



**HAL**  
open science

# Principe de comparaison et stabilité des systèmes complexes

Georges S. Bitsoris

► **To cite this version:**

Georges S. Bitsoris. Principe de comparaison et stabilité des systèmes complexes. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1978. Français. NNT: . tel-00178414

**HAL Id: tel-00178414**

**<https://theses.hal.science/tel-00178414>**

Submitted on 11 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée

**DEVANT L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)**

pour l'obtention

**du Grade de DOCTEUR D'ÉTAT (SCIENCES)  
Spécialité : Automatique**

par

**Georges S. BITSORIS**

Ingénieur de l'Université Technique Nationale d'Athènes

---

## ***PRINCIPE DE COMPARAISON ET STABILITÉ DES SYSTÈMES COMPLEXES***

---

*Soutenu le 9 Juin 1978 devant la Commission d'Examen :*

MM. G. GRATELOUP                      Président

D.D. ŠILJAK  
M. VIDYASAGAR  
F. LHOTE  
J.L. ABATUT  
J. BERNUSSOU

} Examineurs

Στο πατέρα μου

Avant de présenter les résultats de mes travaux de recherche, je voudrais exprimer ma reconnaissance à mes amis Grecs avec qui, pendant des nuits entières, nous vivions le présent et nous essayons d'esquisser l'espoir pour un autre avenir; plus particulièrement à Caroline SAKELLARIOU qui m'a montré qu'on peut réaliser le rêve.

## AVANT - P R O P O S

---

Les travaux présentés dans ce mémoire sont l'aboutissement des recherches effectuées au cours des cinq dernières années au sein du LABORATOIRE d'AUTOMATIQUE et d'ANALYSE des SYSTEMES du CENTRE NATIONAL de la RECHERCHE SCIENTIFIQUE dirigé par Monsieur le Professeur G. GRATELOUP, à qui je tiens à exprimer tous mes remerciements pour l'honneur qu'il m'a fait en s'intéressant à mes travaux et en acceptant la présidence de ma Commission d'Examen.

Mes remerciements s'adressent aussi à :

Monsieur J.L. ABATUT, Maître de Conférences à l'Université Paul Sabatier, pour avoir assuré la direction de mes recherches au cours des trois premières années et qui a bien voulu accepter la charge de rapporteur de thèse, ainsi que celle de membre de la Commission d'Examen,

Messieurs VIDYASAGAR, Professeur à l'Université Concordia de Montréal, D.D. SILJAK, Professeur à l'Université de Santa Clara de Californie et F. LHOTE Professeur à l'Ecole Nationale de Chronométrie et de Micromécanique de Besançon, qui malgré leurs occupations ont accepté de participer à la Commission d'Examen,

Monsieur J. BERNUSSOU, chargé de Recherche au C. N. R. S., Directeur de nos travaux de recherches, pour les très nombreuses et fructueuses discussions scientifiques et l'aide morale qu'il nous a apportée au cours des deux dernières années de recherches.

Je voudrais exprimer ici ma joie d'avoir collaboré, dès le début de mes recherches, avec C. BURGAT ; qu'il trouve ici le témoignage de mon amitié.

Cet ouvrage a été réalisé grâce aux multiples collaborations amicales de HÉLÈNA ORPHANIDOU qui a corrigé le manuscrit, Melle J. DOUMERGUE qui a dactylographié mon mémoire, ainsi que Mrs J. CATHALA, R. ZITTEL D. DAURAT et R. LORTAL qui en sont vivement remerciés.

I N T R O D U C T I O N

Depuis environ une quinzaine d'années, nous pouvons constater que les automaticiens s'orientent vers l'étude de systèmes de plus en plus complexes, phénomène qui reflète le besoin d'élaboration de méthodes pour l'étude de processus comme les systèmes industriels de production, les systèmes socio-économiques ...

En ce qui concerne la stabilité, propriété importante en particulier pour la sécurité de fonctionnement d'un système dynamique, mis à part les méthodes de simulation numériques ou analogiques, la recherche de conditions suffisantes est basée principalement sur l'utilisation de plusieurs fonctions scalaires définies positives ou, d'une façon plus générale, sur l'utilisation de fonctions vectorielles possédant certains types de propriété de positivité. La méthode, proposée presque simultanément par R. Bellman [5] et V.M. Matrozov [42] et développée principalement par ce dernier [43] [45] et connue sous le nom de principe de comparaison, est applicable à l'étude des systèmes dynamiques décrits sous forme d'équations d'état.

La méthode consiste à associer au système dynamique qui fait l'objet d'une étude de stabilité un autre système dynamique, dit système de comparaison, dont l'étude de stabilité est moins difficile et dont la stabilité implique la stabilité du système étudié. L'obtention du système de comparaison est effectuée par une transformation du vecteur d'état du système étudié, en utilisant des fonctions vectorielles dont les composantes sont définies ou semi-définies positives (fonctions vectorielles définies positives) ou dont la fonction valeur maximale des composantes est définie positive (fonctions de classe  $\mathcal{V}$ ).

L'utilisation d'une fonction de transformation vectorielle, au lieu d'une fonction scalaire (méthode de Lyapunov), fournit un outil puissant pour l'étude de la stabilité des systèmes d'ordre élevé ou de structure compliquée puisqu'elle permet la décomposition du système étudié en sous-systèmes et par conséquent une décomposition du problème global en sous-problèmes. Cette approche, qui a été appliquée pour la première fois par F. N. Bailey [4] dans l'étude de la stabilité des systèmes continus interconnectés, connaît de nos jours de nouveaux développements dans l'étude d'autres propriétés des systèmes dynamiques.



Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une extension des méthodes basées sur le principe de comparaison.

Le premier chapitre est essentiellement divisé en deux parties.

Dans la première partie, nous présentons les classes des systèmes dynamiques continus et discrets qui font l'objet d'une analyse de stabilité dans notre mémoire.

Dans la deuxième partie, nous considérons en général le problème de la stabilité des systèmes dynamiques en rappelant d'abord les définitions des différents types de stabilité par rapport à tout ou partie de composantes du vecteur d'état et les définitions des domaines de stabilité.

Puis, nous présentons les principales méthodes d'analyse de stabilité par l'utilisation d'une fonction scalaire définie positive, en particulier la seconde méthode de Lyapunov [41] et les méthodes de comparaison basées sur les travaux de C. Cordunéanu [15] et de L. Hatvanyi [31].

Le deuxième chapitre est consacré à l'établissement d'un nouveau système de comparaison et son étude.

Dans une première partie, nous définissons une classe de fonctions vectorielles dites fonctions de classe  $\mathcal{V}$  qui seront utilisées comme fonctions de transformation du vecteur d'état du système étudié pour la construction du système de comparaison. Cette classe de fonctions est plus générale que celle des fonctions vectorielles définies positives en ce sens qu'on n'exclue pas le cas où certaines composantes sont négatives pour certaines valeurs de leurs arguments.

Puis, après la présentation des théorèmes de comparaison, sur les inégalités différentielles de type de Wazewski [68], nous établissons un nouveau système de comparaison dont la stabilité partielle implique la stabilité de l'origine du système étudié.

Enfin, une quatrième partie est consacrée à l'étude de la stabilité partielle du système de comparaison où nous établissons des conditions de stabilité asymptotique uniforme et de stabilité exponentielle ; de même que nous abordons le problème de l'estimation de leur domaine de stabilité et de l'estimation du comportement transitoire.

Dans le troisième chapitre, nous développons le problème de l'estimation du domaine de stabilité d'un système dynamique toujours par l'étude du système de comparaison qui lui est associé. Ce problème se pose soit lorsque le système de comparaison ne peut être considéré comme tel que dans un sous-ensemble de l'espace d'état du système étudié, soit lorsqu'il est défini dans tout l'espace d'état, mais lui-même est localement stable.

Ayant développé le support théorique de la méthode d'analyse de stabilité basée sur le principe de comparaison, nous abordons le problème de la construction même du système de comparaison. Le sujet du quatrième chapitre est donc la présentation des différentes approches de construction du système de comparaison. Dans une première partie, nous montrons comment la construction du système de comparaison d'un système dynamique d'ordre élevé peut être conduite à partir d'une partition convenable du système global. Cette partition, lorsqu'elle est possible, amène une décomposition du problème de la construction et de l'analyse de la stabilité du système de comparaison en un certain nombre de sous-problèmes plus simples qui, dans certains cas, peuvent être indépendants les uns des autres. Dans les parties suivantes, nous présentons brièvement des méthodes d'agrégation-décomposition et d'agrégation directe.

Le principe de comparaison, utilisé initialement pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques, a été récemment envisagé pour l'étude des problèmes de commande. Les résultats présentés dans le cinquième chapitre constituent une contribution à la recherche sur l'utilisation du principe de comparaison dans ce type de problèmes. Dans un premier paragraphe, nous considérons le problème de la commande en temps minimal, en donnant un théorème sur l'existence d'une telle commande. Par la suite, en se basant sur ce théorème et les propriétés du système de comparaison développées dans le chapitre II, nous proposons une solution à quelques problèmes de synthèse des systèmes de commande : systèmes à temps de réponse fixe, avec comportement exponentiel prespécifié, à coût borné.



NOTATIONS

$A, B, C, M, \dots$	Matrices à éléments $a_{ij}, b_{ij}, \dots$ : $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \dots$
$A^T, B^T, C^T, M^T, \dots$	Matrices transposées des $A, B, \dots$
$X, U, V, W, \dots$	Vecteurs colonne
$X^T, U^T, V^T, W^T, \dots$	Vecteurs ligne
$x_i, u_i, v_i, w_i$	Composantes des vecteurs $X, U, V, W, \dots$
$\  \cdot \ $	Norme "somme des valeurs absolues" : $X = \sum  x_i $
$\  \cdot \ _e$	Norme Euclidienne : $(X^T \cdot X)^{1/2}$
$\mathbb{1}$	Matrice unité
$U \leq V$	Ordonnance partielle de vecteurs : $u_i \leq v_i$
$R^n$	L'espace Euclidienne de dimension $n$
$R_+^n$	Le "quadrant" non négatif de $R^n$
$T^c$	L'ensemble de temps continus $T^c = \{t \in R_+\}$
$T_0^c$	L'ensemble de temps continu $T^c = [t_0, \infty)$ où $t_0 \in T^c$
$T^d$	L'ensemble de temps discret $T^d = \{k = 0, 1, 2, \dots\}$
$T_0^d$	L'ensemble de temps discret $T_0^d = \{k_0, k_0 + 1, \dots\}$ où $k_0 \in T^d$
$T$	Symbole représentant soit $T^c$ soit $T^d$

$T_o$	Symbole représentant soit $T_o^c$ soit $T_o^d$
$D$	L'opérateur de dérivation
$\Delta$	L'opérateur de différence
$\$$	Symbole représentant soit $D$ soit $\Delta$ .

C H A P I T R E I



## SYSTEMES COMPLEXES

### DEFINITIONS DE STABILITE - METHODES D'ANALYSE

---

#### I.1 - INTRODUCTION

#### I.2 - LES SYSTEMES COMPLEXES

#### I.3 - DESCRIPTION DES SYSTEMES ETUDIES

I.3.1- Systèmes dynamiques continus

I.3.2- Systèmes dynamiques discrets

I.3.3- Formalisation unique adoptée dans la mémoire pour les systèmes dynamiques continus et discrets.

I.3.4- Systèmes interconnectés.

#### I.4 - LE PROBLEME DE LA STABILITE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

I.4.1- Définitions relatives aux propriétés de stabilité de l'état d'équilibre  $X = 0$

I.4.1.a - Définitions de stabilité par rapport à toutes les composantes du vecteur d'état.

I.4.1.b - Définitions de stabilité par rapport à une partie des composantes du vecteur d'état.

I.4.2 - Définitions des domaines de stabilité

I.4.3 - Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes dynamiques

1.4.3.a - Fonctions scalaires définies ou semi-définies positives.

I.4.3.b - La deuxième méthode de Lyapunov.

I.4.3.c - La méthode de Corduneanu.

I.4.3.d - La méthode de Hatvanyi.





## I.1 - INTRODUCTION

Ce premier chapitre est consacré d'une part à la description des systèmes étudiés et d'autre part au rappel de certaines notions fondamentales et de quelques méthodes plus ou moins classiques relatives à l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques.

Dans une première partie, nous précisons le sens que nous donnons à la notion de système complexe dans ce mémoire. Cela nous permet de clarifier les différences conceptuelles entre les termes de système réel ou processus et son modèle abstrait mathématique. Dans le même contexte, nous précisons le sens des termes "système complexe", "système à grande échelle" et "système interconnecté" qui sont parfois employés indifféremment.

Dans cette première partie, nous soulignons aussi l'importance de l'étude des modèles mathématiques complexes qui sont d'ailleurs le sujet de notre mémoire.

La deuxième partie est relative au problème de stabilité des systèmes dynamiques. D'abord il est rappelé et précisé le sens dans lequel seront utilisés les termes relatifs aux différents types de stabilité, ceci nous paraissant nécessaire vu le grand nombre de notions de stabilité émaillant la littérature sur le sujet.

Enfin, nous rappelons trois méthodes d'étude de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires basées sur l'utilisation d'une fonction scalaire définie positive. En particulier, après avoir rappelé la méthode directe de Lyapunov [41], nous présentons une approche due à C. Corduneanu [15] qui montre que les théorèmes de Lyapunov peuvent se ramener à une forme simple d'un principe de comparaison plus général. La troisième méthode qui généralise l'approche de Corduneanu est à la base d'un théorème présenté récemment par L. Hatvanyi [31] relatif au principe de comparaison associé à la notion de stabilité partielle.

La présentation de ces trois méthodes, dont il sera fait souvent appel au cours du développement de notre étude, a pour but de faire apparaître les relations entre nos résultats basés sur l'utilisation des fonctions vectorielles de classe  $\mathcal{U}$  avec ceux obtenus par l'utilisation de fonctions scalaires définies positives.

## I.2 - LES SYSTEMES COMPLEXES

Lorsque nous parlons de système nous entendons "un ensemble d'objets avec leurs relations". Nous faisons la distinction entre les systèmes réels et les systèmes abstraits, ces derniers étant supposés décrire des systèmes réels. Dans notre mémoire nous étudions une classe de systèmes mathématiques sous forme d'équations d'état.

Un système mathématique est un ensemble de relations entre les attributs mesurables qui caractérisent les objets ou parties d'un système réel [71]. Ainsi, dans notre cas ce sont les composantes du vecteur d'état, du vecteur d'entrée ou de commande et du vecteur de sortie qui en constituent les attributs.

Selon H.H. Simon [66] "par systèmes complexes on entend ceux qui sont composés d'un grand nombre de parties interconnectées d'une façon non simple"; donc un système complexe est à la fois "système à grande échelle" et "système interconnecté". Cependant dans notre mémoire nous ferons la distinction entre les trois termes "système complexe", "système à grande échelle" et "système interconnecté".

Nous attribuons à un système le qualificatif "complexe" pour exprimer la difficulté soit à bien décrire, soit à étudier certains de ces aspects fonctionnels; difficultés dues à sa structure, c'est-à-dire à la forme des relations entre ses différentes parties ou ses attributs.

Par "systèmes à grande échelle" nous entendons les systèmes dont le nombre d'attributs qui les caractérisent est relativement élevé. Dans le cas des systèmes étudiés dans ce mémoire ce nombre sera la dimension du vecteur d'état.

Par "systèmes interconnectés" nous entendons ceux qui sont composés de deux ou plusieurs sous-systèmes interagissants entre eux; cette décomposition du système en sous-systèmes pouvant être guidée soit par des considérations physiques reflétant une décomposition spatiale ou fonctionnelle du système réel, soit par des considérations purement mathématiques.

Il est évident qu'en général la complexité du système croît avec sa dimension et surtout avec le nombre de variables interconnectées. Ceci vient expliquer pourquoi les qualificatifs "complexe", "à grande échelle" et "interconnecté" sont souvent employés indifféremment.

Lorsqu'on envisage l'étude du comportement d'un système réel à partir de l'analyse d'un modèle mathématique on peut être confronté au dilemme suivant : précision de la "description" et réalisabilité de l'étude de ce modèle.

A ses tout débuts, l'automatique théorique s'est intéressée au développement des méthodes pour l'étude des modèles mathématiques relativement simples. Ces méthodes qui permettent une étude détaillée et parfois exhaustive du modèle mathématique se révèlent souvent impuissantes. Cela arrive lorsqu'il s'agit de systèmes réels complexes parce que l'étude détaillée du modèle ne peut pas compenser les incertitudes ou approximations faites au niveau de la description du modèle réel. Ainsi, dès le début des années 60 les automaticiens se sont orientés vers l'approche "systèmes complexes".

Cette orientation était encouragée par les progrès de la technologie informatique qui offrait de nouveaux moyens pour l'étude des modèles complexes. Néanmoins, reste à notre sens un besoin en méthodologie et c'est une des tentatives de ce mémoire que d'apporter, principalement dans le domaine d'analyse de la stabilité, une contribution à l'avancement de ce problème.

### 1.3 - DESCRIPTION DES SYSTEMES ETUDIES

Dans ce mémoire, notre étude se limite à une classe de systèmes dynamiques de dimension finie comme définies dans la théorie des systèmes mathématiques (R. E. Kalman et al. [34]).

A la notion de système dynamique est associée un ensemble ordonné  $T$  de temps. Si  $T$  est l'ensemble  $T^c = [0, \infty)$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels non négatifs, alors le système dynamique est dit continu. Si  $T$  est l'ensemble des entiers non négatifs que nous désignons par  $T^d$ ,  $T^d = \{0, 1, 2, \dots\}$ , alors le système dynamique est dit discret. Dans notre étude nous considérons les deux cas.

### 1.3.1 - Systèmes dynamiques continus

Les systèmes dynamiques continus qui font l'objet de notre étude sont décrits par l'équation différentielle :

$$D X(t) = F \left[ t, X(t), U(t) \right] \quad (1.1)$$

où  $D$  est l'opérateur de dérivation.

La fonction  $F [t, X(t), U(t)]$  est supposée définie pour tout  $(t, X, U) \in T^c \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ , où  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{U}$  sont respectivement des sous ensembles connexes des espaces réels  $R^n$  et  $R^m$ . Elle prend ses valeurs dans  $R^n$ .

La fonction  $U(t)$  dite *entrée* du système appartient à une classe  $\Omega^c$  des fonctions  $U : T^c \rightarrow \mathcal{U}$  qui sont continues par morceaux pour tout  $t \in T^c$ . Nous désignerons par  $U [t, t']$  la restriction de la fonction  $U(t)$  dans l'intervalle  $[t, t']$ ,  $t \leq t'$ . Dans notre étude l'entrée  $U(t)$  représentera la commande du système et  $\Omega^c$  sera dit ensemble de commandes admissibles.

Dans tout ce qui suit nous supposons que la fonction  $F$  est suffisamment lisse pour qu'à toute condition initiale  $(t_0, X_0) \in T^c \times \mathcal{X}_0$ ,  $\mathcal{X}_0$  étant un sous ensemble connexe de  $\mathcal{X}$ , toute fonction  $U(t) \in \Omega^c$  et tout  $t \in T_0^c$ , où  $T_0^c = [t_0, \infty)$  corresponde une solution  $X(t; t_0, X_0)$  unique  $\forall t \in T_0^c$ .

On sait que pour un tel système il existe une fonction  $\Phi : T^c \times T^c \times \mathcal{X}_0 \times \Omega^c \rightarrow \mathcal{X}$ , dite *fonction de transition* du système, telle que pour tout  $(t_0, X_0) \in T^c \times \mathcal{X}_0$  et toute fonction  $U(t) \in \Omega^c$

$$1. \quad X(t_0) = \Phi(t_0; t_0, X_0, U_{[t_0, t_0]}) = X_0$$

$$2. \quad X(t) = \Phi(t; t_0, X_0, U_{[t_0, t]}) \quad \forall t \in T_0^c$$

$$3. \quad \Phi(t_2; t_0, X_0, U_{[t_0, t_2]}) = \Phi(t_2; t_1, \Phi(t_1; t_0, X_0, U_{[t_0, t_1]}), U_{[t_1, t_2]}) \quad \forall (t_0, t_1, t_2) \in T^c \times T^c \times T^c, \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2$$

4. Si pour deux  $U'$  et  $U$ ,  $U' \in \Omega^c$  et  $U \in \Omega^c$ , on a

$$U'_{[t_0, t_1]} = U_{[t_0, t_1]}$$

alors

$$\Phi(t_1; t_0, X_0, U'_{[t_0, t_1]}) = \Phi(t_1; t_0, X_0, U_{[t_0, t_1]})$$

Le vecteur  $X(t)$  est dit *état* du système à l'instant  $t$  et dans le cas que nous étudions représente aussi sa sortie à l'instant  $t$ .

Il faut souligner le fait que les deux façons de décrire le système, soit par l'équation différentielle (I.1), soit par la relation

$$X(t; t_0, X_0) = \Phi(t; t_0, X_0, U_{[t_0, t]}) \quad (I.2)$$

sont équivalentes. Autrement dit, chacune des fonctions  $F$  et  $\Phi$  contient toutes les informations nécessaires pour définir le comportement du système.

Notons que dans notre étude toutes les variables et fonctions ne dépendent pas de facteurs aléatoires. Ainsi, compte tenu aussi des propriétés de la fonction  $\Phi$ , les systèmes étudiés appartiennent à la classe des systèmes *déterministes et non anticipatifs*.

Dans un premier temps, nous nous préoccuperons plus spécifiquement du problème de la stabilité, c'est-à-dire que nous considérerons le système (I.1) avec une entrée (commande)  $U(t)$  donnée. Moyennant quoi, la représentation adoptée par la suite sera :

$$DX(t) = F [ t, X(t) ] , \quad X(t_0) = X_0 \quad (I.3)$$

ou

$$X(t) = \Phi(t ; t_0, X_0) \quad (I.4)$$

Enfin, tout au long de notre étude, l'état  $X = 0$  sera supposé être un état d'équilibre. Ceci est équivalent à :

$$F(t, 0) = 0$$

ou à :

$$\Phi(t, t_0, ) = 0$$

$$\forall t_0 \in T^c \text{ et } t \in T_0^c$$

### 1.3.2. - Systèmes dynamiques discrets

Parmi les systèmes dynamiques discrets, dans notre étude, nous ne retiendrons que ceux qui sont décrits par une équation aux différences du type :

$$\Delta X(k) = F [ k, X(k), U(k) ] \quad (I.5)$$

où  $\Delta X(k) \triangleq X(k+1) - X(k)$  appartenant à  $T^d$ .

La fonction  $F : T^d \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$  est supposée continue ou continue par morceaux par rapport à  $X$  et  $U$  pour tout  $k \in T^d$ , de sorte que pour toute condition initiale  $(k_0, X_0) \in T^d \times \mathcal{X}_0$  et toute entrée  $U(k)$  appartenant à l'ensemble  $\Omega^d$  de suites bornées, la solution  $X(k; k_0, X_0)$  de (I.5) existe et est unique pour tout  $k \in T_0^d$  où  $T_0^d = \{ k_0, k_0 + 1, \dots \}$

Tout ce qui est dit pour le système dynamique continu (I.1) se transpose au cas du système dynamique discret (I.5). Ainsi, il existe une fonction de transition

$$\Phi(k; k_0, X_0, U_{[k_0, k]}) , \quad \Phi : T^d \times T^d \times \mathcal{X}_0 \times \Omega^d \rightarrow \mathcal{X}$$

qui a les mêmes propriétés que dans le cas du système dynamique continu.

Par la suite, nous ferons souvent appel à la description équivalente,

$$X(k; k_0, X_0) = \Phi(k, k_0, X_0, U_{[k_0, k]}) \text{ du système (I.5)}$$

Dans le cas où l'entrée  $U$  est nulle ou fonction donnée de l'état  $X(k)$  et / ou de la variable de temps  $k$  nous adopterons la notation équivalente :

$$\Delta X(k) = F(k, X(k)) \quad , \quad X_0 = X(k_0) \quad (\text{I.6})$$

ou

$$X(k) = \bar{\Phi}(k; k_0, X_0)$$

Dans ce cas aussi, l'origine  $X = 0$  sera supposée être un état d'équilibre, ce qui est équivalent à la relation :

$$F(k, 0, 0) = 0 \quad \forall k \in T^d$$

### I. 3.3 - Formalisation unique adoptée dans le mémoire pour les systèmes dynamiques continus ou discrets

Un nombre important de résultats de notre étude ont une forme analogue pour les deux cas : systèmes continus, systèmes discrets. Il nous paraît donc naturel d'unifier la représentation de ces deux classes. Pour cela nous adoptons le symbole  $\mathcal{D}$  et le système dynamique prend la forme suivante :

$$\mathcal{D} X(\tau) = F[\tau, X(\tau), U(\tau)] \quad (\text{I.7})$$

Le symbole  $\mathcal{D}$  représente l'opérateur  $D$  ou  $\Delta$  selon que l'on s'intéresse à un système continu ou discret. D'une façon analogue la variable de temps  $\tau$  appartient à l'ensemble  $T^c$  s'il s'agit d'un système continu, ou à  $T^d$  s'il s'agit d'un système discret. Nous désignons par  $T$  l'ensemble ordonné du temps :  $\tau \in T$ .

Nous ferons aussi appel à la représentation du système (I.7) par sa fonction de transition :

$$X(\tau; \tau_0, X_0) = \bar{\Phi}(\tau; \tau_0, X_0, U_{[\tau_0, \tau]}) \quad (\text{I.8})$$



Pour une classe importante de processus réels leurs caractéristiques sont supposées invariantes dans le temps. Par conséquent, les relations mathématiques qui décrivent leur comportement ne changent pas avec le temps et l'équation (I.7) prend la forme suivante :

$$\mathfrak{D}X(\tau) = F [ X(\tau), U(\tau) ] \quad (I.9)$$

La fonction de transition de cette classe de systèmes dynamiques, dits *systèmes dynamiques invariants*, possède une propriété supplémentaire : Pour tout couple  $(\tau_0, \tau'_0) \in T \times T$  et tout couple de commandes  $(U, U') \in \Omega \times \Omega$  telles que  $U(\tau) = U'(\tau + \tau'_0 - \tau_0) \quad \forall \tau \geq \tau_0$ , la relation

$$\Phi(\tau + \tau'_0 - \tau_0; \tau'_0, X_0, U'[\tau_0, \tau + \tau'_0 - \tau_0]) = \Phi(\tau; \tau_0, X_0, U[\tau_0, \tau])$$

est vérifiée pour tout  $X_0 \in \mathcal{X}_0$  et  $\tau \in T, \tau \geq \tau_0$ .

Si de plus le système (I.9) est *libre*, c'est-à-dire  $U(\tau) \equiv 0$ , alors le système dynamique est dit *autonome*, et prend la forme suivante :

$$\mathfrak{D}X(\tau) = F [ X(\tau) ]$$

#### I.3.4 - Systèmes interconnectés

Une classe particulière des systèmes dynamiques complexes est celle des *systèmes interconnectés* qui, comme nous l'avons dit plus haut, sont composés par un certain nombre de sous systèmes qui réagissent entre eux. Cette décomposition en sous systèmes peut être inspirée soit par la nature même du système physique étudié (p. ex. réseau de production et de transfert de l'énergie électrique) soit par une étude mathématique en vue de simplification de l'analyse.

Dans ce deuxième cas, le mode de décomposition adoptée dépend de la méthode choisie pour l'analyse. Nous adopterons deux modes de décomposition. Le premier consiste à faire apparaître explicitement les *sous-systèmes isolés*, c'est-à-dire lorsqu'ils sont découplés, et les *termes d'interconnexion* qui décrivent l'action

des autres sous systèmes sur chaque sous système isolé. Dans cette classe de systèmes appartiennent les systèmes complexes représentés sous la forme suivante :

$$Si : \mathcal{D}X_i(\tau) = F_i [\tau, X_i(\tau)] + G_i[\tau, X(\tau)] \quad (I.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, s$$

Dans (I.10),  $X_i \in \mathcal{X} \cap R^{n_i}$  représente le vecteur d'état du sous-système  $S_i$  de dimension  $n_i$  où  $R^n = R^{n_1} \times R^{n_2} \times \dots \times R^{n_s}$ . La fonction  $F_i : T \times \mathcal{X} \cap R^{n_i} \rightarrow R^{n_i}$  décrit le comportement du sous-système  $S_i$  lorsqu'il est découplé, c'est-à-dire lorsque  $G_i \equiv 0$  :

$$\mathcal{D}X_i(\tau) = F_i [\tau, X_i(\tau)]$$

La fonction  $G_i : T \times \mathcal{X} \rightarrow R^{n_i}$  représente l'action des autres sous-systèmes  $S_j$  sur le sous système  $S_i$ . Nous n'excluons pas le cas où  $G_i$  dépend aussi de  $X_i$ , ce qui peut correspondre à une contre réaction du sous-système sur lui-même.

Le deuxième mode de décomposition consiste à mettre le système sous un schéma hiérarchique où chaque sous-système est découplé des sous-systèmes qui le suivent. Cette classe de systèmes complexes est représentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}X_1(\tau) &= F_1[\tau, X_1(\tau)] \\ \mathcal{D}X_2(\tau) &= F_2[\tau, X_2(\tau)] \\ &\vdots \\ \mathcal{D}X_s(\tau) &= F_s[\tau, X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_s(\tau)] \end{aligned} \quad (I.11)$$

#### I.4 - LE PROBLEME DE LA STABILITE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

Il existe de nombreuses définitions et concepts différents concernant la stabilité. Il n'est pas dans notre intention d'en faire ici une liste exhaustive mais plutôt de présenter les définitions et méthodes qui nous seront utiles dans la suite du mémoire.

Tout d'abord disons que notre étude est restreinte à l'étude des propriétés de stabilité d'un état d'équilibre qui sans perte de généralité sera l'origine.

Dans une première partie de cette section, nous présentons les différentes notions de stabilité auxquelles nous nous référerons par la suite. Puis dans une deuxième partie, nous nous proposons de rappeler les principales méthodes d'étude de stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires basées sur l'utilisation d'une fonction scalaire définie positive ; méthodes qui feront l'objet d'un développement dans ce mémoire.

#### 1.4.1 - Définitions relatives aux propriétés de stabilité de l'état d'équilibre $X = 0$

Dans le cas général la notion de stabilité relative à un système dynamique est liée à la topologie de l'espace où ce système est défini. Les notions de stabilité que nous allons adopter dans ce mémoire seront liées à la norme, somme des valeurs absolues  $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ ,  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , que nous désignerons par  $\|X\|$  (\*).

##### 1.4.1.a - Définitions de stabilité par rapport à toutes les composantes du vecteur d'état [30].

Définition 1.1.

L'état d'équilibre  $X = 0$  du système dynamique (I.10) est dite.

1. *Stable selon Lyapunov* si pour tout nombre réel positif  $\varepsilon$  et tout  $\tau_0 \in T$ , il existe un nombre réel positif  $\delta(\tau_0, \varepsilon)$ , dépendant en général de  $\tau_0$  et de  $\varepsilon$ , tel que l'inégalité  $\|X_0\| < \delta$  implique que  $\|X(\tau; \tau_0, X_0)\| < \varepsilon$  pour tout  $\tau \in T_0$ .

2. *Uniformément stable* si le nombre  $\delta$  de la définition ci-dessus ne dépend pas de  $\tau_0$ .

3. *Attractif* si pour tout  $\tau_0 \in T$  il existe un nombre réel positif  $\eta(\tau_0)$ , dépendant en général de  $\tau_0$ , tel que de l'inégalité  $\|X_0\| < \eta$  il suit que  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|X(\tau; \tau_0, X_0)\| = 0$

---

(\*) Tout au long de notre étude, s'il n'est pas indiqué autrement,  $\|\cdot\|$  représentera la norme "somme des valeurs absolues".

De manière équivalente :

Pour tout  $\tau_0 \in T$  il existe un nombre réel positif  $\eta(\tau_0)$  tel que pour tout nombre réel positif  $\varepsilon$  il existe un  $\tau'(\tau_0, \varepsilon)$  tel que si  $\|X_0\| < \eta$  alors  $\|X(\tau; \tau_0, X_0)\| < \varepsilon$  pour tout  $\tau \geq \tau' + \tau_0$ ,  $\tau \in T$ .

4. *Uniformément attractif* si le nombre  $\eta$  de la définition ci-dessus ne dépend pas de  $\tau_0$  et la convergence de  $\|X(\tau; \tau_0, X_0)\|$  est uniforme par rapport à  $\tau_0$ .

Ceci peut s'énoncer de la façon suivante :

Il existe un nombre réel positif  $\eta$  tel que pour tout nombre réel positif  $\varepsilon$  il existe un  $\tau'(\varepsilon) \in T$  tel que si  $\|X_0\| < \eta$  alors  $\|X(\tau; \tau_0, X_0)\| < \varepsilon$   $\forall \tau_0 \in T$  et  $\tau \geq \tau' + \tau_0$ ,  $\tau \in T$ .

5. *Asymptotiquement stable* s'il est à la fois stable et attractif.

6. *Uniformément asymptotiquement stable* s'il est à la fois uniformément stable et uniformément attractif.

7. *Exponentiellement stable* s'il existe trois nombres réels positifs  $a$ ,  $b$  et  $\eta$  tels que :

$$\|X(\tau; \tau_0, X_0)\| \leq a \cdot \|X_0\| \cdot \exp[-b(\tau - \tau_0)]$$

pour tout  $X_0 \in \mathcal{X}_0$  :  $\|X_0\| < \eta$ ,  $\tau_0 \in T$  et  $\tau \in T_0$ .

8. *Instable* s'il n'est pas stable.

#### 1.4.1.b - Définitions de stabilité par rapport à une partie des composantes du vecteur d'état [49], [56].

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les propriétés de l'équilibre  $X = 0$  au sens des définitions données précédemment. Comme un grand nombre de résultats qui seront établis par la suite sont basés sur une analyse de la *stabilité partielle* [49] d'un système auxiliaire dit système de comparaison, il nous est donc apparu nécessaire de rappeler les définitions de ces notions.

Soit un système dynamique décrit par l'équation

$$\mathcal{D}Z(\tau) = H[\tau, Z(\tau)] \quad (I.12)$$

où  $H(\tau, 0) \equiv 0$ .

Supposons que le vecteur d'état  $Z \in \mathbb{R}^{n+s}$  soit décomposé en deux sous vecteurs  $Y \in \mathbb{R}^n$  et  $W \in \mathbb{R}^s$ ,  $Z = [Y^T, W^T]^T$  et soit  $Z(\tau; \tau_0, Z_0) = [Y(\tau; \tau_0, Z_0)^T, W(\tau; \tau_0, Z_0)^T]^T$  la solution générale de (I.12).

Si l'on ne s'intéresse qu'au comportement de la composante  $W$  du vecteur d'état, alors les définitions présentées dans I.4.1a paraissent très restrictives. Pour cette raison ont été introduites les notions de stabilité partielle ou  $W$ -stabilité de l'état d'équilibre  $Y = 0, W = 0$ .

Ainsi, l'état d'équilibre  $Y = 0, W = 0$  de (I.12) est dite  $W$ -stable selon Lyapunov, si pour tout nombre réel positif  $\varepsilon$  et tout  $\tau_0 \in T$  il existe un nombre réel positif  $\delta(\tau_0, \varepsilon)$ , dépendant en général de  $\tau_0$  et de  $\varepsilon$ , tel que de l'inégalité  $\|Z_0\| < \delta$  il suit que  $\|W(\tau; \tau_0, Z_0)\| < \varepsilon$  pour tout  $\tau \in T_0$ .

Cette définition est tout à fait analogue à celle de la stabilité selon Lyapunov donnée précédemment. D'une façon analogue, en remplaçant  $X_0$  par  $Z_0$  et  $X(\tau, \tau_0, X_0)$  par  $W(\tau, \tau_0, Z_0)$  dans les définitions correspondantes données dans I.4.1a on obtient les définitions des notions de  $W$ -stabilité uniforme,  $W$ -attractivité,  $W$ -attractivité uniforme,  $W$ -stabilité asymptotique,  $W$ -stabilité asymptotique uniforme et  $W$ -stabilité exponentielle.

Comme il est souligné par Hahn [30], les notions de stabilité partielle sont particulièrement importantes pour les systèmes dynamiques (I.12) qui sont décomposables en deux sous-systèmes du type :

$$\mathcal{D}Y(\tau) = F[\tau, Y(\tau)]$$

$$\mathcal{D}W(\tau) = H[\tau, Y(\tau), W(\tau)]$$

C'est justement ce cas qui nous intéressera dans l'étude du système de comparaison.

### I.4.2 - Définitions des domaines de stabilité

Nous présentons les définitions des concepts de domaine de stabilité dans le cas général de la stabilité partielle. Ces domaines que nous désignerons par  $\mathcal{R}(Z)$  sont des sous-ensembles connexes appartenant à  $\mathbb{R}^{n+s}$  et  $\mathcal{R}(Z) \cap \{0\} \neq \emptyset$ .

*Définition 1.2.*

$\mathcal{R}(Z)$  est un domaine de  $W$  - attraction de l'équilibre  $Z = 0$  de (I.12) si pour tout nombre réel positif  $\varepsilon$  et tout  $\tau_0 \in T$  il existe un  $\tau'(\tau_0, \varepsilon) \in T$  tel que  $\|W(\tau; \tau_0, z_0)\| < \varepsilon$  pour tout  $z_0 \in \mathcal{R}(Z)$  et  $\tau \geq \tau' + \tau_0$ .

*Définition 1.3.*

$\mathcal{R}(Z)$  est un domaine de  $W$  - attraction uniforme de l'équilibre  $Z = 0$  de (I.12), si pour tout nombre réel positif  $\varepsilon$  il existe un  $\tau'(\varepsilon) \in T$  tel que  $\|W(\tau; \tau_0, z_0)\| < \varepsilon$  pour tout  $z_0 \in \mathcal{R}(Z)$ ,  $\tau_0 \in T$  et  $\tau \geq \tau' + \tau_0$ .

*Définition 1.4*

$\mathcal{R}(Z)$  est un domaine de  $W$  - stabilité asymptotique s'il est un domaine de  $W$  - attraction et l'équilibre  $Z = 0$  est  $W$  - stable selon Lyapunov.

*Définition 1.5.*

$\mathcal{R}(Z)$  est un domaine de  $W$  - stabilité asymptotique uniforme s'il est un domaine de  $W$  - attraction uniforme et l'équilibre est uniformément  $W$  - stable.

La définition suivante relative à la borne des solutions du système (I.12) est étroitement liée aux définitions ci-dessus.

*Définition 1.6*

$\mathcal{R}(Z)$  est un domaine des trajectoires  $W$  - bornées si pour tout  $\tau_0 \in T$  et  $z_0 \in \mathcal{R}(Z)$  il existe un nombre réel positif  $\delta(\tau_0, z_0)$  tel que :

$$\sup \| W(\tau; \tau_0, z_0) \| \leq \delta(\tau_0, z_0) \quad \text{pour } \tau \in T_0.$$

1.4.3 - Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes dynamiques

Ici encore, il nous paraît difficile d'établir une classification exhaustive des différentes méthodes d'analyse de stabilité des systèmes dynamiques non linéaires et on peut dire que, contrairement au cas des systèmes linéaires, il n'existe pas d'approche systématique suffisamment générale pour pouvoir englober toute étude de stabilité dans le cas des systèmes non-linéaires. Les différentes méthodes obtenues se particularisent non seulement en fonction de la notion de stabilité retenue mais parfois, et ceci est plus gênant, en fonction de la forme même du système étudié. Néanmoins, essayant d'établir une classification, trois approches nous paraissent se dégager du fait de leur relative généralité : l'approche fréquentielle, la méthode de linéarisation et les méthodes du type Lyapunov.

L'approche fréquentielle initialisée dans le domaine des systèmes non linéaires par les travaux de Popov [52] fait l'hypothèse d'une classe particulière de systèmes : à non-linéarité comprise dans un secteur avec argument combinaison linéaire de l'état. Elle s'intéresse à l'analyse de la stabilité absolue, c'est-à-dire la stabilité de l'état d'équilibre pour toute variation de la non-linéarité à l'intérieur du secteur mentionné ci-dessus, [32], [39].

L'approche par linéarisation qui est applicable lorsqu'il ne s'agit pas de cas critiques, ne permet que d'étudier la stabilité locale d'un état d'équilibre.

La deuxième méthode de Lyapunov est certainement celle qui a soulevé le plus grand nombre de développements. Basée sur l'utilisation de fonctions auxiliaires possédant certaines propriétés de positivité, on peut dire qu'elle tendait à conclure sur la stabilité d'un état d'équilibre par une étude des variations d'une distance généralisée entre cet état d'équilibre et les états du système le long de ses trajectoires. Relativement récemment, par les travaux de Corduneanu [15], il a été montré que cette méthode n'est qu'un cas particulier d'un principe plus général, dit principe de comparaison. En règle générale, toutes les méthodes qui découlent de cette approche sont basées sur la transformation du vecteur d'état par une fonction ayant certaines propriétés de positivité particulières.

Par la suite, dans une première partie nous rappelons les définitions des fonctions scalaires définies positives. Puis, nous présentons les trois méthodes de comparaison basées sur les travaux de Lyapunov, de Corduneanu et de Hatvanyi [31]. Cette dernière méthode qui généralise les deux premières, sera l'objet d'une extension que nous développons dans le chapitre II.

#### 1.4.3.a - Fonctions scalaires définies ou semi-définies positives

Nous rappelons ici les définitions des fonctions scalaires définies ou semi-définies positives  $v(\tau, X)$ ,  $v: T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$   
 $\mathcal{X} \cap \{0\} \neq \emptyset$  qui sont à la base des méthodes de comparaison que nous allons présenter dans les paragraphes suivants.

##### *Définition 1.7.*

La fonction  $v(X)$ ,  $v: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite *semi-définie positive* dans  $\mathcal{X}$  si  $v(\tau, X) \geq 0$  pour tout  $(\tau, X) \in T \times \mathcal{X}$  et  $v(\tau, 0) = 0 \quad \forall \tau \in T$ .

##### *Définition 1.8*

La fonction  $v(X)$ ,  $v: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite *définie positive* dans  $\mathcal{X}$ , si  $v(0) = 0$  et  $v(X) > 0 \quad \forall X \in \mathcal{X} - \{0\}$ .



*Définition 1.9.*

La fonction  $v(\tau, X)$ ,  $v: T \times \mathcal{X} \rightarrow R_+$  est dite définie positive dans  $\mathcal{X}$  si  $v(\tau, 0) = 0 \quad \forall \tau \in T$  et il existe une fonction  $v^*(X)$ ,  $v: \mathcal{X} \rightarrow R_+$  définie positive dans  $\mathcal{X}$  telle que

$$v^*(X) \leq v(\tau, X) \quad \forall (\tau, X) \in T \times \mathcal{X}.$$

Autres définitions sont également nécessaires pour particulariser certains types de stabilité .

*Définition 1.10*

La fonction  $v(\tau, X)$ ,  $v: T \times \mathcal{X} \rightarrow R_+$  est dite admettre une borne supérieure infiniment petites, s'il existe une fonction  $v^*(X)$   $v^*: \mathcal{X} \rightarrow R_+$  définie positive et continue dans  $\mathcal{X}$ , telle que

$$v(\tau, X) \leq v^*(X).$$

*Définition 1.11*

La fonction  $v(\tau, X)$ ,  $v: T \times R^n \rightarrow R_+$  est dite radialement non bornée si pour tout nombre réel positif  $a$  il existe un nombre réel positif  $b$  tel que  $\|X\| > b$  implique  $v(\tau, X) > a \quad \forall \tau \in T$ .

1.4.3.b - La deuxième méthode de Lyapunov

La méthode consiste à déterminer les propriétés de stabilité de l'état d'équilibre  $X = 0$  à partir d'une étude du signe de "l'accroissement" d'une fonction scalaire définie positive le long des trajectoires du système étudié. Cette méthode établie initialement pour les systèmes dynamiques continus [41] a été étendue aussi dans le cas des systèmes discrets [29] , [33].

Soit une fonction  $v(t, X)$ ,  $v: T^c \times \mathcal{X} \rightarrow R_+$  continue et définie positive dans  $\mathcal{X}$ . L' "accroissement"  $Dv(t, X)$ <sub>(I.13)</sub> de la fonction  $v(t, X)$  le long des trajectoires du système dynamique continu (I.3) est défini par :

$$Dv(t, X)_{(I.3)} = \lim_{\delta t \rightarrow 0_+} \sup \frac{v[t + \delta t, X(t + \delta t)] - v[t, X(t)]}{\delta t}$$

Si la fonction  $v(t, X)$  est dérivable par rapport à  $t$  et  $X$  pour tout  $(t, X) \in T^c \times \mathcal{X}$ , alors on obtient :

$$D v(t, X)_{(I.3)} = \frac{\partial v(t, X)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial v(t, X)}{\partial X} \right]^T \cdot F(t, X)$$

Pour le système dynamique discret (I.6) "l'accroissement"  $\Delta v(k, X)_{(I.6)}$  de la fonction  $v(k, X)$ ,  $v : T^d \times \mathcal{X} \rightarrow R_+$  le long des trajectoires du système (I.6) est défini par :

$$\Delta v(k, X)_{(I.6)} = v[k, F(k, X) + X] - v(k, X)$$

Représentons les systèmes (I.3) et (I.6) sous leur formalisation unique :

$$\mathcal{D}X(\tau) = F[\tau, X(\tau)] \quad (I.13)$$

où  $X = 0$  est un état d'équilibre. Alors :

Théorème 1.1.

S'il existe une fonction scalaire  $v : T \times \mathcal{X} \rightarrow R_+$  définie positive dans un voisinage  $B_\sigma(X)$  (\*) de l'origine telle que  $- \mathcal{D}v(\tau, X)_{(I.13)}$  soit semi-définie positive dans  $B_\sigma(X)$  alors l'état d'équilibre  $X = 0$  du système (I.13) est stable selon Lyapunov.

Théorème 1.2.

S'il existe une fonction scalaire  $v : T \times \mathcal{X} \rightarrow R_+$  définie positive et admettant une borne supérieure infiniment petite dans un voisinage  $B_\sigma(X)$  de l'origine telle que  $- \mathcal{D}v(\tau, X)_{(I.13)}$  soit semi-définie positive dans  $B_\sigma(X)$  alors l'état d'équilibre  $X=0$  de (I.13) est uniformément stable.

Théorème 1.3

S'il existe une fonction scalaire  $v : T \times \mathcal{X} \rightarrow R_+$  définie positive et admettant une borne supérieure infiniment petite dans un voisinage  $B_\sigma(X)$  de l'origine, telle que  $- \mathcal{D}v(\tau, X)_{(I.13)}$  soit définie positive dans  $B_\sigma(X)$ , alors l'état d'équilibre  $X = 0$  de (I.13) est uniformément asymptotiquement stable.

(\*) Par  $B_\sigma(X)$  nous désignons un ensemble  $\{ X \in R^n = \|X\| < \sigma \}$  où  $\sigma$  est un nombre réel positif.

Si en plus, le système dynamique est défini dans  $T \times \mathbb{R}^n$ , les hypothèses ci-dessus sont vérifiées pour tout  $(\tau, X) \in T \times \mathbb{R}^n$  et la fonction  $v$  est radialement non bornée, alors l'état d'équilibre  $X = 0$  de (I.13) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Remarquons qu'une fonction  $v : T \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie positive dans  $\mathbb{X}$  représente la distance paramétrique  $d_\tau(X, 0)$  entre le point  $X$  et l'origine dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance paramétrique [69] :

$$d_\tau(X, X') \triangleq \begin{cases} v(\tau, X) + v(\tau, X') & \text{si } X \neq X' \\ 0 & \text{si } X = X' \end{cases}$$

Ainsi, d'après les théorèmes de Lyapunov, on peut conclure sur la stabilité selon Lyapunov ou la stabilité asymptotique si on peut trouver une distance paramétrique qui décroît au sens large ou au sens strict le long des trajectoires du système (I.13), ce qui est en général assez restrictif. Cet inconvénient a été particulièrement levé par :

#### I.4.3.c - La méthode de Corduneanu

Cette méthode tire son origine d'un théorème de Corduneanu [15] relatif à la stabilité des systèmes dynamiques continus. Ici, nous présentons cette méthode sous la forme d'un théorème relatif à la stabilité du système général (I.13).

#### Théorème I.4.

Soit une fonction  $v(\tau, X)$ ,  $v : T \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie positive dans  $\mathbb{X}$  et vérifiant pour tout  $(\tau, X) \in T \times \mathbb{X}$  l'inégalité :

$$\mathcal{D}v(\tau, X) \underset{(I.13)}{\leq} h[\tau, v(\tau, X)] \quad (I.14)$$

Soit aussi le système de comparaison :

$$\mathcal{D}w(\tau) = h[\tau, w(\tau)] \quad (I.15)$$

associé à cette inégalité, pour lequel on suppose l'existence et

l'unicité des solutions  $w(\tau; \tau_0, w_0)$  pour toute condition initiale  $(\tau_0, w_0) \in T \times B_\sigma(w) \cap R_+$ , que  $w = 0$  est une solution d'équilibre :  $h(\tau, 0) \equiv 0$  et que dans le cas discret la fonction  $h(k, w) + w$  soit non décroissante par rapport à  $w$ .

a) Si la solution d'équilibre  $w = 0$  du système de comparaison (I.15) est stable selon Lyapunov (uniformément stable), alors l'état d'équilibre  $X = 0$  de (I.13) est aussi stable selon Lyapunov (uniformément stable si en plus  $v$  admet une borne supérieure infiniment petite).

b) Si la solution d'équilibre  $w = 0$  du système de comparaison (I.14) est asymptotiquement stable (uniformément asymptotiquement stable) alors l'état d'équilibre  $X = 0$  de (I.13) est aussi asymptotiquement stable (uniformément asymptotiquement stable si en plus  $v$  admet une borne supérieure infiniment petite).

c) S'il existe deux nombres réels positifs  $\eta_1, \eta_2$  tel que

$$\eta_1 \|X\| \leq v(\tau, X) \leq \eta_2 \|X\|, \quad \forall (\tau, X) \in T \times \mathcal{X}$$

et la solution d'équilibre  $w = 0$  de (I.15) est exponentiellement stable, alors la solution  $X = 0$  de (I.13) l'est aussi :

Les hypothèses de ce théorème n'exigent pas la monotonie de  $\mathcal{D}v(\tau, X)$  (I.13) puisque la fonction  $h(\tau, w)$  peut prendre de valeurs positives pour certains  $\tau$ . Toutefois, si la fonction  $h$  est indépendante de  $\tau$ , alors  $h(w)$  doit être non positive pour tout  $w$  appartenant à un voisinage  $B_\sigma(w) \cap R_+$  de  $w = 0$ , ce qui rejoint les conditions de la deuxième méthode de Lyapunov.

#### I.4.3.d - La méthode de Hatvani

Lorsqu'on applique la méthode de Corduneanu, on s'aperçoit qu'il n'est pas toujours facile de trouver une estimation  $h[\tau, v(\tau, X)]$  de l'"accroissement"  $\mathcal{D}v(\tau, X)$  (I.13) qui ne dépende pas explicitement de  $X$ . Ainsi, on est souvent amené à faire des majorations, ce qui peut conduire à des conditions de stabilité très restrictives.

La méthode que nous présentons par la suite est basée sur un théorème donné par Hatvanyi [31] relatif à la stabilité selon Lyapunov, asymptotique simple et uniforme des systèmes dynamiques continus. L'importance de ce théorème que nous donnons ici sous une forme plus générale consiste au fait que la fonction  $h$  qui majore l'expression  $\mathcal{D}v(\tau, X)$  (I.13) peut dépendre aussi de la variable d'état  $X$ , ce qui donne la possibilité d'établir de meilleures estimations de  $\mathcal{D}v(\tau, X)$  (I.13).

Théorème 1.5.

Soit une fonction  $v(\tau, X)$ ,  $v : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , définie positive dans  $\mathcal{X}$  et vérifiant pour tout  $(\tau, X) \in T \times \mathcal{X}$  l'inégalité

$$\mathcal{D}v(\tau, X)_{(I.13)} \leq h[\tau, X, v(\tau, X)] \quad (I.16)$$

Soit aussi le système de comparaison

$$\begin{aligned} \mathcal{D}Y(\tau) &= F[\tau, Y(\tau)] \\ \mathcal{D}w(\tau) &= h[\tau, Y(\tau), w(\tau)] \end{aligned} \quad (I.17)$$

associé à (I.13) et (I.16), pour lequel on suppose l'existence et l'unicité des solutions  $Y(\tau; \tau_0, Y_0)$ ,  $w(\tau, \tau_0, Y_0, w_0)$  pour toute condition initiale  $(\tau_0, Y_0, w_0) \in T \times \mathcal{X} \times B_{\sigma}(w) \cap \mathbb{R}_+$  et que  $Y = 0$ ,  $w = 0$  est une solution d'équilibre de (I.17) :  $h(\tau, 0, 0) \equiv 0$ .

De plus, pour le cas discret nous supposons que la fonction  $h(k, Y, w) + w$  est non décroissante par rapport à  $w$ .

a) Si la solution d'équilibre  $Y = 0$ ,  $w = 0$  du système de comparaison (I.17) est  $w$ -stable selon Lyapunov (uniformément  $w$ -stable), alors l'état d'équilibre  $X = 0$  de (I.13) est stable selon Lyapunov (uniformément stable si en plus  $v$  admet une borne supérieure infiniment petite).

b) Si la solution d'équilibre  $Y=0$ ,  $W=0$  du système de comparaison (I.17) est asymptotiquement  $w$ -stable (uniformément asymptotiquement  $w$ -stable), alors l'état d'équilibre  $X=0$  de (I.13) est asymptotiquement stable (uniformément asymptotiquement stable si en plus  $v$  admet une borne supérieure infiniment petite).

c) S'il existe deux nombres réels positifs  $\eta_1, \eta_2$

tels que

$$\eta_1 \|x\| \leq v(\sigma, x) \leq \eta_2 \|x\| \quad , \forall (\sigma, x) \in T \times \mathcal{X}$$

et la solution d'équilibre  $Y = 0, w = 0$  de (I.17) est exponentiellement  $w$ -stable alors l'état d'équilibre  $X = 0$  de (I.13) est exponentiellement stable.

Nous ne donnons pas ici les démonstrations de ces versions générales des théorèmes de Corduneanu et de Hatvanyi, puisque ces théorèmes sont des corollaires des théorèmes plus généraux que nous allons établir dans le chapitre suivant.

---



C H A P I T R E    I I





## LE SYSTEME DE COMPARAISON

---

### II.1 - INTRODUCTION

### II.2 - LES FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{U}$ ET LES FONCTIONS VECTORIELLES DEFINIES POSITIVES

II.2.1 - Quelques propriétés des fonctions de classe  $\mathcal{U}$

### II.3 - LES THEOREMES DE COMPARAISON

II.3.1 - Inégalités différentielles

II.3.2 - Inégalités aux différences

### II.4 - LE PRINCIPE DE COMPARAISON

### II.5 - CONDITIONS DE STABILITE DU SYSTEME DE COMPARAISON

II.5.1 - Systèmes de comparaison continus

II.5.1.a - Conditions de stabilité asymptotique uniforme.

II.5.1.b - Conditions de stabilité exponentielle.

II.5.2 - Systèmes de comparaison discrets

II.5.2.a - Conditions de stabilité asymptotique uniforme.

II.5.2.b - Conditions de stabilité exponentielle.

II.5.3 - Applications

II.5.3.a - Système de comparaison linéaire invariant.

II.5.3.b - Système de comparaison de type de Luri'e.

### II.6 - CONCLUSION



II. 1 - INTRODUCTION

Le principe de comparaison est basé sur la transformation du vecteur d'état du système dynamique étudié par une fonction vectorielle possédant certaines propriétés de positivité et sur les théorèmes de comparaison relatifs à une classe particulière d'inégalités différentielles ou aux différences.

Nous pouvons résumer la philosophie de la méthode dans le cas de systèmes continus comme suit :

Soit le système dynamique

$$S : DX(t) = F [t, X(t)]$$

où  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $F : T^c \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $F(t, 0) = 0$ .

Soit aussi une fonction  $V(t, X)$ ,  $V : T^c \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^s$  continue par rapport à  $t, X$  telle que  $V(t, X) = 0$  si et seulement si  $X=0$ .

Désignons par  $DV(t, X)_{(S)}$  l' "accroissement" de la fonction  $V$  le long des trajectoires du système  $S$ , et supposons qu'il existe une fonction  $H[t, Y, W]$ ,  $H : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $H(t, Y, 0) = 0$ , telle que

$$DV(t, X)_{(S)} \leq H [t, X, V(t, X)]$$

Si la fonction  $H$  possède certaines propriétés de croissance (propriété 1°) alors en considérant le système dynamique

$$\begin{cases} DY(t) = F [t, Y(t)] \\ DW(t) = H [t, Y(t), W(t)] \end{cases}$$

dit système de comparaison, on peut établir les inégalités

$$V^*(t) \leq W(t; t_0, Y_0, W_0)$$

avec

$$\begin{aligned} V^*(t_0) &= W_0 \\ X_0 &= Y_0 \end{aligned}$$

où  $V^*(t)$  est une solution continue de l'inégalité différentielle

$$S^* : \begin{cases} DX(t) = F [t, X(t)] \\ DV^*(t) \leq H [t, X(t), V^*(t)] \end{cases}$$

Donc pour toute solution  $X(t; t_0, X_0)$  de  $S$  il suit que

$$V [t, X(t; t_0, X_0)] \leq W (t; t_0, Y_0, W_0).$$

avec  $W_0 = V(t_0, X_0)$  et  $Y_0 = X_0$ .

Ainsi, par l'utilisation de cette dernière inégalité il est possible de conclure sur le comportement des solutions du système  $S$ , si on connaît le comportement du sous-vecteur  $W$  du vecteur d'état  $(Y, W)$  du système de comparaison. On peut donc dire que le principe de comparaison consiste à définir les propriétés de fonctions de transformation  $V$  qui permettent de conclure sur la stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de  $S$  par la stabilité partielle par rapport à  $W$  de l'état d'équilibre du système de comparaison.

Le présent chapitre consacré au développement de ce principe de comparaison est composé de quatre paragraphes :

Dans un premier paragraphe nous donnons les définitions d'une classe de fonctions vectorielles, dites de classe  $\mathcal{U}$ , qui seront utilisées comme fonctions de transformation en vue de la construction du système de comparaison. Cette classe de fonctions englobe celle des fonctions vectorielles à composantes définies ou semi-définies positives.

Dans un deuxième paragraphe nous exposons quelques théorèmes dits de comparaison, concernant les inégalités du type  $S^*$ . Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions d'inégalité différentielle ou aux différences soient **majorées** par les solutions du système de comparaison associé.

Le principe de comparaison mettant en évidence le lien sur les propriétés de stabilité de l'état d'équilibre d'un système dynamique et celles de son système associé est exposé dans un troisième paragraphe.

Enfin, le quatrième et dernier paragraphe de ce chapitre concerne l'établissement de critères de stabilité pour les systèmes dynamiques particuliers que sont les systèmes de comparaison.

## II.2 - LES FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{V}$ ET LES FONCTIONS VECTORIELLES DÉFINIES POSITIVES

C'est Lyapunov qui le premier a introduit l'utilisation de fonctions scalaires définies positives dans l'étude des systèmes dynamiques continus. En 1957, définissant dans le cadre de la deuxième méthode de Lyapunov la notion de stabilité partielle, B.B. Rumiantsev [56] a introduit l'usage de fonctions scalaires définies positives par rapport à une partie des variables. Enfin, c'est vers le début des années 60 qu'en introduisant le concept de fonction de Lyapunov vectorielle (le terme plus correct serait fonction vectorielle définie positive [9]), R. Bellman [5] et V.M. Matrosov [42] apporteront une généralisation importante dans l'utilisation de la deuxième méthode de Lyapunov pour l'étude de la stabilité de systèmes dynamiques complexes.

Dans ce paragraphe, nous présentons les définitions d'une classe de fonctions vectorielles plus générale que celle de fonction vectorielles définies positives. Ces fonctions seront utilisées comme fonctions de transformation du vecteur d'état de systèmes dynamiques en vue de la construction d'un système de comparaison.

Soit la fonction vectorielle  $V(\tau, X)$ ,  $V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^s$  où  $\mathcal{X}$  est un sous ensemble connexe de  $\mathbb{R}^n$  entourant l'origine. Supposons que le vecteur  $X$  est décomposé en deux sous-vecteurs.

$$Y \in \mathbb{R}^{n_1}, Z \in \mathbb{R}^{n_2}, n_1 + n_2 = n, X = [Y^T, Z^T]^T$$

*Définition II.1.*

La fonction  $V(\tau, X), V : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$  est dite *fonction de classe  $\mathcal{V}_Z$*  dans  $\mathcal{X}$  si  $V(\tau, 0) = 0 \quad \forall \tau \in T$  et il existe une fonction scalaire  $v^*(Z)$ ,  $v^* : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}_+^s$  définie positive dans  $\mathbb{R}^{n_2}$ , telle que :

$$\max_i (v_i(\tau, X)) \geq v^*(Z) \quad \forall (\tau, X) \in T \times \mathcal{X}.$$

Si on remplace  $Z$  par  $X$  dans cette définition on obtient la notion de fonction de classe  $\mathcal{V}_X$ . Dans le cas où la fonction  $V$  ne dépend pas de  $\tau$  on peut donner la définition suivante :

Définition II.2

La fonction  $V(X)$ ,  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dite fonction de classe  $\mathcal{V}_X$  dans  $\mathcal{X}$ , si  $V(0) = 0$  et  $\max_i (v_i(X)) > 0$

Exemple II.1

a) Soit la fonction vectorielle  $V(\tau, X)$ ,  $V : T \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$V(\tau, X) = \begin{bmatrix} x_1^2 + (1+\tau)^{-1} x_2^2 - x_3^2 \\ |x_3| \\ \max(|x_2|, |x_3|, |x_4|) \end{bmatrix} \quad (II.1)$$

Elle est une fonction de classe  $\mathcal{V}_X$  dans  $\mathbb{R}^4$  car  $V(\tau, 0) = 0$  et il existe une fonction scalaire  $v^*(X) = \max [x_1^2 - x_3^2, |x_2|, |x_3|, |x_4|]$  définie positive dans  $\mathbb{R}^4$  telle que :

$$v^*(X) \leq \max (x_1^2 + (1+\tau)^{-1} x_2^2 - x_3^2, |x_3|, \max(|x_2|, |x_3|, |x_4|))$$

b) Soit aussi la fonction vectorielle  $V(\tau, X)$ ,  $V : T \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$V(\tau, X) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ |x_3| \\ \max(|x_3|, |x_4|) \end{bmatrix} \quad (II.2)$$

Elle n'est pas de classe  $\mathcal{V}_X$ , mais est de classe  $\mathcal{V}_Z$  avec  $Z = [x_1, x_3, x_4]^T$  car  $V(\tau, 0) = 0$  et considérant la fonction scalaire  $v^*(Z) = \max [x_1^2 - x_3^2, |x_3|, |x_4|]$  qui est définie positive dans  $\mathbb{R}^3$  il vient :

$$v^*(Z) \leq \max [x_1^2 + \tau x_2^2 - x_3^2, |x_3|, \max(|x_3|, |x_4|)] \quad \forall (\tau, X) \in T \times \mathbb{R}^4.$$

Une sous-classe importante des fonctions vectorielles de classe  $\mathcal{V}_Z$  est celle de fonctions vectorielles  $Z$ -définies positives.

Définition II.3.

La fonction vectorielle  $V(\tau, X)$ ,  $V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dite  $Z$ -définie positive dans  $\mathcal{X}$  si elle est de classe  $\mathcal{V}_Z$  et toutes ses composantes sont non négatives pour tout  $(\tau, X) \in T \times \mathcal{X}$ .

D'après les définitions II.1 - II.3 on voit que si une fonction  $V(\tau, X) ; V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^s$  est de classe  $\mathcal{V}_Z$  dans  $\mathcal{X}$ , alors la fonction vectorielle  $|V(\tau, X)| \cong [ |v_1(\tau, X)|, \dots, |v_s(\tau, X)| ]^T$  est définie positive. D'autre part si

$V(\tau, X)$  est de classe  $\mathcal{V}_Z$  alors la fonction scalaire  $\max_i [ v_i(\tau, x) ]$  est  $Z$ -définie positive, mais l'inverse n'est pas vrai.

On peut noter une certaine redondance dans les fonctions (II.1) et (II.2), car en effet si on leur supprime leur deuxième composante  $|x_3|$ , les fonctions  $V(\tau, X), T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui en résultent restent respectivement de classe  $\mathcal{V}_X$  et de classe  $\mathcal{V}_Z$ . D'où la

*Définition II.4.*

La fonction vectorielle  $V(\tau, X), V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^s$  de classe  $\mathcal{V}_Z$  dans  $\mathcal{X}$  est dite *surjective* s'il n'existe pas d'indice  $i$  tel que la fonction

$$V^*(\tau, X) \cong [ v_1(\tau, X), \dots, v_{i-1}(\tau, X), v_{i+1}(\tau, X), \dots, v_s(\tau, X) ]^T$$

soit de classe  $\mathcal{V}_Z$  dans  $\mathcal{X}$ .

*Exemple II.2*

D'après cette définition la fonction vectorielle  $V(\tau, X), V : T \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{V}_Z$ ,  $Z = [x_1, x_3, x_4]^T$ , définie par :

$$V(\tau, X) = \begin{bmatrix} x_1^2 + \tau x_2^2 - x_3^2 \\ \max(|x_3|, |x_4|) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

est surjective. Au contraire la fonction  $V(\tau, X)$  définie par (II.2) n'est pas surjective.

*Définition II.5*

La fonction vectorielle  $V(\tau, X), V : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^s$ ,  $Z$ -définie positive dans  $\mathcal{X}$  est dite *régulière* si elle peut s'écrire sous la forme :

$$V(\tau, X) = [ v_1(\tau, Y, Z_1), v_2(\tau, Y, Z_2), \dots, v_s(\tau, Y, Z_s) ]^T$$



où  $Z_i \in \mathcal{X} \cap \mathbb{R}^{n_{2i}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  et  $\mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_{21}} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_{2s}}$ ,

$$n = n_1 + \sum_{i=1}^s n_{2i}$$

Bien évidemment, la régularité implique la surjectivité. De plus, toute composante  $v_i(\zeta, Y, Z_i)$  d'une fonction vectorielle  $Z$  - définie positive dans  $\mathcal{X}$  et régulière est une fonction scalaire  $Z_i$  - définie positive dans  $\mathcal{X} \cap \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_{2i}}$ .

Exemple II.3

Soit la fonction  $V(\zeta, X)$ ,  $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  définie par :

$$V(\zeta, X) = \begin{bmatrix} [1 + (1+\zeta)^{-1} x_1^2] x_2^2 \\ |x_3| \\ x_4^2 + x_5^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Elle est  $Z$  - définie positive et régulière dans  $\mathbb{R}^5$  où  $Z = [x_2, x_3, x_4, x_5]^T$ .

II.2.1 - Quelques propriétés des fonctions de classe  $\mathcal{V}$

Pour pouvoir déterminer le type de stabilité de l'équilibre du système étudié, les fonctions de classe  $\mathcal{V}_x$  utilisées doivent parfois posséder certaines propriétés supplémentaires. D'abord celle de l'existence d'une borne supérieure infiniment petite afin de définir l'uniformité des résultats obtenus :

Définition II.6.

La fonction vectorielle  $V(\zeta, X)$  ;  $V : \mathbb{T} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^s$  est dite admettre une borne supérieure infiniment petite par rapport à  $Z$ , s'il existe une fonction scalaire  $v'(Z)$ ,  $v' : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $Z$ -définie positive et continue telle que :

$$\max_i ( |v_i(\zeta, X)| ) \leq v'(Z), \quad \forall (\zeta, X) \in \mathbb{T} \times \mathcal{X}.$$

Exemple 11.4

La fonction vectorielle (II.1) admet une borne supérieure infiniment petite par rapport à X ; en effet, considérant la fonction scalaire

$$v(X) = \max [ x_1^2 + x_2^2, |x_3|, |x_4| ]$$

qui est définie positive dans  $R^4$  il vient

$$\max_i ( |v_i(\tau, X)| ) \leq v'(X), \quad \forall (\tau, X) \in T \times R^4.$$

Au contraire, les fonctions définies en (II.2) et (II.3) n'admettent pas de borne supérieure infiniment petite ni par rapport à X ni par rapport à Z .

Pour pouvoir définir des propriétés de stabilité globale il est parfois nécessaire que les fonctions de classe  $\mathcal{V}_Z$  utilisées possèdent la propriété suivante :

Définition 11.7.

La fonction  $V(\tau, X), V : T \times R^n \rightarrow R^3$  est dite *radialement non bornée* par rapport à Z si pour tout nombre réel positif a il existe un nombre réel positif b tel que

$$\|Z\| > b \implies \max_i [v_i(\tau, X)] > b \quad \forall \tau \in T$$

Par exemple, la fonction  $V(\tau, X)$  définie par (II.4) est radialement non bornée par rapport à  $Z = [x_2, x_3, x_4, x_5]^T$ , mais non par rapport à X.

Considérant la classe des fonctions  $V(\tau, X)$  continues par rapport à X certaines définitions précédentes peuvent s'interpréter au moyen de fonctions dites de classe K [30] :

La fonction  $\varphi(r), \varphi : R_+ \rightarrow R_+$  est dite *de classe K* si elle est continue, définie positive et strictement croissante dans  $R_+$ .

Ainsi :

a) La fonction  $V(\tau, X), V : T \times \mathcal{X} \rightarrow R^R$  continue par rapport à X est de classe  $\mathcal{V}_Z$  dans  $\mathcal{X}$ , si  $V(\tau, 0) \equiv 0$  et il existe une fonction  $\varphi$  de classe K telle que

$$\max_i [v_i(\tau, X)] \geq \varphi(\|Z\|), \quad \forall (\tau, X) \in T \times \mathcal{X} \quad (II.5)$$

b) La fonction  $V(\zeta, X)$  ;  $V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^S$  continue par rapport à  $X$  admet une borne supérieure infiniment petite dans  $\mathcal{X}$  s'il existe une fonction  $\varphi$  de classe  $K$  telle que

$$\max_i [ |v_i(\zeta, X)| ] \leq \varphi(\|X\|) \quad \forall (\zeta, X) \in T \times \mathcal{X} \quad (\text{II.6})$$

c) La fonction  $V(\zeta, X)$ ,  $V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^S$  continue par rapport à  $X$  est radialement non bornée s'il existe une fonction  $\varphi(r)$  de classe  $K$  vérifiant (II.5) et telle que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0$$

### II.3 - LES THEOREMES DE COMPARAISON

Les théorèmes donnés dans ce paragraphe sont applicables à l'étude de propriétés des solutions d'inégalités différentielles du type

$$\mathcal{D}X(\zeta) = F[\zeta, X(\zeta)] \quad (\text{II.7a})$$

$$\mathcal{D}V(\zeta) \leq H[\zeta, X(\zeta), V(\zeta)] \quad (\text{II.7b})$$

où la fonction  $H$  vérifie certaines conditions données ultérieurement. Nous allons successivement traiter les cas où  $\mathcal{D}$  représente l'opérateur de dérivation et l'opérateur de différence.

#### II.3.1 - Inégalités différentielles

Le but recherché est de ramener l'étude de l'inégalité différentielle

$$DX(t) = F(t, X(t)) \quad (\text{II.8.a})$$

$$DV(t) \leq H[t, X(t), V(t)] \quad (\text{II.8.b})$$

a celle du système différentiel

$$DY(t) = F[t, Y(t)] \quad (\text{II.9.a})$$

$$DW(t) = H[t, Y(t), W(t)] \quad (\text{II.9.b})$$

La fonction  $H : T^c \times \mathcal{X} \times \mathcal{W} \rightarrow R^s$  est supposée continue par rapport à tous ses arguments ;  $\mathcal{X}$  est un sous-ensemble connexe de  $R^n$  et  $\mathcal{W} = \{ W \in R^s : \underline{W} < W < \bar{W} \}$ ,  $\bar{W} > 0, -\underline{W} > 0$  (\*). La fonction  $H$  satisfait des conditions garantissant l'existence et l'unicité des solutions  $Y(t) = Y(t; t_0, Y_0)$ ,  $W(t) = W(t; t_0, Y_0, W_0)$  pour toute condition initiale  $(t_0, Y_0, W_0) \in T^c \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}$  et tout  $t \geq t_0$  pour laquelle  $Y(t) \in \mathcal{X}$  et  $W(t) \in \mathcal{W}$ . Enfin, par solution de (II.8) nous entendons toute couple de fonctions  $X(t; t_0, X_0)$ ;  $V(t; t_0, X_0, V_0)$  continues par rapport à  $t$  et vérifiant (II.8)  $\forall t \geq t_0$  pour lequel  $X(t) \in \mathcal{X}$  et  $V(t) \in \mathcal{W}$ .

Nous allons supposer que la fonction  $H$  possède, en plus des propriétés précédentes, la propriété suivante :

*Propriété  $\mathcal{H}$ .*

La fonction  $H(t, Y, W)$ ;  $H : T^c \times Y \times \mathcal{W} \rightarrow R^s$  est dite posséder la propriété  $\mathcal{H}$  (aussi appelée "croissance par rapport aux variables hors diagonales, Habets et Peiffer [28]) par rapport à  $W$ , si  $\forall (W, W') \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$  tels que  $w_i = w'_i$  et  $w_j \leq w'_j \quad \forall j \neq i$ , alors :

$$h_i(t, Y, W) \leq h_i(t, Y, W') \quad \forall (t, Y) \in T \times \mathcal{X}$$

Le théorème de comparaison suivant tire son origine des résultats établis par T. Wazewski [68]

Théorème II.1.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) La fonction  $H$  possède la propriété  $\mathcal{W}$  par rapport à

$W$  dans  $T^c \times Y \times \mathcal{W}$

b) Si  $X_0 = Y_0$ ,  $V_0 \leq W_0$

alors

$$V(t; t_0, X_0, V_0) \leq W(t; t_0, Y_0, W_0)$$

(\*) Nous employons le symbole  $>$  pour désigner l'ordonnance partielle des vecteurs:  $W_0 > W'_0 \iff w_{0i} > w'_{0i}$ ; de la même façon  $W_0 \geq W'_0 \iff w_{0i} \geq w'_{0i}$ .

pour tout  $(t_0, Y_0, V_0, W_0) \in T^c \times \mathcal{X} \times \mathcal{W} \times \mathcal{W}$  et  $t \geq t_0$  tel que  $V(t) \in \mathcal{U}$   
 $W(t) \in \mathcal{U}$  et  $Y(t) \in \mathcal{X}$  où  $V(t; t_0, X_0, V_0)$  est une solution de (II.8)  
 avec conditions initiales  $(t_0, X_0, V_0)$ .

*Démonstration*

1)  $a \Rightarrow b$  : La relation  $X(t) = Y(t)$  implique que

$$X(t; t_0, X_0) = Y(t; t_0, X_0), \text{ d'où il suit que (II.8) et (II.9)}$$

satisfont les hypothèses du théorème de **Wazewski**[68], donc  $a \Rightarrow b$ .

2)  $b \Rightarrow a$  : Par l'absurde. Supposons que  $b$  soit vrai, mais que pour un  
 triplet  $(t_0, Y_0, W_0) \in T^c \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}$  et deux indices  $i, q, i \neq q$ , il  
 existe un nombre réel positif  $\varepsilon$  tel que

$$w_{0j} = w'_{0j} \quad j \neq q \quad j = 1, 2, \dots, s$$

$$w_{0q} < w'_{0q} < w_{0q} + \varepsilon$$

implique l'inégalité

$$h_i(t_0, Y_0, W_0) > h_i(t_0, Y_0, W'_0)$$

Dans ce cas, pour la solution  $W(t; t_0, Y_0, W'_0)$  de (II.9.b) et la solution  
 particulière  $V(t; t_0, Y_0, W_0) = W(t; t_0, Y_0, W_0)$  de (II.8.b) avec conditions  
 initiales  $X_0 = Y_0$  et  $V_0 = W_0$  on aurait

$$D \left[ w_i(t; t_0, Y_0, W'_0) - v_i(t; t_0, X_0, V_0) \right]_{t=t_0} < 0$$

ce qui implique, compte-tenu de la continuité par rapport à  $t$  des  
 solutions de (II.9) et de l'hypothèse que  $\mathcal{U}$  est ouvert, l'existence  
 d'un intervalle  $\delta t = (t_0, t_0 + \delta t)$  tel que

$$w_i[t; t_0, Y_0, W'_0] < v_i(t, t_0, X_0, V_0) \quad \forall t \in \delta t$$

ce qui contredit les hypothèses de la proposition b.

Bien évidemment, ce théorème donne également une relation  
 entre les solutions du système (II.9), à savoir que si :

$$W_0 \leq W'_0$$

alors :

$$W(t; t_0, Y_0, W_0) \leq W(t; t_0, Y_0, W'_0)$$

$\forall t \geq t_0$  tel que  $Y(t) \in \mathcal{X}$  et  $W(t) \in \omega$ . Cette remarque est équivalente au fait que dans la fonction de transition du système (II.9) la partie correspondante au vecteur  $W$  et notée  $\Phi_W(t; t_0, Y_0, W_0)$  est croissante par rapport à toutes les composantes  $w_{oi}$  de  $W_0$  pour tout  $(t_0, Y_0, W_0) \in T^c \times \mathcal{X} \times \omega$  et  $t \geq t_0$  tel que  $Y(t) \in \mathcal{X}$  et  $\Phi_W(t) \in \omega$ .

### II.3 2 - Inégalités aux différences

Le théorème de comparaison présenté ci-dessus est transposable moyennant de minimes modifications au cas discret d'inégalités aux différences [9]. Il consistera donc à lier l'étude des propriétés des solutions de

$$\begin{cases} \Delta X(k) = F [k, X(k)] & \text{(II.12.a)} \\ \Delta V(k) \leq H (k, X(k), V(k)) & \text{(II.12.b)} \end{cases}$$

à celles de

$$\Delta Y(k) = F [k, Y(k)] \quad \text{(II.13.a)}$$

$$\Delta W(k) = H [k, Y(k), W(k)] \quad \text{(II.13.b)}$$

Nous supposons ici encore que la fonction  $H : T^d \times \mathcal{X} \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^s$  est continue par rapport à  $Y$  et  $W$ , les ensembles  $\mathcal{X}$  et  $\omega$  étant définis dans le sous-paragraphe précédent. Nous supposons de plus que les conditions initiales  $V_0, W_0$  appartiennent à un ensemble

$$\omega_0 = \left\{ W_0 \in \mathbb{R}^s : \underline{W}_0 \leq W_0 \leq \bar{W}_0 \right\}$$

où  $\bar{W}_0 > 0, -\underline{W}_0 > 0, \omega_0 \in \omega$ , pour lequel

$W(k_0+1; k_0, Y_0, W_0) \in \omega$  pour tout  $(k_0, Y_0) \in T^d \times \mathcal{X}$

#### Théorème II.2.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- a) La fonction  $H(k, Y, W) + W$  est croissante par rapport à toutes les composantes de  $W$  pour tout triplet  $(k, Y, W) \in T^d \times \mathcal{X} \times \omega_0$
- b) Si  $X_0 = Y_0$  et  $V_0 \leq W_0$  où  $(X_0, V_0, W_0) \in \mathcal{X} \times \omega_0 \times \omega_0$ , alors

$$V(k; k_0, X_0, V_0) \leq W(k; k_0, Y, W_0) \quad \text{(II.14)}$$

pour tout  $k_0 \in T^d$  et  $k > k_0$  tel que  $X(k) \in \mathfrak{X}$ ,  $W(k-1) \in \omega_0$ ,  
 $V(k-1) \in \omega_0$ ,  $V(k; k_0, Y_0, V_0)$  étant une solution de (II.12)

*Démonstration*

1)  $a \Rightarrow b$  : L'inégalité (II.14) est vérifiée pour  $k = k_0$ . Supposons la  
aussi vérifiée pour un instant  $k > k_0$  tel que  $Y(k) \in \mathfrak{X}$  et  
 $W(k) \in \omega_0$ ,  $V(k) \in \omega_0$ .

alors :

$$\begin{aligned} V((k) \leq H[k, X(k), V(k)] + V(k) \\ \leq H[k, Y(k), W(k)] + W(k) = W(k+1) \end{aligned}$$

2)  $b \Rightarrow a$  : La démonstration se fait comme précédemment par l'absurde.  
Supposons qu'il existe un triplet  $(k_0, Y_0, W_0) \in T^d \times \mathfrak{X} \times \omega_0$  tel que  
pour un nombre réel positif  $\epsilon$  suffisamment petit et deux indices  
 $i, q$   $i \neq q$  les relations

$$\begin{aligned} w_{0j} = w'_{0j} \quad j \neq q \quad j = 1, 2 \dots s \\ w_{0q} < w'_{0q} < w_{0q} + \epsilon \end{aligned}$$

impliqueraient l'inégalité

$$h_i(k_0, Y_0, W'_0) + w'_{0i} < h_i(k_0, Y_0, W_0) + w_{0i}$$

Dans ce cas, pour la solution  $W(k; k_0, Y_0, W_0)$  de (II.13b) et la solution  
particulière  $V(k; k_0, X_0, V_0) = W(k; k_0, Y_0, W_0)$  avec  $Y_0 = X_0$ ,  $V_0 = W'_0$  de  
(II.12.b) il viendrait

$$\begin{aligned} w'_i(k_0 + 1) = h_i(k_0, Y_0, W'_0) + w'_{0i} \\ \leq h_i(k_0, X_0, W_0) + w_{0i} = V_i(k_0 + 1) \end{aligned}$$

ce qui contredit les hypothèses de la proposition b.

Si la fonction  $H$  satisfait les conditions énoncées dans la  
proposition a alors la partie  $\bar{\Phi}_W$  de la fonction de transition du  
système (II.13) et correspondant au vecteur  $W$  est croissante par  
rapport à toutes les composantes  $w_{0i}$  de  $W_0$ , pour tout triplet  
 $(k_0, Y_0, W_0) \in T^d \times \mathfrak{X} \times \omega_0$  et  $k \geq k_0$  tels que  $Y(k) \in \mathfrak{X}$  et  $W(k-1) \in \omega_0$ .  
Notons aussi que si la fonction  $H(k, Y, W) + W$  est croissante par  
rapport à toutes les composantes de  $W$  alors la fonction  $H(k, Y, W)$   
possède nécessairement la propriété  $H$  par rapport à  $W$ .

II.4. - LE PRINCIPE DE COMPARAISON

Considérons le système

$$\mathcal{D} X(\tau) = F[\tau, X(\tau)] \quad (\text{II.15})$$

Supposons qu'il existe une fonction vectorielle  $V(\tau, X)$  de classe  $\mathcal{V}_X$  et continue par rapport à  $X$  dans  $T \times \mathcal{X}$ . Supposons aussi l'existence d'une fonction  $H(\tau, Y, W)$  satisfaisant aux propriétés suivantes :

- 1 -  $H$  est définie pour tout  $(\tau, Y, W) \in T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}$  où  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{W}$  sont des sous-ensembles connexes de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^s$  respectivement, entourant l'origine.
- 2 -  $H$  possède la propriété  $\mathcal{D}\mathcal{E}$  par rapport à  $W$  pour tout  $(\tau, Y, W) \in T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}$  et dans le cas discret où  $T = T^d$   $H(k, Y, W) + W$  est non décroissante par rapport à  $W$ .
- 3 -  $H(\tau, Y, 0) = 0$  pour tout  $(\tau, Y) \in T \times \mathcal{X}$ .
- 4 -  $H$  vérifie l'inégalité

$$\mathcal{D}V[\tau, X(\tau)]_{(\text{II.15})} \leq H[\tau, X(\tau), V(\tau, X(\tau))]$$

pour tout  $(\tau, X) \in T \times \mathcal{X}$ .

où  $\mathcal{D}V[\tau, X(\tau)]_{(\text{II.15})}$  représente la dérivée ou différence totale de  $V(\tau, X(\tau))$  le long des trajectoires de (II.15) .

Le système différentiel ou aux différences

$$\begin{cases} \mathcal{D}Y(\tau) = F[\tau, Y(\tau)] \\ \mathcal{D}W(\tau) = H[\tau, Y(\tau), W(\tau)] \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

défini pour  $(\tau, Y, W) \in T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}$  est appelé *système de comparaison* de (II.15). Supposons de plus que  $H$  satisfait aux conditions suffisantes garantissant l'existence et l'unicité des solutions  $Y(\tau; \tau_0, Y_0)$ ,  $W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0)$  pour tout triplet  $(\tau_0, Y_0, W_0) \in T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}$



et tout  $\tau \geq \tau_0$  pour lesquels  $(Y(\tau), W(\tau)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{W}$ . D'après l'hypothèse 3,  $Y=0$   $W=0$  est solution d'équilibre pour (II.16). De plus, des hypothèses 2 et 4 et des théorèmes du paragraphe précédent il vient que si

$$X_0 = Y_0 \tag{II.17a}$$

$$V(\tau_0, X_0) \leq W_0 \tag{II.17b}$$

alors

$$V[\tau, X(\tau; \tau_0, X_0)] \leq W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0) \tag{II.18}$$

pour tout  $(\tau_0, Y_0, W_0) \in T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}$  et  $\tau \geq \tau_0$  tel que

$$(Y(\tau), W(\tau)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{W}.$$

A partir des relations (II.17) et (II.18) nous montrerons que l'étude des solutions de (II.15) dans un voisinage de la position d'équilibre  $X = 0$  peut se ramener à l'étude du comportement par rapport à  $W$  de la position d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison dans  $T \times \mathcal{X} \times \omega_+$  où  $\omega_+ = \omega \cap \mathbb{R}_+$ .

Notons tout d'abord que pour toute condition initiale  $(\tau_0, Y_0, W_0) \in T \times \mathcal{X} \times \omega_+$  il vient

$$W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0) \geq 0 \quad \forall \tau \geq \tau_0 \tag{II.19}$$

La démonstration se fait aisément à partir des hypothèses qui sont retenues pour la fonction  $H$ . Dans le cas continu, par exemple, (II.19) est vérifiée, parce que pour tout  $t$  et  $W(t)$  tels que  $w_i(t) = 0$  et  $w_j(t) \geq 0 \quad \forall j \neq i$ , du fait de la propriété  $\partial \mathcal{C}$  et de  $H(\tau, Y, 0) \equiv 0$ , il vient :

$$D_{w_i}(t) = h_i[t, Y(t), W(t)] \geq 0$$

Les théorèmes qui suivent correspondent donc à l'établissement des propriétés de stabilité de (II.15) à partir de celles de (II.16).

Théorème II.3.

S'il existe une fonction  $V(\tau, X)$ ,  $V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^S$  de classe  $\mathcal{V}_x$  dans  $\mathcal{X}$  et continue par rapport à  $X$  et une fonction  $H : T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^S$  possédant les propriétés 1 à 4, alors la  $W$ -stabilité selon Lyapunov de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (II.16) dans  $T \times \mathcal{X}_\tau \times \mathcal{W}_\tau$  implique la stabilité selon Lyapunov de l'état d'équilibre  $X=0$  de (II.15).

*Démonstration*

De la  $W$ -stabilité selon Lyapunov de l'équilibre  $Y=0, W=0$  de (II.16) il suit que pour tout  $\varepsilon' > 0$  et  $\tau_0 \in T$  il existe un  $\delta'(\tau_0, \varepsilon') > 0$  tel que

$$\|Y_0\| + \|W_0\| < \delta' \Rightarrow \max_i [w_i(\tau; \tau_0, Y_0, W_0)] < \varepsilon' \quad \forall \tau \in T_0$$

C'est-à-dire, reprenant les relations (II.17.a) et (II.17.b) l'implication précédente devient :

$$\|X_0\| + \|V(\tau_0, X_0)\| < \delta' \Rightarrow \max_i [v_i(\tau, X(\tau; \tau_0, X_0))] < \varepsilon' \quad \forall \tau \in T_0 \quad (II.20)$$

D'autre part, du fait de l'hypothèse de continuité de  $v(\tau, X)$  par rapport à  $X$ , il suit qu'il existe un  $\delta(\tau_0, \delta') > 0$  tel que :

$$\|X_0\| < \delta \Rightarrow \|X_0\| + \|V(\tau_0, X_0)\| < \delta' \quad (II.21)$$

Enfin,  $V(\tau, X)$  étant de classe  $\mathcal{V}_x$  dans  $\mathcal{X}$ , il existe une fonction  $\varphi$  de classe  $K$  telle que

$$\varphi \|X\| \leq \max_i [v_i(\tau, X)]$$

donc

$$\max_i [v_i(\tau, X)] < \varepsilon' \Rightarrow \|X(\tau, \tau_0, X_0)\| < \varepsilon \quad (II.22)$$

ou  $\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon')$ . Ainsi, des relations (II.20) - (II.22) il suit que pour tout  $\tau_0 \in T$  et  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta(\tau_0, \varepsilon) > 0$  tel que

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|X(\tau, \tau_0, x_0)\| < \epsilon \quad \forall \tau \in T_0 \quad (II.23)$$

c. q. f. d.

Si de plus, la fonction  $V(\tau, X)$  admet une borne supérieure infiniment petite et la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  de (II.16) est uniformément  $W$ -stable alors les nombres  $\delta'$  et  $\delta$  ne dépendent pas de  $\tau_0$ , d'où le théorème :

Théorème II.4

S'il existe une fonction  $V(\tau, X), V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^s$  de classe  $\mathcal{V}_X$  dans  $\mathcal{X}$ , continue par rapport à  $X$  et admettant une borne supérieure infiniment petite et une fonction  $H : T \times \mathcal{X} \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^s$  possédant des propriétés 1 à 4, alors la  $W$ -stabilité uniforme de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (II.16) dans  $T \times \mathcal{X} \times \omega_+$  implique la stabilité uniforme d'état d'équilibre  $X=0$  de (II.15).

Les deux théorèmes suivants concernent la propriété d'attractivité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (II.15)

Théorème II.5

S'il existe deux fonctions  $V(\tau, X)$  et  $H(\tau, Y, W)$  possédant les propriétés énoncées au théorème II.3, alors la  $W$ -attractivité dans  $T \times \mathcal{X} \times \omega_+$  de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison implique l'attractivité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (II.15).

*Démonstration*

Par hypothèse pour tout  $\tau_0 \in T$  il existe un nombre réel positif  $\delta(\tau_0)$  tel que pour tout  $\epsilon > 0, (\epsilon' = \varphi^{-1}(\epsilon))$ , il existe un  $\tau^*(\tau_0, \epsilon') \in T$  tel que :

$$\|Y_0\| + \|W_0\| < \delta' \Rightarrow \max_i (v_i[\tau, X(\tau, \tau_0, X_0)]) < \epsilon' \quad \forall \tau \geq \tau_0 + \tau^*$$

C'est-à-dire, d'après (II.17.a) et (II.17.b)

$$\|X_0\| + \|V(\tau_0, X_0)\| < \delta' \Rightarrow \max_i (v_i[\tau, X(\tau, \tau_0, X_0)]) < \epsilon'$$

$$\forall \tau \geq \tau_0 + \tau^*$$

La démonstration se poursuit de façon identique à celle du théorème (II.3). Donc avec les mêmes notations et définitions des (II.20) et (II.22) il vient :

$$\|X_0\| < \delta \Rightarrow \|X(\tau; \tau_0, X_0)\| < \varepsilon \quad \forall \tau \geq \tau_0 + \tau'$$

c.q.f.d.

Là encore, si la fonction  $V(\tau, X)$  admet une borne supérieure infiniment petite et si la  $W$ -attractivité de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (II.16) est uniforme, alors les nombres  $\tau', \delta', \delta$  ne dépendent pas de  $\tau_0$ , d'où :

### Théorème II.6

Les fonctions  $V$  et  $H$  vérifiant les propriétés énoncées au théorème II.4, alors, si la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (II.16) est uniformément  $W$ -attractive dans  $T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}_+$ , l'état d'équilibre  $X=0$  de (II.15) est uniformément attractive.

A partir des théorèmes précédents il est possible d'énoncer un théorème concernant la stabilité asymptotique.

### Théorème II.7

S'il existe une fonction  $V(\tau, X)$  ;  $V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^S$  de classe  $\mathcal{V}_x$  et continue par rapport à  $X$ , (et admettant une borne supérieure infiniment petite) et une fonction  $H(\tau, Y, W)$ ,  $H : T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^S$  possédant les propriétés 1 à 4, alors la  $W$ -stabilité asymptotique ( $W$ -stabilité asymptotique uniforme) de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (II.16) dans  $T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}_+$ , implique la stabilité asymptotique (stabilité asymptotique uniforme) de l'état d'équilibre  $X=0$  de (II.15).

Théorème II.8

S'il existe une fonction  $V(\tau, X)$ ,  $V : T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^s$  de classe  $\mathcal{V}_x$  vérifiant les inégalités

$$\max_i [v_i(\tau, X)] \geq \eta_1 \|X\| \tag{II.24}$$

$$\|V(\tau, X)\| \leq \eta_2 \|X\| \tag{II.25}$$

$\eta_1, \eta_2$  étant de nombres réels positifs, et une fonction  $H(\tau, Y, W)$   $H : T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^s$  possédant des propriétés 1 à 4 alors la  $W$ -stabilité exponentielle de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (II.16) dans  $T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}_+$  implique la stabilité exponentielle de l'état d'équilibre  $X=0$  du système (II.15).

*Démonstration*

La solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (II.16) étant exponentiellement  $W$ -stable dans  $T \times \mathcal{X} \times \mathcal{W}_+$ , il existe trois nombres réels positifs  $\delta', \alpha, \beta$  tels que si

$$\|Y_0\| + \|W_0\| < \delta'$$

alors :

$$\|W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0)\| \leq \alpha (\|Y_0\| + \|W_0\|) \exp[-\beta(\tau - \tau_0)] \tag{II.26}$$

pour tout  $\tau_0 \in T$  et  $\tau \in T_0$ .

D'après (II.24) il suit que

$$\|X_0\| < (1 + \eta_2)^{-1} \delta' \Rightarrow \|X_0\| + \|V(\tau_0, X_0)\| < \delta'$$

pour tout  $\tau_0 \in T$ . Donc pour tout  $X_0 \in \mathcal{X} : \|X_0\| < (1 + \eta_2)^{-1} \delta'$  et

$\tau_0 \in T$  il existe un  $W_0 \in \mathcal{W}_+$  tel que  $\|X_0\| + \|W_0\| < \delta'$  et

$|V(\tau_0, X_0)| = W_0$  où  $|V| \hat{=} [|v_1|, |v_2|, \dots, |v_s|]^T$ . Par conséquent, des (II.26) et (II.11) il suit que

$$\max_i [v_i(\tau, X(\tau; \tau_0, X_0))] \leq \alpha [\|X_0\| + \|V(\tau_0, X_0)\|] \exp[-\beta(\tau - \tau_0)]$$

et de (II.24) - (II.25)

$$\|X(\tau; \tau_0, X_0)\| \leq \eta_1^{-1} \alpha (1 + \eta_2) \|X_0\| \exp[-\beta(\tau - \tau_0)],$$

pour tout  $\|X_0\| < \delta, \tau_0 \in T$  et  $\tau \in T_0, \delta = (1 + \eta_2)^{-1} \delta',$  c.q.f.d

*Remarque*

Les théorèmes (II.3) - (II.8) peuvent être considérés comme des extensions de travaux antérieurs:

- 1) Si la variable  $X$  n'apparaît pas explicitement dans le deuxième membre de l'inégalité de la propriété 4 sur  $H$ , c'est-à-dire si on peut établir une inégalité du type

$$\mathcal{D}V(\tau, X(\tau)) \underset{(II.16)}{\leq} H[\tau, V(\tau, X(\tau))] \quad (II.27)$$

alors le système de comparaison (II.16) prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{D}Y(\tau) &= F[\tau, Y(\tau)] \\ \mathcal{D}W(\tau) &= H[\tau, W(\tau)] \end{aligned}$$

c'est-à-dire une forme faisant intervenir deux systèmes découplés. Le système de comparaison se réduit en fait à :

$$\mathcal{D}W(\tau) = H[\tau, W(\tau)]$$

Cette approche est celle de Matrosov [42] - [45].

En général, on peut dire que pour arriver à un tel système de comparaison on est amené à effectuer des majorations plus fortes que celles nécessaires à l'établissement d'un système de comparaison du type (II.16).

- 2) Dans le cas où la fonction  $V$  est scalaire, on retrouve la méthode de Halvanyi.
- 3) Enfin, si la fonction  $V$  est scalaire et la variable  $X$  n'apparaît pas explicitement dans le deuxième membre de l'inégalité (II.27), alors on retrouve la méthode de Corduneanu.

### II.5 - CONDITIONS DE STABILITE DU SYSTEME DE COMPARAISON

Tout l'intérêt de système de comparaison de type (II.16) réside dans la possibilité que nous aurons à énoncer pour de tels systèmes des conditions de stabilité relativement simples et pratiques. C'est l'objet du paragraphe qui vient.

Nous avons vu dans les théorèmes (II.3) à (II.8) que pour conclure sur la stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (II.15), il suffit d'étudier le comportement du système de comparaison dans le "quadrant" positif de  $R^S$  ; c'est-à-dire dans  $T \times R^n \times R_+^S$ . Ainsi, sans perte de généralité nous supposons par la suite que le système de comparaison

$$\begin{aligned} \mathcal{D}Y(\tau) &= F[\tau, Y(\tau)] \\ \mathcal{D}W(\tau) &= H[\tau, Y(\tau), W(\tau)] \end{aligned}$$

est défini dans  $T \times R^n \times R_+^S$ . Les problèmes qui se posent lorsque le système de comparaison n'est défini que pour  $(Y, W)$  appartenant à un sous-ensemble de  $R^n \times R_+^S$ , problèmes qui sont liés à l'estimation des domaines de stabilité du système étudié (II.15), seront traités dans le Chapitre III.

Notons que les conditions de stabilité que nous allons établir dans ce paragraphe sont des extensions des conditions analogues obtenues dans [9] pour les systèmes de comparaison non linéaires de type de Matrozov.

### II.5.1 - Systèmes de comparaison continus

Par la suite, nous nous référons au système de comparaison continu

$$DY(t) = F[t, Y(t)] \tag{II.28a}$$

$$DW(t) = H[t, Y(t), W(t)] \tag{II.28b}$$

défini dans  $T^c \times R^n \times R_+^S$ .

Nous présentons d'abord un théorème relatif à l'existence d'une borne des solutions de ce système.

#### Théorème II.9

S'il existe un vecteur  $\bar{W} \in R_+^S$  à composantes positives tel que

$$H(t, Y, \bar{W}) \leq 0 \tag{II.29}$$

pour tout  $(t, Y) \in T^c \times R^n$  alors le domaine

$$\mathcal{R}(Y, W) = \{ (Y, W) \in R^n \times R_+^S : W \leq \bar{W} \}$$

est un domaine de trajectoires uniformément  $W$ -bornées et

$$W(t; t_0, Y_0, W_0) \leq \bar{W}$$

pour tout  $t_0 \in T^c$ ,  $(Y_0, W_0) \in \mathcal{R}(Y, W)$  et  $t \in T_0^c$ .

*Démonstration*

Si  $(Y_0, W_0) \in \mathcal{R}(Y, W)$ , alors  $0 \leq W_0 \leq \bar{W}$  donc d'après le théorème II.1 il suit que

$$0 \leq W(t; t_0, Y_0, W_0) \leq W(t; t_0, Y_0, \bar{W})$$

pour tout  $(t_0, Y_0) \in T^c \times \mathbb{R}^n$  et  $t \in T_0^c$ . Il suffit donc de montrer que :

$$W(t; t_0, Y_0, \bar{W}) \leq \bar{W}$$

pour tout  $(t_0, Y_0) \in T^c \times \mathbb{R}^n$  et  $t \in T_0^c$ . Or, cette inégalité est vérifiée parce que pour tout  $t \in T_0^c$  tel que

$$w_i(t, t_0, Y, \bar{W}) = \bar{w}_i \quad \text{et} \quad w_j(t; t_0, Y_0, \bar{W}) \leq \bar{w}_j \quad j \neq i \quad j=1, \dots, s,$$

de (II.29) il vient :

$$\begin{aligned} Dw_i(t; t_0, Y_0, \bar{W}) &= h_i[t, Y(t; t_0, Y_0), W(t; t_0, Y_0, \bar{W})] \\ &\leq h_i[t, Y(t; t_0, Y_0), \bar{W}] \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

### 11.5.1a - Conditions de stabilité asymptotique uniforme

#### Théorème II.10

S'il existe deux fonctions  $L(r)$ ,  $L : [0, \bar{r}] \rightarrow \mathbb{R}_+^s$

$\bar{r}$  étant un nombre réel positif, et  $\Psi(t, Y, r), \Psi : T^c \times \mathbb{R}^n \times [0, \bar{r}] \rightarrow \mathbb{R}_+^s$

telles que

1. Toutes les composantes  $l_i(r)$   $i=1, 2, \dots, s$  de  $L(r)$  sont continues, dérivables et strictement croissantes dans  $[0, \bar{r}]$  et  $L(0) = 0$ .



2. Toutes les composantes  $\Psi_i(t, Y, r)$ ,  $i=1, 2, \dots, s$  de  $\Psi$  sont définies positives par rapport à  $r$  dans  $T^c \times R^n \times [0, \bar{r}]$  et vérifiant

$$H [t, Y, L(r)] \leq -\Psi(t, Y, r) \tag{II.30}$$

pour tout  $(t, Y, r) \in T^c \times R^n \times [0, \bar{r}]$ ,

alors

$$\mathcal{R}(Y, W) = \left\{ (Y, W) \in R^n \times R_+^s : W \leq L(\bar{r}) \right\}$$

est un domaine de  $W$ -stabilité asymptotique uniforme pour la solution d'équilibre  $Y = 0$ ,  $W = 0$  de (II.28).

*Démonstration*

D'après les hypothèses faites sur la fonction  $L$  chaque composante  $l_i$  admet une fonction inverse, notée  $l_i^{-1}$ , elle même continue et strictement croissante :

$$l_i^{-1} : [0, l_i(\bar{r})] \rightarrow [0, \bar{r}].$$

Soit la fonction scalaire  $v^*(Y, W)$ ,  $v^* : \mathcal{R}(Y, W) \rightarrow [0, \bar{r}]$

$$v^*(Y, W) \text{ (II.28)} = \max_i [l_i^{-1}(w_i)] \tag{II.31}$$

Cette fonction est  $W$ -définie positive. Soit  $q_j$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ ,  $m \leq s$  les indices pour lesquels  $v^*(Y, W) = l_{q_j}^{-1}(w_{q_j})$ . Alors pour tout  $t \in T^c$  et  $Y \in R^n$  il vient

$$Dv^*(Y, W) \text{ (II.28)} \leq \max_{q_j} \left( \frac{dl_{q_j}^{-1}(w_{q_j})}{dw_{q_j}} \cdot h_{q_j}(t, Y, W) \right) \tag{II.32}$$

D'après les hypothèses sur  $L(r)$  les dérivés  $\frac{dl_{q_j}^{-1}(w_{q_j})}{dw_{q_j}}$

existent pour  $0 \leq w_i \leq l_i(\bar{r})$  et sont positives. De plus, puisque  $H$  possède la propriété  $\mathcal{D}^c$  et du fait de la croissance de  $l_i$  et  $l_i^{-1}$  par rapport à leurs arguments, il vient

$$h_{q_j}(t, Y, W) = h_{q_j}(t, Y, [l_1(l_1^{-1}(w_1)), \dots, l_s(l_s^{-1}(w_s))]^T) < h_{q_j}(t, Y, L[l_{q_j}^{-1}(w_{q_j})])$$

pour  $J = 1, 2, \dots, m$ .

Ainsi, puisque  $r = l_{q_j}^{-1}(w_{q_j}) \leq \bar{r}$  de (II.32) et (II.30) il suit que

$$Dv^*(Y,W)_{(II.28)} \leq \max_{q_j} \left( \frac{dl_{q_j}^{-1}(w_{q_j})}{dw_{q_j}} \cdot \psi_{q_j}[t, Y, L(r)] \right)$$

donc  $-Dv^*(Y,W)_{(II.28)}$  est  $W$ -définie positive dans  $T^c \times \mathcal{R}(Y,W)$  et par conséquent [49] la solution  $Y=0, W=0$  de (II.28) est uniformément asymptotiquement  $W$ -stable. De plus, puisque

$$\mathcal{R}(Y,W) = \left\{ (Y,W) \in R_+^s : v^*(Y,W) \leq \bar{r} \right\}$$

il suit que  $\mathcal{R}(Y,W)$  est un domaine de  $W$ -stabilité asymptotique uniforme de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  de (II.28).

De ce théorème découle naturellement le corollaire suivant :

Corollaire II.1

Si les fonctions  $L(r)$  et  $\Psi(t,Y,r)$  du théorème (II.10) sont définies pour tout  $r \in [0, \infty)$ ,  $L : R_+ \rightarrow R_+^s$

$\Psi : T^c \times R^n \times R_+^s \rightarrow R_+^s$  et  $\lim_{r \rightarrow \infty} l_i(r) = \infty$ , alors la solution d'équilibre  $Y = 0, W=0$  de (II.28) est globalement uniformément asymptotiquement  $W$ -stable.

Les conditions données dans le théorème (II.10) de par leur généralité semblent relativement ardues à satisfaire. Le corollaire suivant en est une version plus simple

Corollaire II.2

s'il existe un vecteur  $\bar{w} \in R_+^s$  à composantes positives et une fonction  $\Psi(t,Y,r)$ ,  $\Psi : T^c \times R^n \times [0, \bar{r}]$  à composantes définies positives par rapport à  $r$  dans  $T^c \times R^n \times [0, \bar{r}]$  vérifiant

$$H(t,Y,r \bar{w}) \leq -\Psi(t,Y,r) \tag{II.33}$$

pour tout  $(t,Y,r) \in T^c \times R^n \times [0, \bar{r}]$ , alors le domaine

$$\mathcal{R}(Y,W) = \left\{ (Y,W) \in R^n \times R_+^s : W \leq \bar{r} \bar{w} \right\}$$

est un domaine de  $W$ -stabilité asymptotique uniforme de la solution  $Y = 0, W=0$  de (II.28). Si de plus, les hypothèses du corollaire sont vérifiées pour tout  $\bar{r} \in [0, \infty)$  alors la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  de (II.28) est globalement uniformément asymptotiquement  $W$ -stable.

La démonstration s'effectue de la même manière que pour le théorème (II.10) avec  $L(r) = r\bar{w}$ , et la fonction scalaire  $v^*(Y,W)$  n'est alors autre que la fonction de type Rosenbrock [55] :

$$v^*(Y,W) \cong \max_i \left( \frac{w_i}{\bar{w}_i} \right)$$

### II.5.1b - Conditions de stabilité exponentielle

#### Théorème II.11

S'il existe un vecteur  $\bar{w} \in R_+^s$  à composantes positives et un nombre réel positif  $\beta$ , vérifiant

$$H(t, Y, r, \bar{w}) \leq -r\beta\bar{w}$$

pour tout  $(t, Y, r) \in T^c \times R^n \times [0, \bar{r}]$ ,  $\bar{r}$  étant un nombre réel positif, alors

$$\mathcal{R}(Y, W) = \left\{ (Y, W) \in R^n \times R_+^s : W \leq \bar{r} \bar{w} \right\}$$

est un domaine de  $W$ -stabilité exponentielle de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  de (II.28).

*Démonstration*

La fonction

$$v^*(Y, W) \cong \max_i \left( \frac{w_i}{\bar{w}_i} \right)$$

est  $W$ -définie positive dans  $\mathcal{R}(Y, W)$  et vérifie l'inégalité

$$\frac{\|W\|}{\|\bar{w}\|} \leq v^*(Y, W) \leq \frac{\|W\|}{\min_i \bar{w}_i} \quad (\text{II.34})$$

Soit  $q_j, j=1, 2, \dots, m$  les indices pour lesquels

$$v^*(Y, W) = \frac{w_{q_j}}{\bar{w}_{q_j}}$$

Il vient alors

$$Dv^{*(Y,W)}_{(II.18)} \leq \max_{q_j} \left( \frac{1}{\bar{w}_{q_j}} \cdot h_{q_j} (t, Y, W) \right)$$

La fonction H possède la propriété DG. De plus

$$\bar{w}_{q_j} = v^{*(Y,W)} \bar{w}_{q_j} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\bar{w}_i < v^{*(Y,W)} \bar{w}_i \quad i \neq q_j \quad i=1, 2, \dots, s$$

donc

$$Dv^{*(Y,W)}_{(II.28)} \leq \max_{q_j} \left( \frac{1}{\bar{w}_{q_j}} \cdot h_{q_j} [t, Y, v^{*(Y,W)} \cdot \bar{W}] \right)$$

Or,

$$v^{*(Y,W)} \leq \bar{r}, \text{ ce qui implique d'après les hypothèses}$$

$$\begin{aligned} Dv^{*(Y,W)}_{(II.28)} &\leq - \left( \frac{\beta}{\bar{w}_{q_j}} \cdot v^{*(Y,W)} \bar{w}_{q_j} \right) \\ &\leq - \beta v^{*(Y,W)} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$v^* [Y(t), W(t)] \leq v^*(Y_0, W_0) \cdot \exp [ - \beta (t-t_0) ]$$

et d'après

$$\| W (t; t_0, W_0) \| \leq \frac{\| \bar{W} \|}{\min_i \bar{w}_i} \cdot \| W_0 \| \cdot \exp [ - \beta (t-t_0) ]$$

pour tout  $(Y_0, W_0) \in \mathcal{R}(Y, W)$ ,  $t_0 \in T^c$  et  $t \in T_0^c$ , c.q.f.d.

### III.5.2 - Systèmes de comparaison discrets

Comme dans le cas du système de comparaison continu ici aussi nous nous référons au système de comparaison.

$$\Delta Y (k) = F [k, Y(k)] \tag{II.35a}$$

$$\Delta W (k) = H [k, Y(k), W(k)] \tag{II.35b}$$

que nous supposons défini dans  $T^d \times R^n \times R_+^s$

Théorème II.12

S'il existe un vecteur  $\bar{W} \in R_+^s$  à composantes positives, tel que :

$$H(k, Y, \bar{W}) \leq 0 \quad (II.36)$$

pour tout  $(k, Y) \in T^d \times R^n$ , alors

$$\mathcal{R}(Y, W) = \left\{ (Y, W) \in R^n \times R_+^s : W \leq \bar{W} \right\}$$

est un domaine de trajectoires uniformément W-bornées et

$$W(k; k_0, Y_0, W_0) \leq \bar{W}$$

pour tout  $k_0 \in T^d$ ,  $(Y_0, W_0) \in \mathcal{R}(Y, W)$  et  $k \in T_0^d$ .

*Démonstration*

D'après le théorème II.2, il suffit de montrer que

$$W(k; k_0, Y_0, \bar{W}) \leq \bar{W}$$

pour tout  $Y_0 \in R^n$ ,  $k_0 \in T^d$  et  $k \in T_0^d$ . Cette inégalité est vraie pour  $k = k_0$ . Supposons qu'elle soit violée pour la première fois à un certain instant  $k^* > k_0$  et pour un indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$  :

$$w_i(k^*; k_0, Y_0, \bar{W}) > w_i \quad (II.37)$$

Alors, compte-tenu de (II.36) et de l'hypothèse que  $H(k, Y, W) + W$  est non décroissante par rapport à  $W$ , il vient

$$\begin{aligned} w_i(k^*, k_0, Y_0, \bar{W}) &= h_i[k^*-1, Y(k^*-1; k_0, Y_0), W(k^*-1; k_0, Y_0, \bar{W})] + w_i(k^*-1; k_0, Y_0, \bar{W}) \\ &\leq h_i[k^*-1, Y(k^*-1; k_0, Y_0), \bar{W}] + \bar{w}_i \\ &\leq \bar{w}_i \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse (II.37).

II.5.2a - Conditions de stabilité asymptotique uniforme

Théorème II.13

S'il existe deux fonctions  $L(r)$ ,  $L : [0, \bar{r}] \rightarrow R_+^s$ ,  $\bar{r}$  étant un nombre réel positif et  $\Psi(k, Y, r)$ ,  $\Psi : T^d \times R^n \times [0, \bar{r}] \rightarrow R_+^s$

possédant les propriétés :

1. Toutes les composantes  $l_i(r)$   $i=1,2,\dots,s$  de  $L(r)$  sont continues et strictement croissantes dans  $[0, \bar{r}]$  et  $L(0) = 0$ .

2. Toutes les composantes  $\psi_i(k, Y, r)$   $i=1,2,\dots,s$  de  $\Psi$  sont définies positives par rapport à  $r$  dans  $T^d \times R^n \times [0, \bar{r}]$

et vérifiant

$$H[k, Y, L(r)] \leq -\Psi(k, Y, r) \quad (II.38)$$

pour tout  $(k, Y, r) \in T \times R^n \times [0, \bar{r}]$ , alors le domaine

$$\mathcal{R}(Y, W) = \left\{ (Y, W) \in R^n \times R_+^s : W \leq L(\bar{r}) \right\}$$

est un domaine de  $W$ -stabilité asymptotique uniforme pour la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  de système de comparaison (II.35).

*Démonstration*

Comme dans la démonstration du théorème II.10, désignons par  $l_i^{-1}(w_i), l_i^{-1}: [0, l(\bar{r})] \rightarrow [0, \bar{r}]$   $i=1,2,\dots,s$  les fonctions inverses des  $l_i(r)$   $i=1,2,\dots,s$ . D'après les hypothèses du théorème, ces fonctions existent et elles sont continues et strictement croissantes.

Soit la fonction scalaire  $v^*(Y, W), v^*: R^n \times R_+^s \rightarrow [0, \bar{r}]$  définie par

$$v^*(Y, W) = \max \left[ l_i^{-1}(w_i) \right]$$

Cette fonction est  $W$ -définie positive dans  $\mathcal{R}(Y, W)$  et vérifie l'inégalité

$$W \leq L[v^*(Y, W)] \quad (II.39)$$

Désignons par  $\Delta v^* [Y(k), W(k)]_{(II.35)}$  la différence totale de la fonction  $v^*(Y, W)$  selon le système (II.35). Alors :

$$\begin{aligned} \Delta v^* [Y(k), W(k)]_{(II.35)} &= \max_i (l_i^{-1}[w_i(k+1)]) - \max_j (l_j^{-1}[w_j(k)]) \\ &= \max_i (l_i^{-1}[h_i(k, Y(k), W(k)) + w_i(k)]) - \\ &\quad - \max_j (l_j^{-1}[w_j(k)]) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $H(k, Y, W) + W$  est non décroissante par rapport à  $W$ , de (II.39) il suit

$$\Delta v [Y(k), W(k)] \underset{(II.35)}{\leq} \max_i \left( l_i^{-1} \left[ h_i(k, Y(k), L[v^*(Y(k), W(k))]) + l_i [v^*(Y(k), W(k))] \right] - v^*(Y(k), W(k)) \right)$$

et d'après (II.38)

$$\Delta v^*[Y(k), W(k)] \underset{(II.35)}{\leq} \max_i \left( l_i^{-1} \left[ -\psi_i(k, Y(k), v^*(Y(k), W(k))) + l_i [v^*(Y(k), W(k))] \right] - l_i^{-1} \left[ l_i [v^*(Y(k), W(k))] \right] \right)$$

parce que  $l_i^{-1}(w_i)$  sont strictement croissantes et  $\psi_i(k, Y, r)$  définies positives par rapport à  $r$ . Le deuxième membre de cette inégalité est une fonction  $W$ -définie négative, d'où la  $W$ -stabilité asymptotique uniforme de l'équilibre  $Y=0, W=0$ . De plus, puisque

$$\mathcal{R}(Y, W) = \left\{ (Y, W) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^s : v^*(Y, W) \leq \bar{r} \right\}$$

$\mathcal{R}(Y, W)$  est un domaine de  $W$  stabilité asymptotique uniforme de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$ .

### II.5.2b - Conditions de stabilité exponentielle

#### Théorème II.14

S'il existe un vecteur  $\bar{W} \in \mathbb{R}_+^s$  à composantes positives et un nombre réel positif  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$  vérifiant

$$H(k, Y, r \cdot \bar{W}) \leq -r \beta \bar{W} \tag{II.40}$$

pour tout  $(k, Y, r) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^n \times ]0, \bar{r}]$ ,  $\bar{r}$  étant un nombre réel positif, alors

$$\mathcal{R}(Y, W) = \left\{ (Y, W) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^s : W \leq \bar{r} \bar{W} \right\}$$

est un domaine de  $W$ -stabilité exponentielle de la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  de (II.35)

#### *Démonstration*

Soit la fonction  $v^*(Y, W)$ ,  $v^*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^s \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$v^*(Y, W) = \max_i \left( \frac{w_i}{\bar{w}_i} \right)$$

qui est  $W$ -définie positive dans  $\mathcal{R}(Y, W)$  et vérifie les inégalités

$$\frac{\|W\|}{\|\bar{W}\|} \leq v^*(Y, W) \leq \frac{\|W\|}{\min_i w_i} \tag{II.41}$$

et

$$W \leq v^*(Y, W) \bar{W} \quad (\text{II.42})$$

On a alors

$$\begin{aligned} \Delta v^* [Y(k), W(k)] &= \max_i \left( \frac{w_i(k+1)}{\bar{w}_i} \right) - \max_j \left( \frac{w_j(k)}{w_j} \right) \\ &= \max_i \left( \frac{h_i(k, Y(k), W(k)) + w_i(k)}{\bar{w}_i} \right) - v^* [Y(k), W(k)] \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

De (II.42) et des hypothèses sur H il suit

$$\begin{aligned} \Delta v^* (Y(k), W(k)) &\leq \max_i \left( \frac{h_i(k, Y(k), v^* [Y(k), W(k)] \bar{W}) + v^* [Y(k), W(k)] \bar{w}_i}{\bar{w}_i} \right) - \\ &\quad - v^* [Y(k), W(k)] \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Enfin, puisque  $v^* [Y(k), W(k)] \leq \bar{r}$ , de (II.40) il suit

$$\Delta v^* [Y(k), W(k)] \leq -\beta v^* [Y(k), W(k)]$$

ou

$$v^* [Y(k+1), W(k+1)] \leq (1-\beta) v^* [Y(k), W(k)]$$

Donc

$$v^* [Y(k), W(k)] \leq (1-\beta)^{k-k_0} \cdot v^* [Y_0, W_0]$$

Si on pose

$$\beta^* = \ln \frac{1}{1-\beta}$$

alors

$$v^* [Y(k), W(k)] \leq v^*(Y_0, W_0) \cdot \exp \left[ -\beta^*(k-k_0) \right]$$

et d'après (II.41)

$$\| W(k; k_0, Y_0, W_0) \| \leq \frac{\| \bar{W} \|}{\min_i w_i} \| W_0 \| \exp \left[ -\beta^*(k-k_0) \right]$$

c.q.f.d.



### II.5.3. - Applications

Nous proposons maintenant quelques applications des critères de stabilité de l'équilibre  $Y=0, W=0$  des systèmes de comparaison que nous avons établis dans les paragraphes précédents. Nous montrerons que pour quelques types de systèmes de comparaison ces critères prennent une forme algébrique simple.

#### II. 5. 3a - Système de comparaison linéaire invariant

Supposons que l'utilisation d'une fonction vectorielle de classe  $\mathcal{V}_x$  conduise à un système de comparaison du type

$$\mathcal{D}W(\tau) = AW(\tau) \quad (\text{II.43})$$

où la matrice carrée  $A = [a_{ij}]$  constante d'ordre  $s \times s$  a tous ses éléments hors diagonaux non-négatifs. Pour le cas discret, nous supposons de plus que les éléments diagonaux  $a_{ii}$  vérifient les inégalités  $-1 < a_{ii} < 0$ .

D'après les théorèmes (II.11) et (II.14), la solution d'équilibre  $W=0$  de (II.43) est exponentiellement stable s'il existe un vecteur  $\bar{W} \in \mathbb{R}_+^s$  à composantes positives tel que

$$A \bar{W} < 0$$

Or, d'après la théorie de M matrices cette condition est équivalente aux conditions de Sevastianov - Kotelyanski [16] :

$$a_{11} < 0, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, (-1)^s \det A > 0 \quad (\text{II.44})$$

#### II.5. 3b - Système de comparaison du type de Lur'e

L'utilisation d'une fonction vectorielle définie positive  $V(\tau, X)$  conduit dans certains cas à une inégalité de la forme suivante :

$$\mathcal{D}V[\tau, X(\tau)]_{(\text{IV.6})} \leq A V[\tau, X(\tau)] + B\theta(CV[\tau, X(\tau)]) \quad (\text{II.45})$$

où

$A = [a_{ij}]$  est une matrice carrée d'ordre  $s \times s$

$B = [b_{ij}]$  est une matrice d'ordre  $s \times m$

$c = [c_{ij}]$  est une matrice d'ordre  $m \times s$

La fonction  $\Theta(z) = [\theta_1(z_1), \dots, \theta_m(z_m)]^T$ ,  $\Theta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  est supposée appartenir soit à la classe

$$\Theta_1 = \left\{ \Theta: \frac{\theta_i(z_i)}{z_i} < \xi_i \quad i=1,2,\dots,m \quad \forall z \in \mathbb{R}^m \right\}$$

soit à la classe

$$\Theta_2 = \left\{ \Theta: \forall z_0 \in \mathbb{R}^m \exists \mathbb{I} \in \mathbb{R}_+^m: \frac{\theta_i(z_i)}{z_i} < \xi_i \right\}$$

où  $\mathbb{I} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]^T$  est un vecteur dont les composantes sont des nombres réels positifs.

Pour qu'une inégalité de la forme (II.45) conduise à un système de comparaison pour tout  $\Theta \in \Theta_1$  ou  $\Theta \in \Theta_2$  il est nécessaire que les éléments hors diagonaux de la matrice  $A$  sont non-négatifs et que la fonction

$$A W + B \Theta [C W]$$

possède la propriété  $\mathfrak{N}$ .

Par la suite nous supposerons que les fonctions  $\Theta$  sont non-décroissantes et que le couple des matrices  $(B, C)$  appartient à une des trois classes suivantes :

Première classe :

$$\begin{cases} b_{ij} \geq 0 & i=1,2,\dots,s & j=1,2,\dots,m \\ c_{ij} \geq 0 & i=1,2,\dots,m & j=1,2,\dots,s \end{cases}$$

Deuxième classe :

$$\begin{cases} b_{ii} \geq 0 & i = 1, 2, \dots, m \\ b_{ij} = 0 & i \neq j \\ c_{ij} \geq 0 & i \neq j \end{cases}$$

Troisième classe :

$$\begin{cases} b_{ij} \quad c_{jj} \geq 0 & i \neq j \\ c_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Sous les hypothèses ci-dessus le système de comparaison prend la forme suivante :

$$\mathcal{D} W(\mathcal{C}) = A W(\mathcal{C}) + B \Theta(C W) \quad (\text{II.46})$$

Ce système de comparaison a été initialement étudié par Lj. Grujić [25] qui a proposé comme conditions de stabilité le critère fréquentiel de Popov. Nous proposons ici d'autres critères plus simples basés sur les résultats obtenus dans les paragraphes précédents.

Considérons d'abord le cas où tous les éléments de la matrice B sont non-négatifs et la fonction  $\Theta$  appartient à la classe  $\mathcal{C}_1$ .

Théorème II.15

S'il existe un vecteur  $\bar{W} \in \mathbb{R}_+^s$  à composantes positives tel que

$$A \bar{W} + B \tilde{\Xi} \hat{W} < 0 \quad (\text{II.47})$$

où

$$\tilde{\Xi} = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

et  $\hat{W} = [\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_s]^T$  avec

$$\hat{w}_i = \max \left( 0, \sum_{j=1}^s c_{ij} \bar{w}_j \right)$$

alors l'état d'équilibre  $W=0$  de (II.46) est globalement exponentiellement stable pour tout  $\Theta \in \Theta_1$ .

*Démonstration*

Désignons par  $\bar{W}_0 = [\bar{w}_{01}, \dots, \bar{w}_{0s}]$  le vecteur défini par

$$C \bar{W} = \bar{W}_0$$

Puisque la fonction  $\Theta$  est supposée non-décroissante, alors pour tout  $r \in [0, \infty)$  et  $i=1, 2, \dots, s$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta_i \left( \sum_{j=1}^s c_{ij} r \bar{w}_j \right) &= \theta_i (r \bar{w}_{0i}) \\ &\leq \max (\theta_i (r \bar{w}_{0i}), 0) \\ &\leq \theta_i (r \hat{w}_i) \end{aligned}$$

De plus, puisque  $r \hat{w}_i \geq 0$ , de (II.47) il suit que

$$\theta_i (r \hat{w}_i) \leq r \sum_i \hat{w}_i$$

Ainsi

$$Ar\bar{W} + B\Theta(Cr\bar{W}) \leq Ar\bar{W} + B\sum_i r \hat{w}_i < -r\beta \bar{W}$$

pour tout  $r \in [0, \infty)$ , avec

$$\beta = \min_i \left( \frac{w_i^*}{\bar{w}_i} \right)$$

où  $W^* = A\bar{W} + B\sum_i \hat{w}_i$ ,  $W^* = [w_1^*, \dots, w_s^*]^T$ , et d'après les Théorèmes II.11 et II.14 la solution d'équilibre  $W=0$  de (IV 45) est globalement exponentiellement stable.

La condition de stabilité (IV.47) donnée dans ce théorème prend une forme particulière pour chacune des trois classes de couples (B,C) :

Première classe

Dans ce cas où tous les éléments des matrices B et C sont non-négatifs on obtient

$$\hat{W} = C \bar{W}$$

et la condition de stabilité exponentielle de l'équilibre  $W=0$  de (IV.23) prend la forme

$$(A + B \mp C) \bar{W} < 0 \quad (\text{IV.48})$$

Puisque la matrice  $A + B \mp C$  a tous ses éléments hors diagonaux non-négatifs, l'existence d'un vecteur  $\bar{W} \in \mathbb{R}_+^s$  à composantes positives vérifiant (IV.48) est garantie par les conditions de Sévastianov - Kotelyanski.

Deuxième classe

Pour cette classe de systèmes de comparaison nous donnons deux conditions simplifiées

1. Si la matrice  $A + B \mp C^*$  où  $C^* = [c_{ij}^*]$  avec  $c_{ij}^* = \max(0, c_{ij})$

satisfait aux conditions de Sévastianov-Kotelyanski, alors la solution d'équilibre  $W=0$  de (II.46) est globalement exponentiellement stable pour tout fonction  $\Theta \in \mathcal{O}_1$ , parce qu'il existe un vecteur  $\bar{W} \in \mathbb{R}_+^s$  à composantes positives tel que

$$\begin{aligned} r A \bar{W} + B \cdot \Theta(rC\bar{W}) &\leq rA\bar{W} + B \cdot \Theta(rC^*\bar{W}) \\ &\leq rA\bar{W} + rB \mp C^*\bar{W} \\ &< 0 \end{aligned}$$

pour tout  $r \in (0, \infty)$ .

Troisième classe

Si la matrice

$$A + B^* \Xi C$$

où  $B^* = [b_{ij}^*]$  avec  $b_{ij}^* = b_{ij}$   $i \neq j$ ,  $b_{ii}^* = \max [0, |b_{ii}| \text{sign}(c_{ii} b_{ii})]$ ,

satisfait aux conditions de Sevastianov-Kotelyanski alors la solution d'équilibre  $W=0$  de (II.46) est globalement exponentiellement stable pour tout  $\Theta \in \Theta_1$ .

Considérons maintenant le cas où la fonction  $\Theta$  appartient à  $\Theta_2$ :

Si le couple (B,C) appartient à la deuxième classe, alors l'existence d'un vecteur  $\bar{W} \in R_+^s$  à composantes positives tel que

$$A \bar{W} < 0$$

$$C \bar{W} \leq 0$$

garantie la stabilité exponentielle globale de la solution d'équilibre  $W=0$  de (II.47). En effet, sous ces conditions pour toute fonction  $\Theta$  appartenant à  $\Theta_2$ , le vecteur  $\bar{W}$  vérifie l'inégalité

$$r A \bar{W} + B \Theta(r C \bar{W}) \leq r A \bar{W} < 0$$

pour tout  $r \in [0, \infty)$ .

II.6 - CONCLUSIONS

Nous avons apporté dans ce chapitre un certain nombre de résultats concernant d'une part l'établissement d'un système de comparaison de type nouveau et d'autre part l'énoncé de conditions de stabilité partielle pour une classe particulière de systèmes dynamiques qui peuvent être considérés comme systèmes de comparaison.

Pour conclure ce chapitre, il nous paraît utile de faire les remarques suivantes :

1. De part la construction du système de comparaison si l'origine  $Y=0$ ,  $W=0$  est stable par rapport à  $W$ , alors elle est aussi stable par rapport à toutes les composantes  $[Y^T, W^T]^T$ . L'avantage de l'établissement d'un tel système de comparaison réside dans le fait que, vu sa forme particulière, l'étude de la stabilité partielle par rapport à  $W$  est, en général, moins ardue qu'une analyse directe du système initial. Notons aussi qu'on peut envisager l'établissement de méthodes d'analyse de stabilité qui donnent des conditions de stabilité moins dures que celles développées dans (II.15). De plus, il faut souligner que la possibilité de faire apparaître explicitement la variable  $X$  dans la fonction  $H[\tau, X, V(\tau, X)]$  peut conduire à des majorations moins dures que celles faites dans les travaux antérieurs (système de comparaison du type de Matrozov) et donc à une meilleure estimation de l'accroissement  $V(\tau, X)(s)$ .

2. Les résultats obtenus sur la stabilité par rapport à toutes les composantes du vecteur d'état  $X$  du système étudié se transpose directement dans le cas où l'on s'intéresse à la stabilité par rapport à une partie  $Z = [x_{q_1}, \dots, x_{q_m}]^T$ ,  $1 \leq q_m \leq n$ ,  $m < n$  de ses composantes. Pour cela, il suffit de choisir une fonction vectorielle  $V(\tau, X)$  de classe  $\mathcal{U}_Z$  pour établir le système de comparaison.

C H A P I T R E    I I I





## ESTIMATIONS DU DOMAINE DE STABILITE

---

### III.1 - INTRODUCTION

### III.2 - STABILITE GLOBALE

### III.3 - STABILITE LOCALE

III.3.1 - Système de comparaison défini dans tout l'espace d'état

III.3.2 - Système de comparaison défini dans un sous ensemble de l'espace d'état

III.3.2.a - Système de comparaison non linéaire.

III.3.2.b - Système de comparaison linéaire à coefficients constants.

### III.4 - CONCLUSION



### III.1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de l'estimation du domaine de stabilité asymptotique ou exponentielle de l'équilibre des systèmes complexes à l'aide du système de comparaison. Ce problème qui dans le cas non linéaire revêt effectivement une importance de tout premier plan, se pose aussi dans le cas de systèmes de comparaison linéaire à coefficients constants.

Dans un premier paragraphe, nous rappelons brièvement les conditions suffisantes pour l'établissement des propriétés de stabilité globale. Pour cela, il est nécessaire que les relations qui conduisent à l'établissement du système de comparaison soient vérifiées dans tout l'espace d'état du système complexe étudié.

Le problème de l'estimation des domaines des propriétés de stabilité locale est abordé dans le deuxième paragraphe. Ce problème nous l'envisagerons dans deux cas.

Dans le premier cas, le système de comparaison peut être considéré comme tel dans tout l'espace d'état, mais il ne possède qu'un domaine de stabilité borné. Il s'agit évidemment d'un système de comparaison non-linéaire.

Dans le deuxième cas, le système de comparaison ne peut être considéré comme tel que dans un sous-ensemble de son espace d'état, dit ensemble de validité de son espace d'état. Il faut donc déterminer l'ensemble des états initiaux du système de comparaison pour lesquels les trajectoires ne sortent pas de l'intersection des ensembles de validité et de stabilité.

Ce dernier problème a été pour la première fois abordé par S. Weissenberger [70] dans le cas des systèmes linéaires continus. Ce même problème a été aussi traité dans [10] et les résultats ont été étendus au cas des systèmes discrets [11]. Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être considérés comme une extension de ceux obtenus dans [9] pour le cas général des systèmes de comparaison non linéaires.

L'estimation de domaines de stabilité asymptotique ou exponentielle consiste à la recherche de domaines d'attraction, puisque les qualificatifs asymptotique et exponentielle dépendent soit des propriétés de stabilité, selon Lyapunov, de l'équilibre soit du comportement transitoire des trajectoires. Ainsi, par la suite, le terme stabilité sera employé indifféremment pour désigner soit la stabilité asymptotique soit la stabilité exponentielle.

III.2 - STABILITE GLOBALE

Soit le système dynamique

$$\mathcal{D} X(\tau) = F[\tau, X(\tau)] \quad (III.1)$$

défini pour tout  $(\tau, X) \in T \times R^n$ . Le choix d'une fonction  $V(\tau, X)$ ,  $V : T \times R^n \rightarrow R^s$  de classe  $\mathcal{V}_X$  permet d'établir l'inégalité

$$\mathcal{D} V[\tau, X(\tau)]_{(III.1)} \leq H(\tau, X(\tau), V[\tau, X(\tau)]) \quad (III.2)$$

que nous supposons vérifiée pour tout  $(\tau, X) \in T \times R^n$ ,

$H : T \times R^n \times R^s \rightarrow R^s$  étant une fonction possédant la propriété  $\mathcal{H}$ . Le système de comparaison s'établit donc comme suit :

$$\mathcal{D} Y(\tau) = F[\tau, Y(\tau)] \quad (III.3a)$$

$$\mathcal{D} W(\tau) = H[\tau, Y(\tau), W(\tau)] \quad (III.3b)$$

Si la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  de (II.3) est asymptotiquement  $w$ -stable (exponentiellement  $w$ -stable) dans un domaine  $R^n \times \mathcal{R}(W)$ ,  $\mathcal{R}(W) \subseteq R^s$  tel que pour tout  $(\tau, Y) \in T \times R^n$  il existe un  $W' \in \mathcal{R}(W)$  qui vérifie l'inégalité

$$V(\tau, Y) \leq W' \quad (III.4)$$

alors l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1) est globalement asymptotiquement stable (exponentiellement stable).

En effet, de (III.2) il suit que

$$V[\tau; X(\tau; \tau_0, X_0)] \leq W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0) \quad (III.5)$$

pour tout  $(\tau_0, X_0) \in T \times R^n$ ,  $\tau \in T_0$ , avec  $X_0 = Y_0$  et  $W_0 = V(\tau_0, X_0)$ . De plus, il existe un  $W' \in \mathcal{R}(W)$  tel que  $V(\tau_0, X_0) = W_0 \leq W'$

donc :

$$W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0) \leq W(\tau; \tau_0, Y_0, W') \quad \forall \tau \in T_0$$

et de (III.5) et de l'hypothèse que  $V(\tau, X)$  est de classe  $\mathcal{V}_X$  il vient

$$0 \leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \max_i (v_i[\tau, X(\tau; \tau_0, X_0)]) \leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|W(\tau; \tau_0, Y_0, W')\| = 0$$

d'où

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \|X(\tau; \tau_0, X_0)\| = 0$$

pour tout  $(\tau_0, X_0) \in T \times \mathbb{R}^n$ .

Le cas le plus souvent rencontré dans les applications et celui où la fonction  $V$  utilisée est définie positive et radialement non bornée. Dans ce cas, pour qu'on puisse conclure sur la stabilité globale de l'équilibre  $X = 0$  de (III.1) il faut que  $\mathcal{R}(W) = \mathbb{R}_+^s$ . Nous illustrons cela dans l'exemple suivant :

Exemple III.1

Soit le système

$$D \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 + 2\sqrt{2} \cdot x_3 + x_1 x_3 - 3x_1 (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ -3x_2 + 2\sqrt{2} \cdot x_3 + x_2 x_3 - 3x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ -4x_3 - 4x_3 |x_3| + (3+x_3)(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

et la fonction vectorielle définie positive  $V(x) = [v_1(x), v_2(x)]^T$  où

$$v_1(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$v_2(x) = |x_3|$$

On obtient alors

$$DV(x)_{(\text{III.6})} \leq \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3v_1^2 + v_1 v_2 \\ -4v_2^2 + v_1 v_2 \end{bmatrix}$$

pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ , d'où le système de comparaison

$$D(W) = H(W) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3w_1^2 + w_1 w_2 \\ -4w_2^2 + w_1 w_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

On peut remarquer que l'approximation linéaire ne permet de conclure ni sur la stabilité de (III.6) ni sur celle de (III.7).

Cependant si  $\bar{W} = \left[ \frac{4}{3}, 1 \right]^T$ , alors

$$H(rW) \leq - \begin{bmatrix} 4r^2 \\ \frac{8}{3} r^2 \end{bmatrix} \quad \forall r \in [0, \infty)$$

donc, d'après le corollaire II.2 la solution d'équilibre  $W=0$  du système de comparaison (III.7) est globalement uniformément asymptotiquement stable dans  $\mathbb{R}_+^2$ . Par conséquent, puisque la fonction  $V(X)$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+^2$  et admet une borne supérieure infiniment petite, il suit que l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.6) est aussi globalement uniformément asymptotiquement stable.

### III.3 - STABILITE LOCALE

Il y a deux cas où on ne peut pas conclure sur la stabilité globale de l'équilibre  $X=0$  de (III.1) par une étude de son système de comparaison (III.3). Dans le premier, l'inégalité (III.2) est vérifiée pour tout  $(\tau, X) \in T \times \mathbb{R}^n$ , mais le système de comparaison n'est  $W$ -stable que dans un domaine  $\mathcal{R}(Y, W)$ . Il peut alors exister des couples  $(\tau, X) \in T \times \mathbb{R}^n$  tels que  $\Psi(Y, W) \in \mathcal{R}(Y, W)$  les relations

$$Y = X$$

$$W \cong V(\tau, X)$$

ne peuvent être vérifiées.

Dans le deuxième cas, l'inégalité (III.2) n'est vérifiée que pour  $X$  appartenant à  $\mathcal{R}(x)$  où  $\mathcal{R}(x)$  est un sous-ensemble au sens strict de  $\mathbb{R}^n$ . Nous allons considérer séparément ces deux cas.

#### III.3.1 - Système de comparaison défini dans tout l'espace d'état

Supposons que l'inégalité (III.2) soit vérifiée pour tout  $(\tau, X) \in T \times \mathbb{R}^n$  et que l'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison soit  $w$ -stable dans  $\mathcal{R}(Y, W) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ . Nous pouvons distinguer deux cas.



Premier cas

Le domaine de W-stabilité  $\mathcal{R}(Y,W)$  peut se mettre sous la forme  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{R}(W)$  où  $\mathcal{R}(W) \subset \mathbb{R}^s$ . C'est le cas où la fonction  $H$  de l'inégalité (II.2) ne dépend pas explicitement de  $X$ . C'est également le cas lorsque le domaine de W-stabilité du système de comparaison se présente sous la forme  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{R}(W)$  où

$$\mathcal{R}(W) = \{W \in \mathbb{R}_+^s : W \leq \bar{W}\}$$

comme les domaines établis dans le Chapitre II.

alors :

$$\mathcal{R}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall z \in T \exists W \in \mathcal{R}(W) : v(z,x) \leq W)\}$$

est un domaine de stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1).

La démonstration de cette propriété est analogue à celle donnée pour la stabilité globale.

Deuxième cas

Supposons maintenant que le domaine de W-stabilité  $\mathcal{R}(Y,W)$  de l'équilibre  $Y=0, W=0$  de (III.3) ne peut pas se mettre sous la forme  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{R}(W)$ , il s'agit donc du cas où la fonction  $H$  dépend explicitement de  $X$ .

Ici aussi on peut affirmer que le domaine

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : (\forall z \in T \exists (Y,W) \in \mathcal{R}(Y,W) : X=Y \text{ et } v(z,X) \leq W) \right\}$$

est un domaine de stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1).

Ces estimations du domaine de stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1) sont basées sur l'estimation du domaine de W-stabilité de l'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (III.3), ces derniers domaines pouvant être établis par l'utilisation de méthodes différentes que celles présentées dans le chapitre précédent.

Toutefois, dans certains cas on peut établir une estimation du domaine de stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1) par la construction d'une fonction de Lyapunov du type de Rosenbrock [55]. Nous allons montrer cela dans le cas de la stabilité asymptotique uniforme d'un système continu ; les autres cas étant analogues vu les démonstrations des théorèmes sur les conditions de stabilité de comparaison que nous avons présentées dans le Chapitre II.

Théorème III.1

S'il existe un vecteur  $\bar{w} \in \mathbb{R}_s^s$  à composantes positives tel que

$$H(t, X, r\bar{w}) \leq -\Psi(t, X, r)$$

pour tout  $t \in T$ ,  $r \in [0, \bar{r}]$ ,  $\bar{r} > 0$  et  $X \in \mathcal{R}(x)$  où

$$\mathcal{R}(x) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : v(t, X) \leq \bar{r}\bar{w} \quad \forall t \in T \right\}$$

les composantes de la fonction  $\Psi(t, X, r)$ ,  $\Psi : T^c \times \mathcal{R}(X) \times [0, \bar{r}]$  étant définies positives par rapport à  $r$  dans  $[0, \bar{r}]$  et la fonction  $H$  possédant la propriété  $\mathcal{H}$  dans  $T \times \mathcal{R}(x) \times \mathbb{R}_+^3$ , alors  $\mathcal{R}(X)$  est un domaine de stabilité asymptotique uniforme de l'état d'équilibre  $X = 0$  de (III.1).

*Démonstration*

Choisissons la fonction

$$v^*(t, X) = \max_i \frac{v_i(t, X)}{\bar{w}_i} \tag{III.8}$$

comme fonction de Lyapunov pour le système (III.1)

Désignons par  $q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$   $m \leq s$  les indices pour lesquels

$$v^*(t, X) = \frac{v_{q_j}(t, X)}{\bar{w}_{q_j}} \tag{III.8}$$

alors  $v_i(t, X) < \bar{w}_i$ ,  $v^*(t, X)$   $i=1, 2, \dots, s$   $i \neq q_j$

Donc

$$Dv^*[(t, X(t))]_{(III.1)} \leq \max_{q_j} \left( \frac{1}{\bar{w}_{q_j}} v_{q_j} [t, X(t)]_{(III.1)} \right)$$

et de (III.2)

$$Dv^*[t, X(t)]_{(III.1)} \leq \max_{q_j} \left( \frac{1}{\bar{w}_{q_j}} h_{q_j} [t, X(t), v(t, X(t))] \right)$$

De (III.8) et compte-tenu de l'hypothèse sur H, il suit que

$$Dv^*[t, X(t)]_{(III.1)} \leq \max_{q_j} \left( \frac{1}{w_{q_j}} \cdot h_{q_j} [t, X(t), v^*[t, X(t)] \bar{w}] \right)$$

et puisque  $v^*[t, X] \in [0, \bar{r}]$  pour tout  $(t, X) \in T^d \times \mathcal{R}(X)$  on obtient

$$Dv^*[t, X(t)]_{(III.1)} \leq \max_{q_j} \left( - \frac{1}{w_{q_j}} \gamma_{q_j} (t, X(t), v^*[t, X(t)] \bar{w}) \right)$$

donc  $Dv^*[t, X(t)]_{(III.1)}$  est définie négative dans  $\mathcal{R}(X)$

De plus, puisque

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X : X \in \mathbb{R}^n, v^*(t, X) \leq \bar{r} \right\}$$

$\mathcal{R}(X)$  est un domaine de stabilité asymptotique uniforme de l'équilibre  $X=0$  de (III.1)

*Exemple III.2*

Soit le système dynamique discret  $\Delta X(k) = F [k, X(k)]$

$$\Delta \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0,2\sin(k) & 0,5\theta[X(k)] \\ -0,25 & -1 & 0,2\theta[X(k)] \\ 0 & 0,5X(k)\cos(k) & -0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (III.9)$$

où  $X = [x_1, x_2, x_3]^T$

Le choix de la fonction vectorielle  $V(X) = [v_1, v_2, v_3]^T$

où  $v_i(x) = |x_i|$  conduit au système de comparaison

$$\Delta Y(k) = F [k, Y(k)]$$

$$\Delta W(k) = H [Y(k)] \cdot W(k)$$

H étant la matrice carrée d'ordre  $n \times n$  définie par

$$H = \begin{bmatrix} -0,9 & 0,2 & 0,5|\theta[Y(k)]| \\ 0,25 & -1 & 0,2|\theta[Y(k)]| \\ 0 & 0,5|\theta[Y(k)]| & -0,8 \end{bmatrix}$$

Vu la forme de la matrice H, il est évident que si pour un  $Y_0 \in \mathbb{R}^3$  il existe un vecteur  $\bar{W} \in \mathbb{R}_+^3$  à composantes positives tel que

$$H(Y_0) \bar{W} < 0$$

alors cette inégalité est aussi vérifiée pour tout  $Y \in \mathbb{R}^3 : |\theta(Y)| \leq |\theta(Y_0)|$ . L'existence d'un tel vecteur est garantie par les conditions de Sevastyanov Kotelyanski [16]. On obtient alors  $|\theta(Y)| \leq |\theta(Y_0)| = 2,1$

Soit  $W_0 \in \mathbb{R}_+^3$  le vecteur propre de la matrice  $H(Y_0)$  correspondant à la plus grande valeur propre. Ce vecteur est à composantes strictement positives et vérifie l'inégalité

$$H(Y_0) W_0 < 0$$

Si donc  $\alpha$  est le plus grand nombre réel positif pour lequel

$$V(X) \leq \alpha W_0 \Rightarrow |\theta(X)| \leq 2,1$$

alors

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq \alpha w_{0i} \quad i=1,2,3 \right\}$$

est un domaine de stabilité exponentielle de l'état d'équilibre  $X = 0$  de (III.9).

### III.3.2 - Système de comparaison défini dans un sous-ensemble de l'espace d'état

Dans les applications du principe de comparaison, souvent l'inégalité (III.2) n'est vérifiée que pour  $X \in \mathcal{R}^*(x)$ ,  $\mathcal{R}^*(x)$  étant un sous-ensemble au sens stric de  $\mathbb{R}^n$ .

C'est le cas par exemple lorsque nous imposons d'avance la forme de la fonction H. [9] [10] [65] [71].

Dans ces cas le système (III.3) ne peut être considéré comme système de comparaison de (III.1) que pour  $Y \in \mathcal{R}^*(X)$ , sans toutefois pouvoir affirmer que  $\mathcal{R}^*(X)$  est un domaine de stabilité de l'équilibre  $X=0$ .

Supposons que l'état d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison soit  $W$ -stable alors  $\mathcal{R}(Y, W)$ . Le domaine de stabilité qu'on peut établir par une étude du système de comparaison ne peut donc être qu'un sous-ensemble de

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathcal{R}^*(X) : \forall \tau \in T \exists (Y, W) \in \mathcal{R}(Y, W) : X=Y, V(\tau, X) \leq W \right\}$$

On peut conclure que  $\mathcal{R}(X)$  est un domaine de stabilité de l'équilibre  $X=0$  de (III.1) si pour tout  $(\tau, X_0) \in T \times \mathcal{R}^*(X)$  il suit que  $X(\tau; \tau_0, X_0) \in \mathcal{R}^*(X) \forall \tau \in T_0$ .

Par la suite nous allons considérer ce problème dans le cas le plus souvent rencontrée dans les applications; c'est-à-dire lorsque la fonction vectorielle  $V(\tau, X)$  utilisée pour construire le système de comparaison est définie positive dans  $\mathbb{R}^n$ , ce qui nous conduit à étudier la stabilité du système de comparaison dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^s$ .

### III.3.2a - Système de comparaison non linéaire

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une propriété importante du système de comparaison est que si  $W_0 \leq W'_0$  alors

$$W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0) \leq W(\tau; \tau_0, Y_0, W'_0)$$

pour tout  $(\tau_0, Y_0) \in T \times \mathbb{R}^n$  et  $\tau \in T_0$ . De plus, si  $W_0 \in \mathbb{R}_+^s$  alors  $W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0) \geq 0$  pour tout  $(\tau_0, Y_0) \in T \times \mathbb{R}^n$  et  $\tau \in T_0$ .

Une conséquence immédiate de ces propriétés est que si  $(Y_0, W'_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^s$  appartient au domaine de  $W$ -stabilité de l'équilibre  $Y=0, W=0$  de (III.3), alors tout couple  $(Y_0, W_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^s : W_0 \leq W'_0$  appartient aussi à ce domaine.

Ainsi, par la suite nous supposons que nous connaissons des estimations du domaine de W-stabilité de l'équilibre  $Y=0$ ,  $W=0$  du système de comparaison du type  $\mathcal{R}(Y) \times \mathcal{R}(W)$  où

$$\mathcal{R}(W) = \left\{ W \in \mathbb{R}_+^s : W \leq W_0 \right\}$$

où  $W_0 \in \mathbb{R}_+^s$  est un vecteur à composantes positives. Nous n'excluons pas le cas où certaines des composantes  $w_{0i}$   $i=1,2,\dots,s$  de ce vecteur sont infinies ce qui signifie que l'ensemble  $\mathcal{R}(W)$  peut être défini par

$$\mathcal{R}(W) = \left\{ W \in \mathbb{R}_+^s : w_{qj} \leq w_{0qj} \quad j = 1, 2, \dots, m \right\}$$

où  $w_{0qj}$  sont les composantes de  $W_0$  à valeurs finies.

De la même façon, nous supposons que le domaine  $\mathcal{R}^*(X)$  où l'inégalité (III.2) est vérifiée, est donné par

$$\mathcal{R}^*(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : v(\tau, X) \leq v_0 \quad \forall \tau \in T \right\}$$

où certaines des composantes  $v_{0j}$  du vecteur  $\bar{V}_0$  peuvent être infinies.

Désignons par  $W_s^*$  le vecteur  $W^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_s^*]^T$  où  $w_i^* = \min(w_{0i}, v_{0i})$ ,  $i=1,2,\dots,s$ . Sans perte de généralité nous supposons par la suite que les  $q$  premières composantes  $w_i^*$ ,  $i=1,2,\dots,q$   $q \leq s$  sont finies et les  $s-q$  composantes  $w_i^*$ ,  $i=q+1,\dots,s$  sont infinies. Si donc nous posons  $W_1^* = [w_1^*, \dots, w_q^*]^T$  alors le plus grand domaine qu'on puisse établir pour une étude du système de comparaison est donné par

$$\mathcal{R}_{\max}(X) = \left\{ X : X \in \mathcal{R}(Y), v_j(\tau, X) \leq W_1^* \quad \forall \tau \in T \right\}$$

où  $V_1 = [v_1, v_2, \dots, v_q]^T$ . Toutefois,  $\mathcal{R}_{\max}(X)$  n'est un domaine de stabilité de l'équilibre  $X=0$  de (III.1) que si pour tout  $(\tau_0, X_0) \in T \times \mathcal{R}_{\max}(X)$ ,  $X(\tau; \tau_0, X_0) \in \mathcal{R}^*(X)$  pour tout  $\tau \in T_0$ .

Théorème III.2

S'il existe un vecteur  $\bar{W} = [\bar{W}_1^T, \bar{W}_2^T]^T$  où  $\bar{W}_1 \in \mathbb{R}_+^q, \bar{W}_2 \in \mathbb{R}^{s-q}$   
 $\bar{W}_1 \leq W_1^*$  à composantes positives, tel que

$$H[\tau, X, \bar{W}] \leq 0 \quad (\text{III.11})$$

pour tout  $(\tau, X) \in T \times \mathcal{R}(X)$  où

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : V(\tau, X) \leq \bar{W} \quad \forall \tau \in T \right\} \quad (\text{III.12})$$

alors  $\mathcal{R}(X)$  est un domaine de stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1).

*Démonstration*

Il suffit de montrer que pour tout  $(\tau_0, X_0) \in T \times \mathcal{R}(X)$  il suit que

$$V[\tau, X(\tau; \tau_0, X_0)] \leq \bar{V}_0 \quad \forall \tau \in T_0 \quad (\text{III.13})$$

et

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} V[\tau, X(\tau; \tau_0, X_0)] = 0 \quad (\text{III.14})$$

parce que dans ce cas  $X(\tau; \tau_0, X_0) \in \mathcal{R}^*(X) \quad \forall \tau \in T_0$  et  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} X(\tau; \tau_0, X_0) = 0$ .

Des (III.11), (III.12) et des hypothèses sur la fonction  $H$ , pour tout  $(\tau_0, Y_0) \in T \times \mathcal{R}(X)$  il suit que

$$W(\tau; \tau_0, Y_0, \bar{W}) \leq \bar{W} \quad \forall \tau \in T$$

et puisque  $(Y_0, \bar{W}) \in \mathcal{R}(Y) \times \mathcal{R}(W)$ , on obtient

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} W(\tau; \tau_0, Y_0, \bar{W}) = 0$$

Ainsi, si  $(\tau_0, X_0) \in T \times \mathcal{R}(X)$  alors  $V(\tau_0, X_0) \leq \bar{W} \leq W^* \leq V_0$ .

Donc

$$0 \leq V[\tau; X(\tau; \tau_0, X_0)] \leq W(\tau; \tau_0, Y_0, \bar{W}) \leq \bar{W} \leq V_0 \quad \forall \tau \in T_0$$

avec  $Y_0 = X_0$ ; D'où les relations (III.13) et (III.14).

De ce théorème il suit naturellement le corollaire suivant qui donne une condition pour que  $\mathcal{R}_{\max}(X)$  soit un domaine de stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1).

*Corollaire III.1*

Si l'inégalité

$$H_1(\tau, X, [W_1^*, W_2^T])^T \leq 0$$

est vérifiée pour tout  $(\tau, X, W_2) \in T \times \mathcal{R}_{\max}(X) \times \mathbb{R}_+^{s-q}$  où  $H_1 = [h_1, \dots, h_q]^T$  alors  $\mathcal{R}_{\max}(X)$  est un domaine de stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1).

### III.3.2.b - Système de comparaison linéaire à coefficients constants

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment les résultats du paragraphe précédent se transposent dans le cas où le système de comparaison est du type

$$\mathcal{D}W(\tau) = AW(\tau) \quad (\text{III.15})$$

A étant une matrice carrée à coefficients constants. Cela nous permettra d'étendre ces résultats en tenant compte des particularités de tels systèmes.

Afin de faciliter la présentation nous partitionnons la matrice A comme suit

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

ou les matrices  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  sont de dimensions  $q \times q$ ,  $q \times (s-q)$ ,  $(s-q) \times q$  et  $(s-q) \times (s-q)$  respectivement. Nous désignons aussi par  $V_{o1} = [v_{o1}, v_{o2}, \dots, v_{oq}]^T$  le sous vecteur de  $V_o$  formé par les composantes à valeurs finies.



Ainsi, le Théorème III.2 se transpose dans le cas du système de comparaison (III.15) comme suit :

S'il existe un vecteur  $\bar{w} = [\bar{w}_1^T, \bar{w}_2^T]^T$ ,

$$\bar{w}_1 \in \mathbb{R}_+^q, \bar{w}_2 \in \mathbb{R}_+^{s-q}$$

$\bar{w}_1 \leq w_1^*$  à composantes positives tel que

$$A\bar{w} \leq 0$$

alors

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : v(\tau, X) \leq \bar{w} \quad \forall \tau \in T \right\}$$

est un domaine de stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1).

Notons que la stabilité exponentielle de l'équilibre  $w=0$  de (III.15) garantit l'existence d'un tel vecteur [16] et le problème qui reste est celui de maximiser en un sens l'estimation  $\mathcal{R}(X)$  choix convenable du vecteur  $\bar{w}$ .

1. Dans le cas que nous étudions le plus grand domaine de stabilité de l'équilibre de (III.1) qu'on puisse établir par une étude de la stabilité du système de comparaison (III.15) est donné par

$$\mathcal{R}_{\max}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : v_1(\tau, X) \leq v_{01} \quad \forall \tau \in T \right\}$$

Ainsi, la condition donnée au corollaire III.1 se transpose pour ce cas comme suit :

Si

$$A_{11}v_{01} \leq 0 \tag{III.16}$$

et

$$A_{12} = 0 \tag{III.17}$$

alors  $\mathcal{R}_{\max}(X)$  est un domaine de stabilité de l'état d'équilibre  $X=0$  de (III.1).

En effet pour que

$$H_1 \left( [v_{01}^T, w_2^T]^T \right) = A_{11}v_{01} + A_{12}w_2 \leq 0$$

soit vérifiée pour tout  $w_2 \in \mathbb{R}_+^{s-q}$ , il faut que  $A_{12}=0$  et  $A_{11}v_{01} \leq 0$

Notons que les conditions (III.16) et (III.17) ont été initialement établies par S.Weissenberger [70] dans le cas d'un système de comparaison continu, à l'aide d'une fonction de Lyapunov de type de Rosenbrock [55].

Exemple III.3

Soit le système S suivant composé de trois sous-systèmes interconnectés entre eux :

$$S_1 : \quad DX_1 = F_1(X_1, t) + G_1(X, t)$$

$$S_2 : \quad DX_2 = F_2(X_2) + G_2(X, t)$$

$$S_3 : \quad DX_3 = F_3(X_3) + G_3(X, t)$$

où  $X = [X_1^T, X_2^T, X_3^T]^T$ ,  $X_1 = [x_{11}, x_{12}]^T$ ,  $X_2 = [x_{21}]$ ,  $X_3 = [x_{31}, x_{32}]^T$

et

$$F_1(t, X_1) = \begin{bmatrix} \left( x_{11} - \frac{2 + 3t^2}{1 + t^2} x_{12} \right) \left( \sqrt{x_{11}^2 + x_{12}^2} - 9 \right) \\ \left( \frac{1 + 2t^2}{1 + t^2} x_{11} - x_{12} \right) \left( \sqrt{x_{11}^2 + x_{12}^2} - 9 \right) \end{bmatrix}$$

$$F_2(t, X_2) = \begin{bmatrix} -3x_{21} + x_{21}^2 \end{bmatrix}$$

$$F_3(t, X_3) = \begin{bmatrix} -2x_{31} + \frac{3}{2}x_{32} \\ -x_{31} - 2x_{32} \end{bmatrix}$$

Les fonctions  $G_1 = [g_{11}, g_{12}]^T$ ,  $G_2 = g_{21}$ ,  $G_3 = [g_{31}, g_{32}]^T$  définies pour tout  $(t, X) \in T \times R^5$  satisfont aux inégalités:

$$|x_{11} g_{11}| + |x_{12} g_{12}| \leq \left( \frac{2}{3} \|X_1\| + \frac{1}{3} a \|X_2\| + b \|X_3\| \right) \|X_1\|$$

$$\forall X_1 \in \mathbb{R}^2, X_3 \in \mathbb{R}^2, X_2 \in \mathbb{R} : \|X_2\| \leq \frac{4}{5} \text{ et } t \in T$$

$$|x_{21} g_{21}| \leq \left( c \|X_1\| + \frac{1}{5} \|X_2\| + d \|X_3\| \right) \|X_2\|$$

$$\forall X_2 \in \mathbb{R}, X_3 \in \mathbb{R}^2, X_1 \in \mathbb{R}^2 : \|X_1\| \leq 4 \text{ et } t \in T$$

$$|x_{31} g_{31}| + |x_{32} g_{32}| \leq \left( \|X_1\| + e \|X_3\| \right) \|X_3\|$$

$$\forall X_1 \in \mathbb{R}^2, X_2 \in \mathbb{R}, X_3 \in \mathbb{R}^2 \text{ et } t \in T^c$$

où  $a, b, c, d$ , et  $e$  sont des paramètres réels non négatifs et  $\|\cdot\|$  la norme Euclidienne :  $\|X\| = (X^T X)^{1/2}$ . Le problème consiste à établir des conditions sur ces paramètres garantissant la stabilité asymptotique du système S et à estimer le domaine de stabilité.

$$v_1 = \sqrt{\frac{1 + 2t^2}{1 + t^2} x_{11}^2 + \frac{2 + 3t^2}{1 + t^2} x_{12}^2}$$

$$v_2 = |x_{21}|$$

$$v_3 = \sqrt{x_{31}^2 + 3x_{32}^2}$$

Si nous désignons par  $S'_i$   $i=1,2,3$  les sous-systèmes isolés

$$S'_i: \quad DX_i = F_i(t, X_i)$$

alors

$$Dv_1(S'_1) \leq v_1 (\sqrt{x_{11}^2 + x_{12}^2} - 9) + v_1$$

$$\leq v_1 (v_1 - 8)$$

$$Dv_2(S'_2) \leq -3|x_{21}| + x_{21}^2$$

$$\leq v_2 (v_2 - 3)$$

$$Dv_3(S'_3) = -2 v_3$$

De plus :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial X_1} \right]^T G_1 &= \frac{1}{v_1} \cdot \left[ \frac{1 + 2t^2}{1 + t^2} x_{11}, \frac{2 + 3t^2}{1 + t^2} x_{12} \right]^T \cdot G_1 \\ &\leq \frac{1}{v_1} \cdot \frac{2 + 3t^2}{1 + t^2} (|x_{11}g_{11}(X,t)| + |x_{12}g_{12}(X,t)|) \\ &\leq \frac{1}{v_1} \cdot \frac{2 + 3t^2}{1 + t^2} \left( \frac{2}{3} \|X_1\| + \frac{1}{3} a \|X_1\| + b \|X_3\| \right) \|X_1\| \\ &\leq 2 v_1 + a v_2 + 3 b v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial v_2}{\partial X_2} \right] G_2 &= \frac{x_{21}}{v_2} \cdot G_2 \\ &\leq c \|X_1\| + \frac{1}{5} \|X_2\| + d \|X_3\| \\ &\leq c v_1 + \frac{1}{5} v_2 + d v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right]^T G_3 &= \frac{1}{v_3} \cdot (x_{31} g_{31} + x_{32} g_{32}) \\ &\leq \frac{3}{2v_3} \cdot (\|x_1\| + e \|x_3\|) \cdot \|x_3\| \\ &\leq \frac{3}{2} v_1 + \frac{3}{2} e v_3 \end{aligned}$$

ainsi nous obtenons :

$$DV[t, X(t)] \underset{(S)}{\leq} \begin{bmatrix} v_1 - 8 + 2 & a & 3b \\ c & v_2 - 3 + \frac{1}{5} & d \\ \frac{3}{2} & 0 & -2 + \frac{3}{2}e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (III.18)$$

pour  $X \in \mathcal{R}^*(X)$ , où

$$\mathcal{R}^*(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^5 : v_1(x_1) \leq 4, v_2(x_2) \leq \frac{4}{5} \right\}$$

Nous pouvons alors écrire

$$DV(t) \underset{(S)}{\leq} \begin{bmatrix} -2 & a & 3b \\ c & -2 & d \\ \frac{3}{2} & 0 & -2 + \frac{3}{2}e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

pour  $V_1 \leq V_{01}$  où  $V_1 = [v_1, v_2]^T$  et  $V_{01} = [4, \frac{4}{5}]^T$ .

D'où le système de comparaison :

$$DW = A W = \begin{bmatrix} -2 & a & 3b \\ c & -2 & d \\ \frac{3}{2} & 0 & -2 + \frac{3}{2} e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Vu la forme des composantes  $v_i$ ,  $i=1,2,3$  de la fonction vectorielle  $V$  utilisée pour l'établissement de l'inégalité (III.18), la stabilité exponentielle de l'équilibre  $W = 0$  du système de comparaison (III.19) implique la stabilité exponentielle de l'état d'équilibre  $X=0$  de  $S$  mais on ne peut pas affirmer que cette propriété est globale.

Le plus grand domaine de stabilité exponentielle

$\mathcal{R}_{\max}(X)$  qu'on peut établir est le domaine  $\mathcal{R}^*(X)$ . Pour cela, d'après (III.16) et (III.17), il faut que

$$A_{11} V_{01} = \begin{bmatrix} -2 & a \\ c & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \leq 0$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 3b \\ d \end{bmatrix} = 0$$

Donc, il faut que

$$ac < 4$$

$$b = 0$$

$$d = 0$$

De plus il faut que

$$e < \frac{4}{3}$$

afin de garantir la stabilité exponentielle de l'équilibre  $W=0$  de III.18. Sous ces conditions l'équilibre  $X=0$  de  $S$  est exponentiellement stable dans le domaine

$$\mathcal{R}_{\max}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^5 : \sqrt{\frac{1+2t^2}{1+t^2} x_{11}^2 + \frac{2+3t^2}{1+t^2} x_{12}^2} \leq 4 \quad \forall t \in \mathbb{T}^c, \right. \\ \left. |x_{21}| \leq \frac{4}{5} \right\}.$$

2. Supposons maintenant que nous ne pouvons pas affirmer que  $\mathcal{R}_{\max}(X)$  soit un domaine de stabilité de l'équilibre  $X=0$  de (III.1), ce qui signifie que les conditions (III.16-17) ne sont pas vérifiées. Nous allons donc chercher un vecteur maximal [40]  $\tilde{W} = [\tilde{W}_1^T, \tilde{W}_2^T]^T$ ,  $\tilde{W}_1 \in \mathbb{R}^q$ ,  $\tilde{W}_2 \in \mathbb{R}_+^{s-q}$ ,  $\tilde{W}_1 \leq W_1^*$  qui satisfait à l'inégalité

$$A \tilde{W} \leq 0 \tag{III.20}$$

Un vecteur maximal  $\tilde{W}$  possède la propriété donnée dans le théorème suivant /9/.

Théorème III.3

Si  $\tilde{W} \in \mathbb{R}_+^s$  est un vecteur maximal qui vérifie (III.20), alors il existe un indice  $p$ ,  $1 \leq p \leq q$  tel que

$$\sum_{j=1}^s a_{pj} \tilde{w}_j = 0 \tag{III.21}$$

$$\tilde{w}_p = w_p^* \tag{III.22}$$

*Démonstration*

D'abord nous allons montrer qu'il existe au moins un indice  $p$ ,  $1 \leq p \leq q$  tel que

$$\sum_{j=1}^s a_{pj} \tilde{w}_j = 0 \tag{III.23}$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun indice  $p$ ,  $1 \leq p \leq q$  vérifiant (III.23), on a alors

$$A_{11} \tilde{W}_1 + A_{12} \tilde{W}_2 < 0 \\ A_{21} \tilde{W}_1 + A_{22} \tilde{W}_2 \leq 0$$

avec  $\tilde{W} = [ \tilde{W}_1^T, \tilde{W}_2^T ]^T$ . Donc il existe un nombre réel positif

$r : r > 1$  tel que

$$A_{11} \tilde{W}_1 + A_{12} r \tilde{W}_2 \leq 0$$

$$A_{21} \tilde{W}_1 + A_{22} r \tilde{W}_2 \leq A_{21} \tilde{W}_1 + A_{22} \tilde{W}_2 \leq 0$$

ce qui contredit l'hypothèse que  $\tilde{W}$  est le vecteur maximal.

Soit, maintenant  $p_i \quad i=1,2,\dots,m \quad m < s$ , les indices pour lesquels

$$\sum_{j=1}^q a_{p_i j} \tilde{w}_j = 0$$

Nous pouvons alors mettre l'expression  $\tilde{A}\tilde{W} \leq 0$  sous la forme

$$A_{mm} \tilde{W}_m + A_{m\bar{m}} \tilde{W}_{\bar{m}} = 0 \tag{III.24}$$

$$A_{\bar{m}m} \tilde{W}_m + A_{\bar{m}\bar{m}} \tilde{W}_{\bar{m}} < 0 \tag{III.25}$$

où  $\tilde{W}_m = [ \tilde{w}_{p_1}, \tilde{w}_{p_2}, \dots, \tilde{w}_{p_m} ]^T$ ,  $\tilde{W}_{\bar{m}} = [ \tilde{w}_{\bar{p}_1}, \tilde{w}_{\bar{p}_2}, \dots, \tilde{w}_{\bar{p}_{(s-m)}} ]^T$

$p_i \neq p_j$  et  $A_{mm}, A_{m\bar{m}}, A_{\bar{m}m}, A_{\bar{m}\bar{m}}$  sont des sous-matrices convenables de  $A$ .

Nous venons de montrer que parmi les indices  $p_i$  il existe au moins un qui vérifie  $1 \leq p_i \leq q$ . Pour compléter la démonstration, il faut montrer que pour un tel indice  $\tilde{w}_{p_i} = w_{p_i}^*$ .

Supposons pour l'instant qu'il n'existe aucun indice  $p_i : 1 \leq p_i \leq q$  tel que  $\tilde{w}_{p_i} = w_{p_i}^*$ .

Puisque  $A_{mm}$  satisfait aux conditions de Sevastianov-Kotelyanski [16], on peut trouver un vecteur

$$E_m = [ \varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_m} ]^T$$

à composantes positives tel que

$$0 < \varepsilon_{p_i} \leq w_{p_i}^* - \tilde{w}_{p_i} \quad 1 \leq p_i \leq m$$

$$A_{mm} E_m \leq 0.$$



De plus, de (III.25), il suit qu'il existe un nombre réel positif  $r$ :  $0 < r \leq 1$  tel que

$$A_{\bar{m}\bar{m}} \cdot r E_m + A_{\bar{m}\bar{m}} \tilde{W}_m + A_{\bar{m}\bar{m}} \tilde{W}_m \leq 0 \quad (\text{III.27})$$

Donc, de (III.24)-(III.27), on obtient

$$\begin{bmatrix} A_{\bar{m}\bar{m}} & A_{\bar{m}\bar{m}} \\ A_{\bar{m}\bar{m}} & A_{\bar{m}\bar{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_m + rE_m \\ W_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\bar{m}\bar{m}} W_m + A_{\bar{m}\bar{m}} W_m + A_{\bar{m}\bar{m}} rE_m \\ A_{\bar{m}\bar{m}} W_m + A_{\bar{m}\bar{m}} W_m + A_{\bar{m}\bar{m}} rE_m \end{bmatrix} \leq 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse que  $\tilde{W}$  est maximal.

Pour appliquer ce théorème, considérons le cas où  $A_{12}=0$ , mais où  $A_{11}V_{01} \leq 0$  n'est pas vérifiée. Dans ce cas les conditions (III.16), (III.17) ne sont pas satisfaites, donc on peut conclure que  $\mathcal{R}_{\max}(X)$  soit un domaine de stabilité. Nous allons donc établir un domaine de stabilité du type

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : V_1(\zeta, X) \leq \bar{W}_1, \quad \forall \zeta \in T \right\}$$

où  $\bar{W}_1 \leq V_{01} = W_1^*$ , mais  $\bar{W}_1 \neq W_1^*$ . Pour cela nous allons chercher un vecteur maximal  $\tilde{W}_1$  tel que

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1 &\leq W_1^* \\ A_{11} W_1^* &\leq 0 \end{aligned}$$

En appliquant le théorème III.3 nous pouvons réduire considérablement le domaine dans lequel il faut chercher ce vecteur. En effet, puisque les éléments hors diagonaux de la matrice  $A_{11}$  sont non négatifs, d'après (III.21), (III.22) le vecteur maximal  $\hat{W}_1$  se trouve sur les hyperplans

$$\tilde{w}_i = w_i^* \quad (\text{II.28})$$

où  $i$  sont les indices pour lesquels

$$\sum_{j=1}^q a_{ij} w_j^* \geq 0 \quad (\text{III.29})$$

Pour illustrer ce résultat nous donnons l'exemple suivant :

Exemple III.4

Reprenons le système  $S$  étudié dans l'Exemple III.3. Supposons que les paramètres  $a, b, c, d, e$ , ont des valeurs données comme suit :  $a=c=e=1$  et  $b=d=0$ . On a donc le système de comparaison

$$D W = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

L'équilibre  $W = 0$  de ce système de comparaison est exponentiellement stable, donc l'équilibre  $X = 0$  de  $S$  l'est aussi. Toutefois, on ne peut pas affirmer que  $\mathcal{R}_{\max}(X)$  soit un domaine de stabilité exponentielle parce que l'inégalité (III.16) n'est pas vérifiée :

$$A_{11} V_{01} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-36}{5} \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

D'après (II.28), (II.29) pour le vecteur maximal  $\tilde{W}_1 = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_2]^T$  nous obtenons

$$\tilde{w}_2 = \frac{4}{5}$$

et

$$\sum_{j=1}^2 a_{2j} \tilde{w}_j = \tilde{w}_1 - 2 \cdot \frac{4}{5} = 0$$

Donc

$$\tilde{w}_1 = \frac{8}{5}$$

et un domaine de stabilité exponentielle de l'état d'équilibre  $X=0$  de  $S$  s'établit comme suit :

$$\mathcal{R}(x) = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \sqrt{\frac{1+2t^2}{1+t^2} x_{11}^2 + \frac{2+3t^2}{1+t^2} x_{12}^2} \leq \frac{8}{5} \quad \forall t \in T^c, |x_{21}| \leq \frac{4}{5} \right\}$$

### III. 4 - CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons apporté un certain nombre de résultats concernant l'application du principe de comparaison pour l'estimation du domaine de stabilité de systèmes dynamiques complexes.

Pour cela nous avons posé le problème de la façon suivante : "Etant donné le domaine de validité du système de comparaison et le domaine de stabilité partielle de son équilibre, trouver une estimation de domaine de stabilité de l'équilibre du système étudié". Ainsi, les résultats que nous avons obtenus sont indépendants de la méthode utilisée pour l'estimation du domaine de stabilité de l'équilibre du système de comparaison.

C H A P I T R E    I V



## LA CONSTRUCTION DU SYSTEME DE COMPARAISON

---

### IV.1 - INTRODUCTION

### IV.2 - CRITERES DE CHOIX DE LA FONCTION DE CLASSE $\mathcal{U}$

IV.2.1 - Le type de stabilité

IV.2.2 - Le type de décomposition du vecteur d'état

IV.2.3 - La forme du système étudié

### IV.3 - L'APPLICATION DU PRINCIPE DE COMPARAISON DANS L'ETUDE DE STABILITE DES SYSTEMES A GRANDE ECHELLE

IV.3.1 - La partition des systèmes à grande échelle

IV.3.2 - Construction et étude du système de comparaison d'un grand système partitionné

IV.3.3 - Conditions de stabilité pour un système de comparaison partitionné

### IV.4 - LA METHODE DE DECOMPOSITION - AGREGATION

IV.4.1 - Systèmes continus interconnectés

IV.4.2 - Systèmes discrets interconnectés

### IV.5 - LA METHODE D'AGREGATION DIRECTE

### IV.6 - CONCLUSION



#### IV. 1 - INTRODUCTION

Au premier stade de l'application du principe de comparaison dans l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques, se trouve la construction d'un système de comparaison, bien que son existence a, dans le cas de certains types de systèmes dynamiques, fait l'objet d'études parmi lesquelles nous pouvons citer celles de Laskmikantham et al [36], le problème de la construction d'un système de comparaison reste encore ouvert. Nous nous proposons donc d'aborder ce problème dans ce chapitre.

Dans une première partie, nous présentons quelques critères qualitatifs qui guident dans le choix des fonctions vectorielles  $\mathcal{U}_x$  en vue de la construction d'un système de comparaison.

Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons trois approches de construction d'un système de comparaison.

Tout d'abord, nous montrons qu'une partition d'un grand système en sous-systèmes sous la forme d'un schéma hiérarchique facilite la construction d'un système de comparaison et son analyse de stabilité.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons brièvement l'approche de décomposition - agrégation où on considère que le système est décomposable en sous-systèmes isolés et termes d'interconnexion.

Enfin, dans un dernier paragraphe, nous présentons l'approche d'agrégation directe.



#### IV. 2 - LE CHOIX DE LA FONCTION VECTORIELLE DE CLASSE $\mathcal{V}_x$

Pour un système dynamique donné la forme de son système de comparaison dépend essentiellement du choix de la fonction vectorielle de classe  $\mathcal{V}_x$  choisie pour sa construction.

Ce choix doit tenir compte de différentes exigences et contraintes que sont le type des propriétés de stabilité recherchées (uniformes, exponentielles...), les possibilités de décomposition du système étudié en sous-systèmes interconnectés et le type du système étudié, l'objectif final restant la détermination d'un système agrégé (système de comparaison) qui doit réaliser un bon compromis entre son aptitude à pouvoir fournir des conditions de stabilité suffisamment réalistes et une complexité raisonnable ; il s'agit là d'un problème délicat et encore largement ouvert à des recherches. Sans prétendre vouloir faire le tour du problème nous allons exposer dans les paragraphes qui suivent quelques critères qui guident dans le choix des fonctions vectorielles de classe  $\mathcal{V}_x$ .

##### IV.2.1 - Le type de stabilité

Nous avons vu dans les théorèmes II.3 - II.8 que pour que la stabilité du système de comparaison implique le même type de stabilité du système étudié il faut que la fonction vectorielle  $V(\mathcal{C}, X)$  de classe  $\mathcal{V}_x$  choisie pour construire le système de comparaison possède les quelques propriétés suivantes :

1. Pour conclure sur la stabilité selon Lyapunov ou sur la stabilité asymptotique, il faut qu'il existe une fonction  $\phi(\|X\|)$  de classe  $K/\sqrt{30}$  telle que :

$$\phi (\|X\|) \leq \max_i [v_i (\tau, X)] \quad \forall (\tau, X) \in T \times X \quad (IV.1)$$

2. Pour conclure sur la stabilité uniforme ou sur la stabilité asymptotique uniforme il faut, **en plus**, que la solution  $V$  admette une borne supérieure infiniment petite ou, ce qui revient au même, qu'il existe deux fonctions  $\phi_1 (\|X\|)$  et  $\phi_2 (\|X\|)$  de classe  $K$  telles que

$$\begin{aligned} \phi_1 (\|X\|) &\leq \max_i [v_i (\tau, X)] \\ \max_i [ |v_i (\tau, X)| ] &\leq \phi_2 (\|X\|) \end{aligned} \quad (IV.2)$$

3. Pour conclure sur la stabilité exponentielle, il est nécessaire que la fonction vectorielle  $V$  choisie satisfasse une inégalité du type

$$\max_i [v_i (\tau, X)] \geq \eta_1 \|X\| \quad (IV.3a)$$

$$\|V (\tau, X)\| \leq \eta_2 \|X\| \quad (IV.3b)$$

où  $\eta_1, \eta_2$  sont des nombres réels positifs.

#### IV.2.2 - Le type de décomposition du vecteur d'état

Suivant les définitions de régularité et de surjectivité données pour les fonctions de classe  $\mathcal{V}_x^g$ , nous pouvons aussi parler de décomposition régulière, surjective ou non-surjective du vecteur d'état  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ . Ainsi, si nous décomposons le vecteur d'état  $X \in R^n$  en  $s$  sous-vecteurs  $X_2$  appartenant à des sous-espaces  $R^{n_i}$  disjoints, c'est-à-dire tels que  $R^n = R^{n_1} \times \dots \times R^{n_s}$ , alors nous pouvons parler d'une *décomposition régulière*. De la même façon, si aucun ensemble constitué par  $s-1$  sous-espaces  $R^{n_i}$  ne recouvre l'espace  $R^n$  alors nous parlons d'une *décomposition surjective* tandis que s'il existe  $s-1$  sous-espaces  $R^{n_i}$  qui recouvrent l'espace  $R^n$  alors nous parlons d'une *décomposition non surjective*.

Exemple IV.1

Soit le vecteur  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ ,  $X \in \mathbb{R}^4$

a) La décomposition

$$X_1 = [x_1, x_2]^T, \quad X_2 = [x_3, x_4]^T$$

de  $X$  est régulière

b) La décomposition

$$X_1 = [x_1, x_2]^T, \quad X = [x_1, x_3, x_4]^T$$

de  $X$  est surjective.

c) La décomposition

$$X_1 = [x_1, x_2]^T, \quad X_2 = [x_1, x_3, x_4]^T, \quad X_3 = [x_2, x_3]^T$$

de  $X$  est non surjective.

A chacun de ces trois types de décomposition du vecteur d'état correspond un type analogue de fonctions de classe  $\mathcal{U}_X$ . La décomposition du vecteur d'état, facteur essentiel pour le choix de la fonction vectorielle définie positive, peut être guidée par des considérations physiques ou simplement méthodologiques.

Par exemple, si l'on s'intéresse particulièrement au comportement de certains sous-vecteurs  $X_i$  du vecteur d'état  $X$  (ce qui est souvent le cas par exemple dans les systèmes socio-économiques) alors il est naturel de choisir une fonction vectorielle  $V(\zeta, X)$  du type  $V(\zeta, X) = [v_1(\zeta, X_1), \dots, v_s(\zeta, X_s)]^T$  correspondant à cette décomposition et ensuite utiliser les inégalités

$$v_i[\zeta, X_i(\zeta; \zeta_0, X_0)] \leq w_i[\zeta, \zeta_0, v(\zeta_0, X_0)]$$

pour estimer le comportement de  $X_i(\zeta)$ .

D'autre part, la décomposition du vecteur d'état et le choix de la fonction  $V(\zeta, X)$  qui en résulte peuvent être guidés par la forme du système étudié comme nous allons le voir dans les paragraphes qui suivent.

Cependant, il faut souligner que tout choix initial de la fonction  $V$  guidé par les critères énoncés ne peut être considéré que comme provisoire, en ce sens qu'il est parfois utile d'ajouter d'autres composantes à la fonction  $V$  initiale, si cela facilite la construction du système de comparaison. Cela est illustré dans l'exemple suivant :

*Exemple IV.2*

Soit le système continu  $S : DX = F(X)$  définie par

$$D \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 |x_2| (1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + x_2 x_3 (2 + x_1) \\ -3x_2 |x_2| (1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + x_2 x_3 (2 + x_2) \\ -4x_3 (1 + |x_3|) + (3 + x_3) \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{bmatrix}$$

Choisissons la fonction  $V(X) = [v_1(x_1, x_2), v_2(x_3)]^T$  où

$$v_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad v_2(x_3) = |x_3|$$

Cette fonction vectorielle est définie positive et régulière.

On obtient alors

$$DV(X) \stackrel{(S)}{\leq} \begin{bmatrix} -(3v_1 + 3v_1^2) |x_2| + (2\sqrt{2} v_2 + v_1 v_2) |x_2| \\ -4v_2 + 3v_1 + v_1 v_2 - 4v_2^2 \end{bmatrix} \quad (IV.5)$$

d'où le système de comparaison

$$D W = \begin{bmatrix} -(3w_1 + 3w_1^2) |x_2| + (2\sqrt{2} w_2 + w_1 w_2) |x_2| \\ -4w_2 + 3w_1 + w_1 w_2 - 4w_2^2 \end{bmatrix}$$

Il n'est pas difficile de voir qu'on ne peut pas conclure sur la stabilité de l'équilibre  $W=0$  par une application des critères de stabilité énoncés dans le chapitre II.

Vu la forme de l'inégalité (IV.6), il paraît naturel d'ajouter une composante supplémentaire  $v_3(x_2) = |x_2|$  à la fonction  $V(X)$  afin de construire un nouveau système de comparaison. Si donc on pose  $V^*(X) = [v_1(x_1, x_2), v_2(x_3), v_3(x_2)]^T$ , alors on obtient

$$DV^*(X)_{(S)} \leq \begin{bmatrix} -3v_1 v_3 - 3v_1^2 v_3 + v_3 (2\sqrt{2} v_2 + v_1 v_2) \\ -4v_2 + 3v_1 + v_1 v_2 - 4v_2^2 \\ -3v_3^2 - 3v_3^2 v_1 + 2v_2 v_3 + v_3^2 v_2 \end{bmatrix}$$

d'où le nouveau système de comparaison

$$DW=H(W) = \begin{bmatrix} w_3 & \oplus \\ & 1 \\ \oplus & \\ & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3w_1^2 w_3 + 2\sqrt{2} w_2 w_3 + w_1 w_2 w_3 \\ + w_1 w_2 - 4w_2^2 \\ -3w_3^2 w_1 + w_3^2 w_2 \end{bmatrix}$$

Soit  $\bar{W} = [\frac{4}{3}, 1, 1]^T$ . Alors

$$H(r\bar{W}) = -r^2 \cdot \begin{bmatrix} 4 - 2\sqrt{2} + 4r \\ \frac{8}{3} \\ 1 + 3r \end{bmatrix}$$

Les composantes de la fonction  $H(r\bar{W})$  sont définies négatives pour  $r \in [0, \infty)$ . Donc l'équilibre  $W=0$  du système de comparaison est globalement exponentiellement stable dans  $R_+^3$ . De plus la fonction  $V^*$  vérifie les inégalités (IV-3a) et (IV-3b). Par conséquent, l'équilibre  $X=0$  de (S) est globalement exponentiellement stable.

#### IV.2.3 - La forme du système étudié

Comme nous l'avons signalé dans le paragraphe précédent le type de décomposition du vecteur d'état et le choix de la fonction vectorielle définie positive qui en résulte dépendent grandement de la forme du système étudié. Il faut noter que, mis à part certaines classes particulières de systèmes, il n'y a pas de méthode systématique pour résoudre le problème de la construction du système de comparaison. Cependant, on peut distinguer deux approches légèrement différentes.

La première approche connue comme approche de décomposition - agrégation consiste en la décomposition du système étudié en sous-systèmes, eux-même faisant apparaître deux parties : l'une représentant les sous-systèmes lorsqu'ils sont isolés, l'autre représentant leurs interconnexions avec les autres sous-systèmes. Le choix des composantes de la fonction vectorielle définie positive s'effectue principalement en fonction de la forme des sous-systèmes isolés.

La deuxième approche qu'on pourrait appeler d'agrégation directe ne considère pas séparément les sous-systèmes isolés et leurs interconnexions. Le choix des composantes de la fonction vectorielle définie positive est basé sur la partition du vecteur d'état et la forme générale des sous-systèmes lorsqu'il sont interconnectés.

Avant de présenter ces deux approches ainsi que certains cas particuliers nous nous intéresserons d'abord à l'application du principe de comparaison dans les systèmes dynamiques à grande échelle.

#### IV.3 - L'APPLICATION DU PRINCIPE DE COMPARAISON DANS L'ETUDE DE STABILITE DES SYSTEMES A GRANDE ECHELLE.

Les difficultés liées à la construction du système de comparaison associé à un système dynamique, s'accroissent généralement avec la dimension du système.

De plus, la dimension du système de comparaison dans le cas général s'accroît avec la dimension du système étudié, ce qui pose des problèmes supplémentaires pour l'analyse de stabilité.

Il est donc intéressant avant toute tentative d'établissement du système de comparaison de décomposer le système étudié d'une façon qui facilite la construction du système de comparaison et, si possible, l'analyse de stabilité de ce dernier. Nous allons présenter une telle approche par la suite.

#### IV.3.1 - La partition des systèmes à grande échelle

Etant donné un système dynamique

$$\mathcal{D} X(\tau) = F[\tau, X(\tau)] \quad (\text{IV.6})$$

d'ordre  $n$ , nous définissons comme *matrice d'occurrence* [35] la matrice carrée  $C = \{c_{ij}\}$  d'ordre  $n \times n$  avec  $c_{ij} = 0$  si la composante  $f_i$  de  $F$  ne dépend pas de la composante  $x_j$  de  $X$  et  $c_{ij} = 1$  dans le cas contraire.

Soit par exemple de système dynamique  $\mathcal{D} X = F(\tau, X), X \in \mathbb{R}^8$ ,  
 $F : T \times \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$  [35] :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} x_1 &= f_1(\tau, x_1, x_8) \\ \mathcal{D} x_2 &= f_2(\tau, x_1, x_2) \\ \mathcal{D} x_3 &= f_3(\tau, x_2, x_3, x_5) \\ \mathcal{D} x_4 &= f_4(\tau, x_3, x_4, x_7) \\ \mathcal{D} x_5 &= f_5(\tau, x_4, x_5) \\ \mathcal{D} x_6 &= f_6(\tau, x_5, x_6, x_7) \\ \mathcal{D} x_7 &= f_7(\tau, x_3, x_7, x_8) \\ \mathcal{D} x_8 &= f_8(\tau, x_2, x_8) \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Sa matrice d'occurrence C s'établit comme suit :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\
 f_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 f_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 f_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 f_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 f_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 f_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 f_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 f_8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \\
 \end{array} \quad (IV.8)$$

Une matrice carrée est dite *irréductible* si elle ne peut pas se mettre sous la forme d'une matrice quasi-triangulaire par une permutation de ses lignes et colonnes. Une matrice quasi-triangulaire est dite *canoniquement unique* [35] si toutes ses sous-matrices diagonales sont irréductibles.

Par exemple, la matrice d'occurrence C du système (IV.7) n'est pas irréductible parce que par une permutation de la troisième ligne et de la huitième colonne elle peut se mettre sous la forme quasi-triangulaire suivante :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_8 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_3 \\
 f_1 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\
 f_2 & 1 & 1 & 1 & & & \textcircled{1} & & \\
 f_8 & 0 & 1 & 1 & & & & & \\
 \hline
 f_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 f_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 f_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 f_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 f_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \end{array}$$



Cette matrice quasi-triangulaire n'est pas canoniquement unique parce que sa deuxième sous-matrice diagonale n'est pas irréductible, mais par les permutations 3-7 et 7-6 nous établissons la matrice quasi-triangulaire canoniquement unique suivante :

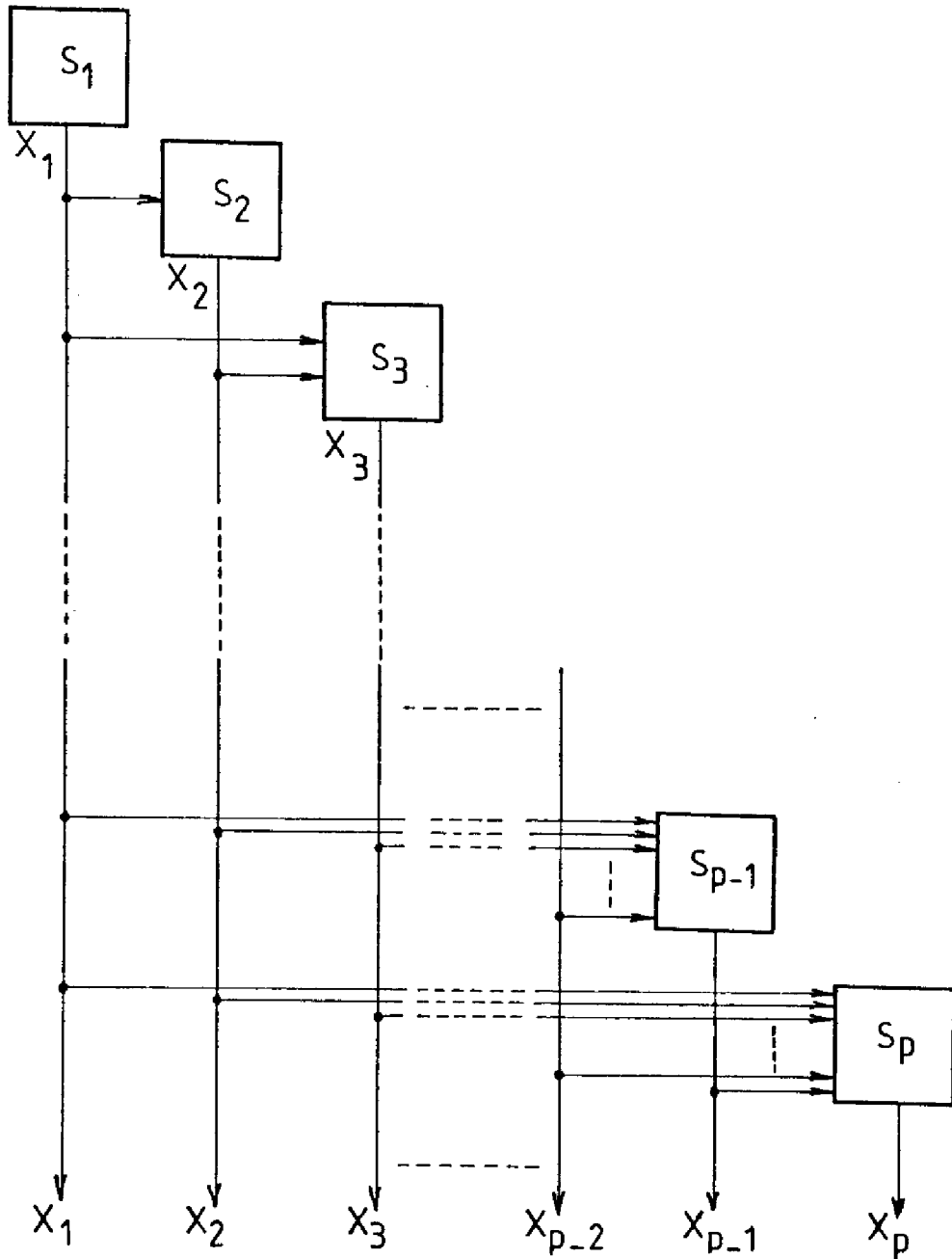
$$\begin{array}{r}
 f_1 \\
 f_2 \\
 f_8 \\
 f_4 \\
 f_5 \\
 f_7 \\
 f_3 \\
 f_6
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x_1 \quad x_2 \quad x_8 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_7 \quad x_3 \quad x_6 \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccccc|c}
 1 & 0 & 1 & & & & & \\
 1 & 1 & 0 & & & \textcircled{1} & & \\
 0 & 1 & 1 & & & & & \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \tag{IV.9}$$

En adoptant la terminologie de Kevorkian [35] par *partition du système dynamique* (IV.6) nous entendons la transformation de sa matrice d'occurrence C en sa forme quasi-triangulaire canoniquement unique. Cette transformation nous permet de présenter le système (IV.6) sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l}
 S_1: \quad \mathcal{D} X_1 = F_1 (\tau, X_1) \\
 S_2: \quad \mathcal{D} X_2 = F_2 (\tau, X_1, X_2) \\
 \cdot \quad \quad \cdot \\
 \cdot \quad \quad \cdot \\
 \cdot \quad \quad \cdot \\
 S_p: \quad \mathcal{D} X_p = F_p (\tau, X_1, X_2, \dots, X_p)
 \end{array}
 \tag{IV.10}$$

où  $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $F_i : T \times \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_s}$ . Cette présentation correspond à une décomposition du système (IV.6) en p sous-systèmes  $S_i, i=1,2,\dots,p$  de sorte que le comportement du

sous-système  $S_i$  est indépendant du comportement des sous-systèmes  $S_j$ ,  $j=i+1, \dots, p$ . Un système dynamique décomposé de cette façon peut être présenté par le schéma suivant



Par exemple, d'après (IV.9), le système (IV.7) peut être décomposé en trois sous-systèmes qui obéissent au schéma ci-dessus.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D} x_1 = f_1 (\zeta, x_1, x_8) \\
S_1 : & \quad \mathcal{D} x_2 = f_2 (\zeta, x_1, x_2) \\
& \quad \mathcal{D} x_8 = f_8 (\zeta, x_2, x_8) \\
& \\
& \quad \mathcal{D} x_4 = f_4 (\zeta, x_3, x_4, x_7) \\
& \quad \mathcal{D} x_5 = f_5 (\zeta, x_4, x_5) \\
S_2 : & \quad \mathcal{D} x_7 = f_7 (\zeta, x_3, x_7, x_8) \\
& \quad \mathcal{D} x_3 = f_3 (\zeta, x_3, x_7) \\
& \\
S_3 : & \quad \mathcal{D} x_6 = f_6 (\zeta, x_5, x_6, x_7)
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Notre but n'étant pas de développer des méthodes de décomposition de grands systèmes, nous ne donnons pas ici d'algorithmes pour une telle partition. Un tel algorithme pour l'obtention de la forme quasi-triangulaire canoniquement unique de la matrice d'occurrence a été développé par Kevorkian [35]. Par la suite nous montrerons qu'une telle décomposition est bien adaptée pour la construction du système de comparaison et facilite aussi l'application des critères de stabilité établis dans les chapitres précédents.

#### IV.3.2. - Construction et étude du système de comparaison d'un grand système partitionné.

La partition du système (IV.6) en sous-systèmes du type (IV.10) facilite considérablement la construction de son système de comparaison. Deux approches peuvent être envisagées : dans la première la construction du système de comparaison est effectuée en  $p$  étapes ; à chaque étape il est tenu compte des fonctions vectorielles de classe  $\mathcal{V}_x$  utilisées dans les étapes précédentes. La deuxième approche considère le problème de la construction du système de comparaison comme  $p$  problèmes indépendants les uns des autres.

Première approche

A la première étape on cherche une fonction vectorielle ou scalaire  $V_1(\tau, X_1)$  de classe  $\mathcal{V}_{X_1}$  et une fonction  $H_1(\tau, Y_1, W_1)$  possédant la propriété  $\mathcal{H}$  par rapport à  $W_1$  et vérifiant l'inégalité

$$\mathcal{D}V_1[\tau, X_1(\tau)]_{(IV.6)} \leq H_1[\tau, X_1(\tau), V_1(\tau, X_1(\tau))] \quad (IV.12a)$$

A la deuxième étape on cherche une fonction vectorielle ou scalaire  $V_2(\tau, X_2)$  de classe  $\mathcal{V}_{X_2}$  et une fonction  $H_2(\tau, Y_1, Y_2, W_1, W_2)$  possédant la propriété  $\mathcal{H}$  par rapport à

$$[W_1^T, W_2^T]^T \text{ et vérifiant l'inégalité} \quad (IV.12b)$$

$$\mathcal{D}V_2[\tau, X_2(\tau)]_{(IV.6)} \leq H_2[\tau, X_1(\tau), X_2(\tau), V_1[\tau, X_1(\tau)], V_2[\tau, X_2(\tau)]]$$

où  $V_1[\tau, X_1(\tau)]$  est la fonction utilisée dans la première étape et ainsi de suite jusqu'à la p-ème étape.

Ainsi, la fonction  $V(\tau, X) = [V_1(\tau, X_1)^T, \dots, V_p(\tau, X_p)^T]^T$  est de classe  $\mathcal{V}_X$  et la fonction :

$$H(\tau, Y, W) = [H_1(\tau, Y_1, W_1)^T, \dots, H_p(\tau, Y_1, Y_2, \dots, Y_p, W_1, W_2, \dots, W_p)^T]^T$$

possède la propriété  $\mathcal{H}$  par rapport à  $W = [W_1^T, W_2^T, \dots, W_p^T]^T$ .

Par conséquent, le système de comparaison du système (IV.6) s'établit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V_1(\tau) &= F_1[\tau, Y_1(\tau)] \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathcal{D}Y_p(\tau) &= F_p[\tau, Y_1(\tau), \dots, Y_p(\tau)] \\ \mathcal{D}W_1(\tau) &= H_1[\tau, Y_1(\tau), W_1(\tau)] \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathcal{D}W_p(\tau) &= H_p[\tau, Y_1(\tau), \dots, Y_p(\tau), W_1(\tau), \dots, W_p(\tau)] \end{aligned} \quad (IV.13)$$

Du fait de la partition initiale du système (IV.6) cette approche de construction du système de comparaison est plus simple que la recherche directe d'une fonction vectorielle  $V(\mathcal{C}, X)$  de classe  $\mathcal{V}_X$  par rapport à  $X$  et d'une fonction  $H(\mathcal{C}, Y, W)$  possédant la propriétés  $\mathcal{D}\mathcal{C}$  par rapport à  $W$  et tel que :

$$\mathcal{D}V[\mathcal{C}, X(\mathcal{C})]_{(IV.6)} \leq H[\mathcal{C}, X(\mathcal{C}), V(\mathcal{C}, X(\mathcal{C}))]$$

Deuxième approche

Lorsque l'ordre du système (IV.6) est très grand, la première approche peut nécessiter un calcul très volumineux. Il peut donc être préférable de décomposer le problème de la construction du système de comparaison en sous-problèmes plus simples et indépendants entre eux. Dans le cas où le système (IV.6) est partitionné en  $p$  sous-système de la forme (IV.10) cette décomposition conduit à trouver des fonctions vectorielles ou scalaires  $V_i(\mathcal{C}, X_i)$  de classe  $\mathcal{V}_{X_i}$  et des fonctions  $H_i(\mathcal{C}, Y_1, Y_2, \dots, Y_i, W_i)$  possédant la propriété  $\mathcal{D}\mathcal{C}$  par rapport à  $W_i$  telles que ;

$$\mathcal{D}V_i[\mathcal{C}, X_i(\mathcal{C})]_{(IV.6)} \leq H_i[\mathcal{C}, X_1(\mathcal{C}), \dots, X_i(\mathcal{C}), W_i(\mathcal{C})]$$

De cette façon le système de comparaison du système (IV.6) s'établit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}Y_1(\mathcal{C}) &= F_1[\mathcal{C}, Y_1(\mathcal{C})] \\ &\vdots \\ \mathcal{D}Y_p(\mathcal{C}) &= F_p[\mathcal{C}, Y_1(\mathcal{C}), \dots, Y_p(\mathcal{C})] \\ \mathcal{D}W_1(\mathcal{C}) &= H_1[\mathcal{C}, Y_1(\mathcal{C}), W_1(\mathcal{C})] \\ &\vdots \\ \mathcal{D}W_p(\mathcal{C}) &= H_p[\mathcal{C}, Y_1(\mathcal{C}), \dots, Y_p(\mathcal{C}), W_p(\mathcal{C})] \end{aligned} \tag{IV.14}$$

La partition du système (IV.6) en sous-systèmes facilite non seulement la construction du système de comparaison qui peut prendre les formes (IV.13) ou (IV.14), mais aussi l'étude de stabilité de ces derniers. Pour cela nous donnons d'abord le théorème suivant :

Théorème IV.1

Soit le système

$$\begin{aligned} \mathcal{D} Y(\tau) &= F[\tau, Y(\tau)] \\ \mathcal{D} W_1(\tau) &= H_1[\tau, Y(\tau), W_1(\tau)] \\ \mathcal{D} W_2(\tau) &= H_2[\tau, Y(\tau), W_1(\tau), W_2(\tau)] \\ &\vdots \\ \mathcal{D} W_p(\tau) &= H_p[\tau, Y(\tau), W_1(\tau), \dots, W_p(\tau)] \end{aligned} \tag{IV.15}$$

ayant  $Y = 0, W = [W_1^T, \dots, W_p^T]^T = 0$  comme solution d'équilibre.

Alors, sa solution d'équilibre  $Y = 0, W = 0$  est  $W$ -stable selon Lyapunov si et seulement les solutions d'équilibre  $Y=0, [W_1^T, \dots, W_i^T]^T = 0$  de sous-systèmes  $S_i ; i=1, 2, \dots, p$

$$S_i : \begin{aligned} \mathcal{D} Y(\tau) &= F[\tau, Y(\tau)] \\ \mathcal{D} W_1(\tau) &= H_1[\tau, Y(\tau), W_2(\tau), \dots, W_i(\tau)] \\ &\vdots \\ \mathcal{D} W_i(\tau) &= H_i[\tau, Y(\tau), W_1(\tau), \dots, W_i(\tau)] \end{aligned}$$

sont partiellement stables selon Lyapunov par rapport à  $W_i$ .

*Démonstration*

1. L'état d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système (IV.15) étant  $W$ -stable selon Lyapunov, alors  $\forall \varepsilon > 0$  et  $\tau_0 \in T \exists \delta(\tau_0, \varepsilon) > 0$  tel que

$$\|Y_0\| + \sum_{j=1}^p \|W_{0j}\| < \delta \Rightarrow \|Y(\tau; \tau_0, Y_0)\| + \sum_{j=1}^p \|W_j(\tau; \tau_0, Y_0, W_0)\| < \varepsilon \quad \forall \tau \in T_0$$

donc

$$\|Y_0\| + \sum_{j=1}^p \|W_{0j}\| < \delta \Rightarrow \|W_i(\tau; \tau_0, Y_0, W_0)\| < \varepsilon \quad \forall \tau \in T_0$$

et comme  $W_i(\tau; \tau_0, Y_0, W_0)$  ne dépend pas des  $W_{0j}$   $j = i+1, \dots, p$ , il suit que

$$\|Y_0\| + \sum_{j=1}^i \|W_{0j}\| < \delta \Rightarrow \|W_i(\tau; \tau_0, Y_0, W_{01}, W_{02}, \dots, W_{0i})\| < \varepsilon \quad \forall \tau \in T_0$$

c'est-à-dire le sous-système  $S_i$  est partiellement stable selon Lyapunov par rapport à  $W_i$ .

2. Supposons maintenant que les solutions d'équilibre  $[Y^T, W_1^T, \dots, W_i^T]^T = 0$  des sous-systèmes  $S_i$   $i=1, 2, \dots, p$  sont partiellement stables selon Lyapunov par rapport à  $W_i$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\tau \in T$  et tout  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, p$  il existe  $\delta_i(\tau_0, \frac{\varepsilon}{p}) > 0$  tels que

$$\|Y_0\| + \sum_{j=1}^i \|W_{0j}\| < \delta_i \Rightarrow \|W_i(\tau; \tau_0, Y_0, W_{01}, \dots, W_{0i})\| < \frac{\varepsilon}{p} \quad \forall \tau \in T_0$$

Donc

$$\|Y_0\| + \sum_{j=1}^p \|W_{0j}\| < \min_j \delta_j \Rightarrow \|W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0)\| < \varepsilon \quad \forall \tau \in T_0$$

parce que  $\|W(\tau; \tau_0, Y_0, W_0)\| = \sum_{j=1}^p \|W_j(\tau; \tau_0, Y_0, W_{01}, \dots, W_{0j})\|$ , ce

qui signifie que l'état d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système (IV.15) est  $W$ -stable selon Lyapunov.

Notons qu'il n'est pas difficile d'établir des théorèmes analogues pour les autres types de stabilité (stabilité asymptotique, exponentielle, uniforme, etc ...)

D'après ces théorèmes, l'étude de la stabilité partielle par rapport à  $W$  du système de comparaison (IV.13) est ramenée à l'étude de la stabilité partielle par rapport à  $W_i$  des sous-systèmes.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} Y_1(\tau) &= F_1[\tau, Y_1(\tau)] \\ &\vdots \\ \mathcal{D} Y_i(\tau) &= F_i[\tau, Y_1(\tau), \dots, Y_i(\tau)] \\ \mathcal{D} W_1(\tau) &= H_1[\tau, Y_1(\tau), W_1(\tau)] \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathcal{D} W_i(\tau) &= H_i[\tau, Y_1(\tau), \dots, Y_i(\tau), W_1(\tau), \dots, W_i(\tau)] \end{aligned}$$

De la même façon l'étude de la stabilité partielle par rapport à  $W$  du système de comparaison (IV.14) est ramenée à l'étude de la stabilité partielle par rapport à  $W_i$  des sous-systèmes.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} Y_1(\tau) &= F_1[\tau, Y_1(\tau)] \\ &\vdots \\ \mathcal{D} Y_i(\tau) &= F_i[\tau, Y_1(\tau), Y_2(\tau), \dots, Y_i(\tau)] \\ \mathcal{D} W_i(\tau) &= H_i[\tau, Y_1(\tau), Y_2(\tau), \dots, Y_i(\tau), W_i(\tau)] \end{aligned}$$

On peut aussi envisager le cas où les inégalités (IV.12a) (IV.12b)... ne dépendent pas de  $X_i$   $i=1,2,\dots,p$ . Dans ce cas le système de comparaison s'établit comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{D} Y(\tau) &= F[\tau, Y(\tau)] \\ \mathcal{D} W_1(\tau) &= H_1[\tau, W_1(\tau)] \\ \mathcal{D} W_2(\tau) &= H_2[\tau, W_1(\tau), W_2(\tau)] \\ &\vdots \\ \mathcal{D} W_p(\tau) &= H_p[\tau, W_1(\tau), W_2(\tau), \dots, W_p(\tau)] \end{aligned}$$

et il suffit d'étudier les propriétés de stabilité de la solution d'équilibre  $W=0$  du système

$$\mathcal{D} W(\tau) = H[\tau, W(\tau)]$$

ou les propriétés de stabilité partielle par rapport à  $W_i$  des solutions d'équilibre  $[W_1^T, \dots, W_i^T]^T = 0$   $i=1,2,\dots,p$  des sous-systèmes

$$\begin{aligned} \mathcal{D} W_1(\tau) &= H_1[\tau, W_1(\tau)] \\ \mathcal{D} W_2(\tau) &= H_2[\tau, W_1(\tau), W_2(\tau)] \\ &\vdots \\ \mathcal{D} W_i(\tau) &= H_i[\tau, W_1(\tau), \dots, W_i(\tau)] \end{aligned}$$



IV.3.3 - Conditions de stabilité pour un système de comparaison partitionné.

Nous allons montrer dans ce paragraphe que l'établissement de conditions de stabilité pour le système de comparaison du type (IV.13) peut se ramener à la considération de p problèmes indépendants.

Théorème IV.2

S'il existe p vecteurs  $W_i^* = [W_{i1}^{*T}, W_{i2}^{*T}, \dots, W_{ii}^{*T}]^T$ ,  $W_{ij}^* \in R_+^{s_j}$

$i=1, 2, \dots, p$  à composantes positives et p fonctions  $\Psi_i(\zeta, Y_1, \dots, Y_i, r)$   
 $\Psi_i : T \times R^{n_1} \times R^{n_i} \times R_+ \rightarrow R_+^{s_i}$  définies positives par rapport à r et vérifiant les inégalités.

$$H_i(\zeta, Y_1, \dots, Y_i, r, W_{i1}^*, \dots, W_{ii}^*) \leq \Psi_i(\zeta, Y_1, \dots, Y_i, r)$$

$i=1, 2, \dots, p \quad \forall (\zeta, Y_1, \dots, Y_i, r) \in T \times R^{n_1} \times \dots \times R^{n_i} \times R_+$ , alors la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (IV.13) est globalement uniformément asymptotiquement W-stable.

*Démonstration*

Il nous faut simplement montrer qu'à partir des  $W_i^*$   $i=1, \dots, p$  il est possible de trouver un vecteur unique  $\bar{W} \in R_+^{s_1 + s_2 + \dots + s_p}$  satisfaisant les hypothèses du corollaire II.2.

Soit p nombres scalaires positifs  $q_i, q_i \leq 1$   $i=1, 2, \dots, p$  définis par les relations

$$q_p = 1$$

$$q_{p-i} = \min_{p-i+1 \leq j \leq p} \left[ 1, \max ( q \in R : q W_{p-i, p-i}^* \leq q_j W_{j, p-i}^* ) \right]$$

$i=1, 2, \dots, p-1$

Ces nombres existent parce que les vecteurs  $W_{ij}^*$  sont supposés à composantes positives.

Désignons par  $\bar{\Psi}_i$  les fonctions

$\bar{\Psi}_i : T \times R^{n_1} \times \dots \times R^{n_i} \times R_+ \rightarrow R^{s_i}$  définies par les relations

$$\bar{\Psi}_i(\tau, Y_1, Y_2, \dots, Y_i, r) \cong \Psi_i(\tau, Y_1, Y_2, \dots, Y_i, r q_i)$$

Il est évident que les composantes des fonctions  $\Psi_i$  sont définies positives par rapport à  $r$ . Si donc nous considérons que les fonctions  $H_i$  possèdent la propriété  $\mathcal{H}$  par rapport à  $W_{ii}$  alors

$$\begin{aligned} H_i(\tau, Y_1, Y_2, \dots, Y_i, r q_1 W_{11}^*, r q_2 W_{22}^*, \dots, r q_i W_{ii}^*) &\leq \\ &\leq H_i(\tau, Y_1, Y_2, \dots, Y_i, r q_1 W_{11}^*, r q_2 W_{22}^*, \dots, r q_i W_{ii}^*) \leq \\ &\leq - \Psi_i(\tau, Y_1, Y_2, \dots, Y_i, r q_i) \leq \\ &\leq - \bar{\Psi}_i(\tau, Y_1, Y_2, \dots, Y_i, r) \end{aligned}$$

$\forall (\tau, Y_1, Y_2, \dots, Y_i, r) \in T \times R^{n_1} \times \dots \times R^{n_i} \times R_+$ . Ainsi, si nous posons :

$$\bar{W} = [q_1 W_{11}^{*T}, \dots, q_p W_{pp}^{*T}]^T \quad \text{et} \quad \bar{\Psi} = [\bar{\Psi}_1^T, \dots, \bar{\Psi}_p^T]^T \quad \text{alors}$$

$$H(\tau, Y, r \bar{W}) \leq -\bar{\Psi}(\tau, Y, r) \quad \forall (\tau, Y, r) \in T \times R^n \times R_+$$

et d'après le corollaire II.2 la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  du système de comparaison (IV.13) est globalement uniformément asymptotiquement  $W$ -stable.

Si de plus  $\Psi_i(\tau, Y, r) \geq r \beta W_i^*$  ou  $\beta$  est un nombre réel positif alors la solution  $Y=0, W=0$  de (IV.13) est globalement exponentiellement stable.

Corollaire IV.1

Soit le système de comparaison

$$\begin{aligned} \mathcal{D}Y(\tau) &= F[\tau, Y(\tau)] \\ \mathcal{D}W_1(\tau) &= A_{11}[\tau, Y(\tau)] W_1(\tau) \\ \mathcal{D}W_2(\tau) &= A_{21}[\tau, Y(\tau)] W_1(\tau) + A_{22}[\tau, Y(\tau)] W_2(\tau) \\ &\vdots \\ \mathcal{D}W_p(\tau) &= A_{p1}[\tau, Y(\tau)] W_1(\tau) + \dots + A_{pp}[\tau, Y(\tau)] W_p(\tau) \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Si les éléments des matrices  $A_{ij}$   $i \neq j$  sont bornées pour tout  $(\tau, Y) \in T \times \mathbb{R}^n$  et il existe de  $p$  vecteurs  $W_{ii}^* \in \mathbb{R}^{s_i}$ ,  $i=1, 2, \dots, p$  à composantes positives tels que :

$$A_{ii}(\tau, Y) W_{ii}^* \leq -\beta^* W_{ii}^* \quad (\text{IV.17})$$

pour tout  $(\tau, Y) \in T \times \mathbb{R}^n$ ,  $\beta^*$  étant un nombre réel positif, alors la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  de (IV.16) est globalement exponentiellement  $w$ -stable.

*Démonstration*

Puisque les éléments des matrices  $A_{ij}$   $i \neq j$  sont bornées alors pour tout  $i$  il existe des vecteurs  $W_{ij}^* \in \mathbb{R}_{+}^{s_j}$   $j=1, 2, \dots, i-1$  à composantes positives tels que

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}(\tau, Y) W_{ij}^* < \alpha^* W_{ii}^*$$

où  $\alpha^* < \beta^*$

Par conséquent de (IV.17) il suit que :

$$\sum_{j=1}^i A_{ij}(\tau, Y) r W_{ij}^* \leq -r(\beta^* - \alpha^*) W_{ii}^* \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^s$$

donc d'après le théorème (IV.2) la solution d'équilibre  $Y=0, W=0$  de (IV.16) est globalement exponentiellement  $w$ -stable.

Ainsi, par exemple, soit le système de comparaison

$$\begin{aligned} \mathcal{D}W_1(\mathcal{Z}) &= A_{11}W_1(\mathcal{Z}) \\ \mathcal{D}W_2(\mathcal{Z}) &= A_{21}W_1(\mathcal{Z}) + A_{22}W_2(\mathcal{Z}) \\ &\vdots \\ \mathcal{D}W_p(\mathcal{Z}) &= A_{p1}W_1(\mathcal{Z}) + \dots + A_{pp}W_p(\mathcal{Z}) \end{aligned}$$

où  $A_{ij}$  sont des matrices à éléments constants. Si les matrices  $A_{ii}$  satisfont aux conditions de Sevastianov - Koteliansky [16], alors la solution d'équilibre  $W=0$  est globalement exponentiellement stable parce que ces conditions garantissent l'existence des vecteurs  $W_{ii}^*$  et d'un nombre réel positif  $\beta^*$  vérifiant (IV.17).

#### IV. 4 - LA METHODE DE DECOMPOSITION - AGREGATION

L'approche de décomposition - agrégation a été originellement utilisée par Bailey [4] qui a été le premier à appliquer le principe de comparaison dans l'étude des systèmes interconnectés. Nous présentons brièvement par la suite cette approche sous sa forme la plus générale.

Dans une première étape le système (IV.6) est décomposé en  $s$  sous-système  $S_i$   $i=1,2,\dots,s$  de la forme

$$S_i: \quad \mathcal{D}X_i(\mathcal{Z}) = F_i[\mathcal{Z}, X_i(\mathcal{Z})] + G_i[\mathcal{Z}, X(\mathcal{Z})]$$

ou  $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $F_i : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $G_i : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$  et  $n = \sum_{i=1}^s n_i$ .

Dans cette représentation

$$S'_i: \quad \mathcal{D}X_i(\mathcal{Z}) = F_i[\mathcal{Z}, X_i(\mathcal{Z})]$$

sont les sous-systèmes isolés,  $G_i(\mathcal{Z}, X)$  étant alors les termes d'interconnexion entre les sous-systèmes. De plus, on suppose que  $X_i = 0$   $i=1,2,\dots,s$  sont des états d'équilibre pour  $S_i$  et également  $S_i$ , ce qui implique  $F_i(\mathcal{Z}, 0) \equiv 0$  et  $G_i(\mathcal{Z}, 0) \equiv 0$   $i=1,2,\dots,s$ .

Ce type de décomposition peut être inspiré soit par des critères physiques soit par des critères méthodologiques, mais dans les deux cas on suppose que l'étude de stabilité pour les sous-systèmes isolés est une tâche relativement simple. Pour la deuxième étape de cette approche nous considérons par la suite séparément les deux cas des systèmes continus et discrets.

#### IV.4.1 - Systèmes continus interconnectés

Pour les systèmes continus composés de  $s$  sous-systèmes

$$S_i : DX_i(t) = F_i [t, X_i(t)] + G_i [t, X(t)] \quad (IV.18)$$

les fonctions d'agrégation du vecteur d'état des sous-systèmes  $S_i$  sont des fonctions scalaires  $v_i(t, X_i)$ ,  $v_i: T^c \times R^{n_i} \rightarrow R_+$  définies positives qui satisfont à une inégalité du type

$$Dv_i [t, X_i] (S'_i) \leq h_{i1} [t, X_i, v_i(t, X_i)] \quad (IV.19)$$

où

$$Dv_i [t, X_i] (S'_i) = \left[ \frac{\partial v_i(t, X_i)}{\partial X_i} \right]^T \cdot F_i(t, X_i) + \frac{\partial v_i(t, X_i)}{\partial t} \quad (IV.20).$$

est la dérivée temporelle de  $v_i$  le long des trajectoires du sous-système isolé

$$S'_i : DX_i(t) = F_i [t, X_i(t)]$$

et  $h_{i1}(t, Y_i, W_i)$ ,  $h_{i1}: T^c \times R^{n_i} \times R_+ \rightarrow R$  une fonction telle que  $h_{i1}(t, Y, 0) \equiv 0$ .

La plupart des auteurs supposent que le problème de l'établissement de l'inégalité (IV.19) est une tâche facile, ce qui est considéré comme un avantage de la méthode par rapport à une agrégation directe. Cela nous amène à dire que le choix de la fonction vectorielle définie positive  $V = [v_1, v_2, \dots, v_s]^T$  est déterminée à partir de la forme des sous-systèmes isolés.

Une fois la fonction  $V$  choisie, on fait intervenir les interactions en établissant des inégalités de la forme

$$\left[ \frac{\partial v_i(t, X_i)}{\partial X_i} \right]^T G_i(t, X) \leq h_{i2} [t, X, V(t, X)]$$

où les fonctions  $h_{i2}(t, Y, W)$ ,  $h_{i2} : T^C \times R^n \times R_+^s$  possèdent la propriété  $\mathfrak{P}$  par rapport à  $W$  et vérifient les relations  $h_{i2}(t, Y, 0) \equiv 0$ . Puisque

$$DV_{(IV.18)} = \begin{bmatrix} Dv_1(t, X_1)(s'_1) + \left[ \frac{\partial v_1(t, X_1)}{\partial X_1} \right]^T \cdot G_1(t, X) \\ Dv_2(t, X_2)(s'_2) + \left[ \frac{\partial v_2(t, X_2)}{\partial X_2} \right]^T \cdot G_2(t, X) \\ \vdots \\ Dv_s(t, X_s)(s'_s) + \left[ \frac{\partial v_s(t, X_s)}{\partial X_s} \right]^T \cdot G_s(t, X) \end{bmatrix}$$

si on pose  $H_i = h_{i1} + h_{i2}$  et  $H = [h_1, h_2, \dots, h_s]^T$ , alors

$$Dv_{(IV.18)} \leq H [t, X, V(t, X)]$$

Compte-tenu que la fonction  $H(t, Y, W)$ ,  $H : T^C \times R^n \times R_+^s \rightarrow R^s$  possède la propriété  $\mathfrak{P}$  par rapport à  $W$ , le système de comparaison s'établit comme suit :

$$\begin{aligned} DY(t) &= F [t, Y(t)] \\ DW(t) &= H [t, Y(t), W(t)] \end{aligned} \tag{IV.21}$$

ou simplement comme :

$$DW(t) = H [t, W(t)] \tag{IV.22}$$

si les fonctions  $h_{ij}$  ne dépendent pas de  $Y$  [7].

Mis à part les travaux de Bailey déjà cités, cette approche a connu des développements par D.D.Siljak, Lj.Grujić, A.Michel, D.W.Porter, A.A.Piontkovski, L.D.Rutkovskaya, H.K.Ramapriyan, C.Gentina, P.Borne, G.Bitsois, C.Burgat, V.M.Matrozov ... ([8], [14] - [20], [25] - [27], [44], [46], [50], [51], [53], [57]..). Dans tous ces travaux le système de comparaison est du type (IV.22). Nous n'entrerons pas ici dans les détails de cette approche. Un classement de ces travaux a été fait par Burgat [14]. Nous nous contenterons de donner un exemple pour illustrer la méthode.

### Exemple V.3

Soit le système suivant composé de deux sous-systèmes  $S_1$  et  $S_2$  interconnectés :

$$\begin{aligned} S_1 &= DX_1 = F_1(X_1) + G_1(X) \\ S_2 &= DX_2 = F_2(X_2) + G_2(X) \end{aligned} \tag{IV.23}$$

où  $X = [X_1^T, X_2^T]^T$ ,  $X_1 = [x_{11}, x_{12}]^T$ ,  $X_2 = [x_{21}, x_{22}]^T$  et

$$F_1(X_1) = \begin{bmatrix} -c_1 x_{12} + a_1 x_{11} (x_{11}^2 + x_{12}^2) \\ c_1 x_{11} + a_1 x_{12} (x_{11}^2 + x_{12}^2) \end{bmatrix}$$

$$F_2(X_2) = \begin{bmatrix} -c_2 x_{22} + a_2 x_{21} (x_{21}^2 + x_{22}^2) \\ c_2 x_{21} + a_2 x_{22} (x_{21}^2 + x_{22}^2) \end{bmatrix}$$

$$G_1(X_1) = \begin{bmatrix} b_1 x_{11} (x_{21}^2 + x_{22}^2) \\ b_1 x_{12} (x_{21}^2 + x_{22}^2) \end{bmatrix}$$

$$G_2(X) = \begin{bmatrix} b_2 x_{21} (x_{11}^2 + x_{12}^2) \\ b_2 x_{22} (x_{11}^2 + x_{12}^2) \end{bmatrix}$$

avec  $a_1 < 0$  ,  $a_2 < 0$ .

Ces équations différentielles qui représentent 2 oscillateurs couplés peuvent décrire un système mécanique articulé (p. ex. satellite à panneaux flexibles, mouvement de particules dans un accélérateurs à gradient alterné) [14].

Il est facile de voir qu'on ne peut pas conclure sur la stabilité du système à partir de la première approximation parce que les valeurs propres de la matrice du système linéarisé sont  $\pm jc_1$  et  $\pm jc_2$ . Nous allons appliquer la méthode présentée précédemment. Pour cela nous choisissons les fonctions scalaires définies positives :

$$v_1(X_1) = x_{11}^2 + x_{12}^2$$

$$v_2(X_2) = x_{21}^2 + x_{22}^2$$

et obtenons

$$Dv_1(S'_1) = 2 a_2 v_2^2$$

$$Dv_2(S'_2) = 2 a_2 v_2^2$$

ou

$$S'_1 : DX_1 = F(X_1)$$

$$S'_2 : DX_2 = F(X_2)$$

et

$$\left[ \frac{\partial v_1(X_1)}{\partial x_1} \right]^T \cdot G_1(X) = 2 b_1 v_1 v_2$$



$$\left[ \frac{\partial v_2(x_2)}{\partial x_2} \right]^T \cdot G_2(x) = 2b_2 v_1 v_2$$

Donc

$$Dv_1(S_1) \leq 2 a_1 v_1^2 + 2 \max(0, b_1) \cdot v_1 v_2$$

$$Dv_2(S_2) \leq 2 \max(0, b_2) v_1 v_2 + 2 a_2 v_2^2$$

et le système de comparaison s'établit comme suit

$$DW = 2 \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \max(0, b_1) \\ \max(0, b_2) & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Si la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \max(0, b_1) \\ \max(0, b_2) & a_2 \end{bmatrix}$$

est stable, ce qui est équivalent aux conditions

$$a_1 < 0$$

$$a_2 < 0.$$

(IV.24)

$$a_1 a_2 > \max(0, b_1) \cdot \max(0, b_2)$$

alors il existe deux vecteurs  $\bar{w} \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $w^* \in \mathbb{R}_+^2$  à composantes positives tels que

$$A\bar{w} = -w^*$$

On obtient alors

$$2 \begin{bmatrix} r\bar{w}_1 & 0 \\ 0 & r\bar{w}_2 \end{bmatrix} A r \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} = -2r^2 \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & w_1^* \\ \bar{w}_2 & w_2^* \end{bmatrix}$$

pour tout  $r \in R_+$ . Donc les conditions (IV.24) garantissent la stabilité asymptotique uniforme de l'équilibre  $X=0$  de (IV.23)

IV.4.2 - Systèmes discrets interconnectés

Comme fonctions d'agrégation du vecteur d'état on choisit des fonctions scalaires définies positives  $v_i(k, X_i)$ ,  $v_i : T^d \times R^{n_i} \rightarrow R_+$  continues par rapport à  $X_i$  pour tout  $k \in T^d$  fixé et vérifiant les inégalités.

$$\Delta v_i(k, X)_{(S'_i)} \leq h_{i1} [k, X_i, v_i(k, X_i)] \tag{IV.25}$$

$$|v_i(k, X_i^*) - v_i(k, X_i)| \leq h_{i2}^*(k, \|X_i^* - X_i\|) \tag{IV.26}$$

pour tout  $(k, X_i, X_i^*) \in T^d \times R^{n_i} \times R^{n_i}$ , où

$$\Delta v_i(k, X)_{(S'_i)} = v_i[k+1, F_i(k, X_i) + X_i] - v_i(k, X_i)$$

est la différence totale de  $v_i$  le long des trajectoires du sous-système isolé  $S_i$ . Les fonctions  $h_{i1}(k, Y_i, w_i)$ ,  $h_{i1} : T^d \times R^{n_i} \times R_+ \rightarrow R$  et  $h_{i2}^*(k, r)$ ,  $h_{i2}^* : T^d \times R_+ \rightarrow R_+$  sont supposées continues par rapport à  $Y_i$ ,  $w_i$  et  $r$  et satisfont les relations  $h_{i1}(k, Y_i, 0) \equiv 0$  et  $h_{i2}^*(k, 0) \equiv 0$ . De plus les fonctions  $h_{i2}(k, r)$  et  $h_{i1}(k, Y_i, w_i) + w_i$  sont supposés non décroissantes par rapport à  $r$  et  $w_i$  respectivement.

Dans un deuxième stade on fait intervenir des interconnexions  $G_i(k, X)$  en établissant des inégalités de la forme

$$\|G_i(k, X)\| \leq h_{i2}'' [k, X, V(k, X)] \tag{IV.27}$$

où  $V = [v_1, \dots, v_s]^T$  et les fonctions  $h_{i2}''(k, Y, W)$ ,  $h_{i2}'' : T^d \times R^n \times R_+^s \rightarrow R_+$  sont non décroissantes par rapport à toutes les composantes  $w_i$  de  $W$ .

Soit  $\Delta v_i(k)_{(S_i)}$  la différence totale de  $v_i$  le long des trajectoires du système  $S_i$ :

$$\Delta v_i(k, X_i)_{(S)} = v_i \left[ k+1, F_i(k, X_i) + G_i(k, X) + X_i \right] - v_i(k, X_i)$$

D'après (IV.25)-(IV.27) on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta v_i(k, X_i)_{(S_i)} &= v_i \left[ k+1, F_i(k, X_i) + G_i(k, X) + X_i \right] - \\ &- v_i \left[ k+1, F_i(k, X_i) + X_i \right] + v_i \left[ k+1, F_i(k, X_i) + X_i \right] - \\ &- v_i(k, X_i) \\ &\leq h_{i2}^{\#}(k+1, \|G_i(k, X)\|) + h_{i1} \left[ k, X_i, v_i(k, X_i) \right] \\ &\leq h_{i2}^{\#}(k+1, h_{i2}'' \left[ k, X, V(k, X) \right]) + h_{i1} \left[ k, X_i, v_i(k, X_i) \right] \end{aligned}$$

et si on pose

$$h_i(k, Y, W) = h_{i2}^{\#} \left[ k+1, h_{i2}''(k, Y, W) \right] + h_{i1}(k, Y_i, W_i)$$

alors on peut écrire

$$\Delta V(k, X)_{(S)} \leq H \left[ k, X, V(k, X) \right]$$

ou  $H = [h_1, h_2, \dots, h_s]^T$ .

Ainsi, puisque d'après les hypothèses la fonction  $H \left[ k, Y, W \right] + W$  est non décroissante par rapport à  $W$ , le système de comparaison s'établit comme suit

$$\Delta Y(k) = F \left[ k, Y(k) \right]$$

$$\Delta W(k) = H \left[ k, Y(k), W(k) \right]$$

ou simplement

$$\Delta W(k) = H \left[ k, W(k) \right]$$

dans le cas où la fonction  $H$  ne dépend pas de  $Y$ , [9].

#### IV. 5 - LA METHODE D'AGREGATION DIRECTE

A l'opposé de la méthode d'agrégation-décomposition, ici on ne considère pas que le système est décomposé en sous-systèmes isolés et interconnexions. Le choix de la fonction de transformation  $V(\tau, X)$  est donné à priori (P.ex. Norme vectorielle, fonctions vectorielles à composantes quadratiques etc) de façon à correspondre à une décomposition donnée du vecteur d'état (p.ex. décomposition surjective, régulière ...etc). Ici aussi on peut dire qu'il n'y a pas de méthode systématique pour la construction du système de comparaison, sauf pour certaines classes particulières de systèmes. Nous allons présenter par la suite une telle méthode pour la construction du système de comparaison d'un système dynamique du type

$$\mathcal{D} X(\tau) = M[\tau, X(\tau)] X(\tau) \quad (\text{IV.30})$$

où  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $M$  est une matrice carrée d'ordre  $n \times n$ .

Notons que pour un système dynamique

$$\mathcal{D} X(\tau) = F[X(\tau)] \quad (\text{IV.31})$$

tel que  $F(0) = 0$  et dont la fonction  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue et continument dérivable, si nous posons

$$M(X) = \int_0^1 \frac{\partial F(rX)}{\partial (rX)} dr$$

alors il peut être représenté sous la forme

$$\mathcal{D} X(\tau) = M[X(\tau)] X(\tau)$$

bien que cette représentation ne soit pas unique.

L'application du principe de comparaison pour l'étude de la stabilité de cette classe de systèmes dynamiques a été initialement entreprise par C.Gentina [20] et P. Borne [13] qui ont utilisé comme fonctions de transformation une classe particulière de fonctions de classe  $\mathcal{V}_X$  : les normes vectorielles [54] dont la définition est donnée par

*Définition IV.1*

$$\text{La fonction } P(X) = [p_1(X), \dots, p_s(X)]^T, \quad P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^s$$

est dite norme vectorielle de dimension  $s$  du vecteur  $X$  si

1.  $p_i(X) \geq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i=1,2,\dots,s$
2.  $p_i(X) = 0$  si et seulement si  $X=0, \quad \forall i=1,2,\dots,s$
3.  $p_i(rX) = |r| p_i(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \forall i=1,2,\dots,s$
4.  $p_i(X+Y) \leq p_i(X) + p_i(Y) \quad \forall (X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \forall i=1,2,\dots,s$

Nous présentons rapidement par la suite cette approche séparément pour les deux cas de systèmes continus et discrets.

### 1. Systèmes continus

Nous allons considérer dans ce paragraphe des systèmes continus du type

$$DX(t) = M[t, X(t)] X(t) \quad (\text{IV.32})$$

#### Définition IV.2

La matrice  $A(t, X) = (a_{ij}(t, X))$ ,  $a_{ij} : T^c \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j=1,2,\dots,s$  est une matrice pseudo majorante de (IV.32) déduite de la norme vectorielle  $P(X)$ ,  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^s$  si et seulement si l'inégalité

$$D_+ P(X)_{(\text{IV.32})} \leq A(t, X) P(X) \quad (\text{IV.33})$$

est vérifiée pour tout  $(t, X) \in T^c \times \mathbb{R}^n$ .

Pour qu'une inégalité du type (IV.33) conduise à un système de comparaison, il faut que les éléments hors-diagonaux de la matrice  $A(t, X)$  soient non-négatifs pour tout  $(t, X) \in T^c \times \mathbb{R}^n$ . Avec cette hypothèse le système de comparaison s'établit comme suit :

$$\begin{aligned} DY(t) &= M[t, Y(t)] Y(t) \\ DW(t) &= A[t, Y(t)] W(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

L'avantage de cette approche est la façon systématique avec laquelle on peut construire la matrice  $M$ , donc le système

de comparaison aussi. Nous présentons par la suite cette approche [20] :

$$\text{Soit } P(X) = [P_1(X_1), \dots, P_s(X_s)]^T, X_i \in R^{n_i},$$

$R^n = R^{n_1} \times R^{n_2} \times \dots \times R^{n_s}$  une norme vectorielle et  $Pr_i$   $i=1,2,\dots,s$  les opérateurs de projection de  $R^n$  dans  $R^{n_i}$  :  $X_i = Pr_i X$ . Soit un autre ensemble d'opérateurs  $Pr_j^*$   $j=1,2,\dots,s$  de  $R^n$  dans  $R^{n_j}$  tels que

$$\tilde{R}^n = R^{n_1} \times R^{n_2} \times \dots \times R^{n_s}.$$

On peut alors définir les matrices pseudo-majorantes suivantes :

1. Matrice pseudo-majorante du type  $M(t, X)$  :

$$a_{ii}(t, X) = \sup_{\substack{Y \in R^n \\ i=1,2,\dots,s}} \left( \frac{\left[ \frac{\partial P_i(Y_i)}{\partial Y_i} \right]^T \cdot Pr_i M(t, X) Pr_i^* Pr_i^* Y}{P_i(Y_i)} \right)$$

$$a_{ij}(t, X) = \max_{\substack{Y \in R^n \\ i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,s \\ i \neq j}} \left[ 0, \sup \left( \frac{\left[ \frac{\partial P_i(Y_i)}{\partial Y_i} \right]^T Pr_i M(t, X) Pr_j^* Pr_j^* Y}{P_j(Y_j)} \right) \right]$$

$$i=1,2,\dots,s$$

$$j=1,2,\dots,s$$

$$i \neq j$$

2. Matrice pseudo-majorante du type  $A(t)$  :

$$a_{ii}(t) = \sup_{\substack{Y \in R^n \\ i=1,2,\dots,s}} \left( \frac{\left[ \frac{\partial P_i(Y_i)}{\partial Y_i} \right]^T Pr_i M(t, Y) Pr_j^* Pr_i^* Y}{P_i(Y_i)} \right)$$

$$a_{ij}(t) = \max \left[ 0, \sup_{Y \in R^n} \left( \frac{\left[ \frac{\partial p_i(Y_i)}{\partial Y_i} \right]^T \text{Pr}_i M(t, Y) \text{Pr}_j^* \text{Pr}_j^* Y}{p_j(Y_j)} \right) \right]$$

$$i, j = 1, 2, \dots, s \quad i \neq j$$

3. Matrice pseudo-majorante du type A.

$$a_{ii} = \sup_{\substack{Y \in R^n \\ t \in T^c}} \left( \frac{\left[ \frac{\partial p_i(Y_i)}{\partial Y_i} \right]^T \text{Pr}_i M(t, Y) \text{Pr}_i^* \text{Pr}_i^* Y}{p_i(Y_i)} \right)$$

$$i=1, 2, \dots, s$$

$$a_{ij} = \max \left[ 0, \sup_{\substack{Y \in R^n \\ t \in T^c}} \left( \frac{\left[ \frac{\partial p_i(Y_i)}{\partial Y_i} \right]^T \text{Pr}_i M(t, Y) \text{Pr}_j^* \text{Pr}_j^* Y}{p_j(Y_j)} \right) \right]$$

$$i, j=1, 2, \dots, s \quad i \neq j$$

Il faut noter que dans le cas où la norme vectorielle  $P(X)$  est régulière et  $\text{Pr}_i = \text{Pr}_i^* \quad i=1, 2, \dots, s$  la matrice  $A(t, X)$  définie ci-dessus est la plus petite majorante de  $A$  relativement à  $P(X)$  en ce sens que pour toute autre majorante  $A'(t, X)$  déduite de norme  $P(X)$  il suit que [20]:

$$a_{ij}(t, X) \leq a'_{ij}(t, X) \quad i, j=1, 2, \dots, s$$

pour tout  $(t, X) \in T^c \times R^n$ .

Il faut aussi noter que pour un grand système du type (IV.32) il est préférable, avant toute tentative de construction de sa matrice pseudo-majorante, de procéder à une partition comme

nous l'avons exposée dans la section IV.3 de ce chapitre. Cela facilite la construction de sa matrice pseudo-majorante et l'étude du système de comparaison qui dans ce cas prend la forme (IV.16).

2. Systèmes discrets

Nous considérons maintenant des systèmes discrets du type

$$\Delta X(k) = M[k, X(k)] X(k) \tag{IV.35}$$

Définition IV.3

La matrice  $A^*(k, X) = (a_{ij}^*(k, X))$ ,  $a_{ij}^* : T^d \times R^n \rightarrow R$ ,  $i, j=1, 2, \dots, s$  est une matrice pseudo-majorante de (IV.35) déduite de la norme vectorielle  $P(X)$ ,  $P : R^n \rightarrow R_+^s$  si et seulement si l'inégalité

$$\Delta P(X)_{(IV.35)} \leq [A^*(k, X) - \mathbb{1}] P(X) \tag{IV.36}$$

est vérifiée pour tout  $(k, X) \in T^d \times R^n$ .

Par cette définition il suit que tous les éléments de la matrice  $M$  sont non-négatifs pour tout  $(k, X) \in T^d \times R^n$ . On obtient alors le système de comparaison

$$\Delta Y(k) = M[k, Y(k)] Y(k)$$

$$\Delta W(k) = A[k, Y(k)] W(k)$$

où  $A = A^* - \mathbb{1}$

Avec les mêmes notations pour les opérateurs de projection  $Pr_i, Pr_j^*$  que celles utilisées dans le paragraphe précédent on peut définir les matrices pseudo-majorantes suivantes [13] :

1. Matrice pseudo-majorante du type A (k, X) :

$$a_{ij}(k, X) = \max \left[ 0, \sup_{Y \in R^n} \left( \frac{p_i (Pr_i M(k, X) Pr_j^* Y)}{p_j (Y_j)} \right) \right] \quad i, j=1, 2, \dots, s$$



2. Matrice pseudo-majorante du type  $A^*(k)$  :

$$a_{ij}^*(k) = \max \left[ 0, \sup_{Y \in R^n} \left( \frac{p_i (Pr_i M(k,Y) Pr_j^* Pr_j^* Y)}{p_j (Y_j)} \right) \right] \quad i, j=1, 2, \dots, s$$

3. Matrice pseudo-majorante du type A :

$$a_{ij}^*(k) = \max \left[ 0, \sup_{\substack{Y \in R^n \\ k \in T^d}} \left( \frac{p_i (Pr_i M(k,Y) Pr_j^* Pr_j^* Y)}{p_j (Y_j)} \right) \right] \quad i, j=1, 2, \dots, s$$

Les remarques que nous avons faites dans le cas des systèmes continus sont aussi valables pour le cas de systèmes discrets.

Pour compléter cette première partie de notre mémoire qui concerne le problème d'analyse de stabilité nous présentons deux exemples qui nous donneront l'occasion de comparer nos résultats avec des résultats antérieurs.

*Exemple V.4*

Le mouvement longitudinal (avec sa commande) d'un avion est représenté par le système d'équations [51] :

$$\begin{aligned} D x_i &= -p_i^* x_i + \sigma & i=1, 2, 3, 4 \\ D \sigma &= \sum_{i=1}^4 b_i x_i - q p \sigma - f(\sigma) \end{aligned} \tag{IV.37}$$

où  $p_i^* > 0$ ,  $q > 0$ ,  $p > 0$  et  $b_i$  sont de constantes,  $x_i \in R$ ,  $\sigma \in R$  et la fonction  $f : R \rightarrow R$  est continue dans  $R$  et vérifie les relations  $f(0) = 0$  et  $\sigma f(\sigma) > 0$  si  $\sigma \neq 0$ .

Soit la fonction vectorielle définie positive  $V(X, \sigma) = [v_1(X), v_2(\sigma)]^T$  où  $v_1(X) = X^T X$  avec  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  et  $v_2(\sigma) = \sigma^2$ . Nous obtenons alors

$$DV(X, \sigma) \stackrel{(IV.37)}{\leq} \begin{bmatrix} -2\bar{p}v_1(X) + 2|\sigma| \cdot \sum_{i=1}^4 |x_i| \\ 2b \cdot |\sigma| \cdot \sum_{i=1}^4 x_i - 2 \cdot qp \cdot v_2(\sigma) \end{bmatrix}$$

où  $\bar{p} = \min_i (p_i^*)$  et  $b = \max_i (|b_i|)$ . De plus, puisque

$$\sum_{i=1}^4 |x_i| \leq \sqrt{2} \cdot v_1(X)^{1/2}$$

il vient

$$DV(X, \sigma) \stackrel{(IV.37)}{\leq} 2 \begin{bmatrix} -\bar{p}v_1(X) + 2 \cdot v_2(\sigma)^{1/2} - v_1(X)^{1/2} \\ 2b v_1(X)^{1/2} v_2(\sigma) - qp v_2(\sigma) \end{bmatrix}$$

d'où le système de comparaison

$$D \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = H(W) = 2 \begin{bmatrix} w_1^{1/2} & 0 \\ 0 & w_2^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{p} & 2 \\ 2b & -qp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{1/2} \\ w_2^{1/2} \end{bmatrix}$$

Si

$$\bar{p}qp > 2b \tag{IV.38}$$

alors il existe un vecteur  $W = [w_1, w_2]^T$  tel que

$$\begin{bmatrix} -\bar{p} & 2 \\ 2b & -qp \end{bmatrix} \bar{W} \leq -\beta \bar{W}$$

où  $\beta$  est un nombre réel positif. Donc

$$H(rW) \leq -2\beta^* W \quad o,$$

où  $\beta^* = \beta \min(w_1, w_2)$  et par conséquent l'équilibre  $X=0$  de (IV.37) est globalement exponentiellement stable.

Par l'utilisation d'un système de comparaison linéaire Piontkovskii et Rutkovskaya [51] ont obtenu la condition de stabilité exponentielle

$$4 \sum_{i=1}^s \left( \frac{2 b_i}{\beta p q} \right)^2 < 1$$

Ce même système a été aussi étudié par A.N.Michel [46] par l'utilisation d'une fonction scalaire de Lyapunov, donnant comme condition de stabilité exponentielle

$$\sum_{i=1}^s \left( \frac{2 b_i}{\beta p q} \right)^2 < 1$$

Toutes ces deux conditions sont plus restrictives que celles données par (IV.38).

Exemple V.5

Soit le système continu S :

$$DX_1 = -2a_1 X_1 + \begin{bmatrix} 2\text{sat}(x_{11} + 2x_{12}) \\ 2x_{11} + 4x_{12} \end{bmatrix} + \beta_{11} \begin{bmatrix} (2|x_{11}| + 3|x_{12}|)x_{11} \\ (|x_{11}| + 2|x_{12}|)x_{12} \end{bmatrix} + \beta_{12} \begin{bmatrix} (|x_{21}| + |x_{22}|)x_{21} \\ (|x_{21}| + |x_{22}|)x_{22} \end{bmatrix}$$

$$DX_2 = -2a_2 X_2 + \begin{bmatrix} 2\text{sat}(x_{21} + 2x_{22}) \\ 2x_{21} + 4x_{22} \end{bmatrix} + \beta_{21} \begin{bmatrix} (2|x_{11}| + 3|x_{12}|)x_{11} \\ (|x_{11}| + 2|x_{12}|)x_{12} \end{bmatrix} + \beta_{22} \begin{bmatrix} (|x_{21}| + |x_{22}|)x_{21} \\ (|x_{21}| + |x_{22}|)x_{22} \end{bmatrix}$$

où  $X_1 = [x_{11}, x_{12}]^T$ ,  $X_2 = [x_{21}, x_{22}]^T$  et

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Soit  $V(X) = [v_1(X_1), v_2(X_2)]^T$ ,  $V : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  la fonction vectorielle définie positive :

$$v_1(X_1) = |x_{11}| + |x_{12}|$$

$$v_2(X_2) = |x_{21}| + |x_{22}|$$

Il vient alors par majoration

$$D_+ V(X) \underset{(S)}{\leq} \begin{bmatrix} -2(a_1-4) & 0 \\ 0 & -2(a_2-4) \end{bmatrix} V(X) + \begin{bmatrix} 2\beta_{11} & \beta_{12} \\ 2\beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(X_1)^2 \\ v_2(X_2)^2 \end{bmatrix}$$

D'où le système de comparaison

$$D W = \begin{bmatrix} -2(a-4) & 0 \\ 0 & -2(a-4) \end{bmatrix} W + \begin{bmatrix} 2\beta_{11} & |\beta_{12}| \\ 2|\beta_{21}| & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \end{bmatrix}$$

Si

$$\beta_{11} \leq 0$$

$$\beta_{22} \leq 0$$

(IV.39)

$$\beta_{11} \beta_{22} \geq |\beta_{12}| \cdot |\beta_{21}|$$

alors il existe un vecteur  $\bar{w} = [\bar{w}_1^2, \bar{w}_2^2]^T$ ,  $\bar{w}_1 > 0$ ,  $\bar{w}_2 > 0$  tel que

$$\begin{bmatrix} -2\beta_{11} & |\beta_{12}| \\ 2|\beta_{21}| & \beta_{22} \end{bmatrix} \bar{w} < -\beta \bar{w}$$

d'où

$$r \cdot \begin{bmatrix} -2(a-4) & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta_{11} & \beta_{12} \\ 2\beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} r^2 \begin{bmatrix} -2 \\ \bar{w}_1 \\ -2 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} \leq -2r(a^*-4) \cdot \bar{w}$$

pour tout  $r \in ]0, \infty)$ , où  $a^* = \min(a_1, a_2)$ . Si donc

$$a_1 > 4$$

$$a_2 > 4$$

alors l'équilibre  $X=0$  du système  $S$  est globalement exponentiellement stable.

Ce système a été aussi étudié par C.Gentina [20] par l'application du critère de Popov. Pour le cas  $a_1=a_2$  il a obtenu les conditions

$$\beta_{11} < 0$$

$$\beta_{22} < 0$$

$$8\beta_{11}\beta_{12} > (|\beta_{12}| + 2|\beta_{21}|)^2$$

qui sont plus restrictives que celles données par (IV.39).

#### IV. 6 - CONCLUSION

Nous avons présenté certaines approches facilitant la construction d'un système de comparaison relatif à un système dynamique.

Tout d'abord, nous avons montré que la partition d'un grand système sous la forme d'un schéma présentant une certaine hiérarchisation, peut faciliter non seulement la construction de son système de comparaison, mais aussi, l'analyse de stabilité de ce dernier. Pour certains types particuliers de grands systèmes (systèmes linéaires, systèmes de la forme  $\dot{X} = A(\tau, X) \cdot X$ ), cette approche peut être considérée comme systématique, en ce sens qu'on peut développer des programmes de simulation numérique pour

résoudre les problèmes posés à chaque niveau de l'analyse :  
Partition par l'algorithme de Kevorkian, construction et étude  
de stabilité du système de comparaison par l'approche développée  
par C.Gentina [20] et B.Borne [13].

A nos yeux, une approche du type agrégation -  
décomposition est mieux adaptée à l'étude des systèmes de  
structure mathématique compliquée, mais d'ordre relativement  
faible, qu'à l'étude de systèmes de grande dimension. Ainsi, cette  
approche est plutôt une étude du couplage des systèmes intercon-  
nectés, ce qui implique qu'elle ait surtout été utilisée pour la  
synthèse (p.e. détermination des paramètres intervenant dans les  
termes d'interconnexions assurant la stabilité du système couplé).

L'approche d'agrégation directe est la plus promet-  
teuse puisque en général elle autorise des majorations plus faibles  
que celles nécessaires pour utiliser la méthode d'agrégation -  
décomposition, principalement lors de la construction du système  
de comparaison.

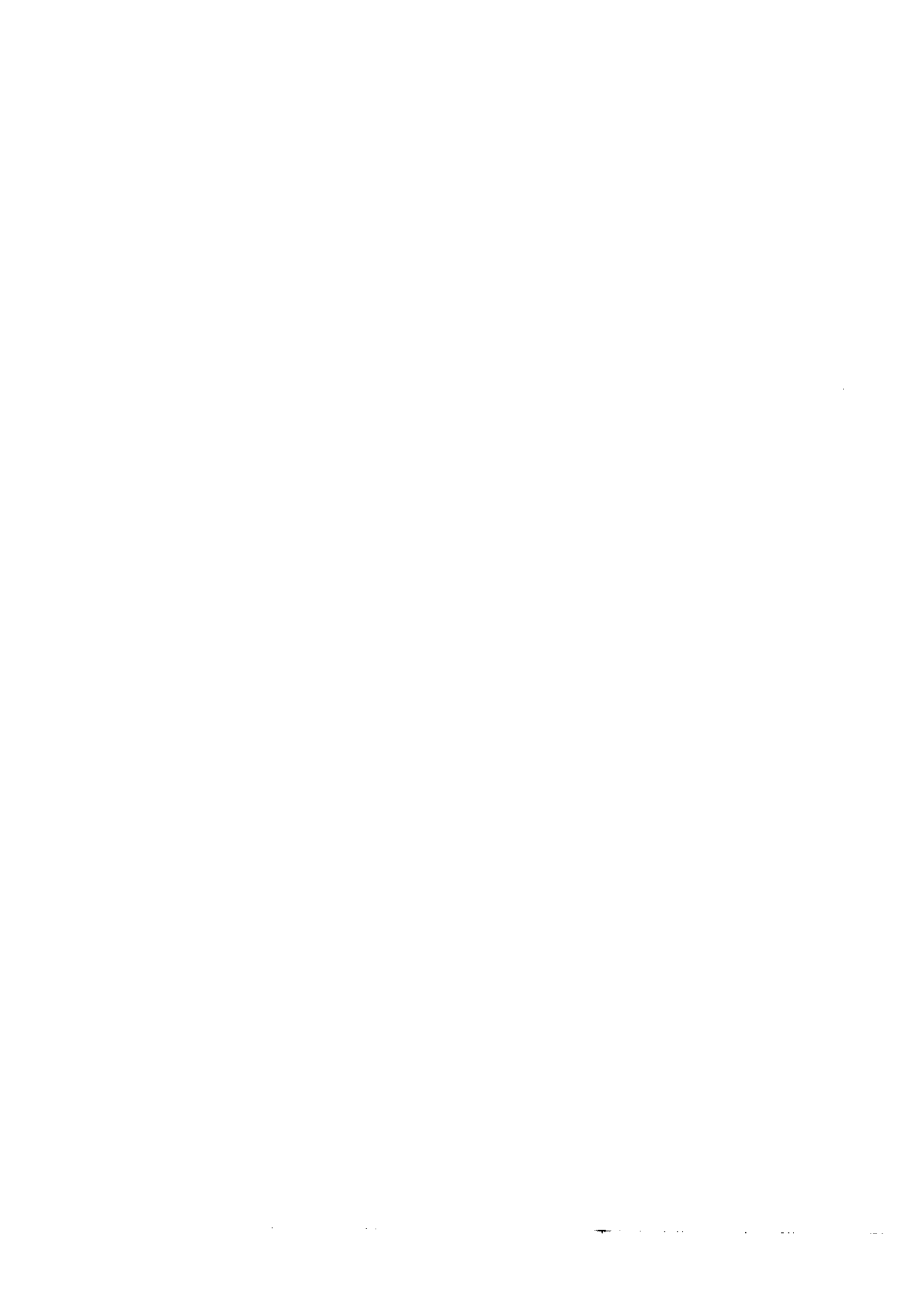
Enfin, notons que les seules méthodes systématiques  
de construction de systèmes de comparaison développées à ce jour,  
à notre connaissance, sont celles de H.K.Ramapriyan [53] et  
G.S. Vakonia et al, [67] pour les systèmes linéaires à coefficients  
constants, et celle de C. Gentina [20] et B. Borne [13] pour les  
systèmes du type  $\dot{X} = A(\tau, X) \cdot X$ .

\_\_\_\_\_.



C H A P I T R E V





SUR QUELQUES PROBLEMES DE COMMANDE

---

- V.1 - INTRODUCTION
- V.2 - COMMANDE EN TEMPS MINIMAL
- V.3 - SYNTHÈSE DE SYSTEMES A TEMPS DE REPONSE FIXE
- V.4 - SYNTHÈSE DE SYSTEMES A COMPORTEMENT EXPONENTIEL PRESPECIFIE
- V.5 - SYNTHÈSE DE SYSTEMES A CÔÛT BORNE
- V.6 - CONCLUSIONS



V.I. - INTRODUCTION

Si à l'origine la méthode de Lyapunov était principalement utilisée pour l'analyse des propriétés de stabilité des solutions des systèmes dynamiques, certains travaux se sont par la suite attachés à montrer qu'elle pouvait être de quelque utilité en vue de la synthèse de lois de commande [22]. Tous ces travaux portent sur l'utilisation d'une fonction scalaire définie positive sans aucune décomposition du système étudié en sous-systèmes.

L'introduction de la notion de fonction vectorielle définie positive est étroitement liée pour son application aux systèmes complexes au fait qu'il permet une décomposition du système global en un certain nombre de sous-systèmes. C'est la raison pour laquelle l'utilisation de fonctions vectorielles définies positives et du principe de comparaison paraît adaptée pour le problème de synthèse de commandes de grands systèmes et plus particulièrement pour la synthèse de commandes de type décentralisée

Certains travaux ont été déjà entrepris dans ce sens. Ainsi D.D. Šiljak et M.B. Vukčević [65], en utilisant des fonctions vectorielles définies positives et le principe de comparaison, ont dans le domaine des systèmes linéaires et bilinéaires déterminé une classe des systèmes interconnectés stabilisables par commande décentralisée. Le problème consistait à la recherche des commandes locales stabilisant les sous-systèmes isolés à un degré suffisamment élevé, de sorte que leur stabilité ne soit pas détruite par l'introduction des interconnexions.

Dans un autre article [64], ils ont proposé une commande à deux niveaux : le niveau supérieur diminuant les effets des interconnexions entre sous-systèmes, le niveau local devant assurer un degré de stabilité suffisant pour chaque sous-système isolé. Ces approches ont été appliquées pour la stabilisation d'un grand télescope [63], [65] et d'un modèle linéaire de Skylab [62].

Dans [21] J.C.Geromel et J.Bernussou ont proposé un algorithme pour la détermination des degrés de stabilité minimaux à fixer au niveau de chaque sous-système afin d'assurer la stabilité du système global soumis à des perturbations structurelles. Enfin, V.D. Furasov [18], [19] a considéré le problème de stabilisation des systèmes non linéaires interconnectés et a établi des conditions pour qu'une classe de commandes au niveau local assure la stabilité du système global avec un comportement transitoire pré-spécifié.

Dans ce chapitre, nous montrons comment par l'utilisation de fonctions vectorielles définies positives et du principe de comparaison il est possible de résoudre quelques problèmes de commande de grands systèmes dynamiques, sans faire la décomposition de chaque sous-système en sous-systèmes isolés et termes d'interconnexions. Dans un premier paragraphe nous considérons le problème en temps minimal en proposant une extension d'un théorème de N. E. Nahí [48]. A partir de ce théorème et de l'analyse du système de comparaison développée au chapitre II, nous considérons par la suite trois problèmes distincts.

1. Synthèse d'une commande assurant que tout état initial pris à l'intérieur d'un domaine entourant l'origine est transférée à l'équilibre dans un temps donné.

2. Stabilisation d'un grand système avec un degré de comportement exponentielle prespécifié.

3. Synthèse des systèmes à coût borné.

Dans ce chapitre, nous ne considérons que des systèmes dynamiques continus décrits par une équation différentielle du type

$$DX = F(t, X, U) \quad (V.1)$$

où  $X \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $U \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de commande, la fonction  $F$  étant définie dans  $T^c \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Notre but étant d'étudier certains problèmes de commande en boucle fermée, les commandes  $U$  seront supposées être fonctions de temps et de l'état du système,  $U = U(t, X)$  et appartenir à un ensemble  $\mathcal{S}^c$  dit ensemble des commandes admissibles.

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction nous nous intéresserons plus particulièrement aux problèmes de commande décentralisée, ce qui dans notre étude correspondra à l'hypothèse que le système V.1 est décomposé en  $s$  sous-systèmes du type

$$DX_i = F_i [t, X, U_i] \quad i=1, 2, \dots, s \quad (V.2)$$

où  $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_s}$  et  $U_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_s}$ .

## V.2. COMMANDE EN TEMPS MINIMAL

Soit le système dynamique continu décrit par l'équation différentiel

$$DX(t) = F [t, X, U] \quad (V.3)$$

où  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $U \in \mathbb{R}^m$  et  $X=0$  est un état d'équilibre en l'absence de commande. Etant donné un ensemble  $\mathcal{S}^c$  de fonctions  $U(t, X)$   
 $U : T^c \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  et un domaine connexe  $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathbb{R}^n$  entourant l'origine, le problème consiste à la détermination d'une fonction  $\hat{U} \in \mathcal{S}^c$  dite *commande en temps minimal* telle que tout état initial  $X(t_0) = X_0$ ,  $X_0 \in \mathcal{R}(X)$  du système

$$DX(t) = F [t, X, U(t, X)] \quad (V.4)$$

soit transféré à l'origine  $X=0$  dans un temps minimal. Le théorème suivant donne des conditions d'existence d'une solution de ce problème et fait apparaître une méthode pour sa détermination.

Théorème V.1

S'il existe une fonction vectorielle définie positive  $V(t,X) : T \times R^n \rightarrow R_+^s$  et une commande  $\hat{U}(t,X) \in \mathcal{S}^c$  telles que

$$1. \left[ \frac{\partial v_i}{\partial X} \right]^T F(t,X, \hat{U}) = \min_{U \in \mathcal{R}^c} \left( \left[ \frac{\partial v_i}{\partial X} \right]^T \cdot F(t,X,U) \right) \quad i=1,2,\dots,s \quad (V.5)$$

$$V(t,X) \in T^c \times R^n$$

$$2. \left[ \frac{\partial v_i}{\partial X} \right]^T \cdot F(t,X, \hat{U}) + \frac{\partial v_i}{\partial t} \equiv h_i [t, V(t,X)] \quad i=1,2,\dots,s \quad (V.6)$$

où la fonction  $H = [h_1, \dots, h_s]^T$ ,  $H : T^c \times R_+^s \rightarrow R^s$  possède la propriété  $\mathcal{H}$  dans  $R_+^s$  et  $H(t,0) \equiv 0$ .

3. Tout état initial  $W(t_0) = W_0$ ,  $W_0 \in \mathcal{R}(W)$  où

$$\mathcal{R}(W) \supseteq \left\{ W \in R_+^s : (\exists (t,X) \in T^c \times \mathcal{R}(X) : V(t,X) = W) \right\}$$

du système de comparaison

$$DW = H(t,W) \quad (V.7)$$

est transféré à l'origine  $W=0$  dans un temps fini, alors

- a.  $\hat{U}$  est une commande en temps minimal du système (V.3).
- b. Le temps de transfert de l'état  $X(t_0) = X_0$  à l'équilibre  $X=0$  du système (V.4) est égal au temps de transfert de l'état  $W(t_0) = V(t_0, X_0)$  à l'équilibre du système de comparaison (V.7).

*Démonstration*

Désignons par  $\hat{X}(t; t_0, X_0)$  les trajectoires du système (V.4) et par  $X(t; t_0, X_0)$  les trajectoires du système (V.3) pour une autre commande  $U \in \mathcal{S}^c$  qui transfère l'état initial  $X_0$  à l'équilibre  $X=0$  dans un temps fini.

Puisque la fonction  $V(t,X)$  est définie positive, le temps de transfert d'un état initial  $X(t_0)=X_0$  à l'équilibre  $X=0$  sur la trajectoire  $X(t; t_0, X_0)$  est égal au temps de transfert du point  $V_0 = V(t_0, X_0)$  à l'origine sur la trajectoire  $V [t, X(t; t_0, X_0)]$ .  
Des hypothèses 2 et 3 il suit que

$$V [t, \hat{X}(t; t_0, X_0)] = W(t; t_0, W_0) \quad \forall t \in T_0^c$$

avec

$$W_0 = V(t_0, X_0).$$

pour tout  $(t_0, X_0) \in T^c \times \mathcal{R}(X)$  ; donc la proposition (b) est vraie puisque  $V(t_0, X_0) \in \mathcal{R}(W)$  pour  $(t_0, X_0) \in T^c \times \mathcal{R}(X)$ .

Pour montrer la proposition (a) il suffit de montrer que pour toute autre commande  $U \in \mathcal{S}^c$  l'inégalité

$$V [t, \hat{X}(t; t_0, X_0)] \leq V [t, X(t; t_0, X_0)] \quad (V.8)$$

est vérifiée pour tout  $(t_0, X_0) \in T^c \times \mathcal{R}(X)$  et  $t \in T_0^c$ .

L'inégalité (V.8) est vérifiée pour  $t=t_0$ . Elle est aussi vérifiée pour  $t \geq t_0$ , parce que pour tout  $t' \geq t_0$  et tout indice  $i$  pour lesquels

$$v_i [t', \hat{X}(t'; t_0, X_0)] = v_i [t', X(t'; t_0, X_0)]$$

$$v_j [t', \hat{X}(t'; t_0, X_0)] \leq v_j [t', X(t'; t_0, X_0)] \quad j=1, 2, \dots, s \\ j \neq i$$

d'après les hypothèses 1 et 2 nous obtenons

$$\begin{aligned} & D ( v_i [t, \hat{X}(t)] - v_i [t, X(t)] )_{t=t'} = \\ & = h_i(t', V [t', \hat{X}(t')]) - \left[ \frac{\partial v_i}{\partial X} \right]^T F [t', X(t'), U(t', X(t'))] - \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{t=t'} \\ & \leq h_i(t', V [t', \hat{X}(t')]) - \left[ \frac{\partial v_i}{\partial X} \right]^T F [t', X(t'), U(t', X(t'))] - \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{t=t'} \\ & \leq \left[ \frac{\partial v_i}{\partial X} \right]^T F [t', X(t'), \hat{U}(t', X(t'))] - \left[ \frac{\partial v_i}{\partial X} \right]^T F [t', X(t'), U(t', X(t'))] \\ & \leq 0 \end{aligned}$$



c.q.f.d.

Ce théorème constitue une extension d'un théorème établi par N.E. Nahi [48] pour le cas d'une fonction scalaire  $v(X)$  et d'un système de comparaison autonome d'ordre 1.

Il est évident que la satisfaction des hypothèses 1 et 2 est en général un problème très délicat. L'hypothèse 3 découle naturellement des deux premiers si pour le système étudié le problème de commande en temps minimal a une solution.

Le problème de la minimisation simultanée des expressions

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial v_i}{\partial X} \end{array} \right]^T \cdot F(t, X, U) \quad i=1, 2, \dots, s \quad (V.9)$$

n'a de solution que dans des cas particuliers. L'utilisation d'une fonction vectorielle définie positive est recommandée lorsque le système étudié à la forme (V.2) et les contraintes sur les commandes locales  $U_i$  sont indépendantes entre elles. Dans ce cas, les problèmes de minimisation des expressions (V.9) sont aussi indépendants entre eux.

L'application du Théorème V.1 est dans le cas général une tâche difficile, c'est pourquoi on est amené à chercher des commandes sous-optimales:

D'après le théorème de comparaison IV.1, s'il existe une fonction  $V(t, X)$  définie positive, et une commande  $U(t, X)$  telles que

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial X} \right]^T \cdot F [t, X, U(t, X)] + \frac{\partial V}{\partial t} \leq H [t, V(t, X)] \quad (V.10)$$

où la fonction  $H$  possède la propriété  $\mathcal{D}\mathcal{C}$  et  $H(t, 0) \equiv 0$ , alors

$$V [t, X(t; t_0, X_0)] \leq W (t; t_0, W_0) \quad (V.11)$$

où  $W_0 = V(t_0, X_0)$  et  $W (t; t_0, W_0)$  est la solution du système de comparaison

$$DW = H(t, W) \quad (V.12)$$

Puisque  $V(t, X)$  est définie positive le temps de transfert  $T(t_0, X_0)$  de l'état initial  $X(t_0) = X_0$  à l'origine est donné par la relation

$$T(t_0, X_0) = \max_{t \in T_0} (V[t; X(t; t_0, X_0)]) = 0$$

et d'après (V.11)

$$T(t_0, X_0) \leq T(t_0, W_0)$$

où  $T(t_0, W_0)$  est le temps de transfert à l'origine de l'état initial  $W(t_0) = W_0$  du système de comparaison (V.12). Ainsi le choix de la commande  $U$  doit être effectuée de façon à conduire à un système de comparaison pour lequel le temps de transfert de ses états initiaux soit le plus petit possible. Pour cela nous donnons le Théorème suivant :

### Théorème V.2

Soit les systèmes dynamiques

$$DW = H(t, W)$$

$$D\tilde{W} = \tilde{H}(t, \tilde{W})$$

où les fonctions  $H$  et  $\tilde{H}$  possèdent la propriété  $\exists \epsilon$ . Si

$$H(t, W) \leq \tilde{H}(t, W)$$

pour tout  $(t, W) \in T \times R^s$ , alors

$$W(t; t_0, W_0) \leq \tilde{W}(t; t_0, W_0) \quad (V.13)$$

pour tout  $(t_0, W_0) \in T \times R^s$  et  $t \geq t_0$ .

### *Démonstration*

L'inégalité (V.13) est vérifiée pour  $t=t_0$ . Elle est aussi vérifiée pour  $t \geq t_0$ , parce que s'il existe un instant  $t' \geq t_0$  et un indice  $i$  telsque

$$w_i(t'; t_0, W_0) = \tilde{w}_i(t'; t_0, W_0)$$

$$w_j(t'; t_0, W_0) \leq \tilde{w}_j(t'; t_0, W_0) \quad j \neq i$$

il vient

$$D[w_i(t; t_0, W_0) - \tilde{w}_i(t; t_0, W_0)]_{t=t'} = h_i[t', W(t'; t_0, W_0)] - h_i[t', \tilde{W}(t'; t_0, W_0)] \leq 0$$

Ce théorème montre qu' il est convenable de choisir comme commande  $U$  la commande  $\hat{U}$  qui minimise l'expression

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial X} \right]^T F [t, x, U(t, X)]$$

parce que si pour une autre commande  $\tilde{U}$  on peut trouver une fonction  $\tilde{H}$  possédant la propriété  $\partial \mathcal{C}$  et satisfaisant à l'inégalité

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial X} \right]^T F [t, X, \tilde{U}(t, X)] + \frac{\partial V}{\partial t} \leq \tilde{H} [t, V(t, X)]$$

alors on peut toujours trouver une fonction  $\hat{H}$  possédant la propriété  $\partial \mathcal{C}$  et satisfaisant à l'inégalité

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial X} \right]^T F [t, X, \hat{U}(t, X)] + \frac{\partial V}{\partial t} \leq \hat{H} [t, V(t, X)] \leq \tilde{H} [t, V(t, X)]$$

En effet, on a alors

$$\hat{T}(t_0, W_0) \leq \tilde{T}(t_0, W_0)$$

où  $\hat{T}$  et  $\tilde{T}$  sont les temps de transfert à l'origine de l'état initial  $W(t_0) = W_0$  pour les systèmes

$$DW = \hat{H}(t, W)$$

et

$$D\tilde{W} = \tilde{H}(t, \tilde{W})$$

respectivement.

Avant de montrer que le principe de comparaison peut être appliquée dans la synthèse des lois de commande sous optimale, nous donnons un exemple d'application du théorème V.11.

Exemple V.1

Soit le système suivant, décomposé en deux sous-systèmes  $S_1$  et  $S_2$  :

$$S_1: \quad D \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_{11} + b_1 x_{12} + x_{11} x_{21}^2 + x_{11} x_{22}^2 \\ -b_1 x_{11} + a_1 x_{12} + x_{12} x_{21}^2 + x_{21} x_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \quad (V.14a)$$

$$S_2: \quad D \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 x_{21} + b_2 x_{22} + x_{21} x_{11}^2 + x_{21} x_{12}^2 \\ -b_2 x_{21} + a_2 x_{22} + x_{22} x_{11}^2 + x_{22} x_{12}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} \quad (V.14b)$$

les vecteurs de commande  $U_1 = [u_{11}, u_{12}]^T$  et  $U_2 = [u_{21}, u_{22}]^T$  vérifiant les contraintes  $u_{11}^2 + u_{12}^2 \leq p_1^2$  et  $u_{21}^2 + u_{22}^2 \leq p_2^2$  ou  $p_1, p_2$  sont de nombres réels positifs.

Soit la fonction vectorielle définie positive  $V(X) = [v_1(x_1), v_2(x_2)]^T$   
 $x_1 = [x_{11}, x_{12}]^T$   $x_2 = [x_{21}, x_{22}]^T$  avec

$$v_1(x_1) = x_{11}^2 + x_{12}^2$$

$$v_2(x_2) = x_{21}^2 + x_{22}^2$$

Alors

$$\left[ \frac{\partial v_1}{\partial x} \right]^T \cdot F(X, U) = 2a_1 v_1 + 2v_1 v_2 + 2 [x_{11}, x_{12}]^T U_1$$

$$\left[ \frac{\partial v_2}{\partial x} \right]^T \cdot F(X, U) = 2a_2 v_2 + 2v_1 v_2 + 2 [x_{21}, x_{22}]^T U_2$$

donc

$$\hat{U}_1 = p_1^{-1/2} v_1^{-1/2} \cdot [x_{11}, x_{12}]^T$$

et

$$\hat{U}_2 = p_2^{-1/2} v_2^{-1/2} \cdot [x_{21}, x_{22}]^T$$

d'où le système de comparaison

$$DW=H(W) = 2 \cdot \begin{bmatrix} a_1 w_1 + w_1 w_2 - p_1 w_1^{1/2} \\ a_2 w_2 + w_1 w_2 - p_2 w_2^{1/2} \end{bmatrix} \quad (V.15)$$

Il est facile de voir que l'équilibre  $W=0$  de ce système n'est pas globalement attractif, donc il faut faire une estimation de la région  $\mathcal{R}(W)$  des états initiaux qui se transfèrent à l'équilibre dans un temps fini. Pour établir une telle estimation on essaiera de se ramener à un problème linéaire de la façon suivante.

Soit un vecteur  $W_0^* = [w_{01}^*, w_{02}^*]^T$  à composantes strictement positives et le système :

$$\tilde{D}\tilde{W}=\tilde{H}(\tilde{W}) = \begin{bmatrix} a_1 \tilde{w}_1 + w_{02}^* \tilde{w}_1 - p_1 \tilde{w}_1^{-1/2} \\ a_2 \tilde{w}_2 + w_{01}^* \tilde{w}_2 - p_2 \tilde{w}_2^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (V.16)$$

Puisque pour les systèmes

$$DW = H(W)$$

$$\tilde{D}\tilde{W} = \tilde{H}(\tilde{W})$$

l'inégalité

$$H(t, W) \leq \tilde{H}(t, W)$$

est vérifiée pour tout  $(t, W) \in T^c \times \mathcal{R}(\tilde{W})$  :

$$\mathcal{R}(\tilde{W}) = \left\{ \tilde{W} \in \mathbb{R}_+^2 : \tilde{w}_{oi} \leq w_{oi}^* \quad i=1,2 \right\}$$

alors d'après le théorème V.2

$$W(t; t_0, W_0) \leq \tilde{W}(t; t_0, W_0)$$

pour tout  $t \in T_0$  pour lequel  $\tilde{W}(t) \in \mathcal{R}(\tilde{W})$ . Donc si les états initiaux  $\tilde{W}_0 \in \mathcal{R}(\tilde{W})$  du système (V.16) se transfèrent à l'origine dans un temps fini et  $W(t; t_0, \tilde{W}_0) \in \mathcal{R}(\tilde{W}) \forall t \in T_0$  alors il en va de même pour le système (V.15). Par conséquent, compte tenu du fait que le système (V.16) possède la propriété  $\mathcal{D}\mathcal{E}$ , il suffit de déterminer un vecteur  $W_0^*$  qui se transfère à l'origine dans un temps fini et (d'après le théorème II.9)  $\tilde{H}(W_0^*) \leq 0$ .

Par séparation des variables nous pouvons établir les solutions du système (V.16) comme suit :

$$\tilde{w}_i(t_j, t_0, \tilde{w}_0) = \frac{1}{(a_i + w_{oj}^*)^2} \exp - \frac{(a_i + w_{oj}^*)}{2} (t - t_0 + t_i^*) - \frac{p_i}{2} \quad j=i$$

$$t_i^* = - \frac{2}{a_i + w_{oj}^*} \ln \left[ p_i - (a_i + w_{oj}^*) \tilde{w}_{io}^{1/2} \right] \quad j \neq i$$

avec

$$a_i + w_{oj}^* \neq 0$$

$$p_i - (a_i + w_{oj}^*) \tilde{w}_{io}^{1/2} > 0 \quad j \neq i$$

Ainsi le temps de transfert  $T(\tilde{w}_0)$  de l'état  $\tilde{w}_0$  à l'origine est donné par la relation

$$T(\tilde{w}_0) = \max_i \left[ - \frac{2}{a_i + w_{oj}^*} \ln \left( 1 - \frac{a_i + w_{oj}^*}{p_i} \tilde{w}_{oi}^{1/2} \right) \right] \quad j \neq i$$

donc

$$T(w_0^*) = \max_i \left[ - \frac{2}{a_i + w_{oj}^*} \ln \left( 1 - \frac{a_i + w_{oj}^*}{p_i} w_{oi}^{1/2} \right) \right] \quad j \neq i$$

et pour définir une région des états initiaux  $X_0 \in R^4$  qui se transfèrent à l'origine  $X=0$  il suffit de choisir un vecteur  $w_0^* = [w_{o1}^*, w_{o2}^*]^T$  à composantes positives qui satisfait aux relations

$$p_i - (a_i + w_{oj}^*) \cdot \tilde{w}_{io}^{1/2} > 0 \quad i \neq j \quad i = 1, 2$$

$$a_i + w_{oj}^* \neq 0 \quad i \neq j \quad i = 1, 2$$

car ce vecteur satisfaira aussi l'inégalité

$$\tilde{H}(w_0^*) < 0$$

### V. 3 - SYNTHÈSE DE SYSTEMES A TEMPS DE REPONSE FIXE

L'approche que nous avons développée dans le paragraphe précédant peut être également utilisée pour la synthèse de systèmes à temps de réponse fixé avec commande décentralisée.

Soit le système

$$DX_i = F_i(t, X, U_i) \quad i=1, 2, \dots, s$$

$$\text{où } X_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad X = [X_1^T, X_2^T, \dots, X_s^T]^T, \quad n = \sum_{i=1}^s n_i,$$

$U_i \in \mathbb{R}^m$ , et  $F_i : T^c \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$  avec  $F_i(t, 0, 0) \equiv 0$ .

Le problème consiste à trouver de commandes locales  $U_i(t, X)$   $i=1, 2, \dots, s$  du type  $\|U_i\|_e \leq p_i$  ou  $\|\cdot\|_e$  est la norme Euclidienne et  $p_i$  de nombres réels positifs, telles que tout état initial  $X_0$  appartenant au domaine

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \|X_i\|_e \leq d_i \quad i=1, 2, \dots, s \right\}$$

ou  $d_i$  sont des nombres réels positifs, soit ramené à l'origine dans un temps non supérieur à un temps donné  $T^*$ .

Pour résoudre ce problème on choisit une fonction vectorielle définie positive  $V(t, X) = [v_1(t, X_1), \dots, v_s(t, X_s)]^T$  et on cherche des commandes  $\hat{U}_i(t, X, p_i)$  telles que

$$\left[ \frac{\partial v_i}{\partial X_i} \right]^T \cdot F_i[t, X, \hat{U}_i(t, X, p_i)] = \min_{\|U_i\|_e \leq p_i} \left( \left[ \frac{\partial v_i}{\partial X_i} \right]^T F_i[t, X, U_i(t, X)] \right)$$

où  $p_i$  est un nombre réel positif à déterminer.

Dans une deuxième étape on établit le système de comparaison

$$D W = \hat{H}(t, W, P)$$

où  $\hat{H}(t, W, P)$  est une fonction possédant la propriété  $\mathcal{H}$  telle que  $\hat{H}(t, 0, 0) \equiv 0$  et

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial X} \right]^T \cdot F[t, X, \hat{U}(t, X, P)] + \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] \leq \hat{H}[t, v(t, X), P]$$

où  $P = [p_1, \dots, p_s]^T$ .

Soit  $\hat{W}$  le vecteur défini par la relation

$$\hat{W} = \sup_{(t, X) \in T^c \times \mathcal{R}(X)} [V(t, X)]$$

où le sup est pris composante par composante. Puisque pour tout  $W_0 \leq \hat{W}$  il suit que

$$W(t; t_0, W_0) \leq W(t; t_0, \hat{W})$$

le problème initial est ramené à la détermination d'un vecteur  $\hat{P} \in \mathbb{R}_+^s$  à composantes positives tel que l'état initial  $W(t_0) = \hat{W}_0$  du système

$$D W = \hat{H}(t, W, \hat{P})$$

soit transféré à l'origine dans un temps inférieur ou égal à  $T^*$

Nous allons illustrer cette approche par deux exemples.

### Exemple V.2

Soit le système linéaire, décomposé en  $s$  sous-systèmes  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

$$S_i : DX_i = \sum_{j=1}^s A_{ij} X_j + B_i U_i \quad (V.18)$$

où  $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $U_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $A_{ij}$  sont matrices d'ordre  $n_i \times n_j$  et  $B_i$  des matrices carrées d'ordre  $n_i \times n_i$  et de rang  $n_i$ . Le problème consiste à trouver des commandes locales  $U_i$ ,  $\|U_i\|_e \leq p_i$ ,  $\|\cdot\|_e$  étant la norme Euclidienne, telles que toute condition initiale  $X_0 \in \mathcal{R}(X)$

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \|X_i\|_e \leq d_i \quad i=1, 2, \dots, s \right\}$$

où  $d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  sont des nombres réels positifs, soit transférée à l'origine dans un temps non supérieur à un temps donné  $T^*$ .

Soit  $s$  matrices carrées symétriques  $Q_i$  définies positives et  $V(X)$  la fonction vectorielle définie positive  $V(X) = [v_1(X_1), \dots, v_s(X_s)]^T$  où  $v_i(X_i) = X_i^T Q_i X_i$ . Alors,

$$\left[ \frac{\partial v_i(X_i)}{\partial X_i} \right]^T F_i(X, U) = 2 \sum_{j=1}^s X_i^T Q_i A_{ij} X_j + 2 X_i^T Q_i B_i U_i$$



et les commandes  $\hat{U}_i$  qui minimisent ces expressions sont données par les relations suivantes

$$\hat{U}_i(X_i) = \begin{cases} -p_i \frac{B_i^T Q_i X_i}{\|B_i^T Q_i X_i\|_e} & \text{si } X_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } X_i = 0 \end{cases} \quad (V.19)$$

Donc

$$\left[ \frac{\partial v_i}{\partial X_i} \right]^T F_i(X, \hat{U}) = 2 \sum_{j=1}^s X_i^T Q_i A_{ij} X_j - 2p_i (X_i^T Q_i B_i B_i^T Q_i X_i)^{1/2} \quad i=1,2,\dots,s$$

Soit  $c_i, c_{ij}$  les nombres réels (positifs) minimaux tels que les matrices

$$Q_i A_{ii} - c_i Q_i$$

$$Q_i Q_i - c_{ii}^2 Q_i$$

$$A_{ij}^T A_{ij} - c_{ij}^2 Q_i \quad i \neq j$$

soit semi-définies négatives et  $\mu_i \quad i = 1,2,\dots,s$  les nombres réels maximaux tels que les matrices

$$Q_i B_i B_i^T Q_i - \mu_i^2 Q_i$$

soit semi-définies positives. On obtient alors

$$Dv_i(S_i) \leq 2 c_i v_i + 2 c_{ii}^{1/2} v_i \sum_{j=1}^s c_{ij}^{1/2} v_j - 2 p_i \mu_i^{1/2} v_i$$

Si nous désignons par C la matrice

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_{11}c_{12}\dots\dots & c_{11}c_{1s} \\ c_{22}c_{21} & c_2\dots\dots & c_{22}c_{2s} \\ \vdots & & \\ c_{ss}c_{s1} & c_{ss}c_{s2} & c_s \end{bmatrix}$$

alors le système de comparaison s'établit comme suit :

$$D W = 2 \begin{bmatrix} w_1^{1/2} & & & & \textcircled{+} \\ & w_2^{1/2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & w_s^{1/2} & \\ \textcircled{+} & & & & \end{bmatrix} \left( C \begin{bmatrix} 1/2 \\ w_1 \\ 1/2 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s^{1/2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \mu_1 \\ p_2 \mu_2 \\ \vdots \\ p_s \mu_s \end{bmatrix} \right) \quad (V.20)$$

Avec le changement des variables  $\tilde{w}_i = w_i^{1/2}$  ce système de comparaison prend la forme suivante

$$D \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \vdots \\ \tilde{w}_s \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \vdots \\ \tilde{w}_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{r}_1(t) \\ \tilde{r}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{r}_s(t) \end{bmatrix} \quad (V.21)$$

où  $\tilde{R}(t) = [\tilde{r}_1(t) \dots, \tilde{r}_s(t)]^T$ , avec  $\tilde{r}_i(t) = 0$  si  $\tilde{w}_i(t) = 0$  et  $\tilde{r}_i(t) = p_i \mu_i$  si  $\tilde{w}_i(t) > 0$ .

Ainsi les solutions de (V.21) sont données par

$$\tilde{W}(t) = \exp [C(t-t_0)] \tilde{W}_0 - \exp (Ct) \left[ \int_{t_0}^t \exp [-C\tau^*] \tilde{R}(\tau^*) d\tau^* \right]$$

Soit  $\hat{W} = [\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_s]^T$  le vecteur défini par les

relation 
$$\hat{w}_i = \min [ w_i : x_i^T Q_i x_i \leq w, \forall x_i \in R^{n_i}, \|x_i\|_e \leq d_i ]$$

Il suffit alors de déterminer le vecteur  $\hat{R} \in R^s$  où  $\hat{r}_i = p_i \cdot \mu_i$  qui vérifie la relation

$$\exp (CT^*) \hat{W} - \exp [C(T^*+t_0)] \left[ \int_{t_0}^{t_0+T^*} \exp [-C\tau^*] d\tau^* \right] \hat{R} = 0 \quad (V.22)$$

Puisque on peut toujours arriver à un système de comparaison où la matrice  $C$  est non singulière, la relation (V.22) peut se mettre sous la forme suivante

$$\exp [C T^*] \hat{W} - \exp [C T^*] C^{-1} \left( \mathbb{1} - \exp [-CT^*] \right)_{\hat{R}=0}^{\hat{R}} = 0$$

d'où

$$\hat{R} = \left( \mathbb{1} - \exp [-CT^*] \right)^{-1} \cdot C \hat{W}$$

et les paramètres  $p_i$  des commandes  $\hat{U}_i$  données par (V.19) sont calculées par les relations

$$p_i = \frac{\hat{r}}{\mu_i} \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

*Exemple V. 3*

Soit le système (V.10) étudié dans l'Exemple V.1. Supposons que l'on cherche deux commandes locales  $U_1$  et  $U_2$  pour que tout état initial  $X_0 \in \mathcal{R}(X)$ .

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 : \|X_i\|_e \leq d_i \quad i=1,2 \right\}$$

où  $d_1, d_2$  sont deux nombres réels positifs, soit ramené à l'origine  $X=0$  dans un temps non supérieur à un temps donné  $T^*$ .

Suivant l'approche tracée dans l'exemple V.1 ce problème se ramène à la recherche de deux nombres réels positifs  $p_1$  et  $p_2$  tels que

$$-\frac{2}{a_i + w_{oj}^*} \cdot \ln \left( 1 - \frac{a_i + w_{oj}^*}{p_i} \right) w_{oi}^{*1/2} = T^* \quad i=1,2 \quad i \neq j$$

où

$$w_{oj}^* = d_j^2 \quad \text{Donc}$$

$$p_i = \left( 1 - \exp \left[ -\frac{a_i + d_j^2}{2} T^* \right] \right)^{-1} \cdot (a_i + d_j^2) d_i \quad i=1,2 \quad i \neq j$$

V.4 - SYNTHÈSE DE SYSTÈMES A COMPORTEMENT EXPONENTIELLE PRESPECIFIÉE

Soit le système

$$DX_i = F_i(t, X, U_i) \quad i=1,2,\dots,s \quad (V.23)$$

Le problème consiste à trouver des commandes locales du type

$$\|U_i\|_e \leq p_i \quad \text{pour que pour tout état initial } X_0 \in \mathcal{R}(X) :$$

$$\mathcal{R}(X) \equiv \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \|X_i\|_e \leq d_i \quad i=1,2,\dots,s \right\}$$

la solution  $X(t; t_0, X_0)$  du système (V.23) satisfasse à l'inégalité

$$\|X(t; t_0, X_0)\|_e \leq \alpha \|X_0\|_e \cdot \exp[-\beta(t-t_0)] \quad \forall t \in T_0^c \quad (V.24)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels positifs dont  $\beta$  est donné d'avance.

Soit  $s$  fonctions  $v_i(t, X_i)$ ,  $v_i: T^c \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}_+$  définies positives satisfaisant aux inégalités

$$\eta_{i1} \|X_i\|_e^2 \leq v_i(t, X_i) \leq \eta_{i2} \|X_i\|_e^2 \quad (V.25)$$

où  $\eta_{ij}$   $i=1,2,\dots,s$   $j=1,2$  sont des nombres réels positifs.

Suivant la procédure développée dans les paragraphes précédents nous établissons un système de comparaison

$$DW = \hat{H}(t, W, P) \quad (V.26)$$

Si  $\bar{W}$  est le vecteur défini par les relations

$$\bar{w}_i = \eta_{i1} d_i^2 \quad i=1,2,\dots,s \quad (V.27)$$

alors le problème initial est ramené à la détermination d'un vecteur  $\hat{P}$  tel que l'inégalité

$$\hat{H}(t, r\bar{W}, \hat{P}) \leq -2r\bar{W} \quad (V.28)$$

soit vérifiée pour tout  $t \in T^c$  et  $r \in [0, 1]$

En effet, si (V.28) est vérifiée alors d'après le Théorème II.11 les solutions du système (V.26) vérifient l'inégalité

$$\| W (t; t_0, W_0) \| \leq \frac{\| \bar{W} \|}{\min \bar{w}_i} \| W_0 \| \exp[- 2 \beta (t-t_0)] \quad (V.29)$$

pour tout  $t_0 \in T^c$  ,  $t \in T_0^c$  et tout état initial  $W_0 \in R_+^s : W_0 \leq \bar{W}$ .

De plus, puisque

$$V [t, X(t; t_0, X_0)] \leq W [t; t_0, V(t_0, X_0)] ,$$

de (V.25) et (V.29) il suit que

$$\sum_{i=1}^s \eta_{i1} \| X_i(t; t_0, X_0) \|_e^2 \leq \frac{\| \bar{W} \|}{\min \bar{w}_i} \sum_{i=1}^s \eta_{i2} \| X_{i0} \|_e^2 \cdot \exp[-2\beta(t-t_0)] \quad \forall t \in T_0^c$$

pour tout  $X_{i0} \in R^{n_i} : v_i(t, X_{i0}) \leq \bar{w}_i$  , donc d'après (V.27) pour tout  $X_0 \in \mathcal{R}(X)$ . Enfin, en posant

$$\alpha^2 = \frac{\| \bar{W} \|}{\min \bar{w}_i} \cdot \frac{\max \eta_{i2}}{\min \eta_{i1}}$$

nous obtenons

$$\| X ( t; t_0, X_0 ) \|_e \leq \alpha \| X_0 \|_e \exp[-\beta(t-t_0)]$$

pour tout  $(t_0, X_0) \in T^c \times \mathcal{R}(X)$  et  $t \in T_0^c$ .

#### Exemple V. 4

Soit le système linéaire (V.18) étudié dans l'Exemple V.2. Etant donné un nombre réel positif  $\beta$  et la région

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X_0 \in R^n : \| X_{0i} \| \leq d_i \quad i=1, 2, \dots, s \right\}$$

nous cherchons des commandes locales  $U_i$  pour que l'inégalité (V.24) soit vérifiée pour tout  $X_0 \in \mathcal{R}(X)$ . Suivant la procédure de l'Exemple V.2, nous établissons le système de comparaison

$$D W = 2 \begin{bmatrix} w_1^{1/2} & & & \textcircled{0} \\ & w_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ \textcircled{0} & & & w_s^{1/2} \end{bmatrix} \left( C \begin{bmatrix} w_1^{1/2} \\ w_2^{1/2} \\ \vdots \\ w_s^{1/2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \mu_1 \\ p_2 \mu_2 \\ \vdots \\ p_s \mu_s \end{bmatrix} \right)$$

Si  $\bar{\lambda}_i$  et  $\underline{\lambda}_i$   $i=1,2,\dots,s$  sont respectivement les valeurs propres maximales et minimales des matrices  $Q_i$ , alors les nombres  $\eta_{i1}$  et  $\eta_{i2}$  des inégalités (V.25) sont donnés par  $\eta_{i1} = \underline{\lambda}_i^2$  et  $\eta_{i2} = \bar{\lambda}_i^2$ . Par conséquent, le vecteur  $\bar{W}$  est défini comme suit :

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1^2 & d_1^2 & \dots & \bar{\lambda}_s^2 & d_s^2 \end{bmatrix}$$

Pour déterminer donc les commandes locales  $\hat{U}_i$

$$\hat{U}_i = \begin{cases} - p_i \frac{B_i^T Q_i X_i}{\|B_i^T Q_i X_i\|} & \text{Si } X_i \neq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

qui assurent un comportement transitoire du type (V.24), il suffit de déterminer les nombres réels non négatifs  $p_i$  pour lesquels l'inégalité

$$2r^{1/2} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1^2 d_1^2 & & & \textcircled{0} \\ & \bar{\lambda}_2^2 d_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ \textcircled{0} & & & \bar{\lambda}_s^2 d_s^2 \end{bmatrix} \left( r^{1/2} C \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1^2 d_1^2 \\ \bar{\lambda}_2^2 d_2^2 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_s^2 d_s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \mu_1 \\ p_2 \mu_2 \\ \vdots \\ p_s \mu_s \end{bmatrix} \right) \leq - 2r\beta \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1^2 d_1^2 \\ \bar{\lambda}_2^2 d_2^2 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_s^2 d_s^2 \end{bmatrix}$$

Soit vérifiée pour tout  $r \in [0,1]$

Il suffit donc de choisir le vecteur

$$P = \begin{bmatrix} \mu_1^{-1} & & & & \\ & \mu_2^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mu_s^{-1} \end{bmatrix} \cdot \max \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, (C + \beta \mathbb{1}) \begin{bmatrix} \lambda_1 d_1 \\ \lambda_2 d_2 \\ \vdots \\ \lambda_s d_s \end{bmatrix} \right)$$

On aura alors

$$\| X(t; t_0, X_0) \|_e \leq \alpha \| X_0 \|_e \exp[-\beta(t - t_0)]$$

pour tout  $X_0 \in \mathcal{R}(X)$ ,  $t_0 \in T^c$  et  $t_0 \in T_0$ , où

$$\alpha = \left( \sum_{i=1}^s \lambda_i^2 d_i^2 \right) \left( \min_i \lambda_i^2 d_i^2 \right)^{-1} \left( \max_i \lambda_i^2 \right) \left( \min_i \lambda_i^2 \right)^{-1}$$

Exemple V. 5

Considérons le même problème pour le système (V.14).  
 Suivant la même procédure on établit le système de comparaison

$$D W = 2 \cdot \begin{bmatrix} a_1 w_1 + w_1 w_2 - p_1 w_1^{1/2} \\ \\ \\ a_2 w_2 + w_1 w_2 - p_2 w_2^{1/2} \end{bmatrix}$$

Puisque  $v_i(X_i) = \| X_i \|_e^2$  il suit que  $\eta_{i1} = \eta_{i2} = 1$  donc  $\bar{W} = [d_1^2, d_2^2]^T$ .

Il suffit donc de déterminer les valeurs minimales non négatives des paramètres  $p_1, p_2$  pour lesquels l'inégalité

$$2 \cdot \begin{bmatrix} r a_1 d_1^2 + r^2 d_1^2 d_2^2 - r^{1/2} p_1 d_1 \\ r a_2 d_2^2 + r^2 d_1^2 d_2^2 - r^{1/2} p_2 d_2 \end{bmatrix} \leq -2r\beta \begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \end{bmatrix}$$

soit vérifiée pour tout  $r \in [0, 1]$ .

On choisit alors les  $p_i$  donnés par les relations

$$p_i = \max \left( 0, \max_{r \in [0,1]} \left( r^{1/2} d_i [ a_i + \beta + r d_j^2 ] \right) \right) \quad i=1,2 \quad i \neq j$$

V.5 - SYNTHÈSE DE SYSTÈMES A CÔÛT BORNE

Soit le système

$$DX_i = F_i (t, X, U_i) \quad i=1,2,\dots,s \quad (V.29)$$

et le domaine

$$\mathcal{R}(X) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \| X_i \|_e \leq d_i \quad i=1,2,\dots,s \right\}$$

où  $d_i$  sont de nombres réels positifs.

Nous considérons le problème suivant :

Etant données  $s$  fonctions scalaires définies positives

$\psi_i(t, X_i), \psi_i : T^c \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}_+$  dérivables par rapport

à  $t$  et  $X_i$  et  $s$  nombres réels positifs  $\xi_i$ ,

déterminer de commandes locales  $U_i \quad i=1,2,\dots,s$  telles

que pour tout  $t_0 \in T^c$  et  $X_0 \in \mathcal{R}(X)$  les solutions

$X(t; t_0, X_0)$  du système (V.29) satisfassent les inégalités

$$\int_{t_0}^{\infty} \psi_i [t, X_i(t; t_0, X_0)] dt \leq \xi_i \quad i=1,2,\dots,s \quad (V.30)$$

Pour résoudre ce problème nous appliquons l'approche

développée dans les paragraphes précédents en choisissant la fonction  $\psi$

$\psi(t, X) = [\psi_1(t, X_1), \dots, \psi_s(t, X_s)]^T$  comme fonction de classe  $\psi_X$ .

Nous établissons donc une inégalité du type

$$D \psi(t, X)_{(V.29)} \leq \hat{H} [t, \psi(t, X), P] \quad (V.31)$$

d'où le système de comparaison

$$DW = \hat{H} (t, W, P) \quad (V.32)$$

Soit  $\bar{W} \in \mathbb{R}_+^s$  le vecteur défini par les relations

suyvantes :



$$\bar{w}_i = \min_{w_i} \left( \psi_i(t, X) \leq w_i \quad \forall t \in T^c \text{ et } \|X\|_e \leq d_i \right) \quad (V.33)$$

Il suffit alors de déterminer les composantes minimales non négatives  $p_i$  du vecteur  $P$  pour lesquelles l'inégalité

$$\hat{H}(t, r\bar{W}, P) \leq -r \beta \bar{W} \quad (V.34)$$

avec

$$\beta = \max \left( \frac{\bar{w}_i}{\xi_i} \right) \quad (V.35)$$

soit vérifiée pour tout  $r \in [0, 1]$

En effet, si (V.34) est vérifiée alors

$W(t, t_0, \bar{W}) \leq W \cdot \exp[\beta(t-t_0)]$   
pour tout  $t_0 \in T^c$  et  $t \geq t_0$  [9]. Donc

$$\int_{t_0}^{\infty} w_i(t; t_0, \bar{W}) dt \leq \bar{w}_i \int_{t_0}^{\infty} \exp[-\beta(t-t_0)] dt = \frac{\bar{w}_i}{\beta} \leq \xi_i \quad (V.36)$$

$i=1, 2, \dots, s$

Puisque, d'après (V.33) les inégalités

$$\psi_i(t_0, X_{i0}) \leq \bar{w}_i \quad i=1, 2, \dots, s$$

sont vérifiées pour tout  $(t_0, X_0) \in T^c \times \mathcal{R}(X)$ , de (V.31), (V.32) il

$$\text{suit } \psi_i[t, X_i(t; t_0, X_0)] \leq w_i(t; t_0, \bar{W}) \quad i=1, 2, \dots, s \quad (V.37)$$

pour tout  $(t_0, X_0) \in T^c \times \mathcal{R}(X)$  et  $t \in T_0^c$ . Par les inégalités (V.36) et (V.37) nous obtenons donc les inégalités (V.30).

### Exemple V.6

Reprenons le système linéaire étudié dans l'Exemple V.2 et associons à chaque sous-système le critère :

$$\int_{t_0}^{\infty} X_i^T(t) Q_i X_i(t) dt \leq \xi_i \quad i=1, 2, \dots, s$$

où  $Q_i$  sont des matrices carrées définies positives.

Dans ce cas les fonctions  $\psi_i(X_i)$  sont définies par les relations

$$\psi_i(X_i) = X_i^T Q_i X_i \quad i=1, 2, \dots, s$$

Ainsi avec les commandes locales

$$U_i = \begin{cases} -p_i \frac{B_i^T Q_i X_i}{\|B_i^T Q_i X_i\|} & \text{si } X_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } X_i = 0 \end{cases}$$

nous établissons le système de comparaison

$$D W = 2 \begin{bmatrix} w_1^{1/2} & & & \\ & 1/2 & & \\ & & w_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & w_s^{1/2} \end{bmatrix} \left( C \begin{bmatrix} w_1^{1/2} \\ w_2^{1/2} \\ \vdots \\ w_s^{1/2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \mu_1 \\ P_2 \mu_2 \\ \vdots \\ P_s \mu_s \end{bmatrix} \right)$$

Dans notre cas le vecteur  $\bar{W}$  de la relation (V.33) est donné

$$\bar{W} = \left[ \bar{\lambda}_1^2 d_1^2, \dots, \bar{\lambda}_s^2 d_s^2 \right]^T$$

où  $\bar{\lambda}_i$  sont les valeurs propres maximales des matrices  $Q_i$

et

$$\beta = \max_i \left( \frac{\lambda_i^2 d_i^2}{\xi_i} \right)$$

Suivant donc l'approche développée dans l'Exemple V.4 le vecteur  $P$  est donné par la relation

$$P = \begin{bmatrix} \mu_1^{-1} & & & \oplus \\ & \mu_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \oplus & & & \mu_s^{-1} \end{bmatrix} \bullet \max \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \left( C + \frac{\beta}{2} \mathbb{1} \right) \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 d_1 \\ \bar{\lambda}_2 d_2 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_s d_s \end{bmatrix} \right)$$

## V. 6 - CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la synthèse de lois de commande, synthèse basée sur le principe de comparaison. Si une telle approche a été largement étudiée dans le cas scalaire, le cas vectoriel est encore, à notre sens, insuffisamment exploré.

Le résultat principal de ce chapitre est donné par le théorème relatif au problème de commande en temps minimal. Nous montrons que si les commandes qui minimisent les dérivées totales de toutes les composantes d'une fonction vectorielle définie positive conduisent à un système dynamique dont le deuxième membre possède la propriété  $S^*$ , alors elles sont de commandes optimales.

Par la suite, en se basant sur ce résultat nous apportons un début de réponse pour quelques problèmes particuliers concernant la synthèse de lois de commandes de type décentralisé pour l'obtention d'un comportement transitoire prespécifié.

Il faut noter que le but de ce chapitre était de montrer que le principe de comparaison peut donner des réponses à certains problèmes de commande. Reste à développer cette approche en essayant de la rendre moins contraignante.

C O N C L U S I O N



Dans ce mémoire nous avons essentiellement étudié le problème de l'analyse de la stabilité des systèmes complexes. Pour ce faire, nous avons utilisé deux outils théoriques :

- Les fonctions de classe  $\mathcal{V}$  dont les fonctions vectorielles définies positives constituent une sous-classe particulière, et
- Le principe de comparaison.

Alors qu'au début de son développement le principe de comparaison apparaissait, théoriquement, comme un outil très puissant, ses applications ultérieures ont révélé un certain nombre d'inconvénients. Le premier était induit par les fortes majorations nécessaires à l'établissement d'un système de comparaison. Le deuxième provenait de l'absence de conditions de stabilité spécifiques des systèmes de comparaison non-linéaires.

L'objectif principal des travaux présentés dans ce mémoire était de rendre cette approche moins contraignante, c'est-à-dire d'élargir le domaine de son applicabilité. Ainsi, notre étude a été développée dans deux directions : la première orientée vers la diminution des restrictions lors de la construction du système de comparaison, la deuxième consistant en l'établissement des conditions de stabilité relativement simples pour les systèmes de comparaison non-linéaires, sous leur forme générale.

Dans le deuxième chapitre, nous avons établi un nouveau système de comparaison en s'appuyant sur la notion de stabilité partielle et incluant comme cas particulier ceux du type Matrozov. Ce type de système de comparaison présente un avantage important, en ce sens qu'il permet de faire apparaître la variable  $X$  dans le deuxième membre de l'inégalité qui conduit à sa construction.

Cela peut en général conduire à des majorations moins dures que celles utilisées dans des travaux antérieurs, et par là même à une meilleure estimation de l'accroissement de la fonction d'agrégation le long des trajectoires du système étudié.

Le système de comparaison que nous avons proposé peut être considéré comme composé de deux sous-systèmes dont le premier est le système étudié lui-même ; les conditions de stabilité partielle que nous avons établies se déduisent de l'analyse du deuxième sous-système.

Cette démarche apparaît très naturelle étant donné que l'analyse directe du système étudié est souvent très difficile. Notons aussi que les conditions de stabilité partielle présentées dans ce même chapitre ont été établies dans le cas général de systèmes non-linéaires.

Dans le troisième chapitre, nous avons abordé le problème de l'estimation du domaine de stabilité du système étudié à partir d'une analyse du système de comparaison associé. Les estimations que nous avons développées concernent le cas des systèmes linéaires et non-linéaires.

Dans le quatrième chapitre, notre apport concerne le développement d'une méthode de partition d'un grand système en vue de la construction de son système de comparaison. Ce qui, à nos yeux constitue le point fondamental de cette partition, réside dans la possibilité de décomposer le problème de l'analyse du système de comparaison en sous-problèmes indépendants entre eux.

Enfin, dans le cinquième chapitre, nous avons essayé de montrer comment le principe de comparaison peut être utilisé pour résoudre quelques problèmes de commande. Cette étude, loin d'être complète, avait pour but de poser des bases pour une recherche future dans un domaine qui n'est pas encore suffisamment exploré.

L'étude entreprise dans le domaine de l'analyse de stabilité par l'utilisation du principe de comparaison nous a montré au travers des résultats que nous avons obtenus, que cette méthode présente un certain nombre de faiblesses.

L'analyse objective de ces faiblesses permet de faire apparaître un ensemble de questions ouvertes. Parmi celles-ci on peut distinguer le problème posé par l'élaboration de méthodes systématiques permettant la construction de systèmes de comparaison ; cela doit être suivi, très naturellement, par la recherche de conditions de stabilité moins dures.

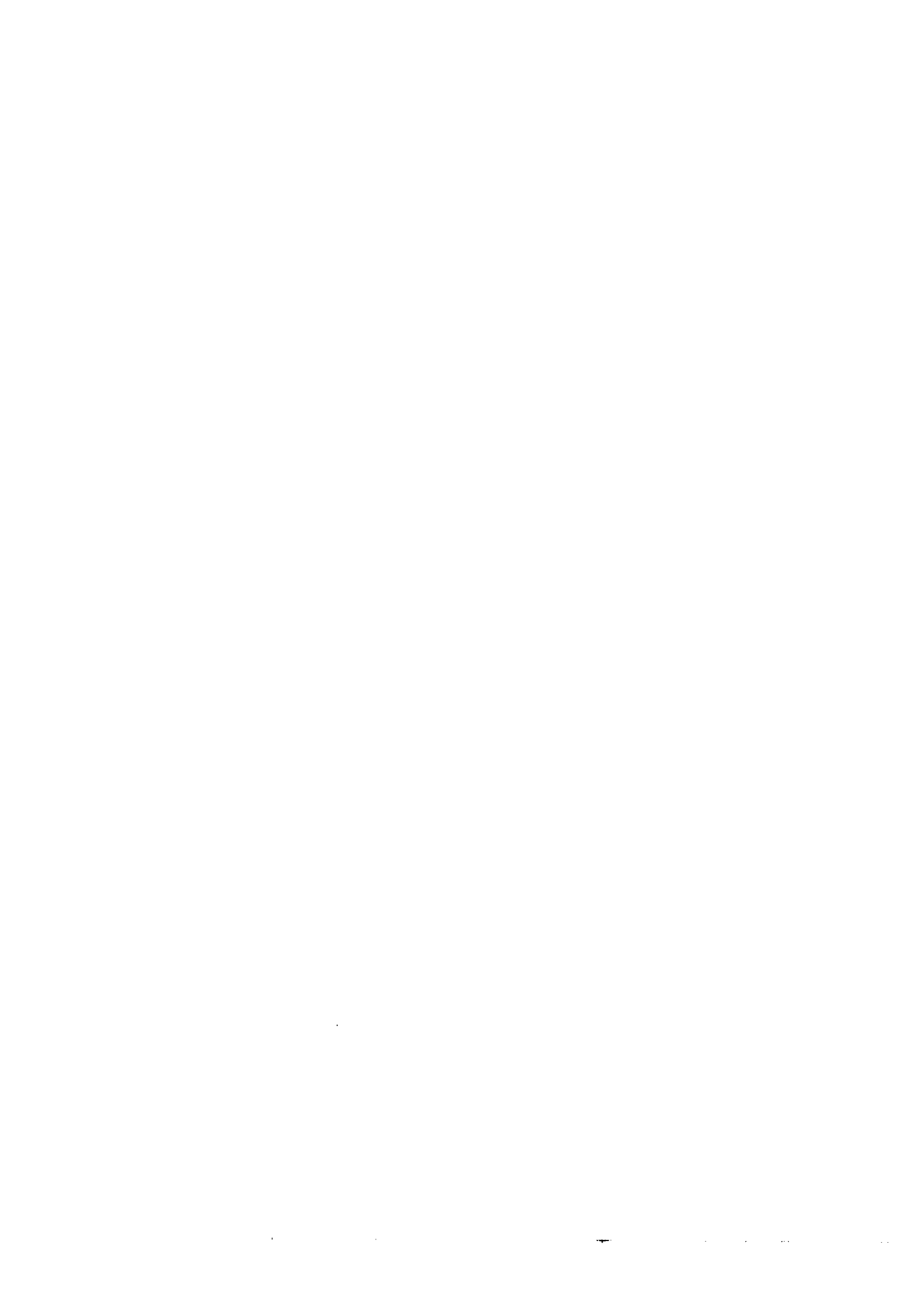
Enfin, il faut insister particulièrement sur la nécessité d'un effort de recherche s'appuyant sur l'utilisation du principe de comparaison, d'une part, vers d'autres aspects de l'analyse des systèmes dynamique [58], [59], d'autre part, vers l'application de ce principe à des problèmes concrets, domaine qui à cette date est encore largement inexploité ([60] - [63]).

---





R E F E R E N C E S



1. M. ARAKI, K. ANDO, B. KONDO  
"Stability of sampled - data composite systems with many non- linearities",  
IEEE - Trans. Aut. Control, AC-16, n° 1, 22-27, (1971).
2. M. ARAKI, B. KONDO  
"Stability and transient behavior of composite non - linear systems",  
IEEE - Trans. Aut. Control, AC-17, n° 4, 537-541, (1972).
3. M. ARAKI, B. KONDO  
Comments on "Stability and transient behavior of composite non - linear systems",  
IEEE - Trans. Aut. Control, AC-17, n° 6, 688-689, (1973).
4. F.N. BAILEY  
"The application of Lyapunov Second method to interconnected systems",  
J.SIAM Control, ser.A, vol.3, n° 3, 443-462, (1966).
5. R. BELLMAN  
"Vector Lyapunov Functions",  
J. SIAM Control, ser. A, vol.1, n° 6, 32-34, (1962)
6. J. BERNUSSOU, C. BURGAT, G. BITSORIS  
"On the stability of large - scale interconnected systems under structural perturbations",  
Accepté pour présentation au 7th I.F.A.C. World Congress Helsinki, (1978)
7. G. BITSORIS  
"Sur la stabilité asymptotique des systèmes interconnectés",  
Comptes rendus de l'Académie des Sciences (C.R.A.S.), Paris, t.282, série A, 301-304, 2 février 1976.

8. G. BITSORIS  
"Vector positive definite functions and stability analysis of complex dynamical systems",  
International Conference on Information Sciences and Systems  
Patras - Greece, 19-24 Aug., (1976).
  
9. G. BITSORIS  
"Utilisation des fonctions vectorielles définies positives dans l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques complexes",  
Note interne L.A.A.S., 76 I 29, pp. 1 - 96, mai 1976.
  
10. G. BITSORIS, C. BURGAT  
"Stability conditions and estimates of the stability region of complex systems"  
Int. J.Syst. Sciences, vol. 7, n° 8, 911-928, (1976).
  
11. G. BITSORIS, C. BURGAT  
"Stability analysis of complex discrete systems with locally and globally stable subsystems",  
Int. J. Control, vol. 25, n° 3, 413-424, (1977).
  
12. G. BITSORIS, C. BURGAT  
"Estimation of stability region and transient behavior of interconnected systems",  
Third International Congress of Cybernetics and Systems,  
Bucharest (1975).
  
13. P. BORNE  
"Contribution à l'étude des systèmes discrets non - linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés",  
Thèse d'Etat, Université de Lille, (1976).

14. C. BURGAT  
"Contribution à l'étude des propriétés de stabilité de systèmes non linéaires continus interconnectés",  
Thèse d'Etat, Université Paul Sabatier de Toulouse, (1976).
15. C. CORDUNEANU  
"Sur la stabilité asymptotique",  
Revue *Math.pur. appl.*, 6 , 573-576, (1960).
16. M. FIEDLER - V. PTAK  
"On matrices with non-positive off diagonal elements and positive principal minors",  
*Czec. Math. Journal*, 12, 382-400, (1962).
17. G. FRONEBIUS  
"Über matrizen aus nicht negativen elementen",  
S. - B. Preuss. Acad. Wiss., Berlin, 456-477, (1912).
18. V. D. FURASOV  
"Construction of controlled Systems by prescribed estimates of the transient process",  
I. *Automatika i Telemekhanika*, n° 7, 42-49, (1971).  
II. *Automatika i Telemekhanika*, n° 10, 29-35, (1971).
19. V. D. FURASOV  
"On vector valued Lyapunov Functions and stabilization of interconnected systems", (En Russe),  
*Prikl. Mat. Mekh*, vol.39 ,n° 1, 59-65, (1975).
20. J. C. GENTINA  
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension",  
Thèse d'Etat, Université de Lille, (1976).

21. J. C. GEROMEL, J. BERNUSSOU  
"Stability of two level control schemes subjected to structural perturbations",  
A paraitre à l' Int. J. Control.
22. L. P. GRAYSON  
"The status of synthesis using Lyapunov's method",  
Automatica, vol. 3, n° 2, 91-121, (1965).
23. Lj.T. GRUJIĆ  
"Uniform asymptotique stability of discrete large - scale systems",  
IEEE - Trans. Syst. Man. Cyb., SMC-3, n° 6, 636-643, (1973).
24. Lj.T. GRUJIĆ  
"Stability analysis of large - scale systems with stable and unstable subsystems",  
Int. J. Control, vol. 20, n° 3, 453-463, (1974).
25. Lj. T. GRUJIĆ  
"On multi-level absolute stability analysis of large - scale systems",  
Part. I : "The Popov method, the comparison principle and time invariant systems",  
Automatika, n° 1-2, 67-72, (1974).  
Part.II : "The Lyapunov method, the comparison principle and time varying systems",  
Automatika, n° 4-5, 155-161, (1974).
26. Lj. T. GRUJIĆ, J. C. GENTINA, P. BORNE  
"General aggregation of large-scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms",  
Int. J. Control, vol. 24, n° 4, 529-550, (1976).

27. Lj. T. GRUJIĆ - D.D. ŠILJAK  
"Asymptotic stability and instability of large - scale systems",  
IEEE - Trans. Aut. Control, AC-18, n° 6, 636-645, (1973)
28. P. HABETS, K. PEIFFER  
"Attractivity concepts and vector Lyapunov functions",  
Nonlinear vibration problems, vol 16,  
Polish Scientific Publishers, Warszawa, (1975).
29. W. HAHN  
"On the application of the method of Lyapunov to difference equations", (En Allemand)  
Mathematische Annalen, vol 136, 403-441, (1958).
30. W. HAHN  
"Stability of motion",  
Ouvrage, Springer - Verlag, New York, (1967).
31. L. HATVANYI  
"On the application of differential inequalities to stability theory", (En Russe)  
Vestin - Mosk. Univ. Matematika, Mekhanika, 3, 83-89, (1975).
32. E. I. JURY - B. W. LEE  
"The absolute stability of systems with many non-linearities",  
Aut. Remote Control, 26, 943-961, (1965).
33. R. E. KALMAN - J.E. BERTRAM  
"Control system analysis and design via the Second Method of Lyapunov",  
I. Continuous - time systems,  
Trans A.S.M.E. J.Basic Engin.,82, 371-393, (1962).  
II. Discrete - time systems,  
Trans A.S.M.E. J.Basic Engin, 82, 394-400, (1962).



34. R.E. KALMAN - P.L. FALB - M. A. ARBIB  
"Topics in mathematical system theory",  
Ouvrage, Mc Graw - Hill, Inc, (1969).
35. A.K. KEVORKIAN  
"Structural aspects of large scale dynamic systems",  
Proceedings of I.F.A.C. 6th World Congress, Boston (1975).
36. V. LAKSHMIKANTHAM - S. LEELA  
"Differential and integral inequalities",  
Ouvrage, vol I et II, Academic Press , New York, (1969).
37. J.P. LASALLE  
"Vector Lyapunov functions",  
Report, Brown University, Jan. (1975).
38. J. P. LASALLE (and Z. ARTSTEIN)  
"The stability of dynamical systems",  
Regional Conference Series in Applied Mathematics S.I.A.M.,  
Philadelphia, Pennsylvania 19103, U.S.A.
39. S. LEFSCHETZ  
"Stability of non - linear control systems",  
Ouvrage, Academic Press, New York, (1965).
40. J. G. LIN  
"Maximal vectors and multi-objective optimization",  
J. Opt. Theory, Appl., vol 18, n° 1, 41-64, (1976).
41. A. M. LYAPUNOV  
"Problème général de la stabilité du mouvement",  
Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse, 2ème série,  
tome IX, (1907).

42. V. M. MATROZOV  
"On the theory of stability of motion"  
Prikl. Math. Mekhan, vol. 26, 992-1002, (1962).
43. V. M. MATROZOV  
"Comparison principle and vector Lyapunov functions",  
I. Diff. Uranh., vol. 4, n° 8, 1374 - 1386, (1968).  
II. Diff. Uranh., vol. 4, n° 10, 1740 - 1752, (1968).  
III. Diff. Uranh., vol. 5, n° 7, 1171 - 1185, (1969).  
IV. Diff. Uranh., vol. 5, n° 12, 2128 - 2143, (1969).
44. V. M. MATROZOV  
"Vector Lyapunov functions in the analysis of non-linear  
interconnected systems",  
Symposia Math., vol. 6, 209-242, Academic Press,  
New York, (1971).
45. V. M. MATROZOV  
"Method of Lyapunov - vector functions in feedback  
systems".  
Automatika i Telemekhanika, vol 18, n° 1, 5 - 22, (1971).
46. A. N. MICHEL  
"Stability analysis of interconnected systems",  
SIAM J. Control, vol.12, n° 3, 554 - 579, (1974).
47. A. N. MICHEL - D. W. PORTER  
"Stability analysis of composite systems",  
IEEE - Trans. Aut. Control, vol AC-17, n°2 , 222-226, (1972).
48. N. E. NAHI  
"On design of time optimal systems via the second method of  
Lyapunov",  
IEEE - Trans. Aut. Control, vol. AC-9, n° 3, 274-276, (1964).

49. A. S. OZIRANER - V. V. RUMIANTSEV  
"The method of Lyapunov functions in the stability problem for motion with respect to a part of the variables",  
Prikl. Math. Mekhan., vol. 36, n° 2, 364-384, (1972).
50. A.A. PIONTKOVSKII  
"Investigations of stability of non stationary non linear systems".  
Automatika i Telemekhanika, vol 31, n° 11, 179-181, (1970).
51. A.A. PIONTKOVSKII - L. D. RUTKOVSKAYA  
"Investigations of certain stability theory problems by the vector Lyapunov functions method",  
Automatica i Telemekhanika, vol 28, n° 10, 23-31, (1967).
52. V. M. POPOV  
"Hyperstability of Control Systems",  
Ouvrage, Springer Verlag, Berlin, (1973).
53. H. K. RAMAPRIYAN  
"Study of coupling in interconnected systems",  
Ph. D. Thesis, University of Minnesota, (1970).
54. F. ROBERT  
"Etude et utilisation de normes vectorielles en analyse numérique linéaire",  
Thèse d'Etat, Université de Grenoble, (1968).
55. H. H. ROSENBROCK  
"A method of Investigating Stability"  
Proceedings of I.F.A.C. 2d World Congress, Bâle, (Suisse).
56. V. V. RUMIANTSEV  
"On stability with respect to a part of the variables", (En Russe),  
Vestnik. Mosk. Univ., Mat - Mekh. Ser. I, n° 4, 9-16, (1957)

57. D.D. ŠILJAK  
"Stability of large - scale systems",  
Proceedings of I.F.A.C. 5th World Congress, Paris,  
article n° C-32, (1972).
58. D. D. ŠILJAK  
"On stability of large scale systems under structural  
perturbations",  
IEEE. Trans. Syst. Man Cybern., vol S.M.C.-2, 657-663, (1972).
59. D. D. ŠILJAK  
"On stability of large scale systems under structural  
perturbations",  
IEEE. Trans. Syst. Man. Cybern, vol SMC-3, 415-417, (1973).
60. D. D. ŠILJAK  
"Connective stability of competitive equilibrium",  
Automatica, vol 11, n° 4, 389-400, (1975).
61. D. D. ŠILJAK  
"Structure and stability of model Ecosystems",  
Mathematical Systems Ecology (à paraître)
62. D. D. ŠILJAK  
"Stabilisation of large scale systems : A spinning  
flexible spacecraft",  
Proceedings of I.F.A.C. 6th World Congress, Boston,  
article n° 35.1, (1975).
63. D. D. ŠILJAK, M. K. SUNDARESHAN, M. B. VUKČEVIĆ  
"A multilevel control system for the large scale telescope",  
Univ. Santa Clara, Santa Clara, C.A, Final Report on NASA  
Contract NAS 8-27799, (1975).

64. D. D. ŠILJAK, M.B. VUKČEVIĆ  
"Decentralization, stabilization, and estimation of  
large - scale systems",  
IEEE Trans. Aut. Control, vol AC-21, n° 3 363-366,(1976).
65. D. D. ŠILJAK, M. B. VUKČEVIĆ  
"Decentrally stabilizable linear and bilinear large - scale  
systems",  
Int. J. Control, vol.27, n° 2, 289-305, (1977).
66. H. H. SIMON  
"The architecture of complexity",  
Proc. Amer. Philosophical Society, vol 106, n° 6,  
467-482, (1962).
67. G. S.VAKONIA , A. S. ZEMILIAKOV, V. M. MATROZOV  
"Methods of constructing quadratic Lyapunov vector  
functions for linear systems",  
Automatica i Telemekhanika, vol 33, n° 2, 5-16, (1972).
68. T. WAZEWSKI  
"Systèmes des équations et des inégalités différentielles  
ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs  
applications",  
Ann. Soc. Polon. Math, 23, 112-166, (1950).
69. S. WEGRZYN, J. C. GILLES, P. VIDAL, D. PALUSINSKI  
"Introduction à l'étude de la stabilité dans les espaces  
métriques",  
Ouvrage, Dunod, Paris, (1971).

70. S. WEISSENBERGER

"Stability regions of large - scale systems",  
Automatica, vol. 9, n° 6, 653-663 (1973).

71. L. A. ZADEH, C. A. DESOER

"Linear System Theory",  
Ouvrage, Mc Graw - Hill, Inc, New York, (1963).



T A B L E   D E S   M A T I E R E S





INTRODUCTION	1
NOTATIONS	7
CHAPITRE I : <i>Systèmes complexes. Définitions de stabilité- Méthodes d' analyse.</i>	9
I.1 - INTRODUCTION	13
I.2 - LES SYSTEMES COMPLEXES	14
I.3 - DESCRIPTION DES SYSTEMES ETUDIES	15
I.3.1 - Systèmes dynamiques continus	16
I.3.2 - Systèmes dynamiques discrets	18
I.3.3 - Formalisation unique adoptée dans la mémoire pour les systèmes dynamiques continus et discrets	19
I.3.4 - Systèmes interconnectés	20
I.4 - LE PROBLEME DE LA STABILITE DES SYSTEMES DYNAMIQUES	21
I.4.1 - Définitions relatives aux propriétés de stabi- lité de l' état d' équilibre $X = 0$	22
I.4.1.a - Définitions de stabilité par rapport à toutes les composantes du vecteur d' état	22
I.4.1.b - Définitions de stabilité par rapport à une partie des composantes du vecteur d' état	23
I.4.2 - Définitions des domaines de stabilité	25
I.4.3 - Méthodes d' étude de la stabilité des systèmes dy- namiques	26
I.4.3.a - Fonctions scalaires définies ou semi-défini- es positives	27
I.4.3.b - La deuxième méthode de Lyapunov	28
I.4.3.c - La méthode de Corduneanu	30
I.4.3.d - La méthode de Hatvanyi	31
CHAPITRE II : <i>Le système de comparaison.</i>	35
II.I - INTRODUCTION	36

II.2 - LES FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{U}$ ET LES FONCTIONS VECTORIELLES DE-FINIES POSITIVES	41
II.2.1 - Quelques propriétés des fonctions de classe $\mathcal{U}$	44
II.3 - LES THEOREMES DE COMPARAISON	46
II.3.1 - Inégalités différentielles	46
II.3.2 - Inégalités aux différences	49
II.4 - LE PRINCIPE DE COMPARAISON	51
II.5 - CONDITIONS DE STABILITE DU SYSTEME DE COMPARAISON	57
II.5.1 - Systèmes de comparaison continus	58
II.5.1.a - Conditions de stabilité asymptotique uniforme	59
II.5.1.b - Conditions de stabilité exponentielle	62
II.5.2 - Systèmes de comparaison discrets	63
II.5.2.a - Conditions de stabilité asymptotique uniforme	64
II.5.2.b - Conditions de stabilité exponentielle	66
II.5.3 - Applications	68
II.5.3.a - Système de comparaison linéaire invariant	68
II.5.3.b - Système de comparaison de type de Luri'e	68
II.6 - CONCLUSION	73
CHAPITRE III : <i>Estimations du domaine de stabilité</i>	75
III.1 - INTRODUCTION	77
III.2 - STABILITE GLOBALE	79
III.3 - STABILITE LOCALE	81
III.3.1 - Système de comparaison défini dans tout l'espace d'état	81
III.3.2 - Système de comparaison défini dans un sous ensemble de l'espace d'état	85
III.3.2.a - Système de comparaison non linéaire	86
III.3.2.b - Système de comparaison linéaire à coefficients constants	89
III.4 - CONCLUSION	100

CHAPITRE IV : <i>La construction du système de comparaison</i>	101
IV.1 - INTRODUCTION	105
IV.2 - CRITERES DE CHOIX DE LA FONCTION DE CLASSE $\mathcal{U}$	106
IV.2.1 - Le type de stabilité	106
IV.2.2 - Le type de décomposition du vecteur d'état	107
IV.2.3 - La forme du système étudié	111
IV.3 - L'APPLICATION DU PRINCIPE DE COMPARAISON DANS L'ETUDE DE STABILITE DES SYSTEMES A GRANDE ECHELLE	111
IV.3.1 - La partition des systèmes à grande échelle	112
IV.3.2 - Construction et étude du système de comparaison d'un grand système partitionné	116
IV.3.3 - Conditions de stabilité pour un système de comparai- son partitionné	122
IV.4 - LA METHODE DE DECOMPOSITION - AGREGATION	125
IV.4.1 - Systèmes continus interconnectés	126
IV.4.2 - Systèmes discrets interconnectés	131
IV.5 - LA METHODE D'AGREGATION DIRECTE	133
IV.6 - CONCLUSION	142
CHAPITRE V : <i>Sur quelques problèmes de commande</i>	145
V.1 - INTRODUCTION	149
V.2 - SYSTEMES EN TEMPS MINIMAL	151
V.3 - SYNTHESE DE SYSTEME A TEMPS DE REPONSE FIXE	159
V.4 - SYNTHESE DE SYSTEMES A COMPORTEMENT EXPONENTIEL PRESPECIFIE	165
V.5 - SYNTHESE DE SYSTEMES A COUT BORNE	169
V.6 - CONCLUSIONS	172
CONCLUSION	173
REFERENCES	179