HAL
open science

Contribution à l'étude des systèmes dynamiques interconnectés : aspects de décentralisation

José Claudio Geromel

To cite this version:

José Claudio Geromel. Contribution à l'étude des systèmes dynamiques interconnectés : aspects de décentralisation. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1979. Français. NNT : . tel-00178419

HAL Id: tel-00178419

https://theses.hal.science/tel-00178419v1

Submitted on 11 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ordre : 903 ANNÉE 1979

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

pour l'obtention

DU GRADE DE DOCTEUR D'ÉTAT (SCIENCES)
Spécialité : Automatique

par

José Claudio GEROMEL
Ingénieur en Génie Electrique UNICAMP - (Campinas) Brésil
M.SC. Automatique UNICAMP - (Campinas) Brésil

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SYSTEMES DYNAMIQUES INTERCONNECTES ASPECTS DE DECENTRALISATION

Soutenue le 10 Décembre 1979, devant la Commission d'Examen :

MM.	G. GRATELOUP	Président
	P. VARAIYA P. BERNHARD Y. SEVELY A. TITLI J. BERNUSSOU	Examinateurs

AVANT-PROPOS

Cette thèse est le résultat de trois ans de travail au sein de l'équipe "Décomposition, Commande des Systèmes Interconnectés" du Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du Centre National de la Recherche Scientifique dirigé par Monsieur le Professeur G. GRATELOUP. Je tiens à lui exprimer tous mes remerciements pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence de ma commission d'examen.

Je tiens à remercier aussi Monsieur SEVELY, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse qui, malgré ses multiples occupations, a bien voulu participer à la commission d'examen.

Je suis très honoré par la présence de Monsieur P. VARAIYA, Professeur à l'Université de Californie - Berkeley, et je le remercie vivement d'avoir bien voulu se déplacer jusqu'à Toulouse pour participer à ce jury.

Je suis également très honoré par la présence de Monsieur P. BERNHARD, Professeur à l'Ecole des Mines de Paris et à l'Université de Paris Dauphine. Je dois le remercier pour sa présence et aussi pour le travail qu'il a bien voulu accepter en tant que rapporteur de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur A. TITLI, Professeur à l'INSA pour sa participation au jury de thèse et pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à notre travail en tant que rapporteur.

A Monsieur J. BERNUSSOU, Chargé de Recherche au CNRS : je tiens à le remercier non seulement pour avoir bien voulu accepter d'être mon directeur de recherche, avec lequel j'ai pu apprendre et travailler côte à côte dès mon arrivée au LAAS jusqu'à l'écriture finale de ce mémoire mais aussi pour son amitié. Qu'il trouve ici le témoignage de ma gratitude.

Je voudrais exprimer ici ma joie d'avoir connu et travaillé avec mes collègues d'équique, L.F.B. BAPTISTELA, H.P.L. LUNA et L. JULIEN auprès desquels j'ai trouvé toujours amitié sincère, esprit critique et attachement au travail. Qu'ils trouvent ici le témoignage de mon amitié.

Je voudrais également exprimer ma gratitude et reconnaissance à ma femme Bruna qui a supporté avec sérénité toutes mes occupations et mon manque d'attention.

Je voudrais finalement remercier tous ceux qui m'ont aidé pour la réalisation de ce mémoire, en particulier, Madame SOM qui a assuré la dactylographie avec beaucoup de soin et de compétence, Monsieur CATALA qui a fait les dessins et Monsieur MEUNIER qui m'a beaucoup aidé pendant les essais numériques.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE I : SYSTEMES INTERCONNECTES - PROBLEMES DE STABILITE ET COMMANDE 7

I-1 - Introduction 9

I-2 - Stabilité des systèmes interconnectés 10

I-2-1 - Quelques définitions 11

I-2-2 - Fonctions définies positives 13

I-2-3 - La deuxième méthode de Lyapunov 15

I-2-4 - Les théorèmes de Wazewski et Corduneanu 18

I-2-5 - Le principe de comparaison. Théorème de Matrosov 22

I-2-6 - Quelques propriétés particulières de systèmes linéaires 27

I-3 - La commande décentralisée 30

I-3-1 - Le coût de l'information dans la commande des systèmes interconnectés 31

I-4 - Conclusion 34

CHAPITRE II : DECENTRALISATION - STABILITE 37

II-1 - Introduction 39

II-2 - Système de comparaison optimal 40

II-2-1 - Quelques définitions 40

II-2-2 - Système de comparaison et condition de stabilité 42

II-2-3 - Le système de comparaison optimal 44

II-2-4 - Méthode numérique pour l'obtention du système de comparaison optimal 47

II-2-5 - Quelques propriétés du système de comparaison optimal 58

II-2-6 - Application à la stabilisation décentralisée de systèmes linéaires interconnectés 61

II-3 - Le problème de la stabilité et de la stabilisation sous perturbations structurelles 66
II-3-1 - Description du problème 67
II-3-2 - Le système de comparaison 69
II-3-3 - Détermination des degrés de stabilité pour chaque sous-système 71
II-3-4 - Les commandes locales stabilisantes. Leur détermination 73
II-3-5 - La détermination de la fonction $f(\pi)$ à partir des bornes de l'équation de Lyapunov 76
II-3-6 - Considérations sur la convergence de l'algorithme proposé 81
II-4 - Conclusion 83

CHAPITRE III : DECENTRALISATION - COMMANDE ET ESTIMATION 85
III-1 - Introduction 87
III-2 - La commande décentralisée 89
III-2-1 - Définitions. Remarques préliminaires 90
III-2-2 - Gradients matriciels. Problèmes dynamiques 92
III-2-3 - Exemples de calcul de matrices gradient 95
III-2-4 - Problème de projection du gradient matriciel 98
III-2-5 - Un algorithme primal pour le calcul de la commande décentralisée. Optimisation avec horizon fini 104
III-2-6 - Commande décentralisée. Horizon infini. Stabilité 111
III-2-7 - Degré de sous optimalité 116
III-2-8 - Calcul de la matrice gradient par décomposition 120

III-2-9 - L'indépendance vis à vis des conditions initiales. Détermination par le cas le plus défavorable 125
III-2-10 - Un problème d'optimisation avec contraintes de structure et contraintes instantanées sur état et commande 129
III-3 - L'estimation d'état décentralisée 144
III-4 - Conclusion 156

CHAPITRE IV : LA COMMANDE DECENTRALISEE. UNE APPLICATION 159

IV-1 - Introduction 161
IV-2 - Le problème de la commande optimale "puissance-fréquence" dans un réseau d'énergie électrique 162
IV-2-1 - Le modèle linéaire continu pour une aire 163
IV-2-2 - Le problème de régulation décentralisée "puissance-fréquence" 166
IV-2-3 - Quelques résultats numériques 171
IV-3 - Le problème de "CDPF" avec le modèle dynamique discret 177
IV-4 - Conclusion 184

CONCLUSION GENERALE 187

BIBLIOGRAPHIE 191

NOTATIONS

$(.)'$	Transposition
C^-	Ensemble des nombres complexes à partie réelle négative
Π_χ	Opérateur de projection orthogonale sur l'ensemble χ
a, x, y	Lettres minuscules indiquant des vecteurs ou scalaires
$x \geqslant 0$	Vecteur avec toutes ses composantes non négatives
$\|x\|$	Norme euclidienne de x,= $(x'x)^{1/2}$
$\|x\|_\infty$	$= \max_i \{\|x_i\|\}$
$\hat{x}$	Valeur estimée de x
A, X, Y	Lettres majuscules indiquant des matrices
$A = \{a_{ij}\}$	Matrice d'éléments a_{ij}
A^S	Partie symétrique de A,= (A+A')/2
$P \geqslant 0$	Matrice semi-definie positive
Tr(A)	Fonction trace = $\sum_i a_{ii}$
$\underline{X} \leqslant X \leqslant \overline{X}$	Inégalité matricielle $\underline{x}_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant \overline{x}_{ij}$
$\Delta_k(L)$	Mineur d'ordre k de la matrice L
$\lambda_{max}(P)=\lambda_M(P)$	Valeur propre maximum de la matrice symétrique P
$\lambda_{min}(P)=\lambda_m(P)$	Valeur propre minimum de la matrice symétrique P
$\|A\|$	Norme d'une matrice. Chapitre II : $\|A\|^2 = \lambda_{max}(A'A)$ Chapitre III : $\|A\|^2 = Tr(A'A)$
$\theta(P)^2$	"Condition number" de la matrice symétrique P, $= \|P\|\|P^{-1}\| = \lambda_M(P)/\lambda_m(P)$.

INTRODUCTION GENERALE

Le but de ce mémoire est d'apporter une contribution dans le domaine de l'analyse (stabilité) et de la synthèse (régulation) des systèmes complexes du type : systèmes interconnectés.

Les outils et méthodes qui vont être développés s'appuient sur la structure interne du système qui permet de distinguer :

- des sous systèmes,
- un schéma de couplage entre ces parties (interconnexions).

C'est une des caractéristiques des études actuelles sur les systèmes interconnectés que d'exploiter cette structure en vue de l'élaboration d'outils spécifiques. Nous ne rentrerons pas ici dans le problème important de la décomposition même des systèmes complexes et faisons l'hypothèse d'une décomposition "a priori" pouvant par exemple être induite par la nature physique du processus (ex : réseaux de transport d'énergie électrique).

Nous nous intéressons plus particulièrement à deux problèmes, le premier est lié à l'étude de la stabilité au moyen de fonctions vectorielles de Lyapunov et le second est relatif à la commande (ou plus exactement, régulation) à structure décentralisée. C'est en présentant le plan de ce mémoire que nous discuterons plus en détail des points qui se rattachent à ces deux grands volets.

Le mémoire est constitué de quatre chapitres. Le premier chapitre est divisé en deux parties qui constituent chacune une introduction aux chapitres II et III. La première partie a pour but de rappeler synthétiquement quelques résultats importants sur l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques au moyen des méthodes de type Lyapunov, insistant plus particulièrement sur leur adaptation au cas des systèmes de grande dimension : fonctions de Lyapunov vectorielles, principe de comparaison, etc.

Dans la deuxième partie, nous essayons de présenter de façon aussi générale que possible le problème de la commande des systèmes interconnectés afin de bien spécifier le

point qui sera ultérieurement traité et qui concerne la commande décentralisée. Dans cette présentation, nous parlerons du coût de transfert d'information entre sous systèmes, obtenant alors un problème d'optimisation "mixte" (variables continues et entières), problème qui, à notre avis, ne possède pas encore de solution.

Le chapitre II est entièrement consacré à l'approche "fonctions de Lyapunov vectorielles" et "système de comparaison". Tout comme pour le cas scalaire, la qualité des résultats obtenus par une telle méthode dépend grandement du choix effectué pour les "fonctions de Lyapunov". Le principal résultat de ce chapitre réside dans l'élaboration et la solution d'un problème d'optimisation paramétrique permettant la détermination d'un système de comparaison "aussi bon que possible", c'est-à-dire, fournissant des conditions suffisantes de stabilité "aussi peu restrictives que possible" et ce, dans le cas de systèmes linéaires invariants. Une discussion critique est faite montrant les limitations et faiblesses d'une telle approche dans le cadre de la stabilisation par commande décentralisée et de la stabilité sous perturbations de structure.

Enfin, nous présentons dans ce chapitre un résultat nouveau concernant la détermination de bornes sur la solution de l'équation de Lyapunov.

Le troisième chapitre, à notre sens le plus important, porte sur le problème de la commande (régulation) avec contrainte de structure décentralisée. Nous y développons une méthode primale traitant les divers problèmes induits par la méthode. Nous traitons tout d'abord du problème de l'obtention de gradients matriciels et fournissons une technique de calcul simple de mise en oeuvre. Le problème de projection matricielle est ensuite étudié et présenté, encore, comme un problème d'optimisation paramétrique, relativement facile à résoudre dans le cas de contraintes multiples (linéaires).

Les problèmes de commande à structure contrainte posent en général le problème de la dépendance de leur solution par rapport aux conditions initiales. Ce problème est la plupart

du temps résolu en considérant le vecteur condition initiale comme un processus stochastique à caractéristiques connues (moyenne et variance). Nous allons comparer cette approche avec celle consistant à faire la synthèse de la commande à partir de la définition d'un problème de "jeux" et qui revient à optimiser le pire des cas.

La stabilité de la structure est étudiée et des conditions suffisantes sont fournies pour que l'algorithme (primal) de détermination de la commande décentralisée optimale converge bien vers une solution stabilisante. Ce point n'avait, à notre connaissance, par encore été résolu et les quelques algorithmes existant dans la littérature nécessitaient la vérification a posteriori de la stabilité de la solution obtenue. Enfin; à la fin du chapitre nous traitons un problème formellement plus complexe où, outre les contraintes de structure sur la commande, interviennent des contraintes de type instantanné sur l'état et la commande.

L'application des résultats obtenus auparavant est ensuite faite au problème de l'estimation d'état décentralisée.

Le dernier chapitre constitue le "chapitre application". Le problème de la régulation charge-fréquence dans les réseaux d'énergie électrique y est abordé. Nous nous y attachons à montrer l'applicabilité des résultats (algorithmes) à un système de taille relativement significative et à comparer nos résultats à ceux trouvés auprès d'auteurs spécialistes en la matière.

C H A P I T R E I

SYSTEMES INTERCONNECTES :
PROBLEMES DE STABILITE ET COMMANDE

I-1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons principalement rappeler certains résultats concernant l'analyse de la stabilité pour les systèmes interconnectés au moyen de la méthode de Lyapunov pour terminer par une brève présentation du problème lié à la décomposition-décentralisation pour la commande de tels systèmes.

Il serait illusoire que de vouloir, en quelques pages, faire un tour d'horizon complet des études et résultats obtenus dans le cadre de la théorie de la stabilité selon Lyapunov, depuis la parution de ses travaux à la fin du siècle dernier. Nous nous attacherons donc essentiellement à distinguer ceux qui ont un rapport direct avec le problème que nous étudierons au deuxième chapitre et concernant la stabilité des systèmes interconnectés.

La seconde méthode de Lyapunov est apparue comme une idée extrêmement séduisante car (et c'est une des caractéristiques essentielles) elle exigeait seulement la connaissance du modèle mathématique (équation différentielle) du système à l'étude. Sa mise en oeuvre nécessite la détermination d'une fonction dite "fonction de Lyapunov" à partir de laquelle peuvent être énoncées les conditions (suffisantes en général) de stabilité. Le choix, non unique, de ces fonctions de Lyapunov constitue le point crucial de la méthode et parfois aussi son point d'échoppement.

Dans le cas de grande dimension, cette détermination peut se révéler extrêmement laborieuse et c'est pourquoi nombre de travaux se sont attachés à considérer le cas des systèmes interconnectés qui conduisent en fait à une décomposition du problème. Dans ces travaux, les hypothèses suivantes, sont généralement admises :

- il existe pour chaque sous système isolé une fonction de Lyapunov au moyen de laquelle ses propriétés de stabilité sont établies

- les termes de couplages entre sous systèmes peuvent être caractérisés (majorations) dans la base que constituent les fonctions de Lyapunov pour les sous-systèmes.

Avec ces hypothèses, deux approches peuvent être considérées (Sandell et al [56]) : l'une consistant à rechercher une fonction de Lyapunov globale pour le système, l'autre conduisant à la définition d'un vrai système dynamique : appelé système de comparaison. C'est la deuxième approche qui retiendra plus particulièrement notre attention.

Parmi les personnes qui furent à l'origine du développement d'une telle approche nous citerons Corduneanu [21] qui à partir d'un système de comparaison scalaire a montré qu'il n'était pas toujours nécessaire que la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov soit négative (cas non invariant), et Matrosov [51] qui, à partir des résultats de Wazewski [64] sur les inégalités différentielles, a défini un système de comparaison vectoriel à partir des "fonctions de Lyapunov vectorielles" (Bellman [10]).

Enfin, il nous faut mettre en évidence le travail pionnier de Bailey [8] dans le cadre des systèmes interconnectés, travail qui a ensuite suscité de nombreuses contributions (Siljak [58]), (Michel et Miller [52]) et (Araki [4]).

Bien que nous n'ayons personnellement pas envisagé son étude il nous paraît bon de ne pas passer sous silence l'approche "input-output" qui a également fourni un grand nombre de travaux dont les références et principaux résultats peuvent être trouvés dans le livre de Michel et Miller [52].

I-2. Stabilité des Systèmes Interconnectés

Le principe de la deuxième méthode de Lyapunov peut être introduit à partir de considérations énergétiques (cf. Kalman et Bertram [40]).

Supposons un système physique isolé, d'énergie exprimée en fonction de l'état x : E(x). Si dE(x)/dt est négative pour tout x, à l'exception d'un point isolé X_e (unique), l'énergie va

décroître continuellement jusqu'à atteindre sa valeur minimum pour $x=x_e$.

Pour un système dissipatif, l'énergie permet donc de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre. Toutefois l'expression de l'énergie est, dans le cas où un système est décrit par un modèle mathématique, très difficile à déterminer. La deuxième méthode de Lyapunov généralise cette idée d'énergie par la considération de fonctions dites "fonctions de Lyapunov" |40| .

> "Un système dynamique est stable (retour à la position d'équilibre après perturbation) si il existe une fonction scalaire de l'état telle que $V(x)>0$, $\dot{V}(x)<0$ pour $x\neq x_e$ et $V(x)=\dot{V}(x)=0$ pour $x=x_e$".

Bien sûr $V(x) = E(x)$ satisfait les conditions précédentes et une interprétation géométrique peut être fournie. En effet on peut considérer $V(x)$ comme une mesure de la distance entre x et x_e et donc si $\dot{V}(x(t))< 0$, $V(x)$ est continuement décroissante ce qui implique $x(t) \longrightarrow x_e$ pour $t\to\infty$

Dans ce qui suit nous nous restreindrons au cas de systèmes invariants dans le temps, et décrits par :

$$\dot{x}=F(x) \qquad x(0)=x_0 \qquad , t \geqslant 0 \tag{1}$$

où $x\varepsilon R^n$ et $F(.) : R^n \to R^n$ est une fonction continue satisfaisant la condition de Lipschitz (unicité des solutions de (1), |40|). Le cas discret ne sera pas évoqué ici (voir Bitsoris |16|).

I-2-1. QUELQUES DEFINITIONS

Supposons que l'origine est un point d'équilibre isolé pour (1) c'est-à-dire $F(0)=0$. Par la suite nous noterons $\|x\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2}$ (norme euclidienne du vecteur $x\varepsilon R^n$) et $\Phi(t,x_0)\varepsilon R^n$ l'unique solution de (1).

DEFINITION I-1. Le point d'équilibre $x=0$ de (1) est stable si $\forall$ $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon)>0$ tel que

$$\|x_0\| \leqslant \delta(\varepsilon) \;\rightarrow\; \|\Phi(t,x_0)\| \leqslant \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0 \tag{2}$$

DEFINITION I-2. Le point d'équilibre x=0 de (1) est asymptotiquement stable si il est stable et s'il existe un nombre $\eta>0$ tel que :

$$\|x_0\| \leqslant \eta \quad \rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|\Phi(t,x_0)\| = 0 \tag{3}$$

DEFINITION I-3. Le point d'équilibre x=0 de (1) est dit exponentiellement stable s'il existe $\sigma>0$ tel que $\forall \varepsilon>0$ il existe $\delta(\varepsilon)>0$ tel que

$$\|x_0\| \leqslant \delta(\varepsilon) \quad \rightarrow \quad \|\Phi(t,x_0)\| \leqslant \varepsilon e^{-\sigma t} \quad \forall t \geqslant 0 \tag{4}$$

Ces trois définitions ont les interprétations géométrique suivantes :

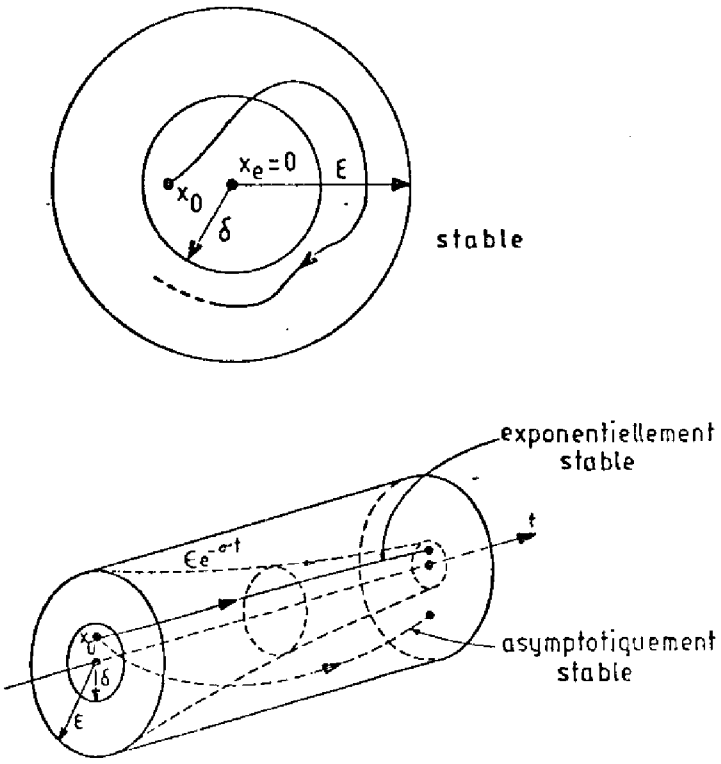


Fig. I-1. Interprétation géométrique des définitions de stabilité

Exemple I.1. Soit le système (1) avec $F(x)=Ax$, où A est une matrice réelle, soient $\lambda_i(A)$ $i=1...n$ ses valeurs propres supposés distincts. Il existe alors une matrice T inversible (Bellman [9]) telle que :

$$\|e^{A}\| = \|e^{T^{-1}\Lambda T}\| = \|T^{-1}e^{\Lambda}T\| \leqslant \|T^{-1}\|\,\|T\|\,\|e^{\Lambda}\|$$

avec $\|e^{\Lambda}\| = \exp\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Re}\left[\lambda_i(A)\right]\right\}$. Nous avons donc

$$\|\Phi(t,x_0)\| = \|e^{At}x_0\| \leqslant \theta(T)^2 . \|x_0\| . \exp\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Re}\left[\lambda_i(A)\right] t\right\}$$

où $\theta(T)^2 = \|T\|\,\|T^{-1}\|$. Finalement si on prend

$$\begin{cases} \delta(\varepsilon) = \varepsilon/\theta(T)^2 \\ \sigma = -\max_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Re}\left\{\lambda_i(A)\right\} \end{cases}$$

il vient :

a) Si $\sigma = 0$ alors $x = 0$ est un point d'équilibre stable du système linéaire $\dot{x} = Ax$
b) Si $\sigma > 0$ alors $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable du système linéaire $\dot{x} = Ax$.

I-2-2. FONCTIONS DEFINIES POSITIVES

Tout d'abord, rappelons la définition suivante des fonctions dites de classe k (Hahn [37]).

DEFINITION I-4. Une fonction continue $\varphi:[0,\infty)\to R^+$ est dite une fonction de classe k ($\varphi \varepsilon k$) si $\varphi(0)=0$ et φ est strictement croissante dans son intervale de définition.

Considérons maintenant la fonctions scalaire $v(x):R^n\to R$ continue alors :

DEFINITION I-5. La fonction $v(.)$ est dite définie positive (semi-définie positive) si $v(x)>0$ $(v(x)\geqslant 0)$ pour $\forall x \varepsilon R^n$ et $v(x)=0$ si et seulement si $x=0$.

Il est évident que d'après la définition I-4., $v(x)$ est une fonction définie positive s'il existe une fonction $\varphi \in k$ telle que

$$v(x) \geqslant \varphi(\|x\|) \qquad \forall x \in R^n \tag{5}$$

et $v(0)=0$. Nous sommes en mesure maintenant d'étendre ces définitions pour les fonctions vectorielles. Considérons une fonction $V(x): R^n \rightarrow R^m$ continue, alors

<u>DEFINITION I-6.</u> $V(x)$ est dite <u>définie positive</u> (semi-définie positive) si $\forall \mathbf{a} \in R^m$, $a_i > 0$ $i=1...m$, la fonction scalaire $v(x)=\mathbf{a}'V(x)$ est définie positive (semi-définie positive).

Nous devons noter que d'après cette définition, une fonction $V(x)'=[v_1(x),...,v_m(x)]$ est définie positive si $v_i(x) \geqslant 0$ pour tout $i=1...m$ et si l'ensemble

$$\mathbf{M}(x)=\left\{x \in R^n / v_i(x)=0,\ i=1...m\right\} \tag{6}$$

est constitué simplement de l'élément zéro, c'est-à-dire $\mathbf{M}(x)=\{0\}$.

<u>Exemple I-2</u>. Soit la fonction $V(x)'=[v_1...v_m]: R^n \rightarrow R^m$ avec $v_i(x)=x'C_i'C_i x$ où C_i est une matrice de rang inférieur ou égal à n alors d'après la définition ci-dessus et (6) nous avons

$$\mathbf{M}(x) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{N}(C_i)$$

où $\mathbf{N}(C_i)$ dénote l'espace nul de C_i alors $V(x)$ sera définie positive si $\mathbf{M}(x)=\{0\}$. Dans le cas contraire elle sera semi-définie positive.

Par définition, si $V(x)$ est une fonction vectorielle définie positive, alors nous pouvons lui associer une fonction scalaire définie positive. Ce fait est fondamental pour comparer les deux approches classiques, fonctions de Lyapunov vectorielles et sommes pondérées, pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques interconnectés.

I-2-3. LA DEUXIEME METHODE DE LYAPUNOV

Dans ce paragraphe nous allons passer en revue les diverses propriétés que peuvent présenter les fonctions de Lyapunov et noter les types de stabilité que ces propriétés induisent pour le système dynamique (1).

L'application de la deuxième méthode de Lyapunov consiste à évaluer "l'accroissement par rapport au temps"

$$\dot{v}_+(t) = \lim_{\delta t \to 0^+} \left\{ \frac{v(t+\delta t)-v(t)}{\delta t} \right\} \tag{7}$$

de la fonction continue $v(t)$. Bien sûr si $v(.)$ est différentiable alors

$$\dot{v}_+(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \tag{8}$$

Considérons la fonction $v(x(t))$ où $x(t)$ est solution de (1), alors

$$\dot{v}_+(x) = \lim_{\delta t \to 0^+} \left\{ \frac{v(x(t+\delta t))-v(x(t))}{\delta t} \right\} \tag{9}$$

Comme $x(t+\delta t) \longrightarrow x(t)+\delta t f(x(t))$ lorsque $\delta t \longrightarrow 0^+$, il vient

$$\dot{v}_+(x) = \lim_{\delta t \to 0^+} \left\{ \frac{v(x(t)+\delta t f(x))-v(x(t))}{\delta t} \right\} \tag{10}$$

soit dans le cas différentiable

$$\dot{v}_+(x) = \dot{v}(x) = \nabla v(x)' f(x) \tag{11}$$

Pour ne pas surcharger l'écriture, nous adopterons à partir d'ici la notation $\dot{v}(x)$ dans tous les cas.

THEOREME I-1. S'il existe une fonction définie positive $v(x)$ telle que

a) $\varphi_1(\|x\|) \leqslant v(x) \leqslant \varphi_2(\|x\|)$

b) $\dot{v}(x) \leqslant 0$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions de classe k alors le point d'équilibre $x=0$ de (1) est stable.

Démonstration : Soit x_0 une condition initiale quelconque pour (1), alors de l'hypothèse b) nous tirons :

$$v(\Phi(t,x_0)) - v(x_0) = \int_0^t \dot{v}(\Phi(\zeta,x_0))\,d\zeta$$

$$\leqslant 0 \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{12}$$

$\forall \varepsilon > 0$, prenons $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\varphi_2(\delta) \leqslant \varphi_1(\varepsilon)$ alors si $\|x_0\| \leqslant \delta(\varepsilon)$ nous avons :

$$\varphi_1(\varepsilon) \geqslant \varphi_2(\delta) \geqslant \varphi_2(\|x_0\|) \geqslant v(x_0) \tag{13}$$

mais avec (12) nous pouvons reécrire (13) sous la forme :

$$\varphi_1(\varepsilon) \geqslant v(\Phi(t,x_0)) \geqslant \varphi_1(\|\Phi(t,x_0)\|) \tag{14}$$

et comme $\varphi_1 \varepsilon k$ il vient

$$\|\Phi(t,x_0)\| \leqslant \varepsilon \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{15}$$

et le théorème est prouvé par la définition I-1. ∎

THEOREME I-2. S'il existe une fonction définie positive $v(x)$ telle que

a) $\varphi_1(\|x\|) \leqslant v(x) \leqslant \varphi_2(\|x\|)$

b) $\dot{v}(x) \leqslant -\varphi_3(\|x\|)$

où φ_1, φ_2 et $\varphi_3 \varepsilon k$ alors le point d'équilibre $x=0$ de (1) est asymptotiquement stable.

Démonstration : Comme $\varphi_3 \geqslant 0$, d'après le théorème antérieur nous pouvons conclure que le point d'équilibre de (1) est stable. D'autre part avec b) nous avons :

$$v(\Phi(t,x_0))-v(x_0)=\int_0^t \dot{v}(\Phi(\zeta,x_0))d\zeta$$

$$\leqslant -\int_0^t \varphi_3(\|\Phi(\zeta,x_0)\|)d\zeta \quad \forall t\geqslant 0 \tag{16}$$

supposons maintenant que pour $\eta>0$ nous avons $\|x_0\|\leqslant\eta$ alors

$$v(x_0) \leqslant \varphi_2(\|x_0\|) \leqslant \varphi_2(\eta) \tag{17}$$

d'après (16) et l'hypothèse a) il vient

$$\varphi_1(\|\Phi(t,x_0)\|)\leqslant v(\Phi(t,x_0))$$

$$\leqslant \varphi_2(\eta)-\int_0^t \varphi_3(\|\Phi(\zeta,x_0)\|)d\zeta \quad \forall t\geqslant 0 \tag{18}$$

comme en particulier $\varphi_1 \varepsilon k$

$$\varphi_2(\eta) \geqslant \lim_{t\to\infty} \int_0^t \varphi_3(\|\Phi(\zeta,x_0)\|)d\zeta \tag{19}$$

finalement, comme φ_2 et $\varphi_3 \varepsilon k$, si on impose une borne finie sur $\|x_0\|$, (19) implique

$$\lim_{t\to\infty} \|\Phi(t,x_0)\| = 0 \tag{20}$$

et le théorème est prouvé par la définition I-2. ∎

THEOREME I-3. S'il existe trois constantes positives telles que

a) $\mu_1\|x\|\leqslant v(x) \leqslant \mu_2 \|x\|$

b) $\dot{v}(x)\leqslant -\mu_3\|x\|$

alors le point d'équilibre x=0 de (1) est exponentiellement stable.

Démonstration : Comme avant, nous pouvons écrire

$$v(\Phi(t,x_0))-v(x_0)=\int_0^t \dot{v}(\Phi(\zeta,x_0))d\zeta$$

$$\leqslant -\int_0^t \mu_3 \|\Phi(\zeta,x_0)\| d\zeta$$

$$\leqslant -\frac{\mu_3}{\mu_2}\int_0^t v(\Phi(\zeta,x_0))d\zeta \qquad (21)$$

Il est aisé de voir qu'une solution possible pour cette inéquation intégrale est

$$v(\Phi(t,x_0)) \leqslant e^{-\sigma t} v(x_0) \qquad (22)$$

avec $\sigma=\mu_3/\mu_2$. Finalement, pour $\forall\varepsilon>0$ prenons $\delta(\varepsilon)=\varepsilon\mu_1/\mu_2$ alors nous avons d'après (22)

$$\|\Phi(t,x_0)\| \leqslant \frac{1}{\mu_1} v(x_0) e^{-\sigma t} \leqslant \frac{\mu_2}{\mu_1} \|x_0\| \; e^{-\sigma t} \qquad (23)$$

alors si $\|x_0\| \leqslant \delta(\varepsilon)$, (23) implique que $\|\Phi(t,x_0)\| \leqslant \varepsilon e^{-\sigma t}$ pour $\forall t \geqslant 0$ et le théorème est prouvé par la définition I-3. ∎

Avec ces conditions, dans les paragraphes suivants, nous allons pouvoir établir le principe de comparaison pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques interconnectés.

I-2-4. LES THEOREMES DE WAZEWSKI ET CORDUNEANU

Dans ce paragraphe nous allons rappeler deux théorèmes dus à Wazewski |64| et Corduneanu |21| qui furent à l'origine de l'énonce du principe de comparaison développé par Matrosov |51|

DEFINITION I-7. Une fonction $G(x):R^n \rightarrow R^n$ continue est dite quasi-monotone si pour toutes ses composantes $g_i(x)$ et tout vecteur, $x,y \in R^n$ tels que $x_i=y_i$ et $x_j \leqslant y_j$ $(i \neq j)$ on ait $g_i(x) \leqslant g_i(y)$

THEOREME I-4. Soit l'inégalité différentielle

$$\dot{x}(t) \leqslant G(x(t)) \qquad x(0) \geqslant 0 \tag{24}$$

où la fonction $G(.); R^n \rightarrow R^n$ est une fonction continue qui satisfait la condition de Lipschitz. Si pour toutes les composantes g_i : $g_i(x) \geqslant 0$ pour $x_i = 0$ et $x_j \geqslant 0$ $(i \neq j)$ alors il existe une fonction $x(t) \geqslant 0$ $\forall t \geqslant 0$ qui satisfait (24).

Démonstration : Par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas une fonction $x(t) \geqslant 0$ $\forall t \geqslant 0$, telle que (24) soit satisfaite. Comme $x(0) \geqslant 0$ alors il existe un instant $t^* \geqslant 0$ tel que $x_i(t^*) = 0$ et $x_j(t^*) \geqslant 0$ $(i \neq j)$

D'autre part comme $G(x)$ est continue et satisfait la condition de Lipschitz alors il existe toujours une solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = G(x(t)) \tag{25}$$

qui satisfait évidemment (24). Donc pour $t = t^*$ nous avons

$$\dot{x}_i(t)\Big|_{t=t^*} = g_i(x(t^*)) \geqslant 0 \tag{26}$$

ce qui implique que $x_i(t^* + dt) \geqslant 0$ et donc comme ceci est valable pour tout $t^* \geqslant 0$ cela contredit l'hypothèse de non existence d'une solution $x(t) \geqslant 0$ $\forall t \geqslant 0$ ce qui prouve le théorème. ∎

THEOREME I-5. (Théorème de WAZEWSKI). Soit l'inégalité différentielle

$$\dot{x}(t) \leqslant G(x(t)) \qquad x(0) = x_0 \tag{27}$$

où $G(.): R^n \rightarrow R^n$ est une fonction quasimonotone qui satisfait la condition de Lipschitz et soit aussi l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) = G(y(t)) \qquad y(0) = y_0 \tag{28}$$

alors l'inégalité $x_0 \leqslant y_0$ implique $x(t) \leqslant y(t)$ $\forall t \geqslant 0$.

Démonstration : Comme dans le théorème antérieur, ceci est prouvé par l'absurde. Dans ce cas, il existe un instant $t^* \geqslant 0$ tel que $x_i(t^*) = y_i(t^*)$ et $x_j(t^*) \leqslant y_j(t^*)$ $(i \neq j)$. Alors d'après (28) et du fait que G(.) est quasimonotone il vient :

$$\dot{y}(t)\Big|_{t=t^*} = G(y(t^*)) \geqslant G(x(t^*)) \geqslant \dot{x}(t)\Big|_{t=t^*} \qquad (29)$$

c'est-à-dire que pour $t=t^*+dt$ nous avons $x(t) \leqslant y(t)$ et comme $t^* \geqslant 0$ est complètement arbitraire, le théorème est prouvé. ▬

Finalement, nous devons noter que si la fonction G(.) du théorème antérieur satisfait aussi l'hypothèse $G(0)=0$ alors (Théorème I-4.) $0 \leqslant x_0 \leqslant y_0$ implique $0 \leqslant x(t) \leqslant y(t)$ $\forall t \geqslant 0$.

Ce résultat sera d'une importance fondamentale pour établir les propriétés du système de comparaison dans le paragraphe suivant.

THEOREME I-6. (Théorème de Corduneanu). Soit $v(x):R^n \rightarrow R$ une fonction définie positive tel que son accroissement temporel par rapport à une trajectoire de (1) satisfasse

$$\dot{v}(x) \leqslant h(v(x)) \qquad (30)$$

Considérons le système dynamique scalaire dit "Système de Comparaison"

$$\dot{\omega} = h(\omega) \qquad (31)$$

pour lequel on suppose l'existence et l'unicité des solutions $\forall \omega(0)=\omega_0 \geqslant 0$. On suppose de plus que $\omega=0$ est un point d'équilibre isolé de (31). Alors :

a) S'il existe φ_1 et $\varphi_2 \in k$ telles que $\varphi_1(\|x\|) \leqslant v(x) \leqslant \varphi_2(\|x\|)$ et si (31) est stable alors le point d'équilibre de (1) est aussi stable

b) S'il existe φ_1 et $\varphi_2 \in k$ telles que $\varphi_1(\|x\|) \leqslant v(x) \leqslant \varphi_2(\|x\|)$ et si (31) est asymptotiquement stable alors le point d'équilibre de (1) est aussi asymptotiquement stable

c) S'il existe $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ tel que $\mu_1 \|x\| \leqslant v(x) \leqslant \mu_2 \|x\|$ et si (31) est exponentiellement stable alors le point d'équilibre de (1) est également exponentiellement stable.

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème de Wazewski nous pouvons conclure que $v(x(t)) \leqslant \omega(t)$ avec $\omega(0) = v(x_0)$ et comme $v(x)$ est une fonction définie positive : $0 \leqslant v(x(t)) \leqslant \omega(t) \quad \forall t \geqslant 0$.

a) Comme par hypothèse $\omega=0$ est un point d'équilibre stable de (31) et comme $h(.)$ est une fonction scalaire alors il existe un voisinage $B(r) = \{\omega / 0 \leqslant \omega \leqslant r\}$ de l'origine tel que $h(\omega) \leqslant 0$ $\forall \omega \varepsilon B(r)$. D'autre part

$$\dot{v}(x) \leqslant h(v(x)) \leqslant 0 \qquad \forall x / \|x\| \leqslant \varphi_2^{-1}(r) \tag{32}$$

ce qui prouve la stabilité du point d'équilibre de (1) par le théorème I-1.

b) La stabilité asymptotique du point d'équilibre $\omega=0$ de (31) implique qu'il existe un voisinage $B(r)$ de l'origine tel que $h(\omega) \leqslant -\varphi(\omega)$, $\varphi \varepsilon k$ pour $\forall \omega \varepsilon B(r)$ et donc

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) \leqslant h(v(x)) &\leqslant -\varphi(v(x)) \\ &\leqslant -\varphi(\varphi_1(\|x\|)) \\ &\leqslant -\varphi_3(\|x\|) \qquad \forall x / \|x\| \leqslant \varphi_2^{-1}(r) \end{aligned} \tag{33}$$

et par le théorème I-2. la stabilité asymptotique de (1) est prouvée.

c) Comme le point d'équilibre $\omega=0$ est exponentiellement stable alors $\exists \nu > 0$ tel que $h(\omega) \leqslant -\nu\omega \ \forall \omega \varepsilon B(r)$, donc

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) < h(v(x)) &\leqslant -\nu v(x) \\ &\leqslant -\nu \mu_1 \|x\| \\ &\leqslant -\mu_3 \|x\| \qquad \forall x / \|x\| \leqslant \frac{r}{\mu_2} \end{aligned} \tag{34}$$

et par le théorème I-3. avec $\mu_3 = \nu\mu_1 > 0$, la partie c) est prouvée. ∎

Insistons sur le fait que ce théorème a établi des conditions de stabilité pour le système de départ (1) à partir de l'étude de la stabilité d'un système scalaire appelé "système de comparaison".

Dans le prochain paragraphe, nous allons généraliser cette idée et établir un système de comparaison vectoriel qui nous permettra de mettre en évidence les aspects de la "décomposition" pour l'étude de la stabilité des systèmes interconnectés.

I-2-5. LE PRINCIPE DE COMPARAISON. THEOREME DE MATROSOV

Dans cette section nous allons établir le "principe de comparaison" à partir de la généralisation du théorème de Corduneanu. L'idée principale est de construire un autre système dynamique (nous allons considérer ici seulement le cas linéaire et stationnaire) de telle façon que :

a) L'étude de sa stabilité implique celle du système initial (système de comparaison)

b) L'étude de la stabilité du système de comparaison doit être simple (structure simple, dimension réduite par rapport au système de départ)

c) Le système de comparaison doit tenir compte de la structure du système global (sous systèmes - interconnexions).

Pour satisfaire ces objectifs, Bellman [10] et Matrosov [51] ont proposé de considérer pour le système global une fonction de Lyapunov vectorielle $V(x) = [v_1, \ldots, v_N]'$ où $v_i(x_i)$ est une fonction de Lyapunov scalaire associée à chaque sous-système isolé. La première application pratique montrant l'efficacité de cette approche a été faite par Bailey [8] , suivi par de nombreux auteurs (Siljak [58] , Michel et Miller [52] et Araki [4]).

<u>DEFINITION I-8</u>. Une matrice réelle $L \in R^{NxN}$ est dite <u>M-matrice</u> si tous ses éléments hors diagonaux sont non-positifs ($l_{ij} \leqslant 0$, $i \neq j$) et si tous ses mineurs principaux sont positifs :

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots\cdots & l_{1k} \\ & & \\ l_{k1} & \cdots\cdots & l_{kk} \end{bmatrix} \right\} = \Delta_k (L) > 0 \qquad k=1\ldots N \qquad (35)$$

<u>THEOREME I-7.</u> Soit $L \in R^{NxN}$ une (-M)-matrice (-L est une M matrice) alors les propositions suivantes sont équivalentes

a) $\Lambda(L) \subset C^-$ (stabilité asymptotique)

b) $(-1)^k \Delta_k (L) > 0 \quad k=1\ldots N$ (conditions connues comme conditions de Sevastyanov-Kotelyanski)

c) Il existe un vecteur $y \in R^N$; $y > 0$ tel que $Ly < 0$

<u>Démonstration</u> : Voir par exemple (Fiedler et Ptak |27|) qui fournissent bon nombre d'autres conditions equivalentes. ∎

L'obtention du système de comparaison procède de la façon suivante : soit le système (1)

$$(S) \qquad \dot{x} = F(x) \qquad (36)$$

où F(.) est une fonction non linéaire telle que (36) peut être ecrit sous la forme

$$(S_i) \qquad \dot{x}_i = f_i(x_i) + g_i(x) \qquad i=1\ldots N \qquad (37)$$

où $g_i(x)$, $i=1\ldots N$, est une fonction additivement séparable et qui satisfait

$$\begin{cases} g_i(x) = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} g_{ij}(x_j) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i=1\ldots N \\ \|g_i(x)\| \leqslant \sum\limits_{j\neq i}^{N} \|g_{ij}(x_j)\| \leqslant \sum\limits_{j\neq i}^{N} h_{ij} \|x_j\| \end{cases} \qquad (38)$$

où h_{ij} est un nombre réel non négatif. Considérons maintenant, le ième sous-système isolé

$$(\hat{S}_i) \qquad \dot{x}_i = f_i(x_i) \tag{39}$$

où $f_i(.):R^{n_i} \rightarrow R^{n_i}$ est une fonction telle que $x_i=0$ est un point d'équilibre isolé. Supposons encore associé à chaque $\hat{S}_i$ une fonction de Lyapunov telle que

$$\begin{aligned} &\mu_{i1}\|x_i\| \leqslant v_i(x_i) \leqslant \mu_{i2}\|x_i\| \\ &\dot{v}_{i(\hat{S}_i)} \leqslant -\mu_{i3}\|x_i\| \\ &\|\nabla v_i\| \leqslant \mu_{i4} \end{aligned} \tag{40}$$

avec $\mu_{ik} > 0 \quad \forall i = 1...N$ et $k=1,2,3$ et 4. Nous devons noter que les hypothèses sur les interconnexions (38) et sur la fonction de Lyapunov de chaque sous-système isolé (40) ont été prises de cette façon simplement parce que nous les retrouverons dans les cas que nous allons traiter dans le prochain chapitre. Néanmoins leur généralisation (avec des hypothèses moins restrictives et plus générales) n'induit aucune difficulté supplémentaire sur le développement que nous allons maintenant faire.

Considérons l'accroissement temporel $v_i(x)$ sur une trajectoire de (S_i), alors nous avons

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i(S_i)} &= \dot{v}_{i(\hat{S}_i)} + \nabla v_i' \sum_{j\neq i}^{N} g_{ij}(x_j) \\ &\leqslant -\mu_{i3}\|x_i\| + \mu_{i4} \sum_{j\neq i}^{N} h_{ij}\|x_j\| \qquad i=1...N \end{aligned} \tag{41}$$

Utilisant les bornes sur v_i données en (40) nous pouvons réécrire (41) sous la forme

$$\dot{v}_i \leqslant -\frac{\mu_{i3}}{\mu_{i2}} v_i + \mu_{i4} \sum_{j\neq i}^{N} \frac{h_{ij}}{\mu_{j1}} v_j \qquad i=1...N \tag{42}$$

alors si on définit le vecteur $V' = [v_1 \ldots v_N]$, (42) s'écrit sous la forme matricielle

$$\dot{V} \leqslant L\,V \tag{43}$$

où les éléments de la matrice L sont définis par

$$l_{ij} = \begin{cases} -\ \mu_{i3}\ \mu_{i2}^{-1} & i=j \\ \mu_{i4}\ \mu_{j1}^{-1}\ h_{ij} & i\neq j \end{cases} \qquad i,j=1\ldots N \tag{44}$$

Comme $l_{ij} \geqslant 0$, $i\neq j$ alors la fonction vectorielle lineaire $G(V)=LV$ est une fonction quasimonotone et donc elle satisfait les hypothèses du théorème I-4. et du théorème de Wazewski. Si on considère l'équation différentielle linéaire

$$\dot{W} = LW \tag{45}$$

alors $0 \leqslant V(0) \leqslant W(0)$ implique $0 \leqslant V(t) \leqslant W(t)$ $\forall t \geqslant 0$.

<u>THEOREME I-8</u>. (Théorème de Matrosov). Si le système de comparaison $\dot{W} = LW$ satisfait les définitions I-1-I-3. alors le point d'équilibre $x = 0$ du système dynamique (36) satisfera la même définition.

<u>Remarques</u> :

1. Le théorème de Matrosov a été établi originalement pour un système de comparaison non linéaire $\dot{W} = G(W)$ où $G(.): R^N \rightarrow R^N$ est une fonction qui satisfait les conditions du théorème de Wazewski (pour cela voir par exemple Matrosov |51| , Burgat |17| , Bitsoris |16|).

2. Evidemment, le système de comparaison dépend fortement des bornes supérieures pour les normes des interconnexions (38) et surtout des bornes de la fonction de Lyapunov associée à chaque sous système isolé (40). C'est pour cela que le choix de la fonction de Lyapunov de chaque sous-système isolé est très important et sera le sujet de notre prochain chapitre.

3. L'étude de la stabilité d'un système dynamique interconnecté qui admet pour chaque sous-système isolé une fonction de Lyapunov avec les propriétés (40) peut aussi être abordée par la méthode des "sommes pondérées" (Michel et Miller [52]).

Considérons pour le système global une fonction de Lyapunov scalaire

$$\vartheta(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i(x_i) \tag{46}$$

avec $y_i > 0$. Alors, $\vartheta(x)$ satisfait (Michel et Miller [52])

$$\mu_1 \|x\|_\infty \leqslant \vartheta(x) \leqslant \mu_2 \|x\|_\infty \tag{47}$$

où $\mu_1 = \min_i (y_i \mu_{i1}) > 0$; $\mu_2 = \sum_{i=1}^{N} y_i \mu_{i2} > 0$ et $\|x\|_\infty = \max_i (\|x_i\|)$.

Sa dérivée temporelle par rapport à une trajectoire de (S) vérifie

$$\dot{\vartheta}_{(S)}(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \dot{v}_{i(S_i)}(x_i) \tag{48}$$

d'après (41) il vient

$$\dot{\vartheta}(x) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left\{ - y_i \mu_{i3} \|x_i\| + y_i \mu_{i4} \sum_{j \neq i}^{N} h_{ij} \|x_j\| \right\} \tag{49}$$

et si on considère $y' = [y_1 \cdots y_N]$ et $\phi(\|x\|)' = [\|x_1\| \ \ldots \ \|x_N\|]$ (49) peut être reécrite sous la forme

$$\dot{\vartheta}(x) \leqslant y' L_\nu \ \phi(\|x\|) \tag{50}$$

où L_ν est une matrice définie par

$$l^{\nu}_{ij} = \begin{cases} - \mu_{i3} & i=j \\ \mu_{i4} \ h_{ij} & i \neq j \end{cases} \tag{51}$$

Finalement, comme toutes les composantes du vecteur $\phi(\|x\|)$ sont non négatives et comme $\vartheta(x)$ est borné (47) alors le système dynamique interconnecté de départ sera asymptotiquement stable si $\exists\ y > 0$ telle que $L_\nu' y < 0$. C'est-à-dire (Théorème I-7.) que L_ν' (et donc L_ν) doit être une (-M)-matrice. Dans ce cas

$$\dot{\vartheta}(x) \leqslant \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{N} y_j\ l_{ji}^{\nu} \right\} \|x\|_\infty = -\ \mu_3 \|x\|_\infty \tag{52}$$

Cela impose une condition de stabilité moins restrictive que celle obtenue avec le système de comparaison (45). Evidemment cette conclusion est valide avec les hypothèses que nous avons faites sur les fonctions de Lyapunov des sous-systèmes isolés. Ceci n'est pas toujours vrai, comme nous allons le montrer pour le cas des systèmes linéaires interconnectés.

I-2-6. QUELQUES PROPRIETES PARTICULIERES DES SYSTEMES LINEAIRES

Considérons maintenant un système linéaire, invariant $S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$:

$$(S_i) \qquad \dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} A_{ij} x_j \qquad i=1\ldots N \tag{53}$$

où A_i est une matrice telle que $\Lambda(A_i) \subset C^-$. Soit en plus la matrice $Q_i = D_i' D_i$ de telle sorte que la paire (A_i, D_i) est observable. Il existe alors une matrice unique $P_i > 0$ qui satisfait l'équation matricielle linéaire (équation de Lyapunov).

$$A_i' P_i + P_i A_i + Q_i = 0 \tag{54}$$

Considérons finalement la fonction scalaire définie positive

$$v_i(x_i) = \left\{ \|P_i^{-1}\|\ x_i' P_i x_i \right\}^{1/2} \tag{55}$$

qui satisfait (40) avec

$$\mu_{i1} = 1 \quad ; \quad \mu_{i2} = \mu_{i4} = \left\{ \|P_i\| \ \|P_i^{-1}\| \right\}^{1/2} = \theta_i$$

$$i=1\ldots N \tag{56}$$

Si on considère sa dérivée temporelle par rapport aux trajectoires de chaque sous-système isolé nous avons :

$$\dot{v}_{i(\hat{S}_i)} \leqslant - \alpha_i v_i \quad ; \quad \alpha_i = \min_{x_i} \frac{1}{2} \left\{ \frac{x_i' Q_i x_i}{x_i' P_i x_i} \right\} \tag{57}$$

et aussi d'après (40) en faisant

$$\mu_{i3} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\|P_i^{-1}\|}{\|P_i\|} \right\}^{1/2} \cdot \lambda_{min}(Q_i) \qquad i=1\ldots N \tag{58}$$

Si finalement on définit la "matrice des interconnexions" $H \varepsilon R^{NxN}$ comme étant

$$H = \left\{ h_{ij} / h_{ij} = \|A_{ij}\| \qquad i,j = 1\ldots N \right\} \tag{59}$$

nous pouvons obtenir la matrice du système de comparaison linéaire (45) sous la forme

$$L = - \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{2} \ \frac{\lambda_{min}(Q_i)}{\lambda_{max}(P_i)} \right\} + \operatorname{diag} (\theta_i) H \tag{60}$$

mais d'après (57) rien ne nous empêche, à la place de L donnée par (60), de considérer L donnée par

$$L = - \operatorname{diag}(\alpha_i) + \operatorname{diag} (\theta_i) H \tag{61}$$

ce qui, évidemment, sera plus intéressant car $2\alpha_i \geqslant \lambda_{min}(Q_i)/\lambda_{max}(P_i)$. Finalement, comme $\theta_i \geqslant 1 \quad i=1\ldots N$, nous pouvons reécrire (61) sous la forme

$$L = \operatorname{diag}(\theta_i) \left\{ - \operatorname{diag}(\alpha_i/\theta_i) + H \right\} = \operatorname{diag}(\theta_i) \tilde{L} \tag{62}$$

et l'étude de la stabilité de (53) peut être faite à partir de la matrice $\tilde{L}$ (voir lemma II-1.).

Si maintenant on considère l'approche des sommes pondérées avec la fonction de Lyapunov (46) nous pouvons trouver la matrice L_ν sous la forme

$$L_\nu = \mathrm{diag}(\theta_i)\left\{-\mathrm{diag}\left[\frac{1}{2}\frac{\lambda_{min}(Q_i)}{\lambda_{max}(P_i)}\right]+H\right\} = \mathrm{daig}(\theta_i)\tilde{L}_\nu \tag{63}$$

pour comparer les deux approches faisons

$$\Delta\tilde{L} = \tilde{L} - \tilde{L}_\nu = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{2}\frac{\lambda_{min}(Q_i)}{\lambda_{max}(P_i)} - \frac{\alpha_i}{\theta_i}\right\} \tag{64}$$

mais étant donné que $\theta_i \geqslant 1$ et $2\alpha_i \geqslant \lambda_{min}(Q_i)/\lambda_{max}(P_i)$ alors la matrice $\Delta\tilde{L}$ n'a pas nécessairement un signe défini et donc nous ne pouvons pas dire laquelle des deux approches sera la meilleure.

Nous pouvons remarquer que les deux approches vont dépendre du choix de la matrice Q_i dans (54). Dans le prochain chapitre nous allons traiter du problème du choix des matrices Q_i permettant d'obtenir les conditions de stabilité les moins restrictives possible. Le problème du choix de la matrice Q_i peut s'exprimer comme suit (voir Théorème I-7.).

<u>Problème 1</u>. concernant la matrice L : Trouver les matrices Q_i^* i=1...N telles que

$$L(Q_i^*)y \leqslant L(Q_i)y \qquad \forall y > 0 \tag{65}$$

ce qui se réduit à

$$\max_{D_i} \alpha_i \theta_i (P_i)^{-1} \quad \text{sous} \quad A_i'P_i+P_iA_i+D_i'D_i = 0 \tag{66}$$

<u>Problème 2</u>. concernant la matrice L_ν : Trouver les matrices Q_i^* i=1...N telles que

$$L_\nu(Q_i^*)y \leqslant L_\nu(Q_i)y \qquad \forall y > 0 \tag{67}$$

ce qui se réduit à

$$\max_{D_i} \frac{1}{2}\frac{\lambda_{min}(D_i'D_i)}{\lambda_{max}(P_i)} \quad \text{sous} \quad A_i'P_i+P_iA_i+D_i'D_i = 0 \tag{68}$$

Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il est possible de proposer une solution pour le problème 1 alors que le problème 2 "résiste" à notre avis à toute tentative de solution.

I-3. La Commande Decentralisee

Nous allons dans ce paragraphe discuter de quelques aspects qui concernent la commande des systèmes dynamiques interconnectés.

La structure de la commande à implanter sur de tels systèmes doit bien sûr tenir compte de contraintes induites par la structure même du système : au niveau de chaque sous système on dispose d'un certain nombre d'actionneurs (points de commande) et de capteurs (points de mesure). Les performances obtenues vont bien sûr dépendre de la structure des échanges (informations) que l'on va se permettre entre ces points de commande et ces points de mesure. Plus cette structure sera riche et complète plus les performances du système seront bonnes. Toutefois il est raisonable de penser, surtout dans le cas de systèmes distribués géographiquement, que les échanges entre sous-systèmes seront affectés d'un coût opération. Le choix d'une structure de commande peut dans ce cas être envisagé comme un compromis fait pour obtenir un bon comportement du système avec une structure de la commande qui ne soit pas excessivement chère.

Il n'est pas a priori sûr que la solution de ce problème se trouve aux extrêmes, c'est-à-dire, soit la solution complètement centralisée où tous les organes de commande disposent de toute l'information collectée sur le système global, soit la solution complètement décentralisée où pour chaque sous-système les commandes locales sont élaborées simplement à partir des mesures faites sur le sous système correspondant.

Nous discuterons par la suite de la formulation mathématique du problème qui consiste à chercher la structure de commande optimisant un critère dépendant non seulement de la performance du système mais aussi du coût de la structure d'infor-

mation nécessaire pour l'obtention de cette performance. La solution de ce problème nous semble encore ouverte ; un des premiers papiers à mentionner ce problème est celui de Athans [7] qui établit une revue des problèmes ouverts dans le domaine de la commande optimale des grands systèmes (voir également Sandell et al [56]).

I-3-1. LE COUT DE L'INFORMATION DANS LA COMMANDE DES SYSTEMES INTERCONNECTES

Considérons un système dynamique S ainsi noté

$$S = S(x,y,u) \tag{69}$$

où $x \varepsilon R^n$ est le vecteur des variables d'état, $y \varepsilon R^r$ le vecteur des variables de sortie (observations) et $u \varepsilon R^m$ le vecteur des variables de commande. Supposons qu'on ait la décomposition suivante :

$$S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(x,y_i,u_i) \tag{70}$$

avec $y_i \varepsilon R^{r_i}$; $u_i \varepsilon R^{m_i}$ où $r = \sum_{i=1}^{N} r_i$ et $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$. Pour mesurer la performance de (70) considérons le critère (fonction objectif) que, pour simplifier nous allons prendre additivement séparable

$$\min J(x,u) = \min \sum_{i=1}^{N} J_i(x_i,u_i) \tag{71}$$

Soit I_i un sous ensemble de $I = \{1,2,\ldots,N\}$. La commande de chaque sous-système dépend d'un ensemble de mesures faites sur le système S, c'est-à-dire

$$u_i = \gamma_i(Y_{I_i}) \quad ; \quad Y_{I_i} = \{y_j / j \varepsilon I_i\} \tag{72}$$

Finalement, il est raisonnable de penser que chaque commande donnée par (72) a un coût d'implémentation qui varie selon l'ensemble de mesure Y_{I_i} car cet ensemble définitles liaison à faire pour le transfert des informations nécessaires. Le critère d'optimisation se transforme en :

$$\min \sum_{i=1}^{N} \left\{ J_i(x_i, \gamma_i(Y_{I_i})) + C_i(I_i) \right\}$$
$$\text{sous} \quad S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(x, y_i, \gamma_i(Y_{I_i})) \tag{73}$$

Vu de cette manière, la solution de (73) est très complexe, une première simplification peut être faite en considérant $\mu_i \in \Lambda_i \subset R^N$ un vecteur de variables booléennes (0-1) de telle façon que

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \in I_i \\ 0 & \text{si} \quad j \notin I_i \end{cases} \qquad i=1\ldots N \tag{74}$$

c'est-à-dire que μ_{ij} sera égal à "1" si la commande (actionneur) du sous-système (i) possède l'information de la mesure faite au niveau du sous-système j (capteur) et "0" dans le cas contraire. L'ensemble Λ_i représente des contraintes structurelles par exemple $\mu_{ii} = 1 \quad i = 1\ldots N$ et/ou $\sum_{j=1}^{N} \mu_{ij} \leqslant C_{p_i} \leqslant N$ (contrainte de capacité). Alors le problème (73) peut être reécrit sous la forme :

$$\min_{\mu_i \in \Lambda_i} \sum_{i=1}^{N} \left\{ J_i(x_i, u_i) + C_i(\mu_i) \right\}$$
$$S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(x, y_i, u_i) \tag{75}$$
$$u_i = \gamma_i(Y_{\mu_i}) \qquad Y_{\mu_i} = \left\{ y_j / \mu_{ij} = 1 \quad j=1\ldots N \right\}$$

Notons que la résolution de (75) est encore difficile car nous devons chercher N fonctions γ_i (ou paramètres) et N vecteurs de variables 0-1 de façon à minimiser un critère donné.

Pour mesurer cette difficulté considérons le cas le plus simple où S représente un système linéaire, J_i un critère quadratique et γ_i des fonctions linéaires. Dans ce cas nous pouvons écrire (75) sous la forme

$$\min_{k_{ij}\ ;\ \mu_i \varepsilon \Lambda_i} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_0^{\infty} (x_i' Q_i x_i + u_i' R_i u_i) dt + C_i(\mu_i) \right\}$$

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j \qquad x_i(0) = x_{i0} \qquad (76)$$

$$y_i = C_i x_i$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij}\ k_{ij}\ y_j$$

finalement, en principe, nous pouvons penser que la solution de (76) peut être faite par la décomposition en deux problèmes :

<u>Problème Maître</u> : Choix des vecteurs $\mu_i \varepsilon \Lambda_i$ $i=1...N$

<u>Sous-Problème</u> : Avec les vecteurs $\mu_i \varepsilon \Lambda_i$ résoudre

$$\min_{k \varepsilon \Omega(\mu)} \int_0^{\infty} \mathrm{Tr}\ \{(Q+C'k'RkC)X(t)\}\ dt$$

$$\dot{X}(t) = (A-BkC)X(t) + X(t)(A-BkC)' \qquad (77)$$

$$X(0) = X_0$$

où $\Omega(\mu) = \left\{ k/k_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad \mu_{ij} = 0 \right\}$

<u>Remarques</u> :

1. Dans notre mémoire nous allons proposer une méthode numérique pour la résolution des sous-problèmes (77) c'est-à-dire pour $\mu_i \varepsilon \Lambda_i$ fixé. La solution du problème global (76) passe donc par la définition d'une méthode pour la tâche du problème maître. La formalisation du problème paraît parfaitement adaptée pour l'application de la méthode de décomposition de Benders généralisée. Néanmoins l'application de cette méthode nécessite que les sous-problèmes (77) soient convexes pour tout choix des variables en-

tières $\mu_i \in \Lambda_i$, propriété que nous n'avons pu mettre en évidence.

2. Pour le problème (76) on pourrait songer à résoudre les problèmes (77) pour toutes combinaisons possibles des μ_i et choisir ensuite la solution fournissant le minimum du critère (76). Ceci n'est guère envisageable que dans le cas où μ_i est de dimension relativement réduite.

Finalement, il est évident que pour $\mu_{ij} = 1 \ \forall i,j = 1..N$ (77) corresponde à la solution centralisée du problème (76). Si de plus $C = I$ (matrice identité) et $X_0 > 0$ alors la solution passe par la résolution de l'équation de Riccati :

$$A'P+PA-PBR^{-1}B'P+Q = 0 \quad ; \quad k = R^{-1}B'P \tag{78}$$

qui a une solution $P > 0$ unique si (A,D) ; $Q=D'D$ est une paire observable.

D'autre part, si $\mu_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ et $\mu_{ii} = 1$ alors (77) correspondra à la solution complètement décentralisée de (76) qui sera étudiée en détail dans le chapitre III.

I-4. Conclusion

Nous avons fait dans ce chapitre une introduction pour les deux chapitres qui vont suivre , afin d'amener et justifier les études que nous avons entreprises :

- sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov vectorielles pour l'analyse de stabilité et le problème de stabilisation décentralisée des sytèmes interconnectés
- sur les aspects décentralisation (commande et estimation) des systèmes linéaires interconnectés.

Les points originaux de ce chapitre nous semblent résider en une discution comparative de l'approche "fonctions de Lyapunov vectorielles" et "somme pondérée" dans le cadre des systèmes invariants. Cette discution nous conduit à dire qu'en général il n'est guère possible de dire a priori laquelle des deux approches est la plus performante et ceci diffère de ce qui est normalement admis.

Notons aussi la présentation d'un problème d'optimisation "mixte" pour prendre en compte, au niveau de la synthèse de la commande, le coût de la structure d'information nécessaire à son élaboration.

CHAPITRE II

DECENTRALISATION : STABILITE

II-1. INTRODUCTION

Depuis quelques années et plus particulièrement depuis la parution de l'article de Bailey |8|, on a pu noter un nombre impressionnant de travaux relatifs à l'analyse des propriétés de stabilité des systèmes interconnectés. Les livres de Michel |52| et Siljak |58| fournissent des listes détaillées de références bibliographiques.

L'idée fondamentale soutenue dans chacun de ces travaux consiste à tirer partie de la structure particulière des systèmes qui apparaissent comme une collection d'unités (sous-systèmes) liées entre elles au travers des termes de couplage (interconnexions). L'étape première consiste en la détermination de fonctions de Lyapunov scalaires pour chacun des sous-systèmes considérés alors complètement découplés. Pour la deuxième étape deux voies sont possibles : soit la détermination d'une fonction de Lyapunov scalaire pour le système global (ex : somme pondérée des fonctions choisies pour chaque sous-système) ; soit, par utilisation du principe de comparaison sur des inégalités différentielles vectorielles, la détermination d'un vrai système appele système de comparaison. En général, la dimension de ce système est egale au nombre de sous-systèmes (cf. chapitre I).

Dans ce chapitre nous allons essentiellement considérer la deuxième approche, en notant au préalable que, dans le domaine des systèmes interconnectés linéaires qui nous intéressent ici, il est possible de montrer qu'elle fournit au moins d'aussi bons résultats que la première (Bernussou |12|).

Le chapitre est composé de deux paragraphes principaux. Dans le premier nous traitons, dans le cas de systèmes linéaires interconnectés, de la construction du système de comparaison à partir du choix des fonctions de Lyapunov scalaires associées à chaque sous-système. Nous définissons un problème d'optimisation paramétrique qui nous permet l'obtention d'un système de comparaison que nous qualifierons d'"optimal", en ce sens qu'il fournit des conditions de stabilité les moins restrictives possibles.

Ce problème présente la particularité importante de définir des calculs de type décentralisé, c'est-à-dire, à effectuer au niveau de chacun des sous-systèmes. Une étude critique sera faite des résultats obtenus, mettant en évidence certaines "lacunes" de l'approche fonctions de Lyapunov vectorielles. Enfin, nous nous intéresserons au problème de stabilisation par le biais d'une structure de régulation décentralisée.

Dans le deuxième paragraphe, nous traiterons du cas des perturbations structurelles, perturbations qui peuvent être étendues soit comme des variations dans les termes de couplage (pannes de processus) soit comme des incidents au niveau de la structure (multi-niveaux) de commande. Le problème sera celui de la synthèse, au moyen de fonctions de Lyapunov vectorielles, de commandes assurant la stabilité du système dans toutes les éventualités.

II-2. SYSTEME DE COMPARAISON "OPTIMAL"

Comme nous l'avons dit en introduction, le qualificatif optimal est utilisé pour mettre en évidence le fait que le système de comparaison obtenu est parmi l'ensemble des systèmes de comparaison possibles celui qui fournit les conditions de stabilité les moins restrictives possibles.

Comme nous traitons le cas de systèmes interconnectés linéaires, le choix des fonctions de Lyapunov scalaires pour chaque sous-système se fera dans la classe particulière des fonctions quadratiques. En effet, c'est à partir de fonctions quadratiques que le lemme de Lyapunov fournit des conditions nécessaires et suffisantes.

II-2-1. QUELQUES DEFINITIONS

Soit (S) un système linéaire invariant décrit par

$$(S) \qquad \dot{x} = Ax \quad ; \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

où $x \varepsilon R^n$. Nous faisons l'hypothèse que (S) présente une structure particulière (système interconnecté) permettant de mettre en évidence sous-systèmes et couplages de telle sorte que (1) s'écrive également :

$$(S_i) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_{ij} x_j & i=1 \ldots N \\ x_i(0) = x_{i0} \end{cases} \qquad (2)$$

où $x_i \varepsilon R^{n_i}$, $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$. Nous dénoterons par $\Lambda(A_i)$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice A_i et par $(\hat{S}_i)$ le ième sous-système isolé, obtenu à partir de S_i en le supposant totalement découplé du reste du système : $A_{ij} = 0$, $j = 1 \ldots N$, $i \neq j$.

Le sous-système $(\hat{S}_i)$ est asymptotiquement stable si et seulement si $\Lambda(A_i) \subset C^-$.

Nous appelons σ_i degré de stabilité de $(\hat{S}_i)$ le nombre reel positif défini par

$$\sigma_i = \min_{1 \leqslant j \leqslant n_i} \left\{ |Re(\lambda_j)| \quad ; \forall \lambda_j \varepsilon \Lambda(A_i) \right\} \qquad (3)$$

Dans la suite du chapitre nous allons considérer que les sous-systèmes isolés $(\hat{S}_i)$, $i = 1 \ldots N$ sont asymptotiquement stables avec un degré de stabilité σ_i supposé connu à l'avance.

Bien que le développement soit fait dans le cas des systèmes linéaires, la généralisation aux systèmes présentant des termes de couplage non linéaires est triviale, à condition toutefois que ces termes satisfassent en norme les inégalités présentées au chapitre I qui permettent la détermination du système de comparaison associé.

II-2-2 - SYSTEME DE COMPARAISON ET CONDITION DE STABILITE

A chaque sous-système isolé $(\hat{S}_i)$ nous associons une fonction de Lyapunov du type (Geromel et Bernussou |31|)

$$v_i(x_i) = \left\{ \|P_i^{-1}\| \; x_i' P_i x_i \right\}^{1/2} \tag{4}$$

où $\|.\|$ est la norme spectrale de (.). Ici $\|P_i\| = \lambda_{max}(P_i)$ car P_i est la matrice symetrique solution de l'équation algébrique de Lyapunov.

$$A_i' P_i + P_i A_i + D_i' D_i = 0 \tag{5}$$

et dans l'hypothèse où la paire (A_i, D_i) est observable, P_i est définie positive $(P_i > 0)$ (Anderson et Moore |1|).

Le choix de $v_i(x_i)$ sera justifié par la suite où il sera montré que cette forme permet d'obtenir le système de comparaison sous une structure directement exploitable pour la définition du problème d'optimisation conduisant à la détermination du système de comparaison optimal.

La dérivée temporelle de $v_i(x_i)$ le long des trajectoires de $(\hat{S}_i)$ donne

$$\dot{v}_{i(\hat{S}_i)} = -\frac{1}{2} \; \frac{x_i' D_i' D_i x_i}{x_i' P_i x_i} v_i(x_i) \tag{6}$$

et pour (S_i) il vient

$$\dot{v}_{i(S_i)} = \dot{v}_{i(\hat{S}_i)} + (\nabla v_i)' \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_{ij} x_j \tag{7}$$

Définissant

$$2\alpha_i = \min_{x_i} \frac{x_i' D_i' D_i x_i}{x_i' P_i x_i} \quad ; \; h_{ij} = \|A_{ij}\| \tag{8}$$

à partir de (7) nous obtenons les inégalités différentielles :

$$\dot{v}_i \leqslant - \alpha_i v_i + \|\nabla v_i\| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} h_{ij} \|x_j\| \tag{9}$$

De plus, la fonction $v_i(.)$ en (4) satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x_i\| \leqslant v_i(x_i) \leqslant \theta_i(P_i) \|x_i\| \\ \|\nabla v_i\| \leqslant \theta_i(P_i) \end{array} \right. \quad \forall x_i \in R^{n_i} \tag{10}$$

où $\theta_i^2(P_i) = \|P_i\| \|P_i^{-1}\|$ est le "condition number" de la matrice P_i (Aoki |2|). Finalement nous obtenons

$$\dot{v}_i \leqslant - \alpha_i v_i + \theta_i(P_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} h_{ij} v_j \qquad i=1...N \tag{11}$$

soit, sous forme matricielle avec $V = [v_1 ... v_N]'$

$$\dot{V} \leqslant LV \tag{12}$$

où $L \in R^{N\times N}$ est donnée par

$$L = \left\{ l_{ij} = - \alpha_i \delta_{ij} + \theta_i(P_i) h_{ij} \qquad i,j=1...N \right\} \tag{13}$$

et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

L est une matrice à éléments hors-diagonaux non négatifs ($h_{ij} \geqslant 0$) qui satisfait donc les conditions de Wazewski (cf. Chap. I). Comme nous l'avons vu au chapitre antérieur, la stabilité de (S) peut se déduire de l'étude de la stabilité du système de comparaison

$$\dot{W} = L\, W \tag{14}$$

car $\forall\, 0 \leqslant V(0) \leqslant W(0)$ implique $0 \leqslant V(t) \leqslant W(t)$ pour $\forall t \geqslant 0$.

Il existe un grand nombre de conditions de stabilité équivalentes pour des matrices telles que L (Fiedler et Ptak |27|) parmi lesquelles nous nous bornerons à citer celle dite de

Sevastyanov-Kotelyanski :

" L est stable si et seulement si $(-1)^k \Delta_k(L) \geqslant 0$; $k=1...N$, $\Delta_k(L)$ étant le mineur principal d'ordre k de la matrice L"

II-2-3. LE SYSTEME DE COMPARAISON "OPTIMAL"

Ecrivons L définie en (13) sous la forme

$$L = \{-S + \Theta H\} = \Theta\{-\Theta^{-1}S + H\} = \Theta\tilde{L} \qquad (15)$$

où $S = \mathrm{diag}\,(\alpha_1,...\alpha_N)$; $\Theta = \mathrm{diag}\,(\theta_1,...,\theta_N)$ et $H \in R^{NxN}$ est la matrice d'interconnexion définie par

$$H = \left\{h_{ij}/h_{ij} = \|A_{ij}\| \quad ; \quad i,j = 1...N\right\} \qquad (16)$$

Lemme II-1. L est asymptotiquement stable si et seulement si $\tilde{L}$ est asymptotiquement stable.

Démonstration. La démonstration est immédiate à partir des conditions de Sevastyanov-Kotelyanski et notant que

$$\Delta_k(L) = \prod_{j=1}^{k} \theta_j(P_j) . \Delta_k(\tilde{L}) \qquad (17)$$

Or, la matrice $\tilde{L}$ représente la propriété intéressante que tous les termes variables, c'est-à-dire dépendant du choix des fonctions de Lyapunov v_i, se trouvent isolés sur la diagonale principale

$$\tilde{L} = -\,\mathrm{diag}\left\{\alpha_1/\theta_1,...,\alpha_N/\theta_N\right\} + H \qquad (18)$$

Le système de comparaison optimal dans le sens de la restriction des contraintes imposées par les conditions de stabilité sera bien sûr celui pour lequel la matrice $\tilde{L}$ présente des termes diagonaux le plus négatifs possible. Donc le problème de la détermination du système de comparaison optimal apparaît comme pouvant être résolu par la solution de N problèmes d'optimisation parametrique suivants :

$$\begin{cases} \max\limits_{D_i} \quad \alpha_i \, \theta_i (P_i)^{-1} & \\ & i=1\ldots N \\ \text{sous} \quad A_i' P_i + P_i A_i + D_i' D_i = 0 & \end{cases} \tag{19}$$

Malheureusement, la solution de (19) ne peut être directement obtenue compte tenu de la non différentiabilité de la fonction objectif $\alpha_i \, \theta_i^{-1}$ par rapport aux éléments de D_i. Nous allons donc par la suite transformer le problème initial (19).

Considérons tout d'abord le problème

$$\begin{cases} \max\limits_{0 \leqslant \beta_i \leqslant \sigma_i ; D_i} \quad \beta_i \, \theta_i (P_i)^{-1} \\ \text{sous} \quad F_i' P_i + P_i F_i + D_i' D_i = 0 \end{cases} \tag{20}$$

où $F_i = A_i + \beta_i I$ et σ_i est le degré de stabilité de $(\hat{S}_i)$.

<u>THEOREME II-1</u>. Les problèmes (19) et (20) sont équivalents dans le sens que les optima de leurs fonctions objectif sont égaux.

<u>Démonstration</u>. Soient (α_i^o, θ_i^o) et $(\tilde{\beta}_i, \tilde{\theta}_i)$ les valeurs obtenues respectivement à l'optimum des problèmes (19) et (20). Démontrons initialement que $\tilde{\beta}_i / \tilde{\theta}_i \leqslant \alpha_i^o / \theta_i^o$. La contrainte du problème (20) s'écrit

$$A_i' P_i + P_i A_i + (D_i' D_i + 2 \tilde{\beta}_i P_i) = 0 \tag{21}$$

et avec la définition du paramètres α_i il vient

$$\alpha_i = \min_{x_i} \frac{1}{2} \frac{x_i' (D_i' D_i + 2 \tilde{\beta}_i P_i) x_i}{x_i' P_i x_i} = \tilde{\beta}_i + \min_{x_i} \frac{x_i' D_i' D_i x_i}{x_i' P_i x_i} \tag{22}$$

et donc

$$\tilde{\beta}_i / \tilde{\theta}_i \leqslant \alpha_i / \tilde{\theta}_i \leqslant \alpha_i^o / \theta_i^o \tag{23}$$

Montrons maintenant que $\alpha_i^o / \theta_i^o \leqslant \tilde{\beta}_i / \tilde{\theta}_i$. La contrainte en (19) peut être écrite

$$(A_i + \alpha_i^o I)' P_i + P_i (A_i + \alpha_i^o I) + (D_i' D_i - 2 \alpha_i^o P_i) = 0 \tag{24}$$

Or, par définition de α_i^o ; $(D_i'D_i - 2\alpha_i^o P_i) \geqslant 0$. Il existe donc une matrice $\bar{D}_i$ telle que $\bar{D}_i'\bar{D}_i = D_i'D_i - 2\alpha_i^o P_i$. Cela signifie qu'à l'optimum de (19), il existe un β_i et $\bar{D}_i$ solutions admissibles pour le problème (20) et donc

$$\alpha_i^o / \theta_i^o = \beta_i / \theta_i^o \leqslant \tilde{\beta}_i / \tilde{\theta}_i \tag{25}$$

De (23) et (25) il vient $\alpha_i^o / \theta_i^o = \tilde{\beta}_i / \tilde{\theta}_i \quad i=1...N.$ ∎

Si le problème (20) paraît plus abordable que (19) il n'en reste pas moins que l'écueil principal de la non différentiabilité par rapport à D_i subsiste. L'étape ultérieure va consister en la définition d'un problème similaire qui fait tomber cette difficulté.

La définition du problème passe par la mise en évidence de certaines propriétés de $\theta_i(P_i)$. Tout d'abord il est aisé de voir que $\forall P \varepsilon R^{nxn}$ et $P > 0$ (Géromel |28|)

$$1 \leqslant \frac{1}{n^2} \operatorname{Tr}(P)\operatorname{Tr}(P^{-1}) \leqslant \theta(P)^2 \leqslant \operatorname{Tr}(P)\operatorname{Tr}(P^{-1}) \tag{26}$$

et de plus :

<u>Lemme II-2</u>. Soit l'ensemble $P_o = \{ P \varepsilon R^{nxn} / P > 0 \}$ alors

$$1 = \min_{P \varepsilon P_o} \theta^2(P) = \frac{1}{n^2} \min_{P \varepsilon P_o} \operatorname{Tr}(P)\operatorname{Tr}(P^{-1}) \tag{27}$$

et P^* est une solution optimale de (27) si et seulement si $P^* = \lambda^*. I.$

<u>Démonstration</u> : La première égalité est évidente, pour la seconde calculons $\nabla_\lambda \operatorname{Tr}(P)\operatorname{Tr}(P^{-1}) = [\mu(\lambda_1) \ldots \mu(\lambda_n)]'$:

$$\mu\{\lambda_i(P)\} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i(P)} \left\{ \operatorname{Tr}(P)\operatorname{Tr}(P^{-1}) \right\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j(P)} \left\{ 1 - \frac{\lambda_j^2(P)}{\lambda_i^2(P)} \right\} \tag{28}$$

à l'optimum $\mu\{\lambda_i(P)\} = 0$, $\forall i = 1...n$ donc $\mu\{\max_i \lambda_i(P)\} = \mu\{\min_i \lambda_i(P)\} = 0$. Ceci est réalisé si et seulement si $\lambda_i(P) = \lambda^* =$ cte, c'est-à-dire $P^* = \lambda^*. I.$ ∎

A partir des relations (26) et du lemme II-2. nous proposons le problème :

$$\begin{cases} \max\limits_{0 \leqslant \beta_i \leqslant \sigma_i} \quad \beta_i \bullet \theta_i (P_i)^{-1} \\ P_i \text{ donné par } \min\limits_{D_i} \left\{ J(D_i) = Tr(P_i) Tr(P_i^{-1}) / F_i' P_i + P_i F_i + D_i' D_i = 0 \right\} \end{cases} \tag{29}$$

Dans le paragraphe suivant nous allons proposer une méthode de calcul pour la solution de (29) et nous discuterons de l'équivalence entre (29) d'une part et (19) ou (20) d'autre part. Pour des raisons de simplicité dans l'écriture nous nous affranchissons de préciser l'indice (i) sachant bien sûr que pour chaqie sous système il faudra traiter des problèmes identiques.

II-2-4. METHODE NUMERIQUE POUR L'OBTENTION DU SYSTEME DE COMPARAISON OPTIMAL

La solution du problème (29) peut se décomposer en la maximisation par rapport à β et la minimisation par rapport à D , c'est de cette dernière que nous allons nous intéresser en premier. Soit donc à résoudre :

$$\begin{cases} \min\limits_{D} J(D) = Tr(P) Tr(P^{-1}) \\ \text{sous} \quad F'P + PF + D'D = 0 \end{cases} \tag{30}$$

Les hypothèses sur $\beta (\beta \leqslant \sigma)$ font que $\Lambda(F) \subset C^-$, la paire (A,D) étant observable, la solution P, définie positive, de l'équation algébrique de Lyapunov s'écrit

$$P = \int_0^\infty e^{F't} D'D \, e^{Ft} \, dt \tag{31}$$

Par substitution de (31) dans (30), on obtient une fonction objectif qui s'écrit de façon explicite par rapport à D.

Néanmoins sous une telle forme le calcul de $dJ(D)/dD$ (matrice gradient) est relativement compliqué (Géromel [29]) et il est préférable d'adopter un calcul indirect consistant à adopter une formulation lagrangienne (dualisation par rapport aux contraintes). Le lemme suivant fournit des résultats applicables au cas de la dérivation matricielle de fonctions composées (fonction de fonction) de matrices (Bernussou et Géromel [13]).

Lemme II-3. La matrice gradient de la fonction composée $f(X,G(X))$ (f : fonction scalaire) est donnée par

$$\frac{d}{dX} f(X,G(X)) = \frac{\partial}{\partial X} L(X,Y^*,\Lambda^*) \tag{32}$$

où $L(X,Y,\Lambda) = f(X,Y) + Tr\left\{\Lambda'(G(X)-Y)\right\}$ et Y^*, Λ^* étant les valeurs satisfaisant les conditions de stationnarité

$$\frac{\partial}{\partial Y} L(X,Y,\Lambda) = \frac{\partial}{\partial \Lambda} L(X,Y,\Lambda) = 0 \tag{33}$$

Démonstration : Le développement en série de $f(X+\delta X,\ G(X)+\delta G(X))$ limité aux termes du premier ordre fournit

$$\delta f = Tr\left\{\frac{\partial f'}{\partial X}\ \delta X\right\} + Tr\left\{\frac{\partial f'}{\partial G}\ \delta G\right\} \tag{34}$$

où $\delta G(X) = \left\{\delta G(X)_{ij}\right\}$ avec

$$\delta G(X)_{ij} = Tr\left\{\left(\frac{d\ G(X)_{ij}}{dX}\right)'.\ \delta X\right\} \tag{35}$$

finalement, on peut écrire

$$\delta f = Tr\left\{\frac{\partial f'}{\partial X}.\delta X + \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial G}\right)_{ij} \left(\frac{d\ G(X)_{ij}}{dX}\right)'\ \delta X\right\} \tag{36}$$

et par utilisation directe du lemme de dérivation matricielle (cf. chapitre III) nous obtenons

$$\frac{d\ f(X,G(X))}{dX} = \frac{\partial f}{\partial X} + \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial G}\right)_{ij} \cdot \frac{d\ G(X)_{ij}}{dX} \tag{37}$$

Enfin, posant

$$\Lambda^* = \frac{\partial}{\partial Y} f(X,Y) \Big|_{Y^* = G(X)} = \frac{\partial f}{\partial G} \tag{39}$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} f(X,G(X)) &= \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \operatorname{Tr} \left\{ \Lambda^{*\prime} G(X) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial X} L(X,Y^*,\Lambda^*) \end{aligned} \tag{40}$$

ce qui démontre le lemme. ∎

Cette manière d'aborder la dérivation matricielle d'une fonction composée est, à notre avis, très intéressante car elle simplifie notablement les calculs. Nous illustrerons ce fait dans ce qui suit et principalement au chapitre III où nous allons généraliser le lemme précédent au cas de contraintes dynamiques.

<u>THEOREME II-2.</u> La matrice gradient de la fonction $J(D) = \operatorname{Tr}(P)\operatorname{Tr}(P^{-1})$ où P est l'unique solution, définie positive, de l'équation linéaire $F'P + PF + D'D = 0$, est donnée par

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dD} J(D) = 2D\Lambda(D) \\ F\Lambda(D) + \Lambda(D)F' + \psi(D) = 0 \\ \psi(D) = \operatorname{Tr}\left\{ P(D)^{-1} \right\} I - \operatorname{Tr}\left\{ P(D) \right\} P(D)^{-2} \end{cases} \tag{41}$$

<u>DEMONSTRATION</u> : Par application directe du Lemme II-3. et la fonction lagrangienne

$$L(D, P, \Lambda) = \operatorname{Tr}(P)\operatorname{Tr}(P^{-1}) + \operatorname{Tr}\left\{ \Lambda'(F'P+PF+D'D) \right\} \tag{42}$$

il vient

$$\frac{d}{dD} J(D) = \frac{\partial}{\partial D} L(D,P,\Lambda) = 2D\Lambda \tag{43}$$

avec les conditions de stationnarité de $L(D,P,\Lambda)$

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda}(D,P,\Lambda) = F'P + PF + D'D = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial P}(D,P,\Lambda) = F\Lambda + \Lambda F' + \frac{d}{dP}\,\mathrm{Tr}(P)\mathrm{Tr}(P^{-1}) \tag{44}$$

or

$$\frac{d}{dP}\,\mathrm{Tr}(P)\mathrm{Tr}(P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1})I - \mathrm{Tr}(P)P^{-2} = \psi(D) \tag{45}$$

et le théorème est prouvé. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de proposer un algorithme pour la résolution du problème (30), qui est une part importante du problème original (29) pour la définition du système de comparaison optimal.

Supposons donnée une condition initiale pour la matrice D_1 tel que Rang(D) = n (I par exemple) alors l'algorithme présente les pas suivants (Bernussou et Géromel [15]).

<u>Pas 1</u> : Résolution de l'équation de Lyapunov

$$F'P_k + P_kF + D_k'D_k = 0$$

<u>Pas 2</u> : Obtention de la matrice gradient par

- calcul de $\psi(D_k) = \mathrm{Tr}(P_k^{-1})I - \mathrm{Tr}(P_k)P_k^{-2}$
- résolution de $F\Lambda_k + \Lambda_kF' + \psi(D_k) = 0$
- détermination de la matrice gradient

$$\left.\frac{dJ(D)}{dD}\right|_{D=D_k} = 2\,D_k\Lambda_k = G_k$$

- test : si $\|G_k\| \approx 0$ stop, sinon aller au pas 3

<u>Pas 3</u> : Trouver un paramètre $\varepsilon_k > 0$ tel que $J(D_k - \varepsilon_kG_k) < J(D_k)$

<u>Pas 4</u> : Faire $D_{k+1} = D_k - \varepsilon_kG_k$, aller au pas 1.

Compte tenu de la fonction objectif J(D) il est aisé de voir que l'algorithme précédent génère une suite de matrices $P_1, P_2, \ldots$ strictement définies positives et donc inversibles, ce qui est nécessaire pour le pas 2. En effet, si $\lambda_i(P) \longrightarrow 0^+$ alors $J(D) \longrightarrow +\infty$.

Remarque : La méthode précédente permet la détermination d'un minimum local de la fonction objectif $J(D)$. De plus, il n'est pas evident qu'à l'optimum du problème (30) on obtienne toujours une diminution de $\theta(P)$, néanmoins pour les essais numériques nombreux effectués il en était toujours ainsi. Le lemme suivant nous fournit une base permettant de discuter des propriétés de la solution de (30).

Lemme II-4. Soient D^o et P^o les valeurs obtenues à la convergence de l'algorithme précédent. Soit $x_i \in R^n$ un vecteur propre de P^o associe à la valeur propre $\lambda_i(P^o)$. Alors si $x_i \in R(D^{o\prime})$, $\mu\{\lambda_i(P^o)\}=0$, où $R(.)$ représente l'espace image de $(.)$.

DEMONSTRATION : A l'optimum de (30) on a

$$\frac{dJ(D)}{dD} = 2\, D^o \Lambda^o = 0 \tag{46}$$

et donc $D^o \psi(D^o) D^{o\prime} = 0$. Si $x_i \in R(D^{o\prime})$ alors $\exists\, y_i$ tel que $x_i = D^{o\prime} y_i$ et donc

$$y_i' D^o \psi(D^o) D^{o\prime} y_i = x_i' \psi(D^o) x_i = 0 \tag{47}$$

or

$$x_i' \psi(D^o) x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j(P^o)} \left\{ 1 - \frac{\lambda_j^2(P^o)}{\lambda_i^2(P^o)} \right\} \|x_i\|^2 =$$

$$= \mu\{\lambda_i(P^o)\} \|x_i\|^2 = 0 \tag{48}$$

ce qui implique $\mu\{\lambda_i(P^o)\} = 0$. ∎

Si D^o est de rang plein rang $(D^o) = n$, alors $\mu\{\lambda_i(P^o)\} = 0$ $i=1\ldots n$ ce qui implique $P^o = \lambda^o I$ et également $\theta(P^o) = 1$. Or, $P^o = \lambda^o I$ n'est solution de l'équation algébrique de Lyapunov que si et seulement si $F^s = (F+F')/2 \leqslant 0$, ce qui est bien sûr un cas très particulier.

Dans le cas où F^s est de signe indéfini, le lemme précédent permet donc d'affirmer que D^o n'est pas de rang plein, mais de rang $r < n$ et il existera donc au moins un vecteur propre de P^o qui n'appartient pas à $R(D^{o\prime})$.

Exemple II-1. Le problème (30) a été résolu avec

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Pour une condition initiale $D_1 = I$ et un test à $\|G_k\| \leqslant 10^{-4}$, la convergence de l'algorithme a été obtenue au bout de 25 itérations avec

$$D^o = \begin{bmatrix} 0.08 & -0.07 & 0.18 & 0.05 \\ -0.03 & 0.59 & 0.15 & 0.55 \\ 0.26 & -0.01 & 0.65 & 0.38 \\ 0.16 & 0.96 & 0.76 & 1.20 \end{bmatrix}$$

Comme F^s est une matrice de signe indéfini, il n'existe pas de matrice D telle que $\theta(P) = 1$ et donc, rang $(D^o) < 4$. La figure II-1. nous montre comme évoluent, par itération, les termes présents dans l'inégalité (26).

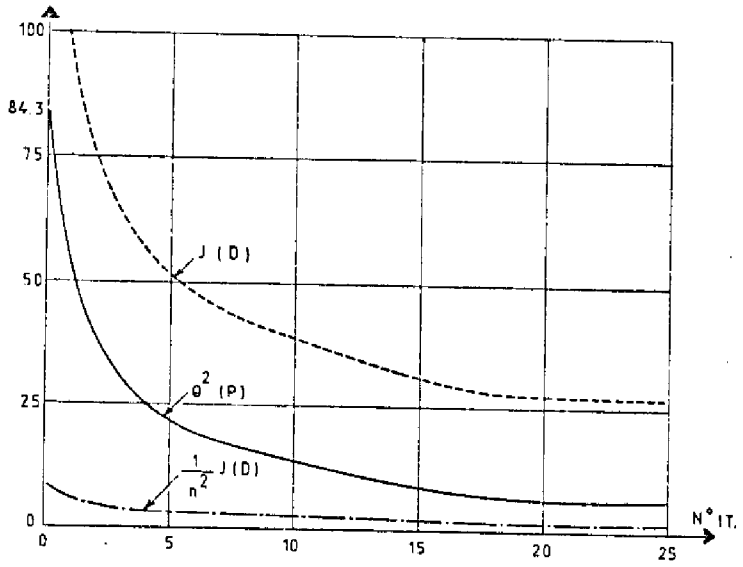


Figure II-1. Evolution de $\theta(P)^2$ et $J(D)$

De plus, pour $D_1 = I$ nous avons $\theta(P_1)^2 \approx 84,3$ et pour $D_{25} = D^o$, $\theta(P_{25})^2 \approx 6.5$ ce qui constitue donc une réduction certaine et importante de la valeur de $\theta(P)$.

Revenant au problème initial (29), il reste le problème de la maximisation par rapport à β_i. Nous pouvons réécrire ce problème sous la forme

$$\max_{0 \leqslant \beta \leqslant \sigma} \beta C(\beta) \tag{49}$$

où $C(\beta) = \theta(P^o)^{-1}$, P^o étant solution de

$$\begin{cases} \min_D \mathrm{Tr}(P)\mathrm{Tr}(P^{-1}) \\ (A+\beta I)'P + P(A+\beta I) + D'D = 0 \end{cases} \tag{50}$$

Numériquement, la solution de (48) peut être obtenue par application d'une méthode classique de recherche unidimensionnelle (par ex: la méthode de Fibonacci).

Nous présentons ci-dessous l'algorithme numérique pour la résolution des problèmes d'optimisation paramétrique (49-50) associés à chaque sous-système.

<u>Pas 1</u> : Etant donné A_i asymptotiquement stable, calculer son degré de stabilité σ_i et faire

$$\beta_{imin} = \max \left\{ 0, \min\{-\lambda_{max}(A_i^s), \sigma_i\} \right\}$$

où A_i^s est la partie symétrique de A_i.

<u>Pas 2</u> : Si $\beta_{imin} = \sigma_i$ alors la solution optimale pour le sous-système est $\alpha_i^o / \theta_i^o = \sigma_i$

Si $\beta_{imin} \neq \sigma_i$, faire $\beta_i = \beta_{imin}$ et après résoudre (50) calculer $C(\beta_i)$. Faire l'indice $k = 1$ et aller au pas 3.

<u>Pas 3</u> : Faire $\beta_i^{k+1} = \beta_i^k + \delta\beta_i^k$ avec $0 \leqslant \delta\beta_i^k \leqslant \sigma_i - \beta_i^k$ et résoudre le problème

$$\begin{cases} \min\limits_{D_i} \operatorname{Tr}(P_i)\operatorname{Tr}(P_i^{-1}) \\ (A_i+\beta_i^{k+1}I)'P_i + P_i(A_i+\beta_i^{k+1}I) + D_i'D_i = 0 \end{cases}$$

soient P_i^{k+1} et D_i^{k+1} les matrices obtenues à la convergence. Calculer $C(\beta_i^{k+1})$.

Pas 4 : Tests :

a) si $\beta_i^{k+1} = \sigma_i$ la solution optimale est $\sigma_i C(\sigma_i)$

b) si $\beta_i^{k+1}\ C\ (\beta_i^{k+1}) > \beta_i^k C(\beta_i^k)$, faire $k \leftarrow k+1$ et aller au pas 3 sinon stop, la solution optimale est $\beta_i^k C(\beta_i^k)$

Se pose bien sûr le choix du pas $\delta\beta_i^{k+1}$; dans l'algorithme utilisé il était fixé de manière adaptative

$$\begin{cases} \delta\beta_i^{k+1} = \nu_1\ \delta\beta_i^k & \text{si} \quad \beta_i^{k+1}C(\beta_i^{k+1}) > \beta_i^k C(\beta_i^k) \\ \delta\beta_i^k \leftarrow \nu_2\ \delta\beta_i^k & \text{dans le cas contraire} \end{cases} \tag{51}$$

avec $\nu_1 > 1$, $0 < \nu_2 < 1$ et $\delta\beta_i^1$ arbitraire.

Exemple II-2. Soit le système du 4ème ordre

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -6 \end{bmatrix} x$$

Dans ce cas $\sigma_1=2$ et $\sigma_2=3$ avec $\beta_{1min}= \beta_{2min}=0$. Les résultats numériques sont fournis dans la table suivante

sous système	β_i^o	α_i^o/θ_i^o	Temps de calcul
1	1.09	0.39	0.58 sec.
2	1.64	0.44	0.55 sec.

Tableau II-1. Résultats numériques

et pour $\beta_i = \beta_i^o$, i=1 et 2 nous avons

$$D_1^o = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.56 \\ 0.86 & 0.88 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_2^o = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.54 \\ 0.94 & 0.61 \end{bmatrix}$$

On peut également vérifier que $\det(D_1^o) = \det(D_2^o) \approx 0$. La matrice $\tilde{L}$ qui fournit le système de comparaison optimal est

$$\tilde{L}_{opt} = \begin{bmatrix} -0.39 & 1 \\ 0.1 & -0.44 \end{bmatrix}$$

qui est asymptotiquement stable.

Il est à noter que les valeurs optimales obtenues pour α^o/θ^o sont pour les deux systèmes relativement éloignées de la valeur des degrés de stabilité respectifs (qui bien sûr sont une borne supérieure pour le rapport α/θ). Nous discuterons de ce problème ultérieurement et comparerons nos résultats avec ceux présentés dans (Siljak |59|).

Cette publication |59| avait également pour but de donner une méthode permettant d'obtenir un système de comparaison aussi "bon" que possible. La méthode proposée est la suivante. Considérons

$$\alpha_i = \min_{x_i} \frac{1}{2} \frac{x_i' Q_i x_i}{x_i' P_i x_i}$$

où P_i est la solution de l'équation de Lyapunov associée au sous système (i) $A_i' P_i + P_i A_i + Q_i = 0$. Supposant que A_i a toutes ses valeurs propres distinctes, effectuons le changement de variable $x_i = T_i \tilde{x}_i$ de telle sorte que

$$\tilde{A}_i = \mathrm{diag} \left\{ \begin{bmatrix} -\sigma_i^1 & \omega_i^1 \\ -\omega_i^1 & -\sigma_i^1 \end{bmatrix} ; \ldots ; -\sigma_i^{n_i} \right\} \tag{53}$$

on obtient alors $\tilde{P}_i = T_i' P_i T_i$ et $\tilde{Q}_i = T_i' Q_i T_i$ où $\tilde{P}_i$ est solution de $\tilde{A}_i' \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{A}_i + \tilde{Q}_i = 0$. Finalement, $\tilde{Q}_i$ et $\tilde{P}_i$ sont prises telles que

$$\tilde{Q}_i = -2\,\tilde{A}_i^s > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{P}_i = I \tag{54}$$

Il est aisé de voir qu'ainsi le choix des matrices $P_i = (T_i T_i')^{-1}$ et $Q_i = -2(T_i')^{-1}\tilde{A}_i^s T_i^{-1}$ revient en fait à faire l'estimation parfaite du degré de stabilité, c'est-à-dire, elles fournissent la solution du problème

$$\max_{Q_i \geqslant 0} \; \min_{x_i} \; \frac{1}{2} \; \frac{x_i' Q_i x_i}{x_i' P_i x_i} \tag{55}$$

Il est également aisé de voir qu'une telle approche ne fournit pas nécessairement le "meilleur" système de comparaison car en effet

$$(\alpha_i / \theta_i(P_i)) = (\sigma_i / \theta_i(T_i T_i')) \leqslant (\alpha_i^o / \theta_i^o) \tag{56}$$

La méthode développée précédemment permet donc la détermination d'un système de comparaison "optimal" qui est obtenu après la résolution de N problèmes d'optimisation paramétrique indépendants. Il peut se faire que dans certains cas il ne soit pas nécessaire de pousser les calculs jusqu'au bout pour prouver la stabilité et dans ce cas il pourrait être avantageux d'utiliser le résultat du lemme suivant qui a l'avantage de donner des tests de stabilité eux-mêmes complètement décentralisés.

<u>Lemme II-5</u>. Soient $y, \pi \in R^N$ deux vecteurs à composantes positives tels que

$$\left\{ H - \operatorname{diag}(\pi_1, \ldots, \pi_N) \right\} y \leqslant 0 \tag{57}$$

où H est la matrice relative aux termes d'interconnexion définie en (16). Alors (14) est asymptotiquement stable si

$$\alpha_i > \pi_i \, \theta_i(P_i) \qquad i = 1 \ldots N \tag{58}$$

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov (Rosenbrock [54])

$$\xi(t) = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\{ \frac{W_i(t)}{y_i} \right\} \tag{59}$$

où y_i est la ième composante de y. L'accroissement par rapport au temps de $\xi(t)$ le long des trajectoires de (14) s'écrit (cf. Chap. I)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_+(t) &= \lim_{\delta t \to 0^+} \left\{ \frac{\xi(W(t+\delta t)) - \xi(W(t))}{\delta t} \right\} \\ &= \lim_{\delta t \to 0^+} \left\{ \frac{\xi(W(t)+\delta t LW(t)) - \xi(W(t))}{\delta t} \right\} \end{aligned} \tag{60}$$

mais, à partir de (59), il vient

$$\xi(W(t)+\delta t LW(t)) \leqslant \xi(W(t)) + \delta t\, \xi(LW(t)) \quad ; \quad \delta t > 0 \tag{61}$$

donc, avec (61) nous avons

$$\dot{\xi}_+(t) \leqslant \xi(LW(t)) = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left[-\alpha_i \delta_{ij} + \theta_i h_{ij} \right] \frac{W_j}{y_i} \right\} \tag{62}$$

comme $\xi(t) \geqslant W_j(t)/y_j \quad j=1..N$ et par hypothèse $\sum_{j=1}^{N} h_{ij} y_j \leqslant \pi_i y_i$, par substitution, il vient

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_+(t) &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\{ \frac{\xi(t)}{y_i} \sum_{j=1}^{N} \left[-\alpha_i \delta_{ij} + \theta_i h_{ij} \right] y_j \right\} \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\{ (-\alpha_i + \pi_i \theta_i)\, \xi(t) \right\} \\ &\leqslant - \min_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\{ \alpha_i - \pi_i \theta_i \right\} \xi(t) \end{aligned} \tag{63}$$

donc, (59) fournit une condition suffisante de stabilité. ▬

Il est intéressant de remarquer que la condition (58) est la même que celle que l'on obtiendrait en étudiant, par le biais de la même fonction de Lyapunov $v_i(x_i)$ le système non linéaire suivant

$$(\hat{S}_i)\quad \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + f_i(x_i) \\ \|f_i(x_i)\| \leqslant \pi_i \|x_i\| \end{cases} \tag{64}$$

Par utilisation des tests de stabilité (58) il est clair que les problèmes d'optimisation suivants doivent être considérés

$$\begin{cases} \max\limits_{D_i} \quad \alpha_i - \pi_i\, \theta_i(P_i) \\ A_i' P_i + P_i A_i + D_i' D_i = 0 \end{cases} \qquad i=1\ldots N \tag{65}$$

Utilisant les mêmes considérations que précédemment nous proposons les problèmes suivants

$$\max_{0 \leqslant \beta_i \leqslant \sigma_i} \quad \beta_i - \pi_i\, \theta_i(P_i^o) \tag{66}$$

où P_i^o est la solution de

$$\begin{cases} \min\limits_{D_i} J(D_i) = Tr(P_i)Tr(P_i^{-1}) \\ F_i' P_i + P_i F_i + D_i' D_i = 0 \end{cases} \qquad i=1\ldots N \tag{67}$$

Il faut remarquer que les conditions données par le lemme antérieur sont simplement des conditions suffisantes de stabilité du système de comparaison (14) alors que les conditions de Sevastyanov-Kotelyanski sont, elles nécessaires et suffisantes. La qualité des résultats obtenus par (58) dépend du choix du vecteur y (voir section II-3-3.).

II-2-5. QUELQUES PROPRIETES DU SYSTEME DE COMPARAISON OPTIMAL

Compte tenu du fait que $\theta_i(P_i) \geqslant 1$ et $\alpha_i \leqslant \sigma_i$ alors le rapport α_i^o/θ_i^o possède la borne supérieure

$$\frac{\alpha_i^o}{\theta_i^o} \leqslant \sup\left\{\frac{\alpha_i}{\theta_i}\right\} = \sigma_i \tag{68}$$

en fait, nous avons pu constater sur certains exemples que cette borne supérieure était extrêmement "optimiste", le but du présent paragraphe est d'affiner cette borne.

THEOREME II-3. Soit $A_i \varepsilon R^{n_i x n_i}$ une matrice asymptotiquement stable écrite sous la forme compagne. Alors

$$\forall D_i \longrightarrow \alpha_i \leqslant \min \left\{1, \ |\det(A_i)|\right\} \ \theta_i = \hat{\pi}_i \theta_i \qquad (69)$$

Démonstration : La démonstration se fait par l'absurde. Considérons un système dynamique de la forme

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & H_i \\ H_i & A_i \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (70)$$

où $H_i \varepsilon R^{n_i x n_i}$ est une matrice quelconque de l'ensemble $\Phi(A_i) = \Phi_C(A_i) \cup \Phi_L(A_i)$ où

$$\begin{aligned} \Phi_C(A_i) &= \left\{H_j / H_j = A_i I_j \quad j=1 \ldots n_i\right\} \\ \Phi_L(A_i) &= \left\{H_j / H_j = I_j A_i \quad j=1 \ldots n_i\right\} \end{aligned} \qquad (71)$$

et $I_j = \mathrm{diag}(\delta_{kj})$ $k=1 \ldots n_i$. Le système de comparaison associé à (70) s'écrit

$$\dot{W} = LW \quad \text{avec} \quad L = \begin{bmatrix} -\alpha_i & \theta_i \cdot \|H_i\| \\ \theta_i \cdot \|H_i\| & -\alpha_i \end{bmatrix} \qquad (72)$$

Le choix des matrices d'interconnexions H_i dans (70) a été fait de telle sorte que la matrice globale de (70) présente soit deux lignes ($H_i \ \varepsilon \ \Phi_L(A_i)$) soit deux colonnes ($H_i \ \varepsilon \ \Phi_C(A_i)$) identiques. Elle possède donc (au moins) une valeur propre nulle donc (35) ne peut être asymptotiquement stable et donc (36) ne peut être asymptotiquement stable, ce qui fournit la condition

$$\alpha_i \leqslant \|H_i\| \cdot \theta_i \quad ; \quad \forall H_i \ \varepsilon \ \Phi(A_i) \qquad (73)$$

Il nous faut donc chercher la norme minimum $\|H_i\|$, ce qui est aisément réalisé, du fait de la structure particulière de la matrice H_i (seule une ligne ou une colonne n'est pas nulle)

$$\min_{H_i \in \Phi_L(A_i)} \|H_i\|^2 = \min \left\{ 1, \sum_{j=1}^{n_i} a^2_{n_i,j} \right\}$$

$$\min_{H_i \in \Phi_C(A_i)} \|H_i\|^2 = \min \left\{ a^2_{n_i,1} , \min_{2 \leqslant j \leqslant n_i} (1 + a^2_{n_i,j}) \right\} \tag{74}$$

bien évidemment, notant que $a_{n_i,1}$ =-det (A_i), il vient d'après (74)

$$\min_{H_i \in \Phi(A_i)} \|H_i\| = \min \left\{ 1, |\det(A_i)| \right\} \tag{75}$$

ce qui démontre le théorème. ∎

<u>Corollaire II-4</u>. Dans le cas où la matrice A_i n'est plus sous forme compagne, le paramètre $\hat{\pi}_i$ du théorème antérieur est fourni par

$$\hat{\pi}_i = \min_{1 \leqslant j \leqslant n_i} \left\{ \|\underline{a}_{ij}\| , \|\bar{a}_{ij}\| \right\} \tag{76}$$

où $\underline{a}_{ij}$ représente la jème colonne et $\bar{a}_{ij}$ la jème ligne de la matrice A_i.

<u>Démonstration</u>. La démonstration s'effectue de la même manière que pour le théorème précédent. ∎

Enfin, à partir des résultats antérieurs il est possible d'énoncer le théorème suivant :

<u>THEOREME II-5</u>. Si la matrice $H_\pi \in R^{NxN}$ définie par

$$H_\pi = H - \text{diag}\ (\hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_N) \tag{77}$$

ne satisfait pas les conditions de Sevastyanov-Kotelyanski alors le système de comparaison (14) ne peut être asymptotiquement stable quelles que soient les matrices D_i en (5) choisies pour la détermination des fonctions de Lyapunov $v_i(x_i)$ en (4).

Démonstration : La démonstration découle directement du fait que

$$L = \Theta \tilde{L} = \Theta \{ H - \mathrm{diag}(\hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_N) \} + $$
$$+ \Theta \left\{ \mathrm{diag}(\hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_N) - \Theta^{-1} S \right\} \qquad (78)$$
$$= \Theta H_\pi + \mathrm{diag} \left\{ \hat{\pi}_1 \theta_1 - \alpha_1, \ldots, \hat{\pi}_N \theta_N - \alpha_N \right\}$$

et d'après le théorème anterieur, la matrice $\tilde{L}$ est terme à terme toujours non inférieure à H_π.

Le théorème II-5. fournit donc un test qui permet de determiner, a priori, si l'approche "fonction de Lyapunov vectorielle et systèmes de comparaison" pourra permettre de déterminer la stabilité du système interconnecté en étude. Il est évident que nous retrouvons ici la condition de "faible couplage", simplement l'approche présentée pour la détermination d'un système de comparaison optimal permet de relacher au maximum cette contrainte.

II-2-6. APPLICATION A LA STABILISATION DECENTRALISEE DE SYSTEMES LINEAIRES INTERCONNECTES

Soit le système dynamique interconnecté

$$(S_i) \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_{ij} x_j \\ x_i(0) = x_{i0} \end{cases} \qquad (79)$$

où $x_i \in R^{n_i}$, $u_i \in R^{n_i}$. Nous faisons l'hypothèse que $\forall i = 1 \ldots N$ les paires (A_i, B_i) sont commandables. Nous nous posons le problème suivant : Déterminer pour chaque sous-système une commande décentralisee $u_i = - k_i x_i$ de telle sorte que le système global $S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$ soit asymptotiquement stable, sachant que les tests de stabilite sont effectuës sur le système de comparaison associé.

Comme chaque sous système isolé ($\hat{S}_i$) est commandable, il est toujours possible de déterminer une boucle de contre réaction de gain k_i assurant à chaque sous-système un degré de stabilité σ_i, quelconque (Wonham |65|). C'est-à-dire

$$\Lambda(A_i^c + \sigma_i I) \subset C^- \qquad i=1\ldots N \tag{80}$$

où $A_i^c = A_i - B_i k_i$. La recherche d'une commande décentralisée optimale dans notre approche (Géromel et Bernussou |32|) consiste en l'accroissement successif des degrés de stabilité de chaque sous système isolé jusqu'à l'obtention d'un système de comparaison optimal satisfaisant les conditions de Sevastyanov-Kotelyanski. Nous proposons pour ce faire l'algorithme suivant.

<u>Pas 1</u> : Détermination de la matrice H (interconnexions)

$$H = \left\{ h_{ij}/h_{ij} = \|A_{ij}\| \qquad i,j = 1\ldots N \right\}$$

et prendre une condition initiale pour σ_i $i = 1\ldots N$

<u>Pas 2</u> : Déterminer pour chaque sous-système une matrice $k_i \in R^{m_i x n_i}$ telle que $\Lambda(A_i^c + \sigma_i I) \subset C^-$.

<u>Pas 3</u> : Résoudre pour chaque sous-système le problème (29). Soient β_i^o et P_i^o les solutions optimales. Calculer alors

$$\tilde{L}_{opt} = H - \text{diag} \left\{ \beta_1^o \theta_1 (P_1^o)^{-1} \ldots . \beta_N^o \theta_N (P_N^o)^{-1} \right\}$$

<u>Pas 4</u> : Si $\tilde{L}_{opt}$ satisfait les conditions de Sevastyanov-Kotelyanski stop, sinon incrémenter σ_i et retourner au pas 2.

Pour spécifier complètement l'algorithme précédent, il faudrait décrire la technique qui est utilisée au pas 2 pour la détermination des gains k_i qui assurent le degré de stabilité σ_i pour chaque sous-système isolé. Nous ne discuterons pas de ce problème et supposerons qu'un choix a été fait a priori (par ex : optimisation critère quadratique - Anderson et Moore |1|).

Il est très difficile de pouvoir spécifier a priori pour quelles classes de systèmes l'algorithme précédent va converger. A l'inverse, en utilisant les résultats des paragraphes précédents il est possible de déterminer les cas où surement une telle approche ne convergera pas (et donc de l'éliminer). Le seul problème qui se pose pour l'obtention des bornes du rapport α/θ est que maintenant à chaque itération la matrice A_i^c change. Le théorème suivant fournit une réponse pour ce cas.

THEOREME II-6. Si la matrice H^c définie par

$$H_\pi^c = H - \mathrm{diag}\ (\pi_1^c, \ldots \pi_N^c)$$
$$\pi_i^c = \min_{j \in J_i} \left\{ \| \underline{t}_{j,i} \| \cdot \| \bar{t}_{j+1,i} \| \right\} \tag{81}$$

où $\underline{t}_{ji}$ est la jème colonne de T_i^{-1} et $\bar{t}_{ji}$ est la jème ligne de T_i ; T_i est la matrice de transformation de Luenberger [49] pour le ième sous système isolé ; ne satisfait pas les conditions de Sevastyanov-Kotelyanski alors l'algorithme précédent ne convergera pas (l'ensemble J_i sera exactement défini dans la démonstration qui suit).

Démonstration : Supposons initialement que $m_i = 1$, alors la matrice T_i est la matrice de transformation qui permet d'obtenir un système sous forme compagne

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{A}_i \tilde{x}_i + \tilde{B}_i \tilde{u}_i \\ \dot{\tilde{x}}_i = T_i x_i \ , \ \tilde{u}_i = C_i u_i \end{cases} \tag{82}$$

où $\tilde{B}_i = [0\ 0 \ldots 0\ 1]'$. Comme pour le théorème II-3. considérons le systèmes

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_i \\ \dot{\tilde{x}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{H}_i \\ \tilde{H}_i & \tilde{A}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_i & 0 \\ 0 & \tilde{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{u}_i \end{bmatrix} \tag{83}$$

qui ne peut être stabilisable lorsque $\tilde{H}_i \in \tilde{\Phi}_L(\tilde{A}_i)$ où

$$\tilde{\Phi}_L(\tilde{A}_i) = \left\{ \tilde{H}_i / \tilde{H}_i = I_j \tilde{A}_i \qquad j=1\ldots(n_i-1) \right\} \tag{84}$$

la même propriété vaut pour le système transformé inverse

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & H_i \\ H_i & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_i \end{bmatrix} \tag{85}$$

Or ce dernier système, avec la commande $u_i = - k_i x_i$ a pour système de comparaison

$$\dot{W} = LW \quad ; \quad L = \begin{bmatrix} -\alpha_i & \theta_i(P_i).\|H_i\| \\ \theta_i(P_i).\|H_i\| & -\alpha_i \end{bmatrix} \tag{86}$$

P_i étant solution de l'équation de Lyapunov

$$(A_i - B_i k_i)' P_i + P_i (A_i - B_i k_i) + D_i' D_i = 0 \tag{87}$$

alors pour $\forall D_i$ et k_i tel que $\Lambda(A_i - B_i k_i) \subset C^-$ en (87), on doit avoir

$$\alpha_i \leqslant \min_{\tilde{H}_i \varepsilon \tilde{\Phi}(\tilde{A}_i)} \|T_i^{-1} \tilde{H}_i T_i\| . \ \theta_i(P_i) \tag{88}$$

Il est facile de voir que

$$\|T_i^{-1} \tilde{H}_i T_i\| = \|T_i^{-1} I_j \tilde{A}_i T_i\| = \|\underline{t}_{j,i}\| . \|\bar{t}_{j+1,i}\| \tag{89}$$

d'où il vient

$$\alpha_i \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant n_i - 1} \left\{ \|\underline{t}_{j,i}\| \ \|\bar{t}_{j+1,i}\| \right\} \theta_i(P_i) = \pi_i^c \theta_i(P_i) \tag{90}$$

Dans le cas où $m_i \geqslant 2$ la même démonstration reste valable à condition que j prenne ses valeurs dans J_i, qui est l'ensemble des indices qui correspondent à une ligne nulle dans la matrice transformee $\tilde{B}_i$. Dans le cas $m_i = 1$, évidemment $J_i = 1,2,\ldots(n_i-1)$.

Si H_π^c ne satisfait pas les conditions de Sevastyanov-Kotelyanski, $\tilde{L}$ ne pourra pas les satisfaire car $\tilde{L}$ est terme à terme toujours non inférieure à H_π^c et donc l'algorithme ne pourra converger.

Exemple II-3. Soit le système linéaire interconnecté

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} A_{ij} x_j \qquad i=1,2,3$$

avec $A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0$ et

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le calcul fournit

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad H_\pi^c = H - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0.15 & -1 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1 \end{bmatrix}$$

Les conditions de Sevastyanov-Kotelyanski sont remplies par H_π^c et la loi de commande (pas 2) a été choisie comme $k_i = [\sigma_i^2 \quad 2\sigma_i]$
La condition de stabilité pour $\tilde{L}$ s'écrit

$$(\beta_i^o / \theta_i^o) \geqslant \sqrt[3]{0.09} \approx 0.45$$

Dans le tableau ci-dessous sont donnés les résultats de l'algorithme précédent traité sur IBM 370/165 du CIRCE avec 2,4 sec. de calcul.

σ_i	β_i^o	β_i^o/θ_i^o
1	0.54	0.25
2	1.09	0.40
3	1.64	0.44
4	2.18	0.46

$i = 1,2,3$

Tableau II-2. Solution optimale du problème (29) à chaque itération

D'après la relation antérieure on voit que $\sigma_i = 4$ $i=1,2,3$ est le degré de stabilité qui guarantit le stabilité asymptotique du système de comparaison et donc du système global avec la commande

$$u_i = - [16 \quad 8] \, x_i \qquad i = 1,2,3$$

Il est à noter que dans cet exemple si on ne considérait pas le problème de la recherche d'un système de comparaison optimal et l'on utilisait les fonctions de Lyapunov $v_i(x_i)$ (4) determinées pour $D_i = I$ il ne serait pas possible de déterminer une commande décentralisée donnant le système de comparaison stable même avec $\sigma_i \rightarrow +\infty$.

II-3. Le Probleme de la Stabilite et de la Stabilisation Sous Perturbations Structurelles

Dans les paragraphes suivants nous allons nous intéresser au problème de l'analyse de la stabilité des systèmes interconnectés soumis à des variations de structure et au problème de la synthèse de commandes de type robuste, c'est-à-dire permettant d'assurer la stabilité pour toute éventualité de perturbations structurelles (stabilité "connective" - Siljak [58]).

Bien évidemment, les résultats du paragraphe II-2-6. sont applicables mais nous allons adopter ici une voie un peu différente (Siljak [58] ; Géromel et Bernussou [31]). Nous allons considérer que les lois décentralisées sont obtenues à partir de l'optimisation d'un critère quadratique pour chaque sous système isolé, la matrice de Riccati calculée servira aussi à la détermination des fonctions de Lyapunov $v_i(x_i)$ à partir desquelles sera déterminé le système de comparaison.

II-3-1 - DESCRIPTION DU PROBLEME

Soit le système linéaire invariant $S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$ où

$$(S_i)\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} A_{ij} x_j \\ x_i(0) = x_{i0} \end{cases} \tag{91}$$

où $x_i \varepsilon R^{n_i}$; $u_i \varepsilon R^{m_i}$ et (A_i, B_i) controlable $i = 1 \ldots N$. Les critères locaux sont

$$J_i(u_i) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (\|x_i\|^2_{Q_i} + \|u_i\|^2_{R_i})dt \tag{92}$$

avec $Q_i = Q_i' \geqslant 0$, $R_i = R_i' > 0$. Nous allons considérer le cas d'une loi de commande (retour d'état) à "deux niveaux"

$$u_i = - k_i x_i - \sum_{j=1}^{N} T_{ij} x_j \qquad i=1 \ldots N \tag{93}$$

où $k_i = R_i^{-1} B_i' P_i$ avec $P_i > 0$, solution de l'équation de Riccati

$$A_i' P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i' P_i + Q_i = 0 \tag{94}$$

et où T_{ij} représente un bouclage sur l'état global, ayant pour but de faire que la commande globale aille dans le sens de l'optimisation du critère global $J(u) = \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i)$. La figure suivante montre l'implémentation envisagée à deux niveaux pour la commande (93).

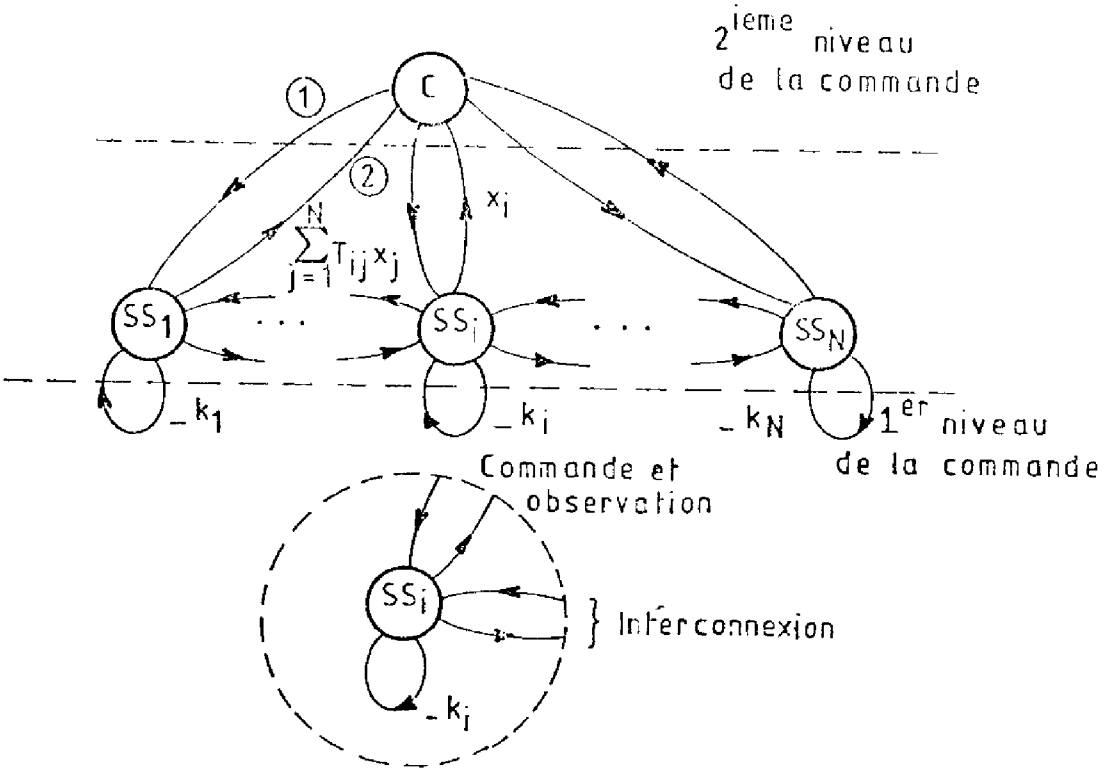


Figure II-2. Structure de la commande

Nous allons considérer que les perturbations de structure se traduisent par une rupture de liaison entre le niveau supérieur et les sous-systèmes ; deux types sont à considérer

1) les perturbations de commande, se traduisant par une rupture de liaisons "descendantes" de la figure antérieure
2) les perturbations d'observation, qui correspondent à une rupture des liaisons "ascendantes".

Pour une meilleure caractérisation de ces perturbations introduisons dans le modèle (91) une matrice à éléments binaires

$$E = \left\{ e_{ij} / e_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad , \quad i,j = 1 \ldots N \right\} \tag{95}$$

alors la dynamique de chaque sous-système s'écrit

$$\dot{x}_i = (A_i - B_i k_i) x_i + \sum_{j=1}^{N} (A_{ij} - e_{ij} B_i T_{ij}) x_j \tag{96}$$

Une perturbation du type 1) entre le sous-système (i) et le niveau supérieur se traduit par $e_{ij} = 0 \quad \forall j = 1,2,\ldots N$, alors que celle du type 2) se traduit par $e_{ji} = 0, \forall j = 1,2,\ldots N$. Nous supposons bien sûr qu'en l'absence des perturbations ($e_{ij} = 1$, $\forall\, i,j$) le système S est asymptotiquement stable.

Le problème que nous posons est celui de la détermination d'une commande locale $u_i = -k_i^o x_i \quad i=1\ldots N$ qui assurer la stabilité pour toute matrice E de perturbation.

II-3-2. LE SYSTEME DE COMPARAISON

Nous reprenons ici la même démarche qu'au paragraphe II-2-2. c'est-à-dire : à chaque sous système isolé nous associons la fonction de Lyapunov

$$v_i(x_i) = \left\{ \|P_i^{-1}\| \; x_i' P_i x_i \right\}^{1/2} \tag{97}$$

où P_i est la solution de (94) qui satisfait aussi

$$\begin{cases} \|x_i\| \leqslant v_i(x_i) \leqslant \theta_i \|x_i\| \\ \|\nabla v_i\| \leqslant \theta_i \end{cases} \tag{98}$$

Après avoir calculé la dérivée temporelle de $v_i(x_i)$ le long des trajectoires de (96) et majoré certains termes à partir des inégalités (98), on obtient les inégalités différentielles

$$\dot{v}_i \leqslant -\alpha_i v_i + \theta_i \cdot \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(e_{ij}) v_j \qquad i=1\ldots N \tag{99}$$

où

$$\begin{cases} 2\alpha_i = \min\limits_{x_i} \dfrac{x_i'(Q_i + P_i B_i R_i^{-1} B_i' P_i) x_i}{x_i' P_i x_i} \\ h_{ij}(e_{ij}) = \|A_{ij} - e_{ij} B_i T_{ij}\| \end{cases} \tag{100}$$

sous forme matricielle avec $V = [v_1,\ldots,v_N]'$ le système de comparaison s'écrit

$$\dot{W} = L(E)W \tag{101}$$

où

$$L(E) = \left\{ l_{ij}(e_{ij}) = -\alpha_i \delta_{ij} + \theta_i h_{ij}(e_{ij}) \ ; \ i,j=1...N \right\} \tag{102}$$

Afin de pouvoir assurer la stabilité de (96) sous toute éventualité de perturbations structurelles il nous faut donc nous assurer que le système de comparaison associé au cas le plus défavorable soit stable, ce que nous voulons

$$\dot{W} = \max_E L(E).W \tag{103}$$

Il n'est pas du tout facile de déterminer la plus mauvaise (au sens de Lyapunov) matrice L(E). Ce problème là est en effet de nature combinatoire avec un grand nombre de combinaisons à tester, d'autant plus grand que le nombre de sous-systèmes sera élevé.

Une façon d'éviter ce problème est de maximiser indépendemment chaque terme de la matrice L(E) pour finalement obtenir

$$\max_E L(E) = -S + \Theta \max_E H(E) = L_M \tag{104}$$

où $S = \mathrm{diag}(\alpha_1,...,\alpha_N)$, $\Theta = \mathrm{diag}\ (\theta_1,...,\theta_N)$ et

$$H_M = \max_E H(E) = \left\{ h_{ij}^M = \max_{e_{ij}} \| A_{ij} - e_{ij} B_i T_{ij} \| \quad i,j=1...N \right\} \tag{105}$$

ce qui fournit le système de comparaison majorant

$$\dot{W} = L_M W \tag{106}$$

<u>Remarques</u>

1. L_M peut ne pas avoir de signification physique, c'est-à-dire ne correspondre à aucun cas de perturbations structurelles physiques possibles. Pour une etude plus fine, il est possible de déterminer "le plus mauvais" système de comparaison correspondant à un vrai cas de figure mais pour la suite de l'exposé cela n'est pas nécessaire et allongerait inutilement le développement

2. La commande décentralisée sans perturbations est un cas particulier du problème précédent avec $E = 0$
3. Il est aisé de voir que

$$h_{ij}(e_{ij}) \leqslant (1-e_{ij})\, h_{ij}(0) + e_{ij} h_{ij}(1) \qquad \forall\, i,j \qquad (107)$$

et donc

$$\max_{e_{ij}=0 \text{ ou } 1} h_{ij}(e_{ij}) = \max_{0 \leqslant e_{ij} \leqslant 1} h_{ij}(e_{ij}) \quad \forall\, i,j \qquad (108)$$

c'est-à-dire que (106) est aussi le système de comparaison majorant pour le cas où e_{ij} pourrait varier continement dans l'intervale $[0, 1]$.

II-3-3. DETERMINATION DES DEGRES DE STABILITE POUR CHAQUE SOUS-SYSTEME

Nous devons obtenir une matrice $L_M = - S + \Theta H_M$ qui soit asymptotiquement stable, ce qui comme nous l'avons vu est équivalent à $\tilde{L}_M = - \Theta^{-1} S + H_M$ asymptotiquement stable.

La stratégie de synthèse que nous avons adoptée est basée sur la recherche de commandes assurant à chaque sous-système un degré de stabilité suffisant pour que puissent être satisfaites les conditions de Sevastyanov-Kotelyanski pour le système de comparaison. Le problème qui se pose alors est comment choisir (ou guider le choix de) ces degrés de stabilité pour chaque sous-système isolé (répartition de l'effort nécessaire localement).

Tout d'abord il est toujours possible de choisir un vecteur $\pi = [\pi_1, \ldots \pi_N]'$ à composantes positives tel que $H_M - \mathrm{diag}\,(\pi_1, \ldots, \pi_N)$ soit asymptotiquement stable. Il y a bien sûr une infinité de solutions.

Pour éviter cela définissons le problème suivant que nous justifierons par la suite et qui va nous permettre de sélectionner un vecteur π particulier

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi,y} \quad f(\pi) \\ \pi \geqslant 0 \ ; \ y \geqslant \varepsilon > 0 \ ; \ \left\{H_M - \mathrm{diag}(\pi_1,\ldots,\pi_N)\right\} \ y \leqslant 0 \end{cases} \tag{109}$$

Si π^* est solution du problème précédent alors $\pi = \pi^* + \varepsilon$ est tel que $H_M - \mathrm{diag}\ (\pi_1,\ldots,\pi_N)$ est asymptotiquement stable.

Les conditions de stationnarité de (109) s'écrivent (avec l'hypothèse que les contraintes $\pi \geqslant 0$, $y \geqslant \varepsilon > 0$ sont strictement satisfaites) :

$$\begin{bmatrix} \nabla f(\pi) \\ \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ \mathrm{diag}(y_1,\ldots,y_N) \\ \\ H_M' - \mathrm{diag}(\pi_1,\ldots,\pi_N) \end{bmatrix} \mu = 0$$

$$\left\{H_M - \mathrm{diag}(\pi_1,\ldots,\pi_N)\right\} y \leqslant 0 \tag{110}$$

$$\mu' \left\{H_M - \mathrm{diag}(\pi_1,\ldots,\pi_N)\right\} y = 0$$

$$\mu \geqslant 0 \quad ; \ \pi > 0 \quad ; \ y > 0$$

ces conditions ne permettent pas dans le cas général l'écriture d'une solution analytique, aussi avons nous considéré deux cas particuliers

<u>Cas 1</u> : Soit $f(\pi) = C'\pi$, avec $C_i > 0$, $i=1\ldots N$ et H_M une matrice symétrique. Alors (110) se réduit à

$$\left\{H_M - \mathrm{diag}\ (\pi_1,\ldots,\pi_N)\right\}\mu = 0$$

$$\left\{H_M - \mathrm{diag}\ (\pi_1,\ldots,\pi_N)\right\} y = 0 \tag{111}$$

$$\mathrm{diag}\ (y_1,\ldots,y_N)\,\mu = C$$

qui fournit la solution

$$\mu_i^* = y_i^* = \sqrt{C_i} > 0$$

$$\pi_i^* = \sum_{j=1}^{N} h_{ij}^M \sqrt{C_j/C_i} > 0 \tag{112}$$

<u>Cas 2</u> : Dans la littérature on rencontre le cas où $f(\pi) = \pi$ ($\pi_i = \pi =$ cte) c'est-à-dire où un degré de stabilité uniforme est imposé à tous les sous-systèmes (Siljak [58]). Dans ce cas, il

vient

$$\begin{aligned} \{H'_M - \pi I\}\mu &= 0 \\ \{H_M - \pi I\}y &= 0 \\ \mu' y &= 1 \end{aligned} \tag{113}$$

qui compte tenu des propriétés particulières de la matrice H_M donne la solution unique (Fiedler et Ptak [27])

$$\pi^* = \lambda_{max}(H_M) \tag{114}$$

Répétons qu'en général la solution de (109) n'admet pas de solution analytique et doit être abordée au moyen des techniques de programmation mathématique.

II-3-4. LES COMMANDES LOCALES STABILISANTES. LEUR DETERMINATION

La stratégie de commande peut être la suivante. En fonctionnement normal, sans perturbation, on applique la commande (93) au système ce qui assure par exemple l'optimalité globale. En présence de perturbations on applique localement une commande

$$u_i^P = - k_i^o x_i \tag{115}$$

où k_i^o est calculée de façon à ce que

$$\dot{x}_i = (A_i - B_i k_i^o) x_i + \sum_{j=1}^{N} (A_{ij} - e_{ij} B_i T_{ij}) x_j \qquad i=1...N \tag{116}$$

soit asymptotiquement stable pour toute matrice de perturbation E. Les commandes locales sont donc choisies telles que

$$k_i^o = R_i^{-1} B_i' P_i^o \tag{117}$$

où P_i^o est la solution définie positive de l'équation de Riccati

$$(A_i + \sigma_i I)' P_i^o + P_i^o (A_i + \sigma_i I) - P_i^o B_i R_i^{-1} B_i' P_i^o + Q_i = 0 \tag{118}$$

Un tel choix nous permet également d'obtenir directement une fonction de Lyapunov pour chaque sous-système

$$v_i(x_i) = \left\{ \|P_i^{o\,-1}\| \quad x_i' P_i^o x_i \right\}^{1/2} \tag{119}$$

et à partir desquelles nous écrivons le système de comparaison

$$\dot{W} = L(\sigma)W = \quad \Theta \left\{ -\Theta^{-1}(S + \Sigma) + H_M \right\} W \tag{120}$$

où $\sigma = [\sigma_1, \ldots, \sigma_N]'$ et $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$. Comme nous l'avons fait pour le lemme II-5. il est possible d'obtenir un test de stabilité tout à fait décentralisé avec

<u>Lemme II-6.</u> Soient deux vecteurs y et π à composantes positives tels que

$$\left\{ H_M - \mathrm{diag}\ (\pi_1, \ldots \pi_N) \right\} \ y \leqslant 0 \tag{121}$$

alors (120) sera asymptotiquement stable si $\alpha_i + \sigma_i > \pi_i \theta_i$ $\forall\ i = 1, \ldots, N$.

Les résultats nous permettent de proposer l'algorithme suivant

<u>Pas 1</u> : Calcul de la matrice H_M représentative des interconnexions et des perturbations

$$H_M = \left\{ h_{ij}^M / h_{ij}^M = \max_{e_{ij}=0 \text{ ou } 1} \|A_{ij} - e_{ij} B_i T_{ij}\| \quad i,j=1 \ldots N \right\}$$

<u>Pas 2</u> : Obtention des paramètres π_i^* par solution du problème (109).

<u>Pas 3</u> : Pour chaque sous-système isolé, à partir d'une initialisation sur σ_i :

a) résoudre l'équation de Riccati (118)
b) calcul des paramètres θ_i et α_i et de la commande locale $k_i^o = R_i^{-1} B_i' P_i^o$
c) test : si $\alpha_i + \sigma_i > \pi_i^* \cdot \theta_i$ faire $i \leftarrow i+1$ et aller au pas 3. Sinon augmenter σ_i et aller en 3-a).

<u>Exemple II-4</u>. Soit le système $S = S_1 \cup S_2$ avec

$$(S_1) \qquad \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} x_2$$

$$(S_2) \qquad \dot{x}_2 = [3]\ x_2 + [1]\ u_2 + [1 \quad 2]\ x_1$$

et soit le critère quadratique additivement séparé

$$J = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \|x_i\|^2 + \|u_i\|^2 \, dt$$

qui est minimal pour la commande donnée sous la forme (93) avec

$$k_1 = [0.85 \quad 0.25] \quad ; \quad T_{11} = [0.17 \quad 0.60]$$

$$T_{12} = [1.99]$$

$$k_2 = [6.16] \quad ; \quad T_{21} = [0.30 \quad 1.69] \quad ; \quad T_{22} = [-0.93]$$

au pas 1 de l'algorithme précédent nous avons trouvé

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution du problème (109) avec la matrice H_M symétrique, c'est-à-dire $H_S = \{h_{ij}^S = \max(h_{ij}^M, h_{ji}^M)\}$

$$H_S = \begin{bmatrix} 0.88 & 2.67 \\ 2.67 & 0.93 \end{bmatrix}$$

et $f(\pi) = 0.94\ \pi_1 + 0.06\ \pi_2$ ont donné $\pi^* = [1.56 \quad 11.52]'$. Les conditions de stabilité au pas 3 ont été satisfaites avec $\sigma = [5.0 \quad 4.2]'$ correspondant aux commandes décentralisées stabilisantes

$$k_1^o = [17.17 \quad -2.74] \quad ; \quad k_2^o = [14.54]$$

Le cas de la commande décentralisée "simple" (E = 0) a été traité avec

$$H_S = \begin{bmatrix} 0 & 2.34 \\ 2.34 & 0 \end{bmatrix}$$

et nous avons trouvé $\pi^* = [0.56 \quad 8.85]'$; $\sigma = [0.17 \quad 2.88]'$ correspondant aux commandes décentralisées

$$k_1^o = [0.98 \quad 0.28] \quad ; \quad k_2^o = [11.85]$$

<u>Exemple II-5</u>. Soit le système $S = \bigcup_{i=1}^{3} S_i$ avec

$$(S_1) \quad \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_3$$

$$(S_2) \quad \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x_3$$

$$(S_3) \quad \dot{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} x_2$$

Nous voulons déterminer une commande décentralisée stabilisante. Alors au pas 1 de l'algorithme antérieur on obtient

$$H_S = \begin{bmatrix} 0 & 1.28 & 1 \\ 1.28 & 0 & 1.14 \\ 1 & 1.14 & 0 \end{bmatrix}$$

le pas 2 avec $f(\pi) = 0.5\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.4\pi_3$ fournit $\pi^* = [1.46 \quad 5.15 \quad 1.69]'$ et le test de stabilité est satisfait pour $\sigma = [4.08 \quad 2.97 \quad 3.72]'$ avec les gains correspondants

$$k_1^o = [11.51 \quad -0.55]$$

$$k_2^o = \begin{bmatrix} 2.30 & 0.62 \\ 0.82 & 3.41 \end{bmatrix} \quad ; \quad k_3^o = [4.96 \quad 0.06]$$

II-3-5 - <u>LA DETERMINATION DE LA FONCTION $f(\pi)$ A PARTIR DES BORNES DE L'EQUATION DE LYAPUNOV</u>

Nous avons supposé que la commande déterminée en absence de perturbations allait dans le sens de la minimisation du critère (92). Nous nous proposons ici la détermination de commandes décentralisées qui,en présence de perturbations, détériore le moins possible les performances du système (du point de vue du critère (92)). Pour cela nous allons déterminer le degré de sous-

optimalité de chaque sous-système isolé et déterminer $f(\pi)$ de façon à le minimiser.

La détermination de $f(\pi)$ passe par la détermination des bornes de l'équation matricielle de Lyapunov (Geromel et Bernussou [33]).

Soit l'équation différentielle de Lyapunov

$$\dot{P}(t) = A'P(t) + P(t)A + Q \quad ; \; P(0) = 0 \tag{122}$$

où $\Lambda(A) \subset C^-$. La solution d'équilibre satisfait l'équation algébrique

$$A'P + PA + Q = 0 \tag{123}$$

supposons $Q = Q' > 0$ et définissons

$$\Delta(A) = \left\{ X \varepsilon R^{nxn} / X > 0 \quad \text{et} \quad -H(X) < 0 \right\} \tag{124}$$

où $H(X) = -(A'X + XA)$

<u>THEOREME II-7</u>. La solution $P(t) > 0$ de (122) satisfait

$$\int_0^t e^{-\mu\zeta} d\zeta . Q \leqslant P(t) \leqslant \int_0^t e^{-\xi\zeta} d\zeta . Q \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{125}$$

où

$$\mu = \max_x \frac{x'H(Q)x}{x'Qx} \quad ; \quad \xi = \min_x \frac{x'H(Q)x}{x'Qx} \tag{126}$$

<u>Démonstration</u> : Rappelons que la solution de (122) s'écrit

$$P(t) = \int_0^t e^{A'\zeta} Q \, e^{A\zeta} d\zeta = \int_0^t T(\zeta) d\zeta \tag{127}$$

et considérons la fonction définie positive $v(\zeta) = x'T(\zeta)x$ avec $x \varepsilon R^n - \{0\}$. Sa dérivée

$$\frac{dv(\zeta)}{d\zeta} = - x'e^{A'\zeta} H(Q) \, e^{A\zeta} x \tag{128}$$

admet les bornes

$$- \max_x \left\{ \frac{x' e^{A'\zeta} H(Q) e^{A\zeta} x}{x' e^{A'\zeta} Q e^{A\zeta} x} \right\} v \leqslant \frac{dv}{d\zeta} \leqslant - \min_x \left\{ \frac{x' e^{A'\zeta} H(Q) e^{A\zeta} x}{x' e^{A'\zeta} Q e^{A\zeta} x} \right\} v \tag{129}$$

compte tenu du fait que $e^{A\zeta}$ est inversible $\forall \zeta \geqslant 0$ on obtient

$$- \mu v \leqslant \frac{dv}{d\zeta} \leqslant -\xi v \tag{130}$$

ce qui par intégration fournit

$$e^{-\mu\zeta} v(0) \leqslant v(\zeta) \leqslant e^{-\xi\zeta} v(0) \tag{131}$$

compte tenu du fait que $v(0) = x'Qx$, intégrant encore une fois il vient

$$\int_0^t e^{-\mu\zeta} d\zeta\, x'Qx \leqslant \int_0^t v(\zeta) d\zeta = x'P(t)x \leqslant \int_0^t e^{-\xi\zeta} d\zeta\; x'Qx \tag{132}$$

et le théorème est démontré car (132) est valable pour $\forall x \in R^n - \{0\}$ et $\forall t \geqslant 0$.

<u>Corollaire II-8</u>. La solution de (123) satisfait

$$\frac{Q}{\mu} \leqslant P \leqslant \frac{Q}{\xi} \qquad (\xi > 0) \tag{133}$$

<u>Démonstration</u> : immédiate à partir du théorème précédent

Nous devons noter que $\mu > 0$, $\forall\, Q > 0$ car A étant asymptotiquement stable H(Q) ne peut être semi définie négative, par contre il est facile de voir que $\xi > 0$ implique $Q \in \Delta(A)$. Il nous semble que c'est là la seule borne supérieure proposée pour la solution de l'équation de Lyapunov.

Enfin, comparons les résultats (borne inférieure) avec ceux donnés par (Kwon et Pearson [45]) qui est un des derniers articles sur le problème. Dans cet article nous trouvons

$$P \geqslant \frac{\lambda_{min}(Q)}{2 \cdot \|A\|} I \quad ; \qquad \|P\| \geqslant \frac{\|Q\|}{2 \cdot \|A\|} \tag{134}$$

Par une majoration supplémentaire (133) fournit

$$P \geqslant \frac{\lambda_{min}(Q)}{\mu} I \qquad \|P\| \geqslant \frac{\|Q\|}{\mu} \tag{135}$$

Or, c'est facile de montrer que

$$\mu \leqslant 2\,\theta(Q)\,\|A\| \tag{136}$$

donc (135) donnera au moins d'aussi bons résultats que (134) lorsque $\theta(Q) = 1$, c'est-à-dire lorsque $Q = qI$; $\forall q \in R^+$. Notons cependant que ce n'est pas le seul cas où nous obtiendrons de meilleurs résultats comme le montre l'exemple ci-dessous.

<u>Exemple II-6</u>. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(133) donne

$$0.184\ Q \leqslant P \leqslant 1.766\ Q$$

et (135) $P \geqslant 0.33I$; $\|P\| \geqslant 1.32$, tandis qu'avec (134) il vient $P \geqslant 0.24I$, $\|P\| \geqslant 0.97$.

Appliquons ce résultat à l'équation de Riccati (118)

$$(A+\sigma I)'P^o + P^o(A+\sigma I) - P^o BR^{-1}B'P^o + Q = 0 \tag{137}$$

Dérivant cette équation par rapport à σ il vient

$$(A-BR^{-1}B'P^o + \sigma I)'\,\frac{dP^o}{d\sigma} + \frac{dP^o}{d\sigma}(A-BR^{-1}B'P^o+\sigma I) + 2P^o = 0 \tag{138}$$

où $(A-BR^{-1}B'P^o+\sigma I)$ est asymptotiquement stable et $P^o > 0$ (Anderson et Moore [11]).

Sur cette dernière équation les résultats précédents fournissent (avec 137)

$$H(2P^o) = 2(Q + P^o BR^{-1}B'P^o) \tag{139}$$

et donc il vient

$$2\,\frac{P^o}{\mu} \leqslant \frac{dP^o}{d\sigma} \leqslant 2\,\frac{P^o}{\xi} \tag{140}$$

où

$$\mu = \max_x \frac{x'(Q+P^oBR^{-1}B'P^o)x}{x'P^ox}$$

$$\xi = \min_x \frac{x'(Q+P^oBR^{-1}B'P^o)x}{x'P^ox} \tag{141}$$

Notre proposition pour définir la fonction $f(\pi):R^N \longrightarrow R$ est la suivante : chaque sous système isolé a une commande qui minimise le critère quadratique

$$J_i = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\|x_i\|^2_{Q_i} + \|u_i\|^2_{R_i})dt = \frac{1}{2}\,x'_{i0}P_ix_{i0} \tag{142}$$

où P_i est la solution de l'équation de Riccati (92). Dès qu'arrive une perturbation, pour avoir la stabilité du système global on doit changer cette commande locale pour une autre qui minimise le critère quadratique modifié

$$J_i^o = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{2\sigma_i t}(\|x_i\|^2_{Q_i} + \|u_i\|^2_{R_i})dt = \frac{1}{2}\,x'_{i0}\,P_i^ox_{i0} \tag{143}$$

où P_i satisfait (118). Alors supposant σ_i faible nous pouvons développer J_i^o en série de Taylor autour de $\sigma_i = 0$. Se limitant au 1er ordre il vient

$$J_i^o - J_i \approx \frac{1}{2}\,x'_{i0}\,\frac{dP_i^o}{d\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i=0} \cdot x_{i0} \cdot \sigma_i \tag{144}$$

et d'après (140) nous pouvons écrire

$$\frac{\sigma_i}{\mu_i} \leqslant \frac{J_i^o - J_i}{J_i} \leqslant \frac{\sigma_i}{\xi_i} \tag{145}$$

Comme $P_i^o\Big|_{\sigma_i=0} = P_i$ alors nous pouvons facilement déterminer les paramètres μ_i et ξ_i pour obtenir les bornes du degré de sous-optimalite pour chaque sous-système isolé.

Nous proposons donc de choisir $f(\pi)$ comme une fonction linéaire de π de telle façon que la somme des bornes supérieures des degrés de sous-optimalité des sous-systèmes isolés soit minimale. D'après (145) :

$$f(\pi) = \sum_{i=1}^{N} C_i \pi_i \quad ; \quad C_i = \xi_i^{-1} \tag{146}$$

II-3-6. CONSIDERATIONS SUR LA CONVERGENCE DE L'ALGORITHME PROPOSE

Il est très difficile de déterminer la classe des systèmes interconnectés pour laquelle la convergence de l'algorithme antérieur pourra être assurée. Bien sûr, les résultats du théorème II-6. restent valables, fournissant, rappelons-le, un test à priori de non convergence.

Evidemment si l'ensemble J_i est vide alors le Théorème II-6. n'imposera aucune borne sur le rapport α_i/θ_i, cas que nous etudierons maintenant. Avant tout, il est aisé de voir que J_i est vide si et seulement si rang $(B_i) = n_i$ ce qui implique que B_i est une matrice carrée inversible (Bernussou et Géromel [14]).

Considérons alors $y_j \varepsilon R^{n_i}$ un vecteur propre normalisé ($\|y_i\| = 1$) de la solution de l'équation de Riccati (118) et soit λ_j la valeur propre associée. Si on multiplie cette équation à gauche et à droite par y_j nous obtenons

$$\lambda_j^2 (y_j' B_i R_i^{-1} B_i' y_j) - 2\lambda_j (y_j' A_i^S y_j + \sigma_i) - y_j' Q_i y_j = 0 \qquad j=1\ldots n_i \tag{147}$$

lorsque $\sigma_i \longrightarrow +\infty$, comme $\lambda_j > 0 \quad j=1\ldots n_i$, nous avons

$$\lambda_j \longrightarrow 2\,\frac{y_j' A_i^S y_j + \sigma_i}{y_j' B_i R_i^{-1} B_i' y_j} \qquad j=1\ldots n_i \tag{148}$$

Considerons $\lambda_M = \max_j \lambda_j$ et $\lambda_m = \min_j \lambda_j$, d'après (148) il vient

$$\lim_{\sigma_i \to \infty} \frac{\lambda_M}{\lambda_m} = \frac{y_m' B_i R_i^{-1} B_i' y_m}{y_M' B_i R_i^{-1} B_i' y_M} \tag{149}$$

Finalement comme par hypothèse $\text{rang}(B_i) = n_i$ et $R_i > 0$ alors $B_i R_i^{-1} B_i' > 0$ et nous pouvons reécrire (149) sous la forme

$$\lim_{\sigma_i \to \infty} \theta_i(P_i^o) \leqslant \theta_i(B_i R_i^{-1} B_i') < \infty \qquad i=1\ldots N \tag{150}$$

Alors il est évident que la condition de stabilité donnée par le lemme II-6. sera vérifiée lorsque $\sigma_i \longrightarrow +\infty$ car $\theta_i(P_i^o)$ admet une borne supérieure finie. Hors de ce cas particulier considéré, il n'est pas possible d'établir une borne supérieure finie pour $\theta_i(P_i^o)$ car $\theta_i(B_i R_i^{-1} B_i') = \infty$, néanmoins en utilisant le résultat du Théorème II-6. nous pouvons dire que $\sigma_i + \alpha_i \leqslant \pi_i^C \cdot \theta_i$. Alors s'il existe au moins un paramètre π_i^* solution du problème (109) tel que $\pi_i^* > \pi_i^C$, l'algorithme proposé ne convergera pas. Donc,nous devons introduire cette contrainte sur le problème (109) et on obtient alors

$$\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{\pi, Y} C'\pi & \\ \{H_M - \text{dag}(\pi_1, \ldots, \pi_N)\}\, Y \leqslant 0 & \\ \qquad\qquad Y \geqslant \varepsilon & \\ 0 \leqslant \pi_i \leqslant \pi_i^C & i/\text{rang}(B_i) < n_i \\ 0 \leqslant \pi_i & i/\text{rang}(B_i) = n_i \end{array}\right. \tag{151}$$

Si ce problème admet au moins une solution alors les etapes suivantes de l'algorithme devant être faites pour essayer de satisfaire pour chaque sous-système la condition de stabilité.

Par contre, s'il n'admet pas de solution alors l'algorithme ne convergera pas. Heureusement, comme dans le Théorème II-6. le test de non convergence est donné par la matrice

$$\tilde{H}_\pi = \tilde{H} - \text{diag}\,(\pi_1^C, \ldots) \tag{152}$$

où $\tilde{H}$ est obtenue en enlevant de H toutes les lignes et les colonnes correspondantes aux sous-systèmes tels que $\text{rang}(B_i) = n_i$. Si $\tilde{H}_\pi$ ne satisfait pas les conditions de Sevastyanov-Kotelyanski alors l'algorithme ne convergera pas.

II-4. CONCLUSION

L'outil "fonction de Lyapunov vectorielle" est connu comme étant un outil relativement simple dans son utilisation (du moins en ce qui concerne son principe) mais il donne en général des conditions relativement sévères pour l'analyse de la stabilité des systèmes complexes.

Nous nous sommes attachés dans la première partie de ce chapitre à voir comment il était possible, dans le classe des systèmes interconnectés linéaires invariants, d'améliorer les résultats fournis par son application. En effet, si le principe de la méthode de Lyapunov est bien connu, rien à notre connaissance n'avait été fait pour le cas vectoriel, pour guider dans le choix des fonctions de Lyapunov scalaires associées à chaque sous-système. Or, bien sûr la qualité des résultats obtenus dépend, tout comme dans le cas scalaire, de ce choix.

Nous avons proposé ici un problème d'optimisation paramétrique portant sur une matrice de l'équation de Lyapunov et dont la solution permet de tenter de construire un système de comparaison fournissant des conditions de stabilité aussi peu restrictives que possible.

Il n'en reste pas moins que même avec cette amélioration l'approche "fonction de Lyapunov vectorielle" souffre de désavantages qui en fait paraissent inévitables. Ils sont principalement dûs au fait que cette approche provoque une perte d'information relativement grande au niveau des termes d'interconnexion qui sont finalement représentés pour leurs normes. Cette perte d'information fait, en particulier, qu'à un système de comparaison on peut associer (transformation inverse) une vaste classe de systèmes interconnectés. Cela a été utilisé pour montrer les limitations d'une telle méthode fournissant par exemple des testes "a priori" nous permettant d'éliminer surement les problèmes où une telle approche se révèle inopérante.

Au vu des résultats obtenus nous avons discuté du problème de la stabilisation par régulation décentralisée (toujours dans le cadre de l'application de la méthode de Lyapunov) ainsi que dans une deuxième partie du problème d'analyse et synthèse sous perturbations structurelles.

Le dernier problème a fait l'objet de nombreuses publications. Pour la stabilisation sous perturbations de structure, le principe est simple, il s'agit d'augmenter la "rigidité" de chaque commande locale (degré de stabilité) pour atteindre la satisfaction des tests de stabilité. Nous avons proposé une méthode pour le choix de ces degrés de stabilité en essayant de conserver un degré de sous optimalité satisfaisant.

Si les résultats obtenus sont encore relativement "conservatifs" à la décharge d'une telle méthode nous disons que, outre sa simplicité, elle nécessite un effort numérique raisonnable, ce qui est aussi un caractère non négligeable lorsque on la compare à d'autres techniques existantes.

C H A P I T R E III

DECENTRALISATION : COMMANDE ET ESTIMATION

III-1. INTRODUCTION

Depuis quelques années on a pu noter un souci dans le développement d'outils mathématiques pour le traitement de systèmes de grande dimension du point de vue de leur optimisation. Parmi eux, on peut citer le développement des outils de calcul hiérarchisé, l'utilisation de la théorie de la dualité, le traitement pour quelques problèmes particuliers des matrices "épar - ses".

Nous nous intéresserons plus particulièrement dans ce chapitre aux problèmes d'optimisation dynamique : systèmes linéaires-critère quadratique. Sans vouloir entrer dans une longue discussion (déjà largement développée et depuis longtemps) sur la justification d'une telle formalisation (Athans [5]), disons que leur solution conduit à une structure en boucle fermée.

Dans le cas des systèmes de grande dimension le calcul de la commande optimale nécessite la résolution d'une équation (différentielle ou algébrique) matricielle non linéaire qui fait intervenir des matrices de dimension n x n, n étant l'ordre du système à commander. Cette tâche devient de plus en plus ardue à mesure que la taille du système croît. De plus sa mise en place (en boucle fermée) nécessite une centralisation de toutes les informations (état, état estimé, etc.) ce qui peut être une contrainte très dure dans certains cas (systèmes interconnectés).

Dans le cas des systèmes interconnectés, les méthodes de calcul hiérarchisé peuvent permettre une décentralisation des calculs (Lasdon [16]) généralement avec l'hypothèse de séparabilité du critère. Parmi les méthodes envisageables citons celles s'appuyant sur la théorie de la dualité (coordination par le critère-méthode non admissible) (Tamura [60]) et celles qualifiées de méthodes mixtes (coordination par le critère et par le modèle) (Takahara [61] , Titli [62]). L'inconvénient de telles méthodes est qu'elles ne permettent qu'une implantation en boucle ouverte de la commande générée, ce qui pose le problème, bien classique, de sensibilité vis à vis de variations du modèle ou de perturbations.

Il est donc naturel d'envisager un compromis entre optimalité et faisabilité pratique. Nous verrons que dans le cas des systèmes interconnectés un tel compromis peut être satisfait par le choix d'une structure décentralisée de commande.

La détermination d'une telle commande peut être résolue par la solution d'un problème d'optimisation sous contrainte de structure. Ces problèmes nous semblent avoir une importance pratique réelle du fait des inévitables contraintes techniques et technologiques qui se posent au moment de la réalisation.

La littérature fournit déjà un certain nombre d'exemples résolus d'optimisation sous contrainte structurelle. La première contribution a été faite par Levine et Athans [47] avec le problème de la commande optimale par retour de sortie-critère quadratique-horizon infini. Dans [42] Kleimnan et Athans ont résolu le problème de la commande sur horizon fini dans le cas où les moyens de son implémentation sont fixes a priori (encombrement mémoire). Dans le cadre de la commande stochastique, Johnson et Athans [39] ont résolu le problème de la commande optimale à compensateur dynamique de dimension définie a priori (voir aussi Chong et Athans [20] et Cohen [19]).

Il faut noter que pour tous ces problèmes, les conditions nécessaires d'optimalité sont extrêmement difficiles à résoudre numériquement. Dans [1] , Anderson et Moore ont discuté des propriétés de convergence des algorithmes proposés pour finalement conclure que cette convergence ne pouvait être assurée a priori.

Kosut [43] a repris le problème de commande par la sortie introduisant certaines approximations (aux justifications heuristiques) qui permettent l'obtention d'une solution écrite directement sous forme analytique mais qui n'assure pas la stabilité du système. Citons encore Anderson et Moore [1] pour lesquels la commande était contrainte à être du type P.I.D..

Le but de ce chapitre est de fournir une généralisation des études précédentes au cas de systèmes de grande dimension (interconnectés). La solution des problèmes sera conduite par le

biais de la programmation mathématique étendue au problème matriciel, comme il a été proposé initialement par Athans [6] .

Dans une première partie (la plus longue) nous nous interesserons au problème de la commande décentralisée. Après une mise en place des outils mathématiques nécessaires (matrices gradient-projection) nous proposerons un algorithme pour la détermination d'une commande décentralisée (Geromel et Bernussou [35]). Nous étudierons ses conditions de convergence et montrerons qu'il permet l'obtention d'une commande stabilisante. L'estimation du degré de sous optimalité sera proposé dans le cas d'un critère quadratique a horizon infini.

Il sera montré comment obtenir la commande à partir d'une structure de calcul à deux niveaux et le problème de l'indépendance de la commande vis à vis des conditions initiales sera abordée. Un problème plus complexe sera traité à la fin de cette partie où à côté des contraintes structurelles figureront des contraintes de type "instantané".

La deuxième partie, plus succincte traitera de l'estimation d'état décentralisée (filtre de Kalman) et pour une classe de systèmes linéaires nous améliorerons les résultats proposés en [56] par Sanders et al.

III-2. La Commande Décentralisée

Les systèmes considérés sont les systèmes dits interconnectés, c'est-à-dire des systèmes constitués d'un ensemble de sous-systèmes de dimension relativement réduite, et liés au moyen d'une structure d'interconnexion. Le choix d'une structure décentralisée de la commande c'est-à-dire d'une structure faite de N (nombre de sous-systèmes) organes de commande locaux utilisant les seules informations disponibles au niveau de chaque sous-système, peut se justifier par le fait que le coût de transfert de l'information devient prohibitif pour l'implantation d'une commande de type centralisée (dans l'hypothèse où cette dernière serait possible à déterminer).

Davison et Rau [22] ont traité du problème par la méde Rosenbrock [53] qui consiste en une évaluation expérimentale de l'accroissement de la fonction objectif sur des directions définies (Hill climbing method). Il est à noter qu'une telle approche nécessite un grand nombre de fois l'évaluation de la fonction objectif ce qui est une très lourde charge. Dans [63] Wang a proposé une méthode itérative pour résoudre les conditions d'optimalité, enfin une application a été proposée par Elgerd et Fosha [26] dans le cas des réseaux d'énergie électrique.

Dans ce paragraphe nous allons proposer un algorithme pour la détermination des matrices de gain pour une structure décentralisée de commande. Auparavant, nous allons adapter au cas du calcul matriciel, certaines méthodes connues de programmation mathématique, suivant en cela, les travaux de Athans [6]. Cette approche nous permettra de traiter aisément, comme nous le verrons, des problèmes à contraintes "multiples", ce qui était quasiment impossible d'envisager à partir des méthodes utilisées dans les articles cités précédemment.

III-2-1. DEFINITIONS - REMARQUES PRELIMINAIRES

Par la suite nous dénoterons $\Lambda(A)$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice $A \in R^{nxn}$. La matrice A est asymptotiquement stable si et seulement si $\Lambda(A) \subset C^-$.

Nous appellerons $\Omega(S)$ l'ensemble des matrices bloc-diagonales.

$$\Omega(S) = \left\{ k/k = \text{bloc diag}(k_1, \ldots, k_N),\ k_i \in R^{m_i x n_i} \quad i=1 \ldots N \right\} \quad (1)$$

Une telle notation sera évidemment utilisée pour caractériser l'ensemble de commande décentralisée d'un système S constitué de l'interconnexion d'un nombre N de sous systèmes de dimension n_i respectivement, la dimension de la commande locale associée à chaque sous système étant m_i.

Soit $\psi(.)$ l'application qui à tout matrice $X \varepsilon R^{mxn}$ (dimension m x n) fait correspondre un vecteur $x \varepsilon R^{(n.m)}$ (dimension (m.n x 1))

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & & \\ x_{m1} & & & x_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\psi} x = \psi(X) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Cette application possède les propriétés suivantes (Athans 16)

P1 - $\psi(.)$ est une application linéaire

P2 - $\psi(.)$ est inversible

P3 - $\psi(.)$ préserve le produit scalaire, le produit scalaire de deux matrices A, $B \varepsilon R^{mxn}$ étant défini par $(A,B)=Tr(A'B)$

Les propriétés P1 et P2 sont évidentes, quant à la propriété P3 elle est aisément vérifiable et

$$\langle \psi(A), \psi(B) \rangle = (A,B)=Tr(A'B)= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \quad (3)$$

La quantité

$$\|A\| = \{Tr(A'A)\}^{1/2} = \{\psi(A)'\psi(A)\}^{1/2} = \|\psi(A)\| \quad (4)$$

est dite norme euclidienne de A. Cette norme ne possède (malheureusement) pas la propriété suivante : $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$, par contre on vérifie aisément que $Tr(A'B) \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Par la suite nous faisons un usage intensif de dérivées matricielles (gradient matriciel de fonctions scalaire) : soit f(X) une fonction scalaire d'une matrice $X \varepsilon R^{mxn}$, nous définissons la matrice gradient df(X)/dX comme suit

$$\frac{df(X)}{dX} = \left\{ \frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}} \quad ; \quad i=1...m \ , \ j=1...n \right\} \quad (5)$$

<u>Lemme III-1</u>.(Généralisation, Kleimnan 14). Soit $f(X) : R^{mxn} \longrightarrow R$ telle que $f(X+\varepsilon\delta X)=f(X)+\varepsilon Tr\{M(X).\delta X\}$ quand $\varepsilon \to 0$ alors

$$\frac{df(X)}{dX} = M(X)' \tag{6}$$

Démonstration : par définition

$$\frac{df(X)}{dX} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial X_{ij}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(X+\varepsilon e_i e_j') - f(X)}{\varepsilon} \right), \quad i=1\ldots m, j=1\ldots n \right\} \tag{7}$$

où e_i est la ième ligne de la matrice unité. D'après l'hypothèse du lemme il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} = \mathrm{Tr}\left\{ M(X).e_i e_j' \right\} = m(X)_{ji} \qquad \forall i,j \tag{8}$$

III-2-2. GRADIENTS MATRICIELS. PROBLEMES DYNAMIQUES

Dans le chapitre II nous avons présenté une méthode qui permettait le calcul de la dérivée matricielle d'une fonction composée, et ce, dans le cas de contraintes statiques. Nous allons ici étendre ce résultat au cas de contraintes dynamiques et faire sur quelques exemples l'illustration de l'intérêt (rapidité, facilité) d'une telle méthode (Bernussou et Géromel [13]).

Soit

$$J(k) = \int_0^T f(X(t),k)dt + g(X(T)) \tag{9}$$

avec $\dot{X}(t) = F(X(t),k)$, $X(0)=X_0$ où $X(t)$ et k sont des matrices de dimensions appropriées.

THEOREME III-1. La dérivée matricielle de $J(k)$ par rapport à k s'exprime par

$$\frac{dJ(K)}{dk} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial k} H(X,\Lambda,k)dt \tag{10}$$

où $H(X,\Lambda,k) = f(X,k) + \mathrm{Tr}\left\{ \Lambda' F(X,k) \right\}$. X et Λ étant les solutions fournies par les conditions de stationnarité

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial X} + \dot{\Lambda} = 0 & \Lambda(T) = \dfrac{dg}{dX(T)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \Lambda} - \dot{X} = 0 & X(0) = X_0 \end{cases} \tag{11}$$

<u>Démonstration</u> : Elle s'inspire de celle du théorème qui traite le cas statique mais elle présente un niveau de complexité supérieur. C'est la raison pour laquelle elle est reprise ici.

Nous supposerons que f, g et les composantes de F sont des fonctions dérivables de leurs arguments. Tout d'abord

$$\begin{aligned} J(k+\varepsilon\delta k) &= \int_0^T f(X+\varepsilon\delta X, k+\varepsilon\delta k)\,dt + g(X(T)+\varepsilon\delta X(T)) \\ &= J(k) + \varepsilon\int_0^T \mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial f}{\partial X}'.\delta X\right\} + \mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial f}{\partial k}'.\delta k\right\}dt + \\ &\quad + \varepsilon\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{dg'}{dX(T)}\ \delta X(T)\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

de plus $\dot{X}+\varepsilon\delta\dot{X} = F(X+\varepsilon\delta X, k+\varepsilon\delta k)$ avec $X(0)=X_0$ et $\delta X(0)=0$, ce qui sur les composantes de $\delta\dot{X}$ s'écrit

$$\delta\dot{X}_{ij} = \mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial X}\right)'\delta X\right\} + \mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial k}\right)'\delta k\right\} \quad ; \quad \delta X_{ij}(0)=0 \tag{13}$$

Les conditions de stationnarité (11) s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial X} + \dfrac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}\{\Lambda' F(X,k)\} + \dot{\Lambda} = 0 & \Lambda(T) = \dfrac{dg}{dX(T)} \\ F(X,k) - \dot{X} = 0 & X(0) = X_0 \end{cases} \tag{14}$$

Le but ultime est d'exprimer dans (12) l'accroissement $\delta J(k)$ en fonction de δk uniquement, c'est-à-dire, d'éliminer les termes en δX et $\delta X(T)$. Tout d'abord, multipliant (14) par $\delta X'$ et prenant la trace il vient

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial X}'.\ \delta X\right) + \mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(\Lambda' F)\right)'\delta X\right\} + \mathrm{Tr}(\dot{\Lambda}'\delta X) = 0 \tag{15}$$

soit, intégrant (15)

$$\int_0^T \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial X}'.\delta X\right)dt + \int_0^T \mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(\Lambda' F)\right)'\delta X\right\}dt +$$

$$+ \mathrm{Tr}(\Lambda'\delta X)\Big|_0^T - \int_0^T \mathrm{Tr}(\Lambda'\delta\dot{X})dt = 0 \qquad (16)$$

Sachant que $\delta X(0) = 0$ et $\Lambda(T) = dg/dX(T)$ nous avons

$$\int_0^T \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial X}'.\delta X\right)dt + \mathrm{Tr}\left\{\frac{dg'}{dX(T)}\ .\ \delta X(T)\right\} =$$

$$= \int_0^T \mathrm{Tr}\left\{\Lambda'\delta\dot{X} - \left(\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(\Lambda' F)\right)'\delta X\right\}dt \qquad (17)$$

Regardons maintenant comment se transforme l'expression sous le signe intégrale du second membre de (17)

$$\mathrm{Tr}(\Lambda'\delta\dot{X}) = \sum_i \sum_j \Lambda_{ij}\ \delta\dot{X}_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_j \left\{\Lambda_{ij}\ \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial F'_{ij}}{\partial X}\ \delta X\right) + \Lambda_{ij}\ \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial F'_{ij}}{\partial k}\ \delta k\right)\right\}$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\sum_i \sum_j \Lambda_{ij}F_{ij}\right)'\delta X\right\} + \mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial}{\partial k}\left(\sum_i \sum_j \Lambda_{ij}F_{ij}\right)'\ \delta k\right\} \qquad (18)$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(\Lambda' F)\right)'\delta X\right\} + \mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial k}\mathrm{Tr}(\Lambda' F)\right)'\delta k\right\}$$

A partir de (12), (17) et (20) il vient

$$J(k+\varepsilon\delta k) = J(k) + \varepsilon\int_0^T \mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial k} + \frac{\partial}{\partial k}\mathrm{Tr}(\Lambda' F)\right)'\delta k\right\}dt \qquad (19)$$

Soit

$$J(k+\varepsilon\delta k) = J(k) + \varepsilon\,\mathrm{Tr}\left\{\int_0^T \frac{\partial}{\partial k}H(X\ ,\ \Lambda, k)'dt.\ \delta k\right\} \qquad (20)$$

et donc, usant du lemme III-1. il vient

$$\frac{dJ(k)}{dk} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial k}H(X\ ,\Lambda, k)\ dt \qquad (21)$$

Corollaire III-1. (Cas direct). Soit la fonction

$$J(k) = \sum_{t=0}^{T-1} f(X_t,k) + g(X_T) \tag{22}$$

et $X_{t+1} = F(X_t,k)$ avec X_0 comme condition initiale. La dérivée $dJ(k)/dk$ s'exprime par

$$\frac{dJ(k)}{dk} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\partial}{\partial k} H(X_t, \Lambda_t, k) \tag{23}$$

où $H(X_t, \Lambda_t, k) = f(X_t,k) + Tr\left\{\Lambda_t'(X_t,k)\right\}$. X_t et Λ_t étant fournies par les conditions de stationnarité :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial X_t} - \Lambda_{t-1} = 0 & t=(T-1)\ldots 1 \quad ; \quad \Lambda(T-1) = \dfrac{d\,g}{dX(T)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \Lambda_t} - X_{t+1} = 0 & t=0\ldots(T-1) \quad ; \quad X_0 \end{cases} \tag{24}$$

Remarque : Nombre de problèmes de commande peuvent se ramener à des problèmes d'optimisation paramétrique. Ces problèmes présentent une complexité assez grande du fait que la fonction à optimiser dépend de façon relativement complexe des paramètres (dépendance du critère, dépendance des trajectoires, etc.). Le théorème précédent permet l'obtention formelle simplifiée de la matrice gradient, en s'affranchissant par exemple de la détermination directe de la dépendance des trajectoires par rapport aux paramètres. Par exemple, même dans le cas linéaire quadratique (Levine et Athans |47|),horizon infini, le calcul de la matrice gradient directement par utilisation du Lemme III-1. demande un volume de calculs non négligeable. Le théorème précédent permet d'envisager des problèmes plus complexes et généraux (ex : systèmes non linéaires).

III-2-3. EXEMPLES DE CALCUL DE MATRICES GRADIENT

Traitons tout d'abord du cas continu, critère quadratique, système linéaire invariant, commande fonction linéaire de l'état

l'état

$$\begin{cases} f(.) = \int_0^T (x'Qx+u'Ru)dt + x(T)'Sx(T) \\ \dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad u = -kx \end{cases} \tag{26}$$

Q, R et S sont des matrices symétriques. Le problème est la détermination de la matrice gradient df/dk. Avec $X(t)=x(t)x(t)'$, (26) s'écrit

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_0^T Tr\{(Q+k'Rk)X(t)\}dt + Tr\{SX(T)\} \\ \dot{X}(t) &= (A-Bk)X(t) + X(t)(A-Bk)' \quad ; \quad X(0) = X_0 \end{aligned} \tag{27}$$

La fonction H(.) du théorème III-1. s'écrit

$$H(X,P,k) = Tr\{(Q+k'Rk)X\}+Tr\{P'[(A-Bk)X+X(A-Bk)']\} \tag{28}$$

Les conditions de stationnarité par rapport à X et P (11) donnent

$$\begin{cases} Q+k'Rk+(A-Bk)'P+P(A-Bk)+\dot{P} = 0 & P(T)=S \\ (A-Bk)X+X(A-Bk)'-\dot{X} = 0 & X(0)=X_0 \end{cases} \tag{29}$$

et finalement, P(t) étant symétrique

$$\frac{df}{dk}(k) = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial k}(X,P,k)dt = 2\int_0^T (Rk-B'P(t))X(t)dt \tag{30}$$

Pour l'horizon infini ($T \longrightarrow \infty$) ; $P(t) = P(k)$ constante et

$$\frac{df}{dk}(k) = 2(Rk-B'P(k))\int_0^\infty X(t)dt \tag{31}$$

c'est-à-dire

$$\frac{df}{dk}(k) = 2\{Rk-B'P(k)\}\ V(k) \tag{32}$$

où

$$\begin{cases} (A-Bk)'P(k)+P(k)(A-Bk)+Q+k'Rk = 0 \\ (A-Bk)V(k)+V(k)(A-Bk)'+X_0 = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Nous avons supposé dans les calculs précédents que (A-Bk) était asymptotiquement stable. Le cas discret s'exprime par

$$\begin{cases} f(.)=\sum_{t=0}^{T-1} (x_t'Qx_t+u_t'Ru_t)+x_T'Sx_T \\ x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \quad , \quad u_t = - k\, x_t \end{cases} \tag{34}$$

ce qui avec $X_t = x_t x_t'$ s'écrit

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_{t=0}^{T-1} \mathrm{Tr}\,\{(Q+k'Rk)X_t\} + \mathrm{Tr}\,\{SX_T\} \\ X_{t+1} &= (A-Bk)X_t(A-B_k)' \quad , \quad X_0 \end{aligned} \tag{35}$$

De manière similaire au cas continu

$$H(X_t,P_t,k) = \mathrm{Tr}\,\{(Q+k'Rk)X_t\} + \mathrm{Tr}\{P'[(A-Bk)X_t(A-Bk)']\} \tag{36}$$

et du corollaire III-1, il vient

$$\frac{df}{dk}(k)=\sum_{t=0}^{T-1} \frac{\partial}{\partial k} H(x_t,P_t,k)=2\sum_{t=0}^{T-1} \left\{ Rk-B'P_t(A-Bk)\right\} X_t \tag{37}$$

où X_t et P_t sont solution de

$$\begin{cases} Q + k'Rk + (A-Bk)'P_t(A-Bk) - P_{t-1} = 0 & P_{T-1}=S \\ (A-Bk)X_t(A-Bk)' - X_{t+1} = 0 & X_0 \end{cases} \tag{38}$$

Pour un horizon infini, avec (A-Bk) asymptotiquement stable il vient

$$\frac{df(k)}{dk} = 2\left\{Rk - B'P(k)(A-Bk)\right\} V(k) \tag{39}$$

où V(k) et P(k) sont solution des deux équations de Lyapunov

$$\begin{cases} (A-Bk)'P(k)(A-Bk) - P(k) + Q + k'Rk = 0 \\ (A-Bk)V(k)(A-Bk)' - V(k) + X_0 = 0 \end{cases} \tag{40}$$

<u>Remarque</u> : Il est à noter que dans les deux cas continu et discret, pour l'horizon fini, l'obtention de la matrice gradient dépend essentiellement de l'intégration de deux équations (différentielles ou aux différences) de Lyapunov découplées, l'une d'entre elle devant se faire à rebours (P). Dans le cas où la place mémoire poserait certain problème, il est possible d'intégrer au préalable, à rebours l'équation sur P afin de calculer la condition initiale P_0 pour ensuite intégrer, conjointement P_t et X_t dans le même sens.

Dans le cas de l'horizon infini, le problème dépend essentiellement de la possession d'un algorithme bien adapté à la résolution d'équation de Lyapunov. Un de ceux qui nous paraissent le plus performant a été récemment fourni dans (Hoskins et al [38]).

III-2-4. <u>PROBLEME DE PROJECTION DU GRADIENT MATRICIEL</u>

Dans la classe des méthodes primales pour les problèmes d'optimisation, les méthodes dites de "gradient projeté" sont très importantes dans le cas de contraintes linéaires. Le principe de ces méthodes est simple : à partir d'une solution initiale satisfaisant les contraintes on détermine une direction de progression qui doit générer d'autres points satisfaisants également les contraintes ("feasible direction"), avec décroissance de la fonction objectif. Dans cette classe de méthodes, seules

sont testées les conditions nécessaires d'optimalité (Kuhn-Tucker), conditions qui sont également suffisantes pour la classe des problèmes convexes.

Parmi les méthodes de projection citons celle de Rosen [55] où l'opérateur projection est déterminé de manière analytique et Zoutendijk [66] où le problème de projection est résolu au moyen d'un programme linéaire. Nous proposons ici la résolution du problème de projection au moyen de la définition d'un problème d'optimisation quadratique strictement convexe pour lequel les méthodes duales sont particulièrement bien adaptées.

Considérons le problème général suivant

$$\min_{X \in \mathcal{X}} \; f(X) \quad \text{sous} \quad C(X) = C_0 \tag{41}$$

où f(.) est une fonction différentiable de ses arguments, C(.) une fonction linéaire telle que C(0) = 0, et

$$\mathcal{X} = \left\{ X \in R^{mxn} / \underline{X} \leqslant X \leqslant \overline{X} \right\} \tag{42}$$

Supposons que X est une condition initiale : $X \in \mathcal{X}$ $C(X) = C_0$ telle que le gradient $df(X)/dX$ est non nul. Le problème est alors de trouver une direction $D \in R^{mxn}$ telle qu'il existe un pas $\alpha > 0$ et $f(X-\alpha D) < f(X)$.

Définissons les ensembles d'indices

$$\begin{aligned} I(X) &= \left\{ (i,j) / X_{ij} = \underline{X}_{ij} \right\} \\ J(X) &= \left\{ (i,j) / X_{ij} = \overline{X}_{ij} \right\} \end{aligned} \tag{43}$$

Une matrice D peut être obtenue par solution du problème

$$\min_{D \in D(X)} \; \frac{1}{2} \left\| \frac{df}{dX} - D \right\|^2 \quad \text{sous} \quad C(D) = 0 \tag{44}$$

où $D(X) = \left\{ D \in R^{mxn} / D_{ij} \leqslant 0 \;\; (i,j) \in I(X) \;\; ; \; D_{ij} \geqslant 0 \;\; (i,j) \in J(X) \right\}$

Il est possible de fournir une interprétation géométrique du problème (44) à partir de l'opérateur $\psi(.)$ introduit au paragraphe III-2-1. Soit $d = \psi(D)$ alors (44) s'écrit

$$\min_{d \varepsilon \psi(D(X))} \frac{1}{2} \left\| \psi\left(\frac{df}{dX}\right) - d \right\|^2 \quad \text{sous} \quad C_\psi(d) = 0 \qquad (45)$$

Dans la figure III-1., Γ est le sous espace linéaire de R^{mxn} défini par les contraintes $C_\psi(d) = 0$ et $d \varepsilon \psi(D(X))$. d est donc le vecteur de Γ minimisant la distance entre les points $Z \varepsilon \Gamma$ et $y = \psi(X) + \psi(\frac{df}{dX})$.

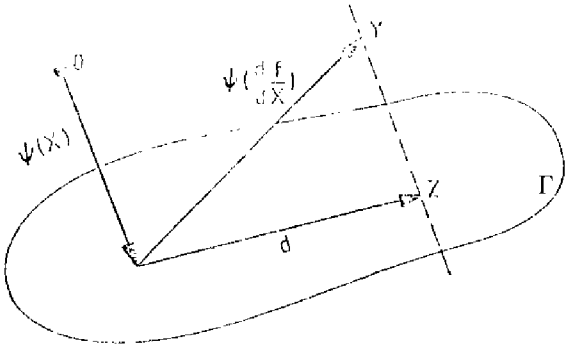


Figure III-1. Interprétation géométrique de (45)

S'il est intéressant de considérer le problème vectoriel (45) pour une interprétation géométrique il en va tout autrement pour la solution du problème de départ. La raison essentielle vient du fait qu'il est pénible dans la plupart des cas de déterminer la contrainte $C_\psi(d)$ à partir de $C(D)$. Par exemple à $C(D) = ADB = 0$ avec $A \varepsilon R^{rxm}$, $B \varepsilon R^{nxq}$ correspond une matrice $C_\psi \varepsilon R^{(r.q)x(m.n)}$ telle que $C_\psi \psi(D) = 0$, dont la détermination est assez difficile.

Il est bien plus intéressant de considérer directement le problème matriciel (44) qui peut être résolu au moyen de la méthode duale. Soit Y la matrice des variables duales associée

à la restriction $C(D) = 0$. Alors la solution de (44) s'effectue par

$$\max_{\gamma} \phi(\gamma) \tag{46}$$

où $\phi(\gamma)$ est la fonction duale définie par

$$\phi(\gamma) = \min_{D \in D(X)} L(D,\gamma) \tag{47}$$

avec $L(D,\gamma)$ est la fonction lagrangienne définie par

$$L(D,\gamma) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left\{ \left(\frac{df}{dX} - D\right)' \left(\frac{df}{dX} - D\right) \right\} + \operatorname{Tr} \left\{ \gamma' C(D) \right\} \tag{48}$$

Le lagrangien étant une fonction strictement convexe par rapport à D, la fonction duale $\phi(\gamma)$ (46) est différentiable, sa matrice gradient $d\phi/d\gamma$ peut être aisément obtenue par application du lemme de dérivation matricielle III-1.. L'obtention de D est donc un problème relativement simple. Montrons maintenant que pour $D \neq 0$, $\exists\, \alpha > 0$ telle que $f(X-\alpha D) < f(D)$.

Par un développement limité au premier ordre autour de $\alpha = 0$ de $f(X-\alpha D)$ il vient

$$f(X-\alpha D) = f(X) - \alpha \operatorname{Tr} \left\{ \frac{df'}{dX} \cdot D \right\} \tag{49}$$

la solution D du problème (44) est bien évidemment telle que

$$\left\| \frac{df}{dX} - D \right\|^2 < \left\| \frac{df'}{dX} \right\|^2 \tag{50}$$

ce qui fournit

$$\operatorname{Tr} \left\{ \frac{df'}{dX} \cdot D \right\} \geqslant \frac{1}{2} \|D\|^2 > 0 \tag{51}$$

et donc il existe bien un $\alpha > 0$ tel que $f(X-\alpha D) < f(X)$ lorsque $D \neq 0$. $D = 0$ correspond à un minimum local du problème (41). Nous allons, dans ce qui suit, développer trois problèmes de projection qui nous seront utiles pour la suite du travail

1er cas :

$$\min_{D} \frac{1}{2} \left\| \frac{df}{dX} - D \right\|^2 \quad \text{sous} \quad GDH = 0 \tag{52}$$

Les matrices G et H sont des matrices de dimension appropriée et de rang plein. Soit Υ la matrice des variables duales associées à la contrainte, alors

$$L(D,\Upsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left\{ \left(\frac{df}{dX} - D\right)' \left(\frac{df}{dX} - D\right) \right\} + \operatorname{Tr} \left\{ \Upsilon' GDH \right\} \tag{53}$$

les conditions de stationnarité s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial D} &= D - \frac{df}{dX} + G'\Upsilon H' = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Upsilon} &= GDH = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

qui admettent une solution unique

$$\begin{cases} \Upsilon^* = (GG')^{-1} G \dfrac{df}{dX} H(H'H)^{-1} \\ D^* = \dfrac{df}{dX} - G'(GG')^{-1} G \dfrac{df}{dX} H(H'H)^{-1} H' = \Pi_{\Sigma}\left(\dfrac{df}{dX}\right) \end{cases} \tag{55}$$

où Π_{Σ} est l'opérateur projection sur le sous ensemble Σ défini par $GDH = 0$

$$\Pi_{\Sigma}(.) = (.) - G'(GG')^{-1} G(.) H(H'H)^{-1} H' \tag{56}$$

La solution obtenue dans ce cas une généralisation au cas matriciel de celle proposée par Rosen [55] dans le cas vectoriel. L'unicité de la solution découle de l'inversibilité des matrices (GG') et (H'H) qui est une conséquence de l'hypothèse faite sur le rang des matrices G et H.

2ème cas :

$$\min_{D \in D(X)} \frac{1}{2} \left\| \frac{df}{dX} - D \right\|^2 \tag{57}$$

où D(X) est un domaine défini par des contraintes linéaires d'inégalité $D(X) = \{ D \in \mathbb{R}^{m \times n} ; D_{ij} \leqslant 0 \ (i,j) \in I(X) \ ; \ D_{ij} \geqslant 0 \ (i,j) \in J(X) \}$ I(X) et J(X) sont définis en (43). Le lagrangien s'écrit

$$L(D,\gamma) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{df}{dX} - D\right)'\left(\frac{df}{dX} - D\right)\right\} + \mathrm{Tr}\left\{\gamma' D\right\} \qquad (58)$$

et les conditions d'optimalité

$$\begin{aligned} &D - \frac{df}{dX} + \gamma = 0 \quad ; \quad D \in D(X) \\ &\mathrm{Tr}\left\{\gamma' D\right\} = 0 \quad ; \quad \gamma \in \gamma(X) \end{aligned} \qquad (59)$$

où $\gamma(X)$ est défini par

$$\gamma(X) = \left\{ \gamma \in R^{mxn} / \begin{array}{ll} \gamma_{ij} \geqslant 0 & (i,j) \in I(X) \\ \gamma_{ij} \leqslant 0 & (i,j) \in J(X) \\ \gamma_{ij} = 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right. \qquad (60)$$

Comme précédemment (59) possède une solution analytique unique

$$\gamma^*_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \max\left(0, \frac{df}{dX_{ij}}\right) & (i,j) \in I(X) \\ \min\left(0, \frac{df}{dX_{ij}}\right) & (i,j) \in J(X) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right. \qquad (61)$$

et

$$D^*_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \min\left(0, \frac{df}{dX_{ij}}\right) & (i,j) \in I(X) \\ \max\left(0, \frac{df}{dX_{ij}}\right) & (i,j) \in J(X) \\ \frac{df}{dX_{ij}} & \text{ailleurs} \end{array} \right. \qquad (62)$$

d'où l'opérateur de projection

$$\Pi_D(.) = \left\{ \begin{array}{ll} \Pi_{ij} = \min\left(0, (.)_{ij}\right) & (i,j) \in I(X) \\ \Pi_{ij} = \max\left(0, (.)_{ij}\right) & (i,j) \in J(X) \\ \Pi_{ij} = (.)_{ij} & \text{ailleurs} \end{array} \right. \qquad (63)$$

3ème cas :

$$\min_{D \in \Omega(S)} \frac{1}{2} \left\| \frac{df}{dX} - D \right\|^2 \tag{64}$$

où $\Omega(S)$ est l'ensemble défini par les contraintes de décentralisation défini au paragraphe III-2-1.. Le lagrangien est celui écrit en (58) et les conditions d'optimalité

$$\begin{aligned} &D - \frac{df}{dX} + \Upsilon = 0 && D \in \Omega(S) \\ &\mathrm{Tr}\left\{ \Upsilon' D \right\} = 0 && \Upsilon \in \bar{\Omega}(S) \end{aligned} \tag{65}$$

où $\bar{\Omega}(S)$ est l'ensemble complémentaire de $\Omega(S)$ ($\Omega(S) \cup \bar{\Omega}(S) = R^{mxn}$ et $\Omega(S) \cap \bar{\Omega}(S) = \phi$). La solution des relations (65) fournit l'expression de l'opérateur de projection qui dans ce cas s'exprime par :

$$\Pi_{\Omega}(.) = \text{bloc diag}\left\{ (.)_1, \ldots, (.)_N \right\} \; ; \; (.)_i \in R^{m_i x n_i} \tag{66}$$

La projection sur l'ensemble de décentralisation consiste simplement à annuler dans l'expression du gradient matriciel les termes non bloc-diagonaux.

III-2-5. UN ALGORITHME PRIMAL POUR LE CALCUL DE LA COMMANDE DECENTRALISEE - OPTIMISATION AVEC HORIZON FINI

Le problème qui va être traité dans ce paragraphe est celui de la détermination d'une commande décentralisée optimisant un critère quadratique sur horizon fini. Nous considérons le système interconnecté décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + z_i \\ z_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j \qquad i=1\ldots N \\ x_i(0) = X_{i0} \end{cases} \tag{67}$$

$x_i \varepsilon R^{n_i}$, $u_i \varepsilon R^{m_i}$, la contrainte de décentralisation s'exprime par

$$u_i = - k_i x_i \qquad i=1...N \tag{68}$$

de plus, les matrices de contre réaction locales doivent satisfaire les contraintes

$$G_i k_i H_i = 0 \tag{69}$$

où $G_i \varepsilon R^{r_i x m_i}$ (rang $G_i = r_i \leqslant m_i$) et $H_i \varepsilon R^{n_i x q_i}$ (rang $H_i = q_i \leqslant n_i$). Le problème consiste en la minimisation de

$$f(.) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^T (x_i' Q_i x_i + u_i' R_i u_i) dt + x_i'(T) S_i x_i(T) \tag{70}$$

De manière globale le problème peut se formalier de la manière suivante :

$$\min_{k \varepsilon \Omega(S)} \int_0^T (x'Qx + u'Ru) dt + x'(T) S x(T)$$

$$\dot{x} = Ax + B u \qquad x(0) = x_0 \tag{71}$$

$$u = - kx$$

$$GkH = 0$$

où $k \varepsilon R^{mxn}$, $x \varepsilon R^n$ ($n = \sum_{i=1}^{N} n_i$), $u \varepsilon R^m$ ($m = \sum_{i=1}^{N} m_i$), $A = \{A_{ij}, (i,j) = 1...N\}$ et les matrices $Q = Q' \geqslant 0$, $R = R' > 0$, $S = S' \geqslant 0$, B, G, H sont des matrices bloc-diagonales. Le problème (71) peut s'écrire de manière équivalente avec $X(t) = x(t)\ x(t)'$

$$\min_{k \varepsilon \Omega(S)} J(k) = \int_0^T Tr\{(Q + k'Rk) X(t)\}\ dt + Tr\{SX(T)\} \tag{72}$$

$$\dot{X}(t) = (A-Bk)X(t) + X(t)(A-Bk)' \quad ; X(0) = X_0$$

$$GkH = 0$$

Il est clair que la solution optimale k^o du problème précédent, va, en général, dépendre de la condition initiale $X_0 = x_0 x_0'$. Une façon d'éliminer cette dépendance a été proposée par Levine et Athans [47] , elle consiste simplement à considérer l'état initial comme une variable aléatoire gaussienne avec

$$E\{x_0\} = \bar{x}_0$$
$$E\{x_0 x_0'\} = E\{X_0\} = \bar{X}_0 \geqslant 0 \tag{73}$$

(E(.) - opérateur espérance mathématique). Il s'agit alors, pour le critère de minimiser son espérance mathématique et comme la dynamique et le critère sont linéaires en X(t), le nouveau problème s'exprime de manière identique à (72) avec $X(0) = \bar{X}_0$.

Partant des résultats des paragraphes précédents, un algorithme basé sur des techniques de (gradient-directions admissibles) est proposé :

<u>Pas 1</u> : initialisation de l'indice d'itération j=1 et détermination d'un k^1 initial admissible, c'est-à-dire satisfaisant les contraintes $k \in \Omega(S)$ et $GkH = 0$

<u>Pas 2</u> : détermination de la matrice gradient de la fonction objectif (équations 29 et 30), c'est-à-dire

$$Q+k^{j'}Rk^j+(A-Bk^j)'P+P(A-Bk^j)+\dot{P} = 0 \quad ; \quad P(T) = S$$
$$(A-Bk^j)X+X(A-Bk^j)'-\dot{X} = 0 \quad ; \quad X(0) = X_0 \tag{74}$$
$$\left.\frac{dJ(k)}{dk}\right|_{k=k^j} = \frac{dJ(k)}{dk^j} = 2\int_0^T (Rk^j-B'P(t))X(t)dt$$

<u>Pas 3</u> : faire la projection de la matrice gradient sur l'ensemble des contraintes. Portant sur des éléments différents, il est possible d'effectuer cette opération en deux étapes distinctes :

a) projection sur l'ensemble de décentralisation (S)

$$\Pi_{\Omega}\left(\frac{dJ}{dk^j}\right) = \text{bloc diag}\left\{ \frac{dJ}{dk_1^j}, \ldots, \frac{dJ}{dk_N^j} \right\} \tag{75}$$

b) projection sur l'ensemble Σ défini par la contrainte linéaire $GkH = 0$

$$\Pi_{\Sigma}(.) = (.) - G'(GG')^{-1}(.)H(H'H)^{-1}H \tag{76}$$

Enfin, obtention d'une direction de progression

$$D^j = \Pi_{\Sigma} \circ \Pi_{\Omega}\left(\frac{dJ}{dk^j}\right) = \Pi_{\Sigma}\left(\Pi_{\Omega}\left(\frac{dJ}{dk^j}\right)\right) \tag{77}$$

<u>Pas 4</u> : test d'optimalité : étant ϵ un scalaire positif arbitrairement petit, si $\|D^j\| < \epsilon$ stop, sinon aller au pas 5.

<u>Pas 5</u> : recherche du pas optimal, i.e., résolution du problème monovariable

$$\min_{\alpha \geqslant 0} J(k^j - \alpha D^j) \tag{78}$$

soit $\alpha^o = \alpha^j$ la solution

<u>Pas 6</u> : faire $k^{j+1} = k^j - \alpha^j D^j$, $j=j+1$ et aller au pas 2.

<u>Remarques</u> :

1. Le plus gros travail dans cet algorithme se situe au niveau du calcul de la matrice gradient dJ/dk qui nécessite la résolution de deux équations différentielles matricielles. La solution de ce problème se trouve grandement facilitée par le fait que ces équations sont découplées.

2. Le pas 3 de l'algorithme précédent consiste dans le problème de projection, qui de façon générale s'écrit

$$\min_{D \in \Omega(S)} \frac{1}{2} \left\| \frac{dJ}{dk} - D \right\|^2 \quad \text{sous} \quad GDH = 0 \tag{79}$$

avec comme conditions d'optimalité

$$D - \frac{dJ}{dk} + \gamma + G'\mu H' = 0$$

$$\begin{aligned} &\gamma \in \bar{\Omega}(S) \\ &D \in \Omega(S) \\ &GDH = 0 \end{aligned} \tag{80}$$

la solution de ce problème est

$$\begin{aligned} D^* &= \Pi_{\Omega}(\frac{dJ}{dk}) - G'(GG')^{-1}G\,\Pi_{\Omega}(\frac{dJ}{dk})H(H'H)^{-1}H' \\ &= \Pi_{\Sigma} \circ \Pi_{\Omega}\,(\frac{dJ}{dk}) \end{aligned} \tag{81}$$

D'après (81), D^* peut être obtenue par l'application en cascade des opérateurs de projection Π_{Ω} et Π_{Σ}. Il est à noter que l'inversion des matrices (GG') et (H'H) ne constitue pas un travail insurmontable du fait de la nature bloc-diagonale des matrices G et H.

$$\begin{aligned} (GG')^{-1} &= \text{bloc diag}\left\{(G_1G_1')^{-1},\ldots,(G_NG_N')^{-1}\right\} \\ (H'H)^{-1} &= \text{bloc diag}\left\{(H_1'H_1)^{-1},\ldots,(H_N'H_N)^{-1}\right\} \end{aligned} \tag{82}$$

3. Il est à noter que le test au pas 4 correspond bien à un test d'optimalité pour le problème proposé, c'est-à-dire, que si $D^* = 0$ est solution du problème de projection alors la valeur correspondante de k satisfait aux conditions nécessaires d'optimalité.

En effet, les conditions d'optimalité de (72) s'écrivent

$$\frac{dJ}{dk} + \theta + G'\beta H' = 0$$

$$\begin{aligned} &\theta \in \bar{\Omega}(S) \\ &k \in \Omega(S) \\ &GkH = 0 \end{aligned} \tag{83}$$

qui sont les mêmes que (80) avec $D = 0$, $\gamma = -\theta$ et $\mu = -\beta$

4. Le pas 5 consiste en un problème d'optimisation unidimensionnelle dont les techniques de solution sont bien connues. La détermination du pas optimal α^0 nécessite généralement le calcul de J(k) en divers points (Luenberger [48]), or

$$J(k) = \mathrm{Tr}\left\{P(0)X_0\right\} \tag{84}$$

où P(0) est la matrice des variables duales P(t) à t = 0. La détermination de cette matrice peut être un travail relativement grand et c'est pourquoi il est généralement avantageux pour la fixation du pas α d'adopter une méthode adaptative comme par exemple

$$\begin{cases} \alpha^{j+1} = \nu_1 \alpha^j & \text{si} \quad J(k^j - \alpha^j D^j) < J(D^j) \\ \alpha^j \longleftarrow \nu_2 \alpha^j & \text{dans le cas contraire} \end{cases} \tag{85}$$

où $\nu_1 > 1$ et $0 < \nu_2 < 1$, avec pour α^1 une valeur arbitraire.

5. L'algorithme présenté a été particularisé au cas de la commande décentralisée ($k \in \Omega(S)$ et $GkH = 0$), néanmoins il est aisément généralisable à tout problème d'optimisation sous contraintes linéaires de structure et nous présentons par la suite un exemple relativement simple pour permettre un calcul "manuel". Cet exemple est tiré d'un article de Kalman et Bertram [40].

<u>Exemple III-1</u>. Soit le système linéaires

$$\dot{x} = A_\xi x \quad , \quad A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\xi \end{bmatrix} , \quad x(0) = x_0$$

le problème d'optimisation paramétrique étant

$$\min_\xi \quad J(.) = \int_0^\infty \|x\|^2 \, dt$$

Pour se ramener à la formulation précédente, prenons $B' = [0 \quad 2]$ et $H' = [1 \quad 0]$ alors, le problème se ramène à

$$\begin{cases} \min\limits_{k} J(k) = \int_0^{\infty} \mathrm{Tr}\left\{X(t)\right\} dt \\ \dot{X} = (A_0 - Bk)X + X(A_0 - Bk)' \quad , \quad X_0 = \bar{X}_0 \\ kH = 0 \end{cases}$$

L'existence menue du problème nécessite l'hypothèse (A_0-Bk) asymptotiquement stable ($\xi > 0$). Les calculs menés pour deux valeurs différentes de $\bar{X}_0$

cas 1 : $\bar{X}_0 = I$ (matrice identité)

cas 2 : $\bar{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ont fourni pour la matrice gradient ($k = [0 \quad \xi]$)

$$\frac{dJ}{dk} = [-2\xi \qquad 1 - \xi^{-2}] \qquad \text{cas 1}$$

$$\frac{dJ}{dk} = [2(\xi^{-1} - \xi) \qquad 1 - \frac{1}{2}\xi^{-2}] \qquad \text{cas 2}$$

et pour la direction projetée sur l'ensemble défini par DH = 0

$$D = [0 \qquad 1 - \xi^{-2}] \qquad \text{cas 1}$$

$$D = [0 \qquad 1 - \frac{1}{2}\xi^{-2}] \qquad \text{cas 2}$$

Nous obtenons donc pour les deux cas traités une solution unique

$$k^o = [0 \qquad 1] \qquad \text{cas 1}$$

$$k^o = [0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}] \qquad \text{cas 2}$$

qui sera obtenue par l'algorithme précédent pour n'importe quelle initialisation avec $\xi > 0$.

La figure III-2. qui représente le lieu des racines (paramétrisé en ξ) montre la position des pôles du système dans les deux cas étudiés.

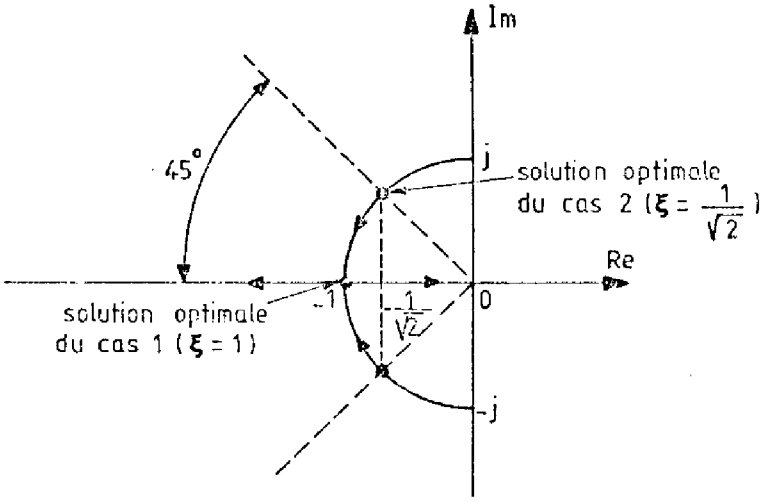


Figure III-2. Le lieu des racines paramétrisé en ξ ($\xi \geqslant 0$)

Il est à remarquer que sans la contrainte kH = 0, du fait que le critère ne fait apparaître aucune pondération sur la commande, la solution optimale tendrait à positionner les poles du système a $-\infty$ (ce qui est possible car (A_0,B) est une paire commandable). Cette singularité est éliminée par la contrainte kH = 0.

III-2-6. COMMANDE DECENTRALISEE - HORIZON INFINI - STABILITE

Uniquement pour des raisons de simplicité dans l'exposition nous traiterons du problème où seule intervient la contrainte de décentralisation $k \in \Omega(S)$, le problème se pose alors de la façon suivante

$$\begin{aligned} \min_{k \in \Omega(S)} \quad J(k) &= \int_0^\infty \mathrm{Tr}\,\{(Q+k'Rk)X(t)\}\,dt \\ \dot{X}(t) &= A(-Bk)X(t)+X(t)(A-Bk)' \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \tag{86}$$

Il est bien connu que dans le cas du problème non contraint et moyennant les hypothèses (suffisantes) de commandabilité de la paire (A,B) et d'observabilité de (A,C), $Q = C'C$, la solution est $u(t) = -k^o x(t)$, où k^o est une matrice à éléments constants solution de l'équation de Riccati et telle que $(A-Bk^o)$ est asymptotiquement stable.

Pour le problème présent et tout comme dans le paragraphe précédent, la solution k^o va dépendre des conditions initiales (X_0). Cette dépendance peut être levée de la même façon qu'auparavant en considérant x_0 comme une variable aléatoire et minimisant alors l'espérance mathématique du critère.

Un point crucial dans la spécialisation de l'algorithme itératif présenté au paragraphe précédent concerne la stabilité de la matrice (A-Bk) à chaque pas de l'algorithme. Il faut en effet assurer qu'à chaque pas le problème (86) conserve un sens. Nous verrons par la suite comment fournir des conditions suffisantes qui assurent l'existence et la convergence vers une solution k-stabilisante.

Désignons par $\Xi(S)$ l'ensemble des commandes décentralisées telles que (A-Bk) soit asymptotiquement stable, c'est-à-dire

$$\Xi(S) = \left\{ k \in R^{mxn} / k \in \Omega(S) \quad \text{et} \quad \Lambda(A-Bk) \subset C^- \right\} \tag{87}$$

Partant des résultats du paragraphe précédent, un algorithme est proposé :

<u>Pas 1</u> : initialisation de l'indice d'itération j=1 et détermination d'un gain initial k^1 telle que $k^1 \in \Xi(S)$.

<u>Pas 2</u> : calcul de la matrice gradient de la fonction objectif (eq. 32 et 33), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &(A-Bk^j)'P(k^j)+P(k^j)(A-Bk^j)+Q+k^{j'}Rk^j = 0 \\ &(A-Bk^j)V(k^j)+V(k^j)(A-Bk^j)' + X_0 = 0 \\ &\frac{dJ(k)}{dk}\Big|_{k=k^j} = \frac{dJ(k)}{dk^j} = 2\left\{Rk^j - B'P(k^j)\right\} V(k^j) \end{aligned} \tag{88}$$

Pas 3 : détermination de la direction de progression (projection)

$$D^j = \Pi_{\Omega}\left(\frac{dJ}{dk^j}\right) \tag{89}$$

Pas 4 : test d'optimalité : étant ϵ un scalaire positif arbitrairement petit, si $\|D^j\| < \epsilon$ stop, sinon aller au pas suivant.

Pas 5 : recherche du pas optimal, i.e., résolution du problème monovariable

$$\begin{cases} \min\limits_{\alpha \geqslant 0} J(k^j - \alpha D^j) = \mathrm{Tr}\left\{P(k^j - \alpha D^j)X_0\right\} \\ \text{sous } k^j - \alpha D^j \in \Xi(S) \end{cases} \tag{90}$$

soit $\alpha^0 = \alpha^j$ la solution

Pas 6 : faire $k^{j+1} = k^j - \alpha^j D^j$; $j = j+1$ et aller au pas 2.

Remarques :

1. Il nous faut tout d'abord initialiser l'algorithme avec $k^1 \in \Xi(S)$, c'est-à-dire trouver une commande décentralisée stabilisante. L'hypothèse (A,B) commandable ne permet pas d'affirmer que $\Xi(S)$ est non vide (Aoki [31]).

Davison [23] a proposé un algorithme qui permet de savoir si $\Xi(S)$ est non vide, il a pour principe la recherche des modes fixes de $(A-Bk)$, $\forall k \in \Omega(S)$. Si un de ces modes fixes est instable alors $\Xi(S)$ est vide. La recherche des modes fixes pour un système de grande dimension constitue un travail assez considérable et qui peut dans ce cas, être remplacé par la méthode proposée au chapitre II, sans toutefois, rappelons le, assurer sa convergence dans tous les cas.

2. Pour que le problème garde un sens à chaque itération, il faut s'assurer que l'algorithme précédent fasse à chaque itération la détermination d'une commande décentralisée stabilisante. Le lemme suivant fournit des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi

<u>Lemme III-2.</u> Soit $J(k) : R^{mxn} \longrightarrow R$ la fonction matricielle définie par $J(k) = Tr\{F(k)X_0\}$ où

$$F(k) = \int_0^{\infty} e^{(A-Bk)'t}(Q+k'Rk)e^{(A-Bk)t}\,dt \qquad (91)$$

qui est différentiable par rapport à k pour $\forall k$ tel que $\Lambda(A-Bk) \subset C^-$, alors

a) si $k \in \Xi(S)$, il existe un pas $\alpha > 0$ tel que $J(k-\alpha D) < J(k)$, $D = \Pi_{\Omega}(\frac{dJ}{dk})$ lorsque $D \neq 0$

b) si la paire (A,C) est complètement observable et $X_0 > 0$ alors pour tout α tel que $J(k-\alpha D) < J(k) < \infty$ nous avons $(k-\alpha D) \in \Xi(S)$

<u>Démonstration</u> : Pour la partie a), comme $k \in \Xi(S)$, $J(k) = Tr\{P(k)X_0\}$ et linéarisant $J(.)$ autour de $\alpha = 0$ il vient

$$J(k-\alpha D) = J(k) + \alpha \frac{d}{d\alpha} J(k-\alpha D)\Big|_{\alpha=0} \qquad (92)$$

or

$$\frac{d}{d\alpha} J(k-\alpha D)\Big|_{\alpha=0} = Tr\left\{\frac{d}{d\alpha} P(k-\alpha D)\Big|'_{\alpha=0} \cdot X_0\right\} \qquad (93)$$

$$= -Tr\left\{\frac{dJ'}{dk} \cdot D\right\}$$

et de par le fait que $D = \Pi_{\Omega}(dJ/dk)$ il vient

$$J(k-\alpha D)-J(k) = -\alpha\, Tr\left\{\frac{dJ'}{dk} \cdot D\right\} = -\alpha \|D\|^2 \qquad (94)$$

donc, pour $D \neq 0$ il existe alors un $\alpha > 0$ tel que a) est vérifié.

La démonstration de la partie b) est basée sur le fait que la matrice F(k) est strictement définie positive car (A,C) est par hypothèse une paire complètement observable. En plus, F(k) est finie si et seulement si (A-Bk) est asymptotiquement stable, mais $F(k) > 0$ et finie implique $Tr\{F(k)\} < \infty$. Il reste donc à démontrer qu'il existe un α tel que $Tr\{F(k-\alpha D)\}$ est finie.

$$Tr\{F(k-\alpha D)\} \leqslant \lambda_{min}^{-1}(X_0)J(k-\alpha D) \leqslant \lambda_{min}^{-1}(X_0)J(k) < \infty \qquad (95)$$

où $\lambda_{min}(.)$ est la plus petite valeur propre de (.).

Il est à remarquer que le lemme permet seulement d'affirmer l'existence de valeurs de α telles que $(k-\alpha D)$ est stabilisant. Il est nécessaire à chaque pas de s'assurer qu'effectivement le gain obtenu est stabilisant. Le pas 5 peut, par exemple, être défini de la façon adaptative suivante :

$$\begin{cases} \alpha^{j+1} = \nu_1 \alpha^j & \text{si } \operatorname{Tr}\left\{P(k^j-\alpha^j D^j)X_0\right\} < \operatorname{Tr}\left\{P(k^j)X_0\right\} \\ & \text{et } P(k^j-\alpha^j D^j) > 0 \\ \alpha^j \longleftarrow \nu_2 \alpha^j & \text{dans le cas contraire} \end{cases} \tag{96}$$

avec $\nu_1 > 1$ et $0 < \nu_2 < 1$

3. Dans le cas où $X_0 \geqslant 0$, le lemme antérieur n'est plus valable car alors $\lambda_{min}(X_0) = 0$. Ecrivons $X_0 = H_0 H_0'$ où $H_0 \varepsilon R^{nxr}$, rang $(H_0) = r \leqslant n$, donc

$$J(k)=\int_0^{\infty} \operatorname{Tr}\left\{(Q+k'Rk)X(t)\right\} dt = \operatorname{Tr}\left\{F(k)X_0\right\} = \\ = \sum_{i=1}^{r} h_{0i}' F(k) h_{0i} \tag{97}$$

où h_{0i} représente la ième colonne de la matrice H_0, l'hypothèse (A,C) observable implique

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{(A-Bk)t\right\} h_{0i} = 0 \qquad i=1\ldots r \tag{98}$$

Si x_0 appartient à l'espace image de H_0 alors $x(t) = \Phi(t)x_0$ ($\Phi(.)$ étant la matrice de transition) tend vers zéro lorsque $t \longrightarrow \infty$. Il est clair que cela n'implique pas que (A-Bk) soit asymptotiquement stable sauf si $r = n$, c'est-à-dire $X_0 > 0$.

Si la paire $[(A-Bk), H_0]$ est commandable alors (98) implique (A-Bk) asymptotiquement stable. Il est clair qu'une telle condition n'est que de peu d'utilité pratique car on ne connaît pas bien sûr, à priori, la séquence de k qui sera générée. Toutefois, si la paire (A, H_0) est commandable alors

$[(A-Bk), H_0]$ est commandable presque partout.

D'autre part, une condition suffisante pour assurer que $[(A-Bk), H_0]$ est commandable $\forall k$ est que

$$R(B) \subset R(H_0) \tag{99}$$

où R(.) représente l'espace image de (.). La démonstration est évidente : elle découle du fait que si la paire (A,B) est commandable, alors la paire $[(A-Bk),B]$ est commandable pour $\forall k$ et $R\{(A-Bk)^q B\} \subset R\{(A-Bk)^q H_0\}$ $q=0,1...n$ (Wonham [65]).

La condition (99) peut être testée soit directement sur les matrices B et H_0 (ce qui peut présenter quelques difficultés si l'ordre du système est grand) soit à partir du résultat suivant

<u>Lemme III-3</u>. $R(B) \subset R(H_0)$ si et seulement si $P(H_0)B = 0$, où $P(H_0) = I - H_0(H_0'H_0)^{-1}H_0'$ est l'opérateur projection sur l'espace nul de H_0'.

<u>Preuve</u> : $\longrightarrow$ Comme par hypothèse $R(B) \subset R(H_0)$ alors $\forall x \in R(B)$ implique $x \in R(H_0) = N(H_0')^{\perp}$ donc la projection de x sur $N(H_0')$ doit être nulle, c'est-à-dire $P(H_0)x = 0$, ce qui implique que $P(H_0)B = 0$.

$\longleftarrow$ $P(H_0)B = 0$ ce qui implique que $b_i \in N(H_0')^{\perp} = R(H_0)$, b_i étant une colonne quelconque de B, donc $\forall x \in R(B)$ implique $x \in R(H_0)$. ∎

III-2-7. <u>DEGRE DE SOUS OPTIMALITE</u>

Dans ce paragraphe nous nous posons le problème de l'estimation du degré de sous optimalité obtenu par la commande décentralisée par rapport à la commande optimale sans contrainte (cas de l'horizon fini)

$$\begin{aligned} \min_k J(k) &= \mathrm{Tr}\{F(k)X_0\} \\ F(k) &= \int_0^{\infty} e^{(A-Bk)'t}(Q+k'Rk)e^{(A-Bk)t}\,dt \end{aligned} \tag{100}$$

avec $R = R' > 0$, $Q = C'C \geqslant 0$ et (A,C) observable. En absence de contrainte, il est bien connu que la solution de (100) est

$$k^o = R^{-1}B'P^o \quad ; \quad A'P^o + P^oA - P^oBR^{-1}B'P^o + Q = 0 \qquad (101)$$

En présence des contraintes de décentralisation, $k \in \Omega(S)$, considérant $2\Lambda \in R^{mxn}$ la matrice des variables duales associées à cette contrainte, la solution déterminée précédemment satisfait les conditions nécessaires d'optimalité

$$\begin{aligned} & 2(Rk-B'P)V + 2\Lambda = 0 \\ & (A-Bk)'P + P(A-Bk) + Q + k'Rk = 0 \\ & (A-Bk)V + V(A-Bk)' + X_0 = 0 \\ & \Lambda \in \bar{\Omega}(S) \quad ; \quad k \in \Omega(S) \end{aligned} \qquad (102)$$

Supposons $X_0 > 0$ (condition suffisante) et soient $\hat{k}$, $\hat{P}$, $\hat{V}$, $\hat{\Lambda}$ les matrices satisfaisant (102) avec $(A-B\hat{k})$ asymptotiquement stable, $\hat{P} > 0$ et $\hat{V} > 0$, alors

$$\hat{k} = R^{-1}B'\hat{P} - R^{-1}\hat{\Lambda}\hat{V}^{-1} \qquad (103)$$

Portant cette valeur de $\hat{k}$ dans la deuxième équation de (102) il vient

$$A'\hat{P} + \hat{P}A - \hat{P}BR^{-1}B'\hat{P} + Q + \hat{V}^{-1}\hat{\Lambda}'R^{-1}\hat{\Lambda}\hat{V}^{-1} = 0 \qquad (104)$$

ce qui montre à l'évidence que $\hat{P}$ satisfait une équation de Riccati qui ne diffère de celle définissant P^o (101) que d'un terme indépendant.

La valeur du critère sans et avec contrainte de décentralisation est

$$\begin{aligned} J^o &= Tr\{P^oX_0\} \\ \hat{J} &= Tr\{\hat{P}X_0\} \end{aligned} \qquad (105)$$

Le but est ici de calculer ou estimer la différence $\Delta J = \hat{J} - J^o$ sans bien sûr effectuer le calcul des équations de Riccati (101) et (104). Pour cela nous proposons le problème suivant : soit

$$r(\beta) = \mathrm{Tr}\left\{P(\beta)X_0\right\} \tag{106}$$

où $P(\beta)$ est la solution de l'équation de Riccati paramétrisée en β.

$$A'P(\beta) + P(\beta)A - P(\beta)BR^{-1}B'P(\beta) + Q + \beta Q_\lambda = 0 \tag{107}$$

où $Q_\lambda = \hat{V}^{-1}\hat{\Lambda}'R^{-1}\hat{\Lambda}\hat{V}^{-1}$. Bien évidemment $r(0) = J^o$ et $r(1)=\hat{J}$; comme $r(\beta)$ est une fonction différentiable par rapport à β, nous allons prendre le développement en série de Taylor pour $\beta = 1$, et se limitant aux premiers termes du développement on peut obtenir une valeur approchée de $\Delta J = r(1) - r(0)$, soit

$$\Delta J_p = -\sum_{j=1}^{p-1} \frac{(-1)^j}{j!} \mathrm{Tr}\left\{ \frac{d^j}{d\beta^j} P(\beta)\Big|_{\beta=1}' \cdot X_0 \right\} \tag{108}$$

Désignant par ∂P, $\partial^2 P$,.... la dérivée première, seconde, etc... de $P(\beta)$ au point $\beta = 1$, il vient

$$\begin{aligned} &(A-BR^{-1}B'\hat{P})'\,\partial P + \partial P(A-BR^{-1}B'\hat{P}) + Q_\lambda = 0 \\ &(A-BR^{-1}B'\hat{P})'\,\partial^2 P + \partial^2 P(A-BR^{-1}B'\hat{P}) - 2\partial P BR^{-1}B'\partial P = 0 \end{aligned} \tag{109}$$

Comme $(A-BR^{-1}B'\hat{P})$ est asymptotiquement stable, $r(\beta)$ possède toutes ses dérivées bornées, de plus $\partial P \geqslant 0$, $\partial^2 P \leqslant 0$ donc $d^2 r(\beta)/d\beta^2 \leqslant 0$. La fonction $r(\beta)$ est donc une fonction concave. Il est à remarquer que l'obtention des dérivées successives de $r(\beta)$ se fait par l'intermédiaire de la solution d'une équation de Lyapunov toujour du même type, ce qui est un avantage pour le calcul du développement (108).

<u>Exemple III-2</u>. Nous reprenons ici l'exemple considéré au chapitre II

$$\min_{k \in \Omega(S)} J(.) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left\{(I+k'k)X(t)\right\}dt$$

$$\dot{X} = (A-Bk)X(t) + X(t)(A-Bk)'$$

$$X_0 = \bar{X}_0 = I$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 1 & 0.6 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 & 3 & 0 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Le gain k^1 initial est celui fourni au chapitre II c'est-à-dire

$$k^1 = \begin{bmatrix} 11.51 & -0.55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.30 & 0.62 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.82 & 3.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.96 & 0.06 \end{bmatrix}$$

et $\alpha^1=0.1$, $\nu_1=1.2$, $\nu_2=0.5$. L'algorithme présenté au paragraphe précédent (programmé en double précision sur IBM 370/165) a pour une précision $\epsilon = 10^{-4}$ (pas 4) convergé en 4 secondes (59 itérations)

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} 1.21 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.43 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.87 & 2.46 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.58 & 0.24 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.27 & 0.06 & 0.44 & -0.18 \\ 0.59 & 0.34 & 0 & 0 & 0.39 & 0.11 \\ 2.21 & -1.36 & 0 & 0 & 0.94 & -1.01 \\ 1.67 & -0.45 & 0.45 & 0.05 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1}$$

La figure ci-dessous présente l'estimation du degré de sous optimalité obtenu.

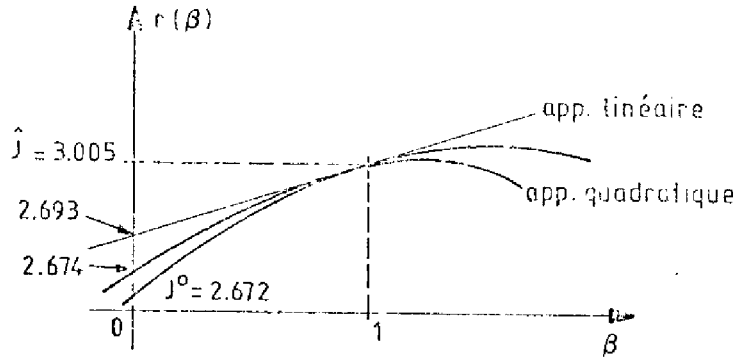


Figure III-3. Estimation du degré de sous-optimalité

Sur cet exemple, l'approximation linéaire fournit J^o à 0,8 % près et l'approximation quadratique à 0,07 %. La bonne qualité des résultats obtenus dans cet exemple paraît être logique compte tenu de la "petitesse" relative de la matrice $\hat{\Lambda}$.

III-2-8. CALCUL DE LA MATRICE GRADIENT PAR DECOMPOSITION

Pour l'application de la méthode présentée aux paragraphes précédents il est évident que la partie la plus conséquente du point de vue tâche de calcul est au niveau de la matrice gradient et de la résolution des équations de Lyapunov (différentielles ou algébriques) qui peuvent poser un problème délicat dans le cas de systèmes de grande dimension.

Le but du paragraphe est de montrer comment dans certains cas on peut obtenir des propriétés de structure afin de décomposer le problème et utiliser une structure de calcul parallèle avec coordination, chaque organe de calcul ayant à résoudre un problème de dimension sensiblement plus faible que celle du pro-

blème initial.

Nous considèrerons dans ce qui suit un modèle dynamique discret avec un critère additivement séparable

$$J(k)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=0}^{T-1}\frac{1}{2}\left\{\|x_i^t\|^2_{Q_i}+\|u_i^t\|^2_{R_i}+\|z_i^t\|^2_{S_i}\right\}=\sum_{i=1}^{N}J_i(k)$$

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= A_i x_i + B_i u_i^t + G_i z_i^t + d_i^t \\ z_i^t &= \sum_{j\neq i}^{N} A_{ij} x_j^t \\ u_i^t &= -k_i C_i x_i^t \end{aligned} \tag{110}$$

où $Q_i = Q_i' \geqslant 0$, $R_i = R_i' > 0$ et $S_i = S_i' > 0$. Il est à remarquer que dans la formulation ci-dessus le critère apparaît sous forme additive séparée et que de plus il fait intervenir une pondération avec matrice strictement définie positive des termes d'interconnexion. Il s'agit donc d'un cas particulier, mais qui, comme on le verra sur un exemple dans le dernier chapitre, présente un intérêt pratique.

Soit λ_i^t et μ_i^t les variables duales associées aux contraintes dynamiques dans (110), l'Hamiltonien pour le problème global s'écrit

$$H(x,k,\lambda,\mu) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=0}^{T-1} H_i(x_i^t,k_i,\lambda,\mu) \tag{111}$$

où

$$\begin{aligned} H_i(x_i^t,k_i,\lambda,\mu) &= \frac{1}{2}\left\{\|x_i^t\|^2_{Q_i+C_i'k_i'R_ik_iC_i}+\|z_i^t\|^2_{S_i}\right\}+ \\ &+(\lambda_i^t)'\left\{(A_i-B_ik_iC_i)x_i^t+G_iz_i^t+d_i^t\right\}+(\mu_i^t)'z_i^t- \\ &-\sum_{j\neq i}^{N}(\mu_j^t)'A_{ji}x_i^t \end{aligned} \tag{112}$$

par application directe du corollaire III-1. il vient

$$\frac{dJ}{dk_i} = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ R_i k_i C_i x_i^t - B_i' \lambda_i^t \right\} (x_i^t)' C_i' \tag{113}$$

ce qui montre que la matrice gradient dJ/dk_i peut se calculer simplement à partir de l'état de chaque sous système et de sa variable duale associée.

Ce problème, dû à sa stricte convexité peut être résolu par la méthode duale classique |46| en un algorithme à deux niveaux. La tâche du niveau supérieur est de maximiser la fonction duale

$$\max \ \phi(\mu) \tag{114}$$

où $\phi(\mu)$ est défini par

$$\begin{aligned} \phi(\mu) &= \sum_{i=1}^{N} \min_{z_i^t} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} H_i(x_i^t, k_i, 0, \mu) \right\} \\ \text{sous} \quad x_i^{t+1} &= (A - B_i k_i C_i) x_i^t + G_i z_i^t + d_i^t \end{aligned} \tag{115}$$

La détermination de la fonction duale est alors (pour fixé) faite par la résolution de N sous problèmes linéaires quadratiques strictement convexes ($S_i > 0$), donc à solution unique. La fonction duale est alors différentiable et son gradient est fourni par

$$\frac{\partial \phi(\mu)}{\partial \mu_i^t} = z_i^t - \sum_{j \neq i}^{N} A_{ij} x_j^t = e_i^t \ , \ i=1 \ldots N, \ t=0 \ldots (T-1) \tag{116}$$

La structure de calcul est alors montrée dans la figure III-4. . La variable duale λ_i^t est bien sûr calculée au niveau de chaque sous problème. En effet, l'écriture des conditions nécessaires (et ici suffisantes grâce à la convexité) du sous problème (i) fournit

$$\begin{cases} x_i^{t+1} = (A_i - B_i k_i C_i) x_i^t - G_i S_i^{-1} G_i' \lambda_i^t + d_i^t - G_i S_i^{-1} \mu_i^t & x_i^0 \text{ donné} \\ \lambda_i^{t-1} = (A_i - B_i k_i C_i)' \lambda_i^t + (Q_i + C_i' k_i' R_i k_i C_i) x_i^t - \sum_{j \neq i}^{N} A_{ji}' \mu_j^t & \\ \lambda_i^{T-1} = 0 & \\ z_i^t = - S_i^{-1} (G_i' \lambda_i^t + \mu_i^t) & \end{cases} \quad (117)$$

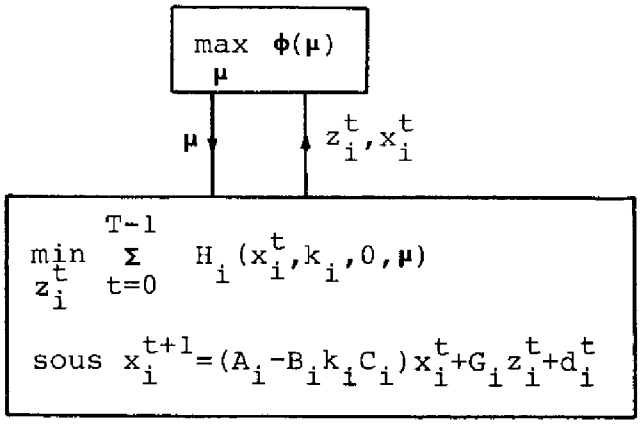


Figure III-4. Structure de calcul à deux niveaux

La solution des sous problèmes se ramène à la solution de problèmes aux deux bouts [11] . Il est à noter que chacun des sous problèmes, étant également strictement convexe, peut être résolu au moyen de la méthode duale. Un algorithme pour le calcul de la matrice gradient est proposé.

Pas 1 : conditions initiales arbitraires sur μ_i^t $i=1...N$, $t=0...(T-1)$ et indice d'itération $q=1$

Pas 2 : résoudre les N sous problèmes (115), obtention de x_i^t, λ_i^t et z_i^t $i=1...N$, $t=0...(T-1)$ qui satisfont (117)

Pas 3 : calcul du gradient de la fonction duale $\phi(.)$

$$\frac{\partial \phi(\mu)}{\partial \mu_i^t} = z_i^t - \sum_{j \neq i}^{N} A_{ij} x_j^t = e_i^t \quad i=1...N,\ t=0...(T-1) \quad (118)$$

<u>Pas 4</u> : si $\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=0}^{T-1} \|e_i^t\| < \epsilon$, $\epsilon > 0$ arbitrairement petit aller au pas 6 sinon aller au pas 5

<u>Pas 5</u> : calculer les nouvelles variables duales au moyen par exemple de la méthode du gradient conjugué : soient

$$\mu' = [\mu_1^{0'}, \ldots \mu_N^{0'}, \mu_2^{0'}, \ldots \mu_N^{T-1'}]$$

$$e' = [e_1^{0'}, \ldots e_N^{0'}, e_2^{0}, \ldots e_N^{T-1'}]$$

alors $\mu^{q+1} = \mu^q + \alpha^q r^q$ où

$$r^q = e^q + \beta_{q-1} r^{q-1} \qquad r^1 = e^1$$

$$\beta_{q-1} = \frac{\|e^q\|^2}{\|e^{q-1}\|^2}$$

et le pas α^q est tel que

$$\alpha^q = \left\{ \alpha \ / \max_{\alpha} \ \phi(\mu^q + \alpha r^q) \right\}$$, faire q=q+1 et aller au pas 2.

<u>Pas 6</u> : calculer les matrices gradient

$$\frac{dJ}{dk_i} = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ R_i k_i C_i x_i^t - B_i' \lambda_i^t \right\} (x_i^t)' C_i' \tag{119}$$

<u>Remarques</u> :

1. A pas 5 l'optimisation de $\phi(.)$ par rapport à α est facile à réaliser du fait que $\phi(\mu)$ est une quadratique en μ. Si pour $\mu_a^q = \mu^q + r^q$ on trouve e_a^q alors

$$\alpha^q = \frac{e'^q r^q}{(e^q - e_a^q)' r^q} \tag{120}$$

2. Il est à priori difficile d'affirmer que la structure de calcul parallèle pour le calcul de la matrice gradient se montrer plus rapide qu'un organe de calcul centralisé traitant du problème global sans décomposition .

La différence réside dans le fait que chaque organe de calcul manipulera un problème de dimension beaucoup plus réduite que le problème initial.

La vitesse de convergence de l'algorithme dépendra également de la dimension de la fonction duale qui est donnée par

$$\dim\ (\phi(\mu)) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=0}^{T-1} \dim\ (z_i^t) \qquad (121)$$

On sait en effet que dans ce cas la convergence avec $\epsilon = 0$ est théoriquement obtenue au bout d'un nombre d'itérations égal à la dimension de la fonction duale (121) (Luenberger |48|). Le cas le plus favorable se présentera donc lorsque $\dim(z_i^t)=1$ et cela correspond au cas de l'exemple qui sera traité au chapitre IV et qui concerne la commande optimale d'un réseau d'énergie électrique.

3. Un inconvénient de la méthode de calcul présentée dans ce paragraphe est que les calculs sont développés par une condition initiale particulière x_0 et qu'il ne paraît pas possible de traiter directement le cas de conditions initiales, variables aléatoires comme il avait été fait de manière globale en minimisant l'espérance mathématique du critère.

Une façon de lever ce problème consiste à traiter séquentiellement de manière parallèle le calcul de la matrice gradient, x_0 devenant tour à tour les colonnes de la matrice X_0. Ceci bien sûr augmente considérablement le temps de calcul.

III-2.9. L'INDEPENDANCE VIS A VIS DES CONDITIONS INITIALES. DETERMINATION PAR LE CAS LE PLUS DEFAVORABLE

Le solution du problème linéaire quadratique sous contraintes de structure dépend généralement des conditions initiales. La manière la plus couramment utilisée dans la littérature pour contourner ce problème consiste, comme nous l'avons fait auparavant, à considérer la condition initiale comme une variable

aléatoire avec caractéristiques stochastiques connues et d'effectuer l'optimisation sur la valeur moyenne du critère.

Le but du présent paragraphe est de proposer une solution différente à ce problème afin de la comparer à l'antérieure. L'idée générale est contenue dans un article de Kalman et Bertran |40| (voir également Bernhard |11|), elle sera adaptée ici dans notre contexte (Geromel |30|). Soit le problème

$$\min_{k \in \Omega(S)} J(.) = \sum_{t=0}^{T-1} \mathrm{Tr}\left\{(Q+k'Rk)X_t\right\} + \mathrm{Tr}\left\{SX_T\right\}$$

$$X_{t+1} = (A-Bk)X_t(A-Bk)' \qquad (122)$$

$$X_0 \text{ donné}$$

Reprenant les termes de Kalman, nous définissons un problème de jeu entre "l'homme et la nature". L'homme agit sur k, la nature sur X_0, l'un a pour objectif la minimisation de J(.) et l'autre sa maximisation. Mathématiquement le problème peut être décrit par

$$\min_{k \in \Omega(S)} \omega(k) \qquad (123)$$

où $\omega(k) : R^{mxn} \longrightarrow R$ est une fonction définie par

$$\omega(k) = \max_{X_0} \left\{ J(k,X_0) \; ; \quad \|X_0\|^2 \leqslant 1 \right\} \qquad (124)$$

D'après (122) il est clair que $J(k,X_0)$ est linéaire en X_0, comme la contrainte $\|X_0\|^2 \leqslant 1$ est strictement convexe, le problème (124) admet une solution unique. Soient P_t, t=0...(T-1) les variables duales associées à la restriction dynamique et γ_0 la variable duale associée à la contrainte $\|X_0\|^2 \leqslant 1$, alors les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de (124) sont

$$\begin{aligned} Q + k'Rk + (A-Bk)'P_0(A-Bk) - 2\gamma_0 X_0 &= 0 \\ \|X_0\|^2 &\leqslant 1 \\ \gamma_0 &\geqslant 0 \\ \gamma_0(\|X_0\|^2-1) &= 0 \end{aligned} \qquad (125)$$

ce qui peut être écrit sous la forme

$$Q + k'Rk + (A-Bk)'P_0(A-Bk) - P_{-1} = 0$$

$$X_0 = \frac{P_{-1}}{\|P_{-1}\|} \tag{126}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \|P_{-1}\|$$

(125) et (126) montrent à l'évidence que X_0 est lié à P_{-1}, matrice des variables duales associée à la contrainte dynamique. Par application du corollaire III-1. auquel on peut adjoindre naturellement (126) il vient

$$\frac{d\omega(k)}{dk} = 2 \sum_{t=0}^{T-1} \{Rk - B'P_t(A-Bk)\} X_t$$

$$Q+k'Rk+(A-Bk)'P_t(A-Bk)-P_{t-1} = 0 \quad t=(T-1)\ldots 0$$

$$P_{T-1} = S \tag{127}$$

$$(A-Bk)X_t(A-Bk)' - X_t = 0 \qquad X_0 = \frac{P_{-1}}{\|P_{-1}\|}$$

La solution de (127) se ramène encore à la résolution de deux équations de Lyapunov couplées par l'intermédiaire d'une condition initiale ce qui n'entraîne aucune difficulté particulière : on effectue d'abord la résolution de l'équation relative à P_t, pour ensuite faire celle relative à X_t.

Le cas de l'horizon infini se déduit très simplement par passage à la limite et l'on obtient

$$\frac{d\omega}{dk} = 2 \{Rk - B'P(k)(A-Bk)\} V(k)$$

$$(A-Bk)'P(k)(A-Bk) - P(k) + Q + k'Rk = 0 \tag{128}$$

$$(A-Bk)\ V(k)\ (A-Bk)' - V(k) + \frac{P(k)}{\|P(k)\|} = 0$$

Le cas continu se résoud de manière identique avec pour résultat :

$$\frac{d\omega}{dk} = 2 \int_0^T (Rk - B'P(t))X(t)dt$$

$$Q=k'Rk+(A-Bk)'P+P(A-Bk)+\dot{P} = 0, \quad P(T)=S \tag{129}$$

$$(A-Bk)X + X(A-Bk)' - \dot{X} = 0 \ , \quad X_0 = \frac{P(0)}{\|P(0)\|}$$

et pour l'horizon infini il vient

$$\frac{d\omega}{dk} = 2(Rk-B'P(k))V(k)$$

$$(A-Bk)'P(k) + P(k)(A-Bk) + Q + k'Rk = 0 \tag{130}$$

$$(A-Bk)V(k) + V(k)(A-Bk)' + \frac{P(k)}{\|P(k)\|} = 0$$

Faisons l'application de cela à l'exemple III-1.

<u>Exemple III-3</u>. (idem III-1.) Le problème se définit ainsi

$$\min_{k\varepsilon\Gamma} \omega(k)$$

avec $\Gamma = \{k/kH = 0\}$ et $\omega(k)$ donné par

$$\omega(k) = \max_{X_0}\left\{\int_0^\infty \mathrm{Tr}\{X(t)\}\, dt/\|X_0\|^2 \leqslant 1\right\}$$

$$\dot{X}(t) = (A_0-Bk)X(t) + X(t)(A_0-Bk)'$$

$$X(0) = X_0$$

Considérant $k=[0 \quad \xi]$, $\xi > 0$ alors d'après (130) il vient

$$D = \Pi_\Gamma\left(\frac{d\omega}{dk}\right) = \frac{2\xi^2 + 1}{\left(\xi^4 + \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\right)^{1/2}} \cdot [0 \quad 1 - \tfrac{1}{2}\xi^{-2}]$$

d'où la solution unique

$$k^o = [0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$X_0^o = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

on retrouve là la solution obtenue au cas 2 de l'exemple III-1. avec la valeur remarquable $\xi^o \approx 0.712$.

Remarque : Si on considère le cas de l'horizon infini on peut voir que cette méthode d'élimination de la dépendance par rapport aux conditions initiales conserve les propriétés trouvées dans le cas où x_0 était un vecteur aléatoire avec $X_0 = \bar{X}_0 > 0$. En effet, l'hypothèse (A,C), $Q = C'C$ observable implique $P(k)$ définie positive et donc $X_0 = P(k)/\|P(k)\| > 0$. Ceci fait que les conditions pour la partie b) du Lemme III-2. sont remplies.

De plus, dans ce cas l'expression du critère $\omega(k)$ a une signification particulièrement intéressante

$$\begin{aligned} \omega(k) &= \mathrm{Tr}\left\{P(k)\ \frac{P(k)}{\|P(k)\|}\right\} = \|P(k)\| \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\ (P(k))\right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{131}$$

III-2-10. UN PROBLEME D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES DE STRUCTURE ET CONTRAINTES INSTANTANEES SUR L'ETAT ET LA COMMANDE

Le but de ce paragraphe est principalement de faire l'illustration de l'applicabilité des idées et résultats antérieurs sur un problème plus complexe d'optimisation. En effet, outre les contraintes de structure qui en fait n'interviennent directement qu'au moment de la projection de la matrice gradient, nous allons considérer le cas de contraintes instantanées sur l'état et la commande.

Sans prétendre à une réalité physique particulière, le problème qui est exposé par la suite a été pensé en s'inspirant de certains problèmes d'optimisation rencontrés dans le domaine de la gestion de ressources énergétiques (Geromel et Baptistela |36|, Luna |50|).

$$\min_{k_j \,\varepsilon\, \Omega(S)} \quad J(.) = \sum_{t=0}^{T-1} \psi(x_t, u_t) + \psi_T(x_T)$$

$$Cx_t + Du_t \geqslant b_t \qquad t=0\ldots(T-1) \qquad a$$

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + d_t \qquad b \qquad (132)$$

$$u_t = \sum_{j=0}^{\theta} k_j \, x_{t-j} \qquad c$$

$$\underline{k}_j \leqslant k_j \leqslant \bar{k}_j \qquad j=0\ldots\ldots\theta \qquad d$$

avec les conditions initiales $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-\theta}$. Les fonctions ψ et ψ_T sont dérivables par rapport à leurs arguments et θ est un nombre entier fixé à priori.

Le problème (132) fait intervenir des contraintes que nous avons classifiées en deux grands types :

- les contraintes de type instantané : (132-a) qui sont des contraintes d'inégalité portant à la fois sur l'état et la commande, (132-b) les contraintes correspondant à l'évolution dynamique du système et (132-c) les contraintes liant la commande et l'état du système. En fait, cette dernière contrainte peut également être classifiée dans le deuxième groupe fournissant les contraintes de structure, le paramètre représente par exemple la quantité de "mémoire" nécessaire à l'élaboration de la commande.

- les contraintes de structure (132-d) n'interviennent pas directement en fait dans le calcul de la matrice gradient mais simplement au niveau de la condition initiale (solution admissible).

Il est évident que sans la contrainte (132-a) le problème pourraît être traité par la méthode du gradient matriciel comme il a été exposé dans les paragraphes précédents. On pourrait donc penser à utiliser la méthode duale en dualisant par rapport à la contrainte (132-a).

Soit μ_t la variable duale associée à cette contrainte, alors pour μ_t "fixé", le problème est du même type de ceux considérés auparavant (contraintes d'égalité). Malheureusement, on ne peut assurer la convergence de la méthode duale dans ce cas, car pour μ_t fixé nous ne pouvons en général ni affirmer la stricte convexité du problème résultant par rapport à k_j ni l'unicité de ses solutions. Cela signifie soit que la fonction duale n'est pas dérivable en tous points ce qui rend la coordination très difficile soit qu'elle présente un "gap" de dualité, ce qui alors rend impossible la convergence vers la solution optimale (Lasdon |46|).

Pour ces raisons nous allons entreprendre la résolution de (132) au moyen de la méthode dite de pénalisation. Il est à noter qu'à priori le problème (132) ne peut pas admettre de solution admissible ou un très petit domaine de solutions admissibles. Nous proposons donc de traiter le problème (132) en deux étapes : la première étape correspond à la recherche d'une solution admissible, la seconde à la recherche de l'optimum.

Pour résoudre la première étape considérons le problème suivant :

$$\min_{S_t \geqslant 0;\, k_j \in \Omega(S)} \sum_{t=0}^{T-1} C(S_t)$$

$$\begin{aligned} & S_t + Cx_t + Du_t \geqslant b_t \qquad t=0\ldots(T-1) \\ & x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + d_t \\ & u_t = \sum_{j=0}^{\theta} k_j x_{t-j} \\ & \underline{k}_j \leqslant k_j \leqslant \bar{k}_j \end{aligned} \tag{133}$$

où C(.) est une fonction dérivable, strictement convexe et minimale pour $S_t=0$. Ecrivons (133) sous la forme

$$\min_{k_j \in \Omega(S)} \sum_{t=0}^{T-1} \omega_t(k_j)$$

$$x_{t+1} = Ax_t + \sum_{j=0}^{\theta} Bk_j x_{t-j} + d_t \tag{134}$$

$$\underline{k}_j \leqslant k_j \leqslant \bar{k}_j \quad ; \quad j=0,\ldots$$

où $\omega_t(.)$ est défini par

$$\omega_t(k_j) = \min_{S_t \geqslant 0} \left\{ C(S_t)/-S_t+b_t \leqslant v_t(k_j) \right\} \tag{135}$$

où $v_t(k_j) = Cx_t + \sum_{j=0}^{\theta} Dk_j x_{t-j}$. Pour pouvoir appliquer la méthode développée dans les paragraphes précédents il nous faut nous assurer que $\omega_t(k_j)$ est bien dérivable par rapport à $k_j (j=0\ldots\theta)$.

Soit μ_t le vecteur des variables duales associé à la contrainte d'inégalité apparaissant dans le sous problème (135), les conditions de stationnarité de Kuhn-Tucker pour ce problème s'écrivent

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \mu_t \leqslant \nabla C(S_t) && \text{a}\\
&-S_t + b_t \leqslant v_t(k) && \text{b}\\
&S_t \geqslant 0 && \text{c}\\
&\mu_t'(-S_t+b_t-v_t(k)) = 0 && \text{d}\\
&(\nabla C(S_t)-\mu_t)'S_t = 0 && \text{e}
\end{aligned} \tag{136}$$

Compte tenu du fait que C(.) est une fonction strictement convexe, $\hat{S}_t$ qui satisfait (136) est unique. Deux cas peuvent alors se présenter : $\hat{S}_t > 0$, alors d'après (136-e) on a $\hat{\mu}_t = \nabla C(\hat{S}_t)$ ou $\hat{S}_t = 0$, alors d'après (136-a) $0 \leqslant \hat{\mu}_t \leqslant \nabla C(\hat{S}_t)\Big|_{\hat{S}_t=0} = 0$

L'unicité de la variable duale μ_t implique que la fonction $\omega_t(.)$ est différentiable par rapport à v_t (Luna [50]), en effet

$$\frac{d\omega_t}{dv_t} = - \mu_t \qquad t=0\ldots(T-1) \tag{137}$$

L'illustration du résultat ci-dessus est fournie dans le cas où v_t est un scalaire

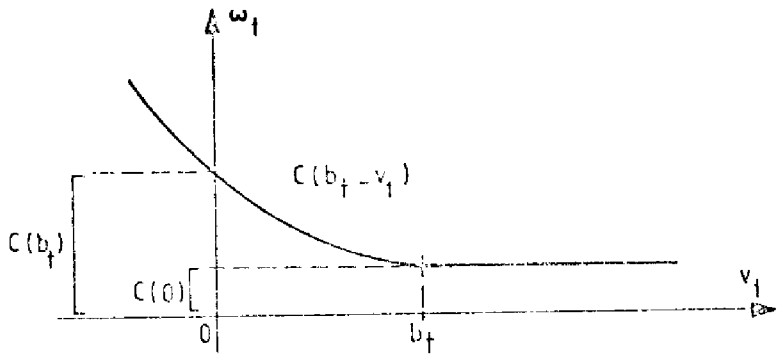


Figure III-5. La fonction ω_t par rapport à v_t

Compte tenu du fait que $v_t(k_j)$ est bien sûr dérivable par rapport à k_j ; $\omega_t(k_j)$ est dérivable par rapport à k_j

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk_j}\omega_t(k_j) &= - \mu'_t \frac{d}{dk_j} v_t(k_j) \\ &= \frac{d}{dk_j}\left\{- \mu'_t C x_t - \mu'_t D \sum_{j=0}^{\theta} k_j x_{t-j}\right\} \end{aligned} \tag{138}$$

et pour la fonction objectif globale du problème (134) nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk_j}\omega(k) &= \frac{d}{dk_j}\left\{\sum_{t=0}^{T-1}\left(- \mu'_t C x_t - \mu'_t D \sum_{j=0}^{\theta} k_j x_{t-j}\right)\right\} \\ x_{t+1} &= Ax_t + \sum_{j=0}^{\theta} Bk_j x_{t-j} + d_t \end{aligned} \tag{139}$$

Pour calculer $d\omega(k)/dk_j$ $(j=0\ldots\theta)$, l'application directe des résultats du corollaire III-1. peut être faite. Appelant λ_t, $t=0\ldots(T-1)$ les variables duales associées à la contrainte dynamique, l'Hamiltonien du problème (139) s'écrit

$$H(x_t, \lambda_t, k_j) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ -\mu_t' C x_t - \mu_t' D \sum_{j=0}^{\theta} k_j x_{t-j} \right\} \tag{140}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \left\{ \lambda_t' \left(A x_t + \sum_{j=0}^{\theta} B k_j x_{t-j} + d_t \right) \right\}$$

et donc

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\omega(k)}{dk_j} = \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} \left\{ B'\lambda_t - D'\mu_t \right\} x_{t-j}' & j=0\ldots\theta \\[2ex] \displaystyle\sum_{j=0}^{\theta} k_j' \left\{ B'\lambda_{t+j} - D'\mu_{t+j} \right\} - C'\mu_t + A'\lambda_t - \lambda_{t-1} = 0 \quad ; \quad \lambda_{T-1} = 0 \\[2ex] d_t + \displaystyle\sum_{j=0}^{\theta} B k_j x_{t-j} + A x_t - x_{t+1} = 0 \quad ; \quad x_0, x_{-1} \ldots x_{-\theta} \text{ connus} \end{cases} \tag{141}$$

L'obtention des matrices gradient $d\omega(k)/dk_j$ est relativement simple du fait qu'il nëcessite uniquement la solution de deux équations dynamiques non couplées portant sur la variable primale x_t et la variable duale λ_t (sens rétrograde).

<u>Remarque</u> : dans la définition du problème (133) portant sur la détermination d'une solution admissible il reste une certaine indétermination quant au choix même de la fonction de pénalisation $C(S_t)$. Ce choix sera bien évidemment fait de façon à minimiser le volume et la complexité des calculs nécessaires. Par exemple, la solution du problème (135) fournissant $\omega_t(k_j)$ s'exprime de manière simple dans le cas où $C(S_t) = \frac{1}{2} \|S_t\|^2$. En effet

$$\begin{cases} \mu_t = S_t \\ S_t^i = \max \left\{ 0,\ b_t^i - v_t^i(k_j) \right\} & i=1\ldots r \end{cases} \tag{142}$$

r étant la dimension de la variable S_t. Il vient alors

$$\omega_t(k_j) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{2}\left\{\max\left\{0,\ b_t^i - v_t^i(k_j)\right\}\right\}^2 \tag{143}$$

Retournons maintenant au problème de départ (132). Sa résolution au moyen de la méthode de pénalisation consiste en la solution de problèmes du type

$$\min_{S_t \geqslant 0,\, k_j \in \Omega(S)} \sum_{t=0}^{T-1} \eta . C(S_t) + J(k_j)$$

$$\begin{aligned} & S_t + Cx_t + Du_t \geqslant b_t \qquad t=0\ldots(T-1) \\ & x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + d_t \\ & u_t = \sum_{j=0}^{\theta} k_j x_{t-j} \\ & \underline{k}_j \leqslant k_j \leqslant \bar{k}_j \qquad j=0\ldots.\theta \end{aligned} \tag{144}$$

où η est un nombre réel positif arbitrairement grand. La procédure classique (Luenberger [48]) consiste à résoudre (144) séquentiellement pour une séquence de valeurs de η croissantes, on obtient alors une séquence de valeurs de k_j convergeant vers la solution du problème (132).

Utilisant les notations introduites au sous paragraphe précédent, (144) peut être reécrit sous la forme

$$\begin{aligned} & \min_{k_j \in \Omega(S)} J(k_j) + \sum_{t=0}^{T-1} \eta \cdot \omega_t(k_j) = \omega^{\eta}(k_j) \\ & x_{t+1} = Ax_t + \sum_{j=0}^{\theta} Bk_j x_{t-j} + d_t \\ & \underline{k}_j \leqslant k_j \leqslant \bar{k}_j \quad , \quad j=0\ldots.\theta \end{aligned} \tag{145}$$

L'introduction de J(.) dans la fonction objectif ne pose aucun problème et à partir des résultats précédents, l'application directe du corollaire III-1. fournit

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dk_j}\ \omega^{\eta}(k_j) = \sum\limits_{t=0}^{T-1} \left\{ \dfrac{\partial \psi}{\partial u_t} + (B'\lambda_t - D'\tilde{\mu}_t) \right\} x'_{t-j} \\[2ex]
\sum\limits_{j=0}^{\theta} k'_j \left\{ B'\lambda_{t+j} - D'\tilde{\mu}_{t+j} + \dfrac{\partial \psi}{\partial u_{t+j}} \right\} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_t} - C\tilde{\mu}_t + A'\lambda_t - \lambda_{t-1} = 0 \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_{T-1} = \dfrac{d\psi_T}{dx_T} \qquad\qquad (146) \\[2ex]
d_t + \sum\limits_{j=0}^{\theta} Bk_j x_{t-j} + Ax_t - x_{t+1} = 0 \qquad x_0, \ldots\ x_{-\theta} \ \text{connus}
\end{array}\right.$$

avec $\tilde{\mu}_t = \eta \cdot \mu_t$, $t=0\ldots(T-1)$. La solution du problème (144) peut donc être fournie au moyen d'un algorithme primal qui consiste, pour un k_j admissible en la détermination de la matrice gradient pour ensuite déterminer une direction de progression admissible pour les gains par la solution de problèmes de projection sur les ensembles associés aux contraintes de structure (décentralisation, contraintes de borne). Nous fournissons ci-dessous une description détaillée du type d'algorithme possible , où on suppose connus a priori les gains initiaux k_j tels que $k_j \in \Omega(S)$, $\underline{k}_j \leqslant k_j \leqslant \bar{k}_j$

<u>Pas 1</u> : calcul de la fonction $v_t(k_j)$ $t=0\ldots(T-1)$

$$\begin{array}{l}
v_t(k_j) = Cx_t + \sum\limits_{j=0}^{\theta} Dk_j x_{t-j} \\[2ex]
x_{t+1} = Ax_t + \sum\limits_{j=0}^{\theta} Bk_j x_{t-j} + d_t \qquad\qquad (147) \\[2ex]
x_0, \ldots x_{-\theta} \ \text{connues}
\end{array}$$

<u>Pas 2</u> : déterminer la valeur des fonctions $\omega_t(k_j)$ $t=0\ldots(T-1)$ et de la variable duale μ_t associée. Calculer ensuite la valeur du critère global par sommation

$$\omega^{\eta}(k_j) = J(k_j) + \sum_{t=0}^{T-1} \eta \cdot \omega_t(k_j) \qquad (148)$$

a) si la valeur du critère est plus grande ou égale à celle antérieure diminuer le pas α et aller au pas 6

b) cas contraire aller au pas 3

Pas 3 : calculer les matrices gradient de la fonction objectif globale

$$\frac{d\omega^{\eta}}{dk_j} = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial u_t} + B'\lambda_t - D'\tilde{\mu}_t \right\} x'_{t-j} \tag{149}$$

où λ_t, t=0...T-1 est donné par (146). Aller au pas suivant

Pas 4 : détermination des directions admissibles sur les gains k_j (projection).
Soient D_j, $j=0\ldots\theta$ ces directions
a) si $\|D_j\| < \epsilon$, ϵ étant un réel positif arbitrairement petit, stop : les gains k_j obtenus sont optimaux
b) cas contraire aller au pas 5

Pas 5 : trouver le pas $\hat{\alpha}$ maximal possible, c'est-à-dire

$$\hat{\alpha} = \max \left\{ \alpha \,/ k_j - \alpha D_j,\ j=0\ldots\theta \ \text{ soient admissibles} \right\}$$

faire $\alpha = \hat{\alpha}$ et aller au pas 6

Pas 6 : actualisation des gains : $k_j \leftarrow k_j - \alpha D_j$ et aller au pas 1.

Remarque : Il se peut que les contraintes fixées pour le problème (132) fassent que ce problème soit en fait sans solution admissible ou que le domaine des solutions admissibles soit exagérément réduit rendant alors le problème d'optimisation sans grand intérêt. La méthode de pénalisation utilisée précédemment permet de contourner cette difficulté en cherchant la solution qui viole le moins possible la contrainte (132-a). En fait, dans la plupart des problèmes physiques il est peu réaliste de considérer la contrainte (132-a) de façon très stricte, en d'autres termes on peut admettre une certaine fourchette admissible pour la violation de cette contrainte. Une manière de formaliser cette tolérance est de considérer le vecteur $b_t \in R^r$ comme une variable aléatoire avec fonction densité de probabilité $P(b_t)$ donnée.

Pour simplifier le problème nous supposerons que les éléments du vecteur b_t sont des variables indépendantes, c'est-à-dire

$$P(b_t) = \prod_{i=1}^{r} P_i(b_t^i) \tag{150}$$

Nous sommes alors confronté à un problème de programmation stochastique qui peut être résolu par une méthode de pénalisation, nous allons discuter par la suite du choix de la fonction de pénalisation.

Supposons que pour une valeur donnée des matrices de gain k_j, $j = 0....\theta$ on ait

$$Cx_t + Du_t = y_t \qquad t=0...(T-1) \tag{151}$$

et considérons la fonction linéaire par morceaux suivante :

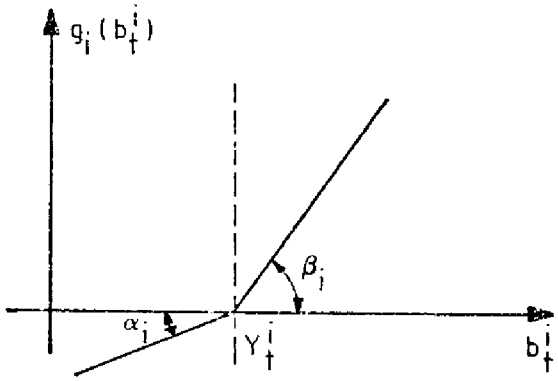


Figure III-6 : La fonction de pénalisation pour le problème stochastique

c'est-à-dire

$$g_i(b_t^i) = \begin{cases} \alpha_i(b_t^i - y_t^i) & b_t^i \leqslant y_t^i \\ \beta_i(b_t^i - y_t^i) & b_t^i \geqslant y_t^i \end{cases} \tag{152}$$

où α_i et β_i $(i=1...r)$ sont des nombres positifs supposés donnés.

Finalement, considérons la fonction de pénalisation

$$C(y_t) = \sum_{i=1}^{r} E\{g_i(b_t^i)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left\{ \alpha_i \int_{-\infty}^{y_t^i} (\zeta - y_t^i) P_i(\zeta) d\zeta + \right.$$

$$\left. + \beta_i \int_{y_t^i}^{\infty} (\zeta - y_t^i) P_i(\zeta) d\zeta \right\} \qquad (153)$$

et définissons le problème déterministe suivant

$$\min_{y_t, k_j \in \Omega(S)} \sum_{t=0}^{T-1} C(y_t) + \sum_{t=0}^{T-1} \psi(x_t, u_t) + \psi_T(x_T)$$

$$Cx_t + Du_t - y_t = 0$$

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + d_t \qquad (154)$$

$$u_t = \sum_{j=0}^{\theta} k_j x_{t-j}$$

$$\underline{k}_j \leqslant k_j \leqslant \bar{k}_j \qquad j=0 \ldots \theta$$

Il est aisé de voir que pour les valeurs de α_i et β_i choisies telles que sur la figure III-6, l'introduction dans la fonction objectif du terme $C(y_t)$ effectue une sorte de pénalisation car $C(y_t)$ augmente lorsque y_t diminue, c'est-à-dire que la probabilité de satisfaction instantanée de la contrainte $y_t \geqslant b_t$ diminue.

Il est à noter que le problème (154) et le problème (132) sont fondamentalement différents puisque la contrainte inégalité (132-a) qui nous a causé quelques problèmes a disparu et que nous sommes ramenés à un problème qui peut directement être traité au moyen des outils présentés aux paragraphes précédents.

Il est évident que la solution optimale de (154) va dépendre du choix des paramètres α_i et β_i. il est également clair que ce choix doit être tel que

$$\beta_i >> \alpha_i \geqslant 0 \tag{155}$$

ceci afin d'encourager les solutions où y_t soit grand c'est-à-dire où la probabilité de la satisfaction de la contrainte $y_t \geqslant b_t$ (132-a) soit élevée.

<u>Exemple III-4.</u> Considérons le problème suivant

$$\min_{k_j \varepsilon \Omega(S)} \frac{1}{2} \|x_{20}\|^2$$

$$Cx_t \geqslant b \qquad t=0\ldots19$$

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + d_t$$

$$u_t = \sum_{j=0}^{1} k_j \, x_{t-j}$$

$$\underline{k}_j \leqslant k_j \leqslant \bar{k}_j \qquad j=0,1 \qquad ; \quad x_0=x_{-1} = 0$$

Le système est constitué de l'interconnexion de deux sous-systèmes de dimensions respectives (2x2) et (3x3), c'est-à-dire $x_t' = [x_t^{1'}, x_t^{2'}]$ avec $x_t^1 \varepsilon R^2$, $x_t^2 \varepsilon R^3$. Les matrices A, B et d considères sont :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les contraintes instantanées sur l'état, de borne sur les matrices k_j et l'ensemble $\Omega(S)$ ont été considérés comme etant

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \bar{k}_j = -\underline{k}_j = \begin{bmatrix} 2 & 3 & & & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$j = 0,1$$

$$\Omega(S) = \left\{ k/k = \text{bloc diag } (k_1, k_2),\ k_1 \epsilon R^{1x2},\ k_2 \epsilon R^{2x3} \right\}$$

A partir du problème ci-dessus, nous avons examiné trois cas :

Cas 1 : Nous avons résolu ce problème sans les contraintes instantanées avec les gains admissibles initiaux $k_j=0$, j=0 et 1 et nous avons obtenu comme solution optimale ($\epsilon = 10^{-3}$)

$$k_0 = \begin{bmatrix} -1.34 & -2.74 & & \\ & & 0.57 & 0 & -0.14 \\ & & 0.03 & 1.50 & -0.02 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} -0.89 & -2.17 & & \\ & & 0.39 & 0 & 0.03 \\ & & -1.63 & 0.72 & 0.40 \end{bmatrix}$$

après 35 itérations et 9.9 sec. de calcul. Sur la figure correspondante nous pouvons voir que la contrainte $Cx_t \geqslant b$ n'est pas toujours satisfaite.

Cas 2 : A partir des gains admissibles initiaux $k_j = 0$, j = 0 et 1 nous avons résolu le problème de recherche d'une solution admissible et après 2 itérations et 1.2 sec. de calcul nous avons obtenu :

$$k_0 = \begin{bmatrix} -0.17 & -1.82 & & \\ & & 0.03 & 0 & 0.35 \\ & & -0.13 & 1.5 & -0.63 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} -0.95 & -1.27 & & \\ & & 0.82 & 0 & -0.11 \\ & & -1.17 & 0.07 & 0.30 \end{bmatrix}$$

les trajectoires correspondantes à ces gains sont fournies sur la figure III-8.

Cas 3 : Nous avons résolu le problème proposé avec les gains initiaux solution optimale du cas 2 et $\eta = 10^3$. Après 100 itérations et 21.9 sec. de calcul toujours sur l'IBM 370/165 du CIRCE nous avons obtenu comme solution optimale

$$k_0 = \begin{bmatrix} -0.51 & -2.41 & & & \\ & & 0.56 & 0 & 1 \\ & & -0.48 & 1.5 & -0.51 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} -1.17 & -2.07 & & & \\ & & 0.85 & 0 & 0.04 \\ & & -1.82 & 0.14 & 0.63 \end{bmatrix}$$

Nous avons vérifié aussi que pour $\eta=10^5$ la solution optimale ci-dessus reste sensiblement la même.

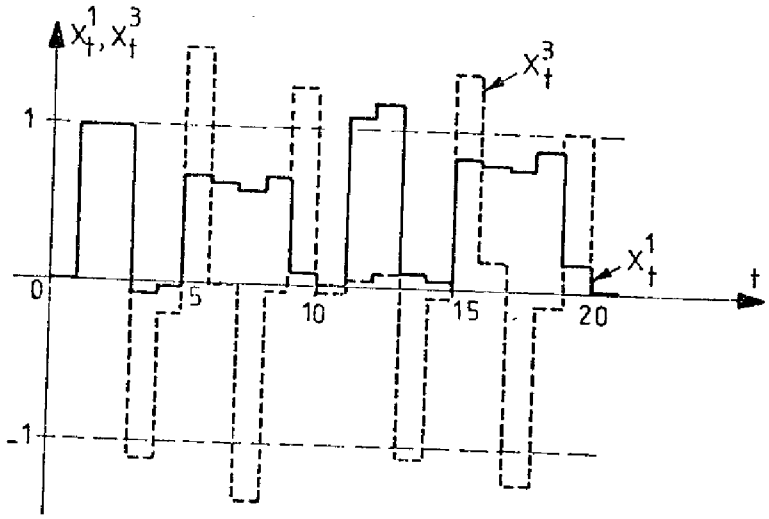


Figure III-7. Solution optimale du cas 1

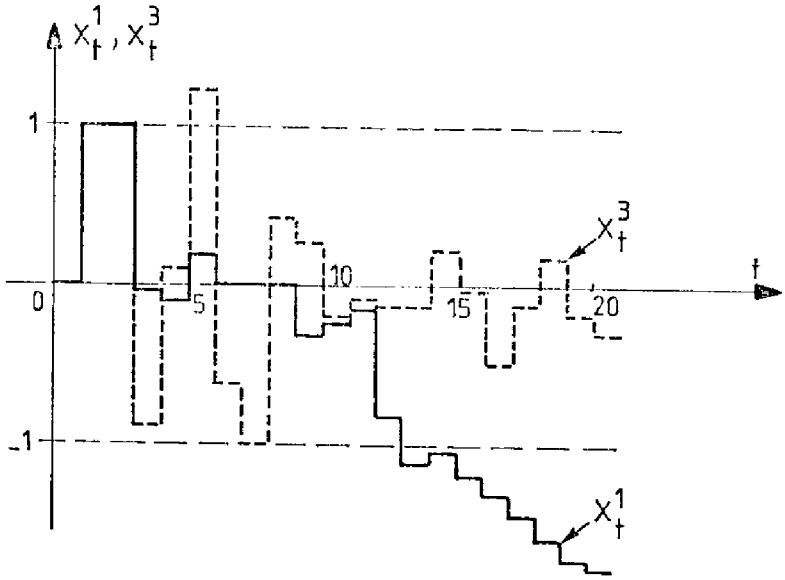


Figure III-8. Solution optimale du cas 2

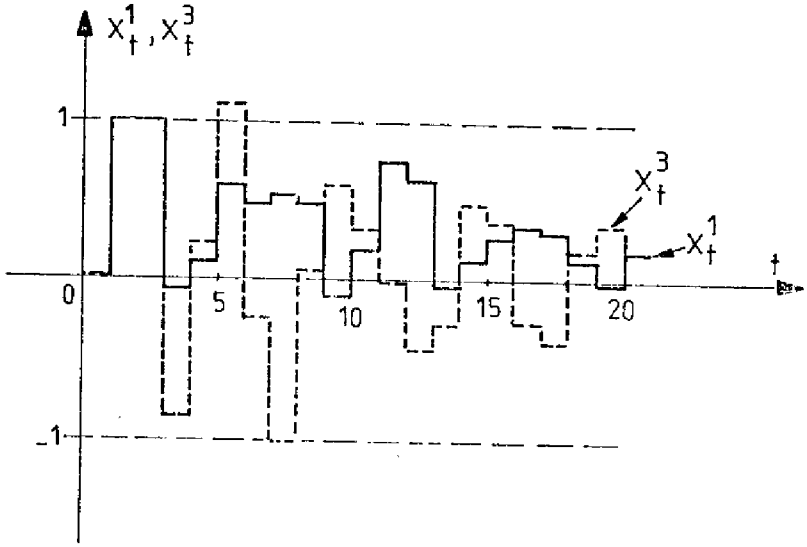


Figure III-9. Solution optimale du cas 3

III-3. L'ESTIMATION D'ETAT DÉCENTRALISÉ

Dans cette section nous allons nous intéresser au problème du filtrage optimal de l'état d'un système linéaire invariant, dans le cas où le filtre est à structure contrainte : décentralisée. Comme nous allons le montrer, le développement n'est possible que dans le cas où on suppose qu'il est possible d'effectuer directement les mesures sur les termes d'interconnexion (Sanders et al [57]), (Sandell et al [56]).

La figure ci-dessous présente de façon schématique le problème.

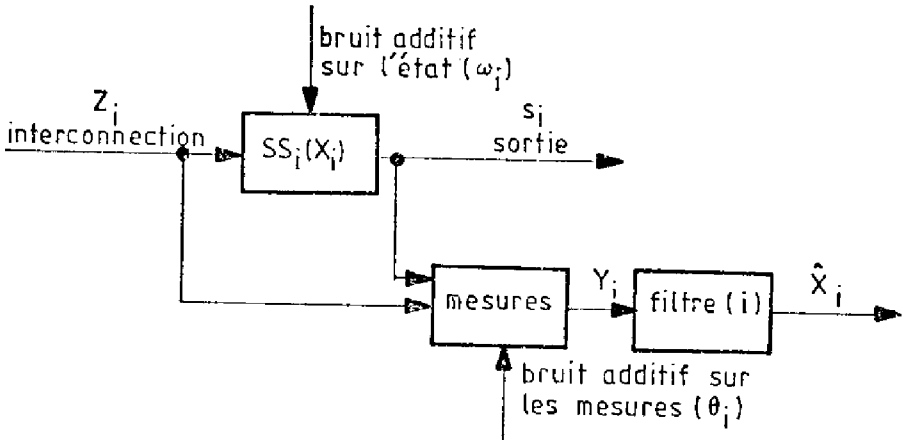


Figure III-10. Le schéma de filtrage de l'état du ième sous système

x_i représente le vecteur des variables d'état, z_i le vecteur des interconnexions et s_i le vecteur des sorties du ième sous-système. En pratique, il nous semble que l'hypothèse de mesure sur les interconnexions n'est pas très dure, en tout cas, dans le problème particulier que nous traiterons ici et qui représente un réseau de transport d'énergie électrique cette hypothèse est tout à fait valide (Elgerd [25]).

Le problème que nous nous posons ici est celui de la détermination des filtres "locaux" au niveau de chaque sous-système, c'est-à-dire, de filtres qui à partir des mesures faites localement (sortie-interconnexions) sont capables de reconstruire l'état du sous-système correspondant.

Soit le système linéaire invariant et interconnecté décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + D_i z_i + \omega_i \\ z_i = L_i x = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} L_{ij} x_j \\ s_i = C_i x_i \\ y_i = s_i + H_i z_i + \theta_i \end{cases} \qquad i=1,\ 2,\ldots N \qquad (156)$$

où $x_i \varepsilon R^{n_i}$, $z_i \varepsilon R^{r_i}$ et $y_i \varepsilon R^{m_i}$. Nous allons par la suite supposer que

- ω_i et θ_i sont des bruits blancs gaussiens, indépendants, de moyenne nulle et de matrices de covariance respectives Q_i et R_i
- $x_i(t_0)$ est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\bar{x}_{i0}$, matrice de covariance X_{i0} et indépendant des bruits ω_i et θ_i
- (ω_i, θ_j) sont indépendants de même que (ω_i, x_{j0}), (θ_i, x_{j0}) et (x_{i0}, x_{j0}) pour $i,j = 1\ldots N$ et $j\neq i$.

L'équation du filtre pour le ième sous-système est prise comme (Kwakernak et Sivan |44|)

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = A_i \hat{x}_i + k_i (y_i - C_i \hat{x}_i) \\ \hat{x}_i(t_0) = \hat{x}_{i0} \end{cases} \qquad (157)$$

Définissant l'erreur d'observation comme $e_i(t)=x_i(t)-\hat{x}_i(t)$, il vient

$$\begin{cases} \dot{e}_i = (A_i - k_i C_i) e_i + \omega_i - k_i \theta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (D_i - k_i H_i) L_{ij} x_j \\ e_{i0} = x_{i0} - \hat{x}_{i0} \end{cases} \qquad (158)$$

Le problème est de minimiser l'erreur quadratique moyenne du filtre, soit

$$E\{e_i' w_i e_i\} = Tr\{w_i E(e_i e_i')\} \tag{159}$$

avec $w_i = w_i' > 0$. C'est-à-dire en fonction de la moyenne de l'erreur $\bar{e}_i(t)$ et de sa matrice de covariance $P_i(t) = E\{[e_i(t)-\bar{e}_i(t)][e_i(t)-\bar{e}_i(t)]'\}$ car

$$E\{e_i' w_i e_i\} = \bar{e}_i'(t) w_i \bar{e}_i(t) + Tr\{w_i P_i(t)\} \tag{160}$$

D'après l'équation (158), il est clair que la moyenne de l'erreur $\bar{e}_i(t)$ pour le ième sous-système va dépendre des valeurs moyennes des états des autres sous-systèmes. Ceci signifie que même si $(A_i - k_i C_i)$ est asymptotiquement stable, il pourra se faire que $e_i(\infty) \neq 0$.

La possibilité de la détermination d'un filtre décentralisé sans "biais" nécessite que puissent être satisfaites les contraintes

$$(D_i - k_i H_i) L_{ij} = 0 \qquad i=1\ldots N \quad , \; j=1\ldots N \quad i \neq j \tag{161}$$

Supposant ces contraintes satisfaites, à partir de l'équation (158) et compte tenu des hypothèses d'indépendance des bruits ω_i, θ_i et des conditions initiales, les équations permettant la détermination de la valeur moyenne de l'erreur et de sa matrice de covariance sont (143)

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_i = (A_i - k_i C_i)\bar{e}_i \quad ; \quad \bar{e}_{i0} = \bar{x}_{i0} - \hat{x}_{i0} \quad i=1\ldots N \\ \dot{P}_i = (A_i - k_i C_i) P_i + P_i (A_i - k_i C_i)' + Q_i + k_i R_i k_i' \quad P_i(0) = X_{i0} \end{cases} \tag{162}$$

Finalement, le problème d'estimation de l'état peut être mis sous la forme

$$\min_{\hat{x}_{i0}, k_i(t)} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \bar{e}_i(t)' w_i \bar{e}_i(t) + Tr\{w_i P_i(t)\} \right\} \quad \text{sous} \quad (161-162) \tag{163}$$

Le premier terme de la fonction objectif dépend seul de $\hat{x}_{i0}$, il est bien évidemment minimisé pour $\hat{x}_{i0} = \bar{x}_{i0}$, i=1...N. D'autre part, la solution de (163) (lorsqu'elle existe) fournit un gain $k_i(t)$ variant dans le temps ce qui pose un problème d'utilisation pratique. Intéressons nous plutôt au cas limite $t_0 \to -\infty$, alors $P_i(t) = P_i$ = constante solution de l'équation algébrique de Lyapunov (162) :

$$\min_{k_i \varepsilon \Gamma_i} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Tr}\left\{w_i P_i\right\}$$
$$(A_i - k_i C_i)P_i + P_i(A_i - k_i C_i)' + Q_i + k_i R_i k_i' = 0 \tag{164}$$

où Γ_i est l'ensemble défini par les contraintes linéaires (161)

$$\Gamma_i = \left\{k_i \varepsilon R^{n_i x m_i} / (D_i - k_i H_i) L_i = 0\right\} \tag{165}$$

Il est aisé de voir que le problème (164) peut être après quelques petites manipulations ramené à la forme suivante

$$\min_{k_i \varepsilon \Gamma_i} \int_0^{\infty} \mathrm{Tr}\left\{(Q_i + k_i R_i k_i')X_i(t)\right\} dt = J_i(k_i) \qquad i=1...N$$
$$\dot{X}_i = (A_i - k_i C_i)' X_i + X_i (A_i - k_i C_i) \tag{166}$$
$$X_i(0) = w_i$$

Il est à remarquer que le problème d'estimation d'état précédent avec les hypothèses faites se décompose en N sous problèmes tout à fait indépendants et ceci est une différence notable par rapport au problème de commande qui lui nécessitait un calcul portant sur le système global.

Enfin, par application des résultats antérieurs (théorème III-1) la matrice gradient $dJ_i(k_i)/dk_i$ est donnée par

$$\frac{dJ_i(k_i)}{dk_i} = 2V_i(k_i)\left\{k_iR_i - P_i(k_i)C_i'\right\}$$

$$(A_i - k_iC_i)P_i(k_i) + P_i(k_i)(A_i - k_iC_i)' + Q_i + k_iR_ik_i' = 0 \qquad (167)$$

$$(A_i - k_iC_i)'V_i(k_i) + V_i(k_i)(A_i - k_iC_i) + w_i = 0$$

Sans la contrainte $k_i \varepsilon \Gamma_i$ la solution optimale est obtenue avec $dJ_i(k_i)/dk_i = 0$ et on retrouve bien le gain optimal du filtre de Kalman qui est indépendant de la matrice de pondération w_i. Par contre, dans le cas présent, avec contrainte de décentralisation, la solution optimale de (166) va dépendre du choix de w_i.

L'étude faite sur la stabilité avec commande décentralisée dans le paragraphe III-2-6. reste encore valable (problèmes duaux) dans le cas de l'estimation décentralisée.

Il est bien sûr nécessaire pour le développement précédent que l'ensemble Γ_i soit non vide, c'est-à-dire

$$R(L_i'D_i') \subset R(L_i'H_i') \qquad (168)$$

et en plus, le nombre de contraintes linéairement indépendantes en Γ_i est donné par

$$l_I(\Gamma_i) = n_i \operatorname{rang}(H_iL_i) = n_i.\min\left\{\operatorname{rang}(L_i), \operatorname{rang}(H_i)\right\} \qquad (169)$$

Nous avons trouvé ici (168-169) une généralisation des résultats fournis dans (Sanders et al |57|) et en nous attachant à ne pas spécifier les formes particulières pour les matrices en présence.

Par exemple, dans (Sanders et al |57|) la matrice $H_i' \varepsilon R^{r_i x m_i}$ est choisie $[I_i \quad 0]$, I_i étant la matrice unité $(r_i x r_i)$ ce qui n'implique pas de perte de généralité mais qui pour un problème réel peut demander un certain travail pour obtenir cette forme.

En plus, les auteurs avaient supposé $\operatorname{rang}(L_i) = r_i$ et avec cette hypothèse (168) est équivalent à $R(D_i') \subset R(H_i')$ et (169) fournit

$$l_I(\tilde{\Gamma}_i) = n_i . r_i \geqslant l_I(\Gamma_i) \tag{170}$$

où $\tilde{\Gamma}_i = \{ k_i \varepsilon R^{n_i x m_i} / D_i - k_i H_i = 0 \} \subset \Gamma_i$

Dans l'exemple qui sera traité ci-dessous les interconnexions seront de type dynamique et il est aisé de voir que les calculs précédents sont encore valables.

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + D_i z_i + \omega_i \\ \dot{z}_i = L_i x_i = \sum_{j=1}^{N} L_{ij} x_j \\ y_i = C_i x_i + H_i z_i + \theta_i \end{cases} \tag{171}$$

pour l'équation du filtre (157), l'erreur d'estimation est donnée par

$$\begin{cases} \dot{e}_i = (A_i - k_i C_i) e_i + \omega_i - k_i \ \theta_i + \sum_{j=1}^{N} (D_i - k_i H_i) L_{ij} \int_0^t x_j(\zeta) d\zeta \\ e_{i0} = x_{i0} - \hat{x}_{i0} \end{cases} \tag{172}$$

et sous la contrainte $k_i \varepsilon \Gamma_i$, le problème se ramène alors au précédent.

<u>Exemple III-5</u>.: Soit un réseau de production et transport d'énergie électrique composé de N aires interconnectées (cf. chapitre IV) décrit par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} T_{p_i} \ \delta\dot{f}_i + \delta f_i = k_{p_i} \ (\delta P_{g_i} - \delta P_{d_i} - \delta P_{t_i}) \\ T_{T_i} \ \delta\dot{P}_{g_i} + \delta P_{g_i} = \delta X_{e_i} \\ T_{g_i} \ \delta\dot{X}_{e_i} + \delta X_{e_i} = - \frac{1}{r_i} \ \delta f_i \qquad i=1 \ldots N \\ \delta\dot{P}_{t_i} = \sum_{j \varepsilon S_i} T_{ij} \ (\delta f_i - \delta f_j) \end{cases} \tag{173}$$

où S_i est l'ensemble des indices des aires couplées à l'aire (i). Si on considère le vecteur d'état $x_i' = [\delta f_i, \delta P_{g_i}, \delta X_{e_i}]$, l'interconnexion $z_i = [\delta P_{t_i}]$ et la perturbation sur l'état $\omega_i' = [-\frac{k_{p_i}}{T_{p_i}} \delta P_{d_i}, 0, 0]$ nous avons

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + D_i z_i + \omega_i \\ \dot{z}_i = \sum_{j=1}^{N} L_{ij} x_j \end{cases}$$

où

$$A_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{p_i}} & \frac{k_{p_i}}{T_{p_i}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_{T_i}} & \frac{1}{T_{T_i}} \\ -\frac{1}{r_i T_{g_i}} & 0 & -\frac{1}{T_{g_i}} \end{bmatrix} \qquad D_i = \begin{bmatrix} -\frac{k_{p_i}}{T_{p_i}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{ii} = [\sum_{j \varepsilon S_i} T_{ij} \quad 0 \quad 0] \quad ; \qquad L_{ij} = [-T_{ij} \quad 0 \quad 0] \quad (i \neq j \varepsilon S_i)$$

Nous allons considérer le cas pratique dans lequel on peut mesurer en chaque sous-système les variables δf_i et δP_{t_i} (Elgerd |25|), alors

$$y_i = C_i x_i + H_i z_i + \theta_i$$

où

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \qquad H_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons considéré le cas d'un système de deux aires avec les données suivantes :

i	T_{p_i}	k_{p_i}	T_{T_i}	T_{g_i}	r_i	T_{1i}	T_{2i}	S_i
1	20	120	0.3	0.08	2.4	X	0.545	2
2	20	120	0.3	0.08	2.4	0.545	X	1

Pour les variables stochastiques nous avons considéré $E\{\delta P_{d1}^2\} = 10^{-6}$; $E\{\delta P_{d2}^2\} = 10^{-6}$ et on peut déterminer

$$Q_i = \begin{bmatrix} \left(\frac{k_{p_i}}{T_{p_i}}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .E\{\delta P_{d_i}^2\} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . 10^{-6}$$

$$R_i = 10.10^{-6}.I \qquad i=1,2$$

Avec les matrices de pondération $w_i = I$ pour i=1 et 2 nous avons obtenu les gains et les matrices de covariances optimaux suivants

$$k_i = \begin{bmatrix} 5.80 & -6.00 \\ -0.45 & 0. \\ -1.57 & 0. \end{bmatrix} ; \quad P_i = \begin{bmatrix} 5.80 & -0.45 & -1.58 \\ -0.45 & 0.19 & 0.22 \\ -1.58 & 0.22 & 0.56 \end{bmatrix} .10^{-3}$$

$$i=1,2$$

Les calculs ont été effectués sur l'IBM 370/165 du CIRCE. Avec un test d'arrêt de 10^{-4} sur le module de chaque élément de la matrice gradient projeté, le temps de calcul a été de 0.51 sec. pour les deux sous-systèmes pour un nombre d'itérations de 39. La valeur choisie comm e condition initiale sur les gains de chacun des filtres a été

$$k_i' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{p_i}}{T_{p_i}} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad i=1,2$$

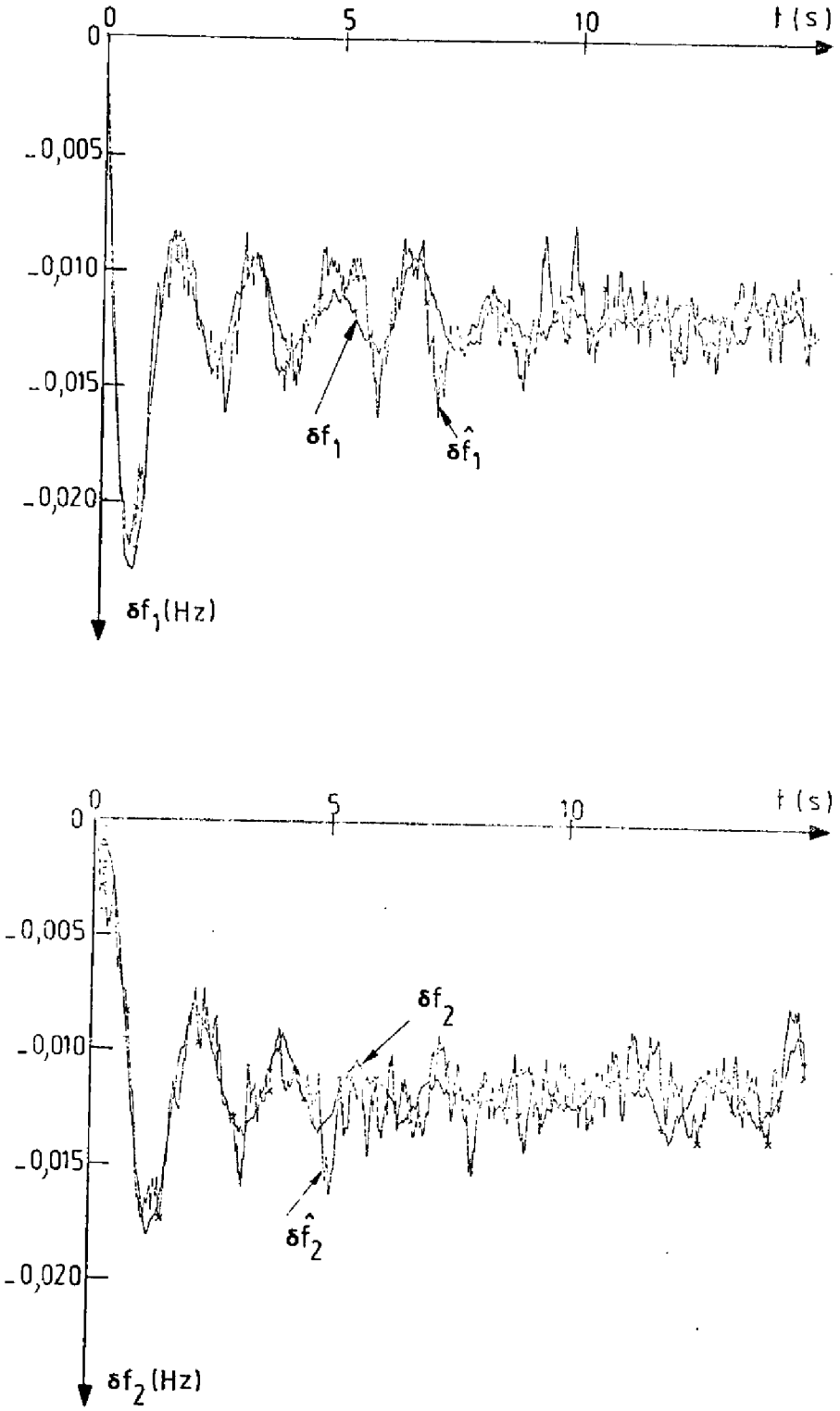
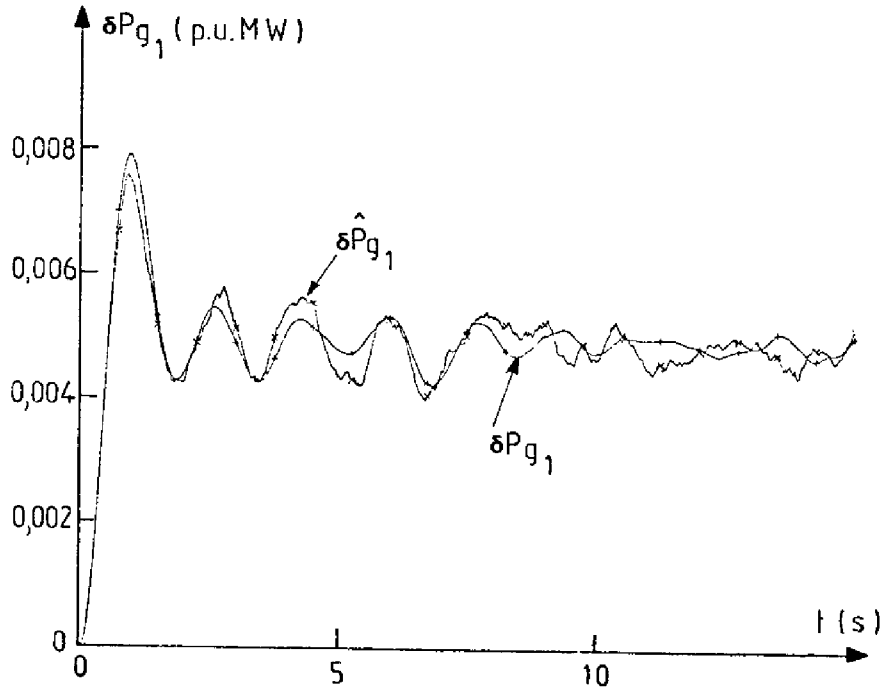


Figure III-11. δf_i réel et estimé



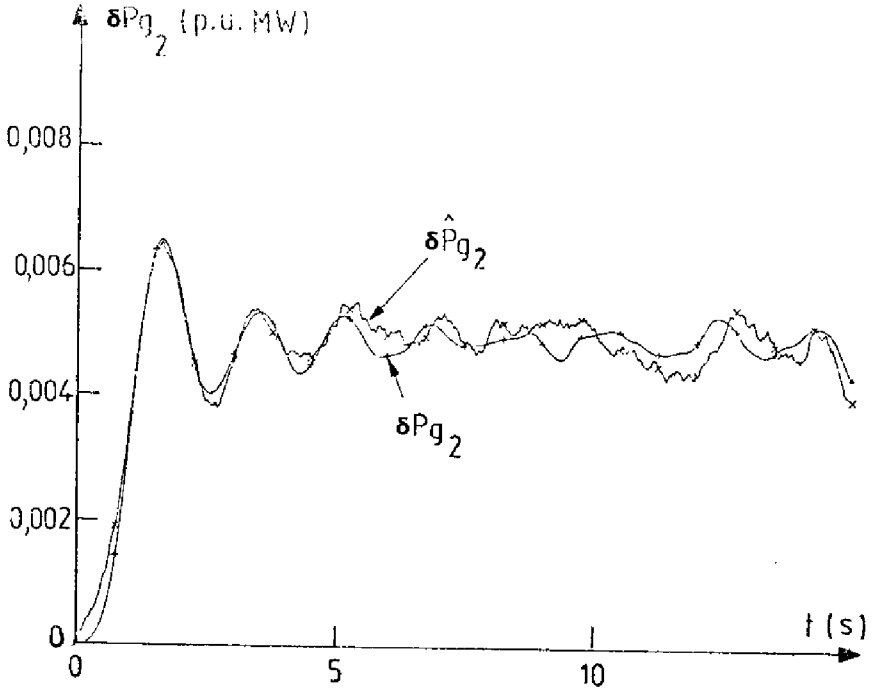


Figure III-12. δP_{g_i} réel et estimé

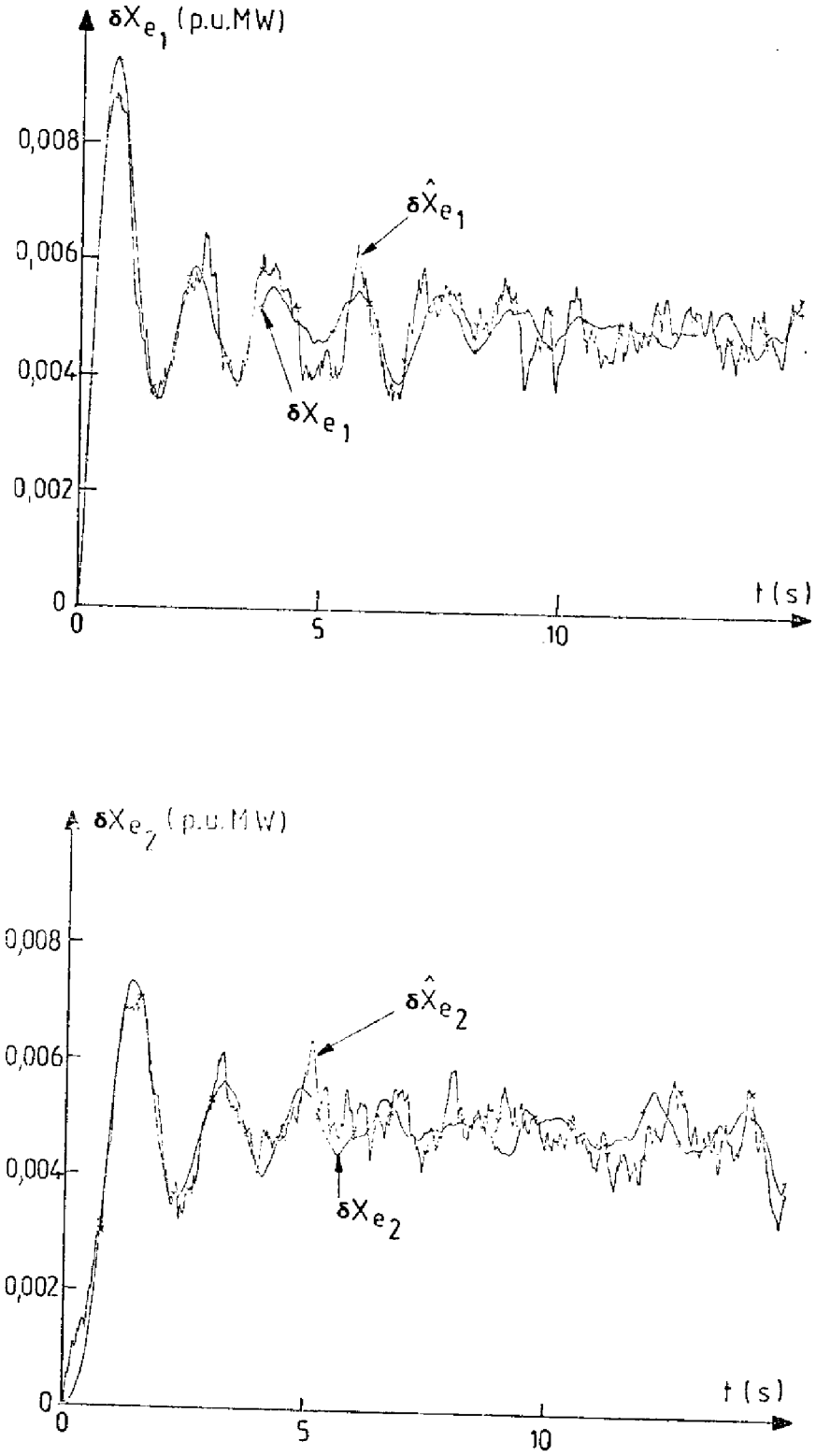


Figure III-13. δX_{e_i} réel et estimé

Les figures III-11, 12 et 13 fournissent les résultats de la simulation numérique.

<u>Remarque</u> : L'extension au cas discret ne présente pas de difficulté majeure. Soit le système

$$\begin{cases} x_i^{t+1} = A_i x_i^t + D_i z_i^t + \omega_i \\ z_i^t = L_i x_i^t = \sum_{j\neq i}^{N} L_{ij}\, x_j^t \qquad i=1\ldots N \\ y_i^t = C_i x_i^t + H_i z_i^t + \theta_i \end{cases} \tag{174}$$

et pour l'équation du filtre

$$\begin{cases} \hat{x}_i^{t+1} = A_i \hat{x}_i^t + k_i\ (y_i^t - C_i \hat{x}_i^t) \\ \hat{x}_i^{t_0} = \hat{x}_{i0} \end{cases} \tag{175}$$

l'erreur d'estimation $e^t = x^t - \hat{x}^t$ est alors donnée par

$$\begin{cases} e_i^{t+1} = (A_i - k_i C_i) e_i^t + \omega_i - k_i\, \theta_i + \sum_{j\neq i}^{N} (D_i - k_i H_i) L_{ij} x_j^t \\ e_i^{t_0} = x_{i0} - \hat{x}_{i0} \end{cases} \tag{176}$$

pour $\hat{x}_{i0} = \bar{x}_{i0}$ et $k_i \in \Gamma_i$ $i=1\ldots N$ le cas discret du problème (163) peut être ramené à

$$\begin{aligned} &\min_{k_i \in \Gamma_i} \sum_{t=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\ \{(Q_i + k_i R_i k_i')X_i^t\} \\ &\qquad X_i^{t+1} = (A_i - k_i C_i)' X_i^t (A_i - k_i C_i) \qquad i=1\ldots N \\ &\qquad X_i^0 = w_i \end{aligned} \tag{177}$$

qui est du même type que le problème du régulateur d'état discet.

III-4. CONCLUSION

La première partie de ce chapitre a été consacrée à l'etude de la commande décentralisée tant dans le cas discret que continu. Nous ne reviendrons pas sur l'intérêt pratique de l'étude de commandes sous contraintes de structure.

Nous avons abordé ce problème au moyen d'une méthode primale directe basée sur le calcul de matrices gradient et la recherche de directions admissibles.

Pour le calcul des matrices gradient nous avons développé une manière systématique d'obtention qui à nos yeux, simplifie de manière notable les calculs. Pour démontrer cela, plusieurs problèmes ont été abordés et leur solution a été comparée à quelques travaux "classiques" dans le domaine. Le problème de la projection du gradient matriciel a également été abordé et résolu, étendant en cela certains résultats obtenus dans le cas vectoriel.

Pour l'algorithme proposé, nous avons fourni des conditions suffisantes permettant d'affirmer sa convergence vers une solution (matrice des gains) stabilisante, problème qui est bien sûr d'une importance pratique évidente.

La méthode adoptée présente l'inconvénient de devoir effectuer les calculs nécessaires sur le modèle global du système. Nous avons montré qu'il était parfois possible d'effectuer une décomposition du problème et d'utiliser un procédé de calcul à deux niveaux (méthode duale).

Comme dans tout problème d'optimisation sous contrainte de structure, nous avons été confronté au problème de la dépendance de la solution vis à vis des conditions initiales. Après avoir résolu ce problème de la manière classique qui consiste à considérer les conditions initiales comme variables aléatoires et à minimiser l'espérance mathématique du critère, nous avons adopté dans notre problème de commande décentralisée une idée mentionnée par Kalman [39] . Elle revient à définir un "jeu" entre "homme et nature" ; la nature agissant sur les conditions initiales cher-

che à maximiser le critère, alors que l'homme disposant de la commande cherche lui à le minimiser. Il a été montré que la solution d'un tel problème satisfait les conditions suffisantes assurant l'obtention d'une commande stabilisante.

Nous avons ensuite considéré un problème d'une complexité relativement plus grande en adjoignant aux contraintes de structure des contraintes de type inégalité instantanées. Intérassant d'un point de vue pratique, nous avons regardé le cas où ces contraintes devraient être satisfaites non impérativement mais "en probabilité" définissant alors un problème avec contraintes stochastiques. La méthode utilisée pour résoudre ce problème a été une méthode avec pénalisation pour laquelle l'approche directe (gradient-projection) s'est avérée efficace.

La deuxième partie de ce chapitre, plus courte, a eu pour but de montrer que le problème dual (estimation) pouvait se résoudre également au moyen des outils présentés au début de la première partie. La différence essentielle du problème de l'estimation décentralisée par rapport à celui de la commande décentralisée est que, lorsqu'il est possible, il conduit à des calculs complètement décentralisés (effectués au niveau de chaque sous-système).

C H A P I T R E IV

LA COMMANDE DECENTRALISEE : UNE APPLICATION

IV-1. INTRODUCTION

Nous nous proposons dans ce chapitre d'appliquer les résultats antérieurs à un problème physique qui concerne la régulation "fréquence-puissance" pour un réseau d'énergie électrique. Cela nous permettra de mettre en évidence les potentialités de la méthode ainsi que ses lacunes.

Dans le cas de réseaux de génération et transport d'énergie électrique la contrainte de décentralisation se justifie aisément car une des caractéristiques de tels réseaux réside dans leur distribution géographique.

Des travaux ont déjà été publiés dans ce domaine. Fosha et Elgerd [28] ont considéré le problème de la régulation optimale à partir d'un modèle linéaire-critère quadratique, la solution globale ne satisfaisant évidemment pas la contrainte de décentralisation. La solution décentralisée a été proposée dans (Elgerd et Fosha [26]) par une méthode très directe, qui n'est guère envisageable que dans le cas où le nombre de variables d'optimisation est très réduit. Il nous faut également citer le travail de Davison et al [24] où est résolu le problème de la commande décentralisée au moyen de la méthode dite de Rosenbrock [53] qui consiste en une recherche pas à pas de directions pour faire décroître la fonction objectif. Enfin, dans [18] , Calovic a considéré le problème de régulation en rajoutant celui de "dispatching" optimal.

Nous allons considérer ici le problème général avec contraintes de décentralisation et contraintes linéaires sur les matrices de contre réaction avec de plus le problème de répartition optimale de charge.

Ce chapitre comprend deux parties : dans la première, après une modélisation du problème (système dynamique continu) nous appliquerons l'algorithme du chapitre précédent et ferons une comparaison des résultats obtenus avec ceux de Elgerd et Fosha [26] . Dans une deuxième partie (plus restreinte) nous montrerons comment appliquer la méthode de décomposition duale

(voir chapitre III) afin d'obtenir la matrice gradient des gains de chaque sous-système.

IV-2. Le Problème de la Commande Optimale "Puissance-Fréquence" Pour un Reseau d'Energie Electrique

Un réseau d'énergie électrique peut être caractérisé comme un ensemble de N aires interconnectées, chacune composée de n_i $i=1...N$ générateurs. Le problème qui se pose est le suivant : trouver une commande pour chaque générateur de façon que pour une perturbation de charge donnée, le système retourne à un état d'équilibre préspécifié en minimisant un critère de performance (généralement quadratique). L'état d'équilibre doit satisfaire les objectifs suivants (Elgerd |25|)

1. La réponse à un échelon de charge doit présenter une erreur en régime permanent nulle pour toutes les aires du réseau c'est-à-dire

$$\delta f_i(\infty) = 0 \qquad i=1...N$$

2. En régime stationnaire, la puissance reçue ou fournie pour chaque aire doit être nulle

$$\delta P_{tie,i}(\infty) = 0 \qquad i=1...N$$

c'est-à-dire qu'en régime stationnaire, chaque aire doit être capable de satisfaire l'accroissement de sa demande. Evidemment les interconnexions sont justifiées car elles permettent qu'une aire aide les autres pendant le transitoire de telle façon que le système global ait une performance plus satisfante.

3. Comme chaque aire est en principe composée par un groupe de générateurs avec coûts marginaux opératoires différents, il est nécessaire d'imposer qu'en régime stationnaire, la production de chaque unité soit telle que le coût de production d'énergie soit minimum tout en satisfaisant la demande

$$\sum_{j=1}^{n_i} \delta P^g_{ij} \geqslant \delta P_{d_i} \qquad i=1...N$$

Elgerd [25] propose une stratégie de commande en considérant les objectifs (1-2) et (3) séparément. Tout d'abord il est déterminé une première boucle de réalimentation, avec un temps de réponse de quelques secondes, par la solution de la commande décentralisée "Puissance-Fréquence" (CDPF). Après, pour ne pas trop changer la dynamique du système ainsi commandé, une autre boucle est mise en place mais avec un temps de réponse d'ordre de quelques minutes pour satisfaire l'objectif 3.

Dans ce chapitre nous allons adopter la stratégie suivante : tout d'abord, nous allons déterminer les consignes des générateurs de telle façon que l'objectif 3 soit satisfait et après nous allons optimiser à la fois les deux boucles de commandes décrites ci-dessus.

IV-2-1. LE MODELE LINEAIRE CONTINU POUR UNE AIRE

Tout d'abord, une aire est définie par un ensemble de générateurs cohérents [25] c'est-à-dire tels que, une variation de charge en tout point du réseau entraîne une variation de fréquence en leur sortie égale en première approximation. Suivant Elgerd [25] , nous allons considérer un modèle linéaire pour l'ensemble "Turbine-Générateur-Commande de vitesse" :

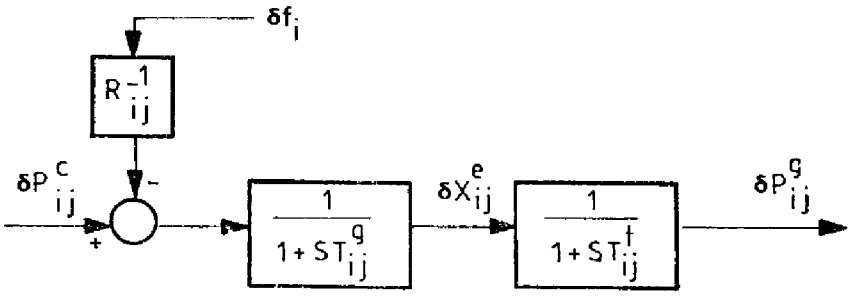


Figure IV-1. Un groupe "Turbine-générateur-commande vitesse" de l'aire (i)

où les variables indiquent :

$\delta f_i(t)$: la variation de fréquence de l'aire (i) (Hz)

δP^g_{ij} : la variation de puissance produite par le jème générateur de l'aire (i) (pu MW)

δP^c_{ij} : la variation de puissance demandée au générateur j de l'aire (i) (pu MW)

D'après la figure antérieure, on peut voir que si on considère $\delta P^c_{ij} = 0$ et $F_i(s) = \mathcal{L}(\delta f_i(t)) = \delta \bar{f}_i/s$ (échelon unitaire) alors

$$R_{ij} = - \frac{\delta \bar{f}_i}{\delta \bar{P}^g_{ij}} \qquad \text{(Hz/pu MW)} \qquad (1)$$

où les variables avec une barre supérieure correspondent aux valeurs en régime permanent. De plus, si δP_{gi} correspond à la puissance totale générée par l'aire (i), alors

$\delta P_{g_i} = \sum_{j=1}^{n_i} \delta P^g_{ij}$ et de (1) vient

$$R_i^{-1} = - \frac{\delta \bar{P}_{g_i}}{\delta \bar{f}_i} = \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}^{-1} \qquad (2)$$

Suivant [25] , après une perturbation de charge δP_{d_i} sur l'aire (i), l'équation de balance d'énergie dans cette aire s'écrit

$$\delta P_{g_i} - \delta P_{d_i} - \delta P_{tie,i} = k_{p_i}^{-1} (\delta f_i + T_{p_i} \frac{d}{dt} \delta f_i) \qquad \text{(pu MW)} \qquad (3)$$

où :

δP_{g_i} : est la puissance totale générée par l'aire (i)

δP_{d_i} : est la variation de charge sur l'aire (i)

$\delta P_{tie,i}$: représente la puissance "importée" ou "exportée" par l'aire (i) avec les aires adjacentes

Dans les équations (1-3) nous avons considéré une capacité maximale de génération P_{r_i} en MW (base de l'unité pu MW).

Alors d'après (3) et le modèle linéaire pris pour représenter les générateurs, nous avons l'ensemble d'équations différentielles qui définissent la dynamique d'une aire

$$\left\{\begin{array}{l} T_{p_i}\ \delta\dot{f}_i + \delta f_i = k_{p_i}(\delta P_{g_i} - \delta P_{d_i} - \delta P_{tie,i}) \\ \delta P_{g_i} = \sum_{j=1}^{n_i} \delta P^g_{ij} \\ T^t_{ij}\ \delta\dot{P}^g_{ij} + \delta P^g_{ij} = \delta X^e_{ij} \\ T^g_{ij}\ \delta\dot{X}^e_{ij} + \delta X^e_{ij} = \delta P^c_{ij} - R^{-1}_{ij}\ \delta f_i \end{array}\right. \qquad i=1\ldots N \qquad (4)$$

Nous devons noter que le système linéaire ci-dessus a été obtenu par linéarisation du processus réel autour d'un point d'opération connu à priori |25| et donc les conditions initiales de (4) sont

$$\left\{\begin{array}{l} \delta f_i(0) = \delta P_{tie,i}(0) = 0 \\ \delta P^g_{ij}(0) = \delta X^e_{ij}(0) = 0 \end{array}\right. \qquad i=1\ldots N,\ j=1\ldots n_i \qquad (5)$$

Considérons maintenant une aire isolée, c'est-à-dire $\delta P_{tie,i} = 0$ et sans commande sur ses générateurs : $\delta P^c_{ij} = 0$, $j=1\ldots n_i$, alors pour une variation de demande en échelon d'amplitude δP_{d_i}, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\bar{f}_i = k_{p_i}\left\{\sum_{j=1}^{n_i} \delta\bar{P}^g_{ij} - \delta P_{d_i}\right\} \\ \delta\bar{P}^g_{ij} = \delta\bar{X}^e_{ij} = -R^{-1}_{ij}\ \delta\bar{f}_i \end{array}\right. \qquad (6)$$

finalement, à partir de (2) et (6) nous avons

$$\frac{\delta P_{d_i}}{\delta\bar{f}_i} = -(k^{-1}_{p_i} + R^{-1}_i) = -\beta_i \quad \text{(pu MW/Hz)} \qquad (7)$$

ce paramètre β_i est appelé "Area frequency response characteristic" (AFRC).

Nous pouvons maintenant définir une autre variable qui va jouer un rôle important dans les sections suivantes, c'est l'Area control error", définie par la relation

$$ace_i = \delta P_{tie,i} + \beta_i \, \delta f_i \tag{8}$$

D'après Elgerd [25] , en pratique, nous pouvons mesurer la variation de puissance demandée ou fournie $\delta P_{tie,i}$ par toutes les aires du réseau. Toutefois l'industrie spécifie que la commande soit établie à partir d'une combinaison linéaire qui est exactement l'ace_i. Comme nous allons le voir, d'après les résultats numériques de la section suivante, l'introduction de (8) cause toujours une détérioration de la valeur optimale du critère choisi. Ce fait a été observé également par Elgerd et Fosha [26] .

IV-2-2. LE PROBLEME DE REGULATION DECENTRALISEE "PUISSANCE-FREQUENCE"

Soit J_i l'ensemble d'indices correspondant aux aires directement connectées à l'aire (i) au travers de lignes de transmission, alors nous avons [25]

$$\begin{aligned} \delta P_{tie,i} &= \sum_{j \in J_i} \delta P_{tie,ij} \\ &= \sum_{j \in J_i} T_{ij} \left\{ \int_0^t (\delta f_i - \delta f_j) dt \right\} \end{aligned} \tag{9}$$

où T_{ij} est un coefficient dit de synchronisation. Soit

$$\begin{cases} \dot{\delta P}_{tie,i} = \sum_{j \in J_i} T_{ij} (\delta f_i - \delta f_j) \\ \delta P_{tie,i}(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Donc le modèle linéaire du réseau est représenté par l'ensemble des équations (4) avec les conditions initiales (5) qui donnent le comportement dynamique des aires et par l'équation (10) qui fournit le comportement dynamique des variables d'interconnexion.

Pour satisfaire les trois objectifs décrits, nous proposons que la commande δP^c_{ij} sur chaque générateur soit composée de deux parties

$$\delta P^c_{ij} = - \delta P_i - \delta I_{ij} \qquad j=1...n_i,\ i=1...N \tag{11}$$

où δP_i et δI_{ij} sont respectivement la partie proportionnelle et intégrale de la commande (contrôle PI). Considérons donc

$$\begin{cases} \delta P_i = k^1_{p_i}\ \delta P_{tie,i} + k^2_{p_i}\ \delta f_i \\ \delta I_{ij} = \int_0^t k^1_{Ii}\ \delta P_{tie,i} + k^2_{Ii}\ \delta f_i + k_{Iij}(\delta P^g_{ij} - \delta \hat{P}^g_{ij})dt \end{cases} \tag{12}$$

où $\delta \hat{P}^g_{ij}$ indique la valeur optimale du problème de "dispatching optimal".

Il est évident qu'à partir de (12), si on considère les contraintes linéaires

$$\begin{cases} \beta_i\ k^1_{p_i} - k^2_{p_i} = 0 \\ \beta_i\ k^1_{Ii} - k^2_{Ii} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

alors les parties proportionnelle et intégrale de la commande peuvent être écrites directement en fonction de l'ace_i :

$$\begin{cases} \delta P_i = k^1_{p_i}\ ace_i \\ \delta I_{ij} = \int_0^t k^1_{Ii} ace_i + k_{Iij}(\delta P^g_{ij} - \delta \hat{P}^g_{ij})dt \end{cases} \tag{14}$$

Nous sommes maintenant en mesure de formuler le problème de la "Commande Décentralisée Puissance-Fréquence" : Trouver les gains $k^1_{p_i}$, $k^2_{p_i}$, k^1_{Ii}, k^2_{Ii}, k_{Iij} pour tout $i=1...N$, $j=1...n_i$

tel que

$$\min \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\infty} \left\{ \delta f_i^2 + \delta P_{tie,i}^2 + r_i \delta P_i^2 + \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ (\delta P_{ij}^g - \delta \hat{P}_{ij}^g)^2 + \frac{r_i}{n_i} \delta \dot{I}_{ij}^2 \right\} \right\} dt \qquad (15)$$

$$\text{sous } \{(4), (5), (10), (11) \text{ et } (12)\}$$

où $r_i > 0$ sont les pondérations sur la commande. $\delta \hat{P}_{ij}^g$ est donné par la solution du problème

$$\min \sum_{j=1}^{n_i} C_{ij}(\delta P_{ij}^g) \qquad i=1...N \qquad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \delta P_{ij}^g \geqslant \delta P_{d_i}$$

<u>Remarque</u> :

Nous avons considéré en (15) une pondération $0 < r_i << 1$ sur les parties proportionnelle et intégrale de la commande simplement parce que ceci implique que les gains optimaux, solutions de (25) sont finis. Néanmoins nous pouvons considérer $r_i = 0$, $i=1...N$ avec des contraintes de borne sur les gains correspondants. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, l'algorithme présenté est aussi applicable dans ce cas là.

La mise en place de la structure de commande proposée prend comme hypothèse qu'il est possible de mesurer à chaque instant les variables δf_i, $\delta P_{tie,i}$ et δP_{ij}^g $j=1...N$ ce qui est une hypothèse réaliste (Elgerd [25]). En régime permanent, on a à partir de (4)

$$\delta \bar{f}_i = \delta \bar{P}_{tie,i} = \delta \bar{P}_i = 0$$

$$\delta \bar{P}_{ij}^g = \delta \bar{X}_{ij}^e = - \delta \bar{I}_{ij} = \delta \hat{P}_{ij}^g \qquad (17)$$

et comme le problème (15) est un problème linéaire quadratique, si on considère $x \varepsilon R^n$, $y \varepsilon R^r$ et $u \varepsilon R^m$ comme étant les variables d'état, de sortie et de commande du système global, avec

$$x' = [\delta f_1, \delta P^g_{11} - \delta\hat{P}^g_{11}, \delta X^e_{11} - \delta\hat{P}^g_{11}, \delta I_{11} + \delta\hat{P}^g_{11}, \delta P^g_{12} - \delta\hat{P}^g_{12}, \ldots$$

$$\ldots, \delta P_{tie,1}, \ldots]$$

$$y' = [\delta f_1, \delta P^g_{11} - \delta\hat{P}^g_{11}, \delta P^g_{12} - \delta\hat{P}^g_{12}, \ldots, \delta P_{tie,1}, \ldots] \qquad (18)$$

$$u' = [\delta P_1, \delta\dot{I}_{11}, \delta\dot{I}_{12}, \ldots, \delta P_2, \ldots]$$

$$n = 2N + 3 \sum_{i=1}^{N} n_i \quad , \; r = 2N + \sum_{i=1}^{N} n_i, \; m = N + \sum_{i=1}^{N} n_i$$

le problème (15) peut s'écrire sous la forme

$$\min_{k \in \Omega(S)} \int_0^{\infty} (y'y + u'Ru)dt$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = D\delta\hat{P}_g \qquad (19)$$

$$y = Cx$$

$$u = -ky$$

où $\delta\hat{P}'_g = [\delta\hat{P}^g_{11}, \delta\hat{P}^g_{12}, \ldots]$ est le vecteur solution du problème (16) et $\Omega(S)$ est l'ensemble de décentralisation défini par

$$\Omega(S) = \left\{ k \in R^{mxr} / k = \text{bloc diag } (k_1, \ldots, k_N) \right\} \qquad (20)$$

d'après la structure de commande choisie (12), chaque élément de la matrice bloc-diagonale ci-dessus a la structure suivante

$$k_i = \begin{bmatrix} k^2_{P_i} & 0 & 0 & \ldots & k^1_{P_i} \\ k^2_{Ii} & k_{Ii1} & 0 & \ldots & k^1_{Ii} \\ k^2_{Ii} & 0 & k_{Ii2} & \ldots & k^1_{Ii} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \end{bmatrix} \in R^{n_i+1, n_i+2} \qquad (21)$$

Finalement la commande décentralisée obtenue à partir de l'ace_i peut être obtenue par la solution de (19) si on considère $k \in \Omega(S) \cap \Gamma(S)$ où $\Gamma(S)$ est défini par

$$\Gamma(S) = \left\{ k_i / k_i H_i = 0 \qquad i=1 \ldots N \right\} \tag{22}$$

où $H_i' = \left[-1 \quad 0 \ldots 0 \quad \beta_i \right]$ est obtenue directement à partir des contraintes (13).

Donc le problème global (19), avec actuellement les contraintes linéaires (22) est exactement du type considéré dans le chapitre antérieur et donc peut être résolu par la méthode développée auparavant.

Nous devons finalement noter que notre définition des variables d'état (18) rend le système global (19) d'ordre non minimal car d'après (10) et du au fait que $T_{ij} = (P_{r_j}/P_{r_i}) T_{ji}$ $\forall\, i,j$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} P_{r_i} \, \delta P_{tie,i} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in J_i} P_{r_i} T_{ij} (\delta f_i - \delta f_j) = 0 \tag{23}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{N} P_{r_i} \, \delta P_{tie,i} = 0 \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{24}$$

ce qui permet d'écrire la puissance d'une aire quelconque comme fonction de celles des autres et diminuer d'un le nombre des variables d'état.

Finalement en (10), les matrices B, D et R sont des matrices bloc-diagonales et A est une matrice pleine. Elles sont facilement déterminées à partir des paramètres et de la topologie de chaque réseau particulier. Dans la prochaine section nous fournissons ces matrices pour un réseau de deux aires interconnectées prises pour notre essai numérique.

IV-2-3. QUELQUES RESULTATS NUMERIQUES

L'exemple retenu pour nos expérimentations numériques est celui donné dans (Elgerd et Fosha |26|), (voir aussi Geromel et Bernussou |34|).

Considérons donc 2 aires de puissance (N = 2) interconnectées chacune composée d'une unité de génération ($n_1=n_2=1$) avec les données numériques suivantes

$$
\begin{aligned}
&P_{r_1} = P_{r_2} = 2000 \text{ MW} \\
&T^g_{11} = T^g_{21} = 0.08 \text{ sec} \\
&T^t_{11} = T^t_{21} = 0.3 \text{ sec.} \\
&R_{11} = R_{21} = 2.4 \text{ Hz/pu MW} \\
&T_{p_1} = T_{p_2} = 20 \text{ sec.} \\
&k_{p_1} = k_{p_2} = 120 \text{ Hz/pu MW} \\
&T_{12} = T_{21} = 0.545 \text{ pu MW/Hz} \\
&\beta_1 = \beta_2 = 0.425 \text{ pu MW/Hz} \\
&\delta P_{d_1} = 0.01 \text{ pu MW} \qquad \delta P_{d_2} = 0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Dans ce cas, évidemment (16) implique $\delta\hat{P}^g_{11} = \delta P_{d_1}$ et $\delta\hat{P}^g_{21} = 0$ et (24) implique que $\delta P_{tie,1} + \delta P_{tie,2} = 0$ alors le problème (19) a 9 variables d'état, 6 variables de sortie et 4 variables de commande

$$x = \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta P^g_{11} - \delta \hat{P}^g_{11} \\ \delta X^e_{11} - \delta \hat{P}^g_{11} \\ \delta I_{11} + \delta \hat{P}^g_{11} \\ \delta f_2 \\ \delta P^g_{21} - \delta \hat{P}^g_{21} \\ \delta X^e_{21} - \delta \hat{P}^g_{21} \\ \delta I_{21} + \delta \hat{P}^g_{21} \\ \delta P_{tie,1} \end{bmatrix} \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta P^g_{11} - \delta \hat{P}^g_{11} \\ \delta P_{tie,1} \\ \delta f_2 \\ \delta P^g_{21} - \delta \hat{P}^g_{21} \\ -\delta P_{Tie,1} \end{bmatrix} \quad ;$$

$$u = \begin{bmatrix} \delta P_1 \\ \delta \dot{I}_{11} \\ \delta P_2 \\ \delta \dot{I}_{21} \end{bmatrix} \tag{26}$$

alors, d'après (26) on peut obtenir facilement :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$D' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

l'ensemble de décentralisation défini en (20), dans ce cas particulier est tel que chaque bloc doit avoir la structure suivante

$$k_i = \begin{bmatrix} k^2_{p_i} & 0 & k^1_{p_i} \\ k^2_{I_i} & k_{I_{i1}} & k^1_{I_i} \end{bmatrix} \qquad i = 1,2 \tag{28}$$

la matrice R du critère a été choisie : R = 0.1 I et la dynamique du système est donnée à la page suivante. Nous pouvons réécrire (19) dans la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \min_{k \varepsilon \Omega \cap \Gamma} \quad & J(k) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left\{(C'C+C'k'RkC)X(t)\right\} dt \\ & \dot{X}(t) = (A-BkC)X(t) + X(t)(A-BkC)' \\ & X(0) = D\delta\hat{P}_g\delta\hat{P}_g'D' = D\delta P_d\delta P_d'D' \end{aligned} \tag{29}$$

Comme nous avons vu dans le chapitre antérieur, la solution optimale de (29) dépendra du vecteur de perturbation de charge δP_d. Pour éliminer cette dépendance nous allons considérer δP_d comme étant un vecteur de variables aléatoires (ce qui est très réaliste) gaussiennes avec $E\{\delta P_d \delta P_d'\} = I$, dans ce cas $X(0) = DD'$.

Nous avons résolu le problème (29) avec l'algorithme fourni dans le chapitre antérieur pour 4 cas différents, chacun avec un ensemble différent de contraintes pour la matrice k (voir tableau ci-après). Pour ces 4 cas, nous avons choisi pour initialiser l'algorithme au pas 1 la matrice

$$k^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & \\ \beta_1 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & \beta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Cette matrice est telle que $\Lambda(A-Bk^1C) \subset C^-$ et $k^1 \varepsilon \Omega(S) \cap \Gamma(S)$. D'après les résultats du chapitre antérieur, la matrice gradient par rapport à k de la fonction objectif en (29) est donnée par

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.05 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -3.33 & 3.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.21 & 0 & -12.5 & -12.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.05 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.33 & 3.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.21 & 0 & -12.5 & -12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.545 & 0 & 0 & 0 & -0.545 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad (30)$$

$$\frac{dJ(k)}{dk} = 2\left\{RkC - B'P(k)\right\} V(k)C'$$

$$(A-BkC)'P(k)+P(k)(A-BkC)+C'(I+k'Rk)C = 0 \qquad (32)$$

$$(A-BkC)V(k)+V(k)(A-BkC)'+DD' = 0$$

Au pas 3, les opérateurs de projection sur l'ensemble $\Omega(S)$ et $\Gamma(S)$ sont facilement obtenus : l'opérateur de projection sur $\Omega(S)$ est simplement une opération de bloc-diagonalisation et sur $\Gamma(S)$ il est donné par

$$\Pi_\Gamma = (.).\text{bloc-diag}(P_1,P_2) \qquad (33)$$

où P_i, i=1,2 sont donnés par

$$P_i = \frac{1}{1+\beta_i^2}\begin{bmatrix} \beta_i^2 & 0 & \beta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta_i & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (34)$$

D'après les résultats obtenus et fournis dans le tableau ci-dessus nous avons fait la simulation du système en étude (voir figures IV-2, 3, 4 et 5) et nous pouvons remarquer quelques aspects :

1. Dans les quatre cas que nous avons considérés (2-5) nous avons baissé la valeur optimale du critère (en prenant comme référence le cas 1) mais dans le troisième cas, en 20 sec. de simulation, les écarts de fréquence dans les deux aires ne sont pas arrivés au point d'équilibre ce qui est inacceptable dans un système réel |25| .

2. Les cas 2 et 4 ont a peu près la même valeur du critère et les mêmes trajectoires, ce qui implique que la bouclage de la variable d'état correspondant à la puissance produite sur chaque générateur ne permet pas une amélioration du transitoire du système. Il faut noter que dans ces cas, nous faisons la commande à partir de δf_i et $\delta P_{tie,i}$ et non à partir de l'ace_i.

3. Si on compare les cas 3 et 5 où nous avons imposé que la commande soit faite à partir de l'ace_i, nous pouvons remarquer que dans ces deux cas là, la boucle de puissance joue un rôle

Cas	$k^1_{p_1}=k^1_{p_2}$	$k^2_{p_1}=k^2_{p_2}$	$k^1_{I_1}=k^1_{I_2}$	$k^2_{I_1}=k^2_{I_2}$	$k_{I_{11}}=k_{I_{21}}$	J(k)	N° ITER	T. Calc.	Contr. Considérée
1	0	0	1	0.210	0	15.30	-	-	Solution proposée en [26]
2	-0.406	0.913	1.89	0.511	0	5.24	33	18 sec.	$k \in \Omega(S)$; $k_{I_{11}}=k_{I_{21}}=0$
3	0.286	0.121	0.565	0.240	0	12.83	24	18 sec.	$k \in \Omega(S) \cap \Gamma(S)$ $k_{I_{11}}=k_{I_{21}}=0$
4	-0.400	0.808	1.36	0.500	0.671	5.18	25	14 sec.	$k \in \Omega(S)$
5	0.156	0.066	0.616	0.262	3.27	7.84	45	25 sec.	$k \in \Omega(S) \cap \Gamma(S)$

Tableau IV-1. Gains optimaux pour $\epsilon=0.01$, $\alpha^1=0.01$, $\nu_1=1.2$ et $\nu_2=0.5$ sur l'ordinateur IBM 370/165

très important car c'est alors elle qui permet une amélioration sensible du transitoire du système. Donc, nous pouvons conclure que si on veut faire la commande sur chaque aire à partir de son ace, alors il est nécessaire d'introduire dans le processus d'optimisation le paramètre correspondant à la boucle de puissance produite sur chaque générateur de chaque aire.

4. Nous avons pu constater que dans les quatre cas traités, à chaque itération la paire (A-BkC,D) était commandable. Ceci implique qu'à l'optimum $(A-Bk^{o}C) \subset C^{-}$.

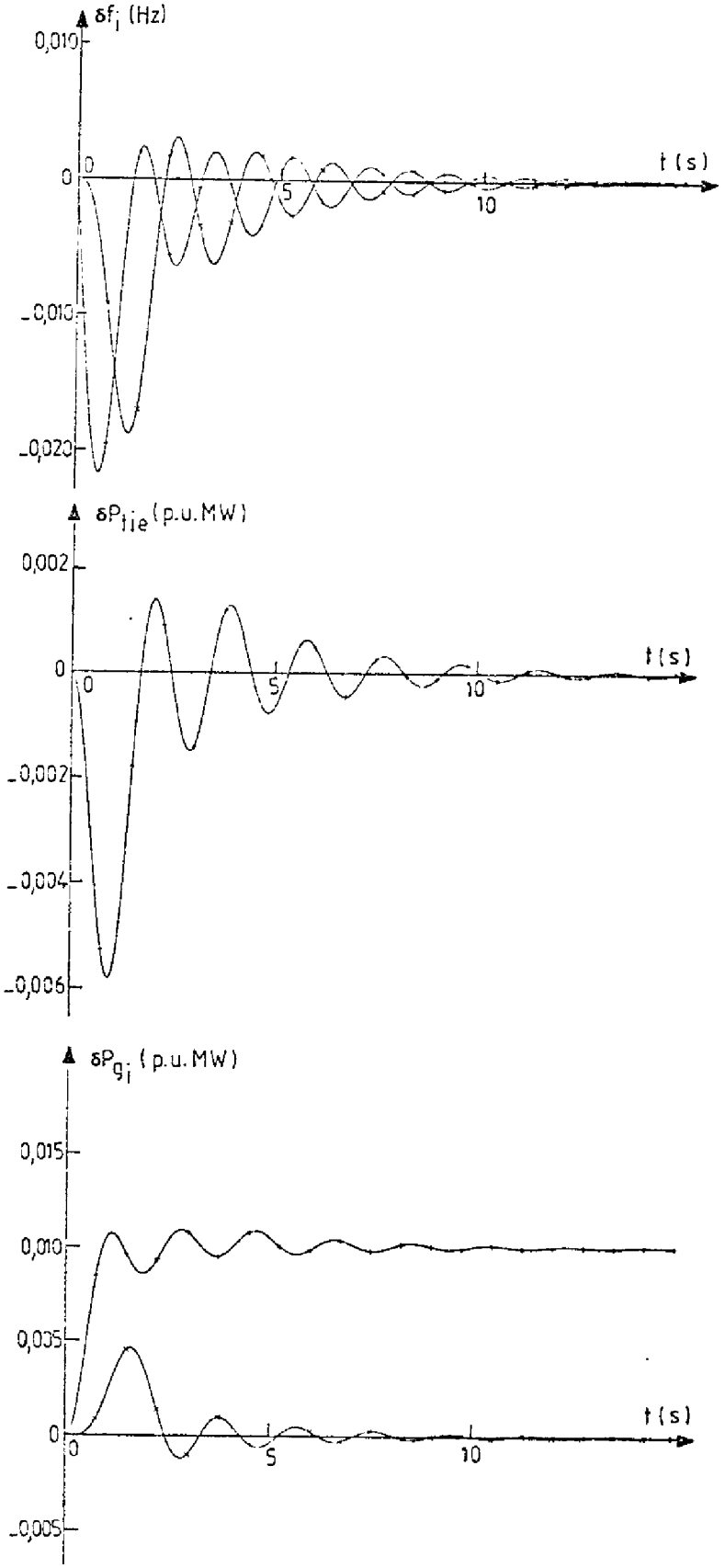
IV-3. Le Problème de "CDPF" avec le Modèle Dynamique Discret

Comme nous avons pu le constater dans les sections antérieures, le modèle dynamique d'un réseau d'énergie électrique a une structure très favorable pour l'application des méthodes de décomposition pour calculer la matrice gradient par rapport aux gains de commande locaux (voir section III-2.8). Pour simplifier considérons le cas $n_i=1$, $i=1...N$ (le cas $n_i > 1$ peut être également considéré) alors si on pose

$$\begin{aligned} x_i' &= [\delta f_i,\ \delta P_{g_i} - \delta\hat{P}_{g_i},\ \delta X_{e_i} - \delta\hat{P}_{g_i},\ \delta I_i + \delta\hat{P}_{g_i}] \\ y_i' &= [\delta f_i,\ \delta P_{g_i} - \delta\hat{P}_{g_i},\ \delta P_{tie,i}] \\ z_i &= [\delta P_{tie,i}] \qquad\qquad i=1..N \qquad (35) \\ u_i' &= [\delta P_i,\ \delta \dot{I}_i] \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire les équations (4, 10, 11, 12) sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \tilde{A}_i x_i + \tilde{B}_i u_i + \tilde{D}_i z_i \qquad x_i(0) = x_{i0} \\ \dot{z}_i &= \sum_{j \in J_i} \tilde{A}_{ij}\, x_j \qquad z_i(0) = 0 \qquad (36) \\ y_i &= \begin{bmatrix} C_i x_i \\ z_i \end{bmatrix} \\ u_i &= -\, k_i y_i \end{aligned}$$



Figures IV-2. Trajectoires correspondant à la solution proposée en |26|

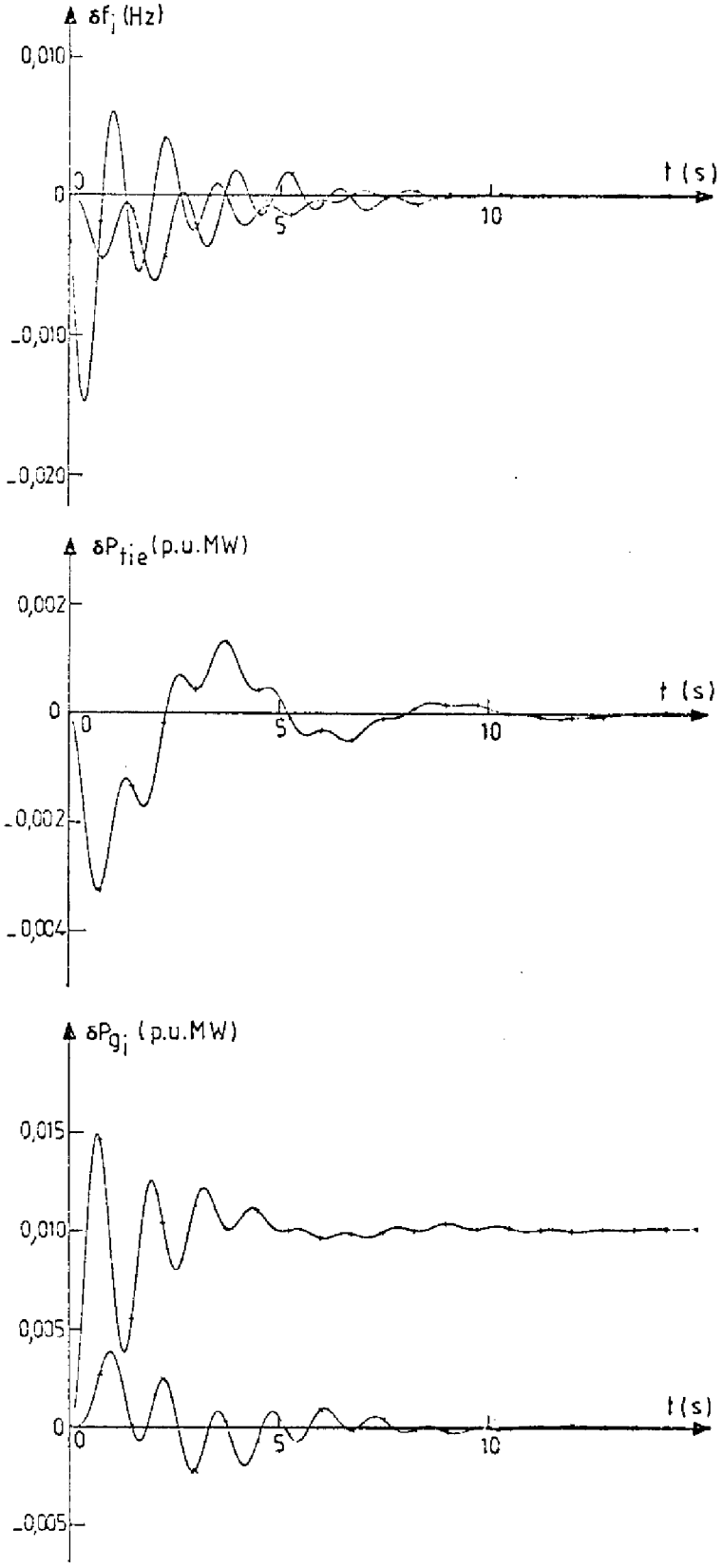


Figure IV-3. Trajectoires optimales pour le cas 2 et 4

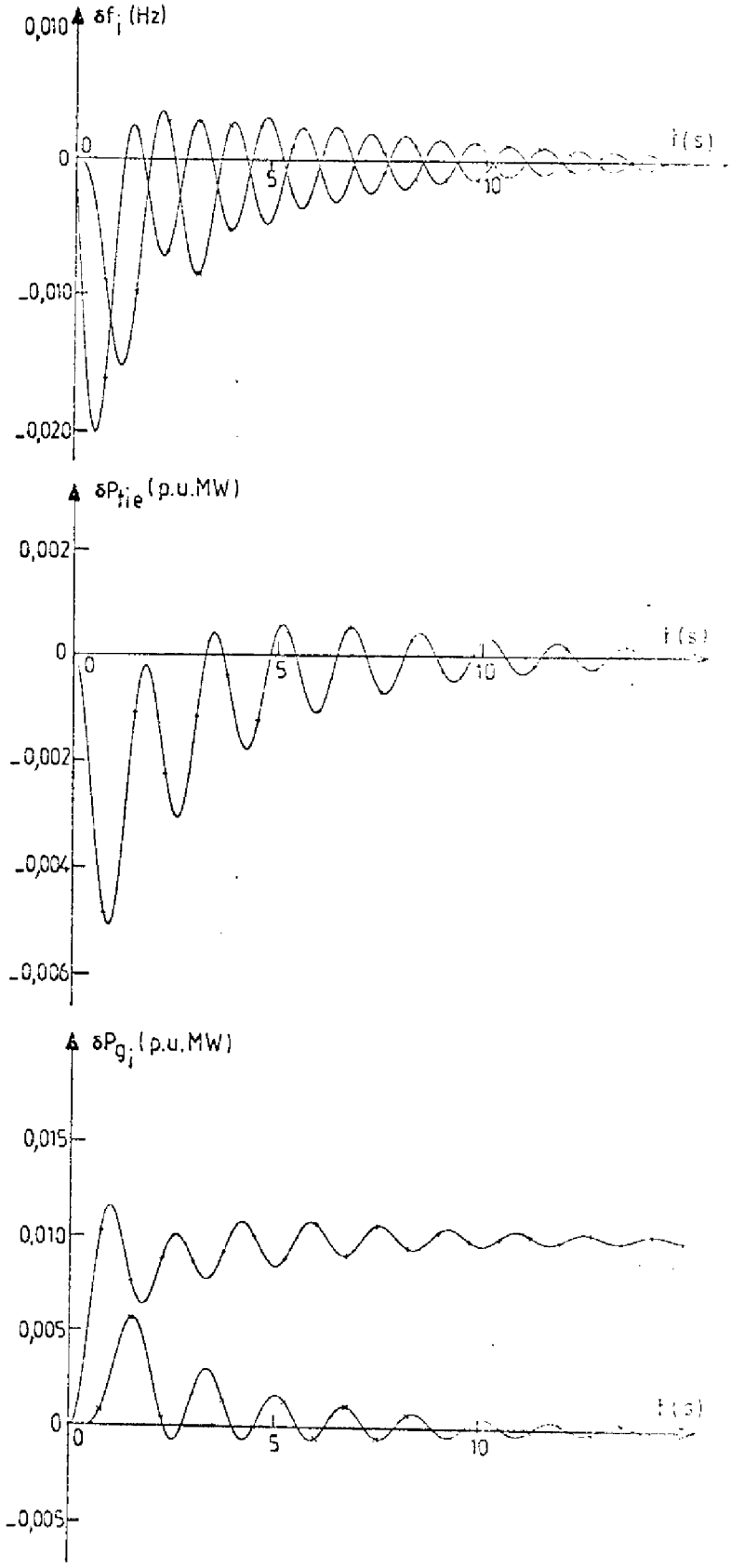


Figure IV-4. Trajectoires optimales pour le cas 3

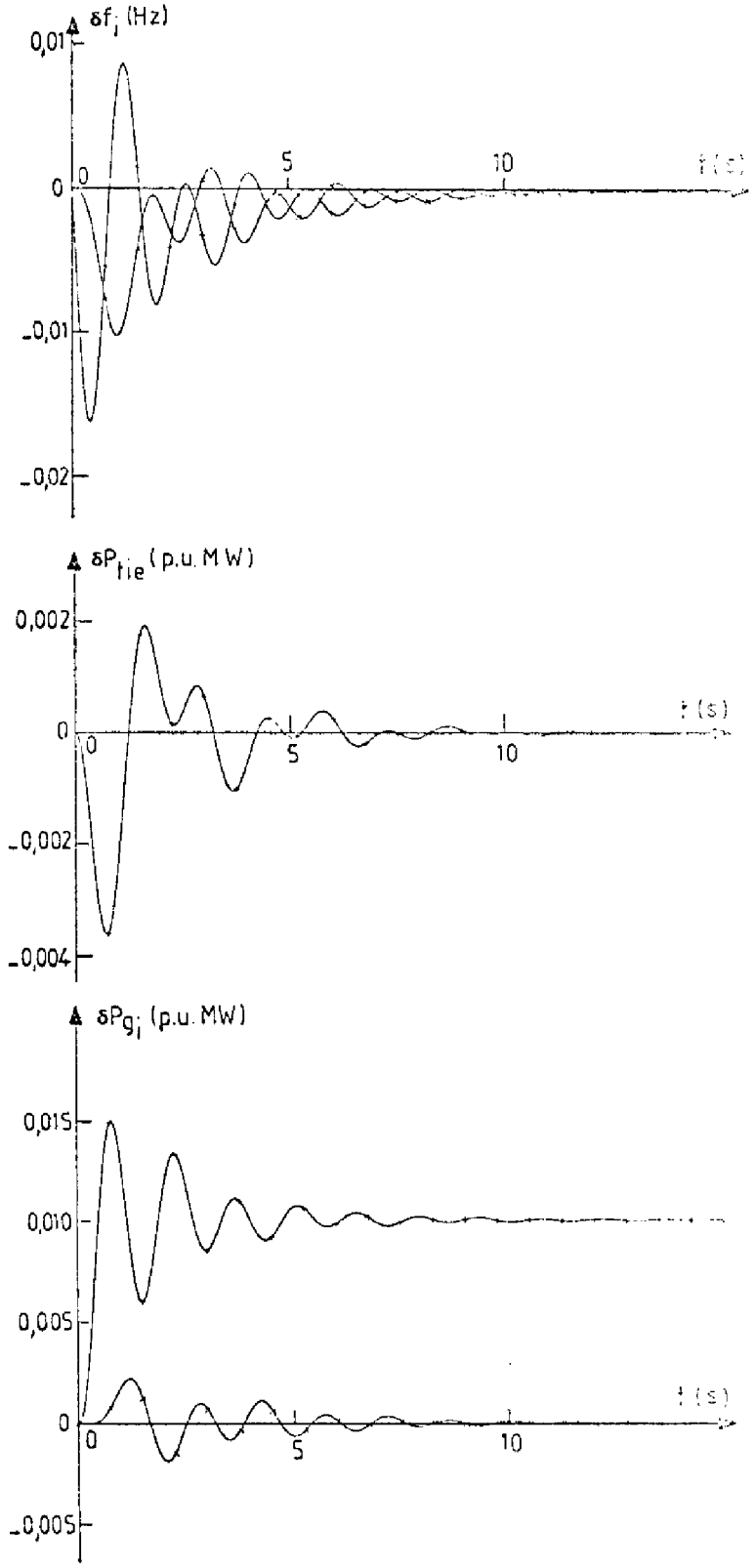


Figure IV-5. Trajectoires optimales pour le cas 5

où les matrices en (36) sont données par

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} -T_{p_i}^{-1} & k_{p_i} T_{p_i}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -T_{t_i}^{-1} & T_{t_i}^{-1} & 0 \\ -R_i^{-1} T_{g_i}^{-1} & 0 & -T_{g_i}^{-1} & -T_{g_i}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_{g_i}^{-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}_i' = \begin{bmatrix} -k_{p_i} T_{p_i}^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_{i0}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \delta P_{d_i} \tag{37}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad k_i = \begin{bmatrix} k_{p_i}^2 & 0 & k_{p_i}^1 \\ k_{I_i}^2 & k_{I_i} & k_{I_i}^1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{bmatrix} \sum_{j \varepsilon J_i} T_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} -T_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad j \varepsilon J_i$$

Nous allons modifier légèrement le critère (15) en faisant $r_i = 0$ mais alors afin de ne pas obtenir des gains de contre réaction trop grands nous allons imposer des contraintes de borne sur ces gains ce qui est réaliste d'un point de vue pratique. D'autre part, compte tenu de la dynamique du système plutôt que d'optimiser sur un horizon infini nous allons le prendre fini (de l'ordre de 20 s.).

Le problème s'écrit :

$$\min_{\underline{k}_i \leqslant k_i \leqslant \bar{k}_i} \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tilde{T}} (x_i' C_i' C_i x_i + z_i' z_i) dt = J(k) \tag{38}$$

sous (36)

Nous devons ajouter en (38) la contrainte de structure sur les gains k_i donnée par (37) et éventuellement, la contrainte que la commande soit générée à partir de l'ace_i.

Comme dans la section III-2.8., notre propos est d'obtenir la matrice gradient dJ/dk_i $i=1...N$ par la méthode de décomposition duale, nous allons discrétiser pour cela le modèle continu (36).

Considérons l'approximation

$$\dot{x}_i = (x_i(t+\delta t) - x_i(t))/\delta t \tag{39}$$

et notons $x_i^{t+1} = x_i(t+\delta t)$ et $x_i^t = x_i(t)$ alors (38) se transforme en

$$\min_{\underline{k}_i \leqslant k_i \leqslant \bar{k}_i} J(k) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=0}^{T-1} \delta t \left\{ \|C_i x_i^t\|^2 + \|z_i^t\|^2 \right\}$$

$$x_i^{t+1} = A_i x_i^t + B_i u_i^t + D_i z_i^t \qquad x_i^0 = x_{i0}$$

$$z_i^{t+1} = z_i^t + \sum_{j \in J_i} A_{ij}\, x_j^t \qquad z_i^0 = 0 \tag{40}$$

$$u_i^t = - k_i y_i^t \quad ; \quad y_i^t = \begin{bmatrix} C_i x_i^t \\ z_i^t \end{bmatrix}$$

où $A_i = I + \delta t \tilde{A}_i$; $B_i = \delta t \tilde{B}_i$; $D_i = \delta t \tilde{D}_i$ et $T = \tilde{T}/\delta t$. Considérons k_i partitionné de la façon suivante : $k_i = [k_i^1 \;\; k_i^2]$ tel que $u_i^t = - k_i^1 C_i x_i^t - k_i^2 z_i^t$ donc nous avons (voir paragraphe III-2-8.)

$$\frac{\partial J}{\partial k_i^1} = - \delta t \sum_{t=0}^{T-1} B_i' \lambda_i^t x_i'^t C_i'$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_i^2} = - \delta t \sum_{t=0}^{T-1} B_i' \lambda_i^t z_i^t \tag{41}$$

et finalement, d'après la définition des variables de sortie de chaque sous-système y_i^t, il vient

$$\frac{dJ}{dk_i} = - \delta t \sum_{t=0}^{T-1} B_i' \lambda_i^t y_i'^t \qquad i=1...N \tag{42}$$

Finalement, il faut noter que λ_i^t est la variable duale optimale associée aux contraintes dynamiques de l'état (x_i^t) du réseau en (40) et peut être déterminée pour k_i fixé par solution du problème

$$\min_{z_i^t} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=0}^{T-1} \|C_i x_i^t\|^2 + \|z_i^t\|^2$$

$$x_i^{t+1} = (A_i - B_i k_i^1 C_i) x_i^t + (D_i - B_i k_i^2) z_i^t \quad i=1\ldots N \qquad (43)$$

$$z_i^{t+1} = z_i^t + \sum_{j \in J_i} A_{ij} x_j^t$$

Ce problème est du type linéaire quadratique et sa solution optimale peut être facilement obtenue par dualisation de la contrainte de couplage (z_i^t). A ce moment là nous aurons des sous problèmes linéaires quadratiques découplés à résoudre ce qui peut être fait en parallèle au niveau de chaque aire. D'autre part, la solution de ces sous-problèmes est obtenue indépendemment par solution de problèmes à deux bouts bien connus et à la convergence de la coordination nous pouvons obtenir immédiatement les variables λ_i^t utilisées dans (42).

Nous pensons que l'obtention de la matrice gradient en (42) par cette méthode est particulièrement intéressante car dans ce cas z_i^t est scalaire et la fonction duale obtenue par dualisation de la contrainte de couplage en (43) a une dimension la plus réduite possible ce qui est un fait très favorable pour son application .

IV-4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons appliqué les algorithmes développés dans le chapitre antérieur sur un problème de conduite optimale d'un réseau d'énergie électrique.

Après la modélisation de la dynamique, nous avons proposé une commande relativement plus complexe que celles étudiées auparavant en ce sens qu'elle fait intervenir le problème de "dispatching optimal". Les essais numériques effectués ont montré que même pour un problème relativement modeste le temps de calcul

est assez important. Ceci est une caractéristique des méthodes de type gradient à convergence lente près de l'optimum. Néanmoins cet inconvénient est relativement compensé par le fait que la méthode fournit à chaque pas une solution admissible (stabilisante).

Le temps de calcul est aussi grandement pénalisé par le fait qu'il est nécessaire de résoudre deux équations matricielles de Lyapunov, ce qui nécessite l'utilisation des algorithmes très performants pour cela.

Une manière de contourner ce dernier inconvénient réside dans le calcul des matrices gradients par décomposition. Dans ce cas, le calcul passe par la résolution de problèmes à deux bouts pour lesquels existent des méthodes bien connues et qui sont de dimension égale à la dimension des sous-systèmes. Il faut également remarquer que dans ce cas on peut utiliser une structure de calcul parallèle.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire nous avons principalement abordé deux problèmes intéressant les systèmes dynamiques interconnectés :

- un problème d'analyse : étude de la stabilité des systèmes dynamiques interconnectés au moyen des fonctions de Lyapunov vectorielles avec application du principe de comparaison

- un problème de synthèse : détermination de régulateurs à structure décentralisée (plus généralement à structure contrainte).

Le chapitre premier constitue une introduction des deux chapitres suivants. Dans une première partie nous avons rappelé quelques résultats concernant la deuxième méthode de Lyapunov et présenté le problème de l'optimisation des conditions de stabilité obtenues dans l'approche "fonctions de Lyapunov vectorielles", problème qui est traité au second chapitre. La deuxième partie est consacrée à une discussion sur le choix d'une structure de commande avec sa structure de transfert d'information associée, ce choix est guié par la prise en compte du coût d'implantation de la structure.

Dans le deuxième chapitre, le problème de l'obtention du système de comparaison "optimal" a été abordé, l'optimalité étant définie par rapport aux conditions de stabilité (minimisation). La solution du problème passe par la résolution de problèmes d'optimisation paramétrique au niveau de chaque sous-système (dimension réduite). Ce résultat a été appliqué ensuite au problème de la synthèse au moyen de fonctions de Lyapunov vectorielles de commandes décentralisées stabilisantes et nous avons discuté des possibilités et lacunes d'une telle approche. Dans ce chapitre nous avons également donné de nouvelles bornes pour la solution algébrique de l'équation de Lyapunov, bornes qui se sont révélées sur de nombreux exemples meilleures que celles déjà fournies dans la littérature.

Dans le troisième chapitre nous nous sommes intéressés à la commande et à l'estimation d'état à structure contrainte, plus particulièrement décentralisée. Une contribution a consisté à développer une manière simple pour le calcul de gradients ma-

triciels utilisés dans le développement des algorithmes numériques proposés. Nous avons fourni des conditions suffisantes permettant d'assurer qu'à la convergence de l'algorithme proposé, la commande décentralisée est stabilisante

Nous avons également regardé le problème de la dépendance de ce type de commande vis à vis de conditions initiales. Nous avons pour cela généralisé une idée de Kalman et Bertran [39] qui consiste à optimiser "le plus mauvais" des cas.

Dans ce même chapitre nous avons aussi montré que, sous quelques hypothèses, nous pouvons déterminer les filtres de Kalman décentralisés pour estimer l'état de chaque sous système. L'obtention d'un filtre "sans biais" impose quelques contraintes linéaires sur les gains de chacun de ces filtres. Ce problème peut être résolu par les mêmes algorithmes développés pour la commande.

Finalement, le quatrième chapitre est entièrement consacré à l'application des résultats obtenus sur le problème de la commande décentralisée "Puissance-Fréquence" d'un réseau d'énergie électrique.

Les contributions que nous pensons avoir apportées dans ce mémoire laissent bien entendu de nombreux points ouverts dans ce domaine complexe que constitue la "maîtrise des systèmes interconnectés". Parmi les points qui nous semblent être une extension plus ou moins directe de notre travail et sur lesquels nous envisageons de poursuivre notre effort, citons :

- L'obtention de conditions de stabilité optimales dans l'approche "somme pondérée"
- La résolution de problèmes de commande avec restrictions isoparamétriques
- Le problème de commande modale
- La résolution du problème faisant intervenir estimation et commande conjointement.

B I B L I O G R A P H I E

[1] Anderson B.D.O. and Moore J.B. - Linear optimal control, Prentice Hall, Electrical Engineering Series, 1971

[2] Aoki M. - Introduction to optimization techniques, Mac Millan Series in Applied Computer Sciences, The MacMillan Company, 1971

[3] Aoki M. - On feedback stabilizability of decentralised dynamic systems, Automatica, vol. 8, n° 2, 1972

[4] Araki M. - Stability of large-scale nonlinear systems - Quadratic-Order Theory of Composite-System : Method using M-Matrices, IEEE Automatic Control, vol. AC-23, N° 2, 1978.

[5] Athans M. - The role and use of the stochastic linear-quadratic-gaussian problem in control system design, IEEE Automatic Control, vol. AC-16, N° 6, 1971

[6] Athans M. - The matric minimum principle, Information and Control, vol. 11, 1968.

[7] Athans M. - Advances and open problems on the control of large scale systems, Plenary paper, IFAC 1978, Helsinki, Finland.

[8] Bailey F.N. - The application of Lyapunov second method to interconnected systems, J. SIAM Control, vol. 3, n° 3, 1966.

[9] Bellman R. - Introduction to matrix analysis, McGraw Hill Book Company, 1970.

[10] Bellman R. - Vector Lyapunov functions, J. SIAM Control, vol. 1, N° 6, 1962.

[11] Bernhard P. - Commande optimale, décentralisation et jeux dynamiques, Paris-France, Dunod, 1976.

[12] Bernussou J. - Vector Lyapunov functions : stability and stabilizability problems for interconnected systems, Memorandum N° UCB/ERL M78/58, Electronics Research Laboratory, Berkeley, 1978.

[13] Bernussou J. et Géromel J.C. - An easy way to find gradient matrix of composite matricial functions, à paraître.

[14] Bernussou J. et Géromel J.C. - Stability approach to robust control for interconnected systems, "Handbook of large scale systems engineering applications", M.G. Singh and A. Titli editors, North Holland, 1979.

[15] Bernussou J. and Geromel J.C. - Interconnected systems and the robust control problem, Third Formator Symposium, Prague, 1978.

[16] Bitsoris G.S. - Principe de comparaison et stabilité des systèmes complexes. Thèse d'Etat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1978.

[17] Burgat C. - Contribution à l'étude des propriétés de stabilité de systèmes non linéaires continus interconnectés, Thèse d'Etat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1976.

[18] Calovic M. - Linear regulator design for load and frequency control, IEEE Power App. Systems, vol. PAS-89, n° 4, 1970.

[19] Cohen G. - Commande par contre réaction, sous contrainte de structure du gain, d'un système stochastique linéaire. Résolution par une méthode de gradient, RAIRO, Novembre 1975.

[20] Chong C.Y. et Athans M. - On the stochastic control of linear systems with different information sets, IEEE Automatic Control, vol. AC-16, N°5, 1971.

[21] Corduneanu C. - Sur la stabilité dynamique, Revue Math. Pur. et Appl., vol. 6, 1960.

[22] Davison E.J. et Rau N.S. - The optimal output feedback control of a synchronous machine, IEEE Power App. Systems, vol. PAS-90, Sept/Oct. 1971.

[23] Davison E.J. - Decentralized stabilization and regulation in large multivariable systems, "Directions in Decentralized Control, Many-Pearson optimization and large scale systems", Y.C. Ho and S. Mitter editors, Plenum Press, 1976.

[24] Davison E.J., Rau N.S. et Palmay F.V. - The optimal decentralized control of a power system consisting of a number of interconnected synchronous machines, Int. J. of Control, vol. 18, n° 6, 1973.

[25] Elgerd O.I. - Electric Energy systems theory : An introduction, TAT McGraw Hill Company, THM edition, 1973.

[26] Elgerd O.I. et Fosha Jr. C.E. - Optimum megawatt - Frequency control of multiarea electric energy systems, IEEE Power App. Systems, vol. PAS-89, N° 4, 1970.

[27] Fiedler M. et Ptak V. - On matrices with non positive off diagonal elements and positive principal minors, Czec. Math. Journal, vol. 12, 1962.

[28] Fosha Jr. C.E. et Elgerd O.I. - The megawatt-frequency control problem : A new approach via optimal control theory, IEEE Power App. Systems, vol. PAS-89, n° 4, 1970.

[29] Geromel J.C. - Sur un problème d'optimisation paramétrique de l'équation matricielle de Lyapunov, C.R. Acad.Sc. Paris, t. 286, 1978.

[30] Geromel J.C. - Sur la dépendance vis à vis des conditions initiales de la solution de certains problèmes d'optimisation dynamique, Proposé à C.R. Acad. Sc. Paris.

[31] Geromel J.C. et Bernussou J. - Stability of two-level control schemes subjected to structural perturbations, Int. J. Control, vol.29, n° 2, 1979.

[32] Geromel J.C. et Bernussou J. - Optimal stability condition for the vector Lyapunov function approach, proposé au IEEE Automatic Control.

[33] Geromel J.C. et Bernussou J. - On bounds of Lyapunov's equation, IEEE Automatic Control, vol. AC-24, n° 3, 1979.

[34] Geromel J.C. et Bernussou J. - Optimal decentralized control problem - Application to electrical power networks, IFAC/IFORS Symposium Optimization Methods, Applied Aspects, Varna, Bulgarie, 1979.

[35] Geromel J.C. et Bernussou J. - An algorithm for optimal decentralized regulation of linear quadratic interconnected systems, Automatica, vol. 14, n°4, 1979.

[36] Geromel J.C. et Baptistella L.F.B. - A feasible direction method for large scale programs with non convew objective-Decomposition approach,à paraître au Journal of Opt. Theory and Appl.

[37] Hahn W. - Stability of motion, Springer Verlag, 1967.

[38] Hoskins W.D., Meek D.S. et Walton D.J. - The numerical solution of A'Q+QA = -C, IEEE Automatical Control, vol. AC-22, n° 5, 1977.

[39] Johnson T.L. et Athans M. - On the design of optimal constrained dynamic compensators for linear constant systems, IEEE Automatic Control, vol. 15, n° 6, 1970.

[40] Kalman R.E. et Bertram - Control systems analysis and design via the "second method" of Lyapunov : I-continuous time systems, Transactions of the ASME, June 1960.

[41] Kleinman D.L. - On the linear regulator problem and the matrix Riccati equation - M.I.T. Electronic Systems Lab., Cambridge, Mass. ESL-R-271, 1966.

[42] Kleinman D.L. et Athans M. - The design of suboptimal linear time-varying systems, IEEE Automatic Control, Vol. AC-13, N° 2, 1968.

[43] Kosut R.L. - Suboptimal control of linear time-invariant systems subjected to control structure constraints, IEEE Automatic Control, vol. AC-15, N° 5, 1970.

[44] Kwarkernaak H.W. et Sivan R. - Linear optimal control systems, Wiley, New York, 1972.

[45] Kwon W.H. et Pearson A.E. - A note on the algebric matrix Riccati equation, IEEE Automatic Control, vol. AC-22, Feb? 1977.

[46] Lasdon L.S. - Optimization theory for large systems, MacMillan Series in Operation Research, The MacMillan Company, 1970.

[47] Levin W.S. et Athans M. - On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems, IEEE Automatic Control, vol. AC-15, n° 1, 1970.

[48] Luenberger D.G. - Introduction to linear and nonlinear programming, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[49] Luenberger D.G. - Canonical forms for linear multivariable systems, IEEE Automatic Control, June 1967.

[50] Luna H.P.L. - Les techniques de décomposition-coordination dans les modèles économiques d'optimisation, Thèse d'Etat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1978.

[51] Matrosov V.M. - On the theory of stability of motion, Prikl. Math. Mekhau. vol. 26, 1962.

[52] Michel A.N. et Miller R.K. - Qualitative analysis of large scale dynamical systems, Mathematics in Science and Engineering, vol. 134, Academic Press, 1977.

[53] Rosenbrock H.H. - An automatic method of finding the greatest or least value of a function, Computer Journal, vol. 3, 1960.

[54] Rosenbrock H.H. - A method of investigating stability, Proceedings of IFAC 2nd World Congress, Bâle, Suisse

[55] Rosen J. - The gradient projection method for nonlinear programming : I - Linear constraints, J. Soc. Ind. Appl. Math., vol. 8, 1960.

[56] Sandell Jr. N.S., Varaiya P., Athans M. et Safonov M. - Survey of decentralized control methods for large scale systems, IEEE Automatic Control, vol. AC-23, n° 2, 1978.

[57] Sanders C.W., Tacker E.C. et Linton T.A. - A new class of decentralized filters for interconnected systems, IEEE Automatic Control, vol. AC-19, June, 1974.

[58] Siljak D.D. - Large scale dynamic systems : stability and structure, North Holland, New York, 1978.

[59] Siljak D.D. - Multilevel stabilization of large scale systems : A spinning flexible spacecraft, Automatica, vol. 12, 1976.

[60] Tamura H. - Decentralized optimization for distributed lag models of discrete systems, Automatica, vol. 11, 1975.

[61] Takahara Y. - A multi-level structure for a class of dynamical optimisation problems, M.S. Thesis, Case Western Reserve University, Cleveland, USA, 1964.

[62] Titli A. - Commande hiérarchisée et optimisation des processus complexes, Dunod Automatique, Paris, France.

[63] Wang F.C.H. - Suboptimization of decentralized control systems, Ph.D. Univ. of Minnesota, Minneapolis, USA, 1972.

[64] Wazewski T. - Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications, Ann. Soc. Polon. Math., vol. 23, 1950.

[65] Wonham W.M. - Linear multivariable control, Lectures notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 101, Springer Verlag, 1974.

[66] Zoutendijk G. - Nonlinear programming : A numerical survey, J. SIAM Control, vol. 4, n° 1, 1966.