



HAL
open science

Analyse structurale des systèmes complexes en vue d'une commande hiérarchisée

Marc Richetin

► **To cite this version:**

Marc Richetin. Analyse structurale des systèmes complexes en vue d'une commande hiérarchisée. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1975. Français. NNT: . tel-00176766

HAL Id: tel-00176766

<https://theses.hal.science/tel-00176766>

Submitted on 4 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

EN VUE DE L'OBTENTION

DU GRADE DE DOCTEUR D'ÉTAT

Mention : Sciences

Spécialité : Automatique

PAR

Marc RICHETIN

Ingénieur AM
Master of Sciences

ANALYSE STRUCTURALE DES SYSTEMES COMPLEXES EN VUE D'UNE COMMANDE HIERARCHISEE

Soutenu le 8 Juillet 1975 devant la Commission d'Examen :

MM. J. LAGASSE	Président
I. LEFKOWITZ	} Examineurs
M. PELEGRIN	
R. PETIT	
A. TITLI	
G. GRATELOUP	

A Claudine, Mathieu... et Juliette.

AVANT - PROPOS

Ce travail de recherche a été réalisé au sein du LABORATOIRE d'AUTOMATIQUE et d'ANALYSE des SYSTEMES du C.N.R.S. dirigé par Monsieur le Professeur J. LAGASSE, et plus particulièrement dans l'équipe "Commande Hiérarchisée" (Responsables scientifiques : Messieurs les Professeurs G. GRATELOUP et A. TITLI).

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur J. LAGASSE pour l'accueil qu'il m'a réservé dans ce Laboratoire, pour tout ce que j'y ai appris et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être Président du jury de thèse.

Monsieur le Professeur G. GRATELOUP, Directeur du Département de Génie Electrique de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, m'a largement conseillé, soutenu et encouragé pendant ces années et je lui suis très reconnaissant d'avoir été mon Directeur de Recherche.

Les discussions avec Monsieur le Professeur A. TITLI, Maître de Conférences à l'I.N.S.A. de Toulouse, ont toujours été fructueuses et je tiens à le remercier vivement pour avoir été à l'origine de développements de mes travaux.

Que Monsieur le Professeur I. LEFKOWITZ, Professeur au "Case Western Reserve University" à Cleveland et co-directeur du projet "Integrated Industrial Systems" de l'I.I.A.S.A. à Vienne, accepte mes remerciements pour sa présence dans le jury, qui m'honore grandement.

Je suis très reconnaissant au Dr. G. GIRALT, Directeur de Recherche au C.N.R.S., à Monsieur le Professeur B. CARRE et à Monsieur le Professeur C. FOULARD d'avoir formulé, en tant que rapporteurs, des critiques constructives de ce mémoire.

Je remercie Monsieur l'Ingénieur Général M. PELEGRIN, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, pour avoir bien voulu être membre du jury et pour son parrainage au C.N.R.S.

C'est grâce à la foi de Monsieur R. PETIT, Directeur de Production à la Radio-Technique Compelec à Evreux, que ma recherche a eu des supports et des retombées dans le secteur industriel. Je l'en remercie vivement ainsi que de sa présence au sein du jury.

Je n'oublie pas mes collègues de l'équipe "Commande Hiérarchisée" (Messieurs M. SINGH, M. de COLIGNY, B. PRADIN, P. BLANDIN), ainsi que ceux du collectif de recherche "Automatisation Intégrée" (Messieurs G. GIRALT, D. ESTEVE, C. HERNANDEZ, L. ETESSE, H. PIOTROWSKI, J.P. RICHARD) avec qui la collaboration fut souvent stimulante et féconde.

Cet ouvrage a été réalisé grâce aux compétences du Service de Documentation du L.A.A.S., notamment, Monsieur J. CATALA pour les dessins et Messieurs R. ZITTEL et D. DAURAT pour l'édition.

ANALYSE STRUCTURALE DES SYSTEMES COMPLEXES

EN VUE D'UNE COMMANDE HIERARCHISEE.

R E S U M E

Les travaux présentés dans cette thèse se situent dans le domaine de la commande hiérarchisée des systèmes complexes.

Dans le premier chapitre, après avoir rappelé les caractéristiques des systèmes complexes (nombre important de variables, pluralité des objectifs de commande) et les types de structures hiérarchisées de commande (décomposition en niveaux d'influence, fonctionnels, de décision), on étudie les différents problèmes de synthèse de ces structures. En particulier, on montre la nécessité de développer des méthodes d'analyse structurale des systèmes afin, d'une part, de déterminer les possibilités de leur partition et, d'autre part, de trouver des sous-systèmes faiblement couplés.

Dans le second chapitre, on présente une méthodologie générale pour la partition des modèles des systèmes, basée sur l'utilisation des graphes. Deux types de partition sont étudiés et correspondent à des sous-systèmes connectés en série-parallèle et de façon quelconque. Ces partitions sont obtenues par l'analyse des propriétés de forte et de simple connexité, respectivement, du graphe de la structure du système. Pour le premier type, aux sous-systèmes correspondent les composantes f-connexes du graphe. Pour le second, aux variables de couplage des sous-systèmes correspondent les éléments d'un ensemble d'articulation du graphe, et aux sous-systèmes, les composantes s-connexes du sous-graphe engendré par la suppression de l'ensemble d'articulation. Cette étude est illustrée par des exemples concernant notamment la décomposition des programmes d'optimisation linéaire et non-linéaire. Un algorithme de recherche d'ensembles minimaux d'articulation, basé sur une méthode de flot maximal dans un réseau, est proposé et se révèle très efficace pour les graphes de grande dimension.

Dans le troisième chapitre, la notion de couplage dans un système statique de dynamique est précisée et on propose d'analyser ces couplages par l'analyse des données. Pour les systèmes discrets, on utilise les concepts

d'entropie, d'information de la théorie de l'information et on montre qu'ils permettent l'analyse quantitative de relations, de couplages complexes entre les variables d'un système. L'obtention de relations fondamentales de décomposition d'information entre les variables, mesures des couplages statiques ou dynamiques dans un système, la définition de matrices de couplage dont les éléments sont des mesures du couplage statique ou dynamique entre deux variables constituent des résultats importants utilisables pour la partition d'un système en sous-systèmes faiblement couplés.

Dans le quatrième chapitre, on présente deux exemples de synthèse de structures hiérarchisées de commande. Le premier concerne la commande d'une chaîne de fabrication de dispositifs à semi-conducteurs dont l'objectif général est une automatisation intégrée. Après analyse de la nature particulière du processus et des objectifs techniques et économiques, on propose un système hiérarchisé de commande basé sur la division des objectifs et des fonctions de commande. Pour la gestion technique de la chaîne, dont le but est la maîtrise des caractéristiques des produits, on définit un système hiérarchisé de surveillance et de commande qui est un ensemble de programmes de diagnostic, de surveillance et de décision statistiques, de surveillance et de commande automatiques, utilisant des modèles de nature différente (modèles logiques, relations statistiques, modèles statiques ou dynamiques paramétrés) obtenus par l'analyse structurale de la chaîne par les données. Pour cette analyse, on utilise conjointement l'analyse en composantes principales normées et les concepts d'information entre variables développés dans le chapitre précédent.

Dans le second exemple, on étudie la synthèse d'une structure hiérarchisée d'optimisation. Les problèmes de coordination, de transfert d'information entre les niveaux, et de convergence des algorithmes de coordination sont analysés. On montre analytiquement qu'ils sont fortement dépendants des couplages entre les sous-systèmes et que cette synthèse est réalisable à l'aide du graphe des équations de couplage. Un algorithme de partition optimale et sous-optimale d'un graphe est proposé, basé sur une méthode de flot maximal.

Dans la conclusion, plusieurs prolongements à nos travaux sont mentionnés.

TABLE DES MATIERES

I. - SYSTEMES COMPLEXES ET STRUCTURES HIERARCHISEES DE COMMANDE	5
I.1. - Introduction	6
I.2. - Notions sur les structures hiérarchisées de commande	8
I.2.1. - Décomposition sur la base des niveaux d'influence	8
I.2.2. - Décomposition sur la base des niveaux fonctionnels de commande	10
I.2.3. - Décomposition sur la base de la partition du système.	11
I.3. - Introduction à la synthèse des structures hiérarchisées	15
II. - ANALYSE STRUCTURALE DES MODELES PAR LES GRAPHES	20
II.1. - Introduction	21
II.2. - Rappels sur les graphes	22
II.3. - Structures hiérarchisées des graphes	25
II.3.1. - Structures hiérarchisées induites par la connexité forte	25
II.3.2. - Structures hiérarchisées induites par la connexité simple	31
II.4. - Applications	40
II.4.1. - Matrices réductibles	41
II.4.2. - Décomposition des systèmes d'équations	43
II.4.3. - Décomposition des programmes d'optimisation	45
II.5. - Conclusion	57
III. - ANALYSE STRUCTURALE PAR LES DONNEES	59
III.1. - Couplage et analyse des données	61
III.2. - Concepts de la théorie de l'information	63
III.2.1. - Entropie	63
III.2.2. - Information entre variables aléatoires	65
III.2.3. - Généralisations aux systèmes multivariables	66
III.3. - Partition des systèmes statiques	68
III.3.1. - Obtention des lois de distribution	68
III.3.2. - Quelques propriétés des entropies et des informations dans les systèmes multivariables	70

III.3.3. - Décomposition de l'information entre les variables	73
III.3.4. - Matrice de couplage statique	76
III.3.5. - Exemple	78
III.4. - Partition des systèmes dynamiques	81
III.4.1. - Décomposition des couplages dynamiques	83
III.4.2. - Analyse des couplages dynamiques	84
III.4.3. - Matrice de couplage dynamique	84
III.4.4. - Exemple	85
III.5. - Conclusion	88
IV. - EXEMPLES DE SYNTHÈSE DE STRUCTURES HIERARCHISEES DE COMMANDE	91
IV.1. - Introduction	93
IV.2. - Commande hiérarchisée d'une chaîne de fabrication de dispositifs à semi-conducteurs	93
IV.2.1. - Description d'une chaîne de fabrication	94
IV.2.2. - Objectifs de la commande	98
IV.2.3. - Système hiérarchisé de commande	99
IV.2.4. - Rôles des fonctions d'analyse	103
IV.3. - Synthèse d'une structure hiérarchisée d'optimisation	117
IV.3.1. - Graphe de la structure du système	117
IV.3.2. - Décomposition des équations de couplage	119
IV.3.3. - Transfert d'information entre les niveaux	123
IV.3.4. - Convergence de la coordination	125
IV.3.5. - Partition optimale d'un graphe	129
V. - CONCLUSION	135
ANNEXES	
A.1. - Admissibilité d'une coordination par le critère de systèmes interconnectés par des stocks	141
A.2. - Sur l'optimisation hiérarchisée : conditions suffisantes de convergence et de minimalité	157
REFERENCES	175

CHAPITRE I

SYSTÈMES COMPLEXES ET STRUCTURES HIÉRARCHISÉES

DE COMMANDE

-

I.1. - INTRODUCTION

Lors des tentatives d'application des méthodes classiques d'analyse, de commande soit à des systèmes industriels de production, soit à des systèmes socio-économiques (par exemple, systèmes de transports urbains) ou biologiques (prothèses, orthèses), les automaticiens ont constaté que la nature même de ces systèmes leur imposait l'élaboration d'une méthodologie nouvelle pour la conception d'une commande réalisable.

Pour souligner la spécificité de ces systèmes, on les dit complexes et l'usage de ce qualificatif révèle la difficulté de leur définition précise et autorise des significations différentes. Nous dirons quant à nous qu'un système complexe est un ensemble d'un grand nombre de parties ou sous-systèmes plus ou moins simplement et intensément interconnectés.

En premier lieu, cette définition sous-entend un grand nombre de variables nécessaires à une description complète du système, une dimension importante des modèles. Les variables d'un même système peuvent être de nature différente (continues, discrètes, déterministes, aléatoires) et l'obtention de modèles doit faire appel à des méthodes de disciplines scientifiques différentes. Par exemple, la modélisation d'une unité de production requiert le concours de physiciens, d'automaticiens, de gestionnaires, d'économistes, de sociologues pour appréhender les multiples aspects du fonctionnement de l'unité. La tâche d'analyse, de modélisation revêt alors une importance primordiale pour la compréhension et la maîtrise des systèmes complexes.

En second lieu, la dimension importante de ces systèmes s'accompagne dans la plupart des cas, d'une pluralité des objectifs de commande, quelquefois antagonistes, qui complique fortement la tâche de commande. Les objectifs d'une unité de production qui portent principalement sur la qualité et la quantité de produits ouvrés, sur les coûts de production et de stockage et sur les conditions de travail sont évidemment concurrents. Une meilleure qualité est bien souvent coûteuse ; un accroissement du volume de production peut entraîner une augmentation des cadences qui influe sur les conditions de travail etc....

Ainsi la connaissance des propriétés de chaque partie et des lois d'interaction ne permet pas, en général, une déduction aisée des propriétés d'ensemble

du système, l'affirmation réciproque étant évidente. Comme le notent FOSSARD et al [5], le compromis à faire entre une connaissance détaillée et une connaissance synthétique est finalement fonction des objectifs de commande. De plus, face à la diversité des fonctionnements possibles du système, aux perturbations qui les affectent, à la pluralité des objectifs, les décisions à prendre, les actions à effectuer sont nombreuses, de nature et de fréquence différentes. Enfin la dimension du système rend difficile et parfois irréaliste l'exécution d'une manière globale de fonctions de commande telles que la régulation, l'optimisation. Dès lors toute approche globale pour la réalisation de la commande est inadéquate.

Pour introduire l'approche de la commande hiérarchisée on peut rappeler cette anecdote rapportée par SIMON [2] dans une étude datant des débuts des travaux de recherche sur les différentes formes possibles de hiérarchie pour l'analyse et la commande des systèmes complexes.

Soient Pierre et Paul, deux fabricants de montres composées d'environ 1.000 pièces. Pierre a choisi de monter une montre en assemblant les 1.000 pièces à la fois. Paul a choisi de la monter en assemblant 10 pièces à la fois. Il doit donc réaliser 111 assemblages pour achever un montage.

Les clients passent commande par téléphone et, Pierre ou Paul répondent personnellement si bien que tout assemblage en cours est détruit. Si p est la probabilité que le téléphone sonne lorsqu'une pièce est en cours de montage, on montre que, pour $p = 1/100$, il faut, en moyenne, environ 4.000 fois plus de temps à Pierre qu'à Paul pour fabriquer une montre(1).

Il apparaît que les perturbations que sont ici les appels téléphoniques ont des effets moins importants sur le processus d'assemblage de Paul que sur celui de Pierre et ceci est dû à la structure hiérarchisée de l'assemblage de Paul. SIMON a montré que les systèmes vivants ayant une structure hiérarchisée sont ceux qui évoluent le plus rapidement face aux changements de l'environnement.

(1) - L'assemblage est un processus de Markov à états discrets qui n'a qu'un seul régime limite.

I.2. - NOTIONS SUR LES STRUCTURES HIERARCHISEES DE COMMANDE

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement les différents principes et concepts de la commande hiérarchisée, plus complètement développés et illustrés par ailleurs [2-8]

Les structures hiérarchisées reposent sur le principe de décomposition de la commande. Cette décomposition peut être issue d'une division des objectifs, des fonctions de commande à assurer pour atteindre les objectifs ou d'une décomposition de la structure physique du système. Dans ce dernier cas, on parle plutôt de la partition du système.

La décomposition de la commande implique l'existence de différents organes de commande dont les décisions doivent être harmonisées en regard des objectifs globaux, c'est-à-dire coordonnés. Cette coordination est réalisée par échange d'informations dont la nature dépend du type de décomposition.

I.2.1. - Décomposition sur la base des niveaux d'influence

A chaque niveau de commande, on utilise un modèle du système approprié aux objectifs de ce niveau, faisant appel à des variables, des lois spécifiques. Les divers modèles mis en jeu portent sur un fonctionnement d'autant plus général du système qu'on s'élève dans la hiérarchie et les décisions des plus hauts niveaux sont prioritaires et moins fréquentes.

En reprenant l'exemple d'une unité de production, on peut distinguer trois niveaux d'influence (fig. I.1). Au premier niveau, commande et contrôle de production, les objectifs ont trait à la fabrication de produits, à leur qualité. Au second, gestion de production, on s'intéresse aux flux des produits ce qui conduit à l'élaboration d'ordres de production. C'est au troisième niveau que sont faits les choix économiques et sociaux.

La coordination se fait par échange de mesures, de performances (rendements, coûts) dans le sens ascendant, de critères, de contraintes dans le sens descendant. Ce type d'organisation est très naturel et permet de mettre en oeuvre une commande à objectifs multiples.

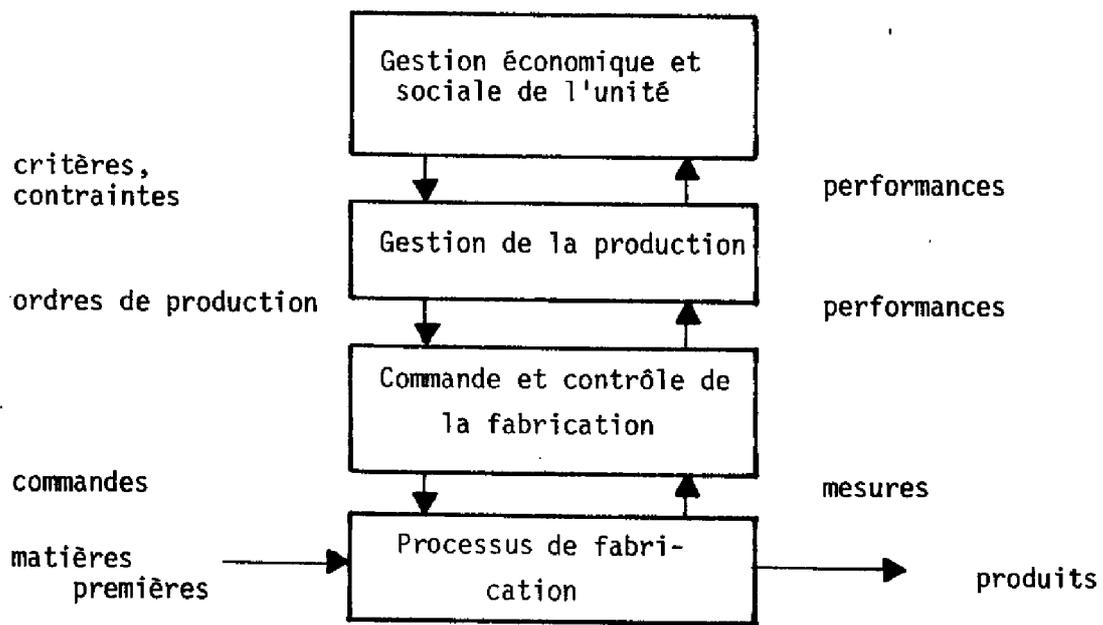


Figure I.1 - Niveaux d'influence

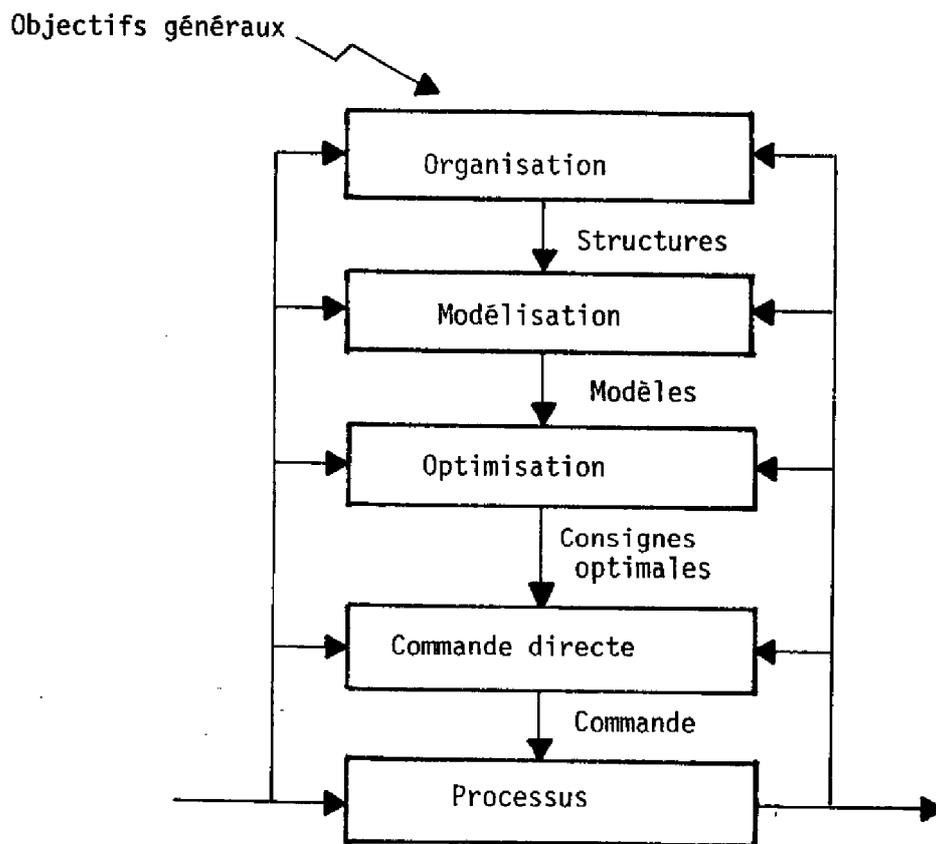


Figure I.2 - Niveaux fonctionnels de commande

1.2.2. - Décomposition sur la base des niveaux fonctionnels de commande.

Un problème de commande est défini par un triplet (modèle, critères, contraintes) dont chaque élément peut être affecté par des perturbations. Comme la connaissance de tous ces éléments est nécessaire pour la réalisation de la commande, l'approche globale pour la commande prenant en compte toutes ces perturbations n'est pas imaginable. On définit alors une structure hiérarchisée de commande où les différentes fonctions à assurer pour maîtriser chaque type de perturbations sont placées à des niveaux différents de telle façon que les décisions prises à chaque niveau sont nécessaires à l'élaboration de celles des niveaux inférieurs, la commande ne pouvant être effectivement réalisée que lorsque toutes les décisions sont connues. Ces différents niveaux apparaissent sur la figure I.2.

Le premier niveau, niveau de commande directe, de régulation, a pour rôle d'assurer un fonctionnement du processus qui, sur la base de mesures, de modèles, respecte des valeurs de consigne en dépit de perturbations affectant les variables.

Le second niveau, niveau d'optimisation, est chargé de calculer ces valeurs de consigne pour un fonctionnement, statique ou dynamique, optimal du processus, sur la base de mesures, de modèles, de critères. Des points de consigne optimaux, des réponses dynamiques optimales sont ainsi définis.

Le niveau de modélisation doit réaliser en permanence la fonction apprentissage. Comme on l'a déjà précisé, l'obtention de modèles de systèmes complexes peut être difficile et longue et pour ce faire, on doit développer à ce niveau d'une part des méthodes d'analyse structurale visant à mettre en évidence les dépendances entre les variables du système, d'autre part des méthodes de modélisation, d'estimation adaptative de paramètres dans le cas, par exemple, de modifications des caractéristiques techniques des matériels.

Enfin le dernier niveau dit d'organisation a pour rôle de définir les composantes du triplet en fonction d'objectifs généraux éventuellement définis par un niveau d'influence supérieur. C'est lui qui fixe notamment sur la base d'une analyse et d'un choix multicritères la structure du processus, les matériels utilisés.

La coordination est directe par transfert d'informations sur les éléments du triplet dans le sens descendant, de mesures dans le sens ascendant.

Les structures hiérarchisées basées sur les deux types de décomposition de la commande précédemment décrits ont des caractéristiques souvent différentes

(objectifs des niveaux d'influence, fonctions de commande précises des niveaux fonctionnels) suivant la nature du système complexe à commander. Toutefois pour les exemples industriels développés notamment dans les références [5, 6, 7, 9, 11, 23], on retrouve les principes d'organisation exposés ci-dessus.

1.2.3. - Décomposition sur la base de la partition du système.

Même en dehors des problèmes de moyens de calcul, la réalisation des fonctions de commande telles que la modélisation, l'optimisation, et même la commande directe est d'autant plus difficile que la dimension du système est grande ce qui condamne aussi dans ce cas l'approche globale.

Les premiers travaux sur la décomposition des algorithmes ont porté sur la résolution des systèmes linéaires (KRON [12]) et des programmes linéaires (DANTZIG-WOLFE [13]).

Le système est décomposé en sous-systèmes interconnectés et le problème global est ainsi décomposé en autant de sous-problèmes que de sous-systèmes. Cependant la présence d'interactions dans les modèles ou les critères, nécessite l'introduction d'organes de coordination ou coordonnateurs pour résoudre le problème global. On aboutit alors à une structure hiérarchisée de commande, de type pyramidale (fig. I.3), dans laquelle les décisions prises par chaque organe de coordination concernent un nombre de sous-systèmes d'autant plus grand que cet organe est placé haut dans la hiérarchie. On note d'autre part que dans chaque coordonnateur on peut trouver tout ou partie des fonctions de commande précédemment décrites et que chacun de ces coordonnateurs peut donc avoir une structure hiérarchisée de niveaux fonctionnels.

Les deux paragraphes qui suivent ont pour but d'illustrer deux types possibles de partition d'un système.

1) - Décomposition des systèmes d'équations - Programmation parallèle.

Soit le système d'équations suivant :

$$f_i(X) = 0 \quad i = \overline{1, n}; \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

On se propose de le résoudre par morceaux et il s'agit alors de trouver des sous-systèmes d'équations pouvant être résolus séparément, si le système est disjoint, ou séquentiellement si les différents sous-systèmes sont connectés en série-parallèle [14, 15]. Si aucun des deux types de résolution précédents n'est possible, on utilise une technique de décomposition par déchirure : on fixe

a priori la valeur de variables, qui une fois fixées, rendent le problème global décomposable. Un algorithme de coordination calcule de façon itérative la valeur exacte de ces variables [14].

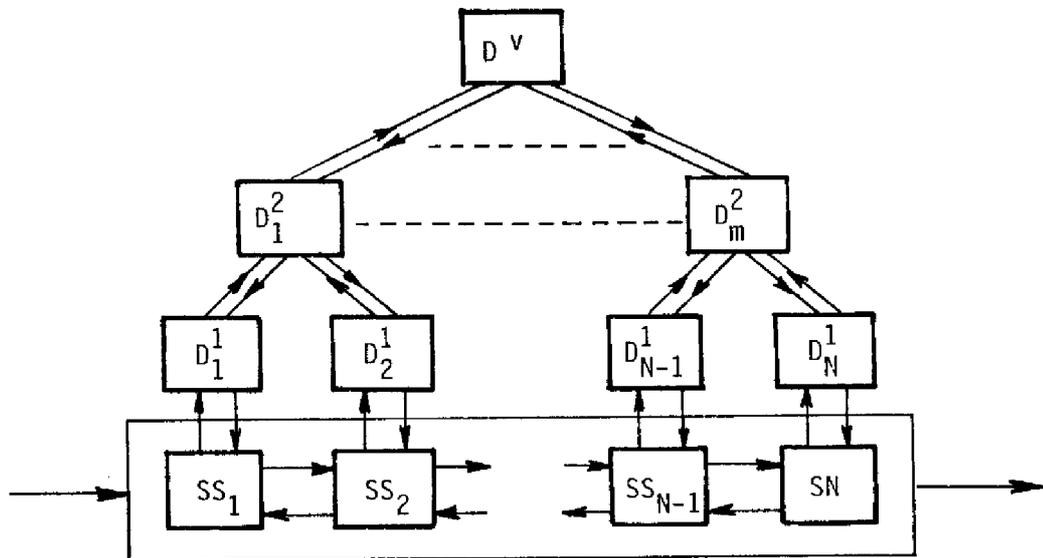


Figure I.3 - Niveaux de décision

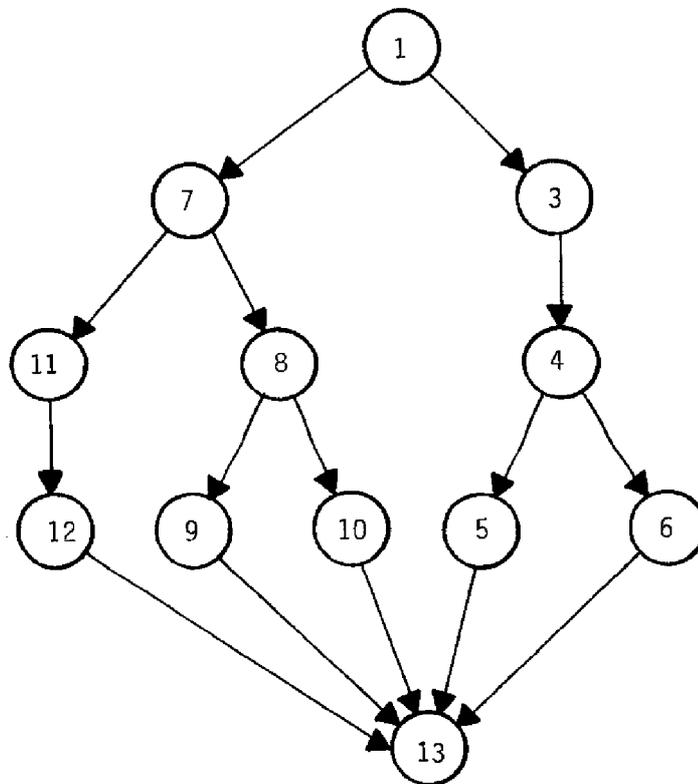


Figure I.4. - Graphe d'une structure hiérarchisée

Le problème précédent est en partie semblable à celui de la recherche, dans un programme de calculateur, d'instructions exécutables en parallèle afin d'utiliser au mieux les possibilités des calculateurs multiprocesseurs [16].

Lorsque la résolution de ces problèmes est effectivement possible par décomposition, la structure du système d'équations ou du programme est hiérarchisée et représentable sous forme d'un graphe de type arborescent (fig. I.4) dont les sommets sont des sous-systèmes d'équations ou des sous-ensembles d'instructions.

2) - Optimisation hiérarchisée

Les méthodes de décomposition-coordination ont surtout été développées pour la résolution des programmes linéaire [13] puis non-linéaire [4, 17, 18].

Dans le cas statique non-linéaire, le système est décomposé en N sous-systèmes interconnectés (fig. I.5) et le problème d'optimisation, lorsque le critère global est sous forme additive et séparable, se formule comme suit :

$$\text{extr}_{X_i, M_i, Z_i} F = \sum_{i=1}^N f_i (X_i, M_i)$$

$$\text{sous } \begin{cases} Z_i = T_i (X_i, M_i) & \text{équation du modèle} \\ X_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} Z_j & \text{équation de couplage} \end{cases}$$

$$X_i \in R^{m_{X_i}}; \quad M_i \in R^{m_{M_i}}; \quad Z_i \in R^{m_{Z_i}}$$

La décomposition du problème est obtenue par séparation du Lagrangien L.

$$L = \sum_{i=1}^N \left[f_i (X_i, M_i) + \mu_i^T (Z_i - T_i (X_i, M_i)) + \rho_i^T (X_i - \sum_j C_{ij} Z_j) \right]$$

Le Lagrangien prend la forme séparable $L = \sum_{i=1}^N \hat{L}_i (V_i, U)$ ou V_i sont

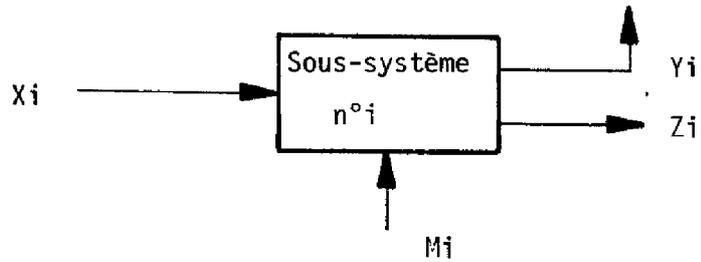


Figure I.5. - Sous-système n° i

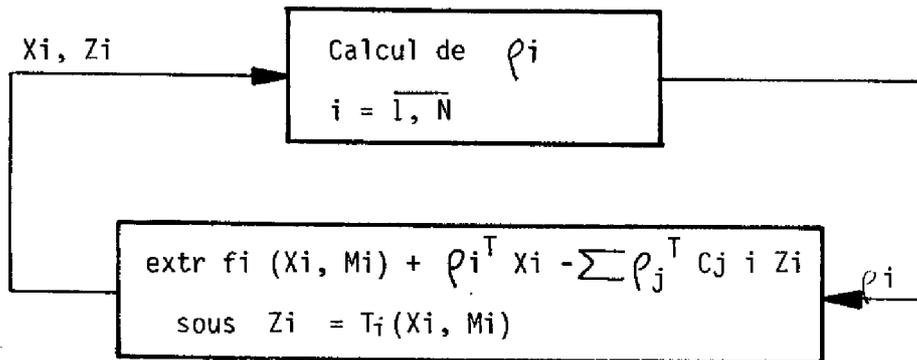


Figure I.6 - Coordination par le critère (non-admissible)

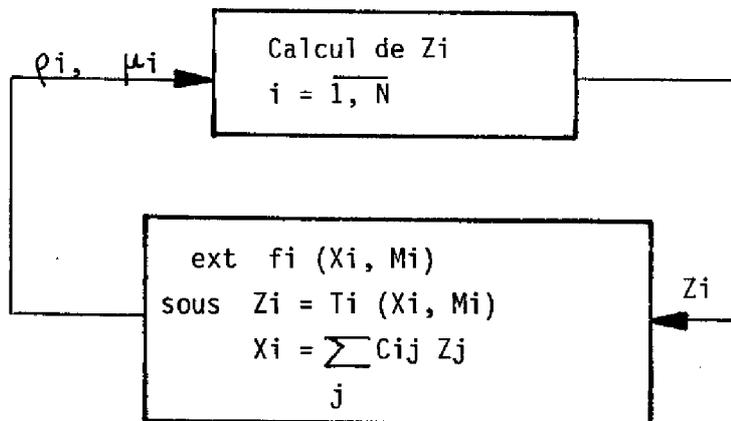


Figure I.7 - Coordination par le modèle (admissible)

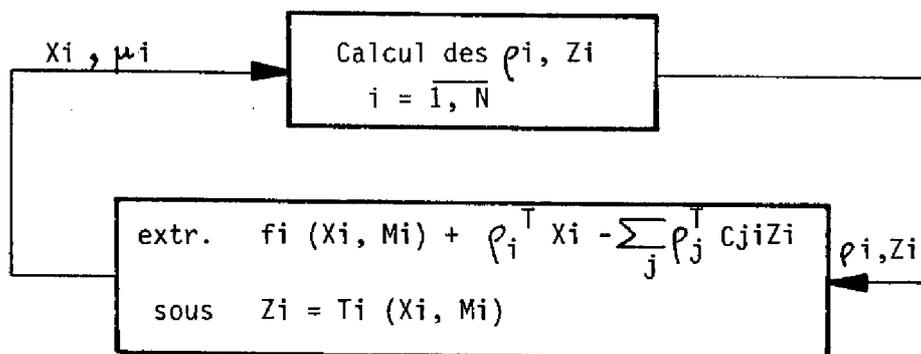


Figure I.8 - Coordination par le critère et le modèle (mixte)

Les variables du sous-problème n°i et U les variables qui, une fois fixées, permettent de découpler les N sous-problèmes - U sont les variables de coordination pour lesquelles on trouve, désormais de façon classique, les choix respectifs suivants : $U = \rho_j$ [17] ; $U = Z_i$ [18] ; $U = \rho_j$ et Z_i [4].

On formule alors N sous-problèmes d'optimisation locaux dont la résolution donne $V_i(U)$ et les variables U sont calculées à un niveau supérieur, par un organe de coordination et suivant une procédure itérative. Les trois méthodes de décomposition - coordination sont schématisées par les figures 6⁽¹⁾, 7, 8 et leur étude détaillée a été réalisée par TITLI [4] et étendue à l'optimisation des systèmes dynamiques [19].

Enfin ces techniques de décomposition ont également été appliquées à la décomposition des algorithmes de filtrage linéaire des grands systèmes [20]

I.3. - INTRODUCTION A LA SYNTHÈSE DES STRUCTURES HIERARCHISEES.

Les avantages de l'approche hiérarchisée appliquée au problème de la commande de systèmes complexes découlent du principe même de décomposition. Ainsi la commande multi-objectif devient réalisable dès lors que les objectifs ont été classés par degré de généralité ce qui permet de définir pour le système de commande des niveaux d'influence. On obtient également une meilleure définition d'un problème de commande en recensant toutes les perturbations qui agissent sur le système et en précisant les différentes fonctions de commande à intégrer pour les maîtriser.

Ceci conduit également à une meilleure utilisation des matériels informatiques. A chaque fonction de commande peut être affecté un matériel spécialisé, pour l'acquisition de données au niveau de commande directe, pour l'exploitation de programmes aux niveaux optimisation et modélisation. Au niveau organisation, la tâche est complexe puisqu'il s'agit, en fonction d'objectifs généraux, de définir la structure du processus, les machines utilisées, des critères et de contraintes de fonctionnement précis. Elle ne peut être entièrement exécutée par programme et nécessite un dialogue homme-machine devant être facilité par des matériels informatiques appropriés.

(1) - Cf. Annexe 1 sur l'admissibilité d'une coordination par le critère de systèmes interconnectés par des stocks.

Dans le cas d'une décomposition sur la base de la structure du processus et si le problème de la coordination est bien résolu, cette approche permet le traitement de problèmes de grande dimension et donne au système de commande une fiabilité accrue [21].

Enfin l'implantation sur un processus complexe industriel d'un système de commande ne peut être que progressive pour des raisons à la fois économiques et de sécurité ; l'approche hiérarchisée qui énumère l'ensemble des objectifs, des fonctions de commande, mais spécifie également leur imbrication, les dépendances respectives, permet de réaliser par étapes successives et de façon rationnelle l'intégration complète.

Cependant, l'ensemble de ces avantages doit être vu en regard des nombreux problèmes de synthèse dus à la spécificité de chaque processus complexe (modèles et objectifs différents) et aux difficultés de coordination introduits par la décomposition de la commande.

Un des problèmes majeurs à résoudre consiste à déterminer la place et le rôle de l'homme en tant que décideur, analyste, opérateur dans une structure de commande dans la mesure où la commande entièrement automatique d'un système complexe est une perspective souvent irréaliste et qu'une évolution de cette structure est souvent nécessaire en fonction du volume et de la précision des connaissances acquises sur le comportement du processus ainsi que du degré de maîtrise des perturbations.

En dépit de principes directeurs d'organisation, la conception de structures hiérarchisées de commande basées sur les niveaux d'influence et les niveaux fonctionnels de commande reste une entreprise difficile nécessitant une connaissance approfondie du processus.

Les problèmes de synthèse des structures hiérarchisées basées sur la partition du système sont mieux définis puisque, pour certains modèles de processus, on dispose d'algorithmes permettant la réalisation par décomposition-coordination de fonctions de commande (filtrage, optimisation, commande directe).

Considérons une structure de commande d'un système de grande dimension comportant les niveaux fonctionnels de commande directe et d'optimisation, l'optimisation statique fournissant les points de consigne optimaux aux régulateurs et l'optimisation dynamique, les lois de commande optimale.

Les performances des algorithmes d'optimisation se dégradent rapidement lorsque la dimension du système croît, comme nous l'avons mentionné au paragraphe I.2.3., on cherche alors à mettre en oeuvre une optimisation hiérarchisée. Pour ce faire, il faut décomposer le problème d'optimisation en sous-problèmes de dimension satisfaisante et donc disposer de méthodes de décomposition.

Lorsque le problème est décomposé, les solutions des sous-problèmes qui sont interconnectés doivent être coordonnées par un organe de coordination. L'échange d'information entre les niveaux d'optimisation et de coordination, la convergence des algorithmes de coordination sont évidemment fonction des interactions entre les sous-problèmes. La synthèse d'une structure hiérarchisée d'optimisation, lorsque des contraintes sont imposées sur les capacités des voies de transmission entre les modules d'optimisation et de coordination, sur les capacités de calcul des organes de coordination, sur les temps de coordination, nécessite donc une étude des couplages entre les sous-problèmes.

L'approche hiérarchisée pour la commande directe a été jusqu'ici faite sous l'angle de l'optimisation dynamique hiérarchisée et si elle suscite de nombreux travaux, par exemple [24, 25, 26], la commande en ligne n'a pas reçu de solution satisfaisante sauf dans le cas de systèmes linéaires à critère quadratique [27]. La difficulté provient de ce que, dans la formulation retenue, le problème global de la commande optimale doit être résolu pour déterminer l'action du coordonnateur et seuls des systèmes à dynamique lente peuvent être ainsi coordonnés en ligne.

Cependant l'approche décentralisée (décomposition de la commande sans coordination) peut être justifiée pour des raisons de fiabilité, de coût de réalisation notamment. Chaque sous-système est alors commandé localement et les interactions sont considérées comme des perturbations. Dans une telle optique, les problèmes de stabilité, de dégradation des critères de performances deviennent essentiels et toutes les études à ce sujet [28-33, 35,37] montrent l'importance du rôle des couplages entre les sous-systèmes et la nécessité d'avoir des sous-systèmes faiblement couplés.

Il en est de même au niveau de la modélisation du système. Dans la mesure où un modèle global ne peut être obtenu, on définit des modèles partiels dont l'aptitude à décrire le comportement réel du système, c'est-à-dire la validité, est d'autant meilleure que les couplages entre les sous-systèmes sont faibles.

Ainsi il apparait que la partition d'un système est une phrase essentielle dans la mise en oeuvre de toute fonction de commande par des structures hiérarchisées et une partie importante de notre étude porte sur le développement de méthodes d'analyse structurale des systèmes en vue de leur partition.

Dans le chapitre II, Analyse structurale des modèles par les graphes, nous traitons l'aspect combinatoire de la partition en utilisant les concepts de la théorie des graphes et nous illustrons cette étude par des exemples concernant la recherche de matrices réductibles, la décomposition des systèmes d'équations et des programmes d'optimisation.

Dans le chapitre III, Analyse structurale par les données, nous précisons la notion de couplage dans les systèmes statiques et dynamiques et plus particulièrement dans les systèmes discrets (à nombre fini d'états) pour lesquels sont utilisés les concepts d'entropie, d'information de la théorie de l'information pour la définition de la notion de sous-systèmes faiblement couplés et de matrices de couplage.

Au chapitre IV, nous présentons deux exemples de synthèse de structures hiérarchisées. Le premier concerne la commande d'une chaîne de fabrication de dispositifs à semi-conducteurs. Après une analyse de la nature particulière du processus, des objectifs de commande, on définit un système hiérarchisé de commande comprenant des niveaux d'influence et des niveaux fonctionnels et l'accent est mis sur l'analyse des données pour la modélisation et la commande du processus.

Dans le deuxième exemple, nous étudions la synthèse d'une structure hiérarchisée d'optimisation dans laquelle sont analysés les problèmes de coordination, de transfert d'information entre les niveaux et de convergence des algorithmes de coordination. Nous montrons que cette synthèse peut être réalisée à l'aide du graphe des équations de couplage des sous-systèmes.

Nous avons mis en Annexes des études sur certains points abordés dans les chapitres précédents.

En Annexe 1, nous présentons un résultat original sur l'admissibilité d'une coordination par le critère de systèmes interconnectés par des stocks.

En Annexe 2, nous établissons des conditions suffisantes de convergence et de minimalité pour l'optimisation hiérarchisée des systèmes statiques.

CHAPITRE II

ANALYSE STRUCTURALE DES MODÈLES PAR LES GRAPHS

-



II.1. - INTRODUCTION

Les structures de systèmes exploitées pour la réalisation de fonctions de commande par des techniques de décomposition-coordination sont de deux catégories. Dans la première catégorie, les sous-systèmes sont connectés en série-parallèle ce qui permet la décomposition de la commande en phases séquentielles et parallèles [3,86], la coordination étant réalisée par transfert simple d'information entre les sous-systèmes. Dans la seconde catégorie, les interconnexions entre les sous-systèmes sont quelconques et la commande est décomposée en commandes partielles de chaque sous-système, coordonnées par un organe supérieur qui calcule certaines informations concernant les couplages entre les sous-systèmes [4,13].

Le problème de la partition d'un système se pose donc en termes de reconnaissance, de recherche d'une structure particulière à partir de la connaissance d'un modèle qualitatif (par exemple, relation binaire liant les variables du système) ou quantitatif (relations fonctionnelles entre les variables). Si pour des systèmes simples, cette structure est aisément reconnaissable, il n'en est pas de même en général pour les systèmes de grande dimension. Ce problème de la partition devient combinatoire et sa résolution systématique doit être envisagée en utilisant un graphe de la structure du système dont la définition est évidemment fonction, dans chaque cas, du système considéré et de la structure recherchée.

Les premiers travaux dans ce domaine ont été réalisés par HARARY [46], STEWARD [14] et concernent les structures série-parallèles pour la décomposition des matrices des systèmes linéaires, la décomposition des systèmes d'équations. Ils ont montré que ces structures peuvent être trouvées par l'analyse des propriétés de connexité forte d'un graphe.

Nous allons montrer que pour des structures d'interconnexion quelconques, la partition se ramène à l'étude des propriétés de connexité simple de graphes et qu'ainsi de façon générale, les possibilités de partition d'un système sont liées aux propriétés de connexité du graphe du système.

Après avoir rappelé quelques définitions et résultats essentiels de la théorie des graphes, nous étudierons deux types de structures hiérarchisées des graphes induites par la connexité et nous présenterons ensuite des applications

dans lesquelles ces structures sont utilisées.

II.2. - RAPPELS SUR LES GRAPHES

Pour le rappel des concepts essentiels de la théorie des graphes utilisés dans ce chapitre, nous utiliserons les notations et définitions extraites du remarquable ouvrage de ROY [38].

Graphe - Relation binaire - Application multivoque - Matrice booléenne associée au graphe.

- un graphe est un schéma constitué :
 - . d'un ensemble X d'éléments appelés sommets du graphe ($|X| = n$)
 - . d'un ensemble U de lignes reliant seulement deux sommets distincts ou non - chaque ligne est notée (x_i, x_j) et porte le nom d'arc si elle est orientée, le nom d'arête si elle ne l'est pas.

On note le graphe $G = (X, U)$

On appelle :

- *graphe bi-parti* : un graphe pour lequel il existe une partition de $X : \{ Y, Y' \}$ telle que chaque ligne de U a une extrémité dans Y et l'autre dans Y' .

Il est noté $G = (Y, Y', U)$.

- *sous-graphe de $G = (X, U)$* : $G_A = (A, U_A)$, $A \subset X$, $U_A \subset U$
- Un graphe G peut être considéré comme la représentation graphique d'une valeur *relation binaire* définie sur X .

$$x_i R x_j \text{ si et seulement si (ssi) } (x_i, x_j) \in U$$

Réciproquement, à partir de toute relation binaire définie sur X , on peut définir un graphe G :

$$(x_i, x_j) \in U \text{ ssi } x_i R x_j$$

Un graphe bi-parti est la représentation graphique d'une relation binaire de Y dans Y' .

- un graphe G peut être également considéré comme la représentation graphique d'une application multivoque Γ définiesur X . Un graphe est également noté $G = (X, \Gamma)$.

- On associe à un graphe, une matrice booléenne carrée d'ordre n , $M = [m_{ij}]$ telle que :

$$m_{ij} = 1 \text{ ssi } (x_i, x_j) \in U \text{ pour } i, j = \overline{1, n}$$

$$m_{ij} = 0 \text{ autrement. (1)}$$

Chaîne - Cycle - Chemin - Circuit

Soit une suite de sommets (non nécessairement tous distincts).

$$x_{i1}, \dots, x_{ip}, x_{ip+1}, \dots, x_{iq}$$

Cette suite est une *chaîne* si :

$$(x_{ip}, x_{ip+1}) \in U \text{ ou } (x_{ip+1}, x_{ip}) \in U \text{ pour } p = \overline{1, q-1}$$

Si de plus $(x_{iq}, x_{i1}) \in U$ ou $(x_{i1}, x_{iq}) \in U$, c'est un *cycle*

Cette suite est un *chemin* si :

$$(x_{ip}, x_{ip+1}) \in U \text{ pour } p = \overline{1, q-1}$$

Si de plus $(x_{iq}, x_{i1}) \in U$, c'est un *circuit*

Deux chemins (*chaînes*) sont *disjoints au sens des arcs (arêtes)* s'ils n'ont aucun(e) arc (*arête*) en commun et sont *disjoints au sens des sommets* s'ils n'ont aucun sommet commun sauf éventuellement le premier et le dernier.

Réflexivité - Transitivité.

Un graphe est *réflexif* ssi :

$$(x_i, x_i) \in U \quad \forall x_i \in X$$

Il est *transitif* ssi :

$$(x_i, x_j) \in U \text{ et } (x_j, x_k) \in U \implies (x_i, x_k) \in U.$$

Soit $\mathcal{G}(X)$ l'ensemble des graphes définis sur X .

- *Fermeture réflexive* : soit un graphe G non réflexif.

L'application ρ , définie sur $\mathcal{G}(X)$, qui fait correspondre à G , le plus petit graphe réflexif le contenant comme graphe partiel¹ est appelée *fermeture réflexive*

- *Fermeture transitive* : Soit un graphe G non transitif.

L'application τ , définie sur $\mathcal{G}(X)$, qui fait correspondre à G , le plus petit graphe transitif le contenant¹ comme graphe partiel est appelée *fermeture transitive*. La relation binaire associée au graphe ainsi obtenu est : "on peut en suivant un chemin de G aller de x_i à x_j ".

(1) - Pour un graphe non orienté, M est symétrique car on peut considérer une arête (x_i, x_j) comme un ensemble de deux arcs $\{(x_i, x_j), (x_j, x_i)\}$

L'application $\mathcal{C}\rho$ (ou $\rho\mathcal{C}$) est appelée *fermeture réflexo-transitive* et le graphe obtenu \hat{G} est réflexif et transitif (préordre). La détermination pratique de \hat{G} et de sa matrice booléenne associée \hat{M} est rappelée dans le paragraphe II.3.1. B

Connexité

Soit un graphe $G = (X, U)$. On définit deux relations binaires de connexité.

- Relation binaire de connexité simple : R_s

$x_i R_s x_j$ ssi il existe une chaîne entre x_i et x_j ou ssi $x_i = x_j$

- Relation binaire de connexité forte : R_f

$x_i R_f x_j$ ssi il existe un circuit passant par x_i et x_j ou
ssi $x_i = x_j$

On montre que ces relations binaires sont des équivalences (réflexives, symétriques et transitives). Chacune d'elles induit une partition de X en classes d'équivalence qui portent les noms respectivement de *composantes simplement connexes* (*s-connexes*) et de *composantes fortement connexes* (*f-connexes*) du graphe G (1).

Résultats fondamentaux.

a) Soit $C_s(x)$ la composante s-connexe contenant un sommet quelconque $x \in X$.

$C_s(x)$ est également l'ensemble des sommets adjacents à x dans \hat{G} du graphe non orienté G .

b) Soit $C_f(x)$ la composante f-connexe contenant un sommet quelconque $x \in X$

$C_f(x)$ est également l'ensemble des sommets qui sont à la fois précédents et suivants de x dans \hat{G} du graphe orienté G .

Graphe réduit

On appelle *graphe réduit* de $G = (X, U)$, le graphe $G_r = (C_f, U_r)$ tel que :

(1) - On donne également le nom de composante s-connexe (f-connexe) au sous-graphe de \hat{G} engendré par une composante s-connexe (f-connexe).

Cf = ensemble des composantes fortement connexes de G (partition de X)
 $\{(Cf_i, Cf_j) \in U_r \mid Cf_i, Cf_j \in Cf\}$ ssi $\exists x_k \in Cf_i$ et $x_l \in Cf_j$ tels
 que $(x_k, x_l) \in U$.

Le graphe G_r est sans circuit. Il est s-connexe si G l'est.

Rang d'un sommet dans un graphe sans circuit.

Dans un graphe sans circuit, un sommet x est de rang r ssi le nombre maximal d'arcs de tout chemin admettant x comme extrémité terminale est précisément r.

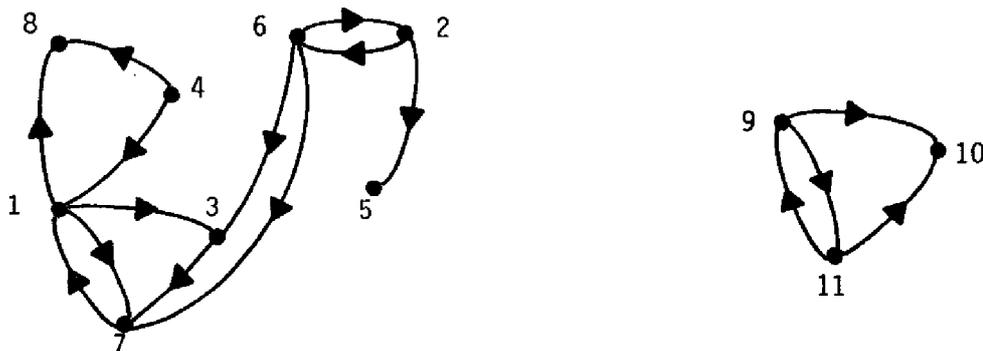
Ainsi il n'existe pas d'arc entre les sommets de même rang.

II.3. - STRUCTURES HIERARCHISEES DES GRAPHES

II.3.1. - Structures hiérarchisées induites par la connexité forte.

Le graphe réduit de $G = (X, U)$ structuré suivant le rang croissant de ses sommets fait apparaître la structure hiérarchisée du graphe G. A chaque niveau, se trouvent les sommets de même rang auxquels correspondent des composantes f-connexes de G (1) et le cheminement entre les niveaux est unidirectionnel, dans le sens croissant des rangs.

Exemple II.1. - Soient le graphe G_1 (fig. II.1) et sa matrice booléenne associée (fig. II.2.).



Sous-graphe G_{11}

Sous-graphe G_{12}

Figure II.1 - Graphe G_1

(1) - Dans ce qui suit, on parlera de rang d'une composante f-connexe défini comme le rang du sommet correspondant du graphe réduit.

$M_1 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Figure II.2. Matrice M_1 associée à G_1

Les composantes s-connexes de G_1 sont :

$$Cs_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \} ; \quad Cs_2 = \{ 9, 10, 11 \}$$

Les composantes f-connexes de G_1 sont :

$$Cf_1 = \{ 8 \} ; \quad Cf_2 = \{ 4 \} ; \quad Cf_3 = \{ 1, 3, 7 \} ; \quad Cf_4 = \{ 2, 6 \} ; \quad Cf_5 = \{ 5 \}$$

$$Cf_6 = \{ 9, 11 \} ; \quad Cf_7 = \{ 10 \}$$

Le graphe réduit G_{r1} est représenté par la figure II.3, sur laquelle sont portés les rangs de chaque sommet.

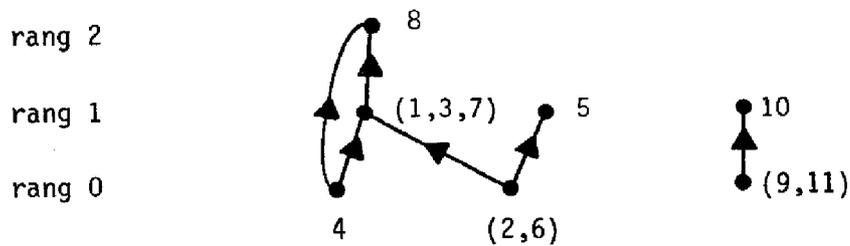


Figure II.3. - Graphe G_{r1}

Le graphe G_1 est constitué de 2 hiérarchies séparées correspondant aux deux composantes s -connexes de G .

- Une composante s -connexe d'un graphe G a une structure hiérarchisée ssi elle n'est pas f -connexe.

En effet, si elle est f -connexe, le graphe réduit correspondant n'a qu'un seul sommet.

Ces différentes structures des graphes impliquent des structures particulières pour les matrices associées.

- Si un graphe G n'est pas s -connexe, alors il existe une matrice de permutation P telle que $\tilde{M} = P^{-1}MP$ est une *matrice-bloc-diagonale*.

Pour le graphe G_1 de l'exemple II.1, une permutation p_1 est :

$$p_1 = \{Cs_1, Cs_2\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}^{(1)} \quad (\text{voir fig. II.2})$$

D'autres permutations peuvent être obtenues à partir de permutations dans Cs_1 et Cs_2 .

- Si un graphe G est s -connexe mais non f -connexe, alors il existe une matrice de permutation P' telle que $\tilde{M}' = P'^{-1}MP'$ est une *matrice bloc-triangulaire*.

Pour le sous-graphe $G_{11} = (Cs_1, U_1)$ de G_1 , une permutation p_1' est :

$$p_1' = \{8, 5, 1, 3, 7, 2, 6, 4\} \quad (\text{voir fig. II.4})$$

D'autres permutations peuvent être obtenues à partir des permutations des composantes f -connexes de même rang.

$$p_2' = \{8, 1, 3, 7, 5, 4, 2, 6\} \quad (\text{voir fig. II.5}).$$

Pour le graphe G_1 , la permutation $p = \{10, 9, 11, 8, 1, 3, 7, 5, 4, 2, 6\}$ permet de faire apparaître les deux structures (bloc-diagonale et bloc-triangulaire) dans la matrice \tilde{M}_1 (fig. II.6).

(1) - La matrice de permutation associée à une permutation $p = \{3, 1, 2\}$ est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = P^T$

	8	5	1	3	7	2	6	4
8	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0
4	1	0	1	0	0	0	0	0

Figure II.4 - Matrice \tilde{M}'_{11}

	8	1	3	7	5	4	2	6
8	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	1	0	0	1	0

Figure II.5 - Matrice \tilde{M}'_{11}

	10	9	11	8	1	3	7	5	4	2	6
10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0

Figure II.6 - Matrice \tilde{M}_1

Algorithmes de recherche des structures hiérarchisées des graphes s-connexes.

On présente ici la méthodologie générale de ces algorithmes. Leur description détaillée se trouve dans les références mentionnées.

A) - ALGORITHME DE STEWARD [14]

A partir de la matrice associée au graphe G, on obtient une structure bloc-triangulaire en exhibant les différentes composantes f-connexes. Cet algorithme ne donne pas le rang de chaque composante f-connexe puisqu'il existe en général plus d'une structure bloc-triangulaire pour une structure hiérarchisée donnée.

B) - ALGORITHME DU GRAPHE REDUIT

Il comporte trois étapes :

1°) - Recherche des composantes f-connexes

a) algorithme de ROY [35, p. 263] : processus de marquage

b) algorithme de RAMAMOORTHY [42] : on détermine la matrice

$$T = \hat{M} \cap \hat{M}^T.$$

avec \hat{M} = matrice associée au graphe \hat{G} . On montre que :

$$\begin{aligned} \hat{M} &= M^n \cup M^{n-1} \cup \dots \cup M \cup I \\ &= (M \cup I)^n \end{aligned}$$

Remarque : Pour les matrices de grande dimension qui sont généralement creuses, il est avantageux d'en tirer parti pour le calcul de \hat{M} (voir ROY [38, p. 255], LEDET et al [44]). Le nombre de lignes distinctes de T est égal au nombre de composantes f-connexes de G. Les éléments non nuls de chaque ligne distincte sont les éléments d'une composante f-connexe.

2°) - Construction du graphe réduit et détermination des rangs.

Voir ROY [38, p. 264]

3°) - Construction du graphe structuré par rang et d'une matrice bloc-diagonale.

Pour déterminer une permutation p', il suffit d'écrire les composantes f-connexes par ordre décroissant de leur rang (matrice bloc-triangulaire inférieure) ou par ordre croissant (matrice bloc-triangulaire supérieure).

c) - ALGORITHME DE WARFIELD [40]

Cet algorithme réalise une synthèse des algorithmes précédents. A partir de la matrice \hat{M} , on construit la structure hiérarchisée en partant par le bas et en déterminant simultanément les composantes f-connexes et leur rang.

Une composante f-connexe Cf_i est telle que (cf II.2.5) :

$$\forall x \in Cf_i \quad S(x) \cap P(x) = Cf_i$$

$$\begin{cases} S(x) = \text{ensemble des suivants de } x \text{ dans } \hat{G} \\ P(x) = \text{ensemble des précédents de } x \text{ dans } \hat{G}. \end{cases}$$

De plus, une composante f-connexe Cf_i est de rang 0 ssi :

$$\forall x \in Cf_i \quad S(x) \cap P(x) = P(x) = Cf_i$$

Une composante f-connexe Cf_i est de rang 1 ssi :

$$\forall x \in Cf_i \quad S_1(x) \cap P_1(x) = P_1(x)$$

$$\begin{cases} S_1(x) & = \text{ensemble des suivants de } x \text{ dans le sous-graphe} \\ & \hat{G}_1 = (X - \sum \text{composantes f-connexes de rang 0}, \hat{U}_1) \\ P_1(x) & = \text{ensemble des précédents de } x \text{ dans le sous-} \\ & \text{graphe } \hat{G}_1 \end{cases}$$

De proche en proche on détermine ainsi toutes les composantes f-connexes de même rang.

Exemple II.2 : Composantes f-connexes de rang 0 du sous-graphe G_{11} (fig. II.1). La matrice \hat{M}_{11} est donnée par la figure II.7 et on a porté dans la figure II.8, les ensembles de suivants et de précédents de chaque sommet de \hat{G}_u . On voit qu'il y a deux composantes f-connexes de G_u de rang 0. Ce sont :

$$Cf_1 = \{2, 6\} ; Cf_2 = \{4\}$$

$$\hat{M}_{11} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	1	0	0	0	1	1
2	1	1	1	0	1	1	1	1
3	1	0	1	0	0	0	1	1
4	1	0	1	1	0	0	1	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	1	1	1	0	1	1	1	1
7	1	0	1	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1

Figure II.7 - Matrice $\hat{\Pi}_{11}$

	S (x)	P (x)	S(x) \cap P (x)
1	1,3,7,8	1,2,3,4,6,7	1, 3, 7
2	1,2,3,5,6,7,8	2,6	2,6
3	1,3,7,8	1,2,3,4,6,7	1, 3, 7
4	1,3,4,7,8	4	4
5	5	2,5,6	5
6	1,2,3,5,6,7,8	2,6	2,6
7	1,7,8	2,3,4,6,7	7
8	8	1,2,3,4,6,7,8	8

Figure II.8

II.3.2. - Structures hiérarchisées induites par la connexité simple.

On a vu que lorsqu'un graphe G n'est pas s-connexe, il est constitué par la juxtaposition de ses composantes s-connexes et que la matrice booléenne associée est bloc-diagonale (Cf II.3.1.)

Pour trouver les composantes s-connexes d'un graphe orienté ou non, il suffit de le rendre symétrique et de rechercher les composantes f-connexes du graphe ainsi obtenu qui sont les composantes s-connexes du graphe initial [45].

Ensemble d'articulation

Dans un graphe s -connexe $G = (X, U)$, tout sous-ensemble C tel que le sous-graphe $G_A = (X-C, U_A)$ ne soit pas s -connexe est appelé *ensemble d'articulation* (c'est un *point d'articulation* lorsqu'il ne contient qu'un seul élément).

Exemple II.3. : sous-graphe G_{11} de la figure II.1

L'ensemble $\{3, 7\}$ est un ensemble d'articulation de G_{11}

Ensemble minimal d'articulation

Soit un graphe s -connexe $G = (X, \Gamma)$ et soient k sous-ensembles disjoints A_1, \dots, A_k de X tels que :

$$\Gamma A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j ; \quad i, j = \overline{1, k}$$

Soit une $k + 1$ - partition de X : $\{ X_1, \dots, X_k, C \}$ telle que :

$$1^\circ) X_i \supseteq A_i \quad i = \overline{1, k}$$

$$2^\circ) \Gamma X_i \cap X_j = \emptyset \quad i \neq j ; \quad i, j = \overline{1, k}$$

$$3^\circ) |C| \text{ minimum.}$$

C est appelé *ensemble minimal d'articulation*. Il est en général non unique.

Exemple II.4. : sous-graphe G_{11} de la figure II.1

Pour $A_1 = \{8\}$; $A_2 = \{5\}$, les ensembles $C_1 = \{1\}$; $C_2 = \{6\}$; $C_3 = \{2\}$ sont des ensembles minimaux d'articulation.

Remarque : Le nombre d'ensembles C peut être très élevé pour les graphes de grande dimension et la recherche systématique de tous ces ensembles est alors très longue. On présente ci-après un algorithme qui permet d'obtenir rapidement un ensemble minimal d'articulation à partir d'ensembles B_1, \dots, B_k ($X_i \supseteq B_i \supseteq A_i$) déterminés a priori .

- Un ensemble d'articulation C d'un graphe s -connexe définit une partition de $X = \{ X_1, \dots, X_i, \dots, X_k, C \}$ telle que les sous-graphes $G_{X_i} = (X_i, U_i)$ sont s -connexes.

Si C_i est un ensemble d'articulation d'un sous-graphe G_{X_i} , il définit une partition de $X_i = \{X_{i1}, \dots, X_{ij}, \dots, X_{il}, C_i\}$ telle que les sous-graphes $G_{X_{ij}} = (X_{ij}, U_{ij})$ sont s -connexes.

A partir d'ensembles d'articulations (s'ils existent) des sous-graphes successivement obtenus, on définit des partitions de plus en plus fines de X et on convient de représenter par un *arbre*, cette structure induite par la connexité simple (fig. II.9).

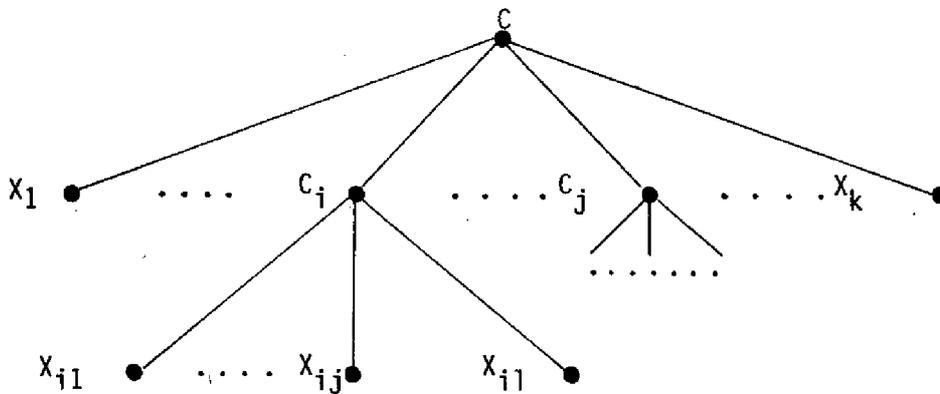


Figure II.9

Cet arbre n'est pas unique pour un graphe donné et dépend des ensembles d'articulation successivement choisis.

Si G n'est pas s -connexe, on associe un arbre à chaque composante s -connexe.

- Pour chaque ensemble d'articulation C d'un graphe s -connexe, il existe une matrice de permutation P'' telle que $\tilde{M}'' = P''^{-1} M P''$ est une matrice dont la forme est représentée par la figure II.10.

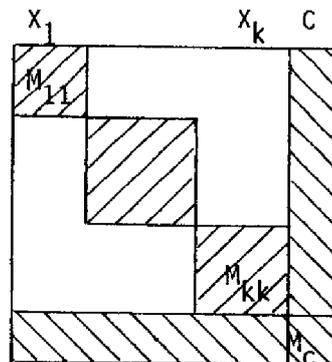


Figure II.10

Sur cette figure, les matrices carrées M_{ij} sont les matrices associées aux sous-graphes s-connexes $G_{X_i} = (X_i, U_i)$ et M_C est la matrice associée au sous-graphe $G_C = (C, U_C)$.

Exemple II.4. Soit le graphe G_2 de la figure II.11 qui peut être considéré comme le graphe non-orienté du graphe orienté G_1 (fig. II.1)

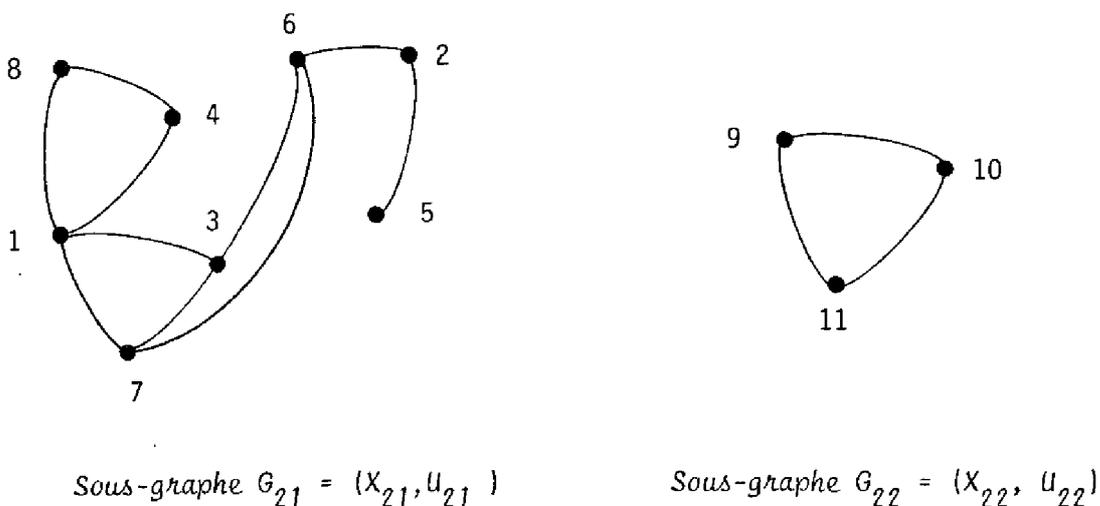


Figure II.11. - Graphe G_2

Il est constitué de deux composantes s-connexes qui engendrent les sous-graphes G_{21} et G_{22}

Le sommet 6 est un point d'articulation du sous-graphe G_{21} . La partition de X_{21} est : $\{X_{211}, X_{212}, 6\}$ ($X_{211} = \{1, 3, 4, 7, 8\}$; $X_{212} = \{2, 5\}$) et l'arbre correspondant et la matrice \tilde{M}_{21} après permutation sont données par les figures II.12 et II.13.

Le sommet 1 est un point d'articulation du sous-graphe $G_{211} = (\{1, 3, 4, 7, 8\}, U_{211})$ de G_{21} . La partition de X_{211} est : $\{(3, 7), (4, 8), 1\}$. (voir fig. II.14).

Le sous-graphe G_{22} n'a pas d'ensemble d'articulation et l'arbre se réduit à un seul sommet.

La permutation $p = \{3, 7, 4, 8, 1, 2, 5, 6\}$ permet de faire apparaître dans \tilde{M}_2 les 2 structures liées à la connexité simple (fig. II.15)

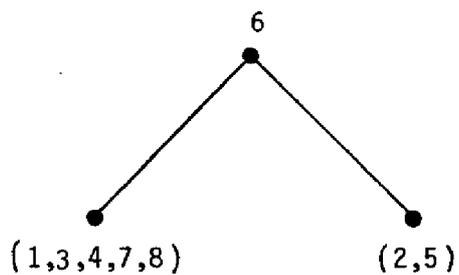


Figure II.12

$M_{21} =$

	1	3	4	7	8	2	5	6
1	0	1	1	1	1	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	0	0
7	1	1	0	0	0	0	0	1
8	1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0	1	0	1	0	1	0	0

Figure II.13

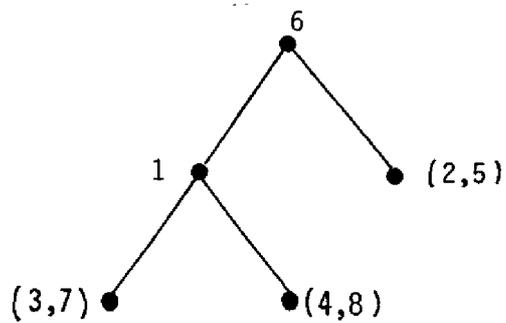


Figure II.14

3 7 4 8 1 2 5 6 9 10 11

$M_2 =$

3	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
7	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
8	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Figure II.15

Algorithmes de recherche d'ensembles minimaux d'articulation.

A) - ALGORITHME DE MALGRANGE [54].

Soit $k = 2$. Dans ce cas, la partition cherchée est :

$$X = \{X_1, X_2, C\} \text{ avec } A_1 \subseteq X_1 \text{ et } A_2 \subseteq X_2$$

Soit M_c la matrice du graphe complémentaire de G . La sous-matrice de M_c définie par les lignes correspondant à X_1 et par les colonnes correspondant à X_2 a tous ses éléments égaux à 1. On démontre que cette sous-matrice complète est première et que toutes les sous-matrices premières de M_c définissent des ensembles d'articulation minimaux C .

L'algorithme de Malgrange consiste, à partir d'une couverture de sous-matrices complètes de M_c , à trouver par des transformations logiques successives, toutes les sous-matrices premières de M_c .

On obtient avec cet algorithme toutes les solutions. Cependant lorsque n est grand, le nombre de solutions devient important et le programme de calcul, bien que ne comportant que des opérations logiques simples, nécessite beaucoup de temps d'exécution et de mémoire [45].

B) - METHODE DU FLÔT MAXIMAL.

L'algorithme que nous proposons ici permet d'obtenir une des solutions

optimales (pour $k = 2$). Soit $G_c = (X_c, \Gamma_c)$ le graphe obtenu, à partir du graphe G , en remplaçant A_1 et A_2 respectivement par les sommets α_1 et α_2 tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(A_1) = \Gamma_c(\alpha_1) \\ \Gamma(A_2) = \Gamma_c(\alpha_2) \\ X_c = \{ (X \cup \alpha_1 \cup \alpha_2) - (A_1 \cup A_2) \} \end{array} \right.$$

Le nombre maximal de chaînes du graphe G reliant a_1 ($\forall a_1 \in A_1$) à a_2 ($\forall a_2 \in A_2$) et n'ayant aucun sommet commun autre que a_1 et a_2 est égal au nombre maximal de chaînes du graphe G_c reliant α_1 et α_2 et n'ayant aucun sommet commun autre que α_1 et α_2 .

D'après le théorème de Menger [38,55] ce nombre est égal au nombre minimal d'éléments d'un ensemble d'articulation qui déconnecte α_1 et α_2 donc qui déconnecte A_1 et A_2 .

Démonstration On transforme le graphe G_c en un réseau de transport R . On considère G_c comme un graphe orienté symétrique. α_1 est l'entrée du réseau et α_2 la sortie.

Tous les autres sommets i du graphe G_c sont éclatés en 2 sommets ie, is tels que :

- 1°) - le sommet ie reçoit les arcs incidents vers l'intérieur à i
- 2°) - du sommet is partent les arcs incidents vers l'extérieur à i
- 3°) - ces deux sommets sont reliés par un arc (ie, is).

Tous les arcs du réseau ont une capacité infinie sauf les arcs (ie, is) qui ont une capacité unitaire. Le réseau R ainsi défini est un graphe anti-symétrique. A partir de l'exemple de la figure II.16 on obtient le réseau R (fig. II.17).

La valeur du flot maximal entre α_1 et α_2 sur le réseau R , est égale au nombre maximal de chemins disjoints au sens des arcs entre α_1 et α_2 donc au nombre maximal de chaînes disjoints au sens des sommets entre α_1 et α_2 sur le graphe G_c . Elle est aussi égale à la capacité minimale d'une coupe (théorème de Ford-Fulkerson [56]).

Comme cette capacité est finie, la coupe ne contient que des arcs (ie, is) dont la suppression coupe tous les chemins entre α_1 et α_2 . Les sommets i correspondants, sur le graphe G_c , sont les éléments d'un ensemble d'articulation et sont obtenus par application de l'algorithme de Ford-Fulkerson.

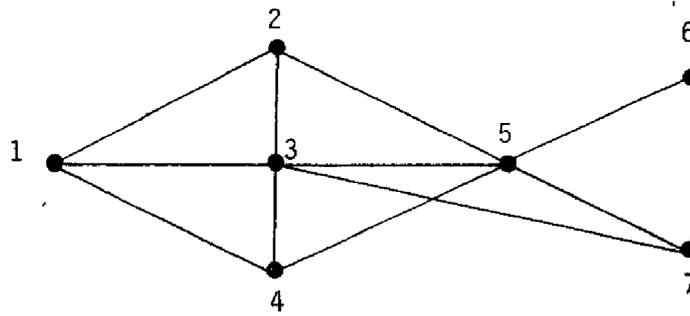


Figure II.16

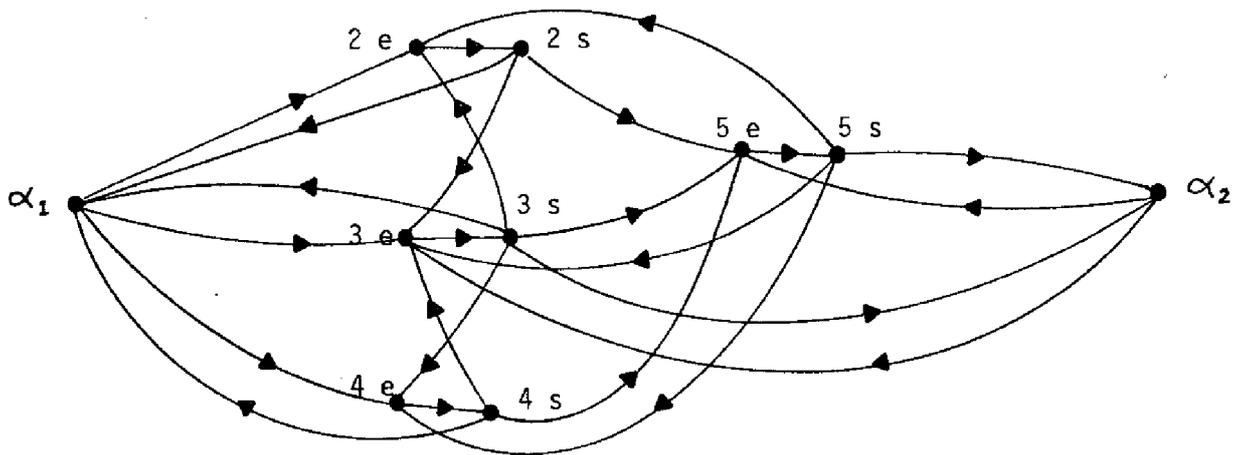


Figure II.17

Mise en oeuvre de l'algorithme.

- Pour la simplicité de la démonstration, on a réduit les ensembles A_1 et A_2 à des sommets α_1 et α_2 respectivement entrée et sortie du réseau. Cette réduction n'est pas nécessaire et on pourrait appliquer l'algorithme sur un réseau dont tous les sommets de A_1 seraient des entrées reliées à une source commune α_1 et tous les sommets de A_2 des sorties reliées à une sortie commune α_2 . Le choix du type de transformation du graphe G en un réseau R est fonction des facilités de programmation de la méthode.

- L'ensemble d'articulation C est tel que sa suppression déconnecte A_1 et A_2 . On obtient alors un graphe qui n'est pas s -connexe dont les sommets sont les éléments de l'ensemble $\{X_1 \cup X_2\}$ ($A_1 \subseteq X_1$; $A_2 \subseteq X_2$). Cependant ce graphe peut être composé de plusieurs composantes s -connexes.

On peut montrer qu'à l'ensemble X_1 correspond toujours une composante s -connexe mais que le sous-graphe dont les sommets sont les éléments de X_2 n'est pas obligatoirement s -connexe. La démonstration se fait à partir du résultat du processus de marquage des sommets dans l'algorithme de Ford Fulkerson.

Sur l'exemple de la figure II.18, si $A_1 = \{1\}$ et $A_2 = \{6\}$, l'ensemble minimal d'articulation est $\{5\}$ et $X_1 = \{1,2\}$, $X_2 = \{3,4,6,7\}$; le sous-graphe $G_2 = (X_2, U_2)$ a deux composantes s -connexes.

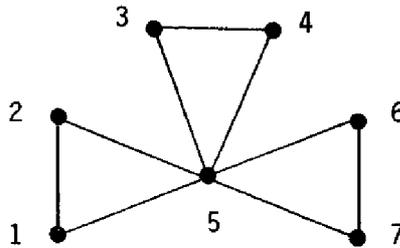


Figure II.18

- Une répétition de la procédure sur les sous-graphes successivement définis permet d'obtenir une $(k+1)$ - partition de X satisfaisant les contraintes $A_i \subseteq X_i$, $i = \overline{1, k}$. Si des contraintes supplémentaires sont introduites sur $|X_i|$, l'ajustement de la dimension des X_i est réalisable en faisant varier à chaque étape, le nombre d'éléments de A_1 et A_2 .

Résultats (1)

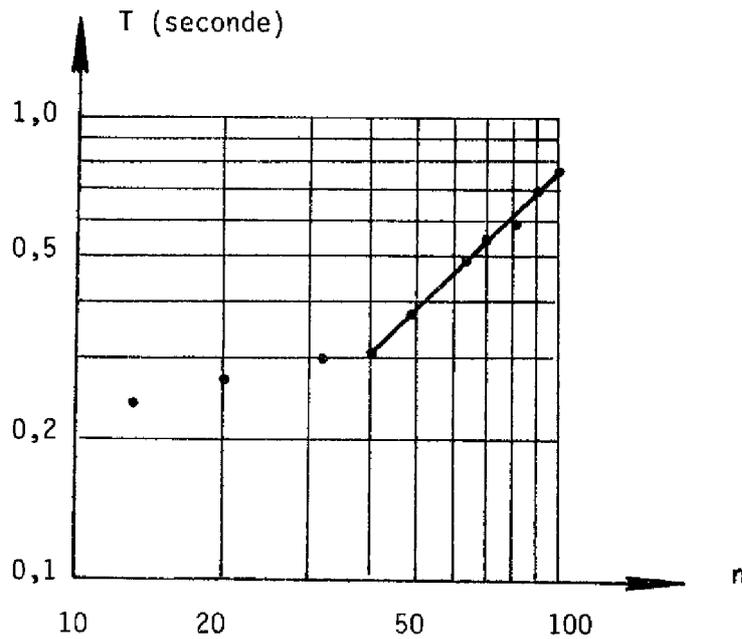
Les temps de calcul ne sont pas uniquement fonction de la dimension du graphe. Le nombre d'arêtes de ce graphe intervient lors de sa transformation en un réseau. D'autre part, le nombre d'éléments de l'ensemble d'articulation est également un facteur puisque le flot maximal lui est égal. Les conditions d'essais dont les résultats apparaissent sur la figure II.19 sont :

(1) Je remercie M. le Professeur B.CARRE (Université de Southampton) pour m'avoir donné sa version programmée d'un algorithme de recherche d'un flot maximal à coût minimal que j'ai utilisée ici.

- a) $k = 2$
- b) $K = \text{rapport nombre d'arêtes/nombre de sommets} \simeq \text{Cte}$
- c) $|C| \simeq \text{Cte.}$

On constate que dans l'intervalle $[50,100]$, l'accroissement est quasi linéaire ce qui montre l'efficacité de l'algorithme.

On remarquera que la condition b) est très sévère dans la mesure où, généralement, plus le graphe est de grande dimension, plus le rapport K est faible.



Temps de calcul en fonction de l'ordre du graphe
(calculateur IBM 370/165)

Figure II.19

II.4. - APPLICATIONS

Tout le problème de la partition réside dans la définition du graphe de la structure du système qui sera donc différente suivant le système considéré.

Pour illustrer ce fait, nous présenterons brièvement deux applications concernant les matrices réductibles et la décomposition des systèmes d'équations, développées respectivement par HARARY [46] et STEWARD [14], et basées sur l'utilisation de structures induites par la connexité forte.

de la structure de A .

Si G n'est pas s -connexe, il existe une matrice \tilde{A} bloc-diagonale car il existe une matrice \tilde{M} bloc-diagonale. Le nombre de blocs m est égal au nombre de composantes s -connexes Cs_j de G . Une permutation p est : $\{Cs_1, \dots, Cs_m\}$.

Si G est s -connexe mais non f -connexe, alors il existe une matrice \tilde{A} bloc-triangulaire car il existe une matrice \tilde{M} bloc-triangulaire. Le nombre de blocs m est égal au nombre de composantes f -connexes Cf_j de G . Une permutation p peut être la suite des éléments des composantes f -connexes ordonnés suivant leur rang.

Application aux systèmes linéaires.

Soit le système d'équations linéaires :

$$A X = B \quad X \in R^n \quad A \text{ régulière} \quad (1)$$

Si A est réductible, alors le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} A_{11} X_1 = B_1 \\ A_{21} X_1 + A_{22} X_2 = B_2 \\ \vdots \\ A_{m1} X_1 + \dots + A_{mm} X_m = B_m \end{cases}$$

Les sous-matrices A_{ij} sont des matrices régulières et le système (1) est décomposé en sous-systèmes interconnectés (ou indépendants si \tilde{A} est bloc-diagonale) mais qu'on peut résoudre séquentiellement.

Cependant A n'est pas caractéristique du système (1). Toute permutation des lignes de A donne une matrice A' qui définit un système identique au système (1). Si A est réductible, A' peut ne pas l'être et si A est irréductible ceci n'implique pas qu'il n'existe pas de matrice A' réductible.

Exemple II.5

$$\begin{pmatrix} f & d & e \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Pour la permutation $p = \{2, 3, 1\}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Soit $A' = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ f & d & e \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$ (permutation des deux premières lignes de A).

Le graphe de A' (fig. II.21) est f-connexe et A' est irréductible.

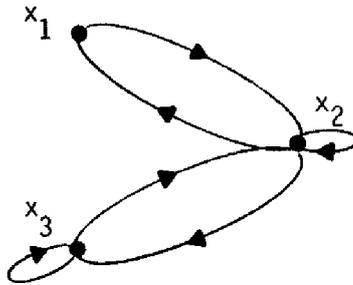


Figure II.21

Pour trouver la forme bloc-triangulaire ou bloc-diagonale, si elle existe, dans un système linéaire, il faut, en général, effectuer deux permutations différentes des lignes et des colonnes de A. (cf. paragraphe suivant II.4.2.).

II.4.2. - Décomposition des systèmes d'équations (STEWART [14]).

Soit un système d'équations algébriques linéaires ou non linéaires :

$$f_i(X) = 0 ; i = \overline{1, n}, X = \{x_1, \dots, x_n\} \quad (2)$$

On appelle F l'ensemble des équations du système.

$$F = \{f_1, \dots, f_n\}$$

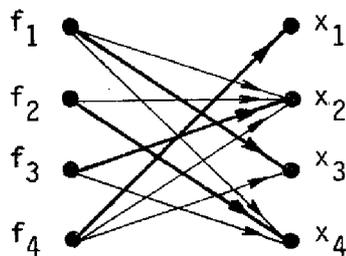
Soit la relation binaire R de F dans X telle que :

$$f_i R x_j \quad \text{ssi l'équation } f_i \text{ contient la variable } x_j$$

Cette relation binaire définit un graphe bi-parti $G = (F, X, U)$

Exemple II.6

$$\begin{cases} f_1(x_2, x_3, x_4) = 0 \\ f_2(x_2, x_4) = 0 \\ f_3(x_2, x_4) = 0 \\ f_4(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$



	x_1	x_2	x_3	x_4
f_1	0	1	①	1
f_2	0	1	0	①
f_3	0	①	0	1
f_4	①	1	1	0

Figure II.22

On détermine un couplage maximal du graphe G qui est un ensemble maximal d'arcs $W \subset U$ tel que deux arcs quelconques de W n'ont aucun sommet commun.

On montre que si $|W| < n$, il existe un sous-ensemble d'équations contenant moins de variables que d'équations (ce résultat découle du théorème de Koenig-Hall.ROY [38, p. 354]) et dans ce cas le système d'équations est soit indéterminé soit sans solution.

Supposons qu'il existe un couplage W de F sur X ($|W| = n$).

A partir de $G = (F, X, U)$, on construit un graphe $G_F = (F, U_F)$ en remplaçant chaque sommet x_j , sommet terminal d'un arc (f_i, x_j) de W par le sommet f_i .

Dans l'exemple II.6, un couplage W de F sur X est constitué les arcs en traits forts sur la figure II.22. Le graphe G_F correspondant est représenté par la figure II.23

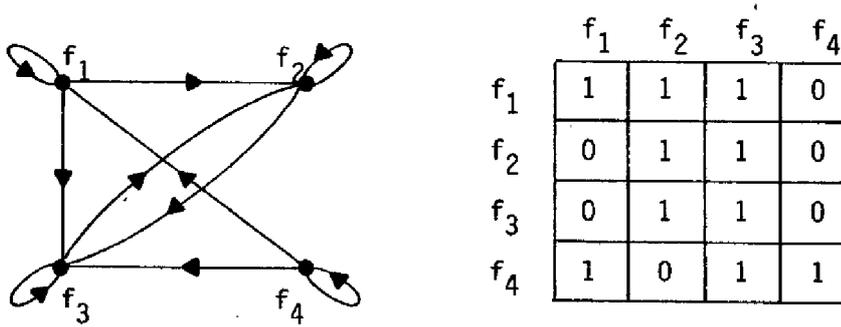


Figure II.23

Le graphe G_F est une représentation graphique de la structure du système d'équations.

On montre que si G_F n'est pas s-connexe, alors le système (2) est composé de sous-systèmes indépendants et réciproquement quel que soit le couplage W choisi. Les éléments d'une composante s-connexe sont les équations d'un sous-système.

Si G_F est s-connexe mais non f-connexe, le système (2) est composé de sous-systèmes qu'on résout séquentiellement et réciproquement quel que soit le couplage W choisi. Les éléments d'une composante f-connexe sont les équations d'un sous-système. Leur ordre de résolution est défini à partir du rang de chaque composante f-connexe.

Considérons l'exemple II.6

Les composantes f-connexes de G_F sont :

$$Cf_1 = \{f_4\}; \quad Cf_2 = \{f_2, f_3\}; \quad Cf_3 = \{f_1\}$$

Le graphe réduit de G_F est celui de la figure II.24

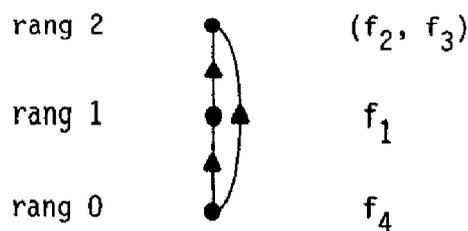


Figure II.24

L'ordre de résolution des équations est :

$$(f_2, f_3), \quad (f_1), \quad (f_4).$$

En effet la relation binaire définie par le graphe réduit est "Pour résoudre Cf_j , il est nécessaire d'avoir résolu Cf_i ".

Les deux permutations à effectuer pour faire apparaître la structure bloc-triangulaire de M (matrice associée à G) sont :

permutation des lignes : $\{ f_2, f_3, f_1, f_4 \}$

permutation des colonnes : $\{ x_4, x_2, x_3, x_1 \}$ (on remplace dans la permutation précédente, les f_i par x_j tel que $(f_i, x_j) \in W$).

La matrice \tilde{M} est celle de la figure II.25

	x_4	x_2	x_3	x_1
f_2	1	1	0	0
f_3	1	1	0	0
f_1	1	1	1	0
f_4	0	1	1	1

Figure II.25

II.4.3. - Décomposition des programmes d'optimisation

A) - Optimisation linéaire

L'optimisation hiérarchisée des systèmes linéaires s'applique, en particulier, aux problèmes de la forme suivante [13, 23]⁽¹⁾ :

$$\min_{X \in R^n} F(X) = E^T X \quad E \in R^n \quad (3)$$

$$\text{sous les contraintes} \quad \begin{cases} A X = B & A (m \times n) ; B \in R^m \\ X \geq 0 \end{cases}$$

avec - $m < n$, rang $A = m$

$$- AX = B \quad \begin{cases} A_{ii} X_i = B_i & i = \overline{1, N-1} \\ \sum_{i=1}^N A_{Ni} X_i = B_N \end{cases} ; A_{ij} (m_i \times n_j)$$

(1) Le rappel des algorithmes d'optimisation hiérarchisée dépasserait le cadre de cette étude. On en trouvera les détails dans les références citées.

$$- X = (X_1^T, \dots, X_i^T, \dots, X_N^T)^T ; B = (B_1^T, \dots, B_i^T, \dots, B_N^T)^T$$

A est dite bloc-angulaire (fig. II.26)

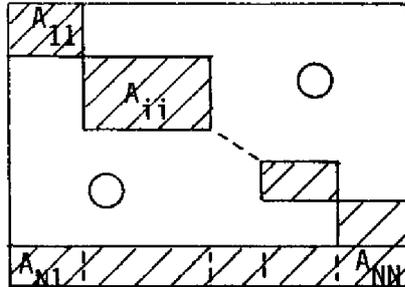


Figure II.26

Si $A_{Nj} = 0$ ($j = 1, N$), la matrice A est pseudo-bloc-diagonale (car A n'est pas une matrice carrée) et le problème (3) se décompose en (N-1) sous-problèmes d'optimisation indépendants. L'ensemble des équations a_i correspondant aux m_N dernières lignes de A sont telles que leur suppression donne une matrice pseudo-bloc-diagonale. Pour mettre en oeuvre une optimisation hiérarchisée linéaire, il s'agit donc, à partir d'une forme quelconque de A, de trouver ces équations particulières.

Soient X l'ensemble des n variables, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, et l'ensemble des m équations a_i , $A = \{a_1, \dots, a_m\}$.

$G = (A, X, U)$ est le graphe bi-parti de A (cf § II.4.2.)

Graphe du système des contraintes

Soit la relation binaire R définie sur X.

$$a_i R a_j \quad \text{ssi} \quad \exists x_k \in X \quad \text{tel que} \quad (a_i, x_k) \in U \quad \text{et}$$

$$(a_j, x_k) \in U$$

En d'autres termes, a_i et a_j sont en relation ssi il existe une variable commune x_k dans l'expression de a_i et de a_j .

R définit un graphe $G_A = (A, U_A)$ du système des contraintes ($AX = B$). Ce graphe est symétrique.

- Si G_A n'est pas s-connexe, alors il existe une double permutation des lignes et des colonnes de A qui la transforme en une matrice pseudo-bloc-diagonale.

Le nombre de matrices A_{ij} est égal au nombre de composantes s-connexes. Si Cs_i ($i = 1, N-1$) sont les $(N-1)$ composantes s-connexes de G_A , une permutation des lignes est

$$p_1 = \{ Cs_1, \dots, Cs_{N-1} \}$$

Une permutation des colonnes de A est obtenue à partir de p_1 en écrivant la suite des variables communes aux équations a_j appartenant aux composantes s-connexes.

- Si G est s-connexe, pour tout ensemble d'articulation C de G_A , il existe une double permutation des lignes et des colonnes de A qui la transforme en une matrice bloc-angulaire.

L'ensemble des équations a_j définissant les matrices A_{Nj} ($j = 1, N$) est donc l'ensemble des éléments de C et les équations a_j définissant les matrices A_{ij} sont les éléments des composantes s-connexes Cs_i du sous-graphe de G_A obtenu par suppression de C .

Une permutation des lignes est :

$$p_1 = \{ Cs_1, \dots, Cs_{N-1}, C \}$$

à partir de p_1 , on peut obtenir une permutation des colonnes.

Exemple II.7

$$a_1 (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = b_1$$

$$a_2 (x_1, x_4) = b_2$$

$$a_3 (x_2, x_3) = b_3$$

$$a_4 (x_2, x_4) = b_4$$

$$a_5 (x_5, x_6) = b_5$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
a_1	1	1	1	1	1	1
a_2	1	0	0	1	0	0
a_3	0	1	1	0	0	0
a_4	0	1	0	1	0	0
a_5	0	0	0	0	1	1

Matrice associée à G

Figure II.27

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	1	1	1	1
a_2	1	0	0	1	0
a_3	1	0	0	1	0
a_4	1	1	1	0	0
a_5	1	0	0	0	0

Matrice associée à G_A

Figure II.28

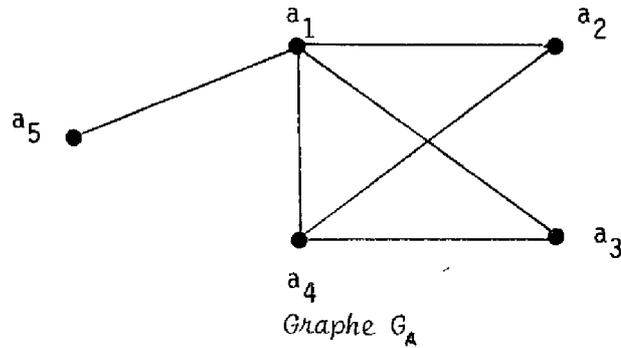


Figure II.29

$$C = \{a_1\} \quad C_{s_1} = \{a_2, a_3, a_4\} \quad C_{s_2} = \{a_5\}$$

$$p_1 = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_1\}$$

$$p_c = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_5\}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_5
a_2	1	0	0	1	0	0
a_3	0	1	1	0	0	0
a_4	0	1	0	1	0	0
a_5	0	0	0	0	1	1
a_1	1	1	1	1	1	1

Figure II.30

La recherche des structures bloc-angulaires de A nécessite la recherche des ensembles d'articulation de G_A et on obtient en général plusieurs structures possibles suivant les ensembles C choisis. Si les matrices A_{ij} sont encore de trop grande dimension, on répète la procédure de décomposition ce qui définit une optimisation hiérarchisée à plusieurs niveaux.

Cette méthode apparaît plus simple et plus souple d'utilisation que celle proposée par WEIL et al [49] qui utilise les résultats concernant les matrices bloc-triangulaires.

B) - Optimisation non linéaire (RICHTIN [51])

Dans le paragraphe I.2.3., nous avons montré que l'optimisation hiérarchisée s'appliquait aux systèmes interconnectés. Dans ce cas, le critère est déjà sous une forme séparable et les équations de couplage sont connues. Lorsque des interactions existent à la fois dans les critères et les contraintes, la décomposition du problème d'optimisation nécessite la détermination des variables de couplage. S'il est possible de les trouver dans les cas simples, lorsque le problème est de grande dimension, il faut disposer d'une méthode de recherche systématique que nous proposons dans ce paragraphe.

Soit le problème d'optimisation non-linéaire :

$$\begin{array}{ll} \min_X F(X) & X \in R^n \end{array} \quad (4)$$

sous les contraintes $G(X) \geq 0$ avec $G = \begin{bmatrix} g_1(X) \\ \vdots \\ g_m(X) \end{bmatrix}$ $g_i =$ contraintes égalité ou inégalité.

On appelle également X l'ensemble des variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
Supposons qu'il existe une partition de $X = \{X_1, \dots, X_N, V\}$ telle que :

1) - $F(X)$ apparaisse sous l'une des 4 formes suivantes :

$$- F(X) = \sum_{i=1}^N F_i(X_i, V) \quad (5)$$

$$- F(X) = \prod_{i=1}^N F_i(X_i, V) \quad (6)$$

$$- F(X) = \prod_{i=1}^1 F_i(X_i, V) + \sum_{i=1+1}^N F_i(X_i, V) \quad (7)$$

$$F(X) = \prod_{i=1}^1 F_i(X_i, V) + \sum_{i=1}^{q \leq 1} F_i(X_i, V) + \sum_{i=1+1}^N F_i(X_i, V) \quad (8)$$

où $|X_i| = n_i$, $i = \overline{1, N}$; $|V| = n_V$

2)- $G(X)$ puisse s'écrire :

$$G(X) = \begin{bmatrix} G_i(X_i, V), i = \overline{1, N} \\ (V) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9)$$

avec $G_i = \begin{bmatrix} g_{i1}(X_i, V) \\ \vdots \\ g_{imi}(X_i, V) \end{bmatrix}$ et $H(V) = \begin{bmatrix} h_1(V) \\ \vdots \\ h_{mv}(V) \end{bmatrix}$

Le problème global d'optimisation se décompose en N sous-problèmes d'optimisation interconnectés par les variables V et les méthodes d'optimisation hiérarchisées sont alors utilisables [4,50]

Supposons qu'on ait obtenu la forme (5) du critère.

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \sum_{i=1}^N \left[F_i(X_i, V) + \sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij} g_{ij}(X_i, V) \right] + \sum_{k=1}^{mv} \mu_k h_k(V)$$

avec $\mu_{ij}, \mu_k = \begin{cases} \text{paramètres de Lagrange si les contraintes correspondantes} \\ \text{sont de type égalité} \\ \text{paramètres de Kuhn-Tucker si les contraintes sont de type} \\ \text{inégalité.} \end{cases}$

La figure II.31 donne le schéma de résolution dans le cas où on utilise un algorithme du gradient au niveau coordonnateur.

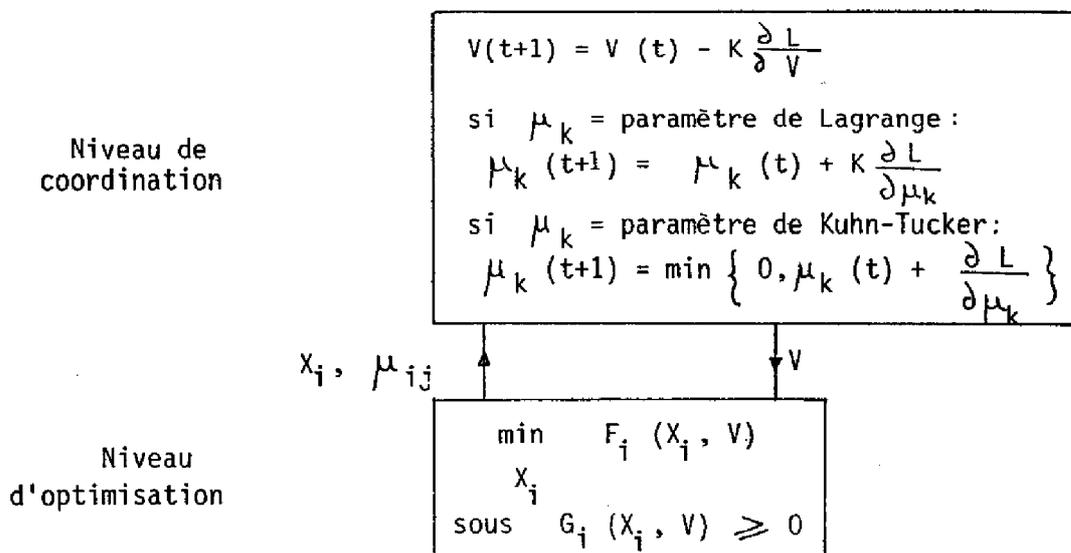


Figure II.31

Remarques

- 1°) - S'il n'y a pas de contraintes $h_k(V) \geq 0$ ($k = \overline{1, m_V}$), la méthode de coordination est admissible: les contraintes sont satisfaites pour toutes valeurs de V délivrées par le coordonnateur.
- 2°) - En Annexe 2, les conditions suffisantes de convergence et de minimalité sont établies pour que le problème global soit résolu par cette méthode d'optimisation hiérarchisée.

La recherche d'un ensemble V est ici encore un problème de reconnaissance de la structure du problème (4) qui peut être faite systématiquement à partir de sa représentation graphique.

Dans le cas de l'optimisation linéaire, on a vu que la décomposition du problème nécessite la recherche d'équations particulières et on a défini un graphe où l'ensemble des sommets est l'ensemble des équations linéaires.

Ici, pour la décomposition, on recherche des variables particulières et on va définir un graphe où l'ensemble des sommets est l'ensemble des variables du problème d'optimisation.

a) - Graphe d'un ensemble R de fonctions

Soient $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de variables et $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ un ensemble de fonctions r_i d'un ensemble de variables $A_i \subseteq X$.

Soit la relation binaire R définie sur X telle que :

$$x_i R x_j \text{ ssi } \exists A_k \text{ tel que } x_i \in A_k \text{ et } x_j \in A_k.$$

Cette relation définit le graphe $G_R = (X, U_R)$ de l'ensemble R de fonctions. Il est réflexif, symétrique et on le considère par la suite comme non orienté.

Exemple II. 8 :

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$R = (r_1, r_2, r_3) \quad A_1 = \{x_1, x_2, x_3\} \quad ; \quad A_2 = \{x_2, x_4\} \quad ;$$

$$A_3 = \{x_5\}$$

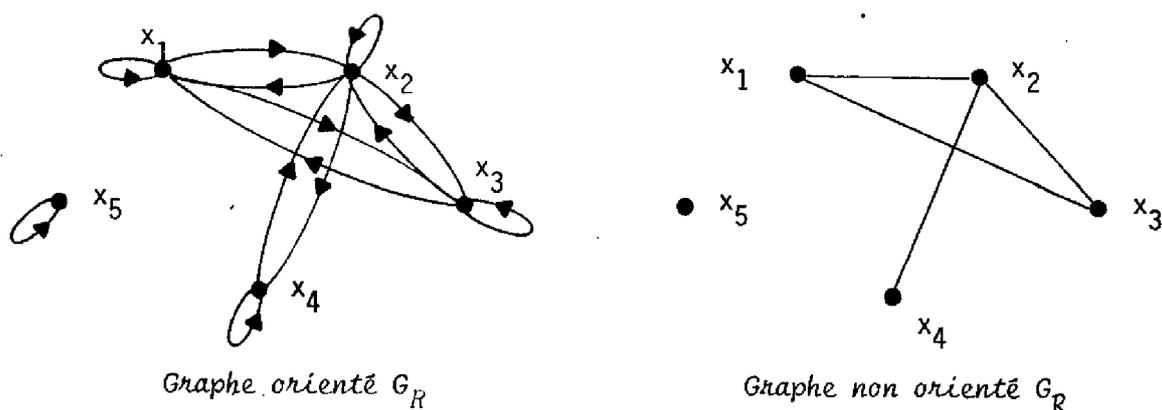


Figure II.32

b) Graphe de l'ensemble des contraintes $G(X)$

Suivant la définition précédente du graphe d'un ensemble de fonctions, l'ensemble R devient l'ensemble $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ et le graphe est noté $G_G = (X, U_G)$.

Considérons la forme (9) de $G(X)$. Le graphe $G_{GA} = (X-V, U_{GA})$ défini comme précédemment, n'est pas s -connexe puisque $\{x_1, \dots, x_N, V\}$ est une partition de X .

V est donc un ensemble d'articulation du graphe G_G .

Réciproquement, à partir de tout ensemble d'articulation V , on peut obtenir un système de contraintes de la forme (9).

Exemple II.9

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}; \quad A_1 = \{x_1, x_2\}; \quad A_2 = \{x_1, x_3\};$$

$$A_3 = \{x_3, x_4, x_5\}; \quad A_4 = \{x_3, x_5\};$$

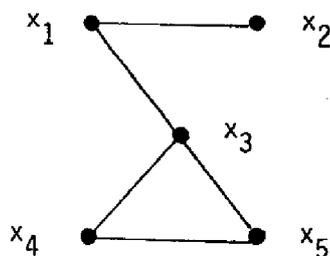


Figure II.33

$$V = \{ x_3 \} \text{ est un ensemble d'articulation (fig. II.33) et}$$

$$G(X) = \begin{cases} G_1(x_1, x_2, V) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ G_2(x_4, x_5, V) = \begin{bmatrix} g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Remarques

1°) - On obtient des variables de l'ensemble V qui sont des variables simples de l'ensemble X . Ce ne sont pas obligatoirement les seules variables qui permettent de décomposer le système de contraintes. Dans certains cas, il peut exister des fonctions de variables ayant la même propriété.

Exemple II.10

$$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}$$

$$G = \{ g_1, g_2 \} \quad A_1 = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \} ; \quad A_2 = \{ x_1, x_2, x_5, x_6 \}$$

De façon évidente $V = \{ x_1, x_2 \}$ est un ensemble d'articulation. Si x_1 et x_2 apparaissent dans g_1 et g_2 sous la forme d'une fonction de x_1, x_2 , $V = x_1, x_2$ est une variable de couplage qui décompose le système de contraintes $G(X)$ et ceci conduit à une réduction du nombre de variables de coordination. De telles fonctions de variables ne peuvent être trouvées que par une étude particulière de chaque exemple.

2°) - Si le graphe G_G n'a pas d'ensemble d'articulation, la décomposition des contraintes n'est possible qu'au moyen de pseudo-variables [52,53]

c) - Graphe du critère $F(X)$

On suppose qu'initialement $F(X)$ est sous la forme d'une somme de fonctions f_i ($i=1, \dots, s$). Chaque f_i est une fonction d'un ensemble de variables A_i .

Dans ce cas, $F = \{ f_1, f_2, \dots, f_s \}$ et on définit le graphe $G_F = (X, U_F)$ du critère.

Considérons les formes (5), (6), (7), (8), de $F(X, V)$. Le graphe $G_{FA} = (X-V, U_{FA})$ n'est pas s -connexe pour les formes (5), (7), (8) et mais l'est pour la forme (6).

Un ensemble d'articulation V conduit donc à une forme (5) qui contient les formes (7) et (8). Afin de trouver la forme multiplicative (6) (ou celle contenue dans (7) et (8)), on peut :

- 1°) - Soit considérer $F(X)$ sous la forme $f_1(X) \cdot f_2(X) \dots f_s(X)$ et déterminer le graphe G_F à partir de $F = \{f_1, \dots, f_s\}$.

Exemple II.II

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$F(X) = f_1(A_1) \cdot f_2(A_2) \cdot f_3(A_3) \Rightarrow F = \{f_1, f_2, f_3\}$$

$$A_1 = \{x_1, x_2\}; \quad A_2 = \{x_2, x_3\}; \quad A_3 = \{x_3, x_4, x_5\}$$

$V = \{x_3\}$ est un point d'articulation du graphe G_F (fig. II.34).

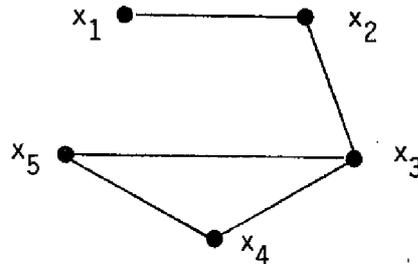


Figure II.34

Il vient : $F(X) = f_1(x_1, x_2) \cdot f_2(x_2, V) \cdot f_3(V, x_4, x_5)$

$$F(X) = F_1(X_1, V) \cdot F_2(X_2, V).$$

$$\text{avec } F_1 = f_1 \cdot f_2; \quad X_1 = \{x_1, x_2\}$$

$$F_2 = f_3; \quad X_2 = \{x_4, x_5\}$$

2°) - Soit analyser de façon particulière certaines formes multiplicatives.

Considérons le cas suivant : $F(X) = \sum_{i,j} x_i x_j \quad (i \neq j)$

S'il existe une factorisation de $F(X)$, elle est de la forme :

$$F(X) = (x_1 + \dots + x_p) (x_q + \dots + x_r).$$

Alors le graphe complémentaire de G_F n'est pas s -connexe.

Exemple II.12

$$X = \{ x_1, x_2, \dots, x_5 \}$$

$$\begin{aligned} F(X) &= x_1 x_5 + x_3 x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_3 x_5 \\ &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4 + x_5) \end{aligned}$$

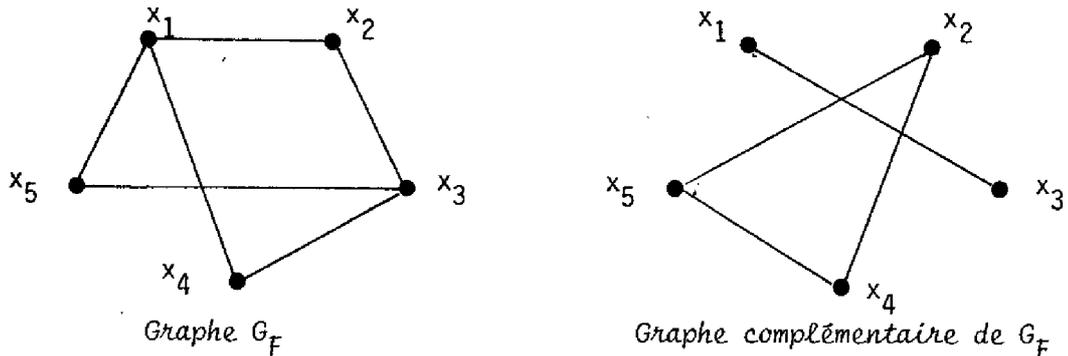


Figure II.35

La forme (8) est très difficile à trouver car elle contient des formes multiplicative et additive pour un même sous-ensemble de variables. Avec l'hypothèse que $F(X)$ se présente initialement sous la forme d'une somme de fonctions, cette méthode permet de trouver les formes (5) si $F(X)$ est décomposable. Notons que les formes (6), (7), (8) sont accompagnées de conditions restrictives qui en limitent l'intérêt (cf. Annexe 2).

d) - Graphe du Lagrangien

Le Lagrangien du problème (4) est :

$$L = F(X) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(X)$$

Le graphe $G_L = (X, U_L)$ du Lagrangien est déterminé à partir de $L = \{ f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_m \}$.

Pour que le problème d'optimisation soit décomposé, il faut que le Lagrangien s'écrive :

$$L = \sum_{i=1}^N L_i(X_i, V) + L(V).$$

Les variables V sont alors les éléments d'un ensemble d'articulation de G_L .

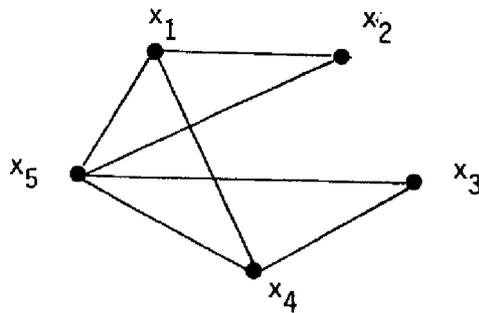
Exemple II.12

$$X = \{ x_1, x_2, \dots, x_5 \}$$

$$f(X) = f_1(x_1, x_2, x_5) + f_2(x_3, x_4, x_5)$$

$$G(X) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_4) \\ g_3(x_2, x_5) \\ g_4(x_3, x_4, x_5) \end{bmatrix}$$

$$L = \{ f_1, f_2, g_1, g_2, g_3, g_4 \}$$



Graphe du Lagrangien

Figure II.36

$V = \{x_4, x_5\}$ est un ensemble d'articulation de G_L (fig. II.36) et en remplaçant x_4 par v_4 et x_5 par v_5 , le Lagrangien devient :

$$L = \sum_{i=1}^2 L_i = \left[f_1(x_1, x_2, v_5) + \mu_1 g_1(x_1, x_2) + \mu_2 g_2(x_1, v_4) + \right. \\ \left. + \mu_3 g_3(x_2, v_5) \right] + \left[f_2(x_3, v_4, v_5) + \mu_4 g_4(x_3, v_4, v_5) \right]$$

II.5. - CONCLUSION

Comme l'attestent ces différentes applications, la représentation sous forme d'un graphe d'un système décrit par un ensemble de relations permet une analyse systématique de sa structure en vue de sa partition.

Deux types de partitions ont été étudiées et nous avons montré que

dans les deux cas, par une définition judicieuse du graphe du système, les possibilités de partition sont liées aux propriétés de connexité de ce graphe.

Le premier type concerne la partition d'un système en sous-systèmes connectés en série-parallèle qui conduit à une décomposition de la commande en phases séquentielles et parallèles. La connexité forte liée à l'existence de couplages, de relations orientés est la propriété étudiée du graphe du système et aux sous-systèmes correspondent les composantes f-connexes de ce graphe.

Le second concerne la partition en sous-systèmes interconnectés de façon quelconque qui conduit à la décomposition de la commande en commandes partielles coordonnées. Dans ce cas, c'est la connexité simple qui intervient dans l'étude de la partition. Aux variables de couplage entre les sous-systèmes correspondent alors les éléments d'un ensemble d'articulation et aux sous-systèmes, les composantes s-connexes du sous-graphe engendré par la suppression de l'ensemble d'articulation.

Plusieurs partitions sont en général admissibles. Le choix de l'une d'entre elles est un difficile problème de synthèse dans lequel interviennent les éléments tels que le nombre et la dimension des sous-systèmes, le nombre de variables de coordination. A ces éléments correspondent dans le graphe, le nombre de composantes f ou s-connexes, le nombre de sommets de ces composantes, le nombre d'éléments d'un ensemble d'articulation etc.... L'analyse structurale par les graphes en permettant la maîtrise de ces différents éléments est alors un outil d'aide à la recherche de partitions satisfaisant certaines contraintes de décomposition.

Cependant, les limites à l'utilisation des graphes pour la partition des systèmes découlent du fait qu'un graphe ne traduit que l'existence ou non de liaisons entre des éléments et que l'intensité de ces liaisons, importante par exemple pour la coordination de sous-systèmes, n'est pas prise en compte. C'est pourquoi nous avons été conduits à développer des méthodes complémentaires d'analyse structurale.

CHAPITRE III

ANALYSE STRUCTURALE PAR LES DONNÉES

-



III.1. - COUPLAGE ET ANALYSE DES DONNEES.

L'analyse structurale par les graphes des modèles des systèmes, en donnant les partitions possibles d'un système en vue d'une décomposition d'une fonction de commande est plus une analyse qualitative que quantitative bien qu'on puisse, comme nous l'avons indiqué, prendre en compte certains critères pour la partition (dimension des systèmes, nombre d'interconnexions, etc...)

La notion de couplage intervient également au niveau du comportement du système (réponse à des commandes, des perturbations) qui est d'autant plus difficile à analyser, à maîtriser que le nombre de variables du système est important, que les interconnexions sont nombreuses.

Pour franchir l'obstacle de la dimension, une méthode consiste à réduire le nombre de variables du système afin de diminuer la dimension des modèles. La difficulté dans ce cas, réside dans la recherche de variables explicatives permettant de décrire au mieux le comportement réel du système. Ces variables sont obtenues soit parmi l'ensemble initial des variables, soit après agrégation de plusieurs d'entre elles, par des transformations linéaires, par exemple [62].

La méthode d'analyse que nous développons dans ce chapitre, s'appuie sur l'hypothèse généralement vérifiée que, dans un système de grande dimension, toutes les variables ne sont pas en relation ou, si elles le sont, qu'il existe une hiérarchie dans l'intensité des couplages entre les variables. Le but de l'analyse est alors de définir la structure du système en termes de sous-systèmes faiblement couplés ce qui permet la mise en oeuvre efficace de méthodes de modélisation par modèles partiels, de commande décentralisée, d'optimisation hiérarchisée, de filtrage hiérarchisé (la coordination qui est un processus dynamique est d'autant plus rapide que les sous-systèmes sont plus faiblement couplés).

La connaissance du modèle d'un système peut faciliter cette analyse (cf. § IV.3). Cependant pour les grands systèmes, les non-linéarités, la dimension des matrices des modèles linéaires la rendent difficile le plus souvent. En fait la présence de couplages est toujours décelable dans les réponses du système à des excitations diverses puisque leurs effets se concrétisent par des

évolutions non indépendantes de certaines variables du système. Comme ces réponses se présentent sous la forme de données enregistrées, on utilise les méthodes de l'analyse des données pour l'analyse structurale du système.

Considérons un système S défini par un ensemble de variables noté $S = \{X_1, \dots, X_N\}$. Les X_i sont des variables intervenant dans le modèle (variables d'entrée, de sortie, de commande, d'état) ou caractérisant le fonctionnement du système (temps de réponse, critères, etc....).

Les données sont s observations ou mesures des N variables (fig. III.1)

		Variables		
		X_1	X_j	X_N
Observations	1			
	j		x_{ij}	
	s			

Figure III.1 - Tableau des données

Les méthodes d'analyse de tels tableaux s'appuient sur des concepts probabilistes et une observation est la réalisation d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_N) . Cependant la nature du système, déterministe ou stochastique, n'intervient pas dans l'analyse puisqu'il n'est pas nécessaire de spécifier comment les données ont été obtenues. En fait, le but de l'analyse n'est pas de trouver comment telle variable varie lorsqu'une autre prend des valeurs connues mais plutôt de savoir si la valeur de cette variable dépend de cette autre et de mesurer le degré de dépendance. C'est en ce sens que les concepts probabilistes sont les outils de l'analyse des relations causales dans un système complexe.

Nous supposons que sur l'horizon des mesures, le système est stationnaire. Pour les systèmes statiques, l'ordre des mesures dans le tableau peut être quelconque. Pour les systèmes dynamiques, les mesures sont des observations de l'état du système à des instants donnés suivant une période d'échantillonnage fixée. Le choix de cette période est important. Une grande période

peut conduire à des résultats peu significatifs sur les relations causales puisque des évolutions rapides du système ne seront pas observées et par conséquent, certains couplages ne pourront pas être décelés. En toute rigueur, la fréquence d'échantillonnage est fixée par le théorème de Shannon [64] et ceci impose une analyse spectrale des différents signaux issus du système.

La nature des données est spécifique du système considéré et les variables peuvent être soit continues, soit discrètes (l'ensemble des valeurs possibles est fini). Le but visé ici de l'analyse des données est l'extraction d'une matrice de couplage dont l'élément ij est une mesure du couplage (dépendance statistique) entre les variables X_i et X_j , appelé aussi indice de similarité [74] et à partir de laquelle est effectuée la partition du système.

Pour les systèmes continus, le couplage est exprimé, dans le cas statique, au moyen d'un coefficient de corrélation simple ou partiel, dans le cas dynamique, au moyen de fonctions d'auto-corrélation et de corrélation [64,66]

Pour les systèmes discrets, on utilise les concepts probabilistes de la théorie de l'information. A l'aide des travaux d'ASHBY [72], de Mc GILL [70], de CONANT [68], nous étudierons comment les notions d'entropie, d'information permettent l'analyse de couplages complexes.

Ces études seront ensuite utilisées pour la partition de systèmes statiques ou dynamiques en sous-systèmes faiblement couplés.

III.2. - CONCEPTS DE LA THEORIE DE L'INFORMATION [71]

III.2.1. - Entropie : - Soit une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans l'ensemble fini $U = \{x_1, \dots, x_n\}$

La loi de X est :

$$P(X = x_i) = p_i \quad \text{avec} \quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

L'entropie d'une variable aléatoire est une mesure de son indétermination a priori. C'est également l'incertitude moyenne sur sa réalisation. Elle est définie par :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_a p_i \quad . \quad \text{L'unité de } H(X) \text{ est le bit si } a = 2 \quad (1)$$

Il résulte de cette définition que :

$$0 < H(X) \leq \log_a n \quad (H(X) = \log_a n \text{ lorsque } p_i = \frac{1}{n})$$

- Soient deux variables aléatoires X, Y prenant leurs valeurs dans les ensembles finis U et V

$$U = \{ x_1, \dots, x_n \}$$

$$V = \{ y_1, \dots, y_m \}$$

La loi conjointe de X et Y est : $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$

Les deux lois projetées sont :

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_{j=1}^m p_{ij}$$

$$P(Y = y_j) = p_{.j} = \sum_{i=1}^n p_{ij}$$

et les deux lois conditionnelles sont :

$$P(X = x_i | Y = y_j) = p_j(i) = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = p_i(j) = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

A partir de ces lois, on définit les quantités suivantes :

Entropie conjointe

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log_a p_{ij}$$

Entropies conditionnelles

$$H_Y(X) = - \sum_i \sum_j p_{ij} \log_a \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$H_X(Y) = - \sum_i \sum_j p_{ij} \log_a \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

$H(X)$ est l'incertitude moyenne relative à la variable aléatoire (v.a.) X quelle que soit la valeur de Y .

$H_Y(X)$ est l'incertitude moyenne relative à X lorsqu'on est informé de la valeur de Y .

Relations fondamentales entre les entropies

$$a) \left. \begin{array}{l} H(X, Y) = H(X) + H_X(Y) \\ H(X, Y) = H(Y) + H_Y(X) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} H(X, Y) \geq H(X) \\ H(X, Y) \geq H(Y) \end{array} \right. \quad (2a)$$

- b) $H(X) - H_Y(X) \geq 0$ - L'égalité est vérifiée lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes (2b).
 Si $Y = f(X)$ alors $H_X(Y) = 0$ et $H(X,Y) = H(X)$

III.2.2. - Information entre variables aléatoires

$$I(X : Y) = H(X) - H_Y(X)$$

$I(X : Y)$ est la différence positive ou nulle entre l'incertitude a priori sur X et l'incertitude sur X lorsque Y est connue. L'incertitude sur X est donc réduite par (ou reste la même après) la connaissance de Y .

En d'autres termes, $I(X : Y)$ est la *quantité d'information contenue dans Y au sujet de X* .

Les propriétés de $I(X : Y)$ sont :

- a) $I(X : Y) \geq 0$ - L'égalité est vérifiée lorsque les variables X et Y sont indépendantes.
 b) $I(X : Y) = I(Y : X)$
 c) $I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$

Les concepts d'entropie et d'information ont été initialement développés par SHANNON pour l'étude de la transmission des signaux [71]. Etant donné un signal Y reçu à la suite de l'émission d'un signal X provenant d'une source (fig. II.2), il s'agit de retrouver quel est le message émis, à partir de la connaissance des caractéristiques de la voie de transmission et du signal reçu Y .

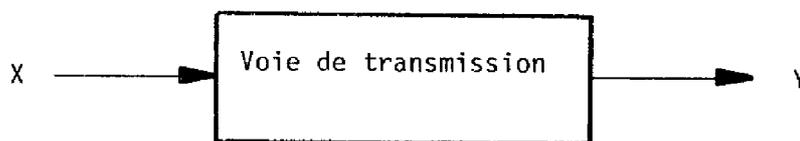


Figure III.2

Le codage optimal d'un message en fonction des performances de la voie de transmission est une des applications majeures de ces concepts.

Dans la théorie de la communication, X et Y sont différenciés, l'un étant le message à l'émission, l'autre à la réception. Cependant cette différence n'apparaît pas dans des expressions comme l'entropie $H(X, Y)$, l'information $I(X : Y)$ qui sont symétriques en X et Y. La voie de transmission peut être considérée comme un système S à deux variables X et Y. $H(X, Y)$ représente alors l'incertitude moyenne sur l'état du système. $I(X : Y)$ est une mesure du couplage entre X et Y dû au système S mais ne permet pas de connaître le sens de la liaison. Celui-ci doit être déterminé à partir de considérations physiques.

III.2.3. - Généralisations aux systèmes multivariés

- Dans le cas d'un système de N variables aléatoires, l'entropie et l'information sont définies comme suit :

$$H(X_1, X_2, \dots, X_N) = H(X_1) + H_{X_1}(X_2) + H_{X_1, X_2}(X_3) + \dots + H_{X_1, X_2, \dots, X_{N-1}}(X_N) \quad (4)$$

$$I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) = H(X_1) + H(X_2) + \dots + H(X_N) - H(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (5)$$

Théorème III.1

$I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) = 0$ ssi les variables sont indépendantes.

Condition suffisante : évidente à partir des définitions de H et de I.

Condition nécessaire :

$$I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) = 0 \implies H(X_1, X_2, \dots, X_N) = H(X_1) + H(X_2) + \dots + H(X_N)$$

En remplaçant dans cette dernière relation $H(X_1)$ par son expression tirée de (4), il vient :

$$\left[H(X_2) - H_{X_1}(X_2) \right] + \left[H(X_3) - H_{X_1, X_2}(X_3) \right] + \dots + \left[H(X_N) - H_{X_1, \dots, X_{N-1}}(X_N) \right] = 0$$

(1) - Dans la notation, $H_{X_1, \dots, X_{j-1}}(X_j)$, (X_1, \dots, X_{j-1}) est une variable vectorielle aléatoire dont les réalisations possibles sont obtenues à partir des combinaisons des réalisations de X_1, \dots, X_{j-1} .

Chaque terme entre crochets est positif ou nul d'après (2b). Ceci implique les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} H(X_2) &= H_{X_1}(X_2) \\ H(X_3) &= H_{X_1, X_2}(X_3) \\ &\vdots \\ H(X_N) &= H_{X_1, \dots, X_{N-1}}(X_N) \end{aligned}$$

Pour toute permutation des variables dans l'expression de $H(X_1, X_2, \dots, X_N)$ on obtient un ensemble de relations analogues.

$$H(X_i) = H_{X_{i1}}(X_i) \quad (6)$$

$$H(X_k) = H_{X_{i1}, X_{i2}}(X_k) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ H(X_m) &= H_{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im}}(X_m) \end{aligned}$$

D'après (6), on démontre que [71] :

$\forall i, \forall j, X_i$ et X_j sont indépendantes.

Compte tenu de ce résultat, d'après (7) on obtient :

$\forall i, \forall j, \forall k, X_i, X_j, X_k$ sont indépendantes.

De proche en proche, on démontre ainsi que toutes les variables sont indépendantes. D'où le corollaire :

Corollaire III.1

$$I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) = 0 \Rightarrow I(X_i : X_j : \dots : X_k) = 0 \quad ;$$

$$\{X_i, X_j, \dots, X_k\} : \text{sous-ensemble de } \{X_1, \dots, X_N\} .$$

- Soient (X_1, \dots, X_N) et (Y_1, \dots, Y_M) deux variables vectorielles aléatoires. On définit les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 H((X_1, \dots, X_N), (Y_1, \dots, Y_M)) &= H(X_1, \dots, X_N) + H_{X_1, \dots, X_N}(Y_1, \dots, Y_M) \\
 &= H(Y_1, \dots, Y_M) + H_{Y_1, \dots, Y_M}(X_1, \dots, X_N)
 \end{aligned}
 \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 I((X_1, \dots, X_N) : (Y_1, \dots, Y_M)) &= H(Y_1, \dots, Y_M) - H_{X_1, \dots, X_N}(Y_1, \dots, Y_M) \\
 &= H(X_1, \dots, X_N) - H_{Y_1, \dots, Y_M}(X_1, \dots, X_N)
 \end{aligned}
 \quad (9)$$

Comme l'a mentionné ASHBY [72] $H(X_1, X_2, \dots, X_N)$ peut être considéré comme une mesure de la complexité d'un système puisqu'on évalue ainsi l'indétermination a priori sur l'état du système. Plus le nombre de variables est grand, plus le nombre de valeurs possibles pour chaque variable est important et plus l'entropie risque d'avoir une valeur élevée. Cependant cette valeur dépend essentiellement des couplages dans le système : si, par exemple, la connaissance de X_i entraîne celle de toutes les autres variables de façon certaine, alors $H(X_1, \dots, X_N) = H(X_i)$.

D'après les définitions et résultats précédents, $I(X_1 : X_2 : \dots : X_N)$ peut être considéré comme une mesure des couplages entre toutes les variables du système. Nous verrons dans les paragraphes suivants, comment cette information est reliée à différentes informations mesurant des couplages entre des groupes de variables.

III.3. - PARTITION DES SYSTEMES STATIQUES

III.3.1. - Obtention des lois de probabilité

Pour calculer les différentes valeurs des entropies et des informations, il est nécessaire de connaître les lois de probabilité des variables.

Le caractère aléatoire des variables d'un système est dû soit à la nature du système à analyser, soit à la façon dont le système a été excité au moyen, par exemple, d'entrées aléatoires de lois de probabilité données ou non. Comme on l'a déjà précisé, il ne s'agit pas ici d'analyser les lois de probabilité de toutes les variables mais plutôt d'analyser les relations entre les variables.

Soient X et Y deux v.a. prenant leurs valeurs dans les ensembles $U = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $V = \{y_1, \dots, y_m\}$

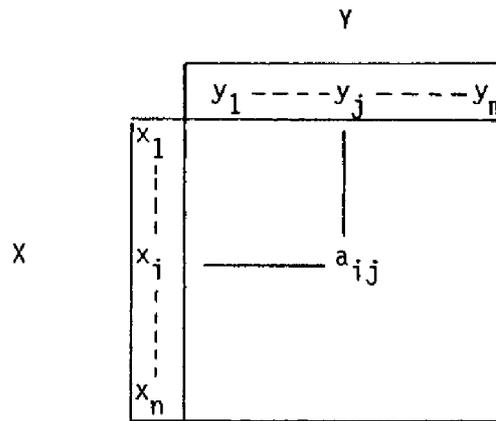


Figure III.3 - Matrice de contingence A

La matrice de contingence A (fig. III.3) est le résultat d'une série d'expériences au cours desquelles on a relevé les valeurs prises conjointement par X et Y. Cette matrice est déterminée à partir d'un tableau de données analogue à celui de la figure III.1.

a_{ij} est le nombre d'occurrences de l'évènement ($X = x_i, Y = y_j$)

$$a_i = \sum_j a_{ij} \quad \text{nombre d'occurrences de l'évènement } (X = x_i)$$

$$a_j = \sum_i a_{ij} \quad \text{nombre d'occurrences de l'évènement } (Y = y_j)$$

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = s \quad (\text{nombre de mesures du tableau des données}).$$

Les différentes probabilités sont alors définies par :

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{s} \quad p_{i.} = \frac{a_i}{s} \quad p_{.j} = \frac{a_j}{s}$$

$$p_j(i) = \frac{a_{ij}}{a_j} \quad p_i(j) = \frac{a_{ij}}{a_i}$$

Les lois ainsi obtenues dépendent essentiellement de la nature des expériences réalisées sur le système et on les qualifie de lois empiriques à partir desquelles on définit des entropies et des informations empiriques.

Les conclusions qui seront formulées sur la structure du système après analyse des couplages entre les variables seront dépendantes des expériences réalisées et il est nécessaire qu'elles le soient en grande nombre.

III.3.2. - Quelques propriétés des entropies et des informations dans les systèmes multivariables.

A. - Soit un système S de N variable X_i . Supposons que la mesure des X_i se fasse à travers un système d'observation R (fig. III.4) qui fournit M variables Y_j ($M \leq N$)

$$(X_1, \dots, X_N) \xrightarrow{R} (Y_1, \dots, Y_M) \quad (10)$$

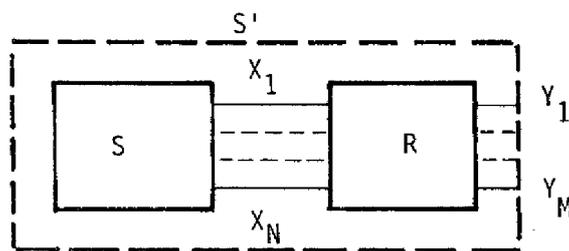


Figure III.4

L'ensemble des systèmes S et R est un système S' défini par l'ensemble des M variables Y_j .

D'après (8) :

$$\begin{aligned} H((X_1, \dots, X_N), (Y_1, \dots, Y_M)) &= H(X_1, \dots, X_N) + H_{X_1, \dots, X_N}(Y_1, \dots, Y_M) \\ &= H(Y_1, \dots, Y_M) + H_{Y_1, \dots, Y_M}(X_1, \dots, X_N) \end{aligned}$$

Mais d'après (10) : $H_{X_1, \dots, X_N}(Y_1, \dots, Y_M) = 0$

$$\Rightarrow H(X_1, \dots, X_N) = H(Y_1, \dots, Y_M) + H_{Y_1, \dots, Y_M}(X_1, \dots, X_N)$$

$$H(X_1, \dots, X_N) \geq H(Y_1, \dots, Y_M) \quad (11)$$

L'égalité est vérifiée lorsque l'application R^{-1} est injective, ce qui n'est pas vrai dans le cas général.

L'incertitude sur l'état du système S' est moins grande que (ou égale à) celle sur l'état du système S. Le système S' est dit moins complexe que le système S en ce sens que l'incertitude moyenne sur son état est moins grande. Savoir si le système S' est représentatif du système S est une question difficile.

Le modèle du système S' portant sur les variables Y_j est un modèle agrégé de S (cf. III.1) et sa validité pour décrire S dépend des caractéristiques du système d'observation mais également du système S lui-même.

B. - Soit un système S de N variables. Supposons qu'on veuille définir ce système à l'aide des $(N-1)$ premières variables. Appelons S' ce système.

Par définition de l'entropie et de l'information pour les systèmes multivariés, on a :

$$\begin{aligned} H(X_1, \dots, X_N) &= H((X_1, \dots, X_{N-1}), X_N) = H(X_1, \dots, X_{N-1}) + H_{X_1, \dots, X_{N-1}}(X_N) \\ H(X_1, \dots, X_N) - H(X_1, \dots, X_{N-1}) &= H_{X_1, \dots, X_{N-1}}(X_N) \end{aligned} \quad (12)$$

$$I(X_1 : \dots : X_N) = \sum_{i=1}^N H(X_i) - H(X_1, \dots, X_N) \quad (13)$$

$$I(X_1 : \dots : X_{N-1}) = \sum_{i=1}^{N-1} H(X_i) - H(X_1, \dots, X_{N-1}) \quad (14)$$

D'après (12), (13), (14), en notant $I(X_1 : \dots : X_N)$ par $I(S)$, on a :

$$\begin{aligned} I(S) - I(S') &= H(X_N) - H_{X_1, \dots, X_{N-1}}(X_N) \\ I(S) - I(S') &= I((X_1, \dots, X_{N-1}) : X_N) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{On a alors : } H(S) \geq H(S') \quad (16)$$

$$I(S) \geq I(S') \quad (17)$$

L'inégalité (16) a la même signification que l'inégalité (11). L'inégalité (17) signifie que la mesure des couplages dans le système S lorsqu'on observe N variables est supérieure ou égale à la mesure des couplages obtenue à partir de l'observation de $(N-1)$ variables. La complexité intrinsèque du système peut devenir plus difficile à analyser et la relation (15) donne la perte d'information sur la mesure des couplages.

Remarque.

L'entropie $H(S')$ se calcule à partir d'une matrice de contingence transformée de la matrice initiale de contingence.

Considérons le cas où $S = \{X, Y\}$ $S' = \{X\}$

X et Y prennent leurs valeurs sur les ensembles U et V

$$U = \{x_1, \dots, x_n\} \quad V = \{y_1, \dots, y_m\}$$

La matrice de contingence A de S est celle de la figure III.3

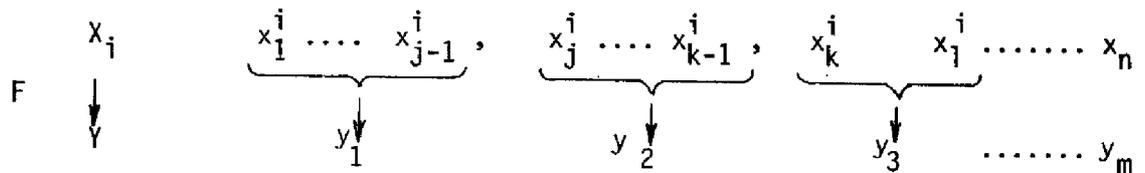
H(X) est l'entropie calculée à partir de la matrice de contingence A' (fig. III.5).

X	x_1	$\sum_{j=1}^m a_{1j}$
	x_i	$\sum_{j=1}^m a_{ij}$
	x_n	$\sum_{j=1}^m a_{nj}$

Figure III.5 - Matrice de contingence A'

On dit que A' est obtenue par une agrégation de A.

C. - Considérons une variable X_i prenant ses valeurs dans l'ensemble $U_i = \{x_1^i, \dots, x_n^i\}$ et supposons qu'il existe une variable Y dont les valeurs sont obtenues par l'application F suivante :



Cette application correspond à une partition moins fine sur l'ensemble des valeurs d'une variable. On montre [64] que :

$$H(X_1, \dots, X_i, \dots, X_N) \geq H(X_1, \dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots, X_N)$$

$$I(X_1 : \dots : X_i : \dots : X_N) \geq I(X_1 : \dots : X_{i-1} : Y : X_{i+1} : \dots : X_N)$$

Il y a donc perte d'information sur les couplages dans le système lorsqu'une ou plusieurs variables sont mesurées moins finement.

Ces quelques propriétés de l'entropie d'un système et de l'information entre les variables du système montrent l'aptitude de ces concepts pour l'ana-

lyse d'un système complexe multivariable. Dans les paragraphes suivants, nous supposons que le système est entièrement défini par un ensemble de variables X_j prenant leurs valeurs dans des ensembles finis et donnés.

III.3.3. - Décomposition de l'information entre les variables.

Soit un système $S = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ et soit une partition de l'ensemble des variables, $S = \{S_1, S_2, \dots, S_M\}$, où $S_i = \{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}\}$

On note : $I(X_{i1} : X_{i2} : \dots : X_{ip}) = I(S_i)$

$H(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}) = H(S_i)$

On a alors la relation fondamentale suivante :

$$I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) = \sum_{i=1}^M I(S_i) + I(S_1 : S_2 : \dots : S_M) \quad (18)$$

Démonstration

D'après (5) : $I(S_i) = H(X_{i1}) + H(X_{i2}) + \dots + H(X_{ip}) - H(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})$
 $= H(X_{i1}) + H(X_{i2}) + \dots + H(X_{ip}) - H(S_i)$

$$\text{Il vient : } \sum_{i=1}^M I(S_i) = \sum_{j=1}^N H(X_j) - \sum_{i=1}^M H(S_i) \quad (19)$$

D'autre part, d'après (5) :

$$\begin{aligned} I(S_1 : S_2 : \dots : S_M) &= \sum_{i=1}^M H(S_i) - H(S_1, S_2, \dots, S_M) \\ &= \sum_{i=1}^M H(S_i) - H(X_1, X_2, \dots, X_N) \end{aligned} \quad (20)$$

De (19) et (20), on tire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M I(S_i) + I(S_1 : S_2 : \dots : S_M) &= \sum_{j=1}^N H(X_j) - H(X_1, X_2, \dots, X_N) \\ &= I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Remarque : On convient de poser $I(X_i) = 0$ de façon à ce que l'identité (18) soit vraie $\forall S_i$, en particulier pour $S_i = \{X_i\}$, $i = \overline{1, N}$

Cette relation est extrêmement importante. Elle exprime que l'information dans un système est égale à la somme des informations dans chaque sous-système plus l'information entre les sous-systèmes, cette dernière étant nulle

si les sous-systèmes S_i sont indépendants (théorème III.1). Elle permet donc d'apprécier la validité d'une partition d'un système lorsqu'on recherche des sous-systèmes faiblement couplés. Cependant on ne peut envisager, pour les systèmes de grande dimension, de choisir la meilleure partition à partir du calcul de $I(S_1 : S_2 : \dots : S_M)$ pour toutes les partitions possibles. Une démarche simple consiste à calculer l'information entre toutes les paires de variables, ce qui permet de définir une matrice de couplage, (cf. § III.3.4) et d'effectuer la partition à partir de cette matrice. La validité d'une telle approche est précisée par la relation suivante, démontrée par Mr GILL [70] :

$$I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} I(X_i : X_j) + \sum_{i,j,k} Q(X_i, X_j, X_k) + \dots + Q(X_1, \dots, X_N) \quad (21)$$

Introduisons les quantités $Q(X_i, X_j, \dots, X_m)$.

Définition et propriétés de $Q(X_i, X_j, \dots, X_m)$

a) - considérons le cas où $N = 3$

La relation (21) devient :

$$I(X_1 : X_2 : X_3) = I(X_1 : X_2) + I(X_1 : X_3) + I(X_2 : X_3) + Q(X_1, X_2, X_3) \quad (22)$$

On démontre que :

$$Q(X_1, X_2, X_3) = I_{X_3}(X_1 : X_2) - I(X_1 : X_2) \quad (23)$$

$$= I_{X_2}(X_1 : X_3) - I(X_1 : X_3) \quad (24)$$

$$= I_{X_1}(X_2 : X_3) - I(X_2 : X_3) \quad (25)$$

où $I_{X_i}(X_j : X_k) = H_{X_i}(X_j) + H_{X_i}(X_k) - H_{X_i}(X_j, X_k)$ (1)

L'information $I_{X_i}(X_j : X_k)$ est une mesure des couplages entre X_j et X_k lorsque les valeurs de X_i sont connues. C'est une information conditionnelle, donc une mesure du couplage direct entre X_j et X_k .

L'information $I(X_j : X_k)$ est une mesure des couplages entre X_j et X_k lorsque les valeurs de X_i sont ignorées.

$Q(X_i, X_j, X_k)$ est alors une mesure des couplages entre les 3 variables X_i, X_j, X_k .

(1) - $I_{X_i}(X_j : X_k)$ est l'espérance mathématique de $I_{(X_i = x_i^j)}(X_j : X_k)$ qui est l'information entre X_j et X_k pour la réalisation $(X_i = x_i^j)$.

D'après (23), (24), (25), la relation (22) devient :

$$I(X_1 : X_2 : X_3) = I(X_1 : X_2) + I(X_1 : X_3) + I_{X_1}(X_2 : X_3) \quad (26)$$

$$= I(X_2 : X_1) + I(X_2 : X_3) + I_{X_2}(X_1 : X_3) \quad (27)$$

$$= I(X_3 : X_1) + I(X_3 : X_2) + I_{X_3}(X_1 : X_2) \quad (28)$$

Supposons maintenant que $I_{X_1}(X_2 : X_3) = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couplage direct entre X_2 et X_3 . Alors $Q(X_1, X_2, X_3) \leq 0$ et

$$I(X_1 : X_2 : X_3) = I(X_1 : X_2) + I(X_1 : X_3).$$

La présence simultanée de couplages entre, respectivement (X_1 et X_2) et (X_1 et X_3) peut engendrer un couplage apparent entre X_2 et X_3 , dû à X_1 et mesuré par $I(X_2 : X_3)$. Ceci justifie que $Q(X_1, X_2, X_3)$ puisse être négatif dans (22).

b) - pour N quelconque, on démontre que [70] :

$$1) \quad Q(X_i, X_j, \dots, X_m) = Q_{X_i}(X_j, \dots, X_m) - Q(X_j, \dots, X_m)$$

$$\text{et } Q_{X_i, X_j, \dots, X_k}(X_m, X_n, X_p) = I_{X_i, X_j, \dots, X_k, X_m}(X_n : X_p) -$$

$$- I_{X_i, X_j, \dots, X_k}(X_n : X_p)$$

2) - Q est une fonction symétrique par rapport à toutes les variables.

- D'autre part, ASHBY [72] a démontré que si l'ensemble des variables $\{X_i, X_j, \dots, X_m\}$ peut être partitionné en deux sous-ensembles tels que tout sous-ensemble de variables de l'un soit indépendant de tout sous-ensemble de l'autre alors : $Q(X_i, X_j, \dots, X_m) = 0$.

Cependant $Q(X_i, X_j, \dots, X_m) = 0$ ne permet pas d'affirmer qu'il existe des sous-ensembles indépendants.

- Si les valeurs des différents $Q(X_i, X_j, \dots, X_m)$ sont élevés en valeur absolue pour des ensembles $\{X_i, X_j, \dots, X_m\}$ comprenant un grand nombre de variables, ceci implique des couplages directs et indirects importants entre des groupes de variables. Le système est intrinsèquement complexe et son analyse ne peut être valablement réalisée à partir des couplages entre les différentes paires de variables.

Si toutefois, dans les systèmes de grande dimension, les couplages entre un nombre important de variables sont faibles, on constate que l'analyse des couplages à partir d'une matrice de couplage reste imparfaite. Notons cependant que la qualité de toute partition est évaluable a posteriori en utilisant la relation fondamentale (18).

III.3.4. - Matrice de couplage statique

$I (X_i : X_j)$ est une mesure du couplage statique entre X_i et X_j . Cette quantité dépend notablement de $H (X_i)$ et $H (X_j)$. Dans le but d'éliminer l'influence du nombre de valeurs possibles pour chaque variable, on définit un coefficient de couplage m_{ij} tel que :

$$m_{ij} = \frac{I (X_i : X_j)}{\sqrt{H(X_i) H (X_j)}} \quad (29)$$

On démontre aisément que :

$$0 \leq I (X_i : X_j) \leq \min [H (X_i), H (X_j)] \implies 0 \leq m_{ij} \leq 1$$

De plus :

$m_{ij} = 1 \iff$ il existe une application biunivoque de U_i dans U_j . Ceci entraîne : $m_{ji} = 1$.

La matrice $M (n \times n)$ est la matrice de couplage entre les variables et on déduira de son analyse, une ou plusieurs partitions du système.

Remarques.

1°) - $I_{S-(X_i, X_j)} (X_i : X_j)$ est une mesure du couplage direct entre X_i et X_j et une analyse du système est réalisable en définissant une matrice de couplage à partir de cette information. Cependant, certains couplages entre X_i et X_j (par exemple, $I (X_i : (X_j, X_k)) \neq 0$ et $I_{S-(X_i, X_j)} (X_i : X_j) = 0$), certes peu fréquents, ne sont pas ainsi mesurés).

De plus le calcul de $I_{S-(X_i, X_j)} (X_i : X_j)$ nécessite pour être significatif, un plus grand nombre d'observations que celui nécessaire à un calcul significatif de $I (X_i : X_j)$. En effet $I_{S-(X_i, X_j)} (X_i : X_j)$ fait intervenir le calcul de l'information entre X_i et X_j pour chaque réalisation de $(S - (X_i, X_j))$

$I_{S-(X_i, X_j)} (X_i : X_j)$ sera surtout utilisée dans le cas de la recherche d'une structure d'un modèle d'un système afin de connaître les variables explicatives de variables dépendantes. Dans le cas de la recherche d'une partition sous-optimale, on utilisera $I (X_i : X_j)$ puisqu'il s'agit plutôt de trouver des sous-ensembles de variables dépendantes.

2°) - Supposons que le système S soit composé de M sous-systèmes S_i indépendants. Alors $I (S_1 : S_2 : \dots : S_M) = 0$

Théorème III.2 - Si un système est composé de M sous-systèmes indépendants, tout sous-ensemble de variables d'un sous-système S_i est indépendant de tout sous-ensemble de variables d'un sous-système S_j ($\forall i, \forall j$ ($i \neq j$) = $\overline{1, M}$)

Démonstration - D'après le corollaire du théorème III.1 :

$$I(S_1 : S_2 : \dots : S_M) = 0 \implies I(S_i : S_j) = 0 \quad \forall i, \forall j \text{ (} i \neq j \text{) = } \overline{1, N}$$

Soient $\{X_1, \dots, X_n\}$ et $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ les variables des sous-systèmes S_i et S_j respectivement.

$$I(S_i : S_j) = I((X_1, \dots, X_n) : (Y_1, \dots, Y_m)) = H(X_1, \dots, X_n) - H_{Y_1, \dots, Y_m}(X_1, \dots, X_n)$$

Soit une partition de $\{Y_1, \dots, Y_m\} = \{\{Y_1, \dots, Y_k\}, \{Y_1, \dots, Y_m\}\}$ et soit l'entropie $H_{Y_1, \dots, Y_k}(X_1, \dots, X_n)$.

$$I((X_1, \dots, X_n) : (Y_1, \dots, Y_m)) = H(X_1, \dots, X_n) - H_{Y_1, \dots, Y_k}(X_1, \dots, X_n) + H_{Y_1, \dots, Y_k}(X_1, \dots, X_n) - H_{Y_1, \dots, Y_m}(X_1, \dots, X_n)$$

Comme :

$$H_{Y_1, \dots, Y_k}(X_1, \dots, X_n) - H_{Y_1, \dots, Y_k, Y_1, \dots, Y_m}(X_1, \dots, X_n) = I_{Y_1, \dots, Y_k}((X_1, \dots, X_n) : (Y_1, \dots, Y_m))$$

$I((X_1, \dots, X_n) : (Y_1, \dots, Y_m)) = 0$ entraîne :

$$I((X_1, \dots, X_n) : (Y_1, \dots, Y_k)) = 0$$

$$I_{Y_1, \dots, Y_k}((X_1, \dots, X_n) : (Y_1, \dots, Y_m)) = 0$$

En partitionnant l'ensemble $\{X_1, \dots, X_n\}$ et partant de la relation $I((X_1, \dots, X_n) : (Y_1, \dots, Y_k)) = 0$, on obtient de façon identique la relation suivante : $I((X_1, \dots, X_1) : (Y_1, \dots, Y_k)) = 0$

Comme les partitions sont quelconques, tout sous-ensemble de S_i est indépendant de tout sous-ensemble de S_j CQFD

Du théorème précédent, on tire :

$$I(X_k : X_l) = 0 \quad \forall X_k \in S_i \text{ et } \forall X_l \in S_j \\ \forall i, \forall j \text{ (} i \neq j \text{) = } \overline{1, N}$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

"Une condition nécessaire pour que le système S soit composé de sous-systèmes indépendants est que la matrice de couplage M soit bloc-diagonale".

On notera que réciproquement, si la matrice M est bloc-diagonale, l'hypothèse d'indépendance devra être testée en calculant $I(S_1 : S_2 : \dots : S_M)$.

Toute partition du système obtenue à partir d'une analyse de la matrice de couplage - en recherchant par exemple une partition de cette matrice telle que la somme des éléments des matrices-blocs hors de la diagonale soit minimale - sera, dans le cas général, sous-optimale.

Parmi les "bonnes" partitions suggérées par l'analyse de M, on retiendra celle dont le rapport $\frac{I(S_1 : S_2 : \dots : S_M)}{I(X_1 : X_2 : \dots : X_N)}$ est le plus faible.

III.3.5. - Exemple

Considérons l'exemple tiré de la référence [69]

$$S = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

Le tableau de données est le suivant : (s = 14)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X ₁	1	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	2
X ₂	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	2	2
X ₃	1	3	3	3	3	3	2	2	1	3	2	2	1	3
X ₄	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2
X ₅	1	1	2	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	1

Tableau III.6 - Tableau des données

La matrice de couplage statique $M = [m_{ij}]$ est :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,0	0,34	0,08	0,0
x_2	0,0	1	0,06	0,02	0,16
x_3	0,34	0,06	1	0,21	0,02
x_4	0,08	0,02	0,21	1	0,05
x_5	0,0	0,16	0,02	0,05	1

Tableau III.7 - Matrice de couplage statique

Cette matrice de couplage est schématisée par la figure III.8 sur laquelle on n'a fait figurer que les liaisons entre variables les plus importantes.

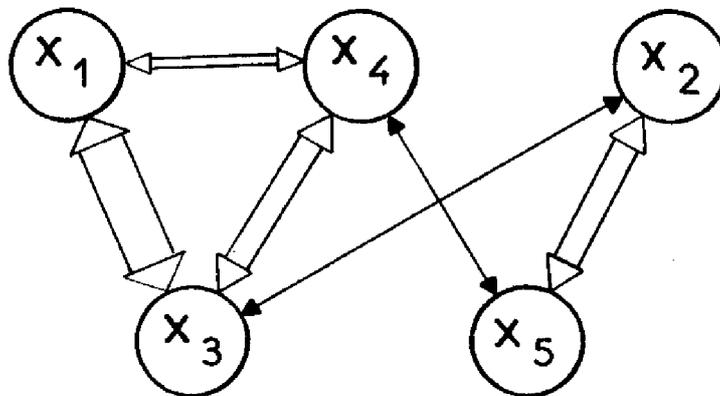


Figure III.8 - Couplages principaux entre variables

Si dans le cas des systèmes de grande dimension, la partition doit être réalisée à l'aide de méthodes systématiques, à l'aide par exemple du graphe associé à la matrice de couplage, sur cet exemple, la partition est suggérée par l'examen de la figure III.8.

$$S = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$S_1 = \{X_1, X_3, X_4\} ; S_2 = \{X_2, X_5\}$$

La relation (18) s'écrit :

$$I(X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5) = I(X_1 : X_3 : X_4) + I(X_2 : X_5) +$$

$$I((X_1, X_3, X_4) : (X_2 : X_5))$$

$$I(X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5) = H(X_1) + H(X_2) + H(X_3) + H(X_4) + H(X_5) -$$

$$- H(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = 2,09$$

$$I(X_1 : X_3 : X_4) = 0,87$$

$$I(X_2 : X_5) = 0,15$$

$$I((X_1, X_3, X_4) : (X_2, X_5)) = 1,07$$

$$\frac{I((X_1, X_3, X_4) : (X_2, X_5))}{I(X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5)} = \frac{1,07}{2,09} \simeq 0,51$$

Le système considéré dans cet exemple n'est donc pas décomposable en sous-systèmes faiblement couplés.

Remarque

On a vu que la matrice de contingence A permettait de définir des lois de probabilité empiriques pour les différentes variables. Dès lors, il devient possible, à partir de la connaissance de ces lois, de calculer la matrice de corrélation empirique et de la considérer comme la matrice de couplage M.

$$M (N \times N) = [m_{ij}]$$

$$m_{ij} = \rho(X_i, X_j) ; \rho(X_i, X_j) = \text{coefficient de corrélation linéaire de } X_i \text{ et } X_j.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $|\rho(X_i, X_j)| = 1$ est que X_i et X_j soient liées par une relation linéaire.

Une condition nécessaire pour que X_i et X_j soient statiquement indépendantes est : $\rho(X_i, X_j) = 0$. Lorsque $\rho(X_i, X_j) = 0$, X_i et X_j ne sont pas corrélées, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas liées par une relation linéaire.

Le coefficient de couplage défini par (29) est donc plus général que le coefficient de corrélation puisqu'il permet de mesurer toute dépendance entre deux variables et en conséquence de décider de leur indépendance.

III.4 - PARTITION DES SYSTEMES DYNAMIQUES.

Soit un système dynamique S défini par un ensemble de N variables X , chacune d'elles prenant ses valeurs dans un ensemble fini. La période d'échantillonnage des mesures est T et on suppose que l'état de S à l'instant $(k+1)T$ est uniquement fonction de l'état de S à l'instant kT .

$$S(kT) \xrightarrow{f(T)} S((k+1)T)$$

Le tableau de données (fig. III.1) est donc dans le cas d'un système dynamique un ensemble, ordonné dans le temps, de mesures des variables du système.

Pour l'analyse des couplages dans le système, deux ensembles sont à considérer:

$$S(kT) = S(k) = \{X_1(k), X_2(k), \dots, X_N(k)\}$$

$$S((k+1)T) = S(k+1) = \{X_1(k+1), X_2(k+1), \dots, X_N(k+1)\}$$

à partir desquels on développe une méthode d'analyse des couplages du système.

Désormais, on notera X_i une variable à un instant quelconque d'échantillonnage et $X_i^!$ cette variable à l'instant suivant.

Considérons deux variables X_i et X_j ($U_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_{n_i}^i\}$; $U_j = \{x_1^j, x_2^j, \dots, x_{n_j}^j\}$). A partir du tableau de données, on définit une matrice de contingence A du couple $\{X_i, X_j^!\}$.

Exemple

	X_i	X_j	X_k	
1	1	1		
2	2	1		
3	1	2		
4	2	3		

Tableau de données

$$\Rightarrow X_i$$

	$X_j^!$		
	1	2	3
1	1	0	1
2	0	1	0

Matrice de contingence A

La valeur d'un élément a_{kl} de A est le nombre d'occurrences de l'évènement $(X_i = x_k^i ; X_j = x_l^j)$. On note que le nombre total d'évènements qui peuvent être pris en compte est $(s-1)$.

A partir de cette matrice de contingence, on calcule les entropies $H(X_i)$, $H(X_j)$ et l'information $I(X_i : X_j)$.

$I(X_i : X_j)$ est une mesure du couplage entre X_i à un instant donné et X_j à l'instant suivant. C'est donc une mesure du couplage dynamique entre X_i et X_j , dans le sens $X_i \rightarrow X_j$. $I(X_j : X_i)$ est une mesure du couplage dynamique entre X_i et X_j dans le sens $X_j \leftarrow X_i$.

Un couplage dynamique entre X_i et X_j mesuré, par exemple, par $I(X_i : X_j)$ peut être dû à des couplages statiques entraînant ainsi des couplages dynamiques indirects. Aussi, dans la suite on rencontrera l'information $I_{S_k}(X_i : X_j)$, mesure du couplage entre X_i et X_j lorsque les valeurs des variables de S_k sont connues et $I_{S-X_i}(X_i : X_j)$ est une mesure du couplage direct entre X_i et X_j .

Une analyse des couplages dans un système dynamique a été proposée par CONANT [69] à partir de l'analyse de l'information $I((S, S'))$

$$I((S, S')) = I(X_1 : X_2 : \dots : X_N : X'_1 : X'_2 : \dots : X'_N)$$

Soit une partition de $S : \{S_1, \dots, S_M\}$. On obtient les deux relations suivantes en utilisant la relation (18) :

$$I((S, S')) = \sum_{i=1}^M I((S_i, S'_i)) + I((S_1, S'_1) : (S_2, S'_2) : \dots : (S_M, S'_M)) \quad (29)$$

$$I((S, S')) = I(S) + I(S') + I(S : S') \quad (30)$$

Selon CONANT, si le système S est composé de M sous-systèmes S_i faiblement couplés alors :

$$i, j = \overline{1, M} \quad I((S_i, S'_i) : (S_j, S'_j)) \ll I((S_i, S'_i)) + I((S_j, S'_j))$$

$$I((S_1, S'_1) : (S_2, S'_2) : \dots : (S_M, S'_M)) \ll \sum_{i=1}^M I((S_i, S'_i))$$

Ce résultat est difficile à justifier dans la mesure où le choix de $I((S, S'))$ pour mesurer les couplages est relativement subjectif et nous proposons d'analyser le comportement dynamique de S à partir de $I(S : S')$. Cette analyse est complexe si on ne fait aucune hypothèse sur la structure du

système. En particulier la notion d'indépendance dynamique de sous-systèmes apparaît difficile à dégager.

On supposera donc que le système a la structure suivante :

$$\left. \begin{array}{l} X_i(k+1) = f_i(X_1(k), X_2(k), \dots, X_N(k)) \\ \text{ou} \\ X'_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_N) \end{array} \right\} \quad i = \overline{1, N} \quad (31)$$

Nous proposons de mesurer les couplages dynamiques dans le système S par la quantité I_{DS} suivante :

$$I_{DS} = \sum_{i=1}^N I(S : X'_i)$$

$$\text{Or } I(S : X'_i) = H(X'_i) - H_S(X'_i)$$

Puisque la connaissance de S implique celle de X'_i d'après (31),

$H_S(X'_i) = 0$ et I_{DS} prend la forme simple suivante :

$$I_{DS} = \sum_{i=1}^N H(X'_i) \quad (\simeq H(X_i) \text{ lorsqu'on dispose d'un grand}$$

nombre d'échantillons). I_{DS} est donc la somme des incertitudes moyennes sur la réalisation de chaque variable.

III.4.1. - Décomposition des couplages dynamiques.

Soit une partition de S : $\{S_1, \dots, S_M\}$.

La relation suivante a été démontrée par Mc GILL [66]

$$I(X : (Y, Z)) = I(X, Y) + I_Y(X : Z) \quad (32)$$

D'après (32) :

$$I(S : X'_i) = I(S_k : X'_i) + I_{S_k}((S - S_k) : X'_i)$$

il vient alors :

$$\begin{aligned} I_{DS} &= \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i \in S_k} I(S_k : X'_i) \right) + \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i \in S_k} I_{S_k}((S - S_k) : X'_i) \right) \quad (33) \\ &= I_{DP} + I_{DEP} \end{aligned}$$

I_{DP} est une mesure des couplages dynamiques dans les sous-systèmes.

I_{DEP} est une mesure des couplages dynamiques entre tous les sous-systèmes. C'est une somme d'informations conditionnelles et donc une mesure des couplages dynamiques directs entre les sous-systèmes. On dit que les sous-systèmes sont dynamiquement indépendants si I_{DEP} est nulle.

La relation (33) va être utilisée pour valider toute partition du système lorsqu'on recherche des sous-systèmes faiblement couplés.

III.4.2. - Analyse des couplages dynamiques.

Comme dans le cas statique, l'analyse des couplages dynamiques est faite à partir des couplages dynamiques entre les variables prises deux à deux.

$$I((X_1, \dots, X_N) : X'_i) = \sum_{j=1}^N I(X_j : X'_i) + \sum_{j,k} Q(X_j, X_k, X'_i) + \sum_{j,k,l} Q(X_j, X_k, X_l, X'_i) + Q(X_1, \dots, X_N, X'_i) \quad (34)$$

Q a la même définition que celle donnée au paragraphe III.3.3.. La relation (34) se déduit simplement des relations démontrées par Mc GILL [70] dans le cas des systèmes comportant une variable (de sortie) dépendant de plusieurs variables (d'entrée).

Les remarques formulées dans le cas des systèmes statiques concernant la validité d'une analyse à partir des couplages entre paires de variables, restent valables dans ce cas.

III.4.3. - Matrice de couplage dynamique.

Le couplage dynamique entre X_i et X_j dans le sens $X_i \longrightarrow X_j$ est mesuré par $I(X_i : X'_j)$ et on définit l'élément ij de la matrice de couplage M par :

$$m_{ij} = \frac{I(X_i : X'_j)}{\sqrt{H(X_i) \cdot H(X'_j)}} \quad (35a)$$

Comme dans le cas statique, on démontre que :

- $0 \leq m_{ij} \leq 1$
- $m_{ij} = 1 \iff$ il existe une application biunivoque de U_i dans U'_j . ($U'_j =$ ensemble des valeurs de $X'_j = U_j$)

Cette dernière condition nécessaire et suffisante est très restrictive quant à la forme de liaison entre X_i et X'_j et CONANT [69] définit un coefficient m_{ij} plus général tel que :

$$m_{ij} = \frac{I(X_i : X'_j)}{H(X'_j)} \quad (35b)$$

m_{ij} est égal à 1 lorsque simplement il existe une application de U_i dans U'_j . Dans ce cas, $I(X_i : X'_j) = H(X'_j) - H_{X_i}(X'_j) = H(X'_j)$

Remarques

1°) - A partir de la définition de l'indépendance dynamique de sous-systèmes ($I_{DEP} = 0$), on ne peut pas déduire une condition nécessaire sur la structure de la matrice de couplage, comme dans le cas statique.

2°) - I_{DEP} fait apparaître des informations conditionnelles. On peut alors penser à définir la matrice de couplage à partir de l'information $I_{S-X_i}(X_i : X'_j)$ en posant :

$$m_{ij} = \frac{I_{S-X_i}(X_i : X'_j)}{H_{S-X_i}(X'_j)} \quad (35c)$$

On élimine ainsi des couplages dynamiques apparents seulement dûs à des couplages statiques. En effet, si $I(X_k : X_i) \neq 0$ et $I(X_k : X'_j) \neq 0$, alors on peut avoir $I(X_i : X'_j) \neq 0$ bien que $I_{S-X_i}(X_i : X'_j) = 0$.

Cependant malgré une procédure simplifiée de calcul de ces informations conditionnelles proposée par RINK [73], comme on l'a mentionné dans le cas statique, il faut beaucoup d'échantillons pour que les résultats soient significatifs et cette procédure apparaît beaucoup plus longue que celle de calcul des informations $I(X_i : X'_j)$.

III.4.4. - Exemple

Considérons le système S étudié dans le paragraphe III.3.5. comme un système dynamique. Pour le calcul de la matrice de couplage, les approximations du type $H(X_i) = H(X'_i)$ n'ont pas été faites et cette matrice dont les éléments sont calculés à partir de (35b), est donnée par le tableau III.9.

	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'
x_1	0,24	0,16	0,72	0,43	0,21
x_2	0,10	0,06	0,01	0,17	0,0
x_3	0,55	0,06	0,46	0,27	0,07
x_4	0,03	0,67	0,07	0,0	0,09
x_5	0,0	0,0	0,01	0,05	0,09

Tableau III.9 - Matrice de couplage dynamique

Sur la figure III.10, on a représenté, sous forme d'un graphe, cette matrice en ne faisant figurer que les couplages principaux.

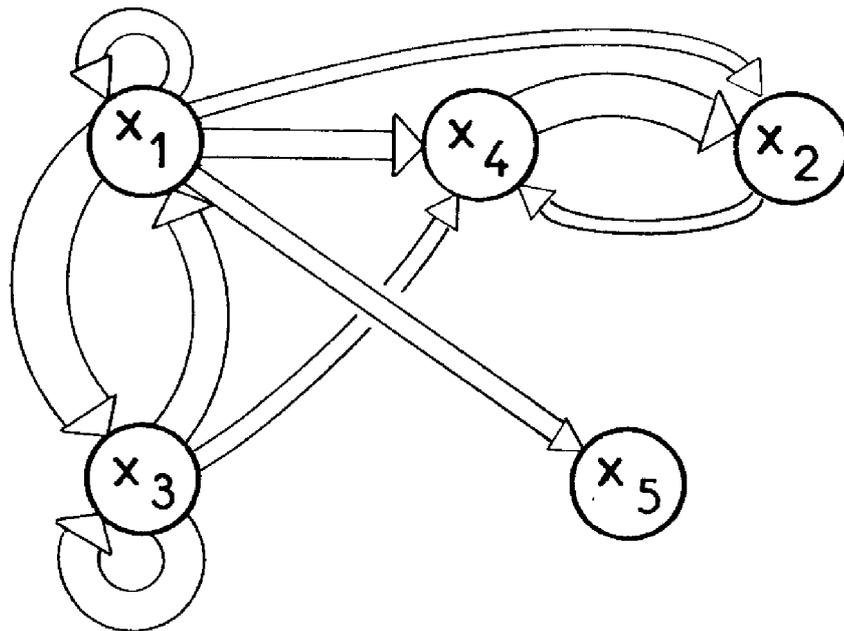


Figure III.10 - Couplages principaux entre les variables.

On note que la variable x_5 a peu d'action sur les autres variables, relativement à l'importance des autres couplages et que sa dynamique est surtout déterminée par la variable x_1 .

Si on recherche par exemple, une décomposition du système en 2 sous-systèmes faiblement couplés de dimensions assez voisines, l'examen de la

figure III.10 suggère la partition $\{S_1, S_2\}$ ainsi définie :

$$S_1 = \{X_1, X_3, X_5\}$$

$$S_2 = \{X_2, X_4\}$$

La relation (33) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I_{DS} &= \sum_{i=1}^5 I(S : X'_i) \\ &= I(S_1 : X'_1) + I(S_1 : X'_3) + I(S_1 : X'_5) + I(S_2 : X'_2) + \\ &\quad + I(S_2 : X'_4) + I_{DEP} \end{aligned}$$

On obtient les résultats suivants :

$$I_{DS} = 5,85$$

$$I(S_1 : X'_1) = 1,24$$

$$I(S_2 : X'_2) = 0,75$$

$$I(S_1 : X'_3) = 1,43$$

$$I(S_2 : X'_4) = 0,25$$

$$I(S_1 : X'_5) = 0,70$$

$$\sum_{i \in S_1} I(S_1 : X'_i) = 3,37$$

$$\sum_{i \in S_2} I(S_2 : X'_i) = 1,00$$

Il vient : $I_{DEP} = 1,48$ et $\frac{I_{DEP}}{I_{DS}} = \frac{1,48}{5,85} \simeq 0,25$

Si on considère la décomposition suivante :

$$S_1 = \{X_1, X_5\}$$

$$S_2 = \{X_2, X_3, X_4\}$$

On obtient :

$$I_{DS} = 5,85$$

$$I(S_1 : X'_1) = 0,48$$

$$I(S_2 : X'_2) = 0,79$$

$$I(S_1 : X'_5) = 0,41$$

$$I(S_2 : X'_3) = 0,81$$

$$I(S_2 : X'_4) = 0,51$$

$$\sum_{i \in S_1} I(S_1 : X'_i) = 0,89$$

$$\sum_{i \in S_2} I(S_2 : X'_i) = 2,11$$

Il vient: $I_{DEP} = 2,85$ et $\frac{I_{DEP}}{I_{DS}} = \frac{2,85}{5,85} \approx 0,49$

La première décomposition est la meilleure et un modèle grossier du système pourra être de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(k+1) = f_1(X_1(k), X_3(k)) \\ X_2(k+1) = f_2(X_2(k), X_4(k)) \\ X_3(k+1) = f_3(X_1(k), X_3(k)) \\ X_4(k+1) = f_4(X_2(k), X_4(k)) \\ X_5(k+1) = f_5(X_1(k)) \end{array} \right.$$

III.5. - CONCLUSION

Ce qui fréquemment caractérise un système complexe est l'impossibilité d'en obtenir un modèle mathématique complet et souvent les seules informations pertinentes dont on dispose, sont des données enregistrées au cours de différents fonctionnements. Lorsqu'un modèle existe, sa dimension est souvent telle que l'analyse des couplages par traitement des équations mathématiques est très difficile et dans de nombreux cas, la simulation sur calculatrices analogiques ou hybrides s'avère indispensable.

Il s'agit donc, à partir de réponses réelles ou simulées, de trouver les relations essentielles de causalité permettant d'expliquer le fonctionnement du système, de dégager la structure de ces relations afin de réaliser une partition en sous-systèmes faiblement couplés.

Notre étude a surtout porté sur les systèmes discrets et ce sont essentiellement les concepts d'entropie, d'information qui ont été utilisés. Nous avons montré qu'ils permettaient l'analyse quantitative de relations, de couplages complexes entre les variables d'un système. L'obtention de deux relations fondamentales ((18) et (33)) de décomposition d'information entre les variables, proposées comme mesures des couplages respectivement statiques et dynamiques dans un système, et la définition de matrices de couplage dont chaque éléments est un coefficient de couplage statique ou dynamique entre deux variables, constituent les résultats importants de cette étude. Une méthode heuristique pour la partition en sous-systèmes faiblement couplés consiste alors à rechercher cette partition par analyse des matrices de couplage statique ou dynamique puis à évaluer, à l'aide de ces relations, les couplages entre les sous-systèmes.

Pour les systèmes continus, de telles relations ne peuvent être obtenues, les notions de corrélation ou de fonctions de corrélation ne portant que sur des couples de variables aléatoires ou de fonctions aléatoires. Si tout système continu peut être discrétisé par discrétisation de l'intervalle de variation de chaque variable, nous avons vu que ceci s'accompagnait d'une perte d'information sur les couplages ; en conséquence, chaque système doit faire l'objet d'une étude particulière sur l'opportunité d'une discrétisation.

La détermination des éléments des matrices de couplages ne nécessite pas de calculs très importants. Ainsi des systèmes de grande dimension peuvent être étudiés. Dans ce cas, la partition du système, à partir de la matrice de couplage, doit faire appel à des méthodes rationnelles, par exemple, de classification automatique [75], graphiques (Cf. IV.3.5)

Enfin nous soulignons que l'analyse structurale d'un système n'est valable que si on dispose d'un ensemble minimal de variables sans lequel nombre de phénomènes ne peuvent être expliqués et sont alors considérés comme des bruits. C'est au cours de la phase de définition de cet ensemble que doivent nécessairement intervenir les spécialistes du processus.



CHAPITRE IV

EXEMPLES DE SYNTHÈSE DE STRUCTURES HIÉRARCHISÉES DE COMMANDE

-



IV.1. - INTRODUCTION

Après avoir développé dans les chapitres II et III des méthodes d'analyse structurale des systèmes, nous présentons dans celui-ci deux exemples de synthèse de structures hiérarchisées de commande.

Le premier exemple concerne la commande hiérarchisée d'une chaîne de fabrication de dispositifs à semi-conducteurs ; le second traite de la synthèse d'une structure hiérarchisée d'optimisation.

Bien que ces études soient de nature différente, on est confronté dans les deux cas, à des problèmes d'analyse de couplages abordés, dans le premier cas, par l'analyse des données, et dans le second, de façon analytique.

Dans le premier exemple, ces travaux sont insérés dans une analyse générale du processus, des objectifs de commande de la chaîne à partir de laquelle une structure hiérarchisée du système de commande est proposée.

IV.2. - COMMANDE HIERARCHISEE D'UNE CHAINE DE FABRICATION DE DISPOSITIFS A SEMI-CONDUCTEURS.

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un collectif de recherche L.A.A.S. sur l'automatisation intégrée de processus complexes de production dont la finalité est la mise en oeuvre d'un ensemble de moyens, d'actions permettant la surveillance et la commande automatique du processus, l'optimisation de certains critères de production, l'adaptation aisée et rapide du système d'exploitation à de nouvelles exigences de production [76, 77].

L'ampleur du projet, la diversité des thèmes particuliers nécessite la collaboration de plusieurs chercheurs et ingénieurs automaticiens de spécialités différentes. Une telle recherche ne peut être valablement entreprise et menée sans un support permettant d'une part de tester dans des conditions réelles de mise en oeuvre, les méthodes et algorithmes de commande développés

par les chercheurs sur des bases théoriques et d'autre part de dégager des axes de recherche.

Le processus complexe étudié est une chaîne de fabrication de dispositifs à semi-conducteurs et les partenaires industriels sont la Radio-Technique Compelec - Caen et la Sescosem - Saint-Egrève.

IV.2.1. - Description d'une chaîne de fabrication

Une chaîne de fabrication de dispositifs à semi-conducteurs est composée de deux parties. La première, la partie physique de la chaîne, comprend toutes les opérations allant de la fabrication ou la réception des lingots (ou des plaquettes) de silicium jusqu'à l'obtention des composants électroniques sur plaquettes. Les propriétés électriques du composant sont pratiquement acquises à l'issue de cette première phase. La seconde, le montage et les tris, concerne l'élaboration de ces composants sous leur forme commercialisée.

La partie physique sur laquelle portent nos travaux comporte de nombreuses opérations technologiques (20 à 50) connectées en série : oxydation, photo-gravure, diffusion, lavage, métallisation..... Chacune des opérations traite un lot de plaques (100 à 300) de silicium, contenant chacune potentiellement de nombreux composants (10 à quelques milliers). L'état du lot peut être en principe contrôlé après chacune des opérations (fig. IV.1), ce qui peut conduire à sa destruction ou éventuellement à son recyclage. Cependant, ces contrôles sont souvent partiels et de qualités variables. Il est à noter aussi la présence de stocks à différents stades de l'élaboration, en particulier entre la partie physique et la partie montage.

Le nombre de variables mis en jeu est très important et les interactions sont nombreuses. Une phase essentielle dans l'étude des systèmes complexes est la définition qualitative de ces interactions. Elle consiste à représenter sous forme d'un graphe la structure du processus afin d'en tirer parti pour son analyse et sa commande (cf. chapitre II).

Un composant électronique est caractérisé à tout instant de sa fabrication par un ensemble de propriétés physiques élémentaires (épaisseur, taux d'impuretés, etc.....). Lors d'une opération, certaines propriétés physiques peuvent être modifiées, d'autres introduites. Les propriétés électriques résultent de l'ensemble des propriétés physiques acquises tout au long de la chaîne dont il devient nécessaire de connaître, qualitativement dans un premier stade,

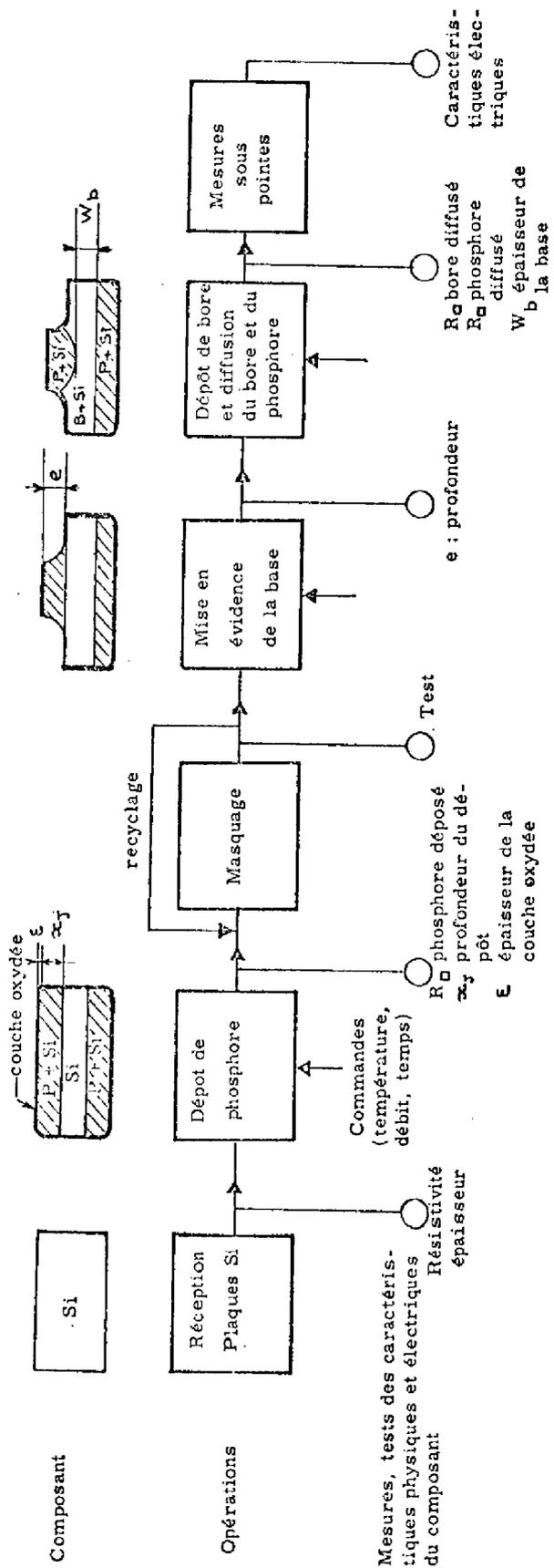


Figure IV.1 - Principales opérations d'une chaîne de fabrication de transistors de puissance.

comment ces dernières sont élaborées, modifiées au cours de la fabrication.

Graphe de la chaîne [76.1]

Il est construit à partir de la représentation schématique des opérations de fabrication (fig. IV.2)

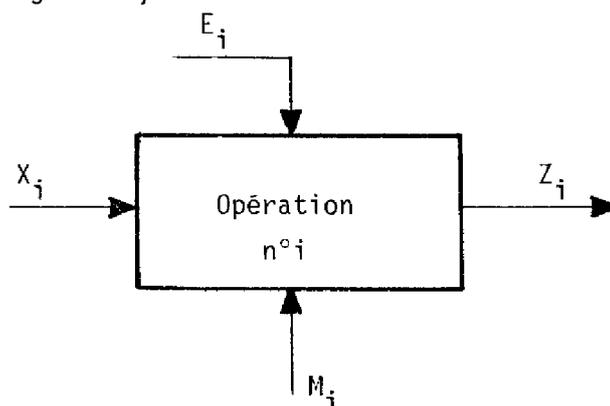


Fig. IV.2 - Schéma d'une opération

X_i = propriétés physiques du composant qui sont modifiées au cours de l'opération n°i

Z_i = propriétés physiques du composant à l'issue de l'opération n°i

E_i = propriétés physiques du composant qui interviennent dans l'élaboration d'autres propriétés physiques mais qui ne sont pas modifiées au cours de l'opération n° i

M_i = variables du processus élémentaire de fabrication associé à l'opération n°i; ce sont soit des consignes soit des commandes.

Les liaisons entre les variables X_i , Z_i , E_i sont définies à partir d'une connaissance initiale du processus de fabrication en partant de la première opération jusqu'à la dernière puisque les opérations sont connectées en série.

Le graphe obtenu visualise les interactions entre les variables (fig. IV.3). Il est complété au fur et à mesure de l'analyse des données expérimentales, c'est-à-dire de l'acquisition de connaissances plus fines sur chaque opération.

Tout au long du graphe, les variables "pendantes" sont les propriétés physiques finales du composant.

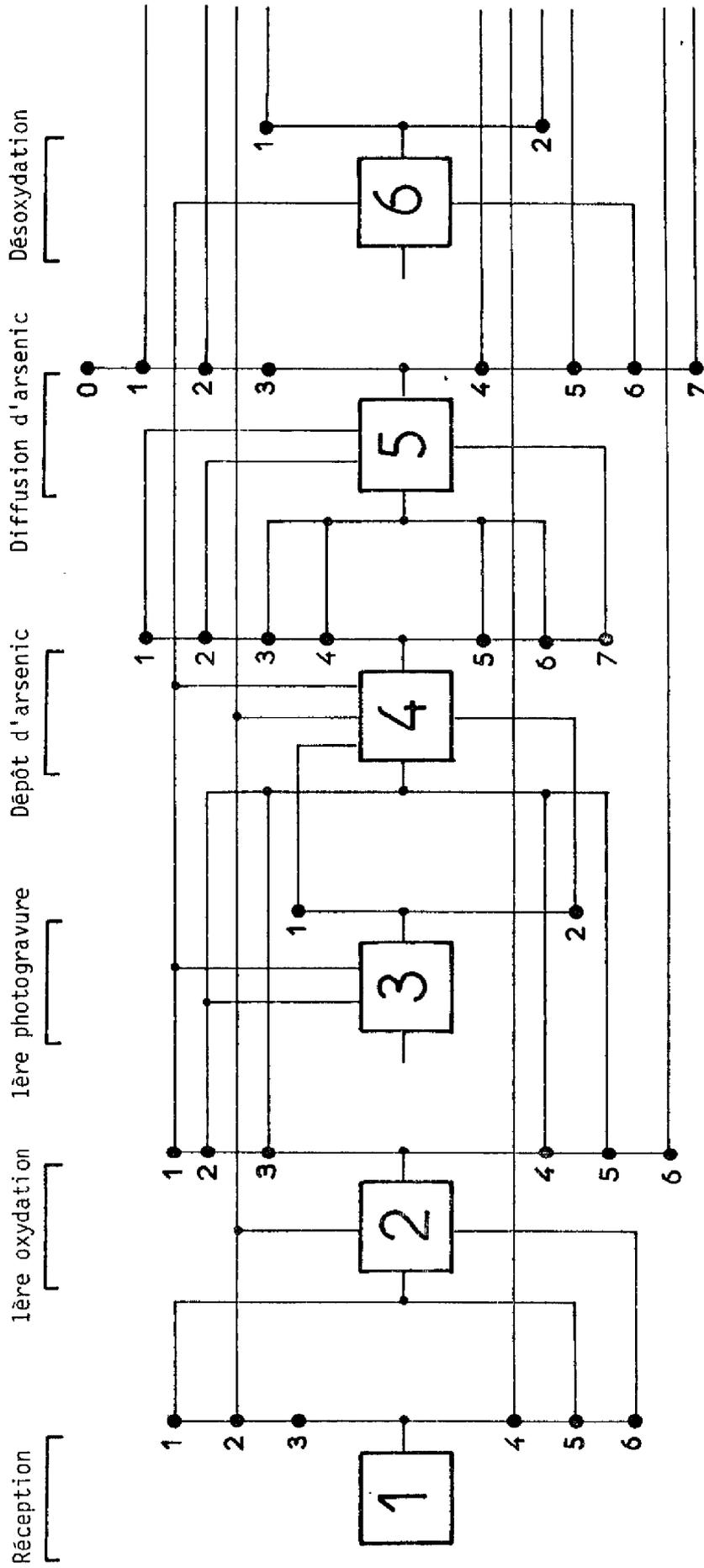


Figure IV.3 - Graphe d'une partie d'une chaîne de fabrication de circuits intégrés.

IV.2.2. - Objectifs de la commande.

La commande d'une chaîne de fabrication n'a pas un objectif unique et le concept de choix multi-critère est ici essentiel [78]. Les composantes principales du multi-critère sont :

- qualité et quantité de produits finis
- coûts de production et de stockage
- conditions de travail.

La difficulté principale au niveau du processus de fabrication (partie physique) est la stabilisation de la qualité de la fabrication. Le rendement est très fluctuant et sa variabilité provient dans une large mesure de la complexité du processus liée autant au nombre de variables mises en jeu qu'à la haute technicité des procédés de fabrication sensibles aux perturbations de diverses natures.

D'autres facteurs tels que la présence de nombreux opérateurs humains, l'utilisation de produits ou de matières premières insuffisamment caractérisés, le vieillissement du matériel technologique, l'inhomogénéité dans le traitement des lots interviennent également dans cette complexité.

En outre, bien que les variables ne soient pas toutes également influentes sur la qualité du composant en fin de fabrication, l'ensemble des variables mesurables est restreint par rapport à l'ensemble total. Les mesures portent essentiellement sur des témoins accompagnant les lots, ces mesures étant destinées à tester soit des opérations particulières soit des groupes d'opérations. L'information sur l'état du processus est donc pauvre a priori.

Toutefois, si les variables mesurées sont très explicatives, en moyenne de la qualité finale du composant, compte tenu de spécifications données, l'information détenue pourra être qualifiée d'essentielle. On note qu'elle le sera d'autant moins que les spécifications sont plus resserrées. En remarquant de plus que la modélisation des composants électroniques complexes obtenue à partir des lois physiques ne se retrouve parfois que très imparfaitement dans la modélisation obtenue à partir de données expérimentales, l'analyse du processus est une fonction primordiale à réaliser afin de préciser les relations entre les variables et les opérations.

Le processus étant incomplètement spécifié, modélisé, la commande de la partie physique va prendre souvent l'aspect de surveillance ce qui diversifie

encore les fonctions de commande.

Une chaîne de fabrication constitue donc un très bon exemple d'un système complexe puisqu'on retrouve toutes les caractéristiques de la complexité (processus de grande dimension - commande multicritère - diversité des fonctions de commande). Ceci conduit à la conception d'un système hiérarchisé de commande.

Les travaux jusqu'ici réalisés ont surtout porté sur la maîtrise des perturbations intervenant dans la qualité des composants. Les études ultérieures devront prendre en compte les autres composantes du multicritère et dans cette optique un schéma général du système de commande a été proposé.

IV.2.3. - Système hiérarchisé de commande [77.1]

Deux niveaux d'influence ont été distingués (fig. IV.4) : le niveau supérieur fixe la politique de production (niveau de management) à partir de données techniques, économiques, sociales et le modèle utilisé de la chaîne est de nature économique.

Sont alors fixés sur un horizon temporel, les critères, les contraintes et les moyens de production qui portent sur les stocks, la planification, la qualité des produits, les machines et les personnels, les coûts de production, etc....

L'objectif du système de surveillance et de commande (S.S.C), placé au deuxième niveau, est de définir les actions à prendre pour que la production (chaîne de fabrication) remplisse les objectifs fixés par le premier niveau. L'identification incomplète de la chaîne dans le stade actuel de la connaissance peut provenir soit d'un manque d'information sur l'état de la chaîne (nombre limité de variables mesurées) soit d'une surabondance d'information ne pouvant être traitée par des moyens humains, et entraîne une régulation aléatoire de la qualité des composants et de ce fait une régulation difficile du volume de production. Le S.S.C. est donc un ensemble de programmes de surveillance, de commande, de recherche opérationnelle, d'aide à la décision destinés à maîtriser les perturbations et leurs effets apparaissant dans la chaîne.

Le S.S.C. doit être un système de dialogue homme-machine car on se place dans l'optique d'une implantation progressive d'une automatisation sur un processus complexe. Il s'agit d'abord d'assister les opérateurs, les analystes, les décideurs dans leurs tâches propres. Au fur et à mesure de l'amélioration du degré de connaissance, certaines de ces tâches peuvent être automatisées

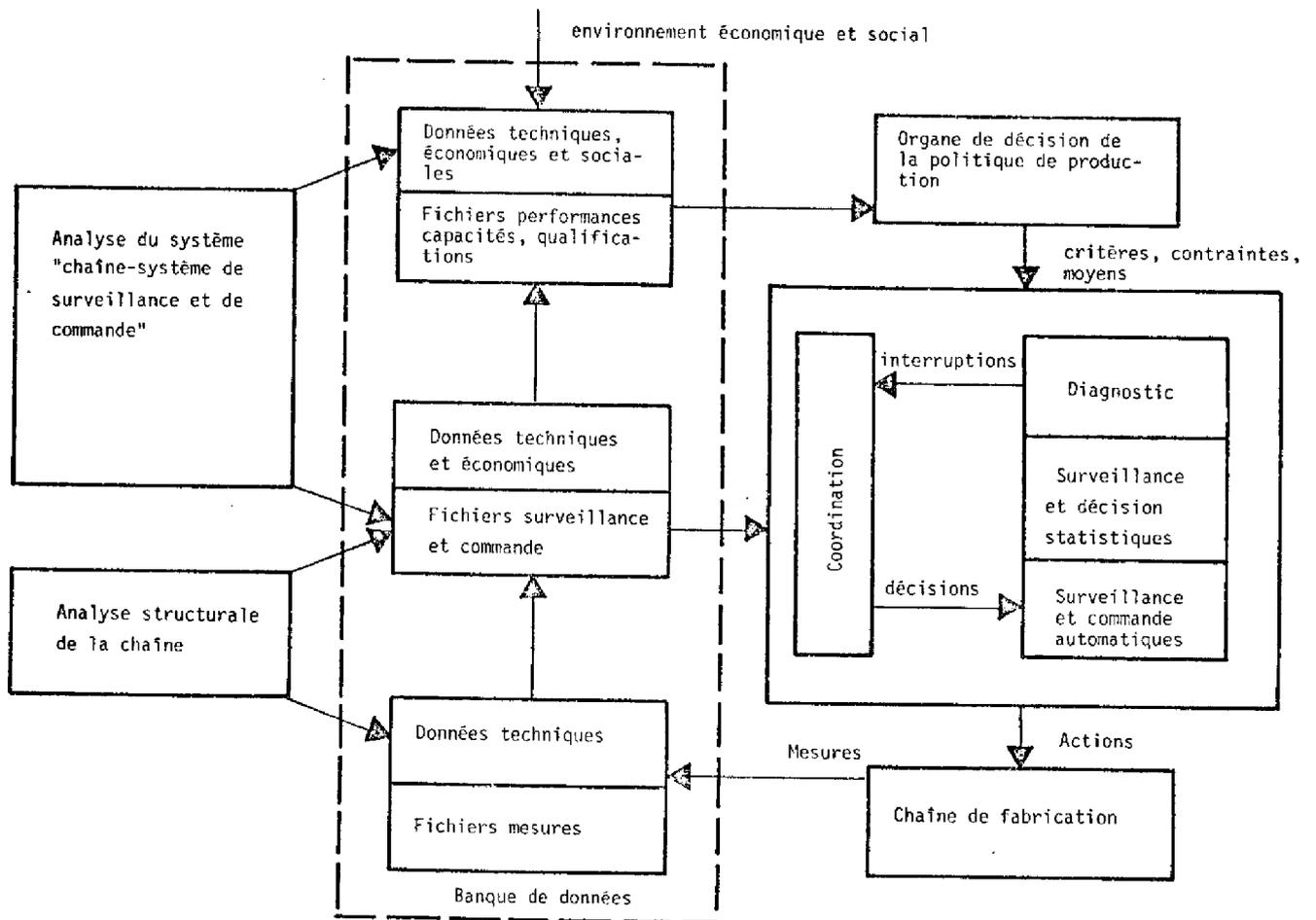


Figure IV.4. - Système hiérarchisé de commande

alors que d'autres pour lesquelles les actes, les décisions sont complexes et non entièrement réalisables par une machine ou un programme continuent d'être en partie traitées par l'homme.

L'objectif du S.S.C. dans le cas de la régulation de la qualité est la maîtrise des variations sur les caractéristiques du produit fini.

Actuellement, la commande en divers points de la chaîne s'effectue d'après des plages de consigne souvent déterminées par l'expérience à cause

de l'identification incomplète de la chaîne. Il en résulte une dispersion importante des caractéristiques. Cette dispersion est également due à des pannes sur les machines, à des variations non mesurées sur d'autres caractéristiques du composant en cours de fabrication.

Ceci conduit à la mise en place d'un S.S.C. comportant des programmes différents suivant l'information dont on dispose sur la chaîne (mesures, modèles) et on distingue trois niveaux de surveillance et de commande :

1) - Surveillance et commande automatique (SCA) [76.III]

Ce mode de commande est classique dans la conduite des processus. Il s'agit essentiellement de régulations, de commandes adaptatives réalisées de manière analogique ou numérique et les exemples sur la chaîne sont nombreux qu'il s'agisse de régulations de température, de débit ou qu'il s'agisse d'automatismes séquentiels.

Ce mode de commande n'est possible que si on possède une information très complète sur le processus à commander (modèle, mesures en temps réel). Après détection d'un écart d'une variable par rapport à une consigne, l'action automatique de correction est localisée.

2) - Surveillance et décision statistiques (SDS)

Lorsque le fonctionnement d'une opération ou d'un groupe d'opérations ne peut être expliqué par des relations fonctionnelles entre les variables mesurées qui sont associées à cette partie de la chaîne (information incomplète), la surveillance se fait alors à partir de données statistiques. Ce fonctionnement peut être caractérisé, par exemple, par un rendement de fabrication au niveau de la qualité des composants. Ce rendement est fonction de plusieurs variables dont on possède des mesures et à un rendement donné ou à une plage de rendement donnée peuvent correspondre des configurations de valeurs des variables différentes (statistiques différentes). A la notion de modèle d'opérations se substitue la notion de familles (ou classes) de lots définis par des données statistiques sur les variables du composant et des opérations.

A un point donné de la chaîne, la décision de rejet, de recyclage ou de corrections ultérieures, connaissant les valeurs des variables déjà mesurées, est fonction des valeurs probables des variables mesurées ultérieurement (par exemple un rendement). Les commandes de correction ne sont donc

pas localisées a priori car elles peuvent porter sur des variables différentes suivant les configurations observées.

Ce mode de surveillance et de commande fait actuellement l'objet de recherches et son importance est justifiée dans le paragraphe IV.2.4.

3) - Diagnostic [76.II, 77.IV]

La présence de ce niveau est rendue nécessaire par l'insuffisance voire l'absence possible d'information dans la banque de données pour la détermination des causes d'un incident de fabrication.

Dans le cas d'un incident répertorié dont on connaît un ensemble de causes possibles (chacune étant affectée d'une probabilité) auquel est associé un ensemble de tests de coûts donnés (matrices logiques tests-causes), on définit un plan d'inspection optimal.

Ce sont donc la qualité et la quantité des informations sur le fonctionnement de la chaîne qui déterminent les modes de surveillance et de commande possibles. Ainsi, plus le nombre de variables mesurées est grand, plus les modèles peuvent être élaborés et plus le degré d'automatisation de la commande croît.

Il faut noter que le coût des actions de surveillance et de commande intervient notablement dans le coût de fabrication et la prépondérance d'un mode de commande est décidée suivant la fréquence des perturbations.

4) - Coordination.

La fonction des organes de surveillance est de générer des interruptions qui doivent être prises en compte, filtrées et analysées par un organe de coordination dont le rôle est de gérer en fonction des objectifs et des contraintes de production l'ensemble des programmes du S.S.C.

Les interruptions peuvent être de natures très diverses (dérive ou sortie de tolérance des caractéristiques des composants, panne sur une machine, etc.....) et peuvent mettre en cause une ou plusieurs opérations. Dans l'état actuel des études sur cette coordination [80], les moyens et méthodes utilisables sont :

- des tables de décision (logique de la coordination)
- un fichier des données de coordination (données relatives aux interruptions passées et aux résultats des décisions associées)
- une analyse de ce fichier devant affecter à chaque interruption un mode de coordination (automatique, semi-automatique, "manuel").

IV.2.4. - Rôle des fonctions d'analyse.

Chaque niveau de commande utilise des fichiers spécifiques de la banque de données : le premier, des fichiers concernant les performances et les capacités des machines, des algorithmes, des personnels, le second, des fichiers contenant outre des mesures, des modèles de la chaîne.

Pour élaborer ces différentes données, il est nécessaire de mettre en place à chaque niveau de commande une fonction analyse.

1) - L'analyse du système "chaîne-SSC"

Les performances de la chaîne de fabrication sont fonction :

- de la qualité des moyens matériels et des personnels au niveau de la fabrication
- de l'information disponible dans la banque des données
- de l'ensemble des moyens de surveillance et de commande mis en place.

Une analyse est alors nécessaire du système "chaîne-SSC" devant réaliser une évaluation de ses performances par rapport aux critères, contraintes et moyens définis par l'organe de décision de la politique de production. Ceci peut conduire :

- soit à une évaluation des efforts à produire quant à l'acquisition de nouvelles données, l'élaboration de nouveaux moyens de surveillance et de commande pour remplir les objectifs. Ainsi c'est à ce niveau d'analyse que des propositions de modifications de la structure du SSC sont faites en fonction principalement de la fréquence des perturbations.

- soit à la mise en cause de ces objectifs et contraintes par suite d'incompatibilités ou d'insuffisances constatées dans les choix (commande multicritère).

L'ensemble des programmes d'analyse constitue un module d'apprentissage s'insérant dans la boucle de commande globale (figure IV.5).

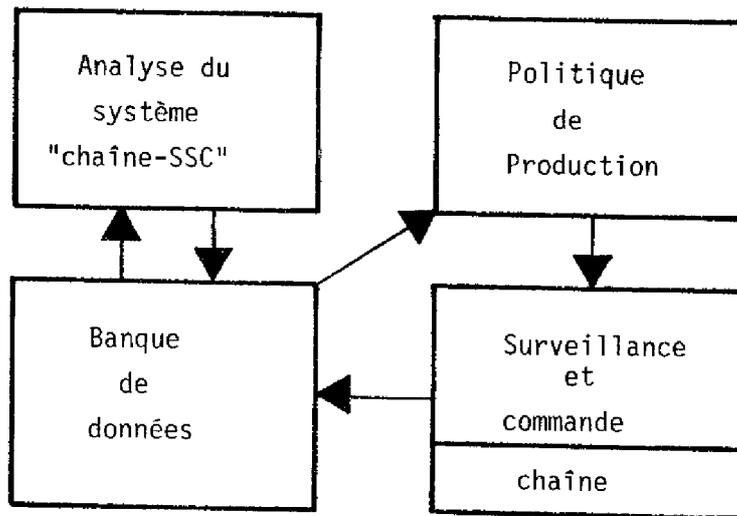


Figure IV.5

2) - Analyse structurale de la chaîne [77.II]

Les trois niveaux du SSC précédemment cités mettent en jeu trois catégories de modèles :

- a) - des relations logiques sont exploitées par les programmes de diagnostic d'incidents répertoriés.
- b) - des dépendances statistiques sont traitées par le niveau SDS.
- c) - des modèles paramètres qui lient des variables mesurées sont à la base des programmes de SCA. Ces modèles sont obtenus à l'aide de techniques de régression ou de filtrage [76.III].

L'analyse structurale a alors pour rôle de mettre en évidence les relations entre les variables mesurées de façon à définir les modèles utilisés par le S.S.C. Ce module d'analyse s'insère également comme module d'appren-

tissage dans une boucle de commande (figure IV.6)

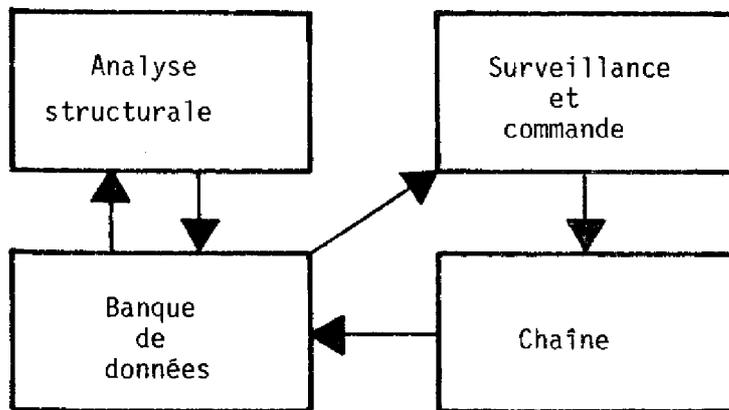


Figure IV.6

Si l'obtention de relations logiques provient de l'analyse du graphe de la chaîne, les modèles b) et c) sont obtenus à partir de l'analyse des données.

La nécessité d'une analyse préalable des données dans un système complexe est justifié par la difficulté de déterminer a priori toutes les variables explicatives d'une variable dépendante. Ceci est particulièrement vrai pour les chaînes de fabrication de semi-conducteurs comme le montre l'exemple suivant :

- On dispose des mesures de 10 variables sur un échantillon de 88 lots (circuits intégrés) couvrant une année de production (tableau IV.7). A partir de considérations théoriques, les relations suivantes entre les 10 variables ont été proposées par les physiciens :

- (1) $\beta = a \frac{R_{\square} \text{emet}}{R_{\square} B} + b R + c$
- (2) $R_{\square} \text{ent} = a R_{\square} \text{émet} + b$
- (3) $R_{\square} B = a R_{\square} \text{épit} + b$
- (4) $\text{Log } BV_{\text{CBO}} = a \text{Log } BV_{\text{CEO}} + b \text{Log } (\beta + 1) + c$
- (5) $BV_{\text{CBO}} = a R_{\square} \text{épit} + b R_{\square} A_s + c$

Un programme de régression a donné les résultats suivants :

Lots	C01 BV CBO	C02 BV CEO	C03 β	C04 R	C05 R_{α} Is	C06 R_{α} ent	C07 R_{α} β	C08 R_{α} emet	C09 R_{α} As	C10 R_{α} épit
1	36.3	11.5	63.5	3.4	47.9	7.4	166.6	3.7	11.4	1756.0
2	35.4	12.2	47.0	3.2	51.1	8.3	153.5	4.0	11.3	2166.0
3	33.9	10.4	51.5	3.3	51.3	5.3	161.4	4.4	11.4	3312.0
4	31.9	11.2	49.5	3.6	44.0	3.4	155.9	4.9	12.0	2263.0
5	37.2	12.5	37.9	3.8	41.4	3.4	171.4	4.3	17.7	1101.9
6	36.5	11.9	53.0	3.6	41.2	5.7	173.4	4.4	11.8	1368.0
7	29.9	9.7	54.5	3.4	74.7	6.3	171.0	4.5	11.3	537.9
8	34.7	12.9	46.0	3.7	42.1	7.4	164.1	5.4	12.0	1770.0
9	33.9	10.5	56.5	3.8	77.3	5.3	173.3	4.9	11.6	1295.0
10	33.3	10.4	52.0	3.5	44.1	4.5	166.0	4.9	11.6	1760.0
11	35.6	11.6	41.5	3.7	40.7	3.5	159.2	5.5	11.4	1734.0
12	40.0	12.8	52.0	4.1	41.0	5.2	166.5	4.7	12.0	2550.0
13	42.5	14.6	52.1	3.2	55.0	8.0	166.7	4.2	10.7	786.0
14	45.0	14.3	55.1	3.4	41.1	5.3	171.0	4.1	11.9	5450.0
15	42.3	13.7	53.0	3.5	54.1	5.2	154.0	4.0	11.0	891.0
16	42.9	12.9	65.0	3.9	50.0	6.9	163.6	4.0	11.0	839.1
17	38.0	14.4	53.0	3.5	56.0	5.6	173.0	4.2	12.2	4530.0
18	42.4	12.7	74.5	3.5	51.4	8.2	163.4	4.2	12.3	4951.0
19	42.0	14.1	39.0	3.0	52.0	3.8	163.3	4.1	11.9	1734.0
20	40.5	13.0	61.5	4.3	51.3	6.5	176.3	4.1	12.0	3647.0
21	41.3	12.2	46.5	3.5	54.3	11.9	168.2	3.8	11.9	5966.0
22	41.4	13.2	79.5	3.2	53.7	9.4	163.0	3.7	12.2	3320.0
23	41.4	13.1	40.5	3.3	53.9	9.1	163.0	3.8	12.2	3320.0
24	34.9	12.1	40.5	3.7	51.7	10.7	174.0	4.1	17.9	2246.0
25	30.1	12.6	51.4	3.2	42.0	6.8	160.3	3.9	12.0	3356.0
26	37.3	11.1	44.4	3.8	50.5	14.8	176.4	4.1	12.0	5588.3
27	35.1	11.3	117.0	4.2	51.2	17.9	192.7	4.9	18.7	2260.3
28	47.1	14.1	50.7	3.8	57.3	8.6	178.8	4.1	15.6	6444.8
29	37.9	12.3	63.0	3.4	51.4	7.6	158.9	3.9	11.8	2344.8
30	35.8	11.4	60.5	3.3	51.2	9.3	155.0	3.9	11.4	2039.5
31	32.3	11.2	113.5	3.4	47.3	14.7	176.2	3.7	11.3	2134.0
32	38.8	12.5	92.3	3.6	54.6	14.9	170.2	3.6	18.3	3730.7
33	34.2	12.3	122.0	3.8	53.3	16.9	196.0	4.3	15.6	3512.5
34	39.2	12.5	62.0	3.1	92.5	6.7	154.4	4.0	15.6	3180.2
35	26.4	10.9	121.0	3.8	53.4	17.1	182.5	4.1	11.5	1934.4
36	39.1	12.1	93.3	3.4	47.3	11.9	165.2	4.0	16.3	2519.7
37	40.6	12.8	172.0	3.3	56.2	4.9	175.4	3.8	16.9	956.0
38	39.1	12.2	66.3	3.1	48.6	6.6	158.7	4.1	16.4	1675.1
39	40.0	12.0	65.7	3.4	44.4	7.9	164.1	3.9	16.0	1311.0
40	37.3	11.7	80.5	2.9	45.9	8.8	160.1	3.9	16.5	6309.0
41	36.9	12.4	76.0	3.2	56.6	10.6	189.1	4.0	15.3	3675.0
42	39.6	12.8	196.0	3.5	57.5	14.1	170.5	3.9	17.1	5102.6
43	38.9	11.2	80.0	3.2	52.3	10.0	171.7	3.9	16.9	1562.0
44	41.7	13.7	71.2	3.3	62.9	7.7	168.7	4.0	18.8	2157.7
45	40.1	12.2	77.0	3.3	47.1	9.8	169.7	3.9	16.2	2047.0
46	42.1	13.7	63.3	3.4	47.5	6.7	156.3	4.0	16.5	1965.2
47	42.7	12.4	74.5	3.4	50.4	8.4	153.4	3.5	17.8	7014.0
48	43.0	13.7	69.0	3.6	47.7	8.4	174.4	4.0	14.8	2331.6
49	36.9	11.9	45.0	4.5	47.0	5.2	167.8	4.0	11.9	5177.0
50	38.6	11.1	95.7	3.4	54.0	10.3	177.6	3.8	11.6	1724.0
51	34.9	11.4	62.4	3.2	49.3	5.2	159.6	4.7	11.7	3970.2
52	34.3	15.1	45.6	3.4	50.7	4.1	154.7	5.5	11.4	7544.5
53	37.5	13.3	79.1	3.3	49.3	6.3	172.1	4.0	15.9	732.0
54	33.0	10.9	46.5	3.4	45.9	7.9	175.6	4.1	15.8	629.2
55	40.2	13.6	51.2	3.3	47.9	6.2	170.9	4.1	16.3	782.7
56	40.5	12.6	79.0	3.3	53.1	5.7	169.0	4.1	16.3	737.1
57	36.6	11.1	69.1	3.3	43.0	4.7	173.9	4.5	11.9	4167.9
58	40.0	10.3	92.0	3.6	52.7	11.8	177.8	3.8	11.5	1243.0
59	38.8	13.2	47.5	3.2	46.7	4.9	159.1	4.4	12.1	1144.0
60	35.9	11.2	92.5	3.2	48.9	10.1	164.4	4.0	12.0	2555.0
61	37.3	12.0	59.5	3.4	47.3	5.9	173.1	4.2	16.4	422.0
62	37.8	12.0	75.0	3.4	55.0	5.2	174.3	4.4	16.3	1722.5
63	39.5	12.1	61.0	3.2	52.0	4.4	170.0	4.8	17.1	415.0
64	35.9	11.6	69.0	3.3	49.2	5.3	174.1	4.7	17.1	425.3
65	39.1	10.7	67.0	3.6	45.8	5.4	184.0	4.3	14.9	3415.9
66	37.3	12.3	53.0	2.9	48.6	3.5	154.8	5.2	15.0	545.0
67	39.5	12.3	73.0	2.2	54.4	5.3	171.1	7.4	17.0	1206.0
68	35.1	11.5	75.5	3.2	52.1	6.7	170.8	4.9	13.8	1404.0
69	34.9	12.1	59.7	3.1	50.6	3.9	164.3	4.9	13.4	1533.0
70	35.1	11.4	54.0	2.3	52.2	4.9	169.9	4.7	13.8	7649.0
71	37.1	11.2	67.5	3.6	49.9	5.6	166.9	4.1	13.6	674.5
72	32.9	10.0	66.0	3.6	47.5	5.1	175.8	4.1	12.8	773.0
73	37.1	10.7	199.0	3.1	52.3	13.8	167.1	4.2	12.7	2077.9
74	32.9	10.7	117.0	3.8	49.7	9.7	184.3	4.5	12.7	2303.5
75	36.9	11.3	76.0	3.0	44.5	5.8	162.4	4.3	12.9	1442.6
76	27.8	10.3	67.0	2.7	47.5	4.8	151.9	5.4	13.0	1057.6
77	12.3	10.6	67.5	3.1	47.6	5.0	164.0	5.1	13.0	2371.9
78	35.6	12.2	63.0	3.2	52.2	4.1	156.4	5.5	14.6	1445.0
79	31.1	10.6	57.0	2.9	44.2	3.8	152.7	4.2	13.0	3942.8
80	36.3	11.7	49.5	2.4	34.0	3.3	155.8	4.2	13.5	5333.0
81	37.6	11.6	61.0	3.7	55.7	4.9	144.0	3.8	13.8	1412.0
82	41.7	13.7	54.5	3.4	53.4	4.2	164.9	4.7	15.0	5948.0
83	40.1	13.5	51.0	3.5	53.0	3.4	150.4	4.9	15.0	5732.0
84	37.4	12.4	38.2	3.4	46.3	3.2	171.1	5.3	15.1	5464.0
85	31.9	9.8	59.9	3.4	40.5	4.1	173.9	4.8	14.9	2874.4
86	37.5	11.9	52.0	3.1	52.4	3.7	182.7	5.9	15.2	4420.0
87	44.4	13.2	45.0	3.0	53.4	2.4	169.0	5.1	14.0	1427.0
88	34.7	12.0	45.7	3.0	53.7	2.6	170.2	5.1	13.9	410.0

Tableau IV.7

- (1) : $a = - 2,58$ ($\sigma_a = \text{écart-type de } a = 613$)
 $b = - 3,3$ ($\sigma_b = 7,5$)
 $c = 147$
 $\tau =$ pourcentage d'explication de l'écart-type initial de la
 variable dépendante = 9 %
- (2) : $a = - 2,8$ ($\sigma_a = 0,5$)
 $b = 19,4$
 $\tau = 11 \%$
- (3) : $a = 8,5 \cdot 10^{-5}$ ($\sigma_a = 50 \cdot 10^{-5}$)
 $b = 169$
 $\tau < 0$
- (4) : $a = 0,65$ ($\sigma_a = 0,08$)
 $b = 0,012$ ($\sigma_b = 0,027$)
 $c = 1,95$
 $\tau = 24 \%$
- (5) : $a = 5,10^{-4}$ ($\sigma_a = 2 \cdot 10^{-4}$)
 $b = 0,40$ ($\sigma_b = 0,16$)
 $c = 30,5$
 $\tau = 5 \%$

L'estimation de a dans la relation (4) a été également faite à l'aide d'un algorithme de filtrage (fig. IV.8). On constate que les relations proposées sont peu vérifiées expérimentalement. Les faibles valeurs de τ signifient que d'autres variables sont explicatives. Ceci est dû à ce qu'en théorie, il est difficile de prendre en compte les nombreuses variables intervenant dans l'élaboration des caractéristiques d'un composant dans les conditions de fabrication industrielle.

Une méthode de recherche systématique de ces variables explicatives est l'analyse des données en composantes principales normées (ACPN) puisque les variables mesurées ici sont continues.

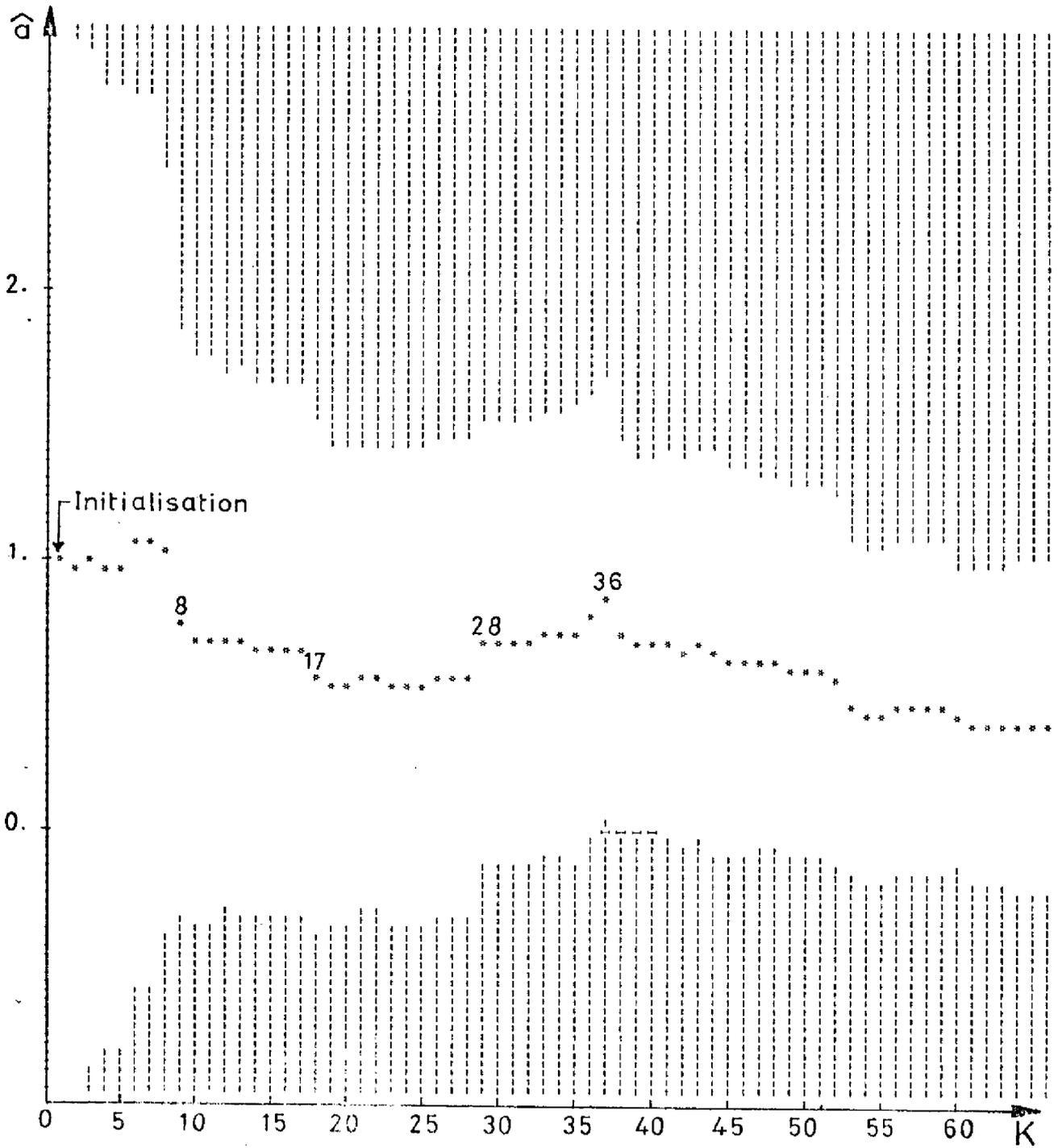


Figure IV.8

Sans entrer dans les détails de cette méthode d'analyse [66,77.II] on rappelle que l'ACPN permet de visualiser les relations entre les variables mesurées (la distance entre deux variables est une fonction du coefficient de corrélation de ces deux variables), les similitudes entre les observations que sont ici les lots, et en représentation simultanée, les relations entre variables et observations.

La figure IV.9 a est le premier plan factoriel relatif aux données du tableau IV.7. Un lot est représenté par un numéro (l'ordre correspond à un ordre de fabrication) et une variable est repérée par un symbole C..(1). A partir de l'examen de ce plan factoriel et de la matrice des corrélations (tableau IV.9 b), 3 sous-ensembles de variables ont été distingués tels que les corrélations de deux variables d'un même sous-ensemble sont plus grandes que les corrélations de deux variables appartenant à 2 sous-ensembles différents.

Ces trois sous-ensembles sont :

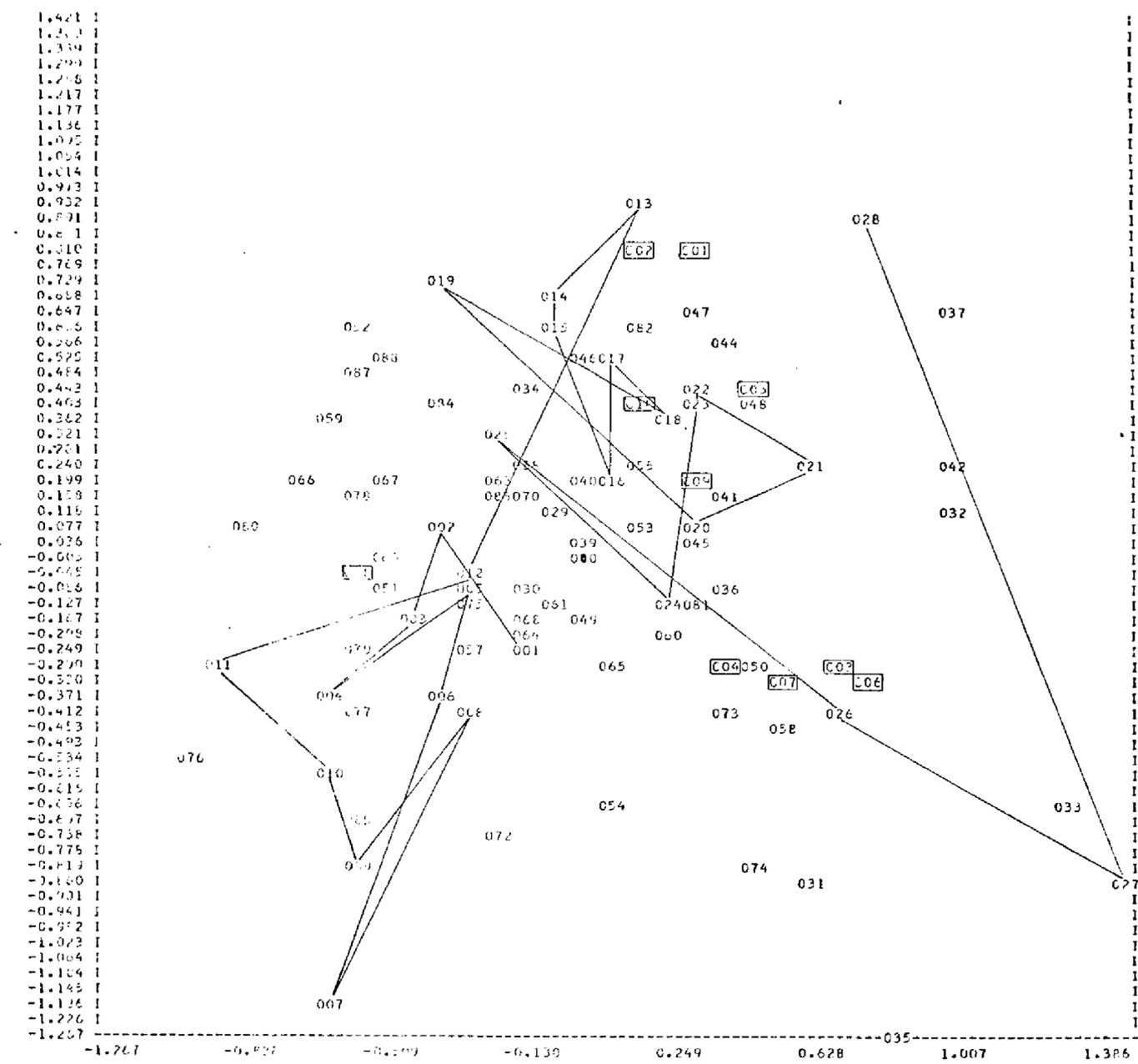
$$\begin{aligned} S_1 &= \{ C01, C02, C05 \} = \{ BV_{CBO}, BV_{CEO}, R_{\square} I_S \} \\ S_2 &= \{ C04, C07 \} = \{ R, R_{\square} B \} \\ S_3 &= \{ C03, C06, C08 \} = \{ \beta, R_{\square} ent, R_{\square} emet \} \end{aligned}$$

Remarque : les variables C09 et C10 n'ont pas été prises en compte car peu corrélées avec les autres variables.

Des relations linéaires entre les variables d'un même sous-ensemble ont été recherchées par régression multiple et se présentent sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 \quad & \begin{cases} BV_{CBO} = 1,80 \quad (\sigma = 0,22) \quad BV_{CEO} + 15,63 \\ \tau = 24 \% \end{cases} \\ & \begin{cases} BV_{CBO} = 1,69 \quad (\sigma = 0,24) \quad BV_{CEO} + 0,09 \quad (\sigma = 0,06) \quad R_{\square} I_S + 12,44 \\ \tau = 24 \% \end{cases} \end{aligned}$$

(1) - la correspondance entre les symboles et les variables est indiquée sur le tableau IV.7.



POINTS MULTIPLES = (100,026) (103,062) (106,043) (101,071)

AXE VALEURS EXTRÊMES 065
 X -0.101725+01 0.173167+01 0.75 0115-01
 Y -0.120717+01 0.227577+00 0.4 07200-01

PLAN 1 AXES 1 --- 2
 POURCENTAGE DE DISPERSION 20.51 20.75
 TOTAL 40.20

Figure IV. 9 a

CORRELATION DES VARIABLES

C01	1.00000											
C02	0.64724	1.00000										
C03	-0.04770	0.00470	1.00000									
C04	0.02635	-0.03744	0.09300	1.00000								
C05	0.22230	0.32559	0.14766	-0.08526	1.00000							
C06	-0.02808	-0.15284	0.74326	0.28613	0.22101	1.00000						
C07	-0.05332	-0.15727	0.30501	0.40217	0.14766	0.33424	1.00000					
C08	-0.24301	-0.07356	-0.32210	-0.10972	-0.11016	-0.08620	-0.04739	1.00000				
C09	0.22354	0.14934	0.19024	-0.07616	0.17422	0.11366	0.22144	-0.04464	1.00000			
C10	0.24379	0.22044	-0.09221	0.04733	0.17540	0.10043	0.01060	-0.07554	-0.08592	1.00000		
	C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10		

Tableau IV. 9 b

$$S_2 \quad \begin{cases} R = 0,017 \quad (\sigma = 0,0033) \quad R_{\square B} + 0,49 \\ \tau = 10\% \end{cases}$$

$$S_3 \quad \begin{cases} \beta = 4,56 \quad (\sigma = 0,51) \quad R_{\square \text{ent}} + 36,77 \\ \tau = 28\% \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 4,59 \quad (\sigma = 0,59) \quad R_{\square \text{ent}} + 0,41 \quad (\sigma = 3,44) \quad R_{\square \text{émet}} + 34,72 \\ \tau = 27\% \end{cases}$$

Si les résultats ci-dessus sont dans l'ensemble plus satisfaisants que ceux obtenus sans l'aide de l'ACPN, les modèles ainsi dégagés ne permettent pas d'expliquer toutes les variations des variables et les estimations de paramètres sont assez imprécises, ce d'autant plus que la dimension des modèles croît ; les causes peuvent être multiples : approximations linéaires des relations liant les variables non valides, absence de mesures ou de prises en compte de variables certainement explicatives et couplages faibles mais effectifs entre plusieurs variables entraînant la non-satisfaction des hypothèses concernant les bruits résiduels dans les modèles linéaires recherchés par régression multiple.

Afin de mieux évaluer l'importance de ces couplages, on a complété l'analyse des données de la chaîne en utilisant les méthodes proposées dans le chapitre III basées sur les concepts de la théorie de l'information.

- Rappelons que pour un ensemble de N variables $\{X_1, \dots, X_N\}$ la matrice de couplage M est définie par :

$$M (N \times N) = [m_{ij}] \quad m_{ij} = \frac{I(X_i : X_j)}{\sqrt{H(X_i) \cdot H(X_j)}}$$

et que l'identité fondamentale permettant de mesurer les couplages entre des sous-ensembles de variables est :

$$I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) = \sum_{i=1}^L I(S_i) + I(S_1 : S_2 : \dots : S_L)$$

$$\{S_1, S_2, \dots, S_L\} = \text{partition de l'ensemble } \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

a) - les 10 variables mesurées étant continues, on discrétise l'intervalle des valeurs des variables qui sont au préalable, réduites et centrées. Le choix du nombre de classes et de la largeur de ces classes est un problème

délicat souvent résolu empiriquement. Compte tenu du nombre d'observations disponibles (88), on a choisi 10 classes pour chaque variable réparties symétriquement autour de la moyenne et deux largeurs l de classe : $l = 0,6$ et $l = 0,5$.

Les fréquences dans les classes sont indiquées dans les tableaux IV.10a ($l = 0,6$) et IV.10 b ($l = 0,5$).

Les matrices de couplage (symétriques) M_1 et M_2 correspondant à ces deux discrétisations, apparaissent respectivement dans les tableaux IV.11 a et IV.11b.

On constate que les valeurs maximales et minimales des coefficients de ces matrices sont respectivement plus faibles et plus fortes que celles, en valeur absolue, des coefficients de la matrice des corrélations (tableau IV.9 b)

b) Les coefficients les plus élevés des matrices M_1 et M_2 sont :

$$m(C03, C06) = 0,378 \text{ et } 0,374$$

$$m(C01, C02) = 0,340 \text{ et } 0,303$$

$$m(C06, C08) = 0,267 \text{ et } 0,263$$

$$m(C04, C07) = 0,235 \text{ et } 0,286$$

Ces résultats sont tout à fait semblables à ceux concernant la matrice des corrélations.

$$\begin{aligned} |\rho(C03, C06)| &= 0,693 \\ |\rho(C01, C02)| &= 0,647 \\ |\rho(C06, C08)| &= 0,486 \\ |\rho(C04, C07)| &= 0,482 \end{aligned}$$

Cependant, si à partir de la matrice des corrélations on a pu distinguer 3 sous-ensembles de variables faiblement couplés au sens précisé plus haut, il n'en est pas de même avec les matrices M_1 et M_2 , la dispersion de leurs éléments étant faible. A l'examen de ces matrices, il apparaît qu'il existe des couplages entre toutes les variables.

En effet si on considère comme précédemment les 8 premières variables $C01, C02 \dots C08$ et la partition qui a été proposée $\{S_1, S_2, S_3\}$ avec $S_1 = \{C01, C02, C05\}$, $S_2 = \{C04, C07\}$, $S_3 = \{C03, C06, C08\}$, on a les résultats suivants :

Classes variables	variable réduite centrée									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C01	2	1	8	10	25	18	14	8	1	1
C02	0	2	7	16	20	22	13	5	2	1
C03	0	0	8	19	27	16	10	2	5	1
C04	0	2	7	19	28	7	13	8	1	1
C05	3	2	6	5	22	25	18	7	0	0
C06	0	0	2	24	28	14	9	3	5	3
C07	0	2	8	15	16	26	12	6	1	2
C08	0	0	2	30	24	12	9	7	3	1
C09	0	0	3	33	14	10	15	9	4	0
C10	0	0	2	26	28	11	6	9	3	3

Tableau IV.10 a ($l = 0,6$)

Classes variables	variable réduite centrée									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C01	3	3	8	8	24	15	12	13	0	2
C02	0	3	9	18	15	20	8	10	3	2
C03	0	1	9	19	25	15	7	4	3	5
C04	1	4	4	19	28	7	13	7	1	4
C05	3	7	3	6	19	19	21	7	3	0
C06	0	0	9	29	16	13	10	3	2	6
C07	1	4	12	11	13	22	14	3	6	2
C08	0	0	5	27	24	7	13	5	5	2
C09	0	0	14	25	11	8	9	14	4	3
C10	0	0	12	25	19	10	6	6	6	4

Tableau IV.10 b ($l = 0,5$)

	C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10
C01	1,0									
C02	0,340	1,0								
C03	0,177	0,216	1,0							
C04	0,197	0,166	0,178	1,0						
C05	0,204	0,205	0,148	0,204	1,0					
C06	0,179	0,149	0,378	0,164	0,139	1,0				
C07	0,197	0,178	0,198	0,235	0,183	0,191	1,0			
C08	0,154	0,204	0,158	0,160	0,167	0,267	0,174	1,0		
C09	0,180	0,192	0,208	0,192	0,155	0,199	0,182	0,191	1,0	
C10	0,147	0,176	0,164	0,169	0,151	0,189	0,157	0,145	0,206	1,0

Tableau IV-11 a - M_1

	C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10
C01	1,0									
C02	0,303	1,0								
C03	0,204	0,177	1,0							
C04	0,213	0,200	0,222	1,0						
C05	0,187	0,204	0,178	0,224	1,0					
C06	0,146	0,164	0,374	0,171	0,146	1,0				
C07	0,211	0,207	0,196	0,286	0,180	0,196	1,0			
C08	0,206	0,155	0,199	0,204	0,156	0,263	0,141	1,0		
C09	0,184	0,215	0,195	0,209	0,181	0,199	0,201	0,218	1,0	
C10	0,161	0,203	0,155	0,203	0,219	0,217	0,187	0,149	0,224	1,0

Tableau IV-11 b - M_2

- pour $l = 0,6$:

$$\begin{aligned} I(C01 : C02 : \dots : C08) &= I(C01 : C02 : C05) + I(C04 : C07) + \\ &+ I(C03 : C06 : C08) + \\ &+ I(\underline{(C01, C02, C05) : (C04, C07) : (C03, C06, C08)}) \\ &= 1,511 + 0,438 + 1,387 + \underline{6,612} = 9,948 \end{aligned}$$

$$\frac{I(S_1 : S_2 : S_3)}{I(C01 : C02 : \dots : C08)} = 0,66$$

- pour $l = 0,5$

$$I(C01 : C02 : \dots : C08) = 1,624 + 0,562 + 1,558 + \underline{7,079} = 10,823$$

$$\frac{I(S_1 : S_2 : S_3)}{I(C01 : C02 : \dots : C08)} = 0,65$$

On vérifie ainsi que les couplages entre les sous-ensembles de variables sont importants-couplages certainement non-linéaires - et ceci explique en partie l'insuccès relatif obtenu lors de la recherche de relations linéaires.

On vérifie également, comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe III.3, que le coefficient $m_{ij} = \frac{I(X_i : X_j)}{\sqrt{H(X_i) H(X_j)}}$ est plus général que le coefficient de corrélation puisqu'il permet de mesurer des couplages non-linéaires. Toutefois les résultats obtenus sont dépendants de la discrétisation choisie. Dans le cas présent, les deux discrétisations donnent des résultats similaires.

La poursuite de l'effort de modélisation impliquant la recherche de relations non-linéaires liant plusieurs variables, on constatera les grandes difficultés rencontrées dans la modélisation d'un nombre important d'opérations.

La commande automatique qui, pour être efficace demande en général un modèle assez précis du système à commander, n'est alors envisageable que pour des opérations simples plus facilement modélisables. L'approche probabiliste pour la surveillance et la commande de la chaîne devient nécessaire et les résultats de l'ACPN peuvent être utiles dans la mesure où les premiers plans factoriels, dans la représentation simultanée font apparaître les relations causales essentielles entre les variables et les observations.

Ainsi, dans le plan factoriel représenté par la figure IV.9 a, on peut suivre a posteriori la fabrication (lignes joignant les points-observations) et déceler certaines dérives de la chaîne caractérisées par des localisations de points-observations consécutifs dans des zones du plan factoriel, et correspondant à des variations importantes de certaines variables (lots 1-12 : faibles valeurs des variables 3 et 6 notamment, lots 13-23 : fortes valeurs des variables 1 et 2 etc....)

Des recherches sur une description statistique de la chaîne comme celle évoquée dans le paragraphe IV.2.3.2. en vue de la surveillance et de la commande doivent être développées afin d'accroître les moyens de maîtrise des caractéristiques des composants.

°
° °

Les études jusqu'ici réalisées ont permis de dégager une structure pour le système de commande d'une chaîne de fabrication fondée principalement sur la décomposition de la commande (niveaux d'influence = politique de production, surveillance et commande ; niveaux fonctionnels = analyse, commande directe).

La diversité des programmes du SSC pour la maîtrise de la qualité des composants est rendue nécessaire par la nature et la qualité des informations sur la chaîne. Un des résultats importants concerne l'analyse structurale par les données dont on a montré le rôle essentiel dans la modélisation de la chaîne. L'utilisation conjointe de l'ACPN et des concepts d'information a permis l'analyse des couplages entre les variables en vue de l'obtention de modèles, et de mettre en évidence la difficulté sinon l'impossibilité d'obtenir avec les mesures actuellement faites, des modèles utilisables efficacement pour la commande automatique, ce dernier résultat impliquant le développement de méthodes probabilistes pour la surveillance et la commande de la chaîne.

D'autres travaux restent à entreprendre pour que le système hiérarchisé de commande réalise efficacement une automatisation intégrée. Ils doivent porter en particulier sur l'analyse et la commande multicritères, sur l'intégration dans le SSC de programmes de gestion de production (ordonnancement, gestion de stocks), sur la coordination des programmes du SSC.

IV.3. - SYNTHESE D'UNE STRUCTURE HIERARCHISEE D'OPTIMISATION [81, 82]

La décomposition des algorithmes d'optimisation est basée sur la partition du système en sous-systèmes interconnectés (cf. I.2.3). La plupart des travaux dans ce domaine ont porté sur les structures à deux niveaux [4, 17, 18, 63] (fig. I.6-I.8). Les différents sous-problèmes d'optimisation sont coordonnés par des variables dites de coordination dont la nature dépend de la méthode de coordination choisie (admissible, non-admissible, mixte). Cependant dans tous les cas, ces variables sont définies à partir des équations de couplage des sous-systèmes.

Pour les systèmes de grande dimension, le nombre de variables de coordination, peut être très élevé et une structure à plusieurs niveaux est nécessaire si des contraintes sont introduites sur les capacités de calcul des coordonnateurs, sur les capacités des voies de transmission entre les niveaux, sur les temps de coordination. On réalise ainsi une décomposition du problème de coordination conjointement à une décomposition du problème d'optimisation.

Plusieurs structures sont alors admissibles et afin de guider leur synthèse, dans les paragraphes suivants, on étudie la décomposition des équations de couplage, la généralisation de méthodes de coordination et on analyse l'influence des interactions entre les sous-systèmes sur le transfert d'information entre les niveaux et sur la convergence des algorithmes de coordination lorsque les couplages sont linéaires.

IV.3.1. - Graphe de la structure du système

Afin de réaliser par la suite cette synthèse, on définit à partir des équations de couplage, le graphe de la structure du système.

Considérons un système composé de N sous-systèmes (Cf fig. I.5) interconnectés par les équations suivantes :

$$X_i = H_i(Z_1, \dots, Z_N) \quad i = \overline{1, N} \quad (1)$$

$$X_i \in R^{X_i}; \quad Z_i \in R^{Z_i}$$

Soit le graphe $G=(S, U)$ ($|S| = N$) tel que :

$$u_{ij} \in U \text{ ssi } X_j = H_j(\dots, Z_{i-1}, Z_i, Z_{i+1}, \dots)$$

Si à chaque sommet s_i de G correspond un sous-système i , G est une représentation graphique des interconnexions entre les sous-systèmes : G est appelé graphe de la structure du système.

Exemple IV.1

$$x_i = z_i = 1 \quad i = \overline{1, N}$$

$$X_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} Z_j \quad (i \neq j)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

Le graphe correspondant est celui de la figure IV.12

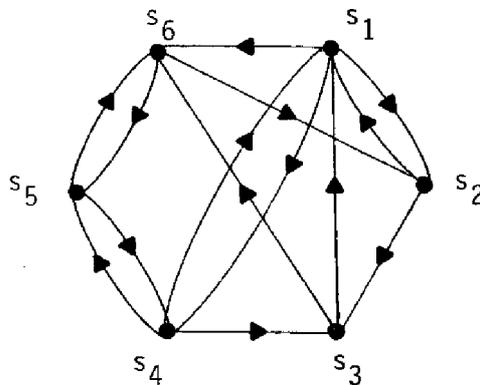


Figure IV.12

De plus on affecte à chaque arc u_{ij} un poids p_{ij} dont la valeur est définie dans les paragraphes suivants selon les cas d'utilisation du graphe.

On appelle partition du graphe en sous-graphes, l'ensemble des sous-graphes associés à une partition de S .

IV.3.2. - Décomposition des équations de couplage.

Dans une structure à plusieurs niveaux, chaque coordonnateur traite les interactions entre des groupes de sous-systèmes. Un coordonnateur "contrôle" un nombre d'autant plus grand de sous-systèmes qu'il est placé haut dans la hiérarchie. Ainsi si $n_v = 2$ (fig. IV.13), le coordonnateur du $v^{\text{ème}}$ niveau traite les interactions entre 2 groupes de sous-systèmes.

A la décomposition de la coordination correspond une décomposition des équations de couplage qu'on suppose linéaires :

$$x_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} z_j \quad (3)$$

Soit I l'ensemble des numéros des N sous-systèmes. A chaque niveau coordonnateur, on associe une partition de I d'autant plus fine que ce niveau est plus bas dans la hiérarchie et qui décrit la répartition des sous-systèmes dans les groupes.

Supposons que $v = 2$.

2ème niveau coordonnateur : $I^{v+1} = I^3 = \{I\}$

1er niveau coordonnateur : $I^2 = \{P_1^2, \dots, P_{n_2}^2\}$

(n_2 = nombre de coordonnateurs au premier niveau)

Les équations de couplage (3) s'écrivent alors :

$$x_i = \sum_j c_{ij} z_j + \sum_k v_{ik}^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall i \in I \\ \forall j, j \in P_r^2 \text{ si } i \in P_r^2 \\ \forall k (k \neq r \text{ si } i \in P_r^2) \in \{1, \dots, n_2\} \end{cases} \quad (4)$$

$$v_{ik}^2 = \sum_{j \in P_k^2} c_{ij} z_j \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall i \in I \\ \forall k (k \neq r \text{ si } i \in P_r^2) \in \{1, \dots, n_2\} \end{cases} \quad (5)$$

Pour v quelconque, la décomposition des équations de couplage est réalisée à partir des différentes partitions.

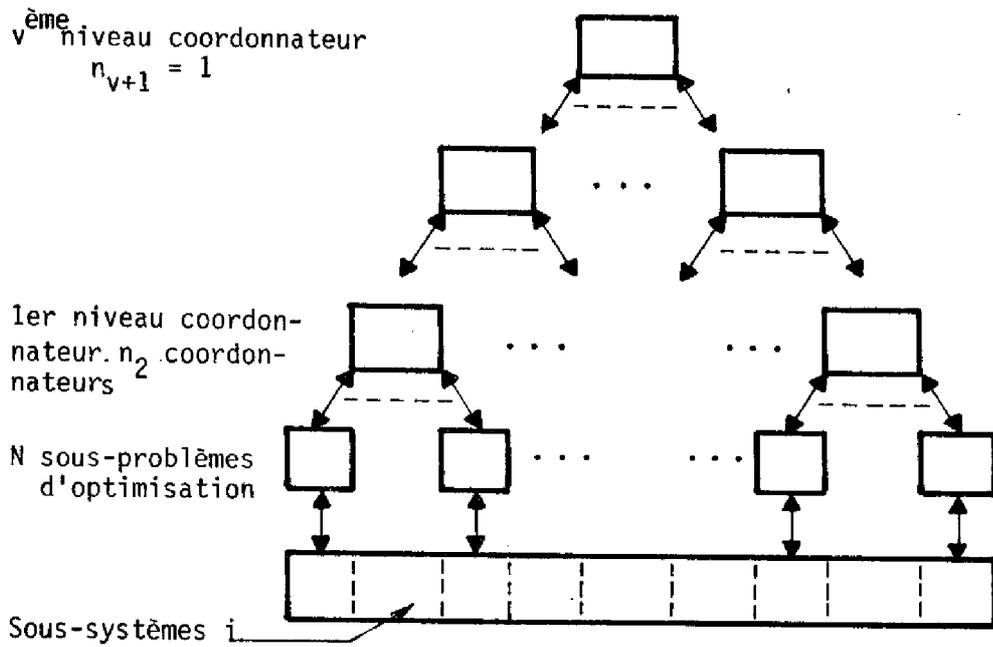


Figure IV.13 - Structure hiérarchisée d'optimisation

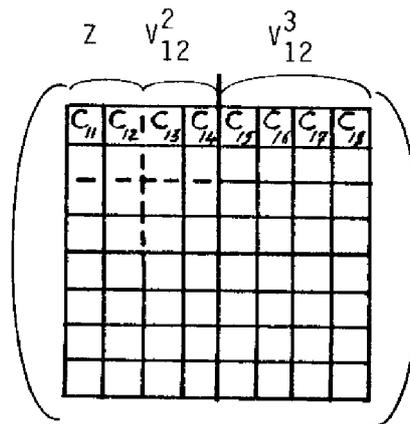


Figure IV.14 - Partition de la matrice de couplage C

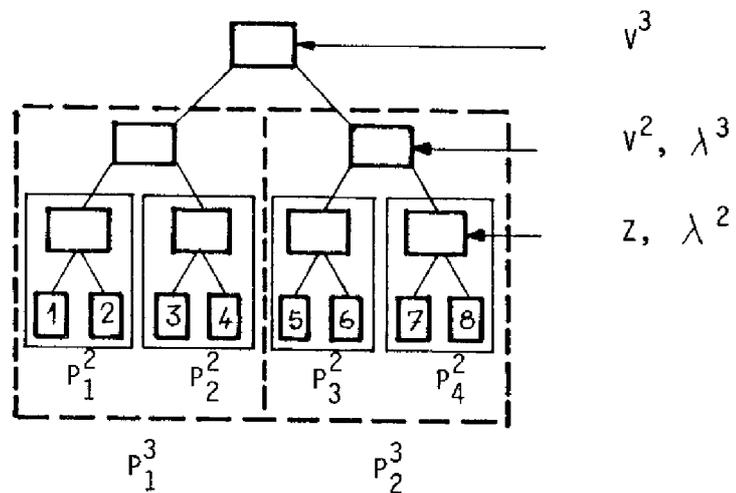


Figure IV.15

Exemple IV.2

$$N = 8 ; v = 3 ; n_2 = 4 ; n_3 = 2 ; i = 1$$

$$I^2 = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\} ; I^3 = \{(1,2,3,4), (5,6,7,8)\}$$

$$X_1 = \sum_{j=1}^2 C_{1j} Z_j + V_{12}^2 + V_{12}^3$$

$$V_{12}^2 = C_{13} Z_3 + C_{14} Z_4$$

$$V_{13}^3 = C_{15} Z_5 + C_{16} Z_6 + C_{17} Z_7 + C_{18} Z_8$$

Schématiquement (fig. IV.14), cette décomposition correspond à des partitions successives de la matrice de couplage C. La structure hiérarchisée correspondante est représentée par la figure IV.15.

Dans le cas général, V_{ab}^C est le vecteur entrée de couplage du sous-système a provenant d'un groupe de sous-systèmes b correspondant à une partie de la partition I^C .

Méthodes de coordination.

L'utilisation de méthodes de coordination (par le critère, par le modèle, mixte) dans les structures à deux niveaux est soumise à des conditions d'application dont l'étude a été faite par TITLI [4], qui portent sur les dimensions des vecteurs d'entrée, de sortie, de commande de chaque sous-système. La généralisation de ces méthodes pour les structures à plusieurs niveaux apporte des résultats supplémentaires sur leur validité.

On considère un système statique pour lequel chaque sous-système a un modèle de la forme : $Z_i = T_i (X_i, M_i)$

Le critère global d'optimisation est additif et séparable : $\min F = \min \sum_{i=1}^N f_i (X_i, M_i)$. Compte tenu des contraintes de type (4) et (5), le

Lagrangien s'écrit :

$$L = \sum_{i=1}^N \left[f_i (X_i, M_i) + \mu_i^T (Z_i - T_i (X_i, M_i)) + \rho_i^T (X_i - \sum_j C_{ij} Z_j - \sum_k V_{ik}^2 - \sum_l V_{il}^3 \dots) + \sum_k \lambda_{ik}^2 (V_{ik}^2 - \sum_j C_{ij} Z_j) + \sum_l \lambda_{il}^3 (V_{il}^3 - \sum_j C_{ij} Z_j) + \dots \right] \quad (6)$$

Par analogie avec la méthode de coordination admissible, supposons que Z , V_{ik}^2 , V_{jl}^3 soient calculés respectivement au 1^{er}, 2nd, 3^{ème} niveaux coordonnateurs.

On peut voir aisément dans la relation (6) que cela ne suffit pas à donner au Lagrangien une forme séparable additive dans le cas où l'information circule verticalement. Il faut en plus avoir fixés les λ_{ab}^c pour pouvoir répartir les termes de couplage, liés aux équations (6), dans les groupes de sous-systèmes adéquats.

Si λ_{ab}^c est calculé à l'aide d'un algorithme de type gradient,

$\lambda_{ab}^c(k+1) = \lambda_{ab}^c(k) + M \frac{\partial L}{\partial \lambda_{ab}^c}$; $M > 0$; $\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ab}^c} = V_{ab}^c - \sum_j C_{ij} Z_j$, le coordonnateur qui calcule λ_{ab}^c doit donc connaître les variables Z_j intervenant dans $\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ab}^c}$; ceci détermine le niveau coordonnateur le plus bas où peuvent être calculés les λ_{ab}^c (voir fig. IV.13 pour l'exemple IV.2).

Dès lors, toutes les équations de couplage ne sont satisfaites que lorsque tous les niveaux coordonnateurs, sauf le dernier, ont convergé. Il n'y a donc pas de méthode de coordination admissible pour une optimisation à plusieurs niveaux ($v > 1$).

- De plus V_{ab}^c et λ_{ab}^c peuvent être simultanément calculés au c^{ème} niveau de coordination. Dans ce cas, ceci conduit à la méthode de coordination mixte [84] qui utilise les conditions de stationnarité du Lagrangien par rapport à V_{ab}^c et λ_{ab}^c :

$$\frac{\partial L}{\partial V_{ab}^c} = \lambda_{ab}^c - \rho_a = 0 ; \frac{\partial L}{\partial \lambda_{ab}^c} = V_{ab}^c - \sum_j C_{ij} Z_j \quad (7)$$

Ces relations permettent le calcul de V_{ab}^c et λ_{ab}^c pour ρ_a et Z_j donnés.

Ainsi à tout v^{ème} niveau coordonnateur ($v > 1$), on peut mettre en oeuvre un algorithme à itération directe [83].

IV.3.3. - Transfert d'information entre les niveaux.

L'optimisation à deux niveaux implique une décomposition du problème global d'optimisation en N sous-problèmes. Dans les structures à plusieurs niveaux, développées ici, il y a à la fois décomposition de l'optimisation et de la coordination. L'intérêt majeur de ces structures réside dans le fait qu'on diminue l'échange d'information entre niveaux et les volumes de calcul à effectuer à chaque niveau, ceci en dépit de l'accroissement du nombre total de variables du système.

En effet, soient par exemple deux structures hiérarchisées CH1 ($v_1 = 1$) et CH2 ($v_2=2$) pour lesquelles on met en oeuvre une méthode mixte de coordination. Les figures IV.16 a et IV.16 b visualisent les transferts d'information entre niveaux.

Dans la structure CH1, le nombre de variables

$$1^\circ) \text{ à transférer entre les 2 niveaux est : } VT1 = \sum_{i=1}^N 2(z_i + x_i)$$

$$2^\circ) \text{ à calculer au niveau coordonnateur est : } VC1 = \sum_{i=1}^N (z_i + x_i)$$

Dans la structure CH2, au 1er niveau de coordination, pour le jème coordonnateur ($j = \overline{1, n_2}$)

$$VT2_j = \sum_i 2(z_i + x_i) \quad i \in P_j^2$$

$$VC2_j = \sum_i (z_i + x_i)$$

Il est évident que :

$$\begin{cases} VT1 > VT2_j \\ VC1 > VC2_j \end{cases} \quad \forall j = \overline{1, n_2}$$

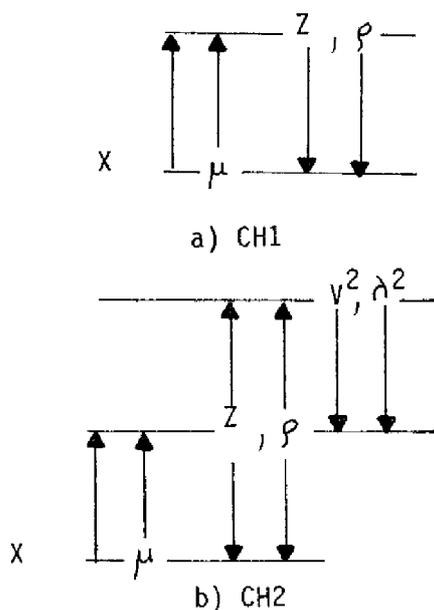


Fig. IV.16

Les autres transferts d'information concernent V_{ab}^c et λ_{ab}^c . En général pour N grand, la matrice de couplage C est creuse et le nombre de composantes identiquement nulles de V_{ab}^c et λ_{ab}^c peut être important mais dépend de la partition correspondante de la matrice C.

Partition de la matrice de couplage.

Soit p_{ij} le poids de l'arc u_{ij} du graphe de la structure du système. On pose :

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^{Z_j} p_{ij}^l \quad \text{avec} \begin{cases} p_{ij}^l = 0 & \text{si la colonne } l \text{ de la matrice } C_{ji} \text{ est nulle.} \\ p_{ij}^l = 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

p_{ij} est le nombre total de composantes de Z_j qui interviennent dans X_i . Considérons la structure CH2 (fig. IV.16 b). Trouver une partition du système en n_2 groupes de sous-systèmes qui minimise le nombre de Z_j transférés du 1^{er} niveau au second, revient à trouver une partition du graphe G en n_2 sous-graphes telle que la somme des arcs reliant ces sous-graphes soit minimale. Si la matrice C est très creuse, ceci peut conduire à une partielle minimisation du nombre de composantes non nulles des vecteurs V_{ab}^2 . Cette dernière

minimisation est meilleure si on pose, compte tenu de la forme de l'équation (4) :

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^{x_j} p_{ij}^l \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_{ij}^l = 0 & \text{si la ligne } l \text{ de la matrice } C_{ji} \text{ est} \\ & \text{nulle.} \\ p_{ij}^l = 1 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Les partitions successives de la matrice de couplage satisfaisant certains critères pour le transfert d'information entre niveaux, peuvent être alors réalisés à l'aide du graphe de la structure du système (cf. § IV.3.5.)

IV.3.4. - Convergence de la coordination

Dans ce paragraphe, on étudie l'influence des interactions sur la convergence de la coordination dont l'importance a été mentionnée très tôt par SPRAGUE [36].

Supposons que : $v = 2$, $n_2 = 2$ Notons V et λ les variables de coordination au second niveau coordonnateur (méthode mixte) et Z, X, M, ρ, μ les autres variables du problème d'optimisation. La valeur optimale d'une variable est notée $*$.

Pour le calcul de V et λ , on utilise un algorithme à itération directe dont on étudie la convergence.

D'après (7) :

$$\begin{aligned} V &= V(Z) \\ \lambda &= \lambda(\rho) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} V(Z) &= \begin{pmatrix} 0 & C^{12} \\ C^{21} & 0 \end{pmatrix} Z \\ \lambda(\rho) &= \rho \end{aligned} ; \quad C = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} \\ C^{21} & C^{22} \end{pmatrix}$$

$C^{11}, C^{22}, C^{12}, C^{21}$ = sous-matrices de C correspondant à la partition des N sous-systèmes ($n_2 = 2$)

A l'iteration i du 2^{ème} niveau de coordination on a :

$$\begin{aligned} (V^i - V^*) &= \frac{dV}{dZ} (Z^i - Z^*) \\ (\lambda^i - \lambda^*) &= \frac{d\lambda}{d\rho} (\rho^i - \rho^*) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_v^i = \frac{dV}{dZ} \varepsilon_z^i \\ \varepsilon_\lambda^i = \frac{d\lambda}{d\rho} \varepsilon_\rho^i \end{cases} \quad (8)$$

Pour V^i et λ^i fixés, lorsque les optimisations locales et le 1^{er} niveau de coordination ont convergé, les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} L_x(X^{i+1}, M^{i+1}, \mu^{i+1}, \rho^{i+1}) &= 0 \\ L_M(X^{i+1}, M^{i+1}, \mu^{i+1}) &= 0 \\ L_z(\mu^{i+1}, \rho^{i+1}, \lambda^i) &= 0 \quad (\text{où } L_T = \frac{\partial L}{\partial T}) \\ L_\mu(X^{i+1}, M^{i+1}, z^{i+1}) &= 0 \\ L_\rho(X^{i+1}, z^{i+1}, V^i) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

En réalisant un développement au 1^{er} ordre des fonctions précédentes on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_x}{\partial X} \Big|_* \varepsilon_x^{i+1} + \frac{\partial L_x}{\partial M} \Big|_* \varepsilon_M^{i+1} + \frac{\partial L_x}{\partial \mu} \Big|_* \varepsilon_\mu^{i+1} + \frac{\partial L_x}{\partial \rho} \Big|_* \varepsilon_\rho^{i+1} &= 0 \\ \frac{\partial L_M}{\partial X} \Big|_* \varepsilon_x^{i+1} + \frac{\partial L_M}{\partial M} \Big|_* \varepsilon_M^{i+1} + \frac{\partial L_M}{\partial \mu} \Big|_* \varepsilon_\mu^{i+1} &= 0 \\ \frac{\partial L_z}{\partial \mu} \Big|_* \varepsilon_\mu^{i+1} + \frac{\partial L_z}{\partial \rho} \Big|_* \varepsilon_\rho^{i+1} + \frac{\partial L_z}{\partial \lambda} \Big|_* \varepsilon_\lambda^i &= 0 \\ \frac{\partial L_\mu}{\partial X} \Big|_* \varepsilon_x^{i+1} + \frac{\partial L_\mu}{\partial M} \Big|_* \varepsilon_M^{i+1} + \frac{\partial L_\mu}{\partial z} \Big|_* \varepsilon_z^{i+1} &= 0 \\ \frac{\partial L_\rho}{\partial X} \Big|_* \varepsilon_x^{i+1} + \frac{\partial L_\rho}{\partial z} \Big|_* \varepsilon_z^{i+1} + \frac{\partial L_\rho}{\partial V} \Big|_* \varepsilon_V^i &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

(f) _{*} = valeur de la fonction à la solution optimale.)

De (8) et (10) on tire :

$$(\varepsilon_x^{i+1}, \varepsilon_M^{i+1}, \varepsilon_z^{i+1}, \varepsilon_\mu^{i+1}, \varepsilon_\rho^{i+1})^T = E_* (\varepsilon_x^i, \varepsilon_M^i, \varepsilon_z^i, \varepsilon_\mu^i, \varepsilon_\rho^i)^T \quad (11)$$

$$E_* = B_*^{-1} D_* A_*$$

$$B_* = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_x}{\partial X} & \frac{\partial L_x}{\partial M} & 0 & \frac{\partial L_x}{\partial \mu} & \frac{\partial L_x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial L_M}{\partial X} & \frac{\partial L_M}{\partial M} & 0 & \frac{\partial L_M}{\partial \mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_z}{\partial \mu} & \frac{\partial L_z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial L_\mu}{\partial X} & \frac{\partial L_\mu}{\partial M} & \frac{\partial L_\mu}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial L_\rho}{\partial X} & 0 & \frac{\partial L_\rho}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix}_* ; D_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial L_z}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial L_\rho}{\partial V} & 0 \end{pmatrix}_* ; A_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d\lambda}{d\rho} \end{pmatrix}_*$$

E_* a la structure suivante :

$$E_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 & x \end{pmatrix} \quad \text{où } x \text{ représente une sous-matrice non nulle}$$

Alors, d'après (11) il vient :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_z^{i+1} \\ \varepsilon_p^{i+1} \end{pmatrix} = F_* \begin{pmatrix} \varepsilon_z^i \\ \varepsilon_p^i \end{pmatrix} \quad F_* = \begin{pmatrix} -b_{zz} \frac{\partial L_p}{\partial V} \frac{dV}{dZ} & -b_{zp} \frac{\partial L_z}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\rho} \\ -b_{pz} \frac{\partial L_p}{\partial V} \frac{dV}{dZ} & -b_{pp} \frac{\partial L_z}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\rho} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$x = \sum_{i=1}^N x_i ; \quad z = \sum_{i=1}^N z_i$$

$b_{zz}(z \times x)$; $b_{zp}(z \times z)$; $b_{pz}(x \times x)$; $b_{pp}(x \times z)$: sous-matrices de B_*^{-1}

Puisque les équations de couplage sont linéaires ($X = CZ$), on a :

$$\frac{\partial L_p}{\partial V} = -I ; \quad \frac{dV}{dZ} = \begin{pmatrix} 0 & c^{12} \\ c^{21} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial L_z}{\partial \lambda} = - \begin{pmatrix} 0 & c^{12} \\ c^{21} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \frac{d\lambda}{d\rho} = I ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_* = \begin{pmatrix} b_{zz} \begin{pmatrix} 0 & c^{12} \\ c^{21} & 0 \end{pmatrix} & b_{zp} \begin{pmatrix} 0 & c^{12} \\ c^{21} & 0 \end{pmatrix}^T \\ b_{pz} \begin{pmatrix} 0 & c^{12} \\ c^{21} & 0 \end{pmatrix} & b_{pp} \begin{pmatrix} 0 & c^{12} \\ c^{21} & 0 \end{pmatrix}^T \end{pmatrix} \quad (13)$$

D'après les équations (8) et (11), pour étudier la convergence de la coordination, il suffit d'étudier le système dynamique discret (12). Si les valeurs propres de F_* ont un module inférieur à 1, alors la coordination est stable.

F_* dépend de la partition de la matrice de couplage comme cela apparaît dans (13), explicitement par $\frac{dV}{dZ}$ et $\frac{\partial L_z}{\partial \lambda}$, implicitement par les sous-matrices

b_{zz} , b_{zp} , b_{pz} , b_{pp} puisque la matrice B_* contient les sous-matrices $\frac{\partial L_z}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial L_p}{\partial z}$ $\left(\frac{\partial L_z}{\partial \rho} = - \begin{pmatrix} c^{11} & 0 \\ 0 & c^{22} \end{pmatrix}^T \right)$

Afin d'obtenir la convergence la plus rapide, on constate donc qu'il est difficile de trouver la partition optimale. Cependant la nature de F_* suggère une partition sous-optimale de C .

Soient $\begin{cases} A = [a_{ij}] \\ |A| = \sum_i \sum_j |a_{ij}| \\ \tau(A) \text{ le rayon spectral de } A \end{cases}$

On sait que [35] :

$$\tau(A) \leq \min \left[\max_j \sum_i |a_{ij}|, \max_i \sum_j |a_{ij}| \right]$$

De plus [47]

$$\zeta(A)^2 \gg \max \left[\max_i A_i^T A_i, \max_j A^j T A^j \right] \quad \begin{cases} A_i = i^{\text{e}} \text{ ligne de } A \\ A^j = j^{\text{e}} \text{ colonne de } A. \end{cases}$$

Considérons le système dynamique linéaire (12). Dans l'expression des éléments f_{ij} de F_* , tous les éléments de C^{12} , C^{21} sont des termes multiplicatifs. En recherchant une partition de C qui minimise $|C^{12}| + |C^{21}|$, on tend à diminuer le module des f_{ij} et par conséquent à diminuer les bornes supérieures et inférieures de $\zeta(F_*)$ dont la valeur détermine principalement la dynamique du système. On tend ainsi à accroître la rapidité de la convergence de la coordination.

On note que l'influence de la partition dans les matrices b_{ZZ} , $b_{Z\rho}$, $b_{\rho Z}$, $b_{\rho\rho}$ est difficile à estimer ce qui ajoute au caractère sous-optimal de la méthode précédente.

Exemple IV.3

On considère N sous-systèmes identiques (modèles linéaires, critères quadratiques).

$$N = 6 ; v = 2 ; n_2 = 2 ; |P_1^2| = |P_2^2| = 3$$

La matrice de couplage C est celle de l'exemple IV.1. Il y a 10 partitions possibles. Au 2^{ème} niveau de coordination, on met en oeuvre un algorithme à itération directe. Il est instable dans tous les cas. On cherche alors k tel que, pour $V = k V(Z)$ et $\lambda = k \lambda(\rho)$, l'algorithme soit stable.

Les résultats apparaissent dans le tableau IV.17 et la figure IV.18 pour $K = |C^{12}| + |C^{21}|$.

	K	k
(123) (456)	9	0,94
(124) (356)	16	0,48
(125) (346)	23	0,24
(126) (345)	16	0,36
(134) (256)	15	0,33
(135) (246)	24	0,15
(136) (245)	19	0,18
(145) (236)	15	0,44
(146) (235)	22	0,22
(156) (234)	21	0,14

Tableau IV.17

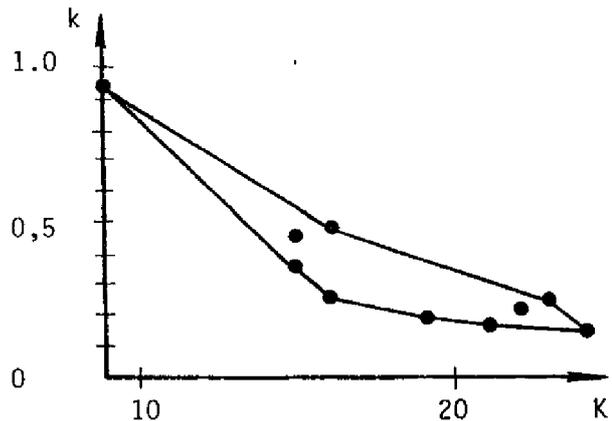


Figure IV.18

On constate une bonne corrélation entre k et K (fig. IV.18). Pour des valeurs peu différentes de K , cette corrélation est moins forte et ceci provient du caractère heuristique du critère pour la partition. Cependant, ces résultats montrent bien l'influence des couplages sur la convergence de la coordination.

La partition peut être faite à partir du graphe de la structure du système. Dans ce cas on pose $p_{ij} = |C_{ji}|$ et comme précédemment, on cherche une partition du graphe en sous-graphes telle que le poids total des arcs liant ces sous-graphes soit minimal.

IV. 3.5. - Partition optimale d'un graphe

Dans cet exemple, comme dans le précédent (ϕ IV.2.4), nous avons été confronté à un problème de partition optimale d'un graphe qui a suscité de nombreuses études, les résolutions proposées ayant toutes des limites d'utilisation dues soit à la dimension du graphe soit aux contraintes du problème. Nous proposons ci-après un algorithme basé sur une méthodologie heuristique.

Soit $G = (X, U)$ ($|X| = n$) un graphe orienté. Chaque arc u_{ij} est affecté d'un poids p_{ij} .

On appelle poids des liaisons entre deux sous-ensembles disjoints A et B de X , la quantité P_{AB} suivante :
$$P_{AB} = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} (p_{ij} + p_{ji})$$

Le problème de partition optimale du graphe G est :

Trouver une k -partition de X : $\{X_1, \dots, X_k\}$ telle que :

$$1^{\circ}) \quad |X_i| \leq M$$

$$2^{\circ}) \quad P = \sum_{i \neq j} P_{X_i} X_j; i, j = \overline{1, k} \quad \text{soit minimal.}$$

Algorithmes de partition optimale ou sous-optimale d'un graphe.

A) - La formulation du problème en termes de programmation linéaire à variables bivalentes est très élégante [57]. Cependant le nombre de variables est proportionnel à n^2 .

B) - On peut également se ramener à un problème de coloriage du graphe G en k couleurs lors $p_{ij} = 1 (\forall i, \forall j)$ [59]. On souhaite dans ce cas, une dimension des sous-graphes $G_i = (X_i, U_i)$ ($i = 1, \dots, k$), voisine de n/k mais on admet un faible écart par rapport à cette valeur si P est sensiblement diminué. L'algorithme proposé est assez complexe.

C) - Il est parfois avantageux de tirer parti de la structure particulière du graphe pour définir des algorithmes spécifiques plus efficaces [57].

D) - KERNIGHAN [58] a développé une méthode dont la mise en oeuvre est relativement simple et qui permet de prendre en compte différentes contraintes sur la dimension des sous-graphes G_i .

$$\text{Supposons } k = 2, n = 2m, |X_1| = |X_2| = m,$$

Si la solution optimale est $\{X_1^*, X_2^*\}$ alors toute solution s'écrit :

$$\begin{cases} X_1 = X_1^* + A_2 - A_1 \\ X_2 = X_2^* + A_1 - A_2 \end{cases}$$

Il s'agit alors de trouver A_1 et A_2 . L'algorithme qui donne une solution sous-optimale, consiste, à partir d'une solution initiale, à rechercher les sommets de X_1 et X_2 à interchanger pour diminuer P à chaque itération, sans examiner évidemment toutes les combinaisons possibles. Cette méthode peut être étendue à k , $|X_i|$ quelconques. Les résultats montrent que le temps de calcul est proportionnel à $n^{2,4}$ environ.

E) - La méthode proposée, suggérée dans [58] mais non développée, s'appuie sur le théorème de Ford-Fulkerson relatif aux flots maximaux dans un réseau [56].

Supposons que $k = 2$ et qu'aucune contrainte ne soit imposée sur la dimension des ensembles X_i .

Transformons le graphe $G = (X, U)$ en un graphe symétrique $G_s = (X, U_s)$ tel que :

$$1^\circ) u_{ij} \in U \implies u_{sij} \in U_s \quad \text{et} \quad u_{sji} \in U_s$$

$$2^\circ) p_{sij} = p_{sji} = p_{ij} + p_{ji}$$

Considérons le réseau composé du graphe G_s , d'une source S reliée à un sous ensemble A_1 de X par des arcs de capacité infinie et un puits T relié à un sous-ensemble A_2 de X par des arcs de capacité infinie avec :

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset ; \quad \Gamma A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{et} \quad \Gamma A_2 \cap A_1 = \emptyset.$$

$Y = X \cup S \cup T$ est donc l'ensemble des sommets du réseau.

Soit une partition de Y , $\{Y_1, Y_2\}$ telle que :

$$Y_1 = \{S, X_1\} \quad (A_1 \subseteq X_1)$$

$$Y_2 = \{X_2, T\} \quad (A_2 \subseteq X_2)$$

La coupe (Y_1, Y_2) est l'ensemble des arcs allant d'un sommet quelconque de Y_1 à un sommet quelconque de Y_2 . La capacité d'une coupe est la quantité :

$$\sum_{\substack{i \in Y_1 \\ i \in Y_2}} p_{sij}$$

D'après la construction du réseau, cette quantité est égale à P pour la partition $\{X_1, X_2\}$ du graphe G , telle que $A_1 \subseteq X_1, A_2 \subseteq X_2$

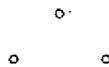
Soit un flot maximal de S à T . D'après le théorème de Ford-Fulkerson, la valeur de ce flot maximal est égale à la capacité minimale d'une coupe.

Soit (Y_1^*, Y_2^*) cette coupe obtenue après l'application de l'algorithme de Ford-Fulkerson. Alors la partition correspondante (X_1^*, X_2^*) du graphe G est optimale (P minimal).

On constate que la dimension de X_1 et de X_2 est quelconque. Cependant pour faire varier $|X_1|$ ou $|X_2|$, il suffit de faire varier le nombre de sommets liés à la source et au puits sur le réseau. D'autre part, si une contrainte impose que 2 sommets i et j ne peuvent appartenir à un même ensemble X_1 ou X_2 , alors il suffit de relier l'un à la source, l'autre au puits.

Pour $k = 2$, la solution obtenue est optimale. Pour k quelconque, une bi-partition doit être effectuée sur les différents sous-graphes successivement obtenus. Dans ce cas, le résultat est sous-optimal.

Cet algorithme qui utilise un programme de recherche d'un flot maximal, performant même pour les graphes de grande dimension (cf. II.3.2) est un outil d'aide à la décomposition en ce sens que pour prendre en compte différentes contraintes de décomposition il est nécessaire de l'utiliser plusieurs fois en particulier dans le cas où on désire des dimensions précises des X_i .



Toute méthode de décomposition optimale et sous-optimale d'un graphe présente un caractère combinatoire. Il en résulte que l'efficacité des algorithmes à mettre en oeuvre dépend fortement de la dimension du graphe considéré. Un problème d'optimisation est en général défini par un critère et des contraintes. Ces dernières, comme nous l'avons indiqué, sont soit du type inégalité (nombre limité d'éléments d'un ensemble) soit du type appartenance (un élément spécifié doit appartenir à un certain ensemble). Une alternative apparaît alors dans la méthodologie des procédures de résolution.

Une première démarche consiste à résoudre le problème avec un algorithme optimal ou sous-optimal qui prend en compte toutes les contraintes. Cependant les méthodes participant de cette démarche consomment beaucoup de temps.

La seconde consiste à définir un algorithme donnant une solution optimale ou sous-optimale qui dépend de paramètres initiaux. La résolution du problème se fait alors par étapes, en modifiant, par expérience, ces paramètres afin de tenir compte des contraintes. Les algorithmes utilisant la théorie des flots suivent cette dernière démarche et on a montré qu'ils sont efficaces pour les graphes de grande dimension. Cependant, l'avantage de la mise en oeuvre sur ordinateur de telles méthodes n'est décisif que si on dispose de moyens informatiques de dialogue homme-machine.



V. CONCLUSION

Tenir compte de tous les impératifs techniques, économiques est une difficulté majeure dans la commande des systèmes complexes, qui condamne toute réalisation par une approche globale. Dès lors, décomposer les tâches, les coordonner est une démarche séduisante, naturelle à la base de la commande hiérarchisée. Mais la mise en application de ce principe de décomposition - coordination n'est pas chose aisée et la phase d'analyse du système est essentielle pour la conception d'un système hiérarchisé de commande, afin de préciser, définir, les objectifs de commande, la nature et la structure du système.

Nous avons souligné lors de l'étude générale des structures hiérarchisées de commande, la nécessité de développer des méthodes d'analyse structurale des systèmes complexes en vue de leur partition. Après avoir rappelé les résultats importants obtenus dans ce domaine, nous voudrions également mentionner les prolongements possibles ou nécessaires à nos travaux.

Pour l'analyse structurale des modèles, l'utilisation systématique des graphes et de leurs propriétés de connexité a été faite. Nous avons développé ainsi une approche unifiée à la partition des modèles des systèmes comme le montrent les différentes applications présentées. Un autre champ d'application particulièrement intéressant du fait de l'essor actuel de l'informatique répartie (réseaux de calculateurs, calculateurs multiprocesseurs) est celui de la décomposition des grands programmes pour ordinateur et les premiers travaux dans ce domaine méritent d'être poursuivis.

Nous avons montré que les relations de causalité, les couplages dans un système pouvaient être étudiés à l'aide de l'analyse des données. En particulier pour les systèmes discrets, les concepts d'entropie, d'information, de la théorie de l'information permettent de mesurer les couplages entre des sous-systèmes et ainsi de trouver, à partir d'une matrice de couplage, des partitions optimales et sous-optimales de ces systèmes.

L'application de ces méthodes d'analyse à la partition des réseaux de production et de distribution d'énergie électrique est actuellement envisagé en vue, dans un premier temps, d'études de stabilité. Les modèles dynamiques des réseaux sont non-linéaires et en général de grande dimension.

Lorsque les perturbations ont de faibles amplitudes, les domaines de stabilité sont déterminés à partir d'un modèle linéarisé. Dans le cas de fortes perturbations consécutives à des défauts d'interconnexion (court-circuit, coupure de lignes), cette approximation n'est plus valable et on a généralement recours à la simulation pour déterminer ces domaines. Cependant, le domaine d'influence d'un défaut est sans doute limité à une partie du réseau et si cela est, on conservera pour cette partie, un modèle non-linéaire tandis que pour le reste, un modèle linéarisé sera utilisé. Ceci doit conduire à la simplification des modèles et à l'utilisation des résultats concernant la stabilité des systèmes interconnectés. Il est alors souhaitable de disposer de critères qui seront obtenus après analyse structurale par les données du réseau permettant de déterminer la partition du réseau quelle que soit la localisation du défaut et évitant ainsi une simulation de chaque cas de défaut.

Par ailleurs, nous pensons que pour les systèmes dynamiques linéaires multivariables, une étude analytique des couplages doit être faite en exploitant la structure linéaire des modèles et les résultats déjà acquis [65,85] afin d'obtenir des critères de découplage de sous-systèmes, ceci dans un optique de commande décentralisée ou hiérarchisée.

Dans le but de créer les moyens d'utilisation des résultats de l'analyse structurale, nous avons développé des algorithmes de partition des matrices de couplage à partir des graphes de ces matrices, en tenant compte principalement des contraintes de temps de calcul afin de pouvoir traiter des problèmes de grande dimension.

Pour la commande d'une chaîne de fabrication de dispositifs à semi-conducteurs nous avons proposé une structure hiérarchisée permettant de définir un système intégré de commande. Les études sur l'analyse structurale de la chaîne ont montré que les techniques classiques de commande directe ne pouvaient être appliquées pour la maîtrise de la qualité des produits du fait de l'impossibilité d'obtenir des modèles de la chaîne suffisamment précis, ceci étant dû à une information incomplète sur le fonctionnement de la chaîne. L'approche probabiliste à la surveillance et à la commande qui a été suggérée est nouvelle et mérite d'être approfondie et développée. Pour réaliser effectivement l'automatisation intégrée de cette chaîne, il reste à étudier, en particulier, les problèmes d'analyse et de décision multicritères et à inclure dans le système de surveillance et de commande, des algorithmes de gestion en temps réel de la production.

A travers nos travaux, on peut constater, en remarquant notamment la multiplicité des méthodes utilisées pour l'analyse structurale et tirées de la théorie des graphes, de l'analyse des données, de la théorie de la commande automatique, de l'optimisation, en mentionnant aussi la diversité des études faites pour l'automatisation intégrée d'une chaîne de fabrication de semi-conducteurs, que la pluridisciplinarité est de règle pour l'analyse et la commande des systèmes complexes. Dès lors, il nous semble que ceci justifie la conception d'un enseignement nouveau, d'une recherche nouvelle évidemment pluridisciplinaires adaptés aux multiples aspects, objectifs, contraintes techniques et économiques de ces systèmes.

A N N E X E 1

ADMISSIBILITÉ D'UNE COORDINATION PAR LE
CRITÈRE DE SYSTÈMES INTERCONNECTÉS PAR DES STOCKS

-

Dans le cadre de l'optimisation hiérarchisée des systèmes interconnectés par des stocks, on montre que la coordination par les paramètres de Lagrange (méthode dite "non-admissible" ou de coordination par le critère [17]) devient "admissible" (au sens de la programmation mathématique) si les instants de coordination sont déterminés en fonction de l'évolution dynamique des stocks qui est liée à celle de la coordination.

A1.1. - FORMULATION

On considère N sous-systèmes connectés par P stocks.

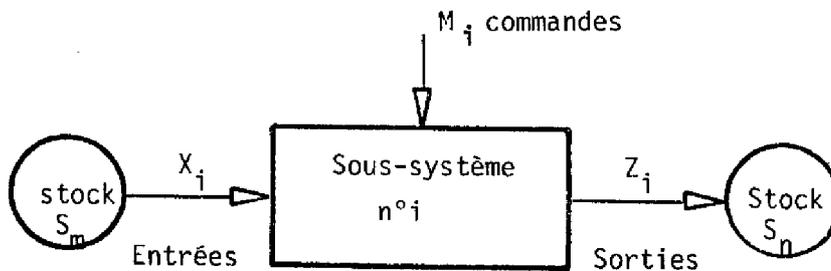


Figure A1.1. - Sous-système n°i

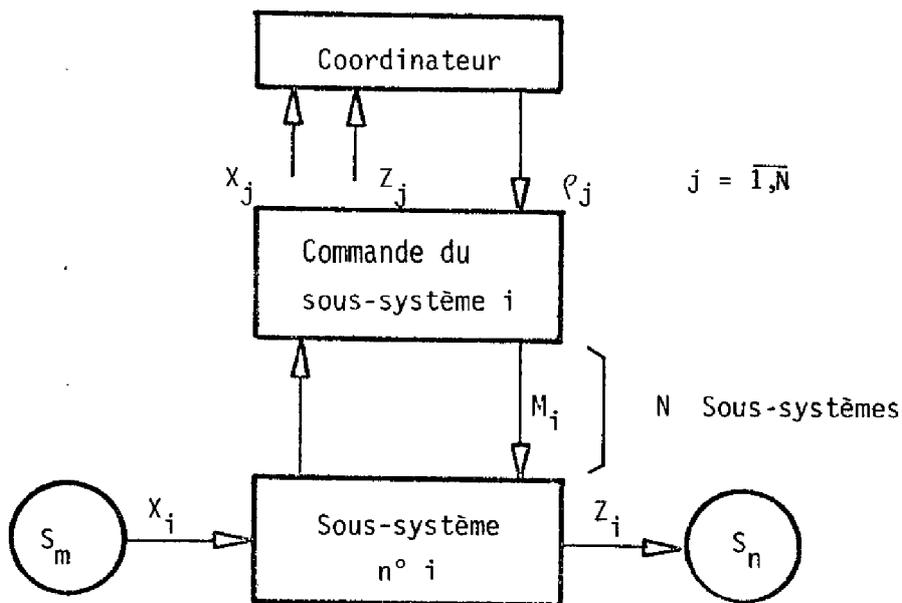


Figure A1.2 - Système de commande

X_i est le vecteur décrivant les entrées du sous-système n° i , Z_i , les sorties et M_i , les commandes sur le sous-système.

Les équations d'interconnexion, considérées en régime statique, se présentent sous deux formes possibles du fait de la présence de stocks (Le choix se fait en fonction du graphe des interconnexions).

$$\text{ou } \begin{cases} X_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} Z_j & \text{(fig. A1.3 a)} \\ Z_i = \sum_{j=1}^N C'_{ij} X_j & \text{(fig. A1.3 b)} \end{cases}$$

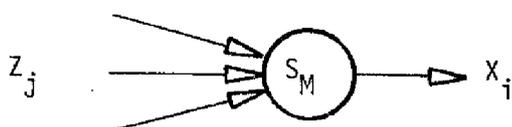


Figure A1.3 a

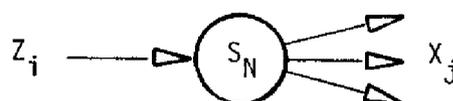


Figure A1.3 b

Remarque 1 : les équations précédentes sont vectorielles dans le cas général et les stocks multidimensionnels (représentation de plusieurs stocks physiques en parallèle).

Remarque 2 : en régime dynamique, l'équation (pour la figure 3 a) prendrait la forme

$$\int_0^T (X_i - \sum_j C_{ij} Z_j) dt = 0$$

lorsqu'on désire un flux conservatif sur l'horizon T .

Problème d'optimisation :

On recherche un état statique optimal du système défini par le problème

$$\text{Min}_{X_i, M_i, Z_i} \sum_{i=1}^N f_i(X_i, M_i)$$

sous les contraintes :

$$Z_i = T_i(X_i, M_i) \quad i = 1, N$$

N équations de modèle

(N équations de modèle des sous-systèmes)

$$\text{et/ou} \left. \begin{aligned} X_i &= \sum_j C_{ij} Z_j \\ Z_i &= \sum_j C'_{ij} X_j \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} P \text{ équations d'intercon-} \\ \text{nexion.} \end{array}$$

On veut résoudre ce problème par une méthode d'optimisation hiérarchisée utilisant une coordination non admissible (variables de coordination : paramètres de Lagrange ρ_i associés aux équations d'interconnexion [4,17])

Comme on a en général,

$$X_i \neq \sum_j C_{ij} Z_j \quad \text{et} \quad Z_i \neq \sum_j C'_{ij} X_j$$

à tout instant de coordination, le niveau de stocks varie dans le temps.

Problème de coordination admissible

Partant d'un état initial $X_i(0)$, $M_i(0)$, $Z_i(0)$, $S_m(0)$, satisfaisant ou non les contraintes d'interconnexion, trouver une politique de coordination par une méthode non-admissible, telle que, à tout instant t , au cours de la coordination on ait :

$$S_m^{\min} \leq S_m(t) \leq S_m^{\max}$$

(dans le cas vectoriel, l'inégalité doit être vérifiée sur chaque composante de S_m).

Remarques - notations

- Les valeurs de X_i , M_i , Z_i sont définies par unité de temps u .

- On note par :

$A^{(k)}$ = la valeur de A à l'itération k du coordonnateur

$t^{(k)}$ = l'instant de la $k^{\text{ème}}$ itération du coordonnateur

$S_m(t)$ = la valeur de S_m en fonction du temps

- L'algorithme de coordination envisagé ici est du type gradient :

$$\rho_m^{(k+1)} = \rho_m^{(k)} + K \left[\sum_j C_{ij} Z_j^{(k)} - X_i^{(k)} \right] \quad (1)$$

$$\rho_m^{(k+1)} = \rho_m^{(k)} + K \left[Z_i - \sum_j C'_{ij} X_j \right] \quad (K > 0) \quad (2)$$

Dans ce qui suit, on ne considèrera que les paramètres de Lagrange définis par (1), l'étude étant identique pour les paramètres définis par (2).

- K est une matrice diagonale lorsque le stock est multidimensionnel. Sans altérer la généralité du raisonnement, on supposera par la suite que S_m , X_i et Z_i ont une seule composante (scalaires). Le raisonnement conduisant à la détermination d'instantanés critiques, il suffit, dans le cas vectoriel, de rechercher ces instantanés sur chaque composante des stocks.

A1.2. - ANALYSE DU PROBLEME

On se place à l'itération k du coordonnateur.

Ayant délivré $\rho_m^{(k)}$, il reçoit des niveaux inférieurs, $X_i^{(k)}$, $Z_i^{(k)}$, $S_m^{(k)}$. L'évolution ultérieure du stock est donnée par :

$$S_m(t) = S_m^{(k)} + \left[\sum_j c_{ij} z_j^{(k)} - X_i^{(k)} \right] (t - t^{(k)}), \quad [t \geq t^{(k)}] \quad (3)$$

Cette évolution est linéaire (fig. A1.4) et le coordonnateur est capable de prédire à quel moment les contraintes de stocks deviennent saturées (instantanés critiques).

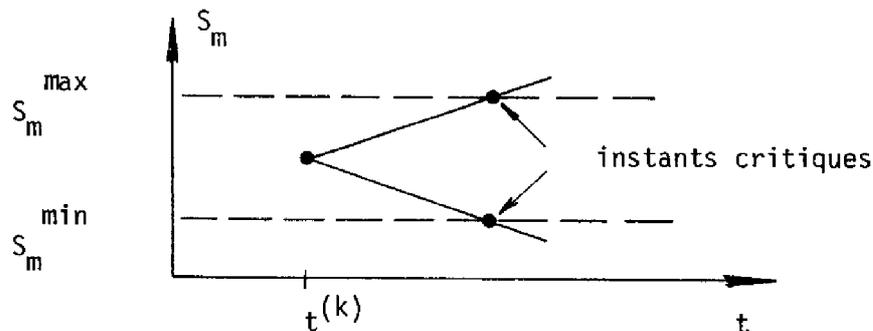


Figure A1.4 - Evolution du stock S_m

En fait le coordonnateur agit ainsi :

A l'itération k , ayant constaté une dérive positive (négative) du stock S_m (équation (3)), il décide à l'itération $(k+1)$ d'augmenter (de diminuer) la valeur de ρ_m (équation (1)).

La question qui se pose alors est la suivante :

L'augmentation (resp. diminution) de ρ_m va-t-elle entraîner à partir de $t^{(k+1)}$ une diminution (resp. augmentation) du stock S_m ?

Si oui, en effet, pour que la coordination devienne admissible, il suffira d'appliquer la valeur $\rho_m^{(k+1)}$ avant l'instant critique pour le stock S_m .

Afin de répondre à cette question, faisons une étude a posteriori de la dynamique de la coordination.

A- Supposons que l'évolution de $\rho_m^{(k)}$ soit de la forme schématisée par la figure A1.5 (pour K fixé)

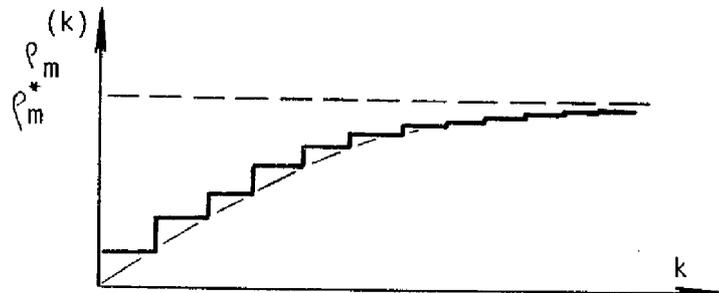


Figure A1.5 - Evolution de $\rho_m^{(k)}$

Dans ce cas, à l'accroissement constamment positif de ρ_m correspond un accroissement constamment positif du stock S_m d'après les équations (1) et (3). Soit $S_m^{(0)}$ la valeur initiale du stock et soit N le nombre d'itérations du coordonnateur nécessaire pour réaliser l'optimisation globale. Pour que la coordination soit admissible, il faut que :

$$S_m^N - S_m^{(0)} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_j c_{ij} z_j^{(k)} - x_i^{(k)} \right] (t^{k+1} - t^k) \ll S_m^{\max} - S_m^{(0)}$$

En particulier si $t^{k+1} - t^k = \text{Cte} = T$, on a :

$$T \ll \frac{S_m^{\max} - S_m^{(0)}}{\sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_j c_{ij} z_j^{(k)} - x_i^{(k)} \right]} = T_i^M \quad (4)$$

T_i^M est donc le temps fixé maximal entre deux instants de coordination pour que celle-ci s'achève sans saturation de la contrainte de stock S_m .

Remarques

a) si l'accroissement de ρ_i est constamment négatif, dans (4) il faut remplacer $S_m^{\max} - S_m^{(0)}$ par $S_m^{\min} - S_m^{(0)}$

b) pour K donné, la quantité $\sum_{k=0}^{N-1} [\sum_{ij} c_{ij} z_j^{(k)} - x_i^{(k)}]$ est caractéristique de la coordination et ne dépend pas du temps. Par contre, cette quantité n'est connue qu'a posteriori.

c) - si l'évolution de tous les ρ_i est de la forme précédente et si à chaque itération k , tous les ρ_i , sont modifiés simultanément, le temps maximal entre deux instants de coordination est :

$$T^M = \min_i T_i^M$$

B - Supposons que l'évolution des ρ_m soit de la forme schématisée par la figure A1.6 (pour K fixé)

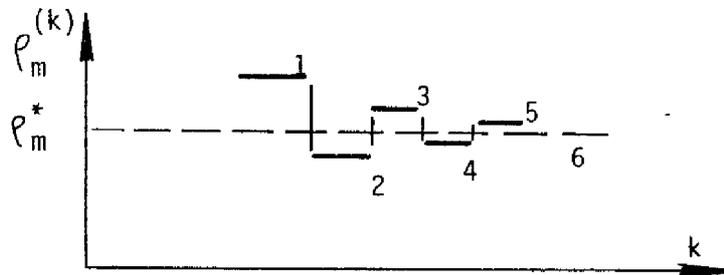


Figure A1.6 Evolution de $\rho_m^{(k)}$

A l'itération 1, $\rho_m^{(1)}$ est trop élevé et ceci s'accompagne d'une diminution du stock S_m . A l'itération 2, $\rho_m^{(2)}$ est trop faible et ceci s'accompagne d'une augmentation du stock S_m .

Supposons qu'à l'itération 1, le stock S_m soit trop élevé. Dans ce cas, une nouvelle itération du coordonnateur peut être différée de façon à diminuer le stock S_m .

Par contre, si le stock S_m est trop faible, il faut appliquer $\rho_m^{(2)}$ de façon à reconstituer le stock S_m .

On constate donc que, lorsque l'évolution de ρ_m est oscillatoire, le calcul des instants d'itération du coordonnateur est fonction de l'état du stock et que le temps global de coordination est fonction de la convergence de la coordination.

A1.3. - EXEMPLE

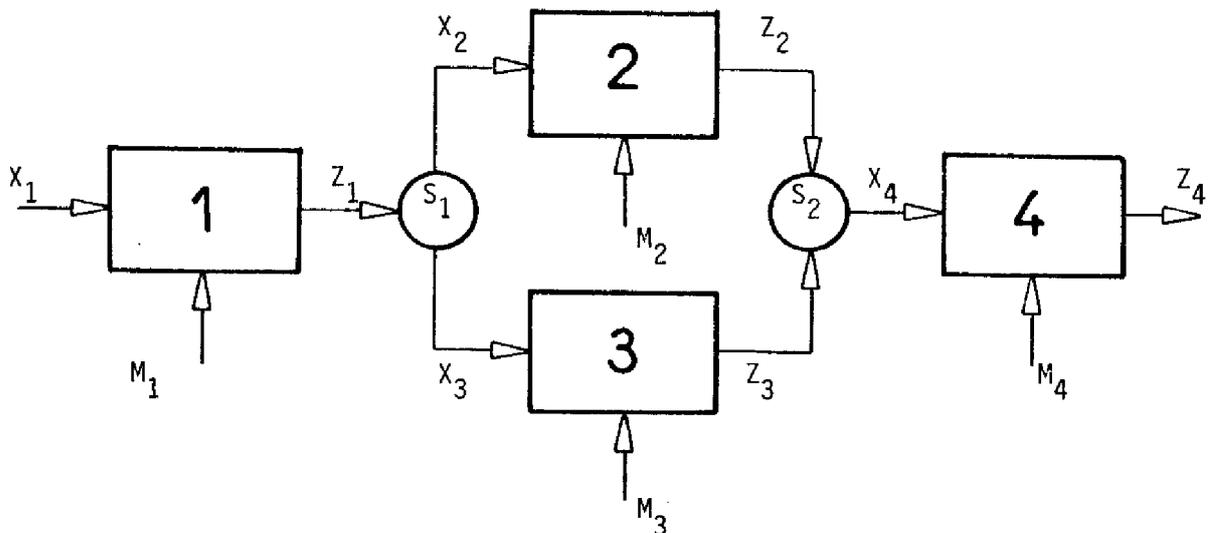


Figure A1.7

Considérons le système représenté par la figure A1.7. On a considéré pour chaque sous-système un modèle linéaire pouvant être obtenu après linéarisation d'un modèle plus complexe.

Modèles

$$Z_i = A_i X_i + B_i M_i$$

Critères

$$f_i = C_i (X_i - X_i^*)^2 + D_i (M_i - M_i^*)^2$$

On a pris :

$$\begin{cases} A_i = B_i = X_i^* = M_i^* = i \\ C_i = D_i = 1 \end{cases}$$

Les résultats apparaissent sur les figures A1-8, 9, 10, 11. Bien que les ρ_i et les Z_i soient constants entre les instants de coordination, on a choisi une représentation montrant plus clairement l'évolution de ces variables.

Pour tous les cas, on a pris pour instants de coordination les instants critiques. On constate que le temps de coordination croît avec K . Cependant, dans le cas de la figure A1.8, ce temps est limité par l'évolution constamment positive de ρ_1 après quelques itérations (figure A1.10). Ceci a pour conséquence de saturer le stock S_1 et de ce fait, les dernières itérations du coordonnateur ne peuvent plus être effectuées en ligne et la valeur optimale de ρ_1 doit être calculée et appliquée très rapidement.

Au caractère oscillatoire de l'évolution des stocks correspond une évolution du même type des entrées du stock (figure A1.11).

*
* * *

La dynamique de la coordination est fixée par K . Les valeurs de K donnant un régime oscillatoire amorti sont plus grandes que celles donnant un régime non oscillatoire. Ces valeurs peuvent être déterminées par une analyse hors ligne de la sensibilité de la coordination.

La méthode admissible de coordination par les prix dont les valeurs successives sont données par l'algorithme du type gradient, consiste donc à placer dans le temps les instants de coordination.

Ces instants de coordination sont fonction des instants critiques de tous les stocks S_m . A chaque instant de coordination, on effectue une itération du coordonnateur sur tous les ρ_i .

Ces instants peuvent être déterminés par le coordonnateur qui reçoit de chaque sous-système les valeurs $X_i(k)$, $Z_i(k)$ (éventuellement $S_m(k)$) mais également par les sous-systèmes eux-mêmes.

Lorsque les itérations ont lieu directement sur le processus,

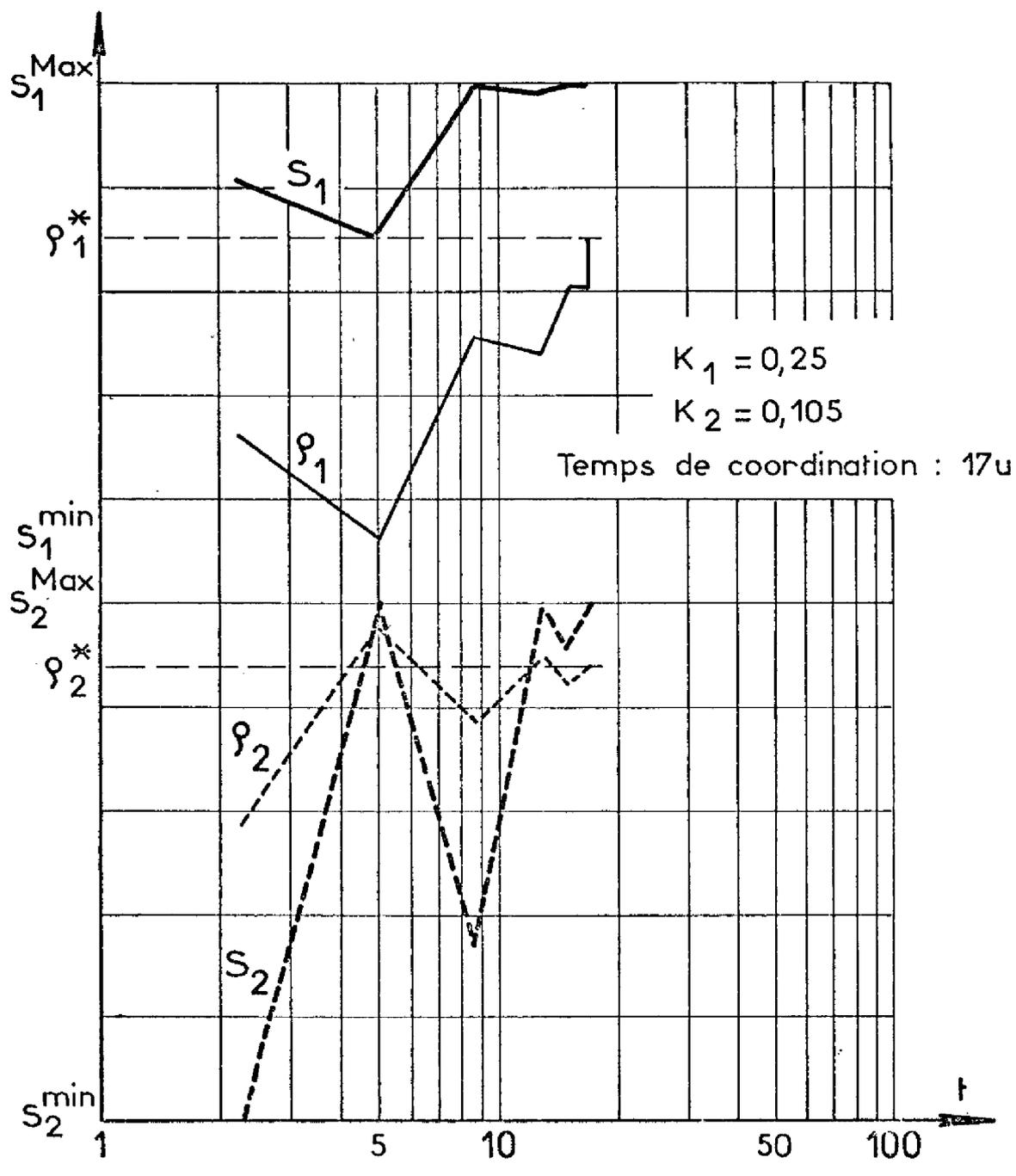


Figure A1.8

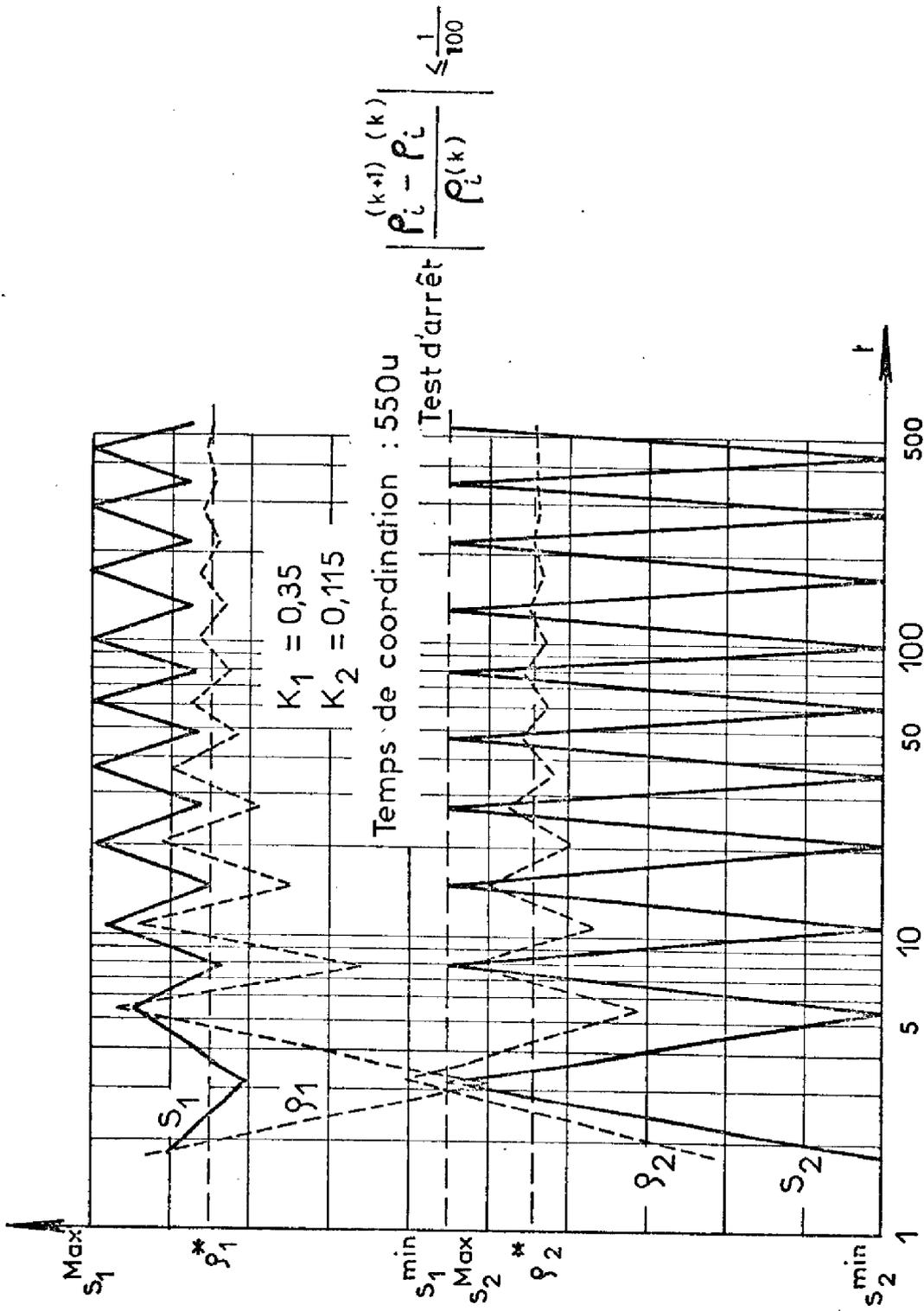


Figure A1.9

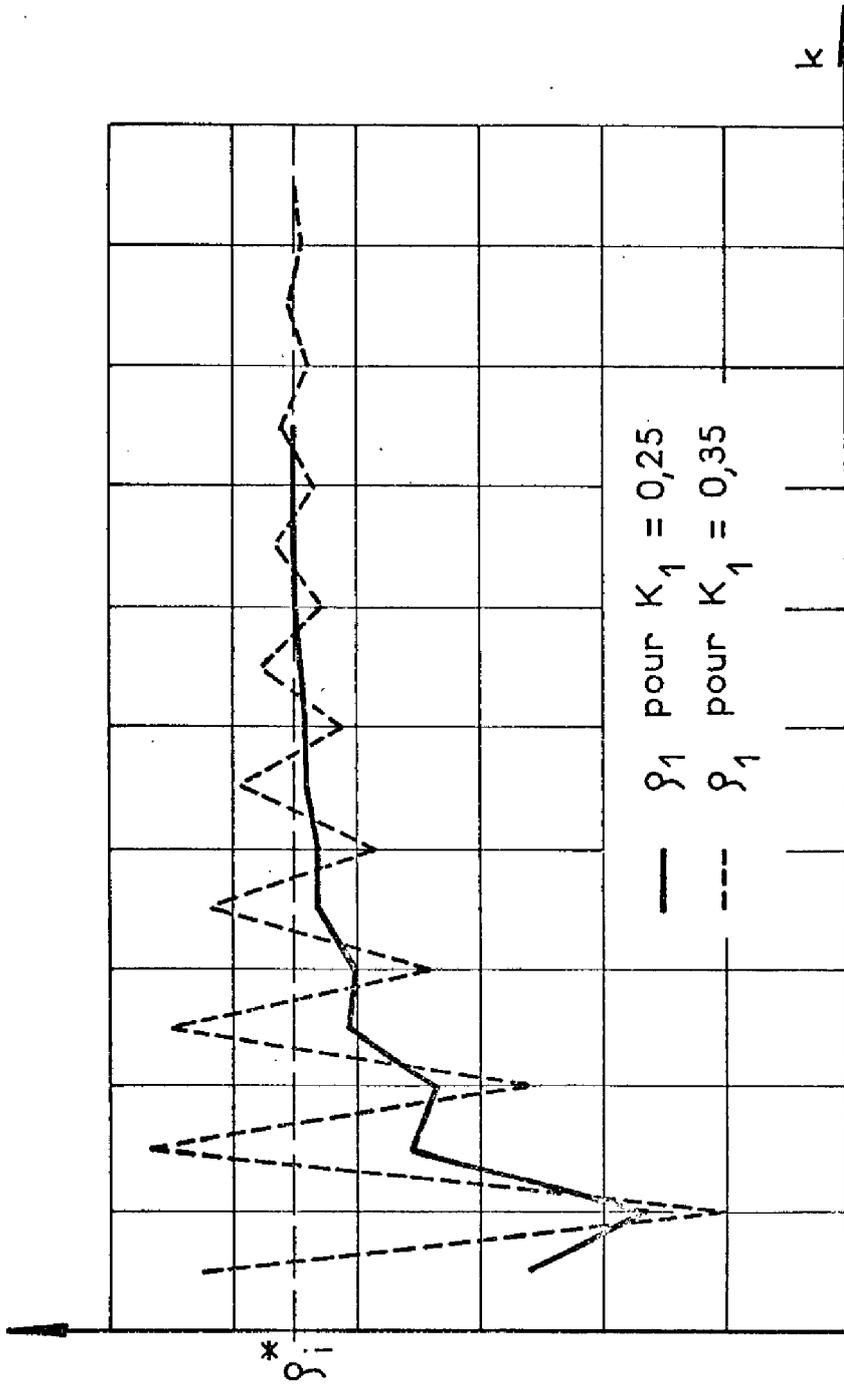


Figure A1.10

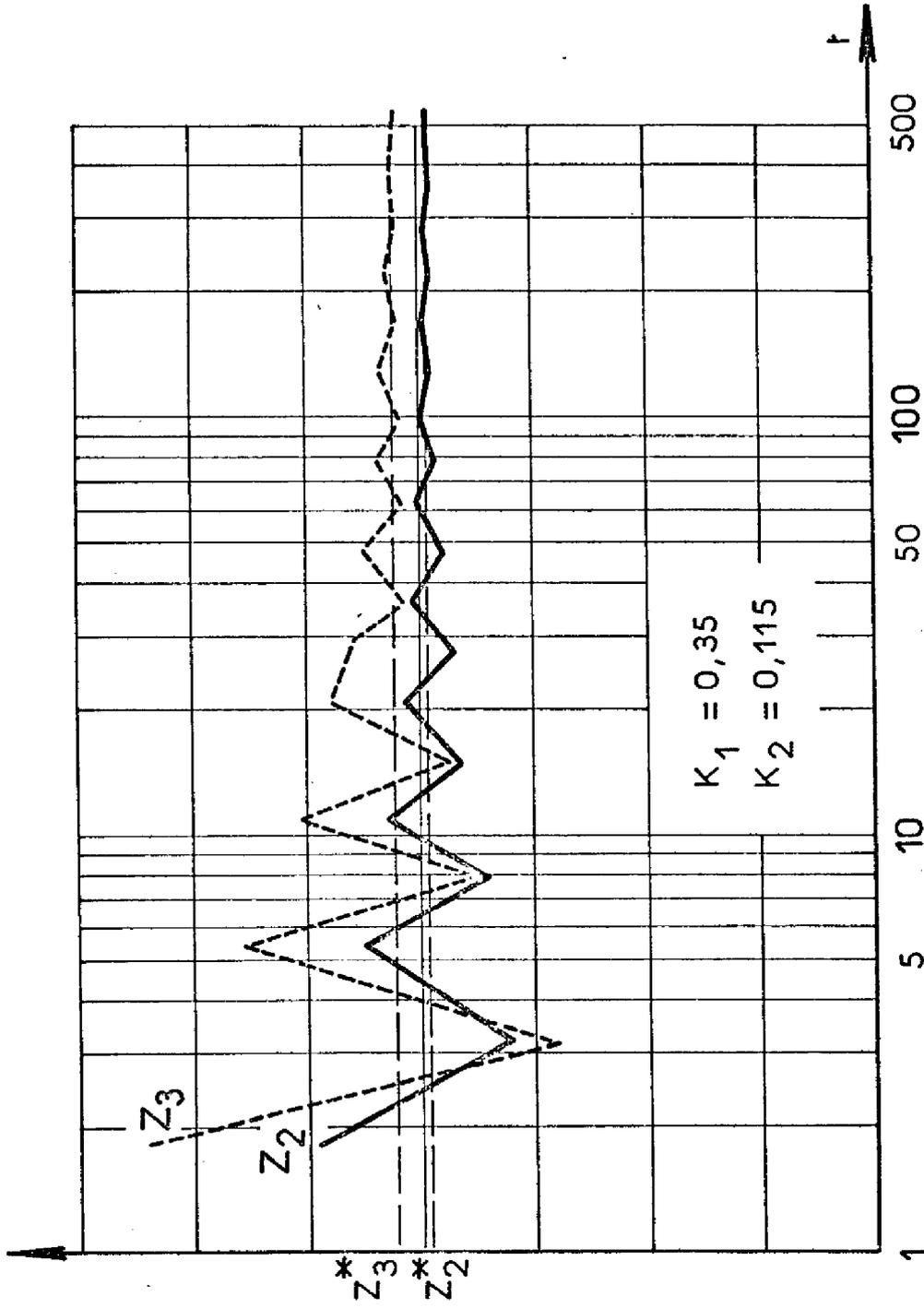


Figure A1.11

ceci permet d'intégrer les fluctuations de la production absorbées par les stocks.

Evolution de la coordination.

On observe deux types fondamentaux d'évolution (figure A1.10) des paramètres de coordination suivant la valeur du coefficient K de l'algorithme (gradient) :

- si K est faible : les paramètres ρ_i sont à évolution monotone, ainsi que les commandes, mais le temps admissible de coordination est court et fonction du niveau initial des stocks et des bornes S_m^{\min} et S_m^{\max} .

- si K est élevé, l'évolution des ρ_i est du type oscillatoire et le temps admissible de coordination peut être illimité, mais les commandes présentent des oscillations, ce qui peut être considéré comme gênant (ce cas est d'ailleurs souvent rencontré dans la réalité). On peut d'ailleurs modifier les paramètres de l'oscillation en réduisant l'intervalle entre les bornes supérieures et inférieures admises pour les stocks.

A N N E X E 2

SUR L'OPTIMISATION HIÉRARCHISÉE :
CONDITIONS SUFFISANTES DE CONVERGENCE ET DE MINIMALITÉ

-

On détermine des conditions suffisantes de convergence d'une procédure d'optimisation hiérarchisée (on utilise au niveau coordonnateur un algorithme de type gradient) et de minimalité de la solution obtenue lorsque le problème d'optimisation non-linéaire (I) est décomposé sous la forme (II)

$$\left\{ \begin{array}{l} \min P(Y) \\ Y \in \mathbb{R}^n \\ \text{sous } G(Y) \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{(I)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min P \quad P_1(X_1, V), P_2(X_2, V), \dots, P_N(X_N, V) \\ X_i, V \\ \text{sous } \left\{ \begin{array}{l} G_1(X_1, V) \geq 0 \\ \vdots \\ G_N(X_N, V) \geq 0 \\ H(V) \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{(II)}$$

$$\text{où } Y = \{X_1, X_2, \dots, X_N, V\}$$

P est sous l'une des 4 formes suivantes :

$$A - P = \sum_{i=1}^N P_i(X_i, V)$$

$$B - P = \prod_{i=1}^N P_i(X_i, V)$$

$$C - P = \sum_{i=1}^N P_i(X_i, V) + \sum_{i=l+1}^N P_i(X_i, V)$$

$$D - P = \prod_{i=i}^1 P_i(X_i, V) + \sum_{i=1}^{q \leq 1} P_i(X_i, V) + \sum_{i=l+1}^N P_i(X_i, V)$$

NOTATIONS :

$X, V =$ vecteurs colonnes $X \in \mathbb{R}^{n_x}$, $V \in \mathbb{R}^{n_v}$
 $P(X, V) =$ scalaire

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial X_{n_x}} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial P}{\partial V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial V_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial V_{n_v}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} = \left[\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial X_1 \partial V_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial X_{n_x} \partial V_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 P}{\partial X_1 \partial V_{n_v}} & \frac{\partial^2 P}{\partial X_{n_x} \partial V_{n_v}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial^2 X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial X_1 \partial X_{n_x}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 P}{\partial X_{n_x} \partial X_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial X_{n_x}^2} \end{bmatrix}$$

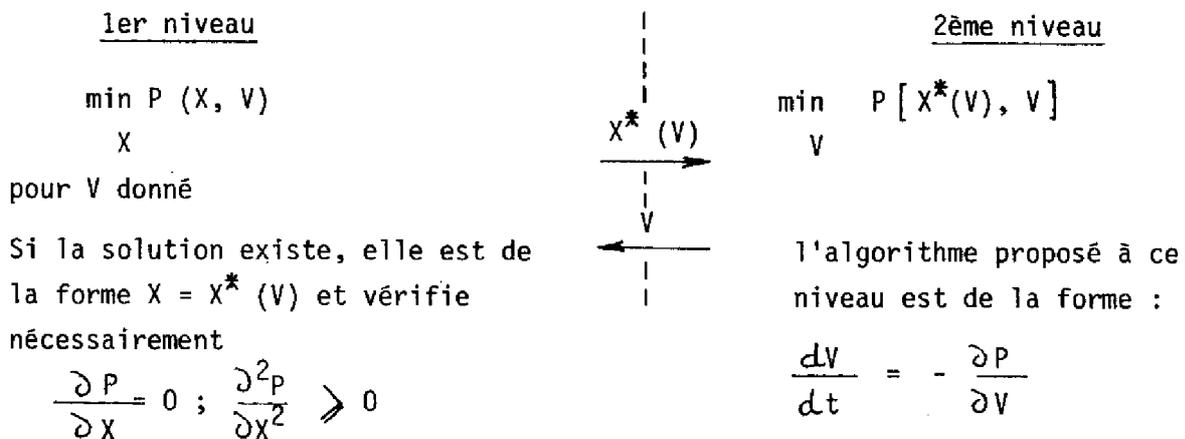
$$X = X(V) \Rightarrow \frac{dX}{dV} = \begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dV_1} & \frac{dX_1}{dV_{n_v}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dX_{n_x}}{dV_1} & \frac{dX_{n_x}}{dV_{n_v}} \end{bmatrix}$$

A2.1 - OPTIMISATION HIERARCHISEE SANS CONTRAINTE

Soit le problème d'optimisation :

$$\min_{X, V} P(X, V) \quad X \in \mathbb{R}^{n_X}, \quad V \in \mathbb{R}^{n_V} \quad (1)$$

On propose de résoudre (1) par une structure d'optimisation à deux niveaux :



1°) - Cette procédure est-elle convergente ?

2°) - Si oui, le point stationnaire obtenu est-il un minimum par rapport à X et V de P(X, V) ?

1) - Convergence :

Soit :

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)^T \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right) \quad (2)$$

Si chaque composante de $\frac{\partial P}{\partial V}$ est continue et bornée, alors F est une fonction de Lyapunov.

$$\overset{\circ}{F} = - \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)^T \frac{d}{dV} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right) \quad (3)$$

Mais $\frac{d}{dV} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right) \cdot \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} \cdot \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 P}{\partial V^2}$

(3) devient :

$$\dot{F} = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^T \left[\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right] \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)$$

Au 1er niveau on a : $\forall V, \frac{\partial P}{\partial X} = 0$

$$\text{pour } X = X^*(V) \Rightarrow \frac{d}{dV} \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right) = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} = 0$$

Si $\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}$ est régulière alors :

$$\frac{dX}{dV} = -\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \dot{F} = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^T \left[\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} \right] \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) \quad (5)$$

Une condition suffisante de stabilité asymptotique de la procédure est :

Tout au long de la trajectoire de V , avec $X = X^*(V)$:

$$\left[\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} \right] > 0 \quad \text{avec } \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \text{ régulière} \quad (6)$$

Remarque : une condition suffisante pour que (6) soit vérifiée est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} & \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{tout au long de la trajectoire de } V \text{ avec } X = X^*(V)$$

En effet, écrivons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

- $M > 0 \Rightarrow A$ régulière

- A régulière $\Rightarrow \exists M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1} B F C A^{-1} & -A^{-1} B F \\ -F C A^{-1} & F \end{pmatrix}$ avec $F = (D - C A^{-1} B^{-1})$ (formule de Shur)

- $M > 0 \Rightarrow M^{-1} > 0$

Soit $y = Mx$. M étant régulière : $\forall y \neq 0, \exists \{x \neq 0 \mid x = M^{-1}y\}$

M étant une matrice symétrique, la forme quadratique $x^T M x$ s'écrit $x^T M x = x^T M M^{-1} M x = x^T M^T M^{-1} M x = y^T M^{-1} y$

Donc

$$\forall y \neq 0 \quad y^T M^{-1} y = x^T M x > 0$$

Mais $M^{-1} > 0 \Rightarrow F > 0 \Rightarrow F^{-1} > 0$

$$\text{Donc } M > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \text{ régulière} \\ F^{-1} = \left[\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} \right] > 0 \end{array} \right.$$

La condition (6) est donc vérifiée.

2) - Minimum de P (X, V) :

Supposons qu'il y ait convergence de l'algorithme. On obtient alors, pour le problème global, un point stationnaire X^* (V^*), V^* , noté plus généralement *

$$\left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_* = 0 ; \quad \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_* = 0$$

Supposons d'autre part que :

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right|_* > 0 \text{ minimum relatif strict au 1er niveau} \quad (7)$$

$$\left. \frac{d^2 P}{dV^2} \right|_* > 0 \text{ minimum relatif strict au 2ème niveau} \quad (8)$$

Alors le point stationnaire est un minimum relatif strict pour le problème global.

Démonstration :

$$\text{Explicitons (8)} \quad \frac{dP}{dV} = \left(\frac{dX}{dV} \right)^T \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial V}$$

$$\frac{d^2 P}{dV^2} = \frac{d}{dV} \left(\frac{dX}{dV} \right)^T \frac{\partial P}{\partial X} + \left(\frac{dX}{dV} \right)^T \left[\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \cdot \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} \right] + \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} \cdot \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \quad (9)$$

$$\text{Comme } \left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_* = 0$$

(9) \Rightarrow

$$\frac{d^2 P}{dV^2} = \left(\frac{dX}{dV} \right)^T \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \frac{dX}{dV} + \left(\frac{dX}{dV} \right)^T \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} + \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \quad (10)$$

En remplaçant (4) dans (10), il vient

$$\frac{d^2 P}{dV^2} = \left[\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} \right] > 0 \quad (11)$$

Une condition suffisante pour que le point stationnaire * soit un minimum relatif strict pour le problème global est :

$$M|_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial V} & \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \end{bmatrix} > 0$$

$M|_* > 0$ si et seulement si tous les mineurs principaux successifs sont positifs.

D'après (7), les n_x premiers sont positifs.

Le $(n_x + i)$ ème ($i = 1, \dots, n_v$) est de la forme :

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} & \begin{array}{c} \frac{\partial^2 P}{\partial V_1 \partial X_1} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V_i \partial X_1} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial V_1 \partial X_{n_x}} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V_i \partial X_{n_x}} \end{array} \\ \hline \frac{\partial^2 P}{\partial X_1 \partial V_1} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial X_{n_x} \partial V_1} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V_1^2} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V_i \partial V_1} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial X_1 \partial V_i} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial X_{n_x} \partial V_i} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V_1 \partial V_i} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V_i^2} \end{array} \right| = \left| \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right| \cdot \left| p^{ii} - p^{iT} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right)^{-1} p^{Ti} \right| \end{array}$$

Mais $\left| p^{ii} - p^{iT} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right)^{-1} p^{Ti} \right|$ est le i ème mineur principal successif de (11), qui est positif. Comme $\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} > 0$, le $(n_x + i)$ ème mineur principal successif de $M|_*$ est positif.

C.Q.F.D.

Remarque :

Les hypothèses (7) et (8) interdisent l'arrêt de l'optimisation, tant au premier niveau qu'au second, sur des points d'inflexion.

3) - Formes particulières de P (X, V)

On considère maintenant les 4 formes de critère suivantes :

$$A - P(X, V) = \sum_{i=1}^N P_i(X_i, V)$$

$$B - P(X, V) = \prod_{i=1}^N P_i(X_i, V)$$

$$C - P(X, V) = \prod_{i=1}^1 P_i(X_i, V) + \sum_{i=1+1}^N P_i(X_i, V)$$

$$D - P(X, V) = \prod_{i=1}^1 P_i(X_i, V) + \sum_{i=1}^{q \leq 1} P_i(X_i, V) + \sum_{i=1+1}^N P_i(X_i, V)$$

La procédure d'optimisation devient :

<u>1er niveau</u>	<u>2ème niveau</u>
$\min_{X_i} P_i(X_i, V) \quad i = \overline{1, N}$ <p>pour V donné</p>	$\min P(X^*(V), V)$ <p>par $\frac{dV}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial V}$</p>

Nous allons étudier les conditions particulières de convergence et de minimum pour ces quatre formes de critère.

$$A - \underline{P(X, V)} = \sum_{i=1}^N \underline{P_i(X_i, V)}$$

1) - Convergence :

$$\text{Dans ce cas on a : } \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 P_i}{\partial V^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial X_1^2} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial^2 P_n}{\partial X_n^2} \right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_1}{\partial V \partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 P_n}{\partial V \partial X_n} \end{bmatrix}$$

(6) devient :

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial V^2} - \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i \partial V} \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i} \right)^{-1} \frac{\partial^2 P_i}{\partial V \partial X_i} \right) > 0, \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2} \text{ régulière } (i=\overline{1, N}) \quad (12)$$

Une condition suffisante pour que (12) soit vérifiée est :

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial V^2} - \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i \partial V} \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 P_i}{\partial V \partial X_i} > 0, \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2} \text{ régulière } (i=\overline{1, N}) \quad (13)$$

Une condition suffisante pour que (13) soit vérifiée est :

$$M_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2} & \frac{\partial^2 P_i}{\partial V \partial X_i} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial V} & \frac{\partial^2 P_i}{\partial V^2} \end{bmatrix} > 0 \quad (i = \overline{1, N})$$

2) - Minimum de P (X, V) :

Les conditions suffisantes (7) et (8) deviennent :

$$\left. \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i} \right|_* > 0 \quad (i = \overline{1, N})$$

$$\left. \frac{d^2 P}{dV^2} \right|_* > 0$$

$$B - P(X, V) = \sum_{i=1}^N \frac{P_i(X_i, V)}{i=1}$$

1) Convergence :

Dans ce cas on a :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 P_i}{\partial V^2} \prod_{R \in K_1} P_R + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial P_i}{\partial V} \left(\frac{\partial P_j}{\partial V} \right)^T \prod_{R \in K_2} P_R$$

$$\text{avec } \begin{cases} K_1 = \{ (1, \dots, N) - i \} \\ K_2 = \{ (1, \dots, N) - i - j \} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{P_2 \dots P_N} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial X_1^2}\right)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{P_1 \dots P_{N-1}} \left(\frac{\partial^2 P_N}{\partial X_N^2}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V \partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_1}{\partial V \partial X_1} & P_2 \dots P_N \\ \frac{\partial^2 P_N}{\partial V \partial X_N} & P_1 \dots P_{N-1} \end{bmatrix}$$

(6) devient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} - \sum_{i=1}^N \left(P_{i-1} \dots P_{i,N-1} \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i \partial V} \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2 P_i}{\partial V \partial X_i} \right) > 0$$

On constate que pour un critère multiplicatif, des conditions suffisantes de stabilité asymptotique sont difficiles à obtenir.

2) - Minimum de $P(X, V)$:

Pour que (7) soit vérifiée, il suffit que :

$$\left. \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2} \right|_* > 0 \quad ; \quad P_i \Big|_* > 0 \quad (i = \overline{1, N})$$

Dans ces conditions, si (8) est vérifiée alors le point stationnaire est un minimum relatif strict de $P(X, V)$.

$$C - P(X, V) = \prod_{i=1}^1 \frac{P_i(X_i, V)}{P_i(X_i, V)} + \sum_{i=1+1}^N \frac{P_i(X_i, V)}{P_i(X_i, V)}$$

1) - Convergence :

Les conditions suffisantes de stabilité se déduisent évidemment des conditions formulées dans les cas A et B.

2) - Minimum :

Une condition suffisante pour que (7) soit vérifiée est :

$$\left. \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2} \right|_* > 0 \quad (i = \overline{1, N}) \quad ; \quad P_i \Big|_* > 0 \quad (i = \overline{1, 1})$$

$$D - P(X, V) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{P_i(X_i, V)} + \sum_{i=1}^{q \leq l} \frac{P_i(X_i, V)}{P_i(X_i, V)} + \sum_{i=l+1}^N \frac{P_i(X_i, V)}{P_i(X_i, V)}$$

1) Convergence :

Les conditions suffisantes de stabilité se déduisent des cas précédents.

2) - Minimum :

Pour cette forme de critère on a :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_1}{\partial X_1^2} (1 + P_2 \dots P_\ell) & & & & 0 \\ & \frac{\partial^2 P_q}{\partial X_q^2} (1 + P_1 \dots P_{q-1} P_{q+1} \dots P_\ell) & & & \\ & & \frac{\partial^2 P_{q+1}}{\partial X_{q+1}^2} (P_1 \dots P_q P_{q+2} \dots P_\ell) & & \\ & & & \frac{\partial^2 P_\ell}{\partial X_\ell^2} (P_1 \dots P_{\ell-1}) & \\ & & & & \frac{\partial^2 P_{\ell+1}}{\partial X_{\ell+1}^2} \\ 0 & & & & & \frac{\partial^2 P_N}{\partial X_N^2} \end{bmatrix}$$

Une condition suffisante pour que $\left. \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right|_* > 0$ (7) est :

$$\left. \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2} \right|_* > 0 \quad (i = \overline{1, N}) \quad \text{et} \quad P_i \Big|_* > 0 \quad (i = \overline{1, N})$$

A2.2 - OPTIMISATION HIERARCHISEE AVEC CONTRAINTES EGALITE :

Soit le problème d'optimisation :

$$\min P(X, V)$$

$$X, V$$

$$\text{sous } \begin{cases} G(X, V) = 0 & p \text{ équations } (p < n_X) \\ H(V) = 0 & q \text{ équations } (q < n_V) \end{cases}$$

(14)

On suppose que :

$$G(X, V) = 0 \quad \text{forme un système régulier pour } X \quad (15)$$

$$H(V) = 0 \quad \text{forme un système régulier pour } V \quad (16)$$

alors
$$\left. \begin{array}{l} G(X, V) = 0 \\ H(V) = 0 \end{array} \right\} \text{ forment un système régulier pour } (X, V) \quad (17)$$

En effet, (17) s'exprime par :

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial g_1}{\partial X_1} & \frac{\partial g_1}{\partial X_{nx}} & \frac{\partial g_1}{\partial V_1} & \frac{\partial g_1}{\partial V_{nv}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial X_1} & \frac{\partial g_p}{\partial X_{nx}} & \frac{\partial g_p}{\partial V_1} & \frac{\partial g_p}{\partial V_{nv}} \\ \hline & \bigcirc & \frac{\partial h_1}{\partial V_1} & \frac{\partial h_1}{\partial V_{nv}} \\ & & \frac{\partial h_q}{\partial V_1} & \frac{\partial h_q}{\partial V_{nv}} \end{array} \right]$$

Or si (15) et (16) sont vérifiées, on peut extraire de A et de B des matrices régulières A' et B' respectivement d'ordre p et q et on peut alors extraire de C une sous-matrice d'ordre p + q de la forme :

$$D = \left[\begin{array}{c|c} A' (p \times p) & E \\ \hline 0 & B' (q \times q) \end{array} \right]$$

$$|D| = |A'| \cdot |B'| \neq 0. \quad D \text{ est une matrice régulière d'ordre } (p+q)$$

C.Q.F.D.

Le Lagrangien du problème (14) est :

$$L = P(X, V) + \lambda^T G(X, V) + \mu^T H(V)$$

On propose de résoudre (14) par une structure d'optimisation à deux niveaux.

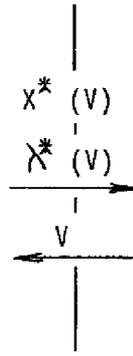
1er niveau	2ème niveau
$\min P(X, V)$ X sous $G(X, V) = 0$ pour V donné	$\min P(X^*(V), V)$ sous $H(V) = 0$
Si une solution existe, elle est de la forme $\begin{cases} X = X^*(V) \\ \lambda = \lambda^*(V) \end{cases}$	

et vérifie nécessairement

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 ; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \geq 0 \text{ dans}$$

$$E_X = \left\{ z \mid \frac{\partial G}{\partial X} z = 0 \right\}$$



l'algorithme proposé est :

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial V}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = + \frac{\partial L}{\partial \mu}$$

1) - Convergence :

Soit :

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right)^T \frac{\partial L}{\partial V} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mu} \right)^T \frac{\partial L}{\partial \mu}$$

Si chaque composante de $\partial L / \partial V$ et $\partial L / \partial \mu$ est continue et bornée, alors F est une fonction de Lyapunov.

$$\dot{F} = \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right)^T \left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \frac{dV}{dt} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \frac{d\mu}{dt} \right] + \left(\frac{\partial L}{\partial \mu} \right)^T \frac{d}{dV} \left(\frac{\partial L}{\partial \mu} \right) \cdot \frac{dV}{dt}$$

Car au 2^{ème} niveau $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial V} \text{ est une fonction de } V, \mu, X^*(V), \lambda^*(V) \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} \text{ est une fonction de } V \end{cases}$

$$\Rightarrow \dot{F} = - \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right)^T \frac{d}{dV} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial V} \right)^T \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial V} \left(\frac{\partial L}{\partial \mu} \right)}_A - \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \mu} \right)^T \frac{\partial^2 L}{\partial V \partial \mu} \frac{\partial L}{\partial V}}_B \quad (18)$$

Il vient : $A - B = A - A^T$. Comme A est un scalaire : $A - B = 0$

$$(18) \Rightarrow \dot{F} = \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right)^T \frac{d}{dV} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right)$$

D'autre part, en notant que $\frac{d}{dV} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right)$ est en fait la dérivée totale de $\frac{\partial L}{\partial V}$ par rapport à V :

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial V} \cdot \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial V} \frac{d\lambda}{dV} + \frac{\partial^2 L}{\partial V^2}$$

$$\Rightarrow \dot{F} = - \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right)^T \left[\frac{\partial^2 L}{\partial X \partial V} \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial V} \frac{d\lambda}{dV} + \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} \right] \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \quad (19)$$

Au 1^{er} niveau, les équations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0, \left[\frac{\partial L}{\partial X} = f(X^*(V), \lambda^*(V), V) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \left[\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(X^*(V), V) \right]$$

Donc :

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{\partial L}{\partial X} \right) = 0 = \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \lambda} \frac{d\lambda}{dV} + \frac{\partial^2 L}{\partial V \partial X}$$

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right) = 0 = \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \lambda} \frac{dX}{dV} + \frac{\partial^2 L}{\partial V \partial \lambda}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \lambda} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dX}{dV} \\ \frac{d\lambda}{dV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 L}{\partial V \partial X} \\ -\frac{\partial^2 L}{\partial V \partial \lambda} \end{bmatrix}$$

N

Si la matrice N est régulière, du système précédent on tire $\frac{dX}{dV}$ et $\frac{d\lambda}{dV}$ qui peuvent être substitués dans (19)

Cependant, on constate que les conditions suffisantes de stabilité sont difficiles à établir dans le cas général.

Sous réserve d'hypothèses simplificatrices, des conditions suffisantes peuvent être trouvées [4, pp. 174-175]

2) - Minimum de $P(X, V)$

Comme précédemment (§ 1.2) supposons que l'algorithme d'optimisation est convergent. Le point stationnaire $*$ obtenu vérifie :

$$\left. \frac{\partial L}{\partial X} \right|_* = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right|_* = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial L}{\partial V} \right|_* = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \mu} \right|_* = 0$$

Si :

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \right|_* > 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{E}_X = \left\{ \beta \mid \frac{\partial G}{\partial X} \beta = 0 \right\} \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} \right|_* > 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{E}_V = \left\{ y \mid \frac{\partial H}{\partial V} y = 0 \right\} \quad (21)$$

Alors, le point stationnaire est un minimum relatif strict du problème d'optimisation.

Démonstration :

Comme au § 1.2, on peut montrer que :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial V \partial X} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial V} & \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} \end{pmatrix}^* > 0 \text{ dans } \mathcal{E} = \mathcal{E}_X + \mathcal{E}_V \quad (22)$$

Or \mathcal{E} est un espace vectoriel de dimension $p + q$, qui est le même que celui défini, d'après (17), par $\{t \mid Ct = 0\}$ avec

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial X} & \frac{\partial G}{\partial V} \\ 0 & \frac{\partial H}{\partial V} \end{bmatrix}$$

(22) constitue une condition suffisante pour que le point stationnaire soit un minimum relatif strict.

2.3. - Formes particulières de $P(X, V)$

$$A - \underline{P(X, V)} = \sum_{i=1}^N \underline{P_i(X_i, V)} ; \underline{G(X, V)} = \begin{cases} G_1(X_1, V) = 0 \\ \vdots \\ G_N(X_N, V) = 0 \\ H(V) = 0 \end{cases}$$

Une condition suffisante pour que (20) soit vérifiée, si les $G_i(X_i, V)$ forment des systèmes réguliers pour les X_i est :

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial X_i^2} \right|_* > 0 \text{ dans } \mathcal{E}_{X_i} = \left\{ z_i \mid \frac{\partial G_i}{\partial X_i} z_i = 0 \right\} \quad (i = \overline{1, N}) \quad (23)$$

(23) exprime qu'à la solution $*$, chaque sous-problème d'optimisation au i er niveau, admet un minimum relatif strict par rapport au X_i .

$$B - \underline{P(X, V)} = \prod_{i=1}^N \underline{P_i(X_i, V)} ; \underline{G(X, V)} = \begin{cases} G_1(X_1, V) = 0 \\ \vdots \\ G_N(X_N, V) = 0 \\ H(V) = 0 \end{cases}$$

Une condition suffisante pour que (20) soit vérifiée est :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i |_* > 0 \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2} |_* > 0 \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial X_i^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i} \lambda_i \right) |_* \end{array} \right. \quad \text{dans } \mathcal{E}_{X_i} \quad (i = \overline{1, N}) \quad (24)$$

En effet (24) est une condition suffisante pour que $\frac{\partial^2 L}{\partial X_i^2} |_* > 0$ dans \mathcal{E}_{X_i} . Les conditions suffisantes pour les cas de critères C et D se déduisent de (23) et (24).

A2.3 - OPTIMISATION HIERARCHISEE AVEC CONTRAINTES INEGALITE :

Soit le problème d'optimisation :

$$\begin{array}{l} \min P(X, V) \\ X, V \end{array} \quad (25)$$

$$\text{sous } \begin{cases} G(X, V) \geq 0 \\ H(V) \geq 0 \end{cases}$$

On se propose de résoudre (25) par une structure d'optimisation à deux niveaux :

1er niveau	2ème niveau
$\begin{array}{l} \min P(X, V) \\ \text{sous } G(X, V) \geq 0 \\ \text{pour } V \text{ donné} \end{array}$	$\begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial L}{\partial V} \\ \frac{d\mu}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial L}{\partial \mu} > 0 \text{ et } \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} & \text{autrement} \end{cases} \end{array}$
$\begin{array}{c} \xrightarrow{X^*(V), \lambda^*(V)} \\ \xleftarrow{V} \end{array}$	
1) <u>Convergence</u> :	

La recherche de conditions suffisantes de convergence par la méthode de Lyapunov est très difficile dans ce cas étant donné le caractère non linéaire de l'algorithme d'optimisation au 2^{ème} niveau. On doit alors avoir recours à d'autres méthodes [4].

2) Minimum :

Si les conditions de Kuhn - Tucker sont vérifiées aux 1^{er} et 2^{ème} niveaux pour le point stationnaire obtenu, alors les conditions suffisantes de minimum sont les mêmes que dans le cas d'une optimisation avec contraintes égalité, en considérant les contraintes inégalité saturées comme des contraintes égalité.

RÉFÉRENCES



1. M.D. MESAROVIC, D. MACKO, Y. TAKAHARA
Theory of hierarchical, multilevel systems
Academic Press, New-York, 1970.
2. H.A. SIMON,
The architecture of complexity
Proceedings of the American Philosophical Society,
vol. 106, n° 6, December 1962.
3. J.D. SHOEFLER
On-Line multilevel systems,
in "Optimization methods for large-scale systems",
D.A. Wismer, Mac Graw Hill, New-York 1971.
4. A. TITLI
Contribution à l'étude des structures de commande hiérarchisée en vue
de l'optimisation des processus complexes,
Thèse de Doctorat d'Etat, Toulouse n° 495, 1972.
5. A.J. FOSSARD, M. CLIQUE, N. IMBERT
Aperçus sur la commande hiérarchisée,
RAIRO, J 3, pp. 3-40, 1972.
6. W. FINDENSEN, I. LEFKOWITZ
Design and application of multilayer control,
IVe Congrès IFAC, Varsovie 1969
7. I. LEFKOWITZ, J.D. SHOEFLER
Multilevel control for three discrete manufacturing processes,
Vè Congrès IFAC, Paris 1972.
8. I. LEFKOWITZ
Multilevel approach applied to control system design,
JACC 1965
9. J. ERSCHLER, F. ROUBELLAT, J.P. VERNHES
Decision making process for the real-time control of a production unit,
3 rd International Conference on Production Research, Amherst. August 1975.
10. M.D. MESAROVIC
Multilevel systems theory : State of the art. 1971,
2 nd Symposium on Multivariable Technical Systems, Dusseldorf 1971
11. DI LIACCO
Control of power systems via the multi-level concept,
Ph. D. Thesis, Case Western Reserve University, Cleveland, June 1968.
12. G. KRON
Diakoptics : the piecewise solution of large-scale systems,
Mac-Donald, London, 1963.
13. G.B. DANTZIG, P. WOLFE
Décomposition principle for linear programs,
Operations Research, vol 8, n° 1, pp. 101-111, 1960.
14. D.V. STEWARD
Partitioning and tearing systems of equations,
J. SIAM Numer. Anal, ser B, vol 2, n° 2, 1965.

15. D.M. HIMMELBLAU
Morphology of decomposition,
in "Decomposition of large-scale problems", D.M. HIMMELBLAU, North-Holland
Publishing Co, 1973.
16. C.V. RAMAMOORTHY, M.J. GONZALEZ
A survey of techniques for recognizing parallel processable streams in
computer programs,
Fall Joint Computer Conference, 1969
17. L.S. LASDON, J.D. SHOEFLER
A multilevel technique for optimization,
JACC 1965.
18. G.B. BROSILOW, L.S. LASDON, J.D. PEARSON
Feasible optimization methods for interconnected systems,
JACC 1965.
19. G. GRATELOUP, A. TITLI,
Two-level dynamic optimization methods,
JOTA, vol. 5, Mai 1975.
20. M.G. SINGH
Practical methods for the control and state estimation of large interconnected
systems,
RAIRO J 3, pp. 5-45, Octobre 1974.
21. I. PLANDER
The reliability of a hierarchic multi-computer systems for real-time direct
industrial process control,
Information Processing 1971 - North-Holland Publishing Company 1972.
22. J.F. DONOGUE, I. LEFKOWITZ
Economic Tradeoffs associated with a multilayer control strategy for a class
of static systems,
IEEE Trans. on Automatic Control, vol AC 17, n° 1, February 1972.
23. L.S. LASDON
Optimization theory for large system,
Mac-Millan, 1970.
24. B. CHENEVEAUX
Synthesis of a multivariable control system via multilevel techniques,
2 nd IFAC Symposium on Multivariable Control Systems, Dusseldorf, 1971.
25. A. BENVENISTE, P. BERNHARD, G. COHEN
Commande hiérarchisée avec coordination en ligne d'un système dynamique,
RAIRO, J 4, pp. 71-91, Décembre 1972.
26. M. SINGH, A. TITLI
Closed-loop hierarchical control for non-linear dynamical systems using
the quasi-linearisation approach,
VIe Congrès IFAC, Boston, 1975.
27. B. CHENEVEAUX
Contribution à l'optimisation hiérarchisée des systèmes dynamiques,
Thèse de Docteur-Ingénieur, n° 4, Nantes, 1972.

28. M. AOKI
On feedback stabilizability of decentralized dynamic systems,
Automatica, vol. 8, pp. 163-173, 1972.
29. S.H. WANG, E.J. DAVISON
On stabilization of decentralized control system,
IEEE Trans. on Automatic Control, vol AC-18, n° 5, 1973.
30. D.D. SILJAK
Stability of large-scale systems under structural perturbations,
IEEE Trans. on Syst. Man. and Cybernetics, vol. SMC-2, n° 4, pp. 657-663,
November 1972.
31. L.T. GRUJIC, D.D. SILJAK
Stability of large scale systems with stable and unstable subsystems,
JACC 1972.
32. F.N. BAILEY
The application of Lyapunov's second method to interconnected systems,
J. SIAM Control, vol 3, n° 3, 1966.
33. A. STRASJAK
On the synthesis of multilevel large scale control systems,
IVE Congrès IFAC, Varsovie 1969.
34. R. KULIKOWSKI
Optimization of large-scale systems,
Automatica, vol. 6, pp. 315-331, 1970.
35. G.J. COVIELLO
An organizational approach to the optimization of multivariate systems,
JACC 1964.
36. C.F. SPRAGUE
On the reticulation problem in multivariable control systems,
JACC 1964.
37. H.K. RAMAPRIYAN
Study of coupling in interconnected systems,
Ph D. Thesis, University of Minnesota, 1970.
38. B. ROY
Algèbre moderne et théorie des graphes,
Dunod, Paris, 1970.
39. J.N. WARFIELD
On arranging elements of a hierarchy in graphic form,
IEEE Trans. on Syst. Man, Cybern, vol SMC-3, n° 2, March 1973.
40. J.N. WARFIELD
Binary matrices in system modeling,
IEEE Trans. on Syst. Man, Cybern, vol SMC 4, n° 5, September 1974.
41. F. HARARY
Sparse matrices and graph theory
in "Large sparse sets of linear equations", J.K. Reid, Academic Press,
New-York, 1971.

42. C.V. RAMAMOORTHY
Connectivity considerations of graphs representing discrete sequential systems,
IEEE Trans on Elect. Comp., pp. 724-727, October 1965.
43. A.K. KEVORKIAN, J. SNOEK
Theory and applications of structural analysis in partitioning, disjointing and constructing hierarchical systems,
in "Decomposition of large-scale problems", D.M. Himmelblau, North-Holland Publishing Co, 1973.
44. W.P. LEDET, D.M. HIMMELBLAU
Decomposition procedure for the solving of large scale systems,
Advances in Chemical Engineering, n° 8, pp. 185-254, 1970.
45. M. RICHTIN, J.E. DOUCET
Graphes connexes : algorithmes et programmes,
Note interne CH-LAAS 73-I-05, Février 1973.
46. F. HARARY
A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward finding its eigenvalues,
J. Math Physics, n° 38, pp. 104-111, 1959
47. R.S. VARGA
Matrix iterative analysis,
Prentice-Hall, 1962.
48. R.P. TEWARSON
Sorting and ordering sparse linear systems,
in "Large sparse sets of equations", J.D. Reid, Academic Press, New-York, 1971.
49. R.L. WEIL, P.C. KETTLER
Rearranging matrices to block-angular form for decomposition (and other) algorithms,
Management Science, vol. 18, n° 1, September 1971.
50. W. FINDENSEN
Parametric Optimization by primal method in multilevel systems,
IEEE Trans, on Syst. Science and Cybern., SSC-4, 1968
51. M. RICHTIN
Graphs and decomposition for multilevel optimization,
2 nd Formator Symposium on Mathematical Methods for Analysis of Large Systems, Prague, June 1974.
52. E.J. BAUMAN
Multilevel optimization techniques with application to trajectory decomposition,
Advances in Control Systems, 6, pp. 159-220, 1968.
53. A. TITLI , T. LEFEVRE , M. RICHTIN
Multilevel optimization methods for non-separable problems and application,
Int.J. Systems Sci., vol 4, n° 6, 1973.
54. A. KAUFMANN
Introduction à la combinatoire en vue des applications,
Dunod, Paris, 1968.

55. C. BERGE
Graphes et Hypergraphes,
Dunod, Paris, 1970.
56. L.R. FORD, D.R. FULKERSON
Flows in networks,
Princeton University Press, 1962.
57. E.A. SCHROEPPPEL
Graph Partitioning,
Ph D. Dissertation, Polytechnic Institute of Brooklyn, n° 71 29 105, 1971.
58. B.W. KERNIGHAN, S. LIN
An efficient heuristic procedure for partitioning graphs,
The Bell System Journal, pp. 291-307, February 1970.
59. G.I. ORLOVA, Y.G. DORFMAN
Optimum partition of a graph into several subgraphs,
Engineering Cybernetics, vol. 18, Jan/Feb 1972.
60. T. MUKHERJEE, P.K. SARKAR
A method of determination of the articulation points of a graph,
Bull. Cal. math. Soc. 64, pp. 41-45, 1972.
61. M. INKIELMANN, M. RICHTIN, A. TITLI
Decomposition et commande hiérarchisée des processus complexes. Application
au génie chimique,
Congrès de la Fédération Européenne de Génie Chimique, Paris, Avril 1973.
62. M. AOKI
Control of large-scale dynamic systems by aggregation,
IEEE Trans. on Automatic Control, vol 13, n° 3, pp. 246-253, June 1968
63. T. LEFEVRE
Etude et mise en oeuvre des algorithmes de coordination dans les structures
de commande hiérarchisée,
Thèse de Docteur-Ingénieur, Toulouse, n° 373, 1973.
64. J. STERN, J. de BARBEYRAC, R. POGGI
Méthodes pratiques d'études des fonctions aléatoires,
Dunod, Paris, 1967.
65. R. MILNE
The analysis of weakly-coupled dynamical systems,
International. J. Control, vol 2, pp. 171-199, August 1965.
66. L. LEBART, J.P. FENELON
Statistique et Informatique appliquées,
Dunod, Paris, 1973.
67. G.E.P. BOX, G.M. JENKINS
Time Series Analysis, forecasting and control,
Holden-Day, San-Francisco, 1970.
68. R.C. CONANT
Information transfer in complex systems with application to regulation
Ph D. Thesis, University of Illinois, U.S.A., January 1968.

69. R.C. CONANT
Detecting subsystems of a complex system,
IEEE Trans. on Syst. Man. and Cybern., pp. 550-553, September 1972.
70. W.J. Mc GILL
Multivariate information transmission,
Psychometrika, vol 19, n° 2, pp. 97-116, June 1954.
71. E. ROUBINE
Introduction à la théorie de la communication,
Masson, Paris, 1970.
72. W.R. ASHBY
Measuring the internal informational exchange in a system,
Cybernetica, n° 1, pp. 5-22, 1965.
73. R.E. RINK
Information-theoretic methods for modelling and analysing large systems,
IFIP Symposium on Optimization Techniques, Rome, 1973.
74. E. DIDAY
Recent progress in distance and similarity measures in pattern recognition,
Second International Joint Conference on Pattern Recognition, Copenhagen,
1974.
75. J.P. BENZECRI
Problèmes et méthodes de la taxinomie,
Revue de Statistique appliquée, vol. 18, n° 4, 1970.
76. Rapport de contrat DGI-LAAS, "Etude visant au contrôle et à la conduite de chaînes de fabrication de dispositifs à semi-conducteurs", n° LAAS-1022, Avril 1973,
 - I. - M. RICHTIN, A. TITLI, Analyse structurale du processus et hiérarchisation de la commande.
 - II. - J.P. RICHARD, M. LEMAITRE, Diagnostic d'incidents répertoriés.
 - III. - J.C. CHARAVIT, C. HERNANDEZ, Commande stochastique d'une opération de la chaîne de fabrication.
77. Rapport de contrat DGI-LAAS, "Etude visant au contrôle et à la conduite de chaînes de fabrication de dispositifs à semi-conducteurs", n° LAAS, 1174, Juin 1974,
 - I. - D. ESTEVE, M. RICHTIN, Principes généraux de conception de l'automatisation intégrée d'une chaîne de fabrication de composants électroniques au silicium.
 - II. - C. HERNANDEZ, M. RICHTIN, H. PIOTROWSKI, Analyse structurale de la chaîne de fabrication par les données en vue de la maîtrise des caractéristiques des produits.
 - III. - L. ETESSE, M. LEMAITRE, J.P. RICHARD, L'aide à la décision au niveau surveillance et décision statistiques.
 - IV. - M. LEMAITRE, J.P. RICHARD, Diagnostic d'incidents répertoriés.
78. B. ROY
Décisions avec critères multiples : problèmes et méthodes,
SEMA, Revue METRA, vol XI, n° 1, 1972.

79. M. RICHETIN, C. HERNANDEZ
Structural analysis of discrete complex processes for multilevel control.
Application to an electronic components production line.
VIè congrès IFAC, Boston, 1975.
 80. M. ATTIAS, M. GHALLAB
Conception d'un système de gestion intégré d'un processus discret,
Rapport ENSAE-LAAS, Toulouse, Juin 1974.
 81. M. RICHETIN, G. GRATELOUP
The synthesis of multilevel system : a new graph theoretic approach,
3 rd IFAC Symposium on Multivariable Technological Systems, Manchester,
September 1974.
 82. M. RICHETIN, G. GRATELOUP
On the partitioning problem in the synthesis of multilevel optimization
systems,
IFIP Technical Conference on Optimization Techniques, Novossibirsk, July
1974.
 83. G. GRATELOUP, A. TITLI, T. LEFEVRE
Les algorithmes de coordination dans la méthode mixte d'optimisation à
deux niveaux,
Proceedings of 5 th IFIP. Conf. on Optimization Techniques, Springer-
Verlag, Berlin, 1973.
 84. G. GRATELOUP, A. TITLI
Combined decomposition and coordination method in large dimension
optimization problems,
Int. Journal of Systems Science, vol 4, n° 4, pp. 577-595, 1973.
 85. A.G.J. MACFARLANE
Relationships between recent developments in linear control theory and
classical design techniques,
3 rd IFAC Symposium on Multivariable Technological Systems, Manchester,
September 1974.
 86. O.A. SOLHEIM
Optimal feedback control of a class of multi-level dynamical systems.
3 rd IFAC Symposium on Multivariable Technological Systems, Manchester,
September 1974.
-