusion, le senseur d'horizon et le système optique de mesure de la déformation des panneaux forment un ensemble de capteurs assurant l'absence de mode "faiblement observable" dans le processus de filtrage. Ce fait est très bien représenté sur les tracés des lieux des pôles (figure 5.4.).

En considérant ces lieux des pôles, d'autres conclusions peuvent être tirées. Ainsi, les figures 5.4.a. et 5.4.b. montrent l'influence de  $C_1$  sur le tracé du lieu. On remarque que, lorsque  $C_1$  augmente, la branche "rigide" du lieu pénètre moins loin à l'intérieur du cercle unité; ceci peut se justifier de la manière suivante: quand  $C_1$  augmente, l'observabilité du mode déformable est améliorée au détriment de celle du mode rigide. La comparaison des figures 5.4.a. et 5.4.c. permet de se rendre compte de l'influence de  $\omega_1$  sur le lieu des pôles. Enfin, les figures 5.4.a. et 5.4.d. montrent l'influence de  $\mu$  sur les lieux; quand  $\mu$  augmente, la branche rigide pénètre de nouveau moins loin à l'intérieur du cercle unité; ceci est dû au fait que quand  $\mu$  augmente l'observabilité du mode déformable est améliorée au détriment de celle du mode rigide.

### 5.2. COMMANDE

On peut, par exemple, choisir une loi de commande linéaire stationnaire du genre  $u_k = G x_k$  optimale au sens du critère quadratique sur horizon infini :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\sigma^2 \theta_k^2 + u_k^2) \quad (5.21.)$$

Dans ce cas, on démontre que pour tout  $\sigma$ , les pôles correspondant au mode déformable du système optimal en boucle fermée sont situés dans une zone bien précise, tout près du cercle unité ; c'est l'aspect "faible commandabilité" du mode déformable.

Cet aspect n'est cependant pas important car on a toujours la liberté de choisir une autre fonction de pénalisation ; ainsi, le critère :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\sigma_{\theta}^2 \theta_k^2 + \sigma_q^2 (q_1)_k^2 + u_k^2)$$

peut mener à un système optimal en boucle fermée dont tous les pôles sont bien amortis.

### 5.3. CONCLUSIONS

Ce chapitre a principalement étudié les problèmes de filtrage dans les satellites déformables.

En utilisant les résultats du chapitre 3, on a mis en évidence le fait qu'il est difficile d'observer le mode déformable du satellite à partir de mesures données par des senseurs situés dans le corps principal. La technique utilisée est basée sur la considération des lieux des pôles du filtre stationnaire optimal quand la covariance du bruit de dynamique varie de zéro à l'infini.

La situation peut se résumer en disant que le mode déformable du satellite est "faiblement observable" (au sens du chapitre 4) à partir de mesures données par des senseurs situés dans le corps principal.

Pour supprimer ce mode "faiblement observable", l'utilisation d'un capteur supplémentaire donnant une mesure de la déformation des panneaux s'est avérée indispensable. Ce fait a été mis en évidence par la considération des lieux des pôles du filtre stationnaire optimal correspondant.

Les résultats du chapitre 3 sont donc intéressants pour juger l'observabilité des modes d'un système et pour déterminer un ensemble de capteurs tel que le processus de filtrage ne contienne pas de mode "faiblement observable".





## CONCLUSION

---



Ce mémoire de thèse a étudié, sous certains aspects, une classe importante de satellites : les satellites composés d'un corps principal massif sur lequel sont connectés, symétriquement, deux panneaux solaires déformables.

Le contenu de ce mémoire peut se diviser en deux parties :

- 1) Une partie "mécanique appliquée" (chapitres 1, 2),
- 2) Une partie "filtrage" (chapitres 3, 4, 5).

La partie "mécanique appliquée" propose d'abord dans le chapitre 1 un formalisme euléro-lagrangien de mise en équations des satellites composés d'un corps principal rigide et d'appendices déformables. L'étude des propriétés de cette classe de satellites fait un usage prépondérant des méthodes lagrangiennes. Ainsi, il faut tout particulièrement retenir l'utilisation du formalisme lagrangien pour faire des considérations d'observabilité et de commandabilité dans les modèles linéarisés. Ces questions sont ainsi tranchées de manière presque immédiate, tandis que la méthode de KALMAN aurait demandé des calculs fastidieux.

Il est espéré que la méthode proposée dans le chapitre 1 soit plus abondamment utilisée pour traiter les questions d'observabilité et de commandabilité dans les satellites déformables.

Cette méthode qui consiste à étudier l'observabilité et la commandabilité par le formalisme lagrangien est appliquée dans le chapitre 1 à des systèmes linéaires. Néanmoins, elle pourrait éventuellement être appliquée à des systèmes non linéaires. Il y a là une voie qui reste ouverte pour de futures recherches.

Le chapitre 2 étudie les équations non linéaires du mouvement des satellites munis de panneaux déformables. La principale contribution est l'étude du "satellite deux modes" pour lequel le problème central est celui de la stabilité de deux oscillateurs couplés. Il est montré comment la méthode de la récurrence associée de BIRCKHOFF peut être utilisée pour cette étude.

Bien que le chapitre 2 traite de cas assez particuliers, la méthodologie proposée pourra néanmoins être appliquée à des cas plus complexes.

La seconde partie de ce travail est axée autour des problèmes de filtrage rencontrés dans la synthèse d'un système actif de stabilisation d'attitude pour un satellite munis d'appendice déformables. L'attention a été portée sur ce qui est apparu comme étant le point crucial ; à savoir : les modes déformables du satellite sont "faiblement observables" à partir de senseurs localisés dans le corps principal.

Cette seconde partie commence par le chapitre 3 qui est essentiellement théorique. Il traite le problème inverse du filtrage optimal en présentant des développements théoriques originaux. Ce problème consiste à trouver les relations existant entre les covariances des bruits agissant sur un processus à observer et les pôles du filtre stationnaire optimal correspondant.

La lecture du chapitre 3 ne va pas sans suggérer des idées pour des recherches ultérieures. En particulier, l'ensemble des pôles d'un filtre stationnaire optimal, quand les covariances des bruits agissant sur le processus à observer varient, pourrait être étudié plus en profondeur.

Le chapitre 4 montre comment le problème inverse du filtrage optimal permet de définir la "faible observabilité" de certains modes dans un système linéaire ; cette propriété ne dépend que de la structure du système et non pas des niveaux des bruits. Il est montré que la présence d'un tel mode dans un processus de filtrage a des conséquences gênantes.

Enfin, dans le chapitre 5, les résultats des deux chapitres précédents sont appliqués aux problèmes de filtrage dans les satellites munis de panneaux déformables et y prennent toute leur signification. Il est montré que les modes déformables sont "faiblement observables" à partir des mesures fournies par des capteurs situés dans le corps principal. De plus, on y suggère quelques méthodes, basées sur des lieux des

pôles, permettant de mesurer l'observabilité des modes déformables des satellites considérés.

Certes, les résultats présentés dans la seconde partie sont susceptibles de très nombreux développements ultérieurs. Néanmoins, les chapitres 3, 4 et 5 proposent suffisamment de résultats et d'idées pour jeter les bases d'une technique, s'appuyant sur le problème inverse du filtrage optimal. Elle permet de mesurer l'observabilité des modes d'un système, de détecter la présence de modes "faiblement observables" et de trouver un ensemble de capteurs tels que le processus de filtrage correspondant ne contienne pas de mode "faiblement observable".



## BIBLIOGRAPHIE

---





- [BER] J. BERNUSSOU, "Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires - Application à l'étude de certains systèmes à modulation". Thèse de Docteur ès-Sciences Physiques, Université Paul Sabatier de Toulouse, Avril 1974.
- [ESR] ESRO/ESTEC, "Study of attitude control of three-axes stabilised spacecraft with flexible appendages". Projet de contrat CS/142/MK/147, Noordwijk, The Netherlands, September 1974.
- [FAU] P. FAURRE, "Identification par minimisation d'une représentation markovienne de processus aléatoire". Centre d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Juillet 1969.
- [FOR] T.E. FORTMAN, "A matrix inversion identity". I.E.E.E., Vol.AC-15, p. 599, October 1970.
- [GET] J.M. GETHING, "Effects of flexibility on a momentum - Stabilised-Communication - Satellite - Attitude - Control System". Proceedings of the I.E.E., Vol.120, pp.613-619, May 1973.
- [KAL] R.E. KALMAN, "When is a linear control system optimal ?". Transactions of the A.S.M.E., Journal of Basic Engineering, pp.51-60, March 1964.
- [KRA] N.N. KRASOVSKI, "Stability of motion". Stanford University Press, Stanford, California, 1963.
- [LAR] V. LARSON, "Suboptimal controller for a linearized n-body spacecraft". J. Spacecraft, Vol.11, pp.858-860, December 1974.
- [LIK] P.W. LIKINS, "Passive and semi-active attitude stabilizations - Flexible spacecraft". AGARD-LS-45-71, October 1971.
- [LUE] D.G. LUENBERGER, "An introduction to observers". I.E.E.E. Vol. AC-16, pp.596-602, December 1971.

- [MEH] R.K. MEHRA, "An algorithm to solve matrix equation  $PH^T=G$  and  $P=\phi P \phi^T + FF^T$ ". I.E.E.E., Vol.AC-15, pp.600, October 1970.
- [MOD] V.J. MODI, "Attitude dynamics of satellites with flexible appendages. A brief review". J. Spacecraft, Vol.11, pp.743-751, November 1974.
- [OHK] Y. OHKAMI and P. LIKINS, "The influence of spacecraft flexibility on system controllability and observability". VI IFAC Symposium Control in Space, Papers Session XIII, pp.51-64, August 1974.
- [PAY] H.J. PAYNE and L.M. SILVERMAN, "On the discrete-time algebraic RICCATI equation". I.E.E.E., Vol.AC-18, pp.226-234, June 1973.
- [POE] D. POELAERT, "Contribution à l'analyse dynamique et à la stabilisation d'attitude des satellites déformables". Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paul Sabatier de Toulouse, October 1973.
- [POP] E.P. POPOV, "The dynamics of automatic control systems". Pergamon Press, Oxford, London, New-York, Paris, 1962.
- [RAP] D. RAPPAPORT and L.M. SILVERMAN, "Structures and stability of discrete-time optimal systems". I.E.E.E. Vol.AC-16, pp.227-233, June 1971.
- [ROB] R.E. ROBERSON and J. WITTENBURG, "A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies with reference to the problem of satellite attitude control". Proc. of the 3rd Int. Cong. of Automatic Control (London, 1966), Butterworths and Co, London, 1967.
- [SCHI] W.O. SCHIELEN, "Fine pointing system for large orbiting telescopes". J. Spacecraft, Vol.11, pp.273-274, May 1974.

- [SCHM] B. SCHMIDTBAUER, "Satellite attitude control and stabilization using on-board computers". E.S.R.O. CR-100, July 1973.
- [SOR] H.W. SORENSON, "KALMAN filtering techniques", in "Advances in control systems". Vol.3, pp.219-264, 1966.
- [VAU] D.R. VAUGHAN, "A non recursive algebraic solution of the discrete RICCATI equation". I.E.E.E., Vol. AC-15, pp.597-599, October 1970.
- [WHI] E.T. WHITTAKER, "A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies". Cambridge University Press, 1965.
- [WIL] P.Y. WILLEMS, "Passive and semi-active attitude stabilization - dual - spin satellites". AGARD-LS-45-71, October 1971.
- [WON] W.M. WONHAM, "On pole assignment in multi-input controllable linear systems". I.E.E.E., Vol.AC-12, pp.660-665, December 1967.

## TABLE DES MATIÈRES

---

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DÉFORMABLES	9
1.1. Les systèmes déformables	11
1.2. Un formalisme de mise en équations	15
1.3. Satellite avec deux panneaux déformables ; propriétés fondamentales	26
1.4. Structure générale des modèles linéarisés	34
ANNEXE A	38
CHAPITRE 2. ÉTUDE DU SATELLITE DÉFORMABLE DANS LE CAS NON LINÉAIRE	41
2.1. Satellite 1 mode	43
2.2. Satellite 2 modes	50
2.3. Conclusions	63
ANNEXE B	65
CHAPITRE 3. LE PROBLÈME INVERSE DU FILTRAGE OPTIMAL	75
3.1. Observateur de LUENBERGER	77
3.2. Tout filtre de KALMAN est un observateur de LUENBERGER	80
3.3. Réalisation de KALMAN d'un observateur	87
3.4. L'ensemble des pôles d'un filtre de KALMAN quand les covariances varient	100
3.5. Conclusions	103

CHAPITRE 4. SUR LA "FAIBLE OBSERVABILITÉ" DANS CERTAINS SYSTÈMES LINÉAIRES	105
4.1. "Faible observabilité" par structure	107
4.2. Conséquences de la présence d'un mode "faiblement observable"	108
4.3. Conclusions	110
CHAPITRE 5. LA STABILISATION D'ATTITUDE DES SATELLITES DÉFORMABLES : L'ASPECT FILTRAGE	111
5.1. Filtrage	117
5.2. Commande	140
5.3. Conclusions	140
CONCLUSION	143
BIBLIOGRAPHIE	149