HAL
open science

Etude théorique des propriétés non-classiques de la lumière émise par des microcavités semiconductrices dans lerégime de couplage fort

Arnaud Verger

To cite this version:

Arnaud Verger. Etude théorique des propriétés non-classiques de la lumière émise par des microcavités semiconductrices dans lerégime de couplage fort. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT : . tel-00177111v2

HAL Id: tel-00177111

https://theses.hal.science/tel-00177111v2

Submitted on 10 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Département de Physique

LABORATOIRE PIERRE AIGRAIN

THÈSE de DOCTORAT de L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Arnaud VERGER

Pour obtenir le titre de
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet de la thèse :

Etude théorique des propriétés non-classiques de la lumière émise par des microcavités semiconductrices dans le régime de couplage fort

Soutenue le 25 septembre 2007 devant le jury composé de :

M.	Roland COMBESCOT	(Président)
M.	David M. WHITTAKER	(Rapporteur)
M.	Alberto BRAMATI	(Rapporteur)
M.	Cristiano CIUTI	(Directeur de thèse)
M.	Gérald BASTARD	(Co-Directeur de thèse)

À Téssoueh ...

Remerciements

Ami lecteur, il ne t'aura pas échappé que cette thèse est courte selon les standards en vigueur dans les milieux académiques, où il fait bon épancher son savoir en de longs phrasés, dont au sujet desquels que la physique elle aurait pas été pareille si ça avait pas été publié. Mais si le manuscrit est court, les remerciements, eux, seront longs tant il est vrai que de nombreuses personnes ont participé à l'excellente ambiance de travail dont j'ai profité pendant ces trois années.

J'aimerais d'abord remercier comme c'est la coutume Claude Delalande, encore directeur du labo à l'heure où j'écris ces lignes. Merci Claude, pour la bienveillance que tu as toujours manifestée à mon égard (dans les paroles et dans les actes), pour les discussions, les éclats de rire partagés, la bonne bouffe (chez toi, pas aux Bugnes, faut pas pousser), bref tout ce qui fait l'ambiance dans un groupe de personnes qui s'entend finalement pas si mal.

Merci à Michel Voos, directeur du département lorsque je suis arrivé, puis véritable appui pour les thésards si tant est qu'on ait l'audace de taper à sa porte, on sera toujours bien reçu. Merci à Jean-Michel Raimond, actuel directeur du département.

Merci à Cristiano Ciuti, mon directeur de thèse effectif. J'ai appris beaucoup de choses scientifiques et extra-scientifiques à ton contact, ce savoir ne sera pas perdu. Je te remercie pour la chaleur de ton accueil et pour ta motivation toujours présente pour me faire avancer. J'ai acquis avec toi beaucoup d'autonomie, et pour cela aussi je te remercie. Durant ces trois années, j'ai pu profiter de ta vista et de ton énorme talent scientifique, ce travail de thèse te doit énormément (mais quoi de plus naturel ?).

Merci à Gérald Bastard, mon directeur de thèse officiel. Tu as toujours cherché à t'effacer, considérant que le «vrai» directeur de thèse était Cristiano, mais ton rôle dans ma thèse ne s'est pas borné qu'à de la figuration et une signature. Et puis, qui m'aurait appris «Noli me tangere» ? Merci Gérald, pour ta gentillesse et ton attention qui transpire à chaque instant sous le voile de ta pudeur.

Merci à Iacopo Carusotto, d'abord pour ses nombreuses et pertinentes suggestions et son sens aigü de la physique. Merci Iacopo, pour ton enthousiasme et ta bonne humeur communicative. Ciao bello !

Je remercie Alberto Bramati et David M. Whittaker d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit. De leur propre aveu, il s'agissait d'un mini-challenge, Alberto Bramati pour l'éventuelle complexité d'une thèse théorique, David Whittaker pour lire une thèse intégralement en français. Merci à Roland Combescot d'avoir accepté d'être président du jury malgré un agenda particulièrement chargé et de s'être attaché malgré toutes ses contraintes à la lecture du manuscrit.

Merci évidemment à Nicolas Regnault. Pour beaucoup de choses et d'abord celle que nous avons partagées, le bout de gras, les coups de gueule, l'info (gentoo rocks), les ragots. Merci Nicolas de m'avoir soutenu, motivé, relancé quand la motivation n'y était plus, merci pour ton savoir numérique incontournable et inévitable dans ce labo. J'espère avoir le droit de t'appeller mon ami.

Merci à Chrystos Flytzanis. Avec toi Chrystos, tes élèves spirituels sont gâtés par ton savoir, ton humour et ton attention. Ma soif de culture s'est toujours trouvée étanchée à tout point de vue à tes côtés. J'espère pouvoir retrouver ces moments privilégiés de discussion au détour d'un couloir...

Merci aux professionnels de la profession, les expérimentateurs de l'optique, Philippe Roussignol, Guillaume Cassabois et Christophe Voisin pour votre accueil toujours chaleureux. Merci à chacun de vous pour vos remarques bienveillantes et l'aide que vous m'avez apporté quand j'en ai eu besoin. Merci à Jérôme pour ton fameux lancer de thésarde dans la piscine à Maratea... Merci pour tous les échanges, scientifiques ou non, toujours agréables !

Merci à Christophe Mora, arrivé en cours de thèse, et que je quitte trop tôt. J'espère que nous pourrons continuer à échanger et que je pourrais toujours venir chez toi, surveiller Porcinette et t'éclater à PES en cachette de Chofie... Merci aussi pour la dédicace.

Merci à Bernard Plaçais, pour l'intérêt et l'attention que tu portes à tous les étudiants que tu croises, et desquels j'ai eu la chance de faire partie. Merci à Robson Ferreira, pour sa culture scientifique, sa bonne humeur et ses conseils de bon aloi. Merci à Patrice Mathieu pour m'avoir dégoté pour la fin de monitorat un enseignement pépère... Merci à Denis Côte, pour sa bonne humeur générale, et sa prévenance. Merci à Sukhdeep Dhillon, qui nous a caché jusque très tard qu'il faisait du rugby à Sale... Bon courage en France, mate !

Merci à Anne Matignon, perle indispensable au laboratoire, qui gère les lourdeurs administratives du CNRS autant que le caractère dissipé des doctorants et des chercheurs en général. Merci à Fabienne pour son peps directement importé de Basse-Terre !

En tant que théoricien, je voudrais faire un petit coucou spécial pour les croisés du libre, Xavier Monin, Francis Hulin-Hubard qui m'ont maintes fois tiré de mauvais pas infos (ah ! le passage à gcc 4...). Merci les gars et Linux rulez ! Je n'oublie pas Frédéric Ayrault, ni Rémy Portier, ni Zaïre Dissi, merci à vous trois pour le support !

Merci aux personnels du département de physique qui ont assuré un service exemplaire ces trois années, Huguette Guérard, Jean-Marc Jusseau, Denis Jaggi, Marie-Françoise Seyer, Anne-Françoise Duclos, Didier Courtiade, France Lamette. Merci au travail des bibliothécaires Monique Brouat, Anne Verzier, Dominique Giafferi, Marie-José Inamo et bien sûr Marie-Béatrice Billault qui m'a fort gentillement permis d'aller avec elle dans la réserve chercher l'émouvant article de Frenkel donnant son nom à l'exciton (ref 35), j'en

garde d'ailleurs un souvenir attendri. Merci à François-René Ladan, pour le vieux chouffisme...

Merci à tous mes camarades avec qui j'ai noué des liens un peu particuliers, et qui m'ont fait passer ces années comme des années dorées. Merci mon Michael à moi, d'avoir supporté un geek (good geek au dernier test) dans ton bureau pendant tout ce temps. Merci de ton soutien moral entre autres choses, merci de ton aide tous terrains. Je doute de jamais retrouver un compagnon de bureau à ta mesure... Merci à Olivier, marathonien au long cours qui ne reste jamais de glace (ahaha) devant l'injustice, et toujours prêt à donner un coup de main. Merci à Alice, thésarde dynamique, visiteuse régulière de notre bureau par tous les temps, partagée entre les soucis de manip, les déboires et les dernières nouvelles de son entourage... Merci pour ton courage exemplaire et pour le beau week-end à Locq ! Merci à Seb dont la bonhommie légendaire m'a apporté un certain recul sur chaque évenement, et qui m'a confié son siège aux discussions du conseil pluriannuel... Merci à Thomas G, la sérénité personnifiée du grand Hall. Merci à Pascalou pour le verre toujours porté haut, merci à Christine pour son étonnante simplicité, merci à Thomas N, pour les bonnes blagues, merci à Mathieu pour le rayon de soleil avé l'accent. Merci évidemment à Arnaud pour les valeurs du pays. Merci à Max, pour l'humour au kärcher, et les anecdotes Nobeliennes... Merci à Jean, qui est sur un chemin escarpé, mais je lui fait confiance pour franchir sa dernière étape. Merci enfin à Carole, pour des années... avec la couleur. Une américaine à Paris, et une française au Massachussets Institute, puisse-tu trouver ta place. Bon vent (pas trop froid) à Boston !

Merci aux personnes que j'ai pu croiser dans les confs et qui m'ont appris sur mon sujet, entre autres, Jacqueline Bloch, Luis Viña, Carlos Tejedor, Maurice Skolnick, Charles Leyder, Atac Imamoğlu, Dario Gerace, Ounsi El Daïf, Elisabeth Giacobino, Marco Romanelli...

Merci à tous ceux que j'ai croisé dans ce labo ou ailleurs et avec qui j'ai partagé qui un sourire, qui un café, qui un repas, Xavier Leyronas, Jean-Marc Berroir, Christian Gattli, Anne Denis, Philippe Pace, David Darson, Sophie Hameau, Yves Guldner, Louis-Anne de Vaulchier, Jean-Paul Maneval, Thierry Jolicoeur, Nathan, Zhen Yu, Nicolas P., Gao Bo, Bertand, Thomas D, Chéryl, Takis, Lorentz, François, Camille, Fabien, Alexandar, Phuong, Simone, Julien C, Julien G, Adrien, Manuel, Ivan, Vanessa, Pierre, Tchung, Florian, Thimothée, Luca, Laurent, Martial, Gregor, Yannick, Tonyo, Ian... Et à tout les gens que j'ai croisé et que j'ai lamentablement oublié.

Bien sûr, mais ils le savent, merci à ma famille, mes amis et à Aude pour leur soutien, et ce, malgré l'exotisme complet de mon sujet de thèse à leurs yeux.

Quelque part dans le multivers, la Grande A'tuin avance...

Table des matières

Introduction **7**

1 Introduction aux polaritons de cavité **11**
1.1 Les microcavités semi-conductrices 11
1.1.1 Le puits quantique 11
1.1.2 La cavité 15
1.1.3 Exemples de réalisation 18
1.2 Le couplage fort, la non-linéarité polariton-polariton 21
1.2.1 Le couplage exciton-photon, le polariton 22
1.2.2 Interaction entre excitations, Hamiltonien final 24

2 Génération d'états non-classiques par blocage quantique polaritonique **31**
2.1 Le modèle 32
2.1.1 La boîte photonique et le principe du blocage 32
2.1.2 Approximation monomode 34
2.1.3 Mise en équation du système 37
2.2 Mise en évidence du régime de blocage 42
2.2.1 La corrélation du second ordre 43
2.2.2 En excitation continue 49
2.2.3 En excitation pulsée 58
2.2.4 Contraintes et limites du modèle 62
2.3 Conclusion et perspectives 62

3 Corrélations quantiques signal-complémentaire dans des processus paramétriques dégénérés **65**
3.1 Présentation du modèle 67
3.1.1 Hamiltonien et équations de champ moyen 67
3.1.2 La méthode de Monte Carlo quantique 73

3.2 La fluorescence paramétrique 76
3.2.1 Sans désordre 76
3.2.2 Avec un potentiel désordonné 83
3.3 Les corrélations quantiques 85
3.3.1 Présentation des corrélations quantiques 85
3.3.2 Résultats du modèle de Monte Carlo 89
3.4 Modèle simplifié 95
3.4.1 Présentation du modèle 95
3.4.2 Résultats 97
3.5 Conclusion 101

Conclusion générale **103**

A Programmes numériques : schémas de calcul et méthodes **105**
A.1 Blocage quantique 105
A.2 Monte Carlo quantique 106

B Calcul analytique : Modèle entrée-sortie **109**
B.1 Calcul de l'Hamiltonien du système 109
B.2 Equations du mouvement 112
B.3 Résolution du système 114
B.4 Hypothèses simplificatrices 116
B.4.1 Cas de modes uniques 116
B.4.2 Cas d'une tâche 120
B.4.3 Lien avec la définition en fréquence 122

C Publications et acte de conférence **127**

Bibliographie **129**

Introduction

Depuis plus de trente ans [1], les hétérostructures semiconductrices sont étudiées intensivement pour la richesse des processus optiques qu'elles peuvent engendrer. Leurs applications suscitent un intérêt croissant en particulier dans les systèmes optoélectroniques quantiques [2]. Les processus optiques générés par ces structures permettent de leur côté de témoigner de la dynamique électronique au sein du matériau, constituant un outil inestimable pour sa compréhension. Grâce à cette connaissance des mécanismes mis en jeu, il est maintenant possible de manipuler de façon active le couplage lumière-matière de ces systèmes.

Parmi ces hétérostructures, les microcavités semiconductrices, issues des recherches sur les lasers à cavité verticale ou «VCSEL» [3, 4], ont largement contribué et contribuent encore à la compréhension des phénomènes ayant lieu au sein de ces matériaux. Cette structure particulière repose sur le confinement du champ électromagnétique dans une microcavité d'une part, et sur le confinement des porteurs dans un puits quantique judicieusement placé au sein de la microcavité d'autre part. Les deux champs interagissent au travers de l'interaction dipolaire électrique, et atteignent le régime de couplage fort, analogue au régime de couplage fort des atomes en cavité [5–7]. Les excitations élémentaires de ce régime sont des particules hybrides appelées polaritons [8], états mixtes excitons-photons. Le caractère hybride de ces particules engendre une phénoménologie particulièrement riche, menant à un grand nombre d'observations remarquables de par les propriétés optiques mises en évidence. La partie excitonique des polaritons, responsable des interactions entre particules, donne naissance à des phénomènes non-linéaires tels que l'amplification et la photoluminescence paramétrique [9, 10], l'oscillation paramétrique [11, 12] ou la bistabilité optique [13, 14].

A l'origine de ces phénomènes non-linéaires, le couplage paramétrique des excitons peut être exploité afin d'obtenir des états non-classiques du champ, à l'origine de paires de photons corrélés de façon non classique [15, 16]. Ainsi, l'utilisation de ces propriétés comme moyen d'accès aux régimes non-classiques commence à voir le jour dans les expériences, à l'image de la condensation de Bose-Einstein des polaritons [17]. Or ces propriétés de corrélations de photons jouent un rôle majeur dans les communications quantiques [18]. Dans un tel contexte, nous avons cherché à comprendre les mécanismes qui régissent ces systèmes afin d'expliquer les effets purement quantiques observés, dans des régimes d'excitation modérée. Nous nous sommes intéressés en particulier aux deux cas limites suivants : dans un premier temps, le polariton est ultra-confiné dans une boîte les effets non-linéaires ont lieu avec un faible nombre d'excitons ; dans l'autre cas, les polaritons sont dilués dans le système, les effets paramétriques sont alors à l'origine de corrélations quantiques entre polaritons.

En régime de couplage fort, le confinement des photons implique également un confinement des porteurs, soumis de leur côté à l'interaction Coulombienne. Grâce aux progrès dans la fabrication des microcavités, il est possible de fabriquer des boîtes telle que le confinement des particules [19] produit des effets non-linéaires importants dès lors que plus d'une particule est injectée dans le système. On parle alors de régime de blocage quantique [20–22]. Ce régime est caractérisé par une statistique d'émission sub-poissonienne, impossible à décrire de façon classique ou semi-classique.

Les effets non-linéaires sont également à la source de la création des paires de polaritons signal-complémentaire, dont les propriétés de corrélations ont été observées expérimentalement [23, 24]. En régime de fluorescence paramétrique, ces propriétés de corrélations, issues du couplage paramétrique entre les modes du système, sont susceptibles de faire apparaître des corrélations quantiques [25] au sein des paires signal-complémentaire émises par la fluorescence.

Le premier chapitre du manuscrit est une introduction aux microcavités semiconductrices et au couplage fort exciton-photon. Nous y introduirons la modélisation du système que nous utiliserons dans le reste de la thèse. Cette modélisation rend compte notamment des interactions exciton-exciton et exciton-photon.

Le deuxième chapitre expose le problème du confinement des polaritons dans une boîte photonique. Nous expliquons comment utiliser l'interaction Coulombienne entre les excitons pour créer un phénomène de blocage, et mon-

trons qu'il est possible d'obtenir une source lumineuse non-classique, générant des états de Fock. Sous certaines conditions, il est alors possible d'obtenir une source de photons uniques dont nous détaillons les différents avantages et inconvénients.

Le troisième et dernier chapitre présente une étude sur les corrélations quantiques issues de la fluorescence paramétrique dégénérée dans une configuration symétrique à deux pompes. Nous explorons les différents mécanismes qui régissent la dynamique d'un système dilué, en nous penchant tout particulièrement sur les phénomènes influant sur les corrélations au sein des paires de photons. Nous montrons qu'il est possible d'observer des corrélations quantiques dans le système, et nous montrons l'impact d'un désordre statique de la structure sur la nature des corrélations.

Chapitre 1

Introduction aux polaritons de cavité

Dans ce chapitre, nous introduisons brièvement la physique des microcavités accompagnée d'un cadre formel général. Nous présenterons les excitons ainsi que les photons dans les microcavités, et nous exposerons le régime de couplage fort exciton-photon donnant naissance aux particules hybrides appelées polaritons. Enfin, nous introduirons l'interaction exciton-exciton, à l'origine des phénomènes non-linéaires du système.

1.1 Les microcavités semi-conductrices

Les microcavités semiconductrices, que nous allons étudier en particulier, sont des résonateurs optiques encadrant un ou plusieurs puits quantiques. Nous rappelons rapidement la physique des puits quantiques et des microcavités et présentons quelques exemples d'hétérostructures qui peuvent être réalisées aujourd'hui.

1.1.1 Le puits quantique

Présentation des excitons

Les puits quantiques sont issus d'un empilement de couches de matériaux semiconducteurs différents suivant un axe appelé «axe de croissance». Chaque

semiconducteur possède une bande d'énergie interdite ou «gap» différent, séparant la bande de valence, dernière bande remplie d'électrons et la bande de conduction, vide à température nulle. Une excitation lumineuse ajustée à l'énergie de cette bande interdite fait transiter un électron de la bande de valence vers la bande de conduction, laissant un espace vacant dans la bande de valence appelé «trou». Le trou et l'électron sont appariés par une forte attraction Coulombienne, donnant naissance à une quasi-particule appelée exciton [26–28] présentant de fortes similarités avec l'atome d'hydrogène. Lorsque cette particule est détruite un photon est alors émis.

Dans le cas d'un puits quantique, les niveaux de conduction et de valence subissent une discontinuité (Figure 1.1) le long de l'axe de croissance du matériau, créant un puits de potentiel pour les différents porteurs de charge du système. Ainsi, le mouvement d'un exciton créé dans le puits quantique reste confiné dans le plan orthogonal à l'axe de croissance. Notre étude étant orien-

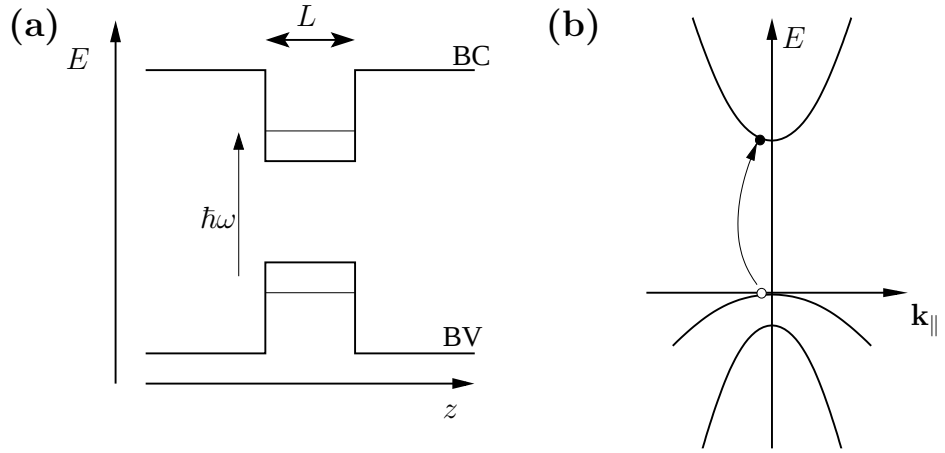


Fig. 1.1: (a) Niveaux d'énergie dans un puits quantique et transition interbande entre les bandes de valence (BV) et de conduction (BC) correspondantes. (b) Dispersion des bandes et processus de création d'une paire électron-trou correspondant.

tée sur une excitation résonante des trous et des électrons de conduction, nous utilisons la description d'un modèle à deux bandes pour représenter la bande d'énergie interdite d'un semiconducteur. Puisque nous considérons l'évolution des excitons dans un puits quantique, il n'y a pas de dégénérescence entre les trous légers et les trous lourds [29], seule l'excitation des trous lourds sera prise en compte par la suite. Les énergies de la bande de conduction et de la bande

de valence seront appelés $E_{1,\mathbf{k}}$ et $E_{2,\mathbf{k}}$ respectivement.

L'optique des nanostructures impose une étude des états électroniques sur de petits vecteurs d'onde. Dans ce cadre, on peut utiliser l'approximation de la masse effective, en considérant des dispersions paraboliques, soit $E_{1,\mathbf{k}} = E_{gap} + \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m_e}$ et $E_{2,\mathbf{k}} = -\frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m_h}$, avec E_{gap} l'énergie de séparation entre la bande de valence et la bande de conduction, et m_e et m_h les masses effectives des bandes de conduction et de valence respectivement.

Dans le cadre de la seconde quantification, on se donne les opérateurs de destruction d'électrons dans la bande de valence $\hat{c}_{2,\mathbf{k}}$ et dans la bande de conduction $\hat{c}_{1,\mathbf{k}}$. Muni de ces définitions, on définit la création d'un exciton ($|\Psi_X\rangle$) à partir d'un état fondamental ($|G\rangle$) en faisant agir une combinaison linéaire du produit d'opérateurs de création d'électron dans la bande de conduction et de destruction d'électron dans la bande de valence :

$$|\Psi_X\rangle = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{k},\mathbf{q}) \hat{c}^{\dagger}_{1,\mathbf{q}+\frac{m_e}{M}\mathbf{k}} \hat{c}_{2,\mathbf{q}-\frac{m_h}{M}\mathbf{k}} |G\rangle \ , \tag{1.1}$$

où $\mathbf{k}$ et $M = m_e + m_h$ représentent respectivement le moment du centre de masse et la masse de la paire électron-trou. L'amplitude $A(\mathbf{k},\mathbf{q})$ est la transformée de Fourier de la fonction enveloppe de l'exciton [30]. Les excitons sont donc composés de paires de fermions, n'ayant pas de statistique définie a priori. Ce type de problème est semblable à celui d'un atome de type hydrogénoïde. L'état fondamental de l'exciton est alors associé à l'état $1s$ et correspond à une résonance aiguë dans le spectre d'absorption du puits quantique. L'opération de création d'un exciton peut être associée à un opérateur :

$$\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{k},\mathbf{q}) \hat{c}^{\dagger}_{1,\mathbf{q}+\frac{m_e}{M}\mathbf{k}} \hat{c}_{2,\mathbf{q}-\frac{m_h}{M}\mathbf{k}} \ , \tag{1.2}$$

que nous appellerons opérateur de création d'un exciton de vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Cet opérateur n'est pas exactement bosonique. En effet, au premier ordre en densité dans un système à deux dimensions, le commutateur [31, 32] de cet opérateur est :

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}] = 1 - O(na_B^2) \ , \tag{1.3}$$

où n est le nombre d'excitons et a_B le rayon de Bohr effectif de l'exciton. On

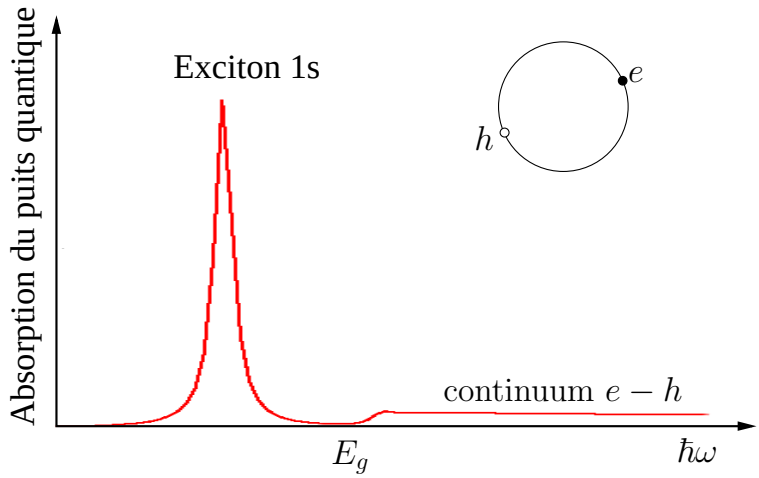


FIG. 1.2: Absorption du puits quantique correspondant à l'orbite fondamentale 1s de l'exciton. A plus haute excitation, l'électron et le trou sont en dehors du puits quantique et l'on créé des paires électron-trou non corrélées.

peut donc considérer l'exciton comme un boson tant que la densité électronique d'excitation est petite par rapport à a_B^2, en d'autre termes tant que la distance entre deux excitons est plus grande que leur extension. Le reste de notre étude sera effectué dans le régime de faible excitation, c'est à dire pour $na_B^2 \ll 1$. Dans le reste du manuscrit les excitons sont considérés comme des bosons.

Pour étudier la dynamique du système, nous avons besoin du hamiltonien correspondant à la configuration électronique comprenant l'interaction Coulombienne qui est donné par :

$$\mathcal{H}_{el} = \sum_{j\in\{1,2\},\mathbf{k}} E_{j,\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{j,\mathbf{k}} \hat{c}_{j,\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,j'\in\{1,2\}^2 \\ \mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}}} V_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{j,\mathbf{k}+\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{j',\mathbf{k}'-\mathbf{q}} \hat{c}_{j',\mathbf{k}'} \hat{c}_{j,\mathbf{k}} \ . \tag{1.4}$$

Le facteur $V_{\mathbf{q}}$ contient l'interaction Coulombienne. Ici l'exciton est confiné dans un plan, donc $V_q = \frac{2\pi e^2}{\epsilon A q}$, où e est la charge élémentaire, ϵ la constante diélectrique du matériau et A la zone de quantification macroscopique. Nous introduirons plus tard l'opérateur $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ dans ce hamiltonien pour obtenir une description complète du système uniquement par l'intermédiaire d'opérateurs bosoniques, et simplifier ainsi ce problème à N corps.

1.1.2 La cavité

Photons confinés

Une microcavité est un puits quantique placé au sein d'une cavité de type Fabry-Pérot. Ici, la cavité est créée par un empilement de couches de semiconducteurs d'indices de réfraction alternativement faibles et élevés [33] appelé miroirs de Bragg (voir Figure 1.3). L'épaisseur des couches est ajustée au quart de la longueur d'onde souhaitée λ de façon à obtenir une interférence constructive au milieu de la cavité pour la fréquence $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$. Ces miroirs pré-

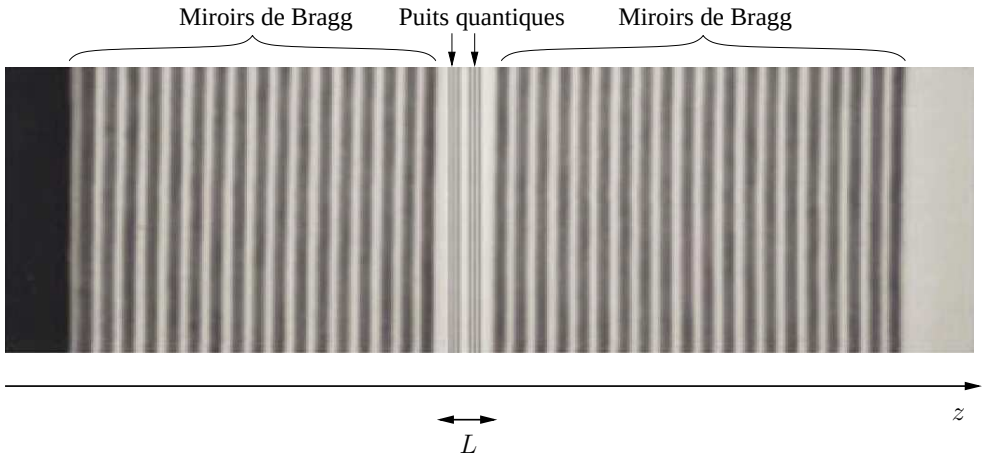


FIG. 1.3: Exemple de microcavité semiconductrice (imagerie par microscopie électronique à balayage) [34]. Les deux alliages utilisés dans les miroirs sont comme pour la plupart des cavités l'$Al_xGa_{1-x}As$, d'indice $n_1 = 2.96$ et l'$AlAs$ d'indice $n_2 = 3.48$ pour $x = 0.1$. La cavité (GaAs) au centre des miroirs de Bragg qui contient des puits quantiques d'InGaAs est de dimension $L = 3\lambda/2$ soit 0.35 μm.

sentent une réflectivité proche de 1 sur un large spectre de fréquence (Figure 1.4). Du fait de la grande qualité de ces miroirs, on obtient une cavité d'une grande finesse permettant un temps de vie élevé du photon dans la cavité [35].

Dans une telle cavité, le vecteur d'onde du photon dans la direction de croissance de la cavité z est quantifié et s'écrit $k_z = \frac{2\pi}{\lambda} n_c$ (n_c étant l'indice de réfraction du semiconducteur de la cavité). On notera dans la suite $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde compris dans le plan orthogonal à l'axe z désignant la composante planaire du vecteur d'onde total de la particule. La dispersion de l'énergie du

photon dans la cavité s'écrit donc :

$$\omega_C(\mathbf{k}) = \omega_C^0 \sqrt{1 + \mathbf{k}^2/{k_z}^2} \tag{1.5}$$

où $\omega_C^0 = n_c \frac{2\pi c}{\lambda}$, avec c la vitesse de la lumière dans le vide. Dans le formalisme de la seconde quantification, le Hamiltonien contenant l'énergie cinétique du champ électromagnétique s'écrit [36] :

$$\mathcal{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_C(\mathbf{k}) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \ , \tag{1.6}$$

où $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ est l'opérateur bosonique de création d'un photon d'énergie $\omega_C(\mathbf{k})$ et de vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Il suit la règle de commutation : $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}$. L'origine de l'énergie pouvant être choisie arbitrairement, on se débarrasse du terme constant $\sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_C(\mathbf{k})/2$ qui n'a pas d'incidence dans notre étude.

Couplage à l'environnement

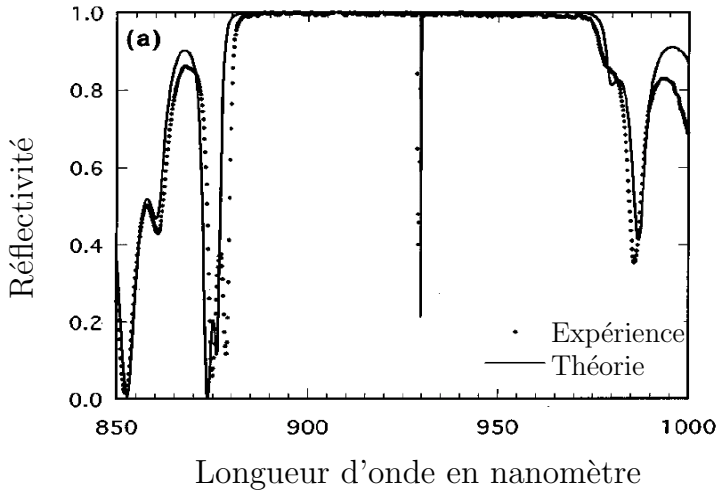


FIG. 1.4: Exemple de spectre obtenu pour une cavité vide [37]. La bande centrale correspond à la bande interdite percée au milieu par la raie de résonance. La largeur de raie obtenue ici est de 0.95 Å.

L'introduction d'un champ électromagnétique dans la cavité s'accompagne de pertes radiatives par le même canal. Ceci correspond à un couplage entre les excitations de cavité et le champ électromagnétique extérieur, indispensable à

l'observation de la dynamique du système. Il existe cependant d'autre pertes radiatives perdues pour l'observation, comme les modes de fuite qui sont émis en totalité dans le substrat [35,38]. Ces modes de fuite sont dus aux résonances entre la structure multicouche de miroirs de Bragg et la cavité et apparaissent pour des vecteurs d'ondes du plan $\mathbf{k}_{\parallel}$ importants. Nous ne considérons ici que des processus à petits vecteurs d'onde, les modes de fuites ne seront donc pas pris en compte dans la suite du manuscrit.

Si l'on reste dans une gamme de fréquences et un angle d'excitation suffisamment réduits, les pertes se réduisent cependant simplement à l'élargissement homogène de la raie lumineuse fixée par la finesse de la cavité. Pour introduire ce phénomène, nous utiliserons l'approximation dite quasi-mode, valable pour des cavités de grande finesse [39]. On modèle alors les pertes radiatives à travers un couplage au continuum du champ électromagnétique extérieur. Si l'on appelle $\alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega}$ l'opérateur de destruction d'un photon extérieur de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et d'énergie $\hbar\omega$, le Hamiltonien du couplage s'écrit alors :

$$H_{qm} = \int d\omega \left(\sum_{\mathbf{k}} g[\omega] \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega} + h.c. \right) \ , \tag{1.7}$$

où la constante de couplage $g[\omega]$ varie lentement en fonction de la fréquence autour de la résonance [40]. Quand on excite le système en appliquant un champ extérieur, l'opérateur $\alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega}$ se comporte comme un champ classique et peut être remplacé par sa valeur $\langle \alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega} \rangle$. L'équation d'évolution de l'opérateur $\alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega}$ s'écrit :

$$i\hbar \frac{d\alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega}}{dt} = \hbar\omega \alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega} + g[\omega] \hat{a}_{\mathbf{k}} \ . \tag{1.8}$$

La résolution formelle de cette équation est :

$$\alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega}(t) = \alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega}(0) e^{-i\omega t} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' g[\omega] \hat{a}_{\mathbf{k}}(t') e^{-i\omega(t-t')} \ . \tag{1.9}$$

Dans le cas d'une cavité couplée à l'extérieur, l'équation de Heisenberg régissant la dynamique du mode $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ s'écrit :

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_{\mathbf{k},\omega}}{dt} = \hbar\omega_C \hat{a}_{\mathbf{k},\omega} + \int d\omega g[\omega] \alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega}(t) \ . \tag{1.10}$$

On utilise l'expression formelle de $\alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega}(t)$ dans cette dernière équation, et il vient l'équation de Langevin suivante :

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k},\omega}}{dt} = -i\omega_C \hat{a}_{\mathbf{k},\omega} - \gamma_C \hat{a}_{\mathbf{k},\omega} - iF_{\mathbf{k}}(t) \ , \tag{1.11}$$

avec la largeur de raie $\hbar\gamma_C = \frac{2\pi}{\hbar} g^2$ ainsi que la force de Langevin :

$$\hbar F_{\mathbf{k}}(t) = \int d\omega g[\omega] \alpha^{ext}_{\mathbf{k},\omega}(t) e^{-i\omega t} \ . \tag{1.12}$$

1.1.3 Exemples de réalisation

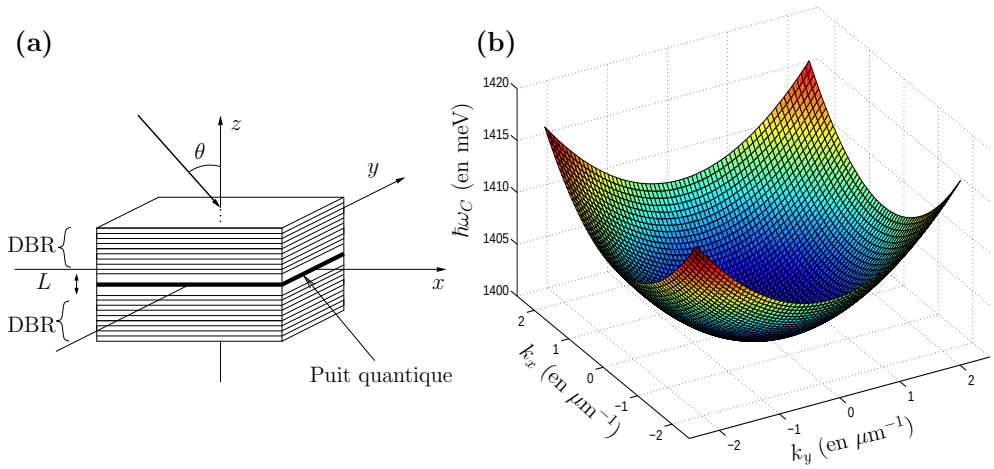


FIG. 1.5: (a) Schéma de principe d'une microcavité planaire excitée par un faisceau avec un angle d'incidence θ (ici exagéré pour plus de clarté), les miroirs de Bragg sont notés DBR (Distributed Bragg Reflectors). (b) Dispersion de l'énergie photonique dans l'espace réciproque du plan de la cavité (k_x, k_y).

Nous présentons ici quelques exemples de cavités semiconductrices de différentes configurations géométriques. Nous montrerons d'abord les microcavités planaires, pour ensuite aborder des structures de dimension inférieure comme des fils ou des boîtes, enfin nous présenterons d'autres systèmes étudiés dans lesquels apparaît le couplage exciton-photon.

Microcavités planaires

Les lasers à cavité verticale émettant par la surface ou VCSEL ont inspiré la première réalisation des microcavités semiconductrices [3] fabriquées par épitaxie à jet moléculaire. Un historique de l'acteur principal de cette découverte est présenté dans la référence [4]. Un exemple de cavité planaire est présenté Figure 1.3, le schéma de principe correspondant est présenté Figure 1.5. Dans ce type de cavité, la dispersion du mode photonique présente une symétrie de rotation par rapport à l'axe z.

Microcavités à dimensionalités réduites

Le principe de la microcavité semiconductrice est de confiner les modes photoniques et excitoniques de façon à obtenir un couplage fort entre les deux particules. Le confinement des modes excitoniques est un champs de recherche très actif, en particulier dans les systèmes tels que les boîtes quantiques [41,42]. Ces systèmes sortant du cadre de notre étude, nous ne présenterons ici que les structures conçues pour confiner les modes photoniques dans des structures de géométries particulières, comme des fils ou des boîtes.

Pour fabriquer ces structures, deux techniques sont utilisées principalement, la gravure et la recroissance. La première consiste en une croissance classique [44] de la cavité, puis une gravure découpant la forme de cavité souhaitée profondément dans le matériau, jusqu'à plusieurs couches de miroirs de Bragg sous la cavité. Un exemple de structure obtenue avec ce procédé est donné Figure 1.6.

La recroissance, technique plus récente [19], se déroule en plusieurs temps de croissance. On fait croître les miroirs puis la cavité par les techniques usuelles. Puis, avant de faire recroître une série de miroirs sur cette cavité, on fait croître la cavité localement à l'aide d'un masque, ce qui change la longueur d'onde de résonance dans l'ilôt ainsi créé. La croissance des miroirs reprend alors sur la structure (Figure 1.7). La qualité des premiers échantillons obtenus par cette technique est prometteuse puisqu'elle dépasse la qualité des échantillons obtenus par gravure. Dans une boîte, les modes photoniques sont complètement discrétisés, permettant l'observation de phénomènes très riches [17] dûs au confinement des particules.

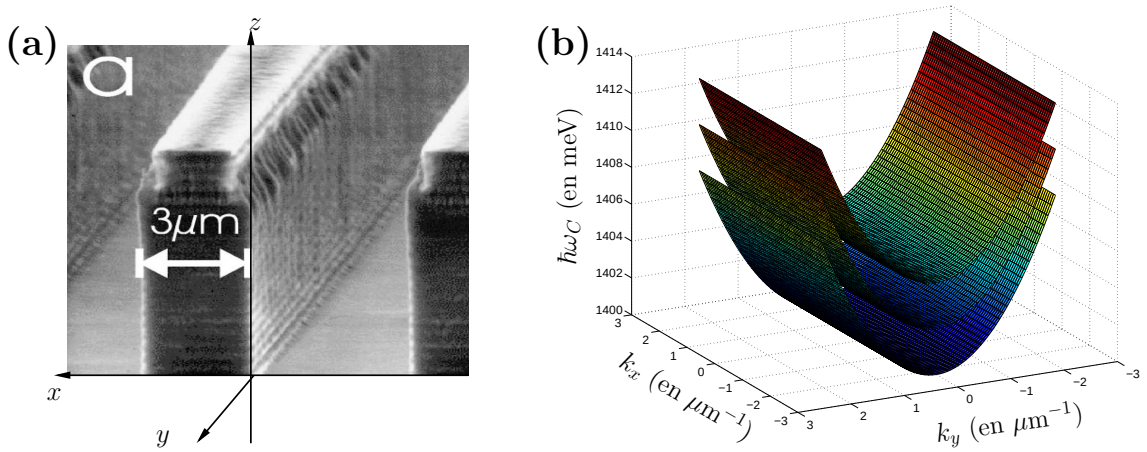


FIG. 1.6: (a) Fils obtenus par gravure (image au Microscope Électronique à Balayage) l'interface air-cavité joue le rôle de barrière de potentiel pour le photon confiné [43]. (b) Dispersion des modes photoniques des cavités longilignes. Dans un fil, le confinement latéral du photon donne naissance à une série de modes discrétisés latéralement.

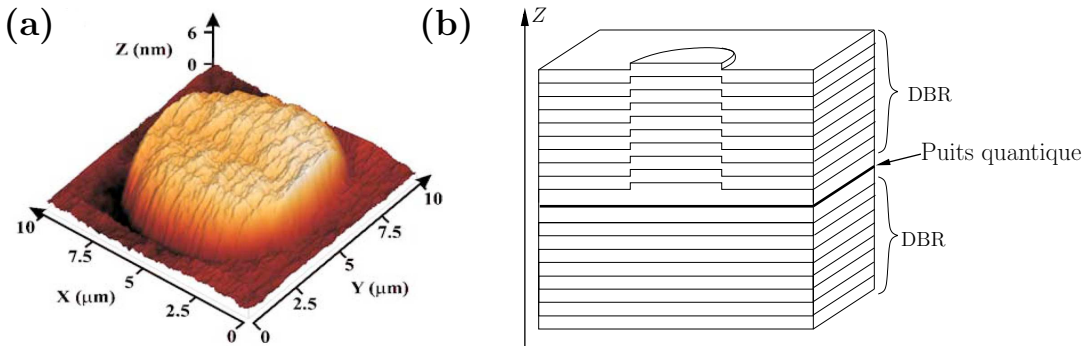


FIG. 1.7: (a) Image par microscopie à force atomique d'une microcavité contenant une boîte photonique obtenue par recroissance [19]. L'image représente la surface des miroirs au niveau de la boîte. (b) La représentation schématique de la microcavité montre la propagation de la déformation créée au-dessus de la cavité.

Ces modifications de la géométrie de la cavité peuvent se rapporter à une modification de la taille de la cavité en fonction du vecteur position dans le plan $\mathbf{x}$. On ajoute alors un terme de potentiel $V_C(\mathbf{x})$ à l'énergie cinétique du photon. Ce terme peut également contenir les effets du désordre d'une cavité

défectueuse par l'intermédiaire d'une composante aléatoire du potentiel.

Autres systèmes

D'autres systèmes sont proposés pour observer le couplage fort exciton-photon, en changeant par exemple la composition du puits quantique [45, 46] pour des expériences à température ambiante. La technique de confinement du champ électromagnétique peut également changer de nature par exemple en utilisant des cristaux photoniques [47–49]. Ces matériaux sont capables d'atteindre des facteurs de qualité très élevés pour des cavités de dimensions réduites. Nous verrons plus tard que la discrétisation des modes dans la boîte

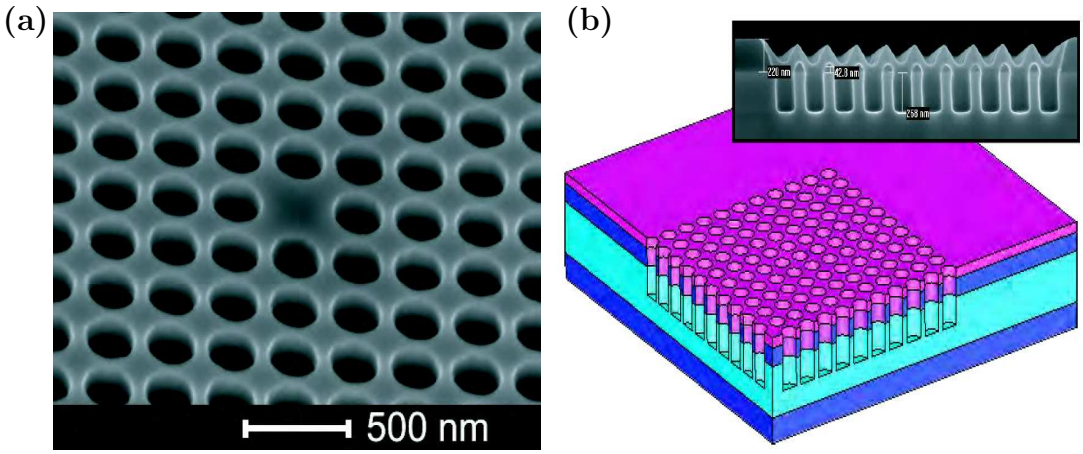


Fig. 1.8: (a) Cavité créée par un cristal photonique [50]. Les modes photoniques sont confinés par le réseau de trous. (b) Vue de coupe du cristal.

photonique peut être utilisée afin de produire des états non-classiques.

1.2 Le couplage fort, la non-linéarité polariton-polariton

Le principal intérêt qu'ont suscité les microcavités à leur début fût la création d'un régime de couplage fort en physique des solides alors que ce couplage était observé en même temps en physique atomique [51, 52]. Ici, le rôle de l'atome est joué par le puits quantique, où l'exciton est l'analogue de l'état excité de l'atome. La différence principale entre le système atome-cavité et la

microcavité semiconductrice est que si l'exciton est considéré comme un boson et donc un oscillateur harmonique, l'atome à deux niveaux est, lui, un boson composite. Dans la microcavité, le photon, coincé entre les deux miroirs, est absorbé par le puits quantique avec lequel il est à résonance pour former un exciton, puis est ré-émis dans la cavité et ainsi de suite, jusqu'à la sortie du photon de la cavité.

1.2.1 Le couplage exciton-photon, le polariton

Le couplage linéaire exciton-photon

L'interaction entre le milieu diélectrique et le champ électromagnétique se traite comme un couplage entre électrons et photons [8, 53, 54] :

$$\mathcal{H}_I = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} G(\mathbf{q}) \hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}_{1,\mathbf{k}+\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{2,\mathbf{k}} + h.c. \ , \tag{1.13}$$

où $G(\mathbf{q})$ est l'élément de la matrice du moment dipolaire électrique. En introduisant l'opérateur bosonique de destruction des excitons dans ce hamiltonien, et en négligeant les termes anti-résonants, on obtient un Hamiltonien effectif linéaire et des termes supplémentaires non-linéaires que nous introduirons plus tard. Cette méthode, qui considère des interactions effectives, se rapproche partiellement des études effectuées en physique atomique sur des systèmes plus complexes [55, 56] comme les atomes de Rubidium ou pour les gaz de fermions comme le lithium. Ce Hamiltonien effectif se découpe en plusieurs termes, associés aux différentes interactions entre les particules du système. L'énergie cinétique de l'exciton est obtenue à partir du terme d'ordre le plus bas [57], le terme d'énergie cinétique du Hamiltonien (1.4) :

$$\mathcal{H}_{exc} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_X(\mathbf{k}) \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \tag{1.14}$$

où $\omega_X(\mathbf{k}) = \omega_X^0 + \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2M}$ est l'énergie de l'exciton 1s, avec $M = m_e + m_h$ et $\omega_X^0 = E_g - \frac{e^2}{2\epsilon a_B}$. La dispersion de l'exciton dans les puits quantiques que nous étudions est très plate par rapport à la dispersion du photon ($\frac{\hbar c}{2k_z} \gg \frac{\hbar^2}{2M}$). Puisque nous nous intéressons à des vecteurs d'ondes faibles, on négligera la dispersion de l'exciton dans le reste de notre étude, et donc : $\omega_X(\mathbf{k}) = \omega_X^0$. De même, on trouve le terme de couplage exciton-photon issu de la transformation

de l'équation (1.13) :

$$\mathcal{H}_{\Omega_R} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_R \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\right) \tag{1.15}$$

Le facteur de couplage Ω_R est appelé fréquence de Rabi du vide et dépend de la nature du puits quantique et du recouvrement entre les fonctions d'onde du photon et de l'exciton [40]. Nous supposerons ce terme réel dans la suite de l'étude.

Présentation des polaritons

L'addition des termes linéaires de l'hamiltonien effectif s'écrit :

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathcal{H}_{ph} + \mathcal{H}_{exc} + \mathcal{H}_{\Omega_R} \\ H_0 &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_C(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_X(\mathbf{k})\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_R \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\right) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ce nouvel Hamiltonien décrit l'interaction entre les photons et les excitons dans une cavité parfaitement fermée dans un régime de faible densité. Les états propres de ce Hamiltonien sont donc des états mixtes exciton-photon appelés polaritons. Ainsi H_0 peut être diagonalisé par une transformation unitaire et s'écrit alors dans la nouvelle base :

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{LP}(\mathbf{k})\hat{p}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{p}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{UP}(\mathbf{k})\hat{u}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{u}_{\mathbf{k}} \tag{1.17}$$

où $\hat{p}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{u}_{\mathbf{k}}$ sont les opérateurs bosoniques de destruction de particules appelées polaritons de la branche basse (LP) et de la branche haute (UP) respectivement, qui constituent les modes propres du système. Les énergies correspondant à ces modes propres sont données par la formule suivante :

$$\omega_{UP,LP}(\mathbf{k}) = \frac{\omega_C(\mathbf{k}) + \omega_X(\mathbf{k})}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_C(\mathbf{k}) - \omega_X(\mathbf{k}))^2 + 4(\Omega_R)^2} \tag{1.18}$$

Les opérateurs $\hat{p}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{u}_{\mathbf{k}}$ sont obtenus à partir d'une combinaison linéaire des opérateurs $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}}$. La transformation unitaire liant ces opérateurs s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_{\mathbf{k}} \\ \hat{u}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\mathbf{k}} & C_{\mathbf{k}} \\ -C_{\mathbf{k}} & X_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_{\mathbf{k}} \\ \hat{a}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

où les coefficients réels $C_{\mathbf{k}}$ et $X_{\mathbf{k}}$ sont appelés coefficients de Hopfield [8] et sont donnés par :

$$C_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{LP}(\mathbf{k})-\omega_C(\mathbf{k})}{\Omega_R}\right)^2}} \quad , \quad X_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_R}{\omega_{LP}(\mathbf{k})-\omega_C(\mathbf{k})}\right)^2}} \tag{1.20}$$

La transformation étant unitaire, les deux coefficients sont liés par la relation $X_{\mathbf{k}}^2 + C_{\mathbf{k}}^2 = 1$. D'autre part, $X_{\mathbf{k}}^2$ et $C_{\mathbf{k}}^2$ représentent respectivement la part excitonique et photonique du polariton LP. En régime de couplage fort (c'est-à-dire si $\Omega_R > \gamma_X, \gamma_C$, ce qui sera toujours le cas dans notre étude), il existe donc deux branches résonantes de part et d'autre de l'énergie de l'exciton. La dispersion de ces modes de résonance est représentée Figure 1.9 ainsi que le premier spectre mettant en évidence le régime de couplage fort dans les microcavités [3].

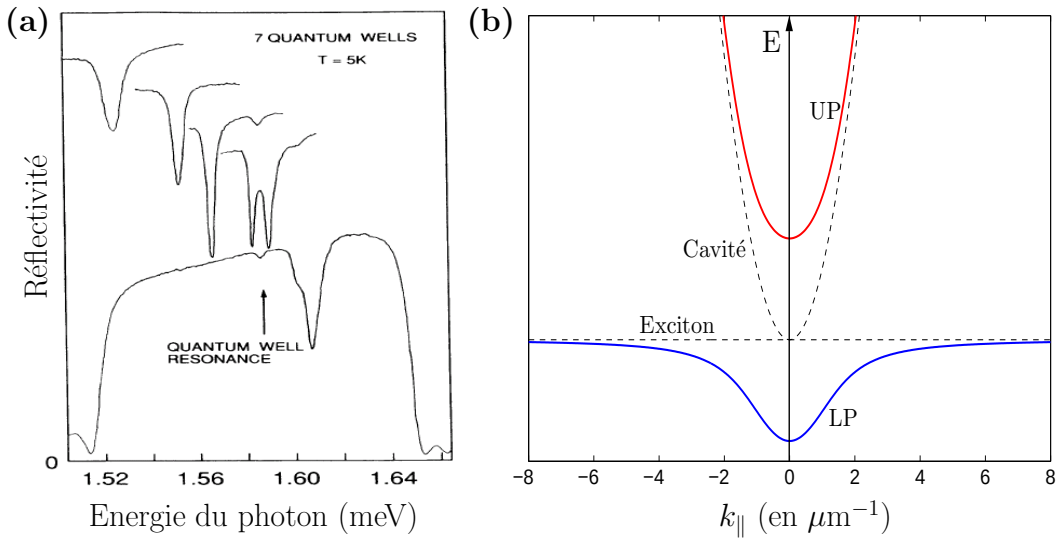


FIG. 1.9: (a) Spectres de réflectivité obtenus à 5K pour différents désaccords entre la cavité et le puits quantique [3]. (b) Courbes de dispersion des polaritons (lignes continues), et de l'exciton et du photon (traits pointillés).

1.2.2 Interaction entre excitations, Hamiltonien final

La richesse de la physique des microcavités est due à la nature duale des polaritons. Ces particules sont introduites et extraites de la cavité par rayonne-

ment, tandis que la partie excitonique est sensible aux interactions. dues aux forces Coulombiennes. Ce problème à N corps peut être approché en considérant les excitons comme les excitations élémentaires du milieu [58] et en traitant la corrélation Coulombienne comme une interaction effective entre excitons. Ainsi, le Hamiltonien (1.4) est transformé en un Hamiltonien effectif de bosons en interactions. Pour aboutir au Hamiltonien effectif, on utilise une méthode [32, 59, 60] basée sur la transformation d'Usui [61], qui transforme le Hamiltonien (1.4) en une somme infinie de produits d'opérateurs bosoniques par l'intermédiaire d'une transformation unitaire. Cette somme infinie est alors traitée comme le développement en puissance de densité de paires de fermions. Le Hamiltonien est finalement obtenu en conservant les termes jusqu'au second ordre, ce qui est justifié pour une densité de porteurs faible. Notons que des méthodes récentes [62] aboutissent à des coefficients d'interaction différents. Toutefois ceux-ci sont du même ordre de grandeur, notamment un facteur $\simeq$ 2.1 pour le cas où l'exciton est en résonance avec le photon [62]. En ce qui concerne la comparaison avec l'expérience, soulignons d'une part que le rayon de Bohr de l'exciton n'est pas connu très précisément (renormalisation en fonction de la densité, confinement variable du puits quantique), et que, d'autre part, la densité d'excitations n'est pas connue avec une précision très élevée (spot d'excitation inhomogène). Dans cette thèse, nous avons utilisé des coefficients issus de l'expérience et dans certains cas, nous avons étudié de façon systématique la dépendance des résultats en la valeur spécifique de l'interaction.

Interaction Coulombienne

Nous considérons le terme d'interaction effectif exciton-exciton avec un potentiel constant, de la même manière que l'interaction entre atomes dans un gaz d'atomes froids [55]. En effet, puisque nous nous intéressons à des vecteurs d'onde petits devant λ_X^{-1}, λ_X étant le rayon de l'exciton à deux dimensions, le potentiel d'interaction effectif $V_{\mathbf{q}}^{XX}$ évolue peu en fonction de $\mathbf{q}$ [57, 60]. On écrit donc $V_{\mathbf{q}}^{XX} \simeq V_0^{XX}$ et il vient :

$$H_{XX} \simeq \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} V_{\mathbf{0}}^{XX} \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \ , \tag{1.21}$$

où nous avons négligé le terme de l'énergie cinétique renormalisé par l'interaction d'échange [57,60]. La valeur du coefficient d'interaction est : $V_0^{XX} = \frac{6e^2\lambda_X}{A\epsilon}$.

Interaction de saturation (Pauli)

De même, un terme de saturation issu du couplage exciton-photon (1.13) apparaît dans le Hamiltonien effectif :

$$H_{XC}^{sat} = -\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} \frac{\hbar\Omega_R}{n_{sat}A} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} + h.c. \ , \tag{1.22}$$

avec $n_{sat} = \frac{7}{16\pi\lambda_X^2}$ la densité de saturation de l'exciton [57,60,63]. Ce terme anharmonique exprime la saturation du couplage exciton-photon dû au principe de Pauli.

Hamiltonien final

Nous avons détaillé les différentes interactions qui ont lieu dans le système, nous pouvons maintenant établir le Hamiltonien du système pour une cavité planaire excitée par un champ classique. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}
H =& H_0 + H_{XX} + H_{XC}^{sat} + H_{qm} \\
H =& \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_C(\mathbf{k}) \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_X^0 \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_R \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} V_0^{XX} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} - \left\{ \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} \frac{\hbar\Omega_R}{n_{sat}A} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} + h.c. \right\} \\
&+ \sum_{\mathbf{k}} \hbar F_{\mathbf{k}}(t) \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} + h.c. \ .
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Notons que ce Hamiltonien n'inclut pas les termes de pertes. Celles-ci seront insérées dans les équations de la dynamique de la cavité. Nous avons déjà traité le cas des pertes dues au photon, il convient donc d'identifier les pertes dues à l'exciton afin de les intégrer dans notre étude.

Effets du désordre et pertes non-radiatives

Pour prendre en compte les pertes dues à l'exciton, on introduit l'élargissement de l'exciton, qui prend principalement en compte l'élargissement inhomogène dû au désordre et l'élargissement homogène dû aux pertes non-radiatives [35]. Les premières microcavités présentaient des puits quantiques de surfaces très rugueuses. Cette rugosité, ou désordre, est responsable de la diffusion des excitons. Dans un puits quantique fortement désordonné l'élargissement non-homogène [64, 65] domine les autres effets d'élargissement. Notons que cet effet conserve néanmoins la phase puisqu'il s'agit d'un processus élastique.

La destruction de l'exciton ne s'accompagne pas automatiquement par l'émission d'un photon à la fréquence de résonance. En réalité, des processus non-radiatifs ont lieu qui font relaxer l'exciton sans émettre de photon dans les longueurs d'onde ou les directions observées. Ces pertes non-radiatives correspondent surtout aux deux mécanismes suivant : l'élargissement collisionel et l'interaction des excitons avec les phonons acoustiques. Pour des échantillons de bonne qualité, ces mécanismes sont prépondérants.

L'interaction exciton-phonon, qui couple l'exciton de faible moment $\mathbf{k}$ avec le réservoir excitonique à grand $\mathbf{k}$ peut être interprétée à l'aide de la règle d'or de Fermi comme le couplage entre un état discret et un continuum [66, 67]. En effet, à grand $\mathbf{k}$ la densité d'états accessibles est plus importante, ce qu'on assimile à un continuum. Cette interprétation permet d'expliquer la dépendance en température de l'élargissement homogène de la raie de l'exciton. Cet élargissement est fortement affecté dans le cas du couplage fort par le changement du terme de couplage entre l'état de petit vecteur d'onde et le réservoir [16, 68]. Ainsi, le polariton de la branche haute a la même énergie que les états excitoniques de grand vecteur d'onde, qui représentent un réservoir possédant une grande densité d'états, tandis que le polariton de la branche basse est protégé du réservoir d'exciton (Figure 1.10) et est donc moins sensible à l'interaction avec le phonon.

Les pertes dues à l'interaction exciton-exciton dépendent directement de la densité dans le puits quantique et donc du pompage effectué [16, 69, 70]. Pour une excitation suffisamment importante de la branche du bas du polariton, l'élargissement est tel que le polariton devient de plus en plus couplé

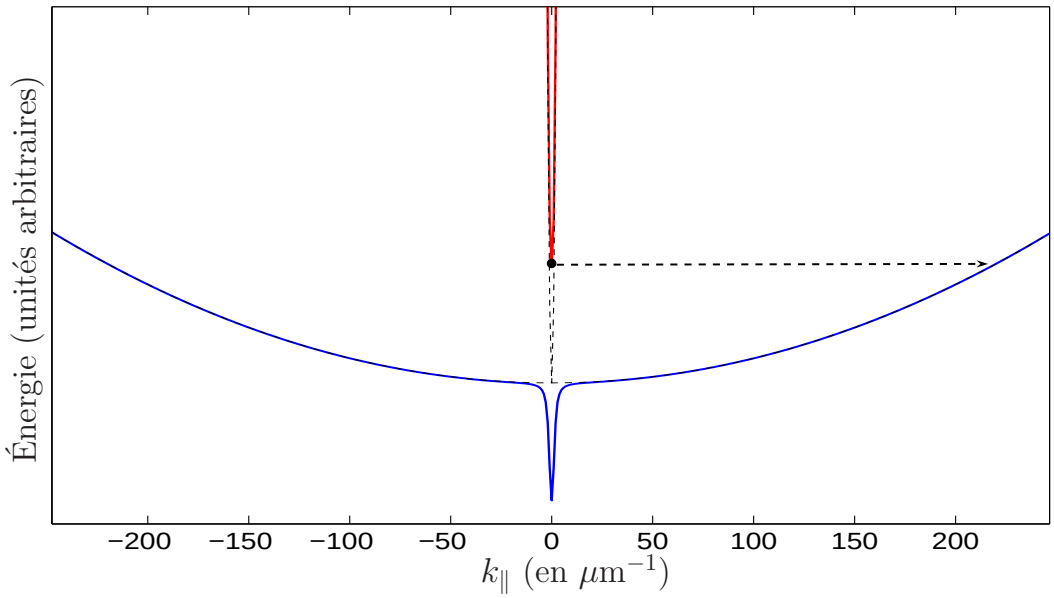


FIG. 1.10: Dispersion des polaritons aux grands **k**. Du fait de sa dispersion particulière, le polariton de la branche du bas est mieux protégé du réservoir excitonique que le polariton de la branche du haut.

avec le réservoir, provoquant un phénomène de seuil de l'élargissement du polariton [70]. Dans ce manuscrit nous resterons à des intensités modérées, et ne rencontrerons pas ce type d'élargissement.

Si l'étude de ces interactions est complexe, les processus d'élargissement homogènes peuvent cependant, dans notre cas, être correctement pris en compte phénoménologiquement par un terme de perte dans les équations régissant la dynamique du système, proportionnel à la largeur de raie de l'exciton γ_X.

Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons exposé des concepts fondamentaux concernant la physique des microcavités. Nous nous sommes attachés à présenter les excitons dans les puits quantiques. Nous avons également décrit le confinement des photons dans les microcavités et présenté plusieurs structures utilisées ou en devenir pour observer le couplage fort exciton-photon. Nous avons finalement abordé le couplage fort exciton-photon et l'interaction

exciton-exciton. L'interaction exciton-exciton est responsable des phénomènes non-linéaires observés dans les microcavités et nous verrons dans les chapitres suivants les propriétés quantiques qui en émanent.

Chapitre 2

Génération d'états non-classiques par blocage quantique polaritonique

La production de photons uniques occupe une place importante dans le développement de l'information quantique et de la cryptographie quantique [18, 71]. Certains systèmes permettent aujourd'hui de produire ces états non-classiques de la lumière, comme les centres N-V colorés du diamant [72, 73], les boîtes quantiques de semiconducteurs en cavité [41, 74–76], de même que les atomes en cavité [77–79]. Dans ce chapitre, nous présentons un autre type de système permettant de produire des états non-classiques de la lumière.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les techniques de croissance permettent de fabriquer aujourd'hui des structures capables de confiner latéralement sur de petites distances le champ électromagnétique, et ce, en plus du confinement longitudinal des microcavités. Les phénomènes observés dans les premières structures fabriquées présentent des caractéristiques intéressantes [43, 80, 81] malgré les défauts des échantillons fabriqués à l'époque. Grâce à la qualité des structures fabriquées aujourd'hui, de nouveaux effets sont accessibles à l'observation [82, 83], en particulier l'effet de confinement dans une boîte sur le polariton, donnant naissance au processus de blocage.

Nous commençons par introduire le principe du blocage de polariton et les approximations que nous effectuons dans la première section, afin d'aboutir aux équations régissant le système. En utilisant la corrélation du second

ordre, nous montrons dans la deuxième section que l'on peut atteindre un régime de blocage quantique aussi bien avec une excitation continue qu'avec une excitation pulsée.

2.1 Le modèle

2.1.1 La boîte photonique et le principe du blocage

Le principe du blocage

Nous avons vu dans le premier chapitre qu'il est maintenant possible de créer des structures telles que les boîtes photoniques, permettant de confiner les photons dans des espaces réduits. Lorsque ces photons sont fortement couplés avec les excitons comme dans les microcavités semiconductrices, l'introduction d'un photon dans le système aboutit à la création d'un polariton, particule hybride exciton-photon. En situation de couplage fort, le confinement du photon est imposé à l'exciton, qui subit alors à son tour le confinement imposé au photon. Or, comme nous l'avons vu, une répulsion coulombienne a lieu entre excitons, d'autant plus importante que les excitons sont proches. Dans une boîte suffisamment petite, cette interaction répulsive décale l'énergie de résonance pour chaque particule insérée dans la cavité d'une valeur égale ou supérieure à la largeur de raie du polariton (voir figure 2.1). L'introduction d'un nouveau polariton est alors bloquée, ce qui donne lieu au phénomène appelé «anti-bunching»(dégroupement en anglais). Ce mécanisme est analogue au processus de blocage de photon introduit par Imamoğlu *et coll.* [22, 79, 84]

Dans une expérience en transmission où l'excitation est précisément à une fréquence bien choisie, on observera donc une lumière sortante dont la statistique sera fortement sub-poissonienne. En effet, dans ces conditions, les états à plus de un photon sont très peu probables à l'intérieur de la cavité.

Mise en équation dans la boîte photonique

Pour modéliser le confinement de notre photon dans la boîte, nous introduisons le potentiel $V_C(\mathbf{x})$ défini par :

$$\begin{aligned} V_C(\mathbf{x}) &= 0 \qquad && \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{B} \ , \\ V_C(\mathbf{x}) &= V_C^0 \qquad && \text{pour } \mathbf{x} \notin \mathcal{B} \ , \end{aligned} \tag{2.1}$$

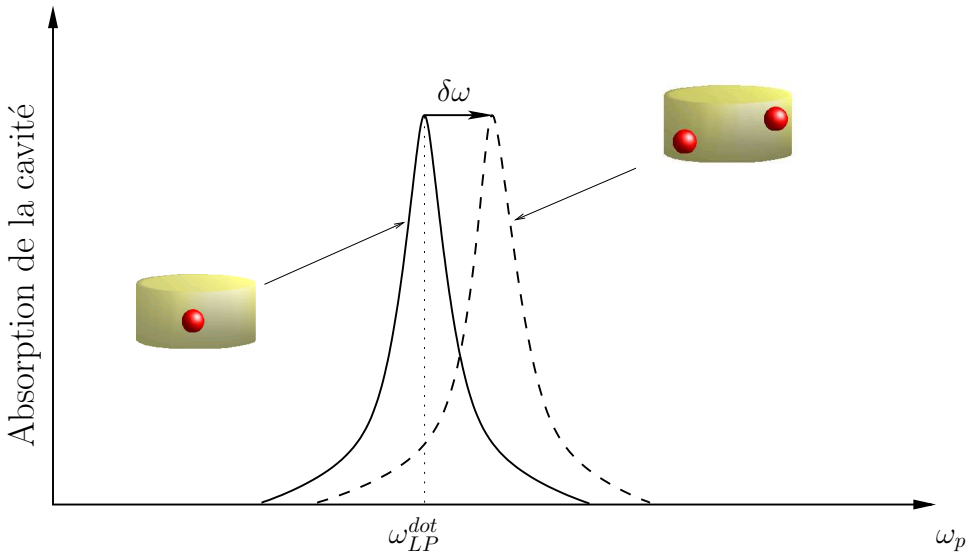


FIG. 2.1: Absorption en fonction de la fréquence d'excitation ω_p lorsqu'une, puis deux particules sont dans la boîte. L'introduction d'une particule supplémentaire dans la boîte photonique décale la résonance du polariton de la boîte ω_{LP}^{dot} d'une énergie $\delta\omega$.

où $\mathcal{B}$ représente l'ensemble des points de la boîte, $\mathbf{x}$ désigne comme précédemment la position spatiale dans le plan et V_C^0 la hauteur du puits de potentiel. Dans une boîte photonique, les modes ne subissent pas de dispersion suivant $\mathbf{k}$, il est donc naturel de traiter ce problème dans l'espace réel. L'hamiltonien total du système introduit dans le chapitre 1 se ré-écrit aisément [85] :

$$\begin{aligned} H = &\int d\mathbf{x}\hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{x})h_{i,j}^0(-i\nabla)\hat{\Psi}_j(\mathbf{x}) + \frac{\hbar\kappa}{2}\int d\mathbf{x}\hat{\Psi}_X(\mathbf{x})^\dagger\hat{\Psi}_X(\mathbf{x})^\dagger\hat{\Psi}_X(\mathbf{x})\hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) \\ &- \left\{\frac{\hbar\Omega_R}{n_{sat}}\int d\mathbf{x}\hat{\Psi}_C(\mathbf{x})^\dagger\hat{\Psi}_X(\mathbf{x})^\dagger\hat{\Psi}_X(\mathbf{x})\hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) + h.c.\right\} \\ &+ \int d\mathbf{x}\hbar F_p(\mathbf{x},t)e^{-i\omega_p t}\hat{\Psi}_C^\dagger(\mathbf{x}) + h.c.\ , \end{aligned} \tag{2.2}$$

où les opérateurs $\hat{\Psi}_i(\mathbf{x})$ ($i \in \{X, C\}$) sont les opérateurs champs, reliés aux opérateurs $\hat{a}_\mathbf{k}$ et $\hat{b}_\mathbf{k}$ par les relations :

$$\hat{\Psi}_C(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{A}}\hat{a}_\mathbf{k}e^{-i\mathbf{kx}}\ ,\ \hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{A}}\hat{b}_\mathbf{k}e^{-i\mathbf{kx}}\ . \tag{2.3}$$

Notons que ces opérateurs champ, à l'image des opérateurs $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ satisfont les relations de commutation de Bose : $[\hat{\Psi}_i(\mathbf{x}), \hat{\Psi}_j(\mathbf{x}')^\dagger] = \delta_{i,j}\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$. L'opérateur $\mathbf{h}^0$ s'exprime :

$$\mathbf{h}^0(-i\nabla) = \begin{pmatrix} \omega_C(-i\nabla) + V_C(\mathbf{x}) & \Omega_R \\ \Omega_R & \omega_X^0 \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

Le coefficient $\kappa = AV_0^{XX} = \frac{6e^2\lambda_X}{\epsilon}$ correspond à la force de l'interaction de contact exciton-exciton, tandis que $F_p(\mathbf{x}, t)$ décrit le champ électromagnétique extérieur appliqué à la cavité à la fréquence ω_p. Celui-ci peut donc être modulé en temps et en espace dans le cadre de notre étude, ce qui nous permettra par la suite d'introduire les régimes d'excitation pulsée ou continue.

2.1.2 Approximation monomode

Mode photonique

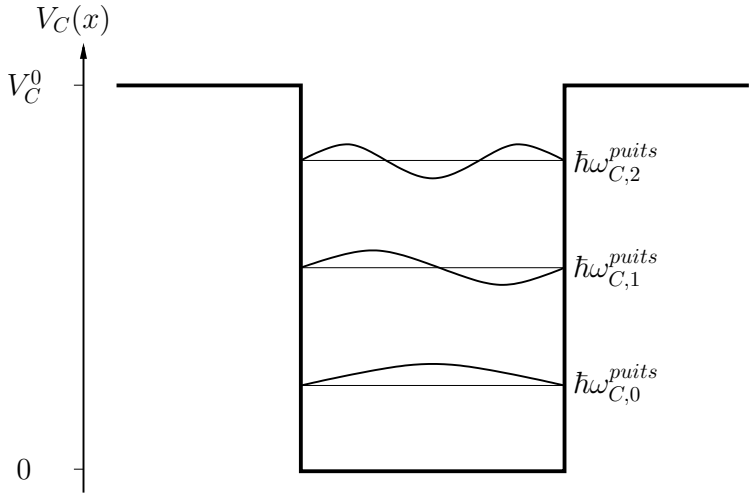


FIG. 2.2: Profils de fonctions d'onde de particules confinés dans un puits de potentiel de profondeur V_C^0, traités ici dans un problème à une dimension. Chaque fonction d'onde correspond à une énergie distincte $\hbar\omega_{C,j}^{puits}$ bien séparée des autres, leur énergie cinétique évoluant en $1/L_x^2$ où L_x est la largeur de la boîte.

Le potentiel photonique correspondant à un problème de puits de potentiel [86], l'opérateur champ $\hat{\Psi}_C$ peut être développé en une somme de modes

propres orthogonaux entre eux, confinés dans la boîte :

$$\hat{\Psi}_C = \sum_j \phi_{C,j}(\mathbf{x})\hat{a}_j \ , \tag{2.5}$$

où chaque fonction d'onde $\phi_{C,j}$ est normalisée et associée au mode d'énergie $\hbar\omega_{C,j}^{dot}$, $\hat{a}_j$ étant l'opérateur de destruction de photon de ce mode.

Plaçons nous dans la situation où le mode fondamental du photon d'énergie $\hbar\omega_C^{dot}$ est en régime de couplage fort avec le mode de l'exciton. Il naît alors deux modes de polaritons, modes propres du système associés au mode fondamental de la boîte d'énergies $\hbar\omega_{LP,UP}^{dot}$. Or, pour un photon suffisamment confiné, l'écart entre les différents modes d'énergie $\hbar\omega_{C,j}^{dot}$ peut atteindre des valeurs bien plus grandes que la largeur spectrale $\hbar\gamma_C$ et que le désaccord $\hbar\omega_C^{dot} - \hbar\omega_X^0$. Ainsi, si l'on excite le système près de la résonance avec le mode d'énergie $\hbar\omega_{LP}^{dot}$, seul le mode fondamental du photon sera concerné (voir figure 2.3). On peut donc simplifier notre approche grâce à l'approximation monomode [87] en négligeant les modes d'énergies supérieures. L'opérateur du champ photonique s'écrit donc :

$$\hat{\Psi}_C(\mathbf{x}) = \phi_C(\mathbf{x})\hat{a} \ , \tag{2.6}$$

où $\hat{a}$ est l'opérateur de destruction bosonique du mode fondamental du photon dans la boîte photonique d'énergie $\hbar\omega_C^{dot}$.

Sélection du mode excitonique

Nous avons projeté l'opérateur champ du photon $\hat{\Psi}_C$ sur un mode propre de la boîte, simplifions maintenant notre approche du côté de l'exciton. Puisque le mode excitonique et le mode photonique sont en régime de couplage fort, il est naturel de développer l'opérateur champ excitonique dans la même base de fonctions d'onde que le photon. On en déduit le développement :

$$\hat{\Psi}_X = \sum_j \phi_{C,j}(\mathbf{x})\hat{b}_j \ , \tag{2.7}$$

où les opérateurs $\hat{b}_j$ sont les opérateurs bosoniques de destruction du mode correspondant à la fonction d'onde $\phi_{C,j}(\mathbf{x})$ d'énergie ω_X^0. Rappelons que cette hypothèse n'est valable que si l'on peut négliger l'énergie cinétique de l'exciton du puits quantique, ce qui est clairement vérifié ici. Puisque les fonctions

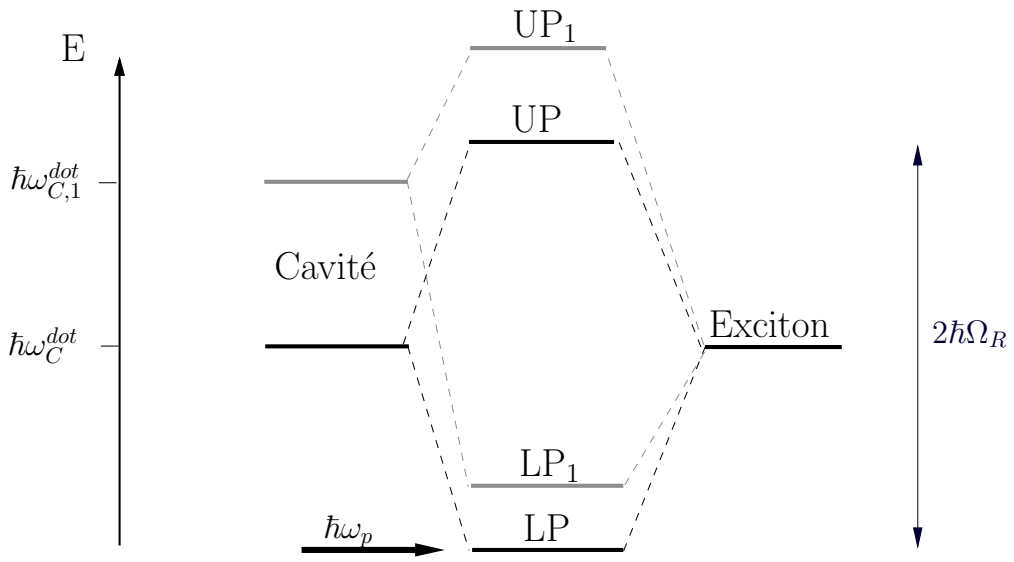


FIG. 2.3: Couplage exciton-photon dans une boîte photonique. En noir apparaissent les niveaux d'énergie de l'exciton et du mode fondamental de la cavité (ici à désaccord nul) ainsi que les modes de polaritons issus de leur couplage. En grisé apparaissent un mode photonique d'énergie supérieure et les deux modes de polaritons associés. Pour une excitation de fréquence ω_p proche de la résonance du mode fondamental du polariton, seul le mode fondamental du polariton est excité.

d'onde $\phi_{C,j}(\mathbf{x})$ sont orthogonales entre elles, le couplage fort exciton-photon implique que chaque mode excitonique est couplé avec le mode photonique de même distribution spatiale. L'exciton ainsi que le mode fondamental du polariton obtenu par le couplage entre le mode fondamental du photon et l'exciton partagent donc la même fonction d'onde $\phi_C(\mathbf{x})$. Par conséquent, dans le cas d'une excitation quasi-résonante du mode fondamental du polariton, seul le mode excitonique associé à la fonction d'onde $\phi_C(\mathbf{x})$ sera peuplé. On peut donc finalement réduire notre description de l'opérateur champ de l'exciton à :

$$\hat{\Psi}_X = \phi_C(\mathbf{x})\hat{b} \ , \tag{2.8}$$

où $\hat{b} = \hat{b}_j$ tel que $\phi_{C,j} = \phi_C$.

2.1.3 Mise en équation du système

Le Hamiltonien monomode

Sachant que les fonctions d'onde $\phi_{C,j}$ sont normalisées, la projection des opérateurs champs sur un seul mode nous permet d'obtenir un hamiltonien monomode simplifié H^{mon} qui prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} H^{mon} = \hbar\omega_X^0 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar\omega_C^{dot} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\Omega_R(\hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{b}\hat{a}^\dagger) + \frac{\hbar\omega_{nl}}{2} \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}\hat{b} \\ - \alpha_{sat}\hbar\Omega_R(\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{a}\hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}\hat{b}) + \hbar\mathcal{F}_0(t)e^{-i\omega_p t}\hat{a}^\dagger + \hbar\mathcal{F}_0^*(t)e^{i\omega_p t}\hat{a} \end{aligned} \tag{2.9}$$

où le couplage à l'extérieur s'écrit :

$$\mathcal{F}_0(t) = \int d\mathbf{x} F_p(\mathbf{x}, t)\phi_C^*(\mathbf{x}) \ , \tag{2.10}$$

le facteur de saturation est :

$$\alpha_{sat} = \frac{1}{n_{sat}} \int d\mathbf{x} |\phi_C(\mathbf{x})|^4 \ , \tag{2.11}$$

et le coefficient d'interaction exciton-exciton :

$$\omega_{nl} = \kappa \int d\mathbf{x} |\phi_C(\mathbf{x})|^4 \ . \tag{2.12}$$

Un choix avantageux de la forme du terme d'excitation $F_p(\mathbf{x}, t)$ permet d'optimiser le couplage entre la cavité et l'excitation (ou pompe). Les termes non-linéaires sont proportionnels au facteur $\int d\mathbf{x}|\phi_C(\mathbf{x})|^4$. Ils dépendent donc directement de la symétrie du système et de la taille de la boîte photonique. Nous calculerons ce terme plus tard, dans le cas d'une boîte cylindrique et d'une boîte carrée, moyennant quelques approximations.

Pour bien se représenter ce nouvel Hamiltonien il est utile de l'écrire sous forme de matrice dans sa base naturelle, à savoir l'espace de Fock $|n, m\rangle$, où n est le nombre d'excitons et m le nombre de photons. Par exemple, dans la

base de Fock ($|0,0\rangle$, $|0,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|0,2\rangle$, $|1,1\rangle$, $|2,0\rangle$), il vient :

$$H^{mon}/\hbar = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{F}_0^*(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{F}_0(t) & \omega_C^{dot} & \Omega_R & \sqrt{2}\mathcal{F}_0^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_R & \omega_X & 0 & \mathcal{F}_0^*(t) & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\mathcal{F}_0(t) & 0 & 2\omega_C^{dot} & \sqrt{2}\Omega_R & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_0(t) & \sqrt{2}\Omega_R & \omega_C^{dot}+\omega_X & \sqrt{2}(1-\alpha_{sat}^*)\Omega_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(1-\alpha_{sat})\Omega_R & 2\omega_X+\omega_{nl} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Approximations

On voit dans la relation (2.13) que le terme de saturation α^{sat} agit en particulier sur le couplage de Rabi, diminuant d'autant le couplage. Ceci augmente davantage le décalage de la résonance des modes plus peuplés du polariton et donc l'effet de blocage. Dans ce chapitre, nous ne considérerons cependant pas ce terme que nous considérons comme négligeable. En effet, pour des valeurs typiques des matériaux III-V [88] :

$$\frac{\alpha_{sat}\Omega_R}{\omega_{nl}/2} = \frac{2\Omega_R}{n_{sat}\kappa} = \frac{2\hbar\Omega_R\epsilon}{n_{sat}6\lambda_X e^2} \simeq 0.2 \ll 1 \ . \tag{2.14}$$

En réalité le poids relatif de ce terme peut être encore modifié par l'intermédiaire du coefficient de Hopfield désignant la partie photonique du polariton $C_{\mathbf{k}}$. Nous verrons plus tard que nous chercherons à augmenter la partie excitonique du polariton, diminuant ainsi l'importance de ce terme vis à vis de la non-linéarité.

Pour obtenir la valeur du coefficient d'interaction, nous avons besoin d'établir la valeur du facteur $\int d\mathbf{x}|\phi_C(\mathbf{x})|^4$. Pour fixer les idées, nous choisirons de calculer cette valeur dans le cas d'un cylindre puis dans le cas du carré. Pour simplifier le calcul, nous supposons que la boîte est un puits de barrières infinies (i.e. $V_C^0 \to \infty$) centré sur l'origine du plan (O, x, y). Pour un puits de potentiel carré, la fonction d'onde normalisée du fondamental est [89] :

$$\phi(x,y) = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \ , \tag{2.15}$$

où L est le côté du carré. Dans ce cas, un rapide calcul d'intégration nous

permet de calculer la valeur du facteur géométrique :

$$\int_{carre} d\mathbf{x}|\phi_C(\mathbf{x})|^4 = \frac{2.25}{L^2} \ . \tag{2.16}$$

Dans le cas d'un cylindre de rayon R, la fonction d'onde normalisée du fondamental est une fonction de Bessel définie dans le plan $(0, r, \theta)$:

$$\phi(r) = \frac{1.087}{R} J_0 \left(\frac{2.405r}{R} \right) \ . \tag{2.17}$$

Dans ce cas, le coefficient géométrique est :

$$\int_{cylindre} d\mathbf{x}|\phi_C(\mathbf{x})|^4 = \frac{2.67}{(2R)^2} \ . \tag{2.18}$$

Une boîte de forme cylindrique est donc préférable pour optimiser la valeur de l'interaction exciton-exciton par rapport à la taille de la boîte. Notons que dans chaque cas, le facteur ω_{nl} est inversement proportionnel à l'aire de la boîte photonique. Cette dépendance montre qu'un faible gain sur la taille de la boîte a des conséquences importantes sur la non-linéarité du système.

Pour simplifier le traitement de la dynamique du système nous nous placerons dans le référentiel tournant à travers l'opérateur unitaire $R(t) = e^{i(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b})\omega_p t}$. Dans l'espace $|n, m\rangle$ limité à deux particules, cet opérateur s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\omega_p t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\omega_p t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2i\omega_p t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2i\omega_p t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2i\omega_p t} \end{pmatrix} \ . \tag{2.19}$$

En appliquant la relation $|\Psi\rangle = R^\dagger|\tilde{\Psi}\rangle$ à l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial|\tilde{\Psi}\rangle}{\partial t} = RH^{mon}R^\dagger|\tilde{\Psi}\rangle - i\hbar R \frac{\partial R^\dagger}{\partial t}|\tilde{\Psi}\rangle \ . \tag{2.20}$$

On aboutit alors à une équation de Schrödinger dans le référentiel tournant

avec un Hamiltonien effectif $\tilde{H}^{mon}$:

$$\tilde{H}^{mon} = RH^{mon}R^{\dagger} - i\hbar R\frac{\partial R^{\dagger}}{\partial t} \ . \tag{2.21}$$

L'hamiltonien dans ce référentiel est donc :

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{mon} &= \hbar\Delta\omega_X^0\hat{b}^{\dagger}\hat{b} + \hbar\Delta\omega_C^{dot}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar\Omega_R(\hat{b}^{\dagger}\hat{a} + \hat{b}\hat{a}^{\dagger}) + \frac{\hbar\omega_{nl}}{2}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\hat{b} \\ &+ \hbar\mathcal{F}_0(t)\hat{a}^{\dagger} + \hbar\mathcal{F}_0^*(t)\hat{a} \ ,\end{aligned} \tag{2.22}$$

où $\Delta\omega_X^0 = \omega_X^0 - \omega_p$ et $\Delta\omega_C^{dot} = \omega_C^{dot} - \omega_p$. Ce Hamiltonien décrit la dynamique d'un système de deux oscillateurs harmoniques couplés auquel s'ajoute un terme non-linéaire $\frac{\hbar\omega_{nl}}{2}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\hat{b}$, ainsi qu'un terme de source $\hbar\mathcal{F}_0(t)\hat{a}^{\dagger} + h.c.$ qui dépend maintenant directement de la forme temporelle de l'excitation, ce dont nous nous servirons dans la suite.

Dans l'espace de Fock $|n, m\rangle$ limité à deux particules, ce nouvel Hamiltonien s'écrit :

$$\tilde{H}^{mon}/\hbar = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{F}_0^*(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{F}_0(t) & \Delta\omega_C & \Omega_R & \sqrt{2}\mathcal{F}_0^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_R & \Delta\omega_X & 0 & \mathcal{F}_0^*(t) & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\mathcal{F}_0(t) & 0 & 2\Delta\omega_C & \sqrt{2}\Omega_R & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_0(t) & \sqrt{2}\Omega_R' & \Delta\omega_C + \Delta\omega_X & \sqrt{2}\Omega_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\Omega_R & 2\Delta\omega_X + \omega_{nl} \end{pmatrix} . \tag{2.23}$$

Dans le cas d'un exciton et d'un photon dégénéré et d'une pompe parfaitement à résonance (i.e. $\Delta\omega_X^0 = \Delta\omega_C^{dot} = 0$), les premiers termes diagonaux de la matrice s'annulent. Le terme correspondant à la présence de deux excitons dans la cavité reste non nul à cause de la non-linéarité. Si l'introduction d'une particule dans la cavité en partant du vide est favorable, il n'en est pas de même pour l'introduction de deux excitons. On retrouve dans cette matrice le principe du blocage, l'introduction d'une seconde particule étant défavorisée en régime de couplage fort.

Équation pilote

La prise en compte de l'effet des pertes sur le système passe par l'utilisation du formalisme de l'équation pilote de la matrice densité [36, 87] dans le référentiel tournant $\tilde{\rho} = R\hat{\rho}R^\dagger$. Celui-ci décrit complètement la dynamique de notre système à travers l'équation suivante :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[\tilde{\rho}, \tilde{H}^{mon}] + \gamma_C RD[\hat{a}]\hat{\rho}R^\dagger + \gamma_X RD[\hat{b}]\hat{\rho}R^\dagger \ , \tag{2.24}$$

où les coefficients γ_C et γ_X sont respectivement l'élargissement du photon et de l'exciton. Le super-opérateur $D[\hat{a}, \hat{b}]$ appliqué à la matrice densité est défini par :

$$\begin{aligned} D[\hat{a}]\hat{\rho} &= \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - 1/2(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \ , \\ D[\hat{b}]\hat{\rho} &= \hat{b}\hat{\rho}\hat{b}^\dagger - 1/2(\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{b}^\dagger\hat{b}) \ . \end{aligned} \tag{2.25}$$

La matrice densité s'écrit dans la base des états de Fock :

$$\tilde{\rho}(t) = \sum_{n'_X, n'_C, n_X, n_C} \tilde{\rho}_{n'_X, n'_C, n_X, n_C}(t) |n'_X, n'_C\rangle\langle n_X, n_C| \ , \tag{2.26}$$

où n_X et n'_X représentent le nombre d'excitons et n_C et n'_C représentent le nombre de photons. La matrice densité contient toutes les informations nécessaires sur les différentes propriétés du système. Il nous reste cependant à développer les équations de la dynamique du système dans la base que nous avons choisie. Pour cela nous exposons séparément les termes de pertes et les termes linéaires, le couplage avec la pompe ainsi que l'interaction exciton-exciton. Les termes de perte s'écrivent dans l'espace de Fock :

$$\begin{aligned} \langle n'_X, n'_C|RD[\hat{a}]\hat{\rho}R^\dagger|n_X, n_C\rangle &= -\frac{1}{2}(n'_C + n_C)\tilde{\rho}_{n'_X, n'_C, n_X, n_C} \\ &\quad + \sqrt{(n'_C + 1)(n_C + 1)}\tilde{\rho}_{n'_X, n'_C+1, n_X, n_C+1} \\ \langle n'_X, n'_C|RD[\hat{b}]\hat{\rho}R^\dagger|n_X, n_C\rangle &= -\frac{1}{2}(n'_X + n_X)\tilde{\rho}_{n'_X, n'_C, n_X, n_C} \\ &\quad + \sqrt{(n'_X + 1)(n_X + 1)}\tilde{\rho}_{n'_X+1, n'_C, n_X+1, n_C} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Les éléments du commutateur du Hamiltonien s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&\langle n'_X, n'_C|\frac{1}{\hbar}[\tilde{\rho}, \tilde{H}^{mon}]|n_X, n_C\rangle = \\
&\qquad \mathcal{F}_0(t)\left(\tilde{\rho}_{n'_X,n'_C,n_X,n_C+1}\sqrt{n_C+1} - \tilde{\rho}_{n'_X,n'_C-1,n_X,n_C}\sqrt{n'_C}\right) \\
&\qquad + \mathcal{F}_0^*(t)\left(\tilde{\rho}_{n'_X,n'_C,n_X,n_C-1}\sqrt{n_C} - \tilde{\rho}_{n'_X,n'_C+1,n_X,n_C}\sqrt{n'_C+1}\right) \\
&+ \Omega_R\left[\left(\tilde{\rho}_{n'_X,n'_C,n_X+1,n_C-1}\sqrt{(n_X+1)n_C} - \tilde{\rho}_{n'_X-1,n'_C+1,n_X,n_C}\sqrt{(n'_C+1)n'_X}\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\tilde{\rho}_{n'_X,n'_C,n_X-1,n_C+1}\sqrt{(n_C+1)n_X} - \tilde{\rho}_{n'_X+1,n'_C-1,n_X,n_C}\sqrt{(n'_X+1)n'_C}\right)\right] \\
&\qquad + \tilde{\rho}_{n'_X,n'_C,n_X,n_C}\left(\Delta\omega_C(n_C - n'_C) + \Delta\omega_X(n_X - n'_X)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\omega_{nl}}{2}(n_X(n_X-1) - n'_X(n'_X-1))\right) \quad . \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Cette écriture reproduit les différents phénomènes qui ont lieu dans le système et qui sont décrits par l'intermédiaire du Hamiltonien (2.22). Notons que les termes de pertes suppriment globalement une particule du système. Le terme de source, désigné par les termes de transition $\tilde{\rho}_{n'_X,n'_C,n_X,n_C+1}$, $\tilde{\rho}_{n'_X,n'_C-1,n_X,n_C}$, $\tilde{\rho}_{n'_X,n'_C,n_X,n_C-1}$ et $\tilde{\rho}_{n'_X,n'_C+1,n_X,n_C}$, modifie également le nombre de particules au sein du système.

Nous nous sommes donnés l'équation d'évolution de la matrice densité de notre système, incluant les pertes et les perturbations extérieures. Dans la section suivante, elle nous permettra d'accéder aux propriétés de cohérence de la lumière et à la dépendance du système en fonction de ses différents paramètres.

2.2 Mise en évidence du régime de blocage

Pour démontrer que nous sommes en présence d'une source non-classique, nous devons étudier la statistique du champ électromagnétique. Nous introduisons donc la fonction de corrélation du second ordre, qui nous permettra de révéler les phénomènes de «bunching» (regroupement en anglais) et d'«anti-bunching» dans les deux régimes d'excitation continue et d'excitation pulsée. Le premier cas nous permettra d'appréhender la dépendance du système en ses caractéristiques physiques, tandis qu'avec le deuxième nous approfondi-

rons l'étude de la dynamique du système.

2.2.1 La corrélation du second ordre

Présentation

La fonction de corrélation du second ordre $G^{(2)}(t,t')$ permet de mesurer la probabilité conditionnelle d'observation de l'arrivée d'un photon au temps t lorsqu'un autre photon est observé au temps t'. D'après la théorie quantique de la détection établie par Glauber [90,91], la fonction de corrélation du second ordre en population se définit comme :

$$G^{(2)}(t,t') = \langle : \hat{n}(t)\hat{n}(t') : \rangle \ , \tag{2.29}$$

où : : désigne l'ordre normal et $\hat{n}(t)$ l'opérateur nombre de photons détectés par les photo-détecteurs dans une expérience de comptage (voir figure 2.4) au temps t. Pour fixer les idées dans le cas où $t > t'$:

$$G^{(2)}(t,t') = \langle \hat{a}^\dagger_{t'}\hat{a}^\dagger_t\hat{a}_t\hat{a}_{t'} \rangle \ , \tag{2.30}$$

où $\hat{a}_t$ désigne l'opérateur destruction de photon au temps t dans la représentation de Heisenberg. S'il n'existe aucune corrélation entre l'émission d'un photon au temps t' puis au temps t, la fonction de corrélation s'écrit :

$$G^{(2)}(t,t') = \langle \hat{a}^\dagger_{t'}\hat{a}_{t'} \rangle \langle \hat{a}^\dagger_t\hat{a}_t \rangle \ . \tag{2.31}$$

En normalisant la fonction de corrélation $G^{(2)}(t,t')$ par cette quantité, nous obtenons une nouvelle fonction appelée fonction de corrélation du second ordre normalisée $g^{(2)}(t,t')$ dont l'expression est donnée par la formule suivante dans le cas où $t > t'$:

$$g^{(2)}(t,t') = \frac{\langle \hat{a}^\dagger_{t'}\hat{a}^\dagger_t\hat{a}_t\hat{a}_{t'} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger_{t'}\hat{a}_{t'} \rangle \langle \hat{a}^\dagger_t\hat{a}_t \rangle} \ . \tag{2.32}$$

Remarquons que s'il n'existe pas de corrélations entre les photons observé à t' puis à t, $g^{(2)}(t,t') = 1$. Cette fonction est particulièrement utile pour étudier la statistique de la lumière observée. En effet, lorsque $g^{(2)}(t,t) > g^{(2)}(t,t')$ on assiste à un phénomène de bunching. Au contraire, l'inégalité $g^{(2)}(t,t) < g^{(2)}(t,t')$

décrit un phénomène d'antibunching. Nous donnons quelques exemples des valeurs prises par cette fonction dans le paragraphe suivant.

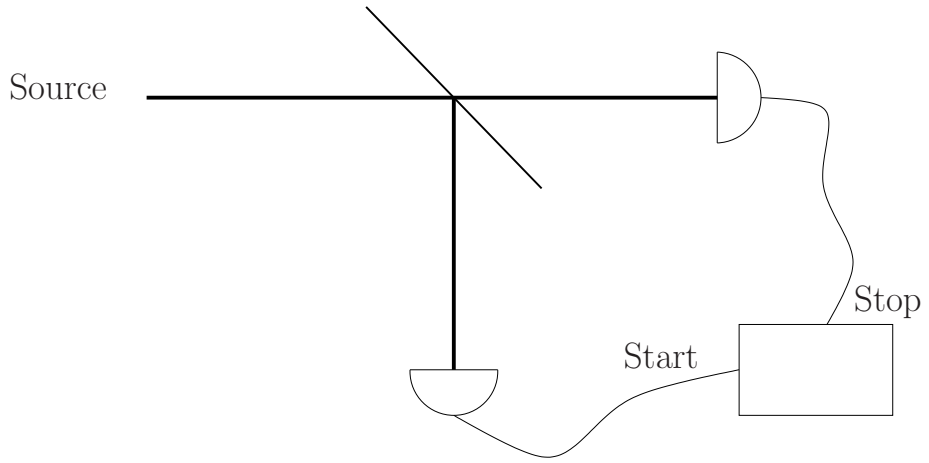


FIG. 2.4: Montage de type Hanbury-Brown et Twiss [92] (HBT). La détection d'un premier photon déclenche le compteur (Start) qui s'arrête à la détection d'un deuxième photon sur l'autre voie (Stop). Dans le cas d'une source à un photon, le compteur n'est arrêté que par un train d'onde suivant.

Exemples

Nous considérons dans la suite $t > t'$, et on pose $\tau = t - t'$. En régime stationnaire, $g^{(2)}(t, t')$ ne dépend plus que du paramètre τ :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger_{t'} \hat{a}^\dagger_{t'+\tau} \hat{a}_{t'+\tau} \hat{a}_{t'} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger_{t'} \hat{a}_{t'} \rangle \langle \hat{a}^\dagger_{t'+\tau} \hat{a}_{t'+\tau} \rangle} \ . \tag{2.33}$$

D'autre part, à $\tau = 0$, on pose $\hat{a}_{t'} \equiv \hat{a}$ et la fonction $g^{(2)}(0)$ s'écrit :

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = 1 + \frac{V(\hat{n}) - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} \ , \tag{2.34}$$

où $V(\hat{n}) = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2$ est la variance de la population. La valeur de cette fonction pour un état cohérent $|\alpha\rangle$ est donnée par :

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle^2} = \frac{|\alpha|^4}{|\alpha|^4} = 1 \Rightarrow V(\hat{n}) = \langle \hat{n} \rangle \ , \tag{2.35}$$

ce qui correspond à une statistique poissonienne du nombre de photons. Il est clair que pour un état de Fock correspondant à un photon unique, $g^{(2)}(0) = 0$. En généralisant le calcul à tout état nombre $|n\rangle$, on obtient :

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}|n\rangle}{\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle^2} = \frac{(n-1)n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \ . \tag{2.36}$$

Dans le cas d'un état de Fock, $g^{(2)}(0) < 1$ et donc $V(\hat{n}) < \langle\hat{n}\rangle$, la statistique est donc sub-poissonienne. On peut montrer [91] en revanche, pour des sources chaotiques de statistiques gaussiennes ou lorentzienne que $g^{(2)}(0) = 2$. Les fluctuations d'intensité du champ chaotique expliquent le bunching observé pour ces sources.

Dans n'importe quel cas, toute corrélation entre deux photons successivement observés à un intervalle de temps τ disparaît quand $\tau \to \infty$. Ceci se traduit par la limite :

$$g^{(2)}(\tau) \to 1 \quad \text{quand} \quad \tau \to \infty \tag{2.37}$$

Ainsi lorsque $g^{(2)}(0) < 1$ (par exemple dans le cas d'un état nombre), $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$ pour un temps suffisamment long, ce qui implique un phénomène d'anti-bunching. Dans le cas contraire, quand $g^{(2)}(0) > 1$ alors pour τ suffisamment grand, $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$ on parle de bunching. D'autre part, on peut montrer qu'il est impossible d'obtenir une fonction d'autocorrélation telle que $g^{(2)}(0) < 1$ par une source classique. En effet, un tel résultat implique dans une description classique de la lumière une distribution de probabilité négative du champ [91]. Il nous suffit donc de montrer que $g^{(2)}(0) < 1$ pour prouver qu'une source est non-classique. Toutefois, une étude plus complète de $G^{(2)}(t, t')$ nous donnera accès à la statistique du système en régime dynamique, nous étudierons donc également cette valeur.

Application au système

Rappelons que la matrice densité permet de calculer la valeur moyenne $\langle\hat{O}\rangle$ d'une observable $\hat{O}$ par l'intermédiaire de la formule :

$$\langle\hat{O}\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{O}\,\hat{\rho}\right) \ . \tag{2.38}$$

Nous introduisons ici le super-opérateur d'évolution $\mathcal{U}(t,t')$ associé à l'équation maîtresse (2.24). Il fait évoluer le système entre les temps t' et t. Le calcul de la fonction de corrélation $G^{(2)}(t,t')$ requiert la valeur d'une quantité de type $\langle \hat{O}_2(t)\hat{O}_1(t')\rangle$ où $\hat{O}_1$ et $\hat{O}_2$ sont des observables du système. Pour une telle quantité dépendant de deux temps successifs correspondant à deux mesures successives, en représentation de Heisenberg, on utilise la suite d'opérations :

$$\begin{tikzcd}
\hat{\rho}(0) \arrow[r, bend left, "\mathcal{U}(0,t')"] \arrow[r, "\text{Éq. pilote}"'] & \hat{\rho}(t') \arrow[r, "\hat{O}_1 \text{ à g.}"'] & \hat{O}_1\hat{\rho}(t') \arrow[r, bend left, "\mathcal{U}(t',t)"] \arrow[r, "\text{Éq. pilote}"'] & \mathcal{U}(t',t)\left[\hat{O}_1\hat{\rho}(t')\right] \arrow[d, "\hat{O}_2 \text{ à d.}"] \\
 & & & \mathcal{U}(t',t)\left[\hat{O}_1\hat{\rho}(t')\right]\hat{O}_2
\end{tikzcd}$$

Le système évolue librement suivant l'équation maîtresse (2.24) jusqu'à t' on applique alors $\hat{O}_1$ à gauche de $\hat{\rho}(t')$, la matrice résultante $\hat{O}_1\hat{\rho}(t')$ évolue à nouveau suivant l'équation maîtresse jusqu'à t, on applique alors à droite l'opérateur $\hat{O}_2$. Cette suite d'opérations conduit à l'égalité suivante :

$$\langle \hat{O}_2(t)\hat{O}_1(t')\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{U}(t,t')\left[\hat{O}_1\hat{\rho}(t')\right]\hat{O}_2\right) \ . \tag{2.39}$$

Nous nous intéresserons ici à la dynamique interne du système, et donc aux photons à l'intérieur de la cavité. Les opérateurs de destruction et de création de photon considérés ici sont donc ceux de la cavité. Nous aborderons plus tard le problème de la relation entre les photons de cavité et les photons observés à l'extérieur. Si l'on revient à notre expression de la matrice densité dans l'espace de Fock, ceci implique les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}\rangle_t &= \sum_{n_C,n_X} n_C \rho_{n_X,n_C,n_X,n_C}(t) \\
\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{a}\rangle_t &= \sum_{n_X,n_C} n_C(n_C-1)\rho_{n_X,n_C,n_X,n_C}(t)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

En considérant le système dans un état stationnaire, on trouve pour le cas simple de la corrélation au même temps ($\tau = 0$) :

$$g^{(2)}(0) = \frac{\sum_{n_X,n_C} n_C(n_C-1)\rho_{n_X,n_C,n_X,n_C}(t)}{\left(\sum_{n_X,n_C} n_C\rho_{n_X,n_C,n_X,n_C}(t)\right)^2} \tag{2.41}$$

Si nous considérons maintenant le problème à deux temps en fixant $t > t'$, $g^{(2)}(t,t')$ s'écrit :

$$\begin{aligned} g^{(2)}(t,t') &= \frac{\langle \hat{a}_{t'}^{\dagger}\hat{a}_t^{\dagger}\hat{a}_t\hat{a}_{t'}\rangle}{\langle \hat{a}_t^{\dagger}\hat{a}_t\rangle\langle \hat{a}_{t'}^{\dagger}\hat{a}_{t'}\rangle} \\ g^{(2)}(t,t') &= \frac{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{a}_{t'}^{\dagger}\hat{a}_t^{\dagger}\hat{a}_t\hat{a}_{t'})}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{a}_t^{\dagger}\hat{a}_t)\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{a}_{t'}^{\dagger}\hat{a}_{t'})} \ , \end{aligned} \tag{2.42}$$

soit, d'après la relation (2.39) :

$$\begin{aligned} g^{(2)}(t,t') &= \frac{\mathrm{Tr}(\hat{a}\mathcal{U}_{t,t'}\left[\hat{a}\mathcal{U}_{t',0}\left[\hat{\rho}\right]\hat{a}^{\dagger}\right]\hat{a}^{\dagger})}{\mathrm{Tr}(\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^{\dagger})\mathrm{Tr}(\hat{a}\hat{\rho}(t')\hat{a}^{\dagger})} \\ g^{(2)}(t,t') &= \frac{\mathrm{Tr}(\hat{a}\hat{\theta}(t,t')\hat{a}^{\dagger})}{\mathrm{Tr}(\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^{\dagger})\mathrm{Tr}(\hat{a}\hat{\rho}(t')\hat{a}^{\dagger})} \ , \end{aligned} \tag{2.43}$$

où l'opérateur $\hat{\theta}$ est lui-même défini par la formule suivante :

$$\hat{\theta}(t,t') = \mathcal{U}_{t,t'}\left[\sum_{n_X,n_C,n'_X,n'_C} \tilde{\rho}_{n'_X,n'_C,n_X,n_C}(t')\sqrt{n_C n'_C}|n'_X, n'_C-1\rangle\langle n_X, n_C-1|\right] \ . \tag{2.44}$$

Physiquement, l'opérateur $\hat{\theta}(t,t')$ représente l'évolution de la matrice densité lorsqu'un photon a été émis au temps t'. La fonction de corrélation s'écrit sous sa forme développée de la façon suivante :

$$g^{(2)}(t,t') = \frac{\sum_{n_X,n_C} n_C\theta_{n_X,n_C,n_X,n_C}(t,t')}{\sum_{n_X,n_C} n_C\rho_{n_X,n_C,n_X,n_C}(t)\sum_{n_X,n_C} n_C\rho_{n_X,n_C,n_X,n_C}(t')} \ . \tag{2.45}$$

Cette formulation est directement implémentée dans les calculs numériques. Nous exposons rapidement le principe de ces calculs dans le paragraphe suivant, un schéma de principe est proposé en annexe.

Principe du calcul numérique et conditions aux limites

Notre problème est donc réduit à un système d'équations différentielles non-linéaires. Pour le résoudre, nous avons utilisé l'outil numérique dont le protocole est exposé en annexe. La programmation numérique interdit la prise en compte d'un grand nombre de particules dans le système.

D'après les hypothèses de notre modèle, lorsqu'on excite faiblement le système, les états comprenant un grand nombre de particules ont peu de chances d'être observés et jouent donc un rôle négligeable dans la dynamique du système. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons étudié cette dynamique dans les conditions favorables à l'antibunching en tenant compte des états à grand nombre de particules. Puis nous avons comparé ces résultats et ceux obtenus pour un nombre maximal de particules plus faible, et vérifié qu'ils demeurent inchangés. Les courbes exposées ici ne considèrent que des états avec un maximum de 3 particules, mais du fait du blocage, les états à 4 particules ou plus sont en réalité négligeables, leur introduction ne modifiant pas les résultats.

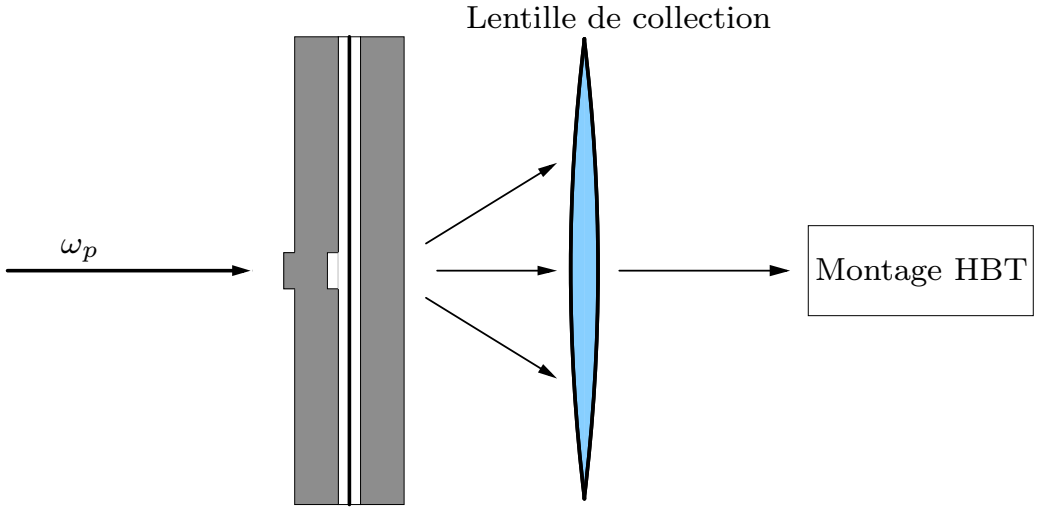


FIG. 2.5: Principe de l'expérience. Un faisceau de faible intensité excite la cavité à la fréquence ω_p. Un photon absorbé dans la cavité est ré-émis par la boîte et est collecté par un dispositif optique. Le faisceau est ensuite analysé par un montage de type HBT (voir figure 2.4). La valeur de la réflectivité des miroirs peut être modifiée pour permettre une meilleur extraction et favoriser une géométrie d'expérience en transmission.

Dans chaque cas, nous partons d'un système vide. Une pompe est imposée qui remplit le système en fonction du régime d'excitation. La modification des paramètres du système s'effectue en faisant varier les paramètres de l'équation pilote. Différentes caractéristiques propres au système comme ω_X^0, Ω_R, γ_X et γ_C restant plus ou moins fixées, on joue sur les paramètres ω_{nl}, ω_C^{dot}, ω_p et $\mathcal{F}_0(t)$ pour étudier la réponse du système. Le principe de l'expérience que

nous proposons est schématisé sur la figure 2.5. Nous exposons maintenant les résultats que nous avons obtenu en fonction des différents régimes d'excitation.

2.2.2 En excitation continue

Nous avons considéré une excitation de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(t) &= \mathcal{F}_0 e^{-\frac{(t-T)^2}{T^2}} \qquad && \text{pour } t < T \ , \\ \mathcal{F}_0(t) &= \mathcal{F}_0 && \text{pour } t > T \ . \end{aligned} \tag{2.46}$$

La pompe augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur plateau $\mathcal{F}_0$, évitant les oscillations parasites du système dues à la transition vers le régime stationnaire (T est ainsi choisi grand devant $1/\gamma_{C,X}$). Celui-ci est atteint pour un temps d'évolution t' suffisamment grand, c'est à dire ici pour $t' \gg T$, on utilisera donc l'égalité :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger_{t'} \hat{a}^\dagger_{t'+\tau} \hat{a}_{t'+\tau} \hat{a}_{t'} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger_{t'} \hat{a}_{t'} \rangle \langle \hat{a}^\dagger_{t'+\tau} \hat{a}_{t'+\tau} \rangle} \ . \tag{2.47}$$

La dépendance en énergie

Nous devons tout d'abord établir la valeur du facteur κ pour évaluer le coefficient non-linéaire ω_{nl}. Pour le calcul de ce coefficient, nous nous basons sur les données expérimentales [33, 88], qui donnent $\kappa \simeq 1.5.10^{-2}$ meV μm^2. Cette valeur correspond à un décalage vers le bleu de 0.15 meV en présence de 10^9 cm^{-2} excitons dans le puits quantique. Pour fixer les idées, nous considérons ici le cas d'un champ appliqué à une boîte cylindrique de diamètre $2R$. D'autre part, nous fixons l'élargissement radiatif $\hbar\gamma_C = 0.1$ meV et la raie de l'exciton $\hbar\gamma_X = 0.1$ meV. On étudie le système lorsqu'un champ lui est appliqué à la fréquence ω_p, proche de la résonance du mode fondamental du polariton ω^{dot}_{LP} qui s'exprime :

$$\omega^{dot}_{LP} = \frac{\omega^{dot}_C + \omega^0_X}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega^{dot}_C - \omega^0_X)^2 + 4\Omega^2_R} \ . \tag{2.48}$$

Nous avons représenté sur la figure 2.6 la corrélation du second ordre $g^{(2)}(0)$ en fonction de la fréquence d'excitation pour différents désaccords exciton-photon dans une boîte photonique de 320 nm de diamètre. Pour chaque courbe,

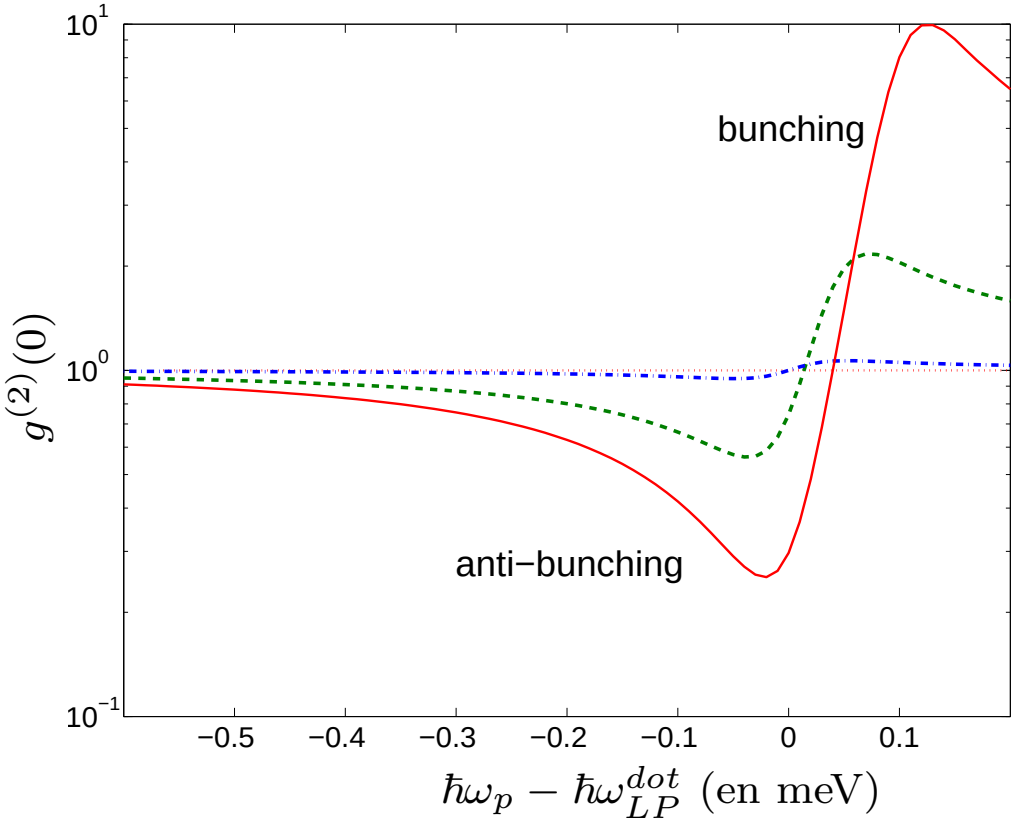


FIG. 2.6: Fonction de corrélation du second ordre intracavité en fonction du désaccord entre la pompe et la fréquence de résonance $\hbar\omega_p - \hbar\omega_{LP}^{dot}$ en meV pour trois désaccords exciton-photon $\delta = \hbar(\omega_C^{dot} - \omega_X^0)$ différents. En trait continu $\delta = 5$ meV, en pointillés : $\delta = 0$ meV et $\delta = -5$ meV en traits mixtes. Les valeurs des paramètres sont : $\hbar\omega_{nl} = 0.4$ meV, $\hbar\gamma_C = 0.1$ meV, $\hbar\gamma_X = 0.1$ meV, $\hbar\Omega_R = 2.5$ meV, l'amplitude d'excitation est $\hbar\mathcal{F}_I = 10^{-2}$ meV.

il existe un régime où $g^{(2)}(0) < 1$, synonyme d'antibunching. Ce régime prend place lorsque la pompe est proche de la résonance ω_{LP}^{dot} ou est faiblement décalée vers le rouge. Cette situation correspond au régime de blocage tel que nous l'avons décrit en début de chapitre. En effet, l'injection de particules supplémentaires dans le système est alors défavorisée par un décalage de la résonance vers le bleu du fait de la répulsion Coulombienne entre polaritons. Nous verrons dans les paragraphes suivants que pour des valeurs de ω_{nl} importantes, le

système tend vers une source lumineuse telle que $g^{(2)}(0) \simeq 0$.

On remarque également que lorsque le système est excité à une fréquence supérieure à la fréquence de résonance, $g^{(2)}(0) > 1$ impliquant un régime de bunching. L'injection de photons dans la cavité est donc favorisée par la non-linéarité. Comme dans le régime de blocage, la résonance se décale vers le bleu. Cependant, dans le cas présent, la résonance se réaccorde alors avec la pompe, encourageant l'absorption de particules supplémentaires, donnant lieu au bunching. Notons toutefois que le régime de bunching ne peut être correctement décrit sur la figure 2.6, du fait de la coupure effectuée dans le calcul numérique sur le nombre maximum de particules dans la cavité. Une étude complète du régime de bunching devrait prendre en compte les états plus peuplés et sort du cadre de notre étude. L'allure de la courbe correspond cependant bien à ce qui est attendu dans un système de ce type [79]. En effet, le désaccord pompe-cavité est compensé à un certain point par un nombre de particules défini, ce qui implique que la corrélation du second ordre ne diverge pas, même si elle peut prendre des valeurs importantes.

Nous avons représenté trois courbes issues de simulations effectuées pour trois désaccords exciton-photon $\delta = \hbar(\omega_C^{dot} - \omega_X^0)$ différents sur la figure 2.6. Chacun de ces désaccords correspond à un mélange exciton-photon différent du polariton.

- L'antibunching est bien plus prononcé dans le cas d'un désaccord positif ($\delta > 0$). La partie excitonique étant prépondérante dans le polariton, la répulsion Coulombienne est alors très efficace, et mène à des valeurs de $g^{(2)}(0)$ caractéristiques d'une source de photons uniques. Un désaccord trop important est cependant exclu de notre analyse. En effet, pour un tel désaccord, l'écart en énergie entre le niveau de l'exciton et le polariton de la branche basse (LP) serait inférieur à la largeur de raie de l'exciton ($|\hbar\omega_{LP}^{dot} - \hbar\omega_X^0| < \gamma_X$). Dans ce régime, la forme du polariton est imposée par l'exciton. L'approximation monomode n'est donc plus valable, les états d'excitons localisés créés par le désordre du puits quantique doivent alors être pris en compte [65, 93].

- Dans le cas opposé, pour un désaccord exciton-photon négatif ou nul ($\delta \leqslant 0$), les modes des excitons localisés sont très peu couplés au modes

photoniques du fait du faible recouvrement des fonctions d'onde de ces états. Pour des désaccord positifs d'importance raisonnable, ce recouvrement est encore faible et on peut alors négliger les effets du désordre. Dans notre cas, pour $\delta = 5$ meV, la séparation entre le mode fondamental du polariton et de l'exciton $\hbar\omega_{LP}^{dot} - \hbar\omega_X^0$ =1 meV est bien supérieur à l'élargissement de l'exciton $\gamma_X = 0.1$ meV. L'approximation monomode est donc toujours valable.

Les différents désaccords exciton-photon montrent chacun un minimum de $g^{(2)}(0)$ pour des valeurs différentes du désaccord entre la fréquence de la pompe et la fréquence de résonance du système. Plus le désaccord est positif, moins la part photonique du polariton est prononcée. L'injection de particules est alors moins efficace loin de la résonance, ce qui explique le léger décalage des minima de $g^{(2)}(0)$.

La géométrie

Pour évaluer l'impact du confinement sur le régime de blocage il convient de déterminer la dépendance de $g^{(2)}(0)$ en fonction de la valeur du terme ω_{nl}. D'autre part, de manière générale, l'injection ou le départ d'une particule de la cavité est subordonnée à la largeur de raie du polariton γ :

$$\gamma = |C_{LP}|^2\gamma_C + |X_{LP}|^2\gamma_X \ , \tag{2.49}$$

où $|C_{LP}|^2$ et $|X_{LP}|^2$ sont respectivement les fractions excitoniques et photoniques du polariton de la branche basse, obtenues grâce aux coefficients de Hopfield X_{LP} et C_{LP} que nous avons introduits dans le premier chapitre. Cependant, si l'effet répulsif contenu dans ω_{nl} détermine la non-linéarité et le décalage vers le bleu de la résonance, l'effet de blocage n'est efficace que si ce décalage est au moins comparable la largeur de la raie. Un effet de blocage efficace requiert donc une résonance aiguë, c'est à dire un bon facteur de qualité, cette condition se traduit par la dépendance de $g^{(2)}(0)$ dans le ratio ω_{nl}/γ. Cette dépendance est présentée sur la figure 2.7. Par la suite, par souci de clarification, on posera $\gamma_C = \gamma_X = \gamma$.

Comme nous l'avons dit précédemment, lorsque l'absorption d'un photon suffit à décaler la résonance d'au moins une largeur de raie, le phénomène d'an-

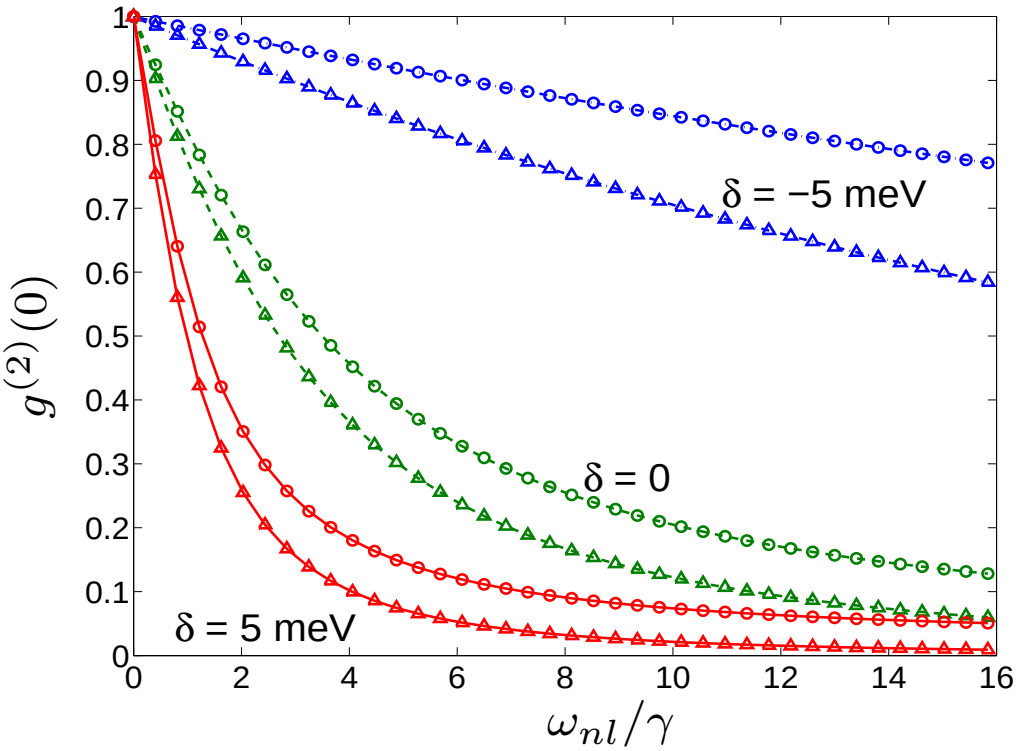


FIG. 2.7: Fonction de corrélation du second ordre intracavité de l'exciton $g^{(2)}_{exc}(0)$ (triangles) et du photon $g^{(2)}(0)$ (cercles) en fonction du facteur ω_{nl}/γ pour trois désaccords exciton-photon δ différents. Les valeurs prises par les paramètres sont : $\hbar\mathcal{F}_0 = 10^{-2}$ meV, $\hbar\gamma_X = \hbar\gamma_C = \hbar\gamma = 0.1$ meV, $\hbar\Omega_R = 2.5$ meV et $\omega_p = \omega^{dot}_{LP}$.

tibunching devient important. Autrement dit, lorsque $\omega_{nl}/\gamma \sim 1$ le système produit une lumière dont la statistique est sub-poissonienne. Ce paramètre est en fait proportionel au rapport Q/V, directement relié à l'effet Purcell [94], où Q est le facteur de qualité de la cavité, et V le volume de confinement du photon. Avec la valeur de $\hbar\kappa$ utilisée précédemment, un cylindre d'un diamètre de 0.67 μm est suffisant pour obtenir $\omega_{nl}/\gamma = 1$. Si la taille de la structure est encore réduite, alors on aura $\omega_{nl} \gg \gamma$. L'introduction d'une particule décale la résonance de plusieurs largeurs de raies, on entre donc dans le régime de blocage pur où un très faible nombre de particules peuvent se trouver au même instant dans la cavité. Une représentation graphique de la dépendance du facteur ω_{nl}/γ en fonction des paramètres de la boîte est donnée sur la figure 2.8. Prenons le cas d'une boîte photonique carrée dont le côté mesure 0.2 μm. Avec les mêmes paramètres, $\omega_{nl}/\gamma = 8.4$, ce qui peut engendrer, suivant

le désaccord exciton-photon dans la cavité, une valeur de $g^{(2)}(0)$ inférieure à 0.1, un résultat correspondant à une statistique proche de celle d'une source de photons uniques idéale.

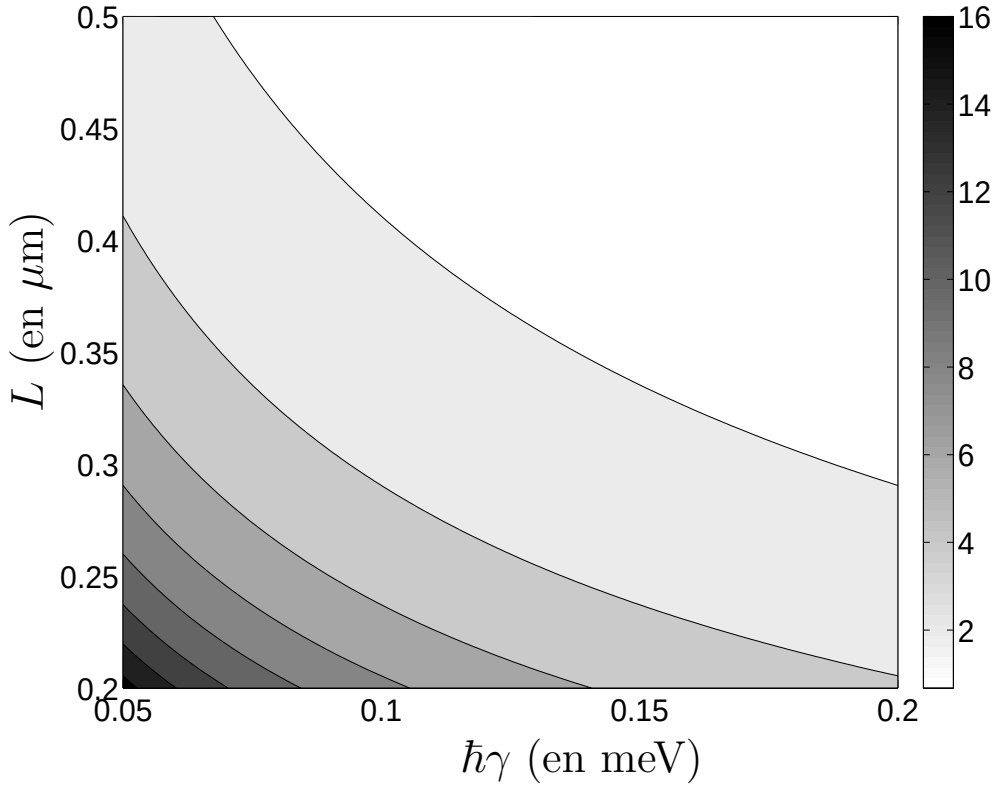


FIG. 2.8: Valeurs de ω_{nl}/γ dans une boîte carrée en fonction de la largeur L de la boîte et de la largeur de raie γ pour une valeur du coefficient d'interaction exciton-exciton $\hbar\kappa = 1.5\ .10^{-2}$ meVμm^2.

Afin de mieux saisir l'asymétrie entre l'exciton et le photon au regard de la non-linéarité du polariton, nous avons introduit la corrélation du second ordre pour l'exciton, qui s'écrit à temps égaux :

$$g^{(2)}_{exc}(0) = \frac{\langle \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}\hat{b} \rangle}{\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle^2} \ , \tag{2.50}$$

que nous calculons de la même façon que la corrélation du second ordre pour le photon $g^{(2)}(0)$. Cette quantité ne peut être mesurée de manière directe mais exprime cependant le processus de blocage du point de vue de l'exciton. On voit

sur la figure 2.7 que $g^{(2)}_{exc}(0) < g^{(2)}(0)$ quelque soit le désaccord exciton-photon. Le fait que l'exciton subit directement l'effet de la non-linéarité provoque un désaccord entre les niveaux d'excitons plus peuplés du puits quantique et le fondamental du photon. Ce désaccord est subit directement par l'exciton et indirectement par le photon. En d'autre termes, la transition :

$$|n_X, n_C\rangle \xrightarrow{\Omega_R} |n_X + 1, n_C - 1\rangle \tag{2.51}$$

est défavorisée, ce qui explique la différence entre les deux fonctions de corrélations.

Population et temps caractéristique de sortie

Pour comparer les différentes caractéristiques de notre système avec celles des autres sources non-classiques, nous examinons les propriétés de notre source en géométrie de transmission. Dans une telle configuration, la séparation spectrale des états photoniques de la boîte et de ceux de la cavité planaire doit empêcher toute pollution du signal de détection par des modes qui ne sont pas issus de la boîte. Comme il est montré expérimentalement dans la référence [19], les modes de la cavité planaire sont à des énergies bien plus élevées que celles de la boîte photonique. Une excitation résonante du mode fondamental de la boîte ne peut donc pas exciter de polaritons dans les modes de la cavité planaire. Les propriétés de cohérence du polariton à l'intérieur de la cavité sont donc conservées lors de la transmission de la particule au champ électromagnétique extérieur.

Il est important de connaître l'intensité du signal de sortie avant toute expérience. Une source de photons uniques émettant trop de «paquets vides», c'est-à-dire des impulsions sans aucun photon, serait insatisfaisante. En effet, pour un taux d'émission de photons uniques demeurant très bas, on ne peut pas faire passer beaucoup d'informations. D'un autre côté, une simple source atténuée d'états cohérents serait également insatisfaisante, celle-ci pouvant être obtenue plus simplement à l'aide d'un laser atténué [71]. Pour éviter ces deux extrêmes, un compromis doit être trouvé en maximisant la population de photons présent dans la cavité N_{ph}, tout en gardant une source lumineuse de statistique fortement sub-poissonienne.

Nous avons représenté sur la figure 2.9 la dépendance en puissance de $g^{(2)}(0)$

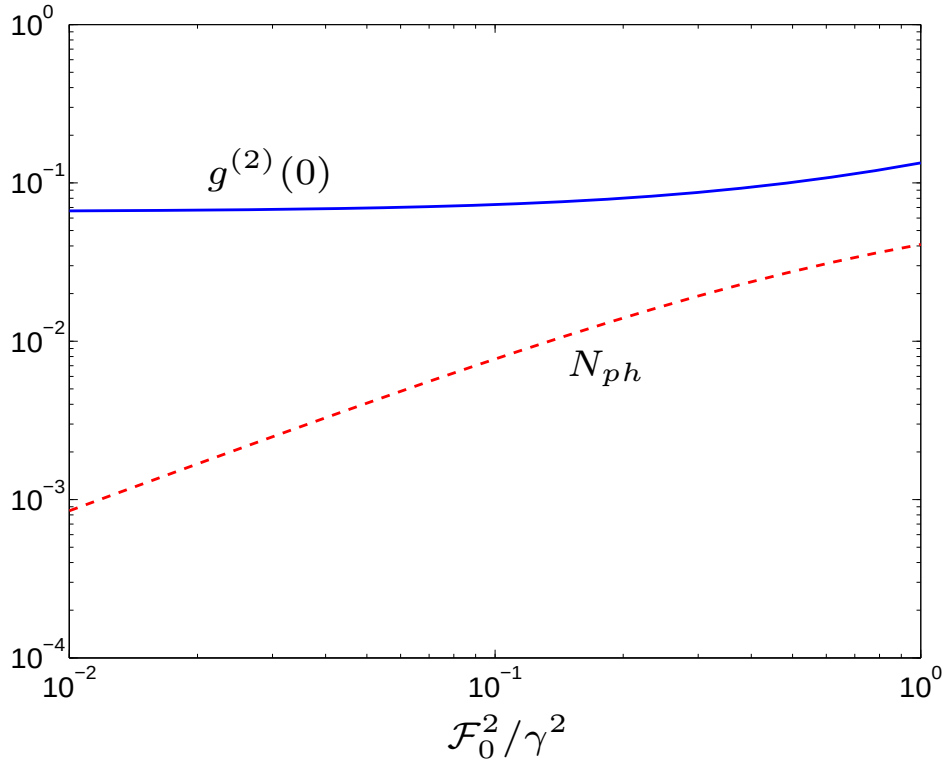


FIG. 2.9: Fonction de corrélation du second ordre intracavité du photon (trait plein) et population de photons au sein du système N_{ph} (traits pointillés) en fonction du facteur $\mathcal{F}_0^2/\gamma^2$. Le désaccord exciton-photon δ est égal à 5 meV, les valeurs prises par les autres paramètres sont : $\hbar\omega_{nl} = 1$ meV, $\hbar\gamma_X = \hbar\gamma_C = \hbar\gamma = 0.1$ meV, $\hbar\Omega_R = 2.5$ meV, et $\omega_p = \omega_{LP}^{dot}$.

et de N_{ph}. Quand $|\mathcal{F}_0|^2/\gamma^2 \to 0$, $g^{(2)}(0)$ converge vers une valeur minimum (inférieure à 0.07 sur la figure) de façon asymptotique. Dans le même temps, la population de photons au sein de la cavité N_{ph} tend vers 0. Lorsque $|\mathcal{F}_0|^2/\gamma^2$ augmente, N_{ph} augmente, mais le caractère sub-poissonien de la lumière se détériore également. Le régime intermédiaire qui nous intéresse intervient lorsque $g^{(2)}(0)$ est petit et que la population N_{ph} est significative. Pour les paramètres utilisés dans la figure 2.9, le cross-over entre les deux tendances a lieu lorsque $N_{ph} \sim 10^{-2}$.

Sur la figure 2.10, nous avons représenté la dépendance au temps relatif τ de $g^{(2)}(\tau)$. Cette dépendance est donnée pour deux intensités différentes de façon à illustrer la dépendance en puissance de $g^{(2)}(\tau)$. La forme de la courbe

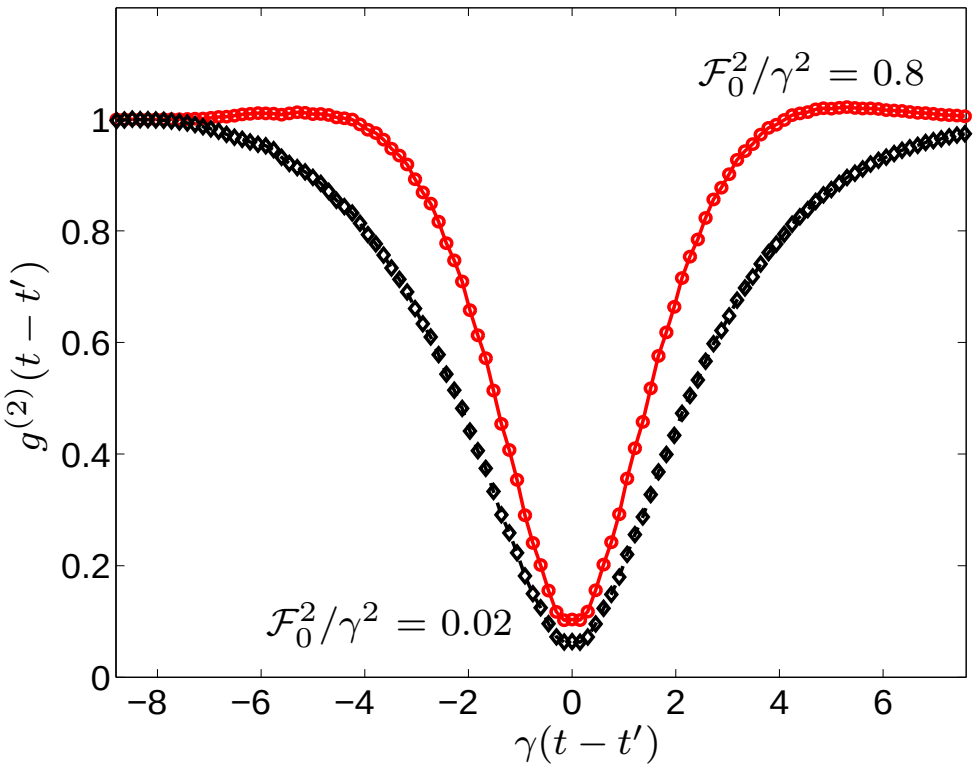


FIG. 2.10: Fonctions de corrélation du second ordre intracavité du photon $g^{(2)}(t-t')$ à t' fixé en fonction du temps pour deux puissances d'excitation différentes. Le désaccord exciton-photon $\delta = 5$ meV. Les valeurs prises par les autres paramètres sont : $\hbar\omega_{nl} = 1$ meV, $\hbar\gamma_X = \hbar\gamma_C = \hbar\gamma = 0.1$ meV, $\hbar\Omega_R = 2.5$ meV, et $\omega_p = \omega_{LP}^{dot}$.

présente un «trou» centré sur $\tau = 0$ qui correspond à une forte réduction du nombre de doubles coïncidences dans une détection de type HBT, c'est à dire de la détection de photons groupés. Pour un temps τ suffisamment long, ici pour $\tau \simeq 10/\gamma$, le système perd toute corrélation, et $g^{(2)}(\tau) \to 1$.

Il est clair que la largeur temporelle du trou de l'antibunching est directement reliée à la valeur de l'élargissement du polariton γ au moins dans la limite où $|\mathcal{F}_0|^2/\gamma^2 \to 0$. Dans ce cas, la population injectée est faible et l'on est quasiment assuré de n'avoir qu'un seul photon dans la cavité. Or, le temps caractéristique de sortie de la cavité du photon est $1/\gamma$, ce qui conditionne le temps de vie de l'état non-classique dans la cavité.

Pour des puissances plus importantes, nous avons vu que les états à plusieurs particules sont plus peuplés, ce qui modifie la statistique de la source vers un antibunching moins marqué. D'autre part, le couplage entre la pompe

et l'état vide $|0,0\rangle$ est plus important, ce qui facilite l'injection d'un photon dans une cavité qui vient d'émettre et diminue ainsi la largeur temporelle du trou.

2.2.3 En excitation pulsée

Notre effet de blocage quantique repose sur une excitation à résonance et nous avons prouvé qu'il permet de produire une lumière non-classique pour une excitation continue. Nous montrons ici que cet effet est toujours considérable dans le régime d'excitation pulsée.

Principe

L'étude du régime pulsé présente un intérêt évident dans le cadre de l'étude d'une source de photons uniques. En effet, dans ce régime, la production de photons uniques se fait à la demande avec un taux de répétition contrôlé. Notre modèle donnant accès à la dynamique de la réponse du système, nous avons simulé une expérience dont le schéma expérimental est identique au précédent, avec une source émettant des trains d'impulsions séparés par un temps ΔT définissant un taux de répétition Γ. Le terme de source s'écrit maintenant :

$$\mathcal{F}_0(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_0 e^{-\frac{(t-n\Delta T)^2}{(\Delta t_p)^2}} \ , \tag{2.52}$$

où Δt_p est la largeur temporelle de chaque impulsion.

Plusieurs problèmes se posent dans l'utilisation d'une telle source. D'abord, le temps entre les impulsions doit être suffisamment long devant le temps de sortie de la cavité pour éviter le blocage des trains suivants, soit :

$$\frac{1}{\Delta T} = \Gamma \ll \gamma \ . \tag{2.53}$$

D'autre part, la largeur temporelle des trains doit être suffisamment élevée pour que la fréquence d'excitation soit bien définie, on évite ainsi l'introduction de photons au-dessus de la résonance pour une excitation spectralement

trop large. Nous traitons en détail ces différents aspects dans la suite.

Résultats et population

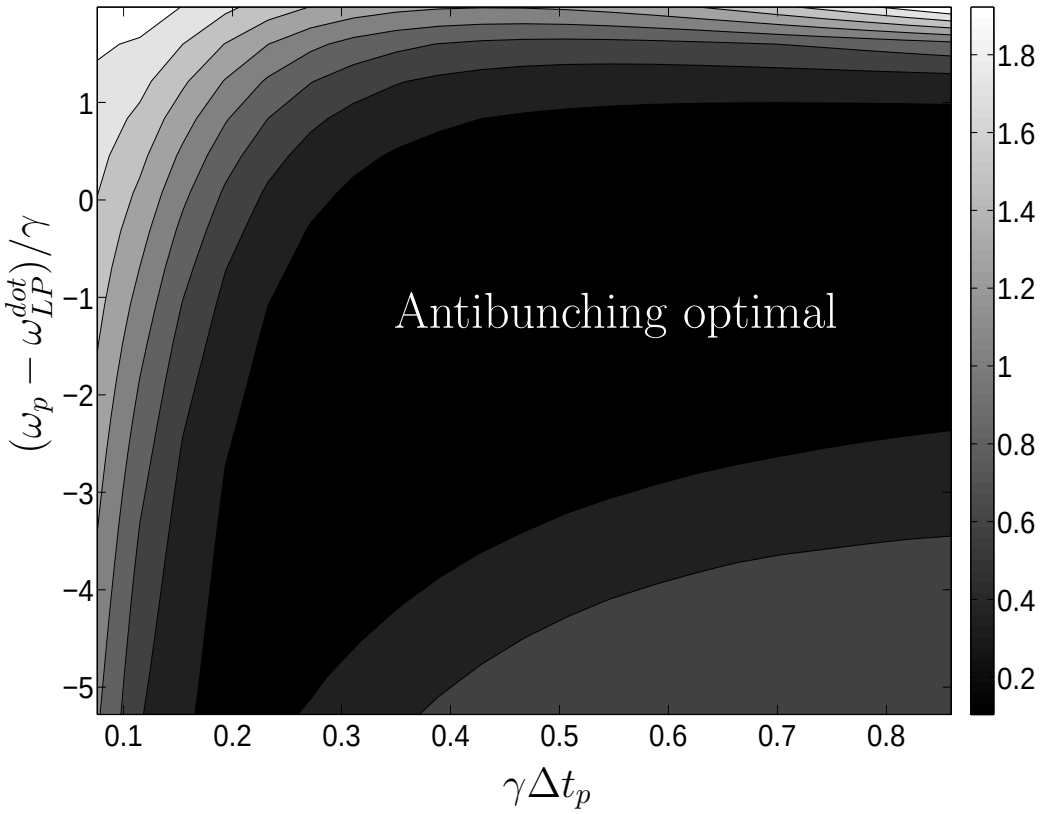


FIG. 2.11: (a) Corrélation du second ordre $\mathcal{G}$ moyennée en intensité au même temps, en fonction de la largeur temporelle des pulses Δt_p et de la valeur du désaccord pompe-résonance. Les impulsions sont séparées les unes des autres de 60 ps. Paramètres : $\hbar(\omega_C^{dot} - \omega_X^0) = 5$ meV, $\hbar\omega_{nl} = 1.1$ meV, $\hbar\Omega_R = 2.5$ meV, $\omega_p - \omega_{LP}^{dot} = -0.05$ meV, $\hbar\gamma_X = \hbar\gamma_C = \hbar\gamma = 0.1$ meV, soit $1/\gamma = 6.6$ ps. Enfin, la valeur maximale de l'intensité est définie par $|\mathcal{F}_0|^2/\gamma^2 = 0.09$.

Pour comprendre l'influence de la dynamique de l'injection des photons de source sur le caractère non-classique de la source, nous introduisons la

corrélation du second ordre moyennée en intensité au même temps définie par

$$\mathcal{G} = \int dt g^{(2)}(t,t) N_{ph}(t) \ . \tag{2.54}$$

Sa représentation en fonction de la largeur des pulses d'excitation et du désaccord entre la pompe et la résonance du fondamental est donnée sur la figure 2.11.

Dans cette figure, le temps ΔT entre chaque impulsion a été choisi très grand devant $1/\gamma$ pour éviter la superposition des trains d'onde. Lorsque des impulsions ont une largeur temporelle étroite, leur largeur spectrale est importante, l'excitation se fait alors de part et d'autre de la résonance, brouillant l'antibunching ($\mathcal{G} > 1$). A l'inverse, si l'on réduit la largeur spectrale de la pompe, la valeur du désaccord pompe-résonance devient important, on se rapproche donc du cas de l'excitation en continu. Ici, nous cherchons à augmenter le taux de répétition de la source tout en évitant la superposition des trains d'onde, on doit donc chercher un compromis entre ces deux aspects, ce qui aboutit au résultat présenté sur la figure 2.12.

En cherchant un compromis sur les conditions énoncées précédemment, nous avons obtenu la figure 2.12(a) qui représente la dépendance de $G^{(2)}(t,t')$ en fonction du temps relatif $t - t'$. Notons que nous n'étudions pas directement la valeur normalisée $g^{(2)}(t,t')$, la cavité se vidant entre chaque paquet. Le caractère non-classique de la source en régime pulsé est démontré par la réduction du pic central. Celui-ci serait maintenu constant dans le cas d'une source de statistique poissonienne, comme par exemple un laser atténué.

Pour évaluer le nombre de photons uniques émis par notre source, on calcule le nombre moyen de photons émis par impulsion η :

$$\eta = \gamma_C \int_{\Delta T} N_{ph}(t) dt \ , \tag{2.55}$$

où ΔT est l'intervalle de temps entre deux impulsions. Sur la figure 2.12(b), on voit que pour $\Gamma = \gamma/10$, les paquets ne se superposent pas. L'évaluation du taux d'informations transmises par notre source, passe par le calcul du taux de bits d'information effectivement émis r. Ici il s'agit du nombre de bits émis par seconde multiplié par la probabilité d'émission d'un photon par impulsion η soit $r = \eta\Gamma$. D'après la figure 2.12(b), on trouve $\eta = 0.01$, ce qui induit un taux

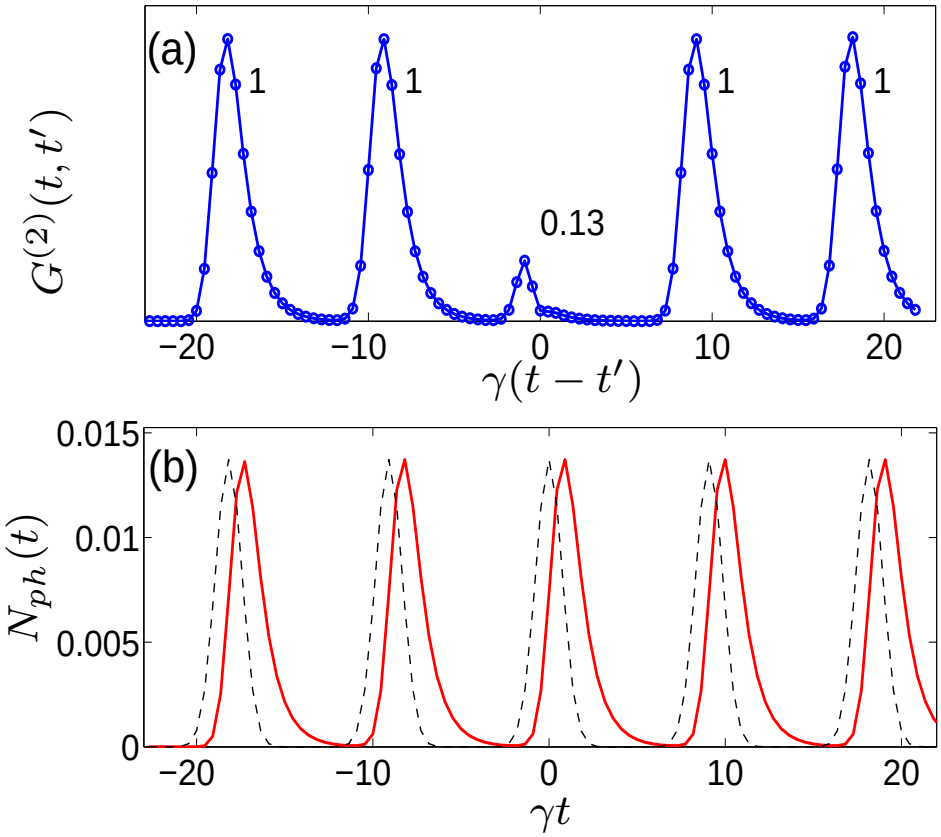


FIG. 2.12: (a) Corrélation du second ordre $G^{(2)}(t,t')$ pour $t' = 6$ ps dans le cas d'une excitation par un train d'impulsions Gaussiennes (de largeur temporelle de 5 ps) séparées les unes des autres de 60 ps. A côté de chaque pic est indiquée son aire normalisée. (b) Population de photons au sein de la cavité correspondante $N_{ph}(t)$. En pointillés, allure de l'amplitude d'excitation $\mathcal{F}_0(t)$. Paramètres : $\hbar(\omega_C^{dot} - \omega_X^0) = 5$ meV, $\hbar\omega_{nl} = 1.1$ meV, $\hbar\Omega_R = 2.5$ meV, $\omega_p - \omega_{LP}^{dot} = -0.05$ meV, $\hbar\gamma_X = \hbar\gamma_C = \hbar\gamma = 0.1$ meV, soit $1/\gamma = 6.6$ ps. La valeur maximale de l'intensité est définie par $|\mathcal{F}_0|^2/\gamma^2 = 0.09$.

r proche de 0.1 GHz. Ce taux est à comparer avec celui obtenu par exemple dans les centres N-V colorés du diamant qui s'élève à environ 10 kHz [73].

2.2.4 Contraintes et limites du modèle

Comme nous en avons discuté plus tôt, notre modèle souffre de quelques défauts. Tout d'abord une incertitude pèse sur la valeur du coefficient κ. La valeur phénoménologique choisie ici est issue de plusieurs expériences, mais aucune étude expérimentale approfondie de la non-linéarité n'a été publiée à notre connaissance. Ce facteur joue pourtant un grand rôle dans les expériences menées dans ces systèmes à propos de l'amplification ou de l'oscillation paramétrique optique [10, 12, 95]. Notons cependant que c'est sur le paramètre ω_{nl}/γ que reposent les effets non-classiques. Un affinement de la largeur de raie entraîne des effets non-linéaires plus importants, mais elle abaisse cependant le temps de sortie de la cavité. En prenant en compte ces remarques, un bon antibunching peut être atteint pour une cavité de quelques centaines de nanomètres de large.

Le modèle ne traite pas précisément des conditions d'extraction de la lumière. On peut donner plusieurs idées pour résoudre le problème de l'excitation à résonance. L'expérience en transmission est indispensable pour éviter d'observer les photons de la source lors de la collection. D'autre part, il est possible de fabriquer une cavité dont les miroirs sont dissymétriques de façon à favoriser la sortie des photons d'un côté de la structure plutôt que l'autre. Enfin, comme nous l'avons indiqué, à résonance, tout photon absorbé par la structure le sera au niveau de la boîte et non au niveau de la structure planaire grâce à la bonne séparation spectrale des modes [19], évitant toute pollution de la statistique des photons issus de la boîte par les photons de la cavité.

2.3 Conclusion et perspectives

En conclusion, nous avons présenté les possibilités engendrées par le confinement des modes photoniques couplés avec les modes excitoniques. La dynamique non-linéaire de l'exciton du puits quantique couplé au photon permet de réaliser des sources de lumières non-classiques dont les propriétés sont bien contrôlées. Le choix de la fréquence de résonance est assez libre, puisqu'elle peut être modifiée lors de la fabrication de la structure. Ces effets non-classiques sont observés en régime continu mais aussi en régime pulsé, ce qui peut déboucher sur une source de photons uniques alternative présentant

certains avantages, mais aussi certains inconvénients par rapport aux sources existantes. Une autre possibilité est de conserver les polaritons dans un réseau et les faire transiter de site en site, créant un circuit de polaritons, le mécanisme de blocage permettant de créer l'équivalent d'une porte logique.

Chapitre 3

Corrélations quantiques signal-complémentaire dans des processus paramétriques dégénérés

Après avoir utilisé les interactions non-linéaires observées dans les microcavités pour engendrer des oscillateurs paramétriques à très bas seuil [9, 12, 33, 43, 88, 96–100], de nombreux travaux se sont intéressés aux propriétés quantiques de la lumière issues de l'émission paramétrique [15, 16, 85, 101–104]. Ces travaux s'appuient sur l'hypothèse que des propriétés non-classiques comme l'intrication ou l'existence d'un état comprimé à deux modes existent entre les paires signal et complémentaire [105, 106] générées par la diffusion cohérente de deux polaritons de pompe placé à l'«angle magique» [11, 95]. Le problème rencontré par l'utilisation de ces processus est le déséquilibre entre l'intensité des deux signaux faisceaux observés. Cette asymétrie est préjudiciable à l'observation de corrélations quantiques en variables continues à l'extérieur de la cavité.

Cette asymétrie a été levée dans une expérience récente [23, 24, 107, 108] en utilisant une paire de faisceaux incidents identiques, mais de vecteurs d'onde planaires opposés, placés à un angle inférieur à l'angle magique. Dans cette géométrie, les paires de faisceaux signal et complémentaire sont parfaitement symétriques, dégénérés en énergie avec les deux pompes et de vecteurs d'onde opposés. Dans une cavité planaire, avec une telle configuration, la représentation dans l'espace réciproque de la fluorescence paramétrique épouse la forme

d'un anneau du même rayon que le vecteur d'onde de la pompe (voir figure 3.1). Une autre façon de lever la difficulté posée par l'asymétrie de la cavité consiste à exciter à incidence normale une microcavité multiple possédant plusieurs branches photoniques [109] et à observer le processus horizontal. Signalons que ces effets sont également observés dans des matériaux semiconducteurs différents, comme les matériaux de type $\chi^{(2)}$ [110, 111].

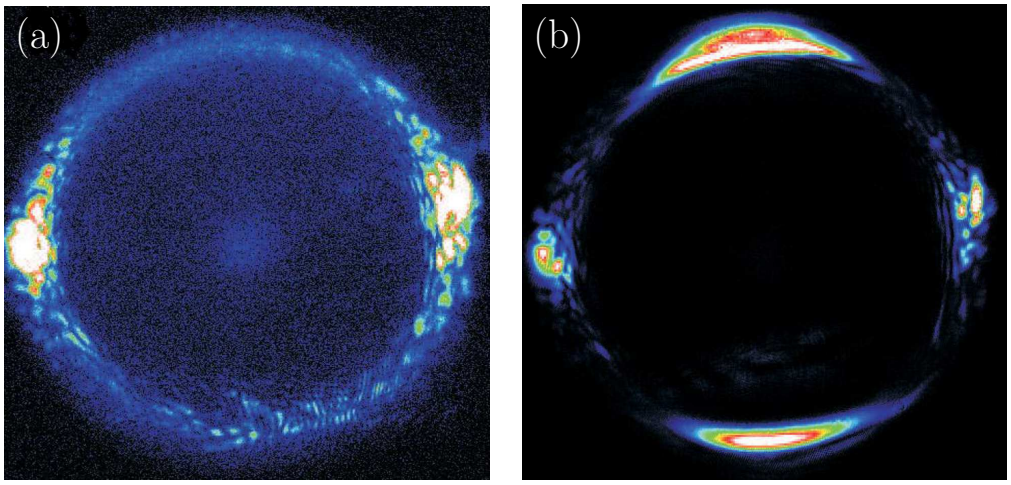


FIG. 3.1: Profil d'émission dans l'espace réciproque d'une microcavité semiconductrice tiré de l'expérience de Romanelli *et coll* [24] pour des régimes d'excitation en dessous du seuil (a) et au dessus du seuil (b).

Dans ce contexte, il est très intéressant de pouvoir évaluer les performances du système, c'est à dire de caractériser aussi bien l'impact des pertes radiatives ou non-radiatives que la compétition entre modes ou la diffusion multiple sur les corrélations quantiques. Une approche telle que le mélange à quatre ondes est inopérante pour décrire ces phénomènes, qui requièrent une description multimode du fait de la nature des processus mis en jeu. De plus, toute hétérostructure étant imparfaite, l'étude d'un désordre statique imposé par le cristal est également incontournable. Celui-ci est en effet responsable de la diffusion élastique des photons de pompe, qui créé elle aussi un anneau lumineux dans l'espace réciproque appelé anneau Rayleigh. Les photons issus de cet anneau de leur côté, ne sont pas corrélés.

Nous présentons dans ce chapitre une étude théorique de ces problèmes par l'intermédiaire de la méthode de Monte Carlo quantique appliquée à la

représentation de Wigner [103]. Nous commençons par présenter la technique de Monte Carlo appliquée à notre modèle ainsi que les observables pertinentes pour qualifier les corrélations quantiques. Nous présentons ensuite une étude de la population obtenue par nos simulations, puis des corrélations quantiques. Nous comparons finalement ces résultats à ceux obtenus par un modèle simplifié.

3.1 Présentation du modèle

Dans la suite de ce chapitre, nous décrivons la physique d'une microcavité planaire. L'excitation de cette cavité sera toujours trop faible pour atteindre un régime de saturation. Comme nous nous plaçons dans un régime dilué, où la densité d'excitons est négligeable devant n_{sat}, et que d'autre part, la densité de photons est comparable à la densité d'excitons, nous négligerons l'influence des termes de saturation dans notre modèle. Un schéma de l'expérience est proposé sur la figure 3.2.

3.1.1 Hamiltonien et équations de champ moyen

Mise en équation du système

Nous reprenons le Hamiltonien obtenu dans le chapitre précédent, en supprimant les termes de saturation :

$$\begin{aligned} H = &\int d\mathbf{x}\hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{x})\left[h_{i,j}^0(-i\nabla) + V_i(\mathbf{x})\delta_{i,j}\right]\hat{\Psi}_j(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{\hbar\kappa}{2}\int d\mathbf{x}\hat{\Psi}_X(\mathbf{x})^\dagger\hat{\Psi}_X(\mathbf{x})^\dagger\hat{\Psi}_X(\mathbf{x})\hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) + \int d\mathbf{x}\hbar F_p(\mathbf{x},t)\hat{\Psi}_C^\dagger(\mathbf{x}) + h.c.\ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le potentiel dû au désordre statique sera modélisé dans la suite par le terme $V_{X,C}(\mathbf{x})$. Le terme de pompe $F_p(\mathbf{x},t)$ a été légèrement modifié, nous donnerons son expression de façon explicite par la suite. La dynamique du spin engendrant un certain nombre de mécanismes supplémentaires [81, 112–114] qui ne sont pas l'objet de notre étude, nous supposons que l'on excite la cavité par des

pompes de polarisation circulaire, ce qui supprime le degré de liberté du spin, et simplifie notre problème. Comme dans le chapitre précédent, les interactions exciton-exciton sont modélisées par un terme d'ordre quartique multiplié par le facteur d'interaction κ. Ici encore nous nous basons sur une valeur proche de l'expérience, soit $\hbar\kappa \simeq 1.10^{-2}$ meVμm^2. Notons que cette valeur doit être théoriquement modifiée du fait de la discrétisation de l'espace. Pour calculer la valeur de ce paramètre, on doit choisir $\hbar\kappa$ de façon à ce que la matrice de diffusion de l'espace discrétisé soit la plus proche possible de la matrice de l'espace réel. Si la matrice de diffusion ne présente pas de résonance de Feshbach dans la zone étudiée, l'approximation employée est alors valable pour des interactions faibles [115].

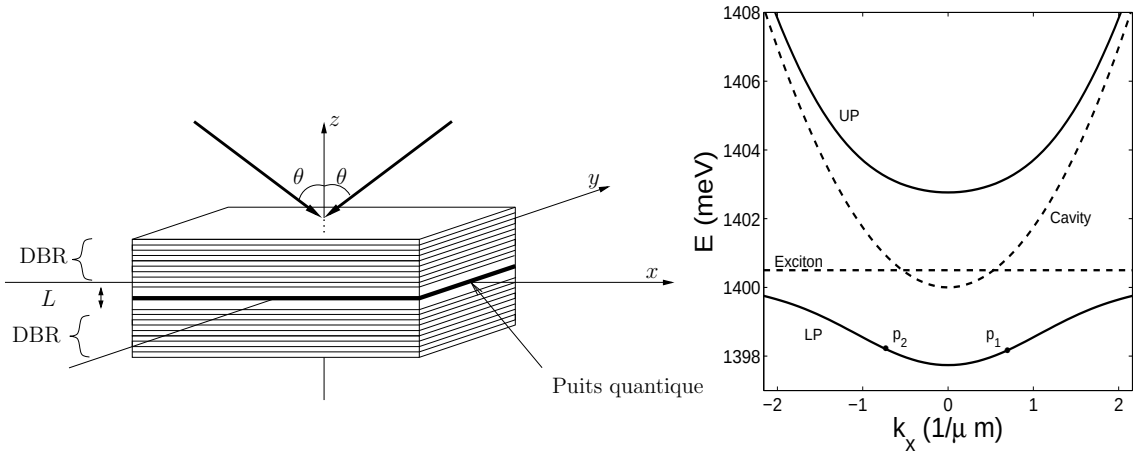


FIG. 3.2: (a) Schéma de principe de l'expérience modélisée. Deux faisceaux viennent exciter la cavité à des angles opposés. (b) Dispersion en énergie des branches de polariton basse et haute (trait continu) et des excitons et des photons (pointillés). Les points sur la dispersion du polariton de branche basse (LP) indiquent les vecteurs d'onde des pompes. Les paramètres sont $\hbar\Omega_R = 2.5$ meV, $\hbar\omega_C^0 = 1400$ meV, $\hbar\omega_X^0 = 1400.5$ meV, $k_z = 20$ μm^{-1} et $k_p = 0.6891$ μm^{-1}.

Afin d'identifier les différents régimes du système, nous étudions dans un premier temps la théorie de champ classique appliquée au Hamiltonien (3.1). On remplace les opérateurs $\hat{\Psi}_{X,C}(\mathbf{x})$ par les nombres complexes $\psi_{X,C}(\mathbf{x})$ représentant la valeur moyenne du champ $\psi_{X,C}(\mathbf{x}) = \langle\hat{\Psi}_{X,C}(\mathbf{x})\rangle$. Puisque nous étudions un système dilué où les interactions entre les bosons sont faibles, les fluctuations du champ sont faibles tant que la solution du problème en champ

moyen est stable, et donc que cette solution fournit une valeur bien établie de la partie cohérente du champ. Nous utiliserons les résultats de la théorie de champ moyen pour situer le régime du système par rapport au seuil d'instabilité. Le champ électrique de la pompe s'écrit :

$$F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x},t) = F_p(e^{-ik_px} + e^{ik_px})e^{-i\omega_pt} \ . \tag{3.2}$$

Ce champ décrit deux pompes monochromatiques de vecteurs d'onde opposés orientés suivant l'axe des x. Les deux faisceaux sont d'égale amplitude F_p, et de même fréquence ω_p. En appliquant ces hypothèses au Hamiltonien (3.1), on en déduit les équations d'évolution de champs moyen :

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\psi_C(\mathbf{x})\\ \psi_X(\mathbf{x})\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\hbar F_p\\ 0\end{pmatrix}(e^{-ik_px} + e^{ik_px})e^{-i\omega_pt} \\ &\quad + \left[\mathbf{h}^1 + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \hbar\kappa|\psi_X(\mathbf{x})|^2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\psi_C(\mathbf{x})\\ \psi_X(\mathbf{x})\end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

où l'opérateur linéaire $\mathbf{h}^1$ est défini par :

$$\mathbf{h}^1 = \mathbf{h}^0 + \begin{pmatrix}V_C(\mathbf{x}) - i\hbar\gamma_C/2 & 0\\ 0 & V_X(\mathbf{x}) - i\hbar\gamma_X/2\end{pmatrix} \ . \tag{3.4}$$

Cette égalité correspond à une équation de Gross-Pitaevskii appliquée à notre système de polaritons en cavité [56]. Notons que nous avons inclus les termes de pertes dans le calcul par le biais des coefficients γ_X et γ_C, largeurs de raie de l'exciton et du photon respectivement. Ceux-ci sont introduits en utilisant la théorie quantique standard de l'amortissement [91,103], à travers l'équation maîtresse introduite au chapitre précédent.

Régime stationnaire, régime de diffusion résonante

Dans le cas homogène, où

$$V_X(\mathbf{x}) = V_C(\mathbf{x}) = 0 \ \ \forall\mathbf{x} \ , \tag{3.5}$$

au vu des symétries du système, les solutions stationnaires de même plan d'onde auront la forme :

$$\psi_{X,C}(\mathbf{x}) = \psi_{X,C}^{ss}\left(e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}_p\mathbf{x}}\right)e^{-i\omega_p t} \ , \tag{3.6}$$

où les coefficients $\psi_{X,C}^{ss}$ sont obtenus à partir des équations :

$$\begin{aligned}\left(e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}_p\mathbf{x}}\right)\left(\left(\omega_X - \omega_p + \kappa|\psi_X^{ss}|^2|e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}_p\mathbf{x}}|^2 - i\gamma_X/2\right)\psi_X^{ss} + \Omega_R\psi_C^{ss}\right) = 0 \ , \\ \left(e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}_p\mathbf{x}}\right)\left(\left(\omega_C(\mathbf{k_p}) - \omega_p - i\gamma_C/2\right)\psi_C^{ss} + \Omega_R\psi_X^{ss}\right) = -F_p\left(e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}_p\mathbf{x}}\right) \ .\end{aligned} \tag{3.7}$$

Puisque la cavité n'est pas excitée à l'angle magique, l'influence des processus de vecteur d'onde $3\mathbf{k}_p$ est négligeable sur le régime stationnaire de la cavité. Pour simplifier les équations, nous coupons ces termes qui apparaissent dans le développement de la première équation, on projète donc l'équation précédente sur les ondes planes de vecteurs d'onde $\pm\mathbf{k}_p$. Il vient :

$$\begin{aligned}\left(\omega_X - \omega_p + 3\kappa|\psi_X^{ss}|^2 - i\gamma_X/2\right)\psi_X^{ss} + \Omega_R\psi_C^{ss} = 0 \ , \\ \left(\omega_C(\mathbf{k_p}) - \omega_p - i\gamma_C/2\right)\psi_C^{ss} + \Omega_R\psi_X^{ss} = -F_p \ .\end{aligned} \tag{3.8}$$

Notons que ces équations sont identiques aux équations d'état pour une seule pompe à l'exception du coefficient du terme non-linéaire [85, 116]. Notons que ces équations sont analogues aux équations utilisées pour décrire les condensats de Bose [56]. La différence entre ces deux systèmes réside dans la fréquence d'oscillation qui est fixée dans le cas du condensat par le potentiel chimique. Ici, nous sommes dans un système hors-équilibre où la pompe fixe la fréquence et qui, par conséquent, est ici un paramètre ajustable.

Pour vérifier la stabilité des solutions, on linéarise l'équation (3.3) autour des solutions stationnaires. Des perturbations peuvent être produites par des fluctuations du champ de pompe ou venir de la diffusion des polaritons sur un défaut du cristal. Dans la zone de stabilité, la réponse du système à une petite perturbation est donnée en utilisant une théorie linéarisée proche de la théorie de Bogoliubov linéarisée des gaz de Bose en interaction faible [56]. Si l'on définit les champs variant lentement par rapport à la fréquence de la pompe par :

$$\delta\phi_{X,C}(\mathbf{x},t) = \delta\psi_{X,C}(\mathbf{x},t)e^{i\omega_p t} \ , \tag{3.9}$$

l'équation du mouvement du vecteur :

$$\delta\phi(\mathbf{x},t) = \begin{pmatrix} \delta\phi_C(\mathbf{x},t) \\ \delta\phi_X(\mathbf{x},t) \\ \delta\phi_C^*(\mathbf{x},t) \\ \delta\phi_X^*(\mathbf{x},t) \end{pmatrix} , \tag{3.10}$$

s'écrit :

$$i\frac{d}{dt}\delta\phi(\mathbf{x},t) = \mathcal{L}\delta\phi(\mathbf{x},t) + f_{pert} , \tag{3.11}$$

où f_{pert} est le terme source de la perturbation. L'expression de f_{pert} dépend évidemment de la perturbation considérée. L'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ est :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \Lambda_C(-i\nabla) - i\gamma_C/2 & \Omega_R & 0 & 0 \\ \Omega_R & \Lambda_X - i\gamma_X/2 + 2\kappa|\psi_X^{cm}|^2(\mathbf{x}) & 0 & \kappa\psi_X^{cm\,2}(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & -\Lambda_C(-i\nabla) - i\gamma_C/2 & -\Omega_R \\ 0 & -\kappa\psi_X^{cm*\,2}(\mathbf{x}) & -\Omega_R & -\Lambda_X - i\gamma_X/2 - 2\kappa|\psi_X^{cm}|^2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} , \tag{3.12}$$

où $\Lambda_C(-i\nabla) = \omega_C(-i\nabla) - \omega_p$, $\Lambda_X = \omega_X - \omega_p$ et $\psi_X^{cm}(\mathbf{x}) = 2\psi_X^{ss}\cos(\mathbf{k}_p\mathbf{x})$. Les valeurs propres de cette matrice sont les modes de Bogoliubov $\omega_{LP,UP}^{\pm}(\mathbf{k})$. A chaque vecteur d'onde $\mathbf{k}$ correspond donc 4 branches de polariton. Pour chaque branche LP ou UP, il existe une branche $+$ et un branche $-$, image l'une de l'autre à travers la transformation $\{(\mathbf{k} \to 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}), (\omega \to 2\omega_p - \omega)\}$. Si les parties imaginaires de ces valeurs propres sont négatives pour tout $\mathbf{k}$, ce qui est toujours le cas quand il n'y a pas d'interaction exciton-exciton, c'est-à-dire quand $\kappa = 0$, la solution de champ moyen est stable. Il suffit que l'une d'entre elles soit positive pour invalider la solution proposée.

Si l'instabilité concerne uniquement le mode de pompe, on obtient une instabilité de type Kerr. Dans le cas qui nous intéresse, lorsque l'instabilité est due à la formation de paires signal-complémentaire, on parle d'instabilité paramétrique [116]. Nous avons représenté sur la figure 3.3 l'énergie de champ moyen correspondant aux solutions stationnaires en fonction de l'intensité de la pompe. Nous avons considéré dans les deux courbes deux désaccords pompe polariton différents correspondant à deux régimes d'instabilité différents. Dans le premier cas, le désaccord $\omega_p > \omega_{LP}(\mathbf{k}_p)$ donne lieu au régime de bistabilité, qui se traduit par la courbe en forme de S. La boucle d'hystérésis formée par la bistabilité a été observée expérimentalement sous excitation par un seul fais-

ceau à incidence nulle [13] et quasi-nulle [14]. La partie instable de la branche est tracée en pointillés, tandis que les points stables sont représentés par des cercles. Sur l'autre figure nous avons représenté la même courbe, pour une désaccord nul $\omega_p = \omega_{LP}(\mathbf{k}_p)$. On observe toujours l'existence de l'instabilité paramétrique, mais plus de bistabilité, le régime correspond à celui d'un limitateur optique.

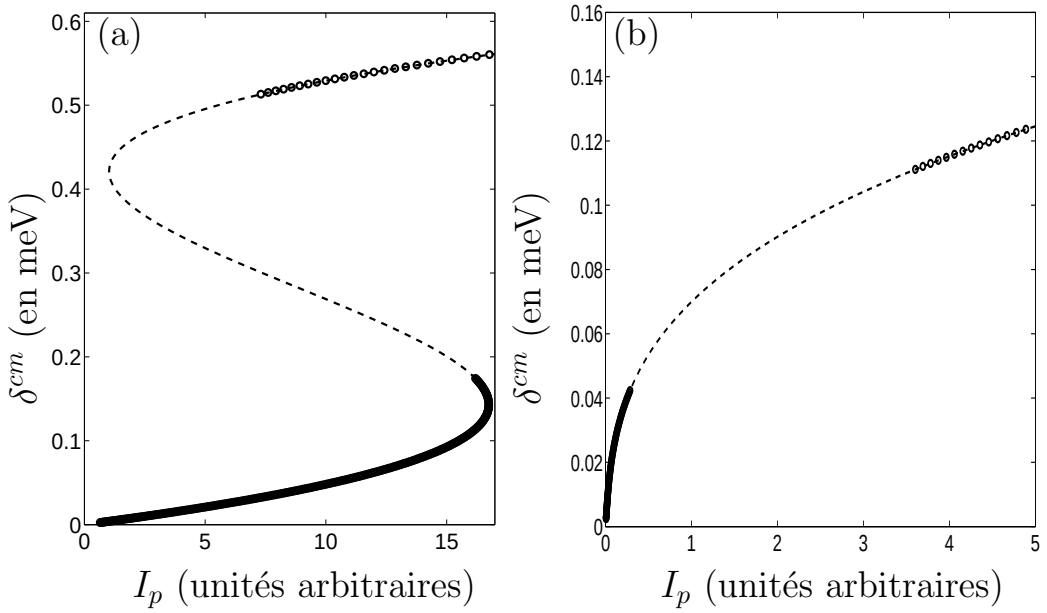


FIG. 3.3: Energie de champ moyen $\delta^{cm} = \hbar\kappa|\psi_X^{cm}|^2(\mathbf{k}_p)$ en meV exprimée en fonction de l'intensité de pompe I_p. Les paramètres utilisés dans les deux cas sont $\hbar\Omega_R = 2.5$ meV, $\hbar\omega_C^0 = 1400$ meV, $\hbar\omega_X^0 = 1400.5$ meV, $k_z = 20$ μm^{-1} et $k_p = 0.6891$ μm^{-1}, $\hbar\gamma_C = \hbar\gamma_X = 0.1$ meV. (a) Courbe de bistabilité obtenue pour $\omega_p - \omega_{LP}(\mathbf{k}_p) = 0.6$ meV. Le domaine stable est dessiné par des cercles, tandis que le domaine instable est représenté par une courbe en pointillés. (b) Courbe sans bistabilité, présentant toutefois un domaine d'instabilité paramétrique (en pointillés), le désaccord pompe résonance est ici nul ($\omega_p - \omega_{LP}(\mathbf{k}_p) = 0$).

Dans la suite, nous nous placerons dans le second régime, où nous bénéficierons de la production de paires signal-complémentaire en dehors de la pompe et où le système n'est pas perturbé par la bistabilité. Nous choisissons donc une pompe à résonance avec la branche basse du polariton soit $\omega_p = \omega_{LP}(\mathbf{k}_p)$. La diffusion des paires de polaritons de pompe par les interactions non-linéaires crééent alors des paires de polaritons signal-complémentaire

de vecteurs d'onde opposés $\pm\mathbf{k}$. En prenant en compte un léger déplacement vers le bleu de l'énergie des modes du fait des interactions, la conservation de l'énergie et du moment est satisfaite si $\omega_s = \omega_i = \omega_p$ et $\|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{k}_p\|$, c'est à dire sur l'anneau de luminescence paramétrique de rayon $\|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{k}_p\|$.

3.1.2 La méthode de Monte Carlo quantique

Pour étudier les fluctuations quantiques de façon complète et leur évolution en fonction des différents régimes du système, nous cherchons les solutions numériques des équations stochastiques de la représentation de Wigner des champs bosoniques du photon et de l'exciton. Avec cette technique, nous sondons la dynamique du système en prenant en compte son caractère multimode, indispensable à la compréhension des phénomènes en jeu dans une telle configuration. Nous avons ainsi accès aux fluctuations autour du champ moyen quelque soit son intensité.

Représentation de Wigner, équation stochastique

On applique le formalisme de la représentation de Wigner aux champs photoniques et excitoniques. La représentation de Wigner des champs $\hat{\Psi}_{C,X}(\mathbf{x})$ est définie par une fonction de distribution de quasiprobabilité $W[\psi_{C,X}]$ dans l'espace fonctionnel des champs à valeurs complexes $\psi_{C,X}$ [91]. Pour implémenter cette distribution dans un modèle numérique, nous utilisons une grille discrète et finie. Nous avons choisi de travailler dans une grille de $n_x \times n_y$ points séparés de façon régulière les uns des autres par une longueur $l_{x,y}$ suivant les axes x et y respectivement, et ce, dans une boîte de dimensions latérales $L_x \times L_y = n_x l_x \times n_y l_y$.

Sous une condition de dilution qui s'écrit $\gamma_{X,C} \gg g/(l_x l_y)$, l'évolution de la distribution W peut être approchée, en utilisant l'approximation de Wigner tronquée [117], par une équation de Focker-Planck. La matrice de diffusion de cette équation est alors définie positive sans les termes d'ordre supérieurs, garantissant que W est toujours positive. Nous pouvons donc représenter le problème par l'intermédiaire de l'équation différentielle stochastique des champs $\psi_{C,X}$. Si l'on pose $l_x l_y = dV$ le volume d'une cellule élémentaire du réseau sur

lequel le champ est discrétisé, il vient l'équation :

$$\begin{aligned} d\begin{pmatrix}\psi_C(\mathbf{x})\\ \psi_X(\mathbf{x})\end{pmatrix} &= -idt\begin{pmatrix}F_p\\ 0\end{pmatrix}(e^{-ik_px}+e^{ik_px})e^{-i\omega_pt} \\ &\quad - idt\left[\mathbf{h}^1/\hbar + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \kappa\left(|\psi_X(\mathbf{x})|^2-\frac{1}{dV}\right)\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\psi_C(\mathbf{x})\\ \psi_X(\mathbf{x})\end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{4dV}}\begin{pmatrix}\sqrt{\gamma_C}dW_C(\mathbf{x})\\ \sqrt{\gamma_X}dW_X(\mathbf{x})\end{pmatrix} \ , \end{aligned} \tag{3.13}$$

où $dW_{X,C}$ sont les termes de bruit blanc. Ils sont donc de moyenne nulle et non-corrélés, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{dW_i(\mathbf{x})dW_i(\mathbf{x}')} &= 0 \ , \\ \overline{dW_i(\mathbf{x})dW_j^*(\mathbf{x}')} &= 2dt\delta_{\mathbf{x},\mathbf{x}'}\delta_{i,j} \ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

La condition initiale est une cavité vide, les champs sont donc tous décrits par des variables aléatoires gaussiennes non corrélées :

$$\begin{aligned} \overline{\psi_i(\mathbf{x})\psi_i(\mathbf{x})} &= 0 \ , \\ \overline{\psi_i(\mathbf{x})\psi_j^*(\mathbf{x}')} &= \frac{1}{2dV}\delta_{ij} \ . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Lorsque l'on effectue une simulation de type Monte Carlo, un grand nombre de configurations de départ est tiré. Ces configurations évoluent en obéissant à l'équation numérique (3.13). Le bruit blanc rajouté correspond au bruit quantique présent dans le système. Notons que ce bruit joue un rôle prépondérant en cas de phénomènes de basse intensité. A haute intensité, la dynamique est dominée par les effets classiques. Cependant, notre équation permet d'évaluer la statistique des champs dans chacun de ces régimes. Nous détaillons dans la suite le calcul des moments qui qualifient la statistique du système.

Principe du calcul des moments

Pour déterminer les valeurs prises par les observables, nous devons calculer leur valeurs moyennes à partir des champs stochastiques. Pour cela on doit faire la moyenne des résultats de l'équivalent classique de l'observable sur toutes les configurations. Les moments de la fonction de Wigner donnent la valeur

moyenne des opérateurs complètement symétrisés, soit :

$$\langle O_1 ... O_N \rangle_W = \frac{1}{N!} \sum_P \langle \hat{O}_{P(1)} ... \hat{O}_{P(N)} \rangle \ , \tag{3.16}$$

où la somme est faite sur toutes les permutations de l'ensemble $\{1...N\}$. Chaque opérateur $\hat{O}_i$ désigne ici la composante d'un champ quantique, tandis que O_1 est le champ stochastique correspondant.

Rappelons la relation entre les opérateurs de l'espace réel et de l'espace réciproque, obtenue au chapitre précédent :

$$\hat{\Psi}_C(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{A}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kx}} \ , \ \hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{A}} \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kx}} \ . \tag{3.17}$$

Ici nous évoluons sur une grille de largeur $L_x \times L_y$ la zone de quantification $A = L_x L_y$ est découpée en $n_x \times n_y$ points, l'intégrale devient une somme discrète sur le réseau. Il vient :

$$\begin{aligned} \Psi_C(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \ , \\ \Psi_X(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \ . \end{aligned} \tag{3.18}$$

A l'aide de ces égalités nous pouvons établir la relation qui relie les moments des champs stochastiques aux différentes observables du champ, comme par exemple la population de photons au sein de la cavité. Celle-ci s'écrit $\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}$, ce qui devient en terme de moments :

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \rangle &= \frac{1}{2} \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \rangle - \frac{1}{2} \\ \langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \rangle &= \frac{1}{2} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle_W - \frac{1}{2} = \frac{L_x L_y}{(n_x n_y)^2} \overline{|\tilde{\psi}_C[\mathbf{k}]|^2} - \frac{1}{2} \ , \end{aligned} \tag{3.19}$$

où $\tilde{\psi}_C[\mathbf{k}]$ est un champ stochastique complexe associé à l'opérateur $\tilde{\Psi}_C[\mathbf{k}]$. Ces champs complexes commutant automatiquement entre eux, ils correspondent nécessairement à l'opérateur symétrisé auquel ils sont associés. Notons que du fait de la transmitivité des miroirs, les observables du champ électromagnétique intracavité sont transferées aux observables de l'extérieur de la cavité avec le même vecteur d'onde transverse.

3.2 La fluorescence paramétrique

Nous décrivons la dynamique de la population au sein de la cavité, suivant différents régimes. A basse intensité d'abord, nous décrivons le régime de fluorescence paramétrique dans une cavité parfaite. Nous étudions ensuite l'évolution de la fluorescence pour une puissance de plus en plus importante puis nous caractérisons cette dépendance. Nous étudions enfin le cas d'un potentiel désordonné et évaluons son impact sur la luminescence.

3.2.1 Sans désordre

Nous avons représenté sur la figure 3.4 la population de photon en état stationnaire obtenu par le modèle numérique, pour une pompe en-dessous du seuil d'oscillation paramétrique. On voit clairement l'anneau de fluorescence paramétrique correspondant aux processus $(\mathbf{k}_p, -\mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ où $\|\mathbf{k}\| \lesssim \|\mathbf{k}_p\|$, cette inégalité étant due au décalage vers le bleu des modes de polariton. On distingue également d'autres processus en plus de l'anneau de fluorescence. Ainsi, on distingue les deux points opposés situés à $\mathbf{k} = \pm 3\mathbf{k}_p$ dus au mélange à quatre ondes $(\pm\mathbf{k}_p, \pm\mathbf{k}_p) \rightarrow (\pm 3\mathbf{k}_p, \mp\mathbf{k}_p)$. Ceux-ci sont issus de l'amplification paramétrique entre les deux pompes où chacune joue le rôle de sonde pour l'autre. Comme ces deux spots sont produits par effet stimulé, il gardent les propriétés de cohérence des deux modes de pompes. On observe également des points lumineux de part et d'autre de chaque pompe, au voisinage de $\mathbf{k}_p$ sur l'axe des x. Ces processus sont issus d'effets spontanés de la luminescence paramétrique à travers le processus $(\pm\mathbf{k}_p, \pm\mathbf{k}_p) \rightarrow (\pm\mathbf{k}_p + \delta\mathbf{k}, \pm\mathbf{k}_p - \delta\mathbf{k})$, avec $\|\delta\mathbf{k}\| \ll \|\mathbf{k}_p\|$. Les deux pompes étant à un angle inférieur à l'angle magique, il n'y a pas à la fois d'accord de phase et de conservation de l'impulsion avec le bas de la branche basse (LP), ce processus est donc peu favorisé et son intensité est moins importante que celle des autres points. L'ensemble de ces processus sont représentés schématiquement sur la figure 3.5.

Pour quantifier l'intensité émise sur l'anneau et étudier le problème des paires de polaritons signal-complémentaire, nous cherchons à étudier l'évolu-

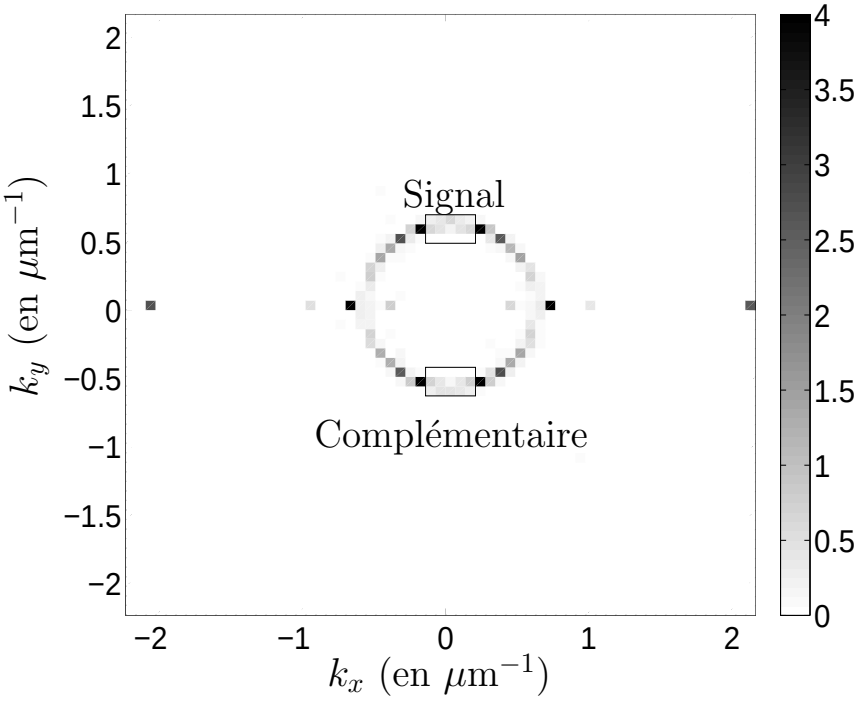


FIG. 3.4: Population de photons dans l'espace des $\mathbf{k}$ au sein de la cavité obtenu par la simulation de Monte Carlo. L'amplitude de pompe $\hbar F_p$ =0.5 meV.μm^{-1} est sous le seuil d'oscillation paramétrique. Les deux rectangles représentent les zones $\mathcal{D}_{s,i}$ dans lesquelles le signal et le complémentaire sont intégrés. Les paramètres sont $\hbar\Omega_R = 2.5$ meV, $\hbar\omega_C^0 = 1400$ meV, $\hbar\omega_X^0 = 1400.5$ meV, $k_z = 20$ μm^{-1} et $k_p = 0.6891$ μm^{-1}, $\hbar\gamma_C = \hbar\gamma_X = 0.1$ meV.

tion d'une partie de la luminescence de l'anneau. Dans ce but, nous étudions les paires signal-complémentaires proches de l'axe y, de part et d'autre de l'anneau. Afin d'éviter les effets de discrétisation, nous avons choisi d'intégrer le signal et le complémentaire sur deux zones rectangulaires $\mathcal{D}_{s,i}$ représentées sur la figure 3.4 qui contient N_D pixels. Le nombre de photons au sein de chaque zone est donné par la formule :

$$\hat{N}_{s,i} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_{s,i}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} = N_D\hat{n}_{s,i} \ , \tag{3.20}$$

où $\hat{n}_{s,i}$ est l'opérateur de la population moyenne par pixel sur la tâche. Si nous reprenons la relation définissant la population avec le champ stochastique

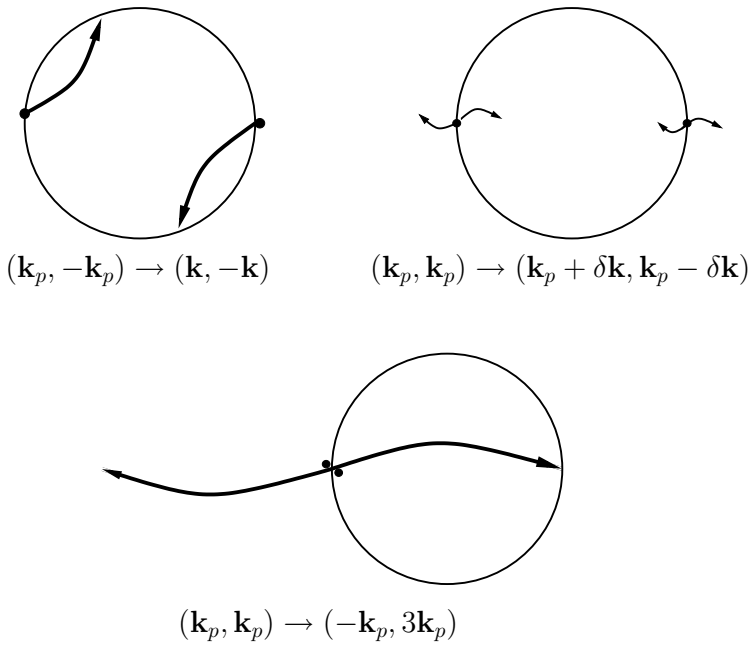


FIG. 3.5: Description des principaux processus au sein de la cavité autour de l'anneau de luminescence.

(3.19), il vient :

$$\langle \hat{n}_{s,i} \rangle = \langle n_{s,i} \rangle_W - \frac{1}{2} = \frac{L_x L_y}{(n_x n_y)^2 N_D} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_{s,i}} \overline{|\tilde{\psi}_C[\mathbf{k}]|^2} - \frac{1}{2} \ . \tag{3.21}$$

Dans la suite, nous noterons $s_{xy} = \frac{L_x L_y}{(n_x n_y)^2}$ le facteur de proportionalité, homogène à une surface.

Sur la figure 3.8 nous avons représenté l'évolution des populations à l'intérieur des zones $\mathcal{D}_{s,i}$ par rapport au temps pour différentes intensités de pompe correspondant à différents régimes d'excitation. Pour chacune des puissances les populations du signal et du complémentaire sont identiques, ce qui était attendu du fait des propriétés de symétrie du système. Pour une amplitude relative $F_p/\gamma = 5\ \mu\text{m}^{-1}$, la population des deux modes est très petite, $n_{s,i} \ll 1$, il existe moins d'un photon par mode. La diffusion paramétrique devient efficace lorsque $F_p/\gamma = 5.5\ \mu\text{m}^{-1}$. A une telle puissance, la population par pixel est proche de 1, et l'effet stimulé joue un rôle important. Il est clair que le seuil d'oscillation paramétrique est dépassé lorsque $F_p/\gamma = 6\ \mu\text{m}^{-1}$. En effet,

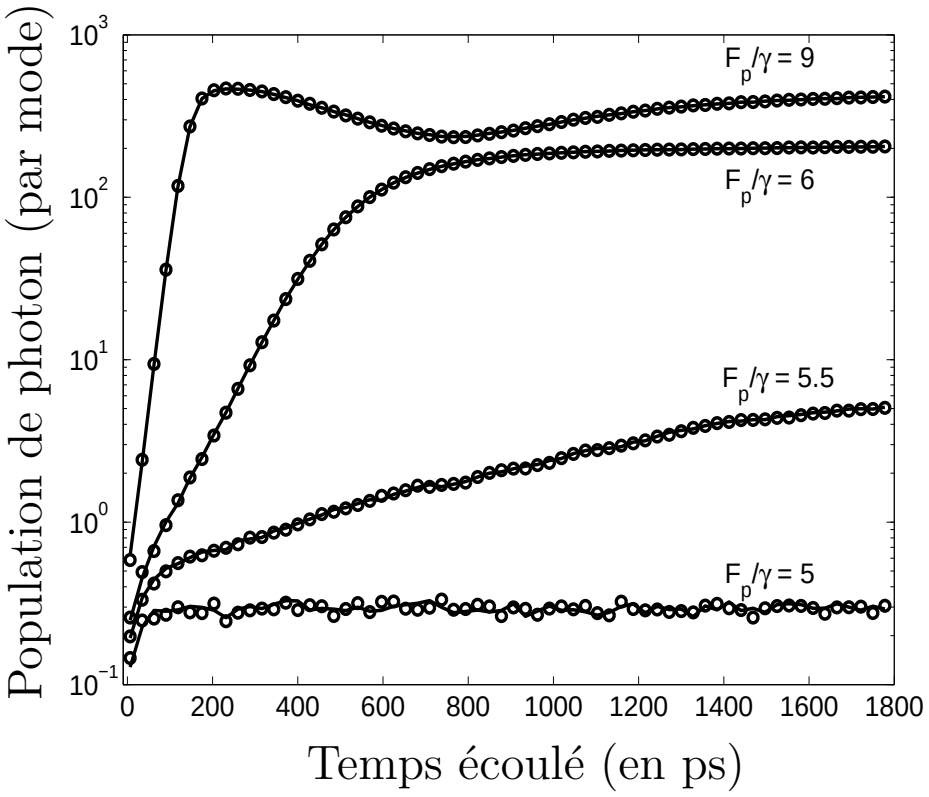


FIG. 3.6: Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique sur la population de photons dans les modes du signal $\langle \hat{n}_s \rangle$ (trait continu) et du complémentaire $\langle \hat{n}_i \rangle$ (cercles) en fonction du temps (en ps) pour différentes puissances de pompes choisies autour du seuil. A chaque puissance correspond un certain nombre de configurations : pour $\hbar F_p = 0.5$ meV.μm^{-1}, 330 configurations, $\hbar F_p = 0.55$ meV.μm^{-1}, 340 configurations, $\hbar F_p = 0.6$ meV.μm^{-1}, 180 configurations, $\hbar F_p = 0.9$ meV.μm^{-1}, 60 configurations. Les paramètres utilisés sont les même que pour la figure 3.4.

la population atteint alors plus d'une centaine de particules par pixel. Au delà de cette puissance, la transition vers l'état stationnaire est plus lente et on remarque une oscillation de relaxation vers cet état.

Profil d'émission des différents régimes

Nous avons vu sur la figure 3.4 que l'anneau de la fluorescence paramétrique est assez homogène en intensité. Cette homogénéité se dégrade pour des champs appliqués plus intenses. Une brisure de symétrie a lieu aux environs

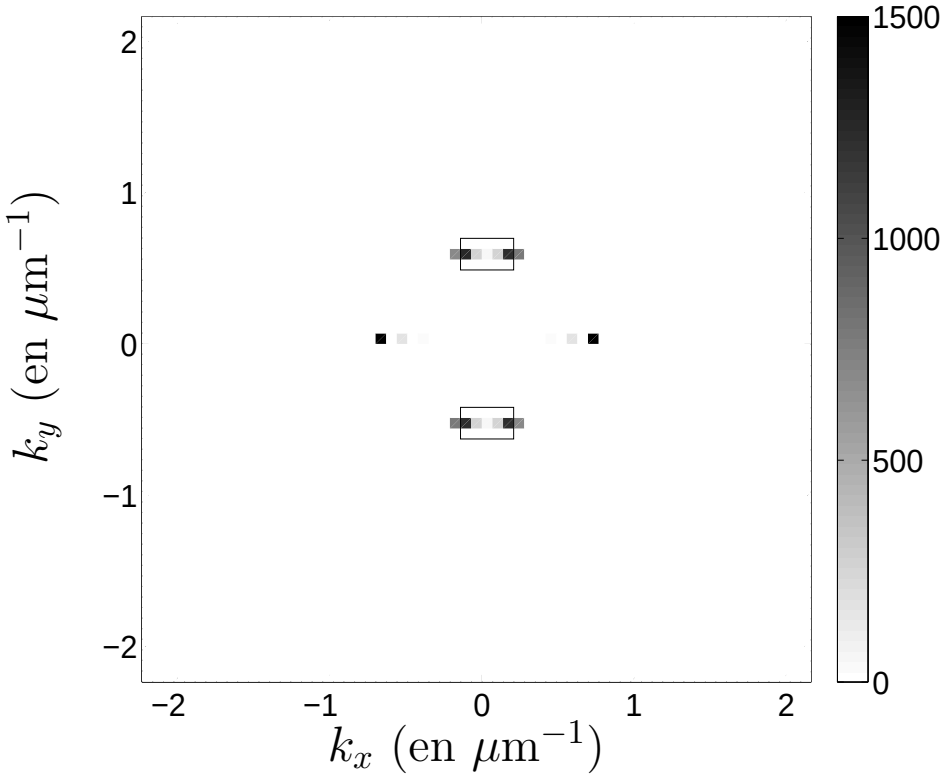


FIG. 3.7: Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique sur la population de photons $n_{\mathbf{k}}$ pour une puissance de pompe $\hbar F_p = 0.6$ meV.μm^{-1}, au-dessus du seuil. Nombre de configurations : 180. Les autres paramètres utilisés sont les mêmes que pour la figure 3.4.

du seuil qui sélectionne quelques modes en compétition. Une population très importante se concentre alors en ces points (figure 3.7), tandis que l'anneau s'aplatit. Pour une intensité suffisamment importante, la nonlinéarité modifie l'accord de phase et les points dégénérés en énergie se déplacent vers le centre de l'anneau. Remarquons que plus l'intensité augmente, plus faible est le nombre de configurations nécessaires pour obtenir une précision convenable des quantités calculées. En effet, le champ moyen domine au-dessus du seuil par l'amplification paramétrique, par opposition à la situation en-dessous du seuil, où la fluorescence paramétrique est prépondérante.

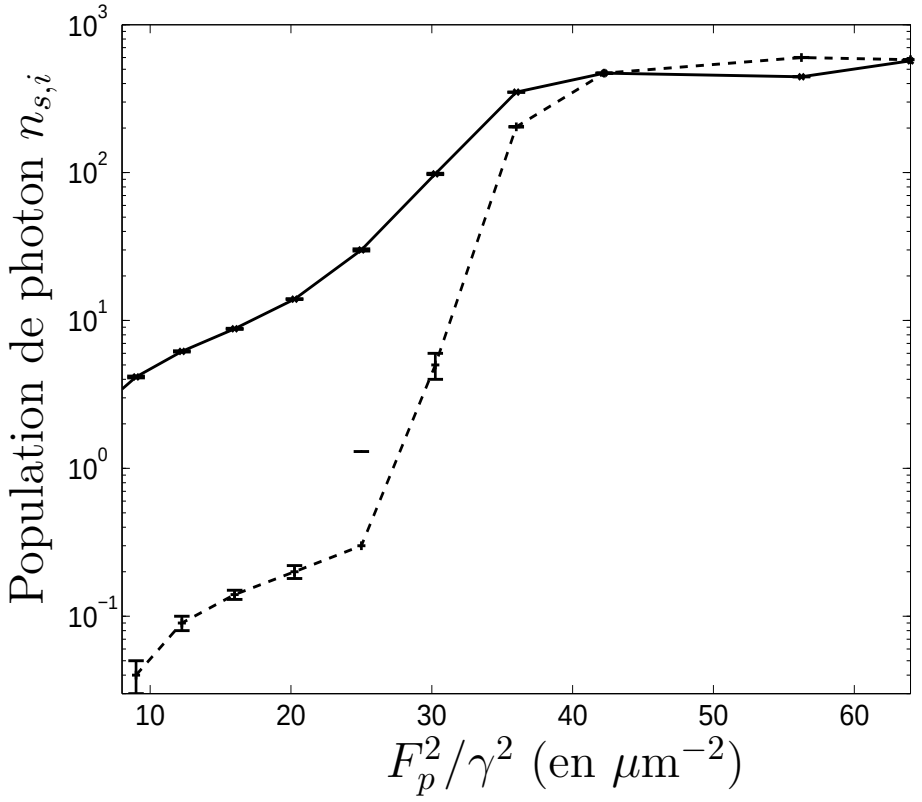


FIG. 3.8: Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique sur la population de photons dans les modes du signal et du complémentaire $n_{s,i}$ avec (trait continu) ou sans (traits pointillés) potentiel photonique désordonné. Les paramètres utilisés sont les mêmes que pour la figure 3.4.

Dépendance en puissance

Le seuil de l'oscillation paramétrique est donné dans la figure 3.8. Sous le seuil, la population augmente de façon quadratique en intensité, ce qui est attendu pour un processus du type $(\mathbf{k}_p, -\mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, -\mathbf{k})$.

Nous avons également représenté sur la figure 3.9 la densité d'excitons dans les modes de pompe :

$$\rho_p = \frac{\langle \hat{b}^\dagger_{\pm\mathbf{k}_p} \hat{b}_{\pm\mathbf{k}_p} \rangle}{L_x L_y} \ , \tag{3.22}$$

en fonction de la puissance. La densité d'exciton ρ_p augmente lentement à

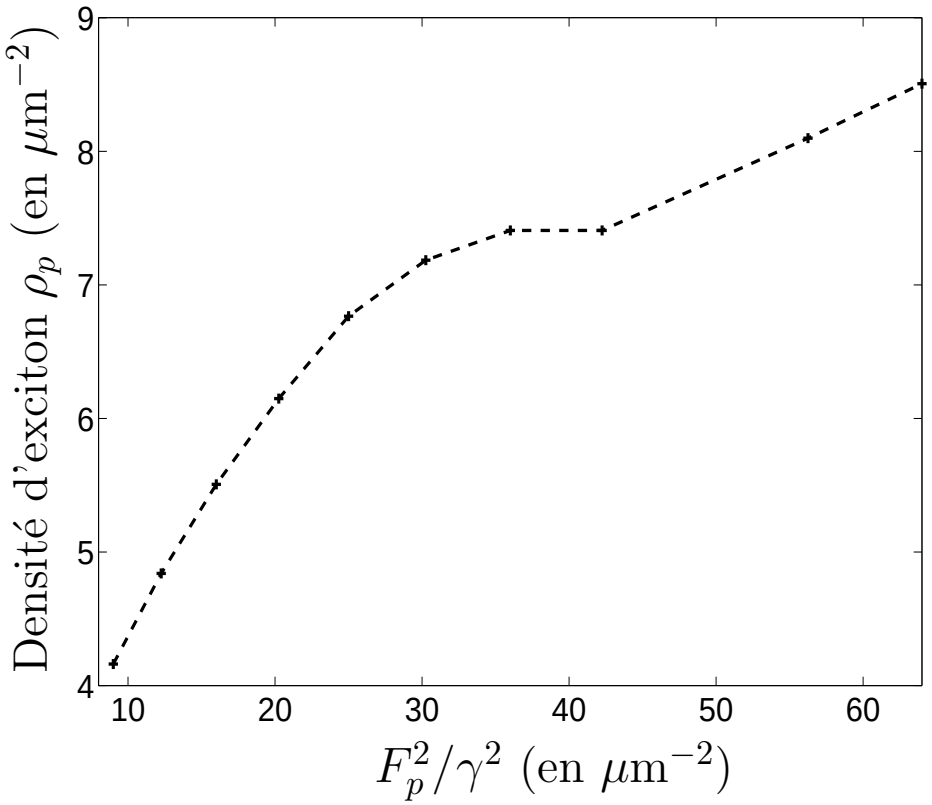


FIG. 3.9: Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique sur la densité d'excitons dans la pompe ρ_p dans une cavité sans potentiel désordonné. Les paramètres utilisés sont les mêmes que dans la figure 3.4.

basse puissance [118] jusqu'au seuil d'oscillation paramétrique. Dans ce régime d'excitation, ρ_p présente une dépendance légèrement sous-linéaire, principalement du fait du décalage vers le bleu des modes en $\pm\mathbf{k}_p$. On voit clairement dans cette courbe l'apparition du seuil pour la puissance $F_p^2/\gamma^2 = 30\ \mu\text{m}^{-2}$. En effet, pour les intensités immédiatement supérieures, la densité d'excitons au sein du mode de pompe est constante, ce qui signifie que les particules supplémentaires injectées sont toutes dirigées vers d'autres modes comme ceux du signal et du complémentaire par amplification paramétrique.

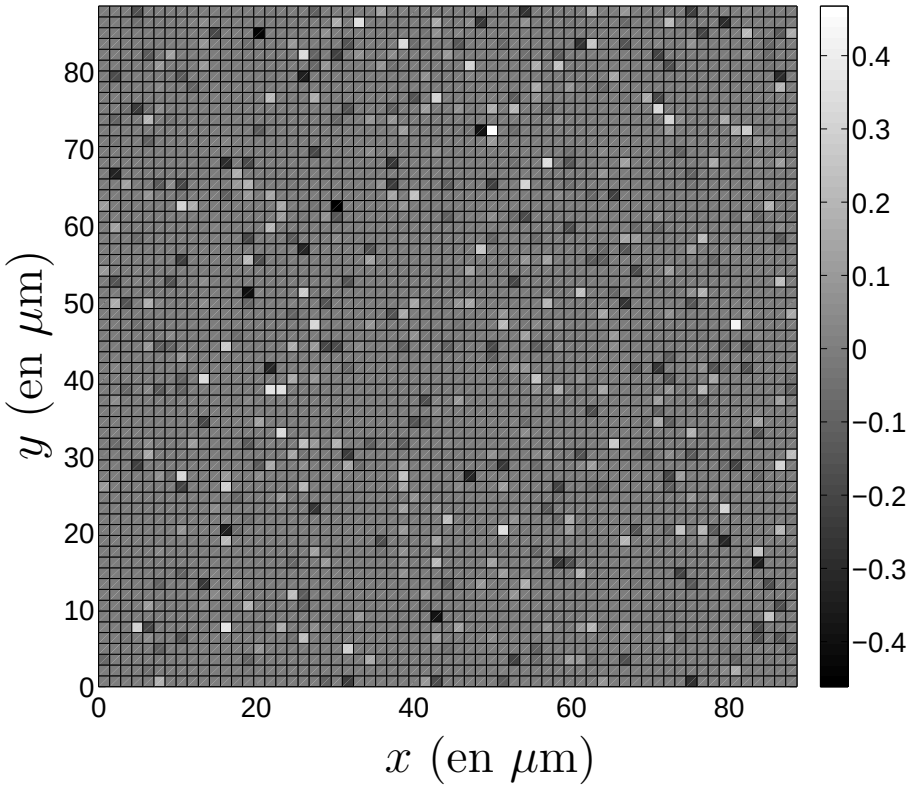


FIG. 3.10: Potentiel d'une cavité désordonnée (en meV/$\hbar$) utilisé dans les figures 3.11,3.8,3.16 et 3.17.

3.2.2 Avec un potentiel désordonné

Les résultats que nous avons exposés jusqu'à présent sont obtenus en étudiant une cavité parfaite. La souplesse du modèle que nous utilisons nous permet cependant d'utiliser un potentiel supplémentaire facilement implémentable dans les équations et le modèle numérique, qui prendra en compte le désordre au sein de la cavité. Pour illustrer ce choix, nous avons considéré le potentiel représenté figure 3.10. Il s'agit d'un ensemble de points de défauts de la cavité tirés aléatoirement. Nous avons vérifié sur différentes suites de tirages que les effets généraux restaient inchangés par rapport aux suites utilisées, pour des paramètres de tirage identiques.

Comparaison des profils d'émission

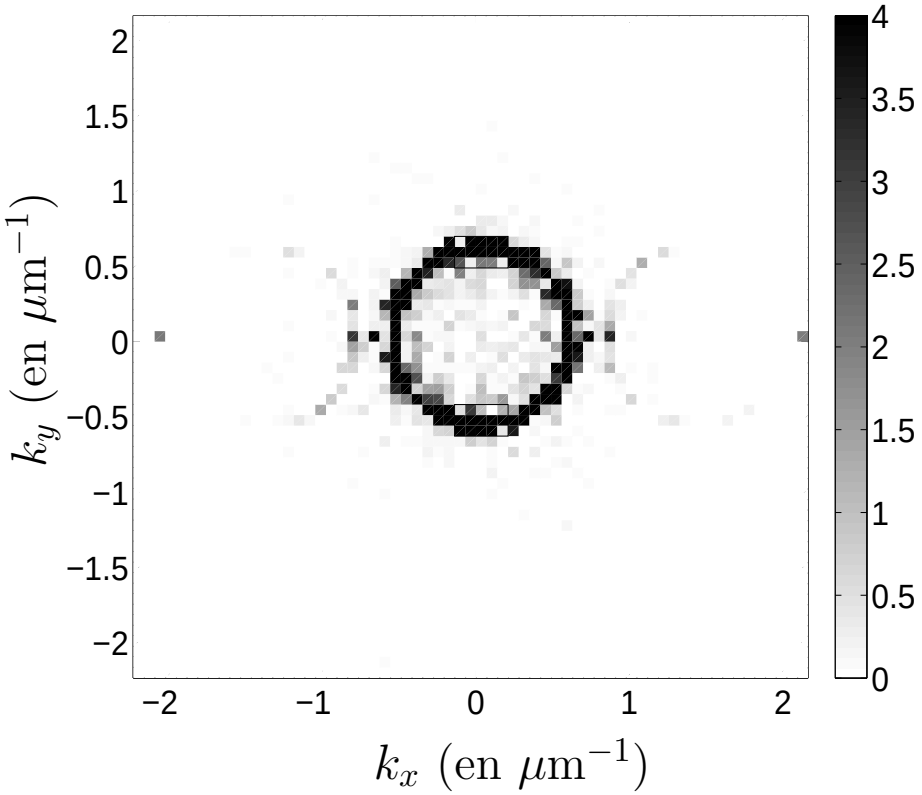


FIG. 3.11: Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique sur la population de photons $n_{\mathbf{k}}$ pour une puissance de pompe $\hbar F_p = 0.5$ meV.μm^{-1}, en présence d'un potentiel désordonné. Notons que sur cette figure, les valeurs de la pompe sont très saturées (anneau faible en comparaison). Nombre de configurations : 50. Les autres paramètres utilisés sont les mêmes que pour la figure 3.4.

Nous avons représenté sur la figure 3.11 la forme de l'émission lumineuse avec un potentiel désordonné. L'effet principal est l'augmentation du nombre de particules dans l'anneau de luminescence. Il ne s'agit cependant pas de fluorescence paramétrique mais de diffusion Rayleigh résonante de chacune des pompes. On peut le vérifier en reprenant le calcul du champ moyen et en supprimant le bruit quantique [85, 116]. Les effets spontanés sont alors supprimés et seuls les effets de diffusion sont observés. On distingue autour des pompes une «forme en 8» [63] de la luminescence. Celle-ci correspond à l'amplification paramétrique de l'anneau Rayleigh par les modes de pompe.

Dépendance en puissance

Si l'on compare la montée en intensité des modes signal et complémentaire avec le résultat sans désordre on s'aperçoit que sous le seuil (figure 3.8), le nombre de photons est bien plus grand avec un potentiel désordonné. Ce décalage est créé par les photons diffusés, prépondérants à basse intensité. Au-dessus du seuil, cette différence disparaît et les deux populations atteignent des valeurs comparables. Les processus de diffusion stimulée prennent le pas à ce régime et dominent la diffusion Rayleigh et la fluorescence paramétrique. Notons que malgré ces différences, la dépendance en intensité est conservée sous le seuil, dominée par la fluorescence paramétrique ou l'amplification paramétrique, de même que la valeur de l'intensité de seuil située pour les caractéristiques du système choisi à $F_p^2/\gamma^2 \simeq 30\ \mu\mathrm{m}^{-2}$.

3.3 Les corrélations quantiques

Le caractère quantique de la lumière ne peut apparaître sans ambiguïté avec les quantités que nous avons calculé jusqu'à présent. Le calcul des corrélations quantiques entre le signal et le complémentaire va nous permettre de remédier à ce problème, en améliorant notre connaissance des caractéristiques du système. Nous commençons par introduire le bruit de la somme et le bruit de la différence en intensité que nous calculons en temps. Nous donnons la dépendance en puissance de cette quantité, puis nous présentons l'impact de l'introduction d'un désordre dans la cavité.

3.3.1 Présentation des corrélations quantiques

Le principe des corrélations quantiques

Pour observer le bruit de la somme et le bruit de la différence, on utilise un montage expérimental qui effectue une mesure de bruit (figure 3.12). L'objectif est de mesurer le bruit de la différence et de la somme en intensité [25,107,119, 120] des opérateurs champs électromagnétiques incidents $\hat{E}_i$ et$\hat{E}_s$. La somme

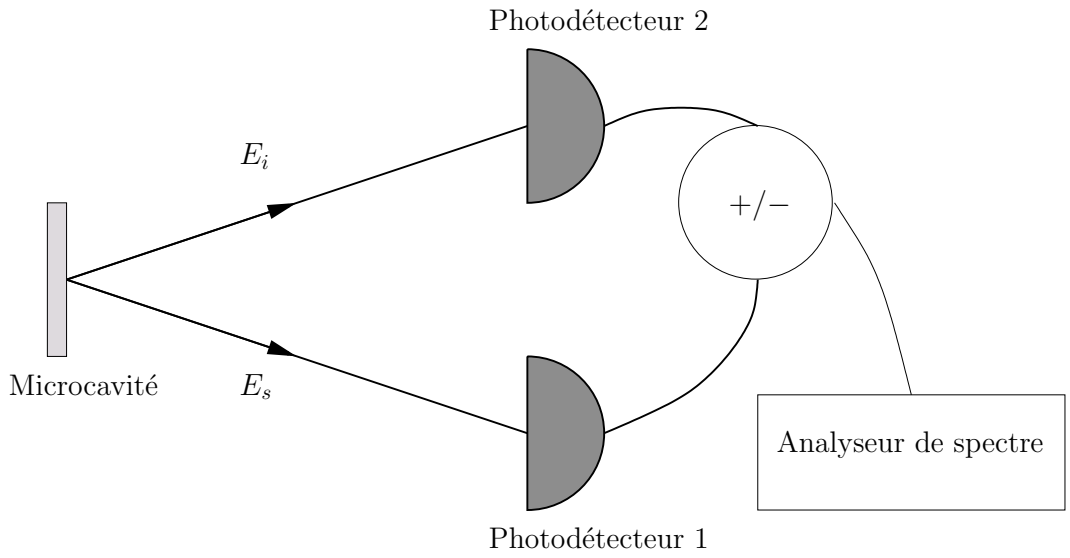


FIG. 3.12: Principe de montage d'une expérience de mesure de corrélations. Les deux signaux de sortie sont détectés par deux photodiodes à équidistance de la source, et elles-mêmes sont reliées à un analyseur de spectre.

et la différence des photocourants $\hat{I}_s$ et $\hat{I}_i$ mesurées par les deux photodiodes est donnée par la formule :

$$\hat{I}_\pm \equiv \hat{I}_s \pm \hat{I}_i \propto \hat{N}_s \pm \hat{N}_i \equiv \hat{N}_\pm \ . \tag{3.23}$$

On définit la fonction de corrélation de deux observables $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ comme étant :

$$C_{12}(t,t') = \langle \hat{f}_1(t)\hat{f}_2(t')\rangle - \langle \hat{f}_1(t)\rangle\langle \hat{f}_2(t')\rangle \ . \tag{3.24}$$

La fonction d'autocorrélation d'une observable se déduit de cette formulation en considérant deux fois la même observable. La fonction d'autocorrélation de la différence de population $\hat{N}_\pm$ s'écrit donc :

$$C_\pm(t,t') = \langle \hat{N}_\pm(t)\hat{N}_\pm(t')\rangle - \langle \hat{N}_\pm(t)\rangle\langle \hat{N}_\pm(t')\rangle \ . \tag{3.25}$$

En régime stationnaire, la fonction de corrélation dépend seulement de la différence $\tau = t' - t$, sous la forme :

$$C_\pm(\tau) = \langle \hat{N}_\pm(t)\hat{N}_\pm(t+\tau)\rangle - \langle \hat{N}_\pm(t)\rangle\langle \hat{N}_\pm(t+\tau)\rangle \ . \tag{3.26}$$

Nous nous intéresserons dans notre étude à l'autocorrélation à $\tau = 0$. Dans le cas de deux états cohérents non corrélés, la valeur de la fonction d'autocorrélation est :

$$\begin{aligned}
C_{\pm}^{coh}(0) &= \langle \alpha_i, \alpha_s | \hat{N}_{\pm}^2 | \alpha_i, \alpha_s \rangle - \langle \alpha_i, \alpha_s | \hat{N}_{\pm} | \alpha_i, \alpha_s \rangle^2 \\
&= \langle \alpha_i, \alpha_s | \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \pm 2 \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \alpha_i, \alpha_s \rangle \\
&\qquad - \langle \alpha_i, \alpha_s | \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s \pm \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \alpha_i, \alpha_s \rangle^2 \qquad (3.27) \\
C_{\pm}^{coh}(0) &= |\alpha_s|^4 + |\alpha_s|^2 + |\alpha_i|^4 + |\alpha_i|^2 \pm 2|\alpha_s|^2 |\alpha_i|^2 - (|\alpha_s|^2 \pm |\alpha_i|^2)^2 \\
C_{\pm}^{coh}(0) &= |\alpha_s|^2 + |\alpha_i|^2 = \langle \alpha_i, \alpha_s | \hat{N}_{+} | \alpha_i, \alpha_s \rangle \ .
\end{aligned}$$

Pour caractériser la nature des corrélations que nous observons, nous normalisons la corrélation par le résultat associé à deux états cohérents non corrélés, soit :

$$\sigma_{\pm} = \frac{C_{\pm}(0)}{C_{\pm}^{coh}(0)} = \frac{\langle \hat{N}_{\pm}^2(t) \rangle - \langle \hat{N}_{\pm}(t) \rangle^2}{\langle \hat{N}_{+}(t) \rangle} \ . \qquad (3.28)$$

Il est clair que les moments d'ordre 4 des champs :

$$\langle \hat{N}_i \hat{N}_j \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}_l} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}'} \rangle \ , \qquad (3.29)$$

ont un rôle particulièrement important dans la caractérisation des corrélations du système. Dans cette perspective, nous rappelons qu'au sein d'une même tâche, les opérateurs de création commutent les uns avec les autres, et :

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \ , \ \forall (\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathcal{D}_j^2 \qquad (3.30)$$

Définition de la quantité calculée numériquement

Le calcul de la moyenne stochastique de ces termes s'effectue de la manière suivante :

$$\langle \hat{N}_i^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}' \in \mathcal{D}_j} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle + \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}' \in \mathcal{D}_j \\ \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \rangle \ . \qquad (3.31)$$

Pour retrouver les champs stochastiques, les expressions doivent être symétrisées. On symétrise ici le premier terme, et en utilisant la relation (3.30) pour

transformer le deuxième terme, il vient :

$$\langle \hat{N}_i^2 \rangle = \frac{1}{6} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \Big\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \Big\rangle - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle + \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}' \in \mathcal{D}_j \\ \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \rangle \ . \quad (3.32)$$

En utilisant la relation (3.16) reliant les moyennes sur les observables aux moyennes stochastiques :

$$\langle \hat{N}_i^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \left(s_{xy}^2 \overline{|\tilde{\psi}_C|^4[\mathbf{k}]} - s_{xy} \overline{|\tilde{\psi}_C|^2[\mathbf{k}]} \right) + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}' \in \mathcal{D}_j} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \rangle - \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle \ . \quad (3.33)$$

La même opération est effectuée pour les second et troisième termes, il vient :

$$\langle \hat{N}_i^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \left(s_{xy}^2 \overline{|\tilde{\psi}_C|^4[\mathbf{k}]} - s_{xy} \overline{|\tilde{\psi}_C|^2[\mathbf{k}]} \right) + \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \left(s_{xy} \overline{|\tilde{\psi}_C|^2[\mathbf{k}]} - \frac{1}{2} \right) \right)^2 - \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \left(s_{xy} \overline{|\tilde{\psi}_C|^2[\mathbf{k}]} - \frac{1}{2} \right)^2 \ . \quad (3.34)$$

La corrélation en intensité entre le signal et le complémentaire est donnée par :

$$\langle \hat{N}_s \hat{N}_i \rangle = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_s \\ \mathbf{k}' \in \mathcal{D}_i}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_s \\ \mathbf{k}' \in \mathcal{D}_i}} \Big\langle \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - 1 \right) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} + \hat{a}_{\mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger - 1 \right) \Big\rangle \ . \quad (3.35)$$

Le remplacement des moyennes des observables par les moyennes stochastiques mène finalement à l'expression :

$$\langle \hat{N}_s \hat{N}_i \rangle = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_s} \sum_{\mathbf{k}'\in\mathcal{D}_i} s_{xy}^2 \overline{|\tilde{\psi}_C[\mathbf{k}]|^2 |\tilde{\psi}_C[\mathbf{k}']|^2} - \frac{N_D}{2} \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_s} s_{xy} \overline{|\tilde{\psi}_C[\mathbf{k}]|^2|} + \sum_{\mathbf{k}'\in\mathcal{D}_i} s_{xy} \overline{|\tilde{\psi}_C[\mathbf{k}']|^2|} - \frac{N_D}{2} \right) . \quad (3.36)$$

Pour des faisceaux signal et complémentaire non corrélés avec un bruit blanc on trouve $\sigma^{\pm} = 1$. Cette valeur correspond à la définition du Bruit Quantique Standard de notre système [91]. Lorsque $\sigma^- < 1$, il existe des corrélations quantiques entre le signal et le complémentaire se traduisant par une compression du bruit de la différence en intensité [25, 121].

Puisque nous nous sommes intéressés aux corrélations à un temps, et que notre modèle ne prend pas en compte de détection sur une plage de fréquence finie, mais calcule l'évolution temporelle du système, le bruit est intégré sur toutes les fréquences et aucun filtrage en fréquence n'intervient. La plupart des corrélations quantiques étant obtenues pour des valeurs proches de la fréquence de pompe de par la nature du terme d'interaction, un filtrage en fréquence autour de la fréquence de pompe purifierait le phénomène de compression du bruit [119]. La population de photons étant cependant fortement concentrée autour de la fréquence de résonance, la perturbation apportée par les modes de fréquence différente reste cependant limitée, et n'empêche pas l'observation des corrélations quantiques.

3.3.2 Résultats du modèle de Monte Carlo

Nous présentons les résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo concernant les corrélations quantiques entre le signal et le complémentaire. Nous exposons d'abord les résultats dans le cas d'une cavité idéale, puis nous observons le rôle joué par un désordre statique sur les corrélations. Les observations que nous donnons sont présentées pour un potentiel désordonné unique, de façon à assurer la cohérence des résultats. Nous avons toutefois observé les mêmes résultats qualitatifs et quantitatifs sur d'autres potentiels, que nous ne

présenterons pas ici par souci de clarté.

Sans désordre

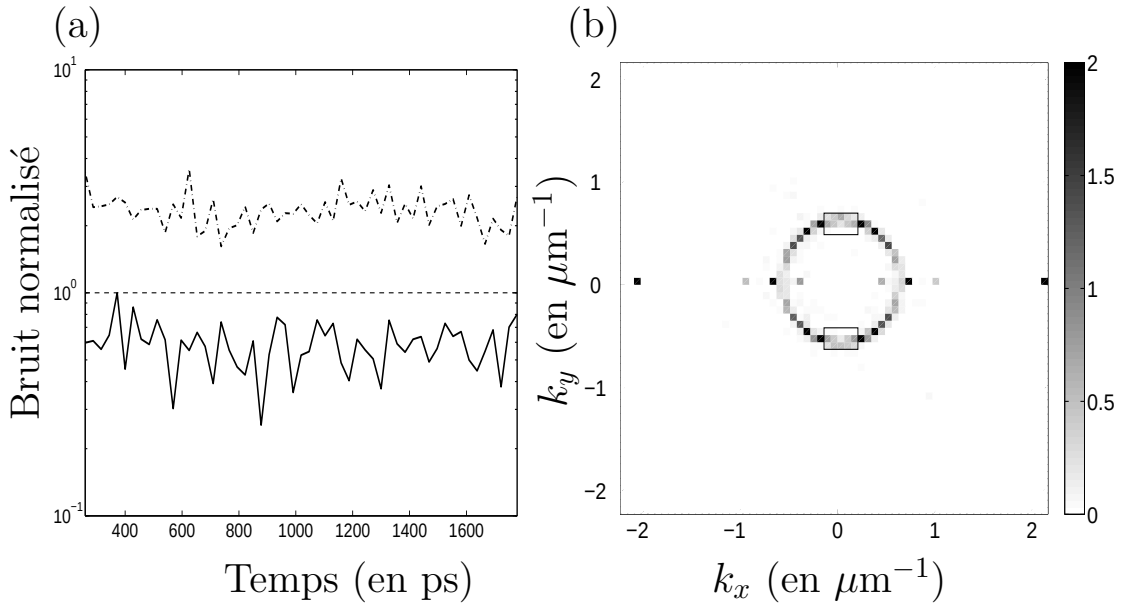


FIG. 3.13: (a) Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique pour l'évolution en temps du bruit de la somme σ^+ (trait discontinu) et de la différence σ^- (trait continu) en l'absence de désordre. (b) Population de photons $n_{\mathbf{k}}$ au sein de la cavité à $t = 1800$ ps. Amplitude de pompe $\hbar F_p = 0.5$ meV.μm^{-1}. Nombre de configurations de la simulation de Monte Carlo : 330. Les paramètres utilisés sont les même que pour la figure 3.4.

Sur la figure 3.13 est représentée la dépendance en temps du bruit normalisé $\sigma^\pm$ issue d'une simulation de Monte Carlo en l'absence de désordre. L'état stationnaire y est clairement atteint à $t = 500$ ps. La courbe σ^- est toujours inférieure à 1, correspondant au bruit quantique standard, ce qui révèle la présence de corrélations quantiques entre le signal et le complémentaire. Les valeurs de σ^-, moyennées par rapport au temps une fois l'état stationnaire atteint, sont données en fonction de la puissance de pompe sur la figure 3.14 On distingue une augmentation continue de la valeur du bruit de la différence vers la limite quantique standard pour des intensités d'excitation plus élevées. Ainsi, bien au-dessus du seuil, les corrélations deviennent purement classiques.

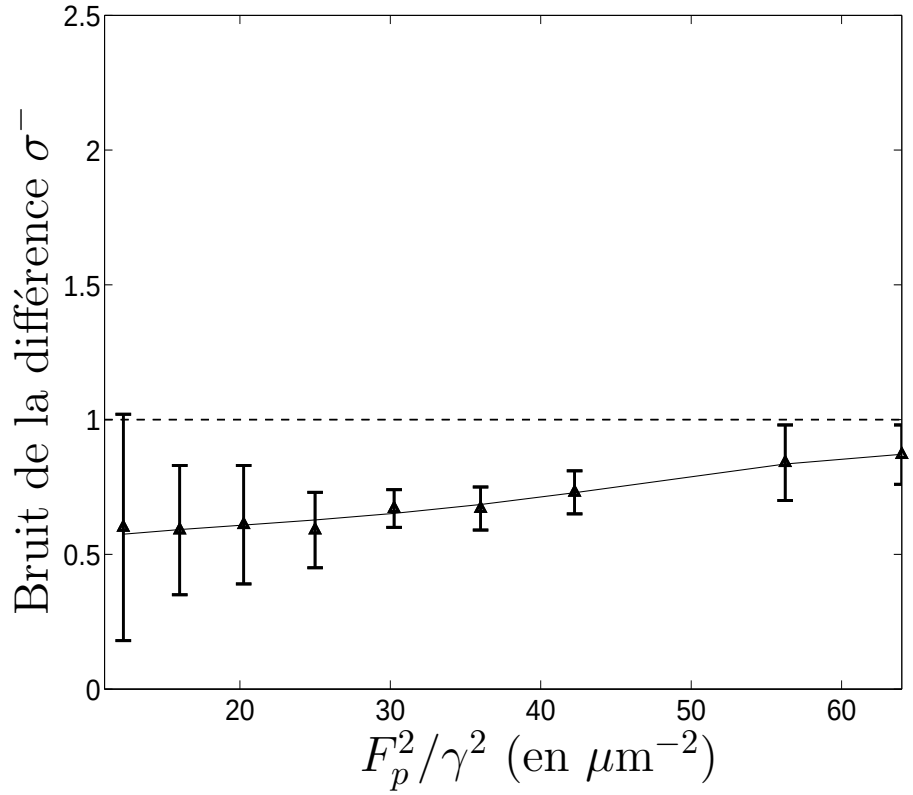


FIG. 3.14: Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique sur le bruit de la différence en intensité des modes du signal et du complémentaire σ^- en fonction de la puissance de pompe dans un potentiel sans désordre. La différence est approchée par une courbe polynomiale, les barres d'erreurs correspondent à l'écart type de la moyenne en fonction du temps une fois le régime stationnaire atteint. Les paramètres utilisés sont les même que pour la figure 3.4.

Il n'y a cependant pas de relation marquée entre l'évolution de la valeur de σ^- et le seuil d'oscillation paramétrique.

D'autre part, le bruit de la somme σ^+ représenté figure 3.15 est toujours supérieur au bruit quantique standard, et s'accroît soudainement au seuil. Au-dessus du seuil, σ^+ reste à peu près constant ce qui s'explique par la présence de plusieurs modes d'oscillation paramétrique en compétition. En effet, lorsque ces modes sont à l'intérieur ou à l'extérieur des zones $\mathcal{D}_{s,i}$, les populations du signal et du complémentaire $n_{s,i}$ varient de 0 à leur valeurs maximales tout en conservant la symétrie entre les deux zones. La valeur de σ^+ épouse donc l'évolution de la population, et devient très grande au-dessus du seuil, tandis

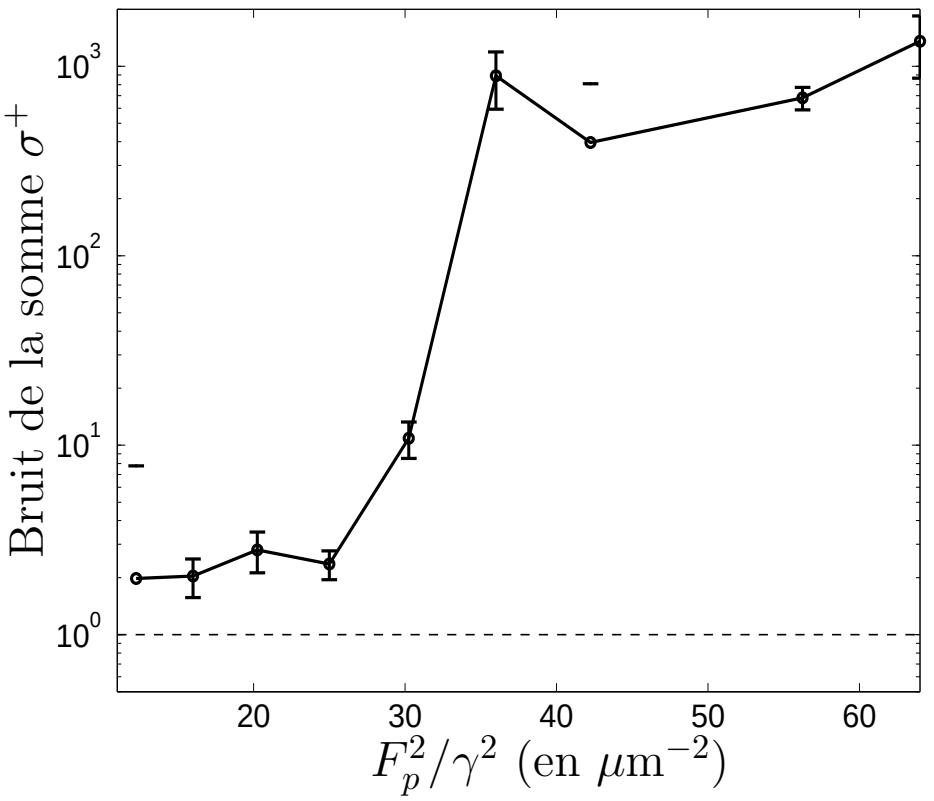


FIG. 3.15: Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique sur le bruit de la somme en intensité des modes du signal et du complémentaire σ^+ en fonction de la puissance de pompe dans un potentiel sans désordre. La ligne reliant les points du graphique est un guide pour l'oeil. Les barres d'erreurs correspondent à l'écart type de la moyenne en fonction du temps une fois le régime stationnaire atteint. Les paramètres utilisés sont les même que pour la figure 3.4.

que la différence σ^- reste faible.

Avec désordre

En considérant une cavité présentant un potentiel désordonné, plusieurs différences apparaissent. A des fins de comparaison, nous avons représenté à l'échelle précédente les résultats du bruit de la somme et de la différence (figure 3.16 et 3.17). En présence de désordre, la différence σ^- à basse intensité descend autour de 0.75, une valeur plus importante que les valeurs observées sans désordre où la différence est plus proche de 0.5-0.6 au même ré-

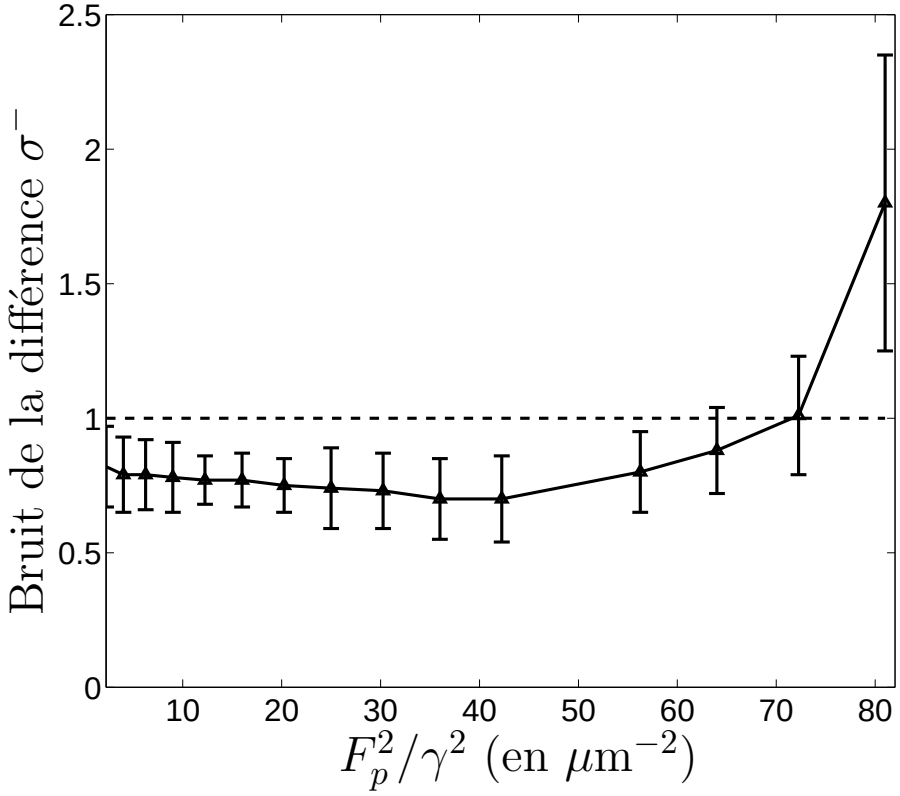


FIG. 3.16: Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique sur le bruit de la différence en intensité des modes du signal et du complémentaire σ^- en fonction de la puissance de pompe dans un potentiel désordonné. La ligne reliant les points du graphique est un guide pour l'oeil. Les barres d'erreurs correspondent à l'écart type de la moyenne en fonction du temps une fois le régime stationnaire atteint. Les paramètres utilisés sont les même que pour la figure 3.4.

gime. La diffusion Rayleigh créé des paires de photons non corrélées au sein de l'anneau de photoluminescence, ce qui déteriore l'observation des corrélations entre le faisceau du signal et celui du complémentaire. A plus faible intensité encore, la diffusion Rayleigh devient le phénomène prédominant. Les photons qui peuplent l'anneau de luminescence sont donc non-appariés en majorité, la lumière du signal et du complémentaire prend alors les propriétés de deux sources de photons cohérentes et non-corrélées, et le bruit de la somme et le bruit de la différence tendent vers la limite du bruit quantique standard $\sigma^{\pm} = 1$.

En raison de la compétition entre la diffusion Rayleigh des polaritons de pompe et la diffusion paramétrique, le bruit de la différence atteint son mini-

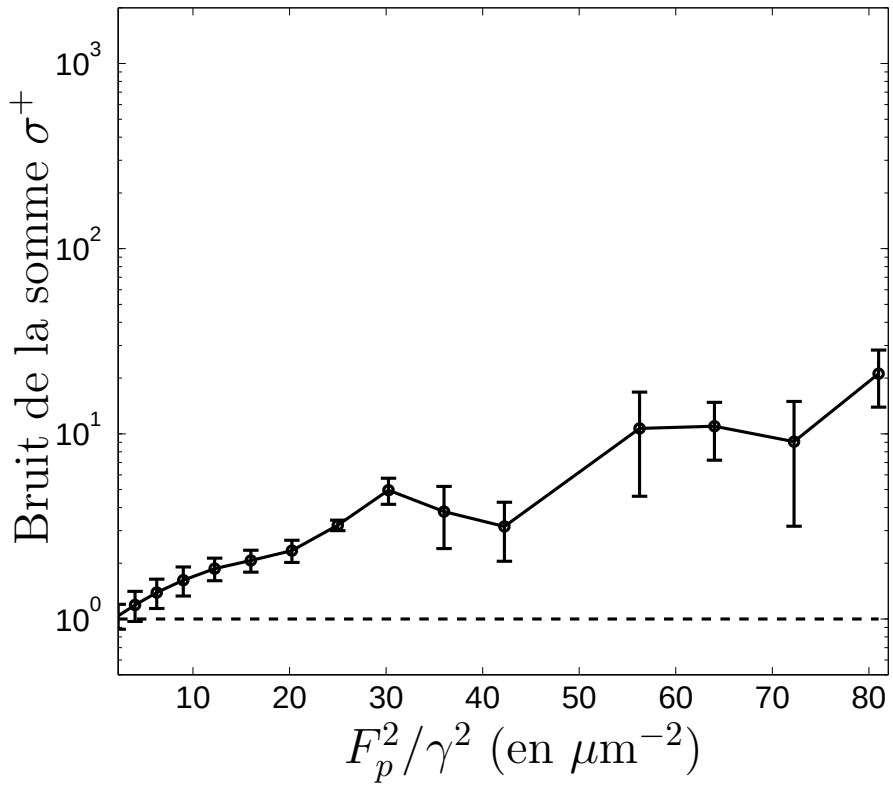


FIG. 3.17: Résultat du calcul de Monte Carlo Quantique sur le bruit de la somme en intensité des modes du signal et du complémentaire σ^+ en fonction de la puissance de pompe dans un potentiel désordonné. La ligne reliant les points du graphique est un guide pour l'oeil. Les barres d'erreurs correspondent à l'écart type de la moyenne en fonction du temps une fois le régime stationnaire atteint. Les paramètres utilisés sont les même que pour la figure 3.4.

mum près du seuil, puis s'accroît du fait de l'augmentation du bruit non corrélé dans les deux faisceaux. La diffusion par le désordre mélangeant les particules à la fois à l'extérieur et à l'intérieur des zones $\mathcal{D}_{s,i}$, le bruit de la différence augmente jusqu'à des valeurs supérieures à $\sigma^- = 1$ pour des valeurs de pompes importantes. De la même façon, ce mélange diminue le bruit de la somme dans un potentiel désordonné par rapport à une cavité parfaite.

Comme nous l'avons précisé précédemment, nous avons effectué ces calculs pour d'autres potentiels désordonnés. Nous avons également pu vérifier nos hypothèses sur le rôle du désordre de manière qualitative. On peut faire augmenter progressivement le désordre au sein de la cavité en augmentant l'amplitude

des défauts ou en variant la probabilité d'observer un défaut. Ainsi, pour une puissance d'excitation choisie de façon à observer des corrélations importantes au départ, on peut observer les corrélations se déteriorer progressivement en augmentant le désordre. La diffusion Rayleigh est alors de plus en plus présente dans l'anneau de luminescence, brouillant les corrélations au fur et à mesure de la progression du désordre.

3.4 Modèle simplifié, approche entrée-sortie d'un modèle à quatre ondes

Si les résultats du calcul de Monte Carlo sont riches, ils souffrent cependant d'une grande lourdeur dans leur mise en oeuvre. Le but de cette section est de vérifier s'il est possible d'approcher les prédictions des sections précédentes avec un modèle plus simple. Nous comparons donc les résultats obtenus par le calcul de Monte Carlo quantique à ceux issus d'un modèle simplifié, reposant sur un modèle analytique utilisant un Hamiltonien linéarisé.

3.4.1 Présentation du modèle

Principes du modèle et mise en équation

La linéarisation du Hamiltonien s'effectue en traitant la pompe comme une quantité classique, fixée comme paramètre. On remplace les opérateurs du mode de pompe par leur valeur de champ moyen. Il est clair que cette approximation est correcte en dessous du seuil. Au-dessus du seuil, la pompe se vide et le modèle n'est plus valable. Le Hamiltonien ainsi linéarisé s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}_p} \Big[& \hbar\omega_C(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hbar\tilde{\omega}_X\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} \\ & + \hbar\Omega_R\left(\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}\right) \\ & + \hbar\left(\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}\kappa + \hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{-\mathbf{k}}\kappa^*\right)\Big] \quad , \end{aligned} \tag{3.37}$$

où $\hbar\tilde{\omega}_X = \omega_X^0 + \frac{2g}{L_x L_y}\left(|\mathcal{P}_1|^2 + |\mathcal{P}_2|^2\right)$ est l'énergie de l'exciton renormalisée par l'interaction exciton-exciton et $\kappa = \frac{g}{L_x L_y}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ est la constante de l'interaction paramètrique effective dépendant des champs $\mathcal{P}_{1,2}e^{-i\omega_p t} = \langle \hat{b}_{\pm\mathbf{k}_p}(t)\rangle$.

On considère que le système est vide à l'état initial, on en déduit les valeurs prises par les forces de Langevin [122] :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{F}_{cav,\mathbf{k}}[\omega]\tilde{F}^{\dagger}_{cav,\mathbf{k}'}[\omega]\rangle &= 4\pi\Gamma_{cav}[\omega]\delta(\omega-\omega')\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\ ,\\ \langle \tilde{F}_{exc,\mathbf{k}}[\omega]\tilde{F}^{\dagger}_{exc,\mathbf{k}'}[\omega]\rangle &= 4\pi\Gamma_{exc}[\omega]\delta(\omega-\omega')\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\ ,\end{aligned} \tag{3.38}$$

où $\Gamma_j[\omega]$ représente l'élargissement complexe dû au couplage au réservoir extérieur. Dans notre cas, le domaine spectral que nous étudions est centré autour de la fréquence d'excitation ω_p et est relativement étroit. Le facteur $\Gamma_j[\omega]$ évolue donc très peu par rapport au spectre étudié. Nous simplifions donc les expressions en prenant directement : $\Gamma_{cav,exc}[\omega] = \gamma_{C,X}/2$. Les équations de Langevin dans l'espace des fréquences s'écrivent alors :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p}\begin{pmatrix}\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\\ \tilde{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}\tilde{F}_{cav,\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{F}_{exc,\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{F}^{\dagger}_{cav,-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\\ \tilde{F}^{\dagger}_{exc,-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\end{pmatrix}\ , \tag{3.39}$$

où la matrice $\mathcal{M}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p}$ définie pour $i = X, C$ est :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p} = \begin{pmatrix}\Delta_C(\omega)-i\gamma_C/2 & \Omega_R & 0 & 0\\ \Omega_R & \Delta_X(\omega)-i\gamma_X/2 & 0 & \kappa\\ 0 & 0 & -\Delta_C(\omega-2\omega_p)-i\gamma_C/2 & -\Omega_R\\ 0 & -\kappa^* & -\Omega_R & -\Delta_X(\omega-2\omega_p)-i\gamma_X/2\end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

en écrivant $\Delta_i(\omega) = \omega_i - \omega$. La relation reliant les opérateurs dans l'espace de Fourier et les opérateurs dépendant du temps est :

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega]e^{i\omega t}, \tag{3.41}$$

où $\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega]$ est l'opérateur de destruction d'un photon du mode $\mathbf{k}$ à la fréquence ω. On notera par la suite $\mathcal{G}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p} = -i\mathcal{M}^{-1}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p}$.

Les quantités calculées

Pour comparer les grandeurs obtenues dans les deux calculs, nous devons nous donner l'expression de la population de photons dans le signal :

$$\hat{N}_s(t) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_s} \iint \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega'}{2\pi} \tilde{a}^\dagger_{\mathbf{k}}[\omega]\, \tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega']\, e^{-i(\omega-\omega')t} \ , \tag{3.42}$$

Nous nous intéressons à la valeur moyenne de cette quantité en régime stationnaire $\langle N_s\rangle$, qui est obtenue en appliquant les résultats de (3.38) et (3.39) à l'égalité précédente. Il vient :

$$\langle N_s\rangle = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_s} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\gamma_C|\mathcal{G}_{13}|^2[\omega] + \gamma_X|\mathcal{G}_{14}|^2[\omega]\right) \ . \tag{3.43}$$

Pour calculer le bruit de la somme et le bruit de la différence, nous avons besoin des moments $\langle\hat{N}_s^2\rangle - \langle\hat{N}_s\rangle^2$, $\langle\hat{N}_i^2\rangle - \langle\hat{N}_i\rangle^2$ et $\langle\hat{N}_i\hat{N}_s\rangle + \langle\hat{N}_s\hat{N}_i\rangle - 2\langle\hat{N}_i\rangle\langle\hat{N}_s\rangle$. Ceux-ci sont obtenus à partir des expressions précédentes :

$$\langle\hat{N}_j^2\rangle - \langle\hat{N}_j\rangle^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_j} \int \frac{d\omega}{2\pi}(\gamma_C|\mathcal{G}_{13}|^2 + \gamma_X|\mathcal{G}_{14}|^2)[\omega] \int \frac{d\omega'}{2\pi}(\gamma_C|\mathcal{G}_{11}|^2 + \gamma_X|\mathcal{G}_{12}|^2)[\omega'] \ , \tag{3.44}$$

où $j \in \{s, i\}$. De la même façon, pour les moments croisés, il vient :

$$\begin{aligned}\langle\hat{N}_s\hat{N}_i\rangle - \langle\hat{N}_i\rangle\langle\hat{N}_s\rangle = \iint \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \sum_{k\in\mathcal{D}_s} \\ (\gamma_C\mathcal{G}^*_{11}[\mathbf{k}, 2\omega_p - \omega_1]\mathcal{G}^*_{13}[-\mathbf{k}, \omega_1] + \gamma_X\mathcal{G}^*_{12}[\mathbf{k}, 2\omega_p - \omega_1]\mathcal{G}^*_{14}[-\mathbf{k}, \omega_1]) \\ (\gamma_C\mathcal{G}_{11}[\mathbf{k}, 2\omega_p - \omega_2]\mathcal{G}_{13}[-\mathbf{k}, \omega_2] + \gamma_X\mathcal{G}_{12}[\mathbf{k}, 2\omega_p - \omega_2]\mathcal{G}_{14}[-\mathbf{k}, \omega_2]) \ .\end{aligned} \tag{3.45}$$

3.4.2 Résultats

Résultats sur la population de photon

Nous avons représenté sur la figure 3.18 la population de photon dans l'espace réciproque dans la cavité. La géométrie de la fluorescence est globalement identique à la géométrie observée dans le cas du calcul de Monte Carlo. Toutefois, certaines différences notables apparaissent. On n'observe plus les processus $(\pm\mathbf{k}_p, \pm\mathbf{k}_p) \to (\pm 3\mathbf{k}_p, \mp\mathbf{k}_p)$ et $(\pm\mathbf{k}_p, \pm\mathbf{k}_p) \to (\pm\mathbf{k}_p + \delta\mathbf{k}, \pm\mathbf{k}_p - \delta\mathbf{k})$

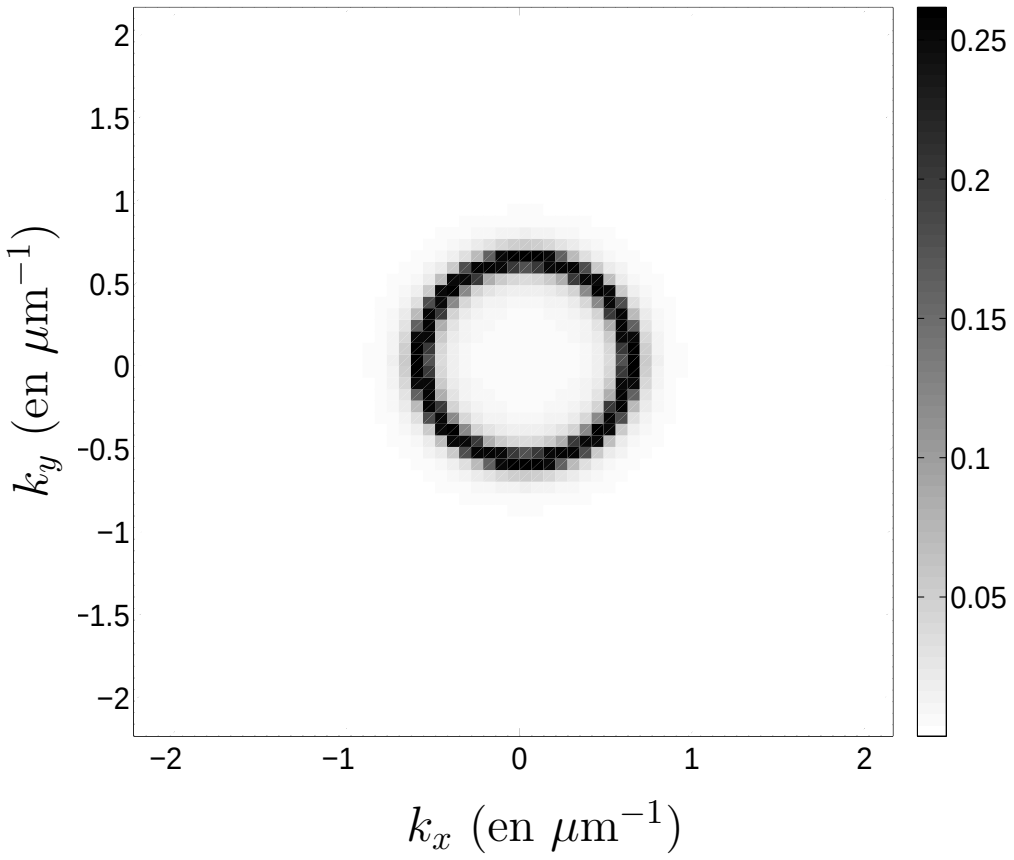


FIG. 3.18: Population de photon $n_{\mathbf{k}}$ au sein de la cavité dans l'espace réciproque, pour une cavité avec un potentiel nul ($V_C = V_X = 0$), dans le vide, calculée à l'aide du modèle analytique. Les paramètres utilisés sont les même que pour la figure 3.4, à l'exception de la densité d'excitons dans la pompe à hauteur de $\rho_p = 4.78.10^8$ cm^{-2}.

ceux-ci n'étant pas pris en compte notre modèle simplifié. D'autre part, l'anneau d'émission est plus homogène car moins sensible aux problèmes d'accords de phase sur un réseau discret, l'intensité d'excitation étant plus élevée.

L'évolution de la population de photon du signal et du complémentaire en fonction de la densité des excitons de pompe est représentée sur la figure 3.19. A basse intensité, la population augmente quadratiquement par rapport à la population d'excitons. Cette dépendance représente uniquement la contribution de la fluorescence paramétrique au seuil, contrairement à la simulation de Monte Carlo, où d'autres contributions sont éventuellement prises en compte. Le seuil est atteint lorsque la population d'excitons au sein de la pompe $N_X \simeq$

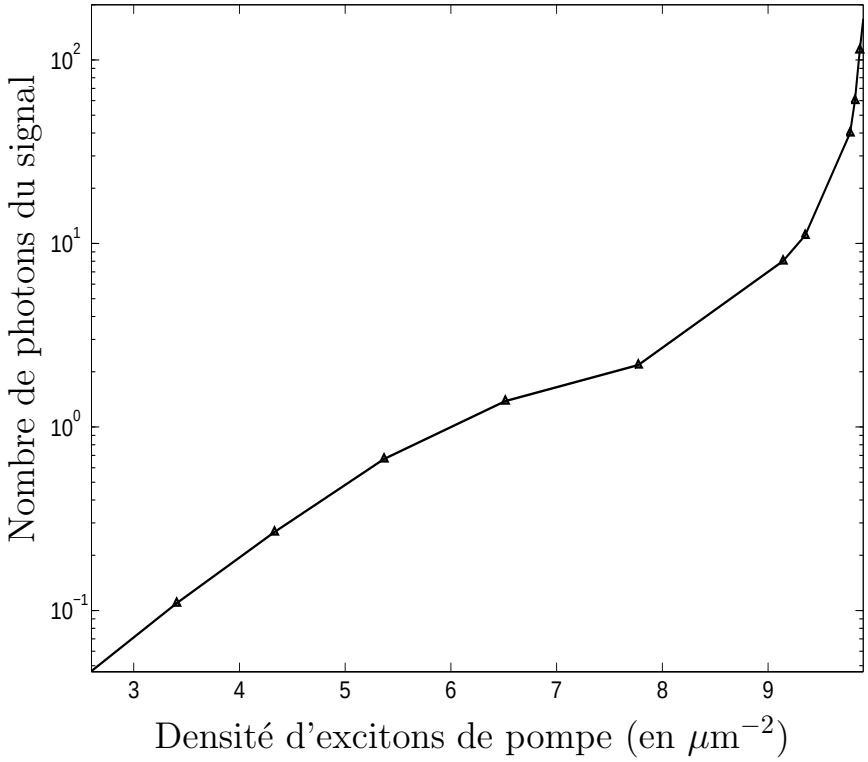


FIG. 3.19: Population de photons du signal et du complémentaire en fonction de la population d'excitons calculée à l'aide du modèle analytique dans un potentiel sans désordre, avec un état d'entrée vide. Les paramètres utilisés sont les même que pour la figure 3.4, exception faite de la fréquence de pompe $\hbar\omega_p = \hbar\omega_{LP}(\mathbf{k}_p)+$ 0.07 meV = 1398 meV, et $\hbar\omega_X^0 = 1400.1$ meV.

10^4. Sur la figure 3.9 nous avons représenté la population d'excitons de la pompe calculée à partir des résultats des simulations de Monte Carlo. On en déduit l'intensité de la pompe pour une population d'excitons donnée. Ici, le seuil correspond à l'égalité $F_p^2/\gamma^2 = 16$, à une puissance d'excitation plus faible que celle prévue par le modèle de Monte Carlo. Le modèle n'étant plus valable au-delà du seuil, la population n'est pas représentée.

Les corrélations, comparaison des deux modèles et limites

Les résultats obtenus pour $\sigma^{\pm}$ sont donnés sur la figure 3.20. On note dans un premier temps les similarités qualitatives entre ces résultats et ceux obtenus avec le calcul de Monte Carlo en l'abscence de potentiel désordonné. Quantita-

tivement, le modèle linéaire prévoit un seuil d'instabilité paramétrique brutal, mais n'est pas valide au-dessus du seuil, l'intensité du signal divergeant au seuil. Ajoutons que les paramètres d'excitation utilisés pour obtenir le seuil d'instabilité paramétrique sont légèrement différents de ceux utilisés lors des simulations de Monte Carlo. La densité de seuil est également différent d'à peu près 20%. La valeur limite du bruit de la différence à basse intensité est seulement légèrement plus grande que celle prévue par la méthode de Monte Carlo sans désordre. Ces différences constatées entre les deux modèles sont principalement dues au caractère multimode du modèle de Monte Carlo. La population des photons de pompe diffusés dans la cavité est plus importante dans un tel modèle et relève ainsi le seuil d'excitation.

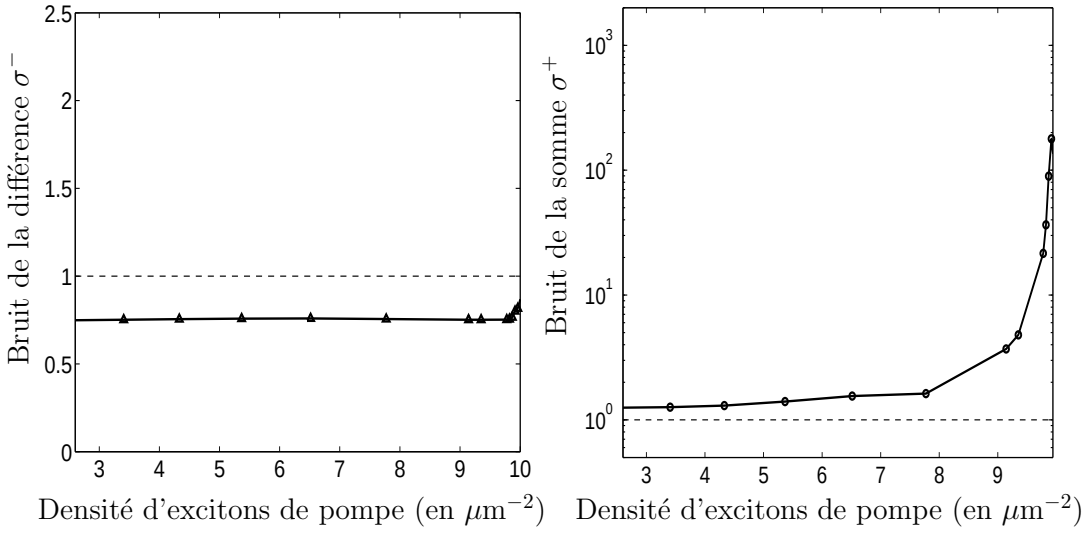


Fig. 3.20: Bruit de la somme (à droite) et de la différence (à gauche) en intensité des faisceaux du signal et du complémentaire en fonction de la densité d'excitons dans de pompe, calculé par l'intermédiaire du modèle analytique, dans un potentiel non désordonné, avec un état d'entrée vide. Les paramètres utilisés sont les même que pour la figure 3.19.

Si dans le modèle de Monte Carlo, l'ajout d'un potentiel désordonné se fait de façon naturelle, cette opération n'est pas aussi aisée dans le cas du modèle simplifié. Un tel ajout compliquerait singulièrement le traitement des calculs, détruisant l'intérêt d'un tel modèle.

3.5 Conclusion

En conclusion, nous avons présenté une étude complète des corrélations quantiques ayant lieu en régime de couplage fort dans les microcavités semi-conductrices grâce au formalisme du calcul de Monte Carlo quantique. Nous avons montré que ces corrélations ont lieu au sein de l'anneau de luminescence paramétrique. Nous avons montré que même en présence de pertes radiatives ou non-radiatives, de diffusion multiple et d'un désordre statique, un taux de corrélations important peut être observé entre les faisceaux signal et complémentaire. En étudiant la dépendance en puissance de ces corrélations quantiques au voisinage du seuil, nous avons mis en évidence le régime dans lequel ces aspects non-classiques de la lumière sont optimisés.

Conclusion générale

Cette étude théorique sur la génération d'états non-classiques au travers du couplage fort dans les microcavités semiconductrices s'est concentrée sur deux cas limites que sont le régime de confinement et le régime dilué, toujours à intensité d'excitation modérée.

Tout d'abord, nous avons étudié les effets du confinement du polariton dans une boîte photonique de dimensions réduites. Excité lègèrement sous la résonance du niveau fondamental, un phénomène d'antibunching dû aux interactions polariton-polariton a lieu, et le système émet une lumière de statistique sub-poissonienne et donc non-classique pour des boîtes de taille de l'ordre de quelques centaines d'angströms. A l'inverse, lorsque le système est excité au delà de la fréquence de résonance du fondamental, un phénomène de bunching apparaît. Pour des boîtes photoniques suffisamment petites, il est possible d'atteindre les caractéristiques d'une source de photons uniques reposant sur le principe du blocage quantique. Pour un tel processus, un montage en transmission est indispensable à l'observation de l'antibunching afin d'éviter l'observation des photons de pompe. Une excitation modérée est également nécessaire pour observer un fort antibunching. Un compromis doit cependant être trouvé à ce sujet afin d'émettre un nombre raisonnable de photons uniques en fonction du temps. Les simulations effectuées montrent que des états non-classiques peuvent être obtenus aussi bien en excitation continue qu'en excitation pulsée. Dans ce dernier cas, le taux de départ des photons de la cavité assure un très fort taux de répétition de la source. Si ce système présente un antibunching comparable aux systèmes utilisés actuellement, il permet cependant d'accéder au régime de blocage quantique qui présente un intérêt fondamental. D'autre part, la fabrication de ce type de structure est plus souple que les systèmes actuels, qui reposent sur des défauts de cristaux ou sur des systèmes auto-organisés.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié une microcavité dans une configuration d'excitation à deux pompes symétriques qui permet de générer deux faisceaux signal et complémentaire à la même intensité et à la même fréquence. Dans ces conditions, il est possible de mettre en évidence les propriétés de corrélations quantiques entre les deux faisceaux. Grâce à la méthode de Monte Carlo quantique, qui reproduit l'effet des fluctuations du champ, la configuration choisie met à jour l'anneau de fluorescence paramétrique, issu des termes d'interaction polariton-polariton. A plus forte intensité, un seuil apparaît séparant cette fluorescence qui s'efface pour laisser la place à une oscillation paramétrique des modes de l'anneau. L'ajout d'un potentiel désordonné montre que d'autres effets prennent place au sein d'une cavité réaliste. L'anneau Rayleigh, issu de la diffusion des particules par les défauts du potentiel de la cavité, se superpose à l'anneau de la fluorescence paramétrique. L'intensité de l'anneau de la luminescence est alors accrue à basse intensité, tandis que la hauteur du seuil d'amplification décroît.

Dans une cavité non désordonnée, la mesure du bruit de la différence en intensité des modes opposés de l'anneau de luminescence montre que ces modes sont quantiquement corrélés. La nature quantique de ces corrélations est plus importante à basse intensité et se dégrade à des intensités plus importantes. L'ajout d'un potentiel désordonné présente alors deux effets majeurs. Tout d'abord, il dégrade sensiblement la nature quantique des corrélations en additionnant des photons non-corrélés aux paires de photons générées par la fluorescence paramétrique. D'autre part, du fait de la persistance de la diffusion Rayleigh à basse intensité, un optimum des corrélations quantiques apparaît sous le seuil. Il est donc possible d'observer des corrélations quantiques dans les microcavités avec ce type de configuration, l'optimum de ces corrélations se trouvant légèrement sous le seuil d'amplification paramétrique. Le formalisme simplifié que nous avons exposé permet de recouvrer une partie de ces résultats. Ce formalisme pourra être utile pour l'abord des futurs systèmes, le calcul de Monte Carlo quantique restant un outil de choix dans la compréhension des mécanismes du système.

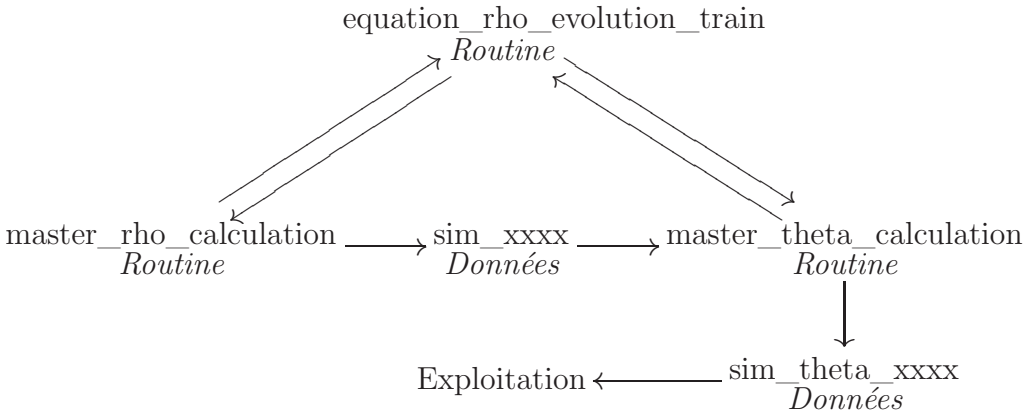
Annexe A

Programmes numériques : schémas de calcul et méthodes

Les différents programmes utilisés dans le cadre de cette thèse sont évoqués dans cet appendice. Il s'agit d'expliquer la méthode utilisée pour générer les données utilisées dans ce travail de thèse. Comme pour un protocole expérimental, savoir comment sont obtenus les résultats numériques est indispensable.

A.1 Blocage quantique

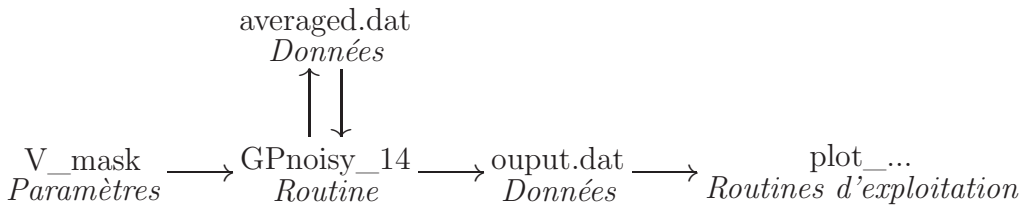
Le calcul du blocage est celui d'une équation différentielle non-linéaire résolue avec la méthode des éléments finis. Cette résolution s'appuie sur la fonction «ode» développée dans le programme MATLAB [123]. Le traitement numérique est expliqué dans le schéma suivant :



Les paramètres de la simulation sont insérés dans la première routine master_rho_calculation. On choisit dans ce premier fichier le calcul de la dépendance en l'un des paramètres qui sera effectué. Ce programme fait alors appel à la fonction «ode» qui à son tour utilise le fichier equation_rho_evolution_train. Celui-ci contient l'expression de l'équation d'évolution du système, associée au superopérateur $\mathcal{U}(t, t')$. La fonction «ode» délivre alors l'évolution de l'opérateur $\hat{\rho}$ en fonction du temps sur toute la durée de la simulation. Cette évolution est enregistrée en totalité dans un fichier de données sim_xxxx. Ce fichier est alors exploité par la routine master_theta_calculation qui applique à chaque temps une observable au système, puis laisse évoluer le système de la même façon que master_rho_calculation. En fin de simulation, on applique à nouveau l'observable choisie, puis les résultats sont conservés dans le fichier de données sim_theta_xxxx. Les données sont enfin exploitées par les différentes routines d'exploitations créées en fonction des besoins. Pour les paramètres exposés dans le chapitre 2, le temps nécessaire au calcul de quantités définies à un seul temps est de l'ordre de l'heure. Pour le calcul des quantités à deux temps, telles que les corrélations du second ordre, le processus réclame environ 24 heures.

A.2 Monte Carlo quantique

Le calcul du Monte Carlo quantique est celui d'une équation aux différences finies, à laquelle on ajoute un bruit à chaque pas. Le schéma explicatif suivant résume l'agencement des routines développées à l'aide du logiciel MATLAB :



La routine contenant le calcul des éléments finis, «GPnoisy» est centrale dans ce schéma. Elle contient la configuration de l'excitation et utilise les valeurs du potentiel générées par une routine secondaire appelée V_mask. Elle calcule ainsi le trajet d'une fonction d'onde en fonction du temps. Ainsi, pour

chaque configuration, à intervalles de temps réguliers, elle stocke la valeur de plusieurs quantités qu'elle moyenne au fur et à mesure avec les valeurs moyennes des configurations précédentes, stockées dans le fichier de données averaged.dat. Ces moyennes sont à leur tour stockées dans le fichier averaged.dat. La plus grande partie du calcul est consacrée en réalité aux calculs de transformée de Fourier rapide (FFT) dans la suite d'opérations. Le temps nécessaire pour le calcul des résultats exposés au chapitre 3 est d'environ 3 heures pour le calcul d'une configuration. Cette configuration correspond à l'évolution sur 1800 ps du champ, avec un pas de temps de 1.7 fs, nécessaire pour un calcul précis des moments du deuxième ordre en population. Lorsque le calcul se termine, la totalité des paramètres et des moyennes calculées sont stockés dans le fichier output.dat. Ce fichier est alors exploité à partir des routines d'exploitation développées en fonction des besoins.

Annexe B

Calcul analytique : Modèle entrée-sortie

Commençons par nous donner l'Hamiltonien dans l'espace réel, en considérant tout potentiel comme nul. Nous discrétisons *a priori* la somme sur les modes spatiaux de la cavité, dv étant le volume élémentaire pavant l'espace réel ($\sum_x dv \longrightarrow \int dx$).

B.1 Calcul de l'Hamiltonien du système

$$\mathcal{H} = \hbar \sum_x dv \sum_{i,j \in X,C} \hat{\Psi}_i^\dagger(x) \mathbf{h}_{i,j}^0 \hat{\Psi}_j(x) + \frac{\hbar g}{2} \sum_x dv \hat{\Psi}_X^\dagger(x) \hat{\Psi}_X^\dagger(x) \hat{\Psi}_X(x) \hat{\Psi}_X(x) \ . \tag{B.1}$$

Puisque nous travaillons dans l'espace réciproque, on ne considérera que quatre modes privilégiés, à savoir le mode de la pompe, de fréquence ω_p, ainsi que le signal et son complémentaire. Rappelons ici les relations entre les quantités de l'espace réel et de l'espace réciproque :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_C(x) &= \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x} \hat{a}_{\mathbf{k}} \ , \\ \hat{\Psi}_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x} \hat{b}_{\mathbf{k}} \ . \end{aligned} \tag{B.2}$$

En remplaçant ces différentes expressions dans l'hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\hbar\omega_C \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hbar\omega^0_X \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'} + \hbar\Omega_R (\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}) \right) + \frac{\hbar g}{2L_x L_y} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',q} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}-q} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'+q} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}} \ . \quad \text{(B.3)}$$

Notons que nous n'avons pas encore pris en compte le couplage à l'extérieur, ainsi, nous n'avons pas considéré l'influence du bain thermique environnant. Pour se faire, on introduit les termes d'interaction [122] dans l'équation afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\hbar\omega_C \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hbar\omega^0_X \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hbar\Omega_R (b^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}) \right) \\ + \frac{\hbar g}{2L_x L_y} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',q} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}-q} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'+q} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}} \\ + \int dq \sum_{\mathbf{k}} \left(\hbar\omega^{ph}_{q,\mathbf{k}} (\alpha^\dagger_{q,\mathbf{k}} \alpha_{q,\mathbf{k}} + 1/2) + \hbar\omega^{exc}_{q,\mathbf{k}} (\beta^\dagger_{q,\mathbf{k}} \beta_{q,\mathbf{k}} + 1/2) \right) \\ + i\hbar \int dq \sum_{\mathbf{k}} \left(\kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}} \alpha_{q,\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} - \kappa^{bath*}_{q,\mathbf{k}} \alpha^\dagger_{q,\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}} \beta_{q,\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} - \kappa^{bath*}_{q,\mathbf{k}} \beta^\dagger_{q,\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \right) \ ,\end{aligned} \quad \text{(B.4)}$$

Pour simplifier, nous avons pris les coefficients de couplage à l'extérieur égaux entre les photons et les excitons. En nous intéressant au modèle à 4 ondes, nous allons considérer seulement les modes des pompes ($\mathbf{k}_p$ et $-\mathbf{k}_p$) ainsi que les modes du signal et du complémentaire ($\mathbf{k}_s$ et $-\mathbf{k}_s$), négligeant donc les autres modes.

Nous considèrerons dans la suite que la pompe a une population importante, son comportement devenant classique, l'Hamiltonien est alors linéarisé. Ainsi, le terme non-linéaire $\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',q} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}-q} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'+q} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}}$ prend une suite de valeurs aisément dénombrables :

$$\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',q} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}-q} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'+q} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}} = 4(\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}_s} \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}_s} \hat{b}_{\mathbf{k}_p} \hat{b}_{-\mathbf{k}_p} + h.c). + 2 \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} + \sum_{\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \ . \quad \text{(B.5)}$$

Le dernier terme $\sum_{\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}$ correspond à un terme négligeable dans le cadre de notre étude. En effet, il concerne ou bien les modes des pompes, considérés

comme classiques ceux-ci n'ayant donc pas d'influence sur l'hamiltonien (leurs termes commutent). Ou bien ce terme concerne un mode peu peuplé, or celui-ci étant d'ordre 4 il est négligeable. L'avant-dernier terme est pris en compte dans la renormalisation de l'énergie des excitons ω_X :

$$\omega_X = \omega_X^0 + \frac{2g}{L_x L_y}\left(\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}_p}\hat{b}_{\mathbf{k}_p} + \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}_p}\hat{b}_{-\mathbf{k}_p}\right) \ . \tag{B.6}$$

Notons que nous avons négligé les termes $\hat{b}^\dagger_{\pm\mathbf{k}_s}\hat{b}^\dagger_{\pm\mathbf{k}_s}\hat{b}_{\pm\mathbf{k}_s}\hat{b}_{\pm\mathbf{k}_s}$ ainsi que $\hat{b}^\dagger_{\pm\mathbf{k}_s}\hat{b}^\dagger_{\mp\mathbf{k}_s}\hat{b}_{\pm\mathbf{k}_s}\hat{b}_{\mp\mathbf{k}_s}$ devant les autres termes En effet la population de la pompe étant considérée comme classique, on opère une linéarisation des termes de l'Hamiltonien. Dans la limite où la pompe est classique on réécrit ces termes :

$$\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 e^{-2i\omega_p t} \ , \qquad \hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{-\mathbf{k}}\mathcal{P}_1^*\mathcal{P}_2^* e^{2i\omega_p t} \ . \tag{B.7}$$

Avec $\mathcal{P}_1 e^{-i\omega_p t} = b_{\mathbf{k}_p}$ Au regard du caractère classique de l'excitation, la population du mode de la pompe est donc constante, nous n'étudierons donc pas ces modes. Pour alléger la notation, nous écrirons dans la suite $\kappa = |\kappa|e^{i\phi} = \frac{g}{L_x L_y}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$. Dans ces conditions, on peut réécrire ω_X de la manière suivante :

$$\omega_X = \omega_X^0 + \frac{2g}{L_x L_y}\left(|\mathcal{P}_1|^2 + |\mathcal{P}_2|^2\right) \ . \tag{B.8}$$

Le nouvel Hamiltonien s'exprime :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} &\left(\hbar\omega_C \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_X \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hbar\Omega_R(\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}})\right) \\ &+ \hbar(\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}_s}\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}_s}\kappa e^{-2i\omega_p t} + \hat{b}_{\mathbf{k}_s}\hat{b}_{-\mathbf{k}_s}\kappa^* e^{2i\omega_p t}) \\ &+ \int dq \sum_{\mathbf{k}} \left(\hbar\omega^{ph}_{q,\mathbf{k}}(\alpha^\dagger_{q,\mathbf{k}}\alpha_{q,\mathbf{k}} + 1/2) + \hbar\omega^{exc}_{q,\mathbf{k}}(\beta^\dagger_{q,\mathbf{k}}\beta_{q,\mathbf{k}} + 1/2)\right) \\ &+ i\hbar \int dq \sum_{\mathbf{k}} \left(\kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}}\alpha_{q,\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} - \kappa^{bath^*}_{q,\mathbf{k}}\alpha^\dagger_{q,\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}}\beta_{q,\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} - \kappa^{bath^*}_{q,\mathbf{k}}\beta^\dagger_{q,\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}\right) \ .\end{aligned} \tag{B.9}$$

B.2 Equations du mouvement

A présent que nous avons clarifié les différents paramètres et dépendances, nous allons pouvoir utiliser notre Hamiltonien pour déterminer les équations du mouvement en appliquant $\frac{da}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[a, \mathcal{H}]$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}_s}}{dt} &= -i(\omega_C \hat{a}_{\mathbf{k}_s} + \Omega_R \hat{b}_{\mathbf{k}_s}) + \int dq \kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}_s} \alpha_{q,\mathbf{k}_s} \ , \\
\frac{d\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}_s}}{dt} &= i(\omega_C \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}_s} + \Omega_R \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}_s}) + \int dq {\kappa^{bath}_{q,-\mathbf{k}_s}}^* \alpha^\dagger_{q,-\mathbf{k}_s} \ , \\
\frac{d\hat{b}_{\mathbf{k}_s}}{dt} &= -i(\omega_X \hat{b}_{\mathbf{k}_s} + \Omega_R \hat{a}_{\mathbf{k}_s} + \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}_s} \kappa e^{-2i\omega_p t}) + \int dq \kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}_s} \beta_{q,\mathbf{k}_s} \ , \\
\frac{d\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}_s}}{dt} &= i(\omega_X \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}_s} + \Omega_R \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}_s} + \hat{b}_{\mathbf{k}_s} \kappa^* e^{2i\omega_p t}) + \int dq {\kappa^{bath}_{q,-\mathbf{k}_s}}^* \beta^\dagger_{q,-\mathbf{k}_s} \ .
\end{aligned} \tag{B.10}$$

De même nous devons faire ce calcul pour les modes extérieurs :

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_{q,\mathbf{k}_s}}{dt} &= -i\omega^{ph}_{q,\mathbf{k}_s} \alpha_{\mathbf{k}_s} - \kappa^{bath*}_{q,\mathbf{k}_s} \hat{a}_{\mathbf{k}_s} \ , \\
\frac{d\alpha^\dagger_{q,-\mathbf{k}_s}}{dt} &= i\omega^{ph}_{q,-\mathbf{k}_s} \alpha^\dagger_{q,-\mathbf{k}_s} - \kappa^{bath}_{q,-\mathbf{k}_s} \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}_s} \ , \\
\frac{d\beta_{q,\mathbf{k}_s}}{dt} &= -i\omega^{exc}_{q,\mathbf{k}_s} \beta_{\mathbf{k}_s} - \kappa^{bath*}_{q,\mathbf{k}_s} \hat{b}_{\mathbf{k}_s} \ , \\
\frac{d\beta^\dagger_{q,-\mathbf{k}_s}}{dt} &= i\omega^{exc}_{q,-\mathbf{k}_s} \beta^\dagger_{q,-\mathbf{k}_s} - \kappa^{bath}_{q,-\mathbf{k}_s} \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}_s} \ .
\end{aligned} \tag{B.11}$$

La similitude de ces équations nous permettra de faire une seule résolution pour toutes. Nous prendrons dans la suite $\mathbf{k} = \mathbf{k}_s$. La résolution formelle des équations des modes α et β s'expriment :

$$\begin{aligned}
\alpha_{q,\mathbf{k}}(t) &= \alpha_{q,\mathbf{k}_s}(t_0) e^{-i\omega^{ph}_{q,\mathbf{k}}(t-t_0)} + \kappa^{bath*}_{q,\mathbf{k}} \int_{t_0}^{t} dt' e^{-i\omega^{ph}_{q,\mathbf{k}}(t-t')} \hat{a}_{\mathbf{k}}(t') \ , \\
\beta_{q,\mathbf{k}}(t) &= \beta_{q,\mathbf{k}}(t_0) e^{-i\omega^{exc}_{q,\mathbf{k}}(t-t_0)} + \kappa^{bath*}_{q,\mathbf{k}} \int_{t_0}^{t} dt' e^{-i\omega^{exc}_{q,\mathbf{k}}(t-t')} \hat{b}_{\mathbf{k}}(t') \ .
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Si l'on remplace ce paramètre par son expression dans les équations du mouvement des opérateurs $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}}}{dt} = -i(\omega_C \hat{a}_{\mathbf{k}} + \Omega_R \hat{b}_{\mathbf{k}}) + \int dq \kappa_{q,\mathbf{k}}^{bath} \alpha_{q,\mathbf{k}}(t_0) e^{-i\omega_{q,\mathbf{k}}^{ph}(t-t_0)} \\ + \int dq |\kappa_{q,\mathbf{k}}^{bath}|^2 \int_{t_0}^{t} dt' e^{-i\omega_{q,\mathbf{k}}^{ph}(t-t')} \hat{a}_{\mathbf{k}}(t') \ ,\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{b}_{\mathbf{k}}}{dt} = -i(\omega_X \hat{b}_{\mathbf{k}} + \Omega_R \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \kappa e^{-2i\omega_p t}) + \int dq \kappa_{q,\mathbf{k}}^{bath} \beta_{q,\mathbf{k}}(t_0) e^{-i\omega_{q,\mathbf{k}}^{exc}(t-t_0)} \\ + \int dq |\kappa_{q,\mathbf{k}}^{bath}|^2 \int_{t_0}^{t} dt' e^{-i\omega_{q,\mathbf{k}}^{exc}(t-t')} \hat{b}_{\mathbf{k}}(t') \ .\end{aligned} \tag{B.14}$$

En utilisant la définition habituelle des opérateurs d'entrée extra-cavité :

$$\alpha_{q,\mathbf{k}}^{in} = \alpha_{q,\mathbf{k}}(t_0) e^{-i\omega_{q,\mathbf{k}}^{ph} t} \ . \tag{B.15}$$

Dans notre situation, nous nous intéressons au régime stationnaire dans ce cas $t_0 \longrightarrow -\infty$, les équations deviennent des équations de Langevin quantique :

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}}}{dt} = -i(\omega_C \hat{a}_{\mathbf{k}} + \Omega_R \hat{b}_{\mathbf{k}}) - \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Gamma_{cav,\mathbf{k}}(t-t') \hat{a}_{\mathbf{k}}(t') + F_{cav,\mathbf{k}}(t) \ , \tag{B.16}$$

$$\frac{d\hat{b}_{\mathbf{k}}}{dt} = -i(\omega_X \hat{b}_{\mathbf{k}} + \Omega_R \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \kappa e^{-2i\omega_p t}) - \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Gamma_{exc,\mathbf{k}}(t-t') b_{\mathbf{k}}(t') + F_{exc,\mathbf{k}}(t) \ . \tag{B.17}$$

Avec les termes :

$$\Gamma_{j,\mathbf{k}}(\tau) = \Theta(\tau) \int dq |\kappa_{q,\mathbf{k}}^{bath}|^2 e^{-i\omega_{q,\mathbf{k}}^{j}\tau} \ , \tag{B.18}$$

et les termes associés à la force de Langevin :

$$F_{ph,\mathbf{k}}(t) = \int dq \kappa_{q,\mathbf{k}}^{bath} e^{-i\omega_{q,\mathbf{k}}^{ph} t} \alpha_{q,\mathbf{k}}^{in} \ , \qquad F_{exc,\mathbf{k}}(t) = \int dq \kappa_{q,\mathbf{k}}^{bath} e^{-i\omega_{q,\mathbf{k}}^{exc} t} \beta_{q,\mathbf{k}}^{in} \ . \tag{B.19}$$

Les opérateurs d'entrée et de sortie (α^{out} et β^{out}) peuvent être reliés via les expressions :

$$\begin{aligned} \alpha^{out}_{q,\mathbf{k}} &= \alpha^{in}_{q,\mathbf{k}} - \kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}} \tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega^{ph}_{q,\mathbf{k}}] \ , \\ \beta^{out}_{q,\mathbf{k}} &= \beta^{in}_{q,\mathbf{k}} - \kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}} \tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega^{exc}_{q,\mathbf{k}}] \ . \end{aligned} \tag{B.20}$$

B.3 Résolution du système

Pour résoudre se problème nous nous placerons dans l'espace des fréquences par transformée de Fourier. Ainsi :

$$\begin{aligned} -i\omega\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega] &= -i(\omega_C\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega] + \Omega_R\tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega]) - \tilde{\Gamma}_{cav,\mathbf{k}}[\omega]\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega] + \tilde{F}_{cav,\mathbf{k}}[\omega] \ , \\ -i\omega\tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega] &= -i(\omega_X\tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega] + \Omega_R\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega] + \kappa\tilde{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega]) - \tilde{\Gamma}_{exc,\mathbf{k}}[\omega]\tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega] + \tilde{F}_{exc,\mathbf{k}}[\omega] \ , \\ i(2\omega_p - \omega)\tilde{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] &= i(\omega_C\tilde{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] + \Omega_R\tilde{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega]) \\ &\quad - \tilde{\Gamma}^{*}_{cav,\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega]a^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] + \tilde{F}^{\dagger}_{cav,-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] \ , \\ i(2\omega_p - \omega)\tilde{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] &= i(\omega_X\tilde{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] + \Omega_R\tilde{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] + \kappa^{*}\tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega]) \\ &\quad - \tilde{\Gamma}^{*}_{cav,\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega]\tilde{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] + \tilde{F}^{\dagger}_{exc,-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] \ . \end{aligned} \tag{B.21}$$

On en déduit le système d'équation :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega] \\ \tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega] \\ \tilde{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] \\ \tilde{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \tilde{F}_{cav,\mathbf{k}}[\omega] \\ \tilde{F}_{exc,\mathbf{k}}[\omega] \\ \tilde{F}^{\dagger}_{cav,-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] \\ \tilde{F}^{\dagger}_{exc,-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{B.22}$$

La matrice $\mathcal{M}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p}$ étant définie par :

$$\begin{pmatrix} \omega_C - \omega - i\tilde{\Gamma}_{cav,\mathbf{k}}[\omega] & \Omega_R & 0 & 0 \\ \Omega_R & \omega_X - \omega - i\tilde{\Gamma}_{exc,\mathbf{k}}[\omega] & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & -\omega_C - (\omega - 2\omega_p) - i\tilde{\Gamma}^{*}_{cav,\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] & -\Omega_R \\ 0 & -\kappa^{*} & -\Omega_R & -\omega_X - (\omega - 2\omega_p) - i\tilde{\Gamma}^{*}_{exc,\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega] \end{pmatrix} . \tag{B.23}$$

Le terme $\tilde{\Gamma}_{j,\mathbf{k}}[\omega]$ s'exprime :

$$\tilde{\Gamma}_{j,\mathbf{k}}[\omega] = \int dq\pi|\kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}}|^2\delta(\omega-\omega^j_{q,\mathbf{k}}) + i\mathcal{P}\int dq\frac{|\kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}}|^2}{\omega-\omega^j_{q,\mathbf{k}}} \ . \tag{B.24}$$

De même,

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{ph,\mathbf{k}}[\omega] &= \int dq\kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}}2\pi\delta(\omega-\omega^{ph}_{q,\mathbf{k}})\alpha^{in}_{q,\mathbf{k}} = 2\pi\kappa^{bath}_{\bar{q}}\rho^{ph}_{\mathbf{k}}[\omega]\alpha^{in}_{\bar{q},\mathbf{k}} \ ,\\ \tilde{F}_{exc,\mathbf{k}}[\omega'] &= \int dq\kappa^{bath}_{q,\mathbf{k}}2\pi\delta(\omega'-\omega^{exc}_{q,\mathbf{k}})\beta^{in}_{q,\mathbf{k}} = 2\pi\kappa^{bath}_{\bar{q}'}\rho^{exc}_{\mathbf{k}}[\omega']\beta^{in}_{\bar{q}',\mathbf{k}} \ ,\end{aligned} \tag{B.25}$$

où $\bar{q}$ et $\bar{q}'$ sont tels que $\omega^{ph}_{\bar{q},\mathbf{k}} = \omega^{exc}_{\bar{q}',\mathbf{k}} = \omega$. Ce système s'inverse de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\\ \tilde{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\end{pmatrix} = \mathcal{G}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p}\begin{pmatrix}\tilde{F}_{cav,\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{F}_{exc,\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{F}^\dagger_{cav,-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\\ \tilde{F}^\dagger_{exc,-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\end{pmatrix} \ , \tag{B.26}$$

avec $\mathcal{G}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p} = -i\mathcal{M}^{-1}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p}$. On explicite la relation :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega] &= \mathcal{G}_{11}\tilde{F}_{cav,\mathbf{k}}[\omega] + \mathcal{G}_{12}\tilde{F}_{exc,\mathbf{k}}[\omega] + \mathcal{G}_{13}\tilde{F}^\dagger_{cav,-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega] + \mathcal{G}_{14}\tilde{F}^\dagger_{exc,-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega] \ ,\\ \tilde{a}^\dagger_{\mathbf{k}}[\omega] &= \mathcal{G}^*_{11}\tilde{F}^\dagger_{cav,\mathbf{k}}[\omega] + \mathcal{G}^*_{12}\tilde{F}^\dagger_{exc,\mathbf{k}}[\omega] + \mathcal{G}^*_{13}\tilde{F}_{cav,-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega] + \mathcal{G}^*_{14}\tilde{F}_{exc,-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega] \ .\end{aligned} \tag{B.27}$$

Notons que nous pouvons nous donner encore à cet instant du calcul une différence entre les différentes interactions en remplaçant $\kappa^{bath} = \kappa^{ph}$ ou $\kappa^{bath} = \kappa^{exc}$. Cette équation peut se réécrire en fonction du champ extérieur aux conditions initiales :

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{b}_{\mathbf{k}}[\omega]\\ \tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\\ \tilde{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\end{pmatrix} = 2\pi\mathcal{G}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p}\begin{pmatrix}\kappa^{ph}_{\bar{q}}\rho^{ph}_{\mathbf{k}}[\omega]\alpha^{in}_{\bar{q},\mathbf{k}}\\ \kappa^{exc}_{\bar{q}'}\rho^{exc}_{\mathbf{k}}[\omega]\beta^{in}_{\bar{q}',\mathbf{k}}\\ \kappa^{ph*}_{\bar{q}_1}\rho^{exc}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\alpha^{in}_{\bar{q}_1,-\mathbf{k}}{}^\dagger\\ \kappa^{exc*}_{\bar{q}'_1}\rho^{exc}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\beta^{in}_{\bar{q}'_1,-\mathbf{k}}{}^\dagger\end{pmatrix} \ , \tag{B.28}$$

sachant que :

$$\langle a^\dagger_{\mathbf{k}}(t)a_{\mathbf{k}}(t)\rangle = \int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d\omega'}{2\pi}\langle\tilde{a}^\dagger_{\mathbf{k}}[\omega]\tilde{a}_{\mathbf{k}}[\omega']\rangle e^{-i(\omega-\omega')t} \ . \tag{B.29}$$

B.4 Hypothèses simplificatrices

On peut négliger l'influence du déphasage apporté par l'extérieur, faible devant les autres facteurs en jeu.

Si l'on s'occupe uniquement du cas quasi-dégénéré où $\omega \simeq \omega_p \simeq \omega_X \simeq \omega_C$, on peut prendre $\tilde{\Gamma}_{cav,\mathbf{k}}[\omega]$ réel qui varie peu sur la gamme de fréquence concernée. On écrit alors $\tilde{\Gamma}_{cav,\mathbf{k}}[\omega] = \gamma_C/2$ et $\tilde{\Gamma}_{exc,\mathbf{k}}[\omega] = \gamma_X/2$ Notre matrice $\mathcal{M}_{\mathbf{k},\omega,\omega_p}$ devient :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{k},\omega_p,\omega_p} = \begin{pmatrix} \Delta_C(\omega) - i\gamma_C/2 & \Omega_R & 0 & 0 \\ \Omega_R & \Delta_X(\omega) - i\gamma_X/2 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & -\Delta_C(2\omega_p - \omega) - i\gamma_C/2 & -\Omega_R \\ 0 & -\kappa^* & -\Omega_R & -\Delta_X(2\omega_p - \omega) - i\gamma_X/2 \end{pmatrix} . \tag{B.30}$$

Avec $\Delta_i(\omega) = \omega_i - \omega$, avec $i = X, C$. Notons que chacune des quantités est tout à fait contrôlable par les paramètres fixes du système {pompe + cavité}.

B.4.1 Cas de modes uniques

Nous nous occupons pour le moment des interactions mode à mode sur le réseau, ce qui diffère de l'interaction d'une tâche à une autre. Le calcul sur une tâche sera introduit brièvement plus tard.

Population

Pour calculer la population dans l'état final en régime stationnaire, nous devons développer les équations. Reprenons l'expressions du moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle = \int d\omega \int d\omega' e^{-i(\omega-\omega')t} \Big\langle \Big(& \kappa^{ph*}_{\bar{q}} \rho^{ph}_{\mathbf{k}}[\omega]\mathcal{G}^*_{11}[\omega]\alpha^{in}_{\bar{q},\mathbf{k}}{}^\dagger + \kappa^{exc*}_{\bar{q}_e} \rho^{exc}_{\mathbf{k}}[\omega]\mathcal{G}^*_{12}[\omega]\beta^{in}_{\bar{q}_e,\mathbf{k}}{}^\dagger \\ + \kappa^{ph*}_{\bar{q}_1} \rho^{ph}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega]\mathcal{G}^*_{13}[\omega]\alpha^{in}_{\bar{q}_1,-\mathbf{k}} & + \kappa^{exc*}_{\bar{q}_{1e}} \rho^{exc}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega]\mathcal{G}^*_{14}[\omega]\beta^{in}_{\bar{q}_{1e},-\mathbf{k}} \Big) \\ \Big(\kappa^{ph}_{\bar{q}'} \rho^{ph}_{-\mathbf{k}}[\omega']\mathcal{G}_{11}[\omega']\alpha^{in}_{\bar{q}',\mathbf{k}} & + \kappa^{exc}_{\bar{q}'_e} \rho^{exc}_{-\mathbf{k}}[\omega']\mathcal{G}_{12}[\omega']\beta^{in}_{\bar{q}'_e,\mathbf{k}} \\ + \kappa^{ph}_{\bar{q}'_1} \rho^{ph}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega']\mathcal{G}_{13}[\omega']\alpha^{in}_{\bar{q}'_1,-\mathbf{k}}{}^\dagger & + \kappa^{exc}_{\bar{q}'_{1e}} \rho^{exc}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega']\mathcal{G}_{14}[\omega']\beta^{in}_{\bar{q}'_{1e},-\mathbf{k}}{}^\dagger \Big) \Big\rangle . \end{aligned} \tag{B.31}$$

Notre modèle inclus une excitation du système, partant d'un état vide. L'état initial étant le vide, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle = \int d\omega \int d\omega' e^{-i(\omega-\omega')t} \\ (\kappa^{ph*}_{\bar{q}_1}\rho^{ph}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\mathcal{G}^*_{13}[\omega]\alpha^{in}_{\bar{q}_1,-\mathbf{k}} + \kappa^{exc*}_{\bar{q}_{1e}}\rho^{exc}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\mathcal{G}^*_{14}[\omega]\beta^{in}_{\bar{q}_{1e},-\mathbf{k}}) \\ (\kappa^{ph}_{\bar{q}'_1}\rho^{ph}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega']\mathcal{G}_{13}[\omega']\alpha^{in}_{\bar{q}'_1,-\mathbf{k}}{}^\dagger + \kappa^{exc}_{\bar{q}'_{1e}}\rho^{exc}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega']\mathcal{G}_{14}[\omega']\beta^{in}_{\bar{q}'_{1e},-\mathbf{k}}{}^\dagger) \ . \end{aligned} \tag{B.32}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle = \int d\omega \int d\omega' e^{-i(\omega-\omega')t} \\ |\kappa^{ph}_{\bar{q}_1}|^2\rho^{ph}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\mathcal{G}^*_{13}[\omega]\mathcal{G}_{13}[\omega'] \left[\frac{d\omega^{ph}_{q=\bar{q}'_1}}{dq}\right]^{-1} \delta(\bar{q}_1(2\omega_p-\omega)-\bar{q}'_1(2\omega_p-\omega')) \\ + |\kappa^{exc}_{\bar{q}_{1e}}|^2\rho^{exc}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]\mathcal{G}^*_{14}[\omega]\mathcal{G}_{14}[\omega'] \left[\frac{d\omega^{exc}_{q=\bar{q}'_{1e}}}{dq}\right]^{-1} \delta(\bar{q}_{1e}(2\omega_p-\omega)-\bar{q}'_{1e}(2\omega_p-\omega')) \ . \end{aligned} \tag{B.33}$$

Or, en effectuant le changement de variable de la distribution suivant :

$$\int d\omega' \left[\frac{d\omega^{exc}_{q=\bar{q}'}}{dq}\right]^{-1} \delta(\bar{q}(\omega)-\bar{q}'(\omega')) = \int d\omega' \delta(\omega-\omega') \ . \tag{B.34}$$

En remplaçant dans l'expression, il vient :

$$\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle = \int d\omega \left(|\kappa^{ph}_{\bar{q}_1}|^2\rho^{ph}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]|\mathcal{G}_{13}|^2[\omega] + |\kappa^{exc}_{\bar{q}_{1e}}|^2\rho^{exc}_{-\mathbf{k}}[2\omega_p-\omega]|\mathcal{G}_{14}|^2[\omega]\right) \ . \tag{B.35}$$

Par définition de Γ :

$$\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \left(\gamma_C|\mathcal{G}_{13}|^2[\omega] + \gamma_X|\mathcal{G}_{14}|^2[\omega]\right) \ . \tag{B.36}$$

On obtient de la même façon :

$$\langle \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \left(\gamma_C|\mathcal{G}_{31}|^2[\omega] + \gamma_X|\mathcal{G}_{32}|^2[\omega]\right) \ . \tag{B.37}$$

Corrélations

Le calcul des corrélations nécessitant de connaître les moments d'ordre 4. Si on reprend ce calcul sur des modes discrets, il vient :

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int d\omega \int d\omega' \int d\omega'' \int d\omega''' e^{-i(\omega+\omega''-\omega'-\omega''')t} \\ (\gamma_C|\mathcal{G}_{13}|^2+\gamma_X|\mathcal{G}_{14}|^2)[\omega](\gamma_C|\mathcal{G}_{11}|^2+\gamma_X|\mathcal{G}_{12}|^2)[\omega']\delta(\omega-\omega''')\delta(\omega'-\omega'') \\ +(\gamma_C|\mathcal{G}_{13}|^2+\gamma_X|\mathcal{G}_{14}|^2)[\omega](\gamma_C|\mathcal{G}_{13}|^2+\gamma_X|\mathcal{G}_{14}|^2)[\omega'']\delta(\omega'-\omega)\delta(\omega''-\omega''') \ .\end{aligned} \tag{B.38}$$

On en déduit les expressions de σ_1 et σ_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle - \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle^2 \\ \sigma_1 &= \int \frac{d\omega}{2\pi}(\gamma_C|\mathcal{G}_{13}|^2+\gamma_X|\mathcal{G}_{14}|^2)[\omega]\int \frac{d\omega'}{2\pi}(\gamma_C|\mathcal{G}_{11}|^2+\gamma_X|\mathcal{G}_{12}|^2)[\omega'] \ .\end{aligned} \tag{B.39}$$

De même :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \langle \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\rangle - \langle \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\rangle^2 \\ \sigma_2 &= \int \frac{d\omega}{2\pi}(\gamma_C|\mathcal{G}_{33}|^2+\gamma_X|\mathcal{G}_{34}|^2)[\omega]\int \frac{d\omega'}{2\pi}(\gamma_C|\mathcal{G}_{31}|^2+\gamma_X|\mathcal{G}_{32}|^2)[\omega'] \ .\end{aligned} \tag{B.40}$$

Il nous reste à calculer le moment «croisé» d'ordre 4 $\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\rangle$ pour terminer le calcul :

$$\begin{aligned}&\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\rangle - \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle\langle \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\rangle = \\ &\frac{1}{4\pi^2}\int d\omega(\gamma_C\mathcal{G}^*_{13}[\omega]\mathcal{G}_{33}[\omega]+\gamma_X\mathcal{G}^*_{14}[\omega]\mathcal{G}_{34}[\omega])\int d\omega'(\gamma_C\mathcal{G}_{11}[\omega']\mathcal{G}^*_{31}[\omega']+\gamma_X\mathcal{G}_{12}[\omega']\mathcal{G}^*_{32}[\omega']) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle - \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle\langle \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\rangle = \\ &\frac{1}{4\pi^2}\int d\omega(\gamma_C\mathcal{G}_{13}[\omega]\mathcal{G}^*_{33}[\omega]+\gamma_X\mathcal{G}_{14}[\omega]\mathcal{G}^*_{34}[\omega])\int d\omega'(\gamma_C\mathcal{G}^*_{11}[\omega']\mathcal{G}_{31}[\omega']+\gamma_X\mathcal{G}^*_{12}[\omega']\mathcal{G}_{32}[\omega']) \ .\end{aligned} \tag{B.41}$$

La somme des deux donne alors tout simplement :

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\rangle + \langle \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle - 2\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)\rangle\langle \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}(t)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(t)\rangle \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2}\Re\left(\int d\omega(\gamma_C\mathcal{G}_{13}[\omega]\mathcal{G}^*_{33}[\omega] + \gamma_X\mathcal{G}_{14}[\omega]\mathcal{G}^*_{34}[\omega])\right. \\ &\qquad \left.\int d\omega'(\gamma_C\mathcal{G}^*_{11}[\omega']\mathcal{G}_{31}[\omega'] + \gamma_X\mathcal{G}^*_{12}[\omega']\mathcal{G}_{32}[\omega'])\right) . \quad \text{(B.42)}\end{aligned}$$

On peut alors dès à présent se donner les valeurs de la somme et de la différence directement en fonction des paramètres du problème. Le cas d'une tâche se calcule aisément en moyennant les éléments du produit.

Corrélations normalisées

On obtient ainsi la valeur du bruit de la somme et de la différence normalisée en divisant la somme et la différence par la population :

$$\begin{aligned}\sigma^\pm &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 \pm \sigma_{12}}{n_{\mathbf{k}} + n_{-\mathbf{k}}} \\ &= \frac{\int d\omega(\gamma_C|\mathcal{G}_{13}|^2 + \gamma_X|\mathcal{G}_{14}|^2)[\omega]\int d\omega'(\gamma_C|\mathcal{G}_{11}|^2 + \gamma_X|\mathcal{G}_{12}|^2)[\omega'] + \sigma_2 \pm \sigma_{12}}{2\pi\int d\omega\,(\gamma_C(|\mathcal{G}_{13}|^2[\omega] + |\mathcal{G}_{31}|^2[\omega]) + \gamma_X(|\mathcal{G}_{14}|^2[\omega] + |\mathcal{G}_{32}|^2[\omega]))} \\ &+ \frac{\int d\omega(\gamma_C|\mathcal{G}_{33}|^2 + \gamma_X|\mathcal{G}_{34}|^2)[\omega]\int d\omega'(\gamma_C|\mathcal{G}_{31}|^2 + \gamma_X|\mathcal{G}_{32}|^2)[\omega']}{2\pi\int d\omega\,(\gamma_C(|\mathcal{G}_{13}|^2[\omega] + |\mathcal{G}_{31}|^2[\omega]) + \gamma_X(|\mathcal{G}_{14}|^2[\omega] + |\mathcal{G}_{32}|^2[\omega]))} \\ &\pm \frac{2\Re\left(\int d\omega(\gamma_C\mathcal{G}_{13}[\omega]\mathcal{G}^*_{33}[\omega] + \gamma_X\mathcal{G}_{14}[\omega]\mathcal{G}^*_{34}[\omega])\int d\omega'(\gamma_C\mathcal{G}^*_{11}[\omega']\mathcal{G}_{31}[\omega'] + \gamma_X\mathcal{G}^*_{12}[\omega']\mathcal{G}_{32}[\omega'])\right)}{2\pi\int d\omega\,(\gamma_C(|\mathcal{G}_{13}|^2[\omega] + |\mathcal{G}_{31}|^2[\omega]) + \gamma_X(|\mathcal{G}_{14}|^2[\omega] + |\mathcal{G}_{32}|^2[\omega]))} .\end{aligned} \quad \text{(B.43)}$$

De plus on peut ajouter que l'ont peut vérifier une partie de la fiabilité de ces calculs en vérifiant l'égalité $\left\langle\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}(t), \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\right]\right\rangle = 1$ avec la forme :

$$\langle\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}(t), \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\right]\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int d\omega\left(\gamma_C|\mathcal{G}_{11}|^2 + \gamma_X|\mathcal{G}_{12}|^2 - \gamma_C|\mathcal{G}_{13}|^2 - \gamma_X|\mathcal{G}_{14}|^2\right)[\omega] . \quad \text{(B.44)}$$

B.4.2 Cas d'une tâche

Dans le cas d'une tâche sur laquelle les modes du vide ne sont pas initialement corrélés, la quantité observée est la population sur notée N_j ($j = (s, i)$ signal ou complémentaire resp.), ici la moyenne sur les états est une définition différente de la valeur moyenne stochastique puisque nous nous intéressons à des états quantiques obtenus analytiquement et non aux résultats du calcul numérique. Cependant, la valeur recherchée est toujours la même et population de photon au sein de la tâche est la valeur mesurée. Ainsi :

$$\langle \hat{N}_j(t) \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in D_j} \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \rangle = N_D \langle n_j(t) \rangle \ , \tag{B.45}$$

est le nombre de photon par mode sur la tâche. Dans le cas du moment d'ordre 4 sur une tache on écrit :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_j(t) \hat{n}_j(t) \rangle &= \frac{1}{N_D^2} \left\langle \sum_{\mathbf{k} \in D_j} \hat{N}_{\mathbf{k}}(t) \sum_{\mathbf{k}' \in D_s} \hat{N}_{\mathbf{k}'}(t) \right\rangle \\
\langle \hat{n}_j(t) \hat{n}_j(t) \rangle &= \iiiint \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4}{(2\pi)^4 N_D^2} \left\langle \sum_{\mathbf{k} \in D_j} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}[\omega_1] \hat{a}_{\mathbf{k}}[\omega_2] \sum_{\mathbf{k}' \in D_j} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}[\omega_3] \hat{a}_{\mathbf{k}'}[\omega_4] \right\rangle \ .
\end{aligned} \tag{B.46}$$

A ce stade intéressons nous à la reformulation de l'intégrant en terme de force de Langevin :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \sum_{\mathbf{k} \in D_j} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}[\omega_1] \hat{a}_{\mathbf{k}}[\omega_2] \sum_{\mathbf{k}' \in D_j} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}[\omega_3] \hat{a}_{\mathbf{k}'}[\omega_4] \right\rangle = \\
&\sum_{\mathbf{k} \in D_j} \sum_{\mathbf{k}' \in D_j} \Big\langle \Big(\mathcal{G}^*_{11} \tilde{F}^\dagger_{cav,\mathbf{k}}[\omega_1] + \mathcal{G}^*_{12} \tilde{F}^\dagger_{exc,\mathbf{k}}[\omega_1] + \mathcal{G}^*_{13} \tilde{F}_{cav,-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega_1] + \mathcal{G}^*_{14} \tilde{F}_{exc,-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega_1] \Big) \\
&\Big(\mathcal{G}_{11} \tilde{F}_{cav,\mathbf{k}}[\omega_2] + \mathcal{G}_{12} \tilde{F}_{exc,\mathbf{k}}[\omega_2] + \mathcal{G}_{13} \tilde{F}^\dagger_{cav,-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega_2] + \mathcal{G}_{14} \tilde{F}^\dagger_{exc,-\mathbf{k}}[2\omega_p - \omega_2] \Big) \\
&\Big(\mathcal{G}^*_{11} \tilde{F}^\dagger_{cav,\mathbf{k}'}[\omega_3] + \mathcal{G}^*_{12} \tilde{F}^\dagger_{exc,\mathbf{k}'}[\omega_3] + \mathcal{G}^*_{13} \tilde{F}_{cav,-\mathbf{k}'}[2\omega_p - \omega_3] + \mathcal{G}^*_{14} \tilde{F}_{exc,-\mathbf{k}'}[2\omega_p - \omega_3] \Big) \\
&\Big(\mathcal{G}_{11} \tilde{F}_{cav,\mathbf{k}'}[\omega_4] + \mathcal{G}_{12} \tilde{F}_{exc,\mathbf{k}'}[\omega_4] + \mathcal{G}_{13} \tilde{F}^\dagger_{cav,-\mathbf{k}'}[2\omega_p - \omega_4] + \mathcal{G}_{14} \tilde{F}^\dagger_{exc,-\mathbf{k}'}[2\omega_p - \omega_4] \Big) \Big\rangle \ .
\end{aligned} \tag{B.47}$$

Rappelons que nous sommes dans le vide en ce qui concerne les forces de Langevin. D'autre part on élimine tout couplage initial entre d'une part le signal et le complémentaire et d'autre part deux modes voisins d'une tâche. Ici on doit se donner le résultat :

$$\langle \tilde{F}_{\mathbf{k}}[\omega]\tilde{F}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}[\omega']\rangle = 2\pi\gamma\delta(\omega-\omega')\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \ . \tag{B.48}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \sum_{\mathbf{k}\in D_j} a^{\dagger}_{\mathbf{k}}[\omega_1]a_{\mathbf{k}}[\omega_2] \sum_{\mathbf{k}'\in D_j} a^{\dagger}_{\mathbf{k}'}[\omega_3]a_{\mathbf{k}'}[\omega_4] \right\rangle = \\
&4\pi^2 \sum_{\mathbf{k}\in D_j}\sum_{\mathbf{k}'\in D_j} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right)\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta(\omega_1-\omega_4)\left(|\mathcal{G}_{11}|^2\gamma_C 2\pi + |\mathcal{G}_{12}|^2\gamma_X\right)\delta(\omega_2-\omega_3)\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \\
&\quad + \left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right)\delta(\omega_1-\omega_2)\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right)\delta(\omega_3-\omega_4)\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}'} \ .
\end{aligned} \tag{B.49}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
&\langle \sum_{\mathbf{k}\in D_j} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}[\omega_1]\hat{a}_{\mathbf{k}}[\omega_2] \sum_{\mathbf{k}'\in D_j} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}[\omega_3]\hat{a}_{\mathbf{k}'}[\omega_4]\rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in D_j} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right) 2\pi\delta(\omega_1-\omega_4)\left(|\mathcal{G}_{11}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{12}|^2\gamma_X\right) 2\pi\delta(\omega_2-\omega_3) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{k}\in D_j}\sum_{\mathbf{k}'\in D_j} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right) 2\pi\delta(\omega_1-\omega_2)\left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right) 2\pi\delta(\omega_3-\omega_4) \ .
\end{aligned} \tag{B.50}$$

On retrouve donc :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_j(t)\hat{n}_j(t)\rangle - \langle \hat{n}_j(t)\rangle^2 = \frac{1}{N_D^2}\sum_{\mathbf{k}\in D_j}\int \frac{d\omega}{2\pi}\left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right)[\omega] \\
\int \frac{d\omega'}{2\pi}\left(|\mathcal{G}_{11}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{12}|^2\gamma_X\right)[\omega'] \ .
\end{aligned} \tag{B.51}$$

Les termes croisés se retrouvent également aisément.

B.4.3 Lien avec la définition en fréquence

La somme et la différence du bruit en intensité sont définies par

$$\sigma^{\pm} \equiv \langle (\delta N_{\pm}(t))^2 \rangle \ , \tag{B.52}$$

où par définition,

$$\delta N_{\pm}(t) \equiv N_{\pm} - \langle N_{\pm} \rangle \ . \tag{B.53}$$

Une réécriture de $\sigma^{\pm}(t)$ est trivialement $\sigma^{\pm}(t) = \langle \delta N_{\pm}(t) \delta N_{\pm}(t) \rangle$. Notons que dans un processus stationnaire $\sigma^{\pm}(t)$ est une constante aventageusement notée $\sigma^{\pm}$. La valeur de la corrélation de l'intensité est par définition :

$$S(\tau) \equiv \langle \delta N_{\pm}(t+\tau) \delta N_{\pm}(t) \rangle = \langle \delta N_{\pm}(\tau) \delta N_{\pm}(0) \rangle \ . \tag{B.54}$$

La deuxième égalité est vraie pour un processus stationnaire. La transformée de Fourier de cette quantitée :

$$\tilde{S}[\omega] = \int d\tau e^{-i\omega\tau} S(\tau) = \int d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \delta N_{\pm}(\tau) \delta N_{\pm}(0) \rangle \ . \tag{B.55}$$

Soit :

$$\tilde{S}[\omega] = \langle \int d\tau e^{-i\omega\tau} \delta N_{\pm}(\tau) \delta N_{\pm}(0) \rangle = \langle \delta \tilde{N}_{\pm}[\omega] \delta N_{\pm}(0) \rangle \ . \tag{B.56}$$

Notons que : $\int d\omega \tilde{S}[\omega] = \int d\omega \tilde{S}[\omega] e^{i\omega 0} = 2\pi S(\tau = 0) = \sigma^{\pm}$ Si nous devons nous intéresser au calcul de $\tilde{S}[\omega]$, il nous faut calculer la valeur de l'opérateur $\delta \tilde{N}_{\pm}[\omega]$:

$$\delta \tilde{N}_{\pm}[\omega] = \int e^{-i\omega\tau} d\tau \delta N_{\pm}(\tau) = \int e^{-i\omega\tau} d\tau \left(N_{\pm}(\tau) - \langle N_{\pm}(\tau) \rangle \right) \ . \tag{B.57}$$

On aura besoin de calculer la valeur de $\langle N_{\pm}(\tau) \rangle$. Or :

$$\begin{aligned} \langle N_{\pm}(\tau) \rangle &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_s} \pm \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}_i} \iint \frac{d\omega_1 d\omega_2}{4\pi^2} e^{i(\omega_2 - \omega_1)\tau} \langle \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}[\omega_1] \hat{a}_{\mathbf{k}'}[\omega_2] \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_s} \pm \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_i} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(\gamma_C |\mathcal{G}_{13}|^2 + \gamma_X |\mathcal{G}_{14}|^2 \right) \ . \end{aligned} \tag{B.58}$$

C'est donc une constante (comme on pouvait s'y attendre) dont on connait maintenant la valeur. On en déduit :

$$\langle \tilde{N}_{\pm}[\omega] \rangle = \langle N_{\pm}(0) \rangle \delta[\omega] \ . \tag{B.59}$$

Revenons au calcul de $\tilde{S}[\omega]$:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}[\omega] &= \langle \delta \tilde{N}_{\pm}[\omega] \delta N_{\pm}(0) \rangle = \langle (\tilde{N}_{\pm}[\omega] - \langle N_{\pm}(0) \rangle \delta[\omega])(N_{\pm}(0) - \langle N_{\pm}(0) \rangle) \rangle \\
&= \langle \tilde{N}_{\pm}[\omega] N_{\pm}(0) \rangle - \langle \tilde{N}_{\pm}[\omega] \rangle \langle N_{\pm}(0) \rangle - \langle N_{\pm}(0) \rangle \delta[\omega] \langle N_{\pm}(0) \rangle + \langle N_{\pm}(0) \rangle^2 \delta[\omega] \\
\tilde{S}[\omega] &= \langle \tilde{N}_{\pm}[\omega] N_{\pm}(0) \rangle - \langle N_{\pm}(0) \rangle^2 \delta[\omega] \ .
\end{aligned} \tag{B.60}$$

Il nous reste maintenant à calculer $\langle \tilde{N}_{\pm}[\omega] N_{\pm}(0) \rangle$. En terme de calcul sur une tâche, on retrouve la dépendance suivante :

$$\langle \tilde{N}_{\pm}[\omega] N_{\pm}(0) \rangle = \langle \tilde{N}_s[\omega] N_s(0) \rangle + \langle \tilde{N}_i[\omega] N_i(0) \rangle \pm \Big(\langle \tilde{N}_s[\omega] N_i(0) \rangle + \langle \tilde{N}_i[\omega] N_s(0) \rangle \Big) \ . \tag{B.61}$$

Ainsi découpé on peut reprendre le calcul :

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{N}_j[\omega] N_j(0) \rangle = & \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \int d\tau e^{-i\omega\tau} \iint \frac{d\omega_1 d\omega_2}{4\pi^2} e^{i(\omega_2 - \omega_1)\tau} \\
& \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}_j} \iint \frac{d\omega_3 d\omega_4}{4\pi^2} \langle \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}[\omega_1] \hat{a}_{\mathbf{k}}[\omega_2] \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}[\omega_3] \hat{a}_{\mathbf{k}'}[\omega_4] \rangle \\
= & \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2 \gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2 \gamma_X \right) [\omega_1] \right)^2 \delta(\omega) \\
& + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2 \gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2 \gamma_X \right) [\omega_1] \left(|\mathcal{G}_{11}|^2 \gamma_C + |\mathcal{G}_{12}|^2 \gamma_X \right) [\omega_1 + \omega] \ .
\end{aligned} \tag{B.62}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{N}_j[\omega] N_j(0) \rangle = & \langle N_j(0) \rangle^2 \delta[\omega] \\
& + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_j} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2 \gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2 \gamma_X \right) [\omega_1] \left(|\mathcal{G}_{11}|^2 \gamma_C + |\mathcal{G}_{12}|^2 \gamma_X \right) [\omega_1 + \omega] \ .
\end{aligned} \tag{B.63}$$

Il nous reste les moments croisés à calculer :

$$\langle \tilde{N}_s[\omega] N_i(0)\rangle = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_s} \int d\tau e^{-i\omega\tau} \iint \frac{d\omega_1 d\omega_2}{4\pi^2} e^{i(\omega_2-\omega_1)\tau} \sum_{\mathbf{k}'\in\mathcal{D}_i} \iint \frac{d\omega_3 d\omega_4}{4\pi^2} \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}[\omega_1]\hat{a}_{\mathbf{k}}[\omega_2]\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}[\omega_3]\hat{a}_{\mathbf{k}'}[\omega_4]\rangle$$
$$= \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_i} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right)[\omega_1]\right) \left(\sum_{\mathbf{k}'\in\mathcal{D}_s} \int \frac{d\omega_3}{2\pi} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right)[\omega_3]\right) \delta(\omega)$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_s} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(\mathcal{G}^*_{11}[\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega_1]\mathcal{G}^*_{13}[-\mathbf{k},\omega_1]\gamma_C + \mathcal{G}^*_{12}[\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega_1]\mathcal{G}^*_{14}[-\mathbf{k},\omega_1]\gamma_X\right)$$
$$\left(\mathcal{G}_{11}[\mathbf{k},\omega+\omega_1]\mathcal{G}_{13}[-\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega-\omega_1]\gamma_C + \mathcal{G}_{12}[\mathbf{k},\omega+\omega_1]\mathcal{G}_{14}[-\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega-\omega_1]\gamma_X\right) . \tag{B.64}$$

De la même façon que plus haut :

$$\langle \tilde{N}_s[\omega] N_i(0)\rangle = \langle N_s(0)\rangle\langle N_i(0)\rangle\delta[\omega]$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_s} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(\mathcal{G}^*_{11}[\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega_1]\mathcal{G}^*_{13}[-\mathbf{k},\omega_1]\gamma_C + \mathcal{G}^*_{12}[\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega_1]\mathcal{G}^*_{14}[-\mathbf{k},\omega_1]\gamma_X\right)$$
$$\left(\mathcal{G}_{11}[\mathbf{k},\omega+\omega_1]\mathcal{G}_{13}[-\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega-\omega_1]\gamma_C + \mathcal{G}_{12}[\mathbf{k},\omega+\omega_1]\mathcal{G}_{14}[-\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega-\omega_1]\gamma_X\right) . \tag{B.65}$$

En réintroduisant ces formules dans notre expression de $\tilde{S}[\omega]$:

$$\tilde{S}[\omega] = \langle \tilde{N}_\pm[\omega] N_\pm(0)\rangle - \langle N_\pm(0)\rangle^2\delta[\omega]$$
$$= \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_s} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right)[\omega_1] \left(|\mathcal{G}_{11}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{12}|^2\gamma_X\right)[\omega_1+\omega]$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_i} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(|\mathcal{G}_{13}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{14}|^2\gamma_X\right)[\omega_1] \left(|\mathcal{G}_{11}|^2\gamma_C + |\mathcal{G}_{12}|^2\gamma_X\right)[\omega_1+\omega]$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_s} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(\mathcal{G}^*_{11}[\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega_1]\mathcal{G}^*_{13}[-\mathbf{k},\omega_1]\gamma_C + \mathcal{G}^*_{12}[\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega_1]\mathcal{G}^*_{14}[-\mathbf{k},\omega_1]\gamma_X\right)$$
$$\left(\mathcal{G}_{11}[\mathbf{k},\omega+\omega_1]\mathcal{G}_{13}[-\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega-\omega_1]\gamma_C + \mathcal{G}_{12}[\mathbf{k},\omega+\omega_1]\mathcal{G}_{14}[-\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega-\omega_1]\gamma_X\right)$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_i} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(\mathcal{G}^*_{11}[\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega_1]\mathcal{G}^*_{13}[-\mathbf{k},\omega_1]\gamma_C + \mathcal{G}^*_{12}[\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega_1]\mathcal{G}^*_{14}[-\mathbf{k},\omega_1]\gamma_X\right)$$
$$\left(\mathcal{G}_{11}[\mathbf{k},\omega+\omega_1]\mathcal{G}_{13}[-\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega-\omega_1]\gamma_C + \mathcal{G}_{12}[\mathbf{k},\omega+\omega_1]\mathcal{G}_{14}[-\mathbf{k}, 2\omega_p-\omega-\omega_1]\gamma_X\right) . \tag{B.66}$$

Notons que les divergences se sont toutes annulées. Il ne reste que des termes dépendant de ω qui sont en général des convoluées.

Annexe C

Publications et acte de conférence

- *Polariton quantum blockade in a photonic dot*, A. Verger, C. Ciuti & I. Carusotto, *Phys. Rev. B* **73**, 193306 (2006), cond-mat/0511336.

- ICPS 28 (Vienna 2006) : *Polariton quantum blockade in a photonic dot*, A. Verger, C. Ciuti & I. Carusotto.

- *Quantum Monte Carlo study of ring-shaped polariton parametric luminescence in a semiconductor microcavity*, A. Verger, I. Carusotto & C. Ciuti, *Phys. Rev. B* **76**, 115324 (2007), cond-mat.other/0704.3423v2.

Bibliographie

[1] L. Esaki & R. Tsu, *Superlattice and Negative Differential Conductivity in Semiconductors*, IBM J. Res. Dev. **14**, 61 (1970).

[2] E. Burstein & C. Weisbuch (Eds.), *Confined Electrons and Photons : New Physics and Devices* (Plenun Press, 1995).

[3] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa & Y. Arakawa, *Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity*, Phys. Rev. Lett. **69**, 3314 (1992).

[4] C. Weisbuch & H. Benisty, *Microcavities in Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Ecole Polytechnique (France) and elsewhere : past, present and future*, Phys. Stat. Solidi (b) **242**, 2345 (2005).

[5] Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond & S. Haroche, *Observation of Self-Induced Rabi Oscillations in Two-Level Atoms Excited Inside a Resonant Cavity : The Ringing Regime of Superradiance*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1175 (1983).

[6] P. R. Berman, *Cavity Quantum Electrodynamics* (Academic Press, 1994).

[7] J. M. Raimond, M. Brune & S. Haroche, *Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity*, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).

[8] J.J. Hopfield, *Theory of the Contribution of Excitons to the Complex Dielectric Constant of Crystals*, Phys. Rev. **112**, 1555 (1958).

[9] P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker & J. S. Roberts, *Angle-Resonant Stimulated Polariton Amplifier*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1547 (2000).

[10] R. M. Stevenson, V. N. Astratov, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, M. Emam-Ismail, A. I. Tartakovskii, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg & J. S. Roberts, *Continuous Wave Observation of Massive Polariton*

Redistribution by Stimulated Scattering in Semiconductor Microcavities, Phys. Rev. Lett. **85**, 3680 (2000).

[11] P. G. Savvidis, C. Ciuti, J. J. Baumberg, M. S.Skolnick, D. M. Whittaker & J. S. Roberts, *Off-branch polaritons and multiple scattering in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. B **64**, 075311 (2001).

[12] C. Diederichs, J. Tignon, G. Dasbach, C. Ciuti, A. Lemaître, J. Bloch, Ph. Roussignol & C. Delalande, *Parametric oscillation in vertical triple microcavities*, Nature **440**, 904 (2006).

[13] A. Baas, J-Ph. Karr, H. Eleuch & E. Giacobino, *Optical bistability in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. A **69**, 023809 (2004).

[14] A. Baas, J-Ph. Karr, M. Romanelli, A. Bramati & E. Giacobino, *Optical bistability in semiconductor microcavities in the nondegenerate parametric oscillation regime : Analogy with the optical parametric oscillator*, Phys. Rev. B **70**, 161307(R) (2004).

[15] J-Ph. Karr, A. Baas, R. Houdré & E. Giacobino, *Squeezing in semiconductor microcavities in the strong-coupling regime*, Phys. Rev. A **69**, 031802 (2004).

[16] C. Ciuti, *Branch-entangled polariton pairs in planar microcavities and photonic wires*, Phys. Rev. B **69**, 245304 (2004).

[17] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchandti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud & Le Si Dang, *Bose-Einstein condensation of exciton polaritons*, Nature **443**, 409 (2006).

[18] D. Boumweester, A. Ekert & A. Zeilinger, *The Physics of Quantum information* (Springer-Verlag, 2000).

[19] O. El Daif, A. Baas, T. Guillet, J.-P. Brantut, R. Idrissi Kaitouni, J. L. Staehli, F. Morier-Genoud & B. Deveaud, *Polariton quantum boxes in semiconductor microcavities*, App. Phys. Lett. **88**, 061105 (2006).

[20] D. V. Averin & K. K. Likharev, *Coulomb blockade of single-electron tunneling, and coherent oscillations in small tunnel junctions*, J. Low Temp. Phys. **62**, 345 (1987).

[21] T. A. Fulton & G. J. Dolan, *Observation of single-electron charging effects in small tunnel junctions*, Phys. Rev. Lett. **59**, 109 (1987).

[22] A. Imamoğlu, H. Schmidt, G. Woods & M. Deutsch, *Strongly Interacting Photons in a Nonlinear Cavity*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1467 (1997).

[23] M. Romanelli, C. Leyder, J-Ph. Karr, A. Baas, E. Giacobino & A. Bramati, *Towards quantum correlated polariton modes in semiconductor microcavities*, J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt. **7**, S523 (2005).

[24] M. Romanelli, C. Leyder, J-Ph. Karr, E. Giacobino & A. Bramati, *Four Wave Mixing Oscillation in a Semiconductor Microcavity : Generation of Two Correlated Polariton Populations*, Phys. Rev. Lett. **98**, 106401 (2007).

[25] C. Fabre & S. Reynaud, *Quantum fluctuations, Notes de cours de l'école d'été des Houches* (North-Holland, 1995).

[26] J. Frenkel, *On the Transformation of light into Heat in Solids. I*, Phys. Rev. **37**, 17 (1931).

[27] J. Frenkel, *On the absorption of light and the trapping of electrons and positive holes in crystalline dielectrics*, Physik Zeits. Sowjetunion **9**, 159 (1935).

[28] G. H. Wannier, *The Structure of Electronic Excitation Levels in Insulating Crystals*, Phys. Rev. **52**, 191 (1937).

[29] P. Y. Yu & M. Cardona, *Fundamentals of semiconductors and Physics and material properties* (Springer, 1999).

[30] G. Bastard, *Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures* (Les éditions de physique, 1996).

[31] R. S. Knox, *Theory of excitons* (Academic Press, 1963).

[32] E. Hanamura & H. Haug, *Condensation effects of excitons*, Phys. Rep.-Phys. Lett. C **33**, 209 (1977).

[33] B. Deveaud (Ed.), *The Physics of semiconductors microcavities* (Wiley-VCH Verlag, 2007).

[34] P. G. Savvidis & P. G. Lagoudakis, *Teaching polaritons new tricks*, Semicond. Sci. Technol. **18**, S311 (2001).

[35] V. Savona, *Confined Photon systems, Fundamentals and Applications, Notes des cours de physique de l'école d'été de Cargèse* (Springer, 1998).

[36] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes* (InterÉdition-CNRS Éditions, 2001).

[37] R. P. Stanley, R. Houdre, U. Oesterle, M. Gailhanou & M. Ilegems, *Ultrahigh finesse microcavity with distributed Bragg reflectors*, Applied Physics Letters **65**, 1883 (1994).

[38] V. Savona, F. Tassone, C. Piermarocchi & A. Quattropani, *Theory of polariton photoluminescence in arbitrary semiconductor microcavity structures*, Phys. Rev. B **53**, 13051 (1996).

[39] P. Meystre & M. Sargent, *Elements of Quantum Optics* (Springer-Verlag, 1991).

[40] V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, P. Schwendimann & F. Tassone, *Optical properties of Microcavity Polaritons*, Phase Transitions **68**, 169 (1999).

[41] J.M. Gérard, B. Sermage, B. Gayral, B. Legrand, E. Costard & V. Thierry-Mieg, *Enhanced Spontaneous Emission by Quantum Boxes in a Monolithic Optical Microcavity*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1110 (1998).

[42] D. Bimberg, M. Grundmann & N. N. Ledentsov, *Quantum Dot Heterostructures* (Wiley, 1999).

[43] G. Dasbach, A. A. Dremin, M. Bayer, V. D. Kulakovskii, N. A. Gippius & A. Forchel, *Oscillations in the differential transmission of a semiconductor microcavity with reduced symmetry*, Phys. Rev. B **65**, 245316 (2002).

[44] U. Oesterle, R. P. Stanley & R. Houdré, *MBE growth of high finesse microcavities*, Phys. Status. Solidi (b) **242**, 2157 (2005).

[45] F. Semond, I. R. Sellers, F. Natali, D. Byrne, M. Leroux, J. Massies, N. Ollier, J. Leymarie, P. Disseix & A. Vasson, *Strong light-matter coupling at room temperature in simple geometry GaN microcavities grown on silicon*, App. Phys. Lett. **87**, 021102 (2005).

[46] A. Brehier, R. Parashkov, J. S. Lauret & E. Deleporte, *Strong exciton-photon coupling in a microcavity containing layered perovskite semiconductors*, App. Phys. Lett. **89**, 171110 (2006).

[47] E. Yablonovitch, *Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).

[48] D. Gerace, M. Agio & L.C. Andreani, *Quantum theory of photonic crystal polaritons*, Phys. Stat. Solidi (c) **1**, 446 (2004).

[49] T. Fujita, Y. Sato, T. Kuitani & T. Ishihara, *Tunable polariton absorption of distributed feedback microcavities at room temperature*, Phys. Rev. B **57**, 12428 (1998).

[50] A. Badolato, K. Hennessy & A. Imamoğlu, *Deterministic coupling of photonic crystal nanocavity modes to single quantum dot excitons*, Poster (2006).

[51] M. G. Raizen, R. J. Thompson, R. J. Brecha, H. J. Kimble & H. J. Carmichael, *Normal-mode splitting and linewidth averaging for two-state atoms in an optical cavity*, Phys. Rev. Lett. **63**, 240 (1989).

[52] S. Haroche & D. Kleppner, *Cavity quantum electrodynamics*, Phys. Today **42**, 24 (1989).

[53] K. Huang, *On the interaction between a radiation field and ionic crystals*, Proc. Roy. Soc.(London) A **208**, 352 (1951).

[54] S. I. Pekar, *Dispersion of light in the exciton absorption region of crystals*, Sov. Phys.-JETP **6**, 785 (1958).

[55] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii & S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).

[56] L. P. Pitaevskii & S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, 2003).

[57] F. Tassone & Y. Yamamoto, *Exciton-exciton scattering dynamics in a semiconductor microcavity and stimulated scattering into polaritons*, Phys. Rev. B **59**, 10830 (1999).

[58] L. J. Sham & T. M. Rice, *Many-Particle Derivation of the Effective-Mass Equation for the Wannier Exciton*, Phys. Rev. **144**, 708 (1966).

[59] T. Hiroshima, *Nonresonant excitonic optical nonlinearity in semiconductors*, Phys. Rev. B **40**, 3862 (1989).

[60] G. Rochat, C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi & A. Quattropani, *Excitonic Bloch equations for a two-dimensional system of interacting excitons*, Phys. Rev. B **61**, 13856 (2000).

[61] T. Usui, *Excitations in a high density electron gas*, Prog. Theor. Phys. **23**, 787 (1960).

[62] M. Combescot, M.-A. Dupertuis & O. Betbeder-Matibet, *Polariton-polariton scattering : exact results through a novel approach*, ArXiv pp. cond–mat/0705.3189 (2007).

[63] C. Ciuti, P. Schwendimann & A. Quattropani, *Theory of polariton parametric interactions in semiconductor microcavities*, Semicond. Sci. Technol. **18**, S279 (2003).

[64] V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, F. Tassone & P. Schwendimann, *Microscopic Theory of Motional Narrowing of Microcavity Polaritons in a Disordered Potential*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4470 (1997).

[65] D. M. Whittaker, *What Determines Inhomogeneous Linewidths in Semiconductor Microcavities ?*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4791 (1998).

[66] C. Piermarocchi, F. Tassone, V. Savona, A. Quattropani & P. Schwendimann, *Nonequilibrium dynamics of free quantum-well excitons in time-resolved photoluminescence*, Phys. Rev. B **53**, 15834 (1996).

[67] V. Savona & C. Piermarocchi, *Microcavity Polaritons : Homogeneous and Inhomogeneous Broadening in the Strong Coupling Regime*, Phys. Status. Solidi (a) **164**, 45 (1997).

[68] R.Houdré, R. P. Stanley, U. Oesterle & C. Weisbuch, *Strong coupling regime in semiconductor microcavities*, C.R. Phys. (France) **3**, 15 (2002).

[69] C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani & P. Schwendimann, *Role of the exchange of carriers in elastic exciton-exciton scattering in quantum wells*, Phys. Rev. B **58**, 7926 (1998).

[70] C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani & P. Schwendimann, *Threshold behavior in the collision broadening of microcavity polaritons*, Phys. Rev. B **58**, R10123 (1998).

[71] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel & H. Zbinden, *Quantum cryptography*, Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002).

[72] A. Beveratos, R. Brouri, T. Gacoin, J-Ph. Poizat & Ph. Grangier, *Non-classical radiation from diamond nanocrystals*, Phys. Rev. A **64**, 061802 (2001).

[73] A. Beveratos, R. Brouri, T. Gacoin, A. Villing, J-P. Poizat & P. Grangier, *Single Photon Quantum Cryptography*, Phys. Rev. Lett. **89**, 187901 (2002).

[74] P. Michler, A. Kiraz, C. Becher, W. V. Schoenfeld, P. M. Petroff, Lidong Zhang, E. Hu & A. Imamoğlu, *A Quantum Dot Single-Photon Turnstile Device*, Science **290**, 2282 (2001).

[75] J. Kim, O. Benson, H. Kan & Y. Yamamoto, *A single-photon turnstile device*, Nature **397**, 500 (1999).

[76] C. Santori, D. Fattal, J. V. Caronkovi, G. S. Solomon & Y. Yamamoto, *Indistinguishable photons from a single-photon device*, Nature **419**, 594 (2002).

[77] H. J. Kimble, M. Dagenais & L. Mandel, *Photon Antibunching in Resonance Fluorescence*, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977).

[78] F. Diedrich & H. Walter, *Non-classical radiation from a single stored ion*, Phys. Rev. Lett. **58**, 203 (1987).

[79] K. M. Birnbaum, A. Boca, R. Miller, A. D. Boozer, T. E. Northup & H. J. Kimble, *Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom*, Nature **436**, 87 (2005).

[80] G.Dasbach, M. Schwab, M. Bayer, D.N. Krizhanovskii & A. Forchel, *Enhanced light emission of $In_xGa_{1-x}As$ quantum dots in a two-dimensional photonic-crystal defect microcavity*, Phys. Rev. B **66**, 041303 (2002).

[81] G. Dasbach, C. Diederichs, J. Tignon, C. Ciuti, Ph. Roussignol, C. Delalande, M. Bayer & A. Forchel, *Polarization inversion via parametric scattering in quasi-one-dimensional microcavities*, Phys. Rev. B **71**, 161308 (2005).

[82] A. Badolato, K. Hennessy, M. Atatüre, J. Dreiser, E. Hu, P. M. Petroff & A. Imamoğlu, *Deterministic coupling of single quantum dots to single nanocavity modes*, Science **308**, 1158 (2005).

[83] R. Idrissi Kaitouni, O. El Daïf, A. Baas, M. Richard, T. Paraiso, P. Lugan, T. Guillet, F. Morier-Genoud, J. D. Ganière, J. L. Staehli, V. Savona & B. Deveaud, *Engineering the spatial confinement of exciton polaritons in semiconductors*, Phys. Rev. B **74**, 155311 (2006).

[84] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, R. Miller, J. R. Buck, A. Kuzmich & H. J. Kimble, *Deterministic Generation of Single Photons from One Atom Trapped in a Cavity*, Science **303**, 1992 (2004).

[85] I. Carusotto & C. Ciuti, *Probing Microcavity Polariton Superfluidity through Resonant Rayleigh Scattering*, Phys. Rev. Lett. **93**, 166401 (2004).

[86] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu & F. Laloë, *Mécanique quantique* (Hermann, 1973).

[87] I. Carusotto, *Linear and nonlinear optics of Bose fields : lightwaves in dielectric structures, matter waves in optical lattices*, Thèse de doctorat, Scuola Normale Superiore (2000).

[88] J. Baumberg & L. Vi na (Eds.), *Special issue on Microcavities*, volume 18, p. S279 (2003).

[89] J-L. Basdevant & J. Dalibard, *Mécanique Quantique* (Les éditions de l'École polytechnique, 2001).

[90] R. J. Glauber, *The Quantum Theory of Optical Coherence*, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).

[91] D.F. Walls & G.J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-verlag, 1994).

[92] R. Hanbury-Brown & R. Q. Twiss, *Correlation between Photons in two Coherent Beams of Light*, Nature **177**, 26 (1956).

[93] D. M. Whittaker, *Resonant Rayleigh scattering from a disordered microcavity*, Phys. Rev. B **61**, R2433 (2000).

[94] E. M. Purcell, *Spontaneous Emission Probabilities at Radio Frequencies*, Phys. Rev. (*Proceedings of the American Physical Society*) **69**, 681 (1946).

[95] C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud & A. Quattropani, *Theory of the angle-resonant polariton amplifier*, Phys. Rev. B **62**, 4825R (2000).

[96] J. J. Baumberg, P. G. Savvidis, R. M. Stevenson, A. I. Tartakovskii, D. M. Whittaker M. S. Skolnick & J. S. Roberts, *Parametric oscillation in a vertical microcavity : A polariton condensate or micro-optical parametric oscillation*, Phys. Rev. B **62**, 16247R (2000).

[97] C. Ciuti, P. Schwendimann & A. Quattropani, *Parametric luminescence of microcavity polaritons*, Phys. Rev. B **63**, 041303R (2001).

[98] D. M. Whittaker, *Classical treatment of parametric processes in a strong-coupling planar microcavity*, Phys. Rev. B **63**, 193305 (2001).

[99] G. Dasbach, M. Schwab, M. Bayer, D.N. Krizhanovskii & A. Forchel, *Tailoring the polariton dispersion by optical confinement : Access to a manifold of elastic polariton pair scattering channels*, Phys. Rev. B **66**, 201201(R) (2002).

[100] D. M. Whittaker, *Effects of polariton-energy renormalization in the microcavity optical parametric oscillator*, Phys. Rev. B **71**, 115301 (2005).

[101] J. Ph. Karr, A. Baas & E. Giacobino, *Twin polaritons in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. A **69**, 063807 (2004).

[102] S. Savasta, O. Di Stefano, V. Savona & W. Langbein, *Quantum Complementarity of Microcavity Polaritons*, Phys. Rev. Lett. **94**, 246401 (2005).

[103] I. Carusotto & C. Ciuti, *Spontaneous microcavity-polariton coherence across the parametric threshold : Quantum Monte Carlo studies*, Phys. Rev. B **72**, 125335 (2005).

[104] A. Baas, J.-Ph. Karr, M. Romanelli, A. Bramati & E. Giacobino, *Quantum Degeneracy of Microcavity Polaritons*, Phys. Rev. Lett. **96**, 176401 (2006).

[105] P. Schwendimann, C. Ciuti & A. Quattropani, *Statistics of polaritons in the nonlinear regime*, Phys. Rev. B **68**, 165324 (2003).

[106] A. Quattropani & P. Schwendimann, *Polariton Squeezing in Microcavities*, Phys. Stat. Solid. (b) **242**, 2302 (2004).

[107] M. Romanelli, *Mélange à quatre ondes de polaritons dans des microcavités semi-conductrices*, Thèse de doctorat, Université Paris VI (2005).

[108] M. Romanelli, J-Ph. Karr, C. Leyder, E. Giacobino & A. Bramati, *Correlated polaritonic emission from a semiconductor microcavity*, ArXiv pp. cond–mat/0505639 (2005).

[109] C. Diederichs, C. Leyder, J. Tignon, M. Romanelli, J-Ph Karr, E. Giacobino, C. Ciuti, A. Lemaître, J. Bloch, Ph Roussignol, C. Delalande, Ph. Roussignol A. Bramati & C. Delalande, Non publié.

[110] E. Rosencher, A. Fiore, B. Vinter, V. Berger, P. Bois & J. Nagle, *Quantum Engineering of Optical Nonlinearities*, Science **271**, 168 (1996).

[111] L. Lanco, S. Ducci, J.-P. Likforman, X. Marcadet, J. A. W. van Houwelingen, H. Zbinden, G. Leo & V. Berger, *Semiconductor Waveguide Source of Counterpropagating Twin Photons*, Physical Review Letters **97**, 173901 (2006).

[112] P. G. Lagoudakis, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, D. M. Whittaker, P. R. Eastham, M. S. Skolnick & J. S. Roberts, *Stimulated spin dynamics of polaritons in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. B **65**, 161310R (2002).

[113] A. Kavokin, G. Malpuech & M. Glazov, *Optical Spin Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **95**, 136601 (2005).

[114] I. Shelykh, G. Malpuech, K. V. Kavokin, A. V. Kavokin & P. Bigenwald, *Spin dynamics of interacting exciton polaritons in microcavities*, Phys. Rev. B **70**, 115301 (2004).

[115] C. Mora & Y. Castin, *Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates*, Phys. Rev. A **67**, 053615 (2003).

[116] C. Ciuti & I. Carusotto, *Quantum fluid effects and parametric instabilities in microcavities*, Phys. Stat. Solid. (b) **242**, 2224 (2004).

[117] M. J. Steel, M. K. Olsen, L. I. Plimak, P. D. Drummond, S. M. Tan, M. J. Collett, D. F. Walls & R. Graham, *Dynamical quantum noise in trapped Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A p. 4824 (1998).

[118] M. Wouters & I. Carusotto, *Parametric oscillation threshold of semiconductor microcavities in the strong coupling regime*, Phys. Rev. B **75**, 075332 (2007).

[119] C. Fabre, *Confined Photon systems and Fundamentals and Applications, Notes des cours de physique de l'école d'été de Cargèse* (Springer, 1998).

[120] A. Baas, *Amplification paramétrique et réduction de bruit quantique dans les microcavités semi-conductrices*, Thèse de doctorat, Université Paris VI (2003).

[121] N. Treps & C. Fabre, *Criteria of quantum correlation in the measurement of continuous variables in optics*, Laser Physics **15**, 187 (2005), (*Prépublication* quant-ph/0407214).

[122] C. Ciuti & I. Carusotto, *Input-output theory of cavities in the ultrastrong coupling regime : The case of time-independent cavity parameters*, Phys. Rev. A **74**, 033811 (2006).

[123] L. F. Shampine & M. W. Reichelt, *The MATLAB ODE Suite*, SIAM Journal on Scientific Computing **18**, 1 (1997).

Abstract :

This manuscript is a theoretical study of the non-classical properties of the light emitted by the semiconductor microcavities in the strong coupling regime. In this respect, we have studied both single photon and twin photon sources based on polariton-polariton interactions.

In a first part, we have demonstrated the possible realization of a sub-poissonian light source based on photon confined structures. For a small enough photonic dot embedded in a planar microcavity, one can reach a non-linear regime where the introduction of one single photon is sufficient to detune the resonance by more than a linewidth. This leads to the so-called polariton quantum blockade. In this regime, we have shown that it is possible to create a novel single photon source, presenting in detail its intrinsic properties. We have highlighted the various aspects of its performance, in the continous regime as well as in the pulsed regime.

In the second part, we have studied the quantum correlations properties of ring-shaped parametric fluorescence from a planar microcavity excited by a symmetric two-pump excitation. Using a Wigner Quantum Monte Carlo algorithm, we have characterized the quantum correlations taking place between the signal and idler beams on the opposite sides of the ring. The results indicate that even in presence of multiple scattering, realistic losses and static disorder, the signal and idler beams maintain a significant amount of quantum correlations. The dependance of the quantum correlation on the pump intensity has been characterized across the parametric instability threshold, showing the regime where the non-classical features are maximized.

Keywords : Microcavity — Strong coupling — Antibunching — Single photon — Quantum blockade — Twin photons — Quantum optics — Semiconductor.

Résumé :

Ce mémoire de thèse a pour sujet l'étude théorique des propriétés non-classiques de la lumière émise par les microcavités semiconductrices dans le régime de couplage fort. Dans ce cadre, nous avons étudié ces structures comme des sources de photons uniques ou de photons jumeaux.

Nous avons démontré dans un premier temps l'opportunité de créer une source de lumière de statistique sub-poisonnienne à partir de structures photoniques confinées. Pour des boîtes photoniques suffisamment étroites au sein de microcavités semiconductrices, on atteint un régime non-linéaire tel que l'introduction d'un seul photon suffit à décaler la résonance d'absorption de la structure de plus d'une largeur de raie, engendrant le phénomène de blocage quantique. Nous avons montré qu'en utilisant ce mécanisme de blocage, il est possible de créer une source de photons uniques originale, dont nous avons présenté les caractéristiques. Nous avons présenté les différents aspects de son fonctionnement tant en régime continu qu'en régime pulsé.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié les propriétés de corrélation entre paires signal et complémentaire émises par fluorescence paramétrique dans une configuration d'excitation symétrique dans une microcavité planaire. En utilisant l'algorithme de Monte Carlo quantique, nous avons montré qu'il existe des corrélations quantiques entre ces deux faisceaux. En étudiant l'impact du désordre (qui brise l'invariance par translation) de la cavité sur ces corrélations, nous montrons que celui-ci dégrade le caractère quantique des corrélations lorsque l'intensité de l'excitation est modérée. La dépendance en intensité des corrélations quantiques entre faisceaux a été caractérisée au-dessus et en-dessous du seuil d'instabilité paramétrique, nous permettant d'identifier le régime où le caractère non-classique du système est maximal.

Mots clefs : Microcavité — Couplage fort — Antibunching — Photon unique — Blocage quantique — Photons jumeaux — Optique quantique — Semiconducteur.