



**HAL**  
open science

# Prévision de la sureté de fonctionnement par les processus staochastiques. Le programme SURF, modélisation de structures à fonctionnement discontinu

André Lestrade-Carbonnel

## ► To cite this version:

André Lestrade-Carbonnel. Prévision de la sureté de fonctionnement par les processus staochastiques. Le programme SURF, modélisation de structures à fonctionnement discontinu. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 1977. Français. NNT: . tel-00176775

**HAL Id: tel-00176775**

**<https://theses.hal.science/tel-00176775>**

Submitted on 4 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

*pour obtenir*

**Le GRADE de DOCTEUR de 3° CYCLE**

Mention E. E. A. - Option Automatique

*par*

André LESTRADE - CARBONNEL

*Maître ès Sciences*

---

## **PREVISION DE LA SURETE DE FONCTIONNEMENT PAR LES PROCESSUS STOCHASTIQUES**

**LE PROGRAMME SURF**

**MODELISATION DE STRUCTURES A FONCTIONNEMENT DISCONTINU**

Soutenue le 7 juin 1977, devant le jury composé de :

M.	A. COSTES	}	Président
Mme	A. CARNINO		
M.	J. C. LAPRIE	}	Examineurs
M.	J. F. MEYER		
Mme	G. SAUCIER		
M.	J. P. VEDEL		

A Jean-Claude et  
Anne-Marie, qui s'ils ne  
m'ont jamais convaincu idéologiquement,  
m'ont toujours donné amitié, appui et conseils  
Amicalement  
Jérôme Belhomme

A Alain COSTES

A Jean-Claude LAPRIE

A Christian LANDRAULT

A mes amis de l'Equipe

"Automatismes Numériques"

## REMERCIEMENTS

---

*J'aimerais commencer ce mémoire en exprimant mes vifs remerciements :*

- à Monsieur le Professeur J. LAGASSE, Directeur Scientifique au C.N.R.S., qui m'a accueilli au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes alors qu'il en était le Directeur et m'a toujours éclairé de ses conseils,
- à mes amis de l'Equipe "Automatismes Numériques", pour l'aide constante qu'ils m'ont prodiguée,
- aux chercheurs, ingénieurs et techniciens du Laboratoire pour les conseils qu'ils ont bien voulu me donner,
- aux membres du Jury de soutenance pour le temps qu'ils ont bien voulu consacrer à ce mémoire.

*Je ne saurais en outre commencer ce mémoire sans exprimer ma reconnaissance à Alain COSTES, Maître de Conférences à l'I.N.P.T., à Jean-Claude LAPRIE, Chargé de Recherche au C.N.R.S., et à Christian LANDRAULT, Attaché de Recherche au C.N.R.S., pour le ferme et constant soutien qu'ils m'ont apporté, mais aussi pour l'amitié dont ils ont su faire preuve.*

*Ont prêté leur concours à ce travail, réalisé au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du Centre National de la Recherche Scientifique :*

- A. COSTES, Maître de Conférences à l'I.N.P.T., Responsable de la Division "Structures des Systèmes de Commande Automatique" du L.A.A.S., Président du Jury de soutenance et rapporteur,
- A. CARNINO, Chef du Département Sécurité Nucléaire au C.E.A./C.E.N. Saclay, membre du Jury de soutenance,
- J.C. LAPRIE, Chargé de Recherche au C.N.R.S., Responsable de l'Equipe "Automatismes Numériques" du L.A.A.S., membre du Jury de soutenance et rapporteur,

- J. MEYER, Professeur à l'Université du Michigan, membre du Jury de soutenance,
- G. SAUCIER, Maître de Conférences à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, membre du Jury de soutenance,
- J.P. VEDEL, Conseiller Technique à l'Electronique Marcel Dassault, membre du Jury de soutenance,
- J. ARLAT, J. BARRETO LEITE, C. BEOUNES, F. CEREJA, Y. CROUZET, G. JUANOLE, G. MOREIRA DE SOUZA, D. POWELL, membres de l'Equipe "Automatismes Numériques",
- J. PENAVAYRE et C. MARROT, Secrétaire et Ingénieur de la Division "Structures des Systèmes de Commande Automatique",
- J.C. IPPOLITO, J.E. DOUCET et B. MEUNIER du Service "Informatique et Simulation",
- M.T. IPPOLITO, J. CATALA, E. LAPEYRE-MESTRE, R. ZITTEL, D. DAURAT et R. LORTAL du Service "Documentation-Publications".

## SOMMAIRE

---



INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. MÉTHODES D'ÉVALUATION DE LA SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT	5
1. SYSTEMES ET SURETE DE FONCTIONNEMENT	7
2. METHODES D'EVALUATION DE FONCTIONNEMENT DES SYSTEMES	12
3. INTERET DE LA MODELISATION PAR PROCESSUS MARKOVIENS HOMOGENES	24
CHAPITRE 2. SURF : OUTIL D'ÉVALUATION DE LA SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT DES SYSTÈMES	25
1. BUT DE SURF ET ACCESSIBILITE	27
2. OUTILS MATHEMATIQUES UTILISES : RAPPELS	28
3. PRESENTATION DES PROGRAMMES SURF	36
4. ALGORITHMES D'IMPLANTATION DES OUTILS MATHEMATIQUES	41
5. DESCRIPTION DE SURF, VERSION FORTRAN	53
6. PERFORMANCES DE SURF	65
7. EXEMPLES D'UTILISATION	66
CHAPITRE 3. SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT DE STRUCTURES FONCTIONNANT DE MANIÈRE NON CONTINUE	77
1. INTRODUCTION	79
2. NATURE ET MODELISATION DU FONCTIONNEMENT DISCONTINU. COMPOSANTES CARACTERISTIQUES	80
3. STRUCTURE NON REDONDANTE FONCTIONNANT DE MANIERE DISCONTINUE	85
4. STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE ACTIVE EN FONCTIONNEMENT NON CONTINU	108



5. <i>CONCLUSION</i>	117
CONCLUSION	119
BIBLIOGRAPHIE	125
TABLE DES MATIÈRES	133

## INTRODUCTION

---



Les progrès accomplis ces dernières années dans la fabrication des circuits intégrés, tant au niveau de leur qualité que de leur diversité ou de leur puissance, donnent aux structures numériques une importance croissante dans le rôle qu'elles sont amenées à jouer dans les processus industriels.

Les applications dans lesquelles elles sont destinées à fonctionner sont très diverses de par les contraintes qu'elles impliquent. Ces contraintes, qui jusqu'à récemment étaient d'origine fonctionnelle uniquement, prennent désormais de plus en plus en compte l'aspect sûreté de fonctionnement. Ce dernier, depuis toujours sous-jacent, a été mis en exergue par les techniques souvent découvertes avec empirisme grâce à l'expérience des concepteurs ; le désir légitime de systématiser l'emploi de ces techniques, du moins en vue de l'optimisation d'une ou plusieurs composantes de la sûreté de fonctionnement en fonction de l'application, a conduit à développer des méthodes d'études moins guidées par le hasard ou l'expérience. Cela explique le développement depuis quelques années d'outils destinés à évaluer les composantes de la sûreté des systèmes. Le manque de généralité de la plupart de ces outils tendrait à montrer qu'ils ont été développés cas par cas afin de valider au stade du produit fini la conception d'une structure.

Nous pensons pour notre part qu'une prise en compte des problèmes de sûreté de fonctionnement au stade de la conception éviterait de tomber dans le biais de solutions aboutissant à une inhomogénéité concernant l'architecture des structures ainsi réalisées. En effet, le souci simultané de satisfaire les contraintes de sûreté et les impératifs fonctionnels :

- doit conduire à une solution finale répondant au cahier des charges,
- ouvre un éventail plus large de techniques de réalisation en intégrant la sûreté de fonctionnement au niveau désiré.

x

x x

Nous présentons au premier chapitre des méthodes d'évaluation de la sûreté de fonctionnement. L'analyse de ces méthodes permet, en fonction de ce que nous venons de dire, de les classer en deux catégories :

- les méthodes d'évaluation prévisionnelle des performances de sûreté,
- les méthodes d'évaluation à postériori.

Nous nous sommes plus particulièrement intéressé à la première catégorie en tentant de développer un outil d'aide à la conception.

Cet outil, présenté au chapitre deux, est précisément destiné à fournir un moyen d'évaluer au stade de la conception, les performances de sûreté de structures connues par leur architecture et leur exploitation. L'outil mathématique sur lequel repose cette évaluation est rendu transparent au maximum à l'utilisateur, afin de lui permettre de concentrer son attention sur les paramètres sur lesquels son rôle de décideur peut influencer : architecture et sa gestion, politique de maintenance, etc.

Le niveau de modélisation que requiert cet outil, ainsi que ses limitations en font plus un outil de comparaison entre systèmes qu'un outil d'évaluation des performances proprement dit.

La troisième partie est consacrée à l'aspect modélisation dans le cas de structures fonctionnant de manière non continue. Ce chapitre constitue par ailleurs une aide pour un utilisateur du programme SURF en montrant les aménagements qu'il est possible d'effectuer lorsque les structures sont utilisées de manière non continue, comme c'est souvent le cas dans la réalité.

# CHAPITRE 1

---

## MÉTHODES D'ÉVALUATION DE LA SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT

-

1. *SYSTEMES ET SURETE DE FONCTIONNEMENT*
2. *METHODES D'EVALUATION*
3. *INTERET DE LA MODELISATION PAR PROCESSUS  
MARKOVIENS HOMOGENES*

---



## 1. SYSTÈMES ET SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT

---

### 1.1. EVALUATIONS DES PERFORMANCES

La nécessité de l'introduction d'une structure numérique de commande dans un système passe par deux étapes complémentaires qui sont indispensables lors de la phase "aide à la conception" :

- une première étape d'analyse et de description qui se concrétise par le cahier des charges,
- une deuxième étape d'évaluation des performances qui se concrétise par un choix d'architecture -matérielle et logicielle- répondant au cahier des charges précédemment défini.

Si l'on reprend le compte-rendu des travaux [TOU,76] de la Commission A.F.C.E.T. "Normalisation de la représentation du cahier des charges d'un automate logique", on remarque que, d'un point de vue purement technique, un cahier des charges doit comporter trois catégories de spécifications :

- les spécifications fonctionnelles, qui définissent les réactions de la structure face aux événements issus du système,
- les spécifications technologiques, qui précisent la façon dont l'automatisme doit s'insérer dans l'ensemble du système,
- les spécifications opérationnelles qui concernent le suivi du fonctionnement de la structure au cours de toute son existence.

Si l'on suppose cette étape franchie de manière précise, sans ambiguïté ni omission, se fait sentir alors le besoin d'outils de description et de prévision des performances qui permettent :

- des choix motivés entre diverses architectures et organisations possibles,
- l'étude de la faisabilité du système avant sa réalisation.



Dans cette deuxième étape, le but à atteindre est bien évidemment la mise en oeuvre d'outils permettant une approche globale du problème tenant compte d'une manière imbriquée des trois catégories de spécifications précédentes ; ceci revient à dire qu'il faut créer des outils sinon semblables, tout au moins homogènes au niveau des résultats qui permettraient de mener de manière parallèle la conception, et non de manière purement séquentielle comme c'est encore le cas aujourd'hui ; une telle méthode d'approche globale permettrait d'évaluer sur l'ensemble des spécifications à la fois, les retombées d'une modification.

C'est dans cet esprit que sont menées actuellement les recherches des équipes "Représentation, Analyse et Sécurité des Systèmes de Commande" [GEF,76]-[VAL,76] et "Automatismes Numériques" [LAP,75]-[LAN,77]-[SAG,77] du L.A.A.S. du C.N.R.S.

Nous nous sommes, pour notre part, essentiellement intéressé aux méthodes spécifiques à l'étude de la sûreté de fonctionnement, certaines d'entre-elles pouvant d'ailleurs conduire simultanément à une validation des spécifications fonctionnelles.

La recherche de performances de sûreté de fonctionnement qui sont fournies par l'analyse du cahier des charges conduit à l'utilisation de techniques qui permettent de mieux définir le système. Chacune de ces techniques remplit une fonction déterminée concourant à faire de la panne sinon un événement naturel prévu, ce qui constitue un objectif idéal, du moins un événement minimisé quant à sa fréquence d'apparition et aux conséquences qu'il peut avoir sur le système. Ces fonctions de minimisation sont réalisées à l'aide de moyens se traduisant respectivement par :

- des choix technologiques,
- l'utilisation d'architectures spécifiques,
- des procédures de maintenance adaptées à la structure et à son fonctionnement.

L'évaluation de ces techniques nécessite une description du système, constituant l'étape de modélisation. Suivant les formes de cette modélisation, on peut dégager deux catégories de méthodes d'évaluation :

- les méthodes permettant d'évaluer les composantes de sûreté du système et de valider simultanément la conception fonctionnelle de la structure,
- les méthodes plus spécifiques à l'étude des performances de sûreté, qui ne s'intéressent du point de vue structure qu'à son architecture, et non à ses performances fonctionnelles.

La figure 1 donne une représentation des étapes de la conception d'une structure tenant compte des performances fonctionnelles et de celles de sûreté et ce sans tenir compte des considérations technico-économiques et commerciales.

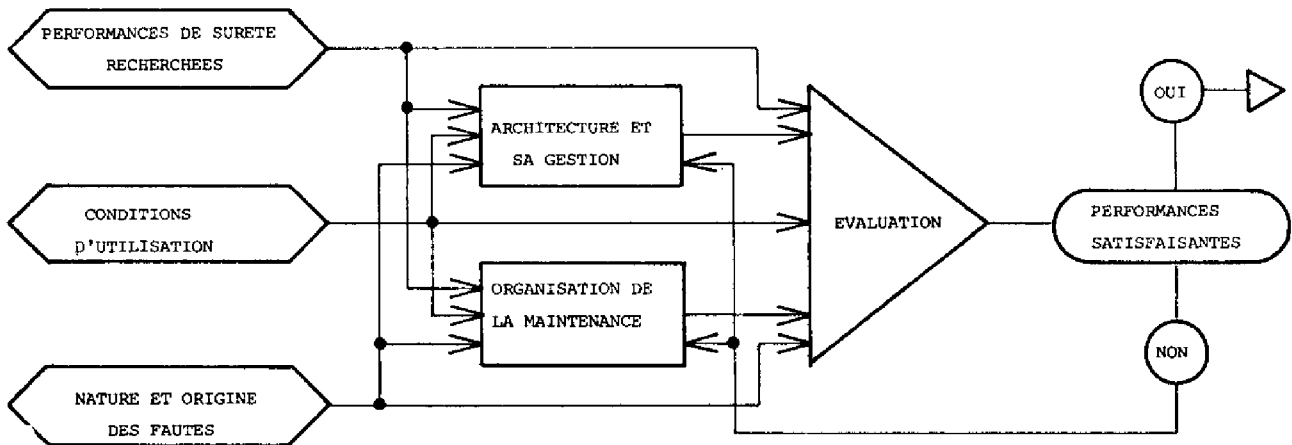


FIGURE 1. Etapes d'aide à la conception.

Nous allons, dans le paragraphe suivant, analyser les performances de sûreté de fonctionnement afin d'en déduire les performances caractéristiques, qui sont fonction du domaine d'application envisagé.

## 1.2. PERFORMANCES CARACTERISTIQUES DE LA SURETE DE FONCTIONNEMENT

### 1.2.1. Composantes de la sûreté de fonctionnement

La sûreté de fonctionnement est une grandeur vectorielle dont les composantes peuvent se répartir en deux groupes suivant leurs retombées :

- les composantes système,
- les composantes structure par l'intermédiaire de la mesure de la tolérance aux pannes.

#### 1.2.1.1. Définition des composantes

La nature des phénomènes mis en jeu étant aléatoire en fonction du temps, il est possible de définir les composantes de la sûreté de fonctionnement par des probabilités.

Les principales composantes système ainsi que leurs définitions sont les suivantes :

- Fiabilité : probabilité de bon fonctionnement continu.
- Disponibilité : probabilité que le système puisse exécuter les tâches qui lui sont confiées lorsqu'il est sollicité.
- Sécurité : probabilité qu'une faute dont les effets sont catastrophiques ne survienne pas.
- Maintenabilité : probabilité de localiser et de réparer les éléments défectueux.

Les composantes structure sont quant à elles plus orientées vers l'évaluation du comportement des structures en présence de dégradations :

- Crédibilité : probabilité qu'une panne soit signalée, étant donné qu'elle était survenue.
- Survivabilité : probabilité que le système puisse continuer à exécuter les tâches qui lui sont dévolues, en présence d'une panne.

#### 1.2.1.2. Mesure des composantes

L'évaluation des performances de sûreté pose le problème de la mesure des composantes précédemment définies qui peuvent être connues de deux manières :

- par leurs évolutions en fonction du temps,
- par des valeurs numériques représentatives de leurs natures.

Ces valeurs, dont la représentativité a souvent été mise en doute  $[MAT,70]$  -  $[LAP,75]$  -  $[AVI,75]$  sont directement liées aux composantes et représentent selon le cas des valeurs moyennes de temps entre événements ou d'apparition d'un événement, des valeurs asymptotiques de ces composantes ou des valeurs de ces composantes à des instants déterminés.

Le tableau de la figure 2 montre, en regard des composantes présentées précédemment, les valeurs qui sont généralement considérées comme représentatives de chacune d'entre-elles. La représentativité de certaines d'entre-elles -les valeurs asymptotiques- est généralement considérée comme bonne du fait de leur valeur (très proche de 1) et du fait du faible temps transitoire qui conduit à ces valeurs.

COMPOSANTE	MESURE DE LA COMPOSANTE
Fiabilité	Temps moyen jusqu'à la première défaillance
Disponibilité	Disponibilité asymptotique
Sécurité	Temps moyen jusqu'à la première défaillance catastrophique
Maintenabilité	Temps moyen jusqu'à la réparation
Crédibilité	Crédibilité asymptotique
Survivabilité	Survivabilité asymptotique

FIGURE 2. Composantes et mesures.

REMARQUE

La comparaison entre systèmes peut être effectuée soit par l'intermédiaire de la comparaison directe de l'évolution des composantes, soit par des facteurs d'amélioration lorsque ces composantes sont connues par leurs valeurs numériques à un instant déterminé. Ces facteurs sont obtenus  $[AVI,75]$  -  $[ASH,76]$  :

- en comparant pour un temps de mission fixé les valeurs de la composante désirée, pour chacun des systèmes,
- en comparant, pour une valeur de composante prise pour contrainte, l'écart relatif des temps au bout desquels les composantes respectives de chaque système atteignent cette contrainte.

### 1.2.2. Composantes caractéristiques

C'est l'analyse du cahier des charges qui permet d'exprimer les besoins de sûreté conduisant à des contraintes sur certaines des composantes précédemment définies. La définition de ces composantes prend en compte trois facteurs :

- type de sollicitation -continue ou discontinue- nécessité par l'application,
- nature de la structure -redondance ou non-,
- type de maintenance -curative ou préventive-.

## 2. MÉTHODES D'ÉVALUATION DE LA SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT DES SYSTÈMES

---

La recherche de la vérification des contraintes conduit à décrire le système sous une forme telle que l'exploitation par un outil approprié du modèle résultant, permette :

- de tenir compte de l'aspect structure du système et éventuellement de son exploitation,
- d'évaluer la ou les composantes de la sûreté dégagées comme caractéristiques du fonctionnement du système.

## 2.1. MODELISATION DES SYSTEMES

Le choix d'un type de modélisation, qui conditionne en partie la méthode d'exploitation, doit tenir compte :

- de l'utilisation qui en sera faite :
  - .niveau d'abstraction désiré,
  - .diversité des systèmes à étudier,
  - .aptitude à évaluer les composantes,
- de la facilité d'établissement du modèle,
- de la facilité d'exploitation du modèle.

La spécificité des modélisations qui permettent l'évaluation de la sûreté de fonctionnement amène à les classer en trois grandes catégories :

- modélisation fonctionnelle,
- modélisation événementielle,
- modélisation directe.

### 2.1.1. Modélisation fonctionnelle

Elle constitue la première étape de l'évaluation des performances d'un système par simulation dont le principe est d'analyser statistiquement les résultats fournis par le modèle.

Cette modélisation n'est pas spécifique de la sûreté de fonctionnement, dans la mesure où elle permet :

- la vérification de la conception fonctionnelle de la structure,
- l'évaluation prévisionnelle des performances de sûreté.

L'établissement d'un tel modèle se fait en deux phases :

- modélisation de la structure sous l'angle fonctionnel,
- modélisation de l'environnement du système.

La synthèse des résultats obtenus à partir de ces deux modélisations permet d'examiner le comportement du système sous le double aspect des fonctions qu'il remplit et des réactions qu'il a en présence des sollicitations qui lui sont appliquées.

Si la première phase conduit à un modèle statique apte à fournir la réponse de la structure à une sollicitation, il n'en est pas de même de la seconde qui est à caractère dynamique dans la mesure où le modèle résultant fournit les sollicitations appliquées à la structure.

La description fonctionnelle de la structure nécessite de prendre en compte :

- le niveau de description désiré, qui peut être celui de blocs fonctionnels, de fonctions booléennes, de circuits électriques, etc.,
- le choix d'un support de représentation, déterminé par :
  - .le niveau de description désiré,
  - .l'exploitation du modèle.

La simulation étant par principe un outil destiné à être exploité sur un ordinateur, trois courants distincts permettent de fournir un support à cette première phase de modélisation :

- l'utilisation de langages de simulation généraux. De type non spécialisés (FORTRAN, PL/1, APL) ou au contraire adaptés à la simulation (GPSS, SIMULA, CASSANDRE), ils offrent la possibilité d'une description à des niveaux différents (GPSS dans le cas de descriptions par blocs fonctionnels, CASSANDRE dans le cas de descriptions au niveau matériel, SIMULA dans le cas de descriptions fonctionnelles à haut niveau) ou dans un but déterminé [LOZ,75] ,
- l'utilisation des outils de simulation par des méthodes de Monte-Carlo où toutes les fonctions du système sont décrites par des expressions mathématiques,
- la création d'outils spécifiques où la description du système est faite par des fonctions logiques ou logicielles, et qui nécessitent le développement d'un système au sens informatique du terme pour leur exploitation, de langages et de traducteurs correspondants [PAU,75].

La définition du modèle dynamique nécessite la prise en compte de trois facteurs :

- génération des événements permettant de simuler une mission-type qui doit tenir compte :
  - .des contraintes fonctionnelles et d'utilisation issues de l'application,
  - .des contraintes issues de l'emploi du logiciel dans le système, lorsque le niveau de description le permet,
- environnement du système par la génération des pannes pouvant affecter la structure,
- exploitation de la structure par l'intermédiaire de la génération des actions de maintenances curative ou préventive appliquées à la structure.

La génération aléatoire de ces événements, selon la loi suivant laquelle ils sont distribués, s'appuie sur l'utilisation de méthodes classiques au nombre desquelles on retrouve l'utilisation des méthodes de Monte-Carlo [KAH,76].

En dehors des techniques d'exploitation de ces modèles, fondées sur des outils statistiques d'estimation des grandeurs à partir des réponses du modèle aux sollicitations qui lui sont fournies, la modélisation fonctionnelle en vue d'une simulation nécessite l'utilisation :

- d'outils informatiques : systèmes, langages, gestion de tables, pré-compilateurs, traducteurs, etc.,
- d'outils mathématiques : utilisation et génération de nombres aléatoires ou pseudo-aléatoires.

Les exemples d'utilisation de cette méthode sont fournis par :

- évaluation de la fiabilité et de la maintenabilité d'un système [WID,71]; cet outil fait abstraction de la vérification fonctionnelle et décrit le système par :
  - .les caractéristiques des sous-ensembles de la structure (temps moyen de pannes, de réparations, durées maximum de pannes, priorités de réparation, etc.),



- .les caractéristiques de la mission : durée et nombre de réparateurs,
- l'exploitation du modèle utilise la méthode de Monte-Carlo pour générer des événements aléatoires dont les fonctions de répartition sont exponentielles, normales ou Log-normales,
- évaluation de la disponibilité de systèmes maintenus tenant compte des stocks destinés aux réparations dans [DOS,71] ; cet exemple procède de la même démarche que celle indiquée précédemment,
- l'évaluation de toutes les composantes de la sûreté de fonctionnement [TRO,75] - [PAU,75] ; son caractère général est obtenu par :
  - .une description fonctionnelle tant au niveau matériel que logiciel, autorisant une vérification de la conception de la structure,
  - .une génération de nombres aléatoires par la méthode de Monte-Carlo.

Nous donnons sur le tableau de la figure 3, les principaux avantages et inconvénients qui nous sont apparus lors de l'examen d'exemples des méthodes citées précédemment.

METHODE DE DESCRIPTION	AVANTAGES	INCONVENIENTS
Langages généraux	Réalisation et apprentissage rapides. Puissance du langage correspondant.	Elaboration d'un macro-langage de description. Introduction des procédures de synchronisation. Introduction des pannes.
Langages de simulation (exemple de SIMULA)	Toutes les fonctions en vue desquelles a été créé le langage ; exemple : .synchronisation de processus .actions réelles simultanées .générateurs de nombres aléatoires .bibliothèque statistique.	Données complexes imposées par le langage. Exécution lente. Nécessaire compréhension totale du système.
Monte-Carlo	Calcul des limites hautes et basses des composantes aisé. Utilisation classique de la méthode de Monte-Carlo.	Modèle non systématique limité par l'obtention des relations mathématiques permettant de définir le système.
Outils spécifiques	Outils adaptés puisque conçus dans le but désiré.	Investissement important. Développement d'un langage spécialisé de description. Réalisation de compilateurs traducteurs.

FIGURE 3. Comparaison des méthodes de description fonctionnelle.

### 2.1.2. Modélisation événementielle

Cette modélisation, utilisée dans le but d'étudier la sûreté de fonctionnement, ne permet pas d'évaluer les spécifications fonctionnelles de la structure.

C'est la prise en compte des événements agissant sur l'état de la structure qui autorise la création du modèle ; événements qui sont :

- soit intrinsèques par l'intermédiaire des pannes qui peuvent l'affecter,
- soit extrinsèques par les actions dues à l'exploitation de la structure, et en particulier :
  - .modes de fonctionnement (continu ou discontinu),
  - .actions de maintenance (curative ou préventive).

Contrairement aux modèles fonctionnels, ces modèles sont dynamiques en ce sens qu'ils :

- comportent dans leur définition la notion probabiliste d'événements qui sont représentés par un paramètre caractéristique de leur distribution,
- sont aptes à fournir directement sous forme probabiliste les composantes de la sûreté de fonctionnement.

Les trois niveaux de description généralement envisagés sont :

- le niveau architecture vue sous l'angle de sûreté de la structure,
- le niveau fonctions réalisées par des sous-ensembles de la structure,
- le niveau composants.

Trois méthodes s'appuyant sur ces trois niveaux de modélisation conduisent à l'établissement de modèles :

- considération du fonctionnement global de la structure au sein de son système d'exploitation, qui conduit à la notion d'états du système ; les transitions entre ces états sont d'origines aléatoires et la prise en compte simultanée des phénomènes qui engendrent ces transitions peut alors être faite par la superposition de processus stochastiques ; les outils utilisés en vue du traitement de ces modèles sont basés sur la théorie des processus stochastiques,

- conception descendante de la modélisation lorsqu'on recherche les pannes pouvant affecter le fonctionnement normal de la structure ; cette conception conduit à l'établissement d'un graphe ou arbre représentant sous forme de logique booléenne la cause d'une panne du système par l'intermédiaire de ses pannes élémentaires ; la définition et la prise en compte de ces dernières conditionnent le niveau de modélisation ; cette modélisation est donc plus spécifiquement orientée vers la considération des phénomènes intrinsèques par l'intermédiaire des pannes ; les phénomènes extrinsèques -réparations, fonctionnements continus ou non continus, etc.- peuvent cependant être considérés, bien que de manière limitée [FUS,76] grâce à l'utilisation conjointe d'arbres du même type,
- conception ascendante consistant à étudier l'effet d'une panne d'une partie de la structure sur le comportement global. Cela nécessite par conséquent une étude en deux étapes :
  - .recherche de toutes les pannes pouvant survenir,
  - .analyse de leur conséquence,

ces deux étapes, connues sous le nom de FMCEA (Failure Modes and Critical Effect Analysis) rendent la prise en compte des phénomènes extrinsèques difficile, si ce n'est impossible ; la conséquence en sera que l'établissement d'un tel modèle sera essentiellement orienté vers l'évaluation de composantes telles que fiabilité ou sécurité pour les systèmes non réparables.

Etablir un classement préférentiel entre ces trois méthodes s'avère difficile en fonction de la nature différente des objectifs poursuivis :

- outil d'évaluation de systèmes particuliers ou aide à la conception offrant la possibilité d'étudier des systèmes très variés,
- évaluation d'une, de plusieurs composantes, ou de la sûreté de fonctionnement dans son ensemble.

Nous avons regroupé sur le tableau de la figure 4 les caractéristiques de ces différentes méthodes, en analysant leurs avantages et leurs inconvénients, abstraction faite de leur outil d'exploitation.

METHODE DE MODELISATION	ETABLISSEMENT DU MODELE	AVANTAGES - INCONVENIENTS
PROCESSUS STOCHASTIQUES	.Simples à haut niveau de description .Difficiles pour description fine de systèmes complexes	.Toutes composantes de la sûreté .Prise en compte structure et de son exploitation
ARBRES DE FAUTES	.Simples à haut niveau de description .Plus difficiles à niveau fin .Problème de créer un graphe pour l'exploitation	.Une composante par modélisation .Utilisation conjointe de graphes pour phénomènes extrinsèques non systématique
ETUDE DES MODES DE PANNES ET DE LEUR CRITICALITE	.Modes de pannes aisés à déterminer .Analyse des effets au niveau structure difficile	.Intéressant au niveau composants .Limité à fiabilité ou sécurité de systèmes non réparables .Nécessaire compréhension totale du système pour analyse des effets .Orientée vers l'évaluation et non l'aide à la conception

FIGURE 4. Comparaison des méthodes de modélisation événementielle.

Ce tableau amène les commentaires suivants :

1) En ce qui concerne les processus stochastiques

- le niveau de description conditionne la simplicité du modèle et par conséquent son établissement, puisqu'il influe sur le nombre d'états générés. Une telle modélisation est donc envisageable :
  - .pour des systèmes même complexes, à condition qu'ils soient décrits à haut niveau ce qui fait essentiellement de cette méthode un outil d'aide à la conception,
  - .pour des systèmes décrits à un niveau plus fin à la condition de disposer d'un outil annexe permettant d'aider à l'établissement de ce modèle ; c'est le cas par exemple [LAN,77] d'un outil permettant de décrire le comportement d'une structure, connaissant celui de ses différents sous-ensembles,
- le principe de la modélisation reposant sur l'existence d'états et sur la superposition de processus stochastiques, permet :
  - .d'exprimer toutes les composantes de la sûreté comme étant la somme des probabilités de se trouver dans certains de ces états,

- .de prendre en compte le système global par l'intermédiaire de la structure et de son exploitation,
- .de considérer, au niveau de la modélisation les paramètres logiciels [SHO,76] - [LAN,77].

2) En ce qui concerne les arbres de fautes

- une description à haut niveau permet d'obtenir aisément les pannes primaires affectant le fonctionnement global de la structure, ce qui n'est pas toujours le cas lorsqu'un niveau de description plus fin est désiré ; cette notion de pannes primaires implique d'autre part leur homogénéité d'un point de vue conséquence, entraînant l'unicité de la composante évaluable par un modèle de ce type,
- la prise en compte de l'exploitation de la structure offre le double aspect :
  - .de devoir être effectuées séparément de l'arbre de fautes précédent, ce qui peut procurer un avantage en vue d'une aide à la conception, en permettant la modification d'une des deux parties seulement du modèle,
  - .de devoir être homogène avec l'arbre de fautes dans son niveau de modélisation, afin d'être exploitée par des méthodes non encore systématiques à notre avis.

3) En ce qui concerne l'analyse des pannes et l'étude de leur criticalité

- de par sa conception, cette méthode entraîne la connaissance précise de la structure et est donc plus directement adaptée à ce que nous appelons une évaluation ponctuelle, c'est-à-dire d'une structure déjà conçue,
- la recherche des modes de pannes de chaque élément de la structure est moins contraignante que l'analyse de leurs effets, qui nécessite une connaissance approfondie de son fonctionnement.

La conséquence en est de limiter cette méthode à l'analyse des systèmes de dimensions raisonnables ; elle possède au contraire l'avantage de fournir des mesures précises de composantes telles que fiabilité ou sécurité dans le cas de structures non réparables, dans la mesure où les occurrences de pannes des composants de base sont bien définies.

La dichotomie que l'on peut faire entre les méthodes d'évaluation de systèmes déjà définis et les méthodes d'aide à la conception, trouve une image dans ces trois méthodes. La méthode de modélisation par processus stochastiques paraît plus adaptée à l'évaluation prévisionnelle en vue d'une conception, alors que la technique des arbres, mais surtout celle de la recherche des pannes et de leurs conséquences, semblent plus orientées vers l'évaluation de structures simples déjà connues par leurs composants de base.

A titre d'exemples d'utilisation de telles méthodes de modélisation, citons l'emploi :

- de processus markoviens homogènes permettant de systématiser le calcul des composantes de sûreté de systèmes réparables ou non [COR,73]-[LAP,75],
- de processus semi-markoviens permettant d'étudier la sûreté de systèmes fonctionnant de manière non continue [NAK,76]-[OSA,76],
- d'arbres de fautes permettant d'étudier la fiabilité de systèmes connus par leurs caractéristiques électroniques [FUS,75] ou par leurs caractéristiques fonctionnelles et leurs modes de fonctionnement [ESA,75],
- de l'analyse des modes de pannes et de leurs conséquences [GRE,68] permettant d'évaluer la fiabilité de systèmes redondants remplissant une mission déterminée ou l'effet séquentiel de pannes sur la fiabilité d'un système [TAY,75].

### 2.1.3. Modélisation directe

Les méthodes de représentation des systèmes qui sont regroupées sous ce vocable de modélisation directe, sont en fait nombreuses et de natures très variées. Elles visent toutes à donner directement les expressions analytiques des composantes de la sûreté ; ces expressions sont généralement obtenues à partir des expressions analytiques d'occurrence des événements modifiant le fonctionnement de la structure.

La classification des méthodes de ce groupe est rendue difficile par la multiplicité des outils utilisés ; nous retiendrons cependant celles basées sur :

- l'utilisation des théorèmes généraux des probabilités qui, alliés à une analyse des blocs fonctionnels de la structure vus sous l'angle sûreté de fonctionnement, conduisent à une modélisation directe du type série-parallèle de la structure, où sont considérées les défaillances, c'est-à-dire les phénomènes intrinsèques à la structure,
- l'emploi de développements analytiques, d'estimateurs statistiques, etc., qui permet d'exprimer les composantes ou d'évaluer leurs limites.

Les calculs qui sont effectués grâce à ces modèles ont comme objectif l'évaluation d'une composante déterminée de la sûreté ; cela limite leur généralité car l'évaluation d'autres composantes nécessite de conduire les calculs dans une autre voie.

Les niveaux de description que de tels modèles utilisent sont variés. Citons en particulier :

- la mise de la structure sous forme de schéma-blocs équivalents d'un point de vue fiabilité [MAT,70]-[COU,76] ; cette méthode est en particulier utilisée pour comparer des structures par l'intermédiaire de leurs niveaux de redondance et s'avère peu efficace pour la prise en compte de systèmes réparables,
- l'évaluation de la fiabilité et du temps moyen entre pannes d'un système (MTBF) en utilisant également des schéma-blocs [FLE,71],
- l'optimisation de la fiabilité de systèmes décrits par leurs schémas électriques, en employant diverses formes de modélisation [CIC,71] dont en particulier une modélisation directe des équations qui régissent les phénomènes aléatoires.

Ces exemples ne sont en aucune manière exhaustifs, car il existe de nombreuses formes de modélisation spécifiques de cas particuliers, qu'il est hors de notre propos d'énumérer ici.

#### REMARQUE

La majorité des modélisations directes incluent en elles-mêmes l'exploitation qui peut en être faite. Ce n'est pas le cas des modélisations fonctionnelle et événementielle qui, selon la forme qu'elles prennent, appellent des outils différents en vue de leur exploitation.

## 2.2. OUTILS DE TRAITEMENT DES MODELES

L'évaluation des composantes de sûreté à partir d'un modèle nécessite de disposer d'un outil de traitement qui lui soit adapté.

La modélisation fonctionnelle a conduit à la création de tables de données représentant les réponses du système à des sollicitations. L'obtention des composantes de la sûreté de fonctionnement à partir de ces données doit alors s'effectuer en deux temps :

- discrimination des données pour en extraire celles qui sont homogènes relativement à une composante ; ceci peut être réalisé par une analyse qualitative des résultats en créant au niveau des résultats des tables de conséquences ; la conception générale d'une telle modélisation permet alors d'exprimer plusieurs composantes,
- évaluation des probabilités d'obtenir une réponse appartenant à une classe de conséquences ; elle se fait par l'utilisation d'outils statistiques d'évaluation.

La modélisation événementielle a entraîné des formes de représentation du modèle différentes :

- graphes, arbres ou leurs matrices équivalentes,
- schéma-blocs,
- listes de conséquences (FMCEA).

Les outils de traitement sont par conséquent différents ; il s'agit respectivement de :

- manipulation, résolution, simplification de graphes ou d'arbres,
- simplification ou évaluation de fonctions de matrices,
- théorèmes généraux des probabilités.

Enfin quelles que soient les méthodes, la connaissance des phénomènes aléatoires qui sont à la base de l'étude de la sûreté de fonctionnement est rendue nécessaire dans un souci de respect de la réalité.



### 3. INTÉRÊT DE LA MODÉLISATION PAR PROCESSUS MARKOVIENS HOMOGÈNES

---

La prévision de la sûreté de fonctionnement par l'utilisation des processus markoviens homogènes trouve son intérêt dans plusieurs facteurs :

- la méthode est largement ouverte à l'étude de systèmes très variés dans la mesure où :
  - .le système entier (structure et son exploitation) peut être considéré,
  - .elle n'est nullement limitative quant aux hypothèses markoviennes qui sont faites (cf. Chapitre 2),
  - .les paramètres logiciels peuvent être introduits de manière systématique [SHO,76]-[LAN,77],
- l'exploitation du modèle peut être faite systématiquement, chaque composante ayant une expression analytique issue du modèle de même type, ce qui entraîne une expression possible de toutes les composantes de la sûreté de fonctionnement.

## CHAPITRE 2

---

### SURF : OUTIL D'ÉVALUATION DE LA SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT DES SYSTÈMES

-

1. *BUT DE SURF ET ACCESSIBILITE*
2. *OUTILS MATHEMATIQUES UTILISES : RAPPELS*
3. *PRESENTATION DES PROGRAMMES SURF*
4. *ALGORITHMES D'IMPLANTATION DES OUTILS MATHEMATIQUES*
5. *DESCRIPTION DE SURF VERSION FORTRAN*
6. *PERFORMANCES DE SURF*
7. *EXEMPLES D'UTILISATION*

---



## 1. BUT DE SURF ET ACCESSIBILITÉ

---

L'objectif poursuivi par l'outil d'évaluation de la sûreté de fonctionnement des systèmes numériques, que nous présentons dans ce chapitre, est de pouvoir calculer toutes les composantes de la sûreté, et ce quel que soit le type de processus agissant sur le système, qu'ils soient de nature intrinsèque ou extrinsèque.

La conception de cet outil, qui consiste en un programme conversationnel, a été fortement guidée par la recherche d'une grande souplesse d'emploi, qui est obtenue :

- en rendant la partie calcul transparente à l'utilisateur,
- en structurant sur le fond et la forme la partie conversationnelle.

Cette politique d'implantation amène, à notre avis, les trois avantages suivants :

- une meilleure efficacité de la part de l'utilisateur qui, dégagé des soucis liés à l'aspect calcul, doit pouvoir concentrer toute son attention à la définition du système et des composantes à prendre en compte,
- une diminution des erreurs de programme par :
  - .l'évaluation et le test sur un grand nombre d'exemples différents, à l'encontre des programmes réalisés cas par cas,
  - .la mise en place d'un grand nombre de tests de vérification,
- une exploitation plus aisée des résultats, qui peuvent être présentés de manière adaptée au problème posé.

## 2. OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS : RAPPELS

---

La présentation de ces outils dont l'application à la sûreté de fonctionnement a été systématisée [LAP,75], peut se diviser en trois parties :

- l'utilisation des processus markoviens homogènes,
- les techniques permettant de décrire un système sous forme de processus markoviens homogènes,
- les simplifications possibles du modèle.

### 2.1. PROCESSUS MARKOVIENS HOMOGENES

#### 2.1.1. Définition

Un processus stochastique est markovien si l'évolution de son état à un instant donné est indépendante des états qu'il a occupés antérieurement.

Soient E l'ensemble des états que peut prendre la structure en fonction du temps et Z(t) la fonction état de la structure telle que Z(t)=i si la structure est dans l'état i à l'instant t. Le processus markovien qui préside au changement d'état de la structure dans un tel espace des temps continu est entièrement déterminé lorsque les probabilités de transition directe  $p_{ij}$  entre l'état i et l'état j sont connues. Il est de plus homogène lorsque les probabilités  $p_{ij}$  ne sont pas affectées par une translation dans le temps.

On peut alors écrire :

$$p_{ij}(t, t+dt) = \mathcal{P} \{ Z(t+dt)=j / Z(t)=i \} = \lambda_{ij} dt + o(dt)$$

où  $\lambda_{ij}$  est le taux de transition entre l'état i et l'état j. Pratiquement, cela signifie que les temps de défaillance, réparation, inspection, mission, etc. des éléments de la structure sont exponentiellement distribués.

La connaissance des probabilités  $p_{ij}(t, t+dt)$  permet de déterminer la probabilité de se trouver dans les états de la structure.

Soit  $P_j(t)$  cette probabilité pour l'état  $j$ , on peut alors écrire :

$$P_j(t+dt) = \sum_{i=1}^n p_{ij}(t, t+dt) \cdot P_i(t)$$

où  $n$  est le nombre d'états que peut prendre la structure.

Sachant que :

$$- p_{ij}(t, t+dt) = \lambda_{ij} dt + \sigma(dt)$$

$$- \sum_{j=1}^n p_{ij}(t, t+dt) = 1,$$

il vient

$$P_j(t+dt) = \sum_{i=1}^n \left[ \delta_{ij} + \lambda_{ij} dt + \sigma(dt) \right] \cdot P_i(t)$$

avec  $\delta_{ij}$ , symbole de KRONECKER

$$\lambda_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{ij}$$

Soit encore en faisant tendre  $dt$  vers zéro :

$$\frac{dP_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} P_i(t)$$

où sous forme matricielle tenant compte de tous les états :

$$\dot{\mathbb{P}}(t) = \mathbb{P}(t) \cdot \mathbb{\Lambda}$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(t) = [P_j(t)] ; \mathbb{\Lambda} = [\lambda_{ij}]$$

Cette équation différentielle de CHAPMANN-KOLMOGOROV permet d'exprimer par sa solution les probabilités de se trouver dans tous les états de la structure, soit :

$$\mathbb{P}[t / \mathbb{P}(0)] = \mathbb{P}(0) \exp(\mathbb{\Lambda} t) \quad (2.1)$$

Les composantes de la sûreté de fonctionnement se déduisent de ces solutions, puisqu'il s'agit des probabilités de se trouver dans certains des états que peut prendre la structure.

2.1.2. Application des processus markoviens homogènes au calcul des composantes de la sûreté de fonctionnement

Le graphe de transition décrivant le comportement d'un système est en général un graphe où tous les états sont ergodiques, c'est-à-dire qu'ils peuvent tous être atteints et quittés.

Les composantes de la sûreté de fonctionnement peuvent être classées en deux catégories suivant que l'on considère :

- le graphe de transition où tous les états sont ergodiques ; c'est par exemple le cas de la disponibilité,
- un graphe de transition déduit du précédent en rendant certains états absorbants, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être quittés une fois atteints ; c'est par exemple, le cas de la fiabilité et de la maintenabilité.

Indépendamment du graphe considéré, une composante donnée de la sûreté de fonctionnement est obtenue à partir d'une partition de l'ensemble E des états que peut prendre le système en deux sous-ensembles E<sub>1</sub> et E<sub>2</sub>, en effectuant la sommation des probabilités que la structure se trouve dans les états d'un de ces sous-ensembles.

2.1.2.1. Graphes de transition où tous les états sont ergodiques

Les composantes sont alors de la forme générale suivante :

$$c(t) = \mathcal{P} \left\{ z(t) \in E_1 / z(\tau) \in E, 0 \leq \tau < t \right\}$$

Il vient alors directement à partir de la relation (2.1) :

$$c(t) = \mathbb{P}(0) \exp(\Lambda t) \cdot \mathbb{1} \tag{2.2}$$

où :

- $\mathbb{P}(0)$  est la distribution initiale des probabilités,
- $\mathbb{1}$  est un vecteur colonne de sommation relatif au sous-ensemble  $E_1$

$$\mathbb{1}^T = (1 \dots 1, 0 \dots 0)$$

$E_1 \qquad E_2$

Tous les états étant ergodiques, il existe une distribution asymptotique des probabilités associées aux états et, par voie de conséquence, une valeur asymptotique non nulle de  $C(t)$  ; celle-ci peut être obtenue en prenant la limite lorsque  $t$  tend vers l'infini de la relation (2.2). Il est cependant plus simple de repartir de la forme que prend l'équation de CHAPMANN-KOLMOGOROV en régime asymptotique :

$$\mathbb{0} = \mathbb{\Pi} \cdot \mathbb{\Lambda}$$

où :

- $\mathbb{0}$  est la matrice nulle,
- $\mathbb{\Pi} = [\pi_i]$  est le vecteur des probabilités asymptotiques  
 $\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$

Il vient alors, tenant compte du fait que  $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$  :

$$\mathbb{\Pi} = [0, 0, \dots, 0, 1] \cdot \mathbb{\Lambda}_m^{-1}$$

où  $\mathbb{\Lambda}_m$  est la matrice déduite de  $\mathbb{\Lambda}$  en remplaçant la dernière colonne par des 1.

La valeur asymptotique de  $C(t)$  est alors donnée par :

$$SC = \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \mathbb{\Pi} \cdot \mathbb{1} = [0, \dots, 0, 1] \mathbb{\Lambda}_m^{-1}$$

### 2.1.2.2. Graphes de transition où certains états sont absorbants

Les composantes sont alors de la forme générale, en supposant que les états du sous-ensemble  $E_2$  ont été rendus absorbants :

$$C(t) = \mathcal{P} \left\{ z(\tau) \in E_1, 0 \leq \tau \leq t \right\}$$



On montre alors [COR,73] que  $C(t)$  a pour expression :

$$C(t) = \mathbb{P}(0) \cdot \exp(\Gamma t) \cdot \mathbb{1}_{E_1}$$

où :

- $\mathbb{P}(0)$  est la distribution initiale des probabilités associées aux états de  $E_1$ ,
- $\Gamma$  est la matrice des taux de transition entre les états de  $E_1$ ,
- $\mathbb{1}_{E_1}$  est un vecteur colonne de sommation, relatif à  $E_1$

$$\mathbb{1}_{E_1}^T = \left[ \underbrace{1, \dots, 1}_{E_1} \right]$$

L'existence d'un état absorbant rend bien entendu la distribution asymptotique des probabilités triviale. On peut cependant caractériser  $C(t)$  par les différents moments du temps passé dans les états de  $E_1$ , c'est-à-dire le temps avant absorption. Si  $\tau$  est ce temps, on peut alors exprimer  $C(t)$  de la manière suivante :

$$C(t) = \mathcal{P} \{ \tau \geq t \}$$

Une mesure privilégiée de  $C(t)$  par la large utilisation qui en est faite sera alors le temps moyen d'absorption  $M(\tau)$  qui a pour expression [COR,73] :

$$M(\tau) = \mathbb{P}(0) \cdot \Gamma^{-1} \cdot \mathbb{1}_{E_1}$$

### 2.1.2.3. Conclusion

La description du comportement d'une structure sous la forme d'un processus markovien homogène permet, à partir de la matrice des taux de transition de son comportement, d'obtenir les composantes de la sûreté de fonctionnement.

A titre d'exemple, considérons que  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les sous-ensembles des états non défailants et défailants.

Soit  $\Lambda$  la matrice des taux de transition entre les états. Cette matrice se partitionne comme suit :

$$\Lambda = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{cc} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{array} \right\} E_1 \\ \left. \begin{array}{cc} \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{array} \right\} E_2 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{E_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{E_2} \end{array}$$

Les expressions des composantes de disponibilité, fiabilité et maintenabilité sont données par le tableau de la figure 1.

COMPOSANTE	EXPRESSION
Disponibilité instantanée	$A(t) = P(0) \cdot \exp(\Lambda t) \cdot \mathbb{1}$
Disponibilité asymptotique	$SA = [0 \dots 0 \ 1] \cdot \Lambda_m^{-1} \cdot \mathbb{1}$
Fiabilité	$R(t) = P(0) \cdot \exp(\Gamma_{11} t) \cdot \mathbb{1}_{E_1}$
Temps moyen jusqu'à la première défaillance	$MTTF = -P(0) \cdot \Gamma_{11}^{-1} \cdot \mathbb{1}_{E_1}$
Maintenabilité	$M(t) = P(0) \cdot \exp(\Gamma_{22} t) \cdot \mathbb{1}_{E_2}$
Temps moyen jusqu'à la réparation	$MTTR = -P(0) \cdot \Gamma_{22}^{-1} \cdot \mathbb{1}_{E_2}$

FIGURE 1. Expressions des composantes de la sûreté de fonctionnement.

## 2.2. LA METHODE DES ETATS FICTIFS

Le comportement d'une structure ne peut être décrit par un processus markovien homogène que si toutes les variables aléatoires mises en jeu sont exponentiellement distribuées, et donc à taux de hasard constant.

S'il est communément admis que les taux de défaillance sont constants, et ce particulièrement pour les systèmes électroniques, on conçoit intuitivement que ce n'est pas le cas pour les autres processus

agissant sur une structure (réparation, inspection, mission) qui sont à taux croissants.

Il est possible d'approximer une fonction de distribution quelconque moins dispersée que l'exponentielle, et donc à taux de hasard croissant, par une loi d'ERLANG généralisée, obtenue en décomposant la variable aléatoire  $\theta$  non exponentiellement distribuée en une succession de variables aléatoires  $\theta_i$  exponentiellement distribuées, de fonction de distribution :

$$F_i(t) = \mathcal{P} \{ \theta_i < t \} = 1 - e^{-\lambda_i t}$$

On a alors  $\theta = \sum_{i=1}^k \theta_i$ , et la fonction de densité de probabilité  $f(t)$  de  $\theta$  est la convolution des fonctions de densité de probabilité  $f_i(t)$  des  $\theta_i$ , soit :

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) * \dots * f_k(t)$$

avec :

$$- f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$- f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

.Si les  $\lambda_i$  sont égaux à  $\lambda$

$$f(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \text{ ce qui constitue la loi d'ERLANG d'ordre } k-1.$$

.Si les  $\lambda_i$  sont différents :

$$f(t) = \sum_{i=1}^k \omega_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad \text{avec } \omega_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}$$

Si  $m$  est la valeur moyenne de  $\theta$  et  $\sigma$  son écart type, on a la relation :

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^k 1/\lambda_i^2}}{\sum_{i=1}^k 1/\lambda_i}$$

Ce rapport  $\frac{\sigma}{m}$  est donc compris entre 1 ( $k=1$ ) et  $1/\sqrt{k}$ , valeur obtenue lorsque les  $\lambda_i$  sont identiques.

Cette relation permet par conséquent, connaissant la valeur moyenne et l'écart type de  $\theta$ , de trouver le nombre  $k$  d'états disposés en série nécessaire pour représenter sous forme markovienne le processus caractérisé par  $\theta$ . Dans le cas où on prend tous les  $\lambda_i$  identiques et égaux à  $\lambda$ , on a :

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{donc} \quad k = \frac{\sigma^2}{m^2}$$

Approximer la fonction de densité de probabilité de  $\theta$  par une loi d'ERLANG d'ordre  $(k-1)$  consiste donc dans un second temps, connaissant  $k$ , à évaluer les valeurs des  $\lambda_i$ . Or, cette fonction de densité de probabilité de  $\theta$  est généralement connue expérimentalement par ses  $n$  premiers moments. On connaît d'autre part les valeurs théoriques des  $n$  premiers moments de la loi d'ERLANG d'ordre  $(k-1)$ . Il suffit donc d'adopter un critère de minimisation entre les moments expérimentaux et les moments théoriques, pour déterminer les valeurs des  $\lambda_i$ .

Nous donnons sur la figure 2, un exemple de graphe de transition d'un processus markovien homogène modifié par la méthode des états fictifs ( $\lambda$  non exponentiellement distribué).

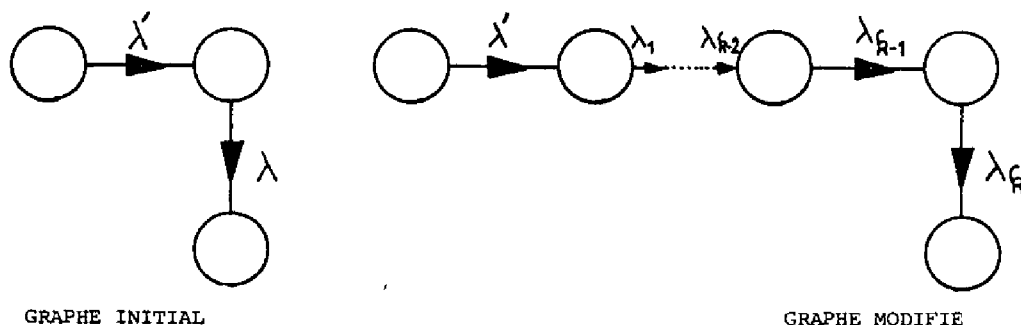


FIGURE 2. Modification par la méthode des états fictifs.

L'avantage de cette disposition série des états se manifeste sur deux points :

- simplification de la description en considérant toutes les variables exponentiellement distribuées,
- prise en compte de manière automatique des lois de distribution non exponentielle.

### 3. PRÉSENTATION DES PROGRAMMES SURF

---

Le but de ce paragraphe est de donner la structure générale de découpage en blocs et les différentes versions du programme SURF qui ont été mises au point et développées.

#### 3.1. STRUCTURE GENERALE DES PROGRAMMES SURF

La théorie précédente permet de montrer que la création d'un programme permettant sa mise en oeuvre pratique nécessite trois étapes :

- définition du modèle,
- modification du modèle,
- exploitation du modèle,

ce qui conduit au schéma-bloc général de la figure 3.

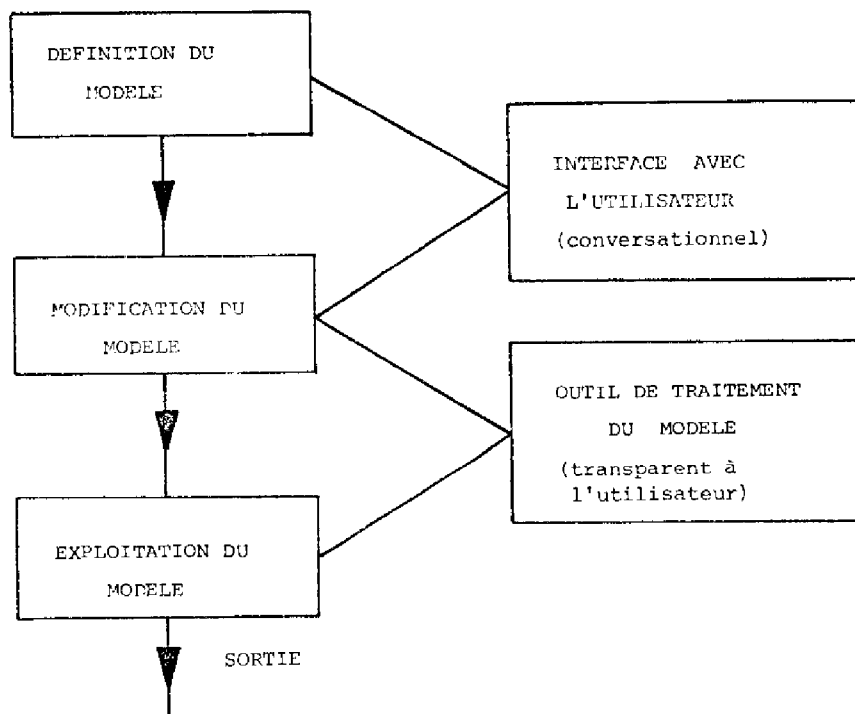


FIGURE 3. Organisation générale des programmes SURF.

Le rôle des différents blocs peut être explicité de la manière suivante :

- Définition du modèle :
  - .définition de la matrice des taux de transition,
  - .définition des composantes recherchées.
- Modification du modèle :
  - .prise en compte des hypothèses simplificatrices,
  - .prise en compte de lois non exponentielles.
- Exploitation du modèle :
  - .calcul des composantes,
  - .tracé de l'évolution de certaines composantes en fonction du temps.

L'examen de cette figure permet de rappeler le souci de transparence de l'outil de traitement par rapport à l'utilisateur puisqu'il n'a accès qu'à la partie conversationnelle.

Il existe deux catégories de programmes SURF qui se différencient par le langage utilisé et par les propriétés qui en découlent :

- la catégorie des programmes SURF en version FORTRAN ; c'est celle que nous avons développée et que nous présenterons plus en détail,
- le programme SURF en version PL/1, réalisé en collaboration avec le Service Informatique et Simulation du L.A.A.S.

Les avantages d'exploitation amenés par la version écrite en PL/1, qui utilise des algorithmes semblables à ceux utilisés dans la version FORTRAN sont dus essentiellement à :

- une manipulation plus aisée de caractères alphanumériques,
- une possibilité d'allocation dynamique de mémoire.

Le premier point intervient au niveau de la définition et de la modification du modèle puisqu'il permet :

- de définir le modèle sous forme de matrice littérale ; cette propriété se traduira au niveau de la version finale de SURF en PL/1 par l'utilisation d'un programme de création du modèle littéral d'un système, connaissant les caractéristiques fonctionnelles de ses sous-ensembles [LAN, 77],

- d'utiliser la méthode des états fictifs disposés en série, de manière tout à fait générale, chaque variable à étendre étant repérée par son nom,
- il permet enfin d'exploiter de manière simple les hypothèses de simplification du modèle initial.

La seconde propriété est utilisée lors de l'exploitation puisqu'elle permet un gain de place mémoire appréciable lors du traitement, en n'utilisant en mémoire centrale que la place instantanément nécessaire au calcul.

Un tableau comparatif des performances des deux versions obtenues lors d'exécutions effectuées sur l'ordinateur IBM 360 que nous utilisons est donné sur la figure 4, qui montre que les temps de traitement sont identiques ; l'estimation mémoire PL/1 est fournie par le maximum instantané au cours du traitement.

DIMENSION DE L'EXEMPLE (nombre d'états)	MEMOIRE FORTRAN (koctets)	TEMPS TRAITEMENT (FORTRAN)	ESTIMATION MEMOIRE PL/1 (koctets)	TEMPS TRAITEMENT (PL/1)
5	400	2s	250	2s
10	664	1mn	250	1mn
20	850	1,2mn	300	1,2mn
40	1200	2mn	400	2mn

FIGURE 4. Comparaison des versions FORTRAN et PL/1 de SURF.

### 3.2. LA VERSION FORTRAN

#### 3.2.1. Organigramme général de déroulement du programme

Le programme développé ici comporte deux parties distinctes qui diffèrent par leur support d'exploitation :

- un mode d'exploitation dit conversationnel, accessible à l'utilisateur permettant de créer un fichier de données définissant le modèle de base par l'intermédiaire :
  - .de la matrice des taux de transition,
  - .des extensions à effectuer par la méthode des états fictifs,
  - .de la définition des composantes à évaluer,
  - .de la forme des sorties désirées,
- un mode d'exploitation accessible par cartes de contrôle et transparent à l'utilisateur, qui utilise le fichier de données précédemment créé et qui est motivé par :
  - .l'existence d'un compilateur en FORTRAN X autorisant les calculs en quadruple précision,
  - .la dimension de la mémoire requise qui rend cette exploitation impossible à l'aide de l'outil conversationnel dont nous disposons.

Cette exploitation passe par les phases suivantes :

- extension du modèle suivant les indications du fichier de données,
- calcul proprement dit des composantes de la sûreté,
- tracé des courbes de variation de ces composantes en fonction du temps.

#### 3.2.2. Support informatique de SURF

Le support informatique permettant d'utiliser le programme suivant les modes définis précédemment est donné sur la figure 5.

La partie conversationnelle est exploitée sur une console alphanumérique reliée à un ordinateur central muni de l'option conversationnelle en temps partagé.



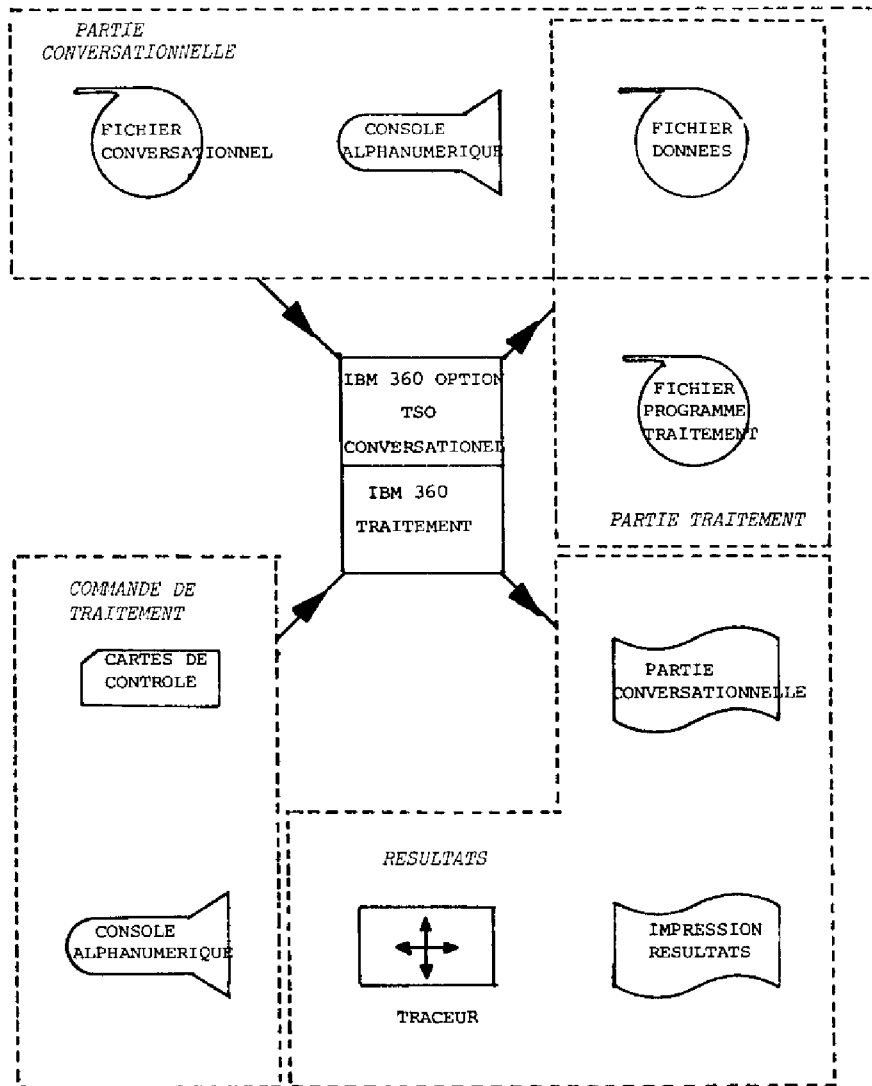


FIGURE 5. Support informatique de SURF.

Les commandes d'exploitation peuvent être faites soit par l'intermédiaire de cette console, soit par cartes de contrôle exploitées sur un lecteur de cartes.

Les divers fichiers permettant l'exploitation du programme sont enregistrés sur disques magnétiques.

Les sorties sont de trois ordres :

- impressions de la partie conversationnelle qui s'est déroulée lors de la création du fichier de données,
- expression des résultats de la partie traitement,
- tracé de l'évolution des composantes en fonction du temps.

Le travail que nous présentons a donc consisté à implanter l'outil mathématique présenté précédemment, sous forme d'un programme tenant compte de la puissance des moyens informatiques dont nous disposons, qui peut être scindée en deux parties :

- outil conversationnel,
- outil de traitement.

#### 4. ALGORITHMES D'IMPLANTATION

##### DES OUTILS MATHÉMATIQUES

---

Ces algorithmes concernent :

- la modification du modèle par la méthode des états fictifs,
- l'exploitation du modèle, destinée à évaluer les composantes présentées précédemment, qui se répartissent en deux groupes du fait des méthodes de calcul qu'elles nécessitent :
  - . temps moyen jusqu'à événement ou valeurs asymptotiques : les expressions mathématiques de ces grandeurs montrent que leur évaluation doit avoir recours à des opérations matricielles utilisant
    - la matrice des taux de transition,
    - les sous-matrices définies par les classes d'états,
    - le vecteur de distribution initiale des probabilités.Ces opérations, constituées d'inversions, produits et sommes de matrices ont nécessité l'amélioration de sous-programmes existant, essentiellement dans un but de précision, et ne nécessitent pas de commentaires spécifiques,
  - . composantes dépendant explicitement du temps : l'obtention de leurs expressions nécessite l'utilisation d'algorithmes spécifiques qui seront exposés plus loin.

#### 4.1. MODIFICATION DU MODELE PAR LA METHODE DES ETATS FICTIFS

L'introduction de lois de distributions non exponentielles par la méthode des états fictifs disposés en série implique :

- la connaissance du nombre  $k$  d'états nécessaires pour les approximer par une loi d'ERLANG d'ordre  $k-1$ ,
- la détermination des taux relatifs à chacun de ces états disposés en série.

##### 4.1.1. Utilisation des états fictifs dans SURF

Dans le but de faire de SURF un outil orienté vers les deux aspects évaluation et aide à la conception, nous avons prévu d'utiliser la méthode des états fictifs à deux niveaux :

- introduction des moments définissant des lois de distribution expérimentales, cas pour lequel le nombre d'états et les taux doivent être calculés,
- étude de sensibilité au niveau de la loi de distribution d'un paramètre en fournissant le nombre d'états et les taux correspondants.

L'exploitation de la méthode des états fictifs disposés en série peut être représentée par la figure 6.

##### 4.1.2. Détermination du nombre d'états et des taux

Soit une fonction de répartition connue expérimentalement par l'intermédiaire de ses moments centrés  $m_i^*$ .

Soient  $\alpha_j$  les coefficients de pondération affectés à ces moments. On veut obtenir :

- le nombre  $k$  d'états nécessaires pour approximer la loi précédente par une loi d'ERLANG d'ordre  $k-1$ ,
- les valeurs  $\lambda_j$  des taux correspondant aux  $k$  états.

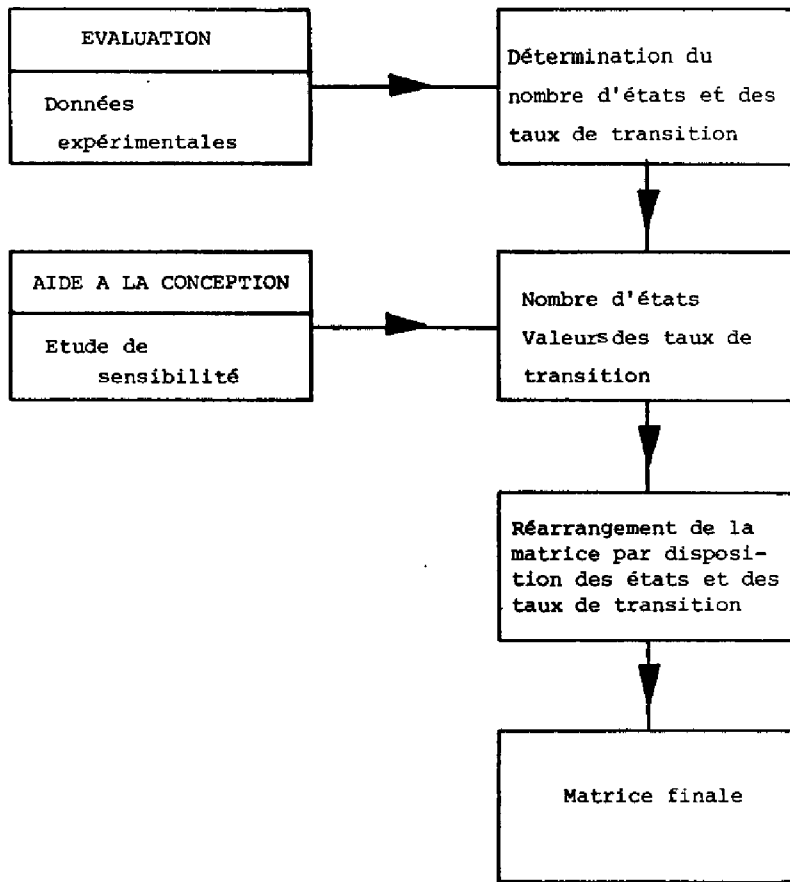


FIGURE 6. Utilisation des états fictifs.

Le nombre  $k$  d'états comme nous l'avons montré au paragraphe 2.2.1. est fourni par :

$$k = \text{plus petit entier} \gg \frac{m_1^{*2}}{m_2^*}$$

La détermination des  $\lambda_j$  se fait en connaissant l'expression des moments de la loi d'ERLANG d'ordre  $k-1$ , et en minimisant l'écart entre ces derniers et les moments expérimentaux.

Le critère de minimisation adopté a été choisi comme étant celui des moindres carrés soit :

$$\min \mathcal{E} = \min \sum_i \alpha_i [m_i - m_i^*]^2$$

Les valeurs des moments d'une loi d'ERLANG sont données par le tableau de la figure 7.

La méthode de minimisation que nous avons adoptée est celle de FLETCHER et POWELL [FLE,63].

VALEUR MOYENNE	$m_1^* = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i}$
VARIANCE	$m_2^* = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^2}$
3ème MOMENT	$m_3^* = 2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^3}$
4ème MOMENT	$m_4^* = 6 \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^4} + 3 \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^2} \right)^2$
5ème MOMENT	$m_5^* = 24 \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^5} + 20 \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^2} \right) \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^3} \right)$
6ème MOMENT	$m_6^* = 120 \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^6} - 30 \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^3} \right) \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i} \right) + 90 \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^4} \right) \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^2} \right) + 15 \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^3} \right)^2 - 90 \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^2} \right)^2$

FIGURE 7. Moments d'une loi d'ERLANG caractérisant la disposition série des états fictifs.

#### 4.1.3. Réarrangement de la matrice par disposition des états et des taux

Dans la version FORTRAN que nous présentons dans ce mémoire, nous n'avons envisagé de prendre en compte que les lois de répartition non exponentielles d'un nombre limité de paramètres. Cette hypothèse paraît :

- restrictive en ce qui concerne l'évaluation de la sûreté d'un système connu,
- justifiée dans le cas d'une étude de sensibilité.

Elle a été retenue :

- dans un souci de simplicité,
- grâce à la notion de partition des états.

En effet, le souci de simplicité a conduit à effectuer ces extensions sur des matrices numériques, du fait de la lourdeur des manipulations alphanumériques en FORTRAN. La conséquence en est le repérage difficile des variables par l'intermédiaire des taux sur une matrice numérique d'autant plus que ces taux peuvent ne pas être les seuls en cause dans la transition considérée. Le repérage de ces taux, et par conséquent des états qui leur correspondent peut être fait par leur position dans la matrice. Si donc la description est telle qu'ils occupent toujours la même place, l'introduction des états fictifs en sera facilitée. La notion de composantes conduit à la définition de sous-matrices de la matrice initiale, c'est-à-dire à une partition des états. Nous avons donc choisi de placer en dernière position de chaque sous-matrice l'état à étendre si besoin est et de définir le nombre d'états qui le précèdent dans la matrice et sur lesquels intervient la variable incriminée.

La transformation de la matrice initiale peut s'effectuer en connaissant les taux de transition  $\lambda_i$  relatifs aux états que l'on rajoute. En effet, soit une matrice de départ, de dimension  $(N \times N)$ . On désire remplacer les états  $i, j, k$  respectivement par  $n$  états en série représentant une distribution d'ERLANG d'ordre  $(n-1)$ .

La matrice finale est une matrice de dimensions  $(N+3n-3, N+3n-3)$  qui peut être déduite de la matrice de départ en suivant les règles ci-après.

La notation  $i_\ell, j_\ell, k_\ell$  désigne le  $\ell$  ième état des états en série intervenant sur l'état  $i, j, k$ .

Règle 1.

L'état  $i_l$  est relié à l'état  $j_l$ , lui-même relié à l'état  $k_l$   $\forall l \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Ceci revient à dire que si on traverse l'événement  $E_1$  présidant à la définition de cet état, et qu'il arrive un événement supplémentaire  $E_2$ , on achève de traverser  $E_1$  avant d'entamer  $E_2$ . Ce type de liaison est représenté sur la figure 8.

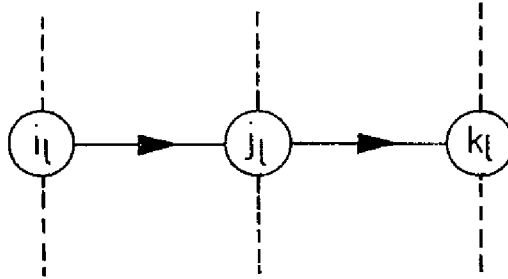


FIGURE 8. Règle 1.

Règle 2.

L'état  $j_n$  est rebouclé sur l'état  $i_1$ , l'état  $k_n$  est rebouclé sur l'état  $j_1$  (figure 9).

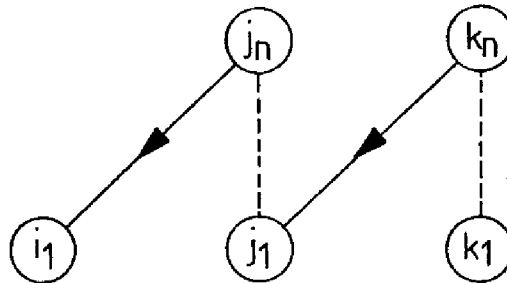


FIGURE 9. Règle 2.

Règle 3.

Le dernier des états  $i_n$  est rebouclé en plus de  $j_n$  sur les états sur lesquels  $i$  était rebouclé au départ.

Ces règles étant données, il est nécessaire de les transcrire en FORTRAN. Cette étape est effectuée par des calculs sur les indices des lignes et des colonnes de la matrice initiale, permettant d'insérer les nouveaux états d'après les règles précédentes.

#### 4.2. COMPOSANTES DEPENDANT EXPLICITEMENT DU TEMPS ET TESTS DE VALIDITE

##### 4.2.1. Calcul des composantes

La forme générale de ces composantes est donnée par

$$P(0) \cdot \exp(A t) \cdot \mathbf{1}$$

où :

- $A$  est la matrice des taux de transition que le système est autorisé à traverser compte tenu de la définition de la composante recherchée,
- $P(0)$  est le vecteur des probabilités initiales,
- $\mathbf{1}$  est le vecteur représentant les états sur lesquels on somme les probabilités.

L'utilisation d'une telle formulation requiert la possibilité de pouvoir exprimer des exponentielles de matrice.

Ce type de calcul est possible par de nombreuses méthodes :

- utilisation d'approximations sous forme de série (TAYLOR, NEUMANN), ou à l'aide de transformations de similarité (SHÜR, JORDAN, etc.),
- utilisation d'approximation par des méthodes plus spécifiques telles que l'approximation de PADE [RIS,72] et plus généralement par des méthodes par intégration numérique,
- utilisation classique d'évaluation des exponentielles de matrices [GANT,60] comprenant en particulier la méthode des matrices constituantes,
- utilisation de méthodes utilisant la transformée de LAPLACE.

Nous avons, pour notre part, recherché à obtenir des composantes sous forme analytique. Ceci élimine les méthodes permettant de les évaluer pas à pas et en particulier les approximations qui nécessiteraient d'évaluer ces composantes point par point et demanderaient donc un temps de calcul important.

L'utilisation de la transformée de LAPLACE permet d'écrire :

$$\mathcal{L}[P(0) \cdot \exp(A t) \cdot \mathbf{1}] = P(0) \cdot \mathcal{L}[\exp(A t)] \cdot \mathbf{1} = P(0) \cdot [s \mathbb{I} - A]^{-1} \cdot \mathbf{1}$$

où  $\mathbb{I}$  est la matrice unité.



On a donc, en exprimant l'inverse de la matrice  $[\lambda \mathbb{I} - A]$  à l'aide de son adjointe :

$$[\lambda \mathbb{I} - A]^{-1} = \frac{\text{Adj}[\lambda \mathbb{I} - A]}{\det[\lambda \mathbb{I} - A]} = \frac{[\text{Cofacteurs}(\lambda \mathbb{I} - A)]^T}{\det[\lambda \mathbb{I} - A]}$$

$$\mathcal{L}[\mathbb{P}(s) \cdot \exp(At) \cdot \mathbb{1}] = \mathbb{P}(s) \frac{\text{Adj}[\lambda \mathbb{I} - A]}{\det[\lambda \mathbb{I} - A]}$$

SOURIAU-LEVERRIER-FADEEV [GANT, 60, pp.87-89] ont proposé un algorithme permettant de calculer l'adjointe d'une matrice et fournissant les coefficients  $p_i$  de son polynôme caractéristique.

L'adjointe d'une matrice  $[\lambda \mathbb{I} - A]$  est alors donnée par

$$\text{Adj}[\lambda \mathbb{I} - A] = B_0 \lambda^{n-1} + B_1 \lambda^{n-2} + \dots + B_{n-1}$$

où les termes  $B_i$  sont des coefficients matriciels fournis pour l'algorithme de FADEEV [GANT, p.88]

$$B_0 = \mathbb{I}$$

$$A_1 = A \quad ; \quad p_1 = \text{tr}(A_1) \quad ; \quad B_1 = A_1 - p_1 \mathbb{I}$$

$$A_2 = A \cdot B_1 \quad ; \quad p_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(A_2) \quad ; \quad B_2 = A_2 - p_2 \mathbb{I}$$

$$A_{n-1} = A \cdot B_{n-2} \quad ; \quad p_{n-1} = \frac{1}{n-1} \text{tr}(A_{n-1}) \quad ; \quad B_{n-1} = A_{n-1} - p_{n-1} \mathbb{I}$$

$$A_n = A \cdot B_{n-1} \quad ; \quad p_n = \frac{1}{n} \text{tr}(A_n) \quad ; \quad B_n = A_n - p_n \mathbb{I} = \mathbb{O}$$

où  $\text{tr}(A_i)$  représente la trace de la matrice  $A_i$

$$\mathcal{L}[\exp(At)] = [\lambda \mathbb{I} - A]^{-1} = \frac{B_0 \lambda^{n-1} + \dots + B_{n-1}}{\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n}$$

Il est à noter que  $B_n = \mathbb{O}$  permet d'effectuer un test de précision lors de l'évaluation sur calculateur.

La transformée de LAPLACE de la composante  $\mathcal{G}(t)$  recherchée peut donc se mettre sous la forme :

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}(t)] = \mathcal{L}[\mathbb{P}(0) \exp(\mathbb{A}t) \mathbb{1}] = \mathbb{P}(0) \cdot \left[ \frac{\mathbb{B}_0 s^{n-1} + \dots + \mathbb{B}_{n-1}}{s^n - p_1 s^{n-1} - \dots - p_m} \right] \cdot \mathbb{1}$$

qui peut encore s'écrire, en se ramenant à des coefficients scalaires :

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}(t)] = \frac{C_0 s^{n-1} + C_1 s^{n-2} + \dots + C_{m-1}}{s^n - p_1 s^{n-1} - \dots - p_m}$$

avec :  $C_i = \mathbb{P}(0) \mathbb{B}_i \mathbb{1}$

On a donc finalement :

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}(t)] = \frac{\sum_{i=1}^m C_{i-1} s^{m-i}}{\sum_{i=1}^{n+1} p_{i-1} s^{n-i+1}} \quad \text{avec } p_0 = 1$$

si on appelle alors :

- $r_j$  les racines du numérateur affectées de leur ordre de multiplicité  $\beta_j$
- $s_i$  les racines du dénominateur affectées de leur ordre de multiplicité  $\alpha_i$

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}(t)] = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (s - r_j)^{\beta_j}}{\prod_{i=1}^m (s - s_i)^{\alpha_i}}$$

Après avoir effectué les simplifications nécessaires entre numérateur et dénominateur pour rendre minimal le polynôme caractéristique on obtient par retour à la variable temporelle à l'aide de la décomposition en éléments simples, une expression de la composante sous la forme :

$$\mathcal{G}(t) = \sum_{i=1}^{m'} \sum_{k_i=2}^{\alpha_i} A_{i,k_i} t^{(k_i-1)} e^{s_i t}$$

les coefficients  $A_{i,k_i}$  étant donnés par la formule des résidus :

$$A_{i,k_i} = \frac{1}{(k_i-1)!} \frac{d^{k_i}}{(ds)^{k_i}} \left[ \frac{(s-s_i)^{k_i} N(s)}{\prod (s-s_i)^{\alpha_i}} \right]_{s=s_i}$$

où  $N(s) = \prod_{j=1}^{n-1} (s - r_j)^{\beta_j}$

#### 4.2.2. Tests de validité

Au cours de la mise au point du programme SURF, nous nous sommes efforcé d'inclure des tests de validité à des niveaux différents.

Ces tests doivent être exécutés aux moments critiques de l'exécution du programme qui peuvent intervenir :

- lors de la partie conversationnelle,
- lors de l'exécution du calcul.

Les erreurs pouvant être faites lors de la partie conversationnelle sont d'origine purement humaine et sont le fait de l'utilisateur. Des tests sont effectués lors du programme conversationnel et permettent une correction instantanée de l'erreur dans le cas où il est possible de la détecter. Les erreurs qui peuvent intervenir au cours de la partie calcul sont essentiellement dues :

- aux algorithmes utilisés,
- à la dynamique entre les termes des matrices.

On sait, en effet, que les algorithmes de convergence pour le calcul des racines d'un polynôme par exemple, peuvent dans certains cas dus à une mauvaise initialisation, s'avérer inefficaces. La solution à ce problème réside donc dans une initialisation différente lorsque cela est possible.

C'est la solution que nous avons adopté en employant l'algorithme de BAIRSTOW [DUR,60,pp.247]. Ce dernier n'est certes pas universel et peut s'avérer inefficace malgré de multiples initialisations. D'autres algorithmes (RUTISHAUSER, WILKINSON) ont été testés pour remplir cette tâche, mais nous n'avons conservé dans la version finale que celui de BAIRSTOW qui s'avère être le plus apte à traiter les types d'exemples utilisés. Les valeurs des racines obtenues sont d'ailleurs testées au cours du calcul en examinant les valeurs correspondantes du polynôme pour ces racines.

La dynamique entre les termes des matrices mises en jeu peut entraîner une erreur d'arrondi de l'ordre du terme le plus faible. Or, c'est souvent ce terme qui est prépondérant (racine de plus faible module) dans

les résultats obtenus. Le désir de minimiser ces phénomènes nous a conduit à employer la quadruple précision lors des calculs.

Le tableau de la figure 10 résume les tests qui sont effectués lors de la partie conversationnelle et lors de la partie traitement.

REMARQUE

Le genre d'exemples traités est tel que la racine prépondérante est celle de plus faible module. Or, par initialisation correcte de l'algorithme de BAIRSTOW, il est possible de calculer ces racines dans l'ordre croissant des modules. Toute erreur de convergence se produisant progressivement au cours du calcul, c'est cette première racine qui sera la moins affectée.

<p>TESTS EFFECTUES LORS</p> <p>DE LA PARTIE</p> <p>CONVERSATIONNELLE</p>	<p>① Déclarations de dimensions conformes</p> <p>② Somme des termes de la matrice des taux de transition nulle</p> <p>③ Somme des probabilités du vecteur des distributions initiales = 1</p> <p>④ Conformités des réponses aux questions posées</p> <p>⑤ Vérification de la validité de la définition des classes d'états</p> <p>⑥ Vérification des données d'extension par contrôle</p> <p style="margin-left: 40px;">- du nombre de moments</p> <p style="margin-left: 40px;">- { et <math>\sum \text{coeff}_i \text{ de pondération} = 1</math></p> <p style="margin-left: 20px;">ou</p> <p style="margin-left: 40px;">- du nombre d'états pour étude de sensibilité</p> <p>⑦ Vérification du nombre d'exemples traités</p>
<p>TESTS EFFECTUES LORS</p> <p>DE LA PARTIE</p> <p>CALCUL</p>	<p>⑧ Somme des termes de la matrice nulle avant extension</p> <p>⑨ Somme des termes de la matrice nulle après extension</p> <p>⑩ Vérification de valeurs indépendantes du temps par calculs différents</p> <p>⑪ Vérification de <math>B_n \approx 0</math> dans l'algorithme de FADEEV</p> <p>⑫ Vérification des valeurs propres trouvées</p> <p>⑬ Vérification du polynôme minimal</p> <p>⑭ Vérification de la valeur de la composante à l'origine</p> <p>⑮ Vérification du test de la tangente</p>

FIGURE 10. Tests effectués lors du déroulement de SURF.

Les tests (10), (14) et (15) appellent quelques commentaires :

- Test (10) . La modélisation sous forme de processus markovien homogène permet par exemple de calculer le temps moyen entre défaillances d'un système par :

$$MTBF = MUT + MDT$$

où

$$MTBF = \frac{MUT}{D}$$

.MUT représente le temps moyen de fonctionnement

.MDT représente le temps moyen de défaillance

.D représente la disponibilité stationnaire.

Les calculs de MDT et de D étant indépendants l'un de l'autre, il est donc possible d'effectuer une vérification sur la valeur du MTBF.

- Test (14) . Selon les composantes évaluées, leur qualité physique entraîne une valeur à l'origine aisément vérifiable sur la forme des expressions des composantes, généralement  $G(0)=1$ .

- Test (15) . Soit l'expression de la composante  $G(t)$  :

$$G(t) = P(0) \exp(A t) \mathbb{1}$$

On peut écrire  $\frac{d}{dt} G(t) = P(0) \cdot A \cdot \exp(A t) \cdot \mathbb{1}$

soit pour  $t=0$   $\left. \frac{d}{dt} G(t) \right|_{t=0} = P(0) \cdot A \cdot \mathbb{1}$

L'expression formelle de  $G(t)$  est donnée par :

$$G(t) = \sum_i A_i e^{s_i t} + \sum_{j=1}^{n'} \sum_{k_j=2}^{\alpha_j} B_{j,k_j} t^{k_j-1} e^{s_j t}$$

où .les  $s_i$  sont les racines simples,

.les  $s_j$  sont les racines de multiplicité  $\alpha_j$

Alors :  $\frac{dG(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n''} A_i s_i e^{s_i t} + \sum_{j=1}^{n'} \sum_{k_j=2}^{\alpha_j} [B_{j,k_j} (k_j-1) t^{k_j-2} e^{s_j t} + B_{j,k_j} s_j t^{k_j-1} e^{s_j t}]$

soit :  $\left. \frac{dG(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n''} A_i s_i + \sum_{j=1}^{n'} B_{j,2}$

et on peut donc vérifier que l'on a l'égalité :

$$P(0) \cdot A \cdot \mathbb{1} = \sum_{i=1}^{n''} A_i s_i + \sum_{j=1}^{n'} B_{j,2}$$

Cette expression permet donc de vérifier à partir des données initiales  $P(0)$ ,  $A$  et  $1$ , que les calculs des coefficients  $A_i$  et des racines  $s_i$  ont été correctement effectués.

## 5. DESCRIPTION DE SURF, VERSION FORTRAN

---

La structure générale du programme SURF que nous avons présentée sur la figure 5 peut être subdivisée en trois grandes parties qui sont représentées sur la figure 11.

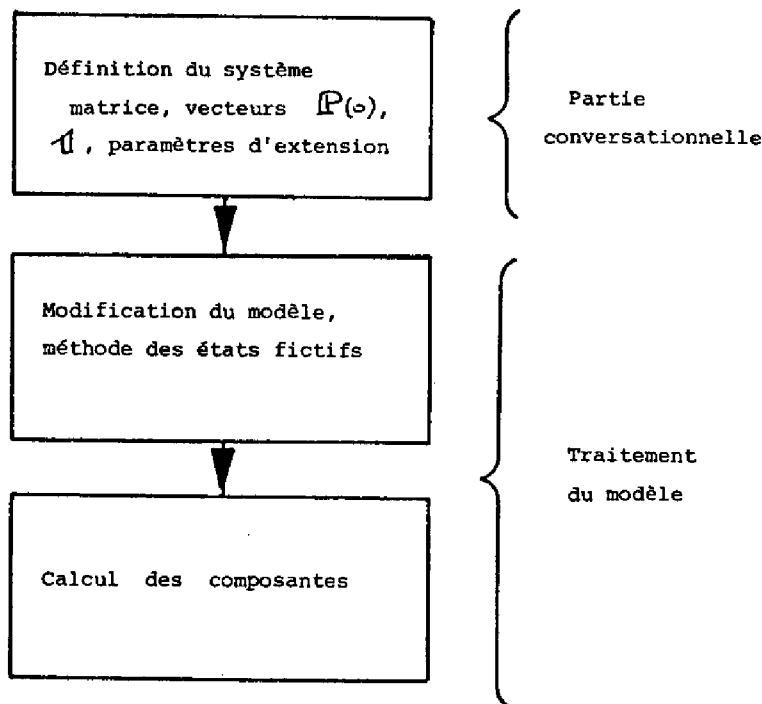


FIGURE 11. Phases d'exploitation de SURF.

Cet organigramme présente trois parties distinctes :

- le choix du modèle,
- la prise en compte de lois de distribution non exponentielles,
- la possibilité d'obtenir une forme désirée des tracés de courbes.

## 5.1. PARTIE CONVERSATIONNELLE

### 5.1.1. Choix du modèle

Le modèle initial doit être représenté par :

- la matrice des taux de transitions,
- le vecteur des distributions initiales des probabilités,
- la dimension des sous-matrices définissant les composantes à évaluer,
- le vecteur définissant les états pris en compte dans la définition des composantes recherchées.

L'utilisateur peut définir ces données à l'aide de deux procédures :

- utilisation d'une bibliothèque de modèles préétablis représentant des structures classiques (redondantes ou non) dans des conditions de fonctionnement déterminées, l'utilisateur doit alors définir uniquement les valeurs des paramètres qui lui sont demandées par voie conversationnelle,
- création d'un modèle particulier par la définition progressive, toujours assistée par mode conversationnel des données énumérées auparavant.

### 5.1.2. Prise en compte des lois de distribution non exponentielles

Le modèle initial est considéré comme markovien homogène. La prise en compte de lois non exponentiellement distribuées est possible grâce à la méthode des états fictifs, qui nécessite pour pouvoir être utilisée, la connaissance de données qui sont différentes suivant l'optique d'utilisation retenue, comme indiqué sur le tableau de la figure 12.

OBJECTIF	DONNEES A FOURNIR PAR L'UTILISATEUR
Etude de sensibilité de la forme de la loi de répartition d'une variable	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Nombre k d'états utilisés pour étendre chaque état où intervient la variable</li> <li>- Nombre d'états sur lesquels intervient la variable à étendre</li> <li>- Valeurs des taux de transition affectés à chaque état</li> </ul>
Approximation d'une loi connue par ses moments expérimentaux	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Valeurs des moments</li> <li>- Valeurs des coefficients de pondération affectés à ces moments</li> <li>- Etats comprenant la variable et sur lesquels doit donc intervenir l'extension</li> </ul>

FIGURE 12. Modes d'utilisation de la méthode des états fictifs.

### 5.1.3. Tracé de courbes

Les expressions des composantes de la sûreté issues de SURF étant sous forme analytique, le tracé de leur évolution en fonction du temps peut être obtenu sous la forme désirée. Les paramètres qui permettent de définir le tracé de courbes sont donnés par :

- commentaires devant s'inscrire sur la courbe,
- valeurs limites du temps,
- forme du tracé désiré : linéaire, semi-logarithmique, log-log,
- dimensions du cadre dans lequel s'inscrit le tracé.

Le choix de l'utilisateur peut alors se porter :

- soit sur l'utilisation d'un format standard dont les paramètres sont rappelés au cours de la partie conversationnelle,
- soit sur la définition de paramètres particuliers lorsqu'une modification du tracé standard précédent est désirée.



5.1.4. Organisation du fichier de données résultant

Le fichier créé par la partie conversationnelle est stocké sur disque résident (permanent) et peut être modifié en cas d'erreur manifeste des données, non détectée au cours de la création.

L'erreur peut être recherchée en disposant d'une impression de la partie conversationnelle qui est également rangée dans un fichier.

L'organisation générale du fichier de données est indiquée sur la figure 13.

DONNEES	COMMENTAIRES
X	Nombre d'exemples
A, B, C	A : dimension totale de la matrice B : première classe d'états définissant la première composante C : deuxième classe d'états définissant la deuxième composante
[M]	[M] : matrice numérique du premier exemple
D, E, F, G	D,E,F,G : indicateurs d'extension de matrice en réponse aux questions 0 = NON ; 1 = OUI D : extension sur première catégorie E : extension sur deuxième catégorie F : simulation ou sensibilité sur première catégorie G : simulation ou sensibilité sur deuxième catégorie
MOM (I) ALPHA (I)	Si extension sur première catégorie, simulation N <sub>1</sub> = nombre d'états à étendre MOM(I) = valeurs des moments ALPHA (I) = coeff. de pondération
N <sub>2</sub> , N <sub>3</sub> LAMBDA (I)	Si extension sur première catégorie, sensibilité N <sub>2</sub> = nombre d'états pour extension N <sub>3</sub> = nombre d'états à étendre LAMBDA(I) = valeurs des taux
MOM(I) ALPHA(I)	Si extension sur deuxième catégorie, simulation N <sub>1</sub> = nombre d'états à étendre MOM(I) = valeurs des moments ALPHA(I) = coeff. de pondération
N <sub>2</sub> , N <sub>3</sub> LAMBDA(I)	Si extension sur deuxième catégorie, sensibilité N <sub>2</sub> = nombre d'états pour extension N <sub>3</sub> = nombre d'états à étendre LAMBDA(I) = valeurs des taux
PFO(I)	Vecteur des distrib. initiales, première composante
PDIO(I)	Vecteur des distrib. initiales, deuxième composante
UNN1(I)	Sommation des états, première composante
UNN2N3(I)	Sommation des états, deuxième composante
2ème exemple	
A, B, C	idem, 1er exemple
	Xième exemple
NTEXT(I)	Commentaires inscrits sur le tracé de courbes
	Paramètres de définition du tracé

FIGURE 13. Constitution du fichier de données.

5.2. TRAITEMENT DU MODELE

5.2.1. Modification du modèle. Méthode des états fictifs

La figure 14 donne l'organigramme général de la partie extension qui utilise :

- les indicateurs d'extension,
- les paramètres de l'extension.

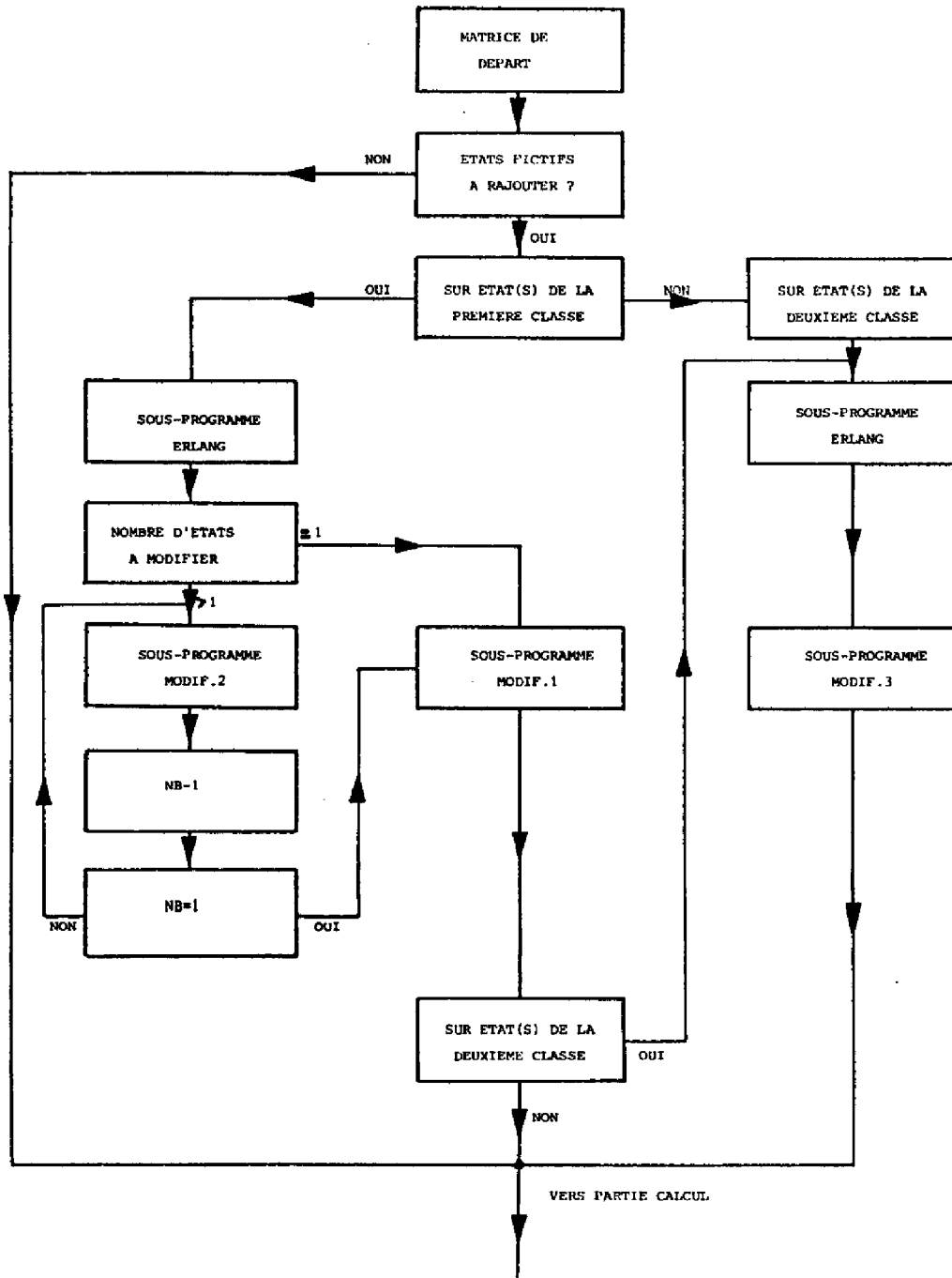


FIGURE 14. Organigramme de la partie extension.

La figure 15 en donne l'organigramme détaillé, le tableau de la figure 16 donnant les rôles respectifs des différents sous-programmes utilisés.

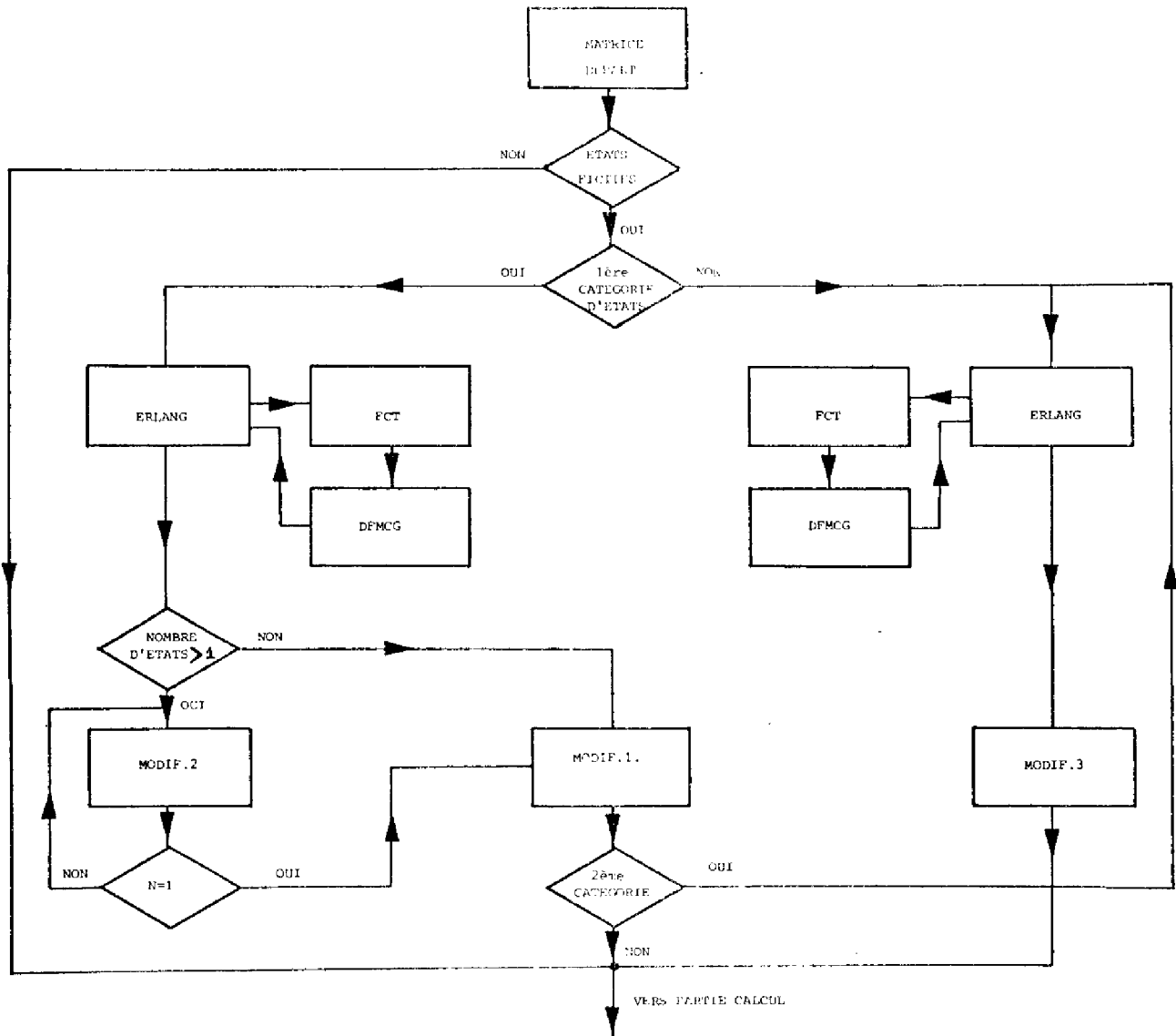


FIGURE 15. Organigramme détaillé de la partie extension.

SOUS-PROGRAMMES	ROLE	ENTREE	SORTIE
MODIF. 1	Fournit la matrice des taux de transition tenant compte de taux non constants à partir de la matrice initiale écrite avec des taux constants, dans le cas de l'extension d'un seul état.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Matrice initiale</li> <li>- Nombre d'états pour effectuer l'extension</li> <li>- Taux de transition</li> </ul>	Matrice modifiée
MODIF. 2	Même principe que MODIF.1, l'algorithme étant plus complexe du fait de la prise en compte de plusieurs états à étendre.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Matrice initiale</li> <li>- Nombre d'états pour extension</li> <li>- Nombre d'états à étendre</li> <li>- Valeurs des taux</li> </ul>	Matrice modifiée
MODIF. 3	Même principe, mais plus simple que MODIF.1 et MODIF.2, l'état à étendre étant le dernier de la matrice.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Matrice initiale</li> <li>- Nombre d'états pour extension</li> <li>- Valeurs des taux</li> </ul>	Matrice modifiée
ERLANG	Simule une fonction de répartition connue par ses moments centrés au moyen d'une loi d'ERLANG série. Il fournit le nombre d'états et les taux correspondants.	Moments et coefficients de pondération	<p>Nombre d'états pour extension</p> <p>Valeurs des taux de transition</p>
FCT	Calcul des moments de la loi d'ERLANG.	Valeurs des taux	Valeurs des moments
DFMCG	Méthode de minimisation par la méthode de FLETCHER et POWELL	Valeurs des moments expérimentaux	Valeurs des taux

Figure 16- Rôle des sous-programmes de l'extension

### 5.2.2. Calcul des composantes

L'organigramme général de la partie calcul est donné par la figure 17 qui montre l'enchaînement des tâches.

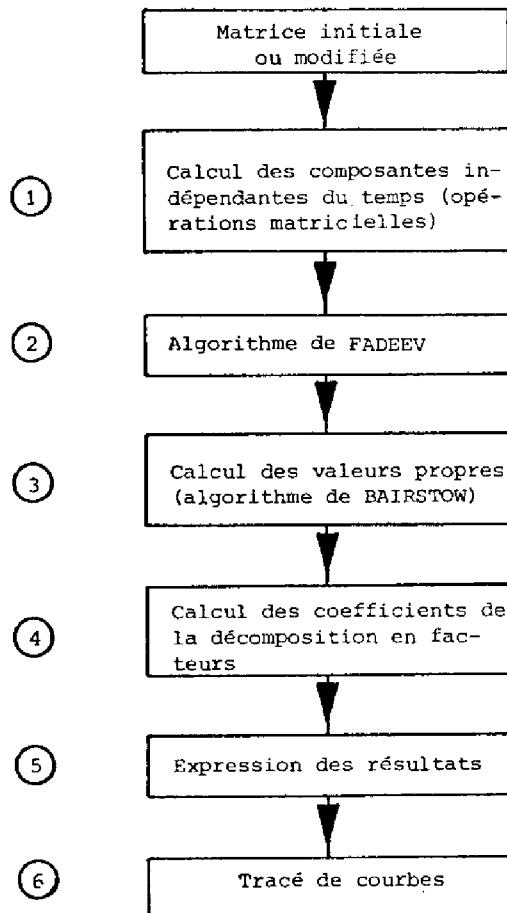


FIGURE 17. Organisation de la partie calcul.

#### 5.2.2.1. Calcul des composantes indépendantes du temps

Le sous-programme CARACT chargé de cette évaluation est donné sur la figure 18.

La grande simplicité de ce sous-programme n'appelle pas de commentaires spécifiques.

Les sous-programmes employés DINVMA et DPROMA ont respectivement pour rôle l'inversion et le produit matriciels.

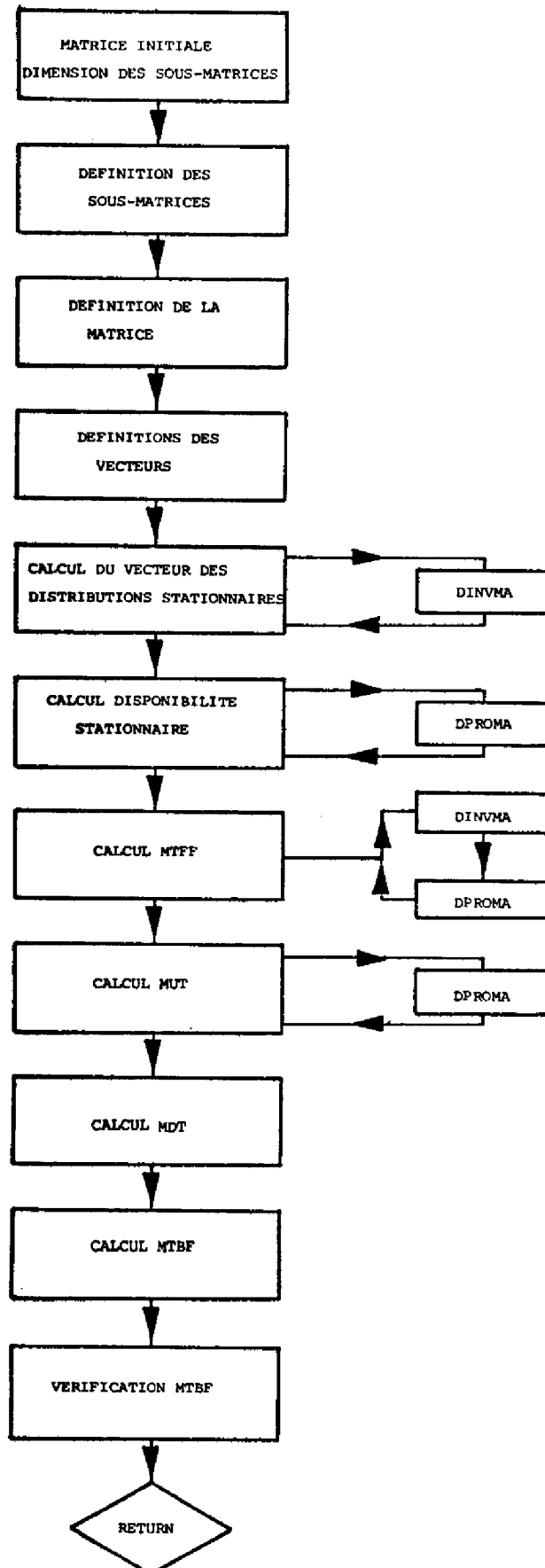


FIGURE 18. Organigramme de l'évaluation des composantes indépendantes du temps.

5.2.2.2. Composantes dépendant du temps

Les phases 2,3,4 (figure 17) sont incluses dans un sous-programme plus général appelé CCDF.

Son rôle est d'évaluer l'expression fonction du temps de l'exponentielle de matrice par l'intermédiaire du calcul des coefficients de la décomposition en facteurs (éléments simples).

Son organigramme général est donné sur la figure 19.:

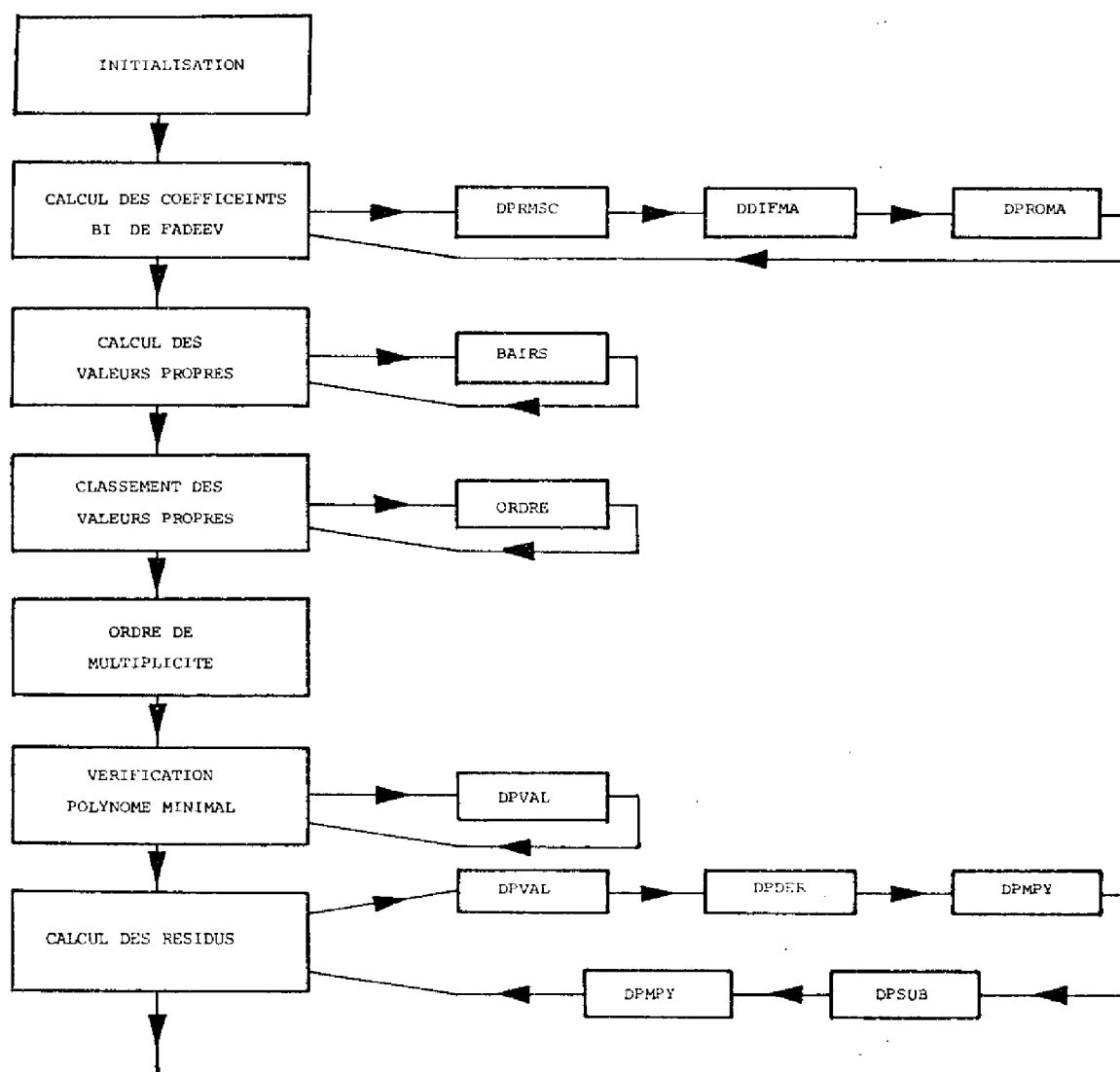


FIGURE 19. Calcul des composantes dépendant du temps.

où les sous-programmes ont les rôles suivants :

- DPRMSC : produit de matrice par un scalaire
- DDIFMA : différence de matrices
- DPROMA : produit de matrices
- BAIRS : méthode de BAIRSTOW : calcul des racines d'un polynôme
- ORDRE : classement de nombres : racines classées par ordre croissant de valeurs réelles
- DPVAL : valeur d'un polynôme
- DPDER : dérivation d'un polynôme
- DPMPY : multiplication de polynômes
- DPSUB : différence de polynômes.

L'expression des résultats est donnée dans le programme SURETE et tient compte notamment :

- des expressions réelles ou complexes des coefficients et des racines,
- de leur ordre de multiplicité.

### 5.2.2.3. Tracé de courbes

Les coordonnées des points de la ou des courbes sont calculées à partir des expressions précédentes dans le sous-programme SURETE, comme indiqué sur la figure 20, où les sous-programmes PNUMA et BSCLA sont des programmes d'exploitation du traceur.

La partie calcul ayant été présentée du point de vue théorique et du point de vue de l'enchaînement des tâches, nous donnons sur la figure 21 l'organigramme général de SURF comportant les noms des sous-programmes utilisés et leurs fonctions.

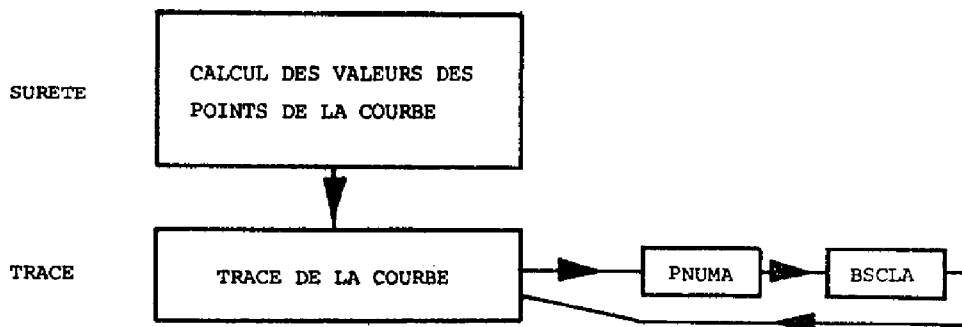


FIGURE 20. Tracé de courbes.





## 6. PERFORMANCES DE SURF

---

Les performances de SURF en version FORTRAN peuvent être présentées suivant trois niveaux en interaction les uns avec les autres :

- les types d'exemples traités,
- les limitations dues aux ressources physiques,
- l'intérêt des résultats et leur précision.

### 6.1. TYPES D'EXEMPLES TRAITES

L'utilisation de la prévision de la sûreté de fonctionnement par les processus markoviens homogènes a permis de montrer :

- qu'ils permettent d'un point de vue qualitatif une étude de toutes les composantes de la sûreté, en tenant compte en particulier :
  - .de l'architecture de la structure employée,
  - .de la politique de maintenance qui s'y applique,
  - .du mode de fonctionnement dû à l'application,
- qu'ils constituent d'un point de vue quantitatif un outil :
  - .d'évaluation,
  - .d'aide à la conception,

en ne se limitant pas aux processus à distributions exponentielles.

### 6.2. LIMITATIONS DUES AUX RESSOURCES PHYSIQUES

Le choix du niveau de modélisation d'un système entraîne lors de la modélisation un nombre d'états déterminant une matrice des taux de transition dont la taille peut devenir un obstacle à l'exploitation du programme, dû à une limitation des ressources physiques dont nous disposons.

Le tableau de la figure 4 montre en effet l'augmentation de ces ressources lorsque la taille des exemples augmente.

L'utilisation de la version PL/1 permettra, outre ses autres avantages de reculer ces limites et d'élargir ainsi le champ d'étude :

- soit par une modélisation plus fine des systèmes,
- soit par la modélisation des systèmes plus importants.

### 6.3. INTERET DES RESULTATS ET PRECISION

Si qualitativement les résultats fournis par SURF sont indéniablement intéressants, la précision de leur obtention peut, lors de certains exemples, s'avérer critique. Cette dernière est cependant constamment contrôlée grâce au souci que nous avons eu d'implanter des tests de vérification au cours des calculs.

## 7. EXEMPLES D'UTILISATION DE SURF

---

Le but de ce paragraphe est de présenter les trois modes d'entrée-sortie définis par :

- partie conversationnelle,
- résultats numériques,
- tracé de courbes.

Pour ce faire, nous avons utilisé une des versions du programme SURF en FORTRAN permettant :

- ou de bénéficier de modèles bibliothèque (structure non redondante, redondance sélective active ou passive, redondance massive à voteur dans le cas de fonctionnement continu),
- ou de définir un modèle propre à l'utilisateur, dans la limite de 10 états au maximum,

les autres versions FORTRAN offrant d'autres modèles bibliothèque et des limites maximales supérieures.

### 7.1. PARTIE CONVERSATIONNELLE

La présentation de la session conversationnelle faite ici ne se veut pas exhaustive et n'a pour but que de montrer les types de relations homme-machine tels que nous les avons définis.

En conséquence, nous présenterons cinq exemples de modèles différents, sachant que tous les résultats numériques ne seront pas présentés par la suite.

Ces modèles seront successivement :

- une structure non redondante ayant un taux de dégradation  $\lambda$ , les taux de réparation après panne détectée et non détectée données respectivement par  $\mu$  et  $\nu$  (exemple n°1),
- la même structure que précédemment, avec une étude de sensibilité sur  $\nu$  (exemple n°2),
- une structure redondante sélective passive présentant :
  - .un taux de défaillance  $\lambda$  pour une unité,
  - .une probabilité de détection de panne  $p_D$ ,
  - .une probabilité de bonne transmission du contexte  $p_T$ ,
  - .un taux de réparation après panne détectée  $\mu$ ,
  - .un taux de réparation après panne non détectée  $\nu$ ,
  - .un rapport des taux de panne en fonctionnement et hors fonctionnement  $\rho$  (exemple n°3),
- une structure redondante massive à voteur, possédant les mêmes définitions de paramètres que précédemment (exemple n°4),
- une structure dont le graphe de comportement est connu par les états et les valeurs numériques des taux de transition entre états, sachant que les taux de réparation sont non constants (exemple n°5).

Le déroulement de la session conversationnelle est alors donné ci-après.

```
EX .SUB(PROC) 'EXEMP'  
ATTR-LIST-NAME LEX NOT FOUND  
ATTR-LIST-NAME LDON NOT FOUND  
G1 COMPILER ENTERED  
SOURCE ANALYZED  
PROGRAM NAME = MAIN  
* NO DIAGNOSTICS GENERATED  
SOURCE ANALYZED  
PROGRAM NAME = EXPL  
* NO DIAGNOSTICS GENERATED  
SOURCE ANALYZED  
PROGRAM NAME = FCOURB  
* NO DIAGNOSTICS GENERATED  
*STATISTICS* NO DIAGNOSTICS THIS STEP :  
CHARGMENT EN ATTENTE
```

LE CALCUL DES DIFFERENTES GRANDEURS CARACTERISTIQUES DE LA SURETE DE FONCTIONNEMENT PAR DES METHODES MATHEMATiques SYSTEMATIQUES PASSE PAR LA CONNAISSANCE DE LA MATRICE DES TAUX DE TRANSITIONS (TAUX DE DEGRADATION ET TAUX DE REPARATION )

DANS LA REALITE , LES TAUX DE REPARATION NE SONT PAS CONSTANTS ( NATURE DE LA PANNE, QUALIFICATION DU PERSONNEL, INCIDENTS DE REMISE EN ROUTE... )  
SI VOUS DESIREZ DE PLUS AMPLES INFORMATIONS SUR LA MANIERE DE SIMULER DES TAUX DE REPARATION REPARTIS DE MANIERE ALEATOIRE AUTOUR D UNE VALEUR MOYENNE, TAPER LE CHIFFRE 1 SIRON, 0

?

1

CONNAISSANT LES DIFFERENTS MOMENTS EXPERIMENTAUX DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION, IL FAUT DETERMINER LE NOMBRE D ETATS, ET LA VALEUR DES COEFFICIENTS DE PONDERATION QUI LEUR SONT AFFECTES DE MANIERE A MINIMISER UN CRITERE QUE NOUS AVONS CHOISI COMME ETANT LA SOMME DES MOINDRES CARRES ENTRE LES MOMENTS EXPERIMENTAUX ET LES MOMENTS CALCULES D UNE LOI D ERLANG D ORDRE K

ON PEUT DONC SIMULER LES REPARATIONS APRES PANNE DETECTEE PAR M+1 ETATS APRES PANNE NON DETECTEE PAR L+1 ETATS EN SERIE  
COMBIEN VOULEZ VOUS TRACER DE COURBES ?

?

5

CHOIX DE L ARCHITECTURE:TAPER LE NOMBRE CORRESPONDANT

- 1:STRUCTURE NON REDONDANTE
- 2:STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE PASSIVE
- 3:STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE ACTIVE
- 4:STRUCTURE REDONDANTE MASSIVE
- 5:VOTRE CAS PARTICULIER
- 6:FIN

?

7

MAUVAISE REPONSE : RETAPER

CHOIX DE L ARCHITECTURE:TAPER LE NOMBRE CORRESPONDANT

- 1:STRUCTURE NON REDONDANTE
- 2:STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE PASSIVE
- 3:STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE ACTIVE
- 4:STRUCTURE REDONDANTE MASSIVE
- 5:VOTRE CAS PARTICULIER
- 6:FIN

?

VALEUR DU TAUX DE DEFAILLANCE LAMBDA DE L UNITE  
?

VALEUR DE PD:PROBABILITE QU UNE PANNE SOIT SIGNALEE  
?

VALEUR DE MU:TAUX DE REPARATION APRES PANNE DETECTEE  
?

VALEUR DE NU:TAUX DE REPARATION APRES PANNE NON DETECTEE  
?

VOULEZ VOUS EN CONSERVANT LA MEME ARCHITECTURE,EVALUER  
LA SURETE DE FONCTIONNEMENT,AVEC UNE VALEUR DIFFERENTE D UN  
DES PARAMETRES ?

CE SERA L EXEMPLE NUMERO 2

OUI=1, NON=0

?

MAUVAISE REPONSE : RETAPER

OUI=1, NON=0

?

RAPPEL : NOMBRE TOTAL D ETATS= 3

NOMBRE D ETATS DE FONCTIONNEMENT= 1

NOMBRE D ETATS APRES PANNE DETECTEE= 2

TAUX DE REPARATION APRES PANNE AUTODETECTEE CONSTANT?

OUI=1, NON=0

?

TAUX DE REPARATION APRES PANNE NON AUTODETECTEE CONSTANT ?

OUI=1, NON=0

?

RENTRE LA DISTRIBUTION INITIALE DES ETATS

RAPPEL: NOMBRE TOTAL D ETATS= 3

DONC 3 TERMES

?

IMPOSSIBLE LA SOMME DES COEFFICIENTS DOIT ETRE 1

RENTRE LA DISTRIBUTION INITIALE DES ETATS

RAPPEL: NOMBRE TOTAL D ETATS= 3

DONC 3 TERMES

?

\*\*\*\*\*  
\* EXEMPLE NUMERO 2

\*\*\*\*\*  
QUEL PARAMETRE VOULEZ VOUS MODIFIER ?

1:LAMBDA

2:PD

3:MU

4:NU

?

MAUVAISE REPONSE : RETAPER

QUEL PARAMETRE VOULEZ VOUS MODIFIER ?

- 1: LAMBDA
- 2: PD
- 3: MU
- 4: NU

?

4

VALEUR DE NU: TAUX DE REPARATION APRES PANNE NON DETECTEE

?

500

VOULEZ VOUS EN CONSERVANT LA MEME ARCHITECTURE, EVALUER LA SURETE DE FONCTIONNEMENT, AVEC UNE VALEUR DIFFERENTE D UN DES PARAMETRES ?

CE SERA L EXEIPLE NUMERO 3

OUI=1, NON=0

?

0

RAPPEL : NOMBRE TOTAL D ETATS= 3

NOMBRE D ETATS DE FONCTIONNEMENT= 1

NOMBRE D ETATS APRES PANNE DETECTEE= 2

TAUX DE REPARATION APRES PANNE AUTODETECTEE CONSTANT?

OUI=1, NON=0

?

1

TAUX DE REPARATION APRES PANNE NON AUTODETECTEE CONSTANT ?

OUI=1, NON=0

?

1

RENTREZ LA DISTRIBUTION INITIALE DES ETATS

RAPPEL: NOMBRE TOTAL D ETATS= 3

DONC 3 TERMES

?

1 0 0

\*\*\*\*\*

\* EXEMPLE NUMERO 3

\*\*\*\*\*

CHOIX DE L ARCHITECTURE: TAPER LE NOMBRE CORRESPONDANT

- 1: STRUCTURE NON REDONDANTE
- 2: STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE PASSIVE
- 3: STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE ACTIVE
- 4: STRUCTURE REDONDANTE MASSIVE
- 5: VOTRE CAS PARTICULIER
- 6: FIN

?

2

VALEUR DU TAUX DE DEFAILLANCE LAMBDA DE L UNITE

?

1

VALEUR DE PD: PROBABILITE QU UNE PANNE SOIT SIGNALEE

?

0.5

VALEUR DE PT: PROBABILITE DE BONNE TRANSMISSION DU CONTEXTE

?

0.5

VALEUR DE MU: TAUX DE REPARATION APRES PANNE DETECTEE

?

1000

VALEUR DE NU: TAUX DE REPARATION APRES PANNE NON DETECTEE

?  
100  
VALEUR DE RO:RAPPORT DES TAUX DE PANNE. EN FONCTIONNEMENT ET HORS FONCTI  
?  
1000  
VOULEZ VOUS EN CONSERVANT LA MEME ARCHITECTURE,EVALUER  
LA SURETE DE FONCTIONNEMENT,AVEC UNE VALEUR DIFFERENTE D UN  
DES PARAMETRES ?  
OUI=1,NON=0  
?  
0  
RAPPEL : NOMBRE TOTAL D ETATS= 6  
          NOMBRE D ETATS DE FONCTIONNEMENT= 4  
          NOMBRE D ETATS APRES PANNE DETECTEE= 5  
TAUX DE REPARATION APRES PANNE AUTODETECTEE CONSTANT?  
OUI=1,NON=0  
?  
1  
TAUX DE REPARATION APRES PANNE NON AUTODETECTEE CONSTANT ?  
OUI=1,NON=0  
?  
1  
RENTRE LA DISTRIBUTION INITIALE DES ETATS  
RAPPEL: NOMBRE TOTAL D ETATS= 6  
  
DONC 6 TERMES  
?  
1 0 0 0 0 0

\*\*\*\*\*  
\* EXEMPLE NUMERO 4  
\*\*\*\*\*  
CHOIX DE L ARCHITECTURE:TAPER LE NOMBRE CORRESPONDANT  
1:STRUCTURE NON REDONDANTE  
2:STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE PASSIVE  
3:STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE ACTIVE  
4:STRUCTURE REDONDANTE MASSIVE  
5:VOTRE CAS PARTICULIER  
6:FIN  
?  
4  
VALEUR DU TAUX DE DEFAILLANCE LAMBDA DE L UNITE  
?  
1  
VALEUR DE PD:PROBABILITE QU UNE PANNE SOIT SIGNALÉE  
?  
.9  
ARRET DE TSO DANS 15 MN \*\*\*\*\*  
VALEUR DE PT:PROBABILITE DE BONNE TRANSMISSION DU CONTEXTE  
?  
.9  
VALEUR DE MU:TAUX DE REPARATION APRES PANNE DETECTEE  
?  
1000  
VALEUR DE NU:TAUX DE REPARATION APRES PANNE NON DETECTEE  
?  
100  
VOULEZ VOUS EN CONSERVANT LA MEME ARCHITECTURE,EVALUER  
LA SURETE DE FONCTIONNEMENT,AVEC UNE VALEUR DIFFERENTE D UN  
DES PARAMETRES ?  
OUI=1,NON=0



?  
0  
RAPPEL : NOMBRE TOTAL D ETATS= 6  
          NOMBRE D ETATS DE FONCTIONNEMENT= 3  
          NOMBRE D ETATS APRES PANNE DETECTEE= 5  
TAUX DE REPARATION APRES PANNE AUTODETECTEE CONSTANT?  
  OUI=1, NON=0  
?  
1  
TAUX DE REPARATION APRES PANNE NON AUTODETECTEE CONSTANT ?  
  OUI=1, NON=0  
?  
1  
  RENTRE LA DISTRIBUTION INITIALE DES ETATS  
  RAPPEL: NOMBRE TOTAL D ETATS= 6  
  
DONC 6 TERMES  
?  
1 0 0 0 0 0

\*\*\*\*\*  
\* EXEMPLE NUMERO 5  
\*\*\*\*\*  
CHOIX DE L ARCHITECTURE:TAPER LE NOMBRE CORRESPONDANT  
  1:STRUCTURE NON REDONDANTE  
  2:STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE PASSIVE  
  3:STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE ACTIVE  
  4:STRUCTURE REDONDANTE MASSIVE  
  5:VOTRE CAS PARTICULIER  
  6:FIN

?  
5  
RENTRE LE NOMBRE TOTAL D ETATS  
?  
4  
RENTRE LE NOMBRE D ETATS DE FONCTIONNEMENT SANS DEFAILLANCE  
?  
3  
RENTRE LE NOMBRE D ETATS DEFAILLANTS AUTODETECTES  
?  
3  
RENTRE LA MATRICE DES TAUX DE TRANSITIONS DE VOTRE STRUCTURE  
NOMBRES EN FORMAT LIBRE  
LAISSER UN BLANC ENTRE CHAQUE NOMBRE  
RENTRE LA MATRICE LIGNE PAR LIGNE  
ENTRE LES 4COEFFICIENTS DE LA LIGNE 1  
?  
-1001 1000 0 1  
ENTRE LES 4COEFFICIENTS DE LA LIGNE 2  
?  
1000 -1000.01  
?  
.01 0  
ENTRE LES 4COEFFICIENTS DE LA LIGNE 3  
?  
0. 10000 -11000 1000  
ENTRE LES 4COEFFICIENTS DE LA LIGNE 4  
?  
0 0 0 0  
RAPPEL : NOMBRE TOTAL D ETATS= 4  
          NOMBRE D ETATS DE FONCTIONNEMENT= 3

NOMBRE D ETATS APRES PANNE DETECTEE= 3  
TAUX DE REPARATION APRES PANNE AUTODETECTEE CONSTANT?  
OUI=1, NON=0

?  
0  
DANS CE CAS, LA REPARTITION DES TAUX DE REPARATION  
EST SIMULEE PAR UNE LOI D ERLANG HYPOEXPONENTIELLE  
CONNAISSEZ VOUS LE NOMBRE D ETATS CORRESPONDANT A  
LA LOI D ERLANG ET LES VALEURS RESPECTIVES DES TAUX DE  
REPARATION?  
OUI=1, NON=0

?  
0  
DANS CE CAS , CES PARAMETRES SONT CALCULES A PARTIR  
DES MOMENTS CENTRES DU TAUX DE REPARATION  
TAUX DE REPARATION APRES PANNE NON AUTODETECTEE CONSTANT ?  
OUI=1, NON=0

?  
1  
\*\*\*\*\*  
\* REPARATION APRES PANNE AUTODETECTEE \*  
\*\*\*\*\*

DONNER LE NOMBRE D ETATS DE REPARATION A MODIFIER  
?

1  
SIMULATION PAR ERLANG SERIE  
NOMBRE DE MOMENTS CENTRES EXPERIMENTAUX DU TAUX DE REPA RATION

?  
2  
VALEUR DES MOMENTS

?  
2000 2000  
VALEUR DES COEFFICIENTS DE PONDERATION AFFECTES A CES MOMENTS CENTRES

?  
1 1  
IMPOSSIBLE LA SOMME DES COEFFICIENTS DOIT ETRE 1  
VALEUR DES COEFFICIENTS DE PONDERATION AFFECTES A CES MOMENTS CENTRES  
?.5 .5

VALEUR DE MU DANS LA MATRICE DE DEPART  
RENTRE LA DISTRIBUTION INITIALE DES ETATS  
RAPPEL: NOMBRE TOTAL D ETATS= 4

DONC 4 TERMES  
?  
1 0 0 0

INSCRIVEZ LES COMMENTAIRES QUE VOUS VOULEZ VOIR  
FIGURER SUR LE TRACE DE COURBES (2 LIGNES DE 40 CARACTERES)

ESSAI DU PROGRAMME SURF  
COMPARAISON D'ARCHITECTURES  
LE TRACE DES COURBES DE FIABILITE ET DE SECURITE  
A UN FORMAT STANDARD.  
SI VOUS DESIREZ - SAVOIR QUEL EST CE FORMAT  
- TRACER SELON VOTRE FORMAT

TAPER LE CHIFFRE 1 SINON TAPER 0  
?  
0

7.2. RESULTATS NUMERIQUES

7.2.1. Composantes independantes du temps

```

-----
I DIMENSION DE LA MATRICE DE DEPART      NA= 6I
I NOBRE D ETATS DE FONCTIONNEMENT      N1= 4I
I NOBRE D ETATS DE FAILLANTS AUTODETECTES  N3= 5I
-----
*****
* INDICATEURS D EXTENSION DE MATRICE *
*   NER   *   NERG   *   NED   *   NERG1   *
*****
*   0   *   0   *   0   *   0   *
*****
*TEST SUR LA SOMME DES TERMES DE LA MATRICE  SOMME=  0.10006Q-15*
*****

```

I SIGLE I	SIGNIFICATION	I VALEUR I
I SA I	I STATIONARY AVAILABILITY I	I 0.99990+00I
I MTFE I	I MEAN TIME TO FIRST FAILURE I	I 0.15000+04I
I MTFE I	I MEAN TIME TO FIRST FAILURE I	I 0.13330+04I
I MDT I	I MEAN UP TIME I	I 0.15000+04I
I MDT I	I MEAN DOWN TIME I	I 0.0 I
I MTF I	I MEAN TIME BETWEEN FAILURES I	I 0.15000+04I
I MTF I	I MEAN TIME BETWEEN FAILURES I	I 0.15000+04I

7.2.2. Composantes de fiabilité

```

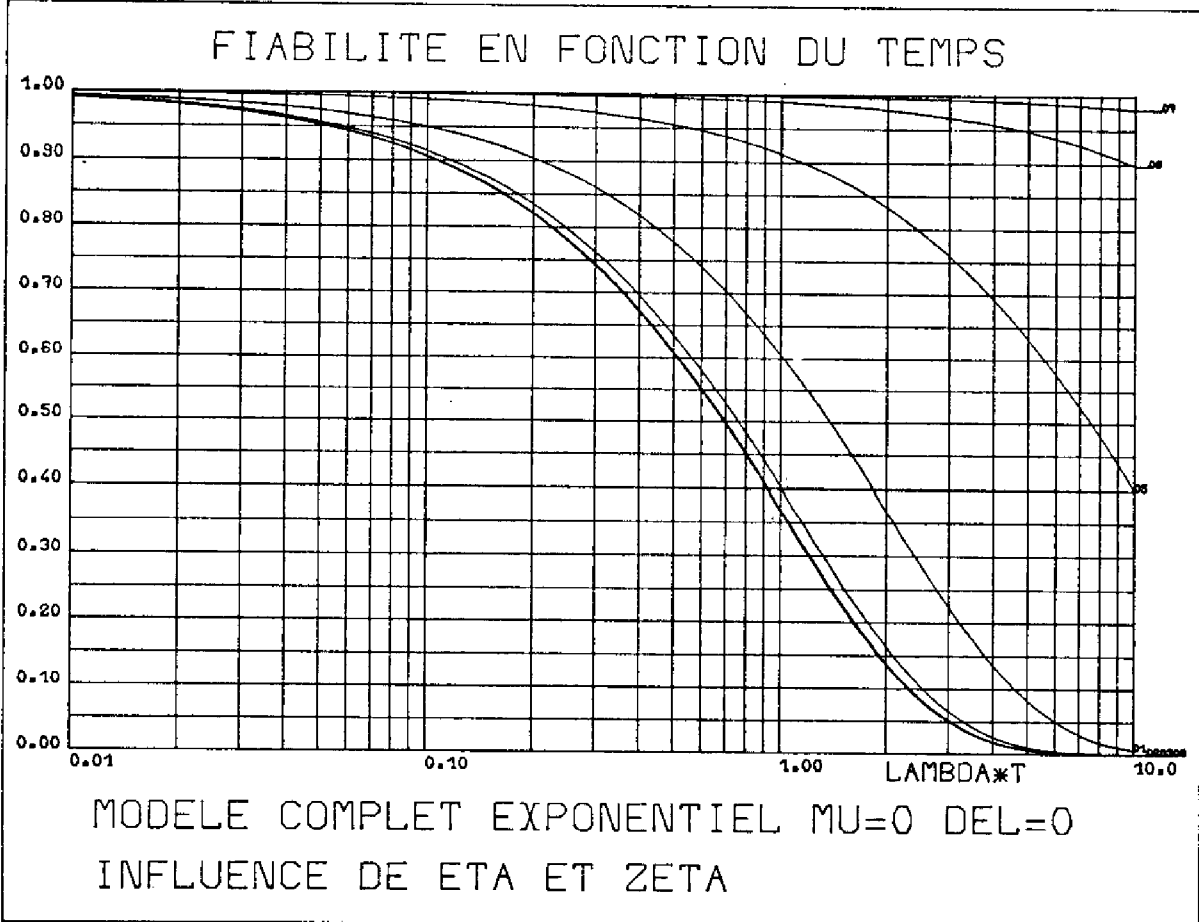
*****
* COEFFICIENT DE L'EXPONENTIELLE *          * VALEUR PROPRE *          * POLYNOME CARACTERISTIQUE * VALEUR RAPPORT *MULT*
* A( 1)= -0.49999150E+04  0.0          * S( 1)= -0.1002000E+01  0.0          * VPC( 1)=-0.130E+26  0.0          * R( 1)= 0.390+21* 0 *
* A( 2)=  0.791222E+21  0.0          * S( 2)= -0.201000E+02  0.0          * VPC( 2)=-0.160E+29  0.0          * R( 2)= 0.500+03* 0 *
* A( 3)=  0.499400E+03  0.0          * S( 3)= -0.100000E+02  0.0          * VPC( 3)=  0.290E+41  0.0          * R( 3)= 0.170+36* 3 *
* A( 4)=  0.100000E+01  0.0          * S( 4)= -0.100000E+02  0.0          * VPC( 4)=  0.500E+41  0.0          * R( 4)= 0.100+36* 3 *
*****
EXPRESSION LITTÉRALE DE F(T)
F(T)=(  -0.49999150E+04          0.0          )*(T**0)*EXP(  -0.10020000E+01          0.0          )*T
      +(  0.791222E+21          0.0          )*(T**0)*EXP(  -0.20000000E+02          0.0          )*T
      +(  0.499400E+03          0.0          )*(T**1)*EXP(  -0.10000000E+02          0.0          )*T
      +(  0.100000E+01          0.0          )*(T**0)*EXP(  -0.10000000E+02          0.0          )*T
TABLEAU DE VERIFICATION

```

```

-----
TEST DE LA TANGENTE VALLEUR A L ORIGINE= -0.100E-02  0.0
SOMME DE LA PREMIERE LIGNE                = -0.50E-03
          * TEST DE LA VALEUR A L ORIGINF(0)=  0.100E+01  0.0
FIABILITE A L ORIGINE DE LA COURBE= 0.494994E+00          FIABILITE A L EXTREMEITE DE LA COURBE= 0.269689E-03

```





## CHAPITRE 3

---

### SURETÉ DE FONCTIONNEMENT DE STRUCTURES

#### FONCTIONNANT DE MANIÈRE NON CONTINUE

-

1. *INTRODUCTION*
2. *NATURE ET MODELISATION DU FONCTIONNEMENT  
DISCONTINU - COMPOSANTS CARACTERISTIQUES*
3. *STRUCTURE NON REDONDANTE*
4. *STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE ACTIVE*

---



## 1. INTRODUCTION

---

Les études de sûreté de fonctionnement menées jusqu'à présent concernent essentiellement l'évaluation des performances de structures fonctionnant de manière continue. Cela permet en particulier de prendre en compte :

- l'architecture de ces structures en considérant en particulier leur modularité, leur niveau de redondance, et plus généralement leur comportement en présence de pannes,
- les différentes politiques de maintenance envisageables qui sont fonction de l'architecture d'une part et de la logistique d'autre part.

La nature des applications employant des structures numériques est telle qu'en réalité ces dernières sont soumises à des périodes de sollicitation - non sollicitation. La conséquence de ce mode de fonctionnement est en particulier de nécessiter des définitions plus précises des composantes de la sûreté aptes à caractériser le comportement de ces structures.

L'utilisation de processus stochastiques trouve tout son intérêt pour la modélisation du comportement de telles structures [FRE, 74] puisque les cycles fonctionnement-non fonctionnement peuvent être caractérisés par des processus stochastiques.

Ce chapitre est consacré à la modélisation de structures soumises à des processus de sollicitation, ceci dans le double but :

- de définir de manière plus précise les composantes caractéristiques de structures fonctionnant de manière non continue,
- d'élargir les possibilités d'utilisation de SURF.

Cette modélisation pose les problèmes suivants :

- dans les processus markoviens homogènes, toutes les variables sont exponentiellement distribuées, ce qui est rarement le cas au niveau des applications en particulier en ce qui concerne les périodes de sollicitation-non sollicitation,



- le nombre d'états générés est plus important que dans le cas d'un fonctionnement continu ; la validation d'un modèle équivalent simplifié permettrait de s'affranchir des problèmes mis en évidence au chapitre 2, particulièrement en ce qui concerne la précision.

Le premier paragraphe est consacré à une étude générale sur la modélisation de structures en fonctionnement discontinu, conduisant à une extension des définitions des composantes de sûreté.

Les deuxième et troisième paragraphes sont consacrés à l'étude d'une structure non redondante et d'une structure redondante sous l'angle de l'évaluation de leur fiabilité et de leur disponibilité en fonctionnement non continu.

Au cours de ces paragraphes, nous envisageons différentes lois de distribution pour les temps de sollicitation et non sollicitation et tentons d'approcher les modèles de comportement généraux par des modèles équivalents.

## 2. NATURE ET MODÉLISATION DU FONCTIONNEMENT

### DISCONTINU - COMPOSANTES CARACTÉRISTIQUES

---

#### 2.1. PROCESSUS PRIS EN COMPTE

Le comportement d'une structure réparable ayant un fonctionnement discontinu résulte de la superposition de processus stochastiques intervenant dans le cas de structures à fonctionnement continu :

- processus d'apparition des fautes,
- processus de réparation,

auxquels il faut ajouter un processus caractérisant la nature de la sollicitation.

### 2.1.1. Processus d'apparition de fautes

Nous considérons que les temps d'apparition de fautes sont exponentiellement distribués, c'est-à-dire que nous supposons les taux de défaillance constants, qu'ils soient affectés :

- au système dans le cas d'une structure non redondante,
- à chacune des unités dans le cas des structures redondantes.

Les taux de défaillance d'un système (ou d'une unité) seront respectivement dénommés  $\lambda$  et  $\lambda'$  selon qu'il est ou non alimenté ; dans les applications numériques nous adopterons pour le rapport  $\rho$  ( $\rho = \lambda'/\lambda$ ) la valeur couramment admise pour les circuits électroniques, soit  $\rho = 0.1$  [KIM, 73].

### 2.1.2. Processus de réparation

Dans le cas d'une structure fonctionnant de manière discontinue, la mise en évidence d'une faute, qui entraînera une réparation peut s'effectuer pendant le fonctionnement du système ou pendant les phases de non sollicitation, si ce dernier est soumis à des processus d'inspection.

Cette inspection, qui consiste en une vérification avant mission pouvant s'apparenter aux "check-lists" de l'aéronautique, a pour effet de valider ou non le lancement de la mission. De ce fait, nous considérons que :

- les actions de maintenance sont uniquement initialisées pendant les phases de fonctionnement, leur durée pouvant naturellement se prolonger pendant les phases de non fonctionnement,
- les actions de vérification avant mission sont instantanées. Leur prise en compte s'effectue alors de manière implicite, une vérification avant mission aboutissant à la détection d'une faute correspondant par exemple à placer le système dans un état de sollicitation où le système ou une des unités est en réparation.

Comme nous l'avons souligné en introduction, les structures étudiées dans ce chapitre concernent une structure non redondante et une structure redondante sélective active dans l'hypothèse d'une maintenance curative.

Bien qu'en première analyse, l'hypothèse selon laquelle les temps de réparation sont exponentiellement distribués ne soit pas réaliste, nous n'avons pas utilisé d'autres lois de distribution, et nous noterons  $\mu$  le taux de réparation.

En effet, des études précédentes [COS,76] ont montré que pour des temps de réparation faibles devant les temps moyens entre pannes ( $10^3 < \mu/\lambda < 10^5$ ), la distribution influait principalement par sa valeur moyenne et non par sa forme.

2.1.3. Processus de sollicitation

La prise en compte du processus caractérisant la nature discontinu du fonctionnement conduit au graphe d'utilisation indiqué sur la figure 1 où :

- ① est l'état de sollicitation
- ② est l'état de non sollicitation

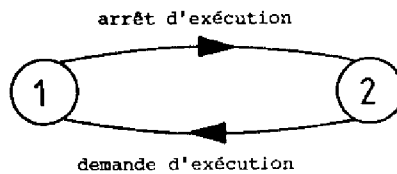


FIGURE 1. Graphe d'utilisation.

Les distributions inconditionnelles des temps passés dans ① et dans ② peuvent être caractérisées par les fonctions de distributions  $G(t)$  et  $H(t)$ , de valeurs moyennes  $1/\eta$  et  $1/\zeta$ .

Ces dernières conduisent à la définition d'un taux d'utilisation  $k$  par :

$$k = \frac{1/\eta}{1/\eta + 1/\zeta}$$

correspondant à la probabilité asymptotique de se trouver dans l'état ① de sollicitation.

Bien qu'en toute généralité, il y ait indépendance entre les deux processus précédemment définis, l'analyse des différentes applications que nous avons envisagées nous ont conduit à considérer :

- des lois de distribution de même nature pour les fonctions de distributions  $G(t)$  et  $H(t)$ ,
- des plages de variation physiquement acceptables pour les valeurs de  $\eta$ ,  $\xi$  et  $k$  :
  - .  $0,1 < k < 0,9$  ce qui correspond à des pourcentages d'utilisation variant entre 10 % et 90 %,
  - .  $10 < \eta / \lambda$ ,  $\xi / \lambda < 10^5$  ce qui correspond, si l'on considère un temps moyen jusqu'à la défaillance  $1/\lambda$  de  $10^4$  à  $10^5$  heures (de 1,5 à 15 mois) à des périodes de sollicitation et de non sollicitation de quelques minutes à quelques jours.

## 2.2. COMPOSANTES DE LA SURETE DE FONCTIONNEMENT

### 2.2.1. Structure en fonctionnement continu

Dans le cas d'une structure fonctionnant continûment et soumise aux processus d'apparition de fautes et de réparation, on peut regrouper les états de la structure en deux macro-états :

- macro-état (1) où les tâches sont correctement effectuées,
- macro-état (2) où une faute est survenue pendant l'exécution des tâches.

A partir de ces deux macro-états, on obtient les composantes de fiabilité et disponibilité par :

- fiabilité :  $R(t) = \mathcal{P} \{ Z(\tau) = 1, \forall \tau \in [0, t[ \}$ ,
- disponibilité :  $A(t) = \mathcal{P} \{ Z(\tau) = 1, Z(\tau) \in \{1, 2\} \forall \tau \in [0, t[ \}$

où  $Z(t) = i$  est la fonction état :  $Z(t) = i$  lorsque la structure se trouve dans l'état  $i$  à l'instant  $t$ .

2.2.2. Structure en fonctionnement non continu

Si l'on considère maintenant une structure fonctionnant non continûment, on est amené à définir quatre macro-états :

- macro-état (1) où les tâches sont exécutées correctement,
- macro-état (2) où l'exécution des tâches n'est pas demandée, mais où elle peut se dérouler correctement,
- macro-état (3) où une faute est survenue pendant l'exécution des tâches,
- macro-état (4) où la demande d'exécution des tâches conduirait à la manifestation d'une faute.

La figure 2 donne un exemple des transitions pouvant exister entre ces différents états.

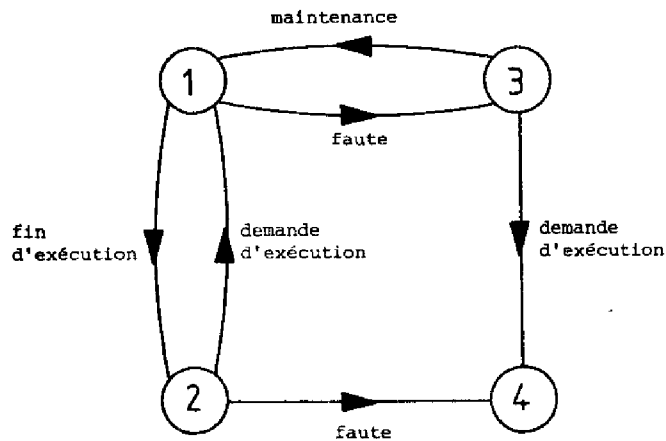


FIGURE 2. Exemple de graphe de comportement.

De manière identique à celle indiquée pour la structure fonctionnant continûment, on peut caractériser la fiabilité et la disponibilité à partir de ces macro-états. L'introduction de la notion de fonctionnement non continu nécessite cependant de préciser la nature exacte des composantes de la sûreté de fonctionnement recherchées.

La dualité des états de la structure (figure 2), selon qu'elle est en fonctionnement ou hors fonctionnement conduit à considérer deux types de composantes :

- les composantes à caractère structure qui caractérisent l'aptitude, au sens large, du système à traiter les tâches qui lui sont confiées indépendamment de la notion de sollicitation,
- les composantes à caractère mission qui prennent en compte les caractéristiques liées aux processus de sollicitation et de durée d'opération et qui donnent une image réelle de l'aptitude du système à traiter les tâches qui lui sont confiées lorsqu'il est sollicité.

La partition des états du système en quatre macro-états telle que nous l'avons définie dans la prise en compte des deux types de composantes conduit à la définition probabiliste de la fiabilité et de la disponibilité :

$$\begin{aligned}
 R_S(t) &= \mathcal{P} \left\{ z(\tau) = 1, 2, \tau \in [0, t[ \right\} \\
 R_M(t) &= \mathcal{P} \left\{ z(\tau) = 1, 2, 4, \tau \in [0, t[ \right\} \\
 A_S(t) &= \mathcal{P} \left\{ z(t) = 1, 2, z(\tau) = [1, 2, 3, 4], \forall \tau \in [0, t[ \right\} \\
 A_M(t) &= \mathcal{P} \left\{ z(t) = 1, 2, 4, z(\tau) = [1, 2, 3, 4], \forall \tau \in [0, t[ \right\}
 \end{aligned}$$

### 3. STRUCTURE NON REDONDANTE FONCTIONNANT

#### DE MANIÈRE DISCONTINUE

---

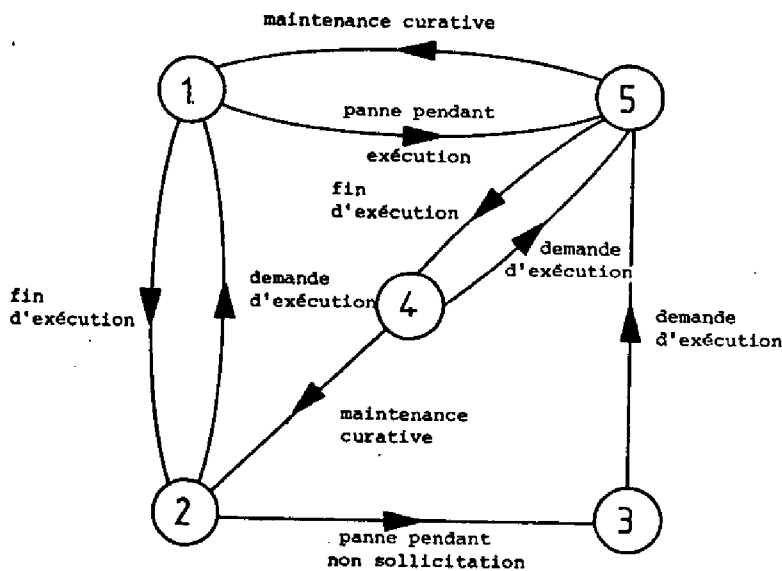
Le système est constitué d'une structure non redondante fonctionnant de manière discontinue. Par "non redondante", nous entendons le fait qu'une faute due à une panne matérielle entraîne la défaillance. Pour ce qui concerne l'acte de maintenance curative qui est engagée dès que les effets d'une faute se sont manifestés pendant une période de sollicitation, on fera l'hypothèse suivante : l'action se poursuit indépendamment du processus de sollicitation-non sollicitation, la structure se trouvant à la fin de la réparation dans l'état déterminé par le processus.

### 3.1. MODELISATION DU COMPORTEMENT

#### 3.1.1. Graphe de comportement

Le graphe général de comportement de la structure est alors donné sur la figure 3.

L'introduction de l'état (4) est due à l'hypothèse retenue pour la politique de maintenance ; il correspond à la poursuite d'une action de réparation commencée dans l'état (5).



- (1) Etat d'exécution correcte.
- (2) Etat de non sollicitation, une sollicitation conduirait à une exécution correcte.
- (3) Une sollicitation conduirait à une manifestation de la panne.
- (4) Etat de réparation en période de non sollicitation.
- (5) Etat défaillant, correspondant à la réparation de la structure.

FIGURE 3. Graphe général de comportement d'une structure non redondante.

#### 3.1.2. Exploitation

L'exploitation du modèle de la figure 3 peut être menée selon trois voies :

- étude des sources de pannes permettant de conclure à la validité ou non de lois exponentielles pour  $G(t)$  et  $H(t)$ ,
- étude des fiabilités mission et structure,
- étude des disponibilités mission et structure.

3.2. ETUDE DES SOURCES DE PANNES

Cette étude permet de déterminer les probabilités de transition directe entre états. Elle peut être menée à l'aide du graphe de la figure 4 où les  $\hat{Q}_{ij}(s)$  sont les transformées de LAPLACE-STIELTJES des probabilités  $Q_{ij}(t)$  de transition directe entre les états  $i$  et  $j$  sachant que l'on se trouvait dans l'état  $i$  à l'instant initial ( $t=0$ ).

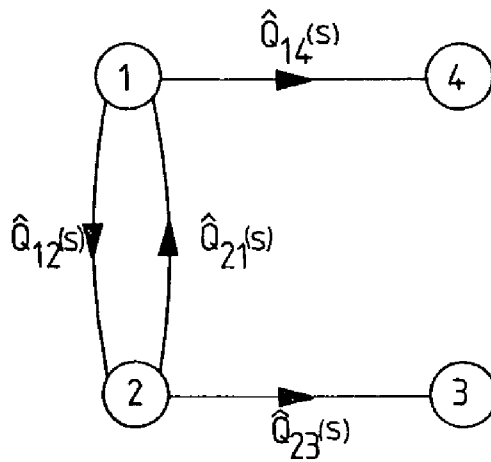


FIGURE 4. Graphe d'étude des sources de pannes.

La probabilité de transition directe  $Q_{ij}(t)$  dans  $[0, t]$  entre les états  $i$  et  $j$ , le processus se trouvant dans l'état  $i$  à l'instant 0, a pour expression, dans le cas d'un processus comportant  $n$  états  $1, 2, \dots, n$

$$Q_{ij}(t) = \int_0^t \left[ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \overline{L_{ik}}(t) \right] dL_{ij}(t)$$

où  $L_{ij}(t)$  est la fonction de distribution du temps de passage de l'état  $i$  à l'état  $j$  indépendamment des autres états et où  $\overline{L_{ik}}(t) = 1 - L_{ik}(t)$ .



L'utilisation de la transformée de LAPLACE-STIELTJES, donnée

par :

$$\hat{Q}_{ij}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dQ_{ij}(t),$$

permet d'écrire :

$$\hat{Q}_{ij}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \overline{L_{ik}}(t) \right] dL_{ij}(t)$$

A partir de la connaissance de ces probabilités de transition directe, on déduit les probabilités  $P_{ij}(t)$  que le processus soit dans l'état  $j$  à l'instant  $t$ , sachant qu'il était dans l'état  $i$  à l'instant 0 par la relation [PYK,61] :

$$\mathbb{P}(t) = \left[ \mathbb{I} - \mathbb{Q}(t) \right]^{-1} * \left[ \mathbb{I} - \mathbb{H}(t) \right] \quad (3.1)$$

où :

- $\mathbb{P}(t)$  est la matrice des  $P_{ij}(t)$ ,
- $\mathbb{Q}(t)$  est la matrice des  $Q_{ij}(t)$ ,
- $\mathbb{H}(t)$  est la matrice diagonale des  $H_i(t)$ ,

définis par :

$$H_i(t) = \sum_{j \in [1, \dots, n]} Q_{ij}(t)$$

- $\mathbb{I}$  est la matrice unité,
- le symbole  $*$  désigne l'opération de convolution.

En prenant la transformée de LAPLACE-STIELTJES de l'expression (3.1), on obtient :

$$\hat{\mathbb{P}}(s) = \left[ \mathbb{I} - \hat{\mathbb{Q}}(s) \right]^{-1} \left[ \mathbb{I} - \hat{\mathbb{H}}(s) \right]$$

Le tableau de la figure 5 donne les expressions formelles des différentes expressions  $\tilde{P}_{ij}(s)$  correspondant aux états définis sur la figure 4.

LOIS POUR G(t) et H(t)	$\tilde{P}_{13}(s)$	$\tilde{P}_{14}(s)$
Exponentielles	$\frac{\lambda(\delta + \zeta + \rho\lambda)}{\delta[(\delta + \eta + \lambda)(\delta + \zeta + \rho\lambda) - \eta\zeta]}$	$\frac{\eta\rho\lambda}{\delta[(\delta + \eta + \lambda)(\delta + \zeta + \rho\lambda) - \eta\zeta]}$
Erlang k=2	$\frac{\lambda[(\delta + 2\eta + \lambda)^2 - 4\eta^2][\delta + 2\zeta + \rho\lambda]^2}{\delta(\delta + \lambda)[(\delta + 2\eta + \lambda)^2(\delta + 2\zeta + \rho\lambda)^2 - 16\eta^2\zeta^2]}$	$\frac{4\rho\lambda\eta^2[(\delta + 2\zeta + \rho\lambda)^2 - 4\zeta^2]}{\delta(\delta + \rho\lambda)[(\delta + 2\eta + \lambda)^2(\delta + 2\zeta + \rho\lambda)^2 - 16\eta^2\zeta^2]}$
Erlang k=3	$\frac{\lambda[(\delta + 3\eta + \lambda)^3 - 27\eta^3][\delta + 3\zeta + \rho\lambda]^3}{\delta(\delta + \lambda)[(\delta + 3\eta + \lambda)^3(\delta + 3\zeta + \rho\lambda)^3 - 729\eta^3\zeta^3]}$	$\frac{9\rho\lambda\eta^3[(\delta + 3\zeta + \rho\lambda)^3 - 27\zeta^3]}{\delta(\delta + \lambda)[(\delta + 3\eta + \lambda)^3(\delta + 3\zeta + \rho\lambda)^3 - 729\eta^3\zeta^3]}$
Déterministe	$\frac{\lambda[1 - e^{-\frac{\delta + \lambda}{\eta}}]}{\delta(\delta + \lambda)[1 - e^{-\left(\frac{\delta + \lambda}{\eta} + \frac{\delta + \rho\lambda}{\zeta}\right)]}$	$\frac{\rho\lambda e^{-\frac{\delta + \lambda}{\eta}}[1 - e^{-\frac{\delta + \rho\lambda}{\zeta}}]}{\delta(\delta + \rho\lambda)[1 - e^{-\left(\frac{\delta + \lambda}{\eta} + \frac{\delta + \rho\lambda}{\zeta}\right)]}$

FIGURE 5. Expressions des sources de pannes.

Les résultats numériques présentés concernent la probabilité de passage de l'état (1) à l'état (3), l'état (1) étant l'état initial :

- le tableau de la figure 6 donne les valeurs asymptotiques de  $P_{13}(t)$  obtenues pour différentes lois de distribution G(t) et H(t),
- les courbes de la figure 7 donnent l'évolution de  $P_{13}(t)$  en fonction du temps pour les mêmes lois de distribution G(t) et H(t) ; ces courbes ont été tracées à partir des relations de la figure 5 en utilisant un programme d'inversion numérique dérivé de celui donné dans [SIN, 75].

LOIS DE DISTRIBUTION DES TEMPS DE SOLLICITATION ET NON SOLLICITATION	$\frac{\eta}{\lambda} = 100, \frac{\zeta}{\lambda} = 10$		$\frac{\eta}{\lambda} = 100, \frac{\zeta}{\lambda} = 100$		$\frac{\eta}{\lambda} = 10, \frac{\zeta}{\lambda} = 10$		$\frac{\eta}{\lambda} = 10, \frac{\zeta}{\lambda} = 100$	
	Valeur	Ecart	Valeur	Ecart	Valeur	Ecart	Valeur	Ecart
Exponentielles	0.502487	-	0.909173	-	0.9099	-	0.9901	-
Erlang j=j'=2	0.50249	$6 \cdot 10^{-6}$	0.909358	$2.03 \cdot 10^{-4}$	0.911714	$2 \cdot 10^{-3}$	0.99034	$2.47 \cdot 10^{-4}$
Erlang j=j'=3	0.502495	$1.6 \cdot 10^{-5}$	0.909421	$2.72 \cdot 10^{-4}$	0.912327	$2.66 \cdot 10^{-3}$	0.99042	$3.28 \cdot 10^{-4}$
Déterministes	0.502499	$2.38 \cdot 10^{-5}$	0.909544	$4.08 \cdot 10^{-4}$	0.913568	$4.03 \cdot 10^{-3}$	0.99058	$4.9 \cdot 10^{-4}$

FIGURE 6. Valeurs et écarts par rapport à des distributions exponentielles de  $P_{13}$ .

Les résultats obtenus à partir des expressions de  $P_{14}^{\sim}(s)$  données sur le tableau de la figure 5 sont de même nature et la prise en compte de l'état initial (1) ou (2) n'amenant qu'un faible écart sur les résultats, l'examen des résultats obtenus à l'aide de  $P_{13}(t)$  et de sa valeur asymptotique  $P_{13}$  permet de conclure de manière générale sur les probabilités  $P_{ij}(t)$  et leurs valeurs stationnaires  $P_{ij}$ .

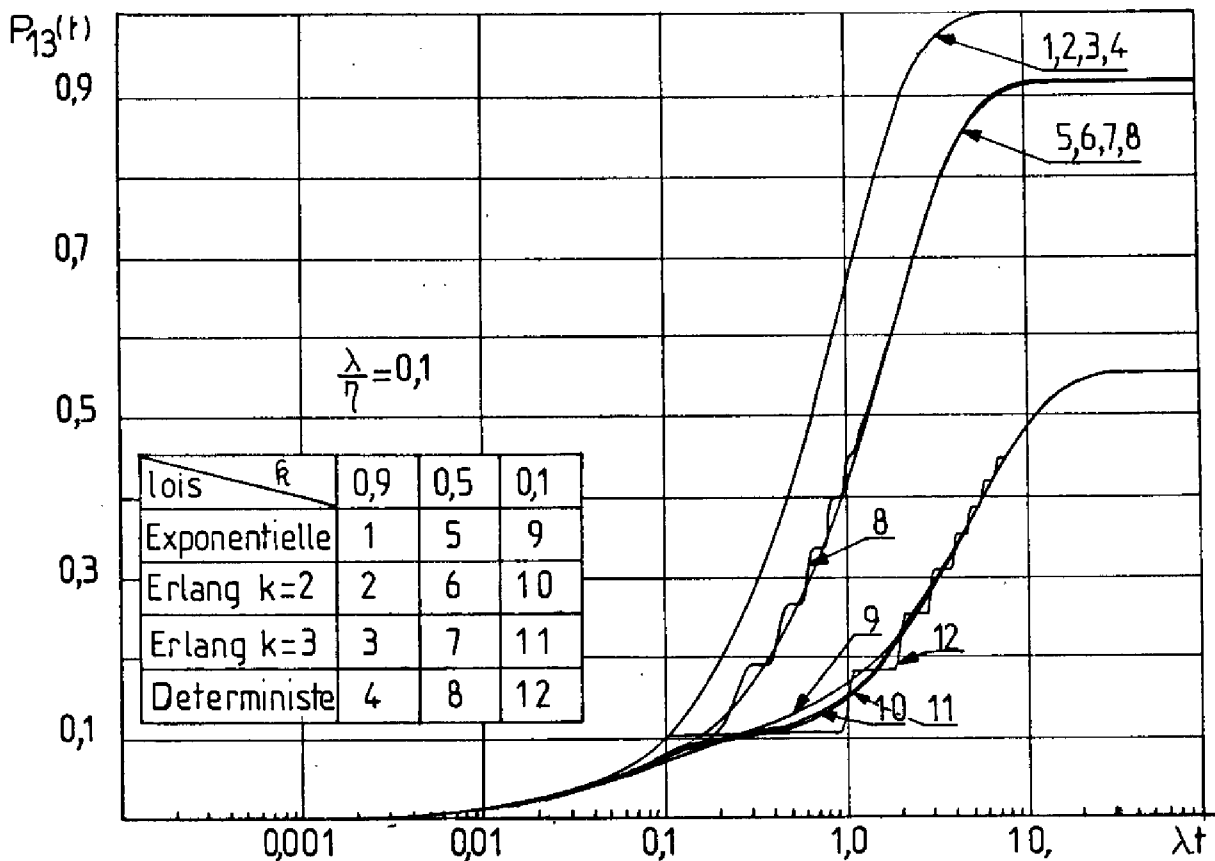


FIGURE 7. Evolution de  $P_{13}$  pour différentes distributions de  $\eta$  et  $\xi$ .

Précisément :

- le premier résultat, de portée générale, concerne le peu d'influence des lois de distributions  $G(t)$  et  $H(t)$  sur les probabilités  $P_{ij}(t)$  et ce dans le cadre des hypothèses retenues pour les valeurs numériques des différents taux de transition,
- le second résultat, de portée plus restrictive, concerne la nature oscillatoire des courbes présentées sur la figure 7. La présence de ce phéno-

mène oscillatoire qui s'explique physiquement par le caractère déterministe des lois de distribution  $G(t)$  et  $H(t)$  est confirmé par l'étude analytique des transformées de LAPLACE  $\tilde{P}_{ij}(s)$  dont le dénominateur qui est de la forme  $1 - \exp\left(-\frac{s+\lambda}{\eta} - \frac{s+\epsilon\lambda}{\xi}\right)$  présente des racines imaginaires pures.

REMARQUE

La valeur de  $\eta$  choisie pour tracer la figure 7 ( $\eta/\lambda = 10$ ) montre nettement cette nature oscillatoire du fait de la durée suffisamment importante des temps de sollicitation et non sollicitation.

3.3. FIABILITE

L'étude de la composante de fiabilité conduit à rendre absorbants les états défectueux de la structure définis sur le graphe de la figure 3.

Suivant que l'on s'intéresse à la fiabilité structure ou à la fiabilité mission, on obtient des graphes différents :

- graphe de la figure 8 pour la fiabilité structure obtenu en rendant absorbants les états (3) et (5) puis en regroupant ces états,

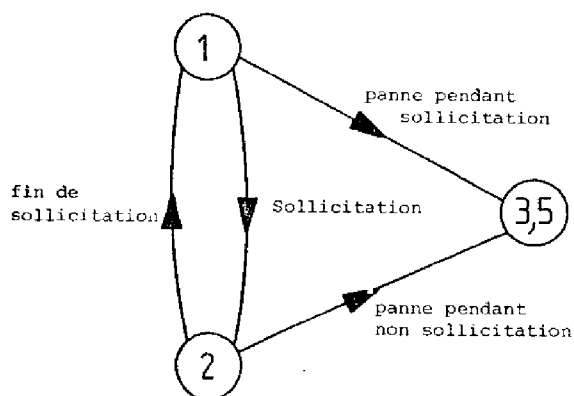


FIGURE 8. Fiabilité structure.

- graphe de la figure 9 pour la fiabilité mission, obtenu en rendant absorbant l'état (5) ,

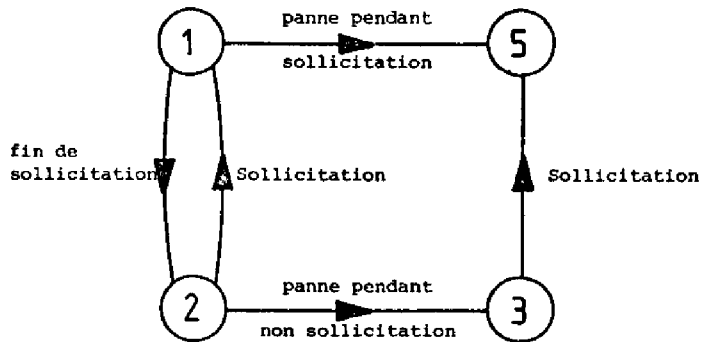


FIGURE 9. Fiabilité mission.

Dans les deux cas, le fait de rendre absorbant l'état (5) a pour effet de supprimer l'état (4) de réparation.

3.3.1. Fiabilité structure

3.3.1.1. Expression générale

Les débuts des états de la figure 8 constituent des points de régénération quelles que soient les distributions adoptées pour les temps de sollicitation et de non sollicitation ; le système sera donc résolu en toute généralité par l'intermédiaire de la théorie des processus semi-markoviens.

On obtient les expressions des  $\hat{Q}_{ij}(s)$  :

$$\hat{Q}_{12}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} d[G(t)] = \hat{G}(s+\lambda)$$

$$\hat{Q}_{13}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{G}(t) d[1-e^{-\lambda t}] = \frac{\lambda}{s+\lambda} [1-\hat{G}(s+\lambda)]$$

$$\hat{Q}_{21}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\rho\lambda t} d[H(t)] = \hat{H}(s+\rho\lambda)$$

$$\hat{Q}_{23}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{H}(t) d[1-e^{-\rho\lambda t}] = \frac{\rho\lambda}{s+\rho\lambda} [1-\hat{H}(s+\rho\lambda)]$$

La fiabilité structure a alors pour expression :

$$\hat{R}_S(s) = \frac{\frac{s}{s+\lambda} [1-\hat{G}(s+\lambda)] + \frac{s \hat{G}(s+\lambda)}{s+\rho\lambda} [1-\hat{H}(s+\rho\lambda)]}{1-\hat{G}(s+\lambda) \hat{H}(s+\rho\lambda)} \quad (3.2)$$

3.3.1.2. Temps de sollicitation et de non sollicitation exponentiellement distribués

Avec cette hypothèse,  $\hat{G}(s)$  et  $\hat{H}(s)$  sont donnés par :

$$\hat{G}(s) = \frac{\eta}{s+\eta} \quad \hat{H}(s) = \frac{\xi}{s+\xi}$$

L'expression de la transformée de LAPLACE de la fiabilité structure est alors donnée par :

$$\tilde{R}_S(s) = \frac{s+\eta+\xi+\rho\lambda}{(s+\eta+\lambda)(s+\xi+\rho\lambda) - \eta\xi} \quad (3.3)$$

Dans ce cas, l'expression temporelle de  $R_S(t)$  est de la forme :

$$R_S(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\text{avec } s_{1,2} = \frac{-(\eta+\xi+\lambda+\rho\lambda) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta = (\eta+\xi+\lambda+\rho\lambda)^2 - 4(\eta+\lambda)(\xi+\rho\lambda) + 4\eta\xi$$

$$A_1 = \frac{s_1 + \frac{\xi}{k} + \rho\lambda}{s_1 - s_2} \quad A_2 = \frac{s_2 + \frac{\xi}{k} + \rho\lambda}{s_2 - s_1}$$

En posant comme hypothèses que  $\frac{\lambda}{\eta} \ll 1$  et  $\frac{\lambda}{\xi} \ll 1$  et en développant au premier ordre  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $A_1$  et  $A_2$ , on obtient :

$$R_S(t) \approx \left[ 1 - \frac{k\lambda(1-\rho)(1-k)}{\xi} \right] e^{-\lambda \left[ k + \rho(1-k) \right] t} + \frac{k\lambda(1-\rho)(1-k)}{\xi} e^{-\left[ \frac{\xi}{k} + \rho\lambda \left( k \frac{1-k}{\rho} \right) \right] t} \quad (3.4)$$

En négligeant les termes en  $\frac{\lambda}{\rho}$  et en considérant  $\frac{\lambda}{\rho} \gg \rho d$  on obtient une expression approchée de la fiabilité donnée par :

$$R_S(t) = e^{-\lambda [k + \rho(1-k)] t} = e^{-\lambda_{eq} t}$$

avec  $\lambda_{eq} = \lambda [k + \rho(1-k)]$

L'expression ainsi obtenue correspond à la démarche intuitive consistant à prendre un  $\lambda_{eq}$  déduit de la moyenne des taux  $\lambda$  et  $\rho\lambda$  pondérés par les temps moyens de sollicitation ( $k$ ) et de non sollicitation ( $1-k$ ). La relation (3.4) montre cependant les limites de cette approximation.

Le modèle de la figure 8 se simplifie donc dans l'hypothèse markovienne, suivant le modèle de la figure 10.

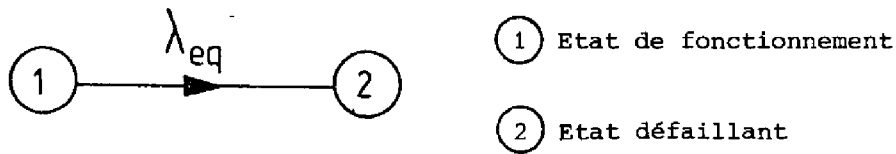


FIGURE 10. Modèle équivalent de fiabilité.

Les courbes des figures 11 et 12 montrent l'écart entre ces deux modèles pour différentes valeurs de  $k$ .

COMMENTAIRES

Cette approche de simplification du modèle, qui peut paraître ici non fondée, étant donnée la simplicité des résultats que le modèle complet de comportement est apte à fournir, sera cependant exploitée avec un intérêt supplémentaire dû à la diminution du nombre d'états lors de la modélisation en fonctionnement non continu du comportement de structures plus sophistiquées.

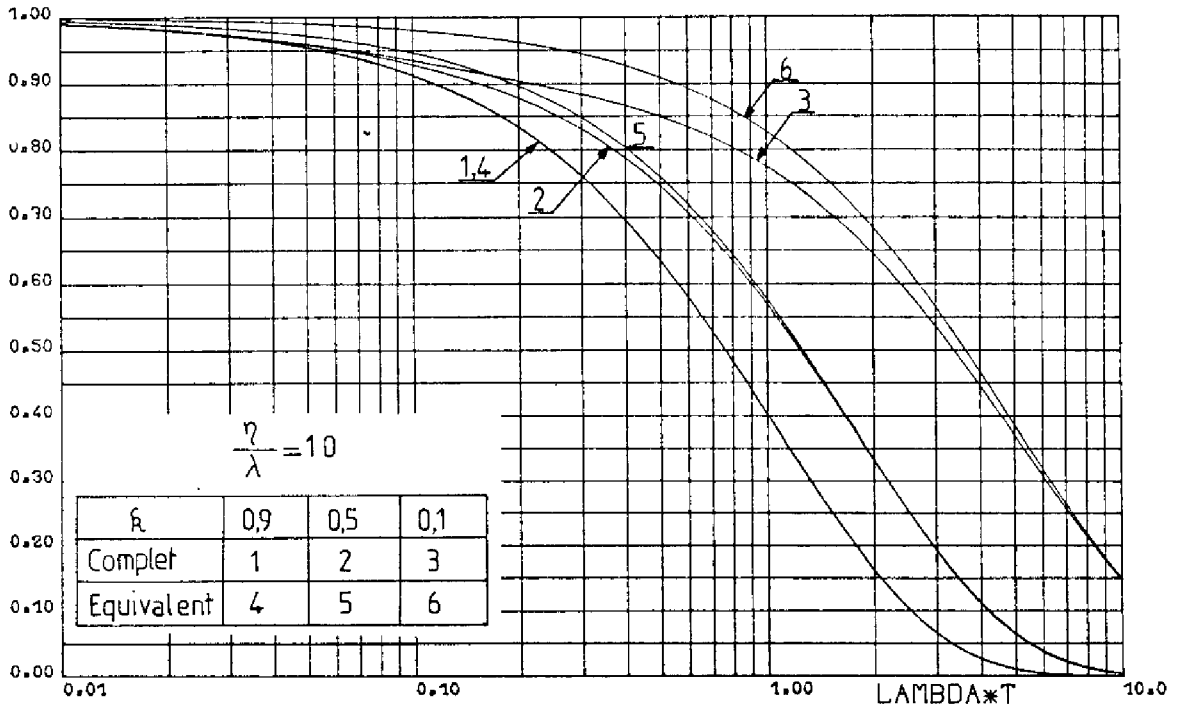


FIGURE 11. Fiabilité structure. Modèles complet et équivalent.

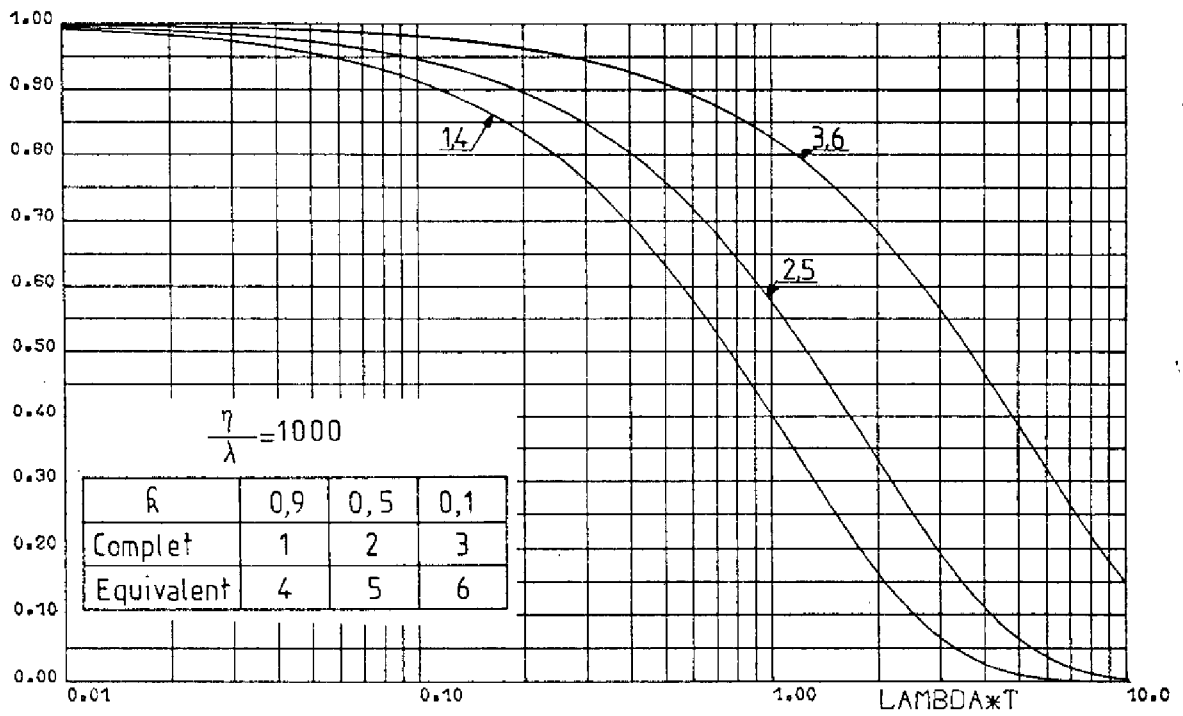


FIGURE 12. Fiabilité structure. Modèles complet et équivalent.



3.3.1.3. Influence des lois de distribution des temps de sollicitation et non sollicitation

Afin d'étudier l'influence des lois de distribution des temps de sollicitation et non sollicitation, nous prendrons les deux cas extrêmes suivants :

- temps de sollicitation et de non sollicitation exponentiellement distribués,
- temps de sollicitation et de non sollicitation déterministes :  
 $G(t) = 0$  pour  $t < 1/\eta$  et  $G(t) = 1$  pour  $t \geq 1/\eta$  ,  
 $H(t) = 0$  pour  $t < 1/\xi$  et  $H(t) = 1$  pour  $t \geq 1/\xi$  ,

car tous les cas correspondant à des distributions de types différents donneraient des résultats dont les valeurs seraient intermédiaires par rapport à celles obtenues à partir de ces distributions extrêmes.

Dans cette hypothèse, l'expression de la transformée de LAPLACE de la fiabilité structure est donnée en posant :

$$\hat{G}(s) = e^{-s/\eta}$$

$$\hat{H}(s) = e^{-s/\xi}$$

par

$$\tilde{R}_S(s) = \frac{\frac{1-e^{-\frac{s+\lambda}{\eta}}}{s+\lambda} + \frac{e^{-\frac{s+\lambda}{\eta}}}{s+\lambda} \left[ 1-e^{-\frac{s+\eta\lambda}{\xi}} \right]}{1 - e^{-\frac{s+\lambda}{\eta}} e^{-\frac{s+\eta\lambda}{\xi}}} \quad (3.5)$$

Les courbes de la figure 13 tracées directement à partir des expressions (3.3) et (3.5) donnent la fiabilité structure pour les distributions exponentielles et déterministes.

Les remarques faites au paragraphe précédent pour les probabilités  $P_{ij}(t)$  sont encore valables en ce qui concerne la fiabilité structure.

3.3.2. Fiabilité de mission

3.3.2.1. Expression générale

Le graphe utilisé est celui de la figure 9.

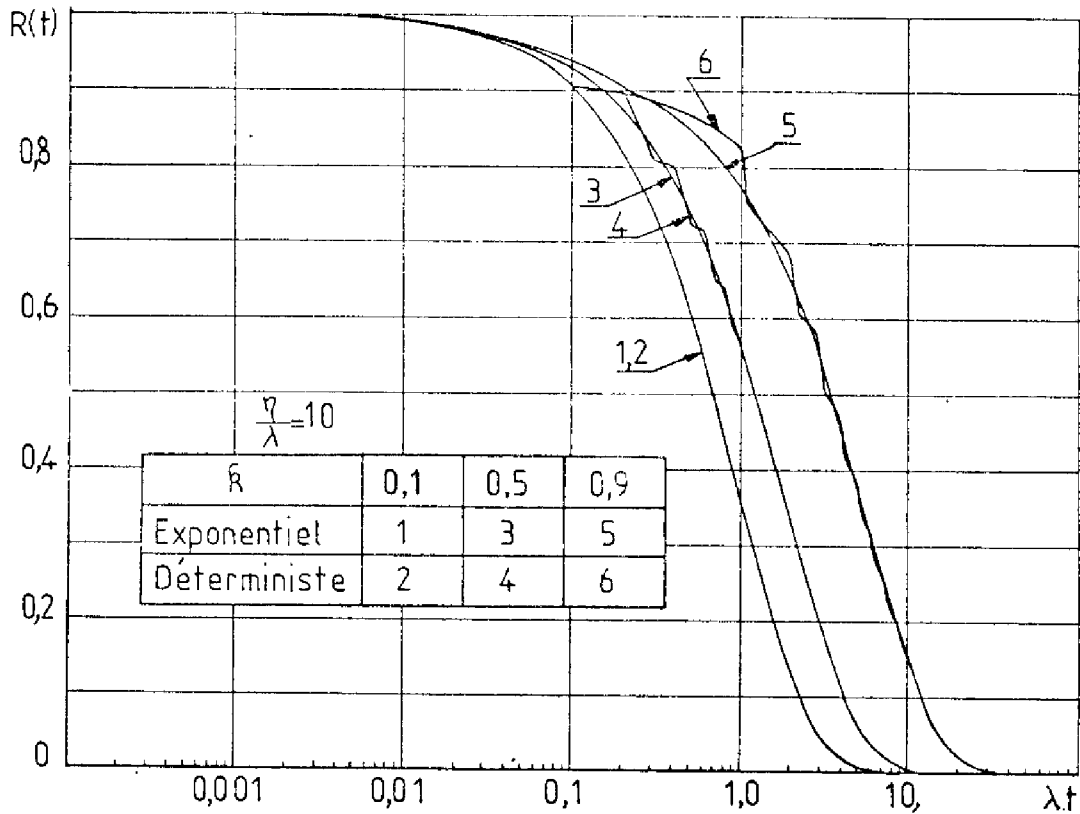


FIGURE 13. Fiabilité structure. Cas déterministe et exponentiel.

Les transformées de LAPLACE-STIELTJES des  $Q_{ij}(t)$  sont données

par :

$$Q_{12}^{\wedge}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} d[G(t)] = \hat{G}(s+\lambda)$$

$$Q_{13}^{\wedge}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{G}(t) d[1-e^{-\lambda t}] = \frac{\lambda}{s+\lambda} [1-\hat{G}(s+\lambda)]$$

ou  $\overline{G}(t) = 1 - G(t)$

$$Q_{21}^{\wedge}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\rho\lambda t} d[H(t)] = \hat{H}(s+\rho\lambda)$$

$$Q_{23}^{\wedge}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1-e^{-\rho\lambda t}) d[H(t)] = \hat{H}(s) - \hat{H}(s+\rho\lambda)$$

La transformée de LAPLACE-STIELTJES de la fiabilité mission

est alors :

$$R_M^{\wedge}(s) = \frac{\frac{s}{s+\lambda} [1-\hat{G}(s+\lambda)] + \hat{G}(s+\lambda) [1-\hat{H}(s)]}{1-\hat{H}(s+\rho\lambda) \hat{G}(s+\lambda)} \quad (3.6)$$

3.3.2.2. Temps de sollicitation et non sollicitation exponentiellement distribués

Dans ce cas, on obtient :

$$\tilde{R}_M(s) = \frac{(s+\eta+\zeta)(s+\zeta+\rho\lambda)}{(s+\zeta)[(s+\zeta+\rho\lambda)(s+\eta+\lambda)-\eta\zeta]} \quad (3.7)$$

L'expression temporelle de  $R_M(t)$  est donc de la forme :

$$R_M(t) = A_1 e^{-\zeta t} + A_2 e^{s_1 t} + A_3 e^{s_2 t}$$

$$\text{Avec } s_{1,2} = \frac{-(\eta+\zeta+\lambda+\rho\lambda) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta = (\eta+\zeta+\lambda+\rho\lambda)^2 - 4(\eta+\lambda)(\zeta+\rho\lambda) + 4\eta\zeta$$

$$A_1 = \frac{\eta\rho\lambda}{\rho\lambda(\eta+\lambda-\eta)-\eta\zeta}$$

$$A_2 = \frac{(s_1+\eta+\zeta)(s_1+\zeta+\rho\lambda)}{(s_1+\zeta)(s_1-s_2)}$$

$$A_3 = \frac{(s_2+\eta+\zeta)(s_2+\zeta+\rho\lambda)}{(s_2+\zeta)(s_2-s_1)}$$

En prenant les mêmes hypothèses que celles prises dans le cas du calcul de la fiabilité structure ( $\lambda/\eta \ll 1$ ,  $\lambda/\zeta \ll 1$ ) et en développant au premier ordre  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , on obtient :

$$R_M(t) = -\rho \frac{\lambda}{\zeta} e^{-\zeta t} + \left[1 - \frac{\lambda}{\zeta} (k-1) \left[ \rho(k-1) - k \right] \right] e^{-\lambda [k + \rho(1-k)] t}$$

$$+ \rho k \left[ k + \frac{1-k}{\rho} \right] e^{-\left[ \frac{\zeta}{k} + \rho\lambda k + \lambda(1-k) \right] t}$$

En négligeant les termes en  $\frac{\lambda}{\zeta}$  et en remarquant que les termes en  $e^{-\zeta t}$  sont très vite négligeables par rapport à ceux en  $e^{-\lambda t}$ , on retrouve pour  $R_M(t)$  la même expression que celle obtenue pour  $R_S(t)$ , en l'occurrence :

$$R_M(t) = e^{-\lambda [k + \rho(1-k)] t} = e^{-\lambda_{eq} t}$$

Ce résultat, qui revient à dire que la probabilité d'être dans l'état 3 est négligeable, est confirmé par les courbes des figures 14 et 15 qui donnent pour deux valeurs du rapport  $\eta / \lambda$  (10 et 1000) les courbes fiabilités mission et structure pour des variations du paramètre k d'utilisation : courbes tracées dans le cas exponentiel directement à partir du graphe de comportement donné sur la figure 3.

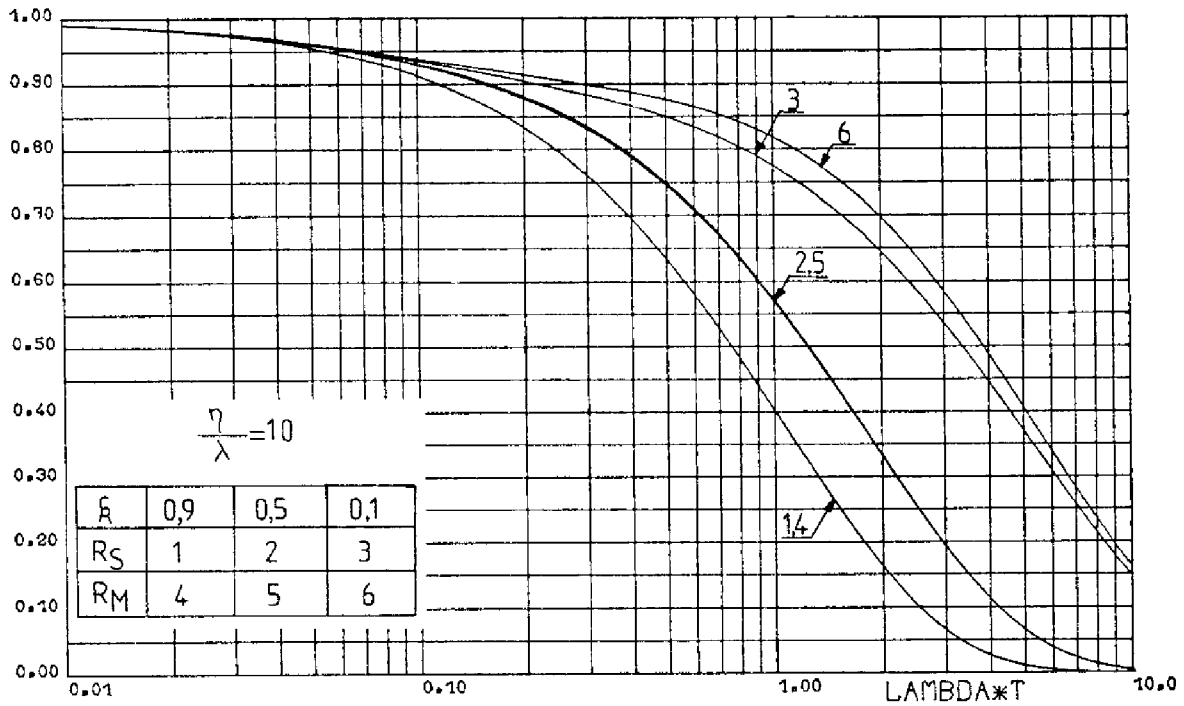


FIGURE 14. Fiabilités structure et mission. Modèle complet.

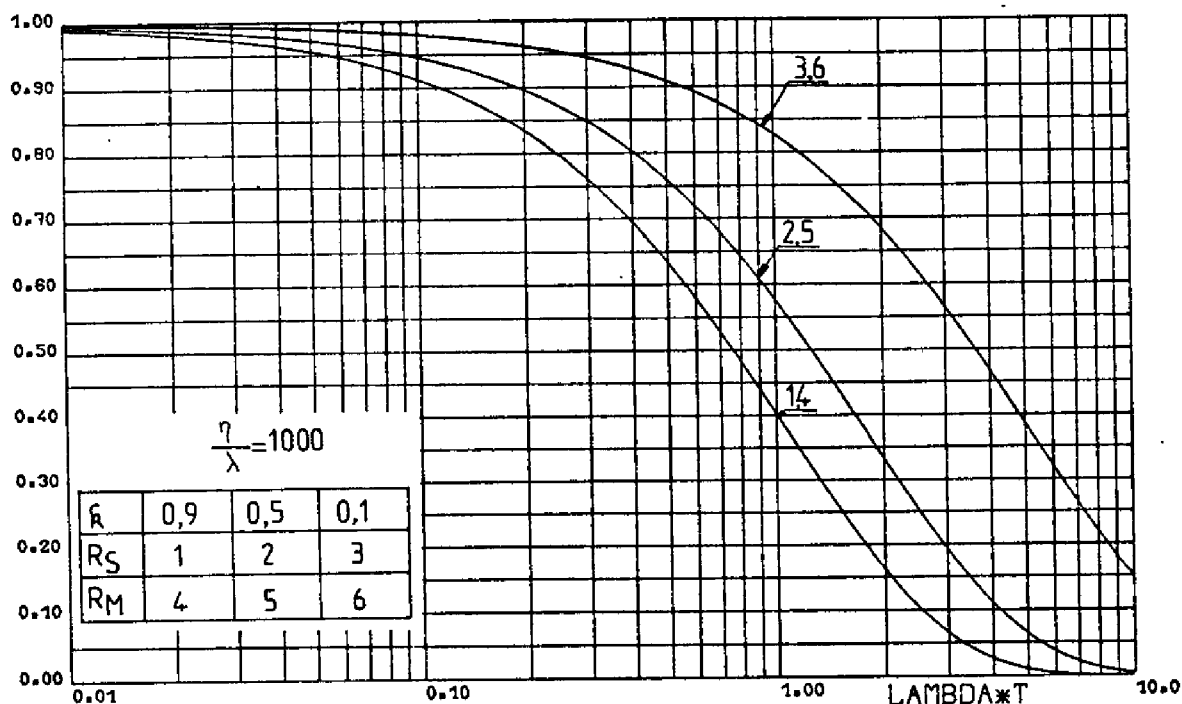


FIGURE 15. Fiabilités structure et mission. Modèle complet.

### 3.3.3. Conclusions sur les grandeurs de fiabilité

Les conclusions que l'on peut tirer des résultats obtenus dans les paragraphes précédents sont de deux ordres :

- validation de l'hypothèse de distributions exponentielles en ce qui concerne les processus de sollicitation,
- représentativité de la fiabilité par l'une ou l'autre des deux composantes (structure ou mission) dans la mesure où un écart très faible les sépare.

Ces deux conclusions conduisent, puisque la fiabilité structure établie à l'aide d'un modèle équivalent est également représentative de la fiabilité structure obtenue à l'aide d'un modèle de comportement complet, à représenter le graphe de fiabilité d'une structure non redondante fonctionnant de manière non continue, par le graphe équivalent de la figure 10.

Ce résultat, qui revient à dire que la probabilité d'être dans l'état 3 est négligeable, est confirmé par les courbes des figures 14 et 15 qui donnent pour deux valeurs du rapport  $\eta / \lambda$  (10 et 1000) les courbes fiabilités mission et structure pour des variations du paramètre k d'utilisation : courbes tracées dans le cas exponentiel directement à partir du graphe de comportement donné sur la figure 3.

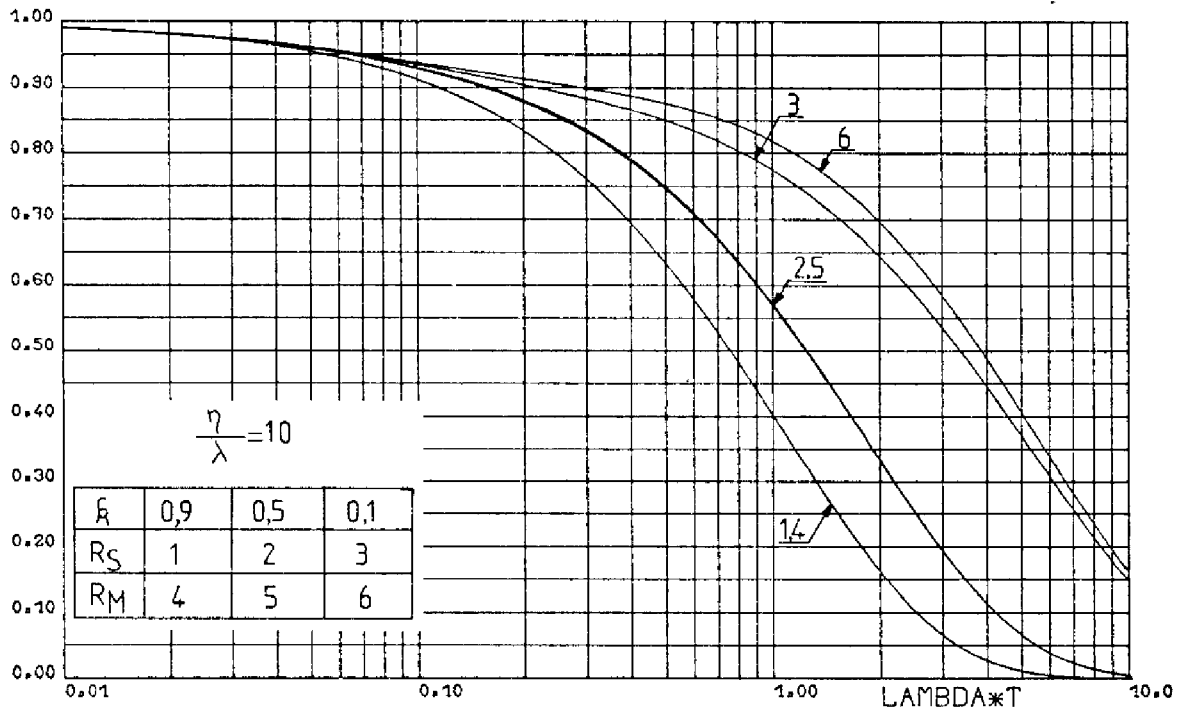


FIGURE 14. Fiabilités structure et mission. Modèle complet.

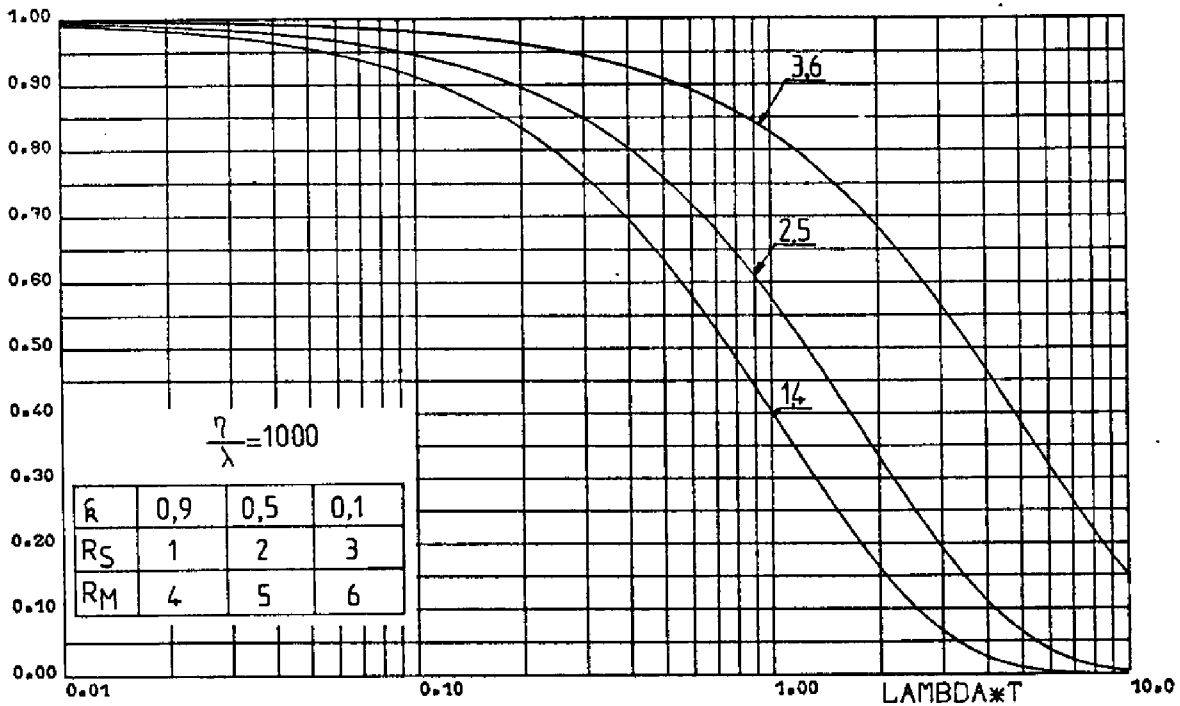


FIGURE 15. Fiabilités structure et mission. Modèle complet.

### 3.3.3. Conclusions sur les grandeurs de fiabilité

Les conclusions que l'on peut tirer des résultats obtenus dans les paragraphes précédents sont de deux ordres :

- validation de l'hypothèse de distributions exponentielles en ce qui concerne les processus de sollicitation,
- représentativité de la fiabilité par l'une ou l'autre des deux composantes (structure ou mission) dans la mesure où un écart très faible les sépare.

Ces deux conclusions conduisent, puisque la fiabilité structure établie à l'aide d'un modèle équivalent est également représentative de la fiabilité structure obtenue à l'aide d'un modèle de comportement complet, à représenter le graphe de fiabilité d'une structure non redondante fonctionnant de manière non continue, par le graphe équivalent de la figure 10.

Ce résultat est particulièrement important puisqu'il permet de réduire le nombre d'états lors de l'étape de modélisation du comportement d'une structure non redondante fonctionnant de manière non continue. Cela offre le double avantage :

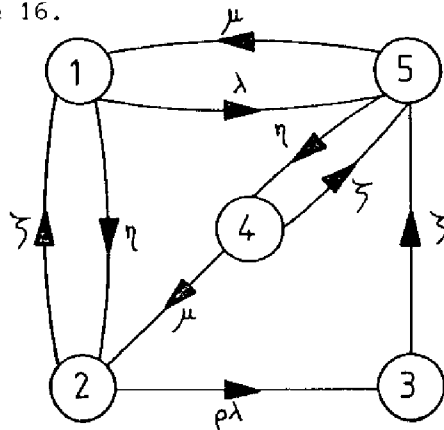
- de pouvoir obtenir, lorsque le modèle équivalent est simple, des expressions analytiques de la fiabilité alors qu'elles nécessitaient auparavant d'utiliser des méthodes numériques,
- de reculer les limites dues à la précision et à la place mémoire requise lorsqu'un traitement numérique est nécessaire.

### 3.4. DISPONIBILITE

#### 3.4.1. Disponibilité structure et mission

##### 3.4.1.1. Distributions exponentielles

Les grandeurs de disponibilité s'obtiennent directement à partir du graphe général de comportement de la figure 3. Dans le cas où toutes les variables sont exponentiellement distribuées, on obtient le graphe de la figure 16.



- ① Etat de fonctionnement non défaillant.
- ② Etat de non sollicitation non défaillant.
- ③ Etat de non sollicitation défaillant.
- ④ Etat de réparation en non sollicitation.
- ⑤ Etat défaillant, réparation pendant sollicitation.

FIGURE 16. Graphe de disponibilité.



REMARQUE

Afin de valider ou d'invalider l'hypothèse selon laquelle les variables sont exponentiellement distribuées, nous étudierons à la fin de ce paragraphe la sensibilité des résultats à différentes distributions des temps de fonctionnement et de non fonctionnement.

Les disponibilités structure ( $A_S$ ) et mission ( $A_M$ ) peuvent être caractérisées par leurs valeurs asymptotiques qui sont respectivement données par les égalités suivantes :

$$A_S = P_1 + P_2$$

$$A_M = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

où  $P_i$  représente la probabilité asymptotique de se trouver dans l'état  $i$ .

La connaissance de ces probabilités asymptotiques permet donc de déterminer les deux disponibilités ainsi définies.

Les expressions du tableau de la figure 17, obtenues dans l'hypothèse markovienne, donnent le développement limité au premier ordre des probabilités de se trouver dans différents états du modèle en considérant que les taux de défaillance sont très faibles devant les autres taux mis en jeu ( $\lambda/\mu, \lambda/\eta, \lambda/\xi \ll 1$ ).

Dans ce tableau, les résultats correspondant à  $H_1$  font intervenir une deuxième hypothèse qui concerne les temps moyens de sollicitation et de non sollicitation, qui sont considérés comme grands devant le temps moyen de réparation ( $\eta/\mu, \xi/\mu \ll 1$ ).

Les résultats correspondant à  $H_2$  ne prennent pas en compte cette hypothèse.

Ces résultats montrent pour les deux hypothèses retenues :

- que les valeurs de  $P_1$  et  $P_2$  sont égales au premier ordre près à  $k$  et à  $(1-k)$ ,
- que  $P_4$  devient un premier ordre dans la seconde hypothèse, ce qui peut s'expliquer par le fait que les valeurs des taux relatifs aux transitions (5) - (4) et (5) - (1) sont du même ordre de grandeur,

- que les probabilités  $P_5$  qui sont en fait les expressions de l'indisponibilité de mission mettent toutes deux en jeu le  $\lambda$  d'équivalent défini dans le paragraphe consacré à la fiabilité ce qui dans le cas de  $H_1$  peut se concrétiser par le graphe de la figure 18.

PROBABILITE ASYMPTOTIQUE D'ETRE DANS L'ETAT i		DEVELOPPEMENT LIMITE AU 1er ORDRE
$P_1$	$H_1$	$\bar{R} - \bar{R}^2 \eta / \mu + \bar{R}(1-\bar{R}) \zeta / \mu + \bar{R}(\bar{R}-1) \lambda / \zeta + (\bar{R} \rho + \bar{R}^2 - \rho) \lambda / \mu$
	$H_2$	$\frac{\bar{R} + (\lambda / (\mu + \eta + \zeta)) (\rho (\mu + \zeta) / (\eta + \zeta)) + (\bar{R}^2 \lambda / (\mu + \eta + \zeta)) [ \rho / \zeta + \rho / \mu + \eta / \mu \zeta + \rho \eta^2 / \mu \zeta^2 ]}{\rho \eta / \zeta^2 + \rho \eta / \mu \zeta + \eta / \mu^2 + \rho \eta^2 / \mu^2 \zeta + 1 / \mu + \rho \eta / \mu \zeta + \zeta / \mu^2 + \eta \lambda / \mu^2}$
$P_2$	$H_1$	$1 - \bar{R} + \bar{R}^2 \eta / \mu + [(1-\bar{R})(\bar{R}-\rho)] \lambda / \zeta - [\bar{R} + \bar{R} \rho - \bar{R}^2 - \bar{R}^2 \rho] \lambda / \mu$
	$H_2$	$\frac{1 - \bar{R} + \lambda (1-\bar{R}) / (\mu + \eta + \zeta) + (\bar{R}(1-\bar{R})) \mu \lambda / (\mu + \eta + \zeta) [ \rho / \zeta + \rho / \mu + \eta / \mu \zeta + \rho \eta^2 / \mu \zeta^2 ]}{\rho \eta / \zeta^2 + \rho \eta / \mu \zeta + \eta / \mu^2 + \rho \eta^2 / \mu^2 \zeta + 1 / \mu + \rho \eta / \mu \zeta + \zeta / \mu^2 + \eta \lambda / \mu^2}$
$P_3$	$H_1$	$\rho (\lambda / \mu) [\bar{R}(1-\bar{R})] + \rho (\lambda / \zeta) [1-\bar{R}]$
	$H_2$	$\rho (\lambda / (\mu + \eta + \zeta)) [\bar{R}(1-\bar{R})] + \rho (\lambda / \zeta) (\mu / (\mu + \eta + \zeta)) (1-\bar{R})$
$P_4$	$H_1$	0
	$H_2$	$(\lambda / (\mu + \eta + \zeta)) (\eta / \mu) [\bar{R} + \rho(1+\bar{R})]$
$P_5$	$H_1$	$[\bar{R} + \rho(1-\bar{R})] \lambda / \mu$
	$H_2$	$(\lambda / (\mu + \eta + \zeta)) \{ [\bar{R} + \rho(1-\bar{R})] + [\zeta + \rho \eta] \bar{R} / \mu \}$

FIGURE 17. Développements limités des probabilités  $P_i$ .

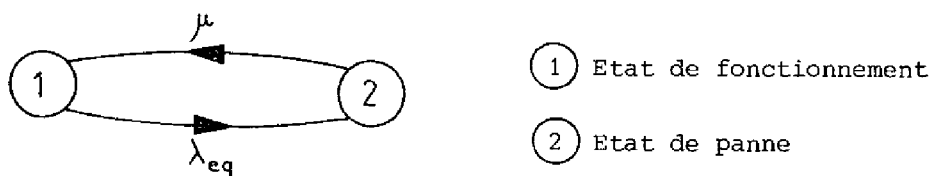


FIGURE 18. Modèle approché.

La comparaison des indisponibilités déduites de ces deux modèles est fournie sur la figure 19 où suivant les valeurs de  $\eta / \lambda$ , on se trouve dans les hypothèses  $H_1$  ou  $H_2$ .

		k		
		0,1	0,5	0,9
INDISPONIBILITE MODELE EQUIVALENT		$0,19 \cdot 10^{-4}$	$0,55 \cdot 10^{-4}$	$0,91 \cdot 10^{-4}$
INDISPONIBILITE MODELE COMPLET	$\eta/\lambda = 10$	$0,19 \cdot 10^{-4}$	$0,55 \cdot 10^{-4}$	$0,91 \cdot 10^{-4}$
	$\eta/\lambda = 10^2$	$0,188 \cdot 10^{-4}$	$0,545 \cdot 10^{-4}$	$0,90 \cdot 10^{-4}$
	$\eta/\lambda = 10^3$	$0,17 \cdot 10^{-4}$	$0,50 \cdot 10^{-4}$	$0,86 \cdot 10^{-4}$
	$\eta/\lambda = 10^4$	$0,10 \cdot 10^{-4}$	$0,37 \cdot 10^{-4}$	$0,83 \cdot 10^{-4}$
	$\eta/\lambda = 10^5$	$0,03 \cdot 10^{-4}$	$0,28 \cdot 10^{-4}$	$0,82 \cdot 10^{-4}$

FIGURE 19. Valeurs de l'indisponibilité.

Les courbes de la figure 20 montrent, pour différentes valeurs du temps moyen T du cycle sollicitation-non sollicitation :

- l'indisponibilité obtenue à l'aide du modèle équivalent,
- l'indisponibilité structure obtenue à l'aide du modèle complet,
- l'indisponibilité mission obtenue à l'aide du modèle complet,

en fonction d'un coefficient d'utilisation k compris entre 0,1 et 0,9.

Elles montrent :

- le faible écart entre l'indisponibilité mission et celle obtenue à l'aide du modèle équivalent,

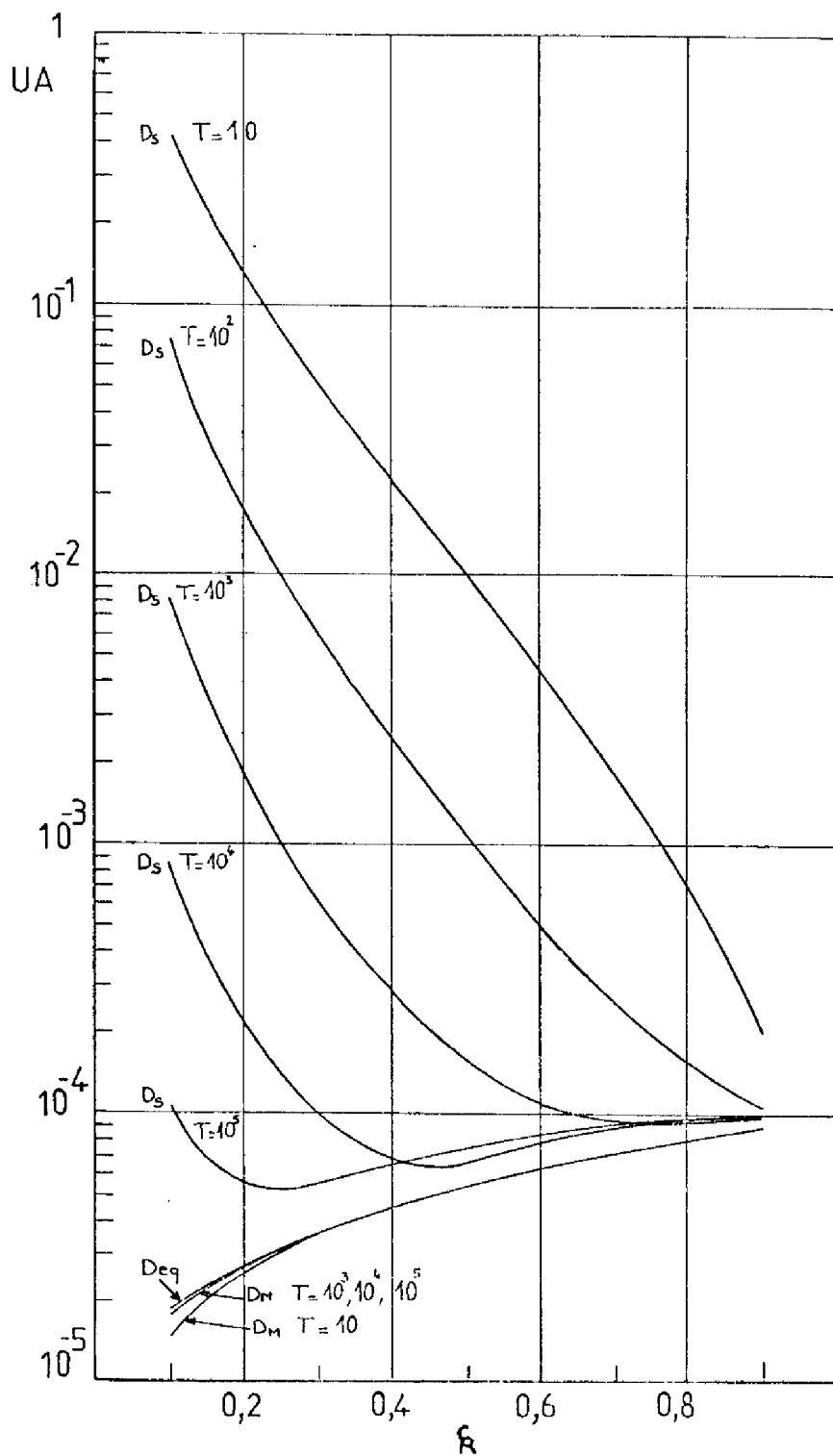


FIGURE 20. Indisponibilités asymptotiques.

- l'écart important entre indisponibilité mission et structure, cette dernière présentant un minimum en fonction de  $k$ . Il est à noter cependant que l'application détermine la valeur de  $k$ , et qu'il n'est nullement question d'optimiser la disponibilité par le choix de  $k$ .

Autant fiabilité structure et mission possédaient un sens pratique, autant, à notre avis, considérer une disponibilité structure n'a pas une grande signification physique ; ce point est confirmé par les études menées à ce jour [NAK,76]-[OSA,76] sur la prévision de la sûreté de structures fonctionnant de manière non continue, qui s'intéressent principalement au calcul des composantes à caractère mission, et en particulier par une mesure de la disponibilité, le "temps de désaccord" par traduction littérale de "disappointment time" introduit par GAVER [GAV,64] , qui correspond au temps d'apparition d'un des deux événements suivants :

- .défaillance pendant une période de sollicitation,
- .occurrence d'une sollicitation non satisfaite pendant une période de non sollicitation, le système étant soit défaillant, soit en cours de réparation.

#### 3.4.1.2. Influence des lois de distribution

Comme nous l'avons souligné en introduction de ce paragraphe, nous donnons sur le tableau de la figure 21 les valeurs de l'indisponibilité stationnaire obtenues par l'utilisation du programme SURF :

- pour des lois de distribution exponentielles (graphe de la figure 16),
- pour des lois de distribution du type ERLANG d'ordre 1 (graphe de la figure 22).

#### REMARQUE

Le choix de lois de distributions du type ERLANG d'ordre 1 est justifié par des études précédentes [LAP,76] qui ont montré que la plus grande influence de la loi de distribution se situait au passage entre le cas exponentiel et le cas où les variables sont étendues à 2 états.

		INDISPONIBILITE MISSION ( $10^{-4}$ )					
LOIS		Exponentielle			Erlang d'ordre 1		
k		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
$\frac{\eta}{\lambda}$	$10^2$	0,188	0,540	0,909	0,804	5,5	1,02
	$10^3$	0,180	0,540	0,905	0,82	1,08	0,961
	$10^4$	0,140	0,510	0,900	1,0	0,75	0,98
	$10^5$	0,107	0,502	0,900	0,345	0,77	0,99

FIGURE 21. Indisponibilité stationnaire.

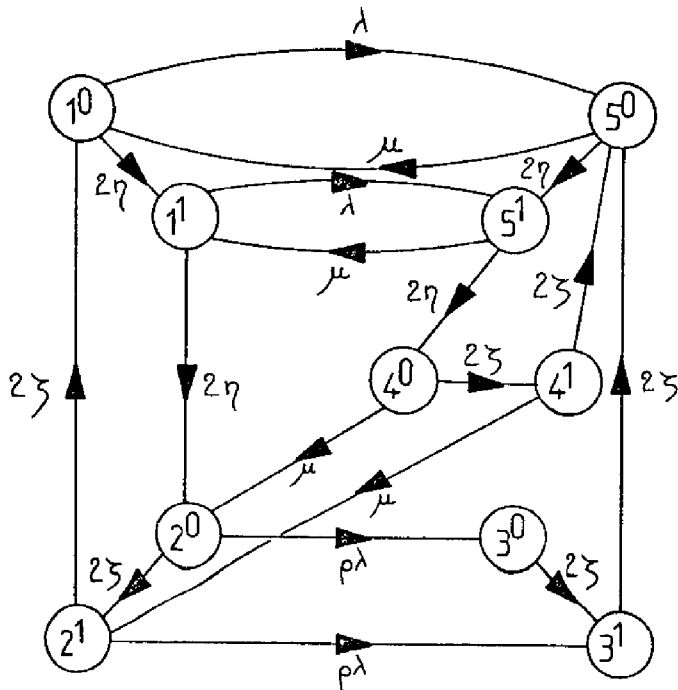


FIGURE 22. Graphe de disponibilité avec extension.

### 3.4.2. Conclusions

L'examen des composantes de disponibilité d'une structure non redondante fonctionnant de manière discontinue permet de montrer que :

- seule la disponibilité mission est à considérer, la disponibilité structure conduisant à des résultats sans intérêt du point de vue de leur utilité pratique,
- le modèle équivalent proposé permet d'approcher de manière satisfaisante la disponibilité de mission,
- l'hypothèse markovienne est ici encore justifiée, les résultats obtenus montrant la faible influence des distributions des temps de sollicitation-non sollicitation sur les valeurs asymptotiques de la disponibilité.

## 4. STRUCTURE REDONDANTE SÉLECTIVE ACTIVE

### EN FONCTIONNEMENT NON CONTINU

---

Un système à redondance sélective active est constitué par deux unités effectuant en parallèle le même traitement. En période de fonctionnement normal, seules les sorties d'une unité sont utilisées. Dans le cas d'une défaillance d'une unité, les sorties sont éventuellement commutées sur l'unité restante.

Le schéma fonctionnel d'une telle structure est donnée sur la figure 23.

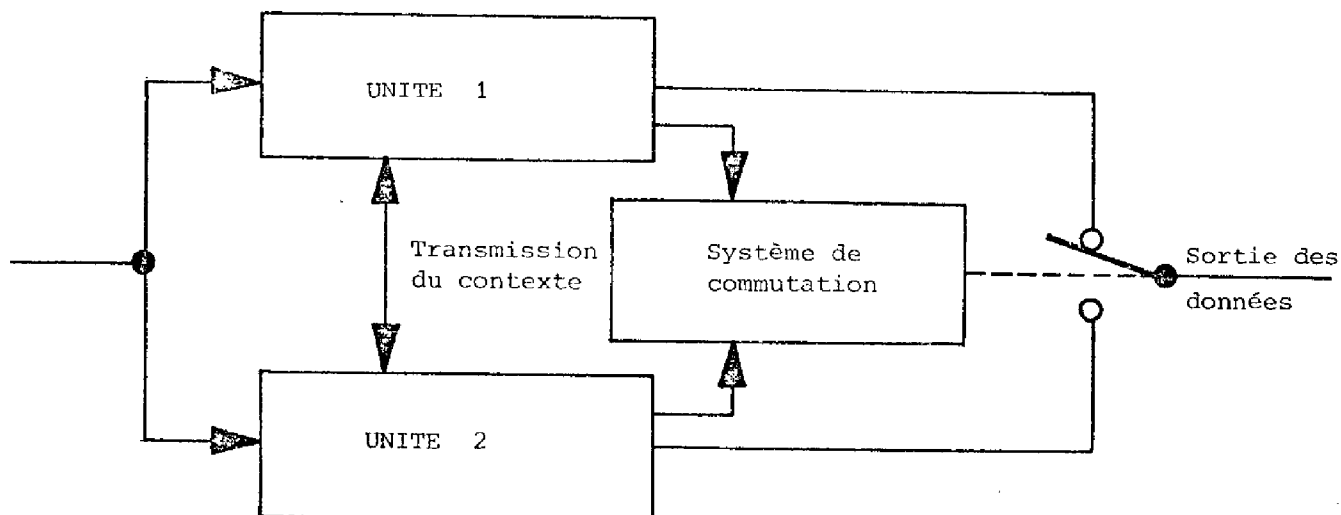


FIGURE 23. Schéma fonctionnel.

Des études précédentes [COS,76] ont montré l'importance du paramètre C défini comme le taux de couverture [BOU,71]. Ce paramètre C englobe les pannes non recouvrables, c'est-à-dire qui entraînent le système dans un état défaillant, et en particulier :

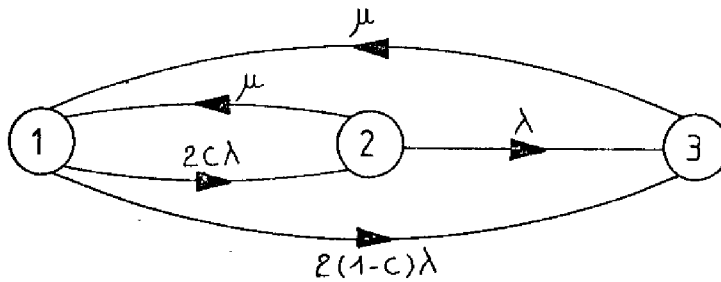
- les pannes non détectées de l'unité active,
- les pannes du sous-ensemble point dur (système de commutation, système de transmission du contexte,...).

Dans le cas d'une structure réparable fonctionnant de manière continue, nous avons montré [COS,76] que le graphe de comportement du système, permettant d'accéder aux composantes de fiabilité et disponibilité pouvait se mettre sous une forme unique (donnée sur la figure 24), quelle que soit la politique de maintenance adoptée.

Dans le cas d'un fonctionnement discontinu, ce graphe dépend à priori des différentes politiques de maintenance envisagées.

Nous n'aborderons au niveau de ce mémoire qu'une seule politique de maintenance, en tenant compte cependant d'un comportement réparable de la structure pendant les phases de sollicitation. Lorsque ce sera le cas, la maintenance engagée à cet instant devra naturellement se prolonger pendant les états de non sollicitation, dans le cas d'une fin de sollicitation survenant pendant une réparation.





- ① Les deux unités fonctionnent correctement.
- ② Une des deux unités fonctionne correctement, l'autre est en panne.
- ③ Etat défailant.

FIGURE 24. Modèle approché en fonctionnement continu.

#### 4.1. MODELISATION DU COMPORTEMENT EN FONCTIONNEMENT DISCONTINU

Les résultats précédents ayant montré le peu d'influence des lois de distributions  $G(t)$  et  $H(t)$ , nous nous placerons dans l'hypothèse markovienne, en donnant le graphe de comportement de la figure 25.

L'exploitation de ce modèle prendra deux formes :

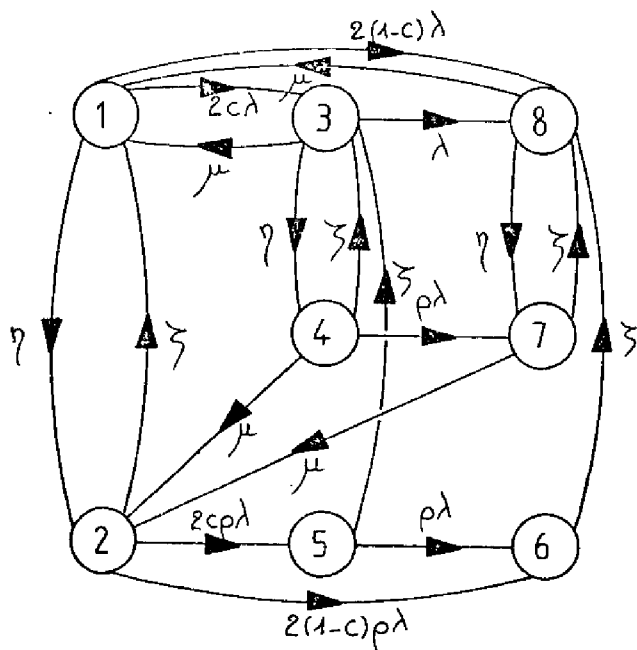
- évaluation des fiabilités mission et structure,
- évaluation de la disponibilité mission,

à l'aide du programme SURF.

#### 4.2. GRANDEURS DE FIABILITE

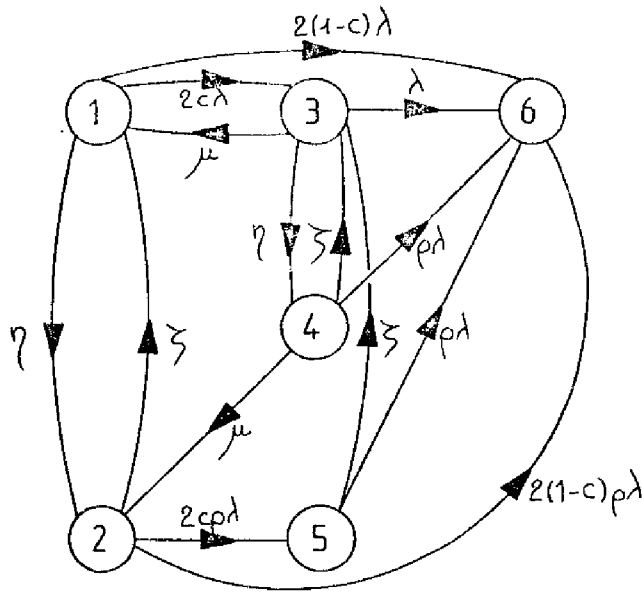
##### 4.2.1. Résultats

Les graphes de fiabilité structure et mission sont donnés par les figures 26 et 27 issues de la figure 25 en supprimant la transition entre les états ⑧ et ① (utilisée pour la disponibilité), et en rendant les états ⑥ et ⑦ absorbants (regroupés avec l'état ⑧) dans le cas de la fiabilité structure, ou en supprimant la transition entre les états ⑧ et ⑦ dans le cas de la fiabilité mission.



- ① La structure est sollicitée, les deux unités fonctionnent.
- ② La structure est non sollicitée, les deux unités sont en état de fonctionner.
- ③ La structure est sollicitée, une unité fonctionne, l'autre est hors d'état de fonctionner.
- ④ La structure est non sollicitée, une unité est en état de fonctionner, l'autre est en suite de réparation commencée en ③ .
- ⑤ La structure est non sollicitée, une unité est en état de fonctionner, l'autre est hors d'état de fonctionner.
- ⑥ La structure est non sollicitée, les deux unités sont hors d'état de fonctionner.
- ⑦ La structure est non sollicitée, les deux unités sont hors d'état de fonctionner. (Maintenance curative appliquée provenant de ④ ou de ⑧).
- ⑧ La structure est sollicitée, les deux unités sont hors d'état de fonctionner. (Etat de réparation).

FIGURE 25. Graphe de comportement en fonctionnement non continu.



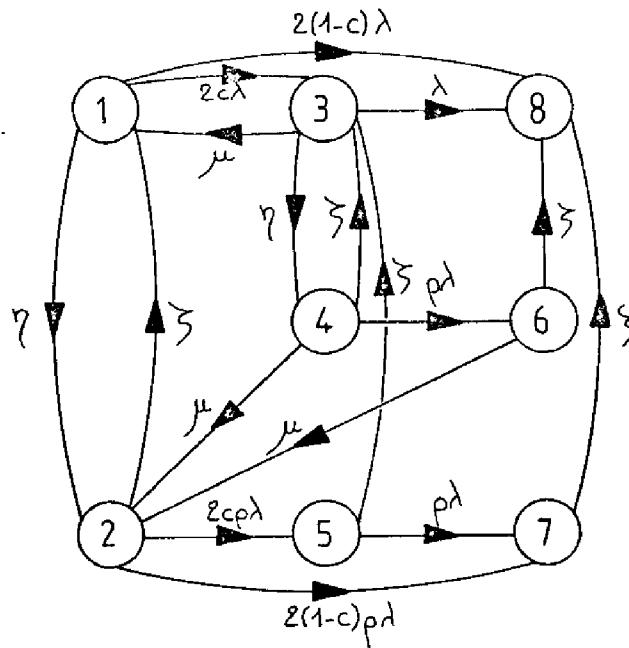
- ① , ② , ③ , ④ Mêmes définitions que figure 25.
- ⑤ Structure non sollicitée, l'unité est en état de fonctionner, l'autre non.
- ⑥ Etat défaillant.

FIGURE 26. Graphe de fiabilité structure.

La prise en compte simultanée :

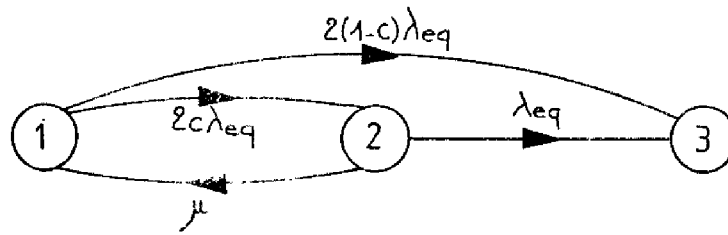
- des résultats obtenus dans le cas d'une structure non redondante grâce à un modèle équivalent de comportement en fonctionnement continu,
- du modèle de la figure 24 dans le cas d'une structure redondante sélective active en fonctionnement continu,

conduit par analogie à tenter de représenter le graphe de comportement d'une structure redondante en fonctionnement discontinu par le graphe de la figure 28.



- ① La structure est sollicitée, les deux unités fonctionnent.
- ② La structure est non sollicitée, les deux unités sont en état de fonctionner.
- ③ La structure est sollicitée, une unité fonctionne, l'autre est hors d'état de fonctionner.
- ④ La structure est non sollicitée, une unité est en état de fonctionner l'autre est en suite de réparation commencée en ③.
- ⑤ La structure est non sollicitée, une unité est en état de fonctionner, l'autre est hors d'état de fonctionner.
- ⑥ La structure n'est pas sollicitée, les deux unités sont hors d'état de fonctionner. (Etat de continuation de la réparation commencée en ③).
- ⑦ La structure n'est pas sollicitée, les deux unités sont hors d'état de fonctionner.

FIGURE 27. Graphe de fiabilité mission.



- ① Les deux unités fonctionnent correctement ou sont aptes à fonctionner (sollicitées ou non).
- ② Une unité fonctionne correctement ou est apte à fonctionner correctement, l'autre est en panne.
- ③ Les deux unités sont en panne.

FIGURE 28. Modèle approché.

Les résultats concernant les fiabilités structure et mission définies sur le modèle réel (figures 26 et 27) et la fiabilité obtenue à partir du modèle approché (figure 28), sont donnés sur les figures 29 et 30 qui prennent en compte deux valeurs du temps moyen de sollicitation : respectivement  $\eta/\lambda = 10$  et  $\eta/\lambda = 10^3$ .

#### 4.2.2. Conclusions sur les grandeurs de fiabilité

L'examen des courbes des figures 29 et 30 permet de dire que dans tous les cas, fiabilité mission et fiabilité structure peuvent être considérées comme identiques, et que le modèle de la figure 28 est apte à représenter d'un point de vue fiabilité le comportement d'une structure redondante sélective active. Seul, le cas  $\eta/\lambda = 10$  et  $k = 0.1$ , correspondant à des temps moyens de sollicitation importants et à des temps moyens de non sollicitation encore plus élevés, permet de mettre en évidence les différentes issues de ces trois formes de modélisation. Les applications qui correspondraient à un tel cas ne sont pas légions et, de ce fait, constituent un cas particulier qu'une forme de modélisation complète permet d'étudier de manière plus précise.

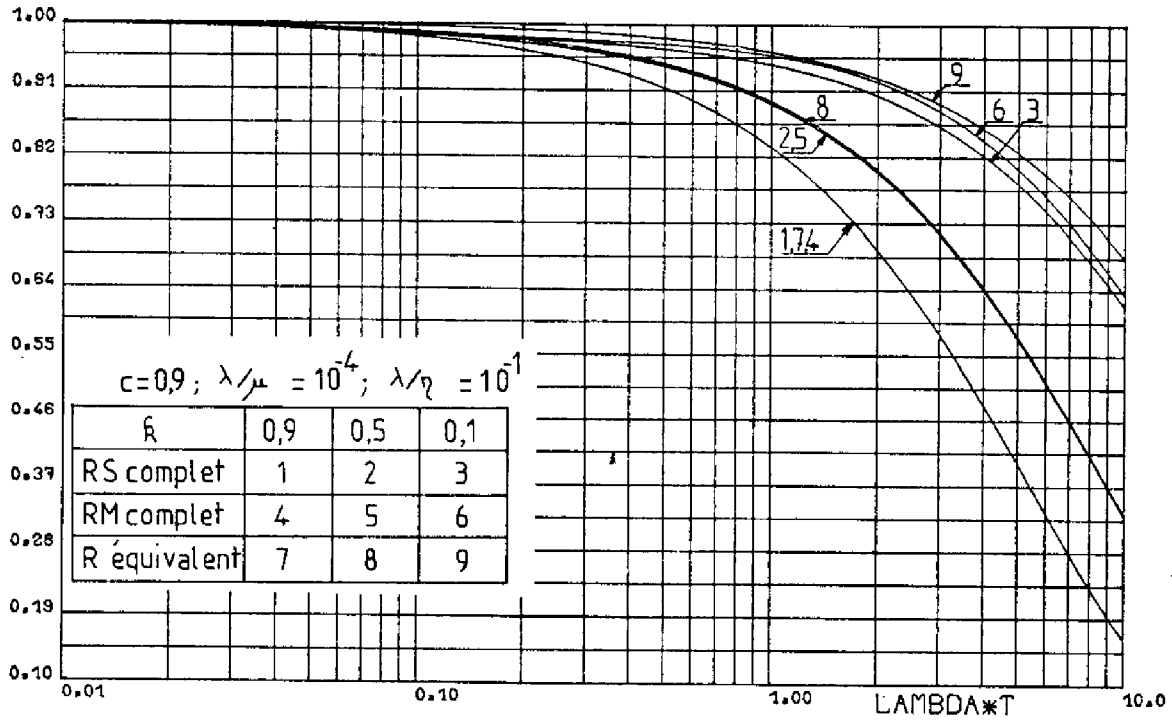


FIGURE 29. Fiabilités structure et mission. Modèles complet et équivalent.

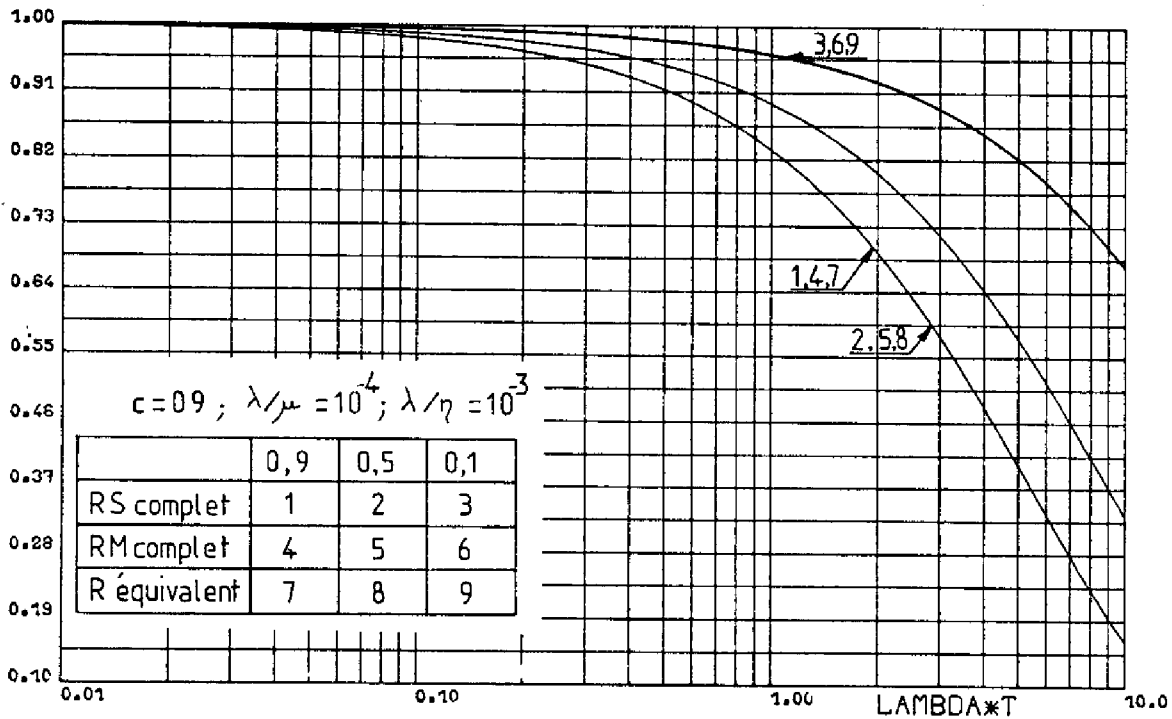


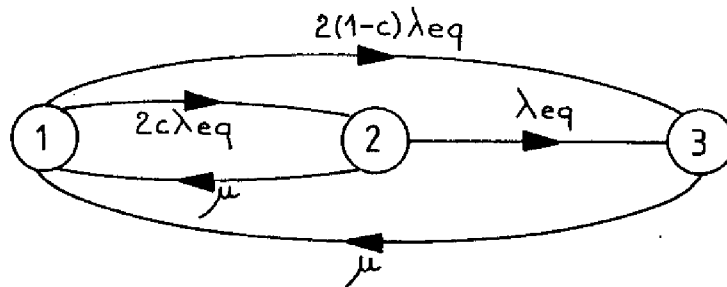
FIGURE 30. Fiabilités structure et mission. Modèles complet et équivalent.

4.3. GRANDEURS DE DISPONIBILITE

4.3.1. Résultats

Le graphe de comportement de la figure 25 fournit directement le graphe de disponibilité de la structure, dans les hypothèses prises précédemment. L'exploitation de ce graphe sera faite par l'évaluation de l'indisponibilité mission, le modèle de comportement de la structure non redondante ayant montré le peu d'intérêt de l'indisponibilité structure en ce qui concerne son sens physique.

Par analogie avec les modèles équivalents précédents, on peut établir le modèle approché de la figure 31.



- ① Etat de fonctionnement. Les deux unités fonctionnent ou sont aptes à fonctionner.
- ② Une unité est hors d'état de fonctionner.
- ③ Etat de panne. Réparation.

FIGURE 31. Modèle approché de comportement.

Les résultats issus du modèle de comportement réel (figure 25) et du modèle approché sont donnés sur la figure 32.

4.3.2. Conclusions sur les grandeurs de disponibilité

Ces conclusions sont du même type que pour la fiabilité et permettent de montrer la validité du modèle approché de la figure 31. Une étude de sensibilité sur les distributions des temps de sollicitation et non sollicitation conduirait, comme dans le cas de la structure non redondante, à montrer la faible influence de la forme sur les résultats.

		INDISPONIBILITE ( $10^{-5}$ )		
		k		
		0,1	0,5	0,9
MODELE APPROCHE		0,380	1,100	1,821
MODELE REEL	$\frac{\eta}{\lambda} = 10^2$	0,387	1,090	1,804
	$\frac{\eta}{\lambda} = 10^3$	0,347	1,009	1,730
	$\frac{\eta}{\lambda} = 10^4$	0,200	0,734	1,655
	$\frac{\eta}{\lambda} = 10^5$	0,066	0,576	1,640

FIGURE 32. Comparaison de l'indisponibilité.

## 5. CONCLUSION

---

L'étude des deux structures présentées au cours de ce chapitre a permis de montrer :

- la bonne approximation effectuée en considérant les variables caractérisant le mode de fonctionnement de la structure comme exponentiellement distribuées,
- la simplification possible du graphe de comportement pour ces deux structures.

En conséquence, ces résultats confirment l'intérêt que peut présenter la modélisation par processus markoviens homogènes en général, et le programme SURF d'évaluation des composantes de la sûreté de fonctionnement en particulier, en prenant en compte toutes les actions pouvant lors d'une application, déterminer l'évolution de l'état d'une structure numérique, que ces actions soient :



- incontrôlables (processus de pannes),
- déterminées par l'application (processus de sollicitation-non sollicitation),
- déterminées par un choix humain (choix de l'architecture et de la politique de maintenance).

CONCLUSION

---



La conception d'un système numérique selon des lois non empiriques se doit de pouvoir intégrer au cours de ses étapes tant l'aspect fonctionnel que l'aspect sûreté de fonctionnement lorsque celle-ci est requise par l'application.

Peu de méthodes offrent actuellement la possibilité de traiter en symbiose la vérification fonctionnelle et la validation des performances de sûreté ; de plus, elles nécessitent d'un point de vue exploitation un recours à des descriptions lourdes du système et à des moyens de traitement numérique constituant souvent une limitation.

Si l'on s'intéresse plus spécifiquement à l'aspect sûreté de fonctionnement, le processus de décision doit tenir compte de manière générale des deux fonctions inséparables que constituent l'architecture de la structure et l'organisation de son exploitation.

Nous avons présenté dans le premier chapitre les méthodes d'évaluation de la sûreté de fonctionnement et les outils correspondants.

L'examen de ces techniques permet de les classer en deux voies :

- évaluation prévisionnelle dans un but d'aide à la conception,
- évaluation à posteriori de systèmes conçus généralement de manière empirique, grâce à l'expérience des concepteurs.

Les méthodes s'apparentant à la deuxième catégorie ne conservent généralement pas, au niveau de leur exploitation cette dualité architecture-exploitation, et abandonnent cette dernière notion pour se consacrer à l'évaluation d'une composante de la sûreté de fonctionnement, en intégrant seulement l'aspect structure au niveau de description requis.

Nous nous sommes plus particulièrement intéressé à la première voie qui comprend essentiellement deux catégories de méthodes :

- les méthodes par simulation qui comportent comme nous l'avons dit précédemment l'avantage essentiel d'une vérification fonctionnelle, mais des inconvénients dus à leur exploitation,
- les méthodes par modélisation sous forme de processus stochastiques avec pour support la théorie des graphes.

C'est dans cette deuxième catégorie que se situe le programme SURF que nous avons présenté au deuxième chapitre.

Le manque manifeste d'outils suffisamment généraux pour offrir une aide à la conception, nous a conduit en utilisant un support mathématique déjà établi, à développer ce programme.

Deux voies nous ont guidé pour sa mise au point :

- la généralité de l'outil mathématique utilisé qui confère à ce programme la possibilité d'intégrer les aspects matériel, logiciel et exploitation de la structure par l'intermédiaire de la politique de maintenance et du type d'application,
- l'utilisation qui doit en être faite au niveau d'un décideur en ne demandant à ce dernier qu'un minimum de connaissances de l'outil mathématique, et en axant son rôle sur la définition du système.

Les limitations de SURF, inhérentes à la précision des résultats numériques fournis et au système informatique sur lequel il est exploité sont dues au nombre d'états très important que la complexité croissante des systèmes nécessite pour leur description.

Ces trois points, qui sont en fait étroitement liés, ont retenu toute notre attention puisqu'ils sont constamment contrôlés par l'intermédiaire des tests de validité sur les résultats obtenus.

Les retombées de la mise au point de la version FORTRAN de SURF, présenté au niveau de ce mémoire, seront concrétisées par la création d'une version équivalente en PL/1 offrant les avantages suivants :

- génération de modèles complexes de manière automatique par la description des sous-ensembles de manière indépendante,
- manipulation de caractères alphanumériques plus aisée qu'en FORTRAN, offrant le double avantage :
  - .de généraliser à une ou plusieurs variables quelconques la méthode des états fictifs,
  - .de simplifier le modèle, dans le cas de la manifestation d'une des limitations précédentes, en considérant l'action correspondant à une des variables comme instantanée,

- allocation dynamique de mémoire permettant de traiter ainsi des exemples de dimension plus importante.

La simplification du modèle initial, qui a pour conséquence de reculer considérablement les limites d'application d'un tel programme, a fait l'objet d'études dans le chapitre trois, en ce qui concerne le cas particulier du processus de sollicitation-non sollicitation. Les résultats obtenus concernent :

- la validité de la simplification d'un modèle de comportement en fonctionnement non continu par un modèle équivalent,
- l'unicité, sauf dans le cas d'applications bien particulières, des notions de composantes structure et mission.

La puissance de description de la représentation par graphes de comportement alliée à la généralité de l'utilisation des processus stochastiques permet d'étendre le strict domaine d'application du programme SURF tel qu'il a été présenté dans ce mémoire vers l'évaluation des probabilités associées au nombre de passage dans les états du graphe d'un système. En effet, si les relations d'obtention de ces probabilités sont formellement distinctes des composantes de la sûreté de fonctionnement envisagées dans ce mémoire, les méthodes mathématiques d'accès à ces probabilités sont les mêmes.

Pouvoir évaluer de telles grandeurs et plus particulièrement les probabilités associées au nombre d'appels à la maintenance revêt un intérêt d'ordre économique certain, puisqu'elles permettent :

- d'estimer le coût d'exploitation d'un système sur des périodes de temps importantes,
- de fournir les données nécessaires à la gestion d'un stock de rechanges données plus significatives que celles utilisées actuellement : disponibilité, nombre moyen de renouvellements.



## BIBLIOGRAPHIE

---





- [ASH,76] D. ASHOK, D.P. SIEWIOREK : "A reliability model for various switch designs in hybrid redundancy", IEEE Trans. on Computers, vol.C-25, n°2, February 1976, pp.115-133.
- [AVI,75] A. AVIZIENIS : "Architecture of fault tolerant computing systems", International Symposium on Fault Tolerant Computing, F.T.C.-5, Paris, 18-20 Juin 1975, pp.3-16.
- [BOU,71] W.G. BOURRICIUS, W.C. CARTER, D.C. JESSEP, P.R. SCHNEIDER, A.B. WADIA : "Reliability modeling for fault tolerant computers", IEEE Trans. on Computers, vol.C-20, n°11, November 1971, pp.1306-1311.
- [CIC,71] A.S. CICI, V.O. MUGLIA : "Computer reliability optimisation system", IEEE Trans. on Reliability, vol.20, n°3, 1971, pp.110-116.
- [COR,73] M. CORAZZA, "Mathématiques de la fiabilité", Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1973.
- [COS,76] A. COSTES, J.C. LAPRIE, A. LESTRADE-CARBONNEL : "Prévision de la sûreté de fonctionnement des systèmes par les processus stochastiques. Application à une structure redondante dynamique", Actes du 3ème Congrès National de Fiabilité, Perros-Guirec, France, Septembre 1976, pp.852-875.
- [COU,76] B. COURTOIS : "Etude d'un calculateur tolérant des pannes : ses fiabilité, sécurité, performance et coût", Thèse de Docteur-Ingénieur, Institut National Polytechnique de Grenoble, 10 Décembre 1976.
- [DOS,71] J. DOSHAY : "On line system availability and service simulation (OLSASS)", IEEE Trans. on Reliability, vol.20, n°3, pp.142-147.
- [DUR,60] E. DURAND : "Solutions numériques des équations algébriques", Tome I, Masson, 1960, pp.247-259.
- [ESA,75] J.D. ESARY, H. ZIEHMS : "Reliability analysis of phased missions", Reliability and Fault Tree Analysis, SIAM, Philadelphia, 1975, pp.213-236.

- [FLE,63] R. FLETCHER, M.J.D. POWEL : "A rapid descent method for minimization", Computer Journal, vol.6, n°2, 1963, pp.163-168.
- [FLE,71] J. FLEHING : "A computer program for calculating system reliability and MTBF", IEEE Trans. on Reliability, vol.R-20, n°3, 1971, pp.102-107.
- [FRE,74] H. FREY : "Safety evaluation of mass transit system by reliability analysis", IEEE Trans. on Reliability, vol.R-23, n°3, August 1974, pp.161-169.
- [FUS,75] J.B. FUSSEL : "Computer aided fault tree construction for electrical systems", Reliability and fault tree analysis, SIAM, 1975, pp.37-56.
- [FUS,76] J.B. FUSSEL : "A review of fault tree analysis with emphasis on limitations", IFAC 6th Triennial World Conference, August, 24-30, 1976, Boston/Cambridge, MA, U.S.A.
- [GAN,60] F.R. GANTHACHER : "The theory of matrices", Chelsea, Publishing Company, New-York, 1960.
- [GAV,64] D.P. GAVER : "A probability problem arising in reliability and traffic studies", Oper-Res, vol.12, 1964, pp.534-542.
- [GEF,76] J.C. GEFFROY : "Test en ligne et sécurité des systèmes logiques", Thèse de Docteur ès-Sciences, Université Paul Sabatier de Toulouse, 26 Novembre 1976.
- [GRE,68] K. GREENE, T.J. CUNNINGHAM : "Failures modes and critical effects analysis", 1968 Annual Symposium on Reliability, IEEE Proceeding, pp.374-384.
- [KAM,76] S.J. KAMAT, W.E. FRANZMEIER : "Determination of reliability using event-based Monte-Carlo simulation", Part.II, IEEE Trans. on Reliability, vol.R-25, n°4, October 1976, pp.254-256.

- [KIM,73] E.W. KIMBALL, J. BAUER, D.F. COTTRELL, T.R. GAGNIER : "Dormancy and power on-off cycling effects on electronic equipments and part reliability", Martin Marietta Aerospace, prepared for Rome Air Development Center (RADC), August 1973.
- [LAN,77] C. LANDRAULT : "Prévision de la sûreté de fonctionnement des systèmes numériques réparables", Thèse de Docteur ès-Sciences, Institut National Polytechnique de Toulouse, 11 Mars 1977.
- [LAP,75] J.C. LAPRIE : "Prévision de la sûreté de fonctionnement et architecture de structures numériques temps réel réparables", Thèse de Docteur ès-Sciences, Université Paul Sabatier de Toulouse, 16 Juin 1975.
- [LAP,76] J.C. LAPRIE : "On reliability prediction of repairable redundant digital structures", IEEE Trans. on Reliability, vol.R-25, n°4, October 1976, pp.275-277.
- [LOZ,75] A. LOZES : "Evaluation et accroissement de la testabilité des systèmes logiques", Thèse de Docteur de 3ème Cycle, Université Paul Sabatier de Toulouse, 3 Mars 1975.
- [MAT,70] F.P. MATHUR : "Reliability modeling and architecture of ultra-reliable fault-tolerant digital computers", Ph.D. Thesis, University of California, Los Angeles, 1970.
- [MOL,75] C.B. MOLER : "Difficulties in computing the exponential of a matrix", Second U.S.A. - Japan Computer Conference, 1975, pp.79-82.
- [NAK,76] T. NAKAGAWA, Y. SAWA, Y. SUSUKI : "Reliability analysis of intermittently used systems when failures are detected only during a usage period", Microelectronics and Reliability, vol.15, 1976, pp.35-38.
- [OSA,76] S. OSAKI, L. GOEL, T. NAKAGAWA : "Stochastic behaviour of intermittently used systems", RAIRO V.2., Juin 1975, pp.101-112.

- [PAU,75] J.P. PAUL : "SEGMA : Etude de la sûreté de fonctionnement des systèmes informatiques", 2ème Partie, Thèse de Docteur de 3ème Cycle, Université Paul Sabatier de Toulouse, 16 Juin 1975.
- [PYK,61] P. PYKE : "Markov renewal processes : definitions and preliminary properties", Ann. Math. Satist., vol.32, n°4, 1961, pp.1231-1242.
- [RIS,72] J. RISSANEN : "Recursive evaluation of pade approximants for matrix sequences", Journal of R. and D., July 1972, pp.401-402.
- [SAG,77] Y. SAGOT : "Conception et évaluation des performances d'un système informatique de commande", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paul Sabatier de Toulouse, 13 Avril 1977.
- [SHO,76] M.L. SHOOMAN, K.T. ASHOK : "A many state Markov model for computer software performance parameters", IEEE Trans. on Reliability, vol.R-25, n°2, June 1976, pp.66-67.
- [SIN,75] R. SINGHAL, J. VLASH : "Computative of time domain response by numerical inversion of the Laplace transform", Journal of the Franklin Institute, vol.299, February 1975, pp.109-126.
- [TOU,76] L. TOURRES : "Qu'entend-on par cahier des charges ?", Document rédigé à l'intention de la Commission A.F.C.E.T. : Normalisation de la représentation du cahier des charges d'un automate logique, 2 Mars 1976.
- [TRO,75] R. TROY : "SEGMA : Etude de la sûreté de fonctionnement des systèmes informatiques", 1ère Partie, Thèse de Docteur de 3ème Cycle, Université Paul Sabatier de Toulouse, 16 Juin 1975.
- [TAY,75] J.R. TAYLOR : "Sequential effects in failure mode analysis", Reliability and Fault Tree Analysis SIAM, Philadelphia, 1975, pp.881-894.

- [VAL,76] R. VALETTE : "Sur la description, l'analyse et la validation des systèmes de commande parallèle", Thèse de Docteur ès-Sciences, Université Paul Sabatier de Toulouse, 24 Novembre 1976.
- [WID,71] W. WIDAWSKY : "Reliability and maintainability evaluated with simulation", IEEE Trans. on Reliability, vol.R-20, n°3, August 1971, pp.158-164.



TABLE DES MATIERES

---





## SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. MÉTHODES D'ÉVALUATION DE LA SÛRETE DE FONCTIONNEMENT	5
1. SYSTEMES ET SURETE DE FONCTIONNEMENT	7
1.1. Evaluation des performances	7
1.2. Performances caractéristiques de la sûreté de fonctionnement	9
1.2.1. Composantes de la sûreté de fonctionnement	9
1.2.1.1. Définition des composantes	10
1.2.1.2. Mesures des composantes	10
1.2.2. Composantes caractéristiques	12
2. METHODES D'EVALUATION DE FONCTIONNEMENT DES SYSTEMES	12
2.1. Modélisation des systèmes	13
2.1.1. Modélisation fonctionnelle	13
2.1.2. Modélisation événementielle	17
2.1.3. Modélisation directe	21
2.2. Outils de traitement des modèles	23
3. INTERET DE LA MODELISATION PAR PROCESSUS MARKOVIENS HOMOGENES	24
CHAPITRE 2. SURF : OUTIL D'ÉVALUATION DE LA SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT DES SYSTÈMES	25
1. BUT DE SURF ET ACCESSIBILITE	27
2. OUTILS MATHEMATIQUES UTILISES : RAPPELS	28
2.1. Processus markoviens homogènes	28
2.1.1. Définition	28

2.1.2. Application des processus markoviens homogènes au calcul des composantes de la sûreté de fonctionnement	29
2.1.2.1. Graphes de transition où tous les états sont ergodiques	29
2.1.2.2. Graphes de transition où certains états sont absorbants	31
2.1.2.3. Conclusion	32
2.2. La méthode des états fictifs	33
3. PRESENTATION DES PROGRAMMES SURF	36
3.1. Structure générale des programmes SURF	36
3.2. La version FORTRAN	39
3.2.1. Organigramme général de déroulement du programme	39
3.2.2. Support informatique de SURF	39
4. ALGORITHMES D'IMPLANTATION DES OUTILS MATHEMATIQUES	41
4.1. Modification du modèle par la méthode des états fictifs	42
4.1.1. Utilisation des états fictifs dans SURF	42
4.1.2. Détermination du nombre d'états et des taux	42
4.1.3. Réarrangement de la matrice par disposition des états et des taux	44
4.2. Composantes dépendant explicitement du temps et tests de validité	47
4.2.1. Calcul des composantes	47
4.2.2. Tests de validité	50
5. DESCRIPTION DE SURF, VERSION FORTRAN	53
5.1. Partie conversationnelle	54
5.1.1. Choix du modèle	54
5.1.2. Prise en compte des lois de distribution non exponentielles	54
5.1.3. Tracé de courbes	55
5.1.4. Organisation du fichier de données résultant	56
5.2. Traitement du modèle	57
5.2.1. Modification du modèle : méthode des états fictifs	57



3. STRUCTURE NON REDONDANTE FONCTIONNANT DE MANIERE DISCONTINUE	85
3.1. Modélisation du comportement	86
3.1.1. Graphe de comportement	86
3.1.2. Exploitation	86
3.2. Etude des sources de pannes	87
3.3. Fiabilité	91
3.3.1. Fiabilité structure	92
3.3.1.1. Expression générale	92
3.3.1.2. Temps de sollicitation et non sollicitation exponentiellement distribués	93
3.3.1.3. Influence des lois de distribution des temps de sollicitation et non sollicitation	96
3.3.2. Fiabilité de mission	96
3.3.2.1. Expression générale	96
3.3.2.2. Temps de sollicitation et non sollicitation exponentiellement distribués	97
3.3.3. Conclusions sur les grandeurs de fiabilité	100
3.4. Disponibilité	101
3.4.1. Disponibilité structure et mission	101
3.4.1.1. Distributions exponentielles	101
3.4.1.2. Influence des lois de distribution	106
3.4.2. Conclusions	107
4. STRUCTURE REDONDANTE SELECTIVE ACTIVE EN FONCTIONNEMENT NON CONTINU	108
4.1. Modélisation du comportement en fonctionnement discontinu	110
4.2. Grandeurs de fiabilité	110
4.2.1. Résultats	110
4.2.2. Conclusions sur les grandeurs de fiabilité	114
4.3. Grandeurs de disponibilité	116
4.3.1. Résultats	116
4.3.2. Conclusions sur les grandeurs de disponibilité	116

5. <i>CONCLUSION</i>	117
CONCLUSION	119
BIBLIOGRAPHIE	125
TABLE DES MATIÈRES	133