



# Propagation acoustique en régime harmonique & transitoire a travers un milieu inhomogène: Méthodes asymptotiques & Transformation en ondelettes

Ginette Saracco

## ► To cite this version:

Ginette Saracco. Propagation acoustique en régime harmonique & transitoire a travers un milieu inhomogène: Méthodes asymptotiques & Transformation en ondelettes. Acoustique [physics.class-ph]. Université de la Méditerranée, Faculté des Sciences de Luminy, Aix-Marseille II, 1989. Français. NNT: . tel-00178676

**HAL Id: tel-00178676**

**<https://theses.hal.science/tel-00178676>**

Submitted on 12 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

PRESENTEE PAR

**Ginette SARACCO**

*Pour obtenir le grade de*

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE II  
FACULTE DES SCIENCES DE LUMINY

*Spécialité:* **ACOUSTIQUE & DYNAMIQUE  
DES VIBRATIONS**

**PROPAGATION ACOUSTIQUE EN REGIME HARMONIQUE & TRANSITOIRE A  
TRAVERS UN MILIEU INHOMOGENE: METHODES ASYMPTOTIQUES ET  
TRANSFORMATION EN ONDELETTES.**

*Soutenue le:* 19 - 10 - 1989

*Devant le jury composé de:*

|     |                    |                                                                                                         |
|-----|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| MM: | Président du jury: | <b>Michel COANTIC</b>                                                                                   |
|     | Rapporteurs:       | <b>Georges DUMERY</b><br><b>Alexander GROSSMANN</b><br><b>Jean KERGOMARD</b>                            |
|     | Examineurs:        | <b>Paul FILIPPI</b><br><b>Claude GAZANHES</b><br><b>Philippe TCHAMITCHIAN</b><br><b>Bernard TOCQUET</b> |

Ces travaux ont été effectués au sein de l'équipe Ultrasons et Acoustique sous-marine du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille, sous la direction de Monsieur Claude Gazanhes. Je tiens à lui exprimer ma plus profonde reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoignée en m'accueillant dans son équipe, me permettant ainsi de mener à bien ces recherches. Ses conseils et enseignements m'ont été très précieux.

Les applications de la transformée en ondelettes à des problèmes de propagation acoustique, n'auraient pas vu le jour sans une intense collaboration avec Alex Grossmann et Ph. Tchamitchian du Centre de Physique Théorique de Marseille. Je tiens à leur exprimer combien j'ai apprécié de travailler avec eux et je les remercie de m'avoir consacré de leur temps.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le professeur M. Coantic qui a lu attentivement le manuscrit que je lui ai soumis et m'a fait l'honneur de présider mon jury.

Je remercie profondément M. J. Kergomard pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, et pour ses remarques constructives.

Mes remerciements vont également à M. B. Tocquet Directeur du Département d'Acoustique Sous-Marine de Thomson-Sintra, pour l'honneur qu'il m'a fait en participant à mon jury, ainsi qu'à M. G. Dumery et M. P. Filippi.

Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe Ultrasons avec qui il a été agréable de travailler. Ne pouvant tous les nommer, je remercie MM. J.L. Arnaud et J.P. Hérault et particulièrement MM. G. Corsain, J. Léandre et R. Holtzer pour leur précieuse collaboration, l'aide efficace et l'enseignement des techniques expérimentales qu'ils m'ont apportés. Je remercie M. J. Sageloli pour sa disponibilité et son efficacité en ce qui concerne le domaine informatique.

Je remercie vivement M. J.P. Sessarego de l'intérêt qu'il a témoigné pour mes travaux, suscitant des discussions intéressantes et constructives. Les développements concernant des problèmes de rétrodiffusion acoustique en sont une conséquence.

De façon générale ces travaux ont pu bénéficier de collaborations et d'échanges fructueux avec des chercheurs du Groupe de Recherche "Ondelettes", de l'I.C.P.I. de Lyon, du C.P.T. de Marseille et de l'équipe d'Informatique Musicale du L.M.A. dirigée par J.C Risset, que je tiens à remercier vivement.

Je remercie le G.E.R.D.S.M.-D.C.A.N et la société DIGILOG pour avoir soutenu ces travaux.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont avec amabilité aidée et encouragée dans l'accomplissement de ce travail au cours de ces trois années.

## SOMMAIRE.

|                                                                                                                                                      |       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Introduction générale.                                                                                                                               | p. 1  |
| <br><b><u>PARTIE 1:</u> ETUDE DE LA TRANSMISSION DE SIGNAUX MONOCHROMATIQUES A TRAVERS LE<br/>DIOPTRE PLAN AIR-EAU.</b>                              |       |
| I - Introduction.                                                                                                                                    | p. 7  |
| <br>II - Transmission acoustique à travers une interface plane séparant deux milieux fluides.                                                        |       |
| II - 1. Position du problème.                                                                                                                        | p. 9  |
| II - 2. Champ réfracté direct. (cas de l'acoustique géométrique).                                                                                    | p. 11 |
| 2.1 - Coefficient de divergence géométrique.                                                                                                         | p. 11 |
| 2.1.1 - Cas des milieux non homogènes.                                                                                                               | p. 12 |
| 2.1.2 - Cas de milieux fluides homogènes.                                                                                                            | p. 13 |
| 2.1.2.a - Coefficient référencé par rapport au déplacement de la source virtuelle                                                                    |       |
| 2.1.2.b - Caustique virtuelle.                                                                                                                       |       |
| 2.1.3 - Coefficient référencé par rapport à la source ponctuelle réelle.                                                                             | p. 13 |
| 2.2 - Taux de transmission.                                                                                                                          | p. 14 |
| 2.3 - Expression de l'onde réfractée au point d'observation P.                                                                                       | p. 15 |
| 2.3.1.a - Amplitude.                                                                                                                                 |       |
| 2.3.1.b - Phase.                                                                                                                                     |       |
| 2.4 - Application en vue d'une expérience.                                                                                                           | p. 17 |
| 2.5 - Evaluations numériques.                                                                                                                        | p. 17 |
| 2.5.1- Mise en forme des expressions pour le calcul numérique.                                                                                       | p. 17 |
| 2.5.2 - Résolution numérique.                                                                                                                        | p. 19 |
| 2.5.3 - Représentations graphiques.                                                                                                                  | p. 21 |
| <br>II - 3. Expression analytique du champ réfracté à partir de la solution exacte de<br>l'équation des ondes. (Correction à l'optique géométrique). |       |
| 3.1 - Analyse du problème.                                                                                                                           | p. 23 |
| 3.2 - Résolution du problème par transformation de Fourier.                                                                                          | p. 24 |
| 3.2.1 - Symétrie axiale.                                                                                                                             | p. 24 |
| 3.2.2 - Symétrie sphérique: Décomposition de l'onde incidente sphérique en une<br>somme d'ondes planes à l'interface.                                | p. 26 |
| 3.2.3 - Décomposition en ondes planes du champ transmis.                                                                                             | p. 28 |



|                                                                                                                                            |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 3.3 - Expression analytique de l'onde géométrique réfractée.<br>Correction à l'optique géométrique.                                        | p. 30  |
| 3.4 - Etude du chemin au point de branchement. Correction du champ géométrique réfracté par les ondes inhomogènes.                         | p. 33  |
| 3.5 - Expression du champ total réfracté en termes d'amplitude et de phase.                                                                | p. 36  |
| 3.6 - Evaluations numériques.                                                                                                              | p. 36  |
| 3.6.1 - Transformation des expressions pour le calcul numérique.                                                                           | p. 37  |
| 3.6.2. a - Résolution numérique pour l'onde géométrique.                                                                                   | p. 38  |
| 3.6.2. b - Représentations graphiques.                                                                                                     |        |
| 3.6.3. a - Résolution numérique de l'onde latérale réfractée.                                                                              | p. 42  |
| 3.6.3. b - Représentations graphiques.                                                                                                     |        |
| 3.6.4 - Représentation du champ réfracté total.                                                                                            | p. 48  |
| III - Expérimentation.                                                                                                                     |        |
| III - 1. Réalisation expérimentale.                                                                                                        | p. 54  |
| 1.1- Présentation générale.                                                                                                                | p. 54  |
| 1.2-Dispositif expérimental.                                                                                                               | p. 55  |
| 1.2.a. Mécanique                                                                                                                           |        |
| 1.2.b. Choix de la source.                                                                                                                 |        |
| 1.2.c. Chaîne d'émission-réception.                                                                                                        |        |
| 1.3- Etablissement du régime harmonique.                                                                                                   | p. 59  |
| III - 2. Résultats expérimentaux.                                                                                                          | p. 61  |
| 2.1. Description générale.                                                                                                                 | p. 61  |
| 2.2. Directivité et étalonnage de la source.                                                                                               | p. 62  |
| 2.3. Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux.                                                                              | p. 62  |
| 2.3.a. Champ réfracté total.                                                                                                               | p. 62  |
| 2.3.b Etude des différentes contributions & Représentations graphiques.                                                                    | p. 63  |
| IV - Conclusion de la première partie.                                                                                                     | p. 110 |
| ANNEXE 1: Etude du champ transmis (cas de l'acoustique géométrique).                                                                       | p. 112 |
| ANNEXE 2: Approximation asymptotique haute fréquence.                                                                                      | p. 121 |
| ANNEXE 3: Mise en évidence expérimentale des ondes latérales dans le cas de la transmission acoustique. (12ème colloque G.R.E.T.S.I. 1989) | p. 127 |
| BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE.                                                                                                       | p. 131 |

**PARTIE 2: ETUDE DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE EN REGIME TRANSITOIRE ET MILIEU INHOMOGENE, A L'AIDE DE LA TRANSFORMEE EN ONDELETTES.**

|                                                                                        |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| <i>Conventions et notations utilisées.</i>                                             | p. 135 |
| I - Introduction.                                                                      | p. 136 |
| II - Etude de la propagation en régime transitoire à travers un dioptré.               | p. 139 |
| II - 1. Position du problème.                                                          | p. 139 |
| II - 2. Expression des solutions. Potentiels transmis et réfléchi.                     | p. 141 |
| II - 3. Décomposition de la fonction de Green.                                         | p. 145 |
| 3.1. Contribution "géométrique".                                                       | p. 146 |
| 3.2. Contribution "latérale".                                                          | p. 149 |
| 3.3. Contribution "évanescence".                                                       | p. 152 |
| 3.4. Vérification des résultats obtenus.                                               | p. 153 |
| III - Transformation temps-échelle.                                                    | p. 155 |
| III - 1. Introduction.                                                                 | p. 155 |
| III - 2. Rappels: Qu'appelle-t-on transformée en ondelettes?                           | p. 155 |
| 2.1. Choix de l'ondelette analysante.                                                  | p. 155 |
| 2.2. Transformée directe.                                                              | p. 156 |
| 2.3. Transformée inverse.                                                              | p. 157 |
| III - 3. Noyau reproduisant.                                                           | p.158  |
| III - 4. Détection de discontinuités.                                                  | p. 161 |
| 4.1. Aperçu général.                                                                   | p. 161 |
| 4.2 Analyse de discontinuités isolées.                                                 | p. 161 |
| III - 5. Discrétisation de la transformée en ondelettes.                               | p. 163 |
| III - 6. Application de la transformée à des signaux particuliers.                     | p. 164 |
| 6.1. Analyse de la distribution $\delta(t-t_0)$                                        | p. 164 |
| 6.2. Analyse d'un signal monochromatique.                                              | p. 167 |
| IV - Décomposition de la fonction de Green en contributions élémentaires d'ondelettes. | p. 169 |
| IV - 1. Expression de la fonction de Green dans le plan temps-échelle.                 | p.169  |
| 1.1. Décomposition en ondelettes de la contribution "géométrique".                     | p. 171 |
| 1.2. Décomposition en ondelettes de la contribution "latérale".                        | p. 172 |
| 1.3. Décomposition en ondelettes de la contribution "évanescence".                     | p. 172 |

|                                                                                                                                                                |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| IV - 2. Application de la transformée en ondelettes: Evaluations numériques.                                                                                   | p. 173 |
| 2.1. Mise en forme des expressions pour le calcul numérique.                                                                                                   | p. 173 |
| 2.2. Interprétation des résultats.                                                                                                                             | p. 175 |
| 2.2.1- Cas du point d'observation situé à une distance radiale $\leq$ au sinus de l'angle critique: $(r/h \leq n \text{ et } n < 1)$ .                         | p. 175 |
| 2.2.2- Cas du point d'observation situé à une distance $\geq$ au sinus de l'angle critique: $(r/h = 1)$ .                                                      | p. 180 |
| 2.2.3- Cas du point d'observation situé à une distance radiale grande devant la hauteur de la source: $(r/h > 1)$ .                                            | p. 186 |
| IV - 3. Application de la transformée en ondelettes: Expérimentation et résultats.                                                                             | p. 191 |
| 3.1. Dispositif expérimental.                                                                                                                                  | p. 191 |
| 3.1.a Choix de la source.                                                                                                                                      | p. 191 |
| 3.1.b Dispositif d'acquisition.                                                                                                                                | p. 193 |
| 3.2. Expérimentation.                                                                                                                                          | p. 193 |
| 3.3. Résultats expérimentaux.                                                                                                                                  | p. 195 |
| 3.3.1. Hydrophone placé à l'aplomb de la source.                                                                                                               | p. 195 |
| i) Analyse du signal source.                                                                                                                                   | p. 195 |
| ii) Analyse du signal transmis.                                                                                                                                | p. 197 |
| 3.3.2. Hydrophone placé à grandes distances radiales.                                                                                                          | p. 197 |
| V - Problème inverse: Reconstruction de la dépendance temporelle de la source.                                                                                 | p. 202 |
| V - 1. Position du problème.                                                                                                                                   | p. 202 |
| V - 2. Formule de reconstruction.                                                                                                                              | p. 203 |
| VI - Une étude préliminaire de l'application de la transformée en ondelettes pour l'analyse de signaux diffusés par des cibles de formes géométriques simples. | p. 211 |
| VI - 1. Introduction générale.                                                                                                                                 | p. 211 |
| VI - 2. Position du problème                                                                                                                                   | p. 212 |
| VI - 3. Extraction de lois de modulation par la transformée en ondelettes.                                                                                     | p. 213 |
| VI - 4. Analyse temps-échelle de la diffusion acoustique par des coques sphériques élastiques en régime impulsionnel.                                          | p. 216 |
| VI - 5. Conclusion                                                                                                                                             | p. 224 |
| VII - Conclusion générale et perspectives.                                                                                                                     | p. 225 |
| ANNEXE 1: Organigramme du programme "ondel".                                                                                                                   | p. 229 |
| ANNEXE 2: Ondelette & Transformation en ondelettes de signaux tests.                                                                                           | p. 234 |
| BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIEME PARTIE.                                                                                                                           | p. 239 |

## INTRODUCTION GENERALE

# Etude de la propagation acoustique en régime monochromatique et transitoire à travers un milieu inhomogène.

## Introduction générale.

L'étude de la propagation acoustique à travers un milieu fluide stratifié a fait l'objet de nombreux travaux. La corrélation entre une étude expérimentale et une étude théorique modélisant la propagation d'un signal acoustique, aussi bien dans le cas d'un problème direct que celui du problème inverse (identification de la dépendance temporelle d'un signal-source) se complique très vite si l'on veut tenir compte de tous les paramètres physiques réels. Nous nous sommes donc plus particulièrement intéressés au problème de la transmission d'ondes sphériques à travers le dioptré plan air-eau (interface fluide/fluide). Ce modèle physique simple présente un intérêt particulier dû à l'existence d'une onde de "surface", appelée onde latérale. Cette étude s'est effectuée suivant deux étapes distinctes:

- Etude de la transmission de signaux acoustiques monochromatiques (Partie 1);
- Etude de la transmission de signaux dépendant arbitrairement du temps: problèmes direct et inverse (Partie 2). Dans ce cas nous avons utilisé une méthode de type temps-échelle: la transformée en ondelettes.

Chacune de ces approches a fait l'objet de développements théoriques, de simulations et d'expérimentations.

Ce problème peut se définir de façon générale comme tridimensionnel en espace. Deux milieux fluides considérés comme homogènes et isotropes sont séparés par une interface plane. Le milieu de plus faible célérité contient à une hauteur  $h$  fixe, une source à support temporel et spatial non ponctuel a priori. En un point quelconque du second milieu (paramétré par la distance radiale  $r$  et la profondeur  $z$ ) et en un temps arbitraire, on s'intéresse au comportement de la pression acoustique.

- Dans la même optique, nous aborderons dans le dernier chapitre de cette thèse, le cas d'une interface fluide/solide dans un problème de sonar actif. Le rôle des ondes de "surface" est essentiel ici. Nous proposons alors une approche de ce type de problème, à l'aide d'une analyse temps-échelle. Nous traiterons le cas de signaux acoustiques rétrodiffusés par une coque sphérique élastique en régime impulsionnel.

*PREMIERE PARTIE: Transmission acoustique: Source ponctuelle monochromatique.*

L'étude de la réfraction acoustique à partir de la résolution du système d'équations de Helmholtz, des conditions de continuité du champ à l'interface et du rayonnement de l'énergie à l'infini, permet d'obtenir une expression intégrale du champ transmis total. Une bonne approche de ce champ est obtenue à l'aide d'une approximation asymptotique haute-fréquence. Sous les hypothèses d'une mer calme et de grande profondeur, le champ total provient de la superposition de deux contributions:

- La contribution géométrique, intervenant pour des angles inférieurs à l'angle critique;
- Et une contribution supplémentaire, que l'acoustique géométrique ne permet pas d'obtenir (trajet d'intégration proche du point de branchement).

Physiquement, cette contribution appelée contribution ou onde latérale correspond à des incidences supérieures à l'angle critique. Dans ce cas nous sommes dans des conditions de réflexion totale, et pourtant nous avons une contribution supplémentaire dans le second milieu. Le problème est alors de savoir si cette onde a une contribution réelle dans la composition du champ transmis. Nous avons donc simulé numériquement ces différentes contributions ainsi que le champ réfracté total, de façon à les comparer à des résultats issus d'une expérimentation. L'application expérimentale a été celle du dioptré plan air-eau. Dans une cuve acoustique en laboratoire, nous avons séparé pour les fréquences 3kHz et 5kHz la contribution latérale de la contribution géométrique au moyen de plans absorbeurs. Les résultats expérimentaux sont en parfait accord avec les résultats théoriques. Nous avons pu mettre en évidence d'une part les comportements et les propriétés différentes de ces contributions et d'autre part les zones d'interférences qu'elles créent à partir de la mesure du champ réfracté total.

En un point quelconque d'observation dans l'eau, il y a interférences entre deux contributions ou ondes. Ces ondes parcourant des trajets différents arrivent à des temps différents et subissent de plus une atténuation fonction de la fréquence. Le prolongement naturel de cette étude au cas de la propagation de signaux transitoires montre alors l'utilité d'utiliser une méthode de type temps-fréquence, ou temps-échelle telle la transformée en ondelettes.

*DEUXIEME PARTIE: Etude de la propagation acoustique à l'aide de la transformée en ondelettes.*

*A) Transmission acoustique avec source ponctuelle en régime transitoire:  
Cas de l'interface plane fluide/fluide.*

Cette étude se compose de deux parties:

- Etude du problème direct de la transmission acoustique pour une source impulsionnelle;
- Etude du problème inverse en régime transitoire. Reconstruction de la dépendance temporelle de la source.

*1) Problème direct .*

L'originalité de cette étude est de pouvoir séparer les différentes contributions composant le champ, et d'en étudier les propriétés et l'évolution temporelle.

La résolution du système d'équations des ondes dans le cas où le terme source temporel dépend arbitrairement du temps, nous fournit une expression intégrale des potentiels transmis et réfléchi. Ces potentiels peuvent être décomposés en trois contributions, à cause de la présence de points de branchement dans l'intégrand. En supposant que le terme source temporel est un signal impulsionnel, nous pouvons à l'aide de la transformation en ondelettes, décomposer la fonction de Green en une somme de contributions élémentaires "d'ondelettes". Ces contributions sont alors étudiées et calculées de façon exacte, grâce à la transformée. Les propriétés d'une part de régularité de l'ondelette analysante, d'autre part de linéarité et d'isométrie de la transformée permettent:

- de nous affranchir des singularités contenues dans le potentiel et de faciliter le calcul numérique. Dans ce cas, la transformée en ondelettes de la fonction de Green est plus régulière que la fonction de Green elle-même.
- d'effectuer une analyse locale des différentes contributions à  $\frac{\Delta f}{f} = C^{st}$ , à n'importe quel temps et n'importe quelle échelle;
- de reconstruire de façon sélective, avec la précision désirée, le champ acoustique transmis total.

Par ailleurs, l'isométrie de la transformée nous permet d'interpréter le module au carré des coefficients d'ondelettes comme une densité d'énergie. Elle fournit de plus des formules exactes d'inversion qui nous sont utiles lors de l'étude du problème inverse (reconstruction du signal).

L'étude théorique des différentes contributions composant le champ transmis est alors combinée à une étude numérique. L'originalité des résultats obtenus est la mise en évidence à certaines échelles, de phénomènes transitoires très brefs (échos) qui permettent d'engager une discussion nouvelle de ce type de problème. Une expérimentation en cuve acoustique dans le cas du dioptre air-eau, combinée à une analyse temps-échelle a confirmé ces observations.

## 2) *Problème inverse.*

On s'intéresse à la reconstruction de la dépendance temporelle du signal source à partir de la mesure de la pression transmise dans le second milieu. Par analogie à la formule dite de reconstitution simple de la transformée en ondelettes, nous avons pu élaborer une formule de reconstruction de la fonction temporelle associée à la source. On montre que cette fonction est en fait donnée par la somme du signal originel et de sa réplique décalée dans le temps: écho (écho mis en évidence lors du problème direct). Les temps de retard correspondent à deux trajets bien distincts de l'onde dans l'air. Le premier est celui du trajet d'une onde arrivant sous incidence critique selon le principe de Fermat, le second correspond au trajet direct de l'onde à incidence sur-critique. Cette reconstruction n'est valable que sous l'approximation haute-fréquence. Par analogie aux formules d'inversion de la transformée, la profondeur joue ici le rôle de paramètre de dilatation et la pression transmise, celui de coefficient d'ondelettes. La partie expérimentale peut déboucher sur la réalisation d'une antenne spécifique où les capteurs seraient disposés suivant un réseau par analogie à la transformée en ondelettes discrète.

### *B) Application de la transformée en ondelettes à un problème de sonar actif. Cas de l'interface fluide/solide.*

Le but de cette étude est de pouvoir extraire de l'analyse de signaux rétrodiffusés par un corps de forme géométrique simple, des caractéristiques permettant d'identifier la nature et la forme de celui-ci. De façon analogue à l'étude de la propagation acoustique à travers un dioptré, nous pouvons décomposer le potentiel diffusé en contributions géométrique et de surface. Ces contributions apparaissent dans le plan temps-échelle sous forme de paquets d'ondes. Ceux-ci peuvent alors être associés à la contribution d'une onde géométrique (écho optique) et celle d'ondes d'interface (onde de Galerie à échos par exemple).

L'analyse de signaux rétrodiffusés par des coques sphériques élastiques creuses a déjà été entreprise à l'aide de méthodes temps-fréquence: Wigner-Ville ou Fourier à court terme. La différence essentielle entre ces méthodes et la transformée en ondelettes réside en une dilatation en temps au lieu d'une translation en fréquence. La fenêtre temporelle, définie par l'ondelette analysante elle-même, est alors automatiquement adaptée à l'échelle à laquelle le signal est analysé. Les termes d'interaction présents dans une distribution de Wigner-Ville (propriété de la bilinéarité) disparaissent ici, du fait de la linéarité de la transformée en ondelettes. Dans cette optique, il paraît alors intéressant d'utiliser une approche temps-échelle de ce type de problème. Nous avons appliqué à des données aussi bien expérimentales (sphère creuse en duralumin immergée dans l'eau) que simulées, une transformée en ondelettes. Les résultats obtenus sont encore préliminaires et semi-quantitatifs.



## **PARTIE 1**

-----

**ETUDE DE LA TRANSMISSION DE SIGNAUX MONOCHROMATIQUES A  
TRAVERS LE DIOPTRE PLAN AIR-EAU.**

## SOMMAIRE.

### PARTIE 1: ETUDE DE LA TRANSMISSION DE SIGNAUX MONOCHROMATIQUES A TRAVERS LE DIOPTRE PLAN AIR-EAU.

|                                                                                                                                               |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| I - Introduction.                                                                                                                             | p. 7  |
| II - Transmission acoustique à travers une interface plane séparant deux milieux fluides.                                                     |       |
| II - 1. Position du problème.                                                                                                                 | p. 9  |
| II - 2. Champ réfracté direct. (cas de l'acoustique géométrique).                                                                             | p. 11 |
| 2.1 - Coefficient de divergence géométrique.                                                                                                  | p. 11 |
| 2.1.1 - Cas des milieux non homogènes.                                                                                                        | p. 12 |
| 2.1.2 - Cas de milieux fluides homogènes.                                                                                                     | p. 13 |
| 2.1.2.a - Coefficient référencé par rapport au déplacement de la source virtuelle.                                                            |       |
| 2.1.2.b - Caustique virtuelle.                                                                                                                |       |
| 2.1.3 - Coefficient référencé par rapport à la source ponctuelle réelle.                                                                      | p. 13 |
| 2.2 - Taux de transmission.                                                                                                                   | p. 14 |
| 2.3 - Expression de l'onde réfractée au point d'observation P.                                                                                | p. 15 |
| 2.3.1.a - Amplitude.                                                                                                                          |       |
| 2.3.1.b - Phase.                                                                                                                              |       |
| 2.4 - Application en vue d'une expérience.                                                                                                    | p. 17 |
| 2.5 - Evaluations numériques.                                                                                                                 | p. 17 |
| 2.5.1- Mise en forme des expressions pour le calcul numérique.                                                                                | p. 17 |
| 2.5.2 - Résolution numérique.                                                                                                                 | p. 19 |
| 2.5.3 - Représentations graphiques.                                                                                                           | p. 21 |
| II - 3. Expression analytique du champ réfracté à partir de la solution exacte de l'équation des ondes. (Correction à l'optique géométrique). |       |
| 3.1 - Analyse du problème.                                                                                                                    | p. 23 |
| 3.2 - Résolution du problème par transformation de Fourier.                                                                                   | p. 24 |
| 3.2.1 - Symétrie axiale.                                                                                                                      | p. 24 |
| 3.2.2 - Symétrie sphérique: Décomposition de l'onde incidente sphérique en une somme d'ondes planes à l'interface.                            | p. 26 |
| 3.2.3 - Décomposition en ondes planes du champ transmis.                                                                                      | p. 28 |

|                                                                                                                                            |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 3.3 - Expression analytique de l'onde géométrique réfractée.<br>Correction à l'optique géométrique.                                        | p. 30  |
| 3.4 - Etude du chemin au point de branchement. Correction du champ géométrique réfracté par les ondes inhomogènes.                         | p. 33  |
| 3.5 - Expression du champ total réfracté en termes d'amplitude et de phase.                                                                | p. 36  |
| 3.6 - Evaluations numériques.                                                                                                              | p. 36  |
| 3.6.1 - Transformation des expressions pour le calcul numérique.                                                                           | p. 37  |
| 3.6.2. a - Résolution numérique pour l'onde géométrique.                                                                                   | p. 38  |
| 3.6.2. b - Représentations graphiques.                                                                                                     |        |
| 3.6.3. a - Résolution numérique de l'onde latérale réfractée.                                                                              | p. 42  |
| 3.6.3. b - Représentations graphiques.                                                                                                     |        |
| 3.6.4 - Représentation du champ réfracté total.                                                                                            | p. 48  |
| III - Expérimentation.                                                                                                                     |        |
| III - 1. Réalisation expérimentale.                                                                                                        | p. 54  |
| 1.1- Présentation générale.                                                                                                                | p. 54  |
| 1.2-Dispositif expérimental.                                                                                                               | p. 55  |
| 1.2.a. Mécanique                                                                                                                           |        |
| 1.2.b. Choix de la source.                                                                                                                 |        |
| 1.2.c. Chaîne d'émission-réception.                                                                                                        |        |
| 1.3- Etablissement du régime harmonique.                                                                                                   | p. 59  |
| III - 2. Résultats expérimentaux.                                                                                                          | p. 61  |
| 2.1. Description générale.                                                                                                                 | p. 61  |
| 2.2. Directivité et étalonnage de la source.                                                                                               | p. 62  |
| 2.3. Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux.                                                                              | p. 62  |
| 2.3.a. Champ réfracté total.                                                                                                               | p. 62  |
| 2.3.b Etude des différentes contributions & Représentations graphiques.                                                                    | p. 63  |
| IV - Conclusion de la première partie.                                                                                                     | p. 110 |
| ANNEXE 1: Etude du champ transmis (cas de l'acoustique géométrique).                                                                       | p. 112 |
| ANNEXE 2: Approximation asymptotique haute fréquence.                                                                                      | p. 121 |
| ANNEXE 3: Mise en évidence expérimentale des ondes latérales dans le cas de la transmission acoustique. (12ème colloque G.R.E.T.S.I. 1989) | p. 127 |
| BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE.                                                                                                       | p. 131 |

## I - INTRODUCTION



## Etude de la Transmission Acoustique à travers le dioptré Air-Eau.

### **I- Introduction.**

Le traitement et la reconnaissance de signaux acoustiques correspondant à des sources se déplaçant dans un milieu fluide, l'air, et enregistrés à partir de récepteurs se trouvant dans l'eau (hydrophones), passent d'abord par une détection optimale de ces signaux.

Une étude de la propagation acoustique à travers le dioptré air-eau est donc nécessaire. Nombreux sont les travaux se rapportant à ce sujet. Nous nous intéresserons dans un premier temps, plus particulièrement aux travaux d'Urick [1], Gerjuoy [2], Hudimac [3], Young [4] Weinstein et Henney [5], Candel [6], Horton [7] et Brekhovskikh [8], en considérant l'interface entre les deux milieux, comme plane (mer faiblement agitée).

A l'appui de ces travaux, nous déterminerons le champ réfracté total en un point quelconque d'observation et nous examinerons la faisabilité d'une expérimentation de la transmission air-eau en laboratoire. L'approche théorique s'articule suivant deux axes:

- Premièrement, en nous plaçant dans le cadre de l'acoustique géométrique, nous déterminerons par la théorie des rayons et suivant les lois de Snell-Descartes, le champ réfracté direct.

- Deuxièmement, par une transformation de Fourier bidimensionnelle sur les variables d'espace en considérant, soit la symétrie axiale du problème [11], [6], soit la symétrie sphérique de l'onde à l'interface plane (Développement de l'onde sphérique en une somme d'ondes planes), puis en prolongeant le champ à tout l'espace [2], [8], nous définirons l'expression analytique du champ réfracté sous forme d'intégrale dans le plan complexe. Cette intégrale calculée par la méthode de "steepest descent", ou plus grande pente, le long d'un contour  $\Gamma$  judicieusement choisi, nous permettra de retrouver, au premier ordre, l'onde géométrique réfractée et de mettre en évidence, pour des incidences supérieures à l'angle critique, un type d'onde différent appelée onde latérale.

Nous déterminerons l'expression analytique de ces deux types d'ondes constituant le champ réfracté total, que nous décomposerons en termes de phase et d'amplitude. A partir d'évaluations numériques, nous donnerons une représentation graphique de ce champ, mettant alors en évidence des phénomènes d'interférences et l'importance que peut jouer, dans certains cas, la contribution de l'onde latérale.

Des évaluations numériques de ces ondes prises isolément, seront également effectuées. Nous utiliserons pour cela les variables réduites  $r/h$ ,  $z/h$  et  $\lambda/h$ , où  $r$  et  $z$  représentent les coordonnées du récepteur,  $\lambda$  et  $h$  les caractéristiques de la source.

Une expérimentation de la transmission acoustique à travers le dioptre air-eau sera réalisée en laboratoire. Elle nous permettra d'étudier d'une part le champ réfracté total, d'autre part, par l'introduction de plans absorbants, les différentes contributions composant le champ. Nous mettrons alors expérimentalement en évidence, l'effet de la contribution de "surface", encore appelée onde latérale, dans la transmission à travers deux milieux fluides. Les résultats expérimentaux seront comparés aux résultats théoriques. Dans le cas d'une source ponctuelle monochromatique, émettant une fréquence appartenant au spectre des fréquences audibles, il y a effectivement des zones d'interférences dans le champ transmis total et donc intervention de la contribution latérale. Si la théorie des rayons n'est pas satisfaisante pour résoudre un problème présentant une discontinuité, en revanche, les méthodes asymptotiques telles que: méthode du point col ou plus grande pente, décrivent assez bien le champ de pression transmis expérimental, en régime harmonique.

## **II - TRANSMISSION ACOUSTIQUE A TRAVERS UNE INTERFACE PLANE SEPARANT DEUX MILIEUX FLUIDES**





## **II - Transmission acoustique à travers une interface plane séparant deux milieux fluides.**

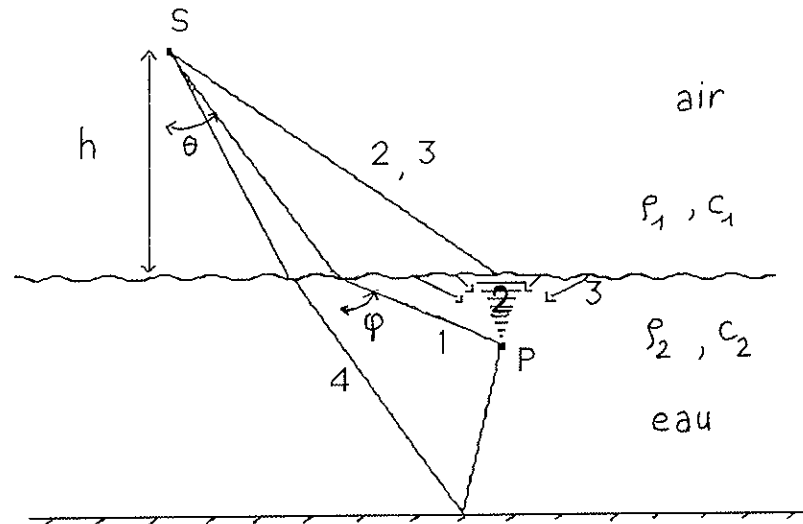
### **II.1- Position du problème.**

L'étude théorique de la réfraction d'une onde sphérique à travers une interface séparant deux fluides homogènes et isotropes, montre que le champ obtenu en un point du second milieu, provient de la superposition de différents types d'ondes dont les contributions diffèrent: en fonction des caractéristiques de la source, de la complexité de l'interface et de la position du point d'observation.

Pour une source ponctuelle S se trouvant dans un milieu 1: l'air , à une hauteur h donnée et pour un point d'observation P se trouvant dans un milieu 2: l'eau, nous pouvons décrire schématiquement, en fonction de quatre trajets, les principales contributions des ondes parvenant à l'hydrophone (cf. fig. 1) :

- la contribution de l'onde géométrique, qui permet de retrouver la géométrie de la source, d'après les lois de Snell-Descartes;
- la contribution de l'onde latérale, intervenant pour des angles d'incidence supérieurs à l'angle critique et que la simple théorie des rayons (Approximation haute fréquence) ne permet pas de mettre en évidence;
- la contribution des ondes ayant subi des réflexions multiples (fond marin, surface..);
- et celle de l'onde diffusée par la surface de la mer (diffusion d'autant plus importante que la surface de la mer est agitée).

En se plaçant dans un premier temps dans les conditions d'une mer assez calme et de grande profondeur, nous pouvons négliger les deux dernières contributions.



- 1 - Trajet de l'onde réfractée directe (ou géométrique).
- 2 - Trajet de l'onde latérale.
- 3 - Trajet de l'onde diffusée.
- 4 - Trajet après réflexions multiples.

Figure 1: Contributions des différents trajets de l'onde au point d'observation P (hydrophone).

On s'intéressera donc à la contribution des ondes directe et latérale. Nous verrons que l'intervention de cette dernière augmente l'amplitude du champ réfracté pour de faibles profondeurs du récepteur, et ce, d'autant plus que la fréquence du signal émise est basse.

L'étude du champ total réfracté à partir de la solution exacte de l'équation des ondes est donc d'un grand intérêt. Les courbes seront paramétrées par les coordonnées du point d'observation (hydrophone) et suivant les caractéristiques de la source (longueur d'onde du signal émis, hauteur par rapport à l'interface).

## II.2 - Champ réfracté direct. (cas de l'acoustique géométrique)

En se plaçant dans le cadre de l'acoustique géométrique, l'onde est considérée comme localement plane, et seules les propriétés locales du milieu interviennent. Les variations des caractéristiques de l'onde (amplitude et direction) sont supposées faibles sur des distances comparables à la longueur d'onde. Nous avons alors  $\lambda \ll R$  ou  $kR \gg 1$ ;  $R$  étant la distance de la source au point d'observation.

Nous sommes dans le cadre de l'approximation haute fréquence. Le champ acoustique peut être représenté à l'aide de rayons direct et réfracté qui sont des droites dans le cas de milieux homogènes, et vérifient la loi de Snell-Descartes qui est:

$$(2.1) \quad \frac{\sin \theta}{c_1} = \frac{\sin \varphi}{c_2}$$

$\theta$  angle d'incidence,  $\varphi$  angle de réfraction (Cf. fig.1).

Introduisons la notation  $n$  pour l'indice de réfraction,  $n = \frac{c_1}{c_2}$ .

En utilisant le principe de conservation de l'énergie contenue dans un faisceau de rayons proches, et en écrivant les conditions de continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface  $\Sigma$ , nous pouvons déterminer le rapport de l'intensité réfractée sur l'intensité incidente. L'intensité incidente étant définie à une distance unité de la source, nous pouvons écrire le rapport suivant:

$$(2.2) \quad \frac{I_t}{I_i} = A(\theta) B(\theta)$$

$A(\theta)$  coefficient de divergence géométrique: rend compte des pertes de rayonnement par divergence géométrique;

$B(\theta)$  Taux de transmission: rend compte des pertes au passage de l'interface.

L'étude complète de ces deux coefficients se trouve dans l'annexe 1. Nous allons simplement rappeler les principaux résultats classiques [1-8] et donner les expressions de ces coefficients. Nous expliciterons, en vue d'une application numérique, l'expression du rapport de l'intensité transmise sur l'intensité incidente. Puis nous simulerons le champ transmis à l'aide de la théorie des rayons.

### 2.1 Coefficient de divergence géométrique.

Le coefficient de divergence géométrique est obtenu en utilisant le principe de conservation de l'énergie contenue dans un faisceau de rayons proches issus d'une source  $S$ .

Nous obtenons d'après (A.5, annexe 1) une relation entre le rapport des aires  $\delta A_1$  et  $\delta A_2$  délimitées par les sections  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  du faisceau et le rapport de l'amplitude de l'onde pris en ces mêmes points (Cf. fig. 2.1 en annexe1):

$$(2.3) \quad A(\theta) = \frac{\delta A_1}{\delta A_2} = \frac{|\psi_2|^2}{|\psi_1|^2} \quad \text{où} \quad \psi = |\psi| e^{i\Phi}$$

$\psi$  représente le potentiel acoustique

Il existe différentes façons de déterminer le coefficient de divergence, selon que l'on se réfère au déplacement de la source virtuelle  $S'$  (que nous nommerons méthode de type 1) [1,6,7] ou de la source réelle  $S$  (méthode de type 2)[2-5, 8]; que l'on considère les aires des sections suivant un même milieu ou de part et d'autre du dioptre. On peut facilement montrer le passage d'une formule à l'autre (annexe 1). L'avantage des méthodes du type 1, est d'exprimer le facteur de divergence, et par conséquent le rapport des intensités, uniquement en fonction du rayon réfracté (distance  $L'$ : source virtuelle-récepteur) et de l'angle correspondant. Nous avons alors un lien direct entre le problème physique et la théorie mathématique utilisée. Ce type de méthode permet en outre, de déterminer l'intensité réfractée dans les conditions de champ proche aussi bien que dans celles du champ lointain. En revanche il ne nous est pas possible de connaître l'expression de la phase et de l'amplitude de l'onde en un point quelconque d'observation. Seule une étude fondamentale du champ, en utilisant l'expression du potentiel acoustique [2], permet d'accéder à cette information. De l'amplitude découle l'expression du facteur de divergence, des conditions de raccordement du champ à la frontière résulte l'expression du facteur de transmission, sans restriction comme dans [1], au cas des ondes planes.

Nous rappellerons d'abord l'expression du facteur de divergence dans le cas de milieux non homogènes (Cf. 1.1 annexe 1) [7]. Puis, en se plaçant sous certaines conditions, nous rappellerons le lien entre cette méthode et celle utilisée par Urlick [1] (Cf. 1.2.b annexe 1). Nous décrirons enfin les principaux résultats selon une méthode du type 2 qu'utilisent Gerjuoy et Brekhovskikh.

### 2.1.1. Cas de milieux inhomogènes.

Si nous supposons le milieu inhomogène, une rotation angulaire du faisceau, entraîne une variation de l'angle d'incidence  $\theta$  (Cf. A.6 et fig. 2.1). L'expression du coefficient de divergence est alors:

$$A(\theta) = - \frac{\cos\theta}{r \sin\varphi} \frac{\delta\theta}{\delta r}, \quad r \text{ distance de la source au point d'observation}$$

projetée sur l'horizontale et  $\varphi$  l'angle de réfraction du faisceau.

Pour de petites variations d'angles,  $\frac{\delta\theta}{\delta r}$  peut être assimilé à la dérivée  $\frac{d\theta}{dr}$ , soit:

$$(2.4) \quad A(\theta) = - \frac{\cos\theta}{r \sin\varphi} \frac{d\theta}{dr}$$

2.1.2. Cas de milieux fluides homogènes. (Méthode de type 1:  
Coefficient référencé par rapport à la source virtuelle S').

Dans le cas de milieux homogènes, considérons la réfraction d'un faisceau à l'interface séparant deux milieux fluides (Cf. fig. 2.2, annexe 1). Le milieu indicé par 1 contient la source réelle S située à une hauteur h de l'interface et la source virtuelle S' à la hauteur h'. Le second milieu indicé par 2 contient le point d'observation. Notons  $A^{(1)}$  le coefficient de divergence géométrique. Nous obtenons une expression analogue à l'expression précédente (Cf. 1.2 annexe 1):

$$(2.5) \quad A^{(1)}(\theta) = \frac{n^2}{L_1 L_2} \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$$

$L_1$  = distance source virtuelle S'-point d'observation.

$L_2$  = distance centre de rotation du faisceau S"-point d'observation.

La source virtuelle S' se trouve à la hauteur h' variable telle que:

$$(2.6) \quad h' = h n \frac{\cos^3\varphi}{\cos^3\theta}$$

Le passage de l'expression (2.4) à l'expression (2.5) est évident et s'effectue à l'aide de la relation (2.6). Ces expressions diffèrent uniquement par le fait que les angles sont référencés par rapport à l'horizontale dans (2.4) (analogie avec l'optique géométrique des rayons optiques) et non par rapport à la verticale.

2.1.3. Cas de milieux fluides homogènes. (Méthode de type 2:  
Coefficient référencé par rapport à la source réelle S).

L'expression est dans ce cas:

$$(2.7) \quad A^{(2)}(\theta) = \frac{h^2 \operatorname{tg}\theta \cos^3\varphi}{r \left( h \cos^3\varphi + \frac{z}{n} \cos^3\theta \right)} \quad \text{avec} \quad n \cos\varphi = \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}$$

Les expressions (2.7) et (2.5) diffèrent par le fait que l'on considère les aires des sections: d'une part dans le même milieu, à une distance source-interface ST ( $ST = \frac{h}{\cos\theta}$ ); et d'autre part à une distance unité  $SS_1$  de la source, soit à des aires prises de part et d'autre du dioptré (Cf. fig. 2.2, et 1.3 annexe 1).

Les coefficients sont donc reliés par l'expression (Cf. (A.20) annexe1):

$$(2.8) \quad A^{(1)}(\theta) = \frac{A^{(2)}(\theta) \cos\theta}{(ST)^2 \cos\varphi}$$

En fonction du raisonnement adopté et des hypothèses faites pour calculer le coefficient de divergence géométrique, on exprimera différemment le taux de transmission. La méthode utilisée en 2.1.3 (Cf. 1.3 annexe 1) est cependant plus générale car elle ne restreint pas le développement du taux de transmission à celui fait pour des ondes planes.

## 2.2. Taux de transmission.(onde plane).

Le taux de transmission n'est autre que le rapport de l'intensité de l'onde réfractée sur l'intensité de l'onde incidente à l'interface. On le déduit des conditions de continuité de la pression et de la vitesse normale à la frontière. En considérant un faisceau arrivant sous incidence oblique, dans le cas d'une onde plane, nous pouvons déterminer l'expression de  $B(\theta)$  ( cf (A.1) ).

Les conditions de raccordement du champ à l'interface sont dans le cas de milieux fluides les conditions de continuité de la pression et de la vitesse normale. En considérant une onde plane arrivant sous incidence oblique ( $\theta$ ), le rapport des pressions (transmise sur incidente) déterminant le coefficient de transmission associé à une onde plane s'exprime par:

$$(2.9) \quad \frac{P_t}{P_i} = \frac{2 m \cos\theta}{m \cos\theta + n \cos\varphi}$$

$n$ : indice de réfraction,  $m$ : rapport des masses volumiques  $m = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

Soit pour le facteur ou taux de transmission l'expression :

$$B(\theta) = \frac{n P_t^2}{m P_i^2}$$

Or, pour un faisceau ayant un angle d'incidence  $\theta$ , par rapport à la verticale issue de S, et traversant l'interface en faisant un angle de réfraction  $\varphi$ , nous avons à la frontière un changement d'intensité qui entraîne une réduction de la puissance énergétique, soit:

$$(2.10) \quad B^{(1)}(\theta) = B(\theta) \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} = \frac{4 n m \cos \theta \cos \varphi}{(m \cos \theta + n \cos \varphi)^2}$$

L'expression de l'intensité transmise pour des ondes phériques s'exprime alors en utilisant les relations (2.5) et (2.10):

$$(2.11) \quad I_t = \frac{4 n^3 m \cos^2 \varphi}{L_1 L_2 (m \cos \theta + n \cos \varphi)^2} I_i$$

### 2.3 - Expression de l'onde réfractée en terme d'amplitude et de phase pour un point d'observation P quelconque

L'étude du champ acoustique créé par une source ponctuelle à partir des expressions des potentiels réfracté et incident en termes d'amplitude et de phase, permet de retrouver un coefficient de divergence en accord avec celui défini en 1.3, et celui caractérisant la transmission. Cette formulation, tout en restant dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique (limite de la loi de Snell-Descartes), permet l'étude générale de la transmission de l'onde sphérique à travers un dioptré pour un point quelconque d'observation.

#### i)-Amplitude

En écrivant le potentiel acoustique en termes d'amplitude et de phase tel que:  $\psi = |\psi| e^{i\Phi}$ , et en désignant par T le point où le faisceau se réfracte à l'interface, P le point d'observation dans le second milieu, T-, (T+) le point proche de T dans le milieu 2 (1),  $\psi_j$  le potentiel dans le milieu j, nous avons (Cf. 3. annexe1), la relation suivante:

$$(2.12) \quad [A^{(2)}(\theta)]^{-1/2} = \frac{|\psi_2(T^-)|}{|\psi_2(P)|}$$

Pour un point d'observation P quelconque, l'expression du champ transmis est donc:

$$(2.13) \quad \psi_2(P) = |\psi_2(T^-)| [A^{(2)}(\theta)]^{1/2} e^{i\Phi(P)}$$

Posons  $R = ST$ : distance source-interface, l'amplitude au point d'observation P dans le second milieu est telle que:



$$\begin{aligned}
 |\psi_2(P)| &= \frac{|1 + D(\theta)|}{m R} [A^{(2)}(\theta)]^{1/2} \\
 (2.14.a) \quad &= 2 \frac{\sqrt{\sin\theta}}{(m \cos\theta + n \cos\varphi) \sqrt{r[h \cos^{-3}\theta + \frac{z}{n} \cos^{-3}\varphi]}}
 \end{aligned}$$

où

$$(2.14.b) \quad T(\theta) = \frac{|1+D(\theta)|}{m} = \frac{2\cos\theta}{m \cos\theta + n \cos\varphi} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2\theta};$$

$T(\theta)$  représente le coefficient de transmission associé à une onde plane, et  $D(\theta)$  celui de réflexion. La définition de  $T(\theta)$  diffère de l'expression (2.9) par le facteur multiplicatif  $m$ , rapport des masses volumiques car  $\psi_2(T^-) = \frac{\psi_1(T^+)}{m}$  et  $|\psi_1(T^+)| = \frac{|1+D(\theta)|}{R}$  (Cf. annexe1, (A.25)).

## ii)-Phase

La phase est déterminée par le trajet optique du rayon SP (source-point d'observation). Celui-ci se réfractant à l'interface au point T selon la loi de Snell-Descartes (2.1) (Cf. fig. 2.2 annexe 1), s'exprime par:

$$\Phi(P) = k_1 \left( \frac{h}{\cos\theta} + \frac{n^2 z}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} \right)$$

avec  $n = \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_2}{k_1}$  où  $k_j$  représente le nombre d'onde dans le milieu  $j$   
et

(2.15)  $r = h \operatorname{tg}\theta + z \operatorname{tg}\varphi$ ,  $r$  distance projetée sur l'axe horizontal, entre la source S et le point d'observation (récepteur); le récepteur se trouvant à une profondeur  $z$  et la source à une hauteur  $h$ .

Le passage de la formule de (2.11) à la formule (2.14.a) s'obtient en utilisant l'expression (2.8). Si  $|\psi_i|$  et  $I_i$  représentent respectivement le potentiel incident et l'intensité incidente émise par la source, alors:

$$(2.16) \quad \frac{I_t}{I_i} = A^{(1)} B^{(1)} = m n \frac{|\psi_2(P)|^2}{|\psi_i(T^-)|^2}$$

## 2.4 - Application en vue d'une expérience.

En remarquant que dans le cas du dioptre air-eau, le rapport des masses volumiques est grand ( $m \approx 800$ ), tandis que l'indice de réfraction est petit ( $n \approx 0,23$ ), avec un angle critique  $\theta_c$  faible (de l'ordre de  $13^\circ$ ), nous avons:

$$(2.17) \quad m = \frac{\rho_2}{\rho_1} \gg 1 \quad \text{et} \quad n < 1, \quad \text{soit} \quad \rho_1 c_1 \ll \rho_2 c_2.$$

L'angle critique étant d'après (2.1) défini par:  $\theta_c = \arcsin(n)$

Nous pouvons déduire de (2.10), (2.11), (2.14), (2.17) que :

$$(2.18) \quad \frac{I_t}{I_i} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{P_t}{P_i} \approx 2$$

Nous voyons que la forte différence d'impédance entre les deux milieux, contribue dans ce cas à une faible puissance énergétique réfractée. Ceci permet de dire que l'énergie est en majeure partie réfléchi par la surface de la mer. Or, nous avons une pression transmise au passage du dioptre non négligeable et donc mesurable par un capteur sensible à la variation de pression.

## II.2.5 - Evaluations numériques.

Par des évaluations numériques, nous pouvons représenter le champ de pression réfracté correspondant à une situation expérimentale donnée, sous forme de cartes d'amplitude.

Nous voulons déterminer la correction qu'il faut apporter à la pression mesurée par l'hydrophone, en fonction de la position de celui-ci, pour retrouver la pression incidente dont les caractéristiques; hauteur et fréquence de la source, nous sont inconnues.

Nous allons pour cela déterminer numériquement les courbes d'isoatténuation de l'onde géométrique réfractée suivant les variables réduites  $r/h$  et  $z/h$ , coordonnées du point d'observation (position sur l'horizontale et immersion de l'hydrophone).  $h$  représente la hauteur de la source par rapport à l'interface.

### 2.5.1- Mise en forme des expressions pour le calcul numérique.

On notera ici  $I_1$  l'intensité incidente et  $I_2$  l'intensité transmise.

Compte tenu de la relation (2.17) caractérisant le dioptre, les expressions (2.11), (2.14) peuvent se simplifier.

Posons :  $x = \frac{r}{h}$  et  $y = \frac{z}{h}$

$$(2.19.a) \quad \frac{I_2}{(I_1/h^2)} \approx 4 \frac{n^3 \cos^2 \varphi}{m \frac{L_1}{h} \frac{L_2}{h} \cos^2 \theta}$$

ou

$$(2.19.b) \quad \frac{|\psi_2(P)|^2}{(|\psi_1(T^+)|^2/h^2)} \approx 4 \frac{n^2 \sin \varphi}{m^2 x (n \cos^{-3} \theta + y \cos^{-3} \varphi) \cos^2 \theta}$$

En choisissant pour unité de l'intensité dans l'eau (resp. air), l'intensité d'une onde plane de pression unité dans l'eau (resp. air), conformément à une réalisation expérimentale (hydrophone et microphone), nous pouvons éliminer respectivement des expressions (2.19.a et b) les termes  $n/m$  et  $m^2$  (Cf. (2.16)). On notera :

$$(2.20) \quad \tilde{I}_j = \frac{I_j}{\tilde{P}_j^2} \rho_j c_j \quad , \quad \tilde{P}_j \text{ Pression unité dans le milieu } j$$

(la pression  $P$  étant reliée au potentiel acoustique par  $P = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ )

Si nous avons en vue d'établir des courbes d'isoatténuation exprimées en décibels, nous pouvons de plus éliminer le terme en  $\cos^2 \theta$ , car pour une incidence critique de l'ordre de  $13^\circ$  dans le cas du dioptré air-eau, l'erreur engendrée est inférieure à 0,2 décibels.

Les expressions précédentes se simplifient de la façon suivante :

$$(2.21) \quad \frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1/h^2} = 4 \frac{n^2 \cos^2 \varphi}{(L_1/h)(L_2/h)}$$

$$\frac{|\tilde{\psi}_2(P)|^2}{|\tilde{\psi}_1(T^+)|^2/h^2} = 4 \frac{n \sin \theta}{x (n \cos^{-3} \theta + y \cos^{-3} \varphi)}$$

avec :

$$x = \operatorname{tg} \theta + y \operatorname{tg} \varphi$$

$$(2.22) \quad x = \frac{L_2}{h \sin \varphi}$$

et  $y = \frac{L_1}{h} \cos \varphi - h'$

Nous obtenons une "perte" par divergence et réfraction de la pression acoustique de

$$10\text{Log}_{10}\left(\frac{\tilde{r}_2}{\tilde{r}_1}\right) \text{ (ou } 20\text{Log}_{10}\left(\frac{\tilde{P}_2}{\tilde{P}_1}\right) \text{ )}.$$

Nous remarquons, d'après la relation (2.21), que sous les conditions de champ lointain ( $L_1 \gg h$ ), nous avons  $L_1 \approx L_2$  soit :

$I_2 = \frac{4n^2}{L_1^2} \cos^2 \varphi I_1$ , ce qui correspond à une source dipolaire située à l'interface dont l'intensité est  $4n^2$  fois supérieure à celle de la source réelle [1].

### 2.5.2 - Résolution numérique

Nous voulons obtenir une représentation du champ transmis sous forme de courbes d'isoatténuation en décibels (W), dans le plan  $x(=r/h)$ ,  $y(=z/h)$  (distance radiale-profondeur). Pour une valeur de l'angle de réfraction  $\varphi$ , on cherche, compte tenu des différentes relations (2.1, 2.6, 2.16), les points  $x$ ,  $y$  vérifiant la relation (2.21) et qui appartiennent à la courbe d'isoatténuation W que l'on désire. L'algorithme se présente de la façon suivante:

Pour une atténuation W en décibel, nous avons le produit :

$$(2.23) \quad L_1 L_2 = 4n^2 \cos^2 \varphi 10^{-(W/10)}$$

Pour une valeur donnée de l'angle de réfraction  $\varphi$ ,  $\varphi \in ]0, \pi/2[$ , nous pouvons obtenir les valeurs de  $L_1/h$ ,  $L_2/h$ ,  $x$  et  $y$  des étapes successives suivantes :

(i) - Premièrement, connaissant une valeur de  $\varphi$ , nous pouvons obtenir l'angle d'incidence  $\theta$  correspondant, d'après la relation (2.1)

- Connaissant l'angle d'incidence  $\theta$  nous pouvons en déduire la valeur  $r_1$ , telle que:

$$r_1 = h \tan \theta$$

- soit à partir du couple de données  $(r_1, \varphi)$

$$h' = r_1 \tan \varphi$$

- connaissant le couple  $(r_1, h')$ , nous pouvons obtenir l'équation de la droite sur laquelle se trouve le point  $S'$  (source virtuelle) et  $S''$  (centre de rotation). Soit  $y = a_1x + b_1$  l'équation de la cette droite, ces coefficients vérifient :

$$(2.24) \quad \begin{aligned} y &= h' \left( -\frac{x}{r_1} + 1 \right) \\ y &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} x + \frac{r_1}{\operatorname{tg} \varphi}, \\ a_1 &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \quad b_1 = \frac{h \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi} \end{aligned}$$

(ii) - Deuxièmement, on réitère le processus pour un angle  $\varphi - d\varphi$ , correspondant au deuxième rayon issu de  $S$  et créant le faisceau incident.

- Au triplet  $(\varphi, a_1, b_1)$ , nous pouvons ajouter le triplet  $(\varphi - d\varphi, a_2, b_2)$

(iii) - Troisièmement,  $S'$  appartenant à l'intersection des deux droites correspondant aux rayons acoustiques réfractés, nous pouvons déterminer ses coordonnées.

$$(2.25) \quad \begin{aligned} S'_x &= \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \\ S'_y &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2} \end{aligned}$$

- Les coordonnées de  $S''$  étant connues, nous avons d'après la relation (2.25), en posant  $S''S' = t$  :

$$(2.26) \quad L_2 = t + L_1 = \sqrt{S'_x{}^2 + (S'_y - H')^2} + L_1$$

(iv) - Quatrièmement, Obtention de  $L_1/h$ ,  $L_2/h$ ,  $x$ ,  $y$ .

A partir de l'expression (2.26), nous pouvons écrire :

$$L_1 L_2 = L_1 (L_1 + t) \quad , \quad \text{posons } V = L_1 L_2$$

De la relation (2.23) et (2.26) nous obtenons un trinôme du second degré en  $L_1$ , dont une racine est :

$$(2.27) \quad L_1 = \frac{1}{2} (-t + \sqrt{t^2 + 4V})$$

L'autre valeur n'est pas acceptable physiquement, car elle correspond à des solutions se trouvant dans l'air. Des relations (2.27) et (2.26) et suivant le triplet ( $\varphi$ ,  $\varphi - d\varphi$ ,  $W$ ), nous obtenons les valeurs de  $x$ ,  $y$  vérifiant les équations (2.22).

### 2.5.3 Représentations graphiques .

Les courbes d'isoatténuation de l'onde géométrique sont représentées sur la figure 3 , en accord avec les formules (2.21) et (2.22), pour une discrétisation de l'atténuation d'un pas de 5 décibels.

Les courbes convergent en un même point correspondant à la tangente de l'angle critique, c'est à dire à la valeur  $r/h \approx 0.23$ . L'atténuation augmente pour des valeurs de  $r \gg h$  ou  $z \gg h$ . Ce qui signifie que la pression mesurée diminue lorsque l'on se trouve à de grandes profondeurs ou bien, loin de la verticale issue de la source (même pour de faibles profondeurs de l'hydrophone). A la verticale, au niveau de l'interface, nous trouvons non pas une valeur nulle, mais +6 décibels, ceci est dû aux conditions de continuité du champ à l'interface, qui a pour effet de doubler la pression.

Les courbes d'isoatténuation trouvées sont en accord avec la géométrie de la source. Nous en déduisons la correction qu'il faut apporter à la pression mesurée par l'hydrophone, pour obtenir la pression incidente. Ces courbes sont indépendantes de la fréquence du signal émis.

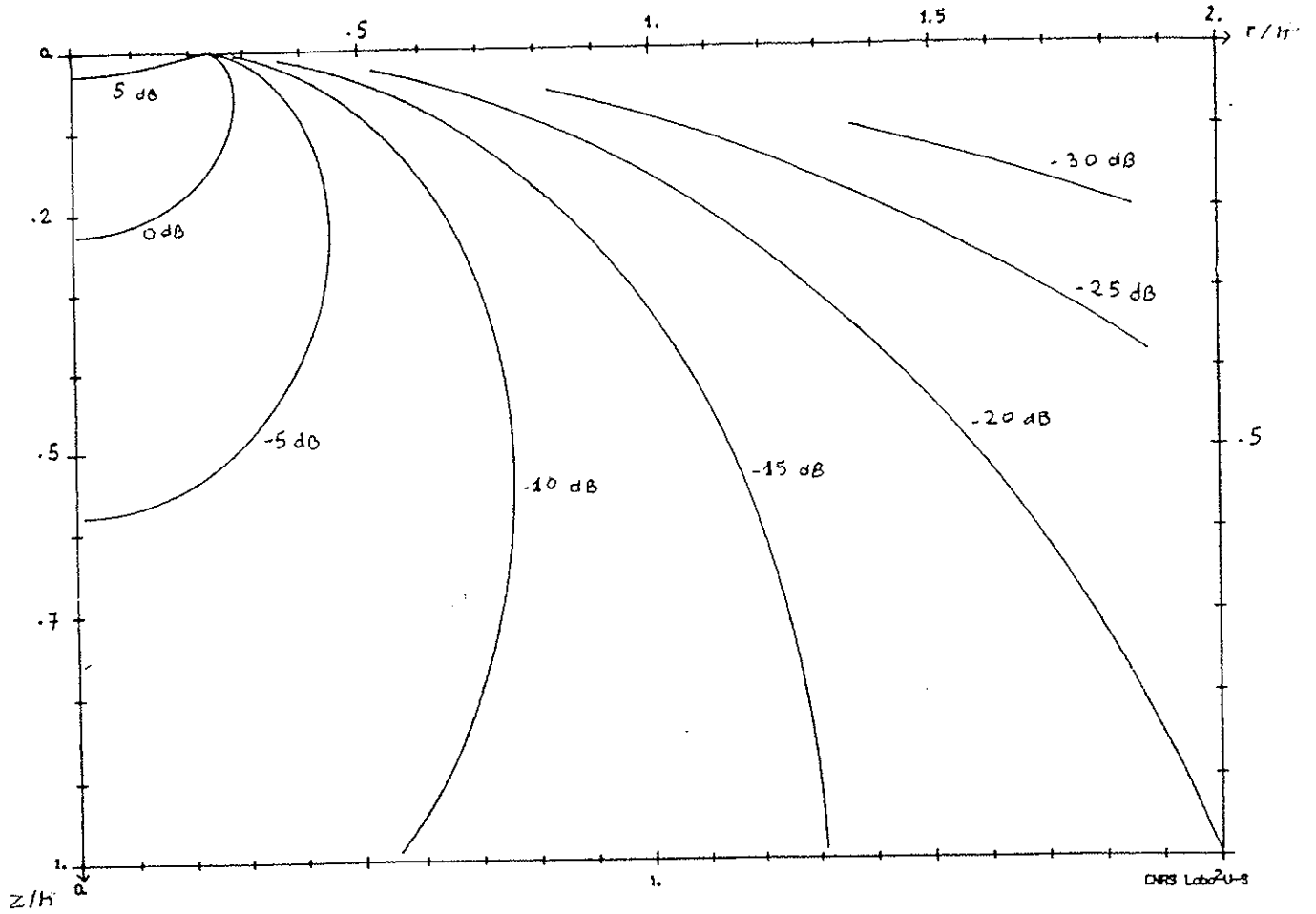


Figure 3 : Courbes d'isoatténuation de l'onde géométrique réfractée (2.21,22) en décibels, par rapport aux variables réduites :  $r/h$  et  $z/h$  ( $r$  et  $z$  position de l'hydrophone).  
Discrétisation d'un pas de 5dB. (Théorie de l'acoustique géométrique)

Pour  $\theta = \varphi = 0$ , nous avons d'après (2.1),  $h' = h \frac{d\theta}{d\varphi} = n h$ ,  $L_2 = L_1 = h + h'$

$$r/h = \frac{L_1}{h \sin \varphi}, \quad z/h = \frac{L_1}{h \cos \varphi} - \frac{h'}{h} \quad \text{et} \quad h' = h n \frac{\cos^3 \theta}{\cos^3 \varphi}, \quad n = \frac{c_1}{c_2}, \quad m = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

### II.3. Expression analytique du champ réfracté à partir de la solution exacte de l'équation des ondes. (Correction à l'optique géométrique).

#### II.3.1 Analyse du problème.

Nous sommes toujours dans les conditions décrites précédemment. Nous allons simplement situer le problème suivant un système d'axes  $o,x,y,z$ .

Nous sommes donc en présence d'une source ponctuelle se trouvant dans un milieu 1 (demi-espace  $z < 0$ ), de célérité  $c_1$  et d'un milieu 2 (demi-espace  $z > 0$ ) de célérité  $c_2$  supérieure à  $c_1$ . Ces milieux fluides, considérés comme homogènes et non absorbants, sont séparés par un plan en  $z=0$ .

La source située à une distance  $h$  finie de l'interface, en un point  $S(0,0,-h)$ , crée un champ acoustique solution de l'équation d'onde.

Posons  $P_j$  et  $v_j$  la pression et la vitesse acoustique dans les milieux  $j$ . Nous avons d'après les relations classiques de conservation de masse, d'énergie et de quantité de mouvement pour un fluide parfait, homogène et compressible où  $\Psi$  représente le potentiel des vitesses, les expressions :

$$P_j = \rho_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} \quad \text{et} \quad v_j = -\text{grad}(\Psi_j)$$

( $\rho_j$  représente la masse volumique).

En nous plaçant en régime harmonique, nous avons un terme de source et le potentiel acoustique de la forme  $\Psi = \psi e^{-i\omega t}$ . Soit  $P_j = -i\omega \rho_j \psi_j e^{-i\omega t}$  avec le nombre d'onde  $k_j = \frac{\omega}{c_j}$ .

Nous avons pour le dioptré le système d'équations de Helmholtz:

$$\begin{aligned} (\Delta + k_1^2) \psi_1 &= -4\pi \delta(\vec{R} - \vec{R}_S), \quad z < 0 \quad \text{où} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{R} = (x, y, z) \\ (2.28) \quad (\Delta + k_2^2) \psi_2 &= 0, \quad z > 0 \end{aligned}$$

auquel s'ajoutent d'une part les conditions de raccordement du champ à l'interface en  $z = 0$  (continuité de la pression et de la vitesse normale), et d'autre part la condition de rayonnement de Sommerfeld à l'infini.



$$\begin{aligned}
 & [\rho_1 \psi_1 = \rho_2 \psi_2]_{\Sigma} \\
 (2.29) \quad & \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right]_{\Sigma} \\
 & \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial r} - ik_j \psi_j \right) = O(r^{-1}), \text{ quand } (r \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Ce problème présentant une symétrie particulière peut être résolu par une transformation de Fourier bidimensionnelle sur les variables d'espace  $x, y$ . Nous allons envisager deux méthodes :

- La première, consiste à utiliser la symétrie axiale du problème autour de l'axe  $z$ .
- La seconde, qui semble naturelle étant données les natures géométriques différentes de l'onde (à symétrie sphérique) et de l'interface (plane), est de décomposer cette onde en une somme infinie d'ondes planes, selon la méthode de Brekhovskikh.

Nous aboutirons dans les deux cas à une intégrale du type :

$$(2.30) \quad \psi(\beta) = \int_{\Gamma} F(\mu) e^{i\beta g(\mu)} d\mu, \quad |\beta| \gg 1$$

où  $F$  et  $g$  sont des fonctions analytiques de la variable complexe  $\mu$ ,  $\beta$  un paramètre réel ou complexe,  $\Gamma$  un contour dans le plan complexe. Cette intégrale sera calculée par la méthode de Debye ou de la plus grande pente. Lorsque nous pourrons par un changement de la variable d'intégration transformer le contour en un contour  $\Gamma'$  dans le plan réel, où  $F$  et  $g$  seront des fonctions d'une nouvelle variable  $u$  réelle, nous utiliserons la méthode de la phase stationnaire (voir annexe 2).

### 3.2 - Résolution du problème par transformation de Fourier.

#### 3.2.1 - 1<sup>ère</sup> méthode: Symétrie axiale. [6,11-14,20].

En tenant compte de la symétrie cylindrique du problème, (symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ ), nous pouvons effectuer une transformation de Fourier sur la variable  $r$ , coordonnée cylindrique.

Notons  $\hat{\psi}(\vec{\mu}, z)$  la transformée de Fourier de  $\psi(\vec{r}, z)$ , où le vecteur  $\vec{\mu} = (\mu_x, \mu_y)$  représente la variable duale du vecteur  $\vec{r} = (x, y)$  :

$$\hat{\psi}(\vec{\mu}, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{r}, z) e^{-i\vec{\mu} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad \text{et} \quad \psi(\vec{r}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\vec{\mu}, z) e^{i\vec{\mu} \cdot \vec{r}} d\vec{\mu}$$

Compte tenu de la dépendance radiale du potentiel acoustique, nous avons suivant les variables  $(r, \theta)$ :

$$(2.31.a) \quad \hat{\psi}(\mu, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \psi(r, z) J_0(\mu r) r dr$$

$$(2.31.b) \quad \psi(r, z) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\mu, z) H_0^{(1)}(\mu r) \mu d\mu$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\mu = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}$

$J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro.

$H_0^{(j)}$  sont les fonctions de Hankel d'ordre zéro de première et deuxième espèce, vérifiant :

$$(2.32) \quad H_0^{(2)}(e^{-\pi i} u) = -H_0^{(1)}(u)$$

$$J_0(u) = \frac{1}{2} \left( H_0^{(2)}(u) + H_0^{(1)}(u) \right)$$

L'application de cette transformation au système d'équations (2.28) et (2.29) suivant les coordonnées  $(r, \theta, z)$  à cause de la symétrie cylindrique, nous fournit le système :

$$(2.33.a) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_1^2 \right) \hat{\psi}_1(\mu, z) = -\frac{\delta(z+h)}{\pi} \quad z < 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_2^2 \right) \hat{\psi}_2(\mu, z) = 0 \quad z > 0$$

$$(2.33.b) \quad \rho_1 \hat{\psi}_1(\mu, z) = \rho_2 \hat{\psi}_2(\mu, z), \quad \frac{\partial \hat{\psi}_1(\mu, z)}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\psi}_2(\mu, z)}{\partial z} \quad z = 0$$

Nous avons  $K_j = \sqrt{k_j^2 - \mu^2}$ . Cette fonction présente deux points de branchement  $(\pm k_j)$  dans le plan complexe  $\mu$ . Nous avons une onde progressive dont la dépendance en temps est du type  $e^{-i\omega t}$ . Nous choisissons  $K_j$  correspondant au feuillet de Riemann supérieur et tel que  $\text{Im}[K_j] > 0$ .

Une solution vérifiant le système (2.33.a) ainsi que la condition de Sommerfeld à l'infini s'écrit:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_1(\mu, z) &= C_1(\mu) e^{-iK_1 z} - \frac{e^{iK_1|z+h|}}{2\pi i K_1} \\ \hat{\Psi}_2(\mu, z) &= C_2(\mu) e^{iK_2 z}\end{aligned}$$

Les conditions aux limites (2.33.b) nous fournissent les expressions des coefficients  $C_1(\mu)$  et  $C_2(\mu)$  (coefficients de réflexion et transmission):

$$\begin{aligned}C_1(\mu) &= \frac{e^{iK_1 h}}{2\pi i K_1} \frac{\rho_1 K_2 - \rho_2 K_1}{\rho_1 K_2 + \rho_2 K_1} \\ C_2(\mu) &= i\rho_1 \frac{e^{iK_1 h}}{(\rho_1 K_2 + \rho_2 K_1) \pi}\end{aligned}\quad (2.34)$$

Soit d'après (2.31) et (2.17), l'expression classique [2,8]:

$$\Psi_2(r, z) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(K_1 h + K_2 z)}}{(K_2 + m K_1)} H_0^{(1)}(\mu r) \mu d\mu \quad (2.35)$$

### 3.2.2 - 2<sup>ème</sup>-méthode: Symétrie sphérique. [2], [8], [15]

#### Décomposition de l'onde sphérique en termes d'ondes planes à l'interface.

Il semble naturel de décomposer l'onde sphérique incidente en une somme d'ondes planes. En associant à chaque onde plane, un rayon (Cf.II.2) dont la direction peut être caractérisée par un angle d'incidence rapporté au système d'axes  $x, y, z$ , il intervient alors dans certaines directions des ondes inhomogènes [8]. Ces ondes ont la particularité de se propager dans un plan, avec une amplitude qui décroît exponentiellement dans une seule direction. La démarche que nous allons suivre se réfère surtout aux travaux de Brekhovskikh. Pour de récents travaux on pourra se référer à [26-28]. Dans [29] on

pourra trouver un aperçu des différentes méthodes de base telles que celles de Weyl, Sommerfeld ou Cagniard.

Brekhovskikh faisant remarquer qu'il y a un problème de nature géométrique différente, entre le front d'onde sphérique et l'interface plane, décompose le potentiel sphérique incident en une somme d'ondes planes, d'abord, dans le plan de l'interface ( $z=0$ ). La solution générale qu'il fournit est donc un prolongement de ce champ dans le demi-espace  $z>0$ , ou  $z<0$  en rajoutant à l'exponentielle (sous certaines hypothèses), un terme en  $e^{\pm ik_z z}$ . Nous verrons, sans rien enlever à l'interprétation physique que fournit sa méthode, qu'il est possible d'obtenir une solution directement dans l'espace tridimensionnel, sans l'artifice de décomposition de l'onde, d'abord dans le plan de l'interface.

On suppose que la source se trouve arbitrairement à l'origine. Posons  $R$  la distance de la source, à un point d'observation dans le milieu.

Nous savons que l'onde sphérique s'exprime, après élimination du terme  $e^{-i\omega t}$ , par une expression de la forme  $\psi_0(R) = \frac{e^{ikR}}{R}$ .

Regardons ce qui se passe si l'on considère directement la décomposition du potentiel sphérique incident pris dans  $R^3$ .

Soient:  $\vec{R} = (\vec{r}, z)$  et  $\vec{\xi}$  la variable duale de  $\vec{R}$ ,  $\vec{\xi} = (\vec{\mu}, \mu_z)$

et  $\psi_0(\vec{R}) = \psi_0(R) = \frac{e^{ikR}}{R}$  la solution vérifiant l'équation d'onde:

$$(\Delta + k_1^2)\psi_0(R) = -4\pi\delta(\vec{R}) \quad ,$$

alors sa transformée de Fourier est:  $\hat{\psi}_0(\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{(\vec{\xi}^2 - k^2)}$

Nous pouvons écrire:  $\psi_0(R) = \int d^2\mu \int \hat{\psi}_0(\vec{\xi}) e^{i(\mu_z z + \vec{\mu} \cdot \vec{r})} d\mu_z$

$$\psi_0(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^2\mu e^{i\vec{\mu} \cdot \vec{r}} \int \frac{e^{i\mu_z z}}{\mu^2 + \mu_z^2 - k^2} d\mu_z$$

Pour une valeur fixe de  $\vec{\mu}$ , nous avons  $\mu^2 = C^{ste}$ . L'intégrale sur  $\mu_z$  présente un pôle en  $\mu_z = \pm \sqrt{k^2 - \mu^2} = \pm K$ , avec  $\text{Im}(K) \geq 0$ . En l'intégrant sur un contour  $\Gamma$ , constitué par un segment de l'axe réel  $[-A, A]$  et un demi-cercle de centre  $O$  et de rayon  $A$ , dans le demi plan où les pôles sont définis comme les zéros du dénominateur avec  $\text{Im}[\mu_z] > 0$ , nous obtenons:

$$\int \frac{e^{i\mu_z z}}{\mu^2 + \mu_z^2 - k^2} d\mu_z = \begin{cases} \pi i \frac{e^{iKz}}{K} & \text{si } z \geq 0 \\ \pi i \frac{e^{-iKz}}{K} & \text{si } z \leq 0 \end{cases}$$

Soit:

$$(2.36.a) \quad \psi_0(R) = \frac{i}{2\pi} \int e^{i(\vec{\mu} \cdot \vec{r} - Kz)} \frac{d^2\mu}{K} \quad \text{si } z \leq 0$$

Nous pouvons poser  $K = \sqrt{k_1^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2}$ . L'extension de l'onde sphérique suivant les nouvelles variables  $\theta$  et  $\alpha$  caractérisant la direction de propagation de chaque onde plane dans le milieu 1, s'exprime par :

$$(2.36.b) \quad \psi_0(R) = \frac{ik_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2-i\infty} e^{i(\mu_x x + \mu_y y - Kz)} \sin\theta d\theta, \quad z \leq 0$$

avec  $\mu_x = k_1 \cos\alpha \sin\theta$ ,  $\mu_y = k_1 \sin\alpha \sin\theta$ ,  $K = k_1 \cos\theta$

$$(2.36.c) \quad K = \sqrt{k_1^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2}$$

$$\text{quand } \mu_x = \mu_y = 0 \quad \Rightarrow \quad K = k_1$$

$$\text{quand } \mu_x \text{ (ou } \mu_y) \rightarrow \pm\infty \quad \Rightarrow \quad K \rightarrow i\pm\infty \Rightarrow 0 \leq (\theta = \cos^{-1}(\frac{K}{k_1})) \leq \frac{\pi}{2} \pm i\infty$$

Nous voyons (2.36.b-c) que la décomposition de l'onde sphérique en une somme d'ondes planes, montre l'existence d'ondes inhomogènes (dénomination selon [8]). Elles se propagent dans le plan x,y avec une décroissance exponentielle de l'amplitude en Kz, verticalement, suivant l'axe z. A l'interface il y a donc une superposition d'un nombre infini d'ondes, ayant même phase .

### 3.2.3- Décomposition en ondes planes du champ transmis.

Nous pouvons donc exprimer les potentiels réfléchi et transmis à partir de l'expression de la décomposition en ondes planes du potentiel sphérique incident, compte tenu des expressions des coefficients de transmission et de réflexion associés à chaque onde plane.

Revenons au référentiel de la partie 3.2.1, dans lequel l'axe z est orienté positivement dans le milieu 2 et la source se trouve au point (0,0,-h).

Dans ce cas, le potentiel acoustique transmis est, en utilisant l'expression (2.14.b) du coefficient de transmission  $T(\theta)$  pour une onde plane:

$$\psi_2(R) = \frac{ik_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{\pi/2-i\infty} R(\theta) e^{ik_2 z \cos \varphi} e^{ik_1 \sin \theta (x \cos \sigma + y \sin \sigma)} \sin \theta d\theta$$

où  $R(\theta) = e^{ik_1 h \cos \theta} T(\theta)$ , coefficient de transmission en  $z = 0$

Posons  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , alors:

$$(2.37) \quad \psi_2(r, z) = ik_1 \int_0^{\pi/2-i\infty} e^{ik_1 h \cos \theta} e^{-ik_2 z \cos \varphi} T(\theta) J_0(k_1 r \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

où la variable  $\varphi$  caractérise les directions de propagation de chaque onde plane dans le milieu 2.

soit d'après (2.32)

$$(2.38) \quad \psi_2(r, z) = \frac{ik_1}{2} \int_{i\infty-\pi/2}^{\pi/2-i\infty} e^{ik_1 (h \cos \theta + n z \cos \varphi)} T(\theta) H_0^{(1)}(k_1 r \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

Posons  $u = \sin \theta$ ,  $du = \cos \theta d\theta$

$$(2.39) \quad \psi_2(r, z) = ik_1 \int_{e^{i\pi_\infty}}^{\infty} du \frac{e^{ik_1 g(u)}}{f(u)} H_0^{(1)}(k_1 u r) u$$

$$f(u) = m \sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}$$

$$g(u) = h \sqrt{1-u^2} + z \sqrt{n^2-u^2}.$$

L'intégrale (2.38) a été ramenée à une intégrale sur l'axe des réels, avec prescription pour contourner les points de branchements. En posant  $\mu = k_1 u$ , soit  $d\mu = k_1 du$ , les expressions (2.35) et (2.39) sont équivalentes et nous avons [8]:

$$(2.40) \quad K_1^2 = k_1^2 (1 - u^2) \quad , \quad K_2^2 = k_1^2 (n^2 - u^2)$$

Le terme  $k_1 r$  n'est autre que le terme de phase de l'onde incidente, faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $z$ . Lorsque l'on considère la symétrie sphérique de l'onde à l'interface ( $z = 0$ ), nous avons par projection sur ce plan, la phase  $k_1 r \sin\theta$ . Nous retrouvons donc, en fonction de la distance radiale  $r$  (cas de la symétrie axiale autour de l'axe  $z$ ), le terme de phase  $\mu r$  tel que :  $\mu r = k_1 r \sin\theta = k_1 r u$ .

### 3.3 - Expression analytique de l'onde géométrique réfractée.

#### Correction à l'optique géométrique.

Pour étendre au cas qui nous intéresse les travaux de Brekhovskikh [8], Gerjuoy [2], nous devons intégrer l'expression (2.39) le long d'un contour  $\Gamma$ . Une étude de la fonction  $f$ , dénominateur de l'intégrand, doit être au préalable faite selon (2.30). Elle montre l'existence de points de branchement ( $\pm n$ ) et ( $\pm 1$ ) dans le plan complexe. L'étude des zéros de la fonction  $f(u)$  fournit des valeurs de  $u^2 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 - 1}$ . Or pour ces valeurs, les expressions

$\sqrt{1 - u^2}$  et  $\sqrt{n^2 - u^2}$  sont de même signe que  $\frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{\sqrt{m^2 - 1}}$ , avec  $u$  réel et  $|u| > 1$ . La fonction  $f$  ne

s'annule donc pas. Les points de branchement ( $\pm n$ ) correspondent aux valeurs  $\theta_c = \pm \arcsin(n)$ , qui est l'angle critique selon la loi de Snell-Descartes.

Nous devons faire un choix de coupures dans ce plan. Sachant que  $\psi_2(r, z)$  décroît quand  $u > n$  (2.39) avec  $z > 0$ , nous choisissons les points appartenant au feuillet de Riemann supérieur tels que les parties imaginaires de  $(n^2 - u^2)$  et  $(1 - u^2)$  soient positives.

Puisque l'onde transmise a été décomposée en une somme infinie d'ondes planes, nous devons effectuer une sommation sur toutes les incidences ( $\theta_0$ ) caractérisant les ondes planes ou rayons associés. Or, si d'après les lois classiques de l'optique géométrique, un rayon se trouve réfracté selon les lois de Snell-Descartes (2.1), nous aurons en revanche pour la restitution du champ total, une sommation pour des angles supérieurs à l'angle critique  $\theta_c$  (Cf. 2.36.c). Pour les valeurs de  $\theta_0 > \theta_c$ , (ie:  $u_0 > n$ ), le contour  $\Gamma$  traverse la coupure issue du point de branchement  $n$ . Nous devons tenir compte dans ce cas, d'une intégrale supplémentaire autour de ce point. L'intégrale sur le contour  $\Gamma$  peut se décomposer en une somme de deux intégrales correspondant aux valeurs de  $\theta_0 < \theta_c$  ( $\Gamma''$ ) et  $\theta_0 > \theta_c$  ( $\Gamma'''$ ).

Pour des valeurs de  $\theta_0 < \theta_c$ , ( $\theta_0$  valeur de l'angle d'incidence associé à chaque onde plane), l'intégrale (2.39) se résume à une intégrale du type (A.6) (voir en annexe 2). Nous pouvons appliquer la méthode de la phase stationnaire. Nous choisissons un chemin  $\Gamma'$  passant par un point stationnaire  $u_s$  et ne contenant pas de pôles ( $f$  ne s'annule jamais).

En reprenant les notations de l'annexe A.6, nous avons pour des valeurs de  $\theta_0 < \theta_c$  :

$$(2.41.a) \quad g(u) = h \sqrt{1-u^2} + z \sqrt{n^2-u^2} + ru$$

$$(2.41.b) \quad \begin{aligned} & \text{et nous avons} \\ & k_1 \gg \left( \frac{h}{(1-u^2)^{3/2}} + \frac{z}{(n^2-u^2)^{3/2}} \right), \text{ soit } k_1 \gg r^{-1} \\ & \text{où } r = \frac{h u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{z u}{\sqrt{n^2-u^2}} \end{aligned}$$

D'après les notations de A.6, notre paramètre  $\beta$  est tel que  $(\beta=k_1) \gg r^{-1}$ : ie  $k_1 r \gg 1$

Expressions dans lesquelles le développement asymptotique de la fonction de Hankel (pour de grandes valeurs de  $k_1 r$ ) a été utilisé soit :

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(k_1 r u) &= \sqrt{\frac{2}{k_1 \pi r}} P_0(k_1 r u) e^{ik_1 r u} e^{-i\pi/4} \\ P_0(k_1 r u) &= \frac{1}{\sqrt{u}} \left( 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p ((2p-1)!)^2 \frac{1}{p!} \left( \frac{i}{8k_1 r u} \right)^p + O((k_1 r u)^{-n}) \right) \end{aligned}$$

Nous avons un point stationnaire  $u_S$  vérifiant  $g'(u) = 0$  , soit :

$$(2.42) \quad r = \frac{h u_S}{\sqrt{1-u_S^2}} + \frac{z u_S}{\sqrt{n^2-u_S^2}}$$

avec  $u_S$  réel et  $u_S < n$  ,

$$g(u_S) = \frac{h}{\sqrt{1-u_S^2}} + \frac{z n^2}{\sqrt{n^2-u_S^2}}$$

or d'après (2.16 ) nous avons  $r = h \operatorname{tg} \theta + z \operatorname{tg} \varphi$ . L'expression (2.42) est toujours vérifiée, en accord avec la loi de Snell-Descartes (2.1), ( $u_S < n$ ). Les rayons dans ce cas suivent une trajectoire correspondant au principe de Fermat. On retrouve les lois propres à l'acoustique géométrique.

$u = u_S \Leftrightarrow \sin \theta_S = u_S$  où  $\theta_S$  correspond à l'angle d'incidence d'une onde plane avec  $u_S < \theta_c$

Chaque onde plane suit un trajet de temps minimum à travers le dioptre, suivant la loi de Snell-Descartes.



L'expression du potentiel acoustique est donc celui de l'onde géométrique réfractée, corrigée par les termes du développement asymptotique (Cf. annexe, (A.4.b) et (A.7)):

$$\psi_{\text{géo}}(r,z) = e^{ik_1 g(u_s)} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(0)^{(2n)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{(2n)!(ik_1)^{1/2+n}}$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler,  $\zeta$  est reliée à  $F$  (Cf. annexe 2).

Ou bien 
$$\psi_{\text{géo}}(r,z) \approx 2\sqrt{\frac{u_s}{r}} \frac{e^{ik_1 g(u_s)}}{f(u_s)\sqrt{g''(u_s)}} \left(1 + \frac{h''(0)}{4k_1} + \dots\right)$$

(2.43.a) 
$$\begin{aligned} g''(u_s) &= -h(1-u_s^2)^{-3/2} - z n^2(n^2-u_s^2)^{-3/2} \\ g^{(3)}(u_s) &= -3u \left( h(1-u_s^2)^{-5/2} + z(n^2-u_s^2)^{-5/2} \right) \\ h''(0) &= \frac{\zeta''(0)}{\zeta(0)}, \text{ d'après (A.7) et (A.4)} \\ &= 2(g'')^{-1} \left( \frac{g^{(3)}F'}{g''F} + \frac{g^{(4)}}{4g''} - \frac{5}{12} \frac{g^{(3)2}}{g''^2} - \frac{F''}{F} \right) \end{aligned}$$

avec 
$$\begin{aligned} F' &= W[P_0'u + P_0 - uP_0'f^{-1}]f^{-1} \\ F'' &= W[P_0''u + 2P_0' - 2uP_0'f^{-1} - 2P_0f^{-1} - uP_0f''^{-1} + 2uP_0f'^2f^{-2}]f^{-1} \end{aligned}$$

où  $W = \sqrt{\frac{2k_1}{\pi r}}$ .  $F$  et  $f$  sont des fonctions de la variable  $u$ .  $P_0$  fonction de la variable  $a.u$ , est au premier ordre égale à  $\frac{1}{\sqrt{u}}$  (où  $a=k_1r$  cf. (2.41)).

Le terme d'ordre deux fait apparaître une dépendance du potentiel par rapport à la longueur d'onde et à l'inverse du carré de la fonction  $f$ . Dans le cas du dioptré air-eau où la relation (2.17) est vérifiée ( $m \approx 800$ ), ce terme devient négligeable, à fortiori ceux d'ordres supérieurs.

Pour le potentiel géométrique à l'ordre 1, nous retrouvons l'expression donnée par la théorie des rayons (2.13) et (2.14) :

(2.43.b) 
$$\psi_{\text{géo}}(r,z) \approx 2\sqrt{\frac{u_s}{r}} \frac{e^{ik_1 g(u_s)}}{f(u_s)\sqrt{h(1-u_s^2)^{-3/2} + zn^2(n^2-u_s^2)^{-3/2}}}$$

avec un terme de phase:  $k_1 \left( \frac{h}{\sqrt{1-u_s^2}} + \frac{zn^2}{\sqrt{n^2-u_s^2}} \right)$

L'utilisation de ces méthodes asymptotiques, (Phase Stationnaire , Steepest Descent) montre que le choix du trajet d'intégration correspond à des ondes planes ayant même phase au point d'observation. Or d'après les propriétés des fonctions analytiques, le trajet sur lequel la phase est constante correspond à une décroissance rapide de l'intégrand suivant la distance au point col. Les parties essentielles de l'intégrale sur ce nouveau contour, proviennent uniquement du voisinage du point col. Soit dans notre cas :  $r = h \operatorname{tg} \theta_S + z \operatorname{tg} \varphi_S$  où  $\theta_S, \varphi_S$  représentent les angles d'incidence et de réfraction selon (2.1). Nous avons donc au point d'observation un ensemble d'ondes planes créant un champ en accord avec les lois de l'optique géométrique lorsque  $k_1 r \gg 1$ . Aux grandes valeurs de  $k_1$  ou à des distances source-récepteur grandes devant  $\lambda_1$  il apparaît des termes correctifs. Ces termes sont fonction de l'ordre du développement que l'on se fixe.

### 3.4 - Etude du trajet au point de branchement. [15,16,18,21-24]

#### Correction du champ réfracté géométrique par les ondes inhomogènes.

L'étude de l'intégrale sur le trajet qui coupe l'axe réel pour des valeurs de  $u_0 > n$ , c'est à dire pour des valeurs supérieures à l'angle critique montre que le chemin d'intégration intercepte dans ce cas, la coupure issue du point de branchement  $n$ . Nous passons du feuillet de Riemann supérieur au feuillet de Riemann inférieur. Nous devons alors ajouter un nouveau contour. Ce nouveau chemin  $\Gamma''$  entourant une partie de la coupure, peut longer le feuillet supérieur. On se ramène alors, en gardant à l'esprit la décomposition de l'onde sphérique en une somme d'ondes planes, à considérer le champ total réfracté comme la somme des intégrales sur le contour  $\Gamma'$  (Cf. 3.3) et sur le contour  $\Gamma''$ . Nous pouvons alors sur cette seconde intégrale appliquer la méthode de steepest descent pour de grandes valeurs du paramètre  $k_1 r$ . L'application de cette méthode nous impose le choix d'un chemin suivant les lignes de plus grandes pentes issues d'un nouveau point col  $u_S'$ .

Nous avons dans ce cas ( $\theta_0 > \theta_c$ ), en utilisant comme précédemment les notations de l'annexe 2, (A.6), les relations :

$$\begin{aligned}
 f(u) &= m \sqrt{1-u^2} + i \sqrt{u^2-n^2} \\
 g(u) &= h \sqrt{1-u^2} + i z \sqrt{u^2-n^2} + r u \\
 (2.44) \quad F(u) &= \sqrt{\frac{2k_1}{\pi r}} P_0(k_1 r u) \frac{u}{f(u)} e^{i\pi/4} \\
 \beta &= k_1 \quad \text{et} \quad k_1 r \gg 1
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}[g(u)] &= h \sqrt{1-u^2} + r u \\
 \operatorname{Im}[g(u)] &= i z \sqrt{u^2-n^2}
 \end{aligned}$$

Le point selle  $u_S'$  vérifie  $g'(u) = 0$ , soit :

$$\frac{d\text{Re}[g(u)]}{du} = 0|_{u=u_S'}$$

$$\text{Im}[g(u)] = \text{Im}[g(u_S')]$$

Soit :

$$\frac{d\text{Re}[g(u)]}{du} = -\frac{h u}{\sqrt{1-u^2}} + r$$

$$(2.45) \quad r = \frac{h u_S'}{\sqrt{1-u_S'^2}} \quad \Leftrightarrow \quad u_S' = \frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}}, \quad u_S' \text{ réel}$$

$$u_S' = \sin \alpha \quad \text{avec } \alpha > \theta_c$$

La relation liant  $r$ ,  $h$ ,  $z$  quand  $\theta < \theta_c$  est déterminée par  $r = h \tan \theta + z \tan \phi$ . Lorsque  $\theta > \theta_c$ , nous avons  $r = h \tan \alpha$ . Cette deuxième relation est indépendante de la profondeur  $z$ .

Nous avons les relations:

$$(2.46) \quad \text{Re}[g(u_S')] = \sqrt{r^2+h^2}$$

$$\text{Im}[g(u_S')] = z \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}$$

$$f(u_S') = \frac{m h}{\sqrt{r^2+h^2}} + i \sqrt{\frac{r^2}{r^2+h^2} - n^2}$$

$$g''(u) = -h(1-u^2)^{-3/2} + i z n^2 (u^2 - n^2)^{-3/2}$$

$$\text{Re}[g''(u_S')] = -\frac{(r^2+h^2)^{3/2}}{h^2}$$

Soit :

$$\psi_{\text{lat}}(r,z) = \sqrt{\frac{2k_1}{\pi r}} e^{i\pi/4} e^{ik_1 g(u_S')} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_1 S^2} \phi(S) dS$$

$$\phi(S) dS = F(u) du$$

D'après les expressions (A.4), (2.45) et (2.46), le potentiel s'écrit :

$$(2.47.a) \quad \psi_{\text{lat}}(r,z) = \sqrt{\frac{2}{r}} \frac{e^{ik_1 g(u_S')}}{(r^2+h^2)^{1/4}} \left\{ \phi(0) + \frac{1}{4ik_1} \phi''(0) + \dots \right\}$$

$$\phi(0) = \sqrt{\frac{-2}{\text{Re}[g''(u_S')]} F(u_S')}$$

Soit à l'ordre 1:

$$(2.47.b) \quad \psi_{lat}(r,z) = \frac{2h}{(r^2+h^2) \left( \frac{mh}{\sqrt{r^2+h^2}} + i \sqrt{\frac{r^2}{r^2+h^2} - n^2} \right)} e^{i\xi_L}$$

(2.48.a) avec un terme de phase  $\xi_L$  :

$$\xi_L = k_1 \left( \sqrt{r^2+h^2} + iz \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2} \right)$$

ou encore:

$$\psi_{lat}(r,z) = \frac{2h}{(r^2+h^2)(m \cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2})} e^{ik_1 g(u_s')}$$

$$(2.48.b) \quad \cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} > n, \quad \alpha > \theta_c$$

Nous voyons apparaître un nouveau type d'onde dans le milieu 2, (appelée onde latérale), pour des angles d'incidence supérieure à l'angle critique. L'amplitude de cette onde, contrairement aux ondes planes, n'est pas constante. Elle s'atténue exponentiellement suivant la profondeur (direction sur l'axe z) et en fonction de la fréquence de l'onde émise. Nous avons vu que ces ondes se propagent dans le plan x,y avec un vecteur d'onde  $k_1$  réel ((2.36), (2.48)). Dès réflexion totale, il y a création d'une onde dans le milieu 2, qui se propage le long du dioptré et rayonne de part et d'autre de celui-ci. Ce rayonnement s'atténue exponentiellement suivant une direction perpendiculaire à l'interface et d'autant plus que la fréquence du signal est élevée.

Il apparaît alors, pour de faibles profondeurs du récepteur, des ondes provenant de deux trajets différents. L'un en accord avec la loi de Snell-Descartes correspondant au principe de Fermat ( $r = h \tan \theta + z \tan \phi$ ), et l'autre correspondant à des angles  $\alpha$  supérieurs à l'angle critique, quand  $z \rightarrow 0$  ( $r = h \tan \alpha$  où  $u = \sin \alpha$ ). Au point d'observation, nous avons donc interférences entre ces ondes, dépendant des paramètres  $\lambda$ ,  $h$  (caractéristiques de la source) et  $r$ ,  $z$  (position de l'hydrophone).

### 3.5- Expression du champ réfracté total en termes d'amplitude et de phase.

Nous avons :

$$(2.49) \quad \psi_2 = \begin{matrix} \psi_{\text{géo}} & + & \psi_{\text{lat}} \\ \theta < \theta_c & & \theta > \theta_c \end{matrix}$$

Posons:

$$\psi_2 = |\psi_2| e^{i\xi}$$

$$\psi_2 = |\psi_{\text{géo}}| e^{i \arg[\psi_{\text{géo}}]} + |\psi_{\text{lat}}| e^{i \arg[\psi_{\text{lat}}]}$$

$$\arg[\psi_{\text{géo}}] = w \quad \text{et} \quad \arg[\psi_{\text{lat}}] = v$$

Nous avons les termes d'amplitude et de phase respectivement tels que :

$$(2.50) \quad |\psi_2| = \sqrt{|\psi_{\text{géo}}|^2 + |\psi_{\text{lat}}|^2 + 2|\psi_{\text{géo}}||\psi_{\text{lat}}| \cos(w-v)}$$

$$\xi = \arctg(\eta) \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \sin(\eta) &= |\psi_{\text{géo}}| \sin w + |\psi_{\text{lat}}| \sin v, \quad (0 \leq \eta < 2\pi) \\ \cos(\eta) &= |\psi_{\text{géo}}| \cos w + |\psi_{\text{lat}}| \cos v \end{aligned}$$

Le développement de ces formules est donné à l'aide des expressions des potentiels acoustiques de l'onde géométrique  $\psi_{\text{géo}}$  (2.43) et latérale  $\psi_{\text{lat}}$  (2.48), calculées précédemment.

### 3.6 - Evaluations numériques.

Nous pouvons représenter séparément les courbes d'isoatténuation des ondes géométriques et latérales réfractées. Pour cela nous ferons les mêmes hypothèses que précédemment (§.2.5.1) et nous utiliserons les mêmes variables réduites correspondant au rapport des coordonnées de l'hydrophone (position sur l'horizontal et immersion) sur la hauteur de la source à l'interface. La dépendance des ondes latérales par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$  du signal émis, nous fera introduire la variable réduite  $\lambda_0 = \frac{\lambda}{h}$ .

Les courbes obtenues représentent également les corrections qu'il faudrait apporter aux pressions mesurées par des hydrophones placés à différentes profondeurs et positions sur l'horizontal, pour retrouver la pression et les caractéristiques du signal incident. Expérimentalement, la séparation des deux types d'onde peut se faire par l'introduction d'un matériau absorbant placé dans l'air. Il devra recouvrir pour le premier la région au delà de l'angle critique ( $13^\circ$ ), et dans le second, la région en deçà de l'incidence critique.

Remarques: - Les évaluations numériques obtenues pour une distance radiale correspondant à l'incidence critique doivent faire l'objet d'une attention particulière et ne peuvent être prises en compte (raccord des intégrales sous approximation phase stationnaire à l'ordre 1). Nous verrons ci-dessous (Fig. 5.1 et 5.2) le comportement de l'onde géométrique pour des incidences proches de l'angle critique selon Brekhovskikh [8].

- D'autre part, en fonction de la fréquence  $\omega$  de la source, nous avons vu que les amplitudes des deux types d'onde s'écrivent sous la forme selon (2.43.a) et (2.47.a):

$$|\psi_{\text{géo}}(P)| = A_{\text{géo}}(P) + \varepsilon(P) \quad \text{où} \quad \varepsilon(P) = O\left(\frac{1}{k_1 r}\right),$$

$$|\psi_{\text{lat}}(P)| = A_{\text{lat}}(P) \exp\left(-k_1 z \sqrt{\frac{r^2}{r^2+h^2} - n^2}\right),$$

en intégrant le reste dans  $A_{\text{lat}}(P)$ .

D'autre part l'amplitude de  $\psi_{\text{géo}}$  décroît en  $\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$  alors que  $\psi_{\text{lat}}$  décroît en  $\frac{h}{r^2+h^2}$ .

Par conséquent, pour des valeurs de  $k_1 r$  tendant vers l'infini,  $|\psi_{\text{lat}}(P)|$  est négligeable par rapport au reste  $\varepsilon(P)$  du développement de  $|\psi_{\text{géo}}(P)|$ . Cependant, à chaque position  $P$  de l'hydrophone, on peut associer une plage de fréquences  $\omega$  pour laquelle  $|\psi_{\text{lat}}(P)|$  reste significatif devant  $\varepsilon(P)$ . Pour le voir, il faut se rappeler que le nombre  $m$  est grand (rapport des masses volumiques), proche de 830. Or,  $|\psi_{\text{lat}}(P)|$  est de l'ordre de  $1/m$  alors que  $\varepsilon(P)$  est de l'ordre de  $1/m^2$  (Cf. 2.43.a). C'est cette circonstance qui justifie la validité des résultats et des simulations.

### 3.6.1-Transformation des expressions pour le calcul numérique.

Nous noterons  $\psi_2$  le potentiel géométrique,  $\psi_L$  le potentiel latéral et  $\psi_i$  celui incident.

Posons :

$$x = \frac{r}{h} \quad \text{et} \quad y = \frac{z}{h}$$

(2.51)  $x = \tan\theta + y \tan\varphi$

Nous pouvons écrire d'après (2.33), (2.48.b) et (2.51):

$$\frac{|\psi_2|^2}{|\psi_i|^2/h^2} = \frac{4 u}{x[(1-u^2)^{-3/2} + y n^2 (n^2 - u^2)^{-3/2}]} (m \cos\theta + n \cos\varphi)^2$$

$$\frac{|\psi_L|^2}{|\psi_i|^2/h^2} = \left| \frac{4 \cos \alpha}{[m \cos \alpha + i(\sin^2 \alpha - n^2)]^2 (x^2 + 1)} \right| e^{-4\pi (y/\lambda_0) \sqrt{x^2/(x^2+1) - n^2}}$$

Soit d'après les relations (2.17), (2.19) :

$$(2.52.a) \quad \frac{|\tilde{\psi}_2|^2}{|\tilde{\psi}_i|^2/h^2} = \frac{4 u}{x[(1-u^2)^{-3/2} + y n^2 (n^2 - u^2)^{-3/2}] \cos \theta}$$

$$(2.52.b) \quad \frac{|\tilde{\psi}_L|^2}{|\tilde{\psi}_i|^2/h^2} = \frac{4}{x^2 + 1} e^{-4\pi (y/\lambda_0) \sqrt{x^2/(x^2+1) - n^2}}$$

### 3.6.2 - a Evaluation numérique pour l'onde géométrique.

Nous avons vu que l'expression de l'onde géométrique réfractée dans le cas du dioptré air-eau, obtenue en utilisant la théorie des rayons (2.14.a) ou un développement asymptotique de la solution intégrale de l'équation des ondes (2.43.b) était la même.

Nous voulons déterminer les courbes d'isoatténuation de pression en décibels dans le plan  $x(=r/h)$ ,  $y(=z/h)$  (distance radiale -profondeur). Pour une valeur de l'atténuation  $W$  que l'on se fixe, un angle d'incidence  $\theta$  ( $\theta < \theta_c$ ), on cherche les points  $(x,y)$  vérifiant la relation (2.52.a) et tels qu'ils satisfassent la condition (2.42) ou (2.16). L'algorithme se présente de la façon suivante:

Pour une atténuation de  $W$  décibels , nous avons d'après (2.52.a) :

$$(2.53) \quad W = 10 \text{ Log}_{10}(G) = 10 \text{ Log}_{10} \left( \frac{|\tilde{\psi}_2|^2}{|\tilde{\psi}_i|^2/h^2} \right)$$

La résolution numérique se résume à la résolution d'un trinôme du 2<sup>nd</sup> degré en  $y$ . Soit en utilisant (2.53) :

$$y^2 A + B y - C = 0$$

$$A = \frac{n^2 \sin \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)^2}$$

$$B = \sin \theta \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{n^2}{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}$$

$$C = \sin \theta \cos^{-2} \theta (4W - \cos^{-2} \theta), \quad C < 0$$

Nous déduisons :

$$(2.54) \quad y_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad x = \operatorname{tg} \theta + y_1 \operatorname{tg} \varphi, \quad \Delta \text{ est le discriminant.}$$

l'autre solution  $y_2$  n'étant pas acceptable physiquement car elle fournit des solutions dans le milieu 1.

### 3.6.2 - b. Représentations graphiques (onde géométrique).

La figure 4, nous donne la représentation graphique des courbes d'isoatténuation de l'onde géométrique réfractée (2.33), obtenue à partir de la solution de l'équation de Helmholtz. Les courbes figures 4 et 3 sont évidemment identiques, en accord avec les théories (acoustique géométrique et développement asymptotique au premier ordre). Sur les figures 5.1, 5.2 nous avons représenté les courbes d'isoatténuation d'après les formules données par Brekhovskikh [8].

Brekhovskikh se place dans les conditions d'existence des ondes latérales, c'est à dire à des angles de réfraction  $\varphi$  proches de  $\pi/2$ .

Dans ce cas l'expression (2.16) devient pour  $\pi/2 - \varphi \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \text{où} \quad n \cos \varphi &\approx n \sin(\pi/2 - \varphi) \approx n(\pi/2 - \varphi) \\ n \sin \varphi &\approx n \cos(\pi/2 - \varphi) \approx n \end{aligned}$$

$$x = \operatorname{tg} \theta + y \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{d'après (2.16)}$$

$$\begin{aligned} (2.55) \quad &= n \frac{\cos(\pi/2 - \varphi)}{1 - n^2 (\cos(\pi/2 - \varphi))^2} + \frac{y}{\operatorname{tg}(\pi/2 - \varphi)} \\ &\approx \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}} + \frac{y}{\pi/2 - \varphi} \end{aligned}$$

Dans ce cas l'expression (2.14) est écrite selon [8, (23.12)], où nous avons introduit les variables réduites:

$$(2.56) \quad \frac{|\tilde{\psi}_2|^2}{|\tilde{\psi}_1|^2/h^2} \approx \frac{4 n^2 \cos^3 \varphi}{xy \left( \cos \theta + \frac{n}{m^2 \cos \varphi} \right)} \approx \frac{4 n^2 \cos^3 \varphi}{xy \cos \theta}$$



En utilisant l'expression (2.55), sans faire tendre  $h\sqrt{1-n^2} \rightarrow 0$ , nous avons, en supposant  $m \gg 1$  [8, (23.22)]:

$$(2.57) \quad \frac{|\tilde{\psi}_2|^2}{|\tilde{\psi}_1|^2/h^2} \approx \frac{4 n^2 y^2}{x(1-n^2) \left( x - \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} \right)^3}$$

Cette approximation est justifiée dans le cas où  $r/h$  est grand et permet d'obtenir une bonne estimation de l'onde. Par contre l'expression (2.56) n'est pas satisfaisante (cf. remarques §3.6); les simulations qui en découlent font apparaître des lignes d'isoatténuation incompatibles avec les résultats expérimentaux (cf. Ch. III).

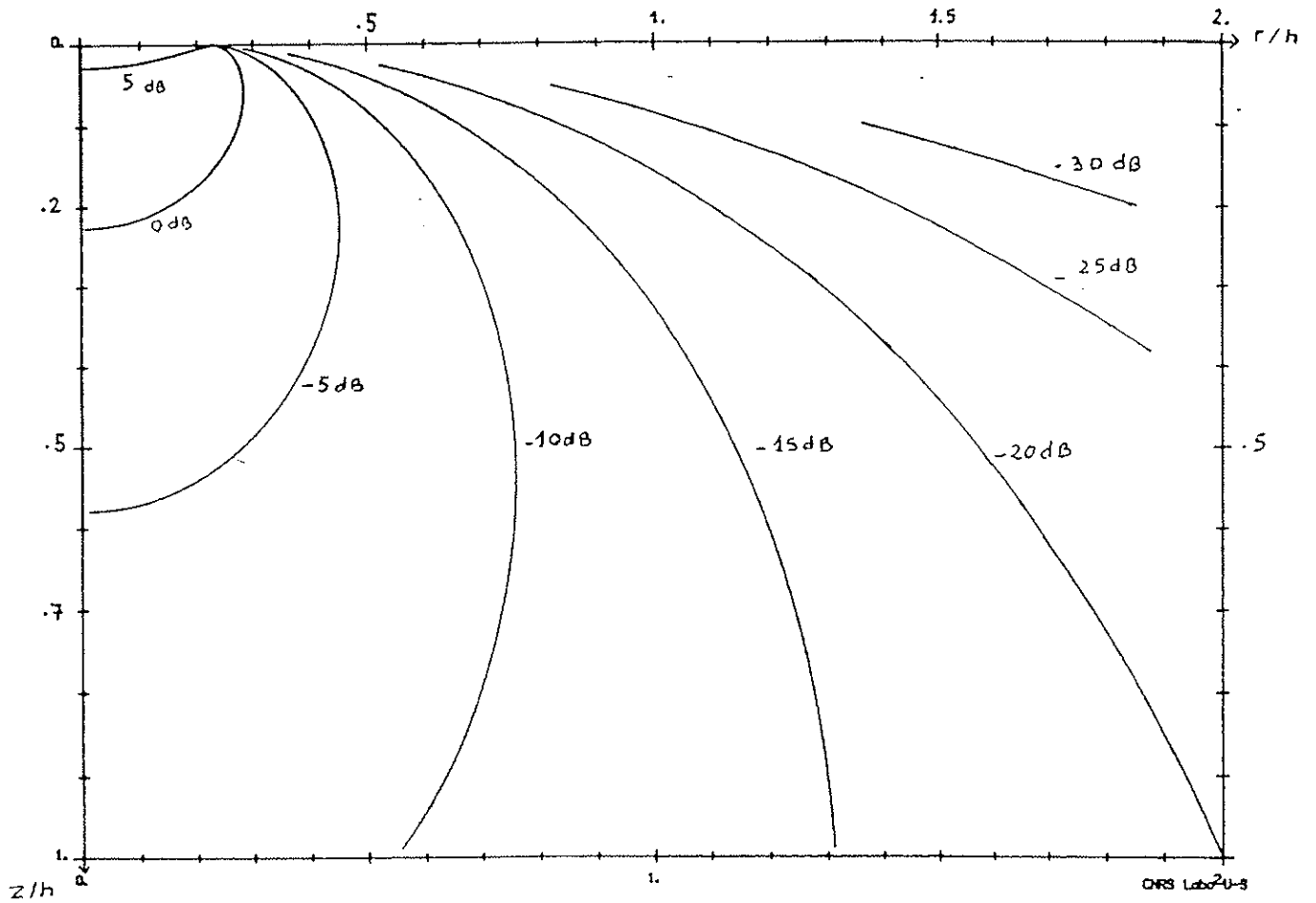


Figure 4: Courbes d'isoatténuation de l'onde géométrique réfractée selon (2.33), en fonction des variables réduites  $r/h$ ,  $z/h$  (coordonnées de l'hydrophone). Discrétisation par pas de 5dB. (Méthode asymptotique ).

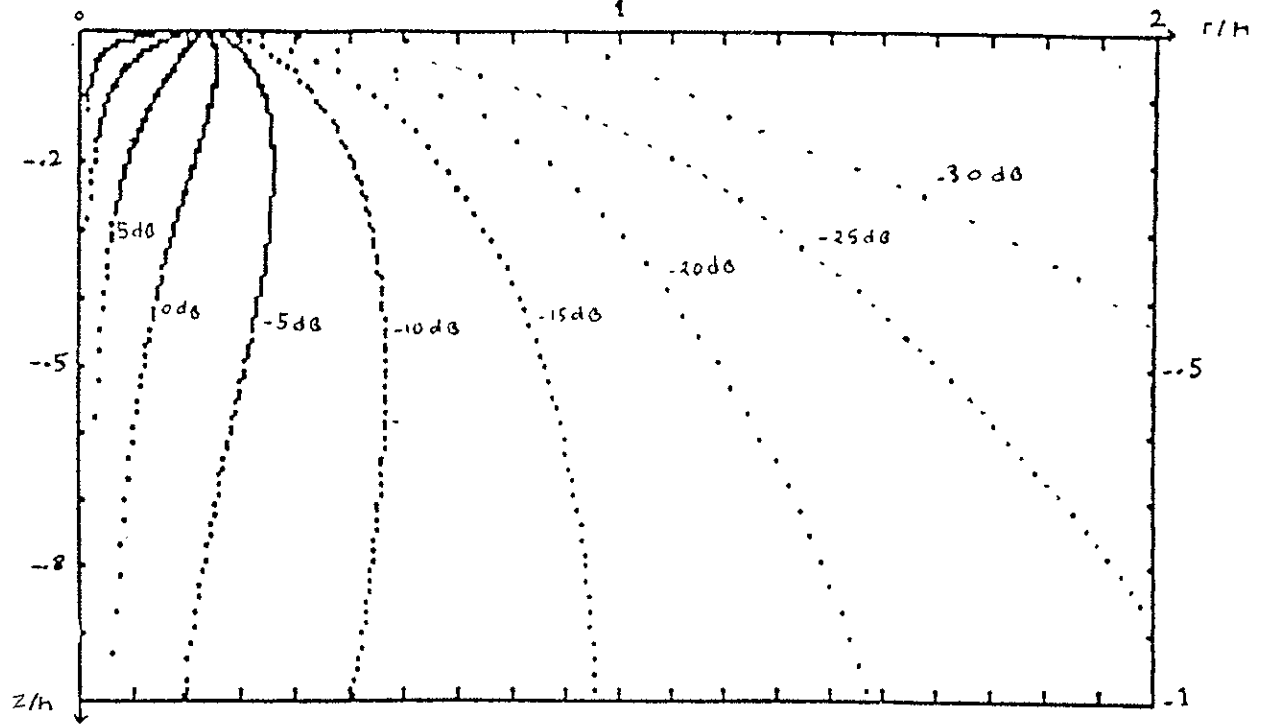


Figure 5.1: (Brekhovskikh [8,(23.12)])  $\pi/2 - \varphi \ll 1$ ,  $\theta_c \approx 13^\circ$

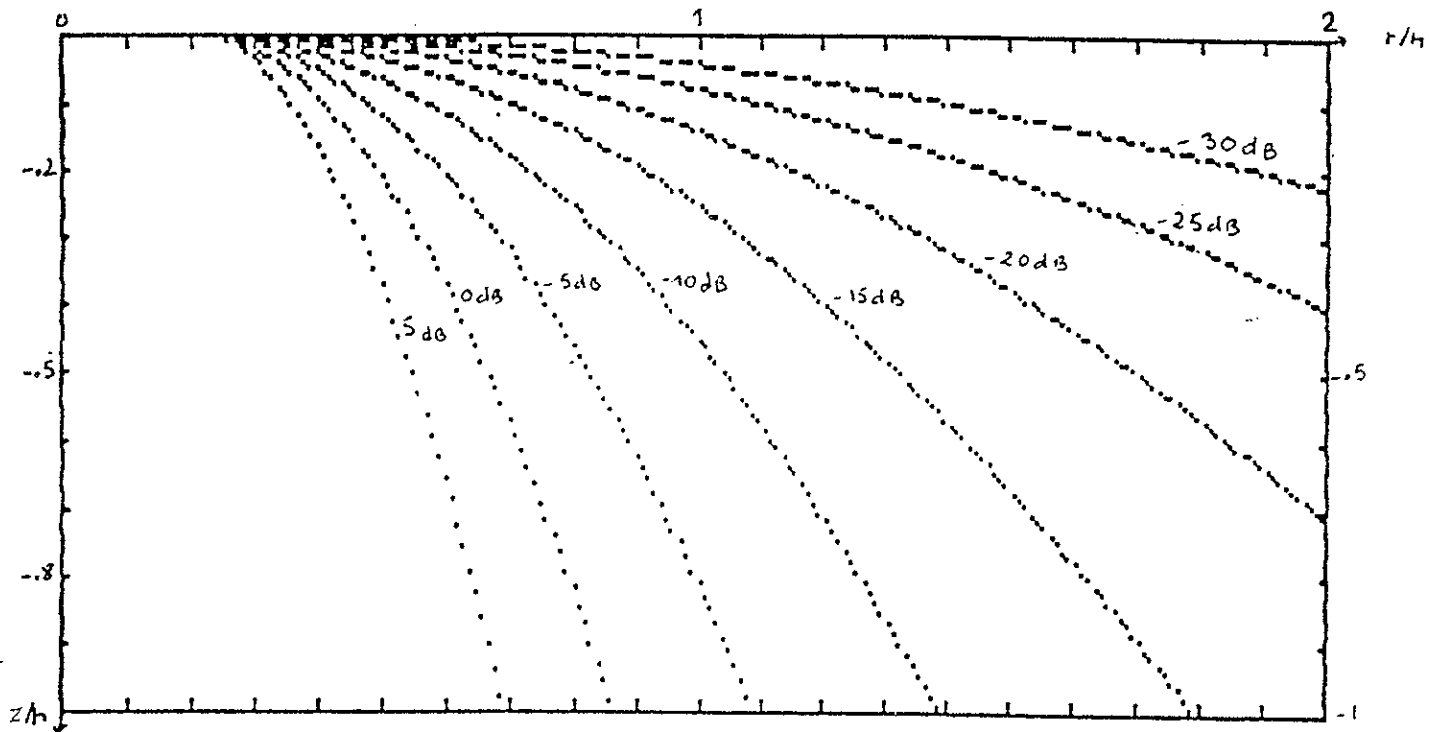


Figure 5.2: (Brekhovskikh)  $\pi/2 - \varphi \ll 1 \Rightarrow x \approx n \sqrt{1-n^2} + \frac{y}{\pi/2 - \varphi}$

Figures 5.1 , 5.2: Courbes d'isoatténuation de l'onde géométrique réfractée en fonction des variables réduites  $r/h$ ,  $d/h$  (coordonnées de l'hydrophone), selon Brekhovskikh, pour des incidences proches de l'angle critique ( $\pi/2 - \varphi \ll 1$ ). Respectivement en accord avec l'équation [8,(23.12)] (1<sup>ère</sup> approximation) et [8,(23.22)] (2<sup>ème</sup> approximation). (M. A )

### 3.6.3 - a Evaluation numérique de l'onde latérale réfractée.

Le raisonnement est le même que précédemment. Les hypothèses faites pour le dioptre air-eau étant également les mêmes (2.38), (2.39) et (2.53), les courbes d'isoatténuation se résolvent par le système d'équations suivant :

$$(2.58) \quad y = \lambda_0 \frac{\text{Log} \left( \frac{4 G^{-1}}{x^2 + 1} \right)}{4\pi \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1} - n^2}} \quad x \geq \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}}$$

avec  $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  et  $\sin \alpha > n$

### 3.6.3 - b Représentations graphiques.

Les courbes d'isoatténuation de l'onde latérale réfractée sont représentées pour différentes valeurs de la longueur d'onde ( $0.2 < \lambda_0 < 0.5$ ). Pour une célérité  $c_1$  de 340 m/s, nous avons une échelle de fréquences telle que :  $680 \text{ Hz} < f_{|h=1} < 1700 \text{ Hz}$ .

Nous retrouvons bien une pénétration des ondes plus importantes aux basses fréquences. (fig 9.1, 9.2). Pour des angles inférieurs à l'angle critique, soit sur le graphe  $x < \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}}$ , où  $n = \sin \theta_c$ , on peut remarquer que les ondes latérales n'existent pas. Nous les retrouvons pour de faibles profondeurs  $x > \text{tg} \theta_c$  en accord avec la théorie. A l'interface ( $x > \text{tg} \theta_c$ ), nous avons augmentation de l'amplitude, contrairement aux ondes géométriques. Ceci peut facilement être expérimenté en laboratoire, dans une cuve acoustique.

Les courbes d'isoatténuation (fig. 6.1) représentent l'onde latérale prise selon les approximations d'Urlick [1] à partir des conditions suivantes :  $r \gg h$  et  $r \gg z$ . Selon Urlick, nous avons :

$$i) \quad R = \sqrt{r^2 + h^2} \approx r, \quad \sin^2 \alpha = \frac{r^2}{r^2 + h^2} \approx 1$$

or  $ii) \quad \sin \alpha \gg n, \quad \text{soit} \quad \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2} \approx 1$

Nous voyons dans ce cas, des courbes d'isoatténuation parallèles au plan de l'interface, ce qui entraîne une dépendance uniquement par rapport à  $\lambda_0$  et à l'immersion du récepteur. Quelle que soit la position de l'hydrophone par rapport à la verticale issue de la source, nous obtenons le même résultat, ce qui est tout à fait injustifié. Une approximation de R seul, ne fournit pas non plus une bonne représentation de l'onde latérale, car nous avons indépendamment de l'angle d'incidence, existence de ces ondes (fig. 6.2). Les conditions qu'imposent Urick ( $r \gg h$  et  $r \gg z$ ) sont correctes physiquement, mais les approximations qu'il fait ne permettent pas d'étudier globalement le champ.

Une étude intéressante est celle du rapport de l'intensité de l'onde latérale sur l'intensité de l'onde réfractée. Nous pouvons étudier ce rapport suivant les variables réduites  $r/z$  et  $z/\lambda$ , mais aussi suivant  $r/h$  et  $z/h$ . Les courbes d'isoatténuation sont représentées figures (7.1) et (7.2). Nous voyons l'importance que peut avoir l'amplitude de l'onde latérale par rapport à celle de l'onde géométrique pour de faibles profondeurs du récepteur. La contribution des ondes géométriques devient négligeable lorsqu'on se rapproche de l'interface. L'intervention des deux contributions en un même point d'observation entraîne un phénomène d'interférences, et non pas, comme le décrit McNicholas [17], une addition ou juxtaposition des deux contributions. La correction qu'il apporte aux courbes d'Urick n'est pas non plus satisfaisante. Nous avons de plus, disjonction entre les points de raccordements entre onde géométrique et onde latérale. Ceci est dû à une trop grande simplification des expressions théoriques. ([17], figures 8.1, 8.2). Certains points de raccordement (points anguleux), sont inexplicables dans [17].

En effet en écrivant [17,(5)] :

$$\psi_2^t = \psi_2 [1 + x e^{i(v-w)}] \quad , \quad x = \frac{|\psi_L|}{|\psi_2|}$$

et en utilisant le fait que pour de faibles profondeurs  $x \gg 1$ , McNicholas néglige le terme d'interférence  $2|\psi_L||\psi_2|\cos(w-v)$  donné en (2.50). Nous obtenons selon son approximation :

$$|\psi_2|^2 + |\psi_L|^2 = (|\psi_2| + |\psi_L|)^2$$

ou encore

$$\psi_2^t = |\psi_L| e^{iv} \quad , \quad z \rightarrow 0$$

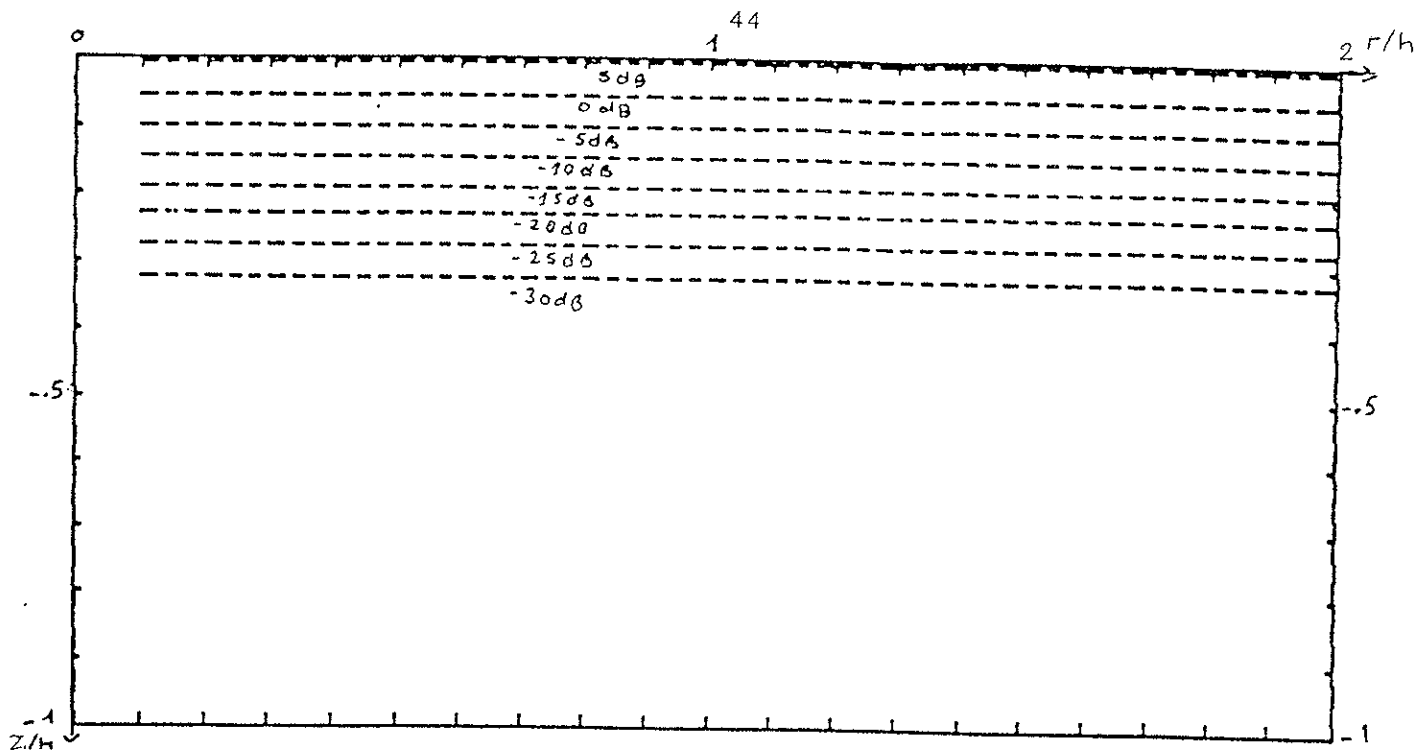


Figure 6.1:  $r \gg h \Rightarrow \sqrt{r^2 + h^2} \approx r$  ,  $\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2} \approx 1$

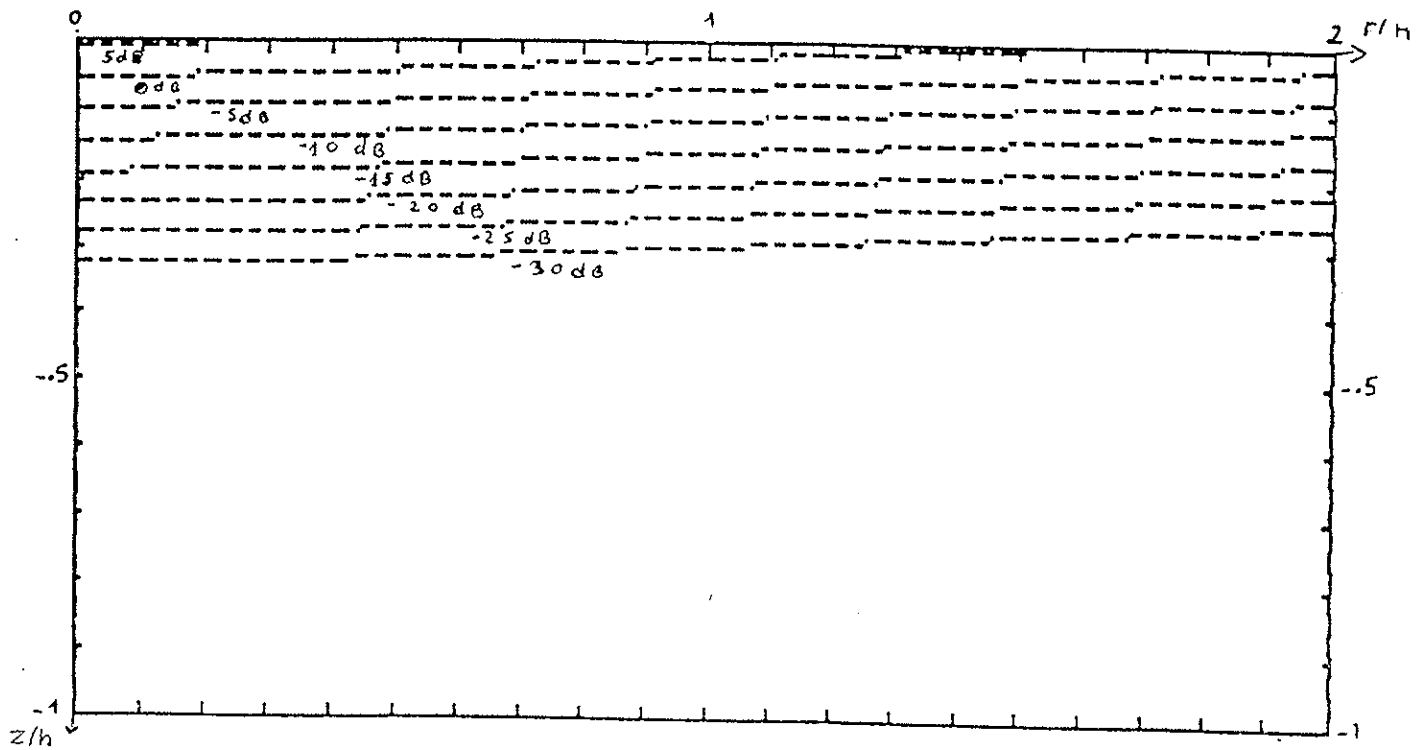


Figure 6.2 :  $r \gg h$  ,  $r \approx \sqrt{r^2 + h^2}$

Figures 6.1, 6.2 : Courbes d'isoatténuation de l'onde latérale approchée selon [1], en fonction des variables réduites  $r/h$  et  $z/h$  (coordonnées de l'hydrophone), pour une longueur d'onde en variable réduite  $\lambda_0 = 0.5$ . Discrétisation par pas de 5dB. (Approximation  $r \gg h$  ,  $r \gg z$  d'après [1]).

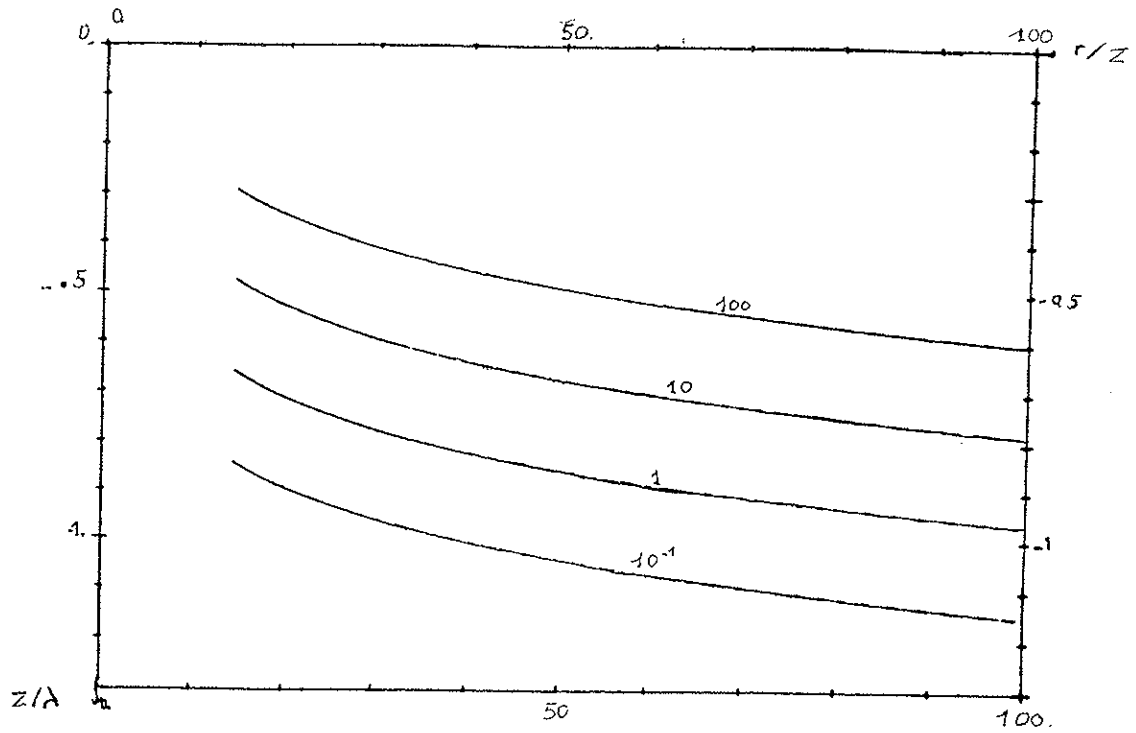
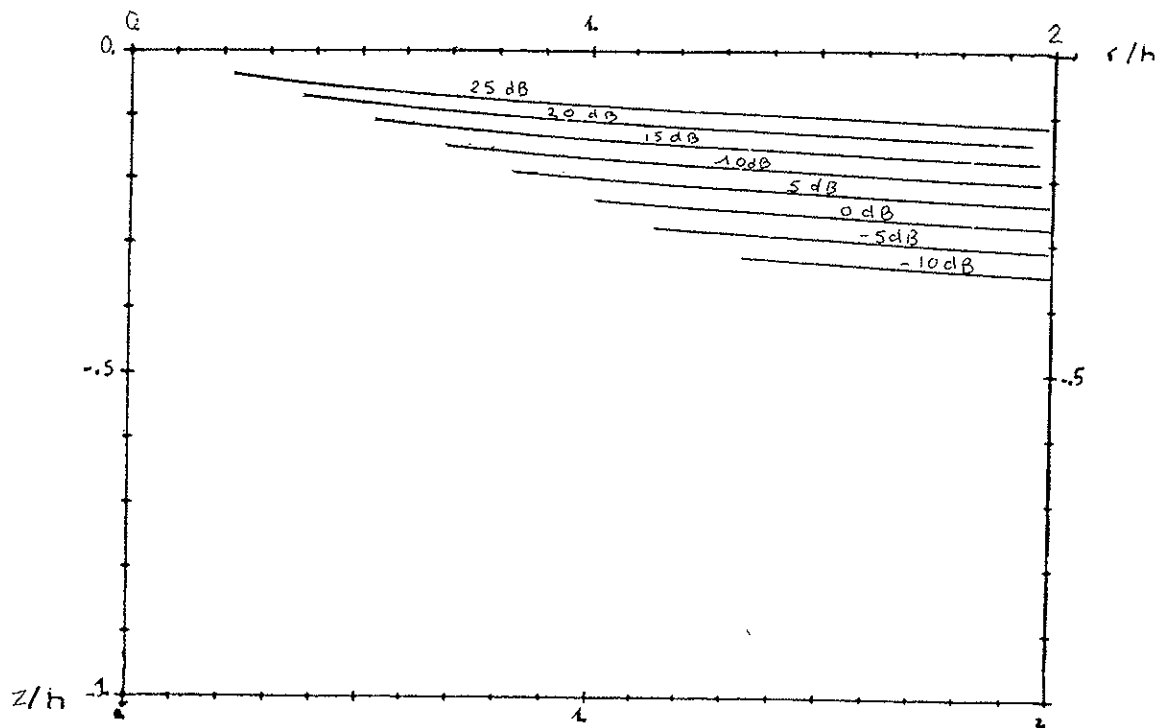


Figure 7.1: Représentation en fonction des variables réduites  $r/z$ ,  $z/\lambda$



l'hydrophone) avec  $\lambda/h = \lambda_0 = 0.5$

Figures 7.1, 7.2: Courbes d'isoatténuation du rapport de l'intensité de l'onde latérale sur l'intensité de l'onde géométrique. Ces intensités ont été ramenées à des unités de pression (2.20). Discrétisation par pas de 5dB.

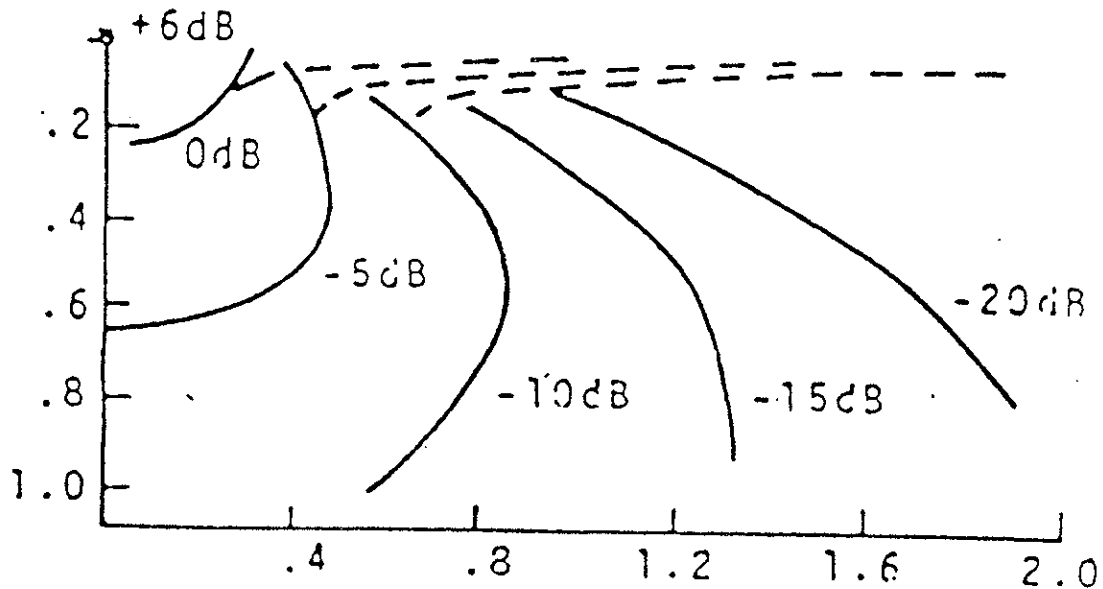


Figure ([17],8.1):  $\lambda_0 = 0.2$

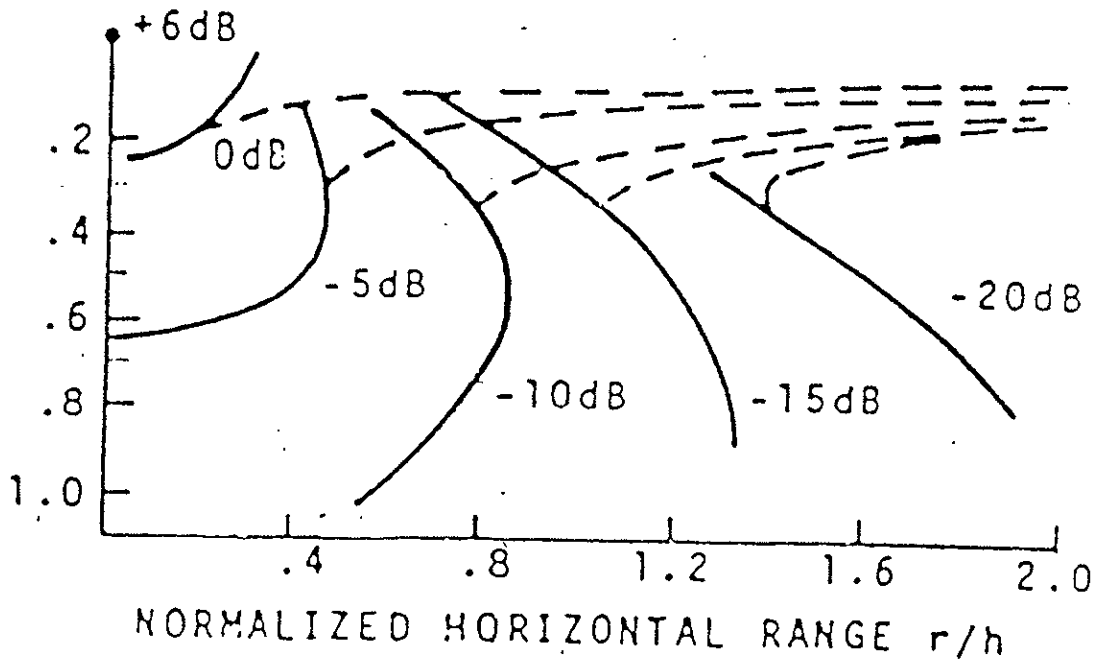
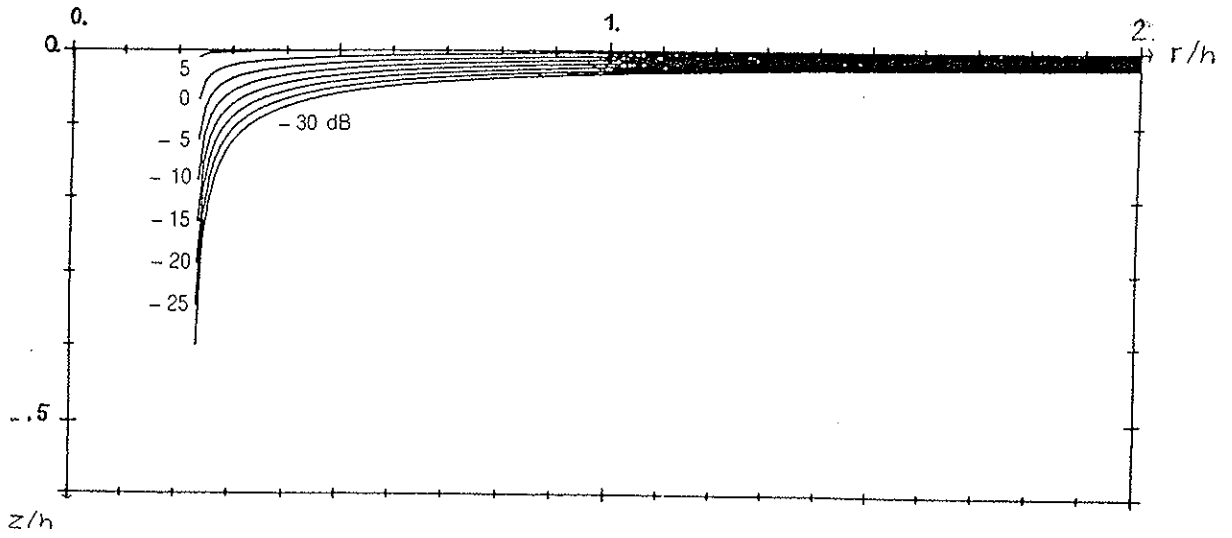
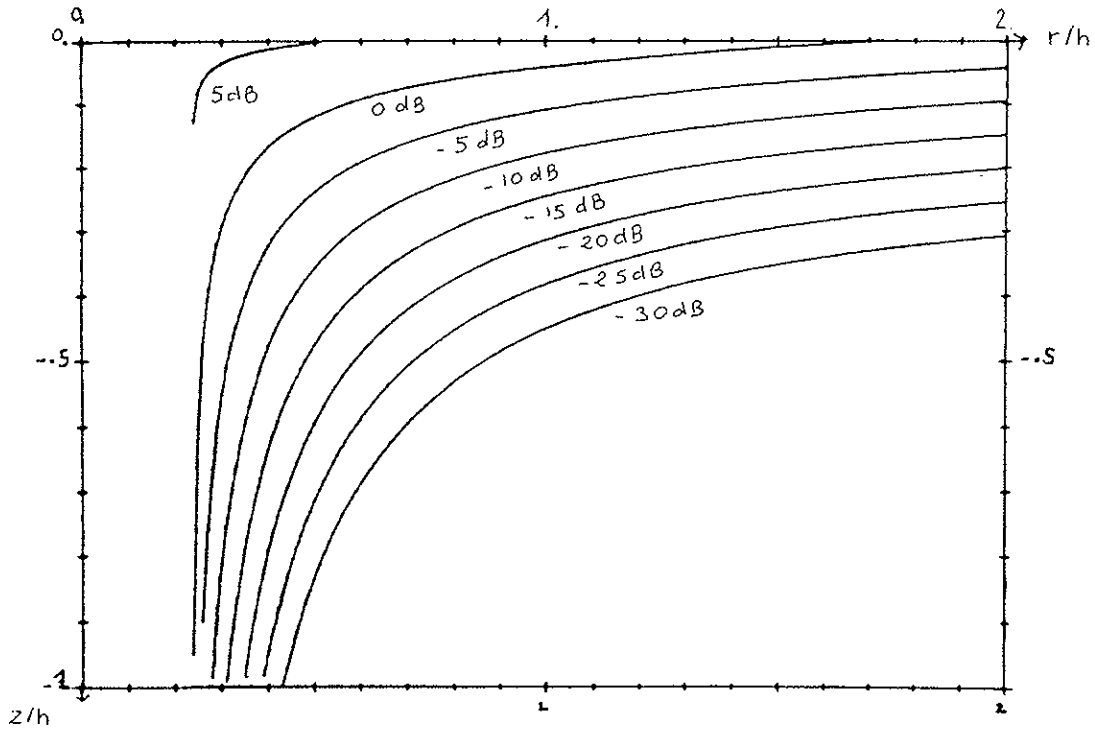


Figure ([17],8.2):  $\lambda_0 = 0.5$

Figures([17],8.1, 82): Courbes d'isoatténuation du champ acoustique selon [11], en fonction des variables réduites  $r/h$  et  $z/h$  (coordonnées de l'hydrophone). Correction des résultats d'Urick par McNicholas.

Figure 9.1:  $\lambda_0 = 0.2$ Figure 9.2:  $\lambda_0 = 0.5$ 

Figures 9.1, 9.2: Courbes d'isoatténuation de l'onde latérale selon l'expression (2.54) en fonction des variables réduites  $r/h$  et  $z/h$  (coordonnées de l'hydrophone), pour une discrétisation par pas de 5dB. (Méthode asymptotique)



### 3.6.4 - Représentation du champ réfracté total.

A partir des expressions analytiques des potentiels réfractés correspondant à l'onde géométrique et latérale (2.43.b),(2.48.b) ainsi que des expressions du champ total réfracté (2.68), nous pouvons déterminer l'expression du rapport de l'intensité de l'onde réfractée totale sur l'intensité de l'onde incidente. Nous utilisons les mêmes hypothèses que précédemment (2.19), (2.20), et nous gardons les mêmes variables réduites  $x = r/h$  et  $y=d/h$ ,  $\lambda_0 = \lambda/h$ . Suivant les caractéristiques de la source nous pouvons déterminer les courbes d'isoatténuation de l'onde réfractée totale.

Nous en déduisons alors les corrections qu'il faut apporter à la pression mesurée par les hydrophones, pour retrouver la pression correspondant au signal émis.

Les représentations graphiques (fig: 10.1, 10.2, 10.3), ont été déterminées pour différentes valeurs de  $\lambda_0$ , avec un pas de 5 décibels. Nous obtenons conformément à la théorie asymptotique, un phénomène d'interférences. Aux hautes fréquences, la théorie des rayons donne une bonne représentation du champ, alors que le développement asymptotique à partir de la solution exacte de l'équation des ondes, convient également pour les basses fréquences.

Nous avons un point particulier  $r/h = \text{tg}\theta_0$ . Pour de hautes fréquences il y a convergence des courbes en ce point. Nous rentrons dans le cadre de la théorie des rayons et le champ se rapproche de la figure 4. Aux basses fréquences, le phénomène d'interférences s'accroît. Les ondes latérales pénètrent plus profondément dans le second milieu.

La résolution numérique s'effectue à partir des relations (2.54) et (2.58), ainsi que des expressions (2.50). Nous obtenons une fonction de la forme :

$$(2.59) \quad y = f(x, \theta, \text{gdB}, \lambda_0, n)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \sin \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad , \sin \alpha > n \\ \text{tg} \alpha &= x - y \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad , \sin \alpha < n \end{aligned}$$

Nous présentons figure 10.4 une synthèse de la représentation graphique du champ total réfracté, calculé d'une part: par la théorie des rayons; d'autre part: par une méthode asymptotique à partir de la résolution de l'équation de Helmholtz.

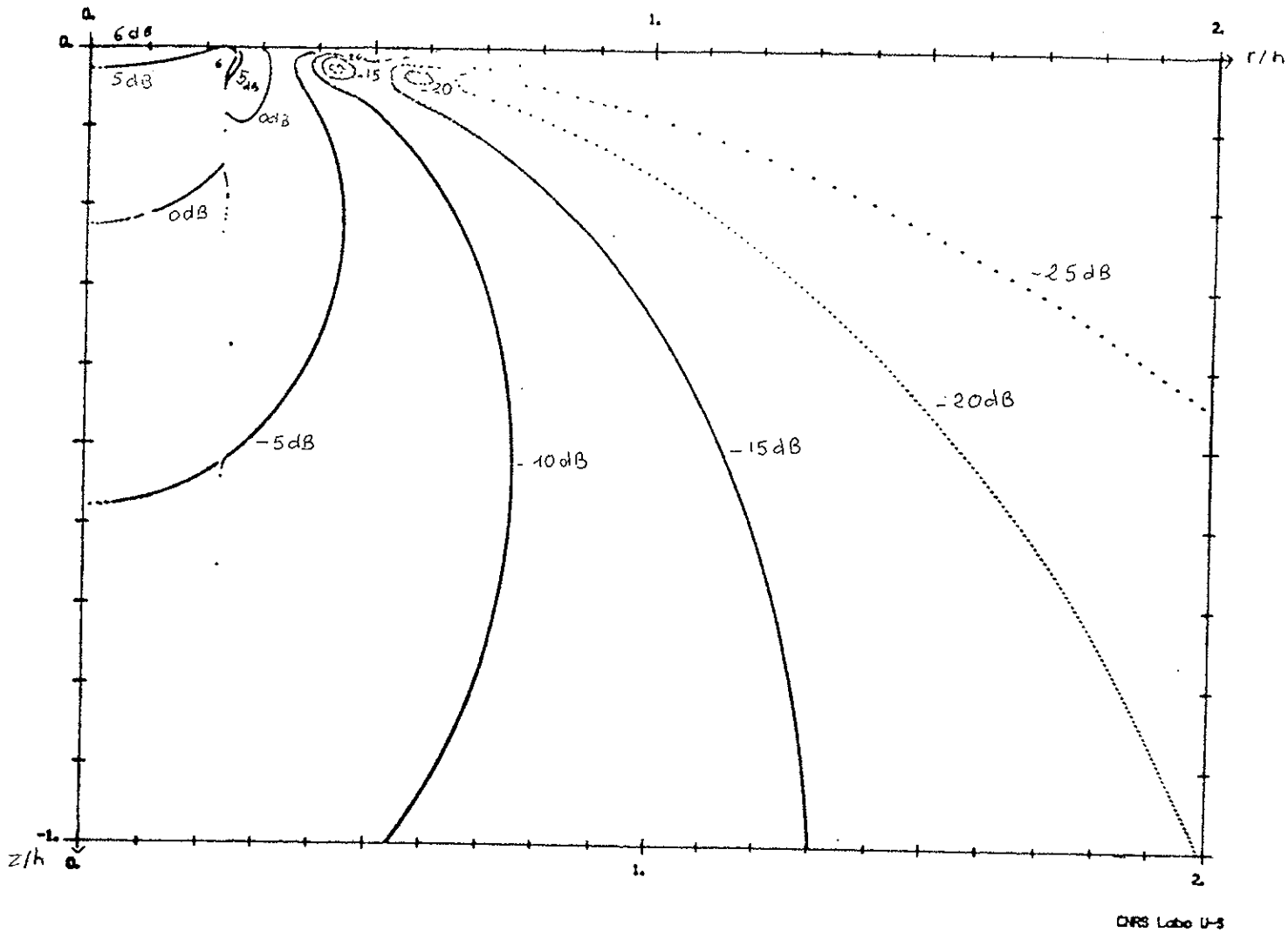


Figure 10.1: Représentation du champ réfracté total en fonction des variables réduites  $r/h$ ,  $z/h$  (coordonnées du récepteur) et de  $\lambda/h$  caractéristiques de la source.  $\lambda/h = 0.034$ . (Méthode asymptotique).

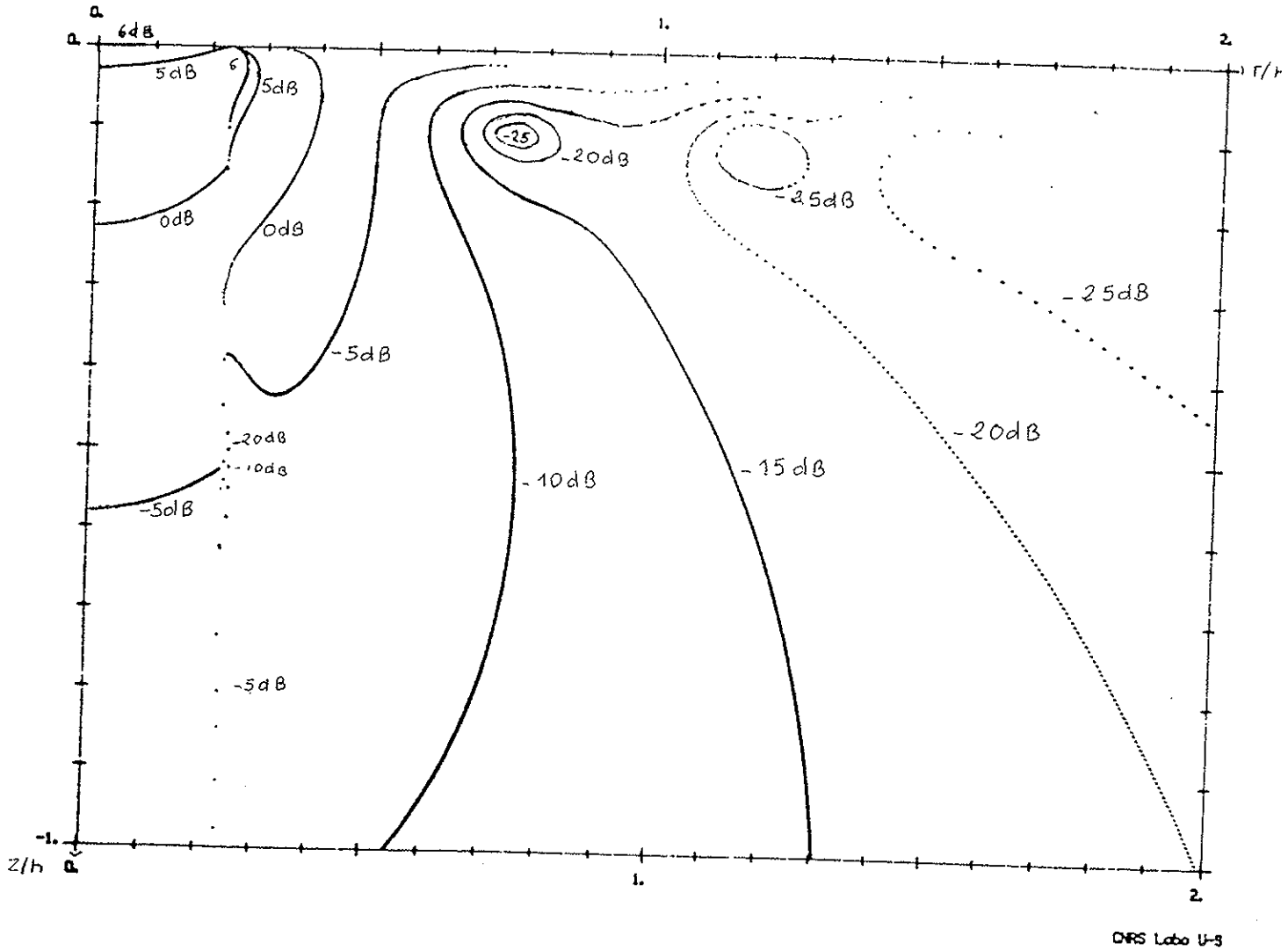
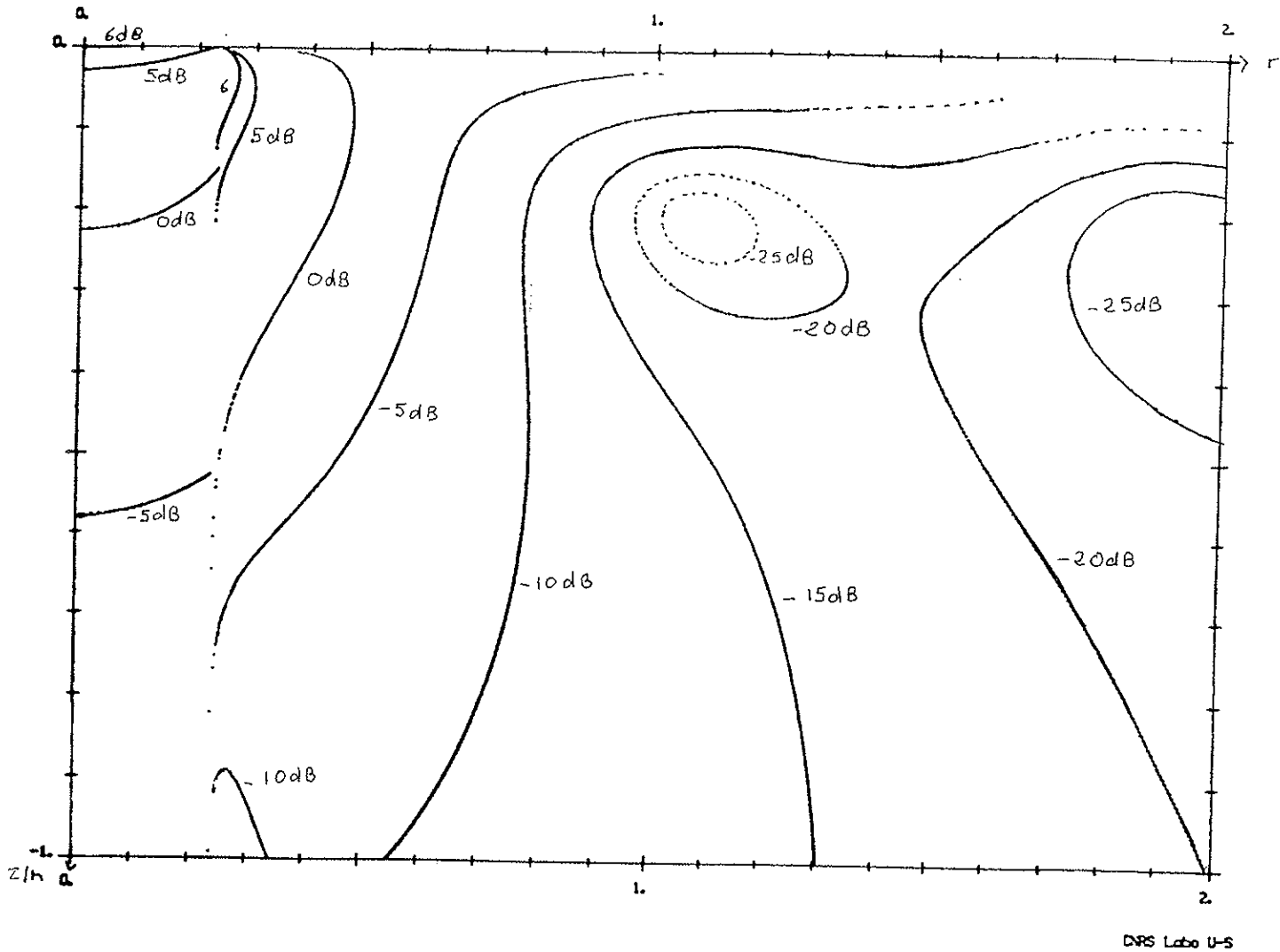


Figure 10.2: Représentation du champ réfracté total en fonction des variables réduites  $r/h$ ,  $z/h$  (coordonnées du récepteur) et de  $\lambda/h$  caractéristiques de la source.  $\lambda/h = 0.2$ . (Méthode asymptotique).



DPS Labo U-S

Figure 10.3: Représentation du champ réfracté total en fonction des variables réduites  $r/h$ ,  $z/h$  (coordonnées du récepteur) et de  $\lambda/h$  caractéristiques de la source,  $\lambda/h = 0.5$ . (Méthode asymptotique).

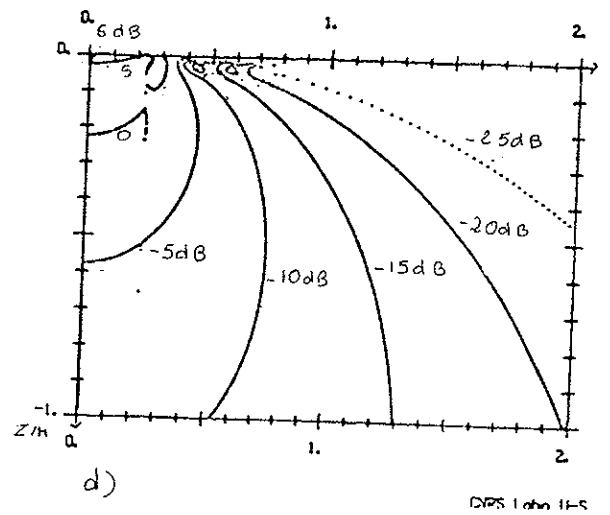
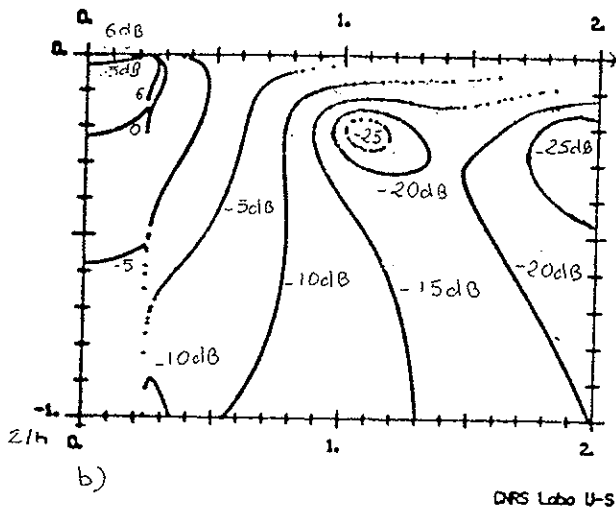
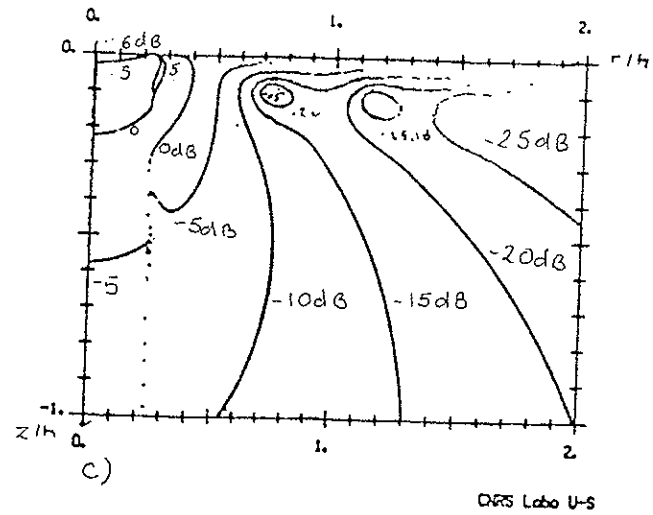
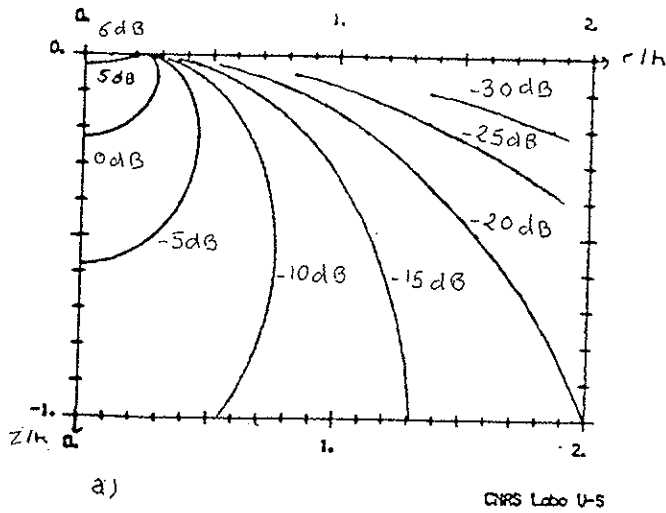


Figure 10.4: Synthèse du champ total réfracté. Représentation en fonction des variables réduites  $r/h$ ,  $z/h$  (coordonnées du récepteur) et de  $\lambda/h$  caractéristiques de la source.  
 a-Acoustique géométrique, b,c,d-Méthode asymptotique: - b:  $\lambda/h = 0.5$ ; - c:  $\lambda/h = 0.2$ ;  
 -d:  $\lambda/h = 0.034$ .

Une expérimentation en laboratoire du phénomène physique peut être réalisée. Nous avons vu qu'aux hautes fréquences, la contribution des ondes latérales devient négligeable. Néanmoins dans le cas du dioptre air-eau, les grandeurs caractéristiques nous permettent de réaliser une expérimentation susceptible de faire apparaître les différentes contributions, à condition de se situer dans une gamme basses fréquences (signaux audibles). Ceci est l'objet du chapitre suivant.



### III - EXPERIMENTATION





### **III Expérimentation**

#### **III.1 Réalisation expérimentale.**

##### **1.1 . Présentation générale.**

L'étude théorique et numérique de la transmission acoustique à travers un dioptre a montré l'existence de différentes contributions intervenant dans la composition du champ de pression. Celles-ci se comportent différemment en fonction de la fréquence, de la hauteur de la source et des coordonnées du point d'observation (Ch. II.3). Le déplacement des zones d'interférences correspondant à un maximum d'atténuation évolue vers les grandes profondeurs, quand la fréquence décroît.

Les simulations numériques représentant les courbes d'isoatténuation du champ réfracté total et partiel (associé à chaque contribution) seront tour à tour comparées aux résultats expérimentaux.

Nous avons vu que la mise en évidence de la contribution de l'onde latérale est liée à la fréquence émise par la source (Ch. II 3.4). Cette contribution dite de "surface", a une pénétration d'autant plus importante que la fréquence émise est basse (décroissance exponentielle en fonction de la fréquence). La transposition des grandeurs numériques aux grandeurs expérimentales, en supposant que les célérités et masses volumiques représentent le cas du dioptre air-eau (indice de réfraction de l'ordre de 0,23 et rapport des masses volumiques de l'ordre de 820), nous impose de choisir une source fonctionnant à des fréquences audibles. Dans cette gamme de fréquences, une nouvelle limitation nous est donnée par les conditions que doit vérifier expérimentalement notre source. Celle-ci émettant des trains d'ondes, doit modéliser le cas d'une source ponctuelle monochromatique. L'intervalle des fréquences se limitera aux valeurs 2,5kHz-8kHz. Les valeurs expérimentales choisies pour la fréquence seront 3kHz et 5kHz.

Deux types d'expérience seront réalisées. D'une part des expériences permettant d'isoler et d'étudier séparément les différents mécanismes de la transmission, en fonction des caractéristiques du champ émis; d'autre part des expériences se rapportant au champ réfracté total. Les deux premières séries de mesures nécessitent l'introduction d'absorbeurs.

Ceux-ci, aux fréquences étudiées, induisent une diffraction du son qui dans certaines régions sera négligeable par rapport au champ réfracté.

L'expérimentation s'effectue en laboratoire, dans une cuve acoustique de dimensions  $L \times l \times H = 5 \times 3 \times 2 \text{ m}$ . La source suspendue au dessus du plan d'eau est fixe. On mesure simultanément le signal source avec un microphone au ras de l'eau (pression incidente de référence) et le signal transmis à différentes profondeurs et distances radiales avec un hydrophone. L'hydrophone peut balayer suivant une coupe verticale, le plan d'eau.

## 1.2. Dispositif expérimental. (figures 1 à 3)

### 1.2.a Mécanique.

Une suspension rigide permet de positionner la source de pression acoustique à différentes hauteurs au dessus du plan d'eau. Deux systèmes permettent de positionner manuellement le microphone et l'hydrophone (Cf. fig. 1)

- Le premier se compose d'un chevalement perpendiculaire à l'axe longitudinal de la cuve, qui supporte deux rails sur lesquels est placé un chariot mobile. Une crémaillère fixée à ce dernier sert au déplacement vertical d'une tige coudée, à l'extrémité de laquelle est fixé un microphone de petites dimensions. (6,35mm de diamètre pour une longueur de 88mm).

Ce dispositif permet de positionner le microphone en tout point d'un axe transversal situé au ras de l'eau et à l'aplomb de la source.

- Le deuxième, immergé dans l'eau, se compose d'un socle muni de deux rails. Ce dispositif placé sur le fond de la cuve suivant l'axe transversal et à la verticale de la source, permet le déplacement d'un deuxième chariot sur lequel est fixée une colonne télescopique. A l'extrémité de celle-ci est fixé un hydrophone de 9,5mm de diamètre et 50mm de longueur.

Ce système permet un balayage vertical du plan d'eau jusqu'à 1m de profondeur par pas de 0,5cm. Le balayage horizontal s'effectue continuellement jusqu'à une distance radiale de 1,45m.

L'expérience dans le cas du régime harmonique n'est pas numérisée. Les chariots sont actionnés manuellement.

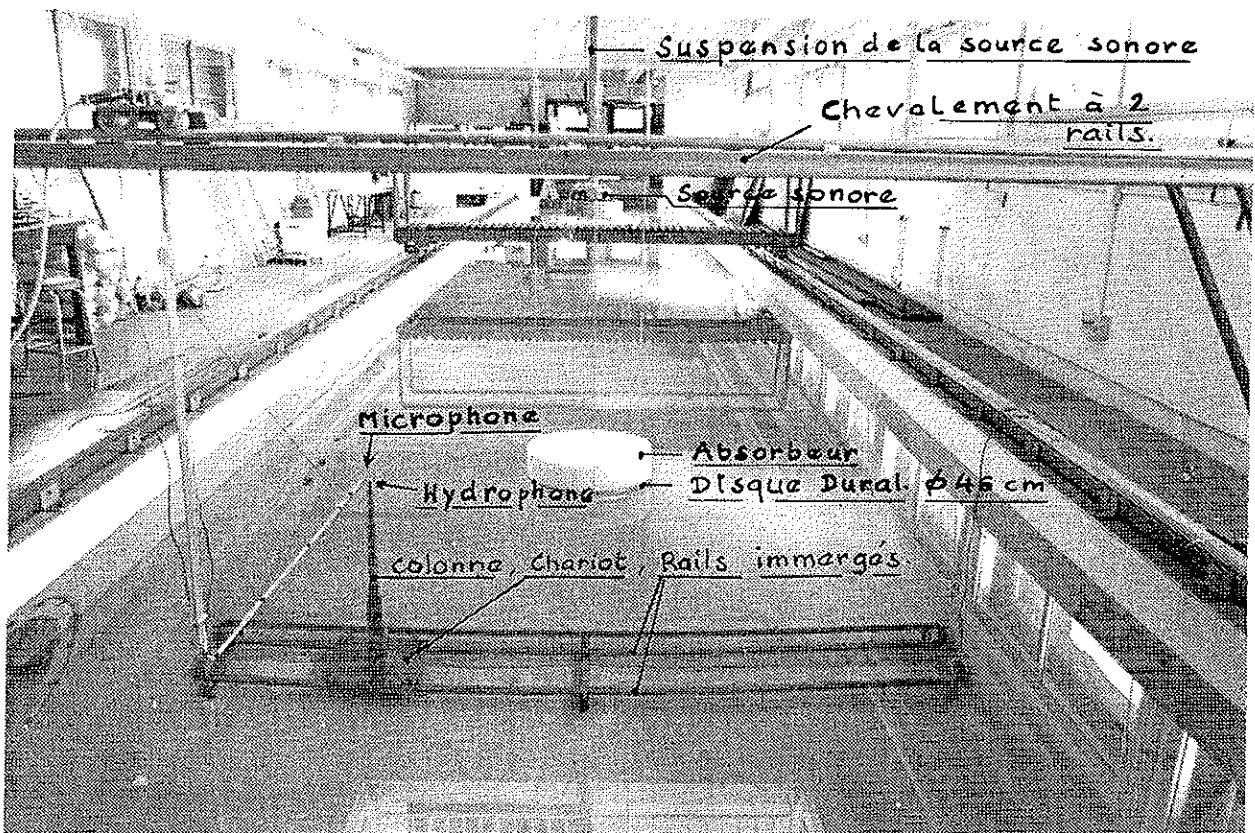
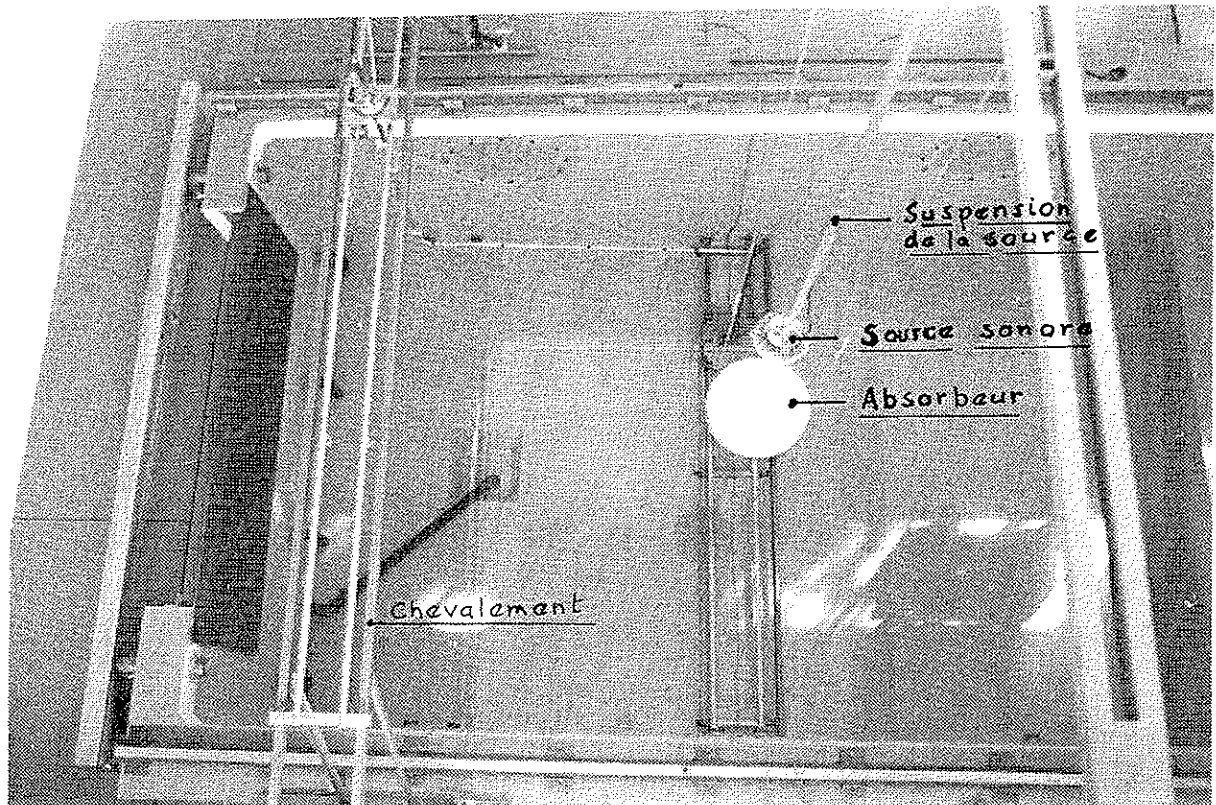
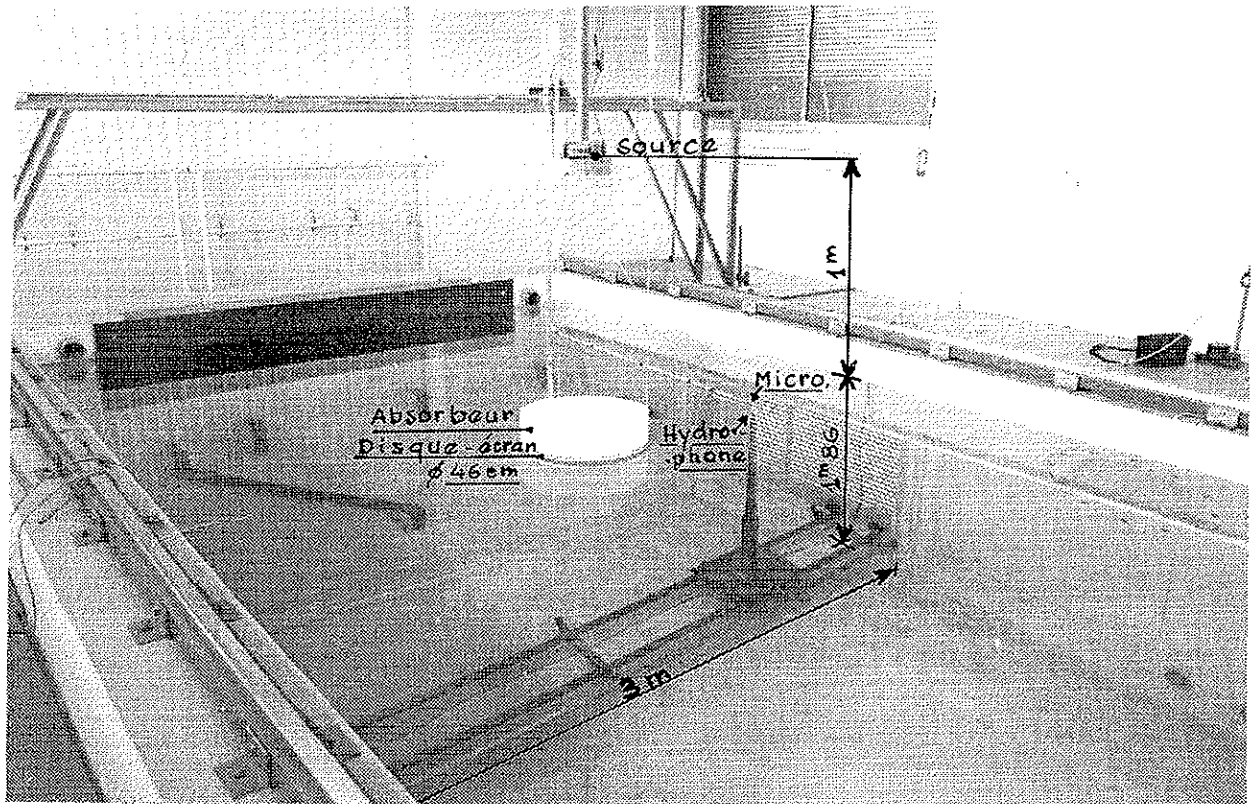
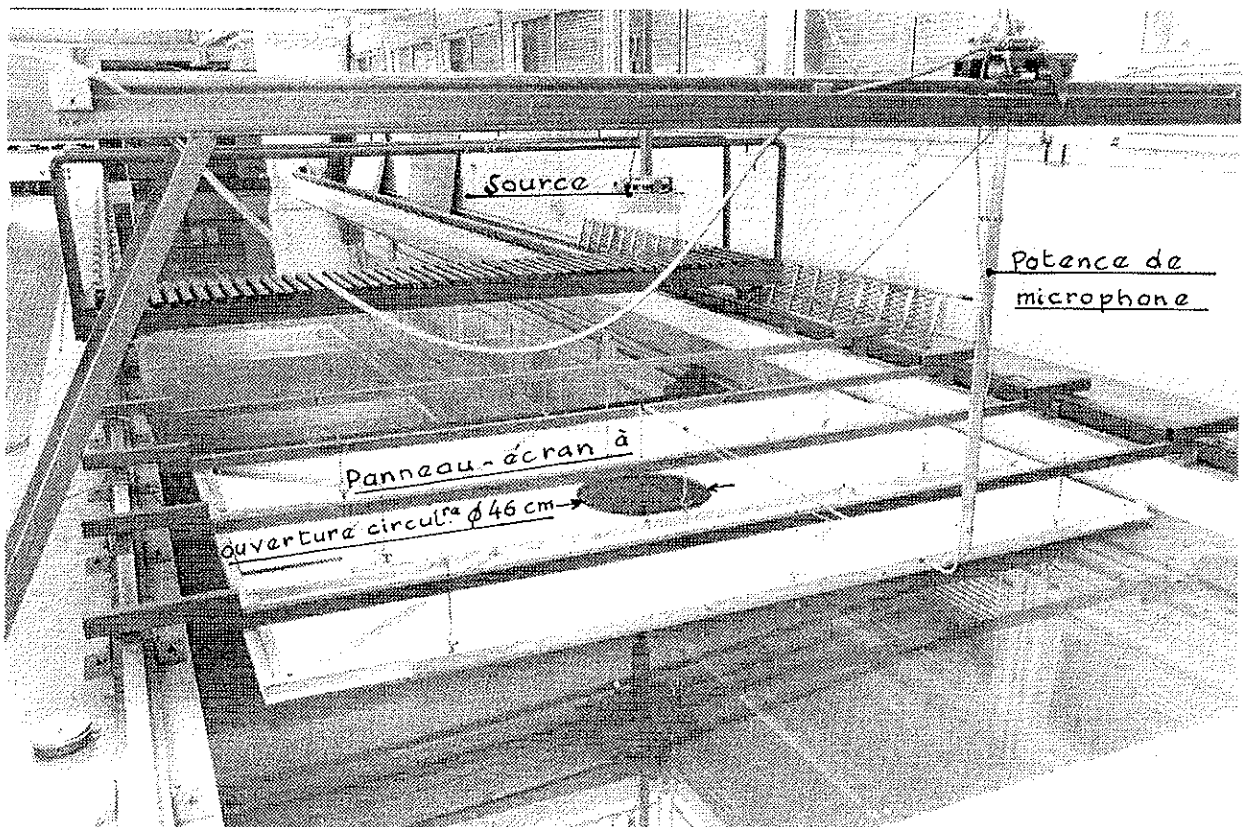


Figure 1: Vue générale du dispositif expérimental.



(a)



(b)

Figure 2: Dispositifs utilisés pour séparer les ondes latérale (a) et géométrique (b).

### 1.2.b. Choix de la source.

Le succès des expériences repose sur le choix de la source acoustique. Dans notre cas, elle doit être ponctuelle et émettre des basses fréquences ( $<6\text{kHz}$ ), pour pouvoir observer l'effet des ondes latérales. Nous avons choisi une source constituée par une chambre de compression. Le diamètre de cette dernière est de 150mm et celui de sa bouche de 30mm. Une étude, en salle anéchoïque, du rayonnement acoustique de la source (Cf. Ch. III.2.2 ci-dessous), a été préalablement effectuée. Ses courbes sont représentées figures 46 à 48. De plus, dans la bande de fréquences (0.5 à 8kHz), la source émet des ondes raisonnablement sphériques.

### 1.2.c Chaîne d'émission-réception. (figure 3)

Le schéma de principe de la chaîne assurant l'émission ainsi que la réception des signaux acoustiques est représenté figure 3. Celui-ci se résume de la façon suivante:

#### Emission

- Un synthétiseur de fréquences génère des signaux sinusoïdaux;
- Un échantillonneur-synchronisateur (porte électronique), relié au synthétiseur découpe des trains d'ondes. Il délivre également une "fenêtre temporelle" de retard et de durée réglables, synchronisée sur l'émission des trains d'ondes;
- Un amplificateur de puissance;

#### Réception

- Un microphone électrostatique;
- Un hydrophone du type piézoélectrique de 9,5mm de diamètre, branché à l'entrée d'un amplificateur de charge;
- Un amplificateur de mesure de tension à gain réglable et étalonné;
- Un oscilloscope visualise les signaux émis et transmis. Il permet de positionner correctement la fenêtre temporelle dans la partie du train d'ondes reçu, correspondant à un régime permanent;
- Un pistonphone pouvant fournir un niveau de pression acoustique de 124dB à 250Hz, sert à l'étalonnage de la chaîne de mesure.

Pour minimiser les erreurs de mesures dues aux différents appareils, nous utiliserons la même chaîne de réception (amplificateur de mesures, module de réception du générateur de porte et voltmètre numérique), pour les deux capteurs.

### 1.3. Etablissement du régime harmonique.

Les résultats que nous cherchons à mettre en évidence sont relatifs au comportement des ondes transmises en régime harmonique. Les dimensions de la cuve acoustique utilisée et de la salle d'expérimentation nous confrontent au problème des échos par réflexions. De façon à contrôler ces phénomènes, nous avons choisi de travailler à partir de trains d'ondes, d'une durée assez petite pour éviter l'effet de réflexions sur les parois, mais assez grande pour obtenir le régime permanent, soit 2ms.

Une telle durée d'émission nous impose alors de travailler dans un intervalle de fréquences compris entre 2,5kHz et 6kHz, de façon à avoir un nombre suffisant de périodes, tout en étant dans les conditions compatibles avec l'observation des ondes latérales.

Nous choisirons pour valeurs expérimentales les fréquences 3kHz (6 périodes) et 5kHz (10 périodes).

Nous n'avons pas besoin de connaître les valeurs absolues de la pression acoustique, nos mesures étant toutes rapportées à la valeur de la pression incidente de la source prise à une distance unité de celle-ci (1m). Nous nous intéressons à l'atténuation du niveau de pression acoustique après passage de l'onde à travers l'interface. Cette atténuation sera exprimée en décibels. Expérimentalement, les mesures de pression incidente et transmise sélectionnées à l'oscilloscope sont directement lues au voltmètre numérique en valeurs relatives. Celles-ci nous permettent d'en déduire la valeur de l'atténuation du niveau de pression acoustique transmis qui ne nécessite que la connaissance du rapport des pressions mesurées par les deux capteurs. Cette atténuation est donnée par:

$$\Delta W = 20 \text{ Log}_{10} \left( \frac{P_2}{P_i} \right)$$

où  $P_2$  représente la pression acoustique transmise mesurée à l'hydrophone, et  $P_i$  la pression acoustique incidente mesurée à 1m de la source par le microphone.

A l'interface, nous devons obtenir une valeur +6dB à cause de l'effet de doublement de la pression dû à la réflexion de l'onde incidente à l'interface (Cf. II.3 et courbes 4 à 10).

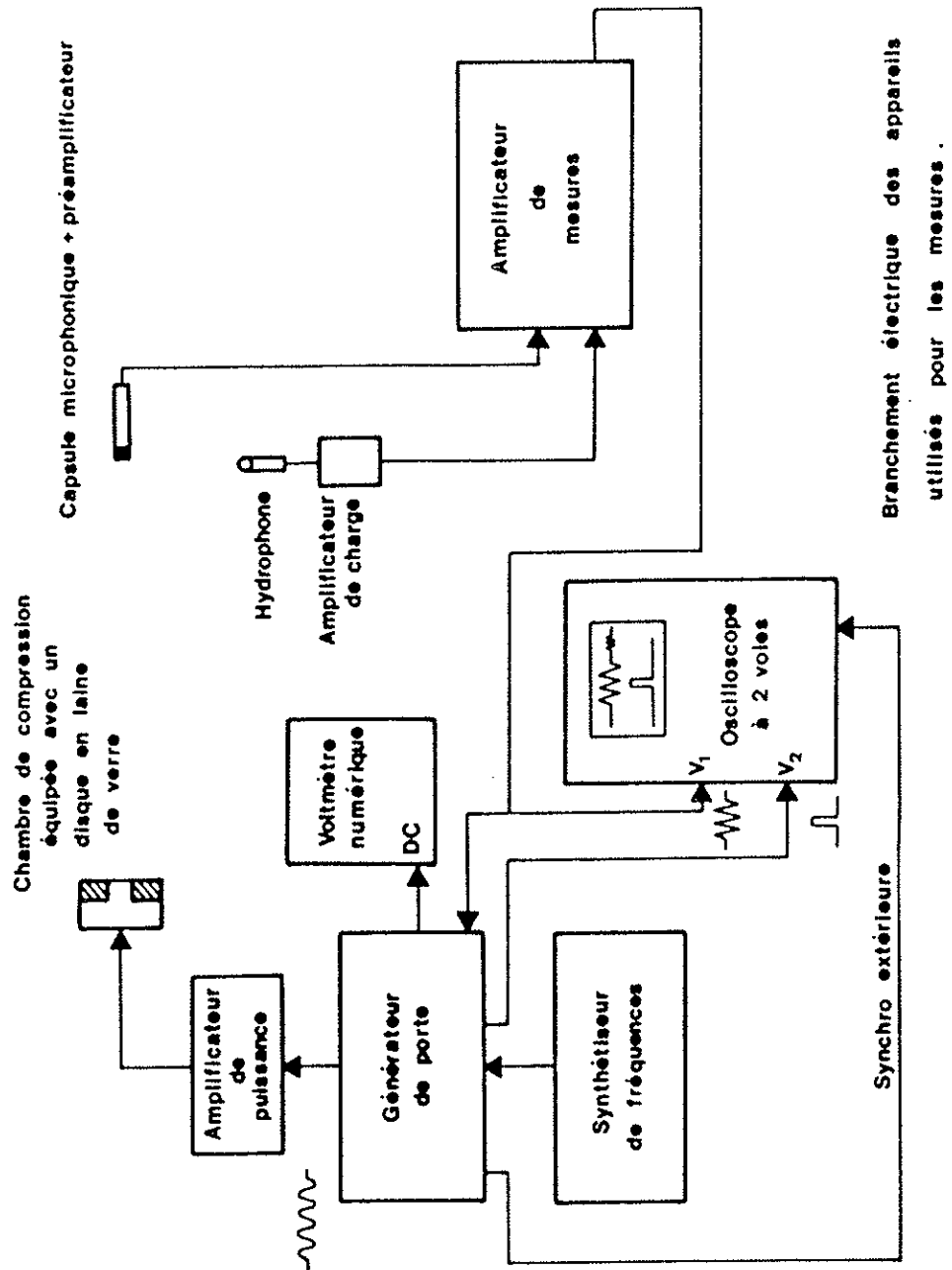


Figure 3: Chaîne d'émission-réception.



### **III.2- Résultats expérimentaux ( Cf. annexe 3).**

#### **2.1. Description générale.**

Les résultats expérimentaux dépendent de l'environnement. Par exemple, les variations de température entraînent des variations sensibles des célérités, et donc de l'indice de réfraction. Nous avons donc tenu compte de ces conditions pour calculer le champ réfracté total, ainsi que celui correspondant aux ondes géométriques et aux ondes latérales, respectivement figures 4 à 8. Les représentations sont conformes à celles décrites au chapitre II.3.6, c'est à dire que les courbes d'isoatténuation en décibels sont représentées dans le plan  $r, d$  (distance radiale, profondeur de l'hydrophone). Les courbes 9 et 10 représentent un grossissement dans la région d'interférences.

Sous les conditions expérimentales, les masses volumiques sont dans un rapport de 820. Les célérités des milieux air, eau ont respectivement pour valeurs 344m/s et 1485,4m/s. Ces valeurs déterminent un angle critique de  $12,04^\circ$ . Pour une hauteur de la source  $h=1\text{m}$ , cet angle délimite une zone circulaire de 23,15cm de rayon à l'interface centrée à la verticale issue de la source.

Pour mettre en évidence l'existence des ondes latérales et leurs comportements, un disque absorbeur de 1cm d'épaisseur réalisé en duralumin couvrira cette zone. Le disque est revêtu de mousse en polyéther semi-rigide à cellules ouvertes (pour atténuer les effets de diffraction qu'il engendre), (Cf. fig. 2.a).

Inversement, pour obtenir l'effet des ondes géométriques seules (Cf. fig. 2.b), le disque sera remplacé par un panneau en fibres de bois présentant au centre une ouverture circulaire. Ce panneau sera également recouvert de mousse de polyéther (atténuation de la diffraction engendrée par le trou).

Pour chacune des fréquences étudiées, nous avons mesuré le niveau de pression acoustique au ras de l'eau et à l'aplomb de la source, soit une valeur de 118dB à  $\pm 0,5\text{dB}$  (valeur calculée par rapport à la référence de l'eau qui est de  $1\mu\text{Pa}$ ).

Les résultats expérimentaux seront paramétrés par l'immersion de l'hydrophone  $d$  et la fréquence de la source  $f$ . Les courbes de niveaux de pression sont représentées suivant la distance radiale  $r$  portée en abscisse et la valeur de l'atténuation en décibels, en ordonnée.

Nous avons également porté les valeurs théoriques (figures 11 à 20) dans cette même configuration, symbolisées par -o-o- pour le champ total réfracté, par -...- pour le champ géométrique et pour le champ latéral par -Δ-Δ-.

Ensuite, les résultats expérimentaux, sont directement comparés aux valeurs théoriques. Nous avons représenté sur un même graphique et dans chaque cas (champ total, latéral et géométrique) les valeurs obtenues expérimentalement -...- et les valeurs obtenues théoriquement -o-o- .

Les courbes expérimentales obtenues pour le champ réfracté total sont représentées figures 21 à 30.

La figure 31 représente un affinement des mesures dans la zone d'interférences pour la valeur fréquentielle de 3kHz. Le symbole  $-\Delta-\Delta-$  représente pour cette courbe, les valeurs avant affinement des mesures.

Le champ réfracté géométrique expérimental est représenté figures 32 à 41.

Les figures 42 à 45 représentent le champ réfracté latéral expérimental.

## 2.2. Directivité et étalonnage de la source. (figures 46 à 48)

Les mesures d'atténuation de la source ont été effectuées d'abord en salle anéchoïque (courbes d'isoatténuation de pression fig. 46,47) et ont permis un étalonnage de celle-ci, puis en présence du plan d'eau (fig. 48). Les expériences en chambre sourde ont montré des écarts par rapport à la loi de divergence géométrique (décroissance en  $1/R$ ) différents suivant que l'on se trouve sur l'axe principal ( $s$ ) ou sur l'axe transversal ( $r$ ) (situé à 1m de la source). Ces écarts cependant, n'excèdent pas pour l'axe principal ( $s$ ), des valeurs de l'ordre  $\pm 0,5\text{dB}$ , et pour le second des valeurs de  $\pm 2,5\text{dB}$  à 3k et  $\pm 4\text{dB}$  à 5kHz (Cf. fig. 46 et 47). Pour éviter les effets de diffraction, la chambre de compression sera munie sur sa face avant, d'un disque en laine de verre. En présence du plan d'eau, les expériences de directivité ont été réalisées avec et sans le disque absorbeur (servant à l'élimination des ondes géométriques). Les écarts se sont avérés dans les deux cas, inférieurs à  $\pm 2\text{dB}$ , pour une variation de  $0 < R < 1\text{m}$  (bonne décroissance du rayonnement en  $1/R$ ) (Cf. fig. 48). De ces études, nous avons pu déterminer le centre acoustique de la source pour les deux fréquences choisies. Celui-ci se trouve, dans les deux cas, situé à 1cm de la bouche de la chambre de compression.

## 2.3. Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux.

### 2.3.a- Champ réfracté total. (fig. 20 à 30)

L'analyse du champ réfracté total montre une bonne concordance entre les valeurs d'atténuation mesurées et calculées. Nous retrouvons bien une zone d'interférences, conformément aux valeurs théoriques, allant jusqu'à une profondeur de 7,5cm lorsque la fréquence est de 5kHz et 10cm lorsqu'elle est de 3kHz. L'écart des valeurs obtenues vis à vis

du calcul est en moyenne inférieur à  $\pm 2\text{dB}$ , sauf dans la zone d'interférences où nous trouvons un écart en moyenne de  $\pm 4\text{dB}$ .

Cependant, dans la zone d'interférences en des points particuliers (maximum d'atténuation) à 5cm de profondeur lorsque la fréquence est de 5kHz et à 7,5cm pour la fréquence 3kHz, les mesures révèlent un écart respectivement de +9dB et +8dB (fig. 23 et 24). Dans ces régions où les valeurs varient très brusquement, les résultats sont sensibles à la position des instruments de mesure (hydrophone). D'autre part les valeurs théoriques correspondent à une donnée ponctuelle, or la valeur mesurée résulte d'une intégration sur l'aire du capteur (9,5mm de diamètre).

Ces écarts correspondent à la 1ère zone d'interférence lorsque la fréquence est de 3kHz et à la 2ème zone d'interférences lorsque la fréquence est de 5kHz.

Un affinement des mesures a été effectué à la fréquence de 3kHz (Cf. fig. 31). L'hydrophone balaye le plan d'eau à la profondeur de 7,5cm pour une distance radiale évoluant de 30 à 100cm suivant un pas de 1cm. L'examen des courbes confirme les résultats obtenus précédemment. L'atténuation obtenue expérimentalement est moins importante que celle obtenue théoriquement.

En résumé la présence des interférences, dans le champ réfracté total expérimental, souligne bien l'existence des ondes latérales, conformément à la théorie.

Pour des profondeurs de 15 à 50cm à 3kHz et de 10 à 50cm à 5kHz et une distance radiale supérieure à 30cm, les écarts de niveaux deviennent inférieurs à  $\pm 2\text{dB}$ . Nous n'obtenons pas ici de zone d'interférences, ce qui est normal car seule l'onde géométrique est prépondérante dans cette région.

### 2.3.b- Etude des champs séparés.

La séparation des deux types d'onde par l'intermédiaire de plan absorbant permet non seulement de mettre en évidence expérimentale l'existence des ondes latérales, mais également de mettre en évidence les différentes propriétés de ces ondes.

#### - Champ géométrique. (fig. 32 à 41)

L'étude du champ géométrique montre une bonne concordance des résultats théoriques et expérimentaux. En moyenne les écarts obtenus sont de l'ordre de  $\pm 2\text{dB}$  pour une distance radiale inférieure à la zone critique (c'est à dire  $r < 23\text{cm}$ ).

A de faibles profondeurs,  $d < 20\text{cm}$  (zone d'interférences pour le champ total) lorsque la distance radiale est inférieure à 23cm, il y a une bonne concordance des résultats. L'écart

devient de l'ordre de 6dB dans les autres cas, notamment figures 39 à 41. Ceci est dû à l'effet de diffraction joué par l'ouverture circulaire dans le plan absorbeur.

- Champ latéral. (fig. 42 à 45)

De façon générale les résultats théoriques et expérimentaux sont en bon accord. Pour des profondeurs inférieures à 5cm, les écarts observés sont inférieurs à  $\pm 3$ dB. Entre les profondeurs 7,5cm et 15cm, l'écart devient de l'ordre de 8dB à 3kHz et 10dB à 5kHz (effet de diffraction du disque).

L'étude expérimentale des ondes séparées à toutes distances et profondeurs n'a pas été toujours possible du fait que l'introduction du plan absorbeur entraîne une perturbation des mesures (effet de diffraction aux fréquences étudiées).

Néanmoins, nous obtenons des valeurs correctes du champ géométrique aux grandes profondeurs et des valeurs du champ latéral aux faibles profondeurs. Chaque type d'onde a été mis en évidence dans la zone où il se trouve prépondérant.

**Champ transmis simulé**

**suivant les valeurs expérimentales:**

$$c_1 = 344\text{m/s et } c_2 = 1485,4\text{m/s}$$

**pour les valeurs fréquentielles 3kHz et 5kHz.**

**Représentation graphique suivant les variables réduites  
r/h et d/h**

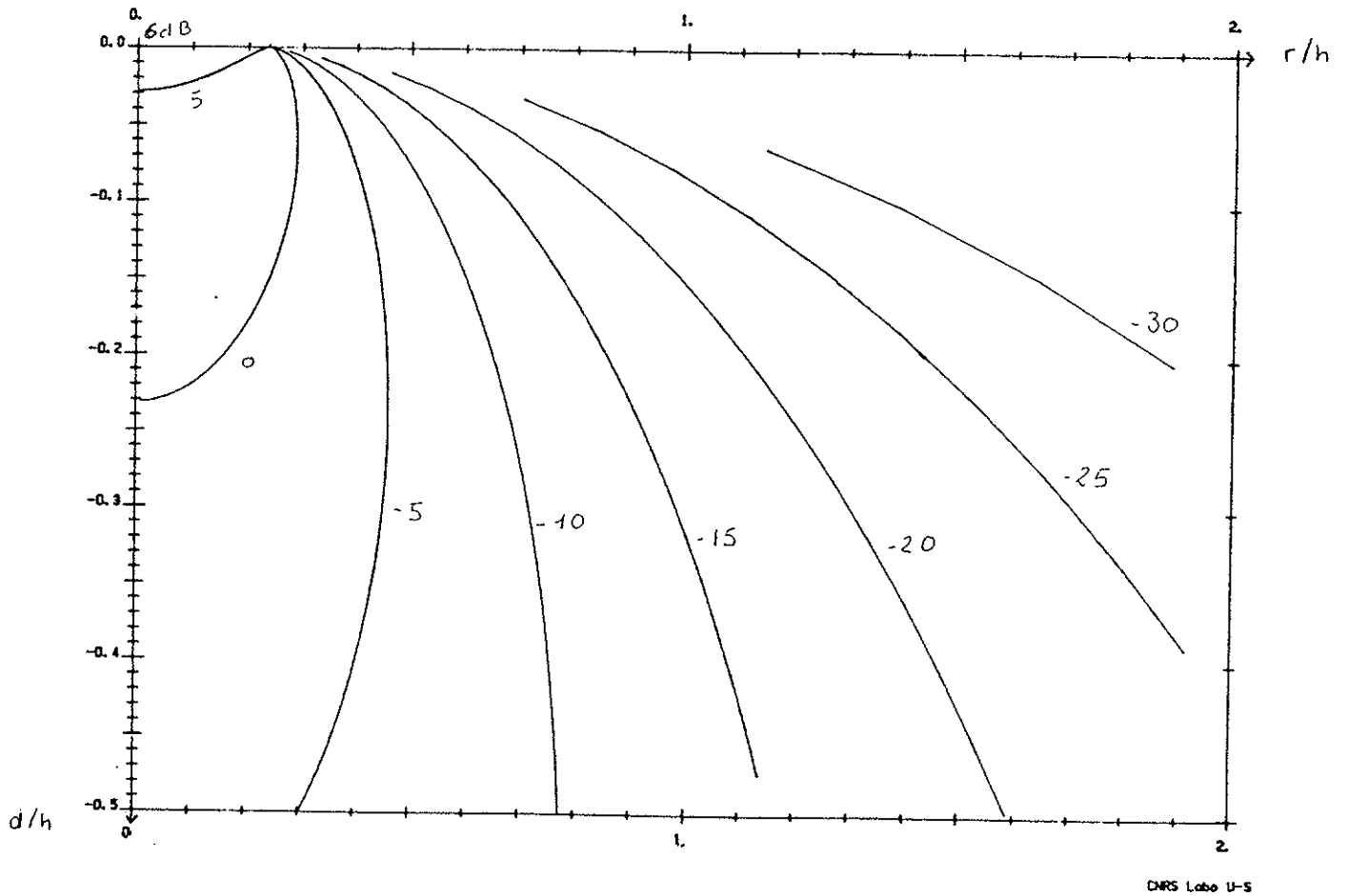
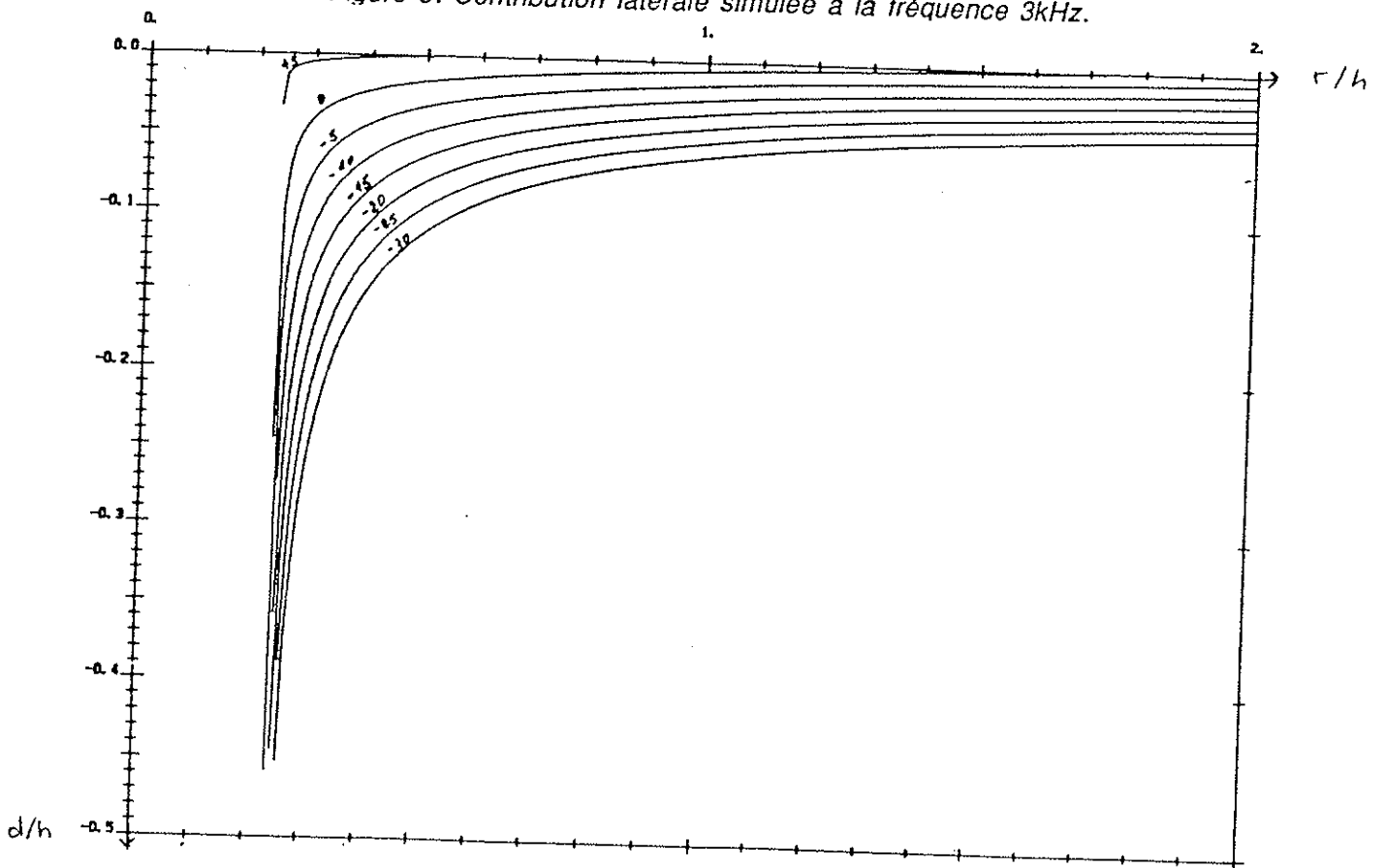
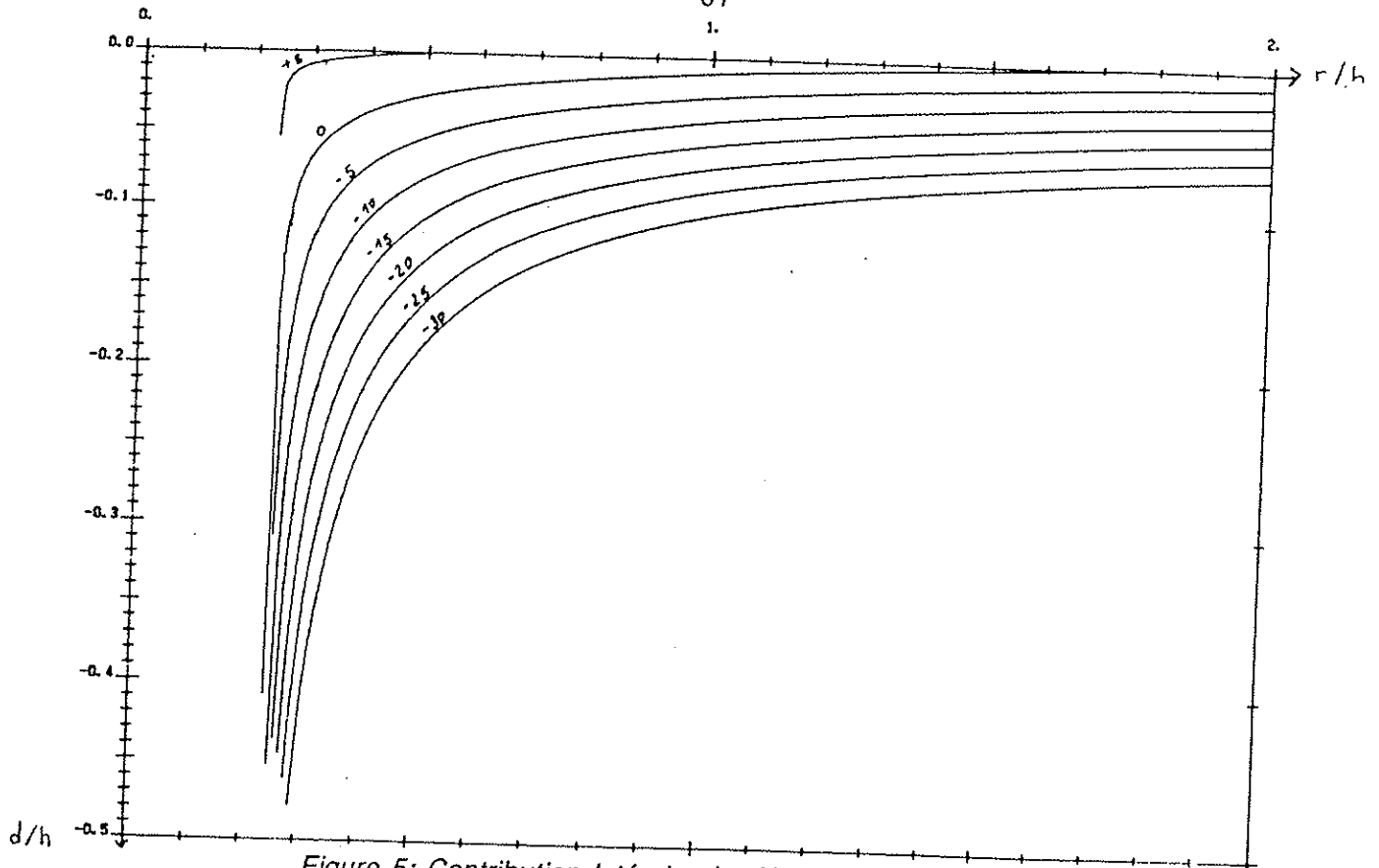
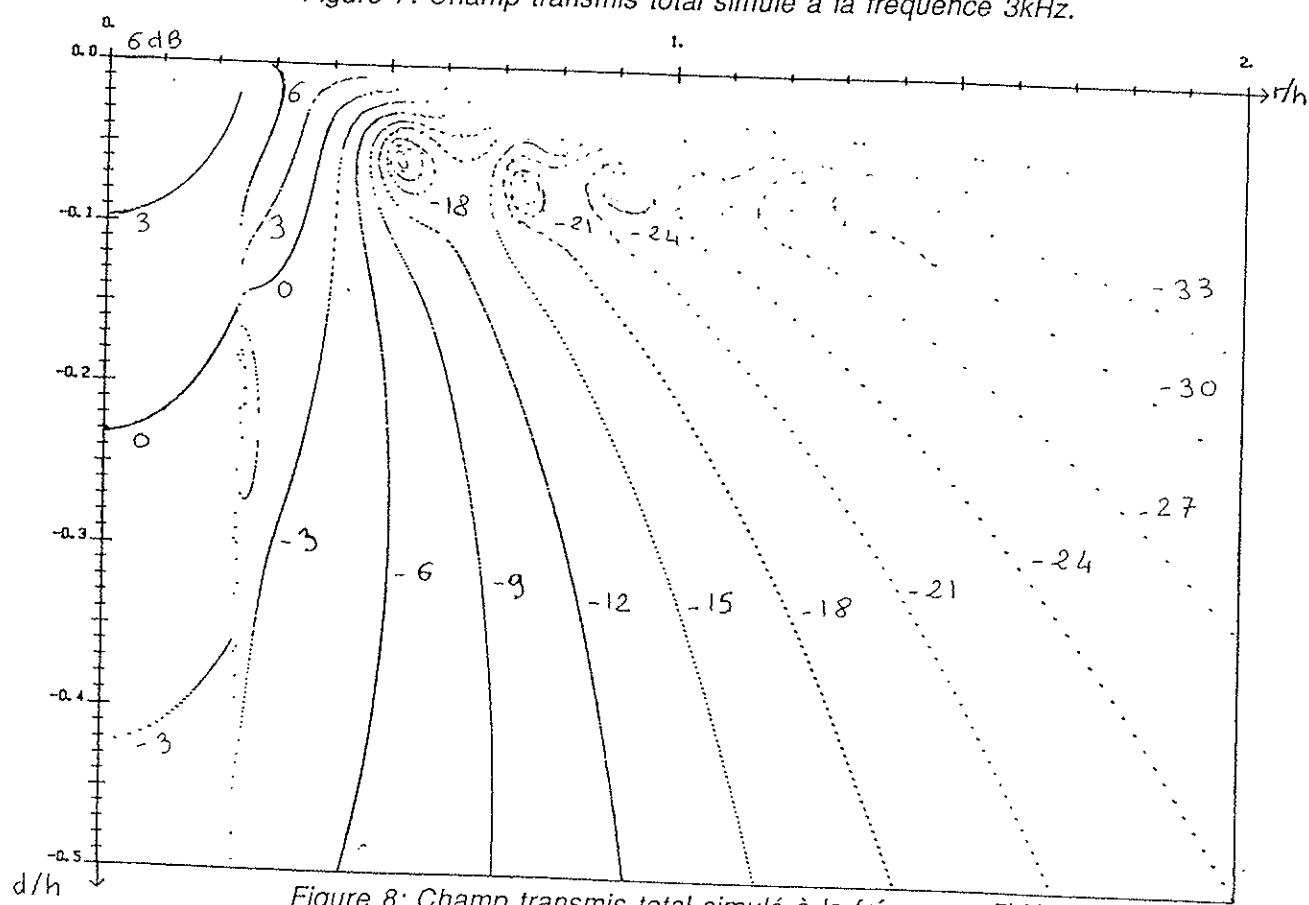
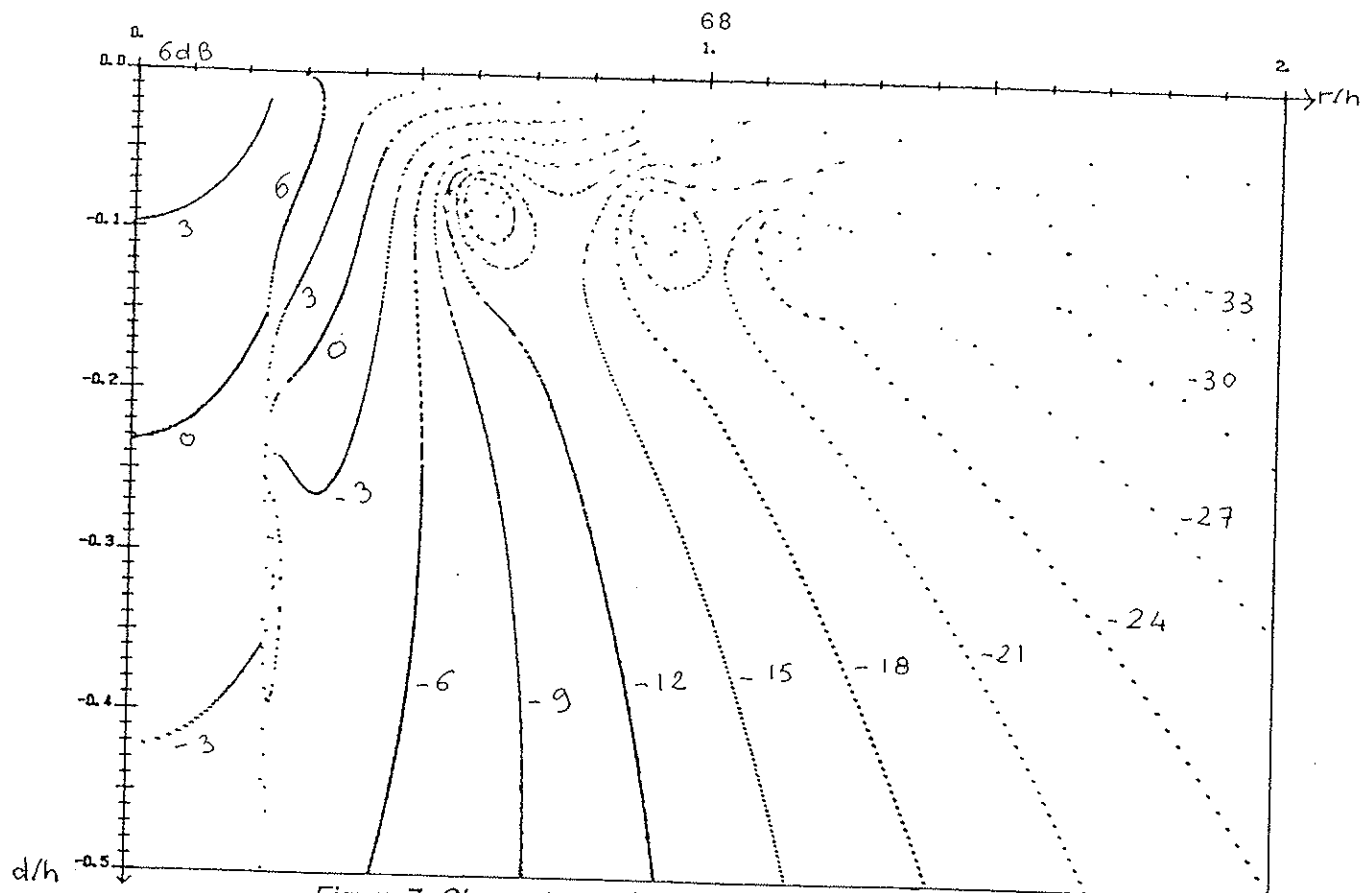


Figure 4: Contribution géométrique: Courbes simulées d'isoatténuation de pression en décibels, pour les valeurs de célérités expérimentales  $c_1 = 344\text{m/s}$  et  $c_2 = 1485,4\text{m/s}$ .



Figures 5, 6: Courbes d'isoatténuation de pression en décibels associées à la contribution latérale.



Figures 7,8: Courbes d'isoatténuation de pression en décibels (pas de discrétisation de 3dB).



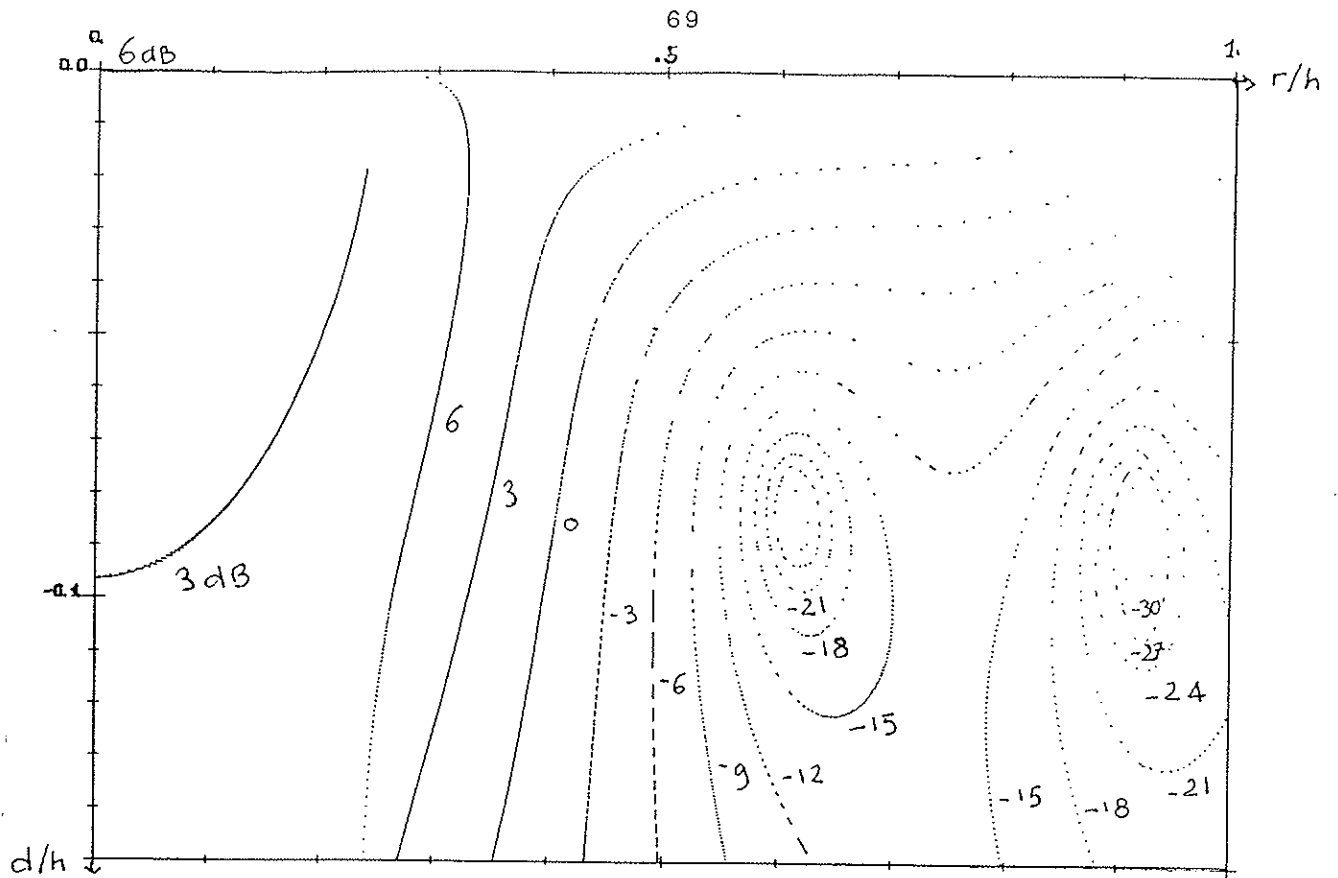


Figure 9: Champ transmis total simulé à la fréquence 3kHz.

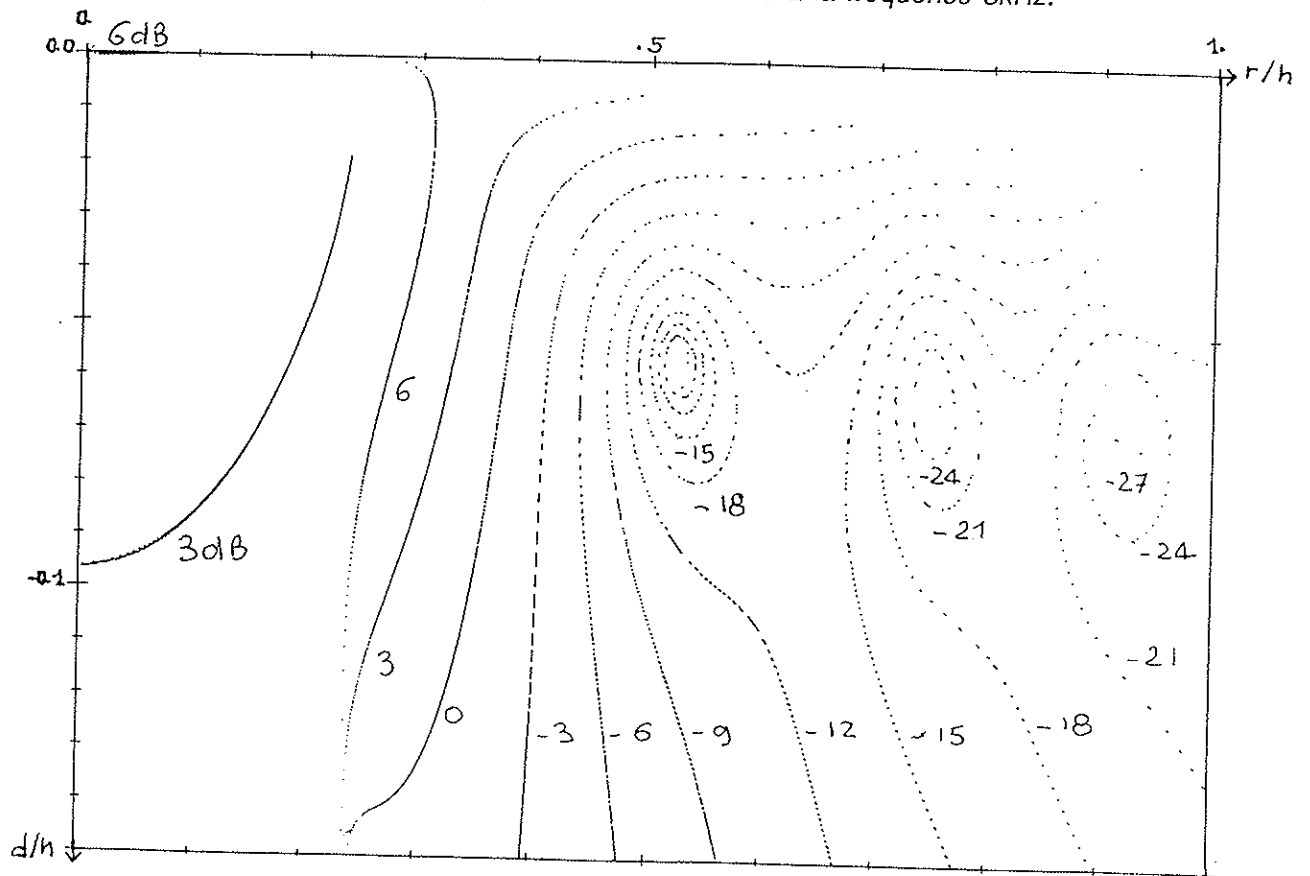


Figure 10: Champ transmis total simulé à la fréquence 5kHz.

Figures 9,10: Grossissement du champ transmis total dans la zone d'interférences.

Représentation du champ de pression transmis total et des  
différentes contributions simulés

pour les valeurs expérimentales  $c_1 = 344\text{m/s}$  et  
 $c_2 = 1485,4\text{m/s}$

et les valeurs fréquentielles 3kHz et 5kHz.  
Représentation graphique suivant le niveau en dB et la  
distance radiale  $r$

-0-0- Champ total.

-•-•- Contribution géométrique.

-Δ-Δ- Contribution latérale.

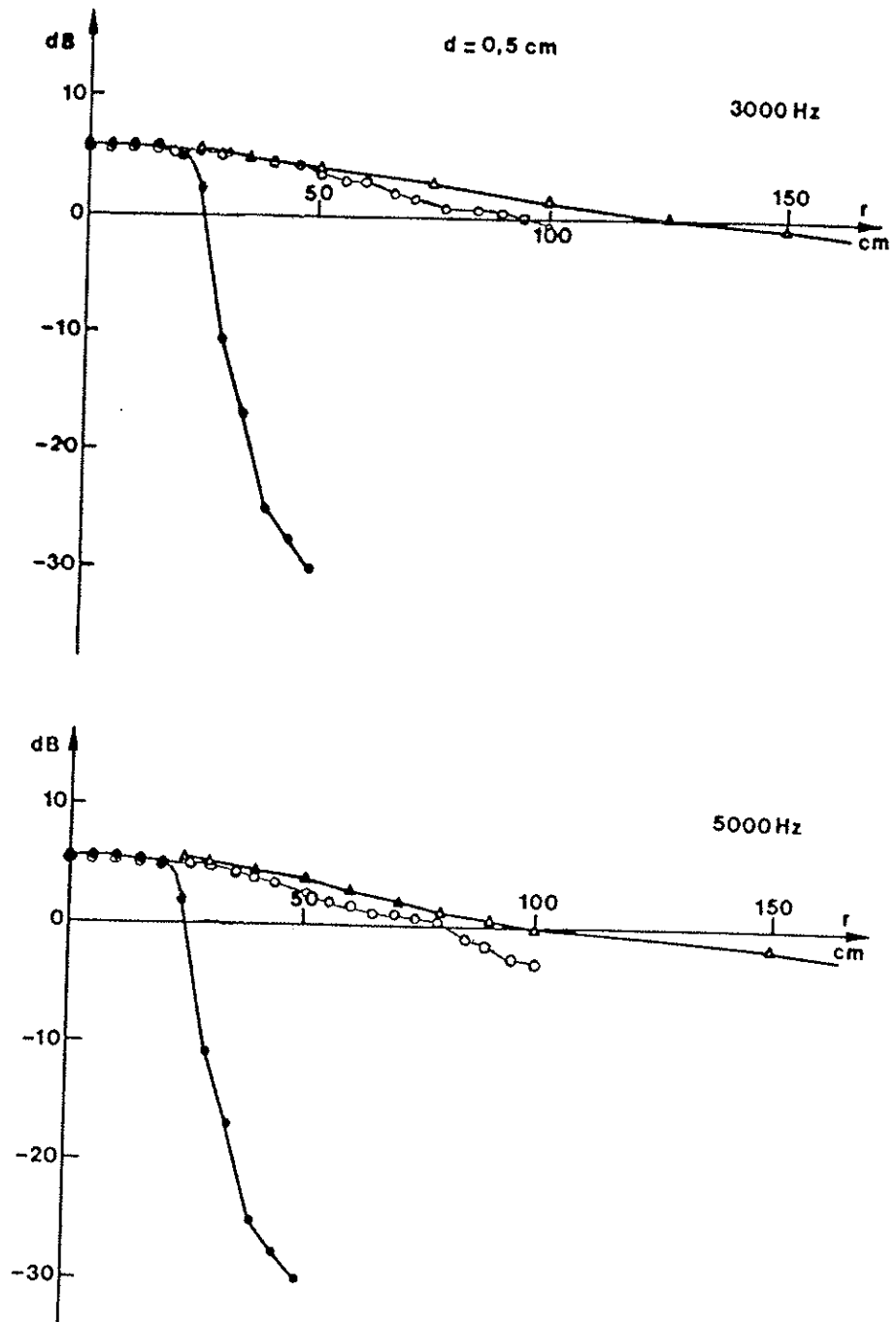


FIG. 11

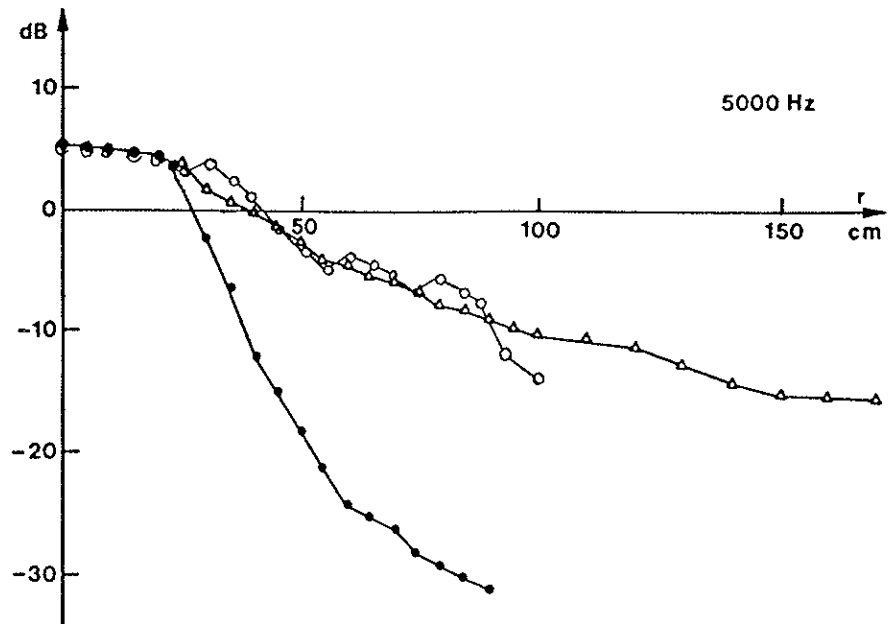
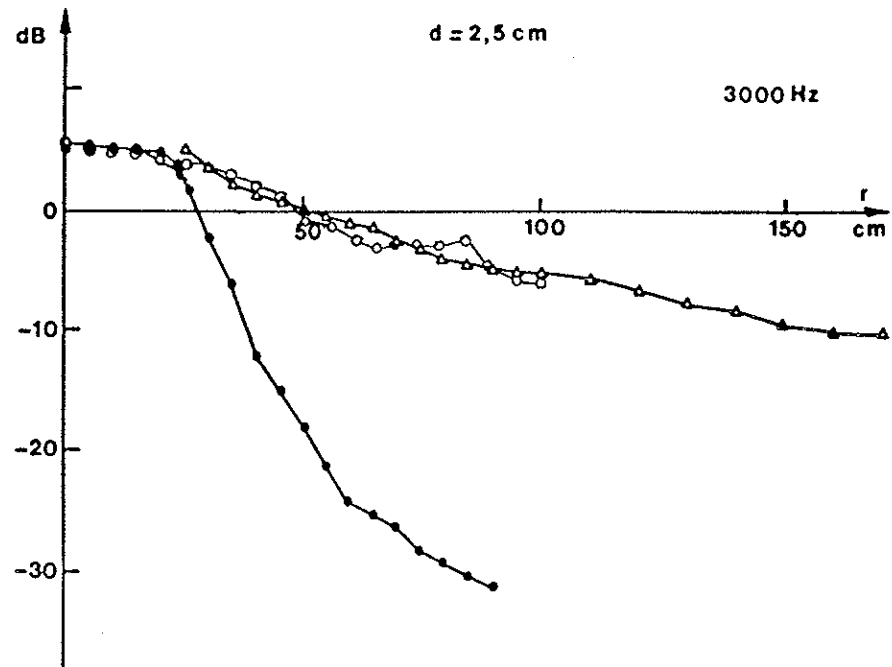


FIG. 12

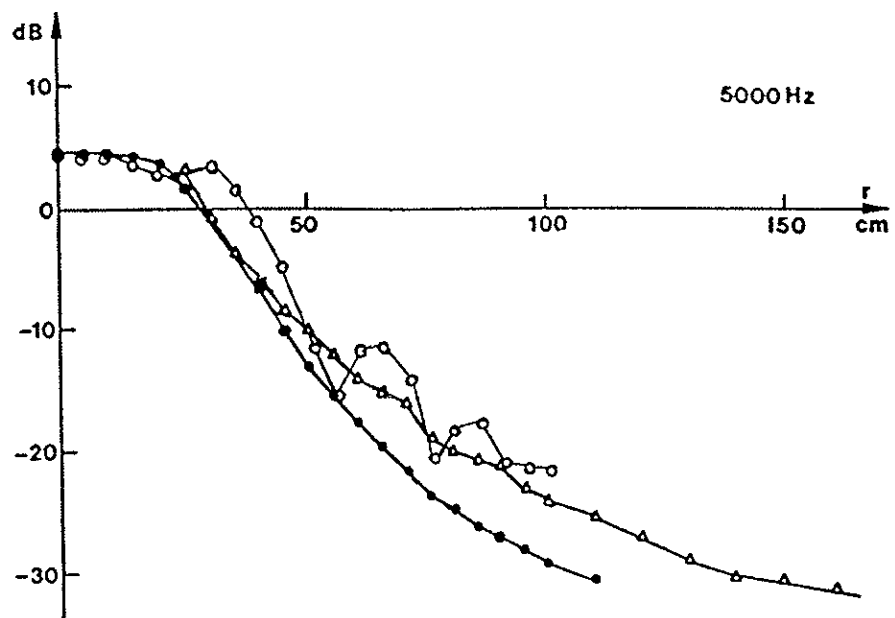
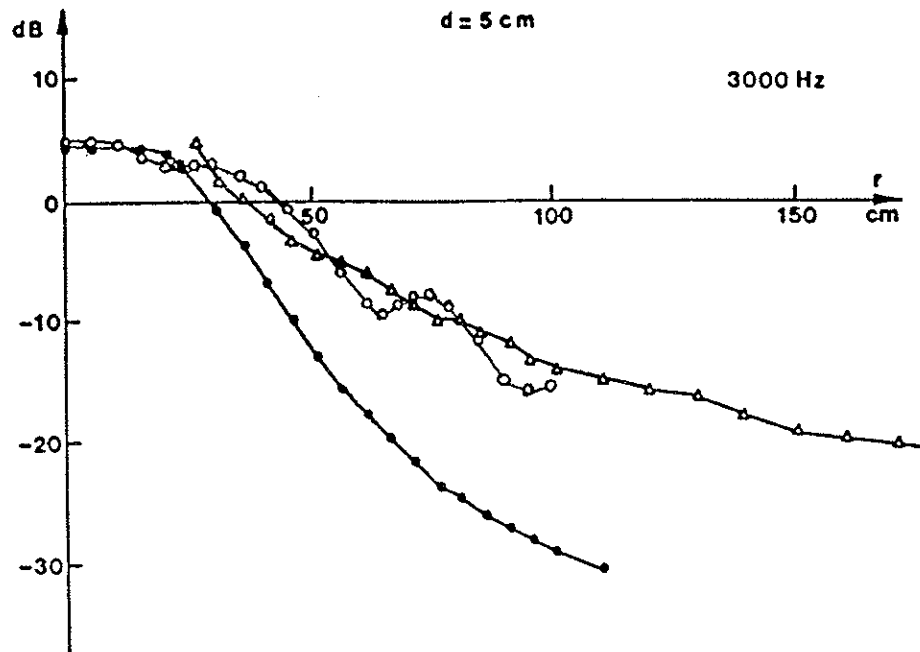
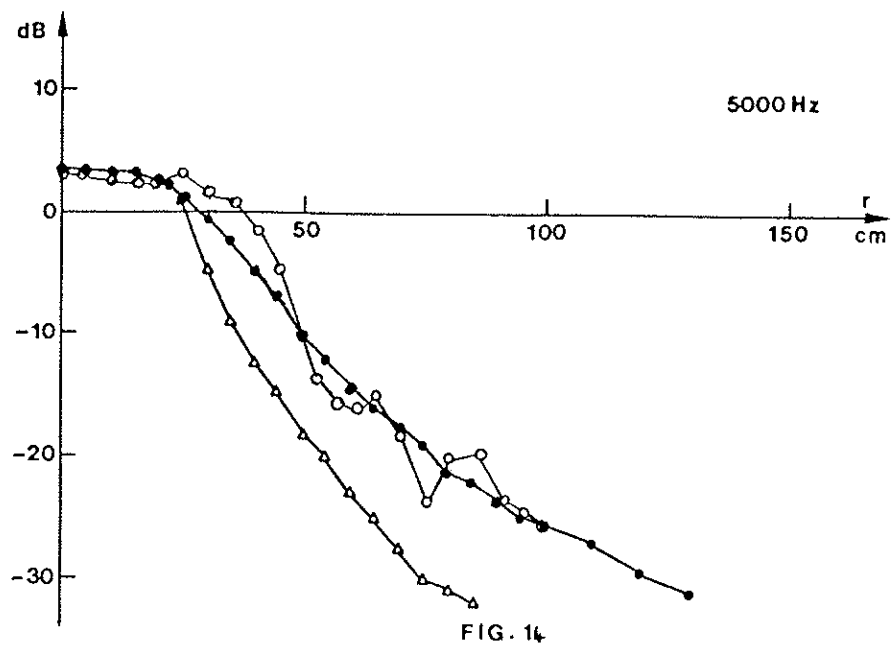
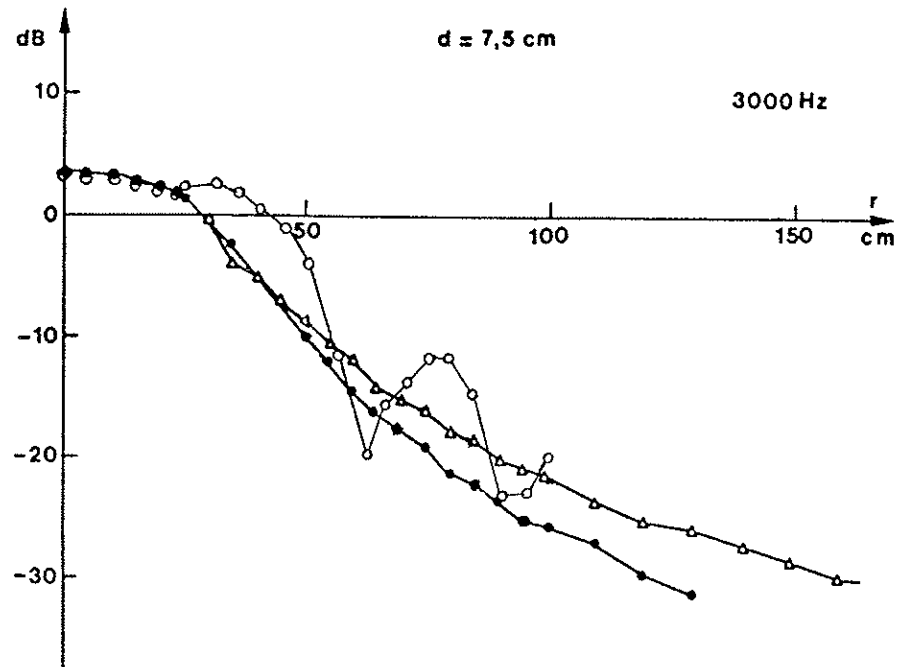
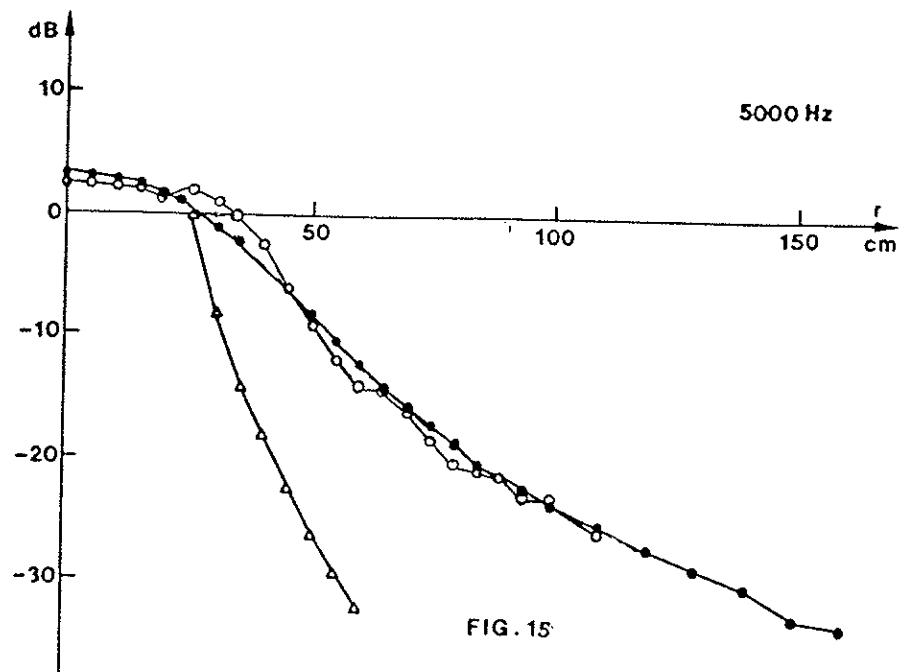
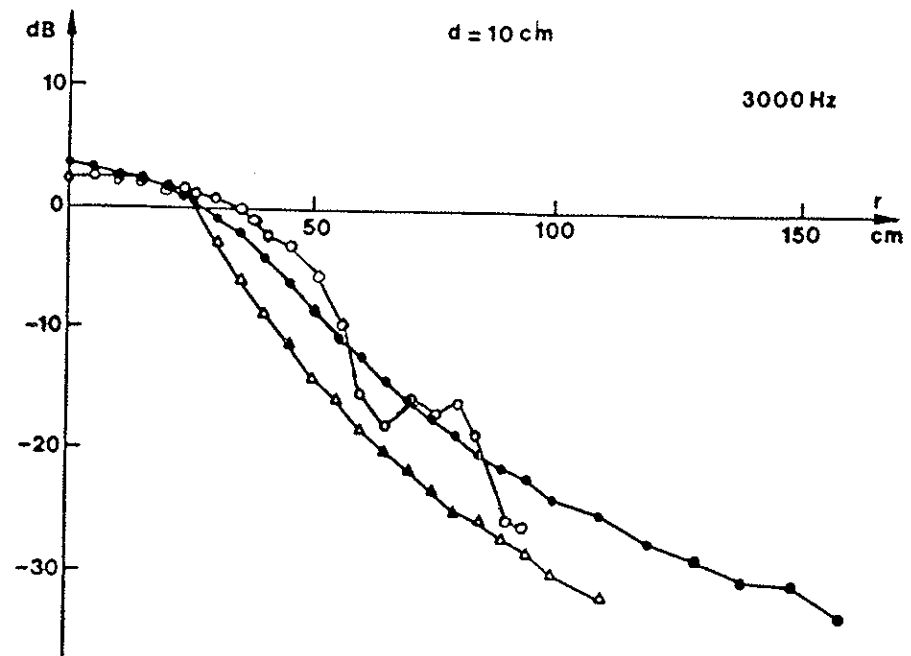
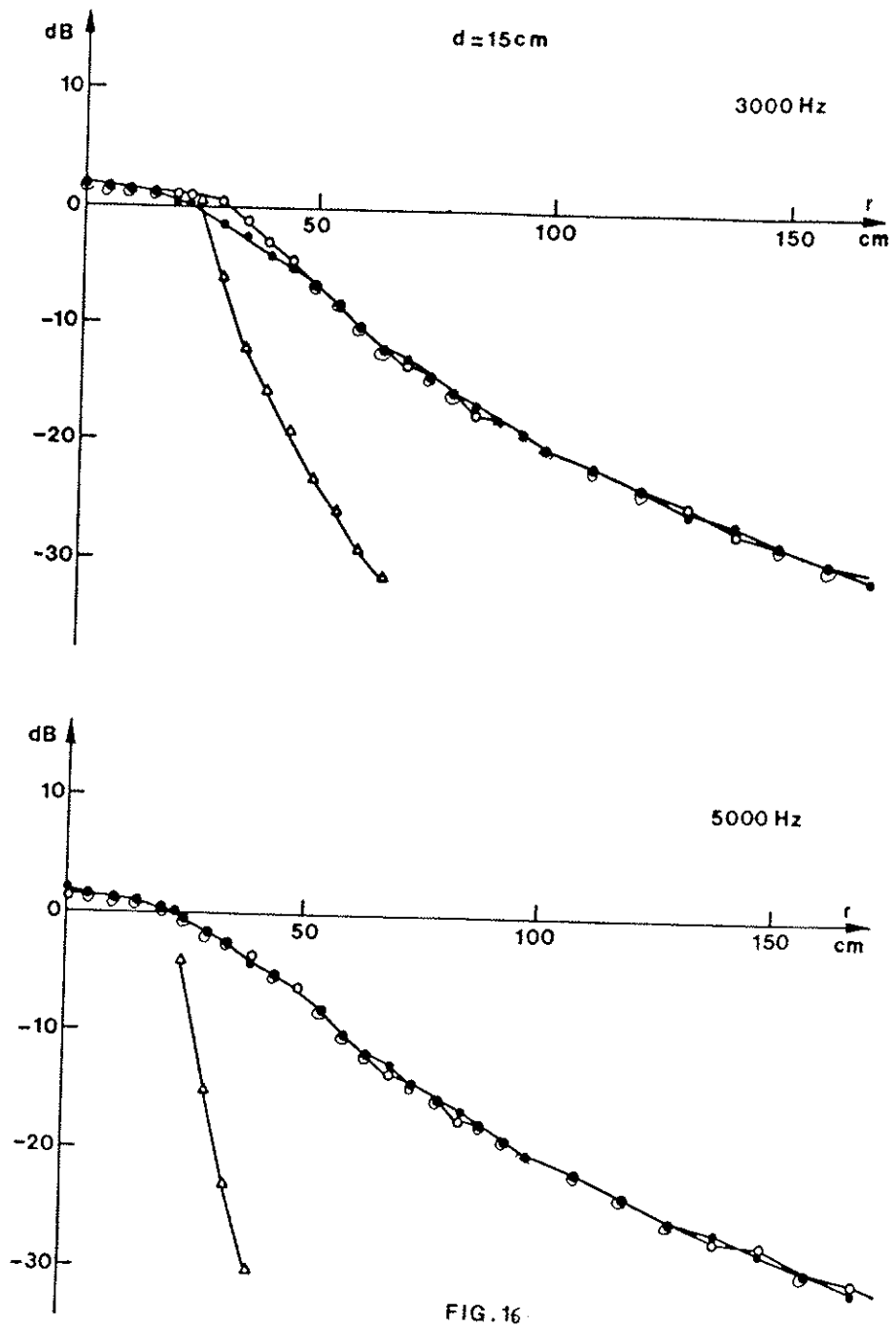


FIG. 13









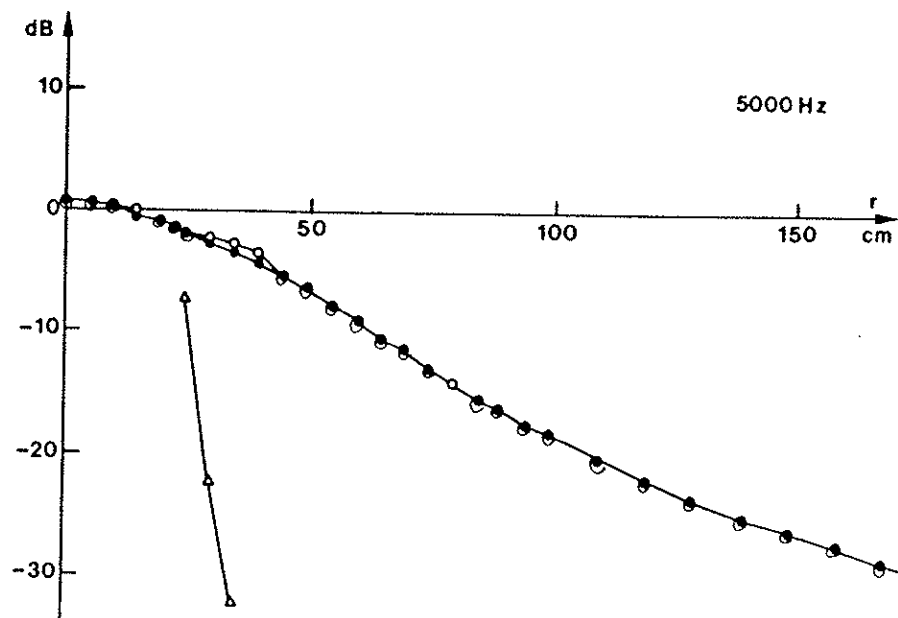
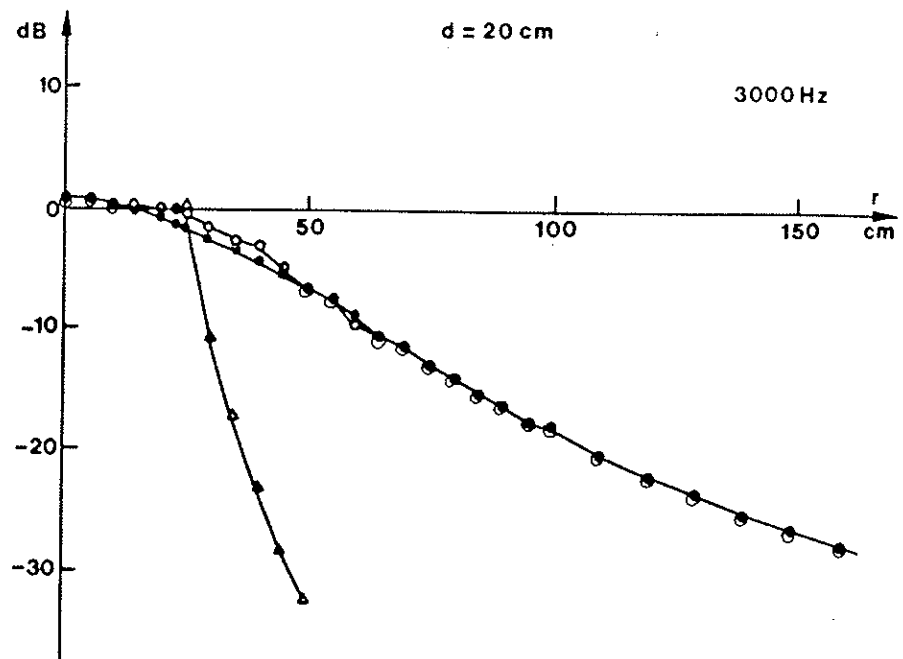


FIG. 17

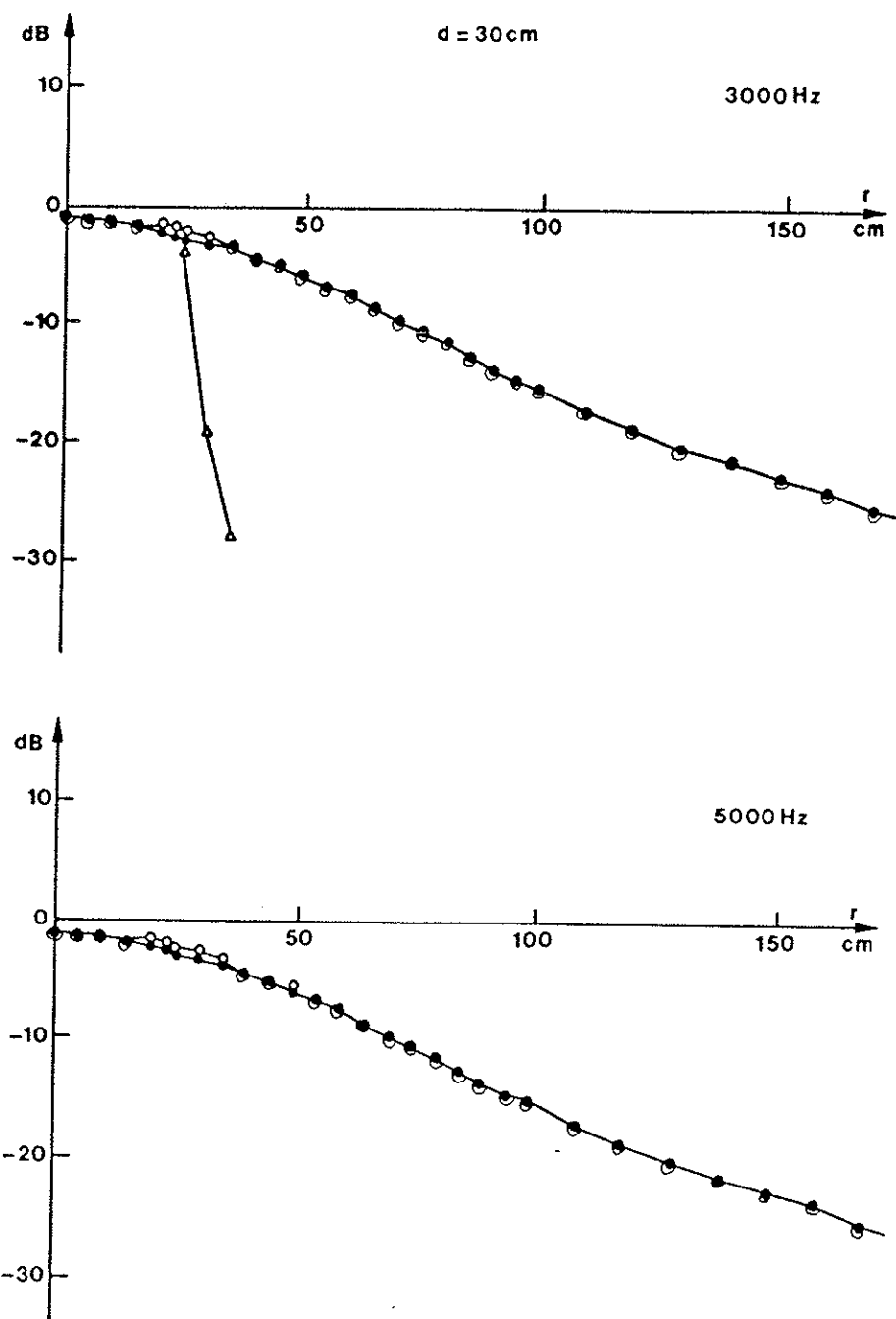


FIG. 18

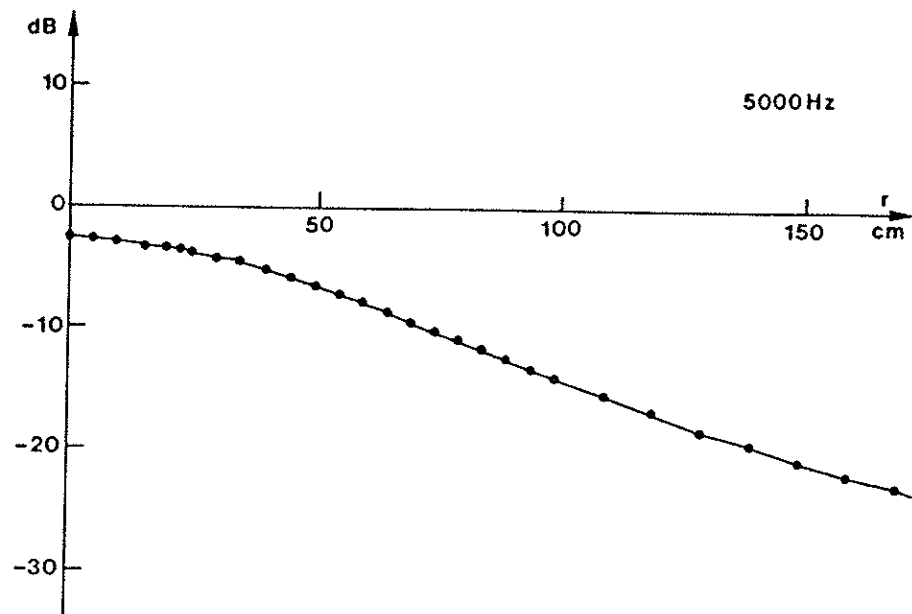
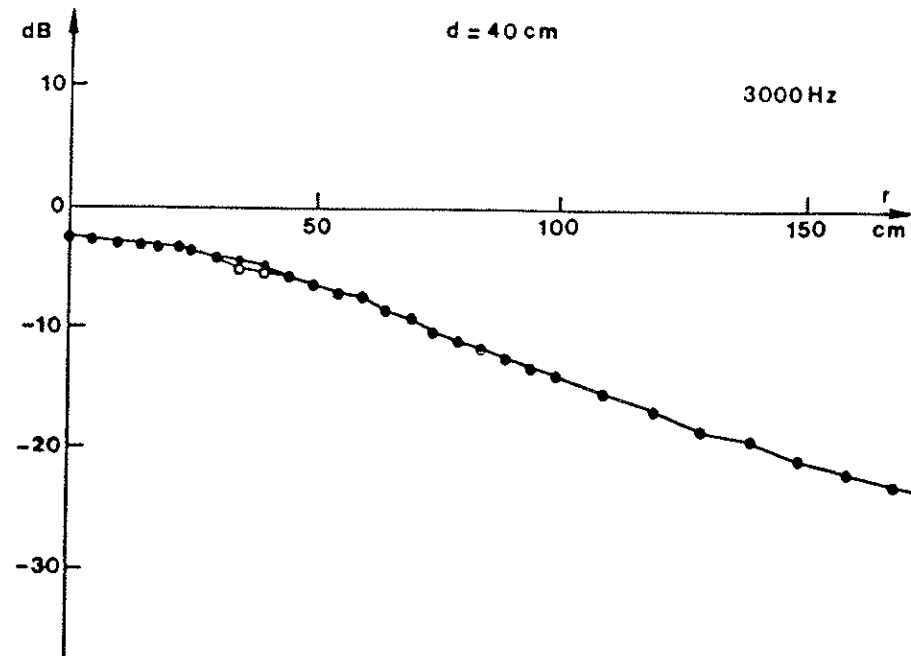


FIG. 19

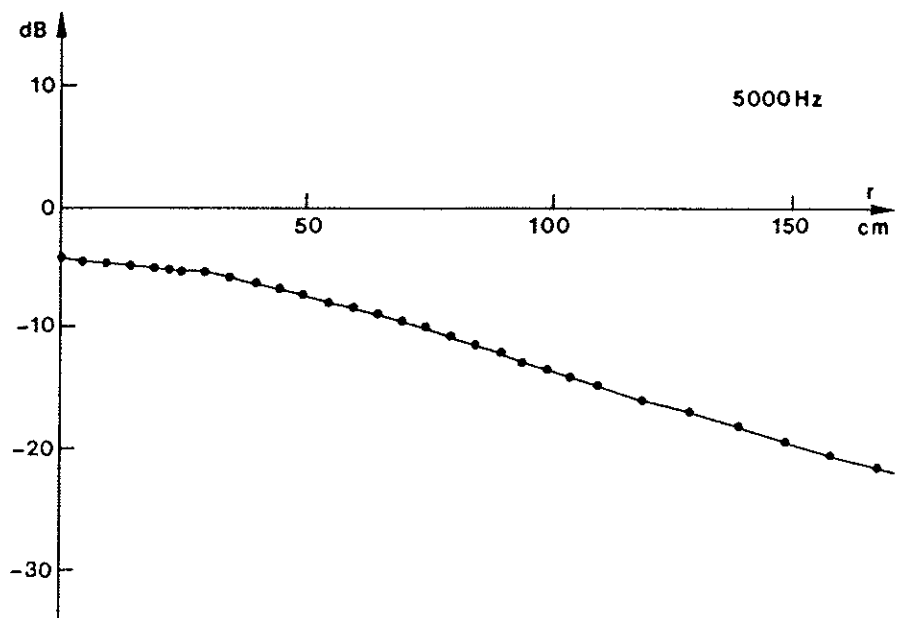
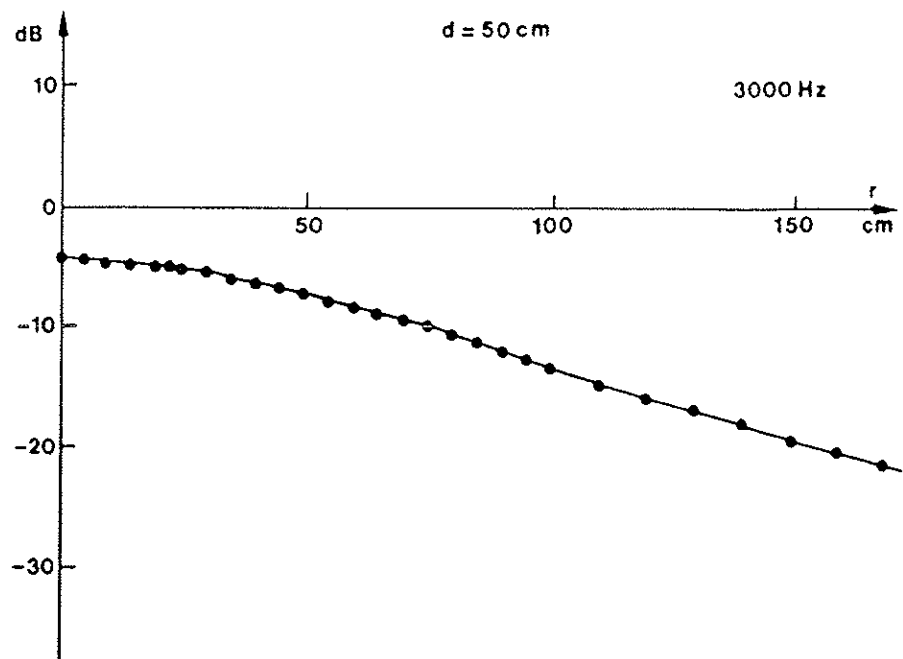


FIG. 20



Champ transmis total

-0-0- Valeurs théoriques

-.-. Valeurs expérimentales

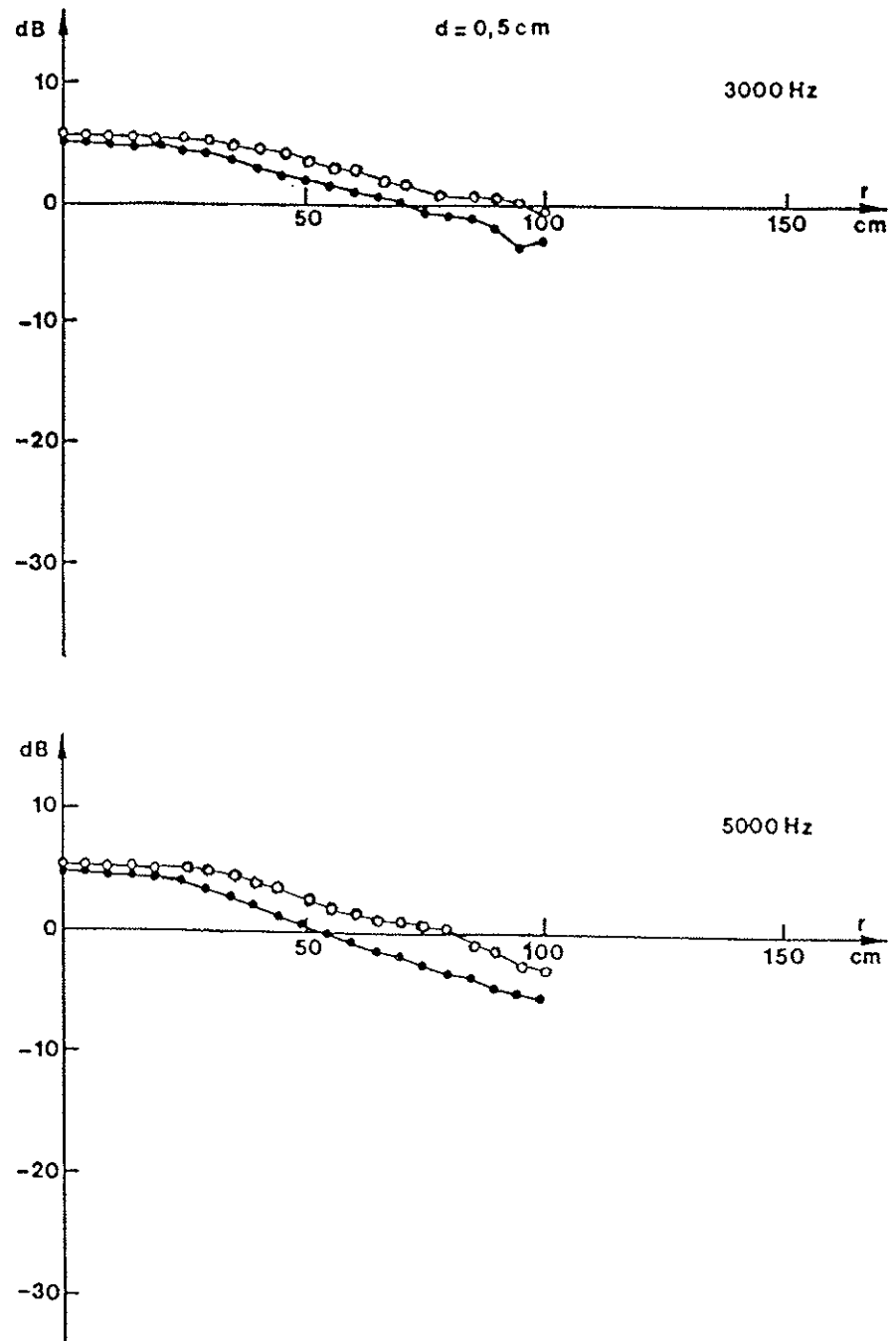


FIG.21

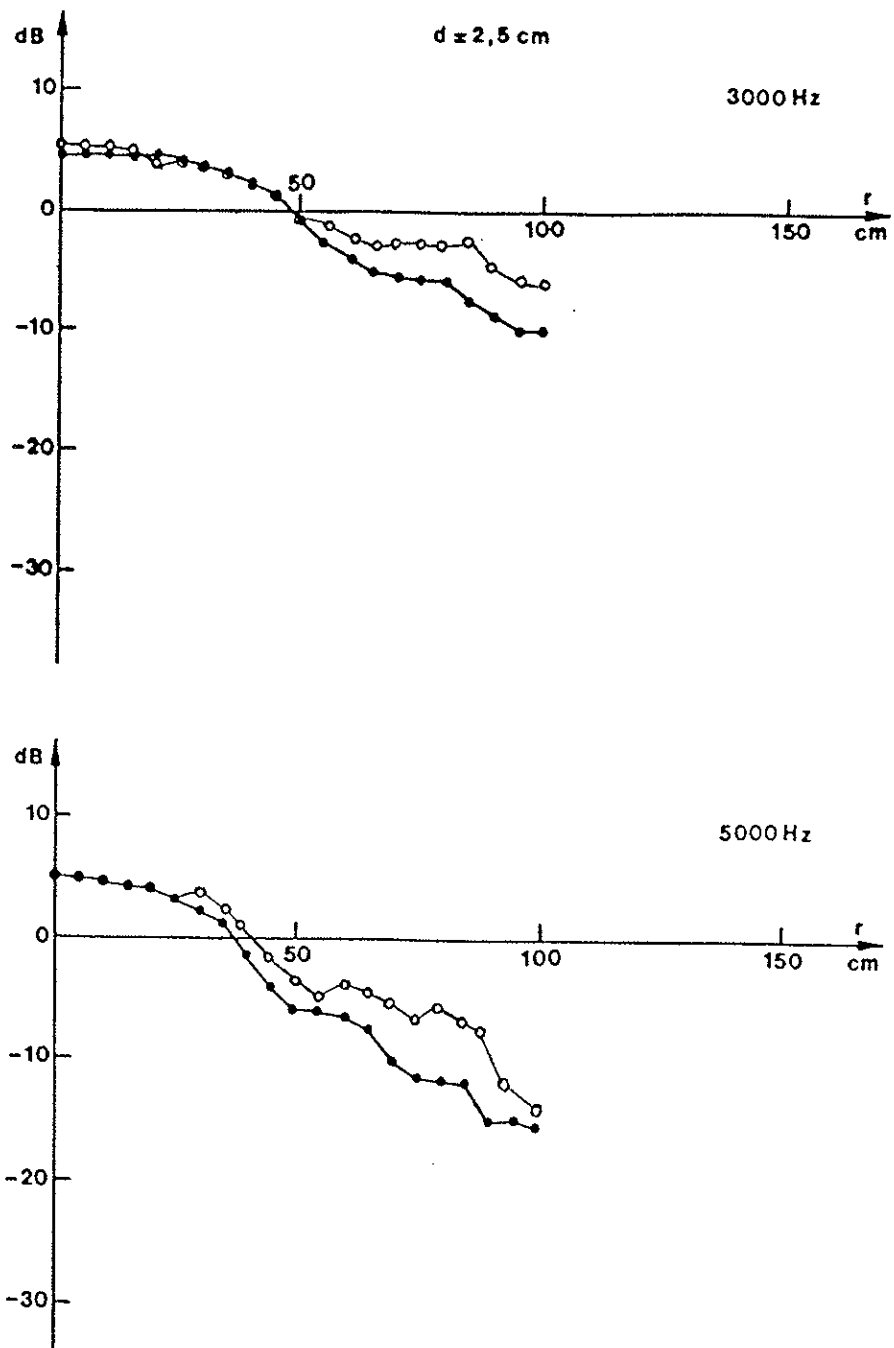


FIG. 22



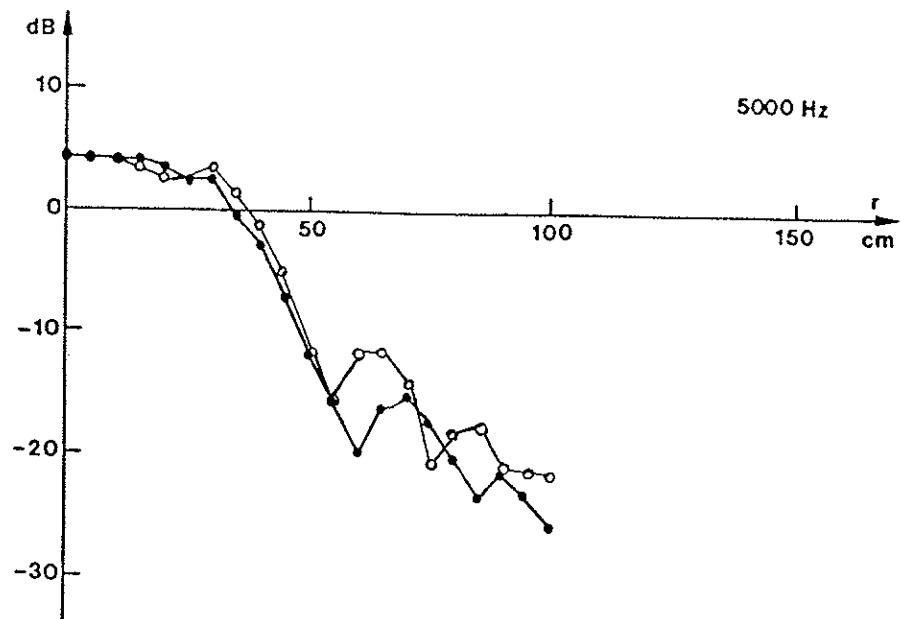
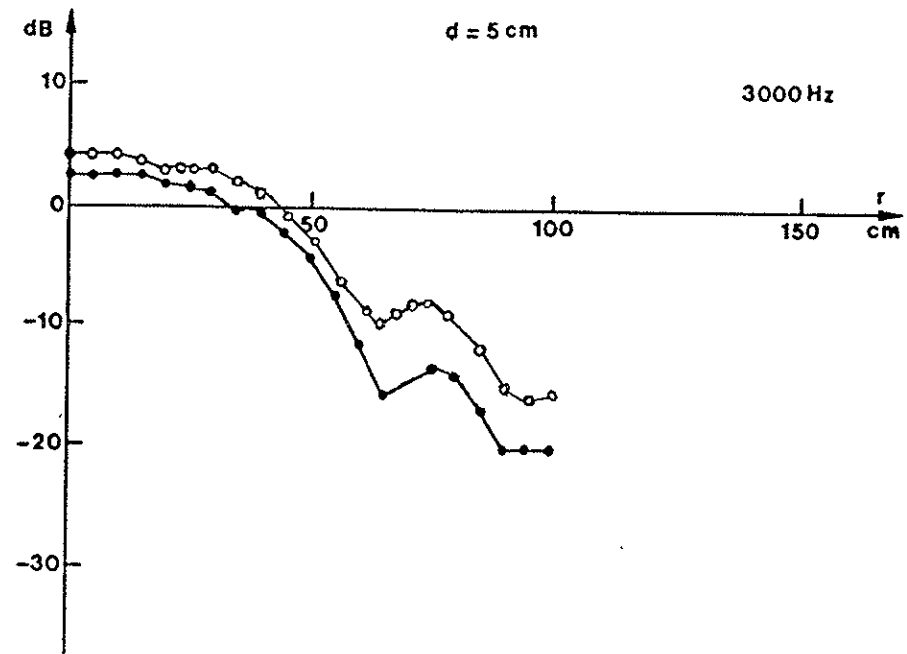


FIG. 23

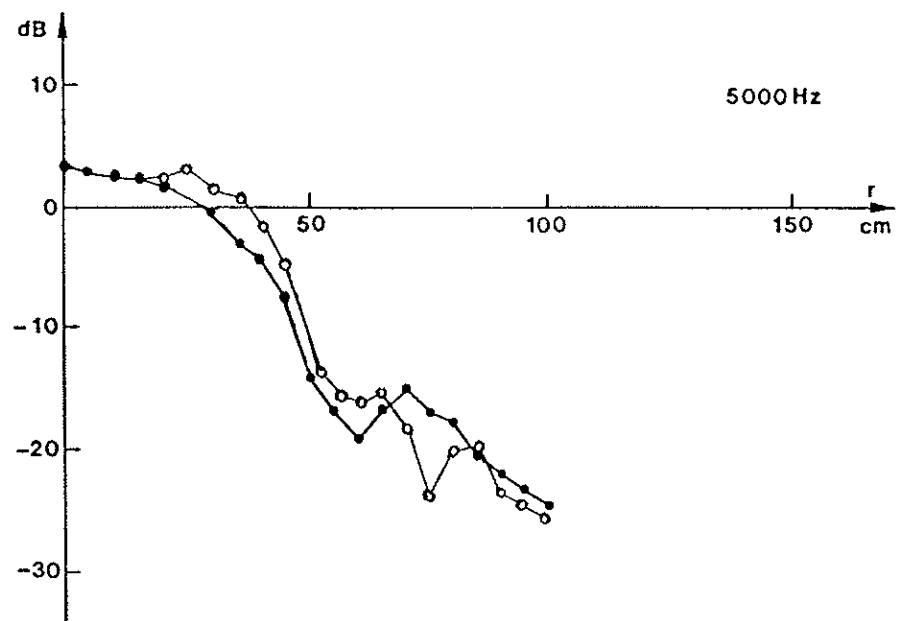
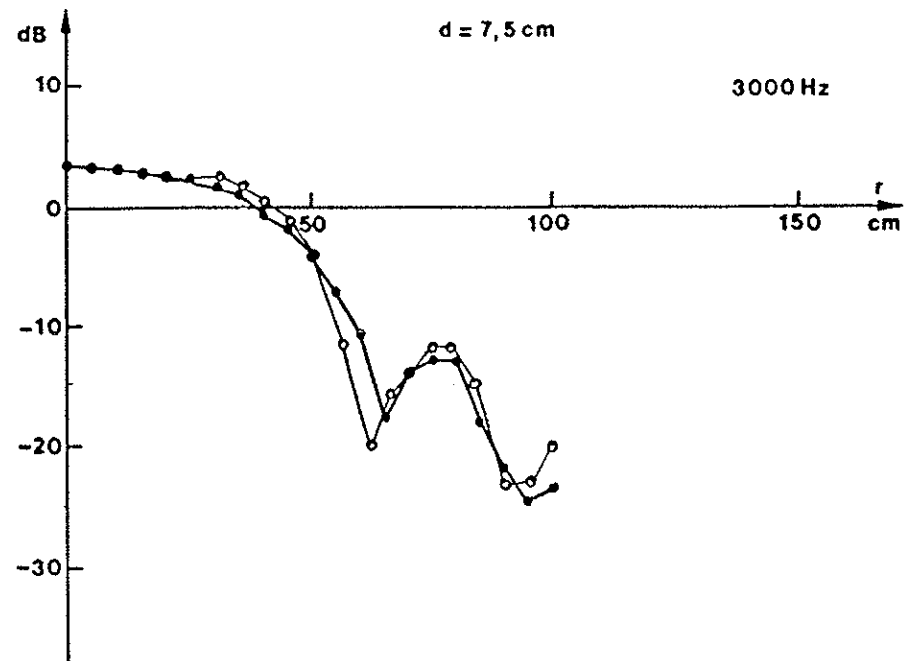


FIG. 24.

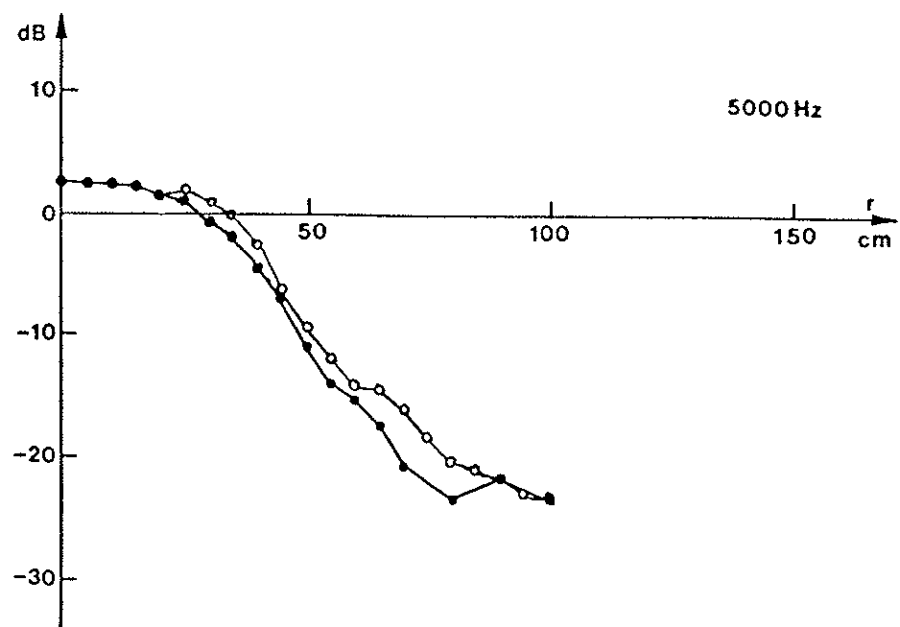
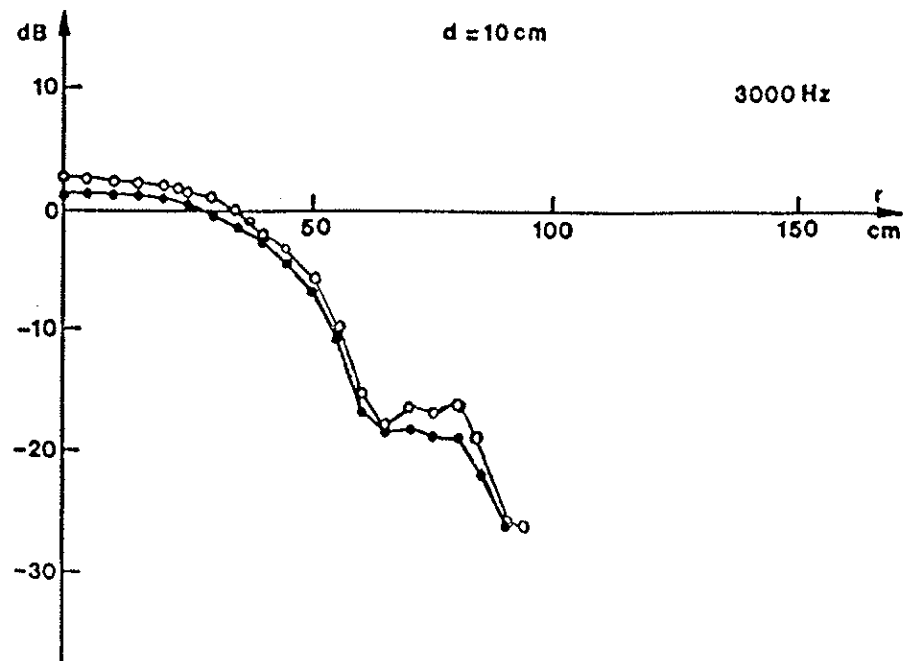


FIG. 25

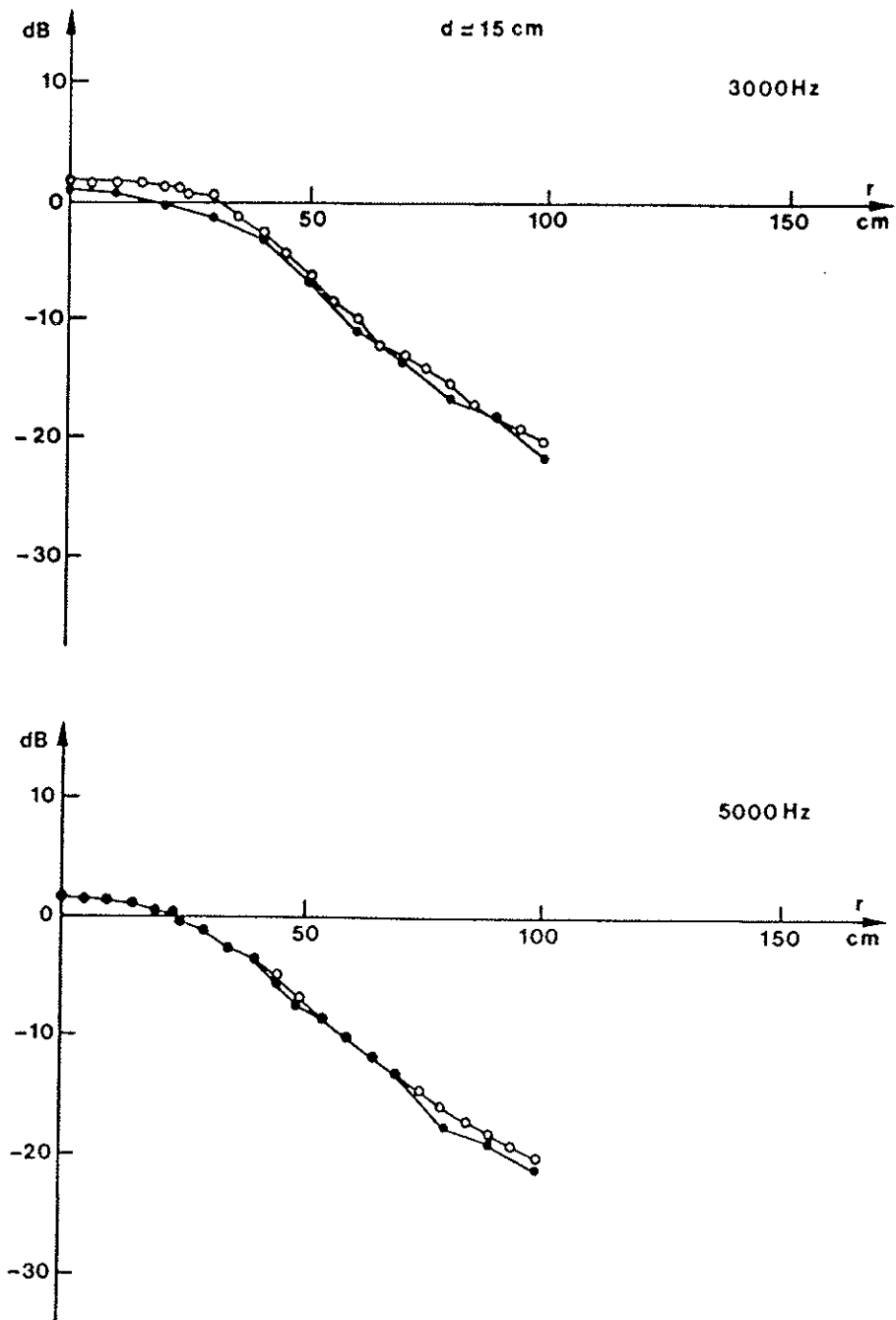


FIG. 26

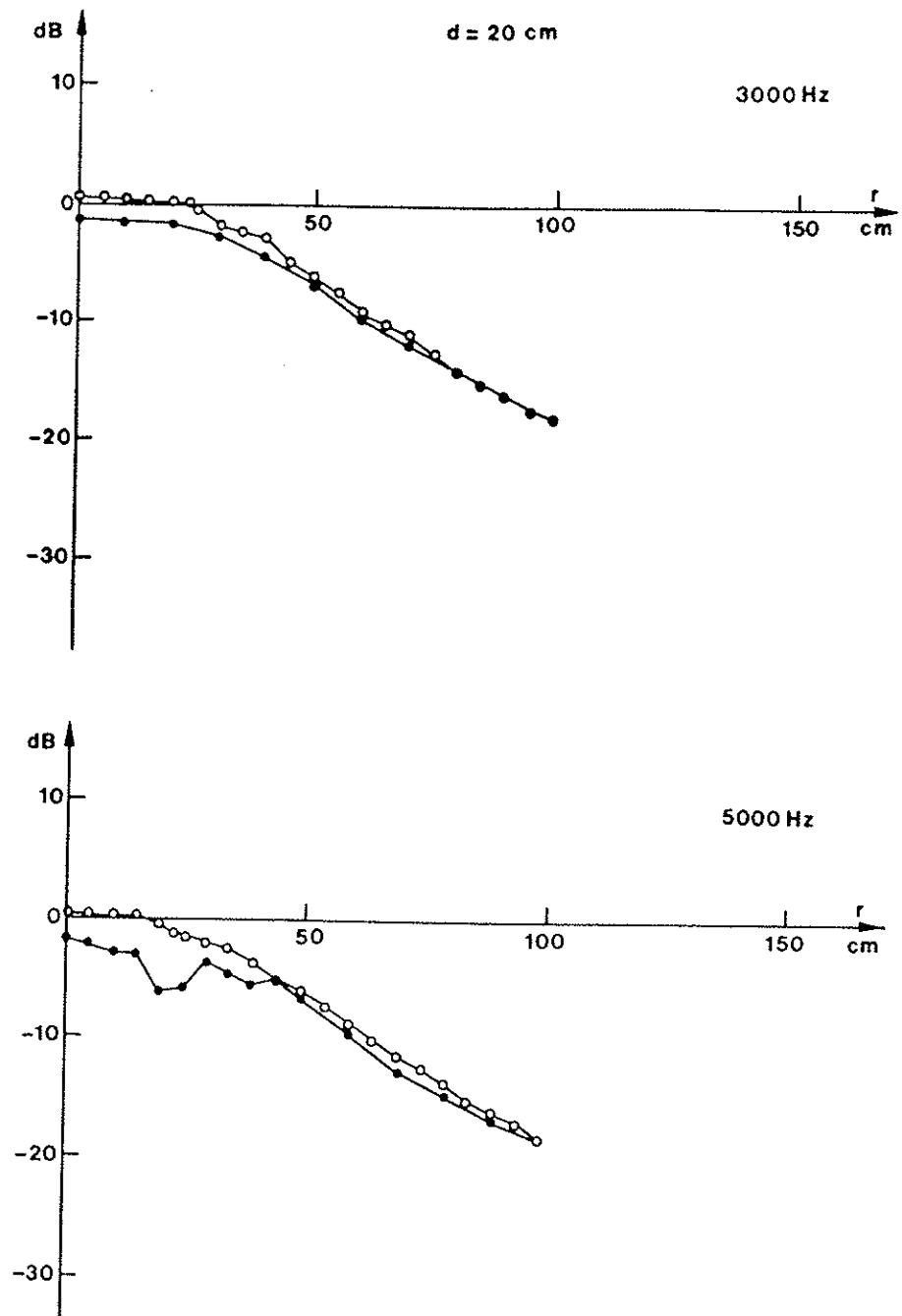


FIG. 27

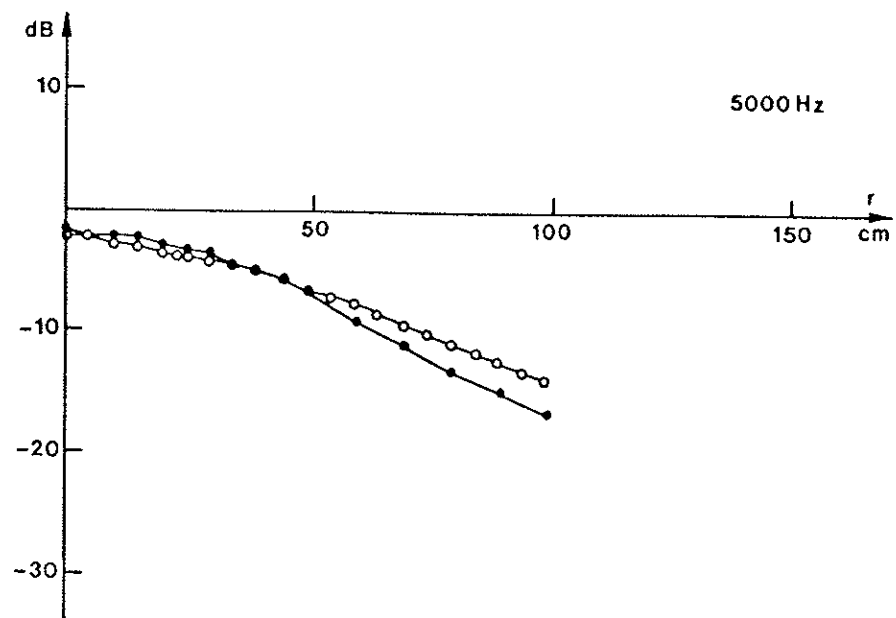
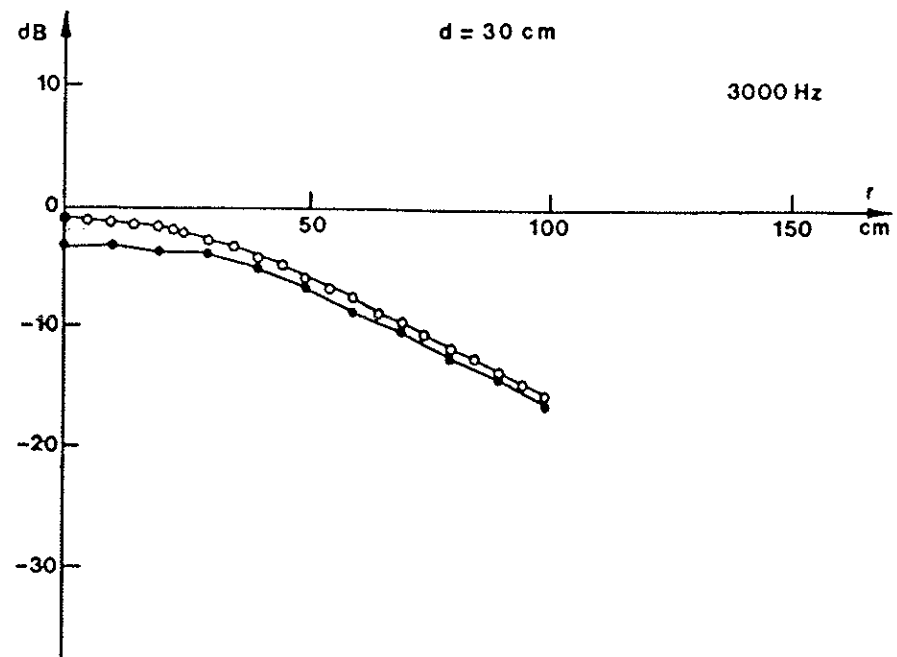


FIG. 28

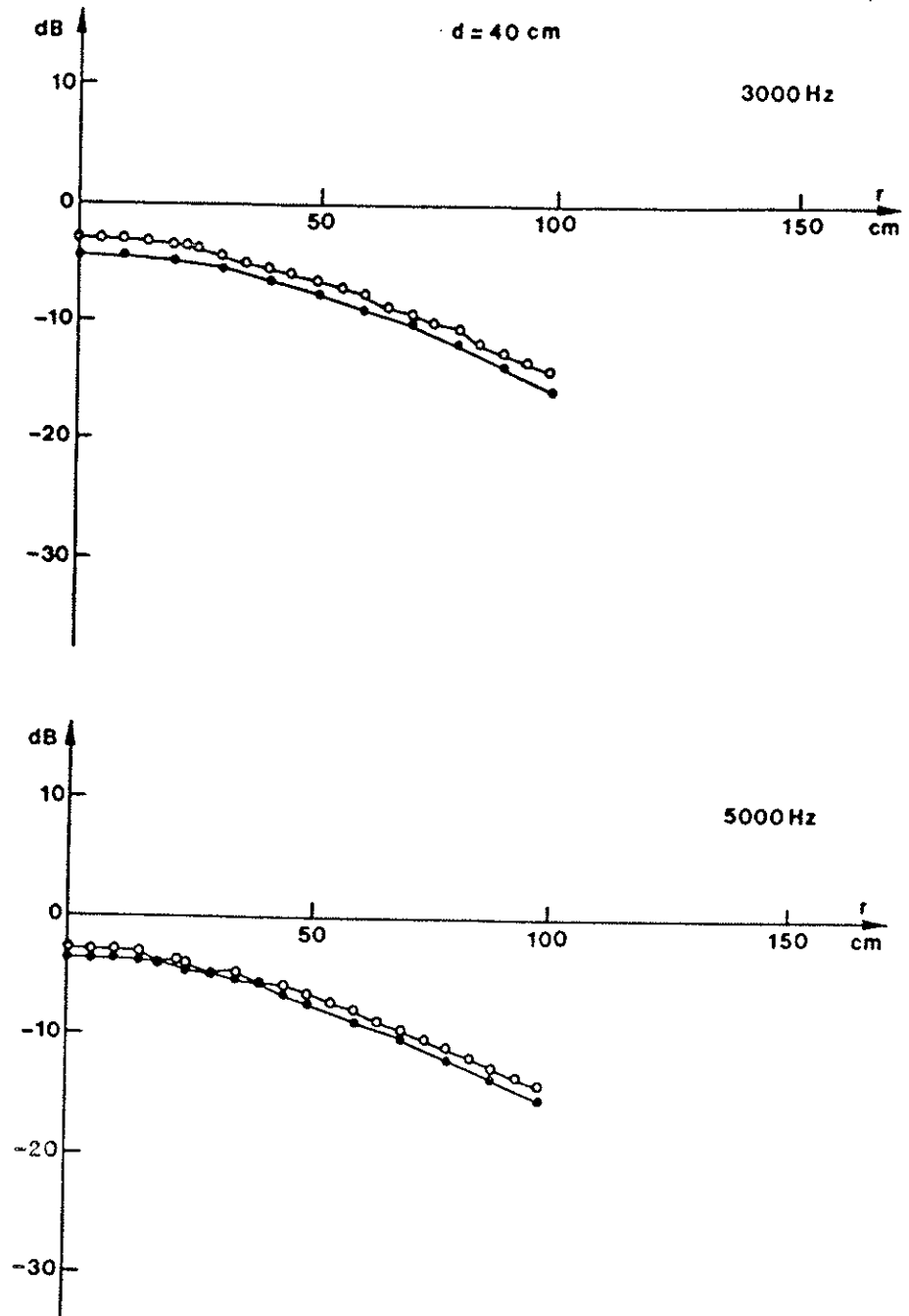


FIG.29

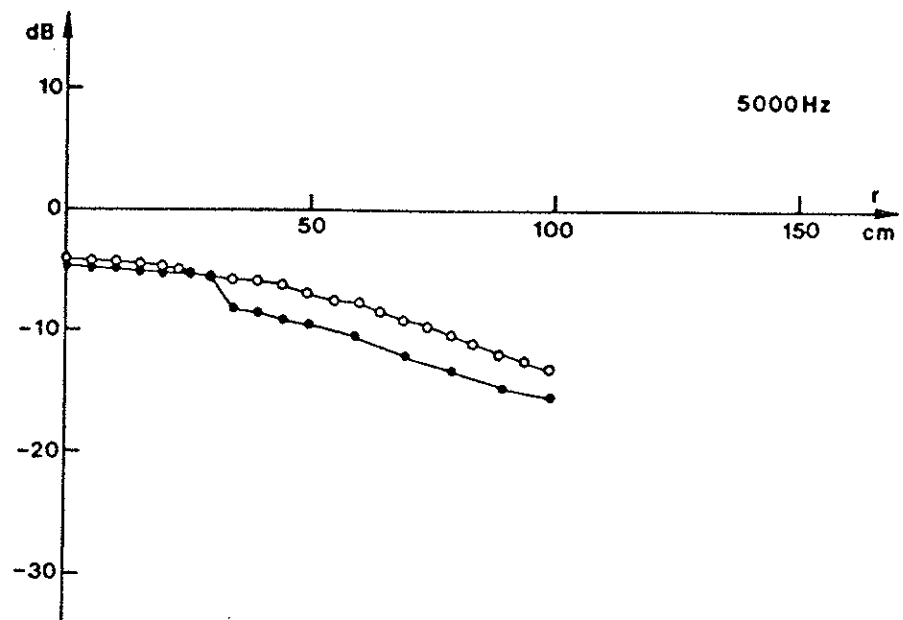
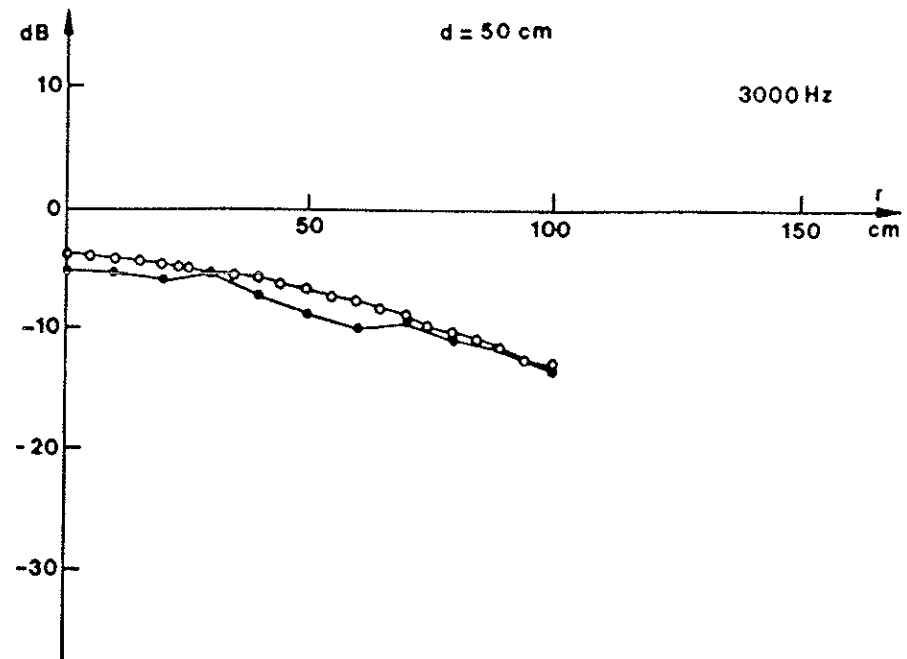


FIG. 30



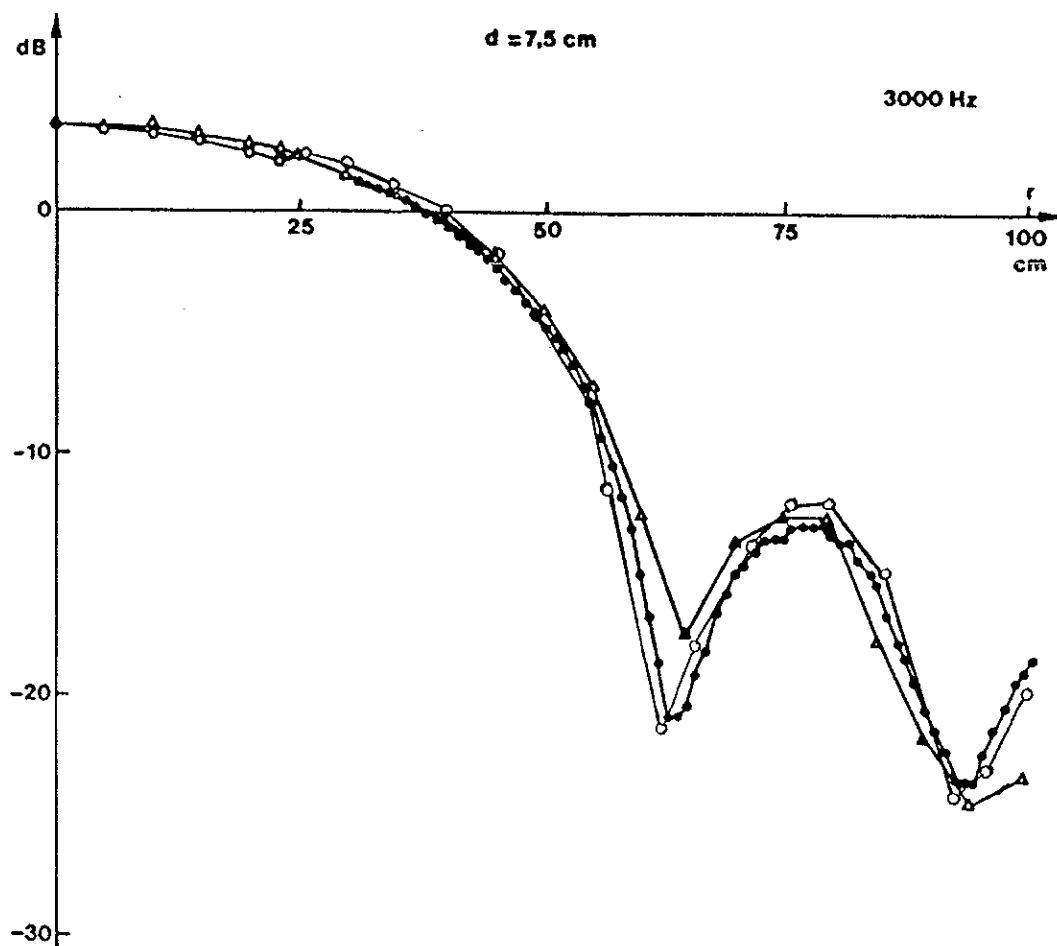


FIG. 31

- ● - : Affinement des mesures dans la zone d'interférences à 3kHz et pour une profondeur  $d=7,5\text{cm}$ .
- Δ - : Valeurs expérimentales avant l'affinement des mesures.
- ○ - : Valeurs théoriques.

Contribution géométrique expérimentale

-0-0- Valeurs théoriques

-•-• Valeurs expérimentales

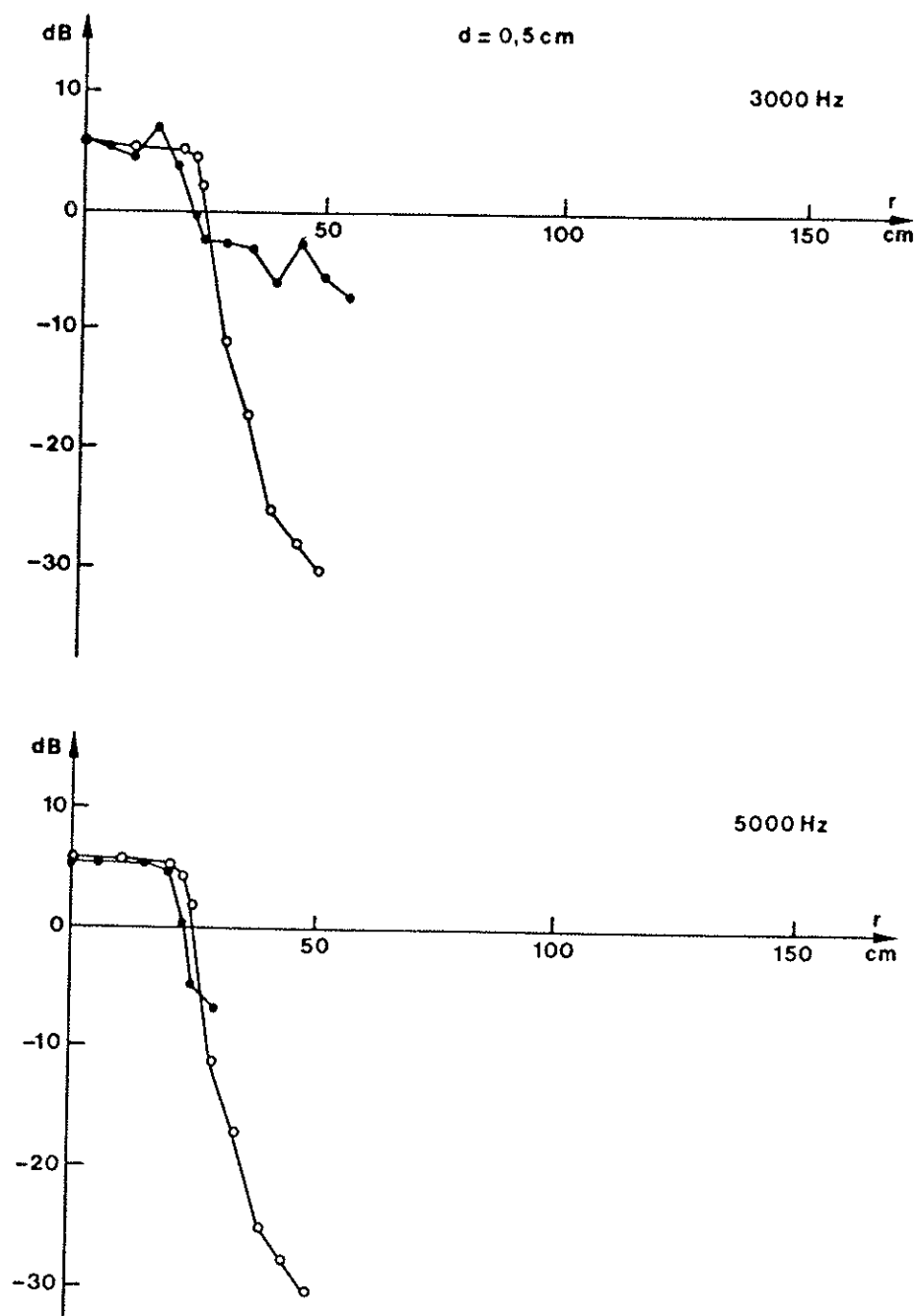


FIG. 32

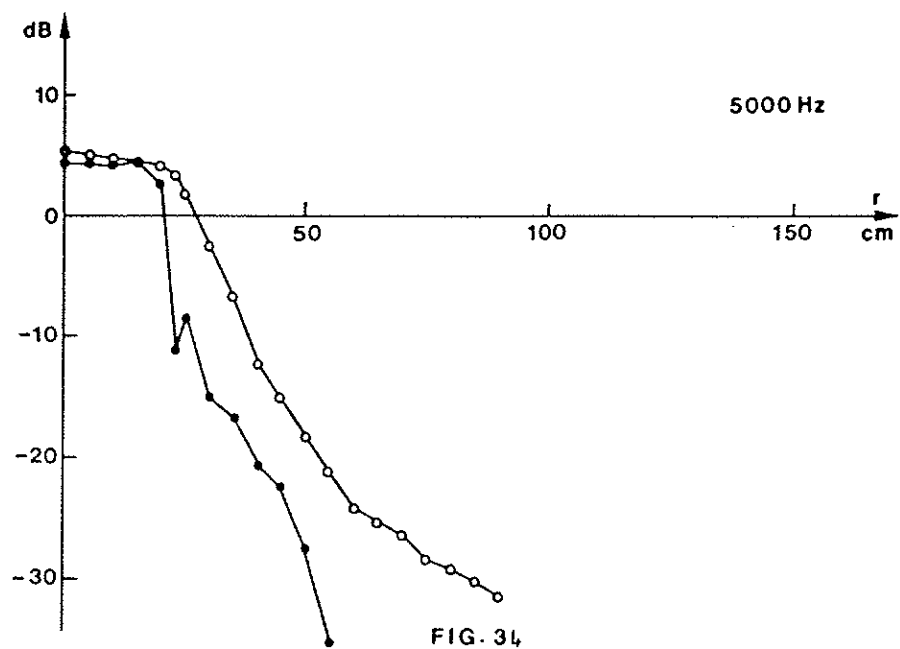
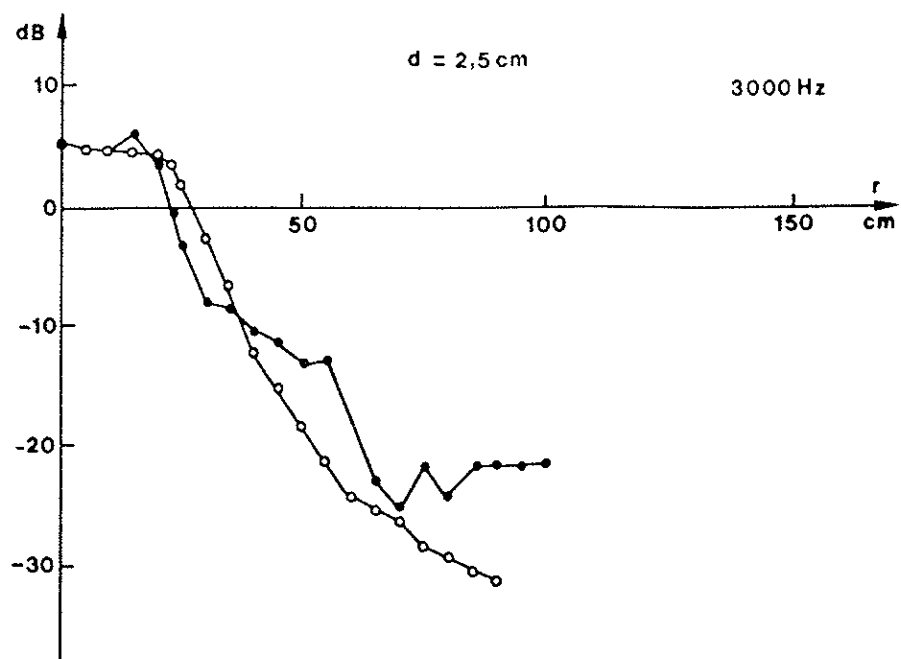


FIG. 34

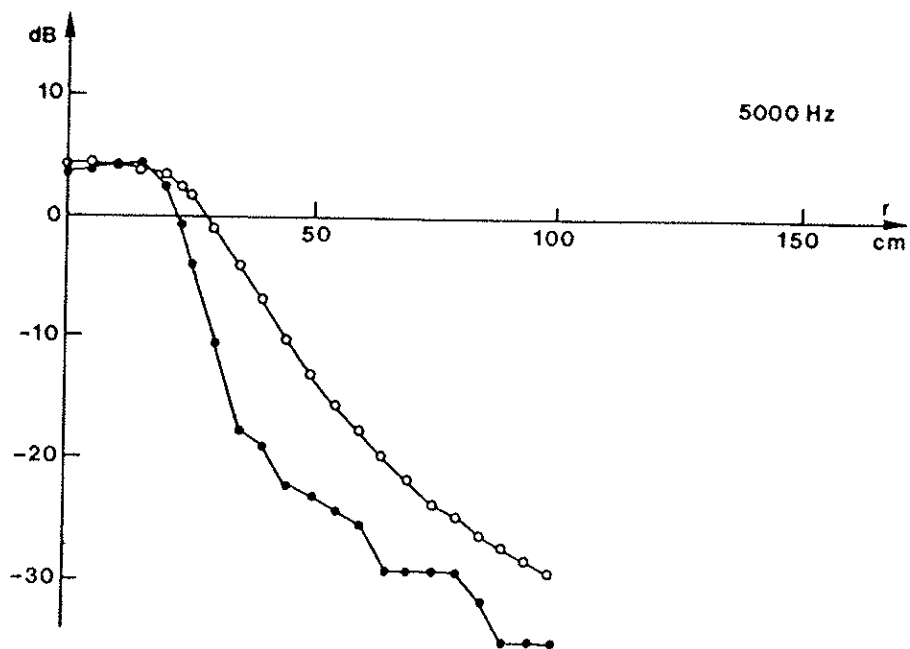
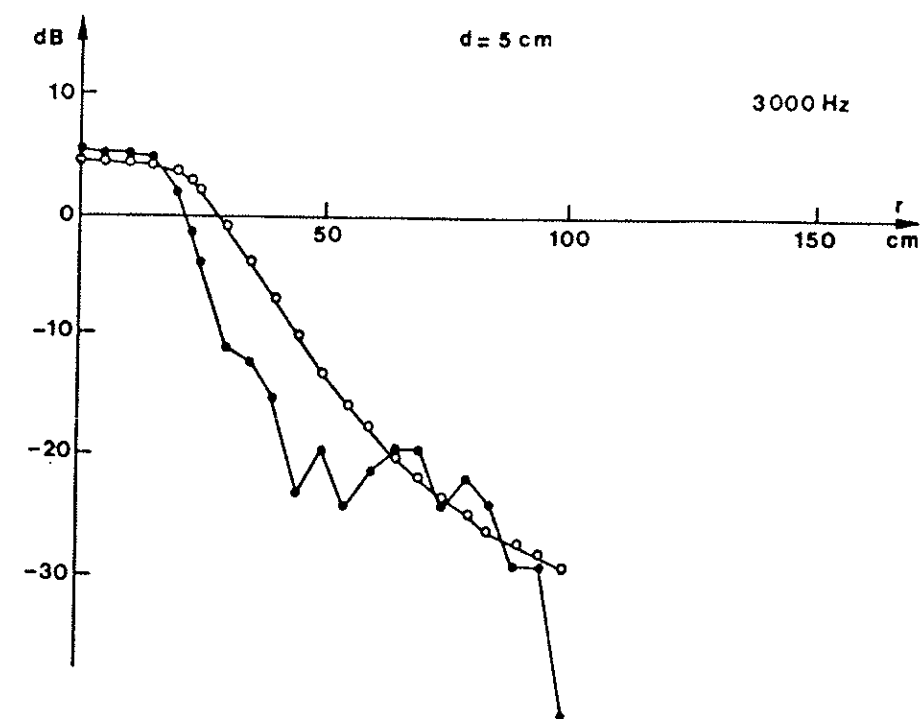
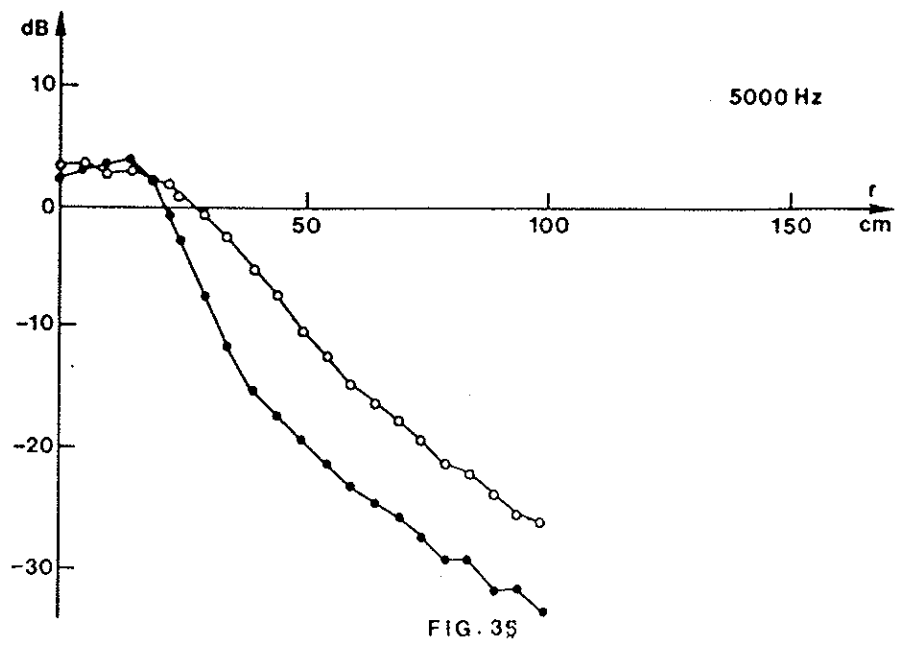
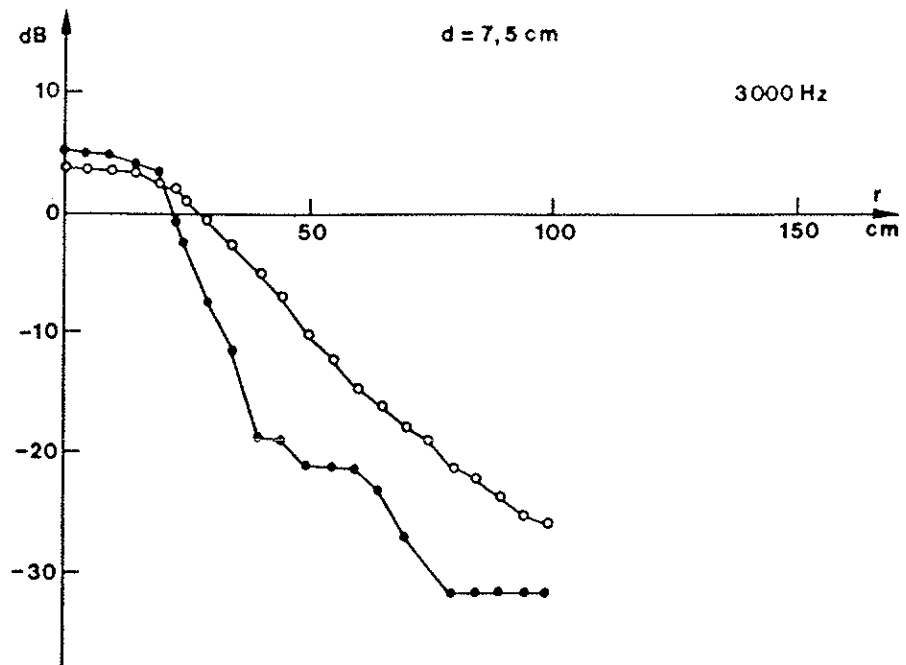


FIG. 34



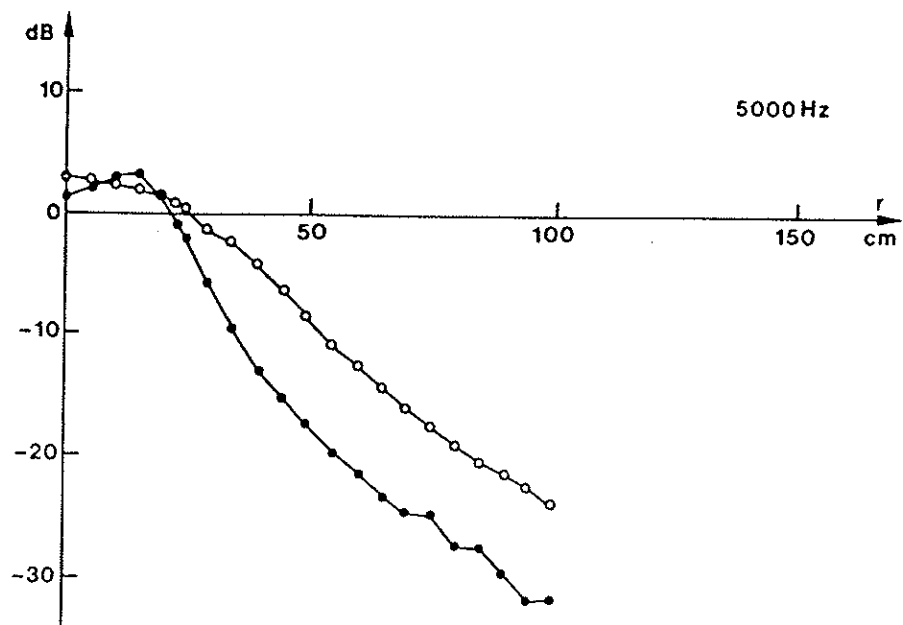
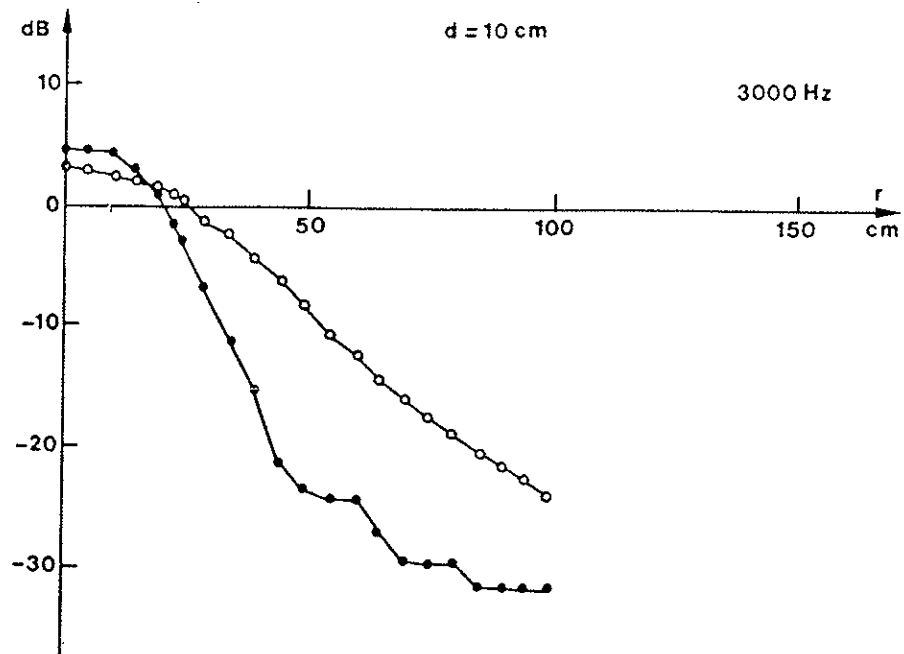


FIG. 36

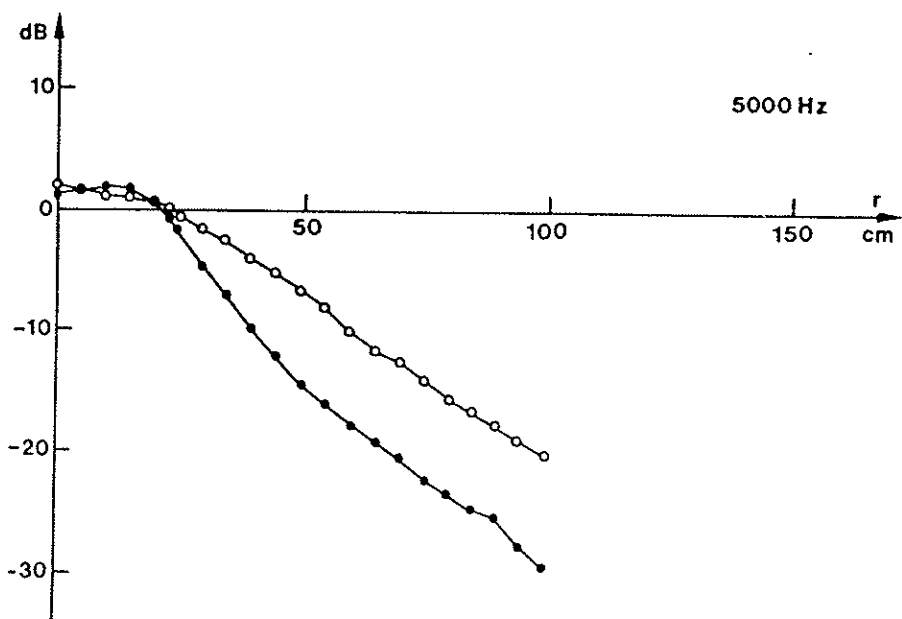
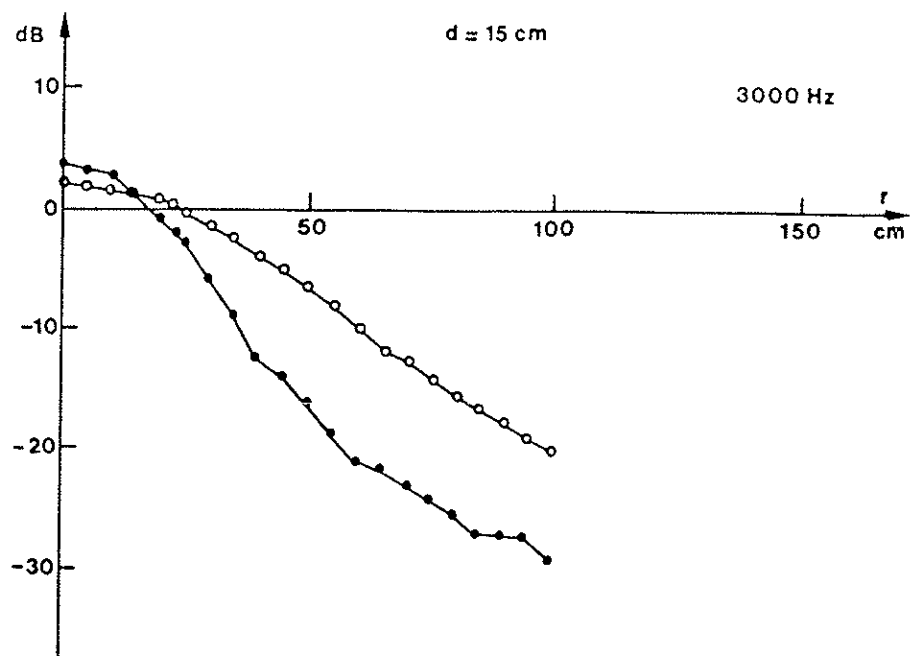


FIG. 37



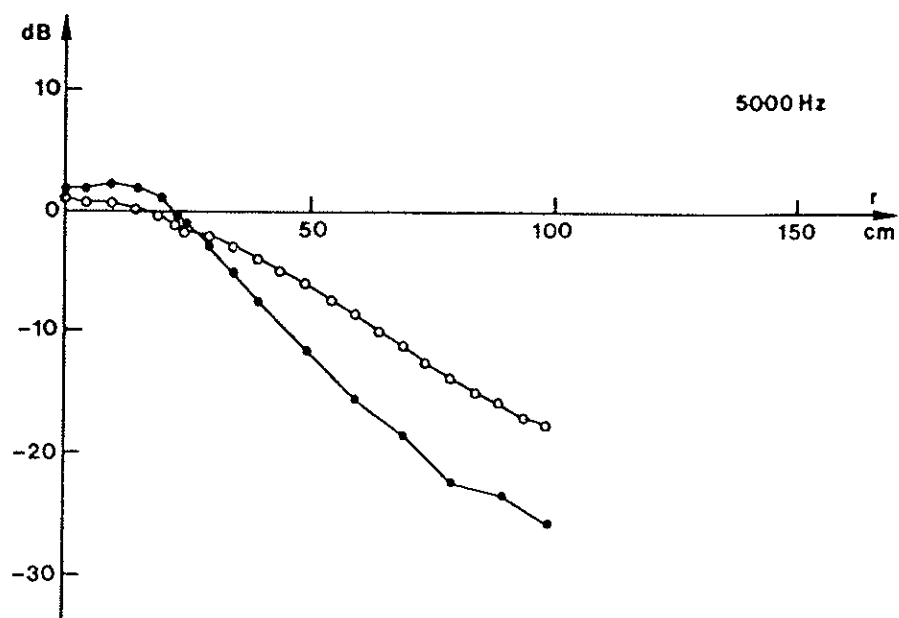
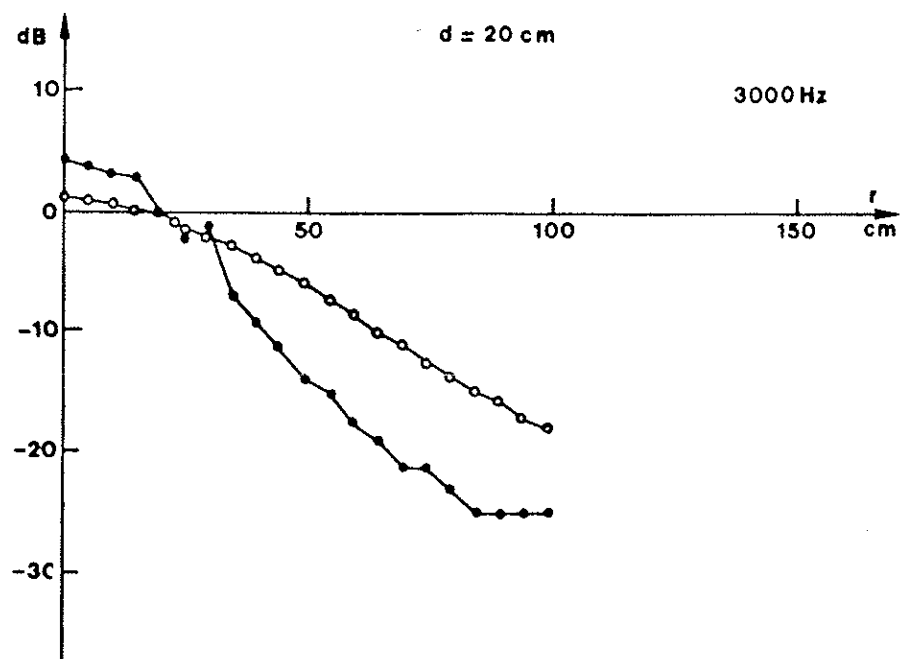


FIG. 38

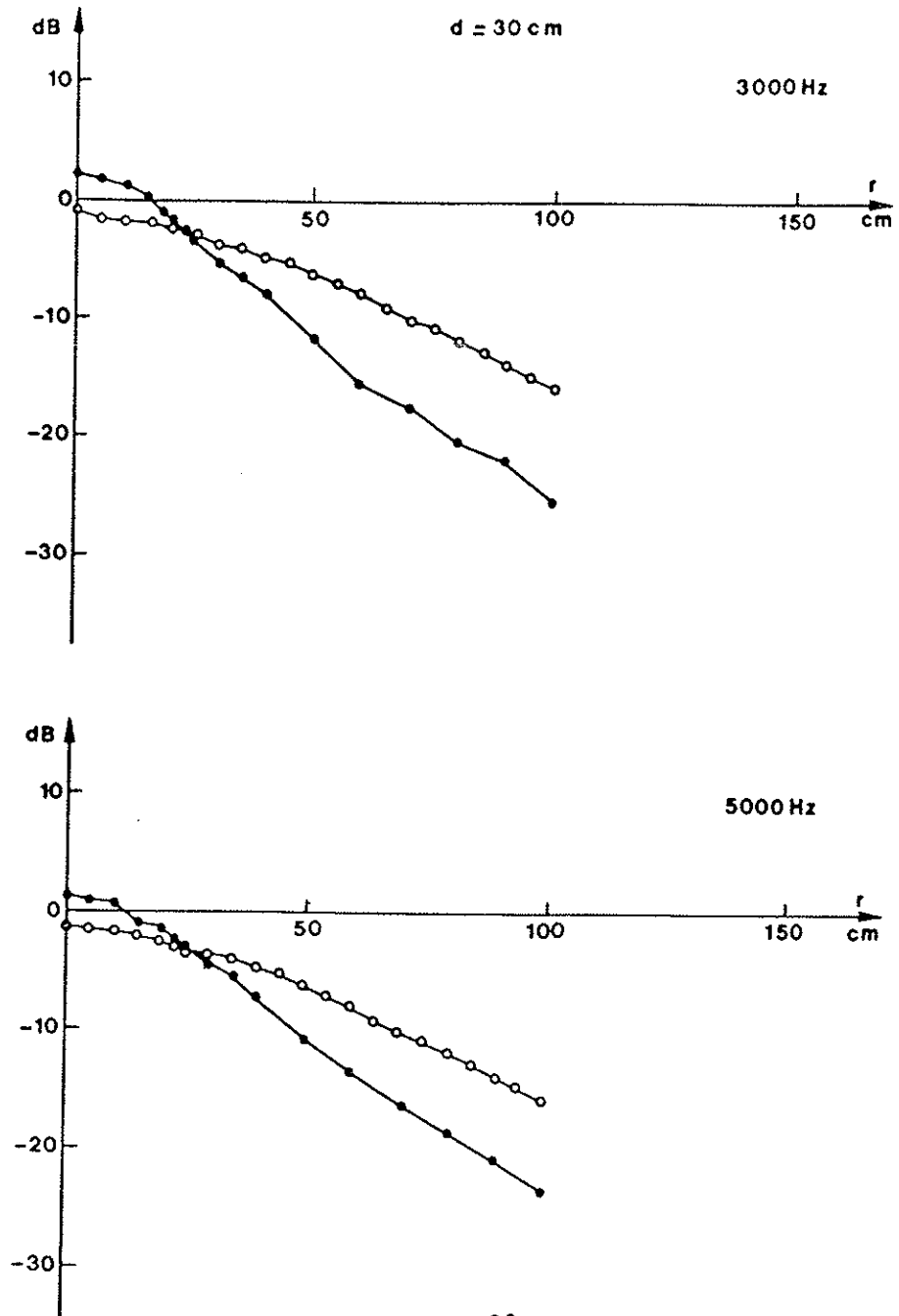


FIG. 39

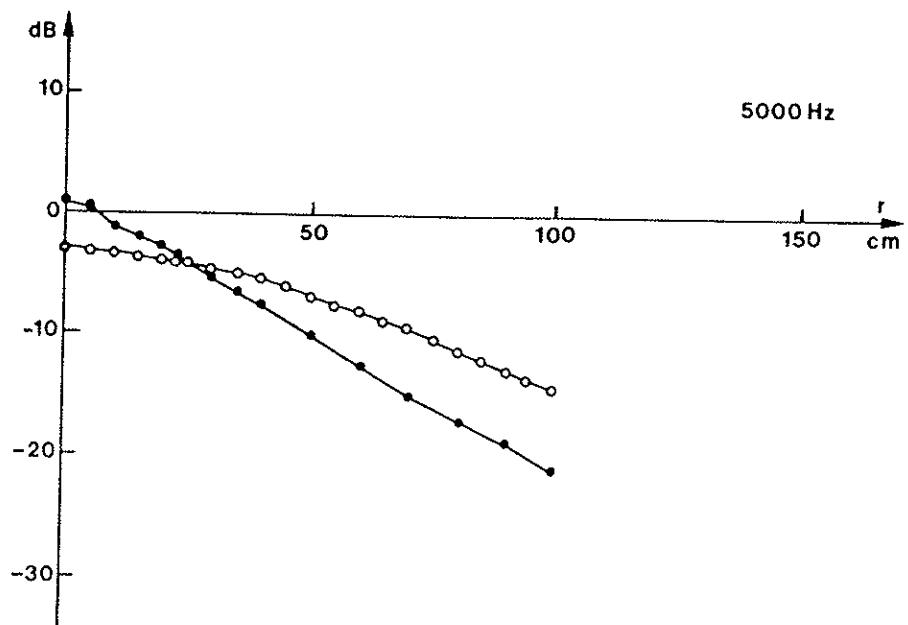
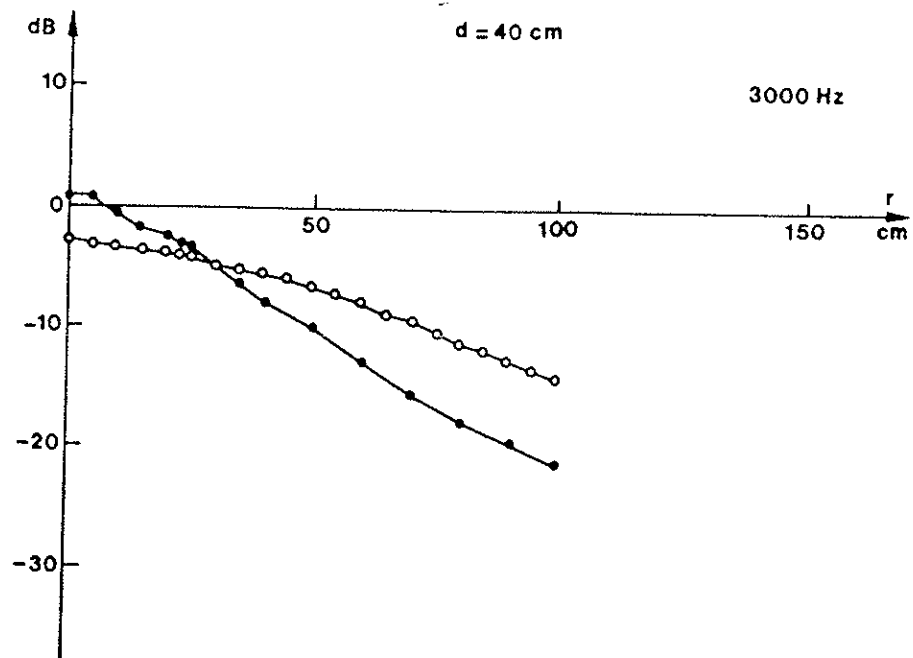


FIG. 40.

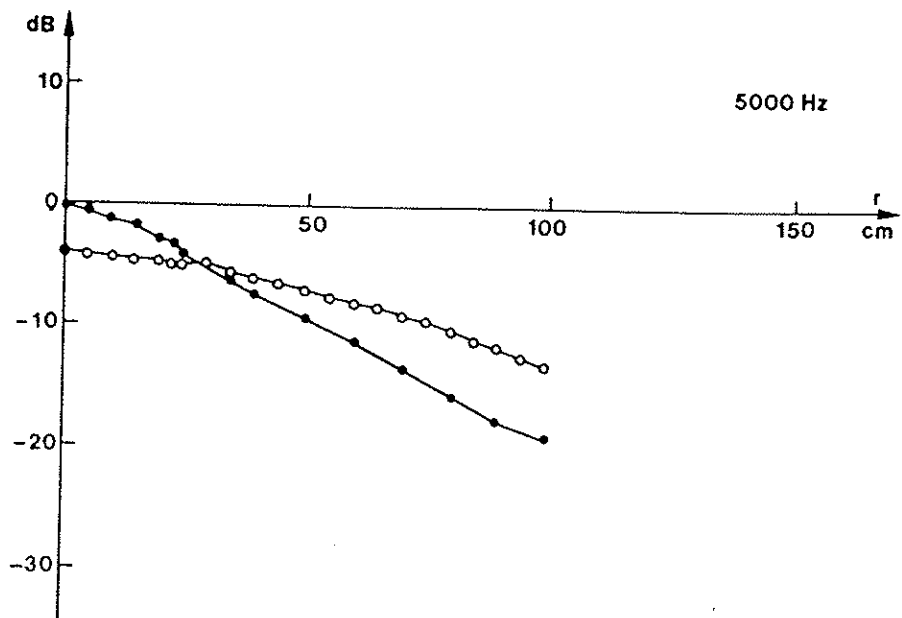
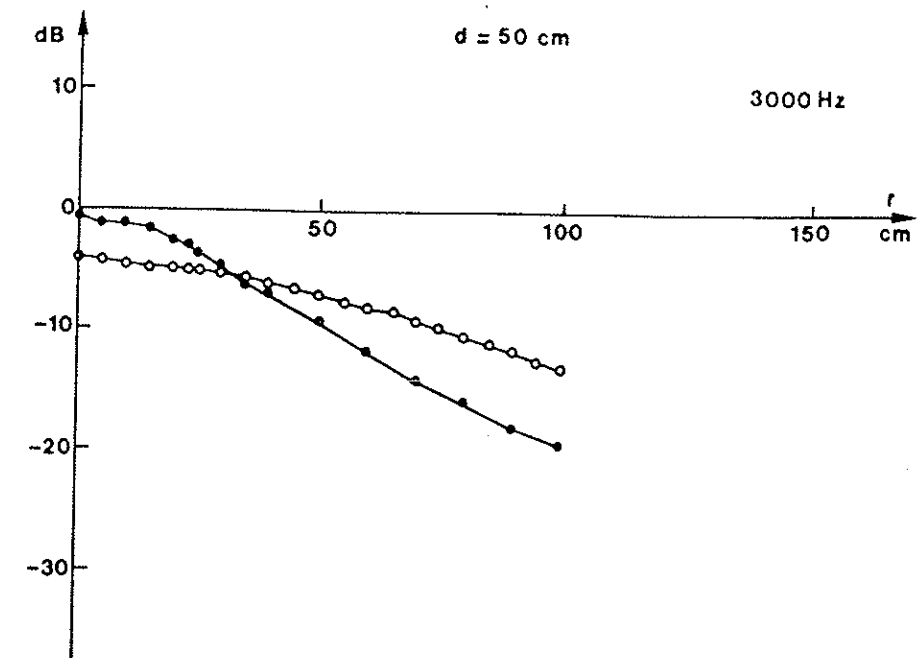


FIG. 41

**Contribution latérale expérimentale**

-0-0- Valeurs théoriques

-•-• Valeurs expérimentales

**Contribution latérale expérimentale**

**-0-0- Valeurs théoriques**

**-.-.- Valeurs expérimentales**

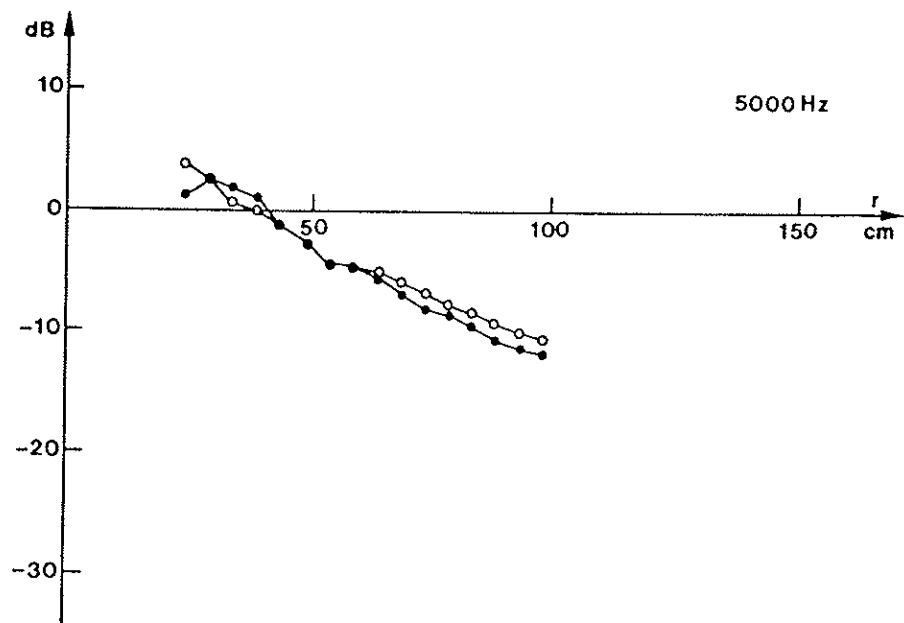
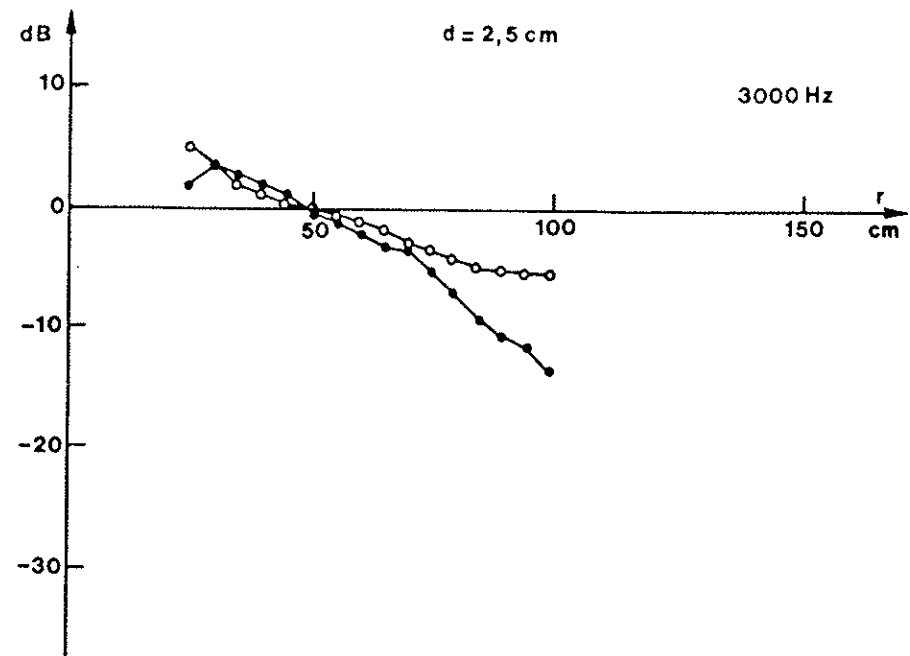


FIG. 42

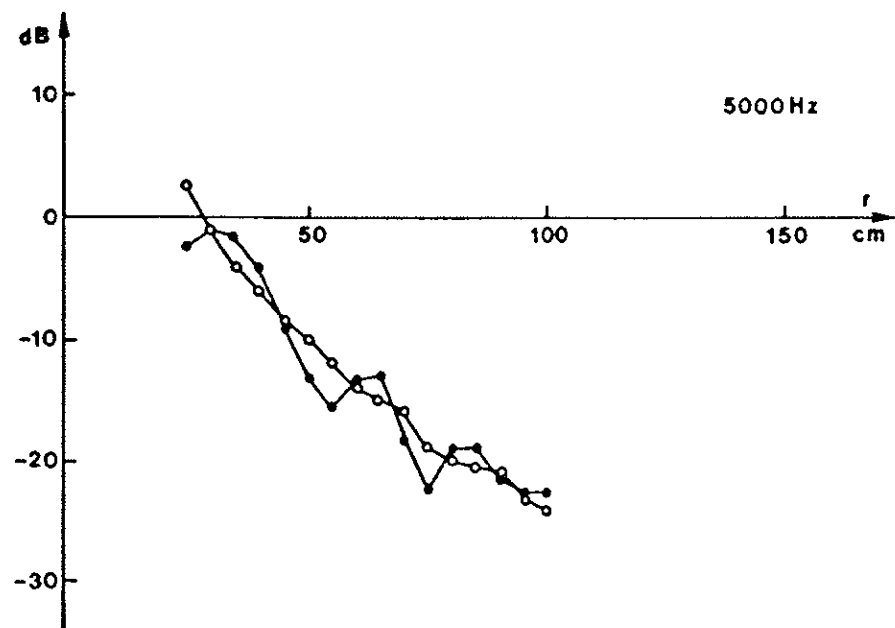
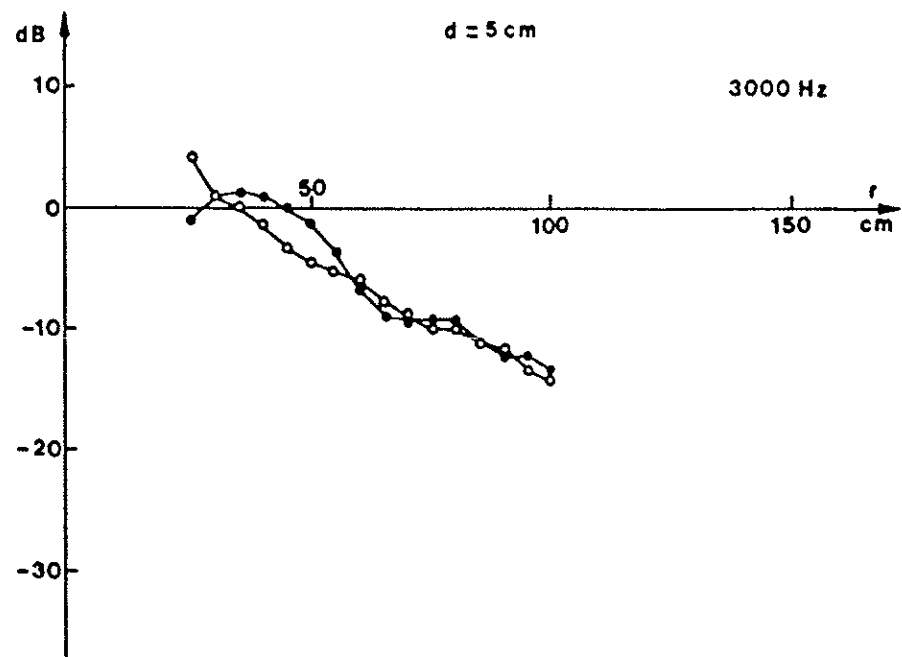


FIG. 43



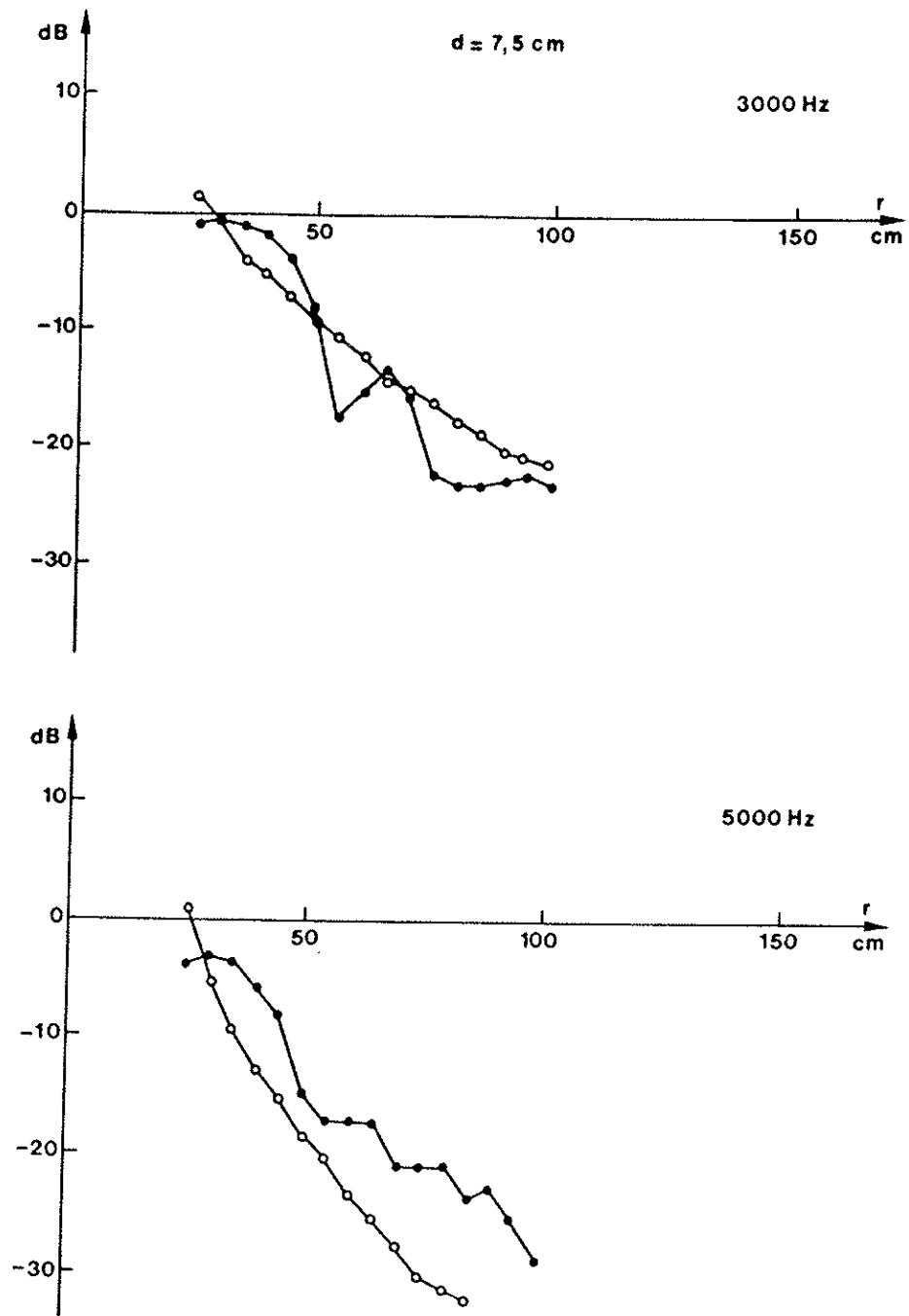


FIG. 44

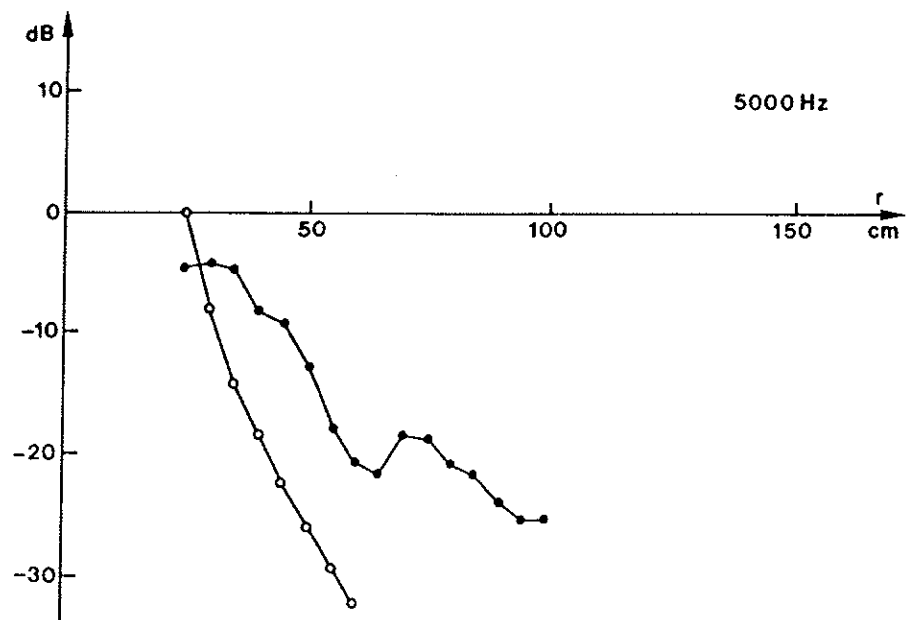
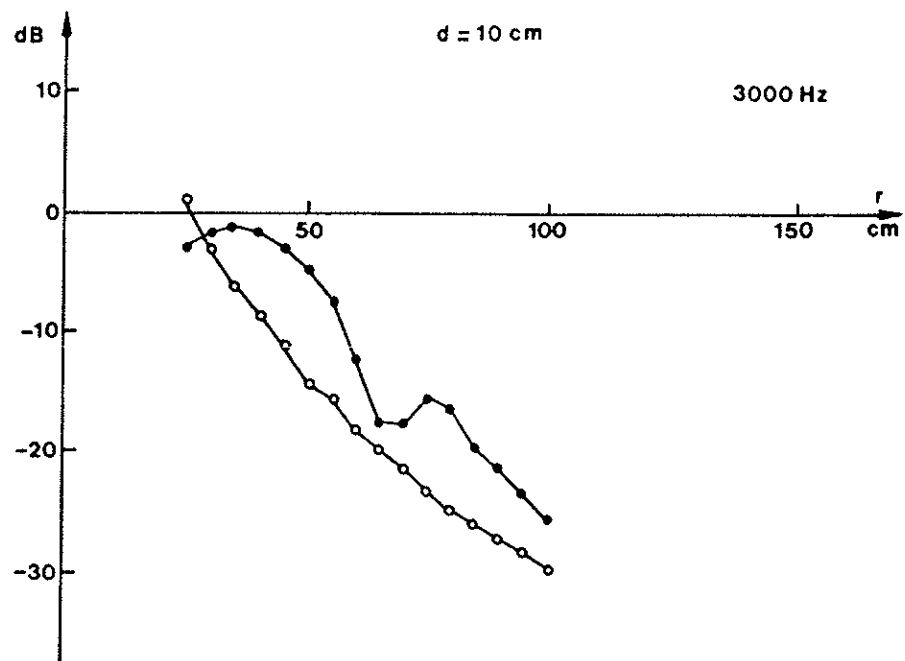


FIG. 45

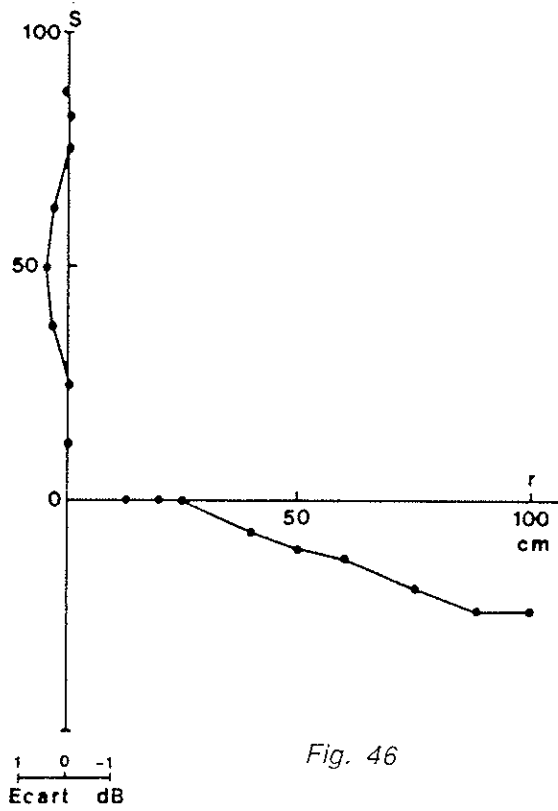


Fig. 46

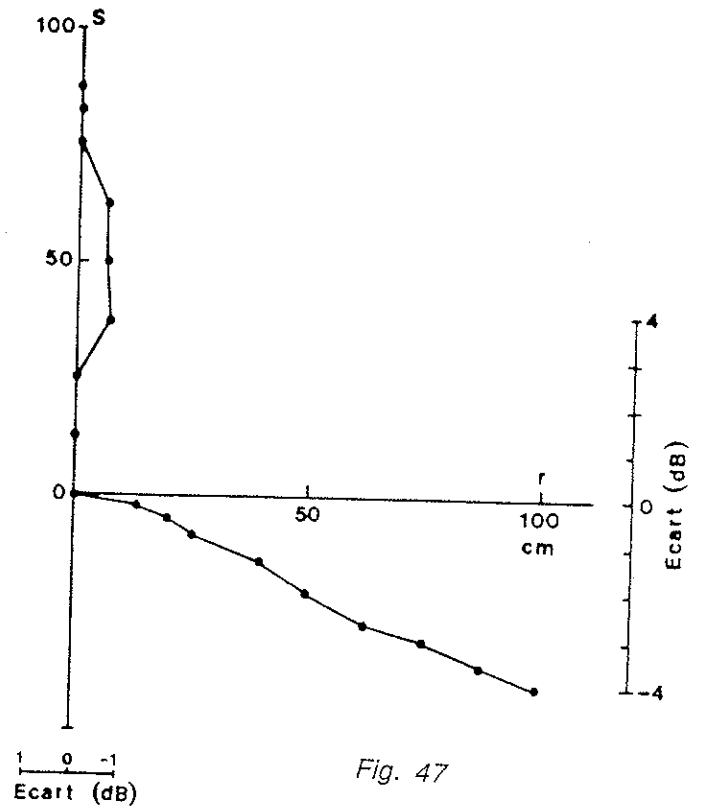


Fig. 47

Figures 46, 47: Mesures de directivité de la source (chambre sourde)

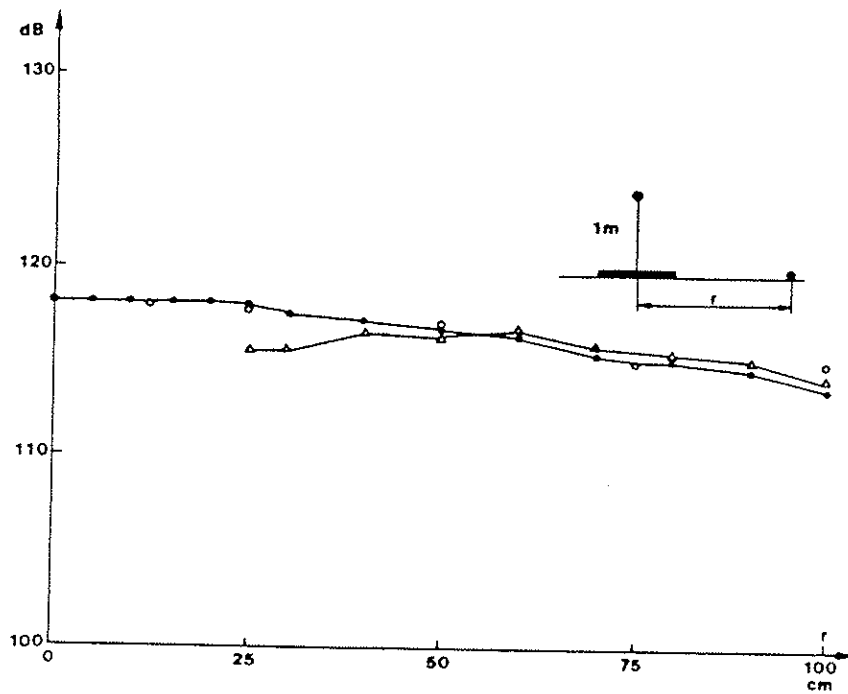


Figure 48: Etalonnage de la source en présence du plan d'eau.

#### IV - CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE.



#### IV - Conclusion de la première partie.

Nous avons vu que la théorie des rayons ne suffisait pas à une étude complète de la transmission acoustique à travers le dioptre.

En effet, elle fournit une expression du champ indépendante des caractéristiques de la source. Elle ne permet donc pas d'identifier la source à partir de données mesurées en un point quelconque d'observation. D'autre part, et c'est le plus important, elle ne permet pas d'étudier correctement un problème de discontinuité du champ (apparition d'ondes latérales pour des incidences sur-critiques). En ce sens cette théorie par sa simplicité, (trop grande approximation du phénomène physique) devient inadaptée quand on aborde la résolution de problèmes de transmission acoustique à travers un dioptre.

L'étude de la propagation acoustique à partir de la résolution de l'équation de Helmholtz a montré l'existence d'ondes inhomogènes pour des angles d'incidence supérieure à l'angle critique. Ces ondes ont une amplitude qui décroît exponentiellement suivant la perpendiculaire à l'interface et qui est de plus fonction de la longueur d'onde. Elles ne correspondent pas à une absorption du milieu car il y a conservation de l'énergie au passage du dioptre, avec un nombre d'onde réel. Ces ondes pénètrent d'autant mieux le milieu que la fréquence du signal émis est plus basse. En un point quelconque du champ réfracté, il y a donc interférences entre les deux contributions de l'onde (géométrique et latérale).

Il y a de ce fait une forte dépendance du champ par rapport à la fréquence et à la hauteur (caractéristiques de la source) et par rapport aux coordonnées du récepteur.

L'expérimentation réalisée en laboratoire (cuve acoustique) dans le cas du dioptre air-eau a montré le rôle joué par l'onde latérale, et les interférences présentes dans le champ de pression transmis, dans une gamme de fréquences audibles (à 3 et 5kHz).

L'examen des courbes d'isoatténuation du champ réfracté total théorique pour ces fréquences montre que jusqu'à des profondeurs respectives de 10cm et 7,5cm, des zones d'interférences marquées apparaissent, résultantes des ondes géométriques et latérales. Ces dernières sont prépondérantes pour de faibles profondeurs et des distances radiales correspondant à des incidences sur-critiques ( $r/h \gg n$ ). Dans les autres cas le champ total prend une configuration analogue au champ géométrique (ondes latérales négligeables).

Si les valeurs expérimentales de l'atténuation du niveau de pression acoustique dans le champ total accusent, parfois, des écarts non négligeables avec les valeurs théoriques, elles décrivent en revanche assez bien les interférences prédites par la théorie.

Nous obtenons dans l'ensemble un champ réfracté total expérimental en accord avec le modèle numérique. Les expériences simulant séparément chaque type d'onde, montrent bien les propriétés de ces ondes:

- atténuation de l'onde latérale exponentiellement suivant la profondeur et la fréquence émise de la source, conformément au Ch. II. 3.2;
- atténuation de l'onde géométrique uniquement en fonction des coordonnées du point d'observation (divergence géométrique seule, c'est à dire en  $1/r$ , indépendamment de la fréquence émise) (Cf. II. 3.2).

Le champ réfracté total dans le cas d'une source monochromatique se trouve parfaitement décrit à l'aide d'une approximation asymptotique (méthode du point col), d'où la bonne concordance entre champs expérimental et théorique. Cette approximation ne pourra plus être utilisée lors d'une source émettant en régime impulsionnel ou en large bande (Cf. remarques II.3.6 et (2.43.a, 2.47.a)).

Si les méthodes classiques ont permis d'aborder le problème en régime harmonique, celles-ci semblent être mal adaptées au cas non stationnaire. Il semble donc intéressant de prolonger cette étude au cas des régimes transitoires, en utilisant une méthode de résolution tenant compte, à la fois, des caractéristiques temporelle et fréquentielle du signal. En effet, ces ondes parcourant des trajets différents arrivent à des temps différents et subissent de plus une atténuation en fonction de la fréquence. Le prolongement naturel de cette étude au cas de signaux transitoires montre alors l'utilité d'utiliser une méthode de type temps-fréquence ou temps-échelle, en l'occurrence la transformée en ondelettes. La seconde partie de notre travail constitue une approche de ce type de problème. Le signal étudié sera alors décomposé en une somme de contributions élémentaires appelées "ondelettes". Le champ de pression transmis total sera alors calculé de façon exacte grâce aux propriétés, d'une part de la transformée en ondelettes et d'autre part de "l'ondelette analysante".

**Annexe 1 de la première partie:**

**Etude du champ transmis (cas de l'acoustique géométrique)**



## Annexe 1 de la première partie.

Etude du champ transmis. (cas de l'acoustique géométrique).

Coefficient de divergence géométrique-Taux de transmission.

Dans le cas de l'acoustique géométrique l'expression du rapport de l'intensité transmise à l'intensité incidente prise à une distance unité de la source s'écrit:

$$(A.1) \quad \frac{I_t}{I_i} = A(\theta) B(\theta)$$

où  $A(\theta)$  représente le coefficient de divergence géométrique (rend compte des "pertes" par divergence);  
 $B(\theta)$  représente le taux de transmission (rend compte des "pertes" au passage de l'onde à l'interface).

Nous allons étudier successivement ces deux coefficients.

### 1. Coefficient de divergence géométrique.

L'invariance du flux d'énergie  $F$  contenu dans un élément de faisceau, de volume  $\Omega$ , de sections  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  (cf. Fig.1), conformément au principe de la conservation de l'énergie, nous fournit une relation sur la variation de l'amplitude de l'onde. Cette variation n'est autre que le coefficient de divergence géométrique.

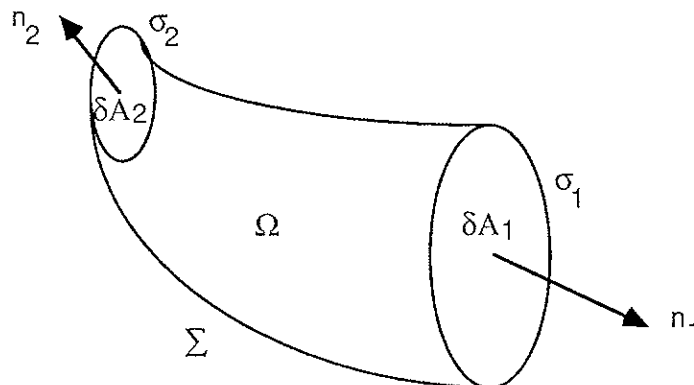


Figure 1: Représentation schématique du flux contenu dans une portion de faisceau.  $d'$  ondes.

Nous avons:

$$(A.2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad (\text{équation de conservation du flux d'énergie acoustique})$$

$$\text{où} \quad |\vec{F}_{\perp}| = \frac{|\vec{P}_2|^2}{2\rho c}$$

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky au volume  $\Omega$ , délimité par les surfaces fermées  $\delta A_1, \delta A_2, \Sigma$  avec  $\vec{n}_i$  normales extérieures aux surfaces, nous avons:

$$(A.3) \quad \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{\perp} d\Omega = \iint_{\delta A_1 + \delta A_2 + \Sigma} \vec{F}_{\perp} \cdot \vec{n} dA$$

De ces relations, nous pouvons déduire le rapport des aires des sections  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ :

$$(A.4) \quad \frac{\delta A_1}{\delta A_2} = \frac{|\vec{P}_2|^2}{|\vec{P}_1|^2} \quad \text{où } P = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi: \text{potentiel acoustique}$$

Soit le coefficient:

$$(A.5) \quad A(\theta) = \frac{\delta A_1}{\delta A_2} = \frac{|\psi_2|^2}{|\psi_1|^2} \quad \text{et} \quad \psi = |\psi| e^{i\Phi}$$

Nous pouvons déterminer le coefficient de divergence géométrique selon deux méthodes différentes: soit par référence à la source virtuelle [1,6,7] (que nous nommerons méthode du type 1), soit par référence à la source réelle [2-5,8] (méthode du type 2). Avant de nous intéresser à l'une de ces méthodes, nous allons en nous inspirant de [7] exprimer le coefficient dans le cas de milieux inhomogènes. Puis, en se plaçant sous certaines conditions, nous montrerons le lien entre cette méthode et celle utilisée en [1]. Nous décrirons brièvement une méthode du type 2 qu'utilisent Gerjuoy et Brekhovskikh.

### 1.1 - Cas de milieux non homogènes.

Dans le cas de milieux non homogènes, les rayons ne sont pas rectilignes. En se plaçant à une distance unité de la source S, nous avons (cf. fig 2.1) :

$$\delta V_S = \delta \theta$$

où  $\delta V_S$  représente l'aire délimitée par les rayons issus de S.

Une rotation  $\delta\alpha$  du faisceau de rayons proches issus de S, donnerait une distance par rapport à l'horizontale:

$$\delta X_S = \cos \theta \delta\alpha$$

Considérons le point R', situé à une distance  $r$  de la verticale issue de S. Un accroissement de l'angle de réfraction  $\varphi$ , entrainerait une diminution  $\delta r$  de  $r$ , mais une augmentation de  $\delta V_{R'}$ . Nous avons donc:

$$\sin \varphi = \frac{\delta V_{R'}}{-\delta r} \Rightarrow \delta V_{R'} = -\sin \varphi \delta r$$

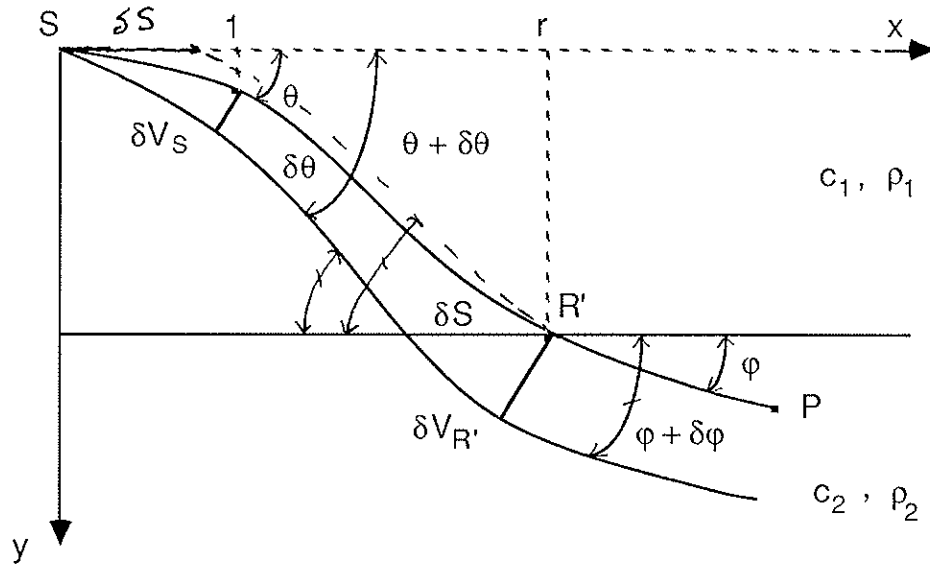


Figure 2.1 : Réfraction d'un faisceau acoustique dans le cas d'un milieu non homogène.

En considérant les distances par rapport à l'axe horizontal, nous avons pour une rotation  $\delta\varphi$ , un déplacement du point R' tel que:

$$\delta X_{R'} = r \delta\varphi \quad (r : \text{distance } SR' \text{ projetée sur l'axe horizontal})$$

En utilisant le principe de conservation de l'énergie (A.3), nous avons d'après la relation décrite en (A.5), le rapport des intensités acoustiques prises d'une part à une distance unité en S et d'autre part au point R' tel que:

$$(A.6) \quad \frac{I_{R'}}{I_S} = A(\theta) = \frac{\delta V_S}{\delta V_{R'}} \frac{\delta X_{R'}}{\delta X_S} = - \frac{\cos \theta}{r \sin \varphi} \frac{\delta \theta}{\delta r}$$

Pour de petites variations d'angle, on assimile le rapport  $\delta r/\delta\theta$  à la dérivée  $dr/d\theta$ , d'où l'expression du coefficient de divergence :

$$(A.7) \quad A(\theta) = - \frac{\cos \theta}{r \sin \varphi} \frac{d\theta}{dr}$$

### 1.2. - Cas de milieux fluides homogènes. (méthode de type 1)

#### a - Coefficient référencé par rapport au déplacement de la source virtuelle.

Si l'on considère le déplacement de la source virtuelle  $S'$ , nous voyons que l'aire  $dA_2$  prise au point d'observation  $P$ , est engendrée par le faisceau réfracté d'angle  $d\varphi$ , issu de  $S'$ . Le centre de rotation de cette aire n'est autre que le point  $S''$  (intersection du prolongement de  $S'$  avec la verticale issue de la source réelle  $S$ ), (cf.fig 2.2).

En considérant l'aire  $dA_1$  prise à une distance unité de  $S$  à l'intérieur du faisceau incident, limité par les deux rayons adjacents d'angle  $d\theta$ , le coefficient de divergence n'est autre que le rapport de ces aires dû à la variation de l'angle solide. L'originalité de la méthode de type 1 est de déterminer un coefficient de divergence dépendant de la distance de la source virtuelle au point d'observation, soit  $S'P = L_1$ , et de la distance centre de rotation-récepteur, soit  $S''P = L_2$ .

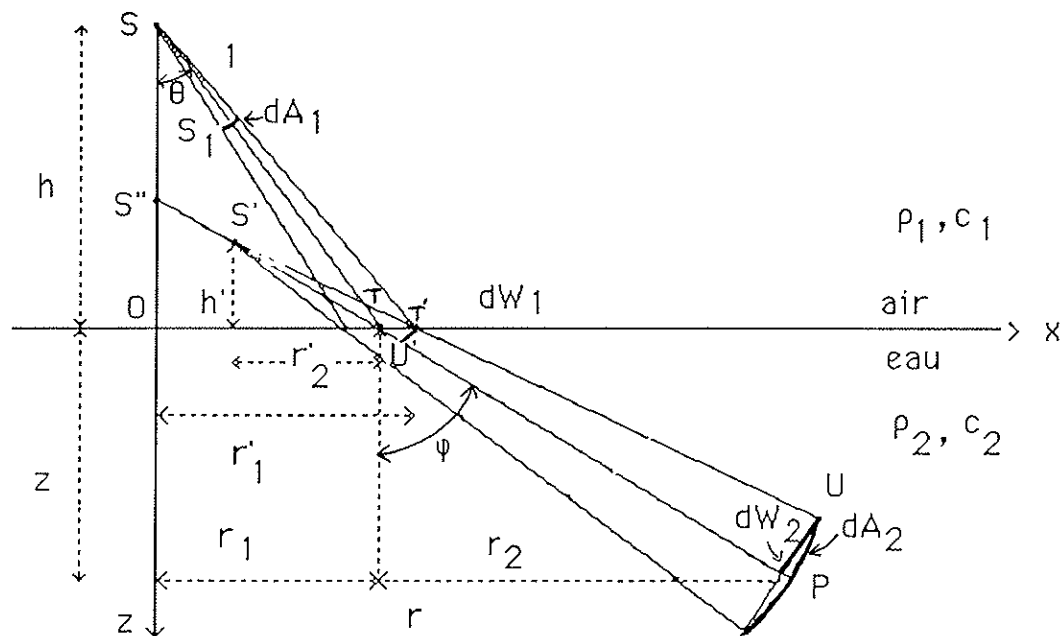


Figure 2.2: Représentation graphique de la réfraction d'un faisceau acoustique sur le dioptré air-eau.

Nous avons donc :

$$(A.8) \quad A^{(1)}(\theta) = \frac{dA_1(S_1)}{dA_2(P)}$$

$dA_1(S_1)$  étant calculée à une distance unité de S au point  $S_1$  et  $\Omega$  étant l'angle solide:

$$\begin{aligned} \Omega &= 2\pi (1 - \cos \theta) \Rightarrow d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \\ &\Rightarrow dA_1(S_1) = r_0^2 d\Omega \\ &\Rightarrow dA_1(S_1) = d\Omega|_{r_0=1} \end{aligned}$$

$$(A.9) \quad dA_2(P) = 2\pi L_1 \sin \varphi L_2 d\varphi$$

Soit  $n$  le rapport des célérités des milieux,  $n = \frac{c_1}{c_2}$ , l'expression du coefficient de divergence géométrique est donc, en utilisant la loi de Snell-Descartes (2.1) ( $\sin \theta = n \sin \varphi$ ) :

$$(A.10) \quad A^{(1)}(\theta) = \frac{n^2}{L_1 L_2} \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}$$

### 1.2.-b - Caustique virtuelle. (Lieu géométrique de S')

Nous avons les relations suivantes (cf. fig 2.2) :

$$(A.11) \quad \begin{aligned} L_1 &= \frac{h' + z}{\cos \varphi} & r &= h \operatorname{tg} \theta + z \operatorname{tg} \varphi \\ L_2 &= \frac{r}{\sin \varphi} & r_1 &= h \operatorname{tg} \theta, \quad r'_2 = h' \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}$$

Une variation d'angle  $\delta\theta$  de  $r_1$  entraîne une variation de même grandeur pour  $r'_2$ , soit  $\delta r_1 = \delta r'_2$ , d'où :

$$\frac{dr_1}{d\theta} = \frac{dr'_2}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\theta}$$

La source virtuelle  $S'$  se trouve à une distance  $h'$  variable, telle que :

$$(A.12) \quad h' = h n \frac{\cos^3 \varphi}{\cos^3 \theta}$$

Le passage de l'expression (A.7) à l'expression (A.10) est évident en utilisant les relations (A.11) et (A.12). Le coefficient diffère uniquement par le fait qu'on référence les angles par rapport à l'horizontale (analogie avec l'optique géométrique des rayons optiques) et non par rapport à la verticale.

### 1.3 - Coefficient référencé par rapport à la source ponctuelle réelle. (méthode de type 2)

Dans ce cas, on considère le faisceau engendré par deux rayons adjacents proches (cf. fig. 2.2), ST et ST' se réfractant, selon le principe de l'optique géométrique, respectivement en T et T' pour donner les rayons TP et TU suivant les angles  $\theta$ ,  $\theta+d\theta$  (incidence) et  $\varphi$ ,  $\varphi+d\varphi$  (réfraction). Nous avons d'après (A.2) et (A.3), conservation de l'énergie à l'intérieur du faisceau réfracté, au passage du dioptré.

Le rapport des aires des anneaux engendrées par la rotation des segments U'T' et UP, orthogonaux au rayon réfracté TP, respectivement en U' et P, est égal d'après (A.5), au carré de l'inverse du rapport des amplitudes de l'onde. Il détermine ainsi le coefficient  $A(\theta)$  de la divergence géométrique du faisceau dans l'eau, où  $\theta$  représente l'angle d'incidence. On notera ici, les aires référencées par rapport à la source réelle par  $dW_j$  au lieu de  $dA_j$ .

Soit T<sup>-</sup> le point d'observation proche de T, mais dans le milieu 2 :

$$(A.13) \quad \frac{dW_1(T^-)}{dW_2(P)} = \frac{r'_1 U'T'}{r UP} \quad , \quad \text{où} \quad r'_1 = OT' \quad , \quad r = OP$$

or

$$r'_1 \approx r_1 \quad \text{où} \quad r_1 = OT = h \tan \theta \quad \text{avec} \quad TT' = \frac{d(OT)}{d\theta} d\theta$$

Nous avons les relations géométriques suivantes :

$$(A.14) \quad \begin{aligned} U'T' &= TT' \cos \varphi \\ PU &= U'T' + TP d\varphi \quad \text{où} \quad TP d\varphi \text{ est l'arc de cercle de rayon TP et d'angle } d\varphi \\ TP &= \frac{z}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

$$\text{soit: } (A.15) \quad A^{(2)}(\theta) = \frac{dW_1(T^-)}{dW_2(P)} = \frac{h \tan \theta}{r \left( 1 + \frac{TP d\varphi}{U'T'} \right)}$$

L'expression du coefficient de divergence géométrique, noté ici  $A^{(2)}$  est donc dans ce cas :

$$(A.16) \quad A^{(2)}(\theta) = \frac{h^2 \tan \theta \cos^3 \varphi}{r \left( h \cos^3 \varphi + \frac{z}{n} \cos^3 \theta \right)}$$

$$\text{avec } n \cos \varphi = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}, \quad \text{d'après (2.1)}$$

La différence entre les expressions (A.10) et (A.16) vient de ce que l'on considère les aires des sections d'une part dans le même milieu, à une distance source-interface,  $ST = \frac{h}{\cos \theta}$  pour  $dW_1$ , et d'autre part à une distance unité  $SS_1$  de la source, soit des aires prises de part et d'autre du dioptré. Nous avons :

$$(A.17) \quad A^{(1)}(\theta) = \frac{dA_1(S_1)}{dA_2(P)}$$

$$(A.18) \quad A^{(2)}(\theta) = \frac{dW_1(T^-)}{dW_2(P)}$$

Or dans le second cas, nous avons à la frontière, un changement d'intensité accompagnant un changement de l'aire engendrée par le faisceau. Soient les relations :

$$(A.19) \quad \begin{aligned} dW_i &= dW \cos \theta && (\text{faisceau incident}) \\ dW_t &= dW \cos \varphi && (\text{faisceau transmis}) \end{aligned}$$

Les coefficients sont donc reliés par l'expression :

$$(A.20) \quad A^{(1)}(\theta) = \frac{A^{(2)}(\theta) \cos \theta}{(ST)^2 \cos \varphi}$$

Suivant le type de raisonnement adopté et les hypothèses faites pour calculer le coefficient de divergence, on exprimera différemment le taux de transmission.

## 2 - Taux de transmission.

Le taux de transmission n'est autre que le rapport de l'intensité de l'onde réfractée sur l'intensité de l'onde incidente à l'interface  $\Sigma$ . On le déduit des conditions de continuité de

la pression et de la vitesse normale à la frontière. En considérant un faisceau arrivant sous incidence oblique, dans le cas d'une onde plane, nous pouvons déterminer l'expression de  $B(\theta)$  ( cf (A.1) ). Nous étudierons dans un second temps, le champ créé par une source ponctuelle, en utilisant le potentiel acoustique de l'onde sphérique en termes d'amplitude et de phase. Ceci nous permettra d'écrire l'expression du potentiel réfracté en fonction du potentiel incident. Nous retrouverons le coefficient de divergence en accord avec celui défini en 1.3, et celui de la transmission. Cette formulation, tout en restant dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique (limite de la loi de Snell-Descartes), permet l'étude générale de la transmission de l'onde sphérique à travers un dioptre pour un point quelconque d'observation.

#### Taux de transmission (onde plane).

Les conditions aux limites pour la pression et la vitesse normale s'écrivent, en considérant l'interface  $\Sigma$  en  $z = 0$ , avec  $z > 0$  dans le milieu 1, et  $z < 0$  pour le milieu 2 :

$$(A.21) \quad [(P_i + P_r)_1 = (P_t)_2]_{\Sigma}$$

$$[\rho_2 \frac{dP_1}{dz} = \rho_1 \frac{dP_2}{dz}]_{\Sigma}$$

$$(A.22) \quad \text{En posant :} \quad m = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad n = \frac{c_1}{c_2}$$

$m$  rapport des masses volumiques des milieux respectivement de l'eau et de l'air.

Nous en déduisons le rapport de la pression transmise  $P_t$  sur la pression incidente  $P_i$ :

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{2 m \cos \theta}{m \cos \theta + n \cos \varphi}$$

Le taux de transmission  $B(\theta)$  étant le rapport des intensités, nous avons suivant la relation (A.2):

$$B(\theta) = \frac{n P_t^2}{m P_i^2}$$

Or dans le cas d'un faisceau de rayons infiniment proches issu de  $S$ , faisant un angle d'incidence  $\theta$  par rapport à la verticale et traversant une frontière plane en faisant un angle de réfraction  $\varphi$ , nous avons à la frontière un changement d'intensité accompagnant une réduction de la puissance énergétique (une partie étant réfléchi l'autre transmise), soit d'après la relation (A.19), un taux de transmission :



$$(A.23) \quad B^{(1)}(\theta) = B(\theta) \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} = \frac{4 n m \cos \theta \cos \varphi}{(m \cos \theta + n \cos \varphi)^2}$$

Nous pouvons écrire à l'aide de (A.23) et (A.10) l'intensité de l'onde réfractée en fonction de l'intensité de l'onde incidente mesurée à une distance unité, soit :

$$(A.24) \quad I_t = \frac{4n^3 m \cos^2 \varphi}{L_1 L_2 (m \cos \theta + n \cos \varphi)^2} I_i$$

### 3. - Expression de l'onde réfractée au point d'observation P.

#### 3.1 - a - Amplitude.

Dans la représentation de l'onde en terme d'amplitude et de phase (A.5), nous avons au point d'observation T se trouvant sur l'interface  $\Sigma$  (fig 2.2), les conditions classiques de continuité du champ :

$$(A.25) \quad \begin{aligned} \psi_2(T^-) &= \frac{\psi_1(T^+)}{m} \\ \psi_1(T^+) &= \psi_i(T^+) + \psi_r(T^+) \end{aligned}$$

où nous avons posé:  $T^+$  le point d'observation proche de T dans le milieu 1

$T^-$  le point d'observation proche de T dans le milieu 2

$\psi_1$  le potentiel acoustique de l'onde dans le milieu 1

$\psi_2$  le potentiel acoustique de l'onde réfractée, milieu 2

or nous avons :

$$(A.26) \quad \psi_1(T^+) = \psi_i(T^+) [1 + D(\theta)] , \text{ où } D(\theta) \text{ représente le coefficient de réflexion.}$$

La source étant ponctuelle, nous avons des ondes incidentes sphériques. Soit l'expression:

$$(A.27) \quad \psi_i = |\psi_i| e^{i\phi} \quad \text{et} \quad |\psi_i| = \frac{\mathcal{A}}{R} \quad \text{avec} \quad R = ST = \frac{h}{\cos \theta}$$

(où  $\mathcal{A}$  est l'amplitude de l'onde incidente)

Si on pose  $\mathcal{A} = 1$ , nous avons :

$$(A.28) \quad \psi_1(T^+) = \frac{|1 + D(\theta)|}{R}$$

Soit d'après (A.26) , (A.27) , (A.28) :

$$(A.29) \quad \begin{aligned} \psi_2(T^-) &= \frac{\psi_1(T^+)}{m} \\ &= \frac{|1 + D(\theta)|}{mR} e^{i\phi(T^-)} \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad |\psi_2(T^-)| = \frac{|1 + D(\theta)|}{mR}$$

Posons  $T(\theta) = \frac{|1 + D(\theta)|}{m} = \frac{2 \cos \theta}{m \cos \theta + n \cos \varphi}$  coefficient de transmission pour une onde plane en incidence quelconque.  $D(\theta)$  représente le coefficient de réflexion.

Nous avons donc dans le milieu 2, les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_2(T^-) &= |\psi_2(T^-)| e^{i\phi(T^-)} \\ \psi_2(P) &= |\psi_2(P)| e^{i\phi(P)} \end{aligned}$$

or d'après (A.5) et (A.15) (Cf. fig. 2.2) nous pouvons écrire la relation :

$$(A.30) \quad \frac{|\psi_2(T^-)|}{|\psi_2(P)|} = \left[ \frac{dW_2(P)}{dW_1(T^-)} \right]^{1/2} = [A^{(2)}(\theta)]^{-1/2}$$

L'expression finale du champ réfracté au point d'observation P est donc :

$$(A.31.a) \quad \psi_2(P) = |\psi_2(T^-)| [A^{(2)}(\theta)]^{1/2} e^{i\phi(P)}$$

$$\psi_2(P) = \frac{|1 + D(\theta)|}{mR} [A^{(2)}(\theta)]^{1/2} e^{i\phi(P)}$$

$$\text{avec} \quad |\psi_2(P)| = \frac{|1 + D(\theta)|}{mR} [A^{(2)}(\theta)]^{1/2}$$

$$(A.31.b) \quad = 2 \frac{\sqrt{\sin \theta}}{(m \cos \theta + n \cos \varphi) \sqrt{r[h \cos^3 \varphi + \frac{z}{n} \cos^3 \theta]}}$$

### 3.1 - b - Phase

La phase au point d'observation P, est déterminée par le trajet optique du rayon SP se réfractant à l'interface au point T selon la loi (2.1) :

$$(A.32) \quad n = \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_2}{k_1}, \quad k_i \text{ représente le nombre d'onde dans le milieu } i.$$

Soit un terme de phase :

$\phi_P = k_1 (ST + TP)$  or d'après (2.1) , (A.14), (A.32) nous pouvons écrire :

$$(A.33) \quad \phi_P = k_1 \left( \frac{h}{\cos \theta} + \frac{n^2 z}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right) \quad \text{et } r = z \operatorname{tg} \varphi + h \operatorname{tg} \theta \quad (\text{d'après A.11})$$

r distance horizontale entre le récepteur et l'axe vertical issu de la source S.

**Annexe 2 de la première partie:**  
**Approximation asymptotique "haute-fréquence"**

## Annexe 2 de la première partie.

### Approximation asymptotique haute fréquence d'intégrales oscillantes

Nous devons intégrer une expression de la forme :

$$(A.1) \quad \psi(\beta) = \int_{\Gamma} F(\mu) e^{\beta g(\mu)} d\mu \quad , \quad |\beta| \gg 1$$

Si  $\Gamma$  est un contour dans le plan complexe,  $F$  et  $g$  des fonctions analytiques de la variable complexe  $\mu$ , indépendantes du paramètre  $\beta$  et régulières dans le plan, et si  $g$  présente des dérivées qui s'annulent en certains points, nous pouvons suivant le comportement de  $\psi(\beta)$  lorsque  $|\beta|$  tend vers l'infini, approcher l'intégrale sous forme d'une série asymptotique. En utilisant les propriétés des fonctions analytiques (avec analyse des points singuliers), nous pouvons déformer le chemin d'intégration dans le plan complexe sans changer la valeur de l'intégrand. L'intégrale est alors entièrement déterminée sur de petites portions comparativement au contour. Ces portions sont fonction des points selle, zéro de la fonction dérivée de  $g$  où l'exponentielle, pour de grandes valeurs de  $\beta$ , prend sa valeur maximum. Le nouveau contour suit donc les lignes de plus grandes pentes issues du ou des points selle, si on choisit  $\text{Im}[\beta g(\mu)]$  constant. La décroissance de l'exponentielle le long de ces lignes est rapide, sa phase constante, et le chemin d'intégration se limite au voisinage de ces points.

Cette méthode s'appelle méthode de Debye ou 'steepest descent'. [9],[10].

Le nouveau trajet d'intégration  $\Gamma'$  vérifie certaines propriétés géométriques qui se résument par les équations ci-dessous. Notons  $\text{Im}$  la partie imaginaire,  $\text{Re}$  la partie réelle de la fonction analytique  $g(\mu)$  où  $\mu$  est le nombre complexe,  $\mu = x+iy$  :

$$(A.2) \quad \begin{aligned} \text{Im}[g(\mu)] &= \text{Im}[g(\mu_0)] = \text{cste} \quad , & \text{Re}[g(\mu_0)] &\text{ est maximum sur } \Gamma' \\ \frac{dg(\mu)}{d\mu} &= 0 \text{ en } \mu_0 \quad , & \mu_0 &\text{ le point selle} \\ \frac{\partial^2 \text{Re}[g(\mu)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \text{Re}[g(\mu)]}{\partial y^2} &= 0 \quad , & &\text{ (équation de Laplace vérifiée)} \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \frac{dg(\mu)}{d\mu} = \frac{\partial \text{Re}[g(\mu)]}{\partial x} - i \frac{\partial \text{Re}[g(\mu)]}{\partial y} \quad , \quad \text{(conditions de Cauchy)}$$

Soit l'équation des points pour le nouveau chemin  $\Gamma'$  :

$$(A.3) \quad g(\mu) = g(\mu_0) - s^2, \quad s \in \mathbf{R}, \quad \text{abscisse curviligne suivant } \Gamma$$

$g(\mu)$  décroît de part et d'autre de  $s$  et nous avons suivant cette nouvelle variable :

$$\phi(s)ds = F(\mu)d\mu, \quad s \ll 1 \quad \text{et} \quad \beta \gg 1$$

Nous devons développer  $s^2$  en puissance de  $\mu - \mu_0$ , puis inverser cette série, pour déterminer le développement de Taylor de l'expression  $\phi(s)$  autour de  $s$ .  $\phi(s)$  s'exprime alors en fonction des expressions de  $g(\mu)$  et  $F(\mu)$  et de leurs dérivées sous forme de séries asymptotiques.  $\beta$  étant grand, on suppose que  $\phi(s)$  varie suffisamment lentement comparée à l'exponentielle et qu'elle est régulière dans un voisinage de  $s=0$ . Cette série converge en effet vers  $\phi$  dans un cercle centré en  $s=0$  et de rayon égal à la distance de la plus proche singularité de  $\phi(s)$  [9],[10].

Soit l'expression au deuxième ordre d'après (2.30) et (A.1) :

$$(A.4.a) \quad \psi(\beta) = e^{i\beta \text{Re}[g(\mu_0)]} \sqrt{\frac{\pi}{i\beta}} \left[ \phi(0) + \frac{1}{4\beta} \phi''(0) + \dots + \dots \right]$$

$$\phi(s) = \phi(0) + \phi'(0)s + \phi''(0) \frac{s^2}{2} + \phi^{(3)}(0) \frac{s^3}{3!} + \dots$$

et

$$\phi(0) = \sqrt{-\frac{2}{\text{Re}[g''(\mu_0)]}} F(\mu_0)$$

$$\frac{\phi''(0)}{2} = \phi(0) \left( \frac{g^{(3)}F'}{g'^2 F} + \frac{g^{(4)}}{4 g'^2} - \frac{5}{12} \frac{g^{(3)2}}{g'^3} - \frac{F''}{Fg''} \right)$$

ou encore :

$$(A.4.b) \quad \psi(\beta) = e^{i\beta \text{Re}[g(\mu_0)]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(2n)}(0)}{(2n)!(i\beta)^{n+1/2}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler.

Si le chemin d'intégration passe au voisinage d'un point de branchement (ou pôles), nous devons ajouter à cette expression l'intégrale au bord d'une coupure appropriée en ce

point (ou résidus). Il est à remarquer que les fonctions  $F$  et  $g$  doivent être régulières sur le domaine contenant les chemins d'intégration alors que  $f$  doit être régulière dans un voisinage de  $s=0$ .

Lorsqu'il n'est pas possible d'explicitier l'inversion du développement de  $\mu-\mu_0$  en terme de puissance de  $s$ , nous remplacerons cette méthode par celle du "point col" [9]. En supposant que  $\mu_0$  est un zéro simple, l'équation (A.3) devient :

$$(A.5.a) \quad g(\mu) \approx g(\mu_0) + g''(\mu_0) \frac{(\mu-\mu_0)^2}{2}$$

et

$$(A.5.b) \quad g''(\mu_0) \frac{(\mu-\mu_0)^2}{2} < 0 \text{ et réelle.}$$

Le chemin de 'steepest descent' (lignes de plus grandes pentes) est remplacé par celui d'une droite passant au voisinage de  $\mu_0$ , pour laquelle la condition (A.5.b) est vérifiée. La direction de cette droite, appelée direction critique à  $\mu_0$ , est tangente aux deux directions des lignes de plus grandes pentes issues de ce point.

Posons sous forme complexe :

$$\mu-\mu_0 = \rho_1 e^{i\theta_1} \quad \text{et} \quad \frac{g''(\mu_0)}{2} = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad \rho_2 > 0$$

Suivant la condition (A.5.b) :  $\theta_1 = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}$ . Si  $g''(\mu_0)$  est réelle négative,  $\theta_1$  est égal à  $\pm\pi/4$ . Cela nous donne les deux directions des lignes de niveau issues de  $\mu_0$ . En effectuant le changement de variable de  $\mu$  en  $u$  tel que  $u^2 = \rho_1^2 \rho_2$ , sous certaines conditions (condition de convergence de la série (A.5) et domaine de validité de  $\rho_1$ ), les bornes de l'intégrale peuvent être remplacées par  $\pm\infty$  [9]. Nous obtenons alors l'expression (A.1) à l'ordre 1.

En effectuant un changement de la variable d'intégration, nous verrons qu'il est possible de passer de l'intégrale dans le plan complexe à une intégrale dans le plan réel soit dans ce cas :

$$(A.6) \quad \psi(\beta) = \int_{\Gamma_1} F(u) e^{\beta g(u)} du, \quad \beta \gg 1$$

$\Gamma_1$  pouvant être l'axe réel  $]-\infty, +\infty[$  ou une partie finie  $]a, b[$  de  $\mathbf{R}$ , les fonctions  $g$  et  $F$  vérifient les mêmes conditions que précédemment et celle de régularité sur le domaine contenant  $\Gamma_1$ .

La fonction  $g(u)$  est alors réelle sur l'axe réel ( $u$  nouvelle variable) et peut posséder des points stationnaires  $u_0$ . La contribution principale de cette intégrale provient de ces points qui annulent  $g'(u)$  et ceci en supposant le paramètre  $\beta$  grand. Le principe de cette méthode est analogue au précédent. Par analogie, cette méthode s'appelle méthode de phase stationnaire. L'expression est alors par rapport à (A.4), au premier ordre :

$$(A.7) \quad \psi(\beta) \approx e^{i\beta g(u_0)} e^{+i\pi/4 \operatorname{sign}[g''(u_0)]} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \zeta(0) + o(\beta^{-1})$$

$$\zeta(0) = \sqrt{\frac{2}{|g''(u_0)|}} F(u_0)$$

$$\frac{\zeta''(0)}{2 \zeta(0)} = (g'')^{-1} \left( \frac{g^{(3)} F'}{g'' F} + \frac{g^{(4)}}{4 g''} - \frac{5}{12} \frac{g^{(3)2}}{g''^2} - \frac{F''}{F} \right)$$





**Annexe 3 de la première partie:**

**Mise en évidence expérimentale des ondes latérales dans le  
cas de la transmission acoustique.**

**Mise en évidence expérimentale des ondes latérales  
dans le cas de la transmission acoustique à travers  
le dioptre plan air-eau.**

G. Saracco, G. Corsain, C. Gazanhes,  
R. Holtzer, J. Léandre.

C.N.R.S.-L.M.A., Equipe Ultrasons, 31 Ch. J. Aiguier 13402 Marseille cedex 09

### RÉSUMÉ

Nombreux sont les travaux se rapportant à l'étude de la propagation acoustique de signaux aussi bien monochromatiques que transitoires, à travers un milieu fluide inhomogène. Ces travaux sont souvent théoriques, difficiles à relier à une réalisation expérimentale. Notre étude a pour but de mettre en relation des résultats numériques et théoriques avec des résultats issus d'une expérimentation. Nous considérerons ici, le cas d'une source ponctuelle monochromatique et nous traiterons le cas du dioptre plan air-eau. On montrera expérimentalement, par l'introduction de plans absorbants, l'existence et les propriétés de différentes contributions (géométrique et latérale) intervenant dans le champ réfracté total en accord avec les résultats théoriques simulés. L'étude du champ de pression transmis total montrera, conformément à l'étude théorique, des zones d'interférences dépendant de la fréquence émise par la source et le rôle que peut jouer dans certains cas, l'onde latérale.

### SUMMARY

A lot of work has been done on acoustic propagation through an inhomogeneous fluid, both for monochromatic and transient signals. These works are often theoretical and far from experiment. The aim of our study is to link theoretical and numerical results to results obtained from an experiment. We consider here the case of a monochromatic point-source. Experimentally, we show, by introduction of absorbing planes the existence and the properties of the different contributions (geometric and lateral) that intervene in the total refracted field, in accord with simulated theoretical results, with a plane interface air-water. The study of the total transmitted pressure field points out, in accordance to theoretical studies, some interference regions dependent on the frequency emits by the source and the importance that lateral wave can play in particular cases.

#### 1-Propagation de signaux acoustiques monochromatiques à travers une interface plane.

s'intéresse au comportement de la pression acoustique transmise.

##### 1.1-Position du problème.

L'étude théorique de la transmission d'ondes sphériques monochromatiques, à travers le dioptre plan air-eau a montré l'existence de différentes contributions intervenant dans la composition du champ de pression [1-5]:

- les ondes réfractées directes ou géométriques, permettant de retrouver la géométrie de la source en accord avec les lois de Snell-Descartes;

- les ondes dites de "surface" ou latérales, ondes inhomogènes intervenant pour des incidences sur-critiques et que la théorie des rayons ne peut mettre en évidence.

Sous les hypothèses de mer calme (interface plane) et de grandes profondeurs, la diffusion engendrée par l'état de surface et les réflexions multiples (fond et interface) peuvent être négligées (Cf. fig.4).

Ce problème peut se définir de façon générale comme tridimensionnel en espace. Deux milieux fluides considérés comme homogènes et isotropes sont séparés par une interface plane. Dans le milieu 1 ( $z < 0$ ) de plus faible célérité  $c_1$  (l'air), à une hauteur fixe  $-h$ , se trouve une source ponctuelle monochromatique. Le point d'observation est située dans le second milieu de célérité  $c_2$  ( $z > 0$ ), l'eau. Pour une profondeur  $z$  quelconque dans l'eau, à une distance radiale  $r$ , on

##### 1.2 -Rappels. Etude de la propagation acoustique.

Ce problème linéaire, décrivant la propagation d'ondes monochromatiques sphériques, à travers deux milieux fluides compressibles, vérifie le système d'équations de Helmholtz:

$$(\Delta + k_j^2)\Psi_j = S_j, \quad j = 1, 2 \text{ indice du milieu,}$$

$$\text{où } S_1 = \delta(x,y,z+h), \quad S_2 = 0,$$

( $k_j = \frac{\omega}{c_j}$  représente le nombre d'onde pour le milieu  $j$ ),

auquel s'ajoutent d'une part les conditions de raccordement du champ à l'interface ( $z=0$ ), d'autre part les conditions de rayonnement de Sommerfeld à l'infini.

Les quantités  $\Psi_j$  et  $S_j$  représentent respectivement le potentiel acoustique scalaire et le terme source. Leur dépendance temporelle peut s'écrire sous la forme générale suivante:  $\chi_j = \chi_j e^{-i\omega t}$  (choix d'ondes progressives).

La résolution de ce système d'équations, nous fournit une expression intégrale des potentiels acoustiques. Une bonne approche de ceux-ci est obtenue à l'aide de développements asymptotiques (approximation haute-fréquence), dont

généralement le terme d'ordre 1 suffit. L'obtention des différentes contributions réside dans le choix d'un trajet d'intégration dans le plan complexe passant par des points "col" en présence de points de branchements ( $u = \sin\theta = \pm 1, \pm n$ ). Le calcul de cette intégrale nous permet de retrouver au premier ordre, l'onde géométrique réfractée en accord avec la théorie des rayons ( $u < n$ ), et de mettre en évidence, pour des incidences supérieures à celles de l'angle critique ( $\sin\theta > n$ ), un type d'onde différent, appelé onde latérale. Nous obtenons également une fonction dont les contributions sont négligeables et que nous nommerons fonction Reste. L'expression du potentiel réfracté total devient:

$$\psi^{\text{tot}} = \psi^{\text{géo}}_{0 < u < n} + \psi^{\text{lat}}_{n < u < 1} + \text{Reste}_{u > 1}$$

### 1.2.a. Expression analytique de la contribution géométrique.

L'expression du potentiel réfracté géométrique obtenue au premier ordre à l'aide de la phase stationnaire est:

$$\psi^{\text{géo}}(r, z) \approx \frac{2\sqrt{u_0}}{D(u_0)} e^{i k_1 \xi(u_0)} \text{ où } \xi(u_0) = \frac{h}{\sqrt{1-u_0^2}} + \frac{z n^2}{\sqrt{n^2-u_0^2}}$$

$$\text{avec } D(u_0) = \frac{\sqrt{r[h(1-u_0^2)^{-3/2} + z n^2(n^2-u_0^2)^{-3/2}]}{(m\sqrt{1-u_0^2} + \sqrt{n^2-u_0^2})^{-1}}$$

et  $u_0 = \sin \theta_0$ ,  $\theta_c = \arcsin(n)$  (angle critique),  $\theta_0 < \theta_c$

m et n représentent respectivement l'indice de réfraction et le rapport des masses volumiques.

Le point stationnaire  $u_0$  vérifie l'équation  $r_0 = h \tan \theta_0 + z \tan \varphi_0$  où  $\theta_0$  et  $\varphi_0$  représentent respectivement les angles d'incidence et de réfraction d'une onde plane pour une position donnée de l'hydrophone.

Cette expression peut se mettre sous la forme suivante:

$$\psi^{\text{géo}}(r, z, t) \approx \frac{C^{\text{ste}}}{R} e^{-i\omega(t - R_1/c_1 - R_2/c_2)}, \quad R = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont respectivement les distances source-interface et source virtuelle-hydrophone.

On voit ici, qu'indépendamment des caractéristiques fréquentielles de la source, nous obtenons une même configuration du champ de pression. Le mode géométrique correspond au mode où l'onde se trouve simplement translatée et atténuée en fonction de la distance de la source au point d'observation [5]. Nous retrouvons ainsi les lois propres à l'acoustique géométrique. Le trajet d'intégration (trajet de phase stationnaire) correspond alors au trajet minimum de l'onde décrit par le principe de Fermat. L'angle d'incidence devient le point stationnaire pour l'onde plane associée.

### 1.2.b. Expression analytique de la contribution latérale.

L'expression à l'ordre un du potentiel réfracté latéral est donnée suivant le point col  $u_1$  ( $u_1$  réel;  $u_1 = \sin \alpha$  avec  $\alpha > \theta_c$ ) par:

$$\psi^{\text{lat}}(r, z) \approx \frac{2h}{(r^2 + h^2)(m \cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2})} e^{i k_1 \xi_L}$$

$$\text{où } \xi_L = \sqrt{r^2 + h^2} + iz \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

Nous obtenons dans ce cas des ondes dont l'amplitude décroît exponentiellement en fonction de la fréquence et de la profondeur, perpendiculairement à l'interface. Elles ne correspondent pas à une absorption du milieu car il y a conservation de l'énergie au passage du dioptré, avec un nombre d'onde réel. A partir d'incidences sur-critique, il y a création d'une onde qui se propage le long du dioptré et rayonne de part et d'autre de celui-ci. Ce rayonnement pénètre d'autant mieux le milieu que la fréquence du signal émise est basse.

L'expression précédente peut encore s'écrire:

$$\psi^{\text{lat}}(r, z, t) \approx \frac{2h C^{\text{ste}}}{R_1^2} e^{-i\omega(t - R_1/c_1)} e^{-z \omega A(\alpha)}$$

où  $A(\alpha) = \sqrt{(\sin \alpha / c_1)^2 - 1/c_2^2}$ ,  $R_1$  distance source-interface.

### 1.2.c. Champ réfracté total

En un point quelconque du champ réfracté, il y a donc interférences entre les deux contributions. Il y a de ce fait une forte dépendance du champ par rapport aux caractéristiques de la source (fréquence, hauteur) et par rapport aux coordonnées du point d'observation (récepteurs) [5].

## 2 - Mise en oeuvre d'une expérimentation.

Cette étude nous a permis d'envisager trois séries d'expériences. D'une part des expériences permettant d'isoler et d'étudier séparément les différentes contributions en fonction des caractéristiques du champ émis; d'autre part des expériences se rapportant au champ réfracté total. Les deux premières séries de mesures nécessitent l'introduction d'absorbants. Ceux-ci, aux fréquences étudiées, entraînent une diffraction du son que l'on pourra négliger dans certaines régions, par rapport au champ réfracté. Nous présenterons des courbes d'isoatténuation du champ acoustique transmis expérimental que l'on comparera à celui obtenu par simulation.

### 2.1- Choix de la source. Modélisation du régime harmonique.

Nous avons vu que la mise en évidence de la contribution latérale dépendait de la fréquence émise par la source (1.2.b). L'étude théorique et numérique a montré que dans le cas du dioptré air-eau (indice de réfraction  $n=0,23$  et rapport des masses volumiques  $m=820$ ), cette contribution devient non négligeable aux fréquences audibles inférieures à 6kHz. Pour simuler à de telles fréquences une source ponctuelle, nous avons utilisé une chambre de compression. Dans cette gamme de fréquences, une nouvelle limitation nous est imposée par les conditions que doit vérifier expérimentalement notre source. Celle-ci doit modéliser le cas d'une source monochromatique, alors qu'elle émet des trains d'ondes. Nous devons donc choisir un temps d'émission du signal adéquat au nombre de cycles contenu dans celui-ci. Ce choix résulte d'un compromis entre une durée assez petite, pour éviter les réflexions sur les parois de la cuve servant aux essais et, une durée assez grande, pour obtenir le régime permanent. La durée des trains d'ondes a été fixée à 2ms. L'intervalle des fréquences est alors limité aux valeurs 2,5-6kHz. Les valeurs fréquentielles expérimentales choisies ont été 3kHz (6 périodes) et 5kHz (10 périodes). Au préalable, une étude du rayonnement acoustique de la source en salle anéchoïque a été effectuée. Cette source

émet des ondes raisonnablement sphériques dans la bande de fréquences des signaux émis (0,5 à 8kHz).

## 2.2- Réalisation expérimentale.

L'expérimentation est réalisée en laboratoire (cuve acoustique). La source est fixée au dessus de l'interface ( $h=1m$ ). On mesure simultanément le signal émis (microphone) au ras de l'eau (pression incidente de référence) et le signal transmis à différentes profondeurs  $d$  et distances radiales  $r$  (hydrophone). L'expérience dans le cas harmonique n'est pas numérisée. Le déplacement des capteurs s'effectue manuellement par l'intermédiaire de chariots. Un système permet le balayage du plan d'eau, verticalement ( $d \leq 1m$ ) avec un pas de 5mm, et horizontalement ( $r \leq 1,45m$ ) de façon continue.

La source est commandée électroniquement. Une chaîne d'appareils de mesures assure l'émission et la réception des signaux acoustiques. Pour minimiser les erreurs de mesures, les deux capteurs utilisent la même chaîne de réception. Les mesures d'atténuation de pression ne nécessitent que la connaissance des valeurs relatives de la pression. Celles-ci, mesurées en décibels, sont données en fonction du rapport des pressions par la relation  $W = 20 \text{ Log}(P_2/P_1)$  où  $P_2$  représente la pression acoustique transmise mesurée à l'hydrophone et  $P_1$  la pression incidente mesurée par le microphone à une distance unité de la source. A l'interface, nous aurons donc +6dB. Ceci est dû aux conditions de raccordement du champ à l'interface (effet de doublement de la pression).

## 2.3 - Résultats expérimentaux.

Les résultats expérimentaux paramétrés par l'immersion de l'hydrophone  $d$ , et la fréquence  $f$  de la source, sont représentés sous forme de courbes de niveaux de pression. L'ordonnée représente l'atténuation en décibels et l'abscisse la distance radiale  $r$ . Les résultats théoriques -o-, sont directement comparés aux résultats expérimentaux -●-.

Sous les conditions expérimentales, nous avons un rapport de masses volumiques  $m=820$ , et des célérités pour les milieux air, eau respectivement de 343,90m/s et 1485,40m/s. Pour mettre en évidence les propriétés des ondes latérales (fig. 2), la zone correspondant à des incidences sous-critique sera recouverte d'un disque absorbant. Celui-ci réalisé en duralumin de 1cm d'épaisseur est revêtu de mousse en polyéther semi-rigide à cellules ouvertes, pour atténuer les effets de diffraction qu'il engendre. Un montage inverse est réalisé pour obtenir l'effet isolé des ondes géométriques (fig.3). Le champ réfracté total est représenté sur la figure 1. Pour chaque fréquence étudiée, le niveau de pression mesuré au ras de l'eau et à l'aplomb de la source est de 118dB à  $\pm 0,5$ dB. Nous montrerons ici, les résultats pour quelques profondeurs seulement.

### 2.3.a. Champ réfracté total.

L'analyse du champ réfracté total montre une bonne concordance entre les valeurs mesurées et calculées. Nous retrouvons bien une zone d'interférences, conformément aux valeurs théoriques, allant jusqu'à une profondeur de 7,5cm pour  $f=5$ kHz et 10cm pour  $f=3$ kHz. L'écart des valeurs obtenues est en moyenne inférieur à  $\pm 2$ dB, sauf dans la zone d'interférences où nous trouvons  $\pm 4$ dB. Ces régions où les valeurs varient très brusquement se trouvent sensibilisées aux moindres variations apportées par les instruments de mesures (hydrophone plus support).

En résumé, la présence des interférences souligne bien l'existence des ondes latérales, conformément à l'analyse des

résultats théoriques. A de grandes profondeurs et une distance radiale supérieure à 30cm, nous n'obtenons plus d'interférences, ce qui est normal car seule l'onde géométrique est prépondérante.

### 2.3.b. Etude séparée des champs.

**Champ latéral:** De façon générale les résultats théoriques et expérimentaux sont en parfait accord. Pour de faibles profondeurs ( $d < 5$ cm), les écarts observés sont inférieurs à  $\pm 3$ dB. A partir de 7,5cm l'écart devient de l'ordre de 8dB à 3kHz et 10dB à 5kHz (effet de diffraction du disque).

**Champ géométrique:** L'étude du champ géométrique montre des écarts entre valeurs théoriques et expérimentales de l'ordre de  $\pm 2$ dB pour une distance radiale inférieure à la zone critique (c'est à dire  $r < 23$ cm) et à faibles profondeurs ( $d < 20$ cm). L'écart devient de l'ordre de +6dB dans les autres cas. Ceci est dû à l'effet de diffraction joué par l'ouverture circulaire dans le plan absorbant.

## 3- Conclusion.

Le champ réfracté total dans le cas d'une source monochromatique se trouve parfaitement décrit à l'aide d'une approximation asymptotique (méthode du point col), d'où la bonne concordance avec l'expérience. Cette approximation ne pourra plus être utilisée pour une source émettant en régime transitoire. En effet, en fonction de la fréquence de la source, les amplitudes des deux types d'onde s'écrivent sous la forme:

$$|\Psi_{\text{géo}}(M)| = A_{\text{géo}}(M) + \varepsilon(M) \quad \text{où} \quad \varepsilon(M) = O(1/k_1 r),$$

$$|\Psi_{\text{lat}}(M)| = A_{\text{lat}}(M) \exp \left[ -k_1 z \sqrt{r^2(r^2 + h^2)^{-1/2} - n^2} \right],$$

(en intégrant le reste dans  $A_{\text{lat}}(M)$ ).

Par conséquent, pour des valeurs de  $k_1 r$  tendant vers l'infini,  $|\Psi_{\text{lat}}(M)|$  est négligeable par rapport au reste  $\varepsilon(M)$  du développement de  $|\Psi_{\text{géo}}(M)|$ . Cependant, à chaque position  $M$  de l'hydrophone, on peut associer une plage de fréquences  $\omega$  pour laquelle  $|\Psi_{\text{lat}}(M)|$  reste significatif devant  $\varepsilon(M)$ . Pour le voir, il faut se rappeler que le nombre  $m$  (rapport des masses volumiques) est grand de l'ordre de 820. Or,  $|\Psi_{\text{lat}}(M)|$  est de l'ordre de  $1/m$  alors que  $\varepsilon(M)$  est de l'ordre de  $1/m^2$ . C'est cette circonstance qui justifie la validité des résultats simulés, dans le cas harmonique.

En régime transitoire, l'étude théorique et numérique du champ de pression total a pu être effectuée de façon exacte grâce à l'utilisation de la transformée en ondelettes [6,7].

## Références.

- [1] Gerjuoy, E., Refraction of Waves from a Point Source into a Medium of Higher Velocity, *Phys. Rev.*, **73**, 1948, 1442-1449.
- [2] Brekhovskikh, L., N., *Waves in Layered Media*, (Wiley, New-York), (1960), 292-302.
- [3] D. H. Towne, Pulse Shape of Totally Reflected Plane waves as a limiting case of the Cagniard solution for Spherical waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, **44** (1), (1968), 77-83.
- [4] Urlick, R., J., Noise Signature of an Aircraft in Level Flight over a Hydrophone in the Sea, *J. Acoust. Soc. Am.*, **52**, (1972), 993-999.
- [5] G. Saracco, Transmission acoustique à travers le dioptré air-eau, *J. Acoust.*, **1**, 1988, 71-80.
- [6] G. Saracco, A. Grossmann, P. Tchamitchian, Use of wavelet transforms in the study of propagation of transient acoustic signals across a plane interface between two homogeneous media, (Wavelet, Time-frequency methods and Phase Space), déc 1987, Springer-Verlag, à paraître.
- [7] G. Saracco, P. Tchamitchian, A study of acoustic transmission of transient signal in an homogeneous with the help of the wavelet transform. Application to an air-water plane interface,

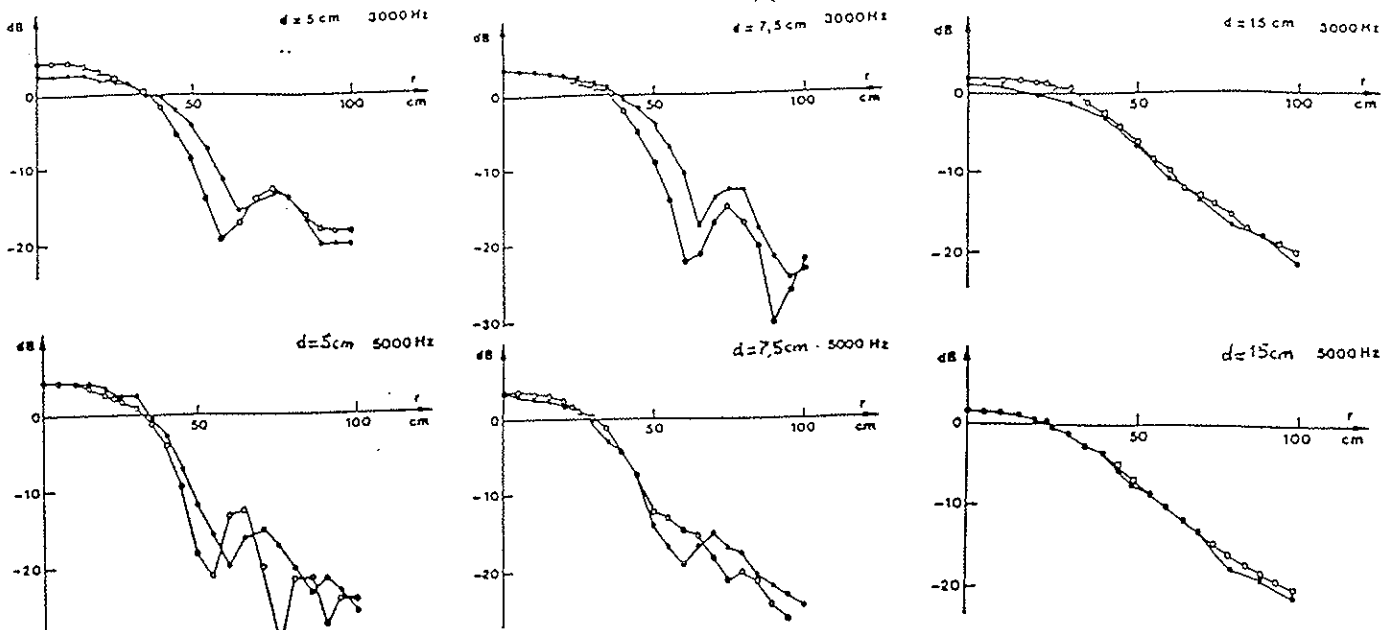


Figure 1: Champ réfracté total: expérimental —●—, théorique —○—

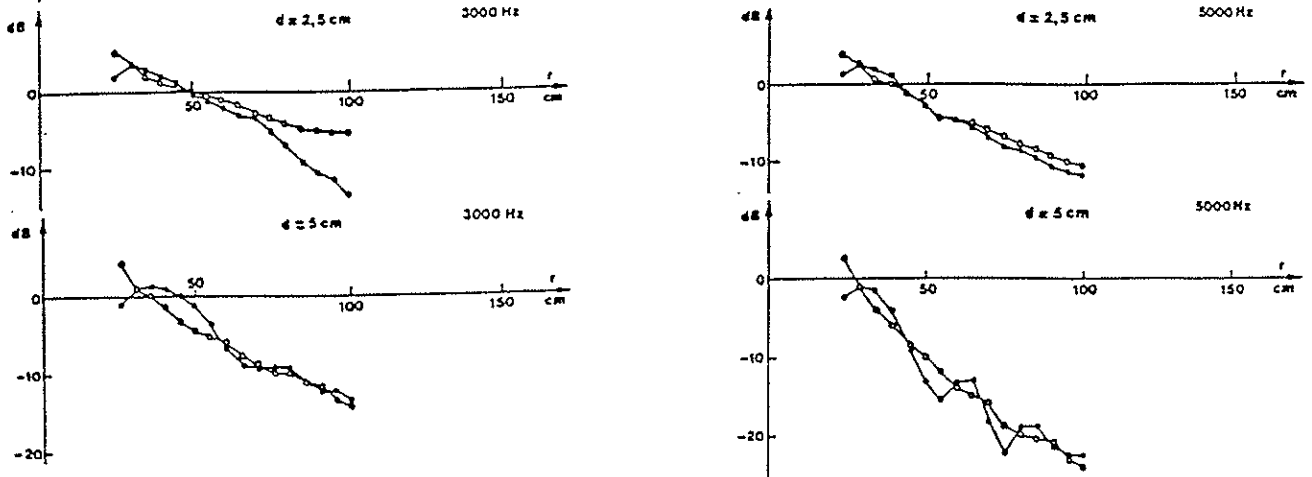


Figure 2: Contribution latérale: expérimental —●—, théorique —○—

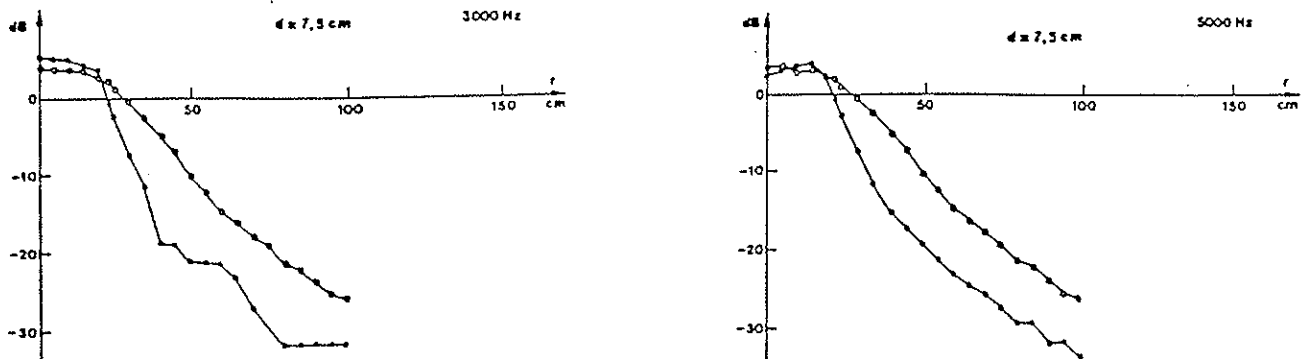


Figure 3: Contribution géométrique: expérimental —●—, théorique —○—

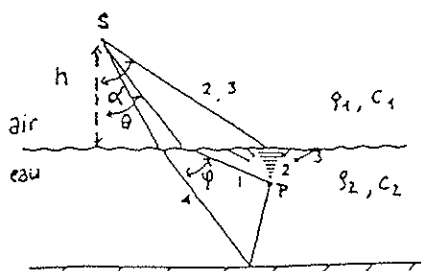
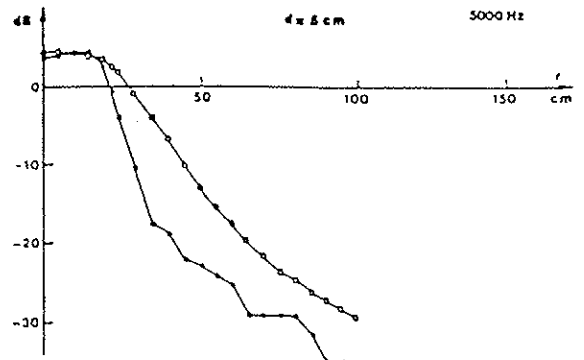


Fig. 4: Contributions des différents trajets de l'onde au point d'observation P(hydrophone).trajet de 1) l'onde géométrique; 2) l'onde latérale; 3) l'onde diffusée; 4) après réflexions.





## BIBLIOGRAPHIE

### PARTIE 1



### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] : R. J. Urick, 1972, "Noise Signature of an Aircraft in Level Flight over a Hydrophone in the sea", J.A.S.A. , vol. 52, n°3, pp. 993-999.
- [2] : E. Gerjuoy, 1948, "Refraction of Waves from a Point Source into a Medium of Higher Velocity", Physical Review, vol. 73, n° 12, pp. 1442-1449.
- [3] : A. A. Hudimac, 1957, "Ray Theory Solution for the Sound Intensity in Water Due to a point Source above it", J.A.S.A. , vol. 28, n°8, pp. 916-917.
- [4] : R. W. Young, 1971, "Sound Pressure in Water from Source in Air (L)", J.A.S.A. ,vol. 50, n°5, pp. 1392-1393.
- [5] : M. S. Weinstein and A. G. Henney, 1965, "Wave Solution for Air-to-Water Sound Transmission", J.A.S.A. ,vol. 37, n°5, pp. 899-905.
- [6] : S. M. Candel and C. Crance, 1980, "Direct Fourier Synthesis of Wave in Layered Media and The Method of Stationary Phase", J.S.V. , vol.74, n°4, pp. 477-498.
- [7] : J. W. Horton, 1959, "Fundamentals of Sonar", U. S. Naval Institute, Annapolis-Maryland.
- [8] : L. N. Brekhovskikh, 1960, "Waves in Layered Media", pp. 292-302, Wiley, New-York.
- [9] : E. T. Copson, 1967, "Asymptotic Expansions", Cambridge, The University Press.
- [10] : G. N. Watson, 1944, "Treatise on the Theory of Bessel Functions", The Macmillan Company, New-York.
- [11] : D. Habault and P. J. Filippi, 1981, "Ground effect analysis: Surface Wave and Layered Potential Representation", J. S. V. , vol.79, n°4, pp. 529-550.
- [12] : K. O. Friedrichs and J. B. Keller, 1954, "Geometrical Acoustics. II. Diffraction, Reflection and Refraction of a weak Spherical or cylindrical Shock at a plane interface", J. of applied Physics, Vol. 26, n°8, pp. 961-966.
- [13] : P. Gottlieb, 1960, "Sound Source near a Velocity Discontinuity, J.A.S.A. , Vol.32, n°9, pp. 1117-1122.
- [14] : D. H. Towne, 1968, "Pulse Shapes of Spherical Waves Reflected and Refracted at a plane Interface Separating Two Homogeneous Fluids", J.A.S.A. , Vol. 44, n°1, pp. 65-76.
- [15] : A. Derem, 1986, "Théorie de la Matrice S et Transformation de Sommerfeld-Watson dans la Diffusion Acoustique", Sect. VI, pp. 233-240, N. Gespa, CEDOCAR Edit.
- [16] : B. Poirée, 1979, "Les Méthodes Asymptotiques 'Hautes Fréquences' en acoustique sous-marine", 7ème colloque sur le Traitement du signal et ses Applications, Nice, pp. 2211-2219.

- [17] : J. V. McNicholas, 1973, "Lateral wave contribution to the underwater signature of an aircraft", J.A.S.A. , letters to the editor, vol. 53, pp. 1755-1756.
- [18] : B. Poirée, 1977, "Les discontinuités en acoustique cas du dioptré", Revue Cethedec, n°51, pp. 1-11.
- [19] : L. T. Ikelle, J.P. Diet, A. Tarantola, 1986, "Linearised Inversion of Multioffset Seismic Reflection data in the  $\Sigma$ -K domain", Geophysics, vol. 51, n°6, pp. 1266-1276.
- [20] : P. Filippi, 1979, "Problème de transmission pour l'équation de Helmholtz scalaire et problèmes aux limites équivalents. Application à la transmission gaz-parfait-milieux poreux", J. de Mécan., vol. 18, n° 3, pp. 507-591.
- [21] : G. Saracco, 1987, "Etude de la transmission acoustique à travers le dioptré air-eau", Note Laboratoire-L.M.A., ISSN 075-7356, n° 101, C.N.R.S. L.M.A.-Marseille.
- [22] : A. Flori, 1983, "Réfraction d'un faisceau acoustique borné à la traversée d'une interface plane fluide parfait-fluide dissipatif, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, U.E.R. de P.et M. Curie, Paris.
- [23] : G. Saracco, 1988, "Transmission acoustique à travers le dioptré air-eau", J. Acoust., n°1, pp. 71-79.
- [24] : B. Poirée, 1984, "Vitesse de l'énergie de l'onde plane évanescence acoustique", Revue Cethedec, n°79, pp. 103-112.
- [25] : G. Saracco, G. Corsain, C. Gazanhes, R. Holtzer, J. Léandre, 1989, "Mise en évidence expérimentale des ondes latérales dans le cas de la transmission acoustique à travers le dioptré plan air-eau", 12<sup>ème</sup> colloque G.R.E.T.S.I., Juan-Les-Pins, pp. 937-940.
- [26] : C.T. Tindle and N. G. Plumptre, 1988, "Ray analysis near the critical angle", J.A.S.A. Suppl. 1, vol. 84, S174.
- [27] : E. K. Westwood, 1989, "Complex ray methods for acoustic interaction at a fluid-fluid interface", J.A.S.A. , vol. 85(5), pp. 1872-1884.
- [28] : N. G. Plumptre and C.T. Tindle, 1989, "Saddle point analysis of the reflected acoustic field", J.A.S.A. , vol. 85, pp. 1115-1123.
- [29] : F.S. Grant, G.F. West, 1965, "Interpretation theory in applied geophysics", pp. 164-185, (International series in the earth sciences), McGraw-Hill Book Company, New-York.



## **PARTIE 2**

-----

**ETUDE DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE EN REGIME TRANSITOIRE  
ET MILIEU INHOMOGENE, A L'AIDE DE LA TRANSFORMEE EN  
ONDELETTES.**

**PARTIE 2: ETUDE DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE EN REGIME TRANSITOIRE ET MILIEU INHOMOGENE, A L'AIDE DE LA TRANSFORMEE EN ONDELETTES.**

|                                                                                        |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| <i>Conventions et notations utilisées.</i>                                             | p. 135 |
| I - Introduction.                                                                      | p. 136 |
| II - Etude de la propagation en régime transitoire à travers un dioptré.               | p. 139 |
| II - 1. Position du problème.                                                          | p. 139 |
| II - 2. Expression des solutions. Potentiels transmis et réfléchi.                     | p. 141 |
| II - 3. Décomposition de la fonction de Green.                                         | p. 145 |
| 3.1. Contribution "géométrique".                                                       | p. 146 |
| 3.2. Contribution "latérale".                                                          | p. 149 |
| 3.3. Contribution "évanescence".                                                       | p. 152 |
| 3.4. Vérification des résultats obtenus.                                               | p. 153 |
| III - Transformation temps-échelle.                                                    | p. 155 |
| III - 1. Introduction.                                                                 | p. 155 |
| III - 2. Rappels: Qu'appelle-t-on transformée en ondelettes?                           | p. 155 |
| 2.1. Choix de l'ondelette analysante.                                                  | p. 155 |
| 2.2. Transformée directe.                                                              | p. 156 |
| 2.3. Transformée inverse.                                                              | p. 157 |
| III - 3. Noyau reproduisant.                                                           | p. 158 |
| III - 4. Détection de discontinuités.                                                  | p. 161 |
| 4.1. Aperçu général.                                                                   | p. 161 |
| 4.2. Analyse de discontinuités isolées.                                                | p. 161 |
| III - 5. Discrétisation de la transformée en ondelettes.                               | p. 163 |
| III - 6. Application de la transformée à des signaux particuliers.                     | p. 164 |
| 6.1. Analyse de la distribution $\delta(t-t_0)$                                        | p. 164 |
| 6.2. Analyse d'un signal monochromatique.                                              | p. 167 |
| IV - Décomposition de la fonction de Green en contributions élémentaires d'ondelettes. | p. 169 |
| IV - 1. Expression de la fonction de Green dans le plan temps-échelle.                 | p. 169 |
| 1.1. Décomposition en ondelettes de la contribution "géométrique".                     | p. 171 |
| 1.2. Décomposition en ondelettes de la contribution "latérale".                        | p. 172 |
| 1.3. Décomposition en ondelettes de la contribution "évanescence".                     | p. 172 |

|                                                                                                                                                                |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| IV - 2. Application de la transformée en ondelettes: Evaluations numériques.                                                                                   | p. 173 |
| 2.1. Mise en forme des expressions pour le calcul numérique.                                                                                                   | p. 173 |
| 2.2. Interprétation des résultats.                                                                                                                             | p. 175 |
| 2.2.1- Cas du point d'observation situé à une distance radiale $\leq$ au sinus de l'angle critique: ( $r/h \leq n$ et $n < 1$ ).                               | p. 175 |
| 2.2.2- Cas du point d'observation situé à une distance $\geq$ au sinus de l'angle critique: ( $r/h = 1$ ).                                                     | p. 180 |
| 2.2.3- Cas du point d'observation situé à une distance radiale grande devant la hauteur de la source: ( $r/h > 1$ ).                                           | p. 186 |
| IV - 3. Application de la transformée en ondelettes: Expérimentation et résultats.                                                                             | p. 191 |
| 3.1. Dispositif expérimental.                                                                                                                                  | p. 191 |
| 3.1.a Choix de la source.                                                                                                                                      | p. 191 |
| 3.1.b Dispositif d'acquisition.                                                                                                                                | p. 193 |
| 3.2. Expérimentation.                                                                                                                                          | p. 193 |
| 3.3. Résultats expérimentaux.                                                                                                                                  | p. 195 |
| 3.3.1. Hydrophone placé à l'aplomb de la source.                                                                                                               | p. 195 |
| i) Analyse du signal source.                                                                                                                                   | p. 195 |
| ii) Analyse du signal transmis.                                                                                                                                | p. 197 |
| 3.3.2. Hydrophone placé à grandes distances radiales.                                                                                                          | p. 197 |
| V - Problème inverse: Reconstruction de la dépendance temporelle de la source.                                                                                 | p. 202 |
| V - 1. Position du problème.                                                                                                                                   | p. 202 |
| V - 2. Formule de reconstruction.                                                                                                                              | p. 203 |
| VI - Une étude préliminaire de l'application de la transformée en ondelettes pour l'analyse de signaux diffusés par des cibles de formes géométriques simples. | p. 211 |
| VI - 1. Introduction générale.                                                                                                                                 | p. 211 |
| VI - 2. Position du problème                                                                                                                                   | p. 212 |
| VI - 3. Extraction de lois de modulation par la transformée en ondelettes.                                                                                     | p. 213 |
| VI - 4. Analyse temps-échelle de la diffusion acoustique par des coques sphériques élastiques en régime impulsionnel.                                          | p. 216 |
| VI - 5. Conclusion                                                                                                                                             | p. 224 |
| VII - Conclusion générale et perspectives.                                                                                                                     | p. 225 |
| ANNEXE 1: Organigramme du programme "ondel".                                                                                                                   | p. 229 |
| ANNEXE 2: Ondelette & Transformation en ondelettes de signaux tests.                                                                                           | p. 234 |
| BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIEME PARTIE.                                                                                                                           | p. 239 |



## Etude de la propagation de signaux acoustiques transitoires. Problème direct.

### Conventions et notations utilisées

Nous utiliserons dans cette partie la transformée de Fourier sur la variable temporelle  $t$ , notée  $\mathcal{F}^+(t;\omega)$ , où  $\omega$  représente la variable duale, et que nous définirons comme suit:

$$(1.1) \quad \mathcal{F}^+(t;\omega): \quad \hat{\Psi}(\vec{r}, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(\vec{r}, z, t) e^{i\omega t} dt$$

La transformée de Fourier sur la variable spatiale  $\vec{r}$ , sera notée  $\mathcal{F}^-(\vec{r};\vec{\mu})$  où  $\vec{\mu}$  représente la variable duale. Elle sera définie par:

$$(1.2) \quad \mathcal{F}^-(\vec{r};\vec{\mu}): \quad \hat{\Psi}(\vec{\mu}, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \Psi(\vec{r}, z, t) e^{-i\vec{\mu} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$$

Pour ne pas alourdir les notations, nous écrirons lorsqu'on appliquera une transformation de Fourier sur les variables spatiales et temporelle ( $\mathcal{F}^-(\vec{r};\vec{\mu})$ ,  $\mathcal{F}^+(t;\omega)$ ):

$$\hat{\Psi}(\vec{\mu}, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 4\pi^2} \iint \Psi(\vec{r}, z, t) e^{i(\omega t - \vec{\mu} \cdot \vec{r})} d\vec{r} dt$$

La présence des variables duales  $\mu$  et  $\omega$ , nous permettra de différencier les transformées.

Nous utiliserons les notations:

- D pour désigner l'opérateur :  $D = \frac{\partial}{\partial t}$
- $\nabla$  pour désigner l'opérateur gradient spatial
- $\Delta$  pour désigner l'opérateur Laplacien spatial.

Nous rappelons que  $n$  représente l'indice de réfraction,  $n = \frac{c_1}{c_2} < 1$ , et  $m$  le rapport des masses volumiques  $m = \frac{\rho_2}{\rho_1} \gg 1$ .

Il nous arrivera d'employer le terme "d'ondelette progressive", terme couramment utilisé dans les travaux de base sur la transformée en ondelettes. Ce terme signifie que l'ondelette analysante  $g(t)$ , vérifiant les conditions d'admissibilité, est définie comme un signal analytique (ie:  $\hat{g}(\omega) = 0$ , pour  $\omega < 0$  avec  $\int \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$ ).





## I - INTRODUCTION

**Etude de la propagation de signaux acoustiques  
transitoires.  
Problème direct.**

**I - Introduction.**

Le problème de la propagation d'ondes sphériques en régime impulsionnel à travers un milieu inhomogène (interface fluide/fluide ou interface fluide/solide) a fait l'objet de nombreux travaux [30-37]. La plupart de ces travaux utilisent la méthode de Cagniard-De Hoop, qui consiste à appliquer une transformation de Laplace sur la variable temporelle et une transformation de Hankel sur les variables spatiales dans le plan de l'interface (symétrie de révolution du problème). Le but de cette méthode est d'obtenir une solution analytique exacte dans le domaine temporel à partir d'une intégration dans le plan complexe. Le problème réside d'une part dans le choix d'un trajet d'intégration et d'autre part, dans l'expression directe de la solution comme le noyau d'une intégrale de Laplace. Si ces problèmes sont résolus, la transformation inverse de Laplace devient inutile, et l'on obtient une expression analytique exacte du champ. Cette méthode ne peut s'étendre de façon générale aux milieux multi-couches. Dans le cas de la propagation d'ondes sphériques transitoires à travers un milieu bi-couches, la solution s'obtient numériquement [30-37].

L'utilisation d'une transformation de Fourier sur les variables spatiales et temporelle permet également d'obtenir dans le cas du dioptré, une expression de la solution sous forme de noyau d'intégration [38]. Cependant il n'existe une solution analytique exacte que lorsque la source et le point d'observation sont dans le plan de l'interface (ie:  $h=z=0$ ). Autrement, la solution dans tout le domaine spatial s'obtient numériquement.

Nous avons vu que l'étude de la transmission acoustique dans le cas d'une source monochromatique, montre l'existence de deux ondes dont les comportements sont différents. Ces ondes parcourant des trajets différents arrivent à des temps différents et subissent une atténuation dépendant de la fréquence.

On suppose maintenant que le signal source dépend d'une fonction arbitraire du temps. En un point quelconque d'observation ( $\vec{r}, z$ ) et en un temps  $t$  arbitraire, on s'intéresse au comportement de la pression acoustique transmise. Nous ne pouvons plus effectuer dans ce cas, une approximation asymptotique "haute-fréquence" du champ. Nous voulons de plus calculer celui-ci de façon exacte.

Notre but est alors de résoudre et d'analyser un problème de propagation de signaux transitoires à travers une interface fluide/fluide en préservant à toute échelle les caractéristiques fréquentielles et temporelles des différents types d'ondes intervenant dans le champ acoustique transmis. Pour cela, nous appliquerons une méthode s'adaptant à des évolutions rapides du signal, la transformée en ondelettes. Cette méthode permet d'analyser un signal arbitraire en le décomposant en une somme de contributions élémentaires appelées "ondelettes" bien localisées à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel.

Les propriétés d'une part de l'ondelette analysante (régularité) et celles d'autre part, de la transformée (isométrie et linéarité) vont nous permettre d'étudier de façon indépendante les différentes contributions ou "ondes" composant le champ transmis. Ces contributions sont alors calculées de façon exacte. Cela nous permettra d'effectuer une analyse locale, à n'importe quel temps et n'importe quelle échelle.

L'intérêt d'utiliser une telle transformation est que l'expression de la transformée en ondelettes de la fonction de Green est plus régulière que la fonction de Green elle-même. Par ailleurs, cela nous permet une reconstitution sélective du champ avec la précision arbitraire désirée.

Dans un premier temps nous aborderons le problème direct de la transmission acoustique à travers le dioptré.

On déterminera les expressions des potentiels transmis et réfléchi, dans le cas où le terme source temporel dépend d'une fonction  $F(t)$  quelconque (Ch. II). Nous rappellerons le formalisme mathématique de la transformée en ondelettes, ainsi que ses principales propriétés (Ch. III). L'application de la transformation en ondelettes au propagateur sera effectuée dans le chapitre IV.1. Nous déterminerons et simulerons le comportement des différentes contributions composant le champ transmis dans le cas du dioptré air-eau, lorsque le signal temporel est un signal impulsionnel (IV.2). Nous mettrons en évidence un phénomène transitoire très bref (apparition d'écho) lorsqu'on se trouve dans une région où la distance radiale est grande (forte intervention de la contribution latérale). Une expérience de la transmission à travers le dioptré air-eau sera réalisée en laboratoire, afin de comparer les résultats théoriques aux résultats expérimentaux. Une interprétation nouvelle de ces résultats, possible grâce à l'analyse en ondelettes, sera faite.

Dans un second temps (Ch. V), nous aborderons le problème inverse: A partir de mesures de la pression transmise dans le second milieu, nous voulons reconstruire la dépendance temporelle du signal source. Celle-ci, par analogie aux formules d'inversion de la transformée, sera obtenue par simple sommation de la pression acoustique, prise à différentes profondeurs dans l'eau.

Nous verrons dans le chapitre VI, une autre application de la transformée en ondelettes à un problème de sonar actif. L'interface considérée est une interface fluide/solide. Le signal analysé est un signal rétrodiffusé par une coque sphérique élastique immergée dans l'eau. Nous retrouverons cette même notion de contributions d'ondes: onde géométrique (écho optique) et ondes de surface (ondes de galerie à échos).

## **II- ETUDE DE LA PROPAGATION EN REGIME TRANSITOIRE A TRAVERS UN DIOPTRE**

## II. Etude de la propagation en régime transitoire à travers un dioptre.

### II.1. Position du problème.

Nous considérons toujours le cas d'une source émettant des ondes incidentes sphériques (source ponctuelle), mais la dépendance temporelle du terme source  $F(t)$  est ici arbitraire. Le but est alors d'obtenir et de décomposer les expressions des potentiels transmis et réfléchi, solutions des équations d'ondes, en contributions (géométrique et latérale) de façon analogue à l'étude faite dans le cas du régime harmonique, puis d'étudier leurs propriétés et leur comportement.

En appliquant une transformation de Hankel sur la variable radiale  $r$  (symétrie de révolution autour de l'axe vertical  $z$ ), et une transformation de Fourier sur la variable temporelle  $t$ , il apparaît pour l'équation de propagation dans l'espace de Fourier-Hankel, le nombre d'onde  $K_j = \sqrt{\frac{|\omega|^2}{c_j^2} - \mu^2}$  ( $j$  indice du milieu).

Le champ transmis peut être décomposé de façon naturelle en trois contributions dues à l'existence de points de branchement dans l'expression du potentiel acoustique. Cette séparation est conforme également aux différentes déterminations que peut prendre la fonction  $K_j$  dans  $\mathbf{C}$ .

Soit  $c_j < c_{j+1}$  (où  $c_j$  représente la célérité du milieu  $j$ ), nous avons:

$$\frac{|\omega|}{c_{j+1}} < \frac{|\omega|}{c_j}$$

Les trois déterminations possibles correspondant aux trois contributions ou modes sont:

$$i) \quad \mu^2 < \frac{|\omega|^2}{(c_2)^2} \quad \text{mode propagatif (contribution géométrique),}$$

$$(K_1, K_2 \text{ réels})$$

$$\text{ii) } \frac{|\omega|^2}{(c_2)^2} < \mu^2 < \frac{|\omega|^2}{(c_1)^2} \text{ mode inhomogène ou latéral (contribution de surface)}$$

$$(K_1 \text{ réel, } K_2 \text{ imaginaire})$$

$$\text{iii) } \frac{|\omega|^2}{(c_1)^2} > \mu^2 \text{ mode évanescent (contribution évanescente).}$$

$$(K_1, K_2 \text{ imaginaires})$$

Une remarque est à faire en ce qui concerne la contribution (ii). Bien que nous gardons la même dénomination que celle adoptée dans le cas harmonique (Partie 1), cette contribution est ici foncièrement différente. Elle s'obtient à partir de l'intégration du potentiel sur l'intervalle délimité par les deux points de branchement  $]n, 1[$ . Par contre, dans le cas harmonique où nous utilisons une approximation asymptotique haute-fréquence, c'est la contribution d'une intégrale supplémentaire autour du point de branchement  $n$ , qui fournit l'onde latérale.

Le problème que nous considérons est linéaire. Nous pouvons donc, par superposition de la solution obtenue dans le cas harmonique, obtenir la solution en régime impulsionnel. En remarquant que dans le cas de la source monochromatique, nous avons choisi de définir des solutions progressives, la dépendance temporelle des potentiels étaient de la forme  $e^{-i\omega t}$  (en accord avec la définition de Fourier spatiale (1.2) choisie). Nous avons la relation  $\text{Im}[K_j] > 0$  pour  $\omega > 0$ . Dans le cas transitoire où la variable  $\omega$  décrit  $\mathbf{R}$ , il apparaîtra alors pour les fonctions solutions des équations d'ondes, la fonction  $\text{sgn}(\omega)$ .

Suivant les conventions choisies, nous aurons alors:

$$\text{Pour } \frac{\omega^2}{c_j^2} < \mu^2, \text{ la détermination: } K_j(\mu, \omega) = i \text{sgn}(\omega) \sqrt{\left| \frac{\omega^2}{c_j^2} - \mu^2 \right|}$$

$$\text{Pour } \frac{\omega^2}{c_j^2} > \mu^2, \text{ la détermination: } K_j(\mu, \omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_j^2} - \mu^2}$$

L'unicité de la solution qui était assurée par les conditions de Sommerfeld (partie 1), sera imposée ici par les conditions de causalité du système. Nous pouvons à partir de la résolution des équations de propagation obtenir de façon rigoureuse une solution causale, réelle. Ceci revient à considérer les conditions d'analyticité et d'hermité que doivent vérifier les potentiels acoustiques et le terme source temporel dans l'espace de Fourier-Hankel.



## II.2 Expression des solutions. Potentiels transmis et réfléchi.

Cette présentation étant faite, nous rappelons brièvement l'orientation du système cartésien choisi et les équations de propagation pour chacun des milieux.

En orientant l'axe  $z$  positivement vers le bas, et le plan  $x,y$  dans le plan de l'interface  $\Sigma$  ( $z=0$ ), nous avons le système d'équations suivant:

$$(2.1) \quad \left[ \Delta - \frac{1}{c_j^2} D^2 \right] \Psi_j(\vec{r}, z, t) = -s_j(\vec{r}, z, t) \quad z \neq 0 \quad (j = 1, 2)$$

$s_j(\vec{r}, z, t)$  représente le terme source.

Les conditions de continuité du champ à l'interface sont:

$$(2.2) \quad \left[ \rho_1 D\Psi_1(\vec{r}, z, t) = \rho_2 D\Psi_2(\vec{r}, z, t) \right]_{\Sigma}$$

$$\left[ \nabla \Psi_1(\vec{r}, z, t) = \nabla \Psi_2(\vec{r}, z, t) \right]_{\Sigma}$$

(L'unicité de la solution étant assurée par la causalité du système [69]).

Les notations étant les mêmes que celles décrites précédemment (partie 1), l'indice  $j=1$  symbolisera le milieu 1, l'air, caractérisé par la célérité  $c_1$  et la masse volumique  $\rho_1$ . Le second milieu,  $j = 2$ , de célérité  $c_2$  et de masse volumique  $\rho_2$  représentera l'eau.

La source supposée ponctuelle et située à une hauteur  $h$  au dessus de l'interface, est décrite par les relations suivantes:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} s_1(\vec{r}, z, t) &= 4\pi F(t) \delta(\vec{r}, z+h) \quad \text{et} \quad F(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \quad \text{et } t > T \\ s_2(\vec{r}, z, t) &= 0. \end{aligned}$$

Le système d'équations décrit par les relations (2.1) et (2.2) s'écrit dans l'espace de Fourier-Hankel, où les variables duales de  $r$  (distance radiale) et  $t$  (variable temporelle) sont respectivement  $\mu$  et  $\omega$ :

$$(2.4.a) \quad \begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_1^2 \right] \hat{\Psi}_1(\mu, z, \omega) &= -\frac{\delta(z+h)}{\pi\sqrt{2\pi}} \hat{F}(\omega), \quad z < 0 \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_2^2 \right] \hat{\Psi}_2(\mu, z, \omega) &= 0, \quad z > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.4.b) \quad & \left[ \rho_1 \hat{\Psi}_1(\mu, z, \omega) = \rho_2 \hat{\Psi}_2(\mu, z, \omega) \right]_{\Sigma}, \\
 & z = 0 \\
 & \left[ \frac{\partial \hat{\Psi}_1(\mu, z, \omega)}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\Psi}_2(\mu, z, \omega)}{\partial z} \right]_{\Sigma},
 \end{aligned}$$

où  $K_j(\mu, \omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_j^2} - \mu^2}$  et  $\text{Im}[K_j] > 0$ , pour  $\omega > 0$  (même détermination que dans la partie 1).

La causalité du système se traduit par l'analyticité des potentiels acoustiques dans le demi-plan complexe supérieur ( $\text{Im}[\omega] > 0$ ), en accord avec la détermination de la transformée  $\mathcal{F}^+(t; \omega)$ .

Le terme-source temporel  $F(t)$  étant une fonction causale, sa transformation de Fourier  $\hat{F}$  sera également analytique dans le demi-plan complexe supérieur. Les parties réelle et imaginaire de  $\hat{F}$  ou  $\hat{\Psi}$  sont donc transformées de Hilbert l'une de l'autre. Représentons ces fonctions par  $\chi$ .  $\chi(t)$  vérifie les relations:

$$(2.5) \quad \hat{\chi}(\omega) = \hat{A}(\omega) + i \hat{B}(\omega)$$

avec 
$$\hat{B}(\omega) = \hat{A}(\omega) * \text{vp}\left(\frac{1}{\omega}\right) \text{ et } \hat{A}(\omega) = -\hat{B}(\omega) * \text{vp}\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

où  $\text{vp}\left(\frac{1}{\omega}\right)$  représente la valeur principale de  $(1/\omega)$  définie en accord avec (1.1). Soit:

$$(2.6) \quad \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}^-} \\ \xleftarrow{\mathcal{F}^+} \\ \xleftarrow{\mathcal{F}^+} \\ \xrightarrow{\mathcal{F}^-} \end{array} \begin{array}{c} -\frac{i}{2} \text{sgn}(\sigma) \\ \\ \\ +\frac{i}{2} \text{sgn}(\sigma) \end{array}$$

Soit  $H(t)$  la fonction d'Heaviside, alors:

$$(2.7) \quad H(t) = \frac{1}{2} + \frac{\text{sgn}(t)}{2},$$

et d'après (2.6): 
$$\hat{H}(\omega) = [\delta(\omega) + i \text{vp}\left(\frac{1}{\omega}\right)] / 2$$

Compte tenu des relations (2.5), (2.6) et (2.7) nous avons la relation, pour la fonction causale  $\chi$  :

$$(2.8) \quad \chi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} H(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}[\hat{\chi}(\omega)] e^{-i\omega t} d\omega$$

Si de plus les fonctions  $F(t)$  et  $\Psi(t)$  sont réelles, leur transformée de Fourier vérifie la symétrie hermitienne et nous aurons pour ces fonctions représentées par la fonction  $\chi(t)$ , la relation:

$$(2.9) \quad \chi(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} H(t) \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}[\hat{\chi}(\omega)] \cos(\omega t) d\omega$$

Les fonctions  $\Psi$  et  $F$  étant analytiques dans le demi-plan complexe supérieur, rappelons que la détermination des racines  $K_j(\mu, \omega)$  est prise de la façon suivante:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} K_j(\mu, \omega) &= i \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{\left| \frac{\omega^2}{c_j^2} - \mu^2 \right|} && \text{pour } \frac{\omega^2}{c_j^2} < \mu^2 \\ K_j(\mu, \omega) &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c_j^2} - \mu^2} && \text{pour } \frac{\omega^2}{c_j^2} > \mu^2 \end{aligned}$$

Les solutions du système d'équations (2.4) s'écrivent alors:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \hat{\Psi}_1(\mu, z, \omega) &= C_1(\mu, \omega) e^{-i \operatorname{sgn}(\omega) K_1(\mu, \omega) z} + \frac{i \operatorname{sgn}(\omega) \hat{F}(\omega)}{2\pi \sqrt{2\pi} K_1(\mu, \omega)} e^{i \operatorname{sgn}(\omega) K_1(\mu, \omega) |z+h|} \\ \hat{\Psi}_2(\mu, z, \omega) &= C_2(\mu, \omega) e^{i \operatorname{sgn}(\omega) K_2(\mu, \omega) z} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites (conditions à l'interface) déterminent les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission,  $C_1$  et  $C_2$ , que l'on pourra comparer à ceux obtenus pour une source harmonique ((2.34.c), partie 1), soit ici:

$$C_1(\mu, \omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\omega) \hat{F}(\omega)}{2\pi \sqrt{2\pi} K_1(\omega, \mu)} \frac{(m K_1(\mu, \omega) - K_2(\mu, \omega))}{(m K_1(\mu, \omega) + K_2(\mu, \omega))} e^{i \operatorname{sgn}(\omega) K_1(\mu, \omega) h}$$

(2.12)

$$C_2(\mu, \omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\omega) \hat{F}(\omega)}{\pi \sqrt{2\pi}} \frac{e^{i \operatorname{sgn}(\omega) K_1(\mu, \omega) h}}{(m K_1(\mu, \omega) + K_2(\mu, \omega))}$$

L'expression du potentiel acoustique transmis en un point spatial  $(r, z)$  quelconque et pour un temps  $t$  arbitraire s'écrit:

$$(2.13) \quad \Psi_2(r, z, t) = \sqrt{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \int_{\mu=0}^{\infty} \hat{\Psi}_2(\mu, z, \omega) J_0(\mu r) \mu d\mu d\omega$$

ou d'après (2.9) :

$$(2.14) \quad \Psi_2(r, z, t) = 4\sqrt{2\pi} H(t) \int_{\omega=0}^{\infty} \cos \omega t \int_{\mu=0}^{\infty} \operatorname{Re}[\hat{\Psi}_2(\mu, z, \omega)] J_0(\mu r) \mu d\mu d\omega$$

En gardant à l'esprit que le potentiel est analytique dans le demi-plan complexe supérieur, nous pouvons nous dispenser d'utiliser l'expression (2.14). On calculera donc  $\Psi_2(r, z, t)$  à partir de l'expression (2.13).

Posons:

$$(2.15.a) \quad u = \frac{\mu c_1}{|\omega|}, \quad \text{nous avons:}$$

$$(2.15.b) \quad K_1(\mu, \omega) = \frac{|\omega|}{c_1} \sqrt{1-u^2} \quad \text{et} \quad K_2(\mu, \omega) = \frac{|\omega|}{c_1} \sqrt{n^2-u^2}$$

Avec toujours la détermination:

$$\sqrt{n^2-u^2} \quad \text{définie par } i \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{|n^2-u^2|}, \quad \text{pour } u > n$$

et

$$\sqrt{1-u^2} \quad \text{définie par } i \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{|1-u^2|}, \quad \text{pour } u > 1$$

En introduisant les nouvelles variables  $(K_1, K_2, u)$  dans l'expression (2.13), nous obtenons:

$$(2.16) \quad \hat{\Psi}_2(r, z, \omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\omega)}{c_1} \hat{F}(\omega) |\omega| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{i \operatorname{sgn}(\omega) [K_1 h + K_2 z]}}{m \sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} J_0\left(\frac{u \omega r}{c_1}\right) u du$$

On peut remarquer que la variable  $u$  s'introduisait naturellement dans le cas harmonique, comme le sinus de l'angle d'incidence associée à une onde plane ( $u = \sin \theta$ ). (Décomposition de l'onde sphérique incidente monochromatique en une somme infinie d'ondes planes à l'interface Cf. II, partie 1). L'approche est différente ici, du fait de la dépendance de  $u$  par rapport à la fréquence spatiale  $\mu$  et la fréquence temporelle  $\omega$  (Cf. 2.15.a).

Néanmoins, l'intégrale sur la variable  $u$  peut être décomposée en trois contributions correspondant aux différents points de branchement apparaissant dans l'intégrand:

$$(2.17) \quad \Psi_2 = \Psi_2^1 + \Psi_2^2 + \Psi_2^3$$

Par analogie à la terminologie utilisée dans le cas harmonique, nous nommerons la première contribution définie sur l'intervalle  $[0, n]$ : contribution "géométrique". La seconde, correspondant aux valeurs de  $u$  comprises entre  $n$  et  $1$ , sera nommée contribution de "surface" ou "latérale". La dernière, correspondant aux valeurs de  $u > 1$ , sera appelée contribution "évanescence".

### **II.3-Décomposition de la fonction de Green.**

Nous voulons calculer ces différentes contributions et étudier leurs comportements en fonction des caractéristiques de la source et de la position du point d'observation pris dans le second milieu.

Pour cela, on suppose que le signal source est un signal impulsionnel, c'est-à-dire que  $\hat{F}(\omega) = C \delta(\omega)$ . L'expression (2.16) correspond alors à celle de la fonction de Green, dans l'espace de Fourier. D'une façon classique, nous pouvons en appliquant une transformation de Fourier inverse sur la variable temporelle, définir l'expression des différentes contributions en un point quelconque de l'espace et du temps. L'expression contient cependant une double intégration. Une mise en forme de l'intégrale sur la variable  $\omega$ , fait apparaître la dérivée du noyau d'une intégrale [39], que nous pouvons expliciter. Le calcul de la fonction de Green se ramène alors, à celui d'une intégrale simple sur la variable  $u$ .

Etant donné que les potentiels vérifient la condition d'hermité, c'est-à-dire:  $\tilde{\Psi}(-\omega) = \Psi(\omega)$ , il devient inutile de définir les fonctions de Green partielles  $G_2^j$  (ie: associées à chaque contribution) pour les valeurs de  $\omega < 0$ . Nous calculerons donc celles-ci, en ne considérant que les valeurs spectrales positives. Le passage à une solution réelle et causale peut s'effectuer compte tenu des conditions précédentes (hermité et analyticité). Les solutions que nous obtiendrons seront donc complexes et nous pourr ons ainsi représenter en terme de module et de phase les différentes contributions  $G_2^j$ . Nous insisterons plus particulièrement sur la fonction de Green associée à la seconde contribution (ou contribution de "surface") pour de grande valeur de la distance radiale  $r$ . Cette contribution bien souvent négligée dans le cas d'interface fluide/fluide, interviendra lorsque l'on envisagera l'étude d'un problème inverse (Cf. Ch. V).

L'expression générale de la contribution  $G_2^j$  s'écrit:

(2.18)

$$G_2^j(r,z,t) = \frac{i}{c_1 \pi} \int_{\omega=0}^{\infty} e^{-i\omega t} \omega \left\{ \int_{u=u_{\min}^j}^{u_{\max}^j} \frac{e^{i[K_1 h + K_2 z]}}{m \sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} J_0\left(\frac{u \omega r}{c_1}\right) u \, du \right\} d\omega$$

On peut remarquer que les intégrales sur les variables  $u$  et  $\omega$  sont indépendantes. L'ordre d'intégration peut être interverti. Nous allons tour à tour calculer les trois contributions.

### 3.1 - Contribution "géométrique".

A partir des expressions (2.16) et (2.18), nous obtenons pour la contribution "géométrique":

$$(2.19.a) \quad G_2^1(r,z,t) = \frac{-1}{c_1 \pi} \int_{u=0}^n \frac{u}{m \sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \int_{\omega=0}^{\infty} e^{-i\omega \beta} J_0(\omega \alpha) d\omega \right\} du$$

$$\text{où} \quad \beta = t - \frac{\sqrt{1-u^2}}{c_1} h - \frac{\sqrt{n^2-u^2}}{c_1} z \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{u r}{c_1}$$

or l'intégrale sur la variable  $\omega$  est connue [39]. Nous avons:

$$I^1(\alpha, \beta) = \int_{\omega=0}^{\infty} e^{-i\omega\beta} J_0(\omega\alpha) d\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad \text{pour } \alpha > \beta \text{ avec } \beta > 0$$

$$= \frac{i}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad \text{pour } \alpha < \beta$$

Soit:

$$G_2^1(r, z, t) = \frac{-1}{c_1 \pi} \int_{u=0}^n \frac{u}{m\sqrt{1-u^2} \sqrt{n^2-u^2}} \frac{d}{d\beta} \left[ \frac{H(\alpha-\beta)}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} + i \frac{H(\beta-\alpha)}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} \right] du$$

nous pouvons écrire:

$$I^1(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}} \frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}}, \quad \text{avec } \alpha > \beta \text{ et } \beta > 0$$

Cette fonction présente une singularité en  $\beta = \alpha$ , Posons:

$$I_+ = \frac{d}{d\beta} I^1(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(\alpha+\beta)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} + \frac{1}{(\alpha+\beta)^{1/2}} \frac{d}{d\beta} \frac{1}{[\sqrt{\alpha-\beta}]_+} \right\}, \quad \text{pour } \alpha > \beta$$

et

$$I_- = \frac{d}{d\beta} I^1(\alpha, \beta) = -\frac{i}{2} \left\{ \frac{1}{(\alpha+\beta)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha}} + \frac{1}{(\alpha+\beta)^{1/2}} \frac{d}{d\beta} \frac{1}{[\sqrt{\alpha-\beta}]_-} \right\}, \quad \text{pour } \alpha < \beta$$

Nous avons par définition en posant:  $X_+ = \alpha - \beta$ , où  $\alpha > \beta$

$$\left\langle \frac{d}{d\beta} (X_+^\lambda), \phi \right\rangle = \int_0^\infty [\phi(x) - \phi(0)] \lambda x^{\lambda-1} dx, \quad \text{où } -1 < \lambda < 0$$

La notation  $\langle, \rangle$  représente l'évaluation d'une fonctionnelle  $f$  par une fonction test  $\phi$ , tel que:  
 $\langle f, \phi \rangle = \int f(x) \phi(x) dx$ .

Dans ce cas la convergence est assurée pour  $X_+ = 0$ . Nous déduisons une relation équivalente pour  $\frac{d}{d\beta} (X_-^\lambda)$ , en posant  $\langle x_-^\lambda, \phi(x) \rangle = \langle x_+^\lambda, \phi(-x) \rangle$  [40].

$$\langle I_+, \phi \rangle = \left\langle \frac{d}{d\beta} I^1(\alpha, \beta), \phi \right\rangle \text{ pour } \alpha > \beta \quad ; \quad \langle I_-, \phi \rangle = \left\langle \frac{d}{d\beta} I^1(\alpha, \beta), \phi \right\rangle \text{ pour } \alpha < \beta$$

$\frac{d}{d\beta}\{\chi_{\pm}\}$  est défini au sens des fonctions pour  $\alpha \neq \beta$ . Pour  $\alpha = \beta$ , il apparaît la distribution de Dirac  $\delta$ .

$$\langle I_{+}, \phi \rangle = -\frac{1}{2} \left( \frac{(\alpha + \beta)^{-3/2}}{\sqrt{\alpha - \beta}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta}} \int_0^{\infty} [\phi(x) - \phi(0)] x^{-3/2} dx \right), \quad \alpha < \beta$$

$$\langle I_{-}, \phi \rangle = -\frac{i}{2} \left( \frac{(\alpha + \beta)^{-3/2}}{\sqrt{\beta - \alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta}} \int_0^{\infty} [\phi(-x) - \phi(0)] x^{-3/2} dx \right), \quad \alpha > \beta$$

Soit:

$$(2.19.b) \quad \langle G_2^1, \phi \rangle = \frac{-1}{c_1 \pi} \int_{u=0}^n \frac{u}{m \sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} [\langle I_{+}, \phi \rangle H(\alpha - \beta) + i \langle I_{-}, \phi \rangle H(\beta - \alpha)] du$$

Le cas où la fonction  $\beta - \alpha = 0$  (apparition de la singularité) correspond à l'arrivée du front d'onde de la contribution "géométrique" (Cf. 2.19.a). C'est à dire au passage de l'impulsion  $\delta$ , au point d'observation. Asymptotiquement, la fonction  $\beta - \alpha$  représente la phase associée à la contribution géométrique (Cf. (2.19.a)). Notons  $t_{\text{géo}}$  le temps associé à l'arrivée du front d'onde pour un point d'observation quelconque  $(r, z)$ . L'expression de ce temps nous est fournie par l'étude de la fonction  $f(u) = \beta - \alpha = 0$ .

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow t = \tau(u) = \frac{\sqrt{1-u^2}}{c_1} h + \frac{\sqrt{n^2-u^2}}{c_1} z + \frac{u}{c_1} r$$

$$\text{Cette fonction présente un extrêmu} \text{m en } r = h \frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} + z \frac{u}{\sqrt{n^2-u_0^2}},$$

La valeur de  $\tau(u)$  en ce point est telle que:

$$\tau(u_0(r)) = \frac{h}{c_1 \sqrt{1-u_0^2}} + \frac{zn}{c_2 \sqrt{n^2-u_0^2}}$$

On retrouve là, le trajet correspondant au principe de Fermat, en accord avec les résultats obtenus dans le cas du régime harmonique par la méthode de la phase stationnaire (Cf. Ch.II (2.42) partie 1). Le temps correspondant à celui que met la contribution géométrique pour parvenir au point d'observation  $(r, z)$  est  $t_{\text{géo}}$  :

$$t_{\text{géo}} = \tau(u_0)$$



On peut remarquer que pour  $u = 0$ ,  $\tau(u) = \frac{h}{c_1} + \frac{z}{c_2} = \tau_0$

Cette valeur correspond au temps minimum que met l'onde pour parvenir au point ( $r=0, z$ ). Nous sommes dans le cas où le point d'observation est directement à l'aplomb de la source.

$$\text{Pour } u = n, \quad \tau(u) = \frac{\sqrt{1-n^2}}{c_1} h + \frac{r}{c_2} = t_1$$

Ce temps correspond à celui d'une onde plane arrivant sous incidence-critique et vérifiant le principe de Fermat (analogie aux résultats obtenus dans le cas du régime harmonique).

### 3.2- Contribution "latérale".

L'expression devient, compte tenu de l'équation (2.18):

$$(2.20) \quad G_2^2(r,z,t) = \frac{-1}{c_1 \pi} \int_{u=n}^1 \frac{u}{m\sqrt{1-u^2} + i\sqrt{u^2-n^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta'} \int_{\omega=0}^{\infty} e^{-i\omega \beta'} J_0(\omega \alpha) d\omega \right\} du$$

$$\text{où } \beta' = c + id = t - \frac{\sqrt{1-u^2}}{c_1} h + i \left( \frac{\sqrt{u^2-n^2}}{c_1} z \right) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{u r}{c_1}$$

$$\text{Posons:} \quad I^2(\alpha, \beta') = \int_{\omega=0}^{\infty} e^{-i\omega(c+id)} J_0(\omega \alpha) d\omega$$

Cette intégrale est complètement déterminée [39] et nous avons:

$$I^2(\alpha, \beta') = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - (c+id)^2}} \text{ avec } \alpha > \beta' \text{ et } \text{Re}[\beta'] > 0$$

$$\text{Soit: } G_2^2(r,z,t) = \frac{-1}{c_1 \pi} \int_{u=n}^1 \frac{u}{m\sqrt{1-u^2} + i\sqrt{u^2-n^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} [\alpha^2 - (c+id)^2]^{-1/2} du \right\}$$

Cette fonction ne présente pas de singularité. En effet nous avons toujours:  $\alpha - (c+id) \neq 0$ .

L'arrivée à l'interface du front d'onde associé à la contribution latérale est fournie par l'étude de la fonction  $\alpha - \text{Re}[c + id] = 0$  (Cf. 2.20). C'est-à-dire:

$$\tau(u) = \frac{u}{c_1} r + \frac{\sqrt{1-u^2}}{c_1} h$$

Cette fonction présente un extrémum pour  $r = \frac{hu_0}{\sqrt{1-u_0^2}}$

$$\text{Pour cette valeur } \tau(u_0) = \frac{hu_0}{c_1 \sqrt{1-u_0^2}}$$

Nous retrouvons, en accord avec les résultats obtenus par la méthode du point col, une distance correspondant au trajet direct d'une onde plane à l'interface.

$$\text{Soit } t_2 \text{ le temps correspondant à ce trajet: } t_2 = \frac{hu_0}{c_1 \sqrt{1-u_0^2}} = \frac{\sqrt{h^2+r^2}}{c_1}$$

Les valeurs de la variable  $\tau$  aux bornes de l'intervalle d'intégration sont:

$$\begin{aligned} \tau(n) &= \frac{\sqrt{1-n^2}}{c_1} h + \frac{r}{c_2} = t_1 \\ \tau(1) &= \frac{r}{c_1} \end{aligned}$$

Nous retrouvons pour la borne inférieure ( $u = n$ ), la même expression  $t_1$  que celle obtenue pour la contribution géométrique.

L'expression de la contribution "latérale" que nous calculerons numériquement, s'écrit:

$$G_2^2(r,z,t) = \frac{-1}{c_1 \pi} \int_{u=n}^1 \frac{u [\alpha^2 - (c + id)^2]^{-3/2} (c + id)}{m \sqrt{1-u^2} + i \sqrt{u^2 - n^2}} du$$

Nous avons représenté le module et la phase de cette contribution, pour la variable réduite  $r/h = 1$  et  $z/h = 0.1$ . L'intégration numérique de cette expression a été obtenue par la méthode de Romberg [41]. La figure 1.a représente le module et la figure 1.b sa phase.

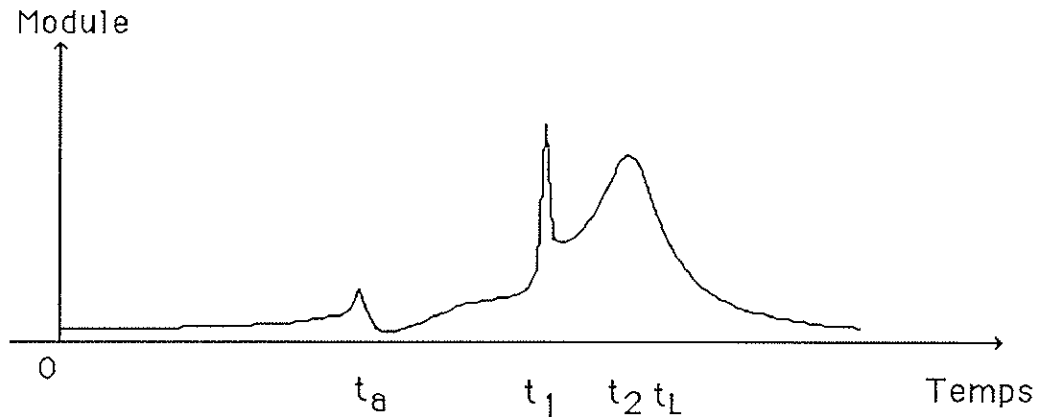


Figure 1.a: Module du potentiel acoustique associé à la contribution "latérale".

$t_a$  = temps parasite dû à la décomposition du champ en contributions "géométrique" et "latérale" et ne correspondant pas à une solution physique ( $t_a = t_1 - \frac{2r}{c_2}$ ).

$t_1, t_2$  = retards correspondant (par analogie à une décomposition de l'onde sphérique incidente en une somme infinie d'ondes planes) respectivement à des ondes planes arrivant sous incidence critique selon le principe de Fermat, et des ondes planes arrivant sous des incidences sur-critiques, ( $t_1 = h \frac{\sqrt{1-n^2}}{c_1} + \frac{r}{c_1} n$  et  $t_2 = \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{c_1}$ ).

$t_L$  = temps correspondant à l'arrivée de la contribution "latérale". ( $t_L = t_2 + \frac{z}{c_1} n$ ).

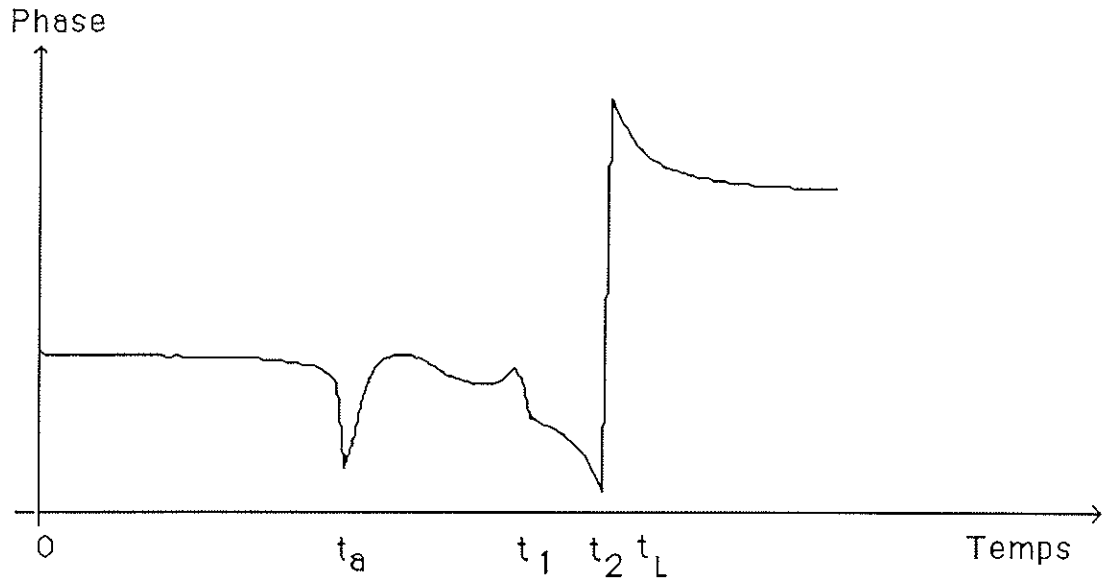


Figure 1.b: Phase du potentiel acoustique associé à la contribution "latérale".

L'analyse de la contribution "latérale" fait apparaître une contribution partielle de la contribution "géométrique". Celle-ci se manifeste de façon prépondérante au temps  $t_1$ . Nous voyons de plus que nous pouvons faire une analogie entre les temps calculés par la phase stationnaire (partie 1) et ceux obtenus par l'étude de la fonction  $\tau(u)$ .

D'autre part, bien que la somme des trois contributions  $G_2 = G_2^1 + G_2^2 + G_2^3$  vérifie les conditions d'hermiticité et d'analyticité, les expressions associées aux contributions partielles (prises isolément) perdent cette dernière propriété du fait de la troncature du domaine de définition sur la variable  $u$  ( $u=u(\omega)$  d'après la relation (2.15.a)). C'est ce qui explique l'apparition du temps  $t_a$ .

### 3.3- Contribution évanescence.

Dans ce cas l'intégrale sur la variable  $\omega$  correspond à une exponentielle réelle décroissante.

$$G_2^3(r,z,t) = \frac{-1}{c_1 \pi} \int_{u=1}^{\infty} \frac{u}{m\sqrt{u^2-1} + \sqrt{u^2-n^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta''} \int_{\omega=0}^{\infty} e^{-\omega \beta''} J_0(\omega \alpha) d\omega \right\} du$$

où  $\beta'' = it + e = it + \frac{\sqrt{u^2 - n^2}}{c_1} z + \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{c_1} h$  et  $\alpha = \frac{u}{c_1} r$

Soit: 
$$I^3(\alpha, \beta'') = \int_{\omega=0}^{\infty} e^{-\omega(it+e)} J_0(\omega\alpha) d\omega$$

Nous obtenons de même que précédemment, la relation:

$$I^3(\alpha, \beta'') = \frac{1}{\sqrt{(e + it)^2 + \alpha^2}} \text{ avec } t > 0, \quad \text{Re}[\beta''] > 0$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned} G_2^3(r, z, t) &= \frac{-1}{c_1 \pi} \int_{u=1}^{\infty} \frac{u}{m\sqrt{u^2-1} + \sqrt{u^2-n^2}} \frac{\partial}{\partial \beta''} \left[ \frac{1}{\sqrt{(e+it)^2 + \alpha^2}} \right] du \\ &= \frac{1}{c_1 \pi} \int_{u=1}^{\infty} \frac{u}{m\sqrt{u^2-1} + \sqrt{u^2-n^2}} [(e+it)^2 + \alpha^2]^{-3/2} (e+it) du \end{aligned}$$

Cette fonction ne présente pas de singularité, et peut être calculée numériquement.

On peut remarquer que dans le cas harmonique où nous avons utilisé une approximation asymptotique du champ, cette contribution n'apparaissait pas. On peut voir ici qu'elle existe mais que sa contribution est négligeable. Elle se trouve très vite atténuée, indépendamment du point d'observation. Son atténuation dépend cependant de la valeur fréquentielle  $\omega$ , portée par  $u$  (2.15.a).

### 3. 4- Vérification des résultats obtenus.

Si maintenant nous supposons l'indice de réfraction et le rapport des masses volumiques  $m$  égaux à l'unité, l'expression du potentiel transmis devient celui de l'onde incidente se propageant dans un même milieu. L'onde d'interface ou "latérale" n'existe plus.

Nous pouvons écrire d'après (2.16) et (2.18):

$$G_2(r, z, t) = G_2^1(r, z, t) + G_2^3(r, z, t)$$

$$G_2(r,z,t) = \frac{i}{2\pi c_1} \int_{\omega=0}^{\infty} \omega \left\{ \int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{i\omega(h+z)\sqrt{1-u^2}}}{\sqrt{1-u^2}} J_0(\omega ur) u \, du \right\} d\omega$$

Posons:  $f(u) =$

$$i u^{1/2} \frac{e^{i\alpha \sqrt{\beta^2 - u^2}}}{\sqrt{\beta^2 - u^2}}, \quad 0 < u < \beta$$

$$u^{1/2} \frac{e^{-\alpha \sqrt{u^2 - \beta^2}}}{\sqrt{u^2 - \beta^2}}, \quad \beta < u < \infty$$

avec:  $v = r \omega$ ,  $\beta = 1$ ;  
 $\alpha = \omega(h+z)$ ,  $(\text{Re}[\alpha] > 0)$

d'après [63] nous avons la relation:

$$\int_0^{\infty} f(u) J_0(uv) (uv)^{1/2} du = \sqrt{\frac{v}{(v^2 + \alpha^2)}} e^{i\beta \sqrt{v^2 + \alpha^2}}$$

Soit:  $G_2(r,z,t) = C^{ste} \int \frac{e^{i\omega R}}{R} e^{-i\omega t} d\omega$

avec  $R = \sqrt{r^2 + (h+z)^2}$

On reconnait l'expression de la transformée de Fourier d'une onde incidente sphérique.

L'étude de ces différentes contributions a montré un comportement différent aussi bien temporellement que fréquentiellement. Nous voyons qu'il y a intérêt à utiliser pour leur caractérisation une méthode de type temps-fréquence. Il existe de nombreuses méthodes d'analyse d'un signal transitoire. Nous voulons toutefois pouvoir effectuer un calcul exact du champ, tout en gardant une approche physique du phénomène. Cela nous oblige à utiliser une méthode linéaire, dans laquelle le signal doit être décomposé dans une base de fonctions bien localisées à la fois en temps et en fréquence. Nous allons voir comment la transformée en ondelettes, méthode temps-échelle, peut répondre à de telles exigences. Avant d'étudier dans le plan temps-échelle le comportement du champ de pression acoustique, nous allons rappeler les principales propriétés de la transformation en ondelettes.



### III - TRANSFORMATION TEMPS-ECHELLE



### **III - Transformation temps-échelle.**

#### **III.1 - Introduction**

Les méthodes non-paramétriques adaptées à l'analyse de signaux transitoires, peuvent être séparées en deux catégories. Les méthodes temps-fréquence: dont les plus performantes sont de type Wigner-Ville [42-43] ou Fourier à court terme (transformation de Gabor) [44]; et une nouvelle méthode de type temps-échelle, la transformée en ondelettes [45-49]. La différence essentielle entre cette dernière et les autres transformations, réside en une dilatation en temps dans le domaine temporel, au lieu d'une translation en fréquence. La fenêtre temporelle, définie par l'ondelette elle-même (fonction analysante), est alors automatiquement adaptée à l'échelle à laquelle le signal est analysé. L'analyse s'effectue à  $\Delta f/f = C^{ste}$ , ( $f$  étant la fréquence). Dans le cas où l'ondelette analysante est définie comme un signal analytique, nous pouvons disposer d'une double information sur la transformée d'un signal, son module et sa phase. La transformée en ondelettes est une application linéaire et isométrique (conservation d'énergie). Les termes d'interaction présents dans la distribution de Wigner-Ville (dus à la bilinéarité) n'existent pas dans ce cas. Cette transformation donne lieu à des formules exactes de reconstruction du signal. Par conséquent, toute l'information se trouve contenue dans la transformée, pour n'importe quel choix de la fonction analysante.

#### **III.2- Rappel: Qu'appelle-t-on transformée en ondelettes?**

Nous présentons ici les principales propriétés de la transformée en ondelettes d'une fonction unidimensionnelle, en les reliant au problème qui nous intéresse, sachant que certaines de ces propriétés peuvent s'étendre au cas des fonctions multidimensionnelles [50,51].

##### **2.1 -Choix de l'ondelette analysante.**

La transformée en ondelettes est une méthode qui permet de décomposer une fonction en une somme de contributions élémentaires appelées ondelettes. Ces ondelettes ont même forme et sont obtenues par dilatation (contraction)  $D^a$  et translation  $T^b$  d'une ondelette originelle  $g$ , appelée ondelette analysante. Elles forment ainsi une famille à deux paramètres

$g(b,a)(p)$  ( $p$  pouvant être une variable de temps ou d'espace ). La paire  $\{b,a\}$  appartient au demi-plan ouvert,  $a$  étant strictement positif.

$$(3.1) \quad g(b,a)(p) = T^b D^a [g(p)] = C(a) g\left(\frac{p-b}{a}\right).$$

(où  $C(a)$  est du type  $a^\alpha$ , et  $\alpha$  ne dépend que de la normalisation choisie).

Nous avons le choix de l'ondelette analysante  $g(p)$ , sous réserve de vérifier une condition dite d'admissibilité. Cette condition peu restrictive s'écrit ici:

$$(3.2) \quad \int \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty ,$$

où  $\hat{g}$  représente la transformée de Fourier de  $g$ . En pratique ceci signifie que  $\hat{g}(0)=0$ , c'est-à-dire que  $g$  est de valeur moyenne nulle:  $\int g(p)dp=0$ .

Nous pouvons imposer des conditions supplémentaires à l'ondelette, suivant le type de problème que l'on a à résoudre, et en fonction de l'analyse souhaitée du signal. Nous imposons ici, à l'ondelette d'être d'énergie finie:  $\int |g(p)|^2 dp < \infty$ , causale en fréquence (ou progressive au sens que  $\hat{g}(\omega)=0$  pour  $\omega < 0$ , c'est-à-dire que  $g(p)$  est définie comme un signal analytique) et d'être bien localisée dans le domaine temporel et fréquentiel. La progressivité de l'ondelette va nous permettre d'éliminer par exemple des termes d'interférences dans la phase et le module de la transformée (ex: III.6.2). Nous choisissons ici une ondelette de type Morlet [45] qui est une gaussienne modulée (représentation graphique en annexe2):

$$(3.3) \quad g(p) = \exp(i \omega_0 p) \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) + \text{petites corrections}.$$

Nous avons vu que l'ondelette devait être admissible (3.2). Cette condition est vérifiée soit en tenant compte de termes correctifs, soit numériquement pour une valeur de  $\omega_0$  supérieure ou de l'ordre de 5,5 et une valeur  $\sigma=1$ .

## 2.2 -Transformée directe.

La transformée en ondelettes d'un signal  $s(p)$ , en un point  $(b,a)$  du demi-plan, est alors le produit scalaire de ce signal par l'ondelette  $a^{-1/2} g\left(\frac{p-b}{a}\right)$ , (normalisation  $L^2$ ):

$$(3.4) \quad S(b,a) = a^{-1/2} \int s(p) \bar{g}\left(\frac{p-b}{a}\right) dp ,$$

où  $\bar{g}$  représente le complexe conjugué de  $g$ .

Si  $p$  représente la variable temporelle, alors la transformation est celle d'un signal analytique [52]. Ceci est dû à la progressivité de l'ondelette et peut se voir en écrivant la définition (3.4) dans l'espace fréquentiel:

$$(3.5) \quad S(b,a) = a^{1/2} \int \hat{s}(\omega) \bar{\hat{g}}(a\omega) \exp(-ib\omega) d\omega, \quad \hat{g}(\omega) = \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

La condition d'admissibilité est primordiale car elle fait de la transformée une isométrie partielle, au sens suivant: il existe une constante  $C_g$  non nulle, ne dépendant que de l'ondelette  $g$ , telle que pour tout signal  $s(p)$ , on ait:

$$(3.6) \quad \int |s(p)|^2 dp = C_g^{-1} \iint |S(b,a)|^2 \frac{db da}{a^2}, \quad C_g = 2\pi \int \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega.$$

Cette expression permet d'interpréter le carré du module de la transformée en ondelettes, comme une densité d'énergie répartie dans le demi-plan temps-échelle  $(b,a)$ .

### 2.3 - Transformée inverse.

La relation (3.6) montre que l'énergie du signal est conservée. Il existe alors une formule d'inversion de la transformée permettant la reconstruction du signal et qui s'écrit:

$$(3.7) \quad s(p) = \text{Re} \left[ C_g^{-1} \iint S(b,a) a^{-1/2} g\left(\frac{p-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2} \right],$$

où  $\text{Re}$  représente la partie réelle.

Cette formule n'est pas la seule possible. Une autre qui nous sera utile dans la suite du problème est celle dite de reconstitution simple. Le signal est reconstruit par simple sommation des coefficients d'ondelettes sur le paramètre de dilatation:

$$(3.8) \quad s(p) = \text{Re} \left[ K_g^{-1} \int a^{-1/2} S(p,a) \frac{da}{a} \right],$$

$K_g$  est une constante non nulle définie par:

$$K_g = (2\pi)^{1/2} \int \frac{\hat{g}(\omega)}{|\omega|} d\omega$$

L'ondelette doit alors vérifier la condition d'admissibilité suivante:

$$(3.9) \quad \int \frac{\hat{g}(\omega)}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (\text{et } \neq 0)$$

Une remarque à ce niveau est à faire: indépendamment du choix de l'ondelette, toute l'information du signal est contenue dans la transformée. Cependant, lorsque nous voudrions étudier certaines caractéristiques du signal, nous prendrions alors une ondelette analysante appropriée aux phénomènes que l'on souhaite observer [53].

Néanmoins, nous n'avons pas besoin d'avoir une connaissance a priori du signal pour appliquer la transformée; cette méthode est non paramétrique.

### III.3. Noyau reproduisant [54].

Soit  $s(p)$  un signal d'énergie finie,  $S(b,a)$  sa transformée en ondelettes par rapport à l'ondelette analysante  $g$ , nous pouvons écrire d'après (3.4):

$$\begin{aligned} S(b,a) &= (T^b D^a g, s) = \frac{1}{C_g} \int (T^b D^a g, T^{b'} D^{a'} g) (T^{b'} D^{a'}, s) \frac{da' db'}{a'^2} \\ &= \iint \mathcal{N}_g(b,a;b',a') S(b',a') \frac{da' db'}{a'^2} \end{aligned}$$

$C_g$  est défini par (3.2).

Cette relation exprime les contraintes que doivent satisfaire les coefficients  $S(b,a)$  associés à un signal arbitraire  $s$ .

Le noyau reproduisant noté  $\mathcal{N}_g$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_g &= \frac{1}{C_g} \sqrt{\frac{a'}{a}} \int g(p) \bar{g}\left(\frac{a'p-b+b'}{a}\right) dp \\ (3.10) \quad &= \frac{1}{C_g} \sqrt{\frac{a'}{a}} \int e^{i(b-b')/a'} \hat{g}(\omega) \bar{\hat{g}}\left(\frac{a\omega}{a'}\right) d\omega \end{aligned}$$

Nous voyons que le module de  $\mathcal{N}_g$  atteint une valeur maximum lorsque l'on a l'égalité des couples:  $\{b,a\} = \{b',a'\}$ . Pour le couple  $\{a_0, b_0\}$  du demi plan ouvert  $(a,b)$ , le module de  $\mathcal{N}_g$ , pour l'ondelette utilisée (3.3), décroît très rapidement dès qu'on s'écarte de  $\{a_0, b_0\}$ .

L'ondelette de Morlet étant une fonction bien localisée dans l'espace fréquentiel et temporel, le noyau associé se trouve donc localisé dans le plan de la transformée.

L'influence du noyau reproduisant peut être observée dans l'analyse d'un signal bruité [55], problème que l'on rencontre lors d'une expérience par exemple, où le signal mesuré est généralement associé à la présence d'un bruit (bruit de mesure, milieu ambiant...).

A titre d'exemple, les principales caractéristiques de la transformée en ondelettes d'un bruit blanc (Fig.1.a-1.b) peuvent se résumer de la façon suivante:

Soit  $s(t)$  un bruit blanc (processus stationnaire aléatoire), de valeur moyenne nulle: c'est-à-dire  $\langle s(t) \rangle = 0$ . Sa fonction d'autocorrélation  $R$  s'écrit:

$$R(t_2 - t_1) = \langle s(t_1), s(t_2) \rangle = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1)$$

où  $\sigma$  représente l'écart type du bruit.

Si nous calculons la transformée en ondelettes de ce signal, la valeur moyenne associée sera nulle également, c'est-à-dire que:  $\langle S(b,a) \rangle = 0$ . La fonction d'autocorrélation associée est décrite par:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S}(b,a), S(b',a') \rangle &= \frac{1}{\sqrt{a} a'} \int \tilde{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) g\left(\frac{t'-b'}{a'}\right) \langle s(t), s(t') \rangle dt' dt \\ (3.11) \quad &= \sigma^2 C_g \mathcal{N}_g\left(\frac{b-b'}{a}, \frac{a}{a'}\right) . \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{N}_g(x,y) = \frac{1}{C_g} (\mathcal{T}^x \mathcal{D}^y g, g).$$

Dans ce cas le module de la transformée en ondelettes fait apparaître des corrélations de la taille du noyau reproduisant, centrées en différents points du demi-plan  $(a,b)$  (Fig.1.b). Les lignes équiphasés (phases du noyau) ne présentent aucune convergence et tendent à devenir parallèles mais de plus en plus denses, à petite échelle (Fig.1.a). Un bruit blanc étant par définition un signal non corrélé, sa transformée reflète les corrélations des ondelettes utilisées. Ces corrélations sont données par le noyau reproduisant.

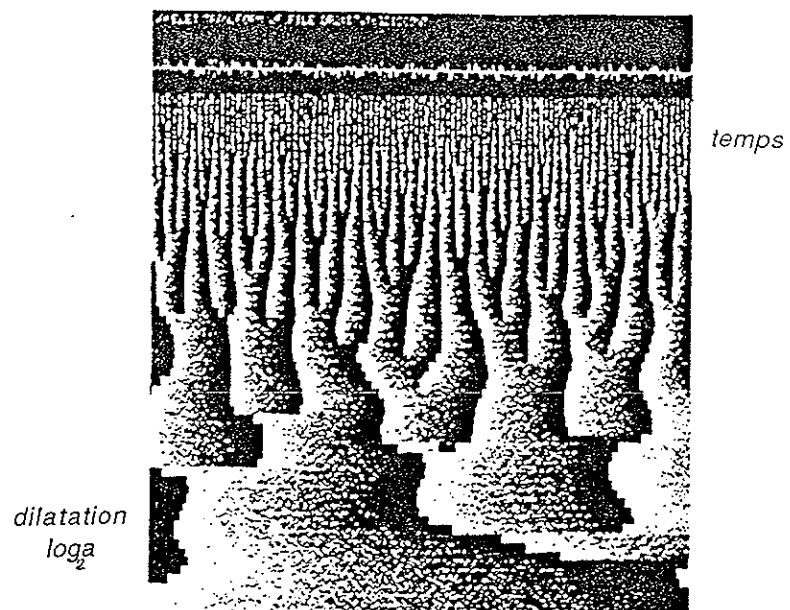


Figure 1.a: Phase de la transformée en ondelettes d'un bruit blanc

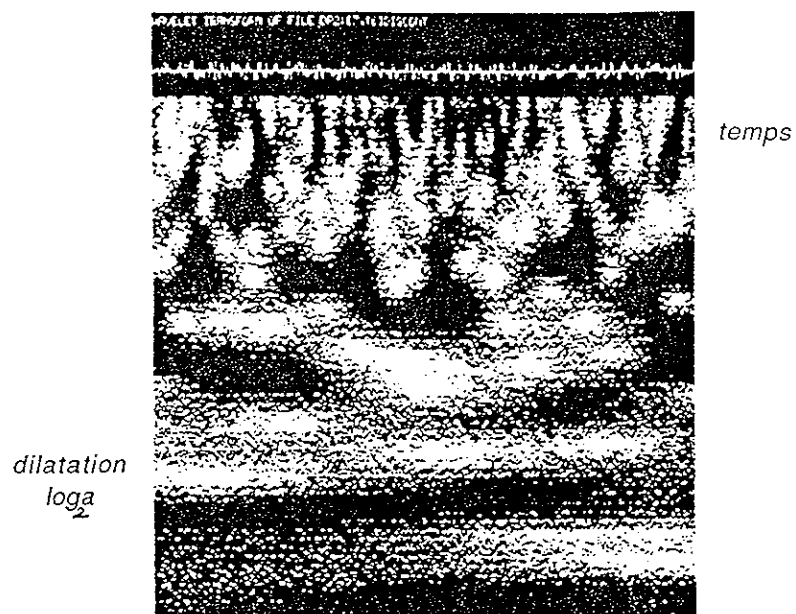


Figure 1.b Module de la transformée en ondelettes d'un bruit blanc

### III.4. Détection de discontinuité.

#### 4.1-Aperçu général de l'analyse de points singuliers présents dans un signal.

Si l'habitude nous a poussé à ne considérer que les résultats issus du module d'une transformée (Fourier, Gabor ou, Wigner-Ville par nécessité), l'information directe ou indirecte apportée par la phase, dans la transformée en ondelettes, est non négligeable. Celle-ci devient même utile numériquement, dans le cas de recherche de points singuliers. En effet, nous avons convergence des lignes de phase constante vers l'endroit où apparaissent les discontinuités du signal. L'analyse devient performante si l'on veut détecter des discontinuités dans les dérivées d'ordre  $n$  du signal, celui-ci pouvant être continu [55-58]. Le type de discontinuité, quant à lui, est donné par le comportement du module.

Une autre application tirée encore de l'analyse de la phase, est celle de l'extraction de lignes spectrales caractéristiques ou encore de lois de modulation [59]. Une application de l'évaluation de la loi de dispersion de la vitesse de groupe, de la fréquence instantanée pour une valeur fixe du paramètre d'échelle, ou de la fréquence de résonance d'un corps diffusant sera abordée au chapitre VI .

#### 4.2.Analyse de discontinuités isolées [55-58].

On supposera que les discontinuités du signal sont isolées et résultent d'une propriété d'homogénéité locale du signal. Soit  $s(p)$  une fonction localement intégrable,  $s(p)$  est dite homogène de degré  $\alpha$ , si elle vérifie la relation:

$$(3.12) \quad \forall \mu > 0, s(\mu p) = \mu^\alpha s(p) \quad \text{avec } \alpha \text{ appartenant à } \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}.$$

( $s(p)$  est alors une fonction propre de l'opérateur de dilatation)

Soit  $S(b,a)$  la transformée en ondelettes du signal  $s(p)$ , compte tenu de (3.12), et (3.1) ( $C(a)=a^\alpha$ ), nous avons l'expression en posant  $p'= p/a$ :

$$\begin{aligned} S(b,a) &= C(a) \int s(p) \tilde{g}\left(\frac{p-b}{a}\right) dp \\ (3.13) \quad &= a C(a) \int s(a p') \tilde{g}\left(p'-\frac{b}{a}\right) dp' \\ &= a^{1+\alpha} C(a) S(b/a,1). \end{aligned}$$

Si  $s(p)$  est homogène en un point arbitraire  $p_0$ , alors nous pouvons écrire:

$$S(b-p_0, a) = a^{1+\alpha} C(a) S\left(\frac{b-p_0}{a}, 1\right)$$

Soit pour  $C(a) = a^{-1}$  (normalisation  $L^1$ ):

$$S(b-p_0, a) = a^\alpha S\left(\frac{b-p_0}{a}, 1\right)$$

Nous voyons que sur une ligne allant vers le point d'homogénéité (discontinuité) en  $b=p_0$ , quelque soit la position du point  $p$ , (invariance par translation), le module de la transformée se comporte comme  $a^\alpha$ . Si  $\alpha$  est réel, la phase de  $S(b, a)$  est constante le long des lignes  $\frac{b-p_0}{a} = \text{Cste}$  qui convergent asymptotiquement pour  $a$  petit (et fond de régularité), au point d'homogénéité.

L'analyse d'un signal, dont la dérivée d'ordre  $n$  présente une discontinuité aura un module en décroissance du type  $a^{1+\alpha+n}C(a)$  le long des droites convergeant vers la discontinuité.

Ce qui est vrai pour les fonctions (fig.2:a-b:  $s(p) = p^\alpha$ ,  $\alpha=2$ ) l'est aussi pour les distributions. Nous étudierons ci-après (III.6.1) la distribution de Dirac qui est homogène de degré  $-1$  (fig.3).

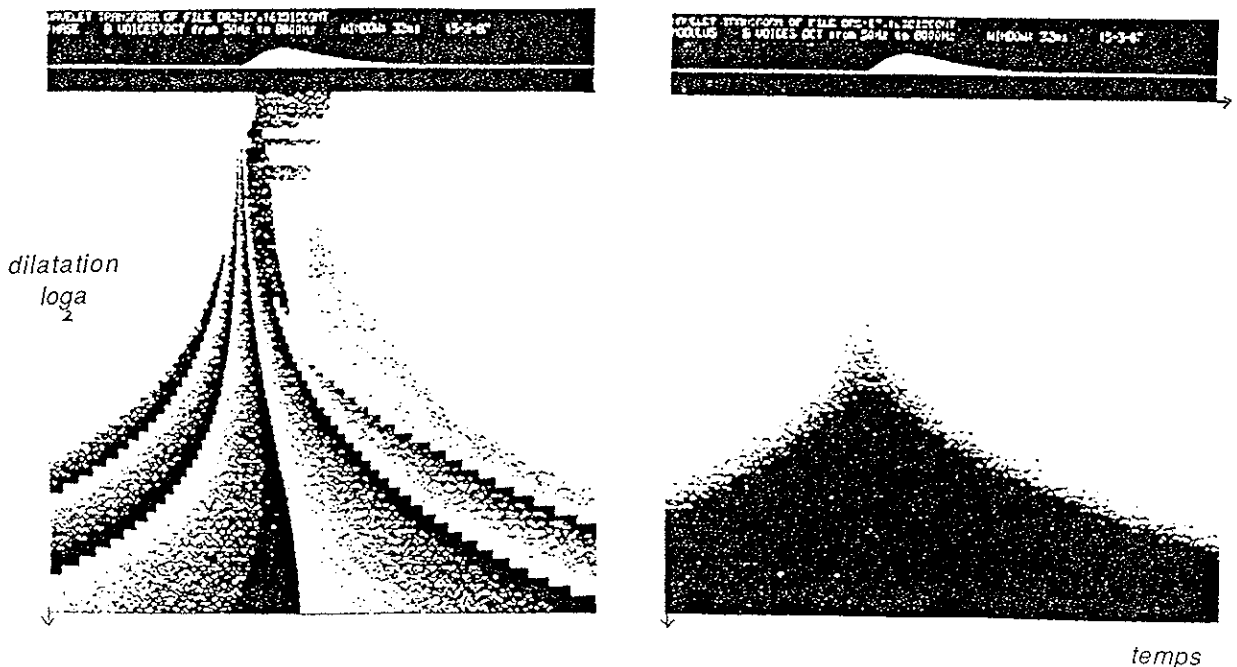


Figure 2.a:Phase, .b:Module: de la transformée en ondelettes de la fonction:  $f(p) = p^2 e^{-p}$



### III.5. Discrétisation de la transformée en ondelettes.

L'application numérique de la transformée en ondelettes nécessite l'introduction de formules discrétisées sur un réseau ou grille. Le choix de cette grille détermine la nature des procédures de reconstruction du signal (formules d'interpolation), ainsi que l'aspect réduction de données (exemple grille dyadique). L'utilisation d'algorithmes élaborés (comme l'algorithme à trous [60-61]) peut permettre une analyse temps réel des données. Le nombre d'opérations élémentaires (addition-multiplication) ne croît plus exponentiellement en fonction du nombre d'octaves comme dans le cas d'algorithmes classiques, mais linéairement. Néanmoins l'algorithme à trous, basé sur une factorisation de l'opérateur de convolution n'est exact que pour une classe particulière d'ondelettes (ondelettes stables par interpolation sur la grille dyadique).

Indépendamment du choix du réseau, nous devons faire évoluer les paramètres d'échelle  $a$  et de translation  $b$ . Si  $p$  représente la variable temporelle du signal  $s(p)$ , le paramètre  $b$  sera homogène à un temps et variera linéairement. Les valeurs du paramètre de dilatation seront inversement proportionnelles à des fréquences et seront décomposées en octaves. Chaque octave sera elle-même décomposée en voies.

Le calcul numérique des différentes contributions, ainsi que l'analyse des signaux expérimentaux se sont effectués à partir de l'expression de la transformée en ondelettes continues Cf: (3.4). Nous présenterons pour cela les formules discrétisées sur la grille "fine" définie en (3.14). On trouvera en annexe 1, l'organigramme ainsi que les caractéristiques du programme de transformée en ondelettes réalisé, appelé "ONDEL" ([62]). Des exemples d'applications de la transformée sur des signaux tests (signaux carrés, transition entre deux sinusoïdes) sont également présentées. Ces exemples ont été traités avec l'ondelette de type Morlet (3.3). Les parties réelle et imaginaire de cette ondelette sont montrées à titre indicatif en annexe 1.

Expression de la transformée en ondelettes discrétisée sur une grille fine:

Soient  $T_e$  la période d'échantillonnage du signal, NVO le nombre de voies par octaves, les paramètres d'échelle et de translation s'expriment par:

$$(3.14) \quad a_j = a_0 2^{j/NVO}, \quad b_k = k T_e$$

L'expression de la transformée en ondelettes (3.4) prise à l'instant  $t_k = b_k$ , suivant les relations (3.14) devient sous sa forme discrète:

$$(3.15) \quad S(k, T_e, j) = T_e a_0^{-1/2} 2^{-j/2} NVO \sum_i s(i, T_e) \bar{g}\left(\frac{(i-k) k T_e}{a_0 2^{j/NVO}}\right)$$

En utilisant une ondelette progressive (Cf p. 135), nous avons deux représentations complémentaires de la transformée d'un signal arbitraire, son module et sa phase. L'isométrie donnant lieu à des formules exactes de reconstruction du signal, le module et la phase de la transformée de celui-ci, pourra s'interpréter comme une signature du signal acoustique, par rapport à l'ondelette analysante choisie.

### **III.6- Application de la transformée à des signaux particuliers.**

Nous présentons plus en détails le comportement en phase et en module de la transformée en ondelettes de deux signaux particuliers: celui d'un signal périodique (signal monochromatique), et celui d'un signal non périodique particulier, un signal impulsionnel, représenté par la distribution de Dirac  $\delta$ . L'analyse de ces signaux sert de base dans l'étude de la propagation de signaux acoustiques, car on peut les assimiler aux types de signaux supposés émis par une source (fréquence pure ou dérivée de la distribution de Dirac). Dans l'étude de la décomposition de la fonction de Green en contributions élémentaires d'ondelettes, nous ferons référence aussi bien numériquement qu'expérimentalement au signal impulsionnel émis par la source, et donc à l'analyse de la distribution de Dirac  $\delta$ .

#### **6.1-Analyse de la distribution de Dirac $\delta(t-t_0)$ .**

D'après la définition de la transformée et l'expression de l'ondelette analysante données respectivement en (3.4), l'expression de la transformée en ondelettes de la distribution  $\delta(t-t_0)$  s'écrit (avec la normalisation  $L^2$ ):

$$(3.16) \quad \begin{aligned} S(b,a) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \delta(t-t_0) \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ S(b,a) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{g}\left(\frac{t_0-b}{a}\right) \end{aligned}$$

$$= a^{1/2 - 1} S\left(\frac{t_0 - b}{a}, 1\right) \quad (\text{d'après 3.13})$$

Ce signal est un signal homogène d'ordre -1. Il possède toutes les propriétés des fonctions homogènes d'ordre -1, c'est-à-dire que: quelque soit la position du paramètre  $b$  (invariance par translation), sur les droites d'équation  $\frac{t_0 - b}{a} = \text{Cste}$ , le module de la transformée se comporte comme  $a^{-1/2}$ . La phase est constante le long de ces lignes. Nous remarquons que le module de la transformée de la dérivée de la distribution  $\delta$  (homogène d'ordre -2), aura un comportement en  $a^{-3/2}$  sur les lignes allant au point d'homogénéité  $t_0 = b$  (décroissance plus rapide).

#### 6.1.a- Analyse de la phase. (Fig 3.a)

L'argument de la transformée pour une échelle  $a$  fixée, n'est autre que l'argument des ondelettes  $\tilde{g}\left(\frac{t_0 - b}{a}\right)$ . Nous avons dans ce cas l'expression suivante:

$$(3.17) \quad \arg[S(b,a)] = \text{Cste} \text{ sur les droites d'équation } \frac{t_0 - b}{a} = \text{Cste}$$

Les lignes de phase constante convergent donc au point où apparaît la discontinuité (soit au temps  $t = t_0$ ), suivant les droites  $\frac{t_0 - b}{a} = \text{Cste}$ . Ceci peut être vu sur la représentation en phase de la transformée figure 3.a. La convergence des lignes de phase est visualisée suivant une représentation linéaire en temps (abscisse) et logarithmique pour le paramètre de dilatation (ordonnée). (Les lignes de phases constantes apparaissent alors sous forme d'exponentielle). Cette représentation est obtenue par densité de points. Nous passons progressivement d'une zone claire (phase nulle) à une zone sombre (phase =  $2\pi$ ).

#### 6.1.b- Analyse du module (Fig. 3.b).

Nous voyons que le module de la transformée de l'impulsion  $\delta(t - t_0)$  n'est autre que le module des ondelettes dilatées de  $a$ . Indépendamment de l'ondelette choisie (avec ici  $C(a) = a^{-1/2}$ ), pour de faibles valeurs du paramètre de dilatation ( $a < 1$ ), l'enveloppe du module sera contractée et de forte amplitude sur les droites d'équation  $\frac{t_0 - b}{a} = \text{Cste}$ . Inversement, pour des valeurs  $a > 1$ , elle se trouvera dilatée et de faible amplitude. Ceci peut être visualisé sur une représentation tridimensionnelle. La figure 3.b représente le module de la transformée en ondelettes d'une impulsion  $\delta$ , calculée avec une enveloppe gaussienne.

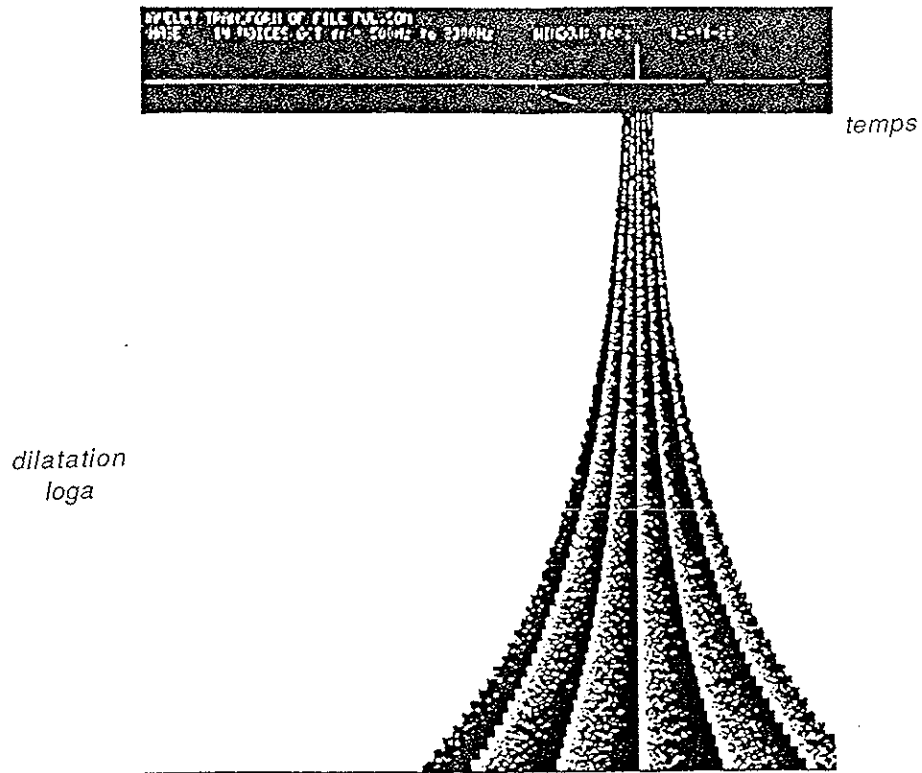


Figure 3.a: Phase de la transformée en ondelettes de la distribution  $\delta(t-t_0)$

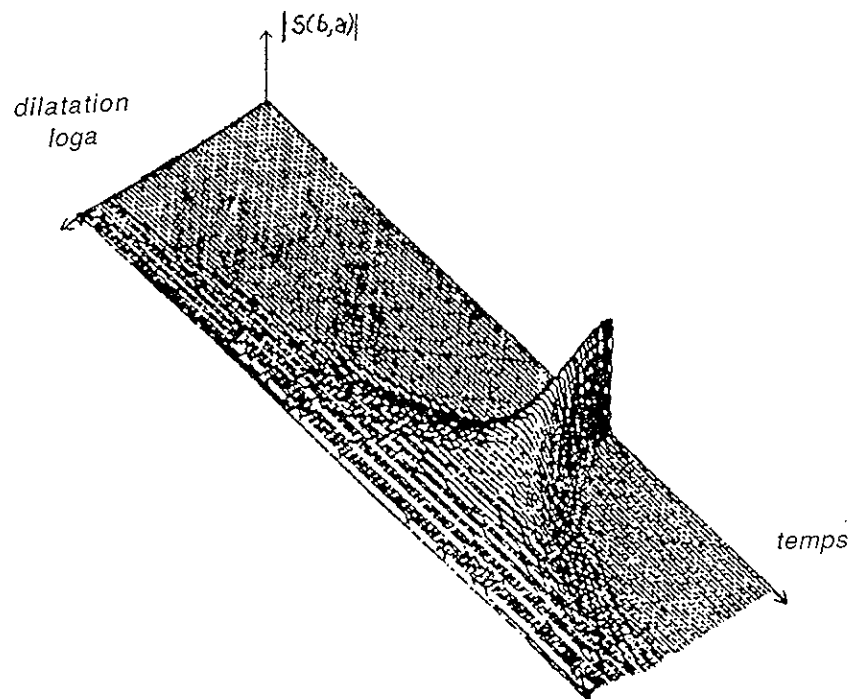


Figure 3.b: Module de la transformée en ondelettes de la distribution  $\delta(t-t_0)$

## 6.2. Analyse d'un signal monochromatique $\cos(\omega_0 t)$ .

Cet exemple montre l'intérêt d'utiliser une ondelette progressive. En effet, en utilisant l'expression (3.5) de la transformée dans l'espace fréquentiel, nous obtenons l'expression suivante:

$$(3.18) \quad S(b,a) = \frac{\sqrt{a}}{2} \hat{g}(a \omega_0) e^{-i b \omega_0}$$

L'information, dans ce cas, portée par les valeurs fréquentielles négatives de la transformée du signal est éliminée. Nous n'avons plus d'artéfacts (interférences) dus à la sommation des termes pour  $\omega < 0$  et  $\omega > 0$ . Phase et module peuvent être déterminés correctement .

### 6.2.a-Analyse de la phase.(Fig.4.a).

Dans le cas d'une ondelette progressive, la phase de la transformée oscille à la pulsation  $\omega_0$ , qui n'est autre que la pulsation de la fonction périodique analysée. Dès que la valeur du paramètre de translation sera:  $b = \frac{2\pi k}{\omega_0}$  ( $k \in \mathbf{N}$ ), nous aurons un passage de la phase de 0 à  $\pi$ . Ceci se traduit dans la représentation temps-échelle par des lignes verticales alternativement noires et blanches (Cf. fig. 2.a). Ces lignes se trouvent centrées autour du paramètre de dilatation correspondant à la fréquence du signal analysé. Cette figure utilise le même principe de représentation graphique que la figure 1.a. Nous voyons que les lignes de phase sont régulières et parallèle à l'axe du paramètre d'échelle.

### 6.2.b-Analyse du module.(Fig.4.b)

Le module de la transformée pour une valeur fixe du paramètre de dilatation, est constant. Lorsque l'ondelette dilatée oscillera à la même fréquence que la sinusoïde, le coefficient d'ondelette sera maximum (Cf. 3.18). Le module, pour cette valeur fréquentielle sera maximum et décroîtra de part et d'autre. La figure 2.b représente le module de la transformée d'une sinusoïde pour une ondelette gaussienne (ondelette de Morlet). Cette représentation est également effectuée en densité de points.

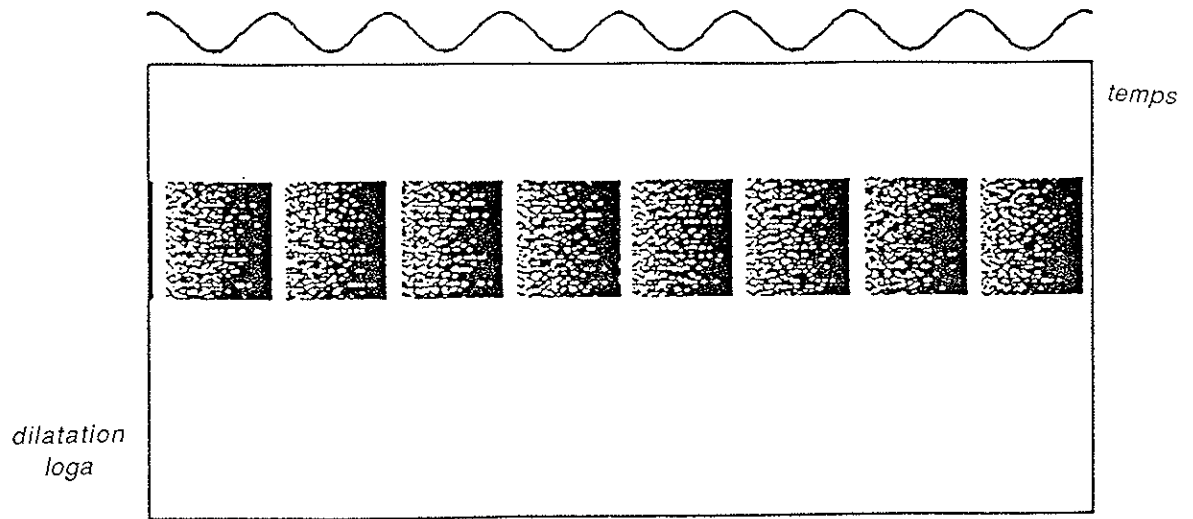


Figure 4.a: Phase de la transformée en ondelettes d'un signal monochromatique.

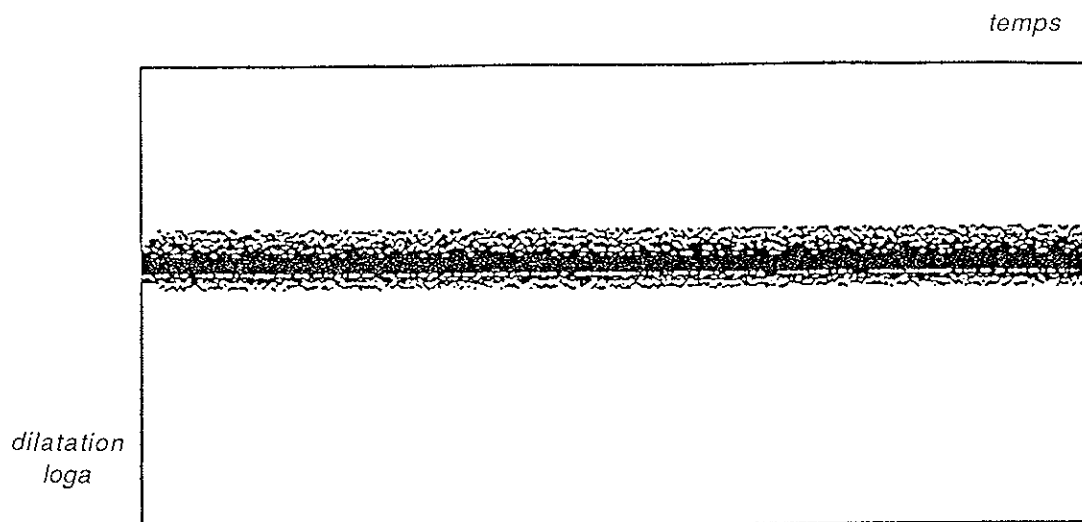


Figure 4.b: Module de la transformée en ondelettes d'un signal monochromatique.



#### **IV - DECOMPOSITION DE LA FONCTION DE GREEN EN CONTRIBUTIONS ELEMENTAIRES D'ONDELETTES.**



## **IV-Décomposition de la fonction de Green en contributions élémentaires d'ondelettes. Problème direct.**

### **IV-1.Expression de la fonction de Green dans le plan temps-échelle.**

Nous avons vu que les potentiels transmis et réfléchi peuvent être décomposés en trois contributions, à cause de la présence de points de branchement dans l'intégrand. Si l'on suppose que le terme source temporel est un signal impulsionnel, nous pouvons de plus (Cf. III) décomposer les solutions élémentaires (fonction de Green) en une somme de contributions élémentaires "d'ondelettes". Cette décomposition bénéficie des propriétés de la transformée en ondelettes et de l'ondelette analysante que l'on se choisit. Nous voulons étudier séparément, et calculer de façon exacte ces contributions. Pour cela, nous choisissons une ondelette analysante régulière Cf. (3.3). Les propriétés d'une part de linéarité et d'isométrie de la transformée, d'autre part de régularité de l'ondelette analysante, nous permettent alors:

- de nous affranchir des singularités contenues dans le potentiel et de faciliter le calcul numérique. (La transformée en ondelettes de la fonction de Green est plus régulière que la fonction de Green elle-même).

- d'effectuer une analyse locale des différentes contributions à  $\frac{\Delta f}{f} = C^{\text{st}}$ , à n'importe quel temps et n'importe quelle échelle;

- de reconstruire de façon sélective, avec la précision désirée, le champ acoustique transmis total.

L'isométrie nous permet d'interpréter le module au carré des coefficients d'ondelettes comme une densité d'énergie. Elle fournit de plus des formules exactes d'inversion qui nous sont utiles lors de l'étude du problème inverse (reconstruction du signal).

Enfin, comme on l'a vu (Cf. III.4), cette méthode est bien adaptée à la détection de singularités contenues dans un signal.

En outre, cette transformation permet d'analyser le signal propagé en conservant ses caractéristiques temporelles et fréquentielles. L'énergie du signal est elle-même conservée. Nous pouvons reconstituer le champ total par simple sommation des différentes contributions.

L'étude théorique des différentes contributions composant le champ transmis sera alors combinée à une étude numérique et expérimentale. Nous utiliserons pour cela les

définitions de la transformée en ondelettes continue (ie: coefficients calculés sur la grille fine). L'ondelette utilisée sera une ondelette de type Morlet.

L'expression du potentiel transmis total s'écrit d'après (2.16) dans l'espace fréquentiel par:

$$\hat{\Psi}_2(r, z, \omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\omega)}{c_1} |\omega| \hat{F}(\omega) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{i \operatorname{sgn}(\omega)[K_1 h + K_2 z]}}{m \sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} J_0\left(\frac{u \omega r}{c_1}\right) u du$$

D'autre part, nous pouvons écrire l'expression de la transformée en ondelettes continue dans l'espace de Fourier (Cf. 3.5), par rapport à l'ondelette analysante progressive  $\hat{g}(\omega)$  (Cf.(3.3)):

$$(S \Psi)(b, a) = \sqrt{a} \int_0^{\infty} \hat{\Psi}(r, z, \omega) \hat{g}(a\omega) e^{-ib\omega} d\omega, \quad (4.1)$$

$$\text{où } \hat{g}(\omega) = \exp\left(-\frac{(\omega - 5.5)^2}{2}\right)$$

Compte tenu de (4.1) et (2.16) nous obtenons:

(4.2)

$$(S \Psi)(b, a) = \frac{i}{c_1} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_{\omega=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{i \frac{\omega}{c_1} (h \sqrt{1-u^2} + z \sqrt{n^2-u^2})}}{m \sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} J_0\left(\frac{u \omega r}{c_1}\right) \hat{F}(\omega) \hat{g}(a\omega) e^{-ib\omega} \omega d\omega du$$

La détermination des racines  $\sqrt{n^2-u^2}$  et  $\sqrt{1-u^2}$  est la même que celle décrite précédemment.

En supposant que  $\hat{F}(\omega) = C \delta^t$ , le terme source représente un signal impulsionnel. Puisque le problème est linéaire, nous voyons que (4.2) représente également l'expression du potentiel transmis où le terme source est une ondelette. Dans ce cas, l'analyse du signal source "ondelette", montrerait quels sont les coefficients d'ondelettes qui fournissent les modes "géométrique", "latéral" ou "évanescent".

La décomposition du potentiel transmis total en trois contributions pour un signal impulsionnel est donnée d'après (2.17) par:

$$G_2(r,z,t) = G_2^1(r,z,t) + G_2^2(r,z,t) + G_2^3(r,z,t)$$

La décomposition de la fonction de Green dans le plan temps-échelle (ou en encore en contributions élémentaires d'ondelettes) s'écrit:

$$(4.3) \quad (SG_2)(b,a) = \frac{i}{c_1} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_{u=0}^{\infty} \frac{u}{m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} \left\{ \int_{\omega=0}^{\infty} \hat{g}(a\omega) e^{i\omega\Phi(u)} J_0(\eta(u)) d\omega \right\} du$$

$$\Phi(u) = \left( b - \frac{h}{c_1} \sqrt{1-u^2} - \frac{z}{c_1} \sqrt{n^2-u^2} \right) \quad \text{et} \quad \eta(u) = \frac{u\omega r}{c_1}$$

Nous allons étudier en un point spatial quelconque  $(r,z)$  du second milieu, successivement dans le plan temps-échelle, chacune des trois contributions (Cf. II.3).

#### 1.1- Décomposition en ondelettes de la contribution "géométrique".

L'expression est dans ce cas (Cf. II.3.1 et (4.1)):

$$(4.4) \quad (SG_2^1)(b,a) = \frac{i}{c_1} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_{u=0}^n \frac{u}{m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} \left\{ \int_{\omega=0}^{\infty} \hat{g}(a\omega) e^{i\omega\Phi(u)} J_0(\eta(u)) d\omega \right\} du$$

or d'après la relation (2.19.b)

$$\langle G_2^1(r,z,t), \phi \rangle = \frac{-1}{c_1 \pi} \int_{u=0}^n \frac{u}{m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} \left[ \langle I_+, \phi \rangle H(\alpha-\beta) + i \langle I_-, \phi \rangle H(\beta-\alpha) \right] du$$

avec:

$$\langle I_+, \phi \rangle = -\frac{1}{2} \left( \frac{(\alpha+\beta)^{-3/2}}{\sqrt{\alpha-\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta_0}} \int_0^\infty [\phi(X) - \phi(0)] X^{-3/2} dX \right)$$

$$\langle I_-, \phi \rangle = -\frac{i}{2} \left( \frac{(\alpha+\beta)^{-3/2}}{\sqrt{\beta-\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta_0}} \int_0^\infty [\phi(-X) - \phi(0)] X^{-3/2} dX \right)$$

$$\text{où } X_+ = (\alpha - \beta) \text{ et } \alpha > \beta ; \quad \beta = t - \frac{\sqrt{1-u^2}}{c_1} h - \frac{\sqrt{n^2-u^2}}{c_1} z \quad ; \quad \alpha = \frac{u}{c_1} r$$

Dans ce cas le rôle joué par la fonction test  $\phi(X)$  dans l'expression (2.19) sera, dans l'expression (4.4), joué par la fonction analysante  $g(x)$  (ondelette). Nous utiliserons l'expression (4.4) pour nos simulations numériques (Cf. IV.2).

### 1.2- Décomposition en ondelettes de la contribution "latérale":

D'après la relation (2.20) et la définition de la transformée en ondelettes dans l'espace temporel (3.4), nous pouvons écrire:

$$(4.5) \quad (SG_2^2)(b,a) = \frac{-1}{\pi\sqrt{ac_1}} \int_{u=n}^1 \frac{u}{m\sqrt{1-u^2} + i\sqrt{u^2-n^2}} \left\{ \int g\left(\frac{t-b}{a}\right) [ \alpha^2 - (c+id)^2 ]^{-3/2} (c+id) dt \right\} du$$

$$c = t - \frac{\sqrt{1-u^2}}{c_1} h, \quad d = \left( \frac{\sqrt{u^2-n^2}}{c_1} z \right) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{u}{c_1} r$$

Cette formulation a donné lieu à des simulations numériques pour différentes valeurs des coordonnées spatiales  $(r,z)$  du point d'observation.

### 1.3. Décomposition en ondelettes de la contribution "évanescence".

L'expression de cette contribution est alors (Cf. II.3.3):

$$(4.6) \quad (SG_2^3)(b,a) = \frac{1}{\pi\sqrt{ac_1}} \int_{u=1}^{\infty} \frac{u}{m\sqrt{u^2-1} + \sqrt{u^2-n^2}} \left\{ \int g\left(\frac{t-b}{a}\right) [ (e+it)^2 + \alpha^2 ]^{-3/2} (e+it) dt \right\} du$$

$$\text{avec } e = \frac{\sqrt{u^2-n^2}}{c_1} z + \frac{\sqrt{u^2-1}}{c_1} h \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{u}{c_1} r$$

Bien que cette contribution soit négligeable avec les paramètres  $m,n$  que nous utiliserons, nous donnerons une représentation graphique de celle-ci et dans nos simulations numériques du champ total, nous en tiendrons compte.

## IV-2. Application de la transformée en ondelettes: Simulations numériques.

### 2.1. Mise en forme des expressions pour le calcul numérique.

Nous devons calculer numériquement chacune des trois contributions, et cela de façon "exacte" (ie: sans l'utilisation de méthodes asymptotiques). Cette évaluation s'effectue séparément, grâce à l'application de la transformée en ondelettes, respectivement à l'ondelette analysante  $g(t)$ .

Chaque contribution demande l'évaluation d'une double intégrale. Les algorithmes que nous utilisons dans les procédures d'intégration sont du type Romberg [41], adaptés aux singularités de l'intégrand (méthode HP [41]). En ce qui concerne les contributions 2 et 3 (latérale et évanescence), elles ont été calculées d'une part à partir des expressions (2.20) et (2.21) auxquelles nous avons appliqué une transformation en ondelettes, d'autre part directement à partir des expressions (4.5) et (4.6). Les résultats sont évidemment identiques, la première méthode est cependant un peu plus rapide. Nous ne différencierons pas dans les représentations graphiques ces deux méthodes.

En utilisant dans les différentes expressions (4.4), (4.5) et (4.6) les variables réduites  $x = \frac{r}{h}$ ,  $y = \frac{z}{h}$  et  $\lambda_0 = \frac{\lambda}{h}$  (idem que pour le cas harmonique), nous sommes amenés à introduire une nouvelle variable  $\tau_0 = \frac{h}{c_1}$ . Cette variable correspond au temps unitaire que met l'onde pour parvenir de la source à l'interface. Les nouveaux paramètres de dilatation et translation  $\alpha$  et  $\beta$  s'expriment alors par:

$$\alpha = \frac{a}{\tau_0} \quad , \quad \beta = \frac{b}{\tau_0} \quad \text{avec} \quad v = \frac{\omega}{\omega_0} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_0}$$

L'expression (4.3) devient selon les variables réduites:

$$(4.7) \quad (SG_2)(\beta, \alpha) = \frac{2i\sqrt{\alpha}}{c_1} \int_{u=0}^{\infty} \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{e^{i2\pi v M(u, \beta)}}{m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} J_0(2\pi u v x) u \wedge g(2\pi v \alpha) v \, dv \, du$$

où

$$M(u, \beta) = \left( \beta + \frac{\sqrt{1-u^2}}{c_1} + \frac{y}{c_1} \sqrt{n^2-u^2} \right)$$

Nous introduisons de même, les variables réduites et les nouveaux paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  dans les expressions (4.5) et (4.6).

Posons: 
$$\int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{i2\pi v M(u, \beta)}}{m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} J_0(2\pi u v x) u du = \text{Int}(u)$$

Nous pouvons remarquer que l'exponentielle devient réelle négative si on considère le cas de la troisième contribution (i.e:  $u > 1$ ), à cause de la détermination des racines:

$$\text{Int}^3(u) = i \int_{u=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi v \left( \beta + \frac{\sqrt{u^2-1}}{c1} + \frac{y}{c1} \sqrt{u^2-n^2} \right)}}{m\sqrt{u^2-1} + \sqrt{u^2-n^2}} J_0(2\pi u v x) u du$$

Le calcul de cette contribution nécessite alors de connaître la valeur de  $u$  ( $u_{\max}$ ) à partir de laquelle  $\text{Int}^3(u)$  se trouve négligeable. Comme nos évaluations numériques représentent le dioptré air-eau, les paramètres  $m$  et  $n$  sont respectivement de l'ordre de 800 et 0,2266. Dans ce cas nous avons les relations:

$$\sqrt{u^2-n^2} > \sqrt{u^2-1} \Rightarrow e^{-\sqrt{u^2-n^2}} < e^{-\sqrt{u^2-1}}$$

et

$$m\sqrt{u^2-1} > \sqrt{u^2-n^2}$$

En supposant que  $\text{Int}^3(u_{\max})$  est numériquement négligeable pour une valeur  $C_0$  nous aurons:

$$\text{Int}^3(u_{\max}) \approx \frac{e^{-2\pi v \sqrt{u_{\max}^2-1}}}{m} \approx C_0 \Leftrightarrow u_{\max} = \frac{\sqrt{\ln^2(m C_0) + 1}}{2\pi v}$$

L'intégrale sur la variable  $u$  de la contribution "évanescence" sera limitée aux valeurs de  $1 < u < u_{\max}$ . Nous prendrons pour nos évaluations numériques  $C_0 = 10^{-6}$ .

Nous allons donc analyser pour différentes positions de l'hydrophone le signal transmis à travers le dioptré. Pour cela nous simulerons les différentes contributions associées au potentiel transmis, en des points particuliers du plan d'eau. Premièrement, on supposera que le point d'observation est directement à la verticale de la source (i.e  $\frac{r}{h} = 0$ ) et

à une profondeur ( $\frac{z}{h} = 0.2$ ), puis juste à incidence critique (ie:  $\frac{r}{h} = n$ ). Deuxièmement, on se placera dans une région où la contribution latérale est importante, c'est à dire à une distance radiale  $\frac{r}{h} = 1$ , avec une faible profondeur du récepteur ( $\frac{z}{h} = 0.1$ ). Enfin, toujours pour une faible immersion de l'hydrophone ( $\frac{z}{h} = 0.1$ ), nous nous placerons à une distance radiale grande devant la hauteur de la source  $\frac{r}{h} = 2$ .

## 2.2. Interprétations des résultats obtenus.

### 2.2.1- Cas du point d'observation situé à une distance radiale $\leq$ au sinus de l'angle critique: $r/h \leq n$ et $n < 1$ . ( $x=0$ , $x=n$ )

Les courbes du module et de la phase de la transformée sont représentées sous forme de lignes de niveaux. Les lignes de niveaux du module varient de façon logarithmique avec une dynamique de 40dB. L'ordre croissant des niveaux passe progressivement du blanc au noir (images en densité de gris), ou (images couleurs) de façon croissante, suivant l'échelle des couleurs: violet, bleu, vert, jaune, orange, rouge, noir. Les lignes de niveaux de la représentation en phase de la transformée sont codées linéairement entre  $-\pi$  et  $\pi$ . L'abscisse représente le paramètre de translation ou temps rapporté au temps unitaire  $\tau_0 = \frac{h}{c_1}$ . L'ordonnée représente le logarithme du paramètre d'échelle rapporté également au temps unitaire. Le signal est analysé sur 6 octaves à partir du paramètre de dilatation 0,15. Chaque octave est décomposée linéairement en 5 voies.

Les paramètres d'échelle et de translation sont les mêmes pour les deux représentations graphiques (module et phase).

#### i) Contribution "géométrique". (Fig.5 et 7)( $x=0$ , $n$ ; $y=0.2$ )

Le signal source émis est un signal impulsionnel. Lorsque l'on analyse la contribution géométrique pour une position fixe de l'hydrophone, juste à l'aplomb de la source ( $x=0$ ,  $y=0.2$ ), nous obtenons pour les représentations en module et en phase de la transformée en ondelettes (Figure 5.a,b) exactement la transformée en ondelettes d'une impulsion  $\delta(t-t_0)$  (Cf.fig.3 ou annexe1). L'interface apparaît comme "transparente" pour le signal propagé (ie: il n'y a pas déformation, mais simplement décroissance en  $1/R$  et perte par réflexion).

L'analyse du module de la transformée en ondelettes (Fig.5.a) montre une concentration d'énergie au temps où apparaît la discontinuité du signal, c'est à dire au temps  $t_0 = t_{géo}$ . Cela se traduit sur les courbes par des lignes de niveaux où le module est maximum.

L'analyse de la phase de la transformée (Fig.5.b) montre que les lignes de phase constante convergent toutes au même temps correspondant au temps exact d'arrivée de la contribution géométrique ( $t_{\text{géo}}$ ). Quantitativement nous avons :

$$t_{\text{géo}} = \frac{h}{c_1} + n \frac{z}{c_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_{\text{géo}}}{\tau_0} = (1+n \gamma) = 1.045$$

Ces résultats sont en accord avec les simulations numériques.

Le potentiel associé à la contribution "géométrique" se trouve simplement atténué en fonction de la distance de la source au point d'observation (décroissance en  $1/R$ ). On retrouve les caractéristiques propres à la contribution de l'onde géométrique dans le cas harmonique (Cf. II, partie 1).

On retrouve ces mêmes résultats lorsqu'on analyse cette contribution pour une distance radiale inférieure ou égale au sinus de l'angle critique (Fig. 7: module de la transformée en ondelettes de la contribution géométrique en  $x=n$ ,  $y=0.2$ ). L'analyse n'est effectuée ici que sur 5 octaves.

## ii). Contribution "latérale". (Fig.6 et 8) ( $x=0$ , $n$ ; $y=0.2$ )

Si on analyse maintenant la contribution "latérale" au même point d'observation ( $x=0$ ,  $y=0.2$ ), nous voyons que celle-ci existe (contrairement à ce que laissait entrevoir l'étude de cette onde par la méthode du point col, dans le cas harmonique); mais sa contribution énergétique est négligeable par rapport à la contribution "géométrique".

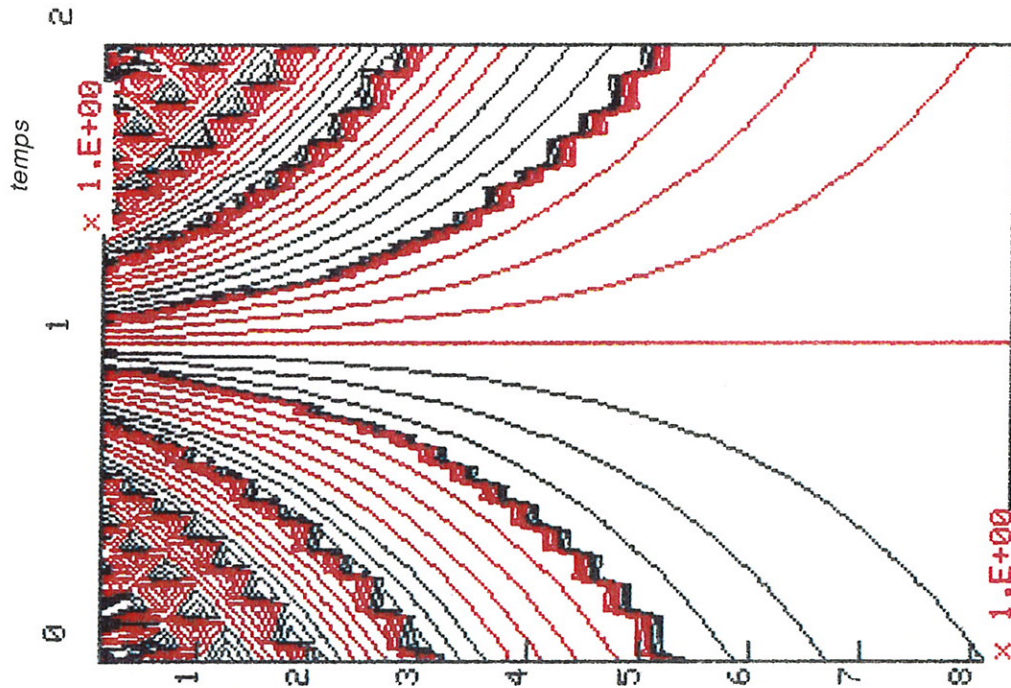
Quantitativement nous avons  $t_{\text{géo}} = t_{\text{lat}}$ . Ces résultats sont en parfait accord avec les simulations numériques.

D'autre part, nous retrouvons une dépendance du module de la contribution latérale par rapport à la fréquence (axe des ordonnées). Les hautes fréquences (basses fréquences) sont inversement proportionnelles à de faibles (grands) paramètres d'échelle.

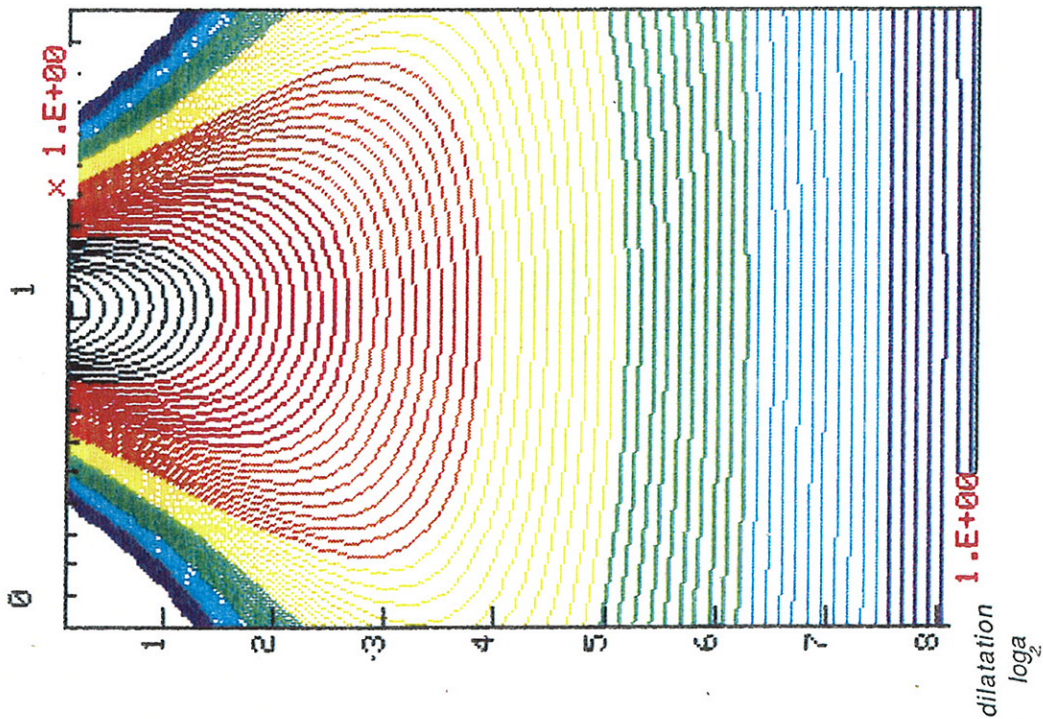
La figure 6 représente le module de la transformée en ondelettes de cette contribution suivant les mêmes paramètres d'analyse que précédemment (Fig.5).

Sous incidence critique ( $x=n$ ), cette contribution n'est plus négligeable, comme on peut le voir (Fig. 8) sur le module de la transformée en ondelettes. Nous avons une plus forte intervention des basses fréquences (résultats en accord avec l'étude du régime harmonique). L'analyse de ce signal est effectuée avec les mêmes paramètres que celle de la figure 7.





a)



b)

Figure 5.a: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique", au point d'observation  $x=0$ ,  $y=0.2$ . L'analyse est effectuée sur 6 octaves de 5 voies, à partir du paramètre de dilatation 0.15.

Figure 5.b: Phase de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique", au même point d'observation et suivant les mêmes paramètres que la figure 5.a.



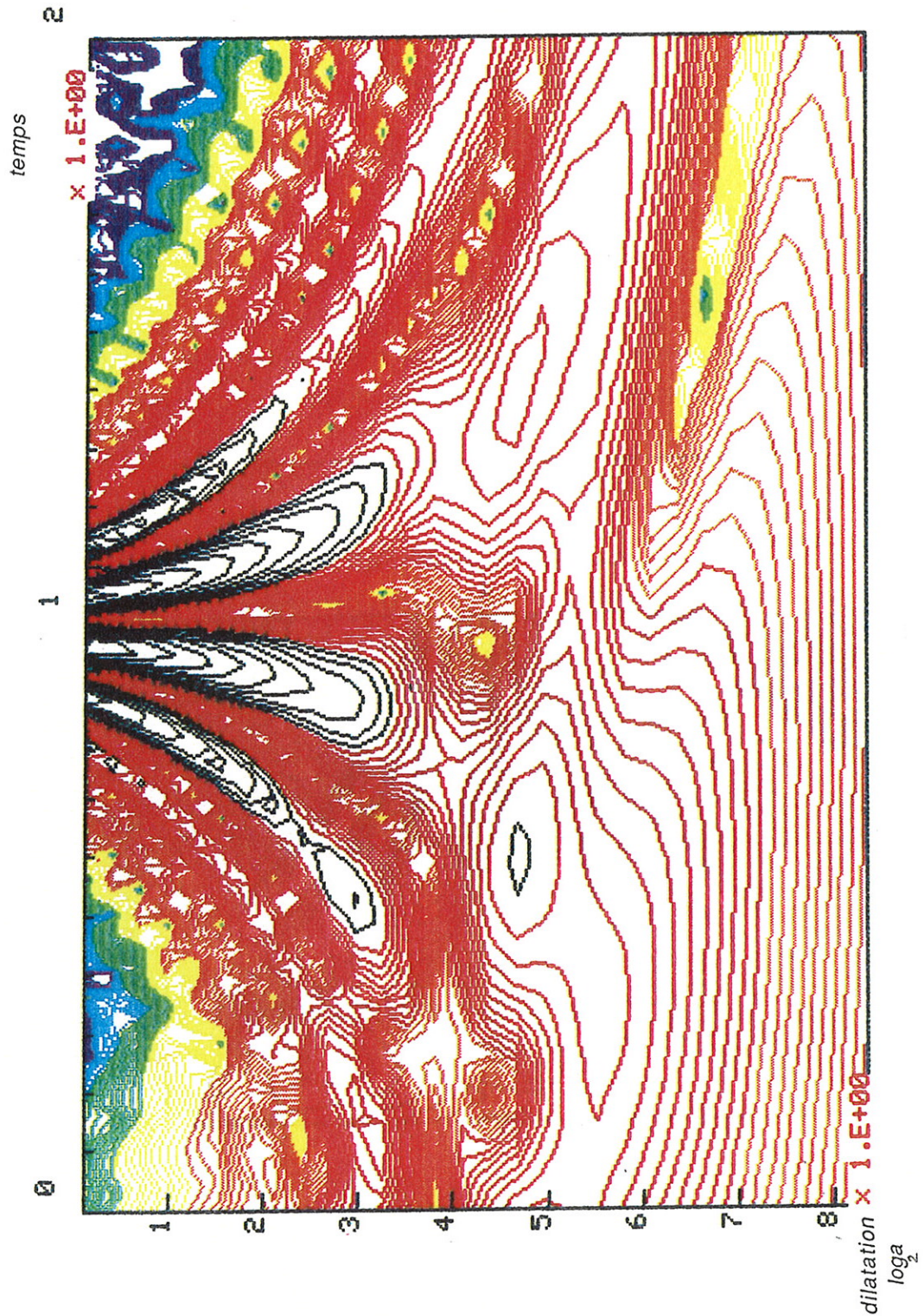


Figure 6: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "latérale" au point d'observation  $x=0$ ,  $y=0.2$ . L'analyse du signal est effectuée suivant les mêmes paramètres que la figure 5.



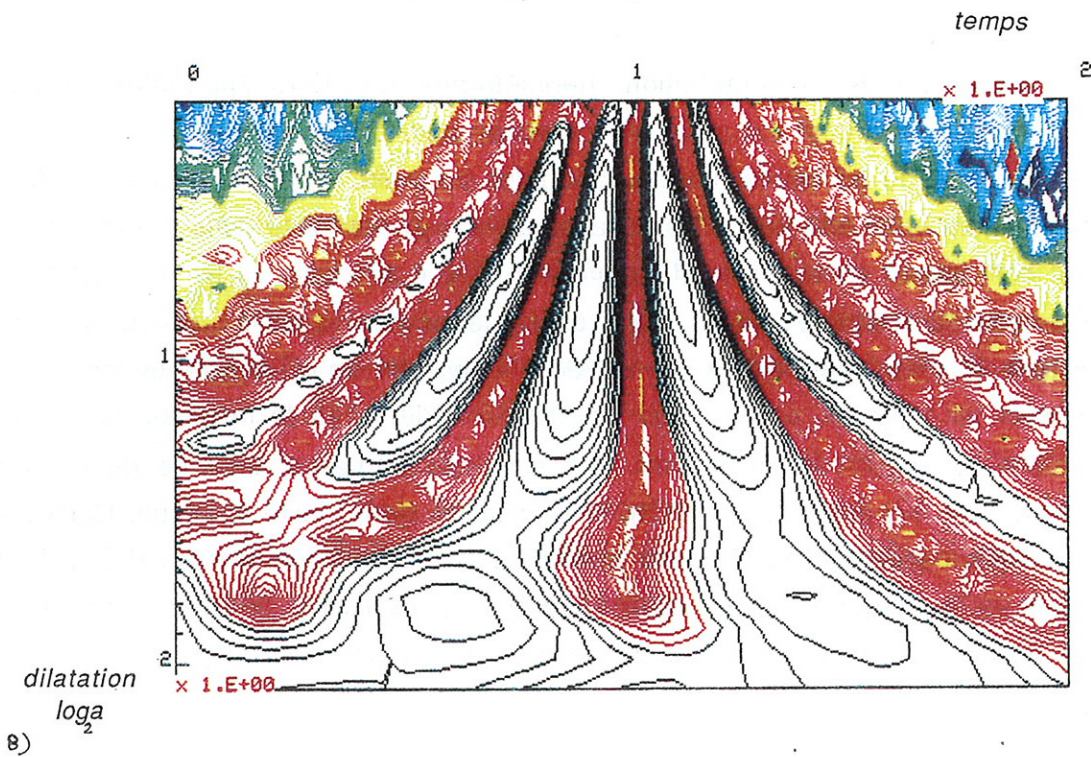
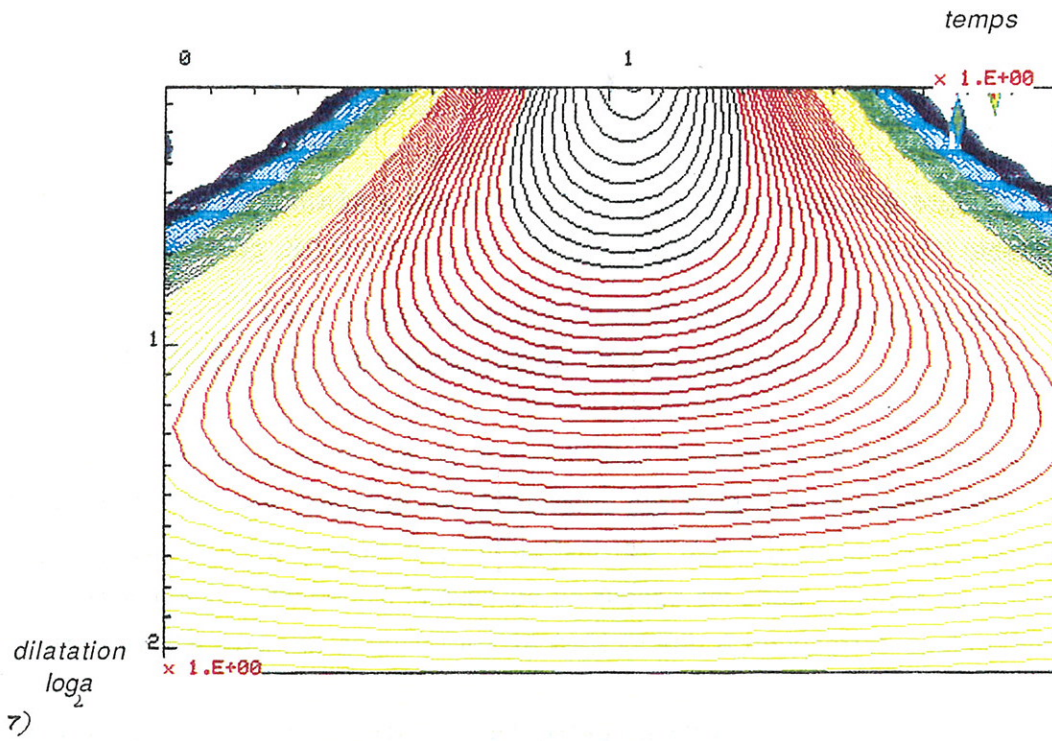


Figure 7: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique" au point d'observation  $x = n$ ,  $y = 0.2$ . L'analyse du signal est effectuée ici sur 20 octaves à partir du paramètre de dilatation 0.15. Chaque octave est décomposé linéairement en 5 voies.

Figure 8: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "latérale" au point d'observation  $x = n$ ,  $y = 0.2$ . L'analyse est effectuée suivant les mêmes paramètres que celle de la figure 7.

iii) Contribution "évanescence". (x=0, n; y=0.2)

Indépendamment de la position du point d'observation cette contribution est négligeable. Nous montrerons à titre indicatif cette contribution pour la valeur de  $\frac{r}{h} = 1$ .

2.2.2- Cas du point d'observation situé à une distance radiale  $\geq$  au sinus de l'angle critique: (r/h=1).

Nous sommes dans le cas où la contribution "latérale" pour de faibles immersions (ici y=0.1) de l'hydrophone (capteur) est importante par rapport à la contribution géométrique. De plus nous sommes dans les conditions où asymptotiquement l'angle d'incidence associé à une onde plane correspond à des incidences sur-critiques (ie: x>n) (Cf. II, partie 1).

i) Contribution "géométrique" (Fig. 9): (x=1, y=0.1)

L'analyse de la contribution "géométrique" fait alors apparaître un phénomène extrêmement important à savoir: une concentration d'énergie à des instants particuliers (Fig.9.a). Pour de faibles valeurs du paramètre d'échelle, les lignes de niveau où le module est maximum entourent les points où apparaît une discontinuité dans le signal reçu (arrivée de la contribution géométrique ( $t_{\text{géo}}$ ) et d'un écho ( $t_1$ )). Pour ces temps, et pour de faibles valeurs du paramètre d'échelle, il y a convergence des lignes de niveau où la phase est constante (Fig.9.b). Nous avons une deuxième concentration d'énergie à un temps inférieur au temps unitaire ( $t_a \approx 0.7$ ). Ce temps "parasite" est dû à l'étude tronquée du signal en trois contributions (perte de l'analyticité des solutions partielles à cause du découpage de l'intégrale sur la variable u , Cf. II.3). Il n'a donc aucune réalité physique. L'analyse de ces temps est en accord avec l'étude faite du propagateur géométrique (Cf. II.3.1). Le temps  $t_1$  correspond au trajet direct d'une onde arrivant sous incidence critique. Quantitativement nous devons retrouver une concentration de l'énergie au temps  $t_{\text{géo}}$ ,  $t_1$  et au temps  $t_a$ , tels que:

$$t_{\text{géo}} = \frac{h}{c_1 \sqrt{1-u^2}} + \frac{z n^2}{c_1 \sqrt{n^2-u^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_{\text{géo}}}{\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{y n^2}{\sqrt{n^2-u^2}} = 1.19$$

$$t_1 = \frac{h \sqrt{1-n^2}}{c_1} + \frac{r}{c_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1}{\tau_0} = \sqrt{1-n^2} + x n = 1,2$$

$$t_a = \frac{h \sqrt{1-n^2}}{c_1} - \frac{r}{c_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_a}{\tau_0} = \sqrt{1-n^2} - x n = 0,747$$



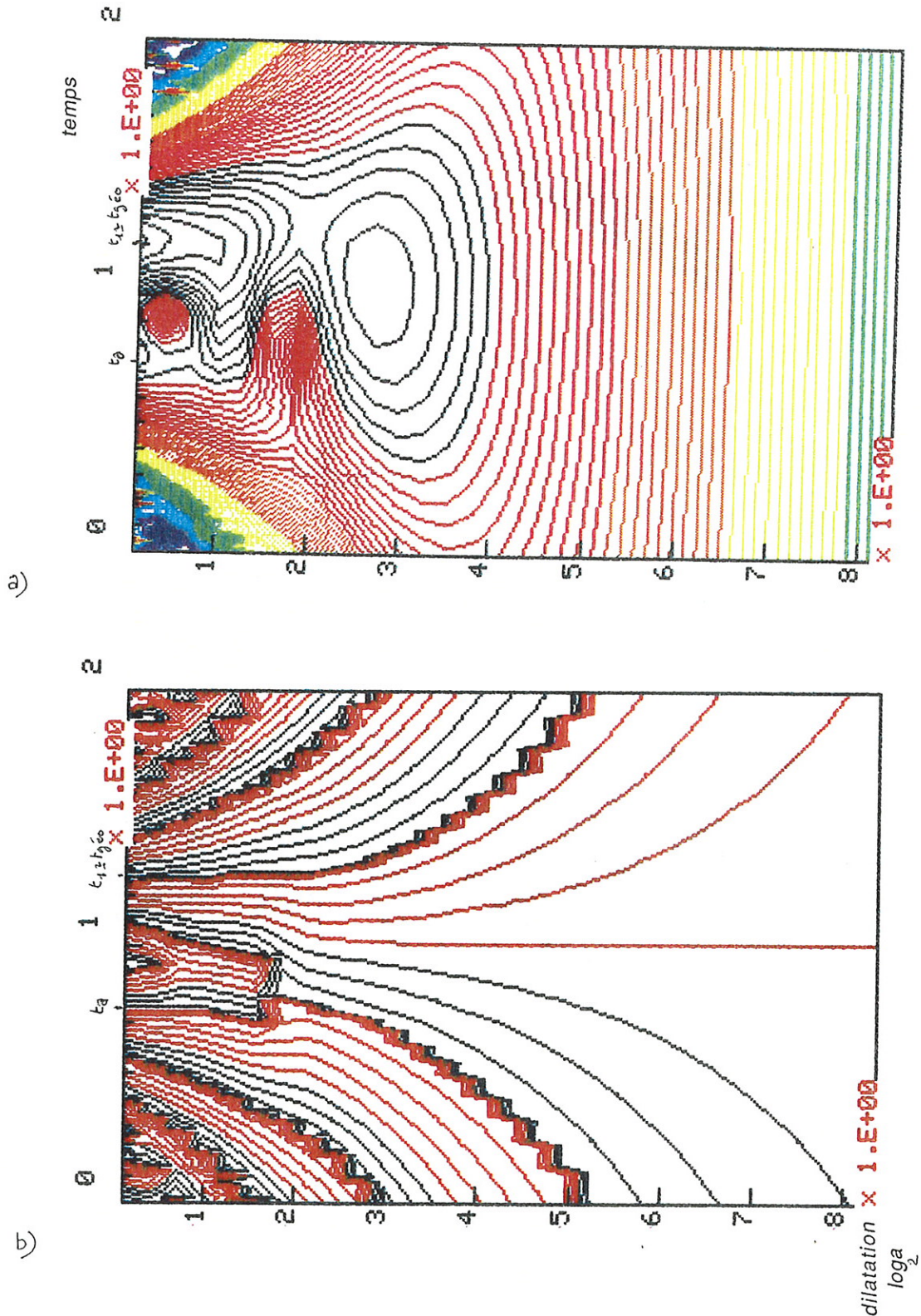


Figure 9.a: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique", au point d'observation  $x=1$ ,  $y=0.1$ . L'analyse est effectuée sur 6 octaves de 5 voies, à partir du paramètre de dilatation 0.15.

Figure 9.b: Phase de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique", au même point d'observation et suivant les mêmes paramètres que la figure 9.a.



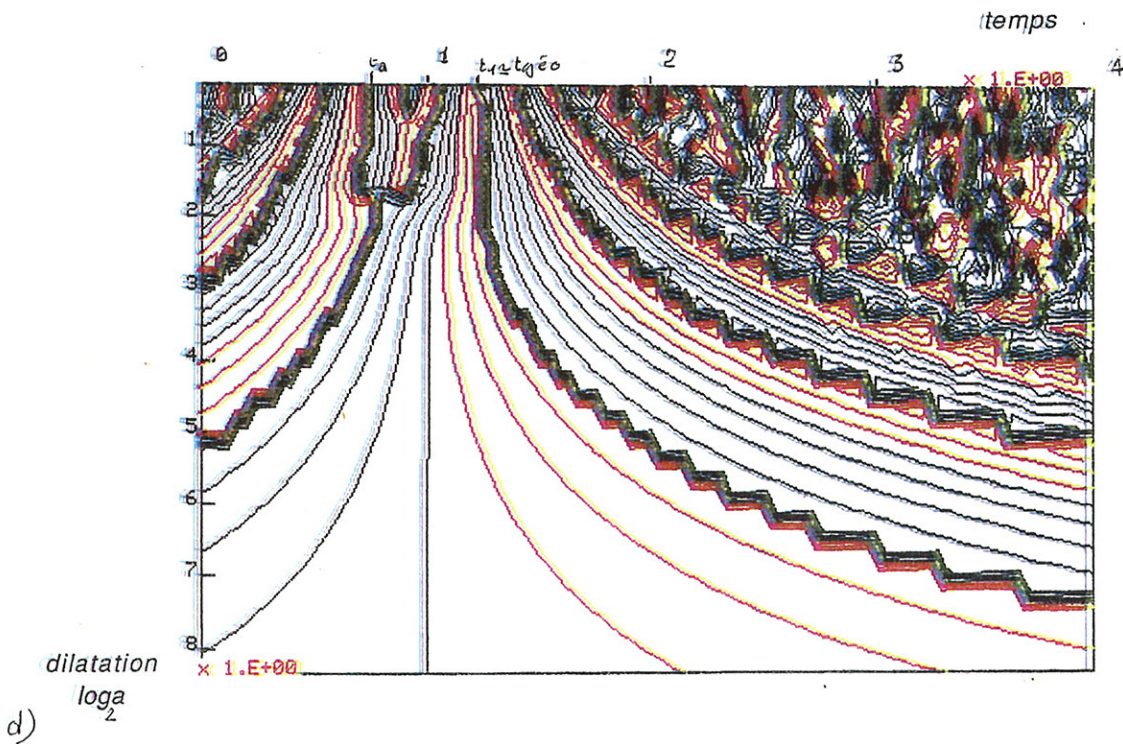
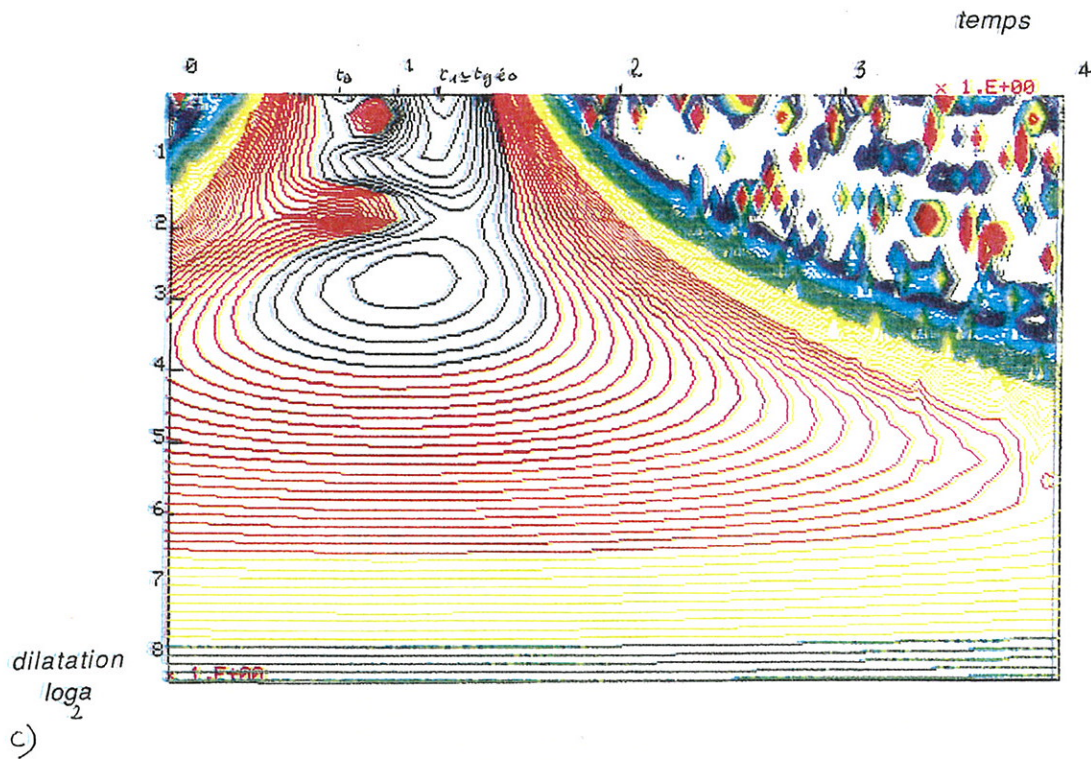


Figure 9.c: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique" au point d'observation  $x=1$ ,  $y=0.1$ , suivant un pas de discrétisation pour le paramètre de translation double de celui de la figure 9.a.

Figure 9.d: Phase de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique" au même point d'observation  $x=1$ ,  $y=0.1$ , suivant les mêmes paramètres d'analyse que la figure 9.c.

Ces résultats sont en accord avec ceux trouvés numériquement dans nos simulations.

Nous avons représenté (Fig.9.c) le module de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique" pour une autre valeur de discrétisation du paramètre de translation. Celui-ci varie avec un pas double de celui de la figure 9.a. Nous pouvons remarquer ainsi qu'il n'existe pas de phénomène impulsif (écho) postérieurement au temps  $t_1$ . Ceci est confirmé par la représentation en phase de la transformée figure 9.d.

L'apparition d'échos dans l'étude du problème direct est d'une extrême importance. Elle prendra tout son sens dans l'étude du problème inverse.

Les représentations graphiques sont effectuées suivant les mêmes paramètres que les figures 5 et 6.

## ii) Contribution "latérale" (Fig. 10): $(x=1, y=0.1)$

L'analyse de la contribution "latérale" montre que celle-ci a un apport énergétique supérieur à celui de la contribution "géométrique". Nous retrouvons également pour de faibles valeurs du paramètre d'échelle, une concentration d'énergie en des temps bien précis (Fig.10). Ces temps sont en accord avec ceux trouvés dans l'étude du propagateur latéral (Cf. II.3.2). Le premier écho apparaît évidemment au temps  $t_a$  et n'a aucune réalité physique. Nous trouvons distinctement les échos au temps  $t_1$  ( $\approx 1.2$ ) et  $t_{lat}$  ( $\approx 1.4$ ) correspondant au temps d'arrivée de la contribution latérale (Fig.10.a). L'apparition d'une concentration d'énergie (écho) au temps  $t_2$  ( $\approx 1.44$ ) se voit sur la représentation graphique (Fig.10.b). Le temps  $t_2$  correspond au trajet direct d'une onde arrivant sous incidence sur-critique. Les figures 10.a et b représentent le module de la transformée en ondelettes de la contribution "latérale" où seul l'axe associé au facteur d'échelle est changé. Quantitativement, nous devons trouver une concentration d'énergie aux temps:

$$\begin{aligned}
 t_2 &= \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{c_1} & \Rightarrow & \frac{t_2}{\tau_0} = \sqrt{x^2 + 1} = 1.414 \\
 t_{lat} &= t_2 + \frac{z}{c_2} & \Rightarrow & \frac{t_{lat}}{\tau_0} = \frac{t_2}{\tau_0} + y n = 1.436 \\
 t_1 &= \frac{h\sqrt{1-n^2}}{c_1} + \frac{r}{c_2} & \Rightarrow & \frac{t_1}{\tau_0} = 1.2 \\
 t_a &= \frac{h\sqrt{1-n^2}}{c_1} - \frac{r}{c_2} & \Rightarrow & \frac{t_a}{\tau_0} = 0.747
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien ces résultats dans nos simulations numériques.

Nous avons représenté sur la figure 10.c la partie réelle de la transformée en ondelettes de la contribution latérale. Cette représentation est conforme à la représentation d'un signal réel, mesuré par un hydrophone et analysé par transformation en ondelettes (voir IV.3).



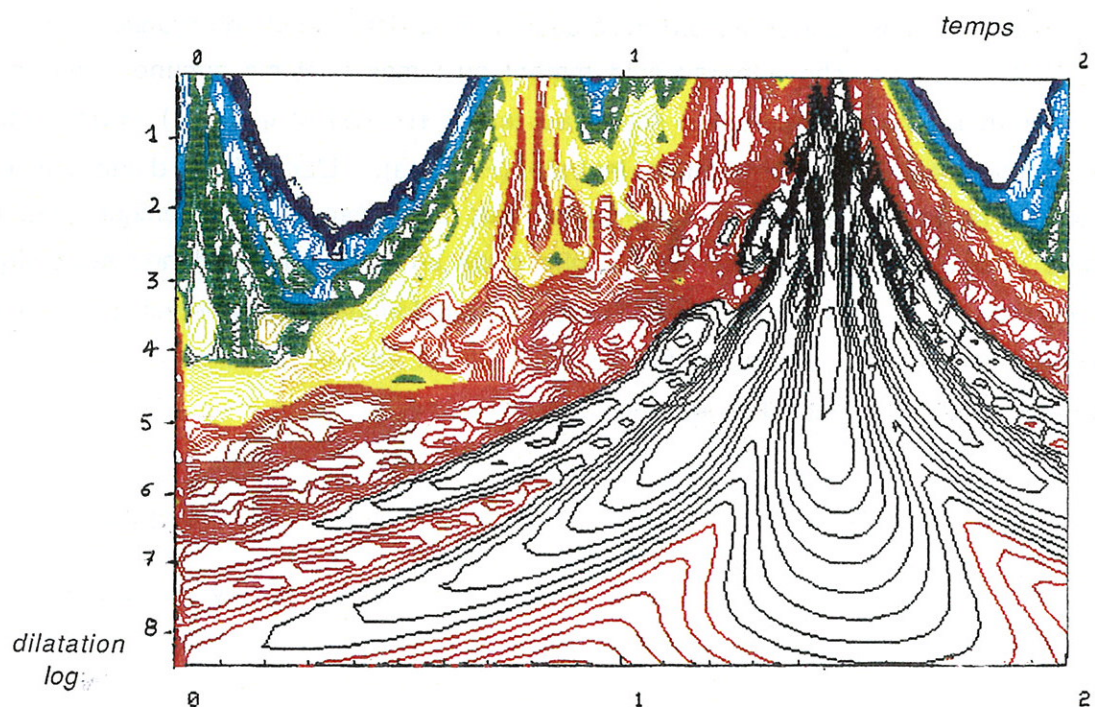
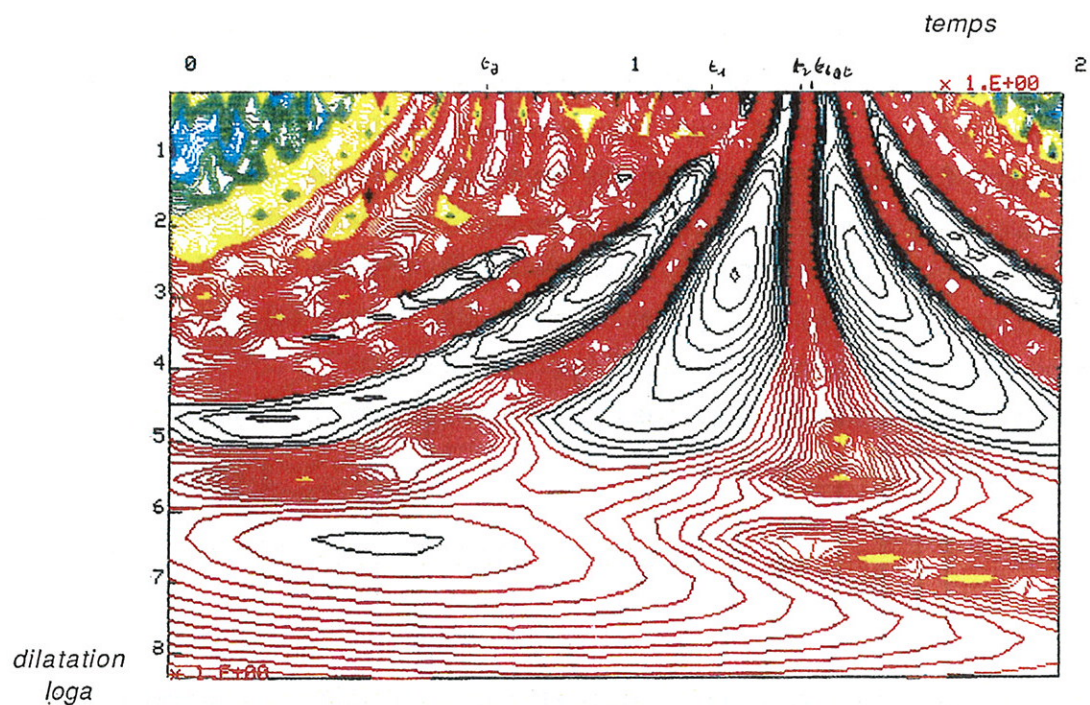


Figure 10.a: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "latérale" au point d'observation  $x=1$ ,  $y=0.1$ . L'analyse du signal est effectuée suivant les mêmes paramètres que la figure 9, à partir de l'expression (2.20).

Figure 10.b: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "latérale" au même point d'observation, mais à une autre échelle, à partir de l'expression (4.5) ( $\lambda = a/340$ ).



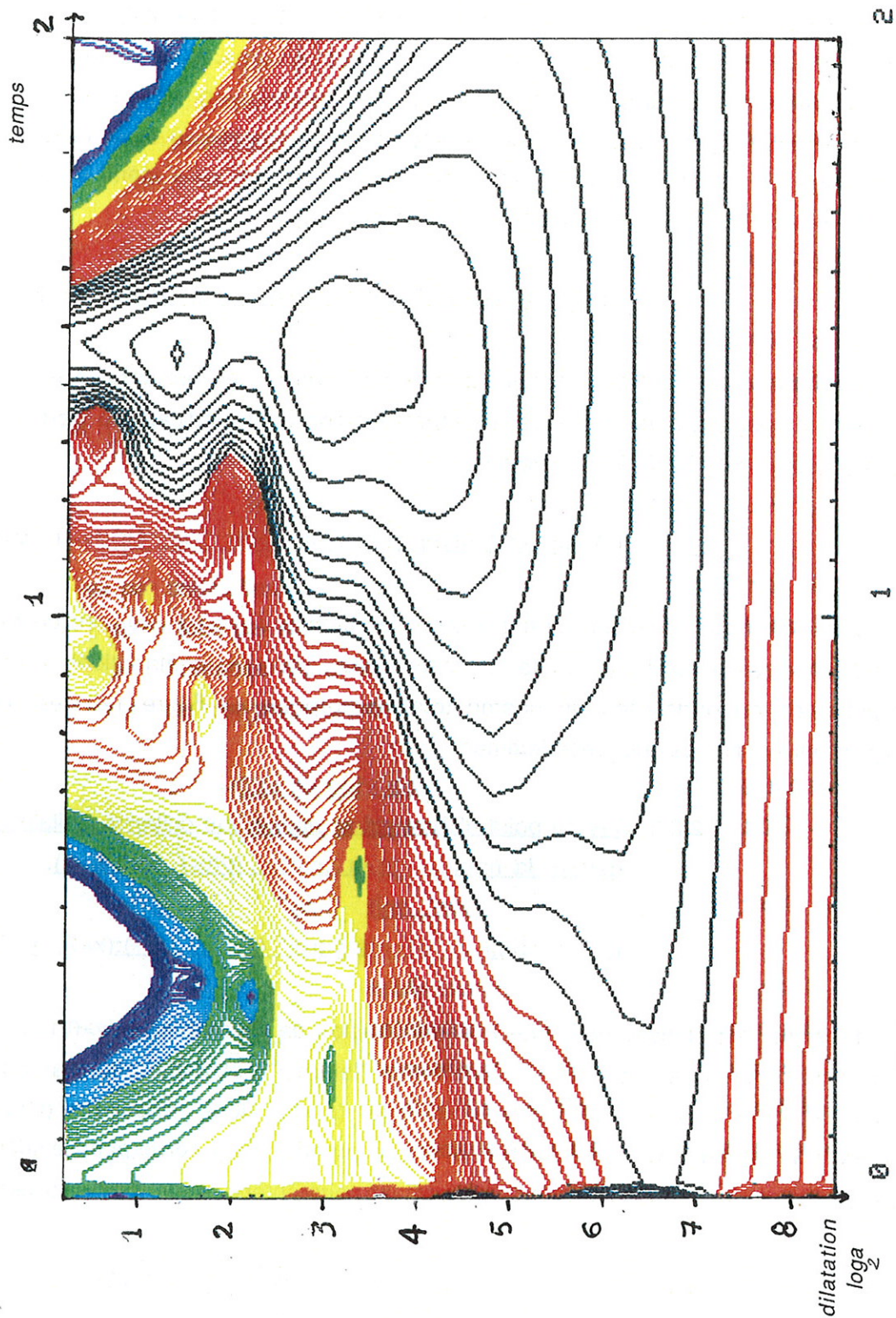


Figure 10.c: Module de la transformée en ondelettes de la partie réelle de la contribution "latérale" au point d'observation  $x=1$ ,  $y=0.1$ . Représentation en accord avec le signal physique tel qu'il est mesuré à l'hydrophone et analysé par transformation en ondelettes. (mêmes paramètres d'analyse que la figure 9).

Il est à retenir que pour un signal impulsionnel émis dans l'air, on reçoit dans le second milieu un signal suivi de deux échos ou impulsions. Ces échos correspondent asymptotiquement (analogie à l'étude de la transmission d'une onde sphérique monochromatique, décomposée en une somme d'ondes planes) au trajet direct d'une onde arrivant sous incidence-critique ( $t_1$ ) en accord avec le principe de Fermat et au trajet direct d'une onde dans l'air sous des incidences sur-critique ( $t_2$ ).

### iii) Contribution "évanescence" (Fig. 11):( $x=1$ , $y=0.1$ )

Bien que cette contribution soit très vite atténuée et ne corresponde donc pas à un phénomène propagatif, nous donnons une représentation à titre indicatif du module (Fig.11.a) et de la phase (Fig.11.b) de la transformée.

### iv) Reconstitution du champ total (Fig. 12):( $x=1$ , $y=0.1$ )

L'analyse par ondelettes permet grâce à la linéarité de la transformée de reconstituer le champ de pression total par simple sommation des différentes contributions. Le module de la transformée en ondelettes du champ total est représenté figure 12. Les paramètres d'analyse sont les mêmes que précédemment.

## 2.2.3- Cas du point d'observation situé à une distance radiale grande devant la hauteur de la source: ( $r/h > 1$ , ie: $r/h=2$ ).

### i) Contribution "géométrique" (Fig. 13.a.):( $x=2$ , $y=0.1$ )

Le signal est analysé pour une faible immersion de l'hydrophone ( $y=0.1$ ) et dans une région où la pression associée à la contribution "latérale" est importante par rapport à la pression associée à la contribution "géométrique" ( $r \gg h$ ). Nous retrouvons (Cf.2.2.2) une concentration d'énergie aux instants  $t_{\text{géo}}$  et  $t_1$ . Le premier écho correspond évidemment au temps  $t_a$  (artéfact mathématique). Quantitativement nous obtenons les temps suivant:

$$\begin{aligned} t_{\text{géo}} \approx t_1 & \Rightarrow \frac{t_{\text{géo}}}{\tau_0} \approx \frac{t_1}{\tau_0} = 1.427 \\ t_a = t_1 - 2\frac{r}{c_1} & \Rightarrow \frac{t_a}{\tau_0} = 0.52. \end{aligned}$$

La figure 13.a représente le module de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique". Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 12.



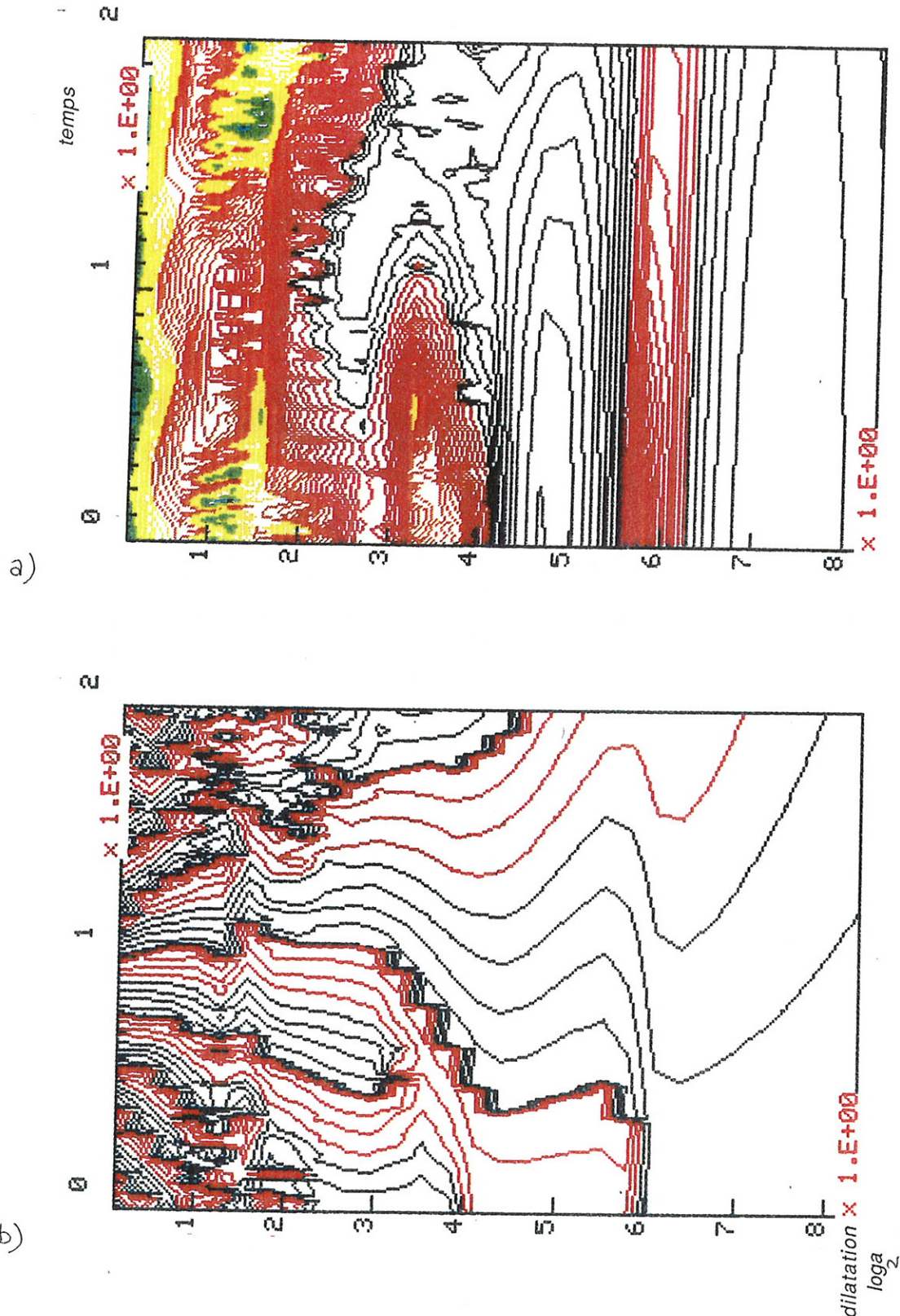


Figure 11.a: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "évanescence" au point d'observation  $x=1$ ,  $y=0.1$ , suivant les mêmes paramètres d'échelle que la figure 5.

Figure 11.b: Phase de la transformée en ondelettes de la contribution "évanescence" au même point d'observation, suivant les mêmes paramètres d'échelle.



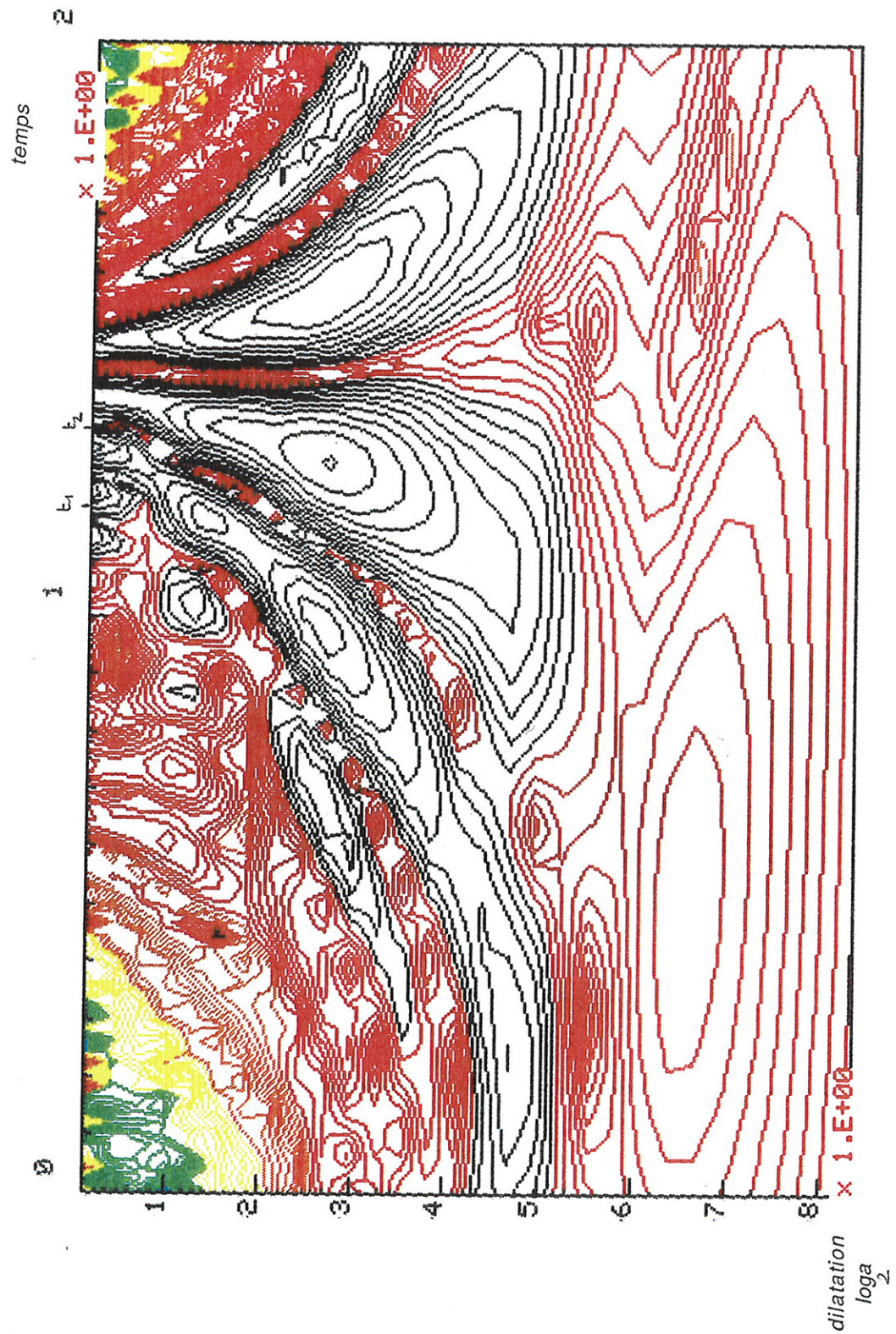


Figure 12: Module de la transformée en ondelettes du champ de pression total au point d'observation  $x=1$ ,  $y=0.1$ , suivant les mêmes paramètres d'échelle que la figure 5.



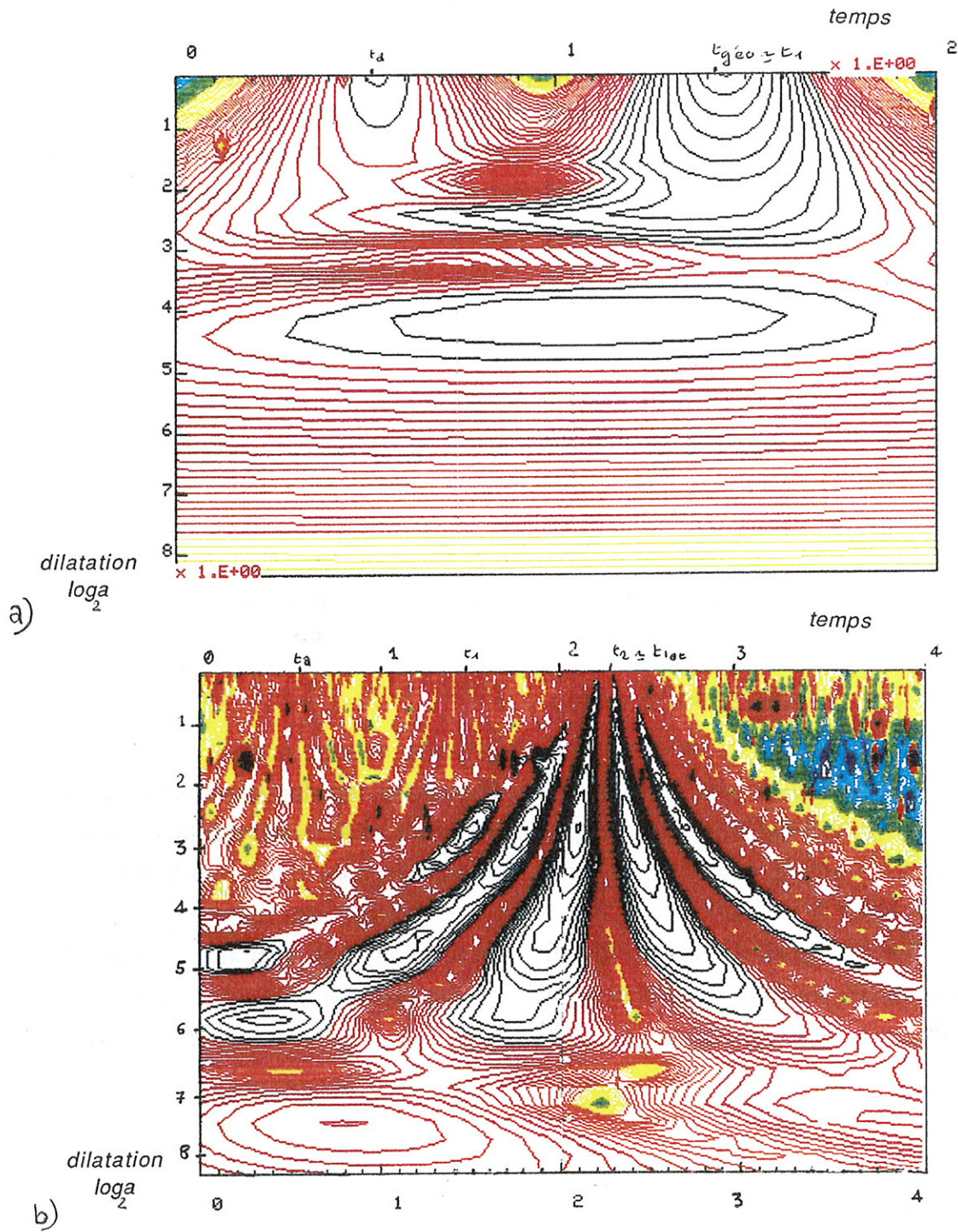


Figure 13.a: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "géométrique" au point d'observation  $x=2$ ,  $y=0.1$ , suivant les mêmes paramètres d'échelle que la figure 5.

Figure 13.b: Module de la transformée en ondelettes de la contribution "latérale" au même point d'observation  $x=2$ ,  $y=0.1$  et suivant les mêmes paramètres d'échelle que la figure 5.

ii) Contribution latérale (Fig. 13.b):(x=2, y=0.1)

Conformément à l'analyse théorique, on retrouve le même phénomène d'échos suivant les instants  $t_1$  et  $t_2$ . Le temps d'arrivée  $t_{lat}$ , correspondant à l'arrivée de la contribution latérale, est équivalent au temps  $t_2$  du fait de la faible immersion du capteur (y=0.1). Quantitativement nous avons une concentration d'énergie (lignes de niveau où le module est maximum: fig 13.b) aux temps:

$$t_2 = \tau_0 \sqrt{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_2}{\tau_0} = 2.236$$

$$t_1 = \tau_0 (\sqrt{1 - n^2} + x n) \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1}{\tau_0} = 1.427$$

$$t_a = \tau_0 (t_1 - 2 \times n) \quad \Rightarrow \quad \frac{t_a}{\tau_0} = 0.52$$

$$t_{lat} \approx t_2 = \tau_0 (t_2 + y n) \quad \Rightarrow \quad \frac{t_{lat}}{\tau_0} = 2.258 \approx \frac{t_2}{\tau_0}$$

Nous voyons que pour de grandes distances radiales ( $r \gg h$ ), c'est à dire dans des régions où la contribution géométrique est négligeable, mais où la contribution latérale subsiste encore, apparait un phénomène d'échos à deux instants précis  $t_1$  et  $t_2$ .

Pour confirmer ces résultats, nous allons les comparer à ceux issus d'une expérimentation, réalisée en laboratoire. L'application sera celle du dioptré plan air-eau et le signal impulsionnel sera modélisé par une charge ponctuelle explosive (amorce).

### **IV-3. Application de la transformée en ondelettes:** **Résultats expérimentaux.**

#### **3.1-Dispositif expérimental.**

Le dispositif expérimental est le même que celui décrit dans le cas du régime harmonique (Ch. III). Les différences essentielles résident dans le procédé de la génération du signal source et dans les méthodes de traitements qui nécessitent ici la numérisation des signaux.

L'aspect temporel joue ici un rôle prépondérant et nécessite à ce titre une attention particulière. Pour cela, l'acquisition des signaux expérimentaux (ie: signal source mesuré au microphone et signal transmis mesuré à l'hydrophone) sera effectuée de façon à assurer leur synchronisme. L'origine des temps sera repérée par un microphone fixe associé à un générateur d'impulsions afin de déclencher le numériseur. Le signal source est, de la même manière, numérisé de façon synchrone ce qui nécessite un numériseur bi-canaux (multiplexé).

#### **3.1.a Choix de la source**

La source idéale qui nous permettrait de relier au mieux les résultats théoriques aux résultats expérimentaux serait une source impulsionnelle parfaite (ie: réponse en fréquence parfaitement plate). Bien entendu une telle source n'existe pas. Néanmoins, il est possible de se rapprocher d'un tel modèle (impulsion) en utilisant des sources pouvant émettre des signaux très brefs.

Nous avons choisi d'utiliser pour cela une source ponctuelle mécanique. La génération du signal acoustique s'effectue par un système de percussion agissant sur une charge explosive ponctuelle (pétard). Les caractéristiques obtenues permettent d'assimiler cette source à un générateur impulsif dans un domaine fréquentiel large bande, à savoir :

- réponse en fréquence constante à  $\pm 6\text{dB}$  dans la bande 500Hz-9kHz et  $\pm 10\text{dB}$  entre 9-10kHz . (Fig.15.a)
- support temporel de l'ordre de  $8.10^{-4}\text{s}$  (Fig.15.b).

Une étude préalable de la source a permis de vérifier que les ondes engendrées ont un comportement compatible avec le modèle d'ondes sphériques (divergence en  $1/R$ ).

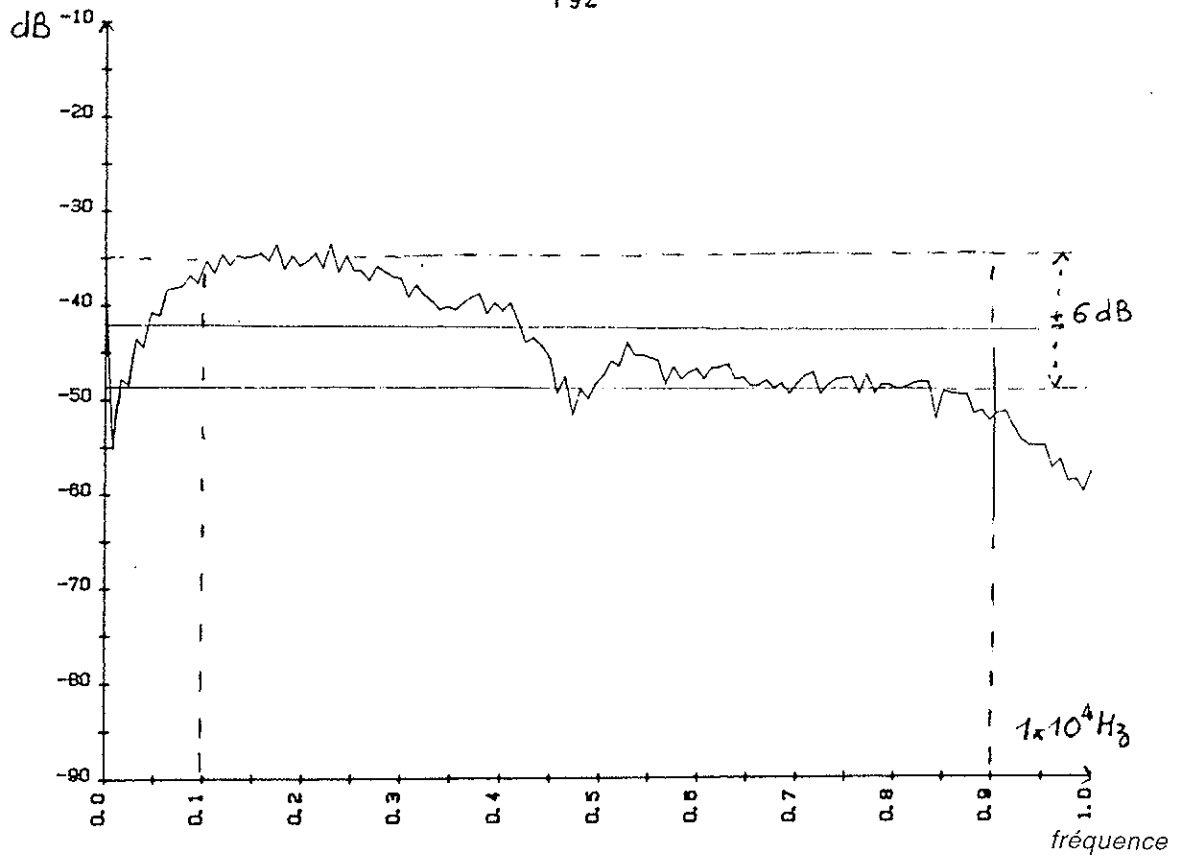
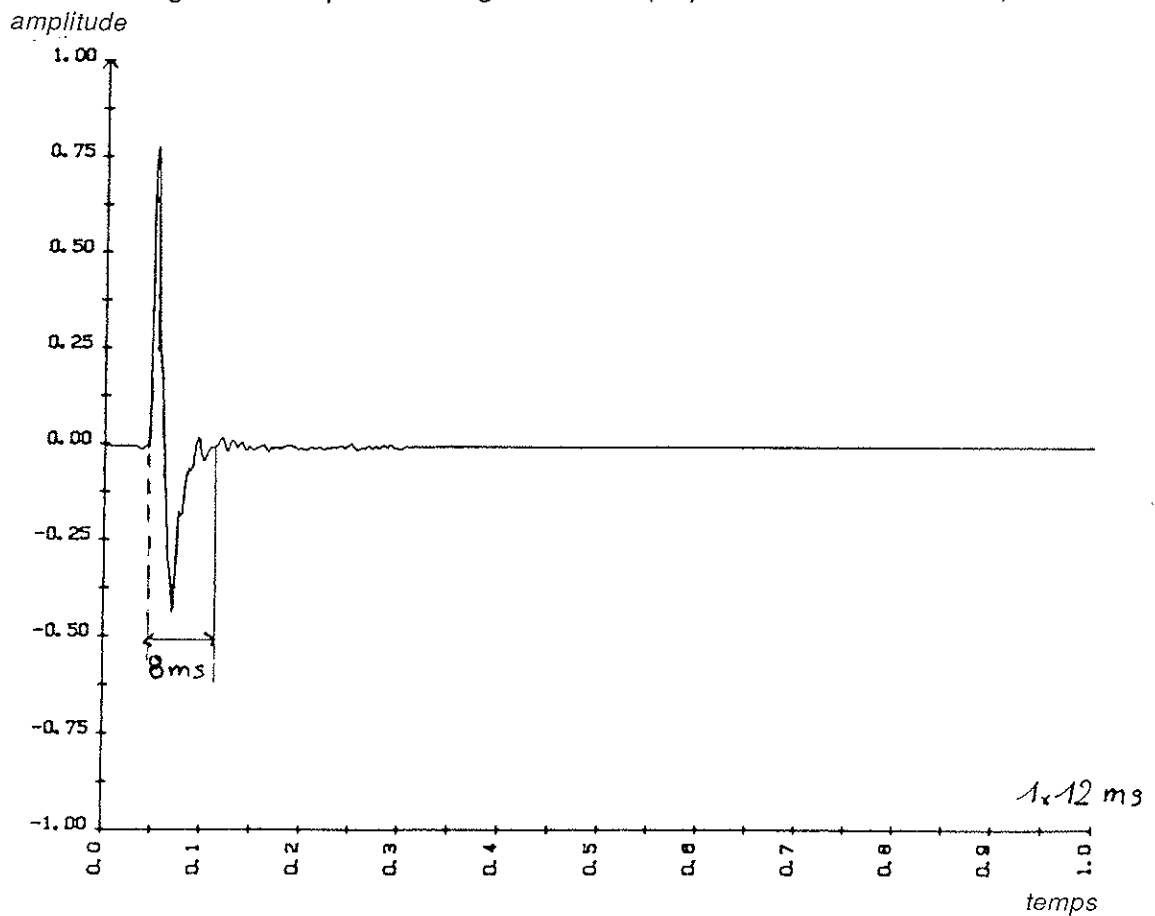
Figure 15.a: Spectre du signal source. (Réponse constante à  $\pm 6$  dB).

Figure 15.b : Signal source temporel. (Impulsion d'une durée de 8ms)



### 3.1.b Dispositif d'acquisition.

Le signal transmis est capté par un hydrophone semblable à celui décrit au paragraphe III. L'acquisition synchrone des signaux transmis et de référence (signal source) est effectuée par un numériseur bi-canaux 8 bits, à la cadence d'échantillonnage de  $10\mu\text{s}$ . La référence temporelle est reliée à l'émission par l'intermédiaire d'un générateur d'impulsions déclenchant l'acquisition. Celui-ci est actionné par le signal reçu à un microphone situé à proximité de la source.

Les signaux numérisés sont ensuite transférés à un ordinateur en vue de leur traitement numérique. Le synoptique du montage expérimental est représenté figure 16.

### 3.2 Expérimentation

L'expérience a donné lieu à trois séries de mesures, de façon à mettre en évidence le comportement des différentes contributions apparaissant dans l'étude théorique, et numérique à savoir:

- une mesure du champ juste à l'aplomb de la source ( $r=0$ ,  $z=0.1\text{m}$ ). Nous sommes dans les conditions où la contribution "géométrique" est prépondérante.
- une mesure du champ à une grande distance radiale, ( $r=1\text{m}$ ,  $z=0.1\text{m}$ ) destinée à l'étude de l'influence de la contribution "latérale" (cas de l'incidence sur-critique).
- une mesure du champ pour une distance radiale supérieure à la hauteur de la source ( $1\text{m}$ ), soit  $r=1,50\text{m}$ . Le capteur se trouve toujours à la même profondeur.

Ces résultats seront comparés aux résultats numériques simulés.

Pour chacune des mesures, la température des milieux est relevée, afin d'effectuer les corrections de célérité correspondantes ( $c_1=344\text{m/s}$  et  $c_2=1481.25\text{m/s}$ ,  $n=\frac{c_1}{c_2}=0.2322$ ). Les masses volumiques respectives des milieux air et eau sont ici:  $\rho_1=1.2\text{Kg/m}^3$  et  $\rho_2=998\text{Kg/m}^3$ . Leur rapport est alors:  $m=831$ .

Les préamplificateurs des hydrophones sont ajustés de façon à obtenir une dynamique maximale pour la numérisation.

L'acquisition est faite sur 2048 échantillons correspondant à une durée de 20ms. Ceci est compatible avec le retard dû à la propagation et avec la durée du signal transmis.

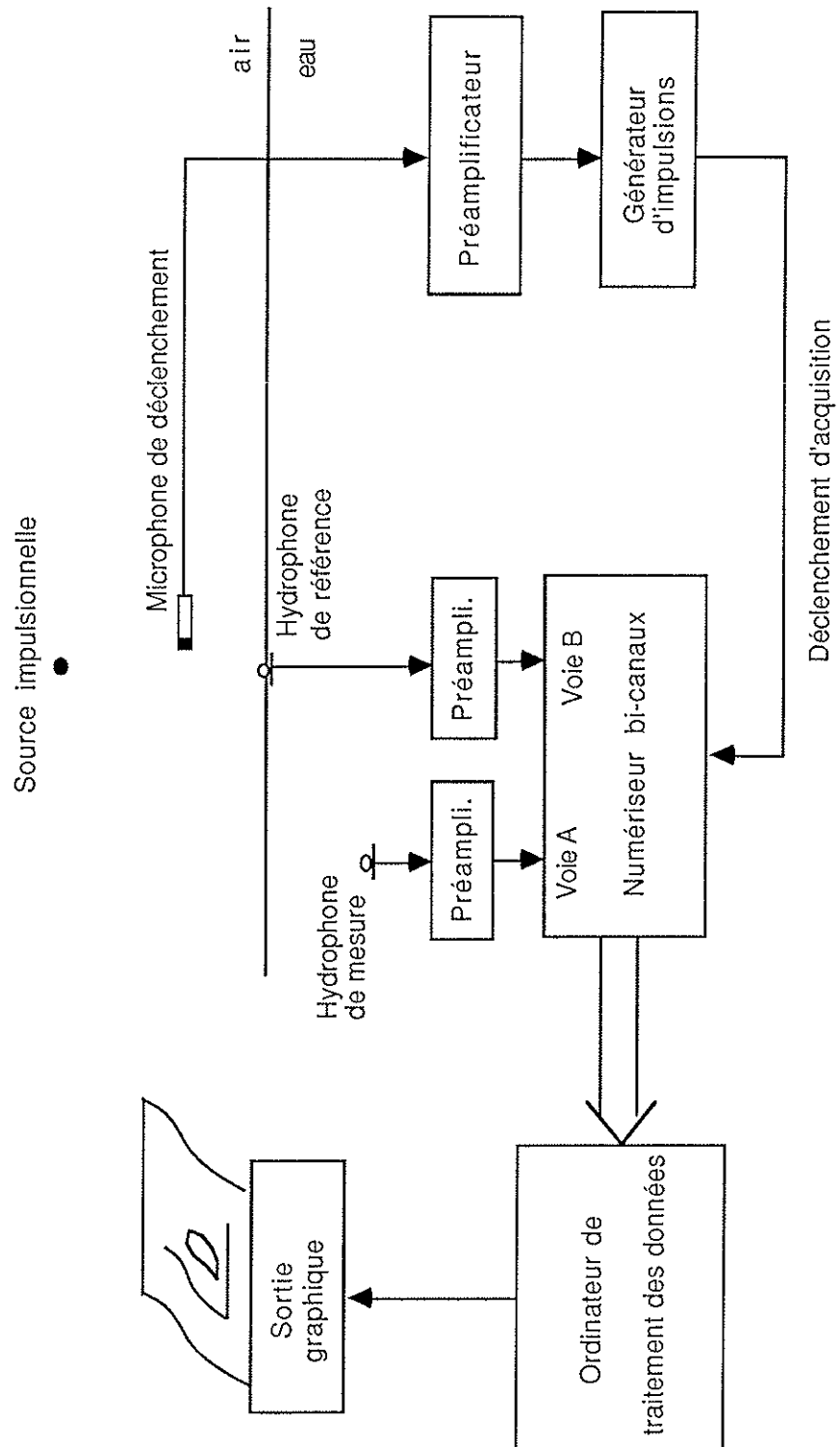


Figure 16: Synoptique du montage expérimental en régime transitoire.

### 3.3 Résultats expérimentaux.

Le signal source est donc un signal impulsionnel. Nous analysons ici le comportement du champ de pression transmis total expérimental. Le signal source mesuré au microphone et le signal propagé à travers l'interface fluide/fluide (mesuré à l'hydrophone), sont enregistrés de façon synchrone et analysés par une transformation en ondelettes.

#### 3.3.1 Hydrophone placé à l'aplomb de la source ( $r=0$ , $z=0.1$ )

##### i) Analyse du signal source.(Fig. 17)

Nous avons d'abord analysé le signal source par transformée en ondelettes, par rapport à l'ondelette analysante décrite en (3.3), (comme dans nos simulations). L'analyse est effectuée sur 6 octaves à partir du paramètre d'échelle  $a=0.8$ , en accord avec la bande de fréquence utile du signal. L'ondelette analysante oscille à une fréquence moyenne de 8130Hz. C'est à dire que à un paramètre de dilatation de 1, nous pouvons associer une fréquence moyenne de 8130Hz. Chaque octave a été décomposée en 5 voies.

L'abscisse représente le temps en millisecondes et l'ordonnée le logarithme du paramètre d'échelle. La représentation graphique est la même que celle utilisée dans les simulations numériques. Nous rappelons que les niveaux (pour le module) varient de façon logarithmique dans l'ordre croissant suivant l'échelle des couleurs: violet, bleu, vert, jaune, orange, rouge, noir. Pour les images noir et blanc, progressivement du blanc au noir. La phase de la transformée présente des niveaux codés entre  $-\pi$  et  $\pi$  et qui varient linéairement.

La figure 17.a représente le module de la transformée en ondelettes du signal source émis. Malgré une légère accentuation de l'amplitude du signal autour de la fréquence de 16kHz, c'est-à-dire pour la valeur 2 sur l'axe des paramètres d'échelle, nous pouvons considérer que ce signal est un signal impulsionnel (Cf. III).

Nous retrouvons là, une transformée en ondelettes analogue à celle d'une distribution de Dirac (Cf. III.6.1). Nous avons une convergence ou concentration d'énergie au temps 17ms, correspondant au temps d'arrivée du signal impulsionnel au microphone de référence.

Nous pouvons remarquer à petites échelles (hautes fréquences) et pour des temps antérieurs à l'arrivée du signal source, une autre impulsion. Ce signal est d'une valeur énergétique faible. il correspond en fait, à l'enregistrement du déplacement d'un clapet qui actionne le déclenchement des appareils de mesures de façon synchrone. Ceci ne gêne en rien l'analyse des signaux émis et transmis. De même, nous pouvons voir après l'émission du signal apparaître les réflexions acoustiques de celui-ci sur les parois de la salle d'expérience, mêlées au bruit ambiant.

La figure 17.b représente la phase de la transformée en ondelettes du signal émis. Elle permet de définir avec précision le temps exacte d'arrivée du signal.

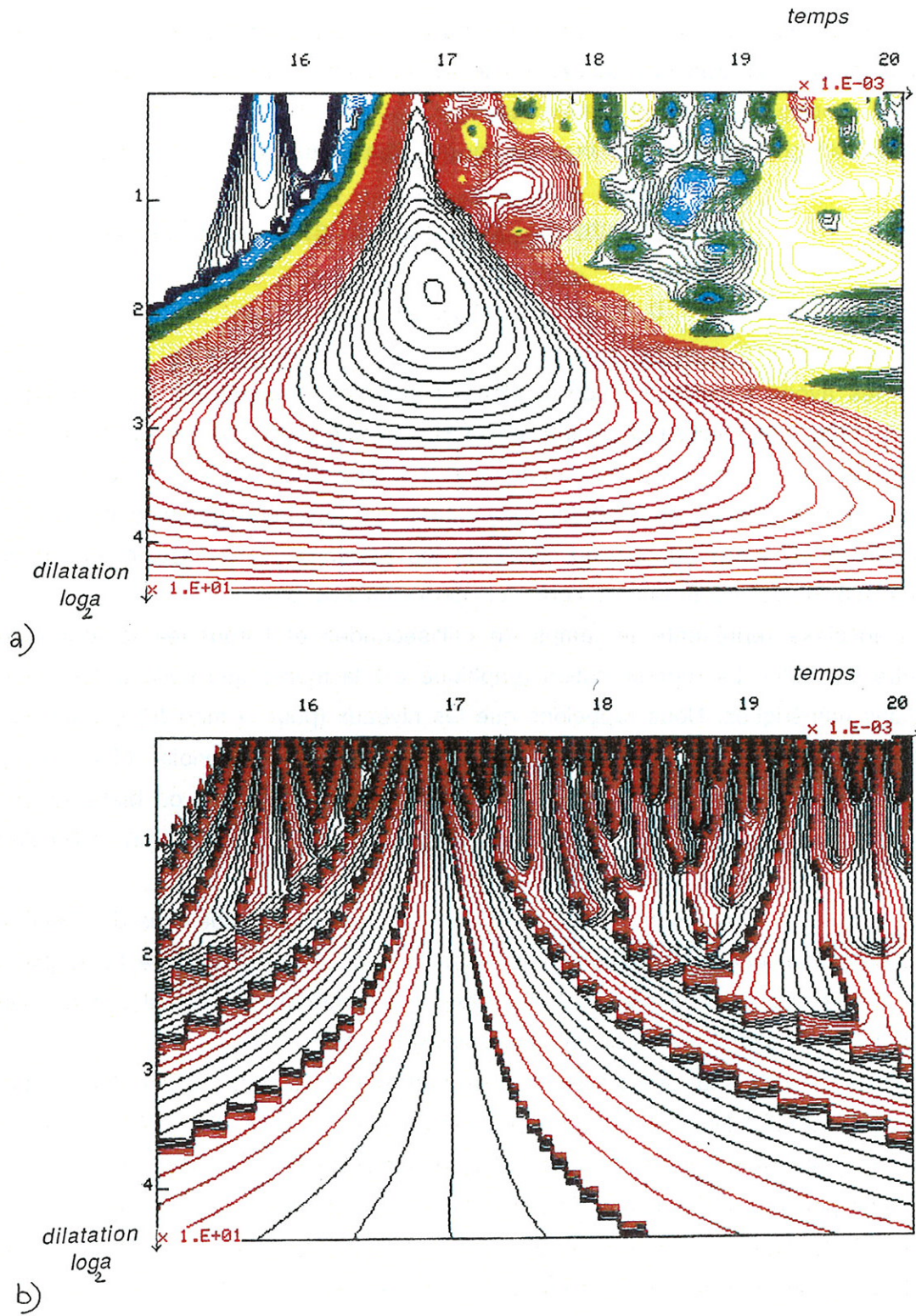


Figure 17.a: Module de la transformée en ondelettes du signal source.

Figure 17.b: Phase de la transformée en ondelettes du signal source

## ii) Analyse du signal transmis.(Fig. 18).

L'analyse du module de la transformée en ondelettes du champ de pression total, montre alors conformément à la théorie, exactement la transformée en ondelettes du signal source. L'intervention de l'interface est négligeable. Le signal se trouve simplement retardé en fonction de la distance parcourue (0.06ms), en accord avec les simulations numériques. En effet, nous sommes dans des conditions où seule la contribution géométrique est prépondérante. Ces résultats sont également en accord avec l'étude du comportement de l'onde géométrique dans le cas du régime harmonique (II. partie 1). La figure 19 représente le signal source enregistré de façon synchrone pendant l'expérience.

### 3.2 Hydrophone placé à grande distance radiale (zone sur-critique).

#### i) Analyse du signal transmis en $r=1$ , $z=0.1$ (Fig. 20).

L'analyse du module de la transformée en ondelettes du champ de pression total fait alors apparaître en accord avec les résultats numériques (pour de faibles valeurs du paramètre d'échelle), une concentration d'énergie à deux instants précis, correspondant à l'arrivée d'une onde suivie d'un écho (Fig. 20).

La valeur théorique de ces temps est donnée par:

$$t_2 = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{c_1} = 4.1\text{ms} \approx t_{\text{lat}} \quad , \quad (t_{\text{lat}} = t_2 + \frac{z}{c_2} = 4.18\text{ms})$$

$$t_1 = h \frac{\sqrt{1-n^2}}{c_1} + \frac{r}{c_2} = 3.5\text{ms}$$

Soient pour les valeurs expérimentales calculées à partir de l'instant d'émission du signal source (14ms):

$$t_2 = 18.1\text{ms} \approx t_{\text{lat}} \quad (t_{\text{lat}} = 18.18\text{ms})$$

$$t_1 = 17.5\text{ms}$$

Ces valeurs correspondent exactement aux valeurs expérimentales trouvées (Fig.20). D'autres séries de mesures ont montré de même la bonne corrélation entre les résultats théoriques et expérimentaux.

L'étude par transformation en ondelettes de la transmission d'une onde impulsionnelle à travers une interface fait apparaître des phénomènes locaux très brefs et de faibles énergies. Ces phénomènes sont dus à la présence de l'interface, qui engendre la contribution "latérale" ou de "surface".



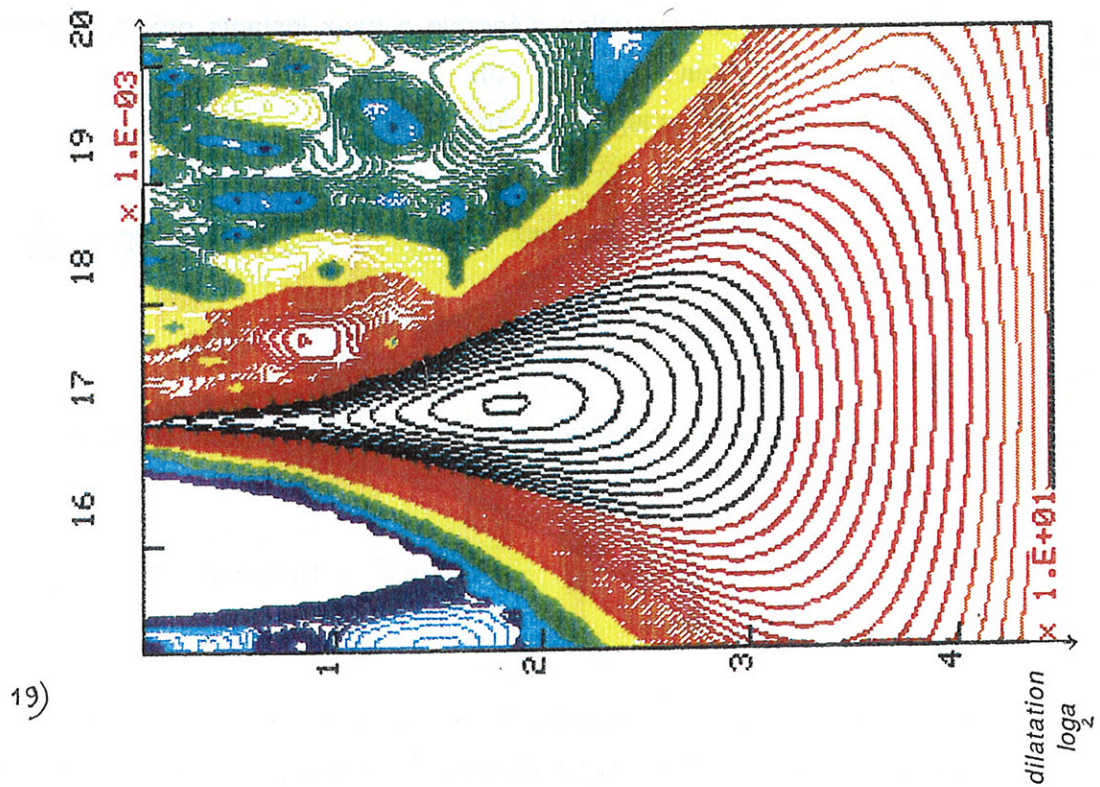
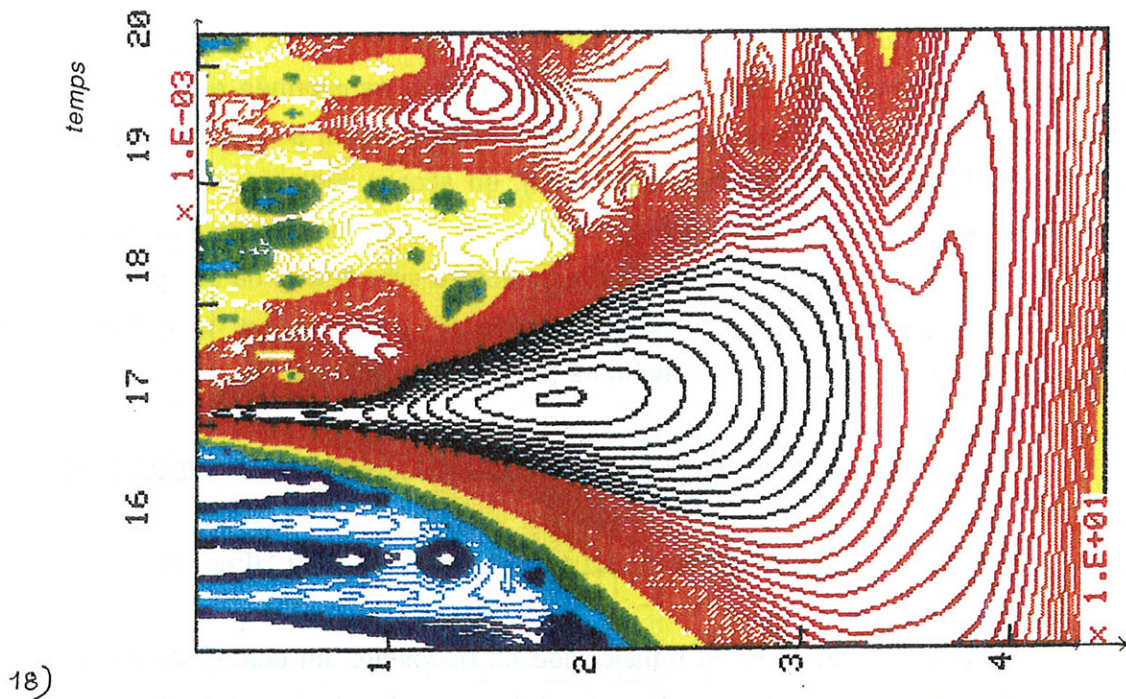


Figure 18: Module de la transformée en ondelettes du signal transmis à travers l'interface fluide/fluide . ( $r=0$ )

Figure 19: Module de la transformée en ondelettes du signal source ( $r=0$ )



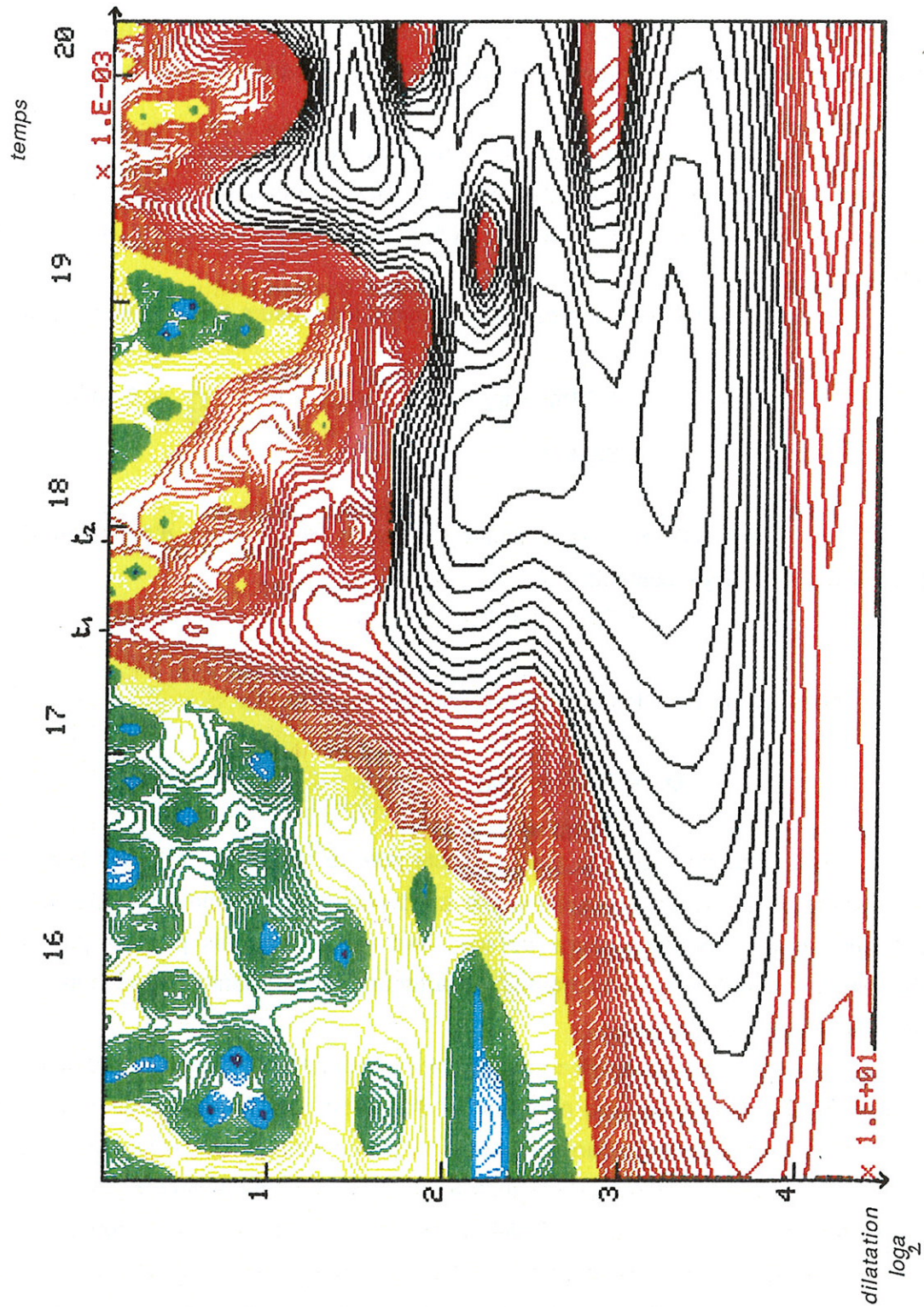


Figure 20: Module de la transformée en ondelettes du signal transmis à travers l'interface fluide/fluide ( $r=1\text{m}$ ,  $z=0.1\text{m}$ ).

ii) Analyse du signal transmis en  $r=1.5m$ ,  $z=0.1$ (Fig. 21)

Ces échos de faible énergie se retrouvent également lorsque l'on analyse le champ de pression total expérimental pour une distance radiale grande devant la hauteur de la source (Fig. 21).

La distance radiale est ici de 1.5m. Nous voyons également apparaître les échos obtenus par réflexions sur les parois de la cuve acoustique ( $r=2m$ ). La transformée en ondelettes permet de les séparer du signal, puisqu'ils apparaissent à des temps et des fréquences différentes.

Le calcul de l'arrivée des ces échos fournit les valeurs théoriques suivantes:

$$t_2 = 5.24ms \approx t_{lat} \quad , \quad (t_{lat} = t_2 + \frac{z}{c_2} = 5.3ms)$$

$$t_1 = 3.83ms$$

Les valeurs théoriques calculées à partir de l'instant d'émission de la source fournissent les temps suivant:

$$t_2 = 19.24ms \approx t_{lat} \quad , \quad t_1 = 17.83ms.$$

Nous avons pour les valeurs expérimentales (Fig.21):

$$t_2 = 19.4ms \approx t_{lat} \quad , \quad t_1 = 17.8ms.$$

Nous retrouvons bien la valeur exacte pour le temps  $t_1$ . Le temps  $t_2$  est obtenu avec une erreur de 0.8%. Cela s'explique par un déplacement du maximum de l'énergie dû à la présence très rapprochés, dans ce cas, des échos réfléchis par les parois de la cuve (battement). Néanmoins, conformément à la théorie, deux phénomènes locaux apparaissent à deux instants particuliers.

Sous les conditions  $r/h \gg n$ , l'envoi d'un signal impulsionnel fournit donc à travers une interface fluide/fluide, une onde suivie d'un écho. Les temps d'arrivée correspondent au trajet d'une onde dans l'air arrivant sous incidence critique en accord avec le principe de Fermat ( $t_1$ ) et au trajet direct d'une onde à des incidences sur-critiques. Ces échos sont liés à l'existence de la contribution "latérale" ou de "surface". Pour cela la source doit se trouver dans le milieu de plus faible célérité. D'autre part le rapport de la contribution "latérale" sur la contribution "géométrique" est d'autant plus important que la distance radiale est grande devant  $n$ . Cette situation sera d'autant plus favorable que le point d'observation se trouvera à une distance radiale grande par rapport à la verticale issue de la source.

L'apparition pour de grandes distances radiales de ces phénomènes locaux très brefs et de faibles énergies se retrouvera lors de l'étude du problème inverse.



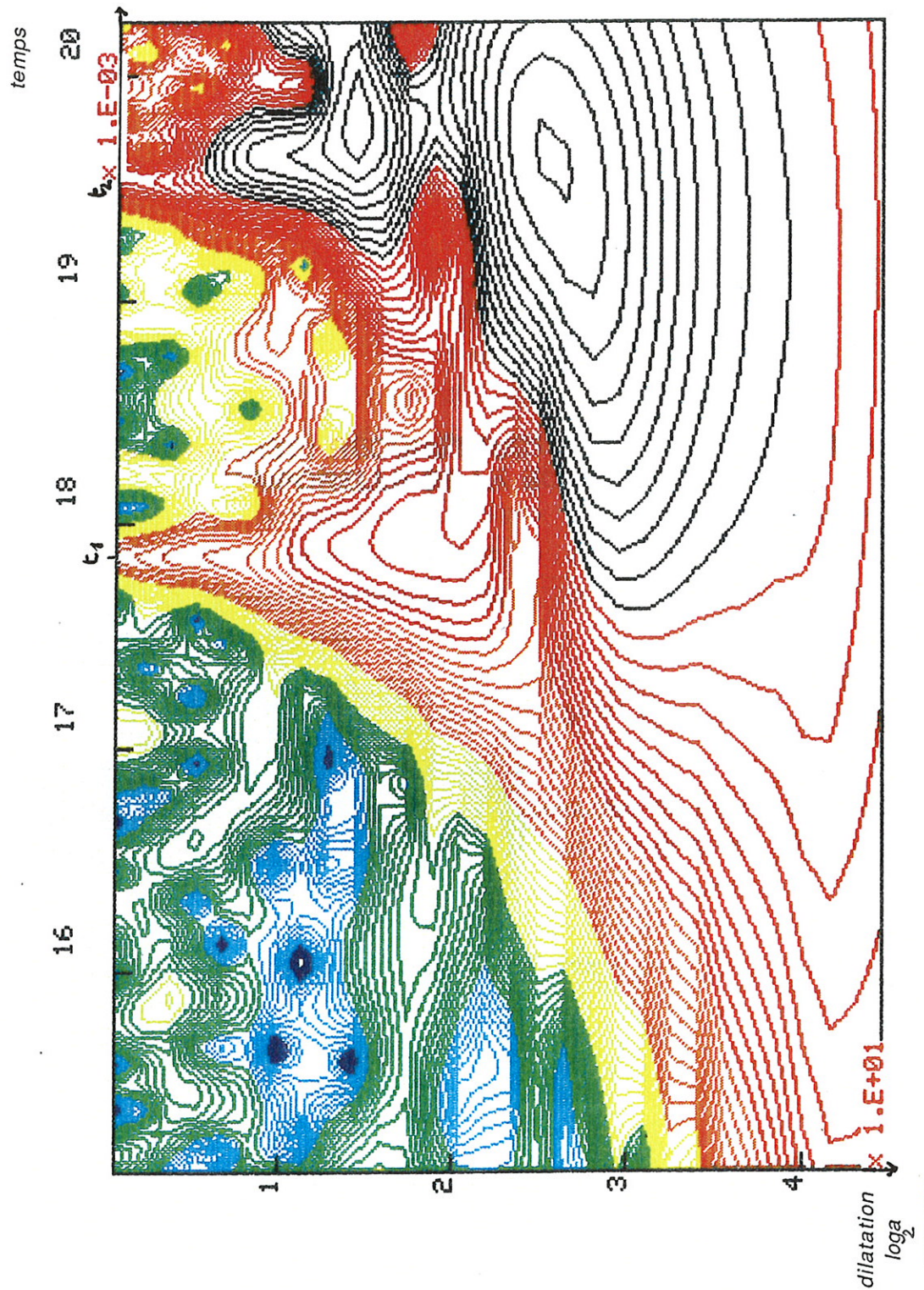


Figure 21: Module de la transformée en ondelettes du signal transmis à travers l'interface fluide/fluide ( $r=1.5\text{m}$ ,  $z=0.1\text{m}$ )

V - PROBLEME INVERSE: RECONSTRUCTION DE LA DEPENDANCE  
TEMPORELLE DE LA SOURCE.



## V - Problème inverse. Reconstruction de la dépendance temporelle de la source.

### V -1. Position du problème.

On suppose maintenant que le terme source dépend d'une fonction arbitraire du temps  $F(t)$ . A un instant d'observation  $t$  donné et une distance radiale  $r$  fixe, on cherche à reconstruire la dépendance temporelle du signal source émis dans l'air, à partir de mesures de la pression acoustique, dans le second milieu.

L'idée intuitive est la suivante: Nous avons des relations liant la pression et le potentiel acoustique scalaire. Expérimentalement, les capteurs sont sensibles à la pression. En exprimant la pression acoustique transmise totale, nous voyons qu'elle peut s'écrire sous forme intégrale, de la façon suivante:

$$(5.1) \quad P_{\text{tot}}(r,z,t) = C^{\text{ste}} \int F(\omega) \Gamma(\omega, z) e^{-i\omega t} d\omega$$

L'intégrand est alors le produit de la transformation de Fourier du terme source temporel  $F(t)$  par une fonction  $\Gamma$  qui dépend de deux paramètres, la fréquence temporelle  $\omega$  et la profondeur  $z$ . Cette fonction n'est autre que la pression associée à la contribution géométrique et latérale de la fonction de Green.

Nous pouvons par analogie, associer l'expression (5.1) à l'expression de la transformation en ondelettes du signal source  $F(t)$ , où la fonction  $\Gamma$  joue un rôle équivalent à celui d'une famille (pour une distance radiale  $r$  fixe) de "pseudo-ondelettes".

Le problème que l'on se pose est alors: A-t-on une formule analogue à la transformation en ondelettes inverse, de façon à restituer le signal source?

Autrement dit: est-ce-que la pression transmise totale, par simple sommation sur la variable  $z$  (facteur d'échelle, par analogie à la formule de reconstitution simple (Cf. III)) joue un rôle équivalent à celui de coefficient d'ondelettes? si oui, sous quelles conditions?

## V -2. Reconstruction de la dépendance temporelle du signal source.[65-71,93]

A partir de l'expression de la pression (2.2) et celle du potentiel transmis total (2.16), nous avons les relations:

$$P_{\text{tot}}(r,z,t) = \rho_2 \frac{\partial \Psi_{\text{tot}}(r,z,t)}{\partial t}$$

$$(5.2.a) \quad \hat{\Psi}_{\text{tot}}(r,z,\omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\omega)}{c_1} \hat{F}(\omega) |\omega| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{i \operatorname{sgn}(\omega) [K_1 h + K_2 z]}}{m \sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} J_0\left(\frac{u \omega r}{c_1}\right) u du$$

avec:  $K_1(\mu, \omega) = \frac{|\omega|}{c_1} \sqrt{1-u^2}$  et  $K_2(\mu, \omega) = \frac{|\omega|}{c_1} \sqrt{n^2-u^2}$

et où:  $\sqrt{n^2-u^2}$  est définie par  $i \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{|n^2-u^2|}$ , pour  $u > n$   
 (5.2.b)  $\sqrt{1-u^2}$  est définie par  $i \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{|1-u^2|}$ , pour  $u > 1$ .

En appliquant une transformation de Fourier inverse sur la variable temporelle, l'expression de la pression transmise devient:

$$(5.3) \quad P_{\text{tot}}(r,z,t) = \frac{\rho_2}{\pi c_1} \int_{u=0}^{\infty} \left\{ \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) \omega^2 \frac{e^{i \frac{\omega}{c_1} [h \sqrt{1-u^2} + z \sqrt{n^2-u^2}]} }{m \sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} J_0\left(\frac{u \omega r}{c_1}\right) e^{-i \omega t} d\omega \right\} u du$$

Pour une distance radiale  $r$  fixe, et en un temps  $t$  donné, nous devons calculer l'intégrale:

$$(5.4) \quad \int_{z=0}^{\infty} P_{\text{tot}}(r,z,t) dz$$

Soit:

$$(5.5) \quad \int_{z=0}^{\infty} e^{i(\omega/c_1)z \sqrt{n^2-u^2}} dz, \quad ,$$

en tenant compte des déterminations de la racine dans le cas de la contribution "géométrique" ( $u < n$ ) et de la contribution "latérale" et "évanescence" ( $u > n$ ).

Posons:

$$(5.6) \quad I(r, t) = \int_{z=0}^{\infty} P_{\text{tot}}(r, z, t) dz$$

L'étude de la convergence de l'intégrale (5.5) pour des valeurs de  $u < n$  (en se souvenant que le potentiel donc la pression est une fonction vérifiant des conditions d'hermité et d'analyticité dans le demi-plan complexe supérieur) montre alors que sous des conditions de causalité de la source et de rayonnement de l'énergie à l'infini, nous avons:

$$(5.7) \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\omega = -\infty}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} \omega e^{-i\omega t} \hat{F}(\omega) J_0\left(\frac{ru|\omega|}{c_1}\right) \frac{e^{i(\omega/c_1)h\sqrt{1-u^2}}}{m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} \frac{u e^{i(\omega/c_1)A\sqrt{n^2-u^2}}}{\sqrt{n^2-u^2}} du d\omega = 0$$

Le cas où  $u > n$ , ne pose pas de problème.

Soit:

$$(5.8) \quad I(r, t) = \frac{p_2}{-i\pi} \int_{\omega = -\infty}^{\infty} \omega e^{-i\omega t} \hat{F}(\omega) \left\{ \int_{u=0}^{\infty} J_0\left(\frac{ru|\omega|}{c_1}\right) \frac{e^{i(\omega/c_1)h\sqrt{1-u^2}}}{m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} \frac{u du}{\sqrt{n^2-u^2}} \right\} d\omega$$

Cela suppose des conditions sur la position du point d'observation, en ce qui concerne la distance radiale  $r$ .

En se plaçant dans les conditions où  $\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} > n$ , nous avons vu que la contribution "géométrique" existe, mais qu'elle se trouve négligeable (Cf. §IV et §II partie 1). D'autre part, pour une valeur fixe de  $u$ , cette contribution décroît quand  $z$  croît (Cf. §II partie 1, fig.4). La relation (5.7) peut donc être vérifiée en imposant la condition:

$$(5.9) \quad \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} > n$$

Cette relation entraîne la relation suivante:  $n < \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} < 1$ .

Physiquement, cette condition impose que le point d'observation se trouve dans une région correspondant à des incidences sur-critiques, donc à de grandes distances radiales sans toutefois avoir  $\frac{r}{h} \gg 1$ .

Par ailleurs, les intégrations sur les variables  $u$  et  $\omega$  sont indépendantes. En intégrant d'abord l'expression (5.6) sur la variable  $u$ , celle-ci peut être découpée de façon naturelle en deux parties:  $u < n$  et  $u > n$ . Notre but étant d'identifier la dépendance temporelle de la source, chacune des intégrales en  $u$ , peut alors être estimée à l'aide d'un développement asymptotique (voir ann. 2, part.I), pour de grandes valeurs du paramètre  $\frac{\omega r}{c_1}$  [70,8, 10,16], en supposant que la source soit alors "haute-fréquence". Chaque composante  $\omega_j$  de son spectre doit être au dessus d'une valeur  $\omega_0$ , de façon à ce que la condition  $\frac{\omega_0 r}{c_1} \gg 1$  soit vérifiée:

$$(5.10) \quad |\omega_j| > \omega_0 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_j r}{c_1} \gg 1.$$

Sous ces deux conditions ((5.9) et (5.10)), nous pouvons alors effectuer le calcul.

Posons: 
$$I(r, t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \omega e^{-i\omega t} \hat{F}(\omega) \{ I_{in}(\omega) \} d\omega,$$

On ne considèrera ici que les valeurs de  $\omega > 0$ . Intégrons d'abord l'expression  $I_{in}(\omega)$ , pour  $u < n$ .

i)  $u < n$  : contribution géométrique.

L'intégrale s'écrit dans ce cas:

$$(5.11) \quad I_{in}(\omega) = \int_{u=0}^n J_0\left(\frac{ru\omega}{c_1}\right) \frac{e^{i(\omega/c_1)h\sqrt{1-u^2}}}{m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} \frac{u}{\sqrt{n^2-u^2}} du$$

$J_0\left(\frac{ru\omega}{c_1}\right)$  est la fonction de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce, d'ordre zéro. Son développement asymptotique pour de grandes valeurs du paramètre  $\frac{r\omega}{c_1}$  est [39]:

$$J_0\left(\frac{ru\omega}{c_1}\right) \approx \sqrt{\frac{2c_1}{\pi r u \omega}} \cos\left(\frac{ru\omega}{c_1} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left[\left(\frac{ru\omega}{c_1}\right)^{-1}\right]$$

Nous obtenons donc deux intégrales oscillantes que l'on notera  $I_{in}^{\pm}$  ( $I_{in}^{+}$  correspondant à  $e^{+iru|\omega|/c_1}$  et  $I_{in}^{-}$  correspondant à  $e^{-iru|\omega|/c_1}$ )

$$I_{ing}^{\pm}(\omega) = \sqrt{\frac{c_1}{2\pi r \omega}} \int_{u=0}^n e^{\pm i(r u \omega / c_1)} e^{-i\pi/4} \frac{e^{i(\omega/c_1)h\sqrt{1-u^2}}}{m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}} \sqrt{\frac{u}{n^2-u^2}} du$$

$$\begin{aligned} \text{Posons: } p(u) &= u + \frac{h}{r}\sqrt{1-u^2} \\ H(u) &= \frac{1}{\sqrt{n^2-u^2}} \frac{\sqrt{u}}{(m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2})} \\ \beta &= \frac{\omega r}{c_1} \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire:

$$I_{ing}^{\pm}(\omega) = \sqrt{\frac{c_1}{2\pi r \omega}} \int_0^n e^{i\beta p(u)} H(u) du$$

Le potentiel acoustique, donc la pression vérifiant des conditions d'hermité (Cf. II), nous pouvons effectuer nos calculs en ne considérant que les valeurs de  $\omega$  positives. D'autre part le découpage de l'intégrale en contributions entraîne une perte de l'analyticité (ie: la causalité) des expressions partielles. Celle-ci se retrouve lors de la sommation des différentes contributions (Cf.II).

En utilisant la méthode de la phase stationnaire, nous voyons que l'étude des fonctions  $p(u)$  et  $H(u)$  fournissent respectivement un point stationnaire  $u_0$  et un point singulier en  $u=n$ .

Le point stationnaire  $u_0$  vérifie la relation:  $\frac{r}{h} = \frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}}$

Il se trouve donc en dehors du domaine de validité imposé (5.9),  $\left(\frac{r}{h} > \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}\right)$ . La

contribution apportée par ce point ne peut être considérée. En revanche, l'étude de la contribution apportée par le point singulier montre alors, par un changement de la variable  $u$  en  $v$  ( $v = \sqrt{n^2-u^2}$ ), deux points stationnaires, dont l'un est acceptable ( $v_0 = 0$ ).

La nouvelle phase  $p$  et fonction  $H$  s'écrivent:

$$p(v) = \sqrt{n^2-v^2} + \frac{h}{r}\sqrt{1-n^2+v^2}, \quad p(v_0) = \sqrt{n^2} + \frac{h}{r}\sqrt{1-n^2}, \quad p''(v) < 0$$



$$H(v) = \frac{\left(\sqrt[4]{n^2-v^2}\right)^{-1}}{\left(v + m\sqrt{1-n^2-v^2}\right)}, \quad H(v_0) = \frac{(\sqrt{n})^{-1}}{\left(v + m\sqrt{1-n^2}\right)}$$

L'estimation de l'intégrale  $I_{in}^+(\omega)$  à l'aide de la phase stationnaire provenant essentiellement du voisinage autour du point  $v_0 = 0$  est:

$$(5.12.a) \quad I_{in}^+(\omega) \approx \frac{c_1}{2\omega} \frac{e^{i\omega(rn+h\sqrt{1-n^2})} e^{i\pi/2}}{m\sqrt{r(1-n^2)} \sqrt{n\left(\frac{-h}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{r}{n}\right)}} + O(\beta^{-1})$$

Un calcul analogue au précédent fournit l'expression de l'intégrale  $I_{in}^+$ :

$$(5.12.b) \quad I_{in}^-(\omega) \approx \frac{c_1}{2\omega} \frac{e^{i\omega(h\sqrt{1-n^2}-rn)} e^{i\pi/2}}{m\sqrt{r(1-n^2)} \sqrt{n\left(\frac{h}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{r}{n}\right)}} + O(\beta^{-1})$$

Considérons maintenant l'intégrale  $I_{in}(u, \omega)$  pour  $u > n$ .

*ii)  $u > n$ : contribution latérale.*

L'expression (5.11) devient:

$$(5.13) \quad I_{inl}(\omega) = \frac{1}{i} \int_{u=n}^1 J_0\left(\frac{ru\omega}{c_1}\right) \frac{e^{i(\omega/c_1)h\sqrt{1-u^2}}}{m\sqrt{1-u^2+i\sqrt{u^2-n^2}}} \frac{u}{\sqrt{u^2-n^2}} du$$

En utilisant le développement asymptotique de la fonction de Bessel, et en ne considérant que les valeurs de  $\omega > 0$ , nous obtenons les expressions  $I_{inl}^\pm$ :

$$I_{inl}^\pm(u, \omega) = -i \sqrt{\frac{c_1}{2\pi r \omega}} \int_{u=n}^1 e^{-i\pi/4} \frac{e^{i(\omega/c_1)(\pm ru + h\sqrt{1-u^2})}}{m\sqrt{1-u^2+i\sqrt{u^2-n^2}}} \sqrt{\frac{u}{u^2-n^2}} du$$

Le calcul de ces intégrales s'effectue également à l'aide de la phase stationnaire pour de grandes valeurs du paramètre  $\beta = \frac{\omega r}{c_1}$ . Le traitement de  $I_{inl}^-$  est analogue à celui de  $I_{ing}^-$  et l'on trouve pour le point stationnaire  $v_0=0$ :

$$I_{inl}^- \approx -i \frac{c_1}{\omega} \frac{e^{i\omega/c_1(-rn+h\sqrt{1-n^2})}}{m\sqrt{1-n^2} \sqrt{r(hn+r\sqrt{1-n^2})}} + O(\beta^{-1})$$

En revanche l'intégrale  $I_{inl}^+$  présente cette fois-ci un point stationnaire en  $u_0$  car celui-ci vérifie la condition (5.8). Cette intégrale peut être découpée en deux parties:

$$I_{inl}^+ = \int_n^a A(u)du + \int_a^1 B(u)du + \int_1^\infty C(u)du$$

La dernière intégrale est négligeable (Cf. II. partie 1).

$$\text{Posons } \int_n^a A(u)du = I_{inl1}^+ \quad \text{et} \quad \int_a^1 B(u)du = I_{inl2}^+$$

La contribution principale de l'intégrale  $I_{inl1}^+$  est dû au point singulier. Le calcul est donc le même que précédemment. On trouve un point stationnaire en  $v_0=0$ , par un changement de la variable  $u$  en  $v$ , ( $v = \sqrt{u^2 - n^2}$ ).

En ce qui concerne l'intégrale  $I_{inl2}^+$ , posons:

$$p(u) = u + h/r\sqrt{1-u^2}$$

$$H(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-n^2}} \frac{\sqrt{u}}{(m\sqrt{1-u^2} + i\sqrt{u^2-n^2})}$$

On trouve un point stationnaire  $u_0$  vérifiant la relation:

$$\frac{r}{h} = \frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}}, \quad \left( \frac{r}{h} > \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} \right)$$

soit

$$u_0 = \frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}} = \sin\alpha$$

$$p(u_0) = \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r} \quad \text{et} \quad p''(u_0) < 0$$

$$H(u_0) = \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin^2\alpha-n^2}(m\cos\alpha + i\sqrt{\sin^2\alpha-n^2})}$$

Nous obtenons pour le point stationnaire  $u_0$  le développement asymptotique suivant:

$$(5.14) \quad |l_{in}|_2 \approx \frac{c_1}{\omega} \frac{h}{(r^2+h^2)^{3/4}} \frac{e^{i\omega/c_1(\sqrt{h^2+r^2})}}{\sqrt{\sin^2\alpha-n^2}(m\cos\alpha+i\sqrt{\sin^2\alpha-n^2})} + O(\beta^{-1})$$

L'expression de la sommation pression est donc:

$$\begin{aligned} l(r,t) &= \int_{z=0}^{\infty} P_{tot}(r,z,t) dz \\ &\approx \frac{\rho_2}{c_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \hat{F}(\omega) \{ l_{ing}^{\pm}(\omega) + l_{in}^-(\omega) + l_{in}^+_1(\omega) + l_{in}^+_2(\omega) \} d\omega \\ &\approx \rho_1 \left[ \int C_1^{ste} \frac{e^{i\omega/c_1(rn+h\sqrt{1-n^2})}}{4\sqrt{1-n^2}\sqrt{r(hn+r\sqrt{1-n^2})}} + C_2^{ste} \frac{h}{(r^2+h^2)^{3/4}\sqrt{\sin^2\alpha-n^2}(\cos\alpha)} \right] e^{-i\omega t} \hat{F}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

(avec la condition  $m \cos\alpha \gg \sqrt{\sin^2\alpha-n^2}$ , car  $m \approx 800$ )

soit:

$$\begin{aligned} l(r,t) \approx & C_1^{ste} \frac{\rho_1}{4\sqrt{1-n^2}\sqrt{r(hn+r\sqrt{1-n^2})}} F\left(t - \frac{rn+h\sqrt{1-n^2}}{c_1}\right) \\ & + \rho_1 C_2^{ste} \frac{h}{(r^2+h^2)^{3/4}\sqrt{\sin^2\alpha-n^2}\cos\alpha} HF\left(t - \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{c_1}\right) \end{aligned}$$

où H représente la transformée de Hilbert.

Nous voyons que par simple sommation de la pression sur la variable  $z$ , nous trouvons effectivement le signal source  $F(t)$  et sa réplique décalée dans le temps: écho (écho mis en évidence lors du problème direct).

Nous remarquons alors que les temps de retard correspondent à deux trajets bien distincts de l'onde dans l'air. Le premier est celui du trajet d'une onde arrivant sous incidence critique selon le principe de Fermat (analogie au temps  $t_1$  Cf. II, IV partie 2), le second correspond au trajet direct de l'onde à incidence sur-critique (analogie au temps  $t_2$  Cf. II, IV partie 2).

Nous trouvons pour le second terme non pas le signal  $F$ , mais la transformée de Hilbert de  $F$ . Ceci est dû à la condition de symétrie hermitienne que vérifie le potentiel acoustique. Cela implique que chaque composante spectrale du signal sera déphasée de  $\pi/2$  par rapport aux composantes spectrales du signal du premier terme. Cette reconstruction n'est valable que sous l'approximation "haute-fréquence".

Une autre remarque est à faire: Les fonctions de Green  $\Gamma_{\text{géo}}$  et  $\Gamma_{\text{sur}}$  associées respectivement aux contributions "géométrique" et de "surface" ("latérale") ne sont pas formellement des ondelettes. Néanmoins, leur support fréquentiel vérifie une loi de comportement à  $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \text{Cste}$ , lorsque le paramètre  $z$  varie [93]. On peut donc modéliser le champ de pression acoustique transmis, le long d'une verticale (distance radiale  $r$  fixe) comme étant le résultat d'un "filtrage multi-échelle" à  $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \text{Cste}$ . Par analogie aux formules d'inversion de la transformée, nous pouvons effectivement dire que la profondeur joue un rôle équivalent à celui du paramètre de dilatation et la pression transmise, à celui de coefficient d'ondelettes.

Nous n'avons pas pour l'instant de simulations numériques de ces résultats et la partie expérimentale est en cours de réalisation. Néanmoins, nous pouvons penser que l'expérimentation pourrait déboucher sur la réalisation d'une antenne spécifique où les capteurs seraient disposés suivant une grille, par analogie à la transformée en ondelettes discrète.



VI-UNE ETUDE PRELIMINAIRE DE L'APPLICATION DE LA  
TRANSFORMEE EN ONDELETTES POUR L'ANALYSE DE SIGNAUX  
DIFFUSES PAR DES CIBLES DE FORMES GEOMETRIQUES SIMPLES.



## **VI -Une étude préliminaire à l'application de la transformée en ondelettes pour l'analyse de signaux diffusés par des coques sphériques.**

### **VI-1. Introduction générale.**

Une autre application de la transformation en ondelettes, à un problème de propagation de signaux acoustiques transitoires à travers une interface, est celle qui se rapporte à l'étude d'un problème de sonar actif. Dans ce cas, en considérant la rétrodiffusion acoustique par un corps élastique (interface fluide/solide), nous pouvons de façon analogue à l'étude de la transmission à travers le dioptre (interface fluide/fluide) (Cf. IV), analyser le signal en termes de contribution géométrique (écho optique) et contributions de surface (ondes de galerie à échos par exemple).

Nous savons qu'un corps immergé dans un milieu environnant fluide et se trouvant "insonné" (soumis à une source acoustique impulsionnelle), renvoie un écho à travers ce milieu, ou support. Cette réponse qu'on appellera "signature acoustique" dépend à la fois de la forme de l'objet et de sa nature. Elle montre que pour un même objet (paramètres géométriques et élastiques fixés), il existe à certaines fréquences, un phénomène de résonance de la cible.

La question naturelle que l'on vient à se poser est: "peut-on, à partir de l'étude de réponses de cibles, caractériser ces dernières?".

Une étude du mécanisme de la diffusion acoustique par des coques de formes géométriques simples devient nécessaire. En fonction de critères d'analyse que l'on se fixe et de la finesse des résultats souhaités, se pose le choix de méthodes d'analyse les plus adéquates à notre problème. L'analyse d'échos, donc la caractérisation de cibles dépendra fortement de la méthode choisie.

Nous entendrons par critères d'analyse, des critères permettant d'appréhender des grandeurs physiques propres au phénomène de diffusion d'ondes telles que vitesse de groupe, maximum d'énergie, loi de dispersion de la vitesse, fréquence de résonance, séparation des paquets d'ondes, présence caractéristique de certains types d'ondes et leur temps d'arrivée. D'autres critères liés à la méthode même peuvent être introduits.

Les signaux de réponse de cibles entrent dans la catégorie de signaux transitoires. Au lieu des méthodes classiques purement temporelles, ou purement fréquentielles, nous choisirons des méthodes s'adaptant à des évolutions rapides, et pouvant conserver à la fois les



caractéristiques fréquentielles et temporelles du signal. Les méthodes classiques temps-fréquence les plus performantes, sont de type Wigner-Ville (pseudo-Wigner-Ville-lissé) [42,43,72-76] ou Fourier à court terme (transformation de Gabor) [44]. Nous utilisons pour notre part la transformée en ondelettes qui comme on l'a vue est une méthode de type temps-échelle (analyse à  $\frac{\Delta f}{f} = C^{st}$ ), possédant la propriété d'être linéaire et isométrique (Cf. III). Elle nous permet par ailleurs d'analyser le signal en une somme de contributions élémentaires d'ondelettes bien localisées à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel. En utilisant une ondelette progressive, nous pouvons de plus utiliser les informations portées par la phase de la transformée. Enfin, cette transformée qui est invariante par translation en temps est, par rapport aux autres transformations linéaires (ie à  $\Delta f = C^{st}$ ), invariante par une transposition en fréquence (exemple effet Doppler).

## **VI-2. Position du problème.**

L'étude théorique et expérimentale de la diffusion acoustique par des coques de formes géométriques simples [77-85] a montré la relation existant entre résonances et ondes de surface. Nous pouvons citer à ce sujet les importants travaux de Überall et Derem.

En résumé, les ondes de surface peuvent se séparer en deux classes: celles ayant un support dans le milieu ambiant fluide (ondes de Stoneley, ondes de Franz appelées encore ondes rampantes) et celles ayant un support dans le milieu élastique, celui du diffuseur (ondes de Rayleigh, ondes de galerie à échos). Les ondes de Franz et celles de galerie à échos sont liées à la géométrie de la cible.

En ce qui concerne le phénomène de résonance, il a été montré [86] qu'il était lié à l'enroulement des ondes de surface autour du diffuseur (soit  $n+1/2$  longueur d'onde sur un grand cercle pour la sphère,  $n$  longueur d'onde pour le cylindre).

On s'intéresse ici plus particulièrement aux diffuseurs sphériques creux et immergés dans un fluide, l'eau. Les coques, de faible épaisseur, réalisées en fortal ont un rapport de rayons (rayon intérieur sur rayon extérieur)  $r_i/r_e$  de 0.9 et 0.67. Les transducteurs utilisés lors des expérimentations, ont une fréquence centrale de l'ordre de 500kHz. Nous allons voir comment la transformée en ondelettes pour une ondelette analysante  $g(t)$  de type Morlet (3.3), peut être utilisée dans le cas de la diffusion acoustique.

L'expression de la pression rétrodiffusée par une coque sphérique élastique, creuse, en régime monochromatique est, pour une onde plane incidente:

$$P_{\text{diff}}(r,t) = P_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) A_n(kr_e) h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta)$$

où  $P_0$  représente l'amplitude de l'onde incidente;

$A_n$  sont des fonctions dépendant du nombre d'onde réduit ( $kr_e$ ), et des caractéristiques de la géométrie de la cible. Elles s'écrivent comme le rapport de 2 déterminants (6x6) qui prend en compte les conditions aux limites (interfaces) [80,81]. Les résonances dues aux interfaces (coque) correspondent aux singularités de ces fonctions [80, 86].

$h_n^{(1)}$  représentent les fonctions de Hankel sphériques de 1<sup>ère</sup> espèce (problème à symétrie de révolution)

$P_n$  sont les polynômes de Legendre.

Cette pression peut encore s'écrire :

$$P_{\text{diff}}(r,t) = P_0 e^{-i(\omega t - kr)} F_{\infty}(kr_e, \theta)$$

$$\text{où } |F_{\infty}(kr_e, \theta)| = \frac{2}{kr_e} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) A_n(kr_e) P_n(\cos\theta) \right|.$$

$F_{\infty}(kr_e, \theta)$  représente la fonction de forme en champ lointain. L'étude par analyse spectrale de la position des résonances de la coque, s'effectue à partir du module de cette fonction.

### VI- 3. Extraction de lois de modulation par transformée en ondelettes.[59,87-89]

Nous savons qu'en utilisant une approximation haute-fréquence (du type phase stationnaire, ligne de plus grande-pente ou méthode de col), on peut évaluer une intégrale de la forme:

$$(6.1.a) \quad \int_{\Gamma} F(\mu) e^{\beta p(\mu)} d\mu, \quad |\beta| \gg 1, \quad (\beta \in \mathbb{C})$$

où  $\Gamma$  représente un contour dans le plan complexe,  $F$  et  $p$  des fonctions analytiques de la variable complexe  $\mu$ , régulières dans le plan et indépendantes du paramètre  $\beta$ .

La contribution principale de cette intégrale provient des points  $\mu_0$  appelés selon le cas (voir partie 1, Ch. IV annexe), points stationnaires ou points selle. Ces points particuliers vérifient certaines conditions. Pour les points selle, zéro de la fonction dérivée

de  $p$ , l'exponentielle prend sa valeur maximum pour de grandes valeurs du paramètre  $\beta$ . Sur les lignes de plus grandes pentes issues de ces points, nous avons  $\text{Im}[\beta p(\mu)] = \text{Cste}$ , la décroissance de l'exponentielle est rapide et sa phase est constante. Le chemin d'intégration se limite donc au voisinage de ces points. Dans ce cas  $p(\mu)$ , ( $\mu \in \mathbf{C}$ ) vérifie:

$$\text{Im}[p(\mu)] = \text{Im}[p(\mu_0)] = \text{Cste}, \quad \frac{dp(\mu)}{d\mu} = 0 \quad \text{en } \mu_0 \quad (\text{point selle})$$

$$(6.1.b) \quad \text{Re}[p(\mu_0)] \text{ est maximum sur } \Gamma',$$

et  $\frac{dp(\mu)}{d\mu}$  vérifie les conditions de Cauchy (Partie 1.Ch.IV annexe, (A.2))

En nous ramenant à un trajet d'intégration sur l'axe réel  $\mathbf{R}$ , où  $p$  devient une fonction de la variable réelle  $u$ , la contribution principale de ce type d'intégrale provient alors de points stationnaires  $u_0$  qui annulent  $p'(u)$  (Cf. Annexe partie 1 Ch.IV (A.7)). Les expressions approchées de l'intégrale sont données pour des points stationnaires supposés d'ordre un, c'est à dire  $p'(u_0) = 0$  et  $p''(u_0) \neq 0$ . Dans ce cas l'intégrale est alors obtenue à l'ordre  $o(\beta^{-1})$ . Pour des points stationnaires d'ordre  $n$ , c'est à dire:

$$(6.2) \quad p'(u_0) = \dots = p^{(n)}(u_0) = 0 \quad \text{et} \quad p^{(n+1)}(u_0) \neq 0$$

les contributions principales sont alors approchées à l'ordre  $o(\beta^{-1/n})$ .

En appliquant la méthode du point col, (ou phase stationnaire) à la transformée en ondelettes d'un signal présentant une loi de modulation arbitraire  $h(t)$ , nous pouvons nous restreindre à l'étude de la contribution principale contenue dans la transformée du signal et extraire des caractéristiques propres au signal étudié.

Soit  $g(t) = A_g e^{i\phi_g}$ , l'ondelette analysante,  $u_0$  le point stationnaire supposé d'ordre un.

En utilisant la méthode de la phase stationnaire (Cf.(A.7) annexeIV, Part. 1). l'expression de la transformée en ondelettes d'un signal  $s(t)$  :  $s(t) = A(t)e^{ih(t)}$  s'écrit:

$$(6.3) \quad S(b,a) \approx \sqrt{\frac{\pi}{\beta a}} \xi(0) e^{i\beta\Phi(u_0)} e^{+i\pi/4 \text{ sgn}[\Phi''(u_0)]} + o(\beta^{-1})$$

$$\text{où} \quad \Phi(u_0) = h(u_0) + \omega_0 \left( \frac{u_0 - b}{a} \right) \quad \text{et} \quad \xi(0) = F(u_0) \sqrt{\frac{2}{|\Phi''(u_0)|}}$$

avec  $F(u_0) = A(u_0) A_g(u_0) = A(u_0) e^{-(u_0-b)^2/2(\sigma a)^2}$

$$g(t) = A_g e^{i\varphi_g} = \exp(i \omega_0 t) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{d'après 3.3})$$

Soit:

$$(6.4) \quad \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{dh(t)}{dt} + \frac{d\varphi_g[(t-b)/a]}{dt} = \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{a} \frac{d\varphi_g[v(t)]}{dv}, \quad \text{où } v(t) = \frac{t-b}{a}$$

Les points stationnaires  $u_0$  vérifient:

$$(6.5) \quad \frac{d\Phi(t)}{dt} = 0, \quad \text{soit: } \frac{dh(t)}{dt} \Big|_{u_0} = - \frac{1}{a} \frac{d\varphi_g[v(t)]}{dv} \Big|_{u_0}$$

Nous voyons que les points stationnaires de l'intégrale correspondent au point où la fréquence de l'ondelette, suivant le paramètre d'échelle  $a$ , est égal à la fréquence instantanée du signal.

Pour l'ondelette de Morlet, nous avons:

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} \Big|_{u_0} &= - \frac{\omega_0}{a} \Big|_{u_0} \\ \frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} \Big|_{u_0} &= \frac{d^2h(t)}{dt^2} \Big|_{u_0} \end{aligned}$$

Les points stationnaires (ou points col) fournissant la contribution essentielle de l'intégrand, nous aurons, pour la représentation en module de la transformée, des coefficients d'ondelettes qui seront maximum au voisinage des points  $u_0(b,a)=b$  (chemin d'intégration). Les points du demi-plan  $(b,a)$  vérifieront pour un  $a$  fixe:

$$(6.7) \quad (b, \Phi'_a(b) = - \frac{\omega_0}{a}) \text{ en } u_0(b,a) .$$

Nous voyons alors que pour un signal  $s(t)$  ayant une loi de modulation arbitraire  $h(t)$ , la contribution principale de la transformée en ondelettes sera donnée par le trajet d'intégration restreint au voisinage des points col. Celle-ci s'ordonne suivant un "squelette" correspondant à la variation de la fréquence instantanée du signal (6.6). Les lignes passant par les maxima du module de la transformée fourniront la loi de dispersion de la vitesse de groupe. Etudions, maintenant le comportement en phase de la transformée en ondelettes à partir de la relation (6.3). La phase notée  $\chi$  est décrite par la relation:

$$\chi(u_0(b,a)) = \beta \Phi(u_0(b,a)) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}[\Phi''(u_0(b,a))]$$

Si l'on regarde le comportement de la phase par rapport au paramètre d'échelle  $a$ , nous voyons d'après la relation (6.5) que:

$$\begin{aligned} (6.8) \quad \frac{\partial \chi(u_0(b,a))}{\partial a} &= \beta \frac{\partial \Phi(u_0(b,a))}{\partial a} \\ &= \beta \left( \left( \frac{\partial h(u_0(b,a))}{\partial u_0} + \frac{\partial \Phi_g[v(u_0(b,a))]}{\partial v} \frac{\partial v(u_0(b,a))}{\partial u_0} \right) \frac{\partial u_0(b,a)}{\partial a} \right) \\ &= \beta \left( \left[ \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{a} \frac{d\Phi_g[v(t)]}{dv} \right]_{|u_0} \frac{\partial u_0(b,a)}{\partial a} \right) = 0 \end{aligned}$$

On a donc aux points de phase stationnaire, la relation (en notant  $\chi = \arg(S(b,a))$ ):

$$(6.9) \quad \frac{\partial \arg(S(b,a))}{\partial a} = \frac{d\chi(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dh(t)}{dt} = - \frac{C^{ste}}{a}$$

Autrement dit, à partir de l'analyse de la phase de la transformée en ondelettes, pour un paramètre  $b$  fixe, sous l'hypothèse "haute fréquence", nous pouvons extraire la loi de dispersion de la vitesse de groupe. Celle-ci correspond au "squelette" extrait à partir de la dérivée de l'argument de  $S(b,a)$  par rapport au paramètre d'échelle  $a$ . Une application directe de cette méthode peut être effectuée dans l'analyse de signaux rétrodiffusés par des cibles de formes géométriques simples.

#### **VI- 4. Analyse temps-échelle de la diffusion acoustique par des coques sphériques élastiques en régime impulsionnel.**

Dans une étude préliminaire, nous avons appliqué en parallèle une transformée pseudo-Wigner-Ville-lissée et celle des ondelettes, sur les mêmes fichiers, aussi bien simulés que expérimentaux. On considère des diffuseurs sphériques creux et immergés dans l'eau. Les coques sont de faible épaisseur et réalisées en Fortal ( $\approx$  duralumin, ie: alliage à 95% d'aluminium et 3,5% de cuivre). Les transducteurs utilisés lors des expérimentations, ont une fréquence centrale de l'ordre de 500kHz et une largeur de bande de 200kHz.

Nous présentons ici, les résultats obtenus par une transformée en ondelettes sur une coque sphérique de fortal de rapport de rayons  $r_i/r_e$  ( $r_i$ ,  $r_e$  : rayon intérieur et extérieur,  $r_e=3\text{cm}$ ) de 0,9 (Fig. 22-28). Nous avons également appliqué cette méthode pour une coque de fortal de rapport 0,67 (fig.29). Ces résultats sont issus de fichiers expérimentaux, excepté pour la figure 29. La figure 22 visualise l'évolution temporelle du signal après diffusion acoustique par la coque de rapport 0,9.

L'ondelette analysante définie en (3.3) a été prise avec les caractéristiques suivantes:  $\omega_0 = 6$ ,  $\sigma = 1$ . Le support de l'ondelette pour  $a=1$ , a été défini avec l'approximation  $g(t)=0$  dès que  $|g(t)| \leq 10^{-3}$ .

Nous avons à notre disposition deux représentations graphiques de la transformée son module et sa phase. Celles-ci sont représentées en lignes de niveaux dans une échelle logarithmique, avec une dynamique de 32dB (Fig 23-28) et de 40dB sur la figure 29. Le paramètre d'échelle varie de façon logarithmique. C'est à dire que l'ordonnée représente le logarithme du paramètre de dilatation. L'abscisse représente le paramètre de translation. L'échelle des couleurs varie progressivement de façon décroissante du noir au blanc.

Nous savons qu'une des particularités du comportement de la phase de la transformée, est que les lignes de phase constante convergent vers l'endroit où se trouvent les discontinuités du signal. On peut de même détecter les discontinuités dans les dérivées d'ordre  $n$  du signal, alors que celui-ci est continu (Cf. III.4)[55,57,58]. La phase variant de  $-\pi$  à  $\pi$ , sa représentation graphique visualise ici, les variations comprise entre 0 et  $\pi$ .

L'analyse de fichiers issus d'une expérience est représentée figure 22 à 28. La fréquence d'échantillonnage du signal temporel, figure 22 est de  $10^7$  Hz (coque de 0.9). Le temps de départ de l'analyse est  $1.8 \cdot 10^{-4}\text{s}$ . Les paramètres de dilatation pour les fichiers expérimentaux ont été choisis pour couvrir une analyse en fréquences comprise entre 66kHz et 1.42MHz. A  $a=1$  correspond une fréquence moyenne de 709,95 kHz.

L'analyse est effectuée sur 5 octaves. Chaque octave est décomposée linéairement en 10 voies à partir du paramètre de dilatation initial de 0,5. D'autre part, la transformée en ondelettes, nous offre la possibilité de faire une loupe sur le signal en jouant sur les paramètres de dilatation. Nous pouvons de plus accroître la précision en augmentant le nombre de voies par octave.

Nous pouvons voir, sur la figure 23, pour la coque de fortal 0,9 en accord avec l'étude théorique de la diffusion, l'écho spéculaire ou contribution géométrique (1<sup>er</sup> paquet d'ondes), et des contributions de surface. Cette contribution est l'onde de galerie à échos au 1<sup>er</sup> tour (2<sup>ème</sup> paquet d'ondes) et au 2<sup>nd</sup> tour (4<sup>ème</sup> paquet). Le paquet d'ondes n°3, non dispersif se retrouve sur la figure 28 atténué après avoir effectué un tour (paquet n°6).

La coque étant dispersive, nous voyons à chaque tour une inclinaison de plus en plus importante du paquet d'ondes, avec atténuation de celui-ci au cours du temps.

Connaissant les dimensions de la sphère et le temps d'arrivée exact des paquets d'ondes grâce à la représentation en phase de la transformée, nous pouvons calculer leur vitesse [87] (En prenant comme repère le maximum de l'enveloppe du paquet d'ondes -grandeur temporelle ici- celui-ci se propage à la vitesse de groupe  $d\omega/dk$ , valeur où la phase est stationnaire [87]). C'est à dire qu'entre deux paquets d'ondes successifs et de même type (par exemple paquet 2 et 4), on relève sur la phase de la transformée (discontinuité dans le signal), leur temps d'arrivée, soit une vitesse de  $5385\text{ms}^{-1}$  ( $r_e = 3\text{cm}$ ). La loi de dispersion de la vitesse peut être alors extraite:

- soit en relevant pour chaque valeur du paramètre d'échelle les maxima d'énergie du paquet d'ondes (onde de galerie à échos) [87] correspondant aux maxima des coefficients d'ondelettes, à partir du module de la transformée;

- soit par extraction à partir de la phase de la transformée d'un "squelette" ([59], [88-90]), recherche des points où la phase est stationnaire, caractéristique de la loi de modulation de la vitesse dans ce cas (Cf. VI.4). Le problème soulevé est alors l'erreur engendrée par le bruit se superposant au signal lors de l'expérimentation [87]. Dans ce cas même si la transformée en ondelettes a montré une certaine "robustesse" [55,57,58,89], il est évident que celle-ci devra être combinée à des méthodes de filtrage du signal.

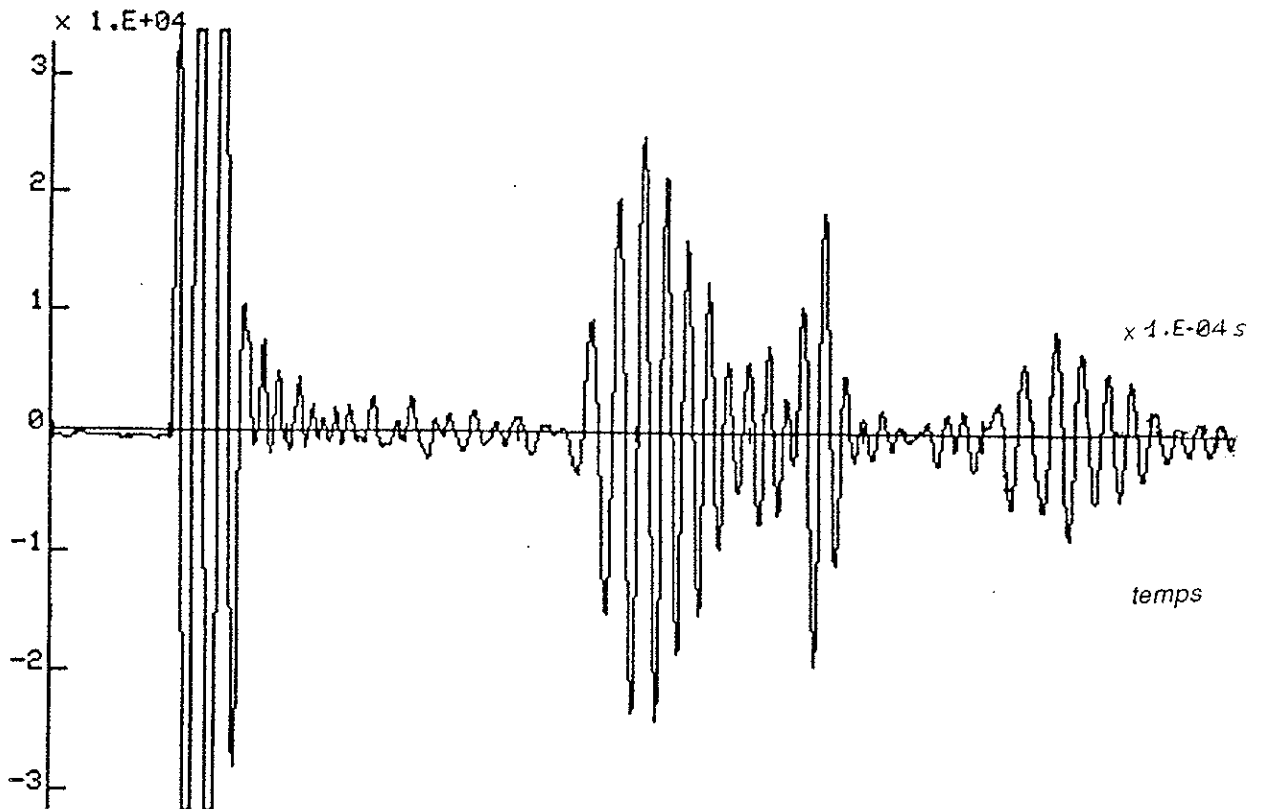


Fig. 22: Réponse impulsionnelle expérimentale d'une coque sphérique mince de fortal de rayon extérieur  $r_e = 0,03\text{m}$ . Rapport des rayons  $r_i/r_e = 0.9$ , ( $r_i$  est le rayon intérieur).



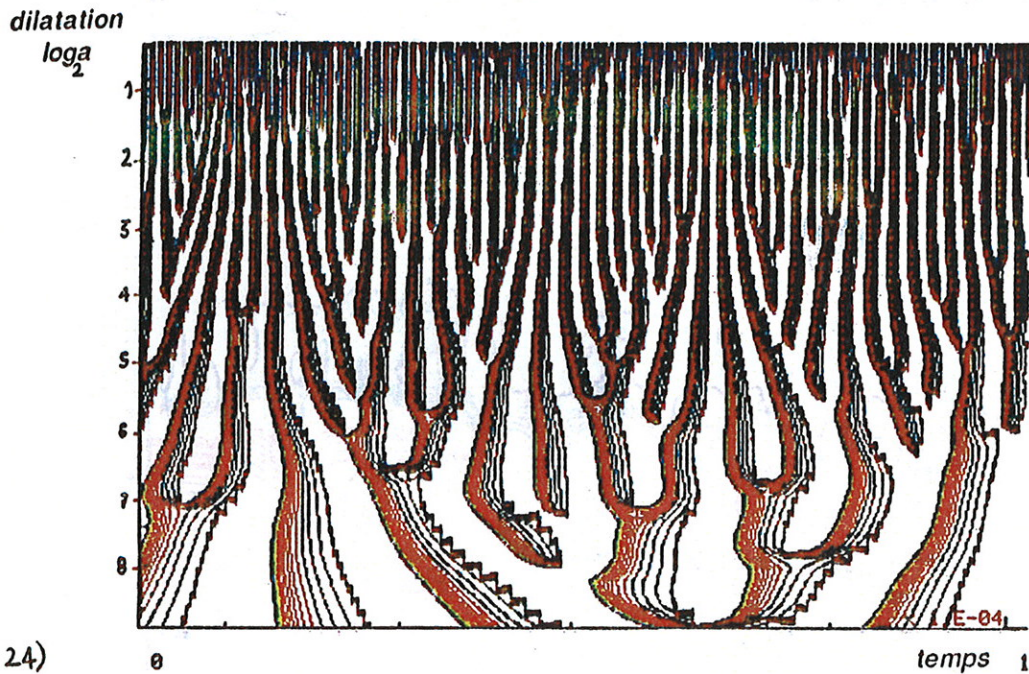
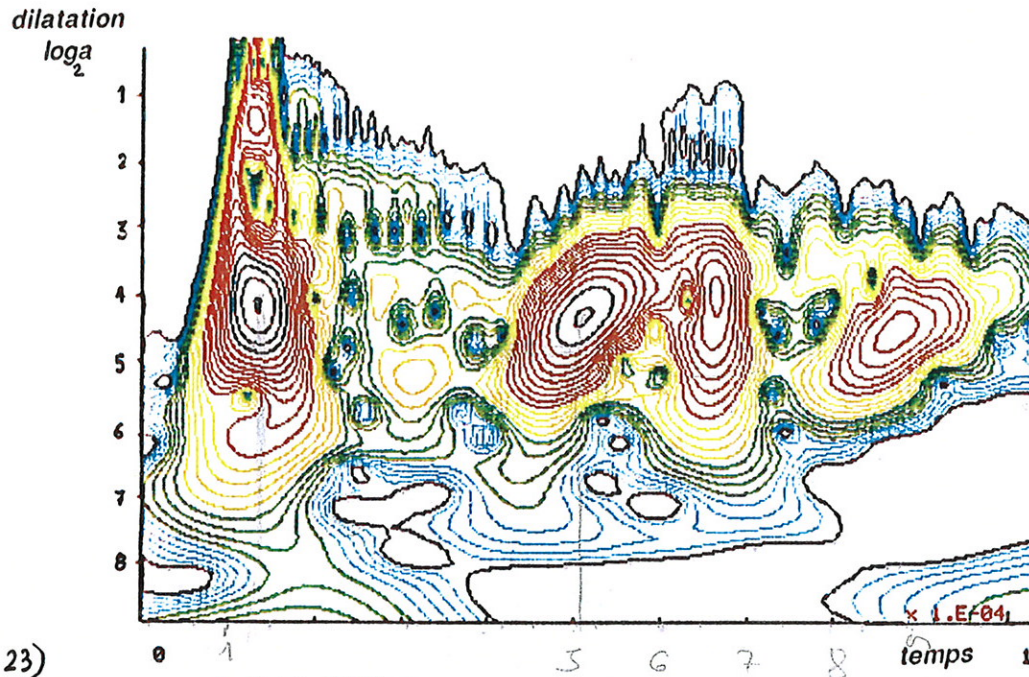


Fig. 23: Module de la transformée en ondelettes du signal temporel de la figure 22. Analyse sur 45 voies; 10 voies par octave, à partir du paramètre de dilatation  $a = 0,5$ ; 1024 points de translation espacés d'une période d'échantillonnage de  $10^{-7}$  s. Pour  $a = 1$ , le support de l'ondelette est de 101 points. (Ceci correspond à une fréquence moyenne de 709,95 kHz).

Fig. 24: Phase de la transformée en ondelettes du signal temporel (Cf. fig. 22). L'analyse s'effectue suivant les mêmes paramètres d'échelle que la figure 23.



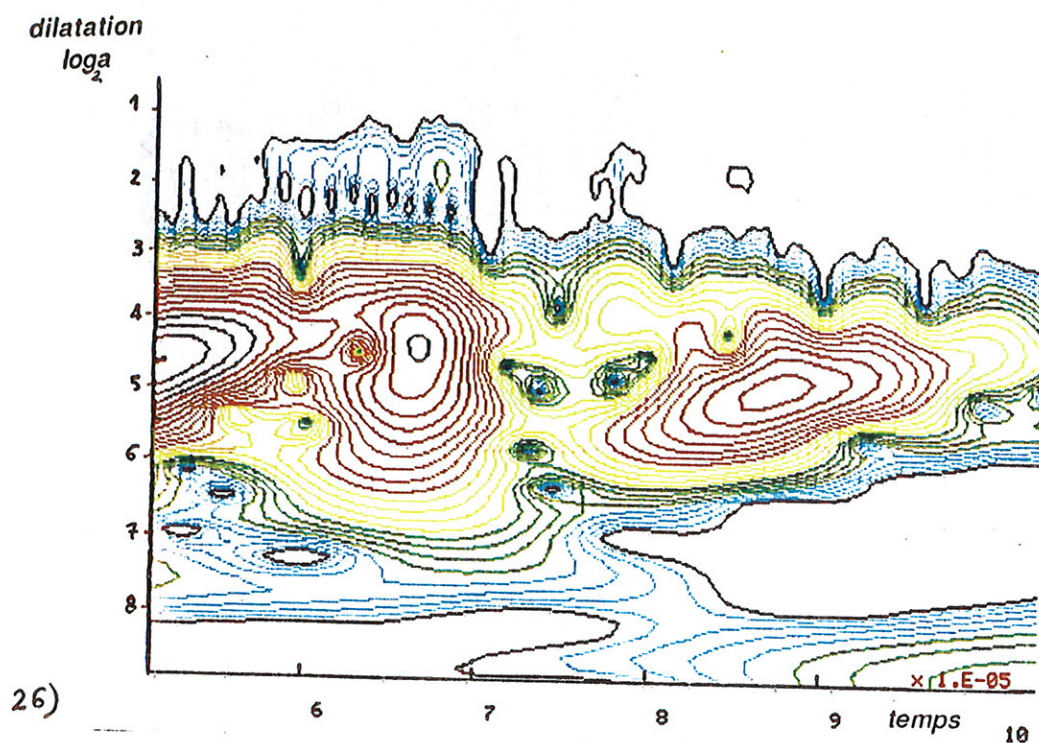
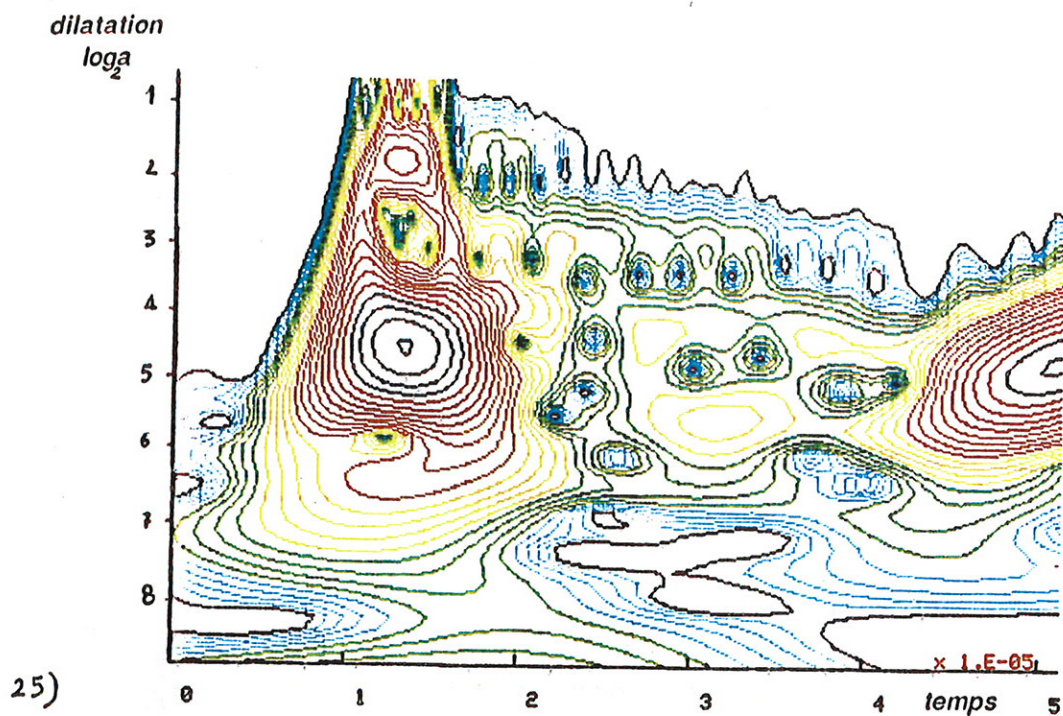
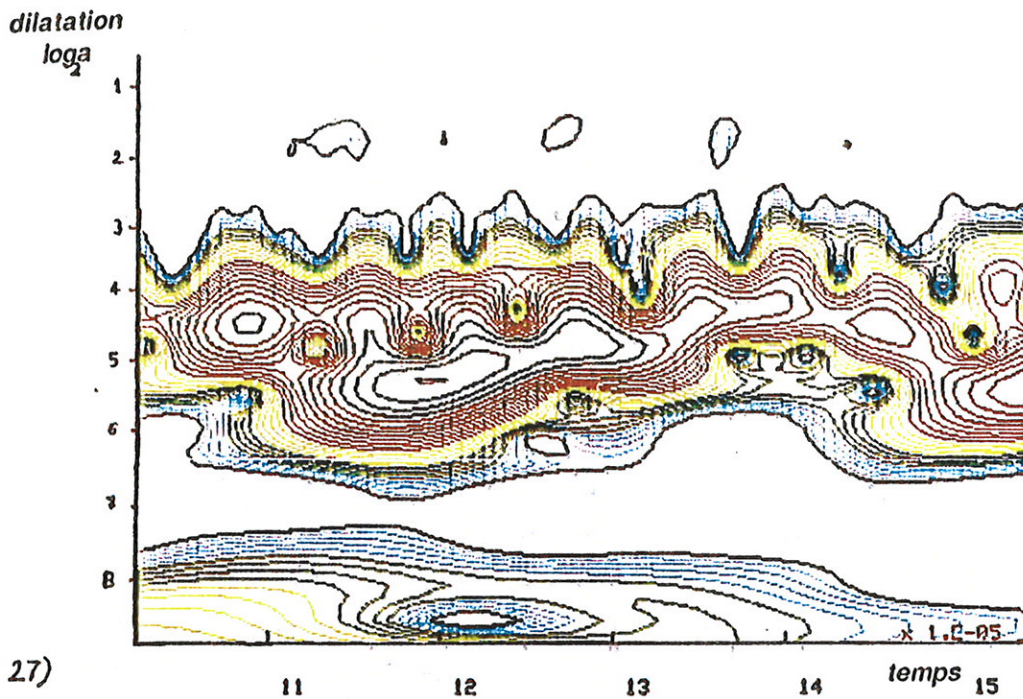
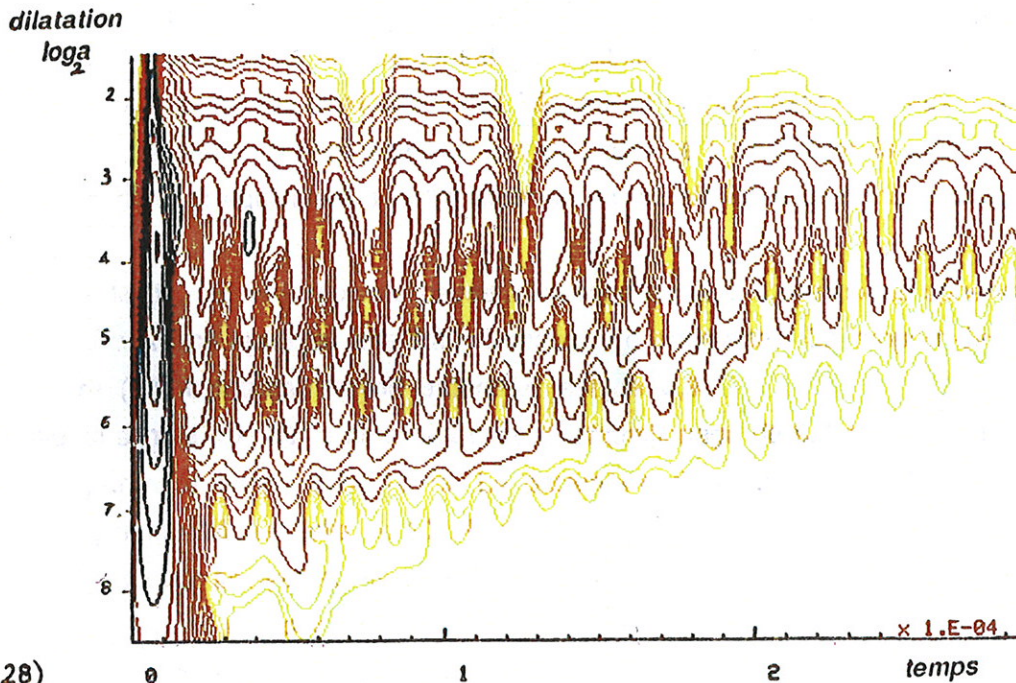


Fig. 25-26 (idem 27): Module de la transformée en ondelettes du signal représenté sur la figure 22. L'analyse s'effectue successivement par tranches de  $51,2\mu s$ . Même facteur d'échelle que la figure 24 et 25.





27)



28)

Fig.27: Module de la transformée en ondelettes du signal représenté sur la figure 21. L'analyse s'effectue successivement par tranches de  $51,2\mu s$ . Même facteur d'échelle que la figure 23.

Fig. 28: Module de la transformée en ondelettes du signal diffusé par une coque de fortal de 0,67 (expérimentation). Analyse sur 50 voies. Nous avons 20 voies par octave. Le paramètre de dilatation de départ est de 0,18. Pour  $a = 1$ , le support de l'ondelette est de 120 points. La fréquence d'échantillonnage est de  $1,8 \cdot 10^6$  Hz. ( $a = 1$  correspond à une fréquence moyenne de 107,38kHz). Les lignes de niveaux sont représentées avec une dynamique de 40dB.

Les figures 25 à 27 représentent le module de la transformée en ondelettes du même signal temporel (Fig. 22), mais par tranches d'analyse temporelle de  $51,2\mu\text{s}$ . Les paramètres d'échelle sont les mêmes que pour les figures 23-24.

La figure 28 représente le module de la transformée en ondelette d'un signal rétrodiffusé par une coque sphérique de fortal 0,67. La fréquence d'échantillonnage du signal temporel est de  $1,8 \cdot 10^6$  Hz. L'analyse a été effectuée sur 50 voies, dont 20 par octave. Le paramètre de dilatation de départ est de 0,18. Pour  $a = 1$ , le support de l'ondelette est ici discrétisé sur 120 points. Pour un paramètre de dilatation égal à l'unité correspond une fréquence moyenne de 107,38kHz.

Nous retrouvons la même structure d'échos: d'abord l'écho spéculaire (contribution géométrique), puis l'onde de galerie à échos, et, ses échos successifs (contribution de surface). Ces ondes présentent également un phénomène de dispersion avec une loi de modulation différente (pente différente). La nature de la cible et le diamètre extérieur étant les mêmes que pour la coque de 0,9, nous voyons que cette loi est liée à l'épaisseur de la coque (interface).

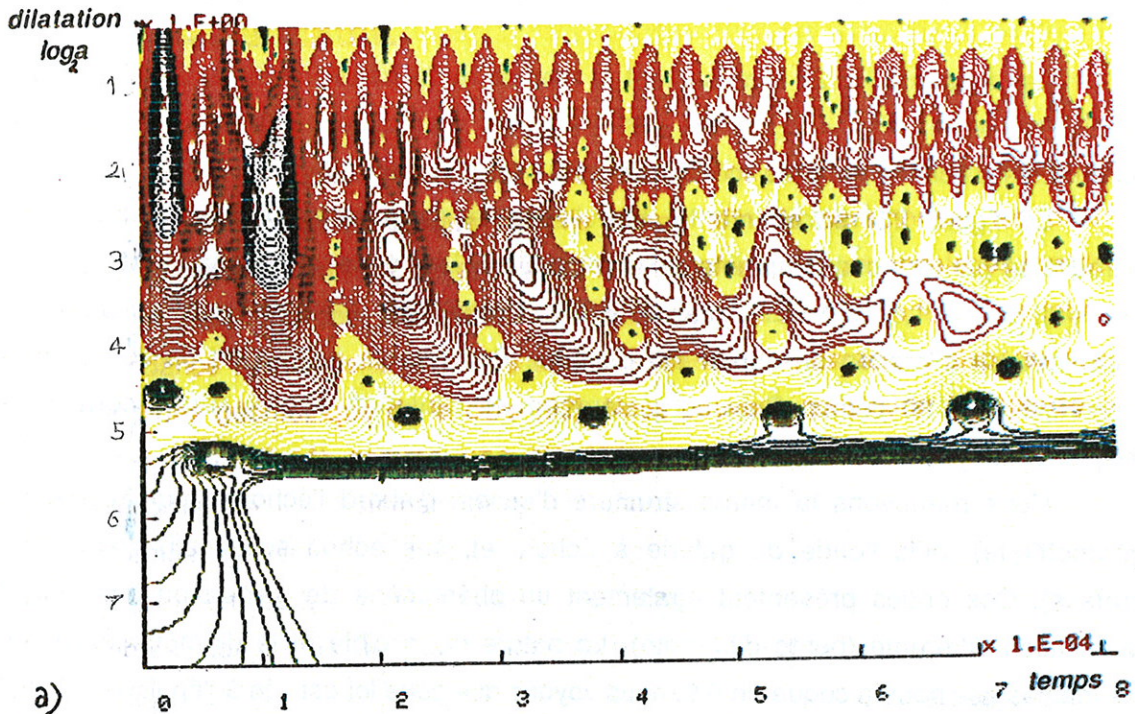
Dans la recherche de la caractérisation de cibles soumises à un signal impulsionnel se pose également le problème d'extraction des fréquences propres associées aux modes propres du corps. Une fréquence propre étant un son pur, cela se traduit dans le plan temps-échelle par un comportement équivalent à la transformée en ondelettes d'un signal monochromatique (Cf. III.6.2).

A titre indicatif, sur une réponse basse fréquence simulée d'une coque sphérique creuse de fortal, nous avons appliqué une transformation en ondelettes. Le rapport des rayons de cette sphère (rayon intérieur/rayon extérieur) est de 0,9.

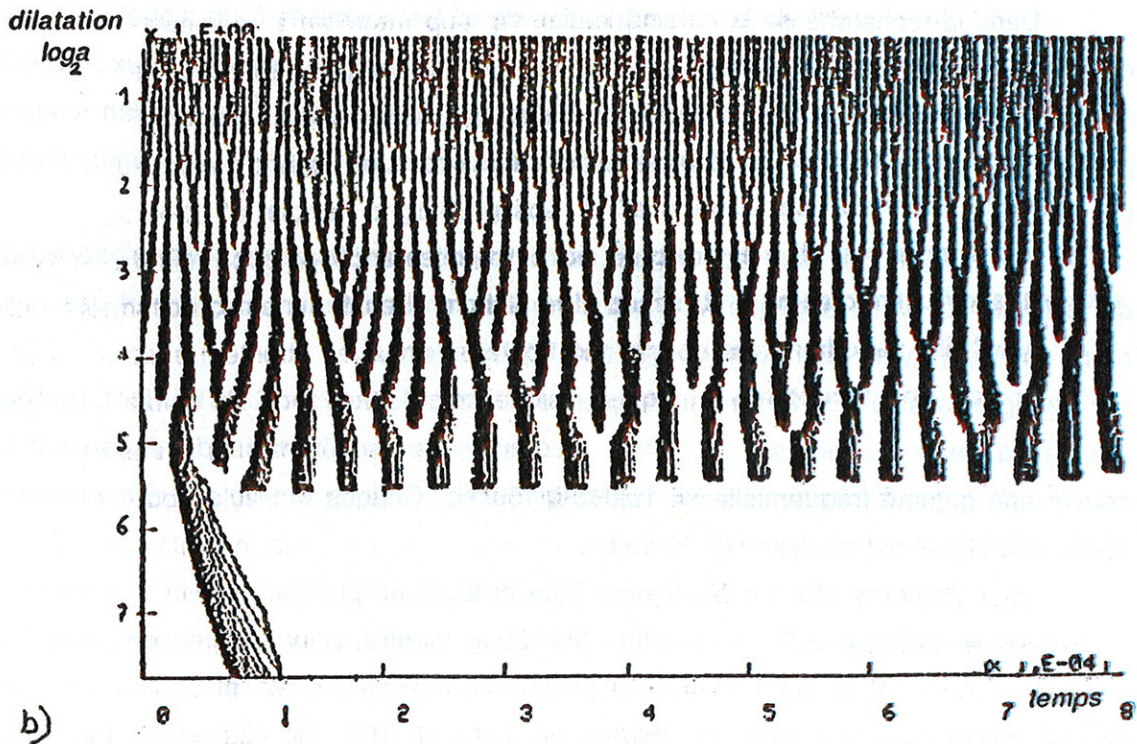
Le signal simulé (Fig 29) a une fréquence d'échantillonnage de  $6,3 \cdot 10^5$  Hz. L'analyse a été effectuée à partir du temps  $3,24 \cdot 10^{-3}$ s. Le paramètre de dilatation de départ est 0,36 et couvre une gamme fréquentielle de 10kHz à 150kHz. Chaque octave est décomposée en 20 voies et le signal est analysé sur 90 voies.

Nous pouvons voir sur les figures 29.a et 29.b, un phénomène de résonnance autour du paramètre d'échelle 5,5. Le module (fig. 29.a) montre, pour ce même facteur d'échelle, une valeur constante du paramètre de dilatation. Le module est maximum pour cette valeur et décroît rapidement de part et d'autre de celle-ci. (Cf. III. fig. 4.b). La figure 29.b représentant la phase de la transformée en ondelettes, montre que pour ce paramètre, les lignes de phase oscillent régulièrement, conformément à l'analyse d'une fonction sinusoïdale (Cf. III. fig. 4.a). D'autre part nous retrouvons une même structure d'échos correspondant pour le premier à l'écho spéculaire ou contribution géométrique, et pour les suivants aux contributions de surface. Ces contributions sont ici, l'onde de galerie à échos et ses échos successifs. Elles présentent également un phénomène de dispersion.





a)



b)

Fig. 29.a: Module de la transformée en ondelettes du signal diffusé par une coque de fortal de 0,9. (simulation). La fréquence d'échantillonnage est de  $1,8 \cdot 10^{-6}$  Hz. Analyse sur 90 voies, dont 20 par octave. Le paramètre de dilatation de départ est de 0,36. Les lignes de niveaux sont représentées avec une dynamique de 40dB.

Fig. 29.b: Phase de la transformée en ondelettes du signal rétrodiffusé par une coque de fortal de 0,9. (simulation).

## VI- 5. Conclusion.

Nous avons traité des fichiers aussi bien simulés qu'expérimentaux (sphère de fortal immergée dans une cuve acoustique remplie d'eau) afin de caractériser les différentes contributions ou ondes de surface. En appliquant une transformation en ondelettes aux données expérimentales, nous pouvons déterminer l'arrivée successive de ces ondes et de leur échos, et leur dépendance fréquentielle [91]. Ces ondes présentent un caractère dispersif liées à la nature et la forme géométrique de la cible [92]. Nous pouvons considérer la réponse de ces cibles (signal rétrodiffusé) comme une signature acoustique, par rapport à l'ondelette analysante choisie. L'étude systématique de ces ondes et de leurs caractéristiques, à l'aide de cette transformée, devient prometteuse. Il est à remarquer que l'analyse par ondelettes de corps en mouvement ne se trouve pas perturbée, car la transformée est invariante pour les deux variables conjointes temps (translation) et fréquence (multiplication par une exponentielle).

Cette étude est avant tout préliminaire et les résultats que nous présentons sont encore qualitatifs. Néanmoins ils montrent que grâce aux propriétés de linéarité et d'isométrie de la transformée et celles de progressivité et régularité de l'ondelette analysante, nous pouvons extraire des informations concernant les différents types d'ondes, leur temps d'arrivée et la vitesse des paquets d'ondes. Nous pouvons étudier séparément chaque écho et reconstruire à partir de ceux-ci le signal originel grâce à l'existence de formules inverses de la transformée. Enfin, nous pouvons estimer les lois de dispersion de la vitesse et ce, grâce à la double information contenue dans le module et la phase de la transformée. Nous pouvons dire de plus que cette méthode est sans "artéfact" par rapport aux méthodes bilinéaires, et que la bonne localisation de l'ondelette dans le plan temps-échelle fournit une bonne résolution, aussi bien dans le plan fréquentiel que temporel.

Une étude plus poussée et une comparaison avec la méthode pseudo-Wigner-Ville-lissée doivent être entreprises, étant entendu que les deux méthodes sont intrinsèquement différentes, du fait de la linéarité de la transformée en ondelettes et de la bilinéarité de la distribution de Wigner-Ville.

C'est donc le carré du module de la transformée en ondelettes qui sera le plus directement comparable à une distribution de Wigner-Ville.

## **VII - CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.**

## Conclusion générale et perspectives

L'ensemble des travaux effectués se répartit sur deux thèmes principaux, à savoir:

- Etude de la transmission acoustique en régime harmonique à travers le dioptré plan air-eau.

- Etude de la propagation en milieu inhomogène et régime transitoire à l'aide de la transformée en ondelettes à travers une interface fluide/fluide: problème direct et approche d'un problème inverse.

Nous proposons également une approche de l'analyse temps-échelle d'ondes d'interface dans un problème de sonar actif (rétrodiffrusion par des coques sphériques élastiques en régime impulsionnel: interface fluide/solide).

### *1) Transmission acoustique en régime harmonique à travers le dioptré plan air-eau*

Nous nous sommes intéressés au champ réfracté total en un point quelconque d'observation dans l'eau, la source ponctuelle se trouvant dans l'air. Chacun des milieux est supposé homogène et isotrope.

L'étude de la réfraction acoustique montre que le champ total provient de la superposition de différents types d'ondes. Les principales contributions sont: l'onde géométrique ou réfractée directe, l'onde latérale intervenant pour des incidences supérieures à celles de l'angle critique, l'onde diffusée par la surface du dioptré, et celle ayant subi des réflexions multiples (fond, surface). Ces contributions diffèrent en fonction de la complexité de l'interface envisagée, des caractéristiques de la source et des coordonnées du point d'observation. Sous l'hypothèse d'une mer calme et de grande profondeur, nous avons négligé les deux dernières contributions.

L'étude de la propagation acoustique à partir de l'équation de Helmholtz (sous hypothèse haute fréquence) nous a permis de montrer l'existence d'ondes inhomogènes pour des angles d'incidence supérieurs à l'angle critique. Ces ondes ont une amplitude variable, en décroissance exponentielle, fonction de la fréquence et de la profondeur. Elles ne correspondent pas à une absorption du milieu, car il y a conservation de l'énergie au passage du dioptré avec un nombre d'onde réel. Ces ondes pénètrent d'autant mieux le milieu que la fréquence du signal émis est basse. En un point quelconque du champ réfracté, il y a interférences entre les deux contributions (géométrique et latérale). Ces phénomènes ont été simulés numériquement et décrits par le tracé de courbes d'isoatténuation du champ acoustique réfracté total. Une expérimentation en cuve a montré la bonne concordance des résultats théoriques et expérimentaux.

*2) Etude de la propagation en milieu inhomogène et régime transitoire à l'aide de la transformée en ondelettes: problème direct et approche d'un problème inverse.*

*2.a) Problème direct*

Les méthodes classiques, bien qu'adaptées au cas de sources monochromatiques, ne permettent pas une description d'un phénomène transitoire. En effet, les ondes parcourant des trajets différents arrivent à des temps différents et de plus subissent des atténuations fonctions de la fréquence. Une analyse de type temps-fréquence a donc été nécessaire. Une méthode temps-échelle compatible avec des variations temporelles et fréquentielles rapides a été retenue: la transformée en ondelettes.

En utilisant, d'une part les propriétés de l'ondelette analysante, d'autre part celles de la transformée (linéarité et isométrie), il a été possible d'étudier de façon sélective et avec la précision souhaitée, les différentes contributions du champ acoustique. On peut aborder le problème de deux façons:

- soit par décomposition du signal source en contributions élémentaires d'ondelettes (nous pourrions voir ainsi quels sont les coefficients d'ondelettes qui fournissent les modes géométrique, latéral ou évanescent)
- soit par décomposition du signal reçu à l'hydrophone.

Nous avons choisi la deuxième approche en vue d'une expérimentation.

Nous n'avons pas utilisé ici de développement asymptotique (approximation haute fréquence) pour l'évaluation du champ, mais effectué un calcul exact. L'expression de la transformée en ondelettes du propagateur étant plus régulière que le propagateur lui même, ceci nous a permis d'évaluer numériquement, celui-ci, de façon plus stable.

Les résultats numériques obtenus ont permis de mettre en évidence à certaines échelles, des phénomènes transitoires très brefs et d'engager une discussion nouvelle de ce type de problème. Une expérimentation en cuve acoustique combinée à une analyse temps-échelle a confirmé ces observations.

*2.b) Problème inverse.*

Par analogie avec les formules d'inversion de la transformée en ondelettes, nous avons pu construire une formule de reconstruction de la dépendance temporelle du signal source. Pour une distance radiale fixe sur l'interface (distance prise par rapport à la verticale issue de la source), il est possible de reconstruire à partir de mesures le long d'une même verticale dans l'eau, une fonction temporelle associée à la source. On montre que cette fonction est en fait donnée par la somme du signal originel et de sa réplique décalée dans le temps (écho), écho que nous avons analysé dans le cas du problème direct. Les temps de



retard correspondent à deux trajets bien distincts de l'onde dans l'air. Le premier est celui du trajet d'une onde arrivant sous incidence critique selon le principe de Fermat, le second correspond au trajet direct de l'onde à incidence sur-critique. Cette reconstruction n'est valable que sous des hypothèses de hautes fréquences de la source, et à grande distance radiale par rapport aux fréquences émises et à la hauteur de la source. Par analogie aux formules d'inversion existantes de la transformée, la profondeur joue le rôle de paramètre de dilatation et la pression transmise, celui de coefficient d'ondelettes.

*2.c) Analyse temps-échelle de la diffusion acoustique par des coques sphériques élastiques en régime impulsionnel.*

Un corps immergé dans un milieu environnant fluide et se trouvant soumis à une source acoustique impulsionnelle, renvoie un écho à travers ce milieu. Cette réponse, appelée "signature acoustique" dépend à la fois de la forme de l'objet et de sa nature. Le problème que l'on se pose est alors: peut-on à partir de l'étude de réponses de cibles, caractériser ces dernières? L'analyse de signaux diffusés par des cibles de formes géométriques simples a déjà été entreprise par des méthodes de type temps-fréquence (Gabor, Wigner-Ville). A partir de critères physiques d'analyse que l'on se fixe, se pose le choix de méthodes adaptées au problème. Nous avons appliqué à des données expérimentales (sphère creuse de fortal immergée dans l'eau) une transformée en ondelettes. Les résultats obtenus sont encore préliminaires et semi-quantitatifs. Néanmoins, certaines caractéristiques physiques telles que les types d'ondes, la vitesse de groupe ainsi que la loi de dispersion peuvent être estimées. Une technique quantitative d'extraction de lois de modulation basée sur l'utilisation de l'approximation phase stationnaire a été proposée.

### Perspectives

Le prolongement naturel des travaux entrepris dans le cadre de la propagation d'ondes consiste à généraliser le problème au cas de la propagation d'ondes harmoniques et transitoires à travers des interfaces agitées aléatoirement constituant un milieu stratifié.

*\* Propagation d'ondes dans des milieux stratifiés: problème direct et inverse.*

On pourrait étendre les travaux effectués dans le cadre d'un dioptré séparant deux milieux homogènes, au cas de milieux fluides présentant des profils de célérité et de densité dépendant de la profondeur. Il s'agirait dans un premier temps d'étudier l'effet des variations de la célérité sur les différents types d'ondes intervenant dans la propagation. La résolution de l'équation de propagation à travers un milieu stratifié peut être intimement

reliée à une analyse spectrale d'un opérateur aux dérivées partielles. Ce formalisme, largement utilisé en mécanique quantique et appliqué à des problèmes d'acoustique par C.H. Wilcox, a l'avantage d'introduire naturellement les variations des caractéristiques physiques du milieu. Le problème peut ainsi se réduire à la recherche des valeurs propres de l'opérateur et donner lieu à des simulations numériques simplifiées.

La description précise du champ acoustique résultant devrait alors permettre de généraliser la formule de reconstruction du signal source, obtenue dans le cas de milieux homogènes. On espère ainsi pouvoir définir une antenne spécifique ainsi que les traitements appropriés au problème et réaliser l'expérience correspondante.

*\* Propagation acoustique à travers une interface agitée aléatoirement séparant deux milieux homogènes: problème direct et inverse.*

Dans le but d'associer un modèle mathématique de l'interface air-eau à une réalité physique et une réalisation expérimentale plus générale, le cas d'une interface agitée ("houleuse") devient un prolongement naturel des études effectuées. Ainsi serait il possible:

- dans un premier temps, en se restreignant au cas d'une source ponctuelle monochromatique, d'étudier pas à pas les phénomènes de diffusion engendrés par l'interface en mouvement.

- dans un second temps, de généraliser les résultats précédemment obtenus au cas d'une source transitoire. La caractérisation du champ acoustique total transmis permettrait alors d'aborder le problème de reconstruction de la dépendance temporelle et de la géométrie de la source.

On pourrait enfin tenter de combiner ces deux modèles (strates et mouvement aléatoire) afin d'intégrer dans un même formalisme le cas de la propagation acoustique de signaux transitoires à travers une interface agitée aléatoirement séparant deux milieux inhomogènes.

D'une façon générale, les problèmes de propagation en régime transitoire devraient tirer un bénéfice significatif de l'utilisation de la transformée en ondelettes.



**ANNEXE 1 :**

**ORGANIGRAMME DU PROGRAMME "ONDEL".**

## Annexe 1 . Partie 2

Organigramme du programme de transformée réalisé. Extrait de la note technique-L.M.A:  
Documentation du logiciel de décomposition de signaux en ondelettes [62]

### 1-Description du logiciel.

#### 1.1-Caractéristiques générales.

- Le programme effectue la transformée en ondelettes d'un signal arbitraire réel ou entier stocké sur un fichier dont la longueur de l'enregistrement est paramétrée.
- La transformée est calculée pour 512 points du signal et stockée dans un fichier sous forme matricielle de N voies par 512 points ( $N \leq 512$ ).
- Nous avons en sortie de la transformée deux cartes correspondant à l'analyse du signal donnant la répartition énergétique (module) et la phase instantanée (phase).
- Toutes les dimensions sont paramétrées de façon à ce que l'on puisse augmenter la taille des tableaux (signal, ondelette, transformée).

#### 1.2-Organigramme.

##### 1.2.1 Présentation générale.

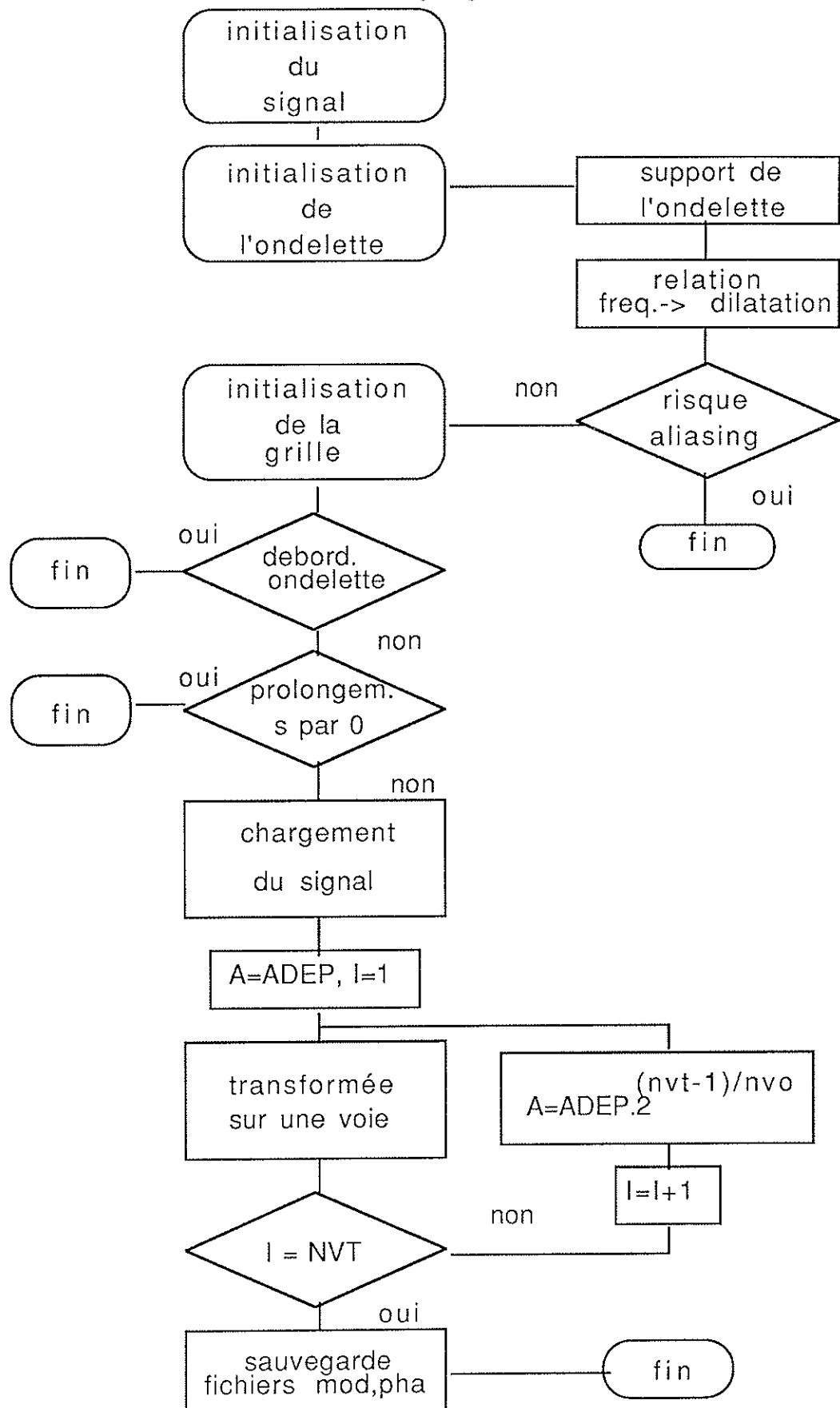
La procédure est initialisée à partir de la donnée de paramètres définissant la grille et l'ondelette. Nous avons ainsi une grande liberté dans le choix des caractéristiques de l'ondelette, du nombre de voies et de leur répartition. Ceci nous permet d'analyser le signal à la précision que l'on souhaite, dans les limites du principe d'incertitude d'Heisenberg.

Des messages (test d'erreurs) peuvent intervenir, à savoir :

- Risque d'aliasing (nombre de points de l'ondelette insuffisant pour le nombre de cycle de celle-ci, voir en annexe );
- Ondelette trop grande pour le paramètre de dilatation maximum demandé;
- Temps de départ de l'analyse trop petit. Dans ce cas nous avons la possibilité de continuer l'analyse en prolongeant le signal par des zéros. L'erreur en aval du signal se traduit par la présence d'une discontinuité localisée au début du fichier (voir §III.4).

Cette présentation étant faite, nous allons décrire l'organigramme du programme.

## 1.2.2. Organigramme.



### 1.3. Présentation des différents modules.

#### a. INITIALISATION.

##### i) Signal.

Le programme demande le nom du fichier où se trouve enregistré le signal ainsi que les caractéristiques de celui-ci. C'est à dire est-il composé de valeurs réelles ou entières ( par exemple signal échantillonné en sortie d'un convertisseur)? fréquence d'échantillonnage?

Les données indépendamment du nombre de bits du convertisseur (exemple pour un 12 bits ie: 11 bits + signe) seront converties en "réel" pour effectuer la transformée. Il est inutile de recadrer le signal car la transformée en ondelette n'analyse pas la fréquence 0 (ie: ajouter dans ce cas 2048 aux données numériques).

##### ii) Ondelette.

##### \* module :SUPOND

En fonction des valeurs de l'écart type  $\sigma$ , du cut-off de l'enveloppe  $\varepsilon$ , du nombre de points NP(a=1) de l'ondelette et de la valeur de la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  du signal, on détermine par la subroutine SUPOND, la valeur du support temporel sur lequel existe l'ondelette. L'ondelette est échantillonnée à la même fréquence que le signal.

En sortie du sous-programme nous restituons par le common /support/ les valeurs extrêmes du support de l'ondelette (tmin,tmax).

##### \*module : FREQ.

En fonction des caractéristiques de l'ondelette ( NP pour a=1,  $\omega_0$ ), de son support (tmin,tmax) et de la fréquence d'échantillonnage du signal transmise par le common /var/, le sous-programme FREQ calcule le nombre de cycles ANC contenu dans l'ondelette a=1 et la fréquence moyenne FREAN analysée par celle-ci.

$$FREAN = ANC.FE/[(NP.a)-1]$$

##### iii) Grille.

La transformée en ondelettes est calculée sur une grille fine. Connaissant les paramètres de dilatation de départ (dilatation la plus petite), le nombre de voies par octave ainsi que le nombre

total de voies, nous pouvons engendrer une grille dans le plan (b,a) telle que a varie sur [adep,amax], avec :

$$amax = adep.2(NVT-1)/NVO$$

## b. CHARGEMENT DU SIGNAL

Après lecture du fichier signal, la partie nécessaire aux calculs est stockée dans le tableau SI.

Le point milieu de l'ondelette pour  $b=0$  étant calé sur le premier échantillon du signal, nous devons réserver la longueur d'une demi ondelette associée à la valeur maximum que peut prendre le paramètre a, de part et d'autre de la zone à analyser.

$$\text{d'où } DIM(SI) = 512 + DIM(OND)$$

## c. TEST D'ERREURS

### i) Aliasing

Le premier test se rapporte au problème d'aliasing. Ceci intervient lorsque le nombre de points NC par cycle de l'ondelette la moins dilatée ne vérifie pas les conditions de Shannon ( $ANC \leq 2$ ).

Ce test est effectuée lors de l'initialisation de l'ondelette. Un message est imprimé lorsque ANC atteint la valeur 3. Il est néanmoins laissé à l'utilisateur la possibilité de continuer la procédure.

### ii) Ondelette trop grande

Après initialisation de la grille, on vérifie la compatibilité de la zone mémoire réservée à l'ondelette avec la taille de l'ondelette la plus dilatée.

Si le test est positif, il y a alors arrêt automatique du programme.

Trois choix sont possibles pour effectuer l'analyse:

- soit réduire le nombre de points de l'ondelette pour  $a=1$ ,
- soit réduire le nombre de voies total,
- soit redimensionner les tableaux, en agissant sur le parametre KOND.

### iii) Temps de départ d'analyse trop court

Lorsque le temps de départ de l'analyse est trop petit (dû à ii), un message s'affiche à l'écran. L'utilisateur a alors la possibilité de prolonger le signal par des zéros.

L'analyse mettra en évidence une discontinuité (convergence des lignes de phase constante, forme caractéristique de la répartition énergétique) en début de fichier.



## d. TRANSFORMEE

\* module : GENOND

Il permet d'engendrer l'ondelette pour un paramètre de dilatation donné.

De façon à pouvoir se caler sur les différentes voies, l'échantillonnage de l'ondelette est toujours réalisé à partir du point  $t=0$  (de part et d'autre).

Il peut être intéressant dans certains cas de normaliser l'ondelette par sa norme L2, limitant ainsi la dynamique des ondelettes. Il suffit pour cela d'activer la séquence prévu à cet effet dans le module. La transformée devra dans ce cas être non plus normalisée par  $a^{-1/2}$  (COEFF) mais par  $a^{+1/2}$  (dans le module TRANSFON).

Les parties réelle et imaginaire de l'ondelette sont restituées par les COMMON /TABR/ et /TABI/.

\* module : TRANSFOND

Ce module réalise le produit de convolution entre le signal et l'ondelette pour une dilatation fixée (une voie). La normalisation des voies est effectuée dans ce module (cf remarque sur COEFF ci dessus).

Les parties réelle et imaginaire de la transformée correspondant au paramètre de dilatation courant, sont restituées par les COMMON /FONCTR/ et /FONCTI/ sur 512 points.

\* module : MODPHAS

Il permet de convertir les parties réelle et imaginaire de la transformée en module et phase. Il est préférable d'introduire un cut-off sur le module pour la phase. En effet, celle ci n'est pas définie pour des valeurs du module trop petites.

Les modules et phases sont restitués par les COMMON /FONCTR/ et /FONCTI/.

## e. STOCKAGE DES RESULTATS DE L'ANALYSE

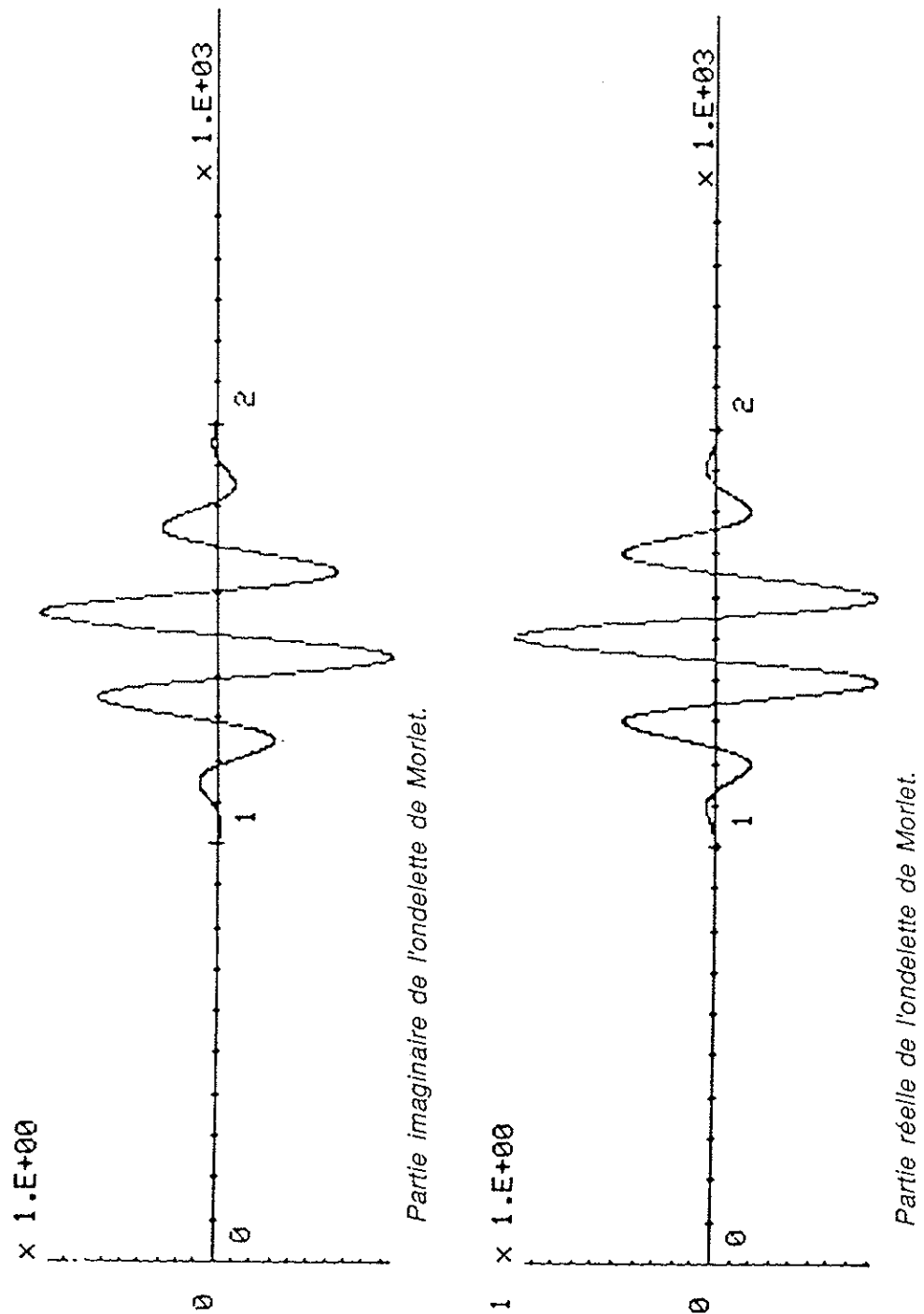
Le choix est donné à l'utilisateur de stocker le module, la phase ou les deux.

La longueur de l'enregistrement est de 512. Le remplissage s'effectue par colonnes. Le premier enregistrement contient les données de l'analyse qui pourront être nécessaire à la représentation graphique: période d'échantillonnage, nombre de points par voie, temps de départ de l'analyse, nombre total de voies, paramètre de dilatation de départ, nombre de voies par octave, fréquence équivalente à  $a=1$ .

Les paramètres de l'analyse, ainsi que les correspondances entre voies et fréquence moyenne en Hz, sont stockés dans le fichier PARAM.DAT.

## **ANNEXE 2 :**

**ONDELETTE & TRANSFORMATION EN ONDELETTES DE SIGNAUX  
TESTS.**

ANNEXE 2

Parties réelle et imaginaire de l'ondelette Morlet pour  $NP=101$ ,  $\epsilon=10^{-2}$ ,  $a=10$ ,  $\omega_0=5$

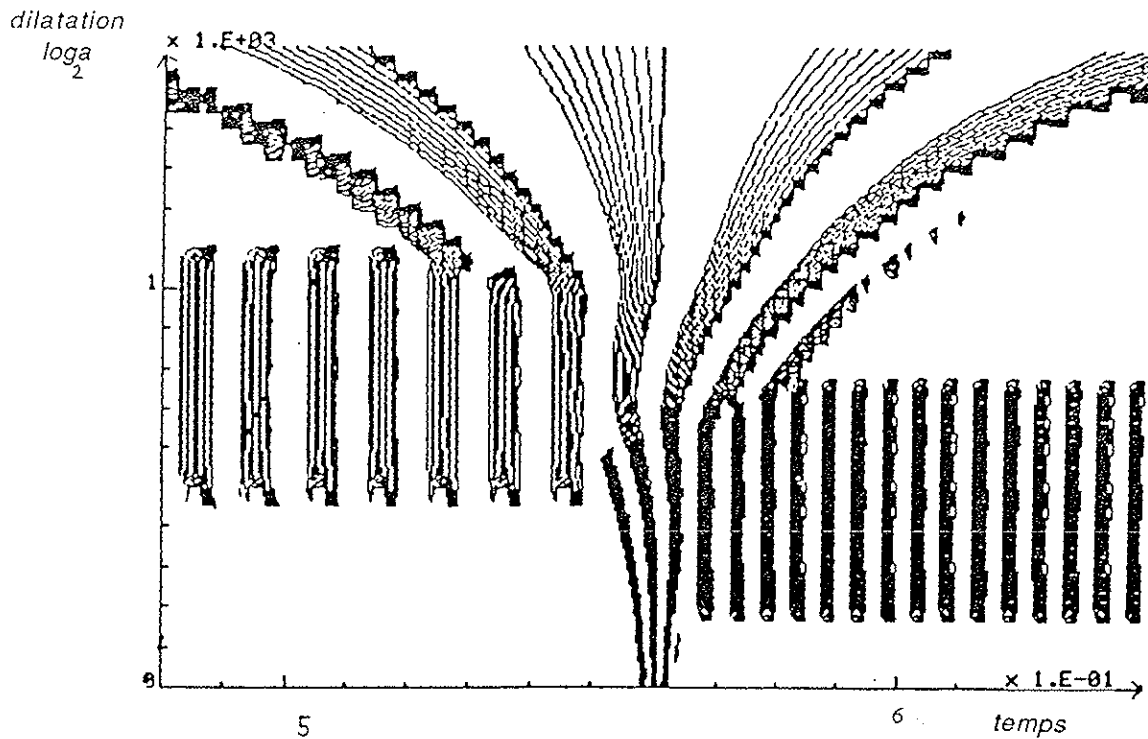


Figure 1.m: Module de la transformée en ondelettes de la transition entre 2 sinusoides de fréquence 100Hz et 200Hz. Image codée sous forme de lignes de niveaux dans une échelle logarithmique en dB. (dynamique 32dB). Fréquence d'échantillonnage du signal 3.2kHz. Analyse sur 5 octaves de 8 voies, à partir du paramètre d'échelle 0.25. Dédut d'analyse au temps 0.48s. Fréquence moyenne de 155.87Hz pour  $a=1$ , (120 points,  $\sigma=1$ ,  $\omega_0=6$ ,  $\varepsilon=10^{-3}$ )

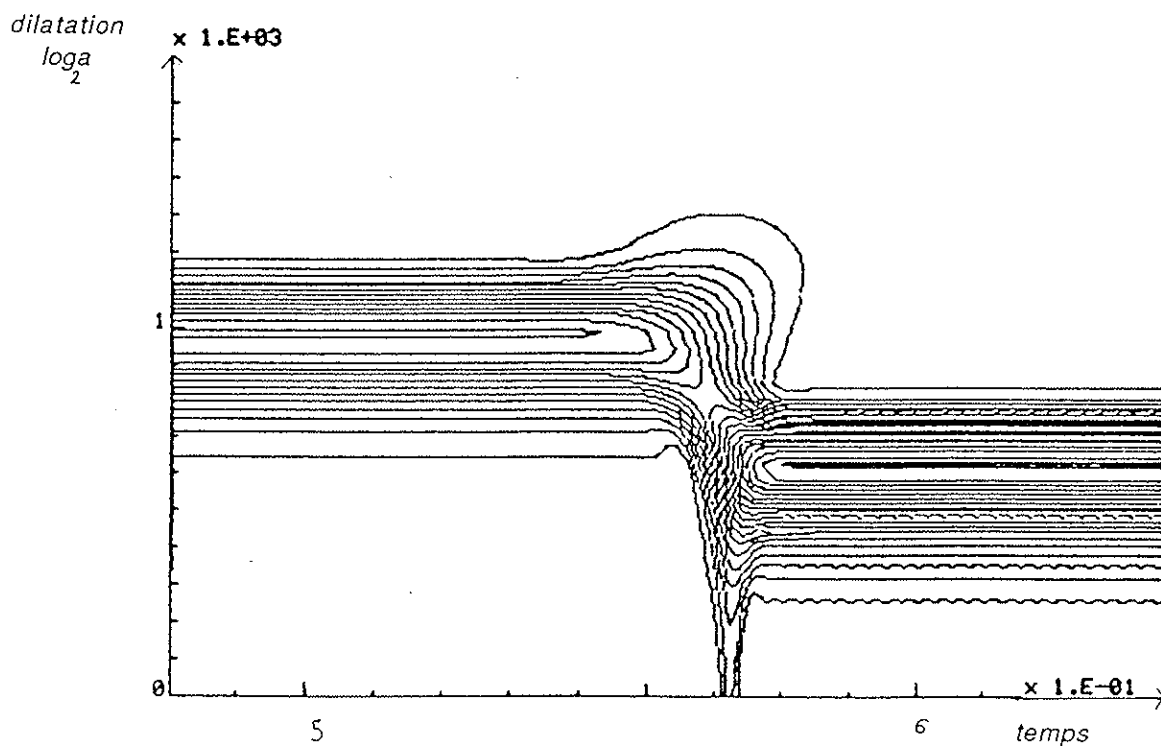


Figure 1.p: Phase de la transformée en ondelettes d'une transition entre 2 sinusoides (100Hz et 200Hz). Mêmes paramètres que la figure 1.m

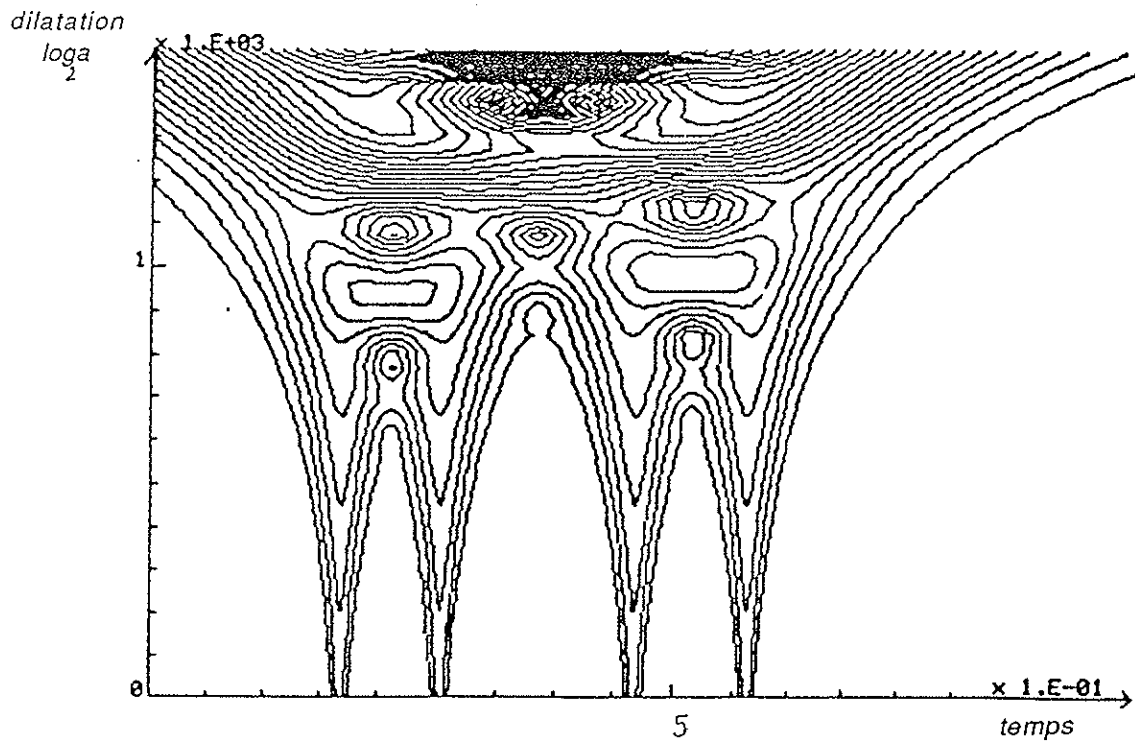


Figure 2.m: Module de la transformée en ondelettes de 2 signaux carrés espacés de  $3.3 \cdot 10^{-2}$ s. Image codée en lignes de niveaux dans une échelle logarithmique en dB. (dynamique 32dB). Fréquence d'échantillonnage du signal 3kHz. Analyse sur 5 octaves de 8 voies, à partir du paramètre d'échelle 0.2. Dédut d'analyse au temps 0.41s. Fréquence moyenne de 143.48Hz pour  $a=1$ , (102 points,  $\sigma = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ).

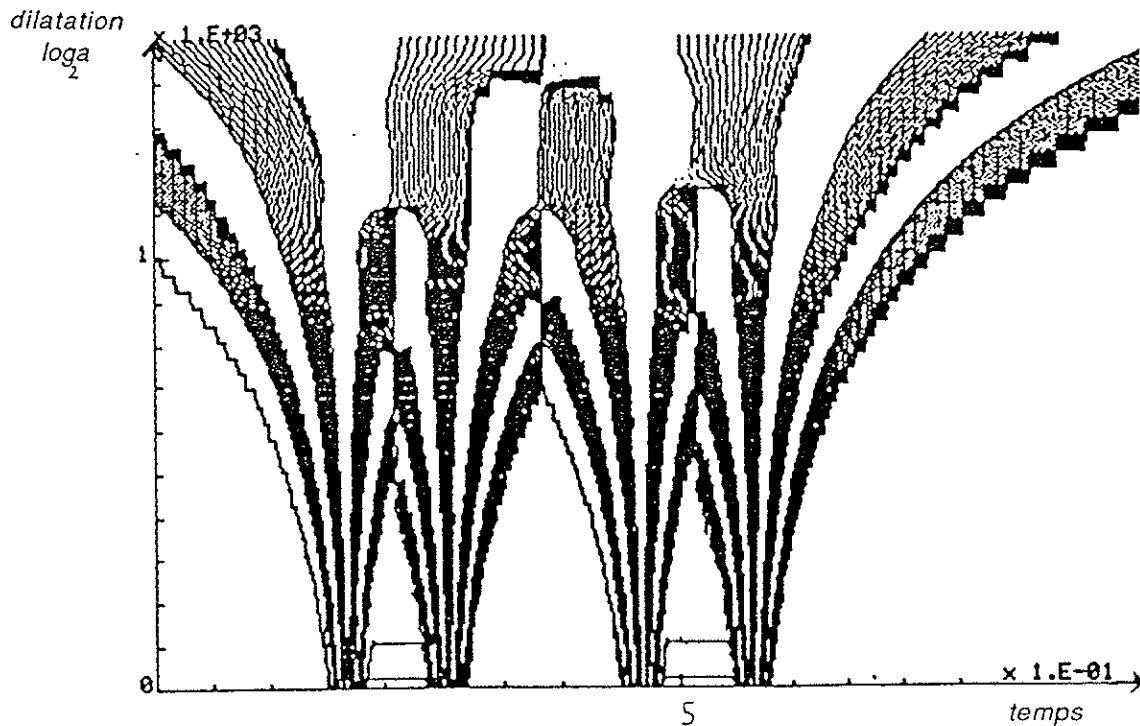


Figure 2.p: Phase de la transformée en ondelettes de 2 signaux carrés espacés de  $3.3 \cdot 10^{-2}$ s. Mêmes paramètres que la figure 2.m.

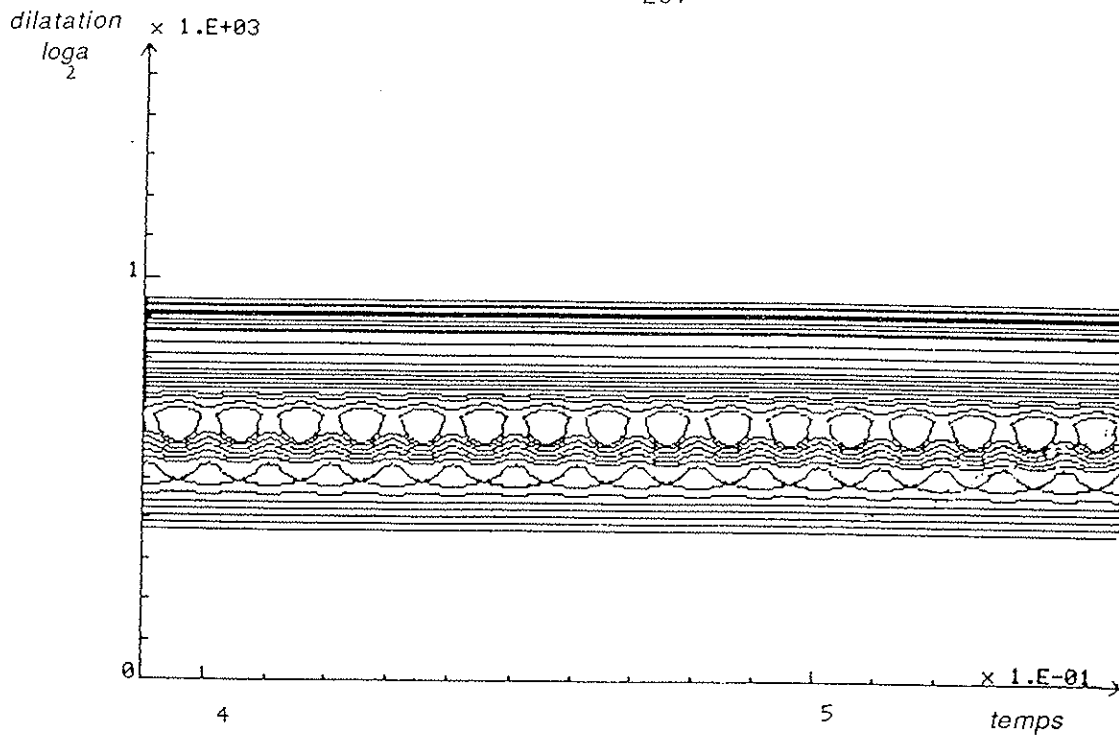


Figure 3.m: Module de la transformée en ondelettes de la somme de deux sinusoides (100Hz et 200Hz). Image codée en lignes de niveaux dans une échelle logarithmique en dB. (dynamique 32dB). Fréquence d'échantillonnage du signal 3.2kHz. Analyse sur 5 octaves de 8 voies, à partir du paramètre d'échelle 0.25. Début d'analyse au temps 0.39s. Fréquence moyenne de 141.69Hz pour  $a=1$ , (121 points,  $\sigma = 1$ ,  $\omega_0 = 5.5$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ )

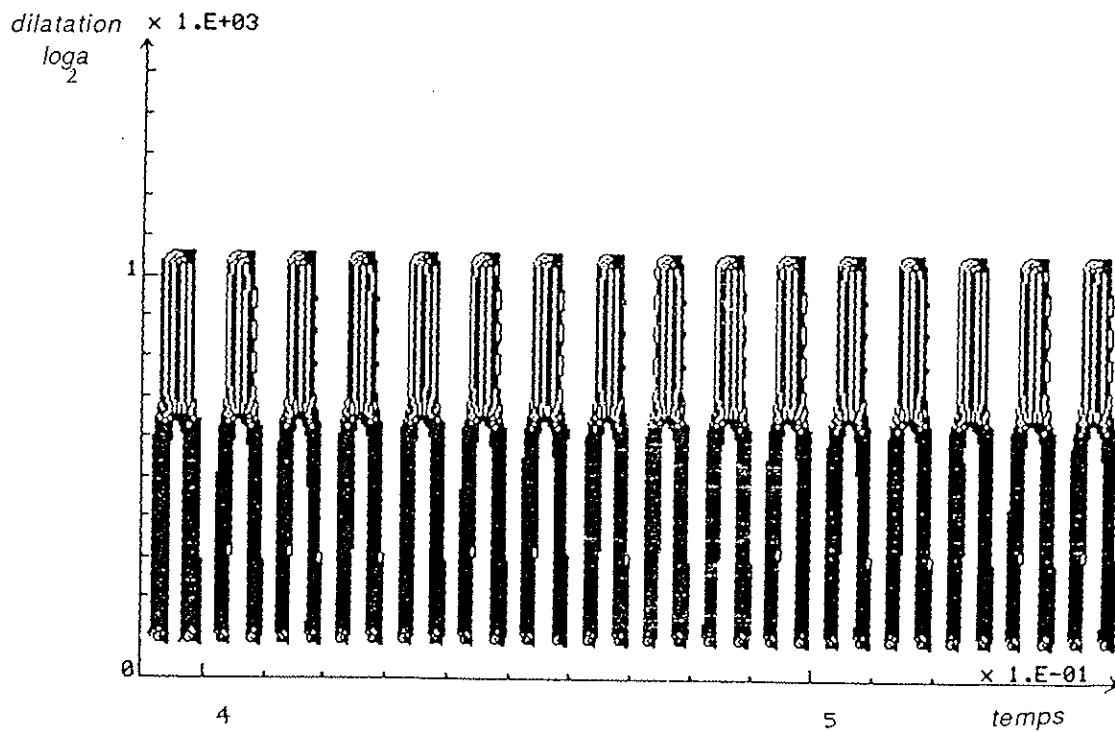


Figure 3.p: Phase de la transformée en ondelettes de la somme de 2 sinusoides de 100Hz et 200Hz. Mêmes paramètres que la figure 3.m.

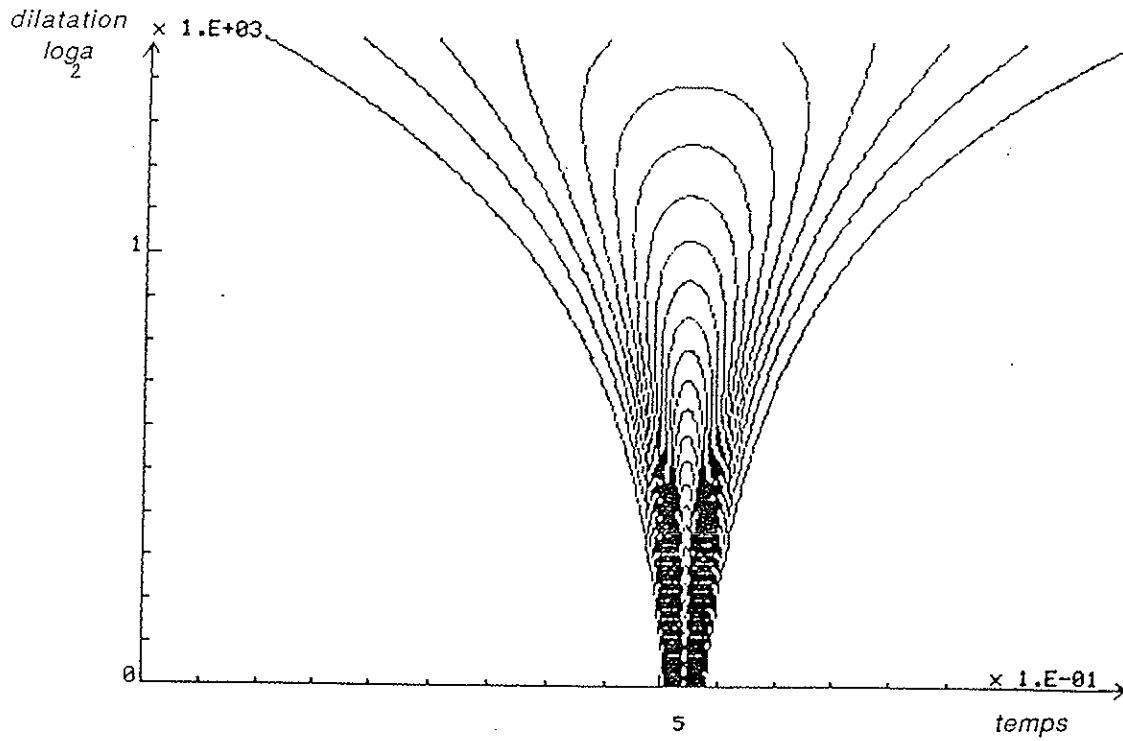


Figure 4.m: Module de la transformée en ondelettes de la distribution de Dirac, sous forme de lignes de niveaux dans une échelle logarithmique en dB. (dynamique 32dB). Fréquence d'échantillonnage du signal 3kHz. Analyse sur 5 octaves de 8 voies, à partir du paramètre d'échelle 0.25. Début d'analyse au temps 0.41s. Fréquence moyenne de 144.92Hz pour  $a=1$ , (101 points,  $\sigma = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ )

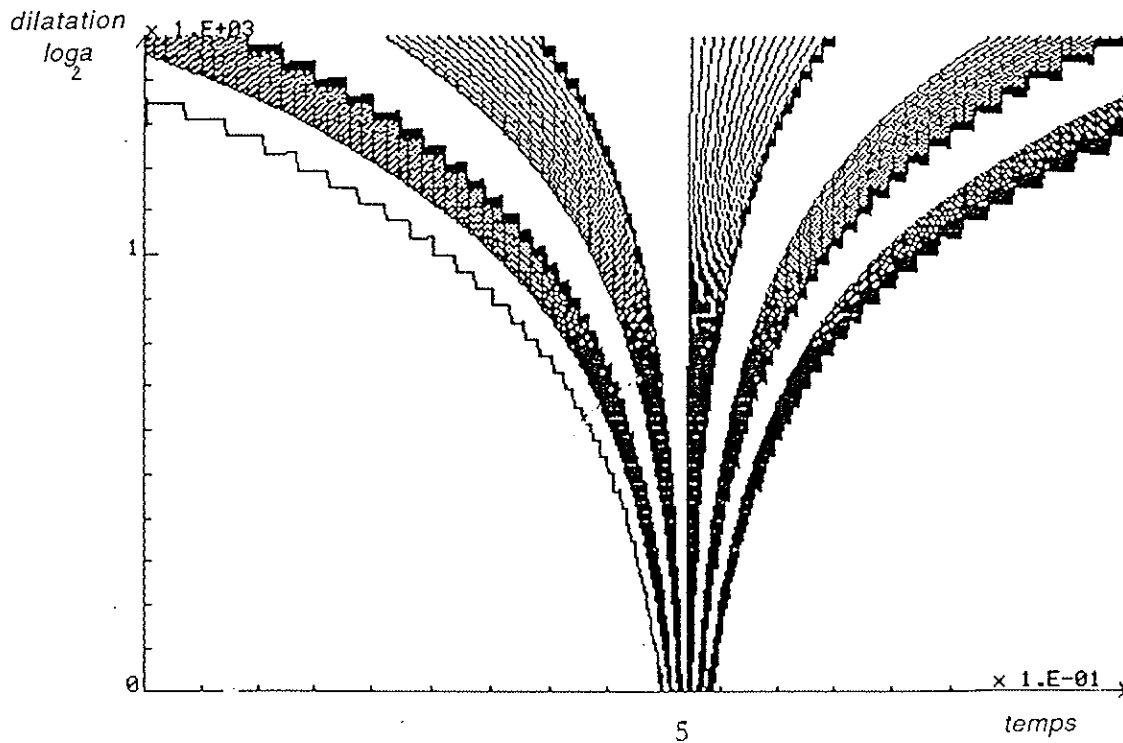


Figure 4.p: Phase de la transformée en ondelettes de la distribution de Dirac. Mêmes paramètres que la figure 4.m

## BIBLIOGRAPHIE

### PARTIE 2



# BIBLIOGRAPHIE.

- [30]: L. Cagniard, 1939, "Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives, Gauthier-Villars, Paris.
- [31]: M. Ewing, 1957, "Elastic waves in layered media, McGraw-Hill Book Company Inc. Ney-York, pp. 74-121.
- [32]: A. D. Pierce, 1967, "Relation of exact transient solution for a line source near an interface between two fluids to geometrical acoustics", J. Acoust. Soc. Am. , vol. 44, n°1, pp. 33-37.
- [33]: A. T. De Hoop, 1960, "A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems", Appl. Sci. Res. Sec. vol n° B 8, pp. 349-356.
- [34]: R. J. Donato, 1976, "Spherical-wave reflection from a boundary of reactive impedance using a modification of Cagniard's method", J. Acoust. Soc. Am. , vol. 60, n°5, pp. 999-1002.
- [35]: A. T. De Hoop, 1979, "Pulse electromagnetic radiation from a line source in a two-media configuration", Radio Sci. , vol. 14, n°2, pp. 253-268.
- [36]: A. T. De Hoop and J. Van Der Hijden, 1984, "Generation of acoustic waves by an impulse point source in a fluid/solid configuration with a plane boundary", J. Acoust. Soc. Am. , vol. 75, n°1, pp. 1709-1715.
- [37]: J. Van Der Hijden, 1987, "Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic medium", North-Holland ser. in Appl. Math. and Mech., Amsterdam, PP. 107-166.
- [38]: D. Casserau, 1988, "Nouvelles méthodes et applications de la propagation transitoire dans les milieux fluides et solides, Nouv. Thèse, U.E.R. Paris VII, Paris.
- [39]: G. Petiau, 1955 , "Théorie des fonctions de Bessel", C.N.R.S.,Paris
- [40]: I. M. Guelfand, G.E. Chilov, 1962, "Les distributions", Collect. Universt. de Math., Traduit par Rideau, Dunod, Paris.
- [41]: P. M. Dew and K. R. James, 1983, "Introduction to numerical computation in pascal", MacMillan, London.
- [42]: T. A.C.M. Claasen and Meckienbraüer W.F.G., 1980, "The Wigner distribution- A tool for time-frequency signal analysis", Philips J. Res., vol n°35, 3, pp. 217-250, 276-300.
- [43]:P. Flandrin, 1987, "Représentations temps-fréquences des signaux non stationnaires", Thèse d'état, I.N.P.G., Grenoble.
- [44]: D. Gabor, 1946, "Theory of communication", J. I.E.E., vol n°93, pp. 429-441.
- [45]: A. Grossmann, J. Morlet, 1984, "decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape", Soc. Int. Am. Math., Journ. of Math. Analys., vol n° 15, PP. 723-736.

- [46]: P. Goupillaud, A. Grossmann, J. Morlet, 1984, "Cycle-Octave and related transforms in seismic signal analysis", *Geoexploration*, vol. 23, Elsevier, pp. 85-102.
- [47]: Y. Meyer, 1987, "Wavelets viewed by a mathematician", (*Wavelet, Time-Frequency Methods and Phase Space*), Springer-Verlag, Berlin.
- [48]: I. Daubechies, 1987, "The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis", à paraître I.E.E.E., Informt. Theory.
- [49]: Proceed. "Wavelet, Time-Frequency Methods and Phase Space", 14-18 déc.87. C.I.R.M.-Luminy, (1989), Springer-Verlag, Berlin.
- [50]: S. G. Mallat, 1987, "Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", Technical report MS-CIS-87-22, University of Pennsylvania, Soumis à IEEE, Transactions on PAMI
- [51]: R. Murenzi, 1988, "Wavelet transforms associated to the N-dimensional Euclidean group with dilatations: signal in more than one dimension", à paraître
- [52]: A. Papoulis, 1962, "The Fourier integral and its applications", McGraw-Hill, New-York.
- [53]: R. Kronland-Martinet, 1988, "The use of the wavelet transform for the analysis, synthesis and processing of speech and music sounds", *Comp. Music Journ.*, MIT Press, Vol.n°12(4), pp. 11-20.
- [54]: A., Grossmann, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, 1987, "Reading and understanding continuous wavelet transforms", (*Wavelet, Time-Frequency Methods and Phase Space*), Springer-Verlag, Berlin.
- [55]: A., Grossmann, M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, 1987, "Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transforms", *Advances in Electr. and Electron Physics, Suppl. 19, Inv. Prob., Acad. Press*, pp. 289-306.
- [56]: A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, 1988, "Time-and-scale representations obtained through continuous wavelet transforms", *Sign. proces. IV: Theo. and applic.*, Elsevier Sci. Pub. B.V. (North Holland), EURASIP 88, pp.
- [57]: A. Grossmann, 1986, "Wavelet transforms and edge detection", (*Stochastic processes in physics and engineering*), Ph. Blanchard, L. Streit and M. Hazewinkel, Editors. Reidel Publishing Co.
- [58]: R. Kronland-Martinet, J. Morlet, A. Grossmann, 1987, "Analysis of sound patterns through wavelet transforms", *Int. J. pattern Recog. and Artif. Intellig.*, vol. n°1, 273-302.
- [59]: B. Escudié, A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, B. Torresani, 1989, "Analyse par ondelettes de signaux asymptotiques", *Emploi de la phase stationnaire*, 12ème Colloq. G.R.E.T.S.I. (Juan-les-pins)
- [60]: M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, P. Tchamitchian, 1988, "The 'algorithme à trous'", CPT-88/P.2115, soumis I.E.E.E.
- [61]: M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, P. Tchamitchian, "A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform"(*Wavelet, Time-Frequency Methods and Phase Space*), Springer-Verlag, Berlin.

- [62]: G. Saracco, 1987, "Documentation du Logiciel de décomposition de signaux en ondelettes", Note-technique L.M.A.-C.N.R.S. Marseille, n°5/87.
- [63]: H. Bateman, 1954, "Table of integral transforms", vol 2, form. (25), pp. 9, McGraw-Hill, New-York.
- [64]: M. Abramovitz, I.A. Stegun, 1965, "Handbook of Mathematical Functions, Dover, New-York.
- [65]: G. Saracco, A. Grossmann, P. Tchamitchian, 1989, "Use of wavelet transform in the study of propagation of transient acoustic signals across a plane interface between two homogeneous media", (Wavelet, Time-Frequency Methods and Phase Space: 14-18 Dec 1987), Springer-Verlag, Berlin, pp. 139-146.
- [66]: G. Saracco, P. Tchamitchian, 1989, "A study of acoustic transmission of transient signals in homogeneous medium with the help of wavelet transform. Application to an air-water interface", (Electromagnetic and Acoustic Scattering. Detection and Inverse Problems: Juin 1988), World Scientific, Singapore, pp. 222-241.
- [67]: M. T. Silva, 1982, "Some results on the three-dimensional geophysical inverse problem", I.F.A.C. Identif. and Syst. Paramt. Estim., Washington D. C., pp. 967-973.
- [68]: F. R. Dinapoli and R. L. Deavenport, 1980, "Theoretical and numerical Green's function field solution in a plane multilayered medium", J. Acoust. Soc. Am. , vol. 67, n°1, pp. 92-105.
- [69]: C. H. Wilcox, 1977, "Spectral and asymptotic analysis of acoustic wave propagation." (Boundary value problems for linear evolution partial differential equation). H. G. Garnir, Ed. Reidel, Boston, pp. 385-473.
- [70]: L. B. Felsen, N. Marcuvitz, 1973, "Radiation and scattering of waves", Ch.4: Asymptotic evaluation of integrals, Prentice-Hall, Inc Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 370-441.
- [71]: G. Saracco, A. Grossmann, P. Tchamitchian, "Propagation d'ondes transitoires", (Wavelets and Applications: may 29-June 2 1989), C.I.R.M. à paraître
- [72]: P. Flandrin, B. Escudié, 1985, "Principe et mise en oeuvre de l'analyse temps-fréquence par transformation de Wigner-Ville", Trait. de Sign. 2(2), pp. 143-151.
- [73]: N. C. Yen, 1987, "Time and frequency representation of acoustic signals by means of the Wigner-Ville distribution function: Implementation and interpretation", J. Acoust. Soc. Am. 81 (6), pp. 1841-1850.
- [74]: P. Flandrin, J. Sageloli, J.P. Sessarego, M. Zakharia, 1987, "Application de l'analyse temps-fréquence à la caractérisation de cibles", 11ème Coll. G.R.E.T.S.I., Nice, pp. 329-332.
- [75]: M. Zakharia, P. Flandrin, J. Sageloli, J.P. Sessarego, 1988, "Analyse temps-fréquence appliquée à la caractérisation acoustique de cibles", J. Acoust., 1, pp. 185-188.
- [76]: J.P. Sessarego, J. Sageloli, P. Flandrin, M. Zakharia, 1989, "Time-frequency analysis of signal related to scattering problems in acoustics. Part I: Wigner-Ville analysis of echoes scattered by a spherical shell", (Wavelet, Time-Frequency Methods and Phase Space: 14-18 Dec 1987), Springer-Verlag, Berlin, pp 147-153.

- [77]: L. Flax, L. R. Dragonette, H. Überall, 1978, "Theory of elastic resonance excitation by sound scattering", J. Acoust. Soc. Am., 63 (3), pp 723-731.
- [78]: A. Derem, 1980, "Diffusion acoustique par des corps cylindriques immergés: aspects généraux", Rev. Cethedec 72, pp. 47-60.
- [79]: A. Derem, 1987, "Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson", (Ch.9, N. Gespa, La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple), CEDOCAR edit, Paris, pp.189-280.
- [80]: N. Gespa, 1987, La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple. Théorie et expériences, CEDOCAR edit, Paris
- [81]: "Electromagnetic and Acoustic Scattering. Detection and Inverse Problems: 31 mai-3 Juin 1988", World Scientific, Singapore
- [82]: J. L. Rousselot, A. Gérard, J.P. Sessarego, J. Sageloli, 1988, "Réponse basse fréquence d'une coque sphérique mince immergée", Acustica, 66, pp. 203-213.
- [83]: M. Talmant, G. Quentin, J.L. Rousselot, Subrahmanyam J.V., H. Überhall, 1988, "Acoustic resonances of thin cylindrical shells and the resonance scattering theory", J. Acoust. Soc. Am., 84(2), pp.681-688.
- [84]: L. Brize-Tramoni, J.P Sessarego, J. Sageloli, 1988, "Etude de la diffusion acoustique par des coques sphériques à parois minces", J. Acoust., 1, pp 177-184.
- [85]: C. Bardos, M. Concordel, G. Lebeau, 1989, "Extension de la théorie de la diffusion pour un corps élastique immergé dans un fluide. Comportement asymptotique des résonances", J. Acoust., 2, pp. 31-38
- [86]: H. Überall, L. R. Dragonette, L. Flax, 1977, "Relation between creeping waves and normal modes of vibration of a curved body", J. Acoust. Soc. Am., 61 (3), pp. 711-715.
- [87]: G. Bonnet, 1983, "Au delà d'une vitesse de groupe: vitesse d'onde et vitesse de signal", Extrait Ann. des Télécom., 38, n° 9-10 et n°11-12, pp. 1-22, 1-17.
- [88]: K. Seip, 1989, "Some remarks on a method for detection of spectral lines in signals", Reprint C.P.T.-Luminy/P.2252, Marseille.
- [89]: B. Escudié, R. Kronland-Martinet, B. Torresani, "Wavelet representation for asymptotic signals and animal sonar systems", (Wavelets and Applications: may 29-June 2 1989), C.I.R.M. à paraître
- [90]: N. Delprat, R. Kronland-Martinet, Ph. Tchamitchian, " 'Skeleton' et démodulations de signaux", (Wavelets and Applications: may 29-June 2 1989), C.I.R.M. à paraître
- [91]: G. Saracco, C. Gazanhes, J. Sageloli, J.P. Sessarego, 1989, "Analyse temps-échelle de la diffusion acoustique par des coques sphériques en régime impulsif", Journ. Acoust. à paraître.
- [92]: L. Brize-Tramoni, 1989, "Diffusion acoustique par des coques sphériques à parois minces", thèse de doctorat (U.E.R. II), Marseille.
- [93]: G. Saracco, Ph. Tchamitchian, C. Gazanhes, "Transmission à travers un dioptre et reconstruction du signal source", 1<sup>er</sup> colloque C.F.A, à paraître.

## RESUME

L'objet de cette thèse se rapporte principalement au problème de la transmission d'ondes sphériques à travers une interface plane séparant deux milieux fluides, la source se trouvant dans le milieu de plus faible célérité. Sous certaines conditions, ce modèle physique simple présente un intérêt particulier dû à l'existence d'une onde de "surface", appelée onde latérale.

Dans un premier temps, nous avons traité le cas d'une source ponctuelle monochromatique à l'aide de méthodes asymptotiques, de façon à vérifier l'existence physique de cette contribution. Dans le cas du dioptré plan air-eau, nous avons pu séparer expérimentalement la contribution latérale de la contribution géométrique, et mettre en évidence le comportement et les propriétés de celles-ci. Le champ réfracté total fait alors apparaître des zones d'interférences en parfait accord avec l'étude théorique et numérique.

La contribution latérale présentant un caractère "dispersif", montre l'intérêt dans le cas du régime transitoire, d'utiliser une méthode de type temps-échelle. La fonction de Green peut être découpée de façon naturelle en contributions analogues à celles du régime harmonique. La transformée en ondelettes permet alors de calculer de façon exacte ces différentes contributions et d'en étudier leur comportement. L'originalité des résultats obtenus est la mise en évidence à certaines échelles, de phénomènes transitoires très brefs (échos) qui permettent d'engager une discussion nouvelle de ce type de problème. Une expérimentation combinée à une analyse temps-échelle (ondelettes) a confirmé ces observations. Par analogie à la formule de reconstitution simple de la transformée en ondelettes, nous avons pu élaborer, pour de grandes distances radiales, une formule de reconstruction de la dépendance temporelle du signal-source (problème inverse) à partir de la mesure de la pression transmise (jouant le rôle de "pseudo-coefficients d'ondelettes") sur les profondeurs. Enfin, l'application de cette transformation à un problème de rétrodiffusion acoustique par des coques sphériques élastiques (interface fluide/solide) a montré qu'il est possible d'accéder à certaines caractéristiques physiques de la cible.

## Mots-clefs

Propagation acoustique, milieu inhomogène, méthodes asymptotiques, onde latérale, dioptré, régime transitoire, transformation en ondelettes, contributions de surface, problème inverse, diffusion acoustique, coques sphériques élastiques.